O.Aşyrow, N.Gurbanmämmedow,
H.Soltanow, M.Almazow

ÝOKARY MATEMATIKA

II

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary
üçin okuw kitaby

A ş g a b a t - 2 0 1 0

Ýokary matematika dersi boýunça şu okuw kitabyna matematiki analiziň dowamy (köp üýtgeýänli funksiýalaryň differensial we integral hasabyýeti, san we funksional hatarlar), ady we hususy önümli differensial deňlemeler, matematiki fizikanyň ýönekeý deňlemeleri, ähtimallyklar nazaryýeti we matematiki statistikanyň elementleri girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen mysallar çözülip görkezilýär.

S Ö Z B A Ş Y

Birinji kitabyň dowamy bolan bu ikinji kitap uniwersitetiň tebigy ylymlary boýunça dürli hünärleri alýan talyplaryň hemmesi ulanyp biler ýaly edilip giňişleýin ýazyldy. Oňa matematiki analiziň dowamy (köp üýtgeýänli funksiýalar, olaryň predeli, üznüksizligi, önümleri we differensiallary, ikigat, üçgat, egriçyzykly we üst integrallary, san we funksional hatarlar), differensial deňlemeler (birinji we ýokary tertipli ady differensial deňlemeler, birinji we ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemeler, matematiki fizikanyň ýönekeý deňlemeleri), ähtimallyklar nazaryýeti (kombinatorikanyñ elementleri, tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary, matematiki garaşma, dispersiýa, kwadrat gyşarma, matematiki statistikanyň elementleri, korrelýasiýa nazaryýetiniň esasy düşünjeleri) girizildi.

Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen onda beýan edilen düşünjeleriň ulanylyşyny görkezýän mysallar getirilýär we olaryň çözülişleri görkezilýär. Şeýle hem her bölümiň ahyrynda talyplar bilen amaly sapaklar geçilende we özbaşdak işlerde ulanar ýaly köpsanly mysallar getirilýär.

Kitapda ýygy-ýygydan duş gelýän "bar bolup"("tapylyp") sözleriniň ýerine barlygy aňladýan $\exists$ belgi, "islendik" ("her bir") sözleriniň ýerine bolsa umumylygy aňladýan $\forall$ belgi ulanylýar. $A \Rightarrow B$ ýazgy A sözlemden B sözlemiň gelip çykýandygyny aňladýar. Eger-de, onuň üstesine B sözlemden A sözlem hem gelip çykýan bolsa, onda ol $A \Leftrightarrow B$ ýazgyda aňladylýar. Mysal üçin, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in B$, $P \ni m \exists$ gysgaça ýazgylar "islendik ε uludyr nol", "islendik x degişli B", "P degişli m tapylyp" diýlip okalýar. Teoremanyň subudynyň, mysalyň çözülişiniň başlangyjyny we ahyryny görkezmek üçin $\triangleleft$ we $\triangleright$ belgiler ulanylýar.

Bu kitapdan fizika hünärini alýan talyplar, şeýle hem beýleki ýokary okuw mekdepleriniň talyplary peýdalanyp bilerler.

II bap. MATEMATIKI ANALIZ
(dowamy)

II.7. KÖP ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝALAR
§ 7.1. Köp üýtgeýänli funksiýa düşünjesi

1. m ölçegli giňişlik düşünjesi. Ilki bilen m ölçegli arifmetik giňişlik düşünjesini girizeliň. Hakyky $x_1, x_2, \dots, x_m$ sanlaryň tertipleşdirilen $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ toplumyna m ölçegli nokat, şol sanlaryň özlerine bolsa onuň koordinatalary diýilýär. Şunlukda, $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ýazgy $x_1, x_2, \dots, x_m$ sanlaryň M nokadyň koordinatalarydygyny aňladýar. Şeýle nokatlaryň köplügine m ölçegli arifmetik (koordinat) giňişligi diýilýär. Eger bu giňişligiň islendik iki $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ we $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk

$$\rho(M, M') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_m - x'_m)^2}$$

formula boýunça kesgitlenýän bolsa, onda oňa m ölçegli ýewklid giňişligi diýilýär we ol R^m bilen belgilenilýär. Aşakdaky köplükler bu giňişligiň köplüklerine mysal bolup biler.

1) Berlen $M_o(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o)$ nokat üçin koordinatalary

$$(x_1 - x_1^o)^2 + (x_2 - x_2^o)^2 + \dots + (x_m - x_m^o)^2 \le r^2$$

deňsizligi kanagatlandyrýan $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nokatlaryň $\{M\}$ köplügine merkezi M_o nokatda we radiusy r bolan m ölçegli ýapyk şar diýilýär.

2) Eger $\{M\}$ köplügiň ähli nokatlarynyň koordinatalary üçin

$$(x_1 - x_1^o)^2 + (x_2 - x_2^o)^2 + \dots + (x_m - x_m^o)^2 < r^2$$

giňişlik ýerine ýetse, onda $\{M\}$ köplüge m ölçegli açyk şar diýilýär.

3) $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nokatlaryň

$$\left(x_1 - x_1^o\right)^2 + \left(x_2 - x_2^o\right)^2 + \ldots + \left(x_m - x_m^o\right)^2 = r^2$$

deňligi kanagatlandyrýan $\{M\}$ köplügine m ölçegli sfera diýilýär.

4) Koordinatalary $[a,\ b]$ kesimde üznüksiz $x_i = x_i(t)$ $(i = 1,\ ,m)$ funksiýalar bolan $M(x_1,\ x_2, \ldots, x_m)$ nokatlaryň köplügine R^m giňişlikde üznüksiz çyzyk diýilýär. Şunlukda,

$$A(x_1(a),\ x_2(a), \ldots, x_m(a)) \quad \text{we} \quad B(x_1(b),\ x_2(b), \ldots, x_m(b))$$

nokatlara degişlilikde çyzygyň başlangyç we ahyrky nokatlary diýilýär.

2. m ölçegli giňişligiň käbir köplükleri. Merkezi M_o nokatda we radiusy ε bolan m ölçegli açyk şara M_o nokadyň ε etraby diýilýär. M_o nokady özünde saklaýan islendik m ölçegli açyk şara bolsa şol nokadyň etraby diýilýär.

Eger köplügiň ähli nokatlary käbir m ölçegli şara degişli bolsa, onda oňa çäkli köplük diýilýär. Şeýle köplügiň islendik iki nokadynyň arasyndaky uzaklyklarynyň takyk ýokarky çägine onuň diametri diýilýär.

Goý, $\{M\}$ köplük m ölçegli R^m giňişligiň käbir köplügi, ýagny $\{M\} \subset R^m$ bolsun. Eger M nokadyň islendik etraby $\{M\}$ köplügiň M nokatdan tapawutly iň bolmanda bir nokadyny özünde saklaýan bolsa, onda M nokada $\{M\}$ köplügiň predel nokady diýilýär. Köplügiň predel nokady şol köplüge degişli bolup hem, degişli bolman hem biler. Mysal üçin, $x = 2,\ x = 4$ nokatlar $[2,\ 4]$ we $(2,\ 4)$ köplükleriň her biriniň predel nokatlarydyr, ýöne olar birinji köplüge degişli bolup, ikinjisine degişli däldir. Eger $M \in \{M\}$ nokadyň şol köplügiň başga hiç bir nokadyny özünde saklamaýan etraby bar bolsa, onda ol nokada $\{M\}$ köplügiň üzňe nokady diýilýär. Ähli predel nokatlaryny özünde saklaýan köplüge ýapyk köplük diýilýär. Eger M nokat $\{M\}$ köplüge özüniň käbir etraby bilen degişli bolsa, onda ol nokada şol köplügiň içki nokady diýilýär. Hemme nokatlary onuň içki nokatlary bolan köplüge açyk köplük diýilýär. Eger M nokadyň islendik etraby $\{M\}$ köplüge degişli nokatlary hem, degişli däl nokatlary hem özünde saklaýan bolsa, onda M nokada şol köplügiň gyra nokady diýilýär. $\{M\}$ köplügiň gyra nokatlarynyň toplumyna ol köplügiň araçägi diýilýär. Her bir köplük özüniň araçägi bilen bilelikde ýapyk köplügi emele getirýär. Mysal üçin, tekizlikde $x^2 + y^2 < 1$ deňsizligi kanagatlandyrýan $M(x,\ y)$ nokatlaryň köplügi onuň araçägi bolan $x^2 + y^2 = 1$ töweriň nokatlary bilen bilelikde $x^2 + y^2 \le 1$ deňsizligi kanagatandyrýan nokatlaryň ýapyk köplügini emele getirýär. Şonuň ýaly, m ölçegli ýapyk şär hem R^m giňişlikde ýapyk köplükdir.

3. Köp üýtgeýänli funksiýa düşunjesi. m ölçegli arifmetik giňişligiň käbir X köplügininiň her bir $M(x_1,\ x_2,\dots,x_m)$ nokadyna kesgitli u hakyky sany degişli edýän f düzgüne X köplükde kesgitlenen m ölçegli funksiya diýilýär we ol $u = f(x_1,\ x_2,\dots,x_m)$ görnüşde ýa-da gysgaça $u = f(M)$ bilen belgilenýär. Hemişelik C san üçin R^m giňişligiň

$$f(x_1,\ x_2,\dots,x_m) = C$$

deňligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügine $u = f(M)$ funksiýanyň dereje köplügi diýilýär. Hususan-da, $m = 2,\ m = 3$ bolanda oňa degişlilikde funksiýanyň derejei çyzygy we dereje üsti diýilýär. “Dereje çyzygy” adalgasy kartografiýadan alnandyr. Ol ýerde dereje çyzyklary deňiz derejesinden beýiklikleri hemişelik bolan ýeriň üstüniň nokatlarynyň emele getirýän çyzyklarydyr. Şol çyzyk boýunça diňe ýeriň nokatlarynyň deňiz derejesinden näçe ýokarda ýerleşýändigi kesgitlenmän, onuň relýefiniň häsiýeti hem kesgitlenýär, ol bolsa daglyk ýerler üçin wajypdyr.

1-nji mysal. $f(x,\ y) = \dfrac{1}{4x^2 + y^2}$ funksiýanyň dereje çyzyklaryny tapmaly.

◁ Berlen funksiýanyň dereje çyzyklary hemişelik C üçin

$$\frac{1}{4x^2+y^2}=C$$

deňlikden, ýagny $C\left(4x^2+y^2\right)=1$ deňlikden kesgitlenýär. Ondan bolsa

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4C}}+\frac{y^2}{\frac{1}{C}}=1$$

gelip çykýar. Ol ellipsiň deňlemesidir. Diýmek, berlen funksiýanyň dereje çyzyklary ellipslerdir. $\triangleright$

§ 7. 2. Köp üýtgeýänli funksiýanyň predeli we üznüksizligi

1. Köp üýtgeýänli funksiýanyň predeli. Goý, $u=f(M)$ funksiýa kabir $X\subset R^m$ köplükde kesgilenen we M_o nokat X köplügiň predel nokady bolsun. Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle $\delta>0$ san tapylyp,

$$0<\rho\left(M,\ M_o\right)<\delta \qquad (1)$$

şerti kanagatlandyrýan her bir $M\in X$ üçin

$$\left|f(M)-B\right|<\varepsilon \qquad (2)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda B sana , $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky (ýa-da $M\to M_o$ bolandaky) predeli diýilýär . $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky predeli

$$\lim_{M\to M_o} f(M)=B \qquad (3)$$

görnüşde belgilenýär.

Eger $\alpha=\alpha(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky predeli nola deň, ýagny

$$\lim_{M\to M_o}\alpha(M)=0 \qquad (4)$$

bolsa,onda ol funksiýa M_o nokatda tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär

1-nji teorema. $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatda predeliniň bolmagy üçin

$$f(M) = B + \alpha(x), \quad \lim_{M \to M_o} \alpha(M) = 0 \tag{5}$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremanyň subudy § 2.4 –däki 5-nji teoremanyň subudy ýalydyr.

Bir üýtgeýänli funksiýa üçin jemiň, köpeltmek hasylyň we paýyň predeli hakyndaky § 2.5 –de subut edilen 9-njy teorema meňzeş teoremany köp üýteýänli funksiýa üçin hem subut etmek bolar.

1-nji bellik. Iki üýtgeýänli $u = f(x, y)$ funksiýanyň $M_o(a, b)$ nokatdaky B predeli üçin

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = B \tag{6}$$

ýazgy ulanylýar.

2-nji mysal. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(3x^2 + 4y - 1\right)$ predeli hasaplamaly.

⊲ Jemiň predeliniň häsiýeti hakyndaky teorema esasynda

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(3x^2 + 4y - 1\right) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(3x^2\right) + \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (4y) - 1 =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(3x^2\right) + \lim_{y \to 2} (4y) - 1 = 3 + 8 - 1 = 10 . \ ⊳$$

2. Köp üýtgeýanli funksiýanyň artymy. Bu düşünjäni ýönekeýlik üçin iki üýtgeýänli $u = f(x, y)$ funksiýa üçin girizeliň.

$$\Delta u = f(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - f(x, y)$$

tapawuda $u = f(x, y)$funksiýanyň $M(x, y)$ nokatdaky doly artymy,

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, \ y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y u = f(x, \ y + \Delta y) - f(x, y)$$

tapawutlara bolsa $u = f(x, y)$ funksiýanyň şol nokatdaky (x we y boýunça) hususy artymlary diýilýär.

3. Köp üýtgeýanli funksiýanyň üznüksizligi. Goý, $u = f(M)$ funksiýa kabir $X \subset R^m$ köplükde kesgilenen we $M_o \in X$ bolsun. Eger $u = f(M)$ funksiýanyň M_o nokatda predeli bar bolup,

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = f(M_o) \qquad (7)$$

deňlik ýerine ýetse, onda $u = f(M)$ funksiýa M_o nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär. Başgaça aýdylanda, eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin şeýle $\delta > 0$ san tapylyp,

$$\rho(M,\ M_o) < \delta \qquad (8)$$

şerti kanagatlandyrýan her bir $M \in X$ üçin

$$|f(M) - f(M_o)| < \varepsilon \qquad (9)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $u = f(M)$ funksiýa M_o nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

2-nji mysaldaky funksiýa $M_o(1,\ 2)$ nokatda üznüksizdir, çünki $f(x,\ y) = 3x^2 + 4y - 1$ funksiýa üçin $f(1,\ 2) = 10$ we (7) deňlik ýerine ýetýär:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(3x^2 + 4y - 1\right) = 10 = f(1,\ 2).$$

$\Delta u = f(M) - f(M_o)$ tapawudyň $u = f(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky doly artymy bolýandygy esasynda, ol funksiýanyň M_o nokatda üznüksiz bolmagy üçin

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta u = 0 \ \text{ ýa-da } \ \lim_{\Delta\rho \to 0} \left[f(M) - f(M_o)\right] = 0 \qquad (10)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir ($\Delta\rho = \rho(M,\ M_o)$).

Hakykatdan-de, eger (7) ýerine ýetýän bolsa, onda

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \left[f(M) - f(M_o)\right] = 0 \ \text{ ýa-da } \ \lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta u = 0,$$

ýagny (10) deňlik ýerine ýetýär. Tersine, eger (10) ýerine ýetýän bolsa, onda (7) deňlik hem ýerine ýetýär.

3-nji mysal. $z = x^2 + y^2$ funksiýanyň islendik $(x,\ y)$ nokatda üznüksizdigini subut etmeli.

$\lhd$ Berlen fubksiyanyň $(x,\ y)$ nokatdaky doly artymy bolan

$$\Delta z = \left[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2\right] - \left(x^2 + y^2\right) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

deňlikde $\Delta x \to 0,\ \ \Delta y \to 0$ bolanda predele geçip,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

deňligi alarys, ýagny funksiýa üznüksizdir. $\triangleright$

Eger funksiýa käbir köplügiň her bir nokadynda üznüksiz bolsa, onda oňa şol köplükde üznüksiz funksiýa diýilýär.

Kesimde üznüksiz bir üýtgeýäni funksiýalaryňka meňzeş bolan häsiýetler köplükde üznüksiz bolan köp üýtgeýänli funksiýalar üçin hem ýerine ýetýär.

2-nji teorema. Eger $u = f(M)$ funksiýa çakli we ýapyk köplükde üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol köplükde çäklidir we iň kiçi we iň uly bahalaryny alýar.

$u = f(M)$ funksiýanyň üznüksiz bolmadyk nokatlaryna onuň üzülme nokatlary diýilýär. Funksiýanyň kesgitlenmedik, ýöne predeli bar bokatlaryna hem onuň üzülme nokatlary diýilýär. Mysal üçin, $u = 1/(y - x^2)$ funksiýanyň üzülme nokatlary $y = x^2$ parabolanyň ähli nokatlarydyr. Bu halda $y = x^2$ parabola onuň üzülme çyzygy diýilýär. Şoňa meňzeşlikde, $u = 1/(z - x^2 - y^2)$ funksiýa üçin $z = x^2 + y^2$ üst, berlen funksiýanyň üzülme üstüdir.

§ 7. 3. Köp üýtgeýänli funksiýanyň hysysy önümleri

1. Hususy önümiň kesgitlenişi. Ýönekeýlik üçin iki üýtgeýänli $z = f(x,\ y)$ funksiýa garalyň. Belli bolşy ýaly ol funksiýanyň x we y boýunça $M(x,\ y)$ nokatdaky hususy artymlary

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y),$$
$$\Delta_y z = f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$$

deňlikler bilen kesgitlenýär. Eger

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right) \tag{11}$$

predel bar bolsa, onda şol predele $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň $M(x,\ y)$ nokatdaky x boýunça (y boýunça) hususy önümi diýilýär we ol

$$z'_x,\ f'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}\quad \left(z'_y,\ f'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

belgileriň haýsydyr biri bilen belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right).$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, iki üýtgeýänli funksiýanyň x boýunça hususy önümi bellenen y üçin berlen funksiýanyň x boýunça adaty önümini aňladýar. Şonuň üçin hem hususy önümler bir üýtgeýänli funksiýalaryň önüminiň formulalary we düzgünleri boýunça hasaplanylýar. Amalyýetde üýtgeýänleriň biri boýunça hususy önüm tapylanda şol üýtgeýänden beýlekilerini hemişelik hasap etmek bolar.

4-nji mysal. $f(x,\ y) = x^2 \sin y$ funksiýanyň hususy önümlerini we olaryň $M_o(1,\ \pi/4)$ nokatdaky bahalaryny tapmaly.

$\lhd$ Bir üýtgeýänli funksiýanyň önüminiň formulalaryny we düzgünlerini ulanyp, ilki y-i we soňra x-i hemişelik hasap edip hususy önümleri taparys:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y\,.$$

Indi olaryň $M_o(1,\ \pi/4)$ nokatdaky bahalaryny hasaplalyň:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_o} = \left.(2x \sin y)\right|_{M_o} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_o} = \left.(x^2 \cos y)\right|_{M_o} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\ \rhd$$

$z = f(x,\ y)$ funksiýanyň $M_o(x_o,\ y_o)$ nokatdaky hususy önümleriniň şeýle geometrik manysy bardyr:

$$f'_x(x_o,\ y_o) = tg\alpha,\quad f'_y(x_o,\ y_o) = tg\beta\,,$$

bu ýerde α burç Ox oky bilen $A(x_o,\ y_o,\ f(x_o,\ y_o))$ nokatda $y = y_o$

tekizlik bilen $z = f(x,\ y)$ üstüň kesişme çyzygyna geçirilen galtaşmanyň arasyndaky burçdyr; β burç bolsa Oy oky bilen A nokatda $x = x_o$ tekizlik bilen $z = f(x,\ y)$ üstüň kesişme çyzygyna geçirilen galtaşmanyň arasyndaky burçdyr.

$z = f(x,\ y)$ funksiýanyň x boýunça hususy önümi funksiýanyň berlen ($y = y_o$) ugur boýunça ütgeýiş tizligini ýa-da bir üýtgeýänli $f(x,\ y_o)$ funksiýanyň x boýunça ütgeýiş tizligini aňladýar we ol hususy önümiň fiziki manysyny görkezýär.

Iki üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümleriniň kesgitlenişine meňzeşlikde, üç üýtgeýänli $u = f(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň $M(x,\ y,\ z)$ nokatdaky hususy önümleri şeýle kesgitlenýär:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y,\ z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y,\ z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,\ y,\ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta z}.$$

Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümlerine birinji tertipli hususy önümler ýa-da birinji hususy önümler hem diýilýär. Hususy önümleriň kesgitlemelerinden görnüşi ýaly, funksiýanyň $M(x,\ y,\ z)$ nokatdaky hususy önümleri şol nokadyň funksiýasy bolýandyr. Şoňa görä onuň hem hususy önümlerini tapmak bolar.

Berlen funksiýanyň birinji hususy önümleriniň husysy önümlerine ol funksiýanyň ikinji tertipli hususy önümleri diýilýär.

Iki üýtgeýänli $z = f(x,\ y)$ funksiýa üçin kesgitleme boýunça:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[f'_x(x,\ y)\right]'_x = f''_{xx}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left[f'_y(x,\ y)\right]'_y = f''_{yy}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[f'_x(x,\ y)\right]'_y=f''_{xy}(x,\ y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[f'_y(x,\ y)\right]'_x=f''_{yx}(x,\ y).$$

5-nji mysal. $z=x^3+4x^2y-6xy^2+y^3$ funksiýanyň ikinji hususy önümlerini tapmaly.

◁ Önüm tapmagyň düzgünlerini we formulalaryny ulanyp, ilki birinji hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+8xy-6y^2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=4x^2-12xy+y^3.$$

Bu hususy önümleri ulanyp, ikinji hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+8y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8x-12y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=8x-12y,\qquad ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12x+6y.$$

Ikinji hususy önümler üçin $z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yx},\ z''_{yy}$ belgilemeler hem ulanylýar. $z''_{xy},\ z''_{yx}$ hususy önümlere garyşyk hususy önümler diýilýär. 4-nji mysaldaky funkşiýa üçin $z''_{xy}=z''_{yx}$ deňlik ýerine ýetýär. Ýöne ol deňlik hemişe ýerine ýetýär diýip bolmaz. Ol deňlik haýsy şertlerde ýerine ýetýärkä diýen soraga jogaby aşakdaky teorema berýär.

3-nji teorema. Eger $M_o(x_o,\ y_o)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen $z=f(x,\ y)$ funksiýanyň şol etrapda $f''_{xy},\ f''_{yx}$ hususy önümleri bar bolup, olar M_o nokatda üznüksiz bolsalar, onda

$$f''_{xy}(x_o,\ y_o)=f''_{yx}(x_o,\ y_o)$$

deňlik dogrudyr.

Şeýlelikde, eger garyşyk önümler üznüksiz bolsalar, onda olar deňdirler, ýagny hususy önümler differensirlemegiň tertibine bagly däldir.

Ikinji tertipli hususy önümleri x we y boýunça differensirläp, üçünji tertipli hususy önümleri ýa-da üçünji hususy önümleri taparys

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Şuňa meňzeşlikde dördünji, bäşinji we ondan-da ýokary tertipli hususy önümler kesgitlenýär. Şeýlelikde, $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň (n-1) tertipli nususy önüminiň birinji hususy önümine onuň n tertipli hususy önümi diýilýär. Üç üýtgeýänli funksiýanyň ikinji we ýokary tertipli hususy önümleri hem şular ýaly kesgitlenilýär.

6-njy mysal. $u = xy\sin 2t + x^2 z^5$ funksiýanyň $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2}$, $\dfrac{\partial^5 u}{\partial z^5}$ hususy önümlerini tapmaly.

◁ Üýtgeýänleriň birinden beýlekilerini hemişelik hasap edip, hususy önümleri taparys:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\sin 2t + 2xz^5,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin 2t,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} = 2\cos 2t;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2z^5,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 10z^4,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} = 40z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 5x^2 z^4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 20x^2 z^3,\ \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 60x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 120x^2 z,\ \frac{\partial^5 u}{\partial z^5} = 120x^2.$$ ▷

§ 7. 4. Köp üýtgeýänli funksiýanyň doly differensialy

1. Birinji tertipli doly differensial. Eger şeýle A we B sanlar bar bolup, $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň $M_o(x_o,\ y_o)$ nokatdaky

$$\Delta z = f(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y) - f(x_o,\ y_o) \qquad (12)$$

doly artymy

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta\rho \tag{13}$$

görnüşde aňladylýan bolsa, onda $A\Delta x + B\Delta y$ aňlatma $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň M_o nokatdaky doly differensialy diýilýär, bu ýerde

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{we} \quad \Delta\rho \to 0 \text{ bolanda } \alpha \to 0. \tag{14}$$

$z = f(x,\ y)$ funksiýanyň doly differensialy dz bilen belgilenýär:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \tag{15}$$

(13), (14) we (15) deňliklerden görnüşi ýaly, $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň doly artymy iki bölekden ybarat bolup, onuň Δx we Δy görä çyzykly bölegi şol funksiýanyň differensialyna deňdir, ikinjisi bolsa, $\Delta\rho$ görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr.

4-nji teorema. Eger $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň doly artymy (13) deňlik görnüşinde aňladylýan bolsa, onda A we B sanlar şol fnksiýanyň M_o nokatdaky nususy önümlerine deňdir:

$$A = f'_x(x_o,\ y_o), \quad B = f'_y(x_o,\ y_o). \tag{16}$$

◁ Eger $\Delta y = 0$ bolsa, onda (13) deňlik

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha|\Delta x| \tag{17}$$

görnüşde ýazylar. Şunlukda, $\Delta x \to 0$ bolanda $\alpha \to 0$ bolar. Şonuň üçin hem (17) deňlik esdasynda

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A \pm \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A, \quad f'_x(x_o,\ y_o) = A. \tag{18}$$

Eger-de $\Delta y = 0$ bolsa, onda (13) deňlik

$$\Delta_y z = B\Delta y + \alpha|\Delta y| \tag{19}$$

görnüşi alar. Şunlukda, $\Delta y \to 0$ bolanda $\alpha \to 0$ bolar. Şonuň üçin hem (19) deňlik esdasynda

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B \pm \alpha, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B, \quad f'_y(x_o,\ y_o) = B. \ \triangleright \tag{20}$$

(16) deňlikleriň esasynda $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň (15) doly differensialyny

$$dz = f'_x(x_o,\ y_o)\Delta x + f'_y(x_o,\ y_o)\Delta y \tag{21}$$

görnüşde ýazmak bolar.

2. Doly differensialyň barlygy. Haýsy şertlerde $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň M_o nokatda doly differensialynyň bardygyna aşakdaky teorema jogap berýär.

5-nji teorema. Eger $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň M_o nokadyň käbir etrabynda birinji hususy önümleri bar bolup, olar şol nokatda üznüksiz bolsalar, onda funksiýanyň şol nokatda doly differensialy bardyr.

$\lhd$ $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň M_o nokatdaky (12) doly artymyny

$$\Delta z = [f(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y) - f(x_o,\ y_o + \Delta y)] +$$
$$+ [f(x_o,\ y_o + \Delta y) - f(x_o,\ y_o)]$$

görnüşe özgerdeliň we bu deňligiň sagyndaky tapawutlara Lagranžyň formulasyny ulanalyň:

$$\begin{gathered} f(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y) - f(x_o,\ y_o + \Delta y) = f'_x(\tilde{x},\ y_o + \Delta y)\Delta x, \\ f(x_o,\ y_o + \Delta y) - f(x_o,\ y_o) = f'_y(x_o,\ \tilde{y})\Delta y, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\tilde{x} \in [x_o,\ x_o + \Delta x], \quad \tilde{y} \in [y_o,\ y_o + \Delta y]. \tag{23}$$

Şeýlelikde,(23) esasynda $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ bolanda $\tilde{x} \to x_o, \tilde{y} \to y_o$ bolar. Şert boýunça $f'_x(x,\ y),\quad f'_y(x,\ y)$ önümleriň M_o nokatda üznüksizligi esasynda, predeliň häsiýeti boýunça (5) deňlik esasynda

$$\begin{gathered} f'_x(\tilde{x},\ y_o + \Delta y) = f'_x(x_o,\ y_o) + \alpha, \\ f'_y(x_o,\ \tilde{y}) = f'_y(x_o,\ y_o) + \beta, \end{gathered} \tag{24}$$

bu ýerde $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ bolanda $\alpha \to 0,\ \beta \to 0$. (22)-(24) deňlikleriň esasynda doly differensial şeýle görnüşde ýazylar:

$$\Delta z = f'_x(x_o,\ y_o)\Delta x + f'_y(x_o,\ y_o)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\,. \tag{25}$$

Bu deňligiň soňky iki goşulyjysynyň jemini özgerdip, ony

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}\Delta\rho = \tilde{\alpha}\Delta\rho \tag{26}$$

görnüsde ýazalyň, bu ýerde

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}, \quad \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,. \tag{27}$$

(27) deňlikden görnüşi ýaly, $\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le 1$. Şonuň üçin hem

$$|\tilde{\alpha}| = \left|\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le |\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| + |\beta|\left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le |\alpha| + |\beta|. \qquad (28)$$

$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ bolanda $\alpha \to 0,\ \beta \to 0$ bolýandygy üçin, (28) deňsizlik esasynda $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ bolanda $\tilde{\alpha} \to 0$, ýagny $\Delta\rho \to 0$ bolanda $\tilde{\alpha} \to 0$.

Seýlelikde, (25) formula

$$\Delta z = f'_x(x_o,\ y_o)\Delta x + f'_y(x_o,\ y_o)\Delta y + \tilde{\alpha}\Delta\rho \qquad (29)$$

görnüşde ýazylar, bu ýerde $\Delta\rho \to 0$ bolanda $\tilde{\alpha} \to 0$ .Bu deňligi (13) deňlik bilen deňeşdirip, $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň M_o nokatda differensialynyň bardygyny we onuň (21) formula boýunça tapylýandygyny alarys. ▷

Berlen nokatda doly differensialy bar bolan funksiýa şol nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. 5-nji teorema boýunça berlen nokatda we onuň käbir etrabynda hususy önümleri üznüksiz bolan funksiýa şol nokatda differensirlenýändir.

Eger funksiýa käbir nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň şol nokatdaky doly artymyny (29) görnüşde aňladyp bolýandyr we şonuň esasynda $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \Delta z = 0$,ýagny funksiýa şol nokatda üznüksizdir.

Bellik. Eger $z = f(x,\ y)$ funksiýa üçin 5-nji teoremanyň ähli şertleri $M(x,\ y)$ nokadyň etrabynda ýerine ýetýän bolsa,onda onuň

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

differensialy dört üýtgeýänleriň funksiýasy bolup, bellenen $\Delta x,\ \Delta y$ ücin ol diňe x we y üýtgeýanleriň funksiýasydyr. Şunlukda, eger $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$ alsak, onda funksiýanyň doly differensialy üçin

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly,eger üç üýtgeýänli $u = f(x,\ y,\ z)$

funksiýanyň birinji hususy önümleri üznüksiz bolsa, onda onuň doly differensialy

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

formula boýunça kesgitlenýär. Bu formulanyň sag bölegindäki her bir goşulyja funksiýanyň hususy differensiallary diýilýär, ýagny

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz .$$

3. Differensialyň takmyn bahalary hasaplamakda ulanylyşy. Eger $z = f(x,\ y)$ funksiýa M_o nokatda differensirlenýän bolsa, onda (21) we (29) formulalar esasynda onuň doly differensialy bilen doly artymy şeýle baglanyşykdadyr:

$$\Delta z = dz + \tilde{\alpha}\Delta\rho, \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\tilde{\alpha} = 0 .$$

Şonuň üçin hem $\Delta z \approx dz$ takmyn deňligi ýazyp bileris. Ony

$$f(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y) - f(x_o,\ y_o) \approx f'_x(x_o,\ y_o)\Delta x + f'_y(x_o,\ y_o)\Delta y$$

görnüşde ýa-da

$$f(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y) \approx f(x_o,\ y_o) + f'_x(x_o,\ y_o)\Delta x + f'_y(x_o,\ y_o)\Delta y \quad (30)$$

görnüşde ýazmak we ony takmyn hasaplamalarda ulanmak bolar.

7-nji mysal. $\sqrt{(1{,}97)^3 + (3{,}02)}$ aňlatmanyň takmyn bahasyny hasaplamaly.

◃ Ilki bilen ony $\sqrt{(1{,}97)^3 + (3{,}02)} = \sqrt{(2 - 0{,}03)^3 + (3 + 0{,}02)^2}$ görnüşde ýazyp, $x_o = 2,\ y_o = 3,\ \Delta x = -0{,}03,\ \Delta y = 0{,}02$ alalyň we $f(x,\ y) = \sqrt{x^3 + y^2}$ funksiýa garalyň. Onda $f(x_o,\ y_o) = f(2,\ 3) =$ $= \sqrt{2^3 + 3^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}123$, $f'_x = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^2}}$, $f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^3 + y^2}}$ we

$$f'_x(x_o,\ y_o) = f'_x(2,\ 3) = \frac{6}{4{,}123} \approx 1{,}455, \quad f'_y(2,\ 3) = \frac{3}{4{,}123} \approx 0{,}727 .$$

Şonuň üçin hem (30) formula esasynda

$$f(x_o+\Delta x,\ y_o+\Delta y)=\sqrt{(2-0{,}03)^3+(3+0{,}02)^2}\approx$$
$$\approx f(2,3)+f'_x(2,\ 3)(-0{,}03)+f'_y(2,\ 3)\cdot 0{,}02\approx$$
$$\approx 4{,}123-1{,}455\cdot 0{,}03+0{,}727\cdot 0{,}02=4{,}094.\ \triangleright$$

4.Ýokary tertipli doly differensiallar. $z=f(x,\ y)$ funksiýanyň doly differensialynyň doly differensialyna onuň ikinji tertipli doly differensialy diýilýär we ol d^2z bilen belgilenýär.

Şeýlelikde, eger $dz=z'_x dx+z'_y dy$ bolsa, onda dx we dy hemişelik hasap edip, birinji tertipli doly differensialyň kesgitlemesi boýunça taparys:

$$d^2z=d(dz)=d\left(z'_x dx+z'_y dy\right)=\left(z'_x dx+z'_y dy\right)'_x dx+$$
$$+\left(z'_x dx+z'_y dy\right)'_y dy=z''_{xx}dx^2+z''_{yx}dydx+z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2=$$
$$=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2\quad \left(z''_{xy}=z''_{yx}\right)$$

Şeýlelikde, $z=f(x,\ y)$ funksiýanyň ikinji doly differensialy üçin

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly üçünji tertipli $d^3z=d\left(d^2z\right)$ doly differensial üçin şeýle formulany alarys:

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Şuňa mezeşlikde, $z=f(x,\ y)$ funksiýanyň $(n-1)$-nji tertipli doly differensialynyň doly differensialyna ol funksiýanyň n-nji tertipli doly differensialy diýilýär we ol d^nz bilen belgilenýär. Onuň üçin

$$d^nz=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k,\quad C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\ldots k}$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar. Bu formulany gysgaça

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

görnüşde hem ýazmak bolar. Bu formulanyň sag bölegine şeýle düşünmeli: ilki ol köpagza hökmünde n derejä göterilýär we soňra alnan aňlatmanyň sanawjylarynda ∂ belginiň degişli derejeleriniň sagyndan z-i ýazmaly. Mysal üçin,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)z=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Funksiýanyň doly differensialyna ýöne differensial hem diýilýär.

§ 7. 5. Çylşyrymly we anyk däl funksiýalaryň differensirlenmegi

1. Çylşyrymly funksiýanyň differensirlenmegi. Eger x we y üýtgeýänlere bagly bolan $p=p(x,\ y)$, $r=r(x,\ y)$ funksiýalar üçin $z=F(p,\ r)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda

$$z=F[p(x,\ y),\ r(x,\ y)]=G(x,\ y)$$

funksiýa x we y üýtgeýänlere görä çylşyrymly funksiýa diýilýär. Goý, $p(x,\ y)$, $r(x,\ y)$ funksiýalar x we y üýtgeýänlere görä we $F(p,\ r)$ funksiýa p we r üýtgeýänlere görä differensirlenýän funksiýalar bolsun. Bu halda $z=F(p,\ r)$ funksiýanyň z'_x, z'_y hususy önümleriniň bardygyny görkezeliň. Eger $p(x,\ y)$, $r(x,\ y)$ funksiýalaryň x we y üýtgeýänlerini belläp, y-i öňküligine goýup x-a Δx artym bersek, onda p we r funksiýalar $\Delta_x p$, $\Delta_x r$ hususy artymlary alar. Şunlukda, $z=F(p,\ r)$ funksiýa $\Delta_x z$ artymy alar we ony (25) formula esasynda

$$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial p}\Delta_x p+\frac{\partial z}{\partial r}\Delta_x r+\alpha\Delta_x p+\beta\Delta_x r$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $\Delta_x p\to 0,\ \Delta_x r\to 0$ bolanda $\alpha\to 0,\ \beta\to 0$ bolar. Ol deňligi agzalaýyn Δx -a bölüp,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\Delta_x p}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\Delta_x r}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta_x p}{\Delta x}+\beta\frac{\Delta_x r}{\Delta x}$$

deňligi, ondan bolsa $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip, $\alpha \to 0,\ \ \beta \to 0$ bolýandygy esasynda

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \qquad (31)$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly y üýtgeýän üçin

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \qquad (32)$$

formulany alarys.

Eger-de $p=p(t),\ r=r(t)$ diňe t görä differensirlenýän funksiýa bolsa we çylşyrymly $z=F[p(t),\ r(t)]=f(t)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda onuň t görä önümi

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{dr}{dt} \qquad (33)$$

formula boýunça tapylýar we ol (31)-den $x=t$ (ýa-da (32)-den $y=t$) bolanda alynýar. Oňa funksiýanyň doly önümi hem diýilýär. Ikiden köp üýtgeýänli funksiýa üçin hususy önümler şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär. Hakykatdan-da, $x,\ y$ we z görä differensirlenýän

$$p=p(x,\ y,\ z),\ \ r=r(x,\ y,\ z),\ \ s=s(x,\ y,\ z)$$

funksiýalar üçin differensirlenýän çylşyrymly

$$u=F(p,\ r,\ s)=F[p(x,\ y,\ z),\ \ r(x,\ y,\ z),\ \ s(x,\ y,\ z)]=g(x,\ y,\ z)$$

funksiýanyň hususy önümleri

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}$$

formulalar boýunça tapylýar.

Eger-de $p=p(t),\ r=r(t),\ s=s(t)$ diňe t görä differensirlenýän funksiýa bolsa we çylşyrymly $z = F[p(t),\ r(t),\ s(t)] = f(t)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda onuň t görä doly önümi

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt}$$

formula boýunça tapylýar.

8-nji mysal. $z = x\sin\frac{x}{y}$ funksiýanyň $x = 1 + 3t,\ \ y = \sqrt{1+t^2}$ bolanda t boýunça doly önümini tapmaly.

◁ Ilki bilen birinji tertipli

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y},\ \ \frac{dx}{dt} = 3,\ \ \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

önümleri tapalyň. Bu önümleri we (33) formulany $p = x,\ r = y$ üçin ulanyp alarys:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)\cdot 3 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\ ▷$$

2. Anyk däl funksiýanyň differensirlenmegi. Eger $y = y(x)$ üznüksiz funksiýa anyk däl görnüşde berlen

$$F(x,\ y) = 0 \qquad (34)$$

deňleme bilen kesgitlenýän bolsa, onda onuň haýsy şertlerde differensirlenýändigine aşakdaky teorema jogap berýär.

6-njy teorema. Eger $F(x,\ y)$ funksiýa we onuň $F'_x(x,\ y)$, $F'_y(x,\ y)$ hususy önümleri $M(x,\ y)$ nokady özünde saklaýan käbir köplükde üznüksiz bolup, şol nokatda $F'_y(x,\ y) \neq 0$ bolsa, onda (34) deňlemäniň kesgitleýän $y = y(x)$ funksiýasynyň şol nokatda önümi bardyr we ol önüm

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y} \qquad (35)$$

formula boýunça tapylýar.

◁ $M(x,\ y)$ nokatda $F(x,\ y) = 0$. Eger x-a Δx artym bersek, onda oňa $y = y(x)$ funksiýanyň Δy artymy degişli bolar. Şoňa görä

$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0$. Şonuň üçin funksiýanyň artymy hem nola deňdir, ýagny $F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)=0$. Funksiýanyň $\Delta F =$ $= F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)$ doly artymyny (25) formula boýunça

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

görnüşde aňladyp bolýar,bu ýerde $\Delta x \to 0,\ \ \Delta y \to 0$ bolanda $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. Doly artymyň nola deňligi esasynda ahyrky deňlik şeýle görnüşi alar:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0.$$

Bu deňligi agzalaýyn Δx -a bölüp, alnan deňlikden $\Delta y/\Delta x$ tapalyň:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha\right)\Bigg/\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\beta\right).$$

Bu deňlikde $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip alarys:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right), \quad y'_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Bellik. Onümiň bu bahasyny $y = y(x)$ funksiýanyň çyzgysynyň absissasy x_o bolan nokadyndaky galtaşmasynyň

$$y - y_o = y'(x_o)(x - x_o)$$

deňlemesinde goýup, $F(x,\ y)=0$ çyzygyň $M(x_o,\ y_o)$ nokadynda geçirilen galtaşmasynyň deňlemesini alarys:

$$F'_x(x_o,\ y_o)(x-x_o)+F'_y(x_o,\ y_o)(y-y_o)=0.$$

Edil şuňa meňzeşlikde, eger

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

deňlemäniň kesgitleýän $z = z(x,\ y)$ funksiýasy we onuň

$$F'_x(x,\ y,\ z),\quad F'_y(x,\ y,\ z),\quad F'_z(x,\ y,\ z)$$

husysy önümleri $M(x,\ y,\ z)$ nokady özünde saklaýan käbir köplükde üznüksiz bolup, şol nokatda $F'_z(x,\ y,\ z)\neq 0$ bolsa, onda

$z = z(x,\ y)$ funksiýanyň hususy önümleri şeýle tapylýar:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

§ 7. 6. Üste geçirilen galtaşma tekizlik we normal

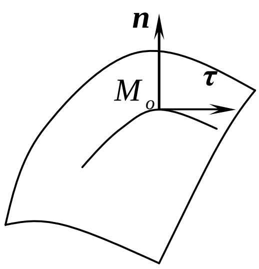
1. Galtaşma tekizligiň deňlemesi. Eger giňişlikde çyzyk

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)\quad (\alpha < t < \beta) \tag{36}$$

parametrik deňlemeler bilen berlen bolup, $x(t),\ y(t),\ z(t)$ t görä differensirlenýän funnksiýalar bolsa,onda şol çyzyga $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokatda $(x_o = x(t_o),\ y_o = y(t_o),\ z_o = z(t_o))$ geçirilen galtaşmanyň deňlemesi

$$\frac{x - x_o}{x'(t_o)} = \frac{y - y_o}{y'(t_o)} = \frac{z - z_o}{z'(t_o)} \tag{37}$$

görnüsde bolar, bu ýerde $x'(t_o),\ y'(t_o),\ z'(t_o)$ önümler birwagtda nola deň däldir.(36) çyzyga $M(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokatda geçirilen galtaşmanyň ugrukdyryjy wektory



1-nji surat

$$\boldsymbol{\tau} = \{x'(t_o),\ y'(t_o),\ z'(t_o)\} \tag{38}$$

bolar.

Giňişlikde differensirlenýän $F(x,\ y,\ z)$ funksiýa arkaly

$$F(x,\ y,\ z) = 0 \tag{39}$$

deňleme bilen berlen üste seredeliň. Ol üstüň $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokady boýunça şol üstde bitewiligine ýatýan çyzyk geçireliň (1-nji surat). Goý, ol çyzyk (36) deňleme bilen berlen bolsun, onda (37) deňleme şol çyzyga $M(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesidir. (39) deňlemede (36) aňlatmalary goýup, t görä toždestwolaýyn $F[x(t),\ y(t),\ z(t)] = 0$ deňligi alarys. Ony çylşyrymly funksiýa hökmünde differensirläp,

$$F'_x x'(t) + F'_y y'(t) + F'_z z'(t) = 0$$

deňligi alarys. $t = t_o$ üçin ol deňlik

$$F'_x(x_o,\, y_o,\, z_o)x'(t_o) + F'_y(x_o,\, y_o,\, z_o)y'(t_o) + F'_z(x_o,\, y_o,\, z_o)z'(t_o) = 0$$

görnüşi alar. Hususy önümlerden düzülen

$$\boldsymbol{n} = \{F'_x(x_o,\, y_o,\, z_o),\ F'_y(x_o,\, y_o,\, z_o),\ F'_z(x_o,\, y_o,\, z_o)\} \qquad (40)$$

wektora garalyň. Ol wektor (39) üst we M_o nokat bilen doly kesgitlenýär we M_o nokat arkaly geçýän çyzyga bagly däldir.

(38) we (40) wektorlar üçin ýerine ýetýän $(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{\tau}) = 0$ deňlik olaryň ortogonaldygyny aňladýar.

Şeýlelikde, (39) üstüň $M_o(x_o,\, y_o,\, z_o)$ nokady arkaly geçýän islendik çyzyk üçin şol nokat arkaly geçýän $\boldsymbol{\tau}$ galtaşma wektory $\boldsymbol{n}$ wektora perpendikulýardyr. Başgaça aýdylanda, M_o nokat arkaly geçýän üstüň islendik çyzygynyň galtaşmasy $\boldsymbol{n}$ wektora perpedikulýar tekizlikde ýatýar. Ol tekizlige (39) üstüň M_o nokadynda geçirilen galtaşma tekizligi diýilýär, onuň deňlemesi

$$F'_x(x_o,\, y_o,\, z_o)(x - x_o) + F'_y(x_o,\, y_o,\, z_o)(y - y_o) +$$
$$+ F'_z(x_o,\, y_o,\, z_o)(z - z_o) = 0 \qquad (41)$$

görnüşdedir.

(40) formula boýunça kesgitlenýän $\boldsymbol{n}$ wektora $M_o(x_o,\, y_o,\, z_o)$ nokatda (39) üste geçirilen normalyň wektory diýilýär. M_o nokat arkaly geçýän we (40) wektor ugrukdyryjysy bolan göni çyzyga (39) üstüň şol nokatdaky normaly diýilýär. Onuň deňlemesi

$$\frac{x - x_o}{(F'_x)_{M_o}} = \frac{y - y_o}{(F'_y)_{M_o}} = \frac{z - z_o}{(F'_z)_{M_o}} \qquad (42)$$

görnüşdedir.

9-njy mysal. $z = x^2 - y^2$ üste $M_o(3,\, -2,\, 5)$ nokatda geçirilen normalyň we galtaşma tekizligiň deňlemelerini ýazmaly.

$\triangleleft$ Eger $F(x,\, y,\, z) = x^2 - y^2 - z$ bolsa, onda $F'_x = 2x,\ F'_y = -2y,$

$F_z' = -1$ bolar. Şonuň üçin

$$\left(F_x'\right)_{M_o} = 2 \cdot 3 = 6,\ \left(F_y'\right)_{M_o} = -2 \cdot (-2) = 4,\ \left(F_z'\right)_{M_o} = -1\,.$$

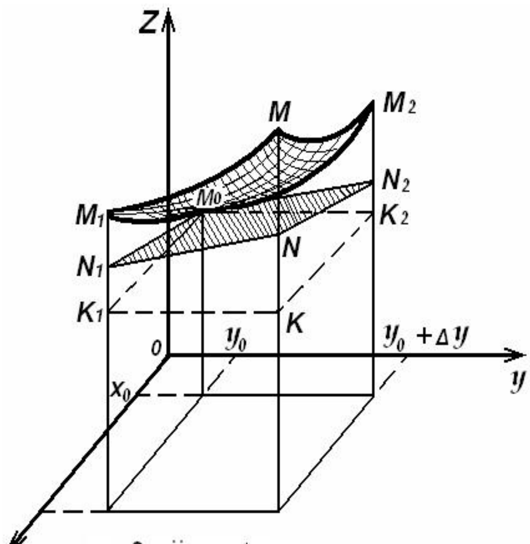
Bulary ulanyp, (41) we (42) esasynda galtaşma tekizligiň

$$6(x-3) + 4(y+2) - (z-5) = 0 \text{ ýa-da } 6x + 4y - z - 5 = 0$$

deňlemesini we normalyň

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-1}$$

deňlemesini alarys. ▹



2-nji surat

2. Doly differensialyň geometrik manysy. Eger üst $z = f(x,\ y)$ ýa-da $z - f(x,\ y) = 0$ deňleme bilen berlen bolsa, onda

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

bolar.Şonuň üçin hem ol üste geçirilen galtaşma tekizligiň deňlemesi

$$z - z_o = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_o)$$

görnüşde bolar. Bu formulada $x - x_o = \Delta x,\ y - y_o = \Delta y$ alyp, onuň

$z = f(x,\ y)$ funksiýanyň doly differensialydygyny görýäris:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\ .$$

Şeýlelikde,

$$z - z_o = dz\ ,$$

ýagny iki üýtgeýänli $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň doly differensialy şol funksiýanyň x we y üýtgeýänleri Δx we Δy artymlary alandaky grafigi bolan üste $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokatda geçirilen galtaşma tekizligiň z applikatasynyň artymyna deňdir (2-nji surat).

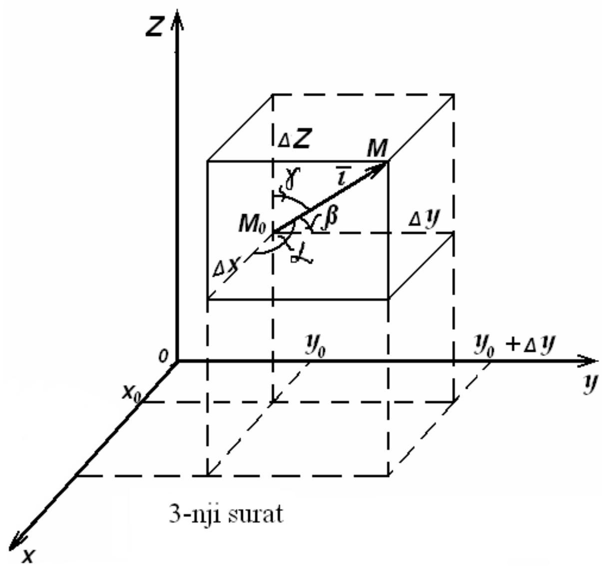
§ 7. 7. Ugur boýunça önüm we gradiýent

1. Ugur boýunça önüm. Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümleriniň ol funksiýanyň degişli ugurlar boýunça üýtgeýiş tizligini aňladýandygyny belläpdik. Indi bolsa islendik ugur boýunça onuň üýtgeýiş tizliginiň nähili bolýandygyny görkezmeklige girişeliň.

Berlen $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen we differensirlenýän $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýa garalyň. Şol etraba degişli bolan $M(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y,\ z_o + \Delta z)$ nokat üçin koordinatalar oklary bilen degişlilikde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ burçlary emele getirýän $\overline{M_oM} = \boldsymbol{l}$ wektory alalyň (3-nji surat). Garalýan $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň M_o nokatdaky doly differensialyny (25) formula meňzeşlikde

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}\Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_3\Delta y + \alpha_3\Delta z$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $\Delta x \to 0,\ \Delta x \to 0,\ \Delta x \to 0$ bolanda $\alpha_k \to 0\ (k = 1,\ 2,\ 3)$. Bu deňligi agzalaýyn $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ aňlatma bölüp,



3-nji surat

$$\frac{\Delta u}{\Delta l}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}\frac{\Delta x}{\Delta l}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}\frac{\Delta y}{\Delta l}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}\frac{\Delta z}{\Delta l}+$$

$$+\alpha_1\frac{\Delta x}{\Delta l}+\alpha_3\frac{\Delta y}{\Delta l}+\alpha_3\frac{\Delta z}{\Delta l} \qquad (43)$$

deňligi alarys. 3-nji suratdan görnüşi ýaly

$$\frac{\Delta x}{\Delta l}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta l}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta l}=\cos\gamma\,.$$

Bu deňligiň esasynda (43) deňlikde $\Delta l\to 0$ bolanda predele geçip,

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}\cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}\cos\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}\cos\gamma$$

deňligi alarys.Bu predele $u=u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokatdaky $\boldsymbol{l}$ wektoryň ugry boýunça önümi diýilýär we $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_o}$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_o} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} \cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} \cos\gamma .$$

Erkin $M(x, y, z)$ nokat üçin bu önüm şeýle görnüşde ýazylar:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \tag{44}$$

Bu formuladan görnüşi ýaly, $\partial u / \partial l$ önüm diňe wektoryň ugruna bagly bolup, onuň uzynlygyna bagly däldir.

10-njy mysal. $u = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ funksiýanyň $M_o(9, 6, 1)$ nokatdaky $\boldsymbol{l} = \{1, 2, -2\}$ wektoryň ugry boýunça önümini tapmaly.

◁ Berlen funksiýa üçin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -4y, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 6z, \ \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}$$

bolýany sebäpli, (44) formula boýunça alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x\left(\frac{1}{3}\right) + (-4y)\frac{2}{3} + 6z\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y - 4z,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_o} = \frac{2}{3}9 - \frac{8}{3}6 - 4(-1) = -6 . \ \triangleright$$

Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümi onuň ugur boýunça önüminiň hususy halydyr. Mysal üçin, eger $\boldsymbol{l} = \{1, 0, 0\}$, ýagny $\alpha = 0, \ \beta = \gamma = 90^\circ$ bolsa, onda

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

deňlik ýerine ýetýär.

2. Skalýar we wektor meýdanlary. Eger giňişligiň köplüginiň her bir nokadynda käbir ululygyň bahasy kesgitlenen bolsa, onda şol ululygyň seredilýän köplükde meýdany berlen diýilýär. Sunlukda, skalýar ululyk üçin oňa skalýar meýdany, wektor ululyk üçin - wekror meýdany diýilýär. Skalýar meýdanlaryna diňe san bahalary bilen kesgitlenýän temperatura meýdany, dykyzlyk meýdany, ýagtylyk meýdany, wektor meýdanlaryna bolsa san bahalary we ugurlary bilen kesgitlenýän tizlik meýdany, güýç meýdany mysal bolup biler.

Eger seredilýän ululyk tekizlikde berlen bolsa, onda oňa degişli meýdana tekiz meýdan diýilýär. Tekiz skalýar meýdany $u = u(x,\ y)$ ýa-da $u = u(M)$, $M = M(x,\ y)$ funksiýa bilen kesgitlenýär. Skalýar meýdany giňişlikde $u = u(x,\ y,\ z)$ ýa-da $u = u(M)$, $M = M(x,\ y,\ z)$ funksiýa bilen kesgitlenýär. Eger käbir $x,\ y,\ z$ dekart koordinatalar sistemasynda u funksiýa ol koordinatalaryň haýsydyr birine, mysal üçin z-e bagly bolmasa, onda oňa degişli skalar meýdana tekiz-parallel meýdan diýilýär. Oňa *Oxy* tekizliginde garamak bolar. *Oxy* tekizligine parallel bolan ähli tekizlikler üçin, ol meýdanyň şol bir çyzyk derejeleri bardyr (mysal üçin, $u = x^2 + y^2$ funksiýa bilen kesgitlenýän meýdanyň dereje çyzygy $x^2 + y^2 = C$ töwerekdir).

3. Skalýar meýdanynyň gradiýenti. Goý, giňişligiň käbir köplüginde differensirlenýän skalýar $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýa berlen bolsun. Bu funksiýanyň berlen nokatdaky hususy önümleri onuň degişli koordinatalary bolan wektora ol funksiýanyň şol nokatdaky gradiýenti diýilýär we *gradu* bilen belgilenýär, ýagny

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\,. \qquad (45)$$

Şeýlelikde, giňişligiň seredilýän köplüginde wektor meýdany, ýagny berlen funksiýanyň gradiýent meýdany kesgitlenendir. Funksiýanyň gradiýenti bilen onuň ugur boýunça önüminiň nähili baglanyşykda bolýandygyny aşakdaky teorema görkezýär.

7-nji teorema. $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň $\boldsymbol{l}$ wektoryň ugry boýunça önümi ol funksiýanyň gradiýentiniň $\boldsymbol{l}$ wektora bolan proýeksiýasyna deňdir.

$\lhd$ Goý, $\boldsymbol{l}$ wektor koordinatalar oklary bilen degişlilikde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ burçlary emele getirýän birlik wektor bolsun, ýagny

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma\,. \qquad (46)$$

Belli bolşy ýaly, (45) we (46) wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

$$\left(dradu,\ \boldsymbol{l}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (47)$$

deňlik boýunça kesgitlenýär. (44) we (47) deňliklerden bolsa

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(dradu,\ \boldsymbol{l}\right) \qquad (48)$$

deňlik gelip çykýar. Eger $gradu$ we $\boldsymbol{l}$ wektorlaryň arasyndaky burçy φ bilen belgilesek, onda

$$\left(dradu,\ \boldsymbol{l}\right)=|gradu||\boldsymbol{l}|\cos\varphi=|gradu|\cos\varphi=pr_{\boldsymbol{l}}\ gradu$$

deňligiň esasynda (48) deňlik

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|gradu|\cos\varphi=pr_{\boldsymbol{l}}\ gradu \qquad (49)$$

görnüşi alar. $\triangleright$

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. Funksiýanyň käbir nokatdaky $\boldsymbol{l}$ ugur boýunça önümi iň uly bahany $\boldsymbol{l}$ ugur gradiýentiň ugry bilen gabat gelende alýar we ol $|gradu|$ deňdir.

$\triangleleft$ (49) deňlikden görnüşi ýaly, ugur boýunça önüm iň uly bahany $\varphi=0$ bolanda alýar, ýagny

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|gradu|\cos 0=|gradu|=\sqrt{u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2}\ .\ \triangleright$$

Başgaça aýdylanda, bu deňlik skalýar funksiýanyň gradiýentiň ugruna beýleki ugurlara garanyňda çalt üýtgeýändigini görkezýär.

2-nji netije. $u=u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň $u(x,\ y,\ z)=C$ deňleme bilen kesgitlenen dereje üste geçirilen galtaşmanyň ugry boýunça önümi nola deňdir.

$\triangleleft$ Bu halda $u=u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň gradiýentiniň ugry berlen nokat arkaly dereje üste geçirilen normalyň ugry bilen gabat gelýär we ol galtaşma perpendikulýardyr, ýagny $\varphi=\pi/2$. Şonuň ücin hem (49) deňlik esasynda agzalan ugur boýunça önüm nola deňdir. $\triangleright$

§ 7. 8. Köp üýtgeýänli funksiýanyň Teýlor formulasy

Käbir D köplükde kesgitlenen $z = z(x,\ y)$ funksiýa garalyň. Goý, şol köplügiň $M_o(a,\ b)$ nokadynyň käbir etrabynda funksiýanyň n+1 tertipli $(n \geq 1)$ üznüksiz önümi bar bolsun. $x = a + t\Delta x,\ y = b + t\Delta y,\ 0 \leq t \leq 1$ üçin $\varphi(t) = f(x,\ y)$ t görä çylşyrymly funksiýadyr. Şunlukda, $t = 0$ bolanda $M_o(a,\ b)$ nokady, $t = 1$ bolanda bolsa $M(a + \Delta x,\ b + \Delta y)$ nokady alarys we ony M_o nokadyň garalýan etrabyna degişli hasap ederis.

Belli bolşy ýaly, bir üýtgeýänli $\varphi(t)$ funksiýanyň Teýlor formulasy

$$\varphi(t) = \varphi(t_o) + \frac{\varphi'(t_o)}{1!}(t - t_o) + \frac{\varphi''(t_o)}{2!}(t - t_o)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(t_o)}{n!}(t - t_o)^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_o + \theta t)}{(n+1)!}(t - t_o)^{n+1},$$

bu ýerde $0 < \theta < 1$. Bu formuladan hususy $t_o = 0$ bolan halda

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \quad (50)$$

formulany alarys. Çylşyrymly $\varphi(t) = f(x,\ y) = f(a + t\Delta x,\ b + t\Delta y)$ funksiýanyň t görä önümlerini tapalyň:

$$\varphi'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = df(x,\ y);$$

$$\varphi''(t) = f''_{xx} x'^2_t + f''_{xy} x'_t y'_t + f''_{yx} y'_t x'_t + f''_{yy} y'^2_t =$$

$$= f''_{xx}\Delta x^2 + 2 f''_{xy}\Delta x \Delta y + f''_{yy}\Delta y^2 = d^2 f(x,\ y);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(t) = d^n f(x,\ y), \quad \varphi^{(n+1)}(t) = d^{n+1} f(x,\ y).$$

Bu deňlikleriň iň soňkusynda t ululygy θt bilen şalşyryp, ondan öňündäkilerde bolsa $t = 0$ goýup, (50) formula girýän $\varphi(t)$ funksiýanyň önümlerini taparys:

$$\varphi'(0) = df(a,\ b),$$

$$\varphi''(0)=d^2 f(a,\ b),\ \dots,\ \varphi^{(n)}(0)=d^n f(a,\ b),$$
$$\varphi^{(n+1)}(\theta t)=d^{n+1} f(a+\theta t\Delta x,\ b+\theta t\Delta y).$$

Önümiň bu bahalaryny (50) deňlikde goýup we alnan deňlikde $t=1$ alyp, iki üýtgeýänli funksiýanyň Teýlor formulasyny alarys:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(a,\ b)}{k!}+$$
$$+\frac{d^{n+1} f(a+\theta t\Delta x,\ b+\theta t\Delta y)}{(n+1)!} \qquad (51)$$

ýa-da

$$f(M)=f(M_o)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(M_o)}{k!}+\frac{d^{n+1} f(\tilde{M})}{(n+1)!}, \qquad (52)$$

bu ýerde $\tilde{M}=\tilde{M}(a+\theta\Delta x,\ b+\theta\Delta y)\in D$.(51) formula $n=1$ bolanda şeýle görnüşde ýazylar:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+\left[f'_x(a,\ b)\Delta x+f'_y(a,\ b)\Delta y\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(\tilde{a},\ \tilde{b})\Delta x^2+2f''_{xy}(\tilde{a},\ \tilde{b})\Delta x\Delta y+f''_{yy}(\tilde{a},\ \tilde{b})\Delta y^2\right] \qquad (53)$$

bu ýerde $\tilde{a}=a+\theta\Delta x,\quad \tilde{b}=b+\theta\Delta y,\quad 0<\theta<1$.

Edil şonuň ýaly köp üýtgeýänli $u=f(M),\ M=M(x_1,\ x_2,\ \dots,x_m)$ funksiýa üçin hem Teýloryň formulasyny getirip çykarmak bolar.

§ 7. 9. Köp üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumy

1. Ekstremumyň kesgitlenişi. Goý, $z=f(x,\ y)$ funksiýa $M_o(x_o,\ y_o)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun. Eger ol nokadyň şeýle etraby bar bolup, şol etrabyň islendik $M(x,\ y)$ nokady üçin $f(x,\ y)\le f(x_o,\ y_o)$ $(f(x,\ y)\ge f(x_o,\ y_o))$ deňsizlik ýerine ýetse, onda M_o nokada $z=f(x,\ y)$ funksiýanyň maksimum (minimum) nokady diýilýär. Funksiýanyň maksimum we minimum nokatlaryna onuň ekstremum nokatlary, şol nokatlardaky bahalaryna bolsa funksiýanyň ekstremumy diýilýär. Bu kesgitlemeden görnüşi ýaly, eger M_o funksiýanyň ekstremum nokady bolsa, onda onuň şol nokatdaky $\Delta z = f(M) - f(M_o)$ artymy üçin $\Delta z \le 0$ ýa-da $\Delta z \ge 0$ deňsizlikleriň haýsydyr biri ýerine ýetýär we tersine, eger M_o nokadyň käbir etrabynda bu deňsizlikleriň haýsydyr biri ýerine ýetse, onda M_o funksiýanyň ekstremum nokadydyr. Köp üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumy hem şuňa meňzeşlikde kesgitlenilýär.

2. Ekstremumyň zerur şerti. Köp üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumynyň zerur şerti aşakdaky teoremada görkezilýär.

8-nji teorema. Ekstremum nokadynda differensirlenýän funksiýanyň şol nokatdaky hususy önümleri nola deňdir.

$\triangleleft$ Subudyny $M_o(x_o,\ y_o)$ nokat onuň ekstremum nokady bolan iki üýtgeýänli $z = f(x,\ y)$ funksiýa üçin görkezeliň. Onuň üçin M_o nokadyň etrabyndaky $y = y_o$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryna seredeliň. Şunlukda, bir üýtgeýänli $g(x) = f(x,\ y_o)$ funksiýany alarys we $x = x_o$ ol funksiýanyň ekstremum nokadydyr. Şoňa görä bir üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumynyň zerur şerti boýunça şol nokatda $g'(x_o) = f'_x(x_o,\ y_o) = 0$ deňlik ýerine ýetýär.Şonuň ýaly hem bir ügeýänli $f(x_o,\ y)$ funksiýa garamak bilen $f'_y(x_o,\ y_o) = 0$ deňligi alarys. Şeýlelikde, M_o ekstremum nokatda

$$f'_x(x_o,\ y_o) = 0, \quad f'_y(x_o,\ y_o) = 0\,. \triangleright \tag{54}$$

(54) ýeterlik şert däldir. Ony $z = x^2 - y^2$ funksiýa tassyklaýar. Onuň $(0,\ 0)$ nokatdaky hususy önümleri nola deňdir, ýöne ol nokat onuň ekstremum nokady däldir, çünki şol nokatda onuň bahasy nola deňdir we $(0,\ 0)$ nokadyň hiç bir etrabynda onuň alamaty hemişelik däldir: $x = 0$ bolanda $z < 0$ we $y = 0$ bolanda $z > 0$.

Şeýlelikde, (54) şert ekstremumyň zerur şertidir. Ol şertiň ýerine ýetýän nokatlaryna ekstremumyň bolup biljek nokatlary hem diýilýär.

2. Ekstremumyň ýeterlik şertleri. Ekstremumyň bolup biljek nokatlarynyň haçan ekstremum nokatlary bolýandygyna aşakdaky teorema jogap berýär.

9-njy teorema. Goý, $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň $M_o(a, b)$ nokadyň käbir etrabynda ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolup, M_o nokatda onuň birinji hususy önümleri nola deň we

$$A = f''_{xx}(a.\ b),\quad B = f''_{xy}(a.\ b)\quad C = f''_{yy}(a.\ b) \tag{55}$$

bolsun. Eger

1) $AC - B^2 > 0$ bolsa, onda $A > 0$ bolanda M_o funksiýanyň minimum, $A < 0$ bolanda bolsa maksimum nokadydyr;

2) $AC - B^2 < 0$ bolsa, onda M_o nokatda funksiýanyň ekstremumy ýokdur.

$\lhd$ Ikinji hususy önümleriň üznüksizligi sebäpli (55) esasynda

$$f''_{xx}(\tilde{a},\ \tilde{b}) = A + \alpha_1,\quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha_1 = 0,$$

$$f''_{xy}(\tilde{a},\ \tilde{b}) = B + \alpha_2,\quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha_2 = 0,$$

$$f''_{yy}(\tilde{a},\ \tilde{b}) = C + \alpha_3,\quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha_3 = 0$$

bu ýerde $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Şoňa görä bu deňlikler we $f'_x(a.\ b) = 0$, $f'_y(a.\ b) = 0$ deňlikler esasynda (53) formula şeýle görnüşi alar:

$$f(x,\ y) - f(a,\ b) = \frac{1}{2}\left[A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\alpha_1\Delta x^2 + 2\alpha_2\Delta x\Delta y + \alpha_3\Delta y^2\right].$$

Ony özgerdip,

$$f(x,\ y) - f(a,\ b) = \frac{\Delta y^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2B\frac{\Delta x}{\Delta y} + C\right] +$$

$$+\frac{\Delta\rho^2}{2}\left[\alpha_1\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + 2\alpha_2\frac{\Delta x}{\Delta\rho} + \alpha_3\left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2\right]$$

görnüşde ýa-da

$$f(x,\ y)-f(a,\ b)=\frac{\Delta y^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+2B\frac{\Delta x}{\Delta y}+C\right]+\alpha\Delta\rho^2 \qquad (56)$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde

$$\alpha=\frac{1}{2}\left[\alpha_1\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2+2\alpha_2\frac{\Delta x}{\Delta\rho}+\alpha_3\left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2\right],\quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha=0.$$

Ýeterlik kiçi $\Delta\rho$ üçin (56) deňligiň sag böleginiň alamaty kwadrat ýaýyň içindäki aňlatmanyň, ýagny $At^2+2Bt+C$ üçagzanyň alamaty bilen kesgitlenýär, bu ýerde $t=\Delta x/\Delta y$. Mälim bolşy ýaly,
$AC-B^2>0$ we $A>0$ bolanda üçagzanyň alamaty položitel,
$AC-B^2>0$ we $A<0$ bolanda üçagzanyň alamaty otrisateldir,
$AC-B^2<0$ bolanda bolsa onuň alamaty üýtgeýändir. Şonuň üçin hem (56) deňligiň esasynda $AC-B^2>0$ we $A>0$ bolanda $f(x,\ y)>f(a,\ b)$, ýagny M_o funksiýanyň minimum nokadydyr, $AC-B^2>0$ we $A<0$ bolanda $f(x,\ y)<f(a,\ b)$, ýagny M_o funksiýanyň maksimum nokadydyr. $AC-B^2<0$ bolanda bolsa $f(x,\ y)-f(a,\ b)$ tapawut alamatyny üýtgedýär we soňa görä M_o funksiýanyň ekstremum nokady bolup bilmez. $\triangleright$

11-nji mysal. $f(x,\ y)=x^2+y^2-2x+4y+8$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

$\triangleleft$ Ilki bilen funksiýanyň hususy önümlerini tapalyň:

$$f'_x=2x-2,\quad f'_y=2y+4,\quad f''_{xx}=2,\quad f''_{xy}=0,\quad f''_{yy}=2.$$

Şunlukda, $x=1,\ y=-2$ bolanda $f'_x=0,\ f'_y=0$ bolar we şol nokatda $AC-B^2=2\cdot 2-0=4>0,\ \ A=2>0$. Şonuň üçin hem $M_o(1,\ -2)$ funksiýanyň minimum nokadydyr we $\min f(x,\ y)=f(1,\ -2)=3$. $\triangleright$

1-nji bellik. Eger $AC-B^2=0$ bolsa, onda M_o funksiýanyň ekstremum nokady bolup hem, bolman hem biler. Ony aşakdaky mysallar tassyklaýar.

12-nji mysal. $f(x,\ y) = x^2 + 2xy + y^2,\quad g(x,\ y) = xy^3$ funksiýalaryň ekstremumyny derňemeli.

◁ Funksiýalaryň ikisi üçin hem $M_o(0,\ 0)$ ekstremumyň bolup biljek nokadydyr we şol nokatda $AC - B^2 = 0$ (özbaşdak barlaň!). Şunlukda, $f(x,\ y) = (x+y)^2 \geq 0 = f(0,\ 0)$ bolýandygy üçin M_o birinji funksiýanyň minimum nokadydyr, $g(0,\ 0) = 0$ we M_o nokadyň etrabynda ol funksiýanyň alamatynyň üýtgeýändigi sebäpli, M_o nokat ikinji funksiýanyň ekstremum bokady bolup bilmez. ▷

2-nji bellik. Köp üýtgeýänli $f(M)$ funksiýa üçin $f(M) - f(M_o) = \frac{1}{2} d^2 f(\tilde{M})$ bolýandygy sebäpli, M_o nokat $d^2 f(\tilde{M}) > 0$ bolanda funksiýanyň minimum, $d^2 f(\tilde{M}) < 0$ bolanda maksimum nokadydyr.

§ 7. 10. Şertli ekstremum düşünjesi

1. Şertli ekstremumyň kesgitlenişi. $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň x we y üýtgeýänleriniň

$$g(x,\ y) = 0 \tag{57}$$

deňligi kanagatlandyrýan ekstremunyny tapmaklyga şertli ekstremum diýilýär. Şunlukda, (57) deňlemä baglanyşyk deňlemesi diýilýär.

Eger (57) deňleme $y = y(x)$ funksiýany kesgitleýän bolsa, onda ony $z = f(x,\ y)$ funksiýada goýup, x görä bir üýtgeýänli

$$z = f[x,\ y(x)] \tag{58}$$

funksiýany alarys. Şonuň üçin bu halda iki üýtgeýänli $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň şertli ekstremumyny tapmak meselesi bir üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumyny tapmaklyga getirilýär. Ýöne (57) deňlemeden $y = y(x)$ funksiýany kesgitlemek hemişe başartýan däldir.Bu halda şertli ekstremumy tapmaklyga başgaça çemeleşmeli.

2. Lagranžyň usuly. Goý, $g(x,\ y)$differensirlenýän funksiýa bolup, $\partial g/\partial y \neq 0$ bolsun. Onda mälim bolşy ýaly $y'_x = \left(-\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\Big/\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)$

Çylşyrymly (58) funksiýany differensirläp, $z'_x = f'_x + f'_y y'_x$ deňligi alarys. Ol funksiýanyň ekstremumynyň zerur şerti $f'_x + f'_y y'_x = 0$ deňligi aňladýar. Bu deňlik esasynda $y'_x = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big/\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ bolar. y'_x önüm üçin alnan aňlatmalary deňeşdirip,

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\text{ýa-da}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

deňligi alarys. Bu ýerdäki deň gatnaşyklary $-\lambda$ bilen belgiläp, funksiýanyň şertli ekstremum nokadynda $\dfrac{f'_x}{g'_x} = \dfrac{f'_y}{g'_y} = -\lambda$ deňlikleri, olardan bolsa

$$f'_x + \lambda g'_x = 0, \quad f'_y + \lambda g'_y = 0 \tag{59}$$

deňlikleri alarys. Eger Lagranžyň funksiýasy atlandyrylýan

$$L(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda g(x,\ y) \tag{60}$$

funksiýa seretsek, onda (59) deňlikleri

$$L'_x(x,\ y,\ \lambda) = 0, \quad L'_y(x,\ y,\ \lambda) = 0 \tag{61}$$

görnüşde ýazmak bolar.(57)we (61) deňliklerden şertli ekstremumyň bolup biljek nokatlarynyň koordinatalary we λ parametriň bahalary kesgitlenýär.

Şeýlelikde, $z = f(x,\ y)$ funksiýanyň (57) baglanyşyk deňligi kanagatlandyrýan ekstremumynyň bolup biljek nokatlaryny tapmak üçin ilki bilen (60) deňlik boýunça Lagranžyň funksiýasyny düzüp, onuň $x,\ y,\ \lambda$ boýunça hususy önümlerini nola deňleýärler we şol deňlemelerden $x,\ y,\ \lambda$ kesgitlenýärler. Ol deňlemeler şertli ekstremumyň zerur şertini aňladýar.

Üç we ondanda köp üýtgeýänli funksiýalaryň şertli ekstremumy, ýagny ol funksiýanyň baglanyşyk deňlemeleri kanagatlandyrýan ekstremumy şonuň ýaly tapylýar. Mysal ücin, eger $u = f(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň

$$g(x,\ y,\ z) = 0, \quad p(x,\ y,\ z) = 0 \tag{61}$$

şertleri kanagatlandyrýan ekstremumyny tapmak talap edilýän bolsa, onda ilki bilen Lagranžyň

$$L(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu) = f(x,\ y,\ z) + \lambda g(x,\ y,\ z) + \mu p(x,\ y,\ z)$$

funksiýasy girizilýär we (61) deňlemelere ýene-de üç

$$L'_x(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu) = 0,\ L'_y(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu) = 0,\ L'_z(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu) = 0 \tag{62}$$

deňlemeler goşulýar we ol deňlemeler sistemasyndan ekstremumyň bolup biljek nokatlarynyň $x,\ y,\ z$ koordinatalary we $\lambda,\ \mu$ parametrler kesgitlenýär. Şunlukda, (61) we (62) deňlemeler $u = f(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň ekstremumynyň zerur şertini aňladýar.

13-nji mysal. $z = 9 - 8x - 6y$ funksiýanyň $x^2 + y^2 = 25$ baglanyşyk deňlemesini kanagatlandyrýan ekstremumyny tapmaly.

◁ Ilki bilen (60) deňlikden peýdalanyp,

$$L(x,\ y,\ \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

lagranžyň funksiýasyny düzeliň we hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -8 + 2\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -6 + 2\lambda y\,.$$

Olary nola deňläp, $x^2 + y^2 = 25$ deňleme bilen bilelikde

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0; \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

sistemany çözeliň. Onuň çözüwleri:

$$\lambda_1 = 1;\ \ x_1 = 4;\ \ y_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -1;\ \ x_2 = -4;\ \ y_2 = -3\,.$$

Ikinji hususy önümleri tapyp, ikinji differensialy taparys:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad d^2 L = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Ahyrky deňligiň esasynda $\lambda_1 = 1;\ \ x_1 = 4;\ \ y_1 = 3$ bolanda $d^2 L > 0$

bolýandygy sebäpli, ol nokat $L(x,\ y,\ \lambda)$ funksiýanyň şertli minimum nokadydyr, $\lambda_2 = -1;\ \ x_2 = -4;\ \ y_2 = -3$ bolanda $d^2L < 0$ we şonuň üçin bu nokat $L(x,\ y,\ \lambda)$ funksiýanyň şertli maksimum nokadydyr.

Şeýlelikde,

$$z_{\min} = \min f(x,\ y) = f(4,\ 3) = 9 - 8\cdot 4 - 6\cdot 3 = -41;$$

$$z_{\max} = \max f(x,\ y) = f(-4,\ -3) = 9 - 8\cdot(-4) - 6\cdot(-3) = 59.\ \triangleright$$

§ 7. 11. Tekizlikde çyzyklar maşgalasy

1. Birparametli deňlemeler maşgalasy. Tekizlikde C parametr üçin

$$F(x,\ y,\ C) = 0 \tag{63}$$

deňleme boýunça kesgitlenýän çyzyklaryň köplügine birparametrli çyzyklar maşgalasy diýilýär.Oňa1) $y = x^2 + C$ - depeleri Oy okunda bolan parabolalaryň köplügini; 2) $y = (x - C)^2$ - depeleri Ox okunda bolan parabolalaryň köplügini; $xy = C$ $(C \neq 0)$-koordinatalar oklary asimptotalary bolan giperbolalaryň köplügini mysal getirmek bolar.

4 - nji surat

ynda birparametrli deňlemeler maşgalasynyň m dürli nokatlarda onuň dürli çyzyklaryna) ňlemeler maşgalasynyň oramasy diýilýär (4-

Goý, (63) birpametrli deňleme bilen maşgalasynyň $y = y(x)$ deňleme bilen kesgitlenýän oramasy bar bolsun, bu ýerde $y(x)$ differensirlenýän funksiýadyr. Goý, $M(x,\ y)$ nokat (63) deňlemäniň oramasynyň erkin nokady bolup, ol berlen çyzyklar maşgalasynyň käbir çyzygyna hem degişli bolsun. Ol çyzyga C parametriň käbir bahasy degişli bolup, ol bellenen x we y üçin (63) deňleme bilen kesgitlenýär, ýagny $C = C(x,\ y)$. Şonuň üçin oramanyň ähli nokatlary üçin $F[x,\ y,\ C(x,\ y)] = 0$ deňlik ýerine ýetýär. Eger $y = y(x)$ bolsa, onda bu deňlik toždestwa öwrülýär. $C(x,\ y)$

funksiýany differensirlenýän hemişelikden tapawutly funksiýa hasap edip, ol toždestwany x boýunça differensirläliň:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}y'=0$$

ýa-da

$$F'_x+F'_y y'+F'_C\left(C'_x+C'_y y'\right)=0\,. \qquad (64)$$

Bu deňlikden $M(x,\ y)$ nokatda orama geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentini tapýarys. Şol nokatda berlen çyzyklar maşgalasynyň çyzygyna geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentini bolsa (63) deňlemeden taparys. Şol deňlemede C-niň hemişelikligi esasynda, ony differensirläp

$$F'_x+F'_y y'=0 \qquad (65)$$

deňligi alarys. Çyzyklar maşgalasynyň çyzygyna we orama şol bir nokatda geçirilen galtaşmalaryň burç koeffisiýentleriniň biri-birine deňligi üçin, (64) we (65) deňlemelerden

$$F'_C\left(C'_x+C'_y y'\right)=0$$

deňligi alarys.Şerte görä $C(x,\ y)\neq const$ bolany üçin $\left(C'_x+C'_y y'\right)\neq 0$ Şoňa görä-de oramanyň ähli nokatlary üçin $F'_C(x,\ y,\ C)=0$ deňlik ýerine ýetýär.

Şeýlelikde, (63) çyzyklar maşgalasynyň oramasy

$$F(x,\ y,\ C)=0,\quad F'_C(x,\ y,\ C)=0 \qquad (66)$$

deňlemelerden kesgitlenýär.

1-nji bellik. $F(x,\ y)$ funksiýanyň hususy önümleriniň ikisiniň hem nola deň bolan nokatlaryna $F(x,\ y)=0$ çyzygyň aýratyn nokatlary diýilýär. Ol çyzygyň aýratyn nokatlary

$$F(x,\ y)=0,\quad F'_x(x,\ y)=0,\quad F'_y(x,\ y)=0$$

deňlemeler sistemasyndan kesgitlenýär.

2-nji bellik. Eger (63) çyzyklar maşgalasy üçin käbir $y=y(x)$ funksiýa onuň aýratyn nokatlarynyň köplügini kesgitleýän bolsa, onda ol nokatlaryň koordinatalary (66) deňlemeleri kanagatlandyrýar.

Şeýlelikde, (66) deňlemeler oramany ýa-da aýratyn nokatlaryň köplügini, ýa-da olaryň ikisini bilelikde kesgitleýär.

Koordinatalary (66) deňlemeleri kanagatlandyrýan ähli nokatlaryň köplügine (63) çyzyklar maşgalasynyň diskriminant çyzygy diýilýär.

§ 7. 12. Empirik formulalar

Gözegçiligiň netijeleri hasaplanylanda köplenç şeýle meselä duş gelinýär: x we y ululyklaryň köp sanly bahalary belli, ýöne olaryň arasyndaky funksional baglylygyň häsiýeti belli däl. Alnan maglumatlar boýunça x we y ululyklaryň arasyndaky analitik baglylygy tapmaly. Şeýle meseleleri çözmekde alynýan formulalara empirik formulalar diýilýär. Gözegçiligiň we tejribäniň netijesinde düzülýän empirik formulalar tebigy ylymlarda, hususanda fizikada, himiýada we beýleki ylymlarda giňişleýiň ulanylýar.

Empirik formulalaryny düzmek meselesi şeýle amala aşyrylýar. Goý, ölçegleriň netijeleri esasynda jedwel düzülen bolsun we

x	x_1	x_2	x_3	....	x_k	x_{k+1}	....	x_n
y	y_1	y_2	y_3	....	y_k	y_{k+1}	....	y_n

$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ gözlenýän empirik formula bolsun, bu ýerde $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýa x ululyga we $C_1, C_2, ..., C_m$ parametrlere baglydyr. Goý, x_k we y_k degişlilikde jedweliň birinji we ikinji setirindäki sanlar we $\varphi(x_k) = \varphi(x_k,\ C_1,\ C_2, ..., C_m)$ bolsun. Onda $\varphi(x_k) - y_k = \varepsilon_k$ $(k = 1,2,.....,n)$ sanlara gyşarmalar ýa-da hatalar diýilýär. $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýanyň $C_1, C_2, ..., C_m$ parametrleriniň $C_1^0, C_2^0, ..., C_m^0$ bahalary nähili alnanda ε_k gyşarmalar iň kiçi bolar diýen meselä seredeliň. Gyşarmanyň iň kiçi bolmak kriterileriniň içinde giňişleýin ýaýrany iň kiçi kwadratlar usulyna esaslanýän kriteridir: $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots.., C_m)$ funksiýanyň parametrlerini gyşarmalaryň kwadratlarynyň

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 \tag{67}$$

jemi iň kiçi bolar ýaly nähili saýlap almaly.

