K. Amanow, S. Soltanow, G. Esenamanow

DISKRET MATEMATIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
"Ylym" neşirýaty
2015

UOK 378:519.7
A 58

Amanow K. we başg.
A58 **Diskret matematika.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Ylym, 2015. – 196 sah.

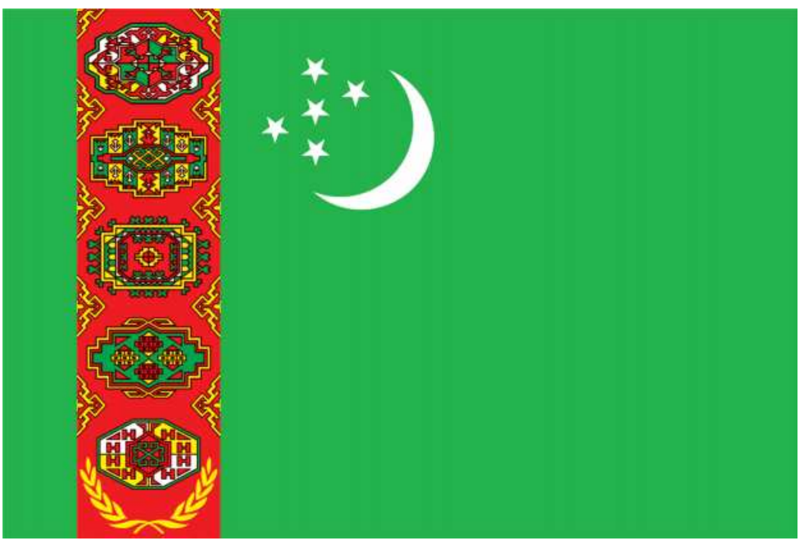
Okuw kitaby ýokary okuw mekdeplerinde umumy we amaly okuwlary geçirmek üçin niýetlenilip, onda köplükler nazaryýeti we kombinatorikanyň elementleri, sanamaklygyň usullary, rekurrent gatnaşyklar, logiki algebranyň esaslary, bul funksiýalary, pikir aýtmalar logikasynyň elementleri, graflar nazaryýeti, tertipleşdirmek we saýlamak, kodlaşdyrmak we ş.m. barada esasy düşünjeler we dürli temalara degişli özbaşdak işlemek üçin meseleler berilýär.

Ylmy işgärler, şeýle hem dürli ugurda işleýän hünärmenler bu okuw kitabyndan öz işlerinde peýdalanyp bilerler.

TDKP № 217, 2015 KBK 22.18 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GIRIŞ

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň parasatly ýolbaşçylygynda ata Watanymyz Berkarar döwletiň Bagtyýarlyk döwründe uly ösüşlere eýe bolýar. Hormatly Prezidentimiz bilim ulgamyny kämilleşdirip, dünýäniň ösen ýurtlarynyň derejesine ýetirmekde uly işleri amala aşyrýar. Bilim ulgamynda amala aşyrylýan işler talyplara bilim berýän mugallymlaryň öňünde uly wezipeleri goýýar. Milli bilim ulgamyndaky özgertmeleriň möhüm ugurlarynyň biri hem halkara tejribesini çuňňur özleşdirip, ony Türkmernistanyň orta we ýokary okuw mekdepleriniň okuw prosesine girizmekden, ýurdumyzyň hem-de dünýä ylmynyň söňky gazananlaryny, täze öňdebaryjy tehnologiýalary öwrenmekden ybaratdyr.

Diskret matematika – iň gadymy döwürde dörän matematikanyň bir bölümi. Sözüň giň manysynda diskret matematika – algebra, sanlar nazaryýeti, köplükler nazaryýeti, matematiki logika we ş.m. ýaly matematikanyň klassyky bölümleri, şeýle hem kompýuterleriň gündelik durmuşa ornaşdyrylmagy sebäpli matematikanyň geçen asyryň ortalarynda dörän täze bölümleri degişlidir. Häzirki döwürde "diskret matematika" ylmy sözüň dar manysynda ulanylýar, oňa çylşyrymly dolandyryjy ulgamlary seljermek bilen bagly bölümler degişli edilýär.

Okuw kitaby alty bölümden ybarat. Birinji bölümde koplükler nazaryýeti we sanamaklygyň usullary beýan edilýär.

Ikinji bölümde bolsa, kombinatorikanyň elementlerine, rekurrent gatnaşyklar usulyna seredilýär. Üçünji bölüm graflar nazaryýetini beýan etmeklige bagyşlanýar.

Dördünji bölümde logiki algebranyň esasy düşünjeleri, pikir aýtmalar logikasynyň elementleri – köplükde bul algebrasy {çyn, ýalan} beýan edilýär. Bu ýerde elementleri adaty ýagdaýda sanlar bolmadyk, ýöne käbir häsiýetleri boýunça oňa meňzeş bolan $\{0,1\}$ köplük esas bolup durýar. Bäşinji bölüm maglumatlary kompýuteriň kömegi bilen tertipleşdirmeklige, saýlamaklyga bagyşlanýar. Altynjy bölümde kodlaşdyrmak nazaryýetiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär we oňa degişli meseleler berilýär.

Okuw kitabynda her bir bölüme degişli köp sanly mysallar we özbaşdak işlemek üçin ýumuşlar berlendir.

I. KÖPLÜKLER WE OLAR BILEN GEÇIRILÝÄN AMALLAR

1.1. Esasy düşünjeler

Matematikada köplük we köplügiň elementleri düşünjeleri beýleki düşünjeler bilen kesgitlenmeýän ilkinji düşünjeler hasap edilýär.

Köplükleriň mysallary: ýokary okuw mekdebinde okaýan talyplaryň köplügi, 100-den uly bolmadyk natural sanlaryň köplügi, tekizlikde radiusy bire deň bolan we merkezi koordinata başlangyjynda bolan tegelege degişli nokatlaryň köplügi.

Köplükler bir baş harp bilen ýa-da onuň elementleriniň sanawy bilen berilýär. Meselem, 1-den 100-e çenli natural sanlaryň köplügi

$$M = \{1,2,3,...,100\} = \{i - \text{bitin}, 1 \leq i \leq 100\}$$

görnüşde berilýär.

x obýektiň A köplügiň elementi bolýanlygy $x \in A$ görnüşde ýazylýar. $x \notin A$ ýazgy x-iň A köplüge degişli däldigini aňladýar.

Elementleri ýeterlik derejede köp bolan köplügi saýlap alyp, onuň çäginden çykmazlygy şertleşeliň. Biziň seretjek köplüklerimiziň elementleri şu agzalan köplügiň çäginden çykmaýar diýip hasap edeliň we ol berkidilen köplüge **uniwersal köplük** diýip at bereliň (ol köplügi biz E bilen belläliň).

Eger, $x \in E$ elementiň A köplüge degişlidigi ýa-da degişli däldigi belli bolsa, onda A **köplük berlen** diýilýär. Köplükler öz elementlerini häsiýetlendirijiler bilen hem berilýär. Şeýle köplügiň hemme elementleri we diňe şolar şol görkezilen häsiýete eýedir. A köplügiň x elementleriniň $P(x)$ häsiýete eýedigi baradaky fakt $A = \{x : P(x)\}$ görnüşde ýazylýar. Meselem, $A = \{x : x = 2k,\ k = 1,2,...\}$ ýazgy A köplügiň jübüt položitel sanlardan düzülendigini aňladýar.

Eger A köplügiň hemme elementleri şol wagtyň özünde B köplügiň hem elementleri bolýan bolsa, onda A köplüge B köplügiň **bölek köplügi** diýilýär we $A \subset B$ görnüşde ýazylýar.

Käbir aýratyn ähmiýetli köplükler üçin ýörite standart belgilemeler ulanylýar:
N – natural sanlaryň köplügi, Q – rasional sanlaryň köplügi, R – hakyky sanlaryň köplügi, Z – bitin sanlaryň köplügi.

Bu köplükleriň arasynda aşakdaky ýaly degişlilik bardyr: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Eger $A \subset B$ we $B \subset A$ bolsa, ýagny bu köplükler şol bir elementlerden ybarat bolsalar, olara **deň köplükler** diýilýär ($A = B$ ýazylýar).

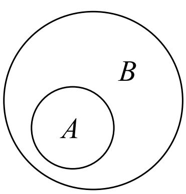
Hiç bir elementi özünde saklamaýan köplüge **boş köplük** diýilýär. Boş köplükleriň mysallary: taraplarynyň uzynlygy 2 sm, 3 sm, 7 sm bolan üçburçluklaryň köplügi, kwadraty 2-ä deň bolan rasional sanlaryň köplügi, $x+y=1$, $x+y=2$ deňlemeler ulgamynyň çözüwleriniň köplügi. Boş köplük islendik köplügiň bölek köplügi hasap edilýär.

Köplükler barada pikir ýöretmek üçin ýörite shemalardan (Eýleriň diagrammasyndan) peýdalanylýar.

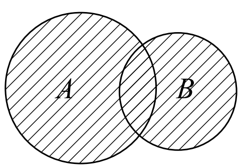
A we B **köplükleriň jemi (birleşmesi)** diýip, bu köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan elementleriň köplügine aýdylýar we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A, \text{ ýa-da } x \in B\}.$$

Eger A köplügiň her bir elementi B köplügiň hem elementi bolsa, onda A köplüge B köplügiň **bölek köplügi** diýilýär.



$A \subset B$



$A \cup B$

Eger A_1, A_2, ..., A_n köplükler berlen bolsa, olaryň birleşmesi simwoliki görnüşde $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ýaly ýazylýar. Köplükleriň birleşmelerine mysallar getireliň.

1. Položitel jübüt sanlaryň we položitel täk sanlaryň köplükleriniň birleşmesi natural sanlaryň köplügidir:

$$\{2,4,6,\ldots\} \bigcup \{1,3,5,\ldots\} = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}.$$

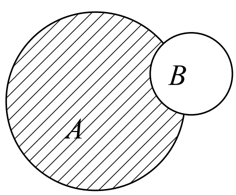
2. Uzynlygy 2 sm deň bolan *MN* kesim berlen. Tekizlikde esasynyň uzynlygy *MN*-e deň bolan, meýdany 1 sm^2-dan kiçi bolmadyk deňýanly üçburçluklaryň hemme depeleriniň köplügine seredilýär. Bu köplük size belli bolan iki sany figuranyň, ýagny *MN* kesime perpendikulýar bolan iki sany şöhläniň birleşmesidir.

3. Her bir üçburçluga nokatlaryň köplügi ýaly seredeliň, şunlukda üçburçlugyň içinde we onuň çäklerinde ýatýan nokatlary bu köplüge degişli edeliň. Berlen töweregiň içinden çyzylan hemme dogry üçburçluklaryň birleşmesi berlen töwerek bilen çäklenen tegelegi aňladýar.

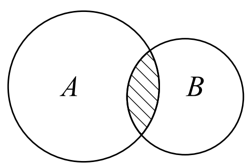
A we *B* **köplükleriň kesişmesi (köpeltmek hasyly)** diýip, bu köplükleriň ikisine-de degişli bolan elementleriň köplügine aýdylýar, başgaça aýdanyňda, bu köplükleriň umumy elementleriniň köplügine aýdylýar we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ we } x \in B\}.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ köplükleriň kesişmesi diýip, bu köplükleriň hemmesi üçin umumy bolan elementleriň köplügine aýdylýar we $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ görnüşde belgilenýär.



$A \setminus B$



$A \cap B$

4. $\{0,1,3,5\} \bigcap \{1,2,3,4\} = \{1,3\}$

5. Goý, *A* – hemme gönüburçluklaryň köplügi, B hemme romblaryň köplügi bolsun, şonda $A \bigcap B$ köplük hemme kwadratlaryň köplügini düzýär.

6. Her bir gönüburçluga onuň gyralaryna degişli ýa-da içinde ýatýan nokatlaryň köplügi ýaly seredeliň. Berlen töweregiň içinden çyzylan gönüburçluklaryň kesişmesi tegelegiň merkezini aňladýar.

A we B **köplükleriň tapawudy** diýip, A köplügiň B köplüge degişli bolmadyk elementlerine aýdylýar we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$A \backslash B = \{x : x \in A$ we $x \notin B\}$.

$E \setminus A$ tapawuda (bu ýerde E – uniwersal köplük) A **köplügiň doldurgyjy** diýilýär we $\overline{A}$ görnüşde belgilenýär.

1.2. Dekart köpeltmek hasyly

Goý, X we Y – erkin köplükler bolsun. Elementleriň (x,y) $x \in X$, $y \in Y$ jübüdine berlen tertipde alnan **tertipleşdirilen jübüt** diýilýär, şunlukda, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ bolanda we diňe şonda $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ hasap edilýär.

Iki sany X we Y köplügiň $X\times Y$ **dekart köpeltmek hasyly** diýlip, hemme tertipleşdirilen (x,y) jübütleriň köplügine aýdylýar we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

Goý, R – hemme hakyky sanlaryň köplügi bolsun. Onda $R^2=R\times R$ dekart kwadrat tekizlikdäki hemme nokatlaryň koordinata oklaryna görä dekart koordinatalarynyň köplügidir. Edil şuňa meňzeşlikde, üç köplügiň $X_1\times X_2\times X_3$, dört köplügiň we ş.m. dekart köpeltmek hasyllaryny girizip bolar. $X_1=\ldots=X_n=X$ bolsa, gysgaça $X\times X\times X=X^n$ ýazylýar we oňa köplügiň **n-derejeli dekart köpeltmek hasyly** diýilýär. X^n köplügiň elementleri $(x_1,x_2,...,x_n)$ tertipleşdirilen elementleriň toplumlarydyr.

1.3. Köplükler bilen geçirilýän amallaryň häsiýetleri

Goý, A,B,C – uniwersial U köplügiň bölek köplükleri bolsun. Aşakdaky gatnaşyklar dogrudyr.

1. Goşa doldurgyjyň kanuny:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

2. $\bigcup$ we $\bigcap$ amallarynyň kommutatiwligi:

$$\begin{cases} A\bigcap B = B\bigcap A \\ A\bigcup B = B\bigcup A \end{cases}$$

3. $\bigcap$ we $\bigcup$ amallaryň assotiatiwligi:

$$\begin{cases} A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C \\ A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C \end{cases}$$

4. $\bigcap$ we $\bigcup$ amallaryň distributiwlik kanuny:

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

5. Siňdirme kanuny:

$$A\bigcap(A\bigcup B)=A$$

$$A\bigcup(A\bigcap B)=A$$

6. De-Morganyň kanuny:

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$$

7. $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$

$A\bigcup\overline{A}=\bigcup$

8. $A\bigcap U=A \quad A\bigcap\varnothing\approx\varnothing$

$A\bigcup U=U \quad A\bigcup\varnothing\approx A$

$\overline{U}\approx\varnothing \quad \overline{\varnothing}\approx U$

Bu ýerde $\approx$ belgi kongurent deňligi aňladýar.

1.4. Şekillenme (funksiýa). Deňgüýçli köplükler

1.4.1. Umumy düşünjeler

X köplügiň Y köplüge bolan f şekillenmesi $f{:}X\to Y$ görnüşde aňladylýar. Eger X köplügiň her bir x elementine Y köplügiň $y=f(x)$ elementi degişli edilse, onda oňa X köplügiň Y köplüge f **şekillenmesi** diýilýär we $y=f(x)$ elemente f şekillenmede x elementiň **obrazy** diýilýär.

X köplügiň Y köplüge f şekillenmesi $f{:}X\to Y$ görnüşde aňladylýar. Ondan başga-da, Y köplügiň bir elementine f şekillenmede $x_i\in X$ birnäçe elementiň degişli bolmak mümkinçiligi aradan aýrylmaýar

$(f(x_i)=y)$. Şeýle görnüşdäki $\{x_i\}\subset X$ bölek köplügi f şekillenmede $y\in Y$ elementiň **proobrazy** diýilýär we aşakdaky ýaly bellenýär:

$$f^{-1}(y)=\{x\in X : f(x)=y\}.$$

$X_1\subset X$ köplügiň obrazy f şekillenmede $f(X_1)=\{f(x): x\in X_1\}\subset Y$.

$Y_1\subset Y$ köplügiň **proobrazy** diýlip, (f şekillenme üçin) Y_1-e degişli elementleriň proobrazlarynyň birleşmesine aýdylýar we aşakdaky ýaly bellenilýär:

$$f^{-1}(Y_1)=\{x\in X : f(x)\in Y_1\}=\bigcup_{y\in Y_1} f^{-1}(y)\subset X.$$

Şekillenme sözüniň (adalganyň) ýerine “Operator” ýa-da “funksiýa” sözleri ulanyp bolar.

$f: X\to X$ şekillenmä X köplügiň öz-özüne öwrülmesi hem diýilýär.

$f: X\to Y$ **funksiýanyň grafigi** diýlip, $(x, f(x))$ görnüşdäki jübütleriň köplügine aýdylýar.

1.4.2. Şekillenmäniň kompozisiýasy (çylşyrymly funksiýa)

Goý, $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$. f we g **funksiýalaryň kompozisiýasy (superpozisiýasy)** diýlip, $g\circ f: X\to Z$ görnüşde bellenýän we $(g\circ f)(x)\overset{def}{=}g(f(x))$ deňlik bilen kesgitlenýän funksiýa aýdylýar.

Soňky deňligiň sag tarapy kompozisiýanyň x nokatdaky bahasynyň ilki bilen f, soňra g funksiýanyň täsir etmegi bilen hasaplanýandygyny görkezýär.

Goý, $f: R\to R$ we $f(x)=\sin x$, $g: R\to R$ we $g(x)=x^2$.

Onda $(g\circ f)\,(x)=\sin^2 x$, $(f\circ g)\,(x)=\sin\,(x^2)$.

Bu ýerden görnüşi ýaly, funksiýalaryň köplüginde $f\circ g$ we $g\circ f$ kompozisiýalar üçin kommutatiwlik häsiýeti ýerine ýetmeýär.

1.4.3. Şekillenmäniň görnüşleri

Eger Y köplügiň her bir elementiniň iň bolmanda bir proobrazy bar bolsa, ýagny $f(X)=Y$ bolsa, onda $f: X\to Y$ şekillenmä **surýektiw şekillenme** diýilýär.

Surýektiw şekillenmä mysal edip, $f: R\to[-1;1]$ $y=\sin x$ we $y=\cos x$ funksiýalary görkezip bolar.

Kesgitleme. Eger her bir $f(x)$ obrazyň diňe bir proobrazy bar bolsa, ýagny $x_1 \neq x_2$-den $f(x_1) \neq f(x_2)$ gelip çykýan bolsa, onda $f: X \to Y$ şekillenmä **inýektiw şekillenme (içine goýlan)** diýilýär.

Inýektiw şekillenmäniň mysaly bolup, $y = \log_2 x$, $y = 3^x$, $y = \sqrt{x}$ we ş.m. görnüşdäki monoton funksiýalar hyzmat edýär. Inýektiw şekillenme umumy görnüşde $f: D(\subset R) \to R$ ýaly bellenýär.

Kesgitleme. Eger, $f: X \to Y$ şekillenme bir wagtda surýektiw we inýektiw bolsa, onda oňa **biýektiw şekillenme** diýilýär.

1.4.4. Şekillenmeleriň öwrülişikliligi

$f: X \to Y$ f şekillenme tarapyndan döredilen $f(z) = y$ (1) deňlemä seredeliň. Bu ýerde: $z(\in X)$ – näbelli, $y(\in X)$ – parametr.

Eger f surýektiw bolman, inýektiw bolsa, onda parametriň (1) deňlemäniň çözüwiniň bolmaýan bahalary tapylmagy mümkin. Eger bu deňlemäniň parametriň käbir bahalarynda çözüwi bar bolsa, ol çözüw ýeke-täkdir.

Eger f inýektiw däl-de, surýektiw şekillenme bolsa, onda (1) deňlemäniň parametriň islendik bahasynda çözüwi bardyr we ondan başgada y parametriň iň bolmanda bir bahasy tapylyp, (1) deňlemäniň birden köp çözüwi bardyr. f – biýektiw şekillenme bolsa, parametriň her bir bahasynda (1) deňlemäniň ýeke-täk çözüwi bardyr. Bu ýagdaýda, f şekillenme beýleki bir $f^{-1}: Y \to X$ şekillemäni kesgitleýär. Ol $y \in Y$ elementleriň her birine (1) deňlemäniň bir çözüwini degişli edýär. Ol çözüw $f^{-1}(y)$ görnüşde bellenýär. $f^{-1}: Y \to X$ şekillenme f şekillenmä ters şekillenmedir.

$f^{-1}(f(x)) = x$ we $f(f^{-1}(y)) = y$ bolýandygyny görmek kyn däldir.

Kesgitleme. Eger $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x \in X$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$, $\forall y \in Y$ şertleri ýerine ýetirýän $f^{-1}: Y \to X$ şekillenme bar bolsa, onda $f: X \to Y$ şekillenmä öwrülişikli şekillenme diýilýär.

Teorema (öwrülişikliligiň şerti). $f: X \to Y$ şekillenmäniň öwrülişikli bolmagy üçin onuň biýektiw bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Aşakdaky mysallara seredeliň:

1) $\sin: R \to R$ öwrülmeýär;

2) $\sin: R \to [-1; 1]$ öwrülmeýär;

3) $\sin: [-\pi/2; \pi/2] \to R$ öwrülmeýär;

4) $\sin:[-\pi/2;\ \pi/2]\to[-1;1]$ öwrülişilikli, $\sin^{-1} \overset{def}{=} \arcsin$.

Ýumuş. Goý, $g:X\to Y$ we $f:Y\to Z$ – biýektiw şekillenmeler bolsun. Onda olaryň $f\circ g$ kompozisiýasynyň hem biýektiw bolýandygyny subut etmeli, ýagny $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

1.4.5. Kuwwatlylyk

Eger $X\to Y$ biýektiw şekillenme bolsa, onda X we Y köplüklere **deňgüýçli (deň kuwwatly) köplükler** diýilýär. Kuwwatlylygy N köplügiňkä deň bolan köplüge **hasaply köplük** diýilýär. R köplügiňkä deň kuwwatly bolan köplüge **kontinium kuwwatly köplük** diýilýär.

Natural sanlaryň köplügi hemme jübüt sanlaryň köplügi bilen deňgüýçlidir. Bu ýerden köplügiň öz bölek köplügi bilen hem deňgüýçli bolup biljekdigi gelip çykýar. Bu häsiýet hemme tükeniksiz köplükler üçin mahsusdyr. Tükenikli köplükler üçin bu tassyklama dogry däldir.

1.5. Sanamak. Elementar toždestwolar

Köplükler nazaryýetinde sanamaklygyň meseleleri çözülende hasaplamak üçin aşakdaky düzgünler giňden ulanylýar:

1. **Deňlik düzgüni.** Eger A we B tükenikli köplükler we $F:A\to B$ biýektiw şekillenme bolsa, onda $|A|=|B|$, bu ýerde $|A|$ – tükenikli A köplügiň elementleriniň sany;

2. **Jemleme düzgüni.** Eger, $A_1, A_2, ...A_n$ tükenikli kesişmeýän köplükler bolsa, onda $|A_1\cup\ldots\cup A_n|=|A_1|+.....+|A_n|$;

3. **Köpeltmek düzgüni.** Eger, $A_1, A_2, ...A_n$ – tükenikli köplükler bolsa, $|A_1\times\ldots\times A_n|=|A_1|\times.....\times|A_n|$;

Ýokarda görkezilen düzgünleri **sanamagy** girizmek bilen bagly meseleleri çözmekde ulanalyň.

1. Goý, $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ we $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$ köplükler berlen bolsun. n – A köplügiň, m – B köplügiň elementleriniň sany bolsun, onda $F:A\to B$ islendik şekillenmäni n uzynlykly B köplügiň $(F(a_1),\ldots,F(a_n))$ elementlerinden düzülen köplük görnüşinde berip bolar. Şeýlelikde, $F:A\to B$ şekillenmäniň sany $|B|^{|A|}=m^n$ formula bilen kesgitlenilýär.

Eger bizi bölekleýin şekillenmäniň A-dan B-e çenli sany gyzyklandyrsa, onda ol $(1+|B|)^{|A|}=(1+m)^n$ – formula bilen berlip bilner.

2. Goý, n – A köplügiň m bolsa B köplügiň inýektiw şekillenmesiniň sany bolsun. Islendik $F:A\to B$ – inýektiw şekillenme n uzynlykly B köplügiň $(F(a_1),\ldots.F(a_n))$ görnüşli elementleriniň birbahaly köplügi arkaly berilýär. $F(a_i)\pm F(a_j)$, $i\pm j$. $F(a_1)$ – element $|B|$ bahany almagy mümkin. $F(a_1)$ – bellenen halda $F(a_2)$ – element $|B|-1$ bahany almagy mümkin. Şeýlelikde, $F:A\to B$ – inýektiw şekillenmäniň sany $|B|\left(|B|-1\right)\ldots\left(|B|-|A+1|\right)=m(m-1)\ldots(m-n+1)$ formula bilen kesgitlenilýär.

3. n – berlen köplügiň bölek k elementli köplüginiň sany. Goý, $A=\{a_1,\ldots a_n\}-|B|=k$ şertde $o\le k\le n$, $B\subseteq A$ bolsa, köplügiň sanyny tapmak talap edilýän bolsun. $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ – gözlenilýän san we goý, $B_1,\ldots B_{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}$ – k elementli bölek köplük A bolsun.

Her bir B_i köplüge k sany inýektiw şekillenmäni gabat getirmek mümkin:

$$F:\begin{pmatrix} 1 & 2 & & k \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ik} \end{pmatrix}, \quad N_k=\{1,2,\ldots\ldots k\}, \quad B_i=\{a_{i1},\ldots.,a_{ik}\}.$$

Şeýlelikde, hemme $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ – k – elementli A bölek köplüge $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\times k!$ – inýektiw şekillenmäni gabat getirip bolar. Onda $F:N_k\to A$ – inýektiw şekillenmäniň sany $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\cdot k!$ – sana deň bolar, ýagny $n(n-1)\ldots.(n-k+1)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\times k!$.

Bu ýerden, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $o!=1$; $\begin{pmatrix} n \\ o \end{pmatrix}=1$;

$\binom{n}{k} = 0,\ k > n$ bolanda $\binom{n}{k}$ – sana **binomial koeffisiýent** diýilýär.

$a \in A$ – elementi belläp, $|A| = n$ A – köplügiň hemme k bölek köplüklerini iki sany klasa bölüp bolar:

1. a – elementi saklaýanlar; 2. a – elementi saklamaýanlar.

1-nji ýagdaýda $\binom{n-1}{k-1}$ bölek köplügi alarys, induksiýanyň tassyklamasyna görä, $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$.

2-nji ýagdaýda $\binom{n-1}{k}$ bölek köplükleri alarys, induksiýanyň tassyklamasyna görä, $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$.

Şeýlelikde, k bölek köplükleriň umumy sany (jemleme düzgünine görä) aşakdaky ululyga deňdir:

$$\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right] = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4. n – berlen köplügiň hemme bölek köplükleriniň sany. Goý, A – n elementden düzülen köplük bolsun. $B(A)$ – A köplügiň bahasy bolsun, bizi $|B(A)|$ san gyzyklandyrýar.

$\{0,1\}$ köplüge seredeliň we bu köplük bilen $B(A)$ köplügiň biýektiw gabat gelmesini gurnalyň.

$F: A - \{0.1\}$. Erkin A_1 bölek köplük üçin $A_1 \subseteq A$, $F_{A_1} : A \to \{0.1\}$,

$$F_{A_1}(a) = \begin{cases} 1, eger - a \in A_1; \\ 0, eger - a \in A_1. \end{cases}$$

Eger $A_1 \pm A_2$, $F_{A_1} \pm F_{A_2}$ bolsa, $F: A - \{0,1\}$ şekillenme $A_1 \subseteq A$, bu ýerde, $A_1 = \{a | a \in A$ we $F(a) = 1\}$. Bu ýerden, $B(A) = 2^n$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

1.6. Binomial koeffisiýentleriň we olar bilen bagly tožděstwolaryň häsiýetleri

Kombinatoriki hasaplamalarda binomial koeffisiýentler esasy orun oýnaýar. Olaryň üstünde amallar geçirilende aşakdaky häsiýetlerden peýdalanylýar:

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ – simmetriýa häsiýeti;

2. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ – goşmak häsiýeti;

3. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ – indeksi peseltmek häsiýeti;

4. $\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ – indeksleri çalşyrma häsiýeti;

5. $\binom{r}{o}+\binom{r+1}{1}+....\binom{r+n}{n}=\binom{r+n+1}{n}$;

6. Goý, p – ýönekeý san bolsun, onda:

a) $\binom{p}{k}=0(\mathrm{mod}\ p)$; $1\le k\le p\le 1$ bolanda;

b) $\binom{p-1}{k}=(-1)^k\,(\mathrm{mod}\ p)$; $o\le k\le p\le 1$ bolanda;

7. a) $\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}=2^n$; b) $\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=o$;

8. $\sum_{k=o}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$;

9. $\binom{n}{o}\binom{n}{p}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1}+.....+\binom{n}{p}\binom{n-1}{o}=2^p\binom{n}{p}$ – Wandermondyň tožděstwosy;

10. $\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\binom{n}{i}=1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}\cdot$

Ýumuşlar

Toždestwony subut etmeli.

1. $\sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}.$

2. $\sum_{k=o}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$

3. $\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}.$

4. $1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+.....=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$

5. $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+.....=2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$

1.7. Binar gatnaşyklar

1.7.1. Esasy düşünjeler

Kesgitlemeler. Goý, $A_1\times.....\times A_n$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly berlen bolsun.

$R\subseteq A_1\times....\times A_n$ bölek köplüge n orunly $A_1.....A_n$ köplügiň **gatnaşygy** diýilýär.

$a_1.....,a_n$ elementlere bolsa R **gatnaşykda ýerleşen** diýýärler.

Eger $(a_1,....,a_n)\in R$, $A_1\times A_2$ dekart köpeltmek hasylynyň R binar gatnaşygyna A_1-iň A_2-ä **gabat gelmesi** hem diýilýär.

Eger A_i=A $V_i=\overline{I_n}$ bolsa, A köplügiň n **orunly gatnaşygy berlipdir** diýýärler.

Eger $R\subseteq A_1\times A_2$ – A_1 we A_2 bölek köplükleriň gabat gelmesi binar gatnaşyk bolsa, onda olaryň P_1, R we P_2, R proýeksiýalaryny hem kesgitlemek mümkin:

$Pr_1R = \{a_1 | (a_1, a_2) \in R$, islendik $a_2 \in A_2$ üçin$\}$;

$Pr_2R = \{a_2 | (a_1, a_2) \in R$, islendik $a_1 \in A_1$ üçin$\}$;

Eger $Pr_1R = A_1$ bolsa, onda R gatnaşyk kesgitlenendir.

Eger $Pr_2R = A_2$ bolsa, onda R gatnaşyk surýektiwdir.

Goý, $A - n$ köplük $a_1, a_2, \ldots . a_n$ elementlerden düzülen bolsun.

Onda R-iň A bolan binar gatnaşygy $D_r = \{r_{is}\}, i, s \in \overline{1, n}$ matrisany kesgitleýär:

$$r_{is} = \begin{cases} 1, \text{eger} - a_i R a_i; \\ 0, \text{tersine bolanda.} \end{cases}$$

D_r – matrisa, R binar gatnaşygy bir bahaly kesgitleýär. $A_1 \times A_2$ köplükleriň R binar gatnaşygy $F : A_1 \to A_2$ kesgitleýär.

Eger $a_1 R a_2$ we $a_1^1 R a_2 => a_1 = a_1^1$ bolsa, onda $(a_1, a_2) \in R$ köplükleriň jübüti F şekillenmäniň grafigini berýär.

1.7.2. Gatnaşyklar bilen geçirilýän amallar

Köplükler bilen amallaryň geçirilişi ýaly, gatnaşyklar bilen hem nazary köplük amallaryny kesgitläp bolar.

Ýönekeýlilik üçin A köplügiň binar gatnaşygy berlen diýip hasaplalyň.

R_1 we R_2 binar gatnaşyklaryň kesişmesi ($R_1 \cap R_2$) diýip, A köplügiň jübüt elementleriniň kesişmesi bolýan binar gatnaşyga aýdylýar.

$a_1(R_1 \cap R_2)a_2 \Leftrightarrow a_1 R_1 a_2$ we $a_1 R_2 a_2$.

R_1 we R_2 gatnaşyklaryň birleşmesi ($R_1 \cup R_2$) diýlip, A köplügiň jübüt elementleriniň birleşmesi bolýan binar gatnaşyga aýdylýar.

$a_1(R_1 \cup R_2)a_2 \Leftrightarrow a_1 R_1 a_2$ ýa-da $a_1 R_2 a_2$.

Binar gatnaşyklar üçin girizme amaly $R_1 \subseteq R_2$, eger R_1 gatnaşyk üçin A köplügiň jübüt elementleri R_2 gatnaşyk üçin köplükleriň jübüti saklanýan bolsa, onda **girizme amaly kesgitlenen** diýilýär.

R gatnaşygyň **doldurgyjy** diýlip, $a_1 \overline{R} a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \overline{R}$ şertde kesgitlenýän $\overline{R}$ gatnaşyga aýdylýar.

Eger R – A-nyň gatnaşygy bolsa, onda oňa ters R^{-1} gatnaşyk $a_1 R^{-1} a_2 = a_2 R a_1$ şertde kesgitlenilýär.

Eger R_1, R_2 – A-nyň gatnaşyklary bolsa, $R_1 \times R_2$ köpeltmek hasyly $a_1(R_1 \times R_2)a_2 \prec\!=\!\succ \exists b \in A \big|\ a_1 R_1 b$ we $bR_2 a_2$ – şertde kesgitlenilýär.

R gatnaşygyň tranzitiw (göni ýol bilen) utgaşdyrmagy $\check{R}$ – aşakdaky formula bilen kesgitlenilýär:

$$a_1 \check{R} a_2 \prec\!=\!\succ \exists(z_0 = a_1, z_1, ..., z_{n-1,} = a_2) \in A^{n+1} \big| z_0 Rz, ..., z_{n-1} Rz_n)$$

Bu ýerden,

$$a_1 \mid \check{R} a_2 \Leftrightarrow \exists n \big| a_1 R^n a_2 .$$

Şeýlelikde,

$$\check{R} = R \bigcup R^2 \bigcup R^3 \bigcup ....$$

1.7.3. Gatnaşyklar bilen geçirilýän amallaryň häsiýetleri

Gatnaşyklaryň kesişme, birikme, doldurma amallary köplükleriň amallary bilen gabat gelýär we olaryň häsiýetlerine eýedir.

Indi algebraik amallara seredeliň.

1. Öwrülme häsiýeti:

$(R^{-1})^{-1} = R$;

$a_1(R^{-1})^{-1} a_2 \prec\!=\!\succ a_2 R^{-1} a_1 \Leftrightarrow a_1 R a_2$.

2. Assosiatiw kanun:

$(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$;

Eger, $a_1 (R_2 \cdot R_2) \cdot R_3 a_2$, onda $z \in A$, $a_1 (R_2 \cdot R_2) z, zR_3 a_2$;

$a_1(R_1 \cdot R_2) \cdot \exists w \in A, \Leftrightarrow a_1 R_1 w$ we

$R_2 z \Rightarrow zR_3 a_2 \Rightarrow w(R_2 \cdot R_3) a_2 \Rightarrow a_1 R_2 (R_2 \cdot R_3) a_2$.

Tersine, eger, $a_1 R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)\ \exists w \in A$, a, R, w we $w(R_2 \cdot R_3) a_2$, $w(R_2 \cdot R_3) a_2\ \exists z \in A\ wR_2 z$ we $zR_2 a_2$; $a, R_1 w$ we $wR_2 z$ alarys. $a_1 (R_1 \cdot R_2) z = R_3 \cdot a_2$, $a_1 (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \cdot a_2$;

3. Köpeltmegiň öwrülme düzgüni:

$(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-2}$.

4. Distributiw kanunlar:

a) $(R_1 \bigcup R_2) \cdot R_3 = (R_1 \cdot R_3) \bigcup (R_2 \cdot R_3)$;

b) $R_3(R_1 \bigcup R_2) = (R_3 \cdot R_1) \bigcup (R_3 \cdot R_2)$;

ç) $(R_1 \bigcap R_2) \cdot R_3 \subseteq (R; R_3) \bigcap (R_3 \cdot R_2)$;

d) $R_3(R_1 \bigcap R_2) \subseteq R_3 \cdot R_1 \bigcap R_3 \cdot R_2$;

e) $(R_1 \bigcup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \bigcup R_2^{-1}$;

ž) $(R_1 \bigcap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \bigcap R_2^{-1}$;

z) $R_1 \subseteq R_2 =\succ R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

k) $R_1 \subseteq R_2 =\succ R_1 \cdot R \subseteq R_2 \cdot R$ we $R \cdot R_1 \subseteq R \cdot R_2 v R$;

l) $R_1 \subseteq R_2 =\succ \check{R}_1 \subseteq \check{R}_2$;

m) $\check{\check{R}} = \check{R}$.

Ýumuşlar

1. Islendik R binar gatnaşyk üçin $\overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1}$ bolýandygyny subut etmeli.

2. Eger $R_1 \subseteq R_2$ bolsa, a) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$; b) $\check{R}_1 \subseteq \check{R}_2$ – bolýandygyny subut etmeli.

3. Goý, $A - n$ elementden ybarat bolan gutarnykly köplük bolsun, A köplügiň binar gatnaşyklaryny tapmaly.

1.7.4. Binar gatnaşyklaryň ýörite görnüşleri

1. Ekwiwalentlilik gatnaşygy. Eger $aRa \vee a \in A$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda A köplügiň R binar gatnaşygyna **refleksli** diýilýär.

Esasy dioganaly birlikler bolan matrisa refleksiw gatnaşyga mysal bolup biler. Bu ýagdaýda R – gatnaşyk simmetrikdir.

Eger islendik $a_1, a_2 \in A$ üçin $a_1 R a =\succ a_2 R a_1$ bolsa, onda R – gatnaşyga **simmetrik** diýilýär. Simmetrik gatnaşyga simmetrik $D_R = (r_{is})$; $r_{is} = r_{ji} \vee i, s = \overline{i, n}$ matrisa mysal bolup biler.

Eger $\vee a_1, a_2, a_3 \in A$, $a_1 R a_2$ we $a_2 R a_3 \Rightarrow a_1 R a_3$ bolsa, onda R gatnaşyga **tranzitiw** diýilýär. Tranzitiw gatnaşyklary R gatnaşyk bilen şekillendirilýän graflarda aýdyň görkezip bolýar.

Eger binar gatnaşyk refleksiw, simmetrik we tranzitiw bolsa, onda A köplügiň binar gatnaşygyna **ekwiwalentlilik** gatnaşygy diýilýär, R gatnaşygyň refleksiwliginde $a \in R[a]$, $\vee a \in A$ gelip çykýar we A köplügiň her bir elementi $a \in A$ **ekwiwalentlilik klasynda ýerleşýär** diýilýär.

Eger R ekwiwalentlilik gatnaşygy bolsa, ekwiwalentlilik klasynyň sanyna R **gatnaşygyň rangy** diýilýär.

Goý, A – erkin köplük bolsun. $x=(x_i)$ köplükleriň maşgalasynda $i \in s$, s – indeksleriň köplügi bolsun, eger aşakdaky şertler ýerine ýetse:

1. $\bigcup\limits_{i \in s} x_i = A$.

2. $x_i \bigcap x_j = q$, $i \neq s$, $i,j \in s$, onda $x_i \subseteq A$, A **erkin köplügi bölmäni emele getirýär** diýilýär.

Teorema. Goý, $x=(x_i)$, $i \in s$; A köplügiň bölünmesi bolsun. Goý, R – A-nyň binar gatnaşygy bolsun, kesgitlenen şertde $a_1 R a_2 \Leftrightarrow \exists i \in s \,|\, a_i$, $a_2 \in x_i$, R gatnaşyk ekwiwalentlilik gatnaşygydyr.

Ekwiwalent gatnaşyklar bilen geçirilýän amallar. Aşakdaky tassyklamalar dogrydyr:

1. Eger R – ekwiwalentlilik gatnaşygy bolsa, onda R^{-1} hem ekwiwalentlilik gatnaşygydyr.

2. Eger R_1, R_2 – ekwiwalent gatnaşygy bolsalar, onda $R_1 \bigcap R_2$ hem ekwiwalent gatnaşygydyr.

3. Eger R_1, R_2 ekwiwalent gatnaşyk bolsa, $R_1 \bigcap R_2$ gatnaşyk diňe $R_1 \cdot R_2 = R_1 \bigcup R_2$ şert ýerine ýeten ýagdaýynda ekwiwalent gatnaşyk bolar.

4. $R_1 \bullet R_2$ ekwiwalent gatnaşyklaryň köpeltmek hasyly diňe $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$ şert ýerine ýetende ekwiwalent gatnaşyk bolar.

2. Tolerant gatnaşyklar. Eger gatnaşyk refleksiw we simmetrik bolsa, onda A köplügiň R binar gatnaşygyna **tolerant gatnaşyk** diýilýär, A köplüge tolerant gatnaşygy bilen bilelikde **tolerant giňişligi** hem diýilýär.

Tolerant gatnaşyklaryň üstünde hem adaty amallary geçirip bolar.

Eger T_1 we T_2 gatnaşyklar tolerant gatnaşyklar bolsalar, onda $T_1 \bigcup T_2$, $T_1 \bigcap T_2$, T_1^{-1}, $\check{T}$ gatnaşyklar hem tolerantdyrlar.

Teorema. $T_1 \cdot T_2$ köpeltmek hasylynyň tolerant gatnaşyk bolmagy üçin T_1 we T_2 – gatnaşygyň tolerant bolmagy we $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$ ýerine ýetmegi zerurdyr we ýeterlikdir.

3. Bölekleýin tertipli gatnaşyklar. Eger aRb, $bRa \Rightarrow a=b$ häsiýet dogry bolsa, onda A köplügiň R binar gatnaşygyna **antisimmetrik** diýilýär.

Eger gatnaşyk refleksiw, antisimmetrik we tranzitiw bolsa, onda oňa R gatnaşygyň **bölekleýin tertipli gatnaşygy** diýilýär.

Goý, A harplaryň tertipli berkidilip bellenen elipbiý köplügi bolsun. Sözlerden düzülen A^* köplüge seredeliň. A^* köplügiň çyzykly tertibini aşakdaky görnüşde kesgitläliň.

1. Bir harpdan düzülen sözler tertibi A elipbiýiň tertibi bilen gabat gelýär.

2. Erkin iki sany söz üçin $S_1 = a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m}$ we $S_2 = a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n}$. A elipbiýde $S_1 \infty S_2 \Leftrightarrow \infty - A^*$ çyzykly tertibi berýän şert ýerine ýetmelidir.

1. $S_1 = pa_1\, a_1$, $S_2 = pa$, a_2 we $a_i \infty a_j$. Bu ýerde, p, q_1, q_2 – birnäçe sözler $a_i a_j \in A$;

2. $S_2 = S_1 p$; p – boş däl söz.

Bölekleýin tertipli gatnaşyklaryň üstünde adaty amallar geçirip bolar.

Eger R_1, R_2 bölekleýin tertipli gatnaşyklar bolsalar, R_1^{-1}, $R_1 \bigcap R_2$ gatnaşyklaryň hem bölekleýin tertipli gatnaşyklar bolmagyny görkezmegiň kynçylygy ýokdur.

Teorema. $R_1 \bigcup R_2$ – birleşmäniň bölekleýin tertipli gatnaşyklar bolmagy üçin aşakdaky degişliligiň ýerine ýetmegi zerurdyr.

$R_1 \cdot R_2 \bigcup R_2 \cdot R_1 \subseteq R_1 \bigcup R_2$.

Girizilen binar gatnaşyklar bilen baglanyşykly san gatnaşyklaryna degişli mysallar getireliň. Goý, A – n elementli köplük bolsun.

1. A köplügiň binar gatnaşyklarynyň sany 2^{n^2} -a deň.

2. A köplügiň refleksiw gatnaşyklarynyň sany 2^{n^2-n} -e deň.

3. A köplügiň simmetrik gatnaşyklarynyň sany $2^{n(n+1)*\frac{1}{2}}$ -e deň.

4. A – köplügiň toleriant gatnaşyklarynyň sany $2^{n(n-1)*\frac{1}{2}}$-e deň.

Teorema. Goý, $p_n - n$ elementli köplügiň n ekwiwalent gatnaşyklarynyň sany bolsun. Onda aşakdaky formula dogrudyr:

$$P_{n+1} = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} p_i, P_o = 1.$$

P_n funksiýanyň birnäçe başlangyç bahalarynyň tablisasyny getireliň.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4110	21147

P_n sana Bellanyň sany diýilýär.

P_{nk} bilen n elementli köplügiň k ekwiwalent gatnaşygyny belläliň.

Teorema. P_{nk} san üçin aşakdaky gatnaşyklar dogrudyr:

$P_{nk} = P_{n-1,\, k-1} + kp_{n-1,\, k}$;

$P_{oo} = 1$, $P_{10} = 0$.

Ýumuşlar

1. n elementli köplügiň $\dfrac{3^{n-1}+1}{2} + 2^{n-1}$ 3 rangly ekwiwalent gatnaşykdygyny subut etmeli.

2. n elementli köplügiň $2^{n-1}-1$ 2 rangly ekwiwalent gatnaşykdygyny subut etmeli.

3. E_n (n uzynlykly ikilik toplumlarynyň köplügi) islendik bölek köplük üçin $(n+2)$-den az bolmadyk toplumyň saklanýandygyny we jübüt deňeşdirilmeýän toplumyň saklanýandygyny subut etmeli.

4. Islendik k elementi saklaýan $(O \leq k \leq n) e\, x \in E_n$ toplum (nobat) üçin $2^k + 2^{n-k} - 1$ deňeşdirilýän toplumyň bardygyny subut etmeli.

II. KOMBINATORIKANYŇ ELEMENTLERI

2.1. Saýlama

Goý, $U=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tükenikli sanly elementleriň köplügi bolsun. a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{j_j}, $a_{j_j} \in U, j = 1, 2, ..., r$ elementleriň toplumyna seredeliň. Bu topluma ***n* elementden *r* göwrümli saýlama** diýilýär.

U köplükdäki islendik bölek köplük saýlama bolup durýar. Ýöne islendik saýlama U köplügiň bölek koplügi däldir, sebäbi saýlama bölek köplükden tapawutlylykda şol bir element birnäçe gezek girip biler.

Kombinatorikanyň esasy meseleleri *n* elementlerden düzülen *r* göwrümli saýlamalaryň sanyna baglydyr. Saýlamalar käbir şertlere boýun egýärler. Saýlamalaryň sany köplükler nazaryýetiniň iki sany düzgünine esaslanýar.

Jemlemek düzgüni: Eger-de card $A = m$, card $B = n$ we $A \cap B = \varnothing$ bolsa, onda card $A \cup B = m+n$.

Kombinatorikanyň dilinde şeýle manyny berýär: eger *A* obýekti *m* usul bilen, *B* obýekti galan *n* usul bilen saýlap bolýan bolsa, onda "*A* ýa-da *B*" saýlamany $m+n$ usul bilen amala aşyryp bolar.

Köpeltmek düzgüni: Eger-de, card $A=m$, card $B=n$ *bolsa*, onda card $(A \times B)=m \cdot n$.

Kombinatorikanyň dilinde şeýle manyny berýär: eger *A* obýekti *m* usul bilen saýlap bolýan bolsa, *A*-nyň islendik saýlamasynda *B* obýekt *n* usul bilen saýlanyp bilner, onda "*A* we *B*" saýlamany $m \cdot n$ usul bilen amala aşyryp bolar.

1-nji mysal. Goý, $A = 10$ {dürli şokoladlar}, $B = 5$ {dürli gaply kökeler} bolsun. "*A* ýa-da *B*" we "*A* we *B*" saýlamany tapmaly.

Çözülişi. "*A* ýa-da *B*" saýlama haýsy hem bolsa biriniň saýlanyp alynmagyny aňladýar, onuň 15 sany saýlama usuly bar. "*A* we *B*" saýlama 1 sany şokolad we 1 gap kökäni saýlamaklygy aňladýar, şeýle saýlamanyň 50 sany usuly bar.

2-nji mysal. Iki sany alty granly süňk zyňylýar. Olaryň ikisinde hem jübüt oçkolaryň ýa-da ikisinde hem täk oçkolaryň düşmek mümkinçilikleriniň sany näçe?

Çözülişi. Goý, m – bir süňkde jübüt oçkonyň düşmek mümkinçilikleriniň sany, n – täk oçkonyň düşmek mümkinçilikleriniň sany bolsun. Bu ýerde, $m = n = 3$. Köpeltmek düzgüni boýunça jübüt, edil şonuň ýaly-da, täk oçkolaryň sany 9-a deň. Goşmak düzgüni boýunça iki sany jübüt we iki sany täk oçkolaryň düşmek mümkinçilikleriniň sany 18-e deň bolar.

Kesgitleme: Eger-de elementleriniň ýerleşiş tertibi berlen bolsa, onda saýlama tertipleşdirilen diýilýär. Eger-de elementleriniň ýerleşiş tertibi ähmiýetsiz bolsa, onda ol saýlama tertipleşdirimedik diýilýär.

2.2. Çalşyrmalar

Kesgitleme: Ähli elementi dürli bolan, n elementden alnan n göwrümli tertipleşdirilen saýlamalara n elementden alnan **çalşyrmalar** diýilýär. Çalşyrmalaryň sany P_n bilen bellenýär.

Teorema: $P_n = n!$ ($n! = 1*2*3....(n-2)*(n-1)*n$).

Subudy induksiýa usulynda getirilýär. $n = 1$ bolanda, çalsyrmalaryň sany bire deň, onda $P_1 = 1!$. Goý, $n = k$ bolanda teorema dogry bolsun: $P_k = k!$, onuň $n = k + 1$ üçin hem dogrylygyny görkezeliň. $(k+1)$-nji elemente seredeliň, ony $k+1$ usul bilen alyp bolýan A obýekt diýip hasap edeliň. Onda B obýekt – galan k elementden k boýunça alnan tertipleşdirilen saýlamadyr. Induktiw çaklama boýunça B obýekti $k!$ usul bilen alyp bolar. Köpeltmek düzgüni boýunça A we B-ni $k!(k+1) = (k+1)!$ usulda saýlap bolar. A we B-ni bilelikde saýlamak $k+1$ elementden $k+1$ boýunça alnan tertipleşdirilen saýlamadyr.

3-nji mysal. 10 sany dürli kitaby tekjede näçe usul bilen ýerleşdirip bolar? Jogaby: 10!

Başgaça pikir ýöredip hem bolar. Birinji elementi n usul bilen saýlap alyp bolar. Soňra ikinji elementi $(n-1)$ usul bilen saýlap alyp bolar. Köpeltmek düzgüni boýunça iki elementiň tertipleşdirilen saýlamasyny $n \times (n-1)$ usul bilen amala aşyryp bolar. Soňra üçünji elementi saýlaýarys, ony saýlap almak üçin n – 2 mümkinçilik galýar, iň soňky elementi diňe bir usul bilen alyp bolar. Biz ýene-de öňki formula dolanyp geldik: $n(n-1)(n-r)$ ... 1.

2.3. Ýerlesdirmeler

n elementden alnan m göwrümli ($m < n$) dürli elementlerden durýan tertipleşdirilen saýlamalara **ýerleşdirmeler** diýilýär.

n elementden düzülmegi mümkin bolan m elementli ýerleşdirmeleriň hemmesiniň sany A_n^m bilen bellenilýär.

Теорема: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Subudy. $x = A_n^m$ ýaly belläliň. Onda galan $(n-m)$ elementi $(n-m)!$ usul bilen tertipleşdirip bolar. Köpeltmek düzgüni boýunça, eger A obýekti x usul bilen saýlap alyp bolýan bolsa, B obýekti bolsa, $(n - m)!$ usul bilen saýlap alyp bolýan bolsa, onda “A we B” bilelikdäki saýlamany $x\cdot(n - m)!$ usul bilen amala aşyryp bolar, “A we B” bilelikdäki saýlama bolsa, çalşyrmadyr we $P_n = n!$ Bu ýerden, $x = A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Başgaça pikir ýöredilse, birinji elementi n usul bilen, ikinjini $(n - 1)$ usul bilen we ş.m., m-nji elementi $(n - m + 1)$ usul bilen saýlaýarys. Köpeltmek düzgüni boýunça $n(n - 1)...(n - m +1)$ san A_n^m bilen gabat gelýär.

4-nji mysal. 15 adamdan düzülen topar 3 sany dürli kitap utdylar. Bu kitaplary topardaky adamlara näçe usul bilen paýlap bolar?

$A_{15}^3 = \dfrac{15!}{12!} = 15\cdot 14\cdot 13 = 2730$ bolar.

2.4. Utgasdyrmalar

n elementden alnan m göwrümli ($m<n$) tertipleşdirilmedik saýlamalara **utgaşdyrmalar** diýilýär. Olaryň sany C_n^m bilen bellenýär.

Теорема: $C_n^m = \dfrac{m!}{m!(n-m)!}$.

Subudy. Görnüşi ýaly, $A_n^m = C_n^m m!$. Hakykatdanam, A obýekt n elementden alnan m göwrümli tertipleşdirilmedik saýlamalar, olaryň sany C_n^m. m element saýlanandan soňra, olary $m!$ usul bilen tertipleşdirip bolar (*B* obýekt – saýlamadaky “tertipleşdirmek” bolup durýar). “*A* we *B*” bilelikdäki saýlama – tertipleşdirilen saýlama.

5-nji mysal. 15 adamdan düzülen topar 3 sany birmeňzeş kitap utdylar. Bu kitaplary topardaky adamlara näçe usul bilen paýlap bolar?

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455.$$

Utgaşdyrmalar, ýerleşdirmeler we çalşyrmalar berlen köplügiň bölek köplükleri bolup durýarlar. Bölek köplüklere degişli däl saýlamalara seredeliň.

2.5. Gaýtalanýan ýerleşdirmeler

n elementden alnan m göwrümli elementleri gaýtalanyp bilýän tertipleşdirilen saýlamalara gaýtalanýan ýerleşdirmeler diýilýär. Olaryň sany $A_n^m(n)$ bilen bellenilýär.

Теорема: $A_n^m(n) = n^m$.

Subudy. Birinji element n usul bilen saýlanyp alnyp bilner, ikinji element hem n usul bilen saýlanyp alnyp bilner we şoňa meňzeşlikde, m-nji element hem n usul bilen saýlanyp alnyp bilner. Köpeltmek düzgüni boýunça, olaryň sany n^m.

6-njy mysal. Kodlanan açaryň dört sany razrýady bar, her bir razrzyadda biri-biri bilen baglanşyksyz 0-dan 9-a çenli sifrleri saýlap alyp bolar. Mümkin bolan kombinasiýalaryň sany näçe?

Bu ýerde $n = 10$, $m = 4$ we teorema laýyklykda jogaby 10^4 bolar.

7-nji mysal. m uzynlykly wektora seredeliň, onuň koordinatalary diňe 2 sany bahany 0 ýa-da 1-i alyp bilýär. Şeýle wektorlaryň sany näçe?

