

## I. 2. BIRINJI WE IKINJI TERTIPLI ALGEBRAIK ÇYZYKLAR

### § 2.1. Tekizlikde göni çyzyklar

**1. Göni çyzyklaryň dürli görnüşleri.** Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä göni çyzyklary dürli usullar boýunça berip bolar. Şoňa baglylykda olar dürli görnüşdäki deňlemeler arkaly aňladylýar. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň  $Oy$  okuna parallel bolan we onuň  $Ox$  okuny  $A(a, 0)$  nokatda kesýän göni çyzyga seredelein (1-nji surat). Ol göni çyzygyň deňlemesi

$$x = a \quad (1)$$

görnüşdäki deňlemedir. Hakykatdan-da, ol göni çyzygyň islendik  $M(x, y)$  nokadynyň  $x$  koordinatasy (1) deňlemäni kanagatlandyryýar we ol göni çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň  $x$  koordinatasy ony kanagatlandyрмаýar. Eger  $a = 0$  bolsa, onda göni çyzyk  $Oy$  oky bilen gabat gelýär we onuň deňlemesi

$$x = 0 \quad (2)$$

bolar.

Orta mekdebiň matematikasyndan belli bolşy ýaly  $Ox$  okuny kesýän göni çyzygyň deňlemesi

$$y = kx + b \quad (3)$$

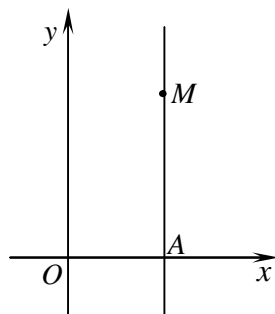
görnüşdedir, bu ýerde  $k = tg\alpha$  onuň burç koeffisiýenti bolup,  $\alpha$  - göni çyzyk bilen  $Ox$  okunyň arasyndaky burçdyr,  $b = OB$  bolsa göni çyzygyň  $Oy$  okunda kesip alýan ugrukdurulan  $\overline{OB}$  kesiminiň ululygydyr. (3) deňlemä göni çyzygyň **burç koeffisiýentli** deňlemesi diýilýär. Eger göni çyzyk  $Ox$  okuna parallel bolsa, ýagny  $\alpha = 0$ ,  $k = 0$ , onda (3) deňleme

$$y = b$$

görnüsi alar.  $Ox$  okunyň ähli nokatlarynyň  $y$  koordinatasy nola deňdir. Şoňa görä-de  $Ox$  okunyň deňlemesi

$$y = 0$$

bolar. (3) göni çyzygyň burç koeffisiýentini şol göni çyzykda ýatýan iki dürli  $B(x_1, y_1)$ ,  $M(x_2, y_2)$  nokatlaryň koordinatalary arkaly aňlatmak bolar. (3) göni çyzykda ýatýandygy üçin olaryň koordinatalary şol



1-nji surat

N.Gurbanmämmadow, O.Aşyrow,  
A.Aşyrow, M.Almazow

## EKOLOGIÝADA MATEMATIKANYŇ USULLARY

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary  
üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň bilim ministrligi  
tarapyndan hödürlenildi*

**A ş g a b a t - 2 0 1 0**

Okuw kitabyna analitik geometriýa, ýokary algebra, wematematiki analiziň bölümleri (analiziň başlangyjy we bir üýtgeýänli funksiýanyň differensial we integral hasabyýeti), birinji we ýokary tertipli ady differensial deňlemeler, ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň elementleri girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen çözülip görkezilen mysallar getirilýär.

**Dosent O.Aşyrowyň redaksiýasy bilen**

**16.** Depeleri  $A(-4, 2)$ ,  $B(6, 8)$ ,  $C(4, -10)$  nokatlarda bolan üçburçlugyň medianalarynyň esaslaryny tapmaly.

**17.** Bir ujy  $A(4, 5)$  nokatda bolan  $[AB]$  kesimiň ortasy  $C(-3, 7)$  nokatda ýerleşýär. Kesimiň beýleki ujyny tapmaly.

**18.** Berlen  $A(1, 2)$  we  $B(-1, 4)$  nokatlar boýunça  $[AB]$  kesimi  $A$  nokatdan başlap 1:2 gatnaşykda bölýän  $C$  nokady tapmaly.

**19.**  $[AB]$  kesim  $A$  nokatdan başlap  $C(4, 1)$  nokat bilen 1:4 gatnaşykda bölünen.  $A$  nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

**20.**  $ABC$  üçburçluklaryň meýdanlaryny tapmaly:

1)  $A(-2, -2)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(4, 8)$ ; 2)  $A(-1, 5)$ ,  $B(4, 8)$ ,  $C(6, 2)$ .

**21.** Üçburçlugyň  $A(3, 5)$ ,  $B(6, -2)$  depeleri berlen.  $ABC$  üçburçlugyň meýdany 15-e deň bolar ýaly  $Oy$  okunda  $C$  nokady tapmaly.

### **J o g a p l a r**

- 1.** 1) 3; 2) -7; 3) 14; 4) -5 . **2.** 1) 5; 2) 13; 3) 6; 4) 5.  
**3.** 1)  $A(-3)$ ; 2)  $A(1)$ ; 3)  $A(8)$  . **5.** 1)  $A_1(3, -4)$ ,  $B_1(-2, -5)$ ,  $C_1(-3, 3)$  .  
**6.** 1)  $A_1(1, -2)$ ,  $B_1(3, 2)$ ,  $C_1(-4, -7)$  . **8.**  $A(1, \sqrt{3})$ ,  $B(0, -6)$ ,  $C(-5, 0)$  .  
**9.**  $A(\sqrt{2}, 3\pi/4)$ ,  $B(2, \pi/2)$ ,  $C(3, 0)$ ,  $D(\sqrt{2}, \pi/4)$  . **10.** 1) 5; 2)  $7\sqrt{2}$  ;  
 3)  $\sqrt{29}$  ; 4) 5; 5) 10. **11.** 32. **12.**  $C_1(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ ,  $C_2(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$  .  
**13.**  $32\sqrt{3}$  . **14.** 20. **15.** 1) (4, 1); 2) (-4, 0) ; 3) (-3, -3) . **16.** 1)  
 (1, 5); 2) (0, -4); 3) (5, -1). **17.**  $B(-10, 9)$  . **18.**  $C(1/3, 8/3)$  .  
**19.**  $A(3, 0)$  . **20.** 1) 24; 2) 18. **21.**  $C_1(0, 2)$ ,  $C_2(0, 22)$  .

## G ö n ü k m e l e r

1. Ugrukdyrylan  $\overline{AB}$  kesimiň ululyklaryny tapmaly:  
1)  $A(2), B(5)$ ; 2)  $A(3), B(-4)$ ; 3)  $A(-6), B(8)$ ; 4)  $A(-2), B(-7)$
2. Ugrukdyrylan  $\overline{AB}$  kesimiň uzynlyklaryny tapmaly:  
1)  $A(3), B(8)$ ; 2)  $A(4), B(-9)$ ; 3)  $A(-5), B(1)$ ; 4)  $A(-3), B(-8)$ .
3. Belli bolan 1)  $B(2), AB = 5$ ; 2)  $B(3), BA = -2$  3)  $B(5), BA = -3$   
boýunça koordinatalar okunda  $A$  nokadyň koordinatalaryny tapmaly.
4. Gönüburçly dekart koordinatalarynda nokatlary gurmaly:  
 $A(1, 4), B(2, -3), C(-3, 5), D(-1, -2), E(0, 1), F(5, 0)$ .
5.  $Ox$  okuna görä  $A(3, 4), B(-2, 5), C(-3, -3)$  nokatlara simmetrik nokatlary tapmaly.
6. Koordinatalar başlangyjyna göre  $A(-1, 2), B(-3, -2), C(4, 7)$  nokatlara simmetrik nokatlary tapmaly.
7. Polýar koordinatalarynda  $A(3, \pi/4), B(1, -\pi/4), C(4, 3\pi/4), D(2, -3\pi/4)$  nokatlary gurmaly.
8. Polýar koordinatalarynda berlen  $A(2, \pi/3), B(6, -\pi/2), C(5, \pi)$  nokatlaryň gönüburçly dekart koordinatalaryny tapmaly.
9. Dekart koordinatalarynda berlen  $A(-1, 1), B(0, 2), C(3, 0), D(1, 1)$  nokatlaryň polýar koordinatalaryny tapmaly.
10. Berlen  $A(4, 3), B(0, 0), C(-3, -4), D(6, 8)$  nokatlar boýunça  
1)  $A$  we  $B$ ; 2)  $A$  we  $C$ ; 3)  $A$  we  $D$ ; 4)  $B$  we  $C$ ; 5)  $B$  we  $D$   
nokatlaryň arasyndaky uzaklyklary hasaplamaly.
11. Iki çatyk depeleri  $A(5, 6), B(9, 2)$  nokatlarda bolan kwadratnyň meýdanyny hasaplamaly.
12.  $A(0, 2), B(2, 0)$  depeleri berlen deňtaraply  $ABC$  üçburçlugyň  $C$  depesiniň koordinatalaryny tapmaly.
13.  $A(-3, -5), B(5, 3)$  depeleri berlen deňtaraply  $ABC$  üçburçlugyň meýdanyny hasaplamaly.
14.  $A(1, 1), B(1, 6), C(5, 9)$  depeleri berlen  $ABCD$  rombuň meýdanyny hasaplamaly.
15.  $[AB]$  kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapmaly: 1)  $A(3, -7), B(5, 9)$ ; 2)  $A(-5, -1), B(-3, -1)$ ; 3)  $A(2, 6), B(-8, -12)$ .

## S Ö Z B A Ş Y

Matematikanyň usullarynyň durmuşda duş gelýän köp amaly meseleleri çözmekde giňden ulanylmagy, tebigy ylymlaryň ugurlaryndan, şol sanda ekologiýa boýunça hünär alýan talyplardan ýokary matematikany oňat bilmeklerini we onuň usullaryny ele alyp, tebigy ylymlarda duş gelýän dürli görnüşdäki meseleleri çözmeklikde ulanmaklygy başarmagyny talap edýär.

Bu okuw kitaby uniwersitetiň ekologiýa hünärini alýan talyplaryna niýetlenip ýazyldy. Oňa analitik geometriýanyň göni çyzykda koordinatalar, tekizlikde koordinatalar sistemasy, tekizlikde birinji we ikinji tertipli algebraik çyzyklar bölümleri; ýokary algebranyň kesgitleýjiler we olaryň kömegi bilen çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözülişi, matrisalar, olaryň häsiýetleri we olar bilen geçirilýän amallar, wektor algebrasy bölümleri; kompleks sanlar düşüňjesi we olar bilen geçirilýän amallar; matematiki analiziň funksiýa, funksiýanyň predeli we üznüksizligi, funksiýanyň önümi we differensialy we olaryň ulanylyşyny görkezýän bölümler, şeýle hem kesgitsiz we kesgitli integrallar, olaryň ulanylyşlary hem-de hususy däl integrallaryň bölümleri; birinji we ýokary tertipli ady differensial deňlemeler, ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanýň elementleri girizildi.

Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen bölümde beýan edilen düşüňjeleriň ulanylyşyny görkezýän mysallar getirilýär we olaryň çözülişleri görkezilýär. Şeýle hem her bölümiň ahyrynda talyplar bilen amaly sapaklar geçilende we özbaşdak işlerde ulanar ýaly köpsanly mysallar getirilýär.

Kitapda ýygy-ýygýdan duş gelýän “bar bolup” (“tapylyp”) sözleriniň ýerine barlygy aňladýan  $\exists$  belgi, “islendik” (“her bir”) sözleriniň ýerine bolsa umumylygy aňladýan  $\forall$  belgi ulanylýar.  $A \Rightarrow B$  ýazgy  $A$  sözlemden  $B$  sözlemiň gelip çykýandygyny aňladýar. Eger-de, onuň üstesine  $B$  sözlemden  $A$  sözlem hem gelip çykýan bolsa, onda ol  $A \Leftrightarrow B$  ýazgyda aňladylýar. Mysal üçin,  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in B, P \ni m \exists$  gysgaça ýazgylar “islendik  $\varepsilon$  uludyr nol”, “islendik  $x$  degişli  $B$ ”, “ $P$  degişli  $m$  tapylyp” diýlip okalýar. Teoremanyň subudynyň, mysalyň çözülişiniň başlangyjyny we ahyryny görkezmek üçin  $\triangleleft$  we  $\triangleright$  belgiler ulanylýar.

# I bap. ANALITIK GEOMETRIYA WE YOKARY ALGEBRA

## I.1. TEKIZLIKDE ANALITIK GEOMETRIYA

### § 1.1. Göni çyzykda koordinatalar

**1. Ugrukdyrylan kesim.** Käbir göni çyzyk alalyň we onuň kesgitleýän iki ugurlarynyň birini saýlap, ony položitel ugur, beýlekisini otrisatel ugur hasap edeliň. Položitel ugry kesgitlenen göni çyzyga ok diýilýär. Onuň islendik kesiminiň uzynlygyny ölçemek üçin ol okda uzynlyk birligini, ýagny masştab alalyň. Uçlary  $A$  we  $B$  nokatlar bolan kesime seredeliň. Eger  $A$  we  $B$  nokatlaryň haýsysynyň ol kesimiň başlangyjy, haýsynyň ahrydygy görkezilen bolsa, onda oňa ugrukdyrylan kesim diýilýär. Kesimiň ugry diýlip başlangyçdan ahya tarap bolan ugur hasap edilýär. Başlangyjy  $A$  we ahry  $B$  nokat bolan ugrukdyrylan kesim  $\overline{AB}$  bilen, onuň uzynlygy bolsa  $|\overline{AB}|$  ýa-da  $|AB|$  bilen belgilenýär. Dürli bolan iki

$A$  we  $B$  nokatlar iki sany  $\overline{AB}$  we  $\overline{BA}$  ugrukdyrylan kesimleri kesgitleýär. Eger  $A$  we  $B$  nokatlar gabat gelýän bolsa, onda  $\overline{AA}$  kesime nol kesim diýilýär. Ugry okuň položitel ugry bilen gabat glende goşmak alamaty bilen, otrisatel ugry bilen gabat gelende aýyrmak alamaty bilen alynýan ugrukdyrylan  $\overline{AB}$  kesimiň uzynlygyna şol kesimiň ululygy diýilýär we  $AB$  bilen belgilenýär, şunlukda  $AB = -BA$  deňlik dogrudyr. Bu kesgitlemäniň esasynda okda islendik ýagdaýda ýerleşýän dürli  $A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlaryň ugrukdyrylan  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  kesimleriniň ululyklary üçin

$$AB + BC = AC \quad (1)$$

deňlik ýerine ýetýär.

**2. Koordinatalar oky.** Käbir  $x$  göni çyzykda  $O$  we  $B$  nokatlary belläliň (1-nji surat) we olara degişlilikde koordinatalaryň başlangyç we birlik nokatlary diýeliň.

Göni çyzykda  $\overline{OB}$  kesim bilen ugurdaş položitel ugry saýlap alalyň.

Položitel ugry, hasap başlangyjy we uzynlygy ölçemek üçin masştab birligi kesgitlenen  $Ox$  göni çyzyga koordinatalar oky diýilýär. Şol okuň erkin  $M$  nokady üçin (1-nji surat) ugrukdyrylan  $\overline{OM}$  kesimiň ululygyna  $M$  nokadyň koordinatasy diýilýär. Eger ol nokadyň koordinatasy  $x$

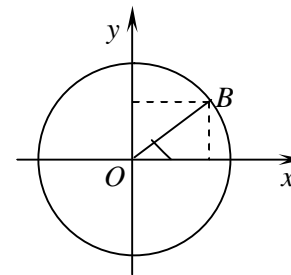
hökmünde töweregiň erkin  $B = B(x, y)$  nokady üçin  $OB$  kesimiň  $Ox$  oky bilen emele getirýan burçuny almak bolar. Bu halda berlen töweregiň parametrik deňlemeleri

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi) \quad (19)$$

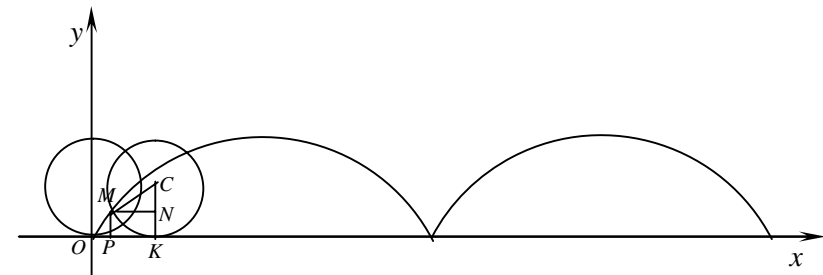
görnüşde bolar. Olardan  $t$  parametri ýoklap (olary kwadrata göterip we goşup), töweregiň (15) deňlemesini alarys.

Indi bolsa  $R$  radiusly töweregiň göni çyzyk boýunça togalananda onuň käbir bellenen nokadynyň çyzýan çyzygyna garalyň. Oňa sikloid diýilýär. Göni çyzygy gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň  $Ox$  oky hökmünde alalyň (12-nji surat). Goý, bellenen

nokat töweregiň başlangyç ýagdaýynda koordinatalar başlagyjynda bolsun



11-nji surat



12-nji surat

we töwerek  $t$  ( $MCN$ ) burç öwrülenden soň ol  $M = M(x, y)$  nokada barsyn. Onda suratdan görnüşi ýaly

$$x = OP = OK - PK, \quad y = MP = CK - CN, \quad CM = CK = R,$$

$$OK = MK = Rt, \quad PK = MN = R \sin t, \quad CN = R \cos t. \text{ Şonuň üçin hem}$$

$$x = Rt - R \sin t, \quad y = R - R \cos t \text{ ýa-da}$$

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t) \quad (20)$$

bolar. Bu deňlemelere sikloidiň parametrik deňlemeleri diýilýär.

üçin onuň koordinatasy (16) deňlemeleriň birnji deňlemesini hem, ikinji deňlemesini hem kanagatlandyryr, ýagny

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ G(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

deňlemeler sistemasyny kanagatlandyryr. Tersine, eger-de käbir  $K(x_o, y_o)$  nokadyň  $x_o, y_o$  koordinatalary (16) çyzyklaryň birinjisinde hem, ikinjisinde hem ýatýan bolsa, onda ol nokat şolaryň kesişme nokadydyr.

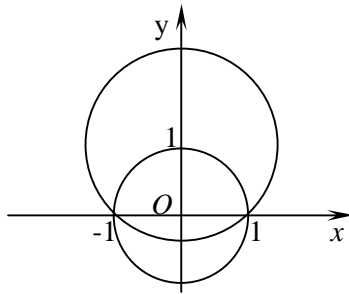
Şeýlelikde, çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmak üçin olaryň deňlemeleriniň sistemasyny çözmek zerurdyr. Şunlukda, hakyky kökleriň sany olaryň kesişme nokatlarynyň sanyna deňdir. Eger (17) sistemanyň hakyky kökleri ýok bolsa, onda (16) çyzyklar kesişýän dälir.

**8-nji mysal.**  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + (y-1)^2 = 2$  çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmaly (10-njy surat)..

◁ Kesişme nokatlary tapmak üçin

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 + (y-1)^2 &= 2 \end{aligned} \right.$$

sistemany çözeň. Ikinji deňlemeden birinji aýryp alarys:  $2y = 0$ ,  $y = 0$ . Birinji deňlemede  $y = 0$  goýup,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  alarys. Şeýlelikde, çyzyklar  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  nokatlarda kesişýärler. ▷



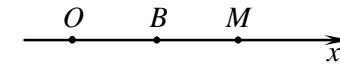
10-njy surat

**3. Çyzygyň parametrik deňlemeleri.** Goý, tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalarynda käbir çyzyk berlen bolsun. Käbir hallarda onuň erkin nokadynyň  $(x, y)$  koordinatalaryny (parametr atlandyrylýän) üçünji  $t$  ululyk arkaly aňladyp bolýar:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), & y &= \psi(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Eger  $t$  parametr käbir (tükenikli ýa-da tükeniksiz) aralykda üýtgände (18) formuladan berlen çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalary alynýan bolup, çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň koordinatalary alynmaýan bolsa, onda (18) deňlemelere çyzygyň parametrik deňlemeleri diýilýär.

Mysal üçin, eger tekizlikde merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy  $R$  deň bolan töwerek berlen bolsa (11-nji surat), onda  $t$  parametr



1-nji surat

bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$x = OM \quad (2)$$

bolar. Şunlukda,  $M(x)$  ýazgy  $x$ -iň  $M$  nokadyň koordinatasydygyny aňladýar.

Şeýlelikde, eger koordinatalar okunyň nokady berlen bolsa, onda şol nokadyň koordinatasy bolan sany görkezmek bolar, şeýle hem berlen san üçin koordinatalar okunda şol san koordinatasy bolan ýeke-täk bir nokady gurmak bolar. Diýmek, koordinatalar okunyň nokatlary bilen hakyky sanlaryň köplügiň arasynda özara birbähaly degişlilik gurnalandyr. Şoňa görä hakyky sanlaryň köplügiňe san oky we her bir hakyky sana san okunyň nokady hem diýilýär.

Ugrukdyrylan kesimiň ululygyny we onuň uzynlygyny şol kesimiň başlangyjynyň we ahyrynyň koordinatalary arkaly aňlatmak bolar.

Eger okuň  $M_1(x_1)$ ,  $M_2(x_2)$  iki nokady berlen bolsa, onda ugrukdyrylan  $\overline{M_1M_2}$  kesimiň ululygy we onuň uzynlygy degişlilikde

$$M_1M_2 = x_2 - x_1; \quad |M_1M_2| = |x_2 - x_1| \quad (3)$$

formulalar boýunça aňladylýar.

Hakykatdan-da, koordinatalar okunyň  $O$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  nokatlary üçin (1) formula esasynda

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2$$

deňligi we (2) formula esasynda  $x_1 = OM_1$ ,  $x_2 = OM_2$  deňlikleri ýazmak bolar. Olardan bolsa  $M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$  deňlik gelip çykýar. Ugrukdyrylan  $\overline{M_1M_2}$  kesimiň uzynlygynyň onuň ululygynyň absolyút ululygyna deňligi üçin  $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$  bolar.

$M_1$  we  $M_2$  nokatlaryň arasyndaky uzaklyk  $\rho(M_1, M_2)$  bilen hem belgilenýär. Şonuň üçin (3) formulalaryň ikinjisi

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|$$

görnüşde ýazylýar.  $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$  deňligiň esasynda koordinatalar okunyň iki nokadynyň arasyndaky uzaklygy tapmaklyk (3) formula

esasynda olaryň koordinatalarynyň birinden beýlekisini aýryp, tapawudyň modulyny almaklygy aňladýar.

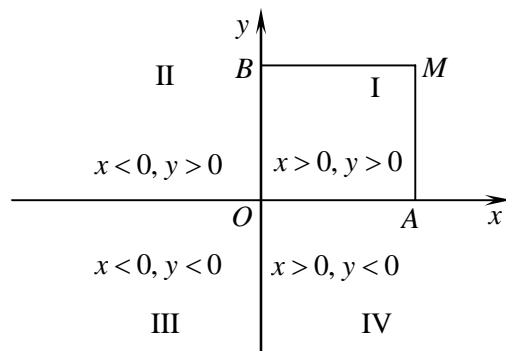
**1-nji mysal.** Berlen  $M_1(2), M_2(-7)$  nokatlaryň arasyndaky uzaklygy we ugrukdyrylan  $\overline{M_1M_2}$  kesimiň ululygyny tapmaly.

◁  $x_1 = 2, x_2 = -7$  üçin (3) formulany ulanyp taparys:

$$\rho(M_1, M_2) = |-7 - 2| = |-9| = 9, M_1M_2 = -7 - 2 = -9. \triangleright$$

## § 1.2. Tekizlikde koordinatalar sistemasy

**1. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy.** Umumy  $O$  başlangyjy we birmeňzeş masştab birligi bolan özara perpendikulýar  $Ox$  we  $Oy$  oklar tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny emele



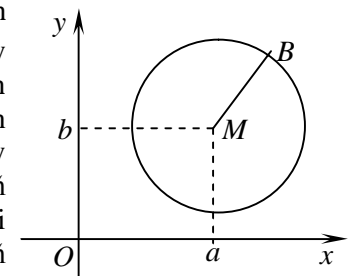
2-nji surat

getirýär. Sol sistemadaky  $Ox$  oka absissa oky we  $Oy$  oka ordinata oky diýilýär. Ol oklaryň kesişme nokadyna koordinatalar başlangyjy, olaryň ýerleşýän tekizligine koordinatalar tekizligi diýilýär we  $Oxy$  bilen belgilenýär. Goý, seredilýän tekizlikde erkin  $M$  nokat berlen bolsun. Şol nokatdan  $Ox$  we  $Oy$  oklaryna degişlilikde  $MA$  we  $MB$  perpendikulýarlary geçireliň (2-nji surat). Şunlukda, perpendikulýarlaryň oklar bilen kesişmeginden alnan ugrukdyrylan  $\overline{OA}$  we  $\overline{OB}$  kesimleriň  $OA$  we  $OB$  ululyklaryna degişlilikde  $M$  nokadyň gönüburçly  $x$  we  $y$  koordinatalary diýilýär, ýagny  $x = OA, y = OB$ .  $M$  nokadyň  $x$  we  $y$  koordinatalaryna degişlilikde şol nokadyň absissasy we ordinatasy diýilýär.  $M$  nokadyň koordinatalarynyň  $x$  we  $y$  bolýandygy  $M(x, y)$  ýazgyda aňladylýar. Şunlukda, ýaýyň içinde ilki onuň absissasy, ikinji ordinatasy görkezilýär. Absissa okunda ýerleşýän nokatlar üçin  $y = 0$  we ordinata okunda ýerleşýän nokatlar üçin  $x = 0$ , koordinatalar başlangyjy üçin bolsa

merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy bäşe deň bolan töweregi kesgitleýär. Käbir deňleme bilen kesgitlenýän köplük bir nokady (mysal üçin,  $x^2 + y^2 = 0$  deňleme diňe bir  $(0, 0)$  nokady), käbir deňleme bolsa boş köplügi kesgitleýär (mysal üçin,  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  deňleme, çünki tekizligiň hiç bir nokady ol deňlemäni kanagatlandyрмаýar). Çyzygyň deňlemesiniň kesgitlemesi esasynda berlen nokadyň çyzykda ýatýanlygy aňsat görkezilýär. Eger nokadyň koordinatalary deňlemede goýulanda san deňlik (tożdestwo) alynsa, onda nokat çyzykda ýatýar, eger-de tożdestwo alynmasa, onda nokat çyzykda ýatmaýar.

**7-nji mysal.** Merkezi  $M(a, b)$  nokatda we radiusy  $R$  bolan töweregiň deňlemesini düzmeli.

◁ Goý,  $B = B(x, y)$  töweregiň erkin nokady bolsun (9-njy surat). Belli bolşy ýaly töweregiň – tekizligiň bir nokatdan (merkezden) deň daşlykda bolan nokatlarynyň köplügi bolýandygy esasynda we onuň islendik nokadynyň merkezden uzaklygynyň  $R$  sana deňligi üçin iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyny ulanyp,



9-njy surat

$$\rho(M, B) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

deňligi alarys. Ondan bolsa gözlenýän töweregiň deňlemesini alarys:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \triangleright \quad (14)$$

Bu töweregiň islendik nokadynyň koordinatalary ol töweregiň deňlemesini kanagatlandyryar. Eger  $N(x, y)$  nokat şol towerekde ýatmaýan bolsa, onda  $\rho(M, N) < R$  ýa-da  $\rho(M, N) > R$  bolar we şonuň üçin onuň koordinatalary (14) deňlemäni kanagatlandyрмаýar. (14) deňlemeden  $a = b = 0$  bolanda alynýan

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (15)$$

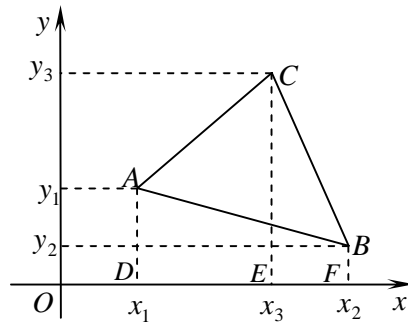
deňlemä töweregiň kanonik deňlemesi diýilýär.

**2. Çyzyklaryň kesişmesi.** Goý, iki çyzyk

$$F(x, y) = 0, G(x, y) = 0 \quad (16)$$

deňlemeler arkaly berlen bolsun. Olaryň kesişme nokadyny tapalyň. Olaryň kesişme nokady birinji çyzyga hem, ikinji çyzyga hem degişlidir, şonuň

$$S = \frac{1}{2} |[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]|$$



8-nji surat

formulany alarys. Ondan bolsa ýönekeý ögertmeler esasynda (12) formula gelip çykýar. Üçburçlugyň islendik başgaça ýerleşşi üçin hem (12) formula şonuň ýaly subut edilýär. ▷

**6-njy mysal.** Depeleri  $A(1, 1)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(8, 2)$  nokatlarda bolan  $ABC$  üçburçlugyň  $S$  meýdanyny tapmaly.

◁ Üçburçlugyň meýdanyny (12) formulany ulanyp taparys:

$$S = \frac{1}{2} |[(6-1)(2-1) - (8-1)(4-1)]| = \frac{1}{2} |[-16]| = 8 \text{ (kw.birlik).} \triangleright$$

#### § 1. 4. Tekizlikde koordinatalary baglanyşdyrýan deňlemeleriň geometrik manysy

**1. Tekizlikde çyzygyň deňlemesi.** Goý, gönüburçly dekart koordinatalarynda  $x$  we  $y$  üýtgeýänler

$$F(x, y) = 0 \quad (13)$$

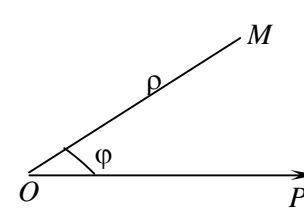
görnüşdäki deňligi kanagatlanyrýan bolsun. Eger bu deňlik  $x$  we  $y$  jübütleriň ähli bahalary üçin ýerine ýetse, onda oňa tozdestwo diýilýär, käbir bahalary üçin ýerine ýetende bolsa oňa deňleme diýilýär. Deňlemäniň mysallary:  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ ,  $2x + 3y - 5 = 0$ , toždestwonyň mysallary:  $(x+y)(x-y) - x^2 + y^2 = 0$ ,  $(x-y) - x + y = 0$ .

Eger  $L$  çyzykda ýerleşýän ähli nokatlaryň koordinatalary (13) deňlemäni kanagatlandyrýan bolup, şol çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň koordinatalary ol deňlemäni kanagatlandyrmasa, onda (13) deňlemä  $L$  çyzygyň deňlemesi diýilýär. Başgaça aýdylanda,  $L$  çyzyk (13) deňlemäni kanagatlandyrýan tekizligiň  $(x, y)$  koordinatalarynyň köplüginde aňladýar. Mysal üçin,  $x - y = 0$  deňleme göni çyzygy – birinji we üçünji koordinatalar burçlarynyň bissektrisasyny,  $x^2 + y^2 - 25 = 0$  deňleme

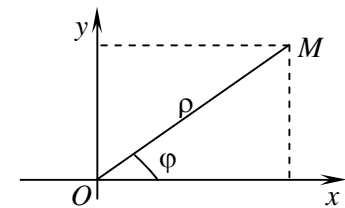
$x = 0$ ,  $y = 0$ . Koordinatalar oklary tekizligi dört böleklere bölýär. Olara çäryekler ýa-da kwadrantlar diýilýär. Olaryň nomerlenişi we şolarda ýerleşýän nokatlaryň koordinatalarynyň alamatlary 2-nji suratda görkezilendir.

Şeýlelikde, tekizligiň her bir  $M$  nokadyna onuň gönüburçly koordinatalary atlandyrylan tertipleşdirilen sanlaryň  $(x, y)$  jübüti deňişli we tersine, sanlaryň her bir  $(x, y)$  jübütine tekizlikde koordinatalary şol sanlar bolan ýeke-täk nokat deňişlidir. Beýle diýildigi tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügi bilen sanlaryň jübüti arasynda özara birbahaly deňişliligi gurnaýar we ol geometrik meseleleri çözmekde algebraik usullary ulanmaklyga ýardam berýär.

**2. Polýar koordinatalar sistemasy.** Tekizlikde polýus atlandyrylýan  $O$  nokada we şol nokatdan çykýan hem-de polýar oky atlandyrylýan  $OP$  şöhlä seredeliň. Şeýle hem kesimleriň uzynlygyny ölçemek üçin masştab birligi we polýusyň töwereginde aýlawyň položitel ugry kesgitlenen hasap edeliň. Tekizligiň islendik  $M$  nokady bilen  $O$  polýusyň arasyndaky  $\rho$  uzaklyga şol nokadyň polýar radiusy,  $OM$  bilen gabat getirmek üçin  $OP$  polýar oky sagat diliniň hereketiniň garşysyna (položitel ugra) aýlamaly bolýan  $\varphi$  burça bolsa polýar burçy diýilýär (3-nji surat). Şunlukda,  $\rho$  we



3-nji surat



4-nji surat

$\varphi$  sanlara  $M$  nokadyň polýar koordinatalary diýilýär.  $\rho$  sana onuň birinji koordinatasy,  $\varphi$  sana – ikinji koordinatasy diýilýär we  $M(\rho, \varphi)$  bilen belgilenýär. Polýus üçin  $\rho = 0$  bolup, ýöne  $\varphi$  kesgitlenmedikdir. Adatça ol koordinatalar  $0 \leq \rho < +\infty$ ;  $0 \leq \varphi < 2\pi$  çäklerde üýtgeýär hasap edilýär. Ýöne käbir hallarda  $2\pi$ -den uly bolan burçlara, şeýle-de otrisatel, ýagny polýar okdan sagat diliniň hereketi boýunça alynýan bürçlara hem seretmeli bolýar.

Nokadyň polýar koordinatalary bilen gönüburçly koordinatalarynyň baglanyşygyny görkezmek üçin koordinatalar başlangyjy polýus bilen we položitel ýarym  $Ox$  oky polýar oky bilen gabat gelýän gönüburçly koordinatalar sistemasyna seredeliň (4-nji surat). Ol suratdan görnüsi ýaly  $M$  nokadyň gönüburçly  $(x, y)$  koordinatalary bilen onuň  $(\rho, \varphi)$  polýar koordinatalary şeýle baglanyşykdaýr:

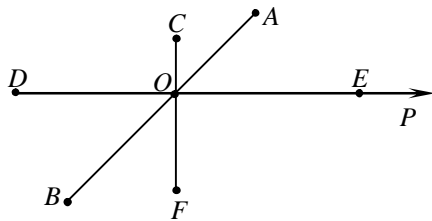
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (4)$$

Bu formula tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalaryny onuň polýar koordinatalary bilen aňladýar. Ol formuladan nokadyň polýar koordinatalaryny onuň dekart koordinatalary bilen aňladýan şeýle formula

$$\text{alynýar: } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**2-nji mysal.** Polýar koordinatalarynda berlen  $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $B\left(3, -\frac{3}{4}\pi\right)$ ,

$C\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $D(3, \pi)$ ,  $E(4, 0)$ ,  $F\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$  nokatlary gurmaly we



5-nji surat

koordinatalar başlangyjy polýus bilen we  $Ox$  okunyň položitel ugry polýar oky bilen gabat gelýän dekart koordinatalarynda ol nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.

◁ Polýar koordinatalarynda  $A$  nokady gurmak üçin  $O$  polýusdan  $OP$  polýar okuna

$\varphi = \pi/4$  burç boýunça şöhle geçireliň (5-nji surat) we şol şöhlede uzynlygy 2-ä deň bolan  $[OA]$  kesimi guralyň. Şol kesimiň soňky uýy  $A(2, \pi/4)$  nokat bolar. Beýleki  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  nokatlar hem edil şolar ýaly gurulýar (5-nji surata seret). Berlen nokatlaryň dekart koordinatalaryny tapmak üçin (4) formuladan peýdalanarys.  $A$  nokat üçin

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad y = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad A(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Edil şonuň ýaly beýleki nokatlaryň dekart koordinatalary tapylýar:

$$x = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3 x_3}{m_1 + m_2}}{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}},$$

$$y = \frac{\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3 y_3}{m_1 + m_2}}{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}},$$

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Matematiki induksiýadan peýdalanyp,  $M_1, M_2, \dots, M_n$  nokatlarda ýerleşen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  massalaryň sistemasynyň agyrylyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak bolar:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \triangleright$$

**3. Üçburçlugyň meýdany.**  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  depeleri bolan bir göni çyzykda ýatmaýan üçburçlugyň  $S$  meýdany (8-nji surat)

$$S = \frac{1}{2} |[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]| \quad (12)$$

formula boýunça tapylýar.

◁  $ABC$  üçburçlugyň meýdanyny

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}$$

deňlik boýunça tapmak bolar, bu ýerde  $S_{ADEC}$ ,  $S_{BCEF}$ ,  $S_{ABFD}$  trapesiýalaryň meýdanlarydyr. Ol meýdanlar bolsa şeýle tapylýar:

$$S_{ADEC} = |DE| \cdot \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2},$$

$$S_{BSEF} = |EF| \cdot \frac{|EC| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)}{2},$$

$$S_{ABFD} = |DF| \cdot \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2},$$

olaryň bahalaryny formulada goup,



gatnaşykda bölýär. Şoňa görä (9) formulany ulanyp we ol formulada  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $y_2 = 4$  göýüp,  $M$  nokadyň koordinatalaryny taparys:

$$x = \frac{-1 + (-1/3) \cdot 3}{1 + (-1/3)} = -3, \quad y = \frac{-2 + (-1/3) \cdot 4}{1 + (-1/3)} = -5. \triangleright$$

**5-nji mysal.** Tekizligiň  $M_1(x_1, x_2)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , ...,  $M_n(x_n, y_n)$  nokatlarynda  $m_1, m_2, \dots, m_n$  massalar ýerleşdirilen. Ol massalaryň sistemasynyň agyrlık merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

◁ Ilki  $n=2$  hala garalyň we  $m_1, m_2$  massalar  $M_1, M_2$  nokatlarda ýerleşýän bolsun. Onda mehanikanyň belli prinsipi esasynda ol massalaryň sistemasynyň  $M(x, y)$  agyrlık merkezi  $\overline{M_1M_2}$  kesimi  $m_1, m_2$  massalara ters proporsional bölekler, ýagny  $\lambda = m_2 : m_1$  gatnaşykda bölekler bölýär. Şoňa görä (5) formula esasynda massalaryň sistemasynyň  $M(x, y)$  agyrlık merkeziiniň koordinatalary üçin

$$x = \frac{x_1 + (m_2/m_1)x_2}{1 + m_2/m_1}, \quad y = \frac{y_1 + (m_2/m_1)y_2}{1 + m_2/m_1};$$

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

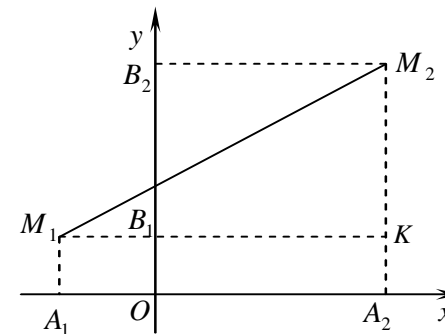
formulany alarys. Edil şonuň ýaly  $M_1(x_1, x_2)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_n, y_n)$  nokatlarda ýerleşen  $m_1, m_2, m_3$  massalaryň sistemasynyň  $M(x, y)$  agyrlık merkeziniň koordinatalaryny tapmak bolar. Eger  $m_1, m_2$  massalary şol sistemanyň  $M'(x', y')$  agyrlık merkezinde jemlesek, onda  $M(x, y)$  nokadyň ýerleşýän ýeri üýtgemez. Indi  $M(x, y)$  nokada  $M_3$  nokatda ýerleşýän  $m_3$  massa bilen  $M'(x', y')$  nokatda jemlenen  $m_1 + m_2$  massalaryň sistemasynyň agyrlık merkezi hökmünde gararys. Şunlukda,  $M'(x', y')$  nokat  $m_1, m_2$  massalaryň sistemasynyň hem agyrlık merkezidir we  $x', y'$  koordinatalar (11) formulanyň sag bölegi bilen kesgitlenýär. Şoňa görä  $M(x, y)$  agyrlık merkezi  $\overline{MM_3}$  kesimi  $\lambda = m_3 : (m_1 + m_2)$  gatnaşykda bölýän nokat hökmünde (5) formulany ulanyp taparys:

$$B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), C(0, 1), D(-3, 0), E(4, 0), F(0, -2).$$

### § 1. 3. Tekizlikde analitik geometriýanyň käbir meseleleri

**1. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk.** Tekizligiň işindik  $M_1(x_1, y_1)$  we  $M_2(x_2, y_2)$  iki nokadynyň arasyndaky  $\rho = \rho(M_1, M_2)$  uzaklyk

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$



6-njy surat

formula bilen kesgitlenýär.

Ony görkezmek üçin  $M_1$  we  $M_2$  nokatlardan  $Ox$ ,  $Oy$  oklaryna perpendikulýarlary geçirip, olaryň esaslaryny  $A_1, B_1, A_2, B_2$  bilen, perpendikulýarlaryň kesişme nokadyny  $K$  bilen belgiläliň (6-njy surat). Pifagoryň teoremasyny gönüburçly  $M_1KM_2$  üçburçluga ulanyp,

$$\rho = \sqrt{M_1K^2 + M_2K^2} \quad (6)$$

formulany alarys. Bu ýerde üçburçlugyň  $M_1K$ ,  $M_2K$  katetleriniň  $|M_1K|$ ,  $|M_2K|$  uzynlyklary koordinata oklarynyň ugrukdyrylan  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{B_1B_2}$  kesimleriniň uzynlyklary bilen gabat gelýär. Şoňa görä (3) formula boýunça

$$M_1K = A_1A_2 = x_2 - x_1, \quad M_2K = B_1B_2 = y_2 - y_1$$

deňlikleri we olaryň esasynda (6) deňlikden (5) formulany alarys.

$M_1$  nokadyň koordinatalaryň başlangyjy bilen gabat gelýän hususy haly üçin (5) formula

$$\rho(O, M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \quad (7)$$

görüňü alar.

**3-nji mysal.**  $M_1(5, -2)$ ,  $M_2(8, -6)$  nokatlaryň arasyndaky uzaklygy

we  $M_2$  nokatdan koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklygy tapmaly.

◁ Berlen nokatlar üçin  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = -2$ ,  $x_2 = 8$ ,  $y_2 = -6$  bolýandygy sebäpli, (5) we (7) formulalar esasynda taparys:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(8-5)^2 + ((-6)-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$\rho(O, M_2) = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10. \triangleright$$

**2. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek.** Tekizlikde dürli  $M_1$  we  $M_2$  nokatlary alyp ( $M_1$  nokady birinji,  $M_2$  nokady ikinji hasap edip) olar arkaly položitel ugry kesgitlenen göni çyzyk geçireliň we masştab birligini alalyň. Goý,  $M$  şol göni çyzygyň  $M_2$  bilen gabat gelmeýän käbir nokady bolsun. Onda

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \quad (8)$$

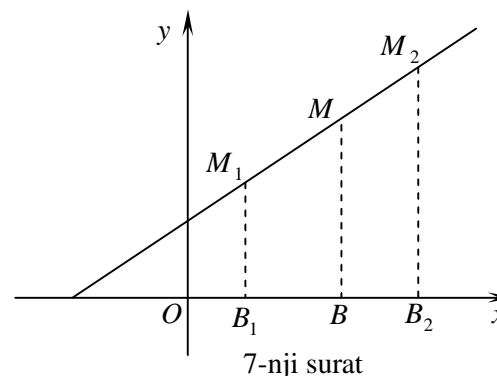
sana  $M$  nokadyň ugrukdyrylan  $\overline{M_1M_2}$  kesimi bölýän gatnaşygy diýilýär, bu ýerde  $M_1M$ ,  $MM_2$  görkezilen okuň ugrukdyrylan  $\overline{M_1M}$ ,  $\overline{MM_2}$  kesimleriniň ululyklarydyr. Okuň položitel ugry başgaça kesgitlenende ýa-da masştab birligi başgaça alnanda hem (8) gatnaşyk üýtgemeýär, çünki iki halda hem sanawjy we maýdalawjy şol bir sana köpeldilýär. Eger  $M$  nokat  $M_1$  we  $M_2$  nokatlaryň arasynda ýerleşýän bolsa, onda  $\lambda > 0$  bolar. Bu halda  $M$  nokat  $\overline{M_1M_2}$  kesimi içinden bölýär diýilýär. Eger  $M$  nokat  $\overline{M_1M_2}$  kesimiň daşynda ýerleşýän bolsa, onda  $\lambda < 0$  bolar we bu halda  $M$  nokat  $\overline{M_1M_2}$  kesimi daşyndan bölýär diýilýär.  $\lambda = -1$  bolup bilmez, çünki tersine, ol deňlik ýerine ýetende  $M_1M = -MM_2$  deňlik alnar we şonuň esasynda  $M_1M + MM_2 = 0$  bolar, ýagny  $M_1M_2 = 0$ , ýöne ol deňlik  $M_1$  we  $M_2$  nokatlar gabat gelende bolup biler, ol bolsa şerte garşy gelýär. Eger  $M$  nokat  $M_1$  nokat bilen gabat gelýän bolsa, onda  $\lambda = 0$ . Eger  $M$  nokat  $M_2$  nokada ýakynlaşýan bolsa, onda  $|\lambda|$  san artar.

Kesimi berlen gatnaşykda bölmek meselesi şeýle okalýar:  $M$  nokadyň  $\overline{M_1M_2}$  kesimi bölekler belýän  $\lambda$  gatnaşygy berlen. Şol nokadyň koordinatalaryny tapmaly. Ol aşakdaky tassyklama esaslanýar.

Eger  $M(x, y)$  nokat  $M_1(x_1, y_1)$  we  $M_2(x_2, y_2)$  nokatlar bilen çäklenen  $\overline{M_1M_2}$  kesimi  $\lambda$  gatnaşykda bölýän bolsa, onda ol nokadyň koordinatalary

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (9)$$

formula boýunça kesgitlenýär.



◁  $M_1, M, M_2$  nokatlardan  $Ox$  okuna perpendikulýar göýberip, olaryň esaslaryny  $B_1, B, B_2$  bilen belgiläliň (7-nji surat). Onda parallel göni çyzyklaryň arasyndaky kesimleriniň proporsionallyk häsiýeti boýunça (8) şertiň esasynda

$$\frac{B_1B}{BB_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$$

deňligi alarys. (3) formula esasynda alynýan  $B_1B = x - x_1$ ,  $BB_2 = x_2 - x$  deňlikleri ulanyp, bu deňligi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$$

görnüşde ýazmak bolar. Ondan bolsa  $\lambda \neq -1$  şerti ulanyp, (9) formulanyň birinjisini alarys. Onuň ikinjisi edil şuna meňzeşlikde ( $M_1, M, M_2$  nokatlardan  $Oy$  okuna perpendikulýar geçirip) subut edilýär.  $\triangleright$

Eger  $M$  nokat  $\overline{M_1M_2}$  kesimiň ortasynda ýerleşýän bolsa, onda  $\lambda = 1$  bolar we bu halda (9) formula

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (10)$$

görnüsi alar.

**4-nji mysal.** Berlen  $M_1(-1, -2)$ ,  $M_2(3, 4)$  nokatlar boýunça  $\overline{M_1M_2}$  göni çyzykda  $M_1$  nokada  $M_2$  nokatdan üç esse ýakyn bolan we  $\overline{M_1M_2}$  kesimiň daşynda ýerleşýän  $M$  nokady tapmaly.

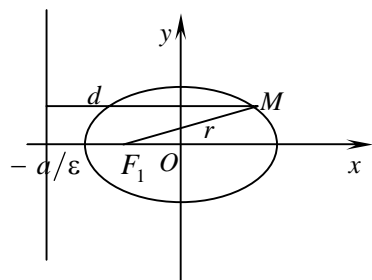
◁ Şerte görä gözlenýän  $M(x, y)$  nokat  $\overline{M_1M_2}$  kesimi  $\lambda = -1/3$

uzaklyga bolan gatnaşygy hemişelik ululykdyr we ellipsiň (giperbolanyň)

ekssentrisitetine deňdir.

◁ Ellipsiň çep fokusyna we çep direktrisasyna seredeliň. Eger  $M(x, y)$  ellipsiň erkin nokady bolsa (12-nji surat), onda

$$r = a + \varepsilon x, \quad d = x - \left(-\frac{a}{\varepsilon}\right) = x + \frac{a}{\varepsilon},$$



12-nji surat

$$\frac{r}{d} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Eger  $M(x, y)$  giperbolanyň çep şahasynyň erkin nokady bolsa, onda

$$r = -a - \varepsilon x, \quad d = -x - \frac{a}{\varepsilon},$$

$$\frac{r}{d} = \frac{-a - \varepsilon x}{-x - a/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Beýleki hemme hallar hem şular ýaly görkezilýär. ▷

## § 2. 6. Parabola

**1. Parabolanyň kesgitlenişi we onuň deňlemesi.** . Tekizlikde berlen nokatdan (fokusdan) we berlen göni çyzykdan (direktrisadan) deň daşlykda bolan tekizligiň ähli nokatlarynyň köplüğine parabola diýilýär.

Parabolanyň deňlemesini getirip çykarmak üçin gönüburçly dekart koordinatlar sistemasynyň  $Ox$  okuny fokusdan geçýän we direktrisa perpendikulýar alyp, položitel ugruny direktrisadan fokusa tarap hasap edeliň. Koordinatlar başlangyjyny fokus bilen direktrisanyň ortasynda ýerleşdireliň (13-nji surat). Eger fokus bilen direktrisanyň arasyndaky uzaklyk  $p$  bolsa, onda fokusyň koordinatary  $F(p/2, 0)$  bolar.

Parabolanyň erkin  $M(x, y)$  nokadyny alyp, ol nokatdan fokusa çenli

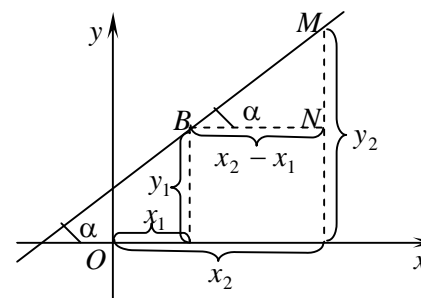
deňlemäni kanagatlandyryň, ýagny

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b.$$

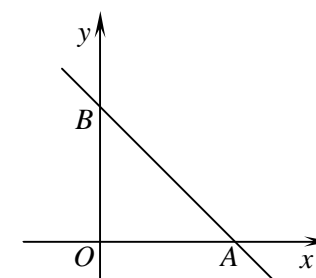
Olaryň birinjisini ikinjiden aýryp,  $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$  deňligi, ondan bolsa

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

deňligi alarys, çünki göni çyzygyň  $Oy$  okuny kesýändigine üçin  $x_1 \neq x_2$ .



2-nji surat



3-nji surat

Goý, göni çyzygyň  $k$  burç koeffisiýenti we onuň  $N(x_1, y_1)$  nokady berlen bolsun. Onuň deňlemesini düzeliň. Goňi çyzygyň erkin  $M(x, y)$  nokadyny belläp, (4) formula boýunça  $x_2 = x$ ,  $y_2 = y$  alyp, onuň burç

koeffisiýentini tapalyň:  $k = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ . Bu deňlikden bolsa

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (5)$$

gelip çykýar. Bu deňlemä **berlen ugur boýunça berlen nokat arkaly geçýän** göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

Tekizlikde berlen nokat (dessäniň merkezi) arkaly geçýän ähli göni çyzyklaryň köplüğine göni çyzyklaryň **dessesi** diýilýär. (5) görnüşdäki deňlemede  $k$  islendik hakyky san bahany alýan bolsun. Şonuň esasynda  $k = k_1$  alyp, göni çyzygyň käbir deňlemesini,  $k = k_2$  alyp, göni çyzygyň başga deňlemesini we ş. m. göni çyzygyň dürli deňlemelerini alarys. Şeýlelikde, (5) görnüşdäki deňleme  $N(x_1, y_1)$  nokat arkaly geçýän ( $Oy$

okuna parallel bolmadyk) ähli göni çyzyklaryň köplüginde kesgitlenýär. Şoňa görä merkezi  $N(x_1, y_1)$  nokat bolan göni çyzyklaryň dessesi

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

deňleme boýunça kesgitlenýär.

Indi bolsa dürli iki  $B(x_1, y_1)$ ,  $M(x_2, y_2)$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $y_1 \neq y_2$  nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzeliň. Göni çyzygyň  $B(x_1, y_1)$  nokat arkaly geçýändigine sebäpli, (4) formula esasynda (5) deňleme

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{ýa-da} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

görnüşde ýazylar. Bu deňlemä **berlen iki nokat arkaly geçýän** göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

Deň gatnaşyklary  $t$  bilen belgiläp alarys:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t, \quad y - y_1 = (y_2 - y_1)t, \quad x - x_1 = (x_2 - x_1)t.$$

Olardan bolsa

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)t \quad (7)$$

deňlemeler gelip çykýar. (7) deňliklerden  $t=0$  bolanda  $B(x_1, y_1)$  nokadyň,  $t=1$  bolanda  $N(x_2, y_2)$  nokadyň  $0 < t < 1$  bolanda bolsa  $[BN]$  kesimiň islendik içki nokadynyň koordinatalary alynýar. Şunlukda,  $t$  ululyk tükeniksiz  $(-\infty, +\infty)$  aralykda üýtgände  $M(x, y)$  nokat seredilýän göni çyzygy çyzýar. (7) deňlemelere göni çyzygyň **parametrik** deňlemeleri diýilýär.

Goý,  $(AB)$  göni çyzyk koordinat oklarynda ululyklary  $a$  we  $b$  bolan kesimleri kesip alýan bolsun, ýagny  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  (3-nji surat). (6) deňlemäni  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = b$  üçin ulanyp,

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{-a}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (8)$$

deňlemäni alarys. Oňa **koordinatalar oklarynyň kesimlerindäki** göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

**2. Göni çyzygyň umumy deňlemesi.**  $x$  we  $y$  üýtgeýänlere görä birinji tertipli

$$Ax + By + C = 0 \quad (9)$$

görnüşdäki deňlemä birinji tertipli umumy deňleme diýilýär, bu ýerde  $A$

ýarym oklaryny, fokuslarynyň koordinatalaryny we eksentrisitetini tapmaly.

◁ Deňlemäniň iki bölegini hem 20-ä bölüp, giperbolanyň deňlemesini

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

görnüşde ýazarys we ony (46) deňleme bilen deňeşdirip,  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = 5$

deňlikleri alarys, ýagny  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{5}$ . (45) deňlik esasynda

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9, \quad c = 3, \quad F_1(-3, 0), \quad F_2(3, 0), \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}. \triangleright$$

## § 2. 5. Ellipsiň we giperbolanyň direktrisalary

Ellipsiň uly okuna perpendikulýar, merkezine görä simmetrik we ondan  $a/\varepsilon$  uzaklykda ýerleşýän iki göni çyzyklara ellipsiň direktrisalary diýilýär ( $a$  – uly oky,  $\varepsilon$  – eksentrisitet). Eger ellips (35) kanonik deňleme boýunça berlen bolsa, onda  $a > b$ . Şonuň üçin bu halda dekart koordinatalar sistemasynda direktrisarlar

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon} \quad (55)$$

deňlemeler boýunça kesgitlenýär. Ellips üçin  $0 < \varepsilon < 1$  bolýandygy sebäpli  $a/\varepsilon > a$  bolar we şoňa görä direktrisalaryň ellips bilen umumy nokady ýokdur.

Giperbolanyň hakyky okuna perpendikulýar, merkezine görä simmetrik we ondan  $a/\varepsilon$  uzaklykda ýerleşýän iki göni çyzyklara giperbolanyň direktrisalary diýilýär ( $a$  – uly oky,  $\varepsilon$  – eksentrisitet). Eger giperbola (46) kanonik deňleme boýunça berlen bolsa, onda şol dekart koordinatalar sistemasynda onuň direktrisalary (55) deňlemeler boýunça kesgitlenýär. Giperbola üçin  $\varepsilon > 1$  bolýandygy sebäpli  $a/\varepsilon < a$  bolar we şoňa görä direktrisalaryň giperbola bilen umumy nokady ýokdur.

Ellipsiň we giperbolanyň direktrisalalarynyň häsiýetleri aşakdaky teorema görkezilýär.

**3-nji teorema.** Ellipsiň (giperbolanyň) erkin  $M(x, y)$  nokadynyň fokusa çenli  $r$  uzaklygynyň şol nokatdan degişli direktrisa çenli  $d$

oklary diýilýär. Oklaryň biri giperbolany onuň depeleri atlandyrylýan  $A_1$  we  $A_2$  nokatlarda kesýär (10-njy surat). Oňa giperbolanyň hakyky oky diýilýär, beýleki oka bolsa onuň hyýaly oky diýilýär, ol nokadyň giperbola bilen umumy nokady ýokdur. Kesimleriniň  $|A_1A_2| = 2a$ ,  $|B_1B_2| = 2b$  uzynlyklaryna hem giperbolanyň oklary diýilýär. Şonuň üçin  $a$  we  $b$  ululyklara giperbolanyň ýarym oklary diýilýär.  $a = b$  bolanda (46) deňleme

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (52)$$

görnüsi alýar we oňa deňtaraply giperbola diýilýär.

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (53)$$

deňleme  $Oy$  oky hakyky oky bolan giperbolany kesgitleýär (11-nji surat).

**3. Giperbolanyň ekssentrisiteti.** Giperbolanyň fokuslarynyň arasyndaky uzaklygyň onuň depeleriniň arasyndaky uzynlyga bolan gatnaşygyna giperbolanyň ekssentrisiteti diýilýär. Eger  $Ox$  oky giperbolanyň hakyky oky bolsa, onda kesgitleme boýunça ekssentrisitet

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (54)$$

deňlik boýunça kesgitlenýär. Giperbola üçin  $c > a$  bolany sebäpli  $\varepsilon > 1$  bolar. (45) formulanyň esasynda (54) deňlikden

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

deňlikler gelip çykýar. Şeýlelikde, giperbolanyň ekssentrisiteti esasy gönüburçlugyň formasyny we giperbolanyň özüniň formasyny häsiýetlendirýär.

Giperbolanyň  $M$  nokadyny onuň  $F_1$  we  $F_2$  fokuslary bilen birleşdirýän kesimlere şol nokadyň fokal radiuslary diýilýär. Olaryň  $r_1$  we  $r_2$  uzynlyklary (49) we (50) formulalar boýunça kesgitlenýär. (54) deňlik esasynda olar sag şaha üçin

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a$$

görnüşde we çep şaha üçin

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a$$

görnüşde ýazylýar.

**5-nji mysal.**  $5x^2 - 4y^2 = 20$  deňleme boýunça berlen giperbolanyň

we  $B$  koeffisiýentleriň ikisi bir wagtda nola deň däldir, ýagny

$$A^2 + B^2 \neq 0. \quad (10)$$

Birinji tertipli deňleme bilen nähili çyzygyň kesgitlenýändigine aşakdaky teorema jogap berýär.

**1-nji teorema.** Tekizlikde her bir göni çyzyk bellenen gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda birinji tertipli deňleme bilen kesgitlenýär we tersine, dekart koordinatalaryna görä birinji tertipli her bir deňleme tekizlikde käbir göni çyzygy kesgitleýär.

◁ Eger berlen göni çyzyk  $Oy$  okuny kesýän bolsa, onda onuň deňlemesi  $y = kx + b$  ýa-da  $kx - y + b = 0$  bolar.. Eger göni çyzyk  $Oy$  okuna parallel bolsa, onda ol  $x = a$  ýa-da  $x - a = 0$  deňleme bilen kesgitlenýär. Bu deňlemeleriň her birisi (9) görnüşdäki dekart koordinatalaryna görä birinji tertipli deňlemedir

Goý, birinji tertipli (9) deňleme berlen bosun. Eger  $B \neq 0$  bolsa, onda ol deňlemäni  $y$  görä çözüp,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

deňlemäni alarys we ony  $k = -A/B$ ,  $b = -C/B$  begileme girizip,

$$y = kx + b$$

görnüşde ýazmak bolar. Ol deňleme bolsa göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesidir. Eger  $B = 0$  bolsa, onda (10) şertiň esasynda  $A \neq 0$  bolar. Şonuň üçin (9) deňlemäni  $x = a$  ( $a = -C/A$ ) görnüşde ýazmak bolar. Ol bolsa  $Oy$  okuna parallel bolan öni çyzygyň deňlemesidir. Şeýlelikde, (9) deňleme tekizlikde käbir göni çyzygy kesgitleýär. ▷

Dekart koordinatalaryna görä birinji tertipli algebraik deňlemeler bilen kesgitlenýän çyzyklara birinji tertipli çyzyklar diýilýär. Subut edilen 1-nji teorema birinji tertipli çyzyklaryň göni çyzyklardygyňy aňladýar.

(9) görnüşdäki deňlemä göni çyzygyň umumy deňlemesi diýilýär.

**3. Iki göni çyzygyň arasyndaky burç.** Hiç biri  $Oy$  okuna parallel bolmadyk iki göni çyzyga seredeliň. Bu halda göni çyzyklar burç koeffisiýentli deňlemeler arkaly berlip bilner:

$$y = k_1x + b_1, \quad k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (11)$$

$$y = k_2x + b_2, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (12)$$

(Şerte görä  $\alpha_1 \neq 90^\circ$ ,  $\alpha_2 \neq 90^\circ$ ,  $k_1 \neq \infty$ ,  $k_2 \neq \infty$ ). Ikinji göni çyzygyň birinji göni çyzyga gýşarma bürçuny, ýagny kesişme nokadyň töwereginde

birinji göni çyzygyň ikinji bilen gabat gelmegi üçin aýlanma burçuny  $\theta$  bilen belgiläliň.  $k_1$  we  $k_2$  belli bolanda ol burçuň tapylyş formulasyny getirip çykaralyň.  $A_1A_2N$  üçburçlukdan (4-nji surat)  $\alpha_1 + \theta = \alpha_2$ ,  $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$  deňlikler alynýar. Şonuň üçin hem

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (13)$$

Eger göni çyzyklaryň birisi (mysal üçin ikinjisi)  $Oy$  okuna parallel bolsa, onda  $\alpha_2 = \pi/2$  we şoňa görä  $\theta = \pi/2 - \alpha_1$  bolar. Eger göni çyzyklar özara parallel bolsalar, onda  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$  bolar, ýagny  $k_1 = k_2$  deňlik ýerine ýetýär. Eger tersine,  $k_1 = k_2$  bolsa, onda  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$  bolar we burçlaryň  $0$  we  $\pi$ -iň arasynda bolýandygy üçin ol deňlikden  $\alpha_1 = \alpha_2$  deňlik gelip çykýar, ýagny göni çyzyklar paralleldir. Şeýlelikde,  $k_1 = k_2$  deňlik (11) we (12) göni çyzyklaryň parallelliginiň zerur we ýeterlik şertidir.

Goý, (11) we (12) deňlikler boýunça berlen göni çyzyklar perpendikulýar bolsun, ýagny  $\theta = \pi/2$ . Bu halda  $\operatorname{ctg} \theta = 0$  bolar we şonuň esasynda

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0, \quad 1 + k_1 k_2 = 0$$

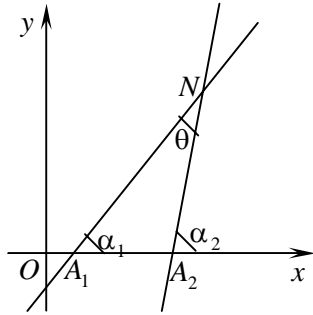
deňlik alynýar we ondan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (14)$$

deňlik gelip çykýar. Tersine, eger (14) şert ýerine ýetse, onda

$$1 + k_1 k_2 = 0, \quad \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

ýagny göni çyzyklar özara perpendikulýar. Şeýlelikde, (14) deňlik (11) we (12) göni çyzyklaryň perpendikulýarlygynyň zerur we ýeterlik şertidir. Ol şert başgaça şeýle okalýar: perpendikulýar göni çyzyklaryň burç koeffisiýentleri ululyklary boýunça özara ters we alamatlary garşylykly.



4-nji surat

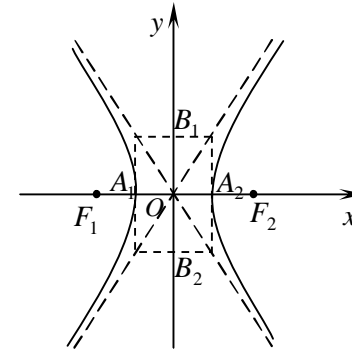
$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{b}{a} \left( x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |MN| = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly  $x$ -iň çäksiz artmagy bilen  $MN$  kesimiň uzynlygy nola ymytlýar. Şoňa görä  $|MP| < |MN|$  deňsizligiň esasynda  $|MP|$  hem nola ymytlýar, ýagny  $M$  nokat koordinatalar başlangyjyndan daşlaşdygyça ol nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk nola ymytlýar. (46) giperbolanyň (51) göni çyzyk bilen umumy nokatlary ýokdur, çünki olaryň deňlemeleriniň sistemasynyň çözüwi ýokdur.

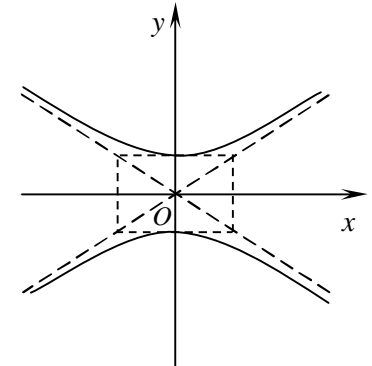
(51) deňleme bilen kesgitlenýän göni çyzyga giperbolanyň asimptotasy diýilýär. Giperbolanyň iki asimptotasy bar bolup, olar şeýle kesgitlenýär:

$$y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

Giperbolanyň çyzgysyny şekillendirmek üçin ilki bilen taraplary  $2a$  we  $2b$ , deňsizlikde  $Ox$  we  $Oy$  oklaryna parallel we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan esasy gönübürçluk gurulýar. Onuň garşylykly depelerinden geçýän göni çyzyklar giperbolanyň asimptotalary bolýar.



10-njy surat



11-nji surat

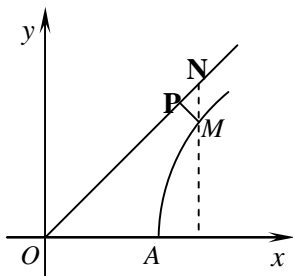
Olary gurup, soňra giperbolanyň özüni gurýarys (10-njy surat). Ol (çep we sag) şahalary atlandyrylýan iki bölekden ybaratdyr. Giberbolanyň simmetriklik merkezine onuň merkezi, simmetriklik oklaryna bolsa ýöne

koordinatalary (46) deňlemäni kanagatlandyrýan  $M$  nokadyň giperbolada ýatýandygyny we onuň üçin (40) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezdik.