Bu usuly ilki bilen x we y ululyklaryň çyzykly baglanyşykda bolan haly üçin beýan edeliň,ýagny bu halda iň kiçi kwadratlar usuly boýunça empirik formulanyň parametrlerini kesgitlemek meselesine seredeliň. Onuň üçin jedweldäki x_k we y_k sanlara tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalaryndaky

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$$

nokatlaryň koordinatalary hökmünde seredeliň. Ol nokatlar tas käbir göni çyzykda ýatýar hasap edeliň. Bu halda x we y ululyklar çyzykly baglydyr diýip güman etmek tebigydyr, ýagny

$$y = ax + b, \tag{68}$$

bu ýerde a we b kesgitlenilmeli parametrlerdir. (68) deňligi

$$ax + b - y = 0 \tag{69}$$

görnüsde hem ýazmak bolar. $M_k(x_k, y_k)$ nokadyň (68) deňleme bilen kesgitlenýän göni çyzykda ýerleşýändigi takmyn bolany ücin, (68) formulanyň özi hem takmyndyr. Şonuň üçin (69) formulanyň çep böleginde x we y ululyklaryň ýerine jedwelden alnan x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bahalary alsak, onda

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + b - y_1 &= \varepsilon_1; \\ ax_2 + b - y_2 &= \varepsilon_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ax_n + b - y_n &= \varepsilon_n \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

deňlikleri alarys, bu ýerde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ - gyşarmalardyr.

a we b koeffisiýentleri gyşarmalar absolýut ululyklary boýunça mümkin boldugyça kiçi bolar ýaly saýlap almak talap edilýär. Iň kiçi kwadratlar usulyna laýyklykda a we b koeffisiýentleri

$$u = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots.. + \varepsilon_n^2 \qquad (71)$$

gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly alýarys. Eger bu jem ýeterlik kiçi bolsa, onda gyşarmalaryň özleri hem absolýut ululyklary boýunça kiçi bolar. (70) deňlikleri (71) formulada goýup,

$$u = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots. + (ax_n + b - y_n)^2 \qquad (72)$$

funksiýany, ýagny a we b ululyklara görä iki üýtgeýänli funksiýany alarys. Ol funksiýanyň a we b parametrlere görä iň kiçi bahany almagynyň zerur şerti $\frac{\partial u}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial b} = 0$.

(72) funksiýanyň a we b görä hususy önümlerini nola deňläp.

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k ; \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + bn &= \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

deňlemeler sistemasyny alarys we ondan (68) empirik formulanyň a we b parametrlerini taparys.

Indi x we y ululyklaryň kwadratik baglylyk haly üçin iň kiçi kwadratlar usuly boýunça empirik formulanyň parametrlerini tapmak meselesine seredeliň. Onuň üçin ýene-de jedweldäki x_k we y_k sanlara tekizligiň nokatlarynyň gönüburçly dekart koordinatalary hökmünde garalyň we olara degişlii $M_1(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$,...,$M_n(x_n, y_n)$ nokatlar tas käbir parabolada ýerleşýär hasap edeliň. Bu halda x we y ululyklaryň arasynda takmyn kwadratik baglylyk bar diýip güman etmek tebigydyr, ýagny

$$y = ax^2 + bx + c\,, \qquad (74)$$

bu ýerde a, b we c kesgitlenilmeli parametrlerdir.

Eger (74) formulanyň sag böleginde x we y ululyklaryň ýerine jedwelden alnan x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bahalary alsak, onda $z_k = = ax_k^2 + bx_k + c$ bolar. Eger a, b, c parametrleri islendik k üçin $z_k = y_k$ $(k = 1,2,\ldots..,n)$ bolar ýaly saýlap bolsady,.onda ol iň oňady bolardy. Ýöne $n > 3$ üçin adatça ony beýdip bolmaýar, çünki

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \quad y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \quad y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

deňliklerden kesgitlenýän a, b, c parametrler köplenç

$$y_4 = ax_4^2 + bx_4 + c, ..., \; y_n = ax_n^2 + bx_n + c$$

deňlikleri kanagatlandyrmaýar. Başgaça aýdylanda $z_k - y_k = \varepsilon_k$ $(k = 1,2,.....,n)$ bolar, bu ýerde ε_k gyşarmalar ýa-da hatalardyr.

(74) empirik formulanyň a, b, c parametrlerini gyşarmalaryň kwadratlarynyň

$$u = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 = (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + ... +$$
$$+ (z_n - y_n)^2 = \left(ax_2^2 + bx_1 + c - y_1\right)^2 + \left(ax_2^2 + bx_2 + c - y_2\right)^2 +$$
$$+ .... + \left(ax_n^2 + bx_n + c - y_n\right)^2$$

jemi iň kiçi bolar ýaly kesgitläris. Onuň üçin bolsa

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial c} = 0$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerurdyr. $u = u(a, b, c)$ funksiýanyň a, b, c üýtgeýänler boýunça hususy önümlerini tapyp we olary nola deňläp,

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^2; \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k; \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k + nc &= \sum_{k=1}^{n} y_k, \end{aligned}\right\}$$

normal deňlemeler sistemasyny alarys we bu sistemadan (74) empirik formulanyň parametrleriniň bahalaryny kesgitläris.

14-nji mysal. Goý, tejribäniň esasynda argumentiň bäş bahasyna gözlenýän y funksiýanyň degişli bäş bahasy alnan bolsun:

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

x we y ululyklaryň arasyndaky funksional baglylygy $y = ax + b$ çyzykly funksiýa görnüşinde aňlatmaly.

◁ Çyzykly funksiýanyň koeffisiýentlerini tapmak üçin (73) sistemadan peýdalanarys. Onuň üçin jedweli ulanyp alarys:

$$\sum_{k=1}^{5} y_k x_k = 16{,}5; \quad \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25; \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = 5; \quad \sum_{k=1}^{5} y_k = 8 .$$

Şoňa görä (73) sistema şeýle görnüşi alar:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16{,}5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp taparys: $a = 0{,}425$, $b = 1{,}175$. Şeýlelikde, $y = 0{,}425x + 1{,}175$ gözlenýän göni çyzygyň deňlemesidir. ▷

G ö n ü k m e l e r

1. $f(x,\ y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ funksiýanyň $f(1,\ 2)$, $f(2,\ -1)$, $f(2,\ 2)$ bahalaryny hasaplamaly.

2. Berlen $f(x,\ y) = xy + \dfrac{y}{x}$ funksiýa boýunça $f(y,\ x)$, $f(-x,\ -y)$, $f(1,\ t)$, $f(1,\ y/x)$ funksiýalary tapmaly.

Funksiýalaryň kesgitleniş oblastyny tapmaly:

3. $z = 3x + 2y - 5$. 4. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. 5. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$.

6. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$. 7. $u = \sqrt{xyz}$. 8. $u = x + \sqrt{yz}$.

Funksiýalaryň dereje çyzyklaryny tapmaly:

9. $z = x + y$. 10. $z = 16x^2 - 9y^2$. 11. $z = \dfrac{1}{x^2 + 3y^2}$. 12. $z = \dfrac{y^2}{x}$

Funksiýalaryň dereje üstlerini tapmaly:

13. $u = x - y + z$. 14. $u = x^2 + y^2 - z$.

15. $u=\dfrac{1}{x^2+9y^2+4z^2}$. 16. $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Funksiýalaryň predellerini tapmaly: 17. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$. 18. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$.

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$. 20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$. 21. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y^3}{xy+2}$. 22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Funksiýalaryň üznüksizdigini subut etmeli:

23. $z=x-y+xy$. 24. $z=x^3+y^3-3xy$.

25. $u=x-y+z$. 26. $u=x^2+y^2-z^2$.

Funksiýalaryň üzülme nokatlaryny tapmaly:

27. $z=\dfrac{1}{(x+2)^2+(y-3)^2}$. 28. $z=\dfrac{1}{\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}}$.

29. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$. 30. $u=\dfrac{1}{\sin xyz}$.

Funksiýalaryň hususy önümlerini tapmaly:

31. $z=y\,\sin(2x-y)$. 32. $z=x^2\cos(x+3y)$. 33. $z=\sqrt[4]{4xy}$.

34. $z=2^{xy}$. 35. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$. 36. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Funksiýalaryň doly differensiallaryny tapmaly:

37. $z=x^4+y^4-3x^2y^2+5xy^3$. 38. $z=y^{3x}$.

39. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 40. $u=\dfrac{2y-3z^3}{4z-5x}$.

41. Funksiýanyň artymyny differensialy bilen çalşyryp, takmyn bahasyny hasaplamaly:

a) $\sqrt{(1,03)^2+(2,98)^2}$. b) $1,98^{1,02}$. ç) $\sqrt{(2,02)^2+(1,03)^2+(1,97)^2}$.

Funksiýalaryň ikinji tertipli hususy önümlerini tapmaly:

42. $z=x^2+y^2-xy$. 43. $z=\cos(2x-3y)$.

44. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$. 45. $z=\dfrac{xy}{x+y}$.

Funksiýalaryň ekstremumyny tapmaly:

46. $z=(x-1)^2+4y^2$. 47. $z=x^2+2y^2-4x+12y$.

48. $z=2x^2-4xy+6y^2-8x+16y+19$.

49. $z=3x^3+2xy^2-51x-24y$.

50. Esasy c we C depesinde şol bir burçy bolan ähli üçburçluklardan perimetri iň uly bolan uçburçlugy tapmaly.

51. Dört $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$, $M_3(x_3,\ y_3)$, $M_4(x_4,\ y_4)$ nokatlara çenli uzaklyklaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolan $M(x,\ y)$ nokady tapmaly.

52. Perimetri $2p$ bolan, bir tarapynyň daşyndan aýlananda göwrümi iň uly bolan jisimi emele getirýän üçburçlugy tapmaly.

J o g a p l a r

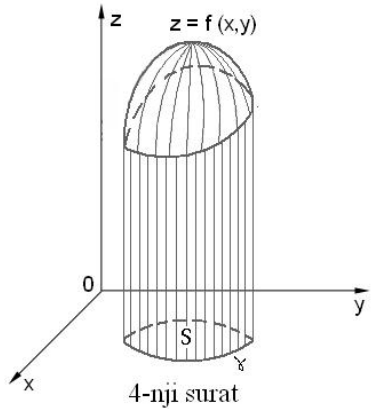
1. $4/5$. $-4/5$. 1. **2.** $xy+y/x$. $xy+y/x$. $2t$. $2y/x$. **3.** Ähli Oxy tekizligi. **4.** Merkezi koordinatalar başlagyjynda, radiusy 3-e deň tegelegiň içki we araçäk nokatlarynyň köplügi. **5.** Merkezi koordinatalar başlagyjynda, radiusy 5-e deň tegelegiň içki nokatlarynyň köplügi. **6.** Oxy tekizligiň $x\le x^2+y^2<2x$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügi (aýjagaz). **7.** Giňişligiň $xyz\ge 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügi. **8.** Giňişligiň: 1) $y\ge 0,\ z\ge 0$; 2) $y\le 0,\ z\le 0$ şertleri kanagatlandyrýan iki oktantlarynyň toplumy. **9.** $x+y=C$ (göni çyzyklar). **10.** $16x^2-$ $-9y^2=C$ **(**$C\ne 0$ bolanda giperbolalar we $C=0$ bolanda iki göni çyzyklar). **11.** $x^2+3y^2=C$ **(**$C>0$ bolanda ellipsler**)**. **12.** $y^2=Cx$ (parabolalar).**13.** $x-y+z=C$ (tekizlikler)**. 14.** $x^2+y^2-z=C$ **(** paraboloidler). **15.** $x^2+9y^2+4z^2=C$ ($C>0$ bolanda ellipsoidler). **16.** $z^2=C^2(x^2+y^2)$ ($C\ne 0$ bolanda konuslar). **17.** 1. **18.** 12. **19.** 0. **20.** Predeli ýok. **21.** 1. **22.** Predeli ýok. **27.** $A(-2,\ 3)$. **28.** $A(-4,\ 3)$**.** **29.** $z=x^2+y^2$ paraboloidde ýatýan nokatlar. **30.** Koordinatalar

tekizliklerinde ýatýan nokatlar. **31.** $z'_x = 2y\cos(2x-y)$, $z'_y = \sin(2x-y) - y\cos(2x-y)$. **32.** $z'_x = 2x\cos(x+3y) - $ $-x^2\sin(x+3y)$, $z'_y = -3x^2\sin(x+3y)$. **33.** $z'_x = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{4x^2}}$, $z'_y =$ $= \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{x}{4y^2}}$. **34.** $z'_x = y2^{xy}\ln 2,$, $z'_y = x2^{xy}\ln 2$. **35.** $z'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $z'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$. **36.** $z'_x = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_y = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{1}{2}$. **37.** $(4x^3 -$ $-6xy^2+5y^3)dx + (4y^3 - 6x^2y + 15xy^2)dy$. **38.** $3y^{3x}\ln y dx +$ $+3xy^{3x-1}dy$. **39.** $\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **40.** $\frac{3(2y-3z)dx}{(4z-5x)^2} +$ $+\frac{2(4z-5x)dy + (15x-8y)dz}{(4z-5x)^2}$. **41.** **a)** 3,153. **b)** 3,978. **ç)** 3,003. **42.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -1$ **43.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4cox(2x-3y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9cox(2x-3y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 6cox(2x-3y)$ **44.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ $= -\frac{4y}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^2}$, **45.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2y^2}{(x+y)^2}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2x^2}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$. **46.** $\min f(x,\ y) = f(1,\ 0) = 0$.
47. $\min f(x,\ y) = f(-3,\ 2) = -22$. **48.** $\min f(x,\ y) = f(1,\ -1) = 7$.
49. $\max f(x,\ y) = f(-4,\ -1) = 152$, $\min f(x,\ y) = f(4,\ 1) = -152$, $A(-1,\ -4)$ we $B(1,\ 4)$ ekstremum nokatlary däl. **50.** Deňýanly.
51. $x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\quad y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$. **52.** $x = \frac{p}{2}, y = \frac{3p}{2}$, $z = \frac{3p}{4}$.

II. 8. GAT INTEGRALLAR

§ 8. 1. Ikigat integrallaryň kesgitlenişi we häsiýetleri

1. Ikigat integrallara getirýän meseleler. 1) Silindrik jisimiň göwrümi hakyndaky mesele. Esasy Oxy tekizlikde ýerleşýän S tekiz figura bolan, gapdallaryndan emele getirijisi Oz okuna parallel we ugrukdyryjysy S figurany çäklendirýän γ çyzyk bolan silindrik üst bilen we ýokarsyndan $z = f(x,\ y)$ üst bilen çäklenen jisime seredeliň (4-nji surat).



4-nji surat

Silindrik jisim atlandyrylýan şol jisimiň göwrümini tapmak meselesine garalyň. Ony tapmak üçin S figurany çyzyklaryň tory arkaly $S_1,\ S_2,\ldots,S_n$ böleklere böleliň (5-nji surat) we olaryň meýdanlaryny degişlilikde $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ldots,\Delta S_n$ bilen belgiläliň. Her bir $S_k\ (k=1,\ 2,\ldots,n)$ bölekde erkin $M_k(x_k, y_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k)$ bahasyny S_k bölegiň ΔS_k meýdanyna köpeldeliň. Şonda, $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ köpeltmek hasyl esasynyň meýdany ΔS_k we beýikligi $h_k = f(x_k, y_k)$ bolan silindrik jisimiň göwrümidir. Şonuň ücin ol köpeltmek hasyllardan düzülen $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ jem berlen silindrik jisimi takmyn çalşyrýan basgançak şilindrik jisimiň V_n göwrümine deňdir:

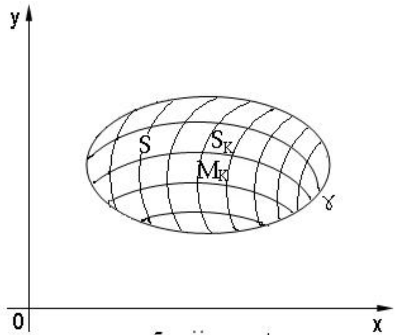
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k\ . \qquad (1)$$

$S_k\ (k=1,\ 2,\ldots,n)$ bölekleriň diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Onda $d \to 0 \Rightarrow n \to \infty$. Eger

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta S_k \qquad (2)$$

predel bar bolsa, onda şol predele silindrik jisimiň göwrümi diýilýär.

2) Plastinkanyň massasy hakyndaky mesele. Oxy tekizlikde γ çyzyk bilen çäklenen S figura seredeliň (5-nji surat) we onda dykyzlygy $\rho = f(x,\ y)$ bolan jisim ýaýradylan bolsun. Plastinka atlandyrylýan ol figuranyň $\rho = f(x,\ y) \geq 0$ dykyzlygy belli halynda onuň massasyny tapmak meselesine garalyň. Onuň üçin 1)-nji meseledäki ýaly S figurany



5-nji surat

böleklere bölüp, alnan bölekleriň meýdanlaryny $\Delta S_1,\ \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ bilen belgiläliň. Her S_k bölekdäki dykyzlyk hemişelik we käbir nokatdaky dykyzlyga deň hasap edeliň, ýagny $\rho_k = f(x_k,\ y_k)$. Onda $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ köpeltmek hasyl plastinkanyň S_k böleginiň massasynyň takmyn bahasy, şeýle köpeltmek hasyllaryň ählisiniň jemi bolsa S plastinkanyň özüniň m_n massasynyň takmyn bahasy bolar, ýagny

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k .$$

Şonuň üçin hem bu jemiň $d \to 0$ bolandaky predeli plastinkanyň massasynyň takyk bahasy bolar:

$$m = \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta S_k . \qquad (3)$$

2. Ikigat integralyň kesgitlenişi. Tekizlikde ýapyk l çyzyk bilen çäklenen S oblastda kesgitlenen $z = f(x,\ y)$ funksiýa garalyň. S oblasty S_k $(k = 1,\ 2, \ldots, n)$ böleklere bölüp, olaryň meýdanlaryny

$\Delta S_1,\ \Delta S_2,\dots,\Delta S_n$ bilen belgiläliň. Her bir blek S_k oblastda erkin $M_k(x_k, y_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky bahasyny ΔS_k meýdana köpeldeliň we şeýle köpeltmek hasyllardan

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \tag{4}$$

jemi düzeliň. Oňa $f(x,\ y)$ funksiýanyň S oblast boýunça integral jemi diýilýär. S_k bölek oblastlaryň diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň.

Eger $\forall\varepsilon > 0$ san üçin şeýle $\delta > 0$ san tapylyp, $d < \delta$ bolanda

$$|I - I_n| < \varepsilon \tag{5}$$

deňsizlik S_k bölekden alynýan M_k nokada baglanyşyksyzlykda ýerine ýetýän bolsa, onda I sana I_n integral jemiň $d \to 0$ bolandaky predeli diýilýär.

Eger $d \to 0$ bolanda integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x,\ y)$ funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integraly diýilýär we ol $\iint\limits_D f(x,\ y)ds$ ýa-da $\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy$ bilen belgilenýär:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,ds = \iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k\,, \tag{5}$$

bu ýerde $f(x,\ y)$ funksiýa integral astyndaky funksiýa, S bolsa integrirleme oblasty diýilýär.

Eger $f(x,\ y)$ funksiýa ýapyk kwadratlanýan S oblastda üznüksiz bolsa, onda (5) formulanyň sag bölegindäki predel bardyr (onuň subudyny [1] kitapdan görmek bolar). Bu halda $f(x,\ y)$ funksiýa S oblastda integrirlenýän funksiýa diýilýar. Şeýlelikde, her bir üznüksiz funksiýa integrirlenýändir. Üznüksiz bolmadyk funksiýalaryň integrirlenýäni hem, integrirlenmeýäni hem bardyr.

Bellik. Seredilen meseleleriň ikisi hem $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ integral jemi düzmeklige we ol jemiň $d \to 0$ bolandaky predelini tapmaklyga getirildi. Ol predel bolsa kesgitleme boýunça $f(x,\ y)$ funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integralyna deňdir.

Şeýlelikde, (2) we (5) formulalaryň esasynda

$$V=\iint\limits_{S} f(x,\ y)\,ds$$

deňligi ýazyp bileris we ol ikigat integralyň geometrik manysyny aňladýar, ýagny esasy S bolan we ýokarsyndan $z=f(x,\ y)$ üst bilen çäklenen silindrik jisimiň göwrüminiň $f(x,\ y)\geq 0$ funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integralyna deňdigini görkezýär.

Şonuň ýaly-da (4) we (5) formulalaryň esasynda

$$m=\iint\limits_{S} f(x,\ y)\,ds$$

deňligi ýazyp bileris we ol ikigat integralyň fiziki manysyny aňladýar, ýagny üst dykyzlygy $\rho=f(x,\ y)\geq 0$ funksiýa bolan S plastinkanyň massasynyň berlen funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integralyna deňdigini görkezýär.

Şeýlelikde, garalan meseleleriň ikisiniň hem ikigat integral düşünjesine getirýändigini gördük.

3. Ikigat integrallaryň häsiýetleri. 1) Eger $f(x,y)$ we $g(x,y)$ funksiýalar D oblastda integrirlenýän bolsalar, onda olaryň algebraik jemi hem şol oblastda integrirlenýär we

$$\iint\limits_{D}\left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]ds=\iint\limits_{D} f(x,y)\,ds\pm\iint\limits_{D} g(x,y)\,ds$$

deňlik dogrudyr.

2) Hemişelik köpeldijini integral belgisiniň daşyna çykarmak bolar:

$$\iint\limits_{D} kf(x,y)\,ds=k\iint\limits_{D} f(x,y)\,ds\,.$$

3) Eger $f(x,y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän bolsa we D oblast kesişmeýän D_1 we D_2 böleklere bölünen bolsa, onda

$$\iint_D f(x, y)ds = \iint_{D_1} f(x, y)ds + \iint_{D_2} f(x, y)ds$$

deňlik dogrudyr.

4) Eger D oblastda integrirlenýän $f(x, y)$ we $g(x, y)$ funksiýalar $\forall\ (x,\ y)\ \in D$ üçin $f(x, y) \le g(x, y)$ deňsizligi kanagatlandyrsa, onda

$$\iint_D f(x, y)ds \le \iint_D g(x, y)ds\ .$$

5) Eger $f(x, y)$ funksiýa D oblast integrirlenýän bolsa, onda $|\ f(x, y)|$ funksiýa hem D oblastda integrirlenýär we

$$\left|\iint_D f(x, y)ds\right| \le \iint_D |f(x, y)|ds\ .$$

6) Eger $f(x, y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän we $m \le f(x, y) \le M$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$mS \le \iint_D f(x, y)ds \le MS$$

deňsizlikler dogrudyr, bu ýerde S berlen D oblastyň meýdanydyr.

Ikigat integralyň bu häsiýetleri onuň kesgitlemesi ulanylyp, aňsatlyk bilen subut edilýär.

§ 8. 2. Ikigat integrallaryň hasaplanylyşy

1. Integrirleme oblasyň gönüburçluk haly. Goý, G oblast $a \le x \le b,\ \ c \le y \le d$ deňsizlikler boýunça kesgitlenýän gönüburçluk bolsun (6-njy surat). Şol gönüburçlukda üznüksiz $f(x, y) \ge 0$ funksiýa üçin $\iint_G f(x, y)dxdy$ integralyň hasaplanylyşyny görkezeliň.

Belli bolşy ýaly bu integral esasy G gönüburçluk, ýokarsyndan $z = f(x, y)$ üst we gapdallaryndan $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$ tekizlikler bilen çäklenen silindrik jisimiň (6-njy surat) göwrümidir:

$$V = \iint_G f(x,\ y)ds\ .$$

Şonuň ýaly-da § 6. 6 –da görkezilen formula boýunça ol göwrüm

$$V = \int_a^b S(x)dx\,,$$

bu ýerde $S(x)$ meýdan x nokat arkaly geçýän we Ox okuny perpendikulýar kesýän tekizligiň jisimi kesende kesikdäki alynýan figuranyň meýdanydyr. Ol kesikde alynýan figura bolsa ýokarsyndan bellenen x üçin $z = f(x,\ y)$ $(c \le y \le d)$ funksiýanyň çyzgysy bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýadyr we onuň $S(x)$ meýdany

$$S(x) = \int_c^d f(x,\ y)dy$$

formula boýunça tapylýar. Bu üç deňlikleriň esasynda ikigat integraly hasaplamak üçin

$$\iint_G f(x,\ y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)dy \right] dx \tag{6}$$

formulany alarys. Şeýlelikde, ikigat integraly hasaplamaklygy iki sany kesgitli integrallary hasaplamaklyga getirdik. Şunlukda, içki (kwadrat ýaýdaky) integral hasaplanylanda x hemişelik hasap edilýär.

Bellik. Subut edilen (6) formulanyň $f(x,\, y) < 0$ bolanda, şeýle-de $f(x,\, y)$ funksiýanyň gönübürçlukda alamatyny üýtgedýän haly üçin hem ýerine ýetýändigini görkezmek bolar.

(6) formulanyň sag bölegine gaýtalanýan integrallar diýilýär we ol

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)dy\ . \tag{7}$$

görnüşde ýazylýar. Edil şonuň ýaly

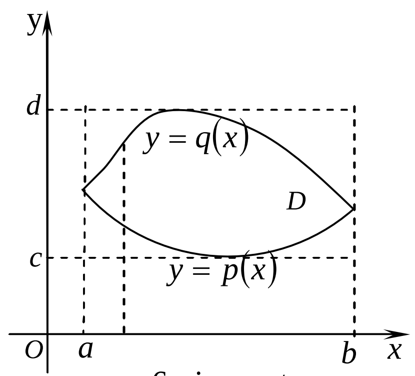
$$\iint_G f(x,\ y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,\ y)dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\ y)dx \qquad (8)$$

formulany görkezmek bolar. (6)-(8) formulalaryň esasynda

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\ y)dx \qquad (9)$$

deňligi alarys.Bu deňlik ikigat integralda integrirlemegiň netijesiniň onuň integrirleme tertibine bagly däldigini görkezýär.

2. Integrirleme oblastyň beýleki görnüşleri. a) Goý, D oblast aşagyndan $y = p(x)$ funksiýanyň çyzgysy, ýokarsyndan $y = q(x)$ funksiýanyň çyzgysy bilen çäklenen oblast bolup, Oy okuna parallel we D oblast bilen umumy nokady bolan islendik göni çyzyk D oblastyň araçägini diňe iki nokatda kesýän bolsun (6-njy surat). Oňa Oy okuna görä ýönekeý oblast diýeliň. Goý,



6-njy surat

$$G\{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

ol oblasty içinde saklaýan iň kiçi gönüburçluk bolsun. Eger $f(x,\ y)$ funksiýa D oblastda üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol ýaýlada integrirlenýändir we

$$F(x,\ y) = \begin{cases} f(x,\ y), & (x,\ y) \in D, \\ 0, & (x,\ y) \in G \setminus D \end{cases}$$

funksiýa üçin integralyň 3-nji häsiýeti boýunça

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_G F(x,\ y)dxdy \qquad (10)$$

deňlik dogrudyr. (6) formulanyň esasynda bolsa

$$\iint_G F(x,\ y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,\ y)dy\,. \qquad (11)$$

$[p(x),\ q(x)]$ kesimiň tutuşlygyna D oblastda ýerleşýändigi sebäpli,

$p(x) \le y \le q(x)$ bolanda $F(x,\ y) = f(x,\ y)$ we ol kesimiň daşynda $F(x,\ y) = 0$. Şoňa görä hem bellenen x üçin

$$\int_c^d F(x,\ y)dy = \int_c^{p(x)} F(x,\ y)dy + \int_{p(x)}^{q(x)} F(x,\ y)dy +$$

$$+ \int_{q(x)}^{d} F(x,\ y)dy = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,\ y)dy .$$

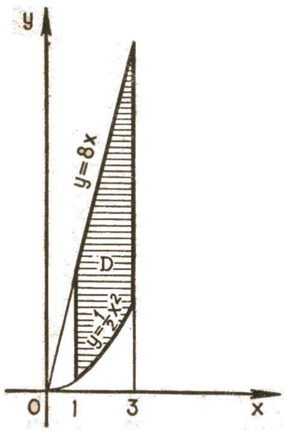
Şoňa görä-de bu deňlik esasynda (11) deňligi

$$\iint_G F(x,\ y)dxdy = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,\ y)dy . \tag{12}$$

görnüşde ýazmak bolar. (10) we (12) formulalardan bolsa

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,\ y)dy \tag{13}$$

deňlik gelip çykýar.



7-nji surat

1-nji mysal. $y = 8x,\quad y = x^2/2$, $x = 1,\ \ x = 3$ çyzyklar bilen çäklenen ýapyk D oblast boýunça (7-nji surat) $f(x, y) = x - 2y$ funksiýanyň ikigat integralyny hasaplamaly.

◁ Bu mysaldaky D oblast Oy okuna görä ýönekeý bolan 2-nji suratdaky oblastdyr:

$$D\left\{\ 1 \le x \le 3;\ \ \frac{1}{2}x^2 \le y \le 8x \right\}$$

Şoňa görä-de D oblast boýunça ikigat integraly (13) formulany ulanyp hasaplamak bolar:

$$\iint_D (x + 2y)dxdy =$$

$$= \int_1^3 dx \int_{x^2/2}^{8x} (x + 2y)dy = \int_1^3 \left(xy + y^2\right)\Big|_{x^2/2}^{8x} dx =$$

$$= \int_1^3 \left(72x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \left(24x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right)\Big|_1^3 = 602{,}1 . \triangleright$$

b) Eger D oblast $c \le y \le d$, $p_1(y) \le x \le q_1(y)$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän bolup, ol Ox okuna görä ýönekeý oblast bolsa we $f(x,\ y)$ funksiýa şol oblastda üznüksiz bolsa, onda a) haldaky ýaly

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_c^d dy \int_{p_1(y)}^{q_1(y)} f(x,\ y)dx \tag{14}$$

deňligi subut etmek bolar.

ç) Eger D oblast hem Ox okuna görä, hem Oy okuna görä ýönekeý oblast bolup, şol oblastda $f(x, y)$ funksiýa üznüksiz bolsa, onda (13) we (14) formulalaryň ikisi hem dogrudyr we şonuň esasynda bu halda amatyna garap ikigat integraly hasaplamak üçin olaryň islendigini ulanmak bolar, çünki şol formulalar esasynda

$$\int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{p_1(y)}^{q_1(y)} f(x, y)dx \tag{15}$$

deňlik dogrudyr. Bu deňlik gaýtalanýan integrallarda integrirlemegiň tertibini üýtgedip bolýandygyny görkezýär. Ony köplenç gaýtalanýan integrallaryň birisiniň hasaplamasy kyn bolanda ulanýarlar. Ony ulanmak üçin ilki bilen berlen gaýtalanýan integralyň integrirleme çäkleri boýunça integrirleme oblasty kesgitleýärler we soňra şol oblast boýunça beýleki tertipdäki gaýtalanýan integralyň integrirleme oblastyny we çäklerini kesgitleýärler, ýagny berlen a, b, $p(x)$, $q(x)$ funksiýalar boýunça c, d, $p_1(y)$, $q_1(y)$ funksiýalar tapylýar (ýa-da tersine).

d) Eger D oblast Ox okuna görä-de, Oy okuna görä-de ýönekeý oblast bolman, ony şol görnüşdäki birnäçe oblastlalara bölüp bolýan bolsa, onda olaryň hersinde degişli formulalary ulanmak arkaly ikigat integraly hasaplamaklygy gaýtalanýan integrallary hasaplamaklyga getirmek bolar.

§ 8. 3. Ikigat integralda üýgeýänleri çalşyrmak

1. Egriçyzykly koordinatalarda meýdan. Oxy tekizikde endigan l çyzyk bilen çaklenen D oblasta seredeliň. Goý, x we y görä birbahaly

$$u = u(x, \ y), \quad v = v(x, \ y) \tag{16}$$

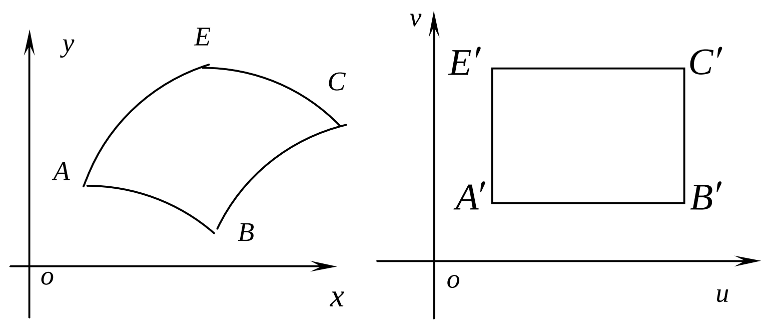
funksiýalar D oblastda üznüksiz bolup, olaryň şol oblastda üznüksiz hususy önümleri bar bolsun.

Goý, (16) deňlikler x we y ululyklary ýeke-täk kesgitleýän bolsun, ýagny

$$x = x(u, \ v), \quad y = y(u, \ v), \tag{17}$$

bu ýerde $x(u, \ v)$, $y(u, \ v)$ funksiýalar Ouv tekizligiň D' oblastynda üznüksiz bolup, olaryň şol oblastda üznüksiz hususy önümleri bar bolsun.

Şerte görä (16) formula D oblastyň her bir $M(x, \ y)$ nokadyna D' oblastyň ýeke-täk $M'(u, \ v)$ nokadyny degişli edýär. (17) formula bolsa onuň tersine, her bir $M'(u, \ v) \in D'$ nokada ýeke-täk



8-nji surat

$M(x, \ y)$ nokady degişli edýär. Şoňa görä u we v sanlara $M(x, \ y)$ nokadyň täze koordinatalary hökmünde garamak bolar we olara M nokadyň egriçyzykly koordinatalary diýilýär.

Şeýlelikde, (16) formula D we D' oblastlaryň nokatlarynyň arasynda özära birbahaly degişliligi gurnaýar, ýagny D oblasty D' oblasta öwürýär. Şunlukda, D oblasty çäklendirýän l çyzyk D' oblasty çäklendirýän l' çyzyga özgerdilýär.Şu özgertmede bellenen u_o üçin Ouv tekizligiň $u = u_o$ göni çyzygyna Oxy tekizligiň parametrik deňlemesi $x = x(u_o, v)$, $y = y(u_o, v)$ görnüşde bolan käbir çyzygy degişli bolar (bu ýerde v parametrdir). Şonuň üçin hem şu öwürmede Ouv tekizligiň $u = u_o$, $u = u_o + \Delta u$, $v = v_o$,

$v = v_o + \Delta v$ göni çyzyklar bilen çäklenen $ABCE$ gönüburçlugy Oxy tekizligiň egriçyzykly $A'B'C'E'$ dörtburçlugyna öwrüler (8-nji surat). Şunlukda, gönüburçlugyň depeleriniň koordinatalary $A'(u_o, v_o)$, $B'(u_o + \Delta u, v_o)$, $C'(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v)$, $E'(u_o, v_o + \Delta v)$, egriçyzykly $ABCE$ dörtburçlugyň depeleriniň koordinatalary bolsa şeýle bolar:

$$A(x_1, y_1), \quad x_1 = x(u_o, v_o), \qquad y_1 = y(u_o, v_o),$$
$$B(x_2, y_2), \quad x_2 = x(u_o + \Delta u, v_o), \qquad y_2 = y(u_o + \Delta u, v_o),$$
$$C(x_3, y_3), \quad x_3 = x(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v), \qquad y_3 = y(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v),$$
$$E(x_4, y_4), \quad x_4 = x(u_o, v_o + \Delta v), \qquad y_4 = y(u_o, v_o + \Delta v) .$$

Tükeniksiz kiçi Δu, Δv ululyklaryň ýokary tertipli takyklygynda egriçyzykly $A'B'C'E'$ dörtburçlugyň meýdany $\overline{AE}$ we $\overline{AB}$ wektorlar esasynda gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir. Ol wektorlaryň koordinatalary bolsa şeýle kesgitlenýär:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\} =$$
$$\{x(u_o + \Delta u,\ v_o) - x(u_o,\ v_o),\ y(u_o + \Delta u,\ v_o) - y(u_o,\ v_o)\},$$
$$\overline{AE} = \{x_4 - x_1,\ y_4 - y_1\} =$$
$$= \{x(u_o,\ v_o + \Delta v) - x(u_o,\ v_o),\ y(u_o,\ v_o + \Delta v) - y(u_o,\ v_o)\}.$$

Lagranjyň formulasyny ulanyp, olary şeýle ýazmak bolar:

$$\overline{AB} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \right\}, \quad \overline{AE} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \right\}.$$

Bu wektorlaryň esasynda parallelogramyň meýdanyny

$$\Delta S = \left| \left[\overline{AB},\ \overline{AE} \right] \right| = \mathrm{mod} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v$$

formula boýunça ýa-da

$$\Delta S = \left| I(u,\ v) \right| \Delta S', \quad \Delta S' = \Delta u \Delta v, \tag{18}$$

formula boýunça tapylýar, bu ýerde

$$I = I(u,\ v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

(19) kesgitleýjä (17) öwürmäniň ýakobiany diýilýär. Ony noldan tapawutly hasap ederis. Şeýlelikde, egriçyzykly koordinatalarda meýdan (18) formula boýunça tapylýar.

2. Ikigat integralda üýtgeýäni çalşyrmak formulasy. Eger D oblastda üznüksiz $f(x,\ y)$ funksiýa üçin x we y üýtgeýänleri (17) formula boýunça u we v üýtgeýänler bilen çalşyrsak, onda

$$f(x,\ y) = f\left[x(u,\ v),\ y(u,\ v)\right] = F(u,\ v)$$

bolar. Bu funksiýanyň D oblast boýunça integral jemini düzeliň:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k) \Delta S_k .$$

(18) deňlik esasynda ony şeýle ýazmak bolar:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k) |I| \Delta S_k' .$$

Bu deňlikde predele geçip, ikigat integralyň kesgitlemesi esasynda ikigat integralda üýtgeýänleri çälşyrmagyň

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \left| J(u,v) \right| dudv \tag{20}$$

formulasyny alarys.Eger dekart koordinatalaryny $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$ formula boýunça polýar koordinatalary bilen çalşyrsak, onda (19) formula boýunça

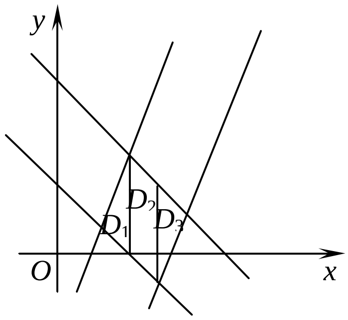
$$I = I(\rho,\ \varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \qquad (21)$$

bolar. Şonuň üçin bu halda (20) formula esasynda

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f[\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi]\rho\, d\rho\, d\varphi \qquad (22)$$

formulany alarys.

2-nji mysal. Ikigat $\iint_D (2x - y)dxdy$ integraly hasaplamaly, bu ýerde D oblast $x + y = 1,\quad x + y = 2,\quad 2x - y = 1,\quad 2x - y = 3$ göni çyzyklar bilen çäklenen parallelogramdyr (9-njy surat).



9-njy surat

◁ Suratdan görnüşi ýaly, D oblast Ox okuna görä-de, Oy okuna görä-de ýonekeý däldir. Şonuň üçin integrala (13) we (14) formulalary gönümel ulanyp bolmaýar. Olary ulanmak üçin D oblasty 9-njy suratda görkezilişi ýaly, üç böleklere bölmeli we degişli üç integraly hasaplamaly.

Ýöne x we y üýtgeýänleri

$$u = x + y,\ v = 2x - y$$

formulalary ulanyp çalşyrma girizmek integraly hasaplamaklygy ýeňilleşdirýär. Bu çalşyrmada Oxy koordinatalar sistemasyndaky $x + y = 1,\ \ x + y = 2$ we $2x - y = 1,\ \ 2x - y = 3$ göni çyzyklar Ouv koordinatalar sistemasynda degişlilikde $u = 1,\ u = 2$ we $v = 1,$ $v = 3$ göni çyzyklara geçýär, ýagny D parallelogram integrirlemek üçin amatly bolan taraplary koordinatalar oklaryna parallel bolan D' gönüburçluga özgerdilýär. Bu halda ýakobian

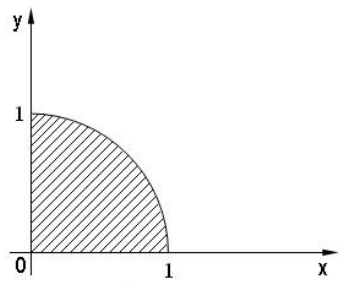
$$I = I(u,\, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Şonuň üçin (20) formulany ulanyp, integraly hasaplarys:

$$\iint_D (2x - y)\, dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{3} vdudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 vdv =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 du = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)\int_1^2 du = \frac{1}{3}\cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}\,. \ \triangleright$$

Bellik. Integral astyndaky funksiýa ýa-da oblasty çäklendirýän çyzygyň deňlemesi özünde $x^2 + y^2$ jemi saklaýan halynda, köplenç, integraly ýönekeýleşdirmek dekart koordinatalaryndan polýar koordinatalaryna geçmek arkaly amala aşyrylýar.



10-njy surat

3-nji mysal. Ikigat $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ integraly hasaplamaly, bu ýerde D oblast $x^2 + y^2 = 1$ töwerek bilen çäklenen tegelegiň birinji kwadrantda ýerleşýän dörtden bir bölegi (10-njy surat).

$\triangleleft$ Dekart koordinatalaryny $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$ formula boýunça polýar koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $x^2 + y^2 = \rho^2$ bolar we (21) formula esasynda ýakobian $I = \rho$ bolar. 10-njy suratdan görnüşi ýaly, φ burç 0-dan $\pi/2$-ä çenli, ρ bolsa 0-dan 1-e çenli üýtgeýär. Şonuň üçin (22) formulany ulanyp alarys:

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{2}(e-1)\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{4}(e-1). \ \triangleright$$

§ 8. 4. Ikigat integrallaryň ulanylyşy

1. Geometriýada ikigat integrallaryň ulanylyşy. Iki gat integrallaryň geometriýada käbir ulanylyşlaryna biz eýýäm duş geldik. Mysal üçin, § 8. 4 –de jisimiň göwrüminiň

$$V = \iint_D f(x,\ y)dxdy$$

formula boýunça tapylýandygyny görkezipdik. Eger ol formulada $f(x,\ y) = 1$ alsak, onda $V = 1 \cdot S = S$ deňligi, ýagny D oblastyň meýdanyny hasaplamak üçin

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D dS$$

formulany alarys.

2. Fizikada ikigat integrallaryň ulanylyşy. 1) Plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary. Eger **t**ekizligiň $M_1(x_1,\ x_2)$, $M_2(x_2,\ y_2), \ldots, M_n(x_n,\ y_n)$ nokatlarynda $m_1,\ m_2,\ \ldots, m_n$ massalar ýerleşdirilen bolsa, onda § 1.1-ň 5-nji mysalynda görkezilişi ýaly, ol massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \tag{21}$$

formula boýunça tapylýar. Şu formuladan peýdalanyp, Oxy tekizligiň D oblastynda ýerleşýän plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapalyň. Goý, $\rho = \rho(x,\ y)$ plastinkanyň $M(x,\ y)$ nokadyndaky dykyzlygy bolsun. D oblasty n böleklere bölüp, olaryň meýdanlaryny $\Delta S_1,\ \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ bilen belgiläliň. Her bir D_k oblastdaky dykyzlygy hemişelik we $\rho_k = \rho_k(x_k,\ y_k)$ deň hasap edeliň we şol bölegiň $m_k = \rho_k(x_k,\ y_k)\Delta S_k$ massasy $M_k(x_k,\ y_k)$ nokatda toplanan bolsun. Onda n sany $M_k(x_k,\ y_k)$ material nokatlaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary (21) formula esasynda şeýle formula boýunça tapylýar:

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k}, \quad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k}. \tag{22}$$

Olar plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalarynyň takmyn bahalaryny aňladýar. Eger D_k oblastlaryň diametrleriniň iň ulusy bolan $d \to 0$ bolanda predele geçsek, onda (22) deňlikleriň sag bölegindäki jemleriň predelleri ikigat integrallara deň bolar. Şonuň easasynda (22) deňliklerde $d \to 0$ bolanda predele geçip, plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary üçin

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,\ y)dxdy, \qquad y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,\ y)dxdy \tag{23}$$

formulalary alarys, bu ýerde m ol plastinkanyň massasydyr:

$$m = \iint_D \rho(x,\ y)dxdy.$$

(23) formuladaky ikigat

$$M_y = \iint_D x\rho(x,\ y)dxdy, \qquad M_x = \iint_D y\rho(x,\ y)dxdy$$

integrallara D plastinkanyň degişlilikde Oy we Ox oklaryna görä statiki momentleri diýilýär. Eger plastinka birjynsly, ýagny dykyzlyk hemişelik bolsa, onda (23) formula

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, \qquad y_c = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy \tag{24}$$

görnüsi alar, bu ýerde S - D oblastyň meýdanydyr.

2) Plastinkanyň inersiýa momenti. Massasy m bolan material nokadyň massasynyň şol nokadyň haýsydyr bir oka (nokada) çenli uzaklygynyň kwadratyna köpeltmek hasylyna material nokadyň şol oka (nokada) görä inersiýa momenti diýilýär.

Massalary $m_1,\ m_2,\ ,\ldots, m_n$ bolan $M_1, M_2, \ldots, M_n$ material nokatlaryň Ou okuna (O nokada) görä inersiýa momentleriniň

$$\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

jemine ol nokatlaryň şol oka (nokada) görä inersiýa momenti diýilýär, bu ýerde r_k material nokatlaryň Ou okuna (O nokada) çenli uzaklygydyr.

Şu kesgitlemeden peýdalanyp, dykyzlygy $\rho = \rho(x,\ y)$ bolan D plastinkanyň koordinat oklaryna we koordinata başlangyjyna görä inersiýa momentlerini kesgitläliň. Onuň üçin D oblasty böleklere bölüp, onuň ΔS_k meýdanly D_k böleginiň $m_k = \rho_k(x_k,\ y_k)\Delta S_k$ massasy $M_k(x_k,\ y_k)$ nokatda toplanan hasap edeliň. Şunlukda, n material nokatlaryň sistemasyny alarys. Olaryň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja çenli r_k uzaklyklarynyň degişlilikde

$$r_k = y_k, \qquad r_k = x_k, \qquad r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

bolýanygy sebäpli, material nokatlaryň sistemasynyň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja görä inersiýa momentleri degişlilikde

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k\ ,$$

$$I_y = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k\ ,$$

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2)\rho(x_k,\ y_k)\Delta S_k$$

deňlikler boýunça kesgitlener we olary degişlilikde plastinkanyň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja görä inersiýa momentleriniň takmyn bahalary hökmünde almak bolar. Ol deňliklerde $d \to 0$ bolanda predele geçip, degişlilikde D plastinkanyň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja görä inersiýa momentleriniň takyk bahalaryny alarys:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,\ y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,\ y)dxdy,$$

$$I_o = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho\left(x,\ y\right)dxdy\ .$$

Bu deňliklerden görnüşi ýaly $I_o = I_x + I_y$.

§ 8. 5. Üçgat integrallar

1. Üçgat integralyň kesgitlenişi. Giňişlikde çakli ýapyk Q oblast we şol oblastda kesgitlenen üznüksiz $u = f(x,\ y,\ z)$ funksiýa seredeliň. Q oblasty Q_k $(k = 1,\ 2,\ldots, n)$ böleklere bölüp, olaryň göwrümlerini $\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ldots,\Delta V_n$ bilen belgiläliň. Her bir Q_k bölekde erkin $M_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k,\ y_k,\ z_k)$ bahasyny Q_k bölegiň ΔV_k göwrümine köpeldip, ähli şeýle köpeltmek hasyllardan

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,\ y_k,\ z_k)\Delta V_k \qquad (25)$$

jemi düzeliň. Oňa $f(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň Q oblast boýunça integral jemi diýilýär. Q_k bölegiň d_k diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Eger $d \to 0$ bolanda (25) integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň Q oblast boýunça üçgat integraly diýilýär we ol $\iiint\limits_Q f(x,\ y,\ z)dV$ görnüsde belgilenýär

Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\iiint\limits_Q f(x,\ y,\ z)dV = \iiint\limits_Q f(x,\ y,\ z)dxdydz = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,\ y_k,\ z_k)\Delta V_k\ .$$

Eger $f(x,\ y,\ z)$ funksiýa Q oblastda üznüksiz bolsa, onda bu deňligiň sag bölegindäki predel bardyr we ol predel Q oblastyň Q_k böleklere bölünmegine we her bölekde alynýan M_k nokatlara bagly däldir.

Eger Q oblastda göwrüm dykyzlygy üznüksiz $f(x,\ y,\ z) \geq 0$ funksiýa bilen aňladylýan käbir jisim paýlanan bolsa, onda $f(x_k,\ y_k,\ z_k)\Delta V_k$ köpeltmek hasyl Q_k bölegiň massasynyň takmyn bahasyny, (25) integral jem bolsa Q ýaýlanyň özüniň massasynyň takmyn bahasyny aňladýar. Şonuň üçin ol massanyň takyk bahasy

$$m = \iiint_Q f(x,\ y,\ z)dV \tag{26}$$

üçgat bilen aňladylýar we ol üçgat integralyň mehaniki manysyny görkezýär: üçgat integral integrirleme Q oblasty doldurýan massadyr.

Eger (26) formulada $f(x,\ y,\ z) = 1$ bolsa, onda $m = V \cdot 1 = V$ bolar we bu halda ol formula

$$V = \iiint_Q dV = \iiint_Q dxdydz \tag{27}$$

görnüsi alar we ol folmula boýunça Q oblastyň göwrümi tapylýar.

Üçgat integrallaryň hem ikigat integrallaryňky ýaly häsiýetleri bardyr.

2. Üçgat integrallaryň hasaplanylyşy. Q oblastyň käbir görnüşleri üçin üçgat integralyň hasaplanyş formulalaryny getirip çykaralyň. Eger: 1) Oz okuna parallel we Q oblast bilen umumy nokatlary bolan islendik göni çyzyk ol ýaýlanyň araçägini diňe iki nokatda kesýän bolsa; 2) Q oblastyň Oxy tekizlige D proýeksiýasy Ox ýa-da Oy oka görä ýönekeý ýaýla bolsa, onda Q oblastýaýla Oz okuna görä ýönekeý ýaýla diýilýär.

Eger $f(x,\ y,\ z)$ funksiýa Oz okuna görä ýönekeý bolan Q oblastda üznüksiz bolsa we ol oblast aşagyndan $z = z_1(x,\ y)$ üst bilen, ýokarsyndan $z = z_2(x,\ y)$ üst bilen çäklenen bolsa, onda

$$\iiint_Q f(x,\ y,\ z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy \tag{28}$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar.Şunlukda, eger Oy okuna görä ýönekeý D oblast $a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän bolsa, onda

$$\iint_D \left[\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy =$$

$$=\int_a^b\left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz\right]dy\right\}dx=$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz \qquad (29)$$

formulany ýazyp bileris. Şonuň üçin (28) we (29) deňliklerden

$$\iiint_Q f(x,\ y,\ z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz \qquad (30)$$

formula gelip çykýär.Eger Q oblast $a \le x \le A,\ b \le y \le B,\ c \le z \le C$ deňsizlikler boýunça kesgitlenýän parallelepiped bolsa, onda (30) formuladan nususy hal hökmünde şeýle formula gelip çykýar:

$$\iiint_Q f(x,\ y,\ z)dxdydz=\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,\ y,\ z)dz. \qquad (31)$$

Bellik. Eger D oblast Ox okuna görä ýönekeý bolup, ol $x_1(y)\le$ $\le x \le x_2(y),\ c \le y \le d$ deňsizlikler boýunça kesgitlenýän bolsa,onda

$$\iint_D\left[\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy=$$

$$=\int_c^d\left\{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\left[\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz\right]dx\right\}dy=$$

$$=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz$$

deňligi ýazmak bolar we bu halda üçgat integraly hasaplamak üçin

$$\iiint_Q f(x,\ y,\ z)dxdydz=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz \qquad (32)$$

formulany alarys. (30) we (32) formulalaryň esasynda

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz$$

deňligi alarys.

2-nji bellik. Integrirleme Q oblastyň beýleki koordinatalar oklaryna görä ýönekeý bolan hallary üçin hem üçgat integraly hasaplamak üçin degişli formulalary almak bolar. Şeýlelikde, üçgat integraly hasaplamak üçin integrirleme çäkleri dürli bolan alty görnüşdäki formulany alarys (olaryň ikisi (30) we (32) formulalar).

§ 8. 6. Üçgat integrallarda üýtgeýänleri çalşyrmak

1. Dekart koordinatalarynda üýtgeýänleri çalşyrmak. Goý, $Oxyz$ dekart koordinatalarynyň käbir Q oblastynda differensirlenän

$$u = u(x,\ y,\ z),\quad v = v(x,\ y,\ z),\quad w = w(x,\ y,\ z) \tag{33}$$

funksiýalar berlen bolup, olar birbahaly funksiýalary

$$x = x(u,\ v,\ w),\quad y = y(u,\ v,\ w),\quad z = z(u,\ v,\ w) \tag{34}$$

kesgitleýän bolsun, bu ýerde $x(u,\ v,\ w)$, $y(u,\ v,\ w)$, $z(u,\ v,\ w)$ öz üýtgeýänlerine görä käbir Q' oblastda differensirlenýän funksiýalar.

(34) funksiýalar Q we Q' oblastlary özara-birbahaly öwürmekligi amala aşyrýar. Şunlukda, ikigat integral üçin subut edilen (20) formula meňzeşlikde üçgat integralda üýtgeýänleri çalşyrmagyň

$$\iiint\limits_{Q} f(x,\ y,\ z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q'} f\left[x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)\right]\left|I\right|dudvdw \tag{35}$$

formulasyny alarys., bu ýerde

$$I = I(u,\ v,\ w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{36}$$

kesgitleýjä (34) funksiýalaryň ýakobiany diýilýär we ol noldan tapawutly hasap edilýär.

2.Üçgat integrallar silindrik we sferik koordinatalarynda. Eger dekart koordinatalaryny $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$ formulalar boýunça silindrik koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $u = \rho,\ v = \varphi,\ w = z$ alyp, (36) formuladan ýakobiany taparys:

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$

Şonuň üçin hem bu halda formula (35) şeýle görnüşi alar:

$$\iiint\limits_{Q} f\left(x,\ y,\ z\right)dxdydz = \iiint\limits_{Q'} f\left(\rho\cos\phi,\ \rho\sin\phi,\ z\right)\rho d\rho d\phi dz . \qquad (37)$$

Eger-de dekart koordinatalaryny $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta \quad (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$ formulalar boýunça sferik koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $u = r,\ v = \theta,\ w = \varphi$ alyp, (36) formulany ulanyp, ýakobiany taparys:

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 01 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta . \qquad (38)$$

Bu deňligiň esasynda (35) formula

$$\iiint\limits_{Q} f(x,\ y,\ z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{D'} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \qquad (39)$$

görnüşde ýazylar.

3-nji mysal. $\iiint\limits_{Q} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}dxdydz$ integraly hasaplamaly, bu ýerde Q oblast $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ şardyr.

◁ Integraly hasaplamak üçin dekart koordinatalaryn sferik koordinatalary bilen çalşyrarys. Şonda Q oblast $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq R$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän Q' oblasta özgerdiler. Şonuň üçin (39) formulany ulanyp alarys:

$$\iiint\limits_{Q} \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\,dxdydz = \iiint\limits_{Q'} \rho^5\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^7 \sin\theta d\rho$$

§ 8. 7. Üçgat integrallaryň ulanylyşy

Üçgat integrallaryň ulanylyşyna biz eýýäm duş geldik, ýagny jisimiň göwrümi we göwrüm dykyzlygy $\rho=\rho(x,\ y,\ z)$ funksiýa bilen aňladylan material jisimiň massasy

$$V = \iiint\limits_{Q} dxdydz, \quad m = \iiint\limits_{Q} \rho(x,\ y,\ z)dxdydz$$

üçgat integrallar arkaly hasaplanylýar. Ikigat integrallaryň ulanylyşy ýaly üçgat integraly göwrüm dykyzygy $\rho=\rho(x,\ y,\ z)$ funksiýa bilen aňladylýan Q material jisimiň agyrlyk merkeziniň $C(x_c,\ y_c,\ z_c)$ koordinatalary üçin

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{Q} x\rho(x,\ y,\ z)dxdydz,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{Q} y\rho(x,\ y,\ z)dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{Q} z\rho(x,\ y,\ z)dxdydz$$

formulalary alarys, bu ýerde m seredilýän Q jisimiň massasydyr we ol ýokarda görkezilen formula boýunça tapylýar. Şonuň ýaly-da, Q material jisimiň Ox, Oy, Oz koordinatalar oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri

$$I_x = \iiint\limits_{Q} (y^2+z^2)\rho(x,\ y,\ z)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{Q} (x^2+z^2)\rho(x,\ y,\ z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_Q (x^2 + y^2)\rho(x,\ y,\ z)dxdydz\,,$$
$$I_0 = \iiint\limits_Q (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,\ y,\ z)dxdydz$$

formulalar boýunça tapylýar. Koordinatalar tekizliklerine görä inersiýa momentleri bolsa

$$I_{xy} = \iiint\limits_Q z^2\rho(x,\ y,\ z)dxdydz,$$
$$I_{yz} = \iiint\limits_Q x^2\rho(x,\ y,\ z)dxdydz\,,$$
$$I_{xz} = \iiint\limits_Q y^2\rho(x,\ y,\ z)dxdydz$$

formulalar boýunça kesgitlenýär.

G ö n ü k m e l e r

Gaýtalanýan integrallary hasaplamaly:

1. $\int_2^4 dx\int_1^2 xydy$. 2. $\int_3^5 dx\int_0^2 (x+y)dy$.

3. $\int_1^e dx\int_4^6 \frac{y}{x}dy$. 4. $\int_1^3 dx\int_4^8 \frac{y}{x^2}dy$.

Berlen G gönüburçluklar boýunça integrallary hasaplamaly:

5. $\iint\limits_G \frac{y}{x^2}dxdy,\ \ G=[2,4;\ 6,8]$. 6. $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy,\ \ G=[0,1;\ 0,1]$.

7. $\iint\limits_G (3xy^2+4y^3)dxdy,\ \ G=[0,1;\ 2,4]$.

8. $\iint\limits_G (\sin(3x+2y)dxdy,\ \ G=[0,\ \pi/4;\ 0,\ \pi/4]$.

Berlen oblastda üznüksiz bolan $f(x,\ y)$ funksiýa üçin $\iint\limits_D f\,dxdy$ ikigat integraly gaýtalanýan integrallar görnüşinde ýazyp, integrallaryň çälkerini goýmaly:

9. D oblast $y = x^2$, $y = 4$ çyzyklar bilen çäklenen.

10. D oblast $x^2 + y = 2$, $y^3 = x^2$ çyzyklar bilen çäklenen.

11. D oblast $x^2 + y^2 \le 9$, $x + y \ge 3$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

12. D oblast $x^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + 4y^2 \ge 1$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

13. D oblast $A(-2, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(6, 2)$ depeli üçburçluk.

Ikigat integrallary hasaplamaly:

14. $\iint\limits_D x dxdy$, D oblast $xy = 6$, $x + y = 7$ çyzyklar bilen çaklenen.

15. $\iint\limits_D x^4 y dxdy$, D oblast $xy = 1$, $y - x = 0$, $x = 2$ çyzyklar bilen çaklenen.

16. $\iint\limits_D (xy^2 + 1) dxdy$, D oblast $0 \le x \le 2$, $x/2 \le y \le \sqrt{x/2}$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

17. $\iint\limits_D (x + 2y) dxdy$, D oblast $-1 \le x \le 3$, $x/2 - 1 \le y \le x/2 + 5/2$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

Polýar koordinatalaryny girizip, integrallary hasaplamaly:

18. $\iint\limits_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dxdy$, D oblast $x^2 + y^2 \le 9$ tegelek.

19. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, D oblast $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ çyzyklar bilen çaklenen.

20. $\iint\limits_D (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dxdy$, D oblast $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

21. $\iint\limits_D (x^2 - y^2) dxdy$, D oblast $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ lemniskata bilen çaklenen.

Üýtgeýänleri çalşyryp, integrallary hasaplamaly:

22. $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy,\ \ D$ oblast $x+y=1,\ x+y=3,\ y=5x,\ y=10x$ çyzyklar bilen çaklenen.

23. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^4},\ \ D$ oblast $x+y=1,\ x+y=2,\ 3x-y=0,\ 4x-y=0$ çyzyklar bilen çaklenen.

24. $\iint\limits_D \sqrt{16-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}^{\,2} dxdy,\ \ D$ oblast $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ çyzyk bilen çaklenen.

25. $\iint\limits_D xydxdy,\ \ D$ oblast $x^2=3y,\ \ x^2=5y,\ y^2=x,\ y^2=2x$ çyzyklar bilen çaklenen.

Berlen çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny tapmaly:

26. $xy-6=0,\ 3x-2y=0,\ \ x-6y=0$.

27. $y=4-x^2,\ y=-\sqrt{4-x^2}$.

28. $x^2+y^2=4,\ y^2=3x$

29. $y^2=5x,\ y^2=8x,\ y=5,\ y=8$.

Berlen çyzyklar bilen çäklenen birjynsly plastinkanyň koordinatalar oklaryna görä statiki momentlerini, agyrlyk merkezini we inersiýa momentlerini tapmaly:

30. $x+y=4,\ x-3y=0,\ \ x+5y=16$.

31. $y=x^2+1,\ y=x+3$

Integrallary hasaplamaly:

32. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 (x^2+y^2+z)dz$. 33. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-1-x}^0 dy\int\limits_{-1-x-y}^0 \dfrac{dz}{(4x+3y+z+2)^5}$.

Silindrik ýa-da sferik koordinatalaryna geçip, integrallary hasaplamaly:

34. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z)^2 dxdydz,\ \ Q$ oblast $x^2+y^2=a^2,\ z=0,\ z=c$ silindr bilen çäklenen.

35. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz,\ Q$ oblast $x^2+y^2=1,\ y=0,\ y=1$ silindr bilen çäklenen.

36. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2+1)^3\,dxdydz,\ Q$ oblast $x^2+y^2+z^2\le 1$ şaryň aşaky bölegi.

37. $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)},\ Q$ oblast $x^2+y^2+z^2=R^2$ sfera we $z=0$ tekizlik bilen çäklenen.

J o g a p l a r

1. 9. **2.** 20. **3.** 10. **4.** 9. **5.** 3,5. **6.** 2/3. **7.** 268. **8.** $(\sqrt{2}+5)/12$.

9. $\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f\,dy=\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f\,dx$. **10.** $\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2}f\,dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y^3}}^{\sqrt{y^3}}f\,dx+$ $+\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}f\,dx$. **11.** $\int_{0}^{3}dx\int_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}f\,dy$. **12.** $\int_{-1}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f\,dy+$ $+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}f\,dy$. **13.** $\int_{-2}^{2}dy\int_{\frac{y}{4}-\frac{3}{2}}^{2y+2}f\,dx$. **14.** $20\frac{5}{6}$. **15.** $7\frac{19}{21}$.

16. $47/105$. **17.** 49. **18.** $2\pi/3$. **19.** $7{,}5\pi$. **20.** 21π. **21.** $a^4/3$.

22. 22. **23.** $3/160$. **24.** $4\pi(64-\sqrt{15^3})$. **25.** 4. **26.** 12ln3. **27.** $32/3+2\pi$ **28.** $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+4\pi)$. **29.** 9,675. **30.** $C(10/3,\ 2)$.

31. $M_x=11{,}7,\ M_y=2{,}25,\ C(1/2,\ 3/15)$. **32.** 18,5. **33.** 0.

34. $2\pi\left(\frac{ca^6}{6}+\frac{a^4c^2}{4}+\frac{a^2c^3}{6}\right)$. **35.** $\frac{431}{420}\pi$. **36.** $\frac{928}{315}\pi$.

37. $\frac{\pi R(4-\pi)}{2}$.

II. 9. EGRIÇYZYKLY INTEGRALLAR

§ 9. 1. Egriçyzykly integral düşünjesine getirýän meseleler

1. Çyzygyň dugasynyň massasy hakyndaky mesele. Giňişligiň çyzygynyň AB dugasy boýunça dykyzlygy $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$ bolan jisim ýerleşdirilen hasap edeliň. Şol material duganyň massasyny hasaplamak meselesine seredeliň. Onuň üçin AB dugany n sany $A_{k-1}A_k$ $(k = 1,\ 2, \ldots, n;\ A_o = A,\ A_n = B)$ dugalara böleliň we jisimiň her $A_{k-1}A_k$ dugadaky ortaça dykyzlygyny $\rho(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň şol duganyň käbir $M_k(x_k, y_k, z_k)$ nokatdaky $\rho_k = \rho(x_k, y_k, z_k)$ bahasyna deň hasap edeliň. $A_{k-1}A_k$ duganyň Δl_k uzynlygyny ρ_k köpeldip, şol duganyň massasynyň takmyn bahasyny alarys: $m_k = \rho(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k$. Şonuň esasynda

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \tag{1}$$

jem AB duganyň massasynyň takmyn bahasy bolar. Şonuň üçin ol jemde $d = \max\limits_k \Delta l_k \to 0$ bolanda predele geçip, massanyň takyk bahasyny alarys:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \tag{2}$$

2. Üýtgeýän güýjüň işini hasaplamak meselesi. Eger $\boldsymbol{F}$ güýç (ululygy we ugry boýunça) hemişelik we geçilen $\overline{AB} = \boldsymbol{s}$ ýol gönüçyzykly bolsa, onda $\boldsymbol{F}$ güýjüň şol ýol boýunça işi $(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{s}) = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\varphi$ skalýar köpeltmek hasylyna deňdir, bu ýerde φ burç $\boldsymbol{F}$ we $\boldsymbol{s}$ wektorlaryň arasyndaky burçdur.

Goý, üýtgeýän

$$\boldsymbol{F} = P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i} + Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j} + R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k} \tag{3}$$

güýç giňişligiň çyzygynyň AB dugasy boýunça hereket edýän bolsun

Şol çyzyk boýunça hereket edip, A nokatdan B nokada geçende $\boldsymbol{F}$ güýjüň eden işini hasaplamaly.

AB dugany n sany $A_{k-1}A_k \left(k=1,2,\dots,n;\ A_0=A, A_n=B\right)$ dugalara böleliň. $A_{k-1}A_k$ dugada $\boldsymbol{F}$ güýç hemişelik we $\boldsymbol{F_k}=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{M}_k\right)$ deň hasap edeliň, bu ýerde $M_k \in A_{k-1}A_k$, $M_k = M_k\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right)$, $A_k = A_k\left(x_k,\ y_k,\ z_k\right)$. Eger $A_{k-1}A_k$ horda hasap etsek, onda

$$\overline{A_{k-1}A_k} = \left\{\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k\right\},$$

bolar, bu ýerde

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Şonuň üçin hem $A_{k-1}A_k$ bölekde edilen iş

$$\left(\boldsymbol{F_k},\ \overline{A_{k-1}A_k}\right) = P\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right)\Delta x_k + Q\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right)\Delta y_k + $$
$$= R\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right)\Delta z_k$$

formula bilen aňladylýar. Şoňa görä-de AB boýunça edilen işiň takmyn bahasy

$$W_n = \sum_{k-1}^{n}\left(\boldsymbol{F_k},\ \overline{A_{k-1}A_k}\right) = \sum_{k-1}^{n}\left(P_k\Delta x_k + Q_k\Delta y_k + R_k\Delta z_k\right) \qquad (4)$$

formula boýunça aňladylýar, bu ýerde

$$P_k = P\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right),\ \ Q_k = Q\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right),\ \ R_k = R\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right).$$

Edilen işiň takyk bahasy bolsa (4) jemiň $d \to 0$ bolandaky predeline deňdir, ýagny

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{d\to 0}\sum_{k-1}^{n}\left(P_k\Delta x_k + Q_k\Delta y_k + R_k\Delta z_k\right). \qquad (5)$$

§ 9. 2. Egriçyzykly integralyň birinji görnüşi

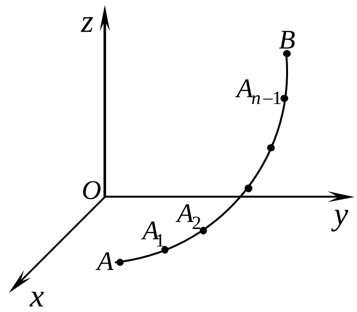
1.Integralyň kesgitlenişi we häsiýetleri. Giňişligiň bölek-endigan çyzygynyň AB dugasynda (11-nji surat) kesgirlenen $u = f\left(x,\ y,\ z\right)$ funksiýa seredeliň. AB dugany n sany $A_{k-1}A_k$ $(k=1,2,\dots,n; A_0 = A$, $A_n = B)$ dugalara böleliň we. $A_{k-1}A_k$ duganyň uzynlygyny Δl_k bilen belgiläliň.Her bir $A_{k-1}A_k$ dugada erkin $M_k(x_k, y_k, z_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k, z_k)$ bahasyny duganyň Δl_k uzynlygyna köpeldeliň we şeýle köpeltmek hasyllardan

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \tag{6}$$

jemi düzeliň. Bu jeme $f(x, y, z)$ funksiýanyň berlen duga boýunça integral jemi diýilýär. Eger bu jemiň $d = \max\limits_k \Delta l_k \to 0$ bolanda edeli bar bolsa, onda şol predele $f(x, y, z)$ funksiýanyň AB duga boýunça egriçyzykly integralynyň birinji görnüşi ýa-da AB duganyň uzynlygy boýunça integraly diýilýär we ol

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$$

görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde,



11-nji surat

kesgitleme boýunça

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \ . \tag{7}$$

Subut etmezden üznüksiz $u = f(x, y, z)$ fuksiýa üçin (6) integral jemiň predeliniň bardygyny belläliň.

Bellik. 1-nji meselede alnan (1) jem $\rho(x, y, z)$ funksiýanyň AB duga boýunça integral jemidir we şonuň üçin ol integral jemiň (2) predeli $\rho(x, y, z)$ funksiýanyň AB duga boýunça egriçyzykly integralynyň birinji görnüşidir, ýagny material duganyň massasyny hasaplamak meselesi egriçyzykly integralyň birinji görnüşine getirdi

Egriçyzykly integralyň birinji görnüşiniň kesgitlemesinden onuň aşakdaky ýönekeý häsiýetleri gelip çykýar:

1) Egriçyzykly integralyň birinji görnüşi integrirleme dugany ugruna bagly däldir, ýagny

$$\int_{AB} f(x,\ y,\ z)dl = \int_{BA} f(x,\ y,\ z)dl\ .$$

2) Eger $f(x,\ y,\ z)$ we $g(x,\ y,\ z)$ funksiýalar AB dugada integrirlenýän bolsa, onda olaryň algebraik jemi hem şol dugada integrirlenýändir we

$$\int_{AB} [f(x,\ y,\ z) \pm g(x,\ y,\ z)]dl = \int_{AB} f(x,\ y,\ z)dl \pm \int_{AB} g(x,\ y,\ z)dl$$

deňlik dogrudyr.

3) Hemişelik köpeldijini egriçyzykly integral belgisiniň daşyna çykarmak bolar:

$$\int_{AB} kf(x,\ y,\ z)dl = k\int_{AB} f(x,\ y,\ z)dl\ .$$

4) Eger AB duga AC we CB dugalardan düzülen bolup, $f(x,\ y,\ z)$ funksiýa AB dugada integrirlenýän bolsa, onda ol AC we CB dugalarda hem integrirlenýändir we

$$\int_{AB} f(x,\ y,\ z)dl = \int_{AC} f(x,\ y,\ z)dl + \int_{CB} f(x,\ y,\ z)dl$$

deňlik dogrudyr.

2.Egriçyzykly integralyň birinji görnüşiniň hasaplanylyşy. Eger çyzyk parametrik görnüşde berlen bolsa:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)\quad (\alpha \le t \le \beta), \tag{8}$$

$$A = (x,\ y,\ z)\big|_{t=\alpha},\quad B = (x,\ y,\ z)\big|_{t=\beta}$$

we $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funksiýalar üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda AB dugada üznüksiz $f(x,\ y,\ z)$ funksiýa üçin

$$\int_{AB} f(x,\ y,\ z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'}\,dt \tag{9}$$

formulanyň dogrudygyny subut etmek bolar. Hususanda, eger AB duga tutuşlugyna Oxy tekizlikde ýatýan bolsa ($z = 0$), onda (9) formula şeýle görnüşi alar:

$$\int_{AB} f(x,\ y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),\ y(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt \tag{10}$$

Eger tekizligiň AB dugasy $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$ deňleme bilen berlen bolup, $y(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa bolsa, onda (10) formuladan şeýle formula gelip çykýar:

$$\int_{AB} f(x,\ y)dl = \int_a^b f[x,\ y(x)]\sqrt{1+y'^2}dx \qquad (11)$$

Eger-de tekizligiň AB dugasy polýar koordinatalarynda $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ deňleme bilen berlen bolup, $\rho(\varphi)$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän bolsa, onda (10) formuladan

$$\int_{AB} f(x,\ y)dl = \int_\alpha^\beta f[\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi]\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi \qquad (12)$$

formula gelip çykýar.

§ 9. 3. Egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi

1.Integralyň kesgitlenişi we häsiýetleri. Giňişligiň çyzygynyň başlangyjy A we ahyry B bolan AB dugasyna seredeliň (1-nji surat). Goý, şol dugada üznüksiz

$$\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z) = P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i} + Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j} + R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k} \qquad (13)$$

wektor funksiýa berlen bolsun. AB dugany $A_{k-1}A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $A_0 = A,\ A_n = B)$ dugalara böleliň we $A_{k-1}A_k$ $(A_k = A_k(x_k, y_k, z_k))$ dugada erkin $M_k = M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ nokady alalyň. Onda $A_{k-1}A_k$ duganyň koordinatalar oklaryna bolan proýeksiýalary şeýle bolar:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

$P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$, $R(x,\ y,\ z)$ funksiýalaryň $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ nokatdaky bahalaryny deişlilikde Δx_k, Δy_k, Δz_k köpeldip, olary goşalyň:

$$P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k =$$
$$= P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k .$$

Şeýle aňlatmalaryň ählisi boýunça şeýle jemi düzeliň:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \left[P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k \right]. \tag{14}$$

Bu jeme (13) wektor funksiýanyň koordinatalar boýunça integral jemi diýilýär. $A_{k-1}A_k$ dugalaryň uzynlyklarynyň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Eger $d \to 0$ bolanda (14) integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele (13) wektor funksiýanyň egriçyzykly integralynyň ikinji görnüşi diýilýär we ol

$$\int_{AB} P(x,\ y,\ z)dx + Q(x,\ y,\ z)dy + R(x,\ y,\ z)dz$$

görnüşde ýa-da gysgaça

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k \right]. \tag{15}$$

Bellik. Ikinji meseledäki (4) jem (13) görnüşdäki wektor funksiýanyň koordinatalar boýunça integral jemidir. Şonuň üçin hem ol integral jemiň (5) predeli şol wektor funksiýanyň egriçyzykly integralynyň ikinji görnüşidir, ýagny üýtgeýän güýjüň işini hasaplamak meselesi egriçyzykly integralyň ikinji görnüşine getirdi.

Kesgitleme boýunça egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi üçin

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz$$

deňlik ýerine ýetýär, ýagny integrirlemäniň ugry üýtgände egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi alamatyny üýtgedýär, çünki bu halda bölek dugalaryň koordinatalar oklaryna bolan proýeksiýalarynyň alamatlary üýtgeýär. Egriçyzykly integralyň birinji görnüşiniň beýleki häsiýetleri egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi üçin hem ýerine ýetýär.

2.Egriçyzykly integralyň ikinji görnüşiniň hasaplanylyşy. Eger AB duga (8) parametrik deňlemeler boýunça berlen bolsa, onda

$$\int_{AB} P(x,\ y,\ z)dx + Q(x,\ y,\ z)dy + R(x,\ y,\ z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),\ y(t),\ z(t)]x'(t) + Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]y'(t) +$$

$$+ R[x(t),\ y(t),\ z(t)]z'(t)\}\, dt \qquad (16)$$

formula dogrudyr. Eger AB duga Oxy tekizlikde ýerleşýän bolsa $(z = 0)$, onda (16) formula şeýle görnüşi alar:

$$\int_{AB} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),\ y(t)]x'(t) + Q[x(t),\ y(t)]y'(t)\}\, dt\,. \qquad (17)$$

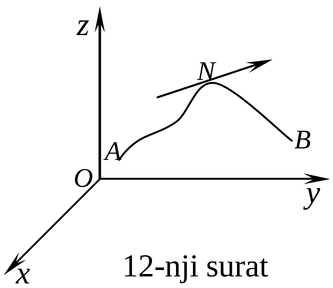
Eger tekizligiň AB dugasy $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$ deňleme bilen berlen bolup, $y(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa bolsa, onda (17) formuladan

$$\int_{AB} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x,\ y(x)] + Q[x,\ y(x)]y'(x)\}\, dx \qquad (18)$$

formula gelip çykýar.

3. Egriçyzykly integrallaryň birinji we ikinji görnüşleriniň arasyndaky baglanyşyk. Giňişlikde başlangyjy A we ahyry B nokatlarda bolan ugrukdyrylan AB duga seredeliň.Ol duganyň erkin N nokadynda geçirilen galtaşmany hem ugrukdyrylan göni çyzyk hasap edeliň (12-nji surat). Galtaşmanyň Ox, Oy, Oz koordinatalar oklary bilen emelegetirýän burçlaryny degişlilikde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ bilen belgiläliň. Duganyň uzynlygynyň dl differensialy üçin $\overline{dl} = \{dx,\ dy,\ dz\}$ wektor galtaşma boýunça



12-nji surat

ugrukdyrylandyr, şonuň üçin hem $dx = \cos\alpha dl,\;\; dy = \cos\beta dl,\;\; dz = \cos\gamma dl$. Bu deňlikler esasynda egriçyzykly integralyň ikinji görnüşini şeýle ýazmak bolar:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl\,.$$

Bu deňlik egriçyzykly integrallaryň birinji we ikinji görnüşlerini baglanyşdyrýan formuladyr. Eger AB duga Oxy tekizlikde ýerleşýän bolsa, onda $z = 0$ bolar we bu formula şeýle görnüşi alar:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl\,,$$

çunki bu halda $\cos\beta = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$.

§ 9. 4. Egriçyzykly integrallaryň ulanylyşy

1. Material duganyň massasy. Eger $\rho = \rho(x,\, y,\, z)$ funksiýa AB dugada ýerleşdirilen jisimiň dykyzlygyny aňladýan bolsa, onda (2) we (7) formulalardan ol material duganyň m massasy üçin

$$m = \int_{AB} \rho(x,\, y,\, z)dl \tag{19}$$

formula gelip çykýar.

2. Çyzygyň dugasynyň uzynlygy. Eger $\rho(x,\, y,\, z) \equiv 1$ bolsa, onda AB duganyň m massasy üçin $m = 1 \cdot l = l$ bolar. Şonuň üçin hem (19) formuladan AB duganyň l uzynlygyny hasaplamak üçin

$$l = \int_{AB} dl$$

formulany alarys.

3. Material duganyň agyrlyk merkezi. Eger $\rho = \rho(x,\, y,\, z)$ funksiýa AB dugada ýerleşdirilen jisimiň dykyzlygyny aňladýan bolsa, onda ol material duganyň agyrlyk $C(x_c, y_c, z_c)$ merkeziniň dekart koordinatalary üçin § 8 – däki (23) formulalara meňzeşlikde

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{AB} x\rho(x,\, y,\, z)dl, \quad y_c = \frac{1}{m}\int_{AB} y\rho(x,\, y,\, z)dl,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_{AB} z\rho(x,\ y,\ z)dl$$

formulalary alarys, bu ýerde m berlen AB duganyň massasydyr we ol (19) formula boýunça hasaplanýar.

4. Material duganyň inersiýa momentleri. Eger AB dugada dykyzlygy $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$ funksiýa bilen aňladylýan jisim ýerleşdirilen bolsa, onda ol material duganyň koordinata oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri

$$I_x = \frac{1}{m}\int_{AB} (y^2 + z^2)\rho(x,\ y,\ z)dl,$$

$$I_y = \frac{1}{m}\int_{AB} (x^2 + z^2)\rho(x,\ y,\ z)dl,$$

$$I_z = \frac{1}{m}\int_{AB} (y^2 + x^2)\rho(x,\ y,\ z)dl,$$

$$I_0 = \frac{1}{m}\int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,\ y,\ z)dl$$

formulalar boýunça kesgitlenýär, bu ýerde m duganyň massasydyr.

5. Üýtgeýän güýjüň işi. Eger AB dugada üznüksiz $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ funksiýalar üçin

$$\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z) = P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i} + Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j} + R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}$$

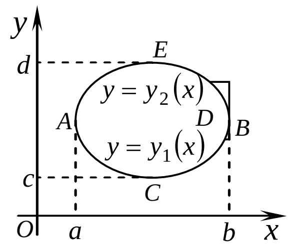
wektor funksiýa AB duga boýunça W işi edýän üýtgeýän güýji aňladýan bolsa, onda (5) we (15) formulalaryň esasynda

$$W = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

formulany alarys.

§ 9. 5. Griniň formulasy we onuň ulanylyşy

1.Griniň formulasy. Bu formula käbir D oblast boýunça ikigat integraly şol ýaýlany çäklendirýän ýapyk L çyzyk boýunça egriçyzykly integraly baglanyşdyrýan formuladyr. Bu formulany koordinata oklarynyň ikisine görä hem ýönekeý bolan D oblast üçin subur ederis. Goý, ol ýaýla aşagyndan $y = y_1(x)$ funksiýanyň çyzgysy (ACB duga), ýokarsyndan $y = y_2(x)$ funksiýanyň çyzgysy (AEB duga) bilen çäklenen bolup, olar bilelikde ýapyk L çyzygy emele getirýän bolsun (13-nji surat).



13-nji surat

Goý, D oblastda we onuň L araçäginde üznüksiz $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ funksiýalar berlen bolup, olaryň üznüksiz $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ önümleri bar bolsun, onda

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= \int_a^b P(x, y) \Big|_{y = y_1(x)}^{y = y_2(x)} dx = \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx =$$

$$= \int_{AEB} P(x, y)dx - \int_{ACB} P(x, y)dx =$$

$$= -\int_{BEA} P(x, y)dx - \int_{ACB} P(x, y)dx = -\oint_L P(x, y)dx,$$

bu ýerde L ýapyk çyzyk boýunça hereket sagat diliniň aýlawynyň tersinedir. Şeýlelikde,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x, y)dx \tag{20}$$

formulany subut etdik. Edil şonuň ýaly

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x, y)dx \tag{21}$$

formulany görkezmek bolar, bu ýerde hem L ýapyk çyzyk boýunça hereket sagat diliniň aýlawynyň tersinedir. (21) deňlikden (20) deňligi aýryp, Griniň formulasy atlandyrylýan

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy \tag{22}$$

formulany alarys.

