D.A.Mowlamow, G.A.Şükürow,
A.I.Rozyýew

EKONOMETRIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2016

UOK 330.1:378
M 29

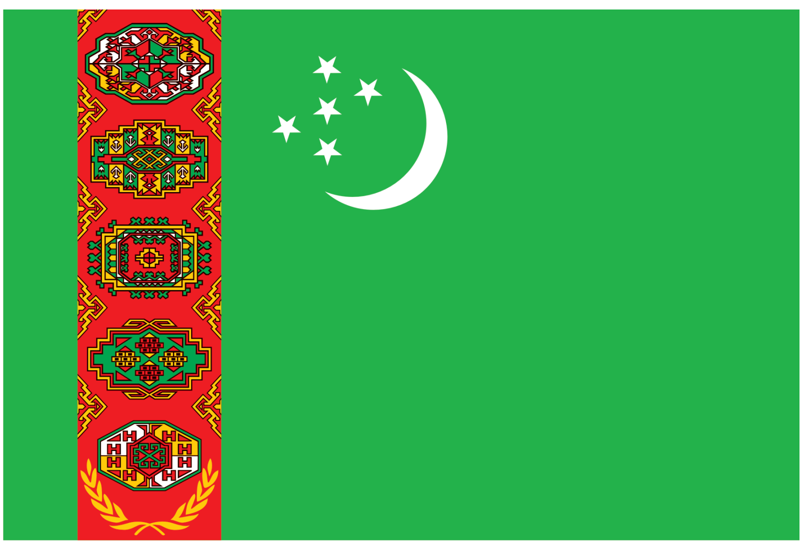
Mowlamow D.A. we başg.
M 29 **Ekonometrika.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2016.

Bu okuw kitabynda milli ykdysadyýetde bolup geçýän umumy proseslere giňişleýin, çuňňur we çalt seljerme we bahalandyrma usullaryna seredilip, ol ýokary okuw mekdepleriniň ykdysady hünärlerinde «Ekonometrika» dersi boýunça bilim alýan talyplara niýetlenendir. Şeýle hem bu okuw kitabyndan Türkmenistanyň ýokary okuw mekdeplerinde ykdysady prosesleri öwrenýän ähli talyplar peýdalanyp bilerler.

TDKP № 75, 2016 KBK 65.053 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim – janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim – janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

**Türkmenistanyň Prezidenti
Gurbanguly Berdimuhamedow:**

– Ekonometriki modeli işläp taýýarlamaklyk Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň gysga we orta möhletleýin döwür üçin ahyrky sarp edilişiň esasy makroykdysady görkezijileri boýunça ssenariý häsiýetli çaklaýyşlary gurmaga gönükdirilendir.

Sözbaşy

Häzirkizaman ykdysadyýet ylmyny, berk matematiki pikir ýöretmä we matematiki hasaplamalara esaslanan bahalandyrma usullarysyz ösdürmek mümkin däldir. Täze ykdysady modelleriň ählisi diýen ýaly ekonometrikanyň usullaryna esaslanandyr. Olary ekonometrikanyň esaslaryny ele alman ulanmak mümkin däldir. Häzirkizaman ykdysady edebiýaty özleşdirmek hem gowy ekonometriki taýýarlygy, bilimi talap edýär.

Ekonometrika ykdysady desgalaryň (obýektleriň) we prosesleriň mukdar aragatnaşyklaryny matematiki-statistiki modelleriň we usullaryň kömegi bilen öwrenýän amaly ykdysady dersdir. Ol ykdysady nazaryýeti, amaly ykdysady ylmy-barlaglary we amalyýeti baglanyşdyrýar. Ekonometrika mikro we makroykdysady görkezijileri bahalandyrmagyň usullaryny berýär. Belli bolşy ýaly, ykdysady nazaryýetiň esaslary matematiki gatnaşyklaryň kömegi bilen beýan edilýär we matematiki statistikanyň usullarynyň kömegi bilen hakyky (real) maglumatlary ulanmak bilen barlanylýar. Ekonometrikanyň usullarynyň kömegi bilen ykdysady nazaryýet tarapyndan çak edilýän ykdysady görkezijileriň arasyndaky täze gatnaşyklary aýan edip, olara degişli çaklamalary (gipotezalary) anyklap, soňraky barlaglarda olary tassyklap ýa-da ret edip bolýar. Şol sebäpli, ekonometrikany ykdysadyýeti statistiki usullaryň kömegi bilen öwrenýän ykdysady statistika bilen hem, matematiki usullary ulanýan ykdysady nazaryýet bilen hem çalyşmak bolmaz. Ekonometrika bu garaýyşlaryň häzirkizaman ykdysadyýetiniň mukdar gatnaşyklaryny öwrenýän birleşmesidir.

Ekonometrikanyň esasy we merkezi meselesi ekonometriki modelleri gurmakdan we olary hakyky ykdysady prosesleri beýan etmekde, seljermekde we çaklaýyşda ulanmagyň mümkinçiliklerini kesgitlemekden ybaratdyr. Şol sebäpli, bu okuw kitabynda gözegçilik edilýän ykdysady prosesleri beýan edýän deňlemeleriň parametrlerini bahalandyrmakda giňden ulanylýan regressiýaly seljermä uly orun berildi. Şeýle usul arkaly alnan deňlemeleriň kömegi bilen ykdysady prosesleriň geljekde özüni alyp barşynyň çaklaýşyna mümkinçilik alynýar.

Ykdysady prosesleriň köpüsi wagta görä üýtgeýän hadysalardyr. Wagtyň geçmegi bilen ykdysady prosesleriň, önümçiligiň şertleri we görkezijileri üýtgeýär. Şeýle prosesleriň geljegini çaklaýyş etmäge we beýan etmäge ymtylyş adama mahsus ahwalatdyr. Şonuň üçin okuw kitabynda wagt hatarlary we olaryň barlagy beýan edilýär.

Köp ykdysady prosesler birnäçe deňlemeleriň kömegi bilen beýan edilýär. Şol sebäpli, olaryň ulgamlaryny seljermek hem özleşdirmek zerurdyr.

Okuw kitaby yokary matematikanyň, ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň esaslaryny özleşdiren ykdysadyýetçi talyplara niýetlenendir. Onda çylşyrymly matematiki subutnamalar ýokdur. Şeýle subutnamalar zerur halatynda ýokarda sanalan dersleri düýpli esasda özleşdiren talyp olary özbaşdak amala aşyryp bilmelidir.

Berkarar döwletiň bagtyýarlyk döwründe ýurdumyzyň ykdysadyýetiniň hil taýdan özgerdilmegi üçin, hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň belleýşi ýaly, ykdysady ösüşi ylmy taýdan üpjün etmegi, ýagny onuň strategiki ugurlaryny ylmy taýdan esaslandyrmak we bazar ykdysadyýetiniň ösüşiniň üýtgemelerini öňünden kesgitläp dolandyrmakda ylma esaslanan taktiki usullary saýlap almagy üpjün etmek gerekdir. Bu jogapkärli işiň esasynda geljekki hünärmenlere düýpli ykdysady bilim bermegiň durýandygy aýandyr. Okuw kitaby bazar ykdysadyýeti şertlerinde işlejek ykdysady hünärmenleri taýýarlamak meselesini çözmegiň çäklerinde düýpli ykdysady bilim bermek göz öňünde tutulan ýokary okuw mekdeplerinde ykdysadyýetde ulanylýan ekonometriki usullar we modeller boýunça bilim bermekde ulanmaga niýetlenilýär.

Geljekki ykdysadyýetçi we dolandyryjy dürli ykdysady derejedäki bolup geçýän proseslere aň ýetirip, doly öwrenip, olara täsir edýän faktorlaryň köplüginde öwrenilýän prosese täsir edýänleriniň özara gatnaşygyny aýan etmegi we prosesi dolandyrmakda olary göz öňünde tutmagy başarmalydyr. Onuň üçin ol ykdysady prosesleri dolandyrmagyň seljeriş, çaklaýyş we meýilleşdiriş usullaryndan peýdalanmagy başarmalydyr. Geljekki ykdysadyýetçä olaryň işleýiş we ulanylyş tehnologiýasyny görkezýän nusgawy görnüşlerini özleşdirmek zerurdyr. Şol usullaryň özenini ekonometrikanyň usullary düzýär.

Okuw kitabynda milli ykdysadyýetde bolup geçýän umumy proseslere giňişleýin, çuňňur we çalt seljerme we bahalandyrma berme usullaryna seredilip, ol ýokary okuw mekdepleriniň ykdysady hünärlerinde «Ekonometrika» dersi boýunça bilim alýan talyplara niýetlenendir. Şeýle hem bu okuw kitabyndan Türkmenistanyň ýokary okuw mekdeplerinde ykdysady prosesleri öwrenýän ähli talyplar peýdalanyp bilerler.

I bap

EKONOMETRIKA DERSINIŇ MAKSADY WE WEZIPELERI. EKONOMETRIKANYŇ USULYÝETINIŇ ÖSÜŞI. EKONOMETRIKA WE BEÝLEKI YLYMLAR

§1.1. Ekonometrika dersiniň maksady we wezipeleri

Ykdysadyýetdäki täze usullaryň köpüsi ekonometriki modellere esaslanýar. Ekonometrika ykdysady nazaryýeti, amaly ykdysady derňewleri we amalyýeti baglanyşdyrýar. Ekonometrika mikroykdysady we makroykdysady modelleriň parametrlerini bahalandyrmagyň usullaryny berýär.

Ekonometrikanyň esasy meselesi ekonometriki modeli gurmakdan we bu modeliň hakyky ykdysady prosesleri beýan etmekdäki, seljermekdäki, çaklaýyşdaky mümkinçiliklerini kesgitlemekden ybaratdyr.

Ekonometrika ykdysady hadysalaryň baglanyşyklary baradaky ylym hökmünde seredip bolýar. Bu baglanyşyklary öwrenmek üçin regressiýa seljermesi ulanylýar. Regressiýa seljermesiniň kömegi bilen bagly we bagly däl üýtgeýän ululyklaryň gözegçiliklerden alnan bahalarynyň toplumyna ýokary derejede degişli bolan deňlemeler bahalandyrylýar. Bahalandyrylan deňlemeleriň kömegi bilen bagly däl üýtgeýänleriň berlen bahalary üçin bagly üýgeýäniň bahasyny öňünden tapyp bolýar. Ykdysadyýetde wagt boýunça üýtgeýän hadysalar köpdür. Wagtyň geçmegi bilen önümçilik prosesleri we ykdysady şertler üýtgeýärler. Şu ýagdaýda geljegiň ýagdaýyny önüňden aýtmak maksady bilen wagt hatarlary ulanylýar.

Köp sanly hakyky ykdysady prosesleri diňe bir deňleme bilen beýan etmek mümkin däl. Şeýle ýagdaýda birnäçe ekonometriki deňlemeleri bolýar. Bu deňlemeler käbir ulgamy düzýärler.

Ekonometrika hakyky statistiki maglumatlaryň esasynda dürli ykdysady görkezijileriň (faktorlaryň) arasyndaky baglanyşyklary seljermegiň usullarynyň toplumydyr. Şu usullaryň komegi bilen öň belli bolmadyk täze baglanyşyklary ýüze çykarmak, ykdysady görkezijileriň arasyndaky kesgitli baglanyşyklaryň bardygy baradaky çaklamalary barlamak mümkin.

Ykdysadyýetçi alym Samuelson ekonometrika barada: «Ekonometrika nazaryýetiň we gözegçiligiň häzirkizaman öşüşine daýanyp, hakyky ykdysady hadysalaryň mukdar seljermesini geçirmäge mümkinçilik berýär» diýse, alym Malenwo: «Ekonometrikanyň maksady-ykdysady kanunlaryň empiriki getirip çykarylmasydyr. Ekonometrika hakyky maglumatlary ulanmak bilen postulirlenen takyklamalary barlamak we takyklamak üçin nazaryýeti doldurýar» diýip belleýär.

Ekonometrikanyň esasy meselelerine aşakdakylar degişlidir.

1) Empiriki seljerme üçin amatly bolar ýaly ykdysady modelleri matematiki formada gurmak.

2) Deňlemäniň parametrlerini kesgitlemek.

3) Modeliň tapylan parametrleriniň we modeliň tutuş özüniň hilini barlamak.

4) Öwrenilýän ykdysady görkezijileriň özüni alyp barşyny düşündirmekde, çaklaýyşda we ykdysady syýasaty oýlanyşykly geçirmekde gurlan modelleri ulanmak.

Soňky döwürlerde ekonometrikanyň usulyýetine tankydy göz bilen seredilip başlandy.

Eger ekonometrikanyň kömegi bilen alnan netijeler (çaklaýyşlaryň netijeleri) ýaramaz bolsa, onda usulyýete daýanýan öwreniji modele, maglumatlara täzeden seretmeklige derek bahalandyrmagyň täze usullaryny ulanmalydyr diýip hasap edilýär.

Häzirkizaman ekonometriki modelleşdirmäniň wajyp düzgüni bahalandyrylýan modeli hemme taraplaýyn barlamakdan durýar. Bahalandyrylan regressiýa modeliň nähili dogry gurlandygyny barlamak üçin ulanylýan esasy kriterilere seredeliň:

– Hasaba alynmadyk üýtgeýän ululyklaryň kriterisi. Bu kriteri öň hasaba alynmadyk üýtgeýän ululygyň modele goşulmak kriterisidir.

– Funksional formanyň kriterisi. RESET kriterisi.

– Gurluşlaýyn (strukturalaýyn) üýtgemeler kriterisi (Чоу, CUSUM we CUSUMSQ kriterisi) we taşlanmalar(zyňylmalar) kriterisi.

– Galyndylaryň awtokorrelýasiýasynyň kriterisi. (Darbiniň-Uotsonyň, Godfreýiň kriterileri, Kingiň nokatlanç – optimal kriterisi).

– Regressorlaryň ekzogenlik kriterisi. (Darbinyň – By – Hausmanyň kriterisi).

– Ilkinji tapawutlar kriterisi we maglumatlary özgertmegiň beýleki kriterileri.

– Girizilmedik ululyklar kriterisi.

– Üýtgeýänleriň stasionarlyk kriterisi.

– Ýalňyşlyklaryň geteroskedastiklik kriterisi.

– Normallyk kriterisi (Žarka-Beranyň kriterisi).

Her bir kriterä statistika (tötän ýalňyşlaryň toplumy) degişli bolýar. Bu statistika maglumatlara bagly funksiýadyr. Ulanylýan modeli (ähtimallykly modeli) dogry hasap edip, berlen statistikanyň paýlanyşyny nazary getirip çykaryp bolýar. Modeliň dogrulygy baradaky nol çaklamanyň barlagy şeýle yzygiderlikde geçirilýär. Eger bar bolan maglumatlaryň esasynda alnan statistika öňden kesgitlenen ynamly aralyga degişli bolmasa, onda nol çaklama taşlanýar we model nädogry gurlan hasaplanýar.

Ynamly aralyk kritiki çäkleri (serhetleri) görkezmek bilen berilýär. Statistikanyň ynamly aralykdan çykmaklygynyň ähtimallygyna **ähmiýetlilik derejesi** diýilýär. Her bir statistika üçin käbir ähmiýetlilik derejesi bar. Amalyýetde 5% kritiki çäkler has köp ulanylýar.

Ekonometriki modelleşdirmegiň käbir meselelerine seredeliň. Ekonometriki modelleşdirme käbir şertleriň ýerine ýetmegine daýanýar. Şol şertleriň biri funksional gatnaşyklaryň seredilýän döwür içinde üýtgemeýänliginden durýar. Ýöne bu şert, köplenç, ýerine ýetmeýär (geçiş ykdysadyýeti bilen iş salşylanda bu şert ýerine ýetmeýär). Bu meselä ykdysadyýetçi üýtgäp durýan gurluşly ykdysady prosesleri öwrenende duş gelýär. Modeliň formasynyň üýtgemeýänligi baradaky şert kabul edilmese modelleşdirme mümkin bolmaýar.

Gurluşlaýyn süýşmeleri hasaba almagyň mümkin bolan usullarynyň biri dürli görnüşli gurlan üýtgeýän ululyklaryň (emeli (fiktiw) üýtgeýän ululyklar we trendler) ulanylmagyndan duryar. Trendleriň ekonometriki modele girizilmegi regressiýa deňlemesiniň ähli koeffisiýentlerindäki üýtgemeleri göz öňünde tutmaga mümkinçilik berýär. Mundan başga-da, modelde emeli üýtgeýän ululyklaryň we garmoniki trendleriň (sinuslar we kosinuslar) ulanylmagy möwsümleýin yrgyldylary hasaba almaklyga mümkinçilik berýär.

Şeýle-de bolsa, bu usullar häsiýeti we ýüze çykma pursaty näbelli bolan (böküşli üýtgeme) üýtgemeleri dogry (adekwat) hasaba almaga mümkinçilik bermeýär. Aýratyn hem gurluşlaýyn süýşmeler çaklaýyş üçin uly meseleleri döredýär.

Bar bolan maglumatlar üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky funksional baglanyşygy kesgitlemek üçin ýeterlik däl ýa-da bir faktoryň täsirini beýleki faktoryň täsirinden tapawutlandyrmak üçin maglumatlaryň ýeterlik derejede üýtgemeýän (warirlenmeýän) bolmagy mümkin.

Soňky meselä ekonometriki modelleşdirmede **multikollinearlyk** diýilýär.

Maglumatlaryň ýeterlik dälliginiň öwezini dolmak üçin käbir aprior ýol bermeleri ulanmaly bolýar.

Modeliň funksional formasy öňünden belli bolmaýar. Şeýle ýagdaýda **bahalandyrmagyň parametrik däl usullaryny** ulanmak has amatlydyr. Ýöne, bu usullary ulanmak üçin maglumatlaryň toplumy has uly bolmaly. Şonuň üçin amalyýetde iki üýtgeýäniň arasyndaky baglanyşyk çyzykly diýlip hasaplanýar. Köplenç ýagdaýda maglumatlaryň ýerleşýän käbir aralygynda çyzykly baglanyşyk çyzykly däl baglanyşyklaryň gowy approksimasiýasyny berýär. Ýöne, «hakyky» baglanyşyk çyzykly baglanyşykdan güýçli daşlaşmaýar diýip bolmaz.

§1.2 Ýalan regressiýanyň meselesi

Determinasiýa koeffisiýentiniň ýokary bahasyny almak üçin bagly we bagly däl üýtgeýänlerde trendleriň bolmaklygy we trendleriň dinamikasynyň käbir derejä çenli gabat gelmegi ýeterlikdir. Determinasiýa koeffisiýenti bir ösýän görkezijiniň başga bir ösýän görkezijiji boýunça regressiýasynda ýokary bolýar. Başga bir tarapdan bir prosesiň başga bir şeýle proses boýunça regressiýasynda determinasiýa koeffisiýenti pes bolýar.

Wagt hatarlarynda «trendiň» bolmaklygy aşakdaky sebäpler bilen düşündirilýär.

1) Determinirlenen düzüji;

2) Stasionar dällik (stohastiki trend).

Determinirlenen trendiň bolmaklygy ýalan regressiýanyň ýüze çykmagyna getirýär. Goý, y_t we x_t $y_t = a + b_t + \varepsilon_t$; $x_t = c + d_t + \xi_t$ proseslerden alynýan bolsun. Bu ýerde ε_t; ξ_t – birmeňzeş paýlanan garaşsyz ýalňyşlyklardyr. Hemişelik ululyk we x_t boýunça y_t – niň regressiýasynyň ýokary determinasiýa koeffisiýentiniň bolmagy mümkin. Bu netije saýlamanyň ölçeginiň artmagy bilen güýçlenýär. Bu seredilýän ýagdaýda ýalan regressiýanyň berjek netijesini ýok etmek üçin deňlemä trendi regressor hökmünde goşmak ýeterlikdir.

Eger stasionar däl tötän prosesleriň stasionar çyzykly kombinasiýasy bar bolsa, onda bu proseslere kointegrirlenen prosesler diýilýär. Kointegrirlenmeklik ýalan regressiýanyň ýüze çykmazlygyny kepillendirýär.

§1.3. Ekonometrika we beýleki ylymlar

Ekonometrika – bu ykdysady seljermäniň usulydyr. Ekonometrika ykdysady nazaryýeti seljermäniň statistiki we matematiki usullary bilen baglanyşdyrýar. Ekonometrikada ykdysady nazary tassyklamalar matematiki gatnaşyklar görnüşde aňladylýar, soňra statistiki usullaryň kömegi bilen empiriki barlanylýar. Şeýle ýol bilen milli ykdysadyýetiň, hojalygyň modelini düzýärler. Şu modeliň kömegi bilen wajyp ykdysady görkezijiler üçin çaklaýyş geçirilýär. Ekonometrikanyň kömegi bilen alnan çaklaýyşlar hemme wagt ýeterlik derejede takyk bolmasa-da ekonometrika has giňden ulanylýar.

Şeýlelikde, ekonometrika bilimiň üç sferasynyň kombinasiýasy ýaly seredip bolar:

1) Ykdysady nazaryýet;

2) Ykdysady statistika;

3) Matematiki statistika.

Ekonometrikanyň we statistikanyň öwrenýän meseleleri biri-birine ýakyndyr. Ekonometrika köp gaýtalanýan ykdysady hadysalary, statistika bolsa islendik tebigatly (şol sanda ykdysady) köp gaýtalanýan hadysalary öwrenýär.

Ykdysady nazaryýet we matematiki ykdysadyýet kanunalaýyklyklary umumy görnüşde kesgitleýär. Ekonometrika şol kanunalaýyklyklary statistikanyň kömegi bilen aňladýar.

Ekonometrika anyk ykdysady maglumatlar bilen iş salyşýar we anyk özarabaglanyşyklary mukdar taýdan ýazyp beýan edýär.

Mysal üçin, ykdysady nazaryýet harydyň bahasy bilen bu harydа bolan islegiň arasynda (beýleki faktorlar üýtgemeýän ýagdaýda) baglanyşygyň bardygyny tassyklaýar. Ýöne, ykdysady nazaryýet bu baglanyşyga mukdar taýdan baha bermeýär. Mukdar bahalandyrmalary hasaplamak ekonometrikanyň meselesi bolup durýar. Ekonometrikada empiriki hasaplamalary geçirmek mümkinçiligini üpjün etmek üçin, köplenç, matematiki deňlemeler, modeller ulanylýar.

§1.4. Ekonometrikanyň taryhy we ösüşiniň häzirkizaman tendensiýalary

Ähtimallyklar nazaryýetiniň ýüze çykmagy bilen statistiki maglumatlary işlemekde ähtimallykly modeller ulanylyp başlandy. XIX asyrda amaly statistikanyň ösmegine belgiýaly alym A.Ketle uly goşant goşdy. Amaly statistikanyň häzirkizaman ösüş tapgyrynyň (etabynyň) başlangyjy 1900-nji ýyl hasap edilýär. 1900-nji ýylda iňlis alymy K.Pirson «Biometrika» žurnalyny esaslandyrdy. XX asyryň 30 – 35-nji ýyllary parametriki statistika uly üns berildi. Paýlanyşlaryň parametriki köplüginiň (maşgalasynyň) maglumatlaryny seljermegiň usullary öwrenildi. Bu paýlanyşlar Pirsonyň maşgalasy diýilýän köplüge degişli egriler bilen berilýär. Has köp ulanylýan paýlanyş normal paýlanyş (Gaussyň paýlanyşy) boldy. Çaklamalary barlamak üçin Pirsonyň, Stýudentiň, Fişeriň kriterileri peýdalanyldy. Maksimal hakykata ýakynlaşma usuly, dispersiýaly seljerme teklip edildi.

XX asyryň 30–35-nji ýyllarynda işlenip düzülen nazaryýet **parametriki statistika** diýlip atlandyryldy. Parametriki statistikanyň öwrenýän zady bir ýa-da birnäçe parametrler bilen aňladylýan, ýazyp beýan edilýän paýlanyşlardan alnan saýlamalardyr. Has umumy paýlanyş Pirsonyň dört parametr bilen berilýän paýlanyşydyr. Ekonometriki we statistiki usullaryň ösüşiniň häzirki döwri bäş sany esasy ugur bilen beýan edilýär (bäş «ösüş nokatlary»).

1) Parametriki däl statistika;

2) Durnukly dällik (robastlyk);

3) Butstrep (başlangyç saýlamanyň göwrümine deň göwrümli köp saýlamalary almak prosesiniň imitirlenilişi. Bu imitirleme bahalandyrylýan häsiýetnamalaryň (harakteristikalaryň) bahasynyň (meselem, korrelýasiýa koeffisiýenti) şol ýa-da beýleki aralyga haýsy ähtimallyk bilen düşýändigini kesgitleýär);

4)Aralyklaýyn maglumatlaryň statistikasy;

5) San däl maglumatlaryň statistikasy (san däl tebigatly desgalaryň statistikasy).

§1.5. Ekonometrikanyň ulanylýan ugurlary

Ekonometrika, esasan, aşakda sanalýan ylmy-amaly ugurlarda ulanylyp bilner:

1) Çaklaýyşda (guramalar, sebitler, ýurtlar, tutuş Ýer ýüzi derejesinde);

2) Wajyp maliýe-hojalyk we durmuş-ykdysady çözüwleri taýýarlamak maksady bilen geçirilýän dürli tebigatly maglumatlaryň seljermesinde;

3) Dürli tebigatly töwekgelçilikleriň seljermesinde (ykdysady, ekologiki töwekgelçilikler, ätiýaçlandyryşyň düzgünleri işlenilip düzülende);

4) Önümiň we harytlaryň hilini dolandyrmaklygyň statistiki usullarynda;

5) Esasy we aýlaw kapitalyň dinamikasyny seljermekde we çaklaýyşda;

6) Maddy, maliýe we maglumat akymlarynyň hereketi baradaky, isleg, gorlar baradaky maglumatlar seljerilende logistiki meselelerde;

7) Eksperimenti ekstremal meýilleşdirmegiň usullary bilen tehnologiki prosesler optimallaşdyrylanda;

8) Tehnologiki prosesiň takyklygy we durnuklylygy öwrenilende;

9) Marketingde sarp edijileriň ileri tutmalary öwrenilende;

10) Saýlanyp alnan auditde;

11) Maliýe (pul) akymlary deňeşdirilende, çaklaýyşda öwrenilende;

12) Ähli bolup biljek reýtingler we indeksler gurlanda;

13) Bahalaryň we durmuş derejesiniň ösüşiniň seljermesinde, puluň hümmetsizlenmeginiň (inflýasiyanyň) maliýe-hojalyk işiniň görkezijilerine edýän täsiri seljerilende;

14) Salgyt salmak bazasynyň döremegine dürli faktorlaryň edýän täsirleri öwrenilende;

15) Kontrolling meselelerinde;

16) Innowasiýa menejmentiň meselelerinde;

17) Kiçi kärhanalary dolandyrmakda, kiçi telekeçilik öwrenilende.

Soraglar:

1. Ekonometrikanyň esasy meselesi nämeden ybarat?
2. Ekonometrikada nähili modeller ulanylýar?
3. Funksional baglanyşyk korrelýasiýa baglanyşygyndan nähili tapawutlanýar?
4. Ýalan regressiýa meselesi näme?
5. Ekonometrikanyň beýleki ylymlar bilen nähili baglanyşygy bar?
6. Ekonometrika nähili ugurlarda ulanylýar?

2. sargyt № 2842

II bap

STATISTIKI DÜŞÜNJELER WE PAÝLANYŞLAR

§2.1. Giriş. Regressiýa seljermesiniň düýp mazmuny

Ylma «ekonometrika» adalgasy 1926-njy ýylda norweg ykdysadyýetçisi we statistigi **Ragnar Friş** tarapyndan girizildi. «Ekonometrika» sözi formal taýdan «ykdysadyýetdäki ölçemeler» diýmekligi aňladýar.

Regressiýa seljermesiniň düýp mazmuny. Funksional baglanyşykda bir üýtgeýän ululygyň her bir bahasyna başga bir üýtgeýän ululygyň bir bahasy degişlidir. Ykdysady üýtgeýän ululyklaryň arasynda şeýle baglanyşyk ýok. Mysal üçin, girdeji bilen sarp edişiň, baha bilen islegiň we ş.m. arasynda berk baglanyşyk ýok. Ykdysady üýtgeýänleriň arasynda funksional baglanyşygyň ýoklugy aşakdaky sebäpler bilen düşündirilýär. Birinjiden, bir üýtgeýän x ululygyň beýleki y ululyga edýän täsiri öwrenilende y üýtgeýän ululyga täsir edýän beýleki faktorlar alynmaýar. Ikinjiden, x ululygyň y ululyga edýän täsiri gös-göni bolman beýleki ululyklaryň üsti bilen ýüze çykýan bolmagy mümkin. Üçünjiden, köp sanly şeýle täsirler tötän häsiýete eýedir. Ykdysadyýetde ululyklaryň arasynda funksional baglanyşyga derek korrelýasiýa ýa-da statistiki baglanyşyk bar. Şeýle baglanyşyklary tapmak, bahalandyrmak we seljermek, baglanyşyklaryň formulasyny gurmak we olaryň parametrlerini bahalandyrmak ekonometrikanyň wajyp bölümleriniň biridir.

Bir ululygyň üýtgemesiniň beýleki ululygyň paýlanyşyny üýtgedýän baglanyşyga **statistiki baglanyşyk** diýilýär. Bir üýtgeýän ululygyň dürli bahalaryna beýleki üýtgeýän ululygyň dürli orta bahasy degişli edilýän baglanyşyga **korrelýasiýa baglanyşygy** diýilýär. Korrelýasiýa baglanyşygy statistiki baglanyşygyň hususy ýagdaýydyr.

X we Y ululyklaryň arasyndaky baglanyşyga iki halda seredip bolar. Birinji ýagdaýda iki ululyklar hem deň ähmiýetli hasaplanylýar, ýagny bu ululyklar bagly däl we bagly üýtgeýänlere bölünmeýärler. Bu ýagdaýda bu ululyklaryň (meselem, harydyň bahasy bilen islegiň göwrüminiň) arasynda baglanyşygyň bardygy we bu baglanyşygyň güýji baradaky mesele esasy mesele bolup durýar. Iki üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky çyzykly baglanyşygyň güýji öwrenilýän ýagdaýda korrelýasiýa seljermesi ulanylýar. Korrelýasiýa seljermesiniň esasy ölçegi korrelýasiýa koeffisiýentidir. Iki üýtgeýän ululyk deň ähmiýetli hasaplanylanda baglanyşygyň ugry bolmaýar. Ikinji ýagdaýda baglanyşyklar iki ululygyň arasynda dürli ähmiýetliligi göz öňüne tutýar. Ululyklaryň biri garaşsyz (düşündiriji) beýlekisi garaşly (düşündirilýän) hasaplanylýar. Garaşsyz ululygyň üýtgemesi garaşly ululygyň üýtgemesiniň sebäbi bolup biler. Meselem, girdejiniň artmagy sarp edişiň artmagyna, bahalaryň artmagy islegiň kemelmegine, göterim derejesiniň azalmagy maýa goýumyň artmagyna, walýutanyň alyş-çalyş kursunyň artmagy arassa eksportyň kemelmegine getirýär. Ýöne, şeýle baglanyşyk birbelgili bolmaýar. Düşündiriji üýtgeýän ululygyň (ýa-da düşündiriji ululyklaryň toplumynyň) her bir anyk bahasyna düşündirilýän (bagly) ululygyň birden köp bahasynyň degişli bolmagy mümkin. Başgaça aýdylanda, düşündiriji ululygyň (ululyklaryň) anyk bahasyna bagly üýtgeýän ululygyň (tötän ululygyň) käbir ähtimallykly paýlanyşy degişlidir. Şonuň üçin düşündiriji üýtgeýän ululygyň (ululyklaryň) bagly ululyga «ortaça» edýän tasiri seljerilýär. Eger $f(x)$ funksiýa bagly üýtgeýän y ululygyň şertli orta bahasynyň üýtgemesini beýan edýän bolsa, onda $f(x)$ funksiýa y ululygyň x ululyga regressiýasynyň funksiýasy diýilýär. Bu ýerde garaşsyz üýtgeýän ululyk (ululyklar) anyk bahany alýar.

Regressiýa deňlemesi şeýle gatnaşyk bilen berilýär:

$$M(y|x) = f(x)\,, \tag{2.1}$$

bu ýerde x – garaşsyz üýtgeýän ululyk (regressor), y – garaşly (bagly) üýtgeýän ululyk. Iki üýtgeýän tötän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyga seredilende **jübüt regressiýa** alynýar.

$M(y|x)$ – belgileme y ululygyň x – iň berlen bahasyndaky şertli matematiki garaşmasyny aňladýar.

§2.2. Birnäçe üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk

Şeýle baglanyşyk

$$M(y \mid x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (2.2)$$

funksiýa bilen aňladylýar. Bu baglanyşyga **köplük regressiýa** diýilýär.

Bagly üýtgeýän ululygyň hakyky bahalary hemme wagt onuň şertli matematiki garaşmasy bilen gabat gelmeýär. Düşündiriji üýtgeýän ululygyň şol bir bahasyna degişli bagly üýtgeýän ululygyň dürli bahalary bolup biler.

Şol sebäpli hakyky bahalara ε tötän ululyk goşulýar. ε tötän ululyga gyşarmalar hem diýilýär. Regressiýa modellerinde ε tötän ululygyň hökman bolmagy aşakdaky sebäpler bilen düşündirilýär.

1. *Modele düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň hemmesiniň goşulmazlygy.* Islendik regressiýa modeli hakyky ýagdaýyň ýönekeýleşdirilen görnüşidir. Modele regressorlaryň hemmesiniň alynmaýanlygy üçin düşündirilýän (bagly) ululygyň hakyky bahalary onuň nazary (modelden alnan) bahalaryndan gyşarýar.

2. *Modeliň funksional formasynyň nädogry saýlanyp alynmagy.* Öwrenilýän prosesiň gowşak öwrenilen ýagdaýynda modelleşdiriji funksiýanyň nädogry saýlanyp alynmagy mümkin. Bu bolsa modeliň hakyky ýagdaýyndan gyşarmasyna getirýär. Düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň nädogry saýlanmagy mümkin. Bu hem gyşarmalary döredip biler.

3. *Üýtgeýän ululyklaryň agregirlenmegi* (umumylaşdyrylmagy). Köp modellerde has ýönekeý üýtgeýän ululyklaryň çylşyrymly kombinasiýasy bolan faktorlaryň arasyndaky baglanyşyklara seredilýär. Bu hem hakyky we model bahalaryň arasynda gyşarmalaryň döremegine getirýär.

4. *Ölçemeleriň ýalňyşlyklary.* Modeliň hili gowy bolsa-da, üýtgeýän ululyklary ölçemekde goýberilen ýalňyşlyklar bagly üýtgeýän ululyklaryň modelden alnan bahalarynyň empiriki bahalaryndan gyşarmagyny döredip biler.

5. *Statistiki maglumatlaryň çäkliligi.* Köplenç üznüksiz funksiýalar bilen aňladylýan modeller gurulýar. Ýöne, model gurlanda dis-

kret gurluşly maglumatlaryň toplumy peýdalanylýar, bu hem tötän gyşarmalara täsir edýär.

6. *Adam faktory barada öňden belli bir pikir aýdyp bolmaýanlygy*. Bu sebäp iň gowy hilli gurlan modele otrisatel täsir edip biler. Çünki her bir adamyň (indiwidumyň) hereketini çaklap bolmaýar.

Şu sebäplere görä bagly we bagly däl ululuklaryň arasyndaky baglanyşyk:

$$Y = M(y \mid x) + \varepsilon, \qquad Y = f(x) + \varepsilon; \tag{2.3}$$

$$Y = M(y \mid x_1, x_2, \ldots, x_m) + \varepsilon, \quad Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \varepsilon \tag{2.4}$$

gatnaşyklar bilen berilýär. Bu gatnaşyklara **regressiýa modelleri** (deňlemeler) diýilýär.

Regressiýa deňlemelerini gurmak prosesi şeýle yzygiderlikde amala aşyrylýar:

1. Regressiýa deňlemesiniň formulasyny saýlamak.
2. Saýlanyp alnan deňlemäniň parametrlerini kesgitlemek.
3. Deňlemäniň hiliniň seljermesi we deňlemäniň empiriki maglumatlara dogry gabat gelýändigini (adekwatlylygyny) barlamak.

§2.3. Statistikanyň käbir düşünjeleri

Baş toplum – bu öwrenilýän görkezijiniň alyp biljek ähli mümkin bolan bahalarynyň toplumydyr. Baş toplum – şertli matematiki düşünjedir we ony statistiki barlaga degişli bolan hakyky toplum bilen garyşdyrmaly däl.

Saýlama toplum – baş toplumdan tötänleýin saýlanyp alnan bölekdir. Saýlama toplumyň maglumatlarynyň esasynda model gurulýar.

Goý, saýlamanyň netijesinde x nyşanyň n sany $x_1, x_2, \ldots, x_n$ we y nyşanyň $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bahalary belli bolsun.

Saýlama orta baha – ($M(x) = m$ matematiki garaşmanyň bahalandyrmasy) $\bar{x}$ bilen belgilenýär we

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

formula bilen tapylýar.

Saýlama dispersiýa (wariasiýa) x ululyk üçin

$$var\,(x) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

formula boýunça tapylýar.

***x* üýtgeýän ululygyň süýşmedik saýlama dispersiýasy**

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

formula bilen tapylýar.

S_x^2 ululyk nazary σ_x^2 dispersiýanyň süýşmedik bahalandyrmasydyr. x we y üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky özarabaglanyşygyň ölçegi saýlama **kowariasiýadyr.**

Ol aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}.$$

$\operatorname{cov}(x,y)$ ululyk $\sigma_{x,y}(x, y) = M[(x - M(x))(y - M(y))]$ nazary kowariasiýanyň bahalandyrmasydyr.

x we y ululyklaryň arasyndaky baglanyşygyň has takyk ölçegi $r_{x,y}$ **saýlama korrelýasiýa koeffisiýentidir.** Ol şeýle tapylýar:

$$r_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}}.$$

Nazary korrelýasiýanyň koeffisiýenti aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$p_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sqrt{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2}}.$$

Takyk položitel çyzykly baglanyşykda korrelýasiýa koeffisiýenti + 1, takyk otrisatel çyzykly baglanyşykda korrelýasiýa koeffisiýenti (– 1) bahalary alýar.

$r = 0$ ululyk üýtgeýän ululyklaryň arasynda çyzykly baglanyşygyň ýokdugyny görkezýär. $r = 0$ ýa-da $r = \pm 1$ ýagdaýdan $\rho = 0$ ýa-da $\rho = \pm 1$ ýagdaýyň alynmagy hökman däl. $\rho = 0$ ýa-da $\rho = \pm 1$ şertden $r = 0$ ýa-da $r = \pm 1$ bolmazlygy mümkin.

$r_{x,y}$ korrelýasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligini kesgitlemek üçin tötän ululyklaryň normal paýlanyşynda t statistika ulanylýar.

Goý, saýlama toplum boýunça kesgitlenen $r_{x,y} \neq 0$ bolsun. $r_{x,y} \neq 0$ ululyk x, y ululyklaryň arasynda baş toplumda korrelýasiýa baglanyşygyň bardygyny aňladýarmy? Ýa-da $r_{x,y} \neq 0$ ýagdaý saýlama toplumyň elementleriniň tötänden alynmaklygynyň netijesimi? Bu soraglara jogap bermek üçin çaklamany barlamaly.

Saýlama korrelýasiýa koeffisiýentiniň hasaplanan bahasy boýunça H_0 çaklamany barlamaly.

H_0: baş toplum üçin korrelýasiýa koeffisiýenti nola deň.

H_1: baş toplum üçin korrelýasiýa koeffisiýenti nola deň däl (alternatiw çaklama).

H_0 çaklama üçin statistiki kriteri hökmünde adatça aşakdaky ululyk ulanylýar:

$$t = \frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2}.$$

Bu tötän ululyk (n – 2) – erkinlik dereje sany bilen Styudentiň kanuny boýunça paýlanandyr. Eger t ululygyň bahasy ýalňyşlyk ähtimallygy α bolan we (n – 2) erkinlik derejeli $t_{\frac{\alpha}{2}\cdot(n-2)}$ kritiki bahadan uly bolsa, onda H_0 çaklama taşlanýar (kabul edilmeýär). Bu bolsa $r_{x,y} \neq 0$ şertiň baş toplumda hem ýerine ýetýänligini aňladýar. r koeffisiýentiň hakyky bahasy 1 – α ähtimallyk bilen $thz_1 < \rho < thz_2$ aralykda ýatýar. Bu ýerde

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} ln\frac{1+r}{1-r} - \frac{r}{2(n-1)} \mp \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n-3}};$$

$$thz = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$ – z argumentiň giperboliki tangensi,

$u_{\frac{\alpha}{2}}$ – standart normal paýlanyşyň $\frac{\alpha}{2}$ derejeli kwantili.

Mysal. Öýjükli telefon boýunça gepleşigiň dowamlylygy x (sagat) we batareýalaryň göwrümleri y (mA /sagat) ululyklar barada maglumatlar berlen. Aşakdaky hasaplaýyş tablisasyny düzeliň.

№	x	y	x^2	y^2	xy
1	4,5	800	20,25	640000	3600

tablisanyň dowamy

2	4	1500	16	2250000	6000
3	3	1300	9	1690000	3900
4	2	1550	4	2402500	3100
5	2,75	900	7,5625	810000	2475
6	1,75	875	3,0625	765625	1531,25
7	2,25	750	5,0625	562500	1687,5
8	1,75	1100	3,0625	1210000	1925
9	1,5	850	2,25	722500	1275
10	2,35	450	5,5225	202500	1057,5
jemi	25,85	10075	75,7725	11255625	26551,25

Aşakdaky hasaplamalary geçireliň:

$$var(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 = \frac{75,7725}{10} - \left(\frac{25,85}{10}\right)^2 = 0,895;$$

$$var(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)^2 = \frac{11255625}{10} - \left(\frac{10075}{10}\right)^2 = 110506.3;$$

$$r_{x,y} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 26551,25 - 25,85 \cdot 10075}{\sqrt{[10 \cdot 7577,25 - (25,85)^2] \cdot [10 \cdot 11255625 - (10075)^2]}} \approx 0,161.$$

t statistikanyň bahasy:

$$t = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1 - r_{yx}^2}} \cdot \sqrt{n-2} = \frac{0,161}{\sqrt{1-(0,161)^2}}\sqrt{10-2} \approx 0,461.$$

$\alpha = 0,05$; $n - 2 = 10 - 2 = 8$ ýagdaýda t statistikanyň kritiki bahasy 2,306 deň. $t = 0,461 < 2,306$ bolýanlygy üçin seredilýän ululyklaryň arasynda görnüp duran çyzykly baglanyşyk ýok.

§2.4. Normal paýlanyş

Bu paýlanyş statistiki barlaglaryň nazaryýetinde we amalyýetinde esasy orun tutýar. Goý, öwrenilýän üznüksiz tötän ululylygyň bahasy bagly däl örän köp sanly faktorlaryň täsiri astynda alynýan bolsun. Her bir faktoryň bagly üýtgeýän ululyga edýän täsiri kiçi bolsun.

Şeýle görnüşli tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

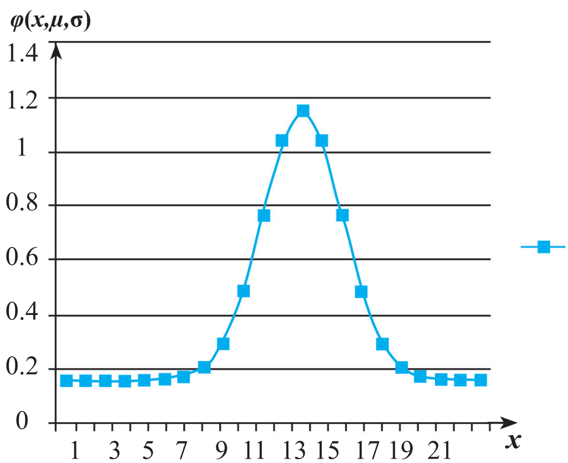
görnüşde bolýar (2.1-nji surat). Bu ýerde μ – matematiki garaşma, σ^2 – dispersiýa. Eger $\mu=0$, $\sigma^2=1$ bolsa standart normal kanun üçin dykyzlyk funksiýasy

$$\varphi(x;0;1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-0)^2}{2\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ görnüşi alar.

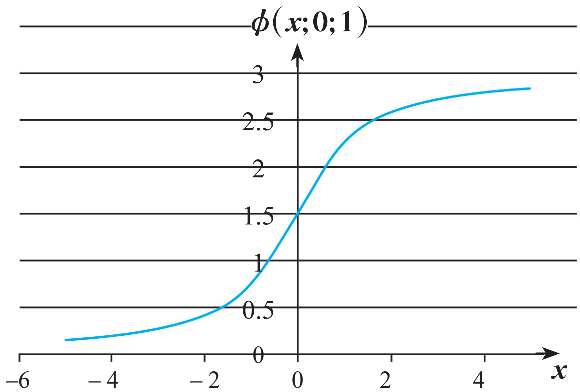
Normal tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\Phi(x;\mu\,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$. $\mu=0$, $\sigma^2=1$bolanda standart normal paýlanyşyň grafigi 2.2-nji suratda görkezilendir

Normal kanun amalyýetde has köp ulanylýan paýlanyş kanunydyr. Normal paýlanyş kanuna degişli nazary barlaglaryň dolulygy



2.1-nji surat. Normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň grafigi



2.2-nji surat. Standart normal paýlanyş funksiýasynyň grafigi

hem-de onuň ýönekeý matematiki häsiýetleriniň barlygy üçin bu kanuny ulanmak has amatlydyr.

Öwrenilýän eksperimental maglumatlaryň normal kanundan gyşarýan ýagdaýynda ony iki ýol bilen maksadalaýyk ulanyp bolýar: a) bu maglumatlary birinji ýakynlaşma hökmünde ulanmaly; b) başlangyç «normal däl» paýlanyşy normal paýlanyşa özgerdýän özgertmäni saýlap almaly.

§2.5. χ^2(hi-kwadrat) paýlanyş

Bu paýlanyşyň paýlanyş funksiýasy $F_{\chi^2(m)}(x)$ ýaly belgilenýär. $x < 0$ bahalar üçin $F_{\chi^2(m)}(x) = 0$, $x \geq 0$ üçin:

$$F_{\chi^2(m)}(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^x t^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt,$$

bu ýerde m – erkinlik derejesiniň sany, $\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{y-1}e^{-u}\,du$-Eýleriň gamma funksiýasynyň y nokatdaky bahasy.

Bu paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy

$$f_{\chi^2(m)}(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \ x > o \ .$$

$m \leq 2$ bolanda dykyzlyk hemişe kemelýär ($x > 0$), $m > 2$ bolanda $x = m - 2$ nokatda ýeke-täk maksimum bahany alýar.

§2.6. Stýudentiň paýlanyşy (*t* paýlanyş)

$\bar{x}$ saýlama orta bahanyň öwrenilýän ξ (ksi) tötän ululygyň hakyky orta bahasyndan tötän gyşarmalaryny seljerme edende iňlis statistigi W.Gosset (lakamy «Stýudent») şeýle netijeleri alypdyr. Goý $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ garaşsyz (0, σ^2)– normal paýlanan tötän ululyklar bolsun. Onda

$$t(m) = \frac{\xi_o}{\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2}}$$

tötän ululygyň paýlanyş dykyzlygy aşakdaky funksiýa bilen berilýär:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, (-\infty < x < \infty).$$

Şeýle paýlanyşa *m* erkinlik derejeli Stýudentiň paýlanyşy diýilýär. Stýudentiň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy ξ_i tötän ululygyň σ^2 dispersiýasyna bagly däl. Dykyzlyk funksiýasy unimodaldyr we $x = 0$ nokada görä simmetrikdir.

$m \to \infty$ ýagdaýda Stýudentiň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasyna ymtylýar. Amalyýetde $m > 30$ bolanda Stýudentiň paýlanyşyny normal paýlanyş bilen çalyşýarlar.

Stýudentiň paýlanyşy (ýa-da $t(m)$ paýlanyş) aşakdaky standart shema boýunça ulanylýar. $\varphi\,(x; \mu, \sigma^2)$ normal kanun boýunça paýlanan garaşsyz $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tötän ululyklar üçin μ – matematiki garaşmanyň we σ^2 – dispersiýanyň iň gowy süýşmedik bahalary bolup aşakdaky statistikalar hyzmat edýärler:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m};$$

$$S^s = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_m - \bar{x})^2}{m - 1}.$$

$\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}$ tötän ululyk $\varphi\,(x; 0;1)$ standart normal kanuna boýun egýär, $\frac{(m-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2$ tötän ululyk «hi-kwadrat» kanuna boýun egýär.

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{s^2}{\sigma^2}}}=\sqrt{m-1}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\chi^2}$$

gatnaşyk Stýudentiň paýlanyşy bolýar.

§2.7. *F* paýlanyş (dispersiýaly gatnaşygyň paýlanyşy)

Normal baş toplumdan alnan iki saýlama toplumyň maglumatlary boýunça hasaplanan saýlama dispersiýalaryň gatnaşygynyň özüni alyp barşyny seljerende iňlis statistigi R.Fişer *F* paýlanyş diýilýän paýlanyşy aldy. Bu paýlanyşyň umumy ýagdaýda kesgitlenilişine seredeliň.

m_1+m_2 sany garaşsyz we $(0,\sigma^2)$ normal paýlanan $\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_{m_1}$;η_1, $\eta_2,\ldots,\eta_{m2}$) ululyklara seredeliň (ξ – ksi, η – eta). Aşakdaky gatnaşygy alalyň:

$$F(m_1,m_2)=\frac{\dfrac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{m_1}\xi_i^2}{\dfrac{1}{m_2}\sum\limits_{j=1}^{m_2}\eta_j^2}.$$

Şol bir tötän ululyk iki garaşsyz we degişlilikde χ^2 paýlanan $\chi^2(m_1)$ we $\chi^2(m_2)$ ululyklaryň gatnaşygy ýaly kesgitlenip bilner:

$$F(m_1,m_2)=\frac{\dfrac{1}{m_1}\chi_1(m_1)}{\dfrac{1}{m_2}\chi_2(m_2)}.$$

$F(m_1, m_2)$ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy şeýle görnüşde bolar:

$$F(m_1,m_2)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{m_1+m_2}{2}\right)\cdot m_1^{\frac{m_1}{2}}\cdot m_2^{\frac{m_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{m_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{m_2}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{m_1}{2}-1}}{(m_1x+m_2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}.$$

§2.8. Çaklamalaryň statistiki barlagy

Nol çaklama H_0 ýaly belgilenýär. H_0 çaklama kabul edilmedik ýagdaýda (ýerine ýetmedik ýagdaýda) oňa alternatiw hasaplanýan H_1 çaklama kabul edilýär. Meselem, eger θ (teta) parametriň θ_0 bahany almaklygy H_0 çaklama bolsa, alternatiw çaklama bolup aşakdaky çaklamalar hyzmat edip biler:

$$H_1^{(1)}: \theta \neq \theta_0;\ H_1^{(2)}: \theta > \theta_0;\ H_1^{(3)}: \theta < \theta_0;\ H_1^{(4)}: \theta = \theta_1 \neq \theta_0 .$$

Saýlamanyň esasynda geçirilýän çaklamanyň statistiki barlagy ýalan çözüwi kabul etmek töwekgelçiligi bilen hökman bagly bolýar. Iki görnüşli ýalňyşlyk goýberilmegi mümkin. Birinji görnüşli ýalňyşlyk – dogry nol çaklamanyň kabul edilmezligi mümkin. Ikinji görnüşli ýalňyşlyk – alternatiw çaklama dogry ýagdaýda H_0 çaklamanyň kabul edilmekligi mümkin. Birinji görnüşli ýalňyşlyklaryň bolmaklygynyň ähtimallygy α bilen belgilenýär we oňa ähmiýetlilik derejesi diýilýär.

Ikinji görnüşli ýalňyşlyk goýberilmeginiň ähtimallygyny β bilen belgileýärler. Onda ikinji görnüşli ýalňyşlygyň goýberilmezliginiň ähtimallygy $1 - \beta$ bolar, $1 - \beta$ ähtimallyga kriteriniň kuwwaty (güýji) diýilýär. Adatça α – nyň bahalary öňünden berilýär (meselem: 0,1; 0,05; 0,01). Soňra iň uly kuwwaty bolan kriteri gurulýar. Eger α = 0,05 deň bolsa, onda 100 ýagdaýyň 5 – den köp ýagdaýynda birinji görnüşli ýalňyşlyk goýbermek islemeýärler.

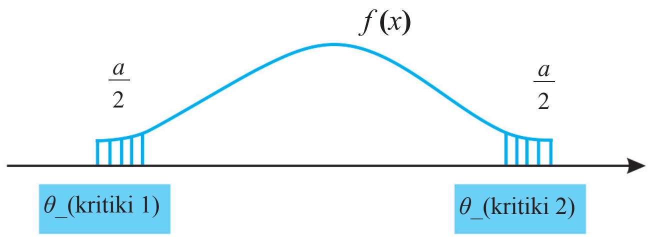
H_1 bäsleşiji çaklamanyň görnüşine baglylykda çep taraplaýyn, sag taraplaýyn ýa-da iki taraplaýyn kritiki aralygy saýlap alýarlar. $H_0 : \theta = \theta_0$ bäşleşiji çaklamada iki taraplaýyn kritiki aralygy alýarlar. Kritiki aralygyň serhetleri aşakdaky şertlerden kesgitlenýär.

$$P(\theta \leq \theta_{\text{kritiki 1}}) = \int_{-\infty}^{\theta_{\text{kritiki 1}}} f(\theta / H_0) d\theta = \frac{\alpha}{2};$$

$$P(\theta \geq \theta_{\text{kritiki 2}}) = \int_{\theta_{\text{kritiki 2}}}^{\infty} f(\theta / H_0) d\theta = \frac{\alpha}{2}.$$

Bu ýerde $f(\theta / H_0) - H_0$ nol çaklamanyň dogry bolan ýagdaýyndaky θ tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy, $P\ (\theta \leq \theta_{\text{kritiki 1}})$ $\theta \leq \theta_{\text{kritiki 1}}$ bolmaklygyň ähtimallygy. Onda θ ululygyň $(\theta_{\text{kritiki 1}};\ \theta_{\text{kritiki 2}})$ aralygyň daşyna düşmekliginiň ähtimallygy α bolar. α ululyga tötän ululygyň bu aralygyň daşyna düşmekligi kiçi ähtimallykly waka bolar ýaly has kiçi bahany bereliň. Eger H_0 çaklama dogry bolsa, onda bir saýlama toplumyň maglumatlary boýunça hasaplanan kriteri boýunça θ ululygyň $\hat{\theta}$ gözegçilik edilýän bahasy ($\theta_{\text{kritiki 1}}$; $\theta_{\text{kritiki 2}}$) aralyga düşmek mümkinçiligi has ýokary diýip hasaplap bolar. Eger $\hat{\theta}$ baha bu aralygyň daşyna düşse, onda kiçi ähtimallykly, amaly nukdaý nazardan mümkin däl waka ýüze çykýar. Bu bolsa, $1 - \alpha$ ähtimallyk bilen H_0 çaklamanyň adalatly däldigini, ýagny nädogrudygyny aňladýar.

$(-\infty; \theta_{\text{kritiki 1}}) \cup (\theta_{\text{kritiki 2}} + \infty)$ aralyga iki taraplaýyn kritiki aralyk diýilýär (2.3-nji surat).

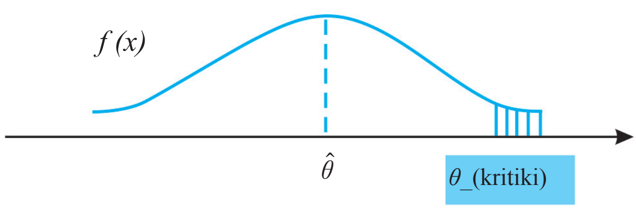


2.3-nji surat. Aralyklaýyn kritiki köplük.
Reňklenen bölegiň meýdany α deň

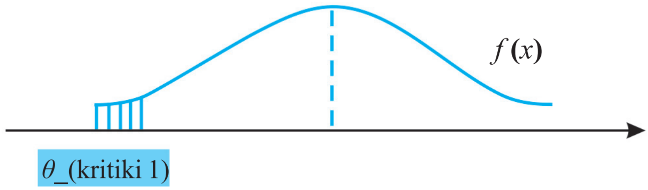
Sag taraplaýyn kritiki aralyk aşakdaky gatnaşykdan kesgitlenýär:

$$P(\theta \geq \theta_{\text{kritiki}}) = \int_{\theta_{\text{kritiki}}}^{+\infty} f(\theta / H_o) d\theta = \alpha.$$ Bu aralyk

H_1: $\theta > \theta_0$ alternatiw çaklama üçin ulanylýar (2.4-nji surat).
$(-\infty; \theta_{\text{kritiki}})$ çep taraplaýyn kritiki aralygy şeýle kesgitleýärler.



2.4-nji surat. Sag taraplaýyn kritiki aralyk.
Reňklenen bölegiň meýdany α deň



2.5-nji surat. Çep taraplaýyn kritiki aralyk.
Reňklenen bölegiň meýdany α deň

$$P(\theta \leq \theta_{\text{kritiki}}) = \int_{-\infty}^{\theta_{\text{kritiki}}} f(\theta/H_o)\,d\theta = \alpha\,.$$

Bu aralyk H_1: $\theta < \theta_0$ alternatiw çaklama üçin ulanylýar (2.5-nji surat).

§2.9. Stýudentiň, Fişeriň paýlanyşlarynyň kritiki bahalarynyň Microsoft Offise Excel programmanyň kömegi bilen tapylyşy

Stýudentiň t statistikasynyň kritiki bahalaryny tapmak üçin α – nyň ähmiýetlilik derejesini (meselem, 0,05 ýa-da 0,01) we erkinlik derejesiniň sanyny bilmek zerur. Çyzykly regressiýanyň koeffisiýentleriniň statistiki ähmiýetliligi barlananda erkinlik derejesiniň sany $n - m - 1$ bolar. Bu ýerde n – gözegçilikleriň sany, m – düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany.

Amallaryň tertibi:

1) Boş öýjügi saýlap almaly;

2) f_x – funksiýa düwmejigini basmaly;

3) Statistiki kategoriýany bermeli;

4) (стьюдраспобр) – funksiýany saýlamaly, OK düwmejigi basmaly.

5) Täze penjirede ähtimallygy (meselem, 0,05) we erkinlik derejesiniň sanyny (meselem, 18) girizmeli, OK düwmejigi basmaly.

6) Ýazylan öýjükde 2,100922037 jogap çykar.

Fişeriň F statistikasynyň kritiki bahasyny tapmak üçin α ähtimallygyň we erkinlik derejesiniň 2 sany bahalaryny bermek zerur. R^2 determinasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligi barlananda erkinlik derejesiniň birinji sany m, ikinji sany $n - m - 1$ bolar, bu ýerde n – gözegçilikleriň sany, m – düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany. Amallaryň tertibi:

1) Boş öýjügi saýlap almaly;

2) f_x – funksiýa düwmejigini basmaly;

3) Statistiki kategoriýany saýlamaly;

4) (f распобр) – funksiýany saýlamaly ,OK düwmejigi basmaly.

5) Täze penjirede ähtimallygy (meselem, 0,05) we erkinlik derejesiniň 2 sanyny (meselem, 2 we 18) girizmeli, OK düwmejigi basmaly.

6) Ýazylan öýjükde 3,554557146 jogap çykýar.

§2.10. Microsoft Offse Excel programmada matrisalar bilen geçirilýän amallar

Iki matrisany köpeltmek amalyna seredeliň.

1) «çep» tarapky matrisanyň elementlerini almaly.

2) «sag» tarapky matrisanyň elementlerini almaly.

3) «syçanyň» kömegi bilen $k \times l$ ölçegli erkin ýaýlany (oblasty) almaly, bu ýerde k – birinji matrisanyň setirleriniň sany we l-ikinji matrisanyň sütünleriniň sany.

4) f_x funksional düwmejige basmaly.

5) «matematiki» kategoriýany saýlamaly;

6) «Мумнож» funksiýany saýlamaly,OK düwmejigi basmaly;

7) Massiw1– «syçanyň» kömegi bilen birinji matrisany bölüp almaly, massiw 2 – «syçanyň» kömegi bilen ikinji matrisany bölüp almaly, OK basmaly;

8) $F2$ funksional düwmejigi basmaly;

9) Şol bir wagtda *ctrl* + *shift* + *enter* üç düwmäni birbada basmaly;

10) Başda alnan ýaýlada netije – matrisanyň elementleri çykar.

Ters matrisany tapmak amalyna seredeliň.

1) Berlen kwadrat matrisanyň elementlerini almaly;

2) «Syçanyň» kömegi bilen $k \times k$ ölçegli ýaýlany bölüp almaly, bu ýerde k – berlen matrisanyň setirleriniň we sütünleriniň sany;

3) f_x funksional düwmejige basmaly.

4) «Matematiki» kategoriýany saýlamaly;

5) «мобр» funksiýany saýlamaly we OK düwmejigi basmaly;

6) Massiw – «syçanyň» kömegi bilen başky berlen matrisany bölüp almaly, OK düwmejigi basmaly;

7) $F2$ funksional düwmejigi basmaly;
8) Şol bir wagtda ctrl + shift + enter üç düwmäni birbada basmaly;
9) Başda alnan ýaýlada netije-ters matrisanyň elementleri çykar.

Soraglar:

1. Nähili sebäplere görä modelde hökman tötän gyşarmalar bolýar?
2. Korrelýasiýa koeffisiýenti nämäni görkezýär? Ol haýsy aralykda üýtgeýär?
3. Eger x we y üýtgeýänleriň ähli bahalaryny (– 1) – e köpeltsek korrelýasiýa koeffisiýenti üýtgeýärmi?
4. Eger x we y üýtgeýänleriň ähli bahalary n gezek artsa, r_{xy} korrelýasiýa koeffisiýenti üýtgeýärmi?
5. Eger x we y üýtgeýänleriň ähli bahalary n gezek atrsa, kowariasiýa üýtgärmi?
6. Nähili baglanyşyga statistiki baglanyşyk diýilýär?
7. «Modeli parametrleşdirmek» nämäni aňladýar?
8. Regressiýa funksiýasy näme?
9. Näme üçin saýlama toplum boýunça hasaplanan dispersiýa, kowariasiýa, korrelýasiýa koeffisiýenleritleri nazary bahalardan tapawutlanýarlar?