(46) deňleme giperbolanyň deňlemesidir. Oňa giperbolanyň kanonik deňlemesi diýilýär. Onuň ikinji derejeli deňlemeligi üçin giperbola ikinji tertipli çyzykdyr.

**2. Giperbolanyň formasynyň derňewi.** Giperbolanyň (46) deňlemesi esasynda  $x^2 \geq a^2$ , ýagny  $x < -a$  we  $x > a$ . Bu deňsizlikler  $x = -a$  we  $x = a$  göni çyzyklaryň arasynda giperbolanyň hiç bir nokadynyň ýokdugyny aňladýar. (46) deňlemä  $x$  we  $y$  ululyklaryň diňe ikinji (jübüt) derejesiniň girýändigini sebäpli giperbola koordinatalar oklaryna görä simmetrkdir. Şoňa görä-de onuň birinji çärykde  $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  deňleme

bilen kesgitlenýän formasyny öwrenmek ýeterlikdir.  $x = a$  bolanda  $y = 0$ , şoňa görä  $A(a, 0)$  nokat giperbolada ýatýandyr (9-njy surat). (46) deňlemeden görnüşi ýaly  $x$ -iň çaksiz artmagy bilen  $y$  çaksiz artýar.



9-njy surat

Giperbolanyň dugasynyň nokatlary koordinatalar başlangyjyndan daşlaşdygyça

$$y = \frac{b}{a}x \quad (51)$$

göni çyzyga ýakynlaşýandygyny görkezeliň. Bellenen  $x$  üçin giperbolada oňa  $M(x, y)$  nokat we (51) göni çyzykda  $N(x, Y)$  nokat deňşlidir.  $M$  nokatdan göni çyzyga  $MP$

perpendikulýar indereliň. Giperbolanyň dugasy göni çyzykdan aşakdadyr, çünki

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y, \quad Y > y.$$

$MN$  kesimiň uzynlygy şeýle tapylýar:

$$|MN| = Y - y = \frac{b}{a} \left( x - \sqrt{x^2 - a^2} \right).$$

Ony özgerdeliň:

Eger göni çyzyklar umumy görnüşde

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (15)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (16)$$

deňlemeler bilen berlen bolsa, onda olaryň arasyndaky burçuň tangensi

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \quad (17)$$

formula boýunça kesgitlenýär. Hakykatdan-da, eger (15) we (16) deňlemeleri

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1},$$

$$y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

görnüşlerde ýazyp, olary deňşililikde (11) we (12) deňlemeler bilen deňeşdirsek, onda burç koeffisiýentler üçin

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2} \quad (18)$$

deňlikleri alarys. Olary (13) formulada goýup we alnan deňligi özgerdip, (17) formulany alarys.

(18) deňlikleriň esasynda (15) we (16) görnüşdäki göni çyzyklaryň parallelliginiň zerur we ýeterlik şertleri

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

deňlik ýa-da

$$A_1 = A_2t, \quad B_1 = B_2t$$

deňlikler bilen aňladylýar, perpendikulýarlyk şerti bolsa

$$-\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{A_2} \quad \text{ýa-da} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

deňlik bilen aňladylýar. Bu şertleriň esasynda

$$Ax + By + C = 0, \quad Bx - Ay + C = 0$$

deňlikler boýunça berlen göni çyzyklar özara perpendikulýardyr.

**1-nji mysal.** Umumy görnüşde berlen

$$3x - 5y + 15 = 0, \quad 8x - 2y - 1 = 0$$

göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmaly.

◁ Şerte görä  $A_1 = 3$ ,  $B_1 = -5$ ,  $A_2 = 8$ ,  $B_2 = -2$  .Şoňa görä-de (17) formula esasynda taparys:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3 \cdot (-2) - 8(-5)}{3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-2)} = \frac{34}{34} = 1, \quad \theta = 45^\circ. \triangleright$$

**4. Nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk.** Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalarynda  $M_1(x_1, y_1)$  nokat we deňlemesi  $Ax + By + C = 0$  umumy görnüşde bolan göni çyzyk berlen bolsun (5-nji surat).  $M_1(x_1, y_1)$  nokatdan şol göni çyzyga çenli uzaklygyň formulasyny getirip çykaralyň. Ol uzaklyk  $M_1$  nokatdan göni çyzyga inderilen perpendikulýaryň kesiminiň uzynlygyna deňdir. Eger ol perpendikulýaryň esasy  $M_2(x_2, y_2)$  nokat bolsa, onda gözlenýän uzaklyk

$$d = |M_1 M_2| \quad (19)$$

formula boýunça aňladylýar. Umumy görnüşde berlen göni çyzygyň burç koeffisiýenti  $k = -A/B$ . Şonuň üçin oňa perpendikulýar bolan  $M_1 M_2$  göni çyzygyň burç koeffisiýenti  $k_1 = B/A$  bolar. Belli bolşy ýaly  $M_1(x_1, y_1)$  we  $M_2(x_2, y_2)$  nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň burç koeffisiýenti (4) formula boýunça kesgitlenýär. Şonuň esasynda

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{B}{A}$$

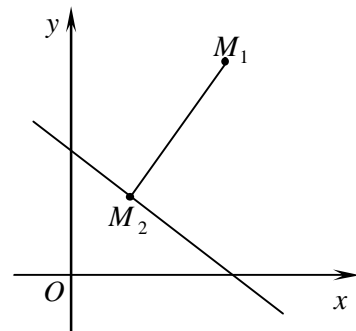
deňligi ýazmak bolar. Deň gatnaşyklary  $t$  bilen belgiläp,

$$\frac{y_2 - y_1}{B} = \frac{x_2 - x_1}{A} = t, \quad x_2 = x_1 + At, \quad y_2 = y_1 + Bt$$

deňlikleri alarys. Onda  $M_1(x_1, y_1)$  we  $M_2(x_1 + At, y_1 + Bt)$  nokatlar üçin (19) formula esasynda

$$d = |M_1 M_2| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2} = \sqrt{A^2 + B^2} |t| \quad (20)$$

bolar. Indi  $t$  parametri kesgitläliň.  $M_2$  nokadyň berlen göni çyzykda ýatýandygy üçin onuň koordinatalary şol deňlemäni kanagatlandyrýar:



5-nji surat

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (44)$$

(41) deňsizligiň esasynda  $c^2 - a^2 > 0$  we şonuň üçin

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (45)$$

belgileme girizip, (44) deňlikden

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (46)$$

deňlemäni alarys. Diýmek, giperbolanyň islendik nokadynyň koordinatalary (46) deňlemäni kanagatlandyrýar. Tersine hem dogrudygyny, ýagny koordinatalary (46) deňlemäni kanagatlandyrýan  $M$  nokadyň giperbolada ýatýandygyny we onuň üçin (40) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň. (45) we (46) deňliklerden peýdalanyň alarys:

$$|F_1 M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 - b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \\ = \sqrt{\frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2} = \pm \left(\frac{c}{a}x + a\right),$$

ýagny

$$|F_1 M| = \pm \left(\frac{c}{a}x + a\right). \quad (47)$$

Edil şonuň ýaly

$$|F_2 M| = \pm \left(\frac{c}{a}x - a\right). \quad (48)$$

Bu deňliklerde alamatlary onuň sag bölekleri otrisatel däl bolar ýaly almaly. (46) formulanyň esasynda  $|x| \geq a$  we (41) esasynda  $a < c$ . Şoňa görä-de  $x > a$  bolanda (47) we (48) deňlikler

$$|F_1 M| = \frac{c}{a}x + a, \quad |F_2 M| = \frac{c}{a}x - a \quad (49)$$

görnüşini alar. Şonuň üçin hem  $|F_1 M| - |F_2 M| = 2a$  bolar.  $x < -a$  bolanda

$$|F_1 M| = -\left(\frac{c}{a}x + a\right) = -\frac{c}{a}x - a, \quad |F_2 M| = -\left(\frac{c}{a}x - a\right) = -\frac{c}{a}x + a. \quad (50)$$

Sonuň üçin bu halda  $|F_1 M| - |F_2 M| = -2a$  deňlik ýerine ýetýär. Şeýlelikde,



## § 2.4. Giperbola

**1. Giperbolanyň kesgitlenişi we onuň deňlemesi.** Tekizlikde berlen iki nokatlara (fokuslara) çenli uzaklyklaryň tapawudynyň moduly hemişelik bolan (we  $2a$  sana deň alynýan) tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügi giperbola diýilýär.  $F_1$  we  $F_2$  fokuslaryň arasyndaky (fokus) uzaklygy  $2c$  bilen belgiläliň. Onda giperbolanyň erkin  $M$  nokady üçin (8-nji surat) kesgitleme boýunça

$$\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a \quad \text{ýada} \quad |F_1M| - |F_2M| = \pm 2a \quad (40)$$

bolar.  $F_1MF_2$  üçburçlukdan görnüşi ýaly  $|F_1M| - |F_2M| < |F_1F_2|$ , ýagny

$$a < c. \quad (41)$$

Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä giperbolanyň deňlemesini düzeliň. Onuň üçin  $Ox$  oky fokuslar arkaly geçär ýaly we položitel ugry  $F_1$ -den  $F_2$  tarapa bolar ýaly alalyň (8-nji surat). Koordinatalar başlangyjyny  $[F_1F_2]$  kesimiň ortasynda alalyň, onda  $F_1 = F_1(-c, 0)$ ,  $F_2 = F_2(c, 0)$  bolar.  $M$  nokadyň koordinatalaryny  $x, y$  bilen belgiläliň. Onda iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy esasynda

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (42)$$

Bu aňlatmalary (40) deňlikde goýup, şeýle deňligi alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (43)$$

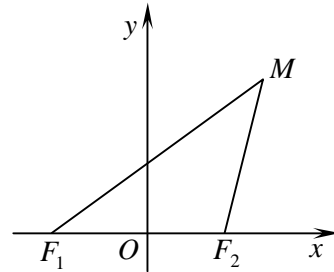
Alnan deňleme giperbolanyň deňlemesidir, çünki ony diňe giperbolanyň islendik nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Ony (33) deňlemäni ýönekeýleşdirmiş ýaly ýönekeýleşdireliň:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2, \quad \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Ahyrky deňlemäni kwadrata göterip alarys:



8-nji surat

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \quad \text{ýa-da} \quad A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C = 0.$$

Ondan bolsa  $Ax_1 + By_1 + C + (A^2 + B^2)t = 0$  deňlik gelip çykýar. Bu deňlikden bolsa  $A^2 + B^2 \neq 0$  şertiň esasynda

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2} \quad (21)$$

deňlik alynýar. (20) we (21) formulalaryň esasynda  $M_1(x_1, y_1)$  nokatdan  $Ax + By + C = 0$  göni çyzyga çenli uzaklygy tapmak üçin

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (22)$$

formula gelip çykýar.

**2-nji mysal.**  $M(-6, 3)$  nokatdan  $3x - 4y + 15 = 0$  deňleme boýunça berlen göni çyzyga çenli uzaklygy tapmaly.

◁ (22) formula esasynda

$$d = \frac{|3 \cdot (-6) - 4 \cdot 3 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-18 - 12 + 15|}{5} = \frac{|-15|}{5} = 3. \triangleright$$

## § 2.2. Töweregiň umumy deňlemesi

Tekizlikde  $x$  we  $y$  dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (23)$$

algebraik deňlemä seredeliň, bu ýerde  $A, B, C$  koeffisiýentler bir wagtda nola deň däl, ýagny

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (24)$$

§ 1.4 -de töweregiň deňlemesiniň (14) formula boýunça aňladylyşyny görüpdik. Eger şol formulada ýaýlary açsak, onda ol

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = 0$$

görnüşü alar. Bu deňlemäni (23) deňleme bilen deňeşdirip,  $A = C = 1, B = 0$  bolýandygyny görýäris. Şondan ugur alyp, (23) deňlemäniň  $A = C, B = 0$  bolan halyna garalyň:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (25)$$

Bu deňlemäniň nähili çyzygy kesgitleýändigini aşakdaky teoremdan görünýär.

**2-nji teorema.** Eger  $x$  we  $y$  dekart koordinatalaryna görä (25) deňleme tekizlikde käbir çyzygy kesgitleýän bolsa, onda ol töwerekdir.

◁ (25) deňlemäni agzalaýyn  $A$  ( $A \neq 0$ ) sana bölüp,

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \quad (26)$$

deňligi alarys, bu ýerde  $d = D/A$ ,  $e = E/A$ ,  $f = F/A$ . Bu deňlemäniň çep böleginde doly kwadratlary almak üçin ony özgerdeliň:

$$\left(x^2 + 2\frac{d}{2}x + \frac{d^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{e}{2}y + \frac{e^2}{4}\right) + f - \frac{d^2}{4} - \frac{e^2}{4} = 0,$$

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f. \quad (27)$$

Bu deňligiň sag bölegindäki algebraik jem položitel, otrisatel we nola deň bolup biler. Olaryň hersini aýratynlykda derňäliň.

1. Eger  $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f > 0$  bolsa, onda  $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f = R^2$ ,  $\frac{d}{2} = -a$ ,

$\frac{e}{2} = -b$  belgilemeleri girizip,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (28)$$

deňlemäni alarys we ol  $R$  radiusly we merkezi  $M(a, b)$  nokatda bolan töweregi kesgitleýär.

2. Eger  $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f = 0$  bolsa, onda (27) deňleme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

görnüşini alar. Ol deňlemäni koordinatalary  $x = a$ ,  $y = b$   $\left(a = -\frac{d}{2}, b = -\frac{e}{2}\right)$

bolan ýeke-täk nokat kanagatlandyýar.

3.  $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f < 0$  bolsa, onda  $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f = -R^2$  belgileme girizip,

(27) deňlemäni

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = -R^2$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu deňligi tekizligiň hiç bir nokady kanagatlandyрмаýar, şoňa görä ol hiç bir çyzygy kesgitlemeýär.

Şeýlelikde, (25) deňleme ýa hiç bir deňlemäni kesgitlemeýär, ýa bir

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (39)$$

formula boýunça kesgitlenýär. Ellips üçin  $0 < \varepsilon < 1$  bolýandygy esasynda (39) deňlikden  $0 < \varepsilon < 1$  deňsizlik alynýar (töwerek üçin  $c = 0$  bolany sebäpli  $\varepsilon = 0$ ).  $b^2 = a^2 - c^2$  we (39) deňligiň esasynda

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

formulalar gelip çykýar. Bu formulalaryň esasynda eksentrisitet ellipsiň formasyny kesgitleýär; eksentrisitet näçe uly boldugyça ellips şonça süýnmekdir. Eksentrisitetiň örän kiçi bahalarynda  $a$  we  $b$  biri-birlerine ýakyndyr, ýagny ellips töwerege ýakyndyr. Eger-de  $\varepsilon$  bire ýakyn bolsa, onda  $b$  san  $a$  bilen deňşdireniňde kiçidir we bu halda ellips uly okuň ugry boýunça gaty süýnmekdir.

Belli bolşy ýaly planetalar we käbir kometalar elliptik orbitalar boýunça hereket edýärler. Şunlukda, planetalaryň orbitalarynyň eksentrisiteti örän kiçi bolup, kometalaryňky uludyr, ýagny bire ýakyndyr. Şeýlelikde, planetalar tas töwerek boýunça herket edýän bolup, kometalar bolsa birden Güne ýakynlaşýar (Gün fokuslaryň birinde ýerleşýär), birden bolsa ondan daşlaşýar

Ellipsiň  $M$  nokadyny onuň  $F_1$  we  $F_2$  fokuslary bilen birleşdirýän kesimine şol nokadyň fokal radiuslary diýilýär. Olaryň  $r_1$  we  $r_2$  uzynlyklary (36) we (37) formulalar boýunça kesgitlenýär. (39) deňlik esasynda olar

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

görnüşde ýazylýar.

**4-nji mysal.**  $3x^2 + 16y^2 = 192$  deňlemäniň ellipsi kesgileýändigini görkezip, onuň ýarym oklaryny, fokusyny we eksentrisitetini tapmaly.

◁ Berlen deňlemäni agzalaýyn 192-ä bölüp,

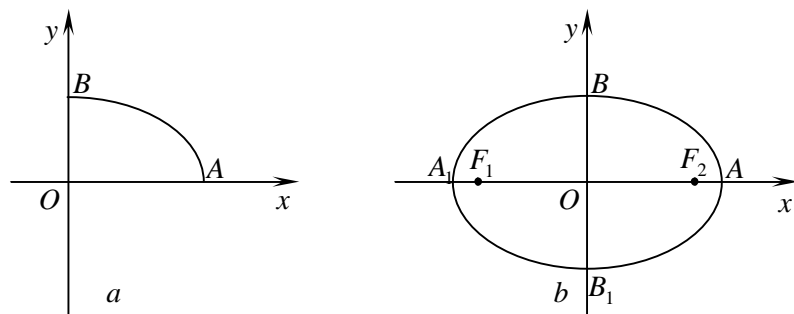
$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1$$

ellipsiň deňlemesini alarys. Bu ýerden görnüşi ýaly  $a = 8$ ,  $b = 2\sqrt{3}$  we

$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{64 - 12} = \pm 2\sqrt{13}$ . Şoňa görä hem  $\varepsilon = \sqrt{13}/4$ ,

$F_1(-2\sqrt{13}, 0)$ ,  $F_2(2\sqrt{13}, 0)$ . ▷

Olaryň birinjisi ellipsiň  $Ox$  okundan aşakda ýerleşýän ýarysyny, ikinjisi bolsa şol okdan ýokarda ýerleşýän beýleki ýarysyny kesgitleýär. Bu deňlemeleriň ikinjisinden görnüşi ýaly,  $x$  0-dan  $a$  çenli artanda  $y$   $b$ -den 0-a çenli kemelýär. Şunlukda,  $x=0$  bolanda  $y=b$  bolar we  $B(0, b)$  nokat,  $x=a$  bolanda  $y=0$  bolar we  $A(a, 0)$  nokat alynýar we şonuň esasynda ellipsiň birinji çärýekde ýerleşýän bölegi 7-nji  $a$  suratdaky ýaly, tutuş ellipsiň özi bolsa 7-nji  $b$  suratdaky ýaly bolýar.



7-nji surat

Ellipsiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryna (7-nji suratdaky  $A_1, A, B_1, B$  nokatlara) ellipsiň depeleri diýilýär. Ellipsiň simmetriýa oklaryna ( $Ox$  we  $Oy$  oklara) onuň oklary, ellipsiň oklarynyň kesişme nokadyna ellipsiň merkezi diýilýär.  $A_1A = 2a$ ,  $B_1B = 2b$  kesimlere hem ellipsiň oklary diýilýär. Şoňa görä  $OA = a$ ,  $OB = b$  kesimlere ellipsiň ýarym oklary diýilýär. Fokuslar  $Ox$  okunda ýerleşýän halda  $a > b$  bolar. Şonuň üçin hem  $OA = a$  kesime uly ýarym ok,  $OB = b$  kesime bolsa kiçi ýarym ok diýilýär.

(35) denlmemä  $a < b$  bolanda hem seretmek bolar, ýöne bu halda ol uly ýarym oky  $OB = b$  bolan ellipsi kesgitleýär, onuň fokuslary bolsa  $Oy$  okunda ýerleşýändir.  $b = a = R$  bolan halda (35) denlmeme  $x^2 + y^2 = R^2$  görnüşi alar we ol merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy  $R$  deň bolan töweregi kesgitleýär.

**3. Ellipsiň ekssentrisiteti.** Fokuslaryň arasyndaky uzaklygyň uly okuň uzynlygyna bolan gatnaşygyna ellipsiň ekssentrisiteti diýilýär.  $a > b$  bolan halda (35) ellipsiň ekssentrisiteti

nokady kesgitleýär, ýa-da töweregi kesgitleýär. ▷

**3-nji mysal.**  $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 19 = 0$  deňleme bilen kesgitlenýän töweregiň merkezini we radiusyny tapmaly.

◁ Berlen deňlemäni özgerdeliň:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + \frac{19}{4} = 0, \quad (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 + \frac{19}{4} = 0,$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{1}{4}.$$

Bu deňlemäni (28) deňleme bilen deňeşdirip, töweregiň merkeziniň  $M(1, -2)$  nokat we radiusynyň  $R = 1/2$  bolýandygyny görýäris. ▷

**4-nji mysal.**  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$  deňlemäniň tekizlikde nähili nokatlaryň köplüginde kesgitleýändigini anyklamaly.

◁ Berlen deňlemäni özgerdip,  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 0$  görnüşde ýazmak bolar. Bu deňlemäni koordinatalary  $x = -3$ ,  $y = 4$  bolan ýeke-täk nokat kanagatlandyryr. Şonuň üçin hem berlen deňleme ýeke-täk  $M(-3, 4)$  nokady kesgitleýär. ▷

## § 2.3. Ellips

**1. Ellipsiň kesgitlenişi we onuň deňlemesi.** Tekizlikde berlen iki nokatlara (fokuslara) çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik bolan (we  $2a$  sana deň alynýan) tekizligiň ähli nokatlarynyň köplüginde ellips diýilýär.

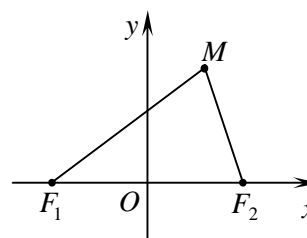
Fokuslary  $F_1$  we  $F_2$ , olaryň arasyndaky uzaklygy  $2c$  bilen belgiläliň, ýagny

$$|F_1F_2| = 2c. \quad (29)$$

Eger  $M(x, y)$  ellipsiň erkin nokady we  $|F_1M|$ ,  $|F_2M|$  şol nokatdan fokuslara çenli uzaklyklar bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \quad (30)$$

deňlik ýerine ýetýär.  $F_1MF_2$  üçburçlukdan görnüşi ýaly (6-njy surat)



6-njy surat

$|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|$  deňsizlik ýerine ýetýär. Ol deňsizlik (29) we (30) deňlikler esasynda şeýle görnüşi alýar:

$$2a > 2c, \quad a > c. \quad (31)$$

Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä ellipsiň deňlemesini düzeliň. Onuň üçin  $Ox$  okuny fokuslar arkaly geçür ýaly we položitel ugry  $F_1$ -den  $F_2$  tarapa bolar ýaly alalyň (6-njy surat). Koordinatalar başlangyjy  $[F_1 F_2]$  kesimiň ortasynda alalyň, onda  $F_1 = F_1(-c, 0)$ ,  $F_2 = F_2(c, 0)$  bolar.  $M$  nokadyň koordinatalaryny  $x, y$  bilen belgiläliň.

Iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy esasynda

$$|F_1 M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |F_2 M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (32)$$

Bu aňlatmalary (30) deňlikde goýup, şeýle deňligi alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (33)$$

Alnan deňleme ellipsiň deňlemesidir, çünki ony diňe ellipsiň islendik nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Ony ýönekeýleşdirmek üçin kökleriň birini deňligiň sag bölegine geçirip, alnan deňligi kwadrata götereliň we meňzeş agzalary toplalyň:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx, \quad a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \end{aligned}$$

Ahyrky deňlemäni kwadrata göterip alarys:

$$\begin{aligned} a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (34)$$

(31) deňsizligiň esasynda  $a^2 - c^2 > 0$  we şonuň üçin  $b^2 = a^2 - c^2$

belgileme girizmek bolar. Şonuň esasynda (34) deňlik  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  görnüşli alar. Ol deňlikden bolsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (35)$$

deňlik alynýar. Şeýlelikde, ellipsiň islendik nokadynyň koordinatalary (35) deňlemäni kanagatlandyrýar. Tersine hem dogrudygyny, ýagny koordinatalary (35) deňlemäni kanagatlandyrýan  $M$  nokadyň ellipsde ýatýandygyny we onuň üçin (30) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň. (35) deňlikden  $y^2$  tapyp:  $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$  we ony (32) deňlikleriň birinjisinde goýup hem-de  $b^2 = a^2 - c^2$  deňlikden peýdalanyň alarys:

$$\begin{aligned} |F_1 M| &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2} = \pm \left(a + \frac{c}{a}x\right), \end{aligned}$$

bu ýerde alamat deňligiň sag bölegi položitel bolar ýaly saýlanyp alynýar.

$c < a$  we (35) esasynda  $|x| \leq a$  bolany üçin goşmak alamatyny almak zerurdyr, ýagny

$$|F_1 M| = a + \frac{c}{a}x. \quad (36)$$

Edil şonuň ýaly (32) deňligiň ikinjisinden

$$|F_2 M| = a - \frac{c}{a}x \quad (37)$$

Ahyrky iki deňliklerden bolsa (30) deňlik gelip çykýar we ol  $M$  nokadyň ellipsde ýatýandygyny aňladýar. Şeýlelikde, (35) deňleme ellipsiň deňlemesidir. Oňa ellipsiň kanonik deňlemesi diýilýär. Onuň ikinji derejeli deňlemeligi üçin ellips ikinji tertipli çyzykdyr.

**2. Ellipsiň formasynyň derňelişi.** Ellipsiň (35) deňlemesiniň esasynda  $x^2 \leq a^2$ ,  $y^2 \leq b^2$ , ýagny  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Bu deňsizlikler ellipsiň tutuşlygyna esasy  $2a$  we beýikligi  $2b$  bolan gönüburçlukda ýerleşýändigini we onuň merkeziniň koordinatalar başlangyjyndygyny aňladýar. (35) deňlemä  $x$ -iň diňe ikinji (jübüt) derejesiniň girýändigini üçin ellips  $Oy$  okuna simmetrikdir. Hakykatdan-da, eger  $M_1(x_1, y_1)$  nokat ellipsde ýatýan bolsa, onda  $M_2(-x_1, y_1)$  nokat hem ellipsde ýatýandyr, çünki

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

ol bolsa  $M_1$  we  $M_2$  nokatlaryň  $Oy$  okuna görä simmetrikligini aňladýar. Şonuň ýaly hem ellips  $Ox$  okuna görä-de simmetrikdir. Ellipsiň koordinata oklaryna görä simmetrikligi esasynda onuň formasyny diňe birinji çärykde derňemek ýeterlikdir. (35) deňlemeden  $y$ -i tapalyň:

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (38)$$

oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmaly.

**27.** Deňlemeleri özgerdip we täze koordinatalara geçip, olaryň haýsy çyzyklary kesgitleýändigini anyklamaly we olary gurmaly:

- 1)  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$ . 2)  $16y^2 - 9x^2 + 54x + 32y - 209 = 0$ .  
 3)  $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$ . 4)  $x^2 - 4x + 4y = 0$ .  
 5)  $xy - 4x + 3y - 7 = 0$ . 6)  $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$   
 7)  $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$ . 8)  $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ .  
 9)  $9y^2 - 4x^2 + 18y + 8x - 31 = 0$ . 10)  $x^2 + 4x - y - 1 = 0$ .

### J o g a p l a r

- 1.** 1)  $y = x + 2$ , 2)  $y = x - 5$ , 3)  $y = x + 3/4$ . **2.**  $3x - 4y = 0$ . **3.**  
 1)  $y = -x - 3$ , 2)  $y = \sqrt{3}x - 3$ , 3)  $y = x - 3$ . **4.** 1)  $\varphi = 45^\circ$ , 2)  $\varphi = 135^\circ$ ,  
 3)  $\varphi = \arctg 2$ . **5.** 1)  $a = 3, b = -2$ ; 2)  $a = 4, b = 3$ ; 3)  $a = -5, b = 4$ .  
**6.**  $C = 20$ . **7.** 1)  $\varphi = 135^\circ$ , 2)  $\varphi = 45^\circ$ , 3)  $\varphi = \arctg(1/2)$ . **8.** 1) we 2)  
 göni çyzyklar parallel, 1) we 3), 2) we 3) göni çyzyklar perpendikulýar.  
**9.**  $6x - 5y - 11 = 0$ . **10.**  $2x + 3y + 1 = 0$ . **11.**  $2x + 3y - 18 = 0$  (AB),  
 $x - 2y - 2 = 0$  (BC),  $x - 3 = 0$  (AC). **12.** (2, -3). **13.** 1) 0,8; 2) 0,5.  
**14.** 1. **15.**  $5x + 12y - 52 = 0$ . **16.**  $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$ . **17.** 1)  $a = -3$ ,  
 $b = 4$ ,  $R = 6$ ; 2)  $a = 1, b = -3/2$ ,  $R = 2$ . **18.** 5. **19.**  $a = 6$ ,  $b = 2\sqrt{5}$ ,  
 $F_1(-4, 0)$ ,  $F_2(4, 0)$ ,  $\varepsilon = 2/3$ ; 2)  $a = 2\sqrt{7}$ ,  $b = 8$ ,  $F_1(0, -6)$ ,  $F_2(0, 6)$ ,  
 $\varepsilon = 3/4$ . **20.**  $x = \pm 10$ . **21.** 1)  $3x^2 + 4y^2 = 48$  ellipsiň içi we  $x = 2$  göni  
 çyzygyň sagy; 2)  $25x^2 + 8y^2 = 200$  ellipsiň içi we  $y = 2$  göni çyzygyň  
 aşagy. **22.** 1)  $a = 4, b = 3$ ,  $F_1(-5, 0)$ ,  $F_2(5, 0)$ ,  $\varepsilon = 5/4$ ,  $y = \pm(3/4)x$ ;  
 2)  $a = 8, b = 6$ ,  $F_1(-10, 0)$ ,  $F_2(10, 0)$ ,  $\varepsilon = 5/4$ ,  $y = \pm(3/4)x$ ;  
 3)  $a = 12, b = 5$ ,  $F_1(0, -13)$ ,  $F_2(0, 13)$ ,  $\varepsilon = 13/5$ ,  $y = \pm(5/12)x$ .  
**23.** 1)  $x = \pm 10/3$ ,  $d = 20/3$ ; 2)  $y = \pm 24/7$ ,  $d = 48/7$ ; 3)  $x = \pm 3,5$ ,  $d = 7$ .  
**24.**  $M$  nokat üçin  $r_1 = 11$ ,  $r_2 = 5$ ;  $N$  nokat üçin  $r_1 = 9$ ,  $r_2 = 15$ .  
**25.** 1)  $F(2, 0)$ ,  $x = -2$ ; 2)  $F(-2,5, 0)$   $x = 2,5$ . **26.**  $y^2 = -4(x - 9)$ ,  
 $A(9, 0)$ ,  $B(0, -6)$ ,  $C(0, 6)$ .

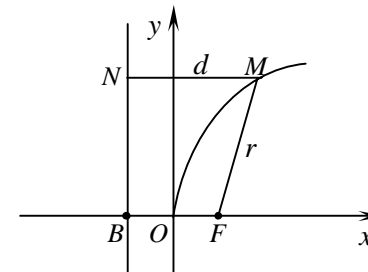
uzaklygy  $r$  bilen we direktrisa çenli uzaklygy  $d$  bilen belgiläliň  
 ( $r = |MF|$ ,  $d = |MN|$ ). Onda kesgitleme boýunça  $r = d$  bolar. Iki nokadyň  
 arasyndaky uzaklygyň formulasy boýunça

$$d = x + \frac{p}{2}, \quad r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

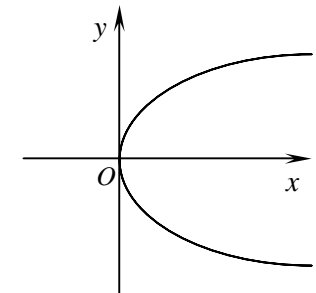
şoňa görä

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (56)$$

deňlemäni alarys. Ol parabolanyň deňlemesidir. Ony ýönekeý görnüşe



13-nji surat



14-nji surat

getirmek üçin onuň iki bölegini hem kwadrata göterip alarys:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

ýa-da

$$y^2 = 2px. \quad (57)$$

(56) we (57) deňlemeler deňgüýçlüdürler.

(57) deňlemä parabolanyň kanonik deňlemesi diýilýär. Bu deňlemeden  
 $x \geq 0$  deňsizlik gelip çykýar ( $p > 0$  bolany üçin), ýagny parabola  
 tutuşlygyna  $Oy$  okdan sagda ýerleşýär. Deňlemä  $y$ -iň ikinji dereje bolup  
 girýänligi üçin parabola  $Ox$  oka görä simmetrikdir;  $x$ -iň çäksiz artmagy  
 bilen  $y$  hem çäksiz artýandyr. Parabolanyň  $y = \sqrt{2px}$  deňlemä degişli  
 dugasy 13-nji suratda, parabolanyň özi bolsa 14-nji suratda şekillendirilen.  
 Direktrisanýň, ýagny  $B(-p/2, 0)$  nokat arkaly geçýän we  $Oy$  okuna

parallell bolan göni çyzygyň deňlemesi  $x = -p/2$  bolar.

**Bellik.** Aşakdaky deňlemeleriň her birisi hem parabolany kesgitelýär:

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2qy, \quad x^2 = -2qy.$$

## § 2. 7. Ellipsiň giperbolanyň, parabolanyň polýar deňlemesi

Goý,  $l$  ellipsiň, giperbolanyň ýa-da parabolanyň dugasy bolsun. Onuň erkin  $M$  nokadyndan fokusa çenli uzaklygy  $r$  bilen, deňişli direktrisa çenli uzaklygy bolsa  $d$  bilen belgiläliň (15-nji surat). Onda 2-nji teorema esasynda

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \quad (58)$$

Fokusdan direktrisa perpendikulýar göni çyzyk geçirip, kesişme nokadyny  $A$  bilen belgiläliň.  $M$  nokadyň şol göni çyzyga bolan proyeksiýasyny  $N$  bilen belgiläliň.  $F$  nokat arkaly  $AN$  göni çyzyga perpendikulýar geçirip, onuň  $l$  çyzyk bilen kesişme nokadyny  $P$  bilen belgiläliň.  $[FP]$  kesimiň uzynlygyny  $p$  bilen belgiläliň, ýagny

$$|FP| = p$$

we oňa  $l$  çyzygyň fokal parametri diýeliň.

Polýusy  $F$  nokatda we polýar oky  $FN$  bolan koordinatalar sistemasynda  $M$  nokadyň  $\rho$ ,  $\varphi$  polýar koordinatalary üçin

$$r = \rho, \quad d = |KM| = |AN| = |AF| + \rho \cos \varphi \quad (59)$$

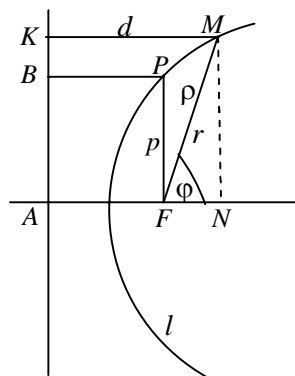
deňlikleri alarys. (58) deňlik  $l$  çyzygyň islendik nokadynda, şol sanda  $P$  nokatda hem ýerine ýetýär, şonuň üçin hem

$$\frac{|FP|}{|BP|} = \varepsilon, \quad \frac{p}{|AF|} = \varepsilon, \quad |AF| = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Ahyrky deňligiň esasynda (59) formulanyň ikinjisi şeýle görnüşi alar:

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi. \quad (60)$$

(59) we (60) deňlikler esasynda (58) deňlik



15-nji surat

$$1) M(2, -1), 4x - 3y - 15 = 0; 1) M(3, 1), 6x + 8y - 21 = 0.$$

**14.** Depeleri  $A(2, -1)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $C(3, 1)$  bolan üçburçlugyň  $B$  depesinden göýberilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapmaly.

**15.**  $5x + 12y - 13 = 0$ ,  $5x + 12y - 91 = 0$  göni çyzyklardan deň daşlaşan nokatlaryň köplügiň deňlemesini düzmeli.

**16.** Radiusy  $R = 7$  we merkezi  $C(-3, 5)$  nokatda bolan töweregiň deňlemesini ýazmaly.

**17.** Töwerekleriň radiuslaryny we merkezleriniň koordinatalaryny tapmaly: 1)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$ ; 2)  $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$ .

**18.**  $x^2 + y^2 + 14x - 6y - 46 = 0$ ;  $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 9 = 0$  töwerekleriň merkezleriniň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

**19.** Ellipsleriň ýarym oklaryny, fokuslaryny we eksentrisitetlerini tapmaly: 1)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ , 2)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ , 3)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ .

**20.**  $16x^2 + 20y^2 = 320$  deňleme bilen kesgitlenýän ellipsiň direktrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

**21.** Deňsizlikler bilen kesgitlenýän köplükleri anyklamaly we olary dekart koordinatalar sistemasynda şekillendirmeli:

$$1) 3x^2 + 4y^2 \leq 48, x \geq 2. 2) 25x^2 + 8y^2 \leq 200, y \leq 2.$$

**22.** Giperbolalaryň ýarym oklaryny, fokuslaryny, eksentrisitetlerini we asimptotalaryny tapmaly:

$$1) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, 2) \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1, 3) -\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

**23.** Giperbolalaryň hersiniň direktrisalalaryny we olaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly: 1)  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ , 2)  $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ , 3)  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{36} = 1$ .

**24.** Giperbola  $7x^2 - 9y^2 = 63$  deňleme bilen kesgitlenen  $M(6, \sqrt{21})$  we  $N(-9, 2\sqrt{14})$  nokatlaryň fokal radiuslaryny tapmaly.

**25.** Parabolanyň fokusyny, direktrisasynyň deňlemesini tapmaly we olaryň hemmesini gurmaly; 1)  $y^2 = 8x$ , 2)  $y^2 = -10x$ , 3)  $x^2 = 2y$ .

**26.**  $Ox$  okuna simmetrik we  $M(5, 4)$ ,  $N(7, -2\sqrt{2})$  nokatlar arkaly geçýän parabolanyň deňlemesini düzmeli we ol parabolanyň koordinatalar

Ol ellips köne sistemanyň koordinatalar başlangygy boýunça geçýär (başdaky deňlemede azat agzanyň ýoklugy sebäpli ol deňlemäni  $x=0$ ,  $y=0$  nokat kanagatlandyryýar).

### G ö n ü k m e l e r

**1.** Birinji koordinatalar burçunyň bissektisasyna parallel we  $Oy$  okdan ululyklary 1)  $b=2$ ; 2)  $b=-5$ ; 3)  $b=3/4$  bolan kesimleri kesýän göni çyzyklary düzmeli.

**2.** Koordinatalar başlangygy we  $B(4, 3)$  nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

**3.**  $Oy$  okundan  $b=-3$  kesimi kesýän we  $Ox$  oky bilen 1)  $\varphi=135^\circ$ ; 2)  $\varphi=60^\circ$ ; 3)  $\varphi=45^\circ$  burçlary emele getirýän göni çyzyklary düzmeli.

**4.** Göni çyzyklaryň  $Ox$  oky bilen emele getirýän burçlaryny tapmaly: 1)  $2x-2y+5=0$ ; 2)  $3x+3y-7=0$ ; 3)  $6x-3y-1=0$ .

**5.** Göni çyzyklaryň koordinatalar oklarynda kesýän kesimleriniň ululyklaryny tapmaly we göni çyzyklary gurmaly: 1)  $2x-3y-6=0$ ; 2)  $3x+4y-12=0$ ; 3)  $4x+5y-20=0$ .

**6.**  $C$ -niň haýsy bahasynda  $3x-4y+C=0$  göni çyzyk  $Oy$  okunda  $b=5$  kesimi kesýär?

**7.** Göni çyzyklaryň arasyndaky burçlary tapmaly: 1)  $y=\frac{4}{3}x-2$ ,  $y=\frac{1}{7}x+3$ ; 2)  $y=\frac{3}{5}x+1$ ,  $y=4x-5$ ; 3)  $x-y+5=0$ ,  $3x-y-1=0$ .

**8.** Göni çyzyklaryň haýsylary parallel, haýsylary perpendikulýar? 1)  $2x-7y+3=0$ ; 2)  $4x-14y+1=0$ ; 3)  $7x+2y-5=0$ , 4)  $3x+5y-2=0$   
**9.**  $2x-3y-5=0$ ,  $3x-4y-7=0$  göni çyzyklaryň kesişme nokady arkaly  $5x+6y-7=0$  göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk geçirmeli.

**10.** Depeleri  $A(3, 4)$ ,  $B(-2, 1)$ ,  $C(-3, -5)$  bolan üçburçlugyň  $B$  depesinden  $AC$  tarapa geçirilen beýikliginiň deňlemesini düzmeli.

**11.** Üçburçlugyň  $A(3, 4)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(3, 1/2)$  depeleri üstünde ýatýan göni çyzyklaryň deňlemelerini düzmeli.

**12.** Depeleri  $A(2, -8)$ ,  $B(-3, 9)$ ,  $C(7, -10)$  bolan üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokadyny tapmaly.

**13.** Berlen nokatdan göni çyzyga çenli uzaklygy tapmaly:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (61)$$

görnüşde ýazylar. Oňa ellipsiň, giperbolanyň, parabolanyň polýar deňlemesi diýilýär (ol deňleme giperbolanyň iki şahasynyň birini kesgitleýär).

Parabola üçin fokal parametr (57) deňlemedäki  $p$  bilen gabat gelýär. Değişlilikde (35) we (46) deňlemeler bilen berilýän ellips we giperbola üçin fokal parametr

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (62)$$

formula boýunça aňladylýar. Hakykatdan-da, kesgitleme boýunça fokal parametr  $P$  nokadyň ordinatasynyň modulyna deňdir ( $AN$  oky  $Ox$  oky hasap edýäris). Ellipsiň  $P(-c, y)$  nokadynyň koordinatalaryny (35) deňlemede goýup alarys:

$$\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}.$$

Bu deňlikden bolsa (61) deňlik gelip çykýar. Bu netije  $P(-c, y)$  nokadyň koordinatalaryny (46) deňlikde goýanymyzda hem alynýar.  $P(-p/2, y)$  nokadyň koordinatalaryny (57) deňlemede goýmak arkaly parabolanyň fokal parametriniň fokusdan direktrisa çenli uzaklyga deňdigi barlanylýar.

**6-njy mysal.** Polýar koordinatarynda berlen  $\rho = \frac{9}{4-5 \cos \varphi}$  deňlemäniň

haýsy çyzygy kesgitleýändigini anyklamaly.

◁ Deňlemäniň sag böleginiň sanawjysyny we maýdalawjysyny 4-e bölüp, ony (61) görnüşdäki

$$\rho = \frac{9/4}{1 - (5/4) \cos \varphi}$$

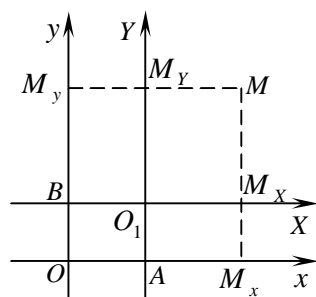
deňlemä getireris. Ony (61) deňleme bilen deňeşdirip alarys:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly berlen deňleme ýarym oklary  $a=4$ ,  $b=3$  bolan giperbolany kesgitleýär. ▷

## § 2.8. Gönüburçly dekart koordinatalaryny özgertmek

**1. Parallel göçürmek.** Goý, umumy masştab kesimi we položitei ýarym oklarynyň ugurlary gabat gelyän iki sany  $Oxy$  (köne) we  $O_1XY$  (täze) gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun. Eger täze sistemanyň koordinatalarynyň başlangyjy  $O_1(a, b)$  nokatda bolup, onuň köne koordinatalary  $x = a, y = b$  bolsa, onda şeýle sistemalaryň birisi parallel göçürmek arkaly beýlekisinden alynýar diýilýär (16-njy surat). Bu



16-njy surat

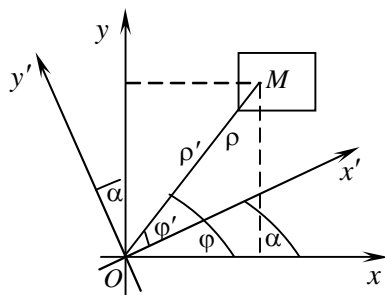
suratdan görnüşi ýaly  $Ox$  okunyň  $O, A, M_x$  we  $Oy$  okunyň  $O, B, M_y$  nokatlary üçin nokadyň koordinatasynyň kesgitlenmesi esasynda  $M$  nokadyň köne  $x$  we  $y$  koordinatalaryny onuň täze koordinatalary arkaly aňlatmak bolar:

$$x = X + a, \quad y = Y + b. \quad (63)$$

Bu formuladan peýalanyp, ol nokadyň täze koordinatalaryny onuň köne koordinatalary arkaly aňlatmak bolar:

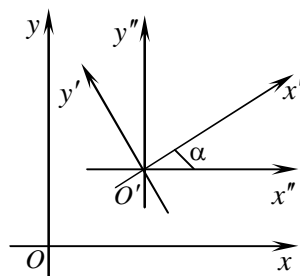
$$X = x - a, \quad Y = y - b. \quad (64)$$

**2. Koordinatalar oklaryny öwürmek.** Goý, täze  $Ox'y'$  gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy köne  $Oxy$  sistemanyň  $O$  nokadynyň daşyndan  $\alpha$  burç öwürlmeginden alynýan bolsun (17-nji surat). Ol sistemalaryň her haýsy bilen deňişlikde  $\rho', \varphi'$  we  $\rho, \varphi$  polýar koordinatalaryny baglanyşdyrallyň. 17-nji suratdan görnüşi ýaly ol polýar koordinatalar üçin  $\rho = \rho', \varphi = \alpha + \varphi'$  deňlikler dogrudyr. Bu deňlikler esasynda polýar we dekart koordinatalary baglanyşdyrýan



17-nji surat

44



18-nji surat

deňleme ýa boş köplügi, ýa nokady, ýa (kesişýän, parallel, gabat gelyän) iki göni çyzygy ýa-da ellips (töwerek), giperbola, parabola çyzyklaryň birini kesgitleýär.

**10-njy mysal.**  $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y = 0$  deňleme bilen berlen çyzygyň görnüşini kesgitlemeli we ony gurmaly.

◁ Berlen deňlemäni (65) formulany ulanyp özgerdenimizde  $x'y'$  köpeltmek hasylyň koeffisiýentini nola deň etmek üçin  $\alpha$  burçy (88)

deňlikden kesgitleäris:  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} = \frac{5-5}{-6} = 0, \quad 2\alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$ . Bu

halda (65) formula

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \quad (89)$$

görnüsi alar. Ony berlen deňlemede göyup alarys:

$$\frac{5}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 3(x'^2 - y'^2) + \frac{5}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) +$$

$$+ 8\sqrt{2}(x' - y') - 8\sqrt{2}(x' + y') = 0,$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16\sqrt{2}y' = 0. \quad x'^2 + 4y'^2 - 8\sqrt{2}y' = 0,$$

$$x'^2 + 4(y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2) - 8 = 0, \quad x'^2 + 4(y' - \sqrt{2})^2 - 8 = 0.$$

Bu deňlemede

$$X = x', \quad Y = y' - \sqrt{2} \quad (90)$$

formula boýunça täze koordinatalara geçip,

$$X^2 + 4Y^2 = 8, \quad \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{2} = 1 \quad (91)$$

deňlemäni alarys. Bu deňleme ýarym

oklary  $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$  bolan

ellipsi kesgitleýär. Onuň merkezi

$X = 0, Y = 0$  bolan nokatdadyr. (89)

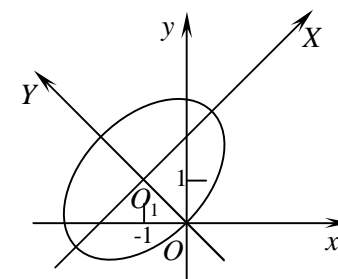
we (90) formulalary ulanyp alarys:

$x' = 0, y' = \sqrt{2}, x = -1, y = 1$ . Şonuň üçin ellipsiň merkezi we täze

$O_1XY$  koordinatalar sistemasynyň başlangyjy  $O_1(-1, 1)$  nokatda

ýerleşýär. Şol sistemada (91) deňleme bilen kesgitleňýän ellipsi guralyň

(22-nji surat). Şunlukda, köne  $Oxy$  sistemada gurlan çyzygy hem alarys.



22-nji surat

53



$$\begin{aligned}A_1 &= A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha, \\B_1 &= (C - A) \cos \alpha \sin \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\C_1 &= A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha.\end{aligned}$$

(87) deňlemedäki  $B_1$  koeffisiýent nola deň bolar ýaly  $\alpha$  burçy saýlap alalyň, ýagny ol burçy

$$(C - A) \cos \alpha \sin \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

deňlemäniň çözüwi hökmünde alalyň. Ol deňlemeden

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}. \quad (88)$$

deňligi alarys. Bu halda  $A_1$  we  $C_1$  koeffisiýentleriň ikisiniň bir wagtda nola deň bolup bilmejegini subut edeliň. Tersine,  $A_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  güman edip,

$$\begin{aligned}A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha &= 0, \\A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha &= 0\end{aligned}$$

deňlemeleri alarys. Olaryň birijisinden ikinjisini aýryp,  $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{2B}{A - C}$

deňligi alarys we ony (88) deňlik bilen deňeşdirip,  $\frac{A - C}{2B} = -\frac{2B}{A - C}$

deňligi, ýagny  $4B^2 = -(A - C)^2$  deňligi alarys, ol bolsa diňe  $B = 0$  bolanda ýerine ýetýär we ol  $B \neq 0$  şerte garşy gelýär.

Şeýlelikde, köne dekart koordinatalaryndan käbir  $\alpha$  burça öwürmek arkaly täze dekart koordinatalaryna geçilende alynýan deňlemäniň derejesiniň peselip bimejekdigini subut etdik. Şonuň ýaly-da parallel göçürmekde we umumy bolan (66) formulalary ulanyp koordinatalary özgerdenimizde-de deňlemäniň derejesi peselmeýär. Başgaça aýdylanda, eger berlen çyzyk käbir dekart koordinatalar sistemasynda ikinji derejeli deňleme bilen kesgitlenýän bolsa, onda ol islendik başga dekart koordinatalar sistemasynda hem ikinji derejeli deňleme bilen kesgitlenýär.

Koeffisiýent  $B_1 = 0$  bolanda (87) deňleme şeýle görnüşini alar:

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F_1 = 0.$$

Bu deňleme (69) görnüşdäki deňlemidir. Şonuň üçin onuň ýönekeý görnüşe getirilişi şol deňlemäniňki ýalydyr.

Alnan netijeleri aşakdaky teorema görnüşinde getirmek bolar.

**3-nji teorema.** Gönüburçly dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli

$x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  formulalary ulanyp alarys:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi = \rho' \cos(\alpha + \varphi') = (\rho' \cos \varphi') \cos \alpha - (\rho' \sin \varphi') \sin \alpha = \\&= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= \rho \sin \varphi = \rho' \sin(\alpha + \varphi') = (\rho' \cos \varphi') \sin \alpha + (\rho' \sin \varphi') \cos \alpha = \\&= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,\end{aligned}$$

ýagny

$$\left. \begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha\end{aligned} \right\}. \quad (65)$$

Täze  $x'$ ,  $y'$  koordinatalary köne  $x$ ,  $y$  koordinatalar arkaly aňlatmak üçin bu sistemany  $x'$ ,  $y'$  görä çözmek zerurdyr. Ýöne ony başgaça hem görkezmek bolar:  $Ox'y'$  sistemany köne sistema hökmünde alyp, ony  $(-\alpha)$  burça öwürmek arkaly  $Oxy$  sistema alynýar, şonuň üçin (65) formulada  $x$  we  $x'$ ,  $y$  we  $y'$  koordinatalaryň orunlaryny çalşyryp,  $\alpha$ -nyň ýerine  $(-\alpha)$  ýazmak ýeterlikdir.

Umumy halda, eger  $Oxy$  we  $O'x'y'$  iki gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsa (18-nji surat), onda goşmaça  $O'x''y''$  sistemany girizip we yzygiderli (63) we (65) formulalary ulanyp,

$$\left. \begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b\end{aligned} \right\} \quad (66)$$

formulany alarys.

## § 2. 9. Koordinatalary özgertmek formulalarynyň ulanylyşy

**1.  $y = ax^2 + bx + c$  deňlemäniň kesgitlän çyzygy.** Deňlemäniň sag böleginde doly kwadraty almak üçin ony özgerdeliň:

$$\begin{aligned}y &= a \left( x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + c; \\y + \frac{b^2}{4a^2} - c &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2.\end{aligned}$$

Bu deňlikde

$$X = x + \frac{b}{2a}, \quad Y = y + \left( \frac{b^2}{4a^2} - c \right)$$

formular boýunça täze koordinatalara geçip, ýagny parallel göçürme geçirip, özgerdip alnan deňlemäni  $Y = aX^2$  görnüşde ýazmak bolar. Ol deňleme bolsa  $O_1XY$  koordinatalar sistemasynda parabolany kesgitleýär. Diýmek, berlen deňleme oky  $Oy$  okuna parallel bolan parabolany kesgitleýär. Şonuň ýaly-da  $x = Ay^2 + By + C$  deňleme hem parabolany kesgitleýär, ýöne ol parabolanyň oky  $Ox$  okuna parallel bolýar.

**2.  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  deňlemäniň kesgitleýän çyzygy.** Bu deňlemede  $c \neq 0$  we  $ad - bc \neq 0$  hasap edeliň, çünki  $c = 0$  bolanda  $y = kx + m$  görnüşdäki we  $ad - bc = 0$  bolanda  $y = l$  görnüşdäki göni çyzyk alynýar. Deňlemäni özgertmekligi aşakdaky ýaly geçireliň:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{bc-ad}{c}}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{x + \frac{d}{c}},$$

ýagny

$$y = \frac{a}{c} + \frac{C}{x + \frac{d}{c}}, \quad C = \frac{bc-ad}{c^2}.$$

Bu deňlemäni

$$y - \frac{a}{c} = \frac{C}{x + \frac{d}{c}} \quad (67)$$

görnüşde ýazyp, täze koordinatalary

görnüşdäki deňlemeleriň haýsy-da bolsa birine getirilýär.

**9-njy mysal.**  $9y^2 - 16x^2 + 18y + 32x - 151 = 0$  deňlemäniň kesgitleýän çyzygyny anyklamaly we ony gurmaly.

◁ Deňlemäni ýönekeýleşdirip alarys:

$$9(y^2 + 2y + 1) - 16(x^2 - 2x + 1) - 9 + 16 - 151 = 0,$$

$$9(y+1)^2 - 16(x-1)^2 = 144,$$

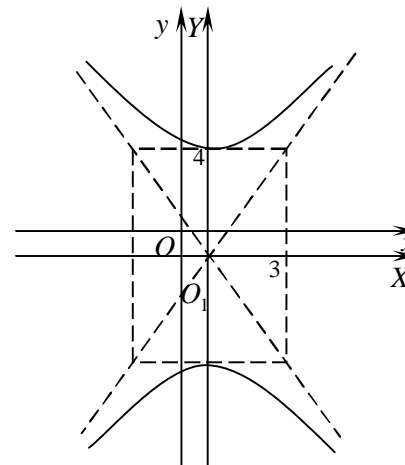
$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1, \quad -\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Bu deňlemede  $X = x - 1$ ,  $Y = y + 1$  formulalary ulanyp, koordinatalar

başlangyjy  $O_1(1, -1)$  nokatda bolan täze dekart koordinatalarynda

$$-\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

deňlemäni alarys. Ol deňleme hakyky oky  $O_1Y$  we parametrleri  $a = 3$ ,  $b = 4$  bolan giperbolany kesgitleýär. Köne we täze dekart koordinatalaryny we täze koordinatalarda giperbolany guralyň. Şunlukda, berlen deňlemäniň köne dekart koordinatalar sistemasynda nähili çyzygy kesgitleýändigini hem göreris (21-nji surat).



21-nji surat

**2. Ikinji derejeli umumy deňleme.** Gönüburçly  $x$  we  $y$  dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli umumy görnüşdäki

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (86)$$

deňlemä seredeliň we bu ýerde  $B \neq 0$  hasap edeliň.

Bu deňlemede (65) formulany ulanyp, täze  $x'$ ,  $y'$  koordinatalaryna geçeliň. Onda ol deňleme şeýle görnüşi alar:

$$A_1x'^2 + 2B_1x'y' + C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0, \quad (87)$$

bu ýerde

3) Goý,  $A=0$ ,  $C \neq 0$  bolsun. Onda  $D \neq 0$  bolanda (69) deňlemäni

$$C \left( y^2 + 2 \frac{E}{C} y + \frac{E^2}{C^2} \right) + 2Dx - \frac{E^2}{C} + F = 0,$$

$$C \left( y + \frac{E}{C} \right)^2 = -2D \left( x + \frac{F - \frac{E^2}{C}}{2D} \right) x - F = 0$$

görnüşde ýazmak bolar. Ol deňlemeden  $p = -D/C$  belgileme girizip we täze koordinatalary

$$X = x + \frac{FC - E^2}{2CD}, \quad Y = y + \frac{E}{C}$$

formulalar boýunça kesgitläp,

$$Y^2 = 2pX \quad (81)$$

deňligi alarys. Bu deňleme oky  $O_1X$  bolan parabolany kesgitleýär.

Eger  $D=0$  bolsa, onda (69) deňleme

$$C \left( y + \frac{E}{C} \right)^2 = \frac{E^2}{C} - F$$

görnüşü alar. Ony bolsa  $Y = y + \frac{E}{C}$ ,  $L = \frac{E^2}{C} - F$  begileme girizip,

$$CY^2 = L \quad (82)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu deňleme  $L$  sana, ýagny ( $LC > 0$ ,  $LC < 0$ ,  $L = 0$ )

şertlere baglylykda aşakdaky deňlemeleriň birine getirilýär:

$$Y^2 = b^2, \quad (83)$$

$$Y^2 = -b^2 \quad (84)$$

$$Y^2 = 0. \quad (85)$$

Şunlukda, (83) deňleme iki sany parallel  $Y = \pm b$  göni çyzyklary, (85) deňleme iki sany gabat gelýän göni çyzyklary kesgitleýär, (84) deňleme bolsa hiç bir çyzygy kesgitlemeýär.

**Bellik.** Eger  $C=0$ ,  $A \neq 0$  bolsa, onda 3-nji hala meňzeşlikde (69)

deňleme  $E \neq 0$  bolanda  $X^2 = 2qY$  deňlemä we  $E=0$  bolanda

$$X^2 = a^2, \quad X^2 = -a^2, \quad X^2 = 0$$

$$X = x + \frac{d}{c}, \quad Y = y - \frac{a}{c}$$

formulalar boýunça girizeliň. Onda täze  $O_1XY$  koordimatalarda (67) deňleme

$$Y = \frac{C}{X} \text{ ýa-da } XY = C, \quad C \neq 0 \quad (68)$$

görnüşde ýazylar. Bu deňleme bolsa deňtaraply giperbolany kesgitleýär. Şoňa görä seredilýän deňleme hem deňtaraply giperbolany kesgitleýär.

**7-nji mysal.**  $2y = x^2 - 2x + 5$  deňlemäniň kesgitleýän çyzygyny anyklamaly we ony gurmaly.

◁ Deňlemäni ýönekeýleşdirip alarys:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} + \frac{5}{2},$$

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2, \quad y-2 = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

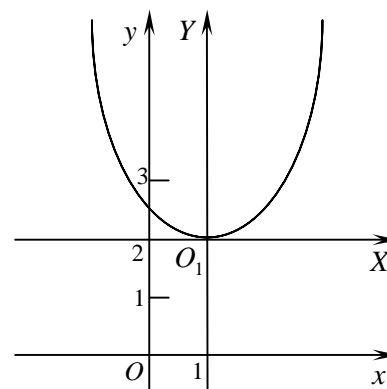
Eger  $X = x-1$ ,  $Y = y-2$  belgileme girizsek, onda täze  $O_1XY$  dekart

koordinatalar sistemasynda ol deňleme  $Y = \frac{1}{2}X^2$  görnüşde ýazylar. Bu

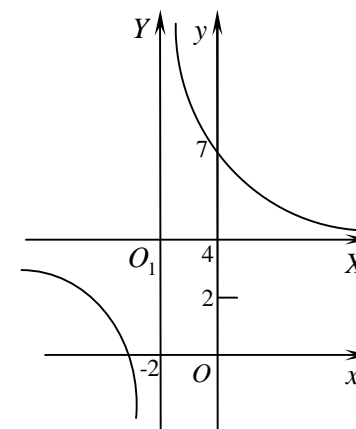
deňleme bolsa parabolany kesgitleýär. Indi  $Oxy$  we  $O_1XY$  koordinatalar

sistemalaryny we täze sistemada  $Y = \frac{1}{2}X^2$  kanonik deňlemesi boýunça

parabolany guralyň (19-njy surat). ▷



19-njy surat



20-nji surat

**8-nji mysal.**  $y = \frac{4x+14}{x+2}$  deňlemäniň kesgitleýän çyzygyny anyklamaly

we gurmaly.

◁ Deňlemäni ýönekeýleşdirip alarys:

$$y(x+2) - 4x - 14 = 0, \quad y(x+2) - 4x - 8 - 6 = 0,$$

$$y(x+2) - 4(x+2) - 6 = 0, \quad (x+2)(y-4) = 6$$

Eger  $X = x + 2$ ,  $Y = y - 4$  formulalar boýunça täze sistemany girizsek, onda täze  $O_1XY$  sistemada  $XY = 6$  deňlemäni alarys, ol deňtaraply parabolany kesgitleýär.  $Oxy$  we  $O_1XY$  koordinatalar sistemalaryny we täze sistemada  $XY = 6$  giperbolany guralyň (20-nji surat).

## § 2. 10. Ikinji derejeli deňlemeleri ýönekeýleşdirmek

**1. Koordinatalaryň köpeltmek hasylynyny özünde saklamaýan deňleme.** Goý, dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (69)$$

görnüşdäki deňleme berlen bolsun, bu ýerde

$$A^2 + C^2 \neq 0 \quad (70)$$

Aşakdaky üç hala seredeliň:

1)  $A$  we  $C$  koeffisiýentleriň alamatlary meňzeş ( $AC > 0$ , bu halda (69) deňlemä elliptik görnüşli deňleme diýilýär);

2)  $A$  we  $C$  koeffisiýentleriň alamatlary dürli ( $AC < 0$ , bu halda (69) deňlemä giperbolik görnüşli deňleme diýilýär);

3)  $A$  we  $C$  koeffisiýentleriň birisi nola deň ( $AC = 0$ , bu halda (70) şertiň esasynda beýleki koeffisiýent noldan tapawutly we (69) deňlemä parabolik görnüşli deňleme diýilýär);

1) Deňlemäniň çep bölegini doly kwadratlara getirip alarys:

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{A}x + \frac{D^2}{A^2}\right) + C\left(y^2 + 2\frac{E}{C}y + \frac{E^2}{C^2}\right) - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} + F = 0.$$

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F. \quad (71)$$

Bu deňligiň sag bolegini  $K$  bilen belgiläp:  $K = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$  we

$$X = x + \frac{D}{A}, \quad Y = y + \frac{E}{C} \quad (72)$$

formulalar boýunça täze koordinatalary girizip, (71) deňligi

$$AX^2 + CY^2 = K \quad (73)$$

görnüşe getireris. Bu deňlemäni  $K$  sana, ýagny ( $KA > 0$ ,  $KA < 0$ ,  $KA = 0$ ) şertlere baglylykda aşakdaky deňlemeleriň birine getirmek bolar:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \quad (74)$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1, \quad (75)$$

bu deňlemelerde  $\frac{1}{a^2} = \frac{A}{K}$ ,  $\frac{1}{b^2} = \frac{C}{K}$ ;

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0, \quad (76)$$

bu ýerde  $\frac{1}{a^2} = A$ ,  $\frac{1}{b^2} = C$  ( $A > 0$ ).

(74) deňleme ýarym oklary  $a$  we  $b$  bolan ellipsi ( $a = b$  bolanda) töweregi kesgitleýär, (76) deňleme bir nokady ( $X = 0$ ,  $Y = 0$  täze koordinatalar sistemasynda, şunlukda onuň köne koordinatalary (72) formuladan tapylýar), (75) deňleme bolsa hiç bir çyzygy kesgitlemeýär.

2) Bu halda  $AC < 0$  bolany üçin (73) deňleme aşakdaky deňlemeleriň birine getirilýär:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1; \quad (78)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1, \quad -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \quad (79)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0. \quad (80)$$

(78) deňleme hakyky oky  $O_1X$  bolan giperbolany, (79) deňleme hakyky oky  $O_1Y$  bolan giperbolany, (80) deňleme bolsa iki sany kesişýän

$Y = -\frac{b}{a}X$ ,  $Y = \frac{b}{a}X$  göni çyzyklary kesgitleýär.

$$33) y = \frac{2}{3}; x = \frac{1}{3};$$

$$34) x = 2; y = -3;$$

$$35) x = \cos(\beta - \alpha); y = \sin(\beta - \alpha);$$

$$36) x = \cos \alpha \cos \beta; y = \cos \alpha \sin \beta; \quad 37) \text{sistema kesgitlenen däl;}$$

38)  $a \neq \pm 6$  bolanda sistema kesgitlenen,  $a = 6$  bolanda sistema kesgitlenmedik,  $a = -6$  bolanda garşylykly; 39)  $ab \neq 90$  bolanda sistema kesgitlenen,  $a = 6; b = 15$  bolanda kesgitlenmedik,  $ab = 90$  emma  $a \neq 6; b \neq 15$  bolanda garşylykly; 40)  $x = 3; y = -2; z = 2$ ; 41)  $x = y = z = 1$ ;

$$42) x = 1; y = 2; z = -1; \quad 43) x = 2; y = -3; z = -2; \quad 44)$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$$

$$45) x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 1 \quad 46) x_1 = -2, x_2 = 1,$$

$$x_3 = 4, x_4 = 3 \quad 47) x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1/3, x_4 = -3/2$$

$$48) x_1 = 1/2, x_2 = -2/3, x_3 = 2, x_4 = -3 \quad 49) x_1 = 104 \frac{6}{7}$$

$$x_2 = 7 \frac{4}{7}, x_3 = -10, x_4 = 1 \quad 50) \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad 51) \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$52) \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix} \quad 53) \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix} \quad 54) \begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$55) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad 56) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad 57) \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$58) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad 59) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$60) \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad 61) \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## I. 3 ÇYZYKLY ALGEBRA

### § 3. 1. Kesgitleýjiler we olaryň häsiýetleri

**1. Ikinji we üçünji tertipli kesgitleýjiler.**  $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$  sana  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  dört sandan düzülen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

kwadrat tablisanyň ikinji tertipli kesgitleýjisi diýilýär we ol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

görnüşde belgilenýär, ýagny

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  sanlara ikinji tertipli kesgitleýjiniň elementleri diýilýär.