2. Griniň formulasynyň ulanylyşy. Eger (20), (21) we (22) formulalarda $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$ alsak, onda olar degişlilikde

$$\iint\limits_D dxdy = \oint\limits_L ydx, \quad \iint\limits_D dxdy = \oint\limits_L xdy, \quad 2\iint\limits_D dxdy = \oint\limits_L xdy - ydx$$

görnüşleri alar.Bu formulalaryň üçüsiniň hem çep bölegindäki ikigat integral ýapyk D oblastyň meýdanyna deňdir. Şonuň üçin hem egriçyzykly integralyň kömegi bilen D oblastyň S meýdanyny tapmak üçin

$$S = \oint\limits_L ydx, \quad S = \oint\limits_L xdy, \quad S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$$

formulalary alarys.

II. 10. ÜST INTEGRALLARY

§ 10. 1. Üst integrallary düşünjesine getirýän meseleler

1. Material üstüň massasy hakyndaky mesele. Kabir T üste seredeliň.Goý,ol üstde dykyzlygy $\rho = \rho(x, y, z)$ bolan massa ýerleşen bolsun. Şol material üstüň massasyny tapmak üçin T üsti dugalaryň tory arkaly T_k böleklere böleliň we ol bölekleriň meýdanlaryny ΔS_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bilen belgiläliň. Her bir bölekde dykyzlyk hemişelik we erkin $M_k(x_k, y_k, z_k) \in T_k$ nokatdaky $\rho_k = \rho(x_k, y_k, z_k)$ bahasyna deň hasap edeliň. Onda $\rho_k \Delta S_k$ köpeltmek hasyl T_k bölegiň massasynyň takmyn bahasyny, şeýle köpeltmek hasyllardan düzülen

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} p(M_k)\Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} p(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k \tag{1}$$

jem bolsa T material üstün massasynyň takmyn bahasyny aňladýar. Şoňa görä T_k bölekleriň diametrleriniň iň ulusy bolan d üçin

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} p(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k \qquad (2)$$

predel ol massanyň takyk bahasyny aňladýar.

2.Üst arkaly geçýän suwuklyk akymy hakyndaky mesele. Goý,

$$\boldsymbol{v}(x,\ y,\ z)=P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+Q(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j}+R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}$$

tizlik bilen akýän suwuklyk bilen doldurylan käbir giňişlik oblasty berlen bolsun. Berlen T üst boýunça birlik wagtda akyp ceçýän suwuklygyň $\varPi$ mukdaryny tapmak meselesine seredeliň. Onuň üçin T üsti T_k böleklere böleliň we ol bölekleriň meýdanlaryny ΔS_k $(k=1,\ 2,\ldots,n)$ bilen belgiläliň. Her bir bölekde tizlik hemişelik we şol bölegiň erkin $M_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ nokadyndaky $v_k=v(x_k,\ y_k,\ z_k)$ bahasyna deň hasap edeliň. Şunlukda, birlik wagt aralygynda T_k bölek boýunça akyp geçýän suwuklygyň mukdary takmyn $v_{n_k}\Delta S_k$ köpeltmek hasyla deň bolar, bu ýerde v_{n_k} ululyk $\boldsymbol{v_k}$ tizlik wektoryň üstüň M_k nokadynda üste geçirilen n_k normalyň birlik wektory bilen kegitlenýäň oka bolan proýeksiýasy. Şonuň esasynda, eger $\alpha_k,\ \beta_k,\ \gamma_k$ burçlar $\boldsymbol{n_k}$ normalyň koordinata oklary bilen emele getirýän burçlary bolsa, onda

$$v_{n_k}=(\boldsymbol{v_k},\ \boldsymbol{n_k})=[P(M_k)\cos\alpha_k+Q(M_k)\cos\beta_k+R(M_k)\cos\gamma_k]$$

formulanyň esasynda

$$\vartheta_{n_k}\Delta S_k=\left[P(M_k)\cos\alpha_k+Q(M_k)\cos\beta_k+R(M_k)\cos\gamma_k\right]\Delta S_k$$

deňligi alarys. Şoňa görä-de ähli berlen üst boýunça birlik wagtda akyp geçýän suwuklygyň mukdary takmyn

$$\varPi_{\text{n}}=\sum_{k=1}^{n}[P(M_k)\cos\alpha_k+Q(M_k)\cos\beta_k+R(M_k)\cos\gamma_k]\Delta S_k \qquad (3)$$

jeme deň bolar. Onuň $d\to 0$ bolandaky

$$\varPi=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(M_k)\cos\alpha_k+Q(M_k)\cos\beta_k+R(M_k)\cos\gamma_k]\Delta S_k \qquad (4)$$

predeli bolsa suwuklygyň takyk mukdaryna deň bolar. (3) we (4) denliklerdäki $\cos\alpha_k \Delta S_k$, $\cos\beta_k \Delta S_k$, $\cos\gamma_k \Delta S_k$ köpeltmek hasyllar T_k üstüň degişlilikde Oyz, Oxz, Oxy tekizliklere proýeksiýalarydyr. Olary

$$(\Delta S_{yz})_k = \cos\alpha_k \Delta\sigma_k\,,\ (\Delta S_{xz})_k = \cos\beta_k \Delta\sigma_k\,,\ (\Delta S_{xy})_k = \cos\gamma_k \Delta\sigma_k \quad (5)$$

bilen belgiläp, (3) we (4) formulalary

$$\Pi_{\mathrm{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left[P(M_k)(\Delta S_{zy})_k + Q(M_k)(\Delta S_{xz})_k + R(M_k)(\Delta S_{xy})_k \right], \quad (6)$$

$$\Pi = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(M_k)(\Delta S_{zy})_k + Q(M_k)(\Delta S_{xz})_k + R(M_k)(\Delta S_{xy})_k \right] \quad (7)$$

görnüşlerde ýazmak bolar.

§ 10. 2. Üst integrallarynyň birinji görnüşi

1. Integralyň kesgitlenişi. Goý, T üstde $u = f(x, y, z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun**.** T üsti dugalaryň tory arkaly T_k böleklere böleliň we ol bölekleriň meýdanlaryny ΔS_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bilen belgiläliň. Her bir bölekde erkin $M_k(x_k, y_k, z_k) \in T_k$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k, z_k)$ bahasyny ΔS_k meýdana köpeldeliň e şeýle köpeltmek hasyllardan

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k \quad (8)$$

jemi düzeliň. Bu jeme $f(x, y, z)$ funksiýanyň T üst boýunça integral jemi diýilýär. T_k bölekleriň diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Eger $d \to 0$ bolanda (8) integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele T üst boýunça üşt integraly ýa-da üst integralyň birinji görnüşi diýilýär we ol $\iint_T f(x, y, z)ds$ bilen belgilenýär, ýagny

$$\iint_T f(x, y, z)ds = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k\,. \quad (9)$$

Eger $f(x, y, z)$ funksiýa endigan T üstde üznüksiz bolsa, onda (8) integral jemiň predeli bardyr (ony subutsyz ulanarys).

1-nji bellik. 1-nji meseledäki (1) jem (8) görnüşdäki integral jemdir. Şonuň üçin (2) we (9) esasynda material üstüň massasyny tapmak meselesi üst integralyň birinji görnüşine getirýär.

2. Integralyň hasaplanylyşy. T üstüň käbir görnüsleri üçin üst integralyň birinji görnüşiniň hasaplanyşyny görkezeliň. Goý, endigan T üst $z = g(x, y)$ deňleme bilen berlen bolsun, bu ýerde $g(x, y)$ differensirlenýän funksiýadyr. Goý, T üst Oxy tekizlige birbahaly proýektirlenýän bolup, D oblast şol proýeksiýa bolsun. Kesgitleme boýunça (9) deňlik ýerine ýetýär. Ol deňlikdäki integral jemi özgertmek maksady bilen üstüň deňlemesini $F(x, y, z) = 0$ görnüşde ýazalyň, bu ýerde $F(x, y, z) = z - g(x, y)$. Bu üste geçirilen $\boldsymbol{n}$ normal wektoryň koordinatalary (§ 7.6 seret)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

bolar.

$$p = \frac{\partial g}{\partial x}, \; q = \frac{\partial g}{\partial y}, \; p_k = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{M_k} \; q_k = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{M_k} \tag{10}$$

belgileme esasynda $z - g(x, y) = 0$ üste geçirile $\boldsymbol{n}$ normalyň ugrukdyryjy cosinuslary şeýle formula boýunça aňladylar:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{11}$$

(5) formulanyň esasynda bolsa

$$\Delta S_k = \frac{(\Delta S_{xy})_k}{\cos\gamma_k} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,(\Delta S_{xy})_k$$

deňligi ýazyp bileris. Şonuň üçin hem integral jem

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left[x_k,\ y_k,\ g(x_k,\ y_k)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\left(\Delta S_{xy}\right)_k$$

görnüşi alar. Bu deňlikde $d \to 0$ bolanda predele geçip,

$$\iint_T f(x,\ y,\ z)ds = \iint_D f\left[x,\ y,\ g(x,\ y)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \qquad (12)$$

formulany alarys, bu ýerde p we q (10) deňlikden kesgitlenýär.

Şeýlelikde, T üst boýunça üst integralynyň birinji görnüşini hasaplamaklyk ol üstüň Oxy tekizlige proýeksiýasy bolan D oblast boýunça ikigat integraly hasaplamaklyga getirildi.

2-nji bellik. Eger endigan T üst $y = g(x,\ z)$ deňleme bilen berlen bolup, D_1 oblast ol üstüň Oxz tekizlige bolan proýeksiýasy bolsa, onda integraly hasaplamak üçin

$$\iint_T f(x,\ y,\ z)ds = \iint_D f\left[x,\ g(x,\ z)\right]\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdz$$

formula alynýar. Edil şonuň ýaly, eger T üst $x = g(y,\ z)$ deňleme bilen berlen bolup, D_2 oblast ol üstüň Oyz tekizlige bolan proýeksiýasy bolsa, onda üst integraly

$$\iint_T f(x,\ y,\ z)ds = \iint_{D_2} f\left[g(y,\ z),\ y,\ z\right]\sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}\,dydz$$

formula boýunça hasaplanylýar.

§ 10. 3. Üst integrallarynyň ikinji görnüşi

1. Ikitaraplaýyn üst. Berlen T üstde käbir M nokady belläp, şol nokatda üste geçirilen birlik $\boldsymbol{n}$ normal wektoryň bir ugruny görkezeliň. Indi M nokat arkaly T üstde ýerleşýän we şol üstüň araçägi bilen umumy nokady bolmadyk ýapyk L çyzyk geçireliň. M nokady şol nokatda üste geçirilen birlik $\boldsymbol{n}$ wektor bilen bilelikde L çyzyk boýunça hereket etdireliň. Şunlukda, her bir täze nokatda $\boldsymbol{n}$ wektor T üste normal bolmagynda galmalydyr we ol üznüksiz üýtgemelidir. Şeýle hereket edip, M nokat başdaky ýerine gelende birlik $\boldsymbol{n}$ wektoryň ugry öňküligine galar ýa-da onuň ugry garşylykly bolar.

Eger endigan T üstde ýerleşýän we onuň araçägi bilen umumy nokatlary bolmadyk islendik ýapyk çyzyk boýunça şol üstüň normaly hereket edip, başdaky ýerine gelende ugruny üýtgetmeýän bolsa, onda ol üste ikitaraplaýyn üst diýilýär.

Eger-de T üstde käbir ýapyk çyzyk bar bolup, şol çyzyk boýunça hereket edip normal başdaky ýerine gelende ugruny garşylykly tarapa üýtgedýän bolsa, onda ol üste birtaraplaýyn üst diýilýär.

Ikitaraplaýyn üste mysallar: 1) tekizlik, tekizligiň islendik bölegi, tegelek; 2) $z = z(x, y)$ deňleme arkaly kesgitlenen islendik endigan üst. Hakykatdan-da, üstüň her bir nokadynda normal geçirlende Oz okuň položitel ugry bilen ýiti burç emele getirýän tarapy onuň bir (ýokarky), tarapyny kütek burç emele getirýän tarapy onuň beýleki (aşaky) tarapyny kesgitleýär; 3) Öz – özüni kesmeýän islendik ýapyk üst, mysal üçin sfera, ellipsoid we ş.m. Göwrümi çäklendirýän üstüň her bir nokadynda normaly içine ugrukdyryp ol üstüň içki tarapyny, normaly daşyna ugrukdyryp, üstüň daşky tarapyny alarys.

Birtaraplaýyn üste ýönekeý mysal bolup Mýobius listi atlandyrylýan üst hyzmat edýär.

2. Integralyň kesgitlenişi. Käbir endigan ikitaraplaýyn T üstde kesgitlenen we üznüksiz $R = R(x,\ y,\ z)$ funksiýa seredeliň. Berlen T üsti $T_1,...,T_n$ böleklere böleliň. T üstüň we onuň bölekleriniň Oxy tekizlige proýeksiýalaryny D we $D_1,\ldots,D_n$ bilen belgiläliň. D_k bölekleriň meýdanlaryny $(\Delta S_{xy})_k$ bilen belgiläliň. Her T_k bölekde erkin $M_k(x_k, y_k, z_{ki})$ nokady alyp,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k \tag{13}$$

jemi düzeliň, bu ýerde $(\Delta S_{xy})_k$ üstüň T_k böleginiň Oxy tekizlige proýeksiýasynyň ululygydyr we ol M_k nokatda üste geçirilen normal Oz oky bilen ýiti burç emele getirýän halynda D_k bölegiň položitel alamaty bilen alnan meýdanyna, kütek burç emele getirýän halynda bolsa otrisatel alamaty bilen alynýan meýdayna deňdir. (12) jeme $R(x, y, z)$ funksiýanyň x we y koordinatalara görä T üst boýunça integral jemi diýilýär.

Eger $d \to 0$ bolanda (13) integral jemiň T üstüň böleklere bölünmegine we şol böleklerde M_k nokadyň saýlanyp alynmagyna bagly bolmadyk tükenikli predeli bar bolsa, onda şol predele $R(x, y, z)$ funksiýanyň x we y koordinatalar boýunça üst integraly ýa-da üst integralynyň ikinji görnüşi diýilýär we ol

$$\iint_T R(x, y, z)dxdy$$

ýazgyda belgilenýär.

Diýmek, kesgitlemä görä

$$\iint_T R(x, y, z)dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k \, . \tag{14}$$

Eger ikitaraplaýyn T üst endigan we şol üştde $R(x, y, z)$ funksiýa üznüksiz bolsa, onda $d \to 0$ bolanda (13) jemiň T üstüň böleklere bölünmegine we böleklerde alynýan M_k nokadyň saýlanyp alynmagyna bagly bolmadyk tükenikli predeli bardygyny subutsyz kabul edeliň.

Edil şuňa meňzeşlikde

$$\iint_T P(x, y, z)dydz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{yz})_k \, , \tag{15}$$

$$\iint_T Q(x, y, z)dxdz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xz})_k \tag{16}$$

üst integrallaryň ikinji görnüşler kesgitlenýar, bu ýerde $(\Delta S_{yz})_k$ we $(\Delta S_{xz})_k$ degişlilikde T_k bölegiň Oyz we Oxz tekizliklere bolan proýeksiýasynyň ululygydyr. (14), (15) we (16) esasynda umumy görnüşdäki üst integraly kesgitlenýär:

$$\iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_T P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy \, . \tag{17}$$

1-nji bellik. 2-nji meseledäki (6) jem $R(x, y, z)$ funksiýanyň T üst boýunça x we y koordinatalara görä, $Q(x, y, z)$ funksiýanyň x we z koordinatalara görä, $P(x, y, z)$ funksiýanyň z we y koordinatalara görä, integral jemleriniň jemidir. Şonuň üçin hem (7), (14),(15),(16) we (17)deňlikler esasynda üst arkaly geçýän suwuklyk akymy hakyndaky mesele üst integralynyň ikinji görnüşine getirýär, ýagny

$$\Pi = \iint_T P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy\,.$$

2-nji bellik. 2-nji meseledäki (4) predele hem (2) predel ýaly üst inegralyň birinji görnüşi diýilýär we ol

$$\iint_T (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k\right]\Delta S_k$$

görnüşde belgilenýär.

(3) we (6) formulalaryň şol bir jemleri (ýöne dürli görnüşdäki) änladýandygy sebäpli, olaryň predelleri hem deňdir (ol predeller bar halynda), şonuň üçin hem

$$\iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_T (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \tag{18}$$

deňlik dogrudyr we ol üst integrallarynyň birinji we ikinji görnüşleriniň baglanyşygyny görkezýär.

3. Integralyň hasaplanylyşy. Üst integralyň ikinji görnüşi bolan (14) integraly hasaplamak üçin endigan T üst $z = g(x,\ y)$ deňleme bilen berlen hasap edeliň. Goý, ol üst Oxy tekizligiň D ýaýlasyna özara-birbahaly proýektirlenýän bolsun. Bu halda (14) deňlikdäki integral jemi

$$\sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R\left[x_k, y_k, g(x_k, y_k)\right]\left(\Delta S_{xy}\right)_k$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu deňlikde $d \to 0$ bolanda predele geçip, üstüň ýokarky tarapy üçin ($\cos\gamma > 0$ hal üçin)

$$\iint_T R(x, y, z)dxdy = \iint_D R\left[x, y, g(x, y)\right]dxdy$$

formulany, aşaky tarapy üçin ($\cos\gamma < 0$ hal üçin) bolsa

$$\iint_T R(x, y, z)dxdy = -\iint_D R\left[x, y, g(x, y)\right]dxdy$$

formulany alarys. Şular ýaly formulalary (15), (16) we (17) integrallar üçin hem görkezmek bolar.

§ 10. 4. Üst integrallaryň ulanylyşy

1. Material üstüň massasy. Eger T üstde üst dykyzlygy $\rho = \rho(x, y, z)$ bolan jisim ýerleşdirilen bolsa, onda (2) we (9) formulalaryň esasynda ol material üstüň massasy

$$m = \iint_T \rho(x, y, z)dS \tag{19}$$

formula boýunça kesgitlenýär.

2. Üstüň meýdany. Eger $\rho(x, y, z) = 1$ bolsa, onda $m = 1 \cdot S = S$ bolar we şonuň üçin (19) formuladan T üstüň S meydanyny hasaplamak üçin

$$S = \iint_T dS \tag{20}$$

formula alynýar.

3. Material üstüň agyrlyk merkezi. Ikigat integral üçin degişli formulalaryň getirilip çykarylyşyna meňzeşlikde üst dykyzlygy $\rho = \rho(x, y, z)$ bolan T material üstüň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalary

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_T x\rho(x, y, z)dS,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_T x\rho(x, y, z)dS,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iint_T x\rho(x, y, z)dS$$

formulalar boýunça kesgitlenýär, bu ýerde m material üstüň massasydyr we ol (19) formula boýunça tapylýar. Birjynsly üst üçin ($\rho(x,\ y,\ z) =$ hemiş) bu formulalar ýönekeý görnüşi alar:

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_T xdS, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_T xdS, \quad z_c = \frac{1}{S}\iint_T xdS\ ,$$

bu ýerde S üstüň meýdanydyr we ol (20) formula boýunça tapylýar.

4. Material üstüň inersiýa momentleri. Ikigat integral üçin degişli formulalaryň getirilip çykarylyşyna meňzeşlikde üst dykyzlygy $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$ bolan T material üstüň koordinatalar oklaryna we koordinata başlangyjyna görä inersiý momentleri

$$I_x = \iint_T \left(y^2 + z^2\right)\rho(x, y, z)dS,$$

$$I_y = \iint_T \left(x^2 + z^2\right)\rho(x, y, z)dS,$$

$$I_z = \iint_T \left(y^2 + x^2\right)\rho(x, y, z)dS,$$

$$I_0 = \iint_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x, y, z)dS$$

formulalar boýunça kesgitlenýär.

§ 10. 5. Stoksuň formulasy

Stoksuň formulasy berlen üst boýunça integraly şol üşti çäklendirýän ýapyk çyzyk boýunça egriçyzykly integraly baglanyşdyrýan formuladyr.

Goý, ýapyk L çyzyk bilen çäklenen T üst $z = g(x,\ y)$ deňleme bilen berlen bolup, ol L çyzygyň Oxy tekizlikdäki proýeksiýasy bolan Γ çyzyk bilen çäklenen S oblastyyna özara-birbahaly proýektirlenýän bolsun (13-nji surat). Stoksyň formulasyny görkezmek üçin L çyzyk boýunça egriçyzykly integraly Γ çyzyk boýunça egriçyzykly integrala, ony bolsa S oblast boýunça ikigat integrala we iň soňunda ikigat integraly T üst boýunça üst integrala özgerdeliň. Ýapyk L çyzygyň $z = g(x, y)$ deňleme bilen berlen T üstde ýatýandygy sebäpli

$$\oint_L P(x, y, z)dx = \oint_\Gamma P[x, y, g(x, y)]dx \qquad (21)$$

deňlik ýerine ýetýär. § 10. 4 – däki (20) formulanyň esasynda

$$\oint_\Gamma P[x, y, g(x, y)]dx = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \qquad (22)$$

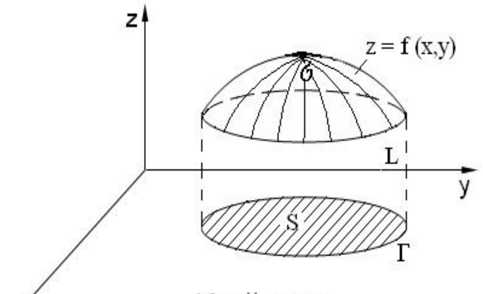
deňligi alarys.

Eger $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ burçlar

$$z - g(x, y) = 0$$

üste geçirilen $\boldsymbol{n}$ normalyň koordinata oklary bilen emele getirýän burçlary bolsa, onda (10) we (11) formulalaryň esasynda

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$



13-nji surat

ýada

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Bu deňligi ulanyp, (21) formulany şeýle ýazmak bolar

$$\oint_K P[x, y, g(x, y)]dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy.$$

(18) formulanyň esasynda

$$-\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy = -\iint_T \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma dS =$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS\,.$$

Şeýlelikde,

$$\oint_K P[x,\ y,\ g(x,\ y)]dx=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS\,.$$

Bu formulanyň esasynda (21) formuladan alarys:

$$\oint_L P(x,\ y,\ z)dx=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS\,.$$

Edil şonuň ýaly degişli şertler ýerine ýetende

$$\oint_L Q(x,\ y,\ z)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\lambda-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS\,,$$

$$\oint_L R(x,\ y,\ z)dx=\iint_D\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS$$

formulalary alarys. Bu alnan üç deňlikleri agzalaýyn goşup, Stoksyň formulasyny alarys:

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_T[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta]dS\,. \tag{23}$$

Bu formulany şeýle hem ýazmak bolar:

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_T\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx\,. \tag{24}$$

Bellik. Eger T üst Oxy tekizliginde ýatýan tekiz ýaýla bolsa, onda Stoksyň formulasyndan Griniň formulasy gelip çykýar, çünki bu halda deňligiň çep bölegindäki dz boýunça integral we sag bölegindäiki $dydz,\ dzdx$ boýunça integrallar nola deň bolar.

§ 10. 6. Ostrogradskiniň formulasy we onuň ulanylyşy

1. Ostrogradskiniň formulasy. Bu formula giňişligiň ýaýlasy boýunça üçgat inegraly şol ýaýlany çäklendirýän üst boýunça üst integralyny baglanyşdyrýan formuladyr. Giňişligiň Oz oka görä ýönekeý bolan (§18.5 seret), aşagyndan $z = z_1(x, y)$ üst, ýokarsyndan $z = z_2(x, y)$ üst we gapdallaryndan emele getirijisi Oz okuna parallel bolan silindrik üst bilen çäklenen G ýaýlasyna garalyň. Onuň Oxy tekizlige proýeksiýasyny D bilen belgiläliň. Goý, $R(x, y, z)$ we onuň $R'_x(x, y, z)$ önümi G ýaýlada we onuň araçäginde üznüksiz funksiýalar bolsun. Belli bolşy ýaly bu halda (§ 8. 5 , (28) seret)

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dxdy$$

deňlik ýerine ýetýär. Şunlukda,

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x, y, z) \Bigg|_{z = z_1(x, y)}^{z = z_2(x, y)} =$$

$$= R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)].$$

Şonuň üçin hem ahyrky iki deňliklerden

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D R[x, y, z_2(x, y)] dxdy - \iint_D R[x, y, z_1(x, y)] dxdy$$

deňlik gelip çykýär. Bu deňligiň sag bölegindäki ikigat integrallary üst interrallary bilen çalşyrmak bolar: birinjisini $z = z_2(x, y)$ deňleme bilen berlen T_2 üstüň ýokarky tarapy boýunça alnan üst integraly bilen, ininjisini $z = z_1(x, y)$ deňleme bilen berlen T_1 üstüň ýokarky tarapy ýa-da minus alamaty bilen alnan T_1 üstüň aşaky tarapy boýunça alnan üst integraly bilen çalşyrmak bolar. Şeýlelikde,

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{T_2} R[x, y, z] dxdy + \iint_{T_1} R[x, y, z] dxdy ,$$

bu ýerde birinji integral T_2 üstüň ýokarky tarapy boýunça, ikinjisi T_1 üstüň aşaky tarapy boýunça alnan üst integralydyr.Bu integrallara T_3 silindrik üst boýunça alnan we nola deň bolan

$$\iint_{T_3} R[x,\ y,\ z]dxdy = \iint_{T_3} R[x,\ y,\ z]\cos\gamma dS$$

(T_3 üstde $\boldsymbol{n}$ wektoryň Oz okuna perpendikulýar bolany sebäpli $\cos\gamma = 0$ bolýany üçin) integraly goşup,

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{T_2} R[x,\ y,\ z]dxdy +$$

$$+ \iint_{T_1} R[x,\ y,\ z]dxdy + \iint_{T_3} R[x,\ y,\ z]dxdy$$

deňligi ýa-da

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_T R[x,\ y,\ z]dxdy = \iint_T R[x,\ y,\ z]\cos\gamma dS$$

deňligi alarys, bu ýerde $T = T_1 + T_2 + T_3$ berlen G ýaýlany çäklendirýän üstdir we integral ol üstüň daşky tarapy boýunça alynýandyr. Giňişligiň G ýaýlasy we $Q(x,\ y,\ z)$, $Q'_y(x,\ y,\ z)$, $R(x,\ y,\ z)$, $R'_z(x,\ y,\ z)$ funksiýalar degişli şertleri kanagatlandyranda

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_T Q[x,\ y,\ z]dxdz = \iint_T R[x,\ y,\ z]\cos\beta dS\ ,$$

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_T P[x,\ y,\ z]dzdy = \iint_T R[x,\ y,\ z]\cos\alpha dS$$

deňlikleri görkezmek bolar. Ahyrky üç deňlikleri agzalaýyn gosup, Ostrogradskiniň formulasy atlandyrylýan

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \qquad (25)$$

formulany ýa-da

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_T \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS \quad (26)$$

formulany alarys.

2. Ostrogradskiniň formulasynyň ulanylyşy. Bu formulanyň kömegi bilen giňişligiň käbir G ýaýlasyny çäklendirýän T üst boýunça üst integraly ulanyp, G ýaýlanyň göwrümini tapmak bolar. Hakykatdan-da, P, Q, R funksiýalary $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$ deňlik ýerine ýeter ýaly saýlap,

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint_G dxdydz = V \quad (27)$$

deňligi alarys. Şonuň üçin hem bu halda Ostrogradskiniň (25) formulasyny ulanyp, Q ýaýlanyň göwrümini tapmak üçin

$$V = \iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

formulany alarys.

Eger $P=\frac{1}{3}x$, $Q=\frac{1}{3}y$, $R=\frac{1}{3}z$ alsak, onda $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$ bolar we şonuň üçin (27) deňlik ýerine ýeter. Şoňa görä-de göwrüm tapylýan (28) formula bu halda şeýle görnüşi alar:

$$V = \frac{1}{3}\iint_T xdydz + ydxdz + zdxdy\,. \quad (28)$$

§ 10. 7. Wektor meýdanynyň akymy, diwergensiýasy, sirkulýasiýasy, rotory. Ostrogradskiniň we Stoksuň formulalarynyň wektor görnüşleri

1.Wektor meýdanynyň akymy. Belli bolşy ýaly (§ 10. 3-däki 1-nji we 2-nji bellikler esasynda) birlik wagtda T üst arkaly akyp geçýän suwuklygyň Π mukdary

$$\Pi = \iint_T \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS \quad (29)$$

formula bilen aňladylýar. Şunlukda, Π ululyga suwuklygyň T üst arkaly akymy diýilýär. $P,\ Q,\ R$ funksiýalaryň $\boldsymbol{F}=\{P,\ Q,\ R\}$tizlik wektoryň koordinatalary, $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ ululyklaryň üste geçirilen biplik $\boldsymbol{n}$ wektoryň koordinatalary bolýandygy sebäpli,

$$P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma=(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{n})$$

deňligiň esasynda (29) formulany

$$\Pi=\iint_T(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{n})dS \quad \text{ýa-da} \quad \Pi=\iint_T F_n dS \qquad (30)$$

Görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde F_n tizlik $\boldsymbol{F}$ wektoryň T üstüň birlik $\boldsymbol{n}$ normalyna **bolan** proýeksiýasydyr:

$$F_n=(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{n})=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{n}|\cos\varphi=|\boldsymbol{F}|\cos\varphi$$

(φ burç $\boldsymbol{F}$ we $\boldsymbol{n}$ wektorlaryň arasyndaky burçdur).

$\boldsymbol{F}$ wektor meýdany üçin $\iint_T F_n dS$ üst integralyna şol wektor meýdanyň T üst arkaly akymy diýilýär.

Eger $\boldsymbol{F}$ wektor suwuklygyň hereketiniň tizligini aňladýan bolsa, onda $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanyň käbir üşt arkaly akymy birlik wagtda şol üst arkaly akyp geçýän suwuklygyň mudaryna deňdir.

Başga görnüşdäki wektor meýdanlary üçin akymyň başgaça fiziki manysy bolar.

2. Wektor meýdanynyň diwergensiýasy. $\boldsymbol{F}=\{P,\ Q,\ R\}$ wektor meýdany üçin $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ jeme deň bolan we $div\boldsymbol{F}$ bilen belgilenýän skalýar funksiýa $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy (dargamasy) diýilýär. Şeýlelikde,

$$div\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{dy}+\frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (31)$$

Eger $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$ wektor G oblast arkaly akyp geçýän suwuklygyň tizlik wektory bolsa, onda belli bolşy ýaly (26) formulanyň sag bölegindäki integral T üst arkaly G oblastdan birlik wagt aralygynda çykýan suwuklygyň mukdaryny aňladýar. Ol formulanyň çep böleginden we (31) formuladan görnüşi ýaly, suwuklygyň şol mukdary $\boldsymbol{F}$ wektoryň diwergensiýasynyň G

oblast boýunça üçgat integralyna deňdir. Şonuň üçin hem $div\boldsymbol{F} = 0$ bolanda T üst boýunça degişli integral hem nola deň bolar, ýagny ýapyk T üst arkaly akyp geçýän suwuklygyň mukdary nola deňdir.

Wektor meýdanynyň akymy we diwergensiýasy düşünjelerinden peýdalanyp, Ostrogradskiniň (26) formulasyny wektor görnüşinde ýazmak bolar:

$$\iiint_G div\boldsymbol{F}\,dV = \iint_T (\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{n})dS\,. \tag{32}$$

Bu deňlik wektor meýdanynyň diwergensiýasynyň käbir G oblast boýunça üçgat integralynyň şol oblasty çäkledirýän T üst arkaly wektor meýdanyň akymyna deňdigini görkezýär.

3. Wektor meýdanynyň sirkulýasyýasy. Goý, wektor meýdany

$$\boldsymbol{F} = P(x,\, y,\, z)\boldsymbol{i} + Q(x,\, y,\, z)\boldsymbol{j} + R(x,\, y,\, z)\boldsymbol{k} \tag{33}$$

wektor funksiýasy arkaky berlen bolsun, bu ýerde $P(x,\, y,\, z)$, $Q(x,\, y,\, z)$, $R(x,\, y,\, z)$ funksiýalar endigan ýa-da bölek-endigan L çyzykda üznüksiz funksiýalar. Onda L çyzyk boýunça

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

egriçyzykly integrala $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň L çyzyk boýunça sirkulýasiýasy diýilýär. Eger L çyzyga geçirilen birlik galaşma $\boldsymbol{\tau}$ wektor koordinatalar oklary bilen $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ burçlaryny emele getirýän bolsa,onda $F_\tau = (\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\alpha + R\cos\alpha$ deňlik esasynda

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L F_\tau dl \tag{34}$$

deňligi ýazmak bolar. Eger $\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$ güýç meýdany bolsa, onda onuň L çyzyk boýunça sirkulýasiýasy güýç meýdanyň L boýunça edilen işini aňladýar. Başga görnüşdäki wektor meýdanlary üçin sirkulýasiýanyň başga fiziki manysy bardyr.

4.Wektor meýdanynyň rotory.(33) wektoryň koordinatalaryndan düzülen

$$\left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},\ \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$

wektora (33) wektor meýdanynyň rotory diýilýär we $rot\boldsymbol{F}$ bilen belgilenýär, ýagny

$$rot\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\ . \qquad (35)$$

Ýatda saklamak üçn bu formulany

$$rot\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

görnüşde hem ýazmak bolar (bu ýerde $\frac{\partial}{\partial y}P$ görnüşdäki köpeltmek hasylyna $\frac{\partial P}{\partial y}$ hususy önüm diýip düşünmeli).

Indi (34) deňlikden we wektor meýdanynyň sirkulýasiýasy we rotory düşünjelerinden peýdalanyp, ozal subut edilen egriçyzykly we üst integrallary baglanyşdyrýan

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds$$

Stoks formulasyny wektor görnüşinde ýazalyň:

$$\oint\limits_L F_\tau dl = \iint\limits_T (rot\,\boldsymbol{F}(M), \boldsymbol{n})ds = \iint\limits_T (rot\,\boldsymbol{F}(M))_n ds. \qquad (36)$$

Bu formula $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň ýapyk L çyzyk boýunça sirkulýasiýasynyň L çyzyk bilen çäklendirilen T üst arkaly geçýän şol wektor meýdanynyň rotorynyň akymyna deňdigini görkezýär.

§ 10. 8. Gamilton operatory we onuň ulanylyşy. Potensial we solenoidal meýdany

1. Gamilton operatory. § 7.7 –de girizilen skalýar funksiýanyň gradiýenti düşünjesinden görnüşi ýaly, $u = u(x,\ y,\ z)$ skalýar meýdanyndan *gradu* wektor meýdanyna geçmeklige käbir amal (operasiýa) hökmünde garamak bolar. Şunlukda, ol köp häsiýetleri boýunça differensirleme amalyna meňzeşdir, ýöne bir tapawudy bu halda skalýar funksiýa wektor funksiýasy (differensirleme amalynda bolsa skalýar funksiýa skalýar funksiýasy) degişli bolýär.

Skalýar u funksiýadan *gradu* wetora geçmeklik ∇ belgi bilen belgilenýär we oňa Gamilton (nabla) operatory diýilýär. Şeýlelikde,

$$\nabla u = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\ . \qquad (37)$$

Köp halatlarda ∇ operatora koordinatalary $\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}$ bolan simwoliki wektor hökmünde seretmek amatly bolýar:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\ . \qquad (38)$$

Şunlukda, ol operasiýany skalýar u funksiýa ulanmaklyk (37) deňligi aňladýär.

2. Gamilton operatorynyň ulanylyşy. Bu operatoryň kömegi bilen käbir aňlatmalaryň ýönekeý görnüşlerde ýazylyşyny görkezeliň. Onuň üçin differensirlenýän

$$\boldsymbol{F} = P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i} + Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j} + R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k} \qquad (39)$$

wektor funksiýa seredeliň. Diwergensiýanyň kesgitlemesi we (38) deňlik esasynda

$$div\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{dy} + \frac{\partial R}{\partial z} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R\right) = (\nabla,\ \boldsymbol{F}),$$

$$div\boldsymbol{F} = (\nabla,\ \boldsymbol{F}), \qquad (40)$$

ýagny $\boldsymbol{F}$ wektoryň diwergensiýasy simwoliki ∇ wektor bilen $\boldsymbol{F}$ wektoryň skalýar köpeltmek hasylyna deňdir. (35) formula boýunça aňladylan $\boldsymbol{F}$ wektoryň rotoryny

$$rot\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = [\nabla,\ \boldsymbol{F}],$$

$$rot\boldsymbol{F} = [\nabla,\ \boldsymbol{F}], \tag{41}$$

ýagny $\boldsymbol{F}$ wektoryň rotory simwoliki ∇ wektor bilen $\boldsymbol{F}$ wektoryň wektor köpeltmek hasylyna deňdir. (39) formuladaky $P,\ Q,\ R$ funksiýalaryň ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar hasap edip we (31), (35) formulalary peýdalanyp, $div\, rot\boldsymbol{F}$ tapalyň:

$$div\, rot\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0.$$

Şeýlelikde,

$$div\, rot\boldsymbol{F} = 0. \tag{42}$$

(40) we (41) formulalaryň esasynda

$$div\, rot\boldsymbol{F} = (\nabla,\ rot\boldsymbol{F}) = (\nabla, [\nabla,\ \boldsymbol{F}]) = (\nabla,\ (\nabla,\ \boldsymbol{F})).$$

Ahyrky iki formulalardan

$$(\nabla, [\nabla,\ \boldsymbol{F}]) = (\nabla,\ (\nabla,\ \boldsymbol{F})) = 0$$

deňlik gelip çykýar we ol ikisi deň bolan üç wektorlaryň gatyşyk köpeltmek hasylynyň nola deňdigini görkezýär.

Ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolan $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýa üçin (35) we (37) formulalardan peýdalanyp, *rot gradu* üçin aňlatmany tapalyň. (37) formulada $P = \frac{\partial u}{\partial x},\ \ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ \ R = \frac{\partial u}{\partial z}$ hasap edip alarys:

$$rot\,grad u = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{i} +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0,$$

$$rot\,grad u = 0. \tag{43}$$

(31) we (35) formulalaryň esasynda bu deňligiň çep bölegini

$$rot\,grad u = [\nabla,\ grad u] = [\nabla,\ \nabla u] \tag{44}$$

görnüşda ýazmak bolar. (43) we (44) formulalardan bolsa

$$[\nabla,\ \nabla u] = 0 \tag{45}$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňlik skalýar köpeldijileri bilen tapawutlanýan iki simwoliki wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň nola deňdigini görkezýär.

Goý, ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolan skalýar $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýa we onuň gradiýentiniň $\boldsymbol{F}$ wektor meýdany berlen bolsun:

$$\boldsymbol{F} = grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{k}\,.$$

(31) formuladan peýdalanyp $div(grad u)$ üçin aňlatmany alarys:

$$div(grad u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$div(grad u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{46}$$

Bu deňligiň sag bölegindäki aňlatna u funksiýanyň Laplas operatory diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{47}$$

(37), (40) we (47) formulalaryň esasynda (46) formulany

$$(\nabla,\ \nabla u) = \Delta u \qquad (\Delta = \nabla^2) \tag{48}$$

Bellik. $\Delta u = 0$ ýa-da $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ deňlemä Laplas deňlemesi diýilýär. Bu deňlemäni kanagatlandyrýän $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýa garmoniki funksiýa diýilýär.

3. Potensial we solenoidal meýdany. Eger $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ wektor käbir skalýar funksiýanyň gradiýenti bolsa, ýagny

$$\boldsymbol{F} = grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\ , \tag{49}$$

onda $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanyna potensial meýdany diýilýär. Ahyrky iki deňliklerden

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial u}{\partial y},\quad R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

deňlikler gelip çykýar. $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar halynda ahyrky deňliklerden

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

deňlikleri ýa-da

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

deňlikleri alarys. Bu deňlikler esasynda (35) deňlikden

$$rot\boldsymbol{F} = 0 \tag{50}$$

deňlik gelip çykýar. Şeýlelikde, islendik potensial $\boldsymbol{F}$ neýdan üçin (50) deňlik ýerine ýetýändir. Eger $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,\ y,\ z)$ wektor meýdany üçin

$$div\boldsymbol{F} = O$$

bolsa, onda ol wektor meýdanyna solenoidal ýa-da trubka görnüşli wektor meýdany diýilýär. Berlen wektor meýdanynyň rotor meýdany solenoidal meýdanydyr.

§ 10. 9. Funksiýanyň doly differesiallygy

1. Oblastyň birbaglanyşyklylyk düşünjesi. Eger üçölçegli G oblast degişli islendik ýapyk L çyzyk üçin şol çyzyk bilen çäklenen we tutuşlygyna G oblastyň içinde ýerleşýän üst bar bolsa, onda G oblasta üstleýin birbaglanyşykly oblast diýilýär. Şeýle oblastlara şar, ellipsoid bilen çäklenen oblast, iki konsentrik ellipsoid bilen çäklenen oblast mysal bolup biler. Üstleýin birbagnyşykly däl oblastyň mysaly içinden silindr kesilip aýrylan şar bolup biler. Üstleýin birbagnyşykly oblastlar üçin ýerine ýtýän häsiýetler aşakdaky teoremadan gelip çykýar.

1-nji teorema. Eger $P = P(x,\ y,\ z)$, $Q = Q(x,\ y,\ z)$, $R = R(x,\ y,\ z)$ funksiýalar we olaryn birinji tertipli hususy önümleri käbir ýapyk çäkli üstleýin birbaglanyşykly G oblastda üznüksiz bolsa, onda aşakdaky dört tassyklamalar deňgüýçlüdirler, ýagny olaryň islendik biriniň ýerine ýetmeginden beýleki üçüsi gelip çykýar:

1.. G oblastda ýerleşýän islendik ýapyk L çyzyk üçin

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0\ . \tag{51}$$

2. G oblastyň islendik A we B nokatlary üçin egriçyzykly integral A we B nokatlary birleşdirýän ýoluna bagly däldir:

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AEB} Pdx + Qdy + Rdz\ .$$

3. $Pdx + Qdy + Rdz$ aňlatma käbir funksiýanyň doly differensialydyr, ýagny G oblastda kesgitlenen şeýle $F(x,\ y,\ z)$ funksiýa tapylyp,

$$dF = Pdx + Qdy + Rdz\ . \tag{52}$$

4. G oblastda

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \tag{53}$$

deňlikler dogrudyr.

$\lhd$ Subut etmekligi

$$\boldsymbol{1} \Rightarrow \boldsymbol{2} \Rightarrow \boldsymbol{3} \Rightarrow \boldsymbol{4} \Rightarrow \boldsymbol{1}$$

yzygiderlikde amala aşyrarys.

a) $\boldsymbol{1} \Rightarrow \boldsymbol{2}$ bolýandygyny görkezeliň. Goý, **1** ýerine ýetsin. G oblastyň A we B nokatlaryny birleşdirýän we şol oblastda ýerleşýän iki ýoluna, ýagny ACB we AEB ýollaryna garalyň.Onda olaryň jemi bolan ýapyk $L = ACBEA$ çyzyk hem şol oblastda ýerleşýär. Şonuň üçin hem 1-nji şertiň esasynda

$$0 = \int\limits_{ACBEA} Pdx + Qdy + dz = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + dz + \int\limits_{BEA} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz - \int\limits_{AEB} Pdx + Qdy + Rdz,$$

ýagny

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AEB} Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

b) $\boldsymbol{2} \Rightarrow \boldsymbol{3}$ bolýandygyny görkezeliň. Goý, egriçyzykly

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

integral integrirleme ýoluna bagly däl bolsun. Eger A nokadyň koordinatalaryny bellesek, ýagny $A = A(x_0, y_0, z_0)$ hasap etsek, onda ol integrala $B = B(x, y, z)$ nokadyň koordinatalarynyň funksiýasy hökmünde garamak bolar, ýagny

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{A(x_0, y_0)}^{B(x,y)} Pdx + Qdy + Rdz = F(x, y, z)\,.$$

Ol funksiýanyň differensirlenýändigini we (52) deňligiň dogrudygyny görkezeliň. Onuň üçin G oblastyň her bir $B(x, y, z)$ nokadynda $\frac{\partial F}{\partial x}$ we $\frac{\partial F}{\partial y}$ hususy önümleriň bardygyny we

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y,\ z),\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y,\ z),\ \frac{\partial F}{\partial z}=R(x,y,\ z) \qquad (54)$$

deňlikleriň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir, çünki $P(x,y,\ z)$, $Q(x,y,\ z)$ we $R(x,y,\ z)$funksiýalaryň üznüksizligi üçin (54) deňlik esasynda $F(x,y,\ z)$ funksiýa differensirlenýändir we (52) ýerine ýetýändir. $\frac{\partial F}{\partial x}$ hususy önümiň bardygyny görkezmek üçin $F(x,y,\ z)$ funksiýanyň x üýtgeýänine $x+\Delta x$ artym bereliň:

$$\Delta_x F=F(x+\Delta x,y,\ z)-F(x,y,\ z)=\int\limits_{AB_1} Pdx+Qdy+Rdz-$$

$$-\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz \quad (B_1=B_1(x+\Delta x,y,\ z)).$$

Integralyň integrirleme ýoluna bagly däldigi esasynda AB_1 çyzygy AB çyzyk bilen Ox okuna parallel BB_1 kesimiň jemi hökmünde garamak bolar. Şoňa görä

$$\Delta_x F=\int\limits_{BB_1} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{BB_1} Pdx=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,\ z)dx$$

deňligi alarys. Bu deňligiň sag bölegindäki kesgitli integrala orta baha hakyndaky teoremany ulanyp,

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x,y,\ z) \quad (0<\theta<1)$$

deňligi alarys. Bu deňlikde $\Delta x\to 0$ bolanda predele geçip, $P(x,y,\ z)$ funksiýanyň üznüksizligi sebäpli $\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y,\ z)$ deňligi alarys. $\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y,\ z)$ we $\frac{\partial F}{\partial z}=R(x,y,\ z)$ deňlikleriň ýerine ýetýändigi bolsa şuňa meňzeşlikde görkezilýär.

ç) $\boldsymbol{3\Rightarrow 4}$ bolýandygyny görkezeliň. Goý, (52) deňlik ýerine ýetsin, onda (54) deňlikler dogrudyr. Şonuň üçin garyşyk önümler hakyndaky teorema esasynda

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

deňlikleri alarys, çünki şerte görä $\frac{\partial P}{\partial y}$ we $\frac{\partial Q}{\partial x}$ önümler üznüksizdirler.

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

deňlikler hem edil şonuň ýaly subut edilýär.

d) ***4*** $\Rightarrow$ ***1*** görkezeliň. Goý, (53) deňlikler ýerine ýetsin we L çyzyk G oblastda ýerleşýän erkin ýapyk çyzyk, T bolsa G oblastyň içinde tutuşlaýyn ýerleşýän we L bilen çäklenen üst bolsun. Onda Stoksuň (23) formulasy esasynda

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0\,. \tag{53}$$

Şeýlelikde, teorema doly subut edildi. ▹

B**ellik.** Egriçyzykly $\oint_L Pdx+Qdy$ integral üçin (53) şert $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ görnüşi alar.

G ö n ü k m e l e r

Egriçyzykly integrallaryň birinji görnüşini hasaplamaly:

1. $\int_L xdl,$ L çyzyk $2y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň $A(1,1)$ we $B(1,1/2)$ nokatlarynyň arasyndaky dugasy.

2. $\int_L \sqrt{1+x^2}dl,$ L çyzyk $4y=x^4$ funksiýanyň grafiginiň $A(0,0)$ we $B(1,1/4)$ nokatlarynyň arasyndaky dugasy.

3. $\int_L y^2dl,$ L çyzyk $x^2+y^2=R^2$ $(y\ge 0)$ töweregiň ýokarky bölegi.

4. $\int_L x^2ydl,$ L çyzyk $x=a\sin^3 t,$ $y=a\cos^3 t$ $(0\le t\le \pi/2)$ astroidiň dugasy.

Egriçyzykly integrallaryň ikinji görnüşini hasaplamaly:

5. $\int\limits_L \sqrt{x^2+3y}dy+(x-y)dx,$ L çyzyk $y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň $A(0,\ 0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli dugasy.

6. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+xydy,$ L çyzyk $y=e^x$ funksiýanyň grafiginiň $A(0,1)$ nokatdan $B(1,1/4)$ nokada çenli aralygyň dugasy.

7. $\int\limits_L \frac{xdx+ydy}{x^3+y^3}dl,$ L çyzyk $x^2+y^2=R^2$ $(y\geq 0)$ töweregiň ýokarky bölegi.

8. $\int\limits_L (x+2x^3y^2-y^4)dx+(y^2-3x^2y^3+4xy)dy,$ L aşakdaky çyzyklar:

a) göni çyzygyň $O(0,\ 0)$ nokatdan $A(1,1)$ nokada çenli kesimi;

b) OBA döwük çyzyk, bu ýerde $B(1,\ 0)$ nokat;

ç) $y=x^2$ parabolanyň $O(0,\ 0)$ nokatdan $A(1,1)$ nokada çenli dugasy.

9. $\int\limits_L (x^3+3x^2y^2)dx+(y^3+2x^3y)dy,$ L aşakdaky çyzyklar:

a) göni çyzygyň $O(0,\ 0)$ nokatdan $A(1,1)$ nokada çenli kesimi;

b) OBA döwük çyzyk, bu ýerde $B(1,\ 0)$ nokat;

ç) $y=x^2$ parabolanyň $O(0,\ 0)$ nokatdan $A(1,1)$ nokada çenli dugasy.

d) $y=x^3$ çyzygyň $O(0,\ 0)$ nokatdan $A(1,1)$ nokada çenli dugasy.

10. Çyzyklaryň görkezilen dugalarynyň uzynygyny hasaplamaly:

a) $x=6a\cos t,\ y=6a\sin t,\ z=8at\ (0\leq t\leq 2\pi)$;

b) $x=at,\ y=a\sqrt{2}\ln t,\ z=a/t\ (1\leq t\leq 10)$;

11. Görkezilen ýapyk çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny tapmaly:

a) $y=x^4,\ y^4=x.$ b) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ (astroida).

12. Dykyzlygy $\rho(x,\ y)$ bolan berlen material çyzygyň dugasynyň massasyny tapmaly:

a) $4y = x^4$ $(0 \le x \le 1)$, $\rho(x,\ y) = y$.

b) $x = \ln y$ $(1 \le y \le 4)$, $\rho(x,\ y) = y\sqrt{y^2 + 1}$.

Üst integrallaryň birinji görnüşini hasaplamaly:

13. $\iint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)ds$, T üst $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ýarym sferadyr.

14. $\iint\limits_T y(x+z)ds$, T üst $y = \sqrt{c^2 - z^2}$ üstüň $x = 0,\ x = a$ tekizlikler bilen kesilen bölegi.

15. $\iint\limits_T (x^2 + y^2 + z - 2)ds$, T üst $2z = 9 - x^2 - y^2$ üstüň $z = 0$ tekizlik bilen kesilen bölegi.

Üst integrallaryň ikinji görnüşini hasaplamaly:

16. $\iint\limits_T (y^2 + z^2)dxdy$, T üst $z = \sqrt{9 - x^2}$ üstüň $y = 0,\ y = 2$ tekizlikler bilen kesilen böleginiň ýokarky tarapy.

17. $\iint\limits_T (x^2 + 3y^2 + z^2)dxdz$, T üst $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ üstüň $y = 0,\ y = 1$ tekizlikler bilen kesilen böleginiň daşky tarapy.

18. $\iint\limits_T (2x + 3y + 4z)dxdy$, T üst $x + y + z = 6$ tekizligiň $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ silindr bilen kesilen böleginiň ýokarky tarapy.

19. Berlen wektor meýdanlarynyň diwergensiýalaryny tapmaly:

a) $(x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$. b) $(x^2 - 2xy + 3y^2)\vec{i} + (xy - 5y^2)\vec{j}$.

ç) $x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$. d) $x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xyz\vec{k}$.

20. Berlen wektor meýdanlarynyň rotorlaryny tapmaly:

a) $x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$. b) $y^2z\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

ç) $xyz\vec{i} + (2x + 3y - z)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$.

21. $\vec{a} = bx\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ wektor meýdanynyň $x - 2y + 2z = 4$ tekizligiň koordinatalar oklary bilen çäklenen bölegi arkaly geçýän akymyny tapmaly.

22. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ wektor meýdanynyň depeleri $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 2)$ nokatlarda bolan piramidanyň üsti arkaly geçýän akymyny hasaplamaly.

J o g a p l a r

1. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **2.** $\frac{8}{7}$. **3.** $\frac{\pi}{2}R^3$. **4.** $\frac{268}{1155}a^4$. **5.** $\frac{3}{2}$. **6.** $\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12}$. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** a) $\frac{17}{15}$. b) $\frac{25}{12}$. ç) $\frac{71}{36}$. **9.** a) $1{,}5$. b) $1{,}5$. ç) $1{,}5$. d) $1{,}5$. **10.** a) $20\pi a$. b) 9,9a. **11.** a) 0,6. b) $3\pi a^2/8$. **12.** a) $(2\sqrt{2-1})/3$. b) 24. **13.** $2\pi R^4$. **14.** a^2c^2. **15.** $\pi(500\sqrt{10}-23)/15$. **16.** 68. **17.** -2π **18.** 114π. **19.** a) $2x+3y^2$. b) $3(x-4y)$. ç) $1+2y+3z^2$. d) $x(1+y)$. **20.** a) 0. b) $(x^2-2xz)\vec{i}+(y^2-2xy)\vec{j}+(z^2-2yz)\vec{k}$. ç) $\vec{i}+(xy-2x)\overrightarrow{j+}$ $+(2-xz)\vec{k}$. **21.** 28. **22.** $1/3$.

II. 11. SAN HATARLARY

§ 11.1. Hataryň ýygnanmagy we dargamagy

1. Hataryň kesgitlenişi we onuň jemi. Matematikanyň dürli bölümleri öwrenilende, şeýle hem meseleleri çözmekde onuň ulanylýan ýerlerinde tükenikli jemler bilen birlikde tükeniksiz jemlere, ýagny goşulyjylaryň sany tükeniksiz artýan jemlere duş gelinýär. Ýöne beýle jemleriň hemmesi bilen tükenikli jemler bilen geçirilýän amallary geçirip bolmaýar. Şonuň üçin hem biz ilki bilen ol jemleriň nämäni aňladýandygyny, olaryň häsiýetlerini we şonuň esasynda haýsy şertlerde tükenikli jemler bilen geçirilýän amallary tükeniksiz jemler bilen hem geçirip bolýandygyny anyklarys.

Hakyky sanlaryň $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ yzygiderliginden düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

aňlatma tükeniksiz san hatary, ýa-da ýöne hatar diýilýär.

Şunlukda, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sanlara onuň agzalary, a_n sana bolsa umumy ýa-da n-nji agzasy diýilýär. Umumy a_n agzasy belli bolan hatar berlen hasap edilýär. Mysal üçin, $a_n = \frac{1}{n^3}$ bolan (1) hatar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3} + ...$$

görnüşde ýazylýar.

Käbir halatlarda bolsa hatar özüniň ilkinji agzalary arkaly

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

görnüşde hem berilýär. Bu halda berlen agzalar boýunça ol hataryň umumy agzasyny kesgitläp bolar. Mysal üçin, eger hatar ilkinji dört agzalary görkezilip,

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \frac{11}{54} + ...$$

görnüşde berlen bolsa, onda onuň agzalarynyň sanawjylaryndan düzülen 2, 5, 8, 11 sanlar tapawudy 3 we ilkinji agzasy 2-ä deň bolan arifmetik progressiýany düzýär. Şonuň üçin ol progressiýanyň umumy agzasy bolan $2+3(n-1)=3n-1$ sany sanawjylar üçin umumy agza hökmünde almak bolar. 2, 6, 18, 54 sanlardan durýan maýdalawjylar bolsa ilkinji agzasy 2-ä we maýdalawjysy 3-e deň bolan geometrik progressiýanyň agzalaryny aňladýar. Şonuň üçin hem geometrik progressiýanyň umumy agzasy bolan $2\cdot 3^{n-1}$ sany maýdalawjylar üçin umumy agza hökmünde almak bolar. Şeýlelikde, hataryň umumy agzasy $a_n=\dfrac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

Hataryň ilkinji n agzalaryndan düzülen

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

jeme hataryň bölekleýin jemi diýilýär.

Şeýlelikde,

$$S_1=a_1,\ \ S_2=a_1+a_2,\ldots,\ \ S_n=a_1+...+a_n. \qquad (2)$$

Eger (1) hataryň bölekleýin jeminiň $\{S_n\}$ yzygiderliginiň tükenikli predeli bar bolsa, onda ol hatara ýygnanýan hatar diýilýär. Şunlukda, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ predele hataryň jemi diýilýär we

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ . \qquad (3)$$

Eger-de $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli ýok bolsa ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda (1) hatara dargaýan hatar diýilýär.

Kesgitleme esasynda hataryň ýygnanmagyny şeýle ýazmak bolar:

$$\left(S=\lim_{n\to\infty}S_n\right)\Leftrightarrow \text{(hatar ýygnanýar)}.$$

Bu ýazgydan ýygnanýan hataryň jeminiň ýeke-täkdigi gelip çykýar.

Bellik. Hataryň c sana köpeltmek hasyly diýip

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=ca_1+ca_2+...+ca_n+...$$

hatara düşünilýär. Hatary sana köpeltmek onuň ýygnanmagyna hem, dargamagyna hem täsir etmeýär.

1-nji mysal. Geometrik progressiýasynyň agzalaryndan düzülen

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \qquad (4)$$

hataryň haýsy şertlerde ýygnanýandygyny görkezmeli.

◁ Bu hatar üçin (2) formulanyň esasynda

$$S_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a - aq^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Şoňa görä (5) deňlikden alarys:

1) $|q| < 1$ bolanda $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli bardyr:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

2) $|q| > 1$ ýa-da $q = 1$ bolanda $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

3) $q = -1$ bolanda (5) deňlikden

$$S_n = \frac{a(1-(-1)^n)}{2}$$

bolýandygyny görýäris, ýagny $S_{2k} = 0$, $S_{2k-1} = a$, diýmek bu halda $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli ýokdur.

Şeýlelikde, (4) hatar $|q| < 1$ bolanda ýygnanýar we $|q| \geq 1$ bolanda bolsa dargaýar. ▷

2-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ hataryň ýygnanýandygyny görkezmeli we onuň jemini tapmaly.

◁ Bu hatar üçin

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(n-2)n} + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\Bigg]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right].$$

Şoňa görä-de

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}.$$

Diýmek, kesgitleme boýunça garalýan hatar ýygnanýar we onuň jemi $S=3/4$. ▷

2. Hataryň ýygnanma şertleri. Hatarlar nazaryýetiniň esasy meseleleriniň biri onuň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny anyklamakdyr. Dürli amaly meseleler çözülende köplenç, hataryň ýygnanýandygyny (jemini tapmazdan) ýa-da dargaýandygyny anyklamak talap edilýär. Şoňa görä, ilki bilen hataryň ýygnanmagy we dargamagy bilen baglanyşykly aşakdaky şertlere garalyň.

1-nji teorema (hataryň ýygnanmagynyň zerur şerti). Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda onuň umumy agzasynyň predeli nola deňdir, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0. \tag{6}$$

◁ Goý, (1) hatar ýygnanýan bolsun, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S, \tag{7}$$

onda ýygnanýan yzygiderligiň häsiýeti esasynda

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S. \tag{8}$$

(7) we (8) deňlikleriň esasynda (2) deňlikden gelip çykýan $a_n=S_n-S_{n-1}$ deňlikde predele geçip, (6) deňligi alarys. ▷

Bellik. (1) hataryň ýygnanmagy üçin (6) deňlik diňe zerur şert bolup, ol ýeterlik däldir. Onuň şeýledigi aşakdaky mysalda görkezilýär.

3-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ garmoniki hataryň dargaýandygyny görkezmeli.

⊲ Bu hatar üçin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, ýagny (6) şert ýerine ýetýär, ýöne ol dargaýar. Hakykatdan-da, eger tersine, ol ýygnanýar diýip güman etsek, onda onuň S jemi üçin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,\ \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0.$$

Ol bolsa

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

deňsizlige garşy gelýär. Şeýlelikde, garmoniki hatar dargaýar. ⊳

Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije (hataryň dargamagynyň ýeterlik şerti). Eger

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \tag{9}$$

bolsa, onda (1) hatar dargaýar.

⊲ Tersine güman edeliň. Goý, (1) hatar ýygnanýan bolsun, onda 1-nji teorema boýunça (6) deňlik ýerine ýetýär we ol (9) şerte garşy gelýär. Bu garşylyk biziň güman etmämiziň nädogrudygyny, ýagny hataryň dargaýandygyny görkezýär. ⊳

4-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

⊲ Bu hatar üçin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3}$, ýagny (9) şert ýerine ýetýär we şonuň üçin netije boýunça hatar dargaýar. ⊳

Hataryň ýygnanmagynyň zerur we ýeterlik şerti subutsyz alynýan aşakdaky teoremada getirilýär

2-nji teorema (Koşiniň kriterisi). $\forall\varepsilon > 0$ üçin $\mathrm{N} \ni n_o$ tapylyp, $\forall n > n_o$ we $\forall p \in \mathrm{N}$ üçin

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \tag{10}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi (1) hataryň ýygnanmagy üçin zerur we ýeterlikdir.

3. Hataryň galyndysy we onuň häsiýetleri. (1) hataryň ilkinji n agzalarynyň taşlanmagyndan alnan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{11}$$

hatara (1) hataryň galyndysy diýilýär we ol r_n bilen belgilenýär.

3-nji teorema. Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda onuň islendik galyndysy hem ýygnanýar we tersine, eger hataryň haýsy-da bolsa bir galyndysy ýygnanýan bolsa, onda hataryň özi hem ýygnanýar. Şunlukda,

$$S = S_n + r_n \tag{12}$$

deňlik dogrudyr.

◁ Eger $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$, $\tilde{S}_p = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$ degişlilikde (1) we (11) hatarlaryň bölekleýin jemleri bolsalar, onda

$$S_m = S_n + \tilde{S}_p \tag{13}$$

bolar. Bu deňlikdeň görnüşi ýaly, bellenen n üçin $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$ predeliň bar bolmagy üçin $\lim\limits_{p\to\infty} \tilde{S}_p$ predeliň bar bolmagy, ýagny (1) hataryň ýygnanmagy üçin (12) hataryň ýygnanmagy zerur we ýeterlikdir. Şonuň esasynda (13) deňlikde $m \to \infty$ bolanda predele geçip, (12) deňligi alarys. ▷

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

1. Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda ol hatardan tükenikli sany agzalaryň goşulmagyndan, şeýle hem, taşlanmagyndan alnan hatar ýygnanýar.

2. Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda onuň galyndysynyň predeli nola deňdir, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

§ 11. 2. Agzalary otrisatel däl hatarlar

1. Agzalary otrisatel däl hatarlaryň ýygnanma nyşany. Hatarlary derňemekligi onuň agzalary otrisatel däl bolan halyndan başlalyň, çünki şeýle hatarlaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny anyklamak ýeňildir.

4-nji teorema. Agzalary otrisatel däl (1) hataryň ýygnanmagy üçin onuň bölekleýin jemleriniň yzygiderliginiň ýokardan çäkli bolmagy zerur we ýeterlikdir.

$\triangleleft$ Eger $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $a_n \geq 0$ bolsa, onda (1) hataryň S_n bölekleýin jemi üçin $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$ deňsizlik ýerine ýetýär. Ol bolsa $\{S_n\}$ yzygiderligiň kemelmeýändigini aňladýar. Kemelmeýän yzygiderligiň predeliniň bar bolmagy üçin bolsa onuň ýokardan çäkli bolmagy zerur we ýeterlikdir $\triangleright$

Bu teoremanyň şertlerinde hataryň S jemi we $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin

$$S_n \leq S. \qquad (14)$$

2. Deňeşdirme nyşanlary. Hatarlary derňemekde ulanylýan usullaryň biri-de deňeşdirme usulydyr. Ol bolsa deňeşdirme nyşanlaryny ulanmaklyga esaslaýar.Şunlukda, deňeşdirilýän hatar hökmünde ýygnanýandygy ýa-da dargaýandygy mälim bolan hatarlar ulanylýar. Ony görkezmek üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (15)$$

hatarlara garalyň.

5-nji teorema (1.d.n.). Goý, (1) we (15) hatarlaryň agzalary $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad (16)$$

deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsun. Onda (15) hataryň ýygnanmagyndan (1) hataryň ýygnanmagy, (1) hataryň dargamagyndan bolsa (15) hataryň dargamagy gelip çykýar.

◁ Goý,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

we (15) hatar ýygnanýan bolsun. Onda $\{\tilde{S}_n\}$ yzygiderlik ýygnanýar we (15) hataryň $\tilde{S}$ jemi üçin (14) esasynda $\tilde{S}_n \le \tilde{S}$ bolar. Şonuň üçin (16) deňsizlik esasynda $S_n \le \tilde{S}_n \le \tilde{S}$ deňsizlik gelip çykýar. Şoňa görä 4-nji teorema boýunça (1) hatar ýygnanýar.

Eger (1) hatar dargaýan bolsa, onda (15) hatar hem dargaýar, çünki tersine bolan halda teoremanyň subut edilen bölegi esasynda (1) hatar ýygnanýan bolup, ol bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Şeýlelikde, (15) hatar dargaýar. ▷

2-nji bellik. Teoremanyň tassyklamalary (16) deňsizlikler käbir $n_o > 1$ agzadan başlap ýerine ýetende hem dogrudyr, çünki 3-nji teoremanyň 1-nji netijesi boýunça hataryň tükenikli sany agzalarynyň taşlanmagy onuň ýygnanmagyna täsir etmeýär..

1-nji deňeşdirme nyşanyndan 1-nji mysal esasynda amalyýetde ulanmak üçin amatly bolan şeýle netije alynýar.

1-nji netije. Eger $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin (ýa-da käbir $n_o > 1$ agzadan başlap) $0 \le a_n \le q^n$, $q < 1$ şert ýerine ýetse, onda (1) hatar ýygnanýar, eger-de $a_n \ge q^n$, $q \ge 1$ şert ýerine ýetse, onda (1) hatar dargaýar.

5-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Bu hataryň umumy agzasy üçin $a_n = \frac{n}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$, ýagny $q = \frac{1}{3}$ üçin $a_n \le q^n$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de, 1-nji netije esasynda garalýan hatar ýygnanýar. ▷

6-njy teorema (2.d.n.). Eger agzalary položitel bolan (1) we (15) hatarlar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \quad (0<k<+\infty) \tag{17}$$

predel bar bolsa, onda (1) we (15) hatarlaryň ikisi hem birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

$\lhd$ Predeliň kesgitlemesi we (17) deňlik esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle n_o nomer tapylyp, $\forall n>n_o$ üçin

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Ondan bolsa $\forall n>n_o$ üçin

$$-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-k<\varepsilon,\quad k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon+k$$

deňsizlik gelip çykýar. ε sany $\varepsilon<k$ bolar ýaly alyp we $k-\varepsilon=m$ $(m>0)$, $k+\varepsilon=M$ $(M>0)$ begilemeler girizip, $\forall n>n_o$ üçin

$$m<\frac{a_n}{b_n}<M \quad \text{ýa-da} \quad mb_n<a_n<Mb_n \tag{18}$$

deňsizligi alarys. Eger (15) hatar ýygnanýan bolsa, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Mb_n$ hatar hem ýygnanýar. Şoňa görä (18) deňsizlikleriň sagkysy we 1.d.n. boýunça (1) hatar hem ýygnanýar. Eger (1) hatar ýygnanýan bolsa, onda (18) deňsizlikleriň çepkisi we 1.d.n. boýunça $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mb_n$ hatar ýygnanýar. Şonuň üçin (15) hatar hem ýygnanýar.

Eger-de (1) we (15) hatarlaryň haýsy-da biri dargaýan bolsa, onda olaryň ikinjisi hem dargaýandyr, çünki ol ýygnanýar diýip güman edenimizde, teoremanyň subut edilen bölegi boýunça birinji hatar hem ýygnanýan bolardy, ol bolsa şerte garşy gelýär. $\rhd$

3. Koşiniň we Dalamberiň nyşanlary. Hatarlary derňemekligi onuň öz agzalarynyň häsiýetleri esasynda hem geçirmek bolar.

7-nji teorema (Koşiniň nyşany). Eger agzalary otrisatel däl (1) hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r \tag{19}$$

predel bar bolsa, onda ol hatar $r<1$ bolanda ýygnanýar, $r>1$ bolanda bolsa dargaýar.

$\lhd$ Yzygiderligiň predeliniň kesgitlemesi we (19) esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin $\mathrm{N}\ni n_o$ tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin

$$r-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<r+\varepsilon \tag{20}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär.

Eger $r<1$ bolsa, onda ε sany $q=r+\varepsilon<1$ bolar ýaly saýlap almak bolar (mysal üçin, eger $\varepsilon<1-r$ bolsa). Şonuň üçin (20) deňsizlikleriň ikinjisi esasynda $\forall n>n_0$ üçin $\sqrt[n]{a_n}<q$, $a_n<q^n$ $(q<1)$ deňsizlik ýerine ýeter we şonüň üçin 1.d.n. netijesi boýunça (1) hatar ýygnanýar.

Eger-de $r>1$ bolsa, onda ε sany $q=r-\varepsilon>1$ bolar ýaly almak bolar (mysal üçin, eger $\varepsilon<r-1$ bolsa). Şonuň üçin (20) deňsizlikleriň birinjisi esasynda $\forall n>n_0$ üçin $q<\sqrt[n]{a_n}$, $q^n<a_n$ $(q>1)$ deňsizlik ýerine ýeter we şonüň üçin 1.d.n. netijesi boýunça (1) hatar dargaýar. $\rhd$

8-nji teorema (Dalamberiň nyşany). Eger agzalary položitel (1) hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \tag{21}$$

predel bar bolsa, onda ol hatar $r<1$ bolanda ýygnanýar, $r>1$ bolanda bolsa dargaýar.

$\lhd$ Yzygiderligiň predeliniň kesgitlemesi we (21) deňlik esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin $\mathrm{N}\ni n_o$ tapylyp, $\forall n>n_o$ üçin

$$r-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<r+\varepsilon \tag{22}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär.

Eger $r<1$ bolsa, onda $\varepsilon>0$ sany $q=r+\varepsilon<1$ bolar ýaly saýlap almak bolar. Şonuň üçin (22) deňsizlikleriň ikinjisi esasynda $\forall n>n_o$ üçin $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q,\ a_{n+1}<qa_n\ (q<1)$ deňsizlik ýerine ýeter, ýagny ol deňsizlik $n=n_o+1,\ n=n_o+2,\ n=n_o+3,\ldots$ üçin ýerine ýeter. Şonuň esasynda

$$a_{n_o+2}<a_{n_o+1}q,\ \ a_{n_o+3}<a_{n_o+2}q<a_{n_o+1}q^2,\ \ a_{n_o+4}<a_{n_o+3}q<a_{n_o+1}q^3,\ldots \quad (23)$$

deňsizlikler ýerine ýetýär. $q<1$ bolanda geometrik progressiýanyň hatarynyň ýygnanýandygy sebäpli (1-nji mysal), $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n_o+1}q^n$ hatar hem ýygnanýar. Şonuň üçin (23) deňsizlik we 1.d.n. boýunça (1) hataryň galyndysy ýygnanýar. Şoňa görä 3-nji teoremanyň 2-nji netijesi boýunça (1) hataryň özi hem ýygnanýar.

Eger-de $r>1$ bolsa, onda ε sany $q=r-\varepsilon>1$ bolar ýaly saýlamak bolar. Şonuň üçin (22) deňsizlikleriň birinjisi esasynda $\forall n>n_o$ üçin $q<\frac{a_{n+1}}{a_n},\ a_{n+1}>qa_n\ (q>1)$. Ol bolsa n_o+1 nomerden başlap hataryň agzalarynyň artýandygyny görkeýär we şonuň üçin hataryň ýygnanmagynyň zerur şerti ýerine ýetmeýär we hatar dargaýar. ⊳

6-njy mysal. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

⊲ Bu hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}<1.$$

Şoňa görä-de Koşiniň nyşany boýunça hatar ýygnanýar. ⊳

7-**nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n n!}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

$\lhd$ $a_n = \frac{n^3}{2^n n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!} : \frac{n^3}{2^n n!} = \frac{2^n n!(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

deňlikleriň esasynda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$$

bolýandygy üçin Dalamberiň nyşany boýunça hatar ýygnanýar. $\rhd$

3. Koşiniň integral nyşany. Funksiýalaryň käbir görnüşi üçin hususy däl integralyň ýygnanmagy hataryň ýygnanmagy bilen baglanyşyklydyr.

9-njy teorema (Koşiniň integral nyşany). Eger f funksiýa $[1, +\infty)$ aralykda üznüksiz, otrisatel däl we artmaýan bolsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \qquad (24)$$

hatar we

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \qquad (25)$$

hususy däl integral birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

$\lhd$ Goý, $P_k = [k, k+1]$, $k \in \mathrm{N}$ we $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ bolsun. f funksiýanyň artmaýandygy esasynda $k \le x \le k+1$ bolanda

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k) \qquad (26)$$

deňsizlikler ýerine ýetýär we şert boýunça f funksiýa her bir P_k kesimde integrirlenýär. Şonuň üçin (26) deňsizlikleri k – dan $k+1$ çenli integrirläp we soňra jemläp,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \qquad (27)$$

deňsizlikler gelip çykýar.

Goý, (25) integral ýygnanýan we $\int_1^{\infty} f(t)\,dt = M$ bolsun, onda $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq M$ bolar. Onuň esasynda bolsa (27) deňsizlikleriň birinjisinden $S_{n+1} \leq f(1) + M$ deňsizlik gelip çykýar, ýagny $\{S_n\}$ yzygiderlik ýokardan çäklidir. Onuň kemelmeýändigi bolsa (24) hataryň agzalarynyň otrisatel däldiginden gelip çykýar. Şeýlelikde, ol yzygiderligiň predeli bardyr, ýagny (24) hatar ýygnanýar.

Goý, (24) hatar ýygnanýan bolsun we $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Şunlukda, $\{S_n\}$ yzygiderligiň kemelmeýändigi üçin $S_n \leq S$. $\forall B \in [1, +\infty)$ üçin $n + 1 \geq B$ şerti kanagatlandyrýan $\mathrm{N} \ni n$ sany görkezmek bolar. Şonuň esasynda (27) deňsizlikleriň ikinjisini ulanyp, $\forall B \in [1, +\infty)$ üçin

$$\int_1^{B} f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq S$$

deňsizligi alarys. Ondan bolsa otrisatel däl funksiýanyň hususy däl (25) integralynyň ýygnanýandygy gelip çykýar.

Eger (24) hataryň ýa-da (25) integralyň haýsy-da birisi dargaýan bolsa, onda olaryň beýlekisi hem dargaýandyr, çünki tersine güman etmegimiz teoremanyň subut edilen bölegi esasynda olaryň ikisiniň hem ýygnanýan bolmagyna alyp barýar, ol bolsa şerte garşy gelýär. ▹

Şeýlelikde, (24) hatar bilen (25) integralyň ikisi hem birwagtda ýygnanýarlar ýa-da dargaýarlar.

8-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hataryň p parametriň haýsy bahalarynda ýygnanýandygyny we dargaýandygyny anyklamaly.

$\lhd$ Bu hataryň agzalary bolan $f(n)=\frac{1}{n^p}$ üçin $f(x)=\frac{1}{x^p}$ funksiýa $x \geq 1$ bolanda položitel we $p>0$ üçin artmaýar, ýagny bu halda 9-njy teoremanyň şertleri ýerine ýetýär. Şonuň üçin şol teorema esasynda hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar, $0<p\leq 1$ bolanda bolsa dargaýar, çünki bu halda (24) hususy däl integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

görnüşi alar we ol integralyň $p > 1$ bolanda ýygnanýandygy, $0<p\leq 1$ bolanda bolsa dargaýandygy ozaldan mälimdir. Eger-de $p\leq 0$ bolsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\neq 0$ we şonuň üçin hatar dargaýar. Şeýlelikde, hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar we $p\leq 1$ bolanda bolsa dargaýar. $\rhd$

Bellik. Eger hataryň ähli agzalary otrisatel bolsa, onda ony –1 sana köpeldip, ähli agzalary položitel hatary alarys. Şonuň üçin beýle hatarlary derňemek üçin hem agzalary otrisatel däl hatarlar üçin subut edilen teoremalary ulanmak bolýar, çünki hataryň agzalaryny sana köpeltmeklik onuň ýygnanmagyna-da, dargamagyna-da täsir etmeýär.

§ 11. 3. Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlar

1.Agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatarlar. Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlary öwrenmekligi olaryň hususy haly bolan islendik iki goňşy agzalarynyň alamatlary dürli bolan hatardan başlalyň. Şeyle hatara agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatar diýilýär we ol

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots \qquad (28)$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde $\forall n \in N$ üçin $a_n > 0$.

10-njy teorema (Leýbnisiň nyşany). Eger (28) hataryň agzalary üçin

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

2°. $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in N$

şertler ýerine ýetse, onda (28) hatar ýygnanýar we

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \qquad (29)$$

$$|r_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}, \qquad (30)$$

bu ýerde S we S_n degişlilikde (28) hataryň jemi we bölekleýin jemi.

$\lhd$ Eger $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ bolsa, onda 2-nji şert esasynda $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$, ýagny $\{S_{2n}\}$ kemelmeýän yzygiderlikdir. Ondan başga-da

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

deňsizligiň esasynda ol yzygiderlik ýokardan çäklidir. Diýmek, onuň $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ predeli bardyr. Şoňa görä $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ deňlik we 1-nji şert esasynda $\{S_{2n+1}\}$ yzygiderligiň hem predeli bardyr:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Şeýlelikde, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ predel bardyr we (28) hatar ýygnanýar.

Indi (29) we (30) deňsizlikleri görkezeliň. 2-nji şert esasynda

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n-1},$$

ýagny $\{S_{2n+1}\}$ artmaýar. Şoňa görä $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ deňlikleriň we $\{S_{2n}\}$ yzygiderligiň kemelmeýändigi esasynda (29) deňsizlikler gelip çykýar. Ony $S_{2n-1} - a_{2n} \leq S \leq S_{2n} + a_{2n+1}$ görnüşde ýazyp,

$S_{2n-1} - S \le a_{2n}$ we $S - S_{2n} \le a_{2n+1}$ deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin (30) gelip çykýar. $\rhd$

9-njy mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ $(p > 0)$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

$\lhd$ Agzalarynyň alamatlary gezekleşýän bu hatar üçin $p > 0$ bolanda Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä hatar şol nyşan esasynda ýygnanýar. $\rhd$

Bu hataryň hususy haly bolan $p = 1$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

hatar hem ýygnanýar we onuň S jemi üçin (29) esasynda $n = 1$ bolanda $1/2 \le S \le 5/6$ deňsizlikler ýerine ýetýär.

2. Absolýut ýygnanýan hatarlar. (1) hatar bilen bilelikde onuň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{31}$$

hatara garalyň.

Eger (1) hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen (31) hatar ýygnanýan bolsa, onda (1) hatara absolýut ýygnanýan hatar diýilýär.

11-nji teorema. Her bir absolýut ýygnanýan hatar ýygnanýandyr.

$\lhd$ Eger (31) hatar ýygnanýan bolsa, onda Koşiniň kriterisi esasynda $\forall \varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_o$ tapylyp, $\forall n > n_o$ we $\forall p \in N$ üçin

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä n we p belgileriň şol bir bahalary we $\forall \varepsilon > 0$ üçin

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

ýagny Koşiniň kriterisi boýunça (1) hatar ýygnanýar. $\rhd$

Bellik. (1) hataryň ýygnanmagyndan (31) hataryň ýygnanmagy gelip çykmaýar. Oňa 9-njy mysaldaky hatardan $p=1$ bolanda alynýan we ýygnanýan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \tag{32}$$

hatar mysal bolup biler, çünki bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklarynyndan düzülen hatar dargaýan garmoniki hatardyr.

Eger (1) hatar ýygnanýan bolup, (31) hatar dargaýan bolsa, onda bu halda (1) hatara şertli (absolýut däl) ýygnanýan hatar diýilýär. Şeýle hatara (32) hatar mysal bolup biler.

10-njymysal. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ hataryň absolýut ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

hatar 8-nji mysal esasynda $p>1$ bolanda ýygnanýar we şonuň üçin berlen hatar absolýut ýygnanýar, 11-nji teorema esasynda bolsa ol ýöne hem ýygnanýar. ▷

4. Hatarlar bilen geçirilýän amallar. Eger (1) hatardan başga

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{33}$$

hatara garasak, onda olardan alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots \tag{34}$$

hatara (1) we (33) hatarlaryň algebraik jemi diýilýär.

12-nji teorema. Eger (1) we (33) hatarlar ýygnanýan bolsa onda (34) hatar hem ýygnanýr we

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{35}$$

deňlik dogrudyr.

$\lhd$ Eger $S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S''_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ we $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)$ bolsa, onda $S_n = S'_n \pm S''_n$ bolar we şert boýunça $\lim_{n\to\infty} S'_n = S'$, $\lim_{n\to\infty} S''_n = S''$ predeller bardyr. Şonuň üçin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n \pm \lim_{n\to\infty} S''_n = S' \pm S'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S \ ,$$

ýagny (35) ýerine ýetýär we

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S' \pm S'' \ . \ \rhd$$

Agzalary

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \ \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

deňlik boýunça kesgitlenýän

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{37}$$

hatara (1) we (33) hatarlaryň köpeltmek hasyly diýilýär.

Absolýut ýygnanýan (1) we (33) hatarlaryň köpeltmek hasyly bolan (37) hataryň hem absolýut ýygnanýandygyny we onuň jeminiň (1) we (33) hatarlaryň jemleriniň $S' \cdot S''$ köpeltmek hasylyna deňdigini belläliň.

Bellik. Tükenikli jemden tapawutlylykda hatarlar bilen ähli amallary ýerine ýetirip bolýan däldir,ýöne 12-nji teoremdan görnüşi ýaly ýygnanýan hatarlary goşup hem, aýryp hem bolýar. Şunlukda, alynýan hatarlar hem ýygnanýar. Islendik hatarda onuň agzalarynyň orunlaryny üýtgedip, şeýle hem onuň agzalaryny toparlap bolýan däldir. Mysal üçin, eger

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \tag{38}$$

hataryň agzalaryny

$$1 - (1-1) - (1-1) \ldots - (1-1) + \ldots = 1 - 0 - \ldots - 0 - \ldots$$

görnüşde ýa-da

$$(1-1) + (1-1) \ldots + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

görnüşde toparlasak, onda iki halda hem ýygnanýan hatar alynýar we olaryň jemleri degişlilikde 1 we 0 bolar. Ýöne (38) hatar dargaýar, çünki ol hatar üçin

$$S_{2n}=0\ (n=1,\ 2,\dots),\ \ S_{2n+1}=1\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots)$$

we şonuň esasynda bölekleýin jemleriň predeli ýokdur.