Bu m göwrümli 2 element boýunça saýlamadyr. *Jogaby:* 2^m.

2.6. Gaýtalanýan çalşyrma

k_1 sany birinji görnüşli, k_2 sany ikinji görnüşli we ş.m., k_s sany s-nji görnüşli elementleri bolan n sany element bar diýeliň, şonlukda, $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$. n elment boýunça şeýle n elementlerden düzülen tertipleşdirilen saýlama **gaýtalanýan çalşyrma** diýilýär, olaryň sany

$C_n(k_1, k_2, ..., k_s)$ ýaly bellenýär. $C_n(k_1, k_2, ..., k_s)$ sanlara **polinomial koeffisiýentler** diýilýär.

Teoreма: $C_n(k_1, ..., k_s) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$.

Subudyny s boýunça, ýagny elementleriň görnüşleriniň sany boýunça induksiýany ulanyp geçireliň, $s=1$ bolanda tassyklama görnüp dur: $k_1=n$, ähli elementi bir görnüşli we $C_n(n)=1$. Induksiýanyň bazasy hökmünde $s=2$-ni alalyň, $n = k_1 + k_2$. Bu ýagdaýda gaýtalanýan çalşyrma n elementden k_1 (ýa-da k_2) element boýunça utgaşdyrma öwrüler: k_1 sany ýer saýlalyň, oňa birinji görnüşli elementleri ýerleşdireliň.

$$C_n(k_1,k_2) = C_n^{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!}.$$

Goý, formula $s = m$ üçin dogry diýeliň, ýagny $n = k_1 + ... + k_m$ we

$$\mathrm{C_n}(k_1, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

Onuň $s = m + 1$ ($n = k_1 +... + k_m + k_{m+1}$) üçin dogrulygyny subut edeliň.

Bu ýagdaýda gaýtalanýan çalşyrmany iki sany obýekti bilelikde saýlama hökmünde seredip bolar:

A obýekt $(m + 1)$-nji görnüşli element üçin k_{m+1} sany ýer saýlamak, B obýekt $(n - k_{m+1})$ element boýunça gaýtalanýan çalşyrma. A obýekti $C_n^{k_{m+1}}$ usul bilen, B obýekti $C_{n\text{-}k_{m+1}}(k_1,...,k_m)$ usul bilen saýlap bolar. Köpeltmek düzgüni boýunça

$$C_n(k_1,...,k_m,k_{m+1}) = C_n^{k_{m+1}} \times C_{n\text{-}k_{m+1}}(k_1,...,k_m) =$$

$$= \frac{n!}{(k_{m+1})!(n-k_{m+1})!} \times \frac{(n-k_{m+1})!}{k_1!k_2!...k_m!} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!k_{m+1}!}.$$

Biz talap edilýän formulany aldyk.

Bellik: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ sanlara **binominal koeffisiýentler** diýilýär.

Bu formuladan $C_n^m = C_n^{n-m}$.

8-nji mysal. “Matematika” sözündäki harplaryň ýerini çalşyp, näçe sany dürli söz alyp bolar?

Çözülişi. “*a*” harp 3 gezek girýär ($k_1 = 3$), “*m*” – 2 gezek ($k_2 = 2$), “*t*” – 2 gezek ($k_3 = 2$), “*e*”, “*к*”, “*i*” harplar bir gezekden girýärler, bu ýerden, $k_3 = k_4 = k_5 = 1$.

$$C_{10}\,(3, 2, , 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200.$$

2.7. Gaýtalanýan utgaşdyrma

Goý, *n* görnüşli elementler bar bolsun, her bir görnüş *m*-den az bolmadyk birmeňzeş elementleri özünde saklaýar. Bar elementler boýunça *m* göwrümli tertipleşdirilmedik saýlama (onun sany $\geq m \times n$) **gaýtalanýan utgaşdyrma** diýilýär.

Gaýtalanýan utgaşdyrmanyň sany $C_n^m\,(n)$ bilen bellenýär.

Teorema: $C_n^m(n) = C_{n+m-1}^m$.

Subudy. Goý, saýlama birinji görnüşli *m1* element, ikinji görnüşli m_2 element, ..., *n*-nji görnüşli *mn* element degişli bolsun. Her biri üçin $0 \leq m_i \leq m$ *u* $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$. Bu saýlama şeýle görnüşli wektory degişli edip bolýar:

$$b_n = (\underbrace{11...1}_{m_1}0\underbrace{11...1}_{m_2}0...0\underbrace{11...1}_{m_n}).$$

Tertipleşdirilmedik gaýtalanýan saýlamalar köplügi we $\{b_n\}$ wektorlar köplüginiň arasynda bieksiýanyň barlygy aýdyňdyr. Şeýlelikde, $C_n^m\,(n)$ san b_n wektorlaryň sanyna deňdir. b_n “Wektoryň uzynlygy” 0 we 1 sana deňdir, ýa-da $m + n - 1$. Wektorlaryň sany *m* birligi $m + n - 1$ ýere goýmak mümkinçilikleriniň sanyna deňdir. Ol bolsa C_{n+m-1}^m deň.

9-njy mysal. Konditer dükanynda bally kökeleriň 7 görnüşi bar. Alyjy olardan 4 görnüşini alýar. Ol muny näçe usul bilen amala aşyryp biler?

$$C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210.$$

10-njy mysal. Goý, $V=\{a, b, c\}$ we saýlamanyň göwrümi bolsa $m=2$ deň bolsun. Calşyrmalary, ýerleşdirmeleri, utgaşdyrmalary, gaýtalanýan ýerleşdirmeleri, gaýtalanýan utgaşdyrmalary tapmaly.

1. Çalşyrmalar: $\{abc, bac, bca, acb, cab, cba\}$. $P3=3!=6$.

2. Ýerleşdirmeler: $\{(ab), (bc), (ac), (ba), (cb), (ca)\}$. $A_3^2=\frac{3!}{1!}=6$.

3. Utgaşdyrmalar: $\{(ab), (ac), (bc)\}$. $C_3^2=\frac{3!}{1!2!}=3$.

4. Gaýtalanýan ýerleşdirmeler: $\{(ab), (bc), (ac), (ba), (cb), (ca), (aa), (bb), (cc)\}$. $A_3^2\ (3)=3^2=9$.

5. Gaýtalanýan utgaşdyrmalar: $\{(ab), (bc), (ca), (aa), (bb), (cc)\}$.
$C_3^2(3)=C_{3+2-1}^2=C_4^2=\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

2.8. Kombinatorika degişli meseleler

1. Bir günlük rejede 5 sany sapak bar. On bir sany dersden saýlamaly bolanda, şeýle rejeleriň sanyny kesgitlemeli.

Jogaby: 55 440.

2. Iş topary başlykdan, onuň orunbasaryndan we ýene-de bäş sany adamdan ybarat. Iş toparynyň agzalary öz aralaryndaky borçlary näçe usul bilen paýlaşyp bilerler?

Jogaby: 42.

3. 20 adamdan ybarat bolan topardan üç sany nobatçyny näçe usul bilen saýlap bolar?

Jogaby: 1140.

4. Eger her bir ses düzümi 3-den 10-a çenli sesden durýan bolsa, saýlanan 10 klawişada näçe sany dürli-dürli ses düzümlerini alyp bolar?

Jogaby: 968.

5. Güldana 10 sany gyzyl we 5 sany gülgüne reňkli çigildem gülleri dur. Güldandan 5 sany şol bir reňkli çigildimleri näçe usul bilen saýlap bolar?

Jogaby: 253.

6. Tramwaý gatnawlarynyň belgileri käwagt iki sany reňkli fonarlar bilen bellenýärler. Eger-de, sekiz sany reňkli fonarlar ulanylsa, näçe sany dürli gatnawlary belläp bolar?

Jogaby: 64.

7. 16 sany komanda gatnaşýan çempionat iki aýlawda geçirilýär (ýagny her bir komanda islendik beýleki komanda bilen iki gezek duşuşýar). Näçe sany duşuşyk geçirilmelidigini kesgitlemeli.

Jogaby: 240.

8. Gulp diňe kesgitli üç belgili san basylanda açylýar. Berlen 5 sifriň üçüsi tötänden basylýar. Bar bolan ähli mümkinçilikleriň iň soňkusynda gerekli nomeri tapmak başartdy. Gerekli nomer tapylýança näçe synanyşyk geçirildi?

Jogaby: 124.

9. 800+400+200+100 estafetasyna gatnaşjak dörtlügi 15 adamdan ybarat topardan saýlap alýarlar. Sportsmenleri estafetanyň etaplarynda näçe usul bilen ýerleşdirip bolar?

Jogaby: 32 760.

10. Bäş adamdan ybarat bolan topar suwda ýüzmek boýunça ýaryşa gatnaşýarlar, ol ýaryşa ýene-de 20 sportsmen gatnaşýar. Bu toparyň agzalarynyň alan ýerleri näçe usul bilen paýlanylyp bilner?

Jogaby: 25!/20!.

11. Küşt tagtasynyň üstünde ýerleşen iki sany pili biri beýlekisini almaz ýaly näçe usulda ýerleşdirip bolar (Bir piliň beýlekini almagy üçin onuň bilen küşt tagtasynyň bir gorizontalynda ýa-da bir wertikalynda ýerleşmeli)?

Jogaby: 3 126.

12. Dürli reňkli iki sany pil küşt tagtasynda biri beýlekisini alar ýaly ýagdaýda ýerleşen. Şunuň ýaly näçe sany ýerleşdirmeler bolup biler?

Jogaby: 896.

13. Bäsleşige gatnaşyjylaryň sekizisiniň çykyş etmek tertibi bije bilen kesgitlenilýär. Bijede näçe sany dürli netijeler bolup biler?

Jogaby: 8!.

14. Otuz adam her haýsynda on adamdan ybarat bolan üç sany topara bölündi. Toparlaryň näçe sany dürli düzümi bolup biler?

Jogaby: $30!/(10!)^3$.

15. Eger her bir san meňzeş sifrleri saklamaýan bolsa, 0, 1, 3, 5, 7, sifrlerden 5-e bölünýän dört belgili sanlaryň näçesini düzüp bolar?

Jogaby: 42.

16. Töwerek boýunça 10 sany dürli reňkli çyrajyklary ýerleşdirip, näçe sany dürli ýagtylanýan halkalary alyp bolar (reňkleri şol bir tertipde bolan halkalar meňzeş hasap edilýärler)?

Jogaby: 9!.

17. Kitap tekjesinde 30 tomluk ýerleşýär. Birinji we ikinji tomlary duldegşir durmaz ýaly olary näçe usulda ýerleşdirip bolar?

Jogaby: $30!-2\cdot 29!$.

18. Dört sany atyjynyň oklary sekiz sany nyşana degmeli (her atyjy iki-ikiden). Olar nyşanalary öz aralarynda näçe usulda paýlaşyp bilerler?

Jogaby: 2 520.

19. 12 adamly topardan 6 günüň dowamynda her gün iki sany nobatçyny saýlap alýarlar. Her bir adam bir gezek nobatçylyk etmeli bolanda, nobatçylygyň sanawyny näçe usulda düzüp bolar?

Jogaby: $12!/(2!)^6$.

20. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sifrlerden 3-lik sifri özünde saklaýan näçe sany dört belgili sanlary düzüp bolar (Sanlarda sifrler gaýtalanmaýarlar)?

Jogaby: 204.

2.9. Polinomial teorema

Köpagzalaryň deňligi üçin

$$\left(x_1+\ldots+x_k\right)^n=\sum_{a_1+\ldots+a_k=n}\frac{n!}{a_1!\ldots a_k!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}$$

formula dogrudyr.

Subudy. Deňligiň çep tarapyna seredeliň.

$$\left(x_1+\ldots+x_k\right)^n=\left(x_1+\ldots+x_k\right)\ldots\left(x_1+\ldots+x_k\right)=$$

$$=\sum_{a_1+\ldots+a_k=n}A\left(a_1,\ldots,a_k\right)x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}.$$

Bu ýerde, $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ koeffisiýent ähli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n$ toplumlaryň sanyna deňdir. Bu sany hasaplalyň. x_1 üýtgeýän ululygy n sany mümkin bolan α_1 köpeldijilerden, ýagny $C_n^{\alpha_2}$ usul bilen saýlap bolar. x_2 üýtgeýän ululygy n-α_1 sany mümkin bolan α_2 köpeldijilerden saýlap bolar. Şeýlelikde,

$$A(\alpha_1,...,\alpha_k)=C_n^{a_1}.C_{n-a_1}^{a_2}\cdots C_{n-(a_1+...+a_{k-1})}=\frac{n!}{a_1!(n-a_1)!}\cdots\frac{(n-(a_1+a_{k-1}))!}{a_k!}=\frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdots a_k!}.$$

Hususy ýagdaýda,

$$(x+x_2)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x_1^k x_2^{n-k}.$$

Nýuton binomynyň klassyky formulasy alynýar.

Ýumuşlar

1. n – köplügiň hemme bölek köplükleriniň sany $2n$-e deňdir.

Görkezme.

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

deňlik dogrudyr.

2. Subut etmeli:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+...=C_n^1+C_n^3+C_n^5+..$$

Görkezme. $(1\text{-}1)^n=0$- binoma seretmeli.

3. Subut etmeli:

$$C_{r+s}^m=\sum_{i=0}^{m} C_r^i C_s^{m-i}.$$

Görkezme. Aşakdaky toždestwony ulanmaly.

$$(1+x)^r(1+x)^s=(1+x)^{r+s}.$$

4. Deňligi subut etmeli.

5. $\sum_k C_n^{4k}=2^n+2^{\frac{\pi}{2}+1}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}.$

Görkezme. Deňlige seretmeli:

$$(1+1)^n+(1+i^2)^n+(1+i^3)^n=4\cdot\sum_k C_n^{4k}.$$

2.10. Girizmeklik, çykarmaklyk usuly

Goý, N elementden düzülen X köplük berlen bolsun. Goý, t sany P_1, P_2... P_t häsiýet bar bolup, X köplük bu häsiýetleri aňladyp ýa-da aňladyp bilmeýän bolsun. Goý, $N(P_i)$ – X köplügiň P_i häsiýetlerini aňladýän elementleriň sany bolsun. Islendik bölek köplük üçin $\{P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_t}\}$ häsiýetleri, N($P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_t}$) bilen bolsa $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_t}$ häsiýetleri aňladýan X köplügiň elementleriniň sanyny belläliň.

1-nji teorema. X köplügiň ýokarda ady agzalan häsiýetleri aňlatmaýan $N(0)$ elementleriniň sany aşakdaky formula bilen berilýär:

$$N(0) = S(0) - S(1) + S(2) + ... + (-1)^t S_t \,. \qquad (1)$$

Bu ýerde, $S_0 = N$

$$S_k = \sum_{1 \le i_i \le \ldots \le i_k \le t} N(P_{i_1} \ldots \mathrm{P}_{i_k}), \quad k = \overline{1, t}.$$

(1) formula **girizmegiň we çykarmaklygyň** formulasy diýilýär.

(1) formulada görkezilen häsiýetleri aňlatmaýan $a \in X$ element bir gezek S_0 agzada hasaba alynýar we beýleki agzalaryň içine girmeýär. P_j häsiýetli $a \in X$ element S_0 agzada bir gezek we $S_1 = \sum_{i=1}^{t} N(P_i)$ agzada hem bir gezek hasaba alynýar, şeýlelikde, goşant $1 + (\text{-}1) = 0$.

Takyk $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_t}$ r – häsiýetleri aňladýan ($r \ge 1$) $a \in X$ – element S_0 agzada, goşant 1-i berýär. S_1 agzada goşant $\binom{r}{1}$ gezek, goşant $\binom{r}{1}$-e deň. S_2 agzada goşant $\binom{r}{2}$ gezek, goşant $\binom{r}{2}$-e deň. S_k agzada goşant $\binom{r}{k}$ gezek, goşant $(\text{-}1)^k \binom{r}{k}$-e deň.

Şeýlelikde, (1) deňlikde elementleriň umumy goşandy

$$1-\binom{r}{1}+\binom{r}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{r}{k}+\ldots+(-1)^r\binom{r}{r}=(1-1)^r=0.$$

(1) formulanyň sag tarapy her elementi bir gezek hasaba alýar, görkezilen häsiýetleriň birini hem aňlatmaýanlary 0 gezek hasaba alýar.

2-nji teorema. *X* köplügiň görkezilen takyk *r* häsiýetlerini aňladýan *N(r)* – elementleriniň sany aşakdaky formula arkaly berilýär.

$$N(r)=S_r-\binom{r+1}{r}S_{r+1}+\ldots+(-1)^s\binom{r+s}{r}S_{r+s}+\ldots+(-1)^{t-r}\binom{t}{r}S_t. \quad (2)$$

Formulanyň sag tarapyndaky *r* häsiýeti aňladýan $a\in X$ element 1-nji goşulyjyda bir gezek hasaba alynýar, beýleki goşulyjylarda hasaba alynmaýar. Goý, takyk *k* häsiýeti aňladýan $a\in X$ element $r<k<t$ bolsun. Onda ol $S_r, S_{r+1}, \ldots S_k$ goşulyjylarda, degişlilikde,

$$\binom{r}{r}\binom{k}{r},\ \binom{r+1}{r}\binom{k}{r+1},\ldots,\binom{k}{r}\binom{k}{k}$$

san gezek hasaba alynýar.

$$\binom{r}{r}\binom{k}{r}-\binom{r+1}{r}\binom{k}{r+1}+\binom{r+2}{r}\binom{k}{r+2}+\ldots+(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{k}{k}. \quad (3)$$

Ýeňil barlanylýan toždestwolary ulanyp alarys:

$$\binom{b}{a}\binom{c}{b}=\binom{c}{a}\binom{c-a}{b-a};$$

$$\binom{k}{r}\binom{k-r}{0}-\binom{k}{r}\binom{k-r}{1}+\binom{k}{r}\binom{k-r}{2}-\ldots+(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{k-r}{k-r}.$$

Şeýlelikde, alarys:

$$\binom{k}{r}\binom{k-r}{0}-\binom{k}{r}\binom{k-r}{1}+\binom{k}{r}\binom{k-r}{2}-\ldots+(-1)^{k-r}\binom{k-r}{k-r}=0.$$

Geljekde girizmegiň we çykarmagyň umumylaşdyrylan formulalary aşakdaky görnüşde ýerine ýetiriler.

Goý, $a \in A$ element $W(a)$ agramy aňladýan bolsun. $W(a)$ – birnäçe meýdanyň elementi bolsun. $\{P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_r}\}$ häsiýetleriň bölek köplügini $W(P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_r})$ bilen X elementiň $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_t}$ häsiýetlerini aňladýan hemme elementleriň agramlarynyň jemini belläliň.

$$W_r = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le t} W\left(P_{i_1}, \ldots, P_{i_r}\right).$$

$W(0)$ – X elementleriň hemme agramlarynyň jemi.

Goý, $E(r)$ – r häsiýetleri aňladýan X-iň hemme elementleriniň agramlarynyň jemi bolsun.

3-nji teorema. Aşakdaky formula dogrudyr:

$$E(r) = W(r) - \binom{r+1}{r} \cdot W(r+1) + \binom{r+2}{r} \cdot W(r+2) - ... + (-1)^{t-r} \binom{t}{r} \cdot W(t).$$

Girizme-çykarma formulalarynyň ulanylyşyna seredeliň.

1. Goý, $X_1, \ldots, X_n$ X – bölek köplügiň maşgalasy bolsun. Onda aşakdaky toždestwo dogrudyr:

$$\left|X_1 \cup ... \cup X_n\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|X_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|X_i \cap X_j\right| + ... + (-1)^{n-1} \left|X_1 \cap ... \cap X_n\right|. \quad (4)$$

2. Goý, X, Y erkin köplükler bolsun. $|X|=n$, $|Y|=m$. Onda W_{nm} surýektiw şekillenmäniň sany aşakdaky formula bilen berilýär:

$$W_{mn} = m^z \cdot \binom{m}{1} \cdot (m-1)^n + \binom{m}{2} \cdot (m-2)^n - ... + (-1)^n \binom{m}{m} \cdot (m-n)^n. \quad (5)$$

3. Goý, X, Y erkin köplükler bolsun. $|X|=k$, $|Y|=m$. N näbellili bahalary Y köplükde bolan $f(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$ – funksiýa seredeliň.

x_i üýtgeýän ululuga fiktiw ululyk diýilýär, eger-de

$$f(X_1, ..., X_{i-1}, X', X_{i+1}, ..., X_n) = f(X_1, ..., X_{i-1}, X'', X_{i+1}, ..., X_n); \quad (6)$$

$$N = m^{k^2};$$

$$N(P_i) = m^{k^{n-1}};$$

$$N(P_i, P_j) = m^{k^{n-2}};$$

....

$$N(P_{i_1},...,P_{i_\tau}) = m^{k^{n-\tau}};$$

$$N_0 = m^{k^n} \cdot \binom{n}{1} \cdot m^{k^{n-1}} + \binom{n}{2} \cdot m^{k^{n-2}} - ... + (-1)^n \binom{n}{n} m^{k^{n-n}}. \qquad (6'')$$

4. Goý, $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ köplük n elementli köplük bolsun.

$$Q_n = (n!)^2 \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \qquad (7)$$

Iki sany gapma-garşy çalyşmanyň sanynyň formulasy:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \qquad (8)$$

Beýleki çalyşma garşylykly bolan, Q_{nk} jübüt tolerant çalyşmanyň sany:

$$Q_{nk} = \frac{(n!)^2}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right). \qquad (9)$$

Garşylykly jübüt şekillenmäniň sany M_{nm}

$$M_{nm} = m^n (m-1)^n. \qquad (10)$$

K sany fiksirläliň, islendik iki sany f we g şekillenmä $f, g : X \to Y$ ***k* – toleriant** diýilýär, eger $x \in X$ takyk k elementleri bar bolup, *f(x)=g(x) ý*erine ýetse, n – köplügiň m bolsa Y köplüge bolan k jübüt tolerant şekillenmesiniň sany N_{mn} formula bilen berilýär.

$$N_{nm} = \binom{n}{k} \cdot (m-1)^{n-k} m^n. \qquad (11)$$

Toplumlary gaýtalamazlyk usuly bilen $X = \{x_1 \dots, x_n\}$ n – köplükleriň çalyşmalaryny gurmagyň meselesine seredeliň. Usulyň mazmuny aşakdakydan ybaratdyr. $t \leq n$ san berkidilip, t uzynlykly X köplügiň erkin $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ elementleriniň yzygiderliligine seredilýär. Onda $\overline{a}$ yzygiderlilik boýunça π_a çalyşma aşakdaky ýaly gurulýar. $\pi_a(x_1) = a_1$.

Eger, $\pi_a(x_1), ..., \pi_a(x_k)$, kesgitlenen bolsa, $\pi_a(x_{k+1}) = a_1$, bu ýerde iň kiçi indeks 1-e deň.

$$a_1 \neq \pi_a(x_1), \quad a_1 \neq \pi_a(x_2),....,a_1 \neq \pi_a(x_k).$$

Hemme elementleri $X(t \geq n)$ köplükde saklanýan $X=\{x_1 \dots, x_n\}$ elipbiýiň $\overline{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ yzygiderliliginiň R_{nt} sany aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$R_{nt} = n^t - \binom{n}{1} \cdot (n-1)^t + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^t - ... + (-1)^n \binom{n}{n}^t . \qquad (12)$$

$\overline{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ yzygiderliligi $\varphi : Y \to X$ şekillenme, bu ýerde, *Y={1,2,...,t}* ýaly göz öňüne getirsek we $\overline{a}=(a_1, a_2, \dots, a_t) \equiv (\varphi(1), \varphi(2), \dots \varphi(t))$ alarys.

Hemme elementleri $X=\{x_1 \dots, x_n\}$ köplükde saklanýan $\overline{a}=(a_1, a_2, \dots, a_t)$ yzygiderlik $\varphi : Y \to X$ surýektiw şekillenmedir.

6. Goý, $X=\{x_1 \dots, x_n\}$. X – köplügiň φ çalyşmasynyň

$$\varphi(x_i) \neq x_i, \quad \varphi(x_i) \neq x_{i+1}, i \in \overline{1, n-1}, \quad \varphi(x_n) \neq x_n, \quad \varphi(x_n) \neq x_1$$

şertde U_n sanyny tapalyň. Biri-birine garşy bolan çalyşmalaryň U_n sany bizi gyzyklandyrýar.

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & ... & X_n \\ X_1 & X_2 & ... & X_n \end{pmatrix} \quad \text{we} \quad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & ... & X_n \\ X_2 & X_3 & ... & X_1 \end{pmatrix}.$$

4-nji teorema. U_n san üçin aşakdaky formula dogrudyr.

$$U_n = n! - \frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1} \cdot (n-1)! + \frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2} \cdot (n-2)! - ... + (-1)^n \frac{2n}{n}\binom{n}{n} \cdot 0! \quad (13)$$

Bu teoremanyň subudy aşakdaky getiriljek iki sany lemmadan gelip çykýar.

Kesgitleme. (x_i, x_{i+1}) görnüşli iki elemente **goňşy elementler** diýilýär, $i \in \overline{1, n-1}$.

1-nji lemma. k elementli *X* bölek köplügiň goňşy elementlerini özünde saklamaýan *f(n,k)* san aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$f(n,k)) = \binom{n-k+1}{k}. \qquad (14)$$

2-nji lemma. Goý, X köplügiň (x_i, x_{i+1}) $i \in \overline{1, n-1}$ we (x_1, x_n) görnüşli elementleri goňşy elementler bolsun. Onda k elementli X bölek köplügiň goňşy elementlerini özünde saklamaýan *g(n,k)* san aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$g(n,k)) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}. \tag{15}$$

2.11. Rekurrent gatnaşyklar usuly

Goý, F – birnäçe meýdan we $\{u_0, u_1, \ldots\}$ F-iň yzygider sanlary bolsun. Eger $a_1, \ldots, a_r \in F$ elementler bar bolup,

$$u_r = a_1 u_{r-1} + a_2 u_{r-2} + \cdots + a_r \cdot u_0,$$
$$u_{r+1} = a_1 u_r + a_2 u_{r-1} + \cdots + a_r \cdot u_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+r} = a_1 \cdot u_{n+r-1} + \cdots + a_r \cdot u_n,$$

şert ýerine ýetse, onda bu yzygiderlilige ***r*** **tertipli rekurrent yzygiderlilik** diýilýär, bu ýerde $n = 1,2,...$

$\{u_n\}$ – rekurrent yzygiderlilik üçin

$$f(x) = x^r - a_1 x^{r-1} - ... - a_r = (x-a)^{e_1}...(x-a_s)^{e_s}$$

köpagza **häsiýetlendiriji köpagza** diýilýär, bu ýerde

$$\sum_{i=1}^{s} e_i = r, \alpha_1, ...\alpha_s \in \overline{F}.$$

Eger

$$u_n = F(u_{n-1}, ..., u_{n-k}), \quad \forall n \geq k \tag{1}$$

şert ýerine ýetse, $\{u_0, u_1, \ldots\}$ elementleriň yzygiderliligi k **tertipli rekurrent gatnaşyklary kanagatlandyrýar** diýilýär.

Eger

$$u_n = a_1 u_{n-1} + ... + a_k u_{n-k}, \quad \forall n \geq k \tag{2}$$

şert ýerine ýetse (bu ýerde $a_1, \ldots, a_k$ – elementler), onda rekurrent gatnaşyga **çyzykly gatnaşyk** diýilýär.

$$g(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots,$$

hatara $\{u_n\}$ yzygiderliligiň **öndüriji funksiýasy** diýilýär. Goý $\{u_n\}$ yzygiderlilik rekurrent bolsun we

$$\varphi(x) = x^r f(\frac{1}{x}) = 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_r x^r$$ şert ýerine ýetsin.

Köpeltmek hasyla seredeliň:

$$g(x) \cdot \varphi(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i)(1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_r x^r) =$$

$$u_0 + (u_1 - a_1 u_0)x + (u_2 - a_1 u_1 - a_2 u_0)x^2 + \dots + (u_{r-1} - a_1 u_{r-2} - \dots - a_{r-1} u_0)x^{r-1} +$$

$$+(u_r - a_1 u_{r-1} - \dots - a_r u_0)x^r + \dots + (u_{n+r} - a_1 u_{r-2} - \dots - a_{r-1} u_0)x^{r-1} + (u_r - a_1 u_{r-1} - \dots -$$

$$-a_r u_0)x^r + \dots + (u_{n+r} - a_1 u_{n+r-1} - a_r u_n)x^{n+r} + \dots = b_0 + b_1 x + \dots + b_{r-1} x^{r-1} = \psi(x)$$

Şeýlelikde,

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(1 - \alpha_1 x)^{e_1} \cdots (1 - \alpha_s x)^{e_s}}.$$

Drobyň sag tarapy dogry drob, ony tükenikli ýönekeý droblaryň jemine dargadalyň:

$$\frac{A}{(1 - \alpha_i x)^t} \quad A \in \overline{F}, t \le e_i.$$

$$g(x) = \frac{\beta_{11}}{(1 - \alpha_1 x)} + \frac{\beta_{12}}{(1 - \alpha_1 x)^2} + \dots + \frac{\beta_1 e_1}{(1 - \alpha_1 x)^{e_1}} +$$

$$+ \frac{\beta_{21}}{(1 - \alpha_2 x)} + \frac{\beta_{22}}{(1 - \alpha_2 x)^2} + \dots + \frac{\beta_2 e_2}{(1 - \alpha_2 x)^{e_2}} + \dots +$$

$$+ \frac{\beta_{s1}}{(1 - \alpha_s x)} + \frac{\beta_{s2}}{(1 - \alpha_s x)^2} + \dots + \frac{\beta_{ses}}{(1 - \alpha_s x)^{e_s}}.$$

Şeýlelikde,

$$\frac{1}{(1 + x)^k} = 1 - k \cdot x + \dots + \frac{(-k)(-k-1) \cdots (-k-(n-1)) \cdot x^n}{n!} + \dots =$$

$$= 1 - C_k^{k-1} x + C_{k+1}^{k-1} x^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_{n+k-1}^{k-1} x^n + \dots,$$

onda

$$\frac{\beta}{(1-\alpha x)^k}=\beta+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n+k-1}^{k-1}\cdot\beta\cdot\alpha^n\cdot x^n.$$

Çep we sag taraplaryň meňzeş derejelerini deňläp, alarys.

$$u_n=q_1(n)\alpha_1^n+q_2(n)\alpha_2^n+\cdots+q_s(n)\alpha_s^n.$$

Çyzykly rekurrent gatnaşyklara mysal edip, Fibonaççiniň sanynyň alnyşyny görkezmek bolar:

$u_1 = 1$
$u_2 = 1$
....
$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$,
$f(x) = x^2 - x - 1$.

Häsiýetlendiriji (harakteristik) köpagzanyň

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

kökleri bardyr, ýagny

$$k(x) = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$$

we

$$g(x)\cdot k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n(1-x-x^2)=u_0+(u_1-u_0)x+(u_2-u_1-u)x^2+...=1.$$

Şeýlelikde,

$$g(x)=\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{\alpha/(\alpha-\beta)}{(1-\alpha x)}+\frac{\beta/(\beta-\alpha)}{(1-\beta x)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\alpha^3x^3+...)-\beta(1+\beta x+\beta^2x^2+\beta^3x^3+...)]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{(\alpha-\beta)+(\alpha^2-\beta^2)x+...+(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})x^n+...\right\}.$$

Bineniň formulasyny alarys:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}.$$

Aşakdaky yzygiderliligiň mysalynda

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_{n+1} = 8u_n - 15u_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

2-nji tertipli rekurrent yzygiderliligiň umumy agzasynyň hasaplanyş usulyny görkezeliň. $\propto$ we β sanlary aşakdaky deňlemelerden tapalyň: $\alpha+\beta = 8$ we $\alpha\beta = 15$, $(\alpha = 3,\ \beta = 5)$

$$u_{n+1} = 8u_n - 15u_{n-1}.$$

Deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$u_{n+1} = 5u_n = 3\,(u_n = 5u_{n-1}),$$

$$u_{n+1} = 3u_n = 5\,(u_n = 3u_{n-1}).$$

Soňky deňlikden

$$u_{n+1} - 5u_n = 3\ \{3\,(u_{n-1} - 5u_{n-2})\} = 3^2\ (u_{n-1} - 5u_{n-2}) = \cdots =$$
$$= 3^{n-1}\ (u_2 - 5u_1) = 3^n\ (u_1 - 5u_0) = -\ 3^{n+1},$$

$$u_{n+1} - 3u_n = 5\ \{5\,(u_{n-1} - 3u_{n-2})\} = 5^2\ (u_{n-1} - 3u_{n-2}) = \cdots =$$
$$= 5^n\ (u_1 - 3u_0) = -\ 5^n.$$

Bu ýerden gelip çykýar:

$$u_n = \frac{3^{n+1} - 5^n}{2}.$$

Indi 3-nji tertipli rekurrent yzygiderlilige seredeliň:

$$u_0 = +\ 1, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 10,$$

$$u_{n+3} = u_{n+2} + 5u_{n+1} + 3u_n, \quad n \geq 0.$$

Bu yzygiderliligiň n-nji agzasynyň formulasyny tapalyň:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3.$$

Häsiýetlendiriji köpagzanyň 3,-1,-1- kökleri bar. Şoňa görä

$$(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots)(1 - x - 5x^2 - 3x^3) = u_0 + (u_1 - u_0)x +$$
$$+ (u_2 - u_1 - 5u_0)x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \cdots = 1 + 4x.$$

Onda g(x) – öndüriji funksiýa aşakdaky droba deňdir:

$$\frac{1+4x}{(1-3x)(1+x)^2}.$$

Bu dogry droby ýönekeý jemlere dagydalyň.

$$\frac{1+4x}{(1-3x)(1+x)^2}=\frac{A}{(1-3x)}+\frac{B}{(1+x)}+\frac{C}{(1+x)^2}.$$

Deňligiň sag tarapyny umumy maýdalawja getirip, sanawjynyň meňzeş derejelerini deňläp, aşakdaky deňlemeleri alarys:

$$A + B + C = 1;$$
$$A - 3B = 0;$$
$$2A - 2B - 3C = 4.$$

Bu deňlemeleri çözüp, alarys:

$$A = 21/16,\ B = 7/16,\ C = -\,3/4.$$

Şeýlelikde,

$$g(x)=1+5x+\cdots+\left(\frac{21}{16}\cdot 3^n+\frac{7}{16}(-1)^n+\frac{3}{4}(n+1)(-1)^{n+1}\right)x^n+\ldots$$

$$u_n=\frac{21}{16}\cdot 3^n+\frac{7}{16}(-1)^n+\frac{3}{4}(n+1)(-1)^{n+1},$$

$n\geq 0.$

2.12. Öndüriji funksiýalar

Hatarlaryň kömegi bilen aňladylýan funksiýalara **öndüriji funksiýalar** diýilýär. Olaryň birnäçesini ýazalyň:

1. $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}1\cdot x^k;$ $\qquad a_k=1,\ k\geq 0;$

2. $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot x^k;$ $\qquad a_k=k+1,\ k\geq 0;$

3. $\ln\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\cdot x^k;$ $\qquad a_0=0, a_k=\dfrac{1}{k},\ k\geq 0;$

4. $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot x^k;$ $\qquad a_0=0, a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k}, k\geq 0;$

5. $(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}\cdot x^k;$ $\qquad a_k=\binom{r}{k}, k\geq 1;$

6. $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k;$ $\qquad a_k=\frac{1}{k!}, k\geq 0;$

7. $e^{rx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\cdot x^k;$ $\qquad a_k=\frac{r^k}{k!}, k\geq 0;$

8. $\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{r}\cdot x^k;$ $\qquad a_k=\binom{r+k-1}{k}, k\geq 1.$

Meseleler

1. Aşakdaky rekurrent yzygiderlilikleriň umumy agzalaryny tapmaly:

a) $u_0=-2, u_1=3, u_{n+1}=10u_n-9u_{n-1}, n\geq 1;$

b) $u_0=1, u_1=2, u_2=0, u_3=-1, u_{n+4}=3u_{n+3}+3u_{n+2}-7u_{n=1}-6u_n, n\geq 0.$

2. $a_1 a_2 \dots a_n$ sözde näçe usul boýunça ýaýlary goýmak mümkin.

Görkezme: Goý, $\{u_n\}$ – şeýle usullaryň sany bolsun we $u_0=0$, $u_1=1$ bolsun, onda

$$u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 5.$$

Ýaýlary goýmagyň aşakdaky usullaryny alarys:

$$(a_1\ a_2)\ a_3,\ a_1\ (a_2\ a_3),$$
$$((a_1\ a_2)\ a_3)\ a_4,\ (a_1\ a_2)\ (a_3\ a_4),\ a_1\ (a_2\ (a_3\ a_4)),$$
$$(a_1\ (a_2\ a_3))\ a_4,\ a_1\ ((a_2\ a_3)\ a_4).$$

$$u_n = u_1\ u_{n-1} + u_2\ u_{n-2} + \cdots + u_{n-1}\ u_1,\ n\geq 2.$$

Bu deňlikden öndüriji funksiýa üçin gatnaşyk alnar:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i x^i : f(x)^2=f(x)-x.$$

Bu ýerden

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Şeýlelikde,

$$u_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}, n \geq 2.$$

3. Aşakdaky yzygiderlilik üçin öndüriji funksiýalary tapmaly:

$$u_n = \begin{cases} 1, n = 0, 1, ..., N, \\ 0, n > N. \end{cases}$$

Jogaby:

$g\,(x) = 1 + x + \cdots + x^N.$

4. Umumy rekurrent gatnaşyklary tapmaly:

a) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0;$

b) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0;$

ç) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0,$

$a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 27;$

d) $a_{n+2} - 2\cos\alpha \cdot a_{n+1} + a_n = 0,\ a_1 = \cos\alpha,\ a_2 = \cos2\alpha.$

5. Rekurrent gatnaşyklary çözmeli:

a) $a_{n+1} - a_n = n,\ a_1 = 7;$

b) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n,\ a_1 = -9,\ a_2 = 45.$

6. Goý a_n – aşakdaky deňlemäniň otrisatel däl çözüwleriniň sany bolsun.

$2x + 5y + 7z = n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x^2)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^7)^{-1}$$

deňligi subut etmeli.

2.13. Hollyň teoremasy

Sözaýdyjy hakynda meselä seredeliň. Goý, n sany ýaş oglan gyzlar bilen dostlaşan bolsun we islendik k ýaş oglanlaryň toparyndan iň bolmanda k sany gyzlar bilen dostlaşanlary bar bolsun. Her bir oglany öz dostlaşan gyzyna öýermeli diýen pikir aýtma dogrumy?

Bu soragyň jogabyna Hollyň teoremay jogap berýär.

Teorema. Goý, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ S – köplügiň bölek köplükleri bolsun. $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – maşgalada dürli wekilleriň bolmagy üçin $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ elementler üçin

$$x_i \in S_i,\ i \le n \quad \text{we} \quad x_i \ne x,\ i \ne j. \tag{*}$$

Islendik dürli $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indeksler üçin

$$S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k}$$

köplügiň iň bolmanda k dürli elementleriniň bolmagy zerurdyr we ýeterlikdir.

Teoremany subut etmezden ozal bir mysala seredeliň. Goý, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ we $S_1 = \{1,2,3\}$, $S_2 = \{1,2,4\}$, $S_3 = \{1,2,5\}$, $S_4 = \{2,5,6\}$, $S_5 = \{2,5,6\}$ köplükler berlen bolsun.

$$1 \in S_1, 4 \in S_2, 5 \in S_3, 2 \in S_4, 6 \in S_5$$

elementler berlen köplükleriň maşgalasy üçin dürli wekilleriň ulgamlaryny düzýärler. Eger

$$T_1 = \{1,1,3\}, T_2 = \{1,1,3\}, T_3 = \{3,3,1\}, T_4 = \{1,2,3,3\}$$

bölek köplükleriň maşgalasyny alsak, onuň üçin dürli wekilleriň ulgamlaryny düzýän $|T_1 \cup T_2 \cup T_3| = 2$ köplük bardyr.

Subudy: Teoremanyň subudyny n köplük üçin matematiki induksiýa usuly boýunça geçireliň. $n = 1$ üçin teoremanyň subudy anyk görünýär. Indi subudy unduksiýa usuly boýunça n sany elementleri bolan köplükleriň maşgalasy üçin geçireliň.

Goý, $|S_1| = |S_2| = \ldots = |S_n| = 1$ bolsun, onda teoremanyň (*) şerti $S_1 = \{x_1\}, \ldots, S_1 = \{x_n\}$, $x_i \ne x$, $i \ne j$ aýdyň ýerine ýetýär.

$\{S_{i_1} \ldots, S_{i_r}\}$ maşgala, bu ýerde, $s = \left|S_{i_1} \cup \ldots S_{i_r}\right| \ge r$ **bloklar** diýilýär.

Eger $s = k$ bolsa, onda **kritiki blok** diýilýär.

Goý, $\{A_1, \ldots A_u, C_{u+1}, \ldots, C_r\} = B_{r,s}$ we $\{A_1, \ldots A_u, C_{u+1}, \ldots, D_t\} = B_{t,\vartheta}$ iki sany ($A_i, B_j, D_t \in \{S_1, \ldots, S_n\}$) blok bolsun. $A_1, \ldots, A_u$ – köplükler iki blok üçin hem umumy bolsun. Goý, $B_{r_s} \cap B_{t_\vartheta} = \{A_1, ..., A_u\}$

we $B_{r_s} \cup B_{t_\vartheta} = \{A_1, ..., A_u, C_{u+1}, ...C_r, D_{u+1}, ...D_t\} = B_{(r+t-u),z}, \vartheta \geq u, z \geq r+t-u.$

1-nji lemma: Iki sany kritiki bloklaryň birikmesi we kesişmesi kritiki blokdyr.

Subudy: Goý, $B_{r,r} \cap B_{t,t} = B_{u,\vartheta}$ we $B_{r,r} \cup B_{t,t} = B_{r+t-u,z}$ belläp, $z \geq r+t-\vartheta$, $z \geq r+t-u$, $\vartheta \geq u$ alarys:

$$r + t - \vartheta \geq z \geq r + t - u,\ u \geq \vartheta,\ u = \vartheta,\ z = r + t - u.$$

2.14. Tekizlikde käbir kombinatoriki meseleler

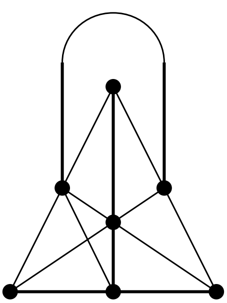
1-nji mesele. Şäherde ýolagçy gatnadýan ulaglaryň hereketini nähili gurnamalydygyny, ýagny:

a) 3 sany duralgasy bolan ýolagçy gatnadýan ulaglaryň her bir marşurutyny;

b) umumy bir sany duralgasy bolan iki sany ýolagçy gatnadýan ulaglaryň her bir marşurutyny;

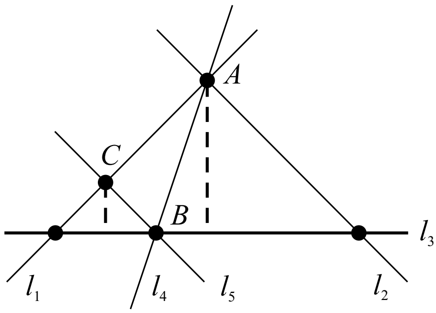
c) düşüp münmezden islendik duralgadan beýleki islendik duralga geçip bolýandygyny görkezmeli.

Görkezme: Grafa seretmeli.



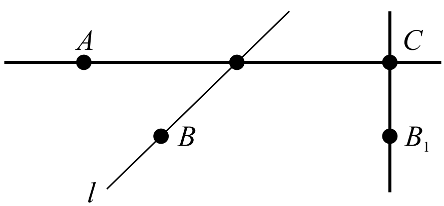
2-nji mesele. Tekizlikde n nokat berlen. Bu nokatlaryň islendik ikisini birleşdirýän islendik göni çyzykda juda iň bolmanda olaryň ýene biri ýatar ýaly edip ýerleşdirmeli. Bu nokatlaryň hemmesiniň bir göni çyzykda ýatýandygyny subut etmeli.

Görkezme:



3-nji mesele. Birnäçe şaherleriň arasynda awtobus ($n \geq 3$) gatnawynyň marşurutlary düzülen. Şol marşurutlaryň islendik biri ýapylanda islendik bar bolan duralgalardan düşüp münmek bilen islendik duralga geçip bolýan mümkinçilikli, iki marşurut ýapylandan soň bolsa, iki sany duralga tapylyp, birinden beýlekisine geçmek mümkin bolmadyk gatnaw toruny meýilleşdirmek mümkinmi?

Görkezme: Şeýle meýilleşdirme bolup biler.



Kesişýän n jübüt göni çyzyklara seredeliň. Her bir göni çyzygy awtobus marşuruty, her bir nokady duralga hasap edeliň. Eger A we B nokatlar bir göni çyzykda ýatsalar, l bilen gabat gelmeseler, onda duralgasyz geçip bolar. Eger bir ýa-da iki duralga l göni çyzykda ýatsalar, onda pikir ýöretme ýokardaky ýaly bolar. Iki sany marşuruty aýran ýagdaýyňda olaryň kesişmesinde ýerleşen duralga ýetip bolmaýar.

III. GRAFLAR NAZARYÝETI

3.1. Esasy düşünjeler

Boş däl X köplükde gatnaşyklaryň T köplügi ***graf*** diýlip atlandyrylýar we $G(X,T)$ bilen belgilenilýär.

Eger-de X köplük çäkli bolsa, onda ***graf çäkli*** diýlip atlandyrylýar.

Geometrik nukdaý nazardan $G(X,T)$ graf nokatlaryň boş bolmadyk köplügi (depeler) we uçlary X köplüge degişli bolan kesimleriň köplügi (gapyrgalar) bolup durýandyr. Grafyň hiç bir gapyrgasyna degişli bolmadyk depeler ***izolirlenen*** diýlip atlandyrylýarlar.

Gapyrga bilen birleşdirilen iki depe ***ýanaşyk*** diýlip atlandyrylýar.

Eger-de iki gapyrganyň umumy depesi bar bolsa, onda olar ýanaşykdyrlar. Gapyrga we onuň islendik depesi ***insident*** diýlip atlandyrylýar. Başlangyç we soňky depesi deň bolan gapyrga ***halka*** diýlip atlandyrylýar.

Depeler köplenç x_i bilen belgilenýärler. x_i we x_j depeleri birikdirýän gapyrgalaryň sanyny a_{ij} bilen belgiläliň. Bu elementleriň emele getirýän $A_{n\times n}=(a_{ij})$ matrisasyna ***ýanaşyklyk matrisasy*** diýilýär.

Aşakdaky belgilemäni girizeliň:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{eger} \quad x_i \quad \text{depe} \quad l_j \quad \text{gapyrga insident bolsa,}\\ 0, & \text{garşylykly ýagdaýda.}\end{cases}$$

Bu elementleriň emele getirýän $B_{n\times m}=(b_{ij})$ matrisasy *insidentlik matrisasy* diýlip atlandyrylýar.

Gapyrgalar bilen birikdirilen depeleriň jübütleriniň sanawyny ýa-da her depe üçin ýanaşyk depeleriň köplügini bermek bilen graflary beýan edip bolar.

Grafyň häsiýetnamalary

Eger-de islendik iki dürli depeler diňe bir gapyrga bilen birikdirilen bolsalar, onda $G(X,T)$ graf ***doly*** diýlip atlandyrylýar.

Doly grafda her depe gapyrgalaryň şol bir sanyna degişlidir, sebäbi ol galan ähli depeler bilen birleşdirilendir. Doly grafy bermek üçin onuň depeleriniň sanyny bilmek ýeterlikdir. Doly bolmadyk grafy, ýetmeýän gapyrgalary goşup, şol depelere eýe bolan doly grafa özgerdip bolýar.

$G(X,T)$ *grafyň doldurmasy* diýip, bu grafdan doly grafy almak üçin goşulýan gapyrgalardan we başdaky grafyňka deň bolan depelerden durýan $\overline{G}(X,T)$ grafa aýdylýar.

$G(X,T)$ grafyň x_i *depesiniň derejesi* diýip grafyň bu depä insident bolan gapyrgalarynyň d_i sanyna aýdylýar. Derejesi jübüt (täk) bolan depä jübüt (täk) diýilýär.

1-nji teorema. Eger-de halkasyz, çäkli $G(X,T)$ grafda n depe we m gapyrga bar bolsa, onda

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m.$$

2-nji teorema. Islendik grafyň täk depeleriniň sany jübütdir.

3-nji teorema. n depeli islendik grafda ($n>2$) hemişe iň azyndan iki sany deň derejeli depeler tapylýar.

4-nji teorema. Eger-de n depeli ($n>2$) grafda deň derejeli diňe iki depe bar bolsa, onda bu grafda hemişe 0 derejeli diňe bir depe ýa-da $n-1$ derejeli diňe bir depe tapylar.

Grafda ýol we sikl

Grafyň gapyrgalarynyň iki goňşy gapyrgasy umumy depä eýe bolan we hiç bir gapyrgasy iki gezek duşmaýan x_i depeden x_j depä çenli alyp barýan yzygiderligine x_i depeden x_j depä çenli ***ýol*** diýilýär. ***Ýoluň uzynlygy*** diýip onuň gapyrgalarynyň sanyna aýdylýar. Bir depeden bir gezekden köp geçmese x_i depeden x_j depä çenli ýola ***ýönekeý*** diýilýär.

Sikl diýlip başlangyç we ahyrky depeleri deň gelýän ýola aýdylýar. *Sikliň uzynlygy* diýip ondaky gapyrgalaryň sanyna aýdylýar. Bir depeden bir gezekden köp geçmeýän *sikle ýönekeý* diýilýär.

5-nji teorema. Eger-de $G(X,T)$ grafda ähli ýönekeý siklleriň jübüt uzynlyklary bar bolsa, onda grafda täk uzynlykly hiç bir sikl ýokdur.

Grafyň baglanyşyklylygy, agaçlar

Iki depede uçlary bolan ýol bar bolsa onda bu iki *depe baglanyşykly*, beýle ýol ýok bolsa *baglanyşyksyz depeler* diýlip atlandyrylýar.

Grafyň islendik iki depesi baglanyşykly bolsa, onda bu *graf baglanyşykly* diýlip atlandyrylýar, garşylykly ýagdaýda bolsa *graf baglanyşyksyz* diýlip atlandyrylýar.

6-njy teorema. Baglanyşykly $G(X,T)$ graf haçan-da onuň her depesi 2 derejä eýe bolsa we diňe şonda ýönekeý sikl bolup durýandyr.

(x_i, x_j) gapyrga aýrylandan soňra alnan grafda x_i we x_j depeler baglanyşyksyz bolsalar, onda bu gapyrga *köpri* diýlip atlandyrylýar.

Siklleri bolmadyk baglanyşykly graf *agaç* diýlip atlandyrylýar.

Agajyň derejesi 1 bolan depesi *asylgy* diýlip atlandyrylýar.

Tekiz graflar

Hiç bir iki gapyrgasynyň diňe umumy depesinden başga umumy nokatlary ýok bolar ýaly görnüşde tekizlikde aňladyp bolýan grafa *tekiz graf* diýilýär.

Grafyň hiç bir iki gapyrgasy kesişmeýän görnüşdäki çyzgysyna *grafyň tekiz şekillendirilmesi* diýilýär.

Tekiz şekillendirmä diňe tekiz graf eýedir hem-de tersine, islendik tekiz grafyň tekiz şekillendirmesi bardyr.

Grafyň tekiz şekillendirmesinde *gran* diýip, tekizligiň ýönekeý sikl bilen çäklendirilen we içinde başga siklleri saklamaýan bölegine aýdylýar.

Tekizligiň, grafyň tekiz şekillendirmesiniň daşynda ýerleşen we içinden ýönekeý sikl bilen çäklendirilen bölegine *tükeniksiz gran* diýilýär.

Eger-de serhetleri iň bolmanda bir umumy gapyrga eýe bolsa, onda iki *gran goňşy* diýlip atlandyrylýar. Iki sikli birikdirýän köprä *germew* diýilýär.

Agajyň tekiz şekillendirmesinde gran hökmünde çyzgynyň ähli tekizligini alýarlar.

Islendik germewsiz tekiz graf üçin depeleriň n sany, gapyrgalaryň m sany we granlaryň g sany (tükeniksizini hasaba almak bilen) aşakdaky formula bilen baglanyşyklydyrlar:

$n - m + g = 2$. Bu formula *Eýleriň formulasy* diýilýär.

Eger-de grafa tekiz graf alar ýaly hiç bir gapyrga goşup bolmaýan bolsa, onda tekiz *graf maksimal tekiz* ýa-da *triangulirlenen* diýlip atlandyrylýar.

Grafyň tekiz şekillendirmesinde her gran gös-göni üç depä eýe bolar ýaly täze gapyrgalary goşmaklyga *grafyň triangulýasiýasy* diýilýär.

7-nji teorema. Islendik tekiz $G(X,T)$ graf üçin tekiz şekillendirme bardyr, onda ähli gapyrgalar göni çyzykly kesimlerdir.

Eýleriň graflary

Grafyň ähli gapyrgalaryny saklaýan we olaryň hersinden diňe bir gezek geçýän ýola *Eýleriň ýoly* diýilýär.

Grafyň ähli gapyrgalaryny saklaýan we olaryň hersinden diňe bir gezek geçýän sikle *Eýleriň sikli* diýilýär.

Eýler sikline eýe bolan grafa *Eýleriň grafy* diýilýär.

8-nji teorema. Eýleriň grafy baglanyşyklydyr, onuň ähli depeleri jübütdirler.

9-njy teorema. Eger-de $G(X,T)$ graf baglanyşykly we onuň ähli depeleri jübüt bolsa, onda ol Eýleriň sikline eýedir.

10-njy teorema. Eger-de $G(X,T)$ grafda soňlary A we B bolan Eýler ýoly bar bolsa, onda bu graf baglanyşyklydyr hem-de A we B onuň ýeke-täk täk bolan depeleridirler.

11-nji teorema. Eger-de $G(X,T)$ graf baglanyşykly hem-de A we B onuň ýeke-täk täk bolan depeleri bolsalar, onda grafyň soňlary A we B bolan Eýler ýoly bardyr.

12-nji teorema. Eger-de $G(X,T)$ graf baglanyşykly bolsa, onda sikliki marşruty gurup bolar, onda ähli gapyrgalar diňe iki gezek, her tarapa bir gezek bolarlar.

Gamilton graflary

Grafyň her depesinden diňe bir gezek geçýän ýola *Gamiltonyň ýoly* diýilýär.

Grafyň her depesinden diňe bir gezek geçýän sikle *Gamiltonyň sikli* diýilýär.

Gamilton sikli bolan grafa *Gamilton grafy* diýilýär.

13-nji teorema. m depesi bolan grafyň Gamilton sikline eýe bolmagy üçin onuň islendik A_i depesi üçin şu şert ýerine ýetmelidir: $dereje\ (A_i) \geq \frac{m}{2}$.

