Türkmenistanyň Bilim Ministrligi

Türkmen döwlet ulag we aragatnaşyk instituty

Gutlyýew G., Atdaýew S.

Ýokary matematika
(Köplükler nazarýeti, çyzykly algebra, wektor algebrasy, analitik geometriýa)

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Aşgabat –2008 ý.

Türkmen döwlet ulag we aragatnaşyk instituty

Gutlyýew G., Atdaýew S.

Ýokary matematika
(Köplükler nazarýeti, çyzykly algebra, wektor algebrasy, analitik geometriýa)

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

- Aşgabat : T B M, T D U we A I , 2008 ý.

Gollanmada, köplükler nazarýetiniň elementlerine, san köplüklerine, çyzykly algebranyň, wektor algebrasynyn we analitik geometriýanyň düşünjelerine, olaryň amaly gönükmeler tarapyndan berkidilişine üns berilýär. Gollanma, beyleki tarapdan, meseleleriň we tipli ýumuşlaryň hem ýygyndysydyr.

Gollanma ýokary mekdepleriň tehniki hem-de ykdysady hünärli talyplary üçin niýetlenip, ýöriteleşdirlen mekdepleriň talyplary, şeýle hem, matematika kursuny özbaşdak öwrenýänler üçin peýdaly bolup biler .

Syn ýazan: fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty Baýmämmet Pirnyýazow

Türkmen döwlet ulag we aragatnaşyk institutynyň Dünýä tejribesini öwreniş kafedrasy tarapyndan hödürlendi

Mazmuny:

GIRIŞ

Garaşsyz we Bitarap Türkmenistan Watanymyzyň ilkinji Prezidenti Beýik Saparmyrat Türkmenbaşy tarapyndan öňe sürlen Täze Bilim syýasaty Beýik galkynyşlar, özgerişler eýýamynda Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň tagallasy bilen täze many - mazmuna eýe boldy hem-de özüniň oňyn netijelerini berýär. Täze Bilim syýasatynyň esasy maksady – bazar ykdysadyýetine geçiş şertlerinde, ýurdumyzyň halk hojalygynyň ösüşini ylmy esaslarda has ilerletjek, ýokary ussatlykly hünärmenleri taýýarlamakdan ybaratdyr.

Häzirki bazar gatnaşyklaryna geçiş döwründe, matematiki apparadyň – usullaryň orny barha artýar. Dogrudan hem, halk hojalygynyň esasy pudaklarynyň: senagatyň, oba hojalygynyň, ulagyň, aragatnašygyň, söwdanyň we hyzmat ulgamynyň esasy meseleleri – görnüşleri rasional saýlamak hem-de çözgütleri ylmy esasda netijä getirmekdir. Diýmek, degişli matematiki modeller boýunça, zerur hasaplamalar kompýuterde hasaplanyp we barlanyp, her bir uly ýa-da kiçi kysymdaky hojalyk çözgütleri kabul edilýärler.

Gollanmada köplükler nazaryýetiniň, san köplükleriniň, wektorlar algebrasynyň we analitik geometriýanyň elementlerine seredilip geçilýär. Ykdysady-matematiki modelirlemede zerur bolan maglumatlar getirilýär. Maglumatlar, esasan, düşünjeler, kesgitlemeler, formulalar görnüşinde beýan edilip, teoremalar, köplenç, subutsyz kabul edilýärler. Formulalaryň ulanylyşlaryna degişli gönükdiriji meseleleriň işlenişleri gollanmada ýeterlik derejede berlendir. Gollanma, beyleki tarapdan, özbaşdak meseleleriň we tipli ýumuşlaryň hem ýygyndysydyr.

Dölwet dilimizde şeýle kitapçalaryň azdygyny nazarda tutup, talyplaryň matematika kursuny berkitmeklerinde şu gollanma hem goşant bolar diýip tama edýäris.

1. KÖPLÜKLER WE SAN KÖPLÜKLERI

Matematikada kesgitlemesi getirilmeýän ilkinji düşünjeleriň biri hem köplük düşünjesidir. Köplükleri dürli nyşanlaryň esasynda, birmeňzeş bolmadyk tebigatly obýektleriň – elementleriň üsti bilen emele getirmek mümkindir. Meselem, köplügi ony düzýän elementleriň häsiýetini ýa-da emele geliş düzgünlerini görkezip gurmak bolar.

plükleriň elementleri material obýektler ýa-da geometrik figuralar, simwollar, sanlar ýaly abstrakt-howaýy düşünjeler bolup bilerler. Şu bölümde umumy köplükler nazaryýetiniň elementlerine hem-de elementleri sanlardan ybarat köplüklere, hususan-da, natural, bitin, rasional, irrasional, hakyky hem-de kompleks san köplüklerine, olarda arifmetiki we beýleki amallaryň kesgitleniş aýratynlyklaryna serederis.

1.1. Köplükler nazaryýetiniň elementleri

Köplük diýlende, hökman, köp elementli bolmalydyr diýip düşünmeli däldir. Bir elementli, iki elementli, köp elementli we hiç bir elementi bolmadyk köplükler hem bolup bilerler. Elementi bolmadyk köplüge **boş köplük** diýilýär.

Köplükleri, esasan, $\boldsymbol{A,B,\dots,X}$ uly latyn harplary, olaryň degişli elementlerini bolsa, $\boldsymbol{a,b,\dots,x}$ ýaly kiçi harplar bilen belgileýärler. Boş köplük $\varnothing$ ýaly belgilenýär.

Eger $\boldsymbol{A}$ köplük $\boldsymbol{a_1,a_2,\dots,a_n}$ elementlerden durýan bolsa, onda ony

$\boldsymbol{A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}}$ ýa-da $\boldsymbol{A=\{a_i \mid i=1,2,\dots,n\}}$

görnüşde ýazmak bolar.

"$\boldsymbol{a}$ element $\boldsymbol{A}$ köplüge degişli" diýmegi

$\boldsymbol{a \in A}$

ýaly belgileýärler.

"$\boldsymbol{a}$ element $\boldsymbol{A}$ köplüge degişli däl" diýmegi

$\boldsymbol{a \notin A}$

görnüşde ýazýarlar. Meselem, eger $\boldsymbol{T=\{1,3,5,\dots,99\}}$ – 100 sana çenli täk sanlaryň köplügi bolsa, onda: $11 \in \boldsymbol{T}$, $24 \notin \boldsymbol{T}$ we ş.m.

Eger $\boldsymbol{B}$ köplügiň hemme elementleri $\boldsymbol{A}$ köplügiň hem elementleri bolsa, onda $\boldsymbol{B}$ köplüge $\boldsymbol{A}$ köplügiň ***bölek köplügi*** diýilýär we

$B \subset A$

ýaly ýazylýar. Meselem, eger $P=\{2,4,6,...,98,100\}$ – 1-den 100-e çenli jübüt sanlaryň köplügi bolsa, onda olaryň içinde 4-e bölünýän sanlaryň köplügi:

$S=\{4,8,12,...,96,100\}$

üçin $S \subset \mathbf{P}$ ýazyp bileris.

Islendik A köplük bölek köplügi hökmünde özüni hem-de boş köplügi saklaýar. Şol sebäpli:

$A \subset A$ we $\varnothing \subset A$

ýazgylar adalatlydyr.

Şol bir elementlerden ybarat A we B köplükler üçin

$A \subset B$ we $B \subset A$

ýazyp bolýandyr. Şeýle köplüklere, ***deň köplükler*** diýlip,

$A=B$

ýaly belgileýärler.

Eger A köplügiň boş bolmadyk B bölek köplügi A köplügiň özi bilen gabat gelmeýän bolsa, onda oňa A köplügiň ***hususy köplügi***, A köplügiň özüne bolsa, B köplüge görä ***umumy köplük*** diýilýär. Umumy köplügi U harpy bilen hem belgileýärler.

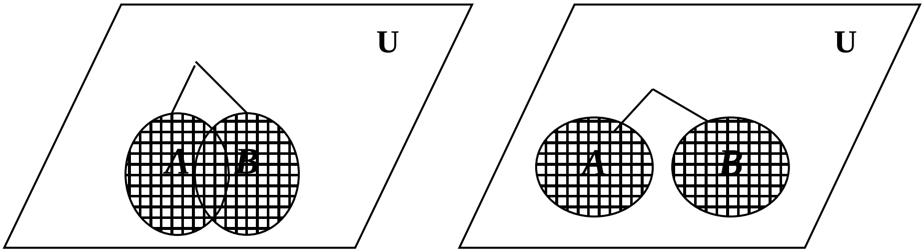
1.1.1. Köplükler üstünde amallar

***A* we *B* köplükleriň birleşmesi** diýlip, elementleri bu köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan, C köplüge aýdylýar we

$C=A \cup B$

ýaly belgilenýär.

Aýdyňlyk üçin, köplükleri ***Eýleriň–Wenniň diagrammalary*** diýlip atlandyrylýan, tekiz tegelek figuralarda aňladýarlar. Onda köplükleriň birleşmesini



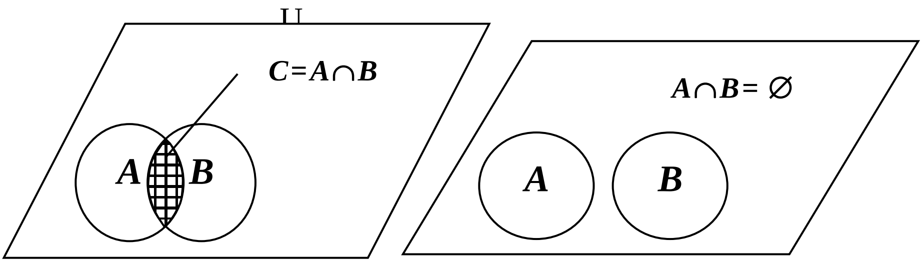
1.1-nji surat

görnüşlerde görkezmek bolar, bu erde U – umumy köplükdir.

A we ***B köplükleriň kesişmesi*** diýlip, elementleri bu köplükleriň ikisine-de umumy bolan C köplüge aýdylýar we

$$C=A\cap B$$

ýaly belgilenýär. Köplükleriň kesişmesi Eýleriň–Wenniň diagrammalarynda şeýle görkeziler:



1.2-nji surat

Köplükleriň birleşmesi we kesişmesi aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. Orun çalşyrma – kommutatiwlik:

$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$; $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$.

2. Utgaşdyrma – assosiatiwlik:

$\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$; $\boldsymbol{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$.

3. Paýlaşdyrma – distributiwlik:

$\boldsymbol{(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)}$; $\boldsymbol{(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)}$.

$\boldsymbol{A}$ we $\boldsymbol{B}$ ***köplükleriň tapawudy*** diýlip, elementleri $\boldsymbol{B}$ köplüge degişli bolmadyk $\boldsymbol{A}$ köplügiň elementlerinden durýan $\boldsymbol{C}$ köplüge aýdylýar we

$\boldsymbol{C = A \setminus B}$ ýa-da $\boldsymbol{C = A - B}$

ýaly belgilenýär.

Eger $\boldsymbol{B \subset A}$ bolsa, onda $\boldsymbol{C = A \setminus B}$ tapawuda $\boldsymbol{B}$ köplügiň $\boldsymbol{A}$ köplüge çenli ***doldurgyjy*** diýilýär. Şunlukda, $\boldsymbol{B \cup C = A}$, $\boldsymbol{B \cap C = \varnothing}$ bolýandygy düşnüklidir.

Iki köplügiň birleşmesi we kesişmesi düşünjelerini islendik tükenikli sanly $\boldsymbol{A_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ köplükler üçin giňeldip, şeýle ýazyp bileris:

$$\boldsymbol{P = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$$ – köplükleriň birleşmeleri;

$$\boldsymbol{Q = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}$$ – köplükleriň kesişmeleri.

Eger $\boldsymbol{A_i}$ $(i=1,2,\ldots)$ tükeniksiz sandaky köplükler bolsalar, onda olaryň birleşmelerini we kesişmelerini şeýle görkezýärler:

$$P=\bigcup_i A_i\,, \qquad\qquad Q=\bigcap_i A_i\,.$$

Goý $\boldsymbol{A}$ köplügiň tükenikli ýa-da tükeniksiz sandaky A_i $(i=1,2,\ldots)$ bölek köplükleriniň toplumy berlen bolsun. Onda ***ikileýinlik gatnaşygy*** diýlip at berilýän, aşakdaky deňlikler ýerine ýetýändir:

$$A\setminus\bigcap_i A_i=\bigcup_i\left(A\setminus A_i\right), \qquad\qquad A\setminus\bigcup_i A_i=\bigcap_i\left(A\setminus A_i\right).$$

Elementleri sanlardan ybarat köplüklere ***san köplükleri*** diýilýär. Biz, esasan, şeýle köplüklere hem serederis.

Eger (a,b) elementleriň jübti $a\in A,\ b\in B$ şertinde alnan bolsa, onda oňa ***tertipleşdirilen jübüt*** diýilýär.

$a_1=a_2,\ b_1=b_2$ bolanda, (a_1,b_1) we (a_2,b_2) tertipleşdirilen jübütler ***deň*** hasap edilýär. $\boldsymbol{A}$ we $\boldsymbol{B}$ köplükleriň $A\times B$ ***dekart köpeltmek hasyly*** diýlip, hemme (a,b) tertipleşdirilen jübütleriň köplügine aýdylýar, ýagny

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

Meselem, goý, $X=\{x\mid x\in R\}$, $Y=\{y\mid y\in R\}$ – degişlilikde abssissa we ordinata okunyň üstindäki nokatlaryň köplükleri bolsunlar. Onda

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$$

bütin ***xOy*** koordinat tekizligindäki nokatlaryň köplügini aňladar.

Köplükleriň üstünde dürli operasiýalary kesgitläp, şu pursada çenli, olaryň elementleriniň arasynda ***deňhukukly gatnaşyklar*** bar diýip hasap etdik. Emma, matematikada, içki strukturasy – elementleri boýunça ol ýa-da beýleki gatnaşyklar kesgitlenen, ***tertipleşdirilen köplükler*** bilen has köp iş salşylýar.

Kesgitleme. Eger $\boldsymbol{A}$ köplügiň islendik a, b elementleriniň arasynda:

1. Refleksiwlik: $a\le a$;
2. Antisimmetriklik: ***eger*** $a\le b$ ***we*** $b\le a$ ***bolsa, onda*** $a=b$;

3. Tranzitiwlik: ***eger*** $\boldsymbol{a \le b}$ ***we*** $\boldsymbol{b \le c}$ ***bolsa, onda*** $\boldsymbol{a \le c}$ häsiýetlerine eýe bolan $\boldsymbol{a \le b}$ (***a***-nyň bahasy ***b***-den geçmeýär) ***tertip gatnaşygy*** kesgitlenen bolsa, onda *A* köplüge ***tertipleşdirilen köplük*** diýilýär.

Boş köplük hem tertipleşdirilen hasap edilýär. Tertipleşdirilen köplükleriň elementlerini berlen tertip boýunça ýaýlaryň içinde görkezip ýazýarlar.

Meselem, $\{1, 2, 3\}$ sanlaryň köplüginde:

A = (1, 2, 3) – elementleri artýan;

B = (3, 2, 1) – elementleri kemelýän

tertiplerde kesgitlenen dürli tertipleşdirilen köplüklerdir.

1.1.2. Köplükleriň arasynda degişlilik we öwürmeler

Degişlilik hem matematikanyň ilkinji düşünjeleriniň biridir. Eger bir köplügiň her bir elementi üçin, beýleki köplügiň kesgitli elementini ýa-da elementleriniň bölek köplügini saýlaýan düzgün bar bolsa, onda ol iki köplügiň arasynda ***degişlilik bar*** diýip aýdýarlar. Şunlukda, birinji köplügiň käbir elementlerine boş bölek köplügiň degişli bolmagy hem mümkindir.

Köplükleriň arasynda degişlilik düşünjesiniň esasynda, ***köplükleriň öwürmesi*** düşünjesini girizýärler. ***A*** köplügiň her bir elementine ***B*** köplügiň diňe bir elementini we mundan başga-da, ***B*** köplügiň her bir elementine ***A*** köplügiň iň bolmanda bir elementini laýyk edýän degişlilige ***A köplügiň B köplüge öwürmesi*** diýilýär.

Köplükleriň öwürmesini ***f, g, h,*** … ýaly harplar bilen şeýle görkezýärler:

$$\boldsymbol{A \xrightarrow{f} B}, \qquad \boldsymbol{A \xrightarrow{g} B}, \qquad \boldsymbol{A \xrightarrow{h} B}, \qquad \ldots$$

ýa-da

$$\boldsymbol{f:\ A \longrightarrow B}, \qquad \boldsymbol{g:\ A \longrightarrow B},$$

$$\boldsymbol{h:\ A \longrightarrow B}, \qquad \ldots .$$

Eger f öwürmede $a \in A$ elemente $b \in B$ element degişli bolýan bolsa, onda $b = f(a)$ belgilenip, b elemente a elementiň ***obrazy***, a elemente bolsa, b elementiň ***asyl obrazy*** diýilýär. A köplügiň B köplügine öwürmesini $B = f(A)$ ýaly hem ýazýarlar. Eger f öwürmede A köplügiň dürli elementleri dürli obrazlara ee bolýan bolsa, onda $f: \ A \longrightarrow B$ öwürmä ***inýektiw*** diýilýär.

$f: \ A \longrightarrow B$, $g: \ A \longrightarrow B$ öwürmeleriň $f = g$ deňliginden, islendik $a \in A$ element üçin, $f(a) = g(a)$ gelip çykýar.

A köplügiň dürli elementlerine B köplügiň dürli elementlerini degişli edýän öwürmä ***özara birbelgili öwürme*** diýilýär. Başgaça, $f: \ A \longrightarrow B$ öwürme A köplügini B köplüge öwürýän hem-de inýektiw bolsa, onda A köplügiň B köplügine öwürmesi özara birbelgilidir. Özara birbelgili öwürmäni ***biýeksiýa*** diýip hem atlandyrýarlar.

Eger A we B köplükler gabat gelip, f – özara birbelgili öwürme bolsa, ýagny $f: \ A \longrightarrow A$, onda "A köplük özüne özara birbelgili öwrülýär" diýlip aýdylýar. Goý, $f: \ A \longrightarrow B$ özara birbelgili öwürme bolsun.

Kesgitleme. Her bir $b \in B$ elemente $a \in A$ asyl obrazyny degişli edýän öwürmä, ***f öwürme üçin ters öwürme*** diýilýär we f^{-1} ýaly belgileýärler.

Onda ters öwürme

$B \xrightarrow{f^{-1}} A$ ýa-da $f^{-1}: \ B \longrightarrow A$

görnüşlerde görkeziler. Eger f özara birbelgili öwürme bolsa, f^{-1} hem özara birbelgili öwürmedir; f^{-1} öwürme üçin ters öwürme f öwürmedir.

Kesgitleme. Eger A köplük özara birbelgili B köplügine öwrülýän bolsa, onda A we B köplüklerine ***ekwiwalent*** diýilýär we $A \sim B$ ýaly belgilenýär.

Ekwiwalent A we B köplükler barada, ***olaryň arasynda ekwiwalentlik gatnaşygy ýola goýlan*** diýip aýdýarlar.

Köplükleriň ekwiwalentlik gatnaşygy hem:

1. Refleksiwlik: $A \sim A$;
2. Simmetriklik: $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$;
3. Tranzitiwlik: $A \sim B$ we $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

häsiýetlerine eýedir.

Köplükler tükenikli we tükeniksiz köplüklere bölünýärler.

Kesgitleme. $[1, n]$ (ýa-da $\overline{1, n}$) natural hataryň kesimine ekwiwalent bolan köplüge ***tükenikli köplük*** diýilýär. Boş köplük hem tükenikli hasap edilýär. Tükenikli köplügiň elementlerini sanamak mümkindir, başgaça, onuň elementlerine 1-den n-e çenli sanlary eýe etdirsek, onda n san köplügiň elementleriniň sanyny görkezer.

A tükenikli köplügiň elementleriniň sanyna onuň ***kuwwaty*** diýilýär.

Teorema. (tükenikli köplükler barada). Islendik tükenikli köplük öz hususy bölek köplükleriniň hiç birine ekwiwalent däldir.

Tükenikli däl köplüge ***tükeniksiz köplük*** diýilýar. Tükeniksiz köplüge ähli natural sanlaryň N köplügi mysal bolup biler.

Eger her dürli tükeniksiz köplükler ähli natural sanlaryň N köplügi bilen deňeşdirilse, onda hemme tükeniksiz köplükler N köplüge ekwiwalent we ekwiwalent däl toparlara bölünýärler. Köplükleriň bu toparlaryna, degişlilikde, ***hasaply*** we ***hasapsyz köplükler*** diýilýär.

Diýmek, hasaply köplükleriň elementlerini käbir usulda natural sanlar bilen nomerlemek mümkindir. Hasaply köplüklere, jübüt natural sanlaryň ýa-da rasional sanlaryň köplükleri mysal bolup bilerler.

Tükeniksiz köplükler aşakdaky häsiýetlere eýedirler:

1. *Hasaply köplügiň islendik bölek köplügi tükeniklidir ýa-da hasaplydyr.*
2. *Hasaply köplükleriň islendik tükenikli ýa-da hasaply sanynyň jemi hasaply köplükdir.*
3. *Islendik tükeniksiz köplük hasaply bölek köplügini saklaýandyr.*

Soňky häsiýet, tükeniksiz köplükleriň arasynda, hasaply köplükleriň "iň kiçisidigini" aňladýar.

Hasapsyz köplüge $[0, 1]$ kesimdäki ähli nokatlaryň köplügini mysal getirse bolar. Bu kesimdäki nokatlaryň tükeniksizdigi, hakyky sanlaryň tükeniksiz periodik ýa-da periodik däl onluk droblar görnüşinde aňladylýandygyna esaslanyp, hemme natural sanlar bilen bu nokatlary belgilesek hem, ýene-de nuldan uly, birden bolsa kiçi hakyky sanlaryň belgilenmän galýandygy bilen düşündirilýär.

Eger köplük nuldan uly, birden kiçi hakyky sanlaryň köplügine ekwiwalent bolsa, onda onuň ***kontinuun kuwwaty*** (üznüksiz dowam edýän kuwwaty) bar diýilýär. Kontinuun kuwwatly köplüklere göni çyzygyň üstündäki islendik kesimiň nokatlarynyň köplügini, göni çyzygyň nokatlarynyň köplügini, tekizligiň üstündäki göni çyzyklaryň köplügini we ş . m. mysal getirse bolar.

1.1.3. Matematiki belgilemeler

Matematiki aksiomalarda, kesgitlemelerde, tassyklamalarda we teoremalarda şol bir söz düzümleriniň ulanylýan wagtlary seýrek bolmaýar. Gysga beýan etmek üçin, şeýle söz düzümleriniň käbirlerini ýörite belgiler, belgilemeler bilen çalyşýarlar.

1. $\in$, $\notin$ – degişli, degişli däl belgileri:
$a \in A$ – "***a*** element ***A*** köplüge degişli", $b \notin P$ – "***b*** element ***P*** köplüge degişli däl" diýlip okalýarlar;

2. $\subset$, $\supset$ – girme, özünde saklama belgileri:
$B \subset A$ – "***B*** köplük ***A*** köplügine girýär – bölek köplügi",
$A \supset B$ – "***A*** köplük ***B*** köplügini (bölek köplügini) özünde saklaýar" ýaly okalýarlar;

3. $\forall$ – "islendik … üçin" belgisi:
$\forall B$ – "islendik ***B*** köplük üçin" diýlip okalýar;

4. $\exists$ – "bar", "tapylýar" belgisi:
$\exists M$ – "***M*** köplügi bar",
$\exists x \in R$ – "***R*** köplügine degişli ***x*** element bar, tapylýar" ýaly okaýlarlar;

5. **:** – "ýerine ýetýär", "ýerinde bar" belgisi:
$\forall a \in A:\ a \in B$ – "***A*** köplüge degişli islendik ***a*** element üçin, ***a*** element ***B*** köplüge degişlidir" diýlip okalýar;

6. $\Rightarrow$ – "logiki gelip çykmak", "eger… bolsa, onda …" belgisi:
$(A \subset B) \Rightarrow (\forall a \in A:\ a \in B)$ – "eger ***A*** köplük ***B*** köplügiň bölek

köplügi bolsa, onda $\boldsymbol{A}$ köplügiň islendik $\boldsymbol{a}$ elementi üçin $\boldsymbol{a}$ degişli $\boldsymbol{B}$ gelip çykýar" diýlip okalýär.

7. $\Leftrightarrow$- "deňgüýçlilik", "şonda we diňe şonda, haçanda" belgisi: $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ - "$\boldsymbol{P}$ tassyklama $\boldsymbol{Q}$ tassyklama deňgüýçli" ýa-da "$\boldsymbol{P}$ tassyklama ýerine ýetýär, şonda we diňe şonda, haçanda $\boldsymbol{Q}$ ýerine ýetende", ýa-da "$\boldsymbol{P}$ tassyklamadan $\boldsymbol{Q}$ gelip çykýär we tersine , $\boldsymbol{Q}$ tassyklamadan $\boldsymbol{P}$ gelip çykýär" diýlip okalýar.

Şu bellemeleri girizmek bilen, meselem,

- köplükleriň birleşmesiniň kesgitlemesini:
  $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ ýa-da $x \in B)$;
- köplükleriň kesişmesiniň kesgitlemesini:
  $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A$ we $x \in B)$;
- köplükleriň tapawudynyň kesgitlemesini:
  $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A$ we $x \notin B)$;

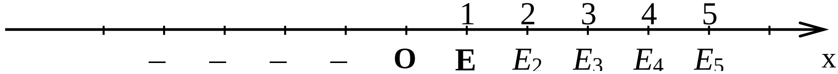
görnüşlerde ýazmak bolar.

1.2. San köplükleri

Ilki bilen san okuna kesgitleme bereliň. Goý, tekizlikde gorizontal ýerleşen göni çyzyk berilsin. Onuň sag tarapyny ***položitel ugur*** hasap edip, peýkam bilen belläliň. Položitel ugry görkezilen göni çyzyga **ok** diýip at bereliň. Onuň üstünde $\boldsymbol{O}$ nokady belläp, oňa ***hasap başlangyjy*** diýeliň. $\boldsymbol{O}$ nokatdan sagda $\boldsymbol{E}$ nokady belläp, $[OE]$ kesime ***masştab kesimi*** diýip at bereliň.

Kesgitleme. Eger göni çyzykda 1) položitel ugur; 2) $\boldsymbol{O}$ hasap başlangyjy; 3) $[OE]$ masştab kesimi berlen bolsa, onda oňa **san *oky*** diýilýär.

San okunda, $\boldsymbol{O}$ nokatdan sagda we çepde, $[OE]$ kesimi yzygider alyp goýalyň we emele gelen nokatlary: …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, … sanlar bilen belgiläliň. San okuna, başgaça, **koordinat oky (*Ox*)** hem diýilýär.



San okunda natural, bitin, rasional, irrasional we hakyky sanlaryň köplüklerine seredeliň.

1.2.1. Natural sanlar

San okunda $\boldsymbol{O}$ nokatdan sagda $[OE_1]$, $[OE_2]$, $[OE_3]$, $[OE_4]$, … kesimlere degişli sanlar: 1, 2, 3, 4, … ýaly belgilenerler. Olara ***natural sanlar*** diýilýär we $\boldsymbol{N}$ bilen belgilenýär. Başgaça, $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ natural sanlar predmetleri – naturalary – sanamakda ulanylýan sanlardyr.

Natural sanlaryň üstünde deňeşdirmek, goşmak, aýyrmak, köpeltmek, bölmek we natural derejä götermek amallary kesgitlenendir.

$\boldsymbol{k}$ we $\boldsymbol{n}$ sanlar deňeşdirilende aşakdaky ýagdaýlar bolup bilerler:

$$\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{k} > \boldsymbol{n}.$$

$\boldsymbol{k}$ we $\boldsymbol{n}$ sanlaryň:

– jemi $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{n}$;
– tapawudy $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{n}$;
– köpeltmek hasyly $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{n}$;
– paýy $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} : \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}/\boldsymbol{n}$

ýaly belgilenýärler.

n sanyň *k*-njy derejesi

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \ \ gezek}$$

ýaly belgilenip, $\boldsymbol{n}$ sana ***derejäniň esasy***, $\boldsymbol{k}$ sana bolsa, ***görkezijisi*** diýilýär.

Derejä götermek amalynyň aşakdaky häsiýetlerini belläliň:

1. Eger $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$ bolsa, onda $\forall\, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{N}: \quad \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$;

   eger $\boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$ bolsa, onda $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{k}} > \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$;
2. Islendik natural sanlar üçin derejä götermek amaly kesgitlenendir;

3. Islendik k, n natural sanlar üçin $\boldsymbol{n^k}$ ýeke-täkdir;
4. Islendik k, n natural sanlar üçin $\boldsymbol{n^k}$ natural sandyr;
5. Islendik k, n, p natural sanlar üçin $\boldsymbol{n^k n^p = n^{k+p}}$;
6. Islendik k, n, p natural sanlar üçin $\boldsymbol{(n^k)^p = n^{kp}}$;
7. Islendik k, n, p natural sanlar üçin $\boldsymbol{n^k p^k = (np)^k}$.