Eger hatar absolýut ýygnanýan bolsa, onda bu halda ol hataryň agzalarynyň orunlarynyň üýtgedilmeginden alynýan hatar hem absolýut ýygnanýar we hataryň jemi önküligine galýar.

Eger hatar şertli ýygnanýan bolsa, onda bu halda ol hataryň agzalarynyň orunlaryny üýtgedip, onuň jemi islendik sana deň bolar ýaly edip, hat-da ol hatary dargaýan hatar görnüşine hem özgertmek bolýandygyny görkezmek bolar.

G ö n ü k m e l e r

Hatarlaryň jemlerini tapmaly:

1. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots$ 2. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\dots$

3. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots$ 4. $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{84}+\dots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Deňeşdirme nyşanlaryny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{1+5^{2n}}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6+n^2}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+3}}$ 14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$.

Koşiniň integral nyşanyny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli::

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}$. 17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Dalamberiň we Koşiniň nyşanyny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{6^n}$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n(2n-1)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$. 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n$ 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{3n+1}\right)^n$

Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$. 25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{1+(-3)^{2n}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$. 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos an}{n^3}$ 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$

Hatarlaryň absolýut ýa-da şertli ýygnanmagyny derňemeli:

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n(3n+1)}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+3^n}$.

J o g a p l a r

1. $4/3$. **2.** $5/6$. **3.** 3. **4.** $4/7$. **5.** $1/2$ **6.** $1/3$. **7.** $1/4$. **8.** $3/4$.
9. Ýygnanýar. **10.** Ýygnanýar. **11.** Dargaýar. **12.** Ýygnanýar. **13.**Ýygnanýar. **14.** Dargaýar. **15.** Ýygnanýar. **16.** Ýygnanýar. **17.** Dargaýar. **18.** Dargaýar. **19.** Ýygnanýar. **20.**Ýygnanýar. **21.** Ýygnanýar. **22.** Ýygnanýar. **23.** Dargaýar. **24.** Ýygnanýar. **25.**Ýygnanýar. **26.** Ýygnanýar. **27.** Dargaýar. **27.** Ýygnanýar. **28.** Ýygnanýar. **29.** Ýygnanýar. **30.** Şertli ýygnanýar. **31, 32.** Absolýut ýygnanýar.

II. 12. FUNKSIONAL YZYGIDERLIKLER WE HATARLAR

§ 12.1. Funksional yzygiderligiň we hataryň ýygnanmagy

1. Funksional yzygiderligiň ýygnanmagy. Agzalary käbir X köplükde kesgitlenen funksiýalar bolan

$$f_1(x),\ f_2(x),...,f_n(x),... \qquad (1)$$

yzygiderlige funksional yzygiderlik diýilýär we ol $\{f_n(x)\}$ bilen belgilenilýär. $x = a \in X$ nokat üçin ol $\{f_n(a)\}$ san yzygiderligidir. Şonuň üçin nokatda funksional yzygiderligiň derňelişi san yzygiderligiňki ýalydyr.

Eger $\{f_n(a)\}$ yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda (1) yzygiderlige a nokatda ýygnanýan funksional yzygiderlik diýilýär. Eger $\{f_n(a)\}$ yzygiderlik dargaýan bolsa, onda (1) yzygiderlige a nokatda dargaýan funksional yzygiderlik diýilýär.

Eger (1) yzygiderlik her bir $x \in X$ nokatda ýygnanýan bolsa, onda onuň predeli käbir $f(x)$ funksiýa bolar we oňa (1) yzygiderligiň predeli diýilýär we ol

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X \qquad (2)$$

görnüşde ýa-da gysgaça $f_n \underset{E}{\to} f$ görnüşde ýazylýar.

Şunlukda, X köplüge yzygiderligiň ýygnanma oblasty diýilýär.

Aýdylanlardan we (2) ýazgydan peýdalanyp, yzygiderligiň X köplükde ýygnanmagyna şeýle kesgitleme bermek bolar.

Eger $\forall\varepsilon > 0$ we her bir $x \in X$ üçin $\mathrm{N} \ni n_o = n_o(\varepsilon, x)$ tapylyp, $\forall n > n_o$ üçin $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{f_n(x)\}$ yzygiderlige X köplükde $f(x)$ funksiýa ýygnanýan yzygiderlik diýilýär.

Bu kesgitlemede $n_o = n_o(\varepsilon, x)$ ýazylmagynyň sebäbi, ol $\forall\varepsilon > 0$ we her bir $x \in \mathrm{E}$ üçin olara degişli n_o belginiň bolmalydygyny aňladýar.

1-nji mysal. $f_n(x) = \dfrac{1+n}{n+x^2}$ yzygiderligiň ýygnanma oblastyny we predelini tapmaly.

◁ Yzygiderligiň ähli agzalary $\boldsymbol{R}$ köplükde kesgitlenendir we her bir $x \in \boldsymbol{R}$ üçin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n+x^2} = 1.$$

Diýmek, yzygiderligiň ýygnanma oblasty ol yzygiderligiň agzalarynyň kesgitlenme oblasty bolan $\boldsymbol{R}$ bilen gabat gelýär we ol yzygiderligiň predeli $f(x) = 1$ funksiýa bolar. ▷

2.Funksional hataryň ýygnanmagy. Agzalary käbir X köplükde kesgitlenen $u_1(x),\ u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ funksiýalar bolan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{3}$$

hatara funksional hatar diýilýär.

Ol hatardan $x = a \in X$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = u_1(a) + u_2(a) + \ldots + u_n(a) + \ldots \tag{4}$$

hatar san hatarydyr. Eger bu hatar ýygnanýan bolsa, onda (3) hatara a nokatda ýygnanýan hatar, a nokada bolsa onuň ýygnanma nokady diýilýär.

San hatary üçin bolşy ýaly, funksional hatary derňemek hem agzalary ol funksional hataryň bölekleýin jemleri bolan

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \tag{5}$$

yzygiderligi derňemeklige getirilýär. Şeýle hem her bir (1) funksional yzygiderlige

$$f_1(x) + \left[f_2(x) - f_1(x)\right] + \ldots + \left[f_n(x) - f_{n-1}(x)\right] + \ldots$$

hatar degişli bolup, $\{f_n(x)\}$ onuň bölekleýin jeminiň yzygiderligidir, ýagny $S_n(x) = f_n(x)$.

Aýdylanlaryň esasynda funksional hatar üçin subut edilýän her bir teoremadan funksional yzygiderlik üçin degişli teoremany we tersine, her bir funksional yzygiderlik üçin subut edilýän teoremadan funksional hatar üçin degişli teoremany almak bolar.

Eger (3) hataryň bölekleýin jeminiň $\{S_n(x)\}$ yzygiderliginiň her bir $x \in X$ nokatda $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ predeli bar bolsa, onda (3) hatara X köplükde ýygnanýan hatar, X köplüge bolsa onuň ýygnanma oblasty diýilýär. Şunlukda, $S(x)$ funksiýa (3) hataryň jemi diýilýär we ol şeýle ýazylýar:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X . \tag{6}$$

Funksional hataryň ilkinji n agzalarynyň taşlanmagyndan alynýan hatara ol hataryň galyndysy diýilýär.

Eger (3) funksional hatar X köplükde ýygnanýan bolsa, onda onuň galyndysy hem şol köplükde ýygnanýar. Bu halda hataryň $S(x)$ we galyndysynyň $r_n(x)$ jemleri hem-de $S_n(x)$ bölekleýin jemi üçin

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \ x \in X \tag{7}$$

deňlik dogrudyr. Ondan bolsa

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \ x \in X$$

deňlik gelip çykýar.

§ 12.2. Funksional yzygiderligiň we hataryň deňölçegli ýygnanmagy

1. Funksional yzygiderligiň deňölçegli ýygnanmagy. Eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\mathrm{N} \ni n_o = n_o(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_o$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda (1) yzygiderlige X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanýan yzygiderlik diýilýär. Ol gysgaça şeýle ýazylýar:

$$f_n(x) \underset{\rightarrow}{\rightarrow} f(x), \ x \in X \quad \text{ýa-da} \quad f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

Bu kesgitlemede $n_o = n_o(\varepsilon)$ ýazylmagynyň sebäbi n_o belginiň diňe ε sana bagly bolup, ýöne x ululyga bagly däldigini görkezýär.

Bu kesgitlemeden görnüşi ýaly (1) yzygiderligiň X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanmagyndan $\rho_n = \sup\limits_X |f(x) - f_n(x)|$ üçin

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 \tag{9}$$

deňlik gelip çykýar. Tersine hem dogrudygy aňsat görkezilýär.

Şonuň üçin (1) yzygiderligiň X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek üçin (9) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.

1-nji mysal. $\{x^n\}$ yzygiderligiň 1) $X = [0, 1]$; 2) $X = [0, b]$ $(b < 1)$ köplüklerde ýygnanmagyny derňemeli.

◁ 1) $0 \le x < 1$ bolanda $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ we $x = 1$ bolanda onuň predeliniň bire deňligi sebäli, $\{x^n\}$ yzygiderligiň predeli

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \ \textit{bolanda}, \\ 1, & x = 1 \ \textit{bolanda} \end{cases}$$

bolar. Şonuň üçin $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,\,1]} |f(x) - f_n(x)| = 1$ we bu halda (9) ýerine ýetmeýär, şoňa görä hatar deňölçegsiz ýygnanýar.

2) $x \in [0, b]$ $(b < 1)$ bolanda $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$ bolýandygy sebäpli,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\,1]} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\,1]} |x^n| = \lim_{n\to\infty} b^n = 0.$$

Şonuň üçin bu halda hatar deňölçegli ýgnanýar. ▷

2. Funksional hataryň deňölçegli ýygnanmagy. Eger (3) funksional hataryň bölekleýin jeminiň $\{S_n(x)\}$ yzygiderligi X köplükde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda ol hatara X köplükde deňölçegli ýygnanýan hatar diýilýär.

Eger $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ we $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ bolsa, onda (3) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy $\forall \varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_o = n_o(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_o$ we $\forall x \in X$ üçin

$$\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \quad \text{ýa-da} \quad \left|r_n(x)\right| < \varepsilon \tag{8}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegini aňladýar.

Şeýlelikde, funksonal yzygiderligiň deňölçegli ýygnanma kriterisi esasynda (3) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy üçin $\rho_n = \sup\limits_X \left|r_n(x)\right|$ üçin $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

2-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1} - x^n\right)$ hataryň 1) $X = [0, 1]$; 2) $X = [0, b]$ $(b < 1)$ köplüklerde ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Bu hataryň bölekleýin jemi üçin

$$S_n(x) = (1-x) + (x - x^2) + \ldots + (x^{n-1} - x^n) = 1 - x^n$$

deňligiň esasynda 1) $x \in [0, 1]$ bolanda

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

bolar. Şonuň üçin bu halda $\rho_n = \sup\limits_{[0,\ 1]} \left|r_n(x)\right| = 1$ we şoňa görä hatar deňölçegsiz ýygnanýar. 2) $x \in [0, b]$ $(b < 1)$ bolanda

$$\rho_n = \sup_{[0,\ b]} \left|r_n(x)\right| = \sup_{[0,\ b]} \left|x^n\right| = b^n \text{ we } \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 .$$

Şonuň üçin bu halda hatar deňölçegli ýygnanýar. ▷

Funksional hataryň deňölçegli ýygnanma kriterisi aşakdaky subutsyz getirilýän teoremada beýan edilýär.

1-nji teorema (Koşiniň kriterisi). (3) hatryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy üçin $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\mathrm{N} \ni n_o = n_o(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_o \wedge \forall p \in \mathrm{N}$ we $\forall x \in X$ üçin

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Indi bolsa hataryň geňölçegli ýygnanma nyşanyny getireliň.

2-nji teorema (Weýerştras). Eger $\forall n > n_o \geq 1$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|u_n(x)| \leq a_n \tag{10}$$

deňsizlik ýerine ýetip, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ san hatar ýygnanýan bolsa, onda (3) hatar X köplükde deňölçegli ýygnanýar.

◁ Şerte görä, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ san hataryň ýygnanýandygy sebäpli, san hatary üçin Koşiniň kriterisi esasynda $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\mathrm{N} \ni n_o$ tapylyp, $\forall n > n_o$ we $\forall p \in \mathrm{N}$ üçin $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu deňsizligiň we (10) şertiň esasynda $\forall n > n_o$, $\forall p \in \mathrm{N}$ we $\forall x \in X$ üçin

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon . \tag{11}$$

Şonuň üçin 1-nji teorema esasynda hatar deňölçegli ýygnanýar. ▷

3-**nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ hataryň $[-1,\ 1]$ kesimde deňölçegli ýygnanýanmagyny derňemeli.

◁ $\forall x \in [-1,\ 1]$ üçin $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ we $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hatar ýygnanýar. Şoňa görä Weýerştrasyň nyşany esasynda hatar $[-1,\ 1]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar. ▷

Weýerştrasyň teoremasyndan şeýle netije gelip çykýar.

1-nji netije. Eger $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ san hatary absolýut ýygnanýan bolsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

hatarlar islendik aralykda deňölçegli ýygnanýarlar.

◁ $\forall x \in \boldsymbol{R}$ üçin $|b_n \sin nx| \le |b_n|$ we $|b_n \cos nx| \le |b_n|$ deňsizlikleriň ýerine ýetýändigi we $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ san hataryň ýygnanýandygy sebäpli, subudy 2-nji teoremadan gelip çykýar. ▷

4-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$ hataryň $\boldsymbol{R}$ köplükde deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmeli.

◁ $b_n = \dfrac{1}{n^2} > 0$ bolany üçin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ san hatary absolýut ýygnanýar. Şonuň üçin hem garalýan hatar 1-nji netije esasynda $\boldsymbol{R}$-de deňölçegli ýygnanýar. ▷

§ 12.3. Deňölçegli ýygnanýan funksional hatarlaryň häsiýetleri

1. Hataryň jeminiň üznüksizligi. Deňölçegli ýygnanýan hatarlaryň wajyp häsiýetleriniň bardygyny görkezeliň.

7-nji teorema. Eger (3) hatar agzalary üznüksiz bolan X aralykda deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda ol hataryň $S(x)$ jemi şol aralykda üznüksizdir.

$\lhd$ (3) hataryň X aralykda deňölçegli ýygnanýandygy sebäpli, onuň $S_n(x)$ bökekleýin jemi we $r_n(x)$ galyndysy ücin şol aralykda, hususan-da bellenen erkin $a \in X$ nokatda şeýle deňlikler ýerine ýetýär:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \; S(a) = S_n(a) + r_n(a).$$

Olaryň ikinjisini birinjisiden agzalaýyn aýryp alarys:

$$S(x) - S(a) = S_n(x) - S_n(a) + r_n(x) - r_n(a).$$

Bu deňlikden bolsa

$$|S(x) - S(a)| \le |S_n(x) - S_n(a)| + |r_n(x)| + |r_n(a)| \qquad (12)$$

deňsizlik gelip çykýar. Üznükziz funksiýalaryň tükenikli jemi hökmünde $S_n(x)$ funksiýa X aralykda üznüksizdir, ýagny $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta > 0$ tapylyp, $|x - a| < \delta$ bolanda $|S_n(x) - S_n(a)| < \varepsilon/3$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şeýle hem hataryň deňölçegli ýygnanýandygy esasynda, $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\mathrm{N} \ni n_o$ tapylyp, $\forall n > n_o$ we $\forall x \in E$ üçin $|r_n(x)| < \varepsilon/3$, hususan-da $|r_n(a)| < \varepsilon/3$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin (12) deňsizlik esasynda $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta > 0$ tapylyp, $|x - a| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x \in X$ üçin

$$|S(x) - S(a)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär we ol $S(x)$ funksiýanyň erkin a nokatda üznüksizdigini, ýagny X aralykda üznüksizdigini görkezýär. $\rhd$

Bellik. Teoremanyň tassyklamasy esasynda

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to a} S(x) = S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) \qquad (13)$$

deňlik ýerine ýetýär we ol teoremanyň şertlerinde hatarda agzalaýyn predele geçip bolýandygyny görkezýär.

Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Eger ähli agzalary X aralykda üznüksiz bolan hataryň jemi üznüksiz funksiýa bolmasa, onda ol hatar şol aralykda deňölçegli ýygnanýan däldir.

◁ Tersine güman edeliň, ýagny hatar X aralykda deňölçegli ýygnanýan bolsun. Onda 7-nji teorema boýunça hataryň jemi şol aralykda üznüksiz bolup, şerte garşy gelýär we alnan garşylyk netijäni subut edýär. ▷

5-nji mysal. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ funksiýanyň san okunda üznüksizdigini görkezmeli.

◁ Hataryň ähli agzalary san okunda üznüksiz we hatar 4-nji mysal esasynda deňölçegli ýygnanýar. Şonuň üçin 7-nji teorema boýunça onuň jemi bolan $S(x)$ funksiýa şol köplükde üznüksizdir. ▷

2. Hataryň agzalaýyn integrirlenmegi.

8-nji teorema. Eger ähli agzalary $[a,\, b]$ kesimde üznüksiz (3) hatar şol kesimde $S(x)$ jeme deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda $S(x)$ funksiýa $[a,\, b]$ kesimde integrirlenýär, $a \le c \le x \le b$ üçin

$$\int_c^x S(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt \tag{14}$$

deňlik dogrudyr we bu deňligiň sag bölegindäki hatar $[a,\, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

◁ Teoremanyň şertlerinde $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ we $\rho_n=\sup_{[a,\, b]}\left|r_n(x)\right|$ üçin $\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$. Şonuň esasynda $n\to\infty$ bolanda

$$\left|\int_c^x S(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt\right|=\left|\int_c^x S(t)\,dt=\int_c^x\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right|=$$

$$=\left|\int_c^x S(t)\,dt-\int_c^x S_n(t)\right|=\left|\int_c^x\left[S(t)-S_n(t)\right]dt\right|\le$$

$$\le\int_a^b\left|S(t)-S_n(t)\right|dt\le(b-a)\rho_n\to 0,$$

ýagny (14) deňlik ýerine ýetýär. ⊳

Eger (14) deňligi

$$\int_c^x\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt,\quad c,x\in[a,\ b]$$

görnüşde ýazsak, onda bu deňlik hatary agzalaýyn integrirläp bolýandygyny görkezýär.

4. Hataryň agzalaýyn differensirlenmegi.

9-njy teorema. Eger ähli agzalary $[a,\ b]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän (13) hatar ýygnanýan bolsa we

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) \tag{15}$$

hatar $[a,\ b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda (3) hatar hem $[a,\ b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar, onuň $S(x)$ jemi şol kesimde üznüksiz differensirlenýär we

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x). \tag{16}$$

⊲ Eger $[a,\ b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan (15) hataryň jemini $p(x)$ bilen belgilesek, onda ol $[a,\ b]$ kesimde üznüksizdir. 8-nji teorema boýunça (15) hatary agzalaýyn integrirlemek bolar:

$$\int_a^x p(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)\,dt\ (a\le x\le b).$$

Nýuton-Leýbnisiň formulasy boýunça ony

$$\int_a^x p(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x) - u_n(a)\right] = S(x) - S(a)$$

görnüşde ýazmak bolar. Ondan bolsa

$$S(x) = \int_a^x p(t)dt + S(a)$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňligiň iki bölegini hem differensirläp alynýan $S'(x) = p(x)$ deňlikden we $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ deňlikden (16) deňlik gelip çykýar. ▷

Eger (52) deňligi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

görnüşde ýazsak, onda ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatary agzalaýyn differensirläp bolýandygyny aňladýar.

6-njy mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ hataryň jeminiň önümini tapmaly.

◁ $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ deňsizligiň we $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ san hataryň ýygnanýandygy sebäpli, Weýerştras nyşany boýunça hatar deňölçegli ýygnanýandyr. Goý, $S(x)$ onuň jemi bolsun. Edil ýokardaky ýaly, Weýerştras nyşany boýunça

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

hatar hem deňölçegli ýygnanýandyr. Şonuň esasynda hatar ücin 15-nji teoremanyň ähli şertleri ýerine ýetýär we şol teorema boýunça ol hatary agzalayyn differensirläp bolýandyr, ýagny

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \ ▷$$

§ 12.4. Derejeli hatarlar

1. Derejeli hataryň kesgitlenişi we ýygnanmagy. Funksional hatarlaryň içinde öwrenmekde has ýönekeýi we şonuň bilen birlikde amalyýetde köp ulanylýany

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{17}$$

görnüşdäki hatardyr. Oňa derejeli hatar, c_n sanlara bolsa onuň koeffisiýentleri diýilýär. (17) hataryň huusy görnüşi bolan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{18}$$

hatar hem derejeli hatardyr. Bu derejeli hatarlary derňemeklik birmeňzeşlikde alnyp barylýandygy sebäpli, ýönekeýlik üçin biz esasan (18) hatary derňejekdiris.

Derejeli hataryň funksional hatarlaryň hususy haly bolýandygy sebäpli, funksional hatarlar üçin girizilen ähli düşünjeler, subut edilen teoremalar derejeli hatarlara hem degişlidir. Ýöne käbir düşünjeler diňe derejeli hatarlara mahsusdyr. Şonuň üçin biz şolara aýratyn garajakdyrys.

10-njy teorema (Abel). Eger (18) derejeli hatar $x_o \neq 0$ nokatda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar $|x| < |x_o|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin hem ýygnanýar, özünem absolýut ýygnanýar.

$\lhd$ Şerte görä, (55) hatardan $x = x_o$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^n \tag{19}$$

san hatary ýygnanýar. Şoňa görä-de hataryň ýygnanmagynyň zerur şerti esasynda, (19) hataryň umumy agzasynyň predeli nola deňdir. Şoňa görä predeliň häsiýeti boýunça $\{c_n x_o^n\}$ yzygiderlik çäklidir, ýagny $M > 0$ san tapylyp, $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $|c_n x_o^n| \le M$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu deňsizligiň esasynda

$$\left|c_n x^n\right| = \left|c_n x_o^n\right|\left|\frac{x}{x_o}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_o}\right|^n . \qquad (20)$$

Eger $|x| < |x_o|$ bolsa, onda $q = \left|\frac{x}{x_o}\right| < 1$ we şonuň üçin hem $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ hatar ýygnanýar.Şol sebäpli (20) deňsizlik we deňeşdirme teoremasy esasynda (18) hatar $|x| < |x_o|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin absolýut ýygnanýar. Şonuň üçin ol hatar ýöne hem ýygnanýar. ⊳

Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Eger (18) hatar x_1 nokatda dargaýan bolsa, onda ol hatar $|x| > |x_1|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin hem dargaýar.

⊲ Tersine güman edeliň. Goý, hatar $|\tilde{x}| > |x_1|$ şerti kanagatlandyrýan käbir $\tilde{x}$ üçin ýygnanýan bolsun. Onda $|x_1| < |\tilde{x}|$ deňsizligiň esasynda 10-njy teorema boýunça hatar x_1 nokatda hem ýygnanýan bolar, ol bolsa şerte garşy gelýär we bu garşylyk teoremany subut edýär. ⊳

Bu teoremanyň we netijäniň esasynda, eger derejeli hatar x_o nokatda ýygnanýan bolsa, onda $(-|x_o|,\ |x_o|)$ interwalyň ähli nokatlarynda ol hatar absolýut ýygnanýar, eger-de x_1 nokatda dargaýan bolsa, onda $(-|x_1|,\ |x_1|)$ interwalyň daşynda ýerleşýän ähli nokatlarda ol hatar dargaýar.

2. Derejeli hataryň ýygnanma radiusy we interwaly. Eger (18) hatar $|x| < R$ bolanda ýygnanýan bolup, $|x| > R$ bolanda dargaýan bolsa, onda R sana ol hataryň ýygnanma radiusy, $(-R,\ R)$ interwala bolsa ýygnanma interwaly diýilýär.

(18) görnüşdäki islendik derejeli hatar $z = 0$ nokatda ýygnanýar, çünki ol nokatda hataryň birinji agzasyndan beýleki ähli agzalary nola deň we şonuň esasynda onuň bölekleýin jeminiň predeli bardyr. Ýöne derejeli hatar ähli san okunda hem, san okunda

ýerleşýän interwalda hem ýygnanýan bolup biler. Onuň şeýledigini aşakdaky mysallar görkezýär.

8-nji mysal. Derejeli hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \qquad \text{ç) } \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n .$$

$\lhd$ $\forall x$ üçin

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

ýagny hatar Dalamberiň nyşany boýunça san okunda ýygnanýar;

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|,$$

ýagny hatar Dalamberiň nyşany boýunça $|x|<1$ bolanda ýygnanýar, $|x|>1$ bolanda bolsa dargaýar;

$$\text{ç) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

şoňa görä hatar Dalamberiň nyşany boýunça dargaýar. Diýmek, hatar diňe bir $z=0$ nokatda ýygnanýar. $\rhd$

Bellik. Eger (18) derejeli hatar diňe bir nokatda ýygnanýan bolsa, onda $R=0$, eger-de ol hatar ähli x üçin ýygnanýan bolsa, onda $R=\infty$ hasap edilýär.

Beýleki hallarda (18) hataryň ýygnanma radiusynyň onuň koeffisiýentleri arkaly tapylyş formulasyny görkezeliň.

Goý, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ üçin $c_n \neq 0$ we

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{R} \tag{21}$$

predel bar bolsun. Onda Dalamberiň nyşanyny $\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n x^n\right|$ hatara ulanyp alarys:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|c_nx^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\left|x\right|=\frac{|x|}{R}.$$

Şonuň üçin hatar $|x|<R$ bolanda ýygnanýar, $|x|>R$ bolanda dargaýar, ýagny R (18) hataryň ýgnanma radiusydyr. (21) deňligiň esasynda ýyganma radiusy tapmak üçin şeýle formula alynýar:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{22}$$

Bellik. (17) derejeli hataryň hem ýygnanma radiusy (22) formula boýunça tapylýar, ýöne ol hataryň ýygnanma interwaly $|x-a|<R$ deňsizlikden kesgitlenýär, ýagny $(a-R,\ a+R)$ interwaldyr.

3. Derejeli hataryň jeminiň üznüksizligi we integrirlenmegi.

11-nji teorema. Eger $R>0$ san (18) hataryň ýygnanma radiusy bolsa, onda $0<r<R$ şerti kanagatlandyrýan $\forall r$ üçin ol hatar $[-r,\ r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

⊲ Abeliň teoremasy boýunça (18) hatar $x=r$ nokatda absolýut ýygnanýar, ýagny

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

san hatary ýygnanýar we şoňa görä $|x|\le r$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $\left|c_nx^n\right|\le|c_n|r^n$ deňsizligiň esasynda, Weýerştrasyň nyşany boýunça (18) hatar $|x|\le r$ üçin, ýagny $[-r,\ r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar. ⊳

Bu teorema gysgaça şeýle okalýar: özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde derejeli hatar deňölçegli ýygnanýar. Ol teoremadan şeýle netijeler alynýar:

1-nji netije. Özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde derejeli hataryň $S(x)$ jemi üznüksiz funksiýadyr.

2-nji netije. Derejeli hatary özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde agzalaýyn integrirlemek bolar.

Bellik. 11-nji teorema esasynda eger $R > 0$ san (17) hataryň ýygnanma radiusy bolsa, onda $0 < r < R$ şerti kanagatlandyrýan $\forall r$ üçin ol hatar $\left[a-r,\ a+r\right]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

Bu belligiň esasynda ahyrky teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

3-nji netije. (17) derejeli hataryň $S(x)$ jemi özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde üznüksiz, integrirlenýär we ýygnanma interwalyna degişli bolan $\forall x$ üçin

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x c_n (t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}. \qquad (23)$$

3. Derejeli hataryň jeminiň differensirlenmegi.

12-nji teorema. Eger $R > 0$ san (18) hataryň ýygnanma radiusy we $S(x)$ ol hataryň jemi bolsa, onda ol hatardan agzalaýyn differensirlenip alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad (24)$$

hataryň hem ýygnanma radiusy R bolar we $\forall x \in (-R,\ R)$ üçin

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}. \qquad (25)$$

$\lhd$ Ilki (24) hataryň $(-R,\ +R)$ interwalda tutuşlygyna ýerleşýän isendik $\left[-r,\ +r\right]$ kesimde ýygnanýangyny görkezeliň. Abeliň teoremasy boýunça $r < x_o < R$ deňsizligi kanagatlandyrýan bellenen $x_o \in (-R,\ R)$ üçin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^n$ san hatary ýygnanýar. Şonuň üçin şeýle $K > 0$ san tapylyp, $\forall n$ üçin $\left|c_n x_o^n\right| \le K$ deňsizlik ýerine ýetýär. Onda $|x| \le r$ bolanda

$$\left|nc_n x^{n-1}\right| \le \left|nc_n r^{n-1}\right| = n\left|c_n x_o^{n-1}\right|\left|\frac{r}{x_o}\right|^{n-1} \le n\frac{K}{x_o}q^{n-1} \qquad (26)$$

deňsizlik ýerine ýetýär, bu ýerde $q = r/x_o < 1$. Şeýlelikde, $|x| \le r$ bolanda (24) hataryň agzalary

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{K}{x_o}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

san hatarynyň agzalaryndan uly däldir. Bu hatar Dalamberiň nyşany boýunça ýygnanýar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q < 1.$$

Şonuň üçin Weýerştrasyň nyşany boýunça (24) hatar deňölçegli ýygnanýar we 9-njy torema boýunça ony agzalaýyn differensrlemek bolar, ýagny (25) deňlik islendik $x \in [-r,\ r]$ üçin ýerine ýetýär. Şonuň esasynda (24) hatar $(-R,\ +R)$ interwalyň her bir nokadynda ýygnanýar we (25) deňlik ýerine ýetýär.

$(-R,\ +R)$ interwalyň daşynda (24) hataryň dargaýandygyny görkezmek maksady bilen tersine, hatar $x_2 > R$ nokatda ýygnanýar diýip güman edeliň. (24) hatary $R < x_1 < x_2$ üçin $[0,\ x_1]$ kesimde integrirläp, (18) hatary alarys. Ol hatar $x_1 > R$ nokatda ýygnanýan bolmaly, bu bolsa şerte sarşy gelýär. Şeýlelikde, (24) hatar $|x| < R$ bolanda ýygnanýar we $|x| > R$ bolanda dargaýar. Diýmek, $(-R,\ +R)$ ol hataryň hem ýygnanma interwalydyr. ▹

Bellik. Eger (25) deňligi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

görnüşde ýazsak, onda ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatary ýygnanma interwalynyň islendik içki nokadynda agzalaýyn differensirläp boýandygyny we differensirlenip alnan hataryň hem ýygnanma radiusynyň R bolýandygyny görkezýär.

Bu bellik esasynda 12-nji teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Derejeli hatary ýygnanma interwalynda islendik gezek agzalaýyn differensirlemek bolar.

§ 12.5. Teýloryň hatary we onuň ulanylyşy

1.Teýloryň hatary. Goý, $f(x)$ funksiýa $(a-R,\ a+R)$ interwalda $(x-a)$-nyň derejeleri boýunça hatara dagydylýan bolsun, ýagny

$$f(x) = A_o + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_2(x-a)^k + \ldots$$
$$(|x-a| < R)\,. \qquad (27)$$

Bu hataryň koeffisiýentleriniň nähili tapylýandygyny görkezmek maksady bilen ol hatary ýygnanma interwalynda differensirläliň:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 +$$
$$+4A_4(x-a)^3 + \ldots + kA_k(x-a)^{k-1} + \ldots;$$
$$f''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-a) +$$
$$+3\cdot 4A_4(x-a)^2 + \ldots + k(k-1)A_k(x-a)^{k-2} + \ldots;$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3A_3 + 2\cdot 3\cdot 4A_4(x-a) + \ldots +$$
$$+k(k-1)(k-2)A_k(x-a)^{k-3} + \ldots;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(k)}(x) = k(k-1)(k-2)\ldots 2A_k + (k+1)k\ldots 2(x-a) + \ldots\ .$$

Bu deňlikleriň ählisinde $x = a$ goýup alarys:

$$f(a) = A_o,\ f'(a) = A_1,\ f''(a) = 2A_o,\ f'''(a) = 2\cdot 3A_3,$$
$$,\ldots,\ f^{(k)}(a) = 2\cdot 3\ldots(k-1)kA_k\,.$$

Bu deňliklerden (27) hataryň koeffisiýentlerini taparys :

$$A_o = f(a),\ A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (k = 2, 3, \ldots)\,. \qquad (28)$$

Bu aňlatmalary (27) hatarda goýup alarys:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots \; . \tag{29}$$

Bu deňligiň sagyndaky hatara Teýloryň hatary diýilýär. Ondan $a = 0$ bolanda alynýan

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \tag{30}$$

hatara Makloreniň hatary diýilýär.

Funksiýany Teýloryň derejeli hatary görnüşinde aňlatmagyň zerur we ýeterlik şertini görkezmek üçin Teýloryň formulasyna garalyň. Eger $S_n(x)$ Teýloryň hatarynyň bölekleýin jemi bolsa, onda Teýloryň formulasyny

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \tag{31}$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $r_n(x)$ Teýloryň formulasynyň galyndy agzasy:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \;\; (c \in (a-R,\; a+R)). \tag{32}$$

(31) deňlikden görnüşi ýaly Teýloryň hatarynyň $f(x)$ funksiýa ýygnanmagy üçin

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \tag{33}$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Funksiýanyň Teýloryň hatary boýunça aňladylmagynyň amalyýetde ulanmak üçin amatly bolan ýeterlik şerti aşakdaky teoremada beýan edilýär.

13-nji teorema. Eger $|x-a| < R$ şerti kanagatlandyrýan ähli x üçin $f(x)$ funksiýanyň önümleriniň hemmesi şol bir $K > 0$ san bilen çäklenen bolsa, ýagny

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le K \;\; (n = 1,\, 2, \ldots) \tag{34}$$

bolsa, onda ol funksiýa üçin Teýloryň hatary $(a-R,\ a+R)$ interwalda ýygnanýar we onuň jemi $f(x)$ deňdir.

$\lhd$ Teoremanyň şertlerinde (32) deňlikden alarys:

$$|r_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(c)\right|\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le K\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \quad (|x-a|<R). \qquad (35)$$

Dalamberiň nyşany boýunça $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{KR^{n+1}}{(n+1)!}$ hataryň ýygnanýandygy sebäpli, ol hataryň umumy agzasy nola ymtylýar, ýadny $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle n_o nomer tapylyp, $\forall n>n_o$ üçin $\left|\frac{KR^{n+1}}{(n+1)!}\right|<\frac{\varepsilon}{K}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şeýlelikde, $\forall\varepsilon>0$, $\forall n>n_o$ we $\forall x\in(a-R,\ a+R)$ üçin $|r_n(x)|<\varepsilon$, ýagny $f(x)$ funksiýanyň Teýlor hatarynyň şol funksiýa ýgnanmagynyň zerur we ýeterlik şerti bolan (33) deňlik ýerine ýetýär. $\rhd$

Subut etmezden funksiýanyň Teýloryň hataryna dagydylmasynyň ýeke-täkdigini belläliň.

2. Funksiýalaryň Teýloryň hataryna dagydylyşy. Käbir elementar funksiýalaryň Teýloryň hataryna ($a=0$ halda) dagydylyşynyň mysallaryny görkezeliň.

1) $f(x)=(1+x)^p$**,** p – hakyky san.

Bu funksiýanyň önümlerini tapalyň:

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1};$$
$$f''(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2};$$
$$f'''(x)=p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3};$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$f^{(n)}(x)=p(p-1)\ldots(p-(n-1))(1+x)^{p-n}.$$

Onda

$$f(0)=1,\ f'(0)=p,\ f''(0)=p(p-1),\ f'''(0)=p(p-1)(p-2),$$
$$,\ldots,\ f^{(n)}(0)=p(p-1)\ldots[p-(n-1)]$$

bolar. Şoňa görä (30) formula boýunça $f(x)=(1+x)^p$ funksiýa üçin Teýloryň hatary şeýle görnüşde bolar:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n\,. \qquad (36)$$

(22) formulany ulanyp, bu hataryň ýygnanma radiusyny tapalyň:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)(n+1)!}{p(p-1)\ldots(p-n+1)(p-n)n!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{p-n}\right|=1\,.$$

Seýlelikde, (36) hatar $|x|<1$ bolanda ýygnanýar. Ol hataryň jeminiň $|x|<1$ bolanda $(1+x)^p$ funksiýa deňdigini, ýagny ol funksiýa üçin

$$(1+x)^p=1+\frac{p}{1}x+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (37)$$

Teýloryň formulasyny görkezmek bolar.

Bu formuladan peýdalanyp, dürli funksiýalaryň derejeli hatara dagydylyşyny görkezmek bolar. Mysal üçin, $p=-1$ bolanda (37) formuladan $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ funksiýanyň hatara dagydylyşyny alarys:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots\ (|x|<1)\,. \qquad (38)$$

Eger bu formulada x-i $(-x)$ bilen çalşyrsak, onda $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ funksiýanyň derejeli hatara dagydylyşyny alarys:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots\ (|x|<1)\,. \qquad (39)$$

(38) we (39) deňlikleri 0-dan x-a çenli integrirläp, degişlilikde

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\ldots\ \ (|x|<1)\,, \qquad (40)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^k}{k} - \ldots \quad (|x| < 1) \tag{41}$$

formulalary alarys.

2) $f(x) = e^x$ funksiýanyň islendik önümi üçin $(-r,\ r)$ interwalda $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^r$ deňsizligiň ýerine ýetýändigi sebäpli, ol funksiýa üçin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{42}$$

formulany alarys. Bu deňligiň esasynda

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{43}$$

formulany, olardan bolsa $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ deňlikler esasynda

$$chx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad shx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{44}$$

formulalary alarys.

3) $f(x) = \sin x$ we 4) $f(x) = \cos x$ funksiýalaryň ikisi üçin hem $\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$ bolýandygy sebäpli, olaryň ikisi hem Teýloryň hataryna dagydylýar:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{45}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{46}$$

(42)-(46) hatarlaryň hemmesi san okunda ýygnanýar.

3. Teýloryň hatarynyň ulanylyşy. Hatarlar dürli takmyn hasaplamalarda, hususan-da, trigonometrik we görkezijili funksiýalaryň bahalaryny, sanlaryň logarifmlerini we kökleri, kesgitli integrallary hasaplamakda giňden ulanylýar. Logarifm we görkezijili funksiýalaryň bahalaryny hasaplamakda (40), (41) we (42), (43), sinusyň we kosinusyň bahalaryny hasaplamakda (45) we (46), kökleri hasaplamakda (37) formulalary ulanmak bolar. Integraly takmyn hasaplamak üçin ilki integral astyndaky funksiýa hatara dagydylýar we soňra ol hatar agzalaýyn integrirlenilýär. Olary myssallarda görkezeliň.

9-njy mysal. $\cos 1$ sany 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

$\lhd$ $x=1$ bolanda (46) formuladan alarys:

$$\cos 1 = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}+\frac{1}{40320}-\ldots\ .$$

Bu hatar alamatlary gezekleşýän hatapdyr we onuň üçin Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şeýle hataryň jemi onuň ilkinji n agzalarynyň jemi bilen çalşyrylanda alnan hatanyň ilkinji taşlanan agzanyň modulyndan uly däldigi we $\frac{1}{40320}<\frac{1}{10000}=0,0001$ bolýandygy üçin, berlen takyklykda hasaplamak üçin hataryň ilkinji dört agzalarynyň jemini almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\cos 1 \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}=\frac{389}{720}\approx 0,5403. \rhd$$

10-njy mysal. $\sqrt{26}$ sany 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

$\lhd$ (38) formulany ulanmak üçin, ilki ony özgerdeliň:

$$\sqrt{26}=\sqrt{25+1}=\sqrt{25(1+1/25)}=5(1+1/25)^{1/2}.$$

$x=1/25$ we $p=1/2$ üçin (38) formuladan alarys:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{25}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{25}\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{25}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{25}\right)^4+\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2\cdot 25}-\frac{1}{2^3\cdot 25^2}+\frac{1}{2^4\cdot 25^3}-\frac{5}{2^7\cdot 25^4}+\ldots\ .$$

Bu hatar ikinjiden başlap agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatar we onuň üçin Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä $\frac{1}{2^4\cdot 25^3}=\frac{1}{250000}<0,0001$ bolýandygy üçin hataryň ilkinji üç agzalaryny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{50}-\frac{1}{8\cdot 625}+\frac{5099}{5000}\ .$$

Şonuň esasynda $\sqrt{26}=5\cdot\frac{5099}{5000}=5,099.$ ▷

11-nji mysal. $\int_0^1\frac{\sin(x/4)}{x}dx$ integraly 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

◁ Ilki bilen (45) formuladan peýdalanyp, integral astyndaky aňlatmany özgerdeliň:

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{4}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{x}{4}\right)^7+\ldots}{x}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3!}\frac{x^2}{4^3}+\frac{1}{5!}\frac{x^4}{4^5}-\frac{1}{7!}\frac{x^6}{4^7}+\ldots\ .$$

Alnan hatary agzalaýyn integrirläp alarys:

$$\int_0^1\frac{\sin(x/4)}{x}dx=\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{x^5}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\frac{x^7}{7\cdot 7!\cdot 4^7}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\cdot 4^7}+\ldots$$

Bu hatar üçin hem Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýändigi we $\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}=\frac{1}{614400}<\frac{1}{10000}$ bolýandygy üçin, hataryň iki agzasyny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\int_0^1 \frac{\sin(x/4)}{x}dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3} \approx 0,25000-0,00086=0,2491. \ \triangleright$$

§ 12.6. Agzalary kompleks bolan hatarlar

1. Kompleks sanlaryň yzygiderliginiň predeli. Kompleks sanlaryň $\{c_n\}$ yzygiderligine garalyň, bu ýerde $c_n = a_n + ib_n$, a_n we b_n hakyky sanlar.

Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin şeýle n_o nomer tapylyp, $\forall n > n_o$ üçin $|c_n - c| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $c = a + ib$ sana $\{c_n\}$ yzygiderligiň predeli diýilýär. Bu halda $\{c_n\}$ yzygiderlige c sana ýygnanýan yzygiderlik diýilýär we ol $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ görnüşde ýazylýar.

Kompleks sanyň modulynyň kesgitlemesi boýunça

$$|c_n - c| = |a_n + ib_n - (a+ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| =$$
$$= \sqrt{(a_n-a)^2 + (b_n-b)^2} = \rho(M_n, M), \qquad (1)$$

bu ýerde $\rho(M_n, M)$ san $M_n(a_n, b_n)$ we $M(a, b)$ nokatlaryň, ýagny c_n we c sanlary şekillendirýän nokatlaryň arasyndaky uzaklykdyr. Şonuň üçin $|c_n - c| < \varepsilon \Leftrightarrow \rho(M_n, M) < \varepsilon$ esasynda c sanyň $\{c_n\}$ yzygiderligiň predeli bolmagynyň geometrik manysy $\forall\varepsilon > 0$ üçin ol yzygiderligiň n_o nomerden soňky ähli agzalarynyň merkezi c nokatda bolan ε radiusly tegelekde ýerleşýändigini we n-iň artmagy bilen onuň c sana çäksiz ýakynlaşýandygyny aňladýar.

$\{c_n\} = \{a_n + ib_n\}$ yzygiderligiň ýygnanmagy $\{a_n\}$ we $\{b_n\}$ yzygiderlikleriň ýygnanmagyna deňgüýçlüdir (ony (1) ulanyp aňsat görkezmek bolar).

2.Agzalary kompleks sanlar bolan hataryň ýygnanmagy. Eger agzalary $c_n = a_n + ib_n$ kompleks sanlar bolan

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{2}$$

hataryň bölekleýin $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ jeminiň $\{S_n\}$ yzygiderliginiň predeli bar bolsa, onda (2) hatara ýygnanýan hatar, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ predele bolsa onuň jemi diýilýär.

Agzalary kompleks sanlar bolan (2) hatara agzalary hakyky sanlar bolan iki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ we $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hatarlar degişlidir Kompleks sanlaryň yzygiderligi üçin bolşy ýaly, (2) hataryň ýygnanmagynyň şol iki hatarlaryň ýygnanmagyna deňgüýçüdigini görkezkek bolar. Eger şonda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S'$ we $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S''$ bolsa, onda $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = S' + iS''$ bolar.

Agzalary kompleks sanlar bolan (2) hatar üçin onuň agzalarynyň modullaryndan düzülen hatara garalyň:

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \ . \tag{3}$$

Bu hataryň agzalary hakyky sanlardyr.

Teorema. Eger (2) hataryň agzalarynyň modullaryndan düzülen (3) hatar ýygnanýan bolsa, onda (2) hatar ýygnanýandyr.

$\lhd$ Goý, $c_n = a_n + ib_n$ bolsun, onda $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ bolar. Şonuň üçin

$$|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n|, \quad |b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n|$$

deňsizlikler ýerine ýetýär. Agzalary otrisatel däl hakyky sanlar bolan hatarlar üçin belli bolan deňeşdirme nyşanynyboýunça bu ýerden (3) hataryň ýygnanmagyndan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ we $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hatarlaryň, ýagny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ we $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hatarlaryň absolýut we şonuň esasynda olaryň özleriniň hem ýygnanmagy gelip çykýar. Olaryň ýygnanmagy bolsa (2) hataryň ýygnanmagyna deňgüýçlüdir. $\rhd$

Subut edilen bu teorema agzalary kompleks sanlar bolan hatarlary derňemekde agzalary otrisatel däl hakyky sanlar bolan hatarlar üçin belli bolan ähli nyşanlary ulanmaklyga mümkinçilik berýär.

12-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)}{n!}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen hatara Dalamberiň nyşanyny ulanyp alarys:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!|1+i|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0<1,$$

ýagny hatar absolýut ýygnanýar we şonuň esasynda teorema boýunça hatar ýygnanýar. ▷

3. Agzalary kompleks funksiýalar bolan derejeli hatarlar. $c=a+ib,\ c_k=a_k+ib_k\ (k=0,1,2,\ldots)$ kompleks sanlardan we $z=x+iy$ kompleks funksiýadan düzülen

$$c_o+c_1(z-c)+c_2(z-c)^2+\ldots+c_n(z-c)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-c)^n \qquad (4)$$

hatara derejeli hatar diýilýär, bu ýerde $a,\ b,\ a_k,\ b_k$ hakyky sanlar bolup, x we y hakyky funksiýalardyr. Bu hatardan $c=0$ bolanda alynýan

$$c_o+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \qquad (5)$$

hatar hem derejeli hatardyr. (5) hatary (4)-den $w=z-c$ çalşyrma girizip hem almak bolar. Ýönekeýlik üçin (5) hatary derňäris.

Abeliň teoremasy. Eger (5) derejeli hatar $z=z_o\neq 0$ bolanda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar $|z|<|z_o|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall z$ üçin hem ýygnanýar, özünem absolýut ýygnanýar.

Bu teoremanyň subudy agzalary hakyky sanlar bolan derejeli hatar üçin degişli teoremanyň subut edilişi ýalydyr.

Abeliň teoremasynyň tassyklamasynyň geometrik manysy şeýledir: eger (5) derejeli hatar kompleks tekizligiň käbir z_o nokadynda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar radiusy $|z_o|$ we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan tegelegiň içinde ýygnanýandyr.

Abeliň teoremasyndan görnüşi ýaly, (5) hataryň ýygnanma oblasty radiusy R we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan tegelek bolup, şol tegelegiň içinde hatar absolýut ýygnanýar, onuň araçäginde, ýagny töweregiň nokatlarynda hatar ýygnanýan hem, dargaýan hem bolup biler. Şol tegelege (5) hataryň ýygnanma tegelegi, onuň R radiusyna bolsa ýygnanma radiusy diýilýär. Eger hatar diňe bir nokatda ýygnanýan bolsa, onda $R=0$ hasap edilýär, eger-de hatar ähli z üçin ýygnanýan bolsa,onda $R=\infty$ hasap edilýär.

(5) hataryň ýygnama radiusynyň tapylyşy agzalary hakyky sanlar bolan hatar üçin tapylyşy ýalydyr. Mysal üçin, ony $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ formula boýunça tapmak bolar.

13-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ hataryň ýygnanma radiusyny tapmaly.

$\lhd$ Hatar üçin $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Şonuň üçin hatar islendik z ücin ýygnanýar.

4. Eýleriň formulasy. Eger kompleks z funksiýa üçin

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

hatara seretsek, onda 13-nji mysalyň esasynda ol hatar ähli z üçin ýygnanýar. Onuň jemini e^z bilen belgiläliň, ýagny

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\ .$$

Bu deňlikde $z=ix$ çalşyrmany girizip, şeýle deňligi alarys:

$$e^{ix}=1+\frac{(ix)}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\ldots+\frac{(ix)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right).$$

Şeýlelikde, (45) we (46) formulalar esasynda bu deňligi şeýle ýazmak bolar:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\,. \tag{6}$$

Edil şuňa meňzeşlikde

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x\,. \tag{7}$$

(6) we (7) formulalara Eýleriň formulasy diýilýär. Ol formulalardan $\cos x$ we $\sin x$ funksiýalar üçin şeýle formulalar alynýar:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Eger $z=x+iy$ bolsa, onda $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$ deňligiň esasynda (6) formulany ulanyp, şeýle formulany alarys:

$$e^z=e^x(\cos x+i\sin x)\,.$$

§ 12.7. Furýeniň hatarlary

1. Furýeniň trigonometrik hatary. Trigonometrik funksiýalaryň sistemasy atlandyrylýan

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots,\cos nx,\ \sin nx,\ldots \tag{7}$$

sistema garalyň. Onuň şeýle häsiýetleri bardyr:

1. Sistemanyň islendik dürli iki funksiýasynyň köpeltmek hasylynyň $[-\pi,\pi]$ kesimdäki integraly nola deňdir. Bu häsiýete (1) sistemanyň şol kesimdäki ortogonallyk häsiýeti diýilýär.

2. $\forall n\in \mathrm{N}$ üçin

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi$$

deňlik dogrudyr.

$\lhd$ Hakykatdan-da, $\forall n,m\in \mathrm{N}$, $n\neq m$ üçin

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx =$$

$$= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]dx =$$

$$= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx =$$

$$= -\frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx = \pi. \ \triangleright$$

Berlen (1) trigonometrik funksiýalaryň sistemasy esasynda düzülen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \tag{2}$$

hatara trigonometrik hatar diýilýär.

1-nji teorema. Goý, (2) hatar $[-\pi, \pi]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsun we onuň $f(x)$ jemi üçin

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \tag{3}$$

deňlik ýerine ýetsin, onda (2) hataryň koeffisiýentleri üçin

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

formulalar dogrudyr.

◁ (3) deňligiň sag bölegindäki hataryň [–π, π] kesimde deňölçegli ýygnanýandygy we onuň ähli agzalarynyň şol kesimde üznüksizligi sebäpli, ol hataryň $\cos mx$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ funksiýa köpeldilmeginden alynýan hatar hem şol kesimde deňölçegli ýygnanýandyr we ol hataryň ähli agzalary üznüksizdir. Şoňa görä ol hatary [–π, π] kesimde agzalaýyn integrirläp bolýandyr.

Aýdylanlaryň esasynda (3) deňligiň iki bölegini hem $\cos mx$ funksiýa köpeldip we alnan hatary [–π, π] kesimde agzalaýyn integrirläp hem-de (1) sistemanyň häsiýetlerinden peýdalanyp,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx = a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx = \pi a_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

deňligi alarys. Edil şuňa meňzeşlikde, (3) deňligiň iki bölegini hem $\sin mx$ funksiýa köpeldip we alnan hatary [–π, π] kesimde integrirläp,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx = \pi b_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

deňligi alarys. Bu deňliklerden bolsa subut edilmeli (4) deňlikler gelip çykýar. ▷

Koeffisiýentleri (4) formulalar boýunça kesgitlenýän (2) trigonometrik hatara f funksiýa üçin Furýeniň trigonometrik hatary ýa-da gysgaça Furýe hatary, a_n we b_n sanlara bolsa Furýeniň koeffisiýentleri diýilýär.

[–π, π] kesimde f funksiýa üçin düzülen Furýeniň hatary

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (5)$$

görnüşde ýazylýar. Bu ýazgy (2) hataryň f funksiýa üçin Furýeniň hatary bolup, ol hataryň jeminiň f funksiýa deň bolýandygyny aňlatmaýar. Ýöne 1-nji teorema esasynda islendik deňölçegli ýygnanýan trigonometrik Furýe hatary şol hataryň jeminiň Furýe hatarydyr.

f funksiýa üçin düzülen Furýeniň hatary haýsy şertlerde şol funksiýa ýygnanýarka diýen soraga jogaby aşakdaky teorema berýär

2-nji teorema. Goý, $f(x)$ funksiýa we onuň $f'(x)$ önümi [–π, π] kesimde üznüksiz ýa-da onuň 1-nji görnüşdäki tükenikli sany üzülme nokatlary bar (ýagny bölek üznüksiz) bolsun. Onda $f(x)$ funksiýanyň Furýe hatary san okunda ýygnanýar, şonda funksiýanyň üznüksiz bolan her bir $x \in (-\pi, \pi)$ nokadynda hataryň jemi $f(x)$ funksiýa deň bolar, funksiýanyň her bir üzülme x_o nokadynda bolsa hataryň jemi $S(x_o) = \dfrac{f(x_o - 0) + f(x_o + 0)}{2}$ bolar. [–π, π] kesimiň uçlarynda bolsa ol jem $S(\pm\pi) = \dfrac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$ bolar.

Bellik. Eger san okunda kesgitlenen we 2π periodly periodik $F(x)$ funksiýa üçin [–π, π] kesimde $F(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetse, onda $F(x)$ funksiýa $f(x)$ funksiýanyň periodik dowamy diýilýär.

Eger [–π, π] kesimde Furýeniň hatary $f(x)$ funksiýa ýygnanýan bolsa, onda ol hatar san okunda onuň periodik dowamyna ýygnanýar

2.Jübüt we täk fuksiýalar üçin Furýeniň hatary. Eger [–π, π] kesimde f funksiýa jübut bolsa, onda bu halda $f(x)\cos nx$ funksiýa hem jübüt bolar, $f(x)\sin nx$ funksiýa bolsa täk bolar. Şonuň üçin kesgitli integralyň häsiýeti boýunça

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad ,$$
$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{6}$$
görnüşi alar we bu deňlikleriň esasynda jübüt funksiýanyň Furýe hatary
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{7}$$
görnüşde ýazylar. Bu halda Furýeniň hatary diňe kosinuslary özünde saklaýar.

Eger f funksiýa $[-\pi, \pi]$ kesimde täk bolsa, onda $f(x)\cos nx$ funksiýa hem täkdir, $f(x)\sin nx$ funksiýa bolsa jübütdir. Şoňa görä Furýeniň koeffisiýentleri
$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad ,$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{8}$$
görnüşi alar. Şonuň esasynda täk funksiýanyň Furýe hatary şeýle ýazylar:
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx . \tag{9}$$
Bu halda Furýeniň hatary diňe sinuslary özünde saklaýar.

14-nji mysal. $f(x) = x$ funksiýany Furýeniň hataryna dagytmaly.

$\triangleleft$ Bu funksiýa üçin 2-nji teoremanyň şertleri ýerine ýetýär, şoňa görä ol funksiýa Furýeniň hataryna dagydylýar. Onuň täkdigi sebäpli, (8) formula esasynda $a_n = 0$, b_n bolsa (8)-den kesgitlenýär. Bölekleýin integrirlemek usuly esasynda
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$
Şonuň üçin (9) formula boýunça

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right). \triangleright$$

15-nji mysal. $f(x) = x^2$ funksiýany Furýeniň hataryna dagytmaly.

$\triangleleft$ Bu funksiýa üçin 2-nji teoremanyň şertleri ýerine ýetýär, şoňa görä ol funksiýa Furýeniň hataryna dagydylýar. Onuň jübütdigi sebäpli, (6) formula esasynda $b_n = 0$, a_n bolsa (6)-dan kesgitlenýär. Bölekleýin integrirlemek usuly esasynda

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx\right] = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Şonuň üçin (7) formula boýunça

$$x^2 = \frac{\pi^3}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \ldots\right). \triangleright$$

3. $[-l,\ l]$ kesimde kesgitlenen funksiýa üçin Furýeniň hatary. Ýokarda garalan $[-\pi,\ \pi]$ funksiýa üçin Furýeniň hatarynyň nazaryýetini $[-l,\ l]$ kesimde kesgitlenen funksiýa geçirmek maksady bilen $x = lt/\pi$ çalşyrma girizeliň. Şunlukda, $-l \le x \le l$ bolanda $-\pi \le t \le \pi$ bolar. Şonuň üçin t üýtgeýäniň funksiýasy bolan $p(t) = f(lt/\pi)$ funksiýa $[-\pi,\ \pi]$ kesimde kesgitlenen funksiýa hökmünde garap, onuň üçin Furýeniň hataryny ýazmak bolar:

$$p(t) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Bu hataryň Furýe koeffisiýentleri şeýle kesgitlenýär:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos ntdt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\sin ntdt, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Ozalky x üýtgeýäne geçip, $[-l,\ l]$ kesimde berlen f funksiýa üçin Furýeniň hataryny we onuň koeffisiýentlerini şeýle görnüşde ýazarys:

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 0,\ 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Şunlukda, eger f jübüt bolsa, onda onuň Furýe hatary we koeffisiýentleri

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 0,\ 1, 2, \ldots,$$

görnüşi alar. Eger-de f täk bolsa, onda olar şeýle görnüşi alar:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Eger funksiýa $[0,\ l]$ kesimde berlen bolsa, onda ony talap edilşine görä diňe kosinuslar boýunça hem, diňe sinuslar boýunça hem Furýe hataryna dagytmak bolar. Onuň üçin berlen funksiýany $[-l,\ 0]$ kesime jübüt funksiýa hökmünde ýa-da täk fuňksiýa hökmünde dowam etdirmeli.Ýöne $[0,\ l]$ kesimde berlen funksiýany $[-l,\ 0]$ kesime başga hili hem dowam etdirmek bolar.

§ 12.8. Ortogonal sistema boýunça Furýeniň hatary

8-nji kesgitleme. Eger $[a, b]$ kesimde integrirlenýän funksiýalaryň

$$p_o(x),\ p_1(x), \dots,\ p_n(x), \dots \qquad (10)$$

sistemasynyň islendik iki dürli funksiýalary üçin

$$\int_a^b p_k(x)p_m(x)dx = 0 \quad (k \neq m) \qquad (11)$$

deňlik ýerine ýetse, onda (10) sistema $[a, b]$ kesimde ortogonal sistema diýilýär. Eger-de ondan daşgary

$$\int_a^b p_k^2(x)dx = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \qquad (12)$$

şert hem ýerine ýetse, onda (10) sistema ortonormirlenen sistema diýilýär.

Trigonomertrik (1) sistemanyň $[-\pi, \pi]$ kesimde (11) deňligi kanagatlandyrýandygyny biz ýokarda görkezipdik, ýagny (10) sistema şol kesimde ortogonal sistemadyr. Şol sistemanyň ikinji häsiýeti boýunça

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

sistema $[-\pi, \pi]$ kesimde ortonormirlenen sistemanyň mysaly bolup biler.

$[a, b]$ kesimde ortogonal bolan (10) sistema esasynda düzülen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \qquad (13)$$

funksional hatara ortogonal sistemanyň hatary, c_n $(n = 0,1,2.\dots)$ sanlara bolsa ol hataryň koeffisiýentleri diýilýär.

Trigonometrik sistema üçin Furýeniň hatarynyň koeffisiýentleriniň kesgitlenişi ýaly, (13) hataryň hem koeffisiýentlerini kesgitlemek bolar.

Goý, f funksiýa $[a, b]$ kesimde (13) hatara dagydylýan bolsun we ol hatar f funksiýa ýygnanýan bolsun, ýagny

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) . \tag{14}$$

Goý, (10) ulgam $[a, b]$ kesimde ortogonal we $k = 0,1,2,\dots$ üçin

$$\int_a^b p_k^2(x)dx \neq 0 \tag{15}$$

bolsun. (13) hataryň koeffisiýentlerini tapmak üçin, ol hatardan $p_k(x)$ funksiýa köpeldilmeginden alynýan hatar agzalaýyn $[a, b]$ kesimde integrirlenýär diýip kabul edeliň. Şonuň esasynda (14) deňligiň iki bölegini hem $p_k(x)$ funksiýa köpeldip we soňra alnan hatary $[a, b]$ kesimde integrirläp, (11) şertiň esasynda

$$\int_a^b f(x)p_k(x)dx = \int_a^b p_k(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)dx = c_k \int_a^b p_k^2(x)dx$$

deňligi alarys we (15) şertiň esasynda hataryň koeffisiýentlerini taparys:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)p_k(x)dx}{\int_a^b p_k^2(x)dx}, \quad k = 0,1,2,\dots \ . \tag{16}$$

Bellik. Eger (13) hatar $[a, b]$ kesimde f funksiýa deňölçegli ýygnanýan we $p_k(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolsalar, onda bu halda hem ol hataryň koeffisiýentleri (16) boýunça kesgitlenýändir, çünki bu halda (14) hatardan çäkli $p_k(x)$ funksiýa köpeldilip alynýan hatar hem $[a, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýandyr we şonuň üçin hem ony agzalaýyn integrirläp bolýandyr.

9-njy kesgitleme. Koeffisiýentleri (16) formulalar boýunça kesgitlenýän (13) hatara f funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki (10) ortogonal sistema boýunça Furýeniň hatary, c_n sanlara bolsa Furýeniň koeffisiýentleri diýilýär.

f funksiýa üçin (10) ortogonal sistema boýunça Furýeniň hatary

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

görnüşde ýazylýar.

Ortogonal sistemanyň Furýe hatary üçin hem ol hataryň haýsy şertlerde ýygnanýandygyny, haýsy şertlerde hataryň jeminiň berlen funksiýa deň bolýandygyny, haýsy şertlerde deňölçegli ýygnanýandygyny we beýleki häsiýetlerini görkezýän teoremalary subut etmek bolar.

§ 12.9. Furýeniň hatarynyň kompleks görnüşi

Goý,

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{17}$$

Furýe hatary berlen bolsun. Eger ozaldan mälim bolan

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-\ln x}\right), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

formulalardan peýdalansak, onda (17) hatary

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{i}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}$$

görnüşde ýazmak bolar. Eger

$$c_o = \frac{a_o}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \bar{c}_n$$

belgilemeleri girizsek, onda ony has ýönekeý

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{18}$$

görnüşde ýazyp bileris. Indi bolsa $\cos nx \pm i\sin nx = e^{\pm inx}$ formuladan peýdalanyp, (18) hataryň Furýe koeffisiýentlerini kompleks görnüşde kesgitlemek üçin

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

formulalary alarys. Bu formulalary birikdirip, olary

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n = 0, \ \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{19}$$

formulanyň üsti bilen aňlatmak bolar.

Şeýlelikde, Furýeniň (2) hataryny kompleks görnüşde aňlatdyk we onuň koeffisiýentlerini kesgitlemek üçin kompleks görnüşdäki formulalary görkezdik.

(19) deňligiň bahasyny (18) formulada goýup, Furýeniň hatarynyň

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{int}}dt$$

görnüşde ýazylyşyny alarys. Edil şuňa meňzeşlikde $[-l, \ l]$ kesimde berlen f funksiýa üçin Furýeniň hataryny hem kompleks görnüşde ýazmak bolar.

Bellik. Biz bu ýerde $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n$ görnüşdäki hatara duş geldik. Onuň ýygnanmagyna nähili düşünilýändigini ýatlalyň. Ol hatar üçin $S_n = \sum_{k=-n}^{n} z_k$ jeme onuň n- tertipli bölekleýin jemi diýilýär. Şunlukda, eger $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ predel bar bolsa, onda oňa ýygnanýan hatar we S sana onuň jemi diýilýär.

5-nji mysal. $f(x) = |x|$ funksiýany (-π, π) aralykda kompleks görnüşdäki Furýe hataryna dagytmaly.

◁ (102) formulany ulanyp, ilki bilen Furýe koeffisiýentlerini tapalyň:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2},$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} xe^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} xe^{-inx}dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n^2}e^{-inx}(inx+1)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi n^2}e^{-inx}(inx+1)\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2} + \frac{1}{2\pi n^2}e^{in\pi}(1-in\pi) + \frac{1}{2\pi n^2}e^{-in\pi}(1+in\pi) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2} + \frac{\cos \pi n}{\pi n^2} + \frac{\sin n\pi}{n} = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Tapylan koeffisiýentleri (101) formulada goýup, berlen funksiýanyň

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{i(2k+1)x}}{(2k+1)^2}$$

görnüşdäki kompleks Furýe hataryny alarys. ▷

G ö n ü k m e l e r

Funksional hatarlaryň ýygnanma oblastlaryny tapmaly:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}4^{2n}(3x+2)^{2n-1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3+x^{2n}}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5-x^2}{4}\right)^n$

Funksional hatarlaryň deňölçegli ýygnanmagyny derňemeli:

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+3^n}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^4+n^4}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt[3]{n}}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Derejeli hatarlaryň ýygnanma radiusyny we interwalny tapmaly:

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{2n}}$. 14. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{2n}x^2$. 15. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n2^{2n}x^n$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}(x+3)^n$ 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(x+1)^n$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}(x-e)^n$.

Funksiýalary Makloren hataryna dagytmaly:

19. $f(x)=sh3x$ 20. $f(x)=\ln(x+5)$. 21. $f(x)=\cos 2x$.

22. $f(x)=\frac{1}{x+8}$. 23. $f(x)=\frac{1}{3x+4}$. 24. $f(x)=\frac{1}{3-2x}$.

J o g a p l a r

1. Ähli x üçin ýygnanýar. **2.** $(-\infty,-1),\ (1,+\infty)$. **3.** $(-3/4,-7/12)$. **4.** $(-\infty,0)$. **5.** Ähli $x\neq\pm1$ üçin ýygnanýar. **6.** $(-3,-1),\ (1,3)$. **7-- 11.** Ähli x üçin deňölçegli ýygnanýar**. 12** Ähli x üçin ýygnanýar, ýöne deňölçegli däl.. **13.** $R=4,\ (-4,4)$. **14.** $R=1/9,\ (-1/9,1/9)$ **15.** $R=1/4,\ (-1/4,1/4)$. **16.** $R=0$. **17.** $R=\infty$. **18** $R=1/e$, $(-1/e,1/e)$ **.19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. **20.** $\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n\ (-5<x<5)$. **21.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{2n}}{(2n)!}$. **22.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{3(n+1)}}\ (|x|<8)$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^nx^n}{2^{2(n+1)}}$ $(|x|<\frac{4}{3})$. **24.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{3^{n+1}}\ (|x|<\frac{3}{2})$.

III bap. DIFFERENSIAL DEÑLEMELER

III. 1. Birinji tertipli differensial deñlemeler

§1.1 Differensial deñlemeler barada esasy düşünjeler

Eger gözlenýän funksiýa we onuñ dürli tertipdäki önümleri deñlemede saklanýan bolsa, onda bu deñlemä differensial deñleme diýilýär. Deñlemedäki gözlenýän funksiýanyñ önüminiñ ýokary tertibine deñlemäniñ tertibi diýilýär.

Eger gözlenýän funksiýa bir üýteýänli bolsa, onda degişli differensial deñlemä ady differensial deñleme diýilýär. Eger gözlenýän funksiýa birnäçe üýtgeýänli bolsa, onda bu differensial deñlemä hususy önümli differensial deñleme diýilýär.

n-nji tertipli umumy ady differensial deñleme

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde x bagly däl üýtgeýän ululyk, $y = y(x)$ gözlenýän funksiýa, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ gözlenýän funksiýanyñ önümleri, $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$ bolsa berlen funksiýa.

Eger (1) deñleme $y^{(n)}$ -e görä çözülen bolsa, onda ol

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) \qquad (2)$$

görnüşi alar.

(a, b) interwalda kesgitlenen $y = \varphi(x)$ funksiýanyñ n-gezek önümleri hem (a,b) interwalda kesgitlenen bolup, (1) deñlemäni $\forall x \epsilon (a, b)$ üçin

$$\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0$$

toždestwa őwürse, onda $y = \varphi(x)$ funksiýa (1) deñlemäniñ çőzüwi diýilýär.

(1) deñlemäniñ

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{\,n-1} \qquad (3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga (1) deñleme üçin Koşiniñ meselesi diýilýär.

(1) deñleme üçin Koşiniñ meselesiniñ çözüwiniñ barlygynyñ we ýeke-täkliginiñ şertleri aşakdaky teoremada getirilýär (teoremany subutsyz kabul etjekdiris).

1–nji teorema. Eger f$\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ funksiýa we onuň $y \;, y', \dots, y^{(n-1)}$ boýunça hususy önümleri

$|x - x_o| \le a, \quad |y - y_o| \le b, \quad |y' - y'_o| \le b, \quad \left|y^{(n-1)} - y_o^{(n-1)}\right| \le b \; (a > 0, \; b > 0)$

deñsizlikler bilen kesgitlenen G oblastda üznüksiz we çäklenen bolsa, ýagny

$$\left|F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)\right| \le C \,, \quad \left|\frac{\partial f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)}{\partial y^{(k)}}\right| \le C_1$$

$\left(k = 0, 1, \dots, n-1; \; y^{(0)} \equiv y\right)$, onda (1) deñlemäniñ (3) şerti kanagatlandyrýan $|x - x_0| \le h$ aralykda ýeke-täk $y = y\,(x)$ çözüwi bardyr, bu ýerde $C > 0, \; C_1 > 0, \; h = \min(a, \; \dfrac{b}{\max(C, \; |y'|, \dots |y^{(n-1)}|)})$,

$$M\,(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \in G, \; M\,(x_o, y_o, y'_o, \dots, y_o^{(n-1)}) \in G$$

Eger

$$\varphi = \varphi\left(x, C_1, C_2, \dots, C_n\right) \qquad (4)$$

funksiýa 1) $C_1, C_2, \dots, C_n$ erkin hemişelikleriñ islendik bahalarynda (1) deñlemäni toždestwa öwürýän bolsa;

2) (3) şerti kanagatlandyrýan $C_1, C_2, \dots, C_n$ tapylýan bolsa, onda (4) funksiýa (1) differensial deñlemäniñ umumy çözüwi diýilýär.

(1) deñlemäniñ (4) umumy çözüwinden erkin hemişelikleriñ berlen bahasyndan alnan çözüwine, ýagny $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ çözüwe berlen deñlemäniñ hususy çözüwi diýilýär.

§1.2 Birinji tertipli differensial deñlemeler. Üýteýänleri aýyl-saýyl edilýän deñlemeler

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (5)$$

deñlemä umumy görnüşdäki birinji tertipli differensial deñleme diýilýär.

Eger (5) deñlemäni y-e görä çözüp bolsa, onda ol $y' = f(x,y)$ ýa-da $dy - f(x,y)dx = 0$ gőrnüşde ýazylýar.

$$p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (6)$$

deñleme onuñ hususy görnüşidir.

(5) deñlemäniñ $y(x_0) = y_0$ şerti kanagatlandyrýan $\varphi = \varphi(x)$ çözüwini tapmaklyga Koşiniň meselesi diýilýär.

Indi deñlemäniñ

$$p(x,y) = f(x)\varphi(y), Q(x,y) = f_1(x)\varphi_1(y)$$

bolandaky hususy halyna seredeliñ:

$$f(x)\varphi(y)\,dx + f_1(x)\varphi_1(y)dy = 0 \qquad (7)$$

Bu deñlemä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deñleme diýilýär.

$f_1(x)\varphi(y) \neq 0$ bolanda (7) deñlemäni $f_1(x)\varphi(y)$ bölüp alarys:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy = 0 \qquad (8)$$

Bu deñlemäniñ birinji goşulyjysy diñe *x*-e, ikinjisi diñe y-e baglydyr. (8) deñlemäni integrirläp, ol deñlemäniñ

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy = C$$

umumy çözüwini alarys.

1-nji mysal. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ deñlemäniñ $y(1) = 1$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

◁ Berlen deñlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyñ:

$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ deñlemäni $y \neq 0$ bolanda $y^{-\frac{2}{3}}dx$ köpeldip,

$y^{-\frac{2}{3}}dy = 3dx$ görnüşde ýazarys. Alnan deñlemäni integrirläliñ:

$\int y^{-\frac{2}{3}}dy = \int 3dx,\quad y^{\frac{1}{3}} = x + c$ ýa-da $y = (x+c)^3$

$y(1) = 1$ şerti ulanyp, C-ni tapalyñ:

$$y(1) = (1+c)^3 = 1, \qquad c = 0$$

Diýmek berlen meseläniñ çözüwi $y = x^3$ bolar. ▷

§1.3 Birinji tertipli birjynsly deñlemeler

Eger $F(x,y)$ funksiýa üçin

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y) \qquad (9)$$

toždestwo ýerine ýetýän bolsa, onda $F(x,y)$ funksiýa n ölçegli birjynsly funksiýa diýilýär.

Mysal üçin:

$F_1(x,y) = 4x + 3y,\ \ F_2(x,y) = x^2\cos\frac{x}{y} + xy,\ \ F_3(x,y) = \frac{x-y}{y}$

funksiýalar degişlilikde bir, iki we nol ölçegli birjynsly funksiýalardyr. Hakykatdan-da,

$$F_1(tx,ty) = 4tx + 3ty = t(4x+3y) = tF_1(x,y),$$

$$F_2(tx,ty) = (tx)^2\cos\frac{tx}{ty} + txty = t^2\left(x^2\cos\frac{x}{y} + xy\right) = t^2F_2(x,y),$$

$$F_3(tx,ty) = \frac{tx-ty}{ty} = \frac{x-y}{y} = t^0F_3(x,y).$$

Eger $P(x,y)$ *we* $Q(x,y)$ funksiýalar şol bir n ölçegli birjynsly funksiýalar bolsalar, onda (6) differensial deñlemä birjynsly differensial deñleme diýilýär. Diýmek, eger (6) deñleme birjynsly differensial deñleme bolsa, onda

$P(tx,ty) = t^n P(x,y), Q(tx,ty) = t^n Q(x,y)$ bolar.

Eger $t = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ bolsa, onda bu ýerden

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} P(x,y), Q\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}Q(x,y)$$

deñlikler alnar. Diýmek,

$$P(x,y) = x^nP\left(1,\frac{y}{x}\right), Q(x,y) = x^nQ\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

$P(x,y)$ *we* $Q(x,y)$ funksiýalary (6)-da ornunda goýup,

$$x^nP\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + x^nQ\left(1,\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

ýa-da

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy = 0 \qquad (10)$$

deñlemäni alarys.

$u=\frac{y}{x}$ ýa-da $y=ux$ belgilemäni girizip, (10)-dan alarys:

$$P(1,u)dx+Q(1,u)(udx+xdu)=0 \text{ ýa-da}$$
$$\big(P(1,u)+uQ(1,u)\big)dx+xQ(1,u)du=0.$$

Alnan deñleme üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deñlemedir. Goý, bu differensial deñlemäniñ umumy çözüwi $\Phi(x,u,c)=0$ bolsun. Bu belgilemäni göz öñünde tutup, (6) birjynsly differensial deñlemäniñ umumy $\Phi\left(x,\frac{y}{x},c\right)=0$ çözüwini alarys.

2-nji mysal. $xy'=\sqrt{x^2-y^2+y}$ deñlemäni çözmeli.

◁ Berlen deñlemäni $x(x\neq 0)$ bolup, aşakdaky görnüşde ýazalyñ:

$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$$

Bu deñlemäniň birjynsly differensial deñlemedigi aýdyñdyr. $y=ux$ belgilemäni ulanyp, alarys: $u'x+u=\sqrt{1-u^2}$ +u ýa-da

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$$

üýtgeýänleri aýyl-saýyl edeliñ :

$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}$, integrirläliñ $\arcsin u=ln|x|+lnC_1$ $(C_1>0)$ ýa-da $\arcsin u=lnC_1|x|$; $C_1|x|=\pm C_1x$ bolanlygy üçin $\pm C_1=C$ belgilemäni ulanalyñ.

$$\arcsin u=lncx, \text{ bu ýerde } |lncx|\leq\frac{\pi}{2}$$

belgilemäni göz öñünde tutup, berlen deñlemäniñ umumy çözüwini alarys:

$$arcsin\frac{y}{x}=lncx \qquad \text{ýa-da} \qquad y=xsinlncx$$

deñlemäniñ üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edenimizde, deñlemäniñ iki bölegini hem $x\sqrt{1-u^2}$ bölüpdik. Şonuñ üçin käbir çözüwleri ýitirmegimiz mümkin.

$x = 0$ we $\sqrt{1-u^2} = 0$ bolsun. Ýöne $x \neq 0$, sebäbi $u = \frac{y}{x}$ ornunda goýmany ulandyk. Ikinjisinden $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$ ýa-da $y = \pm x$ alarys. Ornunda goýmany ulanyp $y = x$ we $y = -x$ funksiýalaryñ hem berlen deñlemäniñ çözüwidigini alarys. ▷

§1.3 Birinji tertipli çyzykly differensial deñlemeler

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{11}$$

deñlemä birinji tertipli çyzykly differensial deñleme diýilýär, bu ýerde $y = y(x)$ gözlenýän funksiýa, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$ funksiýalar berlen üznüksiz funksiýalar, şunlukda $a(x) \neq 0$ bőlüp,

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{12}$$

deñlemäni alarys, bu ýerde

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, f(x) = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

(12) deñlemäniñ çözüwini $u = u(x), v = v(x)$ funksiýalaryñ köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliñ:

$$y = uv\,. \tag{13}$$

$y' = u'v + uv'$ deñligi göz öñünde tutup, (12) den alarys:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

ýa-da

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x) \tag{14}$$

$v = v(x)$ funksiýany

$$v' + p(x)v = 0 \tag{15}$$

deñlemäni çözüp taparys. (15)-i göz öñünde tutup, (14)-den alarys:

$$u'v = f(x)\,. \tag{16}$$

(15) we (16) deñlemeler üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deñlemelerdir. (15) deñlemäniñ umumy çözüwini tapalyñ:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$ deňlemäni integrirläliñ:

$$v(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}. \qquad (17)$$

(16) deñlemeden alarys: $u' = \frac{1}{C_1} f(x) e^{\int p(x)dx}$ ony integrirläp alarys:

$$u(x) = \frac{1}{C_1} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_2 \quad . \qquad (18)$$

(17), (18) deñlikleri ulanyp, (13)-den berlen deñlemäniñ umumy çözüwini taparys:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \ (C = C_1 C_2). \qquad (19)$$

3-nji mysal. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ deñlemäni çözmeli.

◁ (19) formulany peýdalanyp, berlen deñlemäniñ umumy çözüwini tapalyñ:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int 2x\, e^{-x^2} dx + C \right)$$

$$= e^{-x^2} (2 \int x dx + C) = e^{-x^2} (x^2 + C).$$

§1.4 Doly differensially deñlemeler

Eger (6) deñlemäniñ çep bölegi käbir $F = F(x,y)$ funksiýanyñ doly differensialy, ýagny $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ bolsa, onda bu deñlemä doly differensially deñleme diýilýär.

Bu ýagdaýda (6) deñlemäni $dF(x,y) = 0$ görnüşde ýazyp bolar, diýmek $F(x,y) = C$.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Bu deňlik esasynda alarys:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Aşakdaky tassyklama dogrudyr.

(6) deñlemäniñ doly differensially deñleme bolmagy üçin,

$P(x,y)$ *we* $Q(x,y)$ funksiýalaryñ kesgitlenen D oblastynda $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ üznüksiz önümleri bar bolup,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad (20)$$

şertiñ ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Bu ýagdaýda, eger (20) şert ýerine ýetýän bolsa, onda (6) deñlemäniñ umumy çözüwi

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y) dy = C$$

ýa-da

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y) dy = C$$

görnüşde ýazylýar.

4-nji mysal. $2x\cos^2 y dx + (8\sqrt[5]{y} - x^2 \sin 2y)dy = 0$ deñlemäniñ çözüwini tapmaly.

◁ Bu ýerde

$P(x,y) = 2x\cos^2 y, \quad Q(x,y) = 8\sqrt[5]{y} - x^2 \sin 2y$

Şonuñ esasynda

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x(-2\sin y \cos y) = -2x\sin 2y, \frac{\partial Q(x,y}{\partial x} =$$

$$= -2x\sin 2y.$$

$$\int_{0}^{x} 2x\cos^2 y\, dx + \int_{0}^{y} 8\sqrt[5]{y}\, dy = 0$$

$$x^2\cos^2 y + 6y\sqrt[5]{y} = C$$

Bu ýerde (x_o, y_o) nokadyñ ornuna koordinatalar başlangyjyny aldyk.

Eger(20) şert ýerine ýetmese, onda (6) deñleme doly differensially deñleme däldir. Käbir ýagdaýlarda bu deñlemäni $\mu(x,y)$ funksiýa köpeldip, doly differensially deñleme alyp bolýar. $\mu = \mu(x,y)$ funksiýa integrirleýji köpeldiji diýilýär.

1-nji hal. Eger

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi(x)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk *x*-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji

$$\mu=e^{\int\varphi(x)dx} \quad . \tag{21}$$

2-nji hal. Eger

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}=\psi(x)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk y-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji

$$\mu=e^{-\int\psi(y)dy} \tag{22}$$

formuladan tapylýar.

5-nji mysal. $ydx+x(lnx-y^3)dy=0$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu ýerde $P(x,y)=y, Q(x,y)=x(lnx-y^3)$

Alarys: $\frac{\partial P}{\partial y}=1\,,\frac{\partial Q}{\partial x}=1+lnx-y^3$. (20) şert ýerine ýetmeýär.

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1-1-lnx+y^3}{x(lnx-y^3)}=-\frac{1}{x}=\varphi(x)$$

(21) formulany ulanyp, alarys: $\mu=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-lnx=\frac{1}{x}}$

Berlen deñlemäniñ iki böleginihem $1/x$-e köpeldip alarys:

$$\frac{y}{x}dx+(lnx-y^3)dy=0.$$

Alnan deñlemäniñ doly differensial deñlemedigini görkezmek kyn däldir. $(x_o,\ y_o)$ nokady (1;0) diýip, (20) formulany ulanyp, berlen deñlemäniñ umumy çözüwini alarys:

$$\int_1^x\frac{y}{x}dx+\int_0^y(-y^3)dy=C,\ \ yln|x|\,\Big|_1^x-\frac{y^4}{4}\Big|_0^y=C$$

ýa-da $\quad y\ln|x| - \frac{y^4}{4} = C.$ ▷

III. 2. Ýokary tertipli differensial deñlemeler.
§2.1. Käbir n-nji tertipli integrirlenýän differensial deñlemeleriñ görnüşleri. Tertibini peseldip bolýan deñlemeler

1. Sag bölegi üznüksiz *x*-e bagly funksiýa bolan deñlemäniñ hususy halyna seredeliñ, ýagny

$$y^{(n)} = f(x)\,. \qquad (1)$$

Bu deñlemäni n gezek integrirläp, alarys:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-1)} = \int\int f(x)dxdx + C_1 x + C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = \underbrace{\int \dots \int}\, f(x)dx \dots dx + C_1\frac{x^{n-1}}{n-1} + C_2\frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

alnan funksiýa (1) deñlemäniñ umumy çözüwidir. (2) çözüwde kesgitsiz integrallary ýokarky çägi üýtgeýän ululykly kesgitli integrallar bilen çalşyrmak bolar, ýagny ony:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x}} f(x)dx \dots dx + C_1\frac{x^{n-1}}{n-1} + C_2\frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

görnüşde ýazmak bolar.

$$\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \dots dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

Koşi formulasyny peýdalanyp, umumy çözüwi

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt + C_1\frac{x^{n-1}}{n-1} + C_2\frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

görnüşde ýazarys. Eger (1) deñlemäniñ

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0{}', \dots, y^{n-1}(x_0) = y_0{}^{n-1}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun. Onda (1) deñlemäni yzygiderli n gezek x_0 dan $x - e$ çenli integrirläp, bu meseläniñ çözüwini alarys:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$
$$+ y_0^1(x-x_0) + y_0,$$

ýa-da

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^{i}$$

1-nji mysal. $y''' = \sin x \cos x$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◁ Üç gezek yzygiderli integrirläp, alarys:

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1,$$
$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = cosx - sinx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Indi berlen deñlemäniñ $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyñ.