Ugrukdyrylan graflar

Eger-de bir depe başlangyç, beýleki depe bolsa ahyrky diýlip hasaplanylýan bolsa, onda $G(X,T)$ grafyň gapyrgasy *ugrukdyrylan* ýa-da *duga* diýlip atlandyrylýar.

Suratda dugany görkezgiç bilen aňladýarlar. Başlangyjy x_i depede we ujy x_j depede bolan dugany (x_i,x_j) bilen belgileýärler.

Ähli gapyrgalary ugrukdyrylan grafa *ugrukdyrylan graf* diýilýär.

Ugrukdyrylan grafyň x_i depesinden çykýan dugalaryň sanyna x_i depäniň *çykyş ýarymderejesi*; x_i depä girýän dugalaryň sanyna x_i depä *giriş ýarymderejesi* diýiýär.

Eger-de grafyň giriş ýarym derejesi nula deň bolsa, onda x_i depe *çeşme* diýlip atlandyrylýar. Eger-de grafyň çykyş ýarymderejesi nula deň bolsa, onda x_i depe *akym* diýlip atlandyrylýar.

Öňki duganyň ujy indiki duganyň başlangyjy bilen deň gelýän $(x_1,x_2), (x_2,x_3), \ldots, (x_{k-1},x_k)$ dugalaryň yzygiderligine x_1 depeden x_k depä çenli *marşrut* diýilýär.

Başdaky we soňky depeleri deň gelýän marşruta *ýapyk marşrut* diýilýär.

Ähli depeleri dürli bolan marşruta x_1 depeden x_k depä çenli *ýol* diýilýär.

Eger-de x_i depeden x_j depä çenli ýol bar bolsa, onda x_j depä x_i depeden ýetip bolýar diýilýär.

Ýapyk ýola *kontur* diýilýär.

Depeleriň her jübüti diňe bir duga bilen birikdirilen $G(X,T)$ grafa *doly ugrukdyrylan graf* diýilýär.

14-nji teorema. Islendik doly ugrukdyrylan grafda ähli depelerden geçýän ýol bardyr.

Ugrukdyrylan $G(X,T)$ grafy insidentlik matrisasy bilen berip bolýar.

Goý, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – grafyň depeleri, $l_1, l_2, \ldots, l_m$ – grafyň dugalary bolsunlar. Aşakdaky belgilemäni girizeliň:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eger} \quad l_j \quad \text{duga} \quad x_i \quad \text{depeden çykýan bolsa,} \\ -1, & \text{eger} \quad l_j \quad \text{duga} \quad x_i \quad \text{depä girýän bolsa,} \\ 0, & \text{eger} \quad l_j \quad \text{duga we} \quad x_i \quad \text{depe insident däl bolsalar, onda} \end{cases}$$

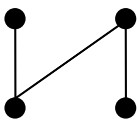
$B_{n\times m} = (b_{ij})$ matrisa hem $G(X, T)$ grafyň *insidentlik matrisasy* diýilýär.

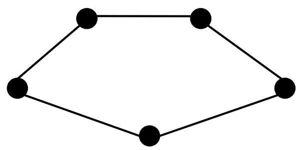
Meseleler

1. Her biri diňe iki adam bilen tanyş bolan 5 adamdan ybarat topar mümkinmi?

2. n depeli grafy $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$ bolanda şekillendiriň.

3. Suratdaky $G(X, T)$ graflara doldurma bolan $\overline{G}(X, T)$ graflary tapyň.



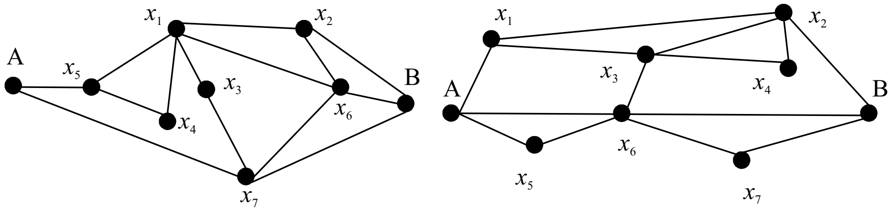


4. Dokuz sany küştçi bir aýlawly ýaryş geçirýär (her kim her kim bilen diňe bir gezek oýnaýar). Islendik pursatda oýunlaryň deň sanyny oýnan iki küştçüniň bardygyny subut ediň.

5. Bir aýlawly futbol ýaryşynda 30 topar bar. Islendik pursatda oýunlaryň deň sanyny oýnan (bir oýun oýnalmadyk hem bolup biler) iki toparyň bardygyny subut ediň.

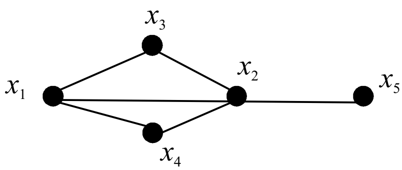
6. Ýedi sany talyp dynç alyşa gidenlerinde her kimiň başga üç kişä elektron hat ugratjakdygy barada şertleşdiler. Her kimiň öz hat ýazanlaryndan hat almaklygy mümkinmi?

7. Syýahatçylyk firmasynda A punktdan B punkta çenli syýahatçylar üçin marşrut düzülýär. Punktlar (gara nokatlar) we ýollar (kesimler) aşakda görkezilendir. Syýahatçylar her punkta bir gezekden köp barmaz ýaly, marşruty düzmeklik talap edilýär. Ýollaryň bu iki shemasynda näçe sany dürli marşrut bolup biler?

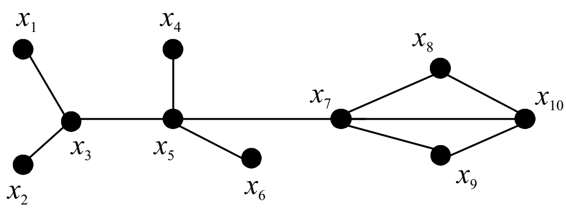


a) *b*)

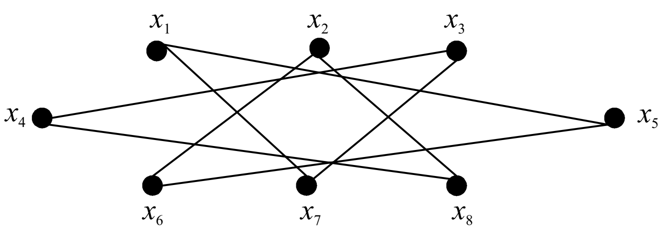
8. Aşakdaky grafyň ähli depelerinden geçýän x_1 depeden x_5 depä çenli ýönekeý ýol barmy?



9. Aşakdaky grafyň ähli köprülerini görkeziň:



10. Aşakdaky graf berlen:

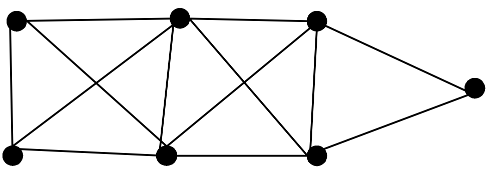


1) x_1 we x_4 depeleri baglanyşdyrýan ýoly tapmaly.

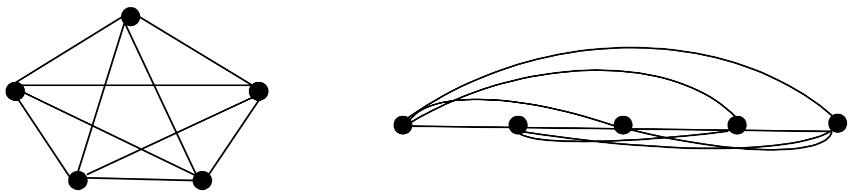
2) Bu graf baglanyşyklymy?

3) Ähli siklleri görkeziň. Olaryň içinde ýönekeýi barmy?

11. Täze alnan graf agaç bolar ýaly aşakdaky grafdan gapyrgalary aýyrmaly.



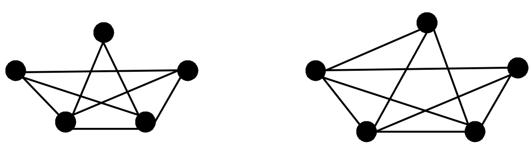
12. Aşakdaky suratlardaky graflaryň şol bir graflardygyny subut ediň:

a) 

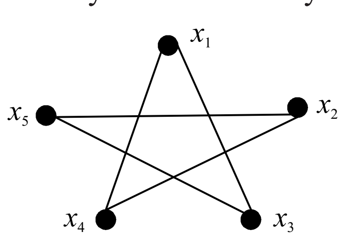
b) 

ç) 

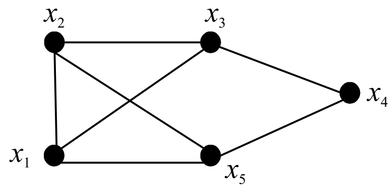
13. Eýleriň formulasyny aşakdaky graflarda barlaň:



14. Aşakdaky grafda Eýleriň sikli barmy?



15. Aşakdaky grafyň Gamiltonyň grafydygyny subut ediň. Onda näçe Gamilton siklini gurup bolar?



3.2. Graflar nazaryýetiniň elementlerini dürli meseleleri çözmekde ulanmak

Graflar nazaryýetiniň elementlerini transport modellerinde ulanmak

Transport (ulag) meselesi çyzykly programmirlemekligiň giň ýaýran we köp öwrenilýän meseleleriniň biridir. Onuň maksady ýükleri daşamaklygyň iň rasional ýollaryny we usullaryny işläp düzmek, örän uzak, garşylyklaýyn, gaýtalanýan daşalmaklary aradan aýyrmakdyr.

Ýük hökmünde bu ýerde dürli harytlar, şol sanda, çig mal, material, mallar we ş.m. bolup bilerler.

Bu modelde daşalýan ýüküň göwrümleri, ýagny olaryň bar bolan ätiýaçlyklary we olara bar bolan islegler-talaplar bilen bagly käbir şertler ýerine ýetmelidirler. Umumy ýagdaýda ulag meselesiniň modelini başga käbir, meselem, bellenmeler, tablisalary düzmek baradaky meseleleri çözmek üçin hem ulanyp bolar.

3.2.1. Ulag meselesiniň goýluşy, meseläniň matematiki modeli

Goý:

1. Käbir öndürijiniň birmeňzeş önümi öndürýän (ugradýan) n punkty (baza, sklad, şäher, oba we ş.m.) bar bolsun, olaryň atlaryny şertli görnüşde:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

ýaly belläliň.

2. Bu önümleri sarp edýän *m* punkt (kabul ediji, ulanyjy, müşderi we ş.m.) bar bolsun, olaryň atlaryny şertli görnüşde:

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_m$$

ýaly belläliň.

3. Önümçilik punktlarynyň maksimal öndürijilikleri bolan

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

ululyklary berlen diýip hasaplarys.

4. Sarp ediş puktlarynyň minimal zerurlyklaryny bolan

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_m$$

ululyklary berlen diýip hasaplarys.

5. $c_{ij}, i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,m$ – önümiň bir birligini A_i önümçilik puktundan B_j sarp ediş punktuna çenli daşamaklygyň gymmatlaryny berlen diýip hasaplaýarys.

Mesele. Ýük daşamaklygyň jemi çykdajylaryny azaldýän ýük daşamaklyk meýilnamasyny tapmaly, ýagny ýük daşamaklygyň çykdajylaryny azaltmak üçin haýsy punktdan haýsy punkta näçe ýük daşamaly?

Meseläniň matematiki modelini düzeliň.

$x_{ij}, i=1,2,\ldots,n;\ \ j=1,2,\ldots,m$ bilen A_i önümçilik puktundan B_j sarp ediş punktuna çenli daşaljak önümiň möçberini belgiläliň. Bu $\{x_{ij}, i=1,2,\ldots,n;\ \ j=1,2,\ldots,m\}$ näbelliler ýük daşamaklygyň meýilnamasyny düzýärler.

Bu ýerde:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{n1} & c_{n2}\ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

matrisa *bahalar (ýük daşaýyş, ulag çykdajylar) matrisasy* diýilýär.

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_{n1} & x_{n2}\ldots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

matrisa *meýilnama (plan) ýa-da çözüw (ýük daşamak) matrisasy* diýilýär.

Meseledäki maglumatlary aşakdaky tablisa görnüşinde görkezmek oňaýlydyr.

Kabul ediş punktlary →		B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
Ugradyş punktlary	Gerekli ýük möçberi → ↓ Bar ýük möçberi	b_1	b_2	...	b_j	...	b_m
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1j} x_{1j}	... ...	c_{1m} x_{1m}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2j} x_{2j}	... ...	c_{2m} x_{2m}
...	...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	... ...	c_{ij} x_{ij}	... ...	c_{im} x_{im}
...	...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
A_n	a_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	... ...	c_{nj} x_{nj}	... ...	c_{nm} x_{nm}

I. Çykdajylary hasaplalyň.

1-nji sarp ediji:

– 1-nji ýük ugradyş punktundan x_{11} ýük möçberini c_{11} baha boýunça alýar we onuň bu ýol boýunça çykdajylary $c_{11}\,x_{11}$ ululygy düzýärler,

– 2-nji ýük ugradyş punktundan x_{21} ýük möçberini c_{21} baha boýunça alýar we onuň bu ýol boýunça çykdajylary $c_{21}\,x_{21}$ ululygy düzýärler, we ş.m.

Şeýlelikde, 1-nji sarp edijiniň jemi çykdajylary aşakdaky ululygy düzýärler:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i1}x_{i1} = c_{11}x_{11} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{n1}x_{n1}.$$

Beýleki sarp edijileriň çykdajylaryny hem şuňa meňzeşlikde hasaplap, aşakdaky maksat funksiýasyny alýarys:

$$Z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

II. Ugradyş punktlaryndan ýükleriň alynmak şerti *n* deňsizlik görnüşinde ýazylýar:

− 1-nji ýük ugradyş punktundan alnan ýükleriň möçberi ol ýerde bar bolan a_1 ýük ätiýaçlygyndan geçmeli däldir, bu punktdan 1-nji ýük kabul ediş punktuna x_{11}, 2-nji ýük kabul ediş punktuna $x_{12}, ...,$ m-nji ýük kabul ediş punktuna x_{1m}, jemi bolsa $x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m}$ ýük alynýar. Onda aşakdaky deňsizlik ýerine ýetmelidir:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} \le a_1.$$

Beýleki ýük ugradyş punktlaryndan ýükleriň alynmak şertleri hem şuňa meňzeşlikde ýazylýarlar.

III. Kabul ediş punktlarynda ýükleri kabul edip almak şerti *m* deňsizlik görnüşinde ýazylýar:

− 1-nji ýük kabul ediş punktunda alnan ýükleriň möçberi ol ýerde zerur bolan b_1 möçberden az bolmaly däldir, bu punkta 1-nji ýük ugradyş punktundan x_{11}, 2-nji ýük ugradyş punktundan $x_{21}, ..., n$-nji ýük ugradyş punktundan x_{n1}, jemi $x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{n1}$ ýük gelýär. Onda aşakdaky deňsizlik ýerine ýetmelidir:

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} \ge b_1.$$

Beýleki kabul ediş punktlarynda ýükleri kabul etmek şertleri hem şuňa meňzeşlikde ýazylýarlar.

IV. Ýükleriň yzyna daşalmazlyk (ýa-da fiziki many boýunça ýükleriň möçberiniň otrisatel däl bolmaklyk) şerti:

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}.$$

I-IV punktlary jemläp, aşakdaky ulag meselesini alýarys:

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \\ x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1m} \le a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2m} \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nm} \le a_n \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} \ge b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1m} + x_{2m} + \ldots + x_{nm} \ge b_m \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m} \end{cases}$$

Has gysga görnüşde bu meseläni aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, \quad j = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m} \end{cases}$$

Bu ýerden, ulag meselesiniň çyzykly programmirlemekligiň meselesidigi görünýär. Daşamaklygyň $\{x_{ij}, i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,m\}$ meýilnamasyny, eger-de ol çäklendirmeleri kanagatlandyrýan bolsa **ýol berilýän** diýip atlandyrýarlar. Daşamaklygyň ýol berilýän meýilnamasynda daşamaklygyň jemi ulag çykdajylary minimal baha eýe bolsalar, onda bu meýilnama **optimal** meýilnama diýlip atlandyrylýar.

Optimal çözüw çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrýan we maksat funksiýasynyň minimum bahasyny berýän $X_{opt}=(x_{ij})_{n\times m}$ (n setirli, m sütünli) matrisadyr. Ulag meselesi çyzykly programmirlemekligiň meselesi hökmünde simpleks usuly bilen çözülip bilner, emma näbellileriň we çäklendirmeleriň sanynyň köp bolmaklygy hasaplamalary kynlaşdyrýar. Şu sebäpli, ulag meselesini çözmek üçin, ýörite usullar işlenilip düzülendirler, ol usullarda simpleks usuldaky ýaly şol bir tapgyrlar bardyrlar, ýagny:

− başlangyç daýanç çözüwi tapmak;

− bu daýanç çözüwi optimallyga barlamak;

− optimal çözüw tapylýança bir daýanç çözüwden indiki daýanç çözüwe geçmek.

3.2.2. Daşamaklygyň ýol berilýän bazis meýilnamasyny tapmak

Ýol berilýän bazis meýilnamany tapmak üçin graflar nazaryýetinden käbir düşünjeleri ulanalyň. Daşamaklygyň x_{ij} meýilnamasyny graf görnüşinde şekillendireliň. Onuň üçin önümçilik punktlaryny we sarp ediş punktlaryny tekizlikde nokatlar (grafyň depeleri) arkaly aňladarys. Eger-de daşamaklyk meýilnamasynda $x_{ij} > 0$ bolsa, onda oňa A_i önümçilik punktuny we B_j sarp ediş punktuny birikdirýän kesim (grafyň dugasy) laýyk gelýär. Gurlan grafy **daşamaklyk grafy** diýip atlandyralyň.

Eger-de grafyň dugalary boýunça islendik depeden islendik depä barmak mümkin bolsa, onda grafy **baglanyşykly** diýip atlandyrarys. Eger-de depeleriň toplumynyň islendik bir depesinden ugramak bilen, onuň dugalary boýunça şu depäniň özüne gaýdyp gelmek mümkin bolsa, onda grafyň depeleriniň toplumy **sikl** diýlip atlandyrylýar. **Agaç** diýlip, siklleri bolmadyk baglanyşykly grafa aýdylýar. Daşamaklygyň ýol berilýän **bazis** meýilnamasyna **daşamaklygyň agajynyň** laýyk gelýändigini subut etmek mümkindir. Özi hem bu ýerde daşamaklygyň agajynda duga laýyk gelýän ähli x_{ij} näbellileri **bazis näbelliler**, galan näbellileri bolsa **bazis däl näbelliler** diýip atlandyrarys.

1-nji mysal. Önümçiligiň üç A_1, A_2, A_3 punktlarynda degişlilikde $a_1=30$, $a_2=40$, $a_3=20$ möçberlerde birugurly önüm taýýarlanylýar.

Bu önümleri sarp etmegiň dört B_1, B_2, B_3, B_4 punktlaryna degişlilikde $b_1=20$, $b_2=30$, $b_3=30$, $b_4=10$ möçberlerde eltmeklik talap edilýär. C matrisa önümiň birligini A_i önümçilik punktundan B_j sarp ediş punktuna çenli daşamagyň c_{ij} bahalaryny berýär:

$$C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Jemi ulag çykdajylaryny has azaldýan daşamaklygyň meýilnamasyny kesgitlemeklik talap edilýär.

Çözülişi.

Ähli başlangyç maglumatlary ulag tablisasyna ýerleşdireliň. Ol tablisada her öýjügiň ýokarky sag burçunda daşamaklygyň degişli gymmatlary ýerleşdirilendirler. x_{ij} bilen A_i önümçilik punktundan B_j sarp etmeklik punktuna çenli daşaljak önümiň möçberini belgiläliň. Bu x_{ij} näbelliler daşamaklygyň meýilnamasyny berýärler. Ol meýilnama bu meselede $n \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$ näbelliden ybaratdyr. Položitel x_{ij} näbelliniň bahasyny tablisada öz degişli ýerinde ýazýarys. Bahasy 0-a deň bolan x_{ij} näbelliniň ýerini tablisada boş goýarys.

Önümçilik punktary	**Sarp ediş punktlary**			
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$
$a_1 = 30$	2	3	3	4
$a_2 = 40$	3	2	5	1
$a_3 = 20$	4	3	2	6

Aşakda seredilen mysallar her bir ýol berilýän daşamaklyk meýilnamasynyň ýol berilýän bazis meýilnamasy bolup bilmejekdigini görkezýärler.

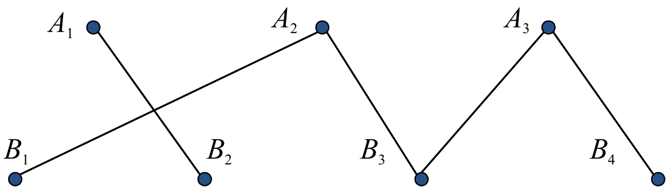
1) Aşakdaky daşamaklyk meýilnamasyna seredeliň:

$$\begin{array}{llll} x_{11} = 0, & x_{12} = 30, & x_{13} = 0, & x_{14} = 0, \\ x_{21} = 20, & x_{22} = 0, & x_{23} = 20, & x_{24} = 0, \\ x_{31} = 0, & x_{32} = 0, & x_{33} = 10, & x_{34} = 10. \end{array}$$

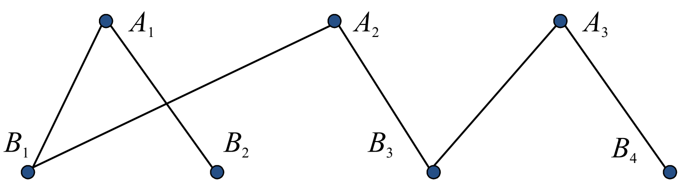
Bu meýilnama laýyk gelýän ulag tablisasy aşakdaky ýalydyr:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**			
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$
$a_1 = 30$	2	3 30	3	4
$a_2 = 40$	3 20	2	5 20	1
$a_3 = 20$	4	3	2 10	6 10

Bu meýilnama laýyk gelýän daşamaklyk grafyny guralyň:



Bu graf baglanyşykly däldir, sebäbi A_1 depeden diňe B_2 depä baryp bolar, diýmek ol agaç däldir, ýagny meýilnama ýol berilýän bazis meýilnamasy hem däldir. Bu grafy baglanyşykly grafa öwreliň, onuň üçin, meselem, A_1 depeden B_1 depä dugany girizeliň:



Daşamaklyk meýilnamasy üçin bu dugany girizmeklik bazis däl $x_{11}=0$ näbelliniň indi **bazis näbelli** hasaplanylýandygyny aňladýar. Diýmek, ýol berilýän bazis meýilnamany almaklyk üçin **“ýasama”** daşamaklyk $x_{11}=0$ girizilýär. Ulag tablisasynda degişli “ýasama” daşamaklyk öýjügine 0 bahany goýýarys. Netijede şol bir daşamaklyk meýilnamasy ýol berilýän bazis meýilnama bolar, onuň simpleks tablisasy aşakdaky ýalydyr:

Önümçilik punktlary	Sarp ediş punktlary			
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$
$a_1 = 30$	2 0	3 30	3	4
$a_2 = 40$	3 20	2	5 20	1
$a_3 = 20$	4	3	2 10	6 10

$x_{11} = 0$, $x_{12} = 30$, $x_{21} = 20$, $x_{23} = 20$, $x_{33} = 10$, $x_{34} = 10$ näbelliler bazisde, galanlary bazisde däldirler.

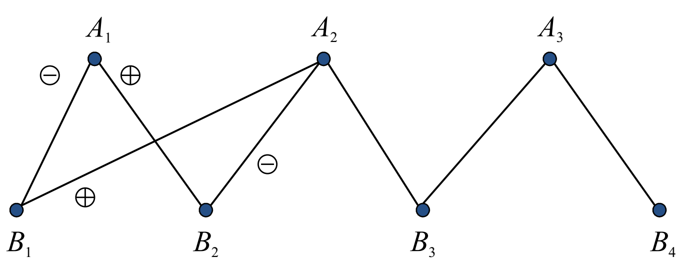
2) Daşamaklygyň aşakdaky meýilnamasyna seredeliň:

$$
\begin{array}{llll}
x_{11} = 10, & x_{12} = 20, & x_{13} = 0, & x_{14} = 0, \\
x_{21} = 10, & x_{22} = 10, & x_{23} = 20, & x_{24} = 0, \\
x_{31} = 0, & x_{32} = 0, & x_{33} = 10, & x_{34} = 10.
\end{array}
$$

Oňa laýyk gelýän ulag tablisasy aşakdaky ýalydyr:

Önümçilik punktlary	Sarp ediş punktlary			
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$
$a_1 = 30$	2 10	3 20	3	4
$a_2 = 40$	3 10	2 10	5 20	1
$a_3 = 20$	4	3	2 10	6 10

Bu meýilnama boýunça daşamaklygyň grafyny guralyň:



Daşamaklygyň bu grafy agaç bolmaz, sebäbi ol A_1, B_1, A_2, B_2, A_1 depelerden durýan sikli özünde saklaýar, ýagny ýene-de A_1 depä gaýdylyp gelinýär. Bu sikli, dugalaryň birini aýyrmak bilen kesip bolar. Onuň üçin, meselem, A_1 depeden B_1 depä çenli dugany $\ominus$ belgi bilen belläliň. Sikliň ähli beýleki dugalaryny $\oplus$ ýa-da $\ominus$ belgileri bilen aşakdaky görnüşde belläliň: sikliň umumy depeleri bar bolan ähli dugalaryny dürli alamatlar bilen belgileýäris, meselem, A_1 depeden B_1 depä çenli $\ominus$ alamaty goýlupdy, diýmek, indi A_1 depeden B_2 depä çenli duga $\oplus$ alamaty bilen belleniler, B_1 depeden A_2 depä çenli duga hem $\oplus$ alamaty bilen belleniler we ş.m.

Daşamaklygyň grafyndan bu belgileri ulag tablisasyna geçirýäris:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**			
	$\boldsymbol{b_1} = \mathbf{20}$	$\boldsymbol{b_2} = \mathbf{30}$	$\boldsymbol{b_3} = \mathbf{30}$	$\boldsymbol{b_4} = \mathbf{10}$
$a_1 = 30$	$\boxed{2}$ 10 $\ominus$	$\boxed{3}$ 20 $\oplus$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
$a_2 = 40$	$\boxed{3}$ 10 $\oplus$	$\boxed{2}$ 10 $\ominus$	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{1}$
$a_3 = 20$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ 10

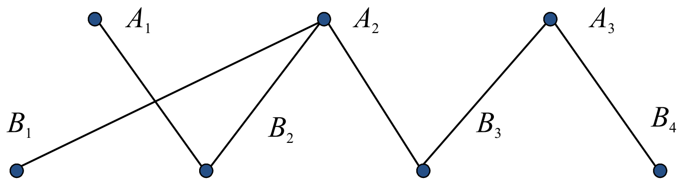
Indi bolsa $\ominus$ alamaty bilen bellenen öýjükleriň içinden iň kiçi bahalysyny tapalyň. Biziň ýagdaýymyzda bu baha 10 bolar, ol bolsa A_1 depeden B_1 depä çenli we A_2 depeden B_2 depä çenli daşamaklygyň bahasyna deň bolar. Bu bolsa siklden bu daşalmaklyklaryň islendiginiň aýryp bolýandygyny aňladýar. Meselem, A_1 depeden B_1 depä çenli dugany aýralyň. Onuň üçin $\oplus$ belgi bilen bellenilen öýjükleiriň hemmesine 10 birligi goşýarys, $\ominus$ belgi bilen bellenilen ähli öýjüklerden 10 birligi aýyrýarys. Özi hem ulag tablisasynda A_2 depeden B_2 depä daşalmaklyk üçin 0 baha (“ýasama” daşalmaklyk) goýýarys, A_1 depeden B_1 depä daşalmaklyk üçin bolsa degişli öýjük doldurylman goýulýar. Netijede ýol berilýän bazis meýilnamany alýarys:

$$
\begin{array}{llll}
x_{11} = 0, & x_{12} = 30, & x_{13} = 0, & x_{14} = 0, \\
x_{21} = 20, & x_{22} = 0, & x_{23} = 20, & x_{24} = 0, \\
x_{31} = 0, & x_{32} = 0, & x_{33} = 10, & x_{34} = 10.
\end{array}
$$

Bu meýilnamanyň ulag tablisasy aşakdaky ýalydyr:

Önümçilik punktlary	Sarp ediş punktlary			
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$
$a_1 = 30$	2	3 30	3	4
$a_2 = 40$	3 20	2 0	5 20	1
$a_3 = 20$	4	3	2 10	6 10

Bu meýilnama laýyk gelýän daşamaklyk grafy agaç bolar:



$x_{12} = 30$, $x_{21} = 20$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 20$, $x_{33} = 10$, $x_{34} = 10$ näbelliler bazisde, galanlary bazisde däldirler.

Ýokarda seredilen ýol berilýän bazis meýilnamalaryň **dürlüdiklerine** üns bermek gerek, sebäbi olaryň ýasama daşalmaklary dürlüdirler, emma bu meýilnamalaryň praktiki amala aşyrylmaklygy meňzeşdir.

Başlangyç ýol berilýän bazis meýilnama hökmünde seredilen mysalda gurlan iki meýilnamanyň islendigini alyp bolar. Aşakda, şol meýilnamada, daşamaklygyň meýilnamasynyň demirgazyk-günbatar burç usuly bilen gurulmaklygyna serederis.

3.2.3. Demirgazyk-günbatar burç usuly

Demirgazyk-günbatar burç usuly ulag meselesiniň daýanç çözüwini tapmak üçin işlenilip düzülendir.

Demirgazyk-günbatar burç usulynyň algoritmini beýan edeliň.

1) Bahalara seretmezden, ulag meselesiniň tablisasyndaky çözüwleriň öýjüklerini demirgazyk-günbatar burçdan başlap doldurýarys, ýagny 1-nji ýük ugradyş punktundan 1-nji sarp ediş punktuna näçe ýük alyp bilsek alýarys:

a) eger-de 1-nji ýük ugradyş punktunda ýük möçberi 1-nji sarp edijä gereginden az bolsa, ýagny $a_1 < b_1$ bolsa, onda ol punktdan ähli a_1 ýüki alýarys, şonda ol punktdan başga punktlara ýük gitmez, ýagny ol setirdäki galan näbelliler 0-a deň bolarlar.

$x_{11} = min\{a_1, b_1\} = a_1,\ x_{1j} = 0,\ j = 2,3,\ldots,n$. Diýmek, birinji ýük ugradyş punktunda 0 ýük galar, 1-nji sarp edijä a_1 ýük eltiler, bu sarp edijä ýene gerekli ýük möçberi bolsa $b_1 - a_1$ ululyga deň bolar.

b) eger-de 1-nji ýük ugradyş punktunda ýük 1-nji sarp edijä gereginden köp bolsa, ýagny $a_1 > b_1$ bolsa, onda ol punktdan ähli gerekli b_1 ýüki alýarys, şonda 1-nji sarp ediş punktuna başga punktlardan ýük gelmez. 1-nji sütündäki galan näbelliler 0-a deň, ýöne 1-nji ugradyş punktunda entek ýük galar. $x_{11} = min\{a_1, b_1\} = b_1,\ x_{i1} = 0,\ i = 2,3,\ldots,m$.

Diýmek, birinji ýük ugradyş punktunda $a_1 - b_1$ ýük möçberi galar, 1-nji sarp edijä b_1 ýük eltiler, bu sarp edijiniň ýüke bolan islegi doly kanagatlandyryldy.

2) Soňra dolman galan öýjükler üçin, ýagny entek ýük doly alynmadyk we ýük geregiçe doly eltilmedik punktlar üçin tablisany kiçeldip täzeleýäris. Dolan öýjükleri aýyrýarys, bar bolan we gerekli ýükleriň möçberleri üýtgeýärler, ondan soňra 1) punkty täze tablisa üçin gaýtalaýarys.

Mysal. Ýokardaky mysal boýunça demirgazyk-günbatar burç usulynyň beýan edilen algoritmini graflar nazaryýetiniň üsti bilen bereliň.

Ulag tablisasyny ýokarky çep (demirgazyk-günbatar burç) öýjükden dolduryp başlaýarys.

1) Başda $x_{11} = 20$ diýip alýarys, bu bolsa A_1 önümçilik punktundan B_1 sarp etmek punktuna maksimal mümkin bolan önümiň daşalýandygyny aňladýar. B_1 sarp etmek punktunyň zerurlyklary doly kanagatlandyryldy. Emma A_1 önümçilik punktunda önümiň 10 birligi galdy, ony bolsa B_2 sarp etmek punktuna ugradýarys.

2) Indi A_2 önümçilik punktundan daşalmaklary gurnaýarys. B_2 sarp etmek punktuna ýene-de önümiň 20 birligini eltmeli. Onda $x_{22} = 20$ diýip alýarys. Bu bolsa A_2 önümçilik punktundan B_2 sarp etmek punktuna maksimal mümkin bolan önümiň daşalýandygyny aňladýar. Bu daşalmak bilen B_2 sarp etmek punktunyň zerurlyklary

doly kanagatlandyrylýar. Emma A_2 önümçilik punktunda önümiň ýene-de 20 birligi galdy, olary B_3 sarp etmek punktuna ýollaýarys.

3) Indi bolsa A_3 önümçilik punktundan daşalmaklary gurnaýarys. B_3 sarp etmek punktuna ýene-de 10 birlik önüm gerek. Onda $x_{33}=10$ diýip alýarys. Bu bolsa A_3 önümçilik punktundan B_3 sarp etmek punktuna maksimal mümkin bolan önümiň daşalýandygyny aňladýar. Bu daşalmak bilen B_3 sarp etmek punktunyň zerurlyklary doly kanagatlandyrylýar. Emma A_3 önümçilik punktunda önümiň ýene-de 10 birligi galdy, olary B_4 sarp etmek punktuna ýollaýarys.

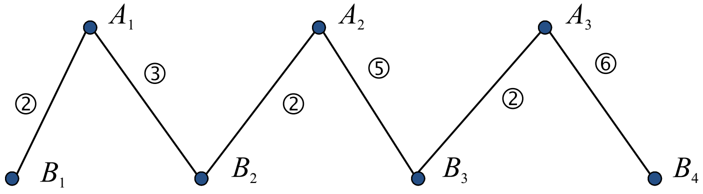
Şeýlelik-de, ulag tablisasy guruldy.

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**			
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3	4
$a_2 = 40$	3	2 20	5 20	1
$a_3 = 20$	4	3	2 10	6 10

Onda daşamaklygyň başlangyç meýilnamasy aşakdaky ýaly bolar:

$$\begin{array}{llll} x_{11} = 20, & x_{12} = 10, & x_{13} = 0, & x_{14} = 0, \\ x_{21} = 0, & x_{22} = 20, & x_{23} = 20, & x_{24} = 0, \\ x_{31} = 0, & x_{32} = 0, & x_{33} = 10, & x_{34} = 10. \end{array}$$

Bu meýilnama ýol berilýän bazis meýilnama bolar, sebäbi onuň daşamaklyk grafy agaç bolýar:



$x_{11} = 20$, $x_{12} = 10$, $x_{22} = 20$, $x_{23} = 20$, $x_{33} = 10$, $x_{34} = 10$ näbelliler bazisde, galanlary bazisde däldirler.

Demirgazyk-günbatar burç usulynyň hemişe ýol berilýän bazis meýilnama getirmeýändigini bellemek gerekdir.

3.2.4. Potensiallar usuly

Potensiallar usuly ulag meselesiniň optimal çözüwini tapmak üçin işlenilip düzülendir.

Ýapyk ulag meselesi.

$$u_i \to \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,$$

$$v_j \to \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geq 0$$

çäklendirmelerde

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

ulag çykdajylaryny azaldýan daşamaklygyň $\{x_{ij}\}$ meýilnamasyny tapmaly.

Bu meselä taýdaş mesele aşakdaky ýalydyr:

$$W = \sum_{j=1}^{m} b_j v_j + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

funksiýany aşakdaky

$$x_{ij} \to u_i + v_j \leq c_{ij}$$

u_i, v_j näbellileriň alamatlaryna çäklendirme ýok çäklendirmelerde ulag çykdajylaryny köpeldýän u_i, v_j näbellileri tapmaly.

Bu ýerde $\to$ belgi x_{ij} daşalmaklyga laýyk gelýän çäklendirmäni görkezýär.

Goý, göni meseläniň käbir ýol berilýän bazis meýilnamasy bar bolsun, ýagny x_{ij} daşalmaklyk meýilnamasy göni meseläniň $n+m$ çäklendirmelerini (deňliklerini) kanagatlandyrýan bolsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ deňligi göz öňünde tutsak, bu deňlikleriň biri galanlaryndan gelip çykýandyr, ýagny x_{ij} daşalmaklyk meýilnamasy göni meseläniň $n+m-1$ garaşsyz deňliklerini kanagatlandyrýandyr. Diýmek, bazis näbellileriň sany gös-göni $n+m-1$ sana deň bolmalydyr.

Ýol berilýän x_{ij} daşalmaklyk meýilnamasy boýunça taýdaş u_i, v_j näbellileri guralyň, olary şu ýerden beýläk **potensiallar** diýip atlandyrarys. Onuň üçin **bazis** x_{ij} **näbellä** laýyk gelýän her taýdaş $u_i+v_j \le c_{ij}$ çäklendirmäni deňlik bilen çalyşýarys. Bazis näbellileriň sanynyň $n+m-1$ bolandygy sebäpli $n+m$ sany u_i, v_j näbellileri kesgitlemek üçin $n+m-1$ deňlemeler ulgamyny alýarys:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Bu deňlemeler ulgamynyň haýsy hem bolsa bir çözüwini kesgitlemek üçin u_i, v_j näbellileriň birini 0-a deň diýip alýarys, galanlaryny bolsa soňky ulgamdan tapýarys. Eger-de u_i, v_j näbellileriň alnan bahalary ähli $u_i + v_j \le c_{ij}$ deňsizlikleri kanagatlandyrsa, onda gurlan ýol berilýan bazis x_{ij} meýilnama optimal bolar.

Bu deňsizlikleriň barlagyny diňe bazisde bolmadyk x_{ij} näbelliler üçin geçirip boljakdygyny belläliň. Täze belgileme girizeliň:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j.$$

Onda gurlan ýol berilýän bazis x_{ij} meýilnama üçin **optimallyk kriterisi** bolup aşakdaky şert hyzmat edýär:

ähli bazisde bolmadyk x_{ij} näbelliler üçin $\Delta_{ij} \ge 0$.

Potensiallar usulynyň ykdysady manysyna seredeliň.

1-nji mysal. Goý, käbir araçy firma öndürijiden ähli önümi satyn almaklygy we ony sarp edijä özüniň satmaklygyny teklip edýär, özi hem önümi daşamaklygy bu firma öz üstüne alýar. Ykdysady taýdan:

$-u_i$ näbelliler önümiň birliginiň A_i önümçilik punktundaky bahasyny aňladýarlar,

$-v_j$ näbelliler önümiň birliginiň B_j sarp ediş punktundaky bahasyny aňladýarlar.

Onda maksat funksiýasy

$$W = \sum_{j=1}^{m} b_j v_j - \left(-\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right)$$

araçy firmanyň önümi satmakdan alan peýdasyny we şol bir wagtda bolsa öndüriji firmanyň ýitgisini aňladýarlar.

Taýdaş meseläniň çäklendirmeleri sarp ediş we öndüriş punktlarynda bahalaryň tapawudynyň daşamaklygyň c_{ij} tapawudyndan köp däldigini aňladýarlar. Özi hem bazis x_{ij} daşalmaklyklar üçin $u_i + v_j = c_{ij}$ deňlikden $v_j = - u_i + c_{ij}$ diýip ýazyp bolýar. Ykdysady taýdan bu deňlik sarp ediş punktunda önümiň birliginiň v_j gymmatynyň önümçilik punktundaky $-u_i$ gymmatdan we transport c_{ij} çykdajylaryndan durýandygyny aňladýar. Bazisde däl x_{ij} daşalmaklyklar üçin $u_i + v_j \le c_{ij}$ deňsizlik sarp ediş we önümçilik punktlaryndaky bahalaryň tapawudynyň transport çykdajylaryny ýapmaýandygyny aňladýar. Eger-de $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ otrisatel bolsa, onda önümiň birligini A_i öndüriş punktundan B_j sarp ediş punktuna çenli daşamaklyk transport çykdajylaryny Δ_{ij} ululyga azaldýar:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = W = \sum_{j=1}^{m} b_j v_j + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

deňlik önümiň birligi üçin araçynyň teklip edýän optimal $-u_i$, v_j bahalarynyň ulag çykdajylarynyň araçy firmanyň girdejisine deň ýagdaýyny berýändigini aňladýar. Bu bolsa öndüriji üçin önümi özüniň daşamaklygynyň ýa-da daşamakda araçynyň hyzmatlaryndan peýdalanmaklygynyň tapawudynyň ýoklugyny aňladýar. Soňky ýagdaýda öndüriji daşamaklyk üçin aladalary etmeýär. Eger-de araçy firmanyň girdejisi transport çykdajylaryndan uly bolsa, onda öndüriji üçin önümi daşamaklygy öz üstüne almaklyk bähbitlidir.

Potensiallar usuly optimal bahalara getirýän $-u_i$, v_j bahalaryň yzygiderligini gurmakdan ybaratdyr.

2-nji mysal. Ýokarda seredilen mysal üçin potensiallar usulyny ulanalyň.

Başlangyç bazis meýilnama hökmünde denirgazyk-günbatar burç usuly bilen gurlan meýilnamany alalyň:

$x_{11} = 20,\quad x_{12} = 10,\quad x_{13} = 0,\quad x_{14} = 0,$
$x_{21} = 0,\quad x_{22} = 20,\quad x_{23} = 20,\quad x_{24} = 0,$
$x_{31} = 0,\quad x_{32} = 0,\quad x_{33} = 10,\quad x_{34} = 10.$

Bu meýilnamanyň ulag tablisasyna u_i potensiallar üçin sütün we v_j potensiallar üçin setir goşalyň.

Önümçilik punktlary	Sarp ediş punktlary				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	
$a_2 = 40$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{1}$	
$a_3 = 20$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ 10	
v_j					

a) Potensiallary kesgitlemek. Her öýjüge goşmaça sütünde we setirde potensiallaryň degişlidigini belläliň. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny düzeliň:

$$u_i + v_i = c_{ij},$$

ýagny her daşamaklyk amala aşyrylan öýjük üçin bu öýjüge degişli potensiallaryň jemini öýjüge degişli baha bilen deňläliň. Onda alarys:

$x_{11} = 20$ daşalmaklyk üçin $u_1 + v_1 = 2$ deňlemäni,
$x_{12} = 10$ daşalmaklyk üçin $u_1 + v_2 = 3$ deňlemäni,
$x_{22} = 20$ daşalmaklyk üçin $u_2 + v_2 = 2$ deňlemäni,
$x_{23} = 20$ daşalmaklyk üçin $u_2 + v_3 = 5$ deňlemäni,
$x_{33} = 10$ daşalmaklyk üçin $u_3 + v_3 = 2$ deňlemäni,
$x_{34} = 10$ daşalmaklyk üçin $u_3 + v_4 = 6$ deňlemäni.

ýa-da aşakdaky deňlemeler ulgamyny alýarys:

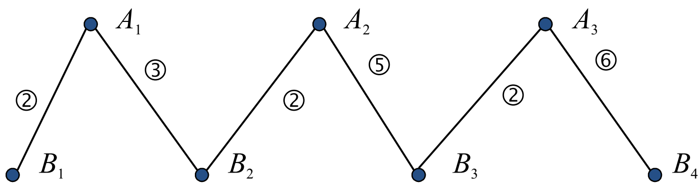
$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2; \\ u_1 + v_2 = 3; \\ u_2 + v_2 = 2; \\ u_2 + v_3 = 5; \\ u_3 + v_3 = 2; \\ u_3 + v_4 = 6. \end{cases}$$

Alnan deňlemeler ulgamyny çözmek üçin $u_1 = 0$ diýip kabul edeliň. Onda:

− birinji deňlemeden $v_1 = 2 - u_1 = 2 - 0 = 2$ diýip tapýarys,
− ikinji deňlemeden $v_2 = 3 - u_1 = 3 - 0 = 3$ diýip tapýarys,

– üçünji deňlemeden $u_2 = 2 - v_2 = 2 - 3 = -1$ diýip tapýarys,
– dördünji deňlemeden $v_3 = 5 - u_2 = 5 - (-1) = 6$ diýip tapýarys,
– bäşinji deňlemeden $u_3 = 2 - v_3 = 2 - 6 = -4$ diýip tapýarys,
– altynjy deňlemeden $v_4 = 6 - u_3 = 6 - (-4) = 10$ diýip tapýarys.

Ulgamyň çözüwini daşamaklygyň grafyny ulanyp tapyp bolar. Onuň üçin her duganyň ýanynda bu duga boýunça daşamaklygyň bahasyny ýazalyň. A_1 depäniň ýanynda oňa degişli $u_1=0$ potensialy goýalyň:



A_1 depeden grafyň dugalary boýunça ugrap, galan ähli depeleriň potensiallaryny tapalyň. A_1 depeden B_1 we B_2 depelere baryp bolýar. A_1B_1 duga boýunça hereket edip, B_1 depe üçin potensialy tapýarys: $v_1=2-0=2$. A_1B_2 duga boýunça hereket edip, B_2 depe üçin potensialy tapýarys: $v_2=3-0=3$. Indi potensiallary tapylan täze B_1 we B_2 depelerden baglanyşykly depelere geçýäris we olaryň potensiallaryny tapýarys. B_1 depeden diňe potensialy belli bolan A_1 depä geçip bolar, B_2 depeden bolsa potensialy näbelli A_2 depä geçip bolar, onda: $u_2=2-3=-1$. A_2 depeden potensialy näbelli B_3 depä geçip bolar, onda: $v_3=5-(-1)=6$. B_3 depeden potensialy näbelli A_3 depä geçip bolar, onda: $u_3=2-6=-4$. A_3 depeden potensialy näbelli B_4 depä geçip bolar, onda: $v_4 = 6 - (-4) = 10$.

Potensiallaryň alnan bahalaryny ulag tablisasyna ýazalyň:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3	4	0
$a_2 = 40$	3	2 20	5 20	1	−1
$a_3 = 20$	4	3	2 10	6 10	−4
v_j	2	3	6	10	

Öndüriji firmanyň ulag çykdajylaryny we araçy firmanyň peýdasyny hasaplalyň:

$$T = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 10 = 290;$$
$$W = 20 \cdot 2 + (10 + 20) \cdot 3 + (20 + 10) \cdot 6 + 10 \cdot 10 +$$
$$+ (20 + 10) \cdot 0 + (20 + 20) \cdot (-1) + (10 + 10) \cdot (-4) =$$
$$= 20 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot (-1) + 20 \cdot (-4) = 290.$$

Görşümiz ýaly bu ululyklar deň.

b) Optimallyk $\Delta_{ij} \geq 0$ kriterisini barlamak. Ýük alynmadyk öýjükler üçin $\Delta ij = c_{ij} - u_i - v_j$ ululyklary hasaplalyň.

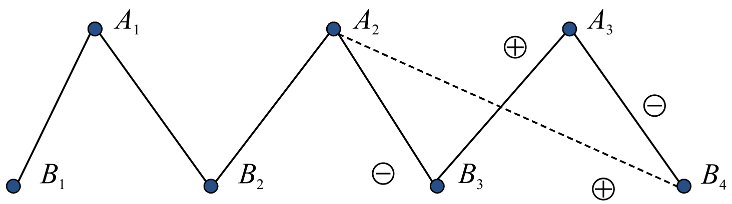
$$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 3 - 0 - 6 = -3,\ \Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 4 - 0 - 10 = -6.$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 3 - (-1) - 2 = 2,\ \Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 1 - (-1) - 10 = -8.$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 4 - (-4) - 2 = 6,\ \Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 3 - (-4) - 3 = 4.$$

Bu bahalary ulag tablisasynyň degişli öýjükleriniň aşaky çep burçunda ýazalyň:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3 −3	4 −6	0
$a_2 = 40$	3 2	2 20	5 20	1 −8	−1
$a_3 = 20$	4 6	3 4	2 10	6 10	−4
v_j	2	3	6	10	

Bu Δ_{ij} ululyklaryň arasynda otrisatelleriniň bardygy sebäpli optimallyk kriterisi ýerine ýetirilmeýär, ýagny daşamaklygyň seredilen meýilnamasy optimal däldir.

ç) Täze ýol berilýän bazis meýilnamasyny gurmak. Otrisatel Δ_{ij} ululyk A_i önümçilik punktundan B_j sarp ediş punktuna çenli önümiň birligi daşalanda transport çykdajylarynyň ululygynyň azalmaklygyny görkezýär. Diýmek, A_2 önümçilik punktundan B_4 sarp ediş punktuna çenli önümiň bir birligi daşalanda transport çykdajylary 8 pul birligi azalarlar. A_2 punktdan B_4 punkta önümiň ugradyp boljak iň uly möçberini tapalyň. Daşamaklyk grafynda punktir bilen A_2 punktdan B_4 punkta çenli daşamaklygy belläliň. Alnan grafdaky “asma” dugalary aýyrmak bilen, sikli emele getirýän depeleri tapalyň. Sikliň dugalaryny “+” we “–” alamatlar bilen aşakdaky görnüşde belläliň. A_2 depeden B_4 depä çenli punktir çyzygy “+” alamaty bilen belläliň, galanlaryny bolsa umumy depesi bolan dugalar dürli alamatlar bilen belleniler ýaly belläliň:



Daşamaklyk grafyndan bu bellemeleri ulag tablisasyna geçirýäris:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3	4	
$a_2 = 40$	3	2 20	5 20 –	1 +	
$a_3 = 20$	4	3	2 10 +	6 10 –	
v_j					

A_2 depeden B_4 depä çenli daşamaklygyň girizilmekliginiň A_2 punktdan başga sarp ediş punktlaryna harydyň akymynyň azalmaklygyna we B_4 punkta önümçiligiň beýleki punktlaryndan akymyň azalmaklygyna getirýändigini belläliň. Şonuň üçin A_2 punktdan B_4 punkta çenli akymyň ululygyny kesgitlemek üçin belgilenen öýjükleriň içinden daşalmaklygyň iň kiçi bahasyny tapalyň. Biziň ýagdaýymyzda bu baha A_3 punktdan B_4 punkta çenli 10 birlige deň. Bu bolsa siklden A_3 punktdan B_4 punkta çenli dugany aýryp bolýandygyny aňladýar. Onuň üçin ähli “+” bilen bellenen öýjükleriň daşalmak bahalaryna 10 goşulýar, ähli “–” bilen belgilenen öýjükleriň daşalmak bahalaryndan 10 birlik aýrylýar. Özi hem A_3 punktdan B_4 punkta çenli daşalmaklyk üçin degişli öýjük doldurylman goýulýar.

Netijede täze ulag tablisasyny alýarys:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3	4	
$a_2 = 40$	3	2 20	5 10	1 10	
$a_3 = 20$	4	3	2 20	6	
v_j					

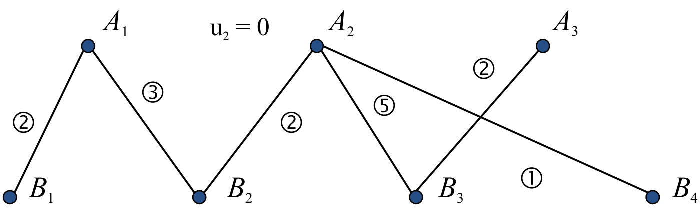
Täze meýilnama aşakdaky ýaly bolar:

$x_{11} = 20,\quad x_{12} = 10,\quad x_{13} = 0,\quad x_{14} = 0,$

$x_{21} = 0,\quad x_{22} = 20,\quad x_{23} = 10,\quad x_{24} = 10,$

$x_{31} = 0,\quad x_{32} = 0,\quad x_{33} = 20,\quad x_{34} = 0.$

Bu meýilnamanyň grafy aşakdaky ýaly bolar:



Bu graf agaçdyr, ýagny gurlan meýilnama ýol berilýän bazis meýilnamadyr.

Bu meýilnamada A_3 punktdan B_4 punkta çenli daşamaklyk ýokdur, ýagny $x_{34}=0$, hem-de onda A_2 punktdan B_4 punkta çenli $x_{24}=10$ daşamaklyk emele geldi. Ýokarda bellenilişi ýaly, A_2 punktdan B_4 punkta çenli önümiň bir birligini daşamaklyk ulag çykdajylaryny 8 birlik azaldýar. Şonuň üçin täze meýilnama ulag çykdajylaryny 80 pul birligi möçberde azaldar, ýagny bu meýilnamada ulag çykdajylary $T = 290 - 80 = 210$ bolar.

3-nji mysal. Täze meýilnama üçin potensiallary hasaplalyň we bu meýilnamanyň optimaldygyny barlalyň.

a) Potensiallary kesgitlemek. Daşamaklygyň grafynyň her dugasynyň ýanynda bu duga boýunça daşamaklygyň bahasyny ýazalyň. A_2 depede potensialyň $u_2 = 0$ bahasyny goýalyň. A_2 depeden B_2, B_3 we B_4 depelere baryp bolýar.

A_2 B_2 duga boýunça ugrap, B_2 depäniň potensialyny tapýarys: $v_2=2-0=2$.

A_2 B_3 duga boýunça ugrap, B_3 depäniň potensialyny tapýarys: $v_3=5-0=5$.

A_2 B_4 duga boýunça ugrap, B_4 depäniň potensialyny tapýarys: $v_4=1-0=1$.

B_4 depe petik depedir, B_3 depeden bolsa A_3 depä baryp bolýar, onuň potensialy: $u_3=2-5=-3$.

B_2 depeden A_1 depä baryp bolýar, onuň potensialy: $u_1=3-2=1$.

A_1 depeden B_1 depä baryp bolýar, onuň potensialy: $v_1=2-1=1$.

Potensiallaryň alnan bahalaryny ulag tablisasyna ýazalyň:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3	4	1
$a_2 = 40$	3	2 20	5 10	1 10	0
$a_3 = 20$	4	3	2 20	6	–3
v_j	1	2	5	1	

Onda araçy firmanyň peýdasy aşakdaky ýaly bolar:

$$W = 20 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 40 \cdot 0 + 20 \cdot (-3) = 210.$$

b) Optimallyk $\Delta_{ij} \geq 0$ kriterisini barlamak. Ýük alynmadyk öýjükler üçin $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ululyklary hasaplalyň:

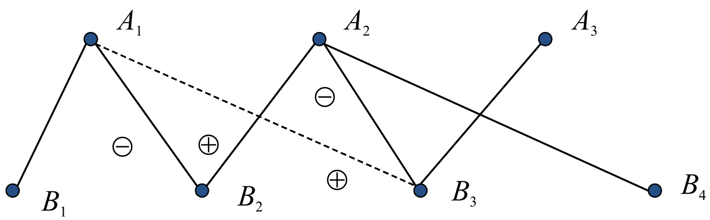
$$\Delta_{13}=c_{13}-u_1-v_3=3-1-5=-3,\ \Delta_{14}=c_{14}-u_1-v_4=4-1-1=2;$$
$$\Delta_{21}=c_{21}-u_2-v_1=3-0-1=2,\ \Delta_{31}=c_{31}-u_3-v_1=4-(-3)-1=6;$$
$$\Delta_{32}=c_{32}-u_3-v_2=3-(-3)-2=4,\ \Delta_{34}=c_{34}-u_3-v_4=6-(-3)-1=8.$$

Bu bahalary ulag tablisasynyň degişli öýjükleriniň aşaky çep burçunda ýazalyň:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10	3 −3	4 2	1
$a_2 = 40$	3 2	2 20	5 10	1 10	0
$a_3 = 20$	4 6	3 4	2 20	6 8	−3
v_j	1	2	5	1	

Bu tapylan Δ_{ij} ululyklaryň arasynda otrisateliniň bardygy sebäpli optimallyk kriterisi ýerine ýetmeýär, ýagny daşamaklygyň seredilen meýilnamasy optimal däldir.