Kesgitleme. Nul san bilen bilelikde natural sanlaryň $\boldsymbol{N}$ köplügine ***natural sanlaryň giňeldilen köplügi*** diýilýär we $\boldsymbol{Z_0}$ bilen belgilenýär $(\boldsymbol{N \subset Z_0})$.

$\boldsymbol{Z_0}$ köplükde nul san bilen baglanyşykly

$$\boldsymbol{0+n=n+0=n}, \qquad \boldsymbol{0\cdot n=n\cdot 0=0}$$

amallar goşulýar.

Islendik natural sanyň nul derejesi bire deň hasap edilýär:

$$\boldsymbol{n^0=1}.$$

Nuluň nulynjy derejesi we nula bölmek amaly kesgitlenen däldir.

Kesgitleme. $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ ýa-da $\boldsymbol{m/n}$, $(\boldsymbol{m \in Z_0},\ \boldsymbol{n \in N})$ görnüşde kesgitlenen sana ***drob*** diýlip, $\boldsymbol{m}$ we $\boldsymbol{n}$ sanlara, degişlilikde, **sanawjy** we **maýdalawjy** diýilýär.

Droblaryň köplügini $\boldsymbol{Q^+}$ bilen belgileýärler. Islendik $\boldsymbol{k}$ natural sana $\boldsymbol{k=k/1}$ drob görnüşinde seretmek bolar. Onda:

$$\boldsymbol{N \subset Q^+}, \qquad \boldsymbol{Z_0 \subset Q^+} \qquad \text{ýa-da} \qquad \boldsymbol{N \subset Z_0 \subset Q^+}.$$

Droblary deňeşdirmek $\boldsymbol{Z_0}$ köplükden sanlary deňeşdirmeklige getirilýär.

Eger $\boldsymbol{mq=np}$ bolsa, onda $\boldsymbol{m/n=p/q}$ droblar deň bolup, bu deňlige ***proporsiýa*** diýilýär.

Eger $\boldsymbol{mq>np}$ bolsa, onda $\boldsymbol{m/n>p/q}$.

Eger $mq < np$ bolsa, onda $m/n < p/q$.

Droblary goşmak we aýyrmak

$$\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q \pm n \cdot p}{nq}$$

düzgünde ýerine ýetirilýär.

Droblary köpeltmek we bölmek, degişlilikde,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}, \qquad \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$$

ýaly ýerine ýetirilýär.

m/n drobuň k-njy derejesi şeýle p/q droba deňdir:

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n}\right)^k = \frac{m^k}{n^k}.$$

Kesgitleme. $n = 10^p$ $(p \in N)$ maýdalawjyly m/n droba ***onluk drob*** diýilýär we onluk drob

$$k, l_1 l_2 \dots l_n \dots$$

görnüşde belgilenýär, bu ýerde $k \in Z_0$ –sanyň bitin bölegidir; $l_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $(i = 1,2,\dots)$ – onluk sifrlerdir.

Drob sanyň ýazgysynyň soňundaky nullar taşlanyp ýazylýar.

Eger onluk drobuň ýazgysynda käbir s nomerden başlap, şol bir (l) san ýa-da käbir $(l_{s+1} l_{s+2} \dots l_{s+t})$ sanlaryň utgaşmasy gaýtalanyp gelýän bolsa, onluk droba ***periodik drob***, (l) sana ýa-da $(l_{s+1} l_{s+2} \dots l_{s+t})$ utgaşma bolsa bu drobuň ***periody*** diýilýär.

Tükeniksiz periodik onluk droby

$k, l_1\, l_2 \ldots l_s\,(l)$ ýa – da

$$k, l_1\, l_2 \ldots l_s\,(l_{s+1}\, l_{s+2} \ldots l_{s+t})$$

görnüşde ýazýarlar.

Islendik adaty droby tükeniksiz, periodik onluk drob görnüşinde ýazmak bolar. Onuň üçin m/n drobuň sanawjysyny maýdalawjysyna bölmelidir. Meselem:

$$\frac{1}{2} = 0{,}500\ldots0\ldots = 0{,}5(0) = 0{,}5\,.$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}66\ldots6\ldots = 0{,}(6).$$

$$+\frac{12}{7} = +1{,}714285714285\ldots = +1{,}(714285).$$

1.2.2. Bitin sanlar

San okunda O nokatdan sag (položitel) ugurda masştab kesimini n gezek alyp goýup, položitel n sany alarys. Indi masştab kesimini çep (garşylykly) ugurda n gezek alyp goýalyň we alnan sany ***otrisatel n san*** atlandyryp, $-n$ ýaly belgiläliň.

Kesgitleme. Nuldan, natural sanlardan hem-de olara garşylykly sanlardan ybarat san köplügine ***bitin sanlaryň köplügi*** diýilýär we Z bilen belgilenýär. Diýmek,

$$Z = \{\ldots, -n, -n+1, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Bitin sanlaryň köplüginde deňeşdirme amaly natural sanlaryň köplügindäki ýaly kesgitlenýär.

Goşmak amaly aşakdaky deňliklerde kesgitlenýär:

1) $(-k)+(-n) = -(k+n)$;

2) $(-k)+0 = -k$;

3) $$(-k)+n=\begin{cases}-(k-n), & \textbf{eger} \quad k>n \ \textbf{bolsa,}\\ n-k, & \textbf{eger} \quad k<n \ \textbf{bolsa,}\\ 0, & \textbf{eger} \quad k=n \ \textbf{bolsa.}\end{cases}$$

Aýyrmak amaly $a-b=a+(-b)$ deňlikden hasaplanýar.

Köpeltmek amaly üçin alarys:

1) $(-k)\cdot(-n)=kn$;   2) $(-k)\cdot n=-kn$;   3) $(-k)\cdot 0=0\cdot(-k)=0$.

Bölmek amalynda nula bölmek bolmaýandygyny bellemelidir.

Derejä götermek amaly hem natural sanlardaky ýaly kesgitlenýär.

1.2.3. Rasional we irrasional sanlar

Eger san okunda O nokatdan sag tarapda m/n drob alynýan bolsa, onda çep tarapda $-m/n$ drob alnar. Olara hem ***özara garşylykly*** sanlar diýilýär.

Kesgitleme. Nuldan, hemme položitel we otrisatel droblardan ybarat san köplügine ***rasional sanlaryň köplügi*** diýilýär we Q bilen belgilenýär.

Diýmek,

$$N\subset Z_0\subset Z\subset Q$$

ýerine ýetip, islendik rasional sany m/n görnüşde ýazmak bolýandyr; bu ýerde $m\in Z$, $n\in N$.

Rasional sanlary deňeşdirmek, goşmak, aýyrmak, köpeltmek, bolmek we derejä götermek amallary droblaryňky ýalydyr. Nula bölmek bolýan däldir.

Belli bolşy ýaly, islendik položitel droby tükeniksiz periodik onluk drob görnüşinde ýazmak bolýar. Onda islendik otrisatel droby hem tükeniksiz periodik onluk drob görnüşinde ýazyp bolar. Meselem:

$\left(-\frac{1}{3}\right)=-0,(3)$. Şeýlelikde, nul sany hem $0=-0,(0)$ görnüşinde aňlatmak mümkin. Netijede, *rasional sanlara islendik periodik onluk drob görnüşinde ýazyp bolýan sanlar degişlidir*.

Rasional sanlar san okuny doly ýapmaýarlar. Meselem, birlik kwadratyň diagonalynyň uzynlugy $\sqrt{2}$-ä deň bolup, ony m/n drob görnüşinde ýazyp bolýan däldir.

Kesgitleme. Tükeniksiz periodik däl onluk drob görnüşinde aňladylýan sanlara ***irrasional sanlar*** diýilýär we $\boldsymbol{I}$ bilen belgilenýär.

Diýmek, san okundaky islendik nokat rasional ýa-da irrasional sanlarda aňladylar.

1.2.4. Hakyky sanlar

Hemme rasional we irrasional sanlaryň köplügine ***hakyky sanlaryň köplügi*** diýilýär we $\boldsymbol{R}$ bilen belgilenýär. Diýmek, islendik tükeniksiz onluk drob hakyky sandyr hem-de $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\cup\boldsymbol{I}$.

Praktikada tükeniksiz onluk drobyň hemme sifrlerini ýazmak mümkin däldir. Şonuň üçin, droby kesgitli onluk razrýadlara çenli tegelekläp, ýakynlaşan bahasyny ulanýarlar.

Hakyky sanlar deňeşdirilende, olaryň san okunda ýerleşişlerini göz öňünde tutmak bolar. Çepdäki san kiçidir. Ýogsa-da olaryň položitel – otrisateldigini, bitin bölekleriniň ululygyny, onluk razrýadlar boýunça deňeşdirmeleri ulanmalydyr.

Hakyky sanlaryň köplüginde hem goşmagyň we köpeltmegiň orun çalşyrma, utgaşdyrma kanunlary ýerine ýetýär. Goşmak we köpeltmek amallary paýlaşdyrma kanuny arkaly baglanyşýarlar:

$$\forall\, a,b,c\in R:\quad (a+b)\cdot c=ac+bc\,.$$

Hakyky sanyň natural derejesi

$$a^k=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k\ \text{gezek}},\qquad a\in R,\ k\in N$$

ýaly hasaplanylýar. Hakyky sanyň nul derejesi hem bire deňdir, ýagny

$\boldsymbol{a^0=1}$, $\boldsymbol{a\in R}$.

Nuldan tapawutly $\boldsymbol{a\neq 0}$ sanyň otrisatel bitin derejesi

$\boldsymbol{a^{-1}=1/a^n}$

hasaplanýar.

Kesgitleme. a sandan alnan ***täk*** $\boldsymbol{(2k+1,\quad k\in N)}$ ***derejeli kök*** diýlip, şeýle ýazgylara düşünilýär:

$\boldsymbol{a^{\frac{1}{2k+1}}}$ ýa-da $\boldsymbol{\sqrt[2k+1]{a}}$.

Teorema. $\boldsymbol{a}$ hakyky sandan alnan täk derejeli kök ýeke-täk bolup,

1. $\boldsymbol{a=0}$ bolsa, alnan kök nula deňdir;
2. $\boldsymbol{a<0}$ bolsa, alnan kök otrisateldir;
3. $\boldsymbol{a>0}$ bolsa, alnan kök položiteldir.

Kesgitleme. $\boldsymbol{a}$ hakyky sandan alnan ***jübüt*** $\boldsymbol{(2k,\quad k\in N)}$ ***derejeli kök*** diýip, 2***k***-njy derejesi $\boldsymbol{a}$ sana deň bolan sana aýdylýar.

Teorema. $\boldsymbol{a}$ hakyky sandan alnan jübüt derejeli kök:

1. $\boldsymbol{a<0}$ bolsa, kesgitlenen däldir;
2. $\boldsymbol{a=0}$ bolsa, ol nula deňdir;
3. $\boldsymbol{a>0}$ bolsa, ol iki sany özara garşylykly sandyr.

Mesele: 9 sandan alnan kwadrat kök 3 we –3 sanlardyr, sebäbi

$\boldsymbol{3^2=9}$ we $(-3)^2=9$.

Kesgitleme. $\boldsymbol{a}$ položitel hakyky sandan alnan ***jübüt derejeli arifmetiki kök*** diýip, $\boldsymbol{b^{2k}=a}$ deňligi kanagatlandyrýan položitel $\boldsymbol{b}$ sana aýdylýar.

Diýmek, 9 sandan alnan arifmetiki kwadrat kök 3 sana deňdir.

Aýdyňlyk üçin, $\boldsymbol{a}$ položitel sandan alynýan arifmetiki köki $\sqrt[2k]{\boldsymbol{a}}$ görnüşde, algebraik köki $\pm\sqrt[2k]{\boldsymbol{a}}$ görnüşde belgileýärler.

Kesgitleme. Islendik hakyky $\boldsymbol{a}$ sanyň $\boldsymbol{m/n}$ drob derejesi

$$\boldsymbol{a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

ýaly tapylyp, $\boldsymbol{m<0}$ bolanda $\boldsymbol{a\neq 0}$, n jübüt bolanda $\boldsymbol{a\geq 0}$ bolmalydyr. Meselem,

$$\boldsymbol{(-8)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{-8}\right)^4 = (-2)^4 = 16}.$$

Eger sanyň dereje görkezijisi irrasional san bolsa, ol sany ýeterlik golaý rasional sanlar bilen çalşyryp, gözlenýän bahany ýakynlaşan hasaplaýarlar. Meselem,

$$\boldsymbol{5^e = 5^{2,718281..} \approx 5^{2,71828}}.$$

Hakyky sanlaryň tapawudy

$$\boldsymbol{a-b = a+(-b)}$$

görnüşinde goşmak amalyna getirilýär.

Hakyky $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ sanlaryň üstünde kesgitlenen $\boldsymbol{a:b}$ amaly üçin $\boldsymbol{c}$ san tapylyp, $\boldsymbol{c\cdot b = a}$ ýerine ýetmelidir.

Kesgitleme._ $\boldsymbol{a}$ hakyky sanyň **absolýut ululygy** diýip:

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \textbf{eger } \boldsymbol{a\geq 0} \textbf{ bolsa,} \\ \boldsymbol{-a}, & \textbf{eger } \boldsymbol{a\leq 0} \textbf{ bolsa} \end{cases}$$

düzgün bilen tapylýan položitel $|\boldsymbol{a}|$ sana düşünilýär.

Diýmek,

$|7| = 7$, $\qquad |-7| = 7$.

Hakyky sanlaryň absolýut ululygynyň şeýle häsiýetleri bardyr:

1. $\forall\, \boldsymbol{a, b \in R}:\quad |a+b| \le |a| + |b|$;
2. $\forall\, \boldsymbol{a, b \in R}:\quad |a\,b| = |a|\,|b|$;
3. $\forall\, \boldsymbol{a, b \in R}:\quad |a/b| = |a|/|b|$, **bu ýerde** $b \neq 0$;
4. $\forall\, \boldsymbol{a \in R}, \forall\, \boldsymbol{n \in N}:\quad |a^n| = |a|^n$;
5. $\forall\, \boldsymbol{a \in R}:\quad \sqrt{a^2} = |a|$.

Kesgitleme. ***Algebraik aňlatma*** diýip, goşmak, aýyrmak, köpeltmek, bölmek, derejä götermek amallary hem-de ýaýlar bilen birleşdirilen hakyky sanlaryň toplumyna aýdylýar. Algebraik aňlatmanyň bahasyny aşakdaky tertipde hasaplaýarlar:

1) ýaýlaryň içindäkileriň bahalaryny tapmaly;
2) derejä götermek amalyny ýerine ýetirmeli;
3) köpeltmek, bölmek amallaryny hasaplamaly;
4) goşmak, aýyrmak amallaryny işlemeli.

Hasaplamalary ýeňilleşdirmekde gysgaça köpeltmek formulalarynyň hem ähmiýeti uludyr:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,\ a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b),$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,\ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot\left(a^2 \mp ab + b^2\right).$$

Gönükme. Hasaplamaly:

$$\left[10 - 0{,}21 : \left(4{,}2 - 3\frac{4}{5}\right)\right] : \left(1{,}3 \cdot 1\frac{19}{24}\right) = 4\frac{38}{559}$$

➲ 1) $4{,}2-3\frac{4}{5}=4\frac{2}{10}-3\frac{4}{5}=1\frac{2-8}{10}=\frac{12-8}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$;

2) $0{,}21:0{,}4=0{,}525$;

3) $10-0{,}525=9{,}475$;

4) $1{,}3\cdot 1\frac{19}{24}=\frac{13}{10}\cdot\frac{43}{24}=\frac{559}{240}$;

5)
$$9{,}475:\frac{559}{240}=9\frac{475}{1000}:\frac{559}{240}=\frac{9475}{1000}:\frac{559}{240}=$$
$$\frac{9475\cdot 240}{1000\cdot 559}=\frac{379\cdot 6}{1\cdot 559}=\frac{2274}{559}=4\frac{38}{559}.$$ ➲

1.2.5. Kompleks sanlar

Bilşimiz ýaly, islendik ölçegleriň netijesini R – hakyky sanlaryň köplüginde aňlatmak mümkindir. Emma deňlemeler çözülende, meselem, $x^2+1=0$ deňlemäniň koeffisientleri bitin, hakyky sanlar bolsa-da, hakyky sanlaryň köplüginde olaryň çözüwiniň bolmaýan ýagdaýlary köp duş gelýär.

Şeýlelikde, hakyky sanlaryň köplügini umumylaşdyrmak zerurlygy ýüze çykýar, ol umumylaşdyrma hem C bilen belgilenýän ***kompleks sanlaryň köplügidir***.

Kesgitleme. $a+b\cdot i$ görnüşdäki ýazga ***kompleks san***, $a\in R$ we $b\in R$ hakyky sanlara, degişlilikde, onuň ***hakyky*** we ***hyýaly*** bölekleri, $i^2=-1$ şert bilen kesgitlenýän i simwola bolsa, ***hyýaly birlik*** diýilýär.

Adatça kompleks sany z harpy bilen, onuň hakyky we hyýaly böleklerini bolsa, degişlilikde, $\mathrm{Re}\,z$ we $\mathrm{Im}\,z$ arkaly belgileýärler. Onda:

$z = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

$z = a + bi$ ýazga, başgaça, ***kompleks sanyň algebraik formasy*** diýilýär.

Kompleks sany $z = (a, b)$ sanlaryň ***tertipleşdirilen jübti*** görnüşde hem aňladýarlar. Şeýlelikde $(a, 0)$ sanlaryň tertipleşdirilen jübtüni a – hakyky sana deň hasap edýärler. Diýmek,

$R \subset C$ ýa-da $(N \subset Z_0 \subset Z \subset Q) \cup I = R \subset C$.

$z_1 = a_1 + b_1 i$ we $z_2 = a_2 + b_2 i$ sanlar, diňe $a_1 = b_1$ we $a_2 = b_2$ bolanda deňdirler. Ol sanlaryň jemi we köpeltmek hasyly bolsa, degişlilikde,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$$

ýaly tapylýar.

Gönükme. $z_1 = 3 + 2i$ we $z_2 = 5 - 3i$ kompleks sanlaryň jemini hem-de köpeltmek hasylyny tapmaly.

➲ $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (5 - 3i) = (3 + 5) + (2 - 3) \cdot i = 8 - i$;
$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (5 - 3i) = [3 \cdot 5 - 2 \cdot (-3)] + [3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2] \cdot i = 21 + i$
. ➲

Umuman, C – kompleks sanlaryň köplüginde goşmak we köpeltmek amallary üçin:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – kommutatiwlik;
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,
3. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ – assosiatiwlik;
4. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – distributiwlik

kanunlary ýerine etýändir.

Bu kanunlaryň esasynda, şol bir z kompleks san üçin:

$$\underbrace{z+z+\cdots+z}_{n\ \text{sany}}=nz\,; \qquad \underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n\ \text{sany}}=z^n$$

ýazyp bileris.

$\boldsymbol{i^2=-1}$ deňlikden

$$\boldsymbol{i^3=-i}\,; \qquad \boldsymbol{i^4=-i\cdot i=-i^2=1}\,; \qquad \boldsymbol{i^5=i}\,;$$

diýmek, $\forall\, \boldsymbol{k}\in \boldsymbol{N}$ üçin $\boldsymbol{i^{4k}=1}$, $\boldsymbol{i^{4k+1}=i}$ alarys.

Kesgitleme. $\boldsymbol{\bar{z}=a-bi}$ sana $\boldsymbol{z=a+bi}$ san üçin ***kompleks çatyrymly*** diýilýär.

Bu ýerden: $\boldsymbol{\bar{\bar{z}}=z}$, $\boldsymbol{z\cdot\bar{z}=a^2+b^2}$.

Onda bölmek amaly üçin alarys:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)\cdot(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a^2+b^2}\cdot i\,.$$

Gönükme. Hasaplamaly: $\boldsymbol{\dfrac{3+5i}{1+7i}}$.

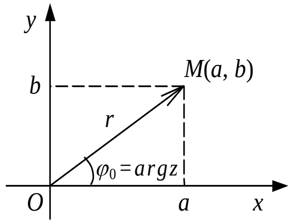
⮊

$$\frac{3+5i}{1+7i}=\frac{(3+5i)\cdot(1-7i)}{(1+7i)\cdot(1-7i)}=\frac{3-21i+5i+35}{1^2+7^2}=\frac{38-16i}{50}=\frac{19}{25}-\frac{8}{25}i\,.$$

⮈

Kompleks sany $\boldsymbol{Oxy}$ dekart gönüburçly koordinatlar ulgamynda $\boldsymbol{M(a;\,b)}$ nokat ýa-da $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ radius-wektor arkaly belgileýärler (sur. 1.3).

Eger $\boldsymbol{O}$ we $\boldsymbol{M}$ nokatlar gabat gelseler, onda $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ wektoryna nul wektor diýilýär: $\vec{\mathbf{0}} = \mathbf{0} + \mathbf{0}\boldsymbol{i}$.



1.3-nji surat

Şeýlelikde, ***Oxy*** koordinat tekizligine ***C* – *kompleks tekizligi***, ***Oxy*** we ***Oxy*** oklaryna bolsa, degişlilikde, ***hakyky*** we ***hyýaly oklar*** diýilýär. $(\mathbf{0};\mathbf{1})$ nokat hyýaly birligi şekillendirýär.

Goý, ***M*(*a*;*b*)** nokat $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ kompleks sana degişli bolsun. Onda $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ wektoryň uzynlygyna ***z*** sanyň ***moduly***, bu wektoryň hakyky okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçunyň radian ölçegine ***z*** sanyň ***argumenti*** diýilýär.

z kompleks sanyň moduly

$$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} ,$$

argumenti

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{Arg\, z} = \boldsymbol{arctg}\, \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

formulalar bilen tapylýarlar.

Argumentiň birbelgili kesgitlenen bahasyny $\mathbf{arg}\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{0}}$ ýaly ýazýarlar, bu baha $-\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{0}} \le \boldsymbol{\pi}$ şerti kanagatlandyrýar (sur. 3).

Eger kompleks san hakyky san bilen gabat gelse, onda oňa degişli wektor hakyky okda ýatar we $|\boldsymbol{z}|$ düşünjesi ***a*** hakyky sanyň $|\boldsymbol{a}|$ moduly düşünjesine getirer.

Gönükme. $\boldsymbol{z} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$ sanyň modulyny we argumentini tapmaly.

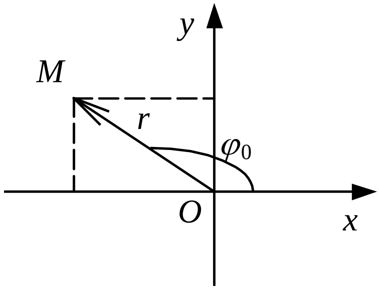
➲ $$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}} = \mathbf{1}.$$

$$\varphi = Arg\,z = arctg\left(\frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -arctg\left(\frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}}\right) = -arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot k;\ \arg z = \frac{5\pi}{6}.$$

Dekart koordinatlar ulgamy bilen ***birlikde polýar koordinatlar ulgamyny*** hem ulanýarlar.

Polýar koordinatlar ulgamynda ***O*** (polýus) nokady we bu nokatdan çykýan ***l*** şöhläni (polýar oky) kabul edip, ***O*** nokady dekart koordinatlar ulgamynyň başlangyjy $O(0;0)$, polýar oky bolsa, abssissa oky bilen gabatlaşdyrýarlar. Onda tekizlikde islendik ***M*** nokat $\overrightarrow{OM}$ wektoryň ***r*** uzynlygy hem-de bu wektoryň polýar oky bilen emele getirýän φ burçy arkaly kesgitlener.



1.4-nji surat

Bu ýerde ***r*** – otrisatel däl hakyky sandyr. φ koordinat bolsa, köpbahaly kesgitlenip, diňe $-\pi < \varphi_0 \le \pi$ şerti kanagatlandyrýanlaryny saýlaýarlar. Abssissa okunyň položitel ugrunda ýatan nokatlar üçin $\varphi_0 = 0$, otrisatel ugrunyň üstünde ýatan nokatlar üçin $\varphi_0 = \pi$; ordinata okunyň položitel we otrisatel ugurlarynda, degişlilikde $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ we $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ bolarlar (sur. 1.4).

$(x;y)$ dekart we $(r;\varphi)$ polýar koordinatlar ulgamlarynyň arasyndaky baglanyşyk

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi; \tag{1.1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x} \tag{1.2}$$

formulalar arkaly kesgitlenýär. (1.1) gatnaşyk boýunça, nokadyň belli polýar koordinatlary arkaly dekart koordinatyny, (1.2) formula boýunça bolsa, belli dekart koordinatlardan polýar koordinatlaryny tapýarlar.

(1.1) gatnaşykdan alarys:

$$z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (1.3)$$

bu ýerde: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Kesgitleme. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ýazga kompleks sanyň ***trigonometrik formasy*** diýilýär.

Diýmek, islendik $z = x + yi$ kompleks sany trigonometrik formada ýazmak mümkindir.

Kompleks sanlary goşmagy we aýyrmagy kompleks sanyň algebraik formasyny ulanmak arkaly geçirmek amatlydyr. Emma köpeltmek we bölmek amallaryny kompleks sanyň trigonometrik formasyny ulanmak arkaly geçirmek ýönekeýdir.

Goý, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ we $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleks sanlar berlen bolsun. Onda:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)] =$$

$$= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

ýagny

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (1.4)$$

Şuňa meňzeşlikde alarys:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \qquad (1.5)$$

Diýmek, kompleks sanlar köpeldilende (bölünende), olaryň modullary köpeldilýärler (bölünýärler), argumentleri bolsa, goşulýarlar (aýrylýarlar).

(1.4) formuladan alarys:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1.6)$$

Diýmek, kompleks san n natural görkezijili derejä göterilen wagtynda, onuň moduly hem şol derejä göterilýär, argumenti bolsa, şol n sana köpeldilýär.

Gönükme. $\left(\sqrt{3}-i\right)^8$ hasaplamaly.

➲ Ilki bilen $z=\sqrt{3}-i$ kompleks sanyň modulyny we argumentini tapalyň:

$$|z|=r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2, \quad tg\,\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi=-\frac{\pi}{6}.$$

Onda

$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

ýazyp bileris. (1.6) formula boýunça alarys:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^8=2^8\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{6}\right)\right],$$

bu ýerde: $2^8=256$, $\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{8\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Onda:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^8 = 256\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128 + i\cdot 128\sqrt{3}\,.$$ ⮌

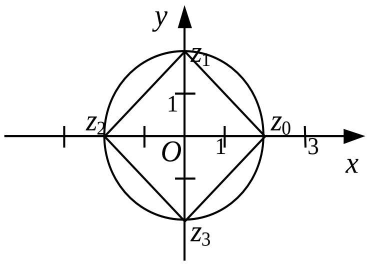
Kesgitleme. z kompleks sandan alnan n görkezijili $(n \in N)$ kök diýip, $z_1^n = z$ deňligi kanagatlandyrýan z_1 kompleks sana aýdylýar we $z_1 = \sqrt[n]{z}$ görnüşinde belgilenýär.

Teorema. Islendik $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sandan alnan n görkezijili kököň kömpleks sanlaryň köplüginde aşakdaky formula boýunça tapylýan, n sany bahasy bardyr:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (1.7)$$

$k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Geometriki taýdan, kompleks sandan alnan n görkezijili köküň bahalary, merkezi koordinatlar başlangyjynda, radiusy $\sqrt[n]{r}$ deň bolan töweregiň içinden çyzylan dogry n-burçlugyň depeleri arkaly aňladylýarlar (sur. 1.5).



1.5-nji surat

Gönükme. $\sqrt[4]{16}$ hasaplamaly.

➲ 16-ny trigonometrik formada ýazalyň:

$$16 = 16(\cos 0 + i\cdot\sin 0).$$

(1.7) formulalaryň esasynda alarys:

$$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right), \quad k = 0,1,2,3\,.$$

Onda $k = 0,1,2,3$ bahalarda alarys:

$$z_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2, \qquad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i. \quad ⊂$$

Görşümiz ýaly, tapylan z_0, z_1, z_2, z_3 bahalar merkezi $(0;0)$ nokatda ýatan, radiusy 2-ä deň bolan töweregiň içinden çyzylan dogry dörtburçlygyň – kwadratyň depelerini aňladýar (sur. 5).

Kompleks sanlaryň köplüginde kök almak amaly arkaly islendik

$$a\,x^n + b = 0, \quad (n \in N; a, b, x \in R)$$

görnüşli deňlemäni çözmek mümkindir.

Gönükme. $x^3 - 8 = 0$ deňlemäni çözmeli.

⊃ Bu ýerde $x^3 = 8$ ýa-da

$$x_k = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i\cdot\sin 0)} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0,1,2.$$

Onda:

$$x_0 = 2(\cos 0 + i\cdot\sin 0) = 2,$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$ ⮌

Islendik, hakyky koeffisientli

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

kwadrat deňlemäniň kompleks sanlaryň köplüginde çözüwi bardyr.

