TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

J.Alimow, A.Alçekow, E.Garryýew

KOMPLEKS ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝALAR WE OPERATORLY HASAPLAMA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Aşgabat – 2010

J.Alimow, A.Alçekow, E.Garryýew,   Kompleks üýtgeýänli funksiýalar we operatorly hasaplama.

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby, Aşgabat – 2010 ý.

Giriş

Täze galkynyşlar we beýik özgertmeler döwründe Türkmenistan döwletimiz, halk hojalygynyň ähli pudaklarynda uly sepgitlere ýetdi we bedew bady bilen täze-täze ýeňişlere, üstünliklere tarap öňe barýar. Sebäbi, Hormatly prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedow bu pudagyň, şol sanda ylymyň, bilimiň dürli ugurlarynyň ösmegine giň ýol açmak bilen, işgärleriň iş depginlerini artdyrmagyň möhümdigini nygtap, ylmy we usuly taýdan döwrüň talaplaryny ödeýän okuw kitaplarynyň, gollanmalaryň köpräk neşir edilmegini belledi.

Eliňizdäki “Kompleks üýtgeýänli funksiýalar we operatorly hasaplama” atly okuw kitabynda, kompleks sanlar we kompleks üýtgeýänli funksiýalar teoriýasynyň esasy ýagdaýlary yzygider beýan edilýär.

Kompleks üýtgeýänli funksiýalar we operatorly hasaplama, ýokary matematika dersiniň ýörite bölümi bolmak bilen ol “Elektrotehnikanyň teoretik esaslary,” “Radiotehnikanyň teoretik esaslary,” “Awtomatik dolandyrmagyň teoriýasy”, “Elektrik aragatnaşyk teoriýasy”, “Elektrik maşynlary”, “Elektrik zynjyrlaryň teoriýasy” we ş. m. ýaly dersleri çuňňur öwrenmek üçin, düýp özen bolup durýar. Bu bölümi öwrenmek üçin, tehniki ýokary okuw mekdepleriniň möçberinde geçilýän ýokary matematika dersiniň bölümleri bolan, analitik geometriýanyň esaslary; bir we köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň differensial we integral hasaplamalary; adaty differensial deňlemeler; san we funksional, esasan hem derejeli hatarlar ýaly bölümleri bilmek ýeterlikdir. Bu bölümlere degişli bolmadyk käbir düşünjeler, gerek ýerinde ýönekeý görnüşde girizilýär.

Kitap 7 bapdan ybarat bolup, olara girýän formulalar we mysallar, degişlilik-de, özbaşdak yzygider sanlar bilen belgilenýär. I, II bapda, kompleks sanlar düşünjesi girizilip, olaryň üstünde geçirilýän amallara, kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň häsiýetlerine, olaryň önümlerine we integrallaryna seredilýär. III, IV bapda, kompleks sanly hatarlar, Teýloryň we Loranyň hatarlary öwrenilýär. V bapda, kompleks üýtgeýänli funksiýanyň aýratyn nokatdaky wyçeti diýen düşünje girizilip, olary tapmagyň usullary we kesgitli integrallary hasaplamakda ulanylyşyna seredilýär.

VI bapda, Laplasyň öwürmesi we häsiýetleri öwrenilip, onuň çyzykly differensial deňlemeleri çözmekde hem-de elektrik zynjyryndaky stasionar däl prosesleri derňemekde wajyplygy ornunyň barlygy aýdyňlaşdyrylýar.

VII bapda analitik funksiýalaryň tekiz wektor meýdanlary hasaplamakda we elektrik aragatnaşyk zynjyrlarynda ulanylyşy seredilýär.

Okuw kitaby, Türkmen politehniki institutynda ýokary matematika dersi giňeldilip geçilýän hünärlerinde, uniwersitetleriň we mugallymçylyk institutynyň fizika, amaly matematika we informatika hünärlerinde hem-de beýleki ýokary okuw mekdepleriniň degişli hünärlerinde bilim alýan talyplar üçin niýetlenendir. Ondan başga-da, bu okuw kitabyndan mugallymlar, inženerler we aspirantlar peýdalanyp bilerler.

Okuw kitabynyň beýanynda we ýygnalanda käbir nogsanlyklaryň goýberilen bolmagy mümkin, olary habar beren okyjylara minnetdar bolardyk.

Kitabyň göwnejaý bolmagyna, yzygider gymmat-ly maslahatlary hem-de ýerlikli bellikleri bilen ýardam edendikleri üçin, akademik Ö. G. Hudaýberenowa we tehniki ylymlarynyň kandidaty B. Nurgeldiýewe minnetdarlygymyzy bildirýäris.

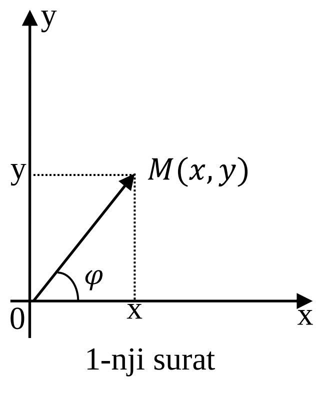
I bap. Kompleks sanlar we kompleks üýtgeýän ululyklar. Kompleks funksiýa we onuň differensirlenişi.

§1. Kompleks sanlar, olaryň geometrik şekillendirilişi, kompleks sanyň moduly we argumenti.

Belli bir tertipde alynan iki sany a we b hakyky sanlaryň jübütine **kompleks san** diýilýär we ol $z=(a,b)$ ýa-da $z=a+ib$ görnüşde ýazylýar, bu ýerde i belgä $i^2=-1$ deňlik bilen kesgitlenýän **hyýaly birlik san** ýa-da **ýöne hyýaly birlik** diýilýär. $z=0++ib=ib$ kompleks sana **sap hyýaly san** diýilýär, $b=0$ bolanda $z=a+ib$ kompleks san hakyky a sany berýär. Diýmek, hakyky sanlar kompleks sanlaryň hususy görnüşidir. a we b sanlara $z=a+ib$ kompleks sanyň degişlilikde hakyky we hyýaly bölekleri diýilýär we $a=Rez$, $b=Imz$ görnüşde belgilenýär. *Re* we *Im* belgiler „reel“ (hakyky) we „imaginaire“ (hyýaly) diýen fransuz sözleriň gysgaça ýazylyşydyr.

Eger $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ bolsa, onda $z_1=a_1++ib_1$ we $z_2=a_2+ib_2$ sanlara deň kompleks sanlar ($z_1=z_2$) diýilýär. $a-ib$ sana $z=a+ib$ kompleks sanyň **çatyrymly sany** diýilýär we ol $\bar{z}$ bilen belgilenýär. $z=a+ib$ kompleks san $a=0$, $b=0$ bolanda we diňe şu halda nola deňdir ($z=0$).

Eger x we y hakyky üýtgeýän ululyklar bolsalar, onda $z=x+iy$ sana **kompleks üýtgeýän ululyk** diýilýär. Eger tekizlikde göniburçly *x0y* koordinatalar sistemasyny girizsek, onda adatça $z=x+iy$ kompleks san, tekizlikde $M(x,y)$ nokat



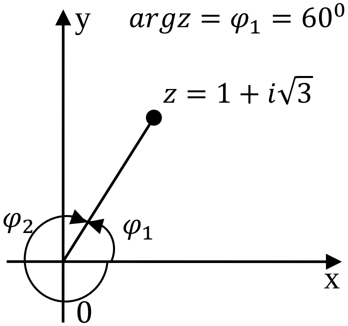
1-nji surat

bilen şekillendirilýär (1-nji surat). Şunlukda tekizligiň islendik (x, y) nokadyna belli bir $z = x + iy$ kompleks san degişli bolar we tersine, islendik $z = x + iy$ kompleks sana tekizligiň ýeke-täk (x, y) nokady degişlidir. Kompleks sanlar köplügi şekillendirilýän $x0y$ tekizlige ***z* kompleks tekizlik** diýilýär.

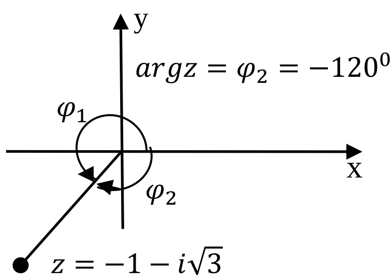
Şunlukda $0x$ oka **hakyky ok** $0y$ oka bolsa **hyýaly ok** diýilýär. Gelejekde biz kompleks san we nokat düşünjelerini birdeň manyda ulanjakdyrys. Kä halatlarda $z = x + iy$ kompleks san, kompleks tekizlikde koordinatalar başlangyjyndan çykýan we $M(x, y)$ nokatda gutarýan $\overrightarrow{0M}$ wektor bilen şekillendirilýär. Ol wektor $z = \{x, y\}$ görnüşde bellenýär. $\overrightarrow{0M} = z$ wektoryň uzynlygyna **z kompleks sanyň moduly** diýilýär we ol r ýa-da $|z|$ bilen belgilenýär. Çyzgydan (1-nji surat) görnüşine görä,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

bolar. $\overrightarrow{0M}$ wektoryň *0x* okuň položitel ugry bilen emele getirýän φ burçuna z kompleks sanyň **argumenti**



2-nji surat



3-nji surat

diýilýär we ol *Argz* belgi bilen belgilenýär. Kompleks sanyň argumenti ýeke-täk däldir, ol $2\pi k$ san (bu ýerde k bitin san) takyklyk bilen kesgitlenýär. Onuň $-\pi < \varphi < \pi$

deňsizligi kanagatlandyrýan bahasyna argumentiň **baş bahasy diýilýär** we ol $argz$ bilen belgilenýär. Diýmek, $Argz = argz + 2\pi k,$ k∈Z, bu ýerde $Z,$ bitin sanlar köplügi. φ burç sagat diliniň hereketiniň ugruna ters ugur boýunça alynsa položitel, sagat diliniň hereketiniň ugry boýunça alynsa bolsa, otrisatel bolar. Adatça, $argz$ burçy I we II çärýeklerde ýatýan nokatlar üçin položitel alamat bilen (2-nji surat), III we IV çärýeklerde ýatýan nokatlar üçin bolsa, otrisatel alamat bilen (3-nji surat) almak amatly bolýar. 1-nji suratdan görnüşine görä

$$x = r\cos\varphi, \quad \mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\varphi \qquad (2)$$

ýa-da (1) formulany göz öňüne tutup

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (3)$$

alarys. (2) deňligiň esasynda $z = x + iy$ kompleks sany

$$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi) \qquad (4)$$

görnüşde ýazyp bileris. Kompleks sanyň (4) deňlik bilen aňladylyşyna onuň **trigonometrik görnüşi** diýilýär. Eger-de biz, Eýleriň formulasy diýilip atlandyrylýan

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (5)$$

formulany ulansak, onda z kompleks san

$$z = re^{i\varphi} \qquad (6)$$

görnüşi alar. (6) deňlige kompleks sanyň **görkezijili görnüşi** diýilýär.

Nol kompleks sanyň moduly nola deň, argumenti kesgitsiz bolýar, nol sana islendik argumenti berip bolar, ýagny $0(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0e^{i\varphi}$ deňlik islendik φ üçin dogrudyr. Modullary deň bolup, argumentleri $2\pi k$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ san bilen tapawutlanýan kompleks sanlar deňdirler we tersine

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

deňlikden

$$r_1 = r_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (7)$$

deňlikler gelip çykýar.

Indi, birnäçe kompleks sanlaryň modulyny we argumentini tapalyň we olary trigonometrik hem-de görkezijili görnüşlerde ýazalyň, şunlukda argumentiň baş bahasy bilen çäklenjekdiris.

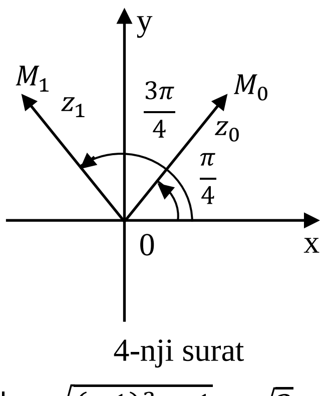
1. $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ sana kompleks tekizlikde $M_0(1; \sqrt{3})$ nokat degişli (4-nji surat), şoňa görä

$$r = |z_0| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad argz = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

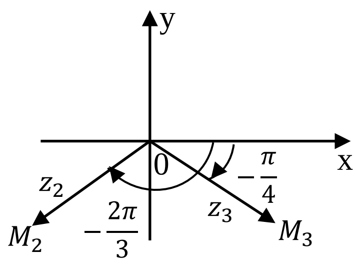
diýmek,

$$z_0 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

2. $z_1 = -1 + i$ sana $M_1(-1; 1)$ nokat degişli (4-nji surat).



4-nji surat



5-nji surat

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}, argz_1 = \pi + arctg(-1) =$$
$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Şeýlelik-de, $z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

3. $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$ sana $M_2(-\sqrt{3}; -3)$ nokat degişli (5-nji surat).

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$argz_2 = -\pi + arctg\frac{3}{\sqrt{3}} = -\pi + arctg\sqrt{3} =$$
$$= -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3},$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

4. $z_3 = 1 - i$ kompleks sana $M_3(1; -1)$ nokat degişli (5-nji surat).

$$r = \sqrt{2}, \quad argz = arctg(-1) = \frac{\pi}{4},$$

$$z_3 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

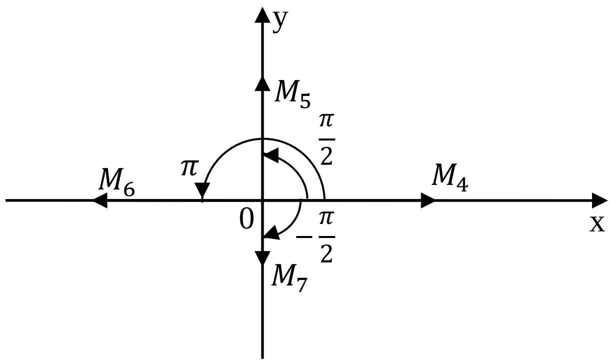
Indi, käbir ýörite sanlar üçin alarys (6-njy surat).

5. $z_4 = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2e^{i0}$, $M_4(2; 0)$ - - nokat,

6. $z_5 = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $M_5(0; 3)$ - nokat,

7. $z_6 = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{i\pi}$, $M_6(-4; 0)$ - nokat,

8. $z_7 = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$,
$M_7(0; -1)$ – nokat.



6-njy surat

Görşimiz ýaly, kompleks tekizligiň koordinatalar başlangyjyndan başga islendik ýerinde berilen $z = x + +iy$ kompleks sanyň moduly $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ formula bilen, argumentiň baş bahasy bolsa

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0 \quad bolsa, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, x < 0, y \geq 0 & bolsa, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0 & bolsa, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0\ bolsa, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0\ bolsa, \end{cases}$$

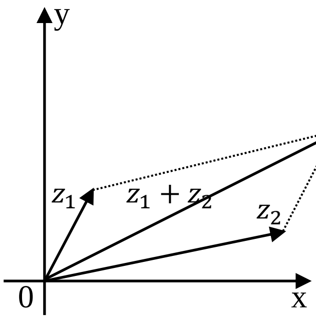
formula boýunça tapylýar.

§2. Kompleks sanlaryň üstünde amallar we olaryň geometrik düşündirilişi.

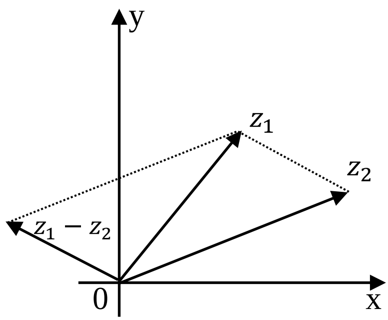
Kompleks sanlary goşmak. Iki $z_1 = a_1 + ib_1$ we $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sanyň jemi

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + \\ +i(b_1 + b_2) \qquad (8)$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Ýokarda belläp geçişimiz ýaly her bir $z = a + ib$ kompleks sana $\vec{z} = \{a; b\}$ wektor hökmünde



7-nji surat



8-nji surat

garasak, onda (8) deňlikden görnüşine görä, geometrik nukdaý nazardan kompleks sanlary goşmak amaly wektorlary goşmak düzgüni boýunça amala aşyrylýar (7-nji surat).

Kompleks sanlary aýyrmak. Iki sany $z_1 = a_1 + +ib_1$ we $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sanyň tapawudy wektorlary aýyrmagyň düzgüni boýunça amala aşyrylýar

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2) \qquad (9)$$

Iki kompleks sanyň tapawudynyň moduly kompleks tekizliginde şu sanlary şekillendirýän iki nokadyň arasyndaky uzaklyga deňdir (8-nji surat).

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

Kompleks sanlary köpeltmek. Kompleks sanlary köpeltmek amaly $i^2 = -1$ bolýandygyny nazarda tutmak bilen algebrada ikiçlenleri köpeltmek düzgüni boýunça ýerine ýetirilýär. Şeýlelik-de,

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + \\ +ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

ýa-da

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \qquad (10)$$

Bu deňlikden, $z = a + ib$ we $\bar{z} = a - ib$ özara çatyrymly sanlar üçin,

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \qquad (11)$$

bolar.

Trigonometrik ýa-da görkezijili görnüşde berilen

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$$

kompleks sanlar üçin

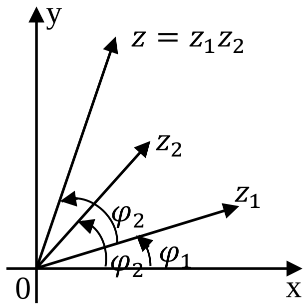
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \\ &\quad + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ &\quad + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

bolar. Diýmek,

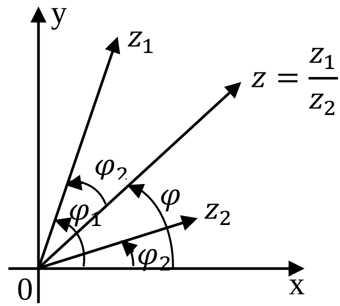
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (12) \end{aligned}$$

Bu ýerden, iki kompleks san köpeldilende olaryň modullary köpeldilýär, argumentleri bolsa goşulýar diýen netije gelip çykýar.

Geometrik nukdaý nazardan z_1 kompleks sany z_2 kompleks sana köpeltmeklik $\vec{z}_1$ wektory $|z_2|$ esse uzaldyp (gysgaldyp) alynan wektory $\varphi_2 > 0$ bolanda, sagat diliniň



9-njy surat



10-njy surat

hereketiniň tersine, φ_2 burça öwürmeklige getirýär (9-njy surat).

Iki kompleks sany köpeltmegiň düzgünini aňladýan (12) formulany ulanyp, n (n > 2) sany $z_1, z_2, \dots, z_n$ kompleks sanlary köpeltmegiň düzgünini

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + \\ + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)] \quad (13).$$

görnüşde ýazmak bolar.

Kompleks sanlary bölmek. $z_1 = a_1 + ib_1$, we $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sanlaryň $\frac{z_1}{z_2}$ paýy diýip, $z_2 z = z_1$ deňligi kanagatlandyrýan z kompleks sana aýdylýar. Eger $z_2 z = z_1$ deňligiň iki tarapyny z_2 kompleks sana çatyrymly bolan $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$ sana köpeltsek, onda (10) we (11) deňlikleriň esasynda

$$(a_2^2 + b_2^2) z = a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)$$

deňligi alarys. Bu deňligiň iki tarapyny $\frac{1}{a^2+b^2}$ sana köpeldip z_1 kompleks sany z_2 kompleks sana bölmegiň

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \qquad (14)$$

formulasyny alarys.

Kompleks sanlardan düzülen $\frac{z_1}{z_2}$ drobyň, hakyky sanlardan düzülen droblaryň esasy häsiýetlerine eýýe bolýandygyny görkezmek kyn däldir. Meselem, $\frac{z_1}{z_2}$ drobyň sanawjysyny we maýdalawjysyny şol bir z_3 sana köpeltsek, onda onuň ululygy üýtgemeýär. Şu ýagdaýdan ugur alyp praktiki hasaplamalarda $\frac{z_1}{z_2}$ kompleks sany tapmak üçin, z_2-ä çatyrymly bolan $\bar{z}_2 = a - ib_2$ sany drobyň maýdalawjysyna we sanawjysyna köpeltmeli. Şeýlelikde (10) we (11) deňliklere görä, maýdalawjyda hakyky $a_2^2+b_2^2$ sany, sanawjyda bolsa $a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - a_1b_2)$ sany alarys. Sanawjynyň hakyky we hyýaly böleklerini maýdalawja bölüp

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} =$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

paýy taparys.

Eger, kompleks sanlar trigonometrik ýa-da görkezijili görnüşde berilen bolsalar, onda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[\frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}\right]$$

ýa-da

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (15)$$

bolar. Bu ýerden iki kompleks san bölünende olaryň modullary bölünýär, argumentleri bolsa aýrylýar diýen netije gelip çykýar.

Geometrik nukdaý nazardan z_1 kompleks sany z_2 kompleks sana bölmeklik, $\vec{z}_1$ wektory $|z_2|$ esse gysgaldyp (uzaldyp), alynan wektory $\varphi_2 > 0$ bolanda sagat diliniň hereketiniň ugry boýunça φ_2 burça öwürmeklige getirýär (10-njy surat).

Kompleks sany derejä götermek. (13) deňlikde $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = \ = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ diýip

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi +$$
$$+ i\sin n\varphi) \qquad (16)$$

deňligi alarys. Diýmek, kompleks sany n-nji derejä götermek üçin, onuň modulyny şu derejä götermeli, argumentini bolsa şol sana köpeltmeli. (16) deňlikde r = 1 goýup

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\, sinn\,\varphi \qquad (17).$$

alarys. Bu deňlige **Muawryň formulasy** diýilýär.

Kompleks sandan kök almak. z kompleks sanyň n-nji derejeli köki diýip, n-nji derejä götereniňde şu sany berýän täze bir kompleks sana aýdylýar. Ol $\sqrt[n]{z}$ bilen belgilenýär. Goý

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$ kompleks san berilen bolsun. Kesgitlemä görä, $\omega = \sqrt[n]{z}$ we $\omega^n = z$ deňlikler deňgüýçlidir. ω sana z kompleks sanyň **n-nji derejeli köki** diýilýär. $\omega^n = z$ deňligi kanagatladyrýan näbelli $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ kompleks sany tapalyň. (17) formulany ulanyp $\omega^n = z$ deňligi

$$\rho^n(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (18)$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden iki kompleks sanyň deňliginiň (7) şertine görä

$$r = \rho^n \text{ we } \theta = \varphi + 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

bolýar. Bu deňlikleriň birinjisi $\rho = \sqrt[n]{r}$ çözüwi, ikinjisi bolsa θ burçuň k sana bagly bolan

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (19)$$

tükeniksiz köp çözüwini berýär. Şunlukda, z kompleks sanyň n-nji derejeli köküniň

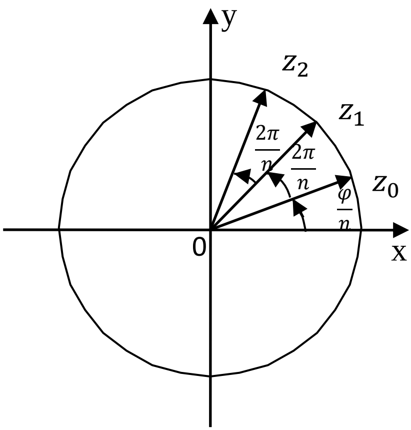
$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (20)$$

deňlik bilen kesgitlenýän tükeniksiz sandaky bahalary bardyr. Emma ol kökleriň diňe n sanysy özara tapawutlanýar. Hakykatdan hem (19) formulada k sana $0,1,2,\ldots,n-1$ bahalary berip, islendik $k > n$ üçin tapylan θ_k burçuň, $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ bahalaryň islendiginden $2\pi m$ san (m=1,2,3,...) tapawutlanýandygyny görmek kyn däldir. Şonuň üçin $\sin\varphi$ we $\cos\varphi$ funksiýalaryň 2π periodlylygy esasynda (20) formuladan

$$\omega_k = \omega_{n+k}, \; k = 0,1,\ldots,n-1$$

deňlik gelip çykýar. Diýmek, (20) formulada k sana diňe $0,1,2,\dots,n-1$ bahalary bermek ýeterlikdir. Şunlukda biz $\sqrt[n]{z}$ ululyk üçin n sany

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0,1,2,\dots,n-1 \qquad (21)$$



11-nji surat

özara tapawutlanýan bahalary alarys.

Geometrik şekillendirilende w_k sanlar merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan, $\sqrt[n]{r}$ radiusly töweregiň üstünde ýatýarlar we biri birinden $\frac{2\pi}{n}$ burça tapawutlanýan nokatlardyr. Diýmek, olar töweregiň içinden çyzylan käbir dogry n burçly köpburçlugyň depeleri bolup hyzmat edýärler (11-nji surat).

Mysallar. (§1 seret).

1) $\quad z_0 z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(-1+i) =$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

2) $$\frac{z_3}{z_2}=\frac{1-i}{-\sqrt{3}-3i}=\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2\sqrt{3}e^{-\frac{2\pi}{3}i}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

3) $$z_0^3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=2^3e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 3}=$$
$$=8e^{i\pi}=-8$$

4) $$\sqrt[5]{z_1}=\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=$$
$$=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), k=0,1,2,3,4$$

bolýanlygy üçin,

$$\omega_k=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),$$
$$k=0,1,2,3,4$$

bolar. Bu ýerden aşakdaky

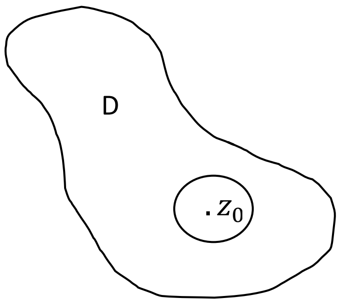
$$\omega_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right)=\sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{20}}$$
$$\omega_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{20}+i\sin\frac{11\pi}{20}\right)=\sqrt[10]{2}e^{i\frac{11\pi}{20}}$$
$$\omega_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{20}+i\sin\frac{19\pi}{20}\right)=\sqrt[10]{2}e^{i\frac{19\pi}{20}}$$
$$\omega_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{20}+i\sin\frac{27\pi}{20}\right)=\sqrt[10]{2}e^{i\frac{27\pi}{20}}$$
$$\omega_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{20}+i\sin\frac{35\pi}{20}\right)=\sqrt[10]{2}e^{i\frac{35\pi}{20}}$$

bahalary alarys.

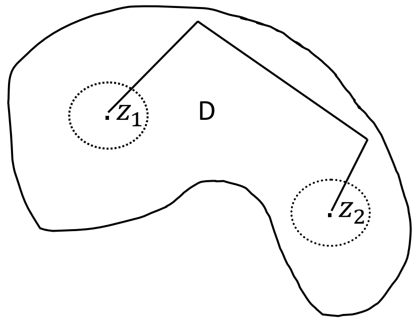
§3. Oblast barada düşünje we onuň görnüşleri

Goý bize, kompleks sanlaryň D köplügi berilen bolsun. Biz oňa z tekizligiň nokatlar köplügi hökmünde garap bileris. z tekizlikde merkezi $z_0 == x_0 + iy_0$ nokatda bolan tegelege z_0 **nokadyň etraby** diýilýär.

Kesgitleme. Eger D köplüge z_0 nokat bilen birlikde



12-nji surat



13-nji surat

onuň käbir etraby hem degişli bolsa, onda z_0 nokada D köplügiň **içki nokady** diýilýär (12-nji surat).

Kesgitleme. Kompleks tekizliginde berilen D köplügiň nokatlarynyň hemmesi içki nokatlar bolup şu köplügiň islendik iki nokadyny D köplügiň nokatlaryndan ybarat bolan döwük çyzyk arkaly birleşdirip bolýan bolsa, onda D köplüge **oblast** diýilýär (13-nji surat).

Kesgitleme. D oblasta degişli bolmadyk M nokadyň islendik kiçi etrapy şu oblastyň nokatlaryny özünde saklasa, onda bu nokada D oblastyň **araçäk nokady** diýilýär.

Oblastyň araçäk nokatlarynyň köplügine onuň **araçägi** diýilýär. Mysal üçin $|z| = 1$ töwerek $|z| < 1$ tegelegiň araçägidir.

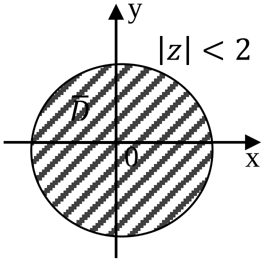
Kesgitleme. Araçägi bilen birleşdirilen islendik D oblasta **ýapyk oblast** diýilýär we ol $\overline{D}$ bilen belgilenýär. Meselem $|z| \leq 2$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügi ýapyk oblastdyr (14-nji surat). Ol tegelegiň we töweregiň nokatlaryndan ybaratdyr.

Indiki beýan etjek kesgitlemämiziň aýdyň bolmagy üçin, matematiki analiziň kursundan bize belli bolan käbir düşünjeleri ýatlap geçeliň.

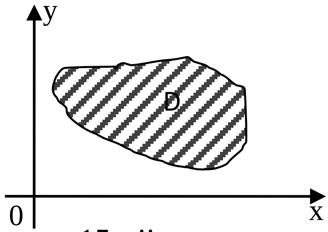
$[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz, hakyky t parametre görä $z(t)$ funksiýa, üznüksiz egrini (çyzygy, dugany) kesgitleýär, $z(t)$ funksiýanyň bahalaryna **egriniň nokatlary,** $z = z(t)$ deňlemä bolsa, **egriniň parametrik deňlemesi** diýilýär. Her bir egride parametriň artýan bahalaryna ýa-da kemelýän bahalaryna görä iki sany ugry kesgitlemek mümkin. Birinji halda, $z(\alpha)$ egriniň başlangyç nokady, $z(\beta)$ bolsa, egriniň ahyrky nokadydyr, ikinji halda, tersine. Başlangyç we ahyrky nokatlary gabat gelýän egrä, **ýapyk egri** diýilýär. Parametriň ýeke-täk bahasyna degişli bolan nokada **ýönekeý** nokat, iki we ondan köp bahalaryna degişli bolan nokada bolsa, **gaýtalanýan** (kratnyý) nokat diýilýär. Diňe ýönekeý nokatlardan düzülen egrä, **ýönekeý** ýa-da **Žordanyň egrisi** diýilýär.

Kesgitleme. Eger, $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ parametrli deňlemede $x(t)$, $y(t)$ funksiýalar $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän bolup, ol kesimiň her bir nokadynda $x_t'(t)$, $y_t'(t)$ önümleriň ($t = \alpha$ we $t = \beta$ nokatlarda, $x_t'(t)$ we $y_t'(t)$ diýip, degişlilik-de, birtaraplaýyn önümler göz öňünde tutulýar) iň bolmanda biri noldan tapawutly bolsa, onda Žordanyň egrisine, **endigan egri** diýilýär.

Bu kesgitleme, geometrik nukdaý nazardan, endigan egriniň islendik nokadyndaky galtaşyjy çyzygynyň, onuň bir nokadyndan başga birine geçende, ugruny üznüksiz üýtgedýändigini aňladýar.