ç) Täze ýol berilýän bazis meýilnamasyny gurmak. Otrisatel Δ_{ij} ululyk A_i önümçilik punktundan B_j sarp ediş punktuna çenli önümiň birligi daşalanda ulag çykdajylarynyň ululygynyň azalmaklygyny görkezýär. Diýmek, A_1 önümçilik punktundan B_3 sarp ediş punktuna çenli önümiň bir birligi daşalanda ulag çykdajylary 3 pul birligi azalarlar. A_1 punktdan B_3 punkta önümiň ugradyp boljak iň uly möçberini tapalyň. Daşamaklyk grafynda punktir bilen A_1 punktdan B_3 punkta çenli daşamaklygy belläliň. Alnan grafda, ondaky “asma” dugalary aýyrmak bilen, sikli emele getirýän depeleri tapalyň. Sikliň dugalaryny “+” we “–” alamatlary bilen aşakdaky görnüşde belläliň. A_1 depeden B_3 depä çenli punktir çyzygy “+” alamaty bilen belläliň, galanlaryny bolsa umumy depesi bolan dugalar dürli alamatlar bilen belleniler ýaly belläliň.



Daşamaklyk grafyndan bu belgileri ulag tablisasyna geçirýäris:

Önümçilik punktlary	**Sarp ediş punktlary**				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 10 –	3 –3 +	4 2	
$a_2 = 40$	3 2	2 20 +	5 10 –	1 10	
$a_3 = 20$	4 6	3 4	2 20	6 8	
v_j					

A_1 depeden B_3 depä çenli daşamaklygyň girizilmekliginiň A_1 punktdan başga sarp ediş punktlaryna harydyň akymynyň azalmaklygyna we B_3 punkta önümçiligiň beýleki punktlaryndan akymyň azalmaklygyna getirýändigini belläliň. Şonuň üçin A_1 punktdan B_3 punkta çenli akymyň ululygyny kesgitlemek üçin "–" alamaty bilen belgilenen öýjükleriň içinden daşalmaklygyň iň kiçi bahasyny tapalyň. Biziň ýagdaýymyzda bu baha A_1 punktdan B_2 punkta çenli we A_2 punktdan B_3 punkta çenli 10 birlige deň. Siklden A_2 punktdan B_3 punkta çenli dugany aýralyň. Onuň üçin ähli "+" bilen belgilenen öýjükleriň daşalmak bahalaryna 10 goşulýar, ähli "–" bilen belgilenen öýjükleriň daşalmak bahalaryndan 10 birlik aýrylýar. Özi hem A_2 punktdan B_3 punkta çenli daşalmaklyk üçin degişli öýjük doldurylman goýulýar, A_1 punktdan B_2 punkta çenli daşalmaklyk üçin 0 ("ýasama" daşalmaklyk) bahany goýýarys.

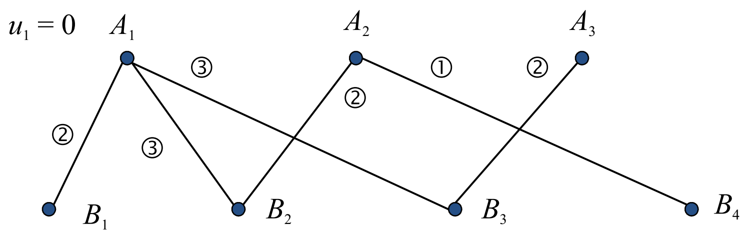
Netijede täze ulag tablisasyny alýarys:

Önümçilik punktlary	Sarp ediş punktlary				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 0	3 10	4	
$a_2 = 40$	3	2 30	5	1 10	
$a_3 = 20$	4	3	2 20	6	
v_j					

Täze meýilnama aşakdaky ýaly bolar:

$x_{11} = 20,\quad x_{12} = 0,\quad x_{13} = 10,\quad x_{14} = 0,$
$x_{21} = 0,\quad x_{22} = 30,\quad x_{23} = 0,\quad x_{24} = 10,$
$x_{31} = 0,\quad x_{32} = 0,\quad x_{33} = 20,\quad x_{34} = 0.$

Bu meýilnamanyň grafy aşakdaky ýaly bolar:



4-nji mysal. Täze meýilnama üçin potensiallary hasaplalyň we bu meýilnamanyň optimaldygyny barlalyň.

a) Potensiallary kesgitlemek. A_1 depede potensialyň $u_1 = 0$ bahasyny goýalyň.

Bu depeden grafyň dugalary boýunça ugrap, galan ähli depeleriň potensiallaryny tapalyň.

A_1 depeden B_1, B_2 we B_3 depelere baryp bolýar.

A_1 B_1 duga boýunça ugrap, B_1 depäniň potensialyny tapýarys: $v_1 = 2 - 0 = 2$.

A_1 B_2 duga boýunça ugrap, B_2 depäniň potensialyny tapýarys: $v_2 = 3 - 0 = 3$.

A_1 B_3 duga boýunça ugrap, B_3 depäniň potensialyny tapýarys: $v_3 = 3 - 0 = 3$.

B_1 depe petik depedir, B_2 depeden bolsa A_2 depä baryp bolýar, onuň potensialy: $u_2 = 2 - 3 = -1$.

B_3 depeden A_3 depä baryp bolýar, onuň potensialy: $u_3=2-3=-1$.

A_2 depeden B_4 depä baryp bolýar, onuň potensialy: $v_4=1-(-1)=2$.

Potensiallaryň alnan bahalaryny ulag tablisasyna ýazalyň:

Önümçilik punktlary	Sarp ediş punktlary				
	$b_1 = 20$	$b_2 = 30$	$b_3 = 30$	$b_4 = 10$	u_i
$a_1 = 30$	2 20	3 0	3 10	4	0
$a_2 = 40$	3	2 30	5	1 10	−1
$a_3 = 20$	4	3	2 20	6	−1
v_j	2	3	3	2	

b) Optimallyk $\Delta_{ij}\geq 0$ kriterisini barlamak. Ähli ýük alynmadyk (eýelenmedik) öýjükler üçin $\Delta_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ ululyklary hasaplalyň.

$$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 4 - 0 - 2 = 2,\ \Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 3 - (-1) - 2 = 2,$$

$$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 5 - (-1) - 3 = 3,\ \Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 4 - (-1) - 2 = 3,$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 3 - (-1) - 3 = 1,\ \Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 6 - (-2) - \left(-1\right) = 5.$$

Tapylan Δ_{ij} ululyklaryň içinde otrisatelleriniň ýoklugy sebäpli optimallyk kriterisi ýerine ýetýär, ýagny daşamaklygyň seredilýän meýilnamasy optimaldyr.

Şeýlelik-de, daşalmaklygyň optimal meýilnamasy aşakdaky ýaly bolar:

$x_{11} = 20,\quad x_{12} = 0,\quad x_{13} = 10,\quad x_{14} = 0,$

$x_{21} = 0,\quad x_{22} = 30,\quad x_{23} = 0,\quad x_{24} = 10,$

$x_{31} = 0,\quad x_{32} = 0,\quad x_{33} = 20,\quad x_{34} = 0.$

Bu meýilnamada ulag çykdajylary aşakdaky bolar:

$$T = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 180.$$

Mysallar

Paýlanma tablisalary bilen berlen aşakdaky ulag meselelerini demirgazyk-günbatar burç we potensiallar usullary bilen graflar nazaryýetiniň elementlerini ulanyp çözmeli we çözüwleri deňeşdirmeli.

1.

b_j		1	2	3	4
a_i		70	30	20	40
1	90	1	3	4	5
2	30	5	3	1	2
3	40	2	1	4	2

2.

b_j		1	2	3	4
a_i		30	80	60	110
1	60	6	8	15	4
2	130	9	15	2	3
3	90	6	12	7	1

3.

b_j		1	2	3
a_i		120	80	60
1	100	2	4	2
2	70	5	5	6
3	70	4	6	3
4	20	6	8	1

4.

b_j		1	2	3
a_i		240	40	110
1	90	7	15	3
2	190	13	8	15
3	40	9	7	20
4	130	8	10	6

5.

b_j		1	2	3	4
a_i		75	80	60	85
1	100	6	7	3	6
2	150	1	2	5	6
3	50	8	10	20	1

6.

b_j		1	2	3	4
a_i		70	120	105	105
1	90	14	8	17	5
2	180	21	10	7	11
3	130	3	5	8	4

7.

a_i \ b_j		1	2	3
		60	70	110
1	150	6	10	4
2	60	12	2	8
3	30	5	4	7

8.

a_i \ b_j		1	2	3	4
		25	25	50	100
1	60	3	2	5	4
2	70	1	4	7	6
3	70	5	8	2	9

9.

a_i \ b_j		1	2	3	4
		30	170	60	140
1	80	5	9	2	7
2	120	4	11	3	4
3	200	2	8	6	5

10.

a_i \ b_j		1	2	3	4
		20	10	70	20
1	30	3	2	4	5
2	40	1	4	7	9
3	60	6	7	9	8

3.3. Graflar nazaryýetiniň elementlerini torlaýyn modellerde ulanmak

Graflar nazaryýeti esasynda ýatan torlaýyn modeller bu torlaryň optimizirlenilmekligini geçirmeklige mümkinçilik berýärler hem-de täze önümler we tehnologiýalar işlenilip düzülende işleriň toplumyny dolandyrmak boýunça hasaplaýyş we guramaçylyk çärelerini geçirmeklige şert döredýärler.

Ykdysady meselelerde graflary **tor**, olaryň depelerini bolsa – **düwün** diýip atlandyrýarlar. Her gapyrga (duga) kesgitli bir san baha berýärler, ol meseläniň manysyna görä aralygy, geçirijilik ukybyny, wagty we ş.m. aňladýar. Toruň her görnüşi bilen akymlaryň kesgitli bir görnüşi baglanyşdyrylandyr, meselem, nebitiň akymy, awtoulaglaryň akymy we ş.m.

3.3.1. Torlaýyn modeliň esasy düşünjeleri

Torlaýyn model işleriň toplumynyň ýerine ýetirilmek meýilnamasynyň grafiki şekillendirilmesidir. Ol sapaklardan (işlerden) we düwünlerden (wakalardan) durýar, olar bolsa ähli operasiýalaryň logiki özara baglanyşyklaryny aňladýarlar. Torlaýyn modelirlemekligiň esasynda işleriň meýilleşdirilýän toplumyny graf görnüşinde şekillendirmek ýatandyr. **Graf** – çyzyklar ulgamy bilen birikdirilen berlen nokatlardan (depelerden) durýan shemadyr. Depeleri birikdirýän kesimler grafyň gapyrgalary (dugalary) diýlip atlandyrylýarlar. Ähli gapyrgalarynyň ugurlary görkezgiçler bilen bellenilen grafa ugrukdyrylan graf diýilýär. Bu ýagdaýda iki serhet depäniň haýsynyň başlangyçdygyny, haýsynyň bolsa ahyrkydygyny kesgitlemek mümkindir. Beýle torlary öwrenmekligi graflar nazaryýetiniň usullary bilen geçirýärler.

Graflar nazaryýeti özara baglanyşdyrylan gapyrgalaryň yzygiderligini birleşdirýän ýol düşünjesi bilen iş salyşýar. Kontur bu başlangyç we ahyrky depeleri deň gelýän ýoldur. **Torlaýyn grafik** – bu kontursyz, ugrukdyrylan grafdyr.

Biz bu kitapda toruň iň kiçi sütün (esasy) agajyny tapmak, iň gysga ýoly tapmak ýaly meselelere serederis.

3.3.2. Tory minimallaşdyrmak (toruň iň kiçi esasy agajyny tapmak) meselesi

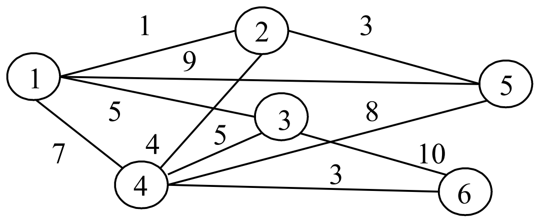
Tory minimallaşdyrmak meselesi toruň ähli düwünlerini birleşdirýän we iň kiçi jemi uzynlygy bolan gapyrgalary tapmakdan ybaratdyr.

Bu meseläniň çözüwiniň algoritmi aşakdakydan ybaratdyr.

Islendik düwünden başlaýarys we ony toruň iň ýakyn düwni bilen birleşdirýäris. Birleşdirilen iki düwün baglanyşykly köplügi emele getirýär, galanlary bolsa baglanyşyksyz köplügi emele getirýärler. Ondan soňra baglanyşyksyz köplükde baglanyşykly köplügiň islendik düwüne beýlekilerden ýakyn ýerleşen düwni saýlap alýarys. Baglanyşykly we baglanyşyksyz köplükleri täzeleýäris we bu prosesi baglanyşykly köplüge toruň ähli düwünleri düşýänçä gaýtalaýarys.

Deň uzaklaşan düwünler ýagdaýynda olaryň islendigini saýlap alýarys, bu “iň kiçi agaç – esasy” algoritminiň birbelgili däldigini görkezýär.

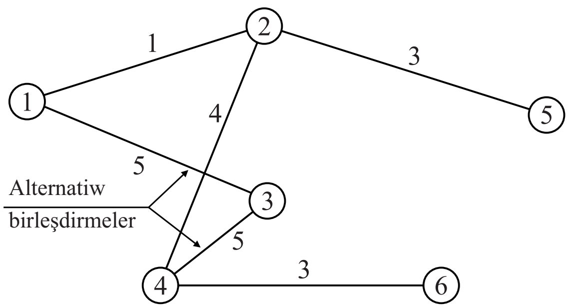
1-nji mysal. Telewizion firma 5 sany täze etrapda täze gurlan ýerlere hyzmat etmek üçin kabel toruny döretmekligi meýilleşdirýär. Gapyrgalardaky sanlar kabeliň uzynlygyny görkezýärler (*3.1-nji surat*). 1-nji düwün – telewizion merkezi. Iki düwnüň arasynda gapyrgalaryň ýoklugy degişli etraplary birleşdirmekligiň uly çykdajylara eýedigini ýa-da bütinleý mümkin däldigini aňladýar. Etraplary birleşdirmekligiň jemi uzynlygy iň az bolar ýaly meýilnamany tapmaly.



3.1-nji surat

Çözülişi.

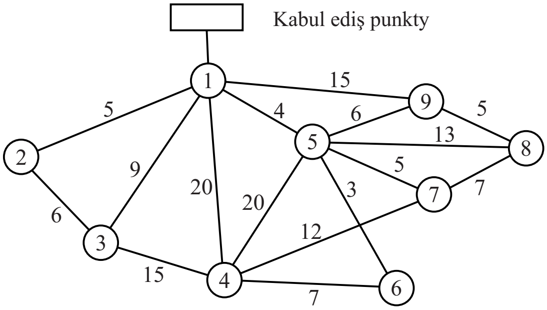
Kabeliň minimal uzynlygy 1+3+4+3+5=16 (*3.2-nji surat*).



3.2-nji surat

2-nji mysal. 3.3-nji suratda kenarda kabul ediş punkty, açyk deňizde bolsa 9 sany gaz çykaryjy desgasy bolan kommunikasiýalaryň uzynlyklary berlen. 1-nji skwažinanyň kenara hemmelerden ýakyn ýerleşendigi sebäpli, ol galan skwažinalardan kabul ediş punktuna gelýän gazy sorujy bilen güýçlendirmek üçin gerekli enjamlar bilen üpjün edilendir.

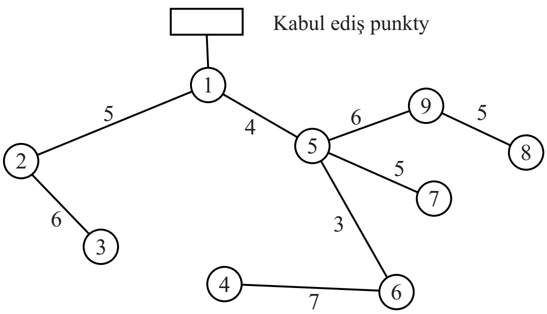
Ähli skwažinalary kabul ediş punkty bilen birleşdirýän we turbalaryň umumy minimal uzynlygyna eýe bolan turbageçirijileriň toruny gurmaly.



3.3-nji surat

Çözülişi.

Turbalaryň iň gysga uzynlygy: $5+6+4+3+7+5+6+5=41$ km (*3.4-nji surat*).



3.4-nji surat

3.3.3. Iň gysga ýoly tapmak meselesi

Bu mesele ulag torunda başlangyç punktdan bellenilen punkta çenli iň az uzynlyga eýe bolan özara baglanyşykly ýollary tapmaklykdan ybaratdyr.

Belgilemeleri girizeliň:

d_{ij} – torda ýanaşyk i we j punktlaryň arasyndaky uzaklyk;

U_j – i we j punktlaryň arasyndaky iň gysga aralyk, $U_1 = 0$.

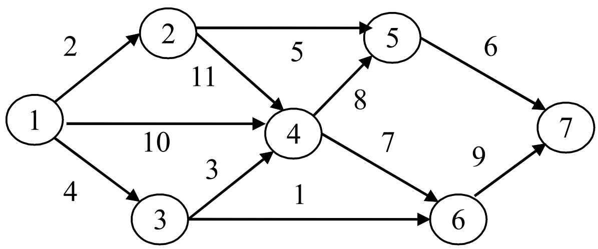
Bu U_j ululygy hasaplamak üçin formula aşakdaky ýalydyr:

$$U_j = \min_i \{U_i + d_{ij}\}.$$

Bu formula öňki i düwne çenli iň gysga aralygyň alynmaklygyny we onuň üstüne häzirki j düwün bilen öňki i düwnüň arasyndaky aralygyň goşulmaklygyny aňladýar.

Bu formuladan j düwne çenli iň gysga U_j aralygy diňe j düwün bilen duga arkaly birleşdirilen her öňki i düwne çenli iň gysga aralyk tapylandan soňra hasaplap boljakdygy gelip çykýar. Bu hasaplamalar iň soňky zynjyr üçin iň gysga aralyk tapylandan soňra tamamlanýar.

1-nji mysal. 3.5-nji suratda 1 we 7 düwünleriň arasynda iň gysga aralygy tapmaly.



3.5-nji surat

Çözülişi.

Minimal aralyklary tapalyň:

$$U_1 = 0, U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2, U_3 = U_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4;$$

$$U_4 = min\{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} = min\{0 + 10; 2 + 11; 4 + 3\} = 7;$$

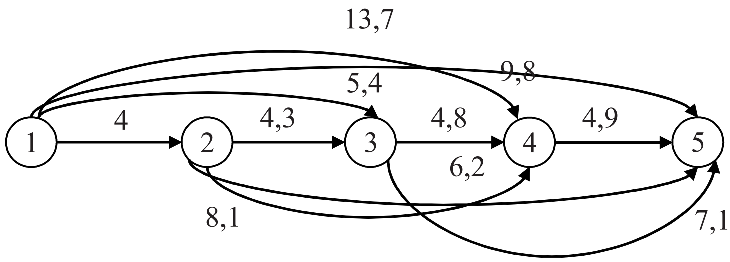
$$U_5 = min\{U_2 + d_{25}; U_4 + d_{45}\} = min\{2 + 5; 7 + 8\} = 7;$$

$$U_6 = min\{U_3 + d_{36}; U_4 + d_{46}\} = min\{4 + 1; 7 + 7\} = 5;$$

$$U_7 = min\{U_5 + d_{57}; U_6 + d_{67}\} = min\{7 + 6; 5 + 9\} = 13.$$

Jogaby: 1 we 7 düwünleriň arasyndaky iň gysga uzaklyk 13-e, degişli marşrut bolsa 1−2−5−7 deň.

2-nji mysal. Awtoulag parkyny çalyşmak baradaky mesele. Awtoulaglary kärendä berýän firma geljekki 5 ýylda awtoulag parkyny çalyşmagy meýilleşdirýär. Awtoulag firmasy awtoulag parkyny çalyşmak meselesini goýýança azyndan 1 ýyl işlemelidir. 3.6-njy suratda awtoulagyň ulanyşda bolan ýyllaryna we çalyşmaklygyň wagtyna baglylykda awtoulaglary çalyşmaklygyň gymmaty şertli birliklerde getirilendir.



3.6-njy surat

Awtoulaglary çalyşmaklygyň iň az çykdajylary berýän meýilnamasyny kesgitlemeli.

Çözülişi.

Iň gysga uzaklyklary tapalyň.

$$U_1 = 0, U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4,$$

$$U_3 = min\{U_1 + d_{13}; U_2 + d_{23}\} = min\{0 + 5,4; 4 + 4,3\} = 5,4;$$

$$U_4 = min\{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} = min\{0 + 9,8; 4 + 6,2; 5,4 + 4,8\} = 9,8;$$

$$U_5 = min\{U_1 + d_{15}; U_2 + d_{25}; U_3 + d_{35}; U_4 + d_{45}\} =$$

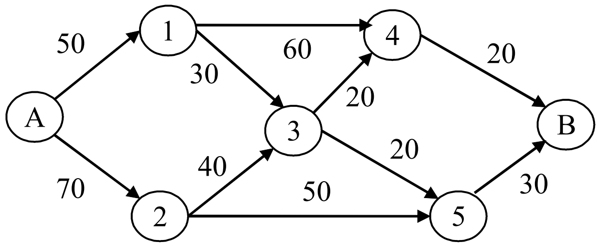
$$= min\{0 + 13,7; 4 + 8,1; 5,4 + 7,1; 9,8 + 4,9\} = 12,1.$$

Gysga ýol 1–2–5, onuň gymmaty 12,1 şertli birlik. Bu her awtoulagyň 2 ýyldan çalşylýandygyny, 5 ýyldan bolsa hasapdan aýrylýandygyny aňladýar.

Jogaby. Gysga ýol 1–2–5, iň az çykdajy 12,1 şertli birlik.

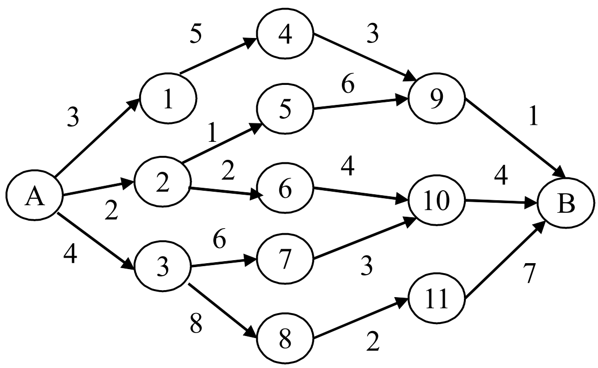
Meseleler

1. Awtoulag kärhanasy *A* we *B* şäherleriň arasynda täze marşruty özleşdirmeli. 3.7-nji suratda *A* şäherden *B* şähere barmagyň dürli marşrutlary görkezilendir, ol ýollar birnäçe beýleki ilatly punktlardan geçýärler. Aralyklar görkezgiçleriň ýanlarynda kilometrlerde sanlarda görkezilendirler. Awtobuslaryň *A* şäherden *B* şähere barmagynyň iň gysga marşrutyny kesgitlemeli.



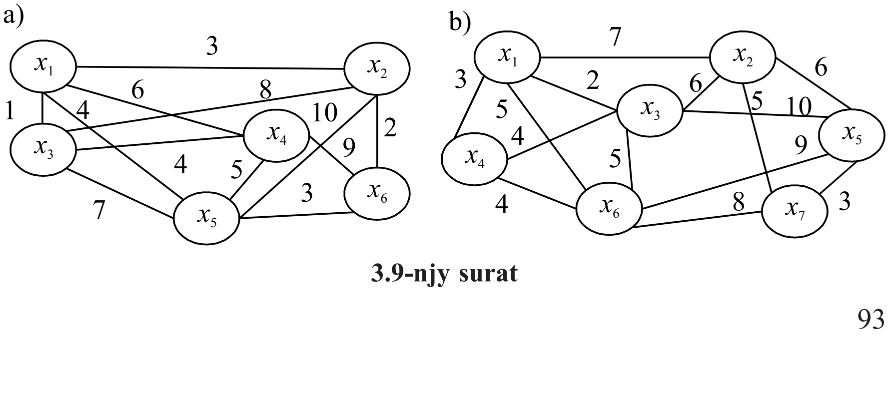
3.7-nji surat

2. Ýangyn gullugyna garaždan (*A* punkt) nebiti gaýtadan işleýän zawoda (*B* punkt) çenli iň gysga ýoly kesgitlemek gerek. Aralyklar kilometrlerde 3.8-nji suratda görkezilendirler.



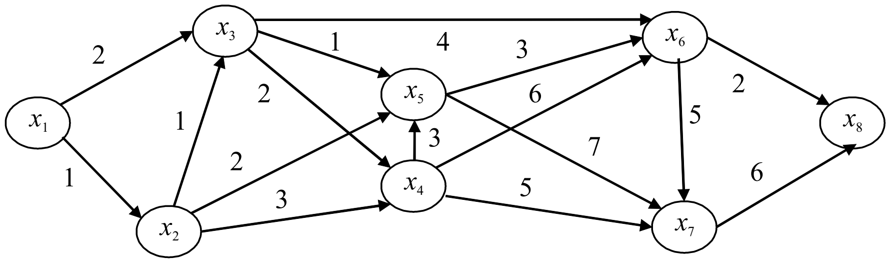
3.8-nji surat

3. Awtoulag kompaniýasy ilatly punktlary birleşdirýän ýollaryň toruny gurýar. Toruň düzümi we ilatly punktlaryň arasyndaky uzaklyklar 3.9-njy suratda görkezilendirler. Iň az çykdajylar bilen ýollaryň toruny gurmaly.



3.9-njy surat

4. 3.10-njy suratda ilatly punktlaryň arasyndaky ulag ýollaryň tory görkezilendir:



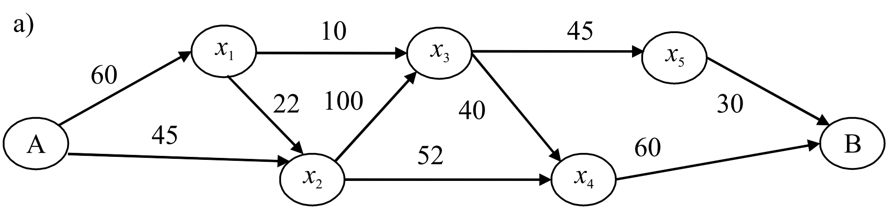
3.10-njy surat

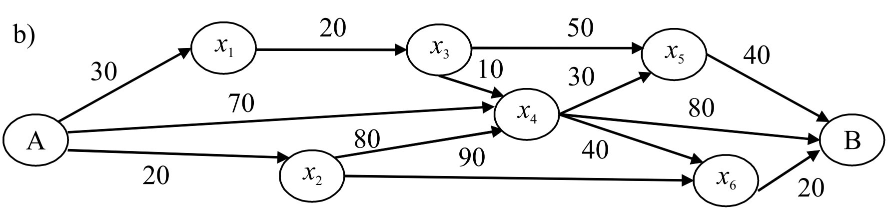
Ilaty punktlaryň arasyndaky iň gysga marşrutlary tapyň:

a) x_1 we x_8 arasynda; b) x_1 we x_6 arasynda;

ç) x_4 we x_8 arasynda; d) x_2 we x_6 arasynda.

5. 3.11-nji suratda *A* we *B* ilatly punktlaryň arasyndaky ýollar görkezilendirler. Ol ilatly punktlaryň arasyndaky iň gysga marşruty tapmaly:

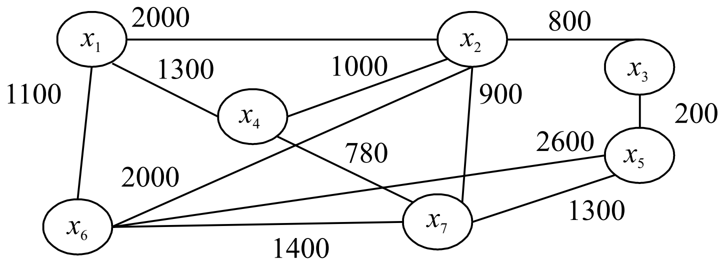




3.11-nji surat

6. Ýükler demir ýol ulgamy boýunça daşalýar. 3.12-nji suratda demir ýol menzilleri we olaryň arasyndaky uzaklyklar görkezilendirler.

Ähli menzilleri birikdirýän we ýükleri daşamaklygyň jemi çykdajysy iň az bolan marşruty tapmaly:



3.12-nji surat

IV. LOGIKI ALGEBRANYŇ FUNKSIÝALARY

4.1. Logiki algebranyň elementar funksiýalary

Belgilemeleri girizeliň: $E_2 = \{0,1\}$; $E_2^n = E_2 \times E_2 \times ... \times E_2$ – n köpeldijiniň göni köpeltmek hasyly; $(x_1,..,x_n) \in E_2$, $|E_2|$ – E_2-niň güýji, $|E_2| = 2$ bolsa, onda $|E_2^n| = 2^n$.

1-nji kesgitleme: Logiki algebranyň funksiýasy diýlip, $E_2^n \Rightarrow E_2$ şekillendirmäni amala aşyrýan kanuna aýdylýar, bu şekillendirme ähli ýerde kesgitlenendir we funksionaldyr.

E_2^n köplük tükenikli bolany üçin, $E_2^n \Rightarrow E_2$ şekillendirmäni bermek diýmek, E_2^n-den alnan toplumlaryň köplügini bermek we her bir toplum üçin onuň E_2-däki şekilini görkezmek diýmekdir.

1-nji mysal. Goý, $n = 2$ bolsun, onda $E_2^2 = \{(0\ 0), (0\ 1), (1\ 0), (1\ 1)\}$, $E_2^2 \Rightarrow E_2$ şekillendirme, mysal üçin, şeýle berlip bilner: $(0\ 0) \Rightarrow 0$; $(0\ 1) \Rightarrow 1$; $(1\ 0) \Rightarrow 1$; $(1\ 1) \Rightarrow 1$.

Şeýle görnüşde funksiýa berlendir, onuň üçin biz $f(x_1,x_2)$ ýaly standart belgileme ulanarys, bu funksiýany tablisa görnüşinde ýazmaly.

Çözülişi.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bu ýerde, x_1 we x_2 – sütünleriň ady, f – şekillendirmäni aňladýan simwoldyr. $f(x_1,x_2)$ we $f(y_1,y_2)$ funksiýalaryň şol bir şekillendirmäni aňladýanlygyna ünsüňizi çekeliň, olaryň tablisalary dine sütünleriniň bellikleri bilen tapawutlanýarlar.

2-nji kesgitleme. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýany berýän tablisa bu funksiýa üçin **çynlyk tablisasy** diýilýär.

Bir näbellili funksiýalara seredeliň. Olaryň ählisiniň sany 4-e deň bolar, olar aşakdaky ýaly çynlyk tablisalary bulen berilýär:

x	$f_0(x)$
0	0
1	0

funksiýa **konstanta 0** diýlip atlandyrylýar, $f_0(x) \equiv 0$ görnüşde ýazylýar;

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

funksiýa **toždestwo** diýilýär, $f_1(x) = x$ görnüşde ýazylýar;

x	$f_2(x)$
0	1
1	0

funksiýa **"*x* däl"** diýilýär we $f_2(x) = \bar{x}$ görnüşde ýazylýar;

x	$f_3(x)$
0	1
1	1

funksiýa $f_3(x) \equiv 1$ görnüşde ýazylýar we konstanta 1 diýlip atlandyrylýar.

Eger-de x näbelliniň standart ýerleşişi birinji sütündäki 0 we ikinji sütündäki 1 diýip hasap etsek, onda f_0, f_1, f_2, f_3 funksiýalar birmanyly toplumlaryň bahalary bilen kesgitlenýärler: f_0=(0,0), f_1=(0,1), f_2=(1,0) we f_3=(1,1). Funksiýalaryň toplumlarynyň bahalary $E_2 \times E_2$ köplügi emele getirýär, şonuň üçin bir näbellili funksiýalaryň sany $|E_2 \times E_2| = 4$ deňdir. Funksiýalaryň nomerleriniň ikilik kody bu funksiýalaryň bahalar toplumy bilen gabat gelýär.

Iki näbellili $f(x_1, x_2)$ funksiýalara seredeliň.

Iki näbellili funksiýalar $E_2^2 = \{(0\ 0), (0\ 1), (1\ 0), (1\ 1)\}$ köplükde kesgitlenendir, E_2^2-däki näbellileriň bu toplumyna 0,1,2,3 sanlaryň ikilik kodlary ýaly seredip bolar, (x_1, x_2) toplumlaryň şeýle ýerleşişlerini standart hasap etjekdiris. Onda $f(x_1, x_2)$ funksiýalar $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$

bahalar toplumy bilen birmanyly kesgitlenýärler, her bir $\beta_i \in E_2$, şonuň üçin $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in E_2{}^4$. Şeýlelikde, iki näbellili funksiýalaryň sany $2^4 = 16$-a deňdir, olary nomerleriniň ikilik kody funksiýalaryň bahalar toplumy bilen gabat geler ýaly edip, 0-dan 15-e çenli sanlar bilen nomerläliň.

$x_1\, x_2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Bu funksiýalaryň käbiriniň ýörite atlary bar, olar analizdäki elementar funksiýalaryň roluny oýnaýarlar, sonuň üçin olara logiki algebranyň elementar funksiýalary diýilýär. Olary sanap geçeliň:

1) $f_1(x_1,x_2) = (x_1 \& x_2)$, «$x_1$ konýunksiýa x_2» ýaly okalýar, käwagtlar & belligiň ýerine • bellik ulanylýar ýa-da bellik goýulman, (x_1x_2) ýaly hem ýazylýar. $(x_1 \& x_2)$ adaty köpeltmek hasyly x_1x_2 ýaly ýazylýar we $\min(x_1,x_2)$ bilen gabat gelýär. Bu amala logiki köpeltmek hasyly diýilýär.

2) $f_6(x_1,x_2) = (x_1 \oplus x_2)$ – x_1 we x_2-ni ikilik modul boýunça goşmak, käwagtlar $(x_1+x_2)_{mod2}$ ýaly ýazýarlar.

3) $f_7(x_1,x_2) = (x_1 \vee x_2)$, «$x_1$ dizýunksiýa x_2» ýaly okalýar, ol $\max(x_1,x_2)$ bilen gabat gelýär, oňa logiki goşmak diýilýär.

4) $f_8(x_1,x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$, «$x_1$ Pirsiň strelkasy x_2» ýaly okalýar we dizýunksiýany inkär etmek bilen gabat gelýär, başga atlary: Webbiň funksiýasy, Daggeriň funksiýasy.

5) $f_9(x_1,x_2) = (x_1 \sim x_2)$, «$x_1$ ekwiwalent x_2» ýaly okalýar.

6) $f_{13}(x_1,x_2) = (x_1 \rightarrow x_2)$, «$x_1$ implikasiýa x_2» ýaly okalýar, käwagtlar $(x_1 \supset x_2)$ ýaly bellenýär, ýagny, x_1 element x_2-ni öz içinde saklaýar.

7) $f_{14}(x_1,x_2) = (x_1 | x_2)$, «$x_1$ Şefferiň ştrihi x_2» ýaly okalýar, ol konýunksiýanyň inkär etmesi bolup durýar.

Elementar funksiýalaryň belgimelerine gatnaşýan $^-, \&, \vee, \rightarrow, \sim, \downarrow, \oplus, |$ simwollara logiki birleşdirmeler ýa-da ýöne birleşdirmeler diýilýär. 0 we 1 üýtgeýän ululyklar logiki ýa-da bul üýtgeýän ululyklary diýilýär, 0 «ýalan», 1 – «çyn» diýmekdir, logiki algebranyň funksiýalaryna **bul funksiýalary** hem diýilýär.

$f(x_1...x_n)$ funksiýalara seredeliň, bu ýerde $(x_1...x_n) \in E_2^n$, onda $f(x_1...x_n)$ funksiýalaryň berilmeli $(x_1...x_n)$ toplumlarynyň sany $|E_2^n| = 2^n$-e deňdir. Iki belgili logiki algebranyň ähli funksiýalarynyň köplügini P_2 bilen belläliň. n üýtgeýän ululyga bagly funksiýalaryň sanyny $P_2(n)$ bilen belläliň. Görnüşi ýaly, $P_2(n) = 2^{2\,n}$.

n-iň artmagy bilen $P_2(n)$ san çalt artýar: $P_2(1)=4$, $P_2(2)=16$, $P_2(3)=256$, $P_2(4)=65536$. Uly n üçin funksiýanyň formulaly berlişi ulanylýar, tablisaly berlişi kabul ederlikli däldir. Formula düşünjesini girizmezden öň hakyky üýtgeýän ululygyň kesgitlemesini bereliň.

3-nji kesgitleme: Eger-de $x_1,...x_{i-1}$, $x_{i+1},...x_n$ üýtgeýän ululyklaryň $\alpha_1,...\alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+1},...\alpha_n$ bahalary bar bolup, olar üçin $f(\alpha_1,...\alpha_{i-1},0,$ $\alpha_{i+1}...\alpha_n) \neq f(\alpha_1...\alpha_{i-1},1,$ $\alpha_{i+1}...\alpha_n)$ şert ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x_1,...,x_{i-1},x_i, x_{i+1},...,x_n)$ funksiýa **x_i-e hakyky bagly** diýilýär. Tersine bolanda, x_i-e **fiktiw üýtgeýän ululyk** diýilýär.

2-nji mysal. Iki näbellili birnäçe funksiýalara seredeliň.

x_1	x_2	$(x_1 \,\&\, x_2)$	f_3	f_5
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$(x_1\&x_2)$-yň x_1-e hakyky baglylygyny görkezmeli.

(0,1) we (1,1) toplumlara seredeliň, bu ýerde, $\alpha_2=1$, $f(0,\alpha_2)=0$ we $f(1,\alpha_2)=1$-e deň däldir.

x_2-niň hem hakyky üýtgeýän ululykdygyny görkezeliň. (0,1) we (1,1) toplumlara seredeliň, bu ýerde, $\alpha_1=1$, $f(1,0)=0$ we $f(1,1)=1$-e deň däldir.

$f_3(x_1,x_2)$ funksiýa üçin x_2-niň fiktiw üýtgeýän ululykdygyny, ýagny, $f_3(\alpha_1,0) \neq f_3(\alpha_1,1)$ bolar ýaly $(\alpha_1,0)$ we $(\alpha_1,1)$ toplumlaryň ýoklugyny görkezmeli.

Goý, $\alpha_1=0$, ýagny (0,0) и (0,1) toplumlara seredeliň, $f(0,0)=f(0,1)=0$. Goý, $\alpha_1=1$, ýöne $f(1,0)=f(1,1)=1$.

f_5 funksiýa üçin x_1 we x_2 hem fiktiw üýtgeýän ululyklardyr. Eger-de $f(0,\alpha_2) \neq f(1,\alpha_2)$ bolar ýaly $(0,\alpha_2)$ we $(1,\alpha_2)$ toplumlar ýok bolsa, onda x_1 fiktiw üýtgeýän ululyk.

Eger-de $\alpha_2=0$ bolsa, onda $f(0,0)=f(1,0)=1$. Goý, $\alpha_2=1$ bolsun, onda $f(0,1)=f(1,1)=1$.

Goý, x_i üýtgeýän ululyk $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ funksiýa üçin fiktiw üýtgeýän ululyk bolsun. Onda ony $(\alpha_1,...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1},...\alpha_n)$ ýaly ýa-da tersine $(\alpha_1,...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1},...\alpha_n)$ ýaly ähli setirlleri we x_i üýtgeýän ululyk üçin sütüni çyzmak arkaly çynlyk tablisadan aýryp bolar. Şunlukda, käbir $g(x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...x_n)$ funksiýany alarys.

$g(x_1,...x_{i-1}, x_{i+1},...x_n)$ funksiýa $f(x_1,...,x_i,...x_n)$ funksiýadan x_i fiktiw üýtgeýän ululygy aýyrmak arkaly alyndy diýilýär ýa-da fg-den x_i fiktiw üýtgeýän ululygy girizmek arkaly alyndy diýilýär.

4-nji kesgitleme: Eger-de f_2-ni f_1-den fiktiw üýtgeýän ululygy goşmak ýa-da aýyrmak arkaly alyp bolýan bolsa, f_1 we f_2 funksiýalara **deň** diýilýär.

3-nji mysal.

x_1	x_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Tablisany düşündiriň.

$(\alpha,1)$ görnüşli setirleri, ýagny, (0,1) we (1,1) -i we x_2 üçin sütüni çyzdyk.

$f_3(x_1, x_2) = g(x_1) = x_1$ aldyk.

4-nji mysal.

x_1	x_2	g
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Goý, $g(x_1x_2)$ funksiýa tablisa görnüşinde berlen bolsun we iki näbellä hem hakyky bagly bolsun. $g(x_1,x_2)$-den x_3 fiktiw üýtgeýän ululygy girizmek arkaly alnan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiýany gurmaly.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

(x_1, x_2) topara x_3=0-y goşýarys, $(\alpha_1,\alpha_2,0)$ görnüşli topary alýarys. Bu toparlarda f funksiýany $g(\alpha_1,\alpha_2)$-e deňläliň, soňra $(\alpha_1,\alpha_2,1)$ görnüşli toparlary goşalyň, $f(\alpha_1,\alpha_2,1)$ funksiýany $g(\alpha_1,\alpha_2)$-e deňläliň.

Hakyky üýtgeýänleri ýok bolan we üýtgeýänleriň boş köplügine görä funksiýalar hökmünde seredip bolýan 0 we 1 konstantalar aýratyn rol oýnaýarlar.

4.2. Logiki algebranyň funksiýalarynyň formulaly berlişi

Köplükleriň üstündäki formulalaryň induktiw kesgitlemesini bereliň. Bu kesgitlemäniň formasy boýunça çylşyrymly bolmagyna garamazdan, gelejekde peýdaly bolar. Induktiw kesgitleme matematiki analizde $d^n f(x)$-n-nji derejeli differensialynyň kesgitlemesinde ulanylypdy: birinji differensial $df(x)$ düşünjesi girizilipdi, soňra n-nji differensial $d^{(n-1)}f(x)$-den alnan birinji differensial hökmünde kesgitlenipdi.

1-nji kesgitleme: Goý, $M \subset P_2$ bolsun, bu ýerde P_2 – logiki algebranyň ähli funksiýalarynyň köplügi, M-P_2 köplüge degişli funksiýalaryň köplügi, onda:

1) her bir $f(x_1,...,x_n) \in M$ funksiýa M-iň üstündäki formula diýilýär;

2) goý, $g(x_1,...,x_m) \in M$, $G_1,...,G_m$ – üýtgeýän ululyklar ýa-da M-iň üstündäki formulalar bolsun. Onda $g(G_1...G_n)$ aňlatma – M-iň üstündäki formula.

Formulalary baş harplar bilen bellejekdiris: formulalary gurnamaga gatnaşan funksiýalary göz öňünde tutmak bilen: $N[f_1,...,f_s]$ ýa-da formula girýän üýtgeýänleri göz öňünde tutmak bilen: $N(x_1,...,x_k)$. $g(G_1,...,G_n)$-ni gurnamaga gatnaşan G_i – formulalara **içki formulalar** diýilýär.

1-nji mysal. Coý, $N=\{(x_1\&x_2), (x_1\vee x_2), (\bar{x})\}$ bolsun, onda $((x_1\&x_2)\vee x_3)$ – N-iň üstündäki formuladyr.

Her bir $N(x_1,...,x_n)$ formula $f(x_1,...,x_n)\in P_2$ funksiýany degişli edeliň. Degişliligi formulanyň induktiw kesgitlemesi boýunça geçireliň.

1) Goý, $N(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)$ bolsun, onda $N(x_1,...,x_n)$ formula $f(x_1,...,x_n)$ funksiýany degişli edeliň.

2) Goý, $N(x_1,...,x_n)=g(G_1,...,G_m)$ bolsun, onda induktiw çaklama boýunça her bir G_i $f_i\in P_2$ funksiýa ýa-da x_i üýtgeýän ululyk degişli edilen, bu funksiýany toždestwo-funksiýa hasap edip bolar, bu ýerde, her bir G_i – M-iň üstündäki formula ýa-da üýtgeýän ululyk. Şunlukda, her bir G_i formula $f_i(x_{i_1},...,x_{i_k})$ funksiýany degişli edip bolar, şonuň ýaly-da: $\{x_{i_1},...,x_{i_k}\}\subseteq\{x_1,...,x_n\}$, sebäbi $N(x_1,...,x_n)$ formulada ony düzmäge gatnaşan ähli üýtgeýänler getirilýär. Ähli f_i funksiýalary $(x_1,...,x_n)$ üýtgeýänlere bagly hasap edip bolar, üýtgeýänleriň käbiriniň fiktiw bolmagy mümkin. Onda $N(x_1,...,x_n)=g(G_1,...,G_m)=g(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,..,x_n))$ bolar.

Bu formula $h(x_1,...,x_n)$ funksiýany aşakdaky görnüşde degişli edeliň: goý, $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – $(x_1,...,x_n)$ üýtgeýänleriň erkin toplumy bolsun. Her bir f_i funksiýanyň bahasyny bu toplumda kesgitläliň.

Goý, $f(\alpha_1,...,\alpha_n)=\beta_i$ bolsun, soňra $g(x_1,...,x_m)$ funksiýanyň bahasyny $(\beta_1,...,\beta_m)$ toplumda kesgitläliň we $h(\alpha_1,...,\alpha_n)=g(\beta_1,...,\beta_m)=$ $=g(f_1(\alpha_1,...,\alpha_n),..., f_m(\alpha_1,...,\alpha_n))$ ýaly goýalyň. Her bir $f_i(x_1,...,x_n)$ funksiýa bolany üçin, her bir $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ toplumda ol birbelgili kesgitlenýär, $g(x_1,...,x_m)$ hem funksiýa, şeýlelikde, ol $(\beta_1,...,\beta_n)$ toplumda birbelgili kesgitlenýär, bu ýerde, $h(x_1,...,x_n)$ islendik $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ toplumda kesgitlenen funksiýa.

M-iň üstündäki ähli formulalar koplügini $<M>$ ýaly belläliň.

2-nji kesgitleme: $<M>$-däki N we D iki formulanyň emele getirýän funksiýalary deň bolsalar, onda $N=D$ – deňdir ýa-da $N\sim D$ – ekwiwalentdir diýilýär.

2-nji mysal. Formulalaryň ekwiwalentligini subut etmeli:

$$(\overline{x_1}\,\&\,(x_2 \oplus x_3)) \sim (\overline{x_1 \vee (x_2 \to x_3)\,\&\,(x_3 \to x_2)}).$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 \oplus x_3$	&	$x_2 \to x_3$	$x_3 \to x_2$	&	$\vee x_1$	$\to$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0

Formulalaryň ýazgysyny ýönekeýleşdirmek:

1) daşky ýaýlary aýryp bolýar;

2) baglylyklary ulanmagyň artykmaçlygy aşakdaky tertipde artýar: $\sim$, $\to$, $\vee$, &;

3) bir näbelliniň üstündäki baglylyk – ähli baglylyklardan güýçlüdir;

4) eger baglylyk formulanyň ýokarsynda duran bolsa, onda ilki formula, soňra inkär etme ýerine ýetýär;

5) ýaýlar ýok bolsa, onda $\sim$ we $\to$ amallar iň soňundan ýerine ýetýärler.

Içki formulalary ekwiwalentleri bilen çalyşmak baradaky teorema

Teorema: Goý, $N \in \langle M \rangle$ we şeýle görnüşde bolsun: $N(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ... G_i, ..., G_m)$. Eger kiçi formula $G_i \sim G_i'$ bolsa, onda $N(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ..., G_i, ..., G_m)$ formula we $N'(x_1, ..., x_n) = g(G_1', ..., G_i', ..., G'_m)$ formula ekwiwalentdirler.

Subudy. Eger-de N we N' şol bir funksiýany emele getirýän bolsalar, onda ol formulalar ekwiwalentdirler. Formulany emele getirýän funksiýanyň gurluşyna laýyklykda alarys:

$$N(x_1, ..., x_n) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_i(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)),$$

$$N'(x_1, ..., x_n) = g(f_1'(x_1, ..., x_n), ..., f_i'(x_1, ..., x_n), ..., f_m'(x_1, ..., x_n)).$$

Şert boýunça, $G_i \sim G_i'$, şeýlelikde, $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplumda $f_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = f_i'(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ alarys, ýagny, islendik $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplumda $g(f_1, ..., f_i, ..., f_m)$ we $g(f_1', ..., f_i', ..., f_m')$ funksiýalaryň bahalary gabat gelýärler. $N \sim N'$ alarys.

Elementar funksiýalaryň käbir häsiýetleri

1. Idempotentligi & we $\vee$: $x \& x = x$, $x \vee x = x$.

2. Kommutatiwligi &, $\vee$, $\oplus$, |, ~,$\downarrow$.

3. Assosiatiwligi &, $\vee$, $\oplus$, ~, şonuň üçin xyz görnüşli formulalarda hiç hilli ýaýlary goýmasa-da bolýar.

4. Distributiwlik:

a) &$\vee$ görä: $x \& (y \vee z) = xy \vee xz$,

b) $\vee$ & görä: $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$,

ç) & $\oplus$ görä: $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

5. Inwolýusiýa: $\overline{\overline{x}} = x$.

6. De Morganyň düzgüni: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \ \& \ \overline{y}$ и $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

7. 0 we 1 bilen hereketleriň kanuny:

$x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \vee \overline{x} = 1$, $x \& 0 = 0$,

$x \& 1 = x$, $x \& \overline{x} = 0$, $x \oplus 1 = \overline{x}$, $x \oplus 0 = x$.

8. Implikasiýalaryň özara distributiwligi:

$x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Şu formulalaryň ählisiniň deňligi kesgitleme boýunça, ýagny olary emele getirýän funksiýalaryň deňligi bilen subut edilýär.

Mysal üçin, implikasiýalaryň özara distributiwligini barlap göreliň: $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

x	y	z	$y \to z$	$x \to (y \to z)$	$x \to y$	$x \to z$	$\to$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Elementar funksiýalaryň häsiýetlerinden gelip çykýan netijeler

1. Ýelmemek kanunlary:

$xy \vee x\overline{y} = x(y \vee \overline{y}) = x \bullet 1 = x$ ($\vee$ görä &-iň distributiwligi);

$(x \vee y) \& (x \vee \overline{y}) = xy = x \vee 0 = x$ (& görä $\vee$-iň distributiwligi).

2. Siňdirmek kanunlary:

$x \vee xy = x(1 \vee y) = x \bullet 1 = x$; $x \& (x \vee y) = x \vee xy = x$.

Elementar funksiýalaryň häsiýetleri we kiçi formulalary ekwiwalentleri bilen çalyşmak teoremasy formulalary ýönekeýleşdirmäge mümkinçilik berýär.

3-nji mysal. Formulalary ýönekeýleşdirmeli.

Çözülişi:

1. $x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = x_3(x_2 \vee x_1\bar{x}_2) = x_3((x_2 \vee x_1)\&(x_2 \vee \bar{x}_2)) = (x_1 \vee x_2)x_3$.

2. $x_1 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 = x_1 \vee \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = x_1 \vee \bar{x}_1(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \vee (\overline{x_2 \vee x_3})x_4 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3 \vee (\overline{x_2 \vee x_3}))(x_2 \vee x_3 \vee x_4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

4.3. Taýdaşlyk usuly

1-nji kesgitleme: Eger-de $f^*(x_1, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ bolsa, onda $f^*(x_1, ..., x_n)$ funksiýalar $f(x_1, ..., x_n)$ funksiýalara **taýdaş** diýilýär.

1-nji mysal. Çynlyk tablisasynyň kömegi bilen 0 konstantanyň 1-e taýdaşlygyny görkezmeli.

Çözülişi:

x	f	f^*
0	0	1
1	0	1

$f(x) = x$ funksiýalar we $g(x) = \bar{x}$ öz-özüne taýdaşdyrlar:

x	f	f^*	g	g^*
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

sebäbi $f^*(0) = \bar{f}(1)$.

2-nji kesgitleme: Eger-de $f^*(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$ bolsa, onda $f(x_1, ..., x_n)$ **özara taýdaş** diýilýär.

2-nji mysal. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$-yň özara taýdaşdygyny görkezmeli.

Çözülişi:

x_1	x_2	x_3	f	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Eger-de f^* – özara taýdaş bolsa, onda $\bar{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) = f(x_1, ..., x_n)$, ýagny, garşylykly toparlarda funksiýa garşylykly bahalara eýe bolýar.

3-nji mysal. $x_1 \vee x_2$ funksiýanyň $x_1 \& x_2$ görä taýdaşdygyny, $x_1 \downarrow x_2$ funksiýanyň $x_1 | x_2$ funksiýa görä taýdaşdygyny görkezmeli.

Çözülişi:

x_1x_2	$f = x_1 \vee x_2$	f^*	$g = x_1 \vert x_2$	$g^* = x_1 \downarrow x_2$
0 0	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0
1 0	1	0	1	0
1 1	1	1	0	0

Taýdaş funksiýalar barada teorema

Teorema: Eger-de f^* funksiýa f-e görä taýdaş bolsa, onda f^*-a görä hem taýdaşdyr.

Subudy. $f^*(x_1, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$. f^*-a görä taýdaş funksiýany tapalyň, ýagny $(f^*(x_1, ..., x_n))^* = (\bar{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n))^* = \bar{\bar{f}}\ (\bar{\bar{x}}_1, ..., \bar{\bar{x}}_n) = f(x_1, .., x_n)$.

Funksiýa formula bilen berlen bolsun. Bu formula boýunça taýdaş funksiýany tapyp bolarmy? Bu soraga jogaby aşakdaky teorema berýär.

Taýdaşlyk usuly barada teorema

Teorema: Goý, $h(x_1, ..., x_n)$ funksiýa $h(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ..., G_m) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ formula bilen berlen bolsun. Bu ýerde käbir üýtgeýän ululyklar fiktiw (ýasalan) bolup bilerler, onda

$h^*(x_1,...,x_n)=g^*(f_1^*(x_1,...,x_n),..., f_m^*(x_1,\ldots,x_n))$. Eger-de funksiýa käbir formula bilen berlen bolsa, taýdaş funksiýany almak üçin bu formulada funksiýanyň ähli belgilerini taýdaş belgilere, 0-y 1-e, 1-i 0-a çalyşmaly.