Kesgitleýjiniň her bir elementi iki indeksli harp bilen belgilenip, birinji indeksi onuň ýerleşýän setiriniň nomerini, ikinjisi sütüniniň nomerini aňladýar we şol elementiň olaryň kesişmesinde ýerleşýändigini görkezýär (mysal üçin,  $a_{21}$  element kesgitleýjiniň ikinji setiri bilen birinji sütüniniň kesişmesinde ýerleşýär)

$a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) dokuz sandan düzülen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kwadrat tablisadan kesgitlenýän

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{23} a_{32} a_{11} \quad (2)$$

sana üçünji tertipli kesgitleýji diýilýär, (2) formulanyň sag bölegindäki algebraik jemiň her bir goşulyjysynyň kesgitleýjiniň her bir setirinden we

her bir sütüninden alınan bir we diňe bir elementleriň köpeltmek hasylydygyny belläliň. Bu köpeltmek hasyllar goşmak ýa-da aýyrmak alamaty bilen alynýar. Haýsylaryny “+” alamaty, haýsylaryny “-” alamaty bilen almalydygyny ýatda saklamak üçin 1-nji suratda görkezilen shema peýdalydyr.



1-nji surat.

Kesgitleýjiniň haýsydyr bir elementiniň ýerleşýän setiriniň we sütüniniň çyzylmagyndan alynýan kesgitleýjä şol elementiň minory diýilýär. Mysal üçin,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

ikinci tertipli kesgitleýji (2) kesgitleýjiniň  $a_{21}$  elementiniň minorydyr. (1) kesgitleýjiniň  $a_{21}$  elementiniň minory  $a_{12}$  elementdir (birinji tertipli kesgitleýji),  $a_{ik}$  elementiň minoryny  $M_{ik}$  bilen belgiläliň. Kesgitleýjiniň  $a_{ik}$  elementiniň  $(-1)^{i+k}$  alamat bilen alınan minoryna onuň algebraik doldurgyjy diýilýär. Mysal üçin, (2) kesgitleýjiniň  $a_{21}$  elementiniň algebraik doldurgyjy minus alamaty bilen alınan (3) kesgitleýji bolar.  $a_{ik}$  elementiň algebraik doldurgyjy  $A_{ik}$  bilen belgilenýär.

Şunlukda,  $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ .

## 2. Kesgitleýjiniň häsiýetleri .

Kesgitleýjileriň häsiýetleri aşakdaky teoremlar bilen berilýär.

**1-nji teorema.** 1) Ähli setirleri degişli sütünleri bilen çalşyrylanda kesgitleýji üýtgemez;

2) Iki sütüniniň (setiriniň) orny çalşyrylanda kesgitleýjiniň diňe alamaty üýtgär;

3) Iki deň sütünü (setiri) bar bolan kesgitleýji nola deňdir;

4) Käbir sütüniň (setiriň) elementleri üçin umumy köpeldijini kesgitleýji belgisiniň önüne çykarmak bolar;

## Matrisalaryň köpeltmek hasylyny tapmaly

$$50. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 51. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$52. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 53. \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$54. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Aşakdaky matrisalaryň ters matrisalaryny tapmaly.

$$55. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 56. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad 57. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$58. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad 59. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad 60. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

## J o g a p l a r

- 1) 1 ; 2) -2 ; 3) -1 ; 4) 0 ; 5) 0 ; 6) -1 ; 7) 4ab ; 8)  $-2b^2$  ; 9) 1 ;  
10)  $\sin(\alpha - \beta)$  ; 11)  $\cos \alpha + \beta$  ; 12) 1 ; 13) -1 ; 14) 40 ;  
15) -3 ; 16) 100 ; 17) -5 ; 18) 0 ; 19) 1 ; 20) 1 ; 21) 2 ; 22) 4 ; 23) -8 ; 24) 6  
; 25) 20 ; 26) 0 ; 27)  $3abc - a^2 - b^2 - c^2$  ; 28)  $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$  ; 29) 0  
; 30)  $2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc$  ; 31)  $x = 3$  ;  $y = -1$  ; 32)  $x = 5$  ;  $y = 2$

$$\begin{array}{lll}
37. \begin{cases} 4x + 6y = 2, \\ 6x + 9y = 3. \end{cases} & 38. \begin{cases} ax + 4y = 2, \\ 9x + ay = 3. \end{cases} & 39. \begin{cases} ax - 9y = 6, \\ 10x - by = 10 \end{cases} \\
40. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases} & 41. \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases} & \\
42. \begin{cases} 4x - 3y + 2z + 4 = 0, \\ 6x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0 \end{cases} & 43. \begin{cases} 5x + 2y + 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + 5z = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 10 = 0 \end{cases} & 
\end{array}$$

**Näbellileri yzygiderli ýok etmek usuly bilen aşakdaky deňlemeler sistemalaryny çözmeli.**

$$\begin{array}{ll}
44. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases} & 45. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases} \\
46. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases} & 47. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases} \\
48. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0. \end{cases} & \\
49. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 146, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 92. \end{cases} & 
\end{array}$$

5) Eger käbir sütüniň (setiriň) ähli elementleri nola deň bolsa, onda ol kesgitleýji nola deňdir.

◁ Üçünji tertipli (2) kesgitleýjä garalyň.

1) Ol kesgitleýjide her bir setiri şol nomerli sütün bilen çalşyralyň, onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - \\ - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{23} a_{32} a_{11}$$

täze kesgitleýji alarys.

Bu deňligi (2) bilen deňeşdirenimizde kesgitleýjileriň deňdigini görmek bolar, çünki, görkezilen deňlikleriň sag bölekleri deňdir.

2) Eger (2) kesgitleýjide ikinji we üçünji sütünleriň orunlaryny çalşyrsak, onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{22} a_{31} + a_{21} a_{33} a_{12} - a_{12} a_{23} a_{31} - \\ - a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{22} a_{33} = -(a_{11} a_{22} a_{33} + \\ + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - \\ - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{23} a_{32} a_{11})$$

deňligi alarys. Ýaýdaky algebraik jemiň (2) formulanyň sag bölegine deň bolany üçin täze kesgitleýji ondan diňe alamaty bilen tapawutlanýar. Beýleki ýagdaýlar hem şuna meňzeşlikde görkezilýär.

3) Kesgitleýjini  $\Delta$  bilen belgiläliň. Goý, onuň iki deň sütüni bar bolsun. Bu sütünleri çalşyryp, şol bir  $\Delta$  kesgitleýjini alarys. 2-nji häsiýete görä kesgitleýjiniň alamaty üýtgeýändir, ýagny,  $\Delta = -\Delta$  bolar, bu ýerden bolsa  $\Delta = 0$  deňligi alarys.

4) Goý, (2) kesgitleýjide ikinji sütüniň elementleriniň umumy  $\lambda$  köpeldijisi bar bolsun. Onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

çünki

$$a_{11} \lambda a_{22} a_{33} + \lambda a_{12} a_{23} a_{31} + \lambda a_{32} a_{21} a_{13} - a_{13} \lambda a_{22} a_{31} - \\ - \lambda a_{12} a_{21} a_{33} - \lambda a_{32} a_{23} a_{11} = \lambda (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + \\ + a_{32} a_{21} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11})$$

5) Eger käbir sütüniň (setiriň) ähli elementleri nola deň bolsa, onda (2) deňligiň sag bölegindäki algebraik jemiň her bir goşulujysy, nol köpeldijisi bolan köpeltmek hasyly hökmünde nola deň bolar we şonuň üçin  $\Delta$  nola deňdir  $\triangleright$

**Netije:** Iki proporsional sütünli (setirli) kesgitleýji nola deňdir.

$\triangleleft$  Hakykyatdan-da, bu sütünleriň biriniň elementleriniň umumy köpeldijisini kesgitleýjiniň önüne çykaryp, iki deň sütünli kesgitleýjini alarys. Ol bolsa nola deňdir. Ikinji tertipli kesgitleýjiniň ähli häsiýetleri şuňa meňzeşlikde subut edilýär.  $\triangleright$

**2-nji teorema.** Eger käbir sütüniň (setiriň) elementlerini şol bir köpeldijä köpeldilip, beýleki sütüniň (setiriň) deňişli elementlerine goşsak, onda kesgitleýji üýtgemez.

$\triangleleft$  Goý, mysal üçin, (2) kesgitleýjiniň üçünji sütüniniň elementlerine  $\lambda$  sana köpeldilen 2-nji sütüniň deňişli elementleri goşulan bolsun. Onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bolar, çünki

$$a_{11} a_{22} (a_{33} + \lambda a_{32}) + a_{12} (a_{23} + \lambda a_{22}) a_{31} + a_{21} a_{32} (a_{13} + \lambda a_{12}) - \\ - (a_{13} + \lambda a_{12}) a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} (a_{33} + \lambda a_{32}) - (a_{23} + \lambda a_{22}) a_{32} a_{11} = \\ = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{32} - \\ - a_{23} a_{32} a_{11}) + \lambda (a_{11} a_{22} a_{32} + a_{12} a_{31} a_{22} + a_{21} a_{32} a_{12} - a_{12} a_{22} a_{31} - \\ - a_{12} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{22} a_{32})$$

$$\mathbf{14.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{15.} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{16.} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{17.} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{18.} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{19.} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{20.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{21.} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{22.} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{23.} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{24.} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{25.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{26.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} . \quad \mathbf{27.} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} . \quad \mathbf{28.} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} . \quad \mathbf{29.} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{30.} \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

**Kesgitleýjileriň kömegi bilen aşakdaky deňlemeler sistemalaryny çözmeli.**

$$\mathbf{31.} \begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ 3x + 7y = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{33.} \begin{cases} 5x - 7y = 1, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{35.} \begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \beta, \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \beta. \end{cases}$$

$$\mathbf{32.} \begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 4x - 5y = 10. \end{cases}$$

$$\mathbf{34.} \begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0, \\ 5x + 8y + 14 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{36.} \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + y = \sin(\alpha + \beta), \\ x - y \operatorname{tg} \alpha = \cos(\alpha + \beta). \end{cases}$$



$$x_3 = \frac{5}{2}x_4 - 4; 2x_2 = 1 - x_3 + x_4 = 5 - \frac{3}{2}x_4; x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;$$

$$x = 1 - x_2 + x_4 = 1 - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4\right) - \left(\frac{5}{2}x_4 - 4\right) + x_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4$$

deňlikleri alarys. Şeýlelikde, berlen sistemanyň

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4; x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4; x_3 = \frac{5}{2}x_4 - 4$$

çözüwi bardyr, bu ýerde  $x_4$  islendik hakyky bahalary alyp bilýär. Diýmek bu sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

## Gönükmeler

### Kesgitleýjileri hasaplamaly

$$1. \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \cdot 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot 3. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \cdot 4. \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} \cdot 5. \begin{vmatrix} a^z & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} \cdot 7. \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \cdot 8. \begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha - \cos \alpha \end{vmatrix} \cdot 10. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \cdot 11. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

$$12. \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -2t & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} \cdot 13. \begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

deňlik ýerine ýetýär we onuň sagyndaky ýaýyň içindäki algebraýik jem nola deňdir.  $\triangleleft$

**Bellik.** Bu teorema şol bir wagtda käbir sütüniň (setiriň) hemme elementleri iki goşulyjynyň jemine deň bolan kesgitleýjiniň iki kesgitleýjiniň jemine deň bolup, birinji kesgitleýjiniň degişli sütüniniň (setiriniň) elementleriniň onuň birinji goşulyjylary, ikinji kesgitleýjiniň bolsa ikinji goşulyjylary bolýandygy subut edildi.

**3-nji teorema.** Kesgitleýji islendik setiriň (sütüniň) elementleriniň olaryň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.

$\triangleleft$  Ikinji tertipli kesgitleýji üçin teorema aýdyň, onuň tassyklamasy (1) formuladan gelip çykýar. (2) kesgitleýjini  $\Delta$  bilen belgiläp, sag bölegini özgerdeliň.

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - \\ &- a_{23} a_{32} a_{11} = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + a_{12} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) + \\ &+ a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Bu ýerden

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (4)$$

bolýany üçin

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \quad (5)$$

deňligi alarys, bu ýerde  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  degişlilikde  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  elementleriň algebraik doldurgyçlary.

(5) deňlige birinji setiriň elementleri boýunça kesgitleýjini dagytmak formulasy diýilýär. Beýleki setirleriň we sütünleriň elementleri boýunça dagytmak şuna meňzeş görkezilýär.

**4-nji teorema.** Goý,  $\Delta$ -käbir üçünji tertipli kesgitleýji bolsun. Haýsydyr bir setiriň (sütüniň) algebraik doldurgyçlarynyň islendik  $q_1, q_2, q_3$  sanlara köpeltmek hasyllarynyň jemi berlen  $\Delta$  kesgitleýjiden şol setiriň (sütüniň)  $q_1, q_2, q_3$  sanlar setiri (sütüni) bilen çalşyrylmagyndan alynýan  $\Delta'$  kesgitleýjä deňdir.

$\triangleleft$  (2) kesgitleýjiniň birinji setirine we  $\Delta'$  kesgitleýjä seredeliň:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3-nji teorema esasynda  $\Delta' = q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_3 Q_3$ , bu ýerde  $Q_1, Q_2, Q_3$  deňşililikde  $q_1, q_2, q_3$  elementleriň algebraik doldurguçlary. Şoňa görä  $Q_1 = A_{11}$ ,  $Q_2 = A_{12}$ ,  $Q_3 = A_{13}$  bolýany üçin bu ýerden  $\Delta' = q_1 A_{11} + q_2 A_{12} + q_3 A_{13}$  deňligi alarys (bu ýerde  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  sanlar (4) formulalar arkaly kesgitlenýär).  $\triangleright$

**5-nji teorema.** Haýsydyr bir setiriň (sütüniň) elementleriniň beýleki setiriň (sütüniň) deňşli elementleriniň algebraik doldurguçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi nola deňdir.

$\triangleleft$  Ikinji tertipli kesgitleýji üçin teorema aýdyňdyr (iki deň setirli kesgitleýjini alarys). (2) deňlik bilen kesgitlenýän  $\Delta$  kesgitleýji berlen bolsun.  $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$  deňligi görkezeliň. 4-nji teorema boýunça

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Iki deň setirli kesgitleýji hökmünde bu deňligiň sagyndaky kesgitleýji nola deňdir. Şonuň üçin

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

bolar.

**1-nji mysal.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

üçünji tertipli kesgitleýjini üç usul bilen hasaplamaly.

$\triangleleft$  1)  $\Delta = -7 - 60 - 96 + 18 + 56 + 40 = -49$ ;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 12; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -1. \end{cases}$$

$\triangleleft$  Onuň matrisasyny düzeliň we özgerdeliň:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & -2 & 6 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -16 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -16 \end{array} \right)$$

Sistemanyň çözüwi ýokdur, çünki soňky matrisa näbellilerdäki ähli koeffisiýentler nola deň bolup, azat agzasy noldan tapawutly bolan deňlemä deňşli setiri özünde saklaýar.

**7-nji mysal.** Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7; \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$$

$\triangleleft$  Onuň matrisasyny ýazalyň we özgerdeliň

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

bolany üçin berlen sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

Deňlemeleriň sistemasyna getirilýär. Ondan bolsa

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 2; \\ x_1 - x_2 + 12x_3 + 6x_4 &= 6; \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

◁ Onuň matrisasyny düzeliň we ony özgerdeliň:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 12 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -3 \end{array} \right)$$

Ikinji matrisa birinjiden onuň birinji setirini yzygiderlikde (-1)-e, (-4)-e, (-2)-ä köpeldilmegi we deňişlilikde ikinji, üçünji, dördünji setirlerine goşulmagy arkaly alnandy; dik çyzyk bilen bu ýerde azat agzalaryň sütüni bölünip aýrylan. Ikinji matrisa aşadaky deňlemeler sistemasy deňşlidir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 2; \\ -2x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 4; \\ -20x_3 - 9x_4 &= -8; \\ -9x_4 &= -3. \end{aligned} \right\}$$

Bu ýerden

$$x_4 = \frac{1}{3}, \quad 20x_3 = 8 - 9x_4 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}, \quad 2x_2 = 8x_3 + 3x_4 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = 2 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = \frac{1}{2}.$$

Şeýlelikde berlen sistemanyň çözüwi:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = \frac{1}{3}. \triangleright$$

**6-njy mysal.** Deňlemeler sistemasyny çözmeli:

$$2) \quad \Delta = 1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 33 + 2(-2) + 3(-26) = -49;$$

3) Birinji setiri - 4-e köpeldip, ikinji setiriň deňişli elementlerine goşup, soňra birinji setiri - 6-a köpeldip, üçünjä goşanymyzda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & -11 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjini alarys. Bu kesgitleýjini birinji sütüniň elementleri boýunça dagydyp,

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = (-77 + 28) = -49$$

deňligi alarys. ▷

**3. n-nji tertipli kesgitleýji.** Matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyň, ýagny (n-1)-nji tertipli kesgitleýji düşüňjesi belli hasap edip, n-nji tertipli kesgitleýji düşüňjesini girizeliň. Onuň üçin n sütünden we n setirden ybarat bolan sanlaryň kwadrat tablisasyna seredeliň:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Oña n-nji tertipli matrisa diýilýär (§3.3 seret).

(6) matrisanyň i-nji setirini we k-njy sütünini çyzmak arkaly alynýan (n-1)-nji tertipli kesgitleýjä n-nji tertipli matrisanyň  $a_{ik}$  elementiniň minory diýilýär.  $a_{ik}$  elementiň minoryny  $M_{ik}$  bilen belgiläris.  $a_{ik}$  elementiň algebraik doldurgyjy diýip, onuň  $(-1)^{i+k}$  alamat bilen alnan minoryna aýdylýar we  $A_{ik}$  bilen belgilenýär, ýagny  $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ .

$\sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k}$  sana, (6) matrisanyň n-nji tertipli kesgitleýjisi diýip aýdylýar, we ol şeýle belgilenýär.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \end{vmatrix}$$

Şeylelikde, kesgitlmä görä,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\text{ýa-da} \quad \Delta = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}.$$

Bu formula  $n$ -nji tertipli kesgitleýjini degişli matrisanyň birinji setiriniň elementleri we  $(n-1)$ -nji tertipli kesgitleýjiler bolan algebraik doldurgyçlary boýunça dagytmak düzgünini aňladýar. Bu formuladan  $n=2$  bolanda formula (1),  $n=3$  bolanda formula (5) alynýar. Kesgitleýjini dagytmak üçin onuň birinji setiriniň elementlerini we oňa degişli minorlaryndan başga beýleki setiriniň elementlerini, şeýle hem islendik sütüniň elementlerini ulanyp bolmaýarmy diýen sorag ýüze çykýar .

Bu soraglara aşakdaky teoremlar jogap berýär.

1.  $n$ -nji tertipli kesgitleýji üçin  $i(i=1,2,...,n)$  setiriň nomeri nähili bolsa-da  $n$ -nji tertipli (7) kesgitleýji üçin

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

ýa-da dagytmak formulasy diýip atlandyrylýan

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

formula dogrudyr.

2.  $n$ -nji tertipli kesgitleýji üçin  $k$ -njy sütüniniň ( $k=1,2,...,n$ ) nomeri nähili bolsa-da  $n$ -nji tertipli (7) kesgitleýji üçin

$$\Delta = \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

ýa-da bu kesgitleýjini k-njy sütün boýunça dagytma formulasy diýip atlandyrylýan.

[illegible]

bu yerde  $k < n$ ;

[illegible]

bu ýerde  $b_k'' \neq 0$  ,  $k \leq n$ .

(39) sistemanyň ýeke-täk çözüwi bar,  $x_n$  soňky deňlemeden,  $x_{n-1}$  ondan öňki deňlemeden, we ş.m.  $x_1$  bolsa birinji deňlemeden tapylýar.

(40) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bar. Soňky deňlemeden bir näbellini (mysal üçin,  $x_k$ -ny bu deňlemä girýän galan  $n-k$  sany  $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$  näbellileriň üsti bilen aňladyp bolýar. Soňkudan önde gelýän deňlemeden  $x_{k-1}$  näbelli bu näbellileriň üsti bilen aňladylyp bilner we ş.m. Alnan formulalarda  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  näbelliler islendik bahalary alyp biler.

(41) sistemanyň çözüwi ýokdur, sebäbi onuň soňky deňlemesini näbellileriň hiç bir bahalary kanagatlandyryp bilmez.

Şunlukda, nəbelliləri yzygiderli ýoklamak usuly islendik çyzykly deňlemeler sistemasına ulanylarlyklydyr. Sistema şeýle usul bilen çözülide, ögertmeler deňlemelerini üstünde däl-de, eýsem nəbelliləriň koffiýesentlerinden we azat agzalaryndan düzülen matrisalar üstünde geçirilýär.

**5-nji mysal.** Deňlemeler sistemasyny çözmeli:



**2. Kramer düzgüni.** (8) sistemanyň deňlemeleriniň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen kesgitleýjä deňlemeler sistemasynyň kesgitleýjisi diýilýär. Ony  $\Delta$  bilen belgiläliň. Ol kesgitleýjiden  $x_k$  näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen sütüni azat agzalaryň sütüni bilen çalşyrylmagyndan alnan kesgitleýjini  $\Delta_k$  bilen belgiläliň. Şeýlelikde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (11)$$

**6-njy teorema** (Kramer). Eger (8) sistemanyň kesgitleýjisi noldan tapawutly bolsa, onda ol sistemanyň ýeke-täk

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda} \quad (12)$$

◁ (8) deňlemeller sistemanyň birinjisiniň iki bölegini hem  $\Delta$  kesgitleýjiniň  $a_{1k}$  elementiniň  $A_{1k}$  algebraik doldurgujyna, ikinji deňlemäniň iki bölegini  $A_{2k}$  algebraik doldurguja we ş.m., ahyrsoňunda in soňky deňlemäniň iki bölegini  $A_{nk}$  köpeldeliň. Olary agzalaýyn goşup we meňzeş agzalary toplan alarys:

$$\begin{aligned} & (a_{11} A_{1k} + a_{21} A_{2k} + \dots + a_{n1} A_{nk}) x_1 + (a_{12} A_{1k} + a_{22} A_{2k} + \dots + \\ & + a_{n2} A_{nk}) x_2 + \dots + (a_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}) x_k + \dots + (a_{1n} A_{1k} + \\ & + a_{2n} A_{2k} + \dots + a_{nn} A_{nk}) x_n = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk} \quad . \end{aligned}$$

66

[illegible]

Eger  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sanlar (33) sistemanyň çözüwi bolsa, onda olar (37) sistemanyň hem çözüwi bolarlar, ýagny eger  $x_k = c_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) bahalar (33) sistemanyň hem her bir deňlemesini kanagatlandyran bolsa, onda olar (37) sistemanyň hem her bir deňlemesini kanagatlandyrlarlar, sebäbi ikinji deňlemeden başga hemmesi (33) sistemanyň deňlemeleri ýaly, ikinjisi bolsa (36) deňlik esasynda (34) deňleme bilen gabat gelýär. Tersine hem dogry: eger  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sanlar (37) sistemanyň çözüwi bolsa, onda olar (33) sistemanyň hem çözüwi bolar, çünki (33) sistemanyň ikinji deňlemesi (37) sistemanyň birinji deňlemesini  $(-\lambda)$  köpeldip, ikinji bilen goşulmagy netijesinde alynýar, beýleki deňlemeler iki sistemada-da deňdir. Şeýlekde, (33) we (37) sistemalar ekwiwalentdir.

(33) sistemanyň çözüwini tapmak üçin ulanaylýan näbellileri yzygiderli ýoklamak usuly, ýagny Gauss usuly diýip atlandyrylýan usul aşadakydan ybarat:

1) iki setiriň ýa-da iki sütüniniň ornuny üýtgedip; 2) sütüniniň (setiriň) elementlerini noldan tapawutly erkin sana köpeldip; 3) bir setire (sütüne) käbir sana köpeldilen beýleki setiri (sütüni) goşup. Görkezilen özgertmelerde matrisanyň rangy üýtgemeýär.

Goý,  $n$  näbellili  $m$  çyzykly algebraik deňlemleriniň

[illegible]

$x_i$  nəbellilər dəyişlilikdə  $c_i$  sanlar ( $i=1, \dots, n$ ) bilən çalşyrylandan son sistemanyñ her bir deñlemesini toždestwo öwürýän  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sanlaryñ toplumyna (33) sistemanyñ çözüwi diýilýär.

Eger iki sany deňlemeler sistemasynyň şol bir çözüwleri bar bolsa, onda olara ekwiwalent sistemalar diýilýär. (33) sistemanyň bir deňlemesiniň iki bölegini hem  $\lambda \neq 0$  sana köpeldip, şol sistemanyň beýleki deňlemesiniň degişli elementleri bilen goşalyň, netijede täze deňlemäni alarys. Mysal üçin, eger birinji deňlemäni  $\lambda \neq 0$  sana köpeldip, ikinjä goşsak, onda aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\begin{aligned} & \lambda (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n) = \\ & = \lambda b_1 + b_2 \end{aligned} \quad (34)$$

$$a'_{21} x_1 + a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2, \quad (35)$$
$$a'_{2k} = \lambda a_{1k} + a_{2k} \quad (k=1,2,\dots,n), \quad b'_2 = \lambda b_1 + b_2. \quad (36)$$
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2; \\ 4x - y + 5z = 15; \\ 6x - 8y + 7z = 9; \end{cases}$$

◁ Sistemanyň  $\Delta$  kesgitleýjisini we  $\Delta_k$  kesgitleýjilerini ( $k=1,2,3$ ) düzeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 15 & -1 & 5 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  kesgitleýjileri hasaplap, (12) formulalary ulanýarys ( $n=3$ )

diýip).  $\Delta_1 = -147, \Delta_2 = -98, \Delta_3 = -49$  bolany üçin sistemanyň

$$x = \frac{-147}{-49} = 3, \quad y = \frac{-98}{-49} = 2, \quad z = \frac{-49}{-49} = 1 \text{ ýeke-täk çözüwi bardyr.}$$

**Netije.** Eger (9) birjynsly sistemanyň nola deň bolmadyk çözüwi bar bolsa, onda onuň kesgitleýjisi nola deňdir. Hakykatdan hem, eger tersine,  $\Delta \neq 0$  bolsa, onda (9) sistemanyň ýeke-täk nol çözüwi bardyr (ähli  $\Delta_k = 0$  bolany üçin) we ol şerte garşy gelýär.

$\Delta = 0$  bolanda (8) deňlemeler sistemasynyň ýa-da tükenüksiz köp çözüwi bardyr ýa-da çözüwi ýokdur.

**1. Matrisalar barada düşünje.**  $m$  setirden we  $n$  sütünden ybarat

gönüburçly tablisada ýerleşen  $m \times n$  sanlaryň sistemasyna matrisa diýilýär. Matrisadaky sanlara onuň elementleri diýilýär. Matrisanyň (ýokardan aşak sanalýan)  $i$ -nji setiriniň we (çepden saga sanalýar)  $k$ -njy sütüniniň kesişmesinde ýerleşen element  $a_{ik}$  bilen belgilenýär,  $i$  we  $k$  sanlara bolsa elementiň indeksleri diýilýär. Matrisa aşadaky belgileriň biri bilen belgilenýär:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\|, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ýa-da has gysgaça

$$(a_{ik})_{mn}, \quad \|a_{ik}\|_{mn}, \quad [a_{ik}]_{mn} \quad (14)$$

görnüşde hem ýazylýar, bu ýerde  $i$  san 1-den  $m$ -e çenli,  $k$  bolsa 1-den  $n$ -e çenli üýtgeýär. Käwagt matrisany bir harp, meselem,  $A$ ,  $B$  bilen belgilenýär, ýöne şonda  $A$ ,  $B$  diýip gönüburçly tablisa düşünilýär. Bir setirden ybarat bolan matrisa setir, bir sütünden ybarat bolan matrisa sütün matrisasy diýilýär. Hemme elementleri nola deň bolan matrisa nol matrisa diýilýär.  $n$  setiri we  $n$  sütüni bolan matrisa  $n$ -nji tertipli kwadrat matrisa diýilýär (birinji tertipli kwadrat matrisa ýeke-täk elemente deň bolýar):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Matrisanyň elementleri ýaly elementleri bolan kesgitleýjä, ýagny (11) formulanyň  $\Delta$  kesgitleýjisine Kwadrat matrisanyň kesgitleýjisi diýilýär. Kwadrat däl gönüburçly matrisanyň kesgitleýjisiniň ýokdugyny belläp geçeliň. (15) kwadrat matrisanyň  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  elementlerden düzülen diogonalyna onuň esasy diogonalý diýilip aýdylýar. Esasy diogonalda ýerleşmeýän ähli elementleri nola deň bolan kwadrat matrisa diagonal matrisa diýilýär:

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Hemme diagonal elementleri 1-e deň bolan diagonal matrisa birlik matrisa diýilýär. Eger ony  $E$  bilen belgilesek, onda

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-1)9 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3(-5) + (-1)(-7) \\ 0 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + (-2)9 & 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5(-5) + (-2) \cdot (-7) \\ 7 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-3)9 & 7 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-5) + (-3)(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \\ 11 & 51 \end{pmatrix}$$

$BA$  kesgitlenen däl, sebäbi  $B$  matrisanyň sütünleriniň sany  $A$  matrisanyň setirleriniň sanyna deň gelenok.  $\triangleright$

(19) formula arkaly kesgitlenýän  $B$  matrisa seredeliň. Setirleriniň sany sütünleriniň sanyna deň bolar ýaly edip, ýagny käbir kwadrat matrisa alnar ýaly ondan birnäçe setirleri we sütünleri çyzalyň; onuň kesgitleýjisine  $B$  matrisanyň minory diýip aýdylýar.

$m$  setirli we  $n$  sütünli matrisanyň köp minorlary bar, olaryň käbiri nola deň, başgalary noldan tapawutly bolmagy mümkin. Noldan tapawutly minorlaryň iň uly tertibine matrisanyň rangy diýilýär. Mysal üçin ,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangy 1-e deň çünki onuň 2-nji tertipli ähli minorlary

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$$

nola deň, birinji tertipli minorlaryň arasynda noldan tapawutlylary bar. Matrisanyň rangy tapylanda kiçi tertipli minorlardan uly tertipli minorlara geçmeli. Eger noldan tapawutly  $k$ -njy tertipli minor tapylanda bolsa, onda diňe bu minory saklaýan  $(k+1)$ -nji tertipli minorlary hasaplamak gerek: eger-de olaryň hemmesi nola deň bolsa, onda matrisanyň rangy  $k$  deň. Matrisanyň rangyny hasaplamagyň ony diagonal görnüşe getirmeklige esaslanýan başga usuly hem bardyr. Eger  $m$  setirli we  $n$  sütünli matrisanyň  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$  ( $0 \leq r \leq \min(m, n)$ ) elementlerden başga ähli elementleri nola deň bolsa, onda oňa diagonal matrisa diýilýär. Şeýle matrisanyň rangy  $r$ -e deň, sebäbi onuň  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$  esasy diagonalny  $r$ -nji tertipli minory noldan tapawutly  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr}$  köpeltmek hasyla



$$s_{ij} = \sum_{l=1}^n u_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} ;$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

deňlikler ýerine ýetýär. Şoňa görä bu ýerden  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  üçin  $s_{ij} = t_{ij}$  ýa-da  $(AB)C = A(BC)$  deňlik alynýar.

Ters matrisalar  $AX=B$  görnüşdäki matrisa deňlemeleri çözmekde peýdalanylýar, bu ýerde  $A$  we  $B$  – berlen matrisalar, özem  $A$  matrisanyň kesgitleýjisi noldan tapawutly,  $X$ -gözlenilýän matrisa. Deňlemäniň iki bölegini hem çepinden  $A^{-1}$ -e köpeldip, (30) deňlikleri ulansak, onda  $X = A^{-1}B$  deňligi alarys. Eger  $XA=B$  deňleme berlen bolsa, onda ony sagyndan  $A^{-1}$ -e köpeltmek bilen  $X = BA^{-1}$  deňligi alarys. Kesgitleýjisi nola deň bolan matrisa aýratyn matrisa diýilýär. Aýratyn matrisanyň ters matrisasy ýokdur.

$AB$  köpeltmek hasylynyň kesgitlemesini  $A$  köpeldiji matrisanyň sütünleriniň sany  $B$  köpeldiji matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolan kwadrat däl matrisal üçin hem girizmek bolar. Bu şertde  $A$  matrisanyň islendik ( $m$ ) sany setiri,  $B$  matrisanyň islendik ( $n$ ) sany sütüni bolup biler.  $AB$  matrisanyň  $m$  setiri we  $n$  sütüni bolar, onuň elementleri (27) formula arkaly kesgitlenýär.

**4-nji mysal.**  $AB$  köpeltmek hasyly tapmaly:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix};$$

$BA$  köpeltmek hasyly alyp bolarmy?

◁  $A$  matrisanyň sütünleriniň sany  $B$  matrisanyň setirleriniň sanyna deň. (27) formula arkaly alarys:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \quad (17)$$

Setirleriniň we sütünleriniň sanlary deň matrisalara ölçegdeş matrisalar diýilýär.

Eger  $A$  we  $B$  deň ölçegli matrisalar bolup,  $A$  matrisanyň her bir  $a_{ik}$  elementi degişlilikde  $B$  matrisanyň  $b_{ik}$  elementine deň, ýagny  $a_{ik} = b_{ik}$  bolsa onda  $A$  we  $B$  matrisalara deň matrisalar diýilýär we

$$A = B \quad (18)$$

görnüşde ýazylyar.

**2. Matrisalaryň üstünde amallar. Ters matrisa**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (19)$$

matrisalar üçin her bir elementi ol matrisalaryň degişli elementleriniň jemine deň bolan, ýagny elementleri

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, \dots, n) \quad (20)$$

deňlik boýunça kesgitlenýän

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad (21)$$

matrisa  $A$  we  $B$  matrisalaryň jemi diýilýär.  $A$  we  $B$  matrisalaryň jemi

$$C = A + B \quad (22)$$

görnüşde belgilenýär. Olaryň tapawudy hem ş.m. kesgitlenýär :

$$D = A - B, \quad (23)$$

bu ýerde

$$D = (d_{ik})_{mn}, \quad d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}. \quad (24)$$

$A$  matrisanyň ähli elementlerini  $\lambda$  sana köpeldilmeği bilen alnan

$$B = \lambda A \quad (25)$$

matrisa A matrisanyň  $\lambda$  sana köpeltmek hasyly diýilýär, şunlukda,

$$b_{ik} = \lambda a_{ik}. \quad (26)$$

Şol bir tertipli A we B iki kwadrat matrisa üçin aşakdaky düzgün boýunça düzülen şol tertipli üçünji P kwadrat matrisa olaryň AB köpeltmek hasyly diýilýär: P matrisanyň  $i$ -nji setir bilen  $k$ -njy sütüniniň kesişmesinde ýerleşýän  $\rho_{ik}$  elementi A matrisanyň  $i$ -nji setiriniň elementleriniň B matrisanyň  $k$ -njy sütüniniň degişli elementlerine köpeltmek hassyllarynyň jemine deň, ýagny

$$\rho_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk}. \quad (27)$$

Umuman matrissalar orun çalşyрма kanunyna boýun bolmaýarlar, ýagny  $AB \neq BA$ . (28)

**3-nji mysal.** 2-nji tertipli

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisalaryň AB we BA köpeltmek hassyllaryny tapmaly.

$\triangleleft A = (a_{ik})_{22}, B = (b_{ik})_{22}$  matrisalar üçin (27) formulany ulanyp, görkezilen köpeltmek hassyllaryň umumy aňlatmalaryny tapýarys:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix},$$

Biziň mysalymyzda

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 4 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu köpeltmek hassyllary üçin (28) deňsizlik ýerine ýetýär. Bu mysalda AB-nol matrisa. Bu mysal köpeldijileriň ikisiniň hem nol matrisa bolmadyk

ýagdaýynda olaryň köpeltmek hasylynyň nol matrisa bolup biljekdigini görkezýär. Kwadrat matrisalar köpeldilende (17) birlik matrisa sanlary köpeltmekdäki birlik ýalydyr, ýagny

$$AE = EA = A \quad (29)$$

Birlik E matrisa üçin

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \quad (30)$$

deňligi kanagatlandyryýan  $A^{-1}$  matrisa A matrisanyň ters matrisasy diýilýär.

$$\Delta \neq 0 \quad (31)$$

şerti kanagatlandyryýan matrisa aýratyn däl matrisa diýilýär.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (32)$$

matrisa garalyň, bu ýerde  $A_{ik}$  (15) matrisanyň  $a_{ik}$  elementleriniň algebraik doldurgyçlary (setiriň algebraik doldurgyçlary sütünde ýazylýar). (32) matrisa üçin (30) deňligiň ýerine ýetýändigine barlagyň üsti bilen göz ýetirip bolýar. Diýmek, (32) matrisa (15) matrisanyň ters matrisasydyr.  $A^{-1}$  matrisanyň berlen aýratyn däl A matrisa üçin (30) şerti kanagatlandyryýan ýeke-täk matrisadygyny belläliň. Hakykatdan hem, eger C matrisa  $AC=CA=E$  deňligi kanagatlandyryýan bolsa, onda

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C, \quad CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$$

deňlikler esasynda  $C = A^{-1}$ .

**Bellik.** Matrisalaryň köpeltmek hasylynyň assosiativlik häsiýeti bardyr, ýagny  $(AB)C = A(BC)$ . Goý,  $n$  tertipli üç erkin

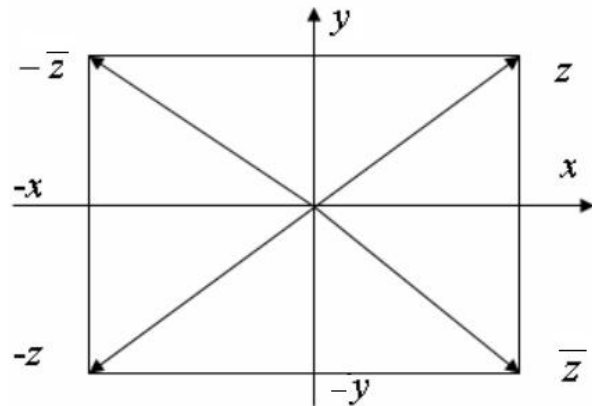
$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$  matrisalar berlen bolsun. Belgilemeleri girizeliň:

$$AB = U = (u_{ij}), \quad BC = V = (v_{ij}), \\ (AB)C = S = (s_{ij}), \quad A(BC) = T = (t_{ij}).$$

$$u_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}, \quad v_{kj} = b_{kl}c_{ej}, \quad S=UC, \quad T=AV$$

bolýany sebäpli,

bilen, tekizligiň nokatlar köplügi we kompleks sanlaryň köplügi özara birbahaly deňişlilikli köplüklerdir. Şunlukda, hakyky san absissalar okunda we hyýaly san ordinatalar okunda şekillendirilýär. Şonuň üçin hem absissalar okuny-hakyky ok, ordinatalar okuny bolsa-hyýaly ok diýip atlandyryrlar. Kompleks sanlar şekillendirilen tekizlige kompleks tekizlik diýilýär.  $z$  we  $-z$  sanlar 0 nokada görä,  $z$  we  $\bar{z}$  sanlar bolsa hakyky oka görä simmetrik ýerleşýärler.



21-nji surat.

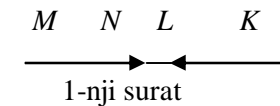
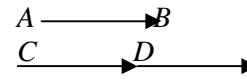
Kompleks sanlaryň  $z = x + iy$  görnüşdäki ýazgysyna olaryň algebraik görnüşi diýilýär.

**2. Kompleks sanlaryň trigonometrik görnüşi.**  $z = x + iy$  kompleks sanyň tekizlikdäki şekiline seredeliň we tekizlikde polýar kordinatalar ulgamyny alalyň. Goý,  $O$  polýus dekart kordinatalar sistemasynyň başlangyjy bilen we polýar oky  $Ox$  oky bilen gabat gelsin. Onda  $z$  nokadyň koordinalary  $(r, \varphi)$  bolar, bu yerde  $r = |z|$ ,  $\varphi$  bolsa hakyky  $Ox$  oky bilen  $z$  wektoryň arasyndaky burç. Şunlukda, eger burç sagat diliniň hereketiniň tersine ösýän hasaplanylssa  $+\varphi$  we sagat diliniň hereketiniň ugruna hasaplansa  $-\varphi$  kabul edilýär. Bu burça  $z(z \neq 0)$  kompleks sanyň argumenti diýilýär we  $\arg z$  belgi bilen belgilenýär.  $z = 0$  san üçin argument kesgitlenmeýär.

## I. 4. WEKTOR ALGEBRASY

### § 4.1. Esasy düşüňjeler

Ugrukdyrylan kesime wektor diýilýär. Suratda wektoryň ugry adatça peýkam bilen belgilenýär. (1-nji surat)



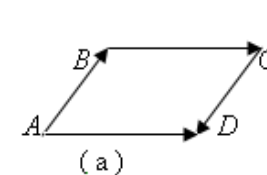
Eger wektoryň başlangyjy  $A$  nokatda, ahyry  $B$  nokatda bolsa, onda wektor  $\overrightarrow{AB}$  ýa-da  $\overline{AB}$  bilen belgilenýär. Wektoryň başlangyjyna onuň goýma nokady hem diýilýär. Wektorlar  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  we  $\bar{a}, \bar{b}$  bilen ýa-da  $\vec{a}, \vec{b}$  we  $\bar{a}, \bar{b}$  bilen belgilenýär.  $\bar{a}$  wektoryň uzynlygyna bu wektoryň moduly diýilýär. Ol  $|\bar{a}|$  görnüşde ýazylýar. Wektoryň moduly – otrisatel däl skalýar ululykdyr.

Başlangyjy we ahyry gabat gelyän wektora nol wektor diýilýär, we ol  $\vec{0}$  bilen belgilenýär. Nol wektoryň moduly nola deň, ugry bolsa kesgitlenmedikdir. Uzynlygy bire deň bolan wektora birlik wektor diýilýär. Parallel gönülerde (ýa-da bir gönüde) ýatýan wektorlara kollinear wektorlar diýilýär. Mysal üçin,

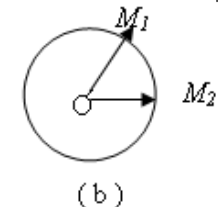
1-nji suratda  $\overrightarrow{CD}$  we  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{KL}$  we  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  we  $\overrightarrow{KL}$  wektorlar kollineardylar. Deň uzynlykly ugurdaş kollinear wektorlara deň wektorlar diýilýär.

(2-nji (a) suratdaky  $ABCD$  parallelogramyň  $\overrightarrow{BC}$  we  $\overrightarrow{AD}$  wektory deň)  $\overrightarrow{AB}$  we  $\overrightarrow{CD}$  wektoryň ugurlary garşylykly bolany üçin  $(|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|)$ ,

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$



2-nji surat



$\overrightarrow{OM_1}$   $\overrightarrow{OM_2}$  wektoryň ugurlary dürli bolany üçin  $\overrightarrow{OM_1} \neq \overrightarrow{OM_2}$  bolýandygyny belläliň, bu ýerde  $M_1, M_2$  nokatlar  $O$  nokatda merkezi bolan  $R$  radiusly töweregiň dürli iki nokadydyr (2-nji (b) surat). Deň uzynlykly

garşylykly ugrukdyrylan wektorlara garşylykly wektorlar diýilýär. (2-nji (a) suratdaky  $\overrightarrow{AB}$  we  $\overrightarrow{CD}$ ).  $\overrightarrow{a}$  wektora garşylykly wektor –  $\overrightarrow{a}$  bilen belgilenýär.

Parallel tekizliklerde (ýa-da bir tekizlikde) ýatýan wektorlara komplanar wektorlar diýilýär.

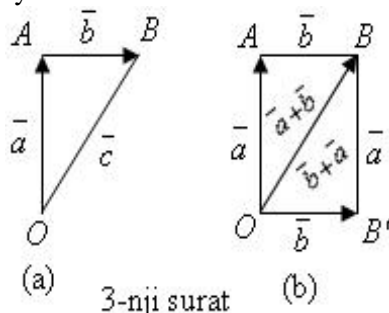
Her bir  $\overrightarrow{a}$  wektor we  $A$  nokat üçin başlangyjy  $A$  nokatda we  $\overrightarrow{a}$  wektora deň bolan, ýagny  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$  bolýan ýeke-täk  $\overrightarrow{AB}$  wektorlary gurup bolýanlygy wektorlaryň deňliginiň kesgitlemesinden gelip çykýar.

Goýma nokadyny erkin saýlap bolýan wektora erkin wektor diýilýär.

## § 4. 2. Wektorlar bilen geçirilýän çyzykly amallar

Wektorlary goşmaklyga, aýyrmaklyga we sana köpeltmeklige olar bilen geçirilýän çyzykly amallar diýilýär.

$\overrightarrow{b}$  wektor  $\overrightarrow{a}$  wektoryň soňundan goýulanda başlangyjy  $\overrightarrow{a}$  wektoryň başlangyjy bilen, soňy  $\overrightarrow{b}$  wektoryň soňy bilen gabat gelýän üçünji  $\overrightarrow{c}$  wektora  $\overrightarrow{a}$  we  $\overrightarrow{b}$  iki wektoryň jemi diýilýär (3-nji (a) surat).  $\overrightarrow{c}$  wektor üçburçluk (3-nji (a) surat) ýa-da parallelogram (3-nji (b) surat) düzgüni boýunça alynýar.



Üç we ondan-da köp wektorlaryň jemi hem şuna meňzeşlikde kesgitlenýär.

4-nji suratda üç sany  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$ ,  $\overrightarrow{c}$  wektorlaryň jemi şekillendirilen.

Görnüşü ýaly wektorlaryň jemi kommutatiwlik häsiýete eýe:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a},$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (6)$$

$z_1$  we  $z_2$  iki kompleks sanyň paýy diýip,  $z_1 = z \cdot z_2$  deňligi

kanagatlandyryan  $z$  sana aýdylýar we  $z_1 : z_2$  ýa-da  $\frac{z_1}{z_2}$  belgi bilen

belgilenýär:

$$z = z_1 : z_2 \quad \text{ýa-da} \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

Islandik iki  $z_1, z_2 \neq 0$  kompleks san üçin  $z_1 = z \cdot z_2$  deňligiň ýeke-täk çözüwi bardyr. Dogrudan hem, bu deňligiň iki bölegini-de  $\overline{z_2}$  sana köpeldip,

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z \cdot z_2} = \overline{z} \cdot \overline{z_2} \quad (7)$$

deňligi alarys. Ýöne,  $z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2$  we  $|z_2| \neq 0$ , çünki  $z_2 \neq 0$ .

Indi (7) deňligi  $\frac{1}{|z_2|^2}$  sana köpeldip,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} \quad (8)$$

deňligi alarys.

Eger  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  bolsa, onda (8) formula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

görnüşü alar.

## § 5. 2. Kompleks sanlaryň geometrik şekillendirilişi we olaryň trigonometrik görnüşi

**1. Kompleks sanyň şekillendirilişi.** Goý, tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun.  $z = x + iy$  kompleks san tekizlikde koordinatalary  $(x; y)$  bolan nokat bilen belgilenýär. Şeýlelik

$$\overline{az^n} = \bar{a} \cdot \overline{(z^n)} = a \cdot \overline{(z)}^n$$

deňligi alýarys. Şonuň ýaly,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{az^n + bz^m} = a\overline{(z)}^n + b\overline{(z)}^m$$

deňlikleriň dogrudugyny aňsatlyk bilen barlamak bolar. Indi

$$|z| = |\bar{z}|,$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

formulalary (3) we (4) deňliklerden alyp bolýandygyny belläliň.

Kompleks sanlary köpeltmek we goşmak amallary üçin aşakdaky

1.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$
2.  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 (z_2 \cdot z_3),$
3.  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

deňlikleriň ýerine ýetýändigini görmek kyn däl. (özbaşdak görkezmeli).

1-3 häsiýetlere görä, kompleks sanlar bilen geçirilýän köpeltmek we goşmak amallar hakyky sanlar bilen geçirilýän deňişli amallar ýalydyr. 0 we 1 sanlaryň häsiýetleri kompleks sanlar köplüginde hakyky sanlar köplügindeki ýalydyr.

$$z + 0 = z, \quad 1 \cdot z = z.$$

Kompleks sanlar üçin hem goşmak amalyna ters bolan aýyrmak amaly we köpeltmek amalyna ters bolan bölmek amaly bardyr.

Islendik iki  $z_1, z_2$  kompleks sanlar üçin üçünji  $z$  kompleks san tapylyp, olar üçin

$$z + z_1 = z_2 \quad (5)$$

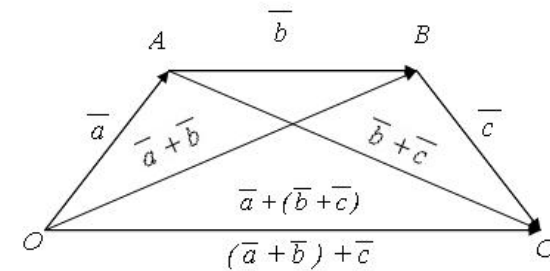
deňlik ýerine ýetýär.  $z$  ana  $z_2$  hem-de  $z_1$  sanlaryň tapawudy diýilýär we

$z_2 - z_1$  belgi bilen belgilenýär :

$$z = z_2 - z_1.$$

0- $z$  tapawut  $-z$  bilen belgilenýär. (1) we (2) deňliklerden islendik iki kompleks sanlar üçin (5) deňlemäniň diňe ýeke-täk çözüwiniň bardygyny gelip çykýar.

Şeýlelikde,



4-nji surat

çünki  $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \bar{a} + \bar{b}$  we  $\overline{OB} = \overline{OB^1} + \overline{B^1B} = \bar{b} + \bar{a}$  (3-nji surat (b))

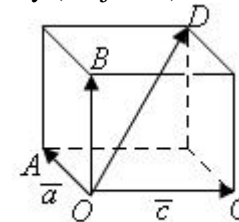
$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$  we

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$  bolandygyna görä wektorlar üçin assosiativlik häsiýeti ýerine ýetýär:

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}). \quad (44)$$

Jem kesgitlenende wektorlaryň komplanarlygy göz önünde tutulmady.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  üç sany komplanar däl wektorlaryň jemi parallelepiped düzgüninden alynýar: ýagny  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$  jem  $\overline{OD}$  wektora deň, bu ýerde  $OD$  kesim  $O$  nokatda goýlan  $\overline{OA} = \bar{a}$ ,  $\overline{OB} = \bar{b}$ ,  $\overline{OC} = \bar{c}$  wektorlarda gurlan parallelepipedin diagonalı (5-nji sur).



5-nji surat

Jemiň kesgiitlemesinden

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \quad (45)$$

bolýandygyny gelip çykýar.

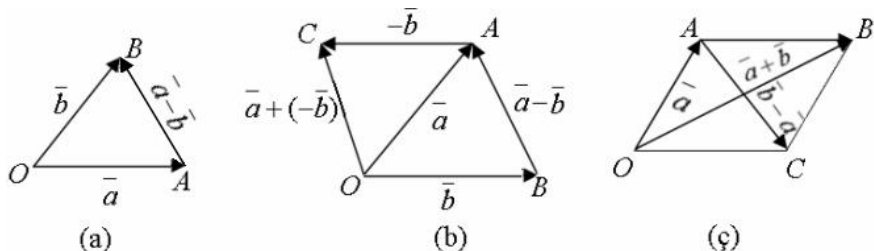
$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}, \quad (46)$$

ýagny garşylykly wektorlaryň jemi nol wektora deň.  $\bar{b}$  wektor bilen

jemde  $\vec{a}$  wektory berýän  $\vec{d}$  wektora  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  iki wektoryň  $\vec{a} - \vec{b}$  tapawudy diýilýär.

$$\text{eger } \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} \text{ bolsa, onda } \vec{a} - \vec{b} = \vec{d}, \quad (47)$$

$\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň  $\vec{a} - \vec{b}$  tapawudyny almak üçin olary bir nokatdan goýup, ikinji wektoryň soňuny birinji wektoryň soňy bilen birikdirmek zerurdyr (6-njy a surat).



6-njy surat

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (48)$$

bolýandygyny belläliň,  $\vec{a} - \vec{b}$  tapawut  $\vec{a}$  we  $(-\vec{b})$  iki wektoryň jemine deň, bu ýerde  $(-\vec{b})$  wektor  $\vec{b}$  wektora garşylykly wektor (6-njy (b) surat).  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  wektordan gurlan  $OABC$  parallelogramyň wektor-diagonallary deňşilikde bu wektorlaryň jemi we tapawudydyr (6-njy (ç) surat).

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} \quad (49)$$

wektora  $\vec{a}$  wektoryň  $\alpha$  sana köpeltmesi diýilýär. Şunlukda,  $\vec{b}$  wektor 1)  $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$ ; 2)  $\alpha > 0$  bolanda  $\vec{b}$  we  $\vec{a}$  wektorlar birmeňzeş ugrukdyrylan; 3)  $\alpha < 0$  bolanda garşylykly ugrukdyrylan şertleri kanagatlandyryr. (7-nji (a) suratda  $\vec{a}, -2\vec{a}, 3,5\vec{a}$  wektorlar görkezilen); eger  $\alpha = 0$  ýa-da  $\vec{a} = 0$  bolsa, onda  $\vec{b} = 0$  boljakdygy düşüňklidir.

Eger  $y = 0$  bolsa, onda  $z = x$  hakyky sany alýarys. Diýmek, hakyky sanlar kompleks sanlaryň hususy kalydyr.  $x = 0$  bolanda alynýan  $z = i y$  sana sap hyýaly san diýilýär.

Iki  $z_1 = x_1 + i y_1$  we  $z_2 = x_2 + i y_2$  kompleks san diňe  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$  bolanda deň diýip hasap edilýär, ýagny

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2). \quad (1)$$

Eger  $x = 0$  we  $y = 0$  bolsa, onda  $z = x + i y$  kompleks san nola deň diýilýär.

Eger  $z_1 = x_1 + i y_1$ ,  $z_2 = x_2 + i y_2$  bolsa, onda  $z = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2)$  kompleks sana ol kompleks sanlaryň jemi diýilýär.

$$(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2). \quad (2)$$

$z = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$  kompleks sana bolsa ol kompleks sanlaryň köpelmek hasyly diýilýär. Bu formulany  $(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2)$  köpeltmek hasyldan köpagzalaryň köpeldiliş düzgüninden peýdalanyp we  $i^2 = -1$  deňligi ulanyp alyp bileris.

$\sqrt{x^2 + y^2}$  sana  $z = x + i y$  kompleks sanyň moduly diýilýär we  $|z|$  belgi bilen belgilenýär.

$$|z| = |x + i y| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$|z| \geq 0$  bolýandygy aýdyňdyr we  $|z| = 0$  deňlik diňe  $z = 0$  bolanda ýerine ýetýär.

$x - i y$  kompleks sana  $z = x + i y$  kompleks san bilen çatyrymly san diýilýär we  $\bar{z}$  belgi bilen belgilenýär:

$$\bar{z} = x + i y = x - i y. \quad (4)$$

Kesgitlemä görä,  $\overline{\overline{z}} = z$  deňlik islendik kompleks san üçin dogrudyr.

Eger  $z = x$  bolsa, onda  $\bar{z} = \bar{x} = x$ . Diýmek, hakyky san bilen çatyrymly san onuň özi bolýar.

$\overline{(z^2)} = \bar{z} \cdot \bar{z} = (\bar{z})^2$  deňligi ulanyp,  $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$  deňligi ýeňillik bilen alyp bileris. Bu deňlikden bolsa, hakyky a san üçin

11. Eger  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar kollinear däl bolsa, onda  $\lambda$  -nyň haýsy bahasynda  $\lambda\vec{a} + \vec{b}$  we  $3\vec{a} + \lambda\vec{b}$  wektorlar kollinear bolar?

12.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny tapmaly.

1)  $\vec{a}(1, -1, 1)$ ,  $\vec{b}(7, 3, -5)$ ,  $\vec{c}(-2, 2, -2)$

2)  $\vec{a}(3, 5, 1)$ ,  $\vec{b}(4, 0, -1)$ ,  $\vec{c}(2, 1, 1)$

3)  $\vec{a}(2, 1, 0)$ ,  $\vec{b}(3, 4, -1)$ ,  $\vec{c}(-1, -3, 1)$

4)  $\vec{a}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{b}(3, -2, 1)$ ,  $\vec{c}(2, 1, 2)$

### Jogaplar

1.  $(-12, -2)$ ;  $(0, 0)$ ; 2.  $\alpha = \frac{2}{7}$ ,  $\beta = \frac{13}{7}$ ;

3.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = -4$

4. 1)  $3/\sqrt{2}$ ; 2) 0; 3) -6. 5. 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) 22; 5) -1; 6) 0.

6. 1) 0; 2)  $\arccos(4/5)$ ; 3)  $90^\circ$ ; 4)  $\arccos(-3/\sqrt{10})$ ;

5)  $\arccos(5/9)$ ; 6)  $180^\circ$ ; 7)  $90^\circ$ .

7. 1)  $(-28, -14)$ ; 2) -13; 3) 77. 8. 1) 0; 2) -4; 3) 2.

9. 1)  $(-11, 19, -7)$ ; 2)  $(0, 0, 0)$ ; 3)  $(0, 0, -15)$ .

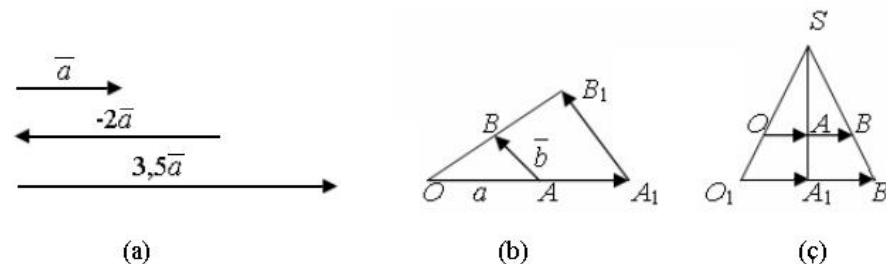
10. 1)  $2[\vec{b}, \vec{a}]$ ; 2)  $[\vec{a}, \vec{b}] + 4[\vec{b}, \vec{c}] + \frac{9}{2}[\vec{c}, \vec{a}]$ . 11.  $\lambda = \pm\sqrt{3}$ .

12. 1) 0; 2) -23; 3) 0; 4) 6.

## I. 5. Kompleks sanlar barada düşünje

### § 5. 1. Kompleks sanlaryň kesgitlenişi we olar bilen geçirilýän amallar

Goý,  $x, y$  hakyky sanlar bolsun. Onda  $z = x + iy$  aňlatma kompleks san diýilýär, bu ýerde  $i = \sqrt{-1}$ . Şunlukda,  $x$ - onuň hakyky bölegi,  $y$ - bolsa onuň hyýaly bölegi diýip atlandyrylýar. Olar üçin  $\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$  belgiler ulanylýar.



7-nji surat

Wektoryň sana köpeltmek hasylynyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}; \quad (50)$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}; \quad (51)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad (52)$$

Bu häsiýetleri subut edeliň

$$|\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha| |\beta\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|, \quad |(\alpha\beta)\vec{a}| = |\alpha\beta| |\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|,$$

bolýanlygy üçin  $\alpha(\beta\vec{a})$  we  $(\alpha\beta)\vec{a}$  wektorlaryň deň uzynlyklary bardyr.

we birmeňzeş ugrukldyrylandyr çünki bu ugurlar  $\alpha\beta > 0$  bolanda  $\vec{a}$  wektoryň ugry bilen gabat gelýär we  $\alpha\beta < 0$  bolanda oňa garşylyklydyr netijede,  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ , ýagny (50) deňlik dogrudyr.

Eger  $\alpha > 0$  bolsa, onda (51) deňlik  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň kollinear däl bolanda  $OAB$  we  $OA_1B_1$  (7-nji (b) surat) üçburçlyklaryň meňzeşliginden, bu ýerde  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OA_1} = \alpha\vec{a}$ ,  $\vec{OB_1} = \alpha\vec{b}$ ; ýa-da  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar kollinear bolanda  $SOB$  we  $SO_1B_1$  (7-nji (ç) surat) üçburçlyklaryň meňzeşliginden gelip çykýar, bu ýerde  $\vec{SO_1} = \alpha\vec{SO}$ ,  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ .  $\alpha < 0$  bolan ýagdaý şuna meňzeşlikde görkezilýär.

$\alpha\beta > 0$  diýip guman edeliň. (52) deňligiň iki böleginde duran wektorlaryň birmeňzeş ugurlary bar

$$|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |\alpha\vec{a}| + |\beta\vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}| + |\beta| |\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|) |\vec{a}| = |\alpha + \beta| |\vec{a}| = |(\alpha + \beta)\vec{a}|$$

bolany üçin olaryň deň uzynlyklary bar. Şunlukda,  $(\alpha + \beta) \bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a}$ .

Eger  $\alpha \beta < 0$  we mysal üçin,  $|\beta| > |\alpha|$  bolsa, onda  $\alpha + \beta$  we  $(-\alpha)$  - nyň birmenzeş alamatlary bar; subut edileniň esasynda

$$(\alpha + \beta) \bar{a} + (-\alpha) \bar{a} = (\alpha + \beta - \alpha) \bar{a} = \beta \bar{a},$$

$$(\alpha + \beta) \bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a}.$$

Matematiki induksiýanyň usulynyň kömegi bilen

$$\alpha(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n) = \alpha \bar{a}_1 + \alpha \bar{a}_2 + \dots + \alpha \bar{a}_n \quad (53)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \bar{a} = \alpha \bar{a}_1 + \alpha \bar{a}_2 + \dots + \alpha \bar{a}_n \quad (54)$$

deňlikleri subut etmek bolar

#### Ş4. 3. Iki wektoryň kollinearlyk şerti

Eger  $\bar{a}$ -käbir nol däl wektor we  $\bar{a}_0$ - şol wektoryň ugry boýunça ugrukdyrylan birlik wektor bolsa ( 8-nji surat ), onda wektory sana köpeltmegiň kesgitlemesinden

$$\bar{a} = |\bar{a}| \bar{a}_0 \quad (55)$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňligiň iki bölegini  $\alpha_0 = \frac{1}{|\bar{a}|}$

$(|\bar{a}| \neq 0)$  sana köpeldip alarys:

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a} \quad \text{ýa-da} \quad \bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \quad (56)$$

**Teorema.** Nol däl  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  iki wektoryň kollinear bolmagy üçin

$$\bar{b} = \alpha \bar{a} \quad (57)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

◁ Hakykatdan hem, wektory sana köpeltmegiň kesgitlemesine göre

eger (57) deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda  $\bar{b}$  we  $\bar{a}$  wektorlar kollinear, bu bolsa çykýar. Tersine, eger  $\bar{b}$  we  $\bar{a}$  kollinear wektorlar bolsa, onda  $\bar{a}_0$  we

$$1) \bar{a}(4, -1), \bar{b}(-1, -7) \quad 4) \bar{a}(3, 2, -5), \bar{b}(10, 1, 2)$$

$$2) \bar{a}(2, 1), \bar{b}(1, -3) \quad 5) \bar{a}(1, 0, 3), \bar{b}(-4, 15, 1)$$

$$3) \bar{a}(1, 2), \bar{b}(-4, 2) \quad 6) \bar{a}(2, 1, 5), \bar{b}(7, -9, -1)$$

bolsa  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

6.  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

$$1) \bar{a}(1, 2), \bar{b}(2, 4) \quad 5) \bar{a}(1, -1, 1), \bar{b}(5, 1, 1)$$

$$2) \bar{a}(1, 2), \bar{b}(4, 2) \quad 6) \bar{a}(1, -1, 1), \bar{b}(-2, 2, -2)$$

$$3) \bar{a}(1, 2), \bar{b}(-2, 1) \quad 7) \bar{a}(1, -1, 1), \bar{b}(3, 1, -2)$$

$$4) \bar{a}(1, -1), \bar{b}(-4, 2)$$

7.  $\bar{a}(-1, 2), \bar{b}(5, 1), \bar{c}(4, -2)$  üç wektor berlen.

Hasaplamaly

$$1) \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}), \quad 2) |\bar{a}|^2 - (\bar{b}, \bar{c}), \quad 3) |\bar{b}|^2 + (\bar{b}, \bar{a} + 3\bar{c}).$$

8. ABC üçburçlukda taraplarynyň uzynlygy berlipdir. Eger,

$$1) |AB| = 5, \quad |BC| = 3, \quad |AC| = 4$$

$$2) |AB| = 7, \quad |BC| = 4, \quad |AC| = 5$$

$$3) |AB| = 3, \quad |BC| = 2, \quad |AC| = 3$$

bolsa  $(\bar{AC}, \bar{BC})$  skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

9.  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

$$1) \bar{a}(3, -1, 2), \bar{b}(2, -3, -5);$$

$$2) \bar{a}(2, -1, 1), \bar{b}(-4, 2, -2); \quad 3) \bar{a}(6, 1, 0), \bar{b}(3, -2, 0)$$

10. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli

$$1) [\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}]$$

$$2) \left[ \bar{a} - \bar{b} + \frac{1}{2} \bar{c}, -\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c} \right]$$



üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ Z_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad (121)$$

formula bilen kesgitlenýär.

$\triangleleft \overline{abc} = [\overline{a}, \overline{b}] \overline{c}$  bolany üçin,

$$\overline{abc} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3 \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

deňligi alarys. Ol bolsa (121) formula deňgüýçlüdir. Çünki, soňky deňligiň sag bölegi (121) deňlikden kesgitlenýän üçünji tertipli kesgitleýjiniň üçünji setiriň elementleri boýunça dagytmasıdyr.  $\triangleright$

### Gönükmeler

1.  $\overline{a}(1, 2)$ ,  $\overline{b}(-5, -1)$ ,  $\overline{c}(-1, 3)$  wektorlar berlen.  $2\overline{a} + 3\overline{b} - \overline{c}$ ,  $16\overline{a} + 5\overline{b} - 9\overline{c}$  wektorlaryň koordinatolaryny tapmaly.

2.  $\overline{a}(1, 3)$ ,  $\overline{b}(2, -1)$ ,  $\overline{c}(-4, 1)$  wektorlar berlipdir.

$\alpha \overline{a} + \beta \overline{b} + \overline{c} = 0$  deňlik ýerine ýeter ýaly  $\alpha$  we  $\beta$  sanlary tapmaly.

3.  $\overline{a}(3, 0, -2)$ ,  $\overline{b}(1, 2, -5)$ ,  $\overline{c}(-1, 1, 1)$ ,  $\overline{d}(-1, 3, 4)$  wektorlar berlipdir.  $\alpha \overline{a} + \beta \overline{b} + \gamma \overline{c} + \overline{d} = 0$  deňlik ýerine ýeter ýaly  $\alpha, \beta, \gamma$  sanlary tapmaly.