14-nji surat

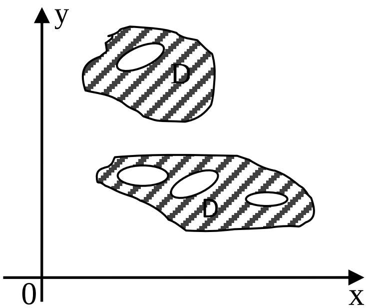


15-nji surat

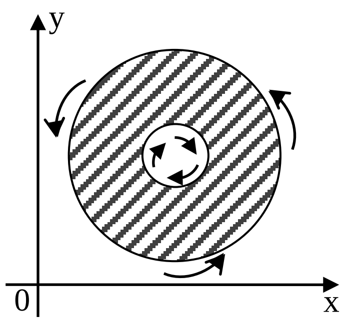
Kesgitleme. Endigan egrileriň döwük tükenikli sanyndan düzülen, Žordanyň egrisine **bölek-endigan egri** diýilýär.

Kesgitleme. Oblastda tutuşlaýyn ýatan islendik ýönekeý ýapyk egrini üznüksiz gysmak bilen oblastyň çäginden çykman bir nokada dartyp getirip bolýan bolsa, onda bu oblasta **birbaglanşykly oblast** diýilýär. Şu şerti kanagatlandyrmaýan oblasta **köpbaglanşykly oblast** diýilýär. Bu kesgitlemeden köpbaglanşykly oblastyň araçägi diňe bir ýönekeý egriden ybarat bolup bilmez.

15-nji suratdaky oblastlar birbaglanşykly, 16-njy suratdaky oblastlar bolsa köpbaglanşykly oblastlaryň mysallarydyr.



16-njy surat



17-nji surat

Gelejekde biz, araçägi bir ýa-da birnäçe bölek-endigan egrilerden düzülen, hususy halda nokada dartylyp biljek oblastlara we aýratyn nygtalmasa, diňe endigan egrilere seretjekdiris.

Eger, oblasty çäklendirýän egri çyzyk (kontur) boýunça hereket edilende, oblast synçyndan mydama çepde galýan bolsa, onda bu hereket ugruna **položitel ugur** diýilýär, tersine bolan halda, **otrisatel ugur** diýilýär. Görşümiz ýaly, 17-nji suratda şekillendirilen tegelek halka ikibaglanşykly oblast bolup, onuň içki we daşky konturynyň položitel ugry oklar bilen görkezilendir.

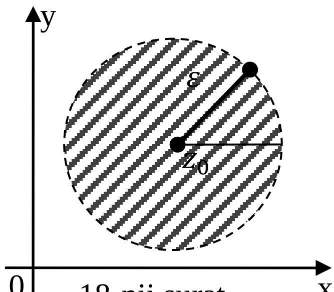
§4. Kompleks sanlaryň yzygiderligi we onuň predeli.

Kompleks sanlaryň käbir tükeniksiz $\{z_n\}$ yzygiderligini alalyň we onuň üçin predel düşünjesini girizeliň. Bu yzygiderligiň $z_n, n = 1,2,3, ...$ agzalaryna, öň belläp geçişimiz ýaly, z tekizligiň nokatlary hökmünde garap bileris.

Kesgitleme. Eger islendik kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin, şeýle bir $N = N(\varepsilon)$ natural san tapylyp, $|z_n - z_0| < \varepsilon$ deňsizlik, ähli n>N sanlar üçin ýerine ýetýän bolsa, onda z_0 sana $\{z_n\}$ yzygiderligiň n tükeniksizlige ymtylanda $(n \to \infty)$ **predeli** diýilýär we ol

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad (22)$$

ýa-da $n \to \infty$, $z_n \to z_0$ ymtylýar görnüşde ýazylýar. $|z_n - z_0| < \varepsilon$ deňsizlik z kompleks tekizliginde merkezi z_0 nokatda, radiusy ε-e deň bolan töwerek bilen çäklenen tegelegiň içki nokatlaryny aňladýar (18-nji surat). Bu tegelege z_0 nokadyň $\boldsymbol{\varepsilon}$ **etraby** diýilýär. (22) predeliň barlygy $\{z_n\}$ yzygiderligiň $n > N$ sanlara degişli hemme agzalarynyň z_0 nokadyň ε etrabynda jemlenendigini aňladýar.



18-nji surat

Eger,$|z_n - z_0| < \varepsilon$ deňsizlik islendik $n > N(\varepsilon)$ üçin, $z_n \neq z_0$

şertde ýerine ýetýän bolsa, onda ol tegelege z_0 nokadyň **oýuk ε etraby** diýilýär we ol $U_{z_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär. Predeli bar bolan kompleks san yzygiderligine **ýygnalýan yzygiderlik** diýilýär. Ýygnalýan kompleks san yzygiderlikleri üçin, ýygnalýan hakyky san yzygiderlikleriň häsiýetlerine mahsus häsiýetler ýerine ýetýär.

Eger $|z_n| < M$ deňsizlik, bu ýerde $M > 0$ hakyky san, $\{z_n\}$ kompleks san yzygiderligiň hemme agzalary üçin ýerine ýetýän bolsa, onda bu yzygiderlige **çäklenen yzygiderlik** diýilýär.

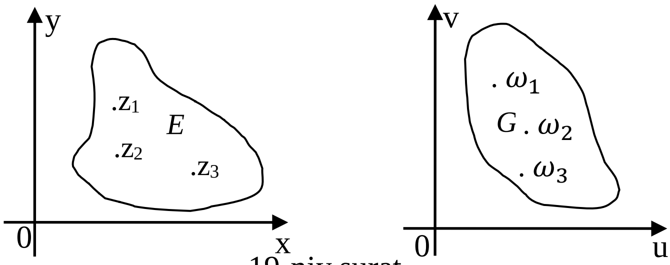
Yzygiderligiň predeliniň geometrik taýdan düşündirilişinden islendik ýygnalýan yzygiderlik çäklenendir diýen netije gelip çykýar.

§5. Kompleks üýtgeýän ululyk. Kompleks üýtgeýänli funksiýa.

Tekizlikde ýatýan islendik E oblastyň her bir $M_0(x_0, y_0)$ nokadyna $z = x_0 + iy_0$ kompleks sanyň degişli bolýandygyny biz §1-de belläp geçdik. Şonuň üçin, E oblastyň nokatlaryny $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ we ş.m. görnüşde bellemän $z_1 = x_1 + +iy_1$, $z_2 = x_2 + +iy_2$ we ş.m. görnüşde belläp bileris. Eger $M(x, y)$ nokat E oblastyň üýtgeýän nokady bolsa (x we y baglanşyksyz üýtgeýän hakyky ululyklar), onda $z = x + iy$ ululyga **kompleks üýtgeýän ululyk** diýilýär. E oblasta bolsa onuň **üýtgeýän oblasty** diýilýär. Goý $z = x + iy$, $x0y$ tekizligiň E oblastynda, $\omega = u + iv$ bolsa $u0v$ tekizligiň G oblastynda üýtgeýän kompleks ululyklar bolsun.

Kesgitleme. Eger E oblastda üýtgeýän z kompleks sanyň her bir bahasyna ω kompleks sanyň bir ýa-da birnäçe bahasy degişli bolsa, onda ω ululyga z ululyga görä **kompleks üýtgeýänli funksiýa** ýa-da ýöne **kompleks funksiýa** diýilýär we ol $\omega = f(z)$ bilen belgilenýär.

Eger, $z = x + iy$ ululyk E oblastda üýtgände, $\omega = u +$ $+iv$ ululyk G oblasty düzýän bolsa, onda E oblasta $f(z)$



19-njy surat

funksiýanyň **üýtgeýän oblasty**, G oblasta bolsa onuň **bahalarynyň oblasty** diýilýär (19-njy surat).

Eger z ululygyň her bir bahasyna w ululygyň bir bahasy degişli bolsa, onda $\omega = f(z)$ funksiýa **birbahaly funksiýa** diýilýär. Eger, z ululygyň käbir bahasyna ω-nyň birnäçe bahasy degişli bolsa, onda $\omega = f(z)$ funksiýa **köpbahaly funksiýa** diýilýär.

Meselem, z kompleks tekizligiň ähli nokatlarynda kesgitlenen $\omega = z^2$, $\omega = Rez$, $\omega = Imz$, $\omega = \bar{z}^2$ funksiýalar birbahaly, $\omega = Argz\,(z \neq 0)$, $\omega = \sqrt[3]{z}$ funksiýalar bolsa (degişlilik-de tükeniksiz köpbahaly we üçbahaly), köpbahaly funksiýalardyr.

E oblastda kesgitlenen $\omega = f(z) = u + iv$ funksiýanyň berilmegi şu oblastda iki hakyky ululykly iki sany $u = u(x, y)$ we $v = v(x, y)$ funksiýalaryň berilmegi bilen deňgüýçlidir. $u = u(x, y)$ funksiýa $f(z)$ funksiýanyň **hakyky bölegi**, $v = v(x, y)$-a bolsa **hyýaly bölegi** diýilýär we olar degişlilikde $Ref(z)$, $Imf(z)$ bilen belgilenýär. Şunlukda, funksiýany $f(z) = Ref(z) + iImf(z)$ görnüşde hem ýazmak bolar. Mysal üçin, $\omega = z^2$ funksiýanyň berilmegi iki sany $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ funksiýalaryň berilmegi bilen deňgüýçli, sebäbi $\omega = z^2 == (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy +$ $+(iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ deň.

Geometrik nukdaý nazardan, birbahaly $\omega = f(z)$ kompleks funksiýanyň berilmegi, *E* oblastyň nokatlaryny *G* oblastyň nokatlaryna geçirýän *F* özgertmäniň berilmegine barabardyr. *E* we *G* oblastlary dürli kompleks tekizliklerde (degişlilikde $z(x0y)$ we $\omega(u0v)$ kompleks tekizliklerde) şekillendirmek amatlydyr (19-njy surat).

Ýokarda garalan *E* we *G* oblastlar arasyndaky *F* özgertmäniň özara birbahaly bolan ýagdaýy esasy hallaryň biridir. Belli boluşy ýaly bu halda, *F* özgertme *E* oblastyň islendik iki dürli nokadyny G oblastyň iki dürli nokadyna geçirýär we tersine, *G* oblasty *E* oblasta geçirýän *F*-e görä ters F^{-1} özgertme hem edil şol häsiýete eýedir.

Indi, käbir elementar funksiýalara seredeliň.

1. **Natural derejeli $\boldsymbol{\omega = z^n}$ funksiýa.** Bu funksiýany r, φ polýar koordinatalaryny ulanyp $\omega = u + iv = z^n =$ $= (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden funksiýanyň hakyky we hyýaly bölekleri üçin

$$u = Rew = r^n \cos\varphi = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(narctg\frac{y}{x}\right),$$

$$v = Im\omega = r^n \sin\varphi\,(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sin\left(narctg\frac{y}{x}\right)$$

alarys.

2. $\boldsymbol{\omega = \sqrt[n]{z}}$ **funksiýa.** Bu funksiýany ((21)-nji formula seret) aşakdaky

$$\omega = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$
$$k = 0,1,2,\dots,n-1 \qquad (23).$$

görnüşde ýazyp bolar.

(23) deňlikden görnüşine görä $\omega = \sqrt[n]{z}$ funksiýa köpbahaly (berlen halda n bahaly) funksiýadyr, ýagny argumentiň her bir bahasyna funksiýanyň n bahasy degişlidir.

Meselem, $z = 1 + i$ kompleks san üçin $\omega = \sqrt{z}$ funksiýanyň iki bahasyny tapmak bolar.

$$\omega_k = \sqrt{1+i} = \sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} =$$
$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) =$$
$$= \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)\right], \qquad k = 0{,}1$$

$k = 0$ bolanda, $\quad \omega_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$,

$k = 1$ bolanda,

$$\omega_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right) =$$
$$= \sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) = -\omega_0.$$

3.**Görkezijili $\boldsymbol{\omega = e^z}$ funksiýa.** $z = x + iy$ kompleks üýtgeýän ululyk üçin, e^z funksiýa, $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ deňlik bilen kesgit-lenýär. Şonuň üçin, $u = Re\omega = e^x\cos y$; $v = Im\omega = e^x\sin y$ bolar. Bu kesgitlemeden e^z funksiýanyň aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar.

1) Islendik z_1 we z_2 kompleks üýtgeýän ululyklar üçin,
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$
deňlik ýerine ýetýär.

2) e^z funksiýa, periody $2\pi i$-e deň bolan periodik funksiýadyr,
$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

3) Islendik $z = x + iy$ kompleks üýtgeýän ululyk üçin
$$|e^z| = e^x, \qquad arge^z = y$$
deňlikler ýerine ýetýärler.

4. **Trigonometrik funksiýalar. $\boldsymbol{sinz}$ we $\boldsymbol{cosz}$** funksiýalar aşakdaky,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (23)$$

deňlikler bilen kesgitlenýärler. Olaryň hakyky we hyýaly böleklerini tapalyň

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} =$$
$$= -\frac{i}{2}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right) =$$
$$= -\frac{i}{2}[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)] =$$
$$= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x =$$
$$= chy\sin x + ishy\cos x$$

ýa-da

$$\sin z = chy\sin x + i\, shy\cos x,$$

bu ýerde

$$chy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}, \quad shy = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2},$$

degişlilik-de **giperbolik kosinus** we **giperbolik sinus** funksiýalardyr. Şuňa meňzeşlikde

$$\cos y = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = chy\cos x - ishy\sin x$$

ýa-da

$$cos\, z = chy\ cosx + ishy\ sinx.$$

$\boldsymbol{tgz\ we\ ctgz}$ **funksiýalar**

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$$

formulalar bilen kesgitlenýärler.

1. **Logarifmli funksiýa.** $z = e^{\omega}$ gorkezijili funksiýa ters bolan funksiýa, **logarifmli funksiýa** diýilýär we ol $\omega = Lnz$ bilen belgilenýär. e^{ω} aňlatma, noldan tapawutly islendik baha eýýe bolup bilýänligi üçin, $\omega = Lnz$ funksiýa z kompleks tekizligiň noldan tapawutly islendik nokadynda kesgitlenendir.

Eger, $\omega = Lnz = u + iv,\ z = re^{i\varphi} = |z|e^{iArgz}$ diýsek, onda logarifmli funksiýanyň kesgitlemesine görä, $e^{u+iv} =$ $= |z|e^{iArgz}$ ýa-da $e^{u}e^{iv} = |z|e^{iArgz}$ bolar. Bu ýerden $e^{u} = |z|,\ v = Argz$ ýa-da $u = ln|z|,\ v = Argz$ deňlikleri alarys. Diýmek,

$$\omega = Lnz = ln|z| + i\, Argz \qquad (24)$$

bolar.

Indi, $Argz = argz + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ deňligi (24) deňlikde ornuna goýup

$$\omega = Lnz = ln|z| + i\, Argz + 2k\pi i,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (25)$$

formulany alarys. Bu formuladan görnüşine görä, $\omega = Lnz$ funksiýa köpbahaly funksiýadyr. Ol funksiýanyň $k = 0$ bolanda alynýan bahasyna **baş bahasy** diýilýär we lnz bilen belgilenýär. Şonuň üçin, (25) deňlikde $k = 0$ bahany goýup

$$lnz = ln|z| + iargz \qquad (26)$$

deňligi alarys. (26) deňligiň esasynda (25) deňligi

$$\omega = Lnz = lnz + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

görnüşde ýazyp bolar.

Mysallar.

1. $Ln(1 + i) = ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, bu ýerden $k = 0$ bolanda, $Ln(1 + i) = ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$ bolar.

2. $Ln1 = ln1 + i \cdot 0 + 2k\pi i = 2k\pi i,\ ln1 = 0.$

3. $Lni = ln1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,\ lni = \frac{\pi}{2}.$

4. $Ln(-i) = -i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
$ln(-i) == i\frac{\pi}{2}.$

5.$Ln(-1) = i\pi + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
$ln(-1) = i\pi.$

§6. Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň predeli we üznüksizligi.

Goý, z_0 nokadyň E oblasta degişli etrabynda kesgitlenen $z = x + iy$ argumentli, $\omega = f(z) = u(x, y) + +iv(x, y)$ birbahaly funksiýa berilen bolsun. z_0 nokadyň özi E oblasta degişli bolmagy hökman däl. Şu etrapda $\{z_n\}$ kompleks sanlaryň yzygiderligini alyp funksiýanyň degişli bahalarynynyň $\{\omega_n = f(z_n)\}$ yzygiderligini guralyň. Goý, $n \to \infty$ ymtylanda $\{z_n\}$ yzygiderlik z_0 nokada ymtylsyn. Şunlukda, eger funksiýanyň degişli bahalarynyň $\{f(z_n)\}$ yzygiderligi käbir A sana ymtylsa, onda A sana $\omega = f(z)$ funksiýanyň $\boldsymbol{z_0}$ **nokadyndaky predeli** diýilýär we ol

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \qquad (27)$$

görnüşde belgilenýär. Indi takyk kesgitlemä geçeliň.

Kesgitleme. Eger islendik kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin, oňa bagly bolan $\delta = \delta(\varepsilon)$ san tapylyp, $|z - z_0| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme $z \neq z_0$ nokatlar üçin $|f(z) - A| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda A sana $\omega = f(z)$ funksiýanyň $\boldsymbol{z_0}$ **nokadyndaky predeli** diýilýär we ol (27) görnüşde ýazylýar.

Funksiýanyň predeli z nokatlaryň z_0 nokada haýsy ýol (ugur) bilen ýakynlaşýandygyna bagly däldir. Eger, $A = u_0 + +iv_0$, $w = f(z) = u(x,y) + +iv(x,y)$ belgilemeleri girizsek, onda (27) deňlikden

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0 \qquad (28)$$

predelleriň barlygy gelip çykýar. Tersine hem dogrudyr, (28) deňlikleriň ýerine ýetmegi (27) deňligiň dogrudygyny subut edýär. Bu netije, predelleri bar bolan hakyky ululukly funksiýalar üçin belli bolan predelleriň häsiýetleriniň, predelleri bar bolan kompleks üýtgeýjili funksiýalar üçin hem ýerine ýetýändigini görkezýär. Hususanda, eger $\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z)$ we $\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)$ predeller bar bolsa, onda

$$\lim_{z \to z_0} [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)] = c_1 \lim_{z \to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z \to z_0} f_2(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} [f_1(z) \cdot f_2(z)] = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \to z_0} f_2(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f_1(z)}{\lim_{z \to z_0} f_2(z)}, \quad \text{bu ýerde} \quad \lim_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0$$

deňlikler dogrudyrlar. Bu ýerde c_1 we c_2 kompleks hemişelik sanlar

Kesgitleme. Eger, $\omega = f(z)$ funksiýa z_0 nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolup, $z \to z_0$ ymtylanda tükenikli predeli bar bolsa we onuň bahasy $f(z_0)$ bilen gabat gelse, ýagny

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad (29)$$

bolsa, onda $\omega = f(z)$ funksiýa, $\boldsymbol{z = z_0}$ **nokatda üznüksiz** diýilýär. Başgaça aýdylanda, eger islendik kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin ε sana bagly bolan başga bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ san tapylyp, $|z - z_0| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan z-iň hemme bahalary üçin

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \qquad (30)$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\omega = f(z)$ funksiýa, $\boldsymbol{z = z_0}$ **nokatda üznüksiz funksiýa** diýilýär. Islendik $z \neq z_0$ nokat üçin $z - z_0$ tapawuda **argumentiň** $\boldsymbol{z_0}$ **nokadyndaky** artdyrmasy, $f(z) - f(z_0)$ tapawuda bolsa **funksiýanyň** $\boldsymbol{z_0}$ **nokatdaky artdyrmasy** diýilýär we degişlilikde $\Delta z,\ \Delta\omega$ bilen belgilenýär. Diýmek,

$$\Delta z = z - z_0,\ \Delta\omega = f(z) - f(z_0) \qquad (31)$$

bolar. Bu belgilemeleri ulanyp, (29) deňligi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta\omega = 0 \qquad (32)$$

görnüşde ýazyp bileris. Diýmek, eger argumentiň artdyrmasy nola ymtylanda, funksiýanyň degişli artdyrmasy nola ymtylsa, onda funksiýa, **berilen nokatda üznüksiz** diýilýär. *E* oblastyň her bir nokadynda üznüksiz bolan funksiýa şu **oblastda üznüksiz** diýilýär. Hakyky üýtgeýjili funksiýalaryň üznüksizliginiň häsiýetlerine meňzeş häsiýetler kompleks üýtgeýjili üznüksiz funksiýalar üçin hem ýerine ýetýär. Şu ýerde ýapyk oblastda üznüksiz funksiýalaryň birnäçe häsiýetlerini sanap geçeliň. Ýapyk $\overline{D}$ oblastda üznüksiz $\omega = f(z)$ funksiýa şu oblastda

1) Moduly boýunça çäklenendir.
2) Moduly boýunça iň kiçi we iň uly baha eýedir.
3) $\overline{D}$ oblastda deňölçegli üznüksizdir.

§7. Kompleks üýtgeýjili funksiýanyň önümi we differensialy. Koşi-Rimanyň şertleri. Analitik funksiýalar.

Goý, kompleks tekizligiň z nokadynyň käbir etrabynda kesgitlenen kompleks üýtgeýänli $\omega = f(z)$ funksiýa berilen bolsun.

Kesgitleme. Eger, Δz islendik kanun bilen nola ymtylanda,

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

gatnaşygyň tükenikli predeli bar bolsa, onda ol predele $\omega = f(z)$ funksiýanyň ***z* nokadyndaky önümi** diýilýär we $f'(z)$ ýa-da $\frac{df(z)}{dz}$ bilen belgilenýär, $f(z)$ funksiýa bolsa ***z* nokatda differensirlenýän** funksiýa diýilýär. Kesgitlemä görä,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \qquad (33)$$

bolar. (33) deňligi

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \gamma(\Delta z)$$

ýa-da

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \gamma(\Delta z) \cdot \Delta z \qquad (34)$$

görnüşde ýazmak bolýar. Bu ýerde $\gamma(\Delta z)$ ululyk $\Delta z \to 0$ ymtylanda tükeniksiz kiçi ululykdyr. Diýmek, $f(z)$ funksiýa z nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň artdyrmasyny (34) görnüşde ýazyp bolýar we tersine, $\omega = f(z)$ funksiýanyň artdyrmasyny

$$\Delta f = C\Delta z + \gamma(\Delta z) \cdot \Delta z \qquad (35)$$

görnüşde ýazyp bolsa, onda $f(z)$ funksiýa z nokatda differensirlenýän funksiýadyr we $C = f'(z)$ bolar. Şeýlelik-de, $f(z)$ funksiýanyň z nokatda differen-sirlenmegi üçin (35) deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. z nokatda differensirlenýän funksiýa şu nokatda üznüksizdir. Oňa göz ýetirmek üçin, (35) deňlikde $\Delta z \to 0$ şertde predele germek ýeterlikdir. (34) deňligiň sag tarapyndaky $f'(z)\Delta z$ goşulyja $f(z)$ funksiýanyň ***z*** **nokadyndaky differensialy** diýilýär we ol $d\omega$ ýa-da $df(z)$ bilen belgilenýär. Diýmek,

$$d\omega = f'(z)\Delta z \qquad (36)$$

deňligi alarys. (36) formula boýunça $\omega = z$ funksiýanyň differensialyny hasaplasak, onda $d\omega = dz = (z)'\Delta z = \Delta z$ bolar. Şonuň üçin, (36) formula $d\omega = f'(z)dz$ görnüşi alar. Diýmek, funksiýanyň differensialy onuň önümini argumentiň differensialyna köpeltmek hasylyna deň.

Hakyky argumentli hakyky funksiýalaryň önümi-ne we differensialyna degişli häsiýetler we esasy düzgünler, kompleks üýtgeýänli funksiýalar üçin hem ýerine ýetýändir. Onuň şeýledigi, önümiň kesgitleme-sinden we predeliň häsiýetlerinden gelip çykýar. z nokatda önümi bar bolan funksiýa, şol nokatda **differensirlenýän funksiýa** diýilýär.

Indi, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiýanyň differensirlenmeginiň zerur we ýeterlik şertlerine garap geçeliň.

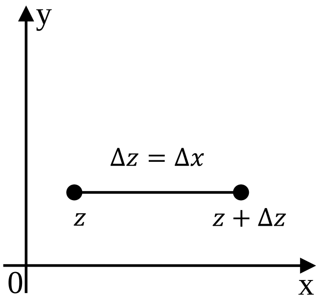
Teorema. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiýanyň $z = x + iy$ nokatda differensirlenmegi üçin *u(x,y)* we *v(x,y)* funksiýalar şu nokatda üznüksiz differensirlenýän bolup

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (37)$$

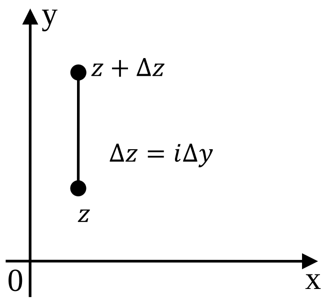
şertleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. (37) deňliklere **Koşi-Rimanyň** (käbir edebiýatlarda bolsa Dalamber-Eýleriň) **şertleri** diýilýär.

Subudy. Zerurlyk şerti. Goý $f(z)$ funksiýa $z = x + iy$ nokatda differensirlenýän bolsun. Onda $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$ predeliň tükenikli bahasy bardyr. Kesgitlemä görä, bu predeliň bahasy, Δz artdyrmanyň nola nähili kanun bilen ymtylýandygyna bagly däldir. Biz ýokarky predeli ilki Δz nola $0x$ okuna parallel ýol bilen, (20-nji surat) soňra bolsa $0y$ okuna parallel ýol bilen (21-nji surat) ymtylan ýagdaýynda tapalyň.

Birinji ýagdaýda $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ deňlikde $\Delta y = 0$,



20-nji surat



21-nji surat

$\Delta z = \Delta x$ bolýar. Şonuň üçin $\Delta z \to 0$ şert $\Delta x \to 0$ şert bilen çalşyrylýar. Onda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

deňligi alarys. Ikinji ýagdaýda $\Delta x = 0$ we $\Delta z = i\Delta y$, şonuň üçin $\Delta z \to 0$ şert, $i\Delta y \to 0$ ýa-da $\Delta y \to 0$ bilen çalşyrylýar. Diýmek, bu halda

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

bolar. Bu iki predeliň bahalary, funksiýanyň $z = x + $ $+iy$ nokatdaky şol bir önümini berýär. Şonuň üçin,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

deňlik dogrudyr. Bu deňligiň hyýaly we hakyky böleklerini deňläp, subut etmeli (37) deňligi alarys.

Ýeterlik şerti. Goý indi, z nokadyň käbir etrabynda Koşi-Rimanyň (37) şertleri ýerine ýetsin. $f(z)$ funksiýanyň differensirlenýändigini görkezeliň. Teoremanyň şertine görä, $u(x,y)$ we $v(x,y)$ differensirlenýän funksiýalardyr, şonuň üçin olaryň doly artdyrmasyny aşakdaky görnüşde

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1|\Delta z|$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\delta y}\Delta y + \alpha_2|\Delta z|$$

ýazyp bolar, bu ýerde, $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ we $|\Delta z| \to 0$ ymtylanda $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ ymtylýar. Diýmek,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{(\alpha_1+i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}$$

bolar. Indi, Koşi-Rimanyň (37) şertlerini ulanalyň, onda

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}$$

deňligi alarys. Bu ýerde, $|\Delta z|\to 0$ şertde predele geçsek, onda

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

ýa-da

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

bolar. Teorema subut edildi.

Koşi-Rimanyň şertlerini ulanyp funksiýanyň önümini aşakdaky

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$

(38)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}, f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y},$$

formulalaryň her biri boýunça hasaplamak bolar. Eger biz x, y dekart koordinatalaryny r, φ polýar koordinatalaryna geçirýän, $x=r\cos\varphi$, $y=r\cos\varphi$ formulalary ulansak, onda üýtgeýän ululyklar çalşyrylanda differensirlemegiň düzgünleri esasynda, Koşi-Rimanyň polýar koordinatalaryndaky,

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial v}, \qquad r\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{\partial u}{\partial \varphi} \qquad (39)$$

şertlerini alarys.

Kesgitleme. Eger funksiýa berlen nokatda we onuň käbir golaý töwereginde differensirlenýän bolsa, onda oňa şol nokatda **analitik funksiýa** diýilýär.

Kesgitleme. Oblastyň her ýer nokadynda analitik bolan birbahaly funksiýa şu **oblastda analitik funksiýa** diýilýär.

1-nji mysal. $\omega=z^3$ funksiýa üçin Koşi-Rimanyň şertlerini barlamaly.

Çözülişi. $z=x+iy$ goýup, funksiýanyň hakyky we hyýaly böleklerini tapalyň.

$$\omega=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy-3xy^2-iy^3=$$
$$=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

bolýanlygy üçin, $u(x,y)=x^3+3xy^2$, $v(x,y)=$ $=3x^2y-y^3$ bolar. Soňky deňlikleri differensirläp

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$$

alarys. Diýmek,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=6xy$$

bolar. Görşümiz ýaly, Koşi-Rimanyň şertleri tekizligiň her bir nokadynda ýerine ýetýär, şonuň üçin (38) formulanyň esasynda

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2-i(-6xy)=$$
$$=3x^2+3i^2y^2+6ixy=$$
$$=3(x^2+2ixy+(iy)^2)=3(x+iy)^2=3z^2$$

deňligi alarys. Diýmek, $f'(z)=(z^3)'=3z^2$ we $\omega=z^3$ funksiýa, tekizligiň hemme nokatlarynda analitikdir.

2-nji mysal. $\omega=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$ görkezijili funksiýa üçin, Koşi-Rimanyň şertlerini barlamaly.

Çözülişi.

$$u=e^x\cos y,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,$$
$$v=e^x\sin y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y.$$

Onda,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y+ie^x\sin y=$$
$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z$$

bolar.

3-nji mysal. $\omega=z^n$ funksiýa üçin Koşi-Rimanyň şertlerini polýar koordinatalarynda barlamaly.

Çözülişi. $z=re^{i\varphi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ornuna goýup, $\omega=u+iv=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}\ =\ r^n\cos n\varphi+ir^n\, sinn\,\varphi$ alarys. Bu ýerden $u=r^n\cos n\varphi,\ v=r^n\, sinn\,\varphi$ deňlikler gelip çykýar. Bu funksiýalaryň r,φ boýunça hususy önümlerini tapalyň.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^{n}\, sin\, n\varphi,$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\, sinn\, \varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^{n}\, cos\, n\varphi.$$
Şeýlelik-de,
$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^{n}\cos\varphi,$$
$$r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi} = nr^{n}\sin\varphi.$$
bolar. Diýmek, $\omega = z^n$ funksiýa üçin, Koşi-Rimanyň (39) şertleri ýerine ýetýär.

4-ni mysal. $\omega = \bar{z}$ funksiýa üçin Koşi-Rimanyň şertlerini barlamaly.