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 = 1 \\ -1 + C_1 = 2 \end{cases} \quad \square \; C_1 = 3, C_2 = -2, \; C_3 = \frac{1}{2}$$

$$y = cosx - sinx + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

2. $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$. (2)

$y^{(n-1)} = z$ ornunda goýmany ulanyp, (2) deñlemäni $F(z, z') = 0$ görnüşde ýazarys.

Eger alnan deñlemäniñ çözüwi $z = \varphi(x, C_1)$ bolsa, ornunda goýmany ulanyp, (1) görnüşdäki $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$ differensial deñlemäni alarys.

2-nji mysal. $y'' = \sqrt{1+(y'')^2}$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◁ $y'' = z$ ornunda goýmany ulanyp alarys: $z' = \sqrt{1+z^2}$ ýa-da $\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliñ we integrirläliñ:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = x + c$$

$z = sht, dz = chtdt$ ornunda goýmany ulanalyñ:

$$\int\frac{chtdt}{\sqrt{1+sh^2 t}} = x + c \qquad \text{ýa-da} \qquad t = x + C_1$$

diýmek: $z = sht(x + C_1)$. $y'' = z$ ornunda goýmany peýdalanalyñ: $y'' = sh(x + C_1)$ iki gezek yzygiderli integrirläp, alarys:

$$y' = ch(x + C_1) + C_2,$$

$$y = sh(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

3. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ (3)

$y^{(k)} = z$ ornunda goýmany ulansak, onda $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$. Bu ýagdaýda (3) deñleme $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$ görnüşi alar. Alnan deñlemäniñ umumy çözüwi $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ bolsa, onda (1.1) görnüşdäki $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ deñlemäni alarys. Bu deñlemäni k gezek yzygiderli integrirläp, berlen deñlemäniñ umumy çözüwini alarys.

3-nji mysal. $xy^V - y^{IV} = 0$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapyñ.

◁ $y^{IV} = z$ belgilemäni girizeliñ, onda $y^V = z'$ bolar. Berlen deñleme $xz' - z = 0$ görnüşi alar. Bu deñlemäni üýtgeýän ululyklara görä aýyl-saýyl edip, alarys:

$x\frac{dz}{dx} = z, \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$ Bu deňlemäni integrirläp alarys:

$$ln|z| = ln|x| + ln|C_1| \qquad \text{ýa-da} \qquad z = C_1 x$$

deñligi alarys. Belgilemäni göz öñünde tutup, $y^{IV} = C_1 x$ deňlemäni alarys. Ony dört gezek yzygiderli integrirläliñ

$$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 \frac{x^4}{4!} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$y = C_1 \frac{x^5}{5!} + C_2 \frac{x^3}{3} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

ýa-da

$$y = \overline{C_1} x^5 + \overline{C_2} x^3 + \overline{C_3} x^2 + C_4 x + C_5,$$

bu ýerde: $\overline{C_1} = \frac{C_1}{5!}, \overline{C_2} = \frac{C_2}{3!}, \overline{C_3} = \frac{C_3}{2!}$.

3. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$.

$y' = z$ ornunda goýmany ulanyp, berlen deñlemäniñ tertibini bir birlik kemeldilýär. Bu ýerde täze üýtgeýän bagly däl funksiýa y-e baglydyr: $z = z(y)$ Alarys:

$$y' = \frac{dy}{dx} = z, \qquad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dz} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = z\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

$$= z^2\frac{d^2z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

we. ş.m. Bu añlatmalary (4) deñlemede ornunda goýup, (n-1) tertipli deñleme alarys.

4-nji mysal. $y^{11} + y^{12} = 2e^{-y}$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◁ $y' = z(y),\ y'' = z\frac{dz}{dy}$ añlatmalary ulanyp, alarys: $z\frac{dz}{dy} + z^2 = 2e^{-y}$ $z^2 = u$ ornunda goýmany ulanyp, $\frac{1}{2}\frac{du}{dy}+u=2e^{-y}$ ýa-da $\frac{du}{dy}+2u=4e^{-y}$ çyzykly deñlemäni alarys. Bu deñlemäniñ umumy çözüwini (19) formulany peýdalanyp taparys:

$$u=e^{-\int 2dy}\left(\int 4e^{-y}e^{\int 2dy}dy+C_1\right)=$$

$$=e^{-2x}(4\int e^{-y}e^{2y}dy+C_1)=e^{-2y}(4e^{y}+C_1)=$$

$$=4e^{-y}C_1e^{-2y}$$

$y^{12}=u=4e^{-y}+C_1e^{-2y}$ ýa-da $y'=\pm\sqrt{4e^{-y}+C_1e^{-2y}},$

§2.2. n-nji tertipli differensial deñlemeler

I. n-nji tertipli çyzykly deñlemäniñ çözüwleriniñ häsiýetleri

$q_0(x)y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+\dots+q_{n-1}(x)y'+q_n(x)y=f_1(x)$ (4)

görnüşli deñlemä n-nji teripli çyzykly differensial deñleme diýilýär, bu ýerde $y=y(x)$ gözlenýän funksiýa,

$f_1(x)$, $q_k(x)$ $(k=\overline{0,n})$ berlen funksiýalar. Bu funksiýalar käbir $[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiýalar diýip hasap ederis.

Eger $f_1(x)\not\equiv 0$ bolsa, onda (4) deñlemä birjynsly däl deñleme, eger $f_1(x)\equiv 0$ bolsa birjynsly deñleme diýilýär.

$q_0(x)\neq 0$ bolanda (4) deñlemäni $q_0(x)$ bölüp, alarys:

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\dots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)=f(x), \quad (5)$$

bu ýerde

$$P_k(x)=\frac{q_k(x)}{q_0(x)}\quad (k=1,n),\qquad f(x)=\frac{f_1(x)}{q_0(x)}$$

$q_0(x)\neq 0$ bolanda n-nji tertipli birjynsly deñleme

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\dots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)=0, \quad (6)$$

görnüşi alar.

$$L[y]=y^{(n-1)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\dots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y \quad (7)$$

belgilemäni girizp, (6) deñlemäni

$$L[y] = 0 \tag{8}$$

görnüşde ýazalyñ.

$L[y]$ belgilemäni geljekde çyzykly differensial operator aşakdaky häsiýetlere eýedir:

$$L[Cy] = CL[y] \quad (C = Const) \tag{9}$$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \tag{10}$$

Hakykatdan-da,

$$L[Cy] \equiv (Cy)^{(n)} + P_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \cdots + +P_n(x)(Cy) \equiv$$
$$C\left(y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y\right) = CL[y]$$

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2] &= (y_1 + y_2)^{(n)} + P_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \cdots \\ &+ P_n(x)(y_1 + y_2) \\ &= \left(y_1^n + P_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y_1\right) \\ &+ \left(y_2^n + P_1(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y_2\right) \\ &= L[y_1] + L[y_2] \end{aligned}$$

(9),(10) formulalary ulanyp, aşakdaky tassyklamalry subut edeliñ:

1-nji teorema. Eger y_1 çyzykly birjynsly $L[y] = 0$ deñlemäniň çözüwi bolsa, onda Cy_1 hem bu deňlemäniň çözüwidir, bu ỳerde C=Const.

◁ Teoremanyň şertine görä $L[y_1] \equiv 0$, onda (2.9) formulany peýdalanyp alarys. $L[Cy_1] \equiv CL[y_1] \equiv 0$, $L[Cy_1] \equiv 0$. ▷

2-nji teorema. Eger y_1 we y_2 funksiỳalar $L[y] = 0$ birjynsly deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda $y_1 + y_2$ funksiỳa hem bu deňlemäniň çözüwidir. ▷

◁ Teoremanyň şertine görä $L[y_1] \equiv 0$, $L[y_2] \equiv 0$ (10) formulany peỳdalanyp, alarys:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv 0, \qquad L[y_1 + y_2] \equiv 0$$

Diỳmek, $y_1 + y_2$ funksiỳa $L[y] = 0$ deňlemäniň çözüwi. ▷

Netije1. Eger $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiỳalar $L[y] = 0$ deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

Funksiỳa hem bu deňlemäniň çöwüdir, bu ỳerde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ erkin hemişelikdir. Bu tassyklama 1-nji we 2-nji teoremalardan gelip çykýar.

3-nji teorema. Eger $P_k(x)$ $(k = \overline{0,n})$ hakyky koeffisiýentli $L[y] = 0$ deñlemäniñ çözüwi $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleks funksiýa bolsa, onda hakyky $u(x)$ we hyýaly $v(x)$ bölekler hem bu deñlemäniñ çözüwidir.

⊲ Teoremanyñ şertine görä $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$ (9), (10) formulalary ulanyp, alarys:

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0,$$

bu ýerden $L[u(x)] \equiv 0$ we $iL[v(x)] \equiv 0$ toždestwalary alarys.

2. Çyzykly bagly we çyzykly bagly däl funksiýalar. Wronskiniň kesgitleýjisi

Eger $[a,b]$ kesimde kesgitlenen

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x) \qquad (11)$$

funksiýalar üçin $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0$ şerti kanagatlandyrýan hakyky $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sanlar bar bolup,

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2\ y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0,\ \forall x \in [a,b] \quad (12)$$

deñlik ýerine ýetse, onda (11) funksiýalara çyzykly bagly diýilýär.
Eger (12) deñlik diñe

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \qquad (2.13)$$

bolanda ýerine ýetse, onda (11) funksiýalar çyzykly bagly diýilýär.
Mysal üçin, $[a,b]$ kesimde kesgitlenen

$$y_1 = 1,\ y_2 = x, y_3 = x^2, \ldots, y_n = x^{n-1} \qquad (14)$$

funksiýalar bu kesimde çyzykly bagly däl.
Hakykatdan-da, $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{n-1} = 0$ deñlik $\forall x \in [a,b]$ üçin diñe $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ bolanda ýerine ýetýär. Sebäbi hakyky koeffisiňentli (n-1) derejeli köpagzanyñ nollarynyñ sany (n-1) den köp däldir.
Eger $i \neq j$ bolanda $k_j \neq k_j$ bolsa

$$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}, \dots, y_n = e^{k_nx}, \tag{15}$$

we

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, x^{n_1}e^{k_1x}, e^{k_2x}, xe^{k_2x}, \dots, x^{n_2}e^{k_2x},$$
$$e^{k_px}, xe^{k_px}, \dots, x^{n_pk_px} \tag{16}$$

funksiýalar hem islendik $[a,b]$ kesimde çyzykly bagly däldir.

Eger $y_1(x), \; y_2(x), \dots, \; y_n(x)$ funksiýalaryñ iñ bolmanda biri nola deñ bolsa, onda bu funksiýalar çyzykly baglydyr. Hakykatdan-da, eger $y_1 \equiv 0$ bolsa, onda

$1y_1(x) + 0\,y_2 + \dots + 0y_n = 0$ bolar, bu ýerde: $\alpha_1 = \mathbf{1} \neq 0$

Eger n sany funksiýalaryñ arasynda $k(k < n)$sanysy çyzykly bagly bolsa, onda ähli funksiýalar hem çyzykly baglydyr. Hakykatdan-da, ýönekeýlik üçin $\alpha_1 \neq 0$ bolanda $\alpha_1 y_1 + \alpha_2\, y_2 + \dots + \alpha_k y_k = 0$ bolsun, onda

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2\, y_2 + \dots + \alpha_k y_k + 0y_{k+1} + \dots + 0y_n = 0, \alpha_1 \neq 0$$
$$\alpha_1 = \alpha_1(x) \; we \; \alpha_2 = \alpha_2(x) \quad (y_1 \not\equiv 0, y_2 \not\equiv 0)$$

funksiýalaryñ çyzykly bagly bolmagy üçin olaryñ proporsional bolmagy zerur we ýeterlikdir. Hakykatdan-da, eger $y_2 = ky_1 \;\; (k = Const)$ bolsa, onda $ky_1 - y_2 = 0$, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2\, y_2 = 0$ bu ýerde $\alpha_2 = -1 \neq 0$. Tersine, eger $\alpha_1{}^2 y_1{}^2 \neq 0$ bolanda $\alpha_1 y_1 + \alpha_2\, y_2 = 0$ bolsun. Goý, $\alpha_2 \neq 0$, onda $y_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1$ ýa-da

$$y_2 = ky_1, \;\; k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Mysal üçin : $y_1 = x, \; y_2 = 2x$ funksiýalar islendik $[a,b]$ kesimde çyzykly baglydyr; $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x} \;\; (k_1 \neq k_2)$ funksiýalar çyzykly bagly däldir.

$$y_1 = e^{\alpha x} sin\beta x, \;\; y_2 = e^{\alpha x} cos\beta x \tag{17}$$

funksiýalar islendik $[a,b]$ kesimde çyzykly bagly däldir.

4-nji teorema. Eger $y_1 = y_1(x), \; y_2 = \; y_2(x), \dots, \; y_n = y_n(x)$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde çyzykly bagly bolsa, onda

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' \dots & y_n'' \\ & \dots\dots\dots\dots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (18)$$

kesgitleýji $[a, b]$ kesimde toždestwalaýyn nola deñdir.

◁ Teoremanyñ şertine görä $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde çyzykly baglydyr. Kesgitlemä görä bu kesimde $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 \ y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ deñlik $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ bolanda ýerine ýetýär.

Bu toždestwony (n-1) gezek differensirläp alarys:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \ y_2 + \dots + \alpha_n y_n &= 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 \ y_2' + \dots + \alpha_n y_n' &= 0, \\ \dots\dots\dots& \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 \ y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Islendik $x \in [a, b]$ üçin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ näbellilere görä birjynsly algebraik deñlemeler sistemasyny aldyk. Bu sistemanyñ noldan tapawutly çözüwi bolmagy üçin kesgitleýjisi nola deñ bolmaly, ýagny (10) deňlik ýerine ýetmeli.

(10) kesgitleýjä Wronskiniň kesgitleýjisi diýilýär.

5-nji teorema. Eger $y_1 = y_1(x),\ y_2 = \ y_2(x), \dots,\ y_n = y_n(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde üznüksiz $P_k(x)$ $(k = \overline{0, n})$ koeffisiýentli

$$y_n^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \dots + P_n(x) y = 0 \qquad (20)$$

Deñlemäniñ çyzykly bagly däl çözüwleri bolsa, onda Wronskiniñ W= $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ kesgitleýjisi $[a, b]$ kesimiñ islendik nokadynda nola deñ däldir.

◁ tersine güman edeliñ, ýagny $x_0 \in [a, b]$ nokatda Wronskiniñ kesgitleýjisi nola deñ bolsun. Şeýlelikde,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2\ y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 {y_1}'(x_0) + \alpha_2\ {y_2}'(x_0) + \dots + \alpha_n {y_n}'(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 {y_1}^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2\ {y_2}^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n {y_n}^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Algebraik deñlemeler sistemasynyñ noldan tapawutly çözüwi bardyr, ýagny $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Teorema 2.1 we 2.2-den

$$y = c_1 y_1(x) + c_2\ y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \qquad (22)$$

funksiýa (20) deñlemäniñ çözüwidir.

Bu deñlemäniñ çözüwi (21)-e görä

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýar. Bu başlangyç şert (20) deñlemäniñ $y \equiv 0$ çözüwini-de kanagatlandyrýar. Diýmek teorema 2.1 –e görä (22) deňlemäniň çözüwi $y(x_0) = 0$, diýmek

$$a_1 y_1(x_o) + a_2 y_2(x_o) + \ldots + a_n y_n(x_o) = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0)$$

Bu ýerden $x_0 \in [a, b]$ nokatda $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiýalar çyzykly bagly. Bu bolsa teoremanyñ şertine garşy gelýär. Bu garşylyk teoremany subut edýär.

3. n tertipli birjynsly çyzykly deñlemäniñ umumy çözüwi

6-njy teorema. Eger $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \dots,\ y_n = y_n(x)$ funksiýalar $[a, b]$kesimde kesgitlenen koeffisiýentleri bu kesimde üznüksiz bolan birjynsly (20) deñlemäniñ çyzykly bagly däl çözüwleri bolsalar, onda bu deñlemäniñ umumy çözüwi

$$y = c_1 y_1 + c_2\ y_2 + \dots + c_n y_n \qquad (23)$$

formula bilen kesgitlenýär, bu ýerde $c_1, c_2, \dots, c_n$ erkin hemişelikdir.

◁ 3-nji teoremany göz öñünde tutup, (23) funksiýanyñ (20) deñlemäni toždestwa öwürýändigini göreris.

Indi

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

şerti kanagatlandyrýan (20) çözüwinden $c_1, c_2, \dots, c_n$ hemişelikleri kesgitläliñ, ýagny

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2\ y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y_0, \\ c_1 y_1{}'(x_0) + c_2\ y_2{}'(x_0) + \dots + c_n y_n{}'(x_0) = y_0, \\ \dots\ \dots\ \dots \\ c_1 y_1{}^{(n-1)}(x_0) + c_2\ y_2{}^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n{}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Bu sistemanyñ kesgitleýjisi Wronskiniñ kesgitleýjisidir. Teoremanyñ şertine görä $[a, b]$ kesimde kesgitlenen $y_1(x),\ \ y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiýalar çyzykly bagly däl, şonuñ üçin islendik $x_0 \in [a, b]$ nokat ücin $W(x_0) \neq 0$ Diýmek, (24) sistemanyñ ýeke-täk $c_1{}^0, c_2{}^0, \dots, c_n{}^0$ çözüwi bardyr.

Bu bolsa (23) funksiýanyñ (20) deñlemäniñ umumy çözüwidigini añladýar.

Netije 2.2 çyzykly birjynsly deñlemäniñ çyzykly bagly däl çözüwleriniñ iñ uly sany deñlemäniñ tertibine deñdir.

Kesgitleme: n-nji tertipli çyzykly birjynsly deñlemäniñ islendik n çyzykly bagly däl çözüwlerine bu deñlemäniñ fundamental çözüwi diýilýär.

§ 2.3. n-nji tertipli hemişelik kosffisiýentli birjynsly çyzykly deñlemeler

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (25)$$

Deñleme n-nji tertipli hemişelik koeffisişelik koeffisiýentli birjynsly çyzykly deñleme diýilýär, bu ýerde $a_1, a_2, \dots, a_n$ hemişelik sanlar.

(25) deñleme (6) deñlemäniñ hususy halydyr. Şonuñ üçin §2.2-
- däki alnan netijeler (25) deñleme üçin dogrudyr.

(25) deñlemäniñ çözüwini

$$y = e^{kx}\ (k = Const) \quad (26)$$

görnüşde gözläliñ.

Bu funksiýany we onuñ $y' = ke^{kx}, y'' = k^{\,2} e^{kx}, \dots, y^n = k^{\,n} e^{kx}$ önümlerini (25) deňlemede ornunda goýup, alarys:

$$k^{n}e^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+\cdots+a_{n-1}ke^{kx}+a_ne^{kx}=0.$$

Ýa-da $$e^{kx}(k^{n}+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n)=0$$

(26) funksiýanyñ (25) deñlemäniñ çözüwi bolmagy üçin

$$k^{n}+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0 \qquad (27)$$

deñligiñ ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

(27) deñleme häsiýetlendiriji deñleme diýilýär. Bu n-nji tertipli algebraik deñlemäniñ n sany köki bardyr, olaryñ gabat gelýänide, kompleks san bolmagy mümkin.

1) Häsiýetlendiriji deñlemäniñ n-sany dürli hakyky köki bolsun. Bu kökleri $k_1, k_2, \dots, k_n$ $(k_i \neq k_j, i \neq j)$ bilen belgiläliñ. Bu sanlara degişli (25) deñlemäniñ kökleri

$$y_1=e^{k_1x}, y_2=e^{k_2x}, \dots, y_n=e^{k_nx} \qquad (28)$$

funksiýalar bolar. Bu funksiýalar $[a,b]$ kesimde çyzykly bagly däldir (15-e seret).

Teorema 6 –yñ netijesine görä, (25) deñlemäniñ umumy çözüwi

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\cdots+c_ne^{k_nx} \qquad (29)$$

formuladan kesgitlenýär.

5-nji mysal. $y'''-2y''-3y'=0$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◃ Bu deñlemäniñ häsiýetlendirijileriji deñlemesini ýazalyñ:

$$k^3-2k^2-3k=0$$

Deñlemäniñ kökleri $k_1=0, k_2=-1,\ k_3=3$ bolar. Berlen deñlemäniñ umumy çözüwi

$$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$$ bolar.

2. Häsiýetlendiriji deñlemäniñ kökleri hakyky bolup, olaryñ m sanysy özara deñ, beýlekileri dürli bolsun:

$$k_1=k_2=\cdots=k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n$$

berlen deñlemäniñ çözüwleri.

$$y_1=e^{k_1x}, y_2=e^{k_1x}, \dots, y_m=e^{k_1x}, y_{m+1}=e^{k_{m+1}x}, \dots, y_n=e^{k_nx}$$

bolar.

Bu çözüwler çyzykly baglydyr, sebäbi m sany çözüw gabat gelýär. m-sany gabat gelýän çözüwlere m-sany çyzykly bagly däl.

$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = xe^{k_1 x}, \dots, y_m = x^{m-1}e^{k_1 x}$

çözüwleri degişli edip bolar, şeýlelikde

$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = xe^{k_1 x}, \dots, y_m = x^{m-1}e^{k_1 x}, y_{m+1} =$

$= e^{k_{m+1}x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$;

Çözüwler çyzykly bagly däldir. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi.

$y =$

$c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} \dots, c_m x^{m-1} e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$

ýa-da

$y = (c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1})\, e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$

funksiýalar bolar.

6-njy mysal. $y''' - 2y'' + y' = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Häsiýetlendirijileriji deňlemesi: $k^3 + 2k^2 + k = 0$ bolar. Bu deňlemäniň çözüwleri $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0$ bolar. Umumy çözüwi ýazalyň:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + C_3.$$

3) Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň arasynda kompleks sanlar hem bar bolsun: $k_1 = \alpha - i\beta,\ k_2 = \alpha + i\beta$. Alarys:

$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$

$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$

Teorema 3-iñ netijesine görä, $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiýalar berlen deňlemäniň çözüwidir.

Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň galan $k_3, k_4, \dots, k_n$ kökleri dürli we hakyky sanlar bolsa, berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$y = (c_1\cos\beta x + c_2 i\sin\beta x)e^{\alpha x} + c_3 e^{k_3 x} + \dots + c_n e^{k_n x}$ bolar.

7-nji mysal. $y'''+4y''+13y'=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Häsiýetlendiriji deňleme $k^3+4k^2+13k=0$ bolar.

Bu deňlemäniň köklerini tapalyň: λ_1=-2-3i; Λ_2=-2+3i, λ_3=0. Umumy çözüwini ỳazalyň:

$$y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^{-2x}+C_3\,.$$

§2.4. n-nji tertipli birjynsly däl deňlemeler.

Aşakdaky n-nji tertipli birjynsly differensial deňlemä garalyň:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)y=f(x), \qquad (30)$$

bu ỳerde $p_k(x)(k=\overline{1,n})$, $f(x)$ funksiỳalar [a,b] kesimde üznüksiz. Berlen deňlemäni

$$L[y]=f(x) \qquad (31)$$

görnüşde ỳazalyň, bu ỳerde

$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y.$

7-nji teorema. Eger $y_0=y_0(x)$funksiỳa birjynsly $L[y]=0$ deňlemäniň çözüwi, $y_1=y_1(x)$ funksiỳa degişli birjynsly däl $L[y]=f(x)$deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda $y_0+y_1=y_0(x)+y_1(x)$ funksiỳa birjynsly däl deňlemäniň çözüwidir.

◁ Teoremanyň şertine görä $L[y_0]\equiv 0$, $L[y_1]\equiv f(x)$ alarys.

$L[y_0+y_1]=L[y_0]+L[y_1]\equiv 0+f(x),$

$$L[y_0+y_1]\equiv f(x).$$

Bu ỳerden $y_0+y_1-L[y]=f(x)$ deňlemäniň çözüwidigi gelip çykỳar.

Netije2.3 Eger $y_0=y_0(x)$ funksiỳa $L[y]=0$ deňlemäniň umumy çözüwi, $y_1=y_1(x)$ funksiỳa $L[y]=f(x)$ deňlemäniň haỳsyda bolsa bir hususy çözüwi bolsa,onda $y_0+y_1-L[y]=f(x)$ deňlemäniň umumy çözüwidir.

§2.5. n-nji tertipli birjynsly däl hemişelik koeffisiỳentli çyzykly deňlemeler

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (32)$$

deňlemä garalyň, bu ỳerde $a_k(k=\overline{1,n})$hakyky sanlar, $f(x)$–$[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiỳa.
(32) deňlemäniň birjynsly deňlemesini ỳazalyň:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \qquad (33)$$

Eger (33) deňlemäniň umumy y_0 çözüwi, we (32) deňlemäniň haỳsyda bolsa bir $y_1$hususy çözüwi belli bolsa, onda netije 2-den y_0+y_1 (32) deňlemäniň umumy çözüwidir. (33) deňlemäniň umumy çözüwiniň tapylyşyny §2.3-de seredipdik.

(32) deñlemäniñ hususy çözüwi näbelli koeffisiňentler usuly bilen tapylýar.

1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, bu ýerde $P_n(x)$- derejeli köpagza.

Eger α san degişli häsiýetlendiriji deñlemäniñ köki däl bolsa, onda $y_1=e^{\alpha x}Q_n(x)$ bolar, bu ýerde n-derejeli $Q_n(x)$ köpagzanyñ koeffisiýentlerini kesgitlemeli.

8-nji mysal. $y'''-y''+y'-y=x^2+x$ deñlemäniñ umumy çözüwlerini tapmaly.

◁ Ilki bilen bu deñlemäniñ birjynslysynyñ umumy çözüwini tapalyñ. Häsiýetlendiriji deñlemesiniñ köklerini tapalyñ.

$$k^3-k^2+k-1=0 \Longrightarrow k_1=1, k_2=-i, k_3=i,$$

diýmek:

$$y_0=c_1e^x+c_2cosx+c_3sinx\,,$$
$$y_1=ax^2+bx+c$$

Önümlerini tapyp, berlen deñlemede ornunda goýup, *a* ,*b*, *c* sanlary tapalyñ:

$$y'_1=2ax+b,\ y''_1=2a,\ y'''=0,$$
$$0-2a+2ax+b-ax^2-bx-c=x^2+x$$
$$-ax^2+(2a-b)x-2a+b-c=x^2+x$$

alarys:

$$\left.\begin{aligned}-a=1,\\ 2a-b=1,\\ -2a+b-c=0.\end{aligned}\right\},\quad a=1, b=1, c=-1, y_1=x^2+x-1.$$

Berlen deñlemäniñ umumy çözüwi
$y = y_0 + y_1 = C_1e^x + C_2cosx + C_3sinx + x^2 + x - 1$ bolar.

Eger α san häsiýetlendiriji deñlemäniñ m kratny köki bolsa, onda $y_1 = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ bolar.

9-njy mysal. $y''' + 7y' = e^{-7x}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu deňlemäniň birjynslysynyň umumy çözüwini tapalyň:

$$k^2 + 7k = 0 \Rightarrow k_1 = -7, k_2 = 0.$$

$$y_0 = C_1e^{-7x} + C_2.$$

$y_1 = xae^{-7x}$, bu funksiýanyñ önümlerini tapyp, berlen deñlemede ornunda goýalyñ:

$$y_1' = ae^{-7x} - 7axe^{-7x}, y_1'' = -14ae^{-7x} + 49axe^{-7x}, -14ae^{-7x} + 49axe^{-7x} + 7axe^{-7x}7axe^{-7x} - 49axe^{-7x} = e^{-7x} -$$

$$-7a = 1, a = -\frac{1}{7}, y_1 = -\frac{1}{7}xe^{-7x}$$

diýmek:

$$y = y_0 + y_1 = C_1e^{-7x} + C_2 - \frac{1}{7}xe^{-7x}$$

2) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + R_n(x)sin\beta x).$

Eger $\alpha \pm i\beta$ kompleks san häsiýetlendiriji deñlemäniñ kökleri bolmasa, onda
$y_1 = e^{\alpha x}(Q_n(x)cos\beta x + S_k(x)sin\beta x).$ bolar, bu ýerde
$k = max\{n, m\}$.

10-njy mysal. $y'' + 25y = cosx$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ $k^2 + 25 = 0,\ k_1 = 5i,\ k_2 = 5i$. Şonuň üçin

$$y_0 = C_1cos5x + C_2sin5x$$

$y_1 = acosx + bsinx, y_1' = -asinx + bcosx,\ y_1'' = -acosx -$
$-bsinx.$

$-acosx - bsinx + 25acosx + 25bsinx = cosx$

$$24acosx + 24bsinx = cosx, \qquad a = \frac{1}{24}, b = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{24}cosx, \ \ y = C_1cos5x + C_2sin5x + \frac{1}{24}cosx.$$

Eger $\alpha \pm i\beta$ kompleks san häsiýetlendiriji deňlemäniň r kratny köki bolsa, onda

$$y_1 = x^r e^{\alpha x}(Q_k(x)cos\beta x + S_k(x)sin\beta x)$$

11-nji mysal. $y'' + y = sinx - cosx$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\triangleleft$ $k^2 + 1 = 0 \Longrightarrow k_1 = -i, \ k_2 = i$, şonuň üçin

$$y_0 = C_1cosx + +C_2sinx.$$

$$y_1 = x(acosx + bsinx),$$

$$y_1' = acosx + bsinx + x(-asinx + bcosx),$$

$$y_1'' = -2asinx + 2bcosx + x(-acosx - bsin), -2asinx + 2bcosx - (acosx + bsinx) + x(acosx + bsinx) = sinx - cosx,$$

$$-2asinx + 2bxosx = sin - cosx, \qquad a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}x(cosx + sinx)$$

$$y = y_0 + y_1 = C_1cosx + C_2sinx - \frac{1}{2}x(cosx + sinx).$$

§2.6. n-nji tertipli çyzykly defferensial deňleme. Lagranžyň usuly

Eger

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0 \qquad (34)$$

deñlemäniñ $y_1(x)$ hususy çözüwi belli bolsa, onda $y = y_1 \check{z}$ belgilemäni girizip, deñlemäniñ tertibini bir birlik kemeldip bolýar, alnan deñlemede çyzykly deñlemedir.

Eger (34) deñlemäniñ k sany hususy çözüwi belli bolsa, onda bu deñlemäniñ tertibini k birlik kemeldip bolar.

Eger (34) deñlemäniñ umumy çözüwi belli bolsa, onda onuñ kömegi bilen

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = f(x) \qquad (35)$$

deñlemäniñ çözüwini tapyp bolar, bu usula Lagranžyň usuly diýilýär. Goý, $y = C_1 y_1 + C_2\ y_2 + \dots + C_n y_n$ funksiýa (34) deñlemäniñ umumy çözüwi bolsun. (35) deñlemäniñ çözüwini.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2\,(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n \qquad (36)$$

görnüşde gözlenilýär, bu ýerde $C_1(x) + C_2\,(x) + \dots + C_n(x)$ funksiýalar häzirlikçe näbellidir. Olary aşakdaky görnüşde kesgitläliñ :

$$\left.\begin{array}{c} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \dots + y_n C_n' = 0, \\ y_1{}' C_1' + y_2{}' C_2' + \dots + y_n{}' C_n' = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y_1{}^{(n-1)} C_1' + y_2{}^{(n-1)} C_2' + \dots + y_n{}^{(n-1)} C_n' = f(x). \end{array}\right\}$$

bu sistemadan $C_k'(x)(k = \overline{1,n})$ tapalyñ,

$\frac{dC_k}{dx} = \varphi_k(x), i = \overline{1,n},$ integrirläp alarys:

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)dx + \overline{C_k}.(k = \overline{1,n})$$

bu ýerde $\overline{C_k}(k = \overline{1,n})$ erkin hemişeliler. $C_k(k = \overline{1,n})$ bahalaryny (36)-da ornunda goýup, (35) deñlemäniñ umumy çözüwini taparys.

12-nji mysal. Hususy çözüwi $y_1 = \frac{sinx}{x}$ bolan

$$xy'' + 2y + xy = 0$$

deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◁ $y = \frac{sinx}{x} z$ ornunda goýmany girizeliñ, bu ýerde z-täze gözlenýän funksiýa.

$$y = y_1 z,\ y' = y_1' z + y_1 z',\ y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

berlen deñlemede ornunda goýup , alarys:

$$(xy''_1 + 2y_1' + xy_1)z + xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0,$$

$xy''_1 + 2y_1' + xy_1 = 0$, sebäbi y_1 berlen deñlemäniñ çözüwi. Alarys:

$$xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0$$

$y_1 = \frac{sinx}{x}$ funksiýany göz öñünde tutup, $z'' sinx + 2z' cosx = 0$ deñlemäni alarys. Alnan deñlemäni $\frac{z''}{z'} + 2\frac{cosx}{sinx} = 0$ görnüşde ýazalyñ.Integrirläp alarys

$$ln|z'| + 2ln|sinx| = LnC_1\ \hat{y}ada\ z' sin^2 x = C_1.$$

Ýene-de bir gezek integrirläliñ:

$z = -C_1 ctgx + C_2,\ \ \hat{y}ada\ \ z = \overline{C_1} ctgx + \overline{C_2}\ (\overline{C_1} = -C_1)$

ornunda goýmadan alarys:

$$y = \overline{C_1}\frac{cosx}{x} + C_2\frac{sinx}{x}$$

13-nji mysal. $y'' + y = \frac{1}{cosx}$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly.

◁ Ilki bilen $y'' + y = 0$ deñlemäniñ umumy çözüwini tapalyñ:

$$k^2 + 1 = 0 \Longrightarrow k_1 = -i, \qquad k_2 = i,$$

Sonuň üçin $y_0 = C_1 cosx + C_2 sinx$. Indi berlen deñlemäniñ umumy çözüwini tapmaly. Ony

$$y_0 = C_1(x)cosx + C_2(x)sinx. (2.37)$$

görnüşde gözläliñ, bu ýerde $C_1(x), C_2(x)$ näbelli funksiýalar. Bu näbellileri

$$\left.\begin{aligned} cosx C_1'(x) + sinx C_2'(x) &= 0 \\ -sinx C_1'(x) + cosx C_2'(x) &= \frac{1}{cosx} \end{aligned}\right\}$$

sistemadan tapalyñ

$$C_1'(x) = -tgx, C_2'(x) = 1$$

Integrirläp alarys: $C_1(x) = ln|cosx| + \overline{C_1}$, $C_2(x) = x + \overline{C_2}$.

Tapylan funksiýalary (2.37) ornunda goýup, alarys:
$y = \overline{C_1} cosx + \overline{C_2} sinx + cosx ln|cosx| + \overline{C_2} sinx.$

G ö n ü k m e l e r

§1.1. $y = \varphi(x,c)$ (c-erkin hemişelik) funksiýa berlen differensial deňlemäniň çözüwimi ?

1) $y = x^2\left(1 + ce^{1/x}\right)$, $x^2y' + (1-2x)y = x^2$;

2) $y = ce^x - e^{-x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$;

3) $y = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, $y' + 2y = e^x$;

4) $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y' + xy = 2x$

5) $x^2 + y^4 = cy^2$, $xydy = (x^2 - y^4)dy$

6) $y = cx + \frac{1}{c}$, $xy' - y + \frac{1}{y} = 0$;

7) $y = \frac{2+cx}{1+2x}$, $2(1 + x^2y') = y - xy'$.

§1.2. Differensial deňlemäni çözmeli.

1) $(1+y^2)dx+(1+h^2)dy=0$; 2) $xydx+(x+1)dy=0$;

3) $xy' = y^2 + 1$; 4) $(x+xy)dy+(y-xy)dx=0$, $y(1)=1$;

5) $(1+y^2)dx+xydy=0$; 6) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

7) $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy = 0$; 8) $e^{-y}(1+y') = 1$;

9) $y' = a^{x+y}(a > 0, a \neq 1)$;

10) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;

11) $e^x\sin^3 y + (1+e^{2x})\cos y\, y' = 0$; 12) $2x^2yy' + y^2 = 2$

§ 1.3. Deňlemäni çözmeli.

1) $(x+ey)dx-xdy=0$; 2) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

3) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$; 4) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;

5) $x^2dy-(y^2-xy+x^2)dx=0$; 6) $xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0$;

7) $y^2 + x^2y' - xyy' = 0$; 8) $xy' - y - x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x} = 0$;

9) $xy' - y\cos\ln\frac{y}{x} = 0$; 10) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

§ 1.4. Berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly :

1) $xy' - 2y = 2x^4$; 2) $(2x - y^2)y' = 2y$;

3) $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1)$; $y(-2) = 2$;

4) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$; 5) $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$;

6) $y' - y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos^3}$, $y(0) = 0$;7) $\left(e^{-y^2/2} - xy\right)dy - dx = 0$;

8) $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$; 9) $(2e^y - x)y' = 1$;

10) $(\sin^2 y + x\,\mathrm{ctg}y)y' = 1$; 11) $y' = \frac{y}{34 - y^2}$;

12) $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

§ 1.5. Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly:

1) $(x\ln y-x^2+\cos y)dy+(x^3+y\ln y-y-2xy)dx=0$;

2) $\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0$;

3) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$;

4) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$;

5) $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$; 6) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$;

7) $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$;

8) $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x dy=0$;   9) $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$;

10) $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$;

11) $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$;   12) $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0$;

13) $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$;   14) $(x^2+y)dx-xdy=0$;

15) $(x+y^2)dx-2xydy=0$;   16) $(2x^2+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$;

17) $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$; 18) $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos y dy=0$;

19) $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$;

§ 2.1. Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly:

1) $y^{IV}=\frac{8}{(x-3)^5}$;   2) $y'''=x+\cos x$;

3) $y''=xe^x$, $y(0)=0$;   4) $y''-2x\ln x$;

5) $y'''=\sqrt{1-y''^2}$;   6) $y''=\sqrt{1+y'^2}$;

7) $y''=y'^2$;   8) $y''=\sqrt{1-y'^2}$;

9) $y''=1+y'^2$;   10) $y''=\sqrt{1+y'}$;

11) $y''=y'\ln y'$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

12) $y''+y'+2=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$;

13) $y'''+y''^2=0$;   14) $xy''+y'=0$;

15) $xy''=(1+2x^2)y'$;   16) $xy''=y'+x^2$;

17) $x\ln x\, y''=y'$;   18) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$;

19) $y'^2 = (3y - 2y')y''$; 20) $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$;

21) $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$;

§ 2.2. Aşakdaky funksiýalar özleriniñ kesgitleniş oblastynda **çyzykly** baglymy ?

1) $4, x$; 2) $1, 2, x, x^2$; 3) $x, 2x, x^2$;

4) $\sin x, \cos x, \cos 2x$ c; 5) $1, \sin x, \cos 2x$; 6) $5, \cos^2 x, \sin^2 x$;

Wronskiniñ kesgitleýjisini hasaplamaly :

7) $1, x$; 8) $x, \frac{1}{x}$; 9) $1, 2, x^2$; 10) e^{-x}, xe^{-x}; 11) $e^x, 2^{ex}, e^{-x}$;

Çözüwleriñ fundemental sistemasy berlen. Çyzykly birjynsly differensial deñlemäni ýazmaly:

12) e^{-x}, e^x; 13) e^{-2x}, xe^{-2x}; 14) e^x, xe^x, x^2e^x;

15) $1, \sin x, \cos x$; 16) $e^{2x}, \sin x, \cos x$; 17) $1, e^{-x}\sin x, e^{-x}\cos x$.

§ 2.3. Aşakdaky deñlemeleriñ umumy çözüwlerini tapmaly:

1) $y''-2y'-4y=0$; 2) $3y''-2y'-8y=0$; 3) $y''+6y'+9y=0$;

4) $y'''-3y''+3y'-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$;

5) $y''-6y'+18y=0$; 6) $y'''+6y''+11y'+6y=0$; 7) $y^{VI}+2y^{V}+y^{IV}=0$;

8) $y^{IV}-8y=0$; 9) $y^{IV}-y=0$; 10) $2y'''-3y''+y'=0$;

§ 2.4. Aşakdaky deñlemeleriñ umumy çözüwlerini tapmaly:

1) $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$; $y(0)=1$, $y'(0)=-2$;

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$; 3) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$;

4) y''-2y'-3y=e^{4x}; 5) y''-y =2e^x-x^2;

6) y''-3y'+2y=sinx; 7) y''+4y'-2y=8sin2x;

8) y''+y=4xcosx; 9) y''+2y'+5y=e^{-x}sin2x;

10) y''-5y'=3x^2+sin5x; 11) y''-3y'+2y=xcosx;

12)y''-2y'+y=6xe^x; 13) y''+y=xsinx;

14) y''+4y'+4y=xe^{2x}; 15) y''-4y'+5y=e^{2x}(sinx+2cosx)

.

Logranžyň usulyny peýdalanyp çözmeli :

16) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$; 17) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$;

18) $y'' - y' = \frac{1}{e^x+1}$; 19) y''-y'=e^{2x}cose^x;

20) $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$; 21) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

Jogaplar

§1.1. 1) Hawa, 2) Ýok, 3) Hawa, 4) Hawa, 5)Hawa, 6)Ýok,
7) Howwa. **§1.2.**1) arctg x+arctg y=c; 2) y=c(x+1)e^{-x}, x=-1;
3) arctg y=ln|cx|; 4) y-x+ln|cx|=0; 5) x^2(1+y^2)=c;
6) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$; 7) $\ln|x| = c + \sqrt{y^2+1}$, $x = 0$;
8) e^x=c(1-e^{-y}); 9) a^x+a^{-y}=c; 10) 1+e^y=c(1+x^2);
11) $\operatorname{arctg} e^x = \frac{1}{2\sin^2 y} + c$; 12) y^2-2=c$e^{1/x}$;

§1.3. 1) x+y=cx^2, x=0; 2) y=xe^{1+cx};
3) $\ln(x^2+y^2) = c - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$; 4) x(y-x)=cy, y=0;
5) (x-y)lncx=x; 6) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2$, $y = x$;
7) y=c$e^{y/x}$; 8) $\sin\frac{y}{x} = cx$; 9) $\ln cx = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$, $y = xe^{2\pi k}$,

k=0, ±1, ±2,... ; 10) $x\ln cx = 2\sqrt{xy}$, $y = 0$, $x = 0$.

§1.4. 1) $y=cx^2$; 2) $x = cy - \frac{1}{2}y^2$; 3) $y = x^2 - \frac{3x}{x-1}$;

4) $y=\sin x+\cos x$; 5) $y=(c+x^2)\ln x$. 6) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$;

7) $x = (c + y)e^{\frac{-y^2}{2}}$; 8) $y = (c + x)e^{(1-x)e^x}$; 9) $x=ce^{-y}+e^y$;

10) $x=-\cos y\sin y+c\sin y$; 11) $x=cy^3+y^2$, $y=0$; $y = (c + x)e^{-x^2}$.

§1.5. 1) $x^4+4xy(\ln y-1)-4x^2y+4\sin y=c$; 2) $x^2 + y^2 + 2\arcsin\frac{x}{y} = c$;

3) $x^4+x^2y^2+y^4=c$; 4) $x^3+3x^2y^2+y^4=c$; 5) $x^2-3x^3y^2+y^4=c$;

6) $xe^{-y}-y^2=c$; 7) $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = c$; 8) $x-y^2\cos^2 x=c$;

9) $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = c$; 10) $x^2+1=2(c-2x)\sin y$;

11) $2x+\ln(x^2+y^2)=c$; 12) $x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = c$;

13) $xy^2-2x^2y-2=cx$, $\mu =1/x^2$; 14) $x - \frac{y}{x} = c$, $\mu = \frac{1}{x^2}$;

15) $x\ln|x|-y^2=cx$, $\mu =\frac{1}{x^2}$; 16) $5\operatorname{arctg}x+2xy=c$, $x=0$, $\frac{1}{1+x^2}$;

17) $y^3+x^3(\ln x-1)=cx^2$, $\mu = \frac{1}{x^4}$; 18) $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+$

$+e^x(\sin x-\cos x)=c$, $\mu =e^x$; 19) $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = c$, $\mu = \frac{1}{y^2}$.

§2.1. 1) $y = \frac{1}{3(x-3)} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$;

2) $y = \frac{x^4}{24} - \sin x + c_1x^2 + c_2x + c_3$; 3) $y=(x-2)e^x+x+2$;

4) $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{5}{18}x^3 + c_1x + c_2$; 5) $y=c_3 + c_2x - \sin(x + c_1)$;

6) $y = \operatorname{ch}(x + c_1) + c_2$; 7) $y = c_2 - \ln|c_1 - x|$;

8) $y = c_2 - \cos(c_1 + x)$; 9) $y = c_2 - \ln|\cos(c_1 + x)|$;

10) $y = \frac{(x+c_1)^3}{12} - X + C_2$; 11) $y=x$; 12) $y=-2x$;

13) $y = (x + c_1)\ln|x + c_1| + c_2x + c_3$; 14) $y = c_1\ln|x| + c_2$;

15) $y = c_1 e^{x^2} + c_2$; 16) $y = \frac{x^3}{3} + c_1 x^2 + c_2$;

17) $y = c_1 x(\ln x - 1)$; 18) $y = (c_1 x - c_1^2) e^{\frac{x}{c_1}+1} + c_2$;

19) $x = 3c_1 P^2 + \ln c_2 P$, $y = 2c_1 P^3 + P$;

20) $12(c_1 y - x) = c_1^2 (x + c_2)^3 + c_3$; 21) $\ln y = c_1 \mathrm{tg}(c_1 x + c_2)$,

$\ln|(\ln y - c_1)/(\ln y + c_1)| = 2c_1 x + c_2$, (c-x)lny=1, y=c.

§2.2. 1) Hawa ; 2) Ýok ; 3) Ýok ; 4) Hawa ; 5) Hawa ; 6) Ýok;

7) 1; 8) $-\frac{2}{x}$; $x \neq 0$; 9) 0; 10) e^{-2x} ; 11) 0 ; 12) $y''-y=0$;

13) $y''+4y'+4y=0$; 14) $y'''+3y''+3y'-y=0$; 15) $y'''+y'=0$;

16) $y'''-2y''+y'-2y=0$; 17) $y'''+2y''+2y'=0$.

§2.3. 1) $y = c_1 e^{(1+\sqrt{5})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{5}x}$; 2) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{4}{3}x}$;

3) $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$; 4) $y=e^x(1+x)$;

5) $y = e^{3x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$; 6) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$;

7) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + e^{-x}(c_5 + c_6 x)$;

8) $y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x)$;

9) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$;

10) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{x/2}$.

§2.4. 1) $y = 4(e^x - e^{2x}) + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$;

2) $y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2\right) e^{-2x}$;

3) $y = e^x\left(c_1 + c_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}x\right)$;

4) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}$;

5) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (2x - 2)e^x$;

6) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2$;

7) $y = c_1 e^{-(\sqrt{6}+2)x} + c_2 e^{(\sqrt{6}+2)x} - \frac{16\cos 2x + 12 \sin 2x}{25}$;

8) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin 2x + x\cos x + x^2 \sin 2x$;

9) $y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{-x} - \frac{1}{4} x e^{-x} \cos 2x$;

10). $y = c_1 + c_2 e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02(\cos 5x - \sin 5x)$.

11) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12)\cos x - (0,3x + 0,34)\sin x$;

12) $y = (c_1 + c_2 x + x^3)e^x$;

13) $y = \left(c_1 - \frac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(c_2 + \frac{x}{4}\right)\sin x$;

14) $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right)e^{2x}$;

15) $y = \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x + x\sin x\right)e^{2x}$;

16) $y = (c_1 - x)\cos x + (c_2 + \ln|\sin x|)\sin x$;

17) $y = e^x(x\ln|x| + c_1 x + c_2)$;

18) $y = c_1 e^x + c_2 + (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x})$;

19) $y = c_1 e^x + c_2 - \cos e^x$;

20) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + 1 - x + x\ln|x|$;

21) $y = e^{-x}(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + c_1 + c_2 x$.

III.3. MATEMATIKI FIZIKANYŇ ESASY DEŇLEMELERI
§ 3.1. Hususy önümli differensial deňlemeler

Tebigatyň köp hadysalary, meselem, yrgyldylar, ỳylylyk geçirijilik, diffuziỳa we ş.m hadysalar matematiki fizikada hususy önümli differensial deňlemelere getirilip öwrenilỳär.

Kesgitleme. $u(x, y \dots z)$ funksiỳany, erkin $x, y, \dots, z$ argumentleri we şu argumentlere görä $u(x, y \dots z)$ funksiỳanyň hususy önümlerini baglanyşdyrỳan differensial deňlemelere hususy önümli differensial deňlemeler diỳilỳär.

Hususy önümli differensial deňlemeler umumy görnüşde aşakdaky ỳaly ỳazylyp bilner:

$$F\left(x, y \dots z\ u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \frac{\partial u}{\partial z,} \dots \frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1}, \partial y^{k_2} \dots \partial z^{k_i}} \right) = 0 \qquad (1.1)$$

bu ỳerde $k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k$. (1.1) hususy önümli differensial deňlemä girỳän hususy önümleriň iň ỳokary tertibine deňlemäniň tertibi diỳilỳär.,

Biz diňe ikinji tertipli we iki, üç erkin üỳtgeỳän argumentlere görä hususy önümli differensial deňlemelere seretjekdiris.

Kesgitleme. $u(x, y)$ funksiỳa we onuň hususy önümlerine görä çyzykly bolan deňlemä hususy önümli çyzykly differensial deňleme diỳilỳar.

Meselem:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y)u + F(x, y) = 0 \ . \qquad (1.2)$$

Eger $F(x, y) \equiv 0$ bolsa, onda (1.2) deňlemä birjynsly çyzykly differensial deňleme diỳilỳär:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+G(x,y)u+F(x,y)=0 \ .$$

(1.2) deňleme iki näbellili, ikinji tertipli hususy önümli çyzykly differensial deňlemedir.

Eger-de hususy önümli differensial deňlemeler, diňe ỳokary tertipli hususy önümlerine görä çyzykly deňleme bolsa, onda beỳle deňlemelere kwaziçyzykly differensial deňlemeler diỳilỳär.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \qquad (1.3)$$

Bu deňlemede $u(x,y)$ funksiỳa we onuň I-nji tertipli hususy önümleri islendik görnüşde gabat gelmegi mümkin. Meselem:

$$(x^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(y+x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$

$$+x^5u^3=(x^2+3x)y \ .$$

Hususy önümli differensial deňlemäniň çözüwi diỳip, şol deňlemede funksiỳa we onuň hususy önümleri deňlemede ornuna goỳlanda deňlemäni argumentlere görä toždestwa öwürỳän islendik funksiỳa aỳdylỳar.

Meseleler: 1.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0 \qquad (1.4)$$

deňlemä garalyň.

Deňlemeden görnüşine görä, gözlenilỳän $u(x,y)$ funksiỳa x-a bagly däldir, diňe y-e bagly funksiỳadyr. $u(x,y)=\varphi(y)$-erkin funksiỳadyr. Hakykatdan-da, $u(x,y)$ funksiỳadan x-a görä önümi alsak, ol nola deň bolar. $u(x,y)$ funksiỳa x-a bagly däldir. Onda $u=\varphi(y)$ funksiỳa (1.4) deňlemäniň çözüwidir.

II.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y \qquad (1.5)$$

deňlemä seredeliň.

(1.5) deňlemäniň çözüwi aşakdaky görnüşde bolar.

$$u(x,y) = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x) \tag{1.6}$$

Bu ỳerde $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ - erkin funksiỳalar.
Hakykatdan-da, (1.6) deňligiň iki böleginden hem y-e görä iki gezek önüm alsak:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + \phi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

we $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ululygyň bahasyny (1.5) deňlemede ornuna goỳsak, onda biz toždestwo alarys.

§ 3.2. Hususy önümli ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemeleriň klassifikasiỳasy

Iki üỳtgeỳänli ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemä seredeliň:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

(2.1)

Eger berlen oblastda $B^2 - AC > 0$ şert ỳerine ỳetse, onda (2.1) deňlemä giperbolik, $B^2 - AC = 0$ bolanda parabolik, $B^2 - AC < 0$ bolanda bolsa elliptik tipli (görnüşli) deňlemer diỳilỳär.

Eger $B^2 - AC$ aňlatma berlen oblastda alamatyny üỳtgetse, onda (2.1) deňlemä garyşyk görnüşli deňleme diỳilỳär.

Mysal üçin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňleme islendik oblastda giperbolik tipli deňlemedir, çünki

$$B^2 - AC = 1^2 - 1 \times (-3) = 1 + 3 = 4 > 0 \ .$$

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňleme islendik oblastda elliptik tipli deňlemedir, çünki

$$B^2 - AC = 0^2 - (1+x^2)(1+y^2) < 0 \ .$$

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňleme islendik oblastda parabolik tipli deňlemä degişlidir, çünki

$$B^2 - AC = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0 \ .$$

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

deňleme garyşyk tipli deňlemedir, ỳagny $y > 0$ bolanda elliptik tipli deňleme, $y < 0$ bolanda giperbolik tipli deňleme.

§ 3.3. Çyzykly hususy önümli differensial deňlemelerde täze üỳtgeỳän ululyklary girizmek bilen özgertmek.

Ikinji tertipli hususy önümli

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.1}$$

deňlemä seredeliň.

Täze üỳtgeỳän ξ we η ululyklary

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \tag{3.2}$$

formulalar arkaly girizileň, bu ỳerde $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ argumentlerine görä iki gezek üznüksiz differensirlenỳän funksiỳalar. Bu funksiỳalaryň ỳakobiany noldan tapawutly diỳeliň, ỳagny

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.3}$$

we (3.2) deňleme x we y-e görä

$$x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$$

görnüsde aňladylỳar.

x we y-e bagly $u(x,y)$ funksiỳanyň önümlerini täze ξ we η üỳtgeỳän ululyklara görä tapalyň:

$$\left.\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y;\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy};\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\varsigma\eta}\xi_\eta\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xy};\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

Tapylan aňlatmalary (3.1) deňlemede ornuna goỳup, alarys:

$$A_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + C_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

(3.5)

bu ỳerde

$$\left.\begin{aligned}
&A_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2;\\
&B_1(\xi,\eta) = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\eta}{\partial y};\\
&C_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

Gös göni barlamak bilen

$$B_1^2 - A_1C_1 = (B^2 - AC)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = (B^2 - AC)I^2 \quad (3.7)$$

bolỳandygyna göz ỳetirmek bolar.

Diỳmek, (3.1) we (3.5) deňlemeler şol bir görnüşli deňlemelere degişlidir, ỳagny täze üỳtgeỳän ululyklar deňlemäniň tipini üỳtgetmeỳär.

§ 3.4. Giperbolik tipli deňlemeleri kanonik görnüşe getirmek

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (4.1)$$

hususy önümli birinji tertipli deňlemä seredeliň, bu ýerde $A=A(x,y), B=B(x,y), C=C(x,y)$ funksiýalar (3.1) deňlemedäki funksiýalardyr, özem $A\neq 0$.

(4.1) deňlemäni

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0 \qquad (4.2)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\ ; \qquad (4.3)$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\ . \qquad (4.4)$$

Bu deňlemeleriň her biri ady differensial deňlemeleriň sistemasyna getirilýär, ýagny

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}}, \qquad (4.5)$$

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}, \qquad (4.6)$$

ýagny

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0, \qquad (4.7)$$

$$Ady-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dy=0. \qquad (4.8)$$

Soňky deňlemeleri bir deňleme görnüşde aňlatmak bolar, ýagny

$$A(dy)^2-2Bdydx+C(dx)^2=0 \qquad (4.9)$$

bolar.

Goý, $\phi_1(x,y)=c_1$, $\phi_2(x,y)=c_2$ (4.7) we (4.8) deňlemeler sistemasynyň çözüwi bolsun. Bu ỳagdaỳda

$$u = \varphi_1(x, y), u = \varphi_2(x, y) \tag{4.10}$$

funksiỳalar degişlilikde (4.3) we (4.4) deňlemeleriň çözüwidir hem-de şol bir wagytda (4.1) deňlemäniň çözüwidir. (4.10) deňleme bilen kesgitlenỳän çyzyklara (3.1) deňlemäniň häsỳetlendiriji çyzyklary ỳa-da bu deňlemäniň häsỳetlendirijisi diỳilỳär. (4.9) deňlemä harakteristik deňleme diỳilỳär.

Eger (3.2) formuladaky $\xi(x, y), \eta(x, y)$ funksiỳalaryň ornuna (4.10) funksiỳalary alsak, onda (3.5) deňleme has ỳönekeỳ görnüşe geler, sebäbi onuň käbir koeffisiỳentleri nola deň bolar.

Goỳ,

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

(4.11)

deňleme seredilỳän oblastda giperbolik tipli deňleme diỳeliň, ỳagny bu oblastda $B^2 - AC > 0$ şert ỳerine ỳetỳän bolsun.

Goỳ, A we C koeffisiỳentler bir wagtda nula deň bolmasynlar, ỳagny kesgitlilik üçin $A \neq 0$ bolsun.

$B^2 - AC > 0$ bolany üçin (4.7) we (4.8) deňlemeler sistemasynyň hakyky dürli $\varphi_1(x, y) = c_1, \varphi_2(x, y) = c_2$ integrallary,ỳagny çözüwleri bolar.

(3.2) formuladaky $\xi(x, y), \eta(x, y)$ funksiỳalaryň ornuna $\varphi_1(x, y)$ we $\varphi_2(x, y)$ funksiỳalary alyp, olaryň degişlilikde (4.3), (4.4) deňlemeleriň çözüwleri bolỳüandygyny göz öňünde tutup (3.4) formulalar esasynda alarys.

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Onda (3.5) deňleme aşakdaky görnüşde bolar

$$2B_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \qquad (4.12)$$

ỳakobianyň ($I \neq 0$), noldan tapawutlylygy esasynda $B_1 \neq 0$. B_1-e bölüp alarys:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varsigma\partial\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \qquad (4.13)$$

(4.13) deňlemä giperbolik tipli deňlemäniň kanonik görnüşi diỳilỳär.

1-nji bellik. Eger $A = C = 0$ bolsa, onda (4.11) deňleme eỳỳäm kanonik görnüşdedir.

2-nji bellik. (4.13) deňlemede

$$\xi=\mu+\nu, \eta=\mu-\nu \ ,$$

$$\mu=\frac{\xi+\eta}{2}, \nu=\frac{\xi-\eta}{2}$$

täze üỳtgeỳän ululyklary girizip, ony

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}=\Phi\left(\mu,\nu,u,\frac{\partial u}{\partial\mu},\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)$$

görnüşe getirmek bolỳar.

§ 3.5. Parabolik tipli deňlemeleri kanonik görnüşe getirmek.

$B^2 - AC = 0$ (5.1) şerti kanagatlandyrỳan (3.1) deňlemä seredeliň.

Goỳ, A we B koeffisientler bir wagtda nula deň bolmasynlar. Kesgitlilik üçin $A \neq 0$ bolsun.

(5.1) şert esasynda (4.3) we (4.4) deňlemeler gabat gelỳärler, we

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad (5.2)$$

deňlmäni alarys.

Eger $\varphi(x, y)$ funksiỳa (5.2) deňlemäni kanagatlandyrỳan bolsa, onda bu funksiỳa

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad (5.3)$$

deňlemäni kanagatlandyrỳandygyny görkezeliň .

(5.2) deňlemäniň iki bölegini B-e köpeldip we (5.1) şerti göz öňüne tutup, alarys

$$O=AB\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}=AB\frac{\partial\varphi}{\partial x}+AC\frac{\partial\varphi}{\partial y}=A\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Bu ỳerden $A\neq 0$ şerti göz öňüne tutyp, (5.3) deňligi alarys.

Bu ỳagdaỳda (4.10)-nyň birinji integraly gabat delỳär. Şonuň üçin $\varphi(x,y)=C$ alarys.

$v=\varphi(x,y)$ (5.2) deňlemäniň çözüwi bolup durỳan $\xi=\varphi(x,y)$ funksiỳa (5.3) deňlemäniň hem çözüwidir.

Goỳ, $\xi=\varphi(x,y)$ bolsun. Şeỳle $\xi=\xi(x,y)$ saỳlamada (3.5) deňlemäniň A_1 we B_1 koeffisientleri nula deňdir. Hakykatdan-da, (3.6) deňlemäniň ikinji formulasyny özgerdip alarys:

$$B_1=\left(A\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(B\frac{\partial\xi}{\partial x}+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Bu ỳerden $B_1\equiv 0$, sebäbi $\xi=\varphi(x,y)$-funksiỳa (5.2) we (5.3) deňlmeleriň çözüwidir.

$\xi=\varphi(x,y)$ funksiỳa (4.1) deňlemäniň çözüwi bolany üçin $A_1\equiv 0$ bolar.

$\eta=\eta(x,y)$ funksiỳanyň ornuna

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

şerti kanagatlandyrỳan islendik funksiỳany almak bolar. Özgerdilen (3.5) deňlemede $\tilde{N}_1\neq 0$ bolỳandygyny görkezmek bolar.

Hakykatdan-da (3.6) deňlemäniň üçinji formulasynda

$B^2 - AC = 0$ şerti ulanyp alarys:

$$\tilde{N}_1 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A}\left[A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]^2 .$$

Bu ỳerden $\tilde{N}_1 \neq 0$, başga ỳagdaỳda kwadrat ỳaỳyň içi nula deň bolmaly, ỳagny

$$A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

bolar.

Bu deňleme we (5.2) deňleme birjynysly sistemany emele getirỳär, ỳagny nuldan tapawutly çözüwe eỳedir. $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$

Şeỳlelikde, bu sistemanyň kesgitleỳjisi nula deňdir, ỳagny

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

bu bolsa $I \neq 0$ şerte garşy gelỳär.

Diỳmek, (3.1) deňleme

$$C_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$$

görnüşi alar.

$\tilde{N}_1 \neq 0$ bolany üçin bu deňlemäni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{5.5}$$

görnüşde ỳazmak bolar.

(5.5) deňlemä parabolik tipli deňlemäniň kanonik görnüşi diỳilỳär.

Bellik. Eger $A = 0, B = 0$ bolsa, onda (3.1) deňleme eỳỳäm kanonik görnüşe getirilendir.

§ 3.6. Elliptik tipli deňlemeleri kanonik görnüşe getirmek.

Goý, (3.1) deňleme elliptik tipli deňleme bolsun, ýagny seredilýän oblastda

$$B^2 - AC < 0 \tag{6.1}$$

şert ýerine ýetsin.

Bu şertiň esasynda (4.7) we (4.8) deňlemeler çatyrymly kompleks integrallara eýe bolar,

$$\varphi_1(x,y) = C_1,\ \varphi_2(x,y) = C_2, \quad \text{özem}$$

$$\varphi_1(x,y) = \xi(x,y) + i\eta(x,y), \quad \varphi_2(x,y) = \xi(x,y) - i\eta(x,y), \tag{6.2}$$

bu ýerde $\xi(x,y), \eta(x,y)$ funksiýalar x we y üýtgeýänli hakyky funksiýalar.

$\varphi_1(x,y)$ funksiýa (4.1) deňlemäniň çözüwi, onda

$$A\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 = 0\,.$$

ýada

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + i\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + i\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + i\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + i\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \equiv 0\,.$$

Bu toždestwanyň çep bölegini özgerdip alarys:

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 - \left[A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+ 2i\left[A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right] \equiv 0$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0\,.$$

(3.6) formula esasynda

$$A_1 \equiv C_1,\ B_1 \equiv 0 \tag{6.3}$$

Onda (3.5) deňleme

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

(6.1), (3.3) we (3.7) şertlerden $A_1 \neq 0$, şonuň üçin soňky deňlemäni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{6.4}$$

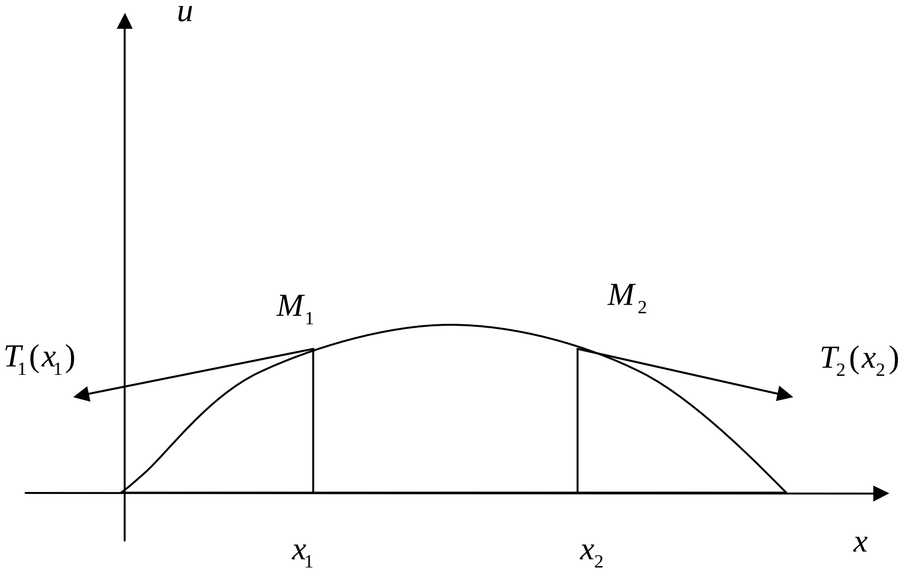
görnüşde ỳazmak bolar.

(6.4) deňlemä elliptik tipli deňlemäniň kanonik görnüşi diỳilỳär.

§ 3.7. Kirşiň yrgyldylarynyň deňlemesini getirip çykarmak

Uçlaryndan dartylan kirş alalyň. Kirş diỳip örän inçe we erkin egrelỳän sim sapajygyna düşünjekdiris. Kirş täsir edỳän dartyş dartyş güỳjiň agyrlyk güỳje garanyňda has uludygy sebäpli agyrlyk güỳjini hasaba aljak däldiris.

Deňagramlylyk ỳagdaỳda kirşiň ugry X okuň ugry bilen gabat gelỳär diỳeliň. Biz kirşiň kese yrgyldysyna seredeliň; yrgyldy diňe bir tekizlikde bolup geçỳär we kirşiň hemme nokatlary X okuna perpendikulỳär hereket edỳär diỳeliň. Wagtyň islendik t pursatynda kirşiň nokatlarynyň deňagramlylyk ỳagdaỳyndan üỳtgemegini $u = u(x,t)$ bilen belläliň. Wagtyň islendik pursatynda $u = u(x,t)$ funksiỳanyň grafigi şol pursatdaky kirşiň formasyny görkezjekdigi aỳdyňdyr.



çyzgy I

Indi has kiçi yrgyldylara garap geçỳänligimiz üçin $u = u(x,t)$ iň we onuň $\frac{\partial u}{\partial x}$ önüminiň kiçi bolanlygy sebäpli $u = u(x,t)$ funksiỳanyň we $\frac{\partial u}{\partial x}$ önüminiň kwadratlaryny hem-de olaryň köpeltmek hasylyny hasaba aljak däldiris.

Kirşiň (x_1, x_2) aralygyny alalyň. Alnan aralyk yrgyldy wagtynda M_1M_2 aralyga deformirlenỳär.(çyzgy I.) M_1M_2-duganyň uzynlygy kesgitli integralyň kömegi bilen aşakdaky ỳaly kesgitlenỳär.

$$S^1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S$$

Şu ýerden görnüşine görä kiçi yrgyldylar wagtynda kirşiň islendik alnan aralygynda süýnmeklik döremeýär: aralygyň uzynlygy öňkiligine galar. Onda Gukuň kanuny esasynda kirşiň islendik nokadynda täsir edýän $T(x)$ dartuw güýji wagta görä üýtgemeýär. Indi $T(x)$ dartuw güýjüniň x-a bagly däldigini görkezeliň. Kirşiň (x_1, x_2) aralygynda M_1 we M_2 nokatlaryna galtaşýanlaryň ugry boýunça ugrukdyrylan dartyş güýji, daşky güýçler we inersiýa güýji täsir edýär. Diňe kese yrgyldylara seredýänligimiz üçin inersiýa güýji we daşky güýçler u okuna paralleldir. Onda

$$T_1(x_1)\cos\alpha(x_1) - T_2(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0$$

bu ýerde $\alpha(x)$ X-okuň položytel ugry bilen, t wagtda, kirşiň absisasy X bolan nokadyna geçirelen galtaşma çyzyk bilen emele getiren burçudyr:

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}.$$

Şerte görä $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$, onda $\cos\alpha(x) \approx 1$, bu ýerden $T_1(x_1) \approx T_2(x_2)$ bu deňligiň islendik x_1 we x_2 üçin ýerine ýetýänligi sebäpli $T = T_0$.

Ýagny, islendik x, t üçin T dartuw güýji hemişelikdir. Indi kirş yrgyldysynyň deňlemesini getirip çykarmaga girişeliň. Munuň üçin kirşiň (x_1, x_2) aralygynyna täsir edýän ähli güýjüň jemi deňagramlaşmalydyr diýen Dalamberyň prinsipinden peýdalanalyň. Kirşiň M_1 we M_2 nokatlaryna täsir edýän dartuw güýjiniň u okuna bolan proýeksiýasyny Y diýsek, onda

$$Y = T_0\left[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)\right].$$

Indi biziň öňki eden talaplarymyzyň esasynda

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \quad ;$$

bolar. Diỳmek

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

ỳa-da

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \ ;$$

onda

$$Y = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \ ;$$

Eger kirşiň (x_1, x_2) aralygynda täsir edỳän u okuna parallel bolan daşky güỳjiň dykyzlygy $p(x,t)$ bilen bellesek, onda (x_1, x_2) täsir edỳän güỳjüň ululygy

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx$$

bolar.

Kirşiň dykyzlygyny $\rho(x)$ bilen bellesek, onda M_1M_2 aralygyň inersiỳa güỳji

$$-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$$

ululyga deňdir.

Kirşiň (x_1, x_2) aralygyna täsir edỳän güỳjleriň u okuna proyeksiỳalarynyň jemi nula deň bolmalydyr:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x,t)\right]dx=0$$

Bu ỳerden x_1 we x_2 ululyklaryň erkinliginiň esasynda alarys.

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x,t)=0 \quad . \tag{7.1}$$

Eger kirş birjynsly bolsa $\rho(x)$-hemişelikdir. Onda (7.1) deňlemäni aşkdaky ỳaly ỳazyp bileris.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)=0\,.$$

Bu ỳerde

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\ ; \qquad f(x,t)=\frac{P(x,t)}{\rho_0}\ ;$$

Eger kirşe daşky güỳç täsir etmeỳän bolsa, onda $\rho(x,t)=0$ we

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \tag{7.2}$$

(7.2) deňlemä kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi diỳilỳär.

§ 3.8. Başlangyç we gyra şertler. Koşiniň meselesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.1}$$

(8.1) deňleme XVIII-nji asyrda Danil Bernulli, Dalamber we Eỳler tarapyndan öwrenilipdir. (8.1)- deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr, diỳmek kirşiň yrgyldysyny doly kesgitlemek üçin (8.1) deňlemäniň ỳeke özi ỳeterlik däldir. Şunlukda kirşiň yrgyldysyny doly kesgitlemek üçin käbir tebigy şertler ỳüze çykỳar. Nokadyň dinamikasyndan belli bolşuna görä, nokadyň hereketini doly kesgitlemek üçin onuň başlangyç ỳagdaỳyny we başlangyç tizligini bilmek zerurdyr. Diỳmek kirşiň urgyldysyny doly kesgitlemek üçin wagtyň $t=0$ pursatynda, onuň islendik nokadynyň ỳagdaỳyny we başlangyç tizligini bilmek zerurdyr.

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x)\ ;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)\ . \tag{8.2}$$

(8.2) şertler başlangyç şertler diỳlip atlandyrylỳar. Eger kirşiň çäklenen bölegine seredilỳän bolsa, onda onuň gyra nokatlarynda yrgyldynyň nähili bolỳandygyny bilmek gerek. Eger kirşiň uçlary berkidilen bolsa, onda

$$u\big|_{x=0}=0\quad ;\qquad u\big|_{x=l}=0 \tag{8.3}$$

şertler hem berilmelidir.

(8.3) şerte gyra şertler diỳilỳär.

Eger yrgyldylar maỳyşgak membranada (metal listi) döreỳän bolsa, onda şeỳle yrgyldylaryň deňlemesi aşakdaky görnüşde ỳazylỳar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y)\,.$$

Eger membranada daşky güỳç täsir etmeỳän bolsa, onda $f(x,y)=0$, membrananyň erkin yrgyldysynyň deňlemesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

bolar.

Eger membrananyň yrgyldysynyň deňlemesine seredilse, onda başlangyç şertler aşakdaky ỳaly

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x,y)\ ;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,y)$$

bolar.

Eger membrananyň gyrasy berkidilen bolsa, onda gyra şerti alarys:

$$u\big|_{L}=0\,.$$

Göwrumde geçỳän akustik yrgyldylaryň deňlemesini şeỳle ỳazmak bolar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z)$$

Waakumdaky elektromagnit yrgyldylaryň hem üç ölçegli yrgyldylar deňlemesine getirilỳändigini biz belläp geçmelidiris. Şu hili deňlemeler üçin başlangyç we gyra şertler aşakdaky ỳaly bolar:

$$u_{t=0} = \varphi(x,y,z) \quad ;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y,z) \quad ;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{s} = 0\,.$$

$\vec{n}$ -wektor, $\vec{S}$ -üstüň içki normal wektory.

§ 3.9. Kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesiniň çözüwi. (Dalamberiň çözüwi)

Kirş yrgyldysynyň deňlemesi giperbolik tipe degişli bolan hususy önümli deňlemeleriň iň ỳönekeỳleriniň biridir. Ilki bilen uzynlygy çäklendirilmedik kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesiniň çözüwine seredeliň. Öňden belli bolşy ỳaly kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \tag{9.1}$$

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\;.$$

$x - at = c_1$ we $x + at = c_2$ çyzyklar (9.1)- deňlemäniň häsỳetlendirijileridir. Eger $x - at = \xi,\ x + at = \eta$ diỳsek, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ululyklaryň tapylan bahalaryny (9.1) deňlemede ornuna goýsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{9.2}$$

deňlemäni alarys.

Bu ýerden

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi) \ . \tag{9.3}$$

Eger (9.3) deňligi ξ -e görä integirlesek, onda

$$u = \int f(x) d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{9.4}$$

deňligi alarys.

Bu ýerde $f_1(\xi) = \int f(\xi) d\xi$, $f_2(\eta)$ -erkin funksuýalar.

(9.4) deňlikde ξ we η ululyklaryň bahalaryny ýerine goýalyň.

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at) \tag{9.5}$$

Eger f_1 we f_2 funksiýalar iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar bolsalar, onda (9.5) aňlatma (9.1) deňlemäniň çözüwidir. Şu çözüw birinji gezek Dalamber tarapyndan açylandygy üçin oňa Dalamber çözüwi diýilýär. Şu çözüwiň fiziki manysyna seredeliň. Ỳönekeýlik üçin $f_2(\eta) = 0$ diýsek, onda yrgyldaýan nokatlaryň üýtgemesi $u_1 = f_1(x - at)$ aňlatma arkaly kesgitlenip bilner.

Erkin X nokat alalyň. Edil şunuň ýaly süýşme wagtyň $t > 0$ pursatynda koordinatasy $x + at$ deň bolan nokatdan döreýär. Diýmek şu ýerden görnüşine görä u -nyň üýtgemesi kirş boýunça a tizlik bilen sag tarapa süýşýär. Ỳagny $u_1 = f_1(x - at)$ funksiýa tolkunyň sag tarapa ýaýraýşyna häsýetlendirýär. Edil şunuň ýaly $u_2 = f_2(x + at)$ funksiýa şol tekizlikdäki tolkunyň çep tarapa ýaýraýşyny kesgitleýär.

Diẏmek (9.5) çözüw garşylykly ugurlara ẏaẏraẏan tolkunlaryň jemidir.

§ 3.10. Koşiniň meselesi

Mesele. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < +\infty, \;\; t > 0)$

deňlemäniň $u\big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ (10.1) başlangyç şertleri kanagatlandyrẏan $u(x,t)$ çözüwini tapmaly.

Kirşiň uzynlygy çäklendirilmedik bolany üçin gyra şertler berilmeẏär. (9.5) formulada $t = 0$ diẏip (10.1) başlangyç şerti göz öňüne tutsak, onda $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

şertlerden bolsa

$$\psi(x) = -a\left[f_1'(x) - f_2'(x) \right] \tag{10.2}$$

deňligi alarys. (10.2) deňligi integrirläp,

$$f_1(x) - f_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \psi(x)dx + c$$

deňligi alarys. Bu ẏerden

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad f_1(x) - f_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz + c \; ,$$

ẏa-da

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz + \frac{c}{2} \; ; \tag{10.3}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz - \frac{c}{2} \; .$$

(10.3) bahalary (9.5) ornuna goỳup alarys:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\phi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(z)dz+\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\phi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\phi(z)dz-\frac{c}{2}$$

Bu ỳerden kesgitli integralyň häsỳetini ulanyp taparys:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \qquad (10.4)$$

Eger $\varphi(x)$ funksiỳanyň üznüksiz ikinji, $\varphi(x)$ funksiỳanyň üznüksiz birinji önümi bar bolsa, onda (10.4) funksiỳa (erkin) yrgyldaỳan kirş deňlemesi üçin Koşiniň meselesiniň çözüwidir. Kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin Koşiniň meselesiniň çözüwiniň barlygy we şol çözüwiň ỳeke-täkligi (10.4) formulanyň alynyşyndan görünỳär. Indi şol çözüwiň durnykly çözüw bolmak meselesine seredeliň. Haçan-da $\varphi(x),\psi(x)$ funksiỳalary aşakdaky

$$|\varphi(x)-\overline{\varphi}(x)|<\delta, \quad |\psi(x)-\overline{\psi}(x)|<\delta$$

şertleri kanagatlandyrỳan $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$ funksiỳa bilen çalşyranymyzda ilki başdaky $u(x,t)$ çözüw bilen täze $\overline{u}(x,t)$ çözüwleriň tapawdynyň absolỳut ululygy islendik $[0,t_0]$ çenli wagt aralygynda ε-den kiçi bolar ỳaly şeỳle $\delta>0$ sany görkezmek mümkin. Şu tassyklamany subut etmek üçin (10.3) formulany peỳdalanalyň.

$$|u(x,t)-\bar{u}(x,t)|\le\frac{|\phi(x+at)-\overline{\phi}(x+at)|}{2}+\frac{|\phi(x-at)-\overline{\phi}(x-at)|}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(z)dz-\overline{\psi}(z)dz|,$$

bu ỳerde

$$|u(x,t)-\bar{u}(x,t)|\le\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2a}2at\le\delta(1+t).$$

Eger $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t}$ diỳsek, onda $\left|u(x,t) - \bar{u}(x,t)\right| \le \varepsilon$.

Eger goỳlan meseläniň çözüwi bar bolup, ol çözüw hem ỳeketäk we durnukly bolsa, onda ol meselä korrekt goỳlan diỳilỳär. Görşümiz ỳaly, kirş yrgyldysynyň deňlemesi üçin Koşiniň meselesi korrekt goỳlan meseledir.

Mysal. Eger $u\big|_{t=0} = x^2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x$ $(-\infty < x < +\infty)$ bolsa, onda

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

deňlemäniň çözüwini tapmaly.

Bu çözüwi tapmak üçin

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz$$

formuladan peỳdalanalyň.

Biziň bu meselämizde $\varphi(x) = x^2; \psi(x) = x,\ a = 1$.

Diỳmek

$$u(x,t) = \frac{(x-t)^2 + (x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} zdz \ ;$$

$$\int_{x-t}^{x+t} zdz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{x-t}^{x+t} = \frac{(x+t)^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2} \ ;$$

Bu ỳerden

$$u(x,t) = \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(x+t)^2}{2} + \frac{(x+t)^2}{4} - \frac{(x-t)^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}(x+t)^2 + \frac{1}{4}(x-t)^2;$$

$$u(x,t) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}xt + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xt + \frac{1}{4}t^2 = x^2 + xt + t^2 \ ;$$

§ 3.11. Kirşiň deňlemesini Furỳeniň usuly bilen çözmek

Furỳeniň ỳa-da üỳtgeỳän ululyklary paỳlaşdyrmak usuly hususy önümli differensial deňlemeleri çözmekde giňden ulanylỳan usullaryň biridir. Goỳ, kirş iki tarapyndan berkidilen bolsun. Şeỳle meselä seredeliň:

Mesele:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11.1}$$

delňlemäni we

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=0} = 0 \tag{11.2}$$

başlangyç

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \tag{11.3}$$

şerti kanagatlandyrỳan $u = u(x,t)$ funksiỳany tapmaly. Deňlemäniň toždestwalaỳyn nula deň bolmadyk käbir hususy çözüwini

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{11.4}$$

görnüşde gözläliň.

(11.4) deňlikden tapylan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t).$$

ikinji önümleriniň bahalaryny (11.1) deňlemede ỳerine goỳup alarys:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),$$

ỳa-da

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Soňky deňligiň çep bölegi diňe t, sag bölegi bolsa diňe x-a bagly. Haçan-da deňligiň sag bölegi x we t bagly bolmadyk hemişelik sana deň bolanda şeỳle deňlik bolmagy mümkin. Bu hemişelik sany λ bilen bellesek, onda

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0\,, \qquad (11.5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (11.6)$$

deňlikleri alarys.

λ-niň käbir bahalarynda (11.6) deňlemäniň (11.1) gyra şertleri kanagatlandyrỳan toždestwalaỳyn nula deň bolmadyk çözüwi bardyr.

λ-niň şeỳle bahalaryna onuň hususy bahalary diỳilỳär. Şol bahalara degişli çözüwe bolsa (11.6), (11.2), (11.3) gyra meseläniň hususy funksiỳalary diỳilỳär. Indi (11.1), (11.6) gyra meseläniň hususy bahalaryny we hususy funksiỳalaryny tapalyň. Ady differensial deňlemeler teoriỳasyndan belli bolşuna görä, $\lambda > 0$ bolanda (11.6)- deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky ỳaly bolar.

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

c_1, c_2 - erkin hemişelik sanlar.

(11.2) gyra şertleri ulanyp alarys.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemanyň çözüwi $c_1 = 0, c_2 = 0$ bolup biler. Onda $X(x) = 0$. Eger $\lambda = 0$ diỳsek, onda (11.6) deňlemäniň umumy çözüwi $X(x) = c_1 + c_2 x$ bolar. Ỳene-de gyra şertleriň esasynda $c_1 = 0, c_2 = 0$ alarys. Eger-de $\lambda > 0$ bolsa, onda (11.6) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

görnüşde bolar. Gyra şertleri ulansak, onda

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{\lambda}l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

sistema alnar.