Subudy: $h^*(x_1,...,x_n) = \overline{h}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) = \overline{g}(f_1(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n),..., f_m(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)) = \overline{g}(\overline{\overline{f_1}}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n), ..., \overline{\overline{f_m}}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)) = g((\overline{f_1^*(x_1,..,x_n)}), ..., (\overline{f_m^*(x_1,..,x_n)})) = g^*(f_1^*(x_1,...,x_n),..., f_m^*(x_1,...,x_n))$, tassyklamanyň dogrudygy subut edildi.

Eger-de $h(x_1,...,x_n)$ funksiýa $N[f_1,..., f_n]$ formula bilen berlen bolsa, onda, N-e girýän f_i funksiýany f_i^* bilen çalyşmak arkaly alnan $h^*(x_1,...,x_n)$ formulany taýdaş diýip atlandyrjakdyrys we $N^*(x_1,...,x_n)$ ýaly bellejekdiris.

4-nji mysal. Eger-de $f = ((x\to y)\vee z)\ (y\bar{z}\to(x\oplus yz))$ bolsa, onda f^*-i emele getirýän formulany gurnamaly we onuň $N = z(x\oplus y)$ formula ekwiwalentdigini görkezmeli.

Çözülişi: $(x\oplus y)^*$ we $(x\to y)^*$ tapalyň.

$x\ \ y$	$x\oplus y$	$(x\oplus y)^*$	$x\to y$	$(x\to y)^*$
0 0	0	1	1	0
0 1	1	0	1	1
1 0	1	0	0	0
1 1	0	1	1	0

Tablisadan görnüşi ýaly,

$(x\oplus y)^* = x \sim y = \overline{x\oplus y} = x\oplus y\oplus 1,\ x\oplus y = \bar{x}y\oplus x\bar{y}$,

$(x\to y)^* = \overline{\bar{x}yx\to y} = \bar{x}\vee y$.

Taýdaşlyk prinsipi boýunça:

$f^* = \bar{x}yz \vee (\overline{y\vee\bar{z}}\,(x \oplus (y \vee z) \oplus 1)) = \bar{x}yz \vee \bar{y}z(x \oplus (y \vee z) \oplus 1) = z(\bar{x}y\vee(\bar{y}x \oplus \bar{y}z \oplus \bar{y})) = z(\bar{x}y\vee\bar{y}(x \oplus z \oplus 1)) = z(\bar{x}y\vee\bar{y}(x \oplus \bar{z})) = z\bar{x}y\vee(z\bar{y}x \oplus z\bar{y}\bar{z}) = z(\bar{x}y\vee x\bar{y}) = z(x \oplus y)$.

Onda $f = (f^*)^* = [z(x\oplus y)]^* = z\vee(x\sim y)$.

5-nji mysal. f* üçin formulany tapmaly we eger-de $f = (xyz\sim(t\vee x\bar{y}))\vee\bar{y}t$ bolsa, onda onuň $N = (x\vee(z\oplus t))\bar{y}$ formula ekwiwalentdigini görkezmeli.

Çözülişi: $f^* = ((x \vee y \vee z) \oplus t(\bar{x} \vee y))\ (\bar{y} \vee t) = (\overline{x \vee y \vee z}$ $t(\bar{x} \vee y) \vee (x \vee y \vee z)\,\overline{t(\bar{x} \vee y)}\,)(\bar{y} \vee t) = (\bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee (x \vee y \vee z)(\bar{t} \vee x\bar{y}))(\bar{y} \vee t) =$ $= \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee (x \vee y \vee z)(\bar{t}\bar{y} \vee x\bar{y} \vee tx\bar{y}) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee (x \vee y \vee z)(\bar{t}\bar{y} \vee x\bar{y}) =$ $= \bar{y}(\bar{t}x \vee \bar{z}t \vee \bar{t}z \vee x \vee xz) = \bar{y}(\bar{z}t \vee x \vee \bar{t}z \vee xz) = \bar{y}(x \vee (z \oplus t))$.

Öz-özüne taýdaş däl funksiýalar barada lemma

Lemma: $f(x)$, $f(\bar{x})$ funksiýalary öz-özüne taýdaş däl funksiýa goýmak arkaly haýsy hem bolsa bir hemişeligi alyp bolar.

Subudy. Goý, $f(x_1, ..., x_n)$ – öz-özüne taýdaş däl funksiýa bolsun. Onda $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplum bolup, onuň üçin $f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_n)$. $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$-däki birlikleri x bilen, nullary bolsa $\bar{x}$ bilen çalyşmak arkaly $h(x)$ funksiýany gurnalyň.

$\bar{x} = x_0$, $x = x_1$ bolany üçin, $h(x) = f(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n})$. $0^{\alpha_i} = \bar{\alpha}_i$, $1^{\alpha_i} = \alpha_i$ bolýandygyny belläp geçeliň.

Onda $h(1) = f(1^{\alpha_1}, \ldots, 1^{\alpha_n}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) =$ $= f(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = h(0)$, ýagny $h(1) = h(0)$. Şeýlelikde, $h(x)$ funksiýa haýsy hem bolsa bir hemişelikdir.

4.4. Bul funksiýasyny üýtgeýänleri boýunça dargatmak

Bellik girizeliň: $x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, \sigma = 0, \\ x, \sigma = 1. \end{cases}$

x we σ-iň dürli bahalarynda x^σ-nyň nämä deň bolýandygyna seredeliň.

x|σ	**0**	**1**
0	1	0
1	0	1

Tablisadan görnüşi ýaly: diňe $x = \sigma$ bolanda $x^\sigma = 1$.

Funksiýany üýtgeýänleri boýunça dargatmak hakynda teorema

Teorema: Goý, $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$. Onda islendik m üçin: $1 \le m \le n$ aşakdaky aňlatma ýolbererlikdir:

$$f(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, ..., \sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

bu ýerde, dizýunksiýa f funksiýanyň $x_1,...,x_n$ üýtgeýänleri boýunça dargatmasy diýlip atlandyrylýan, ähli 0 we 1-den alnan toplumlar boýunça alynýar.

Tassyklamany subut etmezden öň mysallara seredeliň.

1-nji mysal. $m = 1$, x üýtgeýänler boýunça dargatmany ýazmaly.

Çözülişi:

$$f(x_1,...,x_n)=\bigvee_{\sigma_1} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1,x_2,\ldots,x_n)=\bar{x}_1 f(0,x_2,\ldots,x_n)\vee x_1 f(1,x_2,...,x_n). \quad (1)$$

2-nji mysal. $m=2$, x we $\bar{x}$ üýtgeýänler boýunça dargatmany ýazmaly.

Çözülişi:

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,\ldots,x_n) =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2 f(0,0)\vee \bar{x}_1 x_2 f(0,1)\vee x_1\bar{x}_2 f(1,0)\vee x_1 x_2 f(1,1)= \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2):f(\sigma_1\sigma_2)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}.$$

Teorema: Eger-de $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ bolsa, onda soňky formuladan $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2$ alarys.

Subudy. Subut etmek üçin erkin $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplumy alalyň we (1) formulanyň çep we sag taraplarynyň bu toplumda şol bir bahalara eýe bolýandygyny görkezeliň. Çepinde $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ alarys. Sagynda: $\bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n)$.

Dizýunksiýa mümkin bolan $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplumlar boýunça alynýar. Eger-de bu toplumlarda iň bolmanda bir $\sigma_i \neq a_i (1 \leq i \leq m)$ bar bolsa, onda $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$ и $\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_m^{\sigma_m} f = 0$, netijede, nulsyz agza diňe $(\sigma_1, ..., \sigma_m) = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ toplumda bolar, onda $\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n) =$ $\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

1-nji netije. Islendik toždestwalaýyn nula deň bolmadyk $f(x_1,...,x_n)$ funksiýany ýeke-täk şeýle görnüşde aňladyp bolar: $f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}$.

Bu görnüşe $f(x_1,...,x_n)$ funksiýanyň *kämilleşen dizýunktiw normal formasy* diýilýär we KDNF ýaly ýazylýar.

Subudy. Toždestwalaýyn nula deň bolmadyk funksiýalar üçin KDNF-nyň barlygy öňki teoremadan gelip çykýar. Şol KDNF-nyň ýeke-täkligini görkezeliň.

Hakykatdan hem, $2^{2^n}-1$ sany toždestwalaýyn nula deň bolmadyk n – ýerli funksiýalar bar. n üýtgeýänlere görä dürli-dürli KDNF-leriň sanyny hasaplalyň.

C_n^k n elementden k boýunça utgaşdyrmalaryň sanyny aňladýar. Onda biragzaly $x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}$ KDNF-leriň sany $C_{2^n}^1$ -e deňdir.

k agzaly KDNF-leriň sany $C_{2^n}^k$ -e deňdir. n – agzaly KDNF-leriň sany $C_{2^n}^n$ -e deňdir. Ähli bar bolan dürli-dürli KDNF-leriň sany

$$C_{2^n}^1+C_{2^n}^2+\ldots+C_{2^n}^k+\ldots+C_{2^n}^n=2^{2^n}-1.$$

Şeýlelikde, $2^{2^n}-1$ sany funksiýa $2^{2^n}-1$ KDNF arkaly amala aşyrylýar, ýagny her bir funksiýa ýeke-täk KDNF degişlidir.

Bellik. $x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}-x_i\neq x_j,\, i\neq j$ bolanda, üýtgeýän ululyklaryň sany boýunça n rangly elementar konýunksiýa, $f(x_1,...,x_n)$ üçin KDNF – n rangly elementar konýunksiýalaryň dizýnksiýasy.

Eger-de funksiýa iň bolmanda bir elementar konýunksiýanyň rangy n-den kiçi bolan elementar konýunksiýalaryň dizýnksiýasy gornüşinde aňladylan bolsa, onda şeýle forma *dizýunktiw normal forma (DNF)* diýilýär.

2-nji netije. Logiki algebranyň islendik funksiýasy inkär etme, & we $\vee$ üsti bilen formula görnüşinde aňladylyp bilner.

Subudy:

a) Eger-de, $f\equiv 0$, onda $f(x_1,...,x_n)=x_1\ \&\ \bar{x}_1$.

б) Eger-de, toždestwalaýyn $f(x_1,...,x_n)\neq 0$ bolsa, onda ony diňe &, $\vee$, $^-$ baglanyşyklar ulanylýan KDNF görnüşinde aňladyp bolar. KDNF funksiýany &, $\vee$, $^-$ baglanyşyklar ulanylýan formula görnüşinde aňlatmagyň algoritmini berýär.

3-nji mysal. Goý, $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ funksiýa çynlyk tablisasy bilen berlen bolsun. Ony KDNF görnüşinde ýazmaly.

Çözülişi:

Funksiýanyň 1-e deň bolandaky toplumlary üç sany:

(0, 1, 0), (1, 0, 0) we (1, 1, 1), şonuň üçin, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^0$ & x_2^1 & $x_3^0 \vee x_1^1$ & x_2^0 & $x_3^0 \vee x_1^1$ & x_2^1 & $x_3^1 = \bar{x}_1$ & x_2 & $\bar{x}_3 \vee x_1$ & $\bar{x}_2$ & $\bar{x}_3 \vee x_1$ & x_2 & x_3

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3-nji netije. Biz funksiýany $\vee(x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\ldots)$ görnüşde aňladyp bilýäris. Ony $\&(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee\ldots)$ görnüşde aňladyp bolmazmy?

Subudy: Goý, $f(x_1,...,x_n) \neq 1$ toždestwo funksiýasy bolsun. Onda $f^* \neq 0$ funksiýa hem toždestwo funksiýasydyr we ony KDNF görnüşde aňladyp bolar.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f^*(x_1,\ldots,x_n))^* = (\bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f^*(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n})^*.$$

Taýlyk prinsipi esasynda &-y $\vee$ bilen we tersine, çalşyp, alarys

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):\bar{f}(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=1}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}) = \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=0}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}) = \tag{2}$$
$$= \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=0}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

$(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n})$ n rangly elementar dizýunksiýa diýilýär. Funksiýany (2) görnüşde aňlatmaklyga *kämilleşen konýuniktiw normal forma* ýa-a gysgaça yazylanda – KKNF diýilýär. $f(x_1,...,x_n)$ üçin KKNF – n rangly elementar dizýnksiýanyň konýunksiýasydyr. $f(x_1,...,x_n)$ üçin KNF-iň bolmanda bir elementar dizýnksiýanyň rangy n-den kiçi bolan elementar dizýnksiýanyň konýunksiýasydyr.

4-nji mysal. Goý, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \sim x_1))$ bolsun. Ony KKNF görnüşinde aňlatmaly.

Çözülişi: Onuň üçin çynlyk tablisany alarys.

x_1	x_2	x_3	$x_3 \sim x_1$	$x_2 \to (x_3 \sim x_1)$	f
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Funksiýa diňe (1, 1, 0) toplumda nula deňdir, şonuň üçin
$f(x_1x_2x_3) = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3.$

4.5. Dolulyk, doly ulgamlaryň mysallary

Kesgitleme: Eger-de islendik $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$ funksiýa $\{f_1, f_2, ..., f_s, ...\} \subset P_2$ funksiýalar ulgamynyň funksiýalarynyň üsti bilen formula görnüşde ýazylyp bilinýän bolsa, onda $\{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ funksiýalar ulgamy P_2-de doly diýilýär.

Doly ulgamlara mysallar:

1. P_2 – doly ulgam.

2. $M = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1\}$ ulgam – doly ulgam, sebäbi logiki algebranyň islendik funksiýasy bu funksiýalaryň üsti bilen formula görnüşinde ýazylyp bilner.

Doly däl ulgamlaryň mysaly: $\{\vee\}$, $\{0,1\}$.

Lemma: (Dolulygyň ýeterlik şerti). Goý, $U = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ ulgam P_2-de doly bolsun. Goý, $B = \{g_1, g_2, ..., g_k, ...\}$ – P_2-däki käbir ulgam bolsun, ondan başga-da, islendik $f_i \in U$ funksiýa B-niň üstündäki formula bilen aňladyp bolýan bolsun. Onda B ulgam P_2-de dolydyr.

Subudy. Goý, $h(x_1, ..., x_n) \in P_2$ bolsun, U-nyň P_2-de doly bolany üçin, $h(x_1, ..., x_n) = N[f_1, ..., f_s, ...] = N[L_1[g_1, ..., g_k], ..., L_s[g_1, ..., g_k], ...] = U[g_1, ..., g_k]$.

Bu ýerde biz islendik $i \leq n$ üçin, f_i-ni B-niň üstündäki formula bilen aňladyp bolýandygyndan peýdalandyk, şonuň üçin, $f_i = L_i[g_i, ..., g_k]$.

3. $\{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ ulgam P_2-de dolydyr.

P_2-de doly ulgam hökmünde $U = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, x_1 \& x_2\}$, $B = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ alalyň. $x_1 \& x_2$-ni B-niň üstündäki formula bilen aňladyp bolýandygyny görkezmeli. Hakykatdan hem, De Morganyň düzgüni boýunça alarys:
$x_1 \& x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$.

Şu lemmanyň üsti bilen başga-da birnäçe ulgamlaryň dolulygyny subut edeliň.

4. $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ ulgam P_2-de dolydyr.

5. $\{x_1 \mid x_2\}$ ulgam P_2-de dolydyr. Subut etmek üçin, P_2-de doly ulgam hökmünde $U = \{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$-ni alalyň we $x_1 \& x_2$-ni hem-de $\bar{x}$-i $x_1 | x_2$-iň üsti bilen aňladalyň:

$\bar{x}_1 = x_1 \mid x_1$, $x_1 \& x_2 = \overline{x_1 / x_2} = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$.

6. $\{x_1 \downarrow x_2\}$ ulgam – P_2-de dolydyr. $U = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$, $\bar{x}_1 = x_1 \downarrow x_1$, $x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$.

7. $\{x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2, 0, 1\}$ ulgam – P_2-de dolydyr, $U = \{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$, $\bar{x}_1 = x_1 \oplus 1$.

Netije: Žegalkiniň polinomy. $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$, ony konýunksiýanyň üsti bilen formula görnüşinde we 0 we 1 sanlary peýdalanyp, ikilk modully jem görnüşinde aňladalyň.

Bu mümkindir, sebäbi $\{x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2, 0, 1\}$ P_2-de doludyr. $x \& (y \oplus z) = xy \oplus xz$ häsiýeti boýunça, ähli ýaýlary açyp, meňzeş agzalary ýygnap we şonuň netijesinde $\oplus$ belgisi bilen birleşdirilen $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ görnüşli agzalardan durýan, n üýtgeýänli polinom alnar.

Şeýle polinoma Žegalkiniň polinomy diýilýär.

Žegalkiniň polinomynyň umumy görnüşi:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_s)} a_{i_1 i_2 \ldots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s},$$

bu ýerde, $a_{i_1 i_2 \ldots i_s} \in \{0,1\}$, $s = 0, 1, ..., n$, $s = 0$ bolanda a_0 azat agzany alýarys.

Funksiýalary Žegalkiniň polinomy görnüşinde aňlatmak

1. Islendik funksiýany $\{x_1 \& x_2, \bar{x}\}$-nyň üstünde formula görnüşinde aňladalyň we $\bar{x} = x \oplus 1$ çalyşmany amala aşyralyň. Funksiýa formula görnüşinde berlen ýagdaýynda, şu usul amatlydyr.

1-nji mysal. $(x_1 \to (x_2 \to x_3))(x_1 \vee x_2)\, x_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2)\, x_3 = (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 \vee x_2 x_3) x_3 = (\bar{x}_1 x_3 \vee x_2) x_3 = x_1 x_3 x_2 x_3 = ((x_1 x_3 \oplus 1) x_2 \oplus 1) x_3 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3$.

Jübüt sanly birmeňzeş goşulyjylary *mod* 2 boýunça jemlände 0 berýändigini ýatda saklamalydyr.

2. Kesgitlenmedik koeffisiýentler usuly. Funksiýa tablisa görnüşinde berlen ýagdaýynda, bu usul amatlydyr.

2-nji mysal. Üç üýtgeýän ululykly funksiýa üçin kesgitlenmedik koeffisiýentli Žegalkiniň polinomyny ýazmaly.

Çözülişi: $f(x_1, x_2, x_3) = (01101001) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \oplus\ a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus b_1 x_1 x_2 \oplus b_2 x_2 x_3 \oplus b_3 x_1 x_3 \oplus c x_1 x_2 x_3$. Soňra funksiýanyň ähli toplumlardaky bahalaryny peýdalanyp, koeffisiýentleri tapalyň. (0, 0, 0) toplumda $f(0, 0, 0) = 0$, başga tarapdan, bu toplumy polinomda goýup, alarys: $f(0,0,0) = a_0$, bu ýerden, $a_0 = 0$. $f(0, 0, 1) = 1$, (0, 0, 1) toplumy polinomda goýup, alarys: $f(0, 0, 1) = a_0 \oplus a_3$, $a_0 = 0$, bu ýerden, $a_3 = 1$. Şuňa meňzeşlikde, $f(0,1,0) = 1 = a_2$, $f(0,1,1) = 0 = a_2 \oplus a_3 \oplus b_2 = b_2 = 0$; $a_1 = 1$; $0 = a_1 \oplus a_3 \oplus b_3 = b_3 = 0$; $0 = a_1 \oplus a_2 \oplus b_1 = b_1 = 0$; $1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c$; $c = 0$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

3. Paskalyň üçburçlugynyň çep tarapky birlikleri boýunça, tablisa görnüşinde hem Žegalkiniň köpagzasyny alyp bolar. Žegalkiniň köpagzasyny $f = (10011110)$ funksiýa üçin guralyň. Üçburçlugyň ýokarky tarapy f funksiýadyr. Üçburçlugyň islendik beýleki elementi öň ýanyndaky setiriň iki göňşy elementleriniň modul boýunça jemine deňdir. Üçburçlugyň f funksiýa üçin aşaky tarapy alty sany birligi özünde saklaýar. Žegalkiniň köpagzasy alty sany goşulyjyny özünde saklar. Üçburçlugyň birinji birligi (000) topara degişlidir. Köpagzanyň birinji goşulyjysy 1-dir. Üçburçlugyň çep tarapyndaky aşakdan üçünji birligi (101) topara degişlidir. Köpagzanyň goşulyjysy hökmünde $x_1 x_3$-i alýarys. Üçburçlugyň galan birlikleri üçin hem şuňa meňzeşlikde alynýar.

Toplumlaryň çepinde Žegalkiniň köpagzasynyň goşulyjylary görkezilen.

N		$x_1x_2x_3$	f	Paskalyň üçburçlugy
1	000	1		1 0 0 1 1 1 1 0
x_3	001	0		1 0 1 0 0 0 1
x_2	010	0		1 1 1 0 0 1
x_2x_3	011	1		0 0 1 0 1
x_1	100	1		0 1 1 1
x_1x_3	101	1		1 0 0
x_1x_2	110	1		1 0
$x_1x_2x_3$	111	0		1

Onda $f(x_1,x_2,x_3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$.

Žegalkiniň teoremasy. P_2-däki her bir funksiýa Žegalkiniň polinomy görnüşinde ýeke-täk aňladylyp bilner.

Bu ýerde ýeke-täklik diýlip jemdäki goşulyjylaryň tertibine, konýunksiýadaky köpeldijileriň tertibine görä takyklykda düşünilýär.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} a_{i_1i_2\ldots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}, a_{i_1i_2\ldots i_s} \in \{0,1\}, s = 0,1,\ldots,n.$$

Subudy. P_2-däki islendik funksiýa $\{x_1 \& x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ 0,\ 1\}$-nyň üstündäki formula görnüşinde aňladylyp bilner, bu formula bolsa, ähli ýaýlary açanymyzdan we meňzeş agzalary toplanymyzdan soň, Žegalkiniň polinomyny berýär. Aňlatmanyň ýeke-täkligini subut edeliň. n üýtgeýän ululyklara görä $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiýalara seredeliň. Biz şeýle funksiýalaryň, ýagny olaryň çynlyk tablisalarynyň ählisiniň 2^n-e deňligini bilýäris, n üýtgeýän ululykly Zegalkiniň dürli polinomlarynyň sanyny, ýagny $\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)} a_{i_1i_2\ldots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}$ görnüşli wariasiýalaryň sanyny hasaplalyň. $(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s})$ toplumlaryň sany $\{x_1,\ldots,x_n\}$ köplükdäki ähli kiçi köplükleriň sanyna deňdir, bu ýere boş köplük hem girýär ($s=0$ bolanda). n elementden düzülen köplügiň ähli kiçi köplükleriniň sany 2^n-e deňdir, her bir toplumyň iki sany: 0 ýa-da 1 baha alýan $a_{i_1i_2\ldots i_s}$ koeffisiýenti bilen girýändigi üçin, mümkin bolan polinomlaryň sany 2^{2^n}. Her bir polinoma ýeke-täk funksiýa degişli bolany üçin, n üýtgeýän ululykly funksiýalaryň sany ýeke-täk polinomlaryň sanyna deňdir, onda her funksiýa ýeke-täk polinom degişli bolar.

Kesgitleme. Žegalkiniň polinomy $f = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$ üýtgeýänlere görä çyzykly görnüşe eýe bolan $f(x_1, ..., x_n)$ funksiýa çyzykly funksiýa diýilýär.

Çyzykly däl funksiýa barada lemma: Çyzykly däl funksiýanyň superpozisiýasynyň, inkär etmäniň we 1 konstantanyň üsti bilen konýunksiýany alyp bolar.

Subudy. Goý, $f(x_1, ..., x_n)$ – çyzykly däl funksiýa bolsun. Onda bu funksiýa üçin Žegalkiniň polinomy x_1x_2 köpeltmek hasylyny saklaýan goşulyja eýedir. Ýönekeýlik üçin Žegalkiniň köpagzasyndaky x_1x_2-ni şol köpeltmek hasyly diýip hasap edeliň. Goşulyjylary toparlanymyzdan soňra, f funksiýany aşakdaky görnüşe getireliň:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 h_0(x_3, \ldots x_n) \oplus x_1 h_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_2 h_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus h_3(x_3, \ldots, x_n).$$

h_0 funksiýa toždestwalaýyn nul däldir, başgaça bolanda Žegalkiniň polinomynda x_1x_2 – köpeltmek hasylyny saklaýan goşulyjy bolmaz. Onda 0 we 1-den durýan $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ toplum bar we onuň üçin $h_0(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. Goý, $h_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \alpha$, $h_2(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = b$, $h_3(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = c$. Onda $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = x_1x_2 \oplus ax_1 \oplus bx_2 \oplus c$.

Funksiýany gurnalyň:

$$h(x_1, x_2) = g(x_1 \oplus b, x_2 \otimes a) = (x_1 \oplus b)(x_2 \oplus a) \oplus a(x_1 \oplus b) \oplus b(x_2 \oplus a) \oplus c = x_1x_2 \oplus ax_1 \oplus bx_2 \oplus ab \oplus ax_1 \oplus ab \oplus bx_2 \oplus c = x_1x_2 \oplus d,$$

bu ýerde, $d = ab \oplus c$. Eger-de, $d = 0$ bolsa, onda $h(x_1, x_2) = x_1x_2$. Eger-de, $d = 1$ bolsa, onda $h(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus 1$ we $x_1x_2 = \overline{h}(x_1, x_2)$. Lemma subut edildi.

Eger-de $f(a, \ldots, a) = a$ bolsa, $f(x_1, ..., x_n)$ funksiýa $a \in \{0, 1\}$ konstantany saklaýar.

Mysal üçin, xy funksiýa 0-y saklaýar, 1-i saklaýar. $x \to y$ funksiýa 1-i saklaýar we 0-y saklamaýar.

4.6. Utgaşdyrma we ýapyk klaslar

1-nji kesgitleme. Goý, $M \subseteq P_2$. M-iň üstünde formulalar bilen aňladyp bolýan P_2-däki ähli funksiýalaryň köplügine M-iň utgaşdyrmasy diýilýär.

M-iň utgaşdyrmasy $[M]$ ýaly bellenýär.

2-nji kesgitleme. Eger-de $[M]=M$ bolsa, M funksiýalar köplügine ýapyk klas diýilýär.

Mysalary getireliň: 1) P_2 – ýapyk klas.

2) $\{1, x_1 \oplus x_2\}$ köplük ýapyk klas däldir. Çyzykly klaslar funksiýasy $[\{1, x_1 \oplus x_2\}] = \{f(x_1, ..., x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus ... \oplus c_n x_n\}$ onuň utgaşdyrmasy bolup durýar. Hakykatdanam, M-iň üstündäki formulanyň kesgitlemesine görä, $f(G_1, x_3)$ funksiýa M-iň üstündäki formula bolar: $f(G_1, x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$, bu ýerde, f – 2-lik modul boýunça jem, $G_1 - x_1 \oplus x_2$-niň funksiýasy.

Bellik. Utgaşdyrma we ýapyk klas adalgalarynda dolulygyň, öňkä ekwiwalent başgaça kesgitlemesini berip bolar:

Eger-de $[M] = P_2$ bolsa, M – doly ulgamdyr.

3) $A = \{f(x_1,...,x_n) \,|\, f(1,1,...,1) = 0\}$ – ýapyk däl klas. Bu köplügiň üstündäki formulany alalyň. Goý, f, $g_1,...,g_n \in A$ bolsun, ýagny, $f(1,1,...,1) = 0$, $g_1(1,1,...,1) = 0$, onda $f(g_1,...,g_n) \in [A]$. $f(g_1,...,g_n)$ funksiýanyň A köplüge degişli ýa-da degişli däldigine seredeliň. $f(g_1(1,...,1),\ g_2(1,...,1),...,\ g_n(1,...,1) = f(0,...,0))$, ýöne $f(0,...,0)$-iň 0-a deň bolmagy hökman däl. Hakykatdanam, goý, $g_1(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$, $g_2(x) = x \in A$. Alarys: $g_2(g_1(x_1, x_2)) = x_1 \oplus x_2 \in [A]$, $g_2(g_1(1,1)) = 1 \oplus 1 = 0$, şeýlelikde, $g_2(g_1(x_1, x_2)) \notin A$, bu ýerden $[A] \neq A$ we A – ýapyk däl klas.

P_2-däki iň wajyp ýapyk klaslar

1) $T_0 - 0$ konstantany saklaýan funksiýalaryň klasy. $T_0 = \{f(x_1,...,x_n \,|\, f(0,...,0) = 0,\ n = 1,2,...\}$. T_0-yň P_2-niň hususy kiçi köplügidigini, ýagny $T_0 \neq \varnothing$ we $T_0 \subset P$ (P_2 bilen gabat gelmeýär) bolýandygyny görkezeliň.

Onuň üçin, T_0-a girýän funksiýalaryň mysallaryny we T_0-a girmeýän P_2-ä degişli funksiýalaryň mysallaryny getirmek ýeterlikdir: $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x \in T_0$ we $x_1 | x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $\bar{\bar{x}} \notin T_0$.

$[T_0] = T_0$ bolýandygyny görkezeliň. $T_0 \subseteq [T_0]$ degişlilik görnüp dur, sebäbi formulanyň kesgitlemesi boýunça, T_0-dan alnan islendik funksiýa T_0-yň üstündäki formula bolup durýar we şeýlelikde, $[T_0]$-a degişlidir. $[T_0] \subseteq T_0$ bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin, eger-de ähli funksiýalar $f, f_1, f_2, f_3, ..., f_m \in T_0$ bolanda, $\Phi = f(f_1, ..., f_m) \in [T_0]$ bolýandygyny görkezmeli. Formulada f_1 funksiýa hökmünde toždestwaly funksiýalar hasap edilýän üýtgeýänleri alyp bolýandygyny belläp geçmek gerek. Toždestwaly funksiýa T_0 klasa degişlidir, şonuň üçin, $\Phi = f\ (f_1, ..., f_m) \in T_0$ bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir. Onuň üçin aşakdaky funksiýa seredeliň: $\Phi(0, ..., 0) = f\ (f_1(0, ..., 0), f_2(0, ..., 0), ...) = f(0, ..., 0) = 0$.

n üýtgeýänlere bagly we T_0-a degişli funksiýalaryň sany: $|T_0(n)| = 2^{2^n-1}$.

2) T_1 – 1 konstantany saklaýan funksiýalaryň klasy. $T_1 = \{f(x_1, ...)\ |\ f(1, 1, ...) = 1\}$; $x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x \in T_1, x_1 \oplus x_2, x_1 \downarrow x_2 \notin T_1$, şeýlelikde, T_1 – P_2-niň hususy kiçi köplügi. $|T_1(n)| = 2^{2^n-1}$.

$[T_1] \subseteq T_1$ bolýandygyny görkezeliň, tersine degişlilik formulanyň we utgaşdyrmanyň kesgitlemesinden gelip çykýar. Toždestwalaýyn funksiýanyň T_1-e girýänligi üçin, $\Phi = f(f_1, ..., f_n) \in [T_1]$ seredip bolar, bu ýerde, $f, f_1, ..., f_n \in T_1$. Tapalyň: $\Phi(1, ..., 1) = f(f_1(1, ..., 1), ..., f_n(1, ..., 1)) = f(1, ..., 1) = 1$, şeýlelikde, $\Phi = f(f_1, ..., f_n) \in T_1$, bu ýerden, $[T_1] = T_1$ gelip çykýar.

3) S – Öz-özüne taýdaş funksiýalaryň klasy. $S = \{f(x_1, ...)\ |\ f^* = f\}$; $x, \bar{x}, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \in S, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2 \notin S$, şeýlelikde, S – P_2-niň hususy kiçi köplügi. $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$.

$[S] \subseteq S$ bolýandygyny görkezeliň. Eger-de $f, f_1, ..., f_n \in S$, şeýle-de, $\Phi \in S$ bolsa, $\Phi = f(f_1, ..., f_n) \in [S]$. Taýdaşlyk prinsipi boýunça, $\Phi^* = f^*(f_1^*, ..., f_n^*) = f(f_1, ..., f_n) = \Phi$, bu ýerden S – ýapyk klas.

4) L – çyzykly funksiýalaryň klasy. $L = \{f(x_1, ...)\ |\ f = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus ... \oplus c_nx_n\}$; görnüşi ýaly, $L \neq \varnothing$, başga tarapdan $L \neq P_2$, sebäbi $x_1 \& x_2 \notin L$. Toždestwo funksiýasynyň L-e degişlidigini we $|L(n)| = 2^{n+1}$ bolýandygyny belläp geçeliň. $[L] \subseteq L$ bolýandygyny görkezeliň. $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$-e seredeliň, bu ýerde, $f, f_1, ..., f_n \in L$. Onda $\Phi = a_0 \oplus a_1(\boldsymbol{c_{10} \oplus c_{11}x_1 \oplus ... \oplus c_{1n}x_{n1}}) \oplus$

$a_2(c_{20} \oplus c_{21}x_1 \oplus c_{22}x_2 \oplus ... \oplus c_{2n}x_{n2}) \oplus ... \oplus a_n(c_{m0} \oplus c_{m1}x_1 \oplus ... \oplus c_{mn}x_{nm}) =$ $в_0 \oplus в_1x_1 \oplus ... \oplus в_nx_n \Rightarrow \Phi \in L.$

Kesgitleme. $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ topar $\tilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ toparyň öň ýanyndan gelýär we $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ ýaly bellenýär, eger-de $1 \leq i \leq n$ bolanda, $\alpha_i \leq \beta_I$ bolsa, meselem: $\tilde{\alpha}$ = (0010), $\tilde{\beta}$ = (0110), onda $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$.

Islendik iki topar öň ýanyndan gelýär gatnaşykda bolup bilmez, meselem, (0110) we (1010) toparlar beýle gatnaşykda däldirler. Öň ýanyndan gelýän gatnaşyk ($\leq$) n uzynlykly toparlaryň köplügünde tertip gatnaşygy bolup durýar, şeýle toparlaryň köplügi amallara görä hususy tertipleşdirilen köplük bolup durýar.

Kesgitleme. Eger-de $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ bolan iki sany $\tilde{\alpha}$ we $\tilde{\beta}$ topar üçin, $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x_1, ..., x_n)$ funksiýa monoton funksiýa diýilýär.

0, 1, x, x_1 & x_2, $x_1 \vee x_2$ funksiýalar $\in M$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \sim x_2$ funksiýalar $\notin M$.

5) M – monoton funksiýalaryň klasy. n üýtgeýänlere bagly bolan monoton funksiýalaryň sany üçin ýokarky we aşaky bahalar bar, ýöne anyk sanyny kesgitläp bolmaýar. M-iň ýapyk klasdygyny görkezeliň.

$\Phi \in [M]$, $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$ funksiýa seredeliň, bu ýerde, $f, f_1, ..., f_m \in M$ şunlukda, olaryň ählisi n üýtgeýän ululyklara bagly diýip hasap edip bileris. Goý, $\tilde{\alpha}$ = $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\tilde{\beta}$ = $(\beta_1, ..., \beta_n)$. $\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ $= f(f_1(\alpha_1, ..., \alpha_n), \ldots, f_m(\alpha_1, ..., \alpha_n))$ we $\Phi(\beta_1, ..., \beta_n) = f(f_1(\beta_1, ..., \beta_n), ...,$ $f_m(\beta_1, ..., \beta_n))$ seredeliň. Bu ýerde, $f_1(\alpha) \leq f_1(\beta), ..., f_m(\alpha) \leq f_m(\beta)$, onda, topar üçin $(f_1(\alpha), ..., f_m(\alpha)) \leq (f_1(\beta), ..., f_m(\beta))$, ýöne onda $\Phi(\alpha) \leq \Phi(\beta)$, sebäbi $f \in M$, bu ýerden $\Phi = f(f_1, ...,)$ – monoton funksiýa.

Kesgitleme. Eger-de f funksiýa M-iň üstündäki käbir formula bilen aňladylýan bolsa, onda f funksiýa M-iň üstündäki superpozisiýadyr.

Monoton däl funksiýa hakynda lemma. Inkär etmäni 0 we 1 konstantalaryň toždestwo funksiýasy we monoton däl funksiýa bilen superpozisiýasyndan alyp bolar.

Subudy. Goý, $f(x_1, ..., x_n)$ – monoton däl funksiýa bolsun. Onda $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ we $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ toparlar bar bolup, olar üçin $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ ýöne $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Goý, argumentler üçin $\alpha_{i_p} < \beta_{i_p}$, $p = 1, \ldots, k$ ýerine ýetýän ähli $i_1, \ldots, i_k$ nomerleri bolsun. Galan argumentleriň j ýerinde

$a_j = b_j$. $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ aňlatmada nullary $i_1, \ldots, i_k$ ýerlerde x bilen çalşalyň. Netijede, $g(0) = f(\tilde{\alpha}) = 1$ we $g(1) = f(\tilde{\beta}) = 0$ deňlikler ýerine ýetýän $g(x)$ funksiýany alarys, $g(x)$ funksiýa inkär etme bolup durýar.

T_0, T_1, L, S, M klaslar kesişýärler, ýöne gabat gelmeýärler, şeýledigi aşakdaky tablisadan görünýär, bu ýerde “+” funksiýanyň berlen klasa degişlidigini we “–” – degişli däldigini aňladýar.

	T_0	T_1	L	S	M
x	+	+	+	+	+
$\bar{x}$	–	–	+	+	–
0	+	–	+	–	+
1	–	+	+	–	+
x_1x_2	+	+	–	–	+

$A = \{x, \bar{x}, 0, 1, x_1x_2)$ doly ulgam däldir, sebäbi elmydama P_2-ä degişli bolan, bu klaslara degişli däl funksiýalar bardyr.

Meseleler

1. Islendik iki sany ýapyk klasyň kesişmesiniň ýapykdygyny subut etmeli.
2. Islendik iki sany ýapyk klasyň birleşmesiniň elmydama ýapyk däldigini subut etmeli.

Dolulyk barada Postuň teoremasy

Teorema. Funksiýalar ulgamynyň doly bolmagy üçin onuň T_0, T_1, L, S, M klaslaryň birine hem doly girmeýän bolmagy zerurdyr we ýeterlikdir.

Subudy. Bu şertiň zerurlygyny subut edeliň. Goý, $N = \{f_1, f_2, \ldots f_s, \ldots\}$ P_2-de doly bolsun, onda onuň Q-da doly ýatmaýanlygyny görkezeliň, Q bilen biz T_0, T_1, L, S, M klaslaryň islendigini belleýäris. Ters güman etmek arkaly subut edeliň. Goý, $N \subseteq Q$, görnüşi ýaly, $[N] \subseteq [Q] = Q$, ýöne $[N] = P_2$, sebäbi N – P_2-de doly, bu ýerden, $P_2 = Q$, hakykatda bu beýle däl. Zerurlygy subut edildi.

Ýeterlikligi subut edeliň. Goý, $F = \{f_0, f_1, f_L, f_m, f_s\}$, bu ýerde, $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_L \notin L$, $f_s \notin S$ и $f_m \notin M$. F funksiýalar ulgamynyň superpozisiýasyndan $G = \{x_1 \,\&\, x_2, \bar{x}\}$ doly ulgamny alyp bolar.

1. Goý, $g(x) = f_0(x, \ldots, x)$. Onda $g(0)=f(0, \ldots, 0) = 1$. Soňra iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

a) $g(1) = 1$. Onda $g(x) \equiv 1$. Funksiýa $h(x) = f_1(g(x), \ldots, g(x)) = f_1(1, \ldots, 1) = 0$, ýagny $h(x) \equiv 0$. 0 we 1 konstantalary aldyk;

b) $g(1) = 0$. Onda $g(x) = \bar{x}$. Öz-özüne taýdaş däl funksiýalar hakyndaky lemma boýunça $\{f_s, \bar{x}\}$-iň üstündäki superpozisiýa bilen konstantalaryň, meselem, 0-y alyp bolar. Onda $f_0(0, \ldots, 0) = 1$ beýleki konstantadyr.

Iki ýagdaýda hem konstantalaryň ikisinem aldyk.

2. Monoton däl funksiýalar hakyndaky lemma boýunça $\{f_m, 0, 1\}$-iň üstündäki superpozisiýa bilen inkär etmäni alyp bolar.

3. Çyzykly däl funksiýalar hakyndaky lemma boýunça $\{f_L, 1, \bar{x}\}$-iň üstündäki superpozisiýa bilen konýunksiýany alyp bolar. Teorema subut edildi.

Netije. P_2 bilen gabat gelmeýän, P_2-däki islendik ýapyk klas T_0, T_1, L, S, M ýapyk klaslaryň iň bolmanda birinde saklanýar.

Hakykatdan hem, eger-de NQ-nyň kiçi köplügi bolmasa, onda $[N] = P_2$, bu deňlik bolsa dogry däldir.

Postuň teoremasynyň ulanylyşyna mysallar

1. $\{f_1 = x_1x_2,\ f_2 = 0,\ f_3 = 1,\ f_4 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ funksiýalar ulgamynyň P_2-de dolydygyny görkezeliň. Kriterial diýip atlandyrylýan tablisany düzeliň:

	T_0	T_1	L	M	S
x_1x_2	+	+	–	+	–
0	+	–	+	+	–
1	–	+	+	+	–
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	+	+	+	–	+

$x_1x_2x_3$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0 0 0	0
0 1 1	0
1 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

Biz haýsy klasy alsak hem, berlen funksiýalar ulgamynda bu klasa girmeýän funksiýanyň barlygy tablisadan görünýär. Şeýle düzgüni getirip bolar: funksiýalar ulgamynyň doly bolmagy üçin, kriterial tablisanyň her bir sütüninde iň bolmanda bir “minus”-yň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Getirilen ulgam degişli bolan ýene bir ýagdaýy belläp geçeliň. Ulgamdan haýsy funksiýany aýyrmagymyza garamazdan, ulgam doly däl bolar, hakykatdan hem, $\{f_2, f_3, f_4\} \subset L$, $\{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1$, $\{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0$, $\{f_1, f_2, f_3\} \subset M$.

2. Biz $\{x_1|x_2\}$ ulgamnyň P_2-de dolydygyny bilýäris. Onuň kriterial tablisasy nähili bolar? $x_1|x_2 = \overline{x_1x_2} = x_1x_2 \oplus 1$.

	T_0	T_1	L	M	S
$x_1\|x_2$	–	–	–	–	–

3. P_2-de başga bir doly ulgamyň kriterial tablisasyny düzeliň: $\{0, 1, x_1x_2, x_1 \oplus x_2\}$.

	T_0	T_1	L	M	S
0	+	–	+	+	–
1	–	+	+	+	–
x_1x_2	+	+	–	+	–
$x_1 \oplus x_2$	+	–	+	–	–

Kriterial tablisa görä, $\{1, x_1x_2, x_1 \oplus x_2\}$ ulgam hem doludyr. 0 konstanta bu ulgam amatlylyk üçin girizilen. Onda biz Žegalkiniň polinomyny, eger-de $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ agzalar polinomda ýok bolsalar, $a_{i_1i_2\dots i_s}$-laryň 0-a deň bolan görnüşinde ýazyp bileris.

4. $A=(L\cap T_1)\cup(S\setminus T_0)$ ulgamnyň doly ya-da doly däldigini anyklalyň. Kriteriýal tablisany düzeliň, görnüşi ýaly, $L\cap T_1\subseteq L, T_1$. $L\cap T_1 \notin T_0$ bolýanlygyny görkezmek üçin, $f\in L\cap T_1$ we $f\notin T_0$ funksiýany tapmak ýeterlikdir. Berlen şertleri kanagatlandyrýan $f=x_1\oplus x_2\oplus 1$-i alalyň. Eger-de $f\in S\setminus T_0$, onda $f(0,..., 0) = 1, f(1,..., 1) = 0$, şeýlelikde, $f\notin M, f\notin T_1$. $h = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 = 1$ funksiýa seredeliň, onuň bahalar toplumy: (11101000), $h \in S\setminus T_0$, ýöne $h \notin L$. Şeýlelikde, kriterial tablisa aşakdaky görnüşe eýedir:

	T_0	T_1	L	M	S
$L \cap T_1$	–	+	+	–	–
$S \setminus T_0$	–	–	–	+	–

A – doly funksiýalar ulgamy.

Kesgitleme. Eger-de $\{f_1, ..., f_s, ...\}$ funksiýalar ulgamy P_2-de doly bolsa, ýöne onuň islendik kiçi ulgamy doly däl bolsa, onda oňa P_2-de bazis diýilýär. Mysal üçin, $\{x_1 \& x_2, 0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ funksiýalar ulgamy bazisdir.

Dört funksiýanyň ýeterlikligi hakynda teorema

Teorema: P_2-däki islendik doly funksiýalar ulgamyndan dörtden köp bolmadyk funksiýadan durýan doly kiçi ulgamy alyp bolar.

Subudy. Goý, $\{f_0, f_1, f_L, f_M, f_S\}$ – doly funksiýalar ulgamy bolsun, onda ol T_0, T_1, L, M, S klaslaryň hiç birinde hem doly ýatmaýar. Şeýlelikde, ulgamda $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_L \notin L, f_S \notin S$ и $f_m \notin M$ funksiýalar bar. Ulgam $\{f_0, f_1, f_L, f_M, f_S\} \subseteq P_2$ we P_2-de doly ulgamy emele getirýär. f_0: $f_0(0, ..., 0) = 1$ funksiýa seredeliň.

Eger-de $f_0(1, ..., 1) = 0$ bolsa, onda $f_0 \notin T_1$ we $f_0 \notin M$, onda $\{f_0, f_S, f_L\}$ – üç funksiýadan ybarat doly ulgam.

Eger-de $f_0(1, ..., 1) = 1$, onda $f_0 \notin S$ we $\{f_0, f_1, f_L, f_M\}$ dört funksiýadan ybarat doly ulgamny emele getirýär.

Ýokarda getirilen 1-nji mysal 4-lik sifri umumy ýagdaýda azaldyp bolmanlygyny görkezýär, $\{x_1 x_2, 0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ doly ulgamdan doly kiçi ulgamy alyp bolmaýar.

Netije. P_2-däki bazis iň köp bolanda 4 funksiýadan durup biler.

4.7. *k* bahaly logikanyň funksiýalary

Belgi girizeliň: $E_k = \{0, 1, 2, ..., k-1\}$.

n üýtgeýänlere bagly k belgili logikanyň funksiýalary – $E_k^n \Rightarrow E_k$ şöhlelendirýän kanundyr. k belgili logikanyň funksiýalar köplügi P_k ýaly bellenýär. Eger-de çynlyk tablisasy, ýagny ähli toplumlardaky bahalar köplügi berlen bolsa, onda P_k-däki funksiýa doly kesgitlenen diýilýär. Toplumlary k-lyk hasaplaýyş ulgamynda 0-dan k–1-e çenli sanlaryň ýazgysy hökmünde seredip bolar, ähli toplumlaryň sany k^n. n üýtgeýän ululyklara bagly P_k-däki funksiýalar $|P_3(n)|$ bolar, meselem, $n=2$ bolanda, $k=3$ bolar, onda $|P_3(2)| = 3^9 = 19683$ $(k=3, n=2)$.

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	f
0	0	...	0	0	.
0	0	...	0	1	.
...	...	...	...	...	.
0	0	...	0	$k-1$	.
0	0	...	1	0	.
...	...	...	...	...	.
$k-1$	$k-1$	...	$k-1$	$k-1$	.

k belgili logikada elementar diýlip atlandyrylýan funksiýalar hem bardyr. Olaryň käbirini getireliň, mysallary $k = 3$ we $n = 2$ üçin getireliň.

1. Siklli süýşme ýa-da Postuň inkär etmesi: $\bar{x} = x + 1(\mathrm{mod}\ k)$.

2. Zerkal şöhlelenme ýa-da Lukosewiçiň inkär etmesi: $N_x = k-1-x$. Şu iki funksiýa inkär etmäniň umumylaşdyrmasy bolup durýar.

3. $J_i(x) = \{k-1,\ x = i,\ I = 0, 1, 2, ..., k-1\}$.

x_1	x_2	N_x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
0	1	2	2	0	0
1	2	1	0	2	0
2	0	0	0	0	2

4. $\min(x_1, x_2)$ – konýunksiýanyň umumylaşdyrmasy;

5. $x_1 \cdot x_2(\mathrm{mod}\ k)$ – konýunksiýanyň ikinji umumylaşdyrmasy;

6. $\max(x_1, x_2)$ – dizýunksiýanyň umumylaşdyrmasy;

7. $x_1 + x_2(\mathrm{mod}\ k)$ – mod k boýunça jem.

x_1	x_2	$\min(x_1, x_2)$	$x_1x_2(\mathrm{mod}\ 3)$	$\max(x_1, x_2)$	$x_1+x_2(\mathrm{mod}\ 3)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	2	0	0	2	2
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	2
1	2	1	2	2	0
2	0	0	0	2	2
2	1	1	2	2	0
2	2	2	1	2	1

$\min(x_1,x_2)$ –y $x_1 \& x_2$ ýaly bellemek, $\max(x_1,x_2)$ –y $x_1 \vee x_2$ ýaly bellemek kabul edilen. Iki belgili logikadaky ýaly köplügiň üstündäki formula düşünjesini girizip bolar we P_k-däki doly funksiýalar ulgamy baradaky soragy goýup bolar.

P_k-däki doly funksiýalar ulgamy barada teorema

$\{\max(x_1,x_2),\ \ \min(x_1,x_2), 0, 1, ..., k-1,\ \ J_0(x),\ \ J_1(x), ..., J_{k\text{-}1}(x)\}$ funksiýalar ulgamy P_k-de doludyr we islendik $f(x_1, ..., x_n) \in P_k$ funksiýa bu ulgamyň üstünde formula bilen aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \max_{(i_1,\ldots,i_n)\in E_K^n} \left\{\min\left[J_{i_1}(x_1), J_{i_2}(x_2),\ldots,J_{i_n}(x_n), f(i_1,\ldots,i_n)\right]\right\}.$$

Bu formula KDNF-iň özboluşly meňzeşligidir.

Subudy. Bu formulanyň islendik erkin $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplumda dogrydygyny görkezeliň. Çepinde $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ alarys. Sagynda

$$\max_{(i_1,\ldots,i_n)\in E_K^n} \left\{\min\left[J_{i_1}(\alpha_1), J_{i_2}(\alpha_2),\ldots,J_{i_n}(\alpha_n), f(i_1,\ldots,i_n)\right]\right\} \text{ alarys.}$$

Eger-de haýsy hem bolsa bir $\{1, 2, ..., n\}$-däki bolan j üçin $i_j \neq \alpha_j$, onda $J_{i_j}(\alpha_j) = 0$ we $\min[J_{i_1}(\alpha_1),\ J_{i_2}(\alpha_2),\ \ldots,\ J_{i_n}(\alpha_n), f(i_1, .., i_n)] = 0$. $(i_1, ..., i_n)$ topluma seredeliň, bu ýerde, $i_1 = \alpha_1$, $i_2 = \alpha_2, ..., i_n = \alpha_n$, onda $J_{\alpha_1}(\alpha_1) = k-1$, $J_{\alpha_2}(\alpha_2) = k-1, ..,\ J_{\alpha_n}(\alpha_n) = k-1$ we $\min[J_{\alpha_1}(\alpha_1), ...,\ J_{\alpha_n}$ $(\alpha_n) f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).] = \min[(k-1), ..., (k-1), f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).] = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ýöne, onda $\max\limits_{(i_1,\ldots,i_n)\in E_K^n} \{0, f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\} = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

$(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ toplumyň erkin bolany üçin onuň üstünde deňlik dogrudyr, onda formula dogry. Bu formulada $J_i(x)$, $(i = 0, ..., k-1)$, $\min(x_1 x_2)$, $\max(x_1 x_2)$ funksiýalar we $0, ..., k-1$ konstantalar ulanyldy, sebäbi $f(i_1, ..., i_n)$ funksiýalar $\{0, 1, ..., k-1\}$-dan alnan sanlardyr.

4.8. Logiki algebranyň funksiýalaryna degişli meseleler we gönükmeler

Logiki algebranyň funksiýalary bilen amallar geçirilende aşakdaky ekwiwalentlikler peýdaly bolýarlar (adatça olaryň köpüsini logiki algebranyňesasy ekwiwalentlikleri diýip atlandyrýarlar). Degişli funksiýalar üçin tablisalary gurup, aşakdaky ekwiwalentlikleriň dogrulygyna göz ýetiriň:

1. $x*y=y*x$ – baglanyşygyň kommutatiwligi *, bu ýerde, * simwol &, $\vee$, $\oplus$, ~, |, $\downarrow$ baglanyşyklaryň umumy belligi bolup durýar.

2. $(x*y)*z=x*(y*z)$ – baglanyşygyň assosiatiwligi *, bu ýerde, * – &, $\vee$, $\oplus$, ~ baglanyşyklaryň umumy belligi.

3. Distributiwlik:

a) $x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$ – konýunksiýanyň dizýunksiýa görä distributiwligi;

b) $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$ – dizýunksiýanyň konýunksiýa görä distributiwligi;

ç) $x \,\&\, (y \oplus z) = (x \,\&\, y) \oplus (x \,\&\, z)$ – konýunksiýanyň mod 2 boýunça jemine görä distributiwligi.

4. a) $\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; b) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$ de Morganyň düzgüniniň mazmuny.

5. a) $x \vee (x \,\&\, y) = x$; b) $x \,\&\, (x \vee y) = x$ içinde saklamak düzgüniniň mazmuny.

6. a) $x \vee (\bar{x} \,\&\, y) = x \vee y$; b) $x \,\&\, (\bar{x} \vee y) = x \,\&\, y$.

7. a) $x \,\&\, \bar{x} = x \,\&\, 0 = x \oplus x = 0$; b) $x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \sim x = x \rightarrow x = 1$;

ç) $x \vee x = x \,\&\, x = x \,\&\, 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$;

d) $x \oplus 1 = x \rightarrow 0 = x \sim 0 = x | x = \downarrow x = \bar{x}$; д) $\bar{\bar{x}} = x$.

8. a) $x \oplus y = (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y) = (x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y})$;

b) $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \,\&\, y) \vee (\bar{x} \,\&\, \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \,\&\, (\bar{x} \vee y)$;

ç) $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = ((x \,\&\, y) \oplus x) \oplus 1$.

9. a) $x | y = \overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; b) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

1. Degişli funksiýalaryň tablasalaryny gurmaly, υ we σ formulalaryň ekwiwalent ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $\upsilon = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow x \cdot y)$, $\quad \sigma = \overline{y \,\&\, z \rightarrow x}$;

2) $\upsilon = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow \bar{z}))$, $\quad \sigma = \overline{y \rightarrow (x \vee z)}$;

3) $\upsilon = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow y \cdot z)$, $\quad \sigma = (x \vee (y \rightarrow z)) \cdot (x \oplus y)$;

4) $\upsilon = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \,|\, (x \oplus y \cdot z)$, $\quad \sigma = \bar{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \rightarrow z}$;

5) $\upsilon = ((x \vee y) \cdot \bar{z} \rightarrow ((x \sim \bar{z}) \oplus \bar{y})) \cdot ((x \oplus y) \cdot \bar{z})$, $\sigma = (x \rightarrow y \,\&\, z) \,\&\, \overline{x \rightarrow y}$;

6) $\upsilon=(\bar{x}\vee y)\to((y\mid\bar{z})\to(x\sim x\cdot z)),\ \sigma=xy\vee(\overline{x\to x\bar{y}}\to z);$

7) $\upsilon=(x\mid\bar{y})\to((y\downarrow\bar{z})\to(x\oplus z)),\quad \sigma=x\cdot(y\cdot z)\oplus(\bar{x}\to z);$

8) $\upsilon=(((x|y)\downarrow\bar{z})|y)\downarrow(\bar{y}\to z),\sigma=((x|y)\downarrow(y|\bar{z}))\cdot(x\to(y\to z));$

9) $\upsilon=(x\cdot y\to z)\vee((x\downarrow y)|z),\sigma=((x\to y\cdot z)\oplus(x\sim y))\vee(y\to x\cdot z);$

10) $\upsilon=\overline{x\oplus y\cdot z\cdot\bar{y}\to x\cdot z}\cdot(\bar{x}\downarrow y),\qquad \sigma=\overline{(xy\to(y\downarrow z))\vee x\cdot z}\cdot z.$

Jogaby: 2), 6), 9), 10) – ekwiwalent; 3), 7) – ekwiwalent däl.