Çözülişi. Eger $\omega = \bar{z}$ bolsa, onda $u + iv = x - iy$ we $u = x,\ v = -y$ bolar, bu ýerden $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} == -1$ gelip çykýar. Diýmek, Koşi-Rimanyň şertleriniň birinjisi ýerine ýetmeýär. Şonuň üçin $\omega = \bar{z}$ funksiýa tekizligiň hiç bir nokadynda differensirlenýän däldir.

§8. Laplasyň deňlemesi we çatyrymly garmonik funksiýalar.

Käbir D oblastda analitik bolan $f(z) = u + iv$ funksiýanyň hakyky u we hyýaly v bölekleriniň, şu oblastda Laplasyň deňlemesi diýilip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (40)$$

deňlemäniň çözüwidigini, ýagny
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

deňlikleriň ýerine ýetýändigini görkezeliň.

Hakykatdan hem, u we v funksiýalar D oblastda Koşi-Rimanyň

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

şertleri bilen baglydyrlar. Birinji deňligi x boýunça, ikinji deňligi y boýunça differensirläp netijeleri goşsak, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$$

dogry deňligi alarys. Şuňa meňzeşlikde birinji deňligi y boýunça, ikinji deňligi x boýunça differensirläp netijeleri aýyrsak, onda ýene-de

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0$$

dogry deňligi alarys.

Laplasyň (40) deňlemesini kanagatlandyrýan funksiýalara **garmonik funksiýalar** diýilýär. Diýmek, analitik funksiýanyň hakyky we hyýaly bölekleri garmonik funksiýalardyr.

Eger, $u(x,y)$ we $v(x,y)$ erkin saýlanyp alynan garmonik funksiýalar bolsalar, onda $u(x,y) + iv(x,y)$ funksiýanyň analitik bolmazlygy, ýagny düzgün boýunça (37) şertleriň ýerine ýetmezligi mümkin.

Eger, iki sany $u(x,y)$ we $v(x,y)$ garmonik funksiýalaryň birini erkin saýlap, beýlekisini Koşi-Rimanyň

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

şertleri ýerine ýeter ýaly saýlap alsak, başgaça aýdanymyzda ikinji funksiýany onuň berilen iki sany hususy önümi ýa-da onuň doly differensialy boýunça kesgitlesek, onda $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik funksiýa bolar. Bize belli boluşy ýaly (I bap §7 seret) doly differensial boýunça funksiýa erkin hemişelik ululyga çenli takyklyk bilen kesgitlenýär. Analitik funksiýa bolsa, erkin ululyga çenli takyklyk bilen özüniň hakyky we hyýaly bölekleri boýunça kesgitlenýär.

Koşi-Rimanyň şertlerini kanagatlandyrýan, käbir $f(z) = u(x,y) + +iv(x,y)$ analitik funksiýanyň degişlilikde hakyky we hyýaly bölegi bolan iki sany $u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalara **çatyrymly garmonik funksiýalar** diýilýär.

Mysal. Hakyky bölegi $u = x^3 - 3xy^2$ deň bolan analitik funksiýany tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

bolýandygy üçin, Koşi-Rimanyň (37) şertlerini ulanyp

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \qquad (41)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \qquad (42)$$

deňlikleri alarys. (41) deňlikden

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)dy = 3x^2y - y^3 + \varphi(x) \qquad (43)$$

bolar. Bu ýerden $\varphi(x)$ funksiýany tapmak üçin, (43) deňligi x boýunça differensirläp, (42) deňlikde ornuna goýalyň, onda

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x),$$

$6xy + \varphi'(x) = 6xy$ ýa-da $\varphi'(x) = 0$ bolar. Bu ýerden bolsa, $\varphi(x) = C$ gelip çykýar. Bu bahany (43) deňlikde goýup

$$v = 3x^2y - y^3 + C$$

alarys. Onda ahyrky netijede

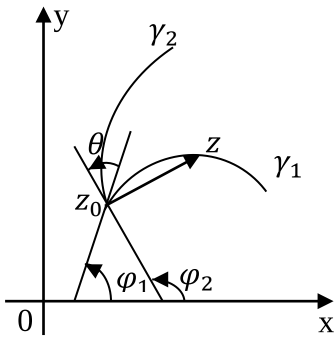
$$\omega = u + iv = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C) =$$

$$= x^3 + 3x^2iy + 3x^2i^2y^2 + i^3y^3 + iC =$$
$$= (x + iy)^3 + iC = z^3 + iC$$
bolar, bu ýerde $z = x + iy$.

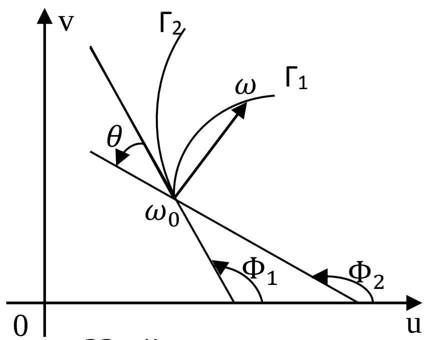
§9. Kompleks funksiýanyň önüminiň geometrik manysy. Konform özgertme.

Goý, $\omega = f(z)$ funksiýa, z tekizligiň käbir D oblastynda analitik bolsun. D oblastyň haýsy hem bolsa bir z_0 nokadyny alalyň we şu nokatdan çykýan D oblasta degişli erkin γ_1 egri çyzygy geçireliň. $f(z)$ funksiýa z tekizligiň D oblastyny ω tekizligiň käbir G oblastyna öwürýär. Goý, bu öwürmede z_0 nokat ω_0 nokada, γ_1 egri çyzyk bolsa ω_0 nokatdan çykýan Γ_1 egri çyzyga geçsin.(22-nji we 23-nji suratlar)

Şerte görä, $\omega = f(z)$ funksiýanyň z_0 nokatda önümi bardyr. Goý $f'(z_0) \neq 0$ bolsun. $f'(z_0)$ önümiň geometrik manysyny anyklamak üçin, $f'(z_0)$ kompleks sany trigonometrik $f'(z_0) = r(cos\alpha + +i\, sin\alpha)$ görnüşde ýazalyň



22-nji surat



23-nji surat

we ilki bilen $f'(z_0)$ önümiň α argumentiniň we r modulynyň geometrik manysyny anyklalyň. Onuň üçin, γ_1 egri çyzygyň üstünde ýatan $z = z_0 + \Delta z$ nokady alyp, bu nokada degişli Γ_1 çyzygyň üstünde ýatan nokady $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ bilen belgiläliň. z nokat γ_1 egri çyzyk boýunça z_0 nokada ymtylanda, bu nokada degişli $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ nokat Γ₁ egri çyzyk boýunça ω_0 nokada ymtylýar, şunlukda Δz we $\Delta\omega$ ululyklaryň ikisi hem nola ymtylýarlar. Önümiň kesgitlemesine we belgilemä görä,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = r(cos\alpha + isin\alpha) \qquad (44)$$

deňligi alarys. Bu ýerden bolsa,

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta\omega}{\Delta z}\right| = r \qquad (45)$$

$$argf'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} arg\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \alpha \qquad (46)$$

bolýanlygy düşnüklidir. (46) deňlikden paýyň argumentiniň kesgitlemesini ulanyp

$$\alpha = \lim_{\Delta z \to 0} arg\Delta\omega - \lim_{\Delta z \to 0} arg\Delta z \qquad (47)$$

deňligi alarys. Δz kompleks san, γ_1 egri çyzygyň üstünde ýatan z_0 we z noklatlary birleşdirýän wektory, $\Delta\omega$ kompleks san bolsa, Γ_1 egri çyzygyň üstünde ýatan ω_0 we ω nokatlary birleşdirýän wektory aňladýar. Şonuň üçin $arg\Delta z,$ $0x$ okuň položitel ugry bilen Δz wektoryň emele getirýän φ burçuny, $arg\Delta\omega$ bolsa, $0u$ okuň položitel ugry bilen $\Delta\omega$ wektoryň arasyndaky Φ burçy aňladýar. $\Delta z \to 0$ ymtylanda, bu burçlar degişlilikde, γ_1 egri çyzygyň z_0 nokadyna geçirilen galtaşyjynyň $0x$ ok bilen, Γ_1 egri çyzygyň ω_0 nokadyna geçirilen galtaşyjynyň bolsa, $0u$ ok bilen emele getiren φ_1 we Φ_1 burçlaryna ymtylýarlar. Şonuň üçin, (47) deňlikden

$$\alpha = \Phi_1 - \varphi_1 \quad \text{ýa-da} \quad \Phi_1 = \alpha + \varphi_1 \qquad (48)$$

deňligi alarys. (48) deňlige görä analitik funksiýanyň önüminiň argumenti, γ_1 egri çyzygyň z_0 nokadyna geçirilen galtaşyjynyň, $\omega = f(z)$ öwürmede aýlanma burçuna deňdir, başga söz bilen aýdanymyzda, α burç, ilki başky we öwürmeden soňky ugurlaryň arasyndaky burça deňdir. γ_1 egri çyzyk erkin bolany üçin onuň ugruny üýtgetsek φ_1 we Φ_1 burçlar üýtgeýärler, emma α burç üýtgemän galýar. Şonuň üçin, z_0 nokatdan çykýan başga bir γ_2 egri çyzygy geçirsek we şu nokada degişli ω_0 nokatdan çykýan egrini Γ_2 bilen belgilesek, onda (48) deňlikler γ_2 we Γ_2 çyzyklar jübüti üçin hem ýerine ýetýändir, diýmek

$$\Phi_2 - \varphi_2 = \alpha \text{ ýa-da } \Phi_2 = \varphi_2 + \alpha \qquad (49)$$

bolar, bu ýerde φ_2 we Φ_2 burçlar, degişlilikde γ_2 we Γ_2 çyzyklaryň z_0 we ω_0 nokatlardaky galtaşyjylarynyň $0x$ we $0u$ oklaryň položitel ugry bilen emele getiren burçlarynyň bahalarydyr. Eger-de α burçuň iki bahasyny deňlesek, onda $\Phi_1 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2$ ýa-da $\Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \theta$ deňligi alýarys. Bu deňlik özgerdilen çyzyklaryň aralygyndaky $\Phi_2 - \Phi_1$ burçuň özgeren çyzyklaryň arasyndaky $\varphi_2 - \varphi_1$ burça deňdigini görkezýär. Şunlukda, bu burçlar ululyklary hem-de aýlaw ugurlary boýunça gabat gelýärler. Bu häsiýete burçlaryň **konserwatizmligi** (hemişelikligi) diýilýär.

Indi, (45) deňligi aşakdaky

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|} = r \qquad (50)$$

görnüşde ýazalyň. $|\Delta z|$ we $|\Delta\omega|$ ululyklar, degişlilik-de Δz we $\Delta\omega$ wektoryň uzynlygydyr. Şonuň üçin (50) deňlik, özgeren nokatlaryň tükeniksiz kiçi aralygynyň, özgerdilen nokatlaryň tükeniksiz kiçi aralygyna bolan gatnaşygynyň predeliniň, γ_1 çyzygyň ugryna bagly däldigini görkezýär. Bu ýerden bolsa, $r = |f'(z_0)|$ modulyň, $\omega = f(z)$ funksiýanyň özgertmesiniň z_0 nokatdaky masştabynyň ululygy bolýandygyna göz ýetirmek mümkin. $r > 1$ bolanda masştab artýar, $r < 1$ bolanda gysylýar, $r = 1$ bolanda üýtgemän galýar. Şeýlelik bilen $r = |f(z_0)|$ modul diňe z_0 nokada bagly bolup, γ_1 egri çyzygyň ugruna bolsa bagly däldir. Şonuň üçin $\omega = f(z)$ funksiýanyň z_0 nokatdaky öwürmesiniň süýşmeklik koeffisienti, şu nokatdan çykýan çyzyklaryň ugryna bagly bolman, şol bir hemişeligi saklaýar. Bu häsiýete **süýndirmekligiň hemişeligi** diýilýär.

Kesgitleme. Argumente we modula görä, degişlilik-de burçlaryň konserwatizmlik we süýndirmekliligiň hemişelik häsiýetine eýýe bolan özgertmä, **I jynsly konform özgertme** diýilýär. Aýdylanlardan görnüşine görä, $\omega = f(z)$ analitik funksiýanyň önümi noldan tapawutly bolan nokatlaryň ählisinde I jynsly konform özgertme bolýar.

Kesgitleme. Eger, kompleks üýtgeýänli z tekizligiň, ω tekizlige özgertmesinde, burçlar ululygyny saklap, ugurlary tersine üýtgäp, süýndirmekligiň hemişelik häsiýeti bolsa saklanyp galsa, onda bu özgertmä **II jynsly konform özgertme** diýilýär. Analitik funksiýa çatyrymly bolan funksiýa, II jynsly konform özgertme bolýar.

Özbaşdak çözmek üçin meseleler

Hasaplamaly:

1. $(a+bi)^3 - (a-bi)^3$ 2. $\dfrac{4-3i}{4+3i}$

3. $\left(\sqrt{3}-i\right)^8$ 4. $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$

5. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ kompleks sanyň argumentini we modulyny tapmaly.

6. $z = -\sqrt{3} - i$ komleks sany trigonometrik görnüşde ýazmaly.

7. Eger, $u(x, y) = e^x cosy$ funksiýa analitik funksiýanyň hakyky bölegi bolsa, onda $f(0) = 1$ goşmaça şertde, ol funksiýany tapmaly.

8. Eger, $\vartheta(x, y) = x + y$ kompleks funksiýanyň hyýaly bölegi bolsa, onda bu funksiýany tapmaly.

9. Eger, $u(x, y) = 2^x \cos(ylnz)$ kompleks funksiýanyň hakyky bölegi bolsa, onda bu funksiýany tapmaly.

10. $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^2)$ funksiýanyň önümini tapmaly.

11. $\omega = \bar{z} - iz^2$ kompleks funksiýanyň hakyky we hyýaly bölegini tapmaly.

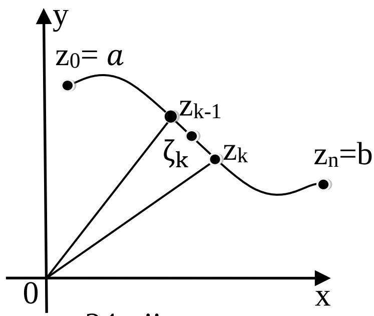
12. $\omega = \frac{\bar{z}}{z}$ kompleks funksiýanyň hakyky we hyýaly bölegini tapmaly.

II bap. Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integraly.

§1. Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integralynyň kesgitlenşi we onuň esasy häsiýetleri.

Goý, bize kompleks z tekizliginde C endigan egriçyzyk (24-nji surat) hem-de şu egriçyzygyň nokatlarynda kesgitlenen kompleks üýtgeýänli $f(z)$ funksiýa berilen bolsun. C egriçyzygyň çetki nokatlaryny a we b bilen belgiläliň we a nokatdan b nokada çenli ugry şu çyzygyň položitel ugry diýip kabul edeliň. C egriçyzygyň ýapyk bolmagy hem mümkin. Bu ýagdaýda a we b nokatlar gabat gelerler. Ýapyk egriçyzygyň (konturyň) položitel ugry I bapda kesgitlenipdi. C egriçyzygy $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_n = b$, nokatlar bilen n sany bölege böleliň we $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

$(k = 1,2, \dots, n)$ belgilemeleri girizeliň. Her bir (z_{k-1}, z_k) bölekde erkin ζ_k $(k = 1,2, \dots, n)$ nokady alyp, funksiýanyň bu nokatlardaky $f(\zeta_k)$ bahalaryny kesgitläliň we olary Δz_k



24-nji surat

ululyklara köpeldip, hemme bölekler boýunça jemläliň. Onda biz integral jem diýip atlandyrylýan

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (1)$$

jemi alarys.

Kesgitleme. Eger, (1) integral jemiň $\lambda = max|\Delta z_k| \to 0$ ymtylýan şertde predeli bar bolsa, onda bu predele $f(z)$ funksiýanyň **C egriçyzyk boýunça integraly** diýilýär we

$$\int_C f(z)dz$$

görnüşde belgilenýär. Diýmek, kesgitlemä görä,

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (2).$$

bolar. Eger, $f(z)$ bölek-üznüksiz funksiýa, C bölek- endigan egri bolsa, onda

$$\int_C f(z)dz$$

integral bardyr.

Eger, C egriçyzygyň nokatlarynda kesgitlenen $f(z)$ kompleks funksiýanyň (2) predeli bar bolsa, onda $f(z)$ funksiýa C egri boýunça **integrirlenýän funksiýa**, C egriçyzyga bolsa **integrirleniş ýoly** (kontury) diýilýär.

$f(z)$ kompleks funksiýanyň C egriçyzygyň položitel we otrisatel ugurlary boýunça integrallary degişlilikde

$$\int_{C^+} f(z)dz \;\; we \;\; \int_{C^-} f(z)dz$$

belgiler bilen belgilenýär. Eger, C egriçyzyk ýapyk bolsa, onda $f(z)$ funksiýanyň şu egri boýunça integraly

$$\oint_C f(z)dz$$

görnüşde ýazylýar.

Şu ýerde, $z = x + iy$ kompleks üýtgeýän ululyga görä, $f(z) = u(x,y) + i\vartheta(x,y)$ kompleks funksiýanyň C egriçyzyk boýunça integralynyň iki hakyky üýtgeýän ululykly $u(x,y)$ we $\vartheta(x,y)$ funksiýalaryň berilen egri boýunça egriçyzykly integralyna getirilişini görkezeliň. Onuň üçin, $\zeta_k == \xi_k + i\eta_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ belgilemeleri girizip (1) integral jemde özgertmeler geçireliň

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k, \eta_k) + i\vartheta(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - \vartheta(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}[\vartheta(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k].$$

Indi, $\lambda \to 0$ ymtylýan şertde predele geçsek, onda (2) deňlik

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - \vartheta(x,y)\,dy +$$

$$+i\int_C \vartheta(x,y)dx + u(x,y)\,dy \qquad (3)$$

görnüşi alar. (3) deňlikden görnüşine görä, hakyky üýtgeýän ululykly hakyky funksiýalaryň egriçyzykly integrallarynyň häsiýetleri, kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň integrallary üçin hem ýerine ýetýär. Aşakda şu häsiýetleri kompleks funksiýalar üçin görkezeliň.

1. Eger, $f_1(z)$ we $f_2(z)$ kompleks üýtgeýänli funksiýalar C egri boýunça integrirlenýän bolsalar, onda A_1 we A_2 kompleks ýa-da hakyky sanlar üçin,

$$\int_C [A_1 f_1(z) \pm A_2\, f_2(z)]dz =$$

$$= A_1 \int_C f_1(z)dz \pm A_2 \int_C f_2(z)dz$$

deňlik ýerine ýetýär.

2. Eger, C egri iki sany C_1 we C_2 egriden ybarat bolsa $(C = C_1 + C_2)$, onda

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

deňlik dogrydyr.

3. $f(z)$ kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integralynda integrirleme ýolunyň ugry üýtgese, onda onuň alamaty tersine üýtgeýär

$$\int_{C^+} f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz.$$

4. Eger, C egriniň ähli nokatlarynda $|f(z)| \leq M$ bolsa, onda

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq Ml$$

deňsizlik ýerine ýetýär, bu ýerde l san, C egriniň uzynlygydyr.

5. Eger, $|f(z)|$ funksiýanyň integraly bar bolsa, onda

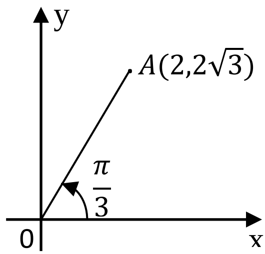
$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$$

deňlik ýerine ýetýär.

1-nji mysal. $argz = \frac{\pi}{3}$ şöhläniň $0(0;0)$ we $A(2,2\sqrt{3})$ nokatlaryny birleşdirýän OA kesim boýunça $\int_{OA} xzdz$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. OA kesimde erkin z nokady alyp, ony $z = x + iy = re^{i\frac{\pi}{3}} = r(cos\varphi + isin\varphi) = r\left(cos\frac{\pi}{3} + +isin\frac{\pi}{3}\right)$ görnüşde ýazalyň. Onda $z = r\left(\frac{1}{2} + +i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x = \frac{r}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ bolar.

Ýokarky deňlikleriň birinjisini r boýunça differensirläp



25-nji surat

$$dz = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)dr,$$

we A nokada degişli kompleks sanyň modulyn $r = 4$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, onda

$$\int_{AB} xzdz = \int_0^4 \frac{r}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) r\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)dr =$$

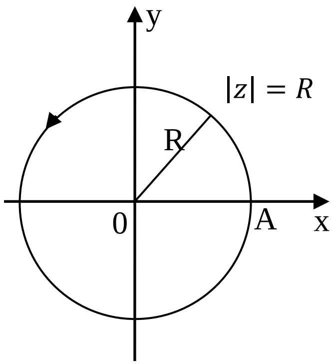
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \int_0^4 r^2 dr \; = \frac{1 + 2i\sqrt{3} - 3}{8} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{64}{3} = \frac{16}{3}(-1 + i\sqrt{3})$$

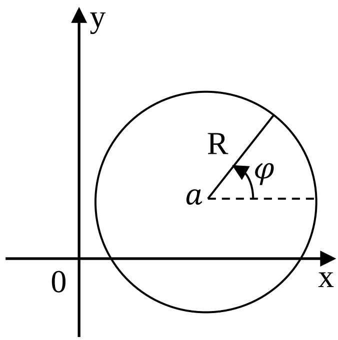
bolar.

2-nji mysal. $|z| = R$ töweregi sagat diliniň hereketiniň ugryna ters ugur boýunça aýlanmak bilen, $\oint_L \frac{dz}{z}$ integraly, başlangyç nokat $A(R, O)$ bolanda hasaplamaly (26-njy surat).

Çözülişi. Töweregiň üstünde z nokady alyp, ony $z = Re^{i\varphi}$ (R-hemişelik) görnüşde ýazalyň. Bu deňligi φ boýunça



26-njy surat



27-nji surat

differensirläp

$$dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$$

deňligi alarys. φ burç 0-dan 2π-e çenli üýtgeýär, çünki z nokat sagat diliniň hereketiniň tersine aýlanýar

$$\oint_L \frac{dz}{z} = \oint_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi}} = 2\pi i$$

3-nji mysal. $|z-a|=R$ töwerek boýunça sagat diliniň hereketiniň ugrynyň tersine aýlanyp $\oint_L \frac{dz}{z-a}$ integraly hasaplamaly (27-nji surat).

Çözülişi. $|z-a|=R$ deňleme, merkezi $z=a$ nokatda, radiusy R-e deň töweregiň deňlemesi $z-a$ kompleks sany $z-a=Re^{i\varphi}$ görnüşde ýazalyň. Onda, $dz=Rie^{i\varphi}d\varphi$ bolar, bu ýerde $0\le\varphi\le 2\pi$. Şonuň üçin,

$$\oint_L \frac{dz}{z-a}=\oint_0^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}d\varphi=2\pi i.$$

4-nji mysal. 2-nji mysaldaky töwerek boýunça $n\neq -1$ bolanda $\oint_L z^n dz=0$ bolýandygyny subut ediň. Bu ýerde n-bütin san.

5-nji mysal. 3-nji mysaldaky töwerek boýunça $n\neq -1$ bolanda $\oint_L (z-a)^n dz=0$ bolýandygyny subut ediň. Bu ýerde n-bütin san.

Eger-de L egriniň deňlemesi, $x=x(t)$ we $y=y(t)$ $(t_0<t<T)$ parametrli görnüşde berilen bolsa, onda (3) deňlemede x,y üýtgeýän ululyklaryň ýerine $x(t),y(t)$ funksiýalary we $dx,\,dy$ differensiallaryň ýerine, ol funksiýalaryň differensialla-rynyň bahalaryny goýmak bilen, egriçyzykly integralyň hasaplanylyşy, t parametre görä, kesgitli integraly hasaplamaklyga getirilýär.

Eger-de $z=z(t)\,(0<t<T)$ bolsa, bu ýerde $z(t)=x(t)+ix(t)$, onda $dz=z'(t)dt$ bolar. Şonuň üçin,

$$\int_L f(z)dz=\int_{t_0}^{T} f[z(t)]z'(t)dt$$

deňligi alarys.

Mysal:$z_A=3$ *we* $z_B=1-i$ nokatlary birleşdir-ýän L göni boýunça

$$\int_L f(z + Rez)dz$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi: $z_A = 3$ sana $A(3:0)$ nokat, $z_B = 1 - i$ sana $B(1:-1)$ nokat degişli. A we B iki nokatdan geçýän göni çyzygyň deňlemesi $y = -4x + 3$ görnüşde bolar. Bu göni çyzygyň parametr görnüşli deňlemesini ýazalyň

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$$

Diýmek, $z(t) = t + i(3 - 4t)$, $0 \leq t \leq 1$. Bu ýerden $dz = (1 - 4i)dt$. Onda,

$$\int_L (z + Rez)dz = \int_0^1 [t + i(3 + 4t) + t](1 - 4t)dt =$$

$$= (1 - 4i)\int_0^1 [2t + \ i(3 + 4t)]dt =$$

$$= (1 - 4i)[t^2 + i(3t + 2t^2)]_0^1 =$$

$$= (1 - 4i)(1 - i) = 5(1 - i)$$

bolar.

§2. Birbaglanşykly oblast üçin Koşiniň integral teoremasy.

Birbaglanşykly oblastyň kesgitlemesini 1-nji babyň, §3-de beripdik. Şonuň üçin biz göniden-göni Koşiniň integral teoramasyny beýan edeliň.

Koşiniň integral teoremasy. Eger $f(z)$ funksiýa ýapyk birbaglanşykly oblastda analitik bolup, onuň her bir nokadynda üznüksiz önümi bar bolsa, onda tutuşlaýyn oblastda ýatan islendik L ýapyk egri (kontur) boýunça $f(z)$ funksiýanyň integraly nola deňdir, ýagny

$$\oint_L f(z)dz = 0. \qquad (4)$$

Subudy. (3) formula görä

$$\oint_L f(z)dz = \int_L udx - \vartheta dy + i\int_L \vartheta dx + udy \qquad (5)$$

(5) deňligiň sag tarapynda duran her bir integral üçin Griniň formulasy diýlip atlandyrylýan

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

formulany ulanyp, teoremanyň şertleriniň esasynda

$$\oint udx - \vartheta dy = \iint_D \left(-\frac{\partial \vartheta}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \qquad (6)$$

$$\oint \vartheta dx + udy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{dx} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) dxdy \qquad (7)$$

deňlikleri ýazmak bolar, bu ýerde D, L egriçyzyk bilen çäklenen ýapyk oblast. $f(z)$ analitik funksiýa bolanlygy üçin, Koşi-Rimanyň

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{dx}$$

şertleri ýerine ýetýär. Şonuň üçin (5), (6), (7) deňliklerden (4) deňlik gelip çykýar. Teorema subut edildi.

Bellik. Koşiniň integral teoremasyny funksiýanyň önüminiň üznüksiz bolmak şertini aýryp hem subut etmek bolýar, ýöne bu halda subut etmeklik belli bir derejede çylşyrymlaşýar.

Netijeler. 1. Koşiniň integral teoremasyny başgaça aşakdaky ýaly beýan etmek bolar. Eger funksiýa D oblastda analitik bolsa, onda oblastda ýatan islendik açyk egriçyzyk boýunça funksiýanyň integraly egriçyzygyň görnüşine bagly bolman, diňe onuň çetki nokatlaryna baglydyr.

2. Tegelek halka üçin (28-nji surat) Koşiniň integral teoremasy

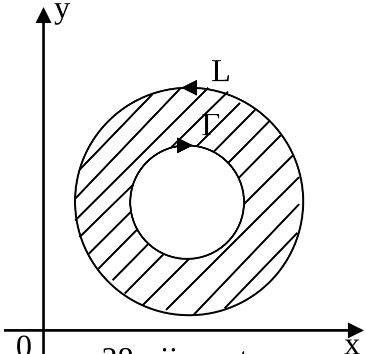
$$\int_L f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz = 0 \qquad (8)$$

görnüşi alar, şunlukda Γ konturda ugur sagat diliniň hereketiniň ugry boýunça, L konturda bolsa sagat diliniň hereketine garşylykly ugur boýunça alynýar. Soňky (8) deňlikde Γ kontur boýunça alynan integraly deňligiň sag tarapyna gaçyrip hem-de Γ konturyň aýlaw ugryny üýtgedip

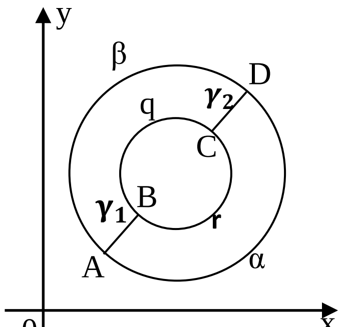
$$\oint_L f(z)dz = \oint_\Gamma f(z)dz$$

deňligi alarys. Şunlukda soňky deňlikde L we Γ konturlaryň ugry sagat diliniň hereketiniň ugrynyň tersine bolan ugur boýunça aýlanýar. (8) deňligiň dogrulygyna göz ýetirmrek üçin, tegelek halkada γ_1 we γ_2 kesimleri geçirip, ony iki sany $\Gamma_1 = A\alpha DCrBA$ we $\Gamma_2 = ABqCD\beta A$oblasta böleli (29-njy surat).

Γ_1 we Γ_2 ýapyk egriçyzyk bilen çäklenen oblastlarda *f(z)* funksiýa analitik bolany üçin Koşiniň integral teoremasyny



28-nji surat



29-njy surat

ulanyp

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 0, \quad \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

degişlilikde

$$\int_{AaD} f(z)dz + \int_{DC} f(z)dz + \int_{CrB} f(z)dz +$$
$$+ \int_{BA} f(z)dz = 0$$

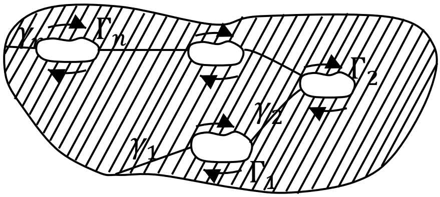
ýa-da

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BqC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz +$$
$$+ \int_{D\beta A} f(z)dz = 0$$

deňlikleri alarys. Bu iki deňligi goşup hem-de

$$\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz,$$
$$\int_{DC} f(z)dz = -\int_{CD} f(z)dz,$$
deňlikleri nazarda tutup
$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{AaD} f(z)dz +$$
$$+ \int_{D\beta A} f(z)dz + \int_{CrB} f(z)dz + \int_{BqC} f(z)dz =$$
$$= \int_{AaD\beta A} f(z)dz + \int_{Cr\beta qC} f(z)dz = 0$$
deňligi alarys. Emma $AaD\beta A = L$ we $Cr\beta qC = \Gamma$, şonuň üçin,
$$\oint_{L} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$
netijäni alarys.

Eger $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ýapyk konturlaryň her biri beýlekileriň daşynda ýatan bolsa we Γ_0 şu konturlaryň her birini öz içinde saklasa, onda Γ_0 konturyň içinde we Γ_k $(k = 1,2,\dots,n)$ konturlaryň daşynda ýatýan nokatlaryň köplügine $\boldsymbol{n+1}$ **baglanşykly oblast** diýilýär. Bu oblasty D bilen belgiläliň (30-njy surat).