Sistemanyň birinji deňlemesinden $c_1 = 0$ emma, ikinji deňlemesinden $c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$ alarys, indi $c_2 \neq 0$ diỳsek, onda $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, ỳagny $\sqrt{\lambda} = \frac{kt}{l}$, k-erkin bitin san $(k = 1,2,3\ldots)$

Diỳmek (11.1) we (11.2) gyra meseläniň nuldan tapawutly çözüwi diňe $\lambda k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ bolanda bolup biler. λ-niň şu hususy bahalaryna aşakdaky ỳaly hususy funksiỳalar degişlidirler.

$$X_n(x) = \sin\frac{k\pi x}{l} \ ;$$

Şu funksiỳalar hemişelik takyklygynda hasaplanỳar.

λ-niň hususy bahalarynda (11.5) deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky ỳaly bolar. (Ady differensial deňlemeler teoriỳasyna seret)

$$T_k = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l} \ ;$$

bu ỳerde a_k, b_k - erkin hemişelik sanlar.

Şeỳlelikde

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left[a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l} \ ;$$

$u_k(x,t)$-funksiỳa a_k, b_k-erkin hemişelik ululyklaryň islendik bahalarynda (11.3)-deňlemäni we (11.2)-gyra şertleri kanagatlandyrỳar.

(11.3)-deňlemäniň birjynsly we çyzykly deňleme bolýandy üçin

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (11.7)$$

funksiỳa hem (11.1) deňlemäni kanagatlandyrỳar.

Şu ỳerde aỳdylan tassyklamalaryň ỳerine ỳetmegi üçin (11.7) hataryň deňölçegli ỳygnalmagy we x,t boỳunça agzama-agza iki gezek differensirlenỳän bolandygy ỳeterlikdir. Hataryň deň ölçegli ỳygnanmagy we x,t üỳtgeỳanlik ululyk boỳunça hataryň agzalarynyň ikinji önümleriniň bolmagy üçin $\varphi(x)$ funksiỳanyň üznüksiz ikinji tertipli önümi bar bolup üçinji tertipli önüminiň I-nji jynsly üzňeligi diňe tükenikli sandaky nokatlarda bolmaly, we $\psi(x)$ funksiỳanyň üznüksiz birinji önümleriniň barlygy, ikinji tertipli önüminiň bolsa, I-nji jynsly üzňeligi tükenekli sandaky nokatlarda bolmagy ỳeterlikdir.

Hataryň her bir

$$\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \quad ;$$

görnüşdäki jemi (11.2) gyra şerti kanagatlandyrỳanlygy üçin (11.7) - hataryň jemi $u = u(x,t)$ hem (11.2)- şerti kanagatlandyrỳar. Indi bize $u = u(x,t)$ funksiỳa berlen (11.3)- başlangyç şertleri kanagatlandyrỳan ỳaly a_k, b_k hemişelik sanlary kesgitlemek gerek. Onuň üçin üỳtgeỳän ululyga görä (11.7) deňligiň önümlerini taparys.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi at}{l} + b_k \cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \quad ;$$

Indi $u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ başlangyç şertimizi ulanalyň.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} \quad ;$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \quad . \qquad (11.9)$$

(11.9) aňlatmalar $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiỳalaryň $(0,l)$ aralykda sinuslar boỳunça Furỳe hataryna dagydylmasydyr. Furỳe hatarynyň koeffisiỳentleri bolan a_k, b_k bize belli bolan $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalar arkaly

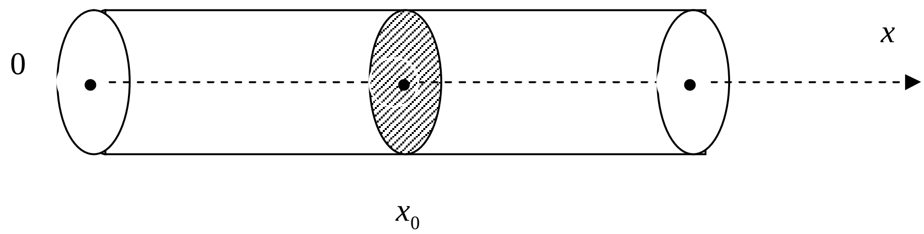
$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\,;$$

formulalar boỳunça kesgitlenỳär.

§ 3.12. Ỳylylyk geçirijilik deňlemesi

Metaldan ỳasalan bir steržen alalyň we şol sterženiň gapdal üsti ỳylylyk geçirmeỳär diỳeliň. Eger başlangyç ỳagdaỳda sterženiň dürli bölekleri dürli temperaturada gyzdyrylan diỳsek, onda sterženiň has gyzgyn böleginden az gyzgyn bölegine ỳylylyk geçer. Eger sterženiň esaslary hem ỳylylyk geçirmeỳän bolsa, onda wagtyň geçmegi bilen sterženiň hemme ỳerinde temperatura deňleşer.

Çyzykly ỳylylyk geçirijilik hadysasyna seredilende, alnan steržen gaty inçe diỳip kabul edilỳär: wagtyň islendik pursatynda onuň kese-kesiginiň hemme nokatlarynda temperatura birmeňzeşdir. Eger sterženiň oky deregine x okuny kabul etsek, onda $u=(x,t)$ temperatura x we t wagta görä funksiỳa hökmünde garamak mümkin.



Ỳylylyk geçirijiligiň deňlemesini getirip çykarmak üçin iki sany öňden belli bolan fiziki ululyklara seredeliň:

1) Birjinsly jisimiň temperaturasyny Δu ululyga ỳokarlandyrmak üçin gerek bolan ỳylylyk mukdary

$$c\rho V\Delta u \qquad (12.1)$$

deňdir. V-jisimiň göwrümi, ρ- onuň dykyzlygy, c-udel ỳylylyk sygymy.

2) Sterženiň kese-kesiginden Δt wagtyň içinde akyp geçỳän ỳylylygyň mukdary kesigiň meỳdanyna, kesige perpendikulỳär ugur

boỳunça temperaturanyň üỳtgeỳiş tizligine, Δt wagt aralygyna proporsionaldyr:

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t \tag{12.2}$$

deňdir. Bu ỳerde S - kese-kesigiň meỳdany, k -ỳylylyk geçirijilik koeffisiỳenti. $\frac{\partial u}{\partial x}$ bolsa x -okunuň polojytel ugry boỳunça temperaturanyň üỳtgeỳiş tizligi.

Minus alamatynyň goỳulmagynyň sebäbi, ỳylylyk akymynyň ululygy polojytel hasap edilỳän, ỳylylyk x - okuň artỳan ugryna tarap akan bolsa. Eger $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ bolsa, onda x -yň artmagy bilen temperatura hem artỳar, emma ỳylylyk bolsa temperaturanyň ỳokary ỳerinden kiçi tarapyna akar. Diỳmek ỳylylyk akymynyň ugry x -yň kemelỳän ugry bilen gabat gelỳär.

Şonuň uçin $\frac{\partial u}{\partial x}$ -yň öňünde minus alamaty goỳulỳär.

Sterženiň kese-kesiginiň absisslary degişlilikde x we $x+\Delta x$ bolan aralygy alalyň we onuň üçin ỳylylyk balansyny düzeliň.

(12.2) formula esasynda absissasy x bolan kesikden Δt wagtyň içinde akyp geçỳän ỳylylygyň mukdary $-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$ ululyga deňdir.

Eger ỳokary tertipli tükeneksiz kiçi ululyklary hasaba almasak, onda $\frac{\partial u}{\partial x}$ hususy önümleriniň $x+\Delta x$ nokatdaky bahasyny aşakdaky ỳaly hasaplamak bolỳar.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + d_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x \ . \tag{12.3}$$

Bu ỳerden görnüşine görä, absissasy $x+\Delta x$ bolan kesikden çykỳan ỳylylyk mukdary $-kS\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$; x - kese-kesiklerden geçỳän we $x+\Delta x$ kesikden çykỳan ỳylylyk akymlaryň mukdarlarynyň tapawdyny bilip, Δt wagtyň içinde sterženiň alnan aralygynyň alan ΔQ ỳylylyk mukdaryny taparys.

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t \ ;$$

$$\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t \ .$$

Ikinji tarapdan bolsa, şu Δt wagt içinde temperatura takmynan $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \approx \Delta u$ ululyga artỳar. Diỳmek

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \quad . \tag{12.4}$$

($S\Delta x = V$ göwrüm)

Alnan (12.3) we (12.4) deňlikleri deňeşdirip alarys.

$$kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t = ñ\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \ ,$$

ỳa-da

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{12.5}$$

$\frac{k}{c\rho} = a^2$ bilen belgiläp,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12.6}$$

deňligi alarys.

(12.6) deňleme ỳylylyk geçirijilik deňlemesi diỳilỳär.

k-hemişelige temperatura geçirijilik koeffisiỳenti diỳip aỳdylỳar. (12.6) deňleme birjynsly we çyzykly deňlemedir. Goỳ sterženiň kä böleklerine ỳylylyk bölüp çykaryjylar, ỳa-da ỳylylyk siňdirjiler bar diỳeliň, ỳa-da başgaça aỳdaňda sterženiň içinde ỳylylyk çeşmeleri bar diỳmekdir. Ỳylylyk bölünip çykmaklygy ỳa-da ỳylylyk siňdirmesine ỳylylyk çeşmeleriniň dykyzlygy diỳlen düşünjäniň üsti bilen häsỳetlendirmek has amatly bolỳar.

Ỳylylyk çeşmesiniň dykyzlygy diỳip, sterženiň $(x, x+\Delta x)$ aralygynda gysga $(t, t+\Delta t)$ wagt aralygynda $F(x,t)\Delta x\Delta t$ deň bolan ỳylylyk mukdaryny bölüp çykarỳan $F(x,t)$ funksiỳa düşünilỳär.

$F(x,t) < 0$ bolsa, onda ỳylylyk bölünip çykmaỳar, tersine ỳylylyk ỳitgisi bolỳar.

Mysal üçin, sterženiň hemişelik elektrik togy akyp geçende sterženden ỳylylyk bölünip çykỳar. Bu ỳagdaỳda $F(x,t) = I^2 R = const$. I -togyň ululygy (güỳji), R -sterženiň garşylygy. Sterženiň içinde ỳylylyk çeşmesi bar bolsa, onda (12.5) ỳylylyk balansyny alanymyzda ỳylylyk bölünip çykmasyny nazara almaly. Ỳagny, (12.5) deňlemäniň bölegine $F(x,t)\Delta x\Delta t$ ululygyň $S\Delta x\Delta t$ ululyga bölünmesini goşmaly.

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} F(x,t) \qquad (12.7)$$

Deňligiň iki tarapyny $c\rho$ ululyga bölüp,

$$\frac{1}{c\rho s} F(x,t) = f(x,t)$$

bilen belläp alarys.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (12.8)$$

(12.8) deňlemä ỳylylyk geçirijiligiň deňlemesidir (sterjeniň içinde ỳylylyk çeşmesi bar).

(12.8) deňleme birjynsly deňleme däldir.

Eger ỳylylyk geçirijilik deňlemesine iki ölçegli jisimde (plastinkda) seretsek, onda deňleme aşakdaky görnüşde bolar.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t)$$

Iki ỳylylyk geçirijilik deňlemesi üç ölçegli jisimde seretsek, onda ỳylylyk geçirijilik deňlemesi şu görnüşde bolar.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t) \qquad (12.9)$$

Eger-de seredilỳän oblastyň içinde ỳylylyk çeşmesi bolmasa, onda $f(x,y,z,t)=0$ bolar we (12.9) şu görnüşe geçer.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{12.10}$$

(12.10)- deňleme birjynsly deňlemedir.

Eger-de jisimiň içinde ỳylylyk çeşmesi bolmasa we jisimiň ähli nokatlarynda wagtyň geçmegi bilen temperatura üỳtgemese $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, onda jisimde temperaturanyň paỳlanmak hadysasy Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrỳar.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{12.11}$$

Ỳylylyk geçirijilik deňlemesine seredilende başlangyç şert diỳmeklik, başlangyç $t=0$ pursatynda jisimiň ähli nokatlarynda temperatura belli diỳmekdir: $u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$, gyra şertler bolsa, seredilỳän fiziki meselelere baglylykda aşakdaky üç görnüşdäki bolup biler.

1. Wagtyň islendik pursatynda jisimiň tutuş üstünde temperatura belli hasap edilỳär:

$$u\big|_S=\varphi(x,y,t)$$

2. Jisimiň üstünde temperatura belli däl, ỳöne jisimiň girỳän ỳa-da ondan çykỳan ỳylylyk akymy belli hasap edilỳär:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi(x,y,z)$$

$\vec{n}_0$ -üstüň normalynyň birlik wektory.

3. Birinji we ikinji gyra şertleriň umumylaşdyrylan görnüşi

$$\frac{\partial u}{\partial n}-hu\big|_S=F(x,y,z).$$

h -daşky ỳylylyk geçirijilik koeffisienti.

Üçinji gyra mesele köplenç jisim özünden ỳylylyk göỳberende ulanylỳar.

Hakykatdan-da tejribeler esasynda alynyşyna görä T temperaturaly jisimiň üstüniň ds böleginden dt wagt aralygynda T_0 temperaturaly daşky gurşaga göỳberilỳän ỳylylyk mukdary $T_1 - T_0, ds, dt$ ululyklara göni proporsional.

$$dQ = \alpha(T_1 - T_0)dsdt$$

α -ỳylylyk berliş koeffisienti. Şeỳlelikde jisimden daşary çykỳan ỳylylyk akymy

$$q = \alpha(T_1 - T_0) \ . \qquad (12.12)$$

Basga tarapdan bolsa ỳylylyk geçirijilik netijesinde jisimiň iç tarapyndan şeỳle ỳylylyk akymy jemlenmelidir:

$$q = -\frac{\partial u}{\partial n} \ . \qquad (12.13)$$

(12.12) we (12.13) deňlemeleriň sag tarapyny deňeşdirip alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\alpha}{k}(T_1 - T_0) \ .$$

Eger $\frac{\alpha}{k} = h$ diỳsek we $T = u\big|_S$ bolsa, onda alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - hu\big|_S = hT_0$$

Indi daşky gurşagyň temperaturasy dürli nokatlarda dürlidir diỳeliň. Eger h, T_0 ululyklaryň koordinatalar bilen baglanyşygy belli diỳsek, onda h, T_0 ululyklar käbir $F(x, y, z)$ funksiỳa hökmünde seretmek bolar we biz üçünji tipli gyra meselä geleris.

§ 3.13. Ỳylylyk geçirijiligiň deňlemesi üçin Furỳeniň usuly

Önden belli bolşuna görä, gapdal üsti ỳylylyk geçirmeỳän sterżende ỳylylyk çeşmesi ỳok wagtynda ỳylylyk geçirijiligiň deňlemesi aşakdaky ỳaly bolar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \tag{13.1}$$

Eger steržen çäksiz uzyn bolsa (iki çetinden çäklendirilmedik steržene seredeliň), onda onuň ortalaryndaky temperaturanyň ỳaỳraỳyşyna diňe ilki başdaky steržene ỳaỳran temparatura täsir edỳär. Gyra nokatlardaky temperatura wagtyň ep-esli dowamynda onuň ortalaryna täsir edip bilmeỳär. Şonuň üçin hem çäksiz uzyn steržende ỳylylyk geçirijilik deňlemesine seredilende, diňe başlangyç şertli meselä seredeliň.

Mesele: (13.1)-deňlemäni we başlangyç

$$u\big|_{t=0} = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{13.2}$$

şerti kanagatlandyrỳan funksiỳa tapmaly.

Bu meseläni çözmekden öňürti (13.1) deňlemäni has ỳönekeỳleşdireliň. Onuň üçin t -üỳtgeỳän ululygy $\tau = a^2 t$ bilen çalşyralyň. Onda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = a^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} \; ;$$

täze girizen τ - üỳtgeỳan ululygymyza görä (13.1) deňleme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.3}$$

görnüşe geçer.

Başlangyç (13.2) şertimiz hem

$$u(x,\tau)\big|_{t=0} = f(x) \tag{13.4}$$

görnüşe eỳe bolar.

Goỳlan meseläni çözmek üçin Furỳeniň usulyndan peỳdalanalyň. Ilki bilen deňlemäniň käbir hususy çözüwini tapalyň. (13.3) deňlemäniň hususy çözüwini

$$u(x,\tau) = X(x)T(\tau) \tag{13.5}$$

görnüşde gözläliň.

$u(x,\tau)$ -nyň we onuň önümleriniň bahalaryny (13.3) deňlemede ỳerine goỳup alarys.

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau)$$

ỳa-da

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad . \tag{13.6}$$

(13.6)- deňlemäniň çep tarapy x-a bagly däl, sag tarapy bolsa τ-a bagly däl. Diỳmek

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c; \quad c - const$$

bu ỳerden

$$T(\tau) = \overline{c_1} e^{c\tau} \tag{13.7}$$

deňligi alarys.

Ỳylylyk geçirijiligiň tebigatyndan belli bolşuna görä, sterženiň islendik $x = x_0$ kese-kesigindäki temperatura $u(x,\tau) = X(x)T(\tau)$ τ-yň islendik $(\tau \to \infty)$ bahasynda absolỳut ululygy boỳunça çäksiz artyp bilmez.

Haçan-da $\tau \to \infty\ (t \to \infty)$ diỳsek (13.7)- deňlikde c hökman otrisatel ululyk bolmaly.

Eger $c = -\lambda^2$ bilen bellesek, onda

$$T(\tau) = ce^{-\lambda^2 \tau} \ .$$

Indi

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{13.8}$$

deňlemäniň umumy çözüwiniň

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

bolỳandygy bize ady differensial deňlemeler teoriỳasyndan bellidir. Şeỳlelikde, biz (13.3) deňlemäniň

$$u(x,\tau) = \left[c_1 \overline{c_1} \cos \lambda x + c_2 \overline{c_1} \sin \lambda x \right] e^{-\lambda^2 \tau}$$

çözüwini taparys, bu ỳerde $c_1, c_2, \overline{c_1}$ - hemişelik sanlardyr. Gysgaça $\alpha = c_1 \overline{c_1}, \beta = c_2 \overline{c_1}$ diỳsek,

$$u(x,\tau) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} \tag{13.9}$$

alarys. $u(x,\tau)$ funksiỳany λ-niň islendik bahasynda (13.3) deňlemäni kanagatlandyrỳar. Onda biz λ-niň her bir bahasyna degişli α we β saỳlap alyp bileris. Diỳmek α we β, λ-e ululyga görä funksiỳa hökmünde seretmek mümkin. Şeỳlelikde biz

$$u_\lambda(x,\tau)=[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda^2\tau} \qquad (13.10)$$

görnüşli (13.3) deňlemäniň hususy çözüwleriniň birjynsly we çyzykly deňleme bolanlygy üçin

$$u(x,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_\lambda(x,\tau)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda^2\tau}d\lambda \quad (13.11)$$

funksiỳa hem (13.3) deňlemäniň çözüwidir. Indi bize (13.11) funksiỳa başlangyç (13.4) şerti kanagatlandyrỳan ỳaly $\alpha(\lambda),\beta(\lambda)$ ululyklary saỳlap almak gerek.

(13.2)- deňlikden $\tau=0$ diỳsek,

$$u\big|_{\tau=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda=f(x) \qquad (13.12)$$

deňligi alarys.

Matematiki analizden belli bolşuna görä, $f(x)$ funksiỳany Furỳeniň integralyna dagytmaklyk aşakdaky ỳaly bolar.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi \;, \qquad (13.13)$$

$$\cos\lambda(\xi-x)=\cos\lambda\xi\cos\lambda x+\sin\lambda\xi\sin\lambda x$$

formulany nazara alsak, (13.13) deňligi başgaça ỳazmak mümkin.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\right]\cos\lambda x+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right)\sin\lambda x\right\}d\lambda$$

$$. \qquad (13.14)$$

(13.12) we (13.14) deňlikleri deňeşdirip,

$$\left.\begin{aligned}\alpha(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi \\ \beta(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\end{aligned}\right\} \quad (13.15)$$

alarys.

Şu ỳerde birzady bellemek gerek. $f(x)$ funksiỳany Furỳe integralyna dagytmak üçin $f(x)$ funksiỳany Furỳe hataryna dagydyp bolỳanlygy we $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ integralyň ỳygnanỳanlygy ỳeterlikdir. $f(x)$ funksiỳadan edilỳän talaplaryň hiç birisi goỳulan meseläniň fiziki manysyna-da garşy çykmaỳar, sebäbi $f(x)$ başlangyç wagtda sterženiň ähli nokatlarynyň temperaturasyny görkezỳär. Ikinji $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ ỳygnalmagyň talap edilmegi bolsa, steržendäki ỳylylyk energiỳasynyň çäklidigini görkezỳär we $\alpha(\lambda)$ we $\beta(\lambda)$ ululyklaryň bahasyny (13.11) deňlikde ỳerine goỳup

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\{\cos\lambda x\cos\lambda\xi + \sin\lambda x\sin\lambda\xi\} e^{-\lambda^2\tau} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos(x-\xi) e^{-\lambda^2\tau} d\xi \qquad (13.16)$$

alarys. Tapylan $u(x,\tau)$ (13.16) funksiỳa (13.3) deňlemäni we (13.4) başlangyç şerti kanagatlandyrỳar. Diỳmek $u(x,\tau)$ goỳulan meseläniň çözüwidir. Indi käbir elementar öwürmeler geçireliň. (13.16) formulanyň sag tarapynda integrirlemek tertibini çalşyrsak, onda

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos(x-\xi)d\lambda\right\}d\xi \qquad (13.17)$$

formulany alarys, indi $\lambda=\frac{á}{\sqrt{\tau}};\frac{x-\xi}{\sqrt{\tau}}=\omega$ bilen bellesek, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-á^2}\cos á\omega\, dá=\frac{1}{\sqrt{\tau}}I(\omega)\ ;$$

Bu ỳerden

$$I(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-á^2}\, dá=\sqrt{\pi}\ ;\quad I'(\omega)=-\frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-á^2}\cos á\omega\, dá=\frac{\omega}{2}I(\omega)\quad .$$

(13.18)

$$I'(\omega)=\frac{\omega}{2}I(\omega)$$

deňlemäni çözüp alarys:

$$I(\omega)=ce^{-\frac{\omega^2}{4}}\quad . \tag{13.19}$$

Indi $I(0)=\sqrt{\pi}$ başlangyç şerti peỳdalanyp, özbaşdak ululyk bolup c-ni taparys.

$$c=\sqrt{\pi}\ ;$$

(13.19) deňlikde $c=\sqrt{\pi}$ bahany ỳerine goỳup

$$I(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}} \tag{13.20}$$

alarys. Indi ω-nyň bahasyny ỳerine goỳsak, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\tau}}\quad . \tag{13.21}$$

Indi (13.21) aňlatmanyň bahasyny (13.17) deňlikde ỳerine goỳalyň.

$$\omega(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\tau}}\ . \tag{13.22}$$

Tapylan funksiỳa (13.3) deňlemäni we (13.4) başlangyç şerti kanagatlandyrỳar.

Geliň başlangyç şerti kanagatlandyrỳandygyny barlap göreliň. Onuň üçin

$$\omega = \frac{(x-\xi)}{\sqrt{\tau}} \quad ; \; \xi = x - 2\omega\sqrt{\tau}\,; \quad d\xi = -2\sqrt{\pi}\, d\omega \,.$$

(13.22) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - 2\omega\sqrt{\tau} \right) e^{-\omega^2}\, d\omega \,,$$

onda

$$u\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\omega^2}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x)\sqrt{\pi} = f(x) \,.$$

Şu ỳerden görnüşine görä, başlangyç (13.4) şert ỳerine ỳetirỳär. Indi (13.22) funksiỳanyň (13.3) deňlemäni kanagatlandyrỳandygyny barlalyň.

$$\varphi_\xi(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\tau}} \qquad (13.23)$$

funksiỳa (13.8)-nji deňlemäni kanagatlandyrỳar.

Hakykatdanam,

$$\frac{\partial \phi_\xi}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} + \frac{(x-\xi)^2}{8\tau\sqrt{\pi\tau}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \,,$$

$$\frac{\partial^2 \phi_\xi}{\partial \tau^2} = \left\{ -\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi\tau}} + \frac{(x-\xi)^2}{8\tau\sqrt{\pi\tau}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}$$

alnan deňlikleri deňeşdirsek, onda

$$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi_\xi}{\partial x^2} \,;$$

Diỳmek (13.22)-funksiỳa (13.3) deňlemäni kanagatlandyrỳar.

$\varphi_\xi(x,\tau)$ funksiỳany parametr ξ -a görä integrirlemekden alynan $u(x,t)$ funksiỳanyň hem (13.3) deňlemäniň çözüwi bolanlygy anykdyr.

Indi (13.22)- formullada τ - ululygyň ornuna $\tau = a^2 t$ ululygy goỳsak, onda (13.2) başlangyç şerti we (13.1) deňlemäni kanagatlandyrỳan $u(x,t)$ funksiỳany alarys.

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\ .$$

(13.23)- deňlikde τ -nyň ornuna $\tau = a^2t$ bahasyny goỳalyň.

$$\varphi_\xi(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \qquad (13.24)$$

$\varphi_\xi(x,t)$-funksiỳa hem (13.1) deňlemäniň çözüwidir. Şu çözüwe ỳylylyk geçirijiligiň fundamental çözüwi diỳilỳär.

§ 3.14. Ỳylylyk geçirijilik deňleme üçin birinji gyra meseläniň çözüwi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (14.1)$$

ỳylylyk geçirijilik deňlemesi üçin $D:\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ göniburçlykda birinji gyra meselä seredeliň.

Mesele. D-oblastda (14.1) deňlemäni we başlangyç

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \quad (0<x<l) \qquad (14.2)$$

hem-de gyra

$$u\big|_{x=0}=\mu_1(t);\quad u\big|_{x=l}=\mu_2(t) \qquad (14.3)$$

şerteleri kanagatlandyrỳan $u(x,t)$ funksiỳany tapmaly.

Bu ỳerde $f(x,t),\mu_1(t),\mu_2(t)$ berlen üznüksiz we $\varphi(0)=\mu_1(0),\ \varphi(l)=\mu_2(0)$ şertleri kanagatlandyrỳan funksiỳalar.

Biz ilki bilen D-oblastda birjynsly

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (14.4)$$

deňlemäni we başlangyç

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (14.5)$$

hem-de

$$u\big|_{x=0}=0\ ,\quad u\big|_{x=l}=0 \tag{14.6}$$

gyra şertleri kanagatlandyrỳan $u(x,t)$ funksiỳany tapalyň. Bu meseläni çözmek üçin Furỳe usulyndan peỳdalanalyň. (14.4) deňlemäniň hususy çözüwlerini

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{14.7}$$

görnüşde gözläliň. Bu ỳerden

$$u_{xx}=X''(x)T(t),\quad u_t=X(x)T'(t)$$

u_{xx}, u_t -niň bahalaryny (14.4) deňlemede ỳerine goỳup

$$X(x)T'(t)=a^2T(t)X''(x),$$

ỳa-da

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \tag{14.8}$$

deňlemäni alarys. (14.8)-nji deňlemeden iki sany

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0\ , \tag{14.9}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{14.10}$$

ady differensial deňlemeleri alarys.

(14.4)- deňlemäniň (14.7) görnüşdäki toždestwalaỳyn nula deň bolmadyk çözüwini tapmak üçin, (14.10) deňlemäniň $X(0)=0,\quad X(l)=0$ şertleri kanagatlandyrỳan nula deň bolmadyk çözüwini tapmak zerurdyr. Öňden belli bolşuna görä (14.10) deňlemäniň toždestwalaỳyn nula deň bolmadyk çözüwleri λ parametryň $\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $(n=1,2,3,\dots)$ bahalary üçin bardyr:

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\ . \tag{14.11}$$

Parametr λ -niň , $\lambda=\lambda_n$ bahalaryna (14.8) deňlemäniň

$$T_n(t)=a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)t}$$

çözüwleri degişlidir. Bu ỳerde a_n -erkin ululyk. Ỳokarky alnan maglumatlardan görnüşine görä, ähli

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)t} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (14.12)$$

funksiỳalar (14.4) deňlemäni we (14.6) gyra şertleri kanagatlandyrar. (14.4) deňlemäniň çyzykly we birjynsly deňleme bolanlygy üçin,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (14.13)$$

funksiỳa hem (14.4) deňlemäniň çözüwidir.

Indi (14.5) başlangyç şertiň ỳerine ỳetmegini talap edeliň.

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (14.14)$$

Bu ỳerden görnüşine görä (14.4) aňlatma berlen $\varphi(x)$ funksiỳanyň sinuslar boỳunça $(0,l)$ aralykda Furỳe hataryna dagydylmasydyr.

a_n-koeffisientler öňden belli bolan

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (14.15)$$

formula boỳunça tapylỳar.

Matematik derňewiň „trigonometrik hatarlar” diỳlen bölüminden belli bolşuna görä, eger $\varphi(x)$ funksiỳa we onuň birinji önümi $(0,l)$ aralykda üznüksiz bolsa, (tükenekli nokatlarda funksiỳanyň birinji önüminiň birjynsly üznükliliginiň bolmagy mümkindir), onda (14.14) hatar deňölçegli we absolỳut ỳygnanỳandyr. Indi $t \geq 0$ bolanda,

$$0 < e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

bolanlygy üçin (14.13) hatar hem absolỳut we deňölçegli ỳygnanỳan hatardyr. Şonuň üçin hem (14.13) formula bilen kesgitlenen $u(x,t)$ funksiỳa $0 \leq x \leq l, t \leq 0$ oblastda üznüksizdir we (14.5) başlangyç, (14.6)- gyra şertleri kanagatlandyrỳandyr. Indi (14.13) formula bilen kesgitlenen funksiỳanyň (14.4) deňlemäni kanagatlandyrỳandygyny görkezmek gerek. Onuň üçin (14.13) hatary agzama-agza t ululyga görä bir gezek, x-a görä iki gezek differensirläp alnan hatarlaryň absolỳut we deňölçegli ỳygnalỳanlygy görkezmek ỳeterlikdir. (14.13) hatary agzama-agza differensirläp alnan hatarlaryň absolỳut we deňölçegli ỳygnalỳanlygy aşakdaky deňsizliklerden görünỳär:

$$0 < \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{n^2\pi^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} < 1, \quad > 0.$$

Indi D oblastda başlangyç

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad (14.16)$$

we gyra

$$u\big|_{x=0} = 0, \; u\big|_{x=l} = 0 \qquad (14.17)$$

şerteleri, hem-de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (14.18)$$

deňlemäni kanagatlandyrỳan $u(x,t)$ funksiỳany tapalyň. Onuň üçin $f(x,t)$ funksiỳa we onuň birinji önüminiň üznüksizligini ($f(x,t)$ funksiỳanyň birinji önüminiň tükenikli nokatlarynda birinji hususy üznükliligi bolmagy mümkin) we $f(0,t) = f(l,t) = 0$ şertiň ỳerine ỳetmegini talap edeliň.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (14.19)$$

funksiỳany hatar görnüşde gözläliň.

Eger $f(x,t)$ funksiỳany sinuslar boỳunça Furỳeniň hataryna dagytsak, onda alarys:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \;, \qquad (14.20)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \;. \qquad (14.21)$$

(14.19) deňlikden $\frac{\partial u}{\partial t}$ we $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ önümleri tapalyň.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

$\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, f(x,t)$ ululyklaryň bahalaryny (14.18) deňlemede ỳerine goỳup alarys.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

Bu ỳerden

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)=0 \quad (n=1,2,3,\ldots). \qquad (14.22)$$

Indi başlangyç şerti ulanyp alarys.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

Bu ỳerden $T_n(t)$ üçin, $T_n(0)=0$ (14.23) başlangyç şerti alarys. (14.22)-deňlemäniň başlangyç (14.23) şerti kanagatlandyrỳan çözüwi aşakdaky görnüşde bolar.

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\ . \qquad (14.24)$$

$T_n(t)$-niň bahasyny (14.19) aňlatmada ỳerine goỳup meseläniň çözüwini tapỳarys:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\left(\frac{t-\tau}{l}\right)^2 f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\ . \qquad (14.25)$$

Eger-de başlangyç şertimiz toždestwalaỳyn nula deň bolmasa, onda (14.25)-çözüwe $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ baslangyç, $u(0,t) = 0; u(l,t) = 0$ gyra şertleri kanagatlandyrỳan birjynsly $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ deňlemäniň çözüwini goşmaly.

Indi ilki başdaky goỳulan meselede, meseläniň goỳyluşynyň umumylygyny çäklendirmezden, gyra şertleri

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t) \equiv 0; \quad u\big|_{x=l} = \mu_2(t) \equiv 0$$

alyp bolỳandygyny görkezeliň. Onuň üçin täze funksiỳany girizeliň.

$$u(x,t) = \omega(x,t) + \vartheta(x,t), \quad \omega(x,t) = \mu_1(t) + \left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]\frac{x}{l}$$

$\vartheta(x,t)$ funksiỳa, başlangyç $v(x,0) = \varphi(x) - \omega(x,0)$ we gyra

$$\begin{cases} v(o,t) = u(0,t) - \omega(0,t) = 0 \\ v(l,t) = u(l,t) - \omega(l,t) = 0 \end{cases};$$

şertleri kanagatlandyrỳan

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \overline{f}(x,t).$$

Deňlemäniň çözüwi hökmünde tapylỳar.

Bu ỳerde $\overline{f}(x,t) = f(x,t) - \omega_t(x,t)$

Şu ỳerden görnüşine görä, $u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u\big|_{x=l} = \mu_2(t)$ gyra şertlerdäki $\mu_1(t)$; $\mu_2(t)$ funksiỳalary hemişe nula deňdir diỳip almak mümkin.

§ 3.15. Diffuziỳanyň deňlemesi

Eger gurşow dürli konsentrasiỳaly gaz bilen doldurylsa, onda diffuziỳa hadysasy uly konsentrasiỳaly ỳerden kiçi konsentrasiỳaly ỳere bolup geçỳär. Eger ereỳän maddanyň konsentrasiỳasy berlen göwrümde hemişelik bolmasa, onda şuňa meňzeş hadysa suwukluklarda-da hem bolup geçỳär.

Diffuziỳa baradaky meselelerde näbelli funksiỳa bolup diffuzirlenỳän maddanyň konsentrasiỳasy hyzmat edỳär, özem $\tilde{n}$ bilen bellenilỳär, yagny $c = c(x, y, z, t)$.

Diffuziỳa prosessi ỳylylyk ỳaỳramak prosesine meňzeş, şonuň üçin $c = c(x, y, z, t)$ funksiỳa

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \tag{15.1}$$

deňlemäni kanagatlandyrmaly.

$D(D > 0)$ hemişelik sana diffuziỳa koeffisiỳenti diỳilỳär.

Başlangyç şert

$$c = c(x, y, z, t)\big|_{t=0} = f(x, y, z), \tag{15.2}$$

bu ỳerde $f(x, y, z)$- berlen funksiỳa başlangyç konsentrasiỳany kesgitleỳär.

Gyra şertler diỳip esasan aşakdaky şertlere aỳdylỳar:

$$\left.\frac{\partial \tilde{n}}{\partial n}\right|_{\tilde{A}} = 0, \tag{15.3}$$

$$c(x, y, z, t)\big|_{\tilde{A}} = \tilde{n}_0 \quad . \tag{15.4}$$

Bu ỳerde $\tilde{A}$ -diffuziỳa bolup geçỳän oblastyň araçägi.

(15.3) şert diffuzirlenỳän maddanyň oblastynyň araçägi geçilmeỳän diwardygyny görkezỳär. (15.4) şert oblastyň araçäginde konsentrasiỳany kesgitleỳär.

Diffuziỳanyň çyzykly meseleleri (ỳagny geçirilmeỳän diwarly inçejik ỳuka trubkada bolỳan diffuziỳa baradaky meseleler) aşakdaky ỳaly bolar.

Mesele. $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ deňlemäniň $c(x, y, z, t)\big|_{t=0} = f(x)$ başlangyç we $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ gyra şert $c = c_0$ gyrada, ỳada trubkanyň gyrasynda ỳerine ỳetỳän $c = c(x, t)$ çözüwini tapmaly.

Bu mesele steržende ỳylylyk ỳaỳramagynyň meselesiniň çözülüşine meňzeşlikde Furỳe usuly bilen çözülỳär.

§ 3.16. Laplasyň deňlemesine getirỳän meseleler

Eger ỳylylyk geçirjilik prosese δ üst bilen çäklene T jisimde seretsek, onda jisimiň dürli nokatlaryndaky temperatura aşakdaky deňlemäni kanagatlandyrỳar.(Ỳylylyk çeşmesi ỳok diỳip hasap edilỳär).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad . \tag{16.1}$$

Eger ỳylylyk geçirjilik prosesde has ỳukajyk plastinkada seretsek, onda plastinkanyň dürli nokatlaryndaky temperatura aşakdaky üç ölçegli (ỳylylyk çeşmesi ỳok hasap edilỳär).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{16.2}$$

deňlemäni kanagatlandyrỳar.

Goỳ, indi ỳylylyk giçirijilik stasionar hala geçipdir diỳeliň. Başgaça aỳdanymyzda jisimiň dürli nokatlaryndaky temperatura wagta bagly bolman, diňe nokadyň x, y, z koordinatalaryna bagly bolỳar.

Eger temperatura wagta bagly bolmaỳan bolsa, onda $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ bolỳar. Bu ỳerden görnüşune görä jisimiň ỳa-da plastikanyň dürli nokatlaryndaky temperatura degişlilikde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \tag{16.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{16.4}$$

deňlemeleri kanagatlandyrỳar.

(16.3), (16.4) deňlemeler Laplasyň deňlemeleri diỳlip atlandyrylỳar.

Indi jisimiň islendik nokadyndaky temperaturany bilmek üçin, bize jisimiň δ üstüniň her bir nokadyndaky temperaturany bilmek gerek.

(16.3), (16.4) deňlemelerden görnüşine görä T-jisimiň, plastinkanyň nokatlaryndaky temperaturalaryny degişlilikde $u(x,y,z)$ we $u(x,y)$ funksiỳa hökmünde seretmek mümkin.

Mesele.

1. Jisimiň içki nokatlarynda (16.3) dňlemäni jisimiň üstki nokatlarynda berlen

$$u\big|_{\delta} = \varphi(M) \qquad (16.5)$$

bahany kanagatlandyrỳan $u(x,y,z)$ funksiỳany tapmaly. Şu mesele birinji gyra mesele ỳa-da Dirihle meselesi diỳlip atlandyrylỳar.

2. Eger jisimiň üstki nokatlarynda temperatura belli bolman, onuň ỳerine üstüň normalynyň proporsional bolỳan ỳylylyk akymy belli bolsa, onda (16.5)- şertiň ỳerine

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\delta} = \varphi(M) \qquad (16.6)$$

gyra şert berilỳär. Bu mesele ikinji gyra mesele ỳa-da Neỳmen meselesi diỳip atlandyrylỳar.

Bu ỳerde $\frac{\partial u}{\partial n}$, δ -üstüň normalynyň ugry boỳunça, $u(x,y,z)$- funksiỳanyň önümidir.

3. Eger (16.5) ỳa-da (16.6) şertleriň ỳerine $\left.\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right|_{\delta} = f(M)$ şerti kanagatlandyrỳan $u(x,y,z)$ funksiỳany tapmaklyk talap edilse, onda beỳle mesele üçünji gyra mesele diỳlip atlandyrylỳar.

§ 3.17. Iki ölçegli Laplasyň deňlemesi üçin Dirihläniň meselesi

Iki ölçegli

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (17.1)$$

Laplasyň deňlemesine merkezi , koordinatalar başlangyjynda bolan R radiusly tegelekde seredeliň.

Mesele: R-radiusly tegelekde (17.1) deňlemäni kanagatlandyrỳan we tegelegi çäklendirỳän l töwerekde berilen $u\big|_e = f(r)$ (17.2) bahany kabul edỳän $u(x,y)$ funksiỳany tapmaly.

Bu meseläni Furỳe usuly bilen çözeliň. Onuň üçin ilki bilen polỳar koordinatalaryna geçeliň.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (17.3)$$

(17.2)- deňligiň kömegi bilen (17.1) deňleme aşakdaky görnüşe getirilỳär.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \ . \qquad (17.4)$$

Onda $u\big|_e = f$ şertimiz hem $u\big|_{r=R} = f_1(\varphi)$ görnüşe eỳe bolar.

(17.3)- deňlemäniň çözüwini Furỳe usulyny ulanyp

$$u=\Phi_1(r)\Phi_2(\varphi) \qquad (17.5)$$

görnüşde gözläliň.

(17.4)- deňligiň esasynda (17.3) deňlemeden

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right)\Phi_2=-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2}\Phi_1$$

deňligi alarys. Bu ỳerden

$$\frac{r}{\Phi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right)=-\frac{1}{\Phi_2}\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2} \ . \qquad (17.6)$$

(17.6)- deňlikden görnüşine görä, deňligiň çep tarapy r-e, sag tarapy bolsa φ ululyga bagly däl. Diỳmek, beỳle deňlik diňe hemişelik ululyga deň bolup biler:

$$\frac{r}{\Phi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right)=\lambda; \qquad (17.7)$$

$$\frac{1}{\Phi_2}\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2}=-\lambda \qquad (17.8)$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2} + \lambda\Phi_2 = 0\ . \qquad (17.9)$$

Bu ỳerde λ-hemişelik ululyk.

(17.9) ady differensial deňlemäni çözüp alarys.

$$\Phi_2(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\ . \qquad (17.10)$$

A, B-erkin hemişelik ululyklar.

Indi λ-niň islendik özbaşdak bahany alyp bilmeỳandigini görkezeliň. $\mu(r,\varphi)$ nokady alalyň. Eger-de φ-niň ỳerine $\varphi + 2\pi$ alsak, onda ỳene öňki nokadymyzy alarys. Bu ỳerden görnüşine görä, biziň φ-ululyga görä alan funksiỳamyz periody 2π -e deň bolan, periodik funksiỳa bolmaly. Ỳagny

$$\Phi_2(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)\ .$$

Onda (17.10) formuladan görnüşine görä $\sqrt{\lambda}$ bitin san bolmaly.

$$\sqrt{\lambda} = n \qquad (n = 1,2,3,\dots)\ .$$

Ỳa-da $\lambda = n^2$.

(17.10) formulada λ-ululygyň bahasyny goỳsak

$$\Phi_2(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi \qquad (17.11)$$

alarys.

Indi (17.7) –deňlemede λ-niň bahasyny ỳerine goỳup alalyň.

$$\frac{r}{\Phi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right) = n^2$$

$$r^2\frac{d^2\Phi_1}{dr^2} + r\frac{d\Phi_1}{dr} - n^2\Phi_1 = 0 \qquad (17.12)$$

(17.12)-deňlemäni çözmek üçin $\Phi_1 = r^\alpha$ diỳip belläliň.Bu ỳerden

$$\frac{d\Phi_1}{dr} = \alpha r^{\alpha-1},\ \ \frac{d^2\Phi_1}{dr^2} = \alpha(\alpha-1)e^{\alpha-r}$$

ululyklaryň bahalaryny (17.12) deňlikde ỳerine goỳup

$$\alpha(\alpha-1)r^2 + \alpha r^2 - n^2 r^\alpha = 0\,,$$

ỳa-da

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$$

deňligi alarys.

Bu deňlemeden α -ululygy tapỳarys.

$$\alpha = \pm n \quad ;$$

Şeỳlelik bilen (17.12) deňlemäniň $\Phi_1 = r^n$ çözüwini tapdyk. Şu deňlemäniň $\Phi_1 = r^{-n}$ çözüwini taşlaỳarys, sebäbi ol çözüw $n > 0$ bolanda, tegelegiň merkezinden $r = 0$ bolanda tükeneksizlige öwrülỳär. Şunluk bilen biz

$$u_n(r,\varphi) = r^2 (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \qquad (17.13)$$

funksiỳany tapdyk.

Biziň seredỳän deňlemämiziň birjynsly we çyzykly deňleme bolanlygy sebäpli (17.13) görnüşdäki hususy çözüwleriň jemi hem Laplas deňlemesini kanagatlandyrỳar.

$$u_n(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \qquad (17.14)$$

Şu (17.14) çözüwi Furỳe hataryna meňzeş görnüşde ỳazmak üçin

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n$$

bilen belläp alalyň.

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \ . \qquad (17.15)$$

(17.15)- deňlikdäki näbelli a_0, a_n, b_n ululyklary kesgitlemek üçin $u\big|_{r=R} = f_1(\varphi)$ şertimizi ulanalyň. (17.15) deňlikde $R = r$ goỳsak

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi) \qquad (17.16)$$

deňligi alarys.

(17.16)-deňlik $f_1(\varphi)$ funksiỳanyň Furỳe hataryna dagydylmasydyr. Furỳe koeffisientlerini kesgitlemek üçin bize belli bolan formulalary ulanalyň.

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\psi)\cos n\psi\, d\psi \ ,$$

$$R^n b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\psi)\sin n\psi\, d\psi \ ,$$

ýagny

$$a_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\psi)\cos n\psi\, d\psi,$$

$$b_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\psi)\sin n\psi\, d\psi$$

Indi R radiusly tegelekde Laplasyň deňlemesi üçin Dirihle meselesiniň çözüwini almak üçin (17.15) formulada a_n, b_n ululyklaryň bahalaryny ỳerine goỳmak ỳeterlikdir.

G ö n ü k m e l e r

I. Aşakdaky deňlemeleriň haỳsylarynyň hususy önümli differensial deňlemedigini anyklamaly.

1. $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0.$

2. $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{yy})^2 = 0.$

3. $\sin^2(u_{xx} + u_{xy}) + \cos^2(u_{xx} + u_{xy}) - u = 1.$

4. $\sin(u_{xy} + u_x) - \sin u_{xy} \cos u_x - \cos u_{xy} \sin u_x + 2u = 0.$

5. $\frac{\partial}{\partial x} tgu - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0.$

6. $\log\left|u_x u_y\right| - \log\left|u_x\right| - \log\left|u_y\right| + 5u - 6 = 0.$

II. Aşakdaky deňlemeleriň tertiplerini kesgitlemeli.

1. $\log\left|u_{xx}u_{yy}\right| - \log\left|u_{xx}\right| - \log\left|u_{yy}\right| + u_x + u_y = 0.$

2. $u_x u_{xy}^2 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y)^2 - 2xy = 0.$

3. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0.$

4. $2(u_x - 2u)u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 - xy = 0.$

5. $\frac{\partial}{\partial x}(u_{yy}^2 - u_y) - 2u_{yy}\frac{\partial}{\partial y}(u_{xy} - u_x) - 2u_x + 2 = 0.$

6. $2u_{xx}u_{xxy} - \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_y)^2 - 2u_y u_{xxy} + u_x = 0.$

III. Aşakdaky deňlemeleriň haýsy tipe degişlidigini kesgitlemeli.

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0.$
2. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0.$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0.$
4. $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$
5. $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0.$
6. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0.$

IV. Aşakdaky deňlemeleri kanonik görnüşe getirmeli.

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$
2. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$
3. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$
4. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$
5. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0.$
6. $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0.$

V. Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly.

1. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$
2. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
3. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0.$

VI. Aşakdaky Koşiniň meselelerini çözmeli.

1. $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0,$

$$u(x,y)\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y(x,y)\big|_{y=0} = \psi(x).$$

2. $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,\ u(x,y)\big|_{x=0} = \varphi(y),\ u_x(x,y)\big|_{x=0} = \psi(y).$

3. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$

$$u(x,y)\big|_{y=\sin x} = x + \cos x,\ u_y(x,y)\big|_{y=\sin x} = \sin x.$$

VII. $0 < x < l,\ t > 0$ oblastda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ deňlemäniň aşakdaky garyşyk şertleri kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

1. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x.$

2. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).$

3. $u = (0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \sin\frac{5\pi}{2l}x,\ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x.$

4. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x + \sin\frac{3\pi}{2l}x.$

5. $u(0,t) = u(l,t) = 0,$

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x.$$

6. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).$

VIII. $0 < x < l,\ t > 0$ oblastda $u_t = a^2 u_{xx}$ deňlemäniň aşakdaky garyşyk şertleri kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

1. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = Ax.$

2. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x).$

3. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = A(l - x).$

4. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = U.$

5. $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ h > 0.$

6. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = U,\ h > 0.$

IX. $0 < x < p,\ 0 < y < s$ göniburçlykda aşakdaky deňlemeleri kanagatlandyrỳanLaplas deňlemesiniň $u(x,y)$ çözüwini tapmaly.

1. $u(0,y)=u_x(p,y)=0,\ u(x,0)=0,\ u(x,s)=f(x).$

2. $u_x(0,y)=u_x(p,y)=0,\ u(x,0)=A,\ u(x,s)=Bx.$

3. $u(0,y)=U,\ u_x(p,y)=0,\ u_y(x,0)=T\sin\dfrac{\pi x}{2p},\ u(x,s)=0.$

J o g a p l a r

I. **1.** Ýok. **2.** Hawa. **3.** Ýok. **4.** Ýok. **5.** Ýok. **6.** Ýok.
II. 1. birinji **2.** ikinji **3.** birinji. **4.** birinji **5.** ikinji **6.** Ikinji
III.1. Giperbolik. **2.** Elliptik. **3.** Parabolik. **4.** Parabolik. **5.** Giperbolik. **6.** Elliptik

IV.1. hemme ỳerinde elliptik, $\vartheta_{\xi\xi}+\vartheta_{\eta\eta}-8\vartheta=0,\ \xi=y-x,\ \eta=2x.$

2. hemme ỳerinde parabolik,
$\vartheta_{\eta\eta}+18\vartheta_{\xi}+9\vartheta_{\eta}-9\vartheta=0,\ \xi=x+y,\ \eta=x.$

3. hemme ỳerinde giperbolik,
$\vartheta_{\xi\eta}+3\vartheta_{\xi}-\vartheta_{\eta}+2\vartheta=0,\ \xi=y-x,\ \eta=2y-x.$

4. hemme ỳerinde giperbolik,
$\vartheta_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi}-2\vartheta_{\eta}+\xi+\eta=0,\ \xi=2x-y,\ \eta=x+y.$

5. hemme ỳerinde parabolik,
$27\vartheta_{\eta\eta}-105\vartheta_{\xi}+30\vartheta_{\eta}-150\vartheta-2\xi+5\eta=0,\ \xi=x+3y,\ \eta=x.$

6. hemme ỳerinde elliptik,
$$\vartheta_{\xi\xi}+\vartheta_{\eta\eta}+15\vartheta_{\xi}-4\sqrt{6}\vartheta_{\eta}+\frac{1}{3}\xi+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta=0,\ \xi=y-2x,\ \eta=\sqrt{6}x.$$

V. **1.** $u=f(x+y)+\varphi(3x+2y)$.

2. $u=\varphi(y-x)+e^{\frac{x-y}{2}}\psi(y-2x)$. **3.** $u=[\varphi(x+3y)+\psi(3x+y)]e^{\frac{7x+y}{16}}$.

VI. 1. $u=(x,y)=\varphi\left(x-\dfrac{2}{3}y^3\right)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y}\psi(\alpha)d\alpha$

2. $u(x,y)=(1+2x-e^{2x})e^{y}+\varphi(y)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{y}^{2x+y}\psi(z)dz.$

3. $u(x,y)=x+\cos(x-y+\sin x)$**.**

VII. **1.** $u(x,t)=\dfrac{1}{2\pi a}\sin\dfrac{2\pi a}{l}t\sin\dfrac{2\pi}{l}x.$

2. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\dfrac{ak\pi}{l}t+b_n\sin\dfrac{ak\pi}{l}t\right)\sin\dfrac{k\pi}{l}x,$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\quad b_k=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx.$$

3. $u(x,t)=\dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi}{2l}t\sin\dfrac{\pi}{2l}x+\cos\dfrac{5a\pi}{2l}t\sin\dfrac{5\pi}{2l}x.$

4. $u(x,t)=\dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi}{2l}t\sin\dfrac{\pi}{2l}x+\dfrac{2l}{3a\pi}\sin\dfrac{3a\pi}{2l}t\sin\dfrac{3\pi}{2l}x+$

$$+\frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)a\pi}{2l}t\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x.$$

5. $u(x,t)=\cos\dfrac{a\pi}{2l}t\cos\dfrac{\pi}{2l}x+\dfrac{2l}{3a\pi}\sin\dfrac{3a\pi}{2l}t\cos\dfrac{3\pi}{2l}x+$

$$+\frac{2l}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi}{2l}t\cos\frac{5\pi}{2l}x.$$

6. $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\cos\dfrac{(2k+1)a\pi}{2l}t+b_k\sin\dfrac{(2k+1)a\pi}{2l}t\right]\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x,$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx,\qquad \int_0^l\psi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx.$$

VIII. 1. $u(x,t)=\dfrac{2lA}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\sin\dfrac{k\pi}{l}x.$

2. $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2t}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x,$

bu ẏerde $a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}xdx.$

3. $u(x,t)=\dfrac{8lA}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}e^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 t}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x.$

4. $u(x,t)=U.$

5.

$$u(x,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{h^2+\lambda_k^2}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\lambda_k\xi\,d\xi\right\}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\cos\lambda_k x,$$

bu ỳerde λ_k- $\lambda tg\lambda l=h$ deňlemäniň polojytel kökleri.

6. $u(x,t)=2U\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k\left[l(h^2+\lambda_k^2)+h\right]}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\Phi_k(x),$

bu yerde $\Phi_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x$. λ_k bolsa $htg\lambda l=-\lambda$ deňlemäniň polojytel kökleri.

IX. 1. $u(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2p}x\,sh\dfrac{(2k+1)\pi}{2p}y,$

$$a_k=\frac{2}{p}sh^{-1}\frac{(2k+1)\pi s}{2p}\int_0^p f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}xdx.$$

2.

$$u(x,y)=\frac{(p^2B-2A)y}{2s}+A-$$

$$-\frac{4pB}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 sh\dfrac{(2k+1)\pi s}{p}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{p}xsh\frac{(2k+1)\pi}{p}y.$$

3.

$$u(x,y)=U+$$

$$+\frac{2p}{\pi}\left[Tsh\frac{\pi}{2p}y-\left(ch^{-1}\frac{\pi s}{2p}\right)\left(\frac{2U}{p}+Tsh\frac{\pi s}{2p}\right)ch\frac{\pi}{2p}y\right]\sin\frac{\pi}{2p}x-$$

$$-\frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ch^{-1}\dfrac{(2k+1)\pi s}{2p}}{2k+1}ch\frac{(2k+1)\pi}{2p}y\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}x.$$

IV. Ähtimallyklar nazaryýeti we matematiki statistika

IV.1. Ahtimallyklar nazaryýetiniň esaslary.

§ 1.1 Ahtimallyk giňişligi.

1.Wakalaryñ synplaşdyrylmasy.Ahtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleriniň biri waka düşünjesidir. Wakanyñ kesgitlemesi ýokdyr.Şol sebäpli,wakalara matematiki usullary ulanmak maksady bilen elementar wakalar giňişligi diýlip atlandyrylan erkin $\Omega = \{w\}$ köplüge garalýar we bu köplügiň islendik bölek köplügi waka diýlip atlandyrylýar. Ω köplügiň w elementlerine elementar wakalar diýilýär.

Wakalary üç topara bölýärler:

1) Hökmany wakalar.
2) Mümkin däl wakalar.
3) Tötän wakalar.

Islendik wakanyň ýüze çykmagy üçin käbir şertler toplumynyň bolmagy zerurdyr. Bu şertler toplumy synag ýa-da tejribe diýlip atlandyrylýar.Käbir şertler toplumynda hökman ýüze çykýan wakalara hökmany wakalar, ýüze çykmajakdygy öňden belli bolan wakalara mümkin däl wakalar, ýüze çykmaklygy hem, çykmazlygy hem mümkin bolan wakalara tötän wakalar diýilýär. Hökmany wakalary Ω ýa-da *U* bilen, mümkin däl wakalary Ø ýa-da *V* bilen, tötän wakalary bolsa latyn elipbiýiniň *A*, *B*, *C*, *D*,… baş harplary bilen belgileýärler. Mysal üçin, gapda 10 sany ak şar bar bolsun. Bu gapdan şowuna çykarylan şaryñ ak bolmagy hökmany wakadyr.Bu şertde ol gapdan şowuna çykarylan şaryñ ak däl bolmagy mümkin däl wakadyr. Eger gapdaky 10 şaryñ birnäçesi ak, birnäçesi ak däl bolsa, onda bu gapdan şowuna çykarylan şaryñ ak ýa-da ak däl bolmagy tötän wakadyr.

“*A* wakanyň ýüze çykmagy *B* wakanyň ýüze çykmagyna getirýär” diýlen tassyklama $A \subseteq B$ görnüşde ýazylýar. Eger şol bir wagtda $A \subseteq B$ we $B \subseteq A$ bolsa, onda *A* we *B* wakalara deňgüýçli diýilýär we *A*=*B* görnüşde belgilenýär.

Şol bir synagda bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligini ýok edýän bolsa, başgaça aýdylanda, şol bir synagda iki waka bilelikde ýüze çykyp bilmeýän bolsa,onda şeýle wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär.

A wakanyň ýüze çykmaýan wagty we diňe şonda ýüze çykýan waka *A* wakanyň garşylykly wakasy diýilýär we $\overline{A}$ bilen belgilenýär (okalyşy: *A* däl).

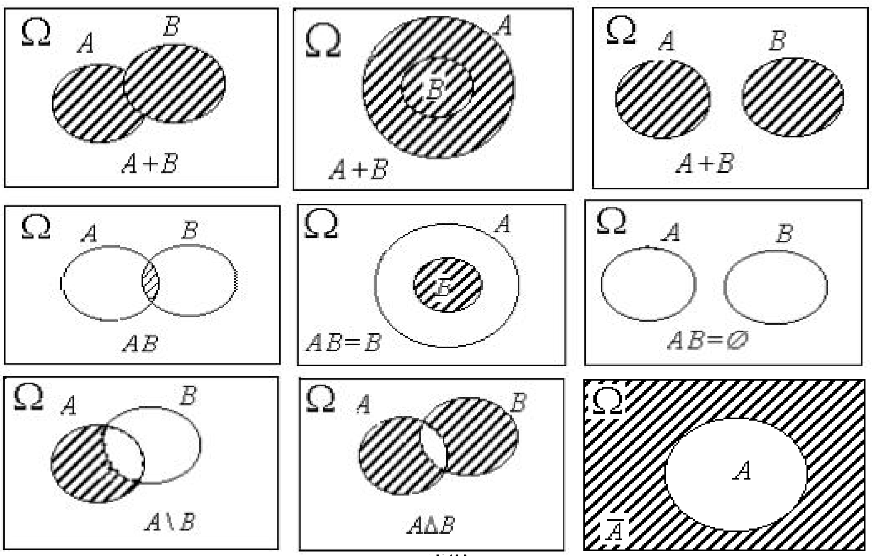
2. Wakalar üstünde amallar. *A* we *B* iki wakanyň jemi ýa-da birleşmesi diýlip, bu wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar we *A*+*B* ýa-da $A \cup B$ bilen belgilenýär.

A we *B* iki wakanyň köpeltmek hasyly ýa-da kesişmesi diýlip, bu wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar we *AB* ýa-da $A \cap B$ bilen belgilenýär.

A we *B* wakalaryň tapawudy diýlip, A wakanyň ýüze çykyp, B wakanyň ýüze çykmazlygyna aýdylýar we $A \setminus B$ bilen belgilenýär.

$A \setminus B$ we $B \setminus A$ wakalaryň jemine *A* we *B* wakalaryň simmetrik tapawudy diýilýär we A Δ B bilen belgilenýär.

Wakalar üstünde amallary Wýenniň diagrammalarynda görkezeliň: (1-nji surat)



1-nji surat.

Sygyşmaýan A we B wakalar üçin AB = Ø deňgüýçlülik adalatlydyr. A we $\overline{A}$ garşylykly wakalar üçin şol bir wagtda $A+\overline{A}=\Omega$ we $A\overline{A}=$ Ø deňgüýçlülikler adalatlydyrlar.

1-nji mysal. Ýygnaga gelen talyplaryñ arasyndan bir talyp şowuna saýlanyp alynýar. Goý, A waka " Saýlanan talyp matematik" bolsun, B waka bolsa " Saýlanan talyp tapawutly" bolsun. A+B, AB, A\\B, A Δ B we $\overline{A}$ wakalary ýazmaly.

⊲ Amallaryñ kesgitlemelerinden peýdalanyp, ýazyp bileris:

A+B = { Saýlanan talyp ýa matematik,ýa tapawutly ýa-da tapawutly matematik.}

AB = { Saýlanan talyp tapawutly matematik. }

A\\B = { Saýlanan talyp tapawutly däl matematik.}

A Δ B = { Saýlanan talyp ýa tapawutly däl matematik, ýa-da

tapawutly matematik däl. } ⊳

3.Wakalaryň algebrasy. Eger $\Omega=\{w\}$ elementar wakalar giňişliginiň bölek köplükleriniň käbir F sistemasy:

1) $\Omega\in F$;
2) $A\in F$ we $B\in F$ wakalar üçin $A+B\in F$, $AB\in F$;
3) $A\in F$ waka üçin $\overline{A}\in F$;
şertleri kanagatlandyrýan bolsa,onda F sistema wakalaryň algebrasy diýilýär.

Eger F algebra üçin $A_n\in F$, n = 1,2,… degişliliklerden $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in F$ we $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in F$ degişlilikler gelip çykýan bolsalar, onda F sistema wakalaryň sigma-algebrasy diýilýär.

4.Ähtimallyk. Ähtimallyklar nazaryýetiniñ esasy düşüñjeleriniñ ýene biri ähtimallyk düşünjesidir.

Kesgitleme. Eger $P(A)$ san funksiýasy :

1) Islendik $A \in F$ waka üçin $P(A) \geq 0$ (otrisatel dällik aksiomasy);

2) $P(\Omega)=1$ (normirlenenlik aksiomasy);

3) Sygyşmaýan A we B wakalar üçin $P(A+B) = P(A)+P(B)$ (tükenikli additiwlik aksiomasy);

4) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ... \supseteq B_n \supseteq ...$ we $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ wakalar yzygiderligi üçin $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ (üznüksizlik aksiomasy);

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa ähtimallyk diýilýär.

Bellik. Üznüksizlik aksiomasyny $B_1 \subseteq B_2 \subseteq ... \subseteq B_n \subseteq ...$ we $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ wakalar yzygiderligi üçin $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$ görnüşde hem teswirlemek bolar.

Ähtimallygyñ bu kesgitlemesine deñgüýçli bolan ýene bir kesgitlemesini getireliñ.

Kesgitleme. Eger $P(A)$ san funksiýasy:

1) Islendik $A \in F$ waka üçin $P(A) \geq 0$ (otrisatel dällik aksiomasy);

2) $P(\Omega)=1$ (normirlenenlik aksiomasy);

3) Sygyşmaýan $A_1, A_2, \ldots, A_n, ...$ wakalar üçin

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{(hasaply additiwlik aksiomasy);}$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa , onda oňa ähtimallyk diýilýär.

Ähtimallyk aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

2) Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda $P(B) \leq P(A)$.

3) Garşylykly wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir, ýagny

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

4) Mümkin däl wakanyň ähtimallygy nola deňdir,ýagny $P(\varnothing)=0$.
5) Islendik A waka üçin $0 \le P(A) \le 1$ deňsizlikler adalatlydyrlar.
Bu häsiýetleri subut edeliñ.

$\lhd$ 1) Goý, $B \subseteq A$ gatnaşyk ýerine ýetýän bolsun.Onda $A = B + (A \setminus B)$ deñgüýçlilik adalatlydyr. B we $A \setminus B$ sygyşmaýan wakalar bolandyklary sebäpli, ähtimallygyñ tükenikli additiwlik aksiomasyndan peýdalanyp,

$$P(A)=P(B)+P(A\setminus B) \qquad (1)$$

deñligi alarys.Bu ýerden taparys:

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(B). \quad \rhd$$

$\lhd$ 2) Goý, $B \subseteq A$ gatnaşyk ýerine ýetýän bolsun.Onda (1) deñlik adalatlydyr. Ahtimallygyñ otrisatel däldigini göz öñünde tutup, ol ýerden $P(B) \le P(A)$ deñsizligi alarys. $\rhd$

$\lhd$ 3) Belli bolşy ýaly, A we $\overline{A}$ garşylykly wakalar üçin $A+\overline{A}=\Omega$ we $A\overline{A}=\varnothing$ deñgüýçlülikler adalatlydyrlar. Ikinji deñgüýçlüligi we ähtimallygyñ normirlenenlik aksiomasyny göz öñünde tutup, birinji deñgüýçlülikgen alarys:

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1. \quad \rhd$$

$\lhd$ 4) $\varnothing$ we Ω sygyşmaýan wakalar bolandyklary sebäpli $\varnothing+\Omega=\Omega$ deñgüýçlülikden $P(\varnothing) + \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\Omega)$ deñligi alarys. Bu ýerden $P(\varnothing) = 0$. $\rhd$

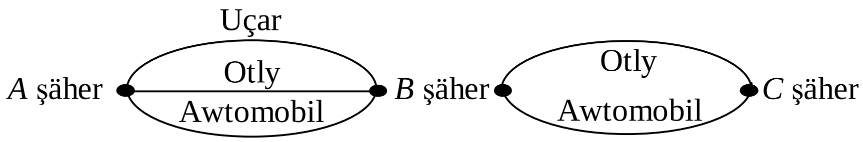
$\lhd$ 5) $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$ bolandygy sebäpli, ähtimallygyñ 2-nji häsiýetini göz öñünde tutup, $P(\varnothing) \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le \mathrm{P}(\Omega)$ ýa-da $0 \le P(A) \le 1$ deñsizlikleri alarys. $\rhd$

(Ω, F, P) üçlüge ähtimallyk giňişligi diýilýär.

§ 1.2. Kombinatorikanyñ elementleri.

1.Köpeltmek düzgüni. Kombinatorika diskret matematikanyñ bölümleriniñ biri bolup,ol ähtimallyklar nazaryýetinde, matematiki lo-gikada,sanlar nazaryýetinde, hasaplaýyş tehnikasynda we kiberneti-kada giñden ulanylýandygy bilen möhüm ähmiýete eýedir.Amaly-ýetde köplenç käbir hereketi amala aşyrmagyñ mümkin bolan ýag-daýlaryny hasaplamagyñ usullarynyñ sanyny anyklamak bilen bag-lanyşykly meseleler bilen iş salyşmaly bolýar.Şeýle meselelere kom-binatoriki meseleler diýilýär.Kombinatoriki hasaplamalary geçirmek bilen ylmyñ dürli pudaklarynýñ wekilleri iş salyşmaly bolýarlar.My-sal üçin, himik molekulalardaky atomlaryñ mümkin bolan baglany-şyklarynyñ görnüşlerini anyklamaly bolanda, biolog belok birleşme-lerindäki aminokislotalaryñ mümkin bolan dürli gezekleşmeler yzy-giderliklerini hasaplanda, agranom ekin meýdanlarynda ekişin dürli usullaryny öwrenende, dispetçer ulaglaryñ ugurlar boýunça hereket-leriniñ grafigini düzende, müdiriñ okuw işleri boýunça orunbasary sapaklaryñ tertibini düzende we şuña meñzeş ýagdaýlarda kombina-toriki hasaplamalary geçirmeli bolýarlar.

Eger A hereketi n usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa we bu usullaryñ her biri üçin B hereketi m usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa,onda görkezilen tertipde A we B hereketleri $n \times m$ usul bilen amala aşyrmak bolar. Kombinatorikanyñ bu esasy düzgünine köpelt-mek düzgüni diýilýär.Mysal üçin, A şäherden B şähere uçarda,otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa, B şäherden C şähere otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa,onda A şäherden C şähere $3 \times 2 = 6$ usul bilen barmak bolar (2-nji surat).



2–nji surat

Indi köpeltmek düzgünininiñ umumylaşdyrmasyny getireliñ.Eger bi-rinji hereketi n_1 usul bilen, ikinji hereketi n_2 usul bilen we ş.m. k-njy hereketi n_k usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa,onda bu hereketleriñ hemmesini bilelikde $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ usul bilen amala aşyrmak bolar.

2. Çalşyrmalar.

Kesgitleme. 1-den *n*-e çenli natural sanlaryň köpeltmek hasylyna *n*-faktorial diýilýär we $n!$ bilen belgilenýär.Mysal üçin, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Kesgitlemeden peýdalanyp bu sany $5! = 4! \cdot 5 = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ deñlikler görnüşinde hem ýazmak bolar.Şol sebäpli islendik natural n san üçin

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

deňlik adalatlydyr.

Bellik. 0! = 1 diýlip kabul edilýär.

Goý, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementler berlen bolsun. Bu elementleriň islendik tertipde ýazylan yzygiderligine çalşyrma diýilýär. Bu elementleriñ islendik ikisinden, mysal üçin, a_1 we a_2 elementlerden a_1, a_2 we a_2, a_1 görnüşli $2! = 1 \cdot 2 = 2$ sany çalşyrma düzmek bolar. Şuña meñzeşlikde, berlen elementleriñ islendik üçüsinden, mysal üçin, a_1, a_2 we a_3 elementlerden a_1, a_2, a_3; a_1, a_3, a_2; a_2, a_1, a_3; a_2, a_3, a_1; a_3, a_1, a_2; a_3, a_2, a_1 görnüşli $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ sany çalşyrma düzmek bolar. Bu pikir ýöretmäni dowam edip, *n* elementden *n*! sany çalşyrma düzmek boljakdygyna göz ýetirmek bolar. Hakykatdan hem, *n* elementden düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryñ sanyny P_n bilen belgiläliñ. $P_n = n!$ deñligiñ adalatlydygyny görkezeliñ.Çalşyrmada birinji orunda *n* elementiñ islendik birini ýazmak bolar.Soñra ikinji orunda (*n*-1) elementiñ islendik birini ýazmak bolar we ş.m.Onda köpeltmek düzgüni boýunça hemme *n* orny $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ usul bilen doldurmak bolar.

3. Utgaşdyrmalar.

Kesgitleme. *n* elementli köplügiň *k* elementli erkin bölek köplügine *n* elementden *k* element boýunça utgaşdyrma diýilýär.Şeýle utgaşdyrmalaryň sany

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad (2)$$

ululyga deňdir.

$\lhd$ Berlen A köplügiñ hemme bölek köplükleriniñ köplügini M (A) bilen, k elementli hemme bölek köplükleriniñ köplügini bolsa M_k (A) bilen belgiläliñ. M_k (A) köplügiñ elementleriniñ sanyny N (M_k (A)) = C_n^k bilen belgiläliñ. A köplügiñ k elementli bölek köplügini almak üçin (k-1) elementli bölek köplüge bu bölek köplüge girmeýän n-k +1 elementleriñ birini girizmeli.(k-1) elementli bölek köplükleriñ sanynyñ C_n^{k-1} ululyga deñ bolandygy we olaryñ her birini n-k +1 usul bilen k elementli bölek köplüge dolduryp bolýandygy sebäpli, k elementli bölek köplükleriñ sany

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

ululyga deñ bolar. Bu deñligi iterirläp alarys:

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}\cdot C_n^{k-1} =$$

$$= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)}{k\cdot(k-1)}\cdot C_n^{k-2} = \ldots = \frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot C_n^1 =$$

$$= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad . \qquad \rhd$$

Mysal üçin,10 elementden 3 element boýunça utgaşdyrmalaryň sany

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!} = 120$$

bolar.

Teorema. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ deñlik adalatlydyr.

$\lhd$ (2) formulany özgerdip alarys:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n-(n-1)!\cdot k+(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(\text{n - k})!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}. \quad \triangleright$$

Teorema. *n* elementli köplügiñ hemme bölek köplükleriniñ sany 2^n-e deñdir.

$\triangleleft$ Berlen *n* elementli köplügiñ elementlerini nomerläliñ we her bir bölek köplük üçin nollardan we birliklerden ybarat bolan *n* uzynlykly yzygiderligi şeýle düzeliñ: eger *k* nomerli element bölek köplüge girýän bolsa,onda *k*-njy orunda 1 ýazalyñ,eger girmeýän bolsa 0 ýazalyñ.Şeýlelikde,her bir bölek köplüge nollardan we birliklerden ybarat bolan öz yzygiderligi degişlidir.Mysal üçin,boş köplüge diñe nollardan ybarat bolan *n* uzynlykly yzygiderlik degişlidir.Onda hemme şeýle yzygiderlikleriñ sany köpeltmek düzgüni boýunça

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n} = 2^n$$

bolar. Diýmek, *n* elmentli köplügiñ hemme bölek köplükleriniñ sany 2^n-e deñdir. $\triangleright$

Netije. n elementli köplügiñ *k* elementli hemme bölek köplükleriniñ sanynyñ C_n^k ululyga deñdigi sebäpli, $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$ jem berlen köplügiñ hemme bölek köplükleriniñ sanyna deñdir.Diýmek,

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$$

deñlik adalatlydyr.Bu deñlige

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Nýutonyñ binomynyñ $a=b=1$ bolan hususy haly hökmünde hem garamak bolar.

Teorema. Goý, *n* elementli käbir A köplük k_1 elementli B_1, k_2 elementli B_2 we ş.m. k_m elementli B_m köplükleriñ jemi görnüşinde aň-aldylýan bolsun,şunlukda $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.Onda şeýle añlatma usullarynyñ sany

$$C_n^{k_1 k_2 ... k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$$

ululyga deñdir. Bu sanlara polinomial koeffisiýentler diýilýär.

◁ n elementli A köplügiñ k_1 elementli B_1 bölek köplügini alalyñ.Ony $C_n^{k_1}$ usul bilen amala aşyrmak bolar.Soñra galan $n - k_1$ elementli köplükden k_2 elementli B_2 bölek köplügi alalyñ.Ony $C_{n-k_1}^{k_2}$ usul bilen amala aşyrmak bolar we ş.m.Onda dürli $B_1, B_2, ..., B_m$ bölek köplükleri almaklygyñ usullarynyñ $C_n^{k_1 k_2 ... k_m}$ umumy sany köpeltmek düzgüni boýunça

$$C_n^{k_1 k_2 ... k_m} = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot ... \cdot C_{n-k_1-...-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot ... \cdot \frac{(n-k_1-...-k_{m-1})!}{k_m! \cdot (n-k_1-...-k_m)!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$$

bolar. ▷

4) Ýerleşdirmeler.

Kesgitleme. Her bir elementine 1-den n-e çenli käbir san (elementiň nomeri) degişli edilen n elementli köplüge tertipleşdirilen diýilýär.

Kesgitleme. n elementli köplügiň tertipleşdirilen k elementli bölek köplügine n elementden k element boýunça ýerleşdirme diýilýär.

Şeýle ýerleşdirmeleriň sany

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (3)$$

ululyga deňdir.

$\triangleleft$ n elementli A köplügiñ k elementli bölek köplükleriniñ sany C_n^k ululyga deñdir.Her bir bölek köplügi $k!$ usul bilen tertipleşdirmek bolar.Diýmek,berlen n elementli köplügiñ tertipleşdirilen hemme k elementli bölek köplükleriniñ sany

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = k! \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

bolar. $\triangleright$

Mysal üçin, 10 elementden 3 element boýunça ýerleşdirmeleriň sany

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

bolar.

Bellik. Utgaşdyrmalarda elementleriň ýerleşiş tertibiniň ähmiýeti ýokdur, ýerleşdirmelerde bolsa, ähmiýeti bardyr.

Gönükmeler

1. Dagyñ depesine 7 ýoda eltýär.

a) Näçe usul bilen ýoda boýunça dagyñ depesine çykyp we ondan düşüp bolar?

b) Bu meseläni çykan ýoluñ boýunça düşüp bolmaýan ýagdaý üçin çözmeli.

2. Näçe usul bilen 6 adam kassa nobata durup biler?

3. Iki sifrasy hem

a) dürli bolan;

b) jübüt bolan;

ç) täk bolan, näçe sany ikibelgili san bar?

4. 0, 1 ,2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany üçbelgili san düzmek bolar?

5. 0, 1 ,2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany 3-e bölünýän üçbelgili san düzmek bolar?

6. 1, 2, 3, 4, 5 sanlaryñ hersini bir gezek ulanyp, olardan näçe sany üçbelgili san düzmek bolar?

7. 0, 1 ,2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany dörtbelgili san düzmek bolar?

8. 5-e bölünýän näçe sany bäşbelgili san bar?

9. Hemme sifralary täk bolan näçe sany bäşbelgili san bar?

10. Çepden saga we sagdan çepe birmeñzeş okalýan näce sany bäşbelgili san bar?

11. Synpda 10 ders öwrenilýär. Duşenbede 6 sany dürli sapak okalýar. Näçe usul bilen duşenbede okaljak sapaklaryñ tertibini düzmek bolar?

12. Näçe usul bilen 25 talypdan 3 talyby saýlap almak bolar?

13. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sifralardan dürli 3 sifrany näçe usul bilen ýerleşdirmek bolar?

14. Hiç bir üçüsi bir gönüde ýatmaýan *n* nokat berlen nokatlary jübüt-jübütden birikdirip, näçe göni geçirmek bolar?

J o g a p l a r

1. a) 49. b) 42. **2.** 720. **3.** a) 81. b) 20. ç) 25. **4.** 180. **5.** 60. **6.** 60. **7.** 1080. **8.** 18000. **9.** 5^5 **10.** 900. **11.** 151200. **12.** 2300. **13.** 720. **14.** $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

§1.3. Ahtimallygyň klassyky, statistiki we geometrik kesgitlemeleri

1.Ähtimallygyñ klassyky kesgitlemesi. Hususy halda, Ω elementar wakalar giňişligi diskret bolanda we *w* elementar wakalar deňähtimallykly bolanlarynda islendik *A* wakanyň ähtimallygy

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (4)$$

gatnaşyk bilen hasaplanýar, bu ýerde n- synag geçirilende ýüze çykyp biljek ähli elementar wakalaryň sany, m- *A* wakanyň ýüze çykmagyna getirýän elementar wakalaryň sany. (4) gatnaşyga ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi diýilýär.Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini ulanmak üçin:

1) synag geçirilende ähli ýüze çykyp biljek elementar wakalaryň sany tükenikli bolmaly;
2) wakalar elementar wakalara böleklenýän bolmaly ;
3) elementar wakalar deňähtimallykly bolmaly.
Emma amalyýetde şeýle ýagdaýlar seýrek duş gelýär. Şol sebäpli ähtimallygyň beýleki kesgitlemelerine hem garaýarlar.

2.Ähtimallygyñ statistiki kesgitlemesi. Goý, *N* synag geçirilýän bolsun we bu synaglaryň *N* (*A*) sanysynda *A* waka ýüze çykýan bolsun.

$$W(A) = \frac{N(A)}{N} \qquad (5)$$

gatnaşyga *A* wakanyň otnositel ýygylygy diýilýär. Bu otnositel ýygylyk hem ätimallygyň statistiki kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär.

3. Ähtimallygyñ geometrik kesgitlemesi. Giñişlikdäki G ýaýlanyñ ölçegini (uzynlygyny, meýdanyny, göwrümini) $mes\,G$ bilen we bu ýaýlada saklanýan g ýaýlanyñ ölçegini $mes\,g$ bilen belgiläliñ. G ýaýla şowuna oklanan nokadyñ g ýaýla düşmegini A waka diýip belgiläliñ. Nokadyñ g ýaýla düşmeginiñ ähtimallygy bu ýaýlanyñ ölçegine proporsional we onuñ G ýaýlada ýerleşişine bagly däl diýip hasap edeliñ.Onda A wakanyñ ähtimallygy

$$P(A) = \frac{mes\,g}{mes\,G} \qquad (6)$$

gatnaşyk bilen kesgitlenýär.Bu formula ähtimallygyñ geometrik kesgitlemesi diýilýär.

1-nji mesele. Gapda her birinde G, A, A, R, Ş, S, Y, Y, Z, L, K harplaryň biri ýazylan 11 tagtajyk bar. Bu tagtajyklar gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylyp, çepden saga yzygider goýulýar. “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagyňyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ Goý, *A* waka “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagy bolsun. Tagtajyklaryň hemmesi gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylyp, çepden saga yzygider goýulsa, bolup biljek ähli elementar wakalaryň sany bu 11 harpdan düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sanyna deňdir, ýagny, n=11! “GARAŞSYZLYK” sözünde iki sany A harpy we iki sany Y harpy bolanlygy sebäpli A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän ähli elementar ýagdaýlarýn sany $m = 2!\cdot 2!$ bolar. Şeýlelikde, “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagynyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11!}$$

bolar. ▹

2-nji mesele. Tekjede dürli 20 kitap bar. Olaryň onusynyň her biriniň banasy 60 manat, dördüsiniň her biriniň bahasy 50 manat, altysynyň her biriniň bahasy 40 manat. Şowuna alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◃ Goý, A- şowuna alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagy bolsun. 20 kitapdan 2 kitaby

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$$

usul boýunça saýlap almak bolar. Ikisiniň bahasy 100 manat bolan 2 kitaby

$$m = C_{10}^1 \cdot C_6^1 + C_4^2 = \frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 5!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 60 + 6 = 66$$

usul boýunça saýlap almak bolar.
Onda

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95} \quad . \quad ▹$$

3-nji mesele. Eger 200 önümden ybarat toplumda zaýa önümleriň otnositel ýygylygy 0,33 bolsa, bu toplumdaky zaýa önümleriň sanyny tapmaly.

◃ Goý A-zaýa önümler bolsun. N=200, $W(A)$=0,33 bolandygy sebäpli, zaýa önümleriň sany $N(A) = N\cdot W(A) = 200\cdot 0{,}33 = 66$ bolar. ▹

4-nji mesele. R radiusly tegelegiň içinden a taraply kwadrat çyzylan. Tegelege sowuna oklanan nokadyň kwadrata düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka tegelege şowuna oklanan nokadyň kwadrata düşmegi bolsun. Kwadratyň meýdany $S_{kw.} = a^2 = 2R^2$, tegelegiň meýdany $S_{teg.} = \pi R^2$. Onda ähtimallygyň geometrik kesgitlemesinden peýdalanyp, gözlenyän ähtimallygy taparys:

$$P(A) = \frac{S_{kw.}}{S_{teg.}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}. \quad \triangleright$$

G ö n ü k m e l e r

1. Oýnalýan kub iki gezek oklanýar. Jemde 10 oçkonyñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

2. Oýnalýan iki gezek oklanýar. Köpeltmek hasyly 5–e deñ bolan oçkolaryñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

3. Oýnalýan iki gezek oklanýar. Düşen oçkolaryñ tapawudynyñ absolýut ululygynyñ 2–ä deñ bolmagynyñ ähtimallygy näçä deñ?

4. Şowuna alnan telefon belgisi bäş sifradan ybarat. Bu sifralaryñ hemmesiniñ
a) dürli bolmagynyñ
b) täk bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

5. Oýnalýan kub 3 gezek oklanýar. Jemi 5-e bölünýän sany emele getirýän oçkolaryñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

6. Gapda 1, 2, 3, 4, 5, 6 sanlar bilen belgilenen birmeñzeş 6 şar bar. Bu şarlar gapdan şowuna ýeke–ýekeden çykarylýar. Şarlaryñ belgileriniñ kemelýän tertipde çykarylmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

7. Gapda her haýsysyna M, M, A, A, A, T, T, E, I, K harplaryñ biri ýazylan 10 tagtajyk bar. Bu tagtajyklar gapdan şowuna ýeke–ýekeden çykarylýarlar we çepden saga yzygider goýulýarlar. “MATEMATIKA” sözüniñ ýazylmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

8-nji mesele. Talyplar toparynda 20 talyp bar. Olaryñ 12–si tapawutly okaýan talyplar. Şowuna 9 talyp alynýar. Alnan talyplaryñ 5–siniñ tapawutly talyp bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

9. Şowuna alnan ýylyñ ýanwar aýynda dört dynç gününiñ bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

10. 10 adamyñ arasynda iki dogan bar. Bu 10 adam skameýkada şowuna oturýarlar. Iki doganyñ ýanaşyk oturmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

11. Abonent telefon belgisini alanda soñky üç sifrasy ýadyna düşenok. Ol sifralaryñ dürlüdiklerini bilip, şowuna üç sifrany alýar. Gerekli telefon belgisiniñ alynmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

12. R radiusly uly tegelegiñ içinden r radiusly kiçi tegelek çyzylan. Uly tegelege şowuna oklanan nokadyñ kiçi tegelege düşmeginiñ ähtimallygyny tapmaly.