Eger, diskriminant $D = b^2 - 4ac \geq 0$ bolsa, onda kwadrat deňlemäniň kökleri hakykydyr we olar:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formula arkaly tapylýar.

Eger, $D = b^2 - 4ac < 0$ bolsa, onda $-D = 4ac - b^2 > 0$ we kwadrat deňlemäniň kökleri üçin şeýle formulany alarys:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Gönükme. $x^2 + x + 1 = 0$ deňlemäni çözmeli.

⮊ $D=1-4=-3<0$. Onda:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ ⮌

Teorema. (Polinomlar algebrasynyň esasy teoremasy).

Natural n derejeli islendik polinomyň iň bolmanda bir kompleks köki bardyr.

Bu teoremadan, eger islendik köküň ***m*** gezek gaýtalanmasyny (kratnylygyny) ***m*** sany kök diýip hasap etsek, şeýle teoremany alarys:

Teorema. Natural ***n*** derejeli polinomyň ***n*** sany kompleks köki bardyr.

Meseleler .

1.1. Berlen ***a*** elementiň ***A*** köplügiň elementidigini ýa-da däldigini görkezmeli:

1) $A=\{-2;-1;0;1;2\}$ we $a=1{,}5$;
2) $A=\{D;E;L;I\}$ we $a=D$;
3) $A=\{$I–kursuň talyplary$\}$, $a=$dalaşgär;
4) $A=\{$çöl agaçlary$\}$, $a=$sazak .

1.2. ***A*** köplük ***B*** köplügiň bölek köplügimi, eger:

1) $A=\{2;4;6\}$ we $B=\{1;2;3;4;5;6\}$;
2) $A=\{3;5;7\}$ we $B=\{3;5;7\}$;
3) $A=\{1;3;9\}$ we $B=\{1;3;5\}$;
4) $A=\{b\}$ we $B=\{a;b;c;d\}$;
5) $A=\{a,a^2,a^3\}$ we $B=\{a^2,a^3,a^4\}$.

1.3. $\boldsymbol{A\cup B}$, $\boldsymbol{A\cap B}$, $\boldsymbol{A\setminus B}$ we $\boldsymbol{B\setminus A}$ amallary tapmaly, eger:

1) $A=\{a;b;c;d\}$ we $B=\{b;c;d;e\}$;
2) $A=\{1;2;3;4;5;6\}$ we $B=\{2;4;6;8\}$;
3) $A=\{3;5;7\}$ we $B=\{2;4;6\}$;
4) $A=\{1;2;3\}$ we $B=\{4;5;6;7\}$;
5) $A=\{0{,}1;0{,}01;1{,}02\}$ we $B=\{0{,}02;0{,}04\}$;
6) $A=\{a;b;c;d\}$ we $B=\{C;D\}$;
7) $A=\{M;A;R;Y\}$ we $B=\{G;A;R;R;Y;G;A;L;A\}$.

1.4. Soňky sifrleri:

1) 5 bilen gutarýan; 2) 7 bilen gutarýan

ikibelgili natural sanlaryň köplügini ýazmaly.

1.5. $\boldsymbol{A}$ köplük 3-lük sana bölünijili (kratny), $\boldsymbol{B}$ köplük bolsa 6-lyk sana bölünijili ilkinji bäş natural sanlardyr. $\boldsymbol{A \cup B}$, $\boldsymbol{A \cap B}$, $\boldsymbol{A \setminus B}$ we $\boldsymbol{B \setminus A}$ köplükleri kesgitlemeli.

1.6. $\overline{\boldsymbol{34x5y}}$ bäşbelgili san 36 sana bölünýär. $\boldsymbol{x}$ we $\boldsymbol{y}$ sifirleri tapmaly.

1.7. $\frac{5}{10}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{128}$, $\frac{5}{42}$ droblary artýan tertipde ýerleşdirmeli.

1.8. $\frac{21}{37}$, $\frac{16}{37}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{25}{74}$, $\frac{6}{37}$, $\frac{13}{111}$, $\frac{1}{37}$, $\frac{5}{37}$ droblary kemelýän tertipde ýerleşdirmeli.

1.9. Droblary gysgaltmaly:

1) $\frac{120}{124}, \frac{224}{236}, \frac{128}{140}, \frac{250}{400}, \frac{3500}{4750};$

2) $\frac{17 \cdot 3 \cdot 9}{6 \cdot 51 \cdot 15}, \frac{19 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11}{22 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 19}, \frac{49 \cdot 77 \cdot 56 \cdot 100}{33 \cdot 70 \cdot 42 \cdot 280}.$

1.10. Sanlaryň jemini tapmaly:

1) $12\frac{3}{4} + 21\frac{2}{9} + 33\frac{5}{11} + 5\frac{7}{9} + 24\frac{1}{4};$

2) $14\frac{3}{4} + 31\frac{7}{9} + 22\frac{5}{12} + 35\frac{2}{9} + 7\frac{7}{12} + 3\frac{1}{4};$

3) $41\frac{1}{2} + 12\frac{1}{3} + 33\frac{1}{4} + 45\frac{1}{6} + 17\frac{5}{12};$

4) $16\frac{5}{7} + 18\frac{3}{5} + 44\frac{7}{11} + 19\frac{1}{9}.$

1.11. Deňlemeleri çözmeli:

1) $\frac{3}{16}+x=\frac{17}{20}$; 2) $x-\frac{11}{80}=\frac{5}{16}$;

3) $16\frac{11}{24}-x=15\frac{5}{18}$; 4) $x+\frac{7}{14}=\frac{33}{42}$;

5) $\frac{3}{25}\cdot x=\frac{3}{10}$; 6) $x:12\frac{3}{11}=5\frac{2}{15}$.

1.12. Amallary ýerine ýetirmeli:

1) $\left(12\frac{5}{12}+1\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}-16\frac{5}{6}\right):\left(2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{7}{9}\right)$;

2) $\left(\frac{5}{7}\cdot 2\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}-1\frac{7}{18}\right):\left(1-\frac{7}{8}\cdot 1\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{14}\right)$;

3) $\left(12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}\right):30$;

4) $\left[\left(\frac{3{,}25}{5{,}5}:\frac{3{,}125}{341}\right):\frac{0{,}341}{6{,}875}\right]:\left(\frac{1/2}{3/4+0{,}125}\cdot\frac{8}{13}\right)$.

1.13. Gysgaça köpeltmek formulalaryny ullanup hasaplamaly :

1) 51^2; 2) 39^2; 3) 79^2-21^2;
4) 147^2-47^2

1.14. Amallary ýerine ýetirmeli:

1) $\left\{\left[\left(-\frac{7}{15}\right)-\left(+\frac{11}{18}\right)-\left(-1\frac{17}{45}\right)\right]:(-0{,}015)+18{,}5\right\}\cdot(-1{,}2)$;

2) $(-3{,}25):\left(-5\frac{1}{5}\right)+6{,}75\cdot\left[\frac{47}{60}-\left(+2\frac{17}{45}\right)-(-1{,}65)\right]$;

3) $\left(-3{,}96\right):5\frac{1}{2}-2{,}4\cdot\left[\left(-\frac{5}{42}\right)-\left(+1\frac{1}{28}\right)-\left(-1\frac{19}{70}\right)\right]$;

4) $\left\{0{,}45+\left(-3{,}6\right)\cdot\left[\left(-\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(-\frac{1}{18}\right)\right]\right\}:\left(-0{,}01\right)$;

5) $\left(0{,}008\right)^{-1/3}-2^{-2}\cdot 64^{2/3}-27^{-1\frac{1}{3}}+\left(8^{0}\right)^{2}\cdot 5$;

6) $235^{0}+\left(0{,}0625\right)^{1/4}-\left(49^{-0{,}4}\cdot 5^{1/2}\cdot 7^{4/5}\right)^{2}+\left(1\frac{61}{64}\right)^{-2/3}$.

1.15. Hasaplamaly:

1) $\left(2+5i\right)\cdot\left(3-i\right)$; 2) $\left(3+i\right)^{3}$;
3) $\left(1+2i\right)^{2}\cdot\left(1-2i\right)^{2}$;
4) i^{131}; 5) i^{236};
6) i^{715};
7) $\frac{3+2i}{5-i}$; 8) $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}$;
9) $\left(\frac{1-3i}{1+3i}\right)^{3}$.

1.16. M nokadyň polýar koordinatyny tapyň:

1) $M\left(1;\sqrt{3}\right)$; 2) $M\left(-1;-1\right)$;
3) $M\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $M\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; 5) $M\left(1;\sqrt{2}\right)$;
6) $M\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

1.17. Kompleks sanlary trigonometrik formada aňladyň:

1) $2\sqrt{3}+2i$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{5}\,i$; 3) $\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)i$;

4) $6+8i$; 5) $-6+3i$;

6) $-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$.

1.18. Kompleks sanlary algebraik formada aňladyň:

1) $-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

2) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

4) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

1.19. Aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan tekizlikdäki nokatlaryň köplügini çyzgyda şekillendiriň:

1) $\operatorname{Re} z>0$; 2) $\operatorname{Im} z<1$;

3) $1\le|z|\le 2$; 4) $\frac{\pi}{4}<\operatorname{Arg} z<\frac{3\pi}{4}$.

1.20. Amallary ýerine ýetiriň:

1) $(1+i)^4\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)^6$;

2) $(1-i)^{10}:\left(-\sqrt{3}-i\right)^9$;

3) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}$;

4) $(2+3i)^3\cdot(1-2i)^2$.

1.21. Deňlemeleri çözüň:

1) $\boldsymbol{x^3 - 81 = 0}$;
2) $\boldsymbol{x^4 + 1 = 0}$;
3) $\boldsymbol{x^2 - 2x + 2 = 0}$;
4) $\boldsymbol{x^2 + 3x + 3 = 0}$.

2.ÇYZYKLY ALGEBRANYŇ ELEMENTLERI

Bu bölümde çyzykly algebranyň esasyny düzýän, matrisalara we kesgitleýjilere, çyzykly algebraik deňlemeler ulgamlaryny çözmek meselelerine, wektor hasaplamalaryna hem-de analitik geometriýanyň elementlerine seredilýär.

2.1. Matrisalar we kesgitleýjiler

Eger $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ sany aňlatmalar (ýönekeý ýagdaýda – sanlar) $\boldsymbol{m}$ setirli we $\boldsymbol{n}$ sütünli gönüburçly tablisada ýerleşdirilen bolsa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

onda $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ ölçegli **matrisa** ýa-da $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$-matrisa berlen diýilýär. a_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$ aňlatmalara bolsa, matrisanyň **elementleri** diýlip at berilýär. Matrisanyň elementleri – sanlar, wektorlar, polinomlar, differensiallar, hat-da bölek matrisalar hem bolup bilerler. Biz, esasan, elementleri hakyky sanlardan ybarat, san matrisalaryna serederis.

$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ ölçegli matrisa $\boldsymbol{n}$ **tertipli kwadrat matrisa** diýilýär. Elementleri hakyky sanlar bolan her bir $\boldsymbol{n}$ tertipli $A=\left(a_{ij}\right),\ i,j=\overline{1,n}$ kwadrat matrisa, bu matrisanyň **kesgitleýjisi** diýlip at berilýän $\boldsymbol{D}$ san degişli edilip, umumy görnüşde şeýle tapylýar:

$$D = \det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^p a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

Bu ýerde, $n!$ goşulyjylaryň jemi arkaly kesgitleýjiniň bahasy kesgitlenip, goşulyjylaryň islendigi her setire hem-de her sütüne degişli köpeldijini saklaýar.

Goşulyjylaryň alamatlary bolsa $(-1)^p$ boýunça kesgitlenýär, eger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

çalşyrmada inwersiýalaryň sany täk bolsa, p=1, ýogsa-da p=2.

Şu bölümde, matrisalaryň görnüşlerine, olaryň üstünde geçirilýän amallara, matrisanyň ters matrisasynyň, rangynyň, hususy sanlarynyň we hususy wektorlarynyň tapylyşyna, kesgitleýjileriň hasaplanylyşyna serederis.

2.1.1. Matrisalar barada esasy düşünjeler

Kesgitleme. $m \times n$ sanlardan düzülen

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

gönüburçly tablisa $\boldsymbol{m}$ setirli we $\boldsymbol{n}$ sütünli **matrisa**, gysgaça, $\boldsymbol{m \times n}$ **ölçegli matrisa** diýilýär.

$\boldsymbol{a_{ij}}$ $\left(\boldsymbol{i = \overline{1,m};\quad j = \overline{1,n}}\right)$ sanlara matrisanyň elementleri diýlip, $\boldsymbol{i}$ indeks elementiň duran setiriniň, j indeks onuň duran sütüniniň nomerini görkezýär.

Matrisany $\boldsymbol{A = \left\| a_{ij} \right\|}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,m}}$; $\boldsymbol{j = \overline{1,n}}$ ýaly hem belgileýäler. Matrisanyň mundan başga-da

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \quad \text{ýa-da} \quad \boldsymbol{\left\lfloor a_{ij} \right\rfloor,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}}$$

hem-de

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \quad \text{ýa-da} \quad \boldsymbol{\left(a_{ij}\right),\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}}$$

belgilenişleri bardyr. Biz, esasan, soňky belgilemäni ulanarys.

Eger $\boldsymbol{\left(a_{ij}\right)}$ we $\boldsymbol{\left(b_{kl}\right)}$ matrisalaryň setirleriniň we sütünleriniň sanlary deň hem-de degişli orunlardaky elementleri birmeňzeş bolsalar ($\boldsymbol{a_{ij}=b_{kl}}$, haçanda $\boldsymbol{i=k}$ we $\boldsymbol{j=l}$), onda bulara **deň matrisalar** diýilýär. Hemme elementleri nula deň bolan matrisa **nul matrisa** diýlip, $\boldsymbol{O = \left(o_{ij}\right)}$ ýaly belgilenýär.

Wektorlaryň öz koordinatlary bilen berilmegi hem matrisanyň hususy halydyr. Şol sebäpli $\boldsymbol{(b_1, b_2, \ldots, b_n)}$ görnüşdäki ($1 \times \boldsymbol{n}$) ölçegdäki matrisa **wektor–setir** diýilýär.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$ - görnüşdäki ($m \times 1$) ölçegdäki matrisa **wektor–sütün** diýilýär.

Setirleriniň we sütünleriniň sany şol bir n-e deň bolan matrisa n tertipli **kwadrat matrisa** diýilýär.

Onuň a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} elementlerine **esasy diagonal elementleri** diýlip, olaryň jemine **matrisanyň yzy** diýilýär we SpA ýaly belgilenýär. Diýmek,

$$SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Diagonal elementleri nuldan tapawutly, galan elementleri nula deň bolan kwadrat matrisa **diagonal matrisa** diýilýär. Diagonal elementleri 1-e deň bolan diagonal matrisasyna **birlik matrisa** diýlip, E_n ýa-da E bilen belgilenýär. Birlik matrisalar üçin

$$A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$$

ýerine ýetýändir.

A kwadrat matrisanyň setirlerini sütünleri bilen çalşyrmakdan alynýan matrisa – berlen A matrisa **transponirlenen matrisa** diýlip, A^T bilen belgilenýär.

Eger $A^T = A$ bolsa, berlen A matrisa **simmetrik matrisa** diýilýär.

2.1.2. Matrisalar üstinde amallar

a) Matrisany sana köpeltmek

Kesgitleme. $A=(a_{ij})$ matrisanyň λ sana köpeltmek hasyly diýip, her bir elementi $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ ýaly tapylýan, setir we sütin sany A gabat gelýän $B=(b_{ij})$ matrisa aýdylýar.

Ýagny 2 tertipli matrisa üçin:

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{pmatrix}=B$$

alarys.

Matrisany sana köpeltmegiň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

– kommutatiwlik: $\lambda\cdot A=A\cdot\lambda$;

– assosiatiwlik: $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$.

b) Matrisalary goşmak

Kesgitleme. Setir we sütün sanlary özara deň bolan $A=(a_{ij})$ we $B=(b_{kl})$, $(i,k=\overline{1,m};\ j,l=\overline{1,n})$ matrisalaryň jemi diýip, şol bir $m\times n$ ölçegdäki $S=(s_{ij})$ matrisa aýdylýar; bu ýerde $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Gönükme:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2+(-2) & 1+(-2) & 1+3 \\ 0+2 & 1+3 & -2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Matrisalary goşmagyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

– kommutatiwlik: $A+B=B+A$;

– assosiatiwlik: $(A+B)+C=A+(B+C)$;

– matrisalary goşmaga görä distributiwlik:

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

– sanlary goşmaga görä distributiwlik:
–

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}.$$

Matrisalary goşmak amalynyň ters amaly–matrisalary aýyrmak şeýle kesgitlenilýär:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

c) Matrisalary köpeltmek

Goý, $\boldsymbol{A}$ matrisanyň sütünleriniň sany $\boldsymbol{B}$ matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolsun:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Kesgitleme. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ we $\boldsymbol{B}=(b_{lp})$ matrisalaryň köpeltmek hasyly diýip, elementleri

$$c_{ip}=a_{i1}\cdot b_{1p}+a_{i2}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{in}\cdot b_{np}, \qquad i=\overline{1,m};\ p=\overline{1,k};\ j,l=\overline{1,n}$$

düzgün boýunça tapylýan $m\times k$ tertipli $\boldsymbol{C}$ matrisa aýdylýar we $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ýaly belgilenýär.

Başgaça, c_{ij} elementi tapmak üçin, $\boldsymbol{A}$ matrisanyň $\boldsymbol{i}$-nji setiriniň her bir elementi $\boldsymbol{B}$ matrisanyň $\boldsymbol{j}$-nji sütüniniň degişli elementine köpeldilip, goşulýar.

Gönükme:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 10 & 1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 3\cdot 2+4\cdot 10 & 3\cdot 1+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 & 3 \\ 46 & 7 \end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

Matrisalary köpeltmek, umuman, kommutatiw däldir, meselem:

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 10 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot3 & 2\cdot2+1\cdot4\\ 10\cdot1+1\cdot3 & 10\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 13 & 24\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}_1 .$$

Matrisalary köpeltmek assosiatiwdir:

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}).$$

Matrisalary köpeltmek amalynyň esasy häsiýetleri:

$$\lambda\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\lambda\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B};$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\lambda\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\lambda)\cdot\boldsymbol{B};$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\lambda=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\lambda);$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C};$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}.$$

Bellik. Bu köpeltmek hasyllar, diňe köpeldilýän matrisalaryň birinjisiniň sütünleriniň sanynyň ikinji matrisanyň setirleriniň sanyna deň ýagdaýynda ýerine ýetýändir.

2.1.3. Kesgitleýjiler

Kesgitleýji düşünjesi çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmekligiň umumy formulalary gözlenilýän wagtynda döredi.

Iki x_1 we x_2 üýtgeýänli iki çyzykly deňlemeler ulgamyna seredeliň.

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2\end{cases}\qquad(2.1)$$

Bu ýerde:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

matrisalara, degişlilikde, **esasy** we **giňeldilen** matrisalar diýilýär.

(2.1) ulgamyň birinji deňlemesini a_{22}-ä, ikinjisini bolsa – a_{12}-ä köpeldip, goşalyň. Netijede:

$$(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})x_1=b_1\cdot a_{22}-b_2\cdot a_{21} \qquad (2.2)$$

Şuňa meňzeşlikde, (2.1) ulgamyň birinji deňlemesini – a_{12}-ä, ikinjisini bolsa a_{11}-e köpeldip, goşalyň. Onda:

$$(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})x_2=b_2\cdot a_{11}-b_1\cdot a_{21} \qquad (2.2')$$

Görşümiz ýaly, (2.2) we (2.2′) deňlemelerde x_1 we x_2 üýtgeýänleriň koeffisientleri birmeňzeşdir. Olar A matrisanyň esasy diagonalynyň elementleriniň köpeltmek hasylyndan, beýleki diagonalynyň elementleriniň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyna deňdir.

Kesgitleme. $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ aňlatma $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2)$ matrisanyň **kesgitleýjisi** (determinanty) diýilýär we $|A|$, $|a_{ij}|$, Δ, D ýa-da $detA$ ýaly belgilenýär.

A matrisa 2-nji tertipli bolany üçin, $|A|$ kesgitleýji hem 2-nji tertiplidir.

(2.2) we (2.2′) deňlemeleriň sag taraplary A matrisanyň, degişlilikde, 1-nji we 2-nji sütünleriniň, (2.1) ulgamyň azat sütüniniň elementleri bilen çalşyrylmagyndan alnan kesgitleýjilerdir.

Kesgitleýji düşünjesini islendik *n*-nji tertipli $A=(a_{ij})$ kwadrat matrisa üçin girizeliň. Onuň üçin, A matrisanyň dürli setirlerde we sütünlerde ýerleşen n elementlerinden, mümkin bolan:

$$a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} \qquad (2.3)$$

köpeltmek hasylyny düzeliň. Bu ýerde $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, …, $\boldsymbol{i}_n$ indeksler 1, 2, …, $\boldsymbol{n}$ sanlardan käbir çalşyrmalary emele getirip, seyle çalsyrmalaryň (diýmek, (2.3) köpeltmek hasyllarynyň hem) sany $\boldsymbol{n}$!-a deňdir.

Kesgitleme. $\boldsymbol{n}$-nji tertipli kwadrat matrisanyn **k e s g i t l e ý j i s i** diyip, mumkin bolan (2.3) kopeltmek hasyllarynyn

$$\sum(-1)^{p}\boldsymbol{a}_{1i_1}\cdot\boldsymbol{a}_{2i_2}\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{a}_{ni_n}$$

algebraik jemine aýdylýar; bu ýerde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \ldots & \boldsymbol{i}_n \end{pmatrix}$$

çalşyrmadaky inwersiýalaryň sany täk bolsa $\boldsymbol{p}$=1, ýogsa-da $\boldsymbol{p}$=2.

Kesgitleýjileriň hasaplanyşyna seredeliň. Ikinji tertipli kesgitleýji şeýle hasaplanylýar:

$$\begin{array}{c} + \qquad\quad - \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix} \end{array} = \boldsymbol{a}_{11}\cdot\boldsymbol{a}_{22}-\boldsymbol{a}_{12}\cdot\boldsymbol{a}_{21}.$$

Üçünji tertipli kesgitleýjiniň hasaplanylyşy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Üçünji tertipli kesgitleýjini hasaplamakda aşakdaky shemany ulanmak amatlydyr:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

Üçünjiden ýokary tertipli kesgitleýjileri hasaplamak üçin, kesgitleýjini setirleriniň elementleri boýunça dargatmak usulyny ulanýarlar. Goý n-nji tertipli kesgitleýji berlen bolsun:

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \dots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \dots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Kesgitleýjini i-nji setiriň elementleri boýunça dargadyp, şeýle ýazmak bolar:

$$
|\boldsymbol{A}| = (-1)^{i+1}\boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{M}_{i1} + (-1)^{i+2}\boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{M}_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}\boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{M}_{in}, \qquad (2.4)
$$

bu ýerde $\boldsymbol{M}_{ij}$ arkaly $(\boldsymbol{a}_{ij})$ matrisanyň i-nji setirini we j-nji sütünini çyzmakdan galýan (n-1)-nji tertipli kesgitleýji – minor belgilenendir.

Kesgitleme. $\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ ululyga $\boldsymbol{a}_{ij}$ elementiň algebraik doldurgyjy diýilýär.

Onda (2.4) dargatmany şeýle ýazmak bolar:

$$
|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + \boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \ldots + \boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{A}_{in} \qquad (2.4')
$$

(2.4') formula boýunça 4-nji tertipli kesgitleýjini 1-nji setiriň elementleri boýunça dargadyp alarys:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Kesgitleýjileriň esasy häsiýetleri:

1) eger kesgitleýjide iki setiriň (sütüniň) ýerleri çalsyrylsa, onuň alamaty üýtgär;
2) eger kesgitleýjiniň setirleriniň (sütünleriniň) biri nullardan ybarat bolsa, onuň bahasy nula deňdir;
3) eger kesgitleýji birmeňzeş iki setiri (sütüni) saklaýan bolsa, onuň bahasy nula deňdir;
4) eger kesgitleýji özara proporsional setirleri (sütünleri) saklaýan bolsa, ol nula deňdir;
5) eger kesgitleýjiniň bir setiriniň (sütüniniň) elementlerini bir sana köpeldip, beýleki setiriniň (sütüniniň) elementleriniň üstüne goşsaň, kesgitleýji üýtgemez;
6) eger kesgitleýjiniň käbir setiriniň (sütüniniň) elementleri k sana köpeldilse, onda onuň özi hem k sana köpeldiler;
7) eger kesgitleýjiniň i-nji setiriniň elementlerini $\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$ $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ ýaly ýazyp bolýan bolsa, onda ony diňe i-nji setirleri boýunça tapawutlanýan iki sany kesgitleýjiniň jemi görnüşinde ýazyp bolar, olaryň i-nji setiri birinjisinde $\boldsymbol{a_{ij}}$, ikinjisinde $\boldsymbol{b_{ij}}$ elementleri özünde saklar;
8) transponirlenen matrisanyň kesgitleýjisi başda berlen matrisanyň kesgitleýjisine deňdir.

2.1.4. Matrisanyň rangy

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gönüburçly matrisa berlen. Bu matrisanyň erkin k setirini we erkin k sütünini $(k \le \min(m,n))$ belläliň. Bellenen setirleriň we sütünleriň kesişmesindäki elementler, k-njy tertipli matrisany emele getirýär. Bu matrisanyň kesgitleýjisine ***A* matrisanyň k-njy tertipli minory** diýilýär. A matrisa k-njy tertipli minorlaryň $C_m^k \cdot C_n^k$ sanysyna eýedir.

A matrisanyň nuldan tapawutly ähli minorlaryna seredeliň.

Kesgitleme. *A* matrisanyň nuldan tapawutly minorlarynyň iň uly tertibine *A* marisanyň **rangy** diýilýär we $r(A)$ bilen belgilenýär.

Nul matrisanyň rangy nula deňdir: $r(0) = 0$.

Matrisanyň rangyna deň bolan, nuldan tapawutly islendik minora matrisanyň **bazis minory** diýilýär.

Eger $r(A)=r(B)$ bolsa, onda *A* we *B* matrisalara **ekwiwalent** diýilýär we $A \sim B$ ýaly belgilenýär.

Gönükme. Matrisanyň rangyny tapmaly:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

➲ Marisanyň iň bolmanda bir nuldan tapawutly elementi bar bolsa, onuň rangy 1-den kiçi däldir.

Ilkinji iki setiriň we iki sütüniň elementlerinden matrisa düzeliň:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisanyň kesgitleýjisi nula deňdir.

Onda 2-nji tertipli minorlaryň içinden nuldan tapawutlysyny gözläliň. Şeýle minor bolup, meselem, ikinji we üçünji setirleriň hem-de birinji we ikinji sütünleriň kesişmesinde durýan elementlerden düzülen:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

kesgitleýji hyzmat edip biler. Diýmek, $\boldsymbol{r(A)}$≥2.

Üçünji tertipli kesgitleýji:

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+3-0-3-0=0.$$

Onda, gutarnykly $\boldsymbol{r(A)}=2$.

Matrisanyň rangyny dürli minorlary hasaplaman hem tapýarlar. Onuň üçin elementar öwürmeleriň kömegi bilen, berlen matrisa ekwiwalent, emma rangyny ýönekeý kesgitläp bolýan matrisany alýarlar. Matrisanyň elementar öwrümelerine:

1) iki setiriň ýa-da iki sütüniň ýerlerini çalşyrmak;
2) setiri ýa-da sütüni nuldan tapawutly erkin sana köpeltmek ýa-da bölmek;
3) bir setiriň (sütüniň) üstüne, käbir sana köpeldilen beýleki setiri (sütüni) goşmak

degişlidir. Meselem, elementar öwürmeleriň kömegi bilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

getirilýär. Bu ýerden $\boldsymbol{r(A)}=2$.

2.1.5. Ters matrisa

n-nji tertipli $\boldsymbol{A}$ kwadrat matrisa seredeliň.

Kesgitleme. $\boldsymbol{A}$ matrisanyň ters matrisasy diýip

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

deňligi kanagatlandyrýan, n-nji tertipli $\boldsymbol{A}^{-1}$ matrisa aýdylýar.

Kesgitleýjisi $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ bolan islendik $\boldsymbol{A}$ matrisanyň ters matrisasy bardyr.

Ters matrisany, esasan:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \dots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \dots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \dots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

formula boýunça tapýarlar. $\boldsymbol{A}_{ij}$ belgileme $\boldsymbol{A}$ matrisanyň $\boldsymbol{a}_{ij}$ elementiniň algebraik doldurgyjydyr:

$$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}. \tag{2.6}$$

Gönükme.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

matrisa ters bolan A^{-1} matrisany tapyp, netijäni $A\cdot A^{-1}=E$ deňlik boýunça barlamaly.