30-njy surat

Indi, 2-nji netijäni umumylaşdyryp köp baglanşykly oblast üçin Koşiniň integral teoremasyny ýazalyň. Eger *f(z)* funksiýa ýapyk $\overline{D}$ oblastda analitik bolsa, onda

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz +$$

$$+\int_{\Gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz. \qquad (9)$$

Bu ýerde, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ konturlaryň ugry sagat diliniň hereketiniň ugry boýunça alynýar. (9) deňlige **çylşyrymly kontur boýunça Koşiniň teoremasy** diýilýär.

1-nji mysal. Eger, D oblast $z = a$ nokady öz içinde saklamaýan bolsa, onda $\omega = z^n$ bu oblastda analitik funksiýasydyr, şonuň üçin Koşiniň integral teoremasynyň esasynda

$$\oint_L z^n dz = 0$$

deňligi alarys, bu ýerde: L, D oblastda ýatan ýapyk egridir. Hususy halda,

$$\oint_L \frac{dz}{z} = 0$$

bolar.

2-nji mysal. Eger D oblast $z = a$ nokady öz içinde saklamaýan bolsa, onda $\omega = (z - a)^n$ bu oblastda analitik funksiýadyr, şonuň üçin

$$\oint_L (z - a)^n dz = 0$$

ýa-da, hususy halda,

$$\oint_L \frac{dz}{z - a} = 0$$

bolar.

3-nji mysal. $\omega = \frac{1}{z^2+1}$ funksiýanyň integralyny L kontur:

1) $z = i$ nokady içinde, $z = i$ nokady daşynda,

2) $z = -i$ nokady içinde, $z = i$ nokady daşynda,

3) $z = \pm i$ nokatlary içinde,

4) $z = \pm i$ nokatlary daşynda, saklaýan hallarda hasaplamaly.

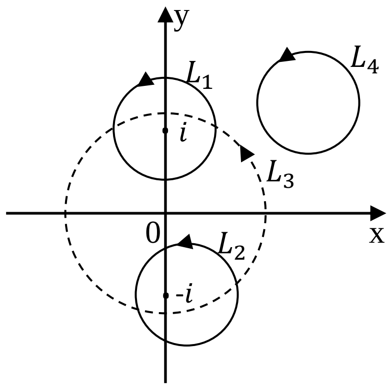
Çözülişi. Ilki bilen berlen droby ýönekeý droblaryň jemine dargadalyň

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + i)(z - 1)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}\right).$$

Onda, gözlenýän integral

$$I = \oint_L \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i}\oint_L \frac{dz}{z - i} - \frac{1}{2i}\oint \frac{dz}{z + i}$$

görnüşi alar. Konturlary degişlilikde $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ we Γ_n bilen belgiläliň (31-nji surat).



31-nji surat

1) Γ_1 kontur boýunça

$$\oint_L \frac{dz}{z-i} = 2\pi i, \ \oint_{L_1} \frac{dz}{z+1} = 0$$

Şonuň üçin,

$$I = \frac{1}{2i} 2\pi i - \frac{1}{2i} \cdot 0 = \pi$$

2) Şuňa meňzeşlikde

$$\oint_{L_2} \frac{dz}{z-1} = 0, \dots \oint_{L_2} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$$

$$I = \frac{1}{2i} \cdot 0 - \frac{1}{2i} 2\pi i = -\pi$$

bolar.

3) Şeýle hem $\oint_{L_3} \frac{dz}{z \pm i} = 2\pi i$ şonuň üçin

$$I = \frac{1}{2i} 2\pi i - \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi - \pi = 0$$

bolar.

4) Γ_4 kontur bilen çäklenen oblastda $\omega = \frac{1}{z^2+1}$ analitik funksiýa bolany üçin, Koşiniň integral teoremasy esasynda $I = 0$ bolar.

Bellik. Geljkede L kontur bilen çäklenen içki oblasty D^-, daşky oblasty bolsa D^+, bilen belgilejekdiris.

§3. Birbaglanşykly oblast üçin Koşiniň integral formulasy.

Goý $f(z)$, L kontur bilen çäklenen birbaglanşykly ýapyk $\overline{D}$ oblastda analitik funksiýa bolsun. Bu bolsa, ýapyk $\overline{D}$ oblasty tutuşlaýyn özünde saklaýan käbir D' oblastyň her bir nokadynda $f(z)$ funksiýanyň kesgitli tükenikli önüminiň bardygyny aňladýar.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)}{t-a}dt \qquad (10)$$

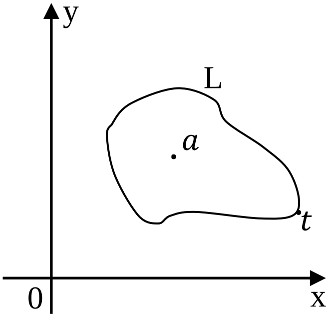
formula, oblastyň içinde ýatan islendik a nokatdaky funksiýanyň $f(a)$ bahasyny, funksiýanyň L konturyň üstünde ýatan $f(t)$ bahasy bilen aňladyp bolýandygyny görkezýär. Bu ýerde a, konturyň içinde ýatan islendik nokat, integrirleme bolsa, L konturyň položitel ugry boýunça amala aşyrylýar (32-nji surat). (10) formulany subut etmek üçin, *D* oblastyň islendik nokadyny *a* bilen belgiläp

$$\varphi(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

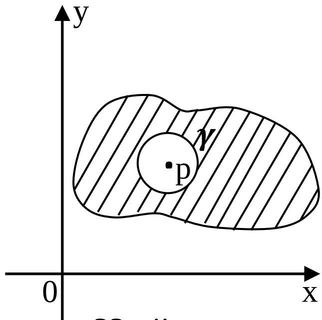
funksiýa seredeliň. t nokat L konturyň üstünde ýatýan nokatdyr. $\varphi(t)$ funksiýa, ýapyk $\overline{D}$ oblastyň $t = a$ nokadyndan başga ähli nokatlarynda analitik funksiýadyr. Merkezi a nokatda bolan, ýeterlik kiçi ρ radiusly γ töweregi çyzalyň (33-nji surat). γ we L konturlaryň arasyndaky oblasta degişli we konturlaryň üstündäki nokatlarda $\varphi(t)$ analitik funksiýadyr. Koşiniň tegelek halka üçin integral teoremasynyň esasynda

$$\oint_L \varphi(t)\mathrm{dt} = \oint_\gamma \varphi(t)\mathrm{dt} \qquad (11)$$

ýazyp bileris.



32-nji surat



33-nji surat

Indi, $t \to a$ şertde $\varphi(t)$ funksiýanyň predelini tapalyň

$$\lim_{t\to a} \varphi(t) = \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f^{'}(a),$$

çünki D oblastda $f(z)$ funksiýa analitikdir. Eger, $t = a$ nokatda $\varphi(t)$ funksiýanyň bahasy $f^{'}(a)$ deň diýip kabul etsek, onda $\varphi(t)$ funksiýamyz ýapyk $\overline{D}$ oblastyň ähli nokatlarynda üznüksiz bolar. Şonuň üçin $|\varphi(t)| < M$ (I bap, §6 seret) deňsizligi göz öňünde tutup

$$\left|\oint_L \varphi(t)dt\right| < \oint_L |\varphi(t)|dt < 2\pi\rho M$$

deňsizligi alarys. ρ sany islendikçe kiçeldip bolýandygy üçin, $\int_\gamma \varphi(t)dt$ integralyň bahasynyň bolsa hemişelikdigini hem-de (11) deňligi göz öňünde tutup

$$\oint_L \varphi(t)dt = 0$$

ýa-da

$$\oint_L \frac{f(t) - f(a)}{t - a} dt = 0$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$\oint_L \frac{f(t)}{t - a} dt = f(a) \oint_L \frac{dt}{t - a}$$

deňlik gelip çykýar. Biziň bilşimize görä,

$$\oint_L \frac{dt}{t - a} = 2\pi i$$

deňlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin, ahyrky netijede

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t - a} dt$$

formulany alarys.

Bellik. Mundan beýläk oblastyň içki nokatlaryny z, konturyň nokatlaryny bolsa t bilen belgiläris. Onda Koşiniň integral formulasy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t - z} dt \qquad (12)$$

görnüşde ýazylýar.

Mysal. §2-däki 3-nji mysaly Koşiniň integral formulasyny ulanyp çözeliň.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + 1i)(z - i)},$$

bu ýerde $\varphi(z) = \frac{1}{z + 1}$ funksiýa $-i$ nokady özünde saklaýan oblastda analitik däldir, $\psi(z) = \frac{1}{z - i}$ funksiýa bolsa i nokady özünde saklaýan oblastda analitik däldir. Şu häsiýetleri göz öňünde tutsak, onda

1) L_1 kontur üçin (31-nji surat),

$$\oint_{L_1} \frac{dz}{z^2+1} = \oint \frac{\varphi(z)}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \varphi(z)|_{z\,=\,i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i}\bigg|_{z\,=\,i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi,$$

2) L_2 kontur üçin,

$$\oint_{L_1} \frac{dz}{z^2+1} = \oint \frac{\psi(z)}{z+i} dz = 2\pi i \cdot \psi(z)|_{z\,=\,-i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{z-i}\bigg|_{z\,=\,-i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = -\pi,$$

3) L_3 kontur üçin,

$$\oint_{L_3} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \oint_{L_3} \frac{dz}{z-i} = \pi - \pi = 0,$$

4) $f(z) = \frac{1}{z^2+i}$ funksiýa L_4 kontur bilen çäklenen oblastda analitikdir. Şonuň üçin,

$$\oint_{L_4} \frac{dz}{z^2+1} = 0$$

bolar. Görşümiz ýaly, bu alynan netijeler öňki netijeler bilen gabat geldi.

Bellik. Tegelek halkada analitik bolan $f(z)$ funksiýa üçin Koşiniň integral formulasyny

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z} dt$$

görnüşde ýazyp bileris. Şunlukda, L konturyň ugry sagat diliniň hereketiniň ugryna ters ugur bilen, γ kontur bolsa sagat diliniň hereketiniň ugry bilen alynmaly.

§4. Analitik funksiýanyň önüminiň formulasy. Koşi görnüşli integrallar.

Bilşimiz ýaly, L kontur bilen çäklenen ýapyk birbaglanşykly $\overline{D}$ oblastda analitik $f(z)$ funksiýa üçin Koşiniň integral formulasy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (12)$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde *t*, konturyň üstünde ýatan islendik nokat, z bolsa, *D* oblastyň içinde ýatan islendik nokatdyr.

$\overline{D}$ oblastyň daşynda ýatan islendik z nokat üçin Koşiniň integraly nola deň, sebäbi $\overline{D}$ oblastda ýatmaýan islendik z nokatda, $\frac{f(t)}{t-z}$ funksiýa analitikdir.

Eger, *L* bölek tekiz egri bolup (ýapyk bolmagy hökman däl), onuň nokatlarynda kesgitlenen üznüksiz $\varphi(z)$ funksiýa berilen bolsa, onda

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \qquad (13)$$

integralyň, *L* egriniň üstünde ýatmaýan islendik *z* nokady üçin kesgitli bahasy bardyr we ol *L* egrä degişli bolmadyk ähli *z* nokatlarda käbir birbahaly funksiýany kesgitlär. Ony

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dz \qquad (14)$$

bilen belgiläliň.

(13) aňlatma **Koşi görnüşli integral** diýilýär. Eger L ýapyk egri bolup, $\varphi(z)$ funksiýa L konturyň içinde we onuň üstünde analitik bolsa, onda biz Koşiniň integralyny alarys.

Bellik. (14) formula D oblastyň içki nokatlarynda bir funksiýany, daşky nokatlarynda başga bir funksiýany kesgitleýär, ýagny

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt \qquad z \in D^{+},$$

$$F^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt \qquad z \in D^{-}.$$

Bu halda *F(x)* funksiýa **bölek-bölek analitik funksiýa** diýilýär.

Teorema. Bölek-bölek analitik funksiýanyň önümi

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt \qquad (15)$$

formula bilen tapylýar.

Subudy. Z nokada D^{+} ýa-da D^{-} oblastlardan çykmazlyk şerti bilen käbir Δz artdyrma bereliň we $F(z)$ funksiýanyň degişli $\Delta F(z)$ artdyrmasyny tapalyň

$$\Delta F(z) = F(z+\Delta z) - F(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z-\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \left[\frac{\Delta z}{t-z-\Delta z} - \frac{1}{t-z}\right]\varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\Delta z}{(t-z\Delta z)(t-z)}\varphi(t)dt$$

ýa-da

$$\Delta F(z) = \frac{\Delta z}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)}dt.$$

Bu deňligiň iki tarapyny Δz -e bölüp we $\Delta z \to 0$ şertde predele geçip

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt$$

deňligi alarys. Teorema subut edildi.

(15) formuladan görnüşi ýaly, $F(z)$ funksiýanyň önümini tapmak üçin Koşi görnüşli integraly, z parametr boýunça differensirlemek ýeterlikdir. Bu differensirlemäni n gezek gaýtalap

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad n = 0,1,2, \dots$$

formulany alarys. (12)-nji formula (14)-nji formula-nyň hususy görnüşi bolany üçin,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \ \ n = 0,1,2, \dots (15)$$

bolar. Bu ýerden bolsa aşakdaky teorema gelip çykýar.

Teorema. Eger birbahaly $f(z)$ funksiýanyň D oblastyň islendik nokadynda birinji tertipli önümi bar bolsa, onda ol funksiýanyň D oblastda islendik tertipli önümleri bardyr.

Mysal.

$$\int_L \frac{cosz}{(z-i)^3} dz$$

integraly hasaplamaly, bu ýerde L, $z = i$ nokadyň daşyndan bir gezek aýlanýan ýapyk kontur.

Çözülişi. (15) formulany $f(z) = cos\, z$ funksiýa üçin ulanyp berilen integraly taparys, ýagny.

$$\int_L \frac{cosz}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(z)|_{z\,=\,i} = -\pi icosi,$$

alarys.

Özbaşdak çözmek üçin meseleler.

1. $z_A = 1 + i$ we $z_B = 2 + 3i$ nokatlary birleşdirýän AB kesim boýunça $\int_{AB} f(z)dz$ integraly hasaplamaly, bu ýerde $f(z) = x^2 + y^2 i$.

2. $O\,(0,0)$ we $A\,(1,1)$ nokatlary birleşdiýän egri boýunça $\int_{AB} f(z)dz$ integraly hasaplamaly, bu ýerde $f(z) = x^2$.

Integrallary hasaplamaly.

3. $\int_i^{1+i} zdz$ 4. $\int_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz$

5. $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$, bu ýerde $\gamma - (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$

görnüşli töwerek.

6. $\int_{AB} z^2 dz,$ bu ýerde $AB, z_A = 1\ we\ z_B = i$

nokatlary birleşdirýän kesim.

7. $\int_{AB} (z\bar{z} + i)dz,$ bu ýerde $AB, z_A = 1$ we

$z_B = -i$ nokatlary birleşdirýän kesim.

8. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$, bu ýerde $\gamma - z = e^{ti}$ görnüşli töwerek.

9. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^2}{z^2 + 2z} dz$

10. $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$

11. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1 - sinz}{z^2} dz$

12. $\int\limits_{\gamma} z^{10} dz$ bu ýerde

$\gamma - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ görnüşli ellips

III bap. Analitik funksiýalaryň hatarlary

§1. Kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň hatarlary.

Ilki bilen kompleks san agzaly hatarlar düşünjesini girizip olaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

Goý bize, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ tükeniksiz kompleks sanlaryň yzygiderligi berilen bolsun. Onda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

hatara, **kompleks san agzaly hatar** diýilýär. Eger (1) hataryň $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jeminden düzülen, tükeniksiz $S_1, S_2, S_3 \dots$ yzygiderlik ýygnalýan bolsa, onda (1) hatara **ýygnalýan hatar** diýilýär. Şunlukda , $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli bolan S sana (1) **hataryň jemi** diýilýär we aşakdaky ýaly ýazylýar

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k.}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

hatara (1) hataryň ***n*-den soňky galyndysy** (ýa-da (1) hataryň galyndysy) diýilýär. Eger, (1) hatar ýygnalýan bolsa, onda (2) hataryň jemi r_n bilen belgilenip oňa **hataryň galyndysy** diýilýär. Ýygnalýan hatar üçin, $|r_n| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Söz bilen ýagny, eger (1) hatar ýygnalýan bolsa, onda onuň galyndysy $n \to \infty$ ymtylanda nola ymtylýar,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Indi, hataryň ýygnalmagynyň zerur we ýeterlik nyşany bolan Koşiniň kriteriýasyny kesgitläliň. Eger islendik $\varepsilon > 0$

san üçin, şeýle bir N natural san bar bolup p-niň islendik natural bahasynda

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$$

ýa-da

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi (1) hataryň ýygnalmagynyň zerur we ýeterlik şertidir. Koşiniň kriteriýasy boýunça

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (3)$$

talabyň ýerine ýetmegi (1) hataryň ýygnalmagynyň zerur şerti bolýandygyny görkezmek kyn däldir. Hakykatdan hem (1) hatar ýygnalýan bolsa, onda Koşiniň kriteriýasy boýunça, islendik san üçin şeýle N natural san bar bolup, ähli $n \geq N$ üçin

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon \qquad (4)$$

deňsizlik ýerine ýetýär. (3) we (4) talaplar deňgüýçlidirler.

Eger, hakyky položitel agzaly

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \qquad (5)$$

hatar ýygnalýan bolsa, onda (1) hatara **absolýut ýygnalýan hatar** diýilýär. Berlen hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen hakyky agzaly hatary derňemeklik, kompleks agzaly hatary derňemegiň esasy usullarynyň biridir. Bize öňden belli bolan Dalamberiň, Koşiniň we deňeşdirme nyşanlary hakyky we položitel agzaly hatarlaryň ýygnalmagynyň ýeterlik şertidir. Şonuň üçin şu nyşanlar kompleks agzaly hatarlary derňemekde hem giňden ulanylýar.

Indi, agzalary kompleks üýtgeýänli funksiýalar bolan hatarlara seredeliň. Goý, şol bir G oblastda kesgitlenen birbelgili kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň tükeniksiz $u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z), \dots$ yzygiderligi berilen bolsun.

Onda,

$$u_1(z)+u_2(z)+\dots+u_n(z), \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \qquad (6)$$

hatara **funksional hatar** diýilýär. Eger,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$$

san hatary ýygnalýan bolsa, onda z_0 nokada (6) hataryň **ýygnalýan nokady** diýilýär. G oblastyň islendik z nokadynda ýygnalýan funksional hatara şol **oblastda ýygnalýan hatar** diýilýär. Funksional hataryň ýygnalýan nokatlarynyň köplügine onuň **ýygnalýan oblasty** diýilýär.

Eger, (6) hatar G oblastda ýygnalýan bolsa, onda bu oblastyň her bir nokadynda şol nokada degişli san hataryň jemine deň bolan birbelgili $f(z)$ funksiýany kesgitlemek mümkin. Bu funksiýa, (6) hataryň ***G* oblastdaky jemi** diýilýär we

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

görnüşde ýazylýar. Bu kesgitlemä görä, oblastyň berilen her bir $z \in G$ nokadynda islendik $\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir N natural san bar bolup,

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon \qquad (7)$$

deňsizlik, ähli $n \geq N(\varepsilon, z)$ üçin ýerine ýetýär. Görnüşi ýaly umumy ýagdaýda N san ε-e we z-e baglydyr. Eger N san diňe ε-e bagly bolup (7) deňsizlik şol bir wagtyň özünde G oblastyň ähli nokatlary üçin ýerine ýetýän bolsa, onda (6) funksional hatara G oblastda **deňölçegli ýygnalýan hatar** diýilýär.

Weýerştrasyň nyşany, (Hataryň deňölçegli ýygnalmagynyň ýeterlik nyşany).

Eger,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (8)$$

san hatary ýygnalýan bolsa, we (6) funksional hataryň her bir agzasy G oblastyň islendik nokadynda

$$|u_n(z)| \leq a_n, n = 1,2, \ldots \qquad (9)$$

deňsizligi kanagatlandyrsa, onda (2) hatar G oblastda deňölçegli ýygnalýandyr. Bu halda, (6) hatara **majorir-lenýän hatar**, (8) hatara bolsa, **majorant hatar** diýilýär.

Deňölçegli ýygnalýan hataryň käbir häsiýetlerini agzap geçeliň.

1) Agzalary üznüksiz funksiýalar bolan G oblastda deňölçegli ýygnalýan hataryň jemi bu oblastda üznünksiz funksiýadyr.

2) Üznüksiz funksiýalardan düzülen G oblastda deňölçegli ýygnalýan hatary bu oblastda tutuşlaýyn ýatýan L egri boýunça agzama-agza integrirlemek mümkin, şunlukda , hataryň agzalarynyň integrallaryn-dan emele gelen hataryň jemi, berilen hataryň jeminiň L egri boýunça integralyna deňdir, ýagny $u_n(z), n = 1,2, \ldots$ funksiýalar G oblastda üznüksiz we

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

hatar bu oblastda deňölçegli ýygnalýan bolsa, onda G oblastda ýatýan islendik L egri boýunça aşakdaky

$$\int_L \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L u_k(z)\, dz = \int_L f(z)\, dz$$

deňlik dogrudyr.

§2. Weýerştrasyň teoremasy.

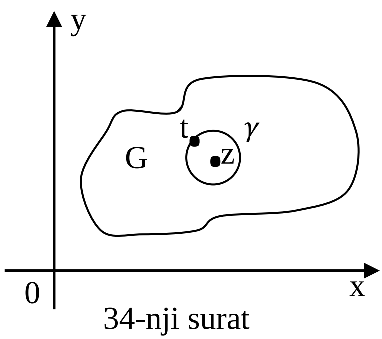
Biz deňölçegli ýygnalýan hataryň ýene bir häsiýetine, ýagny analitik funksiýalardan düzülen hataryň jeminiň analitik funksiýa bolmak şertine garalyň.

Weýerştrasyň teoremasy. Eger $u_1(z), u_2(z), \dots$ funksiýalar käbir ýapyk G oblastda analitik bolsalar we

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \qquad (10)$$

hatar şol oblastda deňölçegli ýygnalýan bolsa, onda (10) hataryň jemi bu oblastda analitik funksiýadyr we ol hatary agzama-agza differensirläp alynan hataryň jemi, (10) hataryň jeminiň degişli tertipdäki önümine deňdir.

Subudy. G oblastda degişli z nokady alalyň we ony



34-nji surat

şu oblastda tutuş ýatýan γ töwerek bilen gurşalyň (34-nji surat).

Onda şerte görä töweregiň t nokatlarynda

$$u_1(t)+u_2(t)+\ldots=f(t) \qquad (11)$$

hatar deňölçegli ýygnalýandyr. Ony $\frac{1}{2\pi i(t-z)}$ ululyga köpeldip, agzama-agza integrirläliň we her bir integrirlenen agza Koşiniň integral formulasyny ulanalyň. Onda

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{u_1(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{u_2(t)}{t-z}dt+..=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}dt$$

ýa-da

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}dt$$

bolar. Bu deňligiň çep tarapyndaky hataryň jemi $f(z)$ funksiýa deň, şonuň üçin ol

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (12)$$

görnüşi alar, bu bolsa Koşiniň integral formulasydyr, diýmek $f(z)$ analitik funksiýadyr.

Eger biz (11) hatary $\frac{1}{2\pi i(t-z)^2}$ köpeldip agzama--agza γ kontur boýunça integrirlesek, onda

$$u'_1(z)+u'_2(z)+\ldots=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)^2}$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \qquad (13)$$

formula gelip çykýar. Edil şuňa meňzeşlikde,

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{r(\in)}{(t-z)^3} dt, \qquad (14)$$

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \qquad (15)$$

deňlikler dogrudyrlar.

§3. Derejeli hatarlar

Kesgitleme.

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$
$$\dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \qquad (16)$$

görnüşdäki funksional hatara **derejeli hatar** diýilýär. Bu ýerde, z_0 kompleks tekizliginde berilen nokat, $c_0, c_1, c_2, \dots$ kompleks sanlar bolup, olara **derejeli hataryň koeffisiýentleri** diýilýär.

Derejeli hataryň ýygnalýan oblastyny tapmakda aşakdaky teoremadan peýdalanýarlar.

Abeliň teoremasy. Eger derejeli hatar käbir $z_1 \neq z_0$ nokatda ýygnalýan bolsa, onda ol, $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ şerti kanagatlandyrýan islendik z nokatda absolýut ýygnalýandyr. Eger derejeli hatar käbir $z_2 \neq z_0$ nokatda dargaýan bolsa, onda ol, $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ şerti kanagatlandyrýan islendik z nokatda dargaýandyr.

Abeliň teoremasyndan gelip çykýan netijeler.

1) Ýygnalýan hem-de dargaýan nokatlary bolan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)$$

derejeli hatar üçin, şeýle bir $R>0$ hemişelik san bar bolup $|z_2-z_0|<R$ tegelegiň içinde berlen hatar ýygnalýandyr, şol tegelegiň daşynda bolsa dargaýandyr.

Radiusy $\rho<R$ bolan tegelekde

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

hatar deňölçegli ýygnalýar. $|z-z_0|<R$ oblasta, derejeli hataryň **ýygnalýan tegelegi**, R sana bolsa hataryň **ýygnalýan radiusy** diýilýär.

2) R ýygnalýan radius Koşi-Adamaryň formulasy diýlip atlandyrylýan

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n-\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

formula boýunça hasaplanýar. Bu ýerde $\overline{\lim\limits_{n-\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=l$ san, $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ yzygiderligiň ýokarky predelidir. Eger $l=\infty$ bolsa, onda $R=0$ hasap edilýär. Bu ýagdaýda hatar diňe z_0 nokatda ýygnalýandyr. Eger $l=0$ bolsa, onda $R=\infty$. Şonuň üçin hatar, kompleks tekizligiň ähli nokatlarynda ýygnalýar.

3) Derejeli hataryň jemi ýygnalýan tegelegiň içki nokatlarynda analitik funksiýadyr.

4) Ýygnalýan tegelegiň içinde derejeli hatary islendik sanyny integrirläp we differensirläp bolýar, şunlukda alynan hatarlaryň ýygnalýan radiusy berlen hataryň ýygnalýan radiusyna deňdir.

5) Derejeli hataryň koefisiýentleri, hataryň jeminiň we onuň önümleriniň ýygnalýan tegelegiň merkezindäki bahasy boýunça, aşakdaky

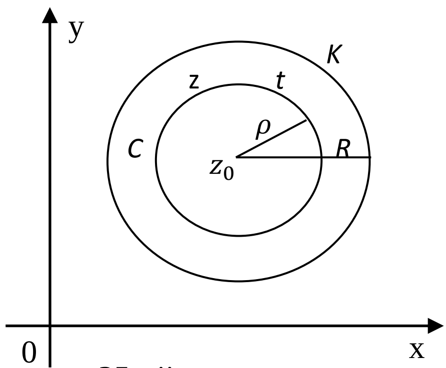
$$c_0 = f(z_0),\ \ c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n = 1,2,\ldots$$

formulalar bilen kesgitlenýär.

§4. Teýloryň hatary.

Biz öň ýygnalýan tegelegiň içinde derejeli hataryň käbir analitik funksiýany kesgitleýändigini (§3, 3-nji häsiýet) belläp geçdik. Indi bolsa, käbir tegelegiň içinde analitik funksiýany derejeli hatara dargatmak meselesine seredeliň.

Goý, $f(z)$ funksiýa merkezi z_0 nokatda, radiusy R-e deň bolan käbir K tegelekde analitik funksiýa bolsun. Merkezi z_0 nokatda bolan, $\rho < R$ radiusly C töweregi alyp, bu



35-nji surat

tegelekde ýatýan z nokat üçin Koşiniň integral formulasyny ýazalyň (35-nji surat)

$$f(z) = \oint_C \frac{f(t)}{t - z}\,dt \qquad (17)$$

Bu deňligiň sag tarapyndaky integralyň aşagyndaky $\frac{1}{t-z}$ droby, z_0 nokadyň etrabynda kemelýän geometrik progressiýa hataryna dargadalyň

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(t-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{t-z_0}\right]} =$$

$$= \frac{1}{t-z}\left[1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^2}+\cdots\right],$$

çünki,

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1, \quad |z-z_0| < |t-z_0| = \rho.$$

Soňky hatary (17) deňlikde ornuna goýup we agzama- -agza integrirläp

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}dt + \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}dt + \ldots +$$

$$+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt + \ldots$$

deňligi alarys. Aşakdaky

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}dt, \quad c_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}dt,$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}dt, \ldots, c_n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,$$

belgilemeleri girizip, (2.10)-(2.13) deňlikleriň esasynda

$$c_0 = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t - z_0}dt,$$

$$c_1 = f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^2}dt,$$

$$c_2 = \frac{f''\,(z_0)}{2!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^3}dt, \dots, c_n =$$

$$= \frac{f^{(n)}\,(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}}dt$$

formulalary alarys. Şeýlelik bilen biz $f(z)$ analitik funksiýany $z = z_0$ nokadyň etrabynda

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^K \qquad (18)$$

derejeli hatara dargatdyk. Bu hatara **Teýloryň hatary** diýilýär.$z_0 = 0$ bolanda (18) hatardan alynýan

$$f(z) = f(0) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{f^K(z_0)}{k!}z^K \qquad (19)$$

hatara, **Makloreniň hatary** diýilýär.

Mysallar. $\omega = (1 + z)^\alpha,\ \omega = e^z,\ \omega = sinz,$ $\omega = cosz,\ \omega = ln(1 - z)$ funksiýalaryň Makloren hataryny ýazalyň:

1. $(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots,\quad |z|<1,$$

2. $e^z=1+z+z^2+z^3+\ldots,\ \ |z|<\infty,$

3. $cosz=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots,|z|<\infty,$

4. $sinz=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots,\ |z|<\infty,$

5. $\ln(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots,\ |z|<1.$

6. $\omega=\frac{1}{z+i}$ funksiýany $z=0$ we $z=1$ nokatlaryň etraplarynda Teýloryň hataryna dargadalyň.

1) $z=0$ nokadyň etrabynda

$$\omega=\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i\left(1+\frac{z}{i}\right)}=$$

$$=\frac{1}{i}\cdot\left[1-\frac{z}{i}+\frac{z^2}{i^2}-\frac{z^3}{i^3}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{i}\left[1-\frac{z}{i}-z^2+\frac{z^3}{i^3}-\cdots\right]=\frac{1}{i}+z-\frac{z^2}{i}-z^3+\ldots$$

bolar. Şunlukda bu dargaýyş, $\left|\frac{1}{i}\right|<1$ ýa-da $|z|<1$ tegelekde dogrudyr.