III bap

JÜBÜT ÇYZYKLY REGRESSIÝA. GAUSSYŇ-MARKOWYŇ ŞERTLERI

§3.1. Esasy düşünjeler

Çyzykly regressiýa modeli (çyzykly deňleme) ykdysady üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglanyşygyň has ýönekeý görnüşidir. Çyzykly deňlemäni gurmak ekonometriki seljermäniň başlangyç nokady bolup biler.

Jübüt çyzykly regressiýa (regressiýanyň nazary çyzykly deňlemesi) bagly üýtgeýän y ululygyň şertli matematiki garaşmasy bilen bir düşündiriji üýtgeýän ululygyň arasyndaky çyzykly funksiýany aňladýar.

$$M(Y \mid X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \,. \tag{3.1}$$

Her bir indiwidual y_i ululygyň degişli şertli matematiki garaşmasyndan gyşarýanlygy üçin (3.1) deňlemä ε tötän goşulyjyny goşmak zerurdyr:

$$y_i = M(Y \mid X = x_i) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \,. \tag{3.2}$$

(3.2) deňlemä **nazary çyzykly regressiýa modeli** diýilýär, β_0, β_1 – regressiýanyň nazary parametrleri (nazary koeffisiýentleri), ε_i – tötän gyşarmalar.

Ekonometrikada baş topluma degişli deňleme we parametrler **nazary deňleme** we **nazary parametrler** diýlip atlandyrylýar.

Saýlama toplumyň maglumatlary boýunça bahalandyrmagyň netijesinde alnan deňlemä we parametrlere **empiriki deňleme** we **empiriki parametrler** diýilýär.

y_i indiwidual baha β_0, $\beta_1 x_i$ we tötän ε_i düzüjileriň jemi görnüşinde aňladylýar. Çyzykly nazary regressiýa modeli aşakdaky görnüşde aňladyp bolar:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon\,. \tag{3.3}$$

Regressiýanyň nazary koeffisiýentleriniň bahalaryny kesgitlemek üçin baş toplumyň Y, X üýtgeýän ululyklarynyň ähli bahalaryny bilmek we peýdalanmak zerurdyr. Bu bolsa mümkin däl.

Çyzykly regressiýa seljermesiniň meseleleri şeýle goýulýar.

Y we X üýtgeýän ululyklaryň saýlama toplumdan alnan (x_i, y_i), $i = 1,2,3,\ldots, n$ statistiki maglumatlary boýunça:

1) Näbelli β_0, β_1 parametrler üçin iň gowy bahalandyrmany almaly;

2) Modeliň parametrleri barada statistiki çaklamalary barlamaly;

3) Modeliň gözegçilikleriň maglumatlaryna dogry gelýändigini barlamaly.

Biz çäkli göwrümli saýlama boýunça regressiýanyň empiriki deňlemesini gurup bilýäris:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i\,, \tag{3.4}$$

bu ýerde $\hat{y}_i - M(Y \mid X = x_i)$ şertli matematiki garaşmanyň bahalandyrmasy; b_0, b_1 – näbelli β_0, β_1 parametrleriň bahalandyrmalary. Onda

$$y_i = b_o + b_1 x_i + e_i\,, \tag{3.5}$$

bu ýerde e_i – nazary (ε_i) tötän gyşarmanyň bahalandyrmasy.

Baş toplumyň we saýlama toplumyň statistiki bazasynyň gabat gelmeýänligi üçin b_0, b_1 bahalandyrmalar hemişe diýen ýaly β_0, β_1 koeffisiýentleriň hakyky bahalaryndan tapawutlanýarlar. Regressiýanyň empiriki we nazary çyzyklary gabat gelmeýärler. Şol bir baş toplumdan alnan dürli saýlama toplumlar adatça dürli bahalandyrmalaryň alynmagyna getirýär.

Anyk alnan saýlama toplumyň (x_i, y_i), $i = 1,2,3, \ldots, n$ maglumatlary boýunça näbelli β_0, β_1 parametrleriň b_0, b_1 bahalandyrmasyny tapmaly. Bu tapylan bahalandyrmalar boýunça gurlan $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ göni çyzyk saýlama toplumyň (x_i, y_i) nokatlaryny daşynda has jebis ýerleşdirmeli.

Näbelli koeffisiýentleriň bahalandyrmasyny tapmak üçin

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

jemi ulanmak bolar. Bu jemiň minimal bahasyna degişli b_0, b_1 bahalandyrmalar alynýar. Bu usula **iň kiçi kwadratlar** usuly diýilýär.

§3.2. Iň kiçi kwadratlar usuly

Goý, (x_i, y_i), $i=1,2,3, \dots, n$ saýlama boýunça (3.4) regressiýanyň empiriki deňlemesiniň b_0, b_1 bahalandyrmasyny tapmak gerek bolsun.

Iň kiçi kwadratlar usuly boýunça

$$Q(b_o, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \qquad (3.6)$$

funksiýanyň minimum bahasy tapylýar.

$Q(b_0, b_1)$ funksiýa b_0, b_1 ululyklara görä iki argumentli kwadrat funksiýadyr, x_i, y_i-gözegçiliklerden belli bolan maglumatlardyr. Q(b_0, b_1) funksiýa üznüksiz, güberçek we aşakdan çäklenen funksiýa bolýanlygy üçin onuň minimumy bardyr. Bu funksiýanyň minimumynyň bolmaklygynyň zerurlyk şertini ýazalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0\,, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_i = 0\,. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Bu ulgamdan, käbir öwürmeleri geçirip, normal deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases} nb_o + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Bu ulgamy çözüp alarys:

$$b_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad (3.9)$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

(3.9) formulada sanawjyny we maýdalawjyny $n^2 - a$ bölüp alarys:

$$b_o = \frac{\bar{y}\cdot\overline{x^2} - \bar{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\bar{y}\cdot\overline{x^2} - \bar{x}\cdot\overline{xy}}{var\,(x)};$$

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{var\,(x)}.$$

Parametrleri tapmaklygyň şeýle formulalaryny almak bolar:

$$b_1 = \sqrt{\frac{var(y)}{var(x)}}\cdot r_{xy},\ b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}\,.$$

Aşakdaky netijeler adalatlydyr:

1) Iň kiçi kwadratlar usulynyň bahalandyrmalary saýlamanyň funksiýasy bolýarlar. Şonuň üçin olary aňsat hasaplap bolýar.

2) Iň kiçi kwadratlar usulynyň bahalandyrmalary regressiýanyň nazary koeffisiýentleriniň nokatlanç bahalandyrmalarydyr.

3) (3.8) ulgamyň birinji deňlemesinden görnüşi ýaly, regressiýanyň empiriki göni çyzygy $(\bar{x},\bar{y})$ nokatdan hökman geçýär.

4) Regressiýanyň empiriki deňlemesi gyşarmalaryň $\bar{e} = \sum_{i=1}^{n} e_i$ jemi we gyşarmalaryň $\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{n}$ orta bahasy nola deň bolar ýaly gurulýar.

5) e_i gyşarmalar x bagly däl üýtgeýän ululygyň bahalary bilen korrelirlenmeýärler.

6) e_i gyşarmalar (galyndylar) bilen $\hat{y} = b_0 + b_1x_i$ bahalaryň arasynda korrelýasiýa ýok.

3.1-nji mysal

Goý, sarp edişiň Y göwrümi bilen salgytdan soňky X girdejiniň arasyndaky baglanyşyk öwrenilýän bolsun. Onuň üçin n = 20 bolan saýlama toplum alnan.

3.1-nji tablisa

№	x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i)^2$
1	2	3	4	5
1	106	102	10812	11236
2	107	102	10914	11449

3.1-nji tablisanyň dowamy

1	2	3	4	5
3	108	104	11232	11664
4	109	106	11554	11881
5	110	108	11880	12100
6	112	108	12096	12544
7	113	112	12656	12769
8	118	114	13452	13924
9	120	112	13440	14400
10	122	118	14396	14884
11	123	120	14760	15129
12	125	121	15125	15625
13	128	122	15616	16384
14	130	127	16510	16900
15	136	131	17816	18496
16	138	136	18768	19044
17	142	134	19028	20164
18	143	139	19877	20449
19	148	143	21164	21904
20	152	142	21584	23104
Σ	2490	2401	302680	314050

Berlen (x_i, y_i), $i = 1,2,3,\ldots, n$ nokatlary koordinatalar ulgamynda gurup (korrelýasiýa meýdanyny gurup), X we Y ululyklaryň arasynda $\hat{Y} = b_0 + b_1X$ çyzykly baglanyşygyň bardygyny takyklaýarys.

Iň kiçi kwadratlar usuly boýunça alarys:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{2401 \cdot 314050 - 2490 \cdot 302680}{20 \cdot 314050 - 2490^2} \approx 4,46;$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{20 \cdot 302680 - 2490 \cdot 2401}{20 \cdot 314050 - 2490^2} \approx 0,928.$$

Diýmek, jübüt çyzykly regressiýa deňlemesi şeýle bolar:

$$\hat{Y} = 4,46 + 0,928\,X.$$

Alnan modelde $b_1 \approx 0,928$ koeffisiýent sarp edişe bolan predel meýili aňladýar. Bu ululyk salgytdan soňky girdeji bir birlik artanda sarp edişiň göwrüminiň haýsy ululyga üýtgejekdigini (artjakdygyny) görkezýär.

b_0 ululyk awtonom sarp edişi aňladýar. b_0 ululyk $x = 0$ bolan ýagdaýda y sarp edişiň çaklaýyş bahasyny aňladýar.

b_0, b_1 empiriki koeffisiýentler nazary β_0, β_1 koeffisiýentleriň bahalandyrmasy bolýar, alnan deňleme bolsa seredilýän üýtgeýän ululyklaryň üýtgeýşiniň umumy tendensiýasyny görkezýär. Üýtgeýän ululyklaryň indiwidual bahalary modelden alnan bahalardan gyşarmagy mümkin. Bu gyşarmalar e_i bahalar bilen alynýar.

§3.3. Iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleri

Regressiýa seljermesi regressiýa koeffisiýentleriniň bahalandyrmasyny tapmaga mümkinçilik berýär, ýöne, bu bahalandyrmalar regressiýanyň empiriki deňlemesiniň baş toplum üçin deňlemesine (regressiýanyň nazary deňlemesine) näçe takyklykda gabat gelýändigi barada netije çykarmaga, b_0, b_1 empiriki koeffisiýentleriň nazary β_0, β_1 koeffisiýentlere nähili ýakynlygy barada, $\hat{Y}_i$ bahalaryň $M(Y\,|\,X = x_i)$ şertli matematiki garaşma nähili ýakynlygy barada pikir aýtmaga mümkinçilik bermeýär. Bu soraglara jogap bermek üçin goşmaça zerur barlaglary (derňewleri) geçirmeli.

y_i bahalar x_i we e_i (tötän) ululyklara gös-göni bagly bolan tötän ululykdyr. Iň kiçi kwadratlar usulynyň iň gowy netijeleri bermegi üçin tötän gyşarmalar barada käbir şertleriň ýerine ýetmegi hökmandyr.

Gaussyň-Markowyň şertleri

Iň kiçi kwadratlar usulynyň iň gowy netijeleri bermegi üçin tötän gyşarmalar barada **Gaussyň-Markowyň** şertlerini sanap geçeliň:

1) Ähli gözegçilikler üçin $M(\varepsilon_i) = 0$.

ε_i tötän gyşarmalaryň matematiki garaşmasy nola deňdir. $M(\varepsilon_i) = 0$ şertiň ýerine ýetmeginden $M\,(Y\,|\,X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ gelip çykýar.

2) ε_i tötän gyşarmalaryň dispersiýasy hemişelik:

islendik i we j gözegçilikler üçin $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j) = \sigma_\varepsilon^2 = const.$. Ýalňyşlygyň (gyşarmanyň) dispersiýasynyň gözegçiligiň belgisine bagly dällik şerti **gomoskedastiklik** diýlip atlandyrylýar. Bu şertiň ýerine ýetmezligi geteroskedastiklik diýlip atlandyrylýar.

$D(\varepsilon_j) = M[(\varepsilon_j - M(\varepsilon_j))^2] = M(\varepsilon_j^2)$ bolýanlygy üçin gomoskedastikligi

$M(\varepsilon_j^2) = \sigma_\varepsilon^2$ görnüşde hem ýazyp bolýar.

3) ε_i we ε_j tötän gyşarmalar $i \neq j$ üçin biri-birine bagly däldirler. Bu şertden şeýle gatnaşyk gelip çykýar:

$$\sigma_{\varepsilon i, \varepsilon j} = \begin{cases} o, i \neq j \\ \sigma_\varepsilon^2, i = j \end{cases} .$$

Eger bu şert ýerine ýetse, onda awtokorrelýasiya ýok hasaplanýar. Birinji şertiň ýerine ýetýändigini göz öňünde tutup, bu şerti $M(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ $(i \neq j)$ görnüşde ýazyp bolar.

4) Tötän gyşarma düşündiriji üýtgeýän ululyklara bagly bolmaly däl. Bu şert

$$\sigma_{\varepsilon i x i} = M[(\varepsilon_i - M(\varepsilon_i))(x_i - M(x_i))] = M(\varepsilon_i, x_i) = 0$$

şertiň ýerine ýetýändigini göz öňünde tutýar.

5) Model näbelli parametrlere görä çyzykly modeldir. Köplük çyzykly regressiýa üçin aşakdaky iki şertiň ýerine ýetmegi gerek.

6) Multikollinearlygyň ýoklugy. Düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň arasynda güýçli çyzykly baglanyşyk ýok.

7) ε_i, $i = 1,2,3, \ldots, n$ tötän gyşarmalar normal kanuna boýun egýärler.

Bu şertiň ýerine ýetmegi statistiki çaklamalary barlamak üçin we aralyklaýyn bahalandyrmalary gurmak üçin wajypdyr.

Klassyky çyzykly regressiýa modelleri gurlanda ýokarda sanalyp geçilen şertlerden başga aşakdaky goşmaça şertler hem göz öňünde tutulýar:

– Düşündiriji üýtgeýän ululyklar tötän ululyklar däl.

– Gözegçilikleriň sany düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sanyndan düýpli köp.

– Deňlemäniň görnüşi dogry saýlanyp alnan we oňa ähli zerur üýtgeýän ululyklar girizilen.

Gaussyň-Markowyň teoremasy

Eger ýokarda sanalyp geçilen 1–5 şertler ýerine ýetse, onda iň kiçi kwadratlar usuly boýunça alnan bahalandyrmalaryň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

1. Parametrleriň bahalandyrmalary süýşmedik bahalandyrmalardyr. Ýagny $M(b_1) = \beta_1$, $M(b_0) = \beta_0$. Bu häsiýet $M(\varepsilon_i) = 0$ deňlikden gelip çykýar.

2.Parametrleriň bahalandyrmalarynyň dispersiýasy n gözegçilikleriň sany artanda ($n \to \infty$) nola ymtylýandygy üçin bahalandyrmalar ygtybarlydyr. Başgaça aýdylanda, saýlama toplumyň göwrümi artanda bahalandyrmalaryň ynamlylygy artýar.

3. Parametrleriň bahalandyrmalary effektiwdir (netijelidir). Ýagny bu bahalandyrmalaryň iň kiçi dispersiýasy bar.

§3.4. Regressiýa koeffisiýentleriniň bahalandyrmalarynyň kesgitlenişiniň takyklygynyň seljermesi

Saýlama toplumyň elementleriniň tötänden saýlanyp alynýanlygy üçin regressiýanyň nazary deňlemesiniň β_0, β_1 parametrleriniň b_0, b_1 bahalandyrmalary hem tötän ululyklardyr. Olar üçin $M(b_0) = \beta_0$, $M(b_1) = \beta_1$ ýerine ýetýär. Bu bahalandyrmalar $D(b_0)$, $D(b_1)$ dispersiýalaryň kiçi boldugyça bahalandyrmalaryň ynamlylygy artýar. b_0, b_1 koeffisiýentleriň (tötän ululyklaryň) dispersiýalarynyň ε_i tötän gyşarmalaryň σ_ε^2 dispersiýasy bilen baglanyşygynyň formulalaryny ýazalyň:

$$D(b_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right]} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2\, var(x)};$$

$$D(b_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right]} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n \cdot var(x)}.$$

Bu formulalardan görnüşi ýaly:

– b_0, b_1 tötän ululyklaryň dispersiýalary tötän gyşarmanyň σ_ε^2 dispersiýasyna göni proporsionaldyr. Diýmek, tötänlik faktorynyň uly boldugyça bahalandyrmalaryň takyklygy şonça-da kiçidir.

– Saýlama toplumyň n göwrümi uly boldugyça bahalandyrmalaryň dispersiýalary şonça-da kiçidir.

– Düşündiriji üýtgeýän ululygyň dispersiýasy uly boldugyça koeffisiýentleriň bahalandyrmalarynyň dispersiýasy şonça-da kiçidir.

ε_i tötän gyşarmalar saýlama toplum boýunça kesgitlenilmeýär. Şonuň üçin ε_i derek $e_i = y_i - \hat{y} = y_i - b_0 - b_1 x_i$ gyşarmalary alýarlar. Tötän gyşarmalaryň $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$ dispersiýasy onuň süýşmedik bahalandyrmasy bilen çalşyrylýar:

$$S_e^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} \qquad (3.10)$$

Onda aşakdaky takmyny deňlikleri ýazyp bileris.

$$D(b_0) \approx S_{b_0}^2 = \frac{S_e^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2 var(x)} = \frac{S_e^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad (3.11)$$

$$D(b_1) \approx S_{b_1}^2 = \frac{S_e^2}{n \cdot var(x)} = \frac{nS_e^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (3.12)$$

$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$ dispersiýa düşündirilmedik dispersiýa diýilýär.

$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}}$ ululyga bahalandyrmanyň standart ýalňyşlygy (regressiýanyň standart ýalňyşlygy) diýilýär. $S_{b_0} = \sqrt{S_{b_0}^2}$, $S_{b_1} = \sqrt{S_{b_1}^2}$ ululyklara regressiýanyň koeffisiýentleriniň standart ýalňyşlyklary diýilýär.

Ýokarda seredilen mysala dolanalyň (3.1-nji tablisa ser.).

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{70,29}{18} \approx 3,91, \ S_e = 1,98; \qquad S_{b_0} \approx 3,9, \ S_{b_1} \approx 0,03.$$

Bu netijeler aşakdaky tablisanyň (3.2-nji tablisa) maglumatlary esasynda (3.10), (3.11), (3.12) formulalar boýunça hasaplanýar.

3.2-nji tablisa

№	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2
1	106	102	102,8	-0,83	0,69
2	107	102	103,8	-1,76	3,08
3	108	104	104,7	– 0,68	0,47
4	109	106	105,6	0,39	0,15
5	110	108	106,5	1,46	2,13
6	112	108	108,4	– 0,40	0,16
7	113	112	109,3	2,68	7,16
8	118	114	114	0,04	0
9	120	112	115,8	– 3,82	14,59
10	122	118	117,7	0,32	0,10
11	123	120	118,6	1,40	1,96
12	125	121	120,5	0,54	0,29
13	128	122	123,2	– 1,24	1,55
14	130	127	125,1	1,90	3,61
15	136	131	130,7	0,33	0,11
16	138	136	132,5	3,48	12,08
17	142	134	136,2	– 2,24	5,00
18	143	139	137,2	1,84	3,37
19	148	143	141,8	1,20	1,43
20	152	142	145,5	– 3,52	12,36
Σ	2490	2401	2399,9	1,08	70,29

§3.5. Jübüt çyzykly regressiýanyň koeffisiýentleriniň statistiki ähmiýetliliginiň barlagy

Bu barlagy geçirmek üçin wajyp bolan tassyklamany ýazalyň:

$t_{b_j} = \dfrac{b_j - \beta_j}{S_{b_j}},\ j = 0, 1$ tötän üýtgeýän ululyklar erkinlik derejesiniň sany $(n – 2)$ deň bolan Stýudentiň paýlanyşyna boýun egýär.

b_0, b_1 koeffisiýentler üçin $H_0 : b_j = 0$ çaklamany barlamak üçin t statistikanyň modullary hasaplanýar:

$$|t_{b_0}| = \left|\frac{b_0}{S_{b_0}}\right|, \quad |t_{b_1}| = \left|\frac{b_1}{S_{b_1}}\right|.$$

Bu droblar erkinlik derejesiniň sany (n – 2) bolan Stýudentiň paýlanyşyna boýun egýär. t statistikanyň hasaplanan bahasy $t_{\text{kritiki}} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ kritiki baha bilen deňeşdirilýär. Bu ýagdaýda iki taraplaýyn kritiki aralyk alynýar. Eger t statistikanyň bahasy $t_{\text{kritiki}} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ bahadan uly bolsa, onda tapylan koeffisiýentleriň bahalary statistiki ähmiýetli hasaplanýar (H_0 çaklama kabul edilmeýär, H_1:b_j≠0 çaklama kabul edilýär).
3.1-nji mysaldan alýarys.

$$t_{b_0} = \frac{4,75}{3,9} = 1,218; \quad t_{b_1} = \frac{0,926}{0,03} = 30,9; \quad \alpha = 0,05.$$

$$n - 2 = 20 - 2 = 18; \qquad t_{\text{kritiki}} = t_{\frac{0,05}{2}, 18} = 2,101.$$

Diýmek b_1 koeffisiýent statistiki ähmiýetli, b_0 azat agza statistiki ähmiýetli däl. b_0 ululyk ulanylmasa hem bolýar, ýagny $\hat{y} = b_1 x$ regressiýany alarys.

§3.6. Regressiýanyň çyzykly deňlemesiniň koeffisiýentleriniň aralyklaýyn bahalandyrylyşy

Iň kiçi kwadratlar usulynyň esasy şerti ε_i gyşarmalar nol matematiki garaşmaly, hemişelik dispersiýaly normal paýlanyşa boýun egmelidir.

Bu şert regressiýanyň çyzykly deňlemesiniň β_0, β_1 koeffisiýentleriniň iň gowy, çyzykly nokatlanç b_0, b_1 bahalandyrmalaryny almaga mümkinçilik bermekden başga-da, olaryň aralyklaýyn bahalandyrmalaryny tapmaga hem uly mümkinçilik berýär. Aralyklaýyn bahalandyrmalar takyklygy kepillendirýär.

Regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentleri üçin ynamly aralyklar şeýle görnüşde ýazylýar.

$$\begin{cases} b_o - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{b_0} < \beta_o < b_o + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{b_o}, \\ b_1 - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{b_1} < \beta_1 < b_1 + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{b_1}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Öňki mysala seredeliň. Koeffisiýentler üçin 95%-li ynamly aralyklary ýazalyň.

$$\begin{cases} 4,46 - 2,101 \cdot 3,9 < \beta_o < 4,46 + 2,101 \cdot 3,9 \\ 0,926 - 2,101 \cdot 0,03 < \beta_1 < 0,926 + 2,101 \cdot 0,03 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3,44 < \beta_0 < 12,94 \\ 0,863 < \beta_1 < 0,989 . \end{cases}$$

§3.7. Bagly üýtgeýän ululyk üçin ynamly aralyk

Ekonometriki modelleşdirmäniň esasy wezipeleriniň biri düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň kesgitli bahalarynda bagly üýtgeýän ululygyň bahasyny öňünden aýtmakdyr (çaklaýyşdyr).

Orta bahanyň çaklaýşyna seredeliň.

Goý, jübüt regressiýa deňlemesi $\hat{y} = b_0 + b_1 x_i$ gurlan bolsun. Bu deňlemäniň esasynda $M\,(Y\,|\,X = x_p)$ şertli matematiki garaşmanyň bahasynyň çaklaýşyny geçirmeli bolsun. Ilki bilen bagly üýtgeýän ululygyň matematiki garaşmasynyň nokatlanç bahalandyrmasyny kesgitläliň:

$$\hat{y}_p = b_0 + b_1 x_p .$$

Onda düşündiriji üýtgeýän ululygyň islendik anyk x_p bahasynda

$$M(Y\,|\,X = x_p) = \beta_0 + \beta_1 x_p$$

üçin $1-\alpha$ ynamlylykly ynamly aralygy şeýle bolar:

$$\hat{y}_p - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_e \sqrt{\frac{1}{n}\left[1 + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{var(x)}\right]} < \beta_0 + \beta_1 x_p < \hat{y}_p + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_e \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{n}\left[1 + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{var(x)}\right]} .$$

Bagly üýtgeýän ululygyň indiwidual bahalarynyň çaklaýşyna seredeliň.

Goý, x düşündiriji üýtgeýän ululygyň x_p bahasyna degişli y ululygyň y_p bahasyna seredilýän bolsun. Onda

$$\left(b_0 + b_1x_p \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_e\sqrt{1 + \frac{1}{n}\left[1 + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{var(x)}\right]}\right)$$

aralygyň daşyna $x = x_p$ baha degişli Y ululygyň bahalarynyň $100\,\alpha$ %-den köp bolmadyk bölegi düşer. Bu aralyk şertli matematiki garaşma üçin ynamly aralykdan giňdir. $\bar{x} = x_p$ bolanda gurlan ynamly aralyk has kiçi bolar. x_p – niň $\bar{x}$ orta bahadan daşlaşmagy bilen ynamly aralyklar giňelýär. Şonuň üçin, alnan netijeleri çaklaýyş geçirilýän aralyga ekstrapolýasiýa etmekde häzir bolmaly.

Ýene-de (3.1) mysala seredeliň. Goý, $x_p = 160$ bolsun, onda

$$t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_e\sqrt{\frac{1}{n}\left[1 + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{var(x)}\right]} =$$

$$= 2,101 \cdot 1,98 \cdot \sqrt{\frac{1}{20}\left[1 + \frac{\left(\frac{2490}{20} - 160\right)^2}{\frac{314050}{20} - \left(\frac{2490}{20}\right)^2}\right]} = 2,5;$$

$$b_0 + b_1x_p = 4,46 + 0,928 \cdot 160 = 152,9;$$

$$152,9 - 2,5 < \beta_0 + \beta_1x_p < 152,29 + 2,5;$$

$$150,4 < \beta_0 + \beta_1x_p < 155,4.$$

Goý, $x_p = 160$ bolsun. Onda:

$$t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_e\sqrt{1 + \frac{1}{n}\left[1 + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{var(x)}\right]} =$$

$$= 2,101 \cdot 1,98 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{20}\left[1 + \frac{\left(\frac{2490}{20} - 160\right)^2}{\frac{314050}{20} - \left(\frac{2490}{20}\right)^2}\right]} = 4,9.$$

Ynamly aralyk:

$b_0 + b_1x_p \pm 4,9 = 4,46 + 0,928 \cdot 160 \pm 4,9$ görnüşde bolar.

§3.8. Regressiýa deňlemesiniň umumy hiliniň barlagy. Determinasiýa koeffisiýenti

Adatça, regressiýanyň koeffisiýentleriniň ähmiýetliligi barlanandan soňra regressiýanyň deňlemesiniň umumy hili barlanylýar. Hili barlanylýan deňleme (empiriki deňleme) berlen statistiki maglumatlary nähili derejede gowy şöhlenendirýär?. Başga söz bilen aýdylanda, regressiýa çyzygynyň daşynda gözegçilikleriň nokatlary näçeräk ýaýraw (dagynyk) ýerleşendigi anyklanylýar.

Aşakdaky toždestwo seredeliň.

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}) \text{ ýa-da } (y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + e_i .$$

Soňky toždestwonyň iki tarapyny kwadrata göterip, e_i galyndylaryň $\hat{y}_i$ bahalar bilen korrelýasiýasynyň ýokdugyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2 .$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}e_i^2 .$$

$$TSS = ESS + RSS ,$$

bu ýerde

$TSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ – bagly üýtgeýän ululygyň orta bahadan gyşarmalarynyň kwadratlarynyň umumy jemi;

$ESS = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y} - \bar{y})^2$ – bagly üýtgeýän ululygyň regressiýa deňlemeden tapylan bahalarynyň orta bahadan gyşarmalarynyň kwadratlarynyň jemi (gyşarmalaryň kwadratlarynyň düşündirilen jemi);

$RSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}e_i^2$ – gyşarmalaryň kwadratlarynyň düşündirilmedik jemi.

Gyşarmalaryň kwadratlarynyň her bir jemine bir san degişlidir, bu sana jemiň **erkinlik derejesiniň sany** diýilýär. Bu san, jemi hasaplamak üçin $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ garaşsyz sanlar boýunça kesgitlenýän maglumatlaryň garaşsyz näçe birligini almalydygyny görkezýär. Meselem, TSS jemi hasaplamak üçin maglumatlaryň n – 1 sany garaşsyz birlikleri zerur. Orta bahanyň kesgitlenilişine görä $y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, y_3 - \bar{y}, ..., y_n - \bar{y}$ sanlaryň n–1 sanysy garaşsyz sanlardyr.

$$ESS = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = b_1^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

bolýanlygy üçin *ESS* jem b_1 koeffisiýent bilen kesgitlenýär, ýagny erkinlik derejesi bire deň. Diýmek, *RSS* jemiň erkinlik derejesiniň sany $(n-2)$ bolar.

Umumy ýagdaýda gyşarmalaryň kwadratlarynyň galyndy jeminiň erkinlik derejesiniň sany gözegçilikleriň sany bilen bahalandyrylýan parametrleriň sanynyň arasyndaky tapawuda deňdir. Dispersiýaly seljermäniň tablisasyny ýazalyň.

Gyşarmanyň çeşmesi	**Erkinlik derejesiniň sany (*df*)**	**Kwadratyň jemi (*SS*)**	**Orta kwadrat (*MS*)**
Regressiýa	1	*ESS*	*ESS*/1
Galyndy	$n-2$	*RSS*	*RSS*/$(n-2)$
Jemi	$n-1$	*TSS*	–

Regressiýanyň deňlemesiniň umumy hiliniň jemlenen ölçegi bolup R^2 determinasiýa koeffisiýenti hyzmat edýär. R^2 ululyk şeýle kesgitlenýär:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} =$$

$$= 1 - \frac{n\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}. \tag{3.14}$$

R^2 ululyk Y bagly üýtgeýän ululygyň ýaýrawynyň y – iň x regressiýasy bilen düşündirilýän ülüşini görkezýär.

$\dfrac{RSS}{TSS}$ – drob bagly üýtgeýän ululygyň ýaýrawynyň Y – iň X – e regressiýasy bilen düşündirilmeýän ülüşini görkezýär. Umumy ýagdaýda $0 \le R^2 \le 1$ dogrudyr.

Eger Y we X ululyklaryň arasynda düýpli çyzykly baglanyşyk bar bolsa, onda $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ jem $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ jemden düýpli kiçidir. Bu ýagdaýda R^2 ululyk 1–e ýakyndyr. Y we X ululyklaryň arasyndaky çyzykly baglanyşyk näçe güýçli bolsa, şonça-da R^2 1– *e* ýakyndyr, bu çyzykly baglanyşyk näçe gowşak bolsa, şonça-da R^2 nola ýakyndyr.

Çyzykly jübüt regressiýa ýagdaýda $r_{xy}^2 = R^2$. Determinasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliliginiň seljermesine geçeliň.

R^2 determinasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligi baradaky çaklamany barlaýarlar:

$$H_0{:}R^2 = 0; \quad H_1{:}R^2 > 0.$$

Bu çaklamany barlamak üçin, köplenç F statistika ulanylýar:

$$F = \frac{\dfrac{ESS}{m}}{\dfrac{RSS}{n-m-1}} = \frac{\dfrac{R^2}{m}}{\dfrac{1-R^2}{n-m-1}} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}, \qquad (3.15)$$

bu ýerde n – gözegçilikleriň sany, m – düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany. Jübüt çyzykly regressiýa ýagdaýda (düşündiriji üýtgeýän ululygyň sany 1 – e deň) $F = \dfrac{R^2(n-2)}{1-R^2}$. Iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleri ýerine ýetende we H_0 adalatly bolanda F ululyk Fişeriň paýlanyşyna eýedir. F we R^2 bir wagtda nola deň ýa-da deň däldir. $H_0: F= = 0$, $R^2 = 0$ çaklama üçin α ähmiýetlilik derejesi berlende Fişeriň paýlanyşynyň kritiki nokatlarynyň tablisasy boýunça $F_{\text{kritiki}} = F_{\alpha;m;n\text{-}m\text{-}1}$ kritiki baha tapylýar. Eger $F > F_{\text{kritiki}}$ bolsa, H_0 çaklama kabul edilmeýär. Bu bolsa $R^2 > 0$ bolýandygyny, ýagny R^2 koeffisiýentiň statistiki ähmiýetlidigini aňladýar.

(3.1) mysal üçin alarys:

$$R^2 = 1 - \frac{n\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} = 1 - \frac{20 \cdot 70{,}29}{20 \cdot 291797 - (2401)^2} \approx 0{,}98;$$

bu ýerde

$$\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_{20}^2 = 291797;$$

$$F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2} = \frac{0{,}98 \cdot 18}{1-0{,}98} = 882;$$

$$F_{\text{kritiki}} = F_{\alpha;m;n-m-1} = F_{0{,}05;1;18} = 4{,}41 < 882.$$

Diýmek, gurlan deňleme ähmiýetli.

Başlangyç maglumatlaryň regressiýa funksiýasy bilen approksimasiýasynyň takyklygyny bahalandyrmak üçin beýleki görkezijiler hem ulanylyp bilner. Şeýle görkezijileriň käbirlerine seredeliň.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|e_i| \text{ – orta absolýut gyşarma.}$$

$A = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{e_i}{y_i}\right|\right)\cdot 100\%$ – orta otnositel ýalňyşlyk. Eger $A \le 7\%$ bolsa, onda deňlemäniň hili ýeterlik gowy hasaplanýar.

Soraglar:

1. Gaussyň-Markowyň şertleri nähili sanalýar?
2. Tötän gyşarmalaryň geteroskedastikligi näme?
3. Tötän gyşarmalaryň awtokorrelýasiýasy näme?
4. Jübüt çyzykly regressiýa deňlemesinde düşündiriji üýtgeýäniň koeffisiýenti nämäni görkezýär?
5. Deňlemäniň parametrleriniň statistiki ähmiýetliligi nähili barlanýar?
6. Süýşmeýän bahalandyrma näme?
7. Ygtybarly (ýagdaýly) bahalandyrma näme ?
8. Netijeli bahalandyrma näme ?
9. TSS, ESS, RSS ululyklar näme we olar nähili hasaplanýar?
10. Determinasiýa koeffisiýenti haýsy formula bilen hasaplanýar we onuň manysyny düşündiriň.
11. Regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentleriniň statistiki ähmiýetliligi haýsy statistika bilen barlanýar? Bu statistika nähili hasaplanýar?
12. Determinasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligi haýsy statistika boýunça barlanýar? Ol nähili hasaplanýar?

IV bap

KÖPLÜK ÇYZYKLY REGRESSIÝA

§4.1. Regressiýa deňlemesiniň parametrleriniň kesgitlenilişi

Köp ýagdaýda islendik ykdysady görkezijä bir däl-de, birnäçe faktorlar täsir edýärler. Şeýle ýagdaýda

$$M(Y\,|\,x_1, x_2, ..., x_m) = f(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (4.1)$$

köplük regressiýa seredilýär.

Köplük regressiýa deňlemesi aşakdaky görnüşde berlip bilner.

$$Y = f(\beta, X) + \varepsilon, \qquad (4.2)$$

bu ýerde Y – düşündirilýän bagly ululyk, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – düşündiriji ululyklaryň wektory, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ kesgitlenilmäge degişli parametrler wektory, ε – tötän ýalňyşlyk.

Nazary köplük çyzykly regressiýa deňlemesi

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_m X_m + \varepsilon \qquad (4.3)$$

görnüşde ýazylýar. i – indiwidual gözegçilikler üçin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1\, x_{i1} + \beta_2\, x_{i2} + ... + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i\,, \qquad (4.4)$$

bu ýerde $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ näbelli parametrleriň $(m + 1)$ ölçegli wektory. β_j ululyga regressiýanyň j-nji nazary koeffisiýenti (regressiýanyň hususy koeffisiýenti) diýilýär. Bu koeffisiýent Y ululygyň X_j ululygyň üýtgemesine duýgurlygyny görkezýär.

Başgaça aýdylanda, beýleki düşündiriji üýtgeýän ululyklar hemişelik bolanda X_j ululygyň Y bagly üýtgeýän ululygyň $M(Y\,|\,x_1, x_2, \dots, x_m)$ şertli matematiki garaşmasyna täsirini şöhlelendirýär. β_0 ululyk ähli X_j ululyklar nola deň bolanda, Y ululygyň alýan bahasy (azat agza). Baglanyşygyň modeli hökmünde çyzykly funksiýa saýlanyp alnandan soň regressiýanyň parametrlerini bahalandyrmaly.

Goý, düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň gözegçiliklerden alnan $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ wektory we Y bagly ululyk berlen bolsun (gözegçilikleriň sany n-e deň).

$$\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}, y_i\}, i = 1,2,\ldots, n.$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ parametrleriň bahalarynyň birbelgili kesgitlenmegi üçin $n \geq m + 1$ şert ýerine ýetmeli. Eger $n = m + 1$ bolsa, onda β wektoryň koeffisiýentleriniň bahalandyrmasy ýeke-täk görnüşde tapylýar.

Eger $n > m + 1$ bolsa, onda $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ parametrler bahalandyrylanda optimallaşdyrmak zerurlygy ýüze çykýar. Optimal ýagdaýda saýlanyp alnan formula başlangyç maglumatlar üçin iň gowy ýakynlaşmany berýär.

Adatça, saýlama toplumyň maglumatlarynyň sany bahalandyrylýan parametrleriň sanyndan 5-6 esse köp bolmaly.

Bu ýagdaýda $v = n - m - 1$ sana erkinlik derejesiniň sany diýilýär. Parametrleri bahalandyrmaklygyň has ýaýran usuly iň kiçi kwadratlar usulydyr.

Iň kiçi kwadratlar usuly üçin öňki getirilen şertler ýerine ýetende klassyky çyzykly regressiýa modeliň çäklerinde seljerme geçirip bolýar.

Saýlama toplumyň maglumatlaryny ulanyp, parametrleriň hakyky bahalaryny (baş topluma degişli bahalaryny) tapmak mümkin däl. Şonuň üçin, (4.3) nazary regressiýa deňlemäniň deregine regressiýanyň empiriki deňlemesi bahalandyrylýar:

$$Y = b_0+b_1 X_1+b_2X_2+\ldots+b_mX_m+e, \tag{4.5}$$

bu ýerde $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m - \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ – parametrleriň nazary bahalarynyň bahalandyrmalary ($b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ – empiriki koeffisiýentler), $e - \varepsilon$ tötän gyşarmanyň bahalandyrmasy.

Indiwidual gözegçilikler üçin alarys:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_m x_{im} + e_i, \; i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{4.6}$$

Bahalandyrylan deňleme Y düşündirilýän (bagly) ululygyň üýtgemesiniň umumy trendini (ugruny) beýan etmeli. Görkezilen trendden gyşarmalary hasaplamak mümkinçiligi hökman bolmaly. Göwrümi

$n-e$ deň bolan saýlama toplumyň maglumatlary boýunça β wektoryň β_j parametrleriniň bahalandyrmalaryny tapmaly.

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{im}, y_i\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Başgaça aýdylanda, saýlanyp alnan modeliň parametrleşdirmesini geçirmeli. Bu ýerde $x_{ij,}$ $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, x_j üýtgeýän ululygyň i-nji gözegçilikdäki bahasy.

ε_i tötän gyşarmalara görä iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleri ýerine ýetende, bu usul boýunça tapylan b_0, b_1, b_2,…,b_m bahalandyrmalar süýşmedik, effektiw we ygtybarly bolýarlar.

(4.6) formulanyň esasynda düşündirilýän (bagly) ululygyň gözegçilikden alnan y_i bahasynyň modelden tapylan $\hat{y}_i$ bahasyndan e_i gyşarmasyny şeýle formula boýunça hasaplaýarlar:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_i x_{i1} - b_2 x_{i2} - ... - b_m x_{im} . \qquad (4.7)$$

§4.2. Köplük çyzykly regressiýanyň koeffisiýentleriniň hasaplanylyşy

Gözegçilikleriň maglumatlaryny we degişli koeffisiýentleri matrisa görnüşde ýazalyň:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Bu ýerde $Y - n$ ölçegli sütün – wektor. Onuň koordinatalary Y bagly üýtgeýän ululygyň gözegçiliklerden alnan bahalarydyr. $X - n \times (m+1)$ ölçegli matrisa. Bu matrisanyň i-nji setiri $X_1, X_2, \ldots, X_m$ bagly däl ululyklaryň i-nji gözegçilikden alnan bahalarydyr.

Birlik b_0 azat agza degişli üýtgeýän ululyga degişlidir. B – $(m + 1)$ ölçegli sütün – wektor. Bu wektoryň koordinatalary (4.5) regressiýa deňlemesiniň parametrleridir. e – n ölçegli sütün – wektor. Bu wektoryň koordinatalary y_i ululygyň hakyky (saýlama toplumdan alnan) bahalarynyň

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + ... + b_m x_{im} \qquad (4.8)$$

regressiýa deňlemesi boýunça tapylan $\hat{y}_i$ bahalardan gyşarmalaryny aňladýar.

Matrisa görnüşinde gyşarmalary şeýle ýazyp bolar.

$$e = Y - X \cdot B. \qquad (4.9)$$

Iň kiçi kwadratlar usulyna görä şeýle ýazyp bileris:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T \cdot e = (Y - XB)^T \cdot (Y - XB) \to \min, \qquad (4.10)$$

bu ýerde $e^T=(e_1, e_2,\ldots,e_n)$ – transponirlenen matrisa.
Eger B sütün wektory

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \qquad (4.11)$$

bolsa, onda (4.10.) şertiň ýerine ýetýändigini görkezip bolýar. Bu ýerde X^T – X matrisanyň transponirlenen matrisasy, $(X^T \cdot X)^{-1}$ – $X^T \cdot X$ matrisanyň ters matrisasy. (4.11) gatnaşyk islendik m mukdardaky düşündiriji üýtgeýän ululykly regressiýa deňlemeleri üçin adalatlydyr.

4.1-nji mysal

Goý, Y kärhananyň käbir harydynyň teklibi X_1 baha we X_2 aýlyk haka çyzykly bagly bolsun (4.1-nji tablisa).

4.1-nji tablisa

Y	20	35	30	45	60	69	75	90	105	110
X_1	10	15	20	25	40	37	43	35	38	55
X_2	12	10	9	9	8	8	6	4	4	5

Çyzykly regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentlerini kesgitläliň. Degişli matrisalar aşakdaky görnüşde bolar.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 12 \\ 1 & 15 & 10 \\ 1 & 20 & 9 \\ 1 & 25 & 9 \\ 1 & 40 & 8 \\ 1 & 37 & 8 \\ 1 & 43 & 6 \\ 1 & 35 & 4 \\ 1 & 38 & 4 \\ 1 & 55 & 5 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 30 \\ 45 \\ 60 \\ 69 \\ 75 \\ 90 \\ 105 \\ 110 \end{pmatrix}, X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 318 & 75 \\ 318 & 11862 & 2116 \\ 75 & 2116 & 627 \end{pmatrix},$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 7,310816 & -0,10049 & -0,53537 \\ -0,10049 & 0,001593 & 0,006644 \\ -0,53537 & 0,006644 & 0,043213 \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 639 \\ 23818 \\ 4077 \end{pmatrix},$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 & 25 & 40 & 37 & 43 & 35 & 38 & 55 \\ 12 & 10 & 9 & 9 & 8 & 8 & 6 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 95,5 \\ 0,818 \\ -7,680 \end{pmatrix}.$$

Şeýlelikde, regressiýanyň deňlemesi
$\hat{y} = 95,5 + 0,818X_1 - 7,68X_2$ görnüşde bolar.

Düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany ikä deň bolan ýagdaýynda aşakdaky matrisalary alarys:

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 \end{pmatrix}; X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} y_i \end{pmatrix}.$$

§4.3. Koeffisiýentleriň dispersiýasy we standart ýalňyşlyklary

Dispersiýany we standart ýalnyşlyklary bilip, bahalandyrmalaryň takyklygyny seljermek bolýar, nazary koeffisiýentler üçin ynamly aralyklary gurup bolýar, degişli çaklamalary barlap bolýar. Regressiýanyň empiriki koeffisiýentleriniň saýlama dispersiýasy şeýle görnüşde bolýar:

$$S_{b_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1} \cdot z_{jj} = S_e^2 \cdot z_{jj}, \tag{4.12}$$

bu ýerde $z_{jj} - z = (X^T \cdot X)^{-1}$, $j = 0, 1, \ldots, m$ matrisanyň j-nji diagonal elementi.

$X^T \cdot X$ we $(X^T \cdot X)^{-1}$ matrisalarda birinji setir we sütün 0 sifr bilen belgilenen.

(4.1) mysal üçin:

$$z_{00} = 7{,}310816; \; z_{11} = 0{,}001593; \; z_{22} = 0{,}043213.$$

$S_{b_j} = \sqrt{S_{b_j}^2}$ ululyk regressiýa koeffisiýentiniň standart ýalňyşlygyny aňladýar.

(4.1) mysalda

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1} = 81{,}61831; \quad S_{b_0} = 24{,}4; \quad S_{b_1} = 0{,}361; S_{b_2} = 1{,}88 .$$

§4.4. Regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentleriniň ähmiýetliliginiň statistiki barlagy

Regressiýanyň empiriki deňlemesini gurmak ekonometriki seljermäniň başlangyç döwrüdir. Saýlama toplumyň maglumatlary boýunça gurlan birinji regressiýa deňlemesi örän seýrek ýagdaýlarda kanagatlanarly bolýar. Şonuň üçin, regressiýa deňlemesiniň hilini barlamak ekonometriki seljermäniň wajyp meselesidir. Regressiýanyň bahalandyrylýan deňlemesiniň statistiki hiliniň barlagy aşakdaky ugurlar boýunça geçirilýär:

– regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentleriniň statistiki ähmiýetliliginiň barlagy;

– regressiýa deňlemesiniň umumy hiliniň barlagy;

– iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleriniň ýerine ýetirilýändiginiň barlagy.

m sany düşündiriji üýtgeýän ululykly köplük çyzykly regressiýanyň koeffisiýentleriniň statistiki ähmiýetliligi *t* statistikanyň esasynda barlanýar:

$$t = \frac{b_j}{S_{b_j}}. \tag{4.13}$$

t ululyk erkinlik derejesiniň sany $v = n - m - 1$ bolan Stýudentiň paýlanyşyna boýun egýär. Bu ýerde n – saýlamanyň göwrümi, m – modeldäki düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany. Ähmiýetliligiň talap edilýän derejesi berlende, t statistikanyň gözegçilik edilýän bahasy Stýudentiň paýlanyşynyň $t_{\frac{\alpha}{2};n-m-1}$ kritiki bahasy (nokady) bilen deňeşdirilýär.

Eger $|t| > t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}$ bolsa, onda b_j koeffisiýent statistiki ähmiýetli hasaplanýar, $|t| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}$ bolsa b_j koeffisiýent statistiki ähmiýetsiz hasaplanýar (statistiki taýdan 0 – a ýakyn). Bu bolsa X_j faktoryň bagly Y ululyk bilen çyzykly baglanyşygynyň ýokdugyny aňladýar.

X_j ululyk Y bagly ululyga hiç hili täsir etmeýär. Onuň modelde bolmaklygy özarabaglanyşygyň hakyky ýagdaýyny bozýar. Eger b_j koeffisiýent statistiki ähmiýetsiz bolsa, onda X_j faktory regressiýa deňlemesinden aýyrýarlar. Beýle edilmegi modeliň hiline känbir täsir etmeýar, ýöne, modeli has anyk edýär.

(4.1) mysala dolanalyň. $\alpha = 0{,}05$ (5%) ,

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1} = t_{\frac{0,05}{2};10-2-1} = t_{\frac{0,05}{2};7} = 2,365\text{. Onda}$$

$$t_{b_0} = \frac{b_0}{S_{b_0}} = \frac{95,5}{24,4} = 3,91;\ t_{b_1} = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{0,818}{0,361} = 2,26;$$

$$t_{b_2} = \frac{b_2}{S_{b_2}} = \frac{7,68}{1,88} = 4,09.$$

Diýmek, $\alpha = 0{,}05$ bolanda b_0, b_2 koeffisiýentler statistiki ähmiýetli, b_1 koeffisiýent statistiki ähmiýetsiz hasaplanýar. $\alpha \approx 0{,}058$ (5,8 %) bolanda, b_1 koeffisiýent statistiki ähmiýetli bolýar.

§4.5. Regressiýanyň nazary deňlemesiniň koeffisiýentleriniň aralyklaýyn bahalandyrmalary

Regressiýanyň nazary deňlemesiniň β_j koeffisiýentleriniň (j = 1,2, ..., m) b_j nokatlanç bahalandyrmalary kesgitlenenden soňra görkezilen koeffisiýentleriň aralyklaýyn bahalandyrmalaryny kesgitläp bolýar. β_j parametriň näbelli bahasyny $1-\alpha$ ynamlylyk bilen özünde saklaýan ynamly aralyk

$$b_j - t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}\cdot S_{b_j} < \beta_j < b_j + t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}\cdot S_{b_j}$$

deňsizlik bilen kesgitlenýär. Bu ýerde $t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}$ erkinlik derejesiniň sany $v = n-m-1$-e deň bolan Stýudentiň paýlanyşynyň kritiki nokady, n – saýlamanyň göwrümi, m – modeldäki düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany, α – ähmiýetlilik derejesi.

(4.1) mysalda, $t_{\frac{\alpha}{2};n-m-1} = t_{\frac{0,05}{2};10-2-1} = t_{\frac{0,05}{2};7} = 2,365$. Ynamly aralyklar şeýle bolýar:

$$95{,}5 - 2{,}365\cdot 24{,}4 < \beta_0 < 95{,}5 + 2{,}365\cdot 24{,}4;$$

$$0{,}818 - 2{,}365\cdot 0{,}361 < \beta_1 < 0{,}818 + 2{,}365\cdot 0{,}361;$$

$$7{,}68 - 2{,}365\cdot 1{,}88 < \beta_2 < 7{,}68 + 2{,}365\cdot 1{,}88.$$

Çaklaýşyň orta bahasynyň aralyklaýyn bahalandyrmasy şeýle gurulýar:

$$\hat{Y}_p - t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1} \cdot S_e \sqrt{X_p^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_p} < M(Y_P \backslash X_p^T) < \hat{Y}_p +$$
$$+ t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1} \cdot S_e \sqrt{X_p^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_p}\,.$$

Goý, (4.1) mysalda $x_{p1} = 60$, $x_{p2} = 4$ bolsun. Onda:

$$X_p^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_p =$$

$$= (1 \quad 60 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 7,31081 & -0,10049 & -0,53537 \\ -0,10049 & 0,001593 & 0,006644 \\ -0,53537 & 0,006644 & 0,043213 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 60 \\ 4 \end{pmatrix} = 0,585;$$

$$\hat{Y}_p = 95,5 + 0,818 \cdot 60 - 7,680 \cdot 4 = 113,9\,;$$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1} \cdot S_e \sqrt{X_p^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_p} = 2,365 \cdot \sqrt{81,6} \cdot \sqrt{0,585} = 16,44\,;$$

$$113,9 - 16,44 < M(Y_p \backslash X_p^T) < 113,9 + 16,44\,.$$

Bagly üýtgeýän ululygyň indiwidual bahalary üçin ynamly aralyklar aýry-aýry kesgitlenende, aşakdaky ornuna goýmany geçirmeli:

$$\sqrt{X_p^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_P} \to \sqrt{1 + X_p^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_p} = \sqrt{1,585} = 1,259\,.$$

§4.6. Regressiýa deňlemesiniň umumy hiliniň barlagy

Regressiýanyň her bir koeffisiýentiniň ähmiýetliligi barlanandan soň regressiýa deňlemesiniň umumy hili barlanylýar. Onuň üçin determinasiýa koeffisiýenti ulanylýar:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{n\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}. \quad (4.14)$$

Öňden bilşimiz ýaly umumy ýagdaýda $0 \le R^2 \le 1$. Bu koeffisiýent bire ýakynlaşdygyça regressiýanyň deňlemesi Y ululygyň özüni alyp barşyny şonça-da köp düşündirýär.

Köplük regressiýa üçin determinasiýa koeffisiýenti düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sanyna görä kemelmeýän funksiýa bolýar. Modele täze düşündiriji üýtgeýän ululygyň goşulmagy bilen R^2 ululygyň bahasy hiç wagt kemelmeýär. Hakykatdan hem, her bir soňky düşündiriji üýtgeýän ululyk bagly üýtgeýän ululygyň özüni alyp barşyny düşündirýän maglumaty kemeltmän, gaýtam artdyrýar. Bu bolsa Y düşündirilýän (bagly) ululygyň özüni alyp barşynyň kesgitsizligini azaldýar (iň erbet ýagdaýda artdyrmaýar).

Käwagt determinasiýa koeffisiýenti kesgitlenende süýşmedik bahalandyrmany almak üçin (4.14) formulanyň deregine düzediş girizilen formulany ulanýarlar:

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-m-1}, \qquad (4.15)$$

bu ýerde n – gözegçilikleriň sany, m – düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany.

Şeýle düzediş degişli RSS we TSS üçin erkinlik derejelerini göz öňünde tutýar. (4.15) formulany şeýle görnüşde hem ýazyp bolýar:

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-k},$$

bu ýerde $k = m + 1$ – regressiýa deňlemesiniň parametrleriniň sany.

(4.15) formuladan görnüşi ýaly $m > 1$ üçin $\overline{R^2} \angle R^2$, m – iň bahasynyň artmagy bilen düzedilen determinasiýa koeffisiýenti adaty determinasiýa koeffisiýentine görä haýal artýar. $\overline{R^2} = R^2$ deňlik diňe $R^2 = 1$ bolanda ýerine ýetýär. $\overline{R^2}$ otrisatel bahalary hem alyp biler (meselem, $R^2 = 0$ bolanda). Adatça

$$\overline{R^2} = \max\left(1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-k}; 0\right)$$ deňlik ýazylýar.

Täze düşündiriji üýtgeýän ululygyň goşulmagy bilen $\overline{R}^2$ ululygyň artmagy diňe bu düşündiriji ululyk üçin t statistikanyň bahasy moduly boýunça 1-den uly bolanda, bolup geçýär. Şonuň üçin modele täze düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň girizilmegi düzedilen determinasiýa koeffisiýenti artýan ýagdaýynda amala aşyrylýar. Adatça R^2 we $\overline{R}^2$ ululyklaryň ikisi hem regressiýa deňlemesiniň umumy hiliniň jemlenen ölçegleri hökmünde alynýar. Ýöne, determinasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetini absolýutlaşdyryp bolmaz.

Ýokary bahaly determinasiýa koeffisiýentli nädogry spesifikasiýalaşan modeller hem bar. Şonuň üçin determinasiýa koeffisiýentine modeli takyklamak üçin ulanylýan görkezijileriň biri hökmünde garap bolar.

Regressiýa koeffisiýentleriniň her biriniň ähmiýetliligi kesgitlenenden soňra, adatça, koeffisiýentleriň jemlenen ähmiýetliligi seljerilýär. Beýle seljerme umumy ähmiýetlilik baradaky çaklamany barlamagyň esasynda geçirilýär:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$ çaklama barlanylýar. Eger bu çaklama kabul edilse, onda ähli m sany düşündiriji $X_1, X_2, \ldots, X_m$ üýtgeýän ululyklaryň Y bagly ululyga edýän jemleýji täsiri statistiki düýpli däl diýip hasaplap bolýar. Regressiýa deňlemesiniň umumy hili pes hasaplanýar.

Bu çaklamanyň barlagy düşündirilen we galyndy dispersiýalary deňeşdirmegiň dispersiýaly seljermesiniň esasynda amala aşyrylýar.

H_0: (düşündirilen dispersiýa) = (galyndy dispersiýa),

H_1: (düşündirilen dispersiýa) > (galyndy dispersiýa).

F statistikany guralyň:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / m}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - m - 1)}, \qquad (4.16)$$

bu ýerde $\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / m = \frac{ESS}{m}$ – bir bagly däl üýtgeýän ululyga düşýän düşündirilen kwadratlar jemi; $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - m - 1) = \frac{RSS}{n - m - 1}$ – erkinligiň bir derejesine düşýän kwadratlaryň galyndy jemi.

Iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleri ýerine ýetende gurlan F statistika erkinlik derejeleriniň sanlary $v_1 = m$, $v_2 = n - m - 1$ bolan Fişeriň paýlanyşyna eýedir. Şonuň üçin, eger ähmiýetliligiň talap edilýän derejesi α bolanda, $F_{\text{gözegçilik}} > F_{\alpha;\, m; n-m-1}$ bolsa H_0 çaklama taşlanýar, H_1 kabul edilýär. $F_{\alpha; m;\, n-m-1}$ – Fişeriň paýlanyşynyň kritiki nokady. Bu bolsa düşündirilen dispersiýanyň galyndy dispersiýadan düýpli uludygyny aňladýar. Diýmek, regressiýa deňlemesi Y bagly üýtgeýän ululygyň üýtgeýiş dinamikasyny ýeterlik hilli şöhlelendirýär. Eger $F_{\text{gözegçilik}} < F_{\alpha; m; n-m-1}$ bolsa, onda H_0 çaklamany taşlamaga esas ýokdur. Diýmek, düşündirilen dispersiýa tötän faktorlaryň döredýän dispersiýasydyr. Diýmek, düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň Y ululyga edýän jemleýji (umumy) täsiri düýpli däldir, modeliň umumy hili pesdir.

Amalyýetde (amaly işde), köplenç, ýokarda getirilen çaklamanyň deregine onuň bilen baglanyşykly bolan çaklama barlanylýar.

$$H_0 : R^2 = 0,\ H_1 : R^2 > 0.$$

Bu çaklamany barlamak üçin aşakdaky F statistika peýdalanylýar:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}. \tag{4.17}$$

(4.17) aňlatma (4.16) aňlatmanyň sanawjysynyň, maýdalawjysynyň TSS ululyga bölünmeginden alynýar.

Iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleri ýerine ýetende we H_0 çaklama adalatly bolanda F ululyk Fişeriň paýlanyşyna eýe. F we R^2 görkezijiler şol bir wagtda nola deňdirler ýa-da nola deň däldirler.

$H_0 : F = 0$, $R^2 = 0$ nol çaklamany (ähmiýetliligiň derejesi α bolanda) barlamak üçin Fişeriň paýlanyşynyň tablisa boýunça $F_{\text{kritiki}} = F_{\alpha;\, m;\, n-m-1}$ kritiki bahasy tapylýar. Eger $F_{\text{gözegçilik}} > F_{\text{kritiki}}$ ýerine ýetse H_0 çaklama taşlanýar. Bu bolsa $R^2 > 0$ bolýandygyny, ýagny R^2 koeffisiýentiň statistiki ähmiýetlidigini aňladýar.

Çyzykly regressiýanyň ähli koeffisiýentleriniň bir wagtda nola deň bolmagy baradaky çaklamany kabul etmek üçin R^2 determinasiýa koeffisiýentiniň noldan düýpli tapawutlanmagy hökman däl. Onuň kritiki bahasy gözegçilikleriň sanynyň artmagy bilen kiçelýär we has nola ýakyn bolup bilýär.

(4.1) mysala dolanalyň:

$$R^2 = 1 - \frac{n\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} = 0,936\,.$$

Onda

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,936}{1-0,936} \cdot \frac{10-2-1}{2} =$$
$$= \frac{0,936 \cdot 7}{0,064 \cdot 2} = 51,2$$

Tablisadan $F_{0,05;\,2;7} = 4{,}74$, $F_{0,01;2;7} = 9{,}55$ tapýarys. $F_{\text{gözegçilik}} = 51,2 > F_{\text{kritiki}}$ şert $\alpha = 0{,}05$ bolanda-da, $\alpha = 0{,}01$ bolanda-da ýerine ýetýär.

Diýmek, iki ýagdaýda-da H_0 çaklama taşlanýar. Bu bolsa düşündirilen dispersiýanyň galyndy dispersiýadan düýpli uludygyny aňladýar. Diýmek, regressiýa deňlemesi Y düşündirilýän (bagly) ululygyň üýtgemesiniň dinamikasyny ýeterlik hilli şöhlelendirýär.

Jübüt regressiýa ýagdaýynda F statistika üçin nol çaklamanyň barlagy korrelýasiýa koeffisiýentiniň

$$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

t statistikasy üçin H_0 çaklamany barlamaklyga deňgüýçlüdir. Bu ýagdaýda F statistika t statistikanyň kwadratyna deňdir.

§4.7. Iki determinasiýa koeffisiýentleriniň deňliginiň barlagy

Goý, R_1^2 – m sany düşündiriji üýtgeýän ululykly, n gözegçilikli çyzykly model üçin determinasiýa koeffisiýenti; $R_2^2 - (m-k)$ sany düşündiriji üýtgeýän ululykly, n gözegçilikli çyzykly modeliň determinasiýa koeffisiýenti bolsun. Ikinji ýagdaýda modelden k sany düşündiriji üýtgeýän ululyklar aýrylan. Y düşündirilýän (bagly) ulylygyň üýtgeýşiniň beýan ediliş hili güýpli ýaramazlaşdymyka? Bu soraga

$$F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1-R_1^2} \cdot \frac{n-m-1}{k} \tag{4.18}$$

statistikany ulanyp, $H_0{:}R_1^2 - R_2^2 = 0$ çaklamany barlap, jogap berip bolar.

$H_0{:}R_1^2 - R_2^2 = 0$ adalatly bolan ýagdaýda ýokarda getirilen F statistika $v_1 = k$, $v_2 = n - m - 1$ erkinlik derejeleriniň sanlary bolan Fişeriň paýlanyşyna eýedir.