13. R radiusly tegelegiñ içinden dogry üçburçluk çyzylan. Tegelege şowuna oklanan nokadyñ bu üçburçluga düşmeginiñ ähtimallygyny tapmaly.

14. Iki adam sagat 12.00 bilen 13.00 aralygynda belleşilen ýerde duşuşmagy şertleşýär. Birinji gelen adam beýlekä α $(\alpha < 60)$ minudyñ dowamynda garaşmaly we eger ikinji adam gelmese gaýtmaly. Eger olaryñ belleşilen wagt aralygynda belleşilen ýere gelmekleri tötän we bagly däl bolsa, ol iki adamyñ duşuşmaklygynyñ ähtimallygyny tapmaly.

Jogaplar

1. $1/12$. **2.** 0,0556. **3.** 0,2222. **4.** a) 0,3024 b) 0,03125. **5.** $43/216$. **6.** $\frac{1}{720}$. **7.** $\frac{1}{151200}$. **8.** 0,33 . **9.** $\frac{4}{7}$. **10.** 0,2. **11.** $\frac{1}{720}$.**12.** $\frac{r^2}{R^2}$ **13.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ **14.** $\frac{60^2-(60-\alpha)^2}{60^2}$.

§ 1.4. Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek teoremalary. Iñ bolmanda bir wakanyñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygy

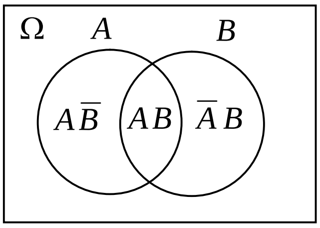
1. Ähtimallyklary goşmak teoremasy

Teorema. Erkin A we B wakalar üçin

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (7)$$

formula adalatlydyr.

◁ A we B wakalaryň jemini sygyşmaýan $A\overline{B}$, AB, $\overline{A}B$ wakalaryň jemi görnüşinde äňladalyñ (3-nji surat)



3-nji surat

$$A+B=A\overline{B}+AB+\overline{A}B$$

Bu deñgüýçliligi göz öñünde tutup,

$$P(A+B)=P(A\overline{B}+AB+\overline{A}B)=$$

$$=P(A\overline{B})+P(AB)+P(\overline{A}B) \qquad (*)$$

deñligi ýazyp bileris. $A=A\overline{B}+AB$ bolandygy sebäpli $P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)$ deñlik adalatlydyr. Bu ýerden taparys

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB) \qquad (**)$$

Edil şuňa meňzeşlikde $B=\overline{A}B+AB$ deñgüýçliligi ýazyp bileris. Onda $P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)$ deñlik adalatlydyr.Bu ýerden

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB) \qquad (***)$$

deñligi alarys.($**$) we ($***$) aňlatmalary ($*$) deňlikde ornuna goýup, (7) formulanyñ adalatlydygyna göz ýetirmek bolar. ▷

(7) formula ähtimallyklary goşmak teoremasy diýilýär. Hususy halda, sygyşmaýan A we B wakalar üçin $P(AB)=0$ bolandygy sebäpli, şeýle wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasy

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (8)$$

görnüşe geler.(7) deñlikden görnüşi yaly,erkin A we B wakalar üçin

$$P(A+B)\le P(A)+P(B)$$

deñsizlik adalatlydyr.

Erkin $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasynyñ umumylaşdyrmasy

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+...+A_n)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\\&+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-...+(-1)^{n+1}P(A_1A_2...A_n)\end{aligned} \qquad (9)$$

görnüşdedir.Bu formulany (7)formuladan we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp subut etmek bolar. Hususy halda, sygyşmaýan $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasy

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \qquad (10)$$

görnüşe geler.

2. Şertli ähtimallyk. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasy.

Goý, $P(A) > 0$ bolsun.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (11)$$

gatnaşyga *B* wakanyň *A* waka ýüze çykan şertdäki şertli ähtimallygy diýilýär. (11) deñligi özgerdip

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

deñligi alarys. $P(B) > 0$ bolan şertde şuňa meňzeşlikde ýazyp bileris

$$P(BA) = P(B) \cdot P(A/B)$$

AB=*BA* bolandygy sebäpli,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (12)$$

formulany alarys. (12) formula ähtimallyklary köpeltmek teoremasy diýilýär.

Erkin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasynyñ umumylaşdyrmasy

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (13)$$

görnüşdedir. Bu formulany (12) formuladan we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp subut etmek bolar.

Eger A wakanyñ B waka ýüze çykan şertdäki şertli ähtimallygy A wakanyñ şertsiz ähtimallygyna deñ bolsa, ýagny

$$P(A/B) = P(A) \qquad (14)$$

deñlik ýerine ýetýän bolsa, onda *A* waka *B* waka bagly däl diýilýär. *A* wakanyñ *B* waka bagly däldiginden *B* wakanyň hem *A* waka bagly däldigi gelip çykýar.

⊲ Hakykatdan hem, goý, *A* waka *B* waka bagly däl bolsun.Onda

(14) deñlik adalatlydyr.Bu deñligi göz öñünde tutup, (12) deñlikden taparys

$$P(B/A)=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)}=P(B) \quad \triangleright$$

Bagly däl A we B wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \qquad (15)$$

görnüşe geler. (15) deňlik iki wakanyň jübütleýin bagly dälliginiň kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär. Ondan başga-da,wakalaryň toplumlaýyn bagly dällik düşünjesi hem bardyr.

Kesgitleme. Eger $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalaryň islendik kombinasiýasy bilen beýlekileriniň islendik kombinasiýasy bagly däl bolsalar, onda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalara toplumlaýyn bagly däl ýa-da bagly däl diýilýär.

Mysal üçin, A_1, A_2, A_3 wakalaryň toplumlaýyn bagly däl bolmaklary üçin A_1 we A_2, A_1 we A_3, A_2 we A_3, A_1 we A_2A_3, A_2 we A_1A_3, A_3 we A_1A_2, wakalaryň bagly däl bolmaklary zerurdyr.

Toplumlaýyn bagly däl $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasynyň umumylaşdyrmasy

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \qquad (16)$$

görnüşe geler.

Bellik. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalaryñ toplumlaýyn bagly däldiklerinden olaryñ jübüt-jübütden bagly däldikleri we $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ wakalaryñ hem toplumlaýyn bagly däldikleri gelip çykýandyr.

3. Iñ bolmanda bir wakanyñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygy

Käbir synag geçirilende bagly däl n wakanyñ iñ bolmanda biriniñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygyny tapmak meselesine garalyñ. Bagly däl $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalaryñ iñ bolmanda biriniñ ýüze çykmagyny A waka diýip belgiläliñ. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalaryñ hiç biriniñ ýüze çykmazlygy $\overline{A}_1\ \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ köpeltmek hasyly görnüşinde ýazylýar. A we $\overline{A}_1\ \overline{A}_2 \dots \overline{A}_n$ wakalar garşylyklydyrlar. Onda $P(A)+P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n) = 1$ deñlik adalatlydyr. Bu ýerden $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n)$ deñligi alarys. Bellikden we toplumlaýyn bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\dots\cdot P(\overline{A}_n)$ deñligi alarys. $q_i = P(\overline{A}_i)$, $i = \overline{1, n}$ belgilemeleri girizip,bu deñligi

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n \qquad (17)$$

görnüşde ýazmak bolar.(17) deñlik synag geçirilende bagly däl $A_1, A_2, \dots, A_n$ wakalaryñ iñ bolmanda biriniñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygyny tapmagyñ formulasydyr. Hususy halda, eger $A_1, A_2, \dots, A_n$ wakalar şol bir p ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsalar,onda (17) formula

$$P(A) = 1 - q^n \qquad (18)$$

görnüşe geler.

1-nji mesele. Kärhananyň öndürýän önümleriniň 98% -i standart önümler. Şünlukda standart önümleriň 85% -i ýokary hilli. Bu kärhanada öndürilen şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ Goý, A-şowuna alnan önümiň standart bolmagy bolsun. B-şowuna alnan standart önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{98}{100}\cdot\frac{85}{100} = 0{,}833 \qquad \triangleright$$

2-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjy üç gezek nyşana atýar. Nyşananyň üç gezek urulmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ Goý, A-atyjynyň birinji gezekde nyşanany urmagy, B-ikinji gezekde nyşanany urmagy, C- üçünji gezekde nyşanany urmagy bolsun. A, B, C, wakalar bagly däl. Onda bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}512 \qquad \triangleright$$

3-nji mesele. Ulgamyň näsaz işleýändigini habar bermek üçin biri-birine bagly bolman işleýän iki duýduryjy goýlan. Ulgamyň näsaz işleýändigini birinji duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygy 0,99-a deň. Ikinji duýduryjy üçin bu ähtimallyk 0,98-e deň. Ulgamyň näsaz işleýändigini diňe bir duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Wakalary girizeliň:

A_1 -birinji duýduryjynyň habar bermegi.

A_2 -ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

B_1 -diňe birinji duýduryjynyň habar bermegi.

B_2 -diňe ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

Sygyşmaýan wakalar üçin goşmak teoremasyndan we bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P((B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) =$$
$$= 0{,}99\cdot 0{,}02 + 0{,}01\cdot 0{,}98 = 0{,}0296. \qquad \triangleright$$

C ö n ü k m e l e r

1. Dukana getirilen sport geýimleriniñ 50%-i ak, 20%-i gyzyl, 20% -i ýaşyl we 10%-i gök. Şowuna alnan sport geýiminiñ ýaşyl ýa-da gök bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

2. Atyjynyñ bir gezek atanda 10 oçko almagynyñ ähtimallygy 0,4-e deñ, 9 oçko almagynyñ ähtimallygy 0,3-e deñ, 8 we ondan az oçko almagynyñ ähtimallygy 0,3-e deñ. Atyjynyñ bir gezek atanda 9-dan az bolmadyk oçko almagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

3. Talyp gerekli formulany üç kitapdan gözleýär. Formulanyñ birinji, ikinji, üçünji kitaplarda bolmagynyñ ähtimallygy degişlilikde 0,6-a, 0,7-ä, 0,8-e deñ. Gözlenilýän formulanyñ

a) dine bir kitapda bolmagynyñ;

b) dine iki kitapda bolmagynyñ;

ç) üç kitapda hem bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

4. Käbir ýerde iýul aýynda ortaça alty gün ygally bolýar. iýul aýynyñ başky iki gününde açyk howanyñ bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

5. Abonent telefon belgisiniñ iñ soñky sifrasyny ýadyndan çykarypdyr. Ol şowuna bir sifrany alýar. Abonentiñ ikiden köp bolmadyk gezek şowsuz synanyşyk etmekliginiñ ähtimallygyny tapmaly.

6. Talyp maksatnamanyñ 25 soragynyñ 20-sini bilýär. Talybyñ synagçy tarapyndan şowuna berlen 3 soragyñ 2-den az däl sanysyna jogap bermeginiñ ähtimallygyny tapmaly.

7. Dukana getirilen joraplaryñ 60%-i birinji fabrikanyñ, 25%-i ikinji fabrikanyñ, 15%-i üçünji fabrikanyñ önümleri. Şowuna alnan jorabyñ birinji ýa-da üçünji fabrikanyñ öndüren önümi bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly

8. Tejribeligini geçmeli 30 talybyñ 15-si şäheriñ 48-nji mekdebine, 8-si 51-nji mekdebine, 7-si bolsa 52-nji mekdebine ugradyldy. Kesgitli iki talybyñ şol bir mekdebe düşmeginiñ ähtimallygyny tapmaly.

9. 1000 lotoreýa biletleriniñ 24-si pul utuşly we 10-sy haryt utuşly. Şowuna alnan 2 biletiñ

a) iñ bolmanda biriniñ utuşly bolmagynyñ;

b) birinji biletiñ pul utuşly, ikinji biletiñ bolsa haryt utuşly bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

10. Bir günüñ dowamynda işleýän abzal bu wagtyñ dowamynda biri–birine bagly bolman hatardan çykyp bilýän 3 bölekden ybarat. Iñ bolmanda bir bölegiñ hatardan çykmagy tutuş abzalyñ hatardan çykmagyna getirýär. Bir günüñ dowamynda birinji bölegiñ döwülmän işlemekliginiñ ähtimallygy 0,9-a deñ. Ikinji we üçünji bölekler üçin bu ähtimallyklar degişlilikde 0,95-e we 0,85-e deñ.

Günüñ dowamynda abzalyñ hatardan çykman işlemekliginiñ ähtimallygyny tapmaly.

Jogaplar

1. 0,3. **2.** 0,7. **3.** a) 0,188 b) 0,452 ç) 0,336. **4.** $20/31$ **5.** 0,3 **6.** $209/345$. **7.** 0,75. **8.** 0,331. **9.** a) 0,064 b) 0,00024. **10.** 0,727.

§ 1.5. Doly ähtimallygyň we Baýesiň formulalary

1.Doly ähtimallygyň formulasy. Eger $H_1, H_2, \ldots, H_n$ wakalaryň toplumy üçin $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$ deñgüýçlilik ýerine ýetýän bolsa,onda olar wakalaryñ doly toparyny emele getirýär diýilýär.

Teorema. Goý,erkin A waka doly topary emele getirýän sygyşmaýan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ wakalaryñ biri we diñe biri bilen bilelikde ýüze çykyp bilýän bolsun. Onda doly ähtimallygyň formulasy diýlip atlandyrylýan

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k) \qquad (19)$$

formula adalatlydyr.

$\lhd$ Sygyşmaýan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ wakalaryñ doly topary emele getirýändikleri sebäpli

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

deñgüýçlilikler adalatlydyrlar. $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ wakalar hem sygyşmaýan wakalardyrlar. Onda ilki sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasynyñ umumylaşdyrmasyny, soňra bagly wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyny ulanyp alarys

$$P(A) = P(AH_1 + \ldots + AH_n) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \ldots + P(H_k) \cdot P(A/H_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k) \quad \triangleright$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ wakalara çaklamalar (gipotezalar) hem diýilýär.
Doly ähtimallygyñ formulasy ulanylanda çaklamalaryñ synaga çenli (apriori) ähtimallyklary hasaplanýar.

Teorema. Doly ähtimallyk baradaky teoremanyň şertlerinde Baýesiñ (Tomas Baýes, 1702-1761, iñlis matematigi)

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k)}, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (20)$$

formulasy adalatlydyr.

$\triangleleft$ Bagly wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp,

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i / A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

deñligi ýazmak bolar. Bu ýerden taparys

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

(19) formulany göz öñünde tutup, bu formulany

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k)}, \qquad i = \overline{1,n}$$

görnüşde ýazmak bolar. $\triangleright$
Baýesiñ formulasy boýunça çaklamalarýň synagdan soňky (aposteriori) ähtimallyklary hasaplanýar.

1-nji mesele. Toplumda birinji zawodyň 28 önümi, ikinji zawodyň 22 önümi bar. Birinji zawodyň önüminiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,95-e deň, ikinji zawodyň önümi üçin bu ähtimallyk 0,9-a deň. Bu toplumdan şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A-toplumdan şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Çaklamalary girizeliň.

B_1-şowuna alnan onümiň birinji zawoda degişli bolmagy;

B_2-şowuna alnan onümiň ikinji zawoda degişli bolmagy;

Bu çaklamalaryň ähtimallyklaryny tapalyň

$$P(B_1) = \frac{28}{50} = 0{,}56, \quad P(B_2) = \frac{22}{50} = 0{,}44.$$

Meseläniň şerti boýunça

$$P(A/B_1) = 0{,}95, \quad P(A/B_2) = 0{,}9$$

Doly ähtimallygyň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) =$$
$$0{,}56\cdot 0{,}95 + 0{,}44\cdot 0{,}9 = 0{,}928.$$ ▷

2-nji mesele. Şol bir agramda çykyş edýän ştangistleriň ýedisi sport ussady, üçüsi bolsa at gazanan sport ussady. At gazanan sport ussadynyň bellenen agramdaky ştangany götermeginiň ähtimallygy 0,8-e deň, sport ussady üçin bolsa bu ähtimallyk 0,6-a deň. Şowuna çagyrylan türgen bellenen agramdaky ştangany göterdi. Onuň sport ussady bolmagy has ähtimalmy ýa-da at gazanan sport ussady?

◁ Goý A-şowuna çagyrylan türgeniň bellenen agramdaky ştangany götermegi bolsun. Çaklamalary girizeliň, B_1-şowuna çagyrylan türgeniň sport ussady bolmagy, B_2-şowuna çagyrylan türgeniň at gazanan sport ussady bolmagy. Doly ähtimallygyň formulasyndan peýdalanyp taparys

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) = 0{,}7\cdot 0{,}6 + 0{,}3\cdot 0{,}8 = 0{,}66.$$

Baýes formulasyndan peýdalanyp gözlenýän ähtimallyklary taparys

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}66} \approx 0{,}64$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A / B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}8}{0{,}66} \approx 0{,}36$$

Görnüşi ýaly, bellenen agramdaky ştangany götereniň sport ussady bolmagy has ähtimaldyr. Bu ýagdaýy sport ussatlarynyň sanynyň at gazanan spor ussatlarynyň sanyndan köpdügi bilen düşündirmek bolar. ▷

Gönükmeler

1. Toplumda 3 zawodyñ önümi bar. Birinji zawodyñ önümleriniñ 0,3%-i zaýa. Ikinji we üçünji zawodlar üçin bu görkezijiler degişlilikde, 0,2%-e we 0,4%-e deñ. Eger toplumda birinji zawodyñ 1000 önümi, ikinji zawodyñ 2000 önümi, üçünji önümiñ 2500 önümi bar bolsa, bu topluma zaýa önümiñ düşmeginiñ ähtimallygyny tapmaly.

2. Işçi bir kysymly önümler işlenip taýýarlanýan 3 abzala hyzmat edýär. Birinji abzalyñ zaýa önüm öndürmeginiñ ähtimallygy 0,02-ä deñ. Ikinji we üçünji abzallar üçin bu ähtimallyklar degişlilikde, 0,03-e we 0,04-e deñ. Işläp taýýarlanylan önümler bir ýaşşige gaýulýarlar. Birinji abzalyñ öndürijiligi ikinji abzalyñkydan üç esse köp, üçünji abzalyñ öndürijiligi bolsa, ikinji abzalyñkyda iki esse az. Şowuna alnan önümiñ zaýa bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

3. Içinde n sany şar bolan gaba 1 ak şar salynýar. Soñra bu gapdan şowuna 1 şar çykarylýar. Eger gapdaky şarlaryñ başky düzüminiñ reñki baradaky aýdylýan ähli mümkin bolan güman etmeler deñmümkinçilikli bolsalar, onda bu gapdan şowuna çykarylan şaryñ ak bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

4. Skladda 3 fabrikanyñ önümi bar. Olaryñ 20%-i birinji fabrikanyñ önümleri, 46%-i ikinji fabrikanyñ önümleri, 34%-i bolsa üçünji fabrikanyñ önümleri. Birinji fabrikanyñ önümleriniñ ortaça 3%-i zaýa, ikinji fabrikanyñ önümleriniñ 2%-i zaýa, üünji fabrikanyñ önümleriniñ 1%-i zaýa. Eger şowuna alnan önüm zaýa bolsa, onuñ birinji fabrika degişli bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

5. 10 gabyñ dokuzysynda 2 ak we 2 gara şar bar, birinde bolsa 5 ak we 1 gara şar bar. Şowuna alnan gapdan şowuna alnan şaryñ akdygy belli bolsa, onuñ 5 ak şarly gapdan alnan bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

6. Iki awçy nyşana bir wagtda atýar. Birinji atyjynyñ nyşanany urmagynyñ ähtimallygy 0,2-ä deñ. Ikinji atyjy üçin bu ähtimallyk 0,6-a deñ. Birinji bilelikde atyşdan soñ bir atyjynyñ urandygy belli boldy. Birinji atyjynyñ nyşanany urandygynyñ ähtimallygy näçä deñ?

7. Tokaýda azaşanyñ biri açyk meýdana çykdy. Ol ýerden gaýdýan 5 ýol tokaýdan çykarýar. Ol ýollar bilen ýörelende 1 sagatda tokaýdan çykmaklygyñ ähtimallygy degişlilikde 0,6-a, 0,3-e, 0,2-ä, 0,1-e, 0,1-e deñ. Eger azaşan tokaýdan çykan bolsa, onuñ birinji ýol bilen gaýdandygynyñ ähtimallygy näçä deñ?

8. Talyplaryñ gurluşyk toparynda birinji ýyl talyplarynyñ 2 topary, ikinji ýyl talyplarynyñ bolsa, 1 topary bar. Birinji ýyl talyplarynyñ her toparynda 5 oglan we 3 gyz bar, ikinji ýyl talyplarynyñ toparynda bolsa, 4 oglan we 4 gyz bar. Şähere ugratmak üçin şowuna alnan topardan şowuna alnan talybyñ oglandygy belli bolsa, onuñ birinji ýyl talyby bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

9. Synaga gelen 20 talybyñ 8-si tapawutly, 6-sy ýagşy, 4-si kanagatlanarly, 2-si kanagatlanarsyz taýýarlanan. Synag sowalnamalarynda 40 sowal bar. Tapawutly taýýarlanan talyp hemme sowallary, ýagşy taýýarlanan 35 sowaly, kanagatlanarly taýýarlanan 25 sowaly, kanagatlanarsyz taýýarlanan 10 sowaly bilýär. Şowuna alnan talyp synagçy tarapyndan hödürlenen 3 sowala jogap berdi. Onuñ

a) ýagşy taýýarlanan

b) kanagatlanarsyz talyp bolmagynyñ ähtimallygyny tapmaly.

10. Iki gabyñ birinjisinde 3 ak we 4 gara şar bar, ikinjisinde bolsa, 2 ak we 3 gara şar bar. Birinji gapdan ikinji gaba şowuna 2 şar geçirilýar. Soñra ikinji gapdan şowuna 1 şar alynýar. Eger bu şaryñ akdygy belli bolsa, birinji gapdan ikinji gaba geçirilen 2 şaryñ reñk boýunça haýsy düzümde bolmagy has ähtimal?

Jogaplar

1. 0,0031. **2.** 0,024. **3.** $\frac{n+2}{2(n+1)}$. **4.** 0,322. **5.** 0,156. **6.** $6/7$. **7.** $6/13$. **8.** $5/7$. **9.** a) 0,307. b) 0,002. **10.** bir ak, bir gara.

§1.5. Bagly däl synaglar yzygyderligi

1. Ähtimallyklaryñ paýlanyşynyñ binomial kanuny.

Ähtimallyklar nazaryýetiniñ amalyýetde ulanylyşynda köplenç şol bir synagyñ birnäçe gezek gaýtalanmagy bilen baglanyşykly meseleler duş gelýär.Şunlukda,bu synaglar tapgyrynda käbir wakanyñ ýüze çykmalarynyñ sanyny anyklamak gerek bolýar. Goý, n synag geçirilýän bolsun. Eger bu synaglaryň her birinde ol ýa-da beýleki netijäniñ ýüze çykmagynyñ ähtimallygy beýleki synaglaryň netijelerine bagly bolmasa, onda şeýle synaglara bagly däl diýilýär.Goý, bagly däl n synagyň her birinde A waka şol bir hemişelik p $(0 \le p \le 1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsun, $q = 1 - p$ ähtimallyk bilen bolsa ýüze çykmaýan bolsun. A wakanyň bu synaglarda k $(0 \le k \le n)$ gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy boýunça $p^k q^{n-k}$ bolar. Bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmalarynyñ sany C_n^k ululyga deñdir. Diýmek, bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad (21)$$

formula boýunça hasaplanar.Garalan bagly däl synaglar yzygiderligine Bernulliniñ (Ýakob Bernulli,27.12.1654-16.08.1705,

şweysar matematigi) shemasy, (21) formula bolsa Bernulliniñ formulasy diýilýär. $P_n(k)$ ähtimallyklar $(p+q)^n$ binomyñ dagadylmasyndaky agzalar bolandyklary sebäpli, ähtimallyklaryñ

(27) formula bilen berlen paýlanyşyna binomial paýlanyş kanuny diýilýär.

2. Polinomial shema. Goý,bagly däl n synag geçirilýän bolsun we bu synaglarda doly topary emele getirýän sygyşmaýan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalaryñ diñe biri ýüze çykýan bolsun. Bu synaglarda A_1 waka hemişelik p_1 ähtimallyk bilen k_1 gezek, A_2 waka hemişelik p_2 ähtimallyk bilen k_2 gezek we ş.m. A_m waka hemişelik p_m ähtimallyk bilen k_m gezek ýüze çykýan bolsun, şunlukda $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Bu wakanyñ ähtimallygyny $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ bilen belgiläliñ.Onda Bernulliniñ shemasyndaky pikir ýöretmeleri ulanyp

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} \qquad (22)$$

formulany alarys.Garalan synaglar yzygiderligine polinomial shema, (22) formula bolsa polinomial formula diýilýär.Hususy halda, m=2 bolanda polinomial formuladan Bernulliniñ formulasy alynýar.

3. Muawr-Laplasyň lokal we integral predel teoremalary. Bernulliniñ shemasynda käbir predel teoremalary getireliñ. Bagly däl synaglaryñ sany uly bolmadyk ýagdaýynda haýsy hem bolsa bir A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygyny Bernulliniñ formulasy boýunça hasaplamak amatlydyr.Emma synaglaryň sany artdygyça bu ähtimallygy tapmak üçin uly we kyn hasaplamalary geçirmeli bolýar. Şol sebäpli, synaglaryñ sany tükeniksiz artanda $P_n(k)$ ähtimallygy hasaplamak üçin gerek bolan asimptotik formulany tapmaklyk zerurlygy ýüze çykýar.A wakanyñ bagly däl n sanagyñ her birinde ýüze çykmagynyñ p ähtimallygy 0,5-e deñ bolan hususy hal üçin şeýle formulany 1730-njy ýylda iňlis matematigi Abraham de Muawr (26.05.1667-27.11.1754) hödürleýär. Muawryň bu formulasyny 1783-nji ýylda fransuz matematigi Pýer Simon Laplas (23.03.1749 - 05.03.1827) $(0;1)$ interwala degişli islendik p ähtimallyk üçin umumylaşdyrýar.

Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasy. Bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik $p(0 < p < 1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň bu synaglarda k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy takmynan $\frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiýanyň $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ nokatdaky bahasyna deňdir, ýagny

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (23)$$

bu ýerde $q = 1 - p$. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ jübüt funksiýadyr we onuñ bahalary tabulirlenendir (1-nji Goşmaça).

Muawr-Laplasyň integral predel teoremasy. Bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik $p(0 < p < 1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň bu synaglarda k_1-den az bolmadyk gezek, k_2-den bolsa köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k_1;k_2)$ ähtimallygy takmynan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

kesgitli integrala deňdir.Amalyýetde meseleleri çözmekde amatly bolar ýaly bu teorema

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (24)$$

görnüşde ýazylýar,bu ýerde

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p,$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ - Laplas funksiýasy. Bu funksiýa täkdir we onuñ bahalary tabulirlenendir (2-nji Goşmaca). x argumentiñ 5-den kiçi bolmadyk bahalary üçin $\Phi(x)$ funksiýanyň bahasy 0,5-e deň diýlip kabul edilýär.

4. Ähtimallyklaryñ paýlanyşynyñ Puasson kanuny.

A wakanyň bagly däl n synagyñ her birinde ýüze çykmagynyñ p ähtimallygy nola ýa-da bire golaý boldugyça Muawr-Laplasyň (23) lokal formulasyny ulanyp, $P_n(k)$ ähtimallygy hasaplamak kynlaşýar. Şol sebäpli, synaglaryň sany artdygyça tükeniksiz kemelýän p ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň $P_n(k)$ ähtimallygyny hasaplamak üçin asimptotik formulany tapmak zerurlygy ýüze çykýar.Bu meseläniñ çözgüdi hökmünde fransuz matematigi Puassonyñ (Puasson Simeon Deni, 21.06.1781 - 25.04.1840) shemasyny we teoremasyny getireliñ.

Elementar wakalaryň tapgyrlarynyň

$$\begin{array}{l} w_{11}, \\ w_{21}, w_{22}, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ w_{n1}, w_{n2}, w_{n3}, \ldots, w_{nn} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{array}$$

yzygiderligine garalyň.Şunlukda, her bir tapgyryň wakalary özara bagly däl we tapgyryň nomerine bagly p_n ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsunlar. n-nji tapgyrda ýüze çykýan wakalaryň sanyny

μ_n bilen belgiläliň. Bagly däl synaglaryñ şeýle yzygiderligine Puasson shemasy diýilýar.

Puassonyň teoremasy. Eger $n \to \infty$ $p_n \to 0$ bolsa, onda $n \to \infty$

$$P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \to 0 \qquad (25)$$

gatnaşyk adalatlydyr, bu ýerde $\lambda_n = n \cdot p_n$.

$\lhd$ Bernulliniň (21) formulasyny özgerdip alarys

$$P(\mu_n = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p_n^k \cdot q_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \qquad (*)$$

Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $A = A(\varepsilon)$ san bar bolup, ol ýeterlik uly saýlanyp alnanda $\lambda_n \ge A$ bolan n nomerler we fiksirlenen k san üçin

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

deňsizlik adalatlydyr. $\lambda_n \ge A$ bolan n nomerler üçin

$$P(\mu_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \le$$

$$\le \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

deňsizligi ýazmak bolar. $1 - x \le e^{-x}$, $x \in [0;1]$, deňsizlikden peýdalanyp, $n \ge 2k$ nomerler üçin

$$P(\mu_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n(n-k)}{n}} \le \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

deñsizligi alarys. (**) we

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \le \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

deñsizliklerden

$$\left| P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (***)$$

deñsizligi alarys. $\lambda_n < A$ bolan *n* nomerlere garap,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n - e^{-\lambda_n} \right] = 0 \quad \text{we} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^k} = 1$$

deňlikleri alarys.Onda $n \ge n_0(\varepsilon)$ nomerler üçin

$$\left| P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \right| < \varepsilon \qquad (26)$$

deñsizlik dogrydyr.Diýmek, (25) gatnaşyk adalatlydyr. ▹
Amaly maksatlar üçin (25) formulany

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (27)$$

görnüşde ýazmak amatlydyr. (27) deñlige Puassonyñ formulasy diýilýär. Ähtimallyklaryñ bu formula bilen berlen paýlanyşyna Puasson paýlanyş kanuny diýilýär.

1-nji mesele. Sehde 5 motor bar. Berlen wagt pursatynda motoryň işleýändiginiň ähtimallygy 0,7-ä deň. Berlen wagtda 3 motoryň işleýändiginiň ähtimallygyny tapmaly.

◃ Meseläniş şertine görä n=5, k=3, p=0,7, q=1-0,7=0,3. Bernulli formulasyndan peýdalanyp, gözlenilýän ähtimallygy taparys

$$P_n(k) = C_5^3 0{,}7^3 0{,}3^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}343\cdot 0{,}09 = 0{,}3087\,. \quad \triangleright$$

2-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjynyň 100 gezek atanda nyşanany 85 gezek urmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ n=100, k=85, p=0,8. Onda q=1-0,8=0,2.

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça 1) taparys $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$

Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P_{100}(85) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi(1{,}25) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1826 = 0{,}04565 \quad \triangleright$$

3-nji mesele. Bagly däl 100 synagyň her birinde *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,75-e deň. Bu 100 synagda *A* wakanyň 70-den az bolmadyk we 80-den köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ $n = 100,\quad k_1 = 70,\quad k_2 = 80,\quad p = 0{,}75.$ Onda $q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \approx \frac{-5}{4{,}33} \approx -1{,}15.,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \approx \frac{5}{4{,}33} \approx 1{,}15.$$

$\Phi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça 2) taparys $\Phi(1{,}15) = 0{,}03749$

$\Phi(x)$ funksiýanyň täkligini göz öňünde tutup we Muawr-Laplasyň integral teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P_{100}(70;80) \approx \Phi(1{,}15) - \Phi(-1{,}15) = 2\Phi(1{,}15) = 2\cdot 0{,}3749 = 0{,}7498 \quad \triangleright$$

3-nji mesele. Kärhana bir günde 1000 önüm öndürýär. Önümiň pes hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Şowuna alnan 3 önümiň pes hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ $n = 1000, k = 3, \ p = 0,002.$ Onda $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2, \quad e^{-2} \approx 0,135$.Puassonyň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P_{1000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx \frac{8}{6} \cdot 0,135 = 0,18. \quad \triangleright$$

§ 1.6. Tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary

1. Diskret tötän ululyk we onuň paýlanyş kanuny.

Ähtimallyklar nazaryýetiniñ esasy düşüñjeleriniñ ýene biri tötän ululykdyr.

Kesgitleme. Ω elementar wakalar giňişligini R san okuna öwürýän hakyky $\xi(w)$ san funksiýasyna tötän ululyk diýilýär.

Başgaça aýdylanda, tötän ululyk bu tötän wakalara baglylykda ol ýa-da beýleki bahalary kabul edýän üýtgeýän ululykdyr.

Tötän ululyklaryñ diskret,üznüksiz we singulýar görnüşleri bardyr.

Ahtimallyklar nazaryýetinde diskret we üznüksiz tötän ululyklar has giñişleýin öwrenilýär.

Eger tötän ululyk tükenikli ýa-da hasaply köplükden bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa diskret tötän ululyk diýilýär.

Belli bir wagt aralygynda duralga gelýän awtobuslaryñ sany, synagda talybyñ bilim derejesine goýulýan bahanyñ san ululygy, gözegçilik edilýän ýylda ekinden alynýan hasylyñ mukdary, ýurdumyza gyşlamaga gelýän guşlaryñ sany, hassahanadaky gany şol bir topara degişli bolan näsaglaryñ sany, nyşanany urmaga sarp ediljek oklaryñ sany we ş.m.diskret tötän ululygyñ mysallarydyrlar.

Tötän ululyklary latyn elipbiýiniň baş harplary bilen, olaryň kabul edýän bahalaryny bolsa setir harplary bilen belgilemegi şertleşeliñ.Diskret tötän ululygyň kabul edýän $x_1, x_2, \dots, x_n$ bahalary bilen bu bahalaryň degişli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ähtimallyklarynyň sanawyna diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Paýlanyş kanunda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ähtimallyklar $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ şerti kanagatlandyrýandyrlar.Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny tablisa, grafik we formula arkaly bermek bolar. Tablisa arkaly ol

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

görnüşde berilýär.

Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny grafik görnüşde bermek üçin tekizlikde gönübürçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Abssissalar okunda diskret tötän ululygyň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalaryny, ordinatalar okunda bolsa bu bahalaryň degişli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ähtimallyklaryny bellemeli. Soňra (x_i, p_i) $i = \overline{1, n}$ nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli. Emele gelen döwük çyzyga paýlanyşyñ köpburçlugy diýilýär.

Diskret tötän ululygyñ paýlanyş kanunynyñ formula arkaly berlişine mysal hökmünde Bernulliniñ (21) we Puassonyñ (27) formulalaryny getirmek bolar.

2. Paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary.

Diskret tötän ululyk kabul edýän bahalary we olaryň degişli ähtimallyklary bilen berilýär. Emma üznüksiz tötän ululyklar üçün şeýle berlişi amala aşyryp bolmaýar. Şol sebäpli, öz tebigaty boýunça köpdürli tötän ululyklaryň ähtimallyklaryny şol bir usul bilen bermeklik üçin tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy düşünjesi girizilýär.

$$F(x) = P(\xi < x) \tag{28}$$

funksiýa ξ tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy diýilýär, bu ýerde $x\ (-\infty < x < \infty)$ üýtgeýän hakyky ululyk.Geometrik nukdaý nazardan ξ tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy ol tötän ululygyň $(-\infty; x)$ aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygydyr.

Paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) Paýlanyş funksiýanyň bahalar ýaýlasy [0:1] kesimdir, ýagny,

$$0 \le F(x) \le 1$$

deňsizlikler adalatlydyrlar.

2) Paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny, paýlanyş funksiýasynyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli we $x_1 < x_2$ bolan islendik x_1 we x_2 argumentler üçin $F(x_1) \le F(x_2)$ deňsizlik adalatlydyr.

3) Paýlanyş funksiýasy çepden üznüksizdir, ýagny,

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x_1) = F(x_0)$$

deňlik ýerine ýetýandir.

4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ we $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ predel gatnaşyklar adalatlydyrlar.

Bu häsiýetleri subut edeliň.

1) Paýlanyş funksiýasynyň bu häsiýeti onuň kesgitlemesinden gelip çykýar, sebäbi $F(x)$ paýlanyş funksiýasy $(\xi < x)$ wakanyň ähtimallygydyr,ähtimallyk bolsa, [0;1] kesimden bahalary kabul edýändir.

2) Goý, $x_1$we x_2 argumentler üçin $x_1 < x_2$ bolsun. $(\xi < x_2)$ wakany sygyşmaýan $(\xi < x_1)$ we $(x_1 \le \xi < x_2)$ wakalaryň jemi görnüşinde aňladalyň

$$(\xi < x_2) = (\xi < x_1) + (x_1 \le \xi < x_2)$$

Sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasynyndan peýdalanyp

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2)$$

deñligi alarys.(28) belgilemäni göz öňünde tutup, bu deñligi

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le \xi < x_2) \qquad (29)$$

görnüşde ýazmak bolar.Bu deñligiñ sag tarapy ähtimallyk bolandygy sebäpli $F(x_1) \le F(x_2)$ deñsizlik adalatlydyr.

3) Goý, $\{x_n\}$ artýan yzygiderlik x_0 nokada ýygnanýan bolsun. $A_n = \{\xi < x_n\}$ we $A = \{\xi < x_0\}$ wakalary girizeliň. $\{A_n\}$ wakalaryň yzygiderligi artýandyr we $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ deñgüýçlilik adalatlydyr.Onda üznüksizlik aksiomasyna görä $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ ýa-da $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$ deňlik adalatlydyr.*F(x)* paýlanyş funksiýasynyň monotonlygy sebäpli $\lim_{x\uparrow x_0} F(x_n) = F(x_0)$ deňlik adalatlydyr.

4) Goý, $\{x_n\}$ monoton kemelýän, $\{y_n\}$ bolsa, monoton artýan san yzygiderlikleri bolsunlar. $A_n = \{\xi < x_n\}$ we $B_n = \{\xi < y_n\}$ wakalary girizeliň. Goý,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ we $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ bolsun.Üznüksizlik aksiomasyndan peýdalanyp $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ we $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$ ýa-da $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$ we $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1$ deňlikleri ýazmak bolar. Paýlanyş funksiýasynyň monotonlygy sebäpli

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \quad \text{we} \quad \lim_{y\to\infty} F(y) = F(+\infty) = 1$$

deňlikler adalatlydyrlar.

Eger

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \qquad (30)$$

aňlatma adalatly bolsa, onda *F(x)* paýlanyş funksiýasyna absolýut üznüksiz diýilýär. Şeýle paýlanyş fumksiýaly tötän ululyga absolýut üznüksiz ýa-da üznüksiz diýilýär. (30) aňlatmadaky integral aşagyndaky funksiýa tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy diýilýär. Dykyzlyk funksiýasy paýlanyş funksiýasynyň birinji önümidir

$$f(x) = F'(x) \qquad (31)$$

Dykyzlyk funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) $f(x) \geq 0.$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Dykyzlyk funksiýasynyň 1-nji häsiýeti onuň kemelmeýän funksiýanyň birinji önümidiginden gelip çykýar. Dykyzlyk funksiýasynyň 2-nji häsiýetini (30) aňlatmadan we paýlanyş funksiýasynyň häsiýetinden peýdalanyp almak bolar

$$1 = F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Paýlanyş funksiýasyna başgaça integral funksiýa hem diýilýär. Dykyzlyk funksiýasyna differensial funksiýa ýa-da ähtimallygyň paýlanyşynyň dykyzlygy hem diýilýär.

Üznüksiz tötän ululygyň üzňe bir bahany almagynyň ähtimallygynyň nula deňdigi sebäpli şeýle ξ tötän ululyk üçin

$$P(a \le \xi \le b) = P(a \le \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a < \xi < b) \quad (32)$$

deňlikleri ýazmak bolar.

Üznüksiz ξ tötän ululygyň $(a;b)$ aralykdan bahalary kabul etmeginiň $P(a < \xi < b)$ ähtimallygy

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (33)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde *f (x)* funksiýa ξ tötän ululygyň differensial funksiýasy. Hakykatdan hem, (29) deňlikde x_1-e derek *a*, x_2-ä derek *b* ululyklary goýup we Nýuton-Leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp, alarys

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(32) deňlikleri göz öňünde tutup, (33) formulanyň adalatlydygyna göz ýetirmek bolar.

Indi käbir wajyp paýlanyş funksiýalary getireliň.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & 0<x\le n, \\ 1, & x>n \end{cases}$$

paýlanyş funksiýaly tötän ululyga binomial (Bernulli) kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, & x>0,\ 0<\lambda<\infty. \end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga λ parametrli Puasson kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy, \quad -\infty<a<\infty, \quad 0<\sigma<\infty$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga a we σ^2 parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan diýilýär. Hususy halda, $a=0$, $\sigma^2=1$ bolanda standart normal kanunyň

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

paýlanyş funksiýasyny alarys.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & 0<x\le b, \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga $[a;b]$ kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{-\nu x}, & x>0,\ \nu>0. \end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga ν parametrli görkezijili kanun boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+y^2}\, dy$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga Koşi kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

§ 1.6. Tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri

1. Matematiki garaşma.

Belli bolşy ýaly, tötän ululygyň berilmegi üçin onuň paýlanyş funksiýasynyň berilmegi ýeterlikdir. Emma köp meselelerde tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaklyk kyn bolýar ýa-da ony tapmaklyga zerurlyk hem bolmaýar. Mysal üçin, birinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sany ikinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sanyndan uly bolsa, onda bu birinji atyjynyň ikinji atyja görä mergenlik derejesiniň ýokarydygy barada netije çykarmaklyk üçin ýeterliklidir. Başgaça aýdylanda, tötän ululyklaryň umumy mukdar häsiýetlendirijileri bolan hemişelik ululyklary bilmek ýeterlik bolýar. Bu hemişelik ululyklara tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri diýilýär. Şeýle san häsiýetlendirijileriň biri hem matematiki garaşmadyr.

Kesgitleme. Diskret ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip, ol tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \qquad (34)$$

Bu ýerde x_k, $k = \overline{1,n}$, ξ tötän ululygyň kabul edýan bahalary, $p_k = p(\xi = x_k)$, $k = \overline{1,n}$, ol bahalaryň degişli ähtimallyklary.

Kesgitleme. Üznüksiz ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad (35)$$

integrala aýdylýar, bu ýerde $f(x)$ funksiýa ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy.

Matematiki garaşmanyň ähtimallyk manysyny anyklalyň. Goý, N synag geçirilýän bolsun we bu synaglarda ξ tötän ululyk x_1 bahany N_1 gezek, x_2 bahany N_2 gezek we şuňa meňzeşler, x_k bahany N_k gezek kabul edýän bolsun. ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň orta arifmetiki bahasyny tapalyň

$$\bar{x}_a = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \ldots N_k x_k}{N} = x_1 \cdot \frac{N_1}{N} + x_2 \cdot \frac{N_2}{N} + \ldots + x_k \cdot \frac{N_k}{N},$$

bu ýerde $\frac{N_i}{N}$, $i = \overline{1,k}$, gatnaşyk x_i bahanyň W_i otnositel ýygylygy. Şol sebäpli, bu deňligi

$$\bar{x}_a = x_1 \cdot W_1 + x_2 \cdot W_2 + \ldots + x_k \cdot W_k$$

görnüşde ýazmak bolar. Synaglaryň sany ýeterlik uly bolanda wakanyň otnositel ýygylygy şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyna takmynan deňdir . Şol sebäpli soňky deňlikde W_i, $i = \overline{1,k}$, otnositel ýygylyklary degişli p_i ähtimallyklar bilen çalşyryp alarys

$$\bar{x}_a \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k = M\xi .$$

Diýmek,

$$M\xi \approx \bar{x}_a$$

ýagny, tötän ululygyň matematiki garaşmasy ol tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň takmynan orta arifmetiki bahasyna deňdir. Bu matematiki garaşmanyň ähtimallyk manysydyr.

Indi matematiki garaşmanyň häsiýetlerine garalyň.

Teorema. Hemişelik ululygyň matematiki garaşmasy ol ululygyň özüne deňdir

$$MC = C ,$$

bu ýerde C hemişelik ululyk.

$\lhd$ (34) formuladan peýdalanyp taparys

$$MC = \sum_{k=1}^{n} C \cdot p_k = C \sum_{k=1}^{n} p_k = C \cdot 1 = C. \quad \rhd$$

Teorema. Hemişelik ululygy matematiki garaşma belgisiniň daşyna çykarmak bolar

$$M(C\xi) = C \cdot M\xi$$

◁ Ýazyp bileris

$$M(C\xi) = \sum_{k=1}^{n} C\, x_k \cdot p_k = C \sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k = C \cdot M\xi. \quad ▷$$

Teorema. Iki tötän ululygyň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir

$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$ (36)

◁ Goý, ξ_1 tötän ululyk $x_1, x_2, \dots, x_n$ bahalary degişlilikde $p_1, p_2, \dots, p_n$ atimallyklar bilen, ξ_2 tötän ululyk bolsa $y_1, y_2, \dots, y_m$ bahalary degişlilikde $q_1, q_2, \dots, q_m$ atimallyklar bilen kabul edýän bolsunlar. ξ_1 tötän ululygyň x_n bahany, ξ_2 tötän ululygyň bolsa y_m bahany kabul etmeginiň ähtimallygyny P_{nm} bilen belgiläliň. Onda

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \right)$$

Doly ähtimallygyň formulasy boýunça

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j$$

Onda

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M\xi_1 + M\xi_2 . \quad ▷$$

Netije. Tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir.

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n$$

Bu deňligiň adalatlydygyna (36) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp göz ýetirmek bolar.

Teorema. Bagly däl iki tötän ululygyň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$M(\xi_1\xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \qquad (37)$$

◁ Goý, ξ tötän ululyk $x_1, x_2, \dots, x_n$ bahalary degişlilikde $p_1, p_2, \dots, p_n$ atimallyklar bilen, ξ_2 tötän ululyk bolsa $y_1, y_2, \dots, y_m$ bahalary degişlilikde $q_1, q_2, \dots, q_m$ atimallyklar bilen kabul edýän bolsunlar. ξ_1 tötän ululygyň x_n bahany, ξ_2 tötän ululygyň bolsa y_m bahany kabul etmeginiň ähtimallygy bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasy boýunça $p_n \cdot q_m$ bolar. Onda

$$M(\xi_1\xi_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j q_j\right) = M\xi_1 M\xi_2 \quad \triangleright$$

Netije. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdot \ldots \cdot M\xi_n \qquad (38)$$

Bu deňligiň adalatlydygyna (37) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp göz ýetirmek bolar.

Matematiki garaşmanyň diskret tötän ululyklar üçin subut edilen bu häsiýetleri üznüksiz tötän ululyklar üçin hem adalatlydyrlar.

2. Dispersiýa

Dürli tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bolup biler. Mysal üçin

ξ	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

η	-10	0	10
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

paýlanyş kanunlar bilen berlen diskret ξ we η tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bardyr.

$$M\xi = -1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0,\quad M\eta = -10\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 10\cdot\frac{1}{3} = 0$$

Şeýle ýagdaýda tötän ululyklary biri-birinden tapawutlandyrmak maksady bilen dispersiýa diýlip atlandyrylýan ýene bir häsiýetlendiriji girizilýär.

Kesgitleme. ξ tötän ululygyň dispersiýasy diýlip, ol tötän ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň (tapawudynyň) kwadratynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar.

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 \qquad (39)$$

Diskret tötän ululyk üçin dispersiýa

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - M\xi\right)^2 p_k \qquad (40)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde $x_k, k = \overline{1,n}$, ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalary, $p_k = p\left(\xi = x_k\right)$, $k = \overline{1,n}$, bolsa bu bahalaryň degişli ähtimallyklary.

Üznüksiz tötän ululyk üçin dispersiýa

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - M\xi\right)^2 \cdot f(x)dx \qquad (41)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde *f (x)* funksiýa ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasydyr.

Bellik. Tükenikli matematiki garaşmasy bolan islendik ξ tötän ululyk üçin

$$M(\xi - M\xi) = M\left(\xi + (-1)M\xi\right) + M\xi + M\left[(-1)M\xi\right] =$$
$$= M\xi + (-1)M\xi = M\xi - M\xi = 0$$

bolandygy sebäpli, dispersiýa hökmünde ξ tötän ululygyň $(\xi - M\xi)$ gyşarmasynyň matematiki garaşmasyny almaklygyň manysy ýokdur

Dispersiýa hökmünde $M\left|\xi - M\xi\right|$ ululygy kabul etmek bolardy, emma bu absolýut ululygyň häsiýetleri bilen baglanyşykly kynçylyklara getirerdi.

Matematiki garaşmanyň häsiýetlerinden peýdalanyp, (39) formulany oňa deňgüýçli we amaly maksatlar üçin amatly bolan

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \qquad (42)$$

görnüşde ýazmak bolar.Hakykatdan hem,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

Dispersiýany diskret tötän ululyklar üçin

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k \right)^2 , \qquad (43)$$

formuladan, üznüksiz tötän ululyklar üçin bolsa

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx \right)^2 \qquad (44)$$

formuladan peýdalanyp hem hasaplamak bolar.

Dispersiýa tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň ol tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň töweregindäki ýaýrawyny häsiýetlendirýär. Bu onuň ähtimallyk manysydyr.

Indi dispersiýanyň hasiýetlerine garalyň.

Teorema. Hemişelik ululygyň dispersiýasy nula deňdir

$$DC = 0,$$

bu ýerde C-hemişelik ululyk.

◁ Dispersiýanyň kesgitlemesinden peýdalanyp taparys

$$DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = M(0)^2 = 0 \quad \triangleright$$

Teorema. Hemişelik ululygy dispersiýa belgisiniň daşyna kwadrata göterip çykarmak bolar

$$D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$$

◁ Ýazyp bileris

$$D(C\xi) = M(C\xi - M(C\xi))^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 =$$

$$= C^2 \cdot M(\xi - M\xi)^2 = C^2 \cdot D\xi. \qquad \triangleright$$

Teorema. Bagly däl iki tötän ululygyň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir

$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 \qquad (45)$$

◁ Eger ξ_1 we ξ_2 tötän ululyklar bagly däl bolsalar, onda $(\xi_1 - M\xi_1)$ we $(\xi_2 - M\xi_2)$ tötän ululyklar hem bagly däldirler. Onda

$$D(\xi_1+\xi_2) = M[(\xi_1+\xi_2) - M(\xi_1+\xi_2)]^2 =$$
$$= M[(\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2)]^2 =$$
$$= M(\xi_1+\xi_2)^2 + 2M(\xi_1 - M\xi_1)\cdot M(\xi_2 - M\xi_2) + M(\xi_2 - M\xi_2)^2 =$$
$$D\xi_1 + D\xi_2 . \quad \triangleright$$

Netije. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir

$$D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$$

Bu deňligi (45) deňlikdeň we matematiki induksiýa usulyndan peydalanyp subut etmek bolar.

Netije. Bagly däl iki tötän ululygyň tapawudynyň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir.

$$D(\xi_1 - \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$$

Hakykatdan hem,

$$D(\xi_1 - \xi_2) = D(\xi_1 + (-1)\xi_2) = D\xi_1 + D[(-1)\xi_2] =$$
$$= D\xi_1 + (-1)^2 \cdot D\xi_2 = D\xi_1 + D\xi_2$$

Netije. Tötän ululyk bilen hemişelik ululygyň jeminiň dispersiýasy tötän ululygyň dispersiýasyna deňdir

$$D(\xi + C) = D\xi$$

Hakykatdan hem, ξ tötän ululyk bilen C hemişelik ululyga biri-biri bilen bagly däl ululyklar hökmünde garap we $DC = 0$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys

$$D(\xi + C) = D\xi + DC = D\xi .$$

3. Orta kwadratik gyşarma.

Tötän ululygyň dispersiýasynyň kesgitlemesinden görnüşi ýaly, tötän ululygyň ölçegi bilen onuň dispersiýasynyň ölçegi gabat gelmeýär. Mysal üçin, tötän ululyk metrde ölçenýan bolsa, onuň dispersiýasynyň ölçegi metr kwadrat bolardy. Bu “kemçiligi” aradan aýyrmak maksady bilen orta kwadratik gyşarma diýlip atlandyrylýan ýene-de bir häsiýetlendirijini girizýärler.

Kesgitleme. Dispersiýadan alnan arifmetiki kwadrat köke orta kwadratik gyşarma diýilýär.

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \qquad (46)$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň orta kwadratik gyşarmasy bu tötän ululyklaryň orta kwadratik gyşarmalarynyň jeminden alnan kwadrat köke deňdir

$$\sigma_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \dots + \sigma_{\xi_n}^2}$$

$\lhd$ Goý, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ toplumlaýyn bagly däl tötän ululyklar bolsunlar.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

belgilemäni girizeliň. Dispersiýanyň häsiýetinden peýdalanalyň

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n$$

Bu ýerden

$$\sqrt{D\xi} = \sqrt{D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n}$$

(46) deňligi göz öňünde tutup, alarys

$$\sigma_\xi = \sigma_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \dots + \sigma_{\xi_n}^2} \qquad \rhd$$

Goý, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar bolsunlar. Onda olaryň birmeňzeş san häsiýetlendirijileri bardyr. Bu tötän ululyklaryň $\overline{\xi} = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$ orta arifmetiki bahasy bilen baglanyşykly käbir tassyklamalary getireliň.

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň matematiki garaşmasy bu tötän ululyklarýn matematiki garaşmalaryna deňdir.

$$M\,\overline{\xi} = a,$$

bu ýerde, $a = M\xi_i$, $i = \overline{1,n}$.

$\lhd$ Matematiki garaşmanyň häsiýetinden peýdalanyp taparys

$$M\,\overline{\xi} = M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a \rhd$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň dispersiýasy bu tötän ululyklarýn her biriniň dispersiýasyndan *n* esse kiçidir.

$$D\overline{\xi} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad (47)$$

bu ýerde $\sigma^2 = D\xi_i$, $i = \overline{1,n}$

$\lhd$ Dispersiýanyň häsiýetinden peýdalanyp taparys

$$D\overline{\xi} = D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}\right) = \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + \cdots D\xi_n}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \rhd$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň orta kwadratik gyşarmasy bu tötän ululyklaryň her biriniň orta kwadratik gyşarmasyndan $\sqrt{n}$ esse kiçidir.

$$\sigma_{\overline{\xi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (48)$$

bu ýerde $\sigma = \sqrt{D\xi_i}$, $i = \overline{1,n}$.

$\lhd$ Orta kwadratik gyşarmanyň kesgitlemesinden peýdalanyp taparys.

$$\sigma_{\overline{\xi}} = \sqrt{D\,\overline{\xi}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad \rhd$$

Netije. (47) we (48) deňliklerden görnüşi ýaly, toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahasynyň ýaýrawy bu tötän ululyklaryň her biriniň ýaýrawyndan ýeterlik kiçidir.

4. Momentler

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k \qquad (49)$$

ululyga ξ tötän ululygyň *k*-njy tertipli momenti diýilýär. Hususy halda, $a=o$ bolanda, bu ýerden alarys

$$\nu_k(0) = \nu_k = M\xi^k \qquad (50)$$

Bu ululyga ξ tötän ululygyň k-njy tertipli başlangyç momenti diýilýär. Eger $a = M\xi$ bolsa, onda *k*-njy tertipli moment

$$\nu_k(M\xi) = \mu_k = M(\xi - M\xi)^k \qquad (51)$$

görnüşe geler. Bu ululyga ξ tötän ululygyň *k*-njy tertipli merkezi momenti diýilýär.

(50) aňlatmadan görnüşi ýaly, birinji tertipli (*k*=1 bolanda) başlangýç moment matematiki garaşmadyr. (51) aňlatmadan görnüşi ýaly, ikinji tertipli (*k*=2 bolanda) merkezi moment dispersiýadyr.

Merkezi momentler bilen başlangyç momentleriň arasynda ýönekeý baglanyşyklar bar. Bu baglanyşyklary matematiki statistikada giňden ulanylýan başky dört moment üçin ýazalyň

$$\mu_0 = 1,$$
$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4.$$

(49), (50), (51) aňlatmalarda ýaýlary absolýut ululygynyň belgisi bilen çalşyryp, degişli absolýut momentleri alarys.

1-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

$\lhd$ (34) formuladan peýdalanyp, matematiki garaşmany tapalyň

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}9.$$

Indi $M\xi^2$ başlangyç ikinji momenti tapalyň

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k = 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}2 = 4{,}1.$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany tapalyň

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 4{,}1 - (1{,}9)^2 = 0{,}49.$$

Orta kwadratik gyşarmany tapalyň.

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7. \qquad \rhd$$

2-nji mesele. Üznüksiz ξ tötän ululyk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

$\lhd$ Ilki ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasyny tapalyň

$$f(x) = F^{/}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Onda (35) formula boýunça matematiki garaşmany tapalyň

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x \cdot xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$M\xi^2$ ululygy tapalyň

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 \cdot xdx = \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Indi orta kwadratik gyşarmany tapalyñ

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,24 \qquad \rhd$$

3-nji mesele. Binomal kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\lhd$ Binomal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk diskret kysyma degişlidir we onuň paýlanyş kanuny

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$\dots$	$P_n(k)$	$\dots$	$P_n(n)$

görnüsdedir, bu ýerde

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}, \quad p + q = 1.$$

(34) formuladan peýdalanyp taparys

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{(n-1)! \cdot n}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}$$

n-k = (n-1) - (k-1) we Nýutonyň binomy boýunça

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k} = (p+q)^{n-1} = 1$$

bolýandygyny göz öňünde tutup alarys

$$M\xi = n \cdot p \qquad (52)$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

k^2 ululygy $k^2 = k(k-1) + k$ görnüşde aňladalyň. Onda

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} [k \cdot (k-1) + k] \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{(k-2)! \cdot (k-1) \cdot k \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Ikinji goşulujy (52) deňlik boýunça $n \cdot p$ ululyga deň. Onda

$$M\xi^2 = n \cdot (n-1)) \cdot p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-k} + np =$$

$$= n \cdot (n-1) p^2 + np.$$

(42) formuladan peýdalanyp dispersiýany taparys

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = n \cdot (n-1) p^2 + np - (np)^2 =$$

$$= -np^2 + np = np(1-p) = npq,$$

$$D\xi = n\,p\,q \qquad (53) \qquad \triangleright$$

4-nji mesele. Puasson kanuny boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ Puasson kanuny boýunça paýlanan tötän ululyk diskret kysyma degişlidir we onuň paýlanyş kanuny

ξ	*0*	*1*	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$\ldots$	$P_n(k)$	$\ldots$

görnüşdedir, bu ýerde $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $\quad k = 0,1,2,\ldots, \quad 0 < \lambda < \infty$

(34) formuladan peýdalanyp taparys

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)! \cdot k} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}. = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda,$$

ýagny

$$M\xi = \lambda. \qquad (54)$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k_2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1)+k] \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k} \cdot e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k} \cdot e^{-\lambda}$$

Ikinji goşulyjy (54) deňlige görä λ parametre deň. Onda

$$M\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{(k-2)!(k-1) \cdot k} \cdot e^{-\lambda} + \lambda =$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

(42) formuladan peýdalanyp dispersiýany taparys

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

ýagny

$$D\xi = \lambda\ . \ \triangleright \qquad (55)$$

5-nji mesele. a we σ^2 parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

görnüşdedir (35) formuladan peýdalanyp ýazyp bileris

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizeliň. Bu ýerden taparys

$x = a + \sigma y, \quad d\,x = \sigma \cdot dy$ Onda

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma\cdot y)\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \sqrt{2\pi} \text{ we } \int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 0$$

bolandygy sebäpli

$$M\xi = a \qquad (56)$$

bolar.

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň.

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys $x = a + \sigma y, \quad dx = \sigma \cdot dy$.

$$M\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma\cdot y)^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy +$$

$$+\frac{2a\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy. = a^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Ikinji goşulyjydaky integraly bölekler boýunça integrirleme usulyndan peýdalanyp hasaplalyň

$$\int_{-\infty}^{\infty}y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}d(\frac{y^2}{2}) =$$

$$(y = u, \quad dy = du, \quad e^{-\frac{y^2}{2}}d(\frac{y^2}{2}) = dv, \quad v = -e^{-\frac{y^2}{2}})$$

$$= -y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \ .$$

Onda

$$M\xi^2 = a^2 + \sigma^2$$

(42) formuladan peýdalanyp dispersiýany taparys.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = a^2 + \sigma^2 - a^2 = \sigma^2 ,$$

ýagny

$$D\xi = \sigma^2 \qquad (57) \qquad \triangleright$$

6-njy mesele. [$a;b$] kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ [$a;b$] kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

görnüşdedir. (35) formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

ýagny,

$$M\xi = \frac{a+b}{2} \qquad (58)$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň.

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

(42) formuladan peýdalanyp dispersiýany taparys:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12},$$

ýagny, $$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (59)$$ ▷

7-nji mesele. Görkezijili kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

◁ Görkezijili kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \nu \cdot e^{-\nu x}, & x > 0, \quad \nu > 0. \end{cases}$$

görnüşdedir. (35) formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \nu \int_0^{\infty} x e^{-\nu\cdot x}\, dx =$$

$$\left(x = u, \quad dx = du, \quad e^{-\nu\cdot x} dx = d\nu, \quad \nu = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu\cdot x} \right)$$

$$= \nu \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{\nu} \cdot e^{-\nu\cdot x} \right)\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\nu\cdot x} dx = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu\cdot x}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\nu},$$

ýagny,

$$M\xi = \frac{1}{\nu} \qquad (60)$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \nu \int_0^{\infty} x^2 e^{-\nu\cdot x} dx =$$

$$\left(x^2 = u, \quad 2xdx = du, \quad e^{-\nu\cdot x} dx = d\nu, \quad \nu = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu\cdot x} \right)$$

$$=\nu\cdot x^2\cdot\left(-\frac{1}{\nu}\cdot e^{-\nu\cdot x}\right)\Bigg|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} xe^{-\nu\cdot x}dx=2x(-\frac{1}{\nu}e^{-\nu\cdot x})\Bigg|_0^{\infty}+\frac{2}{\nu}\int_0^{\infty} e^{-\nu\cdot x}dx=\frac{2}{\nu^2}$$

(42) formuladan peýdalanyp dispersiýany taparys

$$D\xi = M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{2}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{\nu^2},$$

ýagny,
$$D\xi=\frac{1}{\nu^2} \qquad (61) \qquad \triangleright$$

§ 1.6. Köpölçegli tötän ululyklar

Biz şu wagta çenli kabul edýän bahalary bir san bilen kesgitlenýän tötän ululyklara, ýagny, birölçegli tötän ululyklara garadyk. Emma kabul edýän bahalary birden köp sanlar bilen kesgitlenýän tötän ululyklar hem bardyr. Şeýle tötän ululyklara köpölçegli diýilýär. Mysal üçin, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ tötän ululyga *n*-ölçegli tötän ululyk ýa-da *n*-ölçegli wektor diýilýär. Şeýle tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\ldots,\xi_n<x_n)$$

görnüşde kesgitlenýär we *n*-ölçegli paýlanyş funksiýasy ýa-da n tötän ululyklar sistemasynyň paýlanyş funksiýasy diýlip atlandyrylýar. Hususy halda, ikiölçegli tötän ululyga garalyň.

Kesgitleme. Eger bir tötän ululygyň paýlanyş kanuny beýleki tötän ululygyň kabul edýän bahalaryna bagly bolmasa, onda şeýle tötän ululyklara bagly däl diýilýär.

Teorema. ξ we η tötän ululyklaryň bagly däl bolmaklygy üçin $(\xi;\eta)$ sistemanyň paýlanyş funksiýasynyň düzüjileriň paýlanyş funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deň bolmagy, ýagny,

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y) \qquad (62)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterliklidir, bu ýerde $F(x,y)$ funksiýa $(\xi;\eta)$ sistemanyň paýlanyş funksiýasy, $F_1(x)$ we $F_2(y)$

funksiýalar bolsa, degişlilikde ξ we η düzüjileriň paýlanyş funksiýalary.

$\lhd$ **Zerurlygy**. Goý, ξ we η bagly däl tötän ululyklar bolsunlar. Onda $\xi < x$ we $\eta < y$ wakalar hem bagly däldirler. Bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasy boýunça

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x) \cdot P(\eta < y)$$

ýa-da

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

bolar.

Ýeterligi. Goý, (62) deňlik ýerine ýetýan bolsun. Onda

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x) \cdot P(\eta < y)$$

bolar. Bu bolsa, $\xi < x$ we $\eta < y$ wakalar bagly däl diýildigidir. Onda ξ we η tötän ululyklar hem bagly däldirler. $\rhd$

Netije. ξ we η tötän ululyklaryň bagly däl bolmaklygy üçin $(\xi;\eta)$ sistemanyñ dykyzlyk funksiýasynyň düzüjileriň dykyzlyk funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deň bolmagy, ýagny

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (63)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Bellik. (62) we (63) deňlikler zerur we ýeterlik tassyklamalar bolandyklary sebäpli, olary tötän ululyklaryň bagly däldikleriniň kesgitlemeleri hökmünde kabul etmek bolar.

1-nji mesele. Oýnalýan kubik iki gezek oklanýar. Üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmalarynyň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

$\lhd$ Goý, *A*- uçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmagy bolsun. Oýnalýan kubik iki gezek oklananda üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmaklarynyň sany diskret tötän ululykdyr. Ony ξ bilen belgiläliň. ξ tötän ululyk $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ bahalary kabul edýär. Oýnalýan kubik bir gezek oklananda üçe bölünýän oçkonyň (*A*-wakanyň) ýüze çykmagynyň ähtimallygy nusgawy kesgitleme boýunça

$$P = P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

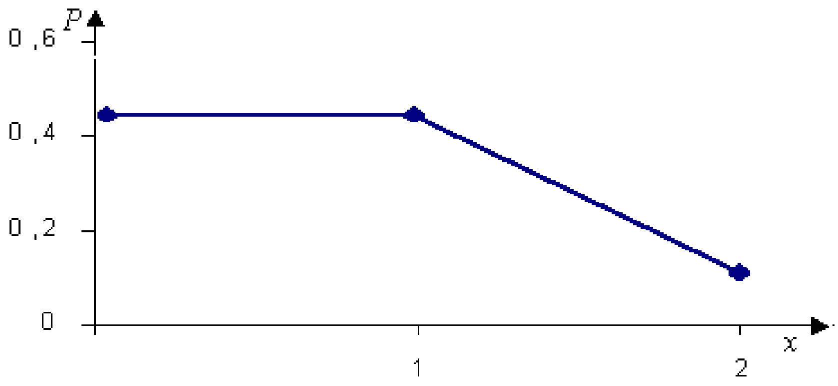
bolar. Onda $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.Indi Bernulli formulasyndan peýdalanyp, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ bahalaryň degişli ähtimallyklaryny tapalyň.

$$\left.\begin{array}{r} P_1 = P(\xi = x_1 = 0) = P_2(0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2!}{0!\cdot 2!} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \\ P_1 = P(\xi = x_2 = 1) = P_2(1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \\ P_1 = P(\xi = x_3 = 2) = P_2(2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{2!}{2!\cdot 0!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \end{array}\right\}$$

Bu deňlikler diskret ξ tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň formula arkaly (analitiki) berlişidir. Bu paýlanyş kanuny tablisa görnüşde ýazalyň

ξ	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

ξ tötän ululygyň bu paýlanyş kanunyny grafik görnüşinde hem bermek bolar.



▷

2-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	-2	-1	0	1
p	0,1	0,2	0,5	0,2

paýlanyş kanun bilen berlen bolsun. Bu tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

$\lhd$ Goý, $x \le 2$ bolsun. Onda $(\xi < -2)$ mümkin däl wakadyr. Şonuň üçin $P(\xi < -2) = 0$ bolar. Diýmek, $x \le 2$ üçin

$$F(x) = P(\xi < x) = 0 .$$

Goý, $-2 < x \le -1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) = 0{,}1$$

Goý, $-1 < x \le 0$ bolsun. Onda, sygyşmaýan wakalar üçin goşmak teoremasy boýunça

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

bolar. Goý, $0 < x \le 1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) + P(\xi = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

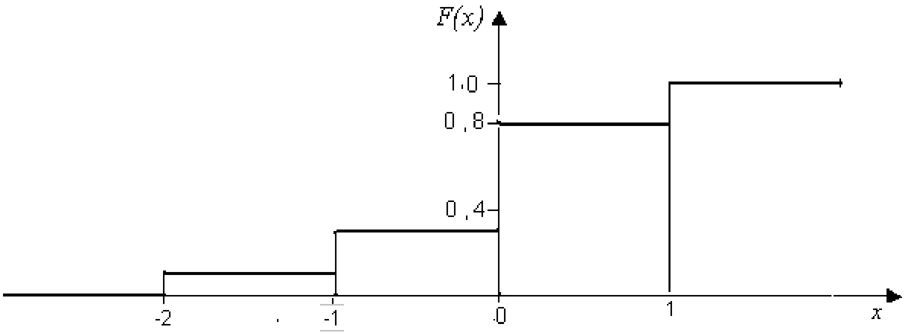
Goý, $x > 1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) + P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1.$$

Şeýlelikde,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ 0{,}1, & -2 < x \le -1`, \\ 0{,}3, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}8, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Bu *F(x)* paýlanyş funksiýasynyň grafigini guralyň



Görnüşi ýaly, diskret tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr. $\triangleright$

3-nji mesele. ξ tötän ululyk

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\cdot\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. Dykyzlyk funksiýasyny we ξ tötän ululygyň (-1;1) aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ *f (x)* dykyzlyk funksiýasyny $f(x)=F^{/}(x)$ deňlikden peýdalanyp tapalyň

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}, & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

ξ tötän ululygyň (-1;1) aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny

$$P\left(a<\xi<b\right)=F(b)-F(a)$$

formuladan peýdalanyp tapalyň. (-1;1) aralyk (-2;2) aralyga degişli. Meseläniň şerti boýunça (-2;2) aralykda

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}$$

Onda

$$P(-1 < \xi < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin(-\frac{1}{2}) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}. \qquad \triangleright$$

4-nji mesele. Üznüksiz ξ tötän ululyk

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{6}, \\ C\sin 3x, & x < \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3} \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýasy bilen berlen. C parametri we ξ tötän ululygyň *F(x)* paýlanyş funksiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ C parametri dykyzlyk funksiýasynyň

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

häsiýetinden peýdalanyp tapalyň

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} 0dx = C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx =$$

$$= -\frac{C}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{C}{3} = 1$$

Bu ýerden *C=3.* Indi *F(x)* paýlanyş funksiýasyny

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

formuladan peýdalanyp tapalyň. Goý, $x \le \frac{\pi}{6}$ bolsun. Onda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{-\infty}^{x} 0dy=0.$$

Goý, $\frac{\pi}{6}<x\leq\frac{\pi}{3}$ bolsun. Onda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dy+\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3ydy=-\cos 3y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x}=-\cos 3x.$$

Goý, $x>\frac{\pi}{3}$ bolsun. Onda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dy+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3ydy+\int_{\frac{\pi}{3}}^{x} 0dy=-\cos 3y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=1.$$

Şeýlelikde,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq\frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & x<\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3}, \\ 1, & x>\frac{\pi}{3}. \end{cases} \qquad \rhd$$

§ 1.7. Uly sanlar kanuny

1. Çebyşewyň deňsizligi we teoremasy

Goý, $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\ldots$ tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun. Bu ululyklaryň n sanysyndan käbir $\zeta_n=g_n(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ funksiýa garalyň. Eger $a_1,a_2,...a_n,\ldots$ hemişelik ululyklar we $\forall\varepsilon>0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n-a_n|<\varepsilon\}=1 \qquad (64)$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanuny ýerine ýetýär diýilýär.
Çebyşewiň deňsizligi.
Tükenikli dispersiýa eýe bolan $\forall \xi$ tötän ululyk we $\forall \varepsilon > 0$ san üçin

$$P\{|\,\xi - M\xi\,| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \qquad (65)$$

deňsizlik adalatlydyr.
◁ Ilki bilen (64) deňsizligi

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\,\zeta_n - a_n| \geq \varepsilon\} = 0 \qquad (66)$$

görnüşde ýazyp bolýandygyny belläliň. Onda

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int\limits_{|x-M\xi| \geq \varepsilon} dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x-M\xi| \geq \varepsilon} (x - M\xi)^2 dF(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x) = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$\{|\,\xi - M\xi\,| \geq \varepsilon\}$ we $\{|\,\xi - M\xi\,| < \varepsilon\}$ wakalaryn garşylyklydygyny göz öňünde tutup, Çebyşewiň deňsizligini

$$P\{|\,\xi - M\xi\,| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \qquad (67)$$

görnüşde ýazyp bolar. ▷
Teorema (Çebyşew) Goý, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ şol bir hemişelik ululyk bilen çäklenen tükenikli dispersiýalary bolan jübüt-jübütden bagly däl tötän ululyklaryň yzygiderligi bolsun. Onda $\forall \varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (68)$$

deňlik adalatlydyr.
◁ (67) deňsizlikden peýdalanyp alarys

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k}{\varepsilon^2}\geq$$

$$\geq 1-\frac{nc}{n^2\varepsilon^2}=1-\frac{c}{n\varepsilon^2};$$

Bu deňsizlikde $n\to\infty$ predele geçip we ähtimallygyň 1-den uly bolup bilmeýändigini göz öňünde tutup,(68) deňligiň adalatlydygyna göz ýetireris. $\rhd$

Indi Çebyşewiň teoremasynyň hususy hallaryna garalyň.

Teorema(Bernulli **).** Goý, μ käbir A wakanyň bagly däl n synagda ýüze çykmalarynyň sany bolsun, p bolsa, ol wakanyň synaglaryň her birinde ýüze çykmagynyň ähtimallygy bolsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (69)$$

deňlik adalatlydyr.

$\lhd$ A wakanyň k-njy synagda ýüze çykmalarynyň sanyny μ_k bilen belgiläliň. Ýazyp bileris

$$\mu=\mu_1+\mu_2+...+\mu_n;\quad M\mu_k=0\cdot q+1\cdot p=p;\quad M\mu_k^2=0\cdot q+1\cdot p=p;$$

$$D\mu_k=p\cdot q\leq\frac{1}{4};$$

Görnüşi ýaly, Bernulliniň teoremasy Çebyşewewiň teoremasynyň hususy halydyr. Diýmek, (69) deňlik adalatlydyr. $\rhd$

Teorema (Puasson). Goý, μ käbir A wakanyň bagly däl n synagda ýüze çykmalarynyň sany, p_k bolsa k-njy synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy bolsun. Onda $\forall\varepsilon>0$ üçin

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-\frac{P_1+P_2+...+P_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (70)$$

deňlik adalatlydyr.

$\lhd$ Ýazyp bileris

$\mu_1 + ... + \mu_n$; $M\mu_k = 0 \cdot q_k + 1 \cdot p_k$; $M\mu_k^2 = 0 \cdot q_k + 1 \cdot p_k$;

$$D\,\mu_k = p_k \cdot q_k \le \frac{1}{4}$$

Bu ýerde μ_k A wakanyň k-njy synagda ýüze çykmalarynyň sany. Görnüşi ýaly, Puassonyň teoremasy Çebyşewiň teoremasynyň hususy halydyr. Onda (70) deňlik adalatlydyr. ▹

§ 1.8. Merkezi predel teorema barada düşünje

Goý, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun we bu tötän ululyklaryň tükenikli matematiki garaşmalary we dispersiýalary bar bolsun.

$$a_k = M\xi_k, \qquad b_k^2 = D\xi_k, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum D\xi_k$$

belgilemeleri girizeliň. ξ_k tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny $F_k(x)$ bilen belgiläliň. “$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$tötän ululyklara nähili şertler goýlanda

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - a_k\right)$$

jemiň paýlanyş funksiýasy normal kanunyň paýlanyş funksiýasyna ýygnanýar? ”- diýlen sowal ýüze çykýar. Bu sowalyň jogabynyň ýeterlik şerti merkezi predel teorema diýlip atlandyrylýan Lindebergiň teoremasynda getirilýär.

Bu teoremanyň diňe formulirlenişini getirmek bilen çäkleneliň.

Teorema (Merkezi predel teorema) Eger $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi $\forall \tau \ge 0$ san üçin Lindebergiň

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k| \ge \tau B_n} \left(x - a_k\right)^2 \, dF_k(x) = 0$$

şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

gatnaşyk *x* üýtgeýäne görä deňölçegli ýerine ýetýändir.
Hususy halda, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar bagly däl we birmeňzeş paýlanan hem-de tükenikli matematiki garaşmalary we dispersiýalary bolan ýagdaýynda, görnükli rus matematigi A.M. Lýapunowyň teoremasy adalatlydyr.

Teorema (Lýapunow) Eger $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tükenikli a matematiki garaşmalary we σ^2 dispersiýalary bolan birmeňzeş paýlanan bagly däl tötän ululyklaryň yzygiderligi bolsa,onda $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ jemiň paýlanyş kanuny n-iň çäksiz artmagy bilen normal kanuna çäksiz golaýlaşýandyr.

Netije. Eger $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tötän ululyklar bu teoremanyň şertlerini kanagatlandyrýan bolsalar, onda olaryň orta arifmetiki bahasy n-iň çäksiz artmagy bilen normal kanuna çäksiz golaýlaşýandyr.
Hakykatdan hem,

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} = \frac{\xi_1}{n} + \frac{\xi_2}{n} + ... + \frac{\xi_n}{n}$$

goşulyjylaryň her biriniň $\frac{a}{n}$ matematiki garaşmasy we $\frac{\sigma^2}{n}$ dispersiýasy bardyr we $\frac{\xi_i}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$ ululyklar Lýapunowyň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýarlar.

Bellik. Lýapunowyň teoremasyndan Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasy gelip çykýandyr.

IV. 2. Matematiki statistikanyň elementleri

§ 2.1. Tötän saýlama we onuň paýlanyş kanuny

1. Baş we saýlama toplumlar

Matematiki statistika XVII asyryň başynda döreýär we ähtimallyklar nazaryýeti bilen bilelikde giň gerim bilen ösýär. Statistika adalgasy latyn “status” (ýagdaý) sözünden gelip çykýar.

Matematiki statistika esasan iki meselä garaýar.

1) Gözegçilikler netijesinde statistiki maglumatlary toplamak we olary toparlamaklygyň usullaryny görkezmek.

2) Ylmy we amaly netijeleri almak üçin toplanan statistiki maglumatlary maksadalaýyk derňemekligiň usullaryny işläp düzmek.

Matematiki statistikanyň başlangyç düşünjeleri hökmünde baş we saýlama toplumlar düşünjelerine garaýarlar. Birjynsly elementleriň köplügini baş toplum diýip atlandyrýarlar. Bu toplum haýsy hem bolsa bir hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenilýär. Baş toplumyň hemme elementlerini ýeke-ýekeden öwrenmeklik wagtyň we serişdeleriň köp sarp edilmegi bilen baglanyşyklydyr. Şol sebäpli, baş toplumdan elementleriň bölek köplügini şowuna saýlap alýarlar we gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenýärler. Bu bölek köplüge saýlama diýilýär.

Toplumyň elementleriniň sanyna toplumyň göwrümi diýilýär. Saýlama geçirilende dürli saýlap alyş usullary ulanylýar.

1) **Mehaniki saýlap alyş usuly**. Bu usulda baş toplum birnäçe bölek toplumlara mehaniki bölünýär we her bölek toplumdan bir element şowuna saýlanyp alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, öndürilen N önümiň 20% -ni saýlap almaly bolsa, onda önümleriň hemmesiniň köplügini $N/5$ bölege bölmeli we her bölekden bir elementi şowuna alyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenmeli.

2) Kysmy saýlap alyş usuly. Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden şowuna bir element alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, köwüş fabriginiň öndürýän köwüşlerini pasyllaýyn görnüşleri we ölçegleri boýunça birnäçe kysmy böleklere bölýärler we her bölekden şowuna bir jübüt köwüş alyp, hil ya-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

3)Tapgyrlaýyn saýlap alyş usuly. Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden elementleriň tapgyry şowuna alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, çörek öndürýän kärhananyň her tamdyrynda bişirilýän çörekleri görnüşleri we ölçegleri boýunça kysmy böleklere bölýärler we her bölekden çörekleriň tapgyryny şowuna saýlap alyp, hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

Amalyýetde bu usullary utgaşdyryp ulanýarlar.

Eger baş toplumdan alnan element gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilip, ýene-de baş topluma gaýtarylsa, onda şeýle saýlama gaýtalanýan diýilýär. Eger element baş topluma gaýtarylmasa, onda şeýle saýlama gaýtalynmaýan diýilýär.

Haýsy saýlap alyş usulynyň ulanylandygyna garamazdan, öwrenilýän nyşan barada dogry netijeleri çykarmaklyga mümkinçilik bermegi üçin, saýlamanyň wekilçilikli (reprezentatiw) bolmagy gerekdir.

2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýan bolsun. Bu nyşan tötän ululykdyr, sebäbi şol bir göwrümli dürli saýlamalarda ol öňden belli bolmadyk dürli bahalary kabul edýär.

Goý, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilen bolsun we bu saýlamada x_1 baha n_1 gezek, x_2 baha n_2 gezek, we ş.m. x_k baha n_k gezek duş gelýan bolsun. Nyşanyň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bahalaryna wariantalar diýilýär. Wariantalaryň artýan tertipde ýazylan yzygiderligine wariasiýa hatary diýilýar. Wariantalaryň gözegçilik edilýän $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sanlaryna bu wariantalaryň degişli ýygylyklary diýilýär. Hemme ýygylyklaryň jemi saýlamanyň göwrümine deňdir, ýagny,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Wariantalar bilen olaryň degişli ýygylyklarynyň sanawyna ýygylygyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Ýygylygyň statistiki paýlanyşy tablisa we grafik görnüşde berilýär. Tablisa görnüşde ol

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

ýaly berilýär. Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny grafiki bermeklik üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny gurmaly. Abssissalar okunda $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wariantalary, ordinatalar okunda bolsa $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ýygylyklary bellemeli. Soňra (x_i, n_i), $i = \overline{1, k}$, nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli. Emele gelen döwük çyzyk ýygylygyň statistiki paýlanyşynyň grafiki berlişidir. Bu döwük çyzyga ýygylygyň poligony diýilýär. “Poligonos” grek sözi bolup, köpburçluk diýen manyny berýär.

$$W_i = \frac{n_i}{n} \qquad (1)$$

gatnaşyga x_i wariantanyň otnositel ýygylygy diýilýär, bu ýerde n_i ululyk x_i wariantanyň ýygylygy, n saýlamanyň göwrümi. Wariantalar bilen degişli otnositel ýygylyklaryň sanawyna otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Bu paýlanyş hem edil ýygylygyň paýlanyşy ýaly tablisa we grafik görnüşinde berilýär.