4. Eger,

$$1) |\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 1, L(\overline{a}, \overline{b}) = 45^\circ$$

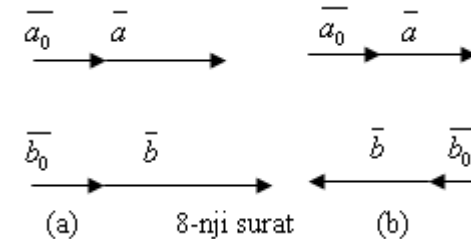
$$2) |\overline{a}| = 4, |\overline{b}| = 2, L(\overline{a}, \overline{b}) = 90^\circ$$

$$3) |\overline{a}| = 2, |\overline{b}| = 3 \quad \overline{a} \text{ we } \overline{b} \text{ wektorlar garşylykly ugrukdurylan}$$

bolsa  $\overline{a}$  we  $\overline{b}$  wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

5. Eger,

$\overline{b}_0$  birlik wektorlar birmeňzeş ugrukdurylan (8-nji (a) surat) ýa-da olaryň garşylykly ugurlary bar (8-nji (b) surat), ýagny,



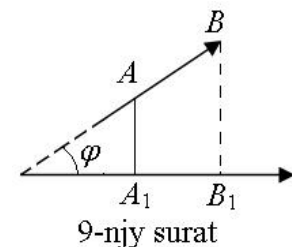
$\overline{a}_0 = \overline{b}_0$  ýa-da  $\overline{a}_0 = -\overline{b}_0$  (58)  
(56) formulany göz önünde tutup, soňky deňlikleri şeýle ýazmak bolar:

$$\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = -\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}. \quad \text{Bu deňliklerden}$$

$$\overline{b} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|} \overline{a} \quad \text{ýa-da} \quad \overline{b} = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|} \overline{a} \quad \text{gelip çykyar, ýagny}$$

$$\overline{b} = \alpha \overline{a}, \quad \text{bu ýerde} \quad \alpha = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|} \quad \text{ýa-da} \quad \alpha = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$$

### § 4. 4. Wektoryň oka bolan proyeksiýasy



Giňişlikde  $\overline{AB}$  wektor we  $l$  ok berlen bolsun. (9-njy surat). Goý,  $A_1$  nokat  $A$  nokadyň  $l$  oka proyeksiýasy,  $B_1$  nokat bolsa  $B$  nokadyň  $l$  oka proyeksiýasy bolsun. Ýagny berlen nokatlardan bu oka geçirilen perpendikulýarlaryň esaslary bolsun.

$\overline{A_1B_1}$  wektoryň ululygyna  $\overline{AB}$  wektoryň  $l$  oka proyeksiýasy diýilýär we  $pr_l \overline{AB}$  bilen belgilenýär, ýagny

$$A_1B_1 = pr_l \overline{AB} \quad (59)$$

$\overline{AB}$  wektoryň proyeksiýasy üçin

$$pr_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \varphi \quad (60)$$

deňlik dogrudyr, bu ýerde  $\varphi$  burç  $\overline{AB}$  wektor bilen  $l$  okuň arasyndaky burçdyr.  $\overline{a} = \overline{b}$  bolanda (18) deňlik easynda

$$pr_l \overline{a} = pr_l \overline{b} \quad (61)$$

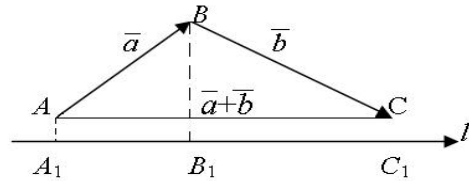
bolar. Ýagny, deň wektorlaryň şol bir oka proyeksiýalarynyň deňdigi gelip çykýar.

Wektoryň oka bolan proyeksiýalarynyň aşakdaky häsiýetleri bar :

$$pr_l(\overline{a} + \overline{b}) = pr_l \overline{a} + pr_l \overline{b}; \quad (62)$$

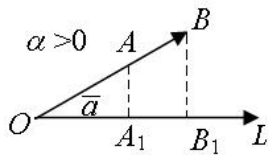
$$pr_l(\alpha \overline{a}) = \alpha pr_l \overline{a} \quad (63)$$

Goý,  $\overline{AB} = \overline{a}$ ,  $\overline{BC} = \overline{b}$ ,  $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$ ,  $A_1, B_1, C_1$  bolsa, degişlilikde  $A, B, C$  nokatlaryň  $l$  oka proyeksiýalary bolsun (10-njy sur).  $l$  okuň  $A_1, B_1, C_1$  üç nokady üçin esasy toždestwany ýazalyň:  $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ .



10-njy surat

Kesgitlemä görä  $A_1B_1 = pr_l \overline{a}$ ,  $B_1C_1 = pr_l \overline{b}$ ,  $A_1C_1 = pr_l(\overline{a} + \overline{b})$ . Bu üç deňlikleri öňdäki deňlikde goýanymyzda, (62) deňligi alarys. (63) deňlik  $OAA_1, OBB_1$  üçburçlyklaryň meňzeşliginden gelip çykýar. (11-nji surat)

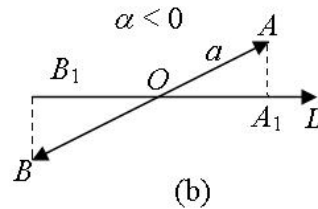


(a)

$$\overline{OA} = \overline{a}$$

$$\overline{OB} = \alpha \overline{a}$$

11-nji surat.



(b)

üçlük bolsa onda “goşmak”, çep üçlük bolsa “aýyrmak” alamaty alynýar. Soňky üç deňliklerden,

$$[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = \pm Sh, \quad [\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = \pm V \quad (115)$$

deňlikleri alarys.  $\triangleright$

**1-nji netije.** Wektorlaryň komplanar bolmagy üçin

$$[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = 0 \quad (116)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

$\triangleleft$  Goý,  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  komplanar wektorlar bolsun, onda  $[\overline{a}, \overline{b}] \perp \overline{c}$  we bu ýagdaýda (116) deňlik ýerine ýetýär.

Eger-de (116) deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda wektorlar komplanar bolar. Çünki, tersine bolan ýagdaýynda taraplary bu wektorlar bolan parallelepipedniň göwrümi noldan tapawutly bolar. Ýagny,  $[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = \pm V \neq 0$ . Bu bolsa şerte garşy gelýär.  $\triangleright$

**2-nji netije.**

$$[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = \overline{a} [\overline{b}, \overline{c}] \quad (117)$$

$\triangleleft$  Skalyar köpeltmek hasylynyň köpeldijileriň tertibine bagly dälidigine görä  $\overline{a} [\overline{b}, \overline{c}] = [\overline{b}, \overline{c}] \overline{a}$ . 3-nji teorema laýyklykda

$$[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = \pm V, \quad [\overline{b}, \overline{c}] \overline{a} = \pm V.$$

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ ,  $(\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$  – ugurdaş üçlükler bolany üçin soňky iki deňlikde şol bir alamaty almaly. Onda,

$$[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = [\overline{b}, \overline{c}] \overline{a} = \overline{a} [\overline{b}, \overline{c}]. \triangleright$$

(116) deňligi göz önünde tutup,  $[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c}$  we  $\overline{a} [\overline{b}, \overline{c}]$  garyşyk köpeltmek hasyly  $\overline{a} \overline{b} \overline{c}$  bilen belgileýärler, ýagny

$$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] \overline{c} = \overline{a} [\overline{b}, \overline{c}]. \quad (118)$$

**Bellik.**  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  wektorlar üçin

$$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = \overline{b} \overline{c} \overline{a} = \overline{c} \overline{a} \overline{b} = -\overline{b} \overline{a} \overline{c} = -\overline{c} \overline{b} \overline{a} = -\overline{a} \overline{c} \overline{b} \quad (119)$$

deňlikler dogrudyr.

**2. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly 4-nji teorema.**

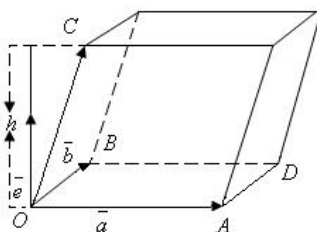
$$\overline{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \overline{b} = (X_2, Y_2, Z_2), \quad \overline{c} = (X_3, Y_3, Z_3) \quad (120)$$

$$= \frac{1}{2} 7 \cdot 4 = 14 \triangleright$$

#### § 4. 10. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

**1. Garyşyk köpeltmek hasylynyň kesgitlenişi.** Goý,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  wektorlar berlen bolsun.  $\vec{a}$  wektory  $\vec{b}$  wektora wektor köpeldeliň, alnan  $[\vec{a}, \vec{b}]$  köpeltmek hasyly  $\vec{c}$  wektora skalýar köpeldeliň, netijede wektor-skalýar köpeltmek hasyly ýa-da  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  üç wektoryň  $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}$  garyşyk köpeltmek hasyly diýip atlandyrylýan sany alarys.

**4-nji teorema.** Üç komplanar däl wektorlaryň  $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}$  garyşyk köpeltmek hasyly,  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  sag üçlük bolanda, goşmak



20-nji surat.

alamaty bilen alnan,  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  çep üçlük bolanda bolsa, “-” alamaty bilen alnan  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  wektorlarda gurlan paralelepipediniň görümine deňdir.

◁ Taraplary  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  wektorlar bolan parallelograma garalyň. (20-nji surat). Görnüşi ýaly bu parallelogram garalýan paralelepipediniň esasydyr. Onuň  $S$  meýdany (101) formula boýunça tapylýar.

(102) deňligi ulanyp,  $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = (S\vec{e}) \vec{c} = S(\vec{e}\vec{c})$  deňligi alarys. (82) deňlige görä  $(\vec{e}\vec{c}) = |\vec{e}| pr_{\vec{e}} \vec{c} = pr_{\vec{e}} \vec{c}$  bolar.

Beýleki tarapdan,  $pr_{\vec{e}} \vec{c} = \pm h$ , bu ýerde  $h$  paralelepipediniň  $OADB$  esasyna geçirilen beýikligidir (20-nji surat). Şunlukda,  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  – sag

Matematiki induksiýa usulyny ulanyp,

$$pr_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_l) = pr_l \vec{a}_1 + pr_l \vec{a}_2 + \dots + pr_l \vec{a}_l \quad (64)$$

deňligi subut edip bolýar (özbaşdak görkeziň!). Eger

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_l \quad (65)$$

wektorlaryň erkin tükenikli sistemasy,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  hakyky sanlaryň erkin sistemasy bolsa, onda

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_l \vec{a}_l \quad (66)$$

wektora (65) sistemanyň wektorlarynyň çyzykly kombinasiýasy diýilýär. (63) we (64) deňliklerden

$$pr_l(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_l \vec{a}_l) = \alpha_1 pr_l \vec{a}_1 + \alpha_2 pr_l \vec{a}_2 + \dots + \alpha_l pr_l \vec{a}_l \quad (67)$$

deňlik gelip çykyar.

#### § 4. 5. Giňişlikde wektoryň gönüburçly dekart koordinatalary. Wektoryň uzynlygy. Wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary

Giňişlikde başlangyjy gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň başlangyjy bilen gabat gelýän, ahyry  $M$  nokatda bolan  $\vec{r} = \vec{OM}$  wektora  $M$  nokadyň radius wektory diýilýär (12-nji surat).

$\vec{r}$  wektoryň koordinatalar oklaryna bolan

$$X = pr_x \vec{r}, \quad Y = pr_y \vec{r}, \quad Z = pr_z \vec{r} \quad (68)$$

proýeksiýalaryna onuň  $X, Y, Z$  gönüburçly dekart koordinatalary diýilýär.

$$\vec{r}(X, Y, Z), \quad \vec{r} = \{X, Y, Z\}, \quad \vec{r} = (X, Y, Z) \quad (69)$$

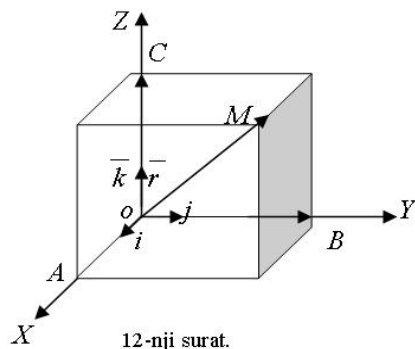
ýazgylaryň her biri  $r$  wektoryň  $X, Y, Z$  koordinatalarynyň bardygyny aňladýar. Eger  $x, y, z$  – giňişlikde  $M$  nokadyň gönüburçly dekart koordinatalary bolsa, onda

$$X=x, Y=y, Z=z. \quad (70)$$

Ýagny  $\vec{OM}$  radius-wektoryň koordinatalary berlen nokadyň koordinatalaryna deňdir.

Koordinatalar oklarynyň (ortlar diýip atlandyrylýan)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  birlik wektorlaryna we

$$\vec{OA} = X\vec{i}, \quad \vec{OB} = Y\vec{j}, \quad \vec{OC} = Z\vec{k} \quad (71)$$



wektorlara garalyň , bu ýerde  $A, B, C$  - gönüburçly parallelepipediniň depeleri,  $OM$  bolsalar onuň dioganaly (12-nji surat) ( $A, B, C$  nokatlar  $M$  nokadyň koordinatalar oklaryna bolan proyeksiýalary,  $OA=X, OB=Y, OC=Z$  bolsa  $\overrightarrow{OM}$  wektoryň koordinatalar oklaryna proyeksiýalary).

Wektoryň jeminiň kesgitlenişine görä  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ , şonuň üçin

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \quad (72)$$

Bu formula  $\vec{r}$  wektoryň  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  bazis wektorlary boýunça dagytmasyny aňladýar. (72) formulanyň sag bölegindäki wektorlara  $\vec{r}$  wektoryň düzüjileri ýa-da komponentleri diýilýär. Gönüburçly parallelepipediniň diagonalynyň kwadraty hakyndaky teoremanyň esasynda (69) (ýa-da (72)) wektoryň uzynlygyny onuň koordinatalary arkaly aňladýan formulany alarys:

$$|\vec{r}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (73)$$

Wektoryň koordinatalar oklary bilen emele getirýän  $\alpha, \beta, \gamma$  burçlarynyň kosinuslaryna wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary diýilýär. (18) formulany göz önünde tutup, (69) wektor üçin

$$X = |\vec{r}| \cos \alpha, \quad Y = |\vec{r}| \cos \beta, \quad Z = |\vec{r}| \cos \gamma. \quad (74)$$

deňlikleri alarys. (73) we (74) deňliklerden  $\vec{r}$  wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary üçin:

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2} \quad (113)$$

formula bilen hasaplanýar

**2-nji netije.**  $ABC$  üçburçlugyň meýdany

$$S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| \quad (114)$$

formula boýunça kesgitlenýär. Bu formula (101) formuladan gelip çykýar. Çünki  $ABC$  üçburçlugyň meýdany  $\overrightarrow{AB}$  we  $\overrightarrow{AC}$  wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanynyň ýarysyna deňdir.

**1-nji mysal.**  $\vec{a} = (7, -5, -6)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, -3)$  wektorlar berlen  $[\vec{a}, \vec{b}]$  wektor köpeltmek hasylynyň koordinatalaryny tapmaly.

◁ (112) formuladan peýdalanyp alarys:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = 3\vec{i} + 15\vec{j} - 9\vec{k}, \quad [\vec{a}, \vec{b}] = \{3, 15, -9\}. \triangleright$$

**2-nji mysal.** Üçburçlugyň depeleri  $A(-1, -1, 1)$ ,  $B(1, -3, 4)$   $C(3, -1, -5)$  nokatlarda ýerleşen. Onuň meýdanyny tapmaly.

◁ (82) formula boýunça  $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4, 0, -6)$ . wektorlary tapyp,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left( \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right) = (12, 24, 8) \quad \text{bolýanlygy}$$

sebäpli (114) formuladan peýdalanyp taparys:

$$S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2(3^2 + 6^2 + 2^2)} =$$

$$[\bar{a}, (\bar{b} + \bar{c})] = -[(\bar{b} + \bar{c}), \bar{a}] = -[\bar{b}, \bar{a}] - [\bar{c}, \bar{a}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]. \triangleright$$

**2. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly. 3-nji teorema.**

$$\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2) \quad (110)$$

iki wektoryň  $[\bar{a}, \bar{b}]$  wektor köpeltmek hasyly

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \bar{k} \quad (111)$$

formula bilen aňladylýar.

◁ Kesgitlemeden we (104) deňlikden sag gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  birlik wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly üçin aşakdaky tablissa gelip çykýar:

$$\begin{aligned} [\bar{i}, \bar{i}] &= 0, & [\bar{i}, \bar{j}] &= \bar{k}, & [\bar{i}, \bar{k}] &= -\bar{j}; \\ [\bar{j}, \bar{i}] &= -\bar{k}, & [\bar{j}, \bar{j}] &= 0, & [\bar{j}, \bar{k}] &= \bar{i}; \\ [\bar{k}, \bar{i}] &= \bar{j}, & [\bar{k}, \bar{j}] &= -\bar{i}, & [\bar{k}, \bar{k}] &= 0. \end{aligned}$$

Wektor köpeltmek hasylynyň häsiýetlerini we tablissany göz önünde tutup,  $[\bar{a}, \bar{b}] = [(X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k}), (X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k})] = (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) [\bar{i}, \bar{j}] + (X_1 Z_2 - Z_1 X_2) [\bar{i}, \bar{k}] + (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) [\bar{j}, \bar{k}]$ ,

deňligi, ýagny

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \bar{i} - (X_1 Z_2 - Z_1 X_2) \bar{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \bar{k}$$

deňligi alarys. Bu ýerde ikinji tertipli kesgitleýjä geçip, (111) formulany alarys. ▷

Bu formulany üçünji tertipli kesgitleýji görnüşünde hem ýazmak bolar:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (112)$$

**1-nji netije.** (68) wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdany

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \end{aligned} \quad (75)$$

formulalary alarys.

(75) deňlikleriň her biriniň iki bölegini hem kwadrata göterip we agzalaýyn goşup,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (76)$$

deňligi alarys. Şeýlelikde, wektoryň ugrukduýy kosinuslarynyň kwadratlarynyň jemi bire deňdir.

(74) formulardan  $\bar{e}$  birlik wektoryň koordinatalarynyň onuň ugrukdyryjy kosinuslaryna deňdigi, ýagny

$$\bar{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (77)$$

gelip çykýar .

**1-nji mysal.**  $\bar{a} = (1, -2, 2)$  wektor berlen . Onuň uzynlygyny we  $\bar{a}$  wektoryň ugry boýunça ugrukduýan  $\bar{a}_0$  birlik wektory tapmaly.

◁  $\bar{a}$  wektoryň uzynlygyny (31) formula boýunça taparys:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3; \quad (33) \text{ formula boýunça}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}, \quad \bar{a}_0 = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \triangleright$$

#### § 4. 6. Wektor gatnaşyklaryndan koordinata gatnaşyklaryna geçmek

**1. Wektory sana köpeltmegiň koordinatalary.** Goý,  $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$  wektor we  $\alpha \neq 0$  san berlen bolsun.  $\bar{b} = \alpha \bar{a}$  wektoryň koordinatalaryny tapmaly. Projeksiýalaryň häsiýetleri we kesgitlemeleri esasynda  $\bar{b}$  wektoryň gözlenilýän  $X_2, Y_2, Z_2$  koordinatalary

$$X_2 = \alpha X_1, \quad Y_2 = \alpha Y_1, \quad Z_2 = \alpha Z_1 \quad (78)$$

formulalar arkaly aňladylýandygyny alýarys, sebäbi:

$$X_2 = pr_x \bar{b} = pr_x (\alpha \bar{a}) = \alpha pr_x \bar{a} = \alpha X_1, \quad Y_2 = pr_y \bar{b}, \quad Z_2 = pr_z \bar{b}.$$

(78) deňlikler  $\vec{a}=(X_1, Y_1, Z_1)$  ,  $\vec{b}=(X_2, Y_2, Z_2)$  iki wektoryň kolinearlygynyň zerur we ýeterlik şertini aladýar. Eger  $X_1, Y_1, Z_1$  sanlaryň hiç biri nola deň däl bolsa, onda bu deňlikleri şeýle ýazmak bolar:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1} . \quad (79)$$

Şeýlelikde, wektorlaryň biratly koordinatalary proporsional bolanda we diňe şonda wektorlar kollinearlyr.

**2. Iki wektoryň jemiň (tapawudynyň) koordinatalary.** Goý, iki sany  $\vec{a}=(X_1, Y_1, Z_1)$  we  $\vec{b}=(X_2, Y_2, Z_2)$  wektorlar berlen bolsun. (62) we (68) formulalar esasynda  $\vec{a} + \vec{b}$  jemiň wektorynyň  $X, Y, Z$  koordinatalaryny alarys:

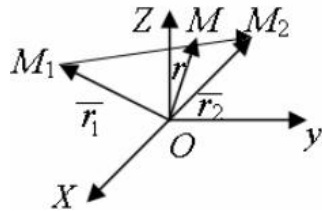
$$X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2, Z = Z_1 + Z_2 \quad (80)$$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  bolany üçin

$$X' = X_1 - X_2, Y' = Y_1 - Y_2, Z' = Z_1 - Z_2, \quad (81)$$

bu ýerde  $X', Y', Z'$  sanlar  $\vec{a} - \vec{b}$  wektoryň koordinatalarydyr.

**3. Iki nokat bilen berlen wektoryň koordinatalary.**  $\overline{M_1 M_2}$  wektoryň başlangyjy  $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$  nokatda, ahyry  $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$  nokatda ýerleşär.  $M_1$  we  $M_2$  nokatlaryň koordinatalarynyň üsti bilen onuň koordinatalary üçin aňlatmany tapalyň.  $M_1$  we  $M_2$  nokatlaryň



13-nji surat

$\vec{r}_1 = \overline{OM_1}, \vec{r}_2 = \overline{OM_2}$  (13-nji surat) radius wektorlaryna garalyň.

$\overline{M_1 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . (70) deňlige görä  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  bolýandygyny göz önünde tutup, (81) deňlikden  $\overline{M_1 M_2}$  wektoryň  $X, Y, Z$  koordinatalary üçin:

$$X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1 \quad (82)$$

wektory  $O$  nokadyň

töwereginden sagat diliniň

hereketiniň ugry boýunça  $90^\circ$  burça öwreliň.

Alnan  $\overline{OA_2}$  wektor  $[\vec{a}, \vec{c}_0]$  wektor köpeltmek hasyly bolar.

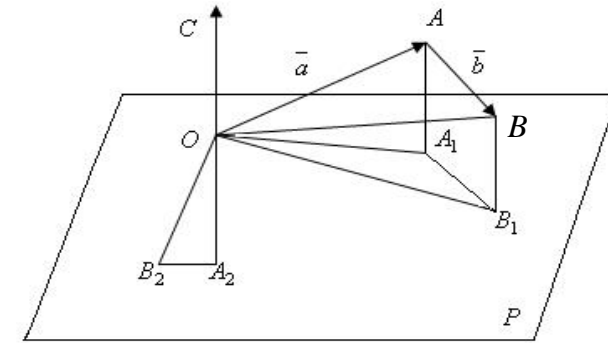
Hakykatdan-da,

$$1) |\overline{OA_2}| = |\overline{OA_1}| = |\vec{a}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\vec{a}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{c}_0| \sin \varphi;$$

$$2) \overline{OA_2} \text{ wektor } \vec{a}, \vec{c}_0 \text{ wektorlaryň her birine perpendikulýar.}$$

$$3) \vec{a}, \vec{c}_0, \overline{OA_2} \text{ wektorlar sag üçlügi emele getirýär.}$$

18-nji suratdaka meňzeş gurluşy geçireliň.  $A$  nokatdan  $\overline{AB} = \vec{b}$  wektory alyp goýalyň, onda  $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ . Goý,  $A_1$  we  $B_1$  nokatlar deňşililikde  $P$  tekizlige  $A$  we  $B$  nokatlaryň ortogonal proyeksiýalary bolsun.  $P$  tekizlikde  $O$  nokadyň töwereginden  $OA_1 B_1$  üçburçlugy  $\alpha = 90^\circ$  burça öwürüp,  $OA_2 B_2$  üçburçlugy alarys. 19-njy surat..  $\overline{OB_2} = \overline{OA_2} + \overline{A_2 B_2}$  we



19-njy surat.

$\overline{OB_2} = [(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}_0]$ ,  $\overline{OA_2} = [\vec{a}, \vec{c}_0]$ ,  $\overline{A_2 B_2} = [\vec{b}, \vec{c}_0]$  bolýanlygy üçin bu ýerden (108') deňlik gelip çykýar. Ony agzalaýyn  $|\vec{c}|$  sana köpeldip,  $\vec{c} = |\vec{c}| \vec{c}_0$  formulany göz önünde tutsak, onda (108) deňligi alarys. (109) deňlik (105), (108) deňliklerden gelip çykýar:

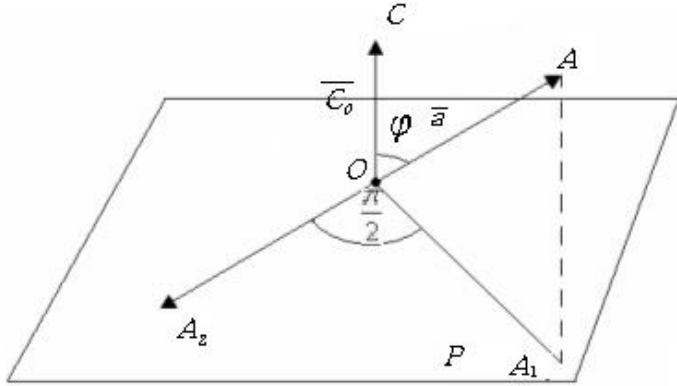
◁(105) deňlik gös-göni kesgitlemeden gelip çykýar. Indi (106) deňligi görkezeliň.  $[(\alpha \bar{a}), \bar{b}]$  we  $\alpha [\bar{a}, \bar{b}]$  wektorlaryň deň uzynlyklary bar. Çünki  $\alpha > 0$  (18-nji surat) bolanda  $[(\alpha \bar{a}), \bar{b}] = |\alpha| |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi$ ,  $\alpha < 0$  bolanda  $[(\alpha \bar{a}), \bar{b}] = |\alpha \bar{a}| |\bar{b}| \sin(\pi - \varphi) = |\alpha| |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi$ . Şeýle hem bu wektorlar ugurdaş, sebäbi  $\alpha > 0$  bolanda olaryň ugry  $[\bar{a}, \bar{b}]$  wektoryň ugry bilen gabat gelýär,  $\alpha < 0$  bolanda bolsa ol wektorlar  $[\bar{a}, \bar{b}]$  wektora garşylykly ugrukdurlandyr.

(107) formula (105) we (106) formulalardan gelip çykýar. Hakykatdanda,

$$[\bar{a}, (\beta \bar{b})] = -[(\beta \bar{b}), \bar{a}] = -\beta [\bar{b}, \bar{a}] = \beta [\bar{a}, \bar{b}]$$

(108) deňligi ilki bilen  $\bar{c}$  birlik wektor bolandaky ýagdaý üçin, ýagny

$$[(\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}_0] = [\bar{a} \bar{c}_0] + [\bar{b} \bar{c}_0] \quad (|\bar{c}_0| = 1) \quad (108')$$



18-nji surat.

deňligi görkezeliň. Erkin  $\bar{a}$  wektoryň birlik  $\bar{c}_0$  wektora wektor köpeltmek hasylyny kesgitleliň. Bellenen  $O$  nokatdan  $\overline{OC} = \bar{c}_0$  we  $\overline{OA} = \bar{a}$  wektory alyp goýalyň.  $O$  nokadyň üsti bilen  $\bar{c}_0$  wektora perpendikulýar bolan  $P$  tekizligi geçireliň (18-nji surat). Goý,  $A_1$  nokat  $A$  nokadyň  $P$  tekizlige ortogonal proyeksiýasy bolsun.  $\bar{c}_0$  wektoryň tarapyndan seredeninde  $\overline{OA_1}$

deňlikleri alarys. Şeýlelikde, wektoryň koordinatalaryny tapmak üçin onuň ahyrynyň koordinatalaryndan başlangyjynyň deňişli koordinatalaryny aýyrmak zerurdyr.

**4. Wektoryň çyzykly kombinasiýasynyň koordinatalary.**  $n$  sany  $\bar{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ ,  $\bar{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \dots, \bar{a}_n = \{X_n, Y_n, Z_n\}$  wektorlar we olaryň çyzykly kombinasiýasy

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n \quad (83)$$

berlen bolsun. (67), (68) formulalary göz önünde tutup, (83) wektoryň koordinatalaryny

$$\begin{cases} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n; \\ Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \dots + \alpha_n Y_n; \\ Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \dots + \alpha_n Z_n; \end{cases} \quad (84)$$

deňlikler bilen kesgitlemek bolar.

#### § 4. 7. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly

**1. Skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlenişi.**  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň uzynlyklarynyň olaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeltmek hasylyna deň bolan sana  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly diýilýär. Biz skalýar köpeltmek hasylyny  $\bar{a} \bar{b}$  görnüşde belgilejekdiris. Diýmek,

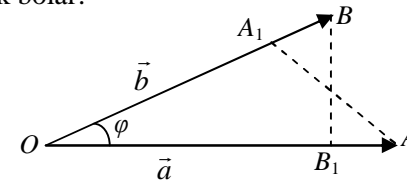
$$\bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi. \quad (85)$$

$|\bar{b}| \cos \varphi = pr_a \bar{b}$  we  $|\bar{a}| \cos \varphi = pr_b \bar{a}$  (14-nji surat) bolýanlygyny göz önünde tutup, (85) deňligi

$$\bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| pr_a \bar{b} \quad (86)$$

$$\bar{a} \bar{b} = |\bar{b}| pr_b \bar{a} \quad (87)$$

görnüşde ýazmak bolar.



14-nji surat.

$\bar{a}$  wektoryň özüne skalýar köpeltmek hasylyna  $\bar{a}$  wektoryň skalýar kwadraty diýilýär:

$$\bar{a}^2 = \bar{a}\bar{a} = |\bar{a}| |\bar{a}| \cos 0^0 = |\bar{a}|^2, \quad \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2. \quad (88)$$

Şunlukda, wektoryň skalýar kwadraty onuň uzynlygynyň kwadratyna deň, şonuň üçin  $|\bar{a}| \neq 0$  bolanda  $\bar{a}^2 > 0$ ,  $|\bar{a}| = 0$  bolanda  $\bar{a}^2 = 0$ . Goý,  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$

wektorlar perpendikulýar bolsun, ýagny  $\varphi = 90^0$ , onda  $\cos \varphi = 0$  we

$$\bar{a}\bar{b} = 0. \quad (89)$$

Tersine, eger (89) deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  – nol däl wektorlar bolanda  $\varphi = 90^0$ , ýagny  $\bar{a} \perp \bar{b}$ . Eger wektorlaryň biri nol wektor bolsa, onda ony beýlekisine perpendikulýar hasap etmek bolar (sebäbi nol wektoryň kesgitli ugry ýok).

Skalýar köpeltmek hasylylynyň

1) Orun çalşyрма

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}; \quad (90)$$

2) Utgaşdyрма (san köpeldijä görä)

$$(\alpha \bar{a})\bar{b} = \alpha \bar{a}\bar{b}; \quad (91)$$

3) Wektorlaryň jemine görä paýlaşdyрма

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}. \quad (92)$$

häsiýetleri bar.

(90)-(92) formulalaryň dogrudygyny görkezeliň. (90) formula (85) formuladan gelip çykýar. (87) we (63) formulalary ulanyp, (91) formulany alýarys.

$$(\alpha \bar{a}\bar{b}) = |\bar{b}| pr_{\bar{b}}(\alpha \bar{a}) = |\bar{b}| \alpha pr_{\bar{b}}\bar{a} = \alpha |\bar{b}| pr_{\bar{b}}\bar{a} = \alpha (\bar{a}\bar{b})$$

(92) formula hem şuna meňzeş subut edilýär:

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| pr_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| (pr_{\bar{a}}\bar{b} + pr_{\bar{a}}\bar{c}) = |\bar{a}| pr_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}| pr_{\bar{a}}\bar{c} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$$

(90), (91) formulalardan

$$(\alpha \bar{a})(\beta \bar{b}) = (\alpha \beta)(\bar{a}\bar{b}) \quad (93)$$

deňlik gelip çykýar.

Hakykatdan-da,

1) şertden  $[\bar{a}, \bar{b}]$  wektor köpeltmek hasylynyň modulynyň  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň üstünde gurlan  $S$  parallelogramyň meýdanyna deňligi gelip çykýar (16-njy surata seret), ýagny

$$|[\bar{a}, \bar{b}]| = S \quad (101)$$

Şonuň üçin

$$[\bar{a}, \bar{b}] = S\bar{e}, \quad (102)$$

bu ýerde  $\bar{e}$  wektor  $[\bar{a}, \bar{b}]$  wektora ugurdaş birlik wektorydyr.

Goý,  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlar kollinear, ýagny  $\varphi = 0$  ýa-da  $\varphi = \pi$  bolsun. Onda  $\sin \varphi = 0$  we  $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$ . Şonuň üçin hem

$$[\bar{a}, \bar{b}] = 0. \quad (103)$$

Eger (103) deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda nol däl wektorlar üçin  $\sin \varphi = 0$ , bu ýerden bolsa  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ , ýagny  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  kollinear wektorlardyr. Eger wektorlaryň biri nol wektor bolsa, onda ony beýlekisine kollinear diýip hasap etmek bolar. Şunlukda, (103) deňlik  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  iki wektoryň kollinearlygynyň zerur we ýeterlik şertini aňladýar. Hususan-da, her bir  $\bar{a}$  wektor üçin

$$[\bar{a}, \bar{a}] = 0 \quad (104)$$

Iki wektoryň wektor köpeltmek hasylynyň aşakdaky häsiýetleri bar:

$$1) [\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]; \quad (105)$$

$$2) [(\alpha \bar{a}), \bar{b}] = \alpha [\bar{a}, \bar{b}]; \quad (106)$$

$$[\bar{a}, (\beta \bar{b})] = \beta [\bar{a}, \bar{b}]; \quad (107)$$

3) Paýlama

$$[(\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]; \quad (108)$$

$$[\bar{a}, (\bar{b} + \bar{c})] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}] \quad (109)$$



Eger  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  birlik wektorlaryň üçlügi sag (çep) üçlük bolsa, onda gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna sag (çep) koordinatalar sistemasy diýilýär.

#### § 4.9. Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly

**1. Wektor köpeltmek hasylynyň kesgitleniş.** Eger  $[\bar{a}, \bar{b}]$  bilen belgilenýän wektor aşakdaky

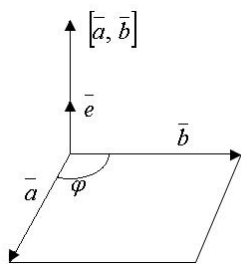
1)  $[\bar{a}, \bar{b}] = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi$ , bu ýerde  $\varphi$  burç  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň arasyndaky burç.

2)  $[\bar{a}, \bar{b}]$  wektor  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň her birine perpendikulýar;

3)  $(\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}])$  we  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  üçlükler bir oriýentasiýaly üçlükler;

şertleri kanagatlandyryan bolsa, onda oňa  $\bar{a}$  wektoryň  $\bar{b}$  wektora wektor köpeltmek hasyly diýilýär.

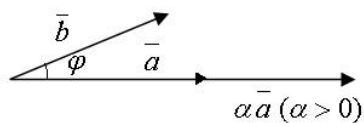
Wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly  $\bar{a} \times \bar{b}$  görnüşde hem belgilenýär.



16-njy surat



(a)



(b)

17-nji surat

$$(\alpha \bar{a})(\beta \bar{b}) = \alpha(\bar{a}(\beta \bar{b})) = \alpha((\beta \bar{b})\bar{a}) = \alpha(\beta(\bar{b}\bar{a})) = \alpha\beta(\bar{b}\bar{a}) = \alpha\beta(\bar{a}\bar{b})$$

#### 2. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly.

##### 2-nji teorema.

$$\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2) \quad (94)$$

iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly

$$\bar{a}\bar{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 \quad (95)$$

formula arkaly aňladylýar.

◁ (88), (89) formulalaryň kömegi bilen  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  birlik wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly üçin

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}^2 &= 1, \bar{i}\bar{j} = 0, \bar{i}\bar{k} = 0; \\ \bar{j}\bar{i} &= 0, \bar{j}^2 = 1, \bar{j}\bar{k} = 0; \\ \bar{k}\bar{i} &= 0, \bar{k}\bar{j} = 0, \bar{k}^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

deňlikleri alarys.  $\bar{a}$  we  $\bar{b}$  wektorlaryň birlik wektorlar boýunça

$$\bar{a} = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k}, \quad \bar{b} = X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k}.$$

dagytmasyny peýdalanyp, (90)–(93) formulalara laýyklykda (96) deňlikleri göz önünde tutup,

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &= (X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k})(X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k}) = Z_1 X_2 \bar{i}^2 + X_1 Y_2 \bar{i}\bar{j} + \\ &+ X_1 Z_2 \bar{i}\bar{k} + Y_1 X_2 \bar{j}\bar{i} + Y_1 Y_2 \bar{j}\bar{j} + Y_1 Z_2 \bar{j}\bar{k} + Z_1 X_2 \bar{k}\bar{i} + Z_1 Y_2 \bar{k}\bar{j} + \\ &+ Z_1 Z_2 \bar{k}^2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \end{aligned}$$

deňligi alarys.▷

**Bellik.** Eger  $\bar{b} = \bar{a}$  bolsa, onda (95) formula  $\bar{a}\bar{a} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$

görnüşini alar. Şoňa görä  $\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$  deňligiň esasynda,

$$|\bar{a}|^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \quad |\bar{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \quad (97)$$

**1-nji netije.** (94) wektorlaryň arasyndaky burçuň kosinusy

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \quad (98)$$

formula arkaly kesgitlenýär.

**2-nji netije.** (94) wektorlaryň perpendikulýarlygynyň zerur we ýeterlik şerti

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0 \quad (99)$$

deňlik arkaly aňladylýar.

**3-nji netije.** Eger  $l$  ok koordinatalar oklary bilen degişlilikde  $\alpha, \beta, \gamma$  burçlary emele getirýän bolsa, onda  $\vec{c} = (X, Y, Z)$  wektoryň bu oka proyeksiýasy

$$pr_l \vec{c} = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma \quad (100)$$

deňlik bilen kesgitlenýär.

Hakykatdan hem, eger  $\vec{e}$  wektor  $l$  - okuň birlik wektory bolsa, onda (86) formulanyň kömegi bilen taparys:

$$\vec{e} \vec{c} = |\vec{e}| pr_l \vec{c} = 1 \cdot pr_l \vec{c} = pr_l \vec{c}, \quad pr_l \vec{c} = \vec{e} \vec{c}$$

bu formuladan (95) deňlik esasynda (100) formula gelip çykýar.

**2-nji mysal.** Berlen  $\vec{a} = (7, 2, -8)$ ,  $\vec{b} = (11, -8, -7)$  wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

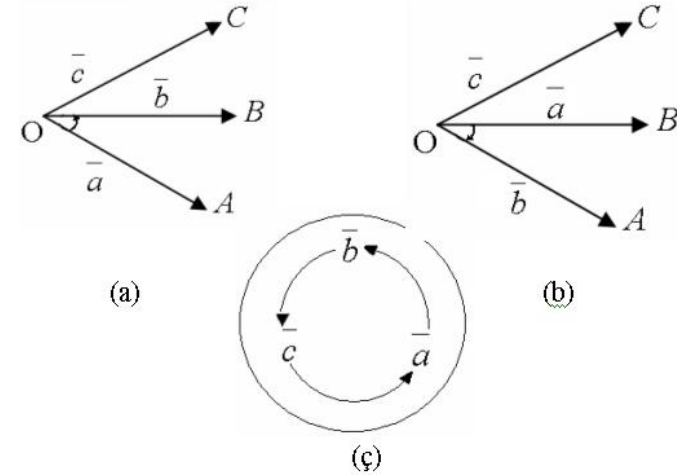
◁ (98) formuladan peýdalanyp taparys.

$$\cos \varphi = \frac{7 \cdot 11 + 2 \cdot (-8) + (-8) \cdot (-7)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45^\circ \triangleright$$

#### § 4. 8. Wektorlaryň sag we çep üçlügi. Sag we çep koordinatalar sistemasy

Bir nokatdan çykýan we görkezilen tertipde alnan ( $\vec{a}$  - birinji wektor,  $\vec{b}$  - ikinji,  $\vec{c}$  - üçünji)  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  üç komplanar däl wektorlara  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  wektorlar üçlügi diýilýär (15-nji a, b surat.)



15-nji surat

$\vec{c}$  wektoryň ahyryndan  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň emele getirýän tekizligine garalyň. Eger  $\vec{a}$  wektordan  $\vec{b}$  wektora iň gysga öwrüm sagat diliniň hereketiniň garşysyna edilýän bolsa, onda  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  wektor üçlügine sag üçlük (15-nji (a) surat), eger-de görkezilen öwrüm sagat diliniň ugry boýunça amala aşyrylýan bolsa, onda  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  wektorlar üçlügüne çep üçlük diýilýär (15-nji (b) surat).

Ikisi hem sag ýa-da ikisi hem çep bolan iki üçlüge ugurdaş (bir oriýentasiýaly) üçlükler diýilýär. Eger bir üçlük sag bolup, beýlekisi çep bolsa, onda olara ters ugurdaş (dürli oriýentasiýaly) üçlükler diýilýär. 15-nji (ç) suratda görkezilişi ýaly wektorlaryň aýlawly orun çalşyrmada (birinjisi ikinjisi bilen, ikinjisi üçünji bilen, üçünjisi birinji bilen çalşyrlanda) üçlügiň oriýentasiýasy üýtgemeyär. Eger iki wektoryň ornuny çalşyrsak, onda üçlügiň oriýentasiýasy üýtgeýär, mysal üçin, eger  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – sag üçlük emele getirýän bolsa, onda  $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$  çep üçlük bolar. Şeýlelikde, eger üç sany  $\vec{a}, \vec{b}$  we  $\vec{c}$  komplanarlar däl wektorlar berlen bolsa, onda olar altý sany üçlügi emele getirýär. Olardan  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ;  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ ;  $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$  üçlükler şol bir oriýentasiýaly  $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ ;  $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ ;  $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$  beýleki oriýentasiýaly üçlüklerdir.

(aşaky) çägi diýilýär. Hem ýokardan, hem aşakdan çäkli yzygiderlige bolsa çäkli yzygiderlik diýilýär.

Bu kesgitlemäniň esasynda  $\{x_n\}$  yzygiderligiň çäkli bolmagy üçin şeýle  $K > 0$  san tapylyp,  $\forall n \in N$  üçin  $|x_n| \leq K$  deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Mysal üçin,  $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ,  $\left\{\cos \frac{\pi n}{2}\right\}$  yzygiderlikler çäkli,  $\{n^2\}$  yzygiderlik bolsa aşakdan çäkli bolup, ýokardan çäkli däldir.

**1-nji teorema.** Eger  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda ol yzygiderlik çäklidir.

◁ Goý,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bolsun. Onda kesgitleme boýunça,  $\varepsilon = 1$  üçin şeýle  $n_0$  belgi tapylyp,  $\forall n > n_0$  üçin  $|x_n - a| < 1$  bolar, ýagny  $|x_n| < |a| + 1$ . Şonuň üçin, eger  $K$  san  $|a| + 1, |x_1|, \dots, |x_{n_0}|$  sanlaryň iň ulusy bolsa, onda  $\forall n \in N$  üçin  $|x_n| \leq K$  bolar we ol  $\{x_n\}$  yzygiderligiň çäklidigini aňladýar. ▷

**2-nji teorema.** Eger  $\{x_n\}$  we  $\{y_n\}$  yzygiderlikleriň predelleri bar bolsa, onda  $\{x_n \pm y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$  we  $\{x_n / y_n\}$  (paý kesgitlenende) yzygiderlikleriň hem predelleri bardyr we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad (4)$$

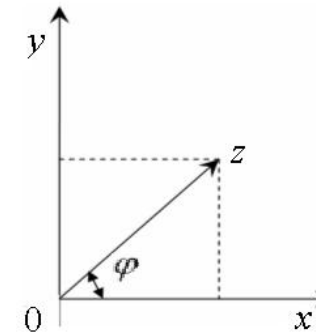
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right) \quad (5)$$

deňlikler dogrudyr (subudynyň funksiýanyň predeli üçin soňra subut ediljek teoremanyňky ýaly bolany sebäpli, biz ony subutsyz ulanarys).

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

**1-nji netije.** Ýygnanýan yzygiderlikleriň tükenikli algebraik jeminiň predeli goşulyjylaryň predelleriniň şol algebraik jemine deňdir.

**2-nji netije.** Eger  $\{x_n\}$  yzygiderlik ýygnanýan bolsa, onda hemişelik  $c$  san üçin  $\{cx_n\}$  yzygiderlik hem ýygnanýandyr we  $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .



22-nji surat

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

alarys. Diymek,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Kompleks sanyň şeýle görnüşdäki ýazgysyna onuň **trigonometrik görnüşi** diýilýär.

Eger  $z = x + iy$  we  $\arg z = \varphi$  bolsa, onda

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (9)$$

$z = x + iy$  kompleks sanyň  $\varphi$  argumentini tapmak üçin (9) sistemany çözmek ýeterlik. (9) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr we ol çözüwler  $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , formula boýunça ýazylýar, bu ýerde  $\varphi_0$  (9) sistemanyň käbir çözüwi.

Şeýlelik bilen, kompleks sanyň argumenti bir bahaly kesgitlenmeýär. Eger  $z = x + iy$  kompleks sanyň argumentiniň käbir bahasy  $\varphi_0$  bolsa, onda  $\arg z = \varphi_0 + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , bolar.

**1-nji bellik.** (9) sistemanyň derejine

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (10)$$

deňlemäni hem almak bolar, ýöne (10) deňlemäniň kökleri (9) sistemanyň çözüwi bolup bilmeyär.

Goý,  $\arg z_1 = \varphi_1$  we  $\arg z_2 = \varphi_2$  bolsun, onda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (11)$$

Diýmek,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Matematiki induksiýa usuluny ulanyp,

$$\left. \begin{aligned} \arg(z_1 \cdot z_2 \dots z_n) &= \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n, \\ |z_1 \cdot z_2 \dots z_n| &= |z_1| |z_2| \dots |z_n| \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

deňlikleri alarys. Eger  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$  bolsa, onda

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

formulany alarys. Oňa Muawryň formulasy diýilýär.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned} \quad (13)$$

Diýmek,  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

**2-nji bellik.** Goý,  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Onda,  $z_1 = z_2$  deňlik diňe  $r_1 = r_2$  we  $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\kappa\pi$ ,  $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  bolanda dogrudyr.

### § 5.3. Kompleks sanlardan kök almak

Eger  $z^n = a$  bolsa, onda  $z$  kompleks sana  $a$  kompleks sanyň  $n$  derejeli köki diýilýär we  $\sqrt[n]{a}$  belgi bilen belgilenýär.

ýetýär, ýagny  $a$  san  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predelidir. Diýmek, hemişelik sanyň predeli onuň özüne deňdir.

Logiki belgilemeleriň kömegi bilen  $a$  sanyň  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predeli bolýandygyny gysgaça şeýle ýazmak bolar:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (N \ni n_o \exists) (\forall n > n_o): |x_n - a| < \varepsilon.$$

**1-nji mysal.**  $\{1+1/n\}$  yzygiderligiň predeliň bire deňdigini subut etmeli we  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  üçin  $n_o$  belgini kesgitlemeli.

◁ Eger  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $n_o \geq 1/\varepsilon$  alsak, ýagny  $n_o$  belgi hökmünde  $1/\varepsilon$  sana deň ýa-da ondan uly bolan iň kiçi natural sany alsak, onda  $\forall n > n_o$  üçin

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_o} \leq \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter we kesgitleme boýunça yzygiderligiň predeli bire deňdir. Şunlukda,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  bolanga degişlilikde

$n_o = 10$ ,  $n_o = 100$  bolar. ▷

Bu mysalyň çözüwünden  $\{1/n\}$  yzygiderligiň hem predeliň bardygyny we onuň nola deňligi gelip çykýar.

(2) deňsizligiň  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  deňsizliklere deňgüýçludigini we  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aralygyň  $a$  nokadyň  $\varepsilon$  etrabydygyny nazara alsak, onda  $a$  sanyň  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predeli bolmaklygynyň geometrik manysy onuň islendik  $\varepsilon$  etrabynda yzygiderligiň tükeniksiz köp agzalarynyň, ýagny etrabyň daşynda diňe tükenikli sany agzalarynyň ýerleşýändigini aňladýar.

Eger yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda ol predel ýeke-täkdir. Hakykatdan-da, eger  $\{x_n\}$  yzygiderligiň  $a$  we  $b$  deň hem-de  $a < b$  bolan iki predeli bar diýsek, onda  $\varepsilon = (b - a)/3$  üçin  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  we  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  aralyklaryň her biri yzygiderligiň tükeniksiz köp agzalaryny özünde saklaýan bolmaly, ýöne ol beýle bolup bilmez, çünki görkezilen aralyklaryň umumy nokady ýokdur.

**2. Yzygiderligiň predeliň esasy häsiýetleri.** Eger şeýle  $B$  san tapylyp,  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n \leq B$  ( $x_n \geq B$ ) bolsa, onda  $\{x_n\}$  yzygiderlige ýokardan (aşakdan) çäkli yzygiderlik,  $B$  sana bolsa yzygiderligiň ýokarky

## II. 2. FUNKSIÝANYŇ PREDELI

### § 2.1. Yzygiderligiň predeli

**1.Yzygiderligiň predeliň kesgitlenişi.** Funksiýanyň predelini ilki onuň hususy haly bolan yzygiderligiň predeli düşüňjesini girizmekden başlarys.

Eger her bir  $n$  natural sana  $x_n = f(n)$  hakyky san degişli edilse, onda

$$x_n = f(n) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

sanlaryň toplumyna hakyky sanlaryň yzygiderligi ýa-da gysgaça yzygiderlik diýilýär we ol  $\{x_n\}$  ýa-da  $x_n$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  bilen belgilenýär.

Yzygiderligi düzýän sanlara onuň agzalary diýilýär. Yzygiderlik, köplenç, umumy agzasy diýip atlandyrylýan  $x_n$  arkaly berilýär.

Mysal üçin,

$$1) \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots ; \quad 2) \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \right\} = -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \dots ;$$

$$3) \{\cos \pi n\} = -1, +1, -1, +1, \dots ; \quad 4) \{1 + (-1)^n\} = 0, 2, 0, 2, \dots .$$

Yzygiderligiň agzalary tükeniksiz köp bolup, onuň içinde gabat gelýänleri hem bardyr (3-nji, 4-nji yzygiderliklere seret).

**1-nji kesgitleme.** Eger  $\forall \varepsilon > 0$  san üçin şeýle  $n_o = n_o(\varepsilon)$  belgi (nomer) tapylyp,  $\forall n > n_o$  üçin

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (2)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda  $a$  sana  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predeli (ýa-da limiti) diýilýär.

Şunlukda,  $a$  sanyň  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predeli bolýandygy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

ýazgy arkaly aňladylýar we ol “limit  $x_n$  deňdir  $a$ ” diýlip okalýar (bu ýerde “lim” belgisi latynça “limites” sözüniň başky üç harpy bolup, ol predel diýmekdir). Tükenikli predeli bar yzygiderlige ýygnaýan, predeli ýok yzygiderlige bolsa dargaýan yzygiderlik diýilýär.

Eger  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n = a$  bolsa, ýagny ol hemişelik bolsa, onda bu halda  $|x_n - a| = 0$  we  $\forall \varepsilon > 0$  we  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $|x_n - a| < \varepsilon$  ýerine

Goý,  $\arg a = 0$ ,  $|a| = \rho$ ,  $\arg z = \varphi$ ,  $|z| = r$  bolsun. Biz  $\sqrt[n]{a} = z$  tapalyň. Kesgitlemä görä

$$z^n = a$$

Muawryň formulasyna görä,

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Diýmek,

$$r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \rho (\cos \theta + i \sin \theta),$$

bu ýerden, ýokarda eden belgimizni ýatlap,

$$\rho = r^n, n\varphi = \theta + 2\kappa\pi, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

deňligi alarys. Ondan bolsa

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \varphi = \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

deňlikleri alarys.

Diýmek,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} \right).$$

Indi

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} \right)$$

kompleks sanlaryň diňe  $n$  sanynyň dürlüdigini görkezeliň  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  sanlar dürlüdürler, çünki

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \varphi_1 = \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}, \dots, \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

burçlar dürli we olaryň tapawudy  $2\pi$  -den kiçi.  $z_n = z_0$  bolýandygyna göz ýetireliň.

$$\varphi_n = n \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Onda,

$$z_n = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \left( \frac{\theta}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{\rho} \cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} = z_0$$

Şunuň ýaly-da  $z_{n+1} = z_1$ ,  $z_{-1} = z_{n-1}$  we ş.m

Şeýlelik bilen  $z^n = a$  deňlemäniň diňe  $n$  sany dürli

$$z_n = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} \right), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1,$$

kökleri bardyr.

### Gönükmeler

1. Amallary ýerine ýetirmeli.

$$1) (2+3i)(3-2i) \quad 2) (a+bi)(a-bi) \quad 3) (3-2i)^2$$

$$4) (1+i)^3 \quad 5) \frac{1+i}{1-i} \quad 6) \frac{2i}{1+i}$$

2. Deňlemelri çözmeli

$$1) x^2 + 25 = 0, \quad 2) x^2 - 2x + 5 = 0, \quad 3) x^2 + 4x + 13 = 0,$$

3. Aşakdaky kompleks sanlary wektor görnüşinde şekillendirmeli, olaryň modulyny, argumentini tapmaly hem-de trigonometrik görnüşde ýazmaly.

$$1) z = 3, \quad 2) z = -2, \quad 3) z = 3i, \quad 4) z = -2i$$

$$5) z = 2 - 2i, \quad 6) z = 1 + i\sqrt{3}, \quad 7) z = -\sqrt{3} - i$$

$$8) z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad 9) z = \sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$$

4. Aşakdaky deňlikleri subut etmeli.

$$1) \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \quad 2) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$3) \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad 4) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$5) z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

5. Muawryň formulasy boýunça hasaplamaly.

$$1) (1+i)^{10}, \quad 2) (1-i\sqrt{3})^6, \quad 3) (-1+i)^5$$

$$4) \left( 1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4, \quad 5) (\sqrt{3} + i)^3$$

$$6) (1-i)^6, \quad 7) (2+i\sqrt{12})^5, \quad 8) \left( 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6$$

$$4) y = \frac{5 - \sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}, \quad 5) y = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[5]{x-3}, \quad 6) y = 5^x.$$

8. Funksiýalaryň nokatlar boýunça grafiklerini gurmaly:

$$1) y = 2x, \quad 2) y = 2x + 2, \quad 3) y = 2x - 2, \quad 4) y = x^2, \quad 5) y = x^2 + 1.$$

$$6) y = x^2 - 1, \quad 7) y = x^3/3, \quad 8) y = x^3/3 + 1, \quad 9) y = x^3/3 - 1, \quad 10) y = |x|.$$

9. Berlen  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  boýunça funksiýanyň  $f(x-2)$ ,  $f(x/2)$  bahalaryny tapmaly.

10. Berlen  $f(x) = \sqrt{x+1}$  we  $g(x) = x^2 - 2$  funksiýalar boýunça çylşyrymly  $f[g(x)]$  we  $g[f(x)]$  funksiýalary kesgitlemeli.

11. Funksiýalaryň ters funksiýalaryny kesgitlemeli:

$$1) y = ax + b, \quad 2) y = (x-1)^3, \quad 3) y = \ln 2x, \quad 4) y = 2^{x/2}.$$

12. Funksiýalaryň haýsysy jübüt, täk, jübüt hem däl, täk hem däl?

$$1) y = 3x^4 + 5x^2, \quad 2) y = 3x^2 + 2x, \quad 3) y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad 4) y = x|x|.$$

### Jogaplar

1. 1)  $A = \{0, 1, 2\}$ ; 2)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ; 3)  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ;  
 4)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 2.  $A \cup B = \{-5, 3, 4\}$ ;  $A \cap B = \{4\}$ ;  $A \setminus B = \{-5\}$ ;  
 $B \setminus A = \{3\}$ . 3.  $A \cup B = (-1, 4)$ ;  $A \cap B = [1, 2]$ ;  $A \setminus B = (-1, 1)$ ;  
 $B \setminus A = (2, 4)$ . 4. 1)  $x_1 = -4, x_2 = 4$ ; 2)  $x_1 = -1, x_2 = 5$ ; 3)  $x_1 = -8,$   
 $x_2 = 2$ ; 4)  $x_1 = 1, x_2 = 2; x_3 = 3, x_4 = 4$ ; 5)  $x_1 = 1, x_2 = 2; x_3 = 3,$   
 $x_4 = 6$ . 6)  $x \leq 3, x \geq 4$ . 5. 1)  $-1/3 \leq x \leq 5/3$ ; 2)  $-4 \leq x \leq -1$ ;  
 3)  $x \leq -1/4, x \geq 1/2$ ; 4)  $x \geq 0$ . 6. 1)  $f(-1) = -1, f(0) = -3/2,$   
 $f(1) = -1/3$ ; 2)  $f(0) = 0, f(\pi/6) = 1, f(\pi/3) = 0$ .  
 7. 1)  $[-2, 2]$ ; 2)  $[-3, 7]$ ; 3)  $(-5, 5)$ ; 4)  $[2, 5]$ ; 5)  $(-\infty, +\infty)$ ;  
 6)  $(-\infty, +\infty)$ . 9.  $f(x-2) = 3x^2 - 14x + 17, f(x/2) = 3x^2/4$ .  
 10.  $f[g(x)] = \sqrt{x^2 - 1}, g[f(x)] = x - 1$ . 11. 1)  $x = (y-b)/a$ ; 2)  $x = \sqrt[3]{y} + 1$ ;  
 3)  $x = e^y/2$ ; 4)  $x = 2 \log_2 y$ . 12. 1) jübüt. 2) jübüt hem däl, täk hem däl.  
 3) täk. 4) täk.

bolar, ýagny  $x_1 = x_2$  ýa-da  $x_1 > x_2$  bolup bilmez, çünki beýle bolanda  $f$  funksiýanyň artýanlygy esasynda  $f(x_1) = f(x_2)$  ýa-da  $f(x_1) > f(x_2)$  bolardy. Olar bolsa  $f(x_1) < f(x_2)$  şerte garşy gelýär. Şeýlelikde,  $y_1 < y_2$  şerti kanagatlandyryan islendik  $y_1, y_2$  üçin  $x_1 = g(y_1) < g(y_2) = x_2$  deňsizlik alynýar, ol bolsa  $g(y)$  funksiýanyň artýandygyny aňladýar. Teoremanyň ikinji bölegi hem şonuň ýaly subut edilýär. ▸

**Bellik.**  $f$  funksiýanyň ters funksiýasy, köplenç,  $f^{-1}$  bilen belgilenýär. Özara ters funksiýalaryň grafikleri  $y = x$  göni çyzyga görä simmetrikdir.

### G ö n ü k m e l e r

1. Köplügiň ähli elementlerini kesgitlemeli:

1)  $A = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ . 2)  $A = \{x \in \mathbf{N} : x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$ .

3)  $A = \{x \in \mathbf{Z} : 1/4 \leq 2^x < 5\}$ . 4)  $A = \{x \in \mathbf{N} : -4 \leq x < 6\}$ .

2.  $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x - 20 = 0\}$  we  $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x + 12 = 0\}$  üçin  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  köplükleriň elementlerini kesgitlemeli.

3.  $A = (-1, 2]$  we  $B = [1, 4)$  üçin  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  köplükleri kesgitlemeli.

4. Deňlemeleri çözmeli:

1)  $|x| = 4$ . 2)  $|x - 2| = 3$ . 3)  $|x + 3| = 5$ . 4)  $|x^2 - 5x + 5| = 1$ .

5)  $|x^2 - 6x + 6| = |x|$ . 6)  $|x^2 - 7x + 12| = x^2 - 7x + 12$ .

5. Deňsizlikleri çözmeli:

1)  $|3x - 2| \leq 3$ . 2)  $|2x + 5| \leq 3$ . 3)  $\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 3$ . 4)  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 1$ .

6. Funksiýanyň görkezilen nokatlardaky bahalaryny hasaplamaly:

1)  $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 2}$ ,  $-1; 0; 1$ . 2)  $f(x) = \sin 3x$ ,  $0; \pi/6; \pi/3$ .

7. Funksiýanyň kesgitleniş köplügi kesgitlemeli:

1)  $y = 3\sqrt{4 - x^2}$ . 2)  $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$ . 3)  $y = \frac{3}{\sqrt{25 - x^2}}$ .

6.  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$  deňlikden peýdalanyň  $\sin 3\alpha$  we  $\cos 3\alpha$  funksiýalary  $\alpha$  burçuň funksiýalarynyň üsti bilen aňlatmaly.

7.  $z = \sqrt[6]{1}$  köküň hemme bahalaryny tapmaly.

8. Tapmaly

1)  $\sqrt[3]{i}$ , 2)  $\sqrt[6]{-1}$ , 3)  $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ , 4)  $\sqrt{i}$ , 5)  $\sqrt[3]{-1 + i}$ , 6)  $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$

9. Deňlemelri çözmeli

1)  $x^3 + 8 = 0$ , 2)  $x^4 + 4 = 0$

10.  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin x$  jemi tapmaly.

Görkezme.  $\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$  formuladan peýdalanmaly.

### Jogaplar:

1. 1)  $12 + 5i$ , 2)  $a^2 + b^2$ , 3)  $12 - 5i$ , 4)  $-2 + 2i$ , 5)  $i$ , 6)  $1 + i$

2. 1)  $\pm 5i$ , 2)  $1 \pm 2i$ , 3)  $-2 \pm 3i$

3. 8)  $2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , 9)  $2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$

5. 1)  $32i$ , 2)  $64$ , 3)  $4(1 - i)$ , 4)  $2(3 + 2\sqrt{2})i$

5)  $8i$ , 6)  $8i$ , 7)  $512(1 - i\sqrt{3})$ , 8)  $-27$

6.  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha$  7.  $\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}; k = \overline{0, 5}$   
 $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$

8. 1)  $-i$ ,  $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$ , 2)  $+i$ ;  $\frac{+\sqrt{3} + i}{2}$ , 3)  $-i$ , 4)  $\pm \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ ,

5)  $\sqrt[6]{2} (\cos \phi + i \sin \phi); \phi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$

6)  $\pm 2(\sqrt{3} + i)$ ,  $\pm 2(-1 + i\sqrt{3})$

9. 1)  $-2$ ,  $1 \pm i\sqrt{3}$ ; 2)  $\pm 1$ ; 10.  $\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$ .

## II bap. MATEMATIKI ANALIZ

### II.1. KÖPLÜK WE FUNKSIÝA DÜŞÜNJESI

#### § 1.1. Köplük düşüňjesi

Matematikada ýygy-ýygýdan köplükler bilen iş salşylyar. Köplük diýip käbir nyşan boýunça birleşdirilen ulgama, topluma, ýygýnda düşüňäris. Mysal hökmünde okalgadaky matematiki analiz kitaplarynyň köplüğine, üçburçlugyň depeleriniň köplüğine, jübüt sanlaryň köplüğine garamak bolar. Köplügi düzüjilere onuň agzalary ýa-da elementleri diýilýär. Ýokardaky mysallarda köplügiň agzalary bolup deňşililikde matematiki analiz kitaplary, üçburçlugyň depeleri we jübüt sanlar hyzmat edýärler. Ol köplükleriň ilki ikisi tükenikli, üçünjisi bolsa tükeniksiz köplükdir. Köplükler baş harplar bilen, onuň agzalary bolsa setir harplary bilen belgilenýär. Eger  $a$  element  $A$  köplügiň agzasy bolsa, onda ol  $a \in A$  (ýa-da  $A \ni a$ ) ýazgyda belgilenýär we  $a$  deňşli  $A$  köplüğe (ýa-da  $A$  köplüğe deňşli  $a$ ) diýlip okalýar,  $a$  elementiň  $A$  köplüğe deňşli daldigi bolsa  $a \notin A$  ýazgyda belgilenýär we  $a$  deňşli däl  $A$  köplüğe diýlip okalýar. Eger  $A$  köplük  $a, b, c$  we şolar ýaly berlen beýleki agzalardan düzülen bolsa, onda ol  $A = \{a, b, c, \dots\}$  ýazgyda aňladylyar. Mysal üçin,  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  we  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  deňşililikde natural we bitin sanlaryň köplüginde aňladýar. Şunlukda,  $-3 \in Z$ , ýöne  $-3 \notin N$ .

Eger  $B$  köplügiň islendik agzasy  $A$  köplügiň hem agzasy bolsa, onda  $B$  köplüğe  $A$  köplügiň bölek köplügi ýa-da  $A$  köplügiň bölegi diýilýär we  $B \subset A$  (ýa-da  $A \supset B$ ) görnüşde aňladylyar (bu ýagdaýda  $A$  köplük  $B$  köplügi özüde saklaýar hem diýilýär). Mysal üçin, jübüt sanlaryň köplügi bitin sanlaryň  $Z$  köplüginde bölek köplügidir. Özüde hiç bir agzany saklamaýan köplüğe boş köplük diýilýär we  $\emptyset$  bilen belgilenýär.  $M$  köplügiň  $P$  häsiýetdäki  $M_1$  bölegi  $M_1 = \{x \in M : P(x)\}$  görnüşde aňladylyar. Mysal üçin,  $N = \{x \in Z : (x > 0)\}$  bitin sanlaryň köplüginde položitel bölegidir we  $\emptyset = \{x \in N : x^2 + 1 = 0\}$ .

Rasional sanlar diýip  $p/q$  ( $p, q$  – bitin,  $q \neq 0$ ) görnüşdäki sanlara,

koordinatalar başlangyjyna göre simmetrikdir.

Eger  $\forall x_1, x_2 \in X$  üçin  $x_1 < x_2$  bolanda  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) ýa-da  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ) bolsa, onda  $f$  funksiýa  $X$  köplükde, deňşililikde, artýan (kemelýän) ýa-da kemelmeýän (artmaýan) funksiýa diýilýär.

Bu häsiýetler funksiýanyň grafigini gurmaklygy ýeňilleşdirýär.

#### § 1.6. Ters funksiýa

Goý,  $f : X \rightarrow Y$  we her bir  $y \in Y_1 = f(X)$  ululyga  $y = f(x)$  bolýan  $x \in X$  ululyk deňşli bolsun. Onda  $Y_1$  köplükde, umuman aýdylanda, köpbahaly  $x = g(y)$  funksiýa kesgitlenendir. Oňa  $y = f(x)$  funksiýanyň ters funksiýasy diýilýär.

Mysal üçin, eger  $y = x/3$  bolsa, onda  $x = 3y$  onuň birbahaly ters funksiýasydyr, eger  $y = x^2$  bolsa, onda  $x = \pm\sqrt{y}$  onuň köpbahaly ters funksiýasydyr, ýöne ol funksiýanyň  $[0, 4]$  kesimde kesgitlenen we  $[0, 2]$  kesimde birbahaly bolan  $x = \sqrt{y}$  ters funksiýasy bardyr.