Fişeriň paýlanyşynyň kritiki nokatlarynyň tablisasy boýunça $F_{\text{kritiki}} = F_{\alpha;k;n-m-1}$ bahany tapýarlar (α – ähmiýetliligiň talap edilýän derejesi). Eger hasaplanan $F_{\text{gözegçilik}}$ baha F_{kritiki} bahadan uly bolsa, onda H_0 çaklama taşlanýar (ýagny, regressiýanyň taşlanan k koeffisiýentiniň bir wagtda nola deň bolmaklygy baradaky çaklama taşlanýar). Bu ýagdaýda k sany düşündiriji üýtgeýän ululyklary birwagtda modelden aýyrmaklyk dogry däl. Bu bolsa regressiýanyň başlangyç deňlemesiniň umumy hiliniň regressiýanyň soňky deňlemesiniň (k – düşündiriji üýtgeýän ululyklar taşlanan) umumy hilinden düýpli gowudygyny aňladýar. Eger $F_{\text{gözegçilik}} < F_{\text{kritiki}}$ ýerine ýetse, onda k sany düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň birwagtda modelden taşlanmagy regressiýanyň deňlemesiniň umumy hilini düýpli azaltmaýar diýip tassyklap bolar. Ýagny, k sany düşündiriji üýtgeýän ululyklary modelden aýyrmaklyk ýolbererlikdir.

Regressiýa modeline täze k sany düşündiriji üýtgeýän ululyklary goşmaklygy esaslandyrmak üçin aşakdaky F statistika hasaplanýar:

$$F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2} \cdot \frac{n - m - 1}{k}.$$

Eger hasaplanan F statitika F_{kritiki} bahadan uly bolsa, onda täze düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň goşulmagy Y düşündirilýän (bagly) ululygyň öňki düşündirilmedik (galyndy) dispersiýasynyň düýpli bölegini düşündirýär. Şonuň üçin şeýle goşulma dogrudyr. Düzgün boýunça täze düşündiriji üýtgeýän ululyklary modele bir-birden goşmaly. Ýagny, birbada köp sanly täze ululyklary goşmak maksadalaýyk däl. Mundan başga-da, modele täze ululyk girizilende düzedilen $\overline{R}^2$ determinasiýa koeffisiýenti peýdalanmaly. Eger täze üýtgeýän ululyk girizilende düşündirilen dispersiýanyň artýan bölegi ujypsyz bolsa, onda $\overline{R}^2$ kemelip biler. Bu ýagdaýda täze ululygy modele goşmak maksadalaýyk däl.

Regressiýanyň iki deňlemesiniň hilini R^2 determinasiýa koeffisiýenti boýunça deňeşdirmek üçin düşündirilýän (bagly) ululygyň şol bir formada bolmaklygy we gözegçilikleriň sanynyň iki model üçin hem deň bolmaklygy zerurdyr.

Goý, şol bir Y görkeziji iki sany deňleme bilen:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_1$$

çyzykly we

$$lnY = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_2$$

log – çyzykly deňlemeler bilen modelleşdirilýän bolsun.

Onda olaryň R_1^2 we R_2^2 determinasiýa koeffisiýentleri aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýar:

$$R_1^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{i1}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}; \qquad R_2^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{i2}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} (lny_i - \overline{lny})^2}.$$

Bu koeffisiýentleri göni deňeşdirmek nädogry bolar.

§4.8. Iki saýlama toplum üçin regressiýa deňlemeleriň gabat gelmegi barada çaklamanyň barlagy

Berlen çaklamany barlamagyň köp ýaýran testi Çou testidir.

Goý, n_1 we n_2 göwrümli iki sany saýlama toplum berlen bolsun. Saýlama toplumlaryň her biri üçin regressiýa deňlemesi aşakdaky görnüşde bahalandyrylan:

$$Y = b_{0,k} + b_{1,k}X_1 + b_{2,k}X_2 + \ldots + b_{m,k}X_m + e_k, \; k = 1;2. \qquad (4.19)$$

Regressiýalaryň degişli koeffisiýentleriniň biri-birine deňdigi baradaky nol çaklama barlanýar.

$$H_0 : b_{j1} = b_{j2}, \qquad j = 0,1,2,\ldots, m.$$

Başgaça aýdylanda, iki saýlama toplum üçin regressiýa deňlemeleriniň şol bir deňleme bolup bilmekligi anyklanylýar. Goý, $\sum_{i=1}^{n} e_{ik}^2 (k = 1;2)$ jemler, degişlilikde S_1 we S_2 bolsun.

Goý, $n_1 + n_2$ göwrümli birleşdirilen saýlama toplum boýunça ýene-de bir regressiýa deňlemesi bahalandyrylan bolsun. Bu deňleme üçin y_i hakyky bahalaryň regressiýa deňlemesinden gyşarmalarynyň kwadratlarynyň jemi S_0 deň bolsun. H_0 çaklamany barlamak üçin aşakdaky F statistika gurulýar:

$$F = \frac{S_0 - S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{n_1 + n_2 - 2m - 2}{m + 1}. \tag{4.20}$$

H_0 çaklamanyň adalatly bolan ýagdaýynda gurlan F statistika $v_1 = m + 1$, $v_2 = n_1 + n_2 - 2m - 2$ sanly erkinlik derejeli Fişeriň paýlanyşyna eýedir. Eger $S_0 \approx S_1 + S_2$ bolsa, F statistika nola ýakyn bolar. Bu bolsa iki saýlama toplum üçin hem regressiýa deňlemeleri birmeňzeş bolar diýip bolýanlygyny aňladýar. Bu ýagdaýda $F < F_{\text{kritiki}} = F\alpha; \nu_1; \nu_2$. Eger $F > F_{\text{kritiki}}$ bolsa, onda H_0 çaklama taşlanýar. Ýokarda getirilen deliller (faktlar) aşakdaky soraga jogap bermekde aýratyn wajypdyr.

Wagtyň seredilýän tutuş döwri üçin ýeke-täk regressiýa deňlemesini gurmak mümkinmi ýa-da tutuş wagt döwrüni böleklere bölüp, her bir bölek üçin regressiýa deňlemesini gurmalymy?

Regressiýa koeffisiýentleriniň statistiki ähmiýetliligi we R^2 determinasiýa koeffisiýentiniň bire ýakyn bahasy regressiýa deňlemesiniň ýokary hilini kepillendirmeýär. Şonuň üçin regressiýa deňlemesiniň hiliniň barlagynyň indiki tapgyrynda iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleriniň ýerine ýetirilişini barlamaly.

§4.9. Regressiýa maglumatlarynyň standartlaşdyrylyşy (merkezleşdirilişi we masştablaşdyrylyşy)

Her bir X_j ($j = 1,2,\dots, m$) we Y üýtgeýän ululyklar üçin saýlama toplumyň maglumatlary boýunça $\overline{X}_j, \overline{Y}$ orta bahalar we $S_{X_j} = \sqrt{var(X_j)}$, $S_Y = \sqrt{var(Y)}$ orta kwadrat gyşarmalar hasaplanýar.

Her bir gözegçilik üçin standartlaşdyrylan üýtgeýän ululyklaryň bahalary

$$t_{X_j} = \frac{X_j - \overline{X}_j}{S_{X_j}} \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$t_Y = \frac{Y - \overline{Y}}{S_Y} \tag{4.21}$$

formulalar boýunça hasaplanýar.

Her bir standartlaşdyrylan üýtgeýän ululyk üçin orta baha nola deň, orta kwadrat gyşarma bire deň.

Köplük çyzykly regressiýa deňlemesi standartlaşdyrylan üýtgeýän ululyklarda şeýle görnüşde bolar.

$$t_Y = \alpha_1 t_{X_1} + \alpha_2 t_{X_2} + \ldots + \alpha_m t_{X_m} + \varepsilon' . \qquad (4.22)$$

(4.22) modelde azat agza ýok.

Regressiýanyň nazary standartlaşdyrylan α_j (j = 1,2,…, m) koeffisiýenti X_j düşündiriji üýtgeýän ululyk bir σ_{x_j} orta kwadrat gyşarma artanda (beýleki düşündiriji üýtgeýän ululyklar hemişelik bolanda) Y bagly üýtgeýän ululygyň näçe σ_Y orta kwadrat gyşarma üýtgejekdigini görkezýär. Koeffisiýentleri bahalandyrmak üçin ähli nazary ululyklar olaryň saýlama toplumdan tapylan bahalandyrmalary bilen çalşyrylýar.

Goý, r_{ij} – X_i we X_j üýtgeýänleriň arasyndaky jübüt korrelýasiýa koeffisiýenti; r_{Yj} – Y we X_j ululyklaryň arasyndaky jübüt korrelýasiýa koeffisiýenti bolsun.

Jübüt korrelýasiýa koeffisiýentleriniň tapylyş formulalary aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$r_{jy} = r_{yj} = r_{Xjy} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_{kj} y_k - \sum_{k=1}^{n} x_{kj} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sqrt{\left[n\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{kj}\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2\right]}};$$

$$r_{ij} = r_{ji} = r_{X_j X_i} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{kj}}{\sqrt{\left[n\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{kj}\right)^2\right]}},$$

$k = 1,\ldots,n$ – gözegçiligiň tertibi.

Onda standartlaşdyrylan modeliň parametrleriniň bahalandyrylyşy şu aşakdaky formula boýunça geçirilýär:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \\ \ldots \\ r_{my} \end{pmatrix}. \qquad (4.23)$$

Başlangyç üýtgeýän ululyklarda deňleme

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \ldots + \beta_m X_m + \varepsilon \qquad (4.24)$$

görnüşde bolar.

(4.22) we (4.24) modelleriň parametrleriniň bahalandyrmalary aşakdaky gatnaşyklar bilen baglanyşýar:

$$b_j = a_j \cdot \frac{S_Y}{S_{X_j}} \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \qquad (4.25)$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \overline{X_1} - b_2 \overline{X_2} - \cdots - b_m \overline{X_m}.$$

§4.10. Regressiýanyň hususy deňlemeleri

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_m X_m + \varepsilon$$

köplük regressiýanyň çyzykly deňlemesiniň esasynda Y bagly ululygy X_j düşündiriji üýtgeýän ululyk bilen baglanyşdyrýan regressiýanyň hususy deňlemelerini tapyp bolýar (X_j– den beýleki düşündiriji üýtgeýän ululyklar orta derejede saklanýar). Regressiýanyň hususy deňlemeleri şeýle görnüşde bolýar:

$$Y_{x_1 \cdot x_2, x_3, \cdots, x_m} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \cdots + \beta_m \bar{X}_m + \varepsilon;$$

$$Y_{x_2 \cdot x_1, x_3, \cdots, x_m} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X}_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \cdots + \beta_m \bar{X}_m + \varepsilon;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{x_m \cdot x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X}_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \cdots + \beta_m X_m + \varepsilon.$$

Bu deňlemelerde degişli düşündiriji üýtgeýän ululygyň orta bahalaryny goýsak, jübüt çyzykly regressiýa deňlemelerini alarys. Modelleriň bahalandyrmalary şeýle görnüşde bolýar:

$$Y_{x_1 \cdot x_2, x_3, \ldots, x_m} = B_1 + b_1 X_1,$$

$$Y_{x_2 \cdot x_1, x_3, \ldots, x_m} = B_2 + b_2 X_2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$Y_{x_m \cdot x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}} = B_m + b_m X_m,$$

bu ýerde

$$B_1 = b_0 + b_2\bar{X}_2 + b_3\bar{X}_3 + \cdots + b_m\bar{X}_m\,;$$
$$B_2 = b_0 + b_1\bar{X}_1 + b_3\bar{X}_3 + \cdots + b_m\bar{X}_m\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_m = b_0 + b_1\bar{X}_1 + b_2\bar{X}_2 + \cdots + b_{m-1}\bar{X}_{m-1}\,.$$

Jübüt regressiýadan tapawutlylykda regressiýanyň hususy deňlemeleri düşündiriji üýtgeýän ululygyň Y bagly ululyga edýän izolirlenen (baglanan) täsirini aňladýar, çünki galan düşündiriji üýtgeýän ululyklar üýtgemeýän derejede berkidilen.Beýleki düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň täsiri B_j azat agzalara goşulan. Bu bolsa çeýeligiň hususy koeffisiýentlerini kesgitlemäge mümkinçilik berýär:

$$\ni_{x_j} = b_j \times \frac{X_j}{Y_{x_j \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m}}\,.$$

Soraglar:

1. Korrektirlenen determinasiýa koeffisiýenti näme maksat bilen ulanylýar? Ol nähili hasaplanýar?
2. Köplük çyzykly regressiýa modele goşmaça düşündiriji üýtgeýän girizilende adaty determinasiýa koeffisiýenti özüni nähili alyp barýar?
3. Köplük çyzykly regressiýa modeli üçin jübüt çyzykly regressiýadan tapawutlylykda Gaussyň-Markowyň nähili goşmaça şertleri bar?
4. Köplük çyzykly regressiýa modelinde haýsy hem bolsa bir düşündiriji ululygyň koeffisiýenti nämäni görkezýär?
5. Başlangyç we standartlaşdyrylan üýtgeýänlerde modeliň koeffisiýentleri nähili baglanyşýar?
6. Standartlaşdyrylan modelde düşündiriji üýtgeýänleriň koeffisiýentleriniň nähili manysy bar?
7. Ähli standartlaşdyrylan düşündiriji üýtgeýänler nola deň bolanda standartlaşdyrylan bagly üýtgeýän ululygyň bahasy nämä deň bolar? Başlangyç bagly üýtgeýän ululygyň bahasy nämä deň bolar?
8. Regressiýanyň hususy deňlemeleri nähili alynýar?
9. Üýtgeýänleriň standart bahalaryny nähili alýarlar?
10. $\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x_2$ model gurlan. Y – peýda, X_1 – umumy girdeji, X_2 – çykdajylar. Deňlemäniň koeffisiýentleri nähili sanlara deň bolarlar? Determinasiýa koeffisiýenti nämä deň?

V bap

TÖTÄN TÄSIRLERIŇ AWTOKORRELÝASIÝASY

§5.1. Awtokorrelýasiýanyň düýp manysy we sebäpleri

Klassyky regressiýada modeliň tötän düzüjisiniň ähli gözegçiliklerde matematiki garaşmasy nola deň diýlip hasaplanýar. Bu şert ähli wagtda ýerine ýetýär. Sebäbi tötän düzüjiniň nola deň bolmadyk matematiki garaşmasyny hemme wagt regressiýa deňlemesiniň azat agzasyna girizip bolýar. Dürli gözegçiliklerde tötän faktoryň gomoskedastiklik we korrelirlenmezlik baradaky şertleriniň ähmiýetine düýpli düşünmek üçin tötän gyşarmalaryň wektorynyň kowariasiýa matrisasyna seredeliň:

$$M[\varepsilon,\varepsilon^T]=\begin{bmatrix}\sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_3} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_n}\\ \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1} & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_3} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_n}\\ \sigma_{\varepsilon_3\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_3\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_3} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_3\varepsilon_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{\varepsilon_n\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_n\varepsilon_2} & \sigma_{\varepsilon_n\varepsilon_3} & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon_n}\end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Bu matrisa simmetrikdir.

Tötän täsirleriň gomoskedastiklik ýagdaýynda we olaryň arasynda awtokorrelýasiýa ýok bolan ýagdaýda alarys:

$$M[\varepsilon,\varepsilon^T]=\begin{bmatrix}\sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2_{\varepsilon_3} & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon_n}\end{bmatrix}=\sigma^2_{\varepsilon}\cdot E, \quad (5.2)$$

bu ýerde E – birlik matrisa. Berlen şertleriň ýerine ýetýän ýagdaýynda modeiň koeffisiýentleriniň iň kiçi kwadtratlar usuly boýunça alnan bahalandyrmalary netijelidir .

Ekonometrika boýunça edebiýatlarda umumy görnüşli kowariasiýa matrisaly çyzykly regressiýa modele umumylaşdyrylan cyzykly regressiýa modeli diýilýär.

Iň kiçi kwadratlar usuly boýunça ýokary hilli regressiýa modeli gurmaklygyň wajyp şerti tötän ε_i gyşarmalaryň bahalarynyň ähli beýleki gözegçiliklerdäki gyşarmalaryň bahalaryna bagly dälligidir. Şeýle baglanyşygyň ýoklugy islendik gyşarmalaryň arasynda korrelýasiýanyň ýokdugyny aňladýar ($\sigma(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j$). Hususan-da $\sigma(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Ýagny goňşy gyşarmalaryň arasynda korrelýasiýa ýok.

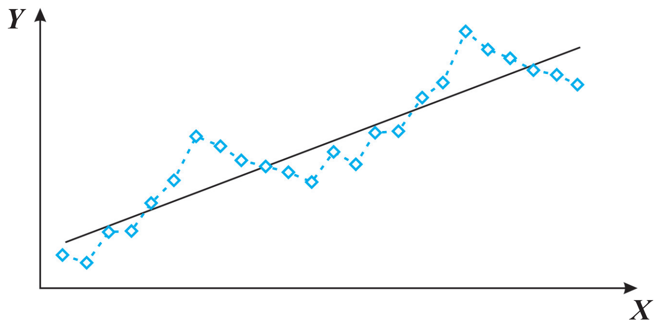
Awtokorrelýasiýa (yzygiderli korrelýasiýa) gözegçilik edilýän görkezijileriň arasyndaky korrelýasiýa ýaly kesgitlenýär. Bu gözegçilik edilýän görkezijiler wagt boýunça tertipleşdirilendir (wagt hatarlary) ýa-da giňişlikde tertipleşdirilendir. Galyndylaryň (gyşarmalaryň) awtokorrelýasiýasy adatça wagt hatarlarynyň maglumatlary ulanylanda regressiýa seljermesinde duşýar. Çatryklanan (giňişlikdäki) maglumatlar ulanylanda awtokorrelýasiýa (giňişlikleýin korrelýasiýa) gaty seýrek bolýar. Şonuň üçin geljekde i belgä (simwola) derek t belgini aljakdyrys (i – gözegçiligiň tertibi, t – gözegçiligiň pursady, momenti). Saýlamanyň göwrümini n däl-de T bilen belgileýäris. Ykdysady meselelerde položitel awtokorrelýasiýa ($\sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) > 0$) ýygy gabat gelýär, otrisatel awtokorrelýasiýa ($\sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) < 0$) seýrek duşýar.

Aşakdaky mysalda awtokorrelýasiýanyň manysyny düşündireliň.

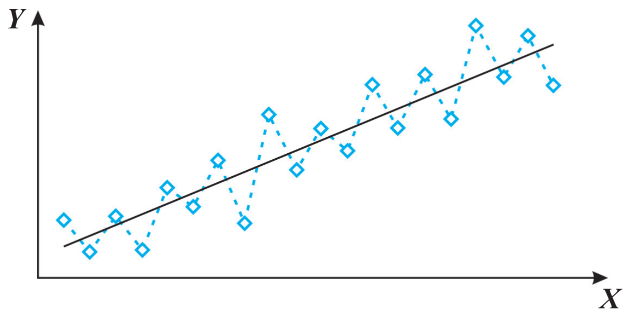
Goý, teşne gandyryjy içgilere bolan Y islegiň X girdejä baglylygy öwrenilýän bolsun. Maglumatlar aýlaýyn alnan. Girdejiniň artmagy bilen islegiň artyşyny görkezýän baglylyk $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ çyzykly funksiýa bilen görkezilip bilner (5.1-nji surat).

Otrisatel awtokorrelýasiýa položitel gyşarmadan soň otrisatel gyşarmanyň gelýändigini (we tersine) aňladýar. Nokatlaryň mümkin bolan ýaýrawy 5.2-nji suratda görkezilen. Şeýle ýagdaý ýokarda getirilen baglanyşygy möwsümleýin (gyş-tomus) maglumatlar boýunça öwrenilende alnyp bilner.

Awtokorrelýasiýany döredýän esasy sebäplerden şeýle sebäpleri alyp bolar: spesifikasiýa ýalňyşlyklar, ykdysady görkezijileriň üýtgemesindäki inersiýa, kerep effekti, maglumatlary düzlemek. Bu sebäplere aýratynlykda seredeliň.



5.1-nji surat. Položitel awtokorrelýasiýa



5.2-nji surat. Otrisatel awtokorrelýasiýa

Spesifikasiýa ýalňyşlyklary. Modelde haýsy hem bolsa bir wajyp düşündiriji üýtgeýän ululygyň ýoklugy ýa-da baglanyşygyň formasynyň nädogry saýlanyp alynmagy adatça, gözegçilikleriň nokatlarynyň regressiýa çyzygyndan ulgamlaýyn gyşarmalaryna getirýär. Bu bolsa awtokorrelýasiýany şertlendirýär.

Inersiýa. Köp ykdysady görkezijiler (meselem, puluň hümmetsizlenmesi, işsizlik, *MIÖ* – jemi milli önüm we ş.m.) işjeň işewürligiň tolkun şekilli bolýandygy bilen baglanyşykda kesgitli siklleýinlige (döwürleýinlige) eýedir.

Kerep effekti. Köp önümçilik we beýleki sferalarda ykdysady görkezijiler ykdysady şertleriň üýtgemesine yza galmak (wagt **lagasy**) bilen jogap berýärler. Meselem, oba hojalyk önümleriniň teklibi bahanyň üýtgemegine yza galmak bilen jogap berýär. Bu yza galmak hasylyň bişmek döwrüne deňdir. Oba hojalyk önüminiň geçen ýyldaky uly bahasy bu ýylda bu önümiň artyk öndürilmegine getirip biler. Netijede, baha kemeler.

Maglumatlary düzlemek. Dowamly wagt döwrüne degişli maglumatlary bu döwrüň böleklerine degişli maglumatlary ortabahalaşdyryp alýarlar. Bu bolsa seredilýän döwrüň içinde bar bolan yrgyldylary düzläp biler. Bu ýagdaý hem awtokorrelýasiýanyň sebäbi bolup biler.

§5.2. Awtokorrelýasiýanyň netijeleri

IKK usuly ulanylanda awtokorrelýasiýanyň aşakdaky netijeleriniň ýüze çykmagy mümkin.

1. Parametrleriň bahalandyrmalary çyzykly we süýşmedik bolmak bilen netijeli bolmaýarlar. Diýmek, bu bahalandyrmalar iň gowy çyzykly süýşmedik bahalandyrma häsiýetini ýitirýärler.

2. Bahalandyrmalaryň dispersiýalary süýşen bolýarlar. Standart formulalar boýunça hasaplanýan dispersiýalar köplenç pes bahaly bolýarlar, netijede, t statistika artýar. Bu bolsa hakykatda statistiki ähmiýetli bolmadyk düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň statistiki ähmiýetli diýlip hasap edilmegine getirip biler.

3. Regressiýanyň dispersiýasynyň

$$S_e^2 = \sum_{t=1}^{T} \frac{e_t^2}{T-m-1}$$

bahalandyrmasy σ^2 ululygyň hakyky bahasynyň süýşen bahalandyrmasy bolýar (köplenç ýagdaýda σ^2 ululygy peseldip).

4. Ýokarda sanalan sebäplere görä regressiýa koeffisiýentleriň ähmiýetliligini kesgitleýän t statistika boýunça we determinasiýa koeffisiýentiň ähmiýetliligini kesgitleýän F statistika boýunça alnan netijeleriň nädogry bolmak mümkinçiligi bar. Şu sebäpden modeliň çaklaýyş hili ýaramazlaşýar.

§5.3. Awtokorrelýasiýanyň ýüze çykarylyşy. Darbiniň-Uotsonyň kriterisi

ε_t, $(t = 1,2,\ldots, T)$ gyşarmalaryň hakyky bahalary näbelli. Şonuň üçin olaryň garaşsyzlygy (bagly dälligi) baradaky netije bu ululyklaryň regressiýanyň empiriki deňlemesinden alynýan e_t $(t = 1,2,\ldots, T)$ bahalandyrmalarynyň esasynda çykarylýar. Awtokorrelýasiýany kesgitlemegiň mümkin bolan usullaryna seredeliň.

Adatça e_t $(t = 1,2,\ldots,T)$ gyşarmalaryň korrelirlenmeýänligi barlanylýar. Korrelirlenmezlik gyşarmalaryň bagly däl bolmaklygynyň zerur, ýöne, ýeterlik däl şertidir. e_t $(t = 1,2,\ldots, T)$ gyşarmalaryň goňşy ululyklarynyň korrelirlenmeýänligi barlanylýar. Olar üçin korrelýasiýa koeffisiýenti, ýagny birinji tertipli awtokorrelýasiýa koeffisiýenti hasaplamak kyn däl.

$$r_{e_t e_{t-1}} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - M(e_t))(e_{t-1} - M(e_{t-1}))}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(e_t - M(e_t))^2 \cdot \sum_{t=2}^{T}(e_{t-1} - M(e_{t-1}))^2}} =$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} e_t^2 \sum_{t=2}^{T} e_{t-1}^2}} = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} e_t^2 \sum_{t=1}^{T-1} e_t^2}} \approx \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}. \tag{5.3}$$

Bu ýerde $M(e_t) = 0$ deňlik göz öňünde tutulýar.

Amalyýetde gyşarmalaryň korrelirlenýänligini barlamak üçin korrelýasiýa koeffisiýentine derek onuň bilen jebis baglanyşykly Darbiniň-Uotsonyň (Darbin-Watson, DW) statistikasyny peýdalanýarlar:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}. \tag{5.4}$$

T – niň uly bahalary üçin $DW \approx 2(1 - r_{e_t e_{t-1}})$ýerine ýetýär. Eger $e_t = e_{t-1}$ bolsa, onda $r_{e_t e_{t-1}} = 1$ we $DW = 0$ bolar. Bu položitel awtokorrelýasiýanyň bardygyny aňladýar. Eger $e_t = -e_{t-1}$ bolsa, onda

$r_{e_te_{t-1}} = -1$ we $DW = 4$ bolar. Bu otrisatel awtokorrelýasiýanyň bardygyny aňladýar. Galan ähli ýagdaýlarda $0 < DW < 4$ bolar. Diýmek, $0 \le DW \le 4$. Gyşarmalaryň tötänleýin özüni alyp barşynda $r_{e_te_{t-1}} = 0$ we $DW = 2$ bolar. Diýmek, Darbiniň-Uotsonyň statistikasynyň bahasynyň 2–ä ýakyn bolmagy tötän gyşarmalaryň bagly däldiginiň zerurlyk şertidir. Diýmek, eger $DW \approx 2$ ýerine ýetse, onda regressiýadan gyşarmalary tötän gyşarmalar (hakykatda bu gyşarmalar tötän gyşarmalar bolman hem bilýär) hasaplaýarlar. Bu bolsa gurlan çyzykly regressiýa modeliň hakyky baglylygy ähtimal şöhlelendirýändigini aňladýar.

Model gurlanda bagly ululyga täsir edýän düýpli faktorlaryň hemmesiniň hasaba alnandygyny aňladýar. Hiç bir çyzykly däl formula (model) statistiki häsiýetnamalary boýunça çyzykly modelden gowy bolmaýar. Bu ýagdaýda, hat-da R^2 determinasiýa koeffisiýenti uly bolmasa-da, düşündirilmedik dispersiýa bagly ululyga ýekelikde gowşak täsir edýän dürli faktorlaryň köp mukdarynyň bagly ululyga bilelikde edýän täsiriniň netijesinde alynýar diýip bolar.

DW statistikanyň haýsy bahalaryny 2 sana statistiki ýakyn diýip hasaplap bolar? Bu soraga jogap bermek üçin Darbiniň-Uotsonyň statistikasynyň kritiki nokatlarynyň ýörite tablisalary işlenip düzülen. Bu tablisalar boýunça gözegçilikleriň T sany berlende (ýa-da n sany berlende), düşündiriji üýtgeýänleriň sany m bolanda we ähmiýetlilik derejesi α bolanda gözegçilik edilýän *DW* statistikanyň ulanyp boljak serhetlerini (kritiki nokatlary) tapýarlar. Berlen α, T, m ululyklar üçin tablisada iki san görkezilýär: d_l – aşaky serhet, d_u – ýokarky serhet.

Darbiniň-Uotsonyň kriterisiniň umumy yzygiderligini görkezeliň.

1) Regressiýanyň gurlan $\hat{y}_t = b_0 + b_1x_{t1} + b_2x_{t2} + \cdots + b_mx_{tm}$ empiriki deňlemesi boýunça her bir t gözegçilik üçin ($t = 1,2,\ldots, T$) $e_t = y_t - \hat{y}_t$ gyşarmalaryň bahalary kesgitlenýär.

2) (5.4) formula boýunça *DW* statistika tapylýar.

3) Darbiniň-Uotsonyň kritiki nokatlarynyň tablisasy boýunça d_l we d_u sanlar tapylýar we aşakdaky düzgün boýunça çözgüt kabul edilýär:

$(0 \le DW < d_l)$ – položitel awtokorrelýasiýa bar.

$(d_l \le DW < d_u)$ – awtokorrelýasiýanyň barlygy barada çözgüt kesgitlenmedik.

$(d_u \leq DW < 4 - d_u)$ – awtokorrelýasiýa ýok.

$(4 - d_u \leq DW < 4 - d_l)$ –awtokorrelýasiýanyň barlygy barada çözgüt (netije) kesgitlenmedik.

$(4 - d_l \leq DW \leq 4)$ – otrisatel awtokorrelýasiýa bar.

Darbiniň-Uotsonyň kritiki nokatlarynyň tablisasyny ulanman, «gödek» düzgün boýunça, eger 1,5 < DW < 2,5 bolsa, galyndylaryň (gyşarmalaryň) awtokorrelýasiýasy ýok diýip hasaplaýarlar. Ýöne, has ynamly netijäni tablisadaky bahalary ulanyp alyp bolar. Galyndylaryň awtokorrelýasiýasy bar bolsa, alnan regressiýa deňlemesi kanagatlanarsyz hasaplanýar.

Darbiniň-Uotsonyň kriterisi ulanylanda aşakdaky çäklendirmeleri hasaba almak zerurdyr:

1) DW kriterisi diňe azat agzany saklaýan modeller üçin ulanylýar.

2) ε_t tötän gyşarmalar $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ iterasiýa shemasy boýunça kesgitlenilýär. Bu shema **birinji tertipli awtoregressiýa shemasy** diýilýär. Ol AR(1) ýaly belgilenýär. Bu ýerde v_t – tötän agza. Bu tötän agza üçin Gaussyň-Markowyň şertleri ýerine ýetýär.

3) Statistiki maglumatlaryň birmeňzeş periodikligi bolmaly.

4) Darbiniň-Uotsonyň kriterisi bagly ululygy bir döwürli wagt lagasy bilen düşündirýän düşündiriji üýtgeýän ululyklary saklaýan regressiýa modelleri üçin ulanarlykly däl. Ýagny, bu kriterini wagt lagaly awtoregressiýa modeli diýlip atlandyrylýan modeller üçin ulanyp bolmaýar:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_m x_{tm} + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \,. \qquad (5.5)$$

Bu ýagdaýda düşündiriji üýtgeýänleriň biri bilen tötän agzanyň düzüjileriniň biriniň arasynda ulgamlaýyn baglanyşyk bardyr. Iň kiçi kwadratlar usulynyň esasy şertleriniň biri ýerine ýetmeýär. (Düşündiriji üýtgeýänler tötän bolmaly däl, ýagny tötän düzüjisi bolmaly däl). Islendik düşündiriji üýtgeýän ululygyň bahasy ekzogen bolmaly, ýagny doly kesgitlenen bolmaly. Şeýle bolmasa bahalandyrmalar, hat-da saýlama toplumyň göwrümi has uly bolsa-da, süýşen bahalandyrmalar bolarlar.

Awtoregressiýa modelleri üçin awtokorrelýasiýany ýüze çykarmaklygyň ýörite testleri işlenip düzülendir. Olaryň biri Darbiniň h statistikasydyr:

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - nD(g)}}\,, \qquad (5.6)$$

bu ýerde $\hat{\rho}$ – birinji tertipli $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ (v_t – tötän agza) awtoregressiýanyň ρ koeffisiýentiniň bahalandyrmasy; $D(g)$ – lagaly y_{t-1} üýtgeýäniň γ koeffisiýentiniň saýlama dispersiýasy; n – gözegçilikleriň sany.

Saýlamanyň göwrümi uly bolanda h ulylyk $\varphi\,(0;1)$ ýaly paýlanyşa eýe bolýar. Ýagny, orta bahasy 0 we dispersiýasy 1 – *e* deň bolan normal üýtgeýän bolar. Diýmek, awtokorrelýasiýanyň ýoklugy baradaky çaklama: eger h ululygyň absolýut bahasy ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 5\%$ bolanda, 1,96 – dan uly bolsa we ikitaraplaýyn kriteri ulanylanda we saýlamanyň göwrümi uly bolanda $\alpha = 1\%$ üçin h ululygyň absolýut ululygy 2,58 – den uly bolsa taşlanýar. Galan ýagdaýlarda bu çaklama (nol çaklama) kabul edilýär.

Adatça, $\hat{\rho}$ baha $\hat{\rho} = 1 - 0{,}5DW$ formula boýunça tapylýar. $D(g)$ – γ koeffisiýentiň g bahalandyrmasynyň S_g standart ýalňyşlygynyň kwadratyna deňdir. Şonuň üçin h ululyk bahalandyrylan regressiýanyň maglumatlary esasynda hasaplanýar.

$nD\,(g) > 1$ bolanda, h ululygy hasaplamak mümkin däl.

5.1-nji mysal. X düşündiriji üýtgeýän ululyk, Y – düşündirilýän bagly ululyk bolsun. Bu ululyklaryň şertli bahalary berlen bolsun (5.1-nji tablisa).

5.1-nji tablisa

Başlangyç maglumatlar

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Y	3	8	6	12	11	17	15	20	16	24	22	28	26	34	31

Regressiýanyň çyzykly deňlemesi $\hat{Y} = 2{,}09 + 2{,}014X$.

Darbiniň-Uotsonyň statistikasyny hasaplalyň (5.2-nji tablisa).

5.2-nji tablisa

X_t	Y_t	$\hat{Y}_t$	$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$	e_t^2	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$
1	3	4,104	– 1,104	1,218816	–	–
2	8	6,118	1,882	3,541924	2,986	8,916196
3	6	8,132	– 2,132	4,545424	– 4,014	16,1122
4	12	10,146	1,854	3,437316	3,986	15,8882
5	11	12,16	– 1,16	1,3456	– 3,014	9,084196
6	17	14,174	2,826	7,986276	3,986	15,8882
7	15	16,188	– 1,188	1,411344	– 4,014	16,1122
8	20	18,202	1,798	3,232804	2,986	8,916196
9	16	20,216	– 4,216	17,77466	– 6,014	36,1682
10	24	22,23	1,77	3,1329	5,986	35,8322
11	22	24,244	– 2,244	5,035536	– 4,014	16,1122
12	28	26,258	1,742	3,034564	3,986	15,8882
13	26	28,272	– 2,272	5,161984	– 4,014	16,1122
14	34	30,286	3,714	13,7938	5,986	35,8322
15	31	32,3	– 1,3	1,69	– 5,014	25,1402
Σ	273	273,03	– 0,03	76,34294	–	272,0027

Darbiniň - Uotsonyň statistikasynyň bahasy şeýle bolar:

$$DW = \frac{272,0027}{76,34294} \approx 3,56.$$

$\alpha = 5\%$ bolanda $4 - d_l = 4 - 1,077 = 2,923$, $\alpha = 1\%$ üçin $4\text{-}d_l\text{=}4\text{-}0,811\text{=}3,189$ bolýanlygy üçin iki ýagdaýda-da ($\alpha = 1\%$, $\alpha = 5\%$) galyndylaryň otrisatel awtokorrelýasiýasy bardyr.

§ 5.4. Awtokorrelýasiýany aýyrmagyň usullary

Düşündirilýän (bagly) ululygyň şol ýa-da beýleki bahasyny kesgitleýän özarabaglanyşyklar baradaky bilimleriň kämil däldigi modelde tötän agzanyň bolmaklygynyň esasy sebäbi bolup durýar. Şonuň üçin, tötän gyşarmalaryň häsiýetleri, şol sanda awtokorrelýasiýa ilkinji nobatda baglanyşygyň formulasyny saýlap almaklyga we düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň düzümini saýlap almaklyga baglydyr. Awtokorrelýasiýanyň has köp ýagdaýda modeliň nädogry spesifikasiýasy sebäpli döreýänligi üçin, ilki bilen modeliň özüni korrektirlemek zerurdyr. Modelde käbir wajyp düşündiriji üýtgeýän ululygyň bolmazlygy hem awtokorrelýasiýanyň bolmaklygyna getirip biler. Şu zerur faktory kesgitlemek we ony regressiýanyň deňlemesinde hasaba almaga çalyşmak gerek. Mundan başga-da, baglanyşygyň formulasyny çalyşmaga (meselem, çyzykly formulany log – çyzykly, giperboliki we ş.m. formula) synanyşmaly.

Ýöne, eger spesifikasiýany üýtgetmegiň ähli proseduralary gutaranda-da awtokorrelýasiýa bar bolsa, onda bu ýagdaý $\{e_t\}$ hataryň käbir içki häsiýetleri sebäpli döreýär diýip bolar. Bu ýerde awtoregressiýa özgertmesinden peýdalanyp bolar. Çyzykly regressiýa modelde ýa-da çyzykly görnüşe getirilýän modellerde has maksadalaýyk we ýönekeý özgertme bolup birinji tertipli awtoregressiýa shemasy (AR(1)) hyzmat edýär.

Ýönekeýlik üçin jübüt çyzykly regressiýa modeline seredeliň:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon. \tag{5.7}$$

Onda t we t-1 gözegçiliklere

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t, \tag{5.8}$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{5.9}$$

formulalar degişlidirler.

Goý, tötän gyşarmalar birinji tertipli awtoregressiýa täsirine sezewar edilýän bolsun:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t .$$

Bu ýerde v_t $(t = 1,2,\ldots,T)$ iň kiçi kwadratlar usulynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýan tötän gyşarmalar; ρ – belli koeffisiýent. (5.9) aňlatmany ρ köpeldip, soň (5.8) aňlatmadan aýralyň:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}). \tag{5.10}$$

$Y_t^* = Y_t - \rho \cdot Y_{t-1}$, $X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$, $\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$ belgilemeleri girizip, alarys:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + v_t .$$

ρ koeffisiýentiň belli ululykdygy üçin Y_t^*, X_t^*, v_t ululyklary ýeterlik aňsat hasaplap bolýar. v_t tötän gyşarmalaryň iň kiçi kwadratlar usulynyň şertlerini kanagatlandyrýandyklaryna görä, β_0^*, β_1 koeffisiýentleriň bahalandyrmalary iň gowy çyzykly süýşmedik bahalandyrmalaryň häsiýetlerine eýe bolar.

Y_t^*, X_t^* ululyklary hasaplamak usuly birinji gözegçiligiň maglumatynyň ýitmegine getirýär. Erkinlik derejesiniň sany bir birlik kemeler. Bu kemelme uly göwrümli saýlama toplum üçin düýpli bolmasa-da, kiçi göwrümli saýlama toplum üçin netijeliligiň üýtgemegine getirmegi mümkin. Bu mesele adatça Praýsyň-Winsteniň düzedişi bilen çözülýär:

$$X_1^* = X_1\sqrt{1-\rho^2}, \quad Y_1^* = Y_1\sqrt{1-\rho^2}\,.$$

Awtoregressiýa özgertmesi köplük regressiýa deňlemesi üçin hem ulanarlykdyr. AR(1) birinji tertipli awtoregressiýa özgertmesini has ýokary tertipli (AR(2), AR(3), we ş.m.) özgertmelere umumylaşdyryp bolar.

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + v_t\,,$$

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + v_t\,.$$

Gyşarmalaryň awtokorrelýasiýasy bar ýagdaýynda tötän gyşarmalaryň wektorynyň kowariasiýa matrisasy aşakdaky görnüşde bolar:

$$M(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2\Omega. \quad (5.11)$$

Umumylaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usulynda, eger Ω matrisanyň elementleri belli bolsa, regressiýa deňlemesiniň parametrleri Eýtkeniň formulasy bilen tapylýar:

$$B = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}Y. \quad (5.12)$$

Emma, amalyýetde ρ parametriň bahasy belli bolmaýar. Bu näbelli parametri bahalandyrmak zerurdyr. Bu parametri bahalandyrmagyň birnäçe usullary bar. Olardan has köp ulanylýanlaryna seredeliň.

ρ parametriň Darbiniň-Uotsonyň statistikasy esasynda kesgitlenilişine seredeliň.

Darbiniň-Uotsonyň statistikasynyň goňşy gyşarmalarynyň arasyndaky korrelýasiýa koeffisiýenti bilen $DW \approx 2(1 - r_{e_t e_{t-1}})$ gatnaşyk boýunça jebis baglanyşyklydygyny ýatlalyň.

Onda ρ koeffisiýentiň bahalandyrmasy hökmünde $r = r_{e_t e_{t-1}}$ koeffisiýenti almak bolar:

$$r \approx 1 - \frac{DW}{2}.$$

Bahalandyrmagyň bu usuly saýlamanyň göwrümi uly bolanda ýaramly usuldyr. Bu ýagdaýda parametriň r bahalandyrmasy ýeterlik takyk bolar.

Kohranyň-Orkattyň usuly. ρ parametri bahalandyrmagyň we galyndylaryň awtokorrelýasiýasyny ýok etmegiň ýene bir usuly **Kohranyň-Orkattyň** usuly diýlip atlandyrylýan iterasiýa prosesidir. Bu usula jübüt regressiýa modelinde $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ we birinji tertipli awtoregressiýa shemasynda $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ seredeliň:

1. Iň kiçi kwadratlar usuly boýunça $Y=\beta_0+\beta_1 X+\varepsilon$ regressiýa deňlemesi bahalandyrylýar ($\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ deňleme tapylýar) we galyndylar (ε_t gyşarmalaryň $e_t = y_t - \hat{y}_t, \quad t = 1, 2, ..., T$, bahalandyrmalary) kesgitlenýär.

2. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ regressiýa baglanyşygy bahalandyrylýar. Goý, $\tilde{\rho} - \rho$ koeffisiýentiň bahalandyrmasy bolsun.

3. Berlen bahalandyrmanyň esasynda aşakdaky deňlemeler gurulýar:

$$y_t - \tilde{\rho} y_{t-1} = \beta_0 (1 - \tilde{\rho}) + \beta_1 (x_t - \tilde{\rho} x_{t-1}) + (\varepsilon_t - \tilde{\rho}\varepsilon_{t-1}),$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_t^* + v_t.$$

β_0^*, β_1 koeffisiýentler regressiýa deňlemesi boýunça bahalandyrylýar:

$$\hat{y}_t^* = b_0^* + b_1 x_t^*.$$

4. $b_0 = \dfrac{b_0^*}{1-\tilde{\rho}}$, b_1 bahalar $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ deňlemede goýulýar. Täzeden ε_t gyşarmalaryň $e_t = y_t - \hat{y}_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$ bahalandyrmalary hasaplanylýar we ikinji tapgyra (etapa) geçilýär.

Tapgyrdan-tapgyra geçmeklik tä talap edilýän takyklyk alynýança amala aşyrylýar. Edilýän talap: ρ parametriň yzygiderli iki bahalandyrmasynyň arasyndaky tapawut öňden berlen islendik sandan kiçi bolmaly.

Goý, e_t galyndy e_{t-1} galynda çyzykly bagly bolsun (5.1-nji mysala ser.). ρ koeffisiýenti bahalandyryp, alarys:

5.3-nji tablisa

t	$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$	e_t^2	$e_t \cdot e_{t-1}$
1	– 1,104	1,218816	-
2	1,882	3,541924	– 2,07773
3	– 2,132	4,545424	– 4,01242
4	1,854	3,437316	– 3,95273
5	– 1,16	1,3456	– 2,15064
6	2,826	7,986276	– 3,27816
7	– 1,188	1,411344	– 3,35729
8	1,798	3,232804	– 2,13602
9	– 4,216	17,77466	– 7,58037
10	1,77	3,1329	– 7,46232
11	– 2,244	5,035536	– 3,97188
12	1,742	3,034564	– 3,90905
13	– 2,272	5,161984	– 3,95782
14	3,714	13,7938	– 8,43821
15	– 1,3	1,69	– 4,8282
Σ	– 0,03	76,34294	– 61,1128

$$\tilde{\rho} = \frac{(T-1)\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1} - \sum_{t=2}^{T} e_t \sum_{t=2}^{T} e_{t-1}}{(T-1)\sum_{t=2}^{T} e_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=2}^{T} e_{t-1}\right)^2} =$$

$$= \frac{(T-1)\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1} - \left(\sum_{t=1}^{T} e_t - e_1\right)\left(\sum_{t=1}^{T} e_t - e_T\right)}{(T-1)\left(\sum_{t=1}^{T} e_t^2 - e_T^2\right) - \left(\sum_{t=1}^{T} e_t - e_T\right)^2} =$$

$$= \frac{14\cdot(-61,1128) - (-0,03 + 1,104)\cdot(-0,03 + 1,3)}{14\cdot(76,34294 - 1,69) - (-0,03 + 1,3)^2} \approx -0,821 .$$

ρ – nyň şeýle bahalandyrmasynda öň getirilen formulalar boýunça x_t^*, y_t^* bahalary tapýarys (5.4-nji tablisa).

5.4-nji tablisa

x_t	y_t	x_t^*	y_t^*
1	3	1,294	3,881
2	8	2,821	10,463
3	6	4,642	12,568
4	12	6,463	16,926
5	11	8,284	20,852
6	17	10,105	26,031
7	15	11,926	28,957
8	20	13,747	32,315
9	16	15,568	32,42
10	24	17,389	37,136
11	22	19,21	41,704
12	28	21,031	46,062
13	26	22,852	48,988
14	34	24,673	55,346
15	31	24,494	58,914

Adaty iň kiçi kwadratlar usuly boýunça $y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_t^* + v_t$ deňlemäniň parametrlerini bahalandyryp alarys:

$$\hat{y}_t^* = b_0^* + b_1 x_t^* = 2,902 + 2,098\, x_t^* .$$

Onda $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$ başlangyç deňlemäniň koeffisiýentleriniň düzedilen bahalandyrmalary şeýle bolar:

$$b_0 = \frac{b_0^*}{1-\hat{\rho}} = \frac{2,902}{1,821} = 1,59, \qquad b_1 = 2,098$$

(ilkibaşdaky bahalandyrmalar $b_0 = 2{,}09$, $b_1 = 2{,}014$). Biz Kohranyň – Orkattyň prosedurasynyň bir siklini ýerine ýetirdik.

Hildretiň-Lunyň usuly.

Bu usul boýunça (5.10) regressiýa ρ – nyň [–1; 1] kesimden alnan kiçi ädimli (meselem, 0,001, 0,01 we ş.m.) her mümkin bolan bahasy üçin bahalandyrylýar. Iň az standart ýalňyşlygy berýän ρ – nyň bahasy ρ – nyň bahalandyrmasy bolup hyzmat edýär. β_0^*, β_1 bahalar ρ – nyň tapylan bahalandyrmasy bilen $\hat{y}_t^* = b_0^* + b_1 x_t^*$ regressiýa deňlemesinden bahalandyrylýar. Bu usul amaly programmalar toplumynda giňden ulanylýar.

Indi ýokarda aýdylanlary jemläliň. Köp sebäplere görä, (spesifikasiýa ýalňyşlygy, seredilýän baglanyşyklaryň inertliligi we ş.m.) regressiýa modellerinde goňşy tötän gyşarmalaryň arasynda korrelýasiýa baglanyşygynyň bolmagy mümkin.

Bu ýagdaý iň kiçi kwadratlar usulynyň fundamental şertleriniň birini bozýar. Şeýle bolansoň, iň kiçi kwadratlar usuly boýunça alnan bahalandyrmalar netijeli bolmaýarlar. Bu bolsa, regressiýa koeffisiýentleriniň ähmiýetliligi we deňlemäniň hili barada alnan netijeleri ynamsyz edýär. Şonuň üçin, awtokorrelýasiýany ýüze çykarmak we ony ýok etmek başarnygy wajypdyr. Awtokorrelýasiýanyň barlygy barlanylanda ilki bilen modeliň spesifikasiýasynyň dogrulygyny seljermek zerurdyr. Eger regressiýanyň mümkin bolan birnäçe kämilleşdirilmesi geçirilenden soň hem (düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň düzümini takyklamak ýa-da baglanyşygyň formasyny üýtgetmek) awtokorrelýasiýa bar bolsa, onda bu ýagdaý gyşarmalaryň $\{\varepsilon_t\}$ hatarynyň içki häsiýetleri bilen baglanyşykly bolmagy mümkin. Şeýle ýagdaýda awtokorrelýasiýany aýyrýan kesgitli özgertmeler mümkindir. Şeýle özgertmeleriň biri AR(1) birinji tertipli awtoregressiýa shemasydyr. Bu shema hem AR(k), k = 2,3,… shema umumylaşdyrylyp bilner. Bu shemalary ulanmak üçin gyşarmalaryň arasyndaky korrelýasiýa koeffisiýenti bahalandyrmak zerurdyr. Muny **Darbiniň-Uotsonyň,**

Kohranyň-Orkattyň, Hildretiň-Lunyň usullary esasynda ýerine ýetirip bolar. Düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň arasynda lagaly bagly ululyk bar ýagdaýynda awtokorrelýasiýanyň barlygy Darbiniň h statistikasynyň kömegi bilen kesgitlenýär. Awtokorrelýasiýany ýok etmek bolsa **Hildretiň we Lunyň** usuly bilen amala aşyrylýar.

Birinji tertipli awtoregressiýa shemasy üçin Eýtkeniň formulasynyň ulanylyşyna seredeliň. Bu ýagdaýda

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Ω^{-1} matrisada ρ parametriň ýerine onuň bahalandyrmasyny goýup, deňlemäniň koeffisiýentleriniň bahalandyrmasyny Eýtkeniň formulasy bilen tapýarys:

$$B = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}Y.$$

Soraglar:

1. Tötän täsirleriň položitel awtokorrelýasiýasy bar bolanda gyşarmalar regressiýa çyzygyna görä özüni nähili alyp barýarlar?
2. Otrisatel awtokorrelýasiýa bar ýagdaýynda gyşarmalar regressiýa çyzygyna görä özüni nähili alyp barýarlar?
3. Eger Gaussyň-Markowyň şertleri ýerine ýetse, onda tötän gyşarmalaryň wektorynyň kowariasiýa matrisasy nähili görnüşde bolýar?
4. Awtokorrelýasiýa bar bolan ýagdaýynda tötän gyşarmalaryň wektorynyň kowariasiýa matrisasy nähili görnüşde bolar?
5. Tötän gyşarmalaryň awtokorrelýasiýasynyň bar ýagdaýynda çyzykly modeliň parametrleriniň bahalandyrmalarynyň süýşmeýänlik häsiýeti saklanýarmy?
6. Tötän gyşarmalaryň awtokorrelýasiýasynyň bar ýagdaýynda çyzykly modeliň parametrleriniň bahalandyrmalarynyň netijelilik we ygtybarlylyk häsiýetleri saklanýarmy?
7. Darbiniň-Uotsonyň statistikasy haýsy formula bilen hasaplanýar?
8. Darbiniň-Uotsonyň statistikasynyň haýsy aralyklarynda tötän gyşarmalaryň awtokorrelýasiýasy bar?
9. Umumylaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usuly haçan ulanylýar?

VI bap

TÖTÄN TÄSIRLERIŇ GETEROSKEDASTIKLIGI

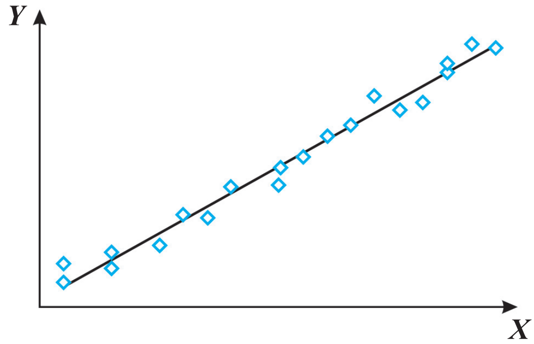
§6.1. Umumy düşünjeler

Iň kiçi kwadratlar (IKK) usulynyň esasy şertleriniň biri gyşarmalaryň dispersiýasynyň hemişelik bolmagydyr: $\sigma_i^2 = \sigma^2 = const.,\ i = 1, 2, ..., n$. Muňa tötän täsirleriň **gomoskedastikligi** diýilýär. Şu şertiň ýerine ýetmezligine **geteroskedastiklik** diýilýär.

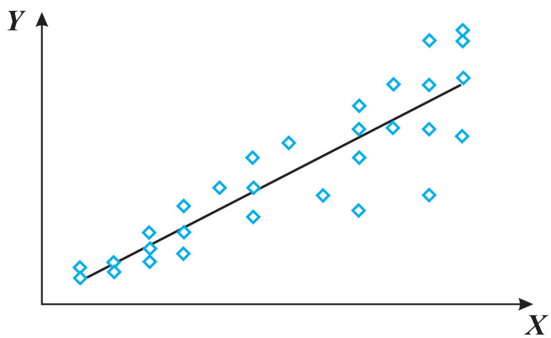
Her bir i-nji gözegçilikde ε_i ýeke-täk baha alynýar. Tötän agzanyň dispersiýasy nireden emele gelýär? Saýlama toplumyň maglumatlary ulanylanda biz anyk y_i bahalara degişli ε_i tötän gyşarmalar bilen iş salyşýarys. Emma saýlama toplumyň maglumatlary ulanylmazdan öň bu görkezijiler apriorlar ähtimallykly paýlanyşlaryň esasynda erkin bahalary alyp bilýärler. Şu paýlanyşlara edilýän talaplaryň biri hem dispersiýalaryň deňligidir. Bu şertiň ýerine ýetmegi her bir gözegçilikde tötän gyşarmanyň uly ýa-da kiçi, položitel ýa-da otrisatel bolup bilýändigine garamazdan, käbir gözegçiliklerde uly gyşarmalara, beýleki bir gözegçilikde kiçi gyşarmalara getirýän aprior sebäpleriň bolmaly däldigini aňladýar.

Ýöne, geteroskedastiklik amalyýetde şeýle bir seýrek hem däl. ε_i tötän gyşarmalaryň ähtimallykly paýlanyşlary dürli gözegçilikler üçin dürli bolar diýmäge esas bar. Bu tötän gyşarmalaryň hökman käbir gözegçilikler üçin uly, beýleki bir gözegçilikler üçin kiçi bolmalydygyny aňlatmaýar, ýöne bu ýagdaýyň aprior (öňden berlen) ähtimallygy ýokarydyr.

6.1– 6.2-nji suratlarda gyşarmalaryň gomoskedastiklik we geteroskedastiklik ýagdaýlarynda gözegçilik nokatlaryň dagynyklygynyň diagrammalary görkezilendir.



6.1-nji surat. Gomoskedastikli tötän agzaly model



6.2-nji surat. Geteroskedastikli tötän agzaly model

Köp ykdysady barlaglarda, esasan hem giňişlikleýin maglumatlar ulanylanda (çatryklaýyn maglumatlar ulanylanda) tötän gyşarmalaryň dispersiýasynyň hemişelikdigini öňünden aýtmak hakykata gabat gelmeýär. Sarp edijileriň býujeti öwrenilende galyndylaryň regressiýa çyzygyna görä dispersiýasy girdejiniň artmagy bilen artýar. Şuňa meňzeşlikde, çatryklaýyn maglumatlaryň esasynda kärhananyň işjeňligi seljerilende galyndylaryň dispersiýasy kärhananyň ölçeginiň artmagy bilen hökman artmaly.

Çatryk maglumatlar dürli ykdysady ululyklara degişli maglumatlardyr. Geteroskedastikli model regressiýanyň umumylaşdyrylan modeliniň hususy halydyr. Geteroskedastiklik bar ýagdaýynda gyşarmalar wektorynyň kowariasiýa matrisasy diagonal görnüşi alýar:

$$M(\varepsilon\varepsilon^T)=\begin{pmatrix}\sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2_{\varepsilon_3} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\varepsilon_n}\end{pmatrix}. \qquad (6.1)$$

Geteroskedastiklik ýagdaýynda matrisanyň diagonal elementleri dürlüdir. Gomoskedastiklik ýagdaýda $\sigma^2_{\varepsilon_1}=\sigma^2_{\varepsilon_2}=\dots=\sigma^2_{\varepsilon_n}=const$. bolar.

Kowariasiýa matrisasy şeýle görnüşde ýazylýar:

$$M(\varepsilon\varepsilon^T)=\sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}=\sigma^2\Omega, \qquad (6.2)$$

bu ýerde Ω matrisanyň elementleri belli položitel sanlar; σ^2 – näbelli ululyk. Şeýlelik bilen, eger λ_i ululyklar belli bolsalar, onda modeliň parametrlerini adaty däl iň kiçi kwadratlar usuly boýunça Eýtkeniň formulasy bilen bahalandyrmak zerurdyr:

$$B=(X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}Y.$$

§6.2. Geteroskedastikligiň netijeleri

Geteroskedastiklik ýagdaýynda iň kiçi kwadratlar usulyny ulanmaklyk şeýle netijelere getirýär:

1. Koeffisiýentleriň bahalandyrmalary öňküsi ýaly süýşmedik we çyzykly bolýarlar.

2. Bahalandyrmalar netijeli bolmaýar. Ýagny, bu bahalandyrmalar berlen parametriň beýleki bahalandyrmalary bilen deňeşdirilende iň kiçi dispersiýa eýe bolmaz. Bahalandyrmalaryň dispersiýasynyň artmagy maksimal takyk bahalandyrmalary almaklygyň ähtimallygyny peseldýär.

3. Bahalandyrmalaryň dispersiýasy süýşmek bilen hasaplanýar.

4. Degişli t we F statistikalar esasynda alnan netijeler, aralyklaýyn bahalandyrmalar ynamly bolmaýar. Onda bahalandyrmalaryň hiliniň standart barlaglarynyň berýän netijeleri ýalňyş bolup bilerler. Bu bolsa, gurlan model boýunça alnan netijeleriň nädogry bolmagyna getirer. Koeffisiýentleriň standart ýalňyşlyklarynyň peselmegi, t statistikanyň ýokarlanmagy has ähtimaldyr. Bu bolsa koeffisiýentleriň statistiki ähmiýetli hasap edilmegine (hakykatda şeýle bolmasa-da) getirýär.

§6.3. Geteroskedastikligi ýüze çykarmak

Käbir ýagdaýlarda maglumatlaryň häsiýetlerini bilip, geteroskedastiklik meselesiniň ýüze çykjagyny öňünden görüp bolýar. Bu ýetmezçiligi spesifikasiýa tapgyrynda ýok etmäge çalşyp bolar. Ýöne, köplenç, bu meseläni regressiýa deňlemesi gurlandan soň çözmeli bolýar.

Geteroskedastikligi kesgitlemek üçin köpsanly testler, olara degişli kriteriler işlenip düzülendir.

Spirmeniň rang korrelýasiýaly testi

Bu test ulanylanda gyşarmalaryň dispersiýasy «X üýtgeýäniň bahasynyň artmagy bilen ýa artar ýa-da kemeler» diýip hasaplanýar. Şonuň üçin IKK usuly boýunça gurlan regressiýa üçin e_i gyşarmalaryň absolýut ululyklary we X üýtgeýäniň x_i bahalary korrelirlenen bolýarlar. x_i we e_i bahalary ranžirleýärler (ululyklary boýunça tertipleşdirilýär). Soňra rang korrelýasiýa koeffisiýenti kesgitlenýär:

$$t_{x_i,|e_i|} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d^2{}_i}{n(n^2-1)}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{6.3}$$

bu ýerde d_i – x_i – niň we $|e_i|$-niň, $i = 1,2,\ldots,n$, ranglarynyň (bu ululyklaryň bahalarynyň) arasyndaky tapawut, 6 – san.

Eger baş toplum üçin $\rho_{x_i,|e_i|}$ – korrelýasiýa koeffisiýenti nola deň bolsa, onda

$$t = \frac{r_{x_i,|e_i|}\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2_{x_i,|e_i|}}} \tag{6.4}$$

statistikanyň erkinlik derejesiniň sany $\nu = n - 2$-ä deň bolan Stýudentiň paýlanyşyna eýedigi subut edilendir.

Diýmek, (6.4) formula boýunça hasaplanan t statistikanyň gözegçilik edilýän bahasy $t_{\text{kritiki}} = t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ bahadan uly bolsa, onda $\rho_{x_i,|e_i|}$ korrelýasiýa koeffisiýentiň nola deňdigi baradaky çaklamany taşlamak zerurdyr. Bu bolsa geteroskedastikligiň ýoklugy hakyndaky çaklamanyň hem taşlanýandygyny aňladýar. Başga ýagdaýlarda geteroskedastikligiň ýoklugy baradaky çaklama kabul edilýär.

Eger regressiýa modelinde düşündiriji üýtgeýänleriň sany 1-den köp bolsa, onda çaklamanyň barlagy t statistikanyň kömegi bilen her bir düşündiriji üýtgeýän üçin aýratynlykda geçirilip bilner.

Parkyň testi

σ_i^2 dispersiýa düşündiriji üýtgeýäniň i-nji bahasyna bagly funksiýa hasap edilýär. R.Park şeýle funksional baglanyşygy hödürledi:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^\beta e^{v_i}. \quad (6.5)$$

Bu deňligi logarifmirläp, alarys:

$$\ln\sigma_i^2 = \ln\sigma^2 + \ln x_i^\beta + \ln e^{v_i};$$

$$\ln\sigma_i^2 = \ln\sigma^2 + \beta\ln x_i + v_i.$$

σ_i^2 dispersiýalar adatça näbelli bolansoňlar olary gyşarmalaryň kwadratlarynyň e_i^2 bahalandyrmalary bilen çalyşýarlar.