➲ (2.5) we (2.6) formulalar boýunça

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix}=20+27+24-36-24-15=-4\neq 0 .$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=20-24=-4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=-(5-8)=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=3-4=-1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=-(15-27)=12;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=5-9=-4;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-(3-3)=0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 36 = -12;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3-3) = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Onda:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Barlagy:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-3+3 & -\frac{3}{4}+1-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+0-\frac{1}{4} \\ 3-12+9 & -\frac{9}{4}+4-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}+0-\frac{3}{4} \\ 9-24+15 & -\frac{27}{4}+8-\frac{5}{4} & \frac{9}{4}+0-\frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.1.6. Matrisanyň hususy sanlary (bahalary) we wektorlary

Kesgitleme.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kwadrat matrisanyň **harakteristik deňlemesi** diýip, aşakdaky ýaly kesgitleýjä aýdylýar:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0\,. \qquad (2.7)$$

(2.7) deňlemäniň $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$ köklerine A matrisanyň **hususy sanlary** (bahalary) diýilýär. Hususy sanlar A matrisa simmetrik bolanda hakykydyrlar. (2.7) deňlemäni $|A-\lambda E|=0$ görnüşde hem ýazmak bolar.

Kesgitleme.

$$(A-\lambda E)\cdot\bar{x}=0 \qquad \text{ýa-da} \quad A\,\bar{x}=\lambda\,\bar{x} \qquad (2.8)$$

görnüşdäki deňlemäni kanagatlandyrýan $\bar{x}$ wektora A matrisanyň **hususy wektory** diýilýär.

Islendik λ_i hususy san üçin (2.8) deňlemäniň nuldan tapawutly çözüwleri A matrisanyň hususy wektorlarynyň tükeniksiz köplügini kesgitleýär. Bu köplüge A matrisanyň **hususy wektor bölek giňişligi** diýilýär.

Gönükme.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisanyň hususy sanlaryny we wektorlaryny tapmaly.

➲ Matrisanyň harakteristik deňlemesini düzeliň:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$ ýa-da $(3-\lambda)\cdot(1-\lambda)-8=0$

ýa-da $\lambda^2-4\lambda-5=0$; bu ýerden: $\lambda_1=5$ we $\lambda_2=-1$.

$\lambda_1=5$ baha üçin alarys:

$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\cdot\bar{\boldsymbol{x}}=0$ ýa-da $\begin{pmatrix} 3-5 & -2 \\ -4 & 1-5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=0.$$

Bu ýerden:

$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=0$ ýa-da $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_2$.

Goý, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{\alpha}$, $(\boldsymbol{\alpha}\neq 0)$; onda $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=0$. Diýmek,

$\bar{\boldsymbol{x}}=(-\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\alpha})$ ýa-da $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\alpha}(-\bar{\boldsymbol{i}}+\bar{\boldsymbol{j}})$

$\lambda_1=5$ sana degişli hususy wektorlardyr ($\boldsymbol{\alpha}\neq 0-$ hakyky san).

$\lambda_2=-1$ baha üçin:

$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\cdot\bar{\boldsymbol{x}}=0$ ýa-da $\begin{pmatrix} 3-5 & -2 \\ -4 & 1-5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=0$;

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1.$$

Goý, $x_1 = \beta$, $(\beta \neq 0)$; onda $x_2 = 2\beta$. Diýmek, $\bar{x} = \beta \cdot (1;2)$ – $\lambda_2 = -1$ sana degişli hususy wektorlaryň köplügidir $(\beta \neq 0)$ – islendik hakyky san). ⊂

Meseleler.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berlen. Matrisalaryň jemini tapmaly.

Jogaby. $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ we $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ berlen, onda $2A + 5B$ matrisalaryň jemini tapmaly.

Jogaby. $2A + 5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$

2.3. $A \cdot B$ we $B \cdot A$ matrisalaryň köpeltmek hasyllaryny tapmaly.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jogaby. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$.

2.4. Kesgitleýjileri hasaplamaly

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (900) b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$ (12)

ç) $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}$ (280) d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$ (a^2b^2)

2.5. **E**ger-de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bolsa, onda $2A^2 + 3A + 5E$ matrisany hasaplamaly.

Jogaby. $2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$.

2.6. $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ matrisa berlen. Ters matrisasyny tapmaly.

Jogaby. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ 0 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

2.7. Matrisanyň hususy sanlaryny we hususy wektorlaryny tapmaly:

$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $Jogaby: \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 11;\ e_1 = (4/\sqrt{41})i - (5/\sqrt{41})j, e_2 = (1/\sqrt{2})$

2.8. Matrisanyň hususy sanlaryny we hususy wektorlaryny tapmaly:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Jogaby: \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6; x_1 = \alpha(i-k); x_2 = \beta(i - j + k); x_3 = \gamma(i + 2j$

2.2. Çyzykly algebraik deňlemeler ulgamlary

n sany $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ üýtgeýänlerden m sany çyzykly algebraik deňlemeler ulgamyna

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.9}$$

cyzykly deňlemeler ulgamy, ýa-da, has takygy, **çyzykly deňlemeleriň $m \times n$ ulgamy** diýilýär; a_{ij}, b_i $\left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right)$ hakyky sanlara, degişlilikde, **ulgamyň koeffisientleri** we **azat agzalary** diýilýär.

Eger hemme $b_i = 0$ bolsa, onda (2.9) ulgama **birjynsly**, ýogsa-da, **birjynsly däl** diýlip at berilyär.

Eger $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\right)$ sanlaryň tertipleşdirilen yzygiderligi berlen tertipde (2.9) ulgamda x_1, x_2, …, x_n üýtgeýänleriň ornuna goylup, ulgamyň hemme deňlemelerini kanagatlandyrýan, ýagny toždestwo öwürýän bolsa, onda ol yzygiderlige deňlemeler ulgamynyň **çözüwi** diýilýär. Hemme çözüwleriň toplumyna bolsa, **çözüwleriň köplügi** diýilýär. Çözüwleriň köplükleri gabat gelýän çyzykly deňlemeler ulgamlary **ekwiwalentdirler**.

Eger deňlemeler ulgamynyň iň bolmanda bir çözüwi bar bolsa, onda ulgam **kökdeş** diýilýär.

Hiç bir çözüwi bolmadyk deňlemeler ulgamy **kökdeş däldir**.

Eger kökdeş ulgamyň diňe bir çözüwi bar bolsa, onda oňa **kesgitli**, ýogsa-da **kesgitsiz** diýilýär.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

belgilemeleri girizeliň. Onda (2.9) ulgamy şeýle ýazmak bolar:

$$AX = B. \tag{2.10}$$

(2.10) deňlemä (2.9) ulgamyň **matrisalaýyn ýazgysy** diýilýär.

Bilşimiz ýaly, birjynsly (AX=0) deňlemeler ulgamynyň (0,0,…,0) çözüwi elmydama bardyr. Oňa **triwial çözüw** diýilýär. Onda birjynsly deňlemeler ulgamyny çözmek diýmek, onuň **triwial däl** çözüwlerini gözlemek diýmekdir. Şeýlelikde, eger birjynsly deňlemeler ulgamynyň nuldan tapawutly $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ çözüwi bar bolsa, onda ol tükeniksizdir, ýagny:

$$(\lambda \bar{x}_1, \lambda \bar{x}_2, \ldots, \lambda \bar{x}_n) = \lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$$ λ – islendik hakyky san.

Meselem:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

birjynsly deňlemeler ulgamynyň diňe triwial çözüwi (0;0) bardyr. Emma:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

üç üýtgeýänli çyzykly iki deňlemeli ulgamyň çözüwleriniň köplügi

$$X = \lambda(-3;1;1)$$

ýaly aňladylar, λ – islendik hakyky sandyr.

Birjynsly däl hem-de kökdeş däl deňlemeler ulgamyna

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

mysal bolup biler.

Çyzykly deňlemeler ulgamyny ters matrisanyň kömegi bilen hem-de Krameriň, Gaussyň usullarynda çözmeklige seredeliň.

2.2.1. Çyzykly deňlemeler ulgamyny ters matrisanyň kömegi bilen çözmek

Goý, bize çyzykly deňlemeleriň $\boldsymbol{n \times n}$ ulgamy matrisalaýyn görnüşde berlen bolsun:

$$\boldsymbol{AX = B}. \qquad (2.11)$$

Bu ýerde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \dots & \boldsymbol{a}_{2\boldsymbol{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}1} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}2} & \dots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{nn}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}.$$

Goý, esasy matrisanyň kesgitleýjisi $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ bolsun. Onda $\boldsymbol{A}$ matrisanyň $\boldsymbol{A}^{-1}$ ters matrisasy hökman bardyr. (2.11) matrisalaýyn deňlemäniň iki tarapyny hem çepinden A^{-1} matrisa köpeldeliň:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad \text{ýa-da} \qquad \boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

ýa-da

$$\boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad (2.12)$$

(2.5) formulany göz öňünde tutup, (2.12) deňlemeden alarys:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2.13)$$

Gönükme.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamyny ters matrisanyň kömegi bilen çözmeli.

➲ Bu yerde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

ýaly belgiläliň. $\boldsymbol{A}$ matrisanyň ters matrisasyny 2.1.5 punktyň ugrukdyryjy gönükmesinde tapypdyk:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Onda, (2.13) formula görä alarys:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -12+30-14 \\ 36-40+0 \\ -36+10+14 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diýmek, $\boldsymbol{X} = \{(-1; 1; 3)\}$ gözlenyän çözüwdir. ⊂

2.2.2. Çyzykly deňlemeler ulgamyny Krameriň düzgüni bilen çözmek

Çyzykly deňlemeleriň $n \times n$ ulgamyna seredeliň. Goý, esasy matrisanyň kesgitleýjisi $|A| \neq 0$ şert ýerine ýetsin. Onda deňlemeler ulgamynyň çözüwini (2.13) görnüşde tapmak bolar. (2.13) formulada, A_{ij} bilen, A matrisanyň a_{ij} elimentiniň algebraik doldurgyjy belgilenendir. Bu formulanyň deňlik belgisiniň sag tarapyndaky matrisalary biri-birine köpeldeliň:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Bu ýerden, x_i üýtgeýän üçin alarys:

$$x_i = \frac{1}{|A|}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

(2.14)

Eger A matrisanyň kesgitleýjisinde i-nji sütüniň elementlerini azat agzalar bilen çalşyrsak hem-de kesgitleyjini şol sütüniň elementleri boýunça dargatsak, onda (2.14) deňligiň ýaý içindäki aňlatmasyny alarys. $|A|$ kesgitleýjiniň i-nji sütüniniň elementlerini (deňlemeler ulgamynda x_i üýtgeýäniň koeffisientlerini) azat agzalar bilen çalşyrmakdan alynýan kesgitleýjini $|A|_{x_i}$ görnüşde belgiläliň. Onda (2.14) deňlikden alarys:

$$x_i = \frac{|A|_{x_i}}{|A|}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (2.15)$$

Alnan formula **Krameriň düzgüni** diýilýär.

Iki üýtgeýänli iki deňlemeler ulgamy üçin formula şeýle görnüşde bolar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$|A|_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad |A|_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{|A|_{x_1}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{|A|_{x_2}}{|A|}. \tag{2.16}$$

Üç üýtgeýänli üç deňlemeler ulgamy üçin alarys:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$|A|_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A|_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |A|_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{|A|_{x_1}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{|A|_{x_2}}{|A|}, \qquad x_3 = \frac{|A|_{x_3}}{|A|}.$$

Gönükme.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamyny Krameriň düzgüni bilen çözmeli.

➲ Bu ýerde:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$|A|_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 14 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 5 + 1\cdot 3\cdot 14 + 10\cdot 1\cdot 8 -$$

$$-14\cdot 4\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 8 - 10\cdot 1\cdot 5 = 60 + 42 + 80 - 56 - 72 - 50 = 4;$$

$$|A|_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 9 & 14 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 10\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 9 + 3\cdot 1\cdot 14 -$$

$$-14\cdot 4\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 8 - 10\cdot 1\cdot 5 = 60 + 42 + 80 - 56 - 72 - 50 = 4;$$

$$|A|_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 10 \\ 9 & 8 & 14 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 14 + 1\cdot 10\cdot 9 + 3\cdot 8\cdot 3 -$$

$$-14\cdot 4\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 8 - 10\cdot 1\cdot 5 = 60 + 42 + 80 - 56 - 72 - 50 = 4.$$

$$x_1 = \frac{|A|_{x_1}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{|A|_{x_2}}{|A|} = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_3 = \frac{|A|_{x_3}}{|A|} = \frac{-12}{-4}.$$

$$X = \{(-1;\,1;\,3)\}.$$ ➲

2.2.3. Çyzykly denlemeler ulgamyny Gaussyň usuly bilen çözmek

Krameriň düzgüni boýunça iki ýa-da üç deňlemeler ulgamyny çözmek amatlydyr. Emma deňlemeleriň, üýtgeýänleriň sany üçden köp bolanda ýa-da üýtgeýänler bilen deňlemeleriň sany gabat gelmedik ýagdaýlarynda, Gaussyň üýtgeýänleri yzygider ýok etmek usulyny ulanýarlar. Bu usulda, 4 üýtgeýänli 4 deňlemeler ulgamyna seredeliň:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, & (\alpha) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, & (\beta) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, & (\gamma) \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. & (\delta) \end{cases}$$

Goý $a_{11} \neq 0$ bolsun (şert ýerine ýetmese, deňlemeleriň ýerini çalyşmak bolar).

I ädim. (α) deňlemäniň iki tarapyny xem a_{11}-e bölup alarys:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}. \qquad (\eta)$$

Indi **(η)** deňlemäni a_{21}-e köpeldip, **(β)**-dan aýralyň;

a_{31}-e köpeldip, **(γ)**-dan aýralyň;

a_{41}-e köpeldip, **(δ)**-dan aýralyň.

Netijede, berlen deňlemeler ulgamyna ekwiwalent bolan we ikinji, üçünji hem-de dördünji deňlemelerde x_1, üýtgeýän ýok edilen, aşakdaky deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, & (\eta) \\ \qquad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, & (\theta) \\ \qquad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, & (\lambda) \\ \qquad b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_{45}, & (\mu) \end{cases}$$

bu ýerde:

$$\boldsymbol{b}_{1j} = \frac{\boldsymbol{a}_{1j}}{\boldsymbol{a}_{11}}, \qquad (\boldsymbol{j} = 2, 3, 4, 5);$$

$$\boldsymbol{b}_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij} - \boldsymbol{a}_{i1} \cdot \boldsymbol{b}_{1j}, \qquad (\boldsymbol{i} = 2, 3, 4; \quad \boldsymbol{j} = 2, 3, 4, 5).$$

II ädim. (θ), (λ), (μ) deňlemeler bilen hem I ädimdäki ýaly işleri geçirip, aşaky iki deňlemeden x_2 üýtgeýäni ýok edeliň we ş. m.

Netijede, (α)–(δ) deňlemeler ulgamyna ekwiwalent bolan we şeýle görnüşdäki:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ \qquad\qquad x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = c_{25}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 + d_{34}x_4 = d_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_4 = e_{45} \end{cases}$$

çyzykly deňlemeler ulgamy alnar. Şu pursada çenli geçirilen işlere **göni ugur** diýilýär.

Indi ters ugur boýunça, x_4-iň tapylan bahasyny üçünji deňlemede goýup, x_3 üýtgeýäniň bahasyny hasaplarys; x_3 we x_4 üýtgeýänleriň bahalaryny ikinji deňlemede goýup, x_2-ni kesgitläris; x_2, x_3, x_4 üýtgeýänleriň bahalary arkaly x_1 üýtgeýäni taparys.

Gönükme.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamyny Gaussyň üýtgeýänleri yzygider ýok etmek usulyny ulanyp çözmeli.

➲ Ulgamda birinji we ikinji deňlemeleriň ýerlerini çalşalyň:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, & (\alpha) \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 5, & (\beta) \\ 4x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 = 5. & (\gamma) \end{cases}$$

Aşaky iki deňlemeden x_1 üýtdeýäni ýok edeliň. Onuň üçin (α) deňlemäni (–3)-e köpeldip, (β) deňlemä goşalyň; (α) deňlemäni (– 4)-e köpeldip, (γ) deňlemä goşalyň. Netijede:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, & (\alpha) \\ \qquad\ \ x_2 - 4x_3 = -5, & (\eta) \\ \quad -5x_2 + 9x_3 = 3 & (\theta) \end{cases}$$

alarys. Iň aşaky deňlemeden x_2 üýtgeýäni ýok edeliň. Onuň üçin (η) deňlemäni 5-e köpeldip, (θ) deňlemä goşalyň. Onda:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ \qquad\ \ x_2 - 4x_3 = -5, \\ \qquad\quad -11x_3 = -22 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, & (\alpha) \\ \qquad\ \ x_2 - 4x_3 = -5, & (\eta) \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 2. & (\mu) \end{cases}$$

(η)-deňlemeden taparys:

$$x_2 = 4x_3 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 = 3.$$

(α) deňlemede x_3 we x_2 üýtgeýänleriň bahalaryny goýup:

$$x_1 = -x_2 + x_3 = -3 + 2 = -1$$

alarys.

Diýmek, çyzykly deňlemeler ulgamynyň eke-täk çözüwi bar bolup, ol:

$$\boldsymbol{X} = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)\} = \{(-1,\ 3,\ 2)\}$$

sanlaryň tertipleşdirilen üçlügi bilen kesgitlener.

Meseleler

2.9. Berlen çyzykly deňlemeler ulgamyny üç usul bilen çözmeli: a) Krameriň düzgüni; b) Ters matrisanyň kömegi bilen; ç) Gaussyň yzygider ýok etme düzgüni.

1) $\begin{cases} 7x + y + \quad z = 10 \\ 6x - y - \quad z = 3 \\ 4x + y + 10z = 7 \end{cases}$ $\quad Jogaby: x = 1, y = 3, z = 0$

2) $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 6 \\ 3x - 2y + z = 5 \\ 5x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$ $\quad Jogaby: x = 2,\ y = 1,\ z = 1$

3) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \\ 4x + 3y + z = 11 \end{cases}$ $\quad Jogaby: x = 3,\ y = -1,\ z = 2$

4) $\begin{cases} 4x - 4y - 3z = 2 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 5x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$ $\quad Jogaby: x = 1,\ y = 2,\ z = -2$

Ýokary matematikadan 1-nji tipli ýumuş

1-nji mesele. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ we $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisalary berlen. Hasaplamaly:

1. $4A^2 + BB^{-1}$
2. $AB-AB^{-1}$
3. $AA^{-1}+5B^2$
4. $A^{-1}A+6B+3A$
5. $ABA^{-1}+3A$
6. $AB^{-1}-7B^2$
7. $B^{-1}B+4A^2$
8. $B^{-1}A+6A^2$
9. $AA^{-1}-4A^3$
10. $5A^2-A^{-1}A$
11. $AA^{-1}+B-4A$
12. $A-A^{-1}B+4B$
13. $BA^{-1}+AB$
14. $4A+7B^{-1}$
15. $3A^2-5A^{-1}$
16. $4A^{-1}+4B$
17. $3AB-A^{-1}B$
18. $4A^{-1}+5(AB)$
19. $6B^{-1}+BA-A$
20. $3AA^{-1}+4(AB)$
21. $A^{-1}+4B^3$
22. $AB+6BA^{-1}$
23. AA^2-BB^{-1}
24. $4A^{-1}-5B+4A$
25. $3B^{-1}-3A-2B$

2-nji mesele. Berlen çyzykly deňlemeler ulgamlaryny üç usul bilen çözmeli: a) Krameriň düzgüni; b) Ters matrisanyň kömegi bilen; ç) Gaussyň yzygider ýok etme düzgüni..

1. $\begin{cases} 3x - y + 4z - 4 = 0 \\ 2x + 2y + z - 7 = 0 \\ x + 3y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 4y - z - 4 = 0 \\ 2x + 5y - 2z - 6 = 0 \\ -4x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y + z - 10 = 0 \\ x + 2y - 2z + 3 = 0 \\ x + 4y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - 2y + 5z = 0 \\ 3x - 3y + 4z + 3 = 0 \\ 2x - 2y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+2y+z-5=0 \\ 4x-3y+z+5=0 \\ 3x-2y+2z+2=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+3y-2z+3=0 \\ 3x+4y+2z+1=0 \\ 4x+3y-z-2=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+z-7=0 \\ 2x-y-2z+6=0 \\ x+y+z-6=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 3x-2y-3z-2=0 \\ x-3y-z+4=0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 4x+2y-3z+4=0 \\ 3x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-4=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-3y+z+2=0 \\ 2x-y-z-3=0 \\ x+2y-4z-3=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ x+y-z-3=0 \\ 2x-2y+3z+1=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ 3x+2y-z-4=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 2x-2y-3z-1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+y-2z+2=0 \\ 2x-y-z+1=0 \\ x+y-2z-2=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x+4y-z+1=0 \\ 2x+3y-2z+2=0 \\ 4x+3y+z-1=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+3y-3z+1=0 \\ 2x-y+3z+1=0 \\ x-2y-4z+2=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x+y-2z-3=0 \\ 3x-y+2z-7=0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-3y+3z-1=0 \\ x-y+2z-1=0 \\ x-3y+2z+1=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ 2x-y-3z+1=0 \\ x+y-5z+1=0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ 2x+y-z+4=0 \\ x+2y+z-4=0 \end{cases}$

$$21.\begin{cases} x+y+3z+1=0 \\ 2x-3y+2z-7=0 \\ x+y-2z-1=0 \end{cases}$$

$$22.\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ x+y+z+1=0 \\ 2x-y-2z-3=0 \end{cases}$$

$$23.\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+2z-1=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$$

$$24.\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ 3x+2y-z+2=0 \\ x-y+2z+3=0 \end{cases}$$

$$25.\begin{cases} 3x-y+2z-1=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \\ x+3y-5z+2=0 \end{cases}$$

1-nji meseläniň jogaplary:

$$1.\ \begin{pmatrix} 189 & 124 & 140 \\ 16 & 45 & 56 \\ 104 & 92 & 129 \end{pmatrix}$$

$$2.\ \begin{pmatrix} 4 & 62/3 & 28/3 \\ -2/5 & 8/5 & 64/5 \\ 34/5 & 84/5 & 72/5 \end{pmatrix}$$

$$3.\ \begin{pmatrix} 6 & 40 & 20 \\ 50 & 66 & 0 \\ -10 & -10 & -14 \end{pmatrix}$$

$$4.\ \begin{pmatrix} 16 & 27 & 45 \\ 18 & 16 & -12 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 195/22 & 33/4 & 1143/44 \\ 90/11 & -1 & -29/11 \\ 141/11 & 11/2 & 201/22 \end{pmatrix}$$

$$6.\ \begin{pmatrix} -5 & -167/3 & -85/3 \\ -348/5 & -458/5 & -14/5 \\ 76/5 & 71/5 & 93/5 \end{pmatrix}$$

$$7.\ \begin{pmatrix} 189 & 124 & 140 \\ 16 & 45 & 56 \\ 104 & 92 & 129 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{pmatrix} 4171/15 & 2759/15 & 3139/15 \\ 82/3 & 203/3 & 256/3 \\ 2341/15 & 2084/15 & 2899/15 \end{pmatrix}$$

9. $\begin{pmatrix} -1371 & -1236 & -1596 \\ -360 & -203 & -224 \\ -1008 & -812 & -983 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 234 & 155 & 175 \\ 20 & 54 & 70 \\ 130 & 115 & 159 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -10 & -18 & -24 \\ -6 & 8 & -2 \\ -17 & -12 & -6 \end{pmatrix}$

12.
$$\begin{pmatrix} 295/44 & 543/44 & 1035/44 \\ 251/22 & 279/22 & -197/22 \\ -45/44 & 79/44 & 259/44 \end{pmatrix}$$

13. $\begin{pmatrix} 147/22 & 85/4 & 379/44 \\ -9/11 & -1/2 & 261/22 \\ 91/11 & 17 & 127/11 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 67/5 & 286/15 & 308/15 \\ 8 & -5/3 & 14/3 \\ 87/5 & 166/15 & 113/15 \end{pmatrix}$

15.
$$\begin{pmatrix} 3107/22 & 367/4 & 4585/44 \\ 137/11 & 71/2 & 889/22 \\ 1691/22 & 271/4 & 4289/44 \end{pmatrix}$$

16. $\begin{pmatrix} 42/11 & 9 & 183/11 \\ 84/11 & 10 & -74/11 \\ -34/11 & 1 & 31/11 \end{pmatrix}$

17.
$$\begin{pmatrix} 779/44 & 2743/44 & 1211/44 \\ 31/22 & 103/22 & 639/22 \\ 1011/44 & 2191/44 & 1579/44 \end{pmatrix}$$

18. $\begin{pmatrix} 328/11 & 106 & 502/11 \\ -4/11 & 3 & 564/11 \\ 450/11 & 86 & 647/11 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 106/5 & 46/5 & 8/5 \\ 2 & 4 & 14 \\ -9/5 & -29/5 & -37/5 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 27 & 84 & 36 \\ 0 & 7 & 40 \\ 32 & 68 & 51 \end{pmatrix}$

21.

$$\begin{pmatrix} 1143/22 & 417/4 & -1401/44 \\ 1583/11 & 471/2 & 1239/22 \\ -259/22 & -159/4 & -1245/44 \end{pmatrix}$$

22. $\begin{pmatrix} 111/11 & 45/2 & 147/22 \\ -54/11 & -8 & 233/11 \\ 106/11 & 17 & 102/11 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 342 & 309 & 399 \\ 90 & 50 & 56 \\ 252 & 203 & 245 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 75/11 & 11 & 95/11 \\ -26/11 & -21 & 124/11 \\ 241/11 & 13 & 20/11 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -52/5 & -97/5 & -161/5 \\ -10 & -2 & 6 \\ -47/5 & -47/5 & -41/5 \end{pmatrix}$

2-nji meseläniň Krameriň düzgüni boýunça jogaplary:

1. $\Delta=30$; $\Delta x=54$; $\Delta y=50$; $\Delta z=2$; (9/5, 5/3, 1/15)
2. $\Delta=-13$; $\Delta x=13$; $\Delta y=-26$; $\Delta z=-13$; (-1, 2, 1)
3. $\Delta=38$; $\Delta x=78$; $\Delta y=-64$; $\Delta z=32$; (39/19, -32/19, 16/19)
4. $\Delta=-14$; $\Delta x=-14$; $\Delta y=-28$; $\Delta z=0$; (1, 2, 0)
5. $\Delta=-21$; $\Delta x=0$; $\Delta y=-42$; $\Delta z=-21$; (0, 2, 1)
6. $\Delta=37$; $\Delta x=61$; $\Delta y=-56$; $\Delta z=2$; (61/37, -56/37, 2/37)
7. $\Delta=-4$; $\Delta x=-5$; $\Delta y=-4$; $\Delta z=-15$; (5/4, 1, 15/4)
8. $\Delta=-14$; $\Delta x=-42$; $\Delta y=-28$; $\Delta z=-14$; (3, 2, 1)
9. $\Delta=-7$; $\Delta x=4$; $\Delta y=-27$; $\Delta z=-22$; (-4/7, 27/7, 22/7)
10. $\Delta=-10$; $\Delta x=-30$; $\Delta y=-20$; $\Delta z=-10$; (3, 2, 1)
11. $\Delta=7$; $\Delta x=7$; $\Delta y=21$; $\Delta z=7$; (1, 3, 1)
12. $\Delta=6$; $\Delta x=6$; $\Delta y=6$; $\Delta z=6$; (1, 1, 1)
13. $\Delta=-10$; $\Delta x=-20$; $\Delta y=-6$; $\Delta z=-6$; (2, 3/5, 3/5)
14. $\Delta=6$; $\Delta x=-12$; $\Delta y=-4$; $\Delta z=-14$; (-2, -2/3, -7/3)
15. $\Delta=-7$; $\Delta x=0$; $\Delta y=0$; $\Delta z=-7$; (0, 0, 1)
16. $\Delta=52$; $\Delta x=-40$; $\Delta y=8$; $\Delta z=12$; (-10/13, 2/13, 3/13)
17. $\Delta=4$; $\Delta x=10$; $\Delta y=2$; $\Delta z=0$; (5/2, 1/2, 0)
18. $\Delta=2$; $\Delta x=4$; $\Delta y=2$; $\Delta z=0$; (2, 1, 0)
19. $\Delta=-2$; $\Delta x=-4$; $\Delta y=-4$; $\Delta z=-2$; (2, 2, 1)
20. $\Delta=9$; $\Delta x=-18$; $\Delta y=18$; $\Delta z=18$; (-2, 2, 2)
21. $\Delta=25$; $\Delta x=42$; $\Delta y=-37$; $\Delta z=-10$; (42/25, -37/25, -2/5)
22. $\Delta=-12$; $\Delta x=0$; $\Delta y=-12$; $\Delta z=24$; (0, 1, -2)
23. $\Delta=6$; $\Delta x=-6$; $\Delta y=-6$; $\Delta z=6$; (-1, -1, 1)
24. $\Delta=6$; $\Delta x=-6$; $\Delta y=0$; $\Delta z=-6$; (-1, 0, -1)
25. $\Delta=26$; $\Delta x=2$; $\Delta y=-8$; $\Delta z=6$; (1/13, -4/13, 3/13)

3. WEKTORLAR ALGEBRASY

Goý, $\boldsymbol{A}$ we $\boldsymbol{B}$ giňişligiň dürli nokatlary bolsunlar. $\boldsymbol{A}$ – başlangyjy, $\boldsymbol{B}$ – ahyry hasaplanyp, ugry peýkamjyk arkaly görkezilip gurlan kesime $\boldsymbol{AB}$ **wektor** diýilýär we $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ ýaly belgilenilýär.