2. Degişli funksiýalaryň tablisalaryny gurmak arkaly, aşakdaky ekwiwalentlikleriň dogrylygyna göz ýetirmeli:

1) $x\vee y=(x\to y)\to y;$

2) $x\sim y=(x\to y)\&(y\to x);$

3) $x\downarrow y=((x\mid x)\mid(y\mid y))\mid((x\mid x)\mid(y\mid y));$

4) $x\vee(y\sim z)=(x\vee y)\sim(x\vee z);$

5) $x\&(y\sim z)=((x\&y)\sim(x\&z))\sim x;$

6) $x\to(y\sim z)=(x\to y)\sim(x\to z);$

7) $x\vee(y\to z)=(x\vee y)\to(x\vee z);$

8) $x\&(y\to z)=(x\to y)\to(x\&z);$

9) $x\to(y\vee z)=(x\to y)\vee(x\to z);$

10) $x\to(y\&z)=(x\to y)\&(x\to z);$

11) $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z).$

3. Ýokarda getirilen esasy ekwiwalentlikleri we gatnaşyklary ulanyp, V we U formulalaryň ekwiwalentligini subut etmeli.

1) $V=(\bar{x}\to y)\to(\bar{x}\cdot y\sim(x\oplus y)),\qquad U=(\overline{x\cdot y}\to x)\to y;$

2) $V=(x\cdot y\vee(\bar{x}\to y\cdot z))\sim((\bar{x}\to\bar{y})\to z),\quad U=(x\to y)\oplus(y\oplus z);$

3) $V=(x\oplus y\cdot z)\to(\bar{x}\to(y\to z)),\qquad U=x\to((y\to z)\to x);$

4) $V=(\bar{x}\to(\bar{y}\to(x\sim z)))\cdot(x\sim(y\to(z\vee(x\to y)))),U=(x\to(y\to z))\to x;$

Jogaby:

$$V=(\overline{\overline{x}}\vee\overline{\overline{y}}\vee(x\sim z))\cdot(x\sim(\overline{y}\vee z\vee\overline{x}\vee y))=$$

$$=(x\vee y\vee xz\vee\overline{x}\overline{z})\cdot(x\sim 1)=(x\vee y\vee\overline{z})\,\&\,x=x$$

$$U=\overline{\overline{x}\vee\overline{y}\vee z}\vee x=xy\overline{z}\vee x=x.$$

5) $V=(\overline{x}\vee\overline{y}\cdot z)\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow((y\vee z)\rightarrow\overline{x})),\ U=(x\rightarrow y)\rightarrow(\overline{y}\rightarrow\overline{x});$

6) $V=(x\cdot\overline{y}\vee\overline{x}\cdot z)\oplus((y\rightarrow z)\rightarrow\overline{x}\cdot y),\qquad U=(x\cdot(\overline{y}\cdot\overline{z})\oplus y)\oplus z;$

7) $V=x\rightarrow((\overline{x}\cdot\overline{y}\rightarrow(\overline{x}\cdot\overline{z}\rightarrow y))\rightarrow y)\cdot z,\ \ U=\overline{x\cdot(y\rightarrow\overline{z})};$

8) $V=\overline{(x\sim y)\rightarrow(x\rightarrow\overline{z})}\vee(x\oplus\overline{y}\cdot z),\qquad U=x\sim(z\rightarrow y);$

9) $V=\overline{(x\vee\overline{y}\cdot\overline{z})\cdot(\overline{x}\rightarrow\overline{y}\cdot z)}\cdot(x\rightarrow(y\sim z)),\ U=((x\rightarrow y)\sim(y\rightarrow(x\rightarrow z)))\oplus x\cdot(y\cdot z);$

Jogaby:

$$V=\left(\overline{x\vee\overline{yz}}\vee\overline{\overline{\overline{x}}\vee\overline{yz}}\right)\cdot(\overline{x}\vee(y\sim z))=(\overline{x}(y\vee z)\vee\overline{x}(y\vee\overline{z}))\cdot(\overline{x}\vee yz\vee\overline{y}\overline{z})=$$

$$=(\overline{x}y\vee\overline{x}z\vee\overline{x}\overline{z})\cdot(\overline{x}\vee yz\vee\overline{y}\overline{z})=\overline{x}\cdot(\overline{x}\vee yz\vee\overline{y}\overline{z})=\overline{x};$$

$$U=((\overline{x}\vee y)\sim(\overline{y}\vee\overline{x}\vee z))\oplus xyz=((\overline{x}y\oplus\overline{x}\oplus y)\oplus xy\overline{z}\oplus xyz=$$

$$=xy\oplus y\oplus\overline{x}\oplus y\oplus xy=\overline{x}.$$

10) $V=\overline{((x\vee y)\rightarrow y\cdot z)\vee(y\rightarrow x\cdot z)}\vee(x\rightarrow(\overline{y}\rightarrow z)),\ U=(x\rightarrow y)\vee z.$

4. Bul funksiýalarynyň taýdaşlygynyň göni kesgitlemesini, şonuň ýaly-da, esasy ekwiwalentlikleri we gatnaşyklary ulanyp, g funksiýanyň f funksiýa taýdaşdygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $f=x\oplus y,$	$g=x\sim y;$
2) $f=x\mid y,$	$g=x\downarrow y;$
3) $f=x\rightarrow y,$	$g=\overline{x}\cdot y;$
4) $f=(\overline{x}\rightarrow\overline{y})\rightarrow(y\rightarrow x),$	$g=(x\rightarrow y)\cdot(\overline{y}\rightarrow\overline{x});$
5) $f=x\oplus y\oplus z,$	$g=x\oplus y\oplus z;$
6) $f=x\cdot y\vee z,$	$g=x\cdot(y\vee z);$
7) $f=xy\oplus xz\oplus yz,$	$g=xy\vee xz\vee yz;$
8) $f=x\cdot y\rightarrow z,$	$g=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z;$
9) $f=(x\vee y\vee z)\cdot t\vee x\cdot y\cdot z,$	$g=(x\vee y\vee z)\cdot t\vee x\cdot y\cdot z;$
10) $f=xy\vee yz\vee zt\vee tx,$	$g=xz\vee yt;$

11) $f = (x \vee y) \to (z \oplus t)$, $g = (x \mid y) \cdot (z \sim t)$;

12) $f = (x \to y) \cdot (z \to t)$, $g = (x \to \bar{z}) \cdot (x \to t) \cdot (\bar{y} \to \bar{z}) \cdot (\bar{y} \to t)$.

Jogaby: 4) $f^{*} = \overline{(\bar{\bar{x}} \to \bar{\bar{y}}) \to (\bar{y} \to \bar{x})} = \overline{\overline{\bar{x} \vee y} \vee (y \vee \bar{x})} = \bar{1} = 0$, $g = (\bar{x} \vee y) \& (y \vee \bar{x}) = x \to y \neq 0$. Ýagny, g f-e taýdaş däl. 6) – taýdaş däl; 8), 9), 11) – taýdaş.

5. Taýdaşlyk tärini ulanyp, f funksiýa taýdaş funksiýany emele getirýän formulany gurnamaly, alnan formulanyň V formula ekwiwalentdigine göz ýetirmeli:

1) $f = x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$, $V = x \cdot (y \oplus z)$;

2) $f = (x \downarrow y) \oplus ((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \sim y \cdot z))$, $V = x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{y} \cdot z$;

3) $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee (y \cdot \bar{z} \oplus 1)) \downarrow z$, $V = x \vee y \vee \bar{z}$;

4) $f = x \cdot y \vee y \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot z$, $V = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee y \cdot z$;

5) $f = ((x \to y) \vee z) \cdot (y \cdot \bar{z} \to (x \oplus y \cdot z))$, $V = (x \oplus y) \cdot z$;

6) $f = (((x \vee \bar{y} \vee (y \cdot z \sim 1)) \oplus 1) \to 0) \mid y$, $V = \overline{x \cdot z \vee y}$;

7) $f = (x \vee y \vee \bar{z}) \to (x \cdot \bar{y} \sim (x \oplus y \cdot \bar{z}))$, $V = (x \sim z) \cdot \bar{y}$;

8) $f = x \cdot y \vee y \cdot z \vee z \cdot t$, $V = x \cdot z \vee z \cdot y \vee y \cdot t$;

9) $f = (x \vee y \vee \bar{z}) \cdot \bar{t} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$, $V = (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot \bar{t} \vee x \cdot y \cdot \bar{z}$;

10) $f = (x \cdot (y \cdot z \vee 0) \sim (t \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot \mathrm{y})) \vee \bar{y} \cdot t$, $V = (x \vee (z \oplus t)) \cdot \bar{y}$.

Jogaby:

1) $f^{*} = \left(x \& 1 \vee y \& (z \vee 0) \vee \bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}\right)^{*} = (x \vee 0) \& (y \vee z) \& (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) =$

$= x \& \left((y \oplus z) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z})\right) = x \cdot (y \oplus z)$;

2) $f^{*} = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$; 5) $f^{*} = (x \oplus y) \& z$; 10) $f^{*} = (x \vee (z \oplus t)) \& \bar{y}$.

6. f funksiýanyň ähli fiktiw (goşulan) üýtgeýänlerini görkezmeli:

1) $f(\tilde{x}^{3}) = (10101010)$; 4) $f(\tilde{x}^{4}) = (1011010110110101)$;

2) $f(\tilde{x}^{3}) = (01100110)$; 5) $f(\tilde{x}^{4}) = (0101111101011111)$;

3) $f(\tilde{x}^{3}) = (11110011)$; 6) $f(\tilde{x}^{4}) = (1100110000110011)$.

Jogaby:

1) iki sany fiktiw üýtgeýäni bar;

3) bir sany fiktiw üýtgeýäni bar;

5) x_1 we x_3 fiktiw üýtgeýänleri bar.

7. x_1-iň f funksiýanyň fiktiw üýtgeýänidigini görkezmeli (bu maksat bilen f funksiýany x_1 üýtgeýäni gös-göni özünde saklamaýan formula görnüşinde aňlatmaly):

1) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$;

2) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 \mid x_2)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot \overline{x_3 \to x_2}$;

4) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2) \to (x_1 \sim x_3)) \cdot x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_3) \sim (\overline{x}_1 \to \overline{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \to (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$;

7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_4)) \sim x_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \overline{x}_4$;

8) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \to x_3))$;

9) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 x_2 \vee x_3 x_4) \cdot ((x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus (x_1 x_2 (x_3 \to x_4) \vee x_3 x_4)$;

10) $f(\tilde{x}^4) = ((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_4) \mid (x_3 \downarrow x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$.

Jogaby: 4), 8), 10) – $f \equiv 1$;
9) $f \equiv 0$.

8. f funksiýadan toždestwolaşdyryp we ondaky üýtgeýänlere täze at goýup, g funksiýany alyp boljakdygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $f(\tilde{x}^3) = (11001011)$, $g(\tilde{x}^2) = (1011)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (10101100)$, $g(\tilde{x}^2) = (1000)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (00110010)$, $g(\tilde{x}^2) = (0110)$;

4) $f(\tilde{x}^4) = (0110110111100011)$, $g(\tilde{x}^3) = (01100111)$;

5) $f(\tilde{x}^4) = (1111110100011011)$, $g(\tilde{x}^2) = (1001)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee x_2 \overline{x}_3$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 x_2$;

7) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) x_3 \oplus x_1 \overline{x}_2$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$;

8) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$;

9) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 x_2 \vee \overline{x}_3 \overline{x}_4) \to (x_1 \overline{x}_2 \to (x_3 \vee x_4))$, $g(\tilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

10) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \overline{x}_2 \vee x_3 \overline{x}_4) \oplus (\overline{x}_1 \overline{x}_4 \vee x_2 \overline{x}_3)$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 \mid x_2$.

Jogaby: 1), 2), 5), 7), 8), 9), 10) – mümkin;
3), 4), 6) – mümkin däl.

9. Aşakdaky funksiýalary KDNF-de aňlatmaly:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \to x_3;$

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 | x_2 x_3);$

3) $f(\tilde{x}^3) = (01010001);$

4) $f(\tilde{x}^3) = (01111000);$

5) $f(\tilde{x}^3) = (10001111);$

6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_2 x_3 x_4) \cdot (x_3 \to x_1 \overline{x}_2);$

7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \to \overline{x}_2 x_4);$

8) $f(\tilde{x}^4) = (0100100011000010);$

9) $f(\tilde{x}^4) = (1000011100110001);$

10) $f(\tilde{x}^4) = (1100100010010011);$

Jogaby:

2) $x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3;$

4) $\overline{x}_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3,$

7) $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4.$

10. Aşakdaky funksiýalary KDNF-de aňlatmaly:

1) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2);$

2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \downarrow x_2;$

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_2 x_3;$

4) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \oplus x_3;$

5) $f(\tilde{x}^3) = (01011101);$

6) $f(\tilde{x}^3) = (00101110);$

7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot x_4 \vee \overline{x}_x \overline{x}_2 \overline{x}_3;$

8) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \to (x_2 \to x_3 x_4);$

9) $f(\tilde{x}^4) = (0101111101110011);$

10) $f(\tilde{x}^4) = (0110111011100101).$

Jogaby:

1) $(x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2;$

2) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2);$

6) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3);$

8) $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4).$

11. Ekwiwalent özgertmeleriň kömegi bilen $f(\tilde{x}^n)$ funksiýanyň DNF-ini gurmaly:

1) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 x_2 \vee x_3);$

2) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x}_1 x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 x_3 \to x_2);$

3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 x_3 \oplus (x_2 \to x_3));$

4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2x_3) \mid ((\bar{x}_1 \mid x_2) \downarrow x_3);$

5) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1 \to (x_2 \to x_3)} \oplus (x_1 \mid (x_2 \oplus x_3));$

6) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_3} \sim (x_1 \to x_2\bar{x}_3);$

7) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3) \cdot (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\overline{x_1x_2} \vee x_3);$

8) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4)((\bar{x}_1 \vee x_4) \oplus x_2x_3) \vee \bar{x}_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_1x_4});$

9) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to \bar{x}_3) \cdot (x_3 \to x_1\bar{x}_4);$

10) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot ((x_2 \mid x_3) \vee x_1\bar{x}_4) \cdot (x_1 \downarrow (x_3 \mid x_4)).$

Jogaby:

4) $f(\tilde{x}^3) = \overline{\overline{x_1 \vee x_2x_3} \cdot \overline{\overline{\bar{x}_1x_2} \vee x_3}} = (x_1 \vee x_2x_3) \vee (\overline{\bar{x}_1x_2} \vee x_3) =$

$= x_1 \vee x_2x_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3;$

10) $f(\tilde{x}^4) = \overline{x_1 \vee x_2}(\overline{x_2x_3} \vee x_x\bar{x}_4)\overline{x_1 \vee \overline{\overline{x_3x_4}}} = \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4)\bar{x}_x x_3x_4 =$

$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4.$

12. Ekwiwalent özgertmeleri ulanyp, $f(\tilde{x}^n)$ funksiýanyň KNF-ini gurmaly:

1) $f(\tilde{x}^2) = ((x_1 \to x_2) \oplus (\bar{x}_1 \mid x_2)) \cdot (x_1 \sim x_2 \cdot (x_1 \to x_2));$

2) $f(\tilde{x}^2) = \overline{x_1x_2} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\bar{x}_1 \to x_2)));$

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee (x_1 \to x_2x_3);$

4) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \to (x_2 \to x_3)) \oplus x_1\bar{x}_2x_3;$

5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim (x_2 \to x_3)) \vee (x_2 \to x_1x_3);$

6) $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_4;$

7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1x_3 \sim x_4) \vee x_2\bar{x}_3.$

Jogaby:

1) $f(\tilde{x}^2) = ((\bar{x}_1 \vee x_2) \oplus \overline{\bar{x}_1x_2})(x_1 \sim x_2(\bar{x}_1 \vee x_2)) = (\overline{x_1\bar{x}_2} \oplus \overline{\bar{x}_1x_2})(x_1 \sim x_2) =$

$= (x_1 \oplus x_2)(x_1 \sim x_2) = 0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2);$

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3;$

6) $f(\tilde{x}^4) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4).$

13. $A = A \cdot \bar{x} \vee A \cdot x$ we $A \vee A = A$, görnüşli özgertmeleri ulanyp, $f(\tilde{x}^n)$ funksiýanyň berlin DNF-inden onuň kämilleşen DNF-ini gurmaly:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_3$;
2) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$;
3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$;
4) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_3$;
5) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3$;
6) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4$;
7) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_3\bar{x}_4$;
8) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_4$.

Jogaby:

2) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 =$
$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;

5) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 =$
$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$.

14. $A=(A \vee x)\cdot(A \vee \bar{x})$ и $A \cdot A = A$ görnüşli özgertmeleri ulanyp, $f(\tilde{x}^n)$ funksiýanyň berlin KNF-inden onuň kämilleşen KNF-ini gurmaly:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2)\cdot x_3$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_2 \vee x_3)\cdot \bar{x}_3$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_3)\cdot(x_2 \vee x_3)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_3)$;
5) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\cdot x_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_2 \vee x_3)$;
6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$;
7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_2 \vee x_3)\cdot(\bar{x}_3 \vee x_4)$;
8) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

Jogaby:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3) =$
$= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)$
$(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\,\&\,(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)$.

15. $x(y\vee z)=xy\vee xz$ distributiw kanuny we $x\cdot x=x$, $x\cdot\bar{x}=0$, $A\cdot 0=0$, $A\vee 0=A$, ekwiwalentligi hem-de $A\vee A\cdot B=A$, ulanyp, $f(\tilde{x}^n)$ funksiýanyň berlen KNF-inden onuň DNF-ine geçmeli:

1) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\cdot(x_1\vee x_3)\cdot(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3)=x_1\cdot(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\cdot(x_2\vee\bar{x}_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee\bar{x}_2)\cdot(x_1\vee\bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)$;

4) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee x_2)\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1\vee x_3)\cdot(x_2\vee x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)\cdot(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\cdot(x_1\vee x_2\vee x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\vee\bar{x}_2)\cdot(x_2\vee\bar{x}_3)\cdot(x_2\vee x_4)\cdot(x_3\vee\bar{x}_4)$;

7) $f(\tilde{x}^4)=(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3\vee x_4)\cdot(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)\cdot(x_1\vee x_4)$.

Jogaby:

3) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee\bar{x}_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)=x_1\bar{x}_2\vee x_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3=$
$=x_1\bar{x}_2\vee x_1x_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3=x_1x_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3$;

6) $f(\tilde{x}^4)=(x_1x_2\vee x_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3)(x_2x_3\vee x_2\bar{x}_4\vee x_3x_4)=x_1x_2x_3\vee$
$\vee x_1x_2\bar{x}_4\vee x_1x_2x_3x_4\vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4=\ x_1x_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3$.

16. $x\vee y\cdot z=(x\vee y)\ \&\ (x\vee z)$ distributiw kanuny we $x\vee x=x$, $x\vee\bar{x}=1$, $A\vee 1=1$, $A\cdot 1=A$, ekwiwalentligi hem-de $A\cdot(A\vee B)=A$, ulanyp, $f(\tilde{x}^n)$ funksiýanyň berlin DNF-inden onuň KNF-ine geçmeli:

1) $f(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_2x_3$;

3) $f(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1\vee x_2x_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3$;

4) $f(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1\vee x_2\vee x_1\bar{x}_2x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3$;

6) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_2\vee x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_2x_4\vee x_3x_4$;

7) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_2x_4$;

8) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_3x_4\vee\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$.

Jogaby:

2) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2)(\bar{x}_2\vee x_2)(x_1\vee\bar{x}_3(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\vee\bar{x}_2x_3=(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_2)$
$(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_2)\,\&\,(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee\bar{x}_3\vee x_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee x_3)=$
$=(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee x_2\vee x_3)=(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee x_2\vee x_3);$

5) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_2)\vee x_2\bar{x}_3=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3=\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3=$
$=(\bar{x}_2\vee x_2)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)=\bar{x}_2\vee\bar{x}_3.$

17. Näbelli koeffisiýentler usulyny peýdalanyp, aşakdaky funksiýalar üçin Žegaliniň polinomyny tapmaly:

1) $f(\tilde{x}^2)=x_1\,|\,x_2;$
2) $f(\tilde{x}^2)=(0100);$
3) $f(\tilde{x}^3)=x_1(x_2\vee\bar{x}_3);$
4) $f(\tilde{x}^3)=x_1\to(x_2\to x_3);$
5) $f(\tilde{x}^3)=(01101001);$
6) $f(\tilde{x}^3)=(10001110);$
7) $f(\tilde{x}^3)=(00000111);$
8) $f(\tilde{x}^3)=(01100110);$
9) $f(\tilde{x}^4)=(1000000000000001);$
10) $f(\tilde{x}^4)=(0000100010010000).$

Jogaby:

1) $x_1x_2\oplus 1;$ 3) $x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1;$
6) $x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1;$
10) $x_1x_2x_3x_4\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus x_2x_3\oplus x_2x_4\oplus x_1\oplus x_2.$

18. Paskalyň üçburçluklary usuly bilen berlin funksiýalar üçin Žegalkiniň polinomyny gurmaly:

1) $f(\tilde{x}^2)=(1000);$
2) $f(\tilde{x}^2)=(0010);$
3) $f(\tilde{x}^3)=(01101110);$
4) $f(\tilde{x}^3)=(01110011);$
5) $f(\tilde{x}^3)=(10101110);$
6) $f(\tilde{x}^3)=(10000100);$
7) $f(\tilde{x}^4)=(0000010001100111);$
8) $f(\tilde{x}^4)=(1010101010110110);$
9) $f(\tilde{x}^4)=(0100000000010001);$
10) $f(\tilde{x}^4)=(0000000100010001).$

Jogaby:

1) $x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1;$
4) $x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_3;$
7) $x_1x_2x_4\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus x_2x_4.$

19. $f(\tilde{x}^n)$ funksiýany $\{\&, {}^{-}\}$ birleşdirmeler köplüginiň üstündäki formula görnüşinde aňladyp, alnan formulany $f(\tilde{x}^n)$ funksiýa üçin Žegalkiniň polinomyna öwürmeli ($\overline{A}=A\oplus 1$, $A\cdot(B\oplus C)=A\cdot B\oplus A\cdot C$, $A\cdot A=A$, $A\cdot 1=A$, $A\oplus A=0$, $A\oplus 0=A$ ekwiwalentlikleri ulanmak bilen):

1) $f(\tilde{x}^2)=x_1\to(x_2\to\overline{x}_1x_2)$; 6) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\to(x_2\to x_3))\cdot((x_1\to x_2)\to x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^2)=x_1\cdot(x_2\sim x_1\overline{x}_2)$; 7) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\oplus x_2)\vee(x_2\downarrow x_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\downarrow x_2)|(x_2\downarrow x_3)$; 8) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\to x_2)\to(x_3\to x_1x_4)$;

4) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2)\cdot(x_2\,|\,x_3)$; 9) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee(x_2\to((x_3\to x_2)\to x_4))$;

5) $f(\tilde{x}^3)=x_1\downarrow((x_1\to\overline{x}_2)\vee\overline{x}_3)$; 10) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\vee x_2\vee x_3)x_4\vee x_1x_2x_3$.

Jogaby:

1) $f(\tilde{x}^2)=\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_1x_2=\overline{x}_1\vee\overline{x}_2=\overline{x_1x_2}=x_1x_2\oplus 1$;

3) $f(\tilde{x}^3)=\overline{\overline{x_1\vee x_2}\cdot\overline{x_2\vee x_3}}=\overline{\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_3}=(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1)\oplus 1=$

$=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3$;

9) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x_2\vee\overline{x}_3}\vee x_4=x_1\vee\overline{x}_2\vee x_4=\overline{\overline{x}_1x_2\overline{x}_4}=$

$=(x_1\oplus 1)x_2(x_4\oplus 1)\oplus 1=x_1x_2x_4\oplus x_1x_2\oplus x_2x_4\oplus x_1\oplus 1.$

20. x_1,x_2 üýtgeýänlere bagly we A köplügiň utgaşdyrmasyna girýän ähli funksiýalar köplügini gurmaly:

1) $A=\{\overline{x}\}$;

2) $A=\{x_1\oplus x_2\}$;

3) $A=\{0,\overline{x}\}$;

4) $A=\{x_1x_2\}$;

5) $A=\{x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1\}$;

6) $A=\{\overline{x}_1\vee x_2\}$;

7) $A=\{0, x_1\sim x_2\}$;

8) $A=\{x_1x_2, x_1\oplus x_2\}$;

9) $A=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\}$;

10) $A=\{x_1x_2\vee x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_3x_1\}$;

11) $A=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1\}$

12) $A=\{x_1\overline{x}_2\}$;

13) $A=\{\overline{x}_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_2x_3\vee x_3\overline{x}_1\}$;

14) $A=\{x_1\vee x_2\vee x_3\}$;

15) $A=\{x_1x_2\vee x_3\}$.

Jogaby:

1) $\{x_1,\overline{x}_1,x_2,\overline{x}_2\}$; 2) $\{0,x_1,x_2,x_1\oplus x_2\}$; 3) $\{0,1,x_1,x_2,\overline{x}_1,\overline{x}_2\}$;

4) $\{x_1,x_2,x_1x_2\}$; 5) $\{x_1x_2\}$; 6) $\{1,x_1,x_2,\overline{x}_1\vee x_2,x_1\vee\overline{x}_2,x_1\vee x_2\}$.

21. f funksiýany A koplügiň üstündäki formula görnüşinde aňladyp, $f \in [A]$ bolýandygyny görkeziň:

1) $f = \bar{x}, A = \{0, x \to y\}$;	9) $f = xy, A = \{xy \oplus z\}$;
2) $f = x \oplus y, A = \{x \downarrow y\}$;	10) $f = xyz \vee t(x \vee y \vee z), A = \{xy \vee yz \vee zx\}$;
3) $f = x, A = \{x \oplus y\}$;	11) $f = x \oplus y \oplus z, A = \{\bar{x}, xy \vee yz \vee zx\}$;
4) $f = x \oplus y \oplus z, A = \{x \sim y\}$;	12) $f = x \oplus y \oplus z, A = \{xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}x\}$;
5) $f = 0, A = \{xy \oplus z\}$;	13) $f = x \oplus y, A = \{x\bar{y}, x \vee \bar{y}\}$;
6) $f = x, A = \{xy\}$;	14) $f = x \vee y, A = \{x \to y\}$;
7) $f = x \vee y, A = \{\bar{x} \vee \bar{y}\}$;	15) $f = xy, A = \{x \vee y, x \oplus y\}$.
8) $f = x, A = \{xy \vee yz \vee zx\}$;	

Jogaby:

1) $f = x \to 0$; 2) $f = ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (x \downarrow y)$;

3) $f = (x \oplus x) \oplus x$; 4) $f = (x \sim y) \sim z$; 5) $f = xx \oplus x$;

6) $f = x(\overline{y\bar{x}})$; 7) $f = (\overline{\bar{x} \vee \bar{x}}) \vee (\overline{\bar{y} \vee \bar{y}})$.

22. A köplügiň utgaşdyrmasyna girýän ähli jübüt-jübütden kongruýent (congruent) däl $f(\tilde{x}^3)^n$ funksiýalary ýazyp görkezmeli:

1) $A = \{1, \bar{x}\}$;	6) $A = \{x \vee y \vee z\}$;
2) $A = \{xy\}$;	7) $A = \{x \to y\}$;
3) $A = \{x \sim y\}$;	8) $A = \{xy \vee z\}$;
4) $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$;	9) $A = \{x\bar{y}\}$;
5) $A = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;	10) $A = \{(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{z} \text{ v } x)\}$.

Jogaby:

1) $\{0,1,x,\bar{x}\}$; 2) $\{x,xy,xyz\}$; 3) $\{1,x,x \sim y,x \oplus y \oplus z\}$;

4) $\{x,xy \vee yz \vee zx\}$; 5) $\{x,\bar{x},x \oplus y \oplus z,x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

23. $[A]$ klas üçin doly bolan ulgamdan bazisi bölüp aýyrmaly:

1) $A = \{0,1,\bar{x}\}$;	2) $A = \{x \oplus y,x \sim y,1\}$;
3) $A = \{x,x \oplus y,x \oplus y \oplus z\}$;	4) $A = \{xy,x \vee y,xy \vee z\}$;
5) $A = \{x \vee y,x \to y\}$;	6) $A = \{x\bar{y},xy\}$;
7) $A = \{x \oplus y \oplus z,x\bar{y} \vee \overline{yz} \vee \bar{z}x,\bar{x}\}$;	8) $A = \{1,x \sim y,x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
9) $A = \{xy,xy \vee \bar{x}z\}$;	10) $A = \{x,x \vee y,x \vee y \vee z,xy \vee z\}$.

Jogaby:

1) $\{0,\bar{x}\}$; 2) $\{x\oplus y,1\}$; 3) $\{x\oplus y\}$; 4) $\{xy,x\vee y\}$; 5) $\{x\to y\}$.

24. P_2-däki anyk doly ulgamlar üçin A köplügiň P_2-de doly ulgam bolýandygyny görkezmeli:

1) $A=\{x\downarrow y\}$;

2) $A=\{xy\oplus z,(x\sim y)\oplus z\}$;

3) $A=\{x\to y,\overline{x\oplus y\oplus z}\}$;

4) $A=\{x\to y,f=(01011110)\}$;

5) $A=\{0,m(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1,x\oplus y\oplus 1\}$;

6) $A=\{x\sim y,x\oplus y,xy\oplus z\}$;

7) $A=\{xy\vee\overline{xz},f=(01111110)\}$;

8) $A=\{xy\oplus zt\oplus 1,f=(10110110)\}$;

9) $A=\{0,1,x\oplus y\oplus z,xy\oplus zx\oplus zy\}$;

10) $A=\{\overline{xy}\vee z,x\oplus y\}$.

Jogaby: 1) $\{\bar{x},xy,x\vee y\}$ ulgam P_2-de doludyr, sebäbi islendik $f\in P_2$ DNF ýa-da KNF görnüşinde aňladylyp bilner. Başga tarapdan seredeniňde, $\bar{x}=x\downarrow x$, $xy=(x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y)$, $x\vee y=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y)$.

2) Alarys: $0=xx\oplus x,xy=xy\oplus 0$, $x=(x\sim x)\oplus x$. $\{x,xy\}$ ulgam doly, sebäbi $x\vee y=\overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}}$;

3) Alarys: $\bar{x}=\overline{x\oplus x\oplus x},x\vee y=\bar{x}\to y,xy=\overline{\bar{x}\to\bar{y}}$;

4) Alarys: $0=f(x,x,x),\bar{x}=x\to 0,xy=\overline{x\to\bar{y}}$;

5) Alarys: $\bar{x}=x\oplus 0\oplus 1,xy=m(x,y,0)$;

25. f funksiýanyň öz-özüne taýdaş bolýandygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $f=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1$;

2) $f=x_1\vee x_2$;

3) $f=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1$;

4) $f=(x\vee\bar{y}\vee z)t\vee x\bar{y}z$;

5) $f=(x\vee\bar{y}\vee z)t\vee xyz$;

6) $f=(x_1\to x_2)$;

7) $f=x_1\oplus x_2$;

8) $f=x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_3x_1\oplus x_2\oplus x_3$;

9) $f=x_1x_2\vee x_3$;

10) $f=x_1\oplus x_2\oplus(x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1)$;

11) $f = x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \vee x_2)$;

12) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;

13) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;

14) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1) \oplus x_3$;

15) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1)$.

Jogaby: 1), 3), 4), 8), 10) – bolýar; 2), 5), 6), 7), 9) – bolanok.

26. Wektor görnüşinde berlen f funksiýanyň öz-özüne taýdaş bolýandygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $\tilde{a}_f = (1010)$;

2) $\tilde{a}_f = (1001)$;

3) $\tilde{a}_f = (10010110)$;

4) $\tilde{a}_f = (01100110)$;

5) $\tilde{a}_f = (01110001)$;

6) $\tilde{a}_f = (01001101)$;

7) $\tilde{a}_f = (1100100101\ 101100)$;

8) $\tilde{a}_f = (1110011100\ 011000)$;

9) $\tilde{a}_f = (1000001110\ 001100)$;

10) $\tilde{a}_f = (1001101110\ 111001)$;

11) $\tilde{a}_f = (1100001110\ 100101)$;

12) $\tilde{a}_f = (1010)$;

13) $\tilde{a}_f = (1001011010\ 010110)$;

14) $\tilde{a}_f = (1101010010\ 110010)$;

15) $\tilde{a}_f = (1010010101\ 011010)$.

Jogaby: 1), 3), 5), 6), 7), 8) – bolýar; 2), 4), 9), 10) – bolanok.

27. A köplügiň taýdaş bolýandygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $A = \{0, 1, \bar{x}\}$;

2) $A = \{0, x\}$;

3) $A = \{x \oplus y, x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$;

4) $A = \{x \to y, x \vee \bar{y}\}$;

5) $A = \{x \to y, x\bar{y}\}$;

6) $A = \{\bar{x}\bar{y}, \bar{x} \vee \bar{y}, m(x, y, z)\}$;

7) $A = \{x \oplus y \oplus z, \bar{x}\}$;

8) $A = [\{x \to y\}]$;

9) $A = [\{m(x, y, z)\}]$;

10) $A = [\{1, x \oplus y\}]$;

11) $A = [\{1, x \oplus y, xy\}]$;

12) $A = [\{1, x\bar{y}\}]$;

13) $A = [\{x \vee y, x \oplus y\}]$;

14) $A = [\{x \oplus y\}]$;

15) $A = [\{xy \oplus z \oplus 1\}]$.

Jogaby: 1), 3), 5), 6), 7), 10) – bolýar; 2), 4), 8), 9) – bolanok.

28. f funksiýany polinom görnüşinde aňladyp, onuň çyzykly bolýandygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $f = x \to y$;

2) $f = \overline{x \to y} \oplus \bar{x}y$;

3) $f = x\bar{y}(x \sim y)$;

4) $f = xy \vee \overline{xy} \vee z$;

5) $f = (xy \vee \bar{x} \cdot \bar{y})z \vee \bar{z}(x\bar{y} \vee \bar{x}y)$;

6) $f = ((x \to y)(y \to x)) \sim z$;

7) $f = xy\bar{z} \vee x\bar{y}$;

8) $f = xyz \oplus xy\bar{z} \oplus \bar{x}y$;

9) $f = m(x, y, z) \oplus \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \oplus xyz$;

10) $f = (x \vee yz) \oplus xyz$;

11) $f = (x \vee yz) \oplus \bar{x}yz$;

12) $f = (xyz \vee x\overline{yz}) \oplus x(y \oplus z)$;

13) $f = (xyz \oplus x(\overline{yz}) \oplus x(y \vee z)$;

14) $f = (xyz \oplus \overline{xy}z) \vee (x\bar{y}z \oplus \bar{x}yz)$;

15) $f = (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \sim xy\bar{z}) \sim (x\bar{y}z \sim \bar{x}yz)$.

Jogaby: 2), 3), 5), 6), 8), 9) – bolýar. 1), 4), 7), 10) – bolanok.

29. Wektor görnüşinde berlin *f* funksiýanyň çyzykly bolýandygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $\tilde{a}_f = (1001)$;

2) $\tilde{a}_f = (1101)$;

3) $\tilde{a}_f = (01100110)$;

4) $\tilde{a}_f = (11000011)$;

5) $\tilde{a}_f = (10100101)$;

6) $\tilde{a}_f = (10100110)$;

7) $\tilde{a}_f = (1100100101\ 101001)$;

8) $\tilde{a}_f = (01101001)$;

9) $\tilde{a}_f = (1001011001\ 101001)$;

10) $\tilde{a}_f = (0110100101\ 101001)$;

11) $\tilde{a}_f = (1010010110\ 011100)$;

12) $\tilde{a}_f = (1010)$;

13) $\tilde{a}_f = (1010011001\ 100101)$;

14) $\tilde{a}_f = (0011110011\ 000011)$;

15) $\tilde{a}_f = (1001100101\ 100110)$.

Jogaby: 1), 3), 4), 5), 7), 8), 9), 10) – bolýar; 2), 6) – bolanok.

30. *A* ulgamnyň *L*-de dolydygyny subut etmeli. *A* ulgamnyň *L*-de bazisdigini ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $A = \{1, x_1 \oplus x_2\}$;

2) $A = \{0, x_1 \sim x_2\}$;

3) $A = \{0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$;

4) $A = \{x \oplus 1, x_1 \oplus x_2\}$;

5) $A = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$;

6) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x \oplus 1, 0\}$;

7) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1, x_1 \sim x_2\}$;

8) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, x_1 \oplus 1\}$;

9) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1, 0\}$;

10) $A = L \cap P_2(x^2)$;

11) $A = (L \cap S) \cup \{0\}$;

12) $A = L | S$;

13) $A=\{x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1, 1\}$; 15) $A=(L|S) \cap P(X^2)$.

14) $A=\{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2, x \oplus 1\}$;

Jogaby: 1) $x_1 \oplus x_2$ funksiýalardan düzülen superpozisiýalaryň kömegi bilen $x_{i1} \oplus x_{i2} \oplus \ldots \oplus x_{ik} \oplus 1$. görnüşli funksiýa 1 – ornuna goýmany ulanyp, x_i görnüşli islendik funksiýany alyp bolar. A ulgam basis bolup durýar;

2), 3), 4), 5), 7), 8), 9) – bolýar; 6), 10) – bolanok.

31. f funksiýanyň $T_1 \backslash T_0$ köplüge degişlidigini ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $f=(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$

2) $f=m(x_1, x_2, x_3)$;

3) $f=x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1))$;

4) $f=x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2$;

5) $f=(x_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2$;

6) $f=\overline{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3} \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 x_3$;

7) $\tilde{a}_f=(10010110)$;

8) $\tilde{a}_f=(11011001)$;

9) $\tilde{a}_f=(10000111)$;

10) $\tilde{a}_f=(00011011)$.

Jogaby: 1), 3), 4), 6), 8), 9) – degişli; 2), 5), 7), 10) – degişli däl.

32. $x_1,\ldots,x_n$ üýtgeýänlere bagly we A köplüge degişli funksiýalaryň sanyny hasaplamaly:

1) $A = T_0 \cap T_1$;

2) $A = T_0 \cup T_1$;

3) $A = T_0 \cap L$;

4) $A = T_1 \cap S$;

5) $A = \mathrm{T}_0 \cup L$;

6) $A = L \backslash T_1$;

7) $A = (L \cup T_1) \cap S$;

8) $A = L \cap T_1 \cap S$;

9) $A = L \cup S \cup T_0$;

10) $A = (L \cup S) \backslash T_1$;

11) $A = (L \backslash T_0) \cap S$;

12) $A = S \cap T_0$;

13) $A = (S \cap T_0) \cup T_1$;

14) $A = (S \cap L) \backslash T_1$;

15) $A = (T_0 \backslash T_1) \cap S$;

16) $A = (T_0 \backslash T_1) \cap L$;

17) $A = (S \cup L) \cap T_1$;

18) $A = (T_1 \cup T_0) \cap S$;

19) $A = T_0 \cap T_1 \cap L$;

20) $A = (T_0 \cap T_1 \cap L) \backslash S$;

21) $A = (S \cap L) \backslash T_0$;

22) $A = (S \cap L) \backslash (T_0 \cap T_1)$;

23) $A = (S \cap L) \backslash (T_0 \cup T_1)$;

24) $A = (S \backslash T_0) \cap T_1$;

25) $A = S \setminus (T_0 \bigcup T_1)$;

26) $A = (S \bigcap T_0) \setminus T_1$;

27) $A = S \setminus (T_0 \bigcup L)$;

28) $A = S \bigcap T_0 \bigcap L$;

29) $A = L \setminus (T_0 \bigcup T_1)$;

30) $A = (L \setminus (T_0 \bigcup T_1)) \bigcap S$;

31) $A = S \setminus L$;

32) $A = L \setminus S$;

33) $A = (L \setminus S) \bigcap T_1$;

34) $A = ((S \setminus L) \setminus T_0) \setminus T_1$;

35) $A = ((S \bigcap L) \setminus T_0) \setminus T_1$;

36) $A = S \bigcap (T_1 \setminus L)$;

37) $A = (L \bigcap S) \setminus (T_0 \bigcap T_1)$;

38) $A = (L \bigcap T_0) \setminus (S \bigcap T_1)$;

39) $A = (S \bigcap T_0) \setminus T_1$;

40) $A = (L \bigcap T_0 \bigcap T_1) \setminus S$;

41) $A = (T_0 \bigcap T_1 \bigcap S) \setminus L$;

42) $A = T_0 \bigcup T_1 \bigcup S$;

43) $A = T_0 \bigcup T_1 \bigcup S \bigcup L$;

44) $A = T_0 \bigcup T_1 \bigcup L$;

45) $A = (L \setminus S) \bigcup (T_0 \setminus T_1)$.

Jogaby: 1) 2^{2^n-2}; 2) $\frac{3}{4} \cdot 2^{2^n}$; 3) 2^{2n}; 4) $2^{2^{n-1}-1}$; 5) $2^{2^{n-1}} + 2^n$; 6) 2^n; 7) $2^{2^{n-1}} + 2^{n-1}$; 8) 2^{n-1}; 9) $2^{2^n-1} + 2^{2^{n-1}} + 2^{n-1}$; 10) $\frac{1}{2}(2^{2^{n-1}} + 2^n)$; 15) 0.

33. Aşakdakylary subut etmeli:

1) $L \bigcap S \bigcap T_0 = L \bigcap S \bigcap T_1 = L \bigcap T_0 \bigcap T_1 = L \bigcap S \bigcap T_0 \bigcap T_1$;

2) $S \bigcap T_0 = S \bigcap T_1 = S \bigcap T_0 \bigcap T_1$.

Görkezme: eger-de $f \in T_\theta \bigcap S$, $\theta \in \{0,1\}$, onda $f \in T_{\bar{\theta}} \bigcap S$; eger-de $f \in L \bigcap T_0 \bigcap T_1$, onda $f \in S$.

34. A köplügiň K klasda bazisdigini ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $A = \{xy \sim z\}, K = T_1$;

2) $A = \{xy \vee z\}, K = T_0$;

3) $A = \{xy, x \sim y, x \vee y\}, K = T_1$;

4) $A = \{x \oplus y \oplus z, m(x, y, z)\}, K = T_0 \bigcap T_1$;

5) $A = \{xy, x \oplus y \oplus z, m(x, y, z)\}, K = T_0 \bigcap T_1$;

6) $A = \{xy, m(x, y, \bar{z})\}, K = T_0 \bigcap T_1$;

7) $A = \{x \oplus y, m(x, y, z)\}, K = T_0 \bigcap T_1$;

8) $A = \{x \vee y, x\bar{y}\}, K = T_0$;

9) $A=\{x\oplus y\oplus z,0\}K=T_0\bigcap L;$

10) $A=\{x\oplus y\oplus z,x\oplus y\oplus z\oplus t\},K=T_0\bigcap L;$

11) $A=\{xy\oplus y\oplus z,x\oplus y\oplus z\},K=T_0\bigcap T_1;$

12) $A=\{m(x,\bar{y},z),x\oplus y\oplus z\},K=T_0\bigcap S;$

13) $A=\{(x\sim y)\sim z)\},K=L\bigcap S\bigcap T_0;$

14) $A=\{x\sim m(y,z,t)\},K=T_1;$

15) $A=\{xy,x\oplus y\oplus z,x\vee y\},K=T_0\bigcap T_1.$

Jogaby: 1) hawa. $1=xx\sim x$, $x\sim y=xx\sim y$, $x\oplus y\oplus z=(x\sim y)\sim z$, $xy=xy\sim 1$ alarys;

2) A T_1-de bazis däl, sebäbi $A\subseteq T_0\cap T_1$;

3) A T_1-de bazis däl, sebäbi $[\{xy,\ x\sim y\}]=T_1$;

4) A T_1-de bazis däl, sebäbi $A\subseteq S$;

5) A T_1-de bazis däl, sebäbi $[\{xy,\ x\oplus y\oplus z\}]=T_0\cap T_1$;

6) A $T_0\cap T_1$-de bazis.

35. Wektoryň $\tilde{a}_f$ bahalary boýunça f funksiýanyň monoton bolýandygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $\tilde{a}_f=(0110);$

2) $\tilde{a}_f=(00110111);$

3) $\tilde{a}_f=(01010111);$

4) $\tilde{a}_f=(01100110);$

5) $\tilde{a}_f=(00010111);$

6) $\tilde{a}_f=(01010011);$

7) $\tilde{a}_f=(0010001101\ 111111);$

8) $\tilde{a}_f=(0001010101\ 110111).$

Jogaby: 2), 3), 5), 8) – bolýar; 1), 4), 6), 7) – bolanok.

36. f funksiýanyň monoton bolýandygyny ýa-da däldigini barlamaly:

1) $f=(x_1\oplus x_2)\ \&\ (x_1\sim x_2);$

2) $f=x_1\to(x_2\to x_1);$

3) $f=x_1\to(x_1\to x_2);$

4) $f=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3;$

5) $f=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3;$

6) $f=(x_1\oplus x_2)\,x_1x_2;$

7) $f = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_3 x_1$;

8) $f = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 x_1 \oplus x_1$.

Jogaby: 1), 2), 4), 6), 7) – bolýar; 3), 5), 8) – bolanok.

37. Funksiýalar ulgamynyň doludygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \oplus yz \oplus zx\}$;

2) $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

3) $A = \{1, \bar{x}, x(y \sim z) \oplus \bar{x}(y \oplus z), x \sim y\}$;

4) $A = \{0, \bar{x}, x(y \oplus z) \oplus yz\}$;

5) $A = \{\bar{x}, x(y \sim z) \sim (y \vee z), x \oplus y \oplus z\}$;

6) $A = \{\bar{x}, x(y \sim z) \sim yz, x \oplus y \oplus z\}$;

7) $A = \{xy(x \oplus y), xy \oplus x \oplus y, 1, xy \oplus yz \oplus zx\}$;

8) $A = \{xy(x \oplus z), 1\}$;

9) $A = \{x \to y, \bar{x} \to \bar{y}x, x \oplus y \oplus z, 1\}$;

10) $A = \{x \to y, x \oplus y\}$.

Jogaby: 2), 4), 6) – doly; 1) ýok, $A \subseteq T_0$; 3) ýok, $A \subseteq L$; 5) ýok, $A \subseteq S$.

38. Öz bahalarynyň wektorlary bilen berlin A funksiýalar ulgamynyň doludygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $A = \{f_1 = (0110), f_2 = (11000011), f_3 = (10010110)\}$;

2) $A = \{f_1 = (0111), f_2 = (01011010), f_3 = (01111110)\}$;

3) $A = \{f_1 = (0111), f_2 = (10010110)\}$;

4) $A = \{f_1 = (0110), f_2 = (11000011), f_3 = (10010110)\}$;

5) $A = \{f_1 = (1001), f_2 = (11101000)\}$;

6) $A = \{f_1 = (11), f_2 = (0111), f_3 = (00110111)\}$;

7) $A = \{f_1 = (10), f_2 = (00110111)\}$;

8) $A = \{f_1 = (11), f_2 = (00), f_3 = (00110101)\}$;

9) $A = \{f_1 = (10000001), f_2 = (0111), f_3 = (1011)\}$;

10) $A = \{f_1 = (10000001), f_2 = (0110), f_3 = (1001)\}$.

Jogaby: 3), 5) – doly; 1) doly däl, $A \subseteq L$; 2) doly däl, $A \subseteq T_0$; 4) doly däl, $A \subseteq S$; 6) doly däl, $A \subseteq M$.

39. A ulgamnyň doludygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$;
2) $A = (L \cap T_1 \cap T_0) \cup S \setminus (T_0 \cup T_1)$;
3) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;
4) $A = (L \cap T_1) \cup (S \setminus T_0)$;
5) $A = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$;
6) $A = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$;
7) $A = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$;
8) $A = ((L \cap M) \setminus T_0) \cup (S \cap T_1)$;
9) $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$;
10) $A = (M \cap S) \cup (T_0 \setminus M) \cup T_1 \cap S)$.

Jogaby: 1), 4), 6) – doly; 2) doly däl, $A \subseteq S$; 3) doly däl, $A \subseteq T_1$; 5) doly däl, $A \subseteq L$.

40. A funksiýalar ulgamynyň P_2-de bazisdigini ýa-da däldigini barlamaly:

1) $A = \{x \to y, x \oplus y, x \vee y\}$;
2) $A = \{x \oplus y \oplus z, x \vee y, 0, 1\}$;
3) $A = \{x \oplus y \oplus yz, x \oplus y \oplus 1\}$;
4) $A = \{xy \vee z, xy \oplus z, xy \sim z\}$;
5) $A = \{x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus 1, xy \oplus yz \oplus zx, \overline{x}\}$;
6) $A = \{x \oplus y \oplus z, xy \oplus zx \oplus zy, 0, 1\}$;
7) $A = \{x \oplus y, x \sim yz\}$;
8) $A = \{xy \oplus yz \oplus zt, 0, 1, x \vee y\}$.

Jogaby: 1) bazis däl, sebäbi $\{x \to y,\ x \oplus y\}$ kiçi ulgam doly; 2) bazis; 3) bazis däl, $A \subseteq T_1$. 4) bazis däl, aýryp bolar: $xy \vee z$.

41. P_2-de doly A ulgamdan mümkin bolan bazisleri bölüp aýyrmaly:

1) $A = \{1, \overline{x}, xy(x \oplus y), x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx\}$;
2) $A = \{0, x \oplus y, x \to y, xy \sim xz\}$;
3) $A = \{0, 1, x \oplus y \oplus z, xy \oplus zx \oplus yz, xy \oplus z, x \vee y\}$;
4) $A = \{xy, x \vee y, xy \vee z, x \oplus y, x \to y\}$;
5) $A = \{xy \oplus z, x \oplus y \oplus 1, x\overline{y}, \overline{x}\}$;
6) $A = \{xy \vee \overline{x}z, \overline{x}, x \to y, 0, x \oplus zy\}$;
7) $A = \{xy, xy \vee z, x \oplus y, x \to y, \overline{x}\}$;
8) $A = \{x \oplus y, x \sim y, x \oplus y \oplus z, xy, x \to y\}$.

Jogaby: 1) $Б_1=\{1,\bar{x},f\}$, $Б_2=\{\bar{x},xy(x\oplus y),f\}$, bu ýerde $f=x\oplus y\oplus xy\oplus yz\oplus zx$; 2) $Б_1=\{0,x\to y\}$, $Б_2=\{x\oplus y,x\to y\}$, $Б_3=\{0,xy\sim xz\}$, $Б_4=\{x\oplus y,xy\sim xz\}$.

42. Amaly-köplük amallary peýdalanyp, A köplügiň utgaşdyrmasyny belli bolan T_0, T_1, L, S, M we P_2 ýapyk klaslaryň üsti bilen aňlatmaly:

1) $A = P_2\setminus(T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M)$;
2) $A = M\setminus(\mathrm{T}_0 \cap L)$;
3) $A = M\setminus(T_0 \cap T_1)$;
4) $A = T_0 \cap (L\setminus S)$;
5) $A = S\setminus(T_0\setminus T_1)$;
6) $A = (L \cap S)\setminus(T_0 \cup T_1)$;
7) $A = S\setminus T_1 \cup L\setminus(T_1 \cup T_0)$;
8) $A = L\setminus(S \cup T_0)$;
9) $A = L\setminus(T_0 \cup T_1)$;
10) $A = (T_0\setminus T_1) \cup (M\setminus L)$;
11) $A = (T_0\setminus T_1) \cup (M\setminus T_0)$;
12) $A = M\setminus(S \cup L)$.

Jogaby: 1) P_2; 2) $M\cap T_1$; 3) $(M\cap L)\setminus S$; 4) $T_1\cap S$; 5) S; 6) $L\cap S$.

43. A köplügi P_2-däki bazise çenli giňeldip bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklamaly:

1) $A = \{x \sim y,\ m(x, y, z)\}$;
2) $A = \{x\}$;
3) $A = \{x \oplus y,\ x \vee y\}$;
4) $A = \{x \vee y,\ xy\}$;
5) $A = \{0,1\}$;
6) $A = \{0.1.x \vee y\}$;
7) $A = \{x \to y,\ x \vee y\}$;
8) $A = \{x \oplus y,\ x \sim y\}$.

Jogaby: 1) mümkin, $A\cup\{0\}$ – bazis; 2) mümkin däl, x funksiýa ähli dolulygyň öň ýanyndaky klaslara girýär; 3) mümkin, $A\cup\{1\}$ – bazis; 4) ýok, xy we $x\vee y$ şol bir dolylygyň öň ýanyndaky klaslara girýär;

44. $A = \{f_1, f_2\}$; funksiýalar ulgamynyň doludygyny ýa-da däldigini anyklamaly:

1) $f_1 \in S \setminus M,\ f_2 \notin L \cup S,\ f_1 \to f_2 \equiv 1$;
2) $f_1 \notin L \cup T_0 \cup T_1,\ f_2 \in M \cap L,\ f_1 \to f_2 \equiv 1$;
3) $f_1 \notin T_0 \cup L,\ f_2 \notin S,\ f_1 \to f_2 \equiv 1$;
4) $f_1 \in (S \cap L)\setminus T_0,\ f_2 \in M \setminus (T_1 \cap L),\ f_1 \to f_2 \equiv 1$.

Jogaby: 1) umuman aýdanda, doly däl. Seretmeli:
$f_1 = x \oplus y \oplus z,\ f_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$;
2) doly, alarys: $f_2 \equiv 1 \notin S,\ f_1 \notin M \cup L \cup T_0 \cup T_1$;
3) umuman aýdanda, doly däl. Seretmeli: $f_1 = x \to y,\ f_2 \equiv 1$;
4) umuman aýdanda, doly däl. Seretmeli: $f_1 = \bar{x},\ f_2 = 1$.