2) $z=1$ nokadyň etrabynda

$$\omega=\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-1)+(i+1)}=$$

$$=\frac{1}{(i+1)\left[1+\frac{z-1}{i+1}\right]}=$$

$$=\frac{1}{i+1}\left[1-\frac{z-1}{i+1}+\frac{(z-1)^2}{(i+1)^2}-\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{i+1}-\frac{z-1}{(i+1)^2}+\frac{(z-1)^2}{(i+1)^3}-\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^k}{(i+1)^{k+1}},$$

hatary alarys. Şunlukda, $\left|\frac{z-1}{i+1}\right|<1,\quad |z-1|<|i+1|=\sqrt{2}$, bolýandygy üçin, hataryň ýygnalýan oblasty, merkezi $z_0=1$ nokatda, radiusy $r=\sqrt{2}$ deň bolan tegelekdir.

Özbaşdak çözmek üçin meseleler.

Hatarlaryň ýygnalma radiusyny tapmaly.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}z^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\pi i}{n}z^n$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$

Funksiýalaryň noluny tapmaly we onuň tertibini kesgitlemeli.

7. $f(z) = z^4 + 4z^2$

8. $f(z) = \frac{sinz}{z}$

9. $f(z) = z^2 + sinz$

10. $f(z) = 1 + chz.$

Berilen derejeler boýunça funksiýalary Teýloryň hataryna dargatmaly.

11. $f(z) = sin(2z + 1)$ funksiaýany $z + 1$ dereje boýunça.

12. $f(z) = cosz.$ funksiýany $z + \frac{\pi}{4}$ dereje boýunça.

13. $f(z) = \frac{1}{3z+1}$ funksiýany $z + 2$ dereje boýunça.

14. $f(z) = \frac{1}{z}$ funksiýany $z + 1$ dereje boýunça.

IV bap.Loranyň hatarlary

§ 1. Loranyň hatarynyň kesgitlenişi.

Aşakdaky

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

hatara, **Loranyň hatary** diýilýär, bu ýerde n ähli bütin (položitel, otrisatel we nol) bahalary kabul edip bilýär. Bu hatary

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (2)$$

görnüşde ýazmak mümkin. (2) deňligiň sag tarapyn-daky $z-z_0$ tapawudyň otrisatel däl derejeleri boýunça ýerleşen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

hatara Loranyň hatarynyň **dogry bölegi**, $z-z_0$ tapawudyň otrisatel derejeleri boýunça ýerleşen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

hatara bolsa, Loranyň hatarynyň **baş bölegi** diýilýär.

Bilşimiz ýaly, Loranyň hatarynyň dogry bölegi, radiusy käbir R sana deň bolan, $|z-z_0|=R$ töwerek bilen çäklenen tegelekde ýygnalýar. Bu hataryň jemi bolsa şu tegelegiň içinde käbir analitik $f_1(z)$ funksiýa deň. Loranyň hatarynyň baş böleginiň ýygnalýan oblastyny tapmak üçin,

$$\frac{1}{z-z_0}=\xi$$

bilen belgiläliň, onda biz,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^{-n}$$

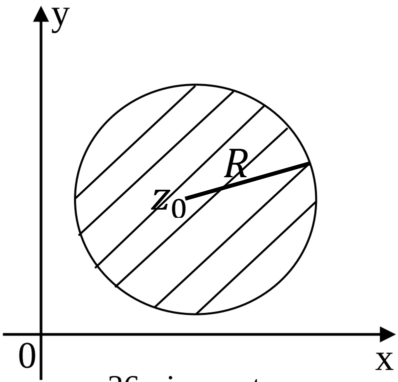
hatary alarys. Bu hatar radiusy käbir ρ sana deň bolan töwerek bilen çäklenen $|\xi|<\rho$ tegelekde ýygnalýar, ýagny $\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<\rho$ ýa-da $|z-z_0|>\frac{1}{\rho}$ bolar. Eger, $\frac{1}{\rho}=r$ bilen belgilesek, onda $|z-z_0|>r$ alarys. Diýmek, Loranyň hatarynyň baş bölegi radiusy r-e we merkezi z_0 nokatda bolan $|z-z_0|=r$ töwerek bilen çäklenen tegelegiň daşynda ýygnalýar we onuň jemi şol oblastda käbir analitik $f_2(z)$ funksiýa deň.

Şeýlelik-de,

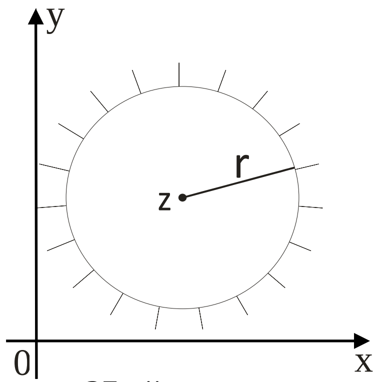
$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0|<R,$$

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^n, \qquad |z-z|<r,$$

alarys.



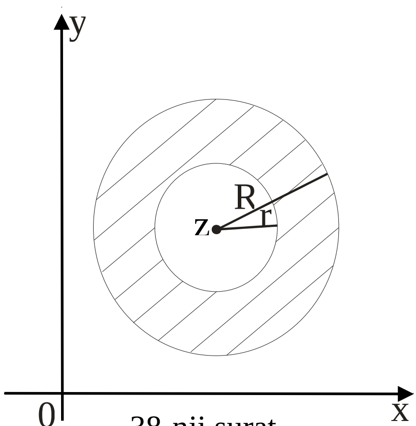
36-njy surat



37-nji surat

Eger, $R > r$ bolsa onda Loranyň hatary $r < |z - z_0| < R$ tegelek halkada ýygnalýar we şol halkanyň içinde käbir analitik $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ funksiýa deň (38-nji surat).

Eger, $R < r$ bolsa, onda loranyň hatary hiç bir nokatda ýygnalmaýar. $r < |z - z_0| < R$ tegelek halkada analitik bolan $f(z)$ funksiýany şu halkada loranyň hatary görnüşinde aňlatmak mümkin.



38-nji surat

Teýloryň hatarynyň koffisiýentlerine meňzeş,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

formulany, Loranyň hatarynyň koeffisiýentlerini hasaplamak üçin hem ulanmak bolýar. Bu ýerde γ egri z_0 nokady özünde saklaýan $r < |z - z_0| < R$ tegelek halkanyň içinde ýatan islendik ýapyk kontur.

§ 2. Bir bahaly kompleks üýtgeýänli funksiýanyň aýratyn nokatlary.

Hakyky üýtgeýänli funksiyalara seredenimizde, biz olaryň bir ýa-da başga bir nokatda özlerini dürli hili alyp barýanlygyna ýagny, üznüksiz, tükenikli üznük, düzedilýän üznük we tükeniksiz üznük bolup bilýändigine göz ýetiripdik. Şuňa meňzeş ýagdaýlar, kompleks üýtgeýänli analitik funksiýalarda hem bolup biler.

Eger, şeýle bir

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

derejeli hatar bar bolup, ol hatar, merkezi z_0 nokatda bolan islendik kiçi radiusly tegelekde $f(z)$ funksiýa ýygnalýan bolsa başgaça z_0 nokadyň islendik kiçi radiusly tegelegi bar bolup $f(z)$ funksiýa şol tegelekde analitik bolsa onda z_0 nokada $f(z)$ fuksiýanyň **dogry nokady** diýilýär. Dogry bolmadyk nokatlara $f(z)$ funksiýanyň **aýratyn nokatlary** diýilýär.

Eger $f(z)$ funksiýa *D* oblastda analitik bolsa, onda onuň içki nokatlarynyň hemmesi dogry nokatlardyr. *D* oblastyň Γ çäginde bolsa dogry nokatlar bilen bilelikde $f(z)$ funksiýanyň aýratyn nokatlary hem bolup biler. Eger, *D* oblastyň we onuň Γ çäginiň hemme nokatlary dogry nokatlar bolsalar, onda $f(z)$ funksiýa ýapyk $\overline{D}$ oblastda analitikdir.

Teorema. Eger derejeli hatar käbir tegelekde $f(z)$ funksiýa ýygnalýan bolsa, onda ýygnalma tegelegiň serhedinde $f(z)$ analitik funksiýasynyň iň bolmanda bir aýratyn nokady bardyr.

Bu teoremadan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

derejeli hataryň ýygnalma tegeleginiň radiusynyň, z_0 nokatdan, şu hataryň jeminiň z_0 nokada iň ýakyn ýerleşen aýratyn nokadyna çenli uzaklygyna deňligi gelip çykýar.

Eger, z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň aýratyn nokady bolup, $f(z)$ funksiýa $0<|z-z_0|<R$ tegelek halkada bir bahaly we analitik bolsa, onda z_0 nokada $f(z)$ funksiýanyň **üzňelenen aýratyn nokady** diýilýär. z_0 nokadyň özünde $f(z)$ funksiýanyň kesgitlenmezligi hem mümkin.

Bilşimiz ýaly, $f(z)$ funksiýany $0<|z-z_0|<R$ tegelek halkada Loranyň hataryna dargatmak mümkin. Şonuň üçin, funksiýanyň Loran hataryna dargamasyndan ugur alyp, onuň aýratyn nokatlaryny tapawutlandyrýarlar.

1. Eger funksiýanyň Loran hatarynyň baş bölegi ýok bolsa $(f_2(z)\equiv 0)$ onda $z=z_0$ nokada funksiýanyň **düzedilýän aýratyn nokady** diýilýär we şu nokadyň etrabynda funksiýa,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=$$
$$=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

görnüşli Teýlor hataryna dargadylýar, bu ýerde

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$

2. Eger funksiýanyň Loran hatary $z - z_0$ iki agzanyň m sany tükenikli otrisatel derejelerini saklýan bolsa, ýagny

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z - z_0)^{-n} =$$

$$= c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_{-2}(z - z_0)^{-2} +$$

$$+\ldots c_{-m}(z - z_0)^{-m}, \quad c_{-m} \neq 0$$

onda, $z = z_0$ nokada $f(z)$ funksiýanyň **m-nji tertipli polýusy** diýilýär, $m = 1$ bolanda, $z = z_0$ nokada **birinji tertipli** ýa-da **ýönekeý polýus** diýilýär.

m-nji tertipli polýusyň etrabynda funksiýany

$$f(z) = \frac{\varphi(t)}{(z - z_0)^m} \qquad (4)$$

görnüşde ýazmak bolýar, ýönekeý polýusyň etrabynda, ol

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0} \qquad (5)$$

görnüşi alar. Bu ýerde $\varphi(z)$-analitik funksiýa we $\varphi(z_0) \neq 0$.

3. Eger, funksiýanyň Loran hatary, $z - z_0$ iki agzamyň otrisatel derejeleriniň tükeniksiz köp sanyny saklaýan bolsa, onda $z = z_0$ nokada funksiýanyň **düýpli aýratyn nokady** diýilýär. Bu hili nokatda $f(z)$ funksiýanyň hiç hili (tükenikli ýa-da tükeniksiz) predeli ýokdur.

Üzňelenen aýratyn nokatlaryň ýeterlik golaý etrabynda funksiýa özüni dürli-dürli alyp barýar. Düzedilýän nokadyň ýeterlik golaý etrabynda funksiýa çäklenendir. Polýus nokadyň ýeterlik golaý etrabynda funksiýa çäklenen däldir, oňa (4) we (5) deňliklerde $z \to z_0$ şertde predele geçsek,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

bolýandygy üçin, göz ýetirmek mümkin. Düýpli aýratyn nokadyň ýeterlik golaý etrabynda funksiýa kesgitlenýän däldir. Bu derňewleri tersine hem ulanyp bolýandygyny belläp geçeliň. Ýagny eger $z = z_0$ nokadyň golaý etrabynda funksiýa çäklenen, çäklenmedik ýa-da kesgitlenmedik bolsa, onda $z = z_0$ nokat, degişlilikde, düzedilýän aýartyn, polýus ýa-da düýpli aýratyn nokatdyr.

Mysal. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^3}$ funksiýany $z = 1$ we $z = 2$ noktlaryň etraplarynda Loranyň hataryna dargatmaly we bu nokatlaryň aýratynlyk görnüşini kesgitlemeli.

Çözülişi. 1) $z = 1$ nokadyň etrabynda funksiýany Loranyň hataryna dargadalyň. Onuň üçin $\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}$ droby ýönekeý drolaryň jemine dargadalyň

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} +$$

$$+ \frac{C}{(z+2)^2} + \frac{D}{(z+2)^3}$$

Bu ýerden, näbelli koffisiýentleri tapmagyň düzgüni boýunça

$$A = \frac{1}{27}; B = -\frac{1}{27};\ C = -\frac{5}{27}; D = -\frac{1}{3}$$

alarys. Onda,

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^3} = \frac{1}{27(z-1)} - \frac{1}{27(z+2)} -$$

$$- \frac{5}{27(z+2)^2} - \frac{1}{3(z+2)^3} \qquad (6)$$

bolar.

Indi, $\frac{1}{27(z-1)}=\frac{1}{27}(z-1)$ deňligi göz öňünde tutup, galan droblary $z-1$ iki agza boýunça hatara dargadalyň:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{3\left[1+\frac{z-1}{3}\right]}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(z-1)+\frac{1}{27}(z-1)^2-\ldots \qquad (7)$$

Şunlukda, $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ şert ýerine ýetmeli, ýa-da

$|z-1|<3$. (7) deňlik bilen kesgitlenen hatary yzygider iki gezek differensirläp aşakdaky

$$-\frac{1}{(z+2)^2}=-\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(z-1)-\frac{3}{81}(z-1)^2+$$

$$+\frac{4}{243}(z-1)^3+\ldots \qquad (8)$$

$$\frac{2}{(z+2)^3}=\frac{2}{27}-\frac{6}{81}(z-1)+$$

$$+\frac{12}{243}(z-1)^2+\ldots \qquad (9)$$

hatarlary alarys. (7), (8), (9) deňlikleri (6) deňlikde ornuna goýup,

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}=\frac{1}{27}(z-1)^{-1}-$$

$$-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(z-1)+\frac{1}{27}(z-1)^2-\cdots\right]-$$

$$-\frac{5}{27}\left[\frac{1}{9}-\frac{5}{27}(z-1)+\frac{3}{81}(z-1)^2+\cdots\right]-$$

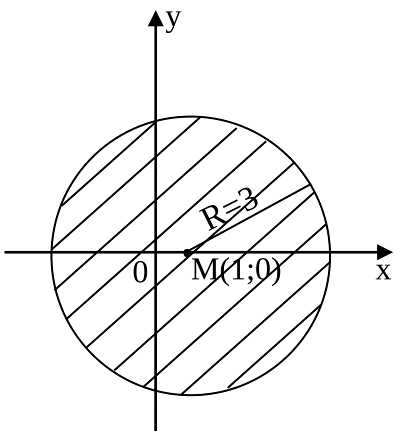
$$-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{27}-\frac{3}{81}(z-1)+\frac{6}{243}(z-1)^2-\ldots\right]$$

ýa-da meňzeş agzalary toparlamak netijesinde

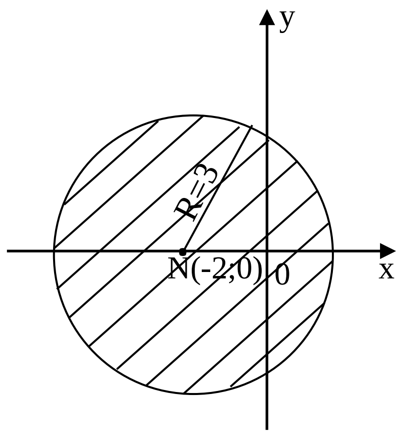
$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}=\frac{1}{27}(z-1)^{-1}-\frac{11}{243}+$$

$$+\frac{334}{19483}(z-1)-\frac{4}{243}(z-1)^2+\ldots$$

hatary alarys. Bu hataryň ýygnalýan oblasty $|z-1|<3$ deňsizlik bilen kesgitlenýär. Bu bolsa, merkezi $M(1;0)$



39-njy surat



40-njy surat

nokatda, radiusy $R=3$ bolan tegelekdir (39-njy surat).

Soňky hatardan görnüşi ýaly, ol $z-1$ iki agzanyň diňe bir otriatel derejesini özünde saklaýar we onuň öňündäki koeffisiýent $\frac{1}{27}$ deň, ýagny $C_{-1}=\frac{1}{27}$. Bu netije bize indiki bapda gerek bolar.

3) Indi $z=-2$ nokadyň etrabynda funksiýany Loranyň hataryna dargadalyň. Onuň üçin, (6) deňlikdäki $\frac{1}{z-1}$ droby $z=-2$ nokadyň etrabynda hatara dargadalyň

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z+2)-3}=-\frac{1}{3-(z+2)}=$$
$$=-\frac{1}{3\left[1-\frac{z+2}{3}\right]}=-\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{3}(z^2+2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{9}(z+2)^2+\ldots\right]=$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(z+2)-\frac{1}{27}(z+2)^2+\ldots$$

Bu netijäni (6) deňlikde goýup

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}=-\frac{1}{81}-\frac{1}{243}(z+2)-$$
$$-\frac{1}{729}(z+2)^2-\cdots-\frac{1}{27}(z+2)^{-1}-\frac{5}{27}(z+2)^{-2}-$$
$$-\frac{1}{3}(z+2)^{-3} \qquad (10)$$

deňligi alarys. Şunlukda, hataryň ýygnalma oblasty $\left|\frac{z+2}{3}\right|<1$ şert bilen ýa-da $|z+2|<3$ deňsizlik bilen kesgitlenýär. Bu bolsa merkezi $N(-2{,}0)$ nokatda, radiusy $R=3$ bolan tegelekdir (5-nji surat).

(10) deňlikden görnüşi ýaly Loranyň hatary $z+2$ ikiagzanyň otrisatel derejesiniň diňe üç sanysyny özünde

saklaýar, şonuň üçin $z = -2$ nokat berilen funksiýanyň 3-nji tertipli polýusydyr, şunlukda

$$C_{-1} = -\frac{1}{27}.$$

§ 3. Funksiýanyň noly we polýusy arasyndaky baglanyşyk.

Goý, $f(z)$ funksiýanyň $z = z_0$ nokatda m-nji tertipli nuly bar bolsun. Onda, belli boluşy ýaly (III bap, § 5), ony z_0 nokadyň käbir etrabynda

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots \qquad (11)$$

derejeli hatar görnüşinde ýa-da

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \quad (12)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde, $\varphi(z)$ funksiýa z_0 nokatda analitik we

$$\varphi(z_0) = c_m \neq 0$$

Indi, $\frac{1}{f(z)}$ funksiýa seredeliň. Onda

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m} \qquad (13)$$

we $\psi(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ funksiýa, $\psi(z_0) \neq 0$ şerti kanagatlandyrýandygy üçin, z_0 nokadyň etrabynda analitikdir, Şonuň üçin ony z_0 nokadyň etrabynda Teýloryň hataryna dargatmak mümkin

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \psi'(z_0)(z - z_0) + \ldots \qquad (14)$$

(14) deňligi (13) deňlikde ornuna goýup

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\psi(z_0)}{(z-z_0)^m}+\frac{\psi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots$$

deňligi alarys. Bu deňlikden görnüşi ýaly, $\frac{1}{f(z)}$ funksiýanyň hatary $z-z_0$ iki agzanyň m sany otrisatel derejesini saklaýar. Diýmek, $z=z_0$ nokat bu funkiýanyň m-nji tertipli polýusydyr. Tersine, eger $z=z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanň m-nji tertipli polýusy bolsa, onda ony

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},\qquad \varphi(z_0)\neq 0$$

görnüşde aňladyp bolar. Bu ýerden bolsa,

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=(z-z_0)^m\,\psi(z)$$

deňligi alarys. $\psi(z_0)=\frac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$ bolany sebäpli, ol z_0 nokadyň etrabynda analitikdir. Şonuň üçin, (14) deňlik dogrydyr. Şunlukda,

$$\frac{1}{f(z)}=\psi(z_0)(z-z_0)^m+\psi'(z_0)(z-z_0)^{m+1}+\ldots$$

bolar. Diýmek $\frac{1}{f(z)}$ funksiýa üçin, $z=z_0$ nokat m-nji tertipli noldyr. Bu ýerden, eger $\frac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)}=$ bilen belgilesek, onda, aşakdaky umumy netije gelip çykýar. Eger z_0 nokat $g(z)$ funksiýanyň m-nji tertipli noly bolsa, onda ol noka $f(z)=\frac{1}{g(z)}$t funksiýa üçin m-nji tertipli polýusdyr we tersine, eger z_0 nokat, $f(z)$ funksiýanyň m-nji tertipli polýusy bolsa, onda ol $g(z)$ funksiýanyň m-nji tertipli nolydyr. Ondan başgada $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ görnüşli drob funksiýanyň nollary $\varphi(z) = 0$ deňlemeden kesgitlenýär.

Mysal. $f(z) = \frac{(z-1)(z+2)^3}{(z+1)^2(z-2)}$ funksiýa üçin, $z = 1$ nokat ýönekeý nol, $z = 2$ nokat 3-nji tertipli nol, $z = -1$ nokat ikinji tertipli polýus, $z = 2$ nokat ýönekeý polýusdyr.

§ 4. Funksiýanyň tükeniksiz uzaklaşan nokatda Loranyň hataryna dargadylşy.

Indi, $\omega = f(z)$ funksiýanyň $z = \infty$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadylyşyna garap geçeliň. Onuň üçin, ilki bilen $\xi = \frac{1}{z}$ özgertmä seredeliň. Eger $|z| < 1$ bolsa, onda $|\xi| > 1$ bolar. Diýmek, $\xi = \frac{1}{z}$ özgertmede, z tekizligindäki birlik tegelek, ω tekizliginde birlik tegelegiň daşyna özgerer, şunlukda, $z = 0$ nokat $\xi = 0$ nokada we tersine, $z = \infty$ nokat $\xi = 0$ nokada özgerer (6-njy surat). Eger, özgerdilen
$\psi(\xi) = f(\frac{1}{z})$ funksiýa $\xi_0 = 0$ nokatda analitik bolsa, onda $f(z)$ funksiýa $z_0 = \infty$ nokatda analitik diýilýär. Meselem, $sin\frac{1}{z}$ funksiýa $z_0 = \infty$ nokatda analitik, sebäbi $sin\xi$ funksiýa $\xi_0 = 0$ nokatda analitik funksiýa şonuň üçin bu funksiýany $\xi_0 = 0$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadalyň

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\xi^n}$$

Bu deňlikde, $\xi = \frac{1}{z}$ ornuna goýsak, onda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (15)$$

hatary alarys. Görşümiz ýaly, bu halda Loranyň hatarynyň dogry bölegi

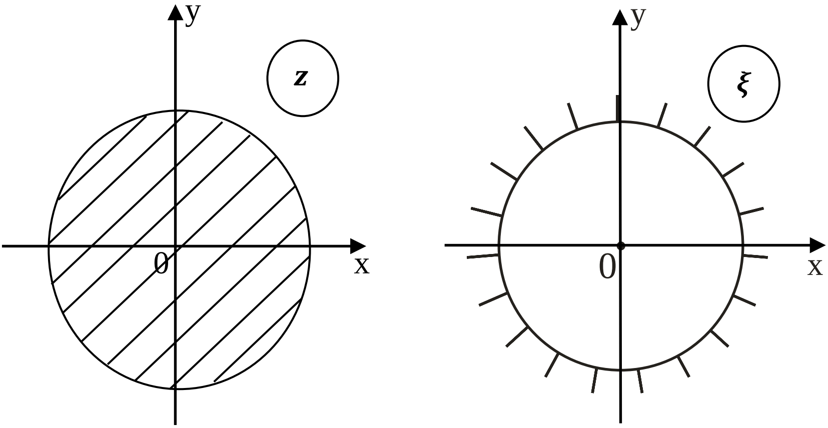
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

z argumentiň otrisatel derejelerini saklaýar, baş bölegi,

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$$

bolsa, z argumentiň položitel derejelerini saklaýar.

Eger, $f(z)$ funksiýa, birlik tegelegiň daşynda tükeniksiz



41-nji surat

daşlaşan nokadyň özünden başga aýratyn nokady saklamaýan bolsa, onda $z = \infty$ nokada **üzňelenen aýratyn nokat** diýilýär. Onuň görnüşi Loranyň (15) hatarynyň baş bölegi boýunça kesgitlenýär.

Eger (15)-nji hatar, z ululygyň položitel derejelerini saklamaýan bolsa, ýagny $f_2(z) = 0$ bolsa, onda $z = \infty$ nokada $f(z)$ funksiýanyň **düzedilýän aýratyn nokady** diýilýär.

Eger (15)-nji hatar, z ululygyň položitel derejeleriniň tükenikli sanyny saklaýan bolsa, onda $z = \infty$ nokada $f(z)$ funksiýanyň **polýusy** diýilýär. $z = \infty$ polýusyň etrabynda funksiýa

$$f(z) = P_m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde $P_m(z)$, m-nji derejeli, köpagzadyr. m sana $z = \infty$ **polýusyň tertibi** diýilýär, $m = 1$ bolanda, $z = \infty$ nokada **ýönekeý polýus** diýilýär. Bu halda, ol

$$f(z) = c_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

görnüşi alýar.

Eger (15) hatar, z ululygyň položitel derejeleriniň tükeniksiz sanyny saklaýan bolsa, onda $r = \infty$ nokada $f(z)$ funksiýanyň **düýpli aýratyn nokady** diýilýär.

Düzedilýän nokadyň etrabynda funksiýa çäklenendir, polýus nokadyň etrabynda çäklenen däldir, düýpli artýan nokatda bolsa, funksiýa kesgitlenen däldir.

Mysal. $f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 5z + 6}$ funksiýany $z = \infty$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargatmaly.

Çözülişi. $z = \frac{1}{\xi}$ ululygy girizeliň. Onda

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\frac{1}{\xi^3}}{\frac{1}{\xi^2} - \frac{5}{\xi} + 6} = \frac{1}{\xi(6\xi^2 - 5\xi + 1)}$$

deňligi alarys. Soňky droby ýönekeý droblaryň jemine dargadalyň

$$\frac{1}{\xi(6\xi^2 - 5\xi + 1)} = \frac{1}{\xi(2\xi - 1)(3\xi - 1)} =$$
$$= \frac{A}{\xi} + \frac{B}{2\xi - 1} + \frac{C}{3\xi - 1}$$

Näbelli A, B, C koeffisiýentleri tapmagyň usulyny ulanyp, $A = 1, B = 4, C = -9$ alarys. Onda,

$$\frac{1}{\xi(2\xi - 1)(3\xi - 1)} = \frac{1}{\xi} + \frac{4}{2\xi - 1} + \frac{-9}{3\xi - 1}$$

bolar. Indi $\xi = 0$ nokadyň etrabynda $\frac{1}{2\xi-1}$ we $\frac{1}{3\xi-1}$ droblary hatara dargadalyň.

$$1)\ \frac{1}{2\xi - 1} = -\frac{1}{1 - 2\xi} =$$

$$= -(1 + 2\xi + 4\xi^2 + 8\xi^3 + \cdots) =$$

$$= -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \ldots\right)$$

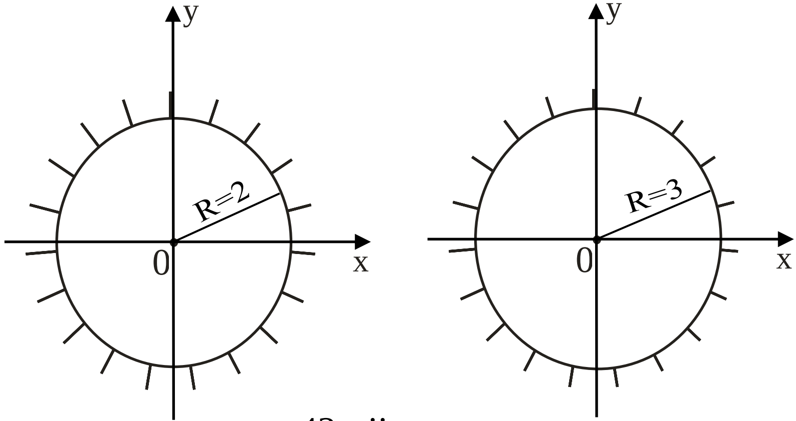
bu hataryň ýygnalýan oblasry $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, ýa-da $|z| > 2$. Bu bolsa merkezi koordinata başlangyjynda, radiusy 2-ä deň ýapyk tegelegiň daşydyr (42-nji surat)

$$2)\ \frac{1}{3\xi-1} = -\frac{1}{1-3\xi} =$$

$$= -(1 + 3\xi + 9\xi^2 + 27\xi^3 + \ldots) =$$

$$= -\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \ldots\right),$$

Bu nokadyň ýygnalýan oblasty, $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$ ýa-da $|z| > 3$, ýagny merkezi koordinata başlangyjynda, radiusy 3-e deň bolan ýapyk tegelegiň daşky nokatlary (42-nji surat).



42-nji surat

Onda, berlen funksiýanyň $z = \infty$ nokadyň etrabyndaky Loranyň hatary

$$\frac{z^3}{z^2 - 5z + 6} = z - 4\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \cdots\right) +$$

$$+9\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \ldots\right) = z + 5 + \frac{19}{z} + \frac{65}{z^2} + \ldots$$

bolar. Bu hatar üçin, $z = \infty$ nokat ýönekeý polýusdyr, onuň ýygnalýan oblasty bolsa, merkezi koordinata başlangyjynda, radiusy $R = 3$ deň bolan ýapyk tegelegiň daşynda ýatan oblastdyr (42-nji surat).

2-nji mysal. $f(z) = \frac{z^4}{1+z^2}$ funksiýany $z = \infty$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargatmaly.

Çözülişi. Bu ýerde, $\frac{z^4}{1+z^2} = \frac{z^4}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{z^2}{1+\frac{1}{z^2}}$

öwürme geçirip

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \ldots$$

dargatmany ulanalyň. Onda

$$f(z) = \frac{z^4}{1+z^2} = z^2 - 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \ldots$$

bolar. Şunlukda, $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$ ýa-da $|z^2| > 1$, bu ýerden $|z| > 1$ deňsizlik gelip çykýar. Şeýlelik-de, hataryň ýygnalýan oblasty merkezi koordinata başlangyjynda, radiusy $R = 1$ bolan ýapyk tegelegiň daşynda ýatýan oblastdyr, $z = \infty$ nokat bolsa, ikinji tertipli polýusdyr. 1-nji mysalda $C_{-1} = 19$, 2-nji mysalda $C_{-1} = 0$ bolýar. Bu netijeler indiki bapda gerek bolar.

Özbaşdak çözmek üçin meseleler.

1. $z = 0$ nokadyň töwereginde aşakdaky funksiýalary Loranyň hataryna dargatmaly.

1. $f(z) = \frac{sinz}{z}$ 2. $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$

2. Berlen tegelekde (halkada) aşakdaky funksiýa-lary Loranyň hataryna dargatmaly.

3. $f(z) = \frac{1}{z^2 + z^4}, \quad 0 < |z| < 1$

4. $f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 1 < |z| < \infty$

5. $f(z) = \frac{2z + 3}{z^2 + 3z + 2}, \quad 1 < |z| < \infty$

6. $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2}, \quad 4 < |z + 2| < \infty$

7. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}, \quad 1 < |z| < 3$

8. $f(z) = \frac{1}{2z - 5}.$

3. $z = 0$ nokadyň töwereginde aşakdaky funksiýalary Loranyň hataryna dargatmaly.