**1-nji teorema.**  $X$  köplükde artýan (kemelýän)  $f$  funksiýanyň  $Y = f(X)$  köplükde kesgitlenen birbahaly artýan (kemelýän) ters  $g(y)$  funksiýasy bardyr.

◁ Teoremany artýan funksiýa üçin subut edeliň. Ilki bilen ters funksiýanyň birbahalydygyny görkezeliň. Onuň üçin tersine güman edeliň. Goý,  $Y \ni y$  ululyga  $y = f(x)$  şerti kanagatlandyryýan iki sany  $x_1 \neq x_2$  ululyklar deňşli bolsun, ýagny  $y = f(x_1)$  we  $y = f(x_2)$ , onda  $f(x_1) = f(x_2)$  bolar. Ýöne ol mümkin däl, sebäbi  $x_1 \neq x_2$  bolanda  $x_1 > x_2$  ýa-da  $x_1 < x_2$  bolýanlygy üçin,  $f(x)$  funksiýanyň artýanlygyndan  $f(x_1) > f(x_2)$  ýa-da  $f(x_1) < f(x_2)$  deňsizlik alynýar, ýagny iki halda-da  $f(x_1) = f(x_2)$  deňlik ýerine ýetmeýär. Diýmek,  $Y \ni y$  ululyga diňe bir  $x = g(y)$  ululyk deňşli bolýar, ýagny ters funksiýa birbahalydyr. Indi onuň artýandygyny görkezeliň. Goý, erkin  $y_1, y_2 \in Y$  üçin  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$  bolsun. Eger  $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$  bolsa, onda  $x_1 < x_2$



funksiýalar diýilýär. Olara

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x + \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[3]{(x-4)/x + \sqrt{x}}$$

funksiýalar mysal bolup bilerler.

**4) Transsendent funksiýa.** Rasional we irrasional bolmadyk islendik funksiýalara transsendent funksiýalar diýilýär. Olara ähli trigonometrik we ters trigonometrik funksiýalar, görkezijili we logarifm funksiýalar hem-de

$$y = \cos \sqrt{x}, \quad y = x + \operatorname{tg} x$$

görnüşdäki we şolar ýaly funksiýalar deňşidirler.

**5) Giperbolik funksiýalar.** Aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenen

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

funksiýalara deňşililikde giperbolik sinus we giperbolik kosinus diýilýär. Olaryň üsti bilen kesgitlenen

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

funksiýalara deňşililikde giperbolik tangens we giperbolik kotangens diýilýär. Bu funksiýalar üçin

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

formulalar dogrudyr.

**6. Funksiýanyň grafigi.** Esasy elementar funksiýalaryň grafikleri bize mekdepdäni belli bolsa, elementar funksiýalaryň grafikleriniň käbirleri bilen biz I bapda tanşypdyk. Funksiýalaryň grafikleri gurlanda peýdalanylýan onuň käbir häsiýetlerini ýatlalyň.

Eger funksiýanyň kesgitleniş oblastyna deňşli islendik  $x$  we  $-x$  üçin  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ) deňlik ýerine ýetse, onda  $f$  funksiýa jübüt (täk) funksiýa diýilýär.

Eger şeýle  $T > 0$  san bar bolup,  $f$  funksiýanyň kesgitleniş oblastyna deňşli islendik  $x$ ,  $x+T$  üçin  $f(x+T) = f(x)$  deňlik ýerine ýetse, onda oňa periodik funksiýa diýilýär. Şeýle  $T$  sanlaryň iň kiçisine bolsa onuň periody diýilýär. Şunlukda, funksiýanyň özüne  $T$ -periodik funksiýa diýilýär. Jübüt funksiýanyň grafigi  $oy$  okuna, täk funksiýanyňky bolsa

irrasional sanlar diýip rasional bolmadyk sanlara aýdylýar. Her bir rasional san ýa bitin, ýa tükenikli ýa-da tükeniksiz periodik droblar görnüşinde aňladylýan sandyr. Irrasional san bolsa tükeniksiz periodik däl droblar görnüşinde aňladylýan sandyr. Ähli rasional we irrasional sanlaryň köplüğine hakyky sanlaryň  $\mathbf{R}$  köplügi diýilýär. Hakyky sanlar ululyklary boýunça tertipleşdirilendirler, ýagny islendik iki  $a$  we  $b$  hakyky sanlar üçin  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$  hallaryň birden biri dogrudyr. Analitik geometriýadan mälim bolşy ýaly, hakyky sanlaryň köplügi bilen san okunyň nokatlarynyň arasynda birbahaly deňşililik gurnalandyr, ýagny san okunyň her bir nokadyna diňe bir hakyky san deňşlidir we tersine. Şoňa görä “ $x$  nokat” we “ $x$  san” düşünjelerini deň manyda ulanmak bolar.

$A$  we  $B$  köplükleriň iň bolmanda birine deňşli bolan ähli agzalaryň köplüğine olaryň birleşmesi diýilýär we  $A \cup B$  bilen belgilenýär.

$A$  we  $B$  köplükleriň ikisine-de deňşli bolan ähli agzalaryň köplüğine olaryň kesişmesi diýilýär we  $A \cap B$  bilen belgilenýär.

$A$  köplügiň  $B$  köplüğe deňşli bolmadyk ähli agzalarynyň köplüğine olaryň tapawudy diýilýär we  $A \setminus B$  bilen belgilenýär.

## § 1. 2. Aralyk, kesim we sanyň absolýut ululygy

Hakyky  $a$  we  $b$  ( $a < b$ ) sanlar üçin  $a < x < b$  deňsizlikleri kanagatlandyryýan  $x$  nokatlaryň köplüğine aralyk diýilýär we  $(a, b)$  bilen belgilenýär. Şeýlelikde,  $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ . Edil şonuň ýaly, çepi ýapyk  $[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$  we sagy ýapyk  $(a, b] = \{x: a < x \leq b\}$  aralyklar kesgitlenýär.  $a \leq x \leq b$  deňsizlikleri kanagatlandyryýan  $x$  nokatlaryň köplüğine bolsa kesim diýilýär we  $[a, b]$  bilen belgilenýär, ýagny  $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ . Şeýle hem aralyklaryň beýleki görnüşleri üçin aşakdaky belgilemeler ulanylýar:

$$(a, +\infty) = \{x: x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x: x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x: x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x: x \leq b\}.$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x: -\infty < x < +\infty\}$$

$c$  nokady özünde saklaýan islendik  $(a, b)$  aralyga  $c$  nokadyň etraby,  $(c - \delta, c + \delta)$  aralyga bolsa  $c$  nokadyň  $\delta$  etraby diýilýär. Mysal üçin,  $c = 1$  nokadyň  $\delta = 0,5$  etraby  $(1 - 0,5; 1 + 0,5) = (0,5; 1,5)$  aralykdyr. Eger

$c$  nokat aralykda özüniň käbir etraby bilen saklanýan bolsa, onda ol nokada aralygyň içki nokady diýilýär.  $(a, b)$  aralygyň ähli nokatlary onuň içki nokatlarydyr.  $a$  we  $b$  nokatlara aralygyň gyra ýa-da uç nokatlary diýilýär, olar aralyga degişli däl.  $[a, b]$  kesim bolsa içki we uç nokatlardan durýandyr.

$a$  sanyň absolýut ululygy (moduly)  $|a|$  bilen belgilenýär we

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eger } a \geq 0 \text{ bolsa,} \\ -a, & \text{eger } a < 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Bu kesgitlemeden aşadaky häsiýetler gelip çykýär.

1. Islendik  $a$  san üçin  $|a| \geq 0$ ,  $|a| = |-a|$ ,  $a \leq |a|$ ,  $-a \leq |a|$ .
2.  $(|a| < \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon < a < \varepsilon)$ .  $(|a - b| < \varepsilon) \Leftrightarrow (b - \varepsilon < a < b + \varepsilon)$ .
3.  $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ . 4.  $|a \pm b| \geq ||a| - |b||$ .
5.  $|abc| = |a||b||c|$ ,  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

### § 1. 3. Köplügiň çäkleri

Çoý,  $X$  käbir san köplügi bolsun.

**1-nji kesgitleme.** Eger şeýle  $B$  san tapylyp,  $\forall x \in X$  üçin  $x \leq B$  ( $x \geq B$ ) bolsa, onda  $X$  köplüge ýokardan (aşakdan) çäkli köplük,  $B$  sana bolsa ol köplügiň ýokarky (aşaky) çägi diýilýär.

(Ýazgylary gysgaltmak üçin bu ýerde iki kesgitleme birden getirilendir, olaryň birisi ýaýyň içinde alnan sözlere degişlidir. Iki sözlemiň bir sözlemde aňladylyş bu usulyndan soňra-da köp peýdalanjakdyrys)

Yokardan we aşakdan çäkli köplüge. çäkli köplük diýilýär.

Islendik tükenikli aralyk  $([a, b], [a, b], (a, b), (a, b))$  çäklidir,  $(a, +\infty)$  aralyk bolsa aşakdan çäklidir, ýöne ýokardan çäkli däl.

Eger  $B$  san  $X$  köplügiň ýokarky (aşaky) çägi bolsa, onda  $B$  sandan uly (kiçi) bolan islendik  $B'$  san hem ol köplügiň ýokarky (aşaky) çägi bolar, ýagny ýokardan (aşakdan) çäkli köplügiň tükeniksiz köp ýokarky (aşaky) çäkleri bardyr.

Yokardan (aşakdan) çäkli  $X$  köplügiň ýokarky (aşaky) çäkleriniň in kiçisine (in ulusyna) ol köplügiň takyk ýokarky (takyk aşaky) çägi diýilýär

takyk çäklerini tapmaly.

$$\triangleleft \forall x \in [0, +\infty) \quad \text{üçin} \quad 0 \leq \frac{x}{1+x} < 1, \text{ şoňa görä-de ol funksiýanyň}$$

bahalarynyň  $Y = [0, 1]$  köplügiň aşaky  $m = 0$ , ýokarky  $M = 1$  çäkleri bardyr we  $m = 0$  onuň takyk aşaky çägidir.  $M = 1$  sanyň ol funksiýanyň takyk ýokarky çägidigini görkezmek üçin, takyk ýokarky çägiň häsiýetinden peýdalanarys:  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $[0, +\infty) \ni x$  tapylyp,

$$\frac{x}{1+x} > 1 - \varepsilon \quad \text{ýa-da} \quad x > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \text{ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny } x\text{-in bu}$$

deňsizlikleri kanagatlandyryan bahalary üçin  $f(x) > 1 - \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýetýär. Ol bolsa  $M = 1$  sanyň funksiýanyň takyk ýokarky çägidigini görkezýär.  $\triangleright$

### § 1. 5. Elementar funksiýalar

$y = C$  hemişelik,  $y = x^a$  derejeli,  $y = a^x$  ( $0 < a \neq 1$ ) görkezijili,  $y = \log_a x$  ( $0 < a \neq 1$ ) logarifmik,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ , trigonometrik we  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ , ters trigonometrik funksiýalara esasy elementar funksiýalar diýilýär. Esasy elementar funksiýalar bilen tükenikli sany arifmetik amallaryň geçirilmeginden hem-de olaryň çylşyrymlaryndan alynýan islendik funksiýalara elementar funksiýalar diýilýär. Olar aşadaky toparlara bölünýär.

**1) Bitin rasional funksiýa.** Eger  $m \geq 0$  bitin san bolsa, onda

$$y = P_m(x), \quad P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

( $a_0 \neq 0$ ,  $a_1, \dots, a_m$  - hemişelik sanlar) görnüşdäki funksiýa bitin rasional funksiýa ýa-da  $m$  derejeli köpagza diýilýär.

**2) Drob rasional funksiýa (rasional drob).**  $m$  we  $n$  derejeli  $P_m(x)$  we  $Q_n(x)$  köpagzalar üçin,  $y = P_m(x)/Q_n(x)$  görnüşdäki funksiýa drob rasional funksiýa diýilýär.

Bitin we drob rasional funksiýalara rasional funksiýalar diýilýär.

**3) Irrasional funksiýa.** Görkezijileri bitin hem-de drob bolan derejeli funksiýalaryň üstünde tükenikli sany arifmetik amallaryň geçirilmeginden hem-de olaryň çylşyrymlaryndan alynýan funksiýalara irrasional

köplüğüne onuñ grafigi diýlip aýdylýandygyny ýatlalyň. Funksiýanyň grafigi bir ýa-da birnäçe böleklerden durýan çyzyklardyr. Funksiýanyň grafik usul boýunça berlişiniň dürli mysallary bize mekdep matematikasyndan mälimdir. Bu usul fiziki ölçeglerde köp ulanylýar we grafikleri özi ýazýan abzallar çyzýar. Mysal üçin, atmosferanyň basyşynyň beýikliklere baglylykda üýtgeýşini barograf atly özi ýazýan abzal lentada grafik görnüşinde çyzýar. Funksiýanyň şeýle usul boýunça berlişiniň ýönekeý mysallarynyň biri-de ýüregiň işleýşini häsiýetlendirýän kardiogrammadyr.

**4. Kompýuter usuly.** Funksiýanyň berlişiniň bu usuly bir ululygyň beýleki ululyga baglylygynyň programmalaryň we algoritmleriň kömegi bilen kompýuterleri ulanyp görkezilişini aňladýar. Ol usul kompýuterleri peýdalanyp, dürli amaly meseleleri çözmekde ulanylýandyr.

$x$  we  $y$  ululyklaryň arasyndaky baglylygyň formulanyň üsti bilen  $y = f(x)$  görnüşde berlişine anyk funksiýa,  $F(x, y) = 0$  görnüşde berlişine bolsa anyk däl funksiýa diýilýär. Ýönekeýlik üçin üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglylygyň parametr atlandyrylýan üçünji  $t$  ululygyň üsti bilen

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

görnüşde berilýän hallaryna hem düş gelinýär. Funksiýanyň şeýle berlişine parametrik görnüşde berlen funksiýa diýilýär.

Eger  $X$  köplükde kesgitlenen  $f$  funksiýa üçin şeýle  $M(m)$  san tapylyp,  $\forall x \in X$  üçin  $f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq m$ ) bolsa, onda  $f$  funksiýa ýokardan (aşakdan) çäkli funksiýa diýilýär.  $X$  köplükde hem ýokardan, hem aşakdan çäkli funksiýa şol köplükde çäkli funksiýa diýilýär. Şeýlelikde,  $X$  köplükde  $f$  funksiýanyň çäkli bolmaklygy şeýle  $K > 0$  can tapylyp,  $\forall x \in X$  üçin  $|f(x)| \leq K$  deňsizligiň ýerine ýetýändigini aňladýar.

$X$  köplükde kesgitlenen  $f$  funksiýanyň bahalar köplüginin käbir köplük bolýandygy esasynda, ýokardan (aşakdan) çäkli funksiýanyň  $X$  köplükdäki takyk ýokarky  $\sup_x f(x)$  (takyk aşaky  $\inf_x f(x)$ ) çäginin kesgitlenişi köplügin takyk çäkleriniň kesgitlenişi ýalydyr.

**2-nji mysal.**  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  funksiýanyň  $X = [0, +\infty)$  aralykdaky

we

$$M = \sup X \quad (m = \inf X)$$

bilen belgilenýär (sup we inf latynça supremum–iň uly we infimum–iň kiçi sözlerden alnandyr).

Takyk ýokarky  $M$  (takyk aşaky  $m$ ) çägiň şeýle häsiýeti bardyr:  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $X \ni x_\varepsilon$  tapylyp,  $x_\varepsilon > M - \varepsilon$  ( $x_\varepsilon < m + \varepsilon$ ) bolar.

**1-nji mysal.**  $X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$  köplügiň çäklidigini subut etmeli we onuň takyk çäklerini tapmaly.

$\triangleleft$  Islendik natural  $n$  san üçin  $0 < 1/n \leq 1$  deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny köplük çäklidir we 1 onuň ýokarky, 0 bolsa aşaky çägidir. Ýokarky  $M = 1$  çägiň köplügiň takyk ýokarky çägidigini görkezmek üçin takyk ýokarky çägiň häsiýeti boýunça  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $1/n > 1 - \varepsilon$  deňsizligi kanagatlandyryýan  $n$  natural sanyň bardygyny görkezmeli. Şeýle san  $n = 1$  bolup biler, çünki  $1 > 1 - \varepsilon$  deňsizlik  $\forall \varepsilon > 0$  üçin dogrudyr. Indi bolsa  $m = 0$  sanyň köplügiň takyk aşaky çägi bolýandygyny görkezelin. Onuň üçin takyk aşaky çägiň häsiýeti boýunça  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $1/n < 0 + \varepsilon$  ýa-da  $1/n < \varepsilon$  deňsizligi kanagatlandyryýan  $n$  natural sanyň bardygyny görkezmeli. Ony çözüp,  $n > 1/\varepsilon$  deňsizligi alarys. Şonuň üçin gözlenýän san hökmünde bu deňsizligi kanagatlandyryýan islendik natural sany almak bolar. Şeýlelikde,  $m = 0$  san köplügiň takyk aşaky çägidir.  $\triangleright$

Eger hakyy sanlaryň  $X$  köplügi ýokardan (aşakdan) çäkli bolmasa, onda kesgitleme boýunça  $\sup X = +\infty$  ( $\inf X = -\infty$ ) alynýar.

Ýokardan (aşakdan) çäkli islendik köplügiň takyk ýokarky (takyk aşaky) çägi bardyr.

## § 1.4. Funksiýa düşüňjesi

Tebigatyň hadysalary öwrenilende we derňelende, şeýle hem dürli amaly we tehnik meselelerde garalýan ululyklaryň içinde şol bir bahalary alýanlary hem, dürli bahalary alýanlary hem düşýar. Olara degişlilikde hemişelik we üýtgeýän ululyklar diýilýär. Seýrek düş gelýän hemişelik ululyklara töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine bolan gatnaşygyny aňladýan we  $\pi$  deň, kwadratyň diagonalynyň onuň tarapyna bolan gatnaşygyny aňladýan we  $\sqrt{2}$  deň, üçburçlugyň içki burçlarynyň jemini

aňladýan we  $180^\circ$  deň sanlar mysal bolup biler. Howanyň temperaturasy, atmosferanyň basyşy, ýurdumyzda ilatyň aýlyk köpelişi wagta baglylykda üýtgeýändir. Amalyýetde her bir üýtgeýän ululygyň üýtgemegi bir ýa-da birnäçe ululyklara baglydyr. Mysal üçin, töweregiň  $C$  uzynlygy we tegelegiň  $S$  meýdany onuň  $R$  radiusyna, hemişelik temperaturada gabyň içindäki gazyň basyşy ol gazyň göwrümüne, hemişelik tizlik bilen hereket edýän jisimiň geçen ýoly wagta baglydyr. Bu mysallaryň hemmesinde bir ululygyň her bir bahasyna beýleki ululygyň kesgitli bahasy degişlidir.

**2-nji kesgitleme.**  $X$  köplügiň her bir  $x$  agzasyna  $Y$  köplügiň kesgitli  $y$  agzasyny degişli edýän  $f$  düzgüne (amala)  $X$  köplükde kesgitlenen funksiýa ýa-da  $X$  köplügiň  $Y$  köplüğe öwürmesi diýilýär.

Funksiýa  $f: X \rightarrow Y$ ,  $x \rightarrow f(x)$  ýa-da  $y = f(x)$  görnüşlerde, käbir ýagdaýda bolsa diňe  $f$  bilen hem belgilenýär. Şunlukda,  $X \ni x$  ululyga baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk ýa-da  $f$  funksiýanyň üýtgeýäni (argumenti),  $Y \ni y = f(x)$  bolsa  $f$  funksiýanyň  $x$  ululyga degişli bahasy

diýilýär.. Mysal üçin, eger  $y = \sqrt{x^2 + 8}$  bolsa, onda  $f$  her bir hakyky  $x$  sany kwadrata göterip we oňa 8 goşup, alnan jemden kwadrat kök almaklygy aňladýar. Funksiýanyň kesgitlenen  $X$  köplüğine onyň kesgitleniş köplügi, bahalarynyň köplüğine bolsa bahalar köplügi diýilýär we ol  $f(X) = \{f(x): x \in X\}$  bilen belgilenýär.

Eger  $f$  funksiýa  $X$  köplügiň her bir agzasyna  $Y$  köplügiň diňe bir agzasyny degişli edýän bolsa, onda oňa birbahaly funksiýa, eger-de birden köp agzasyny degişli edýän bolsa – köpbahaly funksiýa diýilýär. Mysal üçin,  $y^2 = 5x$  deňleme  $x$  görä ikibahaly  $y = \pm\sqrt{5x}$  funksiýany kesgitleýär. Biz, köplenç, birbahaly funksiýalara garajakdyrys.

$y$  ululygyň diňe bir  $x$  ululygyň funksiýasy hökmünde kesgitleniş ýaly, iki ululygyň  $z = f(x, y)$ , üç ululygyň  $u = f(x, y, z)$  we köp ululygyň  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  funksiýalaryny hem kesgitlemek bolar.

Eger  $f$  funksiýa  $X$  köplügiň  $Y$  köplüğe öwürmesi,  $F$  funksiýa bolsa  $Y$  köplügiň  $Z$  köplüğe öwürmesi bolsa, onda  $z = F[f(x)]$  funksiýa  $x$  görä çylşyrymly funksiýa ýa-da  $F$  we  $f$  funksiýalaryň çylşyrymy diýilýär. Oňa funksiýanyň funksiýasy hem diýilýär. Ony  $z$  we  $u$  ululyklar arkaly  $z = F(u)$ ,  $u = f(x)$  görnüşde ýazmak bolar. Şonuň ýaly ikiden köp funksiýalaryň çylşyrymly funksiýasy kesgitlenýär. Mysal üçin,

$x$  görä çylşyrymly  $z = \ln^2 \sqrt{x^2 + 3}$  funksiýany  $z = u^2$ ,  $u = \ln v$ ,  $v = \sqrt{t}$ ,

$t = x^2 + 3$  funksiýalar arkaly aňlatmak bolar.

Her bir  $x$  ululyga  $y$  ululygy degişli edýän  $f$  düzgüne baglylykda funksiýalar esasan aşakdaky usullarda berilýär:

**1. Analitik usul.** Funksiýa bu usulda  $x$  we  $y$  ululyklaryň arasyndaky baglylygy görkezýän, ýagny argumentiň bahasy bilen haýsy amallary ýerine ýetireniňde funksiýanyň degişli bahasynyň alynýandygyny görkezýän formula arkaly berilýär. Mysal üçin,

1)  $y = \sqrt{4 - x^2}$  formula kesgitleniş köplügi  $[-2, 2]$  kesim we bahalar köplügi  $[0, 2]$  kesim bolan funksiýany aňladýar.

$$2) y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 & \text{bolanda} \\ 0, & x = 0 & \text{bolanda} \\ -1, & x < 0 & \text{bolanda} \end{cases}$$

( $\operatorname{sgn}$  latynça *signum* – alamat sözünden alnan . Ol “ $y$  deňdir *signum*  $x$ ” diýlip okalýar). Bu funksiýa birnäçe formulanyň üsti bilen berlendir. Ol san okunda kesgitlenip, onuň bahalar köplügi  $-1, 0$  we  $1$  üç nokatdan durýan köplükdir.

**2. Tablisa usuly.** Bu usulda funksiýanyň kesgitleniş köplüğine degişli bolan  $x$  ululygyň her bir bahasynyň ýanynda  $y$  ululygyň degişli bahasy ýazylyp, tablisa alynýar. Aşakdaky tablisada hlor-wodorod garyndysyna ýagtylygyň täsiriniň netijesi görkezilendir. Şunlukda, onuň bir setirinde emele gelen duzly kislotanyň  $m$  mukdarynyň san bahalary, beýlekisinde bolsa ýagtylygyň garynda täsir edýän  $t$  wagtynyň degişli mukdary görkezilendir.

T sek	4	5	6	7	8	9	10
M mg	2,1	2,6	4,7	19,3	48,5	79,6	110

Funksiýanyň beýle berlişiniň kemçiligi, tablisada funksiýanyň bahalary argumentiň hemme bahalary üçin görkezilmän, diňe käbir bahalary üçin görkezilýändir. Funksiýanyň tablisa usulynda berlişine bize mekdepden tanyş nolan logarifmleriň we trigonometrik funksiýalaryň tablisalary mysal bolup biler.

**3. Grafik usuly.** Ilki bilen  $y = f(x)$  funksiýanyň kesgitleniş köplüğine degişli ähli  $x$  üçin koordinatalary  $(x, f(x))$  bolan tekizligiň nokatlarynyň

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$31) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}.$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}.$$

$$35) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}.$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}.$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \cdot \left\langle \frac{m}{n} \right\rangle$$

$$41) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$43) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x}.$$

$$45) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}.$$

$$38) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

$$40) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \left\langle \frac{2}{\pi} \right\rangle$$

$$42) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1+x^2} - 1\right) \operatorname{tg} \frac{x}{3}}{x}.$$

$$44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cos \pi x}{x}.$$

$$46) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Käbir predelleri hasaplamak üçin belli bolan trigonometrik formulalary peýdalanmak zerur bolýar:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y =$$

**2-nji mysal.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2n + 3}{6n^2 + 7n - 9}$  predeli tapmaly.

◁ Drobuň sanawjysyny we maýdalajysyny  $n^2$  bölüp we predeliň häsiýetlerinden peýdalanyp alarys:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2n + 3}{6n^2 + 7n - 9} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 2/n + 3/n^2}{6 + 7/n - 9/n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 2/n + 3/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (6 + 7/n - 9/n^2)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} (2/n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (3/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} (7/n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (9/n^2)} = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

çünki hemişelik  $c$  san üçin  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c/n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c/n^2) = 0$ . ▷

**3. Monoton yzygiderligiň predeli.** Eger  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_n \geq x_{n+1}$ ) ýa-da  $x_n < x_{n+1}$  ( $x_n > x_{n+1}$ ) deňsizlik ýerine ýetse, onda  $\{x_n\}$  yzygiderlige, deňsizlikde kemelmeyän (artmaýan) ýa-da artýan (kemelýän) yzygiderlik diýilýär. Olara gysgaça monoton yzygiderlikler diýilýär.

**3-nji teorema.** Ýokardan (aşakdan) çäkli kemelmeyän (artmaýan) islendik  $\{x_n\}$  yzygiderligiň predeli bardyr we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\} \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\} \right).$$

Islendik monoton yzygiderligiň ýa aşakdan, ýa-da ýokardan çäkli bolýandygy üçin, bu teorema gysgaça şeýle hem okalýar: monoton çäkli yzygiderligiň predeli bardyr.

◁ Eger yzygiderlik ýokardan çäkli we kemelmeyän bolsa, onda onuň takyk ýokarky  $M = \sup \{x_n\}$  çägi bardyr. Takyk ýokarky çägiň häsiýeti boýunça  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n \leq M$  we  $\forall \varepsilon > 0$  san üçin  $n_0$  belgi tapylyp,  $x_{n_0} > M - \varepsilon$ . Onda yzygiderligiň kemelmeyändigini sebäpli  $\forall n \geq n_0$  üçin  $M - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq M < M + \varepsilon$  deňsizlik, ýagny  $|x_n - M| < \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýeter. Ol bolsa  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M = \sup \{x_n\}$  deňligi aňladýar. Aşakdan çäkli artmaýan yzygiderlik üçin  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m = \inf \{x_n\}$  deňlik edil şonuň ýaly subut edilýär. ▷

Teoremanyň şertlerinde  $\{x_n\}$  yzygiderligiň islendik agzalary üçin  $x_n \leq M$  ( $x_n \geq m$ ) deňsizlik dogrudyr.

Bu teoremadan peýdalanyň,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

zygyderligiň predeliň bardygyny subut edeliň. Nýuton binomy diýip atlandyrylýan

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}b^n$$

formuladan peýdalanyň alarys:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly,  $n$  sanyň ulalmagy bilen birinjiden başga her bir goşulyjy we goşulyjylaryň sany ulalýandyr. Şoňa görä hem-de goşulyjylaryň ählisiniň položitelidigi sebäpli,  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n < x_{n+1}$  bolar, ýagny zygiderlik artýandyr. Onuň ýokardan çäklidigini görkezmek üçin ilki (7) deňsizligiň sag bölegindäki ähli ýaýlaryň içindäki aňlatmalary birlik bilen we soňra alnan droblaryň maýdalawjylaryndaky köpeldijileriň hemmesini 2 bilen çalşyryp,

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

deňsizligi alarys. Bu ýerden geometrik progressiýanyň jeminiň formulasy

esasynda,  $x_n < 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$ , ýagny  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n < 3$  deňsizlik

alynýar. Şeýlelikde, zygiderlik artýar we ýokardan çäkli, şonuň üçin hem 3-nji teorema esasynda (6) zygiderligiň predeli bardyr. Ony  $e$  bilen belgilemek kabul edilendir, ýagny

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (8)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 6x + 8)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})^3}{x^3}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{7x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + x}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^2}{(x-5)^2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + 7x - 1}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 5}{3x^4 - 5x^2 + 1}$$

2. Yzygiderligiň ilkinji  $1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots$  agzalaryny ulanyp, onuň umumy agzasynyň formulasyny ýazmaly.

3. Yzygiderligiň ilkinji  $n$  agzalarynyň jemi  $S_n = 3n^2$  formula bilen aňladylýar. Ol yzygiderligiň arifmetik progressiýadygyny subut etmeli we onuň ilkinji agzasyny we tapawudyny tapmaly.

4. Yzygiderlikleriň haýsysynyň ýokardan, aşakdan, ýokardan we aşakdan çäklidigini anyklamaly:

$$1) x_n = n^2 - 1. \quad 2) x_n = \frac{n+2}{n^2+2}. \quad 3) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad 4) x_n = \frac{n}{3^n}.$$

5. Yzygiderlikleriň haýsysynyň artýandygyny, kemelýändigini, monoton dälidigini kesgitlemeli:

$$1) x_n = \frac{2}{n+3}. \quad 2) x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}. \quad 3) x_n = \ln(1+n). \quad 4) x_n = 3^{-n}.$$

6. Kesgitmeden peýdalanylýan, deňlikleri subut etmeli:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 2. \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 1}{4^4} = 1. \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 0$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2 \quad \text{predeli ulanyp,} \quad \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{deňsizligiň}$$

$\varepsilon = 0,1; 0,01$  üçin  $n > n_0$  bolanda ýerine ýetýän  $n_0$  belgileri görkezmeli.

8. Predelleri tapmaly:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right). \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3^n}. \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n. \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+4}. \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n^2+1}.$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1}. \quad 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}. \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{2n^3+2}.$$

9. Yzygiderlikleriň predellerini tapmaly:

$$1) x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \quad 2) x_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}.$$

$$3) x_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}. \quad 4) x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

10. Funksiýalaryň predellerini tapmaly:

Ol irrational san bolup,  $e = 2,718281828459045\dots$ . Esasy  $e$  san bolan logarifmik funksiýa  $\ln x$  görnüşde belgilenýär.

4. Saklanýan kesimler teoremasy. Eger kesimleriň  $\{[a_n, b_n]\}$  yzygiderliginiň her bir soňkysy öňündäkininiň içinde saklanýan bolsa:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

ýagny islendik  $n$  üçin  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$  deňsizlik ýerine ýetse, onda ol yzygiderlige saklanýan kesimler yzygiderligi diýilýär

4-nji teorema. Eger saklanýan kesimleriň  $\{[a_n, b_n]\}$  yzygiderligi üçin  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  deňlik ýerine ýetse, onda ol yzygiderligiň ähli kesimlerine deňişli ýeke-täk nokat bardyr.

◁ Şerte görä  $\{a_n\}$  kemelmeýän,  $\{b_n\}$  artmaýan yzygiderlikdir we islendik  $n$  üçin  $a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$ . Şeýlelikde, monoton we çäkli yzygiderlikler bolup, olaryň 2-nji teorema esasynda predelleri bardyr:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Şoňa görä bu deňlikleriň we  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  deňligiň esasynda

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b - a$$

deňligi alarys, ýagny ol yzygiderlikleriň predelleri deňdir. Ony  $c$  bilen belgiläp, islendik  $n$  üçin  $a_n \leq c \leq b_n$  deňsizligi alarys, ýagny  $c$  nokat yzygiderligiň ähli kesimlerine deňişlidir. Ol nokadyň ýeke-täkdigini görkezmek üçin tersine güman edeliň. Goý, şol kesimleriň ählisine deňişli ýene bir  $c_1$  ( $c_1 \neq c$ ) nokat bar bolsun. Onda islendik  $n$  üçin  $b_n - a_n \geq |c - c_1|$  bolar we şonuň esasynda  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq |c - c_1| \neq 0$ , ol bolsa şerte garşy gelýär. ▷

## § 2.2. Funksiýanyň predeli

1. Funksiýanyň predeliniň kesgitlenişi. Goý,  $f$  funksiýa  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun (funksiýanyň  $a$  nokatdaky predeli düşünjesi girizilende onuň şol nokatda kesgitlenmegi hökman dälidir).

2-nji kesgitleme. Eger  $a$  sana ýygnaýan  $\forall \{x_n\} (x_n \neq a)$  yzygiderlik

üçin  $\{f(x_n)\}$  yzygiderlik  $B$  sana ýygnanýan bolsa, onda  $B$  sana  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky (ýa-da  $x \rightarrow a$  bolandaky) predeli diýilýär.

$B$  sanyň  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky predeli bolýandygy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \text{ ýa-da } f(x) \rightarrow B \text{ (} x \rightarrow a \text{)}$$

görnüşde belgilenýär.

**3-nji mysal.**  $f(x) = C$ ,  $g(x) = x$  funksiýalaryň  $a$  nokatdaky predelini tapmaly.

$\triangleleft$   $a$  sana ýygnanýan  $\forall \{x_n\} (x_n \neq a)$  yzygiderlik üçin  $f(x_n) = C$ ,  $g(x_n) = x_n$  bolýandygy üçin, deňşililikde, olaryň predelleri  $C$  we  $a$  sanlara deňdir. Şoňa görä-de 1-nji kesgitleme esasynda  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$  we

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \text{ bolar. } \triangleright$$

**4-nji mysal.**  $f(x) = \sin(1/x)$  funksiýanyň  $a = 0$  nokatda predeliniň ýokdugyny subut etmeli.

$\triangleleft$  Bu funksiýa  $x \neq 0$  nokatlaryň hemmesinde kesgitlenendir. Goý,  
 $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) bolsun. Onda  $\lim x_n = 0$ , ýöne  
 $f(x_n) = (-1)^n$ . Şonuň üçin ol hiç bir predele ymtylmaýar. Şoňa görä-de 2-nji kesgitleme esasynda funksiýanyň  $a = 0$  nokatda predeli ýokdur.  $\triangleright$

Funksiýanyň predeliniň 2-nji kesgitlemesine deňgüýçli bolan ýene bir kesgitlemesini getireliň.

**3-nji kesgitleme.** Eger  $\forall \varepsilon > 0$  san üçin  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  san tapylyp,  $0 < |x - a| < \delta$  şerti kanagatlandyryýan  $\forall x$  üçin  $|f(x) - B| < \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýetse, onda  $B$  sana  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky predeli diýilýär.

$B$  sanyň  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky predeli bolýandygyny gysgaça

$$(\forall \varepsilon > 0) (\delta > 0 \exists) (0 < |x - a| < \delta, \forall x) : |f(x) - B| < \varepsilon \quad (9)$$

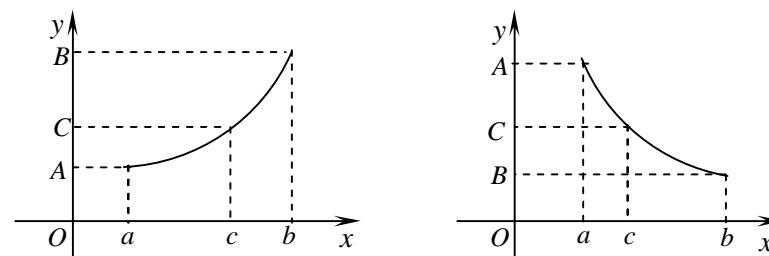
görnüşde aňlatmak bolar.

**1-nji bellik.** Belgileriň kömegi bilen käbir tassyklamalaryň inkär edilşini hem gysgaça ýazmak bolar. Mysal üçin,  $B$  sanyň  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky predeli däldigini aňladýan ýazgyny gysgaça

$$(\varepsilon > 0 \exists) (\forall \delta > 0) (0 < |x - a| < \delta, x \exists) : |f(x) - B| \geq \varepsilon \quad (10)$$

görnüşde aňlatmak bolar.

$y = C$  göni çyzygyň  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysyny kesýändigini aňladýar.



4-nji surat

Eger  $[a, b]$  kesimiň käbir  $c$  nokadynda  $f(c) = 0$  bolsa, onda ol nokada  $f$  funksiýanyň noly diýilýär.

**16-njy teorema (Funksiýanyň noly hakynda).** Eger  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $f$  funksiýanyň şol kesimiň uçlaryndaky bahalarynyň alamatlary dürli bolsa, ýagny  $f(a) \cdot f(b) < 0$  deňsizlik ýerine ýetse, onda funksiýanyň  $(a, b)$  aralykda iň bolmanda bir noly bardyr.

Bu teorema 15-nji teoremanyň  $A \cdot B < 0$  we  $C = 0$  bolýan hususy haly bolup, onuň geometrik manysy  $f(a) \cdot f(b) < 0$  bolanda  $(a, f(a))$  we  $(b, f(b))$  nokatlary birleşdirýän  $y = f(x)$  üznüksiz funksiýanyň çyzgysy  $Ox$  okuny kesýändir.

$[a, b]$  kesimde üznüksiz funksiýalaryň köplüginde  $C[a, b]$  bilen belgiläris. Şunlukda,  $f \in C[a, b]$  ýazgy  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksizdigini aňladýar.

## G ö n ü k m e l e r

**1.** Umumy agzasy berlen yzygiderligiň ilkinji baş agzasyny ýazmaly:

$$1) x_n = \frac{n+1}{n^2+1}. \quad 2) x_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2}. \quad 3) x_n = 2^{n-(-1)^n}.$$

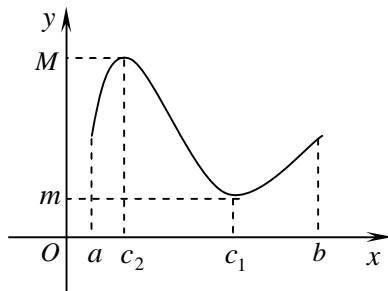


Eger  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesimiň ähli içki nokatlarynda üznüksiz bolup,  $a$  nokatda sagdan we  $b$  nokatda çepden üznüksiz bolsa, onda  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesimde üznüksiz funksiya diýilýär.

Eger şeýle  $c \in [a, b]$  nokat tapylyp,  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $f(x) \leq f(c)$  ( $f(x) \geq f(c)$ ) deňsizlik ýerine ýetse, onda  $f(c)$  sana  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki iň uly (iň kiçi) bahasy diýilýär.

23-nji mysaldaky funksiýanyň bahalar köplügi  $[0, 1]$  aralykdyr, şoňa görä ol funksiya çäklidir we onuň takyk çäkleri bardyr. Şunlukda, takyk aşaky çägi funksiýanyň iň kiçi bahasy bilen gabat gelýär (ol nola deň), ýöne funksiya iň uly bahany almaýar.

**14-nji teorema (Weýerştras).** Eger  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolsa, onda ol funksiya şol kesimde çäklidir we iň kiçi  $m$  we iň uly  $M$  bahalary alýandyr, ýagny şeýle  $c_1, c_2 \in [a, b]$  tapylyp,  $f(c_1) = m$  we  $f(c_2) = M$  bolar.



3-nji surat

Bu teoremanyň geometrik manysy 3-nji suratda şekillendirilendir.

Kesimde üznüksiz funksiya üçin ýerine ýetýän bu teorema aralykda üznüksiz funksiya üçin dogry däl. Mysal üçin,  $(0, 1)$  aralykda üznüksiz  $y = 5x^2$  funksiya şol aralykda  $m = 0$  we  $M = 5$  bahalary almaýar, çünki funksiya ol bahalary  $x = 0$  we  $x = 1$  nokatlarda alýar, olar bolsa seredilýän aralyga degişli däl.

**15-nji teorema (Aralyk baha hakynda).** Eger  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolup,  $A = f(a) \neq f(b) = B$  bolsa, onda ol funksiya  $A$  we  $B$  bahalaryň arasyndaky islendik  $C$  bahany alýar, ýagny  $(a, b) \ni c$  tapylyp,  $f(c) = C$  deňlik ýerine ýeter.

Bu teoremanyň geometrik manysy 4-nji suratda görkezilendir we ol  $A < C < B$  (ýa-da  $A > C > B$ ) şerti kanagatlandyryan islendik  $C$  üçin

**5-nji mysal.**  $f(x) = x \sin(1/x)$  funksiýanyň  $a = 0$  nokatdaky predelinin nola deňdigini subut etmeli.

◁ Eger  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $\delta = \varepsilon$  alsak, onda  $|x \sin(1/x)| \leq |x|$  deňsizlik esasynda  $0 < |x| < \delta$  şerti kanagatlandyryan  $\forall x$  üçin  $|x \sin(1/x)| < \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin hem 3-nji kesgitleme esasynda  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ . ▷

**6-nji mysal.** 3-nji kesgitlemeden peýdalanyň,  $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5) = 1$  deňligi subut etmeli we  $\varepsilon$  sanyň 0,1 we 0,01 bahalaryna degişli  $\delta$  sany kesgitlemeli.

◁ Kesgitleme boýunça,  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $|2x + 5 - 1| = |2x + 4| = 2|x + 2| < \varepsilon$  deňsizligiň  $|x + 2| < \delta$  bolanda ýerine ýetmegi üçin  $\delta$  san hökmünde  $\delta = \varepsilon/2$  sany ýa-da ondan kiçi bolan položitel sany almak bolar. Şunlukda,  $\varepsilon = 0,1$  bolanda  $\delta(0,1) = 0,05$  we  $\varepsilon = 0,01$  bolanda  $\delta(0,01) = 0,005$  bolar. ▷

Indi  $f$  funksiýanyň  $x \rightarrow \infty$  bolandaky predeli düşünjesini girizeliň. Eger  $\forall \varepsilon > 0$  san üçin şeýle  $K > 0$  san tapylyp,  $|x| > K$  şerti kanagatlandyryan  $\forall x$  üçin  $|f(x) - B| < \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýetse, onda  $B$  sana  $f$  funksiýanyň  $x \rightarrow \infty$  bolandaky predeli diýilýär we ol  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$  görnüşde ýazylýar. Şunlukda, eger  $x$  diňe položitel ýa-da diňe otrisatel bahalary alýan bolsa, onda olar degişlilikde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B \quad \text{we} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$$

görnüşde aňladylyar

**2. Birtaraplaýyn predeller.** Funksiýanyň argumentiniň  $a$  sana haýsy tarapyndan ymtylýanlygyna baglylykda birtaraplaýyn predel düşünjesi girizilýär. Eger 2-nji kesgitlemede goşmaça islendik  $n$  üçin  $x_n > a$  ( $x_n < a$ ) şert ýerine ýetse, onda  $B$  sana  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky sag (çep) predeli diýilýär we ol şeýle belgilenýär:

$$B = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \quad (B = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)).$$

Eger 3-nji kesgitlemede  $0 < |x - a| < \delta$  şertiň ýerine  $a < x < a + \delta$

$(a - \delta < x < a)$  şert ýerine ýetse, onda  $B$  sana  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky sag (çep) predeli diýilýär.

Eger  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda sag we çep predelleri bar bolup,  $f(a+0) = f(a-0) = B$  bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ . Eger birtaraplaýyn predeller dürli bolsa, ýa-da olaryň in bolmanda birisi ýok bolsa, onda  $a$  nokatda funksiýanyň predeli ýokdur.

**7-nji mysal.**  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  funksiýanyň  $a = 0$  nokatdaky sag we çep predellerini hasaplamaly.

$\triangleleft$  Goý,  $\forall n \in \mathbb{N}$  üçin  $x_n > 0$ ,  $x'_n < 0$ ,  $\lim x_n = \lim x'_n = 0$  bolsun, onda  $\lim \operatorname{sgn} x_n = 1$ ,  $\lim \operatorname{sgn} x'_n = -1$ . Şonuň üçin hem kesgitleme esasynda  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$ .  $\triangleright$

### § 2.3. Tükeniksiz kiçi we tükeniksiz uly funksiýalar

**1. Tükeniksiz kiçi funksiýalar we olaryň häsiýetleri.** Eger  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $\delta > 0$  san tapylyp,  $0 < |x - a| < \delta$  şerti kanagatlandyryýan  $\forall x$  üçin  $|\alpha(x)| < \varepsilon$  bolsa, onda  $\alpha(x)$  funksiýa  $a$  nokatda (ýa-da  $x \rightarrow a$  bolanda) tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär. Ol  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$  görnüşde aňladylýar.

**5-nji teorema.**  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatdaky predelinin  $B$  sana deň bolmagy üçin

$$f(x) = B + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad (11)$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

$\triangleleft$  Goý,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$  bolsun. Onda  $\alpha(x) = f(x) - B$  we  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $0 < |x - a| < \delta$  bolanda  $|\alpha(x)| = |f(x) - B| < \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny (11) deňlikler ýerine ýetýär.

Eger-de (11) deňlikler ýerine ýetýän bolsa, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [B + \alpha(x)] = B + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = B. \triangleright$$

**6-njy teorema.**  $x \rightarrow a$  bolanda tükeniksiz kiçi bolan tükenikli sany funksiýalaryň algebraik jemi  $x \rightarrow a$  bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

**2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ . Görkezijili funksiýanyň üznüksizligi esasynda

$x \rightarrow 0$  bolanda  $y = a^x - 1 \rightarrow 0$  bolar.  $y = a^x - 1$  deňligiň esasynda  $a^x = y + 1$ ,  $x = \log_a(1 + y)$ . Şonuň üçin hem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Bu ýerden  $a = e$  bolanda  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  formula gelip çykýar.

**3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\lambda - 1}{x} = \lambda$ . Bu formulany subut etmek üçin 1-nji we

2-nji wajyp predellerden we  $x \rightarrow 0$  bolanda  $y = \lambda \ln(1 + x) \rightarrow 0$  bolýanlygyndan peýdalanyp alarys:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\lambda - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda \ln(1 + x)} - 1}{\lambda \ln(1 + x)} \lambda \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lambda.$$

**24-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}$  predeli hasaplamaly.

$\triangleleft$  Predeli hasaplamak üçin 1-nji wajyp predeliň hususy halyny ulanarys:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 - \cos^2 x)}{-\cos^2 x} = -\frac{1}{2}. \triangleright$$

**25-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x^2 - x - 2} - 1}{x^2 - 5x + 6}$  predeli hasaplamaly.

$\triangleleft$  Predeli hasaplamak üçin 2-nji wajyp predelden peýdalanarys:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x^2 - x - 2} - 1}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3^{x^2 - x - 2} - 1}{x^2 - x - 2} \times \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x^2 - x - 2} - 1}{x^2 - x - 2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x - 3)} = -3 \ln 3. \triangleright \end{aligned}$$

### § 2.11. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň häsiýetleri

Eger funksiýanyň  $a$  nokatda birtaraplaýyn predelleriniň iň bolmanda biri ýok ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda  $a$  nokada  $f$  funksiýanyň üzülmek nokadynyň ikinji görnüşi diýilýär.

**22-nji mysal.**  $f(x) = 1/x$  we  $g(x) = 3^{1/x}$  funksiýalaryň üzülmek nokadyny anyklamaly.

◁ Bu funksiýalar üçin  $x = 0$  nokat üzülmek nokadynyň ikinji görnüsidir, çünki  $f(-0) = -\infty$ ,  $f(+0) = +\infty$  we  $g(-0) = 0$ ,  $g(+0) = +\infty$ . ▷

Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimiň tükenikli sany birinji görnüşdäki üzülmek nokatlaryndan başga ähli nokatlarynda üznüksiz bolsa, onda  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde bölek üznüksiz funksiýa diýilýär.

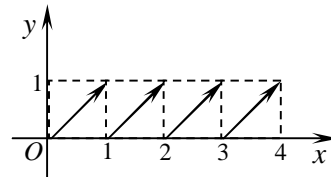
**23-nji mysal.**  $f(x) = x - [x]$  funksiýanyň  $[0, b]$ ,  $b > 1$  kesimde bölek üznüksizdigini subut etmeli.

◁ Ol funksiýanyň  $a = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) nokatlar üçin birtaraplaýyn predellerini hasaplalyň:

$$\lim_{x \rightarrow n-0} (x - [x]) = 1 \neq n - [n],$$

$$\lim_{x \rightarrow n+0} (x - [x]) = 0 = n - [n]$$

ýagny  $a = n$  nokatlar funksiýanyň birinji görnüşdäki üzülmek nokatlary bolup, ähli beýleki nokatlarda ol funksiýa üznüksizdir, ýagny ol bölek üznüksizdir. Onuň çyzygy 2-nji suratda şekillendirilendir ▷



2-nji surat

## § 2. 10. Käbir wajyp predeller

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ . Bu deňligi subut etmek üçin

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

deňlikden we logarifmik funksiýanyň üznüksizliginden peýdalanarys:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e.$$

Bu ýerden  $a = e$  bolan hususy halda  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  formula alynýar.

◁ Goý,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$  funksiýalar  $x \rightarrow a$  bolanda tükeniksiz kiçi funksiýalar bolsun, ýagny  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $\delta_1 > 0$  tapylyp,  $0 < |x-a| < \delta_1$  bolanda  $|\alpha(x)| < \varepsilon/3$ ,  $\delta_2 > 0$  tapylyp,  $0 < |x-a| < \delta_2$  bolanda  $|\beta(x)| < \varepsilon/3$  we  $\delta_3 > 0$  tapylyp,  $0 < |x-a| < \delta_3$  bolanda  $|\gamma(x)| < \varepsilon/3$  deňsizlikler ýerine ýetýär. Onda  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  san üçin  $0 < |x-a| < \delta$  bolanda deňsizlikleriň üçüsi hem ýerine ýeter. Şoňa görä  $u(x) = \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)$  funksiýa üçin

$$|u(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny  $x \rightarrow a$  bolanda  $u(x) = \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)$  tükeniksiz kiçi funksiýadyr. ▷

**7-nji teorema.** Tükeniksiz kiçi funksiýanyň çäkli funksiýa köpeltmek hasyly tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

◁ Eger  $x = a$  nokadyň käbir etrabynda  $b(x)$  çäkli funksiýa bolsa, ýagny şeýle  $C > 0$  tapylyp, şol etrapda  $|b(x)| < C$  we  $x \rightarrow a$  bolanda  $\alpha(x)$  tükeniksiz kiçi funksiýa bolsa, ýagny  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $x = a$  nokadyň käbir etrabynda  $|\alpha(x)| < \varepsilon/C$  deňsizlik ýerine ýetse, onda ol etraplaryň kiçisinde

$$|\alpha(x)b(x)| = |\alpha(x)||b(x)| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter, ýagny  $x \rightarrow a$  bolanda  $\alpha(x)b(x)$  tükeniksiz kiçi funksiýadyr. ▷

Bu teoremalardan şeýle netije gelip çykýar.

**Netije.** Iki tükeniksiz kiçi funksiýalaryň köpeltmek hasyly, şeýle hem tükeniksiz kiçi funksiýanyň hemişelik sana köpeltmek hasyly tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

**2. Tükeniksiz uly funksiýalar.** Eger  $\forall K > 0$  üçin  $\delta > 0$  tapylyp,  $0 < |x-a| < \delta$  şerti kanagatlandyryan  $\forall x$  üçin  $|f(x)| > K$  bolsa, onda ol funksiýa  $a$  nokatda tükeniksiz uly funksiýa diýilýär we ol  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ýazgyda aňladylýar. Şunlukda, diňe  $f(x) > K$  ýa-da diňe  $f(x) < -K$  deňsizlik ýerine ýetse, onda degişlilikde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

ýa-da  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

Mysal üçin, eger  $f(x) = 1/x$ ,  $x \rightarrow 0$  bolsa, onda ol tükeniksiz uly funksiýadyr, çünki  $\forall K > 0$  üçin  $|x| = |x - 0| < 1/K = \delta$  bolanda  $|1/x| > K$  deňsizlik ýerine ýetýär. Şunlukda,  $x < 0$  bolanda  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  we  $x > 0$  bolanda  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . Eger  $f(x) = 1/(x-3)^2$ ,  $x \rightarrow 3$  bolsa, onda  $\forall K > 0$  üçin  $|x-3| < 1/\sqrt{K} = \delta$  bolanda  $1/(x-3)^2 > K$  bolar, ýagny ol funksiýa  $x \rightarrow 3$  bolanda tükeniksiz uludyr we funksiýanyň diňe položitel bahalary alyandygy üçin  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ .

Tükeniksiz kiçi we tükeniksiz uly funksiýalar şeýle baglanyşykdadyr.

Eger  $\delta > 0$  san tapylyp,  $0 < |x-a| < \delta$  şerti kanagatlandyryýan  $\forall x$  üçin  $f(x) \neq 0$  bolsa, onda  $f(x)$  funksiýanyň  $a$  nokatda tükeniksiz kiçi funksiýa bolmagy üçin  $1/f(x)$  funksiýanyň tükeniksiz uly funksiýa bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Hakykatdan-da, eger  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  bolsa, onda islendik  $1/\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) san üçin şeýle  $\delta > 0$  tapylyp,  $0 < |x-a| < \delta$  şerti kanagatlandyryýan  $\forall x$  üçin  $|f(x)| < 1/\varepsilon$ , ýagny  $|1/f(x)| > \varepsilon$  bolar. Diýmek,  $1/f(x)$  funksiýa  $a$  nokatda tükeniksiz uludyr. Tersini hem dogry bolýandygy şuna meňzeşlikde görkezilýär.

Şunlukda, eger  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $f(x) \neq 0$  bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ , eger  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

## § 2. 4. Funksiýanyň predelinin esasy häsiýetleri

**9-njy teorema.** Eger  $f$  we  $g$  funksiýalaryň  $a$  nokatda  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  predelleri bar bolsa, onda  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  we  $f(x)/g(x)$  funksiýalaryň hem  $a$  nokatda predelleri

deňlikler ýerine ýeter, ýagny  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz bolar. Funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksizliginden, onuň şol nokatda hem çepden, hem sagdan üznüksizligi gelip çykýar we şonuň esasynda (22) deňlikler ýerine ýetýär. Şeýlelikde,  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksiz bolmagy üçin onuň şol nokatda hem sagdan, hem çepden üznüksiz bolmagy, ýagny (22) deňlikleriniň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

**2. Funksiýanyň üzülmek nokatlary.** Eger  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz bolmasa, onda  $a$  nokada  $f$  funksiýanyň üzülmek nokady diýilýär.

Eger funksiýanyň  $a$  nokatda biri-birine deň bolmadyk birtaraplaýyn

$$f(a-o) = \lim_{x \rightarrow a-o} f(x) \quad \text{we} \quad f(a+o) = \lim_{x \rightarrow a+o} f(x) \quad (23)$$

predelleri bar bolsa, onda  $a$  nokada  $f$  funksiýanyň üzülmek nokadynyň birinji görnüşini diýilýär.

Başgaça aýdylanda, eger (23) predeller bar bolup, olaryň iň bolmanda birisi funksiýanyň  $f(a)$  bahasyna deň bolmasa, onda  $a$  nokada  $f$  funksiýanyň üzülmek nokadynyň birinji görnüşini diýilýär. Şunlukda,  $f(a+o) - f(a-o)$  tapawuda funksiýanyň  $a$  nokatdaky bökmesi diýilýär.

**21-nji mysal.**  $x = 0$  nokat  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  funksiýanyň üzülmek nokadynyň birinji görnüşidir, çünki  $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$  we  $f(0) = 0$ . Onuň bökmesi  $f(+o) - f(-o) = 1 - (-1) = 2$  bolar.

Eger (23) predeller bar bolup,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a-o) = f(a+o) = A$$

deňlikler ýerine ýetse we  $A \neq f(a)$  bolsa ýa-da  $a$  nokatda  $f$  kesgitlenen bolmasa, onda  $a$  nokada  $f$  funksiýanyň aýrylýan üzülmek nokady diýilýär. Bu halda üzülmek nokadyň şeýle atlandyrylmagy, funksiýanyň şol nokatdaky bahasyny üýtgedip, ýagny  $f(a) = A$  alyp, funksiýany  $a$  nokatda hem üznüksiz edip (ýagny üzülmek nokadyny aýryp) bolýandygy bilen düşündirilýär.

Mysal üçin,  $x = 0$  nokat  $g(x) = |\operatorname{sgn} x|$  funksiýanyň üzülmek nokadydyr, çünki

$$\lim_{x \rightarrow -0} |\operatorname{sgn} x| = \lim_{x \rightarrow -0} |\operatorname{sgn} x| = 1 \neq |\operatorname{sgn} 0| = g(0).$$

Eger  $g(0) = 1$  alsak, onda  $x = 0$  nokatda  $g(x)$  funksiýa üznüksiz bolar, ýagny  $x = 0$  ol funksiýanyň aýrylýan üzülmek nokadydyr.

çylşyrymly  $F(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$  funksiýa hökmünde 13-nji teorema

boýunça üznüksizdir. ▷

**19-njy mysal.**  $f(x) = \lg x$  funksiýa  $\forall x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  nokatda üznüksizdir.

◁ Bu funksiýanyň üznüksizligi  $\sin x$  we  $\cos x$  funksiýalaryň üznüksizliginden gelip çykýar. ▷

**20-nji mysal.**  $f(x) = a^x (0 < a \neq 1)$  görkezijili funksiýa  $\forall x \in \mathbb{R}$  nokatda üznüksizdir.

◁ Ilki bilen bu funksiýanyň  $x = 0$  nokatda üznüksizdigini, ýagny  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$  deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň.

Goý,  $a > 1$  bolsun, onda  $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$  bolanda  $a^{-1/n} < a^x < a^{1/n}$

deňsizlikler ýerine ýetýändir. Bu deňsizliklerden  $n \rightarrow \infty$  bolanda,  $x \rightarrow 0$  we  $\lim_{x \rightarrow 0} a^{1/n} = 1$  bolýandygy sebäpli  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$  gelip çykýar.  $a < 1$

bolanda hem ol edil şonuň ýaly görkezilýär. Şoňa görä  $\forall b \in \mathbb{R}$  üçin hem

$$\lim_{x \rightarrow b} a^x = \lim_{x \rightarrow b} a^b a^{x-b} = a^b \lim_{x \rightarrow b} a^{x-b} = a^b.$$

Bu ýerden  $b$  nokadyň erkinliginden  $f(x) = a^x$  funksiýanyň  $\forall x \in \mathbb{R}$  nokatda üznüksizligi gelip çykýar. ▷

## § 2. 9. Funksiýanyň birtaraplaýyn üznüksizligi we üzülme nokatlary

**1. Funksiýanyň birtaraplaýyn üznüksizligi.** Eger  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda sag (çep) predeli bar bolup, ol predel funksiýanyň  $a$  nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \quad \left( \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = f(a) \right),$$

onda  $f$  funksiýa  $a$  nokatda sagdan (çepden) üznüksiz funksiýa diýilýär.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, eger  $f$  funksiýa  $a$  nokatda hem çepden, hem sagdan üznüksiz bolsa, onda

$$f(a+0) = f(a-0) = f(a) \quad (22)$$

bardyr we aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0). \quad (14)$$

◁ Teoremanyň şertlerinde 5-nji teorema boýunça

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 \quad (15)$$

deňlikleri ýazmak bolar. Şonuň üçin (15) deňlikler esasynda

$$f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + [\alpha(x) \pm \beta(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} [\alpha(x) \pm \beta(x)] = 0$$

deňlikler ýerine ýetýär. Şoňa görä-de 5-nji teorema boýunça

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

ýagny (12) deňlik subut edildi. (15) deňlikler esasynda

$$f(x) \cdot g(x) = (A \cdot B) + [A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)],$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)] = 0$$

deňlikler ýerine ýetýär. Şonuň üçin 5-nji teorema boýunça

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Şeýlelikde, (13) deňlik hem subut edildi. (14) deňligi subut etmek üçin

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$  şert ýerine ýetende (15) deňligi ulanyp alarys:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B[B + \beta(x)]}. \quad (16)$$

Eger  $u(x) = \frac{1}{B[B + \beta(x)]}$ ,  $v(x) = B\alpha(x) - A\beta(x)$  belgileme girizsek, onda

(16) deňlik esasynda

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = u(x)v(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} [u(x)v(x)] = 0,$$

çünkü  $x \rightarrow a$  bolanda  $u(x)$  çäkli funksiýadyr,  $v(x)$  bolsa tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Şonuň üçin hem 5-nji teorema boýunça

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

ýagny (14) deňlik hem subut edildi.  $\triangleright$

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

**1-nji netije.** Eger funksiýalaryň algebraik jeminiň her bir goşulyjysynyň  $a$  nokatda predeli bar bolsa, onda ol jemiň hem predeli bardyr we goşulyjylaryň predelleriniň şolar ýaly algebraik jemine deňdir.

**2-nji netije.** Hemişelik köpeldijini predel belgisiniň daşyna çykarmak bolar.

**3-nji netije.** Eger  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda predeli bar bolsa, onda natural  $m$  san üçin

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^m] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^m$$

deňlik dogrudyr. Hususan-da,  $\lim_{x \rightarrow a} (x^m) = \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right)^m = a^m$ .

**8-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 8x - 7)$  predeli tapmaly.

$\triangleleft$  9-njy teorema we onuň netijeleri esasynda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 8x - 7) &= \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2) + \lim_{x \rightarrow -1} (8x) - \lim_{x \rightarrow -1} (7) = \\ &= 3(-1)^2 + 8(-1) - 7 = -12. \triangleright \end{aligned}$$

**Bellik.** Funksiýalaryň predelleri tapylanda, köplenç,

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

görnüşdäki kesgitsizliklere düş gelinýär. Şonuň üçin ilki olary özgerdip, belli bolan formulalary ulanyp bolar ýaly görnüşlere getirmeli. Sunlukda, predel tapylanda şeýle häsiýetden hem peýdalanylýar.

Eger  $\forall x \neq a$  üçin  $f(x) = g(x)$  deňlik ýerine ýetip,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$

$f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  we  $f(x)/g(x)$  ( $g(a) \neq 0$ ) funksiýalar hem  $a$  nokatda üznüksizdirler.

Eger  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz bolup,  $f(a) \neq 0$  bolsa, onda ol nokadyň käbir etrabynda funksiýanyň alamaty  $f(a)$  sanyň alamaty bilen gabat gelýär.

**15-nji mysal.**  $\forall n \in \mathbf{N}$  üçin  $f(x) = x^n$  funksiýa  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizdir.

$\triangleleft$  Bu funksiýanyň  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizligi  $g(x) = x$  funksiýanyň üznüksizliginden esasy häsiýet boýunça gelip çykýar.  $\triangleright$

**16-njy mysal.**  $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  bitin rasional funksiýa  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizdir.

$\triangleleft$  Bu funksiýanyň  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizligi 13-nji we 15-nji mysallarda garalan funksiýalaryň  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizliginden, esasy häsiýet boýunça gelip çykýar.  $\triangleright$

**17-nji mysal.**  $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$  drob rasional funksiýa  $Q_m(x)$  köpagzanyň köki bolmadyk  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizdir.

$\triangleleft$  Bu funksiýanyň üznüksizligi esasy häsiýet boýunça 16-njy mysaldaky funksiýanyň üznüksizliginden gelip çykýar.  $\triangleright$

**13-nji teorema (Çylşyrymly funksiýanyň üznüksizligi).** Eger  $u = \varphi(x)$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz,  $y = f(u)$  funksiýa  $b = \varphi(a)$  nokatda üznüksiz bolsa, onda  $F(x) = f[\varphi(x)]$  çylşyrymly funksiýa  $a$  nokatda üznüksizdir.

$\triangleleft$  Eger  $x \rightarrow a$  bolsa, onda  $\varphi$  funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksizliginden  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(a)$  gelip çykýar, ýagny  $u \rightarrow b$ . Şonuň üçin  $f$  funksiýanyň  $b$  nokatda üznüksizliginden  $f(u) \rightarrow f(b)$  gelip çykýar. Şeýlelikde,

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow b} f(u) = f(b) = f[\varphi(a)] = F(a),$$

ýagny  $F(x) = f[\varphi(x)]$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksizdir.  $\triangleright$

**18-nji mysal.**  $f(x) = \cos x$  funksiýa  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizdir.

$\triangleleft$  Bu funksiýa üznüksiz  $u = \frac{\pi}{2} - x$  we  $y = \sin u$  funksiýalara görä

tapawuklykda bu ýerde  $x_n \neq a$  ýa-da  $x \neq a$  şert talap edilmeyär.

Eger  $\Delta x = x - a$  we  $\Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$  tapawutlar deňişlikde  $x$  üýtgeýäniň we funksiýanyň  $a$  nokatdaky artymlyary bolsa, onda (21) deňligi  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$  görnüşde ýazmak bolar.

Şoňa görä-de funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksizliginiň kesgitlemesini ýene bir görnüşde getirmek bolar.

**4-nji kesgitleme.** Eger  $f$  funksiýanyň  $x$  üýtgeýäniniň  $a$  nokatdaky  $\Delta x$  artymy nola ymtylanda funksiýanyň şol nokatdaky artymy nola ymtylýan bolsa, onda  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

**14-nji mysal.**  $f(x) = \sin x$  funksiýanyň  $\forall a \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizdigini görkezmeli.

◁ Mälim bolşy ýaly,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  bolanda  $|\sin x| \leq |x|$ . Şonuň esasynda  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  bolanda hem  $|\sin x| = \sin|x| \leq |x|$  bolar. Eger  $|x| \geq \frac{\pi}{2}$  bolsa, onda  $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$ . Şeýlelikde  $\forall a \in \mathbf{R}$  üçin  $|\sin x| \leq |x|$ . Bu deňsizligiň esasynda:

$$\begin{aligned} |\Delta f| &= |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( a + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq 2 \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|. \end{aligned}$$

Şonuň üçin hem  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ , ýagny  $f(x) = \sin x$  funksiýa  $\forall a \in \mathbf{R}$  nokatda üznüksizdir. ▷

## § 2.8. Üznüksiz funksiýalaryň esasy häsiýetleri

Nokatda üznüksiz funksiýanyň şol nokatda predelinin barlygy esasynda, predeli bar funksiýalar üçin ýerine ýetýän häsiýetleriň hemmesi üznüksiz funksiýalar üçin hem dogrudyr. Olaryň esaslaryny ýatlalyň.

Eger  $f$  we  $g$  funksiýalar  $a$  nokatda üznüksiz bolsalar, onda

predel bar bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  predel hem bardyr. Bu häsiýetiň ulanylyşyny görkezeliň.