Parkyň kriterisi şu tapgyrlary öz içine alýar:

1. $y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$ regressiýa deňlemesi gurulýar.
2. Her bir gözegçilik üçin $\ln e_i^2 = \ln(y_i - \hat{y}_i)^2$ kesgitlenýär;
3. Bu tapgyrda

$$\ln e_i^2 = \alpha + \beta\ln x_i + v_i \quad (6.6)$$

regressiýanyň koeffisiýentleri bahalandyrylýar. Köplük regressiýa ýagdaýynda (6.6) baglylyk her bir düşündiriji üýtgeýän üçin gurulýar.

4. $t = \dfrac{b}{S_b}$ · t statistikanyň esasynda β koeffisiýentiň b bahalandyrmasynyň statistiki ähmiýetliligi barlanýar. Eger b bahalandyrma statistiki ähmiýetli bolsa, onda $\ln e_i^2$ we $\ln x_i$ ululyklaryň arasynda baglanyşyk bardyr. Bu bolsa statistiki maglumatlarda geteroskedastikligiň bardygyny aňladýar.

Parkyň kriterisinde anyk (6.5) funksional baglanyşygyň ulanylmagy esaslandyrylmadyk netijelere getirmegi mümkin. Meselem, β koeffisiýent statistiki ähmiýetsiz bolsa-da, geteroskedastiklik bar we.

ýene-de bir meseläniň döremegi mümkin. v_i tötän gyşarma üçin öz gezeginde geteroskedastiklik bolmagy mümkin. Şonuň üçin Parkyň kriterisi beýleki testler bilen doldurylýar.

Gleýzeriň testi

Gleýzeriň testi öz manysy boýunça Parkyň testine meňzeşdir. Bu test gyşarmalaryň σ_i^2 disperisýalary bilen x_i üýtgeýän ululygyň bahalarynyň arasynda başga baglanyşyklaryň (mümkin, has gabat gelýän) seljermesi bilen Parkyň testini doldurýar. Bu usul boýunça gyşarmalaryň $|e_i|$ modullary bilen (σ_i^2 bilen jebis baglanyşykly bolan) x_i bahalaryň arasyndaky regressiýa baglanyşygy bahalandyrylýar. Seredilýän baglanyşyk şeýle deňleme bilen berilýär:

$$|e_i| = \alpha + \beta x_i^k + v_i \ . \tag{6.7}$$

k – nyň bahasyny üýtgedip (adatça k=...,–1; – 0,5; 0,5; 1,…), dürli regressiýalary gurup bolýar. Her bir anyk ýagdaýda β koeffisiýentiň statistiki ähmiýetliligi geteroskedastikligiň bardygyny aňladýar. Eger (6.7) regressiýalaryň birnäçesi üçin β koeffisiýent statistiki ähmiýetli bolsa, onda baglanyşygyň häsiýeti kesgitlenende adatça olaryň iň gowusyna salgylanylýar. Parkyň testinde bolşy ýaly Gleýzeriň testinde hem v_i gyşarmalar üçin gomoskedastiklik şertiň bozulmagy mümkin. Ýöne, köplenç ýagdaýlarda seredilen modeller geteroskedastikligi kesgitlemekligiň ýeterlik gowy modelleridir.

Goldfeldiň-Kwandtyň testi

Bu ýagdaýda hem $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_i)$ standart gyşarmalar x_i bahalara proporsional hasap edilýär: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^2, \ i = 1, 2, \ldots, \ n$. ε_i gyşarmalar normal paýlanyşa eýe we galyndylaryň awtokorrelýasiýasy ýok diýlip hasaplanýar. Goldfeldiň-Kwandtyň testi aşakdakylardan durýar:

1. Ähli n gözegçilikler x – iň ululygy boýunça tertipleşdirilýär.

2. Ähli tertipleşdirilen saýlama toplum k, $n-2k$, k tertipli üç sany bölek saýlama toplumlara bölünýär.

3. Birinji bölek saýlama toplum üçin (ilkinji k gözegçilikler) we üçünji bölek saýlama toplum üçin (ahyrky k gözegçilikler) aýratyn regressiýalar bahalandyrylýarlar. Eger gyşarmalaryň disperisýalarynyň x – iň bahalaryna proporsionallygy baradaky öňünden aýdylan tassyklama dogry bolsa, onda birinji bölek saýlama toplum boýunça alnan regressiýanyň dispersiýasy $(S_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i^2)$ üçünji bölek saýlama toplum

boýunça alnan regressiýanyň dispersiýasyndan $\left(S_3 = \sum_{i=n-k+1}^{n} e_i^2\right)$ düýpli kiçidir.

4. Degişli disperisýalary deňeşdirmek üçin aşakdaky F statistika gurulýar:

$$F = \frac{S_3/(k-m-1)}{S_1/(k-m-1)} = \frac{S_3}{S_1},$$

bu ýerde (k–m–1) – degişli saýlama dispersiýalary üçin erkinlik derejeleriň sany; m – regressiýa deňlemesindäki düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany. Tötän gyşarmalar barada öňden edilen tassyklamalar ýerine ýetende F statistika erkinlik derejeleriniň sanlary $v_1 = v_2 = (k–m–1)$ bolan Fişeriň paýlanyşyna eýedir.

5. Eger $F_{\text{gözegçilik}} = \frac{S_3}{S_1} > F_{\text{kritiki}} = F_{\alpha, v_1, v_2}$ bolsa, onda geteroskedastikligiň ýoklugy baradaky çaklama taşlanýar (α– ähmiýetlilik derejesi).

Esaslandyrylan çözüwleri kabul etmek üçin bölek saýlama toplumlaryň ölçegleri nähili bolmaly? Munuň üçin jübüt regressiýa üçin Goldfeld we Kwandt aşakdaky proporsiýany hödürleýär: $n = 30$, $k = 11$; $n = 60$, $k = 22$.

Köplük regressiýa üçin bu test adatça σ_i bilen has ýokary derejede baglanyşýan düşündiriji üýtgeýän ululyk üçin geçirilýär. k san (m+1) – den uly bolmaly. Eger X_j üýtgeýäniň saýlanyp alnyşyna ynam bolmasa, onda bu test düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň her biri üçin geçirilip bilner.

Bu test σ_i bilen düşündiriji üýtgeýäniň bahalarynyň arasynda ters proporsionallyk bar wagty hem geçirilip bilner. Fişeriň statistikasy $F = \frac{S_1}{S_3}$ görnüşde bolar.

§ 6.4. Geteroskedastiklik meselesini gowşatmagyň usullary

Geteroskedastiklik bahalandyrmalaryň netijeli dälligine (olar süýşmedik bahalandyrmalar bolsalar-da) getirýär. Bu modeliň hili barada esaslandyrylmadyk netijeleriň alynmagyna getirip biler. Şonuň üçin, geteroskedastikligiň barlygy anyklanylanda bu yetmezçiligi ýok etmek maksady bilen modeli özgertmeli.

6.1-nji mysal. Goý, düşündiriji X üýtgeýäniň artýan tertipde ýerleşişine bagly şertli maglumatlar berlen bolsun (6.1-nji tablisa).

6.1-nji tablisa

Geteroskedastikligi barlamak üçin başlangyç maglumatlar

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	6	8	11	9	15	12	15	22	20	27
X	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	23	26	36	22	34	29	36	34	48	40
X	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y	49	41	55	42	58	71	53	48	70	46

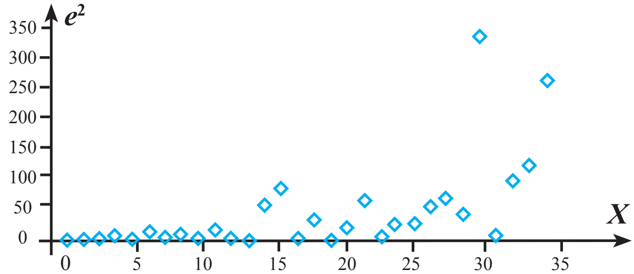
Ähli başlangyç maglumatlar boýunça gurlan regressiýa deňlemesi $\hat{y} = 3,8 + 1,92x$ görnüşde bolar. Geteroskedastikligi bahalandyrmak üçin Goldfeldiň-Kwandtyň testini ulanalyň. Ilkinji 11 sany maglumat boýunça gurlan regressiýa deňlemesi $\hat{y} = 3,6 + 1,95x$ görnüşde bolar. Galyndylaryň kwadratlarynyň jemi S_1=57,07 bolar. Ahyrky 11 sany maglumat boýunça gurlan regressiýa deňlemesi $\hat{y} = 15,7 + 1,45x$ görnüşde bolar, galyndylaryň kwadratlarynyň jemi S_3 = 924,40 bolar. F statistikany tapalyň:

$$F = \frac{924,40}{57,07} = 16,2\,.$$

Bu bolsa $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ ähmiýetlilik derejesi üçin tablisadan alynýan F_{kritiki} bahalardan uludyr. Diýmek, galyndylaryň geteroskedastikligi bar.

(6.1) mysalyň ähli maglumatlaryny ulanyp, galyndylaryň kwadratlaryny $e_i^2 = (y_i - 3,8 - 1,92x_i)^2$ tapalyň. Alnan netijeleri 6.3-nji suratda şekillendireliň.

Bu grafige seredip, galyndylaryň dispersiýasy X^2 ululyga proporsional diýip bolar.



6.3-nji surat. e² – yň düşündiriji üýtgeýäniň bahalaryna baglylygy

Başlangyç $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ regressiýa deňlemesini özgerdeliň. Täze $y_i^* = \dfrac{y_i}{x_i}$, $x_i^* = \dfrac{1}{x_i}$ üýtgeýänleri kesgitläp we

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^* \sum_{i=1}^{n} x_i^{*2} - \sum_{i=1}^{n} x_i^* \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i^*}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{*2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)^2} = 1,89;$$

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i^* - \sum_{i=1}^{n} x_i^* \sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{*2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)^2} = 4,1$$

koeffisiýentleri bahalandyryp, alarys: $\hat{y}_i^* = 4,10x_i^* + 1,89$. Başlangyç üýtgeýänlere geçip, $\hat{y} = 4,10 + 1,89x$ modeli alarys.

Goý, jübüt çyzykly regressiýa modelinde ε_i gyşarmalaryň dispersiýalary x_i bahalara proporsional bolsunlar. Ýagny $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma^2 x_i$, bu ýerde σ² – käbir näbelli, hemişelik ululyk. Onda $\lambda_i = \dfrac{1}{x_i}$ ýazyp bileris.

Bu ýagdaýda, eger jübüt çyzykly regressiýa deňlemesini $\sqrt{x_i}$ ululyga bölsek, umumylaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usuly adaty iň kiçi kwadratlar usulyna ekwiwalent bolar:

$$\frac{y_i}{\sqrt{x_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{x_i}} + \beta_1 \frac{x_i}{\sqrt{x_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_i}},$$

$$\frac{y_i}{\sqrt{x_i}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{x_i}} + \beta_1 \sqrt{x_i} + v_i, \tag{6.8}$$

$$y_i^* = \beta_0 x_{i1} + \beta_1 x_{i2} + v_i.$$

Bu ýerde $x_{i1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_i}}$; $x_{i2} = \sqrt{x_i}$.

Şeýlelik bilen, adaty iň kiçi kwadratlar usuly boýunça (6.8) deňlikdäki β_0, β_1 koeffisiýentleri bahalandyryp, soňra regressiýanyň başlangyç deňlemesine geçilýär.

Ýokarda beýan edilen özgertmeleri ulanmak üçin gyşarmalaryň σ_i^2 dispersiýalarynyň hakyky bahalary barada bilimler ýa-da bu dispersiýalaryň nähili boljakdygy baradaky öňünden aýdylan pikirler ähmiýetlidir.

Köp ýagdaýlarda gyşarmalaryň dispersiýalary regressiýa deňlemesine girizilen düşündiriji üýtgeýän ululyklara däl-de, modele goşulmadyk, ýöne, öwrenilýän baglanyşykda düýpli orun tutýan üýtgeýänlere baglydyr. Bu ýagdaýda bu üýtgeýänler modele goşulmalydyrlar. Käbir ýagdaýlarda geteroskedastikligi ýok etmek üçin modeliň spesifikasiýasyny üýtgetmek zerurdyr (meselem, çyzykly modeli log – çyzykly modele, multiplikatiw modeli additiw modele we ş.m.) .

Amalyýetde geteroskedastikligi kesgitlemegiň birnäçe usullaryny we geteroskedastikligi korrektirlemegiň (dispersiýany durnuklaşdyrýan özgertmeler) birnäçe usullaryny ulanmak bolar.

Eger regressiýa deňlemesinde birnäçe düşündiriji üýtgeýän ululyklar bar bolsa, onda anyk X_j düşündiriji üýtgeýän ululyga derek $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_mX_m$ (düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň çyzykly kombinasiýasy) ulanylýar. Bu ýagdaýda şeýle regressiýa alynýar:

$$\frac{y_i}{\sqrt{\hat{y}_i}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{\hat{y}_i}} + \beta_1 \frac{x_{i1}}{\sqrt{\hat{y}_i}} + \ldots + \beta_m \frac{x_{im}}{\sqrt{\hat{y}_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\hat{y}_i}};$$

$$y_i^* = \beta_o z_i + \beta_1 x_{i1}^* + \beta_2 x_{i2}^* + \cdots + \beta_m x_{im}^* + v_i .$$

Käwagt ähli düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň içinden iň amatlysy saýlanyp alynýar.

Soraglar:

1. Geteroskedastiklik ýagdaýynda tötän gyşarmalaryň wektorynyň kowariasiýa matrisasy nähili görnüşde bolar?
2.Geteroskedastiklik bar ýagdaýynda çyzykly modeliň parametrleriniň bahalandyrmalarynyň süýşmeýänlik, netijelilik we ygtybarlylyk häsiýetleri saklanýarmy?
3. Eger galyndylaryň dispersiýasy düşündiriji üýtgeýäne proporsional bolsa, onda jübüt çyzykly regressiýa deňlemesindäki üýtgeýänler nähili özgerdilýär?
4.Eger galyndylaryň dispersiýasy düşündiriji üýtgeýäniň kwadratyna proporsional bolsa, jübüt çyzykly regressiýa deňlemesindäki üýtgeýänler nähili özgerdilýär?
5. Goldfeldiň-Kwandtyň testi nähili tertipde geçirilýär?
6. Umumylaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usuly haçan ulanylýar?

VII bap

MULTIKOLLINEARLYK

§7.1. Multikollinearlygyň netijeleri we umumy düşünjeler

Iň kiçi kwadratlar (IKK) usuly boýunça köplük çyzykly regressiýa modeller gurlanda esasy meseleleriň biri iki ýa-da birnäçe düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň çyzykly özarabaglylygydyr-multikollinearlygydyr. Eger düşündiriji üýtgeýän ululyklar berk funksional baglanyşykda bolsalar, onda **kämil multikollinearlyk** bar diýilýär. Kämil multikollinearlyk ýagdaýynda $X^T X$ matrisa aýratyn matrisa bolýar, ýagny onuň kesgitleýjisi nola deňdir. Diýmek, bu matrisanyň $(X^T X)^{-1}$ ters matrisasy ýokdur. Bu ters matrisa iň kiçi kwadratlar usulynyň esasy gatnaşyklarynda bar.

Kämil multikollinearlyk hakyky ýagdaýda ýüze çykmaýar. Hakyky ýagdaýda düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň arasynda ýeterlik derejede güýçli korrelýasiya baglanyşygy bar (berk funksional baglanyşyk ýok). Bu baglanyşyga **kämil däl multikollinearlyk** diýilýär. Multikollinearlyk düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň bagly üýtgeýän ululyga edýän täsirini bölmekligi (haýsy düşündiriji ululygyň bagly ululyga nähili täsir edýändigini aýyl-saýyl etmekligi) kynlaşdyrýar we regressiýanyň koeffisiýentleriniň bahalandyrmalary ynamsyz bolýar.

Düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky berk däl çyzykly baglanyşyk hökman kanagatlanarsyz bahalandyrmalary bermeýär. Eger gözegçilikleriň sany we düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň saýlama dispersiýalary uly bolsa, tötän agzanyň dispersiýalary kiçi bolsa, onda netijede gowy bahalandyrmalary alyp bolýar. Eger ähli bagly däl üýtgeýän ululyklar absolýut korrelirlenmedik bolmasalar, onda islendik regressiýanyň bahalandyrmasy multikollinearlykdan zyýan çekýär. Eger şeýle zyýan çekmeler düýpli bolsa, onda multikollinearlyk

7. sargyt № 2842

meselesine seredilýär. Bu mesele wagt hatarlarynyň regressiýalary üçin adaty meseledir. Eger iki ýa-da ikiden köp düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň açyk ýüze çykan wagt trendi bar bolsa, onda olar jebis korrelirlenendir. Bu bolsa multikollinearlyga getirip biler.

Multikollinearlyk aşakdaky ýaramaz netijelere getirýär:

1. Bahalandyrmagyň takyklygy peselýär. Dürli düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň özara täsirlerini aýyl-saýyl etmek mümkinçiliginiň ýoklugy üçin bahalandyrmak has kynlaşýar. Takyklygyň peselmegi üç ýagdaýda ýüze çykýar. Deňlemäniň parametrleriniň käbir anyk bahalandyrmalarynyň dispersiýalary (standart ýalňyşlyklar) örän uly bolýarlar. Olar biri-biri bilen güýçli korrelirlenen bolýarlar, şonuň üçin, kesgitlenýän ululyklaryň hakyky bahalaryny tapmaklyk kynlaşýar. Aralyklaýyn bahalandyrmalaryň takyklygy peselip, olar giňelýär.

2. Ekonometriki seljerme geçirýän adamlar wagtal-wagtal şol ýa-da beýleki üýtgeýänleriň seljermä degişli edilmeginiň korrekt dälligi bilen gabat gelýärler. Sebäbi, bu üýtgeýänlere degişli koeffisiýentler ähmiýetsiz bolýarlar.

3. Iň kiçi kwadratlar usuly boýunça tapylan bahalandyrmalar we olaryň standart ýalňyşlyklary durnukly bolmaýarlar, olar maglumatlaryň üýtgemesine örän duýgur bolýarlar. Örän az mykdardaky täze maglumatlaryň goşulmagy käbir koeffisiýentleriň bahalarynda güýçli süýşmä getirip biler.

4. Her bir düşündiriji üýtgeýän ululygyň bagly ululygyň regressiýa deňlemesi bilen düşündirilýän dispersiýasyna goşandyny kesgitlemek kynlaşýar.

5. Regressiýa koeffisiýentiniň alamatynyň nädogry alynmagy mümkin.

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_m X_m$$

regressiýa deňlemesindäki X_j üýtgeýän ululygyň b_j koeffisiýenti X_j düşündiriji üýtgeýän ululyk bir birlik artanda (beýleki düşündiriji üýtgeýän ululyklar berkidilen) Y bagly ululygyň näçe birlik üýtgejekdigini görkezýär. Multikollinearlyk bar ýagdaýynda regressiýanyň koeffisiýentleriniň şu manysy ýitýär.

§7.2. Multikollinearlygyň kesgitlenilişi

Multikollinearlygyň bardygyny (ýokdugyny) kesgitlemek üçin takyk mukdar kriteriler ýok. Şeýle-de bolsa, multikollinearlygy ýüze çykarmak boýunça käbir teklipler bar.

1. Ilki bilen korrelýasiýanyň

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & r_{y3} & \cdots & r_{ym} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\ r_{3y} & r_{31} & r_{32} & 1 & \cdots & r_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{my} & r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

jübüt koeffisiýentler matrisasy, has takygy, bu matrisanyň düşündiriji üýtgeýän ululyklara degişli

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \cdots & r_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

bölegi seljerilýär.

Bu ýerde $r_{ij} - X_i, X_j$ üýtgeýänleriň arasyndaky jübüt korrelýasiýa koeffisiýenti, $r_{yj} - Y$ we X_j üýtgeýänleriň arasyndaky jübüt korrelýasiýa koeffisiýenti.

Bu koeffisiýentler aşakdaky formulalar boýunça tapylýar.

$$r_{jy} = r_{yj} = r_{x_j y} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_{kj} y_k - \sum_{k=1}^{n} x_{kj} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sqrt{\left[n\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{kj}\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2\right]}},$$

$$r_{ij} = r_{ji} = r_{x_j x_i} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{kj}}{\sqrt{\left[n\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{kj}\right)^2\right]}},$$

bu ýerde $k = 1,2,\ldots, n$ – gözegçiligiň tertibi.

r_{ij} koeffisiýentleriň moduly boýunça 0,75 – 0,80 ululykdan uly bolmaklygy multikollinearlygyň bardygyna şaýatlyk edýär.

2. $X^T X$ matrisanyň kesgitleýjisi nola ýakyn bolsa, onda multikollinearlyk bar diýlip hasaplanýar.

3. R^2 determinasiýa koeffisiýenti ýeterlik uly, ýöne, regressiýanyň koeffisiýentleriniň käbirleri statistiki ähmiýetsiz, ýagny kiçi t statistika eýe.

4. Ýokary hususy korrelýasiýa koeffisiýentler multikollinearlygyň bardygyny aňladýar. Hususy korrelýasiýa koeffisiýentleri iki üýtgeýän ululygyň arasyndaky çyzykly baglanyşygyň (bu iki ululyga galan bagly däl ululyklaryň edýän täsiri hasaba alynmaýar) güýjüni kesgitleýär. X_i, X_j $(1 \le i < j \le m)$ üýtgeýän ululyklar beýleki $(m - 2)$ sany düşündiriji ululyklaryň täsirinden arassalanan. Saýlama hususy korrelýasiýa koeffisiýenti

$$r_{ij \cdot 12 \ldots (i-1)(i+1) \ldots (j-1)(j+1) \ldots m}$$

diýip belgilenýär. Bu koeffisiýenti hasaplamagyň formulasyny getireliň. Goý, $\mathcal{R}$ – R matrisanyň ters matrisasy bolsun:

$$\mathcal{R} = R^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \cdots & \mathcal{R}_{1m} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \cdots & \mathcal{R}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{R}_{m1} & \mathcal{R}_{m2} & \cdots & \mathcal{R}_{mm} \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

onda

$$r_{ij \cdot 12 \ldots (i-1)(i+1) \ldots (j-1)(j+1) \ldots m} = -\frac{\mathcal{R}_{ij}}{\sqrt{\mathcal{R}_{ii} \cdot \mathcal{R}_{jj}}}. \tag{7.4}$$

Saýlama hususy korrelýasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligi barlananda we onuň üçin ynamly aralyklar gurlanda, jübüt korrelýasiýa koeffisiýenti üçin teklipden peýdalanmaly, ýöne, ähli formulalarda saýlamanyň göwrümini $(n - k)$ deň diýip almaly. Bu ýerde k – hususy korrelýasiýa koeffisiýentleri hasaplananda täsirleri hasaba alynmaýan üýtgeýänleriň sany.

5. Multikollinearlyk meselesini doly öwrenmeklik şeýle amala aşyrylýar.

Her bir X_j düşündiriji üýtgeýän ululyk üçin galan $X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_m$ düşündiriji üýtgeýän ululyklara bagly regressiýasynyň deňlemeleri gurulýar. R_j^2 determinasiýa koeffisiýenti hasaplanýar we olaryň statistiki ähmiýetliligi F statistikanyň esasynda barlanýar:

$$F_j = \frac{R_j^2}{1 - R_j^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1},$$

bu ýerde n – gözegçilikleriň sany, m – regressiýanyň ilkibaşdaky deňlemesindäki düşündiriji üýtgeýänleriň sany. F statistika erkinlik derejeleriniň sanlary $\nu_1 = m - 1$, $\nu_2 = n - m$ bolan Fişeriň paýlanyşyna eýe. Eger R_j^2 koeffisiýent statistiki ähmiýetsiz bolsa, onda X_j üýtgeýän ululyk beýleki üýtgeýänleriň çyzykly kombinasiýasy bolmaýar, ony regressiýa deňlemesinde galdyryp bolýar. Eger R_j^2 statistiki ähmiýetli bolsa, onda X_j ululyk beýleki düşündiriji üýtgeýänlere düýpli baglydyr. Ýagny multikollinearlyk bardyr.

Modeliň käbir daşky nyşanlary multikollinearlygyň bardygy barada käbir maglumaty berýär:

– Koeffisiýentleriň käbir bahalandyrmalary ykdysady nazaryýetiň nukdaý nazaryndan nädogry alamatly bolýarlar ýa-da esaslandyrylmadyk uly bahalary alýarlar;

– Başlangyç maglumatlaryň uly bolmadyk üýtgemesi (goşulmagy ýa-da taşlanmagy) koeffisiýentleriň bahalandyrmalarynyň düýpli üýtgemesine getirýär;

– Köp koeffisiýentleriň hakykatda noldan tapawutly bahalary bar ýagdaýynda, model umuman ähmiýetli bolan ýagdaýda hem koeffisiýentleriň bahalandyrmalarynyň köpüsi ýa-da hat-da ählisi noldan statistiki ähmiýetsiz tapawutlanýarlar.

§7.3. Multikollinearlygy aýyrmagyň usullary

Köplenç ýagdaýlarda multikollinearlyk düýpli mesele bolup durmaýar. Multikollinearlygy ýüze çykarmak we aýyrmak ykdysady desgalary öwrenmekligiň maksadyna baglydyr.

Eger modeliň esasy meselesi bagly üýtgeýän ululygyň geljekdäki bahalarynyň çaklaýşy bolsa, onda R^2 determinasiýa koeffisiýentiň ýeterlik uly bahasynda ($R^2 \geq 0{,}9$) multikollinearlygyň barlygy adatça modeliň çaklaýyş häsiýetine täsir etmeýär (eger korrelirlenýän üýtgeýänleriň arasynda bar bolan gatnaşyk üýtgemese).

Eger düşündiriji üýtgeýänleriň her biriniň bagly üýtgeýän ululyga edýän täsiriniň derejesini kesgitlemek zerur bolsa,onda standart ýalňyşlyklaryň artmagyna getirýän multikollinearlyk üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky hakyky baglanyşygy bozar. Bu ýagdaýda multikollinearlyk düýpli meseledir. Multikollinearlygy ýok etmekligiň islendik ýagdaý üçin ýaramly usuly ýok. Sebäbi multikollinearlygyň sebäpleri we netijeleri birbelgili däl we köplenç saýlamanyň netijelerine bagly bolýar.

a) Modelden üýtgeýäni (üýtgeýänleri) aýyrmak

Multikollinearlygy ýok etmekligiň sada usuly modelden bir ýa-da birnäçe korrelirlenýän üýtgeýän ululyklary aýyrmakdyr. Bu usul ulanylanda hüşgär bolmaly. Şeýle ýagdaýlarda spesifikasiýalaşdyrmagyň ýalňyşlyklary mümkindir. Şonuň üçin amaly ekonometriki modellerden multikollinearlyk düýpli mesele bolýança düşündiriji üýtgeýänleri aýyrmaly däl.

b) Goşmaça maglumatlary ýa-da täze saýlama toplumy almak

Multikollinearlygyň saýlama topluma gönüden-göni bagly bolýanlygy üçin, başga saýlama topluma geçilende multikollinearlyk bolman biler ýa-da ol düýpli mesele bolmaz. Käwagt multikollinearlygy azaltmak üçin, saýlama toplumyň göwrümini artdyrmak ýeterlik bolýar. Meselem, ýyllyk maglumatlardan çärýekleýin maglumatlara geçmeli. Maglumatlaryň mukdarynyň artmagy regressiýa koeffisiýentleriniň dispersiýasyny kiçeldýär we bu koeffisiýentleriň statistiki ähmiýetliligini artdyrýar. Ýöne, täze saýlama toplumyň alynmagy ýa-da başdaky saýlama toplumyň giňeldilmegi hemme wagt mümkin däl, ýa-da düýpli çykdajylar bilen baglanyşyklydyr. Mundan başga-da, beýle çemeleşmek awtokorrelýasiýany güýçlendirip biler. Bu meseleler beýle usulyň ulanylmak mümkinçiligini çäklendirýär.

ç) Modeliň spesifikasiýasynyň üýtgedilmegi

Köplenç ýagdaýlarda multikollinearlyk meselesi modeliň spesifikasiýasynyň üýtgedilmegi bilen çözülip bilner. Modeliň formasy üýtgeýär ýa-da başlangyç modelde alynmadyk, ýöne, bagly üýtgeýän ululyga düýpli täsir edýän düşündiriji üýtgeýänler goşulýarlar. Eger bu usul esaslandyrylsa, onda onuň ulanylmagy gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemini kiçeldýär, regressiýanyň standart ýalňyşlygyny azaldýar. Bu bolsa koeffisiýentleriň standart ýalňyşlyklarynyň azalmagyna getirýär.

d) Käbir parametrler baradaky deslapky maglumatlary peýdalanmak

Käwagt köplük regressiýa modeli gurlanda deslapky maglumatlary peýdalanmak bolar. Hususy halda regressiýanyň käbir koeffisiýentleriniň öňden belli bahalaryny peýdalanmak bolar. Koeffisiýentleriň haýsy hem bolsa bir deslapky model üçin tapylan bahalaryny berlen pursatda gurulýan model üçin ulanmak bolar.

e) Has esasy düşündiriji üýtgeýänleriň seçilip alnyşy. Elementleriň yzygiderli birikdirilişi

Az sanly düşündiriji üýtgeýänlere geçmek güýçli özarabaglanyşan nyşanlar tarapyndan döreýän maglumatlaryň gaýtalanmagyny azaldyp biler. Düşündiriji üýtgeýänleriň multikollinearlygy bar ýagdaýynda hut şeýle ýagdaý bilen iş salyşýarys.

Goý, $R_{y\cdot X} = R_{y\cdot(X_1,X_2,\ldots,X_m)}$ – bagly Y ululyk bilen düşündiriji (X_1, $X_2,\ldots, X_m$) üýtgeýänleriň toplumynyň arasyndaky köplük korrelýasiýa koeffisiýenti bolsun. Bu koeffisiýent Y bagly ululyk bilen regressiýanyň çyzykly

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_mX_m$$

deňlemesiniň arasyndaky jübüt korrelýasiýa koeffisiýenti ýaly kesgitlenýär.

$\hat{\mathcal{R}} = \hat{R}^{-1}$ ýagdaý ýerine ýetýän bolsun:

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{R}}_{yy} & \hat{\mathcal{R}}_{y1} & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{ym} \\ \hat{\mathcal{R}}_{1y} & \hat{\mathcal{R}}_{11} & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathcal{R}}_{my} & \hat{\mathcal{R}}_{m1} & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{mm} \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

onda $R_{y \cdot X} = R_{y \cdot (X_1, X_2, \dots, X_m)}$ koeffisiýentiň kwadraty aşakdaky formula bilen hasaplanyp biler:

$$R^2_{y \cdot X} = 1 - \frac{1}{\hat{\mathcal{R}}_{yy}} \cdot \qquad (7.6)$$

$R^2_{y \cdot X}$ determinasiýa koeffisiýentiň süýşmezlige düzedilen $R^{*2}_{y \cdot X}$ bahalandyrmasy şeýle görnüşde bolar:

$$R^{*2}_{y \cdot X} \approx 1 - (1 - R^2_{y \cdot X}) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} \qquad (7.7)$$

(eger (7.7) formula boýunça otrisatel san alynsa, onda $R^{*2}_{y \cdot X} = 0$ bolar). ${R^2}_{y \cdot (X_1, X_2, \cdots, X_m)}$ üçin aşaky (minimal) ynamly serhet şeýle tapylýar:

$$R^2_{\min}(m) = R^{*2}_{y \cdot (X_1, \cdots, X_m)} - 2\sqrt{\frac{2m(n-m-1)}{(n-1)(n^2-1)}}\left(1 - {R^2}_{y \cdot (X_1, X_2, \dots, X_m)}\right). \qquad (7.8)$$

Amaly işde haýsy düşündiriji üýtgeýänleri modele goşmalydygy baradaky mesele çözülende elementleri yzygiderli birikdirmek usuly ulanylýar.

Birinji ädim ($k = 1$). Maglumaty has köp saklaýan düşündiriji üýtgeýän ululyk saýlanyp alynýar. Bu üýtgeýän ululyk ${R^2}_{y \cdot (X_j)}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ ululygy maksimallaşdyrýar. Şunlukda ${R^2}_{y \cdot (X_j)}$ adaty jübüt korrelýasiýa koeffisiýentiň kwadraty bilen $\left({r^2}_{y \cdot (X_j)}\right)$ gabat gelýär. Goý,

$$\max_{1 \le j \le m} {R^2}_{y \cdot (X_j)} = {R^2}_{y \cdot (x_p)}$$

bolsun. Onda x_p üýtgeýän ululyk has köp maglumatly ululyk bolar. Soňra, süýşmezlige düzedilen ${R^{*2}}_{y \cdot (x_p)}(m = 1)$ koeffisiýent we onuň $R^2_{\min}(1)$ aşaky ynamly serhedi tapylýar.

Ikinji ädim ($k = 2$). Düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň mümkin bolan (x_p, x_j) $(j = 1, 2, \dots, m;\ j \ne p)$ jübütleriniň arasyndan ${R^2}_{y \cdot (x_p, x_j)}$ ululygy maksimallaşdyrýan jübüti saýlamaly. Goý,

$$\max_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne p}} {R^2}_{y \cdot (x_p, x_j)} = {R^2}_{y \cdot (x_p, x_q)}$$

bolsun. Onda has maglumatly jübüt (x_p, x_q) bolar. Soňra, süýşmezlige düzedilen ${R^2}_{y \cdot (x_p, x_q)}(m = 2)$ koeffisiýent we onuň $R^2_{\min}(2)$ aşaky ynamly serhedi hasaplanýar.

Bu ýagdaý ($k + 1$) ädimde

$$R^2_{\min}(k+1) < R^2_{\min}(k) \tag{7.9}$$

şert ýerine ýetýänçä dowam etdirilýär. Onda modele ilkinji k ädimde has maglumatly üýtgeýän ululyklar goşulýar.

Hasaplamalarda (7.7) we (7.8) formulalary m – iň ýerine degişli k ädimiň tertibiniň bahasyny goýup, ulanyp geçirýärler.

Bu usul multikollinearlykdan dynmaklygy kepillendirmeýär. Multikollinearlygy aýyrmagyň başga usullary hem ulanylýar.

7.1-nji mysal. Aşakdaky şertli maglumatlar berlen (7.1-nji tablisa).

7.1-nji tablisa

Üýtgeýänleri yzygiderli goşmak usuly üçin maglumatlar

x_1	x_2	x_3	y
1	1,5	0,7	12
2	2,5	1,2	20
3	1	1,4	15
4	5,5	1,9	41
5	3	2,5	33
6	3	3,1	35
7	2,8	3,5	38
8	0,5	4	28
9	4	3,8	47
10	2	5,3	40

Düşündiriji üýtgeýänleriň her biriniň aýratynlykda bagly Y ululyga edýän täsirine seredeliň. Jübüt korrelýasiýa koeffisiýentleri hasaplap, $R^2_{y\cdot x_1} = r^2_{y\cdot x_1} = 0,602$ koeffisiýentiň iň uludygyny alarys. Onda:

$$R^{*2}_{y\cdot x_1} = 1 - (1 - 0,602)\cdot\frac{9}{8} = 0,552\,,$$

$$R^2_{\min}(1) = 0,552 - 2\sqrt{\frac{2\cdot 1\cdot 8}{9\cdot 99}}(1 - 0,602) = 0,445\,.$$

Üýtgeýänleriň (x_1, x_2) we (x_1, x_3) jübütleriniň bagly üýtgeýän ululyga edýän täsirine seredeliň. Ilki bilen (x_1, x_2) jübütiň täsirine seredeliň.

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,7760 & 0,6672 \\ 0,7760 & 1 & 0,05517 \\ 0,6672 & 0,05517 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 147,9 & -109,7 & -92,6 \\ -109,7 & 82,31 & 68,6 \\ -92,6 & 68,6 & 59,0 \end{bmatrix},$$

$$R^2_{y\cdot(x_1,\,x_2)} = 1 - \frac{1}{147,6} = 0,9932\cdot$$

Indi (x_1, x_3) jübütiň täsirine seredeliň:

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y3} \\ r_{y1} & 1 & r_{13} \\ r_{3y} & r_{31} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,776 & 0,7198 \\ 0,776 & 1 & 0,9834 \\ 0,7198 & 0,9834 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 2,936 & -6,084 & 3,870 \\ -6,084 & 42,98 & -37,89 \\ 3,87 & -37,89 & 35,47 \end{bmatrix},$$

$$R^2_{y.(x_1,x_3)} = 1 - \frac{1}{2,936} = 0,659\,.$$

Diýmek, (x_1, x_2) jübüti saýlamaly.

$$R^{*2}{}_{y\cdot(x_1,\,x_2)} = 1 - (1 - 0,9932)\cdot\frac{9}{7} = 0,9913,$$

$$R^2{}_{\min}(2) = 0,9913 - 2\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot(10-2-1)}{(10-1)(100-1)}}(1-0,9932) =$$
$$= 0,988889\,.$$

Bagly ululyga täsir edýän üç üýtgeýänlere $((x_1, x_2, x_3)$ üçlüge) seredeliň.

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & r_{y3} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{3y} & r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,7760 & 0,6672 & 0,7198 \\ 0,7760 & 1 & 0,05517 & 0,9834 \\ 0,6672 & 0,05517 & 1 & -0,02045 \\ 0,7198 & 0,9834 & -0,02045 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 157,7 & -97,6 & -100,2 & -19,59 \\ -97,6 & 97,09 & 59,27 & -24,02 \\ -100,2 & 59,27 & 64,92 & 15,19 \\ -19,59 & -24,02 & 15,19 & 39,03 \end{pmatrix},$$

$$R^2_{y\cdot(x_1,x_2,x_3)} = 1 - \frac{1}{157,7} = 0,9937,$$

$$R^{*2}_{y\cdot(x_1,x_2,x_3)} = 0,9905; \qquad R^2_{\min}(3) = 0,9879.$$

$$R^2{}_{\min}(3) = 0,9879 < R^2{}_{\min}(2) = 0,988889 > R^2{}_{\min}(1) = 0,445.$$

Diýmek, regressiýa deňlemesine iki sany düşündiriji üýtgeýänleri goşmaly. Nazary deňleme şeýle görnüşde bolar:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

f) **Kürekleme usuly** («rij-regressiýa»).

Multikollinearlygy aýyrmagyň bu usulyny A. E. Hoerl 1962-nji ýylda teklip etdi. Bu usul ($X^T X$) matrisa aýratyn matrisa ýakyn bolanda ulanylýar. ($X^T X$) matrisanyň diagonal elementlerine käbir uly bolmadyk sanlary (0,1 – den 0,4 – e çenli) goşýarlar. Netijede, deňlemäniň parametrleriniň süýşen bahalandyrmalary alynýar. Ýöne, şeýle bahalandyrmalaryň standart ýalňyşlyklary multikollinearlyk bar bolanda adaty iň kiçi kwadratlar usulynyň berýän ýalňyşlyklaryndan kiçi bolýar.

7.2-nji mysal. Başlangyç maglumatlar 7.2-nji tablisada berlen. Düşündiriji üýtgeýänleriň korrelýasiýa koeffisiýenti

$$r_{x_1,x_2} = 0,999.$$

Diýmek, güýçli multikollinearlyk bar.

7.2-nji tablisa

x_1	x_2	y
1	1,4	7
2	3,1	12
7	10,3	32

7.2-nji tablisanyň dowamy

4	6	20
7	10,6	32
5	7,6	25
5	7,4	224
3	4,4	15
4	5,8	20
8	11,9	37

$(X^T X)$ matrisanyň diagonal elementlerine 0,4–i goşýarys:

$$(X^T X) = \begin{pmatrix} 10,4 & 46 & 68,5 \\ 46 & 258,4 & 384,5 \\ 68,5 & 384,5 & 573,55 \end{pmatrix}.$$

Onda $\hat{y} = 2,63 + 1,37x_1 + 1,95x_2$ deňlemäni alarys.

Ters matrisanyň diagonal elementleri düýpli kiçelýär we $z_{00} = 0,45264$, $z_{11} = 1,57796$, $z_{22} = 0,70842$ bahalary alýar. Bu bolsa koeffisiýentleriň standart ýalňyşlyklaryny kiçeldýär.

Soraglar:

1. Multikollinearlyk näme?
2. Multikollinearlygyň bardygyna nähili görkezijiler şaýatlyk edýär?
3. Kämil multikollinearlyk ýagdaýynda $X^T \times X$ matrisa nähili matrisa bolar?
4. Multikollinearlyk bar ýagdaýynda düşündiriji üýtgeýänleriň koeffisiýentleri barada näme aýdyp bolar?
5. Korrelýasiýa koeffisiýenti nämäni görkezýär?
6. Hususy korrelýasiýa koeffisiýenti nämäni görkezýär?
7. X_1, X_2 düşündiriji üýtgeýänli çyzykly regressiýa modeli üçin $\det(R) = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1$ şert nämäni aňladýar?
8. Iki düşündiriji üýtgeýänli çyzykly regressiýa modeli üçin $\det(R) = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix} = 0$ şert nämäni aňladýar?

VIII bap

REGRESSIÝA MODELLERDÄKI EMELI ÜÝTGEÝÄNLER

§8.1. Bir emeli üýtgeýänli model

Regressiýa modellerde düşündiriji üýtgeýänler hökmünde köplenç diňe bir sanlar bilen kesgitlenýän mukdar görkezýän üýtgeýänleri ulanmak bilen çäklenmän, eýsem hil görkezýän üýtgeýänler hem ulanylýar. Mysal üçin, käbir nygmata (haryda ýa-da hyzmata) bolan isleg bu nygmatyň bahasy bilen, bu nygmaty çalşyp bilýän goşmaça nygmatlaryň bahasy bilen ýa-da ulanyjylaryň girdejileri we ş.m. (bu görkezijiler mukdar taýdan kesgitlenendirler) bilen kesgitlenip bilner. Ýöne, bu isleg ulanyjylaryň tagam duýujylygyna, olaryň umytlaryna, milli we dini aýratynlyklaryna we ş.m. bagly bolup biler. Bu görkezijileri bolsa san taýdan häsiýetlendirip bolmaz. Şonuň üçin hem, bu görnüşli görkezijileriň derňelýän üýtgeýäne nähili täsiriniň bardygyny modellerde görkezmek meselesi ýüze çykýar. Adatça, modellerde hil faktorynyň täsiri hil faktorynyň iki sany özara gapma-garşylygyny kesgitleýän bir emeli (fiktiw) üýtgeýäniň üsti bilen aňladylýar. Mysal üçin, «faktor işleýär» – «faktor işlemeýär», «walýutanyň kursy berkidilen» – «walýutanyň kursy üýtgäp durýan», «tomus döwri» – «gyş döwri» we ş.m. Bu ýagdaýlarda emeli üýtgeýän ululygy ikileýin görnüşde aşakdaky ýaly aňladyp bolar:

$$D = \begin{cases} 0, \textit{ faktor işlemeýär,} \\ 1, \textit{ faktor işleýär.} \end{cases}$$

Mysal üçin, $D = 0$ – eger-de ulanyjynyň ýokary bilimi ýok bolsa, $D = 1$ – ulanyjynyň ýokary bilimi bar bolsa; $D = 0$ – jemgyýet puluň hümmetsizlenmesine garaşýar, $D = 1$ – jemgyýetde puluň hümmetsizlenmesi bolmaz.

Bu ýagdaýda D ululuga emeli (binar) üýtgeýän ululyk diýilýär.

Şeýlelikde, regressiýaly seljermede diňe mukdar düşündiriji üýtgeýänleri (X bilen belgilenýär) bolan modellerden başga-da diňe hil düşündiriji üýtgeýänleri bolan modellere hem-de ol we beýleki ýagdaýlaryň ikisiniňde bir wagtda seredilýän modelleri bar.

Diňe hil düşündiriji üýtgeýänleri bolan regressiýa modelleri ANOVA–modeller ýa-da dispersiýaly seljermäniň modelleri diýlip atlandyrylýar. Mysal üçin, goý, Y – başlangyç zähmet haky bolsun we goý,

$$D = \begin{cases} 0, & \text{eger dalaşgäriň ýokary bilimi ýok bolsa,} \\ 1, & \text{eger dalaşgäriň ýokary bilimi bar bolsa.} \end{cases}$$

Bu ýagdaýda model jübüt regressiýanyň kömegi bilen aşakdaky ýaly aňladylyp bilner:

$$Y = \beta_0 + \gamma D + \varepsilon. \tag{8.1}$$

Bu ýerde β_0 – ýokary bilimsiz dalaşgäriň ortaça başlangyç zähmet hakyny kesgitleýän bolsa, γ – ýokary bilimli we ýokary bilimsiz dalaşgärleriň ortaça zähmet haklarynyň tapawudyny kesgitleýän koeffisiýentdir. γ – koeffisiýentiň statistiki ähmiýetliligini t statistikanyň kömegi bilen ýa-da bu koeffisiýentiň R^2 determinasiýasyny F statistikanyň kömegi bilen barlap, dalaşgäriň ýokary biliminiň bar bolmagynyň başlangyç zähmet hakyna täsir edýändigini ýa-da täsir etmeýändigini kesgitläp bolýar.

ANOVA – modelleri bölek –hemişelik funksiýalary kesgitleýär. Bu modeller ykdysadyýetde örän seýrekdir. Bulara görä mukdary kesgitleýän, şeýle-de, hili kesgitleýän üýtgeýänleri bolan modeller has köp ulanylýar.

Düşündirijii üýtgeýänleri mukdary we hili aňladýan, häsiýetlendirýän modellere ANCOVA – modeller (kowariasiýaly seljermäniň modelleri) diýilýär.

Ilki bilen bir mukdar üýtgeýänli we bir hil üýtgeýänli iki alternatiw ýagdaýy häsiýetlendirýän ýönekeý ANCOVA – modele seredeliň:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma D + \varepsilon. \tag{8.2}$$

Goý, bu ýerde Y – işgäriň zähmet haky, X – işgäriň iş stažy, D – işgäriň jynsy bolsun, ýagny:

$$D = \begin{cases} 0, & eger\ işgär\ aýal\ bolsa, \\ 1, & eger\ işgär\ erkek\ bolsa. \end{cases}$$

Onda x stažly işgäriň garaşylýan zähmet haky aşakdaky ýaly bolar:

$$M\,(Y\backslash x, D = 0) = \beta_0 + \beta_1 x \ aýallar\ üçin,$$

$$M\,(Y\backslash x, D = 1) = \beta_0 + \beta_1 x + \gamma \ erkekler\ üçin.$$

Görnüşi ýaly, zähmet haky staža bagly çyzykly funksiýa bolar. Şunlukda, aýallaryň we erkekleriň zähmet haklary şol bir proporsionallyk β_1 koeffisiýentine görä üýtgäp bilerler. Azat agzalar bolsa γ ululyga tapawutlanarlar.

β_0 we $\beta_0 + \gamma$ koeffisiýentleriň statistiki ähmiýetliligini t statistikanyň kömegi bilen barlap, jyns boýunça kemsitmäniň barlygyny ýa-da ýoklugyny kesgitläp bolar. Eger-de bu koeffisiýentler statistiki ähmiýetli bolsalar, onda jyns boýunça kemsitmeler bar: Eger $\gamma > 0$ bolsa, onda erkekleriň haýryna; $\gamma < 0$ bolsa, onda aýallaryň haýryna.

Seredýän modelimizde bir emeli üýtgeýäniň üsti bilen işgäriň jynsyny kesgitleýän iki alternatiw ýagdaý hem aňladylandyr.

Düzgün: Eger hili aňladýan üýtgeýän k alternatiw bahalary alýan bolsa, onda modelde $k - 1$ sany emeli üýtgeýän ulanmaly.

Eger-de şu düzgün ulanylmasa, onda derňeýji modelleşdirmede kämil multikollinearlyk ýagdaýyna ýa-da emeli üýtgeýäniň pirimine düşýär.

Emeli üýtgeýäniň bahasyny garşylykly ýagdaýa hem üýtgedip bolar. Bu ýagdaýda modeliň manysy üýtgemeýär. Mysal üçin, modelde şeýle alyp bolar:

$$D = \begin{cases} 1, & eger\ işgär\ aýal\ bolsa, \\ 0, & eger\ işgär\ erkek\ bolsa. \end{cases}$$

Bu ýagdaýda γ koeffisiýentiň alamaty garşylykly ýagdaýa geçirilýär. Hil üýtgeýäniň bahasynyň ýerine $D = 0$ baha alynsa, onda ony baza üýtgeýäni ýa-da deňeşdirilýän üýtgeýän diýip atlandyrýarlar. Baza üýtgeýäniň saýlanyşy erkin ýa-da barlagyň maksadyna görä bolar.

Käbir ýagdaýlarda emeli üýtgeýänler bagly üýtgeýän ululygyň ýagdaýyny kesgitlemek üçin hem ulanylýar. Mysal üçin, eger-de awtomobiliň barlygynyň girdejä bagly bolmagy, adamyň jynsyna bagly bolmagy ýaly ýagdaýlarda iki alternatiw ýagdaý döreýär. Bular ýaly modeller üçin adaty iň kiçi kwadratlar usulyny ulanmak bolmaýar. Başga usullar ulanylýar.

Emeli üýtgeýänleri mukdar üýtgeýänler üçin hem ulanyp bolar. Eger jübüt çyzykly regressiýada düşündiriji üýtgeýänler artyşyna görä toparlansa, onda m topary häsiýetlendirmek üçin (m-1) sany binar üýtgeýänleri ulanyp bolar. Netijede, statistikanyň nazaryýetinde ulanylýan analitiki toparlanmany alarys.

8.1-nji mysal. Aşakdaky maglumatlar berlen (X – iş stažy (ýyl), Y – zähmet haky (pul birligi), D – işgäriň jynsy (1 – erkek, 0 – aýal)) (8.1-nji tablisa):

8.1-nji tablisa

Işgäriň jynsyna baglylykda zähmet hakyny derňemegiň maglumaty

Y	X	D
10000	16	0
7178	2	1
7720	2	1
7808	3	1
8488	25	0
8375	15	0
8828	16	1
5743	0	1
9143	33	0
8967	29	1
8149	3	1
8010	16	0
6776	0	1
9383	19	0
7670	1	1
7897	2	1

8.1-nji tablisanyň dowamy

9622	32	0
9622	21	1
7292	0	1
8551	34	0

Iki sany X we D düşündiriji üýtgeýänler üçin alarys:

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} D_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i D_i \\ \sum_{i=1}^{n} D_i & \sum_{i=1}^{n} x_i D_i & \sum_{i=1}^{n} D_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 269 & 12 \\ 269 & 6561 & 79 \\ 12 & 79 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} D_i y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165222 \\ 2409103 \\ 93650 \end{pmatrix}.$$

Hasaplamalary geçirip, regressiýanyň aşakdaky empiriki deňlemesini alarys:

$$\hat{Y} = 7505{,}4 + 60{,}68\, X + 100{,}7\, D.$$

Deňlemeden görnüşi ýaly, stažyň 1 ýyl artmagy bilen zähmet haky 60,68 pul birligine artýar, aýallaryň zähmet haky bolsa erkekleriňkiden ortaça 100,7 pul birligine az bolar.

§8.2. Emeli üýtgeýänleriň döwürleýin derňewde ulanylyşy

Köp ykdysady görkezijiler döwürleýin üýtgeşmeler bilen gös-göni baglanyşyklydyr. Mysal üçin, tomusda syýahatçylyklara, sowuk içgilere we doňdurmalara bolan islegler gyşdakydan, elbetde, köp bolar. Tersine, ýyly eşiklere, gyzdyryjylara bolan islegler bolsa gyşda tomusdakydan köp bolar. Käbir görkezijiler bolsa her çärýekde hem üýtgäp biler.

Adatça, döwürleýin üýtgeşmeler wagt hatarlary üçin mahsusdyr. Bu modellerde döwürleýin faktorlary ýok etmek ýa-da neýtrallaşdyrmak modellerdäki beýleki örän möhüm mukdar we hil häsiýetlendirijilere, hususy halda bolsa **trend** diýlip atlandyrylýan modeliň ösüşiniň umumy ugruna ünsi jemlemäge mümkinçilik berýär. Döwürleýin faktorlaryň beýle ýok edilmesine **döwürleýin korrektirleme** diýilýär. Döwürleýin korrektirleme usulynyň birnäçe görnüşleri bardyr, olaryň biri-de **emeli üýtgeýänler** usulydyr.

Goý, Y üýtgeýän ululyk X hil üýtgeýän ululyk bilen kesgitlenen we bu baglylyk çärýekler boýunça düýpli tapawutlanýan bolsun. Onda umumy modeli aşakdaky ýaly düzüp bolar:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \varepsilon. \qquad (8.3)$$

Bu ýerde

$$D_1 = \begin{cases} 1, & \textit{ikinji çärýek üçin,} \\ 0, & \textit{beýleki ýagdaýlarda.} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 1, & \textit{üçünji çärýek üçin,} \\ 0, & \textit{beýleki ýagdaýlarda.} \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{cases} 1, & \textit{dördünji çärýek üçin,} \\ 0, & \textit{beýleki ýagdaýlarda.} \end{cases}$$

Çärýekleriň sanynyň 4 – e deňligi üçin emeli üýtgeýänleriň sany 3 – e deň bolmaly. Şu mysalda baza hökmünde birinji çärýek alyndy. Eger-de Y üýtgeýäniň bahasy çärýeklerde (döwürlerde) düýpli tapawutlansa, onda (8.3) formuladaky emeli üýtgeýänleriň koeffisiýentleri çärýekler boýunça aşakdaky gatnaşyklar bilen kesgitlenerler:

$$M(Y\,|\,x, D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0) = \beta_0 + \beta_1 X - \textit{birinji çärýek üçin,}$$
$$M(Y\,|\,x, D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 0) = (\beta_0 + \gamma_1) + \beta_1 X - \textit{ikinji çärýek üçin,}$$
$$M(Y\,|\,x, D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 0) = (\beta_0 + \gamma_2) + \beta_1 X - \textit{üçünji çärýek üçin,}$$
$$M(Y\,|\,x, \mathrm{D}_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1) = (\beta_0 + \gamma_3) + \beta_1 X - \textit{dördünji çärýek üçin.}$$

(8.3) modelden görnüşi ýaly çärýekleriň tapawutlary modeliň azat agzalarynyň üsti bilen görkezilendir. Eger bu tapawutlar proporsionallyk koeffisiýentiň üýtgemesine getirse, onda bu ýagdaý aşakdaky modelde hasaba alnar:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \gamma_4 D_1 X + \gamma_5 D_2 X + \gamma_6 D_3 X + \varepsilon. \quad (8.4)$$

Regressiýada modeliň dogry saýlanyp alynmagy ýeterlik derejede möhüm meseledir. Modeli saýlamagyň iň dogry ýoly aşakdaky ýalydyr: Ilki bilen (8.4) modele seredilýär. Koeffisiýentleriň statistiki ähmiýetliligi kesgitlenýär. Eger differensial burç koeffisiýentler statistiki ähmiýetli däl bolsalar, onda (8.3) modele geçýärler. Eger bu modelde differensial azat agzalar statistiki ähmiýetli däl bolsalar, onda çärýekleriň (döwürleriň) tapawutlary seredilýän baglanyşyk üçin möhüm ähmiýete eýe däl diýip netije çykarylýar.

§8.3. Iki regressiýanyň deňeşdirilişi

8.2-nji paragrafda hil faktorynyň bahasynyň üýtgemesiniň diňe azat agzanyň bahalaryna täsir edýändigi bellenilip geçildi. Bu ýagdaý hemme wagt beýle däldir. Hil faktorynyň bahasynyň üýtgemesiniň azat agzanyň bahalaryna täsir edýänliginden başga-da, regressiýa gönüsiniň ýapgytlygyna hem öz täsirini ýetirýär.

Adatça, bu ýagdaý, hukuk we salgyt çäklendirmeleriň girizilmegi netijesinde, institusial şertleriň üýtgemeginde ykdysady maglumat binýady bolan wagt hatarlaryna mahsusdyr. Mysal üçin, birnäçe ýyllaryň dowamynda ýurtda daşary ýurt pullarynyň alyş-çalşygy berkidilen bolup, soňra erkin görnüşe geçen ýa-da ýurda getirilýän awtoulaglaryň salgydy bir durkuna saklanyp, soňra tapawutly üýtgän bolsun. Bu ýagdaýda baglylyk aşakdaky ýaly alnyp bilner:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 D + \gamma_2 DX + \varepsilon. \quad (8.5)$$

Bu ýerde

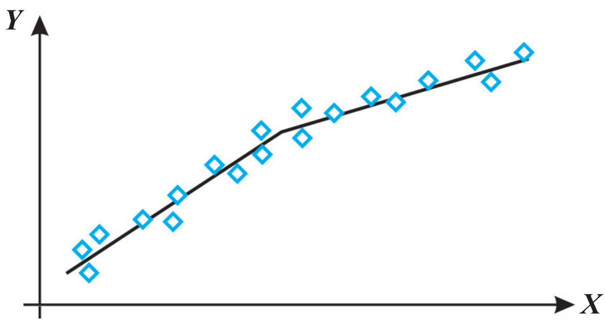
$$D = \begin{cases} 0, & \textit{şertleriň üýtgemegine çenli,} \\ 1, & \textit{şertleriň üýtgemeginden soňra.} \end{cases}$$

Bu şertlerde üýtgeýän ululygyň garaşylýan bahasy aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenýär:

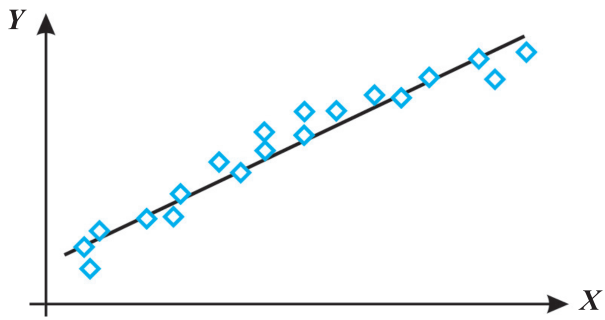
$$M(Y \mid D = 0) = \beta_0 + \beta_1 X, \quad (8.6)$$

$$M(Y \mid D = 1) = (\beta_0 + \gamma_1) + (\beta_1 + \gamma_2)X. \quad (8.7)$$

(8.5) deňlikdäki emeli D üýtgeýän ululyk $(\gamma_1 D)$ additiw we $(\gamma_2 DX)$ multiplikatiw ýagdaýlarda ulanylýar, bu bolsa girizilen üýtgemeleriň periodlaryny hasaba alyp, seredilýän hil faktorly modelde baglylygy iki bölege bölmäge mümkinçilik berýär. Regressiýanyň (8.5) deňlemesi 8.1-8.2-nji suratlarda şekillendirilen ýagdaýlary ýeterlik derejede modelleşdirýär.



8.1-nji surat. Üýtgemeler hasaba alnan model



8.2-nji surat. Üýtgemeler hasaba alynmadyk model

8.1-nji suratdaky modelde gözegçilik nokatlaryny häsiýetlendirýän wagtyň käbir momentleri üçin bolýan üýtgemeler hasaba alynýar.

Emeli üýtgeýänli çylşyrymly regressiýany (8.1-nji sur. ser.) gurmalymy ýa-da «ýönekeý regressiýany» (8.2-nji sur.ser.) gurmak bilen çäklenmelimi? Bu soraga Çounyň testiniň kömegi bilen jogap berip bolar. Goý, saýlamanyň göwrümi n bolsun. Regressiýanyň umumy deňlemesindäki (8.2-nji sur. ser.) y ululygyň bahalarynyň gyşarmalarynyň kwadratlarynyň $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ jemini S_0 bilen belgileýäris.

Goý, umumy saýlamany göwrümleri n_1 we n_2 ($n = n_1 + n_2$) bolan iki sany saýlamalara bölmäge esas bar bolsun we bu saýlamalaryň ikisi üçin hem (8.1-nji sur) regressiýanyň deňlemeleri gurlan bolsunlar. Degişli regressiýalaryň Y ululyklarynyň degişli bahalarynyň gyşarmalarynyň kwadratlarynyň jemlerini S_1 we S_2 bilen belgileýäris. $S_0 = S_1 + S_2$ deňlik diňe (8.5-8.7) deňlemeleriň üçüsinde hem regressiýanyň koeffisiýentleriniň gabat gelen ýagdaýynda dogry bolar. $S_0 - (S_1 + S_2)$ tapawuda bolsa gözegçilik ediş aralyklaryny iki sany bölek aralyklara böleniňde modeliň hiliniň gowulanmagy hökmünde seredip bolar.$(S_0 - (S_1 + S_2))/(m+1)$ drob bolsa bir deňlemäniň ýerine iki deňlemäni guranyňda regressiýanyň dispersiýasynyň kemelmek bahasyny kesgitleýär. Şunlukda erkinlik derejesiniň sany $m + 1$ sana kemeler, sebäbi birleşdirilen deňlemäniň $m + 1$ sany parametrleriniň ýerine iki regressiýanyň $2m + 2$ sany parametrlerini bahalandyrmak zerurdyr.

$$(S_1 + S_2)/(n - 2m - 2)$$

drob iki regressiýany ulananyňda bagly üýtgeýän ululygyň düşündirilmedik dispersiýasyny aňladýar. Umumy saýlamany iki sany bölek saýlamalara bölmeklik dispersiýanyň kemelmesi galan düşündirilmedik dispersiýadan has uly bolan ýagdaýynda maksada laýyk görülýär. Bu derňew F statistikanyň esasynda dispersiýalary deňeşdirmek arkaly alnyp barylýar, bu halda F statistikanyň görnüşi:

$$F = \frac{S_0 - S_1 - S_2}{S_1 - S_2} \times \frac{n - 2m - 2}{m + 1}\ . \qquad (8.8)$$

Eger dispersiýanyň kemelmesi galan düşündirilmedik dispersiýadan statistiki taýdan tapawutlanmasa, onda gurlan F statistika erkinlik derejeleri

$$v_1 = m + 1 \text{ we } v_2 = n - 2m - 2$$

sanlar bolan **Fişeriň** paýlanyşyna eýedir. Bu ýerde m – regressiýanyň deňlemelerindäki mukdar düşündiriji üýtgeýänleriň sanydyr. Eger (8.8) formula bilen hasaplanan $F_{\text{gözegçilik}}$ saýlanyp alnan α ähmiýetlilik derejesi boýunça Fişeriň $F_{\text{kritiki}} = F_{\alpha;\, m+1;\, n-2m-2}$ paýlanyşyna degişli kritiki bahadan kiçi bolsa, onda S_0 we $S_1 + S_2$ ululyklar biri-birinden statistiki taýdan örän az tapawutlanýarlar we regressiýany iki bölege bölmegiň zerurlygy aradan aýrylýar. Garşylykly ýagdaýda bolsa, modeliň hilini gowulandyrmak üçin iki bölek aralyga bölmek maksadalaýykdyr. Bu bolsa regressiýanyň deňlemesine emeli üýtgeýänleri girizmegiň zerurlygyny aňladýar.