9. $f(z) = \dfrac{1}{(2z-5)^2}$ 10. $f(z) = \dfrac{z^2}{z-1}$

V bap. Wyçetler teoriýasy.

§1. Aýratyn nokada görä funksiýanyň wyçeti.

Goý, $z = z_0$ nokat, analitik $f(z)$ funksiýanyň üzňelenen aýratyn nokady bolsun. Bu funksiýany $z = z_0$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadalyň

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) +$$

$$+c_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (1)$$

z_0 nokady gurşap alýan, ýeterlik kiçi radiusly γ ($|z - z_0| = r$) töweregiň üstünde bu hataryň deňölçegli ýygnalýanlygy üçin, (1) deňligiň iki tarapy-ny γ töwerek boýunça agzama-agza integrirläliň. Onda, bize belli bolşuna görä (II bap, §2), $n \neq 1$ şertde

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0,$$

bu ýerde n bütin san, $n = -1$ bolanda bolsa,

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

bolar. Şonuň üçin integrirlenen (1)-nji deňligiň sag tarapynda C_{-1} koeffisiýentli agzadan beýleki agzalaryň hemmesi nola deň bolar. Şeýlelikde

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot C_{-1}$$

ýa-da

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz \qquad (2)$$

deňligi alarys.

Kesgitleme

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz$$

integrala, $f(z)$ funksiýanyň $z = z_0$ nokatdaky **wyçeti** diýilýär we ol

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) \quad \text{ýa} - \text{da} \ \ res\, f(z_0)$$

bilen belgilenýär.(2)-nji deňlikden görnüşine görä, f(z) funksiýanyň üzňelenen aýratyn z_0 nokatdaky wyçeti, ol funksiýanyň z_0 nokatda Loranyň hataryna dargamasynyň $z - z_0$ ikiagzanyň birinji otrisatel derejesiniň **ýanyndaky** c_{-1} koeffisiýente deň.

Meselem, IV babyň §3-de seredilen

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^3}$ funksiýa, $z = 1$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadylanda $z - 1$ ikiagzanyň birinji otrisatel derejesiniň ýanyndaky koeffisiýent $c_{-1} = \frac{1}{27}$ deň bolupdy, şonuň üçin

$$c_{-1} = \underset{z=z_0}{res}\, f(z)\frac{1}{(z-1)(z+2)^3} = \frac{1}{27}$$

ýene-de şol mysalda, funksiýany $z = -2$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadanymyzda

$$c_{-1} = -\frac{1}{27}$$

bolupdy. Şonuň üçin,

$$c_{-1} = resf(-2) = \underset{z=-2}{res}\frac{1}{(z-1)(z+2)^3} = -\frac{1}{27}$$

bolar.

Hususy halda, funksiýanyň düzedilýän aýratyn nokatdaky wyçetiniň nola deňligi düşnüklidir. Çünki, funksiýanyň düzedilýän aýratyn nokatdaky Loran hatary, $z - z_0$ ikiagzanyň birinji otrisatel derejesini özünde saklamaýar. Şonuň üçin, funksiýanyň polýus nokatlardaky wyçetini hasaplamagyň käbir formulalaryny getirip görkezeliň.

1. Goý, $z = z_0$ ýönekeý polýus bolsun.

Onda

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

bolar. Bu deňligiň iki tarapyny $z - z_0$ ikiagza köpel-dip we $z \to z_0$ şertde predele geçip

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \qquad (3)$$

formulany alarys.

1-nji mysal. Bize belli bolan $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^3}$ funksiýanyň $z = 1$ nokatdaky wyçetini hasaplamaly.

Çözülişi. $z = 1$ nokat $f(z)$ funksiýanyň ýönekeý polýusydyr. Şonuň üçin (3)-nji formula boýunça

$$c_{-1} = \underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \cdot \frac{1}{(z-1)(z+2)^3} =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z+2)^3} = \frac{1}{27}$$

deňligi alarys, bu bolsa öňki netije bilen gabat geldi.

2. Eger, $f(z)$ funksiýany

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

görnüşde aňladyp bolýan bolsa, bu ýerde $P(z)$ we $Q(z)$ analitik funksiýalar bolup, $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0,$

$Q'(z_0) \neq 0$ bolsa, onda z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň ýönekeý polýusy bolar we (3)-nji formulanyň =esasynda

$$c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) =$$

$$= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot\frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

ýa-da

$$c_{-1} = resf(z_0)\frac{P(z_0)}{Q^1(z_0)}$$

deňligi alarys.

2-nji mysal. $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ funksiýanyň $z = \pm i$ aýratyn nokatlardaky wyçetlerini hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde $P(z) = z.$ $Q(z) = z^2 + 1$deň we $z^2 + 1$ nokatlar ýönekeý polýuslardyr. Şonuň üçin

$$resf(\pm i) = \frac{P(\pm i)}{Q'(\pm i)} = \frac{1}{2}$$

3. Goý, z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň m-nji tertipli polýusy bolsun. Onda

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (4)$$

bolar, bu ýerde $c_{-m} \neq 0$. (4)-nji deňligiň iki tarapyny $(z-z_0)^m$-e köpeldip

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^{n+m}$$

deňligi alarys. Bu deňligiň iki tarapyny $m-1$ gezek differensirläp we $z \to z_0$ şertde predele geçip

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{d_z^{m-1}} \left[f(z)(z-z_0)^m\right] = (m-1)!\, c_{-1}$$

ýa-da

$$resf(z_0) = C_{-1} =$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{d_z^{m-1}} \left[f(z)(z-z_0)^m\right]$$

deňligi alarys.

Mysal. $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3}$ funksiýanyň wyçetini hasaplamaly

Çözülişi. $z = 2$ nokat $f(z)$ funksiýanyň 3-nji tertipli polýusydyr. Şonuň üçin ýokarky formulanyň esasynda

$$resf(2) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-2)^3 \frac{z^2}{(z-2)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2} \frac{d^2}{dz^2} (z^2) = 1$$

bolar.

§ 2. Tükeniksiz daşlaşan nokada görä funksiýanyň wyçeti.

Goý, $f(z)$ funksiýa nokadyň etrabynda analitik bolsun (nokadyň özünde analitik bolmagy hökmany däl). Ony $z = \infty$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadalyň.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots. \quad (5)$$

Bu hatar, merkezi $z = 0$ nokatda we radiusy ýeterlik uly bolan $\gamma(|z| = R)$ töweregiň üstünde deňölçegli ýygnalýar.

Şonuň üçin (5)-nji deňligiň iki tarapyny, aýlaw ugry sagat diliniň hereketiniň ugry bilen gabat gelýän (şunlukda $z = \infty$ nokat konturyň elmydama çep tarapynda galar) γ^- töwerek boýunça integrirläliň. Onda, $n \neq -1$ bolanda

$$\oint_{\gamma^-} z^n \, dz = 0,$$

$n = -1$ bolanda,

$$\oint_{\gamma^-} \frac{dz}{z} = -2\pi i$$

bolýandygyny göz öňünde tutyp

$$\oint_{\gamma^-} f(z) \, dz = c_{-1} \oint_{\gamma^-} \frac{dz}{z} = -2\pi i \, c_{-1}$$

ýa-da

$$-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) \, dz \qquad (6)$$

deňligi alarys.

Kesgitleme.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) \, dz$$

integralyň bahasyna, $f(z)$ funksiýanyň $\boldsymbol{z = \infty}$ **nokadyndaky wyçeti** diýilýär we ol $resf(\infty)$ ýa-da

$$\underset{z\to\infty}{res} f(z)$$

belgi bilen belgilenýär, diýmek

$$resf(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) \, dz$$

bu ýerde γ^-, aýlaw sagat diliniň hereketiniň ugry bilen gabat gelýän, radiusy ýeterlik uly bolan $|z| = R$ töwerekdir.

Bu kesgitlemeden we (6)-njy deňlikden, $f(z)$ funksiýanyň $z = \infty$ nokadyndaky wyçeti, funksiýanyň $z =$

∞ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargat-masynda z^{-1} derejäniň öňündäki koeffisiýentiň garşy-lykly alamatly bahasyna deňligi gelip çykýar, ýagny

$$resf(\infty) = -c_{-1}$$

1-nji mysal. $f(z) = \frac{z^3}{z^2-5z+6}$ funksiýa, $z = \infty$ nokadyň etrabynda Loranyň hataryna dargadylanda (IV bap § 5) z^{-1} derejäniň ýanyndaky koeffisiýent, $c_{-1} = 19$ bolupdy. Şonuň üçin,

$$resf(\infty) = \underset{z\to\infty}{res}\frac{z^3}{z^2-5z+6} = -c_{-1} = -19$$

bolar. Ýene şol ýerde, $f(z) = \frac{z^4}{1+z^2}$ funksiýa üçin, $c_{-1} = 0$ bolupdy. Diýmek, $resf(\infty) = 0$ bolar.

2-nji mysal. $f(z) = \frac{z+1}{z}$ funksiýasyny $f(z) = = 1 + \frac{1}{z}$ görnüşde ýazyp, ony $z = \infty$ nokadyň etra-bynda Loranyň hatary hökmünde seretmek mümkin.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$$

bolandygy üçin, $z = \infty$ nokat funksiýasynyň düzedilýän aýratyn nokadydyr, şonuň üçin, adatça $f(\infty) = 1$ diýip ýazmak bolar. Bu ýerde, $c_{-1} = 1$, diýmek

$$resf(\infty) = -1$$

bolar. Bu mysaldan, tükenikli düzedilýän aýratyn nokatdan tapawutlylykda, tükeniksiz daşlaşýan düze-dilýän aýratyn nokada görä, analitik funksiýasynyň wyçetiniň nola deň bolmazlygy mümkin.

§ 3. Wyçetler barada esasy teorema.

1-nji teorema. (Wyçetler hakynda esasy teorema) Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastyň üzňelenen tükenikli sany $z_1, z_2, \dots, z_n$ aýratyn nokatlaryndan başga hemmesinde analitik bolsun. Onda $z_1, z_2, \dots, z_n$ nokatlary özünde saklaýan we D

oblastyň içinde ýatan Γ kontur bilen çäklenen islendik ýapyk $\bar{G}$ oblast üçin,

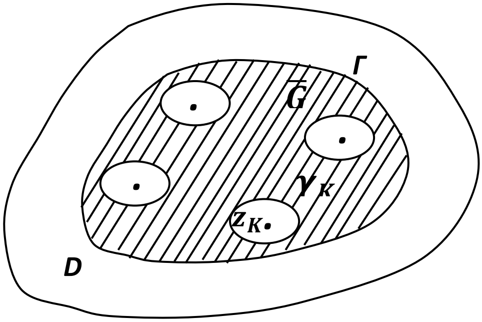
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz$$

integral, $f(z)$ funksiýanyň $z_1, z_2, \dots, z_n$ nokatlara görä wyçetleriniň jemine deňdir, ýagny

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} resf(z_k) \qquad (7)$$

Subudy. $z_k(k = 1,2, \dots, n)$ nokatlaryň her birini, biri-biri bilen kesişmeýän we Γ konturyň içinde tutuşlaýyn ýatýan γ_k konturlar bilen gurşap alalyň. Onda biz $n + 1$ baglanyşykly oblast alarys (43-nji surat). Şu oblast üçin Koşiniň integral teoremasyny ýazalyň

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)dz +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(z)dz \dots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} f(z)dz$$



43-nji surat

Bu deňligiň sag tarapyndaky her bir goşulyjy $f(z)$ funksiýasynyň degişli nokatlara görä wyçetine deň, ýagny

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_k} f(z)dz = resf(z_k), k = 1,2, \dots, n.$$

Şonuň üçin,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz = resf(z_1) + resf(z_2) + \cdots +$$

$$+resf(z_n) = \sum_{k=1}^{n} resf(z_k).$$

Teorema subut edildi.

2-nji teorema. Eger $f(z)$ funksiýanyň giňeldilen kompleks tekizliginde tükenikli sany $z_1, z_2, \dots, z_n$ aýratyn nokatlary bar bolsa, onda onuň tükeniksizlikdäki wyçeti bilen bilelikdäki ähli wyçetleriniň jemi nola deňdir, ýagny

$$resf(\infty) + \sum_{k=1}^{n} resf(z_k) = 0 \qquad (8)$$

Subudy. 1-nji teoremadaky Γ konturyň deregine, $z_1, z_2, \dots, z_n$ nokatlary öz içine alýan, merkezi koordinata başlangyjynda bolan, ýeterlik uly radiusly töweregi alalyň. Onda, Γ töweregiň aýlaw ugruny tersine üýtgedip (7)-nji deňlikden

$$\sum_{k=1}^{n} resf(z_k) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-} f(z)dz = 0$$

deňligi, ýa-da

$$\sum_{k=1}^{n} resf(z_k) - \big(-res(\infty)\big) = 0$$

deňligi alarys. Ahyrky netijede

$$\sum_{k=1}^{n} resf(z_k) + res(\infty) = 0$$

bolar. Teorema subut edildi.

1-nji mysal. Şu babyň §1-de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^3}$ funksiýanyň $z = 1$ nokada görä wyçetiniň $resf(1) = \frac{1}{27}$, $z = -2$ nokada görä wyçetiniň bolsa $resf(-2) = -\frac{1}{27}$ bolýandygyny görkezipdik. Teoremanyň tassyklamasyna görä

$$resf(1) + resf(-2) + resf(\infty) = 0$$

deňlik ýerine ýeter. Onda,ornuna goýmak bilen

$$\frac{1}{27} - \frac{1}{27} + resf(\infty) = 0$$

ýa-da $resf(\infty) = 0$ netijäni alarys.

Bellik. (8)-nji formulany

$$resf(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} resf(z_k) \qquad (9)$$

görnüşde ýazyp, ony käbir integrallary hasaplamakda ulanyp bolýandygyny görkezeliň.

2-nji mysal.

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Integral aşagyndaky $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ funksiýanyň tükenikli polýuslary, $|z| = 2$ töweregiň içinde ýatýan, $z^4 = -1$ deňlemäniň $z_k, k = 1,2,3,4$ kökleri bolar. $z = \infty$ nokadyň etrabynda $f(z)$ funksiýany hatara dargadalyň

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - \ldots,$$

$resf(\infty) = -c_{-1} = 0$ bolýanlygy düşnüklidir. Şonuň üçin, (7) we (9) formulanyň esasynda

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} resf(z_k) = -2\pi i resf(\infty) = 0$$

bolar.

§.4. Wyçetleriň kesgitli integrallary hasaplamakda ulanylyşy.

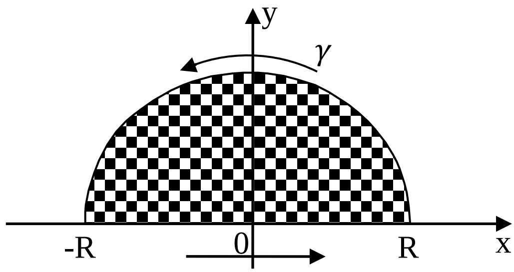
1. Rasional funksiýalaryň integrallary.

Teorema. Goý $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rasional funksiýa bolsun, bu ýerde $P_n(x)$ we $Q_m(x)$ degişlilikde m-nji we n-nji derejeli köpagzalar. Eger $f(x)$ funksiýa, hakyky san okunda üznüksiz bolsa ($Q_m(x) \neq 0$ we $m \geq n+2$ ýagny, maýdalawjydaky köpagzanyň derejesi, sanawjynyň derejesinden iň bolmanda iki birlik uly bolsa, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sigma \qquad (10)$$

deňlik ýerine ýetýändir, bu ýerde σ, $f(x)$ funksiýasynyň ýokary ýarym tekizlikde ýerleşen ähli polýuslaryň wyçetleriniň jemine deňdir.

Subudy. Kompleks tekizligiň hakyky okunda, $-R \leq x \leq R$ kesim we $|z| = R,\ Im\, z > 0$ töweregiň ýokarky ýarym bölegi γ_R bilen çäklenen ýapyk γ kontura seredeliň. (44-nji surat)



44-nji surat

Şunlukda, $f(z)$ funksiýanyň ýokarky ýarym tekizlikde ýerleşen hemme $z_1, z_2, \dots, z_l$ polýuslary, γ konturyň içinde ýerleşer ýaly R radiusy, ýeterlik uly saýlamak mümkin. Wyçetleriň esasy teoremasyna görä,

$$\int_{\gamma} f(\xi)d\xi = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(\xi)d\xi =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{l} resf(z_k)$$

deňligi ýazyp bileris.

Ilki bilen $\int_{\gamma_R} f(\xi)d\xi$ integraly bahalandyralyň. $P_n(z)$ we $Q_m(z)$ köpagzalaryň derejelerine goýlan şerte görä, $|z| > R_0$ bolanda

$$|f(z)| < \frac{m}{|z^2|}$$

deňsizligi kanagatlandyrar ýaly şeýle bir položitel R_0 we M sanlar tapylar. Kompleks üýtgeýänli funksiýa-laryň 6-njy häsiýetine görä, $R \to \infty$ ymtylanda $R > R_0$ üçin,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(\xi)d\xi\right| \le \int_{\gamma_R} |f(\xi)||d\xi| < \frac{m}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0$$

Bilşimiz ýaly,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} resf(z_k)$$

deňligiň sag tarapy R sana bagly däl, çep tarapyndaky ikinji integral bolsa ýokarda belläp geçişimize görä, $R \to \infty$ şertde predele geçip subut etmeli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} resf(z_k) = 2\pi i\sigma$$

deňligimizi alarys, bu ýerde $z_1, z_2, \dots, z_l$ nokatlar, $f(z)$ funksiýanyň ýokarky ýarym tekizlikdäki polýuslarydyr.

1-nji mysal.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Integral aňlatmasynyň aşagyndaky

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

funksiýa jübüt bolandygy üçin, berlen integraly

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

görnüşde ýazyp bolar.

Indi hakyky san okunda, ýagny $z = x$ bolanda $f(x)$

funksiýa bilen gabat gelýän

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

funksiýa seredeliň.

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+1)^2}$$

funksiýanyň ýokarky ýarym tekizlikde, tertibi ikä deň bolan ýeke täk $z = i$ polýusy bardyr hem-de ol

$$resf(i) = \frac{1}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=1} = -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}$$

Şonuň üçin, (10)-njy formula boýunça.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}$$

bolar.

2-nji mysal.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

mahsus däl integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde,

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

rasional funksiýa we onuň maýdalawjysyndaky köpagzanyň derejesi sanawjynyň derejesinden iki birlik uly $m = 4 > 2 = n$, şonuň üçin, teoremany ulanyp bilýäris.

Indi,

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

belgilemäni getirip, $f(z)$ funksiýanyň polýuslaryny tapalyň: $z^2+1=0$ deňlemeden $z_1=i,\quad z_2=-i$ we $z^2+9=0$ deňlemeden bolsa, $z_3=3i,\ z_4=-3i$ gelip çykýar. Bu polýuslaryň ikisi $z_1=i$ we $z_3=3i$ ýokarky ýarym tekizlikde ýatýarlar, şonuň üçin,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)\right]=$$

$$=2\pi i\left\{\frac{z^2}{[(z^2+1)(z^2+9)]}\Big|z=i+\right.$$

$$\left.+\frac{z^2}{[(z^2+1)(z^2+9)]}\Big|z=3i\right\}=$$

$$=2\pi i\left[\frac{z^2}{2z(z^2+9)+2z(z^2+1)}\Big|z=i+\right.$$

$$\left.+\frac{z^2}{2z(z^2+9)+2z(z^2+1)}\Big|z=3i\right]=$$

$$=2\pi i\left(\frac{-1}{16i}+\frac{9}{48i}\right)=\frac{\pi}{4}$$

2. $I=\int_0^{2\pi}R(cosx,sinx)dx,$

görnüşli integral, bu ýerde $R(u,v),\ u$ we v argumentlere görä rasional funksiýa.

Kompleks sany $z=e^{ix}$ görnüşde girizeliň Onda, $dz=ie^{ix}\,dx=izdx$ ýa-da $dx=\frac{dx}{iz}$ we

$$cosx=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \tag{11}$$

bolar. Bu halda,$|z| = 1, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$. Onda

$$I = \int_{\gamma} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} F(z)dz$$

bolar, bu ýerde γ, merkezi koordinata başlangyjynda, radiusu bire deň töwerek. ($|z| = 1$)

Wyçetler barada esasy teorema görä, alynan integral $2\pi i\sigma$ deň, bu ýerde σ, öňde belleýşimiz ýaly integral aşagyndaky $F(z)$ funksiýanyň içinde ýerleşen γ töweregiň polýuslaryna görä wyçetleriniň jemi.

3-nji mysal.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 3cosx)^2}$$

inregraly hasaplamaly.

Çözülişi. $z = e^{ix}$ ornuna goýmany we ondan gelip çykýan (11)-nji formulalary berlen integralda goýup

$$I = \int_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(5 + 3 \cdot \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{4}{i}\int_{\gamma} \frac{zdz}{(3z^2 + 10z + 3)^2}$$

alarys, bu ýerde

$$F(z) = \frac{z}{(3z^2 + 10z + 3)^2}$$

funksiýanyň polýuslaryny tapalyň:

$3z^2 + 10z + 3 = 0, \ z_1 = -\frac{1}{3}, \qquad z_2 = -3.$ Görşümiz ýaly bu polýuslaryň diňe biri $z_1 = -\frac{1}{3}$, birlik tegelegiň içinde ýatyr we ol funksiýanyň ikinji tertipli polýusydyr, şonuň üçin

$$3z^2 + 10z + 3 = 3\left(z + \frac{1}{3}\right)(z + 3)$$

deňligi göz öňünde tutup alarys.

$$resF\left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{z}{9\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot (z + 3)^2}\right]_{z = -\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z + 3)^2}\right]_{z = -\frac{1}{3}} = \frac{3 - z}{(z + 3)^2}\bigg|_{z = -\frac{1}{3}} = \frac{5}{32}$$

Diýmek,

$$I = 8\pi \cdot \frac{5}{32} = \frac{5}{4}\pi$$

bolar.

3. $\int_0^\infty R(x)cosaxdx, \qquad \int_0^\infty R(x)sinaxdx$

görnüşli integrallar, bu ýerde $R(x)$ dogry rasional drob, $a > 0$ hakyky san.

Bu integrallary hasaplamak üçin köplenç halatda Jordanyň lemmasy diýlip atlandyrylýan lemmany ulanmak amatly bolýar.

Jordanyň lemmasy. Goý, $f(z)$ funksiýa, ýokarky ýarym tekizligiň $Im\, z > 0$, tükenikli sanly üzňelenen aýratyn nokatlaryndan başga ýerinde analitik bolsun we bu ýarym oblastda $|z| \to \infty$ ymtylanda $argz$-e görä $(0 < argz < \pi)$ deňölçegli nula ymtylsyn. Onda islendik položitel san üçin,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz = 0$$

deňlik dogrudyr, bu ýerde γ_R merkezi koordinata başlangyjynda radiusy R-e deň bolan töweregiň ýokarky ýarym bölegi.

4-nji mysal. $a > 0, k > 0$ şertde

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{xsinax}{x^2 + k^2} dx$$

integraly hasaplamaly.

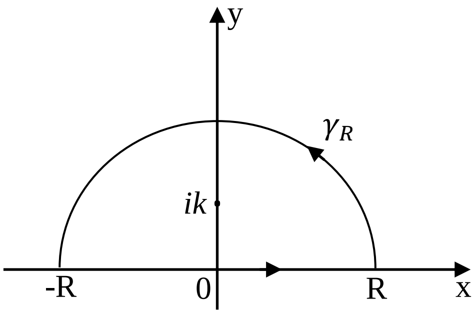
Çözülişi. Kömekçi

$$g(z) = \frac{ze^{iax}}{z^2 + k^2}$$

funksiýany girizeliň. $z = x$ bolanda $g(z)$ funksiýanyň hyýaly böleginiň $[Im\ g(z)]$ integral aşagyndaky

$$f(x) = \frac{xsinax}{x^2 + k^2}$$

funksiýa bilen gabat gelýänligine göz ýetirmek kyn däldir. 45–nji suratda şekillendirilen kontura seredeliň.



45-nji surat

R radius ýeterlik uly bolanda γ_R duganyň üstünde

$$h(z) = \frac{z}{z^2 + k^2}$$

funksiýa, $|z^2 + k^2| \geq |z^2| - k^2$ baglanyşygyň esasynda

$$|h(z)| < \frac{R}{R^2 - k^2}$$

deňsizligi kanagatlandyrýar. Bu ýerden görnüşi ýaly $R \to \infty$ ymtylanda $h(z) \to 0$ ymtylýar. Onda, Jordanyň lemmasy boýunça

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0 \qquad (12)$$

bolar. Wyçet hakyndaky esasy teorema görä islendik $R > k$ üçin

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2 + k^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 2\pi i \cdot \sigma \qquad (13)$$

bu ýerde

$$\sigma = \operatorname*{res}_{z=ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2}\right] = \lim_{z\to ik} \frac{ze^{iaz}(z - ik)}{z^2 + k^2} = \frac{e^{-ak}}{2}$$

(12)-nji deňligi göz öňünde tutyp, (13)-nji deňlikde $R \to \infty$ şertde predele geçip

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 + k^2} dx = \pi i \cdot e^{-ak}$$

deňligi alarys. Soňky deňligiň çep we sag tarapynyň hakyky böleklerini aýyryp

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsinax}{x^2 + k^2} dx = \pi e^{-ak}$$

deňligi alarys. Ahyrky netijede integral aşagyndaky funksiýanyň jübüt bolanlygy üçin,

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}$$

bolar.

Özbaşdak çözmek üçin meseleler.

Funksiýanyň wyçetlerini tapmaly.

1. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ 2. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$

3. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+2z+4}$ 4. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^3}$

5. $f(z) = \dfrac{1}{1-cosz}$ 6. $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

Integrallary hasaplamaly.

7. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+2)}$, bu ýerden γ,

$|z| = 3$ –görnüşli tölwerek.

8. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, bu ýerde γ,

$|z| = 3$ –görnüşli töwerek.

9. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)^2} dz$, bu ýerde γ,

$|z| = 5$ –görnüşli töwerek.

10. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)^3} dz$, bu ýerde γ,

$|z| = 2$ –görnüşli töwerek.

11. $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{(z-i)(z-3)^3}\,dz,$ bu ýerde γ,
$|z| = 2$ –görnüşli töwerek.

Kesgitlenen integrallary hasaplamaly.

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$

VI bap. Operatorly hasaplama

§ 1. Laplasyň öwürmesi.

Goý, $f(t)$ hakyky (ýa-da komleks) üýtgeýän t ululyga bagly funksiýa bolup, $-\infty < t < +\infty$ aralykda kesgitlenen bolsun, $\rho = s + \sigma i$ bolsa, komleks tekizligiň käbir G oblastynda berlen komleks üýtgeýän ululyk diýeliň.

Laplasyň integraly diýlip atlandyrylýan

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \tag{1}$$

hususy däl integrala garap geçeliň. Hususy däl integralyň kesigtlemesine görä, ol

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-pt} f(t)dt \tag{2}$$

deňdir. Eger (2) deňligiň sag tarapyndaky predeliň tükenikli bahasy bar bolsa, onda (1) integrala ýygnalýan integral diýilýär. Umuman, (1) hususy däl integral islendik görnüşli $f(t)$ funksiýalar we p parametriň ähli bahalar köplügi üçin ýygnalýar diýsek, ýalňyş bolar. Şonuň üçin, ilki bilen Laplasyň integraly tükenikli baha eýe bolar ýaly (ýygnalar ýaly), $f(t)$ funksiýalary we p kompleks parametriň bahalar köplügini nähili saýlap almaly diýen soraga jogap bereliň.

Şu bölümde aşakdaky üç şerti kanagatlandyrýan t hakyky üýtgeýän ululykly $f(t)$ komleks funksiýalara seredilýär:

1) $t < 0$ bolanda, $f(t) = 0$,

2) $t < 0$ bolanda, t okuň islendik çäkli böleginde funksiýanyň üznüksiz ýa-da tükenikli sandan köp bolmadyk, birinji jynsly üzülme nokatlary bolmaly,

3)$t \to \infty$ ymtylanda $f(t)$ funksiýanyň çäkli ösüş derejesi bolmaly, ýagny ähli $t \geq 0$ üçin, $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, $M > 0, s_0 \geq 0$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly hemişelik M we s_0 sanlar tapylar.

$1), 2), 3),$ şertleri kanagatlandyrýan islendik komleks bahaly $f(t)$ funksiýa **original** ýa-da **asyl funksiýa** diýilýär. Mundan beýläk "original funksiýa" diýmegiň deregine, gysgaça "$f(t) \in D$" diýip ýazarys. Diýmek, D original funksiýalaryň köplügidir. Eger $f(t) \in D$ bolsa, onda $Rep > s_0$ ýarymtekizligiň ähli nokatlarynda (1) Laplasyň integraly absolýut ýygnalýar we G oblastda p komleks üýtgeýän ululyga bagly

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \qquad (3)$$

funksiýany kesgitleýär. Bu ýerde, $F(p)$ funksiýa $\boldsymbol{f(t)}$ **funksiýanyň şekili**, $f(t)$ original funksiýa $F(p)$ şekili degişli edýän (3) öwürmä bolsa, **Laplasyň öwürmesi** diýilýär we

$$f(t) \Rightarrow F(p) \text{ ýa-da } F(p) \Rightarrow f(t)$$

görnüşde belgilenýär. Mundan başga-da,

$$f(t) = F(p), \qquad L\{f(t)\} = F(p)$$

belgiler hem ulanylýar. Gelejekde biz originaly kiçi harp bilen, onuň şekilini bolsa, degişli uly harp bilen belläris $x(t) \Rightarrow X(p)$, $\varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$ we ş.m.

Ýokary matematikanyň Laplasyň öwürmelerini öwrenýän bölümine **amally hasaplama** diýilýär.

§ 2. Birlik funksiýa.

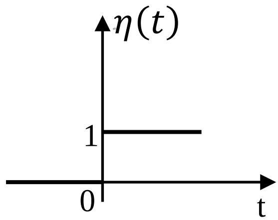
Aşakdaky

$$\eta(t) = \begin{cases} o, \ \ t < 0 & \text{bolanda,} \\ 1, \ \ t \geq 0 & \text{bolanda} \end{cases}$$

deňlik bilen kesgitlenýän originala **birlik funksiýa** ýa--da **Hewisaýdyň funksiýasy** diýilýär (1-nji surat). Eger, $f(t)$ funksiýa original funksiýanyň 2) we 3) şertlerini kanagatlandyryp 1) şertini kanagatlandyr -masa, onda

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} o, \ \ t < 0 & \text{bolanda,} \\ f(t), \ \ t \geq 0 & \text{bolanda} \end{cases}$$

funksiýa, originalyň hemme şertlerini kanagatlandyr-ýar. Şonuň üçin original funksiýanyň 2) we 3) şertlerini kanagatlandyrýan ähli funksiýalar, t-niň otrisatel bahalary üçin nola deňdir diýip kabul edip, ýazgyny gysgaltmak maksady bilen, $f(t)$ $\eta(t)$original funksiýany $\eta(t)$ köpeldijisiz ýazjakdyrys. Şeýlelik bilen $\eta(t)$, $e^t\eta(t)$, $t^e\eta(t)$, $sint\eta(t)$ deregine l, e^t, t^n, $sint$ diýip şertleşeliň.