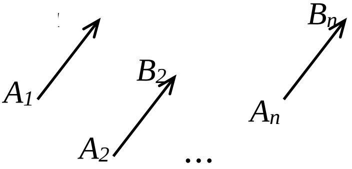
[*AB*) şöhle arkaly kesgitlenýän ugra $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ **wektoryň ugry**, **[*AB*]** kesimiň uzynlygyna bolsa, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ wektoryň **uzynlygy** ýa-da **moduly** diýilýär we $|\boldsymbol{AB}|$ ýa- da $\boldsymbol{AB}$ ýaly belgilenilýär. Köplenç, wektorlary ýeke kiçi harp bilen hem belgileýärler: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, …. Onda olaryň modullary $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$ ýa-da a, b, c, d, … ýaly belgilener.

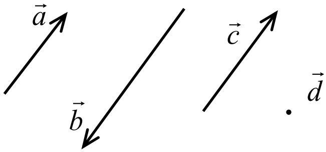
Başlangyjy we ahyry gabat gelýän $\overrightarrow{\boldsymbol{AA}}$ wektora **nul wektor** $(\vec{0})$ diýilýär; onuň moduly nula deňdir, ugry bolsa kesgitsizdir. Nul wektory islendik tarapa ugrukdyrylan hasaplamak bolar.

Goý, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ we $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ giňişligiň iki wektory bolsun. Eger bu wektorlaryň ugurlary gabat gelip, $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}|$ bolsa, onda bulara **deň wektorlar** diýilýär we $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ ýaly belgilenilýär. Şeýle kesgitlemede, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ wektora deň bolan wektorlaryň köplügini **erkin wektorlar** diýip atlandyrýarlar we ýönekeý $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{x}$, ýaly belgileýärler. Diýmek, nuldan tapawutly islendik erkin $\vec{a}$ wektor giňişligiň $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, …, $\boldsymbol{A}_n$, … nokatlaryndan alnyp goýlan ugurdaş $[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1]$, $[\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2]$, … $[\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n]$, … tükeniksiz köp kesimler görnüşinde şekillendirilýärler, olaryň uzynlyklary bolsa, şol bir $|\vec{a}|$ sana deňdir (sur. 3.1).

Erkin $\vec{0}$ wektor bolsa, giňişligiň dürli nokatlarydyr.

Erkin wektorlaryň hususy görnüşlerinden süýşýän we gozganmaýan wektorlary tapawutlandyrýarlar. Bir göni çyzygyň üstünde ýatýan erkin wektorlara **süýşýan wektorlar**, başlangyç we ahyrky nokatlary gabat gelýan erkin wektorlara – **gozganmaýan wektorlar** diýilýar. Erkin wektorlary, adatça, **wektor** diýip atlandyrýarlar.





3.1-nji surat **3.2-nji surat**

Eger iki wektoryň ugurlary gabat gelýan ýa-da garşylykly bolsa, onda olara **kollinear wektorlar** diýilýär. Başgaça, kollinear wektorlar bir göni çyzyga paralleldirler, $\vec{0}$ bolsa islendik wektora kollineardyr (sur. 3.2).

Eger nuldan tapawutly üç wektor bir tekizlige paralel bolsa, onda olara **komplanar wektorlar** diýilýär. Bu wektorlaryň iň bolmanda biri $\vec{0}$ bolsa hem, olar komplanardyrlar (sur. 3.3).

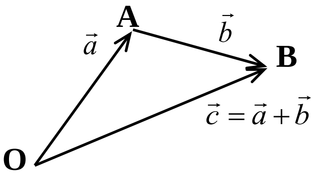
3.3-nji surat

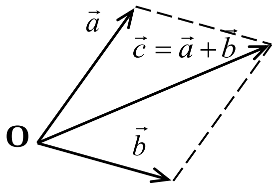
Şu bölümde wektorlaryň üstünde geçirilýän grafiki amallara, olaryň tekizlikdäki we giňişlikdäki koordinatlaryna, skalýar, wektor hem-de garyşyk köpeltmek hasyllaryna serederis.

3.1. Wektorlaryň üstünde grafiki amallar

1) Wektorlary goşmak

Goý, tekizlikde nuldan tapawutly $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ berilsin. ***O*** nokatdan $\vec{\boldsymbol{a}}$ alyp goýalyň we ahyryny ***A*** bilen belgiläliň. *A* nokatdan $\vec{\boldsymbol{b}}$ alyp goýalyň we ahyryny $\boldsymbol{B}$ bilen belgiläliň, ýagny $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=\vec{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ (sur.3. 4).





3.4-njy surat **3.5-nji surat**

$\boldsymbol{O}$ nokatda başlangyjy, $\boldsymbol{B}$ nokatda ahyry bolan $\vec{\boldsymbol{c}}$ wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlaryň **jemi** diýilýär we $\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$ ýaly ýazylýar. Wektorlary şeýle usulda goşmaklyga **üçburçlyk düzgüni** diýilýär.

Wektorlary goşmagyň **parallelogram düzgüninde** $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlary şol bir $\boldsymbol{O}$ nokatdan alyp goýýarlar we bu wektorlaryň üs-tünde parallelogram gurýarlar (sur. 3.5).

Parallelogramyň diagonaly $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlaryň jemidir: $\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$.
Wektorlaryň jeminiň şeýle häsiýetleri bardyr:

1. Jemiň kommutatiwligi: $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{a}}$;
2. Jemiň assosiatiwligi: $\left(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right)+\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\left(\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}\right)$;
3. Nul wektoryň häsiýeti: $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{0}=\vec{\boldsymbol{a}}$.

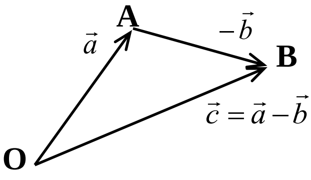
$\vec{\boldsymbol{a}}=\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ wektora garşylykly bolan wektor $-\vec{\boldsymbol{a}}=\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$ ýaly kesgilenilýär. Onda:

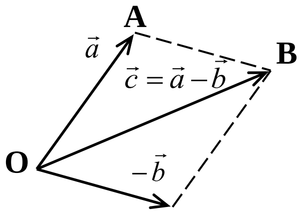
$\vec{\boldsymbol{a}}+\left(-\vec{\boldsymbol{a}}\right)=\vec{0}$ ýa-da $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}+\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}=\overrightarrow{\boldsymbol{AA}}=\vec{0}$.

2) Wektorlary aýyrmak

Tekizlikde $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlaryň **tapawudy** diýlip, şeýle jeme düşünilýär: $\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\left(-\vec{\boldsymbol{b}}\right)$.

Onda, wektorlaryň tapawudy — üçburçluk we parallelogram düzgünlerinde şunuň ýaly tapylar (sur.3.6).





3.6-njy surat

3) Wektory sana köpeltmek

$\vec{a}$ wektory λ sana köpeltmek diýip, oňa kollinear bolan $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ wektora aýdylýar. Bu ýerde:

$$\left|\vec{b}\right| = \left|\lambda\vec{a}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|\vec{a}\right|.$$

$\vec{b}=\lambda\vec{a}$ wektoryň ugry, eger λ položitel san bolsa, $\vec{a}$ bilen gabat gelýändir, otrisatel bolsa garşylyklydyr. Wektory sana köpeltmek amalynyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

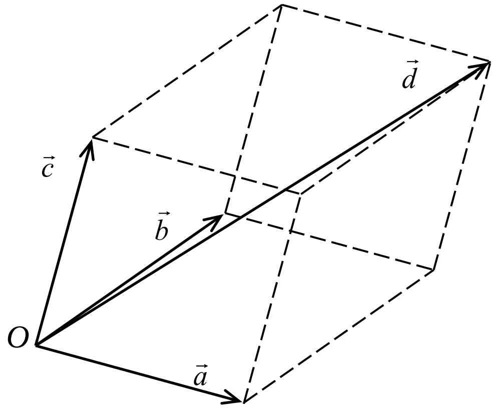
1. Kommutatiwlik:
$$\lambda\vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda;$$

2. Assosiatiwlik:
$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

3. Wektorlaryň jemine görä distributiwlik:
$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

4. Sanlaryň jemine görä distributiwlik:
$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

Bellik. Giňişlikde komplanar däl $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň jemine deň bolan $\vec{d}$ wektory gurmak uçin parallelepiped düzgünini ulanýarlar. Onuň uçin giňişligiň erkin *O* nokadynda $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlary alyp goýýarlar hem-de gapyrgalary şu wektorlardan ybarat bolan parellelepipedi guryarlar. Bu parallelepipediň diagonaly $\vec{d}$ wektoryň uzynlygyna deňdir (sur .3.7).

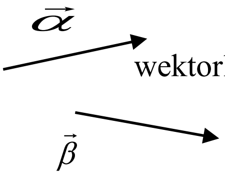


3.7-nji surat

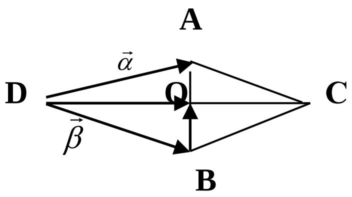
Gönükme 1.

Kollinear däl iki $\vec{\alpha}$ *we* $\vec{\beta}$ wektorlar berlen:

1) $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$; 2). $\dfrac{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$; 3). - $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$; 4) . $\dfrac{\vec{\beta}-\alpha}{2}$; wektorlary gurmaly.



⊂ Goý, wektorlar berlen bolsun. $\vec{\alpha}$ *we* $\vec{\beta}$ wektorlaryň üstünde qaparallelogram guralyň



$\overrightarrow{DC} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$; $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$;

Onda: 1) $\overrightarrow{DO} = \dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$;   **2)** $\overrightarrow{BO} = \dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$;

3) we 4) punktlar çözülende 1) we 2)-ä ters ugrukdyrylan wektorlary gurmalydyr.

3) $-\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} = \overrightarrow{OD}$;   4) $\dfrac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2} = -\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2} = \overrightarrow{OB}$

Meseleler.

3.1. ABCD romb berlen. Aşakdaky wektorlar

1) $\overrightarrow{AB}$ *we* $\overrightarrow{BC}$;   2) $\overrightarrow{AB}$ *we* $\overrightarrow{DC}$;   3) $\overrightarrow{BC}$ *we* $\overrightarrow{AD}$ 4) $\overrightarrow{CB}$ *we* $\overrightarrow{AD}$;

5). $\overrightarrow{AB}$ *we* $\overrightarrow{CD}$ öz aralarynda deňmi ?

3.2. ABCD parallelogram berlen, AC *we* BD diogonallar O nokatda kesişýärler.

Goý, $\vec{AB} = p$; $\vec{AD} = q$ bolsun. Onda:

I. $\vec{BC}, \vec{CB}$; $\vec{CD} : \vec{DC} : \vec{AC}$;

II $\vec{CA}$; $\vec{BD}$; $\vec{AO}$; $\vec{OA}$; $\vec{CO}$; $\vec{OC}$; $\vec{BO}$; $\vec{OB}$

wektorlary p *we* q üsti bilen aňlatmaly.

3.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped berlen, Goý, $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$; $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ bolsun. Onda $\vec{AC_1}$ *we* $\vec{C_1A}$;

$\vec{BD_1}$ we $\vec{D_1B}$; $\vec{A_1C}$ we $\vec{CA_1}$ wektorlary $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ bilen aňlatmaly. (çyzgysyny gurmaly).

3.4. OBCA gönüburçlukda P nokat OB tarapy, Q nokat BC tarapy deň ýarpa bölýar. Eger OA=3; OB=5 bolsa, onda
$\vec{OP}$, $\vec{OQ}$, $\vec{AP}$. $\vec{AQ}$; $\vec{PQ}$ wektorlary tapmaly.

3.2. Wektory bazis wektorlary boýunça dagytmak

Tekizlikde kollinear däl wektorlaryň tertipleşdirilen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ jübtüne, ahli wektorlaryň köplüginde **bazis** diýlip at berilyär. Islendik $\vec{a}$ wektory diňe eke-täk ýagdaýda

$$\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 \qquad (3.1)$$

görnüşde aňlatmak bolar. Bu yerde x, y sanlara $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bazisde $\vec{a}$ **wektoryň koordinatlary** diyilyär we gysgaça $\vec{a} = (x; y)$ ýaly belgilenilyär.
(3.1) aňladylma $\vec{a}$ wektory $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bazisde **dagytmak** diyilyär.
Eger-de $\vec{e}_1$ we $\vec{e}_2$ wektorlar özara perpendikulýar we uzynlyklary bire deň bolsalar, olara **ortlar** diylip, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bazise bolsa **gönü-burçly** diyilyär. Ortlary degişlilikde, $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$ ýaly belgileyärler. Onda gönüburçly bazisde ortlar arkaly (1.1) aňlatmany şeyle ýazmak bolar:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (3.2)$$

Giňişlikde komplanar däl wektorlaryň tertipleşdirilen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ üç-lügine ähli wektorlaryň köpluginde **bazis** diyilyär. Onda islendik $\vec{a}$ wektory bazis wektorlary arkaly

$$\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \qquad (3.3)$$

görnuşde dagytmak bolar, ýa-da, koordinatlarynyň usti bilen $\vec{a} = (x; y; z)$ ýaly ýazyp bileris.

Gönüburçly bazisde ortlary, degişlilikde, $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ ýaly belgiläp, (1.3) formulany şeýle ýazarys:

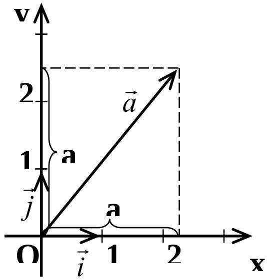
$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \qquad (3.4)$$

Şeýle pikir ýöretmeleri dowam etdirip, bu düşünjeleri n-ölçegli wektor ginişligi üçin hem girizmek bolar.

3.3. Wektorlaryň tekizlikde we giňişlikde koordinatalary

Tekizlikde Oxy gönüburçly dekart koordinatlar ulgamyna seredeliň. Ox we Oy oklarynda, başlangyjy O nokatda bolan, ugurlary abssissa we ordinata oklarynyň položitel ugurlary bilen gabat gelýän, birlik wektorlary alyp goýalyň. Bu wektorlara **ortlar** diýlip, degişlikde, $\vec{i}$ we $\vec{j}$ ýaly belgilenilýär. Şeýlelikde, nokatlar tekizliginden wektor tekizligini alarys.

Tekizlikde berlen $\vec{a}$ wektoryň başlangyjyny parallel göçürme arkaly Oxy koordinatlar ulgamynyň O başlangyjyna elteliň. Onda $\vec{a}$ wektoryň koordinat oklaryna $(a_x; a_y)$ proýeksiýalary wektoryň koordinatlary bolar: $\vec{a} = (a_x; a_y)$.



3.8-nji surat

Koordinatlar ulgamynda ortlary – birlik bazis wektorlary göz öňünde tutup, $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ ýaly ýazyp bileris (sur. 3.8).

Eger Oxy gönüburçly koordinatlar ulgamynda $A(x_1; y_1)$ we $B(x_2; y_2)$ nokatlar berlen bolsa, $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinaty $(\vec{i}; \vec{j})$ bazisde sanlaryň $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ tertipleşdirilen jübti bolar:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j}\ .$$

Goý, $(\vec{i};\vec{j})$ bazisde $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özleriniň $\vec{a} = (a_x; a_y)$, $\vec{b} = (b_x; b_y)$ koordinatlary bilen berlen bolsun. Onda:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y), \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

Goý, giňişlikde ***Oxyz*** gönüburçly koordinatlar ulgamy $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ortlar bilen berlen bolsun. Onda $(a_x; a_y; a_z)$ koordinatly giňişlikdäki islendik $\vec{a}$ wektory ortlar boýunça şeýle dagytmak bolar:

$$\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}\ .$$

Eger bu koordinatlar ulgamynda $A(x_1; y_1; z_1)$ we $B(x_2; y_2; z_2)$ nokatlar berlen bolsa, onda $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinaty

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

ýa-da

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j} + (z_2 - z_1)\cdot\vec{k}$$

ýaly aňladylar.

Goy, $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ bazisde $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özleriniň $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ we $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ koordinatlary bilen berlen bolsun. Onda:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z),$$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$, $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Gönükme. Eger $\vec{a} = (-2;3;1)$ we $\vec{b} = (4;0;-1)$ bolsa, $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ wektory we onuň modulyny kesgitlemeli.

➲ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(-2;3;1) + 3(4;0;-1) = (-4;6;2) + (12;0;-3) =$
$= (-4+12; 6+0; 2-3) = (8;6;-1)$;

$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{8^2 + 6^2 + (-1)^2} = \sqrt{64+36+1} = \sqrt{101}$. ➲

Gönükme. ABC üçburçlugyň depeleri $A(1;1)$, $B(0;3)$, $C(-1;-1)$ nokatlarda ýatýarlar. AB, BC we CA wektorlaryň koordinatlaryny tapyň. $AB+BC+CA=0$ bolýandygyny subut ediň.

➲ $\overrightarrow{AB} = (0-1; 3-1) = (-1;2)$; $\overrightarrow{BC} = (-1-0; -1-3) = (-1;-4)$;
$\overrightarrow{CA} = (1+1; 1+1) = (2;2)$;
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-1;2) + (-1;-4) + (2;2) =$
$= (-1-1+2; 2-4+2) = (0;0)$. ➲

3.4. Wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy

Kesgitleme. $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ýeke-täk tertipleşdirilen hakyky sanlar arkaly $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ wektorlaryň **çyzykly kombinasiýasy** diýip, aşakdaky ýaly kesgitlenen $\vec{b}$ wektora aýdylýar:

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n \qquad (3.5)$$

Başgaça, $\vec{b}$ wektory λ_i, $(i = \overline{1,n})$ ýeke-täk koeffisientleriň üsti bilen $\vec{a}_i$, $(i = \overline{1,n})$ wektorlara **çyzykly bagly** ýa-da **dagydylan** diýilýär.

Belli bolşy ýaly, eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kollinear däl bolsalar, onda bular bilen komplanar islendik $\vec{c}$ wektory ýeke-täk tertipleşdirilen (x,y) sanlar üçin

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \qquad (3.6)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde $\vec{c}$ wektor $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlara dagydylandyr.

Goý, giňişlikde $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar däl wektorlar bolsunlar. Onda islendik $\vec{d}$ giňişlik wektoryny ýeke-täk tertipleşdirilen $(x;y;z)$ sanlar üçin

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} \qquad (3.7)$$

görnüşde dagytmak bolar.

Gönükme. $\vec{a}(4;2)$; $\vec{b}(2;7)$; $\vec{c}(3;-6)$ wektorlar berlen. $\vec{c}$ wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ wektorlaryň üsti bilen aňlatmaly.

➲ $\vec{a}\,x + \vec{b}\,y = \vec{c}$ aňladylmadan alarys:

$$(4;2)x + (2;7)y = (3;-6), \qquad (4x;2x) + (2y;7y) = (3;-6),$$

$$(4x + 2y; 2x + 7y) = (3;-6).$$

Bu ýerden:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3, \\ 2x + 7y = -6 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 4 = 24.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 12 = 33; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -24 - 6 = -30.$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{33}{24}; \qquad \boldsymbol{y}=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-30}{24}.$$

Onda $\frac{33}{24}\vec{\boldsymbol{a}}-\frac{30}{24}\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{c}}$ ýa-da $\vec{\boldsymbol{c}}=\frac{11}{8}\vec{\boldsymbol{a}}-\frac{5}{4}\vec{\boldsymbol{b}}$ bolar. ⊂

Gönükme. $\vec{a}(5;3)$; $\vec{b}(2;0)$; $\vec{c}(4;2)$ wektorlar berlen. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ ýerine ýeter ýaly nuldan tapawutly α, β, γ sanlary tapmaly.

⊃ Deňlemede wektorlaryň kordinatlaryny ornuna goýup taparys:

$$\alpha(5;3)+\beta(2;0)+\gamma(4;2)=(0;0)$$

ýa-da

$$\alpha\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}5\alpha\\3\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\0\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\gamma\\2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}5\alpha\\3\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\0\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\gamma\\2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Bu ýerden deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases}5\alpha+2\beta+4\gamma=0,\\3\alpha \qquad\quad +2\gamma=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5\alpha+2\beta+4\gamma=0,\\3\alpha \qquad\quad +2\gamma=0.\end{cases}$$

γ-nyň bahasyny birinji deňlemede goýalyň:

$$5\alpha+2\beta-6\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad 2\beta-\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=2\beta.$$

$\beta=1$ hasap edeliň $(\alpha,\beta,\gamma\neq 0)$.

Onda: $\alpha = 2;\ \gamma = -\frac{3}{2}\alpha = -\frac{3}{2}\cdot 2 = -3$.

Diýmek, $\alpha = 2;\ \beta = 1;\ \gamma = -3$.

Bu ýerde $0 \neq \beta \in \boldsymbol{R}$ – tükeniksiz köp sanlardyr.
Diýmek, çözüwleriň köplügi hem tükeniksizdir. ⊂

3.5. Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

Kesgitleme. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly şeýle bir c san bolup, $c = (\vec{a}, \vec{b})$ ýa-da $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ýaly belgilenilýär we şeýle formula bilen kesgitlenýär:

$$c = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (3.8)$$

bu ýerde φ – $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçdur.
Umuman, **wektorlaryň arasyndaky burç** diýip, olaryň ugurlarynyň arasyndaky burça düşünilýär. Eger wektorlar özara perpendikulýar bolsalar – $\varphi = 90^0$, garşylykly bolsalar – $\varphi = 180^0$ we ş. m..
Formuladan görnüşi ýaly, wektorlar özara perpendikulýar bolanda ýa-da birden-biri nul wektor bolsa, skalýar köpeltmek hasyly nula deňdir.
(2.8) formuladan wektorlaryň arasyndaky burç üçin alarys:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \qquad (3.9)$$

Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

– kommutatiwlik: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

– sana köpeltmek amalyna görä assosiatiwlik: $\left((k\vec{a}),\vec{b}\right)=k\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;``

– wektorlary goşmak amalyna görä distributiwlik: $\left(\vec{a},\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$.

Wektoryň öz-özüne skalýar köpeltmek hasyly onuň modulynyň kwadratyna deňdir:

$$\left(\vec{a},\vec{a}\right)=(\vec{a})^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0=|\vec{a}|^2=a^2 .$$

Eger wektorlar gönüburçly koordinatlar tekizliginde

$$\vec{a}=\left(a_x,a_y\right)=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}, \qquad \vec{b}=\left(b_x,b_y\right)=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}$$

koordinatlary bilen berlen bolsalar, onda olaryň skalýar köpeltmek hasyly üçin alarys:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\right)=$$

$$=a_x\cdot b_x\cdot\left(\vec{i}\right)^2+a_x\cdot b_y\cdot\left(\vec{i},\vec{j}\right)+a_y\cdot b_x\cdot\left(\vec{j},\vec{i}\right)+a_y\cdot b_y\cdot\left(\vec{j}\right)^2 .$$

Bu ýerde $\vec{i}$, $\vec{j}$ – ortlar bolany üçin:

$$\left(\vec{i}\right)^2=\left|\vec{i}\right|^2=1,\ \left(\vec{j}\right)^2=\left|\vec{j}\right|^2=1,\ \left(\vec{i},\vec{j}\right)=\left(\vec{j},\vec{i}\right)=0 .$$

Netijede alarys:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y \qquad (3.10)$$

Bu ýerden, kordinatalary bilen berlen wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaklygyň anyk formulasy gelip çykýar:

$$\cos\varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \qquad (3.11)$$

Şuňa meňzeşlikde, giňişlikde, gönüburçly koordinatlar ulgamynda berlen

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$$

wektorlar üçin alarys:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z, \qquad (3.12)$$

$$\cos\varphi = \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3.13)$$

Kesgitleme. Berlen $\vec{a}$ wektor bilen $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlar arasyndaky α, β, γ burçlarynyň kosinuslaryna **ugrukdyryjy kosinuslar** diýilýär we olar şeýle tapylýarlar:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \text{(tekizlikde);}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad \text{(giňişlikde).}$$

Ugrukdyryjy kosinuslar üçin aşakdaky deňlikler ýerine ýetýär:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ (tekizlikde);

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (giňişlikde).

Gönükme. $\vec{a}=(-1;2;-2)$ we $\vec{b}=(6;3;-6)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny hem-de aralaryndaky burçuň ululygyny tapmaly.

➲ (3.12) formuladan alarys:

$$c=(\vec{a},\vec{b})=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=$$
$$(-1)\cdot 6+2\cdot 3+(-2)\cdot(-6)=-6+6+12=12.$$

(3.13) formuladan taparys:

$$\cos\varphi=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=$$

$$=\frac{12}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{6^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{12}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{36+9+36}}=$$
$$\frac{123}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{81}}=\frac{12}{3\cdot 9}=\frac{4}{9}.$$

Bu ýerden: $\varphi=\arccos\frac{4}{9}.$ ⮌

3.6. Wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly

Kesgitleme. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly şeýle bir $\vec{c}$ wektor bolup, $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ ýa-da $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ýaly belgilenilýär we aşakdaky üç şert boýunça kesgitlenýär:

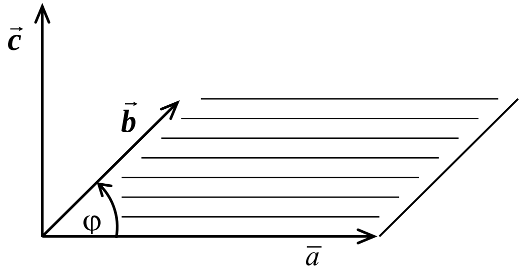
1. $\vec{c}$ wektoryň moduly $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi; \qquad (3.14)$$

2. $\vec{c}$ wektor $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň her birine, diýmek olaryň ýatan tekizligine perpendikulýardyr:

$\vec{c}\perp\vec{a}$ we $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3. Bir başlangyçdan alnyp goýlan $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar wektorlaryň sagky üçlügini emele getirýärler(sur. 3.9):



3.9-njy surat

Formuladan görnüşi ýaly, wektorlar özara kollinear bolanda ýa-da birden-biri nul wektor bolsa, wektor köpeltmek hasyly nula deňdir.

Wektor köpeltmek hasylynyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

– kommutatiw dällik:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right];$$

– sana köpeltmek amalyna görä assosiatiwlik:

$$\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]=k\left[\vec{a},\vec{b}\right];$$

– wektorlary goşmak amalyna görä distributiwlik:

$$\left[\vec{a},\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right].$$

Wektoryň öz-özüne wektor köpeltmek hasyly nul wektora deňdir:

$$\left[\vec{a},\vec{a}\right]=\vec{0}.$$

Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar giňişlikde, gönüburçly koordinatlar ulgamynda özleriniň

$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k},$$

$$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$$

koordinatlary bilen berlen bolsa, onda olaryň wektor köpeltmek hasyly 3-nji tertipli kesgitleýji arkaly şeýle hasaplanylýar:

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k} \qquad (3.15)$$

Bellik. Kesgitleýjileriň hasaplanylyşy 1-nji bölümde getirilendir.

Gönükme. $\vec{a}=(-1;2;-2)$ we $\vec{b}=(6;3;-6)$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny kesgitlemeli.

➲ (3.15) formuladan alarys:

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -2\\ 6 & 3 & -6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-12\vec{j}-3\vec{k}-12\vec{k}+6\vec{i}-6\vec{j}=$$

$$-6\vec{i}-18\vec{j}-15\vec{k}.$$ ➲

3.7. Wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly

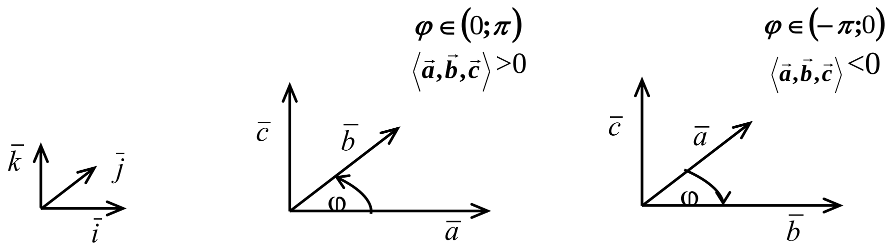
Goý, sagky $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ bazisli gönüburçly koordinatlar ulgamynda nuldan tapawutly we komplanar däl $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlar öz koordinatlary bilen berlen bolsun:

$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k},$$
$$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$$

Kesgitleme. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ bazise görä $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ diýip, absolýut ululygy $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň göwrümine deň bolan sana aýdylýar we $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle$ ýaly belgilenip, aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (3.16)$$

Bu san, ýagny üçünji tertipli kesgitleýjiniň bahasy, eger $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlar hem sagky bazisi emele getirseler – položiteldir, çep bazisi emele getirseler – ortrisateldir (sur. 3.10).