Çounyň testi baglanyşyklaryň bölek saýlamalarda tapawutlanýandygyny gözkezmek üçin ýeterlikdir.

Soraglar:

1. Düşündiriji emeli üýtgeýänler nähili bahalary alýarlar?
2. Hil nyşany üç baha alýar. Bu hil nyşany modelde görkezmek üçin näçe sany emeli üýtgeýänleri ulanmaly?
3. Iki sany hil nyşanyň her biri üç sany alternatiw baha eýe. Modelde näçe sany emeli üýtgeýänleri ulanmaly?
4. Eger modele bir emeli üýtgeýäni additiw girizsek, jübüt çyzykly regressiýa deňlemesiniň grafigi nähili üýtgär?
5. Eger modele bir emeli üýtgeýäni multiplikatiw goşsak, jübüt çyzykly regressiýa deňlemesiniň grafigi nähili üýtgär?
6. ANOVA we ANCOVA modeller biri- birinden näme bilen tapawutlanýarlar?

IX bap

ÇYZYKLY DÄL REGRESSIÝA

§9.1. Umumy düşünjeler

Ykdysady üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklar köplenç çyzykly bolmaýarlar. Şol baglanyşyklary çyzykly deňlemeler bilen modelleşdirmek položitel netijeleri bermeýär. Regressiýanyň çyzykly däl modellerini iki topara bölmek bolýar:

1. Modele girýän düşündiriji üýtgeýän ululyklara görä çyzykly däl, ýöne, bahalandyrylýan parametrlere görä çyzykly modeller.

2. Bahalandyrylýan parametrlere görä çyzykly däl modeller.

Birinji topara degişli modelleri ornuna goýma bilen çyzykly modellere getirýärler. Şeýle modelleriň käbirine seredip geçeliň:

Model	Ornuna goýma	Çyzykly model
$y = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x} + \varepsilon$	$x^* = \dfrac{1}{x}$	$y = \beta_0 + \beta_1 x^* + \varepsilon$
$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + + \cdots + \beta_m x^m + \varepsilon$	$x_1 = x$ $x_2 = x^2$ … … … $x_m = x^m$	$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m + \varepsilon$
$y = \dfrac{1}{\beta_0 + \beta_1 x}$	$y^* = \dfrac{1}{y}$	$y^* = \beta_0 + \beta_1 x$

Bahalandyrylýan parametrlere görä çyzykly däl modeller içki çyzykly we **içki çyzykly däl modellere** bölünýär. Käbir operasiýalary (amallary) geçirip, soňra ornuna goýmany ulanyp, çyzykly modellere getirilýän modellere içki **çyzykly modeller** diýilýär.

Meselem, aşakdaky modeller logarifmirlemäniň kömegi bilen çyzykly modellere getirilýär:

$$y = \beta_0 x^{\beta_1}\varepsilon \text{ (ýa-da } y = \beta_0 x^{\beta_1} e^{\varepsilon}) \text{ },$$
$$y = \beta_0 e^{\beta_1 x}\varepsilon \text{ (ýa-da } y = \beta_0 e^{\beta_1 x+\varepsilon}) \text{ }.$$

Çyzykly modellere getirip bolmaýan modellere **içki çyzykly däl** modeller diýilýär.

$$y = \beta_0 x^{\beta_1} + \varepsilon, \qquad y = \beta_0 e^{\beta_1 x} + \varepsilon$$

modeller içki çyzykly däl modellere degişlidir.

Çyzykly modellere getirilýän çyzykly däl modellere seredeliň.

Ýönekeýlik üçin jübüt regressiýa modellere seredeliň.

§9.2. Derejeli (logarifmiki) modeller

Goý, käbir ykdysady baglanyşyk

$$Y = \beta_0 X^{\beta_1} e^{\varepsilon} \tag{9.1}$$

formula bilen modelleşdirilýän bolsun. Bu ýerde β_0 we β_1 – modeliň näbelli, hemişelik parametrleri, ε – tötän agza.

Bu funksiýa Y islegiň X baha baglylygyny aňladyp biler ($\beta_1 < 0$). Ýa-da Y islegiň X girdejä baglylygyny aňladyp biler ($\beta_1 > 0$). Şeýle manyda (9.1) funksiýa **Engeliň funksiýasy** diýilýär.

(9.1) funksiýa öndürilýän önümiň Y göwrüminiň ulanylýan X serişdelere (resurslara) baglylygyny hem aňladyp biler (önümçilik funksiýasy) ($0 < \beta_1 < 1$).

(9.1) model X ululyga görä çyzykly däl. Bu funksiýanyň iki tarapyny hem e ≈ 2,71828… esasa görä logarifmirläp, alarys:

$$\ln Y = \ln\beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon \text{ }. \tag{9.2}$$

Bu funksiýa logarifmiki üýtgeýänlere görä çyzykly funksiýadyr.

$Y^* = \ln Y$; $\ln\beta_0 = \beta_0^*$; $X^* = \ln X$ ornuna goýmany ulanyp alarys:

$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 X^* + \varepsilon \text{ }. \tag{9.3}$$

(9.3) funksiýa çyzykly funksiýadyr. Eger bu funksiýa üçin klassyky çyzykly regressiýanyň ähli zerur şertleri ýerine ýetse, onda iň kiçi kwadratlar usuly boýunça β_0^* we β_1 koeffisiýentleriň iň gowy çyzykly süýşmedik bahalandyrmalaryny alyp bolar.

(9.3) modeliň paramertleri ornuna goýmany göz öňünde tutup, aşakdaky formulalar boýunça bahalandyrylýar:

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^* \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot y_i^*}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)^2};$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot y_i^* - \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)^2}.$$

Bu ýerde b_0^* β_0^* parametriň, b_1 bolsa β_1 parametriň bahalandyrmalary. β_0 parametriň bahalandyrmasy $b_0 = e^{b_0^*} = \exp(b_0^*)$ deňdir.

β_1 koeffisiýent Y ululygyň X ululyk boýunça çeýeligini kesgitleýär. (9.2) deňligi X boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dX} = \beta_1 \cdot \frac{1}{x}; \ \beta_1 = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y}. \qquad (9.4)$$

β_1 koeffisiýent hemişelik ululykdyr. Diýmek, çeýelik hemişelikdir. Şonuň üçin (9.1) model hemişelik çeýelikli modeldir.

Jübüt regressiýa ýagdaýda logarifmiki modeli peýdalanmaklygy esaslandyrmak aňsatdyr. (x_i, y_i) gözegçilik maglumatlarynyň ýerine $(\ln x_i, \ln y_i)$, $i = 1,2,\ldots, n$ gözegçilik maglumatlara seredilýär. Alnan nokatlar korrelýasiýa meýdanynda şekillendirilýär. Eger bu nokatlaryň ýerleşişi göni çyzyga degişli bolsa, onda geçirilen orun çalşyrma şowly bolar. Logarifmiki modeliň peýdalanylmagy esaslandyrylan bolýar.

9.1-nji mysal

Goý, aşakdaky maglumatlar berlen bolsun (9.1-nji tablisa).

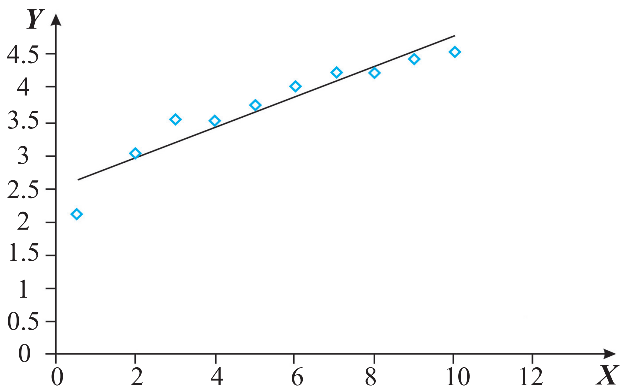
9.1-nji tablisa

X	5	6	7	4	8	1	3	10	9	2
Y	3,2	3,5	3,7	3,0	3,7	1,6	3,0	4,0	3,9	2,5

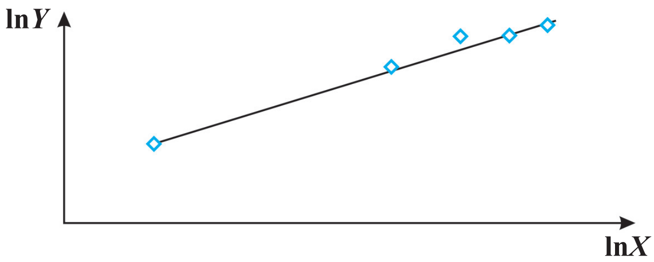
Eger çyzykly modele seretsek, onda 9.1-nji suratdaky netijäni alarys.

Eger derejeli modele seretsek we iki üýtgeýänleri logarifmirlesek, onda 9.2-nji suratdaky netijäni alarys.

Derejeli modeliň parametrlerini kesgitlemek üçin aşakdaky hasaplaýyş tablisany düzeliň (9.2-nji tablisa).



9.1-nji surat. Çyzykly model



9.2-nji surat. Derejeli model (logarifmlerde çyzykly)

9.2-nji tablisa

x	y	$x^* = \ln x$	$y^*=\ln y$	x^{*2}	$x^* y^*$
5	3,2	1,6094	1,1632	2,5903	1,872
6	3,5	1,7918	1,2528	3,2104	2,2446
7	3,7	1,9459	1,3083	3,7866	2,5459
4	3	1,3863	1,0986	1,9218	1,523
8	3,7	2,0794	1,3083	4,3241	2,7206
0,5	1,6	– 0,6931	0,47	0,4805	– 0,326

9.2-nji tablisanyň dowamy

3	3	1,0986	1,0986	1,2069	1,2069
10	4	2,3026	1,3863	5,3019	3,1921
9	3,9	2,1972	1,361	4,8278	2,9904
2	2,5	0,6931	0,9163	0,4805	0,6351
Σ		14,411	11,363	28,131	18,605

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^* \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot y_i^*}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)^2} = 0,700051;$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot y_i^* - \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)^2} = 0,303;$$

$$b_0 = e^{0,700051} = 2,014.$$

Logarifmik çyzykly modeli üýtgeýänleriň köp sanysy üçin umumylaşdyryp bolýar. Meselem:

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \varepsilon.$$

Bu ýerde β_1, β_2 koeffisiýentler Y ululygyň X_1, X_2 üýtgeýänler boýunça çeýelikleridir.

Kobbyň-Duglasyň funksiýasyna seredeliň:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}.$$

Bu deňligi logarifmirläp, alarys:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L,$$

bu ýerde α, β – öndürilýän önümiň göwrüminiň kapitalyň we zähmetiň harajatlary boýunça çeýeligidir. $\alpha + \beta$ jemiň ykdysady manysy bar. $\alpha + \beta < 1$ bosa, önümçiligiň kemelýän masştaby, $\alpha + \beta = 1$ bolsa, önümçiligiň hemişelik masştaby, $\alpha + \beta > 1$ bosa, önümçiligiň artýan masştaby alynýar.

Umumy ýagdaýda köplük regressiýanyň derejeli modeli şeýle görnüşde ýazylýar:

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot X_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot X_m^{\beta_m} \cdot \varepsilon.$$

§9.3. Ters baglanyşykly (giperboliki) model

Bu model şeýle görnüşde bolýar:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X} + \varepsilon. \tag{9.5}$$

$X^* = \dfrac{1}{X}$ ornuna goýmany ulanyp, bu modeli çyzykly görnüşe getirýärler. Bu model, X düşündiriji üýtgeýän ululyk käbir predele asimptotiki ýakynlaşanda ((9.5) modelde bu predel β_0 deň) ulanylýar. β_0, β_1 parametrleriň alamatlaryna baglylykda dürli ýagdaýlar alynýar. Eger $\beta_0 > 0$, $\beta_1 > 0$ bolsa, onda (9.5) funksiýa öndürilýän önümiň X göwrümi bilen hemişelik orta Y çykdajynyň arasyndaky baglanyşygy görkezip biler. Eger $\beta_0 > 0$, $\beta_1 < 0$ bolsa, onda (9.5) funksiýa X girdeji bilen haryda bolan Y islegiň arasyndaky baglanyşygy görkezip biler .Bu ýagdaýda Tornkwistiň funksiýasy alnar. $X = -\dfrac{\beta_1}{\beta_0}$ – girdejiniň minimal zerur derejesi. Eger $\beta_0 < 0$, $\beta_1 > 0$ bolsa, onda Filipsiň egrisini alarys. Bu egri X işsizlik derejesi bilen Y iş hakynyň (bu ululyklaryň göterimlerdäki üýtgemeleri alynýar) üýtgemesiniň arasyndaky baglanyşygy şöhlelendirýär. Bu egriniň OX oky bilen kesişme nokady işsizligiň tebigy derejesini kesgitleýär.

9.2-nji mysal

10 sany maşgala üçin X girdeji we Y sarp ediş barada maglumatlar berlen. (9.3-nji tablisa).

9.3-nji tablisa

Giperboliki model üçin başlangyç maglumatlar

Maşgala	X	Y	$X^* = \dfrac{1}{X}$
1	1	5,6	1,0
2	2	10,8	0,5
3	3	11,1	0,3333
4	4	12,1	0,25
5	5	14,0	0,2

9.3-nji tablisanyň dowamy

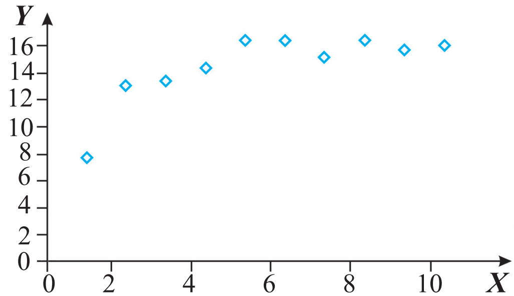
6	6	14,2	0,1667
7	7	12,9	0,1429
8	8	14,1	0,125
9	9	13,4	0,1111
10	10	13,7	0,1

(x_i, y_i) nokatlary grafikde şekillendireliň (9.3-nji surat).
Goý, Y we X ululyklaryň arasyndaky takyk baglylyk

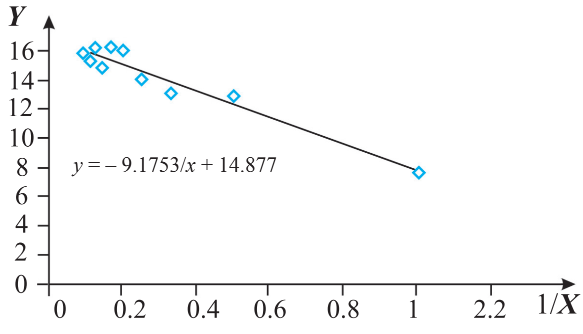
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X} + \varepsilon$$

ýa-da çyzykly görnüşde

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon$$



9.3-nji surat. Y sarp edişiň X girdejä baglylygy



9.4 –nji surat. Y sarp edişiň $\frac{1}{X}$ ululyga baglylygy deňleme bilen berlen bolsun.

Täze üýtgeýän ululyklarda grafik şeýle bolar (9.4-nji surat).

Çyzykly deňlemäniň koeffisiýentleri adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen kesgitlenýär. Regressiýanyň empiriki deňlemesi

$$\hat{y} = 14,9 - 9,18x^{*}$$

görnüşde bolýar.

Başlangyç üýtgeýänlere geçip alarys:

$$\hat{y} = 14,9 - \frac{9,18}{x}.$$

§9.4.Polinom görnüşli model

Bu model şeýle görnüşde berilýär:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \ldots + \beta_m X^m + \varepsilon. \qquad (9.6)$$

(9.6) model $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ parametrlere görä çyzykly modeldir. Diýmek, bu modeli çyzykly regressiýa modeline getirip bolýar.

Onuň üçin $X^k = X_k$, $(k = 1,2,\ldots,m)$ ornuna goýmagy ulanmaly. Netijede,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_m X_m + \varepsilon \qquad (9.7)$$

modeli alarys.

Bu ýagdaýda matrisalaryň $X^T \cdot X$, $X^T \cdot Y$ köpeltmek hasyllary şeýle görnüşde bolar:

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{pmatrix}.$$

Bu ýerde $x_i, y_i - X, Y$ üýtgeýänleriň bahalary.

§9.5. Görkezijili (log-çyzykly) model

Bu model şeýle görnüşde ýazylýar:

$$Y = \beta_0 e^{\beta_1 X + \varepsilon} = \beta_0 \exp(\beta_1 X + \varepsilon)\ . \qquad (9.8)$$

Bu model Y ululygyň ösüşiniň wagt boýunça hemişelik depgini bilen üýtgeýşi seljerilende ulanylýar. X ululyk t ululygy çalyşýar.

Bu modeli logarifmirläp, log – çyzykly modeli alarys:

$$\ln(e^{\beta_1 X}) = \beta_1 X, \quad \ln \beta_0 = \beta_0^*,$$

$$\ln Y = \beta_0{}^* + \beta_1 X + \varepsilon\ . \qquad (9.9)$$

$Y^* = lnY$ ornuna goýmany ulanyp, cyzykly modeli alarys:

$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 X + \varepsilon. \qquad (9.10)$$

(9.10) modeliň parametrleri aşakdaky formulalar boýunça bahalandyrylýar:

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^* \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2};$$

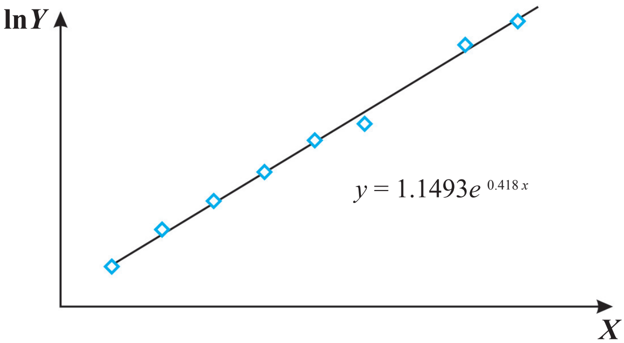
$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i^* - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \quad b_0 = e^{b_0^*}.$$

9.3-nji mysal. Aşakdaky maglumatlar berlen (9.4-nji tablisa).

9.4-nji tablisa

X	1	2	2	3	5	6	4	8	10	9
Y	1,7	2,7	2,8	4,1	9,4	12,0	6,1	35,0	77,0	49,0

Görkezijili model (X, ln$Y$) koordinatalarda çyzykly model bolýar. Grafigi guralyň (9.5-nji surat).



9.5-nji surat. Görkezijili ((X, lnY) koordinatalarda çyzykly) model

Köp ykdysady görkezijiler ýokarda sanalyp geçilen funksiýalaryň kompozisiýasy bolýan funksiýa bilen modelleşdirilýär. Şeýle modelleri hem çyzykly görnüşe getirip bolýar. Meselem, Kobbyň-Duglasyň önümçilik funksiýasyny alalyň.

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\gamma t}. \qquad (9.11)$$

Bu model ylmy-tehniki ösüşi hasaba alýar. ((9.11) modelde tötän täsirler görkezilen däl). Bu deňligi logarifmirläp alarys:

$$lnY = ln\,A + \alpha\,lnK + \beta\,lnL + \gamma t\,. \qquad (9.12)$$

Bu modeli a = ln$A$, k = ln$K$, l = ln$L$, y = ln$Y$ belgilemeleri ulanyp, çyzykly görnüşe getirip bolýar.

§9.6. Modeliň formasynyň saýlanylyşy

Ykdysady prosesleriň köpdürlüligi we çylşyrymlylygy ekonometriki modelleriň köpdürli bolmagyna getirýär. Bu ýagdaý baglanyşygyň maksimal dogry bolan formulasyny saýlamaklygy çylşyrymlaşdyrýar. Jübüt regressiýa ýagdaýynda modeli saýlap almaklyk gözegçilik edilýän nokatlaryň korrelýasiýa meýdanynda ýerleşişi bilen amala aşyrylýar. Ýöne, käbir ýagdaýlarda nokatlaryň ýerleşişi takmyn birnäçe funksiýalara ýakyn bolýar. Şol funksiýalaryň iň gowusyny ýüze çykarmak zerur bolup durýar. Bu mesele köplük regressiýa üçin has kynlaşýar. Çünki, bu ýagdaýda statistiki maglumatlary grafikde şekillendirmek mümkin däl.

Iş ýüzünde haýsy modeliň dogrulygy belli däl. Şonuň üçin hakyky maglumatlara has takyk degişli bolan modeli alýarlar. Hil taýdan gowy modeli saýlamak üçin käbir soraglara jogap bermek zerurdyr.

Adatça, «gowy» modeliň şeýle nyşanlaryna seredilýär:

Ýönekeýlik. Hakyky maglumatlary deňräk şöhlelendirýän iki modeliň haýsysy düşündiriji üýtgeýänleriň az sanyny saklaýan bolsa, şol modeli saýlamaly.

Ýeke-täklik. Statistiki maglumatlaryň islendik toplumy üçin kesgitlenilýän koeffisiýentler birbelgili hasaplanylmaly.

Maksimal degişlilik. Deňleme bagly üýtgeýän ululygyň bahalarynyň gyşarmalarynyň näçe köp bölegini düşündirýän bolsa, şonçada gowy hasaplanýar. Şonuň üçin maksimal mümkin bolan determinasiýa koeffisiýentli deňlemäni gurmaklyga çalyşýarlar.

Nazaryýet bilen ylalaşyklygy. Hiç bir deňleme, eger ol belli nazary şertlere gabat gelmese, hil taýdan gowy hasaplanyp bilinmez.

Çaklaýyş hili. Eger modeliň esasynda edilen çaklaýyş iş ýüzünde tassyklansa, onda modeliň hili gowy hasaplanyp bilner.

Bahalandyrylýan modeliň çaklaýyş hilini aşakdaky gatnaşyk bilen aňladyp bolar:

$$V = \frac{S}{\bar{y}}, \tag{9.13}$$

bu ýerde $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1}}$ – regressiýanyň standart ýalňyşlygy, $\bar{y}$ – regressiýa deňlemesiniň bagly üýtgeýän ululygynyň orta bahasy. Eger V ululyk kiçi bolsa we galyndylaryň awtokorrelýasiýasy ýok bolsa, onda modeliň hili ýokary hasaplanýar.

Eger regressiýa deňlemesi çaklaýyş üçin ulanylýan bolsa, onda V ululyk deňlemäniň bahalandyrylýan döwri üçin däl-de, bu döwürden soňky wagt aralygy üçin (bu aralyk üçin bagly we düşündiriji üýtgeýänleriň bahalary belli) hasaplanýar. Çaklaýyş döwri regressiýa deňlemesiniň bahalandyrylýan döwründen azyndan üç esse gysga bolmaly.

Spesifikasiýalaşdyrmagyň ýalňyşlyklarynyň görnüşlerine seredeliň. Hili gowy modeli gurmagyň esasy şertleriniň biri regressiýa deňlemesini dogry (gowy) spesifikasiýalaşdyrmakdyr. Dogry spesifikasiýa modeliň dogrulygyny, modeldäki ykdysady görkezijileriň arasyndaky gatnaşygy şöhlelendirýändigini aňladýar.

Modeliň funksional formasynyň nädogry saýlanyp alynmagyna ýa-da düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň toplumynyň nädogry alynmagyna spesifikasiýa **ýalňyşlyklary** diýilýär.

Spesifikasiýa ýalňyşlyklaryň esasy görnüşlerine seredeliň.

1. *Ähmiýetli üýtgeýän ululygyň taşlanmagy.*

Beýle ýalňyşlyk goýberilende iň kiçi kwadratlar usuly boýunça alnan bahalandyrmalar süýşýän bahalandyrmalar bolýar we gözegçiliklerden alnan maglumatlar näçe köp bolsa-da, bahalandyrmalar ulanarlykly däl. Diýmek, mümkin bolan aralyklaýyn bahalandyrmalar we degişli çaklamalary barlamagyň netijeleri ynamsyz bolýar.

2. *Ähmiýetsiz üýtgeýän ululygyň modele goşulmagy.*

Käbir ýagdaýlarda regressiýa deňlemesine düşündiriji üýtgeýänleriň örän köp sanysy goşulýar. Üstesine-de, goşulmak doly esaslandyrylmaýar. Beýle ýagdaýda modeliň koeffisiýentleriniň bahalandyrmalary düzgüne laýyklykda süýşmedik we ulanarlyk bolsa-da, olaryň takyklyk derejesi azalýar, standart ýalňyşlyklar artýar. Ýagny, bahalandyrmalar netijeli däl bolýarlar.

3. *Funksional formanyň nädogry saýlanyp alynmagy.* Beýle ýalňyşlygyň getirýän ýaramaz netijeleri has düýplüdir. Ýalňyşlyklar ýa süýşýän bahalandyrmalaryň alynmagyna ýa-da regressiýa koeffisiýentleriniň we deňlemäniň hiliniň beýleki görkezijileriniň bahalandyrmalarynyň statistiki häsiýetleriniň ýaramazlaşmagyna getirýär.

Spesifikasiýa ýalňyşlyklaryň ýüze çykarylmagy we düzedilmegi

Spesifikasiýa ýalňyşlyklary öwrenilýän ykdysady prosesler baradaky bilimler ýüzleý bolanda ýa-da nazaryýetiň ýeterlik derejede çuňňur işlenilmedik ýagdaýynda, ýa-da bolmasa, statistiki maglumatlary toplamakda we işlemekde ýalňyşlyklar goýberilende ýüze çykýar.

Eger regressiýa deňlemesinde bir düýpli bolmadyk üýtgeýän ululyk bar bolsa, ony t statistikanyň pes derejesi bilen bilip bolýar. Bu ululygy deňlemeden aýyrýarlar.

Eger deňlemede birnäçe statistiki ähmiýetsiz düşündiriji üýtgeýän ululyklar bar bolsa, onda bu ululyklary saklamaýan başga deňlemäni gurmaly. Soňra

$$F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{n - m - 1}{k} \quad \text{hasaplamaly.}$$

F statistikanyň üsti bilen başlangyç we goşmaça alnan deňlemeler üçin determinasiýa koeffisiýentleri deňeşdirmeli. Bu ýerde n – gözegçilikleriň sany, m – başlangyç deňlemedäki düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany, k – başlangyç deňlemeden taşlanýan düşündiriji ululyklaryň sany.

Modeliň hili kesgitlenende aşakdaky parametrleri seljermeli:

a) $\overline{R^2}$ düzedilen determinasiýa koeffisiýenti.

b) t statistika.

ç) Darbiniň-Uotsonyň statistikasy.

d) Koeffisiýentleriň alamatlarynyň nazaryýet bilen ylalaşygy.

e) Modeliň çaklaýyş hili.

Eger şu görkezijiler kanagatlanarly bolsa, onda modeli öwrenilýän hakyky prosese ulanyp bolar.

Modeliň dogrulygy jikme-jik seljerilende modeliň galyndy agzasyny derňemek gerek.

Modeliň galyndy agzasyny derňemek

e – galyndy agzany grafiki berip (ýagny e_i tötän gyşarmalary grafiki şekillendirip) awtokorrelýasiýanyň bardygyny we geteroskedastikligi seljerip bolýar. Mundan başga-da, e_i gyşarmalaryň grafiki berlişi bilen deňlemäniň nädogry spesifikasiýasyny görüp bolýar. Onuň üçin e_i gyşarmalaryň i ululyga baglylygynyň grafigini gurmaly. Eger gurlan grafikdäki baglylygyň regulýar (tötän däl) häsiýeti bar bolsa, onda derňelýän regressiýa deňlemesiniň spesifikasiýasy nädogurydyr.

Spesifikasiýa ýalňyşlygy barlamagyň aşakdaky testlerini getireliň:

1) Ramseýiň RESET testi.
2) Maksimal hakykata meňzeşlik testi.
3) Waldanyň testi.
4) Lagranžyň köpeldijisiniň testi.
5) Hausmanyň testi.
6) Boksuň-Koksuň özgertmesi.

Soraglar:

1. Nähili modellere çyzykly däl modeller diýilýär?
2. Parametrleri boýunça çyzykly bolan çyzykly däl modellere mysallar getiriň.
3. Haýsy çyzykly däl modele içki çyzykly model diýilýär?
4. Haýsy çyzykly däl modele içki çyzykly däl model diýilýär?
5. Modeliň spesifikasiýasynyň ýalňyşlygy näme?
6. Spesifikasiýa ýalňyşlyklaryny sanaň we olardan gelip çykýan netijeleri aýdyň.
7. Modeliň galyndylary gözegçiligiň tertibi bilen käbir kanunalaýyklykda bolýar. Modeliň spesifikasiýasy barada näme aýdyp bolar?
8. $y = \alpha x^{\beta} \varepsilon$, $y = \alpha x^{\beta} + \varepsilon$ modelleriň haýsysyny cyzykly görnüşe getirip bolýar?
9. Polinomly model parametrleri boýunça çyzykly model bolup bilermi?

X bap

WAGT HATARLARY

§10.1. Umumy düşünjeler

Wagt hatary (dinamiki hatar, dinamikanyň hatary) – bu haýsy hem bolsa bir görkezijiniň birnäçe yzygiderli wagt pursatlaryna ýa-da wagt döwürlerine degişli bahalarynyň toplumydyr. Umumy görnüşde y_t ykdysady wagt hatary öwrenilende aşakdaky düzüjileri aýyl-saýyl edýärler:

– trend – uzakmöhletleýin faktorlaryň arassa täsirini beýan edýän, böküşli däl-de yzygiderli üýtgeýän düzüji;

– möwsümleýin düzüji – ykdysady prosesleriň uzak bolmadyk döwür içinde (ýylda, aýda, hepdede) gaýtalanýandygyny şöhlelendirýän düzüji;

– sikleýin düzüji – ykdysady prosesleriň uzakmöhletleýin döwürde gaýtalanýandygyny şöhlelendirýän düzüji (meselem, Kondratýewiň ykdysady aktiwlik tolkunlary, demografiki «çukurlar»);

– tötän düzüji – hasaba we bellige alyp bolmaýan tötän faktorlaryň täsirlerini şöhlelendirýän düzüji.

Umumy ýagdaýda hataryň klassyky multiplikatiw modeli şeýle görnüşde bolýar:

$$y_t = tr_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t. \qquad (10.1)$$

Klassyky additiw model aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$y_t = tr_t + C_t + S_t + \varepsilon_t, \qquad (10.2)$$

bu ýerde y_t – derňelýän ululygyň bahasy, tr_t – trendiň bahasy, C_t – möwsümleýin düzüjiniň bahasy, S_t – sikleýin düzüjiniň bahasy, ε_t – tötän düzüjiniň bahasy, $t = 1,2,\ldots, n$ – döwrüň tertibi. Iki model hem tr_t, C_t, S_t faktorlaryň käbirlerini saklaman bilerler.

Additiw ýa-da multiplikatiw modeli saýlap almaklyk yrgyldylaryň gurluşynyň seljermesiniň esasynda amala aşyrylýar. Eger yrgyldylaryň amplitudasy takmyn hemişelik bolsa, onda wagt hatarynyň additiw modeli gurulýar. Eger yrgyldylaryň amplitudasy takmyn artýan ýa-da kemelýän bolsa, onda wagt hatarynyň multiplikatiw modeli gurulýar.

Wagt hatarynyň grafigi öwrenilenden soňra, adatça, trendi, möwsümleýin we periodiki düzüjileri bölüp almaga synanyşýarlar. Olar aýrylandan soňra wagt hatary stasionar (durnukly) häsiýetli bolýar. Mundan başga-da, seljermäni ýenilleşdirmek üçin hataryň bahalarynyň özgertmesi ulanylýar. Bu özgertme hataryň bahalarynyň paýlanyşyny normal paýlanyşa ýakynlaşdyrmaga ýa-da hataryň bahalarynyň dispersiýasyny durnuklaşdyrmaga mümkinçilik berýär.

§10.2. Wagt hatarynyň trendiniň modelleşdirilişi

Eger siklleýin we möwsümleýin yrgyldylar ýok bolsa, onda hatar trendi we tötän düzüjini saklar.

Ykdysady wagt hatarlary derňelende öwrenilýän prosesiň ösüşiniň esasy meýlini (tendensiýasyny) ýüze çykarmak we statistiki bahalandyrmak wajyp klassyky mesele bolup durýar.

Wagt hatarynyň meýlini modelleşdirmegiň has ýaýran usullarynyň biri y hataryn derejeleriniň t wagta baglylygynyň analitiki funksiýasyny gurmakdyr:

$$y_t = f(t, \beta) + \varepsilon_t, \tag{10.3}$$

bu ýerde $f(t, \beta)$ – trendiň funksiýasy (bu funksiýa adatça çeýe hasap edilýär), β – modeliň näbelli parametrler wektory (bu parametrleri hökman bahalandyrmaly), t – wagt (bagly däl üýtgeýän ululyk hasap edilýär), ε_t – bagly däl we birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar (normal paýlanyş).

Bu ýagdaýda t üýtgeýän y ululygyň bagly bolup biljek ähli başga faktorlaryny çalyşýar. Trendleri gurmak üçin aşakdaky funksiýalar has ýygy peýdalanylýar:

– çyzykly trend: $f(t, \beta) = \beta_0 + \beta_1 t$;

– giperbola: $f(t,\beta) = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{t}$;

– eksponensial trend: $f(t,\beta) = \beta_0 \cdot e^{\beta_1 t}$;
– derejeli funksiýa formadaky trend: $f(t,\beta) = \beta_0 \cdot t^{\beta_1}$;
– ikinji we ýokary derejeli polinom;
– $f(t,\beta) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots \beta_m t^m$.

Sanalyp geçilen trendleriň parametrlerini adaty iň kiçi kwadratlar usuly (IKK usuly) bilen kesgitläp bolar (eger tötän agzanyň bahalary korrelirlenmeýän bolsalar). Bu ýerde düşündiriji üýtgeýän ululyk hökmünde $t = 1,2,\ldots, n$ wagty, bagly ululyk hökmünde wagt hatarynyň y_t derejeleri alynýar. Çyzykly däl trendler üçin öňünden olary çyzykly görnüşe getirmekligiň standart usulyny geçirýärler.

Regressiýa galyndylary özara korrelirlenýän bolsalar, onda awtokorrelýasiýany ýok etmegiň usullaryny ulanmak möhümdir.

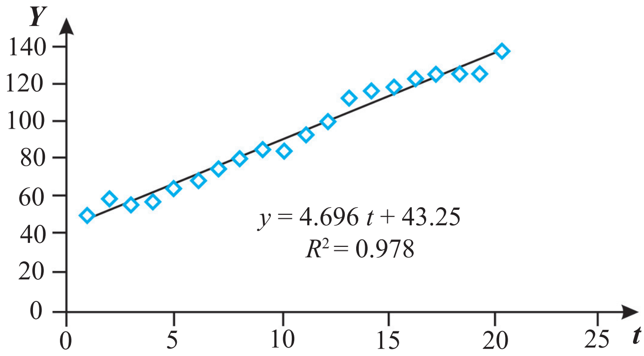
10.1-nji mysal. Kärhananyň birnäçe ýylyň dowamyndaky arassa girdejisi barada maglumatlar berlen (10.1-nji tablisa) .

10.1-nji tablisa

Ýyl	t	y_t	Ýyl	t	y_t
1989	1	50,3	1999	11	92,8
1990	2	58,4	2000	12	99,7
1991	3	56,3	2001	13	112,1
1992	4	57,6	2002	14	116,1
1993	5	63,8	2003	15	117,9
1994	6	68,8	2004	16	121,8
1995	7	75,4	2005	17	124,1
1996	8	80,1	2006	18	124,8
1997	9	85,0	2007	19	124,6
1998	10	84,4	2008	20	137,2

Başlangyç maglumatlar we modelleşdirmegiň netijesi aşakdaky grafikde (10.1-nji surat) görkezilendir.

$\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ çyzykly trendiň kömegi bilen y_t hataryň analitiki deňleşdirmesini (düzedilmesini) geçireliň. $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t$ empiriki deňlemäniň b_0, b_1 koeffisiýentlerini x - i t ululyga çalşyp, jübüt çyzykly regressiýanyň formulalary boýunça hasaplalyň:



10.1-nji surat. Kärhananyň arassa girdejisi (çyzykly trend)

$$b_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t \cdot \sum_{t=1}^{n} t^2 - \sum_{t=1}^{n} t \cdot \sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2} = 43,25;$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t - \sum_{t=1}^{n} t \cdot \sum_{t=1}^{n} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2} = 4,696\,.$$

Netijede, $\hat{y}_t = 43,25 + 4,696\,t$ çyzykly trendiň formulasyny alarys.

Çyzykly $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t$ trend bar ýagdaýynda τ çuňluga (wagt boýunça τ ädim öňe) aralyklaýyn çaklaýyş şu görnüşde bolýar:

$$y(n+\tau) = b_0 + b_1(n+\tau) \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(n+\tau-\bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2}\right)},$$

bu ýerde $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ – Stýudentiň kriterisi.

10.1-nji mysada bäş ýyl öňe aralyklaýyn çaklaýşy geçireliň ($n + \tau = 20 + 5 = 25$).

$$y\;(25(2013\text{ - nji ýyl})) = 43{,}25 + 4{,}696 \cdot 25 \pm 2{,}101 \cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{327,07}{18}\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{(25-10,5)^2}{665}\right)} = 160,7 \pm 5,4\,.$$

Galyndylaryň kwadratlarynyň jemi jübüt çyzykly regressiýa ýagdaýyndaky ýaly hasaplanýar:

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2 = 327,07\,.$$

Eger trendiň deňlemesi polinom görnüşinde bolsa:

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m, \qquad t = 1, 2, \ldots, n\,,$$

onda, ornuna goýmalary geçirip, köplük regressiýa modeline geçýärler. Degişli matrisalar şeýle görnüşde bolar:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix},\; X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \cdots 1^m \\ 1 & 2 & 2^2 \cdots 2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \\ 1 & n & n^2 \quad n^m \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y\,.$$

§10.3. Trend, möwsümleýin yrgyldylar we emeli üýtgeýän ululyklar

Trendi, möwsümleýin düzüjini we tötän faktory saklaýan modele seredeliň. Additiw ýa-da multiplikatiw modeli saýlamaklyk yrgyldylaryň gurluşynyň seljermesi esasynda amala aşyrylýar. Eger yrgyldylaryň amplitudasy takmyn hemişelik bolsa, onda wagt hatarynyň additiw modelini gurýarlar. Eger yrgyldylaryň amplitudasy takmyn artsa ýa-da kemelse, onda wagt hatarynyň multiplikatiw modelini gurýarlar. Möwsümleýin düzüjini seljermek üçin emeli üýtgeýän ululyklar ulanylýar.

Wagt hatarynyň additiw modeliniň gurluşyna seredeliň.

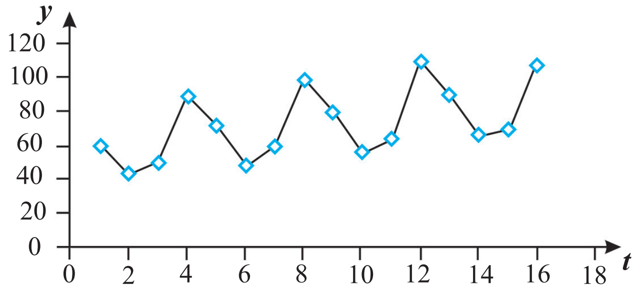
10.2-nji mysal. Goý, birnäçe ýylyň içinde y_t elektroenergiýanyň sarp edilişiniň göwrümi barada çärýekleýin maglumatlar bar bolsun, t – çärýegiň tertibi.

10.2-nji tablisa

Elektroenergiýanyň sarp edilişi (müň kBT × sagat)

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	60	5	72	9	80	13	90
2	44	6	48	10	56	14	66
3	50	7	60	11	64	15	70
4	90	8	100	12	110	16	108

Grafik (10.2-nji surat) trendiň we möwsümleýin düzüjiniň bardygyny görkezýär.



10.2-nji surat. Elektroenergiýanyň çärýekleýin sarp edilişi

Möwsümleýin yrgyldylary modelleşdirmek üçin emeli üýtgeýänleri ulanýarys. Çyzykly trendi we möwsümleýin yrgyldylary saklaýan empiriki model şeýle görnüşde bolar:

$$y_t = b_0 + b_1 t + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3.$$

Hil üýtgeýän ululygyň (çärýek) dört sany alternatiwasy bar. Şonuň üçin ony beýan etmek üçin üç sany x_1, x_2, x_3 binar üýtgeýänleri peýdalanmak zerur. (10.3-nji tablisa). Dört sany düşündiriji üýtgeýänleri bolan köplük çyzykly regressiýa modeli alarys.

10.3-nji tablisa

Ýylyň çärýekleri	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	0	0

10.3-nji tablisanyň dowamy

3	0	1	0
4	0	0	1

Alnan köplük çyzykly regressiýa modeliň başlangyç matrisalary we parametrleriň bahalandyrmalary aşakdaky görnüşde bolar:

$$X=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&0&1&0\\1&4&0&0&1\\1&5&0&0&0\\1&6&1&0&0\\1&7&0&1&0\\1&8&0&0&1\\1&9&0&0&0\\1&10&1&0&0\\1&11&0&1&0\\1&12&0&0&1\\1&13&0&0&0\\1&14&1&0&0\\1&15&0&1&0\\1&16&0&0&1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}60\\44\\50\\90\\72\\48\\60\\100\\80\\56\\64\\110\\90\\66\\70\\108\end{bmatrix},\quad B=(X^TX)^{-1}X^TY=\begin{bmatrix}62,4\\1,88\\-23,88\\-18,25\\20,88\end{bmatrix}.$$

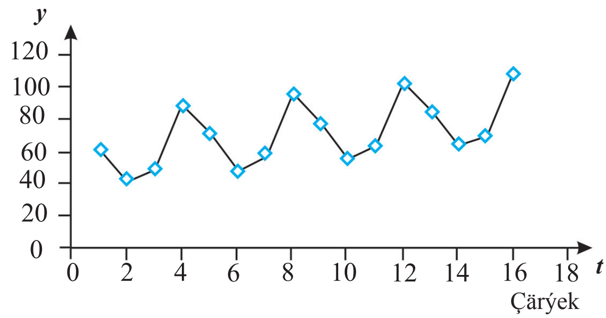
Şeýlelik bilen,

$$\hat{y}_t = 62,4 + 1,88t - 23,88\,x_1 - 18,25\,x_2 + 20,88\,x_3\,.$$

Aşakdaky grafikde modelleşdirmegiň netijeleri görkezilen (10.3-nji surat).

Multiplikatiw modeliň gurluşyna seredeliň.

10.3-nji mysal. Goý, birnäçe ýyl üçin kärhananyň girdejisi barada çärýekleýin y_t maglumatlar berlen bolsun (mln manat), t – çärýegiň tertibi (10.4-nji tablisa).

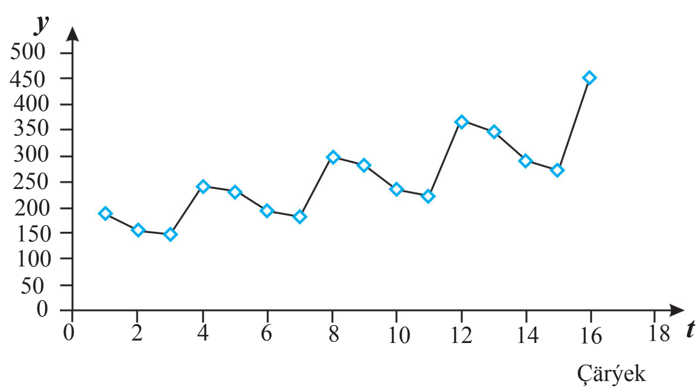


10.3-nji surat. Elektroenergiýanyň sarp edilişiniň deňlenen bahalary

10.4-nji tablisa

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	190	5	230	9	280	13	340
2	158	6	195	10	230	14	285
3	150	7	174	11	230	15	260
4	220	8	310	12	380	16	465

Möwsümleýin yrgyldylaryň amplitudasy wagtyň geçmegi bilen artýar (10.4-nji surat).

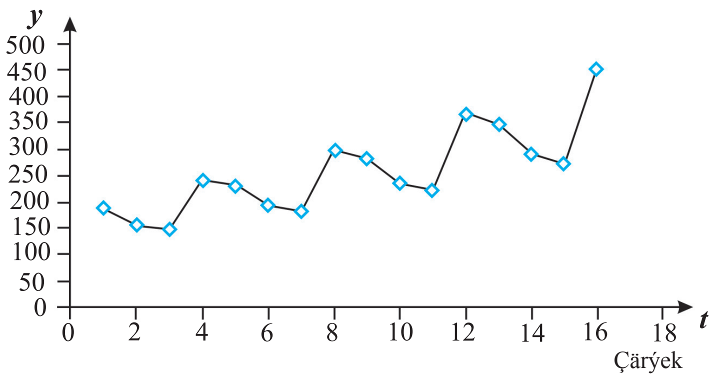


10.4-nji surat. Kärhananyň girdejisi

Modelleşdirmek üçin multiplikatiw modeli ulanalyň. Empiriki deňleme şeýle görnüşde bolar:

$$\hat{y}_t = b_0 \cdot b_1^t c_1^{x_1} c_2^{x_2} c_3^{x_3},$$

bu ýerde x_1, x_2, x_3 – binar ululyklar.



10.5-nji surat. Multiplikatiw model boýunça kärhananyň girdejisiniň deňlenen bahalary

Soňky deňligi logarifmirläp, additiw modeli alarys:

$$\ln\hat{y}_t = \ln b_0 + t\ln b_1 + x_1 \ln c_1 + x_2 \ln c_2 + x_3 \ln c_3 ;$$

$$\hat{y}_t^* = b_0^* + b_1^* t + c_1^* x_1 + c_2^* x_2 + c_3^* x_3 .$$

Dört sany düşündiriji üýtgeýänleri saklaýan köplük çyzykly regressiýa modeli aldyk. Parametrleri bahalandyryp, alarys:

$$\hat{y}_t = 5,176 + 0,0516t - 0,2323x_1 - 0,3483x_2 + 0,1111x_3 .$$

Potensirleme geçirip, başdaky modele gelýäris (10.5-nji surat).

$$\hat{y}_t = 176,98 \cdot 1,053^t \cdot 0,7927^{x_1} \cdot 0,7059^{x_2} \cdot 1,1175^{x_3} .$$

§10.4. Stasionar hatarlar

Stasionar we stasionar däl wagt hatarlaryna degişli esasy düşünjelere we ululyklara seretmäge geçeliň. Wagt hatarlaryny statistiki seljerme etmegiň esasy aýratynlygy gözegçilikleriň $y(t_1)$, $y(t_2)$,…, $y(t_n)$ yzygiderligine statistiki bagly tötän ululyklaryň yzygiderliginiň amala aşmasy hökmünde seredilýär. Wagt hatarlaryny statistiki seljerme etmek meselesini iş ýüzünde çözer ýaly etmek üçin, wagt hatarlarynyň seredilýän modelleriniň toparyny çäklendirmeli bolýar (hataryň gurluşy barada ol ýa-da beýleki öňden goýulýan şertleri we hataryň ähtimallykly häsiýetnamalarynyň gurluşy barada şert girizip).

Şeýle çäklendirmeleriň biri wagt hatarynyň stasionar bolmaklygydyr.

Käbir düşünjelere we kesgitlemelere seredeliň. Wagt hatarlarynyň san häsiýetnamasy tötän ululyklaryň san häsiýetnamalarynyň tapylyşy ýaly tapylýar.

T köplükde berlen, islendik $t \in T$ üçin bahasy tötän ululyk bolýan $y\,(t)$ funksiýa T köplükde berlen $y\,(t)$ tötän proses diýilýär.

$y\,(t)$ tötän prosesiň matematiki garaşmasy diýip her bir t üçin $y\,(t)$ tötän ululygyň matematiki garaşmasy bolýan $m(t)$ funksiýa aýdylýar:

$$m\,(t) = M\,[y\,(t)]. \tag{10.4}$$

$y\,(t)$ tötän prosesiň kowariasiýa funksiýasy şeýle ýazylýar:

$$\begin{aligned} C(t,s) &= cov\,[y(t), y(s)] = \\ &= M[(y(t) - m(t)) \cdot (y(s) - m(s))]. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Bu funksiýa (t,s) üýtgeýänler jübütiniň funksiýasydyr .

$t = s$ bolanda kowariasiýa funksiýasynyň bahasy $y\,(t)$ tötän prosesiň dispersiýasyny berýär:

$$Dy\,(\mathrm{t}) = cov\,[y\,(t), y\,(t)]\,. \tag{10.6}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{cov[y(t), y(t)]} \tag{10.7}$$

kwadrat köke tötän prosesiň standart gyşarmasy diýilýär.

$y\,(t)$ tötän prosesiň korrelýasiýa funksiýasy aşakdaky ululykdyr:

$$corr[y(t),y(s)] = \frac{cov[y(t),y(s)]}{\sigma(t)\sigma(s)}\,. \tag{10.8}$$

Nazary derňewlerde we amaly meselelerde ähtimallykly häsiýetleri wagt boýunça üýtgemeýän tötän ululyklaryň yzygiderligi wajyp ähmiýete eýedir. Şeýle tötän yzygiderliklere **stasionar yzygiderlikler** diýilýär. Stasionar tötän yzygiderlikleri akymy (bahalar yzygiderligi) durnuklaşan we üýtgewsiz şertlerde bolup geçýän wagt hatarlaryny beýan etmek üçin ulanmak mümkin.

Eger islendik $n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ we τ üçin

$$\{y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n)\} \text{ we } \{y(t_1+\tau), y(t_2+\tau), \ldots, y(t_n+\tau)\}$$

tötän ululyklaryň paýlanyşlary birmeňzeş (şol bir paýlanyşa eýe) bolsalar, onda $y(t)$ tötän prosese **berk tötän** proses diýilýär.

Bu ýagdaý tükenikli ölçegli paýlanyşlaryň funksiýalarynyň wagt süýşürilende üýtgemeýändigini aňladýar.

Stasionarlygyň kesgitlemesinden islendik t, s, τ üçin

$$m(t+\tau) = m(t),\ C(s+\tau, t+\tau) = C(s, t) \tag{10.9}$$

ýerine ýetýär. $\tau = -t$ goýup alarys:

$$m(t) = m(0),\ C(s,t) = C(s-t, 0).$$

Bu ýerden stasionar prosesiň $m(t)$, $\sigma(t)$ funksiýalarynyň hemişelikdigi, kowariasiýa we korrelýasiýa funksiýalarynyň $(s-t)$ ululygyň modulyna baglydygy gelip çykýar.

$y(t)$ stasionar prosesiň **awtokowariasiýa funksiýasy** diýlip:

$$\gamma(k) = cov\,[y(t), y(t+k)] \tag{10.10}$$

funksiýa aýdylýar.

$y(t)$ stasionar prosesiň **awtokorrelýasiýa funksiýasy** diýlip aşakdaky funksiýa aýdylýar:

$$r(k) = corr[y(t), y(t+k)] = \frac{cov[y(t), y(t+k)]}{\sigma(t)\cdot\sigma(t+k)}, \tag{10.11}$$

bu ýerde $k > 0$ – bitin san (natural san).

k ululyga **laga** diýilýär. Ol wagt hatarynyň agzalarynyň arasyndaky aralygy görkezýär. Bu agzalar üçin korrelýasiýa koeffisiýenti hasaplanýar. $r(k)$ korrelýasiýa koeffisiýenti şol bir wagt hatarynyň agzalarynyň arasyndaky bar bolan korrelýasiýany ölçeýär, şonuň üçin ony awtokorrelýasiýa koeffisiýenti diýip atlandyrmak kabul edilendir. $r(k)$ ululygyň k baglylykda üýtgemesi seljerilende $r(k)$ awtokorrelýasiýa funksiýasy barada gürrüň edilýär.

Ak galmagalyň prosesi (arassa tötän wagt hatary) diýlip, düzüjileri $y(t)$ tötän ululyklar garaşsyz we birmeňzeş paýlanan, nol orta bahaly wagt hataryna (tötän prosese) aýdylýar.

Gaussyň ak galmagaly – bu nol orta bahaly we hemişelik dispersiýaly garaşsyz normal paýlanan tötän ululyklaryň yzygiderligidir.

Şol bir wagtda, umumy ýagdaýda, hat-da eger käbir $y(1), y(2),\ldots, y(n)$ tötän ululyklar özara garaşsyz bolsalar we birmenzeş paýlanan bolsalar hem, entek olaryň ak galmagal prosesi bolýandygyny aňlatmaýar. Çünki $y(t)$ tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň we (ýa-da) dispersiýasynyň bolmazlygy mümkin.

$t \neq s$ bolanda $y(t)$ we $y(s)$ tötän ululyklaryň korrelirlenmeýänligi sebäpli ak galmagal prosesine degişli wagt hatary özüni örän regulýar däl alyp barýar. Şol sebäpli, ak galmagal prosesi ykdysadyýetde duşýan wagt hatarlarynyň köpüsini gös-göni modelleşdirmek üçin ýaramly däl. Ýöne, şeýle proses wagt hatarlarynyň has hakyky modellerini gurmak üçin baza (esas) bolup hyzmat edýär. Ak galmagal prosesi üçin ε_t belgilemäni ulanarys.

$r_{\text{hususy}}(k)$ hususy awtokorrelýasiýa funksiýasy wagt hatarynyň k wagt aralyklary (taktlary) bilen bölünen $y(t)$ we $y(t+k)$ agzalarynyň arasynda bar bolan awtokorrelýasiýany görkezýär ($y(t)$ we $y(t+k)$ agzalaryň arasyndaky agzalaryň bu awtokorrelýasiýa edýän täsirleri aýrylandyr).

Goý, awtokorrelýasiýa koeffisiýentleriniň matrisasy berlen bolsun:

$$R = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & \cdots & r_{ok} \\ r_{10} & r_{11} & \cdots & r_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{ko} & r_{k1} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix},$$

bu ýerde r_{ij} element ($i = 0,\ldots, k;\ j = 0,\ldots, k$) r_k awtokorrelýasiýa koeffisiýentine deňdir ($k = |i–j|$, $r(0) = 1$).

Goý, $R_{ij} - r_{ij}$ üçin algebraik doldurgyç bolsun.

Onda

$$r_{\text{hususy}}(k) = -\frac{R_{0k}}{\sqrt{R_{00}R_{kk}}}. \tag{10.12}$$

Mysal üçin,

$$R = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r(1) & r(2) \\ r(1) & 1 & r(1) \\ r(2) & r(1) & 1 \end{pmatrix}$$

bolsa, onda ikinji tertipli hususy awtokorrelýasiýa funksiýasy şeýle bolar:

$$r_{\text{hususy}}(2) = -\frac{\begin{vmatrix} r_{10} & r_{11} \\ r_{20} & r_{21} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r_{10} & r_{11} \end{vmatrix}}} = -\frac{\begin{vmatrix} r(1) & 1 \\ r(2) & r(1) \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & r(1) \\ r(1) & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & r(1) \\ r(1) & 1 \end{vmatrix}}} =$$

$$= \frac{r(2) - r(1)^2}{1 - r(1)^2}.$$

k – njy tertipli saýlama awtokorrelýasiýa funksiýasy şeýle hasaplanyp bilner:

$$\hat{r}(k) = \frac{(n-k)\sum_{t=1}^{n-k} y_t y_{t+k} - \sum_{t=1}^{n-k} y_t \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}}{\sqrt{\left[(n-k)\sum_{t=1}^{n-k} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-k} y_t\right)^2\right]\left[(n-k)\sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}\right)^2\right]}},$$

$k = 1,2,\ldots$.

Saýlama awtokorrelýasiýa funksiýanyň grafigine **korrelogramma** diýilýär. Stationar wagt hatary üçin awtokorrelýasiýa funksiýasynyň bahasy wagt boýunça k süýşmäniň artmagy bilen moduly boýunça kemelýär.

Orta bahanyň bahalandyrmasyna seredeliň.

$y(t_1)$, y (t_2),…,$y(t_n)$ hatar üçin

$$\bar{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y(t_i).$$

Käbir şertlerde bu orta baha prosesiň matematiki garaşmasynyň bahalandyrmasy bolup biler. Şeýlelikde, eger tötän proses berk stasionar bolsa, onda onuň üçin:

1. Matematiki garaşma wagta bagly däl;
2. Dispersiýa wagta bagly däl;

3. Awtokorrelýasiýa we awtokowariasiýa funksiýalary diňe wagt boýunça süýşmä bagly we olar jübüt funksiýalardyr.

Ýöne, bu häsiýetleriň özi wagt hatarynyň berk stasionar bolmaklygy üçin ýeterlik däldir.

Eger tötän prosesiň matematiki garaşmasy we dispersiýasy bar bolup, olar wagta bagly bolmasa, awtokorrelýasiýa we awtokowariasiýa funksiýalary diňe wagt boýunça süýşmä bagly bolsalar, onda oňa gowşak stasionar (giň manyda) tötän proses diýilýär.

Eger islendik t üçin $M\,(y(t)) = 0$ we

$$cov(y(s), y(t)) = \begin{cases} \sigma^2, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$$

ýerine ýetse, onda $y(t)$ wagt hataryna (tötän prosese) giň manyda ak galmagal diýilýär.

Wagt hataryny «aklamak», ýagny ondan trendi, siklleýin, möwsümleýin we beýleki düzüjileri ýok etmek (galyndy ak galmagal prosesinden statistiki tapawutlanmaz ýaly) prosesi wagt hataryny seljermek üçin esasy prosesdir.

Eger ilkinji iki momentleriň funksiýasy bar bolsa, onda dar manyda stasionar tötän proses (berk stasionar tötän proses) şol bir wagtda giň manydaky stasionar tötän proses (gowşak stasionar tötän proses) bolýar.

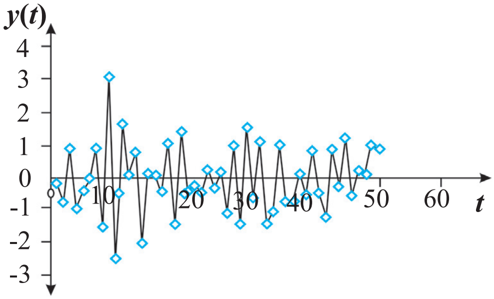
Gauss prosesleri üçin islendik tükenikli ölçegli paýlanyşlar $m\,(t)$ we $C\,(s,\ t)$ funksiýalar bilen kesgitlenýärler. Şonuň üçin giň manydaky gauss stasionar prosesleri şol bir wagtyň özünde dar manyda stasionar prosesler bolýarlar.

§10.5. Awtoregressiýa prosesi (AR (*P*))

$y\,(t)$ prosese seredeliň. Prosesiň t wagt momentindäki bahasy bu prosesiň (t–1) momentdäki bahasy bilen käbir ($y\,(t$–1) bahalara bagly bolmadyk) ε_t tötän düzüjiniň kombinasiýasy ýaly emele gelýär. Goý ε_t – ak galmagal prosesi bolsun. $M\varepsilon_t = 0$, $\boldsymbol{D}\varepsilon_t = \boldsymbol{\sigma}^2$. Köplenç ε_t normal kanun boýunça paýlanan (gauss ak galmagaly) hasaplanýar.

10.6-njy suratda awtoregressiýa prosesine mysal getirilen.

Eger



10.6-njy surat. Birinji tertipli awtoregressiýa AR(1) prosesi

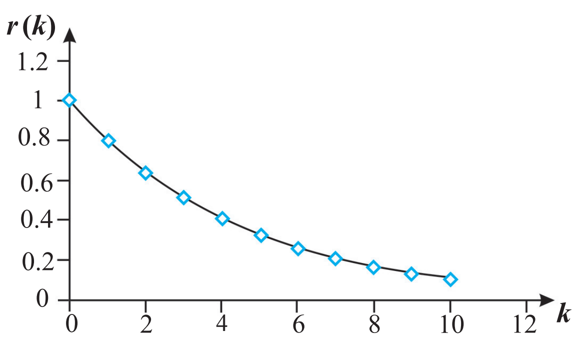
$$y\,(t) = \phi\, y\,(t{-}1) + \varepsilon_t \qquad (10.13)$$

deňlik ýerine ýetse, onda $y\,(t)$ prosese **birinji tertipli awtoregressiýa prosesi (AR(1))** diýilýär. Bu ýerde ϕ – käbir hemişelik ululyk.

Stasionarlyk şertden $M\,(y\,(t)) = 0$ gelip çykýar. $|\phi| < 1$ bolanda AR (1) – stasionar prosesdir.

Prosesiň dispersiýasy $Dy(\,t\,) = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}$. Bu ýerden, eger hataryň yzygiderli bahalary güýçli korrelirlenýän bolsalar ($|\phi|$ 1 - *e* golaý),onda prosesiň dispersiýasynyň tötän faktoryň dispersiýasyndan has uly boljakdygy görünýär. Diýmek, uly bolmadyk täsirler (tolgunmalar) düýpli yrgyldylary döredip biler.

$r\,(k) = \phi^k$ awtokorrelýasiýa funksiýasy laganyň artmagy bilen absolýut ululygy boýunça görkezijili kanun boýunça kemelýär (10.7-nji surat).



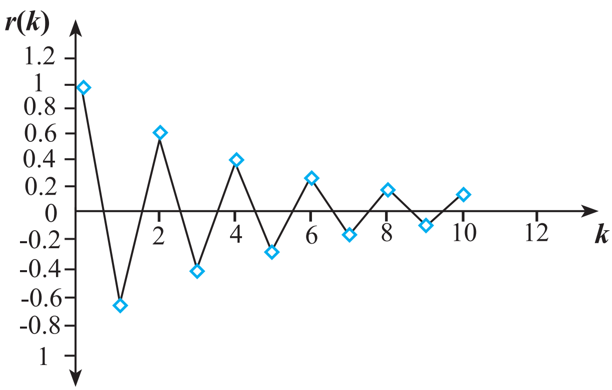
10.7-nji surat. AR(1) prosesiň nazary korrelogrammasy (ϕ = 0,8)

AR(1) (ϕ = 0,8) proses üçin birinji tertipli awtokorrelýasiýanyň nazary hususy koeffisiýenti 0,8 – e deň. Ýokary tertipli koeffisiýentler nola deň.