V. TERTIPLEŞDIRMEK

Şu bölüm berlenleri kompýuteriň kömegi bilen gaýtadan işlemeklige degişi gabat gelýän meseleleri çözmeklige bagyşlanandyr. Kompýuteriň ulanylyşynyň ähli ýagdaýlarynda diýen ýaly obýektler köplügi käbir öňünden kesgitlenen tertip boýunça täzeden ýerleşdirilmelidir. Erkin ýerleşdirilen berlen ululyklara seredeniňde, olaryň tertipleşdirilen ýagdaýy bilen işlemekligiň aňsatlygy hemmä aýdyňdyr. Köp göwrümli berlen ululyklary tertipleşdirmek berlenleri gaýtadan işlemegiň esasy bölegini tutýar, tertipleşdirmegiň netijeli algoritmi ykdysady nukdaý nazardan hem wajypdyr. Algoritmiň netijeliligine tutýan ýeri we wagty, şonuň ýaly-da programmirlemegiň ýönekeýligi bilen baha berilýär.

Programmirlemegiň ýönekeýligi ulanylýan usuly düşünmekligiň hem ýönekeýligini aňladýar, sebäbi gowy programma ýazmak üçin ulanylýan usula gowy düşünmek wajypdyr. Biz baha berenimizde diňe deňeşdirmeleriň sanyny hasaba aljakdyrys. Elementleri deňeşdirmeklige esaslanan tertipleşdirmekligiň iň ýönekeý algoritmleri $O(n^2)$ derejeli çylşyrymlylyga eýedir, olaryň iň gowusynyň deňeşdirmeleriniň sany $O(n \cdot \log_2 n)$-e deňdir.

Tertipleşdirmek meselesini aşakdaky ýaly beýan edip bolar: elementleriniň üstünde çyzykly tertip berlen, ýagny islendik a_i, a_j elementler üçin $a_i < a_j$ ýa-da $a_i \leq a_j$, ýa-da $a_i = a_j$ ýa-da $a_i > a_j$ ýa-da $a_i \geq a_j$ deňsizlikleriň biri ýerine ýetýän köplükden alnan, n elementden düzülen $a_1, a_2, \dots, a_n$ yzygiderlik berlen. Berlen yzygiderligi $a_{\Pi_1} \leq a_{\Pi_2} \leq \dots \leq a_{\Pi_n}$ kemelmeýän yzygiderlige şekillendirýän berlen elementleriň çalşyrmasy $\Pi = (\Pi_2, \Pi_2, \dots, \Pi_n) - i$ tapmaly. Adatça gelejekde tertipleşdirýän çalşyrma Π-ni däl-de, tertipleşdirilen yzygiderligiň özüni alarys.

Tertipleşdirmegiň usullary içki (berlenler işjeň huşda ýerleşdirilende) we daşky (berlenler daşky huşda ýerleşdirilende) usullara bölünýärler. Daşky tertipleşdirmede işjeň huşda göni saklanyp biljek elementleriň sanyndan has köp bolan elementler işe girizilýär. Şonuň üçin tertipleşdirmek usullary daşky huşda saklaýjy enjamlarda ýerleşýän berlenler üçin ulanylýarlar we uly ähmiýete eýedir. Içki tertipleşdirme algoritmleri işläp düzmek üçin hem-de ulanmak üçin amatlydyr.

Berlen tertipleşdirilen ululyklar işjeň huşda ýerleşdirilýär. Berlen ululyklary tertipleşdirmegiň köp sanly algoritmi bellidir. Tertipleşdirmegiň şeýle köp usullarynyň bolmagynyň sebäbi näme? Her bir usulyň özüniň artykmaçlyklary we kemçilikleri bardyr, şonuň üçin ol käbir gurluşlarda beýlekilerden netijeli bolup durýar.

Biz bu ýerde tertipleşdirme usullarynyň wajyp hasap edilýänlerini hem görkezmekden, algoritmler düzmek üçin we ulanmak üçin peýdalylarynyň üstünde durup geçeris. Bu usullar berlen gollanmanyň köp bölümlerinde algoritmler düzmek üçin işjeň ulanylýarlar. Her bir tertipleşdirmek usulynyň häsiýetlerini öwrenmek ulanmaga amatly usuly saýlamak üçin peýdalydyr. Algoritmleri öwrenmek meselesi şeýle bir çylşyrymly hem däldir.

5.1. Ornuna goýmak arkaly tertipleşdirmek

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ yzygiderligiň elementlerini ornuna goýmak arkaly tertipleşdirmek has giň ýaýran usullara degişlidir. Algoritmiň jebis bolmagy üçin a_o fiktiw (goşulan) element girizilýär, onuň bahasy $-\infty$-e deň diýlip goýulýar. Tertipleşdirmek $j = 2, 3, \ldots, n$ üçin sikl geçýär, onda her bir j üçin a_j element $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$-leriň arasynda özüniň dogry ýerinde goýulýar. Ýerinde goýlan wagty a_j element wagtlaýynça w-de ýerleşdirilýär we $a_{j-1}, a_{j-2}, \ldots.., a_1$ atlar gözden geçirilýär, olar w bilen deňeşdirilýärler we olar w-den uly bolsalar saga süýşürilýärler. Bahasy $-\infty$-e deň bolan fiktiw (goşulan) a_o element çep tarapdan seredilmäni duruzmak üçin hyzmat edýär.

1-nji algoritm. Ornuna goýmak arkaly tertipleşdirmek

$$a_0 = -\infty;$$
$$\textbf{\textit{for}}\ j = 2\ \textbf{\textit{to}}\ n\ \textbf{\textit{do}} \begin{cases} i = j-1; \\ w = a_j; \\ \textbf{\textit{while}}\ w < a_i\ \textbf{\textit{do}} \begin{cases} a_{i+1} = a_i; \\ i = i+1; \end{cases} \\ a_{i+1} = w. \end{cases}$$

Algoritmiň çylşyrymlylygy siklde $w<a_i$ şerti barlamagyň sany bilen kesgitlenilýär. Anyk $w<a_i$ $(j\geq 2)$ üçin $w<a_i$ deňeşdirme $1+d_j$ gezek ýerine ýetirilýär. Bu ýerde, d_j-a_j-den uly bolan we ondan çepde ýerleşýän elementleriň sany, ýagny d_j – ikinji elementi a_j bolan inwersiýalaryň sany. d_j sanlar, $d_1, d_2, ..., d_n$ inwersiýalaryň tablisasyny düzýär. $O\leq d_1\leq n-1,\ O\leq d_2\leq n-2, ..., O\leq d_{n-1}\leq 1,\ d_n=O$ bolany üçin, $d_1, d_2, ..., d_n$ elementleriň tertipleşdirmesi iň köp bolanda $\sum_{j=2}^{n}(1+d_j) \leq \sum_{j=2}^{n}(1+n-j) = \frac{n.(n-1)}{2} = O(n^2)$ deňeşdirmäni talap edýär, ornuna goýmak arkaly tertipleşdirmäniň çylşyrymlylygy kwadratikdir.

5.2. Köpürjikli tertipleşdirme

$a_1, a_2, \dots a_n$ yzygiderligi köpürjikli tertipleşdirmek usuly iň aýdyň usullaryň biridir, ol her bir element öz dogry ýerini eýeleýänçä çepden saga saýlanan tertibe gabat gelmeýän goňşy elementleriň ýerini çalyşmakdan ybaratdyr. Uly elementler köpürjekläp ýokary galýarlar we sanawyň soňuna geçýärler, şonuň üçin bu usul köpürjikli tertipleşdirme adyny aldy. Bu usul 2 algoritmiň kömegi bilen amala aşyrylýar. Algoritmde her bir sikli geçende iň uly t indekse deň bolýan b üýtgeýän ululyk ulanylýar, t indeksde ähli $a_1, a_2, \dots a_n$ elementler özüniň gutarnykly pozisiýalarynda ýerleşýärler. Görkezilen elementler üçin gözden geçirişi dowam etmegiň manysy ýokdur.

2-nji algoritm. Köpürjikli tertipleşdirme

$$
b = n;
$$

$$
\textbf{\textit{while}}\ b \neq 0\ \textbf{\textit{do}} \begin{cases} t = 0; \\ \textbf{\textit{for}}\ \ j = 1\ \textbf{\textit{to}}\ b - 1\ \textbf{\textit{do}}\ \ \textbf{\textit{if}}\ \ a_j > a_{j+1}\ \textbf{\textit{then}} \begin{cases} a_j \leftrightarrow a_{j+1}; \\ t = j; \end{cases} \\ b = t. \end{cases}
$$

Algoritmiň çylşyrymlylygy siklde $a_j > d_{j+1}$ şertleri barlamagyň sany we $a_j \leftrightarrow d_{j+1} - a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementleriň çalşyrmasyndaky inwersiýalaryň sanyna deň bolan orun çalyşmalaryň sany bilen kesgitlenilýär. Deňeşdirmeleriň sanyny kesgitläliň. Iň köp bolan ýagdaýynda içki ***for*** sikliniň ýokarky çägi b-1daşky ***while*** sikliniň her bir ädiminde 1 birlik azalýar, onda deňeşdirmeleriň sany

$$
\sum_{b=n}^{1}(b-1) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n.(n-1)}{2} = O(n^2) - a \ \text{deňdir.}
$$

Bu tertipleşdirmäniň kwadratik çylşyrymlylygy bardyr.

3-nji algiritmde “doly” köpürjikli tertipleşdirme görkezilen. Ol 2-nji algoritmiň köp ulanylýan we ýönekeýleşdirilen wariantydyr. “Doly” köpürjikli tertipleşdirmäniň algoritminiň esasy artykmaçlygy programmirlemegiň ýeňilliginde bolup durýar. 3-nji algoritmiň çylşyrymlylygy hemişelik bolup galýar, ol

$$
\sum_{i=1}^{n}(n-i) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n.(n-1)}{2} = O(n^2) - a
$$

deňdir we berlenleriň ýerleşişine bagly däldir.

3-nji algoritm. Doly köpürjikli tertipleşdirme

for i=1 to n do begin
for j=1 to n-i do begin
if $a_j > a_{j+1}$ *then* $a_j \leftrightarrow a_{j+1}$
end;
end.

5.3. Sanamak arkaly tertipleşdirmek

$a_1, a_2, \ldots a_n$ yzygiderligi sanamak arkaly tertipleşdirmegiň manysy $a_1, a_2, \ldots a_n$ elementleriň ählisini jübüt-jübütden deňeşdirmekden we olaryň näçesiniň her bir aýratyn elementden kiçidigini sanamakdan ybaratdyr.

Berlen kiçi elementleri sanamak üçin algoritmde goşmaça $c_1, c_2, \ldots, c_n$ wektor ulanylýar. Algoritm gutarandan soňra $c_j + 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$ bahalar $r_1, r_2, \ldots r_n$ tertipleşdirilen yzygiderlikdäki a_j elementiň gutarnykly ýerini kesgitleýär.

4-nji algoritm. Sanamak arkaly tertipleşdirmek

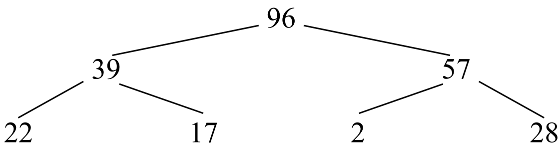
for i=1 to n do $C_i = 0$ *(sanawy yza zyňmak)*
for i=n to 2 by-1 do begin
if $a_i > a_j$ *then* $C_i = C_i + 1$
else $C_j = C_j + 1$
end;
end.
for i=1 to n do begin;
$r_{c_{i+1}} = d_i$ *{*r_i *– tertipleşdirilen elementler}*
end.

Sanamak arkaly tertipleşdirmegiň algoritminiň çylşyrymlylygy içki sikllleriň jübüti bilen kesgitlenilýär we $O(n^2)$ bolar. Çylşyrymlylygyň ululygy berlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ yzygiderlikdäki berlenleriň ýerleşişine bagly däldir. Goý, çalyşma $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, .., \Pi_n)$ ýaly bolsun, bu ýerde $\Pi_i = c_i + 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Sanamak arkaly tertipleşdirmegiň 4-nji algoritmi Π^{-1} çalşyrmany kesgitleýär. Π^{-1} çalşyrma berlen ululyklaryň $a_{\Pi_1} - 1 \le a_{\Pi_2} - 1 \le \ldots \le a_{\Pi_n} - 1$ ýerlleşmesine degişlidir.

5.4. Floýdyň ýüzüp çykmak tertipleşdirmesi

$a_1, a_2, \ldots a_n$ yzygiderligi tertipleşdirmegiň ähli seredilen usullary $O(n^2)$ tertipli deňeşdirmeleri talap edýärdi we ol “hiç zada ýararly däldir”. Floýd tarapyndan hödürlenen has kämil we netijeli usullaryň biri-çylşyrymlylygy $O(n.\log n)$-e deň bolan tertipleşdirmegiň usulyna seredeliň. Şu wagta çenli bar bolan usullaryň içinde bu usul iň oňaýly usul bolmaklygyna galýar. Algoritmde tertipleşdirilen ikilik agaç işjeň ulanylýar, onuň mysaly aşakdaky suratda getirilen.

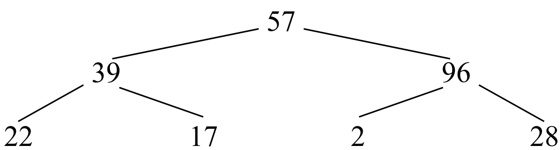


5.1-nji surat. Tertipleşdirilen ikilik agajyň mysaly

Onuň her bir depesindäki bahasy ondan çykýan depelerdäki bahalardan kiçi däldir.

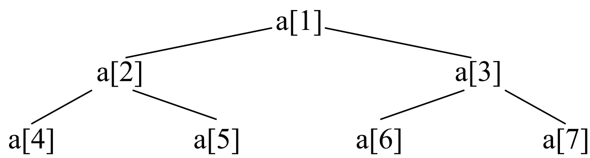
Eger her bir depesi üçin tertiplilik häsiýeti ýerine ýetýän, ýöne köki üçin bu häsiýet üýtgeýän bolsa, onda ikilik agaja bölekleýin tertipli agaç diýilýär.

Bölekleýin tertipli agajyň mysaly aşakdaky suratda getirilendir.



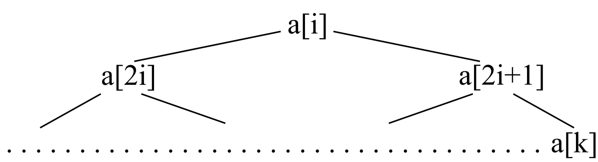
5.2-nji surat. Bölekleýin tertipli ikilik agajyň mysaly

Çylşyrymlylygy $O(n^2)$ bolan öňki seredilen tertipleşdirmek usullarynda iň uly (iň kiçi) element saýlananda barlag geçirilip goýlan elementler baradaky maglumatlar ýatdan çykarylýardy. Agajyň gurluşy $a_1, a_2, \ldots a_n$ yzygiderlikdäki tertipleşdirmek prosesiniň ýagdaýyny her bir ädimde saklamaga mümkinçilik döredýär, ony gelejekki hasaplamalarda ulanmak we galan elementlerden iň uly (iň kiçi) elementi gözlemekde deňeşdirmeleriň sanyny azaldyp bolar. Berlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ yzygiderlik aralyk huşda agaç görnüşinde berlendir. Floýdyň tertipleşdirmek usuly 5.5 algoritmde görkezilendir (bir ölçegli massiw $a[1.n]$). Şeýle agaçda gapyrgalaryň barlygy görünmeýär we massiwiň-aralyk huşuň elementleriniň indeksleriniň üstünde arifmetiki amallary geçirmek arkaly hasaplanýarlar. Ikilik agajyň mysaly aşakdaky suratda görkezilen. Agajyň köki – $a[1]$, her bir $a[k]$ depäniň yz ýanyndan $a[2k]$ we $a[2k+1]$ depeler dowam edýärler. 5-nji algoritmi seljerenimizden soňra, agajyň gurluşynda aralyk huşy ulanmaklygyň beýleki artykmaçlyklarynyň bardygy görünýär.



5.3-nji surat. Aralyk huşdaky ikilik agajyň mysaly

5-nji algoritmiň esasyny SURFACE ($a\,[i.\,k]$) – Floýdyň ýüzüp çykmak prosedurasy tutýar, ol O ($\log_2$n) deňeşdirmeleriň netijesinde tertiplilige golaý kiçi agajy tertipli agaja öwürýär. Aşakdaky suratda kiçi agaç bir ölçegli $a\,[i.\,k]$ massiwiň üstünde berilýär, bu ýerde, **a[i]** – kiçi agajyň köki, **a[k]** – massiwiň maksimal elementi, ol hem kiçi agaja degişli bolup biler.



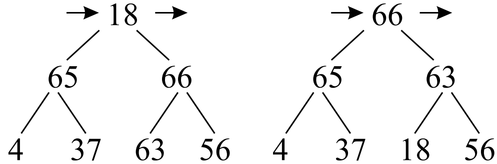
5.4-nji surat. *a* [*i..k*] aralyk huşuň üstünde gurlan ikilik kiçi agaç

Floýdyň ýüzüp çykmak prosedurasynyň çylşyrymlylygyny kesgitläliň. Proseduranyň mazmuny kökdäki baha (bu ýerde tertiplilik şertiniň bozulmagy mümkin) ýapraklara tarap ugra ýüzýär (agaçdaky depeleriň iň soňky derejesi), bu proses tä agaç tertipleşýänçä dowam edýär. Her derejede ýüzüş wagtynda gutarnykly C sanly deňeşdirme ýerine ýetirilýär. Eger-de, agajyň beýikligi (agaçdaky derejeleriň sany) h-a deň bolsa, onda bir sany ýüzüşiň çylşyrymlylygy $C \cdot h = O(h)$ bolar, n sany depesi bolan ikilik agajyň h beýikligini $n \le 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{h-1}$ gatnaşykdan aňsatlyk bilen tapyp bolar, bu ýerde, 2^{i-1} – agajyň i-nji derejesindäki depeleriniň sany, $i = 1, 2, \ldots, n$. Bu ýerden, agajyň beýikligi $h = [\log_2 (n + 1)]$ bolar.

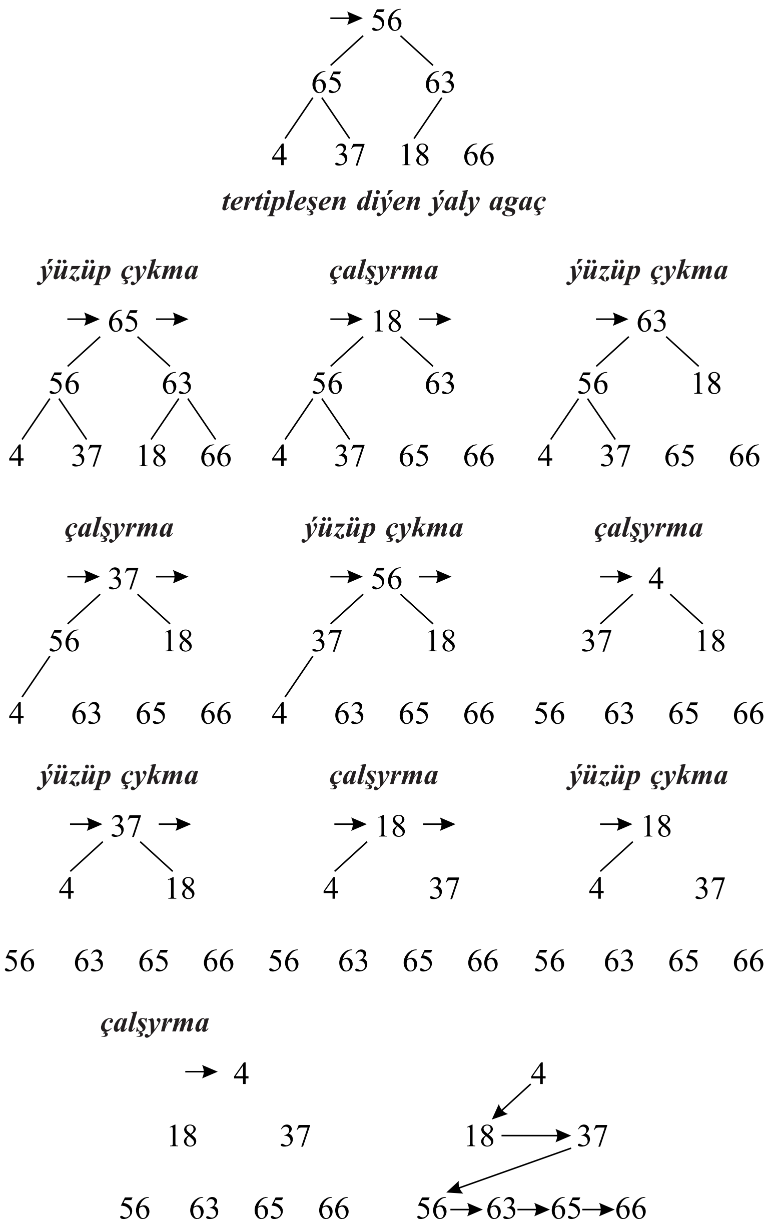
Şunlukda, Floýdyň SURFACE ýüzüp çykmak prosedurasynyň çylşyrymlylygy $O(\log_2 n)$ bolar. Ýokarda seredilen Floýdyň SURFACE ýüzüp çykmak prosedurasy tertipleşen diýen ýaly agaçda iň uly (iň kiçi) elementi $O(\log_2 n)$ sany deňeşdirmäniň kömegi bilen tapmaga, agajy bolsa doly tertipleşen görnüşe getirmäge mümkinçilik döredýär.

Netijede tapylan element agajyň depesinde ýerleşer. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementler köplügini tertipleşdirmek üçin 5-nji algoritm boýunça olardan ilki Floýdyň SURFACE ýüzüp çykmak algoritmini gaýtadan ulanmak arkaly tertipleşen diýen ýaly agaç gurnalýar, ilki bilen agajyň ýapragynyň kiçi böleklerine geçilýär. Ýapraklar ýönekeý tertipleşdirilen, şonuň üçin agajyň birnäçe depesi bolan iň kiçi böleginden başlap, kem-kemden ulaltmaly, her gezek ýüzüp çykmak algoritmini ulaltmak arkaly agajyň köküne ýetýänçä dowam etmeli. Ýüzüp çykmak algoritmi ulanylýan agajyň her bir kiçi bölegi tertipleşdirilen diýen ýaly şerti kanagatlandyrýar, sebäbi tertipleşme ýapraklardan köke barýar, 5-nji algoritmde edil şeýle usul bilen ilkinji tertipleşdirilen diýen ýaly agajy gurmak amala aşyrylýar. Agaç doly tertipleşensoň, iň uly (iň kiçi) element onuň kökünde bolar. 5-nji algoritm boýunça tapylan element agajyň iň soňky ýapragy bilen ornuny çalyşýar (seredilýän massiwiň iň soňky elementi), agajyň bir depesi kemelýär we köplügiň täze iň uly (iň kiçi) elementini gaýtadan Floýdyň SURFACE ýüzüp çykmak prosedurasyny ulanmak arkaly tapmaga ähli zat taýýar bolýar.

Aşakdaky suratda çalyşmanyň we ýüzüp çykmanyň doly yzygiderligi görkezilen. Ol berlen köplükden ilkinji tertipleşdirilen diýen ýaly agaç gurnalandan soň, şol agaçda diňe bir depe galýança dowam edýär, berlen köplük doly tertipleşýär.



ýüzüp çykma ***çalşyrma***



5.5-nji surat. 18, 4, 56, 65, 37, 63, 66 sanlary Floýdyň usuly bilen tertipleşdirmegiň algoritmi

5-nji algoritm. $O(n \cdot \log_2 n)$ **çylşyrymlylygy bolan Floýdyň ýüzüp çykmasy bilen tertipleşdirmek**

Program Floid; *{Floýdyň ýüzüp çykmasy bilen ösýän tertipde tertipleşdirmek}*

uses CRT;
const n=1000; {Tertipleşdirmek üçin berlenleriň massiwiniň ölçegi}
type
Vector=array [1..n] of Integer;
Var
f: Text; {Tertipleşdirmegiň netijesi üçin tekst faýly}
procedure Init (var a:vector;n:integer);
{a[1..n] wektory tötän sanlar bilen doldurmaly}
var
i:integer;
begin
Randomize;
for i=1 to n do a [i]:Random (100);
end;
procedure Surface (var a:Vector;I,k:integer);
{a[i...k] agaçc boývunca Floýdyň ýüzüp çykma prosedurasy}.
var
j,m,copy:Integer;
begin
copy:=a[i];
*m:=2*i;*
while m<k do begin
if m=k then j=m
else if a[m]>a[m+1] then j:=m else j:=m+1;
if a[j] >copy then begin
a[i]:=a[j];
i:=j;
*m:=2*i;*
end

```
else break;
end;
a[i]:=copy;
end;
procedure Sort (var a: Vector;n:integer);
{Floýdyň usuly bilen a [1..n] wektory tertipleşdirmek}
var
i,k,w:Integer;
begin
{Ilkinji tertipleşen diýen ýaly agajy gurnamak}
for i:=n div 2 downto 2 do Surface (a,i,n);
{Agajyň her bir bölegi üçin Floýdyň ýüzüp çykma prosedurasyny ýerine ýetirmeli}
for k:=n downto 2 do begin
Surface(a,i,k);
{Tapylan maksimal elementi sanawyň soňunda ýerleşdirmeli}
w:a [k];a[k]:=a[1]; a[1]:w;
end
end;
Var (Main)
a : Vector; {Tertipleşdirmek üçin berlenleriň wektory}
i : Integer;
begin; (Main)
Assing (f, 'sort.out');
Rewrite (f); {ýazmak üçin faýl açylan }
Init(a,n);
{berlenleri huşa salmaly}
for i:=1 to n do Writeln (f, 'a[',i:1,']=',a[i]:3);
Sort(a,n);
{Tertipleşdirilen berlenleri huşa salmaly.}
Write Ln (f);
For i:=1 to n do Write Ln (f,'s[',i:1,']=',a[i]:3);
Close (f);
end. {Main}
```

Seredilen usul bilen berlenleri tertipleşdirmegiň algoritminiň umumy çylşyrymlylygyny bahalandyralyň. Floýdyň SURFACE ýüzüp çykmak algoritminiň prosedurasy ilki tertipleşdirilen diýen ýaly agajy (prosedura agajyň her bir depesi üçin ulanylýar) gurmak üçin n gezek we soňra şol agaçdaky her bir iň uly (iň kiçi) element üçin n gezek ulanylýar. Floýdyň SURFACE ýüzüp çykmak prosedurasynyň çylşyrymlylygy $O(\log_2 n)$ bolany üçin, $a_1, a_2, \dots a_n$ berlenleri tertipleşdirmegiň algoritminiň umumy çylşyrymlylygy $O(n \cdot \log_2 n)$-e deň bolar. Bu berlenleri deňeşdirmegiň esasynda gurnalan tertipleşdirmegiň iň gowy bahasydyr. Hakykatdan hem, $a_1, a_2, \dots a_n$ elementleriniň mümkin bolan çalyşmalarynyň sany n!-a deňdir we olaryň diňe biri biziň tertipleşdirmämiziň şertini kanagatlandyrýar. n! çalşyrmalaryň köplüginiň içinden çalşyrma gözlemekligiň ikilik gözlegi $\log_2 n!$ sanly deňeşdirmeleri talap edýär. Ýönekeýleşdirmek üçin Stirlingiň formulasyndan peýdalanalyň: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\; n^n \cdot \ell^{-n}$, onda $\log_2 n! \approx \sqrt{2\pi n}\; n^n \cdot \ell^{-n} = 0(n \cdot \log_2 n)$.

Mesele. Kesimleriň birleşmesiniň uzynlygy. Tekstli faýl $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ bitin sanlary özünde saklaýar. Sanlaryň berlen yzygiderligi göni çyzykda $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots. n$ – n sany kesimi kesgitleýär. Görkezilen kesimleriň birleşmesiniň uzynlygyny tapmaly.

Çözülişi. Tekst faýlyndaky berlenler aşakdaky ýaly gurluşa eýedir. Faýlyň birinji setiri n – kesimleriň sany. Ikinjisi, üçünjisi we ş.m. setirleri degişli kesimleriň çäklerini aňladýan a_i, b_i bitin sanlary saklaýar. Kesimleriň birleşmesiniň uzynlygyny hasaplamagyň netijesini tekst faýlynda huşa salmaly.

```
Procedure SortBubble (n: Integer);
(a[i], b[i] we g[i] çäkleri tertipleşdirmek)
Var i, j, w : Integer;
begin
    for i:=1 to n do begin
        for j:=1 to n-i do begin
            if ab [j] > ab[j+1] then begin
w:=ab[j]; ab[j]:=ab[j+1]; ab[j+1]:=w;
w:=g[j]; g[j]:=g[j+1]; g[j+1]:=w;
end;
        end;
```

```
    end;
end;

Var {Main}
i,k : Integer ;
    n : Integer ; {berlen nokatlaryň sany}
    m : LongInt ; {kesimleri birleşdirmäniň uzynlygy}
begin {Main}
    Assign (f,' Measure.in') ;
    Reset (f); {faýly okamak üçin açmak}
    Read (f,n); {berlenleri girizmek}
for i:=1 to n do begin
k:=2*i;
        Read (f, ab[k-1], ab[k]);
        g[k-1]:=1; {çep çägi}
        g[k]:=0; {sag çägi}
end;
    close(f);
    Assign(f,' Measure.out');
    Rewrite (f); {faýl ýazmak üçin açylan}
    SortBubble (2*n);
    Measure (m, 2*n);
    Write Ln(f,m); {birleşdirmäniň uzynlygy}
Close(f);
End. {Main}
```

5.5. Yzygiderli gözleg

Diskret gurluşly algoritmlerde gözleg meselesi esasy meseleleriň biri (fundamental) bolup durýar. Berlenleriň gurluşyna köp bolmadyk çäklendirmeler girizip, dürli netijelilikleri bolan dürli görnüşli gözleg strategiýalarynyň köplügini alyp bolar.

Yzygiderli gözlegde $a_1, a_2, ..., a_n$ köplügiň elementleri olaryň gabat gelşi ýaly tertipde derňelýär diýlip hasap edilýär.

“Başyndan başla we gerekli elementi tapýançaň hereket et, soňra saklan”. Şeýle yzygiderli prosedura gözlegiň aýdyň usuly bolup durýar. 5.7 algoritm $a_1, a_2, ..., a_n$ köplükde z elementiň yzygiderli gözlegini amala aşyrýar. Özüniň ýönekeýligine garamazdan, yzygiderli gözleg örän gyzykly ideýalary özünde saklaýar.

Algoritm7. Yzygiderli gözleg.

c=o; *{z ýazgynyň gözlemegiň nyşany}.*

for i=1 to n do if z=a$_i$ *then* $\begin{cases} c=1; \\ break; \end{cases}$

if c=1 then ýazgy tapyldy else ýazgy tapylmady.

$a_1, a_2, ..., a_n$ köplügiň elementlerini gözlemegiň ortaça çylşyrymlylygyny bahalandyralyň. i-nji element a_i-ni tapmak üçin i sany deňeşdirme talap edilýär. Gözlegiň ortaça wagtyny hasaplamak üçin köplügiň her bir elementine ýüzlenmegiň ýygylygy baradaky maglumaty bermeli. Bu ýüzlenme deňölçegli paýlanan, ýagny ähli elementlere birmeňzeş ýygylykda ýüzlenilýär diýip hasap etjekdiris. Onda köplügiň elementini gözlemegiň ortaça çylşyrymlylygy $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2} = O(n)$ – çyzyklydyr.

Elementlere ýüzlenmegiň ýygylygynyň paýlanyşygyna umumy görnüşde seredeliň. Goý, S_i a_i elemente ýüzlenmegiň ýygylygyny (ähtimallyklarynyň paýlanyşygyny) aňladýar diýeliň, bu ýerde, $S_i \geq o$ we $\sum_{i=1}^{n} S_i = 1$. Bu ýagdaýda elementi gözlemegiň ortaça çylşyrymlylygy (matematiki garaşma) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot S_i$-e deň bolar. Ýygylyklaryň paýlanyşygynyň hakykata ýakyn gowy ýakynlaşmagy Zipfiň kanuny bolup durýar: $S_i = \frac{c}{i}$, $i = 1, 2, ..., n$ üçin. (Ž.K.Zipf adaty dildäki n-nji has köp ulanylýan sözüň takmyny n-e ters proporsional ýygylykda gelýänligini belläpdir).

Kadalaşdyryjy hemişelik $\sum_{i=1}^{n} S_i = 1$ bolar ýaly edip saýlanýar. Goý, $a_1, a_2, ..., a_n$ köplügiň elementleri görkezilen ýygylyklara laýyklykda tertipleşdirilen bolsun. Onda $c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} = \frac{1}{Hn} = \frac{1}{\ell nn}$ we üstünlikli gözlegiň ortaça wagty aşakdaky ýaly bolar: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot S_i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{c}{i} = n \cdot c = n \cdot \frac{1}{Hn} \approx \frac{n}{\ell nn}$, bu $\frac{n+1}{2}$-den has kiçidir.

Soňky mysal iň ýönekeý yzygiderli gözleg hem algoritmiň işiniň işjeňligini ýokary galdyrar ýaly, köplügiň elementleriniň amatly gurluşyny saýlap almagy talap edýänligini görkezýär.

Berlenleriň faýlynyň mysaly:
3
0 2
-1 1
0 1
Çykyşda berlenleriň faýlynyň mysaly:
3

Çözüwi: Meseläni çözmegiň 5.6 algoritmi $ab[1..2n]$ massiwdäki $a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots, a_n, b_n$ abssisalary öňünden tertipleşdirmäge esaslanandyr. $ab[1..2n]$ massiwi tertipleşdireňden soňra kesimleriň çäklerini: *g[i]=1* – çep çägini, *g[i]=0* – sag çägini saklaýan *g[1..2n]* goşmaça massiw gurnalýar. Hasaplamalar *ab[1..2n]* massiwi çyzykly wagtyň dowamynda ýönekeý seretmek bilen tamamlanýar. Algoritmiň umumy çylşyrymlylygy berlenleri tertipleşdirmegiň çylşyrymlylygy bilen kesgitlenilýär. Häzirki ýagdaýda köpürjikli tertipleşdirmäniň algoritminiň çylşyrymlylygy O(n^2) ulanylýar.

5.6 algoritm. *Kesimleri birleşdirmegiň uzynlygyny hasaplamagyň programmasy.*

```
Program MeasureLength; (bölekleri birleşdirmegiň uzynlygy.)
uses CRT, DOS;
const n_max=100;
```

```
type
     vector=array[0..2*n_max] of Integer;
var
     f : Text; {tekstli fayl}
     ab : Vector; {a[i], b[i] kesimleriň cakleri}
     g : Vector; {cakleriň nysanlary: 1-cep, 0-sag}
Procedure Measure (Var m: LongInt; n: Integer);
                              {birleşdirmäniň hasaby}
Var
     i, c : Integer;
begin
     ab[0]:=ab[1];
     m:=0; {birleşdirmäniň uzynlygy}
c: =0; {biri-birini ýapýan interwallaryň sany}
for i:=1 to n do begin
      if c<>0 then m:=m+ab[i]-ab[i-1];
      if g[i]=1 {cep cagi} then c:=c+1 else c:=c-1;
    end;
end;
```

Ondan başga-da, saýlanan strategiýa görä, daşky huşdaky yzygiderli faýllaryň köpüsi üçin wagtal-wagtal berlenleriň tertibini üýtgedip durmaly, ol faýlyň yzygiderli gurluşy maglumatlary göterýän enjamyň tehniki häsiýetlendirijileri bilen baglylykda kesgitlenýär. Berlenleri yzygiderli gözlemegiň algoritmi $a_1, a_2, ..., a_n$ köplügi daşky ýa-da bagly huşlarda ýerleşdirmekde şol bir netijelikde ýerine ýetirilýär.

5.6. Logarifmik gözleg

Berlenleriň logarifmik (binar ýa-da deň ýarpa bölmek usuly) gözlegi $a_1 < a_2 < .... < a_n$ tertipleşdirilen aralyk huşda ýerleşdirilen elementleriň köplügi üçin ulanarlykdyr. Gözlegiň uly netijeliligi üçin, ýönekeý yzygiderli saýlama seredeniňde elementleri saýlamagyň ýoly has ýakyn bolmalydyr.

Has aýdyň usul: gözlegi orta elementden, ýagny $a_{[\frac{1+n}{2}]}$ elementden başlamaly. Deňeşdirmäniň netijesi $a_1, a_2, ..., a_{[\frac{1+n}{2}]}, ... a_n$ yzygiderligiň haýsy ýarymynda gözlegi dowam etmelidigini kesgitlemäge mümkinçilik berýär, oňa-da şol prosedurany ulanýarys, we ş.m. Binar gözlegiň esasy ideýasy ýönekeýdir, ýöne "köp sanly gowy programmistler üçin dogry programma ýazmak synanyşyklary şowsuzlyk bilen gutardy".

Algoritmden anyk baş alyp çykmak üçin iň gowusy $a_1 < a_2 < .... < a_n$ berlenleri binar gözlege jogap berýän deňeşdirmäniň ikilik agajy görnüşinde şekillendirmeli. Ikilik agaja deňeşdirme agajy diýilýär, eger onuň islendik depesi (agajyň köki ýa-da agajyň böleginiň köki) üçin *{Agajyň çepki böleginiň depeleri}<köküň depesi<{Agajyň sag böleginiň depeleri}.*
şert ýerine ýetse $a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriň arasyndaky binar gözlegiň ortaça çylşyrymlylygyny ikilik agajyň (*5.6-njy surat*) beýikligi bilen deňeşdirip bolar. Has bolmadyk ýagdaýynda gözlenýän element iň soňky orunda bolmagy mümkin ýa-da umuman tapylmazlygy mümkin. Her bir orunda kesgitli sanly deňeşdirmeleri amala aşyrmak zerur bolýar.

5.4 punktda agaçdaky derejeleriň $[\log_2(n+1)]$ bolýanlygy görkezildi. Şeýlelikde, gözlegiň çylşyrymlylygy $O(\log_2 n)$ – logarifmikdir, bu gözleg usulynyň adyna hem gabat gelýär.

Seredilen binar gözleg esasanam berkidilen n ölçegli aralyk huşuň $a_1, < a_2 < ... < a_n$ tertipleşdirilen elementleri üçin niýetlenendir, eger wektoryň ölçegi dinamiki üýtgeýän bolsa, onda binar usuly ulanmakdaky tygşytlylyk $a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriň tertipliligini saklamak üçin çykdajyny ýapmaýar.

5.7. Hasaplanýan adresli tertipleşdirme

Goý, $a_1, < a_2 < ... < a_n$ tertipleşdirilýän bitin sanlaryň berlen yzygiderligi we $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi n)$ – şu elementleriň $a_{\pi_1} \le a_{\pi_2} \le ..... \le a_{\pi_n}$ tertipleýji çalşyrmasy bolsun. a_i – bitin sanlar diýlen çäklendirme aşakda serediljek algoritmleriň umumylygyny ýitirmeýär. Tertipleşdirilen a_i yzygiderlik bu elementleriň bahalaryny olaryň $b_{a_i} = a_i$ bolan $b_r, b_{r+1}, ..., b_s$ massiwdäki ýerleşişiniň indeksleri (salgylary) hökmünde ulanmak ýaly aýdyň usulyny salgy berýär. Tertipleşdirilen $b_r, b_{r+1}, ..., b_s$ yzygiderligi ýagny, berlenleriň $a_1, < a_2 < ... < a_n$ tertipleşdirilen yzygiderligini alýarys.

Mysal hökmünde $a_1, < a_2 < ... < a_n$ yzygiderligiň degişlilikde 6,3,5,7,2,4,1–1-den 7-ä çenli dürli bahalara deň bolan elementlerini tertipleşdirmegiň hususy ýagdaýyna seredeliň. a_i elementiň her bir bahasy $b_1 < b_2 < ..... < b_r$ tertipleşdirilen sanawdaky onuň ýerini görkezýär, bu ýerde b_i

for i=1 to 7 do $b_{a_i} = a_i$ siklden kesgitlenilýär.

Berlen usulyň çylşyrymlylygy çyzyklydyr: $O(n)$, $n=7$.

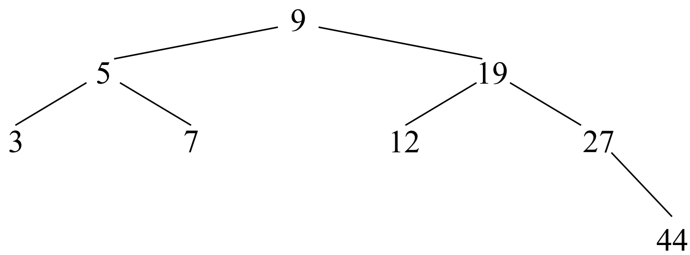
a_i-niň bahalary hakykatda $\pi = \{\pi, \pi_2, ..., \pi_n\} = (7,5,2,6,3,1,4)$ çalşyrmany kesgitleýär, bu çalşyrma $a_{\pi_1} \leq a_{\pi_2} \leq ..... \leq a_{\pi_n}$ elementleri tertipleşdirýär. π_2-niň bahalary *for i=1 to 7 do* $\pi_{ai} = i$ siklde kesgitlenýär.

Berlenleriň 6,3,5,7,2,4,1 bahalary natural sanlaryň yzygiderliginiň tutuş interwalyny doldurýanlygy üçin tertipleşdirme mümkin boldy. Erkin $a_1, < a_2 < ... < a_n$ bitin sanlar üçin hasaplanýan adresli tertipleşdirmäniň umumylaşdyrmagyna seredeliň.

Eger ähli $a_1, < a_2 < ... < a_n$ bahalar dürli bolsalar, tertipleşdirmäniň algoritmi has ýönekeýleşýär.

Goý, ýarpa bölmegiň indiki ädiminde $a_i < a_{i+1} < ... < a_j$ elementleriň arasynda gözleg geçirmek gerek bolsun. Kök hökmünde $a_{[\frac{i+j}{2}]}$ element kabul edilýär, bu ýerde, $\left[\dfrac{i+j}{2}\right] - \dfrac{(i+1)}{2}$-ä deň ýa-da ondan kiçi bolan iň uly bitin san. Agajyň çepki bölegi $a_i, a_{i+1}, ..., a_{[\frac{i+j}{2}]-1}$ wektorda ýerleşendir, sag bölegi bolsa, $a_{\left[\frac{i+j}{2}\right]+1}, ..., a_{j-1}, a_j$ wektorda ýerleşendir.

5.6-njy suratda gapyrgalary ýokarda görkezilen $a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriň indeksleriniň arasyndaky görünmeýän gatnaşyklar arkaly aňladylýan deňeşdirme ikilik agajyň mysaly görkezilendir.



5.6-njy surat. 3, 5, 7, 9, 12, 19, 27, 44 tertipleşdirilen elementleriň arasynda binar gözleg geçirmäge jogap berýän deňeşdirme ikilik agajynyň mysaly

$a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriň arasyndan z elementi deň ýarpa bölmek usuly bilen gözlemekligiň usuly 5.8. algoritminde görkezilendir.

5.8 algoritm. $a_1, < a_2 < ... < a_n$-de z-iň logarifmik gözlegi

find = 0; {ýazgyny gözlemegiň nyşany}
i=1; {Agajyň böleginiň çep çägi}
j=n; {Agajyň böleginiň sag çägi}
while i ≤ j do begin

$m = \left[\dfrac{i+j}{2} \right]$*; {Agajyň berlen böleginiň köki}*

$If\ \ z = a_m\ then \begin{cases} find = 1 \\ break \end{cases}$ *{Element tapyldy}*

else if z > $a_m$then i = m+1 {Täze çep çäk}
else j=m-1 {Täze sag çägi}
end;
if find = 1 then ýazgy tapyldy;
else ýazgy ýok;

$a_1, < a_2 < ... < a_n$ **bahalar – dürli dürli**

Tertipleşdirme usulynyň amala aşyrylyşy 5.9 algoritmde görkezilýär. $b_r, b_{r+1}, ..., b_s$ wagtlaýyn massiw $a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriň tertipleşdirilen ýerleşdirmesi üçin ulanylýar, bu ýerde $r = \min(a_1, a_2, ..., a_n)$ we $s = \max(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot b_r, b_{r+1}, ..., b_s$ massiwdäki boş ýerler $a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriniň bahalaryndan tapawutly s+1 bahalar bilen atlandyrylýarlar.

5.9 algoritm. Dürli $a_1, < a_2 < ... < a_n$ üçin hasaplanýan adresli tertipleşdirme

```
{a₁,<a₂<...<aₙ – in içinden min we max bahalary gözlemek}
r=s=a₁;
for i=2 to n do begin
    if r>aⱼ then r=aᵢ
    else if s<aⱼ then s=aᵢ
end;
{aⱼ-den tapawutly s+1, baha bilen bᵢ-ni atlandyrmak}
for i=r to s do bᵢ=s+1;
{a₁,<a₂<...<aₙ elementleriň tertipleşdirilen ýerleşdirmesi}
for i=1 to n do b_aj = aᵢ;
{a₁, b_r,b_(r+1),......,b_s-den tertipleşdirilen a₁,<a₂<...<aₙ bellemek}
k=0;
for i=r to s do begin
    if bᵢ≠ s+1 then begin
      k=k+1;
      a_k=bᵢ;
    end;
end.
```

Tertipleşdirilen $a_1, < a_2 < ... < a_n$ wektor $b_r, b_{r+1}, ..., b_s$ massiwe yzygiderli seredilensoň, s+1 baha deň bolan boş elementleri aýrylandan soňky netije bolup durýar. Algoritm içki siklleri saklamaýar, ýagny onuň çylşyrymlylygy çyzyklydyr: $O(n)$.

$a_1, < a_2 < ... < a_n$ bahalaryň içinde deňleriniň bolmagy mümkin hasap edilýär. Bu usulyň amala aşyrylyşy 5.10 algoritmde görkezýär. $a_1, < a_2 < ... < a_n$ elementleriň arasynda deň elementleriň bolmagy, mysal üçin, $a_i = a_j$, $b_{a_i} = a_i$ we $b_{a_j} = a_j$ ýerleşdirilende berlen $a_1, < a_2 < ... < a_n$ köplükde berlenleriň ýitmegine getirýär. Bir ýere şol bir wagtda birnäçe elementleriň goýlup bilmek ýagdaýyna **kolliziýa** diýilýär. Şeýle elementleri hasaplanýan adresli tertipleşdirmäniň häsiýetlerini saklamak bilen boş ýerlere gaýtadan ýerleşdirmek zerurdyr. Şeýle maksat bilen $a_1, < a_2 < ... < a_n$ ululyklaryň esasynda $b_1, b_2, ..., b_n$ massiwdäki berlenleriň $a_1, < a_2 < ... < a_n$ tertipleşdirilen ýerleşdirmesiniň indeksler wektory $d_r, d_{r+1}, ..., d_s$ hasaplanýar. 5.9. algoritmde ýerleşdirmäniň indeksiniň roluny dürli-dürli bolany üçin $a_1, < a_2 < .... a_n$ elementleriň bahalarynyň özi gös-göni ýerine ýetirilip bilinýärdi. Häzirki ýagdaýda $d_r, d_{r+1}, ..., d_s$ bahalar $a_1, < a_2 < ... < a_n$-däki ululygy boýunça deň elementler $b_1, b_2, ..., b_n$ massiwde ýerleşdirilende aralyk bolar ýaly edip düzülýär. $C_r, C_{r+1}, ..., C_s$ wektor $a_1, < a_2 < ... < a_n$-däki her bir bahanyň elementleriniň sanyny hasaplamak üçin we $d_r, d_{r+1}, ..., d_s$ ýerleşdirmedäki indeksleri gurnamak üçin ulanylýar.

5.10 algoritm. Erkin $a_1, < a_2 < ... < a_n$ üçin hasaplanýan salgyny tertipleşdirme

{a_1,a_2,…,a_n bahalaryň arasyndan min we max gözlemek}
r=s=a_1;
for i=2 to n do begin
    if r>a_i then r=a_i
    else if s<a_i then s=a_i
end;
{Her bir a_i bahanyň elementleriniň sanyny hasaplamak}
for i=r to s do c_i=0;
for i=1 to n do c_{ai}=c_{ai}+1;
{$d_r, d_{r+1}, ..., d_s$, ýerleşdirmaniň indekslerini hasaplamak}
d_r=1;
for i=r+1 to s do d_i=d_{i-1}+c_{i-1};
{b_1,b_2,.....,b_n-däki a_1,a_2,....,a_n elementleriň tertipleşdirilen ýerleşdirmesi}
for i=1 to n do begin
k=a_i;
b_{dk}=a_i;
    d_k=d_k+1;
end.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ berlenleriň tertipleşdirilen netije wektory $b_1 \leq b_2 \leq ... < b_n$ massiwde ýerleşýär. Algoritm içki siklleri özünde saklamaýar, şonuň üçin onuň çylşyrymlylygy çyzyklydyr – $O(n)$. Hasaplanýan salgyly tertipleşdirme örän çalt usul bolup durýar, ýöne ol s-r-iň uly bahalarynda işjeň huşy wagtlaýyn berlen $C_r, C_{r+1}, ..., C_s$ we $d_r, d_{r+1}, ..., d_s$ massiwleri saklamak nukdaýnazaryndan alnanda örän oňaýly däl bolmagy mümkin.

VI. KODLAŞDYRMAK NAZARYÝETI

6.1. Esasy kesgitlemeler. Kodlaryň mysallary

n elementden durýan $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ köplüge seredeliň. A köplüge n göwrümli elipbiý diýip at bereliň, onuň elementlerini simwollar ýa-da elipbiýniň harplary diýip atlandyralyň. Meselem, türkmen harplary 30 göwrümli elipbiýi düzýärler, latyn harplary bolsa 26 göwrümli elipbiýdir.

A elipbiýniň harplaryndan düzülen m uzynlykly $a_{i1}, \ldots., a_{im}$ yzygiderligi m uzynlykly söz diýip atlandyralyň.

Kesgitleme. A elipbiýde ýazylan islendik boş bolmadyk sözleriň köplügine bu elipbiýdäki kod diýilýär.

Bu köplügiň kuwwatyna koduň göwrümi, onuň elementlerine bolsa kodly sözler diýilýär. Eger kodly sözler birmeňzeş m uzynlykly bolsalar, onda kod deňölçegli diýilýär (m-e deňölçegli koduň uzynlygy diýilýär).

Gönükme. m uzynlykly deňölçegli koduň göwrüminiň $n^m = 2^m \cdot \log_2 n$ sandan geçmeýändigini subut etmeli.

Goý, $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ tükenikli köplük bolsun. Eger X-iň üstünde ähtimallyklaryň paýlanyşygy $P(X)$ berlen bolsa, ýagny her bir $x_i \in X$, $i \le e$ elemente $P(x_i)$ san degişli edilen bolsa, onda X habarlaryň diskret ansamblydyr diýip aýdýarys.

Şunlukda, $P(x_i) \ge 0$, $i = \overline{1, e}$ we $\sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$.

Her bir $Y \subseteq X$ kiçi köplüge $P(Y) = \sum P(x)$ ähtimallygy (sany) degişli edeliň.

Kesgitleme. Erkin $\ell : X \to KX$ diskret ansablyň A elipbiýiniň K koduna şekillendirilmegine X-i kodlaşdyrmak diýilýär.

1-nji mysal. Göwrümi N sany ikilik öýjüge deň bolan ýatda saklaýjy enjamly telegrafda telegrammalary awtomatiki gaýtadan işlemek ýola goýlan diýeliň. Telegrammalary kodlaşdyrmagyň 2 usulyna seredeliň: Harpma-harp we doly sözleri kodlaşdyrmak. Birinji ýagdaýda türkmen elipbiýiniň her bir harpyna ikilik hasaplaýyş ulgamynda ýazylan türkmen elipbiýinde harpyň nomerine deň bolan {0,1} elipbiýde ýazylan 5 uzynlykly sözi degişli edýäris.

Çözülişi. Mysal üçin, $a \to (00001)$, $b \to (00010)$, $ç \to (00011)$, $d \to (00100)$. Biz birjynsly kodlaşdyrmagy alýarys. Her bir telegramma ortaça 20 sözden ybarat diýsek, sözüň ortaça uzynlygy 5 harpdan durýar diýsek, onda ýatda saklaýjy gurala *N/500* telegramma ýazyp bolar.

Ikinji ýagdaýda telegrammalary düzmek üçin adatça ulanylýan $2^{13}=8192$ sözden ybarat sözlük düzüp bolar. Türkmen dilindäki şeýle sözüň her birine {0,1} elipbiýde 13 uzynlykly sözi degişli edip bolar. Ýatda saklaýjy gurala *N*/360 telegramma ýazyp boljaklygy düşnüklidir (ýagny ikinji kodlaşdyrmakda ýatda saklaýjy guralyň huşunyň göwrümi iki esse diýen ýaly köpdür).

Kesgitleme. Eger kod sözi tutuş beýleki kod sözüniň başy bilen gabat gelmeýän bolsa, onda koda dekodlaşdyrylýan (ýa-da prefiksli) diýilýär.

Meselem, deňölçegli kod dekodlaşdyrylýan koddur.

Bellik. Harplaryň yzygiderligini kod sözlerine bire-bir bölmäni üpjün edip bilýän prefiksli däl kodlar bardyr.

Türkmen elipbiýinde ýazylan sözleri kodlaşdyrmagyň usullary

1-nji usul (ornuna goýulýan şifr).

Eger türkmen elipbiýniň (sözleriň arasyndaky aralygy aňladýan goşmaça sözli) kuwwaty ≥ 31 bolan erkin köplüge inýektiw şekillenmegine seretsek, soňra tekstde her bir harpyň ýerine onuň şol köplükdäki obrazyny goýsak, onda tekst ýeterlik uly bolanda, biziň tablisamyzdan ugur alyp, aňsatlyk bilen şifri açyp bolýan ornuna goýmak kriptogrammany alýarys. Şeýle şifre Sezaryň şifri diýilýän şifr mysal bolup biler. Ol elipbiý harplarynyň aşakdaky ýaly kodlaşdyrmasyna eýedir: $a \to z$, $b \to a$, $ç \to b$ we ş.m. ýagny her bir harpyň ýerine türkmen elipbiýinde onuň öň ýanynda gelýän harpy goýýarys.

N	Harp	*N*	Harp
1	*a*	18	*o*
2	*b*	19	*ö*
3	*ç*	20	*p*
4	*d*	21	*r*
5	*e*	22	*s*
6	*ä*	23	*ş*
7	*f*	24	*t*
8	*g*	25	*u*
9	*h*	26	*ü*
10	*i*	27	*w*
11	*j*	28	*y*
12	*ž*	29	*ý*
13	*k*	30	*z*
14	*l*		
15	*m*		
16	*n*		
17	*ň*		

Mysal. Sezaryň şifri bilen "matematika aklyňy tertipleşdirýär" sözi kodlaşdyrmaly.

Jogaby: (lzşdlzşhžz zžkwnw şdpşhökdsçhpyep).

Sezaryň şifri bilen kodlaşdyrylan tekstiň şifrini açmak üçin "sütünjik usuly" ulanylýar. Her bir sütünjik wertikal (yzly-yzyna) ýazylan türkmen elipbiýniň harplaryndan durýar. Soňra biziň mysalymyzdaky "lzşdlzşhžz" sözüň şifrini açmak üçin on sany sütünjik alynýar we şol sözi almak üçin biri-biriniň gapdalynda goýulýar. Şol sözüň aşagynda jogaby durar. Sezaryň şifri hökmünde diňe elipbiýi 1 harp yza süýşürmek däl-de, fiksirlenen erkin sanly harp aşak ýa-da ýokary süýşürmeklige düşünilýär. Meselem, aşakdaky kodlaşdyrma hem Sezaryň şifri diýilýär. $a \to ç$, $в \to d$, …., $z \to в$, ýagny her bir harpyň obrazy ondan soňky üçünji harp bolup durýar.