3.10-njy surat

Gönükme. $\vec{a}=(1;1;-1)$, $\vec{b}=(2;1;0)$ we $\vec{c}=(1;2;3)$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

➲ (3.16) formula görä alarys:

$$\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3+0+(-4)+1-0-6=-6.$$

Köpeltmek hasyly otrisatel san boldy. Diýmek, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlar $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ bazise görä çepki bazisi emele getirýän eken.

Eger $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň üstünde parallelepiped gurulsa, onda onuň göwrümi

$V=|\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle|=|-6|=6$ (kub ölçeg birligi) bolar. ➲

Meseleler .

3.5. $a=3i+4j+5k$ *we* $b=4i+5j-3k$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

Jogaby: Arccos (17/50).

3.6. .Eger $a=1,\ b=2,\ c=3,\ (\widehat{a,b})=(\widehat{a,c})=(\widehat{b,c})=\pi/3$ bolsa, onda $2a+3b+4c$ *we* $5a+6b+7c$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

Jogaby. 547

3.7. Wektory wektora köpeltmeli

$\vec{a}=2i+5j+k$ *we* $\vec{b}=i+2j-3k$ Jogaby: $\vec{a}\times\vec{b}=-17i+7j-k$

3.8. $a=i-j+k$ $b=i+j+k$ $c=2i+3j+4k$

wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny tapmaly. Jogaby: 4

3.9. $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;\ 2;\ 3)\, we\, D(3;7;2)$ üçburçly piramidanyň depeleri. Piramidanyň göwrümini we BCD granyna inderilen beýikligi tapmaly.

Jogaby: $V = 20 kub.\ bir.;\ h = 4\sqrt{510}/17$.

3.10. $A(2:2:2)$, $B(4:0:2)\, we\ C(0:1:0)$ üçburçlugyň depeleri berlen. Üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Jogaby: $S = \sqrt{65}/2\ kw.\ birl.$

Ýokary matematikadan 2-nji tipli ýumuş

Mesele 1. $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$ we $\boldsymbol{c} = c_x \boldsymbol{i} + c_y \boldsymbol{j} + c_z \boldsymbol{k}$ wektorlar berlen.

1. ***a*** we ***b*** wektorlaryň arasyndaky burçy;
2. ***a*** we ***b*** wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny;
3. ***a*** we ***b*** wektorlaryň üstünde gurlan üçburçlugyň meýdanyny;
4. ***a***, ***b*** we ***c*** wektorlaryň üstünde gurlan piramidanyň göwrümini tapmaly.

№	***a***	***b***	***c***
1	$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$
2	$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$
3	$\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$
4	$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$
5	$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$
6	$\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = -\ \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$
7	$\boldsymbol{a} = -\ \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = -8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 9\boldsymbol{k}$
8	$\boldsymbol{a} = -\ 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = -\ 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$
9	$\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = -\ 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$
10	$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$
11	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
12	$\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} +$	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$

	6***k***		
13	***a*** = 2***i*** - 4***j*** - 4***k***	***b*** = 6***i*** + 7***j*** - 6***k***	***c*** = 7***i*** + 4***j*** + 4***k***
14	***a*** = 8***i*** - 4***j*** + 8***k***	***b*** = 7***i*** + 4***j*** - 4***k***	***c*** = 8***i*** - 4***j*** - 8***k***
15	***a*** = - ***i*** - 4***j*** + 8***k***	***b*** = 8***i*** - 4***j*** + 8***k***	***c*** = 6***i*** - 3***j*** - 6***k***
16	***a*** = 2***i*** - 2***j*** + ***k***	***b*** = 6***i*** - 3***j*** - 6***k***	***c*** = ***i*** + 4***j*** - 8***k***
17	***a*** = - 3***i*** - 6***j*** + 6***k***	***b*** = - ***i*** + 4***j*** - 8***k***	***c*** = 2***i*** - 6***j*** - 9***k***
18	***a*** = 2***i*** + 4***j*** - 4***k***	***b*** = - 2***i*** - 6***j*** + 9***k***	***c*** = 6***i*** - 3***j*** - 6***k***
19	***a*** = 6***i*** - 3***j*** - 6***k***	***b*** = 2***i*** + 2***j*** - ***k***	***c*** = -7***i*** - 4***j*** + 4***k***
20	***a*** = -7***i*** + 4***j*** - 4***k***	***b*** = 2***i*** - 6***j*** + 9***k***	***c*** = 3***i*** - 2***j*** - 6***k***
21	***a*** = 2***i*** + 6***j*** + 3***k***	***b*** = -4***i*** - ***j*** + 8***k***	***c*** = 2***i*** - 4***j*** - 4***k***
22	***a*** = 2***i*** - 6***j*** + 9***k***	***b*** = - 4***i*** + ***j*** - 8***k***	***c*** = - 6***i*** - 3***j*** + 6***k***
23	***a*** = 2***i*** + 2***j*** + ***k***	***b*** = 3***i*** - 2***j*** - 6***k***	***c*** = 2***i*** - 2***j*** – ***k***
24	***a*** = - 3***i*** - 2***j*** - 6***k***	***b*** = - 2***i*** + 4***j*** - 4***k***	***c*** = - 2***i*** + 6***j*** - 9***k***
25	***a*** = 6***i*** - 7***j*** - 6***k***	***b*** = 7***i*** + 4***j*** - 4***k***	***c*** = 8***i*** - 4***j*** + 8***k***

Zerur maglumatlar:

1) ***a*** we ***b*** wektorlaryň arasyndaky burç:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

2). ***a*** we ***b*** wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3) ***a*** we ***b*** wektorlaryň üstünde gurlan üçburçlugyň meýdany:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

4) ***a***, ***b*** we ***c*** wektorlaryň üstünde gurlan piramidanyň göwrümi:

$$V_{\text{pir.}} = \pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Jogaplar:

№	cosφ	***a***×***b***	S	V
1	0.76	-10;9;2	6.80	7.00
2	0.97	12;-10;4	8.06	11.00
3	0.95	4;18;-25	15.53	16.00
4	0.89	12;-8;-8	8.25	4.67
5	0.85	9;42;-30	26.20	11.00
6	0.51	16;-60;32	34.93	22.00
7	0.81	0;-56;-28	31.31	98.00
8	-0.67	12;15;-6	10.06	5.00
9	0.96	-8;-2;-12	7.28	12.00
10	0.76	10;9;-2	6.80	7.00
11	0.68	40;-18;14	23.02	9.67
12	0.24	32;24;8	20.40	46.67
13	0.12	52;-12;38	32.76	78.00
14	0.07	-16;88;60	53.85	160.00
15	0.67	0;72;36	40.25	72.00
16	0.44	15;18;6	12.09	6.50
17	-0.85	24;-30;-18	21.21	65.00
18	-0.97	12;-10;-4	8.06	21.00
19	0.44	15;-6;18	12.09	1.50
20	-0.75	12;55;34	32.88	46.33
21	0.16	51;-28;22	31.10	21.00
22	-0.87	39;-20;-22	24.52	51.00
23	-0.19	-10;15;-10	10.31	6.67
24	0.52	32;0;-16	17.89	13.33
25	0.38	52;-18;73	45.71	178.67

4. ANALITIK GEOMETRIÝANYŇ ELEMENTLERI

Umuman, analitik geometriýanyň elementlerine koordinat göni çyzygynda, koordinat tekizliginde we koordinat giňişliginde seredýärler.

Koordinat göni çyzygynda – san okunda seredilýän meseleler ýönekeýdir. Meselem, koordinat okunda ***x* abssissaly *M*** nokady ***M(x)*** görnüşinde belgileýärler. $M_1(x_1)$ we $M_2(x_2)$ nokatlaryň arasyndaky ***d*** uzaklygy bolsa

$$d = |x_2 - x_1| \qquad (4.1)$$

formula arkaly kesgitleýärler.

Islendik $C \in [AB]$ nokat bu kesimi käbir $\lambda = \pm\frac{[AC]}{[CB]}$ gatnaşykda bölýär. Eger [***AC***] we [***CB***] bölek kesimler şol bir ugra gönükdirilen bolsalar, λ – položiteldir, ýogsa-da λ – otrisatel sandyr. Eger ***A*** we ***B*** nokatlar koordinat okunda ýatyp, $A(x_1)$, $B(x_2)$ koordinatlara eýe bolsalar, onda [***AB***] kesimi λ gatnaşykda bölýän ***C(x)*** nokadyň ***x*** koordinaty:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \qquad (4.2)$$

formula arkaly tapylar. Hususan-da, λ=1 bolanda [***AB***] kesimiň ortasynyň koordinaty:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

bolar.

Koordinat tekizligindäki we giňişligindäki meseleleriň käbirlerine garap geçeliň.

4.1. Tekizlikde gönüburçly koordinatalar

Eger tekizlikde $x0y$ – gönüburçly koordinatlar ulgamy berlen bolsa, onda bu tekizlikdäki x we y koordinatly M nokady $M(x,y)$ ýaly belgileýärler. $M_1(x_1;y_1)$ we $M_2(x_2;y_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk (kesimiň uzynlygy) bolsa:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (4.3)$$

formuladan tapylýar. Hususy ýagdaýda, koordinatlar başlangyjyndan $M(x,y)$ nokada çenli d uzaklyk:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ýaly kesgitlener.

$A(x_1;y_1)$ we $B(x_2;y_2)$ nokatlaryň arasyndaky kesimi berlen λ gatnaşykda bölýän $C(x,y)$ nokadyň koordinatlary:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (4.4)$$

görnüşde tapylýar. $\lambda=1$ bolanda, $[AB]$ kesimiň ortasynyň koordinatlary:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

görnüşde kesgitlener.

Eger ABC üçburçlyk $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ depeleriniň koordinatlary bilen berlen bolsa, onda onuň meýdanyny:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}|\Delta|, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{y}_3 \end{vmatrix} \qquad (4.5)$$

formula boýunça hasaplaýarlar.

Gönükme. $\boldsymbol{A}(-3,-3)$, $\boldsymbol{B}(-1;3)$, $\boldsymbol{C}(11;-1)$ depeleri bilen berlen üçburçlugyň gönüburçlydygyny subut etmeli hem-de meýdanyny hasaplamaly.

➲ Üçburçlugyň taraplarynyň uzynlyklaryny (4.3) formulany ulanup tapalyň:

$$\boldsymbol{AB} = \sqrt{(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)^2 + (\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$\boldsymbol{BC} = \sqrt{(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2)^2 + (\boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{y}_2)^2} = \sqrt{(\mathbf{11}+\mathbf{1})^2 + (-\mathbf{1}-\mathbf{3})^2} = \sqrt{\mathbf{160}},$$

$$\boldsymbol{AC} = \sqrt{(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1)^2 + (\boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{y}_1)^2} = \sqrt{(\mathbf{11}+\mathbf{3})^2 + (-\mathbf{1}+\mathbf{3})^2} = \sqrt{\mathbf{200}}.$$

Bu ýerden: $\boldsymbol{AB}^2 = 40$, $\boldsymbol{BC}^2 = 160$, $\boldsymbol{AC}^2 = \mathbf{200}$ hem-de $\boldsymbol{AC}^2 = \boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{BC}^2$.
Diýmek, Pifagoryň teoremasyna görä, $\boldsymbol{ABC}$ üçburçluk gönüburçlydyr.
Gönüburçly üçburçlugyň meýdany katetleriniň köpeltmek hasyllarynyň ýarsyna deňdir. Onda:

$$\boldsymbol{S}_{\Delta \boldsymbol{ABC}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{40} \cdot \sqrt{160} = \frac{1}{2}\sqrt{6400} = 40.$$

Meýdany (4.5) formula boýunça hem hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 11 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1-33-9-3-33-3 = -80;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta| = \frac{1}{2}\cdot|-80| = 40.$$

Meseleler

4.1. Berlen nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

1) A(2; 3) we B(-10; 2) (d = 13)

2) C(√2; - √7) we D(2√2; 0) (d = 3)

4.2. A(4; 3), B(7; 6) we C(2; 11) depeleri bilen berlen üçburçlugyň göniburçlykdygyny görkezmeli.

4.3. A(-3;7) we B(5;11) kesim berlen. Bu kesim üç nokat arkaly dört deň böleklere bölünen, şol nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.

Jogaby: (-1;8), (1;9), (3;10)

4.4. A(11;4), B(-1;-1), C(5;7) parallelogramyň depeleri, D nokadyň koordinatasyny tapmaly.
Jogaby: D(17; 22)

4.5. L(0;0), M(3;0) we N(0;4) nokatlar üçburçlugyň taraplaryňyň ortalarydyr. Üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.
Jogaby:(24 kw. bir).

4.6. A(7;2), B(1;9) we C(-8;-11) üçburçlugyň depeleri. Medianalaryň kesişme nokadyndan üçburçlugyň depelerine çenli uzaklygy tapmaly.

Jogaby: √53, √82, √185.

4.2. Çyzyklaryň deňlemeleri

xOy koordinat tekizliginde islendik çyzyga nokatlaryň geometrik orunlary ýaly seredilip, her çyzyga – bu çyzygyň üstünde ýatan islendik $\boldsymbol{M(x;y)}$ nokadyň $\boldsymbol{x}$ we $\boldsymbol{y}$ koordinatlaryny baglanyşdyrýan **deňleme** degişlidir. Bu deňlemä **berlen çyzygyň deňlemesi** diýilýär.

Eger berlen çyzygyň üstünde ýatan islendik nokadyň koordinatlaryny degişli deňlemesinde ornuna goýsak, onda bu deňleme kanagatlandyrylar, ýagny, **tojdestwo** öwrüler. Meselem, A(2;3) nokat

$$\boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2-21=0$$

deňlemäni (merkezi $\boldsymbol{M}(-2;0)$ nokatda ýatan we radiusy $\boldsymbol{r}=5$ bolan töweregiň deňlemesi) kanagatlandyrýar:

$$2^2+4\cdot 2+3^2-21=0 \qquad \Rightarrow \qquad 0=0.$$

Diýmek, $\boldsymbol{A}(2;3)$ töwerege degişli nokatdyr. $\boldsymbol{O}(0;0)$ nokat töwerege degişli däldir: $-21\neq 0$.

Gönükme. $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{a};0)$ we $\boldsymbol{F}_2(-\boldsymbol{a};0)$ nokatlardan uzaklyklarynyň köpeltmek hasyly şol bir $\boldsymbol{a}^2$ sana deň bolan nokatlaryň geometrik orunlarynyň deňlemesini düzmeli.

➲ Gözlenýän çyzygyň erkin nokadyny $\boldsymbol{M(x;y)}$ bilen belgiläliň. Onda bu nokadyň $\boldsymbol{F_1(a;0)}$ we $\boldsymbol{F_2(-a;0)}$ nokatlardan uzaklyklary, degişlilikde,

$$\boldsymbol{r}_1=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-0)^2} \qquad \text{we} \qquad \boldsymbol{r}_2=\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-0)^2}$$

bolar. Meseläniň şertine görä: $\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{a}^2$. Onda:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2.$$

Deňlemäniň iki tarapyny hem kwadrata göterеliň :

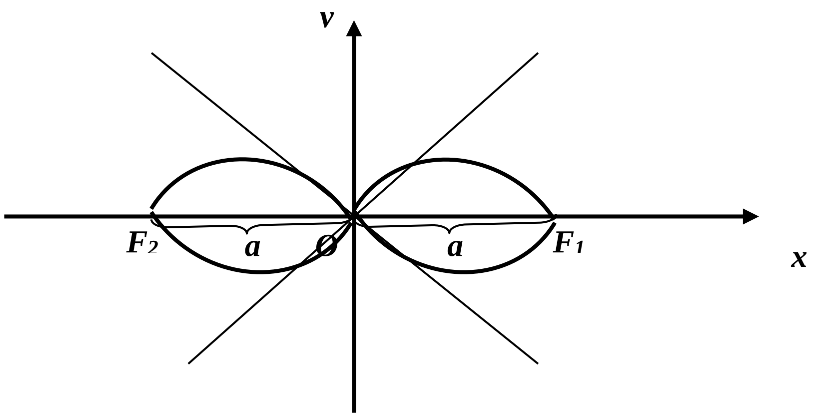
$$\left(x^2-2ax+a^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+2ax+a^2+y^2\right)=a^4 \qquad \text{ýa-da}$$

$$\left(x^2+a^2+y^2-2ax\right)\cdot\left(x^2+a^2+y^2+2ax\right)=a^4$$

$$\left(x^2+a^2+y^2\right)^2-4a^2x^2=a^4 \qquad \text{ýa-da}$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right).$$

Alnan deňlemä **lemniskata** atly çyzygyň deňlemesi diýilýär (sur.4.1).



4.1-nji surat

Nokatlaryň geometrik orunlarynyň deňlemeleri gözlenilende, käwagtlar, nokatlaryň islendiginiň x we y koordinatlaryny käbir kömekçi t üýtgeýän ululygyň – **parametriň** üsti bilen aňlatmak amatly bolýar:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad (*)$$

Şeýle aňlatma gözlenýän **çyzygyň parametrik aňladylyşy**, (*) deňlemeler ulgamyna bolsa, **çyzygyň parametrik deňlemesi** diýilýär.

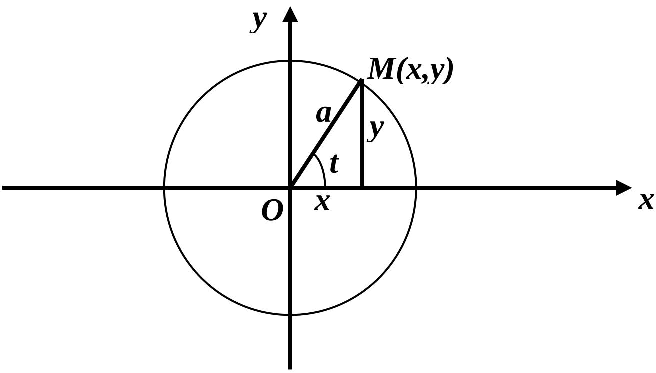
Eger (*) ulgamdan t parametri ýok etmek başartsa, onda gözlenýän çyzygyň $\boldsymbol{f(x,y)=0}$ deňlemesine gelner.

Gönükme. Töweregiň parametrik deňlemesini tapmaly.

➲ Merkezi koordinatlar başlangyjynda, radiusy a deň bolan töweregiň üstünde erkin $\boldsymbol{M(x,y)}$ nokady alalyň (sur. 4.2).

ONM gönüburçly üçburçlukdan alarys:

$$\boldsymbol{x = a \cdot \cos t}, \qquad \boldsymbol{y = a \cdot \sin t}$$



4.2-nji surat

Onda, $\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t \end{cases}$

ýazyp, töweregiň parametrik deňlemesini alarys. Bu ýerden:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \cos^2 t + a^2 \cdot \sin^2 t = a^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = a^2 \cdot 1 = a^2,$$

ýagny, $x^2 + y^2 = a^2$ töweregiň adaty deňlemesidir. ⊂

4.3. Göni çyzygyň deňlemeleri

1. Gönüburçly koordinatlar tekizliginde

$$Ax + By + C = 0, \qquad \left(A, B, C \in R; \quad A^2 + B^2 \neq 0\right) \qquad (4.6)$$

görnüşdäki deňlemä göni çyzygyň **umumy deňlemesi** diýilýär. Bu deňlemede, eger:

1) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ bolsa, onda $By + C = 0$ – Ox okuna parallel göni çyzygyň deňlemesidir;

2) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ bolsa, onda $Ax + C = 0$ – Oy okuna parallel göni çyzygyň deňlemesidir;

3) $B = C = 0$, $A \neq 0$ bolsa, onda $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – Oy okunyň deňlemesidir;

4) $A = C = 0$, $B \neq 0$ bolsa, onda $By = 0 \Rightarrow y = 0$ – Ox okunyň deňlemesidir.

2. $B \neq 0$ ýagdaýda (2.6) deňlemeden alarys:

$$y = kx + b, \qquad (4.7)$$

bu ýerde:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

(2.7) deňlemä göni çyzygyň **burç koeffisientli deňlemesi** diýilýär. Ýagny, $k = tg\alpha$ belgilenip, bu ýerde α – göni çyzyk bilen ***Ox*** okunyň položitel ugry arasyndaky burçdur.

3. Goý, $C \neq 0$ bolsun. Onda (4.6) deňlemeden alarys:

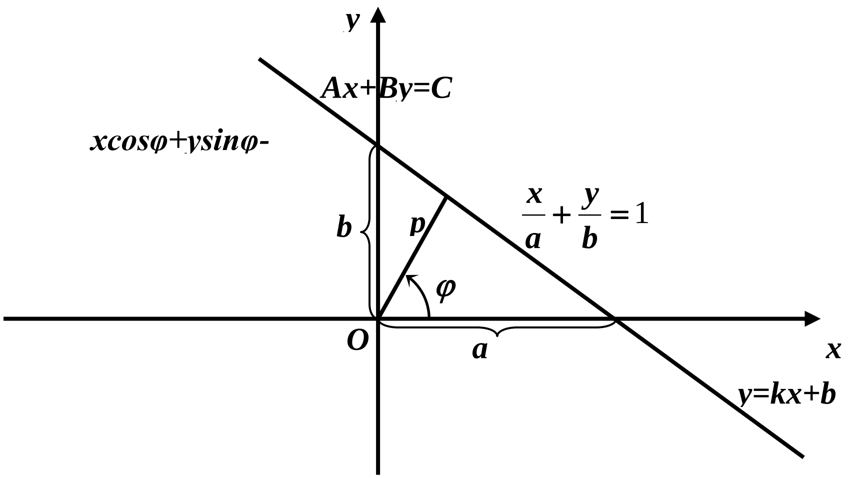
$$Ax + By = -C$$

$$-\frac{A}{C}x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1 \qquad \text{ýa-da} \qquad \frac{x}{-\frac{A}{C}} + \frac{y}{-\frac{B}{C}} = 1.$$

Bu ýerde: $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$ belgiläliň. Onda:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4.9)$$

deňlemä göni çyzygyň **kesimlerdäki deňlemesi** diýilýär. Bu ýerde ***a***, ***b*** – degişlilikde, göni çyzygyň abssissa we ordinata oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatlarydyr (sur.4.3).



4.3-nji surat

4. Umumy deňlemäniň iki tarapyny hem

$$q = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

normirleýji köpeldijä köpeldeliň, bu ýerde radikalyň alamaty $qC < 0$ bolar ýaly saýlanylýar:

$$x \cdot \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + y \cdot \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 .$$

Soňky deňlemede belgilemeleri girizmek bilen alarys:

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0 . \qquad (4.9a)$$

(2.9a) deňlemä göni çyzygyň **normal deňlemesi** diýilýär, bu ýerde: p – koordinat başlangyjyndan göni çyzyga inderilen perpendikulýaryň uzynlygydyr, φ bolsa bu perpendikulýaryň Ox okunyň položitel ugry bilen emele getirýän burçudyr (sur.4.3).

Gönükme. Göni çyzygyň $12x - 5y - 65 = 0$ umumy deňlemesi berlen. Göni çyzygyň: 1) burç koeffisientli; 2) kesimlerdäki; 3) normal deňlemelerini ýazmaly.

➲ 1) berlen deňlemäni *y*-e görä çözüp taparys:

$$12x - 65 = 5y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{12}{5}x - 13,$$

bu ýerde $k = \frac{12}{5}$, $b = -13$.

2) Umumy deňlemäni şeýle ýazalyň:

$$12x - 5y = 65 .$$

Iki tarapyny hem 65 ululyga böleliň:

$$\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{\frac{65}{12}}+\frac{y}{-\frac{65}{5}}=1.$$

Diýmek, $a=\frac{65}{12}$, $b=-\frac{65}{5}=-13$.

3) Normirleýji köpeldijini kesgitläliň:

$$q=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{1}{\sqrt{144+25}}=\frac{1}{\sqrt{169}}=\frac{1}{13}.$$

Göni çyzygyň umumy deňlemesiniň iki tarapyny hem q köpeldijä köpeldip alarys:

$$\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-5=0,$$

bu ýerde: $\cos\varphi=\frac{12}{13}$, $\sin\varphi=-\frac{5}{13}$, $p=5$.

5. $M_1(x_1;y_1)$ nokatdan geçýän hem-de k burç koeffisientli göni çyzygyň – **göni çyzyklaryň dessesiniň** deňlemesi aşakdaky ýalydyr:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (4.10)$$

k-nyň dürli bahalary bu nokatdan geçýän dürli göni çyzyklary kesgitlär.

6. $M_1(x_1;y_1)$ we $M_2(x_2;y_2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini şeýle kesgitleýärler:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (4.11)$$

7. $y=k_1x+b_1$ göni çyzyk bilen $y=k_2x+b_2$ göni çyzygyň arasynda emele gelýän burçuň sagat peýkamynyň tersine kabul edilýän ululygy:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (4.12)$$

formuladan tapylýar.

Eger $y=k_1x+b_1$ we $y=k_2x+b_2$ göni çyzyklar:

– parallel bolsalar, onda $k_1=k_2$;

– perpendikulýar bolsalar, onda $k_1=-\frac{1}{k_2}$

şertler ýerine ýetýärler.

8. Berlen $M_0(x_0;y_0)$ nokatdan $Ax+By+C=0$ göni çyzyga çenli d uzaklygy:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (4.13)$$

formuladan kesgitleýärler.

Gönükme. $M_1(-1;3)$, $M_2(2;5)$, $M_3(1;1)$ nokatlar berlen. M_3 nokatdan M_1 we M_2 nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzyga çenli aralygy kesgitlemeli.

➲ M_1 we M_2 nokatlardan geçýän göni çyzygyň umumy deňlemesini tapalyň. (2.11) formula görä alarys:

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x+1}{2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{2}=\frac{x+1}{3} \text{ ýa-da}$$

$$3(y-3)=2(x+1) \quad \Rightarrow \quad 3y-9=2x+2$$

$$\Rightarrow \quad 2x-3y+11=0.$$

Göni çyzygyň deňlemesiniň dogry tapylandygyny M_1 we M_2 nokatlaryň koordinatlaryny goýup barlap bolar:

$\boldsymbol{M_1(x_1;y_1)=M_1}(-1;3)$: $\quad 2\cdot(-1)-3\cdot3+11=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0$,

$\boldsymbol{M_2(x_2;y_2)=M_2}(2;5)$: $\quad 2\cdot2-3\cdot5+11=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0$.

$\boldsymbol{M_3}(1;1)$ nokatdan göni çyzyga çenli aralygy kesgitlemek üçin (2.13) formuladan peýdalanalyň:

$$d=\frac{|2\cdot1-3\cdot1+11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|2-3+11|}{\sqrt{4+9}}=\frac{10}{\sqrt{13}}.$$

Meseleler

4.7. Absissa okunyň nololožitel ugry bilen 2x+2y-5 = 0 göni çyzygyň emele getiren burçuny tapmaly.

Jogaby: $\alpha = 135^0$

4.8. Koordinata oklarynyň başlangyjy bilen A(-2;-3) nokadyň üstünden geçýän gönüniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: 3x-2y = 0

4.9. A(3;9) nokat üçburçlugyň depesidir, y-6 = 0 we 3x-4y+9 = 0 medianalary. Üçburçlugyň beýleki iki depesiniň koordinatasyny tapmaly.

Jogaby: B(1;3), C(11;6)

4.10. M(-3;-4) nokatdan geçýän we koordinata oklaryna parallel bolan gönüniň deňlemesini ýazmaly.

Jogaby: x+3 = 0, y+4 = 0

4.11. A(0;2), B(7;3) we C(1;6) üçburçlugyň depeleri. $B\hat{A}S = \alpha$ burçuň ululygyny tapmaly.

Jogaby: tgα = 27/11

4.12. 3x+4y-20 = 0 we 8x+6y-5 = 0 gönüleriň arasyndaky burçuň bissektrisalaryny tapmaly.

Jogaby:14x+14y-45 = 0; 2x-2y+35 = 0

4.13. A(0;0), B(-1;-3) we C(-5;-1) üçburçlugyň depeleri. Üçburçlugyň depelerinden geçýän we taraplaryna parallel bolan gönüleriň deňlemelerini tapmaly.

Jogaby: 3x-y+14 = 0, x-5y-14 = 0, x+2y = 0.

4.14. M(2;7) nokatdan geçýän hem-de AB göni çyzyk bilen $\alpha = 45^0$ burçy emele getirýän gönininiň deňlemesini tapmaly, bu ýerde A(-1;7), B(8,-2).

Jogaby: x-2 = 0 , y-7 = 0

4.15. A(3/2;1), B(1; 5/3), C(3;3) üçburçlugyň depeleri. C depeden inderilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: d = 2,4

4.16. $x + 2y+3 = 0$, $2x+3y+4 = 0$ gönüleriň kesişme nokadyndan geçip, $5x+8y = 0$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $5x+8y+11 = 0$

4.17. $A_1(-1;-1)$, $B_1(1;9)$ we $C_1(9;1)$ nokatlar üçburçlugyň taraplaryny deň ýarpa bölýän nokatlar. Şu nokatlaryň üstünden geçip, taraplaryna perpendikulýar bolan gönüleriň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x-y = 0$, $x+5y-14 = 0$, $5x+y-14 = 0$

4.4. Ikinji tertipli egriler

Ikinji tertipli egrilere, esasan, töwerek, ellips, giperbola we parabola degişlidirler.