AR(1) (ϕ = – 0,8) proses üçin birinji tertipli awtokorrelýasiýanyň nazary hususy koeffisiýenti (– 0,8) – e deň. Ýokary tertipli koeffisiýentler nola deň (10.8-nji surat).

Birinji tertipli awtoregressiýanyň stasionar prosesi noldan tapawutly orta baha bilen aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$y\,(t) - \mu = \phi\,(y\,(t-1) - \mu) + \varepsilon_t. \qquad (10.14)$$



10.8-nji surat. AR(1) prosesiň nazary korrelogrammasy (ϕ = – 0,8)

Bu ýerde $My\,(t) = \mu$.

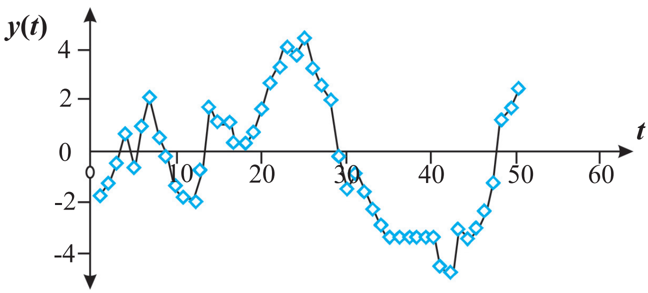
Prosesiň stasionarlygyny hasaba alyp, parametrleri bahalandyrmagy ň aşaky formulalaryny alarys:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$\hat{\phi} = r(1) = \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}}{\sqrt{\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)^2\right]\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}\right)^2\right]}}.$$

Birinji tertipli $y(t) = \phi y\,(t-1) + \varepsilon_t$ awtoregressiýa prosesi $\phi > 1$ ýagdaýda partlaýyş görnüşli (tipli) stasionar däl bolar, onuň awtokorrelýasiýa funksiýasynyň bahalandyrmalary wagt boýunça süýşmäniň artmagy bilen artýarlar.

$\phi = 1$ ýagdaýda AR (1) prosese **tötän azaşma** diýilýär (10.9-njy surat), birinji tapawudyň alynmagy stasionar prosese getirýär.



10.9-njy surat. Tötän azaşma prosesi ($y\,(t) = y\,(t-1) + \varepsilon_t$)

AR(2) prosese seredeliň. Eger

$$y\,(t) = \phi_1 y\,(t-1) + \phi_2 y\,(t-2) + \varepsilon_t \qquad (10.15)$$

ýerine ýetse, onda $y\,(t)$ tötän prosese ikinji tertipli awtoregressiýa prosesi diýilýär. Bu ýerde ϕ_1, ϕ_2 käbir hemişelik ululyklar. Stasionarlyk şertden $My\,(t) = 0$ gelip çykýar. Stasionarlyk şert ϕ_1, ϕ_2 paramertlere hem çäklendirme goýýar:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1,\ \phi_1 - \phi_2 > -1,\ \phi_2 > -1.$$

Noldan tapawutly orta bahasy bolan ikinji tertipli awtoregressiýa prosesi aşakdaky gatnaşyk bilen kesgitlenýär:

$$y\,(t) - \mu = \phi_1\,(y(t-1)-\mu) + \phi_2\,(y(t-2)-\mu) + \varepsilon_t. \qquad (10.16)$$

Bu ýerde $My\,(t) = \mu$.

Prosesiň stasionarlygyny hasaba alyp, paramertleri bahalandyrmalary üçin aşakdaky formulalary almak bolar:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,,$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{r}(1) - \hat{r}(1)\hat{r}(2)}{1 - \hat{r}(1)^2};$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{r}(2) - \hat{r}(1)^2}{1 - \hat{r}(1)^2};$$

bu ýerde

$$\hat{r}(2)=\frac{(n-2)\sum_{i=1}^{n-2}y_i y_{i+2}-\sum_{i=1}^{n-2}y_i\sum_{i=1}^{n-2}y_{i+2}}{\sqrt{\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n-2}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n-2}y_i\right)^2\right]\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n-2}y_{i+2}^2-\left(\sum_{i=1}^{n-2}y_{i+2}\right)^2\right]}}.$$

AR(2) proses üçin nazary awtokorrelýasiýa funksiýasy absolýut ululygy boýunça ýuwaş-ýuwaşdan kemelýär. Birinji we ikinji tertipli awtokorrelýasiýanyň nazary hususy koeffisiýentleri noldan tapawutly, ýokary tertipli koeffisiýentler nola deňdir.

AR(p) prosese seredeliň. Eger

$$y(t)-\mu=\phi_1(y(t-1)-\mu)+\phi_2(y(t-2)-\mu)+\cdots$$
$$\cdots+\phi_p(y(t-p)-\mu)+\varepsilon_t$$

gatnaşyk ýerine ýetse, onda orta bahasy μ bolan $y(t)$ tötän prosese $p-$nji tertipli awtoregressiýa prosesi diýilýär.

Eger prosesiň orta bahasy nola deň bolsa,onda alarys:

$$y(t)=\phi_1 y(t-1)+\phi_2 y(t-2)+\cdots+\phi_p y(t-p)+\varepsilon_t. \quad (10.17)$$

Umumy ýagdaýda stasionar AR prosesiň awtokorrelýasiýa funksiýasy sönýän eksponentalar bilen sönýän sinusoidal tolkunlaryň jemi bolýar.

Parametrleri bahalandyrmak üçin öňünden saýlama awtokorrelýasiýa funksiýasyny kesgitläp, Ýulanyň-Uolkeriň deňlemeler ulgamyny peýdalanýarlar:

$$\hat{r}(1)=\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2\hat{r}(1)+\hat{\phi}_3\hat{r}(2)+\ldots+\hat{\phi}_p\hat{r}(p-1)$$

$$\hat{r}(2)=\hat{\phi}_1\hat{r}(1)+\hat{\phi}_2+\hat{\phi}_3\hat{r}(1)+\ldots+\hat{\phi}_p\hat{r}(p-2)$$

....

$$\hat{r}(p)=\hat{\phi}_1\hat{r}(p-1)+\hat{\phi}_2\hat{r}(p-2)+\hat{\phi}_3\hat{r}(p-3)+\ldots+\hat{\phi}_p.$$

Çözüwi anyk görnüşde ýazmak üçin matrisaly belgilemelere geçeliň:

$$\phi = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \cdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix}, \ r = \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \cdots \\ \hat{r}_p \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} 1 & \hat{r}(1) & \hat{r}(2) \ \dots \ \hat{r}(p-1) \\ \hat{r}(1) & 1 & \hat{r}(1) \ \cdots \hat{r}(p-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \qquad\qquad \cdots \\ \hat{r}(p-1) & \hat{r}(p-2) & \hat{r}(p-3) \ \dots \quad 1 \end{pmatrix}.$$

Onda ýokardaky ulgamy şeýle ýazyp bolýar:

$$R\,\phi = r\,.$$

Ulgamyň çözüwi şeýle görnüşde bolar:

$$\phi = R^{-1}\,r\,.$$

Umumy ýagdaýda AR(p) prosesiň stasionarlyk şertini onuň häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleriniň adalgalarynda (terminlerinde) berýärler. (10.17) prosesiň stasionar bolmagy üçin onuň

$$1-\phi_1 z-\phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0 \qquad (10.18)$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň ähli kökleriniň birlik töweregiň daşynda ýatmaklygy (moduly boýunça 1-den uly bolmaklygy) zerur we ýeterlikdir.

Umumy ýagdaýda (10.18) deňlemäniň kökleri kompleks sanlar bolarlar.

Birinji tertipli awtoregressiýa prosesi üçin häsiýetlendiriji deňleme $1 - \phi_1 z = 0$ bolar. Eger $|\phi| < 1$ bolsa, onda z_0 kök üçin $|z_0| > 1$ şert ýerine ýetýär. Şeýlelik bilen, $|\phi|<1$ şertden (10.13) prosesiň stasionarlygy gelip çykýar.

§10.6. Süýşýän orta bahaly prosesler (MA (q))

1938-nji ýylda Wold şeýle fundamental netijäni subut etdi: Her bir gowşak stasionar wagt hataryny dürli agram koeffisiýentli ak gal-magallaryň çyzykly kombinasiýasy görnüşde aňladyp bolar:

$$y\,(t) = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\,\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\,\varepsilon_{t-q} + \dots\ .$$

Eger Woldyň dagytmasynda tükenikli sanly goşulyjylar bar bolsa

$$y\,(t) = \varepsilon_t + \theta_1\,\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\,\varepsilon_{t-q}\,, \qquad (10.19)$$

onda $y(t)$ prosese q-njy tertipli süýşýän orta bahaly proses (MA(q)) diýilýär. Bu ýerde ε_t – giň ýa-da dar manyda düşünilýän ak galmagal prosesdir.

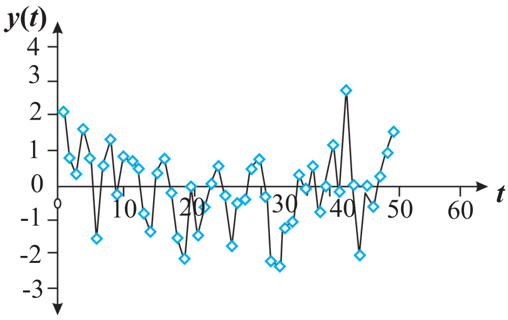
Modeli $\mu \neq 0$ matematiki garaşmasy bolan prosese çenli umumylaşdyryp bolýar:

$$y(t) = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

MA(1) prosesi grafikde şeýle görkezip bolýar (10.10-njy surat).

«Süýşýän orta baha» ady tötän prosesiň häzirki bahasynyň ak galmagalyň öňki bahalarynyň agramlaşdyrylan q orta baha bilen kesgitlenýänligi bilen düşündirilýär.

Süýşýän orta baha prosesi güýçli yrgyldyly maglumatlary düzlemek üçin ulanýarlar.



10.10-njy surat. Süýşýän orta bahaly MA(1) proses

MA (q) proses stasionar prosesdir:

$$My(t) = 0 \quad Dy(t) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2).$$

$|k| > q$ üçin $cov\,(y\,(t), y\,(t + k)) = 0$ ýerine ýetýär.

Bu ýerden käbir tükenikli bölegiň daşynda $r\,(k)$ awtokorrelýasiýanyň nola deňdigi gelip çykýar:

$$r\,(k) = 0,\ |k| > q. \qquad (10.20)$$

Awtokorrelýasiýanyň bu häsiýetini grafikde aýyl-saýyl edip bolýar.

Şeýlelikde, MA(q) proses $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ parametrleriň islendik hakyky bahalarynda stasionar proses bolýar. Ýöne, hataryň häzirki bahasynyň hataryň geçmişe gitdigiçe tükeniksiz artýan we agram koeffisiýentleri bilen alynýan oňki bahalaryna bagly ýagdaý bolmaz ýaly

$$1-\theta_1 z-\theta_2 z^2-\ldots-\theta_q z^q=0$$

häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň birlik tegelegiň daşynda ýatmaklygyny ($|z_j|>1,\ j=1,2,\ldots,q$) talap etmek zerurdyr. Bu tassyklama **tersine öwrülmek şerti** diýilýär.

Awtokorrelýasiýa funksiýany deňlemäniň parametrleri bilen baglanyşdyrýan deňlemeler ulgamy şeýle bolar:

$$r(k)=\frac{-\theta_k+\sum_{j=1}^{q-k}\theta_j\theta_{j+k}}{1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2},\quad k=1,2,\ldots,q,\quad r(k)=0,\quad k>q. \qquad (10.21)$$

(10.21) ulgam çyzykly däl ulgamdyr.

Amalyýetde aýratyn wajyp bolan birinji we ikinji tertipli proseslere seredeliň.

MA (1) prosesiň deňlemesi şeýle görnüşde bolar:

$$y(t)=\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}. \qquad (10.22)$$

Bu ýagdaýda

$$r(k)=\frac{-\theta}{1+\theta^2},\qquad k=1,\quad r(k)=0,\quad k\geq 2.$$

(10.22) prosesiň θ parametrini bahalandyrmak üçin aşakdaky kwadrat deňlemäni çözmeli:

$$\theta^2+\frac{1}{\hat{r}(1)}\theta+1=0.$$

Iki çözüwden $|\theta|<1$ şerti kanagatlandyrýan çözüwi almaly.

MA (2) prosesiň deňlemesi

$$y(t)=\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}$$

görnüşde bolar. Aşakdaky şertleriň ýerine ýetmegi hökmanydyr:

$$|\theta_1|<2,\ \theta_2<1-|\theta_1|.$$

Parametrleri bahalandyrmak üçin θ_1, θ_2 parametrlere görä çyzykly däl iki deňleme ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases}\hat{r}(1)=\dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}\\[2ex] \hat{r}(2)=\dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}.\end{cases}$$

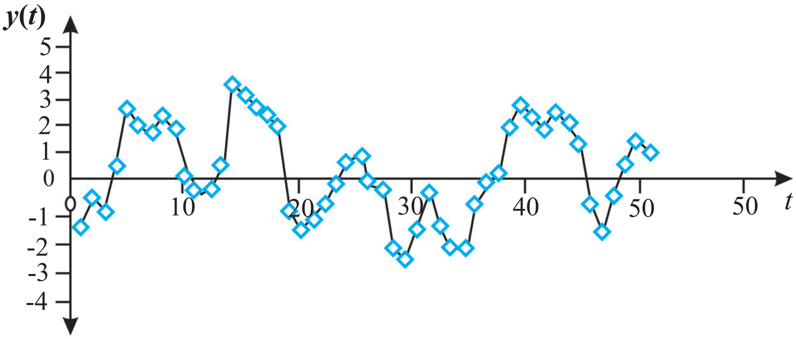
MA(q) proses üçin $r(k)$ nazary awtokorrelýasiýa koeffisiýentleri $1 \leq k \leq q$ bolanda noldan tapawutlydyr, galanlary nola deňdir. Awtokorrelýasiýanyň hususy koeffisiýentleri absolýut ululyklary boýunça ýuwaş-ýuwaş kemelýärler.

Awtoregressiýa we süýşýän orta bahaly prosesleriň şeýle özara baglanyşygy bar. Eger AR(p) stasionar bolsa, onda ol MA(∞) proses görnüşinde berlip bilner. Eger terse öwrülmek şerti ýerine ýetse, onda MA(q) prosesi AR(∞) görnüşde berip bolýar.

§10.7. Awtoregressiýa-süýşýän orta bahaly birleşdirilen (kombinirlenen) prosesler (ARMA(p, q))

AR(p) we MA(q) modelleriň kömegi bilen p we q tertipleri saýlap, köp sanly hakyky prosesleri kanagatlanarly beýan edip bolýar. Ýöne, gözegçilik edilýän wagt hatarlarynyň modelleri saýlananda awtoregressiýa we süýşýän orta bahaly prosesleri (modelleri) bir modele birleşdirmek maksadalaýykdyr. Maksat has ýönekeý, az sanly parametrler bilen gowy approksimasiýa berýän modelleri gurmakdan durýar.

Eger $y(t)$ proses üçin



10.11-nji surat. ARMA(1,1) prosesi

$$y(t) = \phi_1 y(t-1) + \cdots + \phi_p y(t-p) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \\ + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{10.23}$$

gatnaşyk ýerine ýetse, onda oňa p we q tertipleri bolan awtoregressiýa-süýşýän orta bahaly proses (10.11-nji surat) diýilýär (ARMA $(p\,,q)$).

Bu ýerde ε_t – ak galmagal prosesi, $M\,\varepsilon_t = 0$, $D\,\varepsilon_t = \sigma^2$.

Eger $y(t)$ proses hemişelik matematiki garaşma eýe bolsa we onuň üçin $y\,(t) - \mu = \phi_1\,(y\,(t-1) - \mu) + \ldots + \phi_p\,(y\,(t-p) - \mu) + +\varepsilon_t + \theta_1\,\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$ ýerine ýetse, onda oňa **ARMA (*p, q*)** görnüşli proses diýilýär.

ARMA (1,1) modele seredeliň:

$$y(t) = \phi y(t-1) + \varepsilon_t + \theta \cdot \varepsilon_{t-1}\,,$$

$$|\phi| < 1,\ |\theta| < 1\ .$$

Awtokorrelýasiýany parametrler bilen baglanyşdyrýan deňlemeleri ýazalyň:

$$r(1) = \frac{(1-\phi\theta)(\theta-\phi)}{1-2\phi\theta+\phi^2}\,,$$

$$r(k) = \phi^{k-1}\,r(1),\ k \geq 2.$$

Şeýlelikde, $r(k)$ awtokorrelýasiýa $r(1)$ başlangyç bahadan eksponensial kemelýär. Yrgyldynyň ýitmekligi $\phi > 0$ bolsa monoton, $\phi < \theta$ bolsa monoton däl amala aşýar.

Parametrler aşakdaky deňlemelerden bahalandyrylýar:

$$\hat{r}(1) = \frac{(1-\phi\theta)(\theta-\phi)}{1-2\phi\theta+\phi^2}\,,$$

$$\hat{r}(2) = \phi\hat{r}(1)\,.$$

$r(1)$, $r(2)$ awtokorrelýasiýa funksiýalary aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

$$|r(2)| < |r(1)|,$$

$$r(2) > r(1)\,(2r\,(1) + 1),\ \ r\,(1) < 0 \quad \textit{bolanda,}$$

$$r(2) > r(1)\,(2r\,(1) - 1),\ \ r(1) > 0 \quad \textit{bolanda.}$$

Bu şertler seljerilýän prosesiň ARMA(1;1) model bilen ($r(1)$, $r(2)$ awtokorrelýasiýa koeffisiýentleriň saýlama bahalary boýunça) beýan edilýänligi baradaky çaklamany barlamakda peýdalydyr.

ARMA prosesler üçin awtokorrelýasiýanyň nazary koeffisiýentleri we hususy awtokorrelýasiýa koeffisiýentleri absolýut ululygy boýunça ýuwaş-ýuwaş kemelýär.

Modeliň kesgitlenýän tapgyrynda wagt hatarynyň stasionardygyny anyklamaly. Ýagny, wagt hatarynyň bahalarynyň käbir berkidilen derejäniň golaý töwereginde üýtgeýänligini anyklamaly. Onuň üçin wagt hatarynyň we saýlama awtokorrelýasiýa funksiýasynyň grafiklerine seretmek peýdalydyr. Eger hataryň bahalarynda wagtyň geçmegi bilen ösüş ýa-da aşaklama ýüze çyksa, saýlama awtokorrelýasiýa funksiýanyň grafigi bolsa ähmiýetli koeffisiýentleriň çalt ýitmekliginiň ýoklugyny görkezýän bolsa, onda wagt hatarlary stasionar däl bolýarlar.

Eger saýlama awtokorrelýasiýa nola eksponensial ymtylýan bolsa, hususy awtokorrelýasiýalar çalt aýrylýan bolsa, onda modelde awtoregressiýa goşulyjylary hökman bolmaly. Eger saýlama awtokorrelýasiýalar çalt aýrylýan bolsalar, hususy awtokorrelýasiýa bolsa ýuwaş-ýuwaş nola ymtylýan bolsa, onda modelde süýşýän orta bahaly prosesiň goşulyjylary hökman bolmaly. Eger saýlama we hususy awtokorrelýasiýalaryň grafikleri ýuwaş-ýuwaş nola ymtylýan bolsalar, onda modele goşulyjylaryň iki görnüşiniň hem (awtoregressiýa we süýşýän orta bahaly) bolmagy zerurdyr. MA we AR modelleriň q, p tertiplerini saýlama awtokorrelýasiýadaky we hususy awtokorrelýasiýadaky ähmiýetli goşulyjylaryň mukdaryny hasaplap, kesgitläp bolar. Iki görnüşli korrelýasiýanyň koeffisiýentleriniň ähmiýetliligi barada netije çykarmak üçin olaryň bahalaryny $\frac{\pm 2}{\sqrt{n}}$ ululyk bilen deňeşdirip bolar. Bu ýerde n – seredilýän wagt hataryndaky gözegçilikleriň mukdary. Bu usul saýlama toplumyň göwrümi ýeterlik uly bolanda ulanylýar. Deň şertlerde has ýönekeý modelleri saýlamaly.

§10.8. Möwsümleýinligi hasaba alýan ARMA modelleri

Eger gözegçilik edilýän wagt hatary möwsümleýinligi saklaýan bolsa, onda bu hatara degişli ARMA model möwsümleýinligiň ýüze çykmasyny üpjün edýän düzüjileri saklamalydyr.

Çärýekleýin maglumatlar üçin birinji tertipli möwsümleýin awtoregressiýanyň stasionar modelleri (SAR(1)) arassa möwsümleýin modeller bolup bilýär.

$$y(t) = \phi_4\, y(t-4) + \varepsilon_t, \quad \phi_4 < 1\ . \qquad (10.24)$$

$$y(t) = \varepsilon_t + \theta_4\, \varepsilon_{t-4} \qquad (10.25)$$

model (SMA(1)) çärýekleýin maglumatlar üçin möwsümleýin, süýşýän orta bahaly birinji tertipli model bolup bilýär.

Birinji modelde:

$$r(k) = \phi_4^{\,k/4}, \quad k = 4m, \quad m=0,1,2,\ldots \quad \text{üçin},$$

$$r(k) = 0 \ \text{ galan } k > 0 \text{ üçin ýerine ýetýär.}$$

Ikinji modelde:

$$r(0) = 1,\ \ r(4) = \theta_4\,,$$

$$r(k) = 0 \ \ \text{ galan } k > 0 \text{ üçin ýerine ýetýär.}$$

Möwsümleýin däl we möwsümleýin üýtgemeler ARMA((1,4),1) modelde

$$y(t) = \phi_1 y(t-1) + \phi_4\, y(t-4) + \varepsilon_t + \theta_1\, \varepsilon_{t-1}, \qquad (10.26)$$

deňleme bilen, ARMA(1,(1,4)) modelde:

$$y(t) = \phi_1\, y(t-1) + \varepsilon_t + \theta_1\, \varepsilon_{t-1} + \theta_4\, \varepsilon_{t-4} \qquad (10.27)$$

deňleme bilen amala aşyrylýar.

Ýokarda getirilen mysallardan başga multiplikatiw spesifikasiýa hem ulanylýar. Meselem:

$$y(t) = \phi_1\, y(t-1) + \varepsilon_t + \theta_1\, \varepsilon_{t-1} + \theta_4\, \varepsilon_{t-4} + \theta_1\, \theta_4\, \varepsilon_{t-5}. \qquad (10.28)$$

$$y(t)=\phi_1\, y(t-1) + \phi_4\, y(t-4) + \phi_1\, \phi_4\, y(t-5) + \varepsilon_t + \theta_1\, \varepsilon_{t-1}. \qquad (10.29)$$

(10.28) modelde süýşýän orta bahanyň düzüjileriniň 1 we 4 lagalardaky özara täsiri (ýagny, ε_{t-1} we ε_{t-4} bahalaryň özara täsiri) ýolbererlikdir. (10.29) modelde awtoregressiýa düzüjileriň 1 we 4 lagalardaky bahalarynyň ($y\,(t-1)$ we $y(t-4)$) özara täsiri ýolbererlikdir. (10.28 – 10.29) modeller aşakdaky additiw modelleriň hususy hallary bolýarlar:

$$y(t) = \phi_1\, y(t-1) + \varepsilon_t + \theta_1\, \varepsilon_{t-1} + \theta_4\, \varepsilon_{t-4} + \theta_5\, \varepsilon_{t-5},$$

$$y(t) = \phi_1\, y(t-1) + \phi_4\, y(t-4) + \phi_5\, y(t-5) + \varepsilon_t + \theta_1\, \varepsilon_{t-1},$$

$$\theta_5 = \theta_1\, \theta_4, \qquad \phi_5 = \phi_1\, \phi_4.$$

§10.9. Stasionar däl wagt hatarlary. Awtoregressiýa we integrirlenen süýşýän orta bahaly prosesler (ARIMA (*p, k, q*))

Stasionar däl hataryň ýönekeý modeline seredeliň:

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1\, t + \varepsilon_t.$$

Detrendlemegiň netijesinde (ýagny $y(t)$ hataryň bahalaryndan $\beta_0 + \beta_1\, t$ trendi aýyrmaklygyň netijesinde) ε_t staionar hatary (ak galmagal prosesi) alarys.

Ýöne, köp sanly wagt hatarlary üçin determinirlenen trendi aýyrmak amaly (operasiýasy) stasionar hatara getirmeýär. Hatary stasionar görnüşe getirmeklige başga usul bilen hem synanyşyp bolýar. $y(t)$ derejäniň hataryndan birinji tapawutlar $\Delta\, y(t) = y(t) - y(t-1)$ hataryna geçip bolýar. Wagt hatarlarynyň nazaryýetinde şeýle geçişe hatary differensirlemek diýilýär. Şuňa meňzeşlikde ikinji we ýokary tertipli tapawutlary tapýarlar:

$$\Delta^2\, y(t) = \Delta\, y(t) - \Delta\, y(t-1),$$

... .

$$\Delta^k\, y(t) = \Delta^{k-1}\, y(t) - \Delta^{k-1}\, y(t-1).$$

$$\Delta^k y(t) = y(t) - C_k^1 y(t-1) + C_k^2 y(t-2) - \cdots + (-1)^k y(t-k),$$

$$t = k+1, k+2, \ldots, N$$

bolýandygyny görkezip bolar.

Eger $y(t) - f(t)$ hatar stasionar hatar bolsa, onda $y(t)$ wagt hataryna $f(t)$ determinirlenen trende görä stasionar hatar diýilýär. Eger $y(t)$ hatar käbir determinirlenen trende görä stasionar bolsa, onda bu hatar determinirlenen trende görä stasionar hatarlaryň toparyna girýär diýilýär ýa-da oňa TS hatar diýilýär (TS – time stationary). TS hatarlaryň toparyna determinirlenen trendi ýok stasionar hatarlar hem girýärler.

Eger:

1) $y(t)$ hatar stasionar däl ýa-da determinirlenen trende görä stasionar däl, ýagny TS hatar däl bolsa;

2) $y(t)$ hatary k gezek differensirlemekden alnan $\Delta^k y(t)$ hatar stasionar bolsa;

3) $y(t)$ hatary $(k-1)$ gezek differensirlemekden alnan $\Delta^{k-1} y(t)$ hatar TS hatar däl bolsa, onda $y(t)$ hatara k tertipli integrirlenen hatar diýilýär, $k = 1,2,\dots$.

Dürli tertipli ($k = 1,2,\dots$) integrirlenen hatarlaryň toplumy tapawutly stasionar hatarlaryň toparyny ýa-da DS hatarlaryň toparyny (DS – difference stationary) düzýär.

Eger käbir $y(t)$ hatar şu topara degişli bolsa, onda oňa DS hatar diýilýär.

Goý, $y(t)$ k tertipli integrirlenýän hatar bolsun. Bu hatary k gezek differensirläliň. Eger netijede ARMA (p, q) görnüşli stasionar hatar alynsa, onda başlangyç $y(t)$ hatar ARIMA (p, k, q) görnüşli hatar bolýar ýa-da k gezek integrirlenen ARMA (p, q) hatar bolýar diýilýär (ARIMA – awtoregressive integrated moving average).

Awtoregressiýa we integrirlenen süýşýän orta bahaly ARIMA (p, k, q) prosesler J. Boks we G. Jenkins tarapyndan hödürlendi.

Eger derňelýän hatar stasionar däl bolsa, onda onuň awtokorrelýasiýa funksiýasy kemelmez. Eger hatar stasionar bolsa, onda haýsy hem bolsa bir tertipden başlap nazary awtokorrelýasiýalar kemeler. Şonuň üçin olaryň bahalandyrmalary bolan saýlama awtokorrelýasiýalary hasaplap, olaryň kemelýändigine ýa-da kemelmeýändigine seredip bolar. Eger hatar stasionar bolsa, onda p we q parametrleri kesgitlemeklige geçmeli; eger hatar stasionar däl bolsa, onda birinji tertipli tapawutlar hataryny gurmaly we onuň stasionarlygyny barlamaly.

Şeýlelik bilen, Boksyň-Jenkinsiň modeli aşakdaky häsiýetlere eýe bolan $y(t)$ stasionar däl wagt hatarlaryny ($t = 1,2,\dots, N$) beýan etmek üçin niýetlenendir:

1. Hatar $(k-1)$ tertipli, t görä algebraik polinom görnüşli $f(t)$ additiw düzüjini özünde saklaýar ($k \geq 1$); polinomyň koeffisiýentleri stohastiki we stohastiki däl tebigatly bolup bilýärler;

2. $y(t)$ hatardan yzygiderli tapawutlary k gezek ulanyp alnan $y_k(t)$, $t = 1,2,\ldots, N-k,$ hatar ARMA (p, q) model bilen beýan edilip bilner.

Bu bolsa, $y(t)$, $t = 1,2,\ldots, N,$ hataryň ARIMA (p, k, q) modelini aşakdaky görnüşde ýazyp bolýandygyny aňladýar:

$$y_k(t) = \phi_1 y_k(t-1) + \cdots + \phi_p y_k(t-p) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \ ,$$

bu ýerde

$$y_k(t) = \Delta^k y(t) = y(t) - C_k^1 y(t-1) + C_k^2 y(t-2) -$$
$$- \cdots + (-1)^k y(t-k),$$

$$t = k+1, k+2,\ldots, N,$$

$\Delta^k y(t)$ – k-njy tertipli yzygiderli tapawutlar.

Ilki bilen modeliň k tertibini saýlap almaly. Onuň üçin gerekli k tertibe ýetilýänçä $\Delta\, y(t)$, $\Delta^2 y(t)$,… prosesleriň awtokorrelýasiýa funksiýalaryny seljerip bolar. Eger $y_k(t) = \Delta^k\, y(t)$ hataryň awtokorrelýasiýa funksiýasy çalt sönýän bolsa, onda stasionarlyk alynmagy üçin Δ^k tapawudyň zerur k tertibi alnan hasaplanýar. Adatça, iş ýüzünde $k = 0;1$ ýa-da 2 bolýar.

k tertip saýlanyp alnandan soň, biz $y(t)$ hatary däl-de, onuň k-njy tapawudyny, ýagny $y_k\,(t) = \Delta^k\, y(t)$ hatary seljerýäris, onuň identifikasiýasy ARMA (p, q) modeliň identifikasiýasyna getirilýär.

§10.10. Paýlanan lagaly regressiýa modelleri

Goý, Y görkeziji derňelýän bolsun. Onuň t wagt pursatyndaky (momentindäki) bahasyny y_t (ýa-da $y(t)$), soňky pursatlardaky bahalaryny $y_{t+1}, y_{t+1}, \cdots, y_{t+k}, \cdots$ (ýa-da $y(t+1)$, $y(t+2)$,…, $y(t+k)$,…), t pursatdan öňki pursatlardaky bahalaryny $y_{t-1}, y_{t-2},\ldots y_{t-k}$, … (ýa-da $y(t–1)$, $y(t–2)$,…, $y(t–k)$,…) bilen belgileýärler.

Täsiri kesgitli gijä galmak bilen häsiýetlendirilýän üýtgeýän ululyklara **lagaly üýtgeýän ululyklar** diýilýär.

Lagaly modeller (paýlanan lagaly modeller) – bu lagaly üýtgeýän ululyklar hökmünde diňe garaşsyz (düşündiriji) üýtgeýänleri saklaýan modellerdir:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_k x_{t-k} + \varepsilon_t \ , \qquad (10.30)$$

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t \,. \qquad (10.31)$$

Lagalaryň sany tükenikli ýa-da (nazary) tükeniksiz bolup bilýär.

ε_t tötän faktor üçin adaty iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleri ýerine ýetýär. Ekonometriki seljermede şeýle modeller ýeterlik giňden ulanylýar. Sebäbi, köplenç ýagdaýlarda, bir ykdysady faktoryň beýleki faktorlara edýän täsiri şol pursatda däl-de käbir wagta gijä galmak bilen, lagaly amala aşyrylýar. Ykdysadyýetde lagalaryň bolmaklygynyň sebäpleri köpdür. Olaryň käbirlerine seredeliň.

Psihologiki sebäpler. Bu sebäpler adatça, adamlaryň özüni alyp barşyndaky inersiýanyň üsti bilen aňladylýar. Meselem, adamlar öz girdejilerini bir pursatda däl-de, ýuwaş-ýuwaşdan harçlaýarlar.

Tehnologiki sebäpler. Meselem, personal kompýuterleriň oýlanyp tapylmagy uly EHM-leri şol pursatda gysyp çykarmady. Degişli programma üpjünçiligini çalyşmak zerurlygy dowamly wagty talap etdi.

Institusional sebäpler. Meselem, kärhanalaryň arasyndaky gatnaşyklaryň, zähmet şertnamalarynyň wagt boýunça kesgitli üýtgewsiz bolmagy zerurdyr.

Ykdysady görkezijileriň emele gelmek mehanizmi. Meselem, puluň hümmetsizlenmegi, köplenç, inersiýaly proses bolýar. Puluň multiplikatory (bank ulgamynda puluň döredilmegi) hem kesgitli wagt aralygynda hereket edýär.

(10.30–10.31) modellerde β_0 koeffisiýente **gysgamöhletleýin multiplikator** diýilýär. Ol Y ululygyň orta bahasynyň X üýtgeýän ululygyň şol bir wagt pursatyndaky birlik üýtgemesiniň täsiri astynda üýtgemesini häsiýetlendirýär.

Ähli koeffisiýentleriň $\sum_j \beta_j$ jemine **uzakmöhletleýin multiplikator** diýilýär. Ol Y ululygyň X üýtgeýän ululygyň her bir seredilýän wagt döwründäki birlik üýtgemesiniň (bir birlige üýtgemesiniň) täsiri astynda üýtgemesini häsiýetlendirýär. Koeffisiýentleriň islendik $\sum_{j=1}^{h} \beta_j \,, (h < k)$ jemine **aralyk multiplikator** diýilýär.

Modele adaty iň kiçi kwadratlar usuly ulanylanda düşündiriji üýtgeýänleriň arasynda korrelýasiýa meselesi (ýokary derejede multikollinearlyk) ýüze çykýar. Mundan başga-da, lagalaryň sany uly bolanda bahalandyrmak erkinlik derejesiniň sany düýpli azalanda bolup geçýär.

11. sargyt № 2842

Bu kynçylyklar bahalandyrylýan parametrleriň sanyny azaltmak üçin $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ agram koeffisiýentleriň formalary baradaky käbir tejribeden öň tassyklamalary (aprior) kabul etmeklige getirdi. Koýkuň geometriki lagaly gurluşuna seredeliň.

Tükeniksiz sanly lagaly model öwrenilýär:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t \,. \tag{10.32}$$

$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \beta$ hataryň ýygnanmaklygyny talap etmek tebigydyr, $\lim_{i\to\infty} \beta_i = 0$.Bu ýagdaý x_{t-i} bahanyň $y(t)$ ululyga edýän tasiriniň olaryň arasyndaky wagt aralygynyň artmagy bilen kemelýändigini aňladýar.

Koýk normirlenen

$$w_i = \frac{\beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i}, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1$$

koeffisiýentleriň geometrik progressiýada kemelýändigini postulirledi. Ýagny

$$w_i = (1-\lambda)\,\lambda^i, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Bu ýolberme modeliň güýçli ýönekeýleşmegine getirýär. λ parametr laganyň artmagy bilen koeffisiýentleriň kemelmeginiň tizligini häsiýetlendirýär.

Başlangyç modeli şeýle görnüşde ýazyp bolar:

$$y_t = \alpha + \beta w_0 x_t + \beta w_1 x_{t-1} + \beta w_2 x_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\cdot$$
$$\cdot(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \cdots) + \varepsilon_t \,. \tag{10.33}$$

Deňlemäni öňden gelýän (t–1) wagt pursady üçin ýazalyň:

$$y_{t-1} = \alpha + \beta(1-\lambda)(x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \cdots) + \varepsilon_{t-1} \,. \tag{10.34}$$

(10.34) deňlemäni λ köpeldip, (10.33) deňlemeden aýyrýarys:

$$y_t = (1-\lambda)\,\alpha + \beta\,(1-\lambda)\,x_t + \lambda y_{t-1} + (\varepsilon_t - \lambda\,\varepsilon_{t-1}).$$

Netijede, bary-ýogy birnäçe näbelli parametrli deňleme alnar. Ýöne, $(\varepsilon_t - \lambda\,\varepsilon_{t-1})$ tötän düzüji bahalandyrylýan parametre baglydyr we y_{t-1} düşündiriji üýtgeýän ululyk bilen korrelirlenýär.

Deňlemede düşündiriji üýtgeýän ululyk hökmünde bagly ululygyň y_{t-1} lagaly bahasy ýüze çykdy. Şuňa meňzeş netijelere beýleki modeller hem getirýärler. Şeýle görnüşli gowy belli modeller bolup bölek korrektirleme modeli we adaptiw garaşmalar modeli hyzmat edip biler.

Bölek korrektirleme modeline seredeliň. Bölek korrektirlemäni ulanmaklygyň argumenti bolup öwrenilýän ykdysagy ululyk (obýekt) barada doly göz öňüne getirmäniň ýoklugy, ykdysagy ululygyň inersiýalylygy hem-de üýtgemeler üçin töleg hyzmat edip biler.

Goý, $y_t^* = \alpha + \beta x_t$ ýaly kesgitlenýän y_t^* ululyk y ululygyň x_t degişli optimal bahasyny görkezýän bolsun. Meselem, eger x_t bar bolan sarp ediş girdejini aňladýan bolsa, onda y_t^* sarp ediş çykdajylarynyň degişli optimal bahasyny (ululygyny) aňladyp biler. Girdeji üýtgände täze ýagdaýa çalt girişer ýaly sarp edijide özüniň islegler giňişligi barada zerur maglumatlaryň bolmazlygy mümkin. Şonuň üçin onuň özüni alyp barşyny korrektirleýän funksiýa bilen beýan edýärler:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \qquad (10.35)$$

Bu funksiýa geçýän döwrüň içinde sarp edijiniň y_{t-1} başlangyç ýagdaýdan y_t^* optimal ýagdaýa çenli aralygy geçýändigini görkezýär. (10.35) deňleme şeýle görnüşe özgerdilýär:

$$y_t = \lambda y_t^* + (1-\lambda)y_{t-1} + \varepsilon_t . \qquad (10.36)$$

$y_t^* = \alpha + \beta x_t$ deňlemäni (10.36) deňlemede goýup, alarys:

$$y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta x_t + (1-\lambda)\, y_{t-1} + \lambda\, \varepsilon_t . \qquad (10.37)$$

Bu modele bölek korrektirleme modeli diýilýär.

(10.36) deňlemeden görnüşi ýaly, y_t baha islenilýän y_t^* baha bilen berlen bagly ululygyň öňdäki döwürdäki bahasynyň agramlaşdyrylan orta bahasy bolýar.

λ uly boldugyça korrektirleme hem çalt geçýär. $\lambda = 1$ bolanda doly korrektirleme bir döwrüň (periodyň) dowamynda bolup geçýär. $\lambda = 0$ bolanda hiç hili korrektirleme geçmeýär.

(10.37) bölek korrektirleme modeli **Koýkuň** modeline meňzeşdir. Bu model tötän düşündiriji y_{t-1} üýtgeýäni hem özünde saklaýar. Ýöne, bu modelde y_{t-1} üýtgeýän ululyk ε_t tötän gyşarmanyň bahasy bilen korrelirlenmeýär.

Bölek korrektirleme modeli bilen baglanyşykly kynçylyk şeýle ýagdaýdan durýar. Ýagny, käwagt y ululygyň optimal bahasynyň diňe x-iň häzirki bahasyna baglylygy baradaky öňünden aýdylan tassyklama ýaramsyz bolýar. Eger x – iň bahasy döwürden döwre üýtgeýän bolsa, onda onuň şu wagtky bahasy çözüw kabul etmek üçin esasy sebäp bolup bilmeýär. Şu nukdaý nazar (pikir) adaptiw garaşmalar modelinde şöhlelenme tapdy.

Garaşmalar ykdysady işjeňlikde düýpli orun tutýarlar. Bu degişli ykdysady prosesleri modelleşdirmegi kynlaşdyrýar. Şeýle modeller bilen ykdysadyýetiň ösüşiniň takyk çaklaýyşlaryny etmekde hem kynçylyk döreýär. Aýratyn hem, bu mesele makroykdysady derejede düýpli meseledir.

Meselem, diňe göterim derejesiniň esasynda maýa goýumlaryň göwrümi barada çaklaýyş geçirmek kanagatlanarly çaklaýşy almaga mümkinçilik bermeýär.

Döwletiň ykdysady syýasaty düýpli orun tutýar. Bu syýasatyň esasynda maýadarlar öz çözüwlerini kabul edýärler. Hususan-da, doly işliligi üpjün etmäge ugrukdyrylan syýasata hümmetsizlenmäni höweslendiriji hökmünde seredýärler. Bu bolsa işewür adamlaryň ynamyny ýok edýär we maýa goýumyň göwrümi peselýär.

Seredilýän meseläni çözmekligiň ugurlarynyň biri hem adaptiw garaşmalar modelidir. Bu modelde derňelýän görkezijini amala aşyrmak baradaky maglumatlaryň esasynda garaşmalary hemişelik korrektirleme bolup geçýär. Eger görkezijiniň hakyky bahasy garaşylýan bahadan uly bolsa, onda indiki döwürdäki garaşylýan baha artýan tarapa korrektirlenýär. Garşylykly ýagdaýda ters ugra korrektirleme geçirilýär. Korrektirlemäniň ululygy hakyky we garaşylýan bahalaryň tapawudyna proporsionaldyr. Goý, bagly y_t ululyk düşündiriji üýtgeýän ululygyň garaşylýan x_t^* bahasy bilen şeýle baglanyşýan bolsun:

$$y_t = \alpha + \beta x_t^* + \varepsilon_t \ . \tag{10.38}$$

Bu deňleme bilen amal geçirmek mümkinçiligi bolar ýaly garaşmalaryň nähili formirlenýänligi baradaky öňden tassyklamalar bilen modeli doldurmaly.

Adaptiw garaşmalar baradaky öňden tassyklamalar şeýle görnüşde ýazylyp bilner:

$$x_t^* - x_{t-1}^* = \gamma(x_t - x_{t-1}^*), \qquad 0 \le \gamma \le 1, \tag{10.39}$$

bu ýerde γ – garaşmanyň koeffisiýenti. Ykdysady ululyklaryň garaşmalary bu ýagdaýda geçen döwürdäki garaşmalardan durýar. Geçen döwürdäki garaşmalar göýberilen ýalňyşlyklaryň ululygyna korrektirlenýärler.

(10.39) deňlemäni şeýle görnüşde ýazyp bolar:

$$x_t^* = \gamma x_t + (1-\gamma)x_{t-1}^*. \tag{10.40}$$

(10.40) deňlemeden görnüşi ýaly x_t^* garaşylýan baha x_t hakyky baha bilen onuň öňki döwürdäki x_{t-1}^* garaşylýan bahasynyň agramlaşdyrylan orta bahasy bolýar. x_t ululygyň agram koeffisiýenti γ, x_{t-1}^* ululygyň agram koeffisiýenti $(1–\gamma)$ deňdir.

(10.38) deňlemede y_t ululyk x_t^* ululyk bilen aňladylan.

Eger (10.40) deňleme t döwür üçin ýerine ýetýän bolsa, onda ol $(t–1)$ döwür üçin hem ýerine ýetmeli.

$$x_{t-1}^* = \gamma x_{t-1} + (1-\gamma)x_{t-2}^*. \tag{10.41}$$

(10.41) deňlemede x_{t-1}^* ululygy çalşyp bolýar, ýöne onuň ýerine x_{t-2}^* ýüze çykýar:

$$x_t^* = \gamma x_t + \gamma(1-\gamma)x_{t-1} + (1-\gamma)^2 x_{t-2}^*. \tag{10.42}$$

Eger (10.41) aňlatmada $(t–2)$ döwri saýlasak, onda x_{t-1}^* ululygyň ýerine (10.42) aňlatmada x_{t-2}^* ýüze çykýar. Bu ýagdaýy tükeniksiz gezek gaýtalap, alarys:

$$x_t^* = \gamma x_t + \gamma((1-\gamma)x_{t-1} + (1-\gamma)^2 x_{t-2} + \cdots). \tag{10.43}$$

Netijede, adaptiw garaşmalar modeli aşakdaky tassyklama getirilýär: üýtgeýän ululygyň garaşylýan bahasy onuň geçen döwürlerdäki bahalarynyň geometriki kemelýän agram koeffisiýentleri bilen alnan agramlaşdyrylan orta bahasy bolýar. (10.43) deňligi (10.38) deňlikde goýup we $(1–\gamma)$ ululygy λ bilen çalşyp, alarys:

$$y_t = \alpha + \beta\gamma(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \cdots) + \varepsilon_t. \tag{10.44}$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly y_t baha x ululygyň häzirki we geçen döwürlerdäki lagaly bahalary bilen kesgitlenýär. Lagalar **Koýkuň** paýlanyşyna boýun egýärler.

Agram koeffisiýentleriň formirlenýän shemasy **Koýkuň** şertlerini kanagatlandyrýan ýagdaýynda modeliň sag tarapynda düşündirilýän (bagly) ululygyň lagaly bahalary ýüze çykýarlar. Bu bolsa bahalandyrmanyň täze meseleleriniň ýüze çykmagyna getirýär. y_{t-1} düşündiriji üýtgeýän ululygyň tötän ýagdaýy (häsiýeti) bolýar. Bu bolsa iň kiçi kwadratlar usulynyň şertleriniň biriniň ýerine ýetmeýändigini aňladýar. Mundan başga-da, bu düşündiriji üýtgeýän ululygyň $v_t = \varepsilon_t - \rho\, \varepsilon_{t-1}$ tötän gyşarma bilen korrelirlenýän bolmagy gaty ahmal.

Eger başlangyç modeliň ε_t, ε_{t-1} tötän gyşarmalary üçin iň kiçi kwadratlar usulynyň 3-nji şerti ýerine ýetýän bolsa, onda v_t tötän gyşarmalar üçin awtokorrelýasiýa bardyr.

Uollis tarapyndan hödürlenen usula seredeliň. Bu usul üç tapgyrdan durýar:

1. $y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_t + v_t$ regressiýanyň koeffisiýentleri bahalandyrylýar, bu ýerde x_{t-1} ululyk y_{t-1} üýtgeýän ululyk üçin **instrumental** üýtgeýän ululyk hökmünde peýdalanylýar.

Şeýlelik bilen

$$\hat{\beta} = [Z^T X]^{-1} Z^T Y .$$

Bu ýerde

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2. Galyndylar aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \dots \\ \hat{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}.$$

Bu galyndylar üçin birinji tertipli awtokorrelýasiýanyň koeffisiýenti (süýşmä düzedişi göz öňünde tutup) hasaplanýar:

$$r = \frac{\dfrac{\sum\limits_{t=2}^{n} \hat{v}_t \hat{v}_{t-1}}{(n-1)}}{\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n} \hat{v}_t^2}{n}} + \frac{3}{n}.$$

r ululyk ρ parametriň bahalandyrmasy üçin ulanylýar.

3. ρ üçin alnan bahalandyrmany ulanyp, aşakdaky matrisa alynýar:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} \\ r & 1 & r & \cdots & r^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Soňra, umumylaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usuly bilen parametrleriň täze bahalandyrmasy hasaplanýar:

$$b = [X^T \hat{\Omega}^{-1} X]^{-1} Z^T \hat{\Omega}^{-1} Y .$$

§10.11. Ş. Almonyň polinomly paýlanan lagalary

Koýkuň özgertmesi peýdalanylanda regressiýa koeffisiýentlerine ýeterlik berk çäklendirmeler goýulýar. Lagaly üýtgeýän ululyklaryň koeffisiýentleriniň «agramlary» geometrik progressiýa görnüşde kemelýär diýlip hasaplanylýar. Käbir ýagdaýlarda şeýle şertiň goýulmagy ýerliklidir, ýöne, käbir başga ýagdaýlarda bu şert ýerine ýetmeýär. Gözegçilik edilýän pursatdan soňky 3-4 döwürlerdäki lagaly düşündiriji üýtgeýän ululygyň bahalary bagly ululyga häzirki ýa-da geçen döwürlerdäki bahalardan köp täsir edýän ýagdaýlar bolýar. Şeýle üýtgemeleri **Almonyň** paýlanan lagalarynyň kömegi bilen ýeterlik derejede modelleşdirip bolýar. **Weýerştrassyň** teoremasyna esaslanyp, (10.30) modeldäki β_i agram koeffisiýentlere laganyň i ululygyna bagly funksiýa ýaly garap, Ş. Almon β_i agram koeffisiýentleri uly bolmadyk m tertipli ($m \leq 3$), i ululyga bagly polinom görnüşde aňlatmaklygy teklip etdi:

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_i i + \alpha_2 i^2 + \cdots + \alpha_m i^m . \qquad (10.45)$$

Almonyň shemasyny ýönekeý düşündirmek üçin β_i ululygy şeýle baglanyşykda ýazalyň:

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2. \qquad 10.46)$$

Onda (10.30) deňlemäni şeýle görnüşde ýazyp bolar:

$$y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{k} (\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2) x_{t-i} + \varepsilon_t =$$

$$= \alpha + \alpha_0 \sum_{i=0}^{k} x_{t-i} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{k} i x_{t-i} + \alpha_2 \sum_{i=0}^{k} x_{t-i} i^2 + \varepsilon_t . \qquad (10.47)$$

$$z_{t0} = \sum_{i=0}^{k} x_{t-i} , \qquad z_{t1} = \sum_{i=0}^{k} i x_{t-i} , \qquad z_{t2} = \sum_{i=0}^{k} i^2 x_{t-i}$$

ornuna goýmalary ulanyp, alarys:

$$y_t = \alpha + \alpha_0 z_{t0} + \alpha_1 z_{t1} + \alpha_2 z_{t2} + \varepsilon_t . \qquad (10.48)$$

α, α_0, α_1, α_2 bahalar iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyrylyp bilner. ε_t tötän gyşarmalar iň kiçi kwadratlar usulynyň şertlerini kanagatlandyrýarlar. β_i koeffisiýentler (10.46) gatnaşykdan kesgitlenýärler.

Almonyň shemasyny ulanmak üçin ilki bilen lagalaryň k sanyny tapmaly. Adatça, ilki bilen «ýaramly» maksimal baha tapylýar, soňra kemeldilip alynýar. k san kesgitlenenden soňra (10.45) polinomyň m derejesini saýlamaly.

Z_{ti} üýtgeýänleriň özara korrelirlenýänligi we bu korrelýasiýanyň m–iň artmagy bilen ýokarlanýanlygy bu usulyň kemçiligidir. Bu bolsa (10.48) görnüşli deňlemeleriň α_i koeffisiýentleriniň standart ýalňyşlyklaryny artdyrýar.

10.4-nji mysal. Goý, x – girdeji; y – käbir haryda sarp edilýän çykdajy bolsun. Aşakdaky maglumatlar berlen (10.5-nji tablisa).

10.5-nji tablisa

Şertli wagt	x	y	z_0	z_1	z_2
1	11,4	13,2	–	–	–
2	11,8	14	–	–	–
3	7,1	12,5	–	–	–
4	10,4	13	40,7	64,9	156,9
5	7,5	11,5	36,8	60	145
6	14	13,8	39	49,6	113
7	9,9	13,8	41,8	60,2	137,6
8	14,4	15,9	45,8	60,4	133,4
9	9	14	47,3	76,2	180
10	9,4	13,3	42,7	67,5	155,7
11	14,9	15,7	47,7	70,6	175
12	15,3	16,9	48,6	60,7	133,5
13	12,8	16,5	52,4	73,3	159,5
14	14,8	17,6	57,8	88,1	208,1
15	9,6	15,3	52,5	86,3	203,7
16	18	18,1	55,2	77,6	184
17	11,3	16,8	53,7	81,6	189,6
18	9,8	14,8	48,7	76,1	169,7

Goý, lagalaryň sany üçe deň we **Almonyň** modelindäki agramlar ikinji derejeli polinoma degişli bolsunlar:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \varepsilon_t ,$$

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 .$$

Onda model aşakdaky görnüşi alar:

$$y_t = \alpha + \alpha_0 z_{t0} + \alpha_1 z_{t1} + \alpha_2 z_{t2} + \varepsilon_t ,$$

$$z_{t0} = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} ,$$

$$z_{t1} = x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3}\,,$$

$$z_{t2} = x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3}\,.$$

Parametrler bahalandyrylandan soňra regressiýanyň empiriki deňlemesini alarys:

$$\hat{y}_t = 2,2 + 0,4994z_{t0} + 0,2374z_{t1} + 0,03646z_{t2}\,,$$

$$\beta_i = 0,4994 + 0,2374i + 0,03646i^2\,.$$

Başky üýtgeýän ululyklara dolanyp, alarys:

$$\hat{y}_t = 2,2 + 0,499x_t + 0,298x_{t-1} + 0,170x_{t-2} + 0,1152x_{t-3}\,.$$

Soraglar:

1. Wagt hatary diýlip nämä aýdylýar ?
2. Wagt hatarynyň nähili düzüjileri bar ?
3. Wagt hatarlarynyň additiw modeli nähili bolýar?
4. Wagt hatarlarynyň multiplikatiw modeli nähili bolýar ?
5. Trend näme ?
6. Wagt hatarynyň haýsy düzüjisi hemme wagt modelde bar ?
7. Haýsy hatara dar manyda stasionar hatar diýilýär ?
8. Haýsy hatara giň manyda stasionar hatar diýilýär ?

XI bap

BIRWAGTLAÝYN DEŇLEMELER ULGAMLARY

§11.1. Umumy düşünjeler

Özarabaglanyşykly regressiýa modelleriň toplumyna **birwagtlaýyn deňlemeler ulgamy** diýilýär. Bu modellerde şol bir üýtgeýän ululyklar bir wagtda (dürli deňlemelerde) bagly we bagly däl (düşündiriji) üýtgeýän ululyk bolup bilýär.

Birwagtlaýyn deňlemeler ulgamyna seredilende üýtgeýän ululyklar iki uly bölege – endogen we ekzogen üýtgeýän ululyklara bölünýärler. Endogen üýtgeýän ululyklaryň bahalary modeliň içinde kesgitlenýär. Ekzogen üýtgeýän ululyklar modele daşyndan girizilýär. Ekzogen üýtgeýän ululyklaryň bahalary modeliň daşynda kesgitlenýär, olar berkidilen hasaplanýar. Bu ululyklaryň esasy tapawudy ekzogen üýtgeýän ululyklaryň tötän gyşarmalar (ýalňyşlyklar) bilen korrelirlenmeýänliginde we endogen üýtgeýän ululyklaryň bolsa tötän gyşarmalar bilen korrelirlenip bilýänligindedir. Mundan başga-da, model dürli görnüşli parametrleri (koeffisiýentleri) saklaýar, bu parametrler statistiki bahalandyrmanyň barşynda kesgitlenýärler.

Ykdysadyýetçileri modeliň mukdar seljermesi gyzyklandyrýar. Ýagny, bar bolan maglumatlaryň esasynda parametrleriň bahalandyrmasyny kesgitlemek gyzyklandyrýar. Bu ýerde identifisirlenmek meselesi ýüze çykýar: teklip edilýän modelde käbir parametrleriň bahasyny birbelgili dikeltmek mümkinmi ýa-da mümkin däl? Bahalandyrmaga geçmezden öň olary ulanmaklygyň manysynyň bardygyna ynamyň bolmagy zerurdyr. Başlangyç modeli düzýän deňlemelere modeliň gurluş deňlemeleri diýilýär. Modeliň gurluş formasy bu ykdysady nazaryýetiň düzgünlerine laýyklykda üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy şöhlelendirýän deňlemeler ulgamydyr. Modeliň gurluş formasynyň parametrlerine **gurluş parametrleri** diýilýär.

Eger model toždestwolary saklaýan bolsa, onda olara deňlemeler diýip bolar. Bu toždestwolarda üýtgeýän ululyklaryň gurluş parametrleri bire deň.

Endogen üýtgeýän ululyklary kesgitlemegiň shemasy bar bolan deňlemelere **getirilen deňlemeler** diýilýär. Bu deňlemelerde endogen üýtgeýän ululyklar diňe ekzogen üýtgeýänleriň, endogen üýtgeýänleriň lagaly bahalarynyň we tötän düzüjileriň üsti bilen aňladylýar. Ekzogen we lagaly endogen üýtgeýän ululyklar öňden kesgitlenen diýlip hasaplanylýar. Şeýlelik bilen, modeliň getirilen formasynda umumy ýagdaýda endogen üýtgeýän ululyklar öňden kesgitlenen üýtgeýän ululyklar bilen aňladylýar. Modeliň getirilen formasy – bu her bir endogen üýtgeýän ululyk modeliň ähli öňden kesgitlenen üýtgeýän ululyklaryna görä çyzykly funksiýa bölýän deňlemeler ulgamydyr. Ykdysady düşündiriş (interpretasiýa) üçin gurluş deňlemeleri, çaklaýyş üçin getirilen forma ulanylýar.

Özara bagly endogen üýtgeýän ululyklary (wagt boýunça yza galmaýan) Y_{1t}, Y_{2t},..., Y_{mt} ýaly belgiläliň. Wagt boýunça yza galýan endogen üýtgeýän ululyklary we ekzogen üýtgeýän ululyklary (yza galýan we yza galmaýan) $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt}$ ýaly belgiläliň.

Toždestwo – deňlemeleri saklaýan modele seredilmeýär. Onda modeliň umumy formasy şu görnüşde bolar:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \sum_{i=2}^{m} \beta_{1t} Y_{it} + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{1j} x_{jt} + \varepsilon_{1t} \ , \\ Y_{2t} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{m} \beta_{2t} Y_{it} + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{2j} X_{jt} + \varepsilon_{2t} \ , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{mt} &= \sum_{i=1}^{m-1} \beta_{mt} Y_{it} + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{mj} X_{jt} + \varepsilon_{mt} \ . \end{aligned} \tag{11.1}$$

Bu ýerde $j = 0$ azat koeffisiýente degişli. $X_0 = (1,1,...,1)$ diýip hasap edýäris.

Umumy ýagdaýda β we γ koeffisiýentleriň käbirleri nola deň bolmaly. Eger şeýle bolmasa, statistiki bahalandyrmak mümkin däldir. (11.1) ulgamy matrisa görnüşinde ýazalyň:

$$BY_t + \Gamma X_t = \varepsilon_t, \tag{11.2}$$

bu ýerde

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \cdots \\ Y_{mt} \end{pmatrix} -$$

– wagt boýunça yza galmaýan endogen üýtgeýän ululyklaryň $m \times 1$ ölçegli wektor – sütüni;

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ X_{1t} \\ X_{2t} \\ \cdots \\ X_{kt} \end{pmatrix} -$$

– öňden kesgitlenen üýtgeýän ululyklaryň (wagt boýunça yza galýan we galmaýan ekzogen üýtgeýän ululyklaryň we wagt boýunça yza galýan endogen üýtgeýänleriň) $(k+1) \times 1$ ölçegli wektor – sütüni;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1m} \\ -\beta_{21} & 1 & \cdots & -\beta_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\beta_{m1} & -\beta_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} -$$

– endogen üýtgeýän ululyklaryň bahalaryna degişli parametrleriň $m \times m$ ölçegli matrisasy;

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \cdots \\ \varepsilon_{mt} \end{pmatrix} -$$

– tötän gyşarmalaryň $m \times 1$ ölçegli wektor – sütüni;

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\gamma_{10} & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & \cdots & -\gamma_{1k} \\ -\gamma_{20} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & \cdots & -\gamma_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\gamma_{m0} & -\gamma_{m1} & -\gamma_{m2} & \cdots & -\gamma_{mk} \end{pmatrix} -$$

– X üýtgeýän ululyklaryň koeffisiýentlerinden düzülen $m \times (k+1)$ ölçegli matrisa.

Eger B matrisa aýratyn däl matrisa (kesgitleýjisi nola deň däl matrisa) bolsa, onda Y üýtgeýän ululyklary X üýtgeýän ululyklaryň üsti bilen aňladyp bolar:

$$BY_t + \Gamma X_t = \varepsilon_t,\ B^{-1} BY_t + B^{-1}\Gamma X_t = B^{-1} \varepsilon_t,$$

$$Y_t = -B^{-1} \Gamma X_t + B^{-1} \varepsilon_t .$$

Onda modeliň getirilen formasyny alarys:

$$Y_{1t} = \sum_{j=0}^{k} \pi_{1j} X_{jt} + \eta_{1t} ,$$

$$Y_{2t} = \sum_{j=0}^{k} \pi_{2j} X_{jt} + \eta_{2t} ,$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$Y_{mt} = \sum_{j=0}^{k} \pi_{mj} X_{jt} + \eta_{mt} .$$

Getirilen formany matrisa görnüşde ýazalyň:

$$Y_t = \Pi X_t + \eta_t,$$

bu ýerde

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{10} & \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1k} \\ \pi_{20} & \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{m0} & \pi_{m1} & \pi_{m2} & \cdots & \pi_{mk} \end{pmatrix} -$$

– getirilen formadaky X üýtgeýän ululyklaryň koeffisiýentlerinden düzülen $m \times (k+1)$ ölçegli matrisa;

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \cdots \\ \eta_{mt} \end{pmatrix} -$$

– modeliň getirilen formasyndaky tötän gyşarmalaryň wektory.