**9-njy mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$  predeli tapmaly.

◁  $x \rightarrow 2$  bolanda sanawjy hem, maýdalawjy hem nola ymtylýar we 0/0 görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony açmak üçin ilki özgertmeler geçirip, soňra predeli tapmaly:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x-3)} = \frac{1}{-1} = -1. \triangleright$$

**10-njy teorema.** Eger  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen  $f$  funksiýanyň  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \neq 0$  predeli bar bolsa, onda  $a$  nokadyň  $U(a)$  etraby tapylyp, şol etrapda  $B > 0$  bolanda  $f(x)$  položitelidir we  $f(x) > \frac{B}{2}$ ,  $B < 0$  bolanda otrisateldir we  $f(x) < \frac{B}{2}$ .

◁ Teoremanyň şertlerinde  $\varepsilon = |B|/2$  üçin  $\delta > 0$  tapylyp,  $0 < |x - a| < \delta$  bolanda  $B - \frac{|B|}{2} < f(x) < B + \frac{|B|}{2}$  deňsizlikler ýerine ýetýär. Olaryň çepindäkisinden  $B > 0$  bolanda,  $f(x) > \frac{B}{2} > 0$  deňsizligi, sagyndakysyndan bolsa  $B < 0$  bolanda,  $f(x) < \frac{B}{2} < 0$  deňsizligi alarys. ▷

**11-nji teorema.** Eger  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen  $f$  we  $g$  funksiýalar üçin şol etrabyň  $x \neq a$  bolan islendik nokadynda  $f(x) < g(x)$  we  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  predeller bar bolsa, onda  $A \leq B$  bolar.

◁ Eger tersine,  $A > B$  diýip güman etsek, onda şert esasynda 9-njy teorema boýunça  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = A - B > 0$  bolar. Şoňa görä 10-njy teorema esasynda  $a$  nokadyň  $x \neq a$  bolan islendik etrabynda  $f(x) - g(x) > 0$ , ýagny  $f(x) > g(x)$  bolar. Ol bolsa şerte garşy gelýär.

Diýmek,  $A \leq B$  deňsizlik ýerine ýetýär. ▸

Bu teorema iki böleginiň hem predeli bar bolan deňsizlikde predele geçip bolýandygyny aňladýar, şunlukda deňsizlik belgisine deňlik belgisi hem goşulýar. Mysal üçin, islendik  $x \neq 0$  nokatda  $5 + x^2 > 5 - x^2$ , ýöne  $\lim_{x \rightarrow 0} (5 + x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (5 - x^2)$ .

**12-nji teorema.** Eger  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen  $f$ ,  $\varphi$ ,  $g$  funksiýalar üçin şol etrapda

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) \quad (17)$$

deňsizlikler ýerine ýetse we  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  predel bar bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ .

◁ Şertleriň esasynda  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $a$  nokadyň şeýle  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  etraplary tapylyp, şol etraplarda degişlilikde  $B - \varepsilon < f(x)$  we  $g(x) < B + \varepsilon$  bolar. Onda  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  üçin  $a$  nokadyň  $\delta$  etrabynda ol deňsizlikleriň ikisi hem ýerine ýeter. Şonuň üçin şol etrapda (17) deňsizlikler esasynda  $B - \varepsilon < f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) < B + \varepsilon$ , ýagny  $|\varphi(x) - B| < \varepsilon$ . Diýmek,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ . ▸

## § 2.5. Ajaýyp predeller

**1. Birinji ajaýyp predel.** Radiusy  $r$ , merkezi burçunyň radian ölçegi  $x$  ( $0 < x < \pi/2$ ) bolan töwerege seredeliň (1-nji surat).

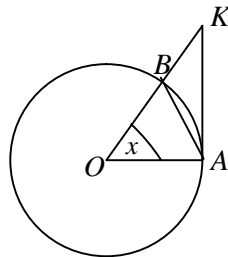
$OAB$  üçburçlugyň meýdany  $OAB$  sektoryň meýdanyndan, ol sektoryň meýdany bolsa  $OAK$  üçburçlugyň meýdanyndan kiçidir. Şoňa görä

$$\frac{r^2}{2} \sin x < \frac{r^2}{2} x < \frac{r^2}{2} \operatorname{tg} x$$

deňsizlikleri we olary  $(r^2/2)$ -ä bölüp,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (18)$$

deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa



1-nji surat

## § 2.7. Üznüksiz funksiýalar

Goý,  $f$  funksiýa  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun.

**1-nji kesgitleme.** Eger  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda predeli bar bolup, ol predel funksiýanyň şol nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad (21)$$

onda  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

**13-nji mysal.** Hemişelik  $f(x) = C$  we  $g(x) = x$  funksiýalar san okunyň islendik  $a$  nokadynda üznüksizdir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = g(a).$$

Şonuň üçin  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  deňlik esasynda funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksizligini aňladýan (21) deňligi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right),$$

görnüşde ýazmak bolar. Ol deňlik üznüksiz funksiýa üçin predeliň “lim” belgisi bilen funksiýany häsiýetlendirýän “ $f$ ” belginiň ornuny çalşyryp bolýandygyny aňladýar.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, funksiýanyň nokatda üznüksiz bolmagynyň esasy şertleriniň biri-de ol funksiýanyň şol nokatda predeliň bolmagydyr. Şonuň üçin hem funksiýanyň predeliň 1-nji we 2-nji kesgitlemelerini ulanyp, funksiýanyň nokatda üznüksizlik kesgitlemesini giňişleýin şeýle düşündirmek bolar.

**2-nji kesgitleme.** Eger  $a$  sana ýygnaýan  $\forall \{x_n\}$  yzygiderlik üçin  $\{f(x_n)\}$  yzygiderlik  $f(a)$  sana ýygnaýan bolsa, onda  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

**3-nji kesgitleme.** Eger  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tapylyp,  $|x - a| < \delta$  deňsizligi kanagatlandyran  $\forall x$  üçin  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  deňsizlik ýerine ýetse, onda  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

Bu kesgitlemäni ulanyp, funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksizligini aňladýan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ýazgyny gysgaça şeýle ýazmak bolar:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\delta > 0 \exists) (|x - a| < \delta, \forall x) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Kesgitlemelerden görnüşi ýaly, predeliň kesgitlemelerinden



$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$  predel bar bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ . Ony subut etmek

üçin  $x \rightarrow a$  bolanda  $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$  deňlikde predele geçmek ýeterlikdir.

**12-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3}$  predeli tapmaly.

$\triangleleft x \rightarrow 0$  bolanda  $\sin 5x \sim 5x$ ,  $x + x^3 \sim x$  bolýandygy üçin

agzalan häsiýetiň esasynda  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5$ .  $\triangleright$

Tükeniksiz uly funksiýalar hem şular ýaly deňeşdirilýändir. Ony mysallarda düşündireliň.

**1.**  $p(x) = x^2 + 5$  funksiýa  $x \rightarrow \infty$  bolanda  $q(x) = x^3 - 4$  görä kiçi tertipli tükeniksiz uly funksiýadyr, çünki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 5/x^2}{x - 4/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**2.**  $p(x) = (1+x)/x$  we  $q(x) = 1/x$  funksiýalar  $x \rightarrow 0$  bolanda

deňgüýçli tükeniksiz uly funksiýalar, çünki  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$ .

**3.**  $p(x) = 2x^4 + 3x + 1$  funksiýa  $x \rightarrow \infty$  bolanda  $q(x) = x^2 + 1$  funksiýa görä ikinji tertipli tükeniksiz uly funksiýadyr, çünki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x + 1}{x^4 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3/x^3 + 1/x^4}{1 + 2/x^3 + 1/x^4} = 2.$$

Şunlukda,  $p(x) = 2x^4 + 3x + 1$  we  $g(x) = x^4 + 2x + 1$  funksiýalar

$x \rightarrow \infty$  bolanda deň tertipli tükeniksiz uly funksiýalardyr.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

deňsizlikler gelip çykýar. Ahyrky deňsizliklerden bolsa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \quad (19)$$

deňsizlikler alynýar. Eger  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $\delta$  sany  $\pi/2$  we  $\varepsilon$  sanlaryň kiçisi bolar ýaly alsak, onda  $0 < x < \delta$  bolanda (19) deňsizliklerden

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| \leq |1 - \cos x| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x < \varepsilon$$

deňsizlik gelip çykýar. Ol bolsa  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$  predeliň bardygyny

aňladýar. Şoňa görä  $\sin x$  funksiýanyň täkligi esasynda

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Diýmek, garalýan funksiýanyň  $a = 0$  nokatda biri-birine deň bolan birtaraplaýyn predelleri bardyr we şonuň esasynda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

deňligi alarys. Oňa birinji ajaýyp predel diýilýär.

**Bellik.** Birinji ajaýyp predel subut edilende  $0 < x < \pi/2$  bolanda görkezilen  $\sin x < x$ ,  $1 - \cos x < x$  deňsizlikleri ulanyp,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  deňlikleri subut etmek bolar (özbaşdak görkeziň).

**10-njy mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$  predeli tapmaly.

$\triangleleft x = 0$  bolanda  $0/0$  görnüşdäki kesgitsizlik alynýar, Soňa görä ol predeli tapmak üçin ilki käbir özgertmeleri geçirmeli we soňra birinji ajaýyp predeli ulanmaly:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0 \triangleright$$

**2. Ikinji ajaýyp predel.** Goý,  $x > 1$  bolsun. Eger  $x$ -iň bitin bölegini aňladýan  $[x]$  funksiýa üçin  $n = [x]$  alsak, onda  $x = n + a$  bolar, bu ýerde

$n$  natural sandyr we  $a$  san  $0 \leq a < 1$  şerti kanagatlandyryar. Şunlukda,  $n \leq x < n+1$ ,  $1/(n+1) < 1/x \leq 1/n$  bolar we bu deňsizlikler esasynda

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (20)$$

deňsizlikler gelip çykýar. Mälim bolşy ýaly  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Şoňa görä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(n+1)}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(n+1)}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

predeller hem bardyr. Şonuň esasynda  $x \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) bolanda (20) deňsizliklerde predele geçip,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

deňligi alarys. Goý,  $x < -1$  bolsun. Eger  $x = -y$  alsak, onda subut edilen deňligiň esasynda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

deňlik gelip çykýar. Bu iki halyň esasynda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ikinji ajaýyp predel atlandyrylýan deňlik alynýar. Bu deňlikden  $u = 1/x$

belgileme girizip,  $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e$  formulany alarys.

**11-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2/x)^x$  predeli tapmaly.

◁ Eger  $x = 2t$  çalşyрма girizsek, onda  $x \rightarrow \infty$  bolanda  $t \rightarrow \infty$  bolýandygy esasynda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2/x)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t = e \cdot e = e^2. \triangleright$$

## § 2. 6. Funksiýalaryň deňşdirilişi

Tükeniksiz kiçi funksiýalaryň algebraik jeminiň we köpeltmek hasylynyň tükeniksiz kiçi funksiýa bolýandygy bellidir. Ýöne olaryň paýy beýle däl. Goý,  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$  bolsun. Eger:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$  bolsa, onda  $\alpha(x)$  funksiýa  $x \rightarrow a$  bolanda  $\beta(x)$

göra ýokary tertipli tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär. Bu halda

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), \quad x \rightarrow a$$

ýazgy ulanylýar we ol şeýle okalýar:  $\alpha(x)$  deňdir  $o$  kiçi  $\beta(x)$ ,  $x \rightarrow a$  bolanda.

2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$  bolsa, onda  $\alpha(x)$  we  $\beta(x)$  funksiýalara

$x \rightarrow a$  bolanda deň tertipli tükeniksiz kiçi funksiýalar diýilýär. Onuň üçin

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \quad x \rightarrow a$$

ýazgy ulanylýar we ol şeýle okalýar:  $\alpha(x)$  dendir  $O$  uly  $\beta(x)$   $x \rightarrow a$  bolanda. Hususanda, eger  $C = 1$  bolsa, onda olara deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalar diýilýär we  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,  $x \rightarrow a$  görnüsde belgilenýär.

3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0$  bolsa, onda  $\alpha(x)$  funksiýa  $x \rightarrow a$  bolanda

$\beta(x)$  göre  $k$  tertipli tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär.

Mysal üçin,  $x \rightarrow 0$  bolanda  $\sin x$  we  $x$  deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalardyr,  $1 - \cos x$  funksiýa bolsa  $x$  göre ikinji tertipli tükeniksiz kiçi funksiýadyr, çünki

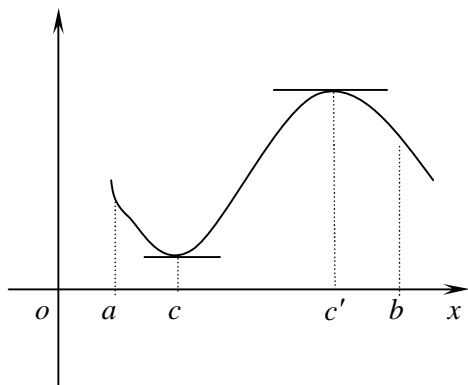
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalaryň predelleri tapylanda ulanylýan

şeýle häsiýeti bardyr. Eger  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ ,  $x \rightarrow a$  we

**1-nji bellik.** Eger funksiýa  $[a, b]$  kesimde kesgitlenen bolup, in uly ýa-da in kiçi bahany kesimiň ujunda alýan bolsa onda şol nokatda funksiýanyň önüminiň nola deň bolmazlygy hem mümkindir. Ony aşadaky mysal tassyklaýar.

**1-nji mysal.**  $f(x) = x$  funksiýa  $[0, 1]$  kesimiň  $x = 0$  nokadynda



1-nji surat

**Roluň teoreması.** Goý,  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän bolup,  $f(a) = f(b)$  bolsun. Onda in bolmanda bir  $c \in (a, b)$  nokat tapylyp,  $f'(c) = 0$ .

$\triangleleft$   $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksizligi üçin Weýerstrasyň teoreması esasynda funksiýa şol kesimde in uly  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$  we in kiçi  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$  bahalary alýar. Şunlukda, eger:

1)  $M = m$  bolsa, onda  $[a, b]$  kesimde ýerine ýetýän  $m \leq f(x) \leq M$  şertiň esasynda funksiýa şol kesimde hemişelik bolar we şonuň üçin onuň önümi  $(a, b)$  aralygyň ähli nokatlarynda nola deňdir.

2)  $M > m$  bolsa, onda  $f(a) = f(b)$  şertiň esasynda funksiýa  $M$  we  $m$  bahalaryň in bolmanda birini içki  $c \in (a, b)$  nokatda alar. Şoňa görä Fermanyň teoreması esasynda  $f'(c) = 0$  bolar.  $\triangleright$

$f(a) = f(b) = 0$  hususy hal üçin bu teorema gysgaça şeýle okalýar: diefferensirlenýän funksiýanyň iki dürli kökleriniň arasynda onuň

$$= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$47) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2 \sin a}{x^2}, \quad 48) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}.$$

$$49) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}, \quad 50) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2 \cos a}{1 - \cos x}.$$

$$51) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \quad 52) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}, \quad 53) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(x/2) - \sin(x/2)}{\cos x}.$$

$$54) \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2 \cos x}, \quad 55) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos 2x - 2 \cos x}{2 \cos x - 2}.$$

$$56) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad 57) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad 58) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}.$$

**11.** Aşadaky  $x \rightarrow 0$  bolanda tükeniksiz kiçi bolan funksiýalaryň haýsysy  $\beta(x) = x$  funksiýa görä deň tertipli, ýokary tertipli, kiçi tertipli tükeniksiz kiçi funksiýadyr?

$$1) \alpha(x) = 3x; \quad 2) \alpha(x) = 4 \sin x; \quad 3) \alpha(x) = 5x^2;$$

$$4) \alpha(x) = 3 \sin^2 x; \quad 5) \alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}; \quad 6) \alpha(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x};$$

**12.** Berlen funksiýalaryň berlen nokatlarda üznüksizligini barlamaly:

$$1) f(x) = x + 1 \text{ funksiýanyň } x = -1, x = 1 \text{ nokatlarda.}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ x, & x < 1 \end{cases} \text{ funksiýanyň } x = 1 \text{ nokatda.}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 3, & x = 1, \\ x + 1, & x > 1 \end{cases} \text{ funksiýanyň } x = 1 \text{ nokatda.}$$

**13.** Funksiýa görkezilen nokatda nähili kesgitlenende şol nokatda ol üznüksiz bolar:

$$1) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \quad x = 1. \quad 2) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad x = 0.$$

**14.** Funksiýanyň üzülmek nokatlaryny tapmaly, olaryň görnüşlerini kesgitlemeli we funksiýanyň çyzgysyny gurmaly:

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x+3}. \quad 2) f(x) = \frac{9}{9-x^2}. \quad 3) f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}.$$

**15.** Funksiýanyň üzülmek nokatlaryny tapmaly we şol nokatlarda onuň bökmegini kesgitlemeli:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2, \\ x+1, & x > 2 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x < 1, \\ 3x+2, & x \geq 1 \end{cases}$$

**16.** Deňlemäniň görkezilen aralykda iň bolmanda bir köküniň bardygyny subut etmeli: 1)  $x^3 + 4x - 6 = 0$ , (1, 2). 2)  $x^4 - 2,15x + 0,95 = 0$ , (1, 2).

## J o g a p l a r

- 1.** 1)  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 3/5$ ;  $x_3 = 2/5$ ;  $x_4 = 5/17$ ;  $x_5 = 3/13$ . 2)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3/4$ ;  $x_3 = 4/9$ ;  $x_4 = -5/16$ ;  $x_5 = 6/25$ . 3) 4; 2; 16; 8; 64.
- 2.**  $x_n = 1/(2n-1)^2$ . **4.** 1) aşakdan. 2) - 4) ýokardan we aşakdan.
- 5.** 1) kemelýär. 2) monoton däl. 3) artýar. 4) kemelýär.
- 7.**  $n_o(0,1) = 9$ ;  $n_o(0,01) = 99$ . **8.** 1) 1. 2) 0. 3)  $e^{-1}$ . 4)  $e^3$ . 5)  $2/3$ . 6) 0. 7) 2. 8)  $1/2$ . 9)  $3/2$ . **9.** 1) 0. 2)  $1/2$ . 3)  $1/3$ . 4) 1.
- 10.** 1) 0. 2)  $-7$ . 3) 3. 4)  $-1$ . 5) 3. 6)  $-1/7$ . 7) 2. 8)  $1/3$ . 9)  $2/3$ . 10)  $3/2$ . 11)  $-8$ . 12)  $1/2$ . 13)  $1/3$ . 14)  $1/3$ . 15)  $1/2$ . 16) 1. 17) 1. 18)  $1/2$ . 19)  $15/2$ . 20)  $1/2$ . 21) 3. 22)  $5/2$ . 23)  $12/5$ . 24)  $1/16$ . 25)  $-1$ . 26) 0. 27)  $\infty$ . 28)  $2/3$ . 29)  $e^{-1}$ . 30)  $e^{-1}$ . 31)  $e$ . 32)  $e^2$ . 33) 2. 34) 2. 35) 0. 36)  $1/2$ . 37) 2. 38)  $x$ . 39)  $m/n$ . 40)  $2/\pi$ . 41)  $e$ . 42) 0. 43) 0. 44)  $1/2$ . 45) 1. 46)  $e^3$ . 47)  $-\sin \alpha$ . 48)  $2\cos \alpha$ . 49)  $(n^2 - m^2)/2$ . 50)  $-2\cos \alpha$ . 51)  $1/2$ . 52)  $-1/4$ . 53)  $\sqrt{2}/2$ . 54)  $\sqrt{3}/2$ . 55) 1. 56)  $1/2$ . 57)  $1/4$ . 58)  $1/2$ . **11.** 1), 2) - deň tertipli. 3), 4) - ýokary tertipli, 5), 6) - kiçi tertipli. **12.** 1) ikisinde-de üznüksiz. 2) üznüksiz. 3) üznüksiz däl. **13.** 1)  $f(1) = 3/2$ . 2)  $f(0) = 1$ .
- 14.** 1)  $x = -3$  ikinji görnüşli üzülmek nokat. 2)  $x = -3$ ,  $x = 3$  ikinji görnüşli üzülmek nokatlar. 3)  $x = -1$  ikinji görnüşli üzülmek nokat. **15.** 1)  $x = 2$ ,  $f(2+0) - f(2-0) = 1$ . 2)  $x = 1$ ,  $f(1+0) - f(1-0) = 4$ .

## II. 4. DIFFERENSIRLENÝÄN FUNKSIÝALAR HAKYNDAKY ESASY TEOREMALAR

### § 4. 1. Funksiýanyň orta bahasy hakyndaky teoremler

**1. Önümiň noly hakyndaky teoremler.** Eger  $f'(c) = 0$  deňlik ýerine ýetse, onda  $c$  sana  $f'(x)$  önümiň noly ýada köki diýilýär.

**Fermanyň teoremy.** Eger  $(a, b)$  aralykda kesgitlenen  $f$  funksiýa  $c \in (a, b)$  nokatda differensirlenýän bolup, şol nokatda iň kiçi ýa-da iň uly bahany alsa, onda  $f'(c) = 0$ .

◁ Kesgitlilik üçin  $f$  funksiýa  $c$  nokatda iň uly bahany alýan bolsun, ýagny  $\forall x \in U(c)$  üçin  $f(x) \leq f(c)$ . Onda  $\Delta x > 0$  üçin

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad (1)$$

we  $\Delta x < 0$  üçin

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0. \quad (2)$$

$f$  funksiýanyň  $c$  nokatda differensirlenýänligi esasynda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \quad (3)$$

predel bardyr. Şonuň üçin (1) we (2) deňsizliklerde  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda predele geçip, deňsizlikde  $f'(c) \leq 0$  we  $f'(c) \geq 0$  deňsizlikleri alarys.

Olardan bolsa  $f'(c) = 0$  deňlik gelip çykýar. ▷

Önümiň geometrik manysynyň esasynda, funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahany alýan nokadynda funksiýanyň önüminiň nola deň bolmagy  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysyna  $(c, f(c))$  nokatda geçirilen galtaşmanyň  $ox$  oka paralleldigini aňladýar we ol bu teoremanyň geometrik manysyny görkezýär (1-nji surat). Bu teoremanyň fiziki manysy göni çyzyk boýunça hereket edilip, yzyna gaýdylyp başlanjak pursatda tizligiň nola deňdigini, ýagny hereketiň ýokdugyny aňladýar. Şoňa görä  $c$  nokada funksiýanyň duruw nokady hem diýilýär.

$$\begin{aligned}
& 6) x^2 - \frac{9}{x^4}. \quad 7) \frac{2}{5}. \quad 8) 6x^2 - 2x. \quad 9) 20x^4 - 15x^2 + 24x. \\
& 10) (x-5)^3 (x+3)^4 (9x-13). \quad 11) \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}. \quad 12) -\frac{x^4 - 15x^2 + 6x}{(5-2x)^4}. \\
& 13) \frac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}. \quad 14) \frac{(3x^2+5)^2(30x^2-54x-10)}{(2x-3)^2}. \quad 15) -\frac{30x^2}{(x^3+5)^6}. \\
& 16) \frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}. \quad 17) -\frac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}. \quad 18) \frac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}. \\
& 19) 3\sin^2 x \cos x. \quad 20) 2x \cos x^2. \quad 21) -\frac{\sin x}{2}. \quad 22) -\frac{3}{2}x^2 \sin \frac{x^3}{2}. \\
& 23) x(2\cos x - x\sin x). \quad 24) \frac{5\cos x - \cos 5x}{2\cos^2 3x}. \quad 25) x^2 \cos x. \quad 26) \frac{1}{1-\sin x}. \\
& 27) \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}. \quad 28) \frac{8xtg^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}. \quad 29) -\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}. \quad 30) -tg^2 x. \\
& 31) -\frac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}. \quad 32) -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}. \quad 33) \frac{2\ln x}{x}. \quad 34) \frac{2}{x} + \frac{\ln x - 2}{x^2}. \\
& 35) \frac{1}{\sin x}. \quad 36) \frac{2}{x}. \quad 37) xe^x. \quad 38) \frac{x^2}{2}e^{x/2}. \quad 39) e^{x\ln x}(1+\ln x) \\
& 40) \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad 41) (2x + x^2 \ln 2)2^x. \quad 42) \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \\
& 43) 2tg^2 2x(3-2\sin^2 2x). \quad 44) -\frac{x}{1+x}. \quad 45) \frac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}. \\
& 46) \frac{x^2}{1+x^2}. \quad 47) \sqrt{1-x^2}. \quad 48) \frac{1}{1-x^4}. \quad 49) -\frac{1}{(x+1)^2}ctg \frac{2x+4}{x+1}. \\
& 50) \frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}. \quad 51) \frac{1}{e^x+1}. \quad 52) -\frac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}. \quad 53) \sqrt{a^2-x^2}. \\
& 54) \frac{1}{2x^2+6x+7}. \quad 55) \frac{6}{4+9x^2}. \quad 56) \frac{1}{x^2+5x}. \quad 57) \frac{1}{4(x^2-1)}.
\end{aligned}$$

## II. 3. FUNKSIÝANYŇ ÖNÜMI WE DIFFERENSIALY

### § 3.1. Eunksiýanyň önümi

**1. Funksiýanyň önümi düşünjesi.** Funksiýanyň predeli düşünjesi bilen ýakyn baglanyşykda bolan ýene bir wajyp düşünjeleriň biri-de funksiýanyň önümi düşünjesidir.

Goý,  $y = f(x)$  funksiýa  $x$  nokadyň käbir  $U(x)$  etrabynda kesgitlenen bolup,  $x$  üýtgeýäniň  $\Delta x$  artymy üçin  $x + \Delta x \in U(x)$  bolsun.  $y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  artymynyň üýtgeýäniň  $\Delta x$  artymyna bolan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

gatnaşygyna garalyň.

**1-nji kesgitleme.** Eger (1) gatnaşygyň  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele  $y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky önümi diýilýär.

$y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky önümi  $f'(x)$  bilen, ýa-da  $y'(x)$  bilen, ýa-da gysgaça  $y'$  bilen belgilenilýär.

Diýmek, önümiň kesgitlemesi boýunça

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Kesgitlemeden peýdalanyň, mysal hökmünde käbir elementar funksiýalaryň önümlerini tapalyň.

**1-nji mysal.**  $f(x) = C$  – hemişelik funksiýa.

Islendik  $x$  we  $\Delta x$  üçin bu funksiýanyň artymy nola deňdir, ýagny  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$ . Onda (2) formula esasynda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad C' = 0.$$

Şeýlelikde, hemişelik funksiýanyň önümi nola deňdir.

**2-nji mysal.**  $f(x) = x^p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

Bu funksiýa üçin  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^p - x^p$ . Şonuň üçin hem (2) formula esasynda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^p - x^p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^p \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^p - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^{p-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^p - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{p-1} \cdot p = px^{p-1}, \quad (x^p)' = px^{p-1}.$$

Bu formuladan hususy hal hökmünde

$$x' = 1, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

formulalar alynýar.

Funksiýanyň nokatdaky sag we çep predelleri düşüňjelerinden peýdalanyň, funksiýanyň nokatdaky sag we çep önümleri düşüňjelerini girizeliň.

**2-nji kesgitleme.** Eger (1) gatnaşygyň  $\Delta x \rightarrow +0$  ( $\Delta x \rightarrow -0$ ) bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele  $y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky sag (çep) önümi diýilýär.

$y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky sag (çep) önümi  $f'_+(x)$  ( $f'_-(x)$ ) bilen belgilenilýär. Diýmek, kesgitlemä görä,

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \left( f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Bu önümlere birtaraplaýyn önümler diýilýär. Olar  $f'(x+0)$  we  $f'(x-0)$  görnüşde hem belgilenilýär.

1-nji we 2-nji kesgitlemelerden hem-de funksiýanyň birtaraplaýyn predelleriniň häsiýetleri esasynda aşakdaky tassyklamlar alynýar.

1. Eger  $f$  funksiýanyň  $x$  nokatda önümi bar bolsa, onda onuň  $x$  nokatda sag önümi hem, çep önümi hem bardyr we olar deňdirler:

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x).$$

2. Eger  $f$  funksiýanyň  $x$  nokatda sag we çep önümleri bar bolup, olar deň bolsalar, onda ol funksiýanyň  $x$  nokatda önümi bardyr we ol önümleriň hemmesi deňdirler.

11. Herekete başlanyndan soň  $t$  wagtda (sekuntda) geçen ýoly (metr)  $s = 1,5t^2 + 2t + 125$  deňleme bilen berlen liftiň wagtyň  $t = 2$  pursatdaky tizligini tapmaly.

12. Funksiýalaryň ikinji tertipli önümini tapmaly:

$$1) y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 1. \quad 2) y = x \ln x. \quad 3) y = e^{\cos x}.$$

$$4) y = \sin 2x. \quad 5) y = \arctg x. \quad 6) y = x + \sqrt{4-x}.$$

13. Funksiýalaryň üçünji tertipli önümini tapmaly:

$$1) y = 2x^3 - 3x^2 + 1. \quad 2) y = e^{2x}. \quad 3) y = x^3 \ln x. \quad 4) y = xe^{-x}.$$

14. Funksiýalaryň dördünji tertipli önümini tapmaly:

$$1) y = x^3 + 3x^2 + 1. \quad 2) y = e^x + x^4.$$

15. Parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň birinji we ikinji önümlerini tapmaly:

$$1) x = t^2, y = t^2/3 - t. \quad 2) x = e^{2t}, y = e^{3t}.$$

$$3) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

16. Anyk däl görnüşde berlen funksiýalaryň önümini tapmaly:

$$1) x^2 + 5xy + y^2 - 7 = 0. \quad 2) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}. \quad 3) y^2 + xy + \sin y = 0.$$

17. Funksiýalaryň differensialyny tapmaly:

$$1) y = \arctg \frac{1}{x}. \quad 2) y = (\arcsin x)^2. \quad 3) y = \sqrt{1 + \sin^2 x}.$$

$$4) y = \frac{\arctg x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 5) y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}. \quad 6) y = \arccos(2^x).$$

18. Differensialyň kömegi bilen funksiýalaryň takmyn bahasyny tapmaly:

$$1) \sqrt{1,006}. \quad 2) \sqrt[3]{9}. \quad 3) (1,03)^5. \quad 4) e^{0,1}. \quad 5) \cos 61^\circ. \quad 6) \lg 10,21.$$

19.  $y = 4^{-x^2}$  funksiýanyň ikinji tertipli differensialyny tapmaly.

## J o g a p l a r

$$1. 1) 3. \quad 2) -2x. \quad 3) 8(4x-1). \quad 4) x^2. \quad 5) -\frac{1}{(x-3)^2}. \quad 6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2. 1) -6x^2. \quad 2) -\frac{2}{x^2}. \quad 3) -\frac{6x}{(x^2-1)^2}. \quad 4) -\frac{2}{x^3}. \quad 5) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

$$50) y = \arcsin(e^{x^2}).$$

$$51) y = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot \left\langle y' = \frac{1}{e^x + 1} \right\rangle$$

$$52) y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}.$$

$$53) y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$54) y = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{5}}.$$

$$55) y = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} x.$$

$$56) y = \ln \sqrt[5]{\frac{x}{x+5}}.$$

$$57) y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$58) y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$

$$59) y = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

$$60) y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$61) y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}. \quad 62) y = \arcsin \frac{x-2}{3}.$$

3.  $y = x^2$  egri çyzyga  $A(2; 4)$  nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini ýazmaly.

4.  $y = \sin x$  sinusoida  $A(\pi; 0)$  nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini ýazmaly.

5.  $y = 5 - 3x^2$  egri çyzyga absissasy  $x = -2$  bolan nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentini tapmaly.

6.  $y^2 = x$  parabola  $A(8; 4)$  nokatda geçirilen normalyň deňlemesini ýazmaly.

7.  $x^2 + y^2 = 25$  töwerege  $A(3; -4)$  nokatda geçirilen normalyň deňlemesini ýazmaly.

8. Nokadyň hereketiniň  $x = t - \sin t$  deňlemesi boýunça onuň tizligini kesgitlemeli.

9. Hereketiniň kanyyny  $s = t^2 - 3t + 5$  deňleme bilen berlen nokadyň wagtyň  $t = 2$  pursatdaky a) geçen ýoluny we b) tizligini tapmaly.

10. Hereketiniň kanuny  $s = 4t^2 - 3$  deňleme bilen berlen jisimiň wagtyň  $t = 2$  pursatdaky tizligini tapmaly.

3. Eger  $f$  funksiýanyň  $x$  nokatda sag we çep önümleri bar bolup, olar deň bolmasalar, onda  $x$  nokatda onuň önümi ýokdur.

**3-nji mysal.**  $f(x) = |x|$ .

Eger  $x > 0$  bolsa, onda  $f(x) = x$  bolar we şonuň üçin 2-nji mysal esasynda  $|x'| = 1$ . Şuňa meňzeşlikde  $x < 0$  bolanda  $|x'| = -1$ . Eger-de  $x = 0$  bolsa, onda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

deňlik esasynda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(-\Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

Diýmek,  $f(x) = |x|$  funksiýanyň  $x = 0$  nokatdaky sag önümi 1 we çep önümi  $-1$  bolýandyr. Şoňa görä, 3-nji tassyklama esasynda  $f(x) = |x|$  funksiýanyň  $x = 0$  nokatda önümi ýokdur.

Eger käbir  $x$  nokatda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = +\infty \quad \text{ýa-da} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\infty$$

predel bar bolsa, onda funksiýanyň  $+\infty$  ýa-da  $-\infty$  deň bolan tükeniksiz önümi bar diýilýär. Geljekde funksiýanyň önümi bar diýip tükenikli önüme düşünjekdiris

**2. Önümiň fiziki manysy.** Goý, material nokat göni çyzyk boýunça hereket edýän bolup,  $y = f(x)$  şol nokadyň hereketiniň kanunyny, ýagny  $t = 0$  wagtdan  $t = x$  wagt aralygynda geçen ýoluny aňlatsyn. Onda  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  tapawut  $t = x$  wagtdan  $t = x + \Delta x$  wagt aralygynda, ýagny  $\Delta x$  wagtda geçilen ýoly aňladýar. Şonuň üçin hem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = v_{or} \quad (3)$$

gatnaşyk material nokadyň şol wagt aralygyndaky ortaça tizligidir. Eger hereket deňölçepli bolmasa, onda bellenen  $x$  üçin  $\Delta x$  ululygyň üýtgemegi bilen ortaça  $v_{or}$  tizlik hem üýtgär we  $\Delta x$  näçe kiçi boldugyça  $v_{or}$  tizlik nokadyň  $x$  pursatdaky hereketini şonça oňat häsiýetlendirir.

Eger (3) gatnaşygyň, ýagny ortaça tizligiň  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele material nokadyň  $x$  pursatdaky tizligi diýilýär. Diýmek,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = v. \quad (4)$$

Ýöne bu predel  $f$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky önümini hem aňladýar.

Şeýlelikde,  $f'(x) = v$  we ol deňlik önümiň mehaniki manysyny aňladýar. Diýmek,  $x$  nokatda funksiýanyň  $f'(x)$  önüminiň barlyk meselesi material nokadyň  $x$  pursatdaky tizligini kesgitlemek meselesidir.

**2. Önümiň himiki manysy.** Goý,  $y = f(x)$  himiki reaksiýa geçýän jisimiň  $x$  pursatdaky mukdaryny aňladýan bolsun. Onda  $\Delta x$  wagt aralygynda himiki reaksiýa geçýän jisimiň mukdary  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  bolar. Şoňa görä  $\Delta y / \Delta x$  gatnaşyk  $\Delta x$  wagt aralygyndaky himiki reaksiýanyň ortaça tizligidir. Ol gatnaşygyň (4) predeline bolsa himiki reaksiýanyň  $x$  pursatdaky tizligi diýilýär. Ol predel  $f$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky önümini hem aňladýar, ýagny  $f'(x) = v$ . Ol deňlik önümiň himiki manysyny aňladýar we himiki reaksiýanyň tizligini tapmak meselesiniň önüm düşünjesine getirýändigini görkezýär.

**3. Önümiň geometrik manysy.** Goý,  $y = f(x)$  funksiýa  $x_o$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen we üznüksiz bolsun. Ol funksiýanyň çyzgysyndaky  $A(x_o, y_o)$  ( $y_o = f(x_o)$ ) we  $B(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$  nokatlar arkaly kesiji göni çyzyk geçireliň. Onuň  $Ox$  oky bilen emele getirýän burçuny  $\beta = \beta(\Delta x)$  bilen belgiläliň (1-nji surat). Eger  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = \alpha$  predel bar bolsa, onda  $k = \operatorname{tg} \alpha$  burç koeffisiýentli  $AC$  göni çyzyga  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysyna  $A$  nokatda geçirilen galtaşma diýilýär. 1-nji surat esasynda

$$\operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \frac{BD}{AD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}, \quad (5)$$

ýagny  $\beta(\Delta x) = \arctg(\Delta y / \Delta x)$ . Eger  $f$  funksiýanyň  $x_o$  nokatda önümi bar bolsa, onda arktangensiň üznüksizligi sebäpli,

- 4)  $y = \frac{1}{x^2}$ . 5)  $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5$ . 6)  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}$ .  
 7)  $y = \frac{2x+1}{5}$ . 8)  $y = x^2(2x-1)$ . 9)  $y = (x^3+3)(4x^2-5)$ .  
 10)  $y = (x-5)^4(x+3)^5$ . 11)  $y = (x-1)\sqrt{x}$ . 12)  $y = \frac{x^3-3}{5-x^2}$ .  
 13)  $y = \frac{5x}{(5-2x)^3}$ . 14)  $y = \frac{(3x^2+5)^3}{2x-3}$ . 15)  $y = \frac{2}{(x^3+5)^5}$ .  
 16)  $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$ . 17)  $y = \frac{5}{\sqrt{x^2+4}}$ . 18)  $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ .  
 19)  $y = \sin^3 x$ . 20)  $y = \sin x^2$ . 21)  $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ .  
 22)  $y = \cos \frac{x^3}{2}$ . 23)  $y = x^2 \cos x$ . 24)  $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ .  
 25)  $y = (x^2-2)\sin x + 2x \cos x$ . 26)  $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ . 27)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .  
 28)  $y = \operatorname{tg}^4(x^2+1)$ . 29)  $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$ . 30)  $y = x - \operatorname{tg} x$ .  
 31)  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$ . 32)  $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$ . 33)  $y = \ln^2 x$ .  
 34)  $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$ . 35)  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . 36)  $y = \ln x^2$ .  
 37)  $y = (x-1)e^x$ . 38)  $y = (x^2-4x+8)e^{x/2}$ . 39)  $y = e^{x \ln x}$ .  
 40)  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . 41)  $y = x^2 2^x$ . 42)  $y = e^{\sqrt{x}}$ .  
 43)  $y = \operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x$ . 44)  $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$ . 45)  $y = \ln \frac{x^3-9}{x^3-1}$ .  
 46)  $y = x - \operatorname{arctg} x$ . 47)  $y = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$ .  
 48)  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ . 49)  $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$ .



$$dy = f'(x)dx \quad (31)$$

formula boýunça kesgitlenilýär we oňa funksiýanyň  $x$  nokatdaky birinji differensialy ýa-da birinji tertipli differensialy diýilýär. Ol differensial  $x$ -e görä funksiýadyr. Eger onuň hem  $x$  nokatda differensialy bar bolsa, onda şol differensiala  $y = y(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky ikinji differensialy diýilýär we ol  $d^2 y$  ýa-da  $d^2 f(x)$  bilen belgilenýär

Şeýlelikde,

$$d^2 y = d(dy) \quad \text{ýa-da} \quad d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Sunlukda,

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx^2 \quad (dx^2 = (dx)^2).$$

Şuňa meňzeşlikde,  $y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky  $n$  tertipli  $d^n y$  differensialy  $d^{n-1} y$  differensialyň differensialyna deňdir, ýagny

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

$y = f(x)$  funksiýanyň  $n$  tertipli  $d^n y$  differensialy üçin

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad (32)$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar. Bu deňlikden önüm üçin

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (33)$$

deňligi alarys. Görkezilen deňlikler diňe baglanyşyksyz üýtgeýän  $x$  üçin dogry bolup,  $x = x(t)$  funksiýa bolan haly üçin ýerine ýetýän däldir.

## G ö n ü k m e l e r

1. Kesgitlemeden peýdalanyň, funksiýalaryň önümini tapmaly:

$$1) y = 3x. \quad 2) y = 8 - x^2. \quad 3) y = (4x - 1)^2.$$

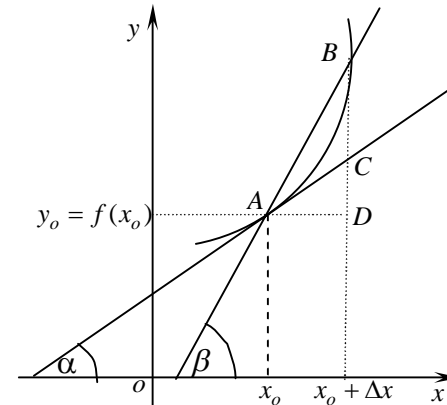
$$4) y = \frac{x^3}{3}. \quad 5) y = \frac{1}{x-3}. \quad 6) y = \sqrt{1+x^2}.$$

2. Funksiýalaryň önümini tapmaly:

$$1) y = 1 - 2x^3. \quad 2) y = \frac{x+2}{x}. \quad 3) y = \frac{3}{x^2-1}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arctg\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctg f'(x_0)$$

deňligi alarys. Diýmek, çyzgynyň  $A$  nokadynda galtaşma bardyr we  $\alpha = \arctg f'(x_0)$ , ýagny galtaşmanyň  $tg \alpha = k$  burç koeffisiýenti  $f'(x_0)$



1-nji surat

önüme deňdir:  $tg \alpha = f'(x_0)$  we ol önümiň geometrik manysyny aňladýar.

Şeýlelikde, egri çyzyga galtaşma geçirmek meseläniň hem önüm düşünjesine getirýändigini gördük.

Indi  $x_0$  nokatda önümi bar bolan  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigine  $A(x_0, y_0)$  nokatda geçirilen galtaşmanyň

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  we normalyň

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

deňlemelerini ýazyp bileris.

## § 3. 2. Funksiýanyň differensirlenmegi

1. Differensirlenmegiň üznüksizlik bilen baglanyşygy. Eger  $x$  nokatda funksiýanyň önümi bar bolsa, onda oňa şol nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. Şoňa görä funksiýanyň önümini tapmaklyga differensirlmek hem diýilýär.  $x$  nokatda differensirlenýän  $f$  funksiýa üçin (2) deňlik ýerine ýetýändir we predeliň häsiýeti esasynda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

deňligi hem-de ondan gelip çykýan

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (6)$$

deňligi ýazyp bileris, bu ýerde  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ .

**1-nji teorema.** Eger  $f$  funksiýa  $x$  nokatda differensirlenýän bolsa, onda ol funksiýa şol nokatda üznüksizdir.

◁  $x$  nokatda differensirlenýän  $y = f(x)$  funksiýanyň  $\Delta y$  artymy üçin (6) ýerine ýetýändir we şonuň üçin hem  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , ýagny funksiýa  $x$  nokatda üznüksizdir. ▷

Bu teoremanyň tersi dogry däldir, ýagny funksiýanyň nokatda üznüksizliginden ol funksiýanyň şol nokatda differensirlenmegi gelip çykmaýar. Oňa  $x = 0$  nokatda üznüksiz, ýöne şol nokatda önümi ýok bolan 3-nji mysaldaky  $y = |x|$  funksiýany mysal görkezmek bolar.

Eger funksiýa käbir aralygyň ähli nokatlarynda differensirlenýän bolsa, onda oňa şol aralykda differensirlenýän funksiýa diýilýär. 1-nji teorema boýunça aralykda differensirlenýän funksiýa şol aralykda üznüksizdir.

**2. Differensirlemegiň esasy düzgünleri.** Funksiýalaryň önümini tapmak üçin, köplenç, aşakdaky teorema ulanylýar.

**2-nji teorema.** Eger  $u = u(x)$  we  $v = v(x)$  funksiýalaryň  $x$  nokatda önümleri bar bolsa, onda şol nokatda  $u \pm v$ ,  $u \cdot v$  we  $u/v$  ( $v(x) \neq 0$  bolanda) funksiýalaryň hem önümleri bardyr hem-de

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (7)$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (8)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (9)$$

formulalar dogrudyr.

◁ Goý,  $y(x) = u(x) \pm v(x)$  bolsun, onda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x) - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= u(x + \Delta x) - u(x) \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v. \end{aligned}$$

Bu ýerden  $\Delta x \neq 0$  bolanda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

deňlik alynýar. Ol deňlikde  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda, predele geçip,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$$

deňligi alarys, ýagny  $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$ .

görnüşde ýazmak bolar. Bu formula  $x$  üýtgeýäne ýakyn bolan bahalar üçin (ýagny ýeterlik kiçi  $\Delta x$  üçin) funksiýanyň bahalaryny (28) deňligiň sag bölegindäki  $\Delta x$  göre çyzykly funksiýa bilen ýakynlaşdyrýar. Ony ulanmak üçin

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (29)$$

görnüşde ýazmaklyk amatlydyr.

**11-nji mysal.**  $f(x) = (1 + x)^\alpha$  funksiýanyň  $x = 0$  nokadyň etrabyndaky takmyn bahasyny tapmaly.

◁ (29) formulany  $f(x) = (1 + x)^\alpha$  funksiýa we  $a = 0$  üçin ulanallyň:

$$(1 + x)^\alpha \approx f(0) + f'(0)x,$$

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = \alpha, \quad f(0) = 1.$$

Şeýlelikde,

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x. \quad (30)$$

**12-nji mysal.**  $\sqrt[3]{27,027}$  aňlatmanyň takmyn bahasyny tapmaly.

◁ Ilki bilen ony  $\sqrt[3]{27,027} = \sqrt[3]{27 + 0,027} = 3\sqrt[3]{1 + 0,001}$  görnüşde ýazyp, soňra  $\sqrt[3]{1 + 0,001} = (1 + 0,001)^{1/3}$  aňlatmany hasaplallyň. Onuň üçin (30)

formulada  $x = 0,001$ ,  $\alpha = 1/3$  goýup,  $(1 + 0,001)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,001 = \frac{3,001}{3}$

takmyn deňligi alarys. Şonuň üçin  $\sqrt[3]{27,027} = 3(1 + 0,001)^{1/3} \approx 3,001$ . ▷

**13-nji mysal.**  $\sin 29^\circ 57'$  aňlatmanyň takmyn bahasyny tapmaly.

◁ Bu aňlatmany tapmak üçin (28) formulany ulanarys. Onuň üçin şol formulada  $f(x)$  funksiýanyň ornunda  $\sin x$  goýup,

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

formulany alarys. Bu formulada  $x = 30^\circ$ ,  $\Delta x = -3^\circ = -\frac{\pi}{3600}$  alsak, onda

$$\sin 29^\circ 57' = \sin\left(30^\circ - \frac{\pi}{3600}\right) \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{3600} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3600} = 0,5 - \frac{\pi\sqrt{3}}{7200} = 0,499237. \quad \triangleright$$

**6. Ýokary tertipli differensiallar.** Mälim bolşy ýaly, eger  $y = y(x)$  funksiýa  $x$  nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň differensialy

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}' dt, \quad dx = \varphi'(t)dt \quad (25)$$

deňlikleri alarys. (14) formula boýunça  $\{f[\varphi(t)]\}' = f'(\varphi) \cdot \varphi'(t)$ . Şonuň üçin (25) deňlikler esasynda

$$dy = f'(\varphi)\varphi'(t)dt = f'(\varphi)dx = f'(x)dx. \quad (26)$$

deňligi alarys. (24) we (26) formulalary deňeşdirip, çylşyrymly  $f[\varphi(t)]$  funksiýanyň hem differensialynyň ýene-de şol bir (24) formula boýunça kesgitlenýändigini görýäris. Funksiýanyň differensialynyň bu häsiýetine differensialyň inwariantlyk häsiýeti diýilýär

Differensialyň inwariantlyk häsiýetini ulanmaklyk çylşyrymly funksiýalaryň differensialyny tapmaklygy ýönekeýleşdirýär. Ony mysalda görkezeliň.

**10-njy mysal.**  $y = \arctg^2 \sqrt{x^2 - 1}$  funksiýanyň differensialyny tapmaly.

$$\begin{aligned} d(\arctg^2 \sqrt{x^2 - 1}) &= 2\arctg \sqrt{x^2 - 1} d(\arctg \sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= 2\arctg \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x^2} d(\sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= 2\arctg \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} d(x^2 - 1) = \\ &= \frac{\arctg \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} 2xdx = \frac{2\arctg \sqrt{x^2 - 1}}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx. \end{aligned}$$

**5.Takmyn hasaplamalarda differensialyň ulanylyşy.** Funksiýanyň differensialy düşüňjesi girizilende  $dy$  differensialyň  $\Delta y$  artyma deň dälidigini görüpdik.  $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  bolýandygy esasynda (24) formulany  $\Delta u - dy = o(\Delta x)$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  görnüşde ýazmak bolar. Şonuň üçin  $\Delta x$ -den ýokary tertipde bolan tükeniksiz kiçi takyklykda

$$\Delta y \approx dy. \quad (27)$$

Bu formula  $y = f(x)$  funksiýanyň  $\Delta y$  artymyny  $dy$  differensialyň takmyn bahasy bilen çalşyrmaklyga mümkinçilik berýär. (22) formulany we  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  deňligi ulanyp, (27) formulany

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (28)$$

Goý, indi  $y(x) = u(x)v(x)$  bolsun, onda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] \end{aligned}$$

Bu ýerden  $\Delta x \neq 0$  bolanda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x + \Delta x) + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (10)$$

deňlik alynýar. 1-nji teorema esasynda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x). \quad (11)$$

Şoňa görä  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda (10) deňlikde predele geçip,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv'$$

deňligi alarys, ýagny  $y' = (uv)' = u'v + uv'$ .

Goý,  $y(x) = u(x)/v(x)$  we  $v(x) \neq 0$  bolsun, onda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)}. \end{aligned}$$

Şeýlelikde,  $\Delta x \neq 0$  bolanda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)}. \quad (12)$$

(11) deňlik esasynda bu deňlikde  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda predele geçip,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

deňdigi alarys, ýagny  $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ . ▷

**1-nji netije.** Hemişelik  $c$  we differensirlenýän  $u$ ,  $v$ ,  $w$  funksiýalar üçin

$$(u + v - w)' = u' + v' - w', \quad (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw',$$

$$(cu)' = cu', \quad \left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{cu'}{u^2}$$

formulalar dogrudyr.

**3. Trigonometrik we logarifm funksiýalaryň önümi.**  $f(x) = \sin x$  funksiýa üçin

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Şoňa görä hem (2) formula we 1-nji ajaýyp predel esasynda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

ýagny  $(\sin x)' = \cos x$ . Şuňa meňzeşlikde  $(\cos x)' = -\sin x$ . Onda (9) formulanyň esasynda  $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$  ( $x \neq \pi/2 + \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ ) we  $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$  ( $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ ) funksiýalaryň önümlerini taparys:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left[ \frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$f(x) = \log_a x$  ( $0 < a \neq 1, x > 0$ ) logarifmik funksiýa üçin

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

bolar. Şoňa görä ikinji ajaýyp predelden we logarifmik funksiýanyň üznüksizliginden peýdalanylýp,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \right] = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

deňligi alarys, ýagny  $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ . Bu ýerden  $a = e$

bolanda  $(\ln x)' = 1/x$  formula alynýar.

deňlik alynýar. Bu deňlikden bolsa önümiň geometrik manysynyň we (22) formula esasynda  $CE = \operatorname{tg} \alpha \Delta x = f'(x) \Delta x = dy$ ,  $dy = f'(x) \Delta x$  deňligi alarys we ol differensialyň geometrik manysyny aňladýar. 2-nji suratdan  $\Delta y \neq dy$  bolýandygy has aýdyň görünýär.

**3. Differensialyň formulasy we düzgünleri.** Eger  $y = x$  bolsa, onda  $dy = dx$  we (22) deňlik esasynda  $dy = x' \Delta x = \Delta x$ , ýagny  $\Delta x = dx$  bolar. Şonuň üçin (22) formula

$$dy = f'(x) dx \quad (24)$$

görnüşde ýazylar we ol  $y = f(x)$  funksiýanyň differensialyny tapmak üçin esasy formuladyr.

(24) formula esasynda (8), (9), (10) formulalardan peýdalanylýp, differensialy tapmaklygyň esasy düzgünlerini görkezeliň:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = (u' \pm v') dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u'v + uv') dx = vu' dx + uv' dx = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vu' dx - uv' dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Hemişelik  $u = c$  funksiýa üçin (24) formulanyň esasynda  $du = dc = 0$  we soňky iki formulalardan aşakdakylar alynýar:

$$d(cv) = cdv, \quad d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{cdv}{v^2}$$

**9-njy mysal.**  $y = \sqrt{x} \sin x$  funksiýanyň differensialyny tapmaly.

◁ Differensialyň düzgünlerinden, (24) formuladan we önümiň tablisasyndan peýdalanylýp, differensialy taparys:

$$\begin{aligned} dy &= \sqrt{x} d(\sin x) + \sin x d(\sqrt{x}) = \sqrt{x} (\sin x)' dx + \sin x (\sqrt{x})' dx = \\ &= \sqrt{x} \cos x dx + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} dx. \triangleright \end{aligned}$$

**4. Çylşyrymly funksiýanyň differensialy.** Eger  $y = f(x)$ ,  $x = \varphi(t)$  özleriniň üýtgeýänlerine görä differensirlenýän funksiýalar bolsa, onda  $y = f[\varphi(t)]$  funksiýa  $t$  görä çylşyrymly funksiýadyr. Şoňa görä (24) formulany ulanylýp,

**1. Differensial düşünjesi.** Eger  $y = f(x)$  funksiýa  $x$  nokatda differensirlenýän bolsa, onda (6) deňlikden görnüşi ýaly, onuň şol nokatdaky artymy

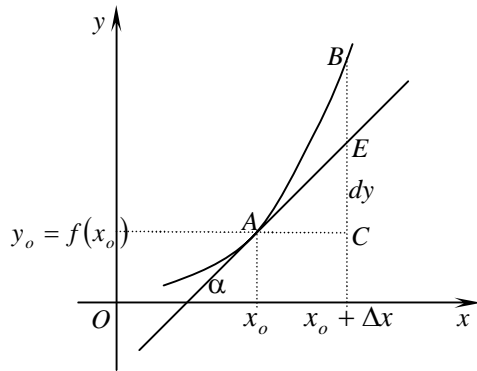
$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (21)$$

görnüşde aňladylyar. Şunlukda, bu deňligiň sag bölegindäki goşulyjylaryň ikisi hem  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda tükeniksiz kiçidir, ýöne

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)} = 0$$

deňlikden görnüşi ýaly, ikinji goşulyjy birinjä görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr. Şol sebäpli  $f'(x)\Delta x$  goşulyja differensirlenýän funksiýanyň  $\Delta y$  artymynyň baş bölegi diýilýär.

**Kesgitleme.**  $y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky artymynyň baş bölegine şol funksiýanyň  $x$  nokatdaky differensialy diýilýär we  $dy$  ýa-da  $df(x)$  bilen belgilenilýär.



2-nji surat

Şeýlelikde, eger  $y = f(x)$  funksiýa  $x$  nokatda differensirlenýän bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (22)$$

Bu formulanyň esasynda (21) deňligi

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (23)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden görnüşi ýaly  $\Delta y \neq dy$ .

## 2. Differensialyň

**geometrik manysy.** Ony görkezmek üçin  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysynda  $A(x_0, y_0)$  we  $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  nokatlary alyp,  $A$  nokatda çyzga galtaşma geçireliň. Onda 2-nji suratdan görnüşi ýaly,  $\Delta x$  artyma deňişli  $\Delta y$  artym  $CB$  kesimiň ululygyna,  $dy$  differensial bolsa  $CE$  kesimiň ululygyna deňdir, çünki  $\triangle ACE$  - den

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{\Delta x}$$

## § 3. 3. Ters we çylşyrymly funksiýanyň önümi

**1. Ters funksiýanyň önümi.** Goý,  $y = f(x)$  we  $x = g(y)$  özara ters funksiýalar bolsun.

**3-nji teorema.** Eger  $y = f(x)$  we  $x = g(y)$  differensirlenýän özara ters funksiýalar bolup,  $f'(x) \neq 0$  bolsa, onda olaryň önümleri üçin

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (13)$$

formula dogrudyr.

◁ Differensirlenýän funksiýalar üçin  $(\Delta x \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\Delta y \rightarrow 0)$ . Şoňa görä

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

deňlikde predele geçip, (13) deňligi alarys. ▷

**2. Ters trigonometrik we görkezijili funksiýalaryň önümi.** Mälim bolşy ýaly,  $y = \arcsin x$  ( $-1 < x < 1$ ) funksiýa  $x = \sin y$  ( $-\pi/2 < y < \pi/2$ ) funksiýanyň ters funksiýasydyr we  $(\sin y)' = \cos y \neq 0$ . Şoňa görä 3-nji teorema esasynda

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Edil şuna meňzeşlikde

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$y = \arctg x$  funksiýanyň bolsa  $x = \operatorname{tg} y$  funksiýa üçin ters funksiýa

bolýandygy sebäpli,  $(\operatorname{tg} y)' = 1/\cos^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$  deňlik we (13) formula esasynda

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Edil şonuň ýaly

$$(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-1/\sin^2 y} = \frac{1}{-(1 + \operatorname{ctg}^2 y)} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

$y = a^x (0 < a \neq 1)$  görkezijili funksiýanyň  $x = \log_a y$  logarifmik funksiýanyň ters funksiýasydygy esasynda 3-nji teorema boýunça

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{(\log_a e)/y} = \frac{y}{\log_a e} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Bu formuladan  $(e^x)' = e^x$  formulany alarys.

**3. Çylşyrymly funksiýanyň önümi.** Bu funksiýanyň önümini tapmak aşakdaky teorema esaslanýar.

**4-nji teorema.** Eger  $u = \varphi(x)$  we  $y = f(u)$  funksiýalar özleriniň üýtgeýänlerine görä diferensirlenýän bolsa, onda  $y = f[\varphi(x)]$  çylşyrymly funksiýanyň önümi üçin

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x) \quad (y'_x = f'_u \cdot u'_x) \quad (14)$$

formula dogrudyr.

◁  $y = f(u)$  funksiýanyň  $u$  boýunça differensirlenýändigine üçin, (6) deňlik esasynda

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha(\Delta u) \Delta u. \quad (15)$$

Bu deňligi  $\Delta x \neq 0$  bölüp, ony

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (16)$$

görnüşde ýazmak bolar.  $u = \varphi(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatda önüminiň barlygyndan onuň şol nokatda üznüksizligi gelip çykýar, ýagny  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda,  $\Delta u \rightarrow 0$  bolar we şonuň esasynda  $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$ . Şonuň üçin (16) deňlikde  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda predele geçip,  $y = f[\varphi(x)]$  çylşyrymly funksiýa üçin (14) formulany alarys. ▷

**4-nji mysal.**  $y = \sin(5x - 7)$  funksiýanyň önümini tapmaly.

◁ Eger berlen funksiýany  $y = \sin u$ ,  $u = 5x - 7$  görnüşde ýazsak, onda  $y'(u) = \cos u = \cos(5x - 7)$ ,  $u'(x) = 5$  deňlikleriň esasynda (14) formula boýunça  $y'(x) = \cos(5x - 7) \cdot 5 = 5 \cos(5x - 7)$ . ▷

Eger  $y = y(x)$  funksiýa  $F(x, y) = 0$  deňleme arkaly anyk däl görnüşde berlen bolsa, onda  $F(x, y)$  funksiýa  $x$  ululyga görä çylşyrymly funksiýa hökmünde garap,  $y' = y'(x)$  önümi  $[F(x, y)]' = 0$  deňlemeden tapmak bolar.

funksiýany kesgitleýän bolsa, onda ol deňlemäniň iki bölegini hem differensirläp,  $y'(x)$  önümiň nähili tapylýandygy bize ozaldan mälimdir. Şonuň üçin differensirlenip alnan deňligi ýene bir gezek differensirläp we alnan deňlemede birinji önümiň bahasyny goýup, funksiýanyň ikinji önümini tapmak bolar.

**13-njy mysal.** Anyk däl  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  deňleme arkaly

kesgitlenýän  $y = y(x)$  funksiýanyň ikinji önümini tapmaly.

◁ Çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, deňligiň iki bölegini hem differensirläliň we birinji önümi tapalyň:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} y' = 0, \quad y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Differensirlenip alnan deňligi ýene bir gezek differensirläliň we birinji önümiň bahasyny deňlemede goýup, ikinji önümi tapalyň:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} y'^2 - \frac{y}{b^2} y'' &= 0, \\ y'' &= \frac{1}{y} \left( \frac{b^2}{a^2} - y'^2 \right) = \frac{1}{y} \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^4} \frac{x^2}{y^2} \right) = \\ &= -\frac{b^4}{a^2 y^3} \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Parametrik görnüşde  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  deňlikler arkaly berlen funksiýanyň birinji önümi (19) formula bilen tapylýar. Şol formuladan hem-de çylşyrymly we ters funksiýalaryň önümleri tapylýan formulalardan peýdalanyp ikinji önümi taparys:

$$y''(x) = \left[ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]_x' = \frac{\left[ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]_t'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

Bu önümden peýdalanyp funksiýanyň üçünji we soňky önümleri tapylýar.

### § 3. 5. Funksiýanyň differensialy

$y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatdaky ikinji (ýa-da ikinji tertipli) önümi diýilýär, Ikinji önümiň önümine üçünji tertipli önüm diýilýär we ş.m. Ikinjiden başlap ähli önümlere ýokary tertipli önümler diýilýär we

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots \text{ ýa-da } f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots$$

bilen belgilenýär.

Umuman,  $y = f(x)$  funksiýanyň  $f^{(n-1)}(x)$  önüminiň birinji önümine ol funksiýanyň  $n$ -nji önümi ýa-da  $n$  tertipli önümi diýilýär:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Funksiýanyň nolunjy önümi diýlip funksiýanyň özüne düşünilýändigini belläliň. Ýokary tertipli önümler fizikada we beýleki ylmlarda giňişleýin ulanylýandyr. Mysal hökmünde, ikinji önümiň mehaniki manysyny görkezeliň.

Eger  $y = f(x)$  funksiýa material nokadyň göni çyzyk boýunça hereketini aňladýan bolsa, onda  $f'(x)$  önümiň material nokadyň  $x$  pursatdaky tizligidigini ýokarda görüpdik. Şonuň üçin funksiýanyň  $f''(x)$  ikinji önümi tizligiň üýtgeýiş tizligi bolar, ýagny hereket edýän material nokadyň  $x$  pursatdaky tizlenmesidir.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, ýokary tertipli önümleri tapmaklyk üçin diňe birinji tertipli önümleri tapmaklygy başarmalydyr.

**8-nji nysal.**  $f(x) = \cos x$  funksiýanyň  $n$ -nji önümi üçin

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n(\pi/2)) \quad (20)$$

formulany subut etmeli.

◁  $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$  deňlik (20) formulanyň  $n = 1$  üçin dogrudygyny görkezýär. Goý, ol formula  $n = k$  üçin dogry bolsun, onda

$$\begin{aligned} (\cos x)^{(k+1)} &= [(\cos x)^{(k)}]' = [\cos(x + k(\pi/2))]' = \\ &= -\sin(x + k(\pi/2)) = \cos(x + (k+1)\pi/2) \end{aligned}$$

deňlik ol formulanyň  $n = k + 1$  bolanda hem dogrudygyny görkezýär. Şonuň üçin matematiki induksiýa usuly esasynda (20) formula  $\forall n \in N$  üçin dogrudyr. ▷

Şuňa meňzeşlikde,  $\forall n \in N$  üçin  $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n(\pi/2))$  deňligi subut etmek bolar.

**2. Anyk däl we parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň ýokary tertipli önümleri.** Eger anyk däl  $F(x, y) = 0$  deňleme käbir  $y = y(x)$

**5-nji mysal.**  $xy + \cos y = 0$  anyk däl deňlemäniň kömegi bilen berlen  $y = y(x)$  funksiýanyň  $y' = y'(x)$  önümini tapmaly.

◁ Deňlemäniň çep bölegine  $x$  ululyga görä çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, (8) we (9) formulalary ulanyp taparys:

$$y + xy' - \sin y \cdot y' = 0, \quad y' = y/(\sin y - x). \quad \triangleright$$

**4. Funksiýanyň logarifmik önümi.** Eger  $x \neq 0$  bolsa, onda

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$$

deňlikleriň esasynda  $(\ln|x|)' = 1/x$  bolar. Bu formulany ulanyp, çylşyrymly  $y = \ln|f(x)|$  funksiýanyň önümini tapalyň. (14) formula esasynda

$$y' = (\ln|f(x)|)' = (\ln|u|)' = \frac{1}{u} u' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (17)$$

Şunlukda,  $(\ln|f(x)|)'$  önüme  $f(x)$  funksiýanyň logarifmik önümi diýilýär we ol (17) formula boýunça tapylýar.

**6-njy mysal.**  $y = x^x$  funksiýanyň önümini tapmaly.

◁ Položitel  $x$  üçin funksiýany logarifmläp, ony  $\ln y = x \ln x$  görnüşde ýazarys. (17) we logarifmiň önüminiň formulasyny ulanyp alarys:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1). \quad \triangleright$$

**5. Giperbolik funksiýalaryň önümi.** Çylşyrymly we görkezijili funksiýalaryň önüminiň formulasy esasynda  $(e^x)' = e^x$ ,  $(e^{-x})' = -e^{-x}$ .

Şoňa görä  $(shx)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ ,

$$(chx)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx,$$

$$(thx)' = \left( \frac{shx}{chx} \right)' = \frac{(shx)' chx - (chx)' shx}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x},$$

$$(cthx)' = \left( \frac{chx}{shx} \right)' = \frac{(chx)' shx - (shx)' chx}{sh^2 x} = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

**6. Funksiýalaryň önüminiň tablisasy.** Funksiýalaryň önümleri tapylan mysallary bir ýere toplaý, önümler üçin şeýle tablisany alarys.

1.  $(C)' = 0, \quad C = const.$
2.  $(x^p)' = px^{p-1}, \quad p \in \mathbf{R}, \quad x > 0$   
 $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}.$
3.  $(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in \mathbf{R}; \quad (e^x)' = e^x.$
4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x > 0.$   
 $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \neq 0.$   
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$
5.  $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}.$
6.  $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$
7.  $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}..$
8.  $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}..$
9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$
10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$
12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$

$$13. (shx)' = chx, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$14. (chx)' = shx, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$15. (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$16. (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$$

**7. Parametrik görnüşdäki funksiýanyň önümi.** Goý,  $x$  we  $y$  ululyklar  $t$  parametriň funksiýasy hökmünde

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (18)$$

görnüşde berlen bolsun. Eger  $\varphi(t)$  we  $\psi(t)$  funksiýalaryň önümleri we  $x = \varphi(t)$  funksiýanyň  $t = g(x)$  ters funksiýasy bar bolsa, onda ters funksiýanyň önümi (13) formula esasynda  $g'(x) = 1/\varphi'(t)$  deňlik boýunça tapylýar. Şoňa görä çylşyrymly  $y = \psi[g(x)]$  funksiýanyň önümi (14) formula boýunça şeýle tapylýar:

$$y'(x) = \{\psi[g(x)]'\} = \psi'(t)g'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (19)$$

**7-nji mysal.** Parametrik görnüşde berlen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

funksiýanyň  $y'(x)$  önümini tapmaly.