4.4.1 Töwerek

Töwerek – bu "merkez" diýlip at berilýän nokatdan deň uzaklaşan nokatlaryň geometrik orunlarydyr. Eger $C(a,b)$ – töweregiň merkezi, r – radiusy bolsa, onda töweregiň umumy deňlemesini şeýle ýazmak bolar:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (4.14)$$

Töweregiň merkezi $O(0;0)$ koordinatalar başlangyjynda ýatsa, onda onuň ýönekeý-kanonik deňlemesi

$x^2+y^2=r^2$ görnüşde ýazylar.

Eger (4.14) deňlemäniň çep tarapyndaky ýaýlary açsak, ony şeýle ýazyp bileris:

$$x^2+y^2+lx+my+n=0, \qquad (4.15)$$

bu ýerde $l=-2a$, $m=-2b$, $n=a^2+b^2-r^2$.

$p=l^2+m^2-4n$ belläliň. Onda, eger:

1) $p>0$ bolsa, (4.15) töweregi kesgitlär;
2) $p=0$ bolsa, (4.15) deňleme $(-l/2; -m/2)=(a;b)$ nokady kesgitlär;
3) $p<0$ bolsa, (4.15) deňlemäniň geometriki manysy ýokdur ýa-da ol hyýaly töweregi kesgitlär.

Erkin $M_1(x_1;y_1)$ nokat bilen $x^2+y^2=r^2$ töwerege seredeliň. Onda, eger:

1) $x_1^2+y_1^2=r^2$ bolsa, M_1 nokat töweregiň üstünde ýatar;
2) $x_1^2+y_1^2<r^2$ bolsa, M_1 nokat töweregiň içinde ýatar;
3) $x_1^2+y_1^2>r^2$ bolsa, M_1 nokat töweregiň daşynda ýatar;

Gönükme. $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$ töweregiň deňlemesinden, onuň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny kesgitlemeli.

➲ Deňlemäniň iki tarapyny hem 2-a böleliň:

$x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y-2=0$. Şeýlelikde:

$x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y-2=0$ ýa-da

$x^2-2\cdot 2x+4-4+y^2+2\cdot\frac{5}{4}y+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}-2=0$,

$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2-4-\frac{25}{16}-2=0$, $(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$,

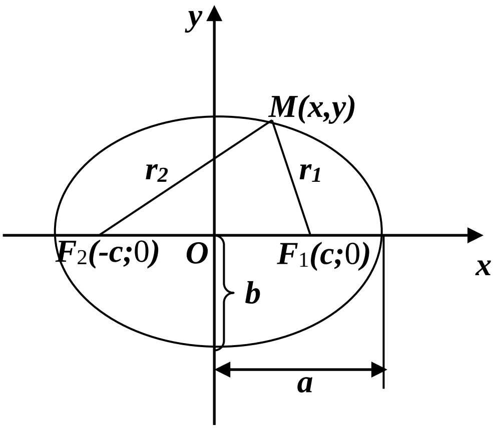
$(x-2)^2+\left(y-\left(-\frac{5}{4}\right)\right)^2=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

Bu ýerden $(a;b)=\left(2;-\frac{5}{4}\right)$; $r=\frac{11}{4}$. ➲

4.4.2. Ellips

Fokuslary diýlip at berilýän nokatlara çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik **2*a*** deň bolan nokatlaryň geometrik orunlaryna **ellips** diýlip at berilýär, şeýlelikde, **2*a*** ululyk, fokuslaryň aralygyndan uly bolmalydyr.

Eger ellipsiň fokuslaryny ***Ox*** okunda $F_1(c;0)$ we $F_2(-c;0)$ koordinatlar boýunça ýerleşdirsek, onda onuň ýönekeý-kanonik deňlemesini şeýle ýazmak bolar (sur. 4.14):



4.14-nji surat

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.16)$$

bu ýerde ***a, b*** – degişlilikde ellipsiň **uly** we **kiçi** ýarym oklary bolup,

$$a^2=b^2+c^2 \qquad (4.17)$$

şert ýerine ýetmelidir

.

Ellipsiň görnüşini – gysylma ölçegini, onuň **eksentrisiteti** $l=\frac{c}{a}$ $(l<1)$ arkaly häsiýetlendirýärler. Görşümiz ýaly, eger ***a*=*b*=*r*** bolsa, onda (4.16) deňlemeden töweregiň deňlemesini alarys: $x^2 + y^2 = r^2$.

$|MF_1|$ we $|MF_2|$ aralyklara **fokal-radiuslar** at berlip, olary, degişlilikde r_1 we r_2 bilen belleýärler. Onda kesgitlemä görä:

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (4.18)$$

Fokal radiuslary M nokadyň x abssissasy arkaly şeýle hem aňladýarlar:

$$r_1 = a - lx; \qquad r_2 = a + lx \qquad (4.19)$$

Eger erkin $M_1(x_1, y_1)$ nokat bilen ellipse seretsek, onda:

1) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ bolsa, M_1 nokat ellipsiň üstünde ýatar;

2) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} < 1$ bolsa, M_1 nokat ellipsiň içinde ýatar;

3) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} > 1$ bolsa, M_1 nokat ellipsiň daşynda ýatar;

Gönükme. $M\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ we $N\left(-2; \dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$ nokatlardan geçýän ellipsiň kanonik deňlemesini düzmeli.

➲ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ deňlemeden M we N nokatlar üçin alarys:

M: $$\frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1$$

N: $$\frac{4}{a^2} + \frac{3}{5b^2} = 1$$

Bu deňlemeler ulgamyndan $a^2 = 10$; $b^2 = 1$ taparys. Onda gözlenýän kanonik deňleme şeýle ýazylar:

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

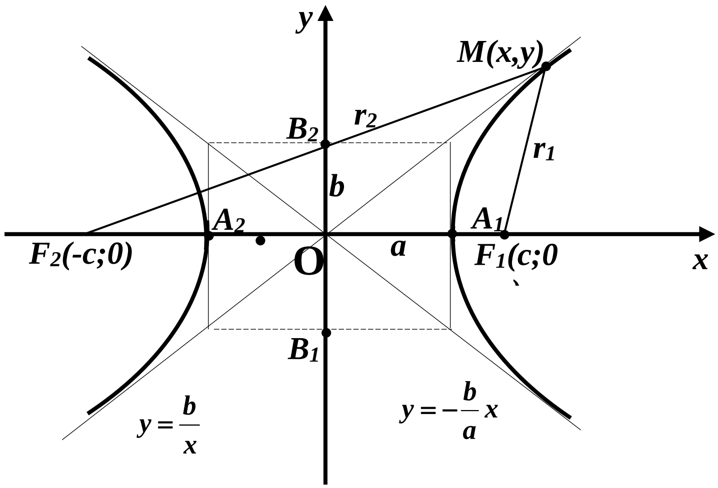
4.4.3 Giperbola

Fokuslary diýlip, at berilýän nokatlardan uzaklyklarynyň tapawudynyň absolýut ululygy hemişelik **2*a*** deň bolan nokatlaryň geometrik orunlaryna **giperbola** diýilýär, şeýlelikde, **2*a*** ululyk, fokuslaryň aralygyndan kiçi bolmalydyr.

Eger giperbolanyň fokuslaryny ***Ox*** okunda $F_1(c;0)$ we $F_2(-c;0)$ koordinatlar boýunça ýerleşdirsek, onda onuň kanonik deňlemesini şeýle ýazmak bolar:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = c^2 - a^2 \qquad (4.20)$$

Giperbola iki şahadan ybarat bolup, onuň grafigi koordinata oklaryna görä simmetrik ýerleşendir (sur. 4.15).



4.15-nji surat

$A_1(a;0)$ we $A_2(-a;0)$ nokatlara giperbolanyň **depeleri** diýilýär. $A_1A_2 = 2a$ kesime giperbolanyň **hakyky oky** , $B_1B_2 = 2b$ kesime bolsa, giperbolanyň **hyýaly oky** diýlip at berilýär.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ göni çyzyklara giperbolanyň **asimptotalary** diýilýär (egri çyzygyň asimptotasy diýlip, $x \to +\infty$ ýa-da $x \to -\infty$ ýagdaýynda egri çyzygyň ymtylýan göni çyzygyna aýdylýar).

Giperbolanyň asimptotasyny gurmak üçin $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$ göni çyzyklaryň kesişmesindäki göniburçlygy gurýarlar hem-de onuň diagonallaryny geçirýärler.

$l = \frac{c}{a} > 1$ ululyga giperbolanyň eksentrisiteti diýilýär. Onda giperbolanyň fokal radiuslaryny seýle kesgitlemek bolar:

- $r_{11} = lx - a$ - sag şahanyň sagky fokal radiusy;
- $r_{12} = lx + a$ - sag şahanyň çepki fokal radiusy;
- $r_{21} = -lx + a$ - çep şahanyň sagky fokal radiusy;
- $r_{22} = -lx - a$ - çep şahanyň çepki fokal radiusy;

Eger $a=b$ bolsa, onda $x^2 - y^2 = a^2$ giperbola **deňýanly** diýilýär, onuň asimptotalary özara göni burçy emele getirýärler. Bu ýagdaýda, asimptotalary koordinata oklarynyň deregine kabul etsek, onda giperbolanyň deňlemesi

$$xy = m \qquad (4.21)$$

görnüşi alar, bu ýerde $m = \pm a^2/2$ bolup: $m>0$ bolsa, giperbola I we III çärýeklerde; $m<0$ bolsa, giperbola II we IV çärýeklerde ýerleşýär. (2.21) deňlemäni şeýle ýazmak bolar: $y = \frac{m}{x}$. Bu bolsa, x we y ululyklaryň arasyndaky ters proporsionallygyň deňlemesidir.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (4.22)$$

deňleme hem giperbolanyň deňlemesidir. Şeylelikde, (2.20) we (2.22) deňlemeleriň şol bir ýarym oklary we asimptotalary bolup, biriniň hakyky oky – beýlekisiniň hyýaly okudyr we tersine. Bulara **özara çatyrymly** giperbolalar diýilýär.

Gönükme. Giperbolanyň eksentrisiteti $\sqrt{2}$ deň. $\boldsymbol{M}\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ nokatdan geçýän giperbolanyň deňlemesini düzmeli.

➲ Şerte görä: $l=\frac{c}{a}=\sqrt{2}.\quad\Rightarrow\quad c^2=2a^2$. Ýöne $c^2=a^2+b^2$. Onda $a^2+b^2=2a^2$ ýa-da $a^2=b^2$ alarys. Diýmek giperbola deňýanlydyr we deňlemesini ýazyp bileris. $\boldsymbol{M}$ nokadyň üstünden geçýänligi üçin:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=a^2 \quad 3-2=a^2 \;\Rightarrow\; 1=a^2$$. Onda $x^2-y^2=1$ alarys. ➲

4.4.4. Parabola

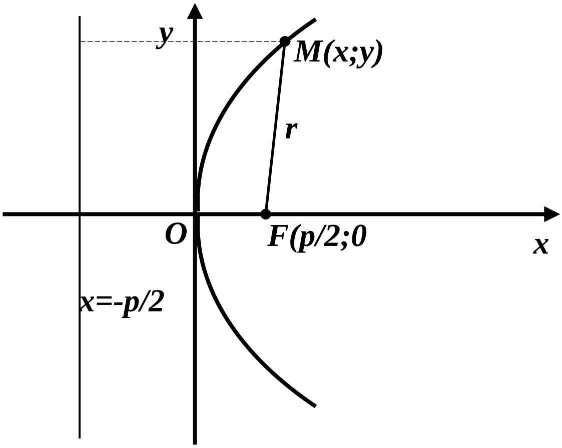
Fokusy diýlip at verilýän nokatdan hem-de direktrisa atlandyrylýan göni çyzykdan deň daşlaşan nokatlaryň geometrik orunlaryna **parabola** diýilýär. Eger parabolanyň fokusy $\boldsymbol{F(p/2;0)}$ nokat, direktrisasy $x=-p/2$ göni çyzyk bolsa, onda onuň kanonik deňlemesi

$$y^2=2px \qquad (4.23)$$

bolar. Bu parabola absissa okuna görä simmetrik ýerleşendir (sur. 4.16).

$$x^2=2py \qquad (4.24)$$

deňleme ordinata okuna görä simmetrik ýerleşen parabolanyň denlemesidir. $\boldsymbol{p}>0$ bahada (4.23) we (4.24) parabolalaryň şahalary, degişli oklaryň položitel ugruna gönükdirilendir, $\boldsymbol{p}<0$ bahada tersinedir.



4.16-njy surat

Parabolanyň ***r*** fokal radiusynyň uzynlygy

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{p}}{2} \qquad (4.25)$$

formulada tapylýar.

Gönükme. Eger ***Ox*** okuna simmetrik ýerleşen hem-de depesi koordinatlar başlangyjynda ýatan parabolanyň ***Ox*** okuna perpendikulýar we parabolanyň depesinden 6 birlik uzaklykda ýerleşen käbir hordasynyň uzynlygy 16 deň bolsa, onda parabolanyň kanonik deňlemesini düzmeli.

➲ Hordanyň uzynlygy hem-de parabolanyň depesinden uzaklygy belli bolansoň, hordanyň uçlarynyň koordinatlary $\boldsymbol{M}_1\mathbf{(}6\mathbf{;}8\mathbf{)}$ we $\boldsymbol{M}_2\mathbf{(}6\mathbf{;}-8\mathbf{)}$ bolar. Bu nokatlar parabola hem degişlidirler. Onda $\boldsymbol{M}_1$ nokat üçin (4.23) deňlemeden alarys:

$M_1 = M_1(6;8)$; $8^2 = 2p \cdot 6 \Rightarrow 2p = 32/3$. Diýmek, $y^2 = \frac{32}{3}x$ gözlenýän parabolanyň deňlemesidir. ⊂

Meseleler

4.18. 1) $x^2+y^2-6x-8y=0$, 2) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$ töweregiň merkeziniň koordinatasyny we radiusyny tapmaly.
Jogaby:1) O(3;4), R=5; 2)O(-5;2), R=0

4.19. A(1;2), B(0;-1) we C(-3;0) nokatlaryň üstünden geçýän töweregiň deňlemesini tapmaly.
Jogaby: $(x+1)^2 +(y-1)^2=5$

4.20. Berlen $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ töwerege galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly. Ol x-y+2=0 göni çyzygyň töweregi kesýän nokatlaryndan geçýär.
Jogaby: 3x-4y+8=0; 4x-3y+7=0.

4.21. $x^2+4y^2=16$ ellipsi gurmaly, onuň focus nokadyny we ekssentrisisetini tapmaly.
Jogaby: a=4, b=2, c= $2\sqrt{3}$, ε= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.22. Ỳer ellips boýunça hereket edýär, onuň traýektoriýasynyň bir fokusy Günde ýerleşýär. Ỳerden güne çenli iň golaý aralyk takmynan 147,5 millon kilometr. Ỳeriň traýektoriýasynyň uly ýarym okuny we ekssentrisitini tapmaly.
Jogaby: a=150 mln. km. ε= $\frac{1}{60}$

4.23. $9x^2+25y^2=225$ ellipsiň sag fokusyndan nokada çenli uzaklyk çep fokusdan nokada çenli uzaklykdan dört esse uly. Ol nokadyň koordinatasyny tapmaly.

Jogaby: $(-\frac{15}{4}; \pm\frac{\sqrt{68}}{4})$

4.24. x^2-$4y^2$=16 giperbolany we onuň asimptotalaryny gurmaly. Giperbolanyň ekssentrisitetini we asimptotalarynyň arasyndaky burçy tapmaly.

Jogaby: $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $53^0 08'$

4.25. Ekssentrisiteti $\varepsilon=\sqrt{2}$ deň bolan, $(2a;\ a\sqrt{3})$ nokatdan geçip we koordinata oklaryna degişlilikde simmetrik bolan giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

Jogaby: $x^2-y^2=a^2$

4.26. $y^2=8x$ parabolada direktrisasyndan 4 birlik daşlykda bolan nokatlaryň koordinatasyny tapmaly.

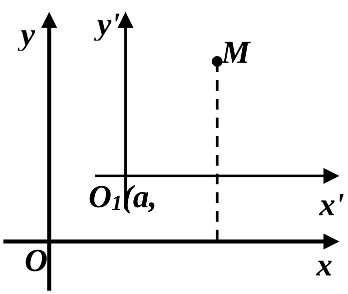
Jogaby: $M_1(2;4)$ we $M_2(2;-4)$.

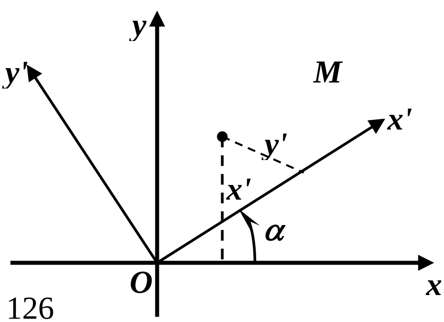
4.5. Koordinatlary özgertmek we egrileriň deňlemelerini ýönekeýleşdirmek

Eger xOy koordinatlar ulgamyndan $O_1(a,b)$ başlangyçly, oklarynyň ugurlary xOy bilen gabat gelýän $x'O_1y'$ koordinatlar ulgamyna geçilse (sur. 4.17), onda tekizligiň islendik M nokadynyň köne we täze koordinatlarynyň arasyndaky baglanşyk

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases} \qquad (4.26)$$

formulalarda aňladylýar. Muňa koordinat oklaryny parallel göçürmek arkaly **özgertmek** diýilýär.





4.17-nji surat **4.18-nji surat**

ger koordinatlar başlangyjy üýtgedilmän, diňe koordinat oklary $\boldsymbol{\alpha}$ burça öwrülen bolsa (sur. 4.18), onda islendik M nokat üçin $\boldsymbol{(x;y)}$ köne we $\boldsymbol{(x';y')}$ täze koordinatlaryň arasyndaky baglanşyk:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,} \\ \boldsymbol{y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha} \end{cases} \text{ ýa-da } \begin{cases} \boldsymbol{x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,} \\ \boldsymbol{y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha} \end{cases} \qquad (4.27)$$

formulalar arkaly kesgitlenýär.

Gönükme

Koordinata oky parallel göçürilip, täze koordinata başlangyjy $O_1(3;-4)$ nokatda ýerleşdirilen. Eger-de köne koordinata okunda $M(7;8)$ nokat belli bolsa, onda täze koordinata okunda M_1 nokady kesgitlemeli.

⊂ a=3, b=-4, x=7, y=8 belli. Onda (4.26) formulany peýdalanyp taparys:

x' =7-3=4 y' =8-(-4)=12 x' =4 y' =12 $M_1(4;12)$ ⊂

Gönükme

Koordinatalar sistemasy $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ burça öwrülen. M($\sqrt{3}$; 3) nokady täze koordinatalar sistemasynda kesgitlemeli.

⊂ (4.27) formulany peýdalanyp alarys

$$x' = \sqrt{3}\,\cos(\pi/6) + 3\sin(\pi/6) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

$$y' = -\sqrt{3}\sin(\pi/6) + 3\cos(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

Diýmek: $M_1(3;\sqrt{3})$. ⊂

(2.26) formulalar arkaly, meselem, $y = Ax^2 + Bx + C$ deňlemäni parabolanyň kanonik deňlemesine getirmek mümkin; bu parabolanyň simmetriýa oky Oy okuna paralleldir. Şuňa meňzeşlikde, $x = Ay^2 + By + C$ parabolanyň simmetriýa oky Ox okuna parallel bolar.

Eger $k \cdot q - p \cdot l \neq 0$ we $p \neq 0$ bolsa, onda

$$y = \frac{kx + l}{px + l}$$

drob-çyzykly funksiýa, (2.26) formulalar arkaly $x' \cdot y' = m$ deňýanly giperbolanyň deňlemesine getirilýär. Bilşimiz ýaly, bu giperbolanyň asimptotalary bolup, täze koordinat oklary hyzmat edýär.

Gönükme. $y = 9x^2 - 6x + 2$ parabolanyň deňlemesini kanonik görnüşe getirmeli.

➲ $x = x' + a$, $y = y' + b$ deňliklere görä alarys:

$y' + b = 9(x' + a)^2 - 6(x' + a) + 2$ ýa-da

$y' = 9x'^2 + 6x'(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b)$.

Bu ýerde a, b ululyklary x-iň koeffisienti hem-de deňlemäniň azat agzasy nula deň bolar ýaly saýlalyň:

$$\begin{cases} 3a - 1 = 0, \\ 9a^2 - 6a + 2 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 1 = 0, \\ (3a - 1)^2 + 1 - b = 0. \end{cases}$$

Bu ýerden: $a = \frac{1}{3}$ we $b=1$ taparys. Diýmek, parabolanyň kanonik deňlemesi $y' = 9x'^2$ ýa-da $x'^2 = \frac{1}{9}y'$ bolar. Bu parabolanyň depesi $O_1\left(\frac{1}{3};1\right)$ nokatda ýatyp, $p = \frac{1}{18}$.

Bu meseläni, mekdep kursundan mälim bolan kwadratik funksiýanyň doly kwadratyny bölüp çykarmak arkaly hem çözmek bolar. Ýagny,

$$\boldsymbol{y}=9\boldsymbol{x}^2-6\boldsymbol{x}+2=9\left(\boldsymbol{x}^2-\frac{2}{3}\boldsymbol{x}+\frac{2}{9}\right)=$$

$$9\left(\boldsymbol{x}^2-2\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{x}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=9\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}\right)^2+1.$$

$\boldsymbol{y}-1=9\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}\right)^2$ ýa-da $\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(\boldsymbol{y}-1).$

Bu ýerde $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}$, $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{y}-1$ belgilemek ýeterlikdir. ⊂

Gönükme. $\boldsymbol{y}=\dfrac{4\boldsymbol{x}+5}{2\boldsymbol{x}-1}$ giperbolanyň deňlemesini $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{m}$ görnüşe getirmeli. Başdaky koordinatlar ulgamyna görä, onuň asimptotalarynyň deňlemesini ýazmaly.

⊃ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}$ deňliklere görä alarys:

$(\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b})\cdot[2(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a})-1]=4(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$ ýa-da:

$$2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'+(2\boldsymbol{b}-4)\boldsymbol{x}'+(2\boldsymbol{a}-1)\boldsymbol{y}'=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{ab}+5.$$

$2\boldsymbol{b}-4=0$ we $2\boldsymbol{a}-1=0$ şertlerden taparys: $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{b}=2$.

$$4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{ab}+5=4\cdot\frac{1}{2}+2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot2+5=7.$$

Onda alarys: $2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'=7$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'=\frac{7}{2}$.

Bu giperbolanyň asimtotalary bolup, täze koordinat oklary $\boldsymbol{x}'=0$ we $\boldsymbol{y}'=0$ hyzmat edýär. Onda:

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}=0+\boldsymbol{b}=2$

ýa-da $x=\frac{1}{2}$ we $y=2$ onuň asimptotalarynyň başlangyç koordinatlar ulgamyna görä deňlemeleridir. ⮌
Umuman, xOy koordinat tekizliginde:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4.28)$$

görnüşdäki bäş goşulyjyly deňleme ellipsi, giperbolany ýa-da parabolany kesgitleýär:
1) Eger $AC>0$ bolsa, (4.28) arkaly ellips kesgitlenýär;
$A=C$ bolanda, ellips töwerege öwrülýär.
2) Eger $AC<0$ bolsa, (4.28) arkaly giperbola kesgitlenýär;
eger deňlemäniň çep tarapyny

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=(a_1x+b_1y+c_1)\cdot(a_2x+b_2y+c_2)$$

ýaly ýazyp bolýan bolsa, giperbola iki sany kesişýän göni çyzyklar ýaly aňladylar.
3) Eger $AC=0$ bolsa (4.28) arkaly parabola kesgitlenýär.
Munda hem, eger deňlemäniň çep tarapy x ýa-da y ululygy saklamaýan bolsa, 2 sany parallel göni çyzyklary almak bolar.
Eger ikinji tertipli egri

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4.29)$$

görnüşde berlen bolsa, onda (4.27) koordinat oklaryny öwürme formulalary arkaly, α-nyň degişli bahasynda, $B=0$ alynýar we (4.28) deňlemä gelinýär.

Gönükme. $5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$ deňlemäni kanonik görnüşe getirmeli.
➲ (4.27) formulalary ulanyp alarys:

$$5(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 4(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\cdot(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+8(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 8(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) +$$
$$14(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 5 = 0$$ ýa-da

$$(5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 8\sin^2\alpha)x'^2 +$$
$$(5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)y'^2 +$$

$$+[6\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' +$$
$$(8\cos\alpha + 14\sin\alpha)x' + (14\cos\alpha - 8\sin\alpha)y' + 5 = 0 \qquad (*)$$

Bu ýerden α ululygy kesgitlemek üçin
$$6\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$
şerti peýdalanalyň ($x'y'$ ululygyň koeffisienti nula deňlenýär). Deňlemäniň iki tarapyny hem $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ böleliň:

$$\mathbf{3 + 2(ctg\alpha - tg\alpha) = 0}, \quad \mathbf{3 + 2\left(\frac{1}{tg\alpha} - tg\alpha\right) = 0}$$ ýa-da

$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0$. Bu ýerden: $tg\alpha_1 = 2$ we $tg\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

$tg\alpha_1 = 2$ bahany ulanalyň. Bu ýerden: $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ bolup, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ toždestwodan: $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$
$5\cos^2\alpha = 1$ ýa-da $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ alarys, diýmek, $\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bu bahalary (*) deňlemede goýup taparys:
$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0$$ ýa-da
$$9\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) = -5.$$
Ýaý içindäki aňlatmany doly kwadrata dolduralyň:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5 \qquad \text{ýa-da}$$

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4} \qquad (**)$$

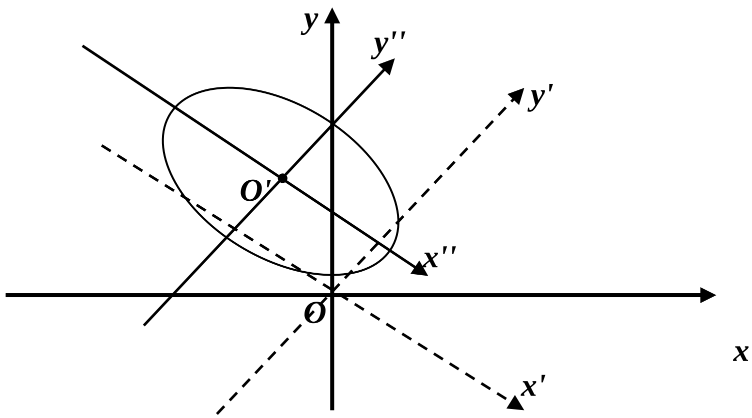
$O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$ nokady täze koordinat ulgamynyň başlangyjy hökmünde kabul edip:

$$x''=x'+\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{we} \qquad y''=y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}$$

formulalary ulanalyň. Onda (**) deňlemeden:

$$9x''^2+4y''^2=\frac{9}{4} \qquad \text{ýa-da} \qquad \frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1.$$

Bu – ellipsiň deňlemesidir (sur.4.19).



4.19-nji surat

Meseleler

4.27. M(3/2;11/2) nokat berlen. Täze koordinata oklary 2x-1=0 (O y' ok) we 2y-5=0 (O x' ok) göniler bilen kesgitlenen. M nokadyň koordinatasyny täze koordinata sistemasynda kesgitlemeli.
Jogaby: M(3;2).

4.28. M($4\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$) nokat berlen.Täze abssisa we ordinata oklary, degişlilikde, y= 2x we y=-0.5x gönüler bilen kesgitlenen. Şeýlelikde, täze koordinata sistemasy köne koordinata sistaemasy bilen ýiti burç emele getirýär. M hokadyň koordinatasyny täze koordinatalar sistemasynda sistemasynda tapmaly.
Jogaby:M_1(8;-6)

4.29. Parabolanyň deňlemesini kanonik görnüşe getirmeli:
1) y= 4x – 2x^2 2) y=-x^2+2x+2
3) x=-4y^2+y 4) x=y^2+4y+5
Jogaby: 1) O_1(1;2), p=-1/8, $x'^2 = -(1/2)y'$
2) O_1(1;3), p=1/2, $x'^2 = y'$
3) O_1(1/16;1/8), p=-1/8, $y'^2 = -(1/4)x'$
4) O_1(1;-2), p=1/2, $y'^2 = x'$

4.30. Giperbolanyň denlemesini $x'y' = m$ görnüşinde aňlatmaly.
1) y=2x/(4x-1) 2) y=(2x+3)/(3x-2)
3) y=(10x+2)/(5x+4) 4) y=(4x+3)/(2x+1)

Jogaby: 1) $x'y' = 1/8$ 2) $x'y' = 13/9$ 3) $x'y' = -6/5$ 4) $x'y' = 1/2$

4.31. Aşakdaky deňlemeleriň nähili egriçyzyklardygyny anyklamaly:

1) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$

Jogaby: Töwerek: $(x-1/2)^2 + (y-1/3)^2 = 1$

2) $16x^2+25y^2-32x+50y-350=0$

Jogaby: Ellips: $x'^2/25+y'^2/16=1$ Täze baslangyç: $O'(1;-1)$

3) $x^2+4y^2-4x-8y+8=0$

Jogaby: Nokat: $O'(2;1)$.