Ýygylygyň we otnositel ýygylygyň paýlanyşyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy diýilýär.

Eger baş toplum üznüksiz nyşana görä öwrenilýän bolsa, onda bu nyşanyň kabul edýän bahalarynyň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir *h* uzynlykly bölek interwallara bölýärler. Her bir bölek interwalyň ýygylygy hökmünde bu bölek interwala düşen wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alýarlar we gistogramma diýlip atlandyrylýan figurany gurýarlar.

Kesgitleme. Ýygylyň (otnositel ýygylygyň) gistogrammasy diýlip, esaslary bölek interwallaryň *h* uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, $\frac{n_i}{h} \quad \left(\frac{W_i}{h}\right), \ i=\overline{1,n},$ gatnaşyklara deň bolan gönüburçluklardan ybarat basgançakly figura aýdylýar.

Ýygylyň (otnositel ýygylygyň) gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny gurmaly. Abssissalar okunda *h* uzynlulkly bölek interwallary, ordinatalar okunda bolsa $\frac{n_i}{h} \quad \left(\frac{W_i}{h}\right)$ ululyklary bellemeli we esaslary *h* ululyga deň, beýiklikleri bolsa $\frac{n_i}{h} \quad \left(\frac{W_i}{h}\right)$ ululyklara deň bolan gönüburçluklary gurmaly.

3. Empirik paýlanyş funksiýasy

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n} \qquad (2)$$

funksiýa empirik paýlanyş funksiýasy diýilýär, bu ýerde $n_x \ (0 \le n_x \le n)$ üýtgeýän hakyky $x \ (-\infty < x < \infty)$ ululykdan kiçi wariantalaryň sany, *n* saýlamanyň göwrümi. Empirik paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) Empirik paýlanyş funksiýasynyň bahalar ýaýlasy [0;1] kesimdir, ýagny, $0 \le F^*(x) \le 1$ deňsizlikler adalatlydyrlar.

2) Empirik paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr,

ýagny, bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli we $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik x_1 we x_2 bahalar üçin $F^*(x_1) \le F^*(x_2)$ deňsizlik adalatlydyr.

1) Eger x_1 iň kiçi warianta bolsa, onda x üýtgeýän ululygyň $x \le x_1$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme bahalary üçin $F^*(x) = 0$ bolar. Eger x_k iň uly warianta bolsa, onda x üýtgeýän ululygyň $x > x_k$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme bahalary üçin $F^*(x) = 1$ bolar.

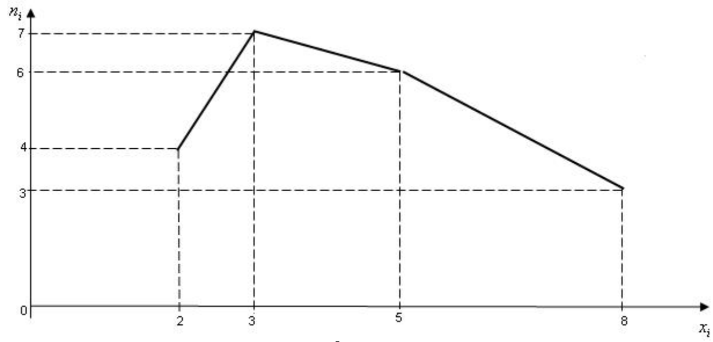
1-nji mesele. Baş toplumdan *n=20* göwrümli saýlama geçirilýär:
2, 8, 5, 3, 3, 5, 2, 3, 8, 5, 3, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 5, 2, 3

a) Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny tablisa görnüşinde ýazmaly.
b) Ýygylygyň poligonyny gurmaly.
ç) Otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly.
d) Otnositel ýygylygyň poligonyny gurmaly.

$\lhd$ a) Saýlamadan görnüşi ýaly 2-lik warianta 4 gezek, 3-lik warianta 7 gezek, 5-lik warianta 6 gezek, 8-lik warianta 3 gezek duş gelýär. Onda

x_i	2	3	5	8
n_i	4	7	6	3

b) Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny guralyň. Abssissalar okunda *2, 3, 5, 8* wariantalary, ordinatalar okunda bolsa *4, 7, 6, 3* ýygylyklary belläliň. Soňra $(2;4), (3;7), (5;6), (8;3)$ nokatlary guralyň we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdireliň.



1-nji çyzgy. Ýygylygyň poligony

ç) $n_1 = 4, n_2 = 7, n_3 = 6, n_4 = 3$ we $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 20$ bolandygy sebäpli

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

formuladan peýdalanyp, otnositel ýygylyklary tapalyň

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{20} = 0.2, \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{7}{20} = 0.35,$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{20} = 0.3, \quad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0.15$$

Onda

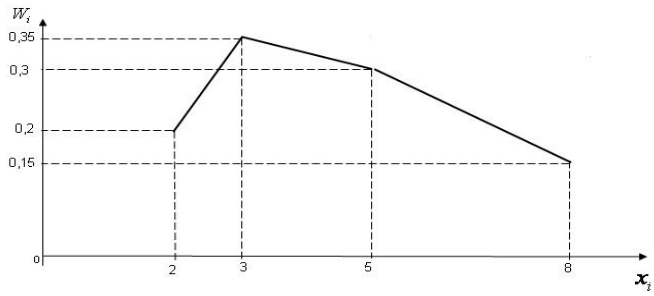
x_i	2	3	5	8
W_i	0.2	0.35	0.3	0.15

▷

Bellik. $\sum_{i=1}^{k} W_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{n}{n} = 1$

deňlikden peýdalanyp, otnositel ýygylyklaryň bahalarynyň dogry tapylandygyna göz ýetirmek bolar.

d) b) punktdaka meňzeş gurluşlary ulanyp, alarys



2-nji çyzgy. Otnositel ýygylygyň poligony

2-nji mesele. Ýygylygyň statistiki paýlanyşy berlen

x_i	1	6	7
n_i	5	3	2

Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

⊲ Bütin san okuny 1, 6, 7 nokatlar bilen, kesişmeýän dört bölege böleliň we *x* üýtgeýän ululygyň her bölekdäki bahalaryna aýry-aýrylykda garalyň.

Goý, $-\infty < x \le 1$ bolsun. *x* üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi warianta ýokdur. Şol sebäpli $n_x = 0$ bolar. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{10} = 0$$

Goý, $1 < x \le 6$ bolsun. *x* üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik warianta bar we ol 5 gezek duş gelýär, ýagny, $n_x = 5$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Goý, $6 < x \le 7$ bolsun. *x* üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik we 6-lyk wariantalar bar. Bu wariantalar degişlilikde 5 we 3 gezek duş gelýärler. Diýmek, $n_x = 8$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{8}{10} = 0,8$$

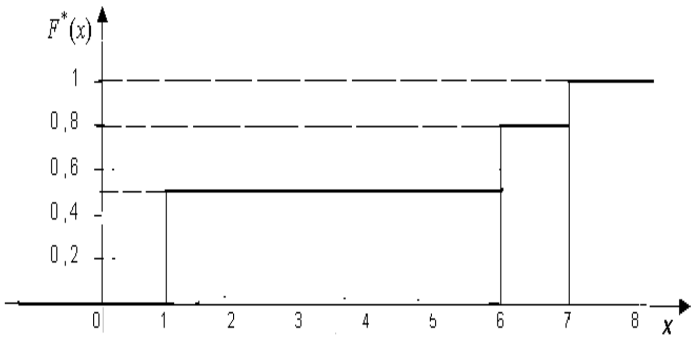
Goý, $7 < x < \infty$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik, 6-lyk we 7-lik wariantalar bar. Bu wariantalar degişlilikde 5, 3 we 2 gezek duş gelýärler. Diýmek, $n_x = 10$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{10}{10} = 1.$$

Şeýlelikde,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0.5, & 1 < x \le 6, \\ 0.8, & 6 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

$F^*(x)$ empirik paýlanyş funksiýanyň grafigini guralyň



3-nji çyzgy

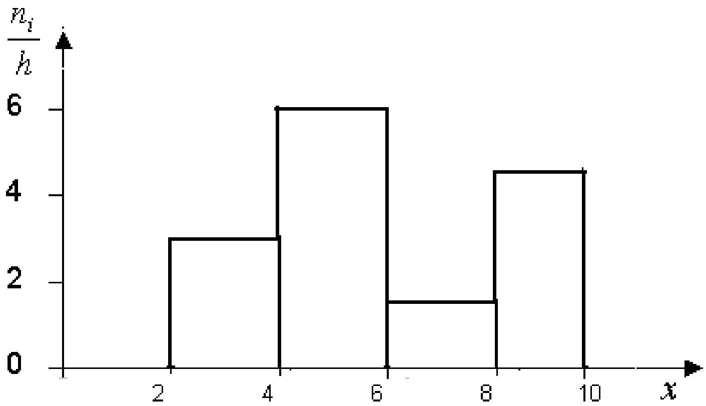
Çyzgydan görnüşi ýaly, empirik paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr. ▷

3-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen

Interwalyň belgisi i	Bölek interwal $x_i - x_{i+1}$	Bölek interwalyň ýygylygy n_i	Ýygylygyň dykyzlygy

			$\frac{n_i}{h}$
1	2-4	6	3
2	4-6	12	6
3	6-8	3	1,5
4	8-10	9	4,5

a) Ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.
b) Otnositel ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.
⊲ a) Tablisadan görnüşi ýaly, saýlamanyň göwrümi $n = 6 + 12 + 3 + 9 = 30$. Bölek interwallaryň uzynlyklary $h = 2$. Ýygylygyň gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly koordinatalar ulgamyny guralyň. Abssissalar okunda $(2;4), (4;6), (6;8), (8;10)$ bölek interwallary, ordinatalar okunda bolsa $3; 6; 1{,}5; 4{,}5$ ululyklary belläliň. Soňra esaslary bölek interwallaryň $h = 2$ uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, $3; 6; 1{,}5; 4{,}5$ ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň.



4-nji çyzgy. Ýygylygyň gistogrammasy

b) Ilki $W_i = \frac{n_i}{n}$ formuladan peýdalanyp, otnositel ýygylyklary tapalyň.

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{30} = 0.2, \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{12}{30} = 0.4,$$

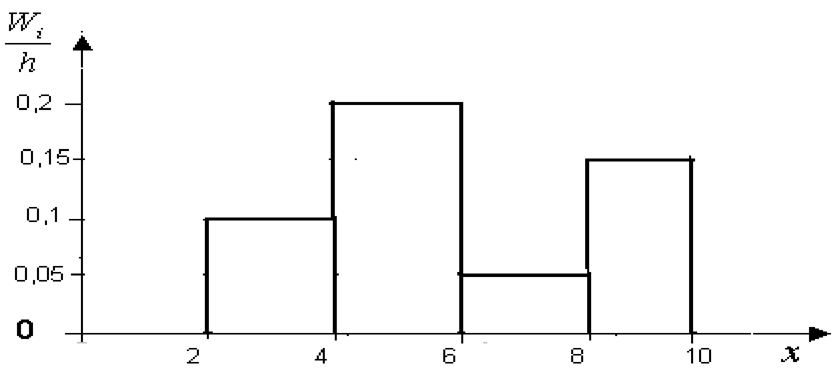
$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{3}{30} = 0.1, \qquad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{9}{30} = 0.3$$

Indi otnositel ýygylygyň $\frac{W_i}{h}$ dykyzlygyny tapalyň.

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0.2}{2} = 0.1, \qquad \frac{W_2}{h} = \frac{0.4}{2} = 0.2,$$

$$\frac{W_3}{h} = \frac{0.1}{2} = 0.05, \qquad \frac{W_4}{h} = \frac{0.3}{2} = 0.15.$$

Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny alyp, esaslary bölek interwallaryň $h = 2$ uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, $0.1;\quad 0.2;\quad 0.05;\quad 0.15$ ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň.



5-nji çyzgy. Otnositel ýygylygyň gistogrammasy ▷

§ 2.2. Paýlanyşyň näbelli parametrleriniň statistiki bahalary

1. Statistiki bahalar

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanyň paýlanyş funksiýasyny kesgitleýän parametrleri bahalandyrmak meselesi ýüze çykýar. Adatça derňeýjide öwrenilýän nyşanyň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalary bolýar. Bu bahalara biri-biri bilen bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklar hökmünde garaýarlar we bahalandyrylýan θ nazary parametriň statistiki bahasy hökmünde bu tötän ululyklardan käbir $\theta^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ funksiýany kabul edýärler. Argumentleri tötän ululyklar bolany sebäpli $\theta^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ funksiýa hem tötän ululykdyr.

Islendik göwrümli saýlama geçirilende hem bahalandyrylýan parametriň diňe ýakynlaşan bahasyny tapmak bolar. Şol sebäpli gerekli ýakynlaşmany almak maksady bilen statistiki bahalara käbir talaplary bildirýärler.Goý, θ bahalandyrylýan parametr, θ^* bolsa, onuň statistiki bahasy bolsun.

Kesgitleme. Matematiki garaşmasy bahalandyrylýan θ parametre deň bolan, ýagny,

$$M\theta^* = \theta$$

deňligi kanagatlandyrýan θ^* statistiki baha süýşmedik baha diýilýär.

Süýşmedik baha artygy ýa-da kemi bilen alnan şol bir ýalňyşlyklaryň gaýtalanyp durmazlygyny üpjün edýän hem bolsa, ol mydama gerekli ýakynlaşmany berýär diýlen netijäni çykarmak nädogrydyr. Hakykatdan hem, n göwrümli saýlama k gezek geçirilip, degişlilikde $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$ statistiki bahalar tapylan bolsun. Bu statistiki bahalara θ^* tötän ululygyň kabul edýän bahalary hökmünde garalyň. Eger bahalandyrylýan θ parametriň statistiki bahasy hökmünde $M\theta^*$ ululykdan ýeterlik daşlaşan haýsy hem bolsa bir statistiki baha kabul edilse, onda gerekli ýakynlaşmanyň alynmazlygy mümkin. Şol sebäpli, θ^* tötän ululygyň bahalarynyň $M\theta^*$ matematiki garaşmanyň töweregindäki ýaýrawynyň kiçi bolmagy talap edilýär. θ^* tötän ululygyň ýaýraw ölçegi hökmünde $M(\theta^* - \theta)^2$ ululyk kabul edilýär. Hususy halda, θ^* süýşmedik baha bolanda, onuň ýaýraw ölçegi dispersiýadyr

$$M(\theta^* - M\theta^*)^2 = D\theta^*$$

Kesgitleme. $\inf\limits_{\theta^*} M\left(\theta^* - \theta\right)^2$ ululyga eýe bolan θ^* statistiki baha effektiw diýilýär.

Kesgitleme. Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

deňligi kanagatlandyrýan θ_n^* statistiki baha esasly diýilýär.

2. Wariasiýa hatarynyň häsiýetlendirijileri

Baş toplumyň öwrenilýän nyşanynyň belli paýlanyşynyň näbelli parametrlerini bahalandyrmakda gözegçilik edilýän wariantalaryň orta bahalarynyň möhüm ähmiýeti bardyr.

Goý, baş toplum käbir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu maksat bilen baş toplumdan alnan n göwrümli saýlamada $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wariantalar degişlilikde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ýygylyklar bilen duş gelýän bolsunlar.

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \qquad (3)$$

ululyga saýlama orta arifmetiki baha diýilýär.Baş orta baha hem edil şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär.

Mukdar nyşanyň bahalarynyň saýlama orta bahanyň töweregindäki ýaýrawyny häsiýetlendirmek üçin saýlama dispersiýa düşünjesi girizilýär.Goý, n göwrümli saýlamada $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wariantlar degişlilikde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ýygylyklar bilen düş gelýän bolsun. Saýlama dispersiýa diýlip, mukdar nyşanyň gözegçilik edilýän $x_i,\ i = \overline{1; k}$ bahalarynyň $\bar{x}_s$ saýlama orta bahadan gyşarmalarynyň kwadratlarynyň orta arifmetiki bahasyna aýdylýar we D_s bilen belgilenýär

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} \qquad (4)$$

Saýlama dispersiýadan alnan arifmetiki kwadrat köke saýlama orta kwadratik gyşarma diýilýär we σ_s bilen belgilenýär

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} \qquad (5)$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n-1} \qquad (6)$$

ululyga düzedilen dispersiýa diýilýär.

Dispersiýanyň formulasyny amaly maksatlar üçin amatly bolan

$$D = \overline{x}^2 - (\overline{x})^2 \qquad (7)$$

görnüşde ýazmak bolar. Hakykatdnan hem,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} + (\overline{x})^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} =$$

$$\overline{x}^2 - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + (\overline{x})^2 = \overline{x}^2 - (\overline{x})^2,$$

bu ýerde

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}.$$

Kesgitleme. Iň uly ýygylyga eýe bolan warianta moda diýilýär we M_o bilen belgilenýär.

Bellik. Eger baş toplumyň öwrenilýän nyşany üznüksiz bolsa, onda dykyzlyk funsiýasynyň maksimuma eýe bolan nokadyna moda diýilýär.

Kesgitleme. Wariasiýa hataryny wariantalaryň sany boýunça deň iki bölege bölýän warianta mediana diýilýär we M_e bilen belgilenýär.

Eger wariantalaryň sany jübüt bolsa, ýagny $m=2k$ bolsa, onda

$$M_e = x_{k+1} \qquad (8)$$

Eger wariantalaryň sany täk bolsa, ýagny $m=2k+1$ bolsa, onda

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \qquad (9)$$

Bellik. Erkin nyşan üçin

$$F(x)=\frac{1}{2} \qquad (10)$$

deňlemäniň çözüwine mediana diýilýär, bu ýerde $F(x)$ funksiýa öwrenilýän nyşanyň paýlanyş funksiýasy.

Kesgitleme. Iň uly warianta bilen iň kiçi wariantanyň tapawudyna wariasiýanyň gerimi diýilýär we R bilen belgilenýär,ýagny

$$R=x_{\max}-x_{\min} \qquad (11)$$

Kesgitleme. Wariantalaryň saýlama orta bahadan absolýut gyşarmalarynyň orta arifmetiki bahasyna orta absolýut gýşarma diýilýär we θ bilen belgilenýär,ýagny

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left|x_i-\overline{x}_s\right|}{n} \qquad (12)$$

Kesgitleme. Orta kwadratik gyşarmanyň saýlama orta baha göterimde aňladylan gatnaşygyna wariasiýa koeffisiýenti diýilýär we V bilen belgilenýär,ýagny

$$V=\frac{\sigma_s}{\overline{x}_s}\cdot 100\% . \qquad (13)$$

Teorema. $\overline{x}_s$ saýlama orta baha $\overline{x}_b$ baş orta bahanyň süýşmedik bahasydyr,ýagny

$$M\,\overline{X}_s=\overline{x}_b \qquad (14)$$

deňlik adalatlydyr.

$\lhd$ $$\overline{x}_s=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n}$$

aňlatmada $\overline{x}_s$ ululyga $\overline{X}_s$ tötän ululyk, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wariantalara bolsa, biri-biri bilen bagly däl we baş toplumyň öwrenilýän ξ nyşany bilen birmeňzeş paýlanan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tötän ululyklar hökmünde garalyň. Goý, $MX_i = a, \quad i = \overline{1,k}$, bolsun. Onda $M\xi = \overline{x}_b = a$ bolar. $\overline{X}_s$ ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\overline{X}_s = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot MX_i}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a = \overline{x}_b \qquad \triangleright$$

Teorema. S^2 düzedilen dispersiýa D_b baş dispersiýanyň süýşmedik bahasydyr,ýagny

$$MS^2 = D_b \qquad (15)$$

deňlik adalatlydyr.

$\triangleleft$ D_s saýlama dispersiýa D_b baş dispersiýanyň süýşen bahasydyr, ýagny

$$MD_s = \frac{n-1}{n} \cdot D_b$$

Bu deňligi göz öňünde tutup,

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} \cdot D_s\right) = \frac{n}{n-1} \cdot MD_s = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_b = D_b$$

deňligi alarys. $\triangleright$

3. Ynam interwallary.

Saýlamanyň kömegi bilen nazary paýlanyşyň näbelli parametriniň bir statistiki bahasyny tapmaklyga nokatlaýyn bahalandyrma diýilýär. Uly bolmadyk göwrümli saýlamada nokatlaýyn bahalandyrmanyň gerekli ýakynlaşmany bermezligi mümkin. Şol sebäpli interwallaýyn bahalandyrmalary ulanýarlar.

Goý, θ bahalandyrylýan parametr, θ^* bolsa, onuň saýlama netijesinde tapylan statistiki bahasy bolsun. Islendik $\delta > 0$ san üçin

$$\left|\theta - \theta^*\right| < \delta \qquad (16)$$

deňsizlikde δ ululyk näçe kiçi boldygyça bahanyň takyklygy şonça-da uludyr. Şol sebäpli δ ululyga bahanyň takyklygy diýilýär.

Islendik θ^* statistiki baha üçin (16) deňsizlik dogrydyr diýmeklik elbetde nädogrydyr. Sonuň üçin (16) deňsiligiň haýsy ähtimallyk bilen ýerine ýetýandigine garaýarlar.

$$\gamma = P\left\{\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right\}$$

ähtimallyga bahalandyrmanyň ygtybarlygy diýilýär. (16) deňsizligi $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$ görnüşde ýazalyñ.

$$\left(\theta^* - \delta;\ \theta^* + \delta\right) \qquad (17)$$

interwala bahalandyrylan θ parametri γ ygtybarlyk bilen örtýan ynam interwaly diýilýär.

Indi belli paýlanyşyň näbelli parametrlerini bahalandyrmak üçin ulanylýan ynam interwallaryny getireliň.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir ξ mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşan $a = M\xi$ we $\sigma = \sqrt{D\xi}$ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan diýeliň. Goý, a parametr näbelli, σ parametr bolsa belli bolsun. Näbelli a parametriň θ^* statistiki bahasy hökmünde $\overline{x_s}$ saýlama orta bahany kabul edip, a parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Bu maksat bilen baş toplumdan n göwrümli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ saýlama geçireliň. Bu wariantalara biri-biri bilen bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklar hökmünde garalyň. Bu tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahasyny $\bar{\xi}$ bilen belgiläliň

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}$$

Belli bolşy ýaly

$$M\bar{\xi} = a, \qquad D\bar{\xi} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad \sigma_{\bar{\xi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Laplas funksiýasyndan we Nýuton-leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp, ýazyp bileris

$$\gamma = P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| < \delta\right\} = \left\{a - \delta < \bar{\xi} < a + \delta\right\} = \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = -\Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

$$\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t \qquad (18)$$

belgilemäni girizip,

$$2\Phi(t) = \gamma \qquad (19)$$

deňligi alarys.

δ takyklygyň bu bahasyny göz öňünde tutup, ýazyp bileris

$$\gamma = P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| < \delta\right\} = P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\bar{\xi} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

$\bar{\xi}$ tötän ululygy $\bar{x}_s$ ululyk bilen çalşyryp, normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşanyň näbelli *a* parametrini σ belli bolanda γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(\bar{x}_s - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x}_s + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (20)$$

ynam interwalyny alarys.

Bellik. (20) ynam interwalyndaky *t* üýtgeýän ululygy (19) deňlikden we *Φ(x)* Laplas funksiýasynyň tablisasyndan (2-nji Goşmaça) peýdalanyp tapmak bolar.

Indi *a* we σ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ mukdar nyşanyň näbelli *a* parametrini σ näbelli bolanda γ ygtybarlylyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Önuň üçin baş toplumdan *n* göwrümli $x_1, x_2, \dots, x_n$ saýlama geçireliň we ýokarda getirilen pikir ýöretmeleri ulanyp

$$T = \frac{\bar{\xi} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

tötän ululygy alalyň, bu ýerde n-saýlamanyň göwrümi, S-düzedilen orta kwadratik gyşarma, $\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_1}{n}$ - saýlama orta baha.

T tötän ululyk k=n-1 erkinlik derejeli we

$$S(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

dykyzlyk funksiýaly Stýudent [W. Gosset, (13.06.1876-16.10.1937), iňlis matematigi] kanuny boýunça paýlanandyr, bu ýerde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} \cdot e^{-y} dy$$

gamma funksiýa. T tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny

$$\gamma = P\left(\left| \frac{\bar{\xi} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| < t_\gamma \right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n) dt \qquad (21)$$

görnüşde ýazmak bolar. (21) deňlikdäki ýaý içindäki deňsizligi özgerdip ýazalyň.

$$\gamma = P\left(\bar{\xi} - t_j \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + t_j \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$\bar{\xi}$ we S tötän ululyklary degişlilikde $\bar{x}_s$ saýlama orta baha we s-düzedilen orta kwadratik gyşarma bilen çalşyryp, normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşanyň näbelli *a* parametrini σ näbelli bolanda γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(\overline{x}_s - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x}_s + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \qquad (22)$$

ynam interwalyny alarys. t_γ ululygy berlen *n* we γ boýunça tablisadan (3-nji Goşmaça) peýdalanyp tapmak bolar.

Indi *a* we σ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ mukdar nyşanyň näbelli σ parametrini γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Onuň üçin baş toplumdan *n* göwrümli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ saýlama geçirip, s düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapalyň. Bu düzedilen orta kwadratik gyşarmany näbelli σ parametriň statistiki bahasy hökmünde kabul edip,

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

deňlige garalyň. Bu deňlikdäki ýaý içindäki deňsizligi özgerdip ýazalyň

$$s - \delta < \sigma < s + \delta$$

Bu ýerden alarys $\quad s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$

$\frac{\delta}{s} = q$ belgilemäni girizip, *q*<1 bolanda, näbelli σ parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$(s(1-q); \quad s(1+q)) \qquad (23)$$

ynam interwalyny alarys. Eger $q \geq 1$ bolsa, onda

$$(0; \quad s(1+q)) \qquad (24)$$

ynam interwaly ulanylýar. q ululygy berlen *n* we γ boýunça tablisadan (4-nji Goşmaça) peýdalanyp tapmak bolar.

1-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen

x_i	1	3	5	8
n_i	3	2	4	1

a) Saýlama orta bahany;
b) Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany;
ç) Düzedilen dispersiýany we düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapmaly.
$\triangleleft$

a) $$\overline{x}_a = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5 + 1\cdot 8}{10} = \frac{37}{10} = 3{,}7$$

b) $$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} =$$

$$= \frac{3\cdot(1-3{,}7)^2 + 2\cdot(3-3{,}7)^2 + 4\cdot(5-3{,}7)^2 + 1\cdot(8-3{,}7)^2}{10} = 4{,}81$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{4{,}81} \approx 2{,}19.$$

ç) $s^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{10}{9}\cdot 4{,}81 \approx 5{,}34$. Onda $s = \sqrt{5{,}34} \approx 2{,}31.$ $\triangleright$

2-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	5	4	3	1

a) Modany;
b) Medianany;
ç) Wariasiýanyň gerimini;
d) Baş orta bahanyň süýşmedik bahasyny;
e) Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany;
ä) Baş dispersiýanyň süýşmedik bahasyny;
f) Orta absolýut gyşarmany;
g) Wariasiýa koeffisiýentini tapmaly.
$\triangleleft$ a) Saýlamanyň paýlanyşyndan görnüşi ýaly, iň uly ýygylyga $(n_1 = 7)$ $x_1 = 2$ warianta eýedir.Diýmek, $M_0 = 2$

b) Berlen saýlamada wariantalaryň sany täk, ýagny, 2k+1=5. Bu ýerden k=2. Onda $M_e = x_{m+1} = x_3 = 5$

ç) Wariantalaryň iň ulusy $x_5 = 9$, iň kiçisi bolsa, $x_1 = 2$. Onda $R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 2 = 7.$

d) Belli bolşy ýaly, baş orta bahanyň süýşmedik bahasy $\overline{x}_s$ saýlama orta bahadyr

$$\overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{7\cdot 2 + 5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 6 + 1\cdot 9}{20} = \frac{81}{20} = 4{,}05$$

e) $D_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} =$

$$= \frac{7\cdot(-2{,}05)^2 + 5\cdot(-0{,}05)^2 + 4\cdot 0{,}95^2 + 3\cdot 1{,}95^2 + 1\cdot 4{,}95^2}{20} = 3{,}4475$$

Onda $\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{3{,}4475} \approx 1{,}86$

ä) Belli bolşy ýaly, baş dispersiýanyň süýşmedik bahasy s^2 düzeldilen dispersiýadyr

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{20}{19}\cdot 3{,}4475 \approx 3{,}63.$$

f) $\theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left| x_i - \overline{x}_s \right|}{n} =$

$$= \frac{7\cdot 2{,}05 + 5\cdot 0{,}05 + 4\cdot 0{,}95 + 3\cdot 1{,}95 + 1\cdot 4{,}95}{20} = 1{,}46$$

g) $V = \dfrac{\sigma_s}{\overline{x}_s}\cdot 100\% = \dfrac{1{,}86}{4{,}05}\cdot 100\% \approx 45{,}93\%$ ▷

3-nji mesele. Goý, baş toplum normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşana görä öwrenilýän bolsun. Eger baş toplumdan n=100 göwrümli saýlama geçirilip, onuň netijesinde $\overline{x}_s = 6{,}62$ saýlama orta baha we $\sigma_s = 2{,}89$ orta kwadratik gyşarma tapylan bolsa, ξ nyşanyň näbelli $a = M\xi$ matematiki garaşmasyny $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

$\triangleleft$ (20) ynam interwalyndan peýdalanalyň. $2\Phi(t) = \gamma$ deňlemeden $\Phi(t) = 0{,}475$ deñligi alarys.

Laplas funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (3-nji Goşmaça) peýdalanyp, t argumentiň $\Phi(t) = 0{,}475$ baha degişli t=1,96 bahasyny taparys. Onda

$$6{,}62 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}89}{\sqrt{100}} < a < 6{,}62 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}89}{\sqrt{100}}$$

ýa-da

$$6{,}05 < a < 7{,}19 \qquad \triangleright$$

4-nji mesele. Käbir jisimi bagly däl 36 ölçemeleriň netijesinde ölçegleriň $\bar{x}_s = 21{,}3$ saýlama orta bahasy we s=0,98 düzedilen orta kwadratik gyşarmasy tapylan bolsun. Ölçenýän jisimiň hakyky a ululygyny $\gamma = 0{,}99$ ygtybarlyk bilen örtýan ynam interwalyny tapmaly.

$\triangleleft$ (22) ynam interwalyndan peýdalanalyň. $n=36$ we $\gamma = 0{,}99$ boýunça tablisadan (3-nji Goşmaça) $t_\gamma = 2{,}7$ bahany taparys. Onda

$$21{,}3 - 2{,}7 \cdot \frac{0{,}98}{\sqrt{36}} < a < 21{,}3 + 2{,}7 \cdot \frac{0{,}98}{\sqrt{36}}$$

ýa-da

$$20{,}86 < a < 21{,}74 \qquad \triangleright$$

5-nji mesele. Baş toplumdan n=10 göwrümli saýlama geçirilip, s=5 düzedilen orta kwadratik gyşarma tapylan bolsun. Baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşanynyň näbelli σ orta kwadratik gyşarmasyny $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

$\lhd$ Berlen n=10 we $\gamma = 0,95$ boýunça tablisadan (4-nji Goşmaça) q=0,65 ululygy taparys. q<1 bolandygy sebäpli (23) ynam interwalyndan peýdalanyp alarys

$5 \cdot (1 - 0,65) < \sigma < 5 \cdot (1 + 0,65)$ ýa-da $1,75 < \sigma < 8,25$ $\rhd$

§ 2.3. Empirik paýlanyşyň normal paýlanyşdan gyşarmasynyň bahalandyrylyşy

1. Empirik momentler

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir ξ mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu maksat bilen baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ wariantalar degişlilikde $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $\left(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r\right)$ ýygylyklar bilen alnan bolsun. Eger wariasiýa hatarynda islendik iki ýanaşyk wariantanyň tapawudynyň absolýut ululygy şol bir h sana deň bolsa, onda wariantalara deňdaşlaşan, h sana bolsa, ädim diýilýär. Wariantalar uly sanlar bolan ýagdaýynda, hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

şertli wariantalardan peýdalanylýar, bu ýerde C-islendik $x_i, \quad i = \overline{1,r}$ warianta (ýalan nul). Ýalan nul hökmünde wariasiýa hatarynyň ortasyna golaý ýerleşen warianta alynsa, hasaplamalar has-da ýeňilleşýär.

Saýlamanň umumy häsiýetlendirijilerini hasaplamak üçin empirik momentlerden peýdalanmak amatlydyr.

$$M_k^{/} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \left(x_i - C\right)^k}{n} \qquad (25)$$

ululyga k-njy tertipli adaty empirik moment diýilýär, bu ýerde $x_i, \quad i = \overline{1,r}$ -wariantalar, $n_i, \quad i = \overline{1,r}$ -wariantalaryň degişli ýygylyklary, *C*-ýalan nul, *n*-saýlamanyň göwrümi. Hususy halda, *C*= 0 bolsa, (25) gatnaşykdan *k*-njy tertipli

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^k}{n} \qquad (26)$$

başlangyç empirik moment alarys. (26) aňlatmadan görnüşi ýaly, birinji tertipli (k=1) başlangyç empirik moment saýlama orta bahadyr

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i}{n} = \bar{x}_s$$

Hususy halda, $C = \bar{x}_s$ bolsa, (25) gatnaşykdan *k*-njy tertipli

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_s)^k}{n} \qquad (27)$$

merkezi empirik momenti alarys. (27) aňlatmadan görnüşi ýaly, ikinji tertipli *(k*=2 *)* merkezi moment saýlama dispersiýadyr

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} = D_s$$

Merkezi we adaty momentleriň arasynda

$$m_2 = M_2^{/} - \left(M_1^{/}\right)^2 = D_s \qquad (28)$$

$$m_3 = M_3^{/} - 3M_1^{/} \cdot M_2^{/} + 2\left(M_1^{/}\right)^2 \qquad (29)$$

$$m_4 = M_4^{/} - 4M_1^{/} \cdot M_3^{/} + 6\left(M_1^{/}\right)^2 \cdot M_2^{/} + 3\left(M_1^{/}\right)^4 \qquad (30)$$

görnüşli baglanyşyklar bardyr.

Hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen şertli empirik momentlerden peýdalanylýar.

$$M_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k}{n} \qquad (31)$$

ululyga k-njy tertipli şertli empirik moment diýilýär. Hususy halda, k=1 bolanda (31) aňlatmadan birinji tertipli şertli empirik momenti alarys

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)}{n} = \frac{1}{h} \left(\frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i}{n} - C \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i}{n} \right) = \frac{1}{h} \left(\overline{x}_s - C \right)$$

Bu ýerden

$$\overline{x}_s = M_1^* \cdot h + C \qquad (32)$$

(31) aňlatmadan taparys

$$M_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{1}{h^k} \cdot M_k^{/}$$

Bu ýerden

$$M_k^{/} = M_k^* \cdot h^k \qquad (33)$$

(33) deňlikden peýdalanyp, (28), (29) we (30) deňlikleri şertli empirik momentler arkaly

$$m_2 = \left[M_2^* - \left(M_1^* \right)^2 \right] \cdot h^2 = D_s \qquad (34)$$

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_1^* \cdot M_2^* + 2\left(M_1^* \right)^3 \right] \cdot h^3 \qquad (35)$$

$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_1^* \cdot M_3^* + 6\left(M_1^* \right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^* \right)^4 \right] \cdot h^4 \qquad (36)$$

görnüşde ýazmak bolar.

Amalyýetde köplenç deňdaşlaşmadyk wariantalar bilen iş salyşmaly bolýar. Bu ýagdaýda berlen wariantalary deňdaşlaşýan wariantalara getirmeklik zerurlygy ýüze çykýar. Onuň üçin berlen wariantalaryň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir uzynlykly bölek interwallara bölýärler we bölek interwallaryň ortalaryny täze wariantalar hökmünde kabul edýärler. Şeýlelikde, täze deňdaşlaşan wariantalar alynýar. Täze wariantalaryň ýygylyklary hökmünde degişli bölek interwallara düşen köne wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alýarlar.

Bellik. Berlen deňdaşlaşmadyk wariantalardan täze deňdaşlaşan wariantalara geçilip, saýlamanyň häsiýetlendirijileri hasaplananda ýalňyşlygyň uly bolmazlygy üçin her bölek interwala berlen wariantalaryň 8-10 – dan az bolmadyk sanysynyň düşmegini gazanmalydyr.

2. Empirik we deňleýji (nazary) ýygylyklar

Goý, baş toplum paýlanyş kanuny näbelli bolan ξ mukdar nyşana görä öwrenilýan bolsun. Bu baş toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilende ξ nyşan x_1 bahany n_1 gezek, x_2 bahany n_2 gezek, ,…, x_k bahany n_k gezek kabul edipdir diýeliň. x_i, $i=\overline{1,k}$,

wariantalaryň gözegçilik edilýän n_i, $i=\overline{1,k}$, sanlaryna empirik ýygylyklar diýilýär. Eger ξ nyşanyň haýsy hem bolsa bir kesgitli kanun boýunça paýlanandygy barada güman etmeklige esas bar bolsa, onda onuň gözegçilik maglumatlary bilen ylalaşygyny barlamak üçin nazary ýygylyklary hasaplamaly bolýar.Nazary hasaplanyp tapylan $n_i^{/}=n\cdot P_i$ ululyklara deňleýji ýygylyklar diýilýär, bu ýerde *n*-saýlamanyň göwrümi, P_i-belli paýlanyşly ξ nyşanyň x_i bahany kabul etmeginiň ähtimallygy.

Eger ξ üznüksiz nyşan bolsa, onda onuň kabul edýän hemme bahalarynyň düşen interwalyny kesişmeýän *k* bölek interwallara bölünýär we ξ nyşanyň bu bölek interwallara düşmeginiň

P_i, $i=\overline{1,k}$, ähtimallyklary tapylýar. Soňra diskret paýlanyşdaky ýaly $n_i^{/}=n\cdot P_i$ formuladan peýdalanyp, deňleýji ýygylyklar tapylýar. Hususy halda, eger ξ üznüksiz nyşan normal kanun boýunça paýlanan diýlip güman etmäge esas bar bolsa, onda $n_i^{/}$ deňleýji ýygylyklar

$$n_i^{/}=\frac{n\cdot h}{\sigma_s}\cdot\varphi(u_i)$$

formuladan peýdalanyp tapylýar, bu ýerde *n*-saýlamanyň göwrümi, *h*-bölek interwallaryň uzynlyklary, σ_s -saýlama orta kwadratik gyşarma, $u_i=\frac{x_i-\bar{x}_s}{\sigma_s}$, x_i -*i*-nji interwalyň ortasy,

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Indi saýlamanyň maglumatlaryndan peýdalanyp, normal egriniň gurluşyny teswirläliň.

Goý, baş toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilip,

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

statistiki paýlanyş alnan bolsun. Normal egrini gurmak üçin:

1) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany we σ_s saýlama orta kwadratik gyşarmany tapmaly;

2) $y_i=\frac{n\cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_i)$ formuladan peýdalanyp, nazary paýlanyşyň y_i ordinatalaryny (deňleýji ýygylyklary) tapmaly, bu ýerde *n*-saýlamanyň göwrümi, *h*-ädim (islendik goňşy iki wariantanyň arasyndaky uzaklyk),

$$u_i=\frac{x_i-\bar{x}_s}{\sigma_s},\qquad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}};$$

3) gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda $(x_i;y_i)$ nokatlary gurmaly we olary endigan egri bilen birikdirmeli.

Normal egriniň gurluşyny mysal arkaly görkezeliň.

Mysal. Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

x_i	40	45	50	55	60	65	70	75	80
n_i	5	6	10	14	30	16	10	4	5

Normal egrini gurmaly.

1) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany tapalyň

$$\overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{5\cdot 40 + 4\cdot 45 + 10\cdot 50 + 14\cdot 55}{100} +$$

$$+ \frac{30\cdot 60 + 16\cdot 65 + 10\cdot 70 + 4\cdot 75 + 5\cdot 80}{100} = 59{,}8$$

D_s saýlama dispersiýany tapalyň

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} =$$

$$= \frac{5\cdot(40-59{,}8)^2 + 6\cdot(45-59{,}8)^2 + 10\cdot(50-59{,}8)^2}{100} +$$

$$+ \frac{14\cdot(55-59{,}8)^2 + 30\cdot(60-59{,}8)^2 + 16\cdot(65-59{,}8)^2}{100} +$$

$$+ \frac{10\cdot(70-59{,}8)^2 + 4\cdot(75-59{,}8)^2 + 5\cdot(80-59{,}8)^2}{100} = 89{,}96$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{89{,}96} \approx 9{,}48$$

2) $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s}$ wariantalary tapalyň

$$u_1 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{40-59{,}8}{9{,}48} = \frac{-19{,}8}{9{,}48} = -2{,}09;$$

$$u_2 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{45-59{,}8}{9{,}48} = \frac{-14{,}8}{9{,}48} = -1{,}56;$$

$$u_3 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{50-59{,}8}{9{,}48} = \frac{-9{,}8}{9{,}48} = -1{,}03;$$

$$u_4 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{55-59{,}8}{9{,}48} = \frac{-4{,}8}{9{,}48} = -0{,}51;$$

$$u_5 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{60-59{,}8}{9{,}48} = \frac{0{,}2}{9{,}48} = 0{,}02;$$

$$u_6=\frac{x_i-\overline{x}_s}{\sigma_s}=\frac{65-59{,}8}{9{,}48}=\frac{5{,}2}{9{,}48}=0{,}55;$$

$$u_7=\frac{x_i-\overline{x}_s}{\sigma_s}=\frac{70-59{,}8}{9{,}48}=\frac{10{,}2}{9{,}48}=1{,}08;$$

$$u_8=\frac{x_i-\overline{x}_s}{\sigma_s}=\frac{75-59{,}8}{9{,}48}=\frac{15{,}2}{9{,}48}=1{,}60;$$

$$u_9=\frac{x_i-\overline{x}_s}{\sigma_s}=\frac{80-59{,}8}{9{,}48}=\frac{20{,}2}{9{,}48}=2{,}13.$$

$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (1-nji Goşmaça) peýdalanyp taparys

$$\varphi(u_1)=\varphi(-2{,}09)=\varphi(2{,}09)=0{,}0449;$$

$$\varphi(u_2)=\varphi(-1{,}56)=\varphi(1{,}56)=0{,}1182;$$

$$\varphi(u_3)=\varphi(-1{,}03)=\varphi(1{,}03)=0{,}2347;$$

$$\varphi(u_4)=\varphi(-0{,}51)=\varphi(0{,}51)=0{,}3503;$$

$$\varphi(u_5)=\varphi(0{,}02)=0{,}3989;\qquad \varphi(u_6)=\varphi(0{,}55)=0{,}3429;$$

$$\varphi(u_7)=\varphi(1{,}08)=0{,}2227;\qquad \varphi(u_8)=\varphi(1{,}60)=0{,}1109;$$

$$\varphi(u_9)=\varphi(2{,}13)=0{,}0413;$$

$y_i=\frac{n\cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_i)$ formuladan peýdalanyp, nazary egriniň y_i ordinatalaryny tapalyň

$$y_1=\frac{n\cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_1)=\frac{100\cdot 5}{9{,}48}\cdot 0{,}0449=52{,}74\cdot 0{,}0449\approx 2;$$

$$y_2=\frac{n\cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_2)=52{,}74\cdot 0{,}1182\approx 6;$$

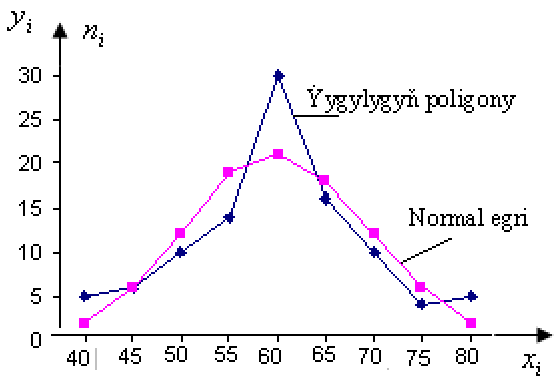
$$y_3=\frac{n\cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_3)=52{,}74\cdot 0{,}2347\approx 12;$$

$$y_4 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_4) = 52{,}74 \cdot 0{,}3503 \approx 19;$$
$$y_5 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_5) = 52{,}74 \cdot 0{,}3989 \approx 21;$$
$$y_6 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_6) = 52{,}74 \cdot 0{,}3429 \approx 18;$$
$$y_7 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_7) = 52{,}74 \cdot 0{,}2227 \approx 12;$$
$$y_8 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_8) = 52{,}74 \cdot 0{,}1109 \approx 6;$$
$$y_9 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_9) = 52{,}74 \cdot 0{,}0413 \approx 2;$$

Berlen we tapylan maglumatlary tablisada ýazalyň

x_i	n_i	$x_i - \overline{x}_s$	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s}$	$\varphi(u_i)$	$y_9 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_9) = = 52{,}74 \cdot \varphi(u_i)$
40	5	-19,8	-2,09	0,0449	2
45	6	-14,8	-1,56	0,1182	6
50	10	-9,8	-1,03	0,2347	12
55	14	-4,8	-0,51	0,3503	19
60	30	0,2	0,02	0,3989	21
65	16	5,2	0,55	0,3429	18
70	10	10,2	1,08	0,2227	12
75	4	15,2	1,60	0,1109	6
80	5	20,2	2,13	0,0413	2
	n=100				

3) Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda $(x_i; y_i)$ nokatlary guralyň we olary endigan egri bilen birikdireliň



6-njy çyzgy

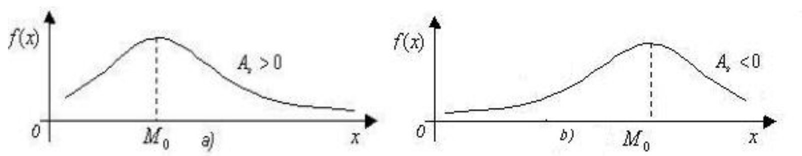
Bu koordinatalar sistemasynda ýygylygyň poligonyny hem gurup we grafikleri deňeşdirip, nazary egriniň gözegçiligiň netijeleri bilen kanagatlanarly ylalaşýandygyny görmek bolar.

3. Asimmetriýa we eksses

Empirik ýa-da nazary paýlanyşyň normal paýlanyşdan gyşarmasyny bahalandyrmakda asimmetriýa we eksses diýlip atlandyrylýan san häsiýetlendirijilerden peýdalanylýar.

Kesgitleme. Üçünji tertipli m_3 empirik(ýa-da μ_3 nazary) merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň üçünji derejesine bolan gatnaşygyna asimmetriýa diýilýär we A_s bilen belgilenýär.

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3}\ , \qquad (37)$$



7-nji çyzgy

bu ýerde m_3 empirik merkezi üçünji moment.Asimmetriýanyň alamatyny empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň moda görä ýerleşişi boýunça kesgitläliň. Eger empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň uzyn bölegi modadan sagda bolsa, $A_s > 0$ (7-nji çyzgy, *a*)), eger modadan çepde bolsa, $A_s < 0$ (7-nji çyzgy, *b*))

Normal paýlanyş üçin $A_s = 0$. Hakykatdan hem,

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^3 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^3 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys

$$\mu_3 = \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0,$$

sebäbi $y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ funksiýa täk, integrirleme çäkleri bolsa simmetrik. Onda

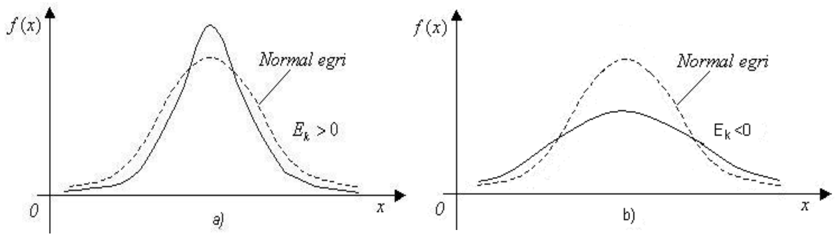
$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

Şol sebäpli, eger asimmetriýa nula golaý bolsa, baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanandygy barada netije çykarmak bolar.

Kesgitleme. Dördünji tertipli m_4 empirik (ýa-da μ_4 nazary) merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň dördünji derejesine bolan gatnaşygy bilen üçüň tapawudyna eksses diýilýär we E_k bilen belgilenýär

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 \qquad (38)$$

Eksess empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň grafigine (normal egrä) görä "kertlik" derejesini häsiýetlendirýär. Empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň normal egrä görä $E_k > 0$ bolsa, süýri, (8-nji çyzgy, a)), $E_k < 0$ bolsa, tekiz (8-nji çyzgy, b)) depesi bardyr



8-nji çyzgy

Normal paýlanyş üçin $E_k = 0$. Hakykatdan hem,

$$\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^4 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^4 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys

$$\mu_4 = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^4 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

Bölekler boýunça integrirleme usulyndan peýdalanyp taparys

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

Ýene-de bölekler boýunça integrirleme usulyny ulanyp alarys

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 3\sigma^4$$

Onda

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

Şol sebäpli, eger eksses nula golaý bolsa, baş toplumyň normal paýlanyşa eýedigini tassyklamak bolar.
Bellik. Eger

$$|A_s| \le 3\sigma_A \quad \text{we} \quad |E_k| \le 3\sigma_E$$

deňsizlikler adalatly bolsalar, onda empirik paýlanyşyň normal paýlanyşa golaýdygy barada netije çykarmak bolar, bu ýerde

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6}{n}}, \qquad \sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}},$$

degişlilikde asimmetriýanyň we ekssesiň standartlary hökmünde kabul edilen ululyklar, n-saýlamanyň göwrümi.

1-nji mesele. Saýlamanýň paýlanyşy berlen

x_i	40	45	50	55	60	65
n_i	4	5	20	10	6	5

Şertli momentlerden peýdalanyp
a) saýlama orta bahany;
b) saýlama dispersiýany;
ç) asimmetriýany;
d) ekssesi tapmaly.

$\triangleleft$ Hasaplamalary ýeňilleşdirmek üçin, berlen x_i wariantalardan u_i şertli wariantalara geçeliň. C ýalan nul hökmünde wariasiýa hatarynyň ortasyna golaý ýerleşen we iň uly ýygylyga $(n_3 = 20)$ eýe bolan $x_3 = 50$ wariantany kabul edeliň. $h = 5$ bolandygy sebäpli, taparys

$$u_1 = \frac{x_1 - C}{h} = \frac{40-50}{5} = -2; \quad u_2 = \frac{x_2 - C}{h} = \frac{45-50}{5} = -1;$$

$$u_3 = \frac{x_3 - C}{h} = \frac{50-50}{5} = 0; \quad u_4 = \frac{x_4 - C}{h} = \frac{55-50}{5} = 1;$$

$$u_5 = \frac{x_5 - C}{h} = \frac{60-50}{5} = 2; \quad u_6 = \frac{x_6 - C}{h} = \frac{65-50}{5} = 3.$$

Başky dört şertli momentleri tapalyň

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} = \frac{4\cdot(-2)+5\cdot(-1)+10\cdot 1+6\cdot 2+5\cdot 3}{50} = 0{,}48$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} = \frac{4\cdot 4+5\cdot 1+10\cdot 1+6\cdot 4+5\cdot 9}{50} = 2$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^3}{n} = \frac{4\cdot(-8)+5\cdot(-1)+10\cdot 1+6\cdot 8+5\cdot 27}{50} = 3{,}12.$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^4}{n} = \frac{4\cdot 16+5\cdot 1+10\cdot 1+6\cdot 16+5\cdot 81}{50} = 11{,}6$$

a) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany tapalyň

$$\bar{x}_s = M_1^* \cdot h + C = 0{,}48\cdot 5 + 50 = 52{,}4$$

b) D_s saýlama dispersiýany tapalyň

$$D_s = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]\cdot h^2 = \left[2-(0{,}48)^2\right]\cdot 25 = 44{,}24$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{44{,}24} \approx 6{,}65.$$

ç) Ilki üçünji tertipli m_3 empirik merkezi momenti tapalyň

$$m_3 = \left[M_3^* - 3\cdot M_1^* \cdot M_2^* + 2\cdot\left(M_1^*\right)^3\right]\cdot h^3 =$$
$$= \left[3{,}12 - 3\cdot 0{,}48\cdot 2 + 2\cdot(0{,}48)^3\right]\cdot 125 \approx 57{,}65$$

Onda

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} = \frac{57{,}65}{294{,}08} \approx 0{,}196$$

d) Dördünji tertipli m_4 empirik merkezi momenti tapalyň

$$m_4 = \left[M_4^* - 4\cdot M_1^* \cdot M_3^* + 6\cdot\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\cdot\left(M_1^*\right)^4\right]\cdot h^4 =$$
$$\left[11{,}6 - 4\cdot 0{,}48\cdot 3{,}12 + 6\cdot(0{,}48)^2\cdot 2 - 3\cdot(0{,}48)^4\right]\cdot 5^4 \approx 5134{,}47.$$

Onda

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 = \frac{5134,47}{(6,65)^4} - 3 \approx -0,37. \quad \triangleright$$

2-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen.

x_i	5	8	10	11	13	14	15	16	18	20	22	24	25
n_i	7	3	10	8	7	15	10	5	8	12	6	5	4

Şertli momentlerden peýdalanyp
a) saýlama orta bahany;
b) saýlama dispersiýany;
ç) asimmetriýany;
d) ekssesi tapmaly.

$\triangleleft$ Saýlamadan görnüşi ýaly, wariantalar deňdaşlaşan däldirler. Olary deňdaşlaşan ýagdaýa getireliň. Onuň üçin wariantalaryň hemmesiniň düşen (5;25) interwalyny şol bir $h = 4$ uzynlyklary bolan (5;9), (9;13), (13;17), (17;21), (21;25) bölek interwallara böleliň. Bu bölek interwallaryň ortalaryny y_i wariantalar hökmünde kabul edip, deňdaşlaşan

$$y_1 = 7; \quad y_2 = 11; \quad y_3 = 15; \quad y_4 = 19; \quad y_5 = 23$$

wariantalary alarys. Täze y_i wariantalaryň n_i ýygylyklary hökmünde degişli bölek interwallara düşen x_i wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alalyň

$$n_1 = 7 + 3 = 10; \quad n_2 = 10 + 8 + 7 = 25; \quad n_3 = 15 + 10 + 5 = 30;$$

$$n_4 = 8 + 12 = 20; \quad n_5 = 6 + 5 + 4 = 15.$$

Şeýlelikde, deňdaşlaşan wariantalary bolan

y_i	7	11	15	19	23
n_i	10	25	30	20	15

paýlanyşy alarys. C ýalan nul hökmünde $x_3 = 15$ wariantany kabul edip, u_i şertli wariantalary tapalyň

$$u_1 = \frac{y_1 - C}{h} = \frac{7 - 15}{4} = -2; \quad u_2 = \frac{y_2 - C}{h} = \frac{11 - 15}{4} = -1;$$

$$u_3 = \frac{y_3 - C}{h} = \frac{15-15}{4} = 0; \quad u_4 = \frac{4_4 - C}{h} = \frac{19-15}{4} = 1;$$

$$u_5 = \frac{y_5 - C}{h} = \frac{23-15}{4} = 2$$

Başky dört şertli momentleri tapalyň

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} = \frac{10\cdot(-2)+25\cdot(-1)+20\cdot 1+15\cdot 2}{100} = 0,05$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} = \frac{10\cdot 4+25\cdot 1+20\cdot 1+15\cdot 4}{100} = 1,45$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^3}{n} = \frac{10\cdot(-8)+25\cdot(-1)+20\cdot 1+15\cdot 8}{100} = 0,35$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^4}{n} = \frac{10\cdot 16+25\cdot 1+20\cdot 1+15\cdot 16}{100} = 4,45$$

a) $\bar{y}_s$ saýlama orta bahany tapalyň

$$\bar{y}_s = M_1^* \cdot h + C = 0,05\cdot 4 + 15 = 15,2$$

b) D_s saýlama dispersiýany tapalyň

$$D_s = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]\cdot h = \left[1,45 - \left(0,05\right)^2\right]\cdot 16 = 23,16$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{23,14} \approx 4,8.$$

ç) Ilki üçünji tertipli m_3 empirik merkezi momenti tapalyň

$$m_3 = \left[M_3^* - 3\cdot M_1^* \cdot M_2^* + \left(M_1^*\right)^3\right]\cdot h^3 =$$
$$= \left[0,35 - 3\cdot 0,05\cdot 1,45 + 2\cdot\left(0,05\right)^3\right]\cdot 4^3 \approx 8,496$$

Onda

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} = \frac{8,496}{\left(4,8\right)^3} \approx 0,08$$

d) Dördünji tertipli m_4 empirik merkezi momenti tapalyň

$$m_4 = \left[M_4^* - 4 \cdot M_1^* \cdot M_3^* + 6 \cdot \left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3 \cdot \left(M_1^*\right)^4\right] \cdot h^4 =$$

$$\left[4{,}45 - 4 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}35 + 6 \cdot (0{,}05)^2 \cdot 1{,}45 - 3 \cdot (0{,}05)^4\right] \cdot 4^4 \approx 1126{,}84$$

Onda

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 = \frac{1126{,}84}{(4{,}8)^4} - 3 \approx -0{,}88 \qquad \triangleright$$

§ 2.4. Korrelýasiýa nazaryýetiniň esasy düşünjeleri

1. Funksional we statistiki baglylyklar.

Belli bolşy ýaly, tötän ululyklar bagly däl ýa-da bagly bolup bilýärler.Eger ξ tötän ululygyň kabul edýän her bir bahasyna η tötän ululygyň kabul edýän kesgitli bir bahasy degişli bolsa, onda ξ we η tötän ululyklaryň arasynda funksional baglylyk bar diýilýär. Mysal üçin, tegelegiň *S* meýdany bilen *r* radiusynyň arasynda $S = \pi r^2$ görnüsli funksional baglylyk bardyr. Ýöne, tötän ululyklar tötän täsirleriň astynda bolandyklary sebäpli, olaryň arasynda funksional baglylyk seýrek duş gelýär.

Eger bir tötän ululygyň üýtgemegi beýleki tötän ululygyň paýlanyşynyň üýtgemegine getirýän bolsa, onda olaryň arasynda statistiki baglylyk bar diýilýär. Mysal üçin, şol bir göwrümleri bolan suwly iki howuza şol bir mukdardaky balyk işbilleri goýberilse, bu howuzlardan dürli mukdardaky balyk alynar. Işbilleriň we balyklaryň mukdarlarynyň arasynda baglylygyň bardygy aýdyňdyr. Emma bu funksional baglylyk däl-de statistiki baglylykdyr.

Goý ,ξ tötän ululygyň her bir bahasyna η tötän ululygyň birnäçe bahasy degişli bolsun. ξ tötän ululygyň *x* bahasyna degişli bolan, η tötän ululygyň bahalarynyň $\bar{y}_x$ orta arifmetiki bahasyna şertli orta baha diýilýär. Eger bu şertli orta baha *x* üýtgeýäne bagly

$$\bar{y}_x = f(x) \qquad (39)$$

funksiýa bolsa, onda η we ξ tötän ululyklaryň arasynda korrelýasiýa baglylygy bar diýilýär. Başgaça aýdylanda, korrelýasiýa baglylygynda bir tötän ululygyň üýtgemegi beýleki tötän ululygyň orta bahasynyň üýtgemegine getirýär. (39) deňlemä η tötän ululygyň ξ tötän ululyga regressiýa deňlemesi, $f(x)$ funksiýa regressiýa funksiýasy, bu funksiýanyň grafigine bolsa, regressiýa çyzygy diýilýär. ξ tötän ululygyň η tötän ululyga

$$\bar{x}_y = \varphi(y)$$

regressiýasy hem edil şuňa meňzeş kesgitlenýär.Eger $f(x)$ we $\varphi(y)$ regressiýa funksiýalarynyň ikisi hem çyzykly bolsa, onda korrelýasiýa çyzykly diýilýär.

Tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygynyň güýjüni tötän ululyklaryň bahalarynyň şertli orta bahalaryň töweregindäki ýaýraw öçegi bilen kesgitleýärler. Ýaýraw ölçegi uly boldugyça, tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygy gowşaýar.

2. Regressiýa gönüsiniň deňlemesi.

Goý, baş toplum ξ we η mukdar nyşanlara görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygy bar diýeliň. η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň deňlemesini tapmaklyk maksady bilen, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip, sanlaryň $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$ n jübüti alnan bolsun, bu ýerde x_i, $i = \overline{1,n}$, ξ nyşanyň, y_i, $i = \overline{1,n}$, η nyşanyň kabul edýän bahalary. Goý, bu jübütleriň her birine bir gezek gözegçilik edilýän bolsun. Onda $\bar{y}_x$ şertli orta bahany ulanmaklygyň zerurlygy ýokdyr. Şol sebäpli
$\bar{y}_x = \rho x + b$ deňlemä derek

$$Y = \rho x + b \qquad (40)$$

deňlemä garaýarlar, bu ýerde ρ ululyk regressiýanyň saýlama koeffisiýenti. Anyk (40) regressiýa deňlemesini ýazmaklyk üçin

ρ we *b* ululyklary tapmak ýeterlikdir. Bu ululyklary

$Y_i - y_i, \quad i = \overline{1, n},$ gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi minimal bolar ýaly saýlap alalyň, bu ýerde Y_i gözegçilik edilýän x_i warianta degişli, (40) deňlemeden tapylan ordinata, y_i bolsa x_i warianta degişli ordinata. Gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi ρ we *b* ululyklardan

$$G(\rho; b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2$$

funksiýadyr. Bu funksiýanyň minimumyny tapalyň

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{d\rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{dG}{db} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases} \qquad (41)$$

Bu deňlemeler sistemasyny çözüp, taparys

$$\rho = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \qquad (42)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \qquad (43)$$

ρ we b ululyklaryň bu bahalaryny (40) deňlemede ornuna goýup, η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň anyk deñlemesini alarys.

Goý, indi ξ we η nyşanlaryň $(x; y)$ bahalar jübütleriniň arasynda birden köp gezek gözegçilik edilýanleri hem bar bolsun. Bu ýagdaýda η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň deňlemesini

$$\bar{y}_x = \rho x + b \qquad (44)$$

görnüşde gözläliñ. (41) deňlemeler ulgamyny özgerdip ýazalyň

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\cdot\rho + n\overline{x}b = \sum n_{xy}\cdot x\cdot y \\ \overline{x}\cdot\rho + b = \overline{y} \end{cases}, \qquad (45)$$

bu ýerde n_{xy} ululyk $(x; y)$ jübütiň gözegçilik edilen sany. Bu sistemanyñ ikinji deňlemesinden taparys.

$$b = \overline{y} - \overline{x}\cdot\rho$$

b ululygyň bu bahasyny (44) deňlikde ornuna goýup,regressiýa gönüsiniň

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho(x - \overline{x}) \qquad (46)$$

deňlemesini alarys. (45) ulgamdan ρ ululygy tapalyň

$$\rho = \frac{\sum n_{xy}\cdot x\cdot y - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\left[\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right]} = \frac{\sum n_{xy}\cdot x\cdot y - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\cdot\sigma_\xi^2}$$

Bu deňlgiň iki tarapyny hem $\dfrac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}$ gatnaşyga köpeldeliň

$$\rho\cdot\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} = \frac{\sum n_{xy}\cdot x\cdot y - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\cdot\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta} \qquad (47)$$

$$r_s = \frac{\sum n_{xy}\cdot x\cdot y - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\cdot\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta} \qquad (48)$$

belgilemäni girizip, taparys

$$\rho = r_s\cdot\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$$

r_s ululyga saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti diýilýär. ρ ululygyň tapylan bahasyny (46) deňlemede ornuna goýup, η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň korrelýasiýa koeffisiýentli

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_s\cdot\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - \overline{x}) \qquad (49)$$

deňlemesini alarys.

Goý, D_y η nyşanyň kabul edýän y bahalarynyň $\bar{y}$ orta bahanyň töweregindäki dispersiýasy, D_y^* bolsa, degişli $\bar{y}_x$ şertli orta bahanyň töweregindäki dispersiýasy bolsun. Onda

$$D_y^* = D_y \cdot \left(1 - r_s^2\right) \qquad (50)$$

deňlik adalatlydyr. Indi korrelýasiýa koeffisiýentiniň häsiýetlerine garalyň.

1). Korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy birden uly däldir, ýagny $|r_s| \leq 1$.Hakykatdan hem, dispersiýanyň otrisatel däldigi sebäpli $D_y^* = D_y \cdot \left(1 - r_s^2\right) \geq 0$ bolar. Bu ýerden $\left(1 - r_s^2\right) \geq 0$ ýa-da $|r_s| \leq 1$

2) Eger korrelýasiýa koeffisiýenti nula deň we regressiýa çyzyklary gönüler bolsalar, onda nyşanlar çyzykly korrelýasiýa baglylygynda däldirler.Hakykatdan hem, eger $r_s = 0$ bolsa, (49) deňlemeden $\bar{y}_x = \bar{y}$ deňligi alarys. Görnüşi ýaly, $\bar{y}_x$ şertli orta bahalar x argumentiň islendik bahasynda şol bir hemişelik baha eýedirler. Bu bosa, nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň ýokdugyny aňladýar. Bu ýagdaýda regressiýa gönüleri degişli koordinata oklaryna paralleldirler.

3)Korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygynyň artmagy bilen çyzykly korrelýasiýa baglylygy has güýjeýär we $|r_s| = 1$ bolanda funksional baglylyga geçýär.Hakykatdan hem, (50) deňlikden görnüşi ýaly, korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy artdygyça D_y^* dispersiýa kemelýär. Bu bolsa, nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň güýjüniň artýandygyny aňladýar. $|r_s| = 1$ bolsa, (50) deňlikden alarys

$$D_y^* = D_y \cdot \left(1 - r_s^2\right) = 0.$$

Bu ýerden, ξ we η nyşanlaryň bahalarynyň islendik $(x; y)$ jübütiniň

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_s \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - \bar{x})$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Bu bolsa, ξ we η nyşanlaryň bahalarynyň arasynda çyzykly funksional baglylygyň bardygyny aňladýar.

Garalan bu häsiýetlerden görnüşi ýaly, saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nyşanlaryň arasyndaky çyzykly baglylygyň güýjüni häsiýetlendirýär: korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy bire golaý boldugyça baglylyk güýjeýär, nula golaý boldugyça gowşaýar.

Bellik. Saýlamada nyşanlaryň bahalarynyň çyzykly funksional baglylykda bolmagy, baş toplumda-da şeýle baglylygyň bolmagyny üpjün etmeýär. Onuň üçin saýlamanyň göwrüminiň uly bolmagy $(n \geq 50)$ we saýlamanyň wekilçilikli bolmagy gerekdir.

Bellik. Eger saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nula deň bolsa, onda nyşanlar çyzykly däl korrelýasiýa ýa-da funksional baglylygynda bolup bilerler.

§ 2.5. Statistiki çaklamalar we kriteriler

1. Statistiki çaklamalar.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýan bolsun. Bu nyşanyň näbelli paýlanyşy ýa-da belli paýlanyşynyň näbelli parametrleri barada aýdylan güman etmelere statistiki çaklamalar diýilýär. Näbelli θ parametriň kesgitli bir θ_0 baha eýedigi barada aýdylan güman etmä ýönekeý çaklama diýilýär. Eger θ parametr käbir köplükden bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa çylşyrymly çaklama diýilýär. Mysal üçin, eger

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

normal kanunyň dykyzlyk funksiýasy bolsa, onda "$a = 0, \quad \sigma = 1$" diýlen çaklama ýönekeýdir, "$a = a_0$" diýlen çaklama bolsa çylşyrymlydyr, sebäbi soňky çaklamada σ parametr islendik otrisatel däl bahany kabul edip biler.

Statistiki çaklamalary barlamaklyk meselesi şeýle goýulýar. Goý, $f(x;\theta)$ dykyzlyk funksiýaly baş toplumdan bagly däl

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (51)$$

saýlama geçirilen bolsun. θ parametr barada

$$H_0 : \theta \in A \quad \text{(A-käbir köplük)}$$

çaklama aýdylýar. Bu çaklama esasy (nulunjy ýa-da barlanylýan) çaklama diýilýär. H_0 esasy çaklama bilen bir hatarda $H_1 : \theta \overline{\in} A$ bäsdeş ýa-da alternatiw çaklama hem garaýarlar. Mysal üçin, eger H_0 esasy çaklama "Puasson kanunynyň λ matematiki garaşmasy 5-e deň" diýlen güman etmeden ybarat bolsa, onda H_1 bäsdeş çaklama "$\lambda \neq 5$" diýlen güman etme bolar.

H_0 esasy çaklama bilen (51) saýlamanyň ylalaşygyny anyklamak möhüm meseleleriň biri bolup durýar. Esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde paýlanyşy belli bolan tötän ululykdan peýdalanýarlar. Kesgitli bir kriteri saýlanyp alnandan soň, onuň bahalar köplügini kesişmeýän iki bölege bölýärler. Bu bölekleriň birinde esasy çaklama kabul edilýär, beýlekisinde bolsa inkär edilýär. Esasy çaklamanyň inkär edilýän bölegine kritiki köplük diýilýar. Çaklamanyň kabul edilýän we kritiki köplüklerini bölýän nokatlara kritiki nokatlar diýilýär we k_{kr} bilen belgilenýär.

Eger kriteri hökmünde saýlanyp alnan tötän ululygyň paýlanyş kanuny gyzyklandyrmaýan bolsa, onda ony K bilen belgileýärler. $K < k_{kr}$, $K > k_{kr}$, $(k_{kr} > 0)$ $K < k_{kr.1}$ we $K > k_{kr.2}$. $(k_{kr.1} < k_{kr.2})$ deňsizliker bilen kesgitlenýän köplüklere degişlilikde çeptaraplaýyn, sagtaraplaýyn we ikitaraplaýyn kritiki köplükler diýilýär. (51) saýlamanyň S kritiki köplüge düşmeginiň ähtimallygyny

$$P(x \in S) = P_\theta(S) = \int_S f(x;\theta)dx \qquad (52)$$

bilen belgiläliñ. Kritiki köplügi (52) ähtimallyk iň kiçi bolar ýaly edip saýlaýarlar.

2. Kriteriniň ähmiýetlilik derejesi we kuwwatlylygy.

S kritiki köplügiň kömegi bilen gurulýan kriterä S-kriteri diýilýar. Her bir S-kriteri bilen ýalňyşlygyň iki jynsyny baglanyşdyrýarlar. Birinji jynsly ýalňyşlyk dogry H_0 esasy çaklamanyň inkär edilmegidir. Ikinji jynsly ýalňyşlyk nädogry H_0 esasy çaklamanyň kabul edilmegidir. Bu ýalňyşlyklaryň haýsysynyň nähili netijelere getirjekdigi goýulýan meselä baglydyr.

$$P_i(A) = \int_A f(x;\theta)dx, \quad i = 0;1 \qquad (53)$$

belgilemäni girizeliň, bu ýerde A-käbir köplük. Onda S-kriteriniň birinji jynsly ýalňyşlygynyň ähtimallygy

$$\alpha = P_0(S), \qquad (54)$$

ikinji jynsly ýalňyşlygynyň ähtimallygy bolsa

$$\beta = P_1(\overline{S}), \qquad (55)$$

bolar, bu ýerde $\overline{S} = X \setminus S$ (X-baş toplum).Birinji jynsly ýalňyşlygyň α ähtimallygyna S-kriteriniň ähmiýetlilik derejesi diýilýär.

$$W(S;\theta) = \int_S f(x;\theta)dx \qquad (56)$$

funksiýa S-kriteriniň kuwwatlylyk funksiýasy diýilýär. Bu funksiýa parametriň hakyky bahasy θ bolanda, H_0 esasy çaklamanyň inkär edilmeginiň ähtimallygydyr. (54)-(56) aňlatmalardan görnüşi ýaly, birinji we ikinji jynsly ýalňyşlyklaryň ähtimallyklaryny kuwwatlylyk funksiýasy arkaly

$$\alpha = W(S;\theta), \quad 1-\beta = W(S;\theta)$$

görnüşde aňlatmak bolar.

Şeýlelikde, H_1 bäsdeş çaklamada H_0 esasy çaklamany barlamaklyk meselesi şeýle goýulýar: ilki α ähmiýetlilik derejesi berilýär we beýle ähmiýetlilik derejeleri bolan hemme S-kriterileriň F_α köplügine garalýar. Soňra bu kriterileriň arasyndan $\theta = \theta_1$

bolanda iň uly kuwwatlylygy bolan S^*-kriteri saýlanyp alynýar, ýagny

$$W(S^*;\theta_0)=\alpha, \quad W(S^*;\theta_1)=\max_{S\in F_\alpha} W(S;\theta).$$

Bu S^*-kriterä **has kuwwatly ýa-da optimal** diýilýär.

3. Korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetliligi baradaky çaklamanyň barlanyşy.

Goý, normal kanun boýunça paýlanan baş toplum ξ we η mukdar nyşanlara görä öwrenilýän bolsun. Bu toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip tapylan r_s saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nuldan tapawutly bosun. Bu ýerden r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti hem nuldan tapawutlydyr diýen netije gelip çykmaýar. Şol sebäpli, berlen α ähmiýetlilik derejesinde we $H_1: r_b \neq 0$ bäsdeş çaklamada r_b baş korrelýasiýa koeffisiýentiniň nula deňdigi baradaky $H_0: r_b = 0$ esasy çaklamany barlamaklyk zerurlygy ýüze çykýar. Eger H_0 esasy çaklama kabul edilse, onda r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti nula deňdir. Diýmek, ξ we η nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygy ýokdyr. Eger H_0 esasy çaklama inkär edilse, onda r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti nuldan tapawutlydyr. Bu ýagdaýda ξ we η nyşanlar çyzykly korrelýasiýa baglylygyndadyrlar.

H_0 esasy çaklamany barlamaklyk üçin kriteri hökmünde k= n-2 erkinlik derejeleri bolan Stýudent kanuny boýunça paýlanan

$$T=\frac{r_s\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

tötän ululyk kabul edilýär. Bäsdeş çaklama $H_1: r_b \neq 0$ bolandygy sebäpli, kritiki köplük ikitaraplaýyndyr. Ikitaraplaýyn kritiki köplük gurulanda T kriteriniň bu köplüge düşmeginiň ähtimallygynyň berlen α ähmiýetlilik derejesine deň bolmagyndan ugur alynýar. Bu ýagdaýda iň uly kuwwatlylyk

$$P(T < t_{kr.1.}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{we} \quad P(T > t_{kr.2.}) = \frac{\alpha}{2}, \qquad (t_{kr.1.} < t_{kr.2.})$$

deňlikler adalatly bolanlarynda alynýar. Stýudent paýlanyşynyň nula görä simmetrikdigi sebäpli, $t_{kr.}(\alpha;k)$ sag we $-t_{kr.}(\alpha;k)$ çep $(t_{kr.} > 0)$ kritiki nokatlary tapmaklyk ýeterlikdir. Bu ýagdaýda ikitaraplaýyn kritiki köplük

$$|T| < t_{kr.}(\alpha;k)$$

deňsizligiň kömegi bilen gurulýar. H_0 esasy çaklamanyň kabul ediýän köplügi bolsa $\lfloor -t_{kr.}(\alpha;k); t_{kr.}(\alpha;k) \rfloor$ kesimdir.

Saýlamanyň maglumatlary boýunça kriteriniň gözegçilik edilen bahasyny $T_{gozeg.}$ bilen belgiläliň. Berlen α ähmiýetlilik derejesinde we $H_1 : r_b \neq 0$ bäsdeş çaklamada r_b baş korrelýasiýa koeffisiýentiniň nula deňdigi baradaky $H_0 : r_b = 0$ esasy çaklamany barlamak üçin ilki T kriteriniň gözegçilik edilen

$$T_{gozeg.} = \frac{r_s \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

bahasy tapylýar. Soňra berlen α ähmiýetlilik derejesi, k= n-2 erkinlik derejeleriniň sany we Stýudent paýlanyşynyň kritiki nokatlarynyň tablisasy boýunça(4-nji Goşmaça) ikitaraplaýyn kritiki köplük üçin $t_{kr.}(\alpha;k)$ kritiki nokat tapylýar. Eger $|T| < t_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär etmäge esas ýokdyr. Eger $|T| > t_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklama inkär edilýär.

4. Pirsonyň kriterisi.

Goý, baş toplum paýlanyş kanuny näbelli bolan ξ nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu näbelli paýlanyşyň güman edilýän kanundygy baradaky çaklamany barlamak üçin ulanylýan kriterä ylalaşyk kriterisi diýilýär. Beýle kriterileriň biri hem iňlis matematigi K. Pirsonyň (Karl Pirson, 27.03.1857-27.04.1936) χ^2 (hi-kwadrat) kriterisidir. Bu kriteriniň hususu halda, ξ nyşan normal kanun boýunça paýlanan diýlen guman etmede ulanylyşyna garalyň.

Goý, baş toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilip,

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_m

statistiki paýlanyş alnan we $n_i^/$ nazary ýygylyklar hasaplanan bolsun. Berlen α ähmiýetlilik derejesinde ξ nyşanyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^/\right)^2}{n_i^/} \qquad (57)$$

tötän ululykdan peýdalanylýar. Saýlamanyň göwrümi artdygyça bu tötän ululygyň paýlanyşy baş toplumyň haýsy kanun boýunça paýlanandygyna garamazdan k erkinlik derejeleri bolan we

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, & x > 0. \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýaly χ^2 paýlanyş kanunyna ýygnanýar, bu ýerde

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} \cdot e^{-y} dy$$

gamma funksiýa. Şol sebäpli (57) tötän ululyga χ^2 ylalaşyk kriterisi diýilýär. Erkinlik derejeleriniň sany k= m-1-r deňlikden peýdalanyp tapylýar, bu ýerde *m*-dürli wariantalaryň (ýa-da bölek interwallaryň) sany, *r*-güman edilýän paýlanyş kanunynyň bahalandyrylýan parametrleriniň sany. Normal kanun üçin *r*=2 (matematiki garaşma we orta kwadratik gyşarma).Garalýan ýagdaýda, H_0 esasy çaklama adalatly bolanda we berlen α ähmiýetlilik derejesinde

$$P\left(\chi^2 > \chi_{kr.}(\alpha;k)\right) = \alpha$$

deňlik ýerine ýeter ýaly edip sagtaraplaýyn kritiki köplük gurulýar.
χ^2 ylalaşyk kriterisiniň saýlamanyň maglumatlary boýunça gözegçilik edilip tapylan bahasyny $\chi^2_{gozeg.}$ bilen belgiläliň. Şeýlelikde, ξ nyşanyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany barlamak üçin ilki $n_i^/$ nazary ýygylyklary, soňra χ^2 kriteriniň gözegçilik edilýän

$$\chi^2_{gozeg.} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^/\right)^2}{n_i^/}$$

bahasy tapylýar. Soňra berlen α ähmiýetlilik derejesi, k=m-3 erkinlik derejesiniň sany we χ^2 paýlanyşyň kritiki nokatlarynyň tablisasy (4-nji Goşmaça boýunça $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ kritiki nokat tapylýar. Eger $\chi^2_{gozeg.} < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär etmäge esas ýokdur. Eger $\chi^2_{gozeg.} > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär edýärler.

Bellik. (57) formulany

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{n_i^/} - n$$

görnüsde hem ýazmak bolar.

1-nji goşundy

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

x	0	1	2	3	4
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876

0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565
1	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608
2	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053
3	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029

3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

x	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669

1.9	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

2-nji goşundy

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0.00	0.00000	1.25	0.78870	2.50	0.98755
0.05	0.03988	1.30	0.80640	2.55	0.98922
0.10	0.07968	1.35	0.82298	2.60	0.99068
0.15	0.11924	1.40	0.83849	2.65	0.99195

0.20	0.15852	1.45	0.85294	2.70	0.99307
0.25	0.19741	1.50	0.86639	2.75	0.99404
0.30	0.23582	1.55	0.87886	2.80	0.99489
0.35	0.27366	1.60	0.89040	2.85	0.99583
0.40	0.31084	1.65	0.90106	2.90	0.99627
0.45	0.34729	1.70	0.90067	2.95	0.99682
0.50	0.38292	1.75	0.91988	3.00	0.99730
0.55	0.41768	1.80	0.92814	3.10	0.99806
0.60	0.45140	1.85	0.93569	3.20	0.99863
0.65	0.48431	1.90	0.94257	3.30	0.99903
0.70	0.51607	1.95	0.94882	3.40	0.99933
0.75	0.54675	2.00	0.95450	3.50	0.99958
0.80	0.57629	2.05	0.95964	3.60	0.99968
0.85	0.60468	2.10	0.96427	3.70	0.99978
0.90	0.63188	2.15	0.96844	3.80	0.99986
0.95	0.65789	2.20	0.97219	3.90	0.99990
1.00	0.68269	2.25	0.97555	4.00	0.99994
1.05	0.70628	2.30	0.97855	4.10	0.99996
1.10	0.72867	2.35	0.98123	4.20	0.99997
1.15	0.74985	2.40	0.98360	4.30	0.99998
1.20	0.76986	2.45	0.98521	4.40	0.99999

3-nji goşundy

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ **bahalaryň tablisasy**

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,754
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600

9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	39,2
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4-nji goşundy

$q = q(\gamma, n)$ **bahalaryň tablisasy**

n	γ			n	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

E D E B I Ý A T

1.Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow (gysgaça terjimehal). Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 128 sah.

2.Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 96 sah.

3.Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 44 sah.

4.Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygyndysy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 416 sah.

5.Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Umumy milli “Galkynyş” Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 48 sah.

6.Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – Saglygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 175 sah.

7.Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 64 sah.

8.Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 133 sah.

9.Aşyrow O., Töräýew A. Matematiki analiz. t. 1, Aşgabat, Magaryf , 1990.

10.Aşyrow O. Matematiki seljermäniň esaslary. I .Aşgabat, TDNG, 2006.

11.Aşyrow O. Matematiki seljermäniň esaslary.II.Aşgabat, TDNG, 2006.
12.Gurbanmämmedow N., Aşyrow O., Aşyrow A., Geldiýew B. Ýokary matematika. I. Aşgabat, TDNG, 2010.
13.Баврин И.И. Высшая математика. Москва, Просвещение, 1980.
14.Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1, 2. Минск. Изд-во БГУ, 1983.
15.Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. ч. 1,2. Минск. «Вышейш. Школа», 1972.
16.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. Москва, Наука, 1971.
17.Кудрявцев В.А..Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Наука, 1986.
18.Шипачев В.С. Высшая математика. Москва, Высш. школа, 1990.

M A Z M U N Y

II bap. MATEMATIKI ANALIZ (dowamy)