46-njy surat

Indi, gös-göni integrirlemek ýoly bilen birlik funksiýanyň we görkezijili $e^{\alpha t}$ funksiýanyň şekilini tapyp görkezeliň.

a) **Birlik funksiýanyň şekili.** (3) formulanyň esasynda

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot 1\cdot dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-pt}dt=$$

$$=-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^A=-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}(e^{-Ap}-1)=\frac{1}{p},$$

çünki $Rep>0$ bolsa,

$$\lim_{A\to\infty}e^{-pA}=0.$$

Şeýlelikde $1\Rightarrow\frac{1}{p}$.

b) $\boldsymbol{e^{\alpha t}}$ **görkezijili funksiýanyň şekili.** (3) formula görä

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt=$$

$$=-\frac{1}{p-\alpha}\lim_{A\to\infty}e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^A=$$

$$=\frac{1}{p-\alpha}\left[1-e^{-(p-\alpha)A}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$$

çünki, $Re(p-\alpha)>0$ bolsa, onda

$$\lim_{A\to\infty}e^{-(p-\alpha)A}=0$$

bolýar. Diýmek,

$$e^{\alpha t}\Rightarrow\frac{1}{p-\alpha},\qquad Re\,p>Re\alpha \tag{4}$$

$\alpha=\pm i$ bolanda (4) formuladan

$$e^{it}\Rightarrow\frac{1}{p-i},\qquad e^{-it}\Rightarrow\frac{1}{p+i} \tag{5}$$

alarys.

§ 3. Laplasyň öwürmesiniň käbir häsiýetleri.

1. Birjynslylyk häsiýeti. Eger $f(t) \in D$ we a- kompleks san bolsa, onda

$$af(t) \Rightarrow aF(p)$$

bolar.

Subudy. Kesgitlemä görä

$$L\{af(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} af(t)dt =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = aF(p).$$

Şeýlelikde, $af(t) \Rightarrow aF(p)$.

2. Goşmak häsiýeti. Eger $f(t) \in F(p)$ we $\varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$ bolsa, onda

$$f(t) \pm \varphi(t) \Rightarrow F(p) \pm \Phi(p)$$

bolar.

Subudy. Kesgitlemä görä

$$L\{f(t) \pm \varphi(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}[f(t) \pm \varphi(t)]dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \pm \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t)dt = F(p) \pm \Phi(p).$$

ýagny $f(t) \pm \varphi(t) \Rightarrow F(p) \pm \Phi(p)$

3. Çyzyklylyk häsiýeti. Eger $f_1(t) \Rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \Rightarrow F_2(p), \dots, f_n(t) \Rightarrow F_n(p)$ we $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_1 -$ - kompleks sanlar bolsa, onda

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots, +\alpha_n f_n(t) \Rightarrow \alpha_1 F_1(p) +$$
$$+\alpha_2 F_2(p) + \cdots + \alpha_n F_n(p)$$

ýa-da

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(t) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(p)$$

bolar.

Bu häsiýetiň subudy öňki iki häsiýetden gelip çykýar.

Mysallar. Eýleriň formulasyndan, Laplasyň öwürmesiniň çyzyklylyk häsiýetinden we (5) deňliklerden peýdalanyp $sin\, t, cos\, t$ funksiýalaryň şekillerini tapalyň.

$$sint = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1};$$

$$sint \Rightarrow \frac{1}{p^2+1} \qquad (6)$$

$$cost = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1};$$

$$cost \Rightarrow \frac{p}{p^2+1} \qquad (7)$$

Şu ýerde Laplasyň öwürmesiniň ýeke-täklik teoremasy diýlip atlandyrylýan ýene bir häsiýetli subutsyz getireliň.

4. **Ýeke-täklik teoremasy.** Eger $f(t) \Rightarrow F(p)$, $\varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$ we $F(p)) \Rightarrow \Phi(p)$ bolsa, onda $f(t) \equiv \varphi(t)$ funksiýalaryň hemme üznüksiz nokatlarynda ýerine ýetýändir.

§ 4. Funksiýanyň önümleriniň şekili.

Teorema. Eger $f(t) \in D$, $f'(t) \in D$ we $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda

$$f'(t) \Rightarrow pF(p) - f(0) \qquad (8)$$

Subudy. Şekiliň kesgitlemesi esasynda

$$f'(t) \Rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt$$

Soňky integraly bölekler boýunça integrirläp

$$f'(t) \Rightarrow e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

öwürmäni alarys. Original funksiýanyň 3) şertine görä, $t \to \infty, |f(t)| \le Me^{s_0 t}$, şonuň üçin,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$$

bolar. Indi

$$\lim_{t\to 0} e^{-pt} f(t) = f(0)$$

we

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p)$$

deňlikleri ulanyp subut etmeli

$$f'(t) \Rightarrow f'(0) + pF(p)$$

formulamyzy alarys.

Eger $f(t)$ funksiýanyň ýokary tertipli önümleri bar bolup, olar original funksiýalaryň köplügine degişli bolsalar, onda birinji önümiň şekiliniň barlygyny bilip, ýokary tertipli önümleriň şekillerini aňsatlyk bilen tapmak bolýar. Hakykatdan hem, $f'(t) = \varphi(t)$ diýip belgiläliň. Onda $f''(t) = \varphi'(t)$ bolar . Eger $\varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$, $f(t) \Rightarrow F(p)$ diýsek,onda

$$\Phi(p) = pF(p) - f(0),\ \ \varphi'(t) \Rightarrow p\phi(p) - \varphi(0) =$$

$$= p[pF(p) - f(0)] - f'(0) =$$

$$= p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

ýa-da

$$f''(t) \Rightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

deňligi alarys.

Edil şuňa meňzeşlikde, üçünji tertipli önümiň şekilini

$$f'''(t) \Rightarrow p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) =$$

$$= p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

soňra bolsa, islendik tertipli önümiň şekiliniň

$$f^n(t) \Rightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) -$$
$$-p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^n(0)$$

hasaplanyş formulasyny taparys Eger-de $f(0) = f'(0) = = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0)$ we $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda önümleriň şekilleriniň tapylyş formulalary has ýönekeý görnüşe eýýe bolýar.

$$f'(t) \Rightarrow pF(p), f''(0) \Rightarrow p^2F(p), \ldots, f^n(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p^nF(p).$$

§ 5. Şekili differensirlemek.

Teorema. Eger $f(t) \in D$ we $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda

$$tf(t) \Rightarrow -\frac{d}{dp}F(p) \qquad (9)$$

bolar .

Subudy. Ilki bilen eger $f(t) \in D$ bolsa, onda $tf(t) \in D$ boljakdygyny belläp geçeliň. Şonuň üçin, şekiliň kesgitlemesine görä

$$tf(t) \Rightarrow \int_0^t \mathrm{t}f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= -\int_0^\infty f(t)\frac{d}{dp}e^{-pt}dt = -\int_0^\infty \left[\frac{d}{dp}f\,(t)e^{-pt}\right]dt =$$

$$= -\frac{d}{dp}\int_0^\infty f(t)e^{-pt} = -\frac{d}{dp}F(p).$$

Teorema subut edildi.

1-nji netije. (9) deňligi ulanyp

$$t^2 f(t) = t[tf(t)] \Rightarrow -\frac{d}{dp}\left[-\frac{d}{dp}F(p)\right] == (-1)^2\frac{d^2F(p)}{dp^2}$$

alarys, ýagny

$$t^2 f(t) \Rightarrow (-1)^2\frac{d^2F(p)}{dp^2} \qquad (10)$$

Şuňa meňzeşlikde,

$$t^3 f(t) = t[t^2 f(t)] \Rightarrow -\frac{d}{dp}\left[(-1)^2\frac{d}{dp}F(p)\right] =$$

$$= (-1)^3\frac{d^3F(p)}{dp^2} \qquad (11)$$

$$t^n f(t) \Rightarrow (-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n} \qquad (12)$$

2-nji netije. Hususy halda $f(t) = 1$ bolanda $F(p) = \frac{1}{p}$ bolýanlygy üçin (9), (10), (11), (12) formulalar aşakdaky

$$t = t\cdot 1 \Rightarrow -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$t^2 = t\cdot t \Rightarrow -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{2!}{p^3},$$

$$t^3 = t\cdot t^2 \Rightarrow -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{3!}{p^4}, \qquad (13)$$

$$t^n \Rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$$

görnüşleri alýarlar. (13) operatorly baglanyşykdan çyzyklylyk häsiýetiň netijesinde

$$\frac{1}{p^{n+1}} \Rightarrow \frac{t^n}{n!}.$$

degişlilik gelip çykýar.

§ 6. Originaly we şekili integrirlemek.

Teorema. (Originaly integrirlemek). Eger $f(t) \in D$ we $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \Rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

bolar.

Subudy. Ilki bilen, eger $f(t) \in D$ bolsa, onda

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \in D$$

bolýanlygyny belläliň. Goý indi, $f(t) \Rightarrow F(p)$, $\varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$ bolsun, onda (8) formulanyň esasynda $\phi'(p) \to p\Phi(p),\ \varphi(t) = 0$. Başga tarapdan bolsa,

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)' = f(t) \Rightarrow F(p).$$

Şonuň üçin, ýeke-täklik teorema görä, $F(p) = p\Phi(p)$. Bu ýerden $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ Diýmek,

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \Rightarrow \frac{F(p)}{p}$$

Teorema (Şekili integrirlemek). Eger $\frac{f(t)}{t} \in D$ we $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda

$$\frac{f(t)}{t} \Rightarrow \int_p^\infty F(p)dp$$

Şekili integrirlemek teoremany ulanyp $\frac{sint}{t}$ funksiýanyň şekilini tapyp görkezeliň.

$$\frac{sint}{t} \Rightarrow \int_{p}^{\infty} \frac{dp\infty}{p^2+1} = arctgp\Big|_{p}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctgp$$

§ 7. Operatorly hasaplamanyň esasy teoremasy.

Aglaba funksiýalaryň şekillerini Laplasyň integralynyň kömegi bilen tapmaklyk iňňän kyn bolýar. Aşakda, subutsyz beýan edilen teoremalar dürli-dürli funksiýalaryň köpüsiniň şekilini tapmak meselesini aňsatlaşdyrýarlar. Ondan başga-da bu teoremalar ters meseläni çözmekde, ýagny berilen şekiller boýunça original funksiýany tapmakda hem giňden ulanylýar. Şonuň netijesinde operatorly hasaplamanyň matematiki abzaly praktikada köp meseleleri çözmekligiň örän amatly we täsirli serişdesi bolup galýar.

1. Meňzeşlik teoremasy (baglanyşyksyz üýtgeýän ululygyň masştabynyň üýtgeýşi).

Eger, $f(t) \in D$ we $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda

$$f(\alpha t) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{P}{\alpha}\right),$$

ýagny originalda t ululyk αt bilen çalşyrylsa, onda şekilde p ululyk $\frac{P}{\alpha}$ bilen çalşyrylmaly we netije α bölünmeli.

Meňzeşlik teoremasyndan peýdalanyp, birnäçe funksiýalaryň şekillerini tapalyň.

1-nji mysal.

$$sin\,\alpha t \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \qquad (14)$$

2-nji mysal.

$$\cos \alpha t \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \qquad (15)$$

3-nji mysal.

$$\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2}\right) =$$

$$= \frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$$

4-nji mysal.

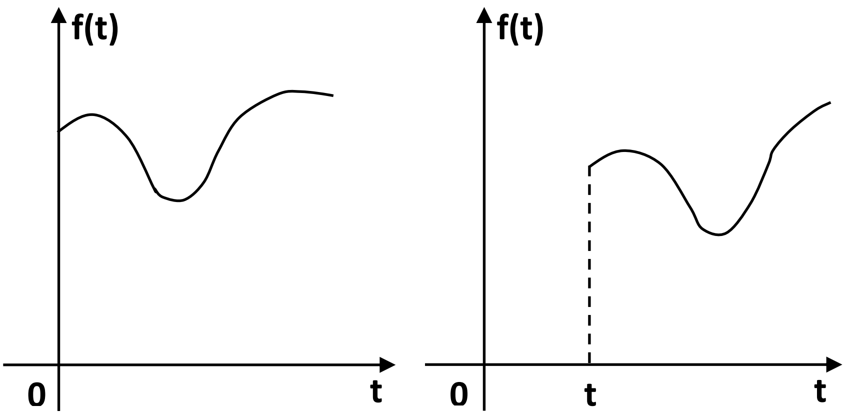
$$\sin^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2}\right) =$$

$$= \frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$$

2. Gijikmek teoremasy (hakyky üýtgeýän oblastda süýşürmek). Eger $f(t) \in D$, $f(t) \Rightarrow F(p)$ we t_0 položitel san bolsa, onda

$$f(t - t_0) \Rightarrow e^{-pt_0} F(p)$$

Şekili, e^{-pt_0} köpeltmeklik $f(t)$ original funksiýanyň grafigini t_0 birlik saga süýşürýär (47-nji surat).



47-nji surat

Fizikada bu ýagdaý hadysanyň t_0 wagta gijikmegi hökmünde garalýar (meselem, Loranyň gijikmek hadysasy).

Meňzeşlik we gijikmek teoremalaryny ulanyp $a > 0$ we $t_0 > 0$ bolanda $f(at - t_0)$ original funksiýanyň şekilini tapmak bolýar.

Eger, $f(t) \Rightarrow F(p)$ bolsa, onda meňzeşlik teoremasy esasynda

$$f(at) \Rightarrow \frac{1}{a}F(p)$$

Gijikmek teoremasynyň esasynda bolsa

$$f(at - t_0) = f\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] \Rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)e^{-\frac{t_0}{a}p}$$

Şeýlelikde,

$$f(at - t_0) \Rightarrow e^{-\frac{t_0}{a}p}\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), a > 0, t_0 > 0. \quad (16)$$

(16) formulany ulanyp aşakdaky funksiýalaryň şekille-rini tapalyň.

5-nji mysal.

$$\sin(\omega t - \varphi_0) \Rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

6-njy mysal.

$$\cos(\omega t - \varphi_0) \Rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Gijikmek teoremasy bölekleýin üznüksiz original funksiýalaryň şekilini tapmak üçin hem amatlydyr.

7-nji mysal.

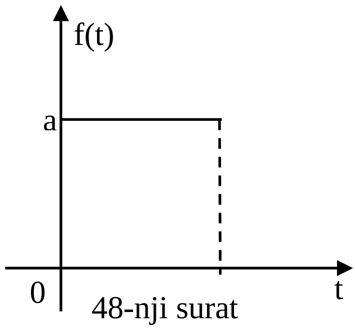
$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \tau \quad \text{bolanda} \\ 0, t < 0 \; we \; t > \tau & \text{bolanda} \end{cases}$$

funksiýanyň (48-nji surat) şekilini tapalyň. Birlik funksiýanyň kömegi bilen ýokardaky $f(t)$ funksiýany $f(t) = a[\eta(t) - \eta(t - \tau)]$ görnüşde ýazmak bolýar. Indi, şekiliň çyzyklylyk häsiýeti we gijikmek teoremasy esasynda

$$f(t) \Rightarrow a\frac{1-e^{p\tau}}{p}$$

çünki $\eta(t) \Rightarrow \frac{1}{p}$ we

$$\eta(t-\tau) \Rightarrow e^{-p\tau}\frac{1}{p}$$



48-nji surat

3. Öňürtmek teoremasy. Eger $f(t) \in D$, $f(t) \Rightarrow$ $\Rightarrow F(p)\ we\ t > 0$ islendik san bolsa, onda

$$e^{-\alpha t}f(t) \Rightarrow F(p+\alpha) \qquad (17)$$

(17) deňlikde $\alpha = -\beta$ goýup

$$e^{\beta t}f(t) \Rightarrow F(p-\alpha)$$

öwürmäni alarys.

Süýşürmek teoremasyny we (14), (15) formulala-ry peýdalanyp birnäçe mysallary çözeliň.

8-nji mysal.

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \Rightarrow \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}.$$

9-njy mysal.

$$e^{-\alpha t}\cos\omega t \Rightarrow \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}.$$

10-njy mysal.

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \Rightarrow \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}.$$

11-nji mysal.

$$e^{\alpha t}\cos\omega t \Rightarrow \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

5. **Köpeltmek teoremasy.** Eger $f(t) \in D$, $\varphi(t) \in D, f(t) \Rightarrow F(p), \varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$ bolsa, onda

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \Rightarrow F(p)\Phi(p) \qquad (18)$$

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

integrala $f(t)$ we $\varphi(t)$ funksiýalaryň düýrlenmesi diýilýär we $f(t)\cdot\varphi(t)$ görnüşde belgilenýär. Şunlukda, (18) formulany

$$f(t)\cdot\varphi(t) \Rightarrow F(p)\Phi(p) \qquad (19)$$

görnüşde ýazyp bolýar.

12-nji mysal. Köpeltmek teoremasyny ulanyp $\frac{p}{(p^2+1)^2}$ şekiliň original funksiýasyny tapmaly

Çözlüşi.

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1},$$

$$\frac{p}{p^2+1} \Rightarrow cost, \qquad \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow sint$$

bolýanlygy aýdyňdyr. Şoňa göräde

$$F(p)\frac{p}{p^2+1} \Rightarrow f(t) = cost$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \varphi(t) = sint$$

bolýandygyny hasaba alyp we (19) formulany ulanyp

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t cos\tau sin(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(\tau+t-\tau) - \sin(\tau-t+\tau)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t - \sin(2\tau - t)]d\tau \ =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tau sint + \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right]\Big|_0^t = \frac{1}{2}tsint.$$

§ 8. Dýuameliň integraly.

Teorema. Eger,

$$f(t)\cdot\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)d\tau \Rightarrow F(p)\Phi(p)$$

bolsa, onda

$$\int_0^t f(\tau)\,\varphi_t'(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0) \Rightarrow pF(p)\Phi(p) \quad (20)$$

ýa-da

$$\int_0^t \varphi(\tau)\,f_t'(t-\tau)d\tau + \varphi(t)f(0) \Rightarrow pF(p)\Phi(p) \quad (21)$$

öwürmeler ýerine ýetýändir. (20) we (21) formulalara **Dýuameliň formulasy**, olaryň çep tarapyndaky integrallara bolsa **Dýuameliň integrallary** diýilýär.

13-nji mysal. (20) deňlikden peýdalanyp $\frac{1}{p^3(p^2+1)}$ şekiliň original funksiýasyny tapalyň.

Çözülişi. Berlen şekili

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} = p\frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

görnüşde ýazalyň we

$$F(p) = \frac{1}{p^4} \Rightarrow \frac{t^3}{6} = f(t),$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow sint = \varphi(t)$$
bilen belgiläliň. Onda, Dýuameliň (20) formulasy boýunça
$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \Rightarrow \int_0^t \left[\frac{(t-\tau)^3}{6}\right]'_t sin\,\tau d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 sin\,\tau d\tau$$
bolar. Soňky integraly iki gezek bölekleýin integrirläp,
$$\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 sin\,\tau d\tau = \frac{1}{2}[(t-\tau)^2(-cost) -$$
$$-2(t-\tau)sin\tau + 2cost]_0^t = \frac{t^2}{2} + cost - 1.$$
deňligi alarys. Diýmek,
$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \Rightarrow \frac{t^2}{2} + cost - 1.$$

§ 9. Käbir şekilleriň tablisasy.

№	Original	Şekil	№	Original	Şekil
1	1	$\frac{1}{p}$	8	$cos(\omega t - \varphi_0)$	$e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}t}\frac{p}{p^2+\omega^2}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{-\alpha t}sin\omega t$	$\frac{\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
3	$sin\,\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	10	$e^{-\alpha t}cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
4	$cos\,\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	11	t^n	$\frac{n}{p^{n+1}}$
5	$sin^2\,\alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	12	$tsin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$

6	$cos^2\ \alpha t$	$\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	13	$tcos\omega t$	$\frac{p^2+10^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
7	$sin\ (\omega t - \varphi_0)$	$e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}t}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	14	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n}{(p-\alpha)^{n+1}}$

§ 10. Çyzykly differensial deňlemeleri çözmekde amally hasaplamanyň ulanylyşy.

Goý, hemişelik koeffisiýentli çyzykly differensial deňleme berilsin

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t) = f(t) \qquad (22)$$

Bu ýerde $a_1, a_2, \ldots, a_n$-hakyky sanlar. Bu deňlemäniň

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (23)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmak talap edilýär. Goý, näbelli $x(t)$ funksiýa we onuň önümleri $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ hem-de $f(t)$ funksiýa, original funksiýalar diýeliň we
$x(t) \Rightarrow X(p)$, $f(t) \Rightarrow F(p)$ bilen belgiläliň. Onda (23) başlangyç şertleri we original funksiýany differensirlemek teoremasyny ulanyp önümleriň şekil-lerini taparys:

$$x'(t) \Rightarrow pX(p) - x_0$$
$$x''(t) \Rightarrow p^2X(p) - px_0 - x_0'$$
$$-------------------------$$
$$x^{(n)}(t) \Rightarrow p^{(n)}X(p) - p^{(n-1)}x_0 - \ldots - x_0^{(n-1)}$$

Çyzykly häsiýetiň esasynda, (22) deňlemede Laplasyň öwürmesine geçeliň

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p^{(n)}X(p) - p^{(n-1)}x_0 - p^{(n-2)}{x'}_0 - \cdots - x_0^{(n-1)} +$$
$$+a_1\big[p^{(n-1)}X(p) - p^{(n-2)}x_0 - p^{(n-3)}{x'}_0 - \ldots -$$

$$-x_0^{(n-2)}\Big]+\ldots+a_{n-1}[pX(p)-x_0]+a_nX(p)=F(p)$$

Soňky deňlikde $X(p)$ çlenli aňlatmalary toparlap we azat çlenleri deňligiň sag tarapyna ters alamaty bilen geçirip

$$\left(p^{(n)}+a_1p^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}p+a_n\right)X(p)=$$
$$=F(p)+\left(p^{(n-1)}x_0+p^{(n-2)}{x'}_0+\cdots+x_0^{(n-1)}\right)+$$
$$+a_1\left(p^{(n-2)}x_0+p^{(n-3)}{x'}_0+\cdots+x_0^{(n-2)}\right)+\cdots+$$
$$+a_{n-1}x_0$$

deňligi alarys we

$$\Phi(p)=p^{(n)}+a_1p^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}p+a_n,$$
$$\Psi(p)=\left(p^{(n-1)}x_0+p^{(n-2)}{x'}_0+\cdots+x_0^{(n-1)}\right)+$$
$$+a_1\left(p^{(n-2)}x_0+p^{(n-3)}{x'}_0+\cdots+x_0^{(n-2)}\right)+\cdots+$$
$$+a_{n-1}x_0$$

bilen belgiläp

$$\Phi(p)X(p)=F(p)+\Psi(p) \qquad (24)$$

deňligi alarys. (24) deňlemä, (22) differensial deňlemäniň operator deňlemesi ýa-da şekillerdäki deňlemesi diýilýär. Bu deňlemeden $X(p)$ tapalyň.

$$X(p)=\frac{F(p)}{\Phi(p)}+\frac{\Psi(p)}{\Phi(p)} \qquad (25)$$

Indi şekili bolýunça original funksiýany tapsak, onda ýeketäklik teoremanyň esasynda gözlenýän $x(t)$ çözüwi alarys.

Bellik. Eger başlangyç şertleriň hemmesi nola deň bolsa

$$x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0 \qquad (26)$$

onda (25) deňlik

$$X(p) = \frac{F(p)}{\Phi(p)} \qquad (27)$$

görnüşi alar.

14-nji mysal. $x'''(t) + x''(t) = sint$ differensial deňlemäniň $x(0) = x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi.

$$x(t) \Rightarrow X(p)$$
$$x(t) \Rightarrow X(p)$$
$$x'(t) \Rightarrow pX(p)$$
$$x''(t) \Rightarrow p^2X(p) - p - 1$$
$$x'''(t) \Rightarrow p^3X(p) - p^2 - p$$
$$sint \Rightarrow \frac{1}{p^2+1}$$

bolýanygyny göz öňünde tutup berlen deňlemede orignal funksiýadan şekile geçeliň

$$p^3X(p) - p^2 - p + p^2X(p) - p - 1 = \frac{1}{p^2+1}$$

ýa-da

$$p^2(p+1)X(p) = \frac{1}{p^2+1} + (p+1)^2$$

Bu ýerden

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+1)(p^2+1)} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

deňligiň sag tarapyndaky droblary ýönekeý droblaryň jemine dargadyp, taparys

$$X(p) = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{1}{2(p^2+1)} + \frac{2}{p^2}.$$

Indi tablisa boýunça şekilden originala geçip gutarnykly suratda deňlemäniň çözüwini alýarys:

$$X(t) = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}cost - \frac{1}{2}sint.$$

Eger (26) başlangyç şertler erine ýetýän bolsa, onda (22) differensial deňlemeleriň çözüwini Düameliň integralyny ulanyp tapyp bolýar. Onuň üçin, ilki bilen (22)deňlemäniň sag tarapy $f(t) = 1$ diýip kömekçi deňlemäni çözmeli. Goý $X(t)$,(28) deňlemäniň (26) şertler kanagatlandyrýan çözüwi $X_1(p)$ bolsa onuň şekili bolsun. Onda (28) deňlemäniň operator deňlemesi

$$\Phi(p)X_1(p) = \frac{1}{p}$$

bu ýerden,

$$X_1(p) = \frac{1}{p\Phi(p)}$$

bolar. Diýmek

$$X(p) = \frac{F(p)}{\Phi(p)} = pF(p)\frac{1}{p\Phi(p)} = pF(p)X_1(p)$$

Şonuň üçin, indi, $X_1(0) = 0$ şerti göz öňünde tutup we Dýuameliň integralyny ulanyp berlen deňlemäniň çözüwini taparys:

$$X(p) = pF(p)X_1(p) \Longrightarrow \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = x(t).$$

15-nji mysal. Dýuameliň integralyny ulanyp $x''(t) + x(t) = sint$ deňlemäniň $x(0) = x'(0) = 0$ başlangyç şerteri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Kömekçi deňlemäni düzüp $x_1''(t) + x_1(t) = 1,\ x_1(0) = x_1'(0) = 0$ onuň çözüwi-ni tapalyň. Bu deňlemäniň operator deňlemesi

$$(p^2 + 1)\, X_1(p) = \frac{1}{p}.$$

bolar. Diýmek,

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+1}$$

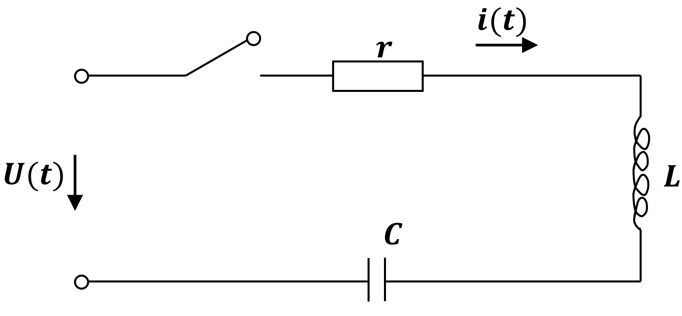
Indi şekilden original funksiýa geçsek $x_1(t) = 1 - cost$ bolar bu ýerden $x_1'(t) = 1 - sint$ Şonuň üçin berlen deňlemeleriň çözüwi

$$x(t) = \int_0^t sin\tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [cos(2\tau - t) -$$
$$-cost]d\tau = \frac{1}{2}(sint - tcost)$$

bolýar.

§11. Operatorly hasaplamanyň elektrik zynjyryndaky stasionar däl prosesleriň derňewinde ulanylyşy.

Elektrik zynjyryndaky geçiş proseslerini hasaplamakda Laplasyň öwürmesini ulanmak has hem amatlydyr. Hemişelik diýip hasap edilýän τ, L we C parametrli elektrik zynjyryndaky geçiş proseslere seredip geçeliň (49-njy surat). Geçiş prosesleri derňelende nol we nul däl başlangyç şertli iki görnüşdäki meselelerde duş gelinýär. Dynçlyk ýagdaýyndaky elektrik zynjyra wagtyň $t = 0$ pursadynda napryýaženiýe



49-njy surat

birikdirilende nol başlangyç şertli meseleler ýüze çykýar.

Bu ýagdaýda naprýaženiýe birikdiriýän pursata çenli shemanyň ähli şahalaryndaky toklar we ähli kondensatorlardaky zarýadlar nola deň bolýar.

Goý, 49-njy suratda şekillendirilen zynjyra wagtyň $t = 0$ pursadynda $U(t)$ naprýaženiýe birikdirilsin. Başlangyç pursatdaky tok we kondensa-tordaky naprýaženiýe nola deň diýeliň. $U(t)$ naprýaže-niýanyň täsiri astynda zynjyrdan $i(t)$ tok akar. Togyň üýtgeýiş kanunyny tapalyň.

Kirhgofyň ikinji kanuny boýunça geçiş prosesiniň togy $i(t)$ görä

$$ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = U(t)$$

differensial deňlemäni alarys. Bu ýerde

$$ri(t) = U_r(t)$$

aktiw garşylykda napryaženiýanyň peselmegi,

$$L\frac{di(t)}{dt} = U_L(t)$$

induktiwlikde naprýaženiýanyň peselmegi,

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = U_c(t)$$

sygymda naprýaženiýanyň peselmegi.

Indi, $i(t) \Rightarrow I(p)$ bilen belgilesek, onda Laplasyň öwürmesiniň häsiýetleri esasynda

$$ri(t) \Rightarrow rI(p),$$

$$L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow LpI(p),$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \Rightarrow \frac{1}{Cp}I(p)$$

bolan we umumy halda

$$rI(p) + LpI(p) + \frac{1}{cp}I(p) = U(p)$$

bolar. Bu ýerde $I(p)$-operator formadaky tok, $U(p)$-operator formadaky goýulan naprýaženiýe. Alynan deňlemäni $I(p)$ toga görä çözüp Omuň kanunyň operator görnüşini alýarys:

$$I(p) = \frac{U(p)}{r + Lp + \frac{1}{Cp}}$$

Meseläni gutarnykly çözmek üçin $I(p)$ şekil boýunç $i(t)$ togy tapmak ýeterlikdir

Özbaşdak çözmek üçin meseleler.

Berlen funksiýalaryň şekillerini tapmaly.

1. $f(t) = te^t cost$ 2. $f(t) = (t+1)sinrt$

3. $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-r} dr$ 4. $f(t) = \int_0^t (\tau+1)cos\tau d\tau$

5. $f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}$ 6. $f(t) = e^{-rt} sintcost$

Berlen şekilleriň original funksiýalaryny tapmaly:

7. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$ 8. $F(p) = \frac{p - 2}{p^2 - 4p + 13}$

9. $F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$ 10. $F(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}$

11. $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ 12. $F(p) = \frac{1}{p^3 - 8}$

Differensial deňlemeleriň berlen başlanyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

13. $x''(t) + 3x'(t) = e^t, x(0) = 0, x'(0) = 1$

14. $x''(t) + x'(t) = cost, x(0) = 2, x'(0) = 0$

15. $x'''(t) + x''(t) = sint, x(0) = x'(0) = 1,$

$$x''(0) = 0$$

16. $x'''(t) + x''(t) = t, x(0) = -3, x'(0) = 1,$
$x''(0) = 0$
17. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^t, x(0) = x'(0) = 0$
18. $x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) = 4, x(0) = 1,$
$x'(0) = 2, x''(0) = -2$

VII bap. Analitik funksiýalaryň mehanikada we aragatnaşyk zynjyrlarynda ulanylyşy.