4.32. Egrileri kanonik görnüşde aňlatmaly:

1) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$

Jogaby: $x''^2/30+y''^2/5=1$

2) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

Jogaby: $x''^2/9-y''^2/36=1$

Ýokary matematikadan 3-nji tipli ýumuş

1-nji mesele. Üçburçlugyň depeleriniň koordinatalary berlen.

a) onuň taraplarynyň uzynlygyny tapmaly;

b) onuň taraplarynyň deňlemelerini düzmeli;

ç) onuň içki burçlaryny tapmaly;

d) onuň A depesinden BC tarapa geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapmaly.

Çyzgy gurmaly.

1. A_1 (4; -2), A_2 (0; 7), A_3 (-5; 2)   13. A_1 (4; 5), A_2 (-4; 7), A_3 (1;-6)

2. A_1 (-4; 4), A_2 (4; -10), A_3 (2; 8) 14. A_1 (2; -2), A_2 (-5; 3), A_3 (4; 7)

3. A_1 (6; -5), A_2 (-9; 4), A_3 (2; 5)
4. A_1 (-3; 5), A_2 (7; 4), A_3 (5; -4)
5. A_1 (6; 6), A_2 (-2; 8), A_3 (8; -9)
6. A_1 (1; 2), A_2 (5; 6), A_3 (5; 7)
7. A_1 (6; 5), A_2 (4; 5), A_3 (6; 9)
8. A_1 (2; 2), A_2 (5; 7), A_3 (5; 3)
9. A_1 (6; 4), A_2 (5; 5), A_3 (5; 8)
10. A_1 (7; 7), A_2 (6; 5), A_3 (3; 8)
11. A_1 (-4; 2), A_2 (2; 5), A_3 (-5; 2)
12. A_1-4; 4), A_2 (0; 7), A_3 (5; -2)
15. A_1 (3; -4), A_2 (2; 5), A_3 (-5; -4)
16. A_1 (3; 6), A_2 (7; -7), A_3 (5; 5)
17. A_1 (5; 3), A_2 (-5; 2), A_3 (0; 0)
18. A_1 (4; -2), A_2 (0; 0), A_3 (-3; 2)
19. A_1 (5; 5), A_2 (2; -4), A_3 (-5; -2)
20. A_1 (9; -3), A_2 (5; 2), A_3 (0; 7)
21.A_1 (1; -5), A_2 (-3; 4), A_3 (-8; -1)
22. A_1 (6; 0), A_2 (2; 5), A_3 (-3; 4)
23. A_1(-2; -2), A_2(0; 0), A_3(-5; 5)
24. A_1 (6; -8), A_2 (10; 3), A_3 (5; 8)
25. A_1 (8; 2), A_2 (4; 3), A_3 (-1; 6)

2-nji mesele. Deňlemesi bilen berlen töweregiň merkezini we radiusyny tapmaly.

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y -12 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 6y -19 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6x - 4y -12 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 1 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 1 = 0$
12. $x^2 + y^2 - 6x + 2y -19 = 0$
13. $x^2 + y^2 + 6x - 4y -12 = 0$
14. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$
15. $x^2 + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0$
16. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$
17. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$
18. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$
19. $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$
20. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
21. $x^2 + y^2 - 6x + 4y -12 = 0$
22. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$
23. $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$
24. $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$

25. $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

4.6. Giňişlikde gönüburçly koordinatlar

Eger giňişlikde ***Oxyz*** gönüburçly koordinatlar ulgamy berlen bolsa, onda ***x*** – absissaly, ***y*** – ordinataly we ***z*** – applikataly ***M*** nokat ***M(x;y;z)*** ýaly bellenýär. Şeýlelikde, $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$ we $\boldsymbol{B(x_2, y_2, z_2)}$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \qquad (4.30)$$

ýaly tapylýar.

Eger ***A*** we ***B*** nokatlary birleşdirýän kesimi $\boldsymbol{C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$ nokat $\boldsymbol{\lambda}$ gatnaşykda bölýan bolsa, onda **C** nokadyň koordinaty şeýle hasaplanar:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}}; \quad \boldsymbol{\bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}; \quad \boldsymbol{\bar{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}} \qquad (4.31)$$

Hususy ýagdaýda, [***AB***] – kesimiň ortasynyň koordinaty

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}}; \quad \boldsymbol{\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}}; \quad \boldsymbol{\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

formulalarda kesgitlenerler.

Giňişlikde, tekizligiň **umumy deňlemesi**:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad (4.32)$$

görnüşdedir.

Ax+By+Cz+D=0 tekizligiň asakdaky hususy ýagdaýlary bardyr:.

A=0 Ox oka parallel;
B=0 Oy oka parallel;
C=0 Oz oka parallel;
D=0 bolsa, onda tekizlik koordinata başlangyjyndan geçýär.

A=B=0 Oz oka perpendikulýar. (xOy tekizlige parallel);
A=C=0 Oy oka perpendikulýar. (xOz tekizlige parallel);
B=C=0 Oz oka perpendikulýar (yOz tekizlige parallel).

A=D=0 Ox okdan geçýär;
B=D=0 Oy okdan geçýär;
C=D=0 Oz okdan geçýär.

A=B=D=0 xOy tekizlik bilen gabat gelýär. z=0;
A=C=D=0 xOz tekizlik bilen gabat gelýär. y=0;
B=C=D=0 yOz tekizlik bilen gabat gelýär. x=0.

(2.32) deňlemäniň iki tarapyny hem:

$$\boldsymbol{q} = \pm \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{C}^2}}$$

normirleýji köpeldijä köpeldip, tekizligiň

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{cos\,\alpha} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{cos\,\beta} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{cos\,\gamma} - \boldsymbol{p} = 0 \qquad (4.33)$$

normal deňlemesini alýarlar. Bu ýerde radikalyň alamaty, umumy deňlemäniň ***D*** agzasynyň alamatynyň tersine kabul edilýär.

(2.32) deňlemede $\boldsymbol{D} \neq 0$ ýagdaýda, ony – ***D*** bölüp alarys:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (4.34)$$

bu ýerde: $a=-\dfrac{D}{A}, \quad b=-\dfrac{D}{B}, \quad c=-\dfrac{D}{C}$.

(2.34) deňlemä, **tekizligiň kesimlerdäki deňlemesi** diýilýär; ***a, b, c*** – ululyklar, degişlilikde, tekizligiň koordinat oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatlarydyr.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{we} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

tekizlikleriň arasyndaky φ burçy:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (4.35)$$

formula arkaly tapýarlar. Onda iki tekizligiň parallellik şerti:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

ýaly, perpendikulýarlyk şerti:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

ýaly kesgitleniler.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokatdan $Ax+By+Cz+D=0$ tekizlige çenli aralygy:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (4.36)$$

formulada kesgitleýärler.

Berlen üç $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ we $M_3(x_3, y_3, z_3)$ ýa-da $M_1(\mathbf{r_1})$, $M_2(\mathbf{r_2})$, $M_3(\mathbf{r_3})$ nokatlardan geçýän tekizligiň wektor deňlemesini

$(\mathbf{r}-\mathbf{r_1})\bullet(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1})\bullet(\mathbf{r_3}-\mathbf{r_1})=0$ (*)

görnüşinde, $\mathbf{r}-\mathbf{r_1}$; $\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}$; $\mathbf{r_3}-\mathbf{r_1}$ wektorlaryň komplanarlygyndan peydalanyp ýazýarlar (bu ýerde $\mathbf{r_1}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{r_2}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$, $\mathbf{r_3}=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ radius wektorlardyr). (*) deňleme koordinat formasynda

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.37)$$

görnüşde bolýar.

Gönükme. $2x+3y-6z+21=0$ tekizligiň deňlemesini normal görnüşde ýazmaly.

➲ Normirleýji köpeldijini (-) alamatly (21>0) tapalyň:

$$q = -\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4+9+36}} = -\frac{1}{7}.$$

Onda tekizligiň normal deňlemesi:

$$-\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 3 = 0$$

görnüşde ýazylýar. ➲

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nokatdan geçýän we $\mathbf{N}=Ai+Bj+Ck$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesi şeýle ýazylýar:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ we $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ kesişmesinden emele gelen göni çyzykdan geçýän tekizligiň deňlemesi(deňlemeleriň dessesi) aşakdaky yaly ýazylýar:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ λ -erkin san.

Eger göni çyzygy kesgitleýän tekizlikler parallel bolsalar, onda tekizlikleriň dessesi bu tekizliklere parallel bolan tekizliklerin toplumyna öwrülýär.

Gönükme. $M_0(3;\ 5;\ -8)$ nokatdan $6x-3y+2x-28=0$ tekizlige çenli uzaklygy tapmaly.

$$d=\frac{|6\cdot 3-3\cdot 5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}.$$

Gönükme

M(2; 3; 5)nokatdan geçýän we **N**=4**i**+3**j**+2**k** wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

$4(x-2)+3(y-3)+2(y-5)=0$ $4x+3y+2z-27=0$

Gönükme

M(2; 3; -1) nokatdan geçýän $5x-3y+2z-10=0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

$A(x-2)-B(y-3)+C(z+1)=0$

A=5, B=-3, C=2

$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0$ $x-3y+2z+1=0$

Gönükme

$x+3y+5z-4=0$ we $x-y-2z+7=0$ tekizlikleriň kesişme çyzygyndan geçip, Oy oka parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

$x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7)=0$

$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0$ gözlenýän tekizlik ordinata okuna parallel, onda y koffisiýenti nula deň $3-\lambda=0$, $\lambda=3$.

Diýmek: 4x-z+17=0 ⊂

Giňişlikde göni çyzygyň deňlemesini iki tekizligiň kesişmesi ýaly ýazmak bolar:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (4.38)$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ we $M_1(x_2,y_2,z_2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4.39)$$

görnüşde tapýarlar. Onda onuň kanonik deňlemesi

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad (4.40)$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nokatdan geçýän we $\vec{t}=l\cdot\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ wektoryna parallel bolan göni çyzygy aňladýar. Bu deňlemäni şeýle görnüşde hem ulanýarlar:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}, \qquad (4.40a)$$

bu ýerde α, β we γ koordinata oklary bilen göni çyzygyň emele getirýän burçlarydyr:

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad \cos\gamma=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

(2.40) deňlemeden, olary aýratynlykda t ululygyna deňläp, göni çyzygyň parametrik deňlemesini alarys:

$$\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \\ z = nt + z_1 \end{cases} \tag{4.41}$$

Kanonik deňlemeleri bilen berlen:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{we} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

göni çyzyklaryň arasyndaky burç:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \tag{4.42}$$

formuladan kesgitlenip, olaryň parallellik şerti:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{4.43}$$

deňliklerden, perpendikulýarlyk şerti:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \tag{4.44}$$

deňlemeden kesgitlenýär.

Gönükme. $2x - y + 3z - 1 = 0$ we $5x + 4y - z - 7 = 0$ tekizlikleriň kesişmesi görnüşde berlen göni çyzygyň kanonik deňlemesini ýazmaly.

➲ Deňlemelerden ilki ***y***-i, soň ***z***-i ýok edip, olary ***x***-e görä çözeliň:

$$\boldsymbol{x}=\frac{11(\boldsymbol{y}-2}{-17}=\frac{11(\boldsymbol{z}-1)}{-13}\text{, bu ýerden: }\frac{\boldsymbol{x}}{11}=\frac{\boldsymbol{y}-2}{-17}=\frac{\boldsymbol{z}-1}{-13}\ .$$ ➲

Iki göni çyzygyň bir tekizlikde ýatmaklygynyň zerur we ýeterlik şerti

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (4.45)$$

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ göni çyzyk bilen Ax+By+Cz+D=0 tekizligiň arasyndaky burç:

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,. \qquad (4.46)$$

Göni çyzyk bilen tekizligiň parallellik şerti:

Al+Bm+Cn = 0 (4.47)

Göni çyzyk bilen tekizligiň perpendikulýarlyk şerti:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (4.48)$$

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ göni çyzyk bilen Ax+By+Cz+D=0 tekizligiň kesişmesini tapmak üçin, olar sistema alnyp çözülýär. Onuň üçin göni çyzygyň parametrik denlemesinden

$$x = lt + x_0, \quad y = mt + y_0, \quad z = nt + z_0$$

peýdalanmalydyr.

a) eger $Al + Bm + Cn \neq 0$ bolsa, göni çyzyk bilen tekizlik kesişýär;

b) eger $Al + Bm + Cn = 0$ $\quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ bolsa, onda göni çyzyk tekizlige paralleldir;

Eger $Al + Bm + Cn = 0$ we $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ bolsa, onda göni çyzyk tekizlikde ýatýar.

Gonükme.

2x-y+3z-1=0 we 5x+4y-z=0 göni çyzyklaryň deňlemelerini kanonik görnüşe getirmeli.

Çözülişi **:**

1-nji usul: Ilki y-i, soňra z-I ýok edip alarys:

13x+11z-11 = 0 we 17x+11y-22 = 0

$$x = \frac{11(y-2)}{-17} = \frac{11(z-1)}{-13}; \ onda, \ \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

2-nji usul. Gözlenýän gönä parallel **s** = l**i**+m**j**+n**k** wektory tapalyň. Bu wektor berlen tekizliklere degişli normal **N$_1$**= 2**i**-**j**+3**k** we **N$_2$** = 5**i**+4**j**-**k** wektorlara perpendikulýar bolmalydyr. Onda **s** deregine **N$_1$** we **N$_2$** wektorlaryň wektor kopeltmek hasyllaryny almak bolar:

$$\mathbf{s} = \mathbf{N_1} \times \mathbf{N_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11i + 17j + 13k$$

Şeýlelikde l=-11, m=17, n=13.

Üstünden gözlenýän göni geçýän M(x_1;y_1;z_1) deregine göniniň islendik koordinata tekizligi, meselem, yOz tekizligi bilen kesýän nokadyny almak bolar. Onda x_1=0 bolup, y_1 we z_1 bahalary asakdaky sistemadan hasaplapys:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

bu ýerden: y_1=2, z_1=1.

Diýmek: $$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Gönükme

M(3; 2; -1) nokatdan geçip Ox oky bilen göni burçy emele getirýän göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

⊂ Şert boýunça Ox oka perpendikulýar göni çyzyk bilen kesişmesi N(3;0;0) nokatdyr.

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$ ⊂

Meseleler.

4.33. $M_0(1;3;-2)$ nokatdan 2x-3y-4z+12=0 tekizlige çenli uzaklygy tapmaly.

Jogaby: d= $\frac{13}{\sqrt{29}}$

4.34. $M_0(2;3;-5)$nokatdan 4x-2y+5z-12 = 0 tekizlige inderilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby:d= $\frac{7\sqrt{5}}{3}$

4.35. P(0;2;0) we Q(2;0;0) nokatlaryň üstünden geçip, x=0 tekizlik bilen 60^0 burç emele getirýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+z}{\left(\pm\sqrt{2}\right)}$ =1

4.35.

2x-y-12z-3=0 we 3x+y-7z-2 =0 tekizlikleriň kesişmesinden geçip x+2y+5z-1=0 tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: 4x+3y-2z-1=0

4.37. Koordinata başlangyjyndan,P(4;-2;1) we Q(2;4;-3) nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.
Jogaby: x+7y+10z=0

4.38. M(0;2;1) nokatdan geçip a=i+j+k we b= i+j-k wektorlara parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.
Jogaby: x-y+2=0

4.39. x +y+2z-4=0 tekizlik bilen a=i-2j+k wektor nähili burç emele getirer?

Jogaby: arcsin $\left(\frac{5}{6}\right)$

4.40. P(1;-4;2) weQ(7;1;-5) nokatlardan deň daşlykda ýatan nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.
Jogaby: x+7y+10z=0

4.41. $\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0 \\ 3x+y-17z=0 \end{cases}$

gönininiň kanonik deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $\frac{(x+1)}{5}=\frac{(y-3)}{2}=\frac{z}{1}$

4.42. $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z+8=0 \end{cases}$

Göni çyzygyň koordinata oklary bilen emele getirýän burçlaryny tapmaly.

Jogaby: $\cos\alpha=\frac{6}{7}$; $\cos\beta=\frac{3}{7}$; $\cos\gamma=\frac{2}{7}$

4.43. M(2;-5;1) we N(-1;1;2) nokatlaryň üstünden geçýän göninuň parametrik deňlemesini tapmaly.
Jogaby: x = -3t-1, y= 6t+1, z=t+2

4.44. Parallelogramyň yzygiderlikde üç depeleri A(3;0;-1), B(1;2;-4), we C(0;7;-2) berlen. AD we CD taraplaryň deňlemelerini tapmaly.

Jogaby: $\frac{(x-3)}{(-1)}=\frac{y}{5}=\frac{(z+1)}{2}$; $\quad \frac{x}{2}=\frac{(y-7)}{(-2)}=\frac{(z+2)}{3}$

4.45. M(0;2;1) nokatdan geçip **a**=**i**+2**j**+2**k**, **b**=3**j**, **c**=3**k** wektorlar bilen deň burçlary emele getirýän göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $\frac{x}{1}=\frac{(y-2)}{(-1)}=\frac{(z-1)}{0}$

4.46. $\frac{x}{1}=\frac{(y+2)}{1}=\frac{(z-2)}{(-2)}$ göni çyzygyň 2x+3y-z-5 = 0 tekizlige bolan proýeksiýasyny tapmaly.

Jogaby: $\frac{x}{(-10)}=\frac{(y-3{,}4)}{13}=\frac{(z-5{,}2)}{19}$.

4.7. Ikinji tertipli üstler

1) **Sfera:** Koordinatalar sistemasynda C(a;b;c)merkezli r radiusly sferanyň deňlemesi şeýle ýazylýar:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2= r^2$

Eger sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa, onda

$x^2+y^2+z^2 = r^2$

F(x,y) = 0 giňişlikde emele getirijileri Oz okuna parallel silindrik üsti,

F(x,z) = 0 giňişlikde emele getirijileri Oy okuna parallel silindrik üst,

F(y,z) = 0 giňişlikde emele getirijileri Ox okuna parallel silindrik üst aňladýar.

Ikinji tertipli silindrik üstleriň kanonik deňlemeleri:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elliptik silindr;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolik silindr.

$y^2 = 2px$ parabolik silindr

Depesi koordinata başlangyjynda bolan OZ okly ikinji tertipli konusyň deňlemesi:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ýaly bolup, onuň beýleki tipleri

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ görnüşlerde bolýarlar.

Eger yOz tekizliginde ýatan F(y, z)=0, x=0 egri Oz okuň daşyndan aýlananda, emele gelýän aýlanma üsti $F\left(x;\sqrt{y^2+r^2}\right)=0$ görnüşde bolýar.

Şuňa meňzeşlikde:

$F(x;\sqrt{y^2+r^2})=0$ Ox okuň daşyndan aýlananda emele gelýän üst

$F\left(\sqrt{x^2+z^2};y\right)=0$ Oy okuň daşynda aýlananda emele gelýän üst.

Ellipsiň, giperbolanyň we parabolanyň öz simmetriýa oklarynyň daşyndan aýlananda, emele gelýän ikinji tertipli üstleriň deňlemelerini ýazalyň:

$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$-aýlanma ellipsoid. Aýlanma ok bolup Oz hyzmat edýär:

Eger a>c bolsa, onda ellipisoid gysylandyr.

Eger a<c bolsa, onda ellipisoid süýndirilendir.

Eger a=c bolsa, onda ellipisoid sfera öwrülýär.

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$-Biroýukly aýlanma giperboloid.

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$- Ikioýukly aýlanma giperboloid

$x^2+y^2=2pz$ Oz aýlanma okly aýlanma paraboloidi.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Ellipsoid (üçokly).

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Biroýukly giperboloid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Ikioýukly giperboloid

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ (p>0, q>0) Elliptik paraboloid

$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (p>0, q>0) giperbolik paraboloid

Gönükme

$A\left(0,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$; $B(1;2;4)$; $C(1;1;2)$ nokatlar $y^2+2xy-3z = 0$ üstde ýatýarmy?

⮌ A we B nokatlar berlen üstde ýatýarlar. C nokat berlen üstde ýatmaýar.

Meselem, x=0; y=1; $z = \frac{1}{3}$; bahalary berlen deňlemede goýýarys.

$1^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ we ş.m.

C nokadyň koordinatalaryny barlalyň .

x=1, y=1, z=2 bahalarda $1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \neq 0$ ⮌

Gönükme

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ sferanyň merkezini we radiusyny tapmaly.

⮌ Berlen deňlemäni kanonik görnüşe getireliň:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + z^2 - 1 - 9 - 6 =$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 16 = 0$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 16$

$a = 1,\quad y = -3,\ c = 0,\ R = 4 \Rightarrow C(1;-3;0),$ R=4 ⮌

Gönükme

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ deňlemeler sistemasynyň geometriki ornuny tapmaly.

⮌ Berlen deňlemeler sistemasyny çözüp, egriniň deňlemesini alarys:

$x^2+z^2-4x+1=0$. Diymek, $(x-2)^2+z^2=3$ deňleme y=1 tekizliginde ýatan, radiusy $R=\sqrt{3}$, merkezi C(2;1;0) nokatda bolan töwerekdir.

Gönükme

Berlen $x^2=4y$ deňleme, giňişlikde haýsy üsti berýär?

$x^2=4y$ deňleme Oz okuna parallel parabolik silindriň deňlemesidir, bu ýerde $x^2=4y$, $z=0$ silindrik üstüň deňlemesidir.

Gönükme

M(0;0;1) nokat depesi bolup hyzmat edýän, ugrukdyryjysy $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ $z=3$ ellips bolan konik üstüň deňlemesini düzmeli.

Ellipsiň üstünde erkin $N(x_0;y_0;z_0)$ nokady alalyň. MN emele getirijiniň deňlemesini ýazalyň. . $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$. N nokat ellipsiň üstünde ýatýandygy üçin, ellipsiň deňlemesini kanagatlandyrýar: $\frac{x_0^2}{25}+\frac{{y_0}^2}{9}=1$, $z_0=3$. Onda:

$$\frac{x}{x_0}=\frac{z-1}{z_0-1}, \qquad \frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}, \qquad \frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1, \qquad z=3$$

deňlemeler sistemasyndan x_0, y_0, z_0 ululyklary ýok edip, gözlenýän konusyň deňlemesini alarys:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0$$

Gönükme

$x+2y=4;\quad z=0$ göni Ox okuň daşyndan aýlananda, emele gelýän üstüň deňlemesini tapmaly.

⊂ Aýlanma üst depesi M(4;0;0) nokatda bolan konusdyr. Üste degişli erkin $A(X;Y;Z)$ nokady alalyň. Bu nokada berlen gönüniň üstünde $B(x;y;0)$ nokady degişlidir. A we B nokatlary, aýlanma Ox okuna perpendikulýar bolan bir tekizlikde ýatýarlar. Onda

$X=x$ $\qquad Y^2+Z^2=y^2$ ýazyp bileris. x we y üçin alnan aňlatmalary berlen gönüniň deňlemesinde goýmak arkaly, gözlenýän aylanma ustüň deňlemesini taparys:

$X+2\sqrt{Y^2+Z^2}=4$ ýa-da $4(Y^2+Z^2)-(X-4)^2=0$,

ýagny:

$4Y^2+4Z^2-(X-4)^2=0$ ⊂

Meseleler

4.47. $A(-1;0;1),\ B(0;-2;2),\ C(0;0;0),\ D(1;2;1)$ nokatlar $z=x^2+\dfrac{y^2}{2}$ üstde ýatýarmy?

Jogaby: A, B we C nokatlar üstde ýatýarlar, emma D üstde ýatmaýar**.**

4.48. Sferanyň merkezini we radiusyny tapmaly.

1) $x^2+y^2+z^2-4x+2y=0$

2) $x^2+y^2+z^2+2x-6=0$

3) $x^2+y^2+z^2-8z=0$

Jogaby: 1)C(2;-1;0) $R=\sqrt{5}$

2)C(-1;0;0) $R=\sqrt{7}$

3)C(0;0;4) R=4

4.49. Merkezi C(1; 2; -3)nokatda bolan we koordinatalar başlangyjyndan geçýän sferanyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$

4.50. Berlen $1)\ y=3,\ 2)\ z=1,\ 3)\ x=0$ tekizlikler bilen $x^2-y^2-z^2=0$ konusyň kesişme çyzygynyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby:

$1)\ x^2+z^2=9;\ y=3$ (töwerek)

$2)\ y^2-x^2=1;\ z=1$ (giperbola)

$3)\ z^2-y^2=0;\ x=0$ (iki göni)

4.51. $2y+z-2=0,\ x=0$ göni Oz okuň daşyndan aýlananda, emele gelen üstüň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $4x^2+4y^2-(z-2)^2=0$

4.52. Berlen $z=x^2-y^2$, üstüň a) $z=1$; b) $y=1$; ç) $x=1$; d) $z=-1$; tekizlikler bilen kesişme çyzyklarynyň deňlemelerini tapmaly.

Jogaby: a) $x^2-y^2=1,\ z=1$; b) $z+1=x^2,\ y=1$; **ç)** $y^2=1-z,\ x=1$; **d)** $y^2-x^2=1;\ z=-1$.

Ýokary matematikadan 4-nji tipli ýumuş

1-nji mesele. Piramidanyň depeleriniň koordinatalary berlen.

a) $A_1A_2\ A_3$ granyň deňlemesini düzmeli;

b) A_4 depeden $A_1A_2\ A_3$ grana geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapmaly;

ç) A_1A_2 gapyrganyň deňlemesini düzmeli;

d) piramidanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapmaly;

e) piramidanyň göwrümini tapmaly

1. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$

2. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$

3. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$

4. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$

5. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$

6. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$

7. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$

8. $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$

9. $A_1(8;6;4)$, $A_2(10;5;5)$, $A_3(5;6;8)$, $A_4(8;10;7)$

10. $A_1(7;7;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$

11. $A_1(-4;2;5)$, $A_2(2;5;3)$, $A_3(-5; 2;-3)$, $A_4(4;6;1)$

12. $A_1(-4;4;2)$, $A_2(0;7;1)$, $A_3(5;-2;2)$, $A_4(4;3;5)$

13. $A_1(4;5;1)$, $A_2(-4;7;2)$, $A_3(1;-6;3)$, $A_4(4;2;3)$

14. $A_1(2;-2;3)$, $A_2(-5;3;2)$, $A_3(4;7;1)$, $A_4(-2;4;3)$

15. $A_1(3;-4;2)$, $A_2(2;5;2)$, $A_3(-5;-4;2)$, $A_4(4;-3;6)$

16. $A_1(3;6;3)$, $A_2(7;5;-7)$, $A_3(5;0;5)$, $A_4(0;4;3)$

17. $A_1(5;2;3)$, $A_2(-5;3;2)$, $A_3(0;0;0)$, $A_4(3;4;3)$

18. $A_1(4;3;-2)$, $A_2(0;2;0)$, $A_3(-3;5;2)$, $A_4(0;5;5)$

19. $A_1(5;0;5)$, $A_2(2;1;-4)$, $A_3(-5;2;-2)$, $A_4(2;-4;3)$

20. $A_1(9;1;-3)$, $A_2(5;-3;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(4;5;-8)$

21. $A_1(1;3;-5)$, $A_2(-3;7;4)$, $A_3(-8;9;-1)$, $A_4(5;-4;2)$

22. $A_1(6;0;3)$, $A_2(2;5;3)$, $A_3(-3;4;3)$, $A_4(3;8;-5)$

23. $A_1(-2;-2;-2)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(-5;5;8)$, $A_4(3;1;0)$

24. $A_1(6;-8;5)$, $A_2(10;3;4)$, $A_3(5;8;-3)$, $A_4(-4;6;2)$

25. $A_1(8;2;-4)$, $A_2(4;3;3)$, $A_3(-1;6;-2)$, $A_4(3;0;-3)$

2-nji mesele. Deňlemesi bilen berlen töweregiň merkezini we radiusyny tapmaly.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 19 = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2z + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + 1 = 0$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 2z + 1 = 0$
6. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 12 = 0$
7. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
8. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2z - 4 = 0$
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 2 = 0$
10. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 12z + 1 = 0$
11. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10z + 1 = 0$
12. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 19 = 0$
13. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 12 = 0$
14. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4z - 5 = 0$
15. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 9z + 1 = 0$
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 9 = 0$
17. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 6z + 2 = 0$
18. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$
19. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 12z + 4 = 0$
20. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0$
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
22. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 8 = 0$
23. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 8z + 7 = 0$
24. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y - 7 = 0$
25. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 4z - 1 = 0$

Edebiýat

1. Hudaýberenow Ö. G. Ýokary matematika. A:Türkmen döwlet neşirýat gullugy. – 2007 ý.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука.2004.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 2003.

4. Данько П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для студентов втузов. В 2-х ч. М.: Высш. шк., 1986.