◁ Ilki bilen funksiýalaryň  $t$  boýunça önümlerini tapalyň:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t.$$

Şonuň üçin  $y'(x)$  önümi (19) formula boýunça tapmak bolar:

$$y'(x) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}. \quad \triangleright$$

### § 3. 4. Ýokary tertipli önümler

**1. Anyk funksiýanyň ýokary tertipli önümleri.** Eger  $y = f(x)$  funksiýanyň  $x$  nokatda önümi bar bolsa, onda  $f'(x)$  önüme ol funksiýanyň birinji (ýa-da birinji tertipli) önümi diýilýär. Eger ol funksiýanyň  $f'(x)$  önüminiň hem önümi bar bolsa, onda bu önüme



$= -28$ . 3)  $y_{\max} = y(2) = 35/3$ ,  $y_{\min} = y(3) = 23/2$ . 4)  $y_{\min} = y(1/e) = -1/e$ .

5)  $y_{\max} = y(2) = 1/4$ ,  $y_{\min} = y(-2) = -1/4$ . 6)  $y_{\max} = y(0) = 2$ ,  $y_{\min} = y(-1) = 5/12$ ,  $y_{\min} = y(3) = -37/4$ . 7. 1)  $(-\infty, 0)$  aralykda ýokaryk güberçek,  $(0, +\infty)$  aralykda aşak güberçek we  $A(0, 7)$  epin nokady. 2)  $(-\infty, -1)$  we  $(1, +\infty)$  aralyklarda aşak güberçek,  $(-1, 1)$  aralykda ýokaryk güberçek,  $A(-1, -19)$ ,  $B(1, -9)$  epin nokatlary. 3)  $(-\infty, -\sqrt{3})$  we  $(0, \sqrt{3})$  aralyklarda ýokaryk güberçek,  $(-\sqrt{3}, 0)$  we  $(\sqrt{3}, +\infty)$  aralyklarda aşak güberçek,  $A(-\sqrt{3}, 15\sqrt{3} + 2)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(\sqrt{3}, -15\sqrt{3} + 2)$  epin nokatlary. 4)  $(-\infty, -1/\sqrt{3})$  we  $(1/\sqrt{3}, +\infty)$  aralyklarda aşak güberçek,  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  aralykda ýokaryk güberçek,  $A(-1/\sqrt{3}, 4/3)$ ,

$B(1/\sqrt{3}, 4/3)$ , epin nokatlary. 8. 1)  $x = -1$ ,  $x = 1$ . 2)  $x = 0$ ,  $y = -x + 2$ .

3)  $y = -x$ ,  $y = x$ . 4)  $x = 1$ ,  $y = 1$ . 10. 1)  $-19$ ; 9. 2)  $-6$ ; 14. 3)  $-13$ ; 3.

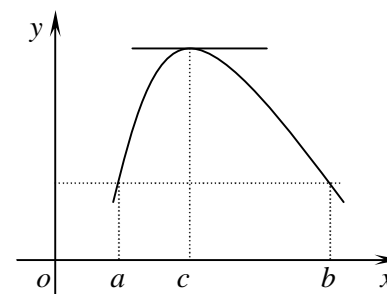
11.  $b = 2a$ . 12. Tarapy  $\sqrt{S}$  bolan kwadrat. 13. Goşulyjylaryň ikisi hem

$a/2$  deň. 14. Äpişgäniň ini  $2p/(4 + \pi)$ . 15. Esasynyň diametri  $\sqrt[3]{V/2\pi}$ .

16. Üçburçlugyň katetleri 2 we 4 deň bolmaly. 17. 1)  $-2,25826$ .

2) 2,13459. 3)  $-0,673593$ . 4) 0,682328.

önüminiň in bolmanda bir köki bardyr.



2-nji surat

ýerine ýetmese, onda onuň tassyklamasy dogry däl. Ony aşakdaky mysal tassyklaýar.

**2-nji mysal.**  $f(x) = |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Bu funksiýa üçin Roluň teoremasynyň  $x = 0$  nokatda differensirlenýär diýlen şertlerinden başgaly ýerine ýetýär. Oňa garamazdan  $(-1, 1)$  aralykda funksiýanyň önüminiň nola deň nokady ýokdur, çünki  $-1 < x < 0$  bolanda  $f'(x) = -1$ ,  $0 < x < 1$  bolanda  $f'(x) = 1$ .  $x = 0$  nokatda bolsa onuň önümi ýokdur.

**2. Orta baha hakyndaky teoremlar.**  $(a, b)$  aralygyň içindeki  $c$  nokat bilen baglanyşykly subut edilýän tassyklamalara orta baha hakyndaky teoremlar diýilýär

**Koşiniň teoremasy.** Goý,  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $f$  we  $g$  funksiýalar onuň hemme içki nokatlarynda differensirlenýän bolup,  $g'(x) \neq 0$  bolsun. Onda  $(a, b) \ni c$  nokat bar bolup,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (4)$$

deňlik ýerine ýetýär.

◁ Iki bilen  $g(b) - g(a) \neq 0$  bolýandygyny görkezeliň. Eger onuň tersine güman etsek, onda  $[a, b]$  kesimde  $g$  funksiýa üçin Roluň teoremasynyň hemme şertleri ýerine yeterdi we şonuň üçin  $(a, b) \ni c$  nokat tapylyp,  $g'(c) = 0$  bolardy. Ol bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Diýmek,  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Şoňa görä

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

funksiýa garap bileris. Teoremanyň şertlerinde bu funksiyá  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýär hem-de

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Ondan başga-da  $F(a) = F(b)$ . Şeýlelikde,  $F$  funksiyá Roluň teoremasynyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar. Sonuň üçin hem  $(a, b) \ni c$  nokat tapylyp,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Bu deňlikden bolsa  $g'(c) \neq 0$  şertin esasynda (4) formulany alarys.  $\triangleright$

Oňa Koşiniň formulasy diýilýär.

Koşiniň teoremasyndan netije hökmünde aşakdaky teoremany alarys.

**Lagranžyň teoremasy.** Goý,  $f$  funksiyá  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän bolsun. Onda  $(a, b) \ni c$  nokat tapylyp,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (5)$$

deňlik yerine ýetýär.

$\triangleleft$  Teoremanyň şertlerinde  $f(x)$  we  $g(x) = x$  funksiýalar Koşiniň teoremasynyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar we şol funksiýalar üçin hem Koşiniň formulasy dogrudyr. Şoňa görä şol formuladan  $g(x) = x$  hususy halda (5) formula gelip çykýar.  $\triangleright$

Oňa Lagranžyň ýa-da tükenikli artymyň formulasy diýilýär. Lagranžyň formulasyny

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

görnüşde ýazyp, onuň çep böleginiň  $A(a, f(a))$  we  $B(b, f(b))$  nokatlardan geçýän kesiji göni çyzygyň burç koeffisiýentidigini, sag böleginiň bolsa  $C(c, f(c))$  nokatda çyzga geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentidigini görýäris. Şonuň esasynda Lagranžyň teoremasynyň geometrik manysy  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän  $y = f(x)$  funksiyanyň çyzgysynda absissasy  $c$  deň bolan nokat bar bolup, şol nokatda çyzga geçirilen galtaşmanyň  $A(a, f(a))$  we  $B(b, f(b))$  nokatlaryny birleşdirýän kesiji göni çyzyga

$$1) y = x^3 + 3x - 5. \quad 2) y = x^3 + 3x^2 - 6. \quad 3) y = x^4 - 2x^2 + 3.$$

**11.** Trapesiýanyň gapdal taraplarynyň we kiçi esasyň uzynlygy  $a$  sana deň. Trapesiýanyň meýdany  $S$  in uly bolar ýaly onuň uly  $b$  tarapyny kesgitlemeli.

**12.** Meýdany  $S$  deň bolan ähli gönüburçluklaryň içinde in kiçi perimetrini tapmaly.

**13.** Položitel  $a$  sany kublarynyň jemi in kiçi bolar ýaly iki goşulyja dagytmaly.

**14.** Yokarsy ýarym töwerek bolan gönüburçluk görnüşdäki äpişgäniň perimetri  $p$  sana deň. In köp ýagtylyk göýbermek üçin äpişgäniň ölçegleri nähili bolmaly?

**15.** Silindrik görnüşli konserwa bankasynyň göwrümi  $V$  deň. Onuň beýikligi we esasyň diametri nähili bolanda ony ýasamaklyga az galaýy sarp ediler?

**16.**  $M(1, 2)$  nokat arkaly göni çyzyk nähili geçirilende onuň birinji kwadrantda kesip alýan üçburçlugynyň meýdany in kiçi bolar?

**17.** Hordalar ýa-da galtaşmalar usulyny ulanyp, deňlemeleriň hakyky köklerini tapmaly:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^3 - 2x + 7 &= 0. & 2) \quad x^3 - 1,96x - 0,89 &= 0. \\ 2) \quad 3) \quad x^3 + 4x + 3 &= 0. & 4) \quad x^3 + x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

### J o g a p l a r

**2.** 1)  $e - 1$ . 2)  $-1$ . 3)  $9/4$ . **4.** 1)  $1/2$ . 2)  $-3$ . 3)  $1/2$ . 4)  $1$ . 5)  $0$ . 6)  $0$ . 7)  $0$ . 8)  $0$ . 9)  $10$ . 11)  $4$ . 12)  $1/e$ . 13)  $1$ . 14)  $e^{-1/8}$ . 15)  $e^{2/\pi}$ . 16)  $2$ . 17)  $1/2$ . **5.** 1)  $(-\infty, -1)$  we  $(1, +\infty)$  aralyklarda kemelýär,  $(-1, 1)$  aralykda artýar. 2)  $(-\infty, 2)$  aralykda kemelýär,  $(2, +\infty)$  aralykda artýar. 3)  $(-1, 1)$  aralykda kemelýär,  $(-\infty, -1)$  we  $(1, +\infty)$  aralyklarda artýar. 4)  $(-1, 0)$  we  $(0, 1)$  aralyklarda kemelýär,  $(-\infty, -1)$  we  $(1, +\infty)$  aralyklarda artýar. **6.** 1)  $y_{\max} = y(1) = 1$ . 2)  $y_{\max} = y(1) = 4$ ,  $y_{\min} = y(5) =$

$$12) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{ctg} x}}. 13) \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}. 14) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \frac{x}{2} \right)^{1/x^2}. 15) \lim_{x \rightarrow 0} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}. 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}.$$

5. Funksiýalaryň kemelýän we artýan aralyklaryny kesgitlemeli:

$$1) y = 3x - x^3. 2) y = x^2 - 4x. 3) y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1. 4) y = 3x + \frac{3}{x} + 5$$

6. Funksiýalaryň ekstremumyny tapmaly:

$$1) y = 2x - x^2. 2) y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3. 3) y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 7.$$

$$4) y = x \ln x. 5) y = \frac{x}{x^2 + 4}. 6) y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2.$$

7. Funksiýalaryň grafikleriniň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny we epin nokatlaryny tapmaly:

$$1) y = x^3 - 6x + 7. 2) y = x^4 - 6x^2 + 5x - 9.$$

$$4) y = x^5 - 10x^3 + 6x + 2. 5) y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

8. Funksiýalaryň grafikleriniň asimptotalaryny tapmaly:

$$1) y = \frac{x}{x^2 - 1}. 2) y = \frac{4 + 2x - x^2}{x}. 3) y = \sqrt{x^2 - 4}. 4) y = e^{\frac{1}{1-x}}.$$

9. Funksiýalary derňemeli we grafiklerini gurmaly:

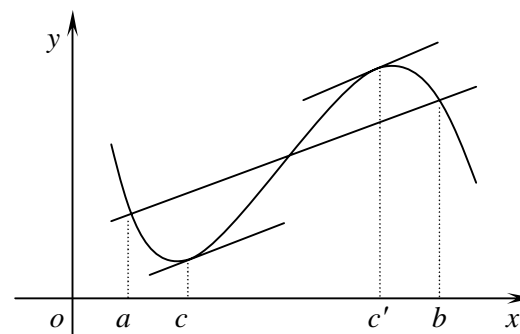
$$1) y = x^3 - 3x + 2. 2) y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1. 3) y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

$$4) y = x^4 - 4x^2 + 3. 5) y = 5x^2 - x^4 - 6. 6) y = x^5 - 5x + 3.$$

$$7) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 3}. 8) y = \frac{x+1}{x^2+1}. 9) y = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

10. Funksiýalaryň  $[-2, 2]$  kesimde iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaly:

paralleldigini aňladýar (3-nji surat).



3-nji surat

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a) \quad (0 < \theta < 1)$$

görnüşde ýazmak bolar.

Lagranžyň teoremasyndan şeýle netijeler gelip çykýar.

**1-nji netije.** Eger  $(a, b)$  aralygyň hemme nokatlarynda  $f$  funksiýanyň önümi nola deň bolsa, onda şol aralykda funksiýa hemişelikdir.

◁  $(a, b)$  aralygyň erkin  $x$  we  $x_0$  nokatlary üçin Lagranžyň teoremasy boýunça  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$  ( $x_0 < c < x$ ) deňlik ýerine ýetýär. Ol deňlikden bolsa  $f'(c) = 0$  şertiň esasynda  $(a, b)$  aralykda  $f(x) = f(x_0)$  deňlik alynýar, ýagny funksiýa şol aralykda hemişelikdir. ▷

**2-nji netije.** Eger  $(a, b)$  aralygyň hemme nokatlarynda  $\varphi$  we  $g$  funksiýalaryň önümleri deň bolsalar, onda şol aralykda olaryň tapawudy hemişelikdir.

◁ Teoremanyň şertlerinde  $(a, b)$  aralykda  $f(x) = \varphi(x) - g(x)$  funksiýa üçin  $f'(x) = 0$  bolar. Şonuň üçin 1-nji netije esasynda şol aralykda  $f(x) = \varphi(x) - g(x) = c$ . ▷

## §4. 2. Lopitalyň kesgitsizlikleri açmak düzgüni

Funksiýalaryň  $f(x)/g(x)$  gatnaşygynyň  $x \rightarrow a$  bolanda predeli tapylanda  $0/0$  we  $\infty/\infty$  görnüşdäki kesgitsizliklere köp duş gelipdik. Bu halda kesgitsizlikleri açmaklygyň ýönekeý usullarynyň biri bolan Lopitalyň düzgünini ulanmak bolar.

**1, Kesgitsizliğin 0/0 görnüşiniň açylyşy.** Bu görnüşdäki kesgitsizligi açmaklyk aşakdaky teorema esaslanýar.

**Lopitalyň teoremasy (düzgüni).** Eger  $f$  we  $g$  funksiýalar  $x=a$  nokadyň käbir etrabynda differensirlenýän bolup, şol nokatda nola deň bolsalar we  $x \rightarrow a$  bolanda  $f'(x)/g'(x)$  gatnaşygyň predeli bar bolsa, onda  $f(x)/g(x)$  gatnaşygyň hem predeli bardyr we

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (6)$$

deňlik dogrudyr.

◁ Goý,  $x \neq a$  nokat  $f$  we  $g$  funksiýalaryň differensirlenýän etrabynda degişli nokat bolsun. Onda Koşiniň teoremasy boýunça  $x$  we  $a$  nokatlaryň arasynda şeýle  $c$  nokat tapylyp,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

deňlik ýerine ýetýär. Şerte görä  $f(a) = g(a) = 0$ . Şonuň üçin ol deňlik

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (7)$$

görnüşli alar.  $c$  nokadyň  $x$  we  $a$  nokatlaryň arasynda ýerleşýändigini üçin  $(x \rightarrow a) \Rightarrow (c \rightarrow a)$ . Şonuň esasynda (7) deňlikde predele geçip,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

deňligi alarys, ýagny (6) subut edildi. ▷

**1-nji bellik.** Bu teorema  $f$  we  $g$  funksiýalar  $x=a$  nokatda kesgitlenmedik bolup,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  deňlik ýerine ýetende hem dogrudyr. Hakykatdan-da, eger  $f$  we  $g$  funksiýalary  $x=a$  nokatda hem üznüksiz bolar ýaly

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

deňlikleri kanagatlandyryýar diýip alsak, onda bu hal ýokarda subut edilen teorema getirilýär.

**2-nji bellik.** Bu teorema  $a = \infty$  bolanda, ýagny

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$n$	$x_{n-1}$	$-x_{n-1} - 4$	$x_n = g(x_{n-1}) = \sqrt[7]{x_{n-1} - 4}$
1	-1,15	-2,85	-1,1614
2	-1,1614	-2,8386	-1,1607
3	-1,1607	-2,8393	-1,1607

Bu tablisadan görnüsi ýaly, deňlemäniň köki  $c = -1,1607$  deňdir. ▷

## G ö n ü k m e l e r

**1.** Funksiýalara  $[-1, 1]$  kesimde Roluň teoremasyny ulanyp bolmaýandygyny subut etmeli:

$$1) y = \sqrt[3]{x}. \quad 2) y = 1 - |x|. \quad 3) y = |\sin x| + x.$$

**2.** Funksiýalara görkezilen kesimde Lagranžyň teoremasyny ulanyp,  $c$  sany kesgitlemeli:

$$1) y = \ln x, x \in [1, e]. \quad 2) y = x - x^3, x \in [-2, 1]. \quad 3) y = \sqrt{x}, x \in [1, 4].$$

**3.**  $3x^5 + 15x - 8 = 0$  deňlemäniň ýeke-täk hakyky kökünüň bardygyny subut etmeli.

**4.** Lopitalyň düzgüninden peýdalanylýan, predelleri tapmaly:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x \quad (n > 0). \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right). \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^4}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x} - 1} \right) \frac{1}{x^2}. \quad 10) \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x). \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{4}.$$

$$c - x_2 = g(c) - g(x_1) = g'(d_1)(c - x_1),$$

$$c - x_3 = g(c) - g(x_2) = g'(d_2)(c - x_2),$$

$$c - x_n = g(c) - g(x_{n-1}) = g'(d_{n-1})(c - x_{n-1})$$

bu ýerde  $d_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ )  $c$  we  $x_{i-1}$ -iň arasyndaky käbir sanlar. Bu deňlikleri agzalaýyn köpeldip we soňra gysgaldyp,

$$c - x_n = (c - x_o)g'(x_o)g'(x_1) \dots g'(x_{n-1})$$

deňligi alarys. Bu deňlikden bolsa (34) şertiň esasynda

$$|c - x_n| \leq |c - x_o|q^n$$

deňsizlik gelip çykyar.  $0 < q < 1$  şertiň esasynda  $\lim q^n = 0$  we şonuň üçin

bu deňsizlikden (35) deňlik gelip çykyar.

**25-nji mysal.** Iterasiýa usuly boýunça  $x^7 + x + 4 = 0$  deňlemäniň hakyky köküni tapmaly.

◁ Deňlemäni  $x^7 = -x - 4$  görnüşde ýazyp we  $p(x) = x^7$ ,  $r(x) = -x - 4$  funksiýalaryň grafikleriniň kesişme nokadyny tapyp, deňlemäniň köküniň  $[-2, -1]$  kesime deňlidigini bilýäris. Deňlemäniň köküni içinde saklaýan uzynlygy kiçi bolan kesimi tapalyň.  $f(-1,2) < 0$ ,  $f(-1,1) > 0$  bolýandygy üçin, deňlemäniň köki  $[-1,2, -1,1]$  kesimiň içindedir.  $g(x) = \sqrt[7]{-x-4}$  belgileme girizip, deňlemäni (32) görnüşde ýazmak bolar. Şunlukda,  $\forall x \in [-1,2, -1,1]$  üçin

$$|g'(x)| = \left| \frac{-1}{7\sqrt[6]{(-x-4)^6}} \right| = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{(-x-4)^6}} \leq q = 0,06 < 1$$

deňsizlik, ýagny (34) şert ýerine ýetýär. Nölunjy ýakynlaşmany  $x_o = -1,15$  alyp we beýleki ýakynlaşmalary  $x_n = \sqrt[7]{-x_{n-1}-4}$  formula boýunça hasaplap, aşadaky tablisany düzeliň:

deňlikler ýerine ýetende hem dogrudyr. Hakykatdan-da, eger  $x = 1/t$  alsak, onda  $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$  esasynda

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(1/t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} g(1/t) = 0$$

bolar. Şeýle hem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Soňa görä bu deňligiň sagyndaky predel bar bolanda onuň çepindäki predel hem bardyr we

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

deňlik dogrudyr.

**3-nji bellik.** Eger  $f'(x)/g'(x)$  gatnaşyk hem  $0/0$  kesgitsizligi aňladyp,  $f'(x)$  we  $g'(x)$  funksiýalar  $x=a$  nokadyň etrabynda differensirlenýän bolup,  $x \rightarrow a$  bolanda  $f''(x)/g''(x)$  gatnaşygyň predeli bar bolsa, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

deňlik dogrudyr, ýagny deňişli şertler ýerine ýetende Lopitalýň düzgünini birnäçe gezek ulanmak bolar.

**3-nji mysal.**  $f(x) = x - \sin x$  we  $g(x) = x^3$  funksiýalar üçin

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  predeli tapmaly.

◁  $f'(x) = 1 - \cos x$  we  $g'(x) = 3x^2$  funksiýalaryň  $f'(x)/g'(x)$  gatnaşygy hem  $0/0$  kesgitsizligi aňladýar hem-de olar  $x=0$  nokadyň etrabynda 3-nji belligiň şertlerini kanagatlandyrýar. Soňa görä-de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{6}. \triangleright$$

**2.Kesgitsizligiň  $\infty/\infty$  görnüşiniň açylyşy.** Bu görnüşdäki kesgitsizlik üçin hem Lopitalýň teoremasý dogrudyr. Ýöne ol teorema

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  şerti  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  şert bilen çalşyrmaly..

**4-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} \quad (p > 0)$  predeli tapmaly.

◁ Bu predel üçin  $\infty/\infty$  görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony açmak üçin Lopitalyň düzgüninden peýdalanmak bolar:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{px^p} = 0. \triangleright$$

**5-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2/5^x]$  predeli tapmaly.

◁  $f(x) = x^2$  we  $g(x) = 5^x$  funksiýalar üçin  $f'(x) = 2x$  we  $g'(x) = 5^x \ln 5$  önümleriň  $f'(x)/g'(x)$  gatnaşygy  $\infty/\infty$  kesgitsizligi aňladýar hem-de ol önümler üçin Lopitalyň teoremasynyň şertleri ýerine ýetýär. Şunlukda,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(5^x \ln 5)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5^x \ln^2 5} = 0.$$

Şonuň üçin hem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)''}{(5^x)''} = 0. \triangleright$$

**3. Kesgitsizlikleriň beýleki görnüşleriniň açylyşy.** Kesgitsizlikleriň beýleki

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

görnüşleri yokarda garalan iki kesgitsizliklere getirilýär. Ilki bilen soňky üçüsiniň  $0 \cdot \infty$  görnüşdäki kesgitsizlige getirilýändigini görkezeliň. Eger  $x \rightarrow a$  bolanda  $f(x)$  funksiýa  $0, 1$  ýa-da  $\infty$  ymtylýan bolup,  $g(x)$  funksiýa bolsa degişlilikde  $0, \infty$  ýa-da  $0$  ymtylýan bolsa, onda soňky üç kesgitsizlikler  $x \rightarrow a$  bolanda  $y = [f(x)]^{g(x)}$  funksiýanyň predeli tapylanda alynýar. Ol predeli tapmak üçin bolsa

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \quad (f(x) > 0) \quad (8)$$

funksiýanyň predelini tapmak ýeterlikdir. (8) deňligiň sag böleginiň

**5. Iterasiýa usuly.** Bu usuly ulanmak üçin ilki bilen (27) görnüşdäki deňlemäni

$$x = g(x) \quad (32)$$

görnüşdäki deňlemä getirmeli (ony dürli usullar bilen ýerine ýetirmek bolar). Eger  $x_o$  (32) deňlemäniň köküniň käbir ýakynlaşan bahasy bolsa, onda ony deňlemäniň köküne nolunjy ýakynlaşma hökmünde alyp, birinji  $x_1$  ýakynlaşma

$$x_1 = g(x_o)$$

deňlikden tapylýar. Şonuň ýaly dowam etdirip, islendik  $x_n$  ýakynlaşmany

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (33)$$

formula boýunça yzygiderlikde kesgitleýäris. Şonuň üçin (33) formula boýunça deňlemäniň çözüwini tapmaklyga yzygiderli ýakynlaşmalar usuly ýa-da iterasiýa usuly diýilýär. Haýsy şertlerde yzygiderli ýakynlaşmalar (33) deňlemäniň çözüwine ýygnaýarka diýen soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

**11-nji teorema.** Eger (32) deňlemäniň  $c$  köküni we onuň (33) formula boýunça hasaplanýan yzygiderli ýakynlaşmalaryny özünde saklaýan aralykda

$$|g'(x)| \leq q < 1 \quad (34)$$

şert ýerine ýetse, onda yzygiderli ýakynlaşmalar deňlemäniň köküne ýygnaýandyr, ýagny

$$\lim x_n = c. \quad (35)$$

◁ (33) formuladan alynýan  $x_1 = g(x_o)$  we  $c$  sanyň (32) deňlemäniň köki bolýandygy üçin ýerine ýetýän  $c = g(c)$  deňlikler esasynda Lagranžyň teoremasyny ulanyp,

$$c - x_1 = g(c) - g(x_o) = g'(d_o)(c - x_o)$$

deňligi alarys, bu ýerde  $d_o$  san  $c$  we  $x_o$ -yň arasyndaky sandyr. Şonuň ýaly deňlikleri beýleki ýakynlaşmalar üçin hem ýazmak bolar:

**24-nji mysal.** Galtaşmalar usuly boýunça  $x^3 + x - 3 = 0$  deňlemäniň hakyky kökünü tapmaly.

$\triangleleft f(x) = x^3 + x - 3$  funksiýa üçin  $f(1) = -1 < 0$ ,  $f(2) = 7 > 0$  we  $[1, 2]$  kesimde

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ,  $f''(x) = 6x > 0$  bolýany üçin, şol kesimde deňlemäniň ýeke-täk köki bardyr we ony (31) formulany ulanyp tapmak bolar. Önuň üçin ilki bilen deňlemäniň kökünü içinde saklaýan has kiçi kesimi tapalyň.

$$\cdot f(1,2) = (1,2)^3 + 1,2 - 3 = -0,072 < 0, f(1,3) = (1,3)^3 + 1,3 - 3 = 0,497 > 0$$

deňsizlikleriň esasynda kök  $[1,2; 1,3]$  kesimiň içindedir. Ol kesimiň ortasyndaky  $x = 1,25$  nokatda  $f(1,25) = (1,25)^3 + 1,25 - 3 = 0,203125 > 0$  bolýandygy üçin, köki içinde saklaýan  $[1,20; 1,25]$  kesimi alarys. Nölunjy ýakynlaşma hökmünde  $x_0 = 1,25$  alarys, çünki  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . (31)

formulany ulanyp, aşakdaky tablisany düzeliň:

$N$	$x_n$	$x_n^3$	$f(x_n) = x_n^3 + x_n - 3$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 1$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,25	1,953125	0,203125	5,6875	0,035714	1,214286
1	1,214286	1,790452	0,004738	5,42347	0,000874	1,213412
2	1,213412	1,786590	0,000002	5,417107	0,0000004	1,2134116

Bu tablisadan görnüşi ýaly, deňlemäniň köki  $c = 1,21341$  deňdir.  $\triangleright$

**3-nji bellik.** Hordalar we galtaşmalar usullarynyň ulanylýan şertlerinde ol usullaryň ikisini bir wagtda hem ulanmak bolar. Şunlukda, ol usullar bilen tapylýan ýakynlaşmalaryň zygiderliginiň birisi artyp, beýlekisi bolsa kemelip deňlemäniň köküne ymtylýandyr. Ol usullary gezeklesdirip hem ulanmak bolar.

predeli tapylanda ýokarda agzalan üç ýagdaýda hem  $0 \cdot \infty$  görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Şonuň üçin diňe  $0 \cdot \infty$  we  $\infty - \infty$  görnüşdäki kesgitsizlikleri açmaklygy öwrenmeklik ýeterlikdir. Ölar bolsa  $0/0$  we  $\infty/\infty$  görnüşdäki kesgitsizliklere getirilýär.

Goý,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  we  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  bolsun, onda

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \Big/ \frac{1}{g(x)} = g(x) \Big/ \frac{1}{f(x)}$$

deňlikleriň esasynda  $0 \cdot \infty$  görnüşdäki kesgitsizlikden  $0/0$  ýa-da  $\infty/\infty$  görnüşdäki kesgitsizlik alynýar.

Eger  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  we  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  bolsa, onda

$$f(x) - g(x) = \left[ \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] \Big/ \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}$$

deňligiň esasynda  $\infty - \infty$  görnüşdäki kesgitsizlikden  $0/0$  görnüşdäki kesgitsizlik alynýar.

**6-njy mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$  predeli tapmaly.

$\triangleleft$  Bu ýerde  $\infty - \infty$  görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony ýönekeýleşdirip,  $0/0$  görnüşdäki kesgitsizlige getireliň we soňra Lopitalýn düzgünini ulanallyň:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^x - 1 - x]'}{[x(e^x - 1)]'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{[e^x + xe^x - 1]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \triangleright \end{aligned}$$

**Bellik.**  $[f(x)]^{g(x)}$  görnüşdäki funksiýanyň predelinu tapmak üçin ilki (8) deňligiň sag böleginiň predeli tapylýar we soňra şeýle deňlikden peýdalanylýar:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}.$$

**7-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$  predeli tapmaly.

$\triangleleft$  Bu predel  $1^\infty$  görnüşdäki kesgitsizlikdir.  $x^{1/(x-1)}$  funksiýany

$e^{\ln x/(x-1)}$  görnüşde ýazsak, onda derejäniň görkezijisinde 0/0 görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Lopitalyň düzgünini peýdalanylýp, ilki şol predeli tapalyň:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Şonuň üçin hem

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln x/(x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}} = e^1 = e. \triangleright$$

### § 4.3. Teýloryň formulasy we onuň ulanylyşy

**1. Köpagza üçin Teýloryň formulasy.** Goý,  $x$  görä  $n$  derejeli

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad (b_n \neq 0) \quad (9)$$

köpagza berlen bolsun. Kbir  $a$  san üçin ony hemişe  $x-a$  görä  $n$  derejeli köpagza görnüşinde aňladyp bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin (9) deňlikde  $x-a=t$  çalşyрма girizip,

$$P(t+a) = b_0 + b_1(t+a) + b_2(t+a)^2 + \dots + b_n(t+a)^n$$

deňligi alarys. Bu deňligiň sag bölegini derejelere göterip we  $t$  görä deň derejeli agzalary toplaşdyryp,

$$P(t+a) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots + c_nt^n$$

köpagzany alarys. Eger bu deňlikde  $t = x-a$  goýup, ýene öňki  $x$  ululyga geçsek, onda  $P(x)$  köpagzanyň  $x-a$  tapawudyň derejesi boýunça dagydylyşyny alarys:

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n. \quad (10)$$

Bu köpagzanyň näbelli  $c_k$  ( $k=0,1,\dots,n$ ) koeffisiýentlerini tapmak üçin ony yzygiderli  $n$  gezek differensirläliň:

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$P''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + \dots + (n-1)nc_n(x-a)^{n-2},$$

$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots nc_n$$

Bu deňliklerde we (10) deňlikde  $x=a$  goýup,

$$P(a) = c_0, \quad P'(a) = c_1, \quad P''(a) = 2!c_2, \dots, P^{(n)}(a) = n!c_n$$

deňlikleri alarys we olardan näbelli koeffisiýentleri taparys:

$$x_n = \frac{x_{n-1}f(a) - bf(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

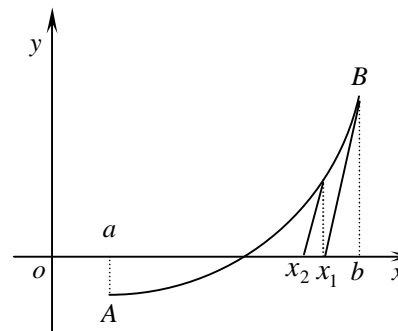
formuladan kesgitlenilýär (11-nji surat).

**4. Galtasmlar usuly.** Goý, deňlemäniň  $c$  köki içinde bolan  $[a, b]$  kesimde  $f$  funksiýa üçin hordalar usulyndaky şertler ýerine ýetsin. Bu halda noluný ýakynlaşmany  $x_0 = b$  alyp, birinji  $x_1$  ýakynlaşmany  $B$  nokatda  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigine geçirilen (12-nji surat)

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

galtasmanyň  $ox$  oky bilen kesişme nokadynyň absissasy hökmünde alarys:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$



12-nji surat

Şunlukda,  $a < x_1 < b$  bolar. Indi  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigine  $B_1(x_1, f(x_1))$  nokatda galtasma geçirip,  $x_2$  ýakynlaşmany galtasmanyň  $Ox$  oky bilen kesişme nokadynyň absissasy hökmünde taparys:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Edil şonuň ýaly dowam etdirip,  $n$ -nji

ýakynlaşmany taparys:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (31)$$

Bu deňlik boýunça kesgitlenen  $\{x_n\}$  yzygiderligiň hem predeli bardyr, ol predel deňlemäniň takmyn köküdür we onuň üçinem (29) ýerine ýetýändir.

**2-nji bellik.** Noluný  $x_0$  ýakynlaşma  $f(x_0)f''(x_0) > 0$  şertden kesgitlenilýär.



**23-nji mysal.** Hordalar usuly boýunça  $x^3 + x - 1 = 0$  deňlemäniň hakyky köküni tapmaly.

◁  $f(x) = x^3 + x - 1$  funksiýa üçin  $f(0,5) < 0$ ,  $f(1) > 0$  we islendik  $x$  üçin  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  bolýandygy sebäpli,  $[0,5; 1]$  kesimde deňlemäniň ýeke-täk köki bardyr.  $f''(x) = 6x > 0$  şertiň ýerine ýetýändigini esasynda,

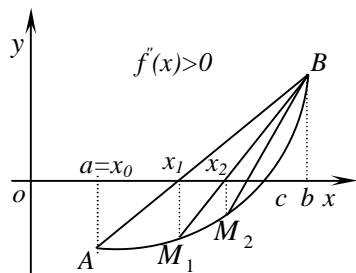
$$x_0 = 0,5, f(x_0) = f(0,5) = -0,375, b = 1, f(b) = f(1) = 1$$

bahalary ulanyp, (28) formuladan peýdalanyp taparys:

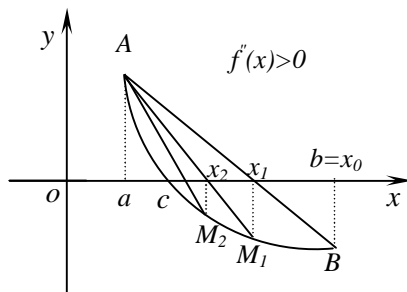
$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} = \frac{0,5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0,375)}{1 + 0,375} \approx 0,636364;$$

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{0,636364 - (-0,105935)}{1 + 0,105935} \approx 0,671196;$$

$$x_3 = \frac{x_2 f(b) - b f(x_2)}{f(b) - f(x_2)} = \frac{0,671196 - (-0,026428)}{1 + 0,026428} \approx 0,679662.$$



10-njy surat



11-nji surat

Şonuň ýaly dowam edip,  $x_4 = 0,681691$ ,  $x_5 = 0,682176$ ,  $x_6 = 0,682292$ ,

$x_7 = 0,682319$ ,  $x_8 = 0,682326$ ,  $x_9 = 0,682327$  ýakynlaşmalary taparys.

Şeýlelikde, 0,0001 takyklykda deňlemäniň köki tapyldy.

**1-nji bellik.** Eger  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$  (ýa-da  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$ ) bolsa, onda bu halda  $x_0 = b$  alynýar we  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ýakynlaşmalar

$$c_0 = P(a), c_1 = \frac{P'(a)}{1!}, c_2 = \frac{P'(a)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Olary (9) deňlikde goýup, köpagza üçin Teýloryň formulasy diýilýän

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

formulany alarys. Bu formula  $x$ -iň derejesine görä  $P(x)$  köpagzany  $x-a$  tapawudyň derejesi boýunça köpagza görnüşinde aňlatmaklyga mümkinçilik berýär we ony köpagzanyň  $a$  sana ýakyn bolan bahalaryny hasaplamakda ulanmak amatlydyr, çünki  $x-a$  tapawudyň ýeterlik kiçi bolýandygy üçin käbir derejeden başlap goşulyjylary taşlamak bolar.

**2. Erkin funksiýa üçin Teýloryň formulasy.** Indi bolsa erkin  $f(x)$  funksiýanyň haýsy şetlerde  $x-a$  tapawudyň derejesi boýunça köpagza görnüşinde aňladylýandygyny görkezeliň we şunlukda göýberilýän ýalňyşlygy tapalyň.

**Teýloryň teoremasy.** Eger  $f$  funksiýanyň  $a$  nokadyň käbir etrabynda  $n+1$  tertipli önümi bar bolsa, onda şol etraba degişli islendik  $x \neq a$  üçin  $a$  we  $x$  nokatlaryň arasynda şeýle  $c$  nokat tapylyp,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x) \quad (11)$$

formula dogrudyr, bu ýerde

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (12)$$

◁ Goý,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad f(x) - P_n(x) = r_n(x) \quad (13)$$

bolsun. Onda teoremany subut etmek üçin  $r_n(x)$  üçin (12) deňligi görkezmek ýeterlikdir. Bellenen  $x > a$  üçin  $[a, x]$  kesimde

$$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1} r_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

funksiýa garalyň. Teoremanyň şertlerinde ol funksiýa  $[a, x]$  kesimde üznüksiz we differensirlenýändir we (13) esasynda

$$F(a) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k - r_n(x) = r_n(x) - r_n(x) = 0,$$

$$F(x) = f(x) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-x)^k - \frac{(x-x)^{n+1} r_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$$

ýagny  $F$  funksiýa  $[a, x]$  kesimde Roluň teoremasynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýar. Şoňa görä  $(a, x) \ni c$  nokat tapylyp,

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n + \frac{(n+1)(x-c)^n r_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Bu deňlikden bolsa (12) formula gelip çykýar we teorema subut bolýar. ▸

**1-nji bellik.** Teoremanyň şertlerinde  $f^{(n+1)}(c)$  funksiýa çäklidir, şoňa görä (12) deňlik esasynda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)}{(n+1)!} = 0,$$

ýagny  $x \rightarrow a$  bolanda  $r_n(x)$  funksiýa  $(x-a)^n$  görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi funksiýadyr, Şonuň esasynda

$$r_n(x) = o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a) \quad (14)$$

deňligi ýazmak bolar.

(11) formula Teýloryň formulasy, ondaky  $r_n(x)$  funksiýa bolsa şol formulanyň galyndy agzasy diýilýär. Şunlukda, (12) we (14) formulalar boýunça kesgitlenen funksiýalara deňlilikde Lagranžyň we Peanonyň galyndy agzalary diýilýär.

**3. Makloreniň formulasy.** Teýloryň (11) formulasyndan  $a = 0$  bolanda alynýan

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \quad (15)$$

formula Makloreniň formulasy diýilýär. Bu halda (12) we (14) galyndy agzalar

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad r_n(x) = o(x^n) \quad (16)$$

görnüşlerde ýazylar.

funksiýanyň kesimiň uçlaryndaky bahalarynyň alamatlary dürli bolsun. Onümiň alamatlarynyň hemişelikligi esasynda  $[a, b]$  kesimde funksiýa ýa artýandyr, ýa-da kemelýändir. Şoňa görä hem deňlemäniň köki ýeke-täkdir. Ikinji önümiň alamatynyň hemişelikligi esasynda bolsa  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysy ýokaryk ýä-da aşak güberçekdir.

Kesgitlilik üçin,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$  bolsun. Onda bu halda  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysy aşak güberçekdir we funksiýa artýandyr (10-njy surat). Nolunjy (başlangyç) ýakynlaşma hökmünde  $x_0 = a$  alyp, birinji  $x_1$  ýakynlaşmany  $A(a, f(a))$  we  $B(b, f(b))$  nokatlary birleşdirýän

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

hordanyň  $ox$  oky bilen kesişme nokadynyň absissasyny almak bolar:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Şunlukda,  $f$  funksiýanyň kanagatlandyrýan şertlerinde  $a < x_1 < b$  bolar.

Indi  $A_1(x_1, f(x_1))$  nokady alyp,  $A_1B$  hordany geçireliň we ol hordanyň  $ox$  oky bilen kesişme nokadynyň absissasyny ikinji  $x_2$  ýakynlaşma hökmünde alalyň:

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Şunlukda,  $a < x_1 < x_2 < b$  bolar. Şonuň ýaly dowam etdirip,  $(n-1)$ -nji  $x_{n-1}$  ýakynlaşmany ulanyp,  $n$ -nji  $x_n$  ýakynlaşmany

$$x_n = \frac{x_{n-1} f(b) - bf(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

formuladan taparys. Şeýdip tapylan ýakynlaşmalaryň  $\{x_n\}$  yzygiderligi çäkli we monotondyr. Şoňa görä hem onuň predeli bardyr we ol predel (27) deňlemäniň takmyn çözüwidir. Şunlukda, deňlemäniň  $c$  köküniň  $x_n$  ýakynlaşmadan tapawudy şeýle bahalandyrylýar:

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{r} \quad \left( r = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \right). \quad (29)$$

$f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$  bolanda hem ýakynlaşmalar (28) –den kesgitlenýär.

çözüwlerini tapmaklyk kynlaşýar. Aşakda (27) görnüşdäki deňlemäni takmyn çözmekligiň käbir usullaryna serederis.

**1. Grafik usuly.** Bu usul bilen deňlemäniň çözüwini tapmak üçin berlen  $f(x)$  funksiýa boýunça  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigini gurýarlar we onuň absissa oky bilen kesişme nokadyny tapýarlar. Şol nokadyň absissasy deňlemäniň köküdür.  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigini gurmak kyn bolanda deňlemäni  $p(x) = r(x)$  görnüşde ýazyp,  $y = p(x)$ ,  $y = r(x)$  funksiýalaryň grafiklerini gurýarlar we deňlemäniň kökünü olaryň kesişme nokadynyň absissasy hökmünde tapýarlar. Grafik usulyndan deňlemäniň ýeke-täk köki ýerleşýän aralygy kesgitlemekde hem peýdalanmak bolar. Mysal üçin, eger  $f$  funksiýa käbir  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we monotonn ( $f'(x) > 0$  ýa-da  $f'(x) < 0$ ) bolup, kesimiň uçlaryndaky bahalarynyň alamatlary dürli bosa, onda şol kesimde (27) deňlemäniň ýeke-täk kökünüň bardygy grafikden görünýär.

**2. Kesimi ýarpa bölmek usuly.** Goý,  $f$  funksiýa (27) deňlemäniň ýeke-täk kökünü içinde saklaýan  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we kesimiň uçlarynda funksiýanyň bahalarynyň alamatlary dürli bolsun. Kesgitlilik üçin,  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$  hasap edeliň.  $[a, b]$  kesimi ýarpa bölüp, olardan uçlarynda funksiýanyň bahalarynyň alamatlary dürli bolýan kesimi saýlap alalyň we ony  $[a_1, b_1]$  bilen belgiläliň. Indi  $[a_1, b_1]$  kesimi deň ikä bölüp, uçlarynda funksiýanyň bahalarynyň alamatlary dürli bolan bölegini  $[a_2, b_2]$  bilen belgiläliň we şu ýörelgäni dowam etdireliň. Şeýlelikde, uzynlyklary  $b_n - a_n = (b - a)/2^n$  bolan kesimleriň  $\{[a_n, b_n]\}$  yzygiderligini alarys. Şunlukda, islendik  $n$  üçin  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$  bolar. Saklanýan kesimler hakyndaky teorema esasynda ol kesimleriň hemmesine deňişli bolan ýeke-täk  $c$  nokat bar bolup,  $\lim a_n = \lim b_n = c$  deňlik dogrudyr. Şoňa görä-de,  $f \in C[a, b]$  bolýandygy üçin  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$  deňsizlikde predele geçip,  $f(c) = 0$  deňligi alarys, ýagny  $c$  deňlemäniň köküdür. Onuň takmyn bahasy hökmünde  $[a_n, b_n]$  kesimiň ortasyny, ýagny  $(a_n + b_n)/2$  nokady almak bolar. Şunlukda, köküň ol nokatdan uzaklygy  $(b - a)/2^{n+1}$  sandan uly däldir.

**3. Hordalar usuly.** Goý, deňlemäniň  $c$  köki içinde bolan  $[a, b]$  kesimde üznüksiz hemişelik alamatly  $f'(x)$  we  $f''(x)$  önümler bar bolup,

**2-nji bellik.** Mälim bolşy ýaly, islendik üznüksiz we täk funksiýanyň  $x = 0$  nokatdaky bahasy nola deňdir. Şonuň üçin  $(-a, a)$  aralykda differensirlenýän täk funksiýanyň önüminiň jübütligini we jübüt funksiýanyň önüminiň täkligini nazara alsak, onda islendik tertipdäki önümi bar bolan täk  $f$  funksiýa üçin  $f^{(2k)}(0) = 0$  we jübüt  $f$  funksiýa üçin  $f^{(2k+1)}(0) = 0$  bolar. Şonuň esasynda Makloreniň formulasy islendik tertipdäki önümi bar bolan jübüt funksiýa üçin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + r_{2n}(x) \quad (17)$$

görnüşde, täk funksiýa üçin bolsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_{2n+1}(x) \quad (18)$$

görnüşde ýazylar

**4. Käbir funksiýalaryň Teýlor formulasy.** Eger  $f(x) = e^x$  bolsa, onda  $f^{(k)}(x) = e^x$  bolýandygy üçin  $f^{(k)}(0) = 1$ ,  $k \in N$ . Şoňa görä ol funksiýa üçin (15) formula şeýle görnüşi alar:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x). \quad (19)$$

$f(x) = \sin x$ . Bu funksiýa tækdir we  $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$  (§ 3.4, mysal 8 seret). Şoňa görä (18) formula we  $f^{(2n+1)}(0) = \sin(n\pi + \pi/2) = \cos n\pi = (-1)^n$  deňlik boýunça

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+1}(x). \quad (20)$$

$f(x) = \cos x$ . Bu funksiýa üçin  $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\pi/2)$  (§ 3.4, mysal 8 seret). Onuň jübütligi üçin (17) formula we  $f^{(2n)}(0) = \cos(n\pi) = (-1)^n$  deňlik esasynda

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x). \quad (21)$$

$f(x) = \ln(1+x)$  ( $x > -1$ ). Bu funksiýa üçin matematiki induksiýanyň esasynda

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \in N$$

formulany görkezmek bolar (ony özbaşdak görkeziň!). Şonuň üçin  $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$  deňlik esasynda. bu funksiýa üçin Makloreniň formulasy şeýle bolar:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x). \quad (22)$$

$f(x) = (1+x)^m$ . Bu funksiýa üçin

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}, \quad k \in N$$

bolýandygy aňsat görkezilýär. Şoňa görä  $f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1)$  deňlik esasynda bu funksiýa üçin Makloreniň formulasy

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (23)$$

görnüşde bolar.

Eger  $m = n - \text{natural san}$  bolsa, onda  $f^{(n+1)}(x) = 0$ , ýagny  $r_n(x) = 0$  bolar we ol formuladan Nýutonyň binomynyň formulasy alynýar:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n.$$

**5. Teýloryň formulasynyň ulanylyşy.** Bu formulanyň käbir meseleler çözülenide ulanylyşyny mysallarda görkezeliň.

**8-nji mysal.**  $f(x) = (1+x)/(1+x^2)$  funksiýany  $x$  üýtgeýäniň bitin položitel derejesi boýunça  $x^4$  çenli dagytmaly we  $f^{(4)}(0)$  hasaplamaly.

◁ Berlen funksiýany  $f(x) = 1 + (x-x^2)(1+x^2)^{-1}$  görnüşde ýazyp, (23) formulany ulanarys:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x-x^2)(1-x^2+x^4+r_4(x)) = \\ &= 1+x-x^2-x^3+x^4+r_4(x). \end{aligned}$$

Bu deňligi Makloreniň formulasy bilen deňeşdirip,  $f^{(4)}(0)/4! = 1$  deňligi alarys. Bu ýerden  $f^{(4)}(0) = 24$ . ▷

goýup,  $y = d/\sqrt{2}$  bolýandygyny görýäris. Diýmek, tegelegiň içinden çyzylan gönüburçluklaryň iň uly meýdanlysy kwadratdyr. Şeýlelikde, togalak agaçdan kesilip alnan zyňyndysy az bolan pürsiň kese kesigi kwadrat bolmalydyr, ýagny ol esasy kwadrat bolan gönüburçly paralelepiped görnüşdäki pürsdir. ▷

**22-nji mysal.** Gaz garyndysy azodyň we kislorodyň oksidinden durýar. Garyndyaky azot oksidini maksimal tizlik bilen okislendirýän kislorodyň konsentrasiýasyny tapmaly.

◁ Amalyýetiň öwrülmezlik şertlerinde  $2\text{NO} + \text{O}_2 = 2\text{NO}_2$  reaksiýanyň tizligi  $v = cx^2y$  formula boýunça aňladylýar, bu ýerde  $x$  NO-nyň wagtyň islendik pursadyndaky konsentrasiýasy;  $y$   $\text{O}_2$ -niň konsentrasiýasy;  $c$  bolsa reaksiýanyň tizliginiň konsentrasiýasy bolup, ol reagirleýji komponentlere bagly bolman diňe temperatura baglydyr ( $c > 0$ ). Gazyň konsentrasiýasyny göwrüm prosentinde aňladyp alarys:

$$y = 100 - x, \quad v = cx^2(100 - x) = c(100x^2 - x^3).$$

$v = v(x)$  funksiýany derňemek üçin onuň önümlerini tapalyň:

$$v'(x) = c(200x - 3x^2), \quad v''(x) = c(200 - 6x).$$

Birinji önümi nola deňläp, funksiýanyň  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 200/3$  duruw nokatlaryny taparys. Şunlukda,  $v''(0) > 0$ ,  $v''(200/3) < 0$  bolýandygy esasynda  $x_1 = 0$  funksiýanyň minimum,  $x_2 = 200/3$  maksimum nokady bolar. Şeýlelikde,  $x = x_2 = 66,7\%$ ,  $y = 100 - x = 33,3\%$  ýa-da  $y/x \approx 0,5$  bolanda okislenmegiň tizligi maksimal bolar. ▷

#### § 4. 8. Deňlemeleri takmyn çözmekligiň usullary

Matematikada, tehnikada we beýleki tebigy ylmlarda duş gelýän dürli meseleler çözülenide

$$f(x) = 0 \quad (27)$$

görnüşdäki deňlemäniň çözüwlerini tapmaly bolýar. Eger  $f$  çyzykly, kwadrat ýa-da käbir başga ýönekeý funksiýa bolsa, onda (27) deňlemäniň çözüliş usullary bize mekdep matematikasyndan bellidir. Ýöne  $f$  funksiýanyň çylşyrymly hallarynda (27) görnüşdäki deňlemäniň

**10-njy teorema.** Eger  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $f$  funksiýa üçin

1)  $f(a) = f(b) = 0$  bolup,  $\forall x \in (a, b)$  üçin  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ) bolsun;

2)  $(a, b)$  onuň differensirlenýän aralygy bolup, şol aralygyň diňe bir  $c$  nokadynda  $f'(c) = 0$  bolsun.

Onda funksiýanyň iň uly (iň kiçi) bahasy  $f(c)$  deňdir.

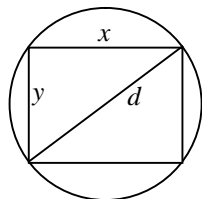
◁ Goý,  $\forall x \in (a, b)$  üçin,  $f(x) > 0$  bolsun, onda birinji şert boýunça  $f$  funksiýa iň uly bahany diňe kesimiň içinde alyp biler. Fermanyň teoremasy esasynda bolsa şol nokatda funksiýanyň önümi nola deňdir. Ikinji şertiň esasynda bolsa  $f'(x) = 0$  deňlik diňe bir  $c \in (a, b)$  nokatda ýerine ýetýär. Şonuň üçin hem funksiýanyň iň uly bahasy  $f(c)$  deňdir.

Teoremanyň ikinji bölegi şonuň ýaly subut edilýär. ▷

**21-nji mysal.** Togalak agaçdan zyňyndysy az bolar ýaly dörtgyraň pürs kesmeli.

Geometriýa dilinde bu mesele şeýle okalýar: berlen tegelegiň içinden iň uly meýdanly gönüburçluk çyzmaly (9-njy surat).

◁ Eger gönüburçlugyň taraplary  $x$ ,  $y$  we diametri  $d$  bolsa, onda onuň meýdany  $S = xy$ . Bu deňlikde  $y = \sqrt{d^2 - x^2}$  goýup, gönüburçlugyň meýdany üçin



9-njy surat

$$S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$$

funksiýany alarys. Şunlukda, meseläniň manysyna görä  $0 \leq x \leq d$  bolar.

Şeýlelikde, başdaky mesele  $S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$  funksiýanyň  $[0, d]$  kesimde iň uly bahasyny tapmaklyga getirildi. Ol funksiýa üçin

$$S'(x) = \frac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = 0$$

deňlemäniň  $[0, d]$  kesime degişli bolan diňe bir  $x = d/\sqrt{2}$  köki bardyr. Şol kesimde  $S(x)$  funksiýa üçin 10-njy teoremanyň ähli şertleri ýerine ýetýär:  $\forall x \in (0, d)$  üçin  $S(x) > 0$  we  $S(0) = S(d) = 0$  we ol funksiýa şol kesimde üznüksizdir. Şoňa görä şol teorema boýunça  $S(x)$  funksiýa iň uly bahany  $x = d/\sqrt{2}$  nokatda alýandyr.  $x$ -iň bu bahasyny  $y = \sqrt{d^2 - x^2}$  deňlikde

Indi bolsa islendik takyklykda  $e$  sany hasaplap bolýan formulany getirip çykaralyň.  $f(x) = e^x$  funksiýa üçin Teýlor formulasynyň hususy haly bolan Makloren formulasyndaky  $x = 1$  bolanda

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n$$

deňlik alynýar. Şu formula boýunça  $e$  san kesgitlenip,  $n$  sanyň näçä deňdigi  $e$  sanyň haýsy takyklykda hasaplanylýandygyna baglydyr. Ol san Lagranžyň galyndy agzasyndaky alynýan

$$|r_n(1)| < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

deňsizlik ulanylyp tapylýar.

**9-njy mysal.**  $10^{-6}$  takyklykda  $e$  sany hasaplamaly.

◁ Ony görkezmek üçin (20) formuladan  $x = 1$  bolanda alynýan

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n(1)$$

deňlikden peýdalanarys.

$$|r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

deňsizligiň  $n = 9$  bolanda ýerine ýetýändigini esasynda

$$e \approx 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} \approx 2,718281. \triangleright$$

**10-njy mysal.**  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  ýakynlaşan formulada  $x$  üýtgeýäniň haýsy bahalarynda ýalňyşlyk 0,00005 sandan kiçidir?

◁  $f(x) = \cos x$  funksiýa üçin görkezilen Makloreniň (21) formulasyndaky we Lagranžyň galyndy agzasyndaky görnüşi ýaly, meseläni çözmek üçin

$$|r_6(x)| \leq \frac{|x|^6}{6!} < 0,00005$$

deňsizligi çözmek ýeterlikdir. Bu ýerden  $|x| < 0,575$  alynýar. ▷

**11-nji mysal.**  $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x - x\sqrt{1-x^2})/x^5]$  predeli hasaplamaly.

◁ Bu predeli hasaplamak üçin galyndy agzasy Peanonyňky bolan aşakdaky Makloreniň formulalaryndan peýdalanarys:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$(1+x)^m =$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Gözlenýän predeliň maýdalawjysynda  $x^5$  bolany üçin, sanawjyda funksiýalara Makloreniň formulasyny ulananymyzda  $x$  üýtgeýäniň başinji derejeden soňkylarynyň hemmesini  $o(x^5)$  girizeris:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

$$x\sqrt[6]{1-x^2} = x(1-x^2)^{1/6} = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{72}x^5 + o(x^5),$$

$$\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2} = \frac{7}{90}x^5 + o(x^5).$$

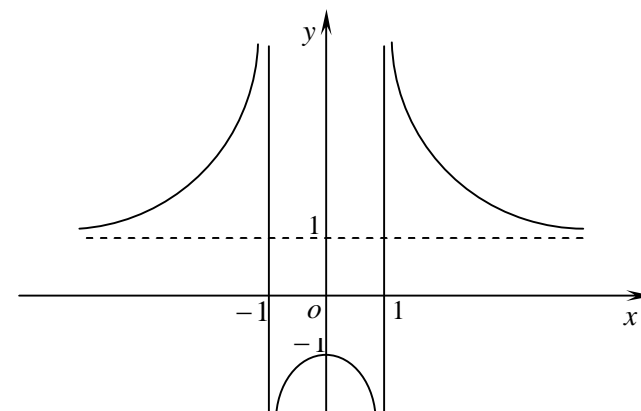
Şonuň üçin hem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{90}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{7}{90}. \triangleright$$

#### § 4.4. Funksiýanyň monotonlygy we ekstremumy

**1. Funksiýanyň monotonlyk nyşanlary.** Ilki bilen funksiýanyň hemişelikliginiň zerur we ýeterlik şertini görkezeliň. Mälim bolşy ýaly  $f(x)=C$  hemişelik funksiýanyň önümi nola deňdir. Lagranžyň teoremasynyň 1-nji netijesi boýunça önümi nola deň bolan funksiýa hemişelikdir. Şonuň üçin hem  $f'(x)=0$  şert  $f$  funksiýanyň hemişelik bolmagynyň zerur we ýeterlik şertidir.

6. Ýokardaky maglumatlary ulanyp, funksiýanyň grafigini gurýarys.



9-njy surat

#### § 4.7. Funksiýanyň iň kiçi we iň uly bahalary we meseleleri çözmekde olaryň ulanylyşy

Matematikada, fizikada, himiýada we durmuşda duş gelýän köp meseleler käbir funksiýalaryň kesimdäki iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaklyga getirilýär. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň Weýerstrasyň teoremasy boýunça şol kesimde iň uly we iň kiçi bahalary alyandygy üçin, ol funksiýanyň  $[a, b]$  kesimiň içindäki iň uly bahalaryny  $f(a)$  we  $f(b)$  bahalary bilen deňeşdirip,  $f$  funksiýanyň iň uly bahasyny taparys.

Şonuň ýaly hem funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki iň kiçi bahasy tapylýar.

**20-nji mysal.**  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$  funksiýanyň  $[-2, 3]$  kesimdäki iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaly.

◁  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$  önümi nola deňläp, onuň  $x = -1$  we  $x = 2$  nol nokatlaryny tapalyň we funksiýanyň şol nokatlardaky bahalaryny kesimiň uçlaryndaky bahalary bilen deňeşdireliň:

$$f(-2) = -3, f(-1) = 8, f(2) = -19, f(3) = -8.$$

Şeýlelikde, funksiýanyň iň kiçi bahasy  $f(2) = -19$  we iň uly bahasy  $f(-1) = 8$ . ▷

Käbir ýagdaýda funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak üçin aşakdaky teoremany ulanmak amatlydyr.

**19-njy mysal.**  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$  funksiýany derňemeli we grafigini gurmaly.

◁ I. Funksiýa  $x = -1$ ,  $x = 1$  nokatdan başga  $\forall x \in \mathbf{R}$  nokatlarda kesgitlenen we üznüksizdir,  $x = -1$ ,  $x = 1$  onuň üzülmek nokatlarydyr.

2.  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} [(x^2 + 1)/(x^2 - 1)] = \infty$ . Diýmek,  $x = -1$ ,  $x = 1$  göniçyzyklar grafigiň dik asimptotalarydyr,  $y = 1$  bolsa onuň ýapgyt asimptotasydyr, çünki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right] = 1.$$

3. Funksiýanyň önümlerini tapalyň:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

Önümi nola deňläp, onuň  $x = 0$  köküni taparys.  $x = -1$ ,  $x = 1$  nokatlaryň önümiň hem üzülmek nokatlary bolýandygy üçin, san okuny  $x = -1$ ,  $x = 1$  we  $x = 0$  nokatlar arkaly bölekler bölüp, olarda önümiň alamatlaryny anyklalyň.  $x < -1$ ,  $-1 < x < 0$  bolanda  $f'(x) > 0$  we funksiýa şol aralyklarda artýar,  $0 < x < 1$ ,  $x > 1$  bolanda  $f'(x) < 0$  we funksiýa şol aralyklarda kemelýär.  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = -4 < 0$  bolýandygy esasynda  $x = 0$  funksiýanyň maksimum nokadydyr we funksiýanyň maksimum bahasy  $f(0) = -1$ .

4.  $x < -1$  we  $x > 1$  bolanda  $f''(x) > 0$  we funksiýanyň grafigi şol aralyklarda aşak güberçekdir,  $-1 < x < 1$  bolanda bolsa  $f''(x) < 0$  we funksiýanyň grafigi şol aralykda ýokaryk güberçekdir. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady ýokdur, çünki ikinji önümi hiç bir nokatda nola deň däl, we funksiýanyň kesgitlenmedik nokatlarynda kesgitlenmedikdir.

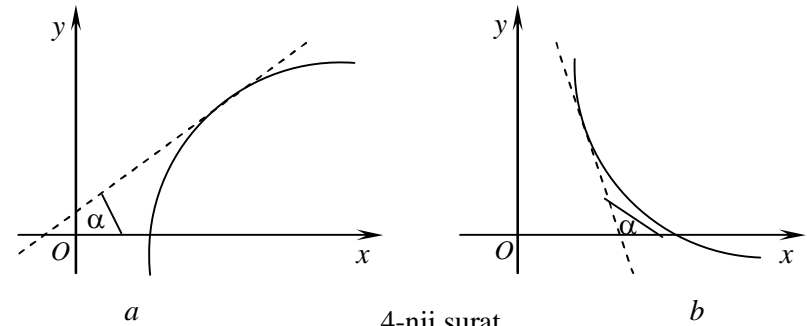
5.  $x = 0$  bolanda  $y = f(0) = -1$  bolýandygy üçin funksiýanyň grafigi  $Oy$  oky bilen  $A(0, -1)$  nokatda kesişýändir,  $Ox$  bilen bolsa kesişýän däl, çünki  $(x^2 + 1)/(x^2 - 1) = 0$  deňlemäniň hakyky köki ýok.

**1-nji teorema.** Eger  $(a, b)$  aralykda differensirlenýän  $f$  funksiýa üçin şol aralykda  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) bolsa, onda  $(a, b)$  aralykda ol funksiýa kemelmeýändir (artmaýandyr). Eger-de  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) bolsa, onda funksiýa  $(a, b)$  aralykda artýandyr (kemelýändir).

◁ Goý,  $(a, b)$  aralykda  $f'(x) \geq 0$  we  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  üçin  $x_1 < x_2$  bolsun. Onda  $[x_1, x_2]$  kesimde Lagranžyň teoremasynyň hemme şertleri ýerine ýetýär we şonuň esasynda  $(x_1, x_2)$  aralykda  $c$  nokat tapylyp,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (24)$$

deňlik ýerine ýetýär. Bu deňlikden bolsa  $f'(c) \geq 0$ ,  $x_2 > x_1$  şertler esasynda  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  deňsizlik gelip çykýar, ýagny  $f$  funksiýa  $(a, b)$  aralykda kemelmeýändir.  $f'(x) \leq 0$  bolandaky subudy şonuň ýalydyr. Şeýle hem  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) bolanda  $f$  funksiýanyň artýandygy (kemelýändigini) şonuň ýaly subut edilýär. ▷



4-nji surat

Bu teoremanyň ýönekeý geometrik manysy bardyr. Eger käbir aralykda  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşma  $Ox$  oky bilen ýiti  $\alpha$  ( $\text{tg} \alpha > 0$ ) burçy emele getirýän bolsa (4-nji a surat), onda funksiýa şol aralykda artýandyr. Eger-de galtaşma  $Ox$  oky bilen kütäk  $\alpha$  ( $\text{tg} \alpha < 0$ ) burçy emele getirýän bolsa (4-nji b surat), onda funksiýa şol aralykda kemelýändir.

**12-nji mysal.**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

$\triangleleft f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$  deňligiň esasynda  $x < 1$  we  $x > 3$  bolanda önüm položitelidir we funksiýa  $(-\infty, 1)$ ,  $(3, +\infty)$  aralyklarda artýandyr,  $1 < x < 3$  bolanda önüm otrisateldir we funksiýa  $(1, 3)$  aralykda kemelýändir.  $\triangleright$

**2. Funksiýanyň ekstremumy. Ekstremumyň zerur şerti.** Goý,  $f$  funksiýa  $a$  nokadyň käbir  $U(a, \delta)$  etrabynda kesgitlenen bolsun. Eger  $\forall x \in U(a, \delta)$  üçin  $f(x) \leq f(a)$  ( $f(x) \geq f(a)$ ) deňsizlik ýerine ýetse, onda  $a$  nokada  $f$  funksiýanyň maksimum (minimum) nokady diýilýär. Funksiýanyň maksimum (minimum) nokatdaky bahasyna bolsa ol funksiýanyň maksimumy (minimumy) diýilýär. Funksiýanyň maksimumyna we minimumyna bolsa onuň ekstremumy diýilýär.

Funksiýanyň  $a$  nokatdaky bahasynyň onuň diňe şol nokadyň käbir etrabyndaky bahalary bilen deňeşdirilýändigini üçin bu kesgitlemedäki ekstremuma funksiýanyň etrap ekstremumy hem diýilýär.

**2-nji teorema (Ekstremumyň zerur şerti).** Eger  $f$  funksiýa  $a$  ekstremum nokadynda differensirlenýän bolsa, onda  $f'(a) = 0$ .