Modeliň gurluş we getirilen formalarynyň parametrleri şeýle baglanyşýar:

$$\Pi = -B^{-1} \Gamma, \qquad \eta_t = B^{-1} \varepsilon_t .$$

Ýokardaky gatnaşyklardan we modeliň getirilen formasyndan görnüşi ýaly, Y_{1t}, Y_{2t}, …, Y_{mt} endogen üýtgeýänleriň her biri ε_{1t}, ε_{2t},…, ε_{mt} tötän täsirleriň her biriniň täsirini duýup biljek. Şonuň üçin, eger modeliň gurluş formasynda Y_{1t}, Y_{2t},…, Y_{mt} endogen üýtgeýänleriň haýsy hem bolsa biri düşündiriji üýtgeýän ululyk hökmünde duran bolsa, onda bu ululyk bu deňlemäniň tötän faktory bilen hökman diýen ýaly korrelirlenýär. Endogen düşündiriji üýtgeýänler bilen tötän tolgunmalaryň arasyndaky korrelýasiýa adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen alnan bahalandyrmalaryň ygtybarly däldigini aňladýar.

11.1-nji mysal. Aşakdaky modele seredeliň:

$$I_t = \beta_{13} V_t + \gamma_{10} + \gamma_{11} I_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$X_t = \beta_{23} V_t + \gamma_{20} + \gamma_{22} K_t + \varepsilon_{2t},$$
$$V_t = \beta_{32} X_t + \gamma_{30} + \gamma_{31} I_{t-1} + \varepsilon_{3t},$$

bu ýerde I – maýa goýum çykdajylary; X – işleýänleriň sany; V – önümiň mukdary; K – esasy önümçilik serişdeleriniň gymmaty.

Berlen mysalda I_t, X_t, V_t – endogen üýtgeýän ululyklar, K_t – ekzogen üýtgeýän ululyk, I_{t-1} – öňden kesgitlenen üýtgeýän ululyk (lagaly endogen üýtgeýän ululyk). Tötän ululyklardan başga ähli goşulyjylary çep tarapa geçirip, alarys:

$$I_t - \beta_{13} V_t - \gamma_{10} - \gamma_{11} I_{t-1} = \varepsilon_{1t},$$
$$X_t - \beta_{23} V_t - \gamma_{20} - \gamma_{22} K_t = \varepsilon_{2t},$$
$$V_t - \beta_{32} X_t - \gamma_{30} - \gamma_{31} I_{t-1} = \varepsilon_{3t} .$$

Gurluş modeliň matrisa formasy şeýle görnüşde bolar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_{13} \\ 0 & 1 & -\beta_{23} \\ 0 & -\beta_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_t \\ X_t \\ V_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma_{10} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\gamma_{20} & 0 & -\gamma_{22} \\ -\gamma_{30} & -\gamma_{31} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ I_{t-1} \\ K_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{pmatrix}.$$

Modeliň getirilen formasyny ýazalyň:

$$\begin{pmatrix} I_t \\ X_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{10} & \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{20} & \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{30} & \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ I_{t-1} \\ K_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \eta_{3t} \end{pmatrix}.$$

Getirilen formanyň parametrlerini modeliň gurluş formasynyň parametrleriniň üsti bilen aňladalyň:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\beta_{13}\\ 0 & 1 & -\beta_{23}\\ 0 & -\beta_{32} & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-\beta_{13}\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{-\beta_{13}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ 0 & \dfrac{1}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{\beta_{23}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ 0 & \dfrac{\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{1}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\end{pmatrix},$$

$$\Pi=-B^{-1}\Gamma=-\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-\beta_{13}\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{-\beta_{13}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ 0 & \dfrac{1}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{\beta_{23}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ 0 & \dfrac{\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{1}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\gamma_{10} & -\gamma_{11} & 0\\ -\gamma_{20} & 0 & -\gamma_{22}\\ -\gamma_{30} & -\gamma_{31} & 0\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma_{20}\beta_{13}\beta_{32}+\gamma_{30}\beta_{13}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}-\gamma_{10} & \dfrac{\gamma_{31}\beta_{13}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}-\gamma_{11} & \dfrac{\gamma_{22}\beta_{13}\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ \dfrac{-\gamma_{20}-\gamma_{30}\cdot\beta_{23}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{-\gamma_{31}\beta_{23}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{-\gamma_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ \dfrac{-\gamma_{20}\cdot\beta_{32}-\gamma_{30}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{-\gamma_{31}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \dfrac{-\gamma_{22}\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\end{pmatrix},$$

$$\eta_t=B^{-1}\varepsilon_t=\begin{pmatrix}\varepsilon_{1t}+\dfrac{-\varepsilon_{2t}\beta_{13}\beta_{32}-\varepsilon_{3t}\beta_{13}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ \dfrac{\varepsilon_{2t}+\varepsilon_{3t}\beta_{23}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\\ \dfrac{\varepsilon_{2t}\beta_{32}+\varepsilon_{3t}}{1-\beta_{23}\beta_{32}}\end{pmatrix}.$$

§11.2. Modeliň gurluş formasynyň identifikasiýasy

Identifisirlenmek meselesi getirilen formanyň parametrlerine degişli däl-de, gurluşlaýyn parametrlere degişlidir. Bu mesele şeýle goýlup biler: Π matrisanyň elementleri belli bolan ýagdaýda B we Γ matrisalaryň käbir ýa-da hemme elementlerini birbelgili kesgitläp bolarmy?

Eger gurluşlaýyn koeffisiýent getirilen formanyň koeffisiýentleriniň esasynda kesgitlenip bilýän bolsa, onda oňa identifisirlenýär diýilýär. Eger modeliň gurluşlaýyn formasyndaky haýsy hem bolsa bir deňlemäniň ähli koeffisiýentleri identifisirlenýän bolsa, onda deňlemäniň özi hem identifisirlenýär diýilýär.

Identifisirlenmek meselesi logiki nukdaý nazardan bahalandyrmak meselesinden öňden gelýän meseledir. Eger ulgamyň berlen deňlemesiniň gurluşlaýyn parametrleri getirilen koeffisiýentler boýunça birbelgili kesgitlenýän bolsa, onda bu deňleme takyk identifisirlenen hasaplanýar. Şeýle deňlemäniň gurluşlaýyn parametrlerini gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly bilen tapmak bolar.

Eger modeliň getirilen formasyndan gurluşlaýyn parametrleriň birnäçe bahalandyrmalaryny alyp bolýan bolsa, onda deňleme aşa identifisirlenen hasaplanýar. Şeýle deňlemäniň gurluşlaýyn parametrleri **iki ädimleýin iň kiçi kwadratlar usuly** boýunça kesgitlenýärler.

Eger modeliň deňlemesiniň gurluşlaýyn parametrlerini getirilen koeffisiýentleriň üsti bilen tapyp bolmaýan bolsa, onda şeýle gurluşlaýyn deňleme identifisirlenmedik diýilýär, onuň parametrleriniň san bahalandyrmalaryny tapyp bolmaýar.

Wagt boýunça yza galmaklygy bolmadyk endogen üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky özarabaglanyşyklar nukdaý nazaryndan birwagtlaýyn deňlemeler ulgamy ýönekeý modellere, rekursiw modellere we özarabaglanyşykly üýtgeýän ululykly modellere bölünýärler. Modeliň topary endogen üýtgeýänleriň gurluşlaýyn parametrleriniň B matrisasyny barlamak bilen kesgitlenýär.

Eger B matrisa diagonal matrisa ýa-da modeliň deňlemeleri täzeden belgilenenden (nomerlenenden) soň diagonal matrisa bolýan bolsa, onda modele **ýönekeý model** diýilýär. Şeýle modellerde endogen üýtgeýänleriň arasynda özarabaglanyşyk ýokdur. Hiç bir deňlemede şeýle üýtgeýän ululyklar düşündiriji üýtgeýän ululyk bolmaýar. Şeýle modeliň her bir deňlemesine aýratynlykda seredip bolýar we adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyryp bolýar.

Eger B matrisa üçburçluk formada bolsa ýa-da modeliň deňlemeleri täzeden belgilenende, ýa-da deňlemelerde üýtgeýänleriň orunlary üýtgedilende üçburçluk forma gelýän bolsa, onda modele **rekursiw**

model diýilýär. Bu toparyň modellerinde her bir anyk deňlemede düşündiriji üýtgeýänler hökmünde diňe öňden gelýän deňlemelerde bagly üýtgeýän ululyk bolan endogen üýtgeýänler bolup biler.

Galan ýagdaýlarda özarabaglanyşykly deňlemeleri bolan modeli alarys. Bu model üçin adaty iň kiçi kwadratlar usuly ulanarlykly däl.

Ekonometriki barlagyň birinji ädimi öwrenilýän ulgamyň hakyky modelini spesifikasiýa etmekden durýar. Şeýle modelleri, eger olar çyzykly bolsalar, umumy formada ýazyp bolýar:

$$BY_t + \Gamma X_t = \varepsilon_t.$$

Spesifikasiýa bar bolan ykdysady nazaryýete, ýörite bilimlere ýa-da ulgam baradaky intuitiw göz öňüne getirmelere esaslanýar. Bu tejribeden öň (aprior) maglumatlar B we Γ matrisalaryň tebigatyny kesgitleýärler. Meselem, kesgitli üýtgeýän ululyklaryň käbir deňlemäniň spesifikasiýasyna gatnaşmaýanlygy baradaky maglumat B we Γ matrisalaryň setirlerindäki degişli elementleriň nola deňdigini aňladýar. Ulgam barada goşmaça maglumatlar matrisalaryň elementleriniň kombinasiýalaryna goýulýan çäklendirmeleriň görnüşini almagy mümkin. Mundan başga-da, tötän tolgunmalar barada şertler bar. Ähli ekzogen üýtgeýänler $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{mt}$ tötän faktorlar bilen korrelirlenmeýärler. Adatça, X sütün – wektora girýän endogen üýtgeýänleriň lagaly bahalary hem $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{mt}$ elementler bilen korrelirlenmeýärler diýen goşmaça şertler hem kabul edilýär. Bu ýerden tötän tolgunmalaryň awtokorrelýasiýasynyň ýokdugy gelip çykýar.

Eger biz modeliň getirilen formasynyň her bir deňlemesine adaty iň kiçi kwadratlar usulyny ulansak, netijeleri birleşdirsek, we getirilen modeliň bahalandyrylan koeffisiýentleriniň $(X^T X)^{-1} X^T Y$ matrisasyny alsak, onda bahalandyrmalar ygtybarly bolarlar. Şonda identifikasiýa meselesi gurluş parametrlerine degişli bolýar we şeýle formulirlenýär: Π matrisanyň elementleri birbelgili bahalandyrylan diýlip hasap edilende, B we Γ matrisalaryň käbir ýa-da ähli elementlerini kesgitläp bolarmy?

Hemme zatdan öň, identifisirlenmekligiň şeýle şertiniň ýerine ýetirilmegi zerurdyr: ulgamyň deňlemeleriniň sany seljerilýän endogen üýtgeýänleriň sanyna deň bolmaly, B matrisa bolsa aýratyn däl matrisa bolmaly (ýagny bu matrisanyň kesgitleýjisi nola deň bolmaly däl we B^{-1} ters matrisa bar bolmaly).

Öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň (ekzogen we lagaly endogen) gözegçilikler matrisasynyň, ýagny

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangynyň $(k + 1) - e$ deň bolmagy zerurdyr. Şunlukda gözegçilikleriň n sanynyň ($t = 1,2,\ldots, n$) seljerilýän üýtgeýänleriň $(m + k)$ umumy sanyndan düýpli artyk bolmagy hökmandyr.

Şeýle şerti subut etmek mümkin: tejribeden öň (aprior) çäklendirmeleriň sany modeliň deňlemeleriniň bir birlik kemelen sanyndan az bolmaly däl. Eger çäklendirmeler hökmünde diňe ýok etmek çäklendirmeleri bar bolsa, onda aýratyn alnan deňlemäniň identifisirlenmeginiň zerurlyk şerti şeýle bolar: deňlemeden ýok edilen üýtgeýänleriň sany azyndan deňlemeleriň bir birlik kemelen sanyna deň bolmaly. Ýok etmekligiň tejribeden öň çäklendirmeleriniň arasynda birmeňzeşi bolmaly däl.

Bu zerurlyk şert alternatiw formada ýazylyp bilner: deňlemeden ýok edilen öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň (ekzogen we lagaly endogen) sany deňlemedäki endogen üýtgeýänleriň bir birlik kemeldilen sanyndan az bolmaly däl. Modeliň gurluş deňlemesiniň identifisirlenenligini kesgitlemek üçin her bir deňleme we tutuş model boýunça: k – modeliň öňden kesgitlenen üýtgeýänleriniň sanyny, k_i – deňlemedäki öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň sanyny, m_i – deňlemedäki endogen üýtgeýänleriň sanyny hasaplaýarlar. Soňra her bir deňleme üçin aýratynlykda şeýle gatnaşygy barlaýarlar:

$$k - k_i \geq m_i - 1.$$

Eger deňlemä girmeýän öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň sany deňlemä girýän endogen üýtgeýänleriň bir birlik kemeldilen sanyndan takyk uly bolsa, ýagny $k - k_i > m_i - 1$ bolsa, onda deňleme aşa identifisirlenendir. Eger $k - k_i = m_i - 1$ bolsa, onda deňleme takyk identifisirlenendir.

Eger $k - k_i < m_i - 1$ bolsa, onda deňleme identifisirlenen däldir.

Modeliň toždestwosynyň identifisirlenenligini barlamagyň zerurlygy ýok. Sebäbi olaryň gurluş parametrleri belli we 1–e deňdirler. Ýöne, toždestwo girýän üýtgeýänler modeliň endogen we öňden kesgitlenen üýtgeýänleriniň sany hasaplananda hasaba alynýar.

Aşakdaky şert ulgamyň aýratyn alnan deňlemesiniň identifisirlenmeginiň zerurlyk we ýeterlik şertidir.

Modele girýän we m sany özarabagly endogen üýtgeýänleri saklaýan i-nji deňlemäniň identifisirlenmegi üçin modeliň düzümine girýän (endogen we öňden kesgitlenen), ýöne i-nji deňlemede bolmadyk üýtgeýänleriň parametrleriniň A_i matrisasynyň rangynyň $(m - 1)$ – e deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Goý, d_i – modeliň i-nji deňlemä girmeýän üýtgeýänleriniň sany bolsun. Eger $d_i = m - 1$ bolsa, onda i-nji deňleme birbelgili identifisirlenen hasaplanýar. Eger $d_i > m - 1$ bolsa, onda i-nji deňleme birbelgili däl identifisirlenen hasaplanýar. Eger $d_i < m - 1$ bolsa, onda i-nji deňleme identifisirlenen däl hasaplanýar.

Özarabaglanyşykly deňlemeleri bolan modeliň parametrlerini bahalandyrmakdan ozal her bir deňlemäniň identifisirlenýändigini barlamak zerurdyr. Eger ähli deňlemeler identifisirlenen bolsa, onda tutuş model identifisirlenen hasaplanýar.

11.2-nji mysal. Model berlen:

$$Y_{1t} = \beta_{12} Y_{2t} + \beta_{13} Y_{3t} + \gamma_{10} + \gamma_{11} X_{1t} + \varepsilon_{1t},$$

$$Y_{2t} = \beta_{21} Y_{1t} + \gamma_{20} + \gamma_{22} X_{2(t-1)} + \varepsilon_{2t},$$

$$Y_{3t} = \beta_{32} Y_{2t} + \gamma_{30} + \gamma_{31} X_{1t} + \gamma_{33} X_{3(t-1)} + \varepsilon_{3t},$$

bu ýerde

Y_{1t} – öňümiň göwrümi,
Y_{2t} – esasy önümçilik gaznalarynyň gymmaty,
X_{1t} – çig malyň iberilişi,
$X_{2(t-1)}$ – öňki ýyldaky maýa goýumyň göwrümi,
$X_{3(t-1)}$ – öňki ýylda işleýänleriň sany.

Modeli şeýle görnüşde ýazalyň:

$$Y_{1t} - \beta_{12} Y_{2t} - \beta_{13} Y_{3t} - \gamma_{10} - \gamma_{11} X_{1t} = \varepsilon_{1t},$$

$$Y_{2t} - \beta_{21} Y_{1t} - \gamma_{20} - \gamma_{22} X_{2(t\text{-}1)} = \varepsilon_{2t},$$

$$Y_{3t} - \beta_{32} Y_{2t} - \gamma_{30} - \gamma_{31} X_{1t} - \gamma_{33} X_{3(t-1)} = \varepsilon_{3t}.$$

Birinji deňlemäniň identifisirlenýändigini ýa-da däldigini barlalyň. Bu deňlemä $X_{2(t-1)}$, $X_{3(t-1)}$ üýtgeýänler girmeýärler. Bu üýtgeýänleriň öňündäki parametrleriň A_1 matrisasy şeýle görnüşde bolar:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{33} \end{pmatrix}.$$

Bu matrisanyň kesgitleýjisi $|A_1| = \gamma_{22} \cdot \gamma_{33} \neq 0$. Diýmek, A_1 matrisanyň rangy 2-ä deň.

Model üç deňlemeden durýar (üç sany endogen üýtgeýänleri saklaýar), şonuň üçin şeýle şert ýerine ýetýär:

$$\text{rang}\ (A_1) = 2,\ m - 1 = 3 - 1 = 2,\ \text{rang}\ (A_1) = m - 1,$$

$$d_1 = 2,\ m - 1 = 2,\ d_1 = m - 1.$$

Şeýlelik bilen, ulgamyň birinji deňlemesi birbelgili identifisirlenýär.

Ikinji deňlemäniň identifisirlenýändigini ýa-da däldigini barlalyň. Bu deňlemä Y_{3t}, X_{1t}, $X_{3(t-1)}$ üýtgeýänler girmeýärler. A_2 matrisa şeýle görnüşde bolar:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\beta_{13} & -\gamma_{11} & 0 \\ 1 & -\gamma_{31} & -\gamma_{33} \end{pmatrix}.$$

Eger

$$\begin{vmatrix} -\beta_{13} & -\gamma_{11} \\ 1 & -\gamma_{31} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} -\beta_{13} & 0 \\ 1 & -\gamma_{33} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} -\gamma_{11} & 0 \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{33} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjileriň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolsa, onda rang(A_2) = 2 bolar. Bu şertiň ýerine ýetýändigi görünýär. Ikinji deňleme birbelgili däl identifisirlenýär. Sebäbi

$$\text{rang}\ (A_2) = 2,\ m\text{–}1 = 3\text{–}1 = 2, \qquad \text{rang}\ (A_2) = m\text{–}1,$$

$$d_2 = 3,\ m\text{–}1 = 2,\ d_2 > m\text{–}1.$$

Üçünji deňlemäni barlaýarys. Bu deňlemede Y_{1t}, $X_{2(t-1)}$ üýtgeýänler ýok. Bu üýtgeýänlere degişli parametrleriň A_3 matrisasy şeýle bolar:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_{21} & -\gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad |A_3| = -\gamma_{22} \neq 0 .$$

$$\text{rang } (A_3) = 2,\ m–1 = 3–1 = 2,\ \text{rang } (A_3) = m–1,$$

$$d_3 = 2,\ m–1 = 2,\ d_3 = m–1.$$

Üçünji deňleme birbelgili identifisirlenýär. Şeýlelik bilen, ähli deňlemeler we tutuş model identifisirlenýär. Modeliň parametrlerini bahalandyrmak mümkinçiligi bar.

§11.3. Gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly

Bu usul birbelgili identifisirlenýän özara baglanyşykly deňlemeleri bolan modeliň parametrlerini bahalandyrmak üçin ulanylýar. Bu usul aýratyn alnan birbelgili identifisirlenýän deňlemäniň parametrlerini bahalandyrmak üçin hem ulanylyp bilner. Bu usulda modeliň getirilen formasynyň parametrleriniň bahalandyrmalary modeliň gurluş formasynyň parametrleriniň bahalandyrmalary üçin ulanylýar.

Usul aşakdaky tapgyrlardan durýar:

1. $BY_t + \Gamma X_t = \varepsilon_t$ gurluş model $Y_t = \Pi X_t + \eta_t$ getirilen forma getirilýär (syrykdyrylýar), bu ýerde $\Pi = -B^{-1}\Gamma$, $\eta_t = B^{-1}\varepsilon_t$.

2. Getirilen formanyň parametrleri klassyky iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyrylýar:

$$\hat{\Pi}^T = (X^T \cdot X)^{-1} X^T Y ,$$

bu ýerde

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} & \cdots & \hat{\pi}_{1k} \\ \hat{\pi}_{20} & \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} & \cdots & \hat{\pi}_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\pi}_{m0} & \hat{\pi}_{m1} & \hat{\pi}_{m2} & \cdots & \hat{\pi}_{mk} \end{pmatrix} –$$

– getirilen formanyň parametrleriniň bahalandyrmalarynyň matrisasy,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} -$$

– modeliň ekzogen we öňden kesgitlenen üýtgeýänleriniň gözegçilikler matrisasy,

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix} -$$

– modeliň özara bagly endogen üýtgeýänleriniň gözegçilikler matrisasy.

3. Gurluş formanyň parametrleriniň bahalandyrmalary

$$\hat{B}\hat{\Pi} = -\hat{\Gamma}$$

deňlemeler ulgamynyň çözüwi netijesinde tapylýar.

Bu ýerde $\hat{B} - Y$ üýtgeýänleriň parametrleriniň bahalandyrmalarynyň matrisasy;

$\hat{\Gamma} - X$ üýtgeýänleriň parametrleriniň bahalandyrmalarynyň matrisasy.

11.3-nji mysal. Modele seredeliň (11.1-nji tablisa):

$$K_t = \beta_{12} Z_t + \gamma_{10} + \gamma_{11} I_t + \varepsilon_{1t},$$

$$Z_t = \beta_{21} K_t + \gamma_{20} + \gamma_{22} P_t + \varepsilon_{2t},$$

bu ýerde

K_t – esasy önümçilik serişdeleriniň gymmaty (endogen üýtgeýän ululyk);

Z_t – işleýänleriň sany (endogen üýtgeýän ululyk);

I_t – maýa goýumyň göwrümi (ekzogen üýtgeýän ululyk);

P_t – önümiň göwrümi (ekzogen üýtgeýän ululyk).

11.1-nji tablisa

Gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly üçin başlangyç maglumatlar

t	K_t	Z_t	I_t	P_t
1	73	4,0	2,1	32
2	76	4,1	2,5	34
3	76	4,2	2,4	35
4	82	4,5	2,7	38
5	82	4,5	2,7	39
6	72	4,0	1,9	33
7	72	4,3	1,6	32
8	74	4,4	1,8	34
9	74	4,4	1,7	35
10	78	4,6	2,0	37

Modeliň getirilen formasynyň parametrlerini kesgitläliň. Degişli matrisalar şeýle göwrüşi alarlar:

$$Y = \begin{pmatrix} 73 & 4,0 \\ 76 & 4,1 \\ 76 & 4,2 \\ 82 & 4,5 \\ 82 & 4,5 \\ 72 & 4,0 \\ 72 & 4,3 \\ 74 & 4,4 \\ 74 & 4,4 \\ 78 & 4,6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 2,1 & 32 \\ 1 & 2,5 & 34 \\ 1 & 2,4 & 35 \\ 1 & 2,7 & 38 \\ 1 & 2,7 & 39 \\ 1 & 1,9 & 33 \\ 1 & 1,6 & 32 \\ 1 & 1,8 & 34 \\ 1 & 1,7 & 35 \\ 1 & 2,0 & 37 \end{pmatrix},$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 10 & 21,4 & 349 \\ 21,4 & 47,3 & 752,7 \\ 349 & 752,7 & 12233 \end{pmatrix},$$

$$(X^TX)^{-1}=\begin{pmatrix}26,5391 & 1,9934 & -0,8798\\ 1,9934 & 1,1638 & -0,1285\\ -0,8798 & -0,1285 & 0,03309\end{pmatrix},$$

$$X^TY=\begin{pmatrix}759 & 43\\ 1636 & 92,11\\ 26566 & 1504\end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}^T=\begin{pmatrix}30,649 & 1,3121\\ 3,2009 & -0,3578\\ 1,1003 & 0,1076\end{pmatrix},\quad \hat{\Pi}=\begin{pmatrix}30,649 & 3,2009 & 1,1003\\ 1,3121 & -0,3578 & 0,1076\end{pmatrix}.$$

Şeýlelik bilen, getirilen model bahalandyrmadan soň şeýle görnüşde bolar:

$$\hat{K}_t=30,649+3,2009\,I_t+1,1003P_t,$$
$$\hat{Z}_t=1,3121-0,3578I_t+0,1076P_t.$$

Modeliň gurluş formasynyň B we Γ matrisalary şeýle görnüşde bolarlar:

$$B=\begin{pmatrix}1 & -\beta_{12}\\ -\beta_{21} & 1\end{pmatrix},\quad \Gamma=\begin{pmatrix}-\gamma_{10} & -\gamma_{11} & 0\\ -\gamma_{20} & 0 & -\gamma_{22}\end{pmatrix}.$$

Gurluş modeliň koeffisiýentleriniň bahalandyrmalaryny tapmak üçin aşakdaky deňlemeler ulgamyny çözeliň:

$$\begin{pmatrix}1 & -b_{12}\\ -b_{21} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}30,649 & 3,2009 & 1,1003\\ 1,3121 & -0,3578 & 0,1076\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-c_{10} & -c_{11} & 0\\ -c_{20} & 0 & -c_{22}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & -b_{12}\\ -b_{21} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}30,649 & 3,2009 & 1,1003\\ 1,3121 & -0,3578 & 0,1076\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{10} & c_{11} & 0\\ c_{20} & 0 & c_{22}\end{pmatrix},$$

bu ýerde $b_{12}, b_{21}, c_{10}, c_{20}, c_{11}, c_{22}$ – degişlilikde $\beta_{12}, \beta_{21}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{11}, \gamma_{22}$ parametrleriň bahalandyrmalary.

Matrisalary köpeldip, alarys:

$$\begin{cases} 30,649 - 1,3121b_{12} = c_{10} \\ 3,2009 + 0,3578b_{12} = c_{11} \\ 1,1003 - 0,1076b_{12} = 0 \\ -30,649b_{21} + 1,3121 = c_{20} \\ -3,2009b_{21} - 0,3578 = 0 \\ -1,1003b_{21} + 0,1076 = c_{22}\ . \end{cases}$$

Ulgamyň çözüwi şeýle bolar:

$$b_{12} = 10,23;\ c_{11} = 6,86;\ c_{10} = 17,23;\ b_{21} = -0,1118;$$

$$c_{20} = 4,738;\ c_{22} = 0,2306\ .$$

Gutarnykly görnüşde gurluş modeliň bahalandyrmasy şeýle görnüşde bolar:

$$\hat{K}_t = 10,23Z_t + 17,23 + 6,86I_t\ ,$$

$$\hat{Z}_t = -0,1118K_t + 4,738 + 0,2306P_t\ .$$

Gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly süýşen, ýöne, ygtybarly bahalandyrmalara getirýär. Aşa identifisirlenmek ýagdaýynda gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly ulanarlykly däl.

Islendik birwagtlaýyn deňlemeler ulgamlaryny bahalandyrmak üçin häzirki wagtda ýeterlik mukdarda usullar bar.Bu usullar iki topara bölünýärler. Birinji topara her bir deňlemä aýratynlykda ulanyp bolýan usullar, ýagny, deňlemeleriň her birini gezekli-gezegine bahalandyrmaga ulanylýan usullar degişlidir. Ikinji topara tutuş ulgamy (ähli deňlemeleri birbada) bahalandyrmak üçin ulanylýan usullar degişlidir. Birinji topara iki ädimli iň kiçi kwadratlar usulyny, ikinji topara üç ädimli iň kiçi kwadratlar usulyny we doly maglumatyň maksimal hakykata ýakynlyk usulyny degişli edip bolar.

§11.4. Iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly

Bu usul deňlemeleri birbelgili we birbelgili däl identifisirlenýän modelleriň parametrlerini bahalandyrmak üçin ulanylýar. Her bir deňlemäniň parametrleri aýratyn bahalandyrylýar.

Bu usul ulanylanda birinji ädimde getirilen formanyň parametrleri adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyrylýar. Beýle etmeklik endogen üýtgeýän Y_{it} ululygyň ulgamlaýyn we tötän düzüjileriniň bahalandyrmasyny almaga mümkinçilik berýär. Ýagny $Y_{it} = \hat{Y}_{it} + \eta_{it}$. Bu ýerde $\hat{Y}_{it} - Y_{it}$ üýtgeýäniň getirilen forma boýunça bahalandyrmasy. Ikinji ädimde gurluş deňlemeleriniň sag tarapynda ýerleşýän endogen üýtgeýänler olaryň $\hat{Y}_{it}$ bahalandyrmalary bilen çalşyrylýar. Şeýle ýol bilen özgerdilen gurluş deňlemesine adaty iň kiçi kwadratlar usuly ulanylýar. Gurluş parametrleriniň iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly bilen alnan bahalandyrmalary süýşen, ýöne, netijeli we ygtybarly bolýarlar.

Goý, i modeliň gurluş formasynyň bahalandyrylýan deňlemesiniň tertip belgisi bolsun. Bu deňlemede h sany endogen Y üýtgeýänler bar. Olaryň $(h - 1)$ sanysy düşündiriji üýtgeýän ululyk hökmünde çykyş edýär. Mundan başga-da, bahalandyrylýan deňlemede f sany öňden kesgitlenen X (ekzogen we lagaly endogen) üýtgeýänler bar. Bahalandyrylýan deňleme şeýle görnüşde bolar:

$$Y_{it} = \sum_{\substack{d=1 \\ d\neq i}}^{h} \beta_{id} Y_{dt} + \sum_{j=0}^{f} \gamma_{ij} X_{jt} + \varepsilon_{it} .$$

Iki ädimli iň kiçi kwadratlar usulynyň manysy $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{(i-1)t}, Y_{(i+1)t}, \ldots, Y_{dt}$ üýtgeýänleriň öňden kesgitlenen $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt}$ üýtgeýänler bilen aňladylýandygyndan ybaratdyr. Onda bu ýerden getirilen formany almak bolar:

$$Y_{dt} = \sum_{j=0}^{k} \pi_{dj} X_{jt} + \eta_{dt}, \quad (d = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, h).$$

Getirilen formanyň parametrleri adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen

$$\Pi_{(i)}^{T} = (X^{T} X)^{-1} X^{T} Y_{(i)}$$

formulany ulanyp, bahalandyrylýar,

bu ýerde X – modeliň ähli öňden kesgitlenen üýtgeýänleriniň gözegçiliklerininiň $n \times k$ ölçegli matrisasy; $Y_{(i)}$ – bahalandyrylýan deňlemede düşündiriji üýtgeýän bolup çykyş edýän endogen üýtgeýänleriň gözegçiliklerininiň $n \times (h - 1)$ ölçegli matrisasy; $\hat{\Pi}^T_{(i)} = (X^T X)^{-1} X^T Y_{(i)}$ – getirilen formadaky endogen üýtgeýänleriň (bu üýtgeýänler bahalandyrylýan deňlemede düşündiriji üýtgeýänler bolup çykyş edýärler) parametrleriniň bahalandyrmalarynyň $k \times (h - 1)$ ölçegli matrisasy.

Modeliň gurlan getirilen formasynyň esasynda i-nji deňlemede düşündiriji üýtgeýänler bolup çykyş edýän endogen üýtgeýänleriň empiriki bahalary hasaplanýar:

$$\hat{Y}_{(i)} = X \hat{\Pi}^T_{(i)},$$

bu ýerde $\hat{Y}_{(i)}$ – bu üýtgeýänleriň bahalandyrmalarynyň $n \times (h - 1)$ ölçegli matrisasy.

Üýtgeýänleriň empiriki bahalary deňlemede goýulýar, deňleme şeýle formany alýar:

$$Y_i = \sum_{\substack{d=1 \\ d \neq i}}^{h} \beta_{id} \hat{Y}_d + \sum_{j=0}^{f} \gamma_{ij} X_j + \varepsilon_i .$$

$\hat{Y}_d$ bahalara **instrumental üýtgeýänler** diýilýär. Tötän tolgunmalar bilen korrelirlenýän Y_d üýtgeýän $\hat{Y}_d$ instrumental üýtgeýäne çalşyrylýar. $\hat{Y}_d$ üýtgeýän tötän gyşarma bilen korrelirlenmeli däl. Alnan deňlemäniň parametrleri adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyrylýar:

$$a_{(i)} = \begin{pmatrix} b_{(i)} \\ c_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}^T_{(i)} \hat{Y}_{(i)} & \hat{Y}^T_{(i)} X_{(i)} \\ X^T_{(i)} \hat{Y}_{(i)} & X^T_{(i)} X_{(i)} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \hat{Y}^T_{(i)} Y_{it} \\ X^T_{(i)} Y_{it} \end{bmatrix},$$

bu ýerde $a_{(i)}$ – bahalandyrylýan deňlemäniň gurluş parametrleriniň bahalandyrmalarynyň $(h - 1 + f + 1) \times 1$ ölçegli wektory (sütün matrisa), $b_{(i)}$ – deňlemede düşündiriji üýtgeýänler bolup çykyş edýän endogen üýtgeýänleriň gurluş parametrleriniň bahalandyrmalarynyň $(h–1) \times 1$ ölçegli wektory; $c_{(i)}$– deňlemedäki öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň gurluş parametrleriniň bahalandyrmalarynyň $(f + 1) \times 1$ ölçegli wektory; $X_{(i)}$ – bahalandyrylýan deňlemedäki öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň gözegçiliklerininiň $n \times (f + 1)$ ölçegli matrisasy; Y_{it} – bahalandyrylýan i-nji deňlemede bagly üýtgeýän bolup çykyş edýän endogen üýtgeýäniň gözegçilikleriniň $n \times 1$ ölçegli wektory.

Bu ýerde bahalandyrylýan deňlemede f sany öňden kesgitlenen üýtgeýänler bar diýlip hasaplanýar, $X(i)$ matrisanyň birinji sütüni birliklerden durýar, bu bolsa azat koeffisiýente degişlidir.

Deňlemäniň tötän gyşarmalarynyň dispersiýasy aşakdaky formula bilen bahalandyrylýar:

$$S_i^2 = \frac{e_i^T\ e_i}{n - (h - 1 + f + 1)}.$$

Gurluş parametrleriniň bahalandyrmalarynyň dispersiýasynyň we kowariasiýasynyň matrisasy şeýle görnüşde bolýar:

$$D^2\begin{pmatrix} b_{(i)} \\ c_{(i)} \end{pmatrix} = S_i^2 \times \begin{bmatrix} \hat{Y}_{(i)}^T \hat{Y}_{(i)} & \hat{Y}_{(i)}^T X_{(i)} \\ X_{(i)}^T \hat{Y}_{(i)} & X_{(i)}^T X_{(i)} \end{bmatrix}^{-1}.$$

11.4-nji mysal. Aşakdaky model gurlan:

$$P_t = \beta_{12}\, Y_t + \gamma_{10} + \gamma_{11}\, X_t + \varepsilon_{1t},$$
$$Y_t = \beta_{23}\, K_t + \gamma_{20} + \varepsilon_{2t},$$
$$K_t = \beta_{32}\, Y_t + \gamma_{30} + \gamma_{33}\, I_t + \varepsilon_{3t}\,,$$

ýa-da

$$P_t - \beta_{12}\, Y_t - \gamma_{10} - \gamma_{11}\, X_t = \varepsilon_{1t},$$
$$Y_t - \beta_{23}\, K_t - \gamma_{20} = \varepsilon_{2t},$$
$$K_t - \beta_{32}\, Y_t - \gamma_{30} - \gamma_{33}\, I_t = \varepsilon_{3t},$$

bu ýerde

K_t – esasy önümçilik serişdeleriniň gymmaty (endogen üýtgeýän),
Y_t – işleýänleriň sany (endogen üýtgeýän),
I_t – maýa goýumyň göwrümi (ekzogen üýtgeýän),
P_t – önümiň göwrümi (endogen üýtgeýän),
X_t – çig malyň ulanylyşy (ekzogen üýtgeýän).
11 ýylyň gözegçilikler maglumatlary berlen (*11.2-nji tablisa*).

Iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly üçin başlangyç maglumatlar berlen:

11.2-nji tablisa

t	P_t	Y_t	K_t	X_t	I_t
1	55	4,1	29	2,8	1,2
2	58	4,1	30	2,9	1,3
3	59	4,2	30	3,8	1,3
4	62	4,4	31	4,1	1,2
5	62	4,6	32	4,1	1,3
6	65	4,6	32	4,1	1,4
7	68	4,7	34	4,0	1,3
8	71	4,8	35	4,1	1,6
9	71	5,2	37	4,2	1,8
10	72	5,4	40	4,2	1,9
11	73	5,8	42	4,3	2,0

Birinji we üçünji deňlemeleriň parametrleri birbelgili identifisirlenýärler we olar gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyrylyp bilner. Ikinji deňlemä seredeliň.

Bu deňlemede P_t, X_t, I_t üýtgeýänler ýok. Bu üýtgeýänlere degişli parametrleriň matrisasy şeýle görnüşde bolar:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{33} \end{pmatrix},$$

$$\text{rang } (A_2) = 2 = m-1 = 3-1 < d_2 = 3.$$

Diýmek, ikinji deňleme birbelgili däl identifisirlenýär. Bu deňlemäni iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyralyň. Ikinji deňlemede düşündiriji üýtgeýän bolup çykyş edýän K_t üýtgeýän üçin deňlemäniň getirilen formasy şeýle ýazylýar:

$$K_t = \pi_{20} + \pi_{21} X_t + \pi_{22} I_t + \eta_{2t}\,.$$

Bu deňlemäniň parametrlerini adaty iň kiçi kwadratlar usuly bilen bahalandyralyň:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2,8 & 1,2 \\ 1 & 2,9 & 1,3 \\ 1 & 3,8 & 1,3 \\ 1 & 4,1 & 1,2 \\ 1 & 4,1 & 1,3 \\ 1 & 4,1 & 1,4 \\ 1 & 4,0 & 1,3 \\ 1 & 4,1 & 1,6 \\ 1 & 4,2 & 1,8 \\ 1 & 4,2 & 1,9 \\ 1 & 4,3 & 2,0 \end{pmatrix}, Y_{(2)} \text{ ýa-da } K = \begin{pmatrix} 29 \\ 30 \\ 30 \\ 31 \\ 32 \\ 32 \\ 34 \\ 35 \\ 37 \\ 40 \\ 42 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_{(2)} = (X^T X)^{-1} X^T Y_{(2)} = \begin{pmatrix} 9,443 \\ 1,512 \\ 12,50 \end{pmatrix}.$$

Bu ýerde $Y_{(2)}$ matrisa diýip ýeke-täk endogen K_t üýtgeýäniň bahalaryna düşünmeli. K_t ululyk modeliň ikinji deňlemesinde düşündiriji ululykdyr. Şeýlelik bilen, K_t üýtgeýäniň getirilen deňlemesi:

$$\hat{K}_t = 9,443 + 1,512X_t + 12,50I_t \text{ bolar.}$$

Bu deňlemeden $\hat{K}_t = \hat{Y}_{(2)}$ empiriki bahalary tapýarys. Soňra ikinji deňlemede K_t ululyga derek $\hat{K}_t$ bahalary goýup, bu deňlemäni bahalandyrýarys:

$$Y_t = \beta_{23}\hat{K}_t + \gamma_{20} + \varepsilon_{2t}.$$

Ulgamyň ikinji deňlemesinde öňden kesgitlenen üýtgeýänleriň ýoklugy üçin $X_{(2)}$ matrisa birliklerden durýar:

$$X_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}, \quad \hat{Y}_{(2)} = \hat{K}_t = X\hat{\Pi}_{(2)} = \begin{pmatrix} 28,677 \\ 30,078 \\ 31,439 \\ 30,642 \\ 31,892 \\ \ldots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \\ 33,142 \\ 31,741 \\ 35,642 \\ 38,293 \\ 39,543 \\ 40,945 \end{pmatrix},$$

$$y_{2t} = Y_t = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 4,1 \\ 4,2 \\ 4,4 \\ 4,6 \\ 4,6 \\ 4,7 \\ 4,8 \\ 5,2 \\ 5,4 \\ 5,8 \end{pmatrix},$$

$$a_{(2)} = \begin{pmatrix} b_{(2)} \\ c_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{(2)}^T \hat{Y}_{(2)} & \hat{Y}_{(2)}^T X_{(2)} \\ X_{(2)}^T \hat{Y}_{(2)} & X_{(2)}^T X_{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \hat{Y}_{(2)}^T y_{2t} \\ X_{(2)}^T y_{2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12754,3 & 372,034 \\ 372,034 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1777,32 \\ 51,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1282 \\ 0,3838 \end{pmatrix}.$$

Şeýlelik bilen β_{23}, γ_{20} parametrleriň aşakdaky bahalandyrmalaryny alarys:

$$b_{23} = 0,1282, \qquad c_{20} = 0,3838 .$$

Ulgamyň ikinji deňlemesiniň bahalandyrmasy şeýle bolar:

$$\hat{Y}_t = 0,1282K_t + 0,3838 .$$

Alnan parametrleriň standart ýalnyşlyklaryny hasaplalyň:

$$S_i^2 = \frac{e_i^T e_i}{n-(h-1+f+1)} = \frac{0,071}{9} = 0,0079\,;$$

$$D_2\begin{pmatrix} b_{(2)} \\ c_{(2)} \end{pmatrix} = S_2^2\begin{bmatrix} \hat{Y}_{(2)}^T\hat{Y}_{(2)} & \hat{Y}_{(2)}^T X_{(2)} \\ X_{(2)}^T\hat{Y}_{(2)} & X_{(2)}^T X_{(2)} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= 0,0079\times\begin{pmatrix} 12754,3 & 372,034 \\ 372,034 & 11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4,6\times 10^{-5} & -0,0016 \\ -0,0016 & 0,05339 \end{pmatrix}.$$

Standart ýalnyşlyklar:

$$S_{b_{23}} = \sqrt{4,6\times 10^{-5}} = 0,00678,\; S_{c_{20}} = \sqrt{0,05339} = 0,231\,.$$

§11.5.Üç ädimli iň kiçi kwadratlar usuly

Bu usul birwagtlaýyn deňlemeler ulgamynyň parametrlerini tutuşlaýyn bahalandyrmak üçin ulanylýar. Başda, koeffisiýentleriň we tötän ýalňyşlyklaryň dispersiýasynyň bahalandyrmalaryny kesgitlemek üçin, her bir deňlemä iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly peýdalanylýar. Soňra, tötän ýalňyşlyklaryň dispersiýalarynyň tapylan bahalandyrmalaryny peýdalanyp, kowariasiýa matrisasynyň bahalandyrmasy gurulýar. Ondan soňra tutuş ulgamyň koeffisiýentlerini bahalandyrmak üçin umumylaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usuly ulanylýar. Üç ädimli iň kiçi kwadratlar usuly dürli gurluş deňlemelerine girýän tötän gyşarmalar biri-biri bilen korrelirlenýän ýagdaýda iki ädimli iň kiçi kwadratlar usulyndan asimptotiki netijelidir.

Üç ädimli iň kiçi kwadratlar usuly amalyýetde ulanylanda aşakdakylary göz öňünde tutmaly:

1) Toždestwo bolýan her bir deňlemäni hasaplama başlamazdan öň ulgamdan çykarmaly;

2) Her bir identifisirlenmeýän deňlemäni hem ulgamdan aýyrmaly;

3) Ulgamda diňe takyk we aşa identifisirlenýän deňlemeler galýarlar.

Deňlemeleriň her bir toparyna üç ädimli iň kiçi kwadratlar usulyny aýratynlykda ulanmak maksadalaýykdyr.

13. sargyt № 2842

4) Eger kowariasiýa matrisasy gurluşlaýyn tolgunmalar üçin blok – diagonal bolsa, onda üç ädimli iň kiçi kwadratlar usulyny bir bloga degişli deňlemeleriň her bir toparyna aýratynlykda ulanyp bolar.

Soraglar:

1. Birwagtlaýyn deňlemeler ulgamynyň gurluş formasy diýlip nämä aýdylýar?
2. Birwagtlaýyn deňlemeler ulgamynyň getirilen formasy näme?
3. Ulgamyň aýratyn alnan deňlemesiniň identifisirlenen bolmagynyň zerur we ýeterlik şertleri nähili?
4. Gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly haçan we nähili tertipde ulanylýar?
5. Eger modeliň gurluş formasynyň deňlemeleri özara baglanyşykly däl bolsalar, parametrler bahalandyrylanda nähili usul ulanylýar?
6. Instrumental üýtgeýänleriň nähili häsiýetleri bolmaly?
7. Iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly haçan ulanylýar?
8. Matrisanyň rangy näme? Ol nähili kesgitlenýär?
9. Endogen üýtgeýänler näme?
10. Ekzogen üýtgeýänler näme?

Barlag testi

1. *X* we *Y* iki üýtgeýän ululyklaryň korrelýasiýa koeffisiýentiniň 1 – e deň bolmagy, nämani aňladýar?

a) Üýtgeýän ululyklaryň arasynda hiç hili baglanyşyk ýok;

b) Üýtgeýän ululyklaryň arasynda çyzykly däl baglanyşyk bar;

ç) Üýtgeýän ululyklaryň arasynda gös-göni çyzykly baglanyşyk bar;

d) Üýtgeýän ululyklaryň arasynda ters çyzykly baglanyşyk bar.

2. *X* we *Y* üýtgeýän ululyklaryň korrelýasiýa koeffisiýenti 0,8-e deň. Eger iki üýtgeýänleriň bahalary 10 – *a* köpeldilse, korrelýasiýa koeffisiýenti näçä deň bolar?

a) – 0,8;

b) 0,8;

ç) –8;

d) 8.

3. Iki üýtgeýän ululyklaryň bahalary *n* esse artsa, onda kowariasiýa nähili üýtgär?

a) üýtgemez;

b) *n* esse artar;

ç) n^2 esse artar;

d) kowariasiýanyň üýtgeýşini aýdyp bolmaz.

4. Jübüt çyzykly regressiýada bagly üýtgeýän ululygyň bahalarynyň alamatlary üýtgedilse, onda determinasiýa koeffisiýenti nähili üýtgär?

a) üýtgemez;

b) *n* esse artar;

ç) n^2 esse artar;

d) determinasiýa koeffisiýentiniň üýtgeýşini aýdyp bolmaz.

5. *X* we *Y* üýtgeýän ululyklaryň bahalary tablisada berlen. Hasaplamalary geçirmän, üýtgeýän ululyklaryň korrelýasiýa koeffisiýentiniň bahasyny aýtmaly

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

a) –1;
b) 0;
ç) 1;
d) ∞.

6. Eger azat agzanyň bahasy ähli synaglarda n esse artsa, çyzykly regressiýanyň koeffisiýentiniň standart ýalňyşlygy nähili üýtgär?

a) üýtgemez;
b) n esse artar;
ç) n^2 esse artar;
d) n esse kemelýär.

7. Düşündiriji ululygyň ähli bahalary n esse artyp, bagly üýtgeýän ululyk hemişelik bolanda, jübüt çyzykly regressiýa deňlemesiniň $(\hat{y} = b_0 + b_1 x)$ b_1 koeffisiýenti nähili üýtgär?

a) üýtgemez;
b) n esse kemelýär;
ç) n esse artar;
d) n^2 esse artar.

8. $$X^T X = \begin{pmatrix} 13 & 61 & 71 & 88 \\ 61 & 399 & 383 & 513 \\ 71 & 383 & 519 & 589 \\ 88 & 513 & 589 & 808 \end{pmatrix}$$

matrisa berlen bolsa, onda köplük çyzykly regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentleriniň mukdary, synaglaryň sany, düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň sany näçä deň?

a) 3, 16, 4;
b) 4, 16, 3;
ç) 3, 13, 4;
d) 4, 13, 3.

9. Göni funksional çyzykly y – iň x – e bolan baglanyşygynda F statistika, R^2 determinasiýa koeffisiýenti we korrelýasiýa koeffisiýenti näçä deň?

a) 1,0 ∞;
b) 1,1, ∞;
ç) 1,1,0;
d) 0,1,∞.

10. Darbiniň-Uotsonyň statistikasy 2-ä deň bolsa:

a) galyndylaryň awtokorrelýasiýasy ýok;
b) galyndylaryň položitel awtokorrelýasiýasy bar;
ç) galyndylaryň otrisatel awtokorrelýasiýasy bar;
d) galyndylaryň awtokorrelýasiýasy barada kesgitli netije çykaryp bolmaýar.

11. Käbir görkezijiniň möwsümleýin yrgyldylara sezewar edilen we düşündiriji üýtgeýän ululygyň bahasynyň artmagy bilen çyzykly artýan alty ýyl üçin çärýeklik maglumatlary bar. Möwsümleýin yrgyldyny öwrenmek üçin modele näçe «emeli» üýtgeýän ululyklary girizmeli?

a) 3;
b) 4;
ç) 5;
d) 6.

12. Koýkuň paýlanyşynda şeýle şert bar: laganyň tertip belgisiniň artmagy bilen lagaly düşündiriji üýtgeýän ululygyň koeffisiýentleri:

a) geometrik progressiýa görnüşinde artar;
b) geometrik progressiýa görnüşinde kemeler;
ç) arifmetrik progressiýa görnüşinde artar;
d) arifmetrik progressiýa görnüşinde kemeler.

13. Eger düşündiriji üýtgeýän ululyklar özara güýçli korrelirlenýän bolsalar, onda alarys:

a) geteroskedastiklik;

b) gomoskedastiklik;
ç) multikollinearlyk;
d) awtokorrelýasiýa.

14. Empiriki model $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + e$ gurlan. X_1 we X_2 üýtgeýän ululyklaryň korrelýasiýa koeffisiýenti r_{X_1, X_2} 1–e deň. $X^T X$ matrisanyň kesgitleýjisi näçä deň?

a) – 1;
b) 0;
ç) 1;
d) ∞.

15. $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ regressiýa deňlemesiniň b_0 koeffisiýenti kesgitlenende ýalňyşlyk goýberilen (b_1 koeffisiýent dogry hasaplanan). Netijede, $b_0 = 4$ alnan.Galyndylaryň jemi

$$\sum_{i=1}^{30} e_i = \sum_{i=1}^{30} (y_i - \hat{y}_i) = -30 .$$

b_0 koeffisiýentiň hakyky bahasy näçe bolmaly?

a) 3;
b) 4;
ç) 5;
d) 6.

16. Endogen we ekzogen üýtgeýän ululyklaryň lagalanan bahalary nähili atlandyrylýar?

a) öňden kesgitlenen;
b) emeli;
ç) instrumental;
d) üýtgeýän ululyklar biri-birini çalşyjy.

17. Sarp edişde özüni alyp barşyň görnüşi we ýylyň möwsümi (çärýegiň tertibi) diýen iki sany hil nyşany bar. Ähli öý hojalyklary birinji nyşan boýunça üç görnüşli durmuş-ykdysady gatlaklara bölünýär: «pes girdejili», «orta girdejili», «ýokary girdejili». Ikinji nyşan boýunça dört möwsüm bar. Modele näçe emeli üýtgeýän ululyk girizmeli?

a) 4;
b) 5;
ç) 6;
d) 7.

18. Bagly üýtgeýäniň umumy dispersiýasynyň regressiýanyň deňlemesi bilen düşündirilýän bölegini näme häsiýetlendirýär?

a) determinasiýa koeffisiýenti;
b) korrelýasiýa koeffisiýenti;
ç) çeýelik koeffisiýenti;
d) ranglaryň korrelýasiýa koeffisiýenti.

19. Iki üýtgeýän ululygyň korrelýasiýa koeffisiýenti (–1)-e ýakyn. Bu bir üýtgeýän ululygyň üýtgemesi beýleki üýtgeýän ululygyň üýtgemesiniň netijesidigini aňladýarmy?

a) hawa;
b) ýok;
ç) belli bir netije aýdyp bolmaýar.

20. Düşündiriji üýtgeýän ululyk bir göterim artanda bagly üýtgeýän ululygyň näçe göterim üýtgejekdigini görkezýän ululyk nähili atlandyrylýar?

a) regressiýa koeffisiýenti;
b) determinasiýa koeffisiýenti;
ç) korrelýasiýa koeffisiýenti;
d) çeýelik koeffisiýenti.

21. Jübüt çyzykly regressiýadaky bagly we düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň özara korrelýasiýa koeffisiýenti 0,9-a deň. Jübüt çyzykly regressiýa ýagdaýynda bagly üýtgeýän ululygyň üýtgemesiniň näçe göterimi düşündiriji üýtgeýän ululygyň üýtgemesi bilen düşündirilýär?

a) 0,9%;
b) 9%;
ç) 81%;
d) 90%.

22. Çyzykly regressiýanyň koeffisiýentleriniň bahalandyrmalarynyň ähmiýetliligini bahalandyrýan statistika:

a) F statistika;
b) t statistika;
ç) DW statistika;
d) h statistika.

23. Eger bahalandyrmanyň dispersiýasy beýleki alternatiw bahalandyrmalaryň dispersiýalaryna görä iň kiçi baha eýe bolsa, onda bahalandyrma:

a) netijeli;
b) süýşmedik;
ç) asimptotiki netijeli;
d) ygtybarly.

24. Jübüt çyzykly regressiýa ýagdaýynda saýlama maglumatlara nazary $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, empiriki $y = b_0 + b_1 x + e$ deňlemeleriň haýsysy has gowy degişli?

a) nazary;
b) empiriki;
ç) iki deňleme birmeňzeş gowy;
d) kesgitli netije aýdyp bolmaýar.

25. Iň kiçi kwadratlar usulynyň manysy:

a) regressiýanyň koeffisiýentleriniň kwadratlarynyň jemini;
b) bagly üýtgeýän ululygyň kwadratlarynyň jemini;
ç) tötän gyşarmanyň bahalandyrmasynyň kwadratlarynyň jemini;
d) regressiýanyň empiriki we nazary deňlemeleriniň gyşarma nokatlarynyň kwadratlarynyň jemini minimallaşdyrmakdyr.

26. Iki çyzykly däl modellere seredilýär:

$$y = \beta_0 x^{\beta_1} + \varepsilon \,, \quad (1)$$

$$y = \beta_0 x^{\beta_1} \cdot \varepsilon \,. \quad (2)$$

Çyzykly görnüşe getirip bolar:

a) iki modeli;
b) (1) modeli;
ç) (2) modeli;
d) hiç birini.

27. Galyndylaryň geteroskedastikligi bar bolanda adaty iň kiçi kwadratlar usuly ulanmaklyk, şeýle netijä getirer:

a) koeffisiýentleriň bahalandyrmasy süýşen bolar;
b) bahalandyrmalar netijeli bolar;
ç) bahalandyrmalaryň dispersiýasy süýşmek bilen hasaplanar;
d) *t* we *F* statistika esasynda alnan netije ynamly bolar.

28. Aşakda görkezilen modelleriň haýsysy awtoregressiýa modelidir?

a) $y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \cdots + \beta_k t_{t-k} + \varepsilon_t$;
b) $y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$;
ç) $y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 t$;
d) $y_t = \alpha + \beta_0 t + \beta_1 t^2 + \cdots + \beta_k t^k + \varepsilon_t$.

29. Birwagtlaýyn deňlemeler ulgamynyň gurluş formasyndan getirilen formany alýarlar, onuň koeffisiýentleri adaty iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyrylýar. Soňra, getirilen modeliň koeffisiýentleri boýunça gurluş modeliň parametrleri bahalandyrylýar. Amallaryň şeýle tertibi nähili atlandyrylýar?

a) adaty iň kiçi kwadratlar usuly;
b) iki ädimli iň kiçi kwadratlar usuly;
ç) üç ädimli iň kiçi kwadratlar usuly;
d) gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly.

30. Eger deňlemede endogen üýtgeýän ululygy kesgitlemegiň ýoly görkezilen bolsa, onda oňa

a) toždestwo deňlemeleri;
b) getirilen görnüşli deňlemeler;
ç) tertipli deňlemeler ulgamy;
d) gurluşly deňlemeler modeli diýilýär.

Barlag testiň jogaplary

Soragyň tertibi	Jogaplary	Soragyň tertibi	Jogaplary	Soragyň tertibi	Jogaplary
1	d	11	a	21	ç
2	b	12	b	22	b
3	ç	13	ç	23	a
4	ç	14	b	24	b
5	a	15	a	25	ç
6	b	16	a	26	ç
7	b	17	b	27	ç
8	d	18	a	28	b
9	ç	19	ç	29	d
10	a	20	d	30	b

Özbaşdak ýumuşlar

I wariant

1-nji mesele

10 ýylyň maglumatlary berlen. X– ortaça girdeji, Y – ortaça çykdajy (sarp ediş) (mln.manat):

Ýyllar	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
X	10,5	11,6	12,3	13,7	14,5	16,1	17,3	18,7	20,1	21,8
Y	8,12	10,0	8,41	12,1	12,4	11,4	12,8	13,9	17,3	17,5

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Eger ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa, onda β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleriniň 95% ynamly aralyklaryny hasaplaň.

4. Girdeji $X = 19{,}0$ bolanda sarp edişiň çaklaýşyny tapyň we $M\,(Y|X = 19{,}0)$ şertli matematiki garaşmanyň 95% ynamly aralygyny hasaplaň.

5. Girdeji X =19,0 bolanda sarp edişiň 95% ähtimallykly aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger girdeji 3 mln.manat artsa, onda sarp edişiň näçe üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýenti hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we determinasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

15 sany gözegçiligiň esasynda şeýle maglumatlar alnan:

$$\sum_{i=1}^{15} x_{i1} = 120, \quad \sum_{i=1}^{15} x_{i1}^2 = 1240, \quad \sum_{i=1}^{15} x_{i2} = 104, \quad \sum_{i=1}^{15} x_{i2}^2 = 1004,$$
$$\sum_{i=1}^{15} y_i = 590, \quad \sum_{i=1}^{15} e_i^2 = 30.$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_{i1}x_{i2} = 936, \quad \sum_{i=1}^{15} x_{i1}y_i = 5732, \quad \sum_{i=1}^{15} x_{i2}y_i = 4841, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 27468,$$

1. Çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini bahalandyryň:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon.$$

2. Koeffiýentleriň standart ýalňyşlyklaryny kesgitläň.

3. R^2 we $\bar{R}^2$ – ni hasaplaň.

4. Eger ähmiýetlilik derejesi α = 0,05 bolsa, onda regressiýa koeffisiýentleriniň we determinasiýa koeffisiýentiniň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

3-nji mesele

Goý, $\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ regressiýa kesgitlenen bolsun, $b_1 > 0$. x_2 üýtgeýän ululyk taşlanýar we regressiýanyň $\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ deňlemesi bahalandyrylýar, netijede, b_1 koeffisiýent otrisatel bolýar ($b_1 < 0$). Bu bolup bilermi? Eger bolsa, onda haýsy ýagdaýda?

4-nji mesele

Eger $\bar{x}, \bar{y}$ – üýtgeýän ululyklaryň ortaça bahalary bolsa, onda jübüt çyzykly regressiýanyň deňlemesiniň grafiginiň hemme wagt $(\bar{x}, \bar{y})$ nokatdan geçýändigini subut ediň.

II wariant

1-nji mesele

10 sany kompaniýanyň işi barada maglumatlar tablisada berlen. X (mlrd.pul ölçeg birligi) – goruň (kapitalyň) aýlawy, Y(mlrd. manat) – arassa girdeji.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	31,3	13,4	4,5	10,0	20,0	15,0	60,1	17,9	40,2	2,0
Y	2,2	1,7	0,7	1,7	2,2	1,3	4,1	1,6	2,5	0,5

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Eger-de ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa,onda β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleriiniň 95% ähtimallykly ynamly aralyklaryny hasaplaň.

4. Goruň aýlawy $X = 50{,}0$ bolanda arassa girdejiniň çaklaýşyny geçiriň we $M\,(Y|X = 50{,}0)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Goruň aýlawy X =50,0 bolanda arassa girdejiniň alyp biljek bahalarynyň 95% – den az bolmadyk göwrüminiň düşjek aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger goruň aýlawy 3 mln.manat artsa, onda arassa girdejiniň näçe üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

X (pul ölçeg birligi) ortaça girdeji we Y (pul ölçeg birligi) ortaça sarp ediş barada 15 ýylyň maglumatlary tablisada berlen.

Ýyllar	X	Y	Ýyllar	X	Y	Ýyllar	X	Y
1995	10,5	8,8	2000	16,1	11,9	2005	23,1	20,5
1996	11,6	12,0	2001	17,3	13,5	2006	24,3	19,5

tablisanyň dowamy

1997	12,3	13,0	2002	18,7	15,0	2007	25,5	19,1
1998	13,7	12,6	2003	20,1	18,2	2008	27,8	19,3
1999	14,5	11,2	2004	21,8	21,2	2009	30,0	24,0

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Darbiniň-Uotsonyň *DW* statistikasynyň bahasyny hasaplaň we galyndylaryň awtokorrelýasiýasynyň barlygyny seljeriň.

3. Awtokorrelýasiýa bar ýagdaýynda Kohranyň-Orkattyň usulynyň bir siklini ulanyp, regressiýanyň deňlemesini täzeden bahalandyryň.

3-nji mesele

X we Y üýtgeýän ululyklaryň bahalary berlen.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	2,6	4,6	6,0	9,4	9,0	12,3	15,1	14,3	17,9	23,1

r_{xy} korrelýasiýa koeffisiýentini hasaplaň we korrelýasiýa baglanyşygyň barlygynyň (ýoklugynyň) gipotezasyny barlaň.

4-nji mesele

X we Y üýtgeýän ululyklaryň bahalarynyň n esse artdyrylmagy $r_{x,y}$ korrelýasiýa koeffisiýentiniň bahasyna nähili täsir eder?

III wariant

1-nji mesele

10 sany arçynlyk boýunça X (pul birligi görnüşinde) – ortaça günlük zähmet haklary we iýmit harytlaryna edilen Y (% görnüşinde) çykdajylar barada maglumatlar berlen.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	340	389	452	509	540	567	643	658	679	720
Y	70,1	62,1	66,1	65,6	55,6	58,0	55,1	57,3	53,1	48,1

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Eger ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa, β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleriniň 95% ähtimallykly ynamly aralyklaryny hasaplaň.