2-nji usul (çalşylýan şifr. Bu usul L.S. Hilliň işlerinde hödürlenen).

«duşuşyk bir hepdeden bolar» (6.1)

habary şifrlemek gerek bolsun.

Her bir harpa onuň elipbiýdäki nomerini degişli edeliň, sözleriň arasyndaky aralyga 31-i degişli edeliň. Onda biziň habarymyza aşakdaky sanlaryň yzygiderligi degişli bolar:

$$4, 25, 23, 25, 23, 28, 13, 31, 2, 10, 21, 31, 9, 5, 20,$$
$$4, 5, 4, 5, 16, 31, 2, 18, 14, 1, 21. \qquad (6.2)$$

Bu yzygiderligi Z_{31} halkada seredeliň. Bu halkada erkin öwrülişikli elementi, meselem, $\overline{3} \in Z_{31}\,(\overline{3} \cdot \overline{11} = \overline{1})$ alalyň. Bu yzygiderligiň her bir agzasyny 3-e köpeldeliň:

$$12, 13, 7, 13, 7, 22, 8, 31, 6, 30,1, 31, 21,15, 29,$$
$$12,15, 12,15, 17, 31, 6, 23,11, 3,1. \qquad (6.3)$$

Şeýlelikde, biziň habarymyz aşakdaky görnüşde kodlaşdyrylýar:

Žkfkfsg äza rmýžmžmň äşjça (6.4)

(6.4) habaryň şifrini açmak üçin, ony (3.3) görnüşde ýazmaly, soňra (6.3) yzygiderligi $\overline{11} = \overline{3}^{-1}$ (Z_{31} halkada) köpeltmeli. Biz (6.2) yzygiderligi alarys. Sanlaryň ýerine degişli harplary goýup, biz öz tekstimizi dikelderis.

Z_{31} halkanyň üstünde has däl matrisalary ulanyp, ýokardaky usuly çylşyrymlaşdyralyň. (6.2) yzygiderligi jübütlere böleliň:

$$\begin{pmatrix}4\\25\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}23\\25\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}23\\28\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13\\31\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}21\\31\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\16\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}31\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}18\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\21\end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Berlen sütünleri $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(Z_{31})$ matrisa köpeldeliň, bu matrisanyň ters matrisasy bardyr: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(Z_{31})$. Aşakdaky sütünlerden ybarat täze yzygiderligi alýarys:

$$\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}28\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}26\\23\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}11\\30\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}27\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\20\end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Harplara gaýdyp gelip, biz aşakdaky ýaly kodlaşdyrylan maglumaty alarys:

çgikyçüşbbjzňgbzçkkdžlwkdp (6.7)

Onuň koduny açmak üçin A matrisany bilmeli. Hakykatdan hem, A-nyň derejesi 2×2 bolany üçin (6.7)-de harplaryň ýerine olaryň elipbiýdäki tertip belgisini goýup we alnan sanlary jübüt-jübütden bölüp, biz (6.6) sütünleri alarys. Bu yzygiderligi A^{-1} matrisa köpeldip (çepden), biz öz tekstimizi dikelderis. Berlen sanlar (nomerler) yzygiderliginiň bölünýän sütünlerindäki elementleriň sanyny köpeldip, berlen usuly çylşyrymlaşdyryp bileris.

Şu usul bilen kodlaşdyrmak üçin $M_n(Z_{31})$ halkada öwrülişikli "açar" matrisany bilmeli, tekstdäki harplaryň we aralyklaryň sany n-e bölünmeli.

Bellik. "Akmak bolma ataň ýaly, akylly bol" diýlen belli nakyl türkmen dilindäki teksti has anyk kabul etmek üçin nokat we otur üçin hem käbir simwollary girizmek zerurlygy ýüze çykarýar. Bu ýagdaýda biz Z_{33} halkaň üstünde işleýäris.

3-nji usul (çalşylýan kod). **"köýtendag – taryhy mekan"** habary kodlaşdyrmak gerek bolsun.

Dürli harplardan düzülen we diňe teksti iberene we adres boýunça alýana belli bolan açar sözi saýlalyň. Meselem, "SEÝDI" sözüni alalyň we aşakdaky tablisa seredeliň.

S	E	Ý	D	I
4	2	5	1	3
k	ö	ý	t	e
n	d	a	g	t
a	r	y	h	y
m	e	k	a	n

Bu tablisada açar sözüň aşagynda degişli harplaryň elipbiýdäki gelýän tertibini görkezýän sanlar ýazylan (bäş belgili açar san alyndy). Biziň tekstimize aşakdaky kriptogrammany degişli edeliň: tghaödreetynknamýayk.

Bu ýerde harplar tablisadaky sütünler boýunça onuň nomerine görä ýazyldy. Bu kriptogrammanyň koduny açmak üçin açar sözi ýa-da 42513 sany bilmek ýeterlikdir.

Mysal. "SEÝDI" açar sözüni ulanyp, berlen habaryň koduny açmaly:

eňtlälgbnýylstyzyuzyuo.

Jogaby: täze ýylyňyz gutly bolsun.

4-nji usul (Tritemiusyň şifri). Türkmen elipbiýiniň harplarynyň 1-den 30-a çenli tertip belgisine seredeliň. Käbir açar sözi, meselem, “SEÝDI” sözi saýlalyň. Käbir tekstiň koduny açmak üçin, meselem, “doglan günüň gutly bolsun” tekstiň koduny açmak üçin aşakdaky ýazga seredeliň:

DOGLANGÜNÜŇGUTLYBOLSUN
S EÝDI S EÝD I SEÝDI SEÝDI SE

Harplaryň ýerine sanlary goýup, aşakdaky tablisany alarys:

4	18	8	14	1	16	8	26	16	26	17	8	25
22	5	29	4	10	22	5	29	4	10	22	5	29

24	14	28	2	18	14	22	25	16
4	10	22	5	29	4	10	22	5

Birinji we ikinji setirlerdäki degişli sanlary goşup (Z_{30} halkada), sanlaryň 26, 23, 7, 18, 11, 8, 13, 25, 20, 6, 9, 13, 24, 28, 24, 20, 7, 17, 18, 2, 17, 21 yzygiderligini alarys.

Sanlaryň ýerine alfawitiň harplaryny goýalyň.

Aşakdaky kodlaşdyrylan teksti alarys:

üşfojgkupähktytpfňobňr

Onuň şifrini açmak üçin açar sözüň ýazgysyny bilmeli (Z_{30} halkada), kodlaşdyrylan tekstden san ýazga geçmeli we her bir sandan (mod 30 boýunça) degişli açar harpyň nomerini aýyrmaly.

5-nji usul. Türkmen elipbiýiniň $N \times N$-däki erkin inýektiw şöhlelenmesi Y-e seredeliň. Her bir sözi kodlaşdyrmak diýmek, onuň her bir harpyny (X-y) ol harpyň obrazy ($Y(X)$) bilen çalyşmakdan ybaratdyr.

Mysal üçin, Y şöhlelenme 6×6 görnüşli tablisa görnüşinde berlen bolsun:

	1	2	3	4	5	6
1	a	o	n	m	ü	k
2	p	b				s
3	r	ý	w	ş		ž
4	c	u	l	g	ä	z
5	t	e	j	ç	d	i
6	y	f	h		ň	ö

Onda “uniwersitet” sözüne aşakdaky tertipleşdirilen jübütleriň toplumy degişli bolýar:

(4.2), (1.3), (5.6), (3.3), (5.2), (3.1), (2.6), (5.6), (5.1), (5.2), (5.1), ýa-da 4213563352312656515251 san degişli bolar, bu san boýunça berlen sözüň kody açylýar, onuň üçin tablisany bilmek zerurdyr.

Mysal. Ýokarky tablisadan peýdalanyp, 14 11 51 52 14 11 51 56 16 11 614361 14 43 11 31 61 65 21 11 51 61 34 11 26 61 55 61 31 habaryň koduny açmaly.

Jogaby: matematika – ylymlaryň patyşasydyr.

Indiki mysal bolup Morze adyny alan, 2 göwrümli elipbiýi ulanýan (nokat, tire) we telegraf habarlary üçin ulanylýan çalşylýan kod bolup durýar. (Samuel Morze tarapyndan oýlanyp tapylan: göýberilen nokat toguň gysga impulsyna degişli, tire toguň uzak impulsyna degişli).

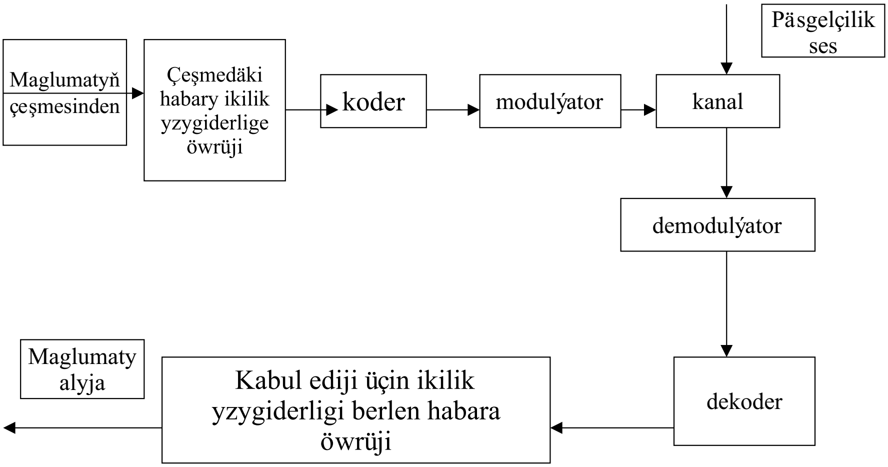
1-nji mesele. *n* uzynlykly birnäçe nuly yzly-yzyna saklamaýan näçe sany ikilik sözler bar?

Çözülişi. Nullaryň sanynyň $q=n\text{-}t \leq n/2$ boljakdygy düşnüklidir. Her bir şeýle sözden islendik goňşy nullaryň arasyndaky birlikleri bir-birden aýryp, göni q sany nuly saklaýan $n\text{-}(q\text{-}1)$ uzynlykly sözi alarys. Bu degişlilik biýektiwdir. Şonuň üçin, gözlenýän san $C_{n-q+1}^{q}=C_{t+1}^{n-1}$-e deňdir.

6.2. Ýalňyşlyklary düzedýän kodlaryň mysallary

Käbir tekstleri türkmen ýa-da iňlis dilinde çap edýän wagty harp ýygnaýjynyň käbir ýalňyşlyklary göýbermegi mümkin. Adatça, ol dogry teksti dikeltmek üçin päsgel bermeýär. Ol diliň artykmaçlyklary bilen bagly.

Meselem, iňlis diliniň artykmaçlygy 70%-e deň. Kodlaşdyrylan maglumat göýberlende berilýän maglumaty goýýan päsgelçilikleriň döremegi mümkin. Şonuň üçin, habar göýberlende ýalňyşlyklary ýüze çykarmagy oňarmaly. Bu göýberilýän maglumatyň artykmaçlygynyň hasabyna amala aşyrylýar. Ilki biz kodlaşdyrylan habary göýbermegiň shemasyna (modeline) seredeliň:



Berlen maglumat öwrüjiniň kömegi bilen ikilik simwollaryň yzygiderligine öwrülýär, soňra kodlaşdyrýan gurala (kodere) berilýär, ol ýerde oňa artykmaçlyk girizilýär. Modulýator oňa berlen simwollary signallara öwürýär, olar öz gezeginde kanal boýunça göýberilýär. Signallar göýberilen wagty olara päsgelçilikler we sesler täsir edýärler. Üýtgeşmeler peýda bolýar. Demodulýator üýtgän (üýtgemedik) signallary ikilik simwollaryň yzygiderligine öwürýär. Dekoder signallaryň artykmaçlygyndan peýdalanyp, ýalňyşlyklary tapýar we düzedýär.

Ýalňyşlyklary tapýan kodlaryň mysallaryna seredeliň.

1-nji mysal. t_0 wagtda “0” ýa-da “1” görnüşli bir impuls göýberilýän kanala seredeliň.

Ýalňyşlygyň ähtimallygy P sana deň. Her bir *a* simwol kanal boýunça 5 gezek göýberilýär, ýagny *aaaaa* impuls görnüşinde göýberilýär. Kabul edilende alnan yzygiderligi bloklara bölýärler (her haýsysynda 5 simwoldan).

Eger $C_5^3P^3(1-p)^2+C_5^4P^4(1-p)+P^5$ ähtimallyk kiçi bolsa, onda ikiden köp bolmadyk *0*-y (mümkin bolan 5 sanydan) saklaýan bloklar *11111* ýaly, ikiden köp bolmadyk *1*-i özünde saklaýan bloklar bolsa, *00000* ýaly koddan açylýarlar. Bu usulyň kemçiligi köp wagty talap edýänligidir (bir bit maglumaty göýbermek 5 t_0 wagt talap edýär).

1-nji mesele. Goý, kanal boýunça n simwol göýberilýän bolsun we göýberilendäki ýalňyşlygyň ähtimallygy p-e deň. k sany ýalňyşlygyň ähtimallygynyň $C_n^k\ P^k\ (1\text{-}p)^{n-k}$ deňdigini subut etmeli.

2-nji mysal. Biziň C_n^k habarymyz bar diýeliň. Her bir habara 0 we 1-den durýan n uzynlykly yzygiderligi degişli edeliň, bu yzygiderlikde 1-iň sany göni k deňdir. Şeýle kodlaşdyrmaga deňölçegli diýilýär.

Çözülişi. Meselem, birinji 10 sany (sifri) kodlaşdyralyň.

0 $\longrightarrow$ (00011)
1 $\longrightarrow$ (00101)
2 $\longrightarrow$ (00110)
3 $\longrightarrow$ (01001)
4 $\longrightarrow$ (01010)
5 $\longrightarrow$ (01100)
6 $\longrightarrow$ (10001)
7 $\longrightarrow$ (10010)
8 $\longrightarrow$ (10100)
9 $\longrightarrow$ (11000)

Bu ýerde $C_5^2=10$. Şeýle yzygiderligi göýberende bir ýalňyşlygyň ýüze çykmagy bir sany 1-lik ýa-da 3 sany birlik bolan 5 simwoldan ybarat bloga getirýär, ýagny nirede ýüze çykanlygyny bilmezden, biz ýalňyşlygyň bardygyny görýäris.

3-nji mysal. 2^n-den uly bolmadyk kuwwatly habarlaryň köplügine seretmeli.

Çözülişi. Her bir habar 0 we 1-den durýan yzygiderlikler görnüşinde kodlaşdyrylan.

$$(a_1,\ ....,\ a_n).$$

$$a_{n+1} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(mod2) şerti kanagatlandyrýan a_{n+1} goşmaça simwoly girizeliň. $(a_1,...,a_n)$ yzygiderligiň ýerine $(a_1,...,a_n,a_{n+1})$ yzygiderligi göýberýäris. Birlikleriň sany täze yzygiderlikde jübütdir. Eger göýberlende täk sany ýalňyşlyk göýberilen bolsa (hususy alnanda, bir ýalňyşlyk), onda göýberilen $(a_1^1,...,a_{n+1}^1)$ yzygiderlikde birlikleriň sany täk bolar, ýagny bu “jübütlik” barlagy usuly bilen, eger täk sanly ýalňyşlyk bolsa, onda onuň diňe barlygyny ýüze çykaryp bolar.

2-nji mesele. Habarlar köplüginiň kuwwaty 10^4-den köp däldir diýeliň. Her bir α habara $\overline{abcd}$ natural sany degişli edeliň, ýagny $\alpha = \rightarrow \overline{abcd}$, $a,b,c,d \in \{0,1,\ldots,9\}$. Kanal boýunça abcd yzygiderligi göýbermegiň ýerine abcde-ni göýberýäris, bu ýerde, $(e+a+b+c+d) \equiv 0 \pmod 9$. Şeýle kodlaşdyrmak göýberlende nämäni anyklap biler?

Jogaby. Biz ýalňyşlygyň ýoklugyny ýa-da 0-uň 9-a çalşylandygyny ýa-da 9-yň 0-a çalşylandygy, ýa-da 2-den köp ýalňyşlygyň bardygyny anyklap bilýäris.

4-nji mysal. (R.W.Hamming, 1950). 4 bitlik maglumaty özünde saklaýan 7 uzynlykly sözde bir ýalňyşlygy düzedýän kody tapmaly.

Çözülişi. Nullardan we birliklerden durýan (a,b,c,d) yzygiderligi göýbermek gerek diýeliň. Aşakdaky wektora seredeliň:

$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \\ z \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Bu ýerde $x+a+b+d=0$, $y+a+c+d=0$, $z+b+c+d=0$.

Bu şertleri matrisa görnüşinde ýazalyň.

Goý,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisada i-nji sütün $\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ özünde $i = r \cdot 2^0 + s \cdot 2^1 + t \cdot 2^2 = (tsr)_2$ bolan r, s, t sifrleri saklaýar, ýagny bu sifrler i sanyň 2-lik ýazgysyna girýärler diýeliň. Onda $H \cdot C = 0$.

Goý, kabul ediji çykyşda aşakdaky wektory kabul edýän bolsun:

$$R = \frac{b_1}{b_7}.$$

Eger p – bir sifri göýberendäki ýalňyşlygyň ähtimallygy bolsa, onda C-ni göýberende birden köp bolmadyk ýalňyşlygyň göýberilmeginiň ähtimallygy aşakdaky sana deňdir:

$\vartheta=(1\text{-}p)7+7(1\text{-}p)6\cdot p$. Meselem, eger-de $p=0.1$ bolsa, onda $\vartheta=0.998$.

Eger ϑ – 1-e ýakyn ähtimallyk bolsa, onda R wektor C wektordan birden köp bolmadyk girýäni (bir koordinatasy) bilen tapawutlanýar diýen ynam bolup biler.

$E=R\text{-}C$ seredeliň. $H\cdot R=H\cdot C+H\cdot E=H\cdot E$. Eger $R=C$ bolsa, onda $E=0$ we $H\cdot E=0$. Eger-de $R\neq C$ bolsa, onda E – bir koordinatasy 1-e galanlary nula deň bolan wektor – sütündir. Bu ýagdaýda, $H\cdot E$ – H-daky i-nji nomeri E-däki 1-e deň bolan H sütündir.

Meselem, eger

$$R = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \text{ bolsa, } H\cdot R = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}.$$

$$H\cdot\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}, \text{ ýagny } C = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}.$$

1-nji gönükme.

a) eger-de, $R=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ bolsa, onda $H\cdot R=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ we $C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

bolýandygyny barlap görmeli;

b) eger-de, $R=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ bolsa, onda $H\cdot R=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ we $C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

ç) eger-de, $R=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ bolsa, onda $H\cdot R=0$ we $C=R$;

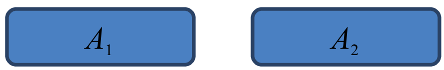
d) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ sözüň (wektoryň) koduny açmaly.

6.3. Birbelgili açyp bolýan kodlar. Kraftyň deňsizligi

Koduň tekstiniň uzynlygyny azaltmak we habaryň göýberilýän wagtyny tygşytlamak üçin köp duş gelýän habarlar kiçi uzynlykly sözler bilen, seýrek habarlar bolsa, uly uzynlykly sözler bilen kodlaşdyrylýar. Bu Morze elipbiýiň mysalynda aýdyň görünýär. $P(A_1)\geq P(A_2)\geq\cdots\geq P(A_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

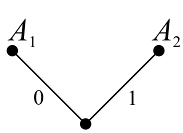
Ähtimallyklar toplumy erkin $A=\{A_1,\ldots,A_n\}$ habarlar ansamblyna seredeliň. Fanonyň kodlaşdyrmak algoritmi diýlip atlandyrylan algoritmi ulanalyň. A köplügi iki topara böleliň. Şunlukda iki toparyň her haýsyndaky habarlaryň ähtimallyklarynyň jemleri biri-birine mümkin boldugyça ýakyn bolar ýaly edeliň.



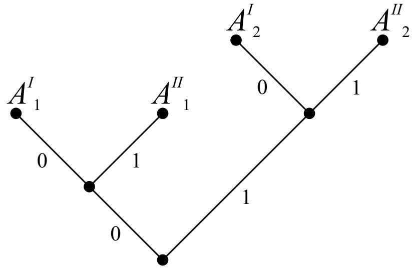
Birnji A_I toparyň habarlaryna simwol 0-y, ikinji A_2 toparyň habarlaryna simwol 1-i degişli edeliň. Şeýle usulda A_I, A_2 toparlaryň her haýsy iki sany köplüge bölünýärler:

$$A_1 = A_I^I \cup A_I^{II}, \quad A_2 = A_2^I \cup A_2^{II}.$$

A_I^I -däki habarlara simwol 00-y, A_I^{II} -däki habarlar simwol 01-i, A_2^I -däkilere simwol 10-y, A_2^{II} -däkilere simwol 11-i degişli edeliň. Berlen algoritmi 1 habardan durýan köplükleri alýançak dowam edeliň. Netijede her bir habara 0 we 1-den durýan kod sözi degişli edilýär. A_i – habaryň $P(A_i)$ ähtimallygy uly boldugyça degişli kod sözi gysga bolar. Görkezilen algoritm graflar nazaryýetiniňdilinde aňladylyp bilner. Anyklap aýdylanda, Fanonyň algoritminiň birinji ädimi aşakdaky grafa (agaja) degişlidir:



Ikinji ädimi aşakdaky grafa degişlidir:



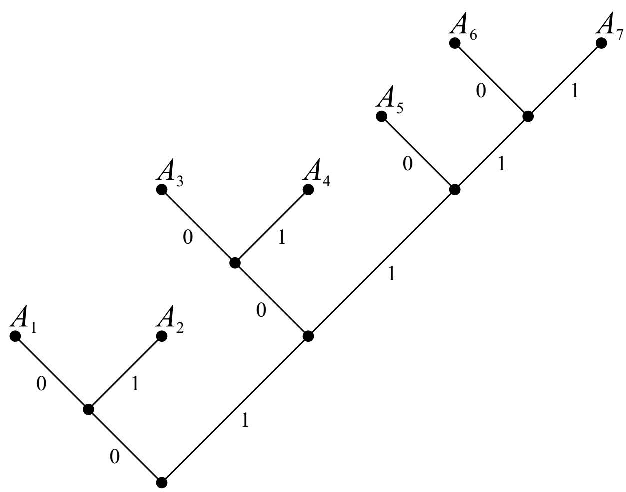
Netijede biz habarlar ansamblynyň (köplüginiň) Fano kod agajyny alarys.

Mysala seredeliň. Goý, $A=\{A_1,\ldots,A_7\}$ ähtimallyklary $P_1 = P_2 = \frac{1}{4}$, $P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{8}$ we $P_6 = P_7 = \frac{1}{16}$ bolan, 7 sany habardan durýan köplük berlen bolsun.

Birinji gezek bölünende $A_1=\{A_1,A_2\}$, $A_2=\{A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$.

Ikinji gezek bölünende $A_1^1 = \{A_1\}$, $A_1^{II} = \{A_2\}$, $A_2^I = \{A_3, A_4\}$, $A_2^{II} = \{A_5, A_6, A_7\}$. A_2^I we A_2^{II} köplüklerde şuňa meňzeş bölmeleri dowam edip, biz aşakdaky agajy we degişli kod sözlerini alarys:

a)



b)

habarlar	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Kod sözleri	00	01	100	101	110	1110	1111

Ýokarda getirilen Fanonyň kodlaşdyrmagyna degişli 7 habardan durýan $\{A_1, \ldots, A_7\}$ mysalyň deňölçegli kodlaşdyrmak bilen deňeşdirilende tygşytlylygyny görkezeliň: $A_1 \to 000$, $A_2 \to 001$, $A_3 \to 010$, $A_4 \to 011$, $A_5 \to 100$, $A_6 \to 110$, $A_7 \to 101$. Hakykatdanam, eger $\{A_1, \ldots, A_7\}$ elipbiýde 1000 habardan durýan teksti göýbermeli bolsa, onda deňölçegli kodlaşdyrmakda biz 3000 ikilik simwollary ulanýarys, Fanonyň usuly boýunça kodlaşdyranda bolsa biz $250 \cdot 2 + 250 \cdot 2 + 125 \cdot 3 + 125 \cdot 3 + 125 \cdot 3 + 125 \cdot 2 + 125 \cdot 2 = 2625$ ikilik simwollary ulanýarys. Tygşytlylygyň kriteriýasy bolup, kod sözüniň orta uzynlygy diýlip atlandyrylýan $\overline{e} = \sum_{i=1}^{N} l_i P(A_i)$ ululyk hyzmat edýär, bu ýerde, l_i-A_i kod sözüniň uzynlygy. Biziň mysalymyzda

$$\overline{e} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 3}{8} + \frac{4}{16} \cdot 2 = 2\frac{5}{8} \approx 2,62.$$

1-nji gönükme. Degişli orta uzynlygyny tapyp we kod agajyny gurup, aşakdaky habarlar köplügini Fanonyň ikilik kody bilen kodlaşdyrmaly.

1) $P_1 = P_2 = 0,22$; $P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 0,1$; $P_7 = P_8 = P_9 = P_{10} = 0,04$ ýaly ähtimallyklary bolan on sany habary.

2) $P_1 = 0,5$; $P_2 = 0,25$; $P_3 = P_4 = 0,125$ ýaly ähtimallyklary bolan dört sany habary kodlaşdyrmaly we deňölçegli kodlaşdyrmak bilen deňeşdirilendäki utuşy anyklamaly.

Fanonyň algoritminde jemleýji deň ähtimallykly iki sany topara bölmekligi ulanyp, d sany deňähtimallykly toparlara bölüp, biz habarlary d simwoldan ybarat ellipbiý arkaly kodlaşdyrmaklyga gelýäris. Degişli agajyň bir depesinde d-den köp bolmadyk gapyrgasy bardyr.

2-nji gönükme. Fanonyň üçlük kody bilen

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}$ ähtimallyklary bolan 9 sany habary kodlaşdyrmaly.

3-nji gönükme. Fanonyň üçlük kody bilen 0,3; 0,15; 0,15; 0,15; 0,07; 0,07; 0,07; 0,04 ähtimallyklary bolan 8 sany habary kodlaşdyrmaly.

Fanonyň usuly bilen kodlaşdyrmak deňölçegli däldir. Kodlaşdyrmagyň deňölçegli däldigi käwagt kody açmaklygyň birbelgili bolmazlygyna getirýär.

Meselem, eger A_1 we A_2 habarlar degişlilikde 1 we 11 ýaly kodlaşdyrylan bolsa, onda kodlaşdyrylan 111 yzygiderlik aşakdaky usullaryň biri bilen şifrden açylyp bilner:

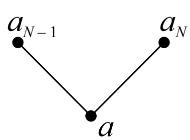
$$\{A_1, A_2\},\ \{A_2, A_1\},\ \{A_1, A_1, A_1\}.$$

Eger her bir kod simwollarynyň yzygiderligi ýeke-täk görnüşde kod sözlerine bölünýän bolsa, onda şeýle koda birbelgili açylýan kod diýilýär (ýa-da otursyz kod). Şeýle koduň mysallaryna islendik deňölçegli kod, şonuň ýaly-da, prefiks kod (ýagny tutuş kod sözi beýleki kod sözüniň başlangyjy bolup durmaýan kod) girýär. Fanonyň kody prefiks koddur, sebäbi kod sözleri kod agajynyň ahyrky depelerine degişli edilýär. Ondan başga-da, bu ikilik kod doludyr, ýagny berlen elipbiýde islendik täze koduň goşulmagy bilen prefiks häsiýeti bozulýar.

4-nji gönükme. Degişli kodlaryň birbelgili kody açylýan kodlardygyny we prefiks däldigini subut etmeli:

$$\{1, 10\},\ \{01, 10, 011\}.$$

Goý, $V=\{a_1, ..., a_N\}$ käbir prefiks ikilik kod bolsun. Onuň prefiksliginden V-niň käbir (ikilik) grafyň (agajyň) ahyrky depeleridigi gelip çykýar.



Goý, n_k – k uzynlykly kod sözleriniň sany, ýagny n_k – k-njy gatdaky depeleriň sany bolsun. $n_k \le 2k$ bolýanlygy düşnüklidir. i-nji gatyň her bir depesinden k-njy gatyň $2k$-i depeleri emele gelýär, onda prefiks kod bolan ýagdaýynda aşakdaky deňsizlikleri alarys:

$$n_k \leq 2k - 2k - 1\ n_1 - 2k - 2\ n_2 - .... - 2 \cdot n_k - 1,$$

$$\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \cdots + \frac{n_k}{2^k} < 1;$$

Eger l – kod sözleriniň maksimal uzynlygy bolsa, onda Kraftyň deňsizligi diýlip atlandyrylýan deňsizligi alýarys:

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{2^i} \leq 1 \qquad (1)$$

ýa-da

$$\frac{1}{2^{l_1}} + \frac{1}{2^{l_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{l_n}} \leq 1,$$

bu ýerde l_i – a_i-niň uzynlygy, $i \leq N$.

Tersine, (1) deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda kod sözleriniň uzynlyklary $l_1, l_2,....,l_n$ bolan prefiks kod bardyr. (1) deňsizlikden

$$n_1 \leq 2,\ n_2 \leq 4\text{-}2n_1,\ n_3 \leq 8\text{-}4n_1\text{-}2n_2,.....$$

deňsizlikler gelip çykýar. Ikilik agajyň birinji gatynda n_1 depeleri saýlalyň, 2-nji gatynda erkin n_2 depeleri saýlalyň, ol depeler birinji gatyň boş (saýlanmadyk) depelerinden çykýar we ş.m. Degişli ikilik kodlaşdyrmak gözlenýän prefiks kody düzýär.

Prefiks kod

$\frac{1}{2^{l_1}} + \frac{1}{2^{l_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{l_n}} = 1$ bolanda we diňe şonda doly koddur.

Görkezme. Koduň käbir grafyň (agajyň) ahyrky depeleriniň ikilik ýazgysy ýaly berlişinden peýdalanmaly.

Bellik. d simwoldan ybarat elipbiýde kod sözleriniň uzynlyklary $l_1, l_2,....l_n$ deň bolan prefiks koduň $\frac{1}{d^{l_1}} + \frac{1}{d^{l_2}} + \cdots + \frac{1}{d^{l_n}} \leq 1$ bolanda we diňe şonda barlygy şuňa meňzeşlikde subut edilýär. Fanonyň prefiks kody kod sözleriniň ortaça uzynlygynyň iň gysga däldigi manysynda alnanda ýaramly däldir (umuman alnanda).

D.Haffmeniň kodlaşdyrmak usulyna seredeliň (1952). Bu usul prefiks optimal kody berýär.

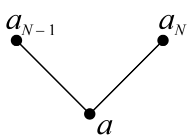
Ähtimallyklary P_1, P_2, ..., P_N deň bolan $A=\{A_1, \ldots, A_N\}$ habarlar ansamblyna (köplügine) seredeliň.

Şunlukda, $P_1 \geq P_2 \geq \ldots\ldots \geq P_N$ hasap edip bolar. Bu habarlar uzynlyklary degişlilikde l_1, l_2, ..., l_N deň bolan ikilik elipbiýdäki a_1, a_2, ..., a_N sözler bilen kodlaşdyrylan diýip hasap edeliň. Eger $l_{i+1} < l_i$ bolsa, onda A_i we A_{i+1} üçin kod belliklerini çalşyp, ortaça uzynlygyň

$P_i\ l_i + P_i{+}1\ l_i{+}1 - P_i\ l_i{+}t - P_i{+}t\ l_i = (P_i - P_{i+1})(l_i - l_i{+}t) \geq 0$ ululykça kiçelmegini alarys.

Şeýlelikde, $P_{i+1} < P_i$ bolanda, biz ortaça uzynlygy $l_{i+1} < l_i$ bolanda kiçeldip bileris. Eger $P_i = P_{i+1}$ we $l_{i+1} < li$ bolsa, onda A_i we A_{i+1} habarlaryň ýerini çalyşýarys (we degişlilikde olaryň kod sözlerini çalyşýarys).

Görkezilen hereketleriň netijesinde kodlaşdyrmagy oňatlaşdyrmaklyga ymtylyp, biz $A_1, A_2, \ldots, A_N$ habarlarymyzy we $\{a_i\}$ sözler bilen kodlaşdyrmagyň tertibini $P_1 \geq P_2 \geq \ldots \geq P_N$ we $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_N$ bolar ýaly tertipleşdirip we üýtgedip bileris. Hususan-da, A_N habar iň uly l_N uzynlykly söz bilen kodlaşdyrylýar. Eger şeýle söz ýeketäk bolsa (ýagny $l_{N-1} < l_N$), onda a_N sözüň (l_N uzynlykly) soňky sözüni zyňyp, biz öňküden kiçi uzynlykly prefiks kody alarys. Eger a_s söz ($s \leq N\text{-}1$) şol bir l_N (ýagny $l_s = l_{s+1} = \ldots l_N$) uzynlykly we a_N-den soňky simwoly bilen tapawutlanýan bolsa, onda a_s we a_{N-1} kod sözleriniň ýerini çalşyp, iň soňky iki sany iň uly uzynlykly a_{N-1}, a_N sözler diňe soňky simwoly bilen tapawutlanýarlar diýip hasap edip bileris.



Habarlaryň ilkibaşda berlen $A=\{A1, A2, \ldots, AN\text{-}1, AN\}$ köplügine gaýdyp geleliň, bu ýerde $Pi=P(Ai)$, $i \leq N$. Onuň gysylmasyna seredeliň: $A(1)=\{A_1, A_2, \ldots, A_{N-2}, A\}$, bu ýerde $P(A_i)=P_i$, $i \leq N\text{-}2$ we $P(A)=P_{N-1}+P_N$.

Goý, $A(1)$ üçin $K(1)=\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-2}, a\}$ kodlaşdyrmak gurlan bolsun, ýagny $a_1, \ldots, a_{N-2}, a$ ahyrky depeleri bolan kod agajy gurlan bolsun. Berlen A ulgam $K=\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a0, a1\}$ kod belgiler ulgamyny degişli edeliň, ýagny $a_{N-1}=a0$, $a_N=a1$. Şeýle degişlilige pytratmak diýilýär.

Lemma. Eger $K^{(1)}$ kod $A^{(1)}$ ulgam üçin ýaramly bolsa, onda K kod A ulgam üçin hem ýaramlydyr.

Subudy. Garşylyklaýyn pikir edeliň. Onda orta uzynlygy $\overline{l}_1 = l(K_1) < (K) = \overline{l}$ deň bolan A ulgamnyň K_1 kodlar ulgamy bardyr.

Goý, $K_1=\{b_1, ..., b_{N-1}, b_N\}$ bolsun. Öňki belliklere görä, b_{N-1} we b_N iň az ähtimallyklary bolan A_{N-1} we A_N wakalar üçin kod sözleri bolup durýar. Şunlukda, olar diňe iň soňky simwoly bilen tapawutlanýarlar, ýagny $b_{N-1}=b0, b_N=b1$ (ýa-da $b_{N-1}=b1, b_N=b0$). $A^{(1)}$ üçin $K_I^{(1)} = \{b_1, \ldots, b_{N-2}, b\}$ koda seredeliň. $\overline{l}_1 = \overline{l_I^I} + P - (\overline{l_I^I} = l(K_1^{(1)})$ alarys. $\overline{l_I^I} \leq \overline{l}$ we $\overline{l} = \overline{l^I} + P$ (bu ýerde $\overline{l_I^I} = l(K_1^{(1)}))$, onda $\overline{l_I^I} < \overline{l^I}$. Garşylykly deňsizlik alýarys. Lemma görä, biz habarlar köplügini birnäçe gezek gysmak arkaly (degişlilikde kod belgilerine pytratmak arkaly) ýaramly kod gurup bileris (ilki gysyp, soňra bolsa giňeldip).

Mysal.

A habar	**Ähtimmal-lyklar**		**A(1) habar**	**Ähtimal-lyklar**		**A(2) habar**	**Ähtimal-lyklar**		**Ortaça uzynlygy**
A_1	0.5	0	A_1	0.5	0	A_1	0	0.5	
A_2	0.25	10	A_2	0.25	10	A	1	0.5	1.75
A_3	0.125	110	A	0.25	11				
A_4	0.125	111							

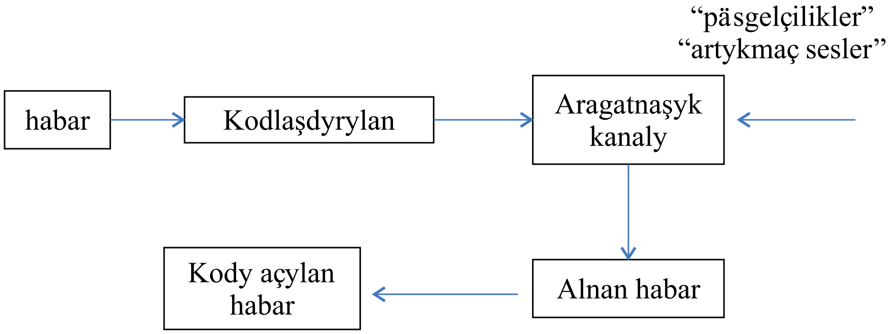
6-njy gönükme. Aşakdaky ähtimallyklary bolan habarlar köplügini Haffmeniň ikilik kody bilen kodlaşdyrmaly.

a) 0.4; 0.15; 0.15; 0.15; 0.15; 0.15;

b) 0.25; 0.2; 0.15; 0.15; 0.15; 0.1.

6.4. Çyzykly kodlar

Öň bellenip geçilişi ýaly, kod ygtybarly, çalt göýberilýän we amatly bolmaly. Şu üç ýagdaýyň utgaşygy, şeýle-de, habary göýberende päsgelçilikleriň bolmagy ýaramly kodlary olaryň anyk görnüşinde ulanmaga mümkinçilik bermeýär. Onuň üçin artykmaç maglumatly kodlar ulanylýarlar. Aragatnaşygyň ýönekeýleşdirilen modelini huşa salalyň.



Biz habarlaryň we kodlaryň ýazgysyna girýän simwollary *GF(q)=Fq* meýdanyň elementleri diýip hasap etjekdiris. Kodlaşdyrmak – bu f: $F_q^k \to F_q^n$ şekillenmedir, bu ýerde $n>k$. Her bir *a1, a2, ..., ak* $(a_i \in Fq)$ habar c_1, …., c_n kod sözi bilen çalşyrylýar. Şuňa meňzeşlikde, koddan açmak – bu g: $F_q^n \to F_q^k$ şekillenmedir.

Goý, $x, y \in F_q^n$ bolsun. *x,y* wektorlaryň arasyndaky Hemmingiň *d(x,y)* aralygy diýlip, *x* we *y* wektorlaryň biri-birinden tapawutlanýan koordinatlarynyň sanyna aýdylýar, Hemmingiň *w(x)* agramy diýlip, bu wektoryň nula deň bolmadyk koordinatlarynyň sanyna aýdylýar. *d(x,y)=w(x-y)* bolýandygy we eger *x* – ugradylýan söz, y – kabul edilýän söz bolsa, onda *d(x,y)* – ugradylandaky göýberilen ýalňyşlyklaryň sanydygy düşnüklidir. *d(x,y)* funksiýanyň $F_q^n(vx, y, z \in F_q^n)$ giňişlikde metrikanyň aşakdaky üç häsiýeti kanagatlandyrýandygyny aňsatlyk bilen görüp bolar:

$d(x,y)=0 \leftrightarrow x=y;$

$d(x,y)=d(y,x);$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

Goý, $V \subseteq F_q^n$ – kod sözleriniň käbir köplügi we *t* – natural san bolsun. Eger islendik $b \in F^n{}_q$ üçin birden köp bolmadyk $d(b,a) \leq t$ bolar ýaly, $a \in V$ wektor bar bolsa, onda *V* kod *t*-den köp bolmadyk ýalňyşlyklary düzedýär diýjekdiris, ýagny $B_t(b) = \{x \in F_q^n;\ d(b,x) \leq t\}$ aralykda *V* degişli birden köp bolmadyk wektor bardyr. *d(V)=min{d(a1, a2); a1, a2* $\in$ *V, a1* $\neq$ *a2}* sana *V* koduň kod (iň gysga) uzaklygy diýilýär.

1-nji tassyklama. Goý, $d(V) \geq 2t+1$ bolsun. Onda V kod t-dan köp bolmadyk ýalňyşlyklary düzedýär.

Subudy. Goý, $b \in F^n_q$ bolsun. Eger-de $B_1(b)$ şar (aralyk) iki sany $a_1, a_2 \in V$ wektory saklaýan bolsa, onda $d(a_1,a_2) \leq d(a_1,b) + d(a_2+b) \leq 2t.$ Başga tarapdan seredeniňde, $d(a_1,a_2) \geq 2t+1$. Bu garşylyk tassyklamany subut edýär.

Eger a söz göýberlende t-den köp bolmadyk ýalňyşlyklar bar bolsa, onda b sözi kabul etmek üçin, $d(b,a) \leq t$ deňsizligi alýarys we başga islendik kod sözi üçin $c \in V(b,c) \geq t+1$ ýerine ýetýär.

Kesgitleme. Goý, matrisa – $(n\text{-}k) \cdot n$ derejeli we $(n\text{-}k)$ rangly Fq meýdanyň üstündäki matrisa bolsun. $H \cdot cT=0$ çyzykly birjynsly deňlemeler ulgamynyň $c \in F^n_q$ çözüwleriniň C köplügine F_q meýdanyň üstündäki çyzykly (n,k) kod diýilýär. DimF_q $C=k$ bolýanlygy düşnüklidir.

k sana koduň ölçegi, n – sana onuň uzynlygy diýilýär. H matrisa C koduň barlag matrisasy diýilýär, C-niň elementlerine kod sözleri ýa-da kod wektorlary diýilýär.

Eger $q=2$ bolsa, onda binar kod diýilýär. Eger $H=(A\ I_{n\text{-}k})$ bolsa, onda ulgamly kod diýilýär, bu ýerde, $A(n\text{-}k,k)$ derejeli matrisa, $I_{n\text{-}k}$ matrisa – $(n\text{-}k)$ derejeli birlik matrisa. Eger ulgamly C koddaky her bir kod sözünde ilkinji k simwollar maglumatly bolsa (ýagny berlen habaryň k simwoly bilen gabat gelýän bolsa), galan $(n\text{-}k)$ simwollary bolsa barlagçy bolsa, onda $H \cdot c^T=0$ ulgam jübütligi barlaýan deňlemeler ulgamy diýilýär. Öň biz H=(11 .... 11) matrisaly ulgamly binar koda gabat gelýän mysal getiripdik.

Öň getirilen mysalymyz $H=(-1 \cdot I_{n-1})$, ýagny

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ -1 & 0 & 0 & .0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

barlag matrisaly çyzykly $(n,1)$ koda degişlidir.

Goý, $H=(AI_{n\text{-}k})$ – çyzykly (n,k) koduň barlag matrisasy bolsun. Onda $G=(I_k\text{-}A^T)$ $k \times n$ tertipli matrisa C koduň dörediji (kodlaşdyrýan) matrisasy diýilýär. Bu matrisa $C^T=(I_k-A)\,a^T=(a\,(I_k-A^T))^T$ deňlik bilen baglylykda ýüze çykýar, bu ýerde $a=a_1....a_k$ – göýberilýän habar, $c=c_1,....,c_n$ – degişli kod sözi we $H\cdot c^T=0$ – barlaýjy deňleme.

$H\cdot c^T=0$ we $c=aG$ bolany üçin, $HG^T=0$ (ýa-da $G\cdot H^T=0$). Bu deňlikden c koduň G setirler bilen döredilýändigi gelip çykýar. Erkin C çyzykly kod üçin dörediji matrisa diýip, setirleri C giňişligi döredýän islendik ($k\times n$) tertipli matrisa aýdylýar.

Kesgitleme: Goý, c – kod sözi we y – habary kanal boýunça göýberlenden soň alnan söz (ýalňyşlyklary bilen) bolsun. $e=y\text{-}c=e_1,....e_n$ tapawuda ýalňyşlyklaryň wektory diýilýär. Çyzykly C kod üçin Hemmingiň iň gysga uzaklygy: $d_c=min\{d(u,\vartheta);\ u,\vartheta\in C,\ c\neq 0\}$. Hemmingiň iň kiçi agramy: $min\{w(c);\ c\in C,\ c\neq 0\}$ bilen gabat gelýär.

H barlagçy matrisaly çyzykly C koduň iň gysga uzaklygynyň aşaky çägi baradaky kriterini subut edeliň.

2-nji tassyklama. H-yň islendik s sütünleri çyzykly bagly däl bolanda we diňe şonda $d_c\geq s+1$.

Subudy: Eger H-da çyzykly bagly bolan $\lambda_1\cdot h_{i1}+....+\lambda_s h_{is}=0\,s$ sany $h_{i1},....,h_{is}$ sütünler tapylsa, onda wektor $c=(0,0,...,0,\lambda_1,0,...,0,\lambda_s,0,....,0)\in C$ we s agrama eyedir, yagny $d_s\leq s$. Tersine, goý H-yň islendik s sütüni çyzykly bagly däl we $d_s\leq s$ bolsun. Goý, $a\in H, w(a)=d_s$, $a\neq 0$ bolsun. Onda $H\cdot a^T=0$ deňlikden käbir $d_s\leq s$ sütünleriniň çyzykly baglylygy gelip çykýar.

Goý, C – F_q meýdanyň üstündäki çyzykly (n,k) kod bolsun. F^n_q giňişligi C boýunça ýanaşyk klaslara böleliň: $F^n_q=(0+C)\bigcup(b^{(1)}+C)\bigcup...\bigcup(b^{(s)}+C)$, bu ýerde $s=q^{n-k}-1$. Her bir $b^{(i)}+C$ $(b^{(0)}=0)$ klasda minimal agramyň elementi bardyr. Ony saýlalyň we şol ýanaşyk klasyň lideri diýip at bereliň. $c\in C$ kod sözi göýberilen bolsa, y sözi kabul edilen bolsa, onda $e=y\text{-}c$ ýalňyşlyklar wektory y-iň degişli bolan ýanaşyk klasyna girýär. Eger $a^{(i)}\text{-}y+C$ klasyň lideri bolsa, onda y-i $x=y\text{-}a^{(i)}\in C$ ýaly koddan açalyň. Koddan açmagyň şu usulyna ýanaşyk klasyň lideri boýunça koddan açmagyň algoritmi diýilýär.

Bu algoritmi anyklaşdyralyň. Goý, $a^{(1)}, ..., a^{(s)}$ – $b1^{(1)}, ..., b1^{(s)}$ ýanaşyk klaslaryň liderleri bolsun we $C=\{c^{(1)}=0,c^{(2)}..., c^{(qk)}\}$-$C$ koduň ähli elementleri bolsun. Goý, y – kabul edilen wektor bolsun. (n-k) uzynlykly $H\cdot y^T$ wektora y-iň sindromy diýilýär. $y,z\in F^n_q$ wektorlaryň sindromlarynyň diňe olaryň ýanaşyk klaslary deň bolan ýagdaýynda gabat geljekdikleri düşnüklidir. Sindrom $S(y)=H\cdot y^T$ diýip hasap etjekdiris.

$S(a^{(1)})$, ..., $S(a^{(s)})$ liderleriň sindromlaryny bilip, biz y-iň ýerleşýän ýanaşyk klasyny kesgitläp bileris. Meselem, $y \in \overline{a}^{(i)}$. Onda y-i $x=(y-a^{(i)})$ ýaly koddan asarys.

Mysal. Aşakdaky ýaly barlagçy matrisasy bolan binar (5,2) – C koda seredeliň:

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Goý, $y=(1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)$ – alnan sindromly söz. $S(y)=H\cdot y^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Başlangyjynda liderleri aýratyn bellemek bilen ähli ýanaşyk klaslary getireliň:

(0,0,0,0,0), (0,1,0,1,1), (1,0,1,0,1), (1,1,1,1,0)
<u>(1,0,0,0,0)</u>, (1,1,0,1,1), (0,0,1,0,1) (0,1,1,1,0)
<u>(0,1,0,0,0)</u>, (0,0,0,1,1), (1,1,1,0,1), (1,0,1,1,0)
<u>(0,0,1,0,0)</u>, (0,1,1,1,1), (1,0,0,0,1), (1,1,0,1,0)
<u>(0,0,0,1,0)</u>, (0,1,0,0,1), (1,0,1,1,1), (1,1,1,0,0)
<u>(0,0,0,0,1)</u>, (0,1,0,1,0), (1,0,1,0,0), (1,1,1,1,1)
<u>(1,0,0,1,0)</u>, (1,1,0,0,1), (0,0,1,1,1), (0,1,1,0,0)
<u>(1,1,0,0,0)</u>, (1,0,0,1,1), (0,1,1,0,1), (0,0,1,1,0)

$$s(y)=S(a^{(1)})=S\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bolany üçin, gözlenýän kod sözi $x=y-a^{(1)}=(0,1,0,1,1)$ deňdir.

3-nji tassyklama. Goý, C H barlagçy matrisasy bolan binar (n,k) kod bolsun. Onda alnan y wektoryň sindromy nomerleri y-iň ýalňyş koordinatalarynyň nomerleri bilen gabat gelýän H matrisanyň sütünleriniň jemine deňdir.

Subudy. Hakykatdanam, goý $x \in C$ söz göýberilen bolsun. Onda $y=x+e$ we $S(y)=H\cdot e^T=h_{i1}+h_{i2}+\ldots+h_{is}$, bu ýerde e=(0,...,0,1,0,...,0,1,0, ...,0), şunlukda birlikler i_1 we i_s ýerlerde durýarlar.

Eger H-yň ähli sütünleri dürli-dürli we i-nji koordinatada diňe bir ýalňyşlyk bar bolsa, onda $S(y)=h_i$, ýagny matrisanyň ýerlikli saýlanyp alynmagy bir ýalňyşlygy tapmaga we düzetmäge mümkinçilik berýär.

Kesgitleme. $m\times(2^m-1)$ tertipli H barlagçy bolan $2^m-1=n$ $(m\geq 2)$ uzynlykly C_m binar koda, eger H matrisanyň sütünleri 1,2,...,2^m-1 sanlaryň ikilik ulgamyndaky ýazgylary bilen berlen bolsa, Hemmingiň kody diýilýär.

4-nji tassyklama. C_m binar kod (2^m-m-1) ölçege eýedir we bir ýalňyşlygy düzedýär.

Subudy. C_m matrisanyň rangy m-e deňdir we $\dim_{F2}C^m=2^m-1-m$ gelip çykýar. C_m-iň islendik iki sütüniniň çyzykly bagly däl we C_m-iň olaryň jemini saklaýanlygy üçin d_{cm}=2+1=3 (2-nji tassyklama seret).

1-nji tassyklama görä, C_m kod bir ýalňyşlygy düzedýän kod bolup durýar.

Mysal. Goý, C_3 – binar (7,4) – Hemmingiň kody bolsun. Onuň barlagçy matrisasy

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\text{-e deňdir.}$$
$$\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}$$

Goý, y = (0,0,1,0,1,0,1) – alnan söz bolsun. Onuň sindromy

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\text{-e}$$

deňdir. Bu H-yň 1-nji sütünidir. Şeýlelikde, ýalňyşlyk birinji koordinatada göýberilen we gözlenýän kod sözi (1,0,1,0,1,0,1)-e deňdir. Kody häsiýetlendirýän esasy parametrler üçin käbir bahalandyrmalary subut edeliň.

5-nji tassyklama (Hemmingiň çägi). Goý, C – F_q meýdanyň üstünde gurlan kod bolsun, ol kod n uzynlygy bolan we t ýalňyşlygy düzedýän M kod sözlerini özünde saklaýar. Onda

$$M(1+C_n^1(q-1)+\cdots+C_n^t(q-1)^t \leq q^n.$$

Subudy. Hakykatdanam, kod sözlerinde merkezi bolan t radiusly şarlar özara kesişmeýärler. Her bir şeýle şar kod sözünden başga, ýene-de, bir koordinatasy bilen tapawutlanýan $C_n^1(q-1)$ sözi, iki koordinatasy bilen tapawutlanýan $C_n^2(q-1)^2$ sözi, we ş.m. sözleri özünde saklaýar. $|F_q^n|=q^n$ bolany üçin deňsizlik subut edildi.

Subutsyz aşakdaky tassyklamany getireliň:

6-njy tassyklama (M.Plotkiniň çägi). Goý, C – F_q meýdanyň üstünde gurlan çyzykly (n,k) kod bolsun. Onda

$$d_C \leq \frac{n\cdot q^{k-1}(q-1)}{(q^k-1)}.$$

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. I we II tomlar. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullygy, 2010.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. – Aşgabat, 2008.

3. Türkmenistanyň durmuş ykdysady ösüşiniň 2011-2030-njy ýyllar üçin Milli maksatnamasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullygy, 2010.

4. Türkmenistanyň XX Halk Maslahytynyň resminamalarynyň ýygyndysy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullygy, 2007.

5. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 2003. С. 384.

6. *Фомичев В.М.* Дискретная математика и криптология. – Курс лекций: Диалог-МИФИ, 2003. С. 397.

7. *Хаггарти Р.* Дискретная математика для программистов. – 2-е издание. Издательство Техносфера, 2005. С. 400.

8. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики – М.: Издательство МАИ, 1992. С. 264.

9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1984. С. 319.

10. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. – М.: Наука, 1992. С. 408.

11. *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. – М.: Просвещение, 1993.

12. *Набебин А.А.* Логика и пролог в дискретной математике. – М.: МЭИ, 1996. С. 452.

13. *Кольман Э., Зих О.* Занимательная логика. – М.: Наука, 1966. С. 127.

14. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. / Под ред. Сканави М.И. – М.: Высшая школа, 1980. С. 541.

15. *Рембольд У.* Введение в информатику для научных работников и инженеров. – Уфа: УГАТУ, 1996. С. 445.

MAZMUNY

III. Graflar nazaryýeti

IV. Logiki algebranyň funksiýalary

V. Tertipleşdirmek

VI. Kodlaşdyrmak nazaryýeti

Kakajan Amanow, Soltan Soltanow, Gaplaň Esenamanow

DISKRET MATEMATIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*G. Garryýew*
Teh. redaktor	*T. Aslanowa*
Kompýuter bezegi	*A. Abdyrahmanaow*
Neşir üçin jogapkär	*M. Almazow*

Ýygnamaga berildi 15.07.2014. Çap etmäge rugsat edildi 6.07.2015.
Ölçegi 60x90 $^1/_{16}$. Edebi garnitura.
Çap listi 12,25. Hasap-neşir listi 6,6. Şertli-çap listi 12,25.
Neşir № 27. Sargyt 84. Sany 1300.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň “Ylym” neşirýaty.
744000. Aşgabat, Türkmenbaşy şaýoly, 18.

Telekeçi Berdi Hallyýew.
744028. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 42.