§1. Analitik funksiýalaryň tekiz wektorlaryň meýdanlaryny hasaplamakda ulanylyşy.

Fizikanyň we tehnikanyň dürli meselelerinde haýsy hem bolsa bir fiziki ýagdaýyň tekiz wektor meýdanlaryny başarnykly hasaplamak örän wajypdyr. Meselem, gürrüň elektrostatikada, elektrik güýjenmäniň $\boldsymbol{E}$ meýdanyny, gidrodinamikada, suwuklygyň bölejikleriniň $\boldsymbol{A}$ tizlik meýdanyny we ş.m. tapmak barada gidýär. Eger, bizi gyzyklandyrýan meýdanlar tekiz, potensial we stasionar (durnuklaşan) bolsalar, onda analitik funksiýalaryň usullaryny peýdalanyp, olary aňsatlyk bilen derňemek mümkin. Eger, giňişligiň her bir (x, y, z) nokadyndaky $\boldsymbol{A}$ wektoryň ugry käbir tekizlige, adatça $0xy$ tekizligine parallel ugrukdyrylan bolsa we üçünji z koordinata bagly bolmasa, onda $\boldsymbol{A}$ meýdana, **tekiz meýdan** diýilýär.

Eger, $\boldsymbol{A}$ wektor diňe berkidilen nokadyna bagly bolup, wagta bagly bolmasa, onda oňa **stasionar meýdan** diýilýär. Eger,

$$\boldsymbol{A} = grad\,\varphi \qquad (1)$$

deňligi kanagatlandyrýan şeýle bir $\varphi = \varphi(x, y)$ funksiýa bar bolsa, onda tekiz stasionar $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y)$ meýdana **potensial meýdan** diýilýär.

Elektrostatiki meýdan hem potensialdyr, ýöne elektrostatikada, (1) deňligi

$$\boldsymbol{E} = -grad\,\varphi \qquad (2)$$

görnüşde ýazmak kabul edilendir. Ýokardaky üç şert ýerine ýetende, $\boldsymbol{E}$ ýa-da $\boldsymbol{A}$ meýdanlara kompleks z tekizliginde, z ululyga görä kompleks üýtgeýänli funksiýalar hökmünde seretmek mümkin. Mysal üçin, wektor tekizlik diýmegiň deregine kompleks tizlik diýip, ony

$$A = A(z) = A_x(x, y) + iA_y(x, y) = |A|e^{i\alpha} \qquad (3)$$

görnüşde ýazýarlar. Bu ýerde, $A_x(x, y)$ we $A_y(x, y)$ funksiýalar $\boldsymbol{A}$ tizligiň degişlilik-de $0x$ we $0y$ oklara bolan proýeksiýalaryny; $|A|$ ululyk, $\boldsymbol{A}$ wektoryň modulyny; α bolsa, $\boldsymbol{A}$ wektoryň $0x$ ok bilen emele getiren ýapgyt burçuny aňladýar. Edil şuňa meňzeşlik-de, $\boldsymbol{E}$ wektor güýjenmä derek,

$$E = E(z) = E_x(x, y) + iE_y(x, y) = |E|e^{i\beta} \quad (4)$$

kompleks güýjenmä seredilýär.

Gidrodinamikada, eger ideal gysylmaýan suwuklyk burawlaýyn däl hereket edýän bolsa, onda onuň potensial tizlikleri, 2 sany x we y baglanşyksyz ululyga görä, $\varphi = \varphi(x, y)$ garmoniki funksiýadygy, ýagny

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

deňlemäni kanagatlandyrýanlygy subut edilýär.

I bap, §8-de görkezilişi ýaly, berilen garmoniki $\varphi(x, y)$ funksiýa boýunça, oňa çatyrymly bolan garmoniki $\psi(x, y)$ funksiýany gurmak mümkin. Gidrodinamikada bu funksiýa **toguň funksiýasy** diýilýär, onuň fiziki manysy bolsa, $\psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)$ tapawudyň, başlangyjy (x_1, y_1), ahyry (x_2, y_2) nokatlarda bolan islendik dugada gurlan, beýikligi 1m. deň silindrik üstden, 1sek. dowamynda akyp geçýän suwuklygyň göwrümine deňdigini aňladýar. Bu iki funksiýany birleşdirip

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \Phi(z) \quad (5)$$

garmoniki funksiýany alarys. Oňa suwuklygyň akymynyň **kompleks potensialy** diýilýär.

Indi, kompleks potensial bilen kompleks tizligiň arasyndaky baglylygy anyklalyň. (1) we (3) deňliklerden

$$A(z) = A_x(x,y) + iA_y(x,y) = \frac{\partial y}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

deňlik gelip çykýar. Bu ýerde Koşi – Rimanyň

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

şertini ulanyp, tekiz gidrodinamikanyň esasy formulalarynyň biri bolan

$$A(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \overline{\Phi'(\mathrm{z})} \qquad (6)$$

formulany alarys. Bu bolsa, kompleks tizligiň, kompleks potensial tizligiň önümine çatyrymly bolan ululyga deňdigini aňladýar, ýagny, potensial tizlikler belli bolsalar, onda kompleks tizligi (6) formula bilen tapmak mümkin.

Diýmek, tekiz wektor meýdanyň kompleks potensialy, belli bir şertler ýerine ýetende, z ululyga görä kompleks üýtgeýänli analitik funksiýadyr. Şonuň üçin, kompleks potensial belli bolsa, onda wektor meýdana degişli ululyklaryň ählisini kesgitlemek mümkin.

§2. Sinusoidal toguň we naprýaženiýanyň aňladylyşy, olaryň kompleks ululyklarynyň arasyndaky baglylyk.

Sinusoidal tok we naprýaženiýa diýip, akymy sinus funksiýanyň grafigine çalymdaş ugur boýunça üýtgeýän toga we naprýaženiýa düşünilýär.

Umumy halda, sinusoidal tok we naprýaženiýa

$$i = I_m sin(\omega t + \psi) =$$
$$= I_m cos\psi sin\omega t + I_m sin\psi cos\omega t \qquad (7)$$

$$u = U_m sin(\omega t + \alpha) =$$
$$= U_m cos\alpha sin\omega t + U_m sin\alpha cos\omega t \qquad (8)$$

kanunlar boýunça wagta baglylykda üýtgeýärler. Bu aňlatmalar simwoliki

$$\dot{I}_m = I_m(cos\psi + jsin\psi) = I_m e^{j\psi}$$
$$\dot{U}_m = U_m(cos\alpha + jsin\alpha) = U_m e^{j\alpha}$$

görnüşde ýazylýarlar, bu ýerde i, u sinusoidal toguň we naprýaženiýanyň ujypsyz (mgnowen) wagt pursatyndaky bahalary; I_m , U_m toguň we naprýaženi-ýanyň amplituda bahalary; ω aýlaw ýygylyk; t wagt; ψ we α toguň we naprýaženiýanyň başlangyç fazasy; $\dot{I}_m$ we $\dot{U}_m$ modullary degişlilikde I_m , U_m deň bolan toguň we naprýaženiýanyň kompleks bahalary.

Kompleks ululyklaryň üstünde goýulan nokatlar, olaryň ω ýygylyga we wagta görä sinusoidal üýtgeýändigini görkezýär.

Toguň we naprýaženiýanyň täsir ediji bahalaryny, degişlilikde

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (9)$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad (10)$$

belgileme bilen girizeliň. Onda (7) we (8) deňlikler

$$\dot{I} = I\,e^{j\psi} \qquad (11)$$
$$\dot{U} = U\,e^{j\alpha} \qquad (12)$$

görnüşi alar.

Kompleks naprýaženiýanyň kompleks toga bolan gatnaşygyny aňladýan kompleks ululyga **kompleks garşylyk** diýilýär we ol, üsti nokatsyz Z bilen belgilenýär, sebäbi garşylyk sinusoidal ululyk däldir. Diýmek,

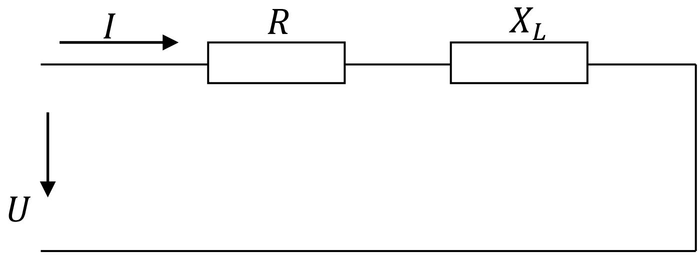
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\,e^{j\psi}}{I\,e^{j\alpha}} = \frac{U}{I}\,e^{j(\psi-\alpha)} = |Z|e^{j\varphi}$$

bolar, bu ýerde $|Z|$, kompleks elektrogarşylygyň moduly, φ bolsa kompleks garşylygyň argumenti (fazanyň süýşmegi).

§3. Analitik funksiýalaryň aragatnaşyk zynjyrlarynda ulanylyşy.

Aragatnaşyk ulgamlarynda ulanylýan elektrik enjamlary, elektrik we magnit meýdanlary bilen ykjam baglanyşyklydyr. Şonuň üçin, ol enjamlardan geçýän signalyň parametrlerini (toguny, naprýaženiýasyny, kuwwatyny) analitiki usul bilen kesgitlemek amatlydyr.

Ýönekeý mysal hökmünde, aktiw we induktiw garşylyklary yzygider birikdirilen zynjyra seredeliň. (50-nji



50-nji surat

surat)

Bu zynjyrdan akýan toguň we naprýaženiýanyň ujypsyz wagt pursatyndaky bahalary

$$i = I_m sin\omega t \qquad (13)$$

$$u = U_m sin(\omega t + \varphi) \qquad (14)$$

kanunlar boýunça üýtgeýärler. Bu ululyklary şertli belgilemeleri ulanyp

$$\dot{I} = I$$

$$\dot{U} = U e^{j\varphi}$$

görnüşde ýazmak mümkin. Bu halda kompleks garşylyk

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = |Z|(cos\varphi + jsin\varphi)$$

bolar. Indi, $|Z|cos\varphi = R$ we $|Z|sin\varphi = X_L$ bilen belgilesek, onda soňky deňlik

$$Z = R + jX_L \qquad (15)$$

görnüşi alar. Bu ýerde, R ululyk aktiw garşylygy, X_L ululyk bolsa, reaktiw garşylygy aňladýar. Onda, Omuň kanunyny kompleks

$$\dot{U} = \dot{I} Z = R\dot{I} + jX_L\dot{I} \qquad (16)$$

görnüşde ýazmak bolar. Şuňa meňzeş aňlatma, yzygider birikdirilen aktiw garşylyk we X_c reaktiw sygym garşylyk üçin

$$\dot{U} = R\dot{I} - jX_c\dot{I} \qquad (17)$$

görnüşi alar. Üýtgeýän toguň bahalary şahalanýan zynjyrlarda hasaplananda, adatça, elektrik geçirijilik ulanylýar. Kompleks garşylyga ters bolan ululyga **elektrik geçirijilik** diýilýär we ol Y bilen belgilenýär. Diýmek biziň mysalymyzda

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|e^{i\varphi}} = \frac{1}{|Z|}\ e^{-j\varphi} \qquad (18)$$

bolar.

Kompleks toguň we naprýaženiýanyň köpeltmek hasyly kuwwatyň aňlatmasyny ýeterlik derejede kesgitlemeýänligi üçin, kompleks görnüşli hasaplamalarda ony, kompleks naprýaženiýanyň kompleks toguň çatyrymlysyna köpeltmek hasyly görnüşde alýarlar, ýagny

$$\dot{S} = U\bar{I} = U|\bar{I}|e^{ij\varphi} = U|\bar{I}|cos\varphi + jU|\bar{I}|sin\varphi =$$
$$= P + jQ \qquad (19)$$

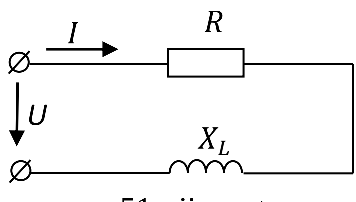
bu ýerde, $\bar{I}$ kompleks toguň çatyrymly ululygyny, P we Q bolsa, degişlilik-de aktiw we reaktiw kuwwaty aňladýarlar.

Kompleks kuwwatyň modulyna **doly kuwwat** diýilýär we ol S bilen belgilenýär. (19) deňlikden

$$S = |\dot{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

formulany alarys.

Çylşyrymly zynjyryň simwoliki usulynyň esasynda, üýtgeýän togyň işleýiş tertibine seredeliň. Goý, zynjyra goýulan naprýaženiýe we garşylyklar berilen bolsun (51-nji surat).



51-nji surat

Bu zynjyryň

$$Z_1 = R_1 + j(X_{L_1} - X_{C_1}) \qquad (20)$$
$$Z_2 = R_2 + j(X_{L_2} - X_{C_2}) \qquad (21)$$
$$Z_3 = R_3 + j(X_{L_2} - X_{C_3}) \qquad (22)$$

bölekleri üçin, doly kompleks garşylyk

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \qquad (23)$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Umumy toguň kompleksi bolsa,

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} \qquad (24)$$

bolar. Zynjyryň böleklerindäki togy tapmak üçin, BC bölekdäki napryýaženiýany

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U} - \dot{I}_1 Z_1 \qquad (25)$$

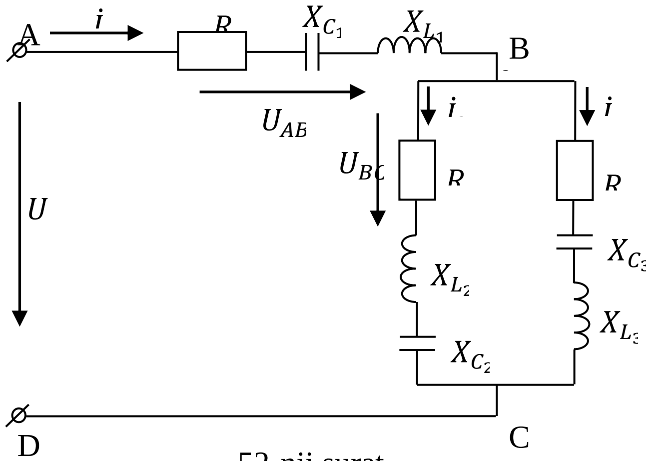
formula bilen tapyp (bu ýerde, $\dot{I} = \dot{I}_1$)

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_2}\ , \qquad (26)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_3} \qquad (27)$$

deňliklerde ornuna goýmak ýeterlik.

Mysal: $U = 220$ w; $R_1 = 3$ Om; $R_2 = 8$ Om; $X_{L_1} = 4$Om; $X_{L_2} = 6$ Om; $X_{C_3} = 8$ Om bolanda aşakdaky (52-nji surat)



52-nji surat

zynjyryň böleklerindäki togy tapmaly.

Çözülişi.

Biziň mysalymyzda $R_3 = 0,\ X_{C_1} = X_{C_2} = 0,\ X_{L_3} = 0.$ Şonuň üçin, (20), (21) we (22) formulalar degişlilik-de

$$Z_1 = R_1 + jX_{L_1} = (3 + 4j)Om$$
$$Z_2 = R_2 + jX_{L_2} = (8 + 6j)Om$$
$$Z_3 = -jX_{C_3} = -8j\ Om$$

görnüşi alarlar. Onda (23) formulanyň esasynda

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = 3 + 4j + \frac{(8 + 6j)(-8j)}{(8 + 6j) + (-8j)} =$$
$$= 3 + 4j + 8 \cdot \frac{3 - 4j}{4 - j} \approx 4 + 3j$$

bolar. (24), (25), (26), (27) deňliklerden bolsa, degişlilikde

$$\dot{I} = I_1 = \frac{\dot{U}}{Z} \approx (36 - 27j)A,$$
$$U_{BC} \approx 220 - (36 - 27j) \cdot 4j = -5w,$$
$$I_2 = \frac{U_{BC}}{Z_2} = -\frac{5}{8 + 6j} = (-0{,}4 + 0{,}3j)A,$$
$$I_3 = \frac{U_{BC}}{Z_3} = \frac{5}{8j} \approx (-0{,}63j)A$$

bahalary alarys, bu ýerde A (amper) - toguň ölçeg birligi, w (wolt) bolsa napryaženiýanyň ölçeg birligi.

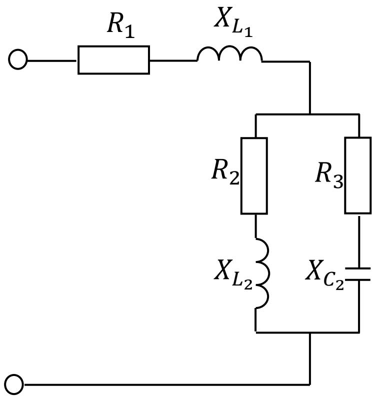
Özbaşdak çözmek üçin meseleler

Simwoliki usulyň kömegi bilen üýtgeýän togy,

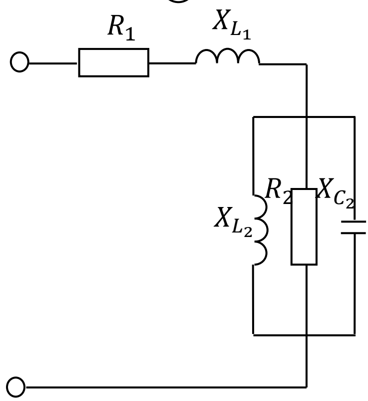
U w	R_1 Om	R_2 Om	R_3 Om	X_{L_1} Om	X_{L_2} Om	X_{L_3} Om	X_{C_1} Om	X_{C_2} Om	X_{C_3} Om
	3	8	6	5	4	2	1	3	2

hasap tablisasynda görkezilen bahalar boýunça, aşak-daky zynjyrlar üçin hasaplamaly.

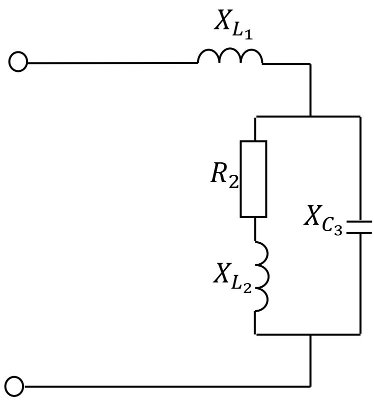
①


R_1
X_{L_1}
R_2
R_3
X_{L_2}
X_{C_2}

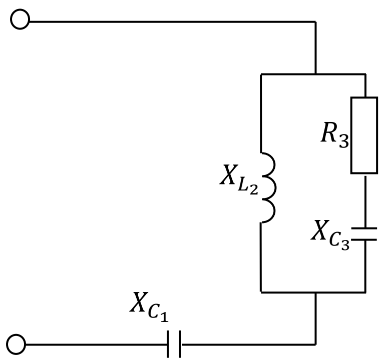
②


R_1
X_{L_1}
R_2
X_{C_2}
X_{L_2}

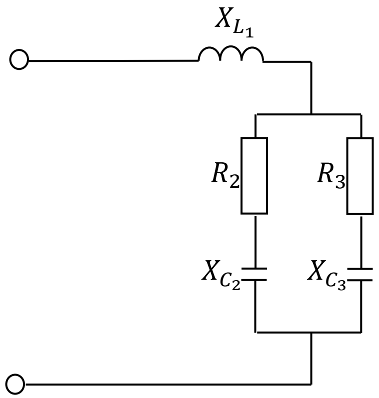
③


X_{L_1}
R_2
X_{C_3}
X_{L_2}

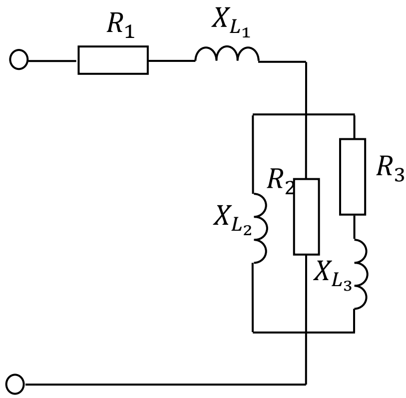
④


R_3
X_{L_2}
X_{C_3}
X_{C_1}

5



6



Özbaşdak işleriň jogaplary.

I bap

1. $2b(3a^2 - 3b^2)i,$ 2. $\dfrac{7 - 25i}{25},$

3. $-128 + 128\sqrt{3i},$

4. $z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),$ $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),$

5. $r = |z| = 1,$ $argz = \dfrac{5\pi}{b},$

6. $2\left[cos\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) + isin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)\right],$

7. $f(z) = e^x\, cosy + i(e^x\, siny + c),$

8. $f(z) = (1 + i)z + c,$ 9. $f'(z) = 3z^2,$

10. $f'(z) = cosz,$ 11. $f(z) = 2^z + c,$

12. $u = x + 2xy, v = y^2 - x^2 - y,$

$13. u=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \ v=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}.$

II bap

$1. -\dfrac{19}{3}+9i,\ \ 2. -\dfrac{2}{3}+i\dfrac{1}{3},\ \ 3. \dfrac{1}{2}+i, 4. -z-zi,$
$5. 2\pi i, 6. -\dfrac{11i}{3}, 7.\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{5}i, 8.\ 2\pi i, 9. \pi i. 10. \dfrac{\pi}{e}$
$11. -2\pi i, 12.0$

III bap

$1.1, 2.1, 3. \infty, 4.1, 5. \frac{1}{2}, 6. \infty, 7. z=0$-ikinji tertipli, $z_n=\pm 2i$-ýönekeý, $8. z_n=\pi n, (n=\pm 1, \pm 2, \dots)$- -ýönekeý, $9. z=0$ -üçünji tertipli, $z_n=\pi n,\ \ (n=\pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$ -ýönekeý,
$10. z_n=(2n+1)\pi i, (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ -ikinji tertipli,
$11. f(z)=-sin1+2(z+1)cos1+$
$+\dfrac{z^2}{2!}(z+1)^2 sin1-\dfrac{z^3}{3!}(z+1)^3 cos1-\dots$

$$12. f(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^5+\dots\right.$$

$$13.\ f(z)=-\tfrac{1}{5}\left[1+\tfrac{3}{5}(z+2)+\left(\tfrac{3}{5}\right)^2(z+2)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3}{5}\right)^3(z+2)^3+\dots\right.$$

$14. f(z)=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots$

IV bap

$$1. f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \cdots,$$

$$2. f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{z}{4!} + \cdots,$$

$$3. f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad 4. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}},$$

$$5. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\, z^n,$$

$$6. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+1}},$$

$$7. f(z) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{3^n}\right),$$

$$8. f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^{n-1}}{5^n}, \quad 9. f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{2^n \cdot z^n},$$

$$10. f(z) = z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \ldots$$

V bap

$$1. \underset{1}{res}\, f(z) = \frac{1}{2}, \quad \underset{3}{res}\, f(z) = \frac{1}{2},$$

$$2. \underset{2i}{res}\, f(z) = -\frac{i}{4}, \quad \underset{-2i}{res}\, f(z) = \frac{i}{4},$$

$$3. \underset{1+2i}{res}\, f(z) = -\frac{i}{4}, \quad \underset{1-2i}{res}\, f(z) = -\frac{i}{4},$$

$$4. \underset{2}{res}\, f(z) = 1, \quad 5. \underset{0}{res}\, f(z) = 0,$$

$$6. \underset{1}{res}\, f(z) = 1, \quad \underset{2}{res}\, f(z) = -3, \quad \underset{3}{res}\, f(z) = 2,$$

$7.\ 2\pi i,\qquad 8.\ 0,\qquad 9.\ \dfrac{13+9i}{750(1+i)},\qquad 10.2\pi i,$

$11.\ \dfrac{2\pi}{3-i}$, $12.\ \dfrac{3\pi}{8}$, $13.\ \dfrac{\pi}{16}$

VI bap

$1.\ F(p)=\dfrac{1}{2(p^3-3)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4},$

$2.\ F(p)=\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2},\qquad 3.\ F(p)=\dfrac{2}{p(p+4)^3},$

$4.\ F(p)=\dfrac{p^3+p^2+p+1}{p(p^2+1)^2}, 5.\ F(p)=ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{p}{p},$

$6.\ F(p)=\dfrac{(p+2)^2-8}{[(p+2)^2+4][(p+2)^2+16]},$

$7.\ f(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}),\qquad 8.\ f(t)=e^{2t}cos3t,$

$9.\ f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+2e^{-t}sint,$

$10.\ f(t)=\dfrac{3}{4}(1-t)-\dfrac{3}{4}cost+\dfrac{3}{8}sint,$

$11.\ f(t)=-1+\dfrac{1}{5}e^t+\dfrac{4}{5}cos2t-\dfrac{1}{10}sin2t,$

$12.\ f(t)=\dfrac{1}{12}e^{2t}-\dfrac{1}{12}e^{-t}\left(cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}sin\sqrt{3}t\right),$

$13.\ x(t)=\dfrac{1}{4}e^t\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{8},$

$14.\ x(t)=\ t^2-4t+6-5e^{-t}-te^{-t},$

$15.\ x(t)=2t+\dfrac{1}{2}(e^{-t}+cost-sint),$

$16.\ x(t)=\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t-4+e^{-t},$

$17.\ x(t)=e^{2t}-e^t+te^t, 18.\ x(t)=4t+3-2e^t.$

EDEBIÝATLAR

1. Berdimuhamedow G. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat: Ylym. 2007.
2. Болгов В.А. и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. М., Наука, 1986. 368 с.
3. Босс В. Лекции по математике . Т.9, ТФКП. М., Издательство ЛКИ, 2007. 216с.
4. Бугров Я.С. , Никольский С.М. Дифферен-циальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., Наука, 1985. 464с.
5. Чинаев П. И. и др. Высшая математика. Специальные главы. Киев, “Вища школа”, 1977. 368с.
6. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая матема-тика в упражнениях и задачах. Ч.III, М., “Высшая школа”, 1971. 288 с.
7. Hudaýberenow O.G. Ýokary matematika. Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw gollanmasy. A., Türkmen döwlet neşirýat gullygy, 2007. 592s.
8. Краснов Л.М. и др. Высшая математика. Т. 4., Едиториал УРСС, 2005. 352 с.
9. Краснов Л. М. , Киселёв А. И., Макаренко Г. Функции комплексного переменного. Операцион-ное исчисление. Теория устойчивости, М., Наука, 1981. 304 с.
10. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. Киев , “Вища школа”, 1973. 230с.
11. Пчелин Б. К. Специальные разделы высшей математики (Функции комплексного пере-менного. Операционное исчисление). М.,”Высшая школа”, 1973. 464 с.

12. Пискунов Н.С. Дифференцальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. Т. 2. М., Наука, 1985. 471 с.
13. Привалов И. И. Введение в теорию функ-ции комплексного переменного, М., Наука, 1977. 444с.
14. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функции комплексного переменного, М., Наука, 1982. 488с.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1.М., 1974. 479с., Т3, ч.2. 1974. 672 с.
16. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения, М., “Высшая школа”, 1988. 167с.

Mazmuny

Giriş.. 7

I bap.Kompleks sanlar we kompleks üýtgeýän ululyklar. Kompleks funksiýa we onuň differensirlenişi.

§1. Kompleks sanlar, olaryň geometriki şekil-lendirilişi, kompleks sanyň moduly we argumenti.............................9
§2. Kompleks sanlaryň üstünde amallar we olaryň geometriki şekillendirilişi...................................14
§3. Oblast barada düşünje we onuň görnüşleri.......................23
§4. Kompleks sanlaryň yzygiderligi we onuň predeli…...……26
§5. Kompleks üýtgeýän ululyk. Kompleks üýt-geýänli funksiýa…... 27
§6.Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň predeli we üznüksizligi……...33
§7.Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň önümi we differensialy.Koşi-Rimanyň şertleri. Analitik funksiýalar………………………..............................36
§8. Laplasyň deňlemesi we çatyrymly garmonik funksiýalar...43
§9. Kompleks funksiýanyň önüminiň geometrik manysy. Konform özgertme...........................46

II bap.Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integraly.

§1. Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integralynyň kesgitlenişi we onuň esasy häsiýetleri.............................51
§2. Birbaglanşykly oblast üçin Koşiniň integral teoremasy...58
§3. Birbaglanşykly oblast üçin Koşiniň integral formulasy...66

§4. Analitik funksiýanyň önüminiň formulasy. Köşi görnüşli integrallar..70

III bap.Analitik funksiýalaryň hatarlary

§1. Kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň hatarlary.................75
§2. Weýerştrasyň teoremasy 79
§3. Derejeli hatarlar..81
§4. Teýloryň hatary...83

IV bap.Loranyň hatarlary.

§1. Loranyň hatarynyň kesgitlenişi.......................................89
§2. Bir bahaly kompleks üýtgeýänli funksiýanyň aýratyn nokatlary...92
§3. Funksiýanyň noly we polýusy arasyndaky baglanyşyk...99
§ 4. Funksiýanyň tükeniksiz uzaklaşan nokatda Loranyň hataryna dargadylyşy...0.101

V bap. Wyçetler teoriýasy.

§1. Aýratyn nokada görä funksiýanyň wyçeti....................108
§2. Tükeniksiz daşlaşan nokada görä funksiýanyň wyçeti..112
§3. Wyçetler barada esasy teorema...............................114
§4.Wyçetleriň kesgitli integrallary hasaplamakda ulanylyşy...118

VI bap.Operatorly hasaplamanyň esaslary.

§1. Laplasyň öwürmesi...129
§2. Birlik funksiýa..131
§3. Laplasyň öwürmesiniň käbir häsiýetleri.........................133
§4. Funksiýanyň önümleriniň şekili......................................134
§5. Şekili differensirlemek...136

§6. Originaly we şekili integrirlemek...138
§7.Operatorly hasaplamanyň esasy teoremalary...........................139
§ 8. Dýuameliň integraly...144
§ 9. Käbir şekilleriň tablisasy…....…………………………….145
§10.Çyzykly differensial deňlemeleri çözmekde operatorly hasaplamanyň ulanylyşy...146
§11.Operatorly hasaplamanyň elektrik zynjyryndaky stasionar däl prosesleriň derňewinde ulanylyşy…………………150

VII bap. Analitik funksiýalaryň mehanikada we aragatnaşyk zynjyrlarynda ulanylyşy

§1.Analitik funksiýalaryň tekiz wektorlaryň meýdanlaryny hasaplamakda ulanylyşy........................154
§2.Sinusoidal toguň we naprýaženiýanyň aňladylyşy, olaryň kompleks ululyklarynyň arasyndaky baglylyk...156
§3.Analitik funksiýalaryň aragatnaşyk zynjyrlarynda ulanylyşy..158
Özbaşdak işleriň jogaplary....………................................……………....164
Edebiýatlar...168