4. Ortaça günlük haky $X = 700$ (pul birligi) bolanda iýmit harytlara çykdajylaryň mukdarynyň çaklaýşyny geçiriň we $M\ (Y|X = 700)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. $X = 700$ bolanda Y ululygyň 95% – den az bolmadyk bahalarynyň düşjek aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger ortaça günlük haky 10 pul birligine artsa, onda iýmit harytlary üçin edilýän çykdajylar näçe göterime üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

30 sany öý hojalyklaryň girdejisi (X) we çykdajysy (Y) barada maglumatlar berlen.

X	26	28	31	32	34	35	37	40	41	43
Y	11,2	9,74	12,4	15,0	12,2	12,1	16,4	14,7	16,4	20,2
X	45	48	49	52	53	54	57	60	61	62
Y	14,9	19,2	23,0	24,4	21,2	17,8	22,8	28,2	21,6	20,5
X	63	66	67	68	69	70	75	77	79	80
Y	29,6	31,0	24,8	22,4	22,8	34,9	31,5	30,8	23,3	41,1

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Galyndylaryň geteroskedastikliginiň ýoklugy baradaky gipotezany öwrenmek üçin Goldfeldiň-Kwandtyň testini ulanyň.

3. Galyndylaryň geteroskedastikligi bar ýagdaýda gyşarmalaryň σ_i^2 dispersiýasy x_i^2 ululyga proporsional diýip hasap edip, agramlaşdyrylan iň kiçi kwadratlar usulyny ulanyň.

4. Adaty iň kiçi kwadratlar usuly boýunça gurlan deňlemelerdäki bahalandyrmalaryň hiline geteroskedastikligiň düýpli täsir edendigini kesgitläň.

3-nji mesele

Eger

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -0,3 & -0,3 \\ -0,3 & 0,1 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{15} e_i^2 = 4$$

bolsa, onda çyzykly regressiýa modeliniň koeffisiýentleriniň S_{b_0}, S_{b_1}, S_{b_2} standart ýalňyşlyklaryny hasaplaň.

4-nji mesele

Çyzykly jübüt regressiýanyň galyndylary barada aşakdaky maglumatlar (t-synag pursadynyň belgisi)berlen.

$$\sum_{t=1}^{15} e_t^2 = 90, \ \sum_{t=2}^{15} (e_t - e_{t-1})^2 = 31$$

Darbiniň-Uotsonyň testini ulanyp, awtokorrelýasiýanyň barlygy ýa-da ýoklugy barada netije çykaryň.

IV wariant

1-nji mesele

10 sany kärhanada bir önümiň özüne düşýän Y (pul ölçeg birligi) gymmatynyň bir önüme düşýän X (adam-sagat) zähmet sygymyna baglylygy barada maglumatlar tablisada berlen.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	10,3	11,2	12,3	11,8	14,6	15,8	15,2	14,2	13,1	10,8
Y	110	125	130	131	150	172	158	145	140	118

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Eger ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa, onda β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň, b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Zähmet sygymy X =15,0 bolanda bir önümiň özüne düşýän gymmatynyň çaklaýşyny ediň we $M(Y|X = 15{,}0)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Zähmet sygymy $X = 15{,}0$ bolanda önümiň özüne düşýän gymmatynyň bahalarynyň 95% -inden az bolmadyk bölegininiň düşjek aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger zähmet sygymy 1 adam-sagat artsa, onda bir önümiň özüne düşýän gymmatynyň näçe üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Bäsleşik şertlerde işleýän kärhana üçin käbir Y harydyň teklibiniň göwrümi bu harydyň X_1 bahasyna we işgärleriň X_2 zähmet haklaryna çyzykly bagly hasaplanýar: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$.

X_1	10	15	20	25	40	37	43	35	38	55	50	35	40	45
X_2	12	10	9	9	8	8	6	4	4	5	3	1	2	1
Y	20	35	30	45	60	69	75	90	105	110	120	130	130	135

1. Regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Gurlan modeliň hilini t statistikanyň we F statistikanyň kömegi bilen barlaň.

3-nji mesele

$\hat{y} = b_0 + b_1 x$ regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentleri hasaplananda b_0 koeffisiýentiň bahasynda ýalňyşlyk göýberilen (b_1 koeffisiýent dogry hasaplanan). Netijede $b_0 = 5$ alnan. Galyndylaryň jemi

$$\sum_{i=1}^{20} e_i = \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{y}_i) = 40.$$

b_0 koeffisiýenti kesgitläň.

4-nji mesele

X we *Y* üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa koeffisiýenti 0,9 - a deň. Çyzykly regressiýa modeli ýagdaýynda determinasiýa koeffisiýenti nähili bolar?

V wariant

1-nji mesele

10 sany kärhanada *Y* udel hemişelik çykdajylaryň öndürilen önümiň *X* göwrümine baglylygy barada maglumatlar tablisada berlen.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1000	900	950	1020	1100	950	1150	1200	1220	1250
Y	800	720	730	800	845	745	890	940	922	960

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolanda β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Önümiň öndürilen göwrümi $X = 120{,}0$ bolanda hemişelik çykdajylaryň çaklaýşyny geçiriň we $M(Y|X = 1200{,}0)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Önümiň öndürilen göwrümi $X = 120{,}0$ bolanda, hemişelik çykdajylaryň aljak bahalarynyň 95% - inden az bolmadyk böleginiň düşjek aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger önümiň öndürilen göwrümi 100 birlik artsa, onda hemişelik çykdajylaryň näçe birlik üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin *F* statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Çyzykly däl modeli saýlap alyň, ony çyzykly görnüşe geçiriň we eger aşakdaky maglumatlar berilse (*X* – düşündiriji üýtgeýän ululyk, *Y* – bagly üýtgeýän ululyk), parametrlerini bahalandyryň.

14. sargyt № 2842

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	5	12,3	20,9	30,3	40,5	51,4	62,7	74,6	87,0	99,8

3-nji mesele

$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + e$ modele seredilýär.

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,74 & -0,06 & -0,06 \\ -0,06 & 0,01 & -0,002 \\ -0,06 & -0,002 & 0,01 \end{pmatrix}, X^T Y = \begin{pmatrix} 330 \\ 2000 \\ 2060 \end{pmatrix}$$

matrisalar alnan.

Modeliň parametrleriniň b_0, b_1, b_2 bahalandyrmalaryny hasaplaň.

4-nji mesele

Y we X berk funksional baglanyşyk ýagdaýynda bolsa R^2 determinasiýa koeffisiýenti we F statistika näçä deň bolar?

VI wariant

1-nji mesele

10 sany kärhana üçin materiallaryň Y sarp edilişi we öndürilen önümiň X göwrümi barada maglumatlar tablisada berlen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	105	116	123	137	145	161	173	187	201	218
Y	210	240	270	290	300	320	350	400	400	450

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa, β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Önümçiligiň göwrümi $X = 200$ bolanda materiallaryň sarp edilişiniň çaklaýşyny geçiriň we M $(Y|X = 200)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Önümçiligiň göwrümi $X = 200$ bolanda, materiallaryň sarp edilişiniň 95%-inden az bolmadyk bahalarynyň jemlenen aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger girdeji 10-a artsa, onda materiallaryň sarp edilişiniň näçä üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Çyzykly däl modeli saýlap, ony çyzykly görnüşe geçirmeli we aşakdaky maglumatlar berilse (X – düşündiriji üýtgeýän ululyk, Y – bagly üýtgeýän ululyk), parametrlerini bahalandyryň.

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Y	5,5	5,7	6,3	6,6	7,1	7,7	8,12	9,1	9,3	10

3-nji mesele

X we Y üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa koeffisiýenti 0,85-e deň. Eger X we Y üýtgeýän ululyklaryň ähli bahalaryny (–10) - a köpeltsek, korrelýasiýa koeffisiýenti näçä deň bolar?

4-nji mesele

Eger korrelýasiýa koeffisiýenti determinasiýa koeffisiýentinden kiçi bolsa, onda çyzykly regressiýa modelinde düşündiriji üýtgeýän ululygyň artmagy bilen bagly üýtgeýän ululyk özüni nähili alyp barar?

VII wariant

1-nji mesele

Konserniň 10 sany kärhanasy boýunça satuwyň Y (mln.manat) göwrümi bilen mahabatlandyrma (reklama) sarp edilen X (mln.manat) çykdajylaryň maglumatlary tablisada berlen.

	1	2	3	4	56	6	7	8	9	10
X	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,5	1,9	2,1	2,2	2,3
Y	23,1	23,6	24,2	23,1	25,2	25,1	26,7	26,3	27,1	26,9

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa, β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Eger mahabatlandyrmagyň çykdajysy $X = 2{,}5$ bolsa, satuwyň göwrüminiň çaklaýyşyny geçiriň we $M\,(Y|X = 2{,}5)$ şertli matematiki garaşmanyň 95%-li ynamly aralygyny hasaplaň.

5. Mahabatlandyrmagyň çykdajysy $X = 2{,}5$ bolsa, satuwyň göwrüminiň 95%-inden az bolmadyk bahalarynyň jemlenen aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger mahabatlandyrmagyň çykdajysy 0,1 mln. manat artsa, onda satuwyň göwrüminiň näçe birlik üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Şeýle maglumatlar berlen (X – düşündiriji üýtgeýän ululyk, Y – bagly üýtgeýän ululyk). Çyzykly däl modeli saýlap, ony çyzykly görnüşe geçiriň we parametrlerini bahalandyryň.

X	10,0	11,7	13,7	16,0	18,7	21,9	25,7	30,0	35,1	41,1
Y	15,0	13,0	11,0	11,2	10,3	9,4	8,9	8,1	7,6	7,44

3-nji mesele

Iki empiriki model gurlan:

$$(1)\ Y = b_0 + b_1 X + e,$$

$$(2)\ ln\ Y = b'_0 + b'_1 X + e.$$

Determinasiýa koeffisiýentleri, degişlilikde:

$$(1)\ R^2 = 0{,}91\ ,$$

$$(2)\ R^2 = 0{,}95\ .$$

(2) deňleme (1) deňlemä garanyňda başlangyç maglumatlary gowy ýazyp beýan edýär diýip bolarmy? Jogaby esaslandyrmaly.

4-nji mesele

Eger $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + e$ model gurulsa (bu ýerde Y – peýda, X_1 – girdeji, X_2 – çykdajy), onda regressiýanyň koeffisiýentleri nähili bolar?

VIII wariant

1-nji mesele

Lomaý söwdanyň 10 sany kärhanasy boýunça önüm ýerleşdirmegiň Y göwrüminiň söwda meýdançasynyň X ölçegine baglylygynyň maglumatlary tablisada berlen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	700	750	800	830	850	900	920	950	980	890
Y	6350	7800	7600	8600	8600	9200	9000	9100	9950	9000

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolsa, β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Söwda meýdançasynyň ölçegi $X = 1000$ bolanda önüm ýerleşdirmegiň göwrüminiň çaklaýşyny geçiriň we $M(Y|X = 1000)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Söwda meýdançasynyň ölçegi $X = 1000$ bolanda, önüm ýerleşdirmegiň göwrüminiň 95%-inden az bolmadyk bahalarynyň jemlenen aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger söwda meýdançasynyň ölçegi 100 – e artsa, onda önüm ýerleşdirmegiň göwrüminiň näçe birlik üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Welaýatda bölekleýin söwdanyň aýlanyşygy we sarp ediş bahanyň dinamikasy barada iki ýylyň maglumatlary tablisada berlen.

Ş.Almonyň usulyny ulanyp, paýlanan lagaly modeliň parametrlerini bahalandyryň. Laganyň uzynlygy 4-den uly bolmaly däl, approksimirleýji polinomyň derejesi 3-den uly bolmaly däl. Gurlan modeliň hilini bahalandyryň.

Aýlar	Bölekleýin söwdanyň aýlawynyň geçen aýa görä % – i	Sarp ediş bahalaryň indeksiniň geçen aýa görä % – i
Ýanwar	70,8	101,7
Fewral	98,7	101,1
Mart	97,9	100,4
Aprel	99,6	100,1
Maý	96,1	100,0
Iýun	103,4	100,1
Iýul	95,5	100,0
Awgust	102,9	105,8
Sentýabr	77,6	145,0
Oktýabr	102,3	99,8
Noýabr	102,9	102,7
Dekabr	123,1	109,4
Ýanwar	74,3	110,0
Fewral	92,9	106,4
Mart	106,0	103,2
Aprel	99,8	103,2
maý	105,2	102,9
Iýun	99,7	100,8
Iýul	99,7	101,6
Awgust	107,9	101,5
Sentýabr	98,8	101,4
Oktýabr	104,6	101,7
Noýabr	106,4	101,7
Dekabr	122,7	101,2

3-nji mesele

(1) $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ – regressiýanyň nazary deňlemesi,
(2) $Y = b_0 + b_1 X + e$ – regressiýanyň empiriki deňlemesi.

Deňlemeleriň haýsysy saýlamanyň maglumatlaryny has gowy şöhlelendirýär we näme üçin ?

4-nji mesele

1. Eger $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + e$ modeli gursak (bu ýerde Y – peýda, X_1 – girdeji, X_2 – çykdajy), onda determinasiýa koeffisiýenti nähili bolar?

IX wariant

1-nji mesele

Lomaý söwdanyň 10 sany kärhanasy boýunça haryt ýerleşdirmegiň Y göwrümi we haryt gorlarynyň X göwrümi barada maglumatlar tablisada berlen.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
X	11,1	11,6	12,3	12,8	13,3	13,6	13,9	14,5	16,8	18,2
Y	70,1	73,3	77,1	76,1	80,1	76,5	79,5	81,5	86,8	91,5

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0,05$ bolanda β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Harydyň gory $X = 20,0$ bolanda haryt ýerleşdirmegiň göwrüminiň çaklaýşyny geçiriň we M(Y|X=20,0) şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Goruň derejesi X=20,0 bolanda, haryt ýerleşdirmegiň göwrüminiň 95%-inden az bolmadyk bahalarynyň jemlenen aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger harydyň gory 1 birlik artsa, onda haryt ýerleşdirmegiň göwrüminiň näçe birlik üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Kärhanada iki (A we B) kärhanalaryň enjamlary ulanylýar. Enjamlaryň ynamlylygy barlanylýar. Enjamlaryň köneligi, ýaşy (X – aý) we soňky döwülýänçä işlän (Y – sagat) wagty hasaba alynýar. 36 enjam boýunça saýlama maglumatlar alnan.

Kärhana	X	Y	Kärhana	X	Y
A	23	280	B	52	200
A	69	176	B	66	123
A	63	176	B	20	245
A	52	200	B	48	236
A	66	123	B	30	230
A	20	245	B	25	216
A	48	236	B	75	45
A	25	240	B	20	265
A	71	115	B	40	176
A	40	225	B	25	260
A	30	260	B	69	65
A	75	100	B	45	126
A	56	170	B	69	45
A	37	240	B	22	220
A	67	120	B	33	194
A	23	280	B	21	240
A	69	176	B	50	120
A	63	176	B	56	88

Dürli kärhananyň enjamynyň hiliniň dürlüdigini hasaba alyp, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 D + \gamma_2 DX + \varepsilon$ regressiýa deňlemesini bahalandyryň.

3-nji mesele

Iň kiçi kwadratlar usuly bilen azat agzasyz regressiýada ýapgytlyk koeffisiýentini bahalandyrmak üçin formulany getirip çykaryň, ýagny, gyşarmalaryň kwadratlarynyň $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ jemi minimal bolar ýaly $Y = \beta_1 X+\varepsilon$ regressiýanyň β_1 parametriniň bahalandyrmasyny tapyň.

4-nji mesele

Eger çyzykly regressiýa modelinde korrelýasiýa koeffisiýenti determinasiýa koeffisiýentinden uly bolsa, düşündiriji üýtgeýän ululygyň artmagy bilen bagly üýtgeýän ululyk özüni nähili alyp barar?

X wariant

1-nji mesele

10 ýyl üçin X (mln. manat) – ortaça girdeji we Y (mln.manat) – ortaça sarp ediş barada maglumatlar tablisada berlen:

Ýyllar	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
X	10,5	11,6	12,3	13,7	14,5	16,1	17,3	18,7	20,1	21,8
Y	8,12	10,0	8,41	12,0	12,4	11,4	12,8	13,9	17,3	17,5

1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X+\varepsilon$ çyzykly regressiýanyň koeffisiýentlerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça bahalandyryň.

2. Ähmiýetlilik derejesi $\alpha = 0{,}05$ bolanda β_0, β_1 nazary koeffisiýentleriň b_0, b_1 bahalandyrmalarynyň statistiki ähmiýetliligini barlaň.

3. Regressiýanyň nazary koeffisiýentleri üçin 95% ähtimallykly ynamly aralyklary hasaplaň.

4. Girdeji $X = 23{,}0$ bolanda sarp edişiň çaklaýşyny geçiriň we $M(Y|X = 23{,}0)$ şertli matematiki garaşma üçin 95% ähtimallykly ynamly aralygy hasaplaň.

5. Girdeji $X = 23{,}0$ bolanda, sarp edişiň göwrüminiň 95%-inden az bolmadyk bahalarynyň jemlenen aralygynyň çäklerini hasaplaň.

6. Eger girdeji 3mln. manada artsa, onda sarp edişiň näçe birlik üýtgejekdigini bahalandyryň.

7. R^2 determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň.

8. Determinasiýa koeffisiýenti üçin F statistikany hasaplaň we onuň statistiki ähmiýetliligini bahalandyryň.

2-nji mesele

Keýns modeli berlen:

$C_t = a_1 + b_{11} Y_t + b_{12} T_t + \varepsilon_{t1}$ (sarp ediş funksiýasy),
$I_t = a_2 + b_{21} Y_{t-1} + \varepsilon_{t2}$ (maýa goýum funksiýasy),
$T_t = a_3 + b_{31} Y_t + \varepsilon_{t3}$ (salgytlar funksiýasy),
$Y_t = C_1 + I_t + G_t$ (girdejiniň toždestwosy),

bu ýerde $C_t - t$ wagt döwründe jemi sarp ediş;
$Y_t - t$ wagt döwründe girdeji;
$I_t - t$ wagt döwründe maýa goýumlar;
$T_t - t$ wagt döwründe salgytlar;
$G_t - t$ wagt döwründe döwlet çykdajylary;
$Y_{t-1} - (t-1)$ wagt döwründe girdeji.

C, I, T, Y üýtgeýän ululyklar endogen ululyklar. Modeliň her bir deňlemesiniň identifisirlenendigini ýa-da däldigini kesgitläň. Modeliň getirilen formasyny ýazyň.

3-nji mesele

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ regressiýa deňlemesiniň koeffisiýentlerini bahalandyrmak üçin hasaplamalar matrisa görnüşinde geçirilen:

$$X^T X - \begin{pmatrix} 10 & 55 & 74 \\ 55 & 385 & 376 \\ 74 & 376 & 634 \end{pmatrix}, \quad X^T Y - \begin{pmatrix} 268 \\ 1766 \\ 1709 \end{pmatrix}.$$

Regressiýanyň empiriki koeffisiýentlerini kesgitläň.

4-nji mesele

X we Y üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky determinasiýa koeffisiýenti 0,64-e deň. Regressiýanyň çyzykly modeli üçin korrelýasiýa koeffisiýenti nähili bolar ?

SÖZLÜK

Awtoregressiýa koeffisiýenti – birinji tertipli $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ awtoregressiýa prosesinde ρ – parametr.

Bagly *Y* ululygyň *X* – *a* regressiýasynyň funksiýasy – bu funksiýa $f(x)$ ýaly belgilenýär. Bu funksiýa bagly üýtgeýän ululygyň şertli orta bahasynyň (düşündiriji üýtgeýän ululyk berlen bahany alanda) özüni alyp barşyny ýazyp beýan edýär.

Bagly *Y* ululygyň X_i ululyga görä çeýeligi – X_i ululygyň bir göterim üýtgemegi bilen (beýleki *X* üýtgeýänler üýtgemeýärler) *Y* ululygyň näçe göterim üýtgejekdigini görkezýär. Bu ululyk regressiýa koeffisiýentiniň kömegi bilen bahalandyrylýar.

Bahalandyrma (baha) – berlen saýlama maglumatlaryň esasynda hasaplanýan käbir san.

Bahalandyrmalaryň ýalňyşlyklary – baş toplumyň parametriniň bahasy bilen bu parametriň statistiki bahalandyrmasynyň arasyndaky tapawut.

Baş toplum – berlen ähli hakyky şertlerde alynjak gözegçilikleriň toplumy.

Birinji görnüşli ýalňyşlyk – bu ýalňyşlyk nol çaklama dogry bolanda onuň taşlanýan ýagdaýynda göýberilýän ýalnyşlyk. Bu ýalňyşlyk statistiki ähmiýetsiz netijäniň statistiki ähmiýetli diýip kabul edilmeginden durýar.

Birwagtlaýyn deňlemeler ulgamy – özara baglanyşykly regressiýa deňlemeleriň (modelleriň) toplumy. Bu deňlemelerde şol bir üýtgeýän ululyklar şol bir wagtda bagly we bagly däl (düşündiriji) üýtgeýänler bolup (dürli deňlemelerde) çykyş edýär.

Çyzykly model – *Y* ululygyň gözegçilik edilýän bahasynyň baş toplumda çyzykly baglanyşyk bilen normal paýlanan tötän ululygyň jemi görnüşde kesgitlenýänligini görkezýän model.

Darbiniň - Uotsonuň statistikasy – tötän gyşarmalaryň korrelýasiýasynyň (awtokorrelýasiýasynyň) bardygyny ýa-da ýokdugyny barlamak üçin ulanylýan görkeziji.

Dispersiýa – tötän ululygyň orta bahadan (matematiki garaşmadan) daşlaşmaklygynyň (ýaýrawynyň) derejesini şöhlelendirýän häsiýetlendiriji.

R^2 determinasiýa koeffisiýenti – düşündirilýän (bagly) ululygyň umumy dispersiýasyndaky düşündirilen dispersiýanyň bölegi (ülüşi).

Ekonometrika – nazary netijeleri, usullary we modelleri birleşdirýän ylmy ugur. Bu ylmy ugurda ykdysady nazaryýete, ykdysady we matematiki statistika esaslanyp, ykdysady nazaryýet tarapyndan goýlan ylmy kanunalaýyklyklara anyk mukdar aňlatmalary berilýär.

Ekstrapolýasiýa – çaklaýyş usuly. Bu usulda berlen maglumatlaryň ýerleşýän aralygyndaky daşky maglumatlar çaklaýyş edilýär. Bu usul töwekgelçilik bilen baglanyşykly. Sebäbi, çaklaýşyň netijelerini bar bolan maglumatlar bilen barlap bolmaýar.

Erkinlik derejesi – standart ýalnyşlykdaky garaşsyz maglumat çeşmeleriniň mukdary.

***F* statistika** – dispersiýaly seljermede *F* testiň esasyny düzýän statistika. Ol dispersiýalaryň gatnaşygy bilen hasaplanýar.

Emeli (indikator) üýtgeýän ululyk – hil nyşany ýazyp beýan etmek üçin ulanylýan we diňe nol we bir bahalary alýan mukdar üýtgeýän ululyk.

***F* tablisa** – bu tablisa *F* statistikanyň paýlanyşynyň kritiki bahalaryny saklaýar. Bu kritiki bahalaryň kömegi bilen H_0 çaklama barlanylýar.

***F* test** – *X* üýtgeýänleriň *Y* üýtgeýäniň üýtgemesiniň ähmiýetli bölegini düşündirýändigini barlamak üçin umumy test.

Galyndylaryň awtokorrelýasiýasy – dürli gözegçiliklerde tötän galyndylaryň özara baglanyşygy.

Geteroskedastiklik – tötän gyşarmalaryň dispersiýasynyň gözegçiliginiň tertip belgisine baglylygy.

Goldfeldiň-Kwandtyň testi – tötän galyndylaryň geteroskedastikliginiň bardygyny ýa-da ýokdugyny kesgitlemek üçin testleriň biri.

Gomoskedastiklik – tötän gyşarmalaryň dispersiýasynyň gözegçiligiň tertip belgisine bagly dälligi.

Gytaklaýyn iň kiçi kwadratlar usuly – birwagtlaýyn deňlemeler ulgamyny çözmegiň usuly. Ilki bilen deňleme getirilen forma özgerdilýär, soňra adaty iň kiçi kwadratlar usuly ulanylýar.

Ikinji görnüşli ýalňyşlyk – alternatiwaly çaklama dogry bolanda oňa derek nol çaklama kabul edilende goýberilýän ýalňyşlyk. Bu ýalňyşlyk statistiki ähmiýetli netijäniň statistiki ähmiýetsiz diýlip kabul edilmeginden durýar.

Instrumental üýtgeýänler – bu üýtgeýän ululyga tötän gyşarmalar bilen korrelirlenýän düşündiriji üýtgeýän ululyk çalşyrylýar. Instrumental üýtgeýän ululyk çalşyrylýan düşündiriji üýtgeýän bilen korrelirlenmeli (mümkin bolsa güýçli) we tötän gyşarma bilen korrelirlenmeli däl.

Iň kiçi kwadratlar usuly – regressiýa deňlemesiniň parametrlerini kesgitlemegiň usuly. Bu usul tötän galyndylaryň kwadratlarynyň jemini minimallaşdyrýar.

Korrelýasiýa baglanyşygy – statistiki baglanyşygyň hususy haly. Bu baglanyşykda bir üýtgeýän ululygyň dürli bahalaryna başga bir üýtgeýän ululygyň dürli orta bahalary degişlidir.

Korrelýasiýa koeffisiýenti – iki üýtgeýän ululygyň arasyndaky çyzykly baglanyşygyň güýjüni görkezýän we [– 1; 1] kesimde üýtgeýän san görkeziji.

Korrelýasiýa meýdany – hakyky statistiki maglumatlaryň nokatlar görnüşde dekart koordinatalar ulgamynda grafiki şekili.

Kritiki baha – test statistika bilen deňeşdirmek üçin standart statistiki tablisalardan alynýan bahalar.

Multikollinearlyk – düşündiriji üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky ýokary derejedäki çyzykly korrelýasiýa. Şeýle ýagdaýda aýratyn alnan regressiýa koeffisiýentleriň gowy bahalandyrmalaryny almak kyn.

Normal paýlanyş – jaň şekilli egri çyzyk bilen berilýän üznüksiz paýlanyş.

Nol çaklama (gipoteza) – H_0 ýaly belgilenýän we «sessiz» kabul edilýän çaklama.

Parametr – tutuş baş toplum üçin hasaplanan islendik görkeziji.

Polinomly regressiýa – çyzykly dällik meselesini çözmegiň usullarynyň biri. Bu ýagdaýda Y ululyk X üýtgeýäniň dürli natural derejeleriniň hatary bilen aňladylýar.

Regressiýa seljermesi – Y üýtgeýän ululygyň bir ýa-da birnäçe X – üýtgeýänler boýunça çaklaýşy.

Regressiýa deňlemesiniň spesifikasiýasy – üýtgeýänleriň baglanyşyk formasynyň saýlanyp alynmagy.

Regressiýa koeffisiýentiniň S_{b_j} standart ýalnyşlygy – bu ululyk b_j bahalandyrmanyň baş toplumdaky β_j parametriň bahasyndan näçe daşlykda boljakdygyny (takmynan) görkezýär.

Regressiýa koeffisiýenti b_j – X_j üýtgeýän ululygyň Y bagly ululyga edýän täsirini görkezýär. b_j X_j bir birlik artanda (beýleki X_j– ler üýtgemeýär) Y ululygyň näçe birlik artjakdygyny (kemeljekdigini) görkezýär.

Regressiýanyň aýratyn alnan koeffisiýentleri üçin *t* testler – eger regressiýa ähmiýetli bolsa, regressiýanyň koeffisiýentleri barada soňky statistiki netije çykarmak usuly.

Saýlama standart gyşarma – üýtgemekligiň ölçegi, bar bolan maglumatlardan käbir has uly baş topluma umumylaşdyryp geçmek üçin ulanylýar.

Standart (orta kwadratik) gyşarma – üýtgäp durmaklygy ölçemegiň däp bolan çemeleşmesi. Bu maglumatlaryň aýratyn bahalary bilen orta bahanyň arasyndaky aralygy umumylaşdyrýar.

Statistiki baglanyşyk – bir üýtgeýän ululygyň bahasynyň üýtgemesiniň beýleki üýtgeýän ululygyň paýlanyşyny üýtgedýän baglanyşyk.

Süýşmeýän baha (bahalandyrma) – baş toplumyň degişli parametri bilen deňeşdirilende ulgamlaýyn artdyryp we kemeldip bolmaýan ortaça korrekt bahalandyrma.

***T* statistika** – *T* testi ýerine ýetirmegiň usullarynyň biri.

Wagt hatary – wagt boýunça tertipleşdirilen maglumatlar. Wagtyň goňşy pursatlaryna degişli gözegçilikler, köplenç biri-birine bagly bolýarlar.

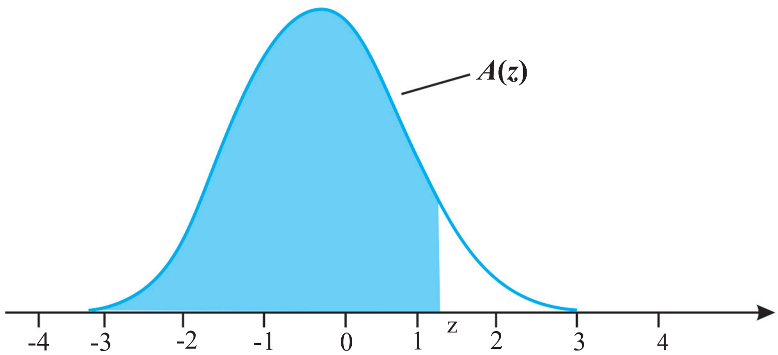
Wagt hatary üçin tendensiýa (trend) – derňelýän wagt hatarynyň örän uzakmöhletleýin özüni alyp barşy.

Ynamly aralyk – baş toplumyň näbelli parametriniň berlen ähtimallyk bilen düşýän aralygy.

Ynamlylyk derejesi (*α*) – bu ululyk maglumatlaryň nol çaklama degişlilik faktynyň näçeräk garaşylmadyk ýagdaýdygyna şaýatlyk edýär. α – nyň kiçi bahalary şeýle ýagdaýyň bolmaklygynyň uly derejede garaşylmaýan bolmaklygyny aňladýar we H_0 çaklamanyň taşlanylmagyna getirýär.

Goşundy

z	A(z)	
1,645	0,9500	Sagky 5% – li ýaýlanyň aşaky çägi
1,960	0,9750	Sagky 2,5% – li ýaýlanyň aşaky çägi
2,326	0,9900	Sagky 1% – li ýaýlanyň aşaky çägi
2,576	0,9950	Sagky 0,5% – li ýaýlanyň aşaky çägi
3,090	0,9990	Sagky 0,1% – li ýaýlanyň aşaky çägi
3,291	0,9995	Sagky 0,05% – li ýaýlanyň aşaky çägi



1-nji tablisa. Kumulýatiw standart normal paýlanyş

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5120	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6113	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6694	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6849
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8161	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830

1-nji tablisanyň dowamy

1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8987	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9118	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9845	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999							

2-nji tablisa. *t* paýlanyş: *t* – niň kritiki bahasy

Erkinlik derejäniň sany	Ähmiýetlilik derejesi						
	Ikitarap-laýyn test	10%	5%	2%	1%	0,2%	0,1%
	Birtarap-laýyn test	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
1		6,814	12,708	31,821	63,657	309	619
2		2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599

2-nji tablisanyň dowamy

3		2,363	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4		2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5		2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6		1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7		1,894	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8		1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9		1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10		1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11		1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12		1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13		1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14		1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15		1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16		1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17		1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18		1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19		1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20		1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21		1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22		1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23		1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24		1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25		1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26		1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27		1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,609
28		1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29		1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30		1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,648
32		1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34		1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36		1,688	2,026	2,434	2,719	3,333	3,582

15. sargyt № 2842

2-nji tablisanyň dowamy

38		1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40		1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
42		1,682	2,018	2,418	2,698	3,296	3,538
44		1,680	2,015	2,414	2,692	3,286	3,526
46		1,679	2,013	2,410	2,687	3,277	3,515
48		1,677	2,011	2,407	2,682	3,269	3,505
50		1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60		1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70		1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80		1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90		1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100		1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
120		1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
150		1,655	1,978	2,351	2,609	3,145	3,357
200		1,653	1,976	2,345	2,601	3,131	1,648
300		1,650	1,972	2,339	2,592	3,118	3,323
400		1,649	1,968	2,336	2,588	3,111	3,315
500		1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
600		1,647	1,964	2,333	2,584	3,104	3,307
–		1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

3-nji *A* tablisa. *F* paýlanyş: *F* – iň kritiki bahasy (ähmiýetlilik derejesi 5%)

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	45	50	71	58	16	99	77	88	54	88	91	36
2	18,51	1900	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,94	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53

3-nji A tablisanyň dowamy

8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,84	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,96	2,91	2,86
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,09	3,09	3,01	2,95	2,90	2,95	2,79	2,74
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,95	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,65	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,33
18	4,41	3,55	3,19	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,37	2,30	2,25	2,18	2,13
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,08
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,04	1,99
40	4,06	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,06	2,00	1,95
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,89
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,89	1,84
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,82
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,86	1,80
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,79
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,78
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,82	1,76

3-nji A tablisanyň dowamy

200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,38	1,93	1,87	1,80	1,74
250	3,88	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	2,05	1,38	1,92	1,87	1,79	1,73
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,37	1,91	1,86	1,78	1,72
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,36	1,90	1,85	1,78	1,72
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,36	1,90	1,85	1,77	1,71
600	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	2,02	1,35	1,90	1,85	1,77	1,71
750	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,35	1,89	1,84	1,77	1,70
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,35	1,89	1,84	1,76	1,70

3-nji A tablisanyň dowamy

$v_2 \backslash v_1$	16	18	20	25	30	35	40	50	60	75	100	150	200
1	48	32	01	26	10	69	14	77	20	62	04	48	68
2	19,43	19,44	19,45	19,46	19,46	19,47	19,47	19,48	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49
3	8,69	8,67	8,66	8,63	8,62	8,60	8,59	8,58	8,57	8,56	8,55	8,54	8,54
4	5,84	5,82	5,80	5,77	5,75	5,73	5,72	5,70	5,69	5,68	5,66	5,65	5,63
5	4,60	4,58	4,56	4,52	4,50	4,48	4,46	4,44	4,43	4,42	4,41	4,39	4,39
6	3,92	3,90	3,87	3,83	3,81	3,79	3,77	3,75	3,74	3,73	3,71	3,70	3,69
7	3,49	3,47	3,44	3,40	3,38	3,36	3,34	3,32	3,30	3,29	3,27	3,26	3,25
8	3,20	3,17	3,15	3,11	3,08	3,06	3,04	3,02	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95
9	2,99	2,96	2,94	2,89	2,86	2,84	2,83	2,80	2,79	2,77	2,76	2,74	2,73
10	2,83	2,80	2,77	2,73	2,70	2,68	2,66	2,64	2,62	2,60	2,59	2,57	2,56
11	2,70	2,67	2,65	2,60	2,57	2,55	2,53	2,51	2,49	2,47	2,46	2,44	2,43
12	2,60	2,57	2,54	2,50	2,47	2,44	2,43	2,40	2,38	2,37	2,35	2,33	2,32
13	2,51	2,48	2,46	2,41	2,38	2,36	2,34	2,31	2,30	2,28	2,26	2,24	2,23
14	2,44	2,41	2,39	2,34	2,31	2,28	2,27	2,24	2,22	2,21	2,19	2,17	2,16
15	2,38	2,35	2,33	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,10	2,10
16	2,33	2,30	2,28	2,23	2,19	2,17	2,15	2,12	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04
17	2,29	2,26	2,23	2,16	2,15	2,12	2,10	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99
18	2,25	2,22	2,19	2,14	2,11	2,06	2,06	2,04	2,02	2,00	1,98	1,96	1,95
19	2,21	2,18	2,16	2,11	2,07	2,05	2,03	2,00	1,98	1,96	1,94	1,92	1,91
20	2,18	2,15	2,12	2,07	2,04	2,01	1,99	1,97	1,95	1,93	1,91	1,89	1,88
21	2,16	2,12	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,94	1,92	1,90	1,88	1,86	1,84
22	2,13	2,10	2,07	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91	1,89	1,87	1,85	1,83	1,82

3-nji A tablisanyň dowamy

23	2,11	2,08	2,05	2,00	1,96	1,93	1,91	1,88	1,86	1,84	1,82	1,80	1,79
24	2,09	2,05	2,03	1,97	1,94	1,91	1,89	1,86	1,84	1,82	1,80	1,78	1,77
25	2,07	2,04	2,01	1,96	1,92	1,89	1,87	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,75
26	2,05	2,02	1,99	1,94	1,90	1,87	1,85	1,82	1,80	1,78	1,76	1,74	1,73
27	2,04	2,00	1,97	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81	1,79	1,76	1,74	1,72	1,71
28	2,04	2,00	1,97	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81	1,79	1,76	1,74	1,72	1,71
28	2,02	1,99	1,96	1,91	1,87	1,84	1,82	1,79	1,77	1,75	1,73	1,70	1,69
29	2,01	1,97	1,94	1,89	1,85	1,83	1,81	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67
30	1,99	1,96	1,93	1,88	1,84	1,81	1,79	1,76	1,74	1,72	1,70	1,67	1,66
35	1,94	1,91	1,88	1,82	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,63	1,61	1,60
40	1,90	1,87	1,84	1,78	1,74	1,72	1,69	1,68	1,64	1,61	1,59	1,56	1,55
50	1,85	1,81	1,78	1,73	1,69	1,66	1,63	1,60	1,58	1,55	1,52	1,50	1,48
60	1,82	1,76	1,75	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,53	1,51	1,48	1,45	1,44
70	1,79	1,75	1,72	1,66	1,62	1,59	1,57	1,53	1,50	1,48	1,45	1,42	1,40
80	1,77	1,73	1,70	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,48	1,45	1,43	1,39	1,38
90	1,76	1,72	1,69	1,63	1,59	1,55	1,53	1,49	1,46	1,44	1,41	1,38	1,36
100	1,75	1,71	1,68	1,62	1,57	1,54	1,52	1,48	1,45	1,42	1,39	1,36	1,34
120	1,73	1,69	1,65	1,60	1,55	1,52	1,50	1,46	1,43	1,40	1,37	1,33	1,32
150	1,71	1,67	1,64	1,58	1,54	1,50	1,48	1,44	1,41	1,38	1,34	1,31	1,29
200	1,69	1,66	1,62	1,56	1,52	1,48	1,46	1,41	1,39	1,35	1,32	1,28	1,26
250	1,68	1,65	1,61	1,55	1,50	1,47	1,44	1,40	1,37	1,34	1,31	1,27	1,25
300	1,68	1,64	1,61	1,54	1,50	1,46	1,43	1,39	1,36	1,33	1,30	1,26	1,23
400	1,67	1,63	1,60	1,53	1,49	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32	1,28	1,24	1,22
500	1,66	1,62	1,59	1,53	1,48	1,45	1,42	1,38	1,35	1,31	1,28	1,23	1,20
600	1,66	1,62	1,59	1,52	1,48	1,44	1,41	1,37	1,34	1,31	1,27	1,23	1,20
750	1,66	1,62	1,58	1,52	1,47	1,44	1,41	1,37	1,34	1,30	1,26	1,22	1,20
1000	1,52	1,65	1,61	1,58	1,47	1,43	1,41	1,36	1,33	1,30	1,26	1,22	1,19

3-nji *B* tablisa. *F* paýlanyş: *F* – iň kritiki bahasy
(ähmiýetlilik derejesi 1%)

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	418	460	535	558	565	599	536	507	647	685	632	667

3-nji B tablisanyň dowamy

2	98,50	9,00	99,17	9,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43
3	34,12	30,82	9,46	8,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,06	26,92
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,25
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,77
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,60
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,36
8	11,26	8,55	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,18	6,03	5,91	5,67	5,56
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	5,01
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,60
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,29
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,05
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,86
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,70
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,56
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,45
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,35
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,70	3,60	3,51	3,37	3,27
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,19
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,13
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,07
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	3,02
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,97
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,93
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,89
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,86
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,82
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,79
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,77
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,74
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,74	2,64
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,56
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,56	2,48

3-nji B tablisanyň dowamy

60	7,06	4,96	4,18	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,39
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,76	2,67	2,59	2,46	2,35
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,43	2,31
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,39	2,29
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,37	2,27
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,23
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,31	2,20
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,27	2,17
250	6,74	4,69	3,86	3,40	3,09	2,87	2,71	2,58	2,48	2,39	2,26	2,15
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,06	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,24	2,14
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,68	2,56	2,45	2,37	2,23	2,13
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,22	2,12
600	6,68	4,64	3,81	3,35	3,05	2,83	2,67	2,54	2,44	2,35	2,21	2,11
750	6,67	4,63	3,81	3,34	3,04	2,83	2,66	2,53	2,43	2,34	2,21	2,11
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,20	2,10

3-nji B tablisanyň dowamy

$v_2 \backslash v_1$	16	18	20	25	30	35	40	50	60	75	100	150	200
1	610	653	673	683	665	657	678	682	603	656	611	688	697
2	99,44	99,44	99,46	99,45	99,47	99,47	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,49	99,49
3	26,83	26,75	26,69	26,58	26,50	26,45	26,41	26,35	26,32	26,28	26,24	26,20	26,18
4	14,15	14,08	14,02	13,91	13,84	13,79	13,75	13,69	13,85	13,81	13,58	13,54	13,52
5	9,68	9,61	9,55	9,45	9,38	9,33	9,29	9,24	9,20	9,17	9,13	9,09	9,06
6	7,52	7,45	7,40	7,30	7,23	7,18	7,14	7,09	7,06	7,02	6,99	6,95	6,93
7	6,28	6,21	6,16	6,06	5,99	5,94	5,91	5,86	5,82	5,79	5,75	5,72	5,70
8	5,48	5,41	5,36	5,26	5,20	5,15	5,12	5,07	5,03	5,00	4,96	4,93	4,91
9	4,92	4,86	4,81	4,71	4,65	4,60	4,57	4,52	4,48	4,45	4,41	4,38	4,36
10	4,52	4,46	4,41	4,31	4,25	4,20	4,17	4,12	4,08	4,05	4,01	3,98	3,96
11	3,21	3,15	3,10	4,01	3,94	3,89	3,86	3,81	3,78	3,74	3,71	3,67	3,66
12	3,97	3,91	3,86	3,76	3,70	3,65	3,62	3,57	3,54	3,50	3,47	3,43	3,41
13	3,78	3,72	3,66	3,57	3,51	3,46	3,43	3,38	3,34	3,31	3,27	3,24	3,22
14	3,62	3,56	3,51	3,41	3,35	3,30	3,27	3,22	3,18	3,15	3,11	3,08	3,06

3-nji B tablisanyň dowamy

15	3,49	3,42	3,37	3,28	3,21	3,17	3,13	3,08	3,05	3,01	2,98	2,94	2,92
16	3,37	3,31	3,26	3,16	3,10	3,05	3,02	2,97	2,93	2,90	2,86	2,83	2,81
17	3,27	3,21	3,16	3,07	3,00	2,96	2,92	2,87	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
18	3,19	3,13	3,08	2,98	2,92	2,87	2,84	2,78	2,75	2,71	2,68	2,64	2,62
19	3,12	3,05	3,00	2,91	2,84	2,80	2,76	2,71	2,67	2,64	2,60	2,57	2,55
20	3,05	2,99	2,94	2,84	2,78	2,73	2,69	2,64	2,61	2,57	2,54	2,50	2,48
21	2,99	2,93	2,88	2,79	2,72	2,67	2,64	2,58	2,55	2,51	2,48	2,44	2,42
22	2,94	2,88	2,83	2,73	2,67	2,62	2,58	2,53	2,50	2,46	2,42	2,38	2,36
23	2,89	2,83	2,78	2,69	2,62	2,57	2,54	2,48	2,45	2,41	2,37	2,34	2,32
24	2,85	2,79	2,74	2,64	2,58	2,53	2,49	2,44	2,40	2,37	2,33	2,29	2,27
25	2,81	2,75	2,70	2,60	2,54	2,49	2,45	2,40	2,36	2,33	2,29	2,25	2,23
26	2,78	2,72	2,66	2,57	2,50	2,45	2,42	2,36	2,33	2,29	2,25	2,21	2,19
27	2,75	2,68	2,63	2,54	2,47	2,42	2,38	2,33	2,29	2,26	2,22	2,18	2,16
28	2,72	2,65	2,60	2,51	2,44	2,39	2,35	2,30	2,26	2,23	2,19	2,15	2,13
29	2,69	2,63	2,57	2,48	2,41	2,36	2,33	2,27	2,23	2,20	2,16	2,12	2,10
30	2,66	2,60	2,55	2,45	2,39	2,34	2,30	2,25	2,21	2,17	2,13	2,09	2,07
35	2,56	2,50	2,44	2,35	2,28	2,23	2,19	2,14	2,06	2,10	2,06	1,96	1,96
40	2,48	2,42	2,37	2,27	2,20	2,15	2,11	2,06	1,02	1,96	1,94	1,90	1,96
50	2,38	2,32	2,27	2,17	2,10	2,06	2,01	1,95	1,01	1,87	1,82	1,78	1,76
60	2,31	2,25	2,20	2,10	2,03	1,98	1,94	1,88	1,84	1,79	1,75	1,70	1,68
70	2,27	2,20	2,15	2,05	1,98	1,93	1,89	1,83	1,78	1,74	1,70	1,65	1,62
80	2,23	2,17	2,12	2,01	1,94	1,89	1,85	1,79	1,75	1,70	1,65	1,61	1,58
90	2,21	2,14	2,09	1,99	1,92	1,86	1,82	1,76	1,72	1,67	1,62	1,57	1,55
100	2,19	2,12	2,07	1,97	1,89	1,84	1,80	1,74	1,69	1,65	1,60	1,55	1,52
120	2,15	2,09	2,03	1,93	1,86	1,81	1,76	1,70	1,66	1,61	1,56	1,51	1,48
150	2,12	2,06	2,00	1,90	1,83	1,77	1,73	1,66	1,62	1,57	1,52	1,46	1,43
200	2,09	2,03	1,97	1,87	1,79	1,74	1,69	1,63	1,58	1,53	1,48	1,42	1,39
250	2,07	2,01	1,95	1,85	1,77	1,72	1,67	1,61	1,56	1,51	1,46	1,40	1,38
300	2,06	1,99	1,94	1,84	1,76	1,70	1,66	1,59	1,55	1,50	1,44	1,38	1,35
400	2,05	1,98	1,92	1,82	1,75	1,69	1,64	1,58	1,53	1,48	1,42	1,36	1,32
500	2,04	1,97	1,92	1,81	1,74	1,68	1,63	1,57	1,52	1,47	1,41	1,34	1,31
600	2,03	1,96	1,91	1,80	1,73	1,67	1,63	1,56	1,51	1,46	1,40	1,34	1,30

3-nji B tablisanyň dowamy

750	2,02	1,96	1,90	1,80	1,72	1,66	1,62	1,55	1,50	1,45	1,39	1,33	1,29
1000	2,02	1,95	1,90	1,79	1,72	1,66	1,61	1,54	1,50	1,44	1,38	1,32	1,28

3-nji Ç tablisa. *F* paýlanyş: *F* – iň kritiki bahasy (ähmiýetlilik derejesi 0,1%)

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	4,05e05	5,00e05	5,40e05	5,62e05	5,76e05	5,93e05	5,93e05	5,98e05	6,02e05	6,06e05	6,11e05	6,14e05
2	50	00	17	25	30	33	36	37	39	40	42	43
3	03	50	11	10	58	85	58	62	86	25	32	64
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,41	46,95
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,83	28,16	27,65	27,24	26,92	26,42	26,06
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,80	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	17,99	17,68
7	29,25	21,69	18,17	17,20	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,71	13,43
8	25,41	18,49	15,83	14,39	13,48	12,86	12,40	12,05	11,71	11,54	11,19	10,94
9	22,86	16,39	17,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,57	9,33
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,93	9,52	9,20	8,96	8,75	8,45	8,22
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,63	7,41
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,00	6,79
13	17,82	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,52	6,31
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,44	7,08	6,80	6,58	6,40	6,13	5,93
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,25	6,08	5,81	5,62
16	16,12	10,97	9,01	7,94	7,27	6,80	6,48	6,19	5,98	5,81	5,55	5,35
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	5,32	5,13
18	15,38	10,39	8,48	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39	5,13	4,94
19	15,08	10,16	8,28	7,27	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	4,97	4,7
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,89	5,44	5,24	5,08	4,82	4,74
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95	4,70	4,51
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,56	4,40
23	14,20	9,47	7,67	6,70	6,08	5,65	5,33	5,09	4,89	4,73	4,48	4,30
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64	4,39	4,21
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,89	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	4,31	4,13
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,24	4,06

3-nji Ç tablisanyň dowamy

27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,17	3,99
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,11	3,93
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,05	3,88
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,56	4,39	4,24	4,00	3,82
35	12,90	8,47	6,79	5,88	5,30	4,89	4,59	4,36	4,18	4,03	3,79	3,62
40	12,61	8,25	6,59	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,64	3,47
50	12,22	7,96	6,34	5,46	4,90	4,51	4,22	4,00	3,82	3,67	3,44	3,27
60	11,97	7,77	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,86	3,69	3,54	3,32	3,15
70	11,80	7,64	6,06	5,20	4,66	4,28	3,99	3,77	3,60	3,45	3,23	3,06
80	11,67	7,54	5,97	5,12	4,58	4,20	3,92	3,70	3,53	3,39	3,16	3,00
90	11,57	7,47	5,91	5,06	4,53	4,15	3,87	3,65	3,48	3,34	3,11	2,95
100	11,50	7,41	5,86	5,02	4,48	4,11	3,83	3,61	3,44	3,30	3,07	2,91
120	11,38	7,32	5,78	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,02	2,85
150	11,27	7,24	5,71	4,88	4,35	3,98	3,71	3,49	3,32	3,18	2,96	2,80
200	11,15	7,15	5,63	4,81	4,29	3,92	3,66	3,43	3,26	3,12	2,90	2,74
250	11,09	7,10	5,59	4,77	4,25	3,88	3,61	3,40	3,23	3,09	2,87	2,71
300	11,04	7,07	5,56	4,75	4,22	3,86	3,59	3,38	3,21	3,07	2,85	2,89
400	10,99	7,03	5,53	4,71	4,19	3,83	3,56	3,35	3,18	3,04	2,82	2,66
500	10,96	7,00	5,51	4,69	4,18	3,81	3,54	3,33	3,16	3,02	2,81	2,64
600	10,94	6,99	5,49	4,68	4,16	3,80	3,53	3,32	3,15	3,01	2,80	2,63
750	10,91	6,97	5,48	4,67	4,15	3,79	3,52	3,31	3,14	3,00	2,78	2,62
1000	10,89	6,96	5,46	4,65	4,14	3,78	3,51	3,30	3,13	2,99	2,77	2,61

3-nji Ç tablisanyň dowamy

$v_2 \backslash v_1$	16	18	20	25	30	35	40	50	60	75	100	150	200
1	6,17e05	6,19e05	6,21e05	6,24e05	6,26e05	6,28e05	6,29e05	6,30e05	6,31e05	6,32e05	6,33e05	6,35e05	6,35e05
2	44	44	45	46	47	47	47	48	48	49	49	49	49
3	14	74	42	84	45	17	96	86	47	27	07	87	77
4	46,60	46,32	46,10	45,70	45,43	45,23	45,09	44,88	44,75	44,61	44,47	44,33	44,26
5	25,78	25,57	25,39	25,08	24,87	24,72	24,60	24,44	24,33	24,22	24,12	24,01	23,95
6	17,45	17,27	17,12	16,85	16,67	16,54	16,44	16,31	16,21	16,12	16,03	15,93	15,89
7	13,23	13,06	12,93	12,89	12,53	12,41	12,33	12,20	12,12	12,04	11,95	11,87	11,82
8	10,75	10,60	10,48	10,26	10,11	10,00	9,92	9,80	9,73	9,65	9,57	9,49	9,45

3-nji Ç tablisanyň dowamy

9	9,15	9,01	8,90	8,69	8,55	8,46	8,37	8,26	8,19	8,11	8,04	7,96	7,93
10	8,05	7,91	7,80	7,60	7,47	7,37	7,30	7,19	7,12	7,05	6,98	6,91	6,87
11	7,24	7,11	7,01	6,81	6,68	6,59	6,52	6,42	6,35	6,28	6,21	6,14	6,10
12	6,63	6,51	6,40	6,22	6,09	6,00	5,93	5,83	5,76	5,70	5,63	5,56	5,52
13	6,16	6,03	5,93	5,75	5,63	5,54	5,47	5,37	5,30	5,24	5,17	5,10	5,07
14	5,78	5,88	5,56	5,38	5,25	5,17	5,10	5,00	4,94	4,87	4,81	4,74	4,71
15	5,46	5,35	5,25	5,07	4,95	4,88	4,80	4,70	4,64	4,57	4,51	4,44	4,41
16	5,20	5,09	4,99	4,82	4,70	4,61	4,54	4,45	4,39	4,32	4,26	4,19	4,16
17	4,99	4,87	4,76	4,60	4,48	4,40	4,33	4,24	4,18	4,11	4,05	3,98	3,95
18	4,80	4,68	4,59	4,42	4,30	4,22	4,15	4,06	4,00	3,93	3,87	3,80	3,77
19	4,64	4,52	4,43	4,26	4,14	4,06	3,99	3,90	3,84	3,78	3,71	3,65	3,61
20	4,49	4,38	4,29	4,12	4,00	3,92	3,86	3,77	3,70	3,64	3,58	3,61	3,48
21	4,37	4,26	4,17	4,00	3,88	3,80	3,74	3,64	3,58	3,52	3,46	3,39	3,36
22	4,26	4,15	4,06	3,89	3,78	3,70	3,63	3,54	3,48	3,41	3,35	3,28	3,25
23	4,16	4,05	3,96	3,79	3,68	3,60	3,53	3,44	3,38	3,32	3,25	3,19	3,16
24	4,07	3,96	3,87	3,71	3,59	3,51	3,45	3,36	3,29	3,23	3,17	3,10	3,07
25	3,99	3,88	3,79	3,63	3,52	3,43	3,37	3,28	3,22	3,15	3,09	3,03	2,99
26	3,92	3,81	3,72	3,56	3,44	3,36	3,30	3,21	3,15	3,06	3,02	2,95	2,92
27	3,86	3,75	3,66	3,49	3,38	3,30	3,23	3,14	3,08	2,02	2,96	2,89	2,86
28	3,80	3,69	3,60	3,43	3,32	3,24	3,18	3,09	3,02	2,96	2,90	2,83	2,80
29	3,74	3,63	3,54	3,38	3,27	3,18	3,12	3,03	2,97	2,91	2,84	2,78	2,74
30	3,69	3,58	3,49	3,33	3,22	3,13	3,07	2,98	2,92	2,86	2,79	2,73	2,69
35	3,48	3,38	3,29	3,13	3,02	2,93	2,87	2,78	2,72	2,66	2,59	2,52	2,49
40	3,34	3,23	3,14	2,96	2,87	2,79	2,73	2,64	2,57	2,51	2,44	2,38	2,34
50	3,41	3,04	2,95	2,79	2,68	2,60	2,53	2,44	2,38	2,31	2,25	2,18	2,14
60	3,02	2,91	2,83	2,67	2,55	2,47	2,41	2,32	2,25	2,19	2,12	2,06	2,01
70	2,93	2,83	2,74	2,58	2,47	2,39	2,32	2,23	2,16	2,10	2,03	1,95	1,92
80	2,87	2,76	2,68	2,52	2,41	2,32	2,26	2,16	2,10	2,03	1,96	1,89	1,85
90	2,82	2,71	2,63	2,47	2,36	2,27	2,21	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83	1,79
100	2,78	2,68	2,59	2,43	2,32	2,24	2,17	2,08	2,01	1,94	1,87	1,79	1,75
120	2,72	2,62	2,53	2,37	2,26	2,18	2,11	2,02	1,95	1,88	1,81	1,73	1,68
150	2,67	2,56	2,48	2,32	2,21	2,12	2,06	1,96	1,89	1,82	1,74	1,66	1,62
200	2,61	2,51	2,42	2,26	2,15	2,07	2,00	1,90	1,83	1,76	1,68	1,60	1,55

3-nji Ç tablisanyň dowamy

250	2,56	2,48	2,39	2,23	2,12	2,03	1,97	1,87	1,80	1,72	1,65	1,56	1,51
300	2,56	2,46	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,85	1,78	1,70	1,62	1,53	1,48
400	2,53	2,43	2,34	2,18	2,07	1,98	1,92	1,82	1,75	1,67	1,59	1,50	1,45
500	2,52	2,41	2,33	2,17	2,05	1,97	1,90	1,80	1,73	1,85	1,57	1,48	1,43
600	2,51	2,40	2,32	2,16	2,04	1,96	1,89	1,79	1,72	1,64	1,56	1,46	1,41
750	2,49	2,39	2,31	2,15	2,03	1,95	1,88	1,76	1,71	1,63	1,55	1,45	1,40
1000	2,48	2,38	2,30	2,14	2,02	1,94	1,87	1,77	1,69	1,62	1,53	1,44	1,38

4-nji tablisa. χ^2 paýlanyş: 0,1%, 1% we 5% ähmiýetlilikler üçin χ^2 – iň kritiki bahasy

Erkinlik derejesiniň sany	Ähmiýetlilik derejesi		
	5%	1%	0,1%
1	3,641	6,636	10,826
2	5,991	9,210	13,816
3	7,815	11,345	16,266
4	9,488	13,277	18,467
5	11,070	15,086	20,515
6	12,592	16,812	22,458
7	14,067	18,475	24,322
8	15,507	20,090	26,124
9	16,919	21,666	27,877
10	18,307	23,208	29,588
12	21,026	26,217	32,909
15	24,996	30,578	37,697
20	31,410	37,586	45,315
30	43,773	50,892	59,703

5-nji *A* tablisa. Darbiniň-Uotsonyň statistikasy: d_L we d_U
(ähmiýetlilik derejesi 5%)

n	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$		$k = 6$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82

5-nji A tablisanyň dowamy

33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,58	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

n – synagyň sany, k – bahalandyrylýan parametrleriň sany

5-nji *B* tablisa. Darbiniň-Uotsonyň (Durbin-Watson) statistikasy:
d_L we d_U (ähmiýetlilik derejesi 1%)

n	$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$		$k=6$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0.49	1,70	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,10	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,80	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,60	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,91	1,28	0,83	1,40	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,40	0,77	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,80	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,90	1,60

5-nji B tablisanyň dowamy

32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,38	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,03	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,20	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
55	1,26	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65

n – synagyň sany, k – bahalandyrylýan parametrleriň sany.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1.Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. I, II tom. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň ykdysady strategiýasy: Halka daýanyp, halkyň hatyrasyna. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010 .

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, 2007.

4. Türkmenistanyň Ministrler Kabinetiniň ýanyndaky Baş arhiw müdirligi, Türkmenistanyň Prezidentiniň Arhiw gaznasy. «Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow. Gysgaça terjimehal. Aşgabat, 2007.

5. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.

6. Türkmenistanyň durmuş – ykdysady ösüşiniň 2011 – 2030-njy ýyllar üçin milli Maksatnamasy. Aşgabat, 2010 .

7. *Бородич С.А.* Эконометрика. Минск ,2001.

8. *Доугерти К.* Введение в эконометрику.М.:ИНФРА-М,1997.

9. *Елисеева И.* Эконометрика .М.:Малие и статистика,2001.

10. *Елисеева И.* Практикум по эконометрике .М.: Малие и статистика,2001.

11 *Кремер Н.Ш., Путко Б.А.* Эконометрика: Учебник для высших учебных заведений.М.: ЮНИТИ – DAHA,2003.

12. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М., 2002.

13. *Шикин Е.В.*, *Чхартишвили А.Г.* Математические методы и модели в управлении. М., 2000.

14. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. М., 1998.

15. *Хайман Д.Н.* Современная микроэкономика: анализ и применение. 1 М., 1992.

16. *Баканов М.И.* Теория экономического анализа. М. Финансы и статистика 1997

17. *Лихолетов И.И., Мацкевич И.П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Минск. 1969 г.

16. sargyt № 2842

GOŞMAÇA EDEBIÝATLAR

1. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики, учебник для вузов. М.: ЮНИТИ, 1998.

2. *Маленво Э.* Статистические методы эконометрии: пер. С фр. Вып.1.М.:-Финансы и статистика, 1975.

3. *Джонстон Дж.* Эконометрические методы. М.: Статистика, 1980.

4. *Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И.* Многомерные статистические методы:учебник. М.: Финансы и статистика, 1998.

5. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело,1997.

6. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ.М.: Диалектика,2007.

7. *Тихомиров Н.П.,Дорохина Е.Ю.*Эконометрика. М.: Экзамен, 2007.

MAZMUNY

III bap

Jübüt çyzykly regressiýa. Gaussyň-Markowyň şertleri

IV bap

Köplük çyzykly regressiýa

V bap

Tötän täsirleriň awtokorrelýasiýasy

VI bap

Tötän täsirleriň geteroskedastikligi

VII bap

Multikollinearlyk

VIII bap

Regressiýa modellerdäki emeli üýtgeýänler

IX bap

Çyzykly däl regressiýa

X bap

Wagt hatarlary

XI bap

Birwagtlaýyn deňlemeler ulgamlary

Daňatar Atdyýewiç Mowlamow, Gurbanguly Ataýewiç Şükürow,
Agamyrat Işangulyýewiç Rozyýew

EKONOMETRIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*E. Berdiýewa*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Suratçy	*H. Welmammedow*
Kompýuter bezegi	*M. Mullikowa*
Neşir üçin jogapkär	*K. Kadyrow*

Çap etmäge rugsat edildi 01.04.2016. Ölçegi 60x90 $^1/_{16}$.
Edebi garniturasy. Çap listi 15,5. Şertli-reňkli ottiski 33,18.
Hasap-neşir listi 12,62. Şertli çap listi 15,5.
Sargyt № 2842. Sany 1600.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat, 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.