$\triangleleft a$  nokadyň funksiýanyň ekstremum nokady bolany üçin ol nokadyň şeýle  $U(a, \delta)$  etraby tapylyp, funksiýanyň  $f(a)$  bahasy şol etrapdaky bahalarynyň iň ulusy ýa-da iň kiçisidir. Şoňa görä Fermanyň teoremasy esasynda  $f'(a) = 0$  bolar.  $\triangleright$

Şeýlelikde, differensirlenýän funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmak üçin  $f'(x) = 0$  deňlemäni çözmek zerurdyr (onuň çözüwüne önümiň nol nokady ýa-da funksiýanyň duruw nokady diýilýär). Ol nokadyň ekstremum nokady bolman hem bilýändigini belläliň. Mysal üçin,  $f(x) = x^3$  funksiýanyň  $f'(x) = 3x^2$  önümi üçin  $f'(0) = 0$ , ýöne  $x = 0$  ol funksiýanyň ekstremum nokady däldir, sebäbi  $(-1, 1)$  aralykda ol artýar.

Şonuň üçin hem  $f'(x) = 0$  şerte ekstremumyň zerur şerti diýilýär. Funksiýanyň differensirlenmeýän, ýagny önüminiň tükeniksizlige öwürülýän ýa-da ýok nokady hem onuň ekstremum nokady bolup biler, ol aşakdaky mysallarda görkezilýär.

**13-nji mysal.** a)  $f(x) = |x|$ ; b)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  funksiýalaryň ekstremum nokatlaryny tapmaly..

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

**Ýeterlik.** Goý, (26) predeller bar bolsun, onda onuň ikinji deňligi  $\alpha(x) = f(x) - kx - b$  funksiýanyň  $x \rightarrow +\infty$  bolanda tükeniksiz kiçidigini aňladýar we bu ýerden (25) deňlikler alynýar, ýagny  $y = kx + b$  göni çyzyk  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasydyr.  $\triangleright$

Funksiýanyň grafiginiň  $x \rightarrow -\infty$  bolandaky ýapgyt asimptotasy hem şonuň ýaly kesgitlenýär.

**18-nji mysal.**  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$  funksiýanyň grafiginiň asimptotalaryny tapmaly.

$\triangleleft x = 1$  göni çyzyk funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasydyr, çünki  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x - 1} = \infty$ . Funksiýany

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2 - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+2) - 2}{x - 1} = x + 2 - \frac{2}{x - 1}$$

görnüşde ýazyp,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x - 1} = 0$  deňligiň esasynda  $y = x + 2$  göni çyzygyň

funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasydygyny alarys.  $\triangleright$

**2. Funksiýanyň derňelişi we onuň grafigi.** Funksiýany derňemekligi şeýle tertipde geçirmek bolar.

1. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny we üzülmek nokatlaryny tapmaly.
2. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalaryny tapmaly.
3. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny kesgitlemeli we ekstremum nokatlaryny hem-de ekstremum bahalaryny tapmaly.
4. Funksiýanyň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny hem-de epin nokatlaryny kesgitlemeli.
5. Funksiýanyň grafiginiň koordinatlar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmaly.

6. Alnan maglumatlar esasynda funksiýanyň grafigini gurmaly.

Funksiýa jübüt ýa-da täk bolanda onuň grafiginiň simmetrikligini nazara alyp, ony diňe  $x \geq 0$  bolanda derňemek ýeterlikdir.



kesgitleniş oblastyny  $(-\infty, -1/\sqrt[3]{4})$ ,  $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  aralyklara bölüp, olaryň her birinde ikinji önümiň alamatyny kesgitleliň.

1) Eger  $x \in (-\infty, -1/\sqrt[3]{4})$  bolsa, onda  $f''(x) > 0$  we funksiýa aşak güberçektir.

2) Eger  $x \in (-1/\sqrt[3]{4}, 0)$  bolsa, onda  $f''(x) < 0$  we funksiýa ýokaryk güberçektir.

3) Eger  $x \in (0, +\infty)$  bolsa, onda  $f''(x) > 0$  we funksiýa aşak güberçektir.

Şeýlelikde, ikinji önüm  $x = -1/\sqrt[3]{4}$  we  $x = 0$  nokatlardan geçende alamatyny üýtgedýär. Şunlukda,  $x = -1/\sqrt[3]{4}$  funksiýanyň epin nokady bolup,  $x = 0$  epin nokady däldir, çünki ol nokatda funksiýa kesgitlenmedikdir. ▷

#### § 4. 6. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary we derňelişi

**1. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary,** Eger  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  predelleriň iň bolmanda birisi  $+\infty$  ýa-da  $-\infty$  deň bolsa, onda  $x = a$  göni çyzyga  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasy diýilýär. Eger  $f$  funksiýa

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0 \quad (25)$$

görnüşde aňladylyan bolsa, onda  $y = kx + b$  göni çyzyga  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy diýilýär.

**9-njy teorema.**  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiginiň  $x \rightarrow +\infty$  bolanda  $y = kx + b$  ýapgyt asimptotasynyň bolmagy üçin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b \quad (26)$$

predelleriň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

◁ **Zerurlyk.** Goý,  $y = kx + b$  göni çyzyk  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy bolsun, ýagny (25) deňlikler ýerine ýetsin, onda

◁  $x = 0$  nokatda olaryň birinjisiniň önümi ýokdur, ikinjisiniň önümi bolsa tükeniksizlige deňdir, ýöne ol nokat funksiýalaryň ikisiniň hem minimum nokadydyr, çünki  $\forall \delta > 0$  üçin  $-\delta < x < \delta$  bolanda olaryň ikisi üçin hem  $f(x) \geq 0 = f(0)$ . ▷

Funksiýanyň duruw nokadyna, şeýle hem onüminiň tükeniksizlige deň ýa-da ýok nokadyna onuň ekstremumynyň bolup biljek nokady diýilýär. Ol nokadyň haçan hakykatdan hem funksiýanyň ekstremum nokady bolýandygyny bilmek üçin goşmaça barlag geçirmeli. Onuň üçin bolsa ýeterlik şertleri ulanmaly.

**2. Ekstreumyň ýeterlik şertleri.** Eger  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen  $f$  funksiýa üçin  $\delta > 0$  tapylyp,  $(a - \delta, a)$  we  $(a, a + \delta)$  aralyklarda funksiýanyň alamatlary dürli-dürli bolsa, onda ol funksiýa  $a$  nokatdan geçende alamatyny üýtgedýär diýilýär.

**3-nji teorema (Birinji ýeterlik şert).** Eger  $f$  funksiýa  $a$  nokadyň käbir etrabynda differensirlenýän bolup,  $f'(a) = 0$  we  $a$  nokatdan geçende  $f'$  önüm alamatyny üýtgedýän bolsa, onda  $a$  nokatda  $f$  funksiýanyň ekstremumy bardyr. Şunlukda, eger:

1. Önümiň alamaty goşmakdan aýyrmaga üýtgeşe, onda  $a$  nokat  $f$  funksiýanyň maksimum nokadydyr.

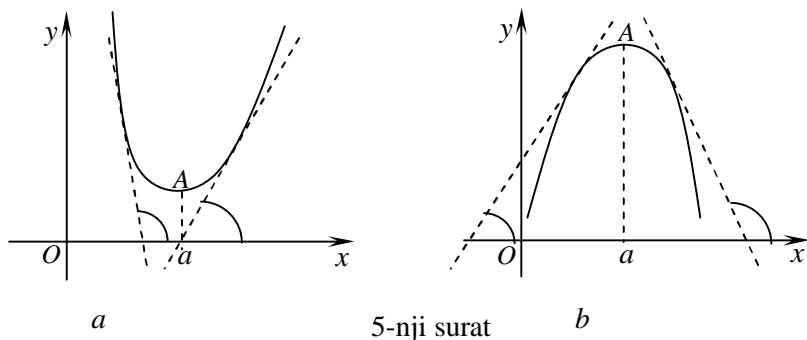
2. Önümiň alamaty aýyrmakdan goşmaga üýtgeşe, onda  $a$  nokat  $f$  funksiýanyň minimum nokadydyr.

Eger-de funksiýanyň önümi  $a$  nokatdan geçende alamatyny üýtgetmese, onda ol nokatda funksiýanyň ekstremumy ýokdur.

◁ Goý,  $x$  garalyan etraba degişli erkin nokat bolsun. Onda  $[a, x]$  (ýa-da  $[x, a]$ ) kesimde  $f$  funksiýa Lagranžyň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyryýar we şonuň üçin  $(a, x) \ni c$  (ýa-da  $(x, a) \ni c$ ) nokat tapylyp,  $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$  deňlik dogrudyr. Eger  $x < a$  bolanda  $f'(x) > 0$  we  $a < x$  bolanda  $f'(x) < 0$  bolsa, onda iki ýagdaýda-da ol deňlikden  $f(x) < f(a)$  deňsizlik alynýar we ol  $a$  nokadyň  $f$  funksiýanyň maksimum nokadydygyny aňladýar. 2-nji şert ýerine ýetende  $a$  nokadyň funksiýanyň minimum nokadydygy şonuň ýaly görkezilýär.

Eger funksiýanyň  $f'$  önümi  $a$  nokatdan geçende alamatyny üýtgetmese, onda şol nokatda onuň ekstremumynyň ýokdugy 16-njy teoremadan gelip çykýar, çünki bu halda funksiýa monotondyr. ▷

Bu teoremanyň şeýle geometrik manysy bardyr: eger differensirlenýän funksiýanyň grafiniň  $A(a, f(a))$  nokadynda galtaşma  $Ox$  okuna parallel, ondan çepdäki nokatlarynda galtaşma şol ok bilen kütäk, sagdaky nokatlarda bolsa ýiti burç emele getirýän bolsa, onda  $a$  onuň maksimum nokadydyr (5-nji  $a$  surat). Eger-de galtaşma ondan çepdäki nokatlarda şol ok bilen kütäk, sagdaky nokatlarynda bolsa ýiti burç emele getirýän bolsa, onda  $a$  onuň minimum nokadydyr (5-nji  $b$  surat).



Bu düzgün boýunça funksiýanyň ekstremumyny tapmak üçin onuň kesgitlenen aralygyny differensirlenmeýän we duruw nokatlary arkaly aralyklara bölmeli we olarda önümiň alamatlaryny kesgitlemeli (onuň üçin bolsa her aralygyň bir nokadynda önümiň alamatyny bilmek ýeterlikdir).

**14-nji mysal.**  $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$  funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

◁ Funksiýanyň san okunyň ähli nokatlarynda önümi bardyr:

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x+2)(x-1)^2(5x+4).$$

Funksiýanyň önüminiň nollary  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -0,8$ ,  $x_3 = 1$ . Şol nokatlar arkaly san okuny  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, -0,8)$ ,  $(-0,8, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  aralyklara böleliň we şolara deňişli  $-3$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $2$  nokatlarda önümiň alamatlaryny kesgitlep, önümiň deňişli aralyklardaky alamatlaryny anyklarys:

- 1)  $(-\infty, -2)$  aralykda  $f'(x) > 0$ ,
- 2)  $(-2, -0,8)$  aralykda  $f'(x) < 0$ ,
- 3)  $(-0,8, 1)$  aralykda  $f'(x) > 0$ ,
- 4)  $(1, +\infty)$  aralykda  $f'(x) > 0$ .

**Teoremanyň  $f''(a) = 0$  şerti zerur bolup, ýöne ol ýeterlik däldir.**

Mysal üçin,  $f(x) = x^4$  funksiýanyň  $f''(x) = 12x^2$  ikinji önümi  $x = 0$  nokatda nola deňdir, ýöne ol nokat funksiýanyň epin nokady däldir, çünki  $x = 0$  nokadyň islendik etrabynda ol funksiýa aşak güberçekdir.

Funksiýanyň ikinji önüminiň ýok nokady hem onuň epin nokady bolup biler. Ony  $x = 0$  nokatda önümi ýok, ýöne şol nokat onuň epin nokady bolan  $f(x) = x^{1/3}$  funksiýa tassyklaýar.

**8-nji teorema (Ýeterlik şert).** Eger  $a$  nokadyň käbir etrabynda ikinji önümi bar bolan  $f$  funksiýa üçin  $f''(a) = 0$  bolup,  $f''$  önümiň şol etrapda  $a$  nokadyň çepinde we sagynda alamatlary dürli-dürli bolsa, onda  $A(a, f(a))$  nokat  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiniň epin nokadydyr.

◁ Funksiýanyň ikinji önüminiň  $a$  nokatdan çepde we sagda alamatlarynyň dürlüligi esasynda, 6-njy teorema boýunça  $a$  nokatdan çepde we sagda funksiýanyň grafiniň güberçeklik ugurlary dürli bolar. Şonuň üçin  $A(a, f(a))$  nokat  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiniň epin nokadydyr. ▷

Şeýlelikde, funksiýanyň epin nokatlaryny hem-de onuň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny kesgitlemek üçin aşakdaky düzgünden peýdalanmak bolar.

1. Funksiýanyň ikinji önüminiň nola deň hem-de ikinji önüminiň ýok (ýa-da tükeniksizlige deň) nokatlaryny tapmaly.

2. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny şol nokatlar hem-de funksiýanyň üzülmä nokatlary arkaly aralyklara bölmeli we alnan aralyklaryň her birinde funksiýanyň ikinji önüminiň alamatlaryny kesgitlemeli.

**17-nji mysal.**  $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$  funksiýanyň epin nokatlaryny, aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny tapmaly.

◁ Funksiýanyň ikinji önümini tapalyň:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 8x, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} + 8 = 8 \frac{x^3 + 1/4}{x^3}.$$

Diýmek, funksiýanyň ikinji önümi  $x = 0$  nokatda tükeniksizlige deňdir we  $x = -1/\sqrt[3]{4}$  nokatda nola deňdir. Şonuň üçin hem funksiýanyň

görnüşde bolar.  $y = f(x)$  funksiýany  $x_o$  nokadyň käbir etrabynda  $n = 2$  üçin Teýloryň formulasy boýunça dagydyp,

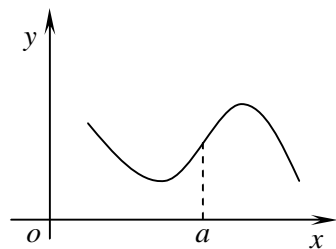
$$y = f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_o)^2, \quad c \in (x_o, x)$$

deňligi alarys. Soňky iki deňlikden bolsa

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_o)^2$$

deňlik gelip çykýar. Şerte görä  $f''(c) > 0$  bolýandygy üçin bu deňlikden  $y - Y > 0$ , ýagny  $y > Y$  deňsizlik gelip çykýar. Ol deňsizlik  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigynyň şol grafiga erkin  $M(x, f(x))$  ( $x \in (a, b)$ ) nokatda geçirilen galtaşmadan ýokarda ýerleşýändigini aňladýar, ýagny  $(a, b)$  aralykda  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigi aşak güberçekdir. Teoremanyň ikinji tassyklamasy şonuň ýaly subut edilýär. ▽

**2. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady.** Eger  $a$  nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen  $f$  üçin  $y = f(x)$  funksiýanyň grafiginiň şol etrapda  $a$  nokadyň çepinde we sagynda güberçeklik ugurlary dürli-dürli bolsa, onda  $A(a, f(a))$  nokada onuň grafiginiň epin nokady (8-nji surat),  $a$  nokada bolsa  $f$  funksiýanyň epin nokady diýilýär.



8-nji surat

**7-nji teorema (zerur şert).** Eger  $A(a, f(a))$  epin nokady üçin  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda üznüksiz ikinji önümi bar bolsa, onda  $f''(a) = 0$ .

◁ Eger tersine  $f''(a) > 0$  (ýa-da  $f''(a) < 0$ ) bolsa, onda  $f''$  önümiň  $a$  nokatda üznüksizligi esasynda  $a$  nokadyň käbir etrabynda hem şol alamat saklanar we 6-njy teorema esasynda  $a$  nokadyň şol etrabynda funksiýanyň grafigi aşak (ýa-da ýokaryk) güberçek bolar, ýagny  $a$  nokat funksiýanyň epin nokady bolup bilmez. Bu garşylyk teoremany subut edýär. ▽

Şeýlelikde, ekstremumyň birinji ýeterlik şerti boýunça  $x = -2$  nokat funksiýanyň maksimum,  $x = -0,8$  nokat minimum nokadydyr,  $x = 1$  nokatda bolsa onuň ekstremumy ýokdur. Şunlukda, funksiýanyň maksimum bahasy  $f(-2) = 0$ , minimum bahasy bolsa  $f(-0,8) = -8,4$ . ▽

**Bellik.** Bu teorema  $f$  funksiýa  $a$  nokatda üznüksiz bolup, şol nokatda onuň önümi ýok halynda hem dogrudyr.

Kabir hallarda ekstremumy tapmak üçin funksiýanyň ikinji önüminiň barlygyny talap edýän aşakdaky teoremany ulanmak amatly bolýar.

**4-nji teorema (Ikinji ýeterlik şert).** Goý,  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda ikinji önümi bar bolup,  $f'(a) = 0$  bolsun. Onda  $a$  nokat  $f''(a) > 0$  bolanda funksiýanyň minimum,  $f''(a) < 0$  bolanda bolsa maksimum nokadydyr.

◁ Ikinji önümiň kesgitlemesine we teoremanyň şertine görä

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a}$$

deňligi ýazmak bolar. Bu deňlik esasynda  $f''(a) > 0$  bolanda, funksiýanyň predeliniň häsiýeti boýunça  $a$  nokadyň käbir  $\delta$  – etrabynda

$$\frac{f'(x)}{x - a} > 0$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şonuň üçin  $x < a$  bolanda  $f'(x) < 0$  we  $x > a$  bolanda  $f'(x) > 0$  bolar we ekstremumyň birinji ýeterlik şerti boýunça  $a$  nokat funksiýanyň minimum nokadydyr. Ikinji tassyklama hem şonuň ýaly subut edilýär. ▽

**15-nji mysal.**  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$  funksiýanyň ekstremumyny tapmaly

$$\triangleleft f'(x) = 4x^3 - 20x = 0 \quad \text{deňlemäniň} \quad x_1 = -\sqrt{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{5}$$

çözüwleri bardyr. Şol nokatlarda  $f''(x) = 12x^2 - 20$  ikinji önümiň bahalarynyň alamatlaryny kesgitleliň:  $f''(-\sqrt{5}) = 40 > 0$ ,  $f''(0) = -20 < 0$ ,  $f''(\sqrt{5}) = 40 > 0$ . Şeýlelikde, ekstremumyň ikinji ýeterlik şerti boýunça  $x_1 = -\sqrt{5}$ ,  $x_3 = \sqrt{5}$  nokatlar funksiýanyň minimum,  $x_2 = 0$  nokat bolsa maksimum nokadydyr. Şunlukda,  $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = -10$  funksiýanyň minimum bahasy we  $f(0) = 15$  maksimum bahasy bolar. ▽

Şeýlelikde, funksiýanyň ekstremumy üçin ýene-de bir düzgün aldyk.

Bu düzgüni funksiýanyň  $a$  nokatda ikinji önümi ýok ýa-da  $f''(a)=0$  bolanda ulanyp bolmaýar. Bu halda ekstremumy tapmak üçin aşakdaky teoremany ulanmak amatlydyr.

**5-nji teorema (Üçünji ýeterlik şert).** Goý,  $f$  funksiýanyň  $a$  nokatda  $n$  tertipli önümi bar bolup,

$$f^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

şertler ýerine ýetsin. Onda  $n$  jübüt bolup,  $f^{(n)}(a) < 0$  bolanda  $a$  nokat  $f$  funksiýanyň maksimum,  $f^{(n)}(a) > 0$  bolanda bolsa minimum nokadydyr. Eger  $n$  ták bolsa, onda  $a$  nokatda  $f$  funksiýanyň ekstremumy ýokdur.

◁ Teoremanyň şertlerinde

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Teýlor formulasy dogrudyr. Onda  $x \rightarrow a$  bolanda

$$b(x, a) = \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} \rightarrow 0 \text{ bolýandygy üçin, } x \rightarrow a \text{ bolanda } b(x, a)$$

tükeniksiz kiçidir. Şonuň üçin Teýlor formulasyndan alynýan

$$f(x) - f(a) = \left[ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + b(x, a) \right] (x-a)^n$$

deňlikdäki kwadrat ýaýyň içindeki aňlatmanyň alamaty  $f^{(n)}(a)$

önümiň alamaty bilen gabat gelýär. Şonuň üçin  $n$  jübüt bolanda,

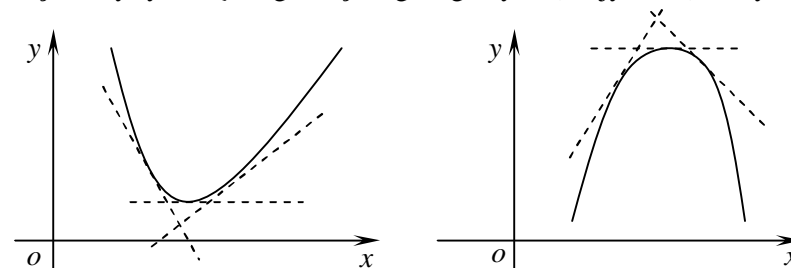
$(x-a)^n > 0$  bolýandygy sebäpli,  $f(x) - f(a)$  tapawudyň alamaty hem  $f^{(n)}(a)$  önümiň alamaty bilen gabat gelýär. Şol sebäpli  $f^{(n)}(a) > 0$  bolanda  $f(x) - f(a) > 0$ , ýagny  $a$  nokat  $f$  funksiýanyň minimum nokadydyr,  $f^{(n)}(a) < 0$  bolanda bolsa  $f(x) - f(a) < 0$  we  $a$  nokat maksimum nokadydyr. Eger  $n$  ták san bolsa, onda  $(x-a)^n$  aňlatma we onuň bilen birlikde bolsa  $f(x) - f(a)$  tapawut  $a$  nokatdan geçende alamatyny üýtgedýär, şoňa görä hem  $a$  nokat funksiýanyň ekstremum nokady bolup bilmez. ▷

**16-njy mysal.**  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$  funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

◁  $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$  önümiň ýeke-täk  $x = -1$  nol nokady bardyr. Şol nokatda beýleki önümleriň bahalaryny hasaplalyň:  $f''(x) = 12x^2 + 24x + 12$ ,  $f''(-1) = 0$ ,  $f'''(x) = 24x + 24$ ,  $f'''(-1) = 0$  we  $f^{IV}(x) = 24$ ,  $f^{IV}(-1) = 24 > 0$  bolany üçin, ekstremumyň üçünji ýeterlik şerti boýunça  $x = -1$  nokat funksiýanyň minimum nokadydyr we minimum bahasy  $f(-1) = 2$ . ▷

#### § 4. 5. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligi we epin nokatlary

**1. Funksiýanyň grafiginiň güberçeklik ugurlary.** Eger käbir aralykda  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigi oňa geçirilen islendik galtaşmadan ýokarda (aşakda) ýerleşýän bolsa, onda onuň grafigi şol aralykda aşak (ýokaryk) güberçek diýilýär. Aşak güberçek grafige oýuk (6-njy surat) we ýokaryk



6-njy surat

7-nji surat

güberçek grafige bolsa yöne güberçek grafik (7-nji surat) hem diýilýär.

**6-njy teorema.** Eger  $f$  funksiýanyň  $(a, b)$  aralykda ikinji önümi bar bolup,  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) bolsa, onda  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigi şol aralykda aşak (ýokaryk) güberçekdir.

◁ Goý,  $(a, b)$  aralykda  $f''(x) > 0$  bolsun. Bellenen  $x_o \in (a, b)$  üçin  $(x_o, f(x_o))$  nokatda  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigine galtaşma geçireliň. Eger onuň nokatlarynyň üýtgeýän ordinatasyny  $Y$  bilen belgilesek, onda ol galtaşmanyň deňlemesi

$$Y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

## II. 5. KESGITSIZ INTEGRAL

### § 5.1. Kesgitsiz integralyň kesgitlenişi we onuň häsiýetleri

**1. Asyl funksiýa we kesgitsiz integral.** Mälim bolşy ýaly, differensial hasabyýetiň esasy meseleleriniň biri funksiýany differensirlemekdir. Ýöne matematikada, tebigy ylymlarda we tehnikada differensirlemeklige ters bolan meseleler hem duş gelýär. Mysal üçin, berlen tizligi arkaly material nokadyň göni çyzyk boýunça geçen ýoluny kesgitlemek we himiki reaksiýanyň tizligi boýunça oňa gatnaşýan jisimiň mukdaryny tapmak şeýle meselelerdir. Başgaça aýdylanda, bu meseleler berlen  $F'(x) = f(x)$  önüm boýunça  $F$  funksiýanyň özüni tapmaklygy aňladýar.

Eger  $X$  aralykda  $F$  funksiýa üçin  $F'(x) = f(x)$  deňlik ýerine ýetse, onda  $F$  funksiýa şol aralykda  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär.

Mysal üçin,  $F(x) = \sin x$  funksiýa san okunda  $f(x) = \cos x$  funksiýanyň asyl funksiýasydyr, çünki  $\forall x \in \mathbf{R}$  üçin  $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ ;  $F(x) = \ln x$  funksiýa  $\forall x > 0$  üçin  $f(x) = 1/x$  funksiýanyň asyl funksiýasydyr, çünki  $\forall x > 0$  üçin  $F'(x) = (\ln x)' = 1/x = f(x)$ .

Eger  $F$  funksiýa  $X$  aralykda  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda islendik hemişelik  $C$  san üçin  $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ , ýagny  $G(x) = F(x) + C$  funksiýa hem  $X$  aralykda  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Şunlukda, dürli iki asyl funksiýalaryň tapawudy hemişelik  $C$  sana. deňdir:  $G(x) - F(x) = C$ .

Şeýlelikde, eger  $F$  funksiýa  $X$  aralykda  $f$  funksiýanyň asyl funksiýalarynyň birisi bolsa, onda şol aralykda onuň islendik asyl funksiýasy  $G(x) = F(x) + C$  görnüşde aňladylýar ( $C$ -erkin hemişelik san), ýagny  $\{F(x) + C\}$  köplük  $f$  funksiýanyň  $X$  aralykdaky ähli asyl funksiýalarynyň köplügidir.

**Kesgitleme.**  $f$  funksiýanyň  $X$  aralykdaky ähli asyl funksiýalarynyň köplüğine  $f$  funksiýanyň şol aralykdaky kesgitsiz integraly diýilýär we ol

$$\int f(x) dx \quad (1)$$

bilen belgilenilýär. Bu ýerde  $\int$  belgä integral belgisi,  $f(x)dx$  aňlatma integral astyndaky aňlatma,  $f$  funksiýa bolsa integral astyndaky funksiýa diýilýär.

Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (2)$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, funksiýanyň kesgitsiz integralyny tapmaklyk ol funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmaklygy aňladýar. Şonuň üçin berlen funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmaklyga integrirlemek hem diýilýär. Ony tapmak üçin bolsa (2) formula ulanylýar. Kesgitsiz integrala, köplenç ýöne integral hem diýilýär..

**2. Kesgitsiz integralyň esasy häsiýetleri.** 1. Eger  $f$  funksiýanyň  $X$  aralykda asyl funksiýasy bar bolsa, onda

$$a) \left( \int f(x)dx \right)' = f(x); \quad b) d\left( \int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

deňlikler dogrudyr.

◁ Eger  $F$  funksiýa  $X$  aralykda  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda (2) formula esasynda

$$\left( \int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Bu deňlik we differensialyň kesgitlemesi boýunça

$$d\left( \int f(x)dx \right) = \left( \int f(x)dx \right)' dx = f(x)dx. \triangleright$$

Bu häsiýet önüm we integralyň, şeýle hem differensial we integralyň özara biri-birlerine ters bolan amallardygyny görkezýär.

2. Eger  $g$  funksiýa  $X$  aralykda differensirlenýän bolsa, onda

$$\int dg(x) = \int g'(x)dx = g(x) + C. \quad (3)$$

◁ Bu deňlik  $X$  aralykda  $g$  funksiýanyň  $f = g'$  funksiýa üçin asyl funksiýasy bolýandygy sebäpli kesgitlemeden gelip çykýar. ▷

3. Eger  $f$  funksiýanyň  $X$  aralykda asyl funksiýasy bar bolsa, onda islendik hemişelik  $k$  san üçin  $kf$  funksiýanyň hem şol aralykda asyl funksiýasy bardyr we  $k \neq 0$  bolanda

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad (4)$$

deňlik dogrudyr, ýagny hemişelik  $k \neq 0$  köpeldijini integralyň astyndan

$$80) \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x\sqrt{5} - \sqrt{2}}{x\sqrt{5} + \sqrt{2}} \right| + C. \quad 81) \frac{3}{8} (2x-3)\sqrt[3]{2x-3} + C.$$

$$82) \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| + C. \quad 83) \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 2} \right| + C.$$

$$84) \frac{13-6x}{9} e^{-3x} + C. \quad 85) \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \quad 86) -\frac{2x+1}{4} e^{-2x} + C.$$

$$87) (6-4x) \cos \frac{x}{2} + 8 \sin \frac{x}{2} + C. \quad 88) 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.$$

$$89) -\frac{2x^2 - 10x + 15}{4} \cos 2x + \frac{2x-5}{4} \sin 2x + C.$$

$$90) \left( \frac{3}{2} x^2 - 4x \right) \ln x - \frac{3}{4} x^2 + 4x + C. \quad 91) \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) + C.$$

$$92) e^x (x^2 - 2x + 3) + C. \quad 93) x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C.$$

$$94) \frac{x}{x+1} \ln x - \ln(x+1) + C. \quad 95) x - 2 \ln|x+2| + C. \quad 96) -\frac{1}{3(x+1)^3} + C.$$

$$97) \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C. \quad 98) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C.$$

$$99) \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C. \quad 100) \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.$$

$$101) \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C. \quad 102) \frac{1}{2} \arctg \left( 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$103) \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{5}} \right| + C. \quad 104) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

41)  $x - 2\ln|2x+3| + C$ ; 42)  $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$ ; 43)  $-\ln(1+e^{-x}) + C$ ;  
 44)  $e^{x^3+x^2-x+1} + C$ ; 45)  $\frac{1}{3}e^{tg3x} + C$ ; 46)  $\frac{1}{6}\arctg\frac{2x}{3} + C$ ;  
 47)  $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right| + C$ ; 48)  $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C$ ; 49)  $\frac{5}{2}\arcsin x^2 + C$ ;  
 50)  $\arcsin(\ln x) + C$ ; 51)  $-\frac{1}{3}(4-\ln x)^3 + C$ ; 52)  $2\sqrt{e^x+4} + C$ ;  
 53)  $e^{-\frac{1}{x}} + C$ ; 54)  $\frac{2^{x^3}}{3\ln 2} + C$ ; 55)  $-\ln|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}| + C$ ;  
 56)  $\frac{1}{3}tgx^3 + C$ ; 57)  $-\frac{1}{x-1} + C$ ; 58)  $\arcsin\frac{2x-1}{3} + C$ ;  
 59)  $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$ ; 60)  $\arcsin(2x-3) + C$ ; 61)  $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$ ;  
 62)  $\arctg(2x-1) + C$ ; 63)  $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C$ ;  
 64)  $\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$ ; 65)  $-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + C$ ;  
 66)  $\sin(x+3) + C$ ; 67)  $\frac{\sin^4 x}{4} + C$ ; 68)  $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$ ;  
 69)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ . 70)  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ . 71)  $-\frac{1}{8}\cos 4x + C$ .  
 72)  $-\frac{1}{2}\cos x + \cos\frac{1}{2}x + C$ . 73)  $\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C$ .  
 74)  $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$ . 75)  $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$ .  
 76)  $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$ . 77)  $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ .  
 78)  $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$ . 79)  $\frac{1}{\sqrt{21}}\arctg\left(x\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + C$ .

çykaryp bolar.

◁ Goý,  $F$  funksiýa  $X$  aralykda  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasy bolsun, ýagny  $F'(x) = f(x)$ . Onda  $[kF(x)]' = kf(x)$  deňligiň esasynda  $kF(x)$  funksiýa  $kf(x)$  funksiýanyň asyl funksiýasy bolar we şonuň üçin

$$k \int f(x)dx = k[F(x) + C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x)dx,$$

bu ýerde  $C_1 = kC$ . ▷

4. Eger  $f$  we  $g$  funksiýalaryň  $X$  aralykda asyl funksiýalary bar bolsa, onda  $f \pm g$  funksiýanyň hem şol aralykda asyl funksiýasy bardyr we

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \quad (5)$$

formula dogrudyr, ýagny algebraik jemiň integraly integrallaryň algebraik jemine deňdir.

◁ Goý,  $F$  we  $G$  funksiýalar  $X$  aralykda deňşililikde  $f$  we  $g$  funksiýalaryň asyl funksiýalary bolsun, ýagny  $F'(x) = f(x)$  we  $G'(x) = g(x)$ . Onda  $[F(x) \pm G(x)]' = f(x) \pm g(x)$  we şonuň üçin

$$\begin{aligned} \int f(x)dx \pm \int g(x)dx &= [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = \\ &= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)]dx, \end{aligned}$$

bu ýerde  $C = C_1 \pm C_2$ . ▷

Bu häsiýet islendik tükenikli sany funksiýalaryň goşulýjylary üçin hem dogrudyr.

**3. Kesgitsiz integrallaryň tablisasy.** Integrirlemegiň differensirlemege ters amaldygý esasynda elementar funksiýalaryň önümleriniň tablisasyndan peýdalanyp, kesgitsiz integrallaryň tablisasyny almak bolar. Onuň üçin önümiň tablisasynyň her bir formulasyndan, ýagny  $F'(x) = f(x)$  görnüşdäki deňlikden, integralyň kesgitlemesi boýunça

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

formulanyň alynýandygyny bilmek ýeterlikdir. Mysal üçin, önümiň tablisasynyň  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(tgx)' = 1/\cos^2 x$  formulalaryndan kesgitsiz integral üçin

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

formulalary alarys. Şuňa meňzeşlikde, önümiň tablisasynyň beýleki formulalaryny ulanyp, kesgitsiz integrallaryň aşakdaky tablisasyny alarys:

$$1. \int 1 dx = \int dx + C.$$

$$2. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right).$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq k\pi, k \in Z).$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C \quad (-1 < x < 1).$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C.$$

$$11. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$12. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (|x| \neq a).$$

## Jogaplar

$$1. 1) \frac{x^7}{7} + C; 2) \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C; 3) -\frac{1}{4x^4} + C; 4) \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C;$$

$$5) \frac{x^6}{6} - x^4 + \frac{x^2}{2} - x + C; 6) x^2 - 2x\sqrt{x} + C; 7) \frac{x^4}{12} - \frac{3}{2x^2} + C;$$

$$8) 4x + \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C; 9) x + \frac{12}{\sqrt{x}} - \frac{9}{2x^2} + C; 10) 2\ln|x| + x + C;$$

$$11) \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C; 12) 2\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C; 13) -\frac{1}{4} e^{-4x} + C;$$

$$14) \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) - 2x + C; 15) \sqrt{x^2 + 1} + C; 16) \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C;$$

$$17) \arcsin \frac{x}{5} + C; 18) -\frac{1}{7} \cos 7x + C; 19) \frac{3^x}{\ln 3} + C; 20) e^x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C;$$

$$21) \ln|x + \sqrt{x^2 - 5}| + C; 22) \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C; 23) \frac{1}{3} \sin 3x + C;$$

$$24) \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C; 25) -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C; 26) 2x + \sin x + C;$$

$$27) 3x + \frac{x^2}{2} + \cos x + C; 28) \frac{1}{2} e^{2x+1} + C; 29) \frac{12^x}{\ln 12} + C;$$

$$30) \frac{1}{4} (x+5)^4 + C; 31) \frac{1}{3} (1+2x)\sqrt{1+2x} + C; 32) \frac{1}{8} (x^2 - 1)^4 + C;$$

$$33) \frac{(x^2 + 5)^8}{8} + C; 34) \frac{1}{3} (1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C; 35) \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C;$$

$$36) -\frac{1}{3(x-1)^3} + C; 37) e^{x+x^2} + C; 38) -\frac{1}{2} \cos x^2 + C;$$

$$39) -\frac{1}{24} \cos^6 4x + C. 40) x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln|x+1| + C;$$



$$\begin{array}{lll}
57) \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}. & 58) \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}. & 59) \int \frac{dx}{1 + x + x^2}. \\
60) \int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}. & 61) \int \frac{dx}{4 + 2x + x^2}; & 62) \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}. \\
63) \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}. & 64) \int (\cos 3x - \sin 2x)dx. & 65) \int (\sin 3x + \cos 5x)dx. \\
66) \int \cos(x + 3)dx. & 67) \int \sin^3 x \cos x dx. & 68) \int \cos^5 x \sin x dx. \\
69) \int (1 - \sin^2 x)dx. & 70) \int (1 - \cos^2 x)dx. & 71) \int \sin 2x \cos 2x dx. \\
72) \int \cos \frac{3}{4}x \sin \frac{1}{4}x dx. & 73) \int \cos 3x \cos \frac{4}{3}x dx. & 74) \int \sin^5 x dx. \\
75) \int \cos^5 x dx. & 76) \int \sin x \sin 5x dx. & 77) \int \sin^3 x \cos^2 x dx. \\
78) \int \sin^2 x \cos^4 x dx. & 79) \int \frac{dx}{3x^2 + 7}. & 80) \int \frac{dx}{5x^2 - 2}. \\
81) \int \sqrt[3]{2x - 3} dx. & 82) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}. & 83) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}. \\
84) \int (2x - 5)e^{-3x} dx. & 85) \int x \cos 2x dx. & 86) \int xe^{-2x} dx. \\
87) \int (2x - 3)\sin \frac{x}{2} dx. & 88) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx. & 89) \int (x^2 - 5x + 8)\sin 2x dx. \\
90) \int (3x - 4)\ln x dx. & 91) \int \sqrt{x} \ln x dx. & 92) \int (x^2 + 1)e^x dx. \\
93) \int \ln^2 x dx. & 94) \int \frac{\ln x dx}{(x + 1)^2}. & 95) \int \frac{x}{x + 2} dx. \\
96) \int \frac{dx}{(x + 1)^4}. & 97) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}. & 98) \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}. \\
99) \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}. & 100) \int \frac{dx}{(x - 2)(x - 3)}. & 101) \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}. \\
102) \int \frac{dx}{5 - 3\cos x}. & 103) \int \frac{dx}{2 + 3\cos x}. & 104) \int \frac{(1 + \sin x)dx}{(1 + \cos x)\sin x}.
\end{array}$$

Bu formulalaryň, şonuň ýaly-da her bir tapylan integralyň dogrudygyny barlamak üçin olaryň iki bölegini hem differensirlmeli. Şunlukda, eger integrirlenip alnan funksiýanyň önümi integral astyndaky funksiýa deň bolsa, onda ol integralyň dogry hasaplanylandygyny aňladýar.

**Bellik.** Kesgitsiz integrallaryň tablisasynda  $x$  baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk bolup, ol käbir differensirlenýän funksiýa bolanda hem tablisa dogrudyr. Hakykatdan-da, Goý,  $F'(x) = f(x)$  we (2) deňlik ýerine ýetýän bolsun hem-de  $u = g(x)$  differensirlenýän funksiýa bolsun. Onda birinji differensialyň inwariantlyk häsiýeti esasynda  $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$  we şonuň esasynda

$$\int f(u)du = F(u) + C. \quad (6)$$

Şeýlelikde, (2) formulanyň ýerine ýetýänliginden (6) formulanyň ýerine ýetýändigini gelip çykýar we ol (2) formuladan  $x = u$  goýup alynýar. Şonuň üçin integrallaryň tablisasynyň ähli formulalary  $x$ -iň ornunda  $u$  bolanda hem dogrudyr. Olary ulanmak üçin integral astyndaky aňlatmany ýönekeý özgertmeler arkaly  $f(x)dx = g(u)du$  görnüşe getirmeli.

## § 5.2. Integrirlenmegiň esasy usullary

**1.Dagytmak usuly.** Bu usul ýönekeý özgertmeler geçirip, integral astyndaky  $f$  funksiýany asyl funksiýalary aňsat tapylýan  $f_i (i = 1, n)$

funksiýalaryň kömegi bilen  $f = \sum_{i=1}^n k_i f_i$  görnüşde aňladyp ulanylýar.

Şunlukda, integralyň 3-nji we 4-nji häsiýetleri boýunça  $f$  funksiýanyň integralyny hasaplamak üçin şeýle formula alynýar:

$$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^n k_i \int f_i(x)dx \quad (7)$$

**1-nji mysal.**  $\int \left( x - \frac{5}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Ýaýyň içini kwadrata göterip we (7) deňligi hem-de integralyň tablisasynyň 2-nji we 4-nji formulalaryny ulanyp, integraly hasaplarys:

$$\int \left( x - \frac{5}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int \left( x^2 - 10\sqrt{x} + \frac{25}{x} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx - 10 \int x^{1/2} dx + 25 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{20}{3} x^{3/2} + 25 \ln |x| + C. \triangleright$$

Integrallaryň jemi tapylanda, adatyça, hemişelik sanlar jemlenip, olar bir  $C$  bilen belgilenýär.

**2-nji mysal.**  $\int \left( 4 \sin x + 3e^x - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2 + 1} + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Integralyň 3-nji, 4-nji häsiýetlerinden we tablisanyň 3-nji, 6-njy, 2-nji, 7-nji we 10-njy formulalaryndan peýdalanyp alarys:

$$\int \left( 4 \sin x + 3e^x - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2 + 1} + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= 4 \int \sin x dx + 3 \int e^x dx - \int x^{-3} dx + 7 \int \frac{dx}{x^2 + 1} + 5 \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= -4 \cos x + 3e^x + \frac{1}{2} x^{-2} + 7 \arctg x - 5 \cotg x + C. \triangleright$$

**3-nji mysal.**  $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Integral astyndaky funksiýany  $1 + 2x^2 = 1 + x^2 + x^2$  görnüşde ýazyp we integraly iki integralyň jemi görnüşinde aňladyp hem-de tablisanyň 2-nji we 7-nji formulalaryny ulanyp, integraly hasaplaýs:

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int \frac{(1 + x^2) + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int \frac{1 + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1 + x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \arctg x + C. \triangleright$$

**2.Üýtgeýäni çalşyrmak usuly.** Integral hasaplanylýanda köplenç halda täze üýtgeýäni girizmek bilen ol aňsat hasaplanylýan integrala getirilýär. Bu usula üýtgeýäni çalşyrmak usuly diýilýär. Ol usul şeýle teorema esaslanýar.

**1-nji teorema.** Eger  $F$  funksiýa  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasy we  $t = \varphi(x)$  differensirlenýän bolsa, onda  $F[\varphi(x)]$  funksiýa  $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

$$13) \int \ell^{-4x} dx. \quad 14) \int (e^x - e^{-x})^2 dx. \quad 15) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$16) \int \frac{dx}{x^2 + 16}. \quad 17) \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}. \quad 18) \int \sin 7x dx.$$

$$19) \int 3^x dx. \quad 20) \int (e^x + e^{-2x}) dx. \quad 21) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$

$$22) \int \frac{dx}{\cos^2 5x}. \quad 23) \int \cos 3x dx. \quad 24) \int \frac{dx}{x^2 - 16}.$$

$$25) \int \frac{dx}{\sin^2 3x}. \quad 26) \int (2 + \cos x) dx. \quad 27) \int (3 + x - \sin x) dx.$$

$$28) \int e^{2x+1} dx. \quad 29) \int 3^x \cdot 2^{2x} dx. \quad 30) \int (x + 5)^3 dx$$

$$31) \int \sqrt{1 + 2x} dx. \quad 32) \int x(x^2 - 1)^3 dx. \quad 33) \int (x^2 + 5)^7 2x dx.$$

$$34) \int x\sqrt{1 + x^2} dx. \quad 35) \int \frac{xdx}{x^2 + 1}. \quad 36) \int \frac{dx}{(x-1)^4}.$$

$$37) \int e^{x+x^2} (1 + 2x) dx. \quad 38) \int (\sin x^2) x dx. \quad 39) \int \cos^5 4x \sin 4x dx.$$

$$40) \int \frac{x^3 dx}{x + 1}. \quad 41) \int \frac{2x - 1}{2x + 3} dx. \quad 42) \int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx.$$

$$43) \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}}. \quad 44) \int e^{x^3 + x^2 - x + 1} (3x^2 + 2x - 1) dx.$$

$$45) \int e^{tg 3x} \sec^2 3x dx. \quad 46) \int \frac{dx}{4x^2 + 9}. \quad 47) \int \frac{dx}{9x^2 - 4}.$$

$$48) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}. \quad 49) \int \frac{5x dx}{\sqrt{1 - x^4}}. \quad 50) \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$$

$$51) \int \frac{(4 - \ln x)^2}{x} dx. \quad 52) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 4}}. \quad 53) \int e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}.$$

$$54) \int 2^{x^3} x^2 dx. \quad 55) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}; \quad 56) \int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3};$$

$$\triangleleft \sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x] \text{ formulany ulanyp}$$

alarys:

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 7x + \sin x] dx = \frac{1}{14} \int \sin 7x d(7x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{2} \cos x + C. \triangleright \end{aligned}$$

**4.  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  görnüşdäki integral.** Bu ýerde  $a, b \in \mathbf{R}$  we  $m, n, p$  - rasional sanlar. Bu integrala binomial differensialyň integraly diýilýär. Ol integralyň diňe üç halda, ýagny  $p, \frac{m+1}{n}$  we  $\frac{m+1}{n} + p$  sanlaryň haýsy-da hem bolsa biri bitin san bolanda integrirlenýändigini, beýleki hallarda bolsa elementar funksiýalarda aňladylmaýandygyny XIX asyryň ortalarynda rus matematigi P.Ž. Çebyşew subut edipdir.

**3-nji bellik.** Elementar funksiýalarda aňladylmaýan başga integrallar hem bardyr. Olara aşakdaky integrallar mysal bolup biler:

$$\begin{array}{lll} 1. \int e^{-x^2} dx & 2. \int \cos(x^2) dx. & 3. \int \sin(x^2) dx. \\ 4. \int \frac{dx}{\ln x} & 5. \int \frac{\cos x}{x} dx. & 6. \int \frac{\sin x}{x} dx. \end{array}$$

## G ö n ü k m e l e r

**1. Integrallary hasaplamaly:**

$$\begin{array}{lll} 1) \int x^6 dx. & 2) \int \sqrt[3]{x} dx. & 3) \int \frac{dx}{x^5}. \\ 4) \int (x - x^3) dx. & 5) \int (x^5 - 4x^3 + x - 1) dx. & 6) \int (2x - 3\sqrt{x}) dx. \\ 7) \int \left( \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3} \right) dx. & 8) \int (2 + \sqrt{x})^2 dx. & 9) \int \frac{(x\sqrt{x} - 3)^2}{x^3} dx. \\ 10) \int \frac{(2+x)dx}{x}. & 11) \int x^2(1+2x) dx. & 12) \int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx. \end{array}$$

funksiýanyň asyl funksiýasydyr, ýagny

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C \quad (8)$$

formula dogrudyr.

$\triangleleft$  Çylşyrymly  $F[\varphi(x)]$  funksiýa üçin

$$\{F[\varphi(x)]\}' = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

deňlik ýerine ýetýär, ýagny  $F[\varphi(x)]$  funksiýa  $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$  funksiýanyň asyl funksiýasydyr we şonuň esasynda (7) formula ýerine ýetýär.  $\triangleright$

Amalyýetde (8) formulany ulanmak üçin ony amatly bolan

$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \\ &= \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C \end{aligned}$$

görnüşde ýazýarlar, ýagny ilki  $\varphi(x)$  funksiýa  $u$  bilen çalşyrylýar we alnan funksiýanyň ýokarda getirilen bellik esasynda  $u$  görä asyl funksiýasy tapylýar, soňra ýene-de öňki  $x$  üýtgeýäne geçilýär. Bu formulany ulanmak üçin ilki berlen integraly (8) görnüşe özgertmeli.

$$\begin{aligned} \text{4-nji mysal. } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3 - 1)}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{3} \int (x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} d(x^3 - 1) = \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \sqrt{u} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 1} + C. \end{aligned}$$

Eger  $f(u) = \frac{1}{u}$  bolsa, onda onuň asyl funksiýasynyň  $F(u) = \ln |u|$

bolýandygy üçin, (8) formula şeýle görnüşi alar:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C.$$

$$\text{5-nji mysal. } \int \frac{xdx}{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 4)'}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + C.$$

Garalan mysallaryň hemmesinde integral ilki (8) görnüşe getirilip, soňra şol formula ulanylýar, ýöne amalyýetde başgaça hem çemeleşilýär, ýagny üýtgeýäni gönümel çalşyrmak bilen integral aňsat hasaplanylýan görnüşe getirilýär.

**6-njy mysal.**  $\int \cos(5x - 4) dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Bu integraly hasaplamak üçin  $t = 5x - 4$  çalşyrmany girizeliň. Onda  $x = (t + 4)/5$ ,  $dx = dt/5$ . Şonuň üçin hem

$$\int \cos(5x - 4) dx = \frac{1}{5} \int \cos t dt = \frac{1}{5} \sin t + C = \frac{1}{5} \sin(5x - 4) + C \triangleright$$

Bu integraly başgaça ýokarda getirilen bellikden peýdalanyň hem hasaplamak bolar:

$$\begin{aligned} \int \cos(5x - 4) dx &= \int \cos(5x - 4) \cdot \frac{1}{5} d(5x - 4) = \\ &= \frac{1}{5} \int \cos u du = \frac{1}{5} \sin u + C = \frac{1}{5} \sin(5x - 4) + C. \end{aligned}$$

Üýtgeýäni çalşyrmagyň bir görnüşi bolan şeýdip integraly hasaplamaklyga differensial astyna girizmek usuly hem diýilýär we ol dürli görnüşdäki kesgitsiz integrallary hasaplamakda giňişleýin ulanylýar.

**7-njy mysal.**  $\int \sin^m x \cos x dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Bu integraly hasaplamak üçin differensial astyna girizmek usulyndan peýdalanarys:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos x dx &= \int \sin^m x d(\sin x) = \\ &= \int u^m du = \frac{1}{m+1} \cdot u^{m+1} + C = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + C. \triangleright \end{aligned}$$

**3. Bölkleýin integrirlemek usuly.** Bu usul şeýle teorema esaslanýar.

**2-nji teorema.** Eger  $u = u(x)$  we  $v = v(x)$  funksiýalar käbir aralykda differensirlenýän bolup,  $\int v(x) du(x)$  integral bar bolsa, onda  $\int u(x) dv(x)$  integral hem bardyr we

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x) \quad (9)$$

formula dogrudyr.

◁ Differensirlemegiň düzgüni esasynda

$$d[u(x) \cdot v(x)] = v(x) du(x) + u(x) dv(x).$$

Bu ýerden alynýan  $u(x) dv(x) = d[u(x) \cdot v(x)] - v(x) du(x)$  deňligiň iki bölegini hem integrirläp we integralyň 4-nji hem-de 2-nji häsiýetlerini ulanyň, (9) formulany alarys.  $\triangleright$

c) Eger  $m$  we  $n$  sanlaryň ikisi hem birwagtda täk ýa-da jübüt bolsalar, onda 3-nji şert ýerine ýetýär, şonuň üçin hem  $t = \lg x$  çalşyrmany ulanmak bolar. Ýöne bu halda integraly başgaça hasaplamak amatlydyr. Mysal üçin,  $m$  we  $n$  görkezijileriň ikisi hem täk we položitel bolanda integraly

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx &= \frac{1}{2} \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x 2 \sin x \cos x dx = \\ &= -\frac{1}{4} \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l d(\cos 2x) \end{aligned}$$

görnüşde ýazyp,  $t = \cos 2x$  çalşyrmany ulanmak amatly bolýar

**1-nji bellik.** Käbir hallarda trigonometrik aňlatmanyň integralyny hasaplamaklygy trigonometrik formulalardan peýdalanmak arkaly hem ýönekeýleşdirmek bolar. Meselem, eger  $m$  we  $n$  görkezijileriň ikisi hem jübüt bolsa, onda

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

formulalardan peýdalanmak integraly hasaplamagy aňsatlaşdyrýar.

**21-nji mysal.**  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Integral astyndaky funksiýany

$$\sin^2 x \cos^4 x = \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (\cos 2x + 1),$$

görnüşde ýazalyň. Onda integral aňsat hasaplanýar:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) + \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C \triangleright \end{aligned}$$

**2-nji bellik.** Eger-de, integral astyndaky funksiýa  $\sin \alpha x \cos \beta x$ ,  $\sin \alpha x \sin \beta x$  ýa-da  $\cos \alpha x \cos \beta x$  köpeltmek hasylyna (ýa-da olaryň položitel derejelerine) deň bolsa, onda ol integraly hasaplamak üçin trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasylyny jeme öwürýän formulalar ulanylýar.

**22-nji mysal.**  $\int \sin 4x \cos 3x dx$  integraly hasaplamaly.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{2dt}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+tg \frac{x}{2}} + C. \triangleright$$

Integral astyndaky funksiýanyň käbir hususy görnüşleri üçin, ýagny

1.  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  bolanda  $t = \sin x$  çalşyрма;
2.  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  bolanda  $t = \cos x$  çalşyрма;
3.  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$  bolanda  $t = tg x$  çalşyрма;

ulanylýar we integral rasional funksiýanyň integralyna getirilýär.

**20-nji mysal.**  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Bu ýerde integral astyndaky  $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}$  funksiýa 2-nji şerti kanagatlandyryýar. Şonuň üçin ony ilki

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} = \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x$$

görnüşde ýazyp, soňra  $t = \cos x$  çalşyrmany ulanarys:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x dx = - \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x} d \cos x =$$

$$= - \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} dt = - \int t^{-4} dt + 2 \int t^{-2} dt - \int dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C. \triangleright$$

Indi  $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cos^n x$  hala aýratynlykda garap geçeliň. Goý,  $m$  we  $n$  bitin sanlar bolsun.

a) Eger  $n$ -täk bolsa, onda 1-nji şert ýerine ýetýär, şonuň üçin hem  $t = \sin x$  çalşyрма ulanylýar.

b) Eger  $m$ -täk bolsa, onda 2-nji şert ýerine ýetýär, şonuň üçin hem  $t = \cos x$  çalşyрма ulanylýar.

Oňa bölekleyin integrirlemegiň formulasy diýilýär we ol gysgaça

$$\int u dv = uv - \int v du$$

görnüşde ýazylýar.

Bu formula esasynda  $\int u dv$  görnüşdäki integral köplenç hasaplamasy aňsat bolan  $\int v du$  görnüşdäki integrala getirilýär.

**8-nji mysal.**  $\int x e^x dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Eger  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$  bolsa, onda bu deňlikleriň birinjisini differensirleseň, ikinjisini integrirleseň  $du = dx$ ,  $v = e^x$  bolar. Şonuň üçin hem (9) formulanyň esasynda

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C. \triangleright$$

**9-njy mysal.**  $\int x^n \ln x dx$  ( $n \neq -1$ ) integraly hasaplamaly.

◁ Eger  $u = \ln x$ ,  $dv = x^n dx$  bolsa, onda  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  bolar.

Şonuň üçin hem (9) formulany ulanyp alarys:

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \triangleright$$

Käbir integrallar hasaplanylýanda bölekleyin integrirlemek usuly gaýtalanylýp birnäçe gezek ulanylýar.

**10-njy mysal.**  $\int x^2 \cos x dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Eger  $u = x^2$ ,  $dv = \cos x dx$  bolsa, onda  $du = 2x dx$ ,  $v = \sin x$  bolar. Şonuň üçin hem (9) formulany ulanyp,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

deňligi alarys. Soňky integraly hasaplamak üçin ýene-de bölekleyin integrirlemek usulyny ulanarys. Goý,  $u = x$ ,  $dv = \sin x dx$  bolsun, onda  $du = dx$ ,  $v = -\cos x$  bolar. Şonuň üçin hem (9) formulanyň esasynda

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C. \triangleright$$

Käbir halatlarda bölekleyin integrirlemek usulyny gaýtalap ulanmaklyk başdaky integrala görä çyzykly deňlemä getirýär. Ony indiki mysal tassyklaýar.

**11-nji mysal.**  $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Eger  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \cos bx \, dx$  bolsa, onda  $du = ae^{ax} \, dx$ ,  $v = \frac{1}{b} \sin bx$

bolar. Şonuň üçin (9) formulany ulanyp alarys:

$$I = \frac{1}{b} \sin bx \cdot e^{ax} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

Eger bu integraly hasaplamak üçin  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \sin bx \, dx$  alsak, onda

$du = ae^{ax} \, dx$ ,  $v = -\frac{1}{b} \cos bx$  bolar. Şonuň üçin integrala ýene-de (9)

formulany ulanyp,  $I$  integrala görä çyzykly

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

deňlemäni alarys. Ol deňlemäni  $I$  görä çözüp, integraly hasaplaýs:

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \triangleright$$

Amalyýetiň görkezişi ýaly, bölekleyin integrirlemek usuly bilen hasaplanylýan integrallaryň köpüsi aşadaky ýaly iki topara bölünýärler.

Birinji topara  $P(x)$  köpagza üçin  $\int P(x)f(x)dx$  görnüşdäki integrallar degişlidir. Şunlukda,  $f(x)$  funksiýa

$\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$

görnüşdäki funksiýalaryň biri bolanda  $u(x)$  hökmünde şol funksiýa alynýar,

$e^{kx}$ ,  $\sin ax$ ,  $\cos ax$  görnüşdäki funksiýalaryň biri bolan halda bolsa  $u(x) = P(x)$  alynýar.

Ikinji topara

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int \sin(\ln x) \, dx, \quad \int \cos(\ln x) \, dx$$

görnüşdäki integrallar girýärler. Bu integrallary hasaplamak üçin 11-nji mysaldaky ýaly bölekleyin integrirlemek usuly iki gezek ulanylýar.

$$-a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \sqrt{x^2 + a} \, dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Şeýlelikde,

$$\int \sqrt{x^2 + a} \, dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} \, dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}},$$

deňligi alarys, ondan bolsa

$$2 \int \sqrt{x^2 + a} \, dx = x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$$

deňlik gelip çykýar. Soňky integrala jedweliň 15-nji formulasyny ulanyp alarys:

$$\int \sqrt{x^2 + a} \, dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right] + C. \triangleright$$

**3.  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  görnüşdäki integral.** Bu ýerde  $R(u, v)$  funksiýa  $u$  we  $v$  görä rasional funksiýadyr. Bu halda  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  ( $-\pi < x < \pi$ ) çalşyrmany ulanyp, integraly rasional funksiýanyň integralyna getirmek bolar. Bu çalşyrmany we

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

formulalary ulanyp,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctgt}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

deňlikleri alarys. Şeýlelikde, garalýan integral

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

görnüşi alar, ýagny integral rasional funksiýanyň integralyna getirildi.

**19-nji mysal.**  $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$  integraly hasaplamaly.

◁ (25) formulanyň esasynda alarys:

$$\sqrt{x^2 + c} = t - x = t - \frac{t^2 - c}{2t} = \frac{t^2 + c}{2t}$$

we integral  $t$  görä rasional funksiýanyň integraly bolar we aňsat hasaplanylýar:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \int \frac{\frac{t^2 + c}{2t} dt}{\frac{t^2 + c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + c}\right| + C. \triangleright$$

Käbir hususy hallarda integrallar differensial astyna girizmek ýa-da bölekleyin integrirlemek usullaryny ulanyp hasaplanylýar.

**17-nji mysal.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x + 4}}$  integraly hasaplamaly.

◁ Ilki bilen kök astyndaky funksiýany özgerdip, ony

$$3x^2 + 6x + 4 = 3\left[(x+1)^2 + \frac{1}{3}\right]$$

görnüşde ýazalyň we soňra integraly hasaplamak üçin differensial astyna girizmek usulyny hem-de tablisanyň 15-nji formulasyny ulanallyň:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x + 4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1/3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{3}}\right| + C. \triangleright$$

**18-nji mysal.**  $\int \sqrt{x^2 + a} dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Bölekleyin integrirleme usulyny ulanmak üçin  $u = \sqrt{x^2 + a}$ ,  $dv = dx$  alallyň. Onda  $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}}$ ,  $v = x$  bolar. Şonuň üçin (9) formula esasynda

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int x \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}} = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Soňky integraly ýönekeýleşdireliň:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx -$$

Bölekleyin integrirlemek usuly bilen hasaplanylýan integrallaryň içinde bu iki topara girmeyänleriniň hem bardygyny belläliň.

**12-nji mysal.**  $B_k = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k}$  integraly hasaplamaly.

◁ Bu integral ýokardaky iki toparyň hiç birine-de degişli däl. Hasaplamak üçin ilki ony

$$B_k = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^k} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int x \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} B_{k-1} - \frac{1}{2a^2} \int x \frac{d(a^2 + x^2)}{(x^2 + a^2)^k}$$

görnüşe getirip, soňky integraly hasaplamak üçin bölekleyin integrirlemek usulyny ulanarys. Goý,  $u = x$ ,  $dv = \frac{d(a^2 + x^2)}{(x^2 + a^2)^k}$  bolsun, onda  $du = dx$ ,

$v = -\frac{1}{(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}}$ . Sonuň üçin integral şeýle görnüşi alar:

$$B_k = \frac{1}{a^2} B_{k-1} + \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2(k-1)} B_{k-1}.$$

Bu ýerden bolsa  $B_k$  integraly hasaplamak üçin rekurrent formula alynýar:

$$B_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} B_{k-1}. \quad (10)$$

Alnan formulanyň kömegi bilen  $\forall k = 2, 3, \dots$  üçin  $B_k$  integraly hasaplap bolar. Hakykatdan-da, differensialyň astyna girizmek usuly we integralyň tablisasynyň 10-njy formulasyny ulanyp tapylýan

$$B_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

integraly peýdalanyp,  $B_2$  integraly hasaplaýs. Soňra  $B_2$  integraly ulanyp,  $B_3$  integraly taparys. Şonuň ýaly dowam etdirip,  $\forall k \in \mathbb{N}$  üçin  $B_k$  integraly hasaplap bileris.

### § 5.3. Rasional droblaryň integrirlenişi

**1. Rasional droblaryň elementar droblara dagydylyşy.** Goý,  $P(x)$  we  $Q(x)$  koeffisiýentleri hakyky sanlar bolan köpagzalar bolsun. Eger  $P(x)$  köpagzanyň derejesi  $Q(x)$  köpagzanyň derejesinden kiçi bolsa, onda  $P(x)/Q(x)$  aňlatma dogry rasional drob diýilýär. Eger  $P(x)/Q(x)$  dogry rasional drob bolmasa, onda köpagzany köpagza bölmegiň düzgüni boýunça ony

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde  $R(x)$  we  $P_1(x)$  käbir köpagzalar,  $P_1(x)/Q(x)$  bolsa dogry rasional drob. Şonuň üçin biz diňe dogry rasional

droblaryň  $\frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$  dörnüşdäki elementar droblaryň

jemleri görnüşinde aňladylyşyny görkezeris, bu ýerde  $k, m$  natural sanlar  $A, M, N, a, p, q$  hakyky sanlar we  $p^2/4 - q < 0$ , ýagny kwadrat üçagzanyň kökleri kompleks sanlardyr. Onuň üçin aşakdaky teoremadan peýdalanylýar.

**3-nji teorema.** Goý,  $P(x)/Q(x)$  rasional drobuň maýdalawjysy

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_n)^{k_n} (x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1} \dots (x^2+p_mx+q_m)^{\ell_m}$$

görnüşde aňladylýan bolsun, bu ýerde  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) sanlar  $Q(x)$  köpagzanyň  $k_i$  gat dürli hakyky kökleri,  $x^2+p_sx+q_s = (x-z_s)(x-\bar{z}_s)$  we  $z_s, \bar{z}_s$  ( $s=1, 2, \dots, l$ ) sanlar bolsa  $Q(x)$  köpagzanyň  $m_s$  gat dürli kompleks kökleridir. Onda şeýle

$$A_i^p \quad (i=1, 2, \dots, k_p; \quad p=1, 2, \dots, n),$$

$$M_s^r, N_s^r \quad (s=1, 2, \dots, m_r; \quad r=1, 2, \dots, l)$$

hakyky sanlar bar bolup,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1^n}{x-a_n} + \dots + \frac{A_{k_n}^n}{(x-a_n)^{k_n}} +$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1}.$$

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

deňligi ulanyp, integraly hasaplaýs:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 6 \int t^2 dt - 6 \int t dt + 6 \int dt - 6 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t+1| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln |\sqrt[3]{x} + 1| + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

**2.  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$  görnüşdäki integral.** Bu integraly

hasaplamak üçin aşakdaky Eýler ornuna goýma usullary ulanylýar.

1) eger  $a > 0$  bolsa, onda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

çalşyрма girizilýär.

2) eger  $c > 0$  bolsa, onda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

çalşyрма girizilýär.

3) eger-de kwadrat üçagzanyň hakyky  $x_1 \neq x_2$  kökleri bar bolsa, onda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t$$

çalşyрма ulanylýar. Üç halda hem irrasional funksiýanyň integraly rasional funksiýanyň integralyna özgerdilýär.

**16-njy mysal.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$  integraly hasaplamaly.

$\triangleleft a=1 > 0$  bolany üçin  $\sqrt{x^2+c} = t - x$  goýalayň. Onda

$$x^2 + c = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2 - c}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt$$

bolar. Şonuň esasynda



$$= \frac{M}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(N - \frac{MP}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Soňky integraly bölekleyin integrirlemek usuly bilen hasaplap bolýar, çünki ol integral ýokarda hasaplanan  $B_m$  integraldan diňe integrirlemäniň üýtgeýän  $t$  ululygy bilen tapawutlanýar. Şonuň üçin hem

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx$$

görnüşdäki integral 17-nji mysalda görkezilen  $B_k$  integral ýaly hasaplanylýar.

Şeýlelikde,  $P(x)/Q(x)$  dogry rasional drobuň integralynyň hemişe elementar funksiýalarda aňladylýandygyny görkezdik. Bu ýerden islendik  $P(x)/Q(x)$  rasional drobuň köpagza bilen dogry rasional drobuň jemi görnüşinde aňladylýandygy esasynda, islendik rasional drobuň integralynyň tapýlýandygyny alýarys.

#### § 5.4. Irrasional we trigonometrik funksiýalaryň integrirleniş

Irrasional we trigonometrik funksiýalaryň integrallary üýtgeýäni çalşyrmak bilen rasional funksiýalaryň integrallaryna getirilýär. Şeýle integrallaryň dürli görnüşlerine aýratynlykda garap geçeliň. Garalýan integrallaryň hemmesinde integral astyndaky funksiýa üýtgeýänlerine görä rasional funksiýadyr.

**1.  $\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_k}) dx$  görnüşdäki integral.** Bu ýerde  $r_1, \dots, r_k$  rasional sanlar. Eger olaryň umumy maýdalawjylary  $m$  sana deň bolsa, onda  $x = t^m$ ,  $dx = mt^{m-1}$  esasynda  $x$ -iň rasional derejeleri,  $t$ -niň bitin derejelerine geçär we netijede integral astyndaky funksiýa  $t$  görä rasional funksiýa bolar.

**15-nji mysal.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$  integraly hasaplamaly.

◁ Bu integralda  $r_1 = 1/2$  we  $r_2 = 1/3$ . Şonuň üçin hem olaryň umumy maýdalawjysy  $m = 6$  bolýar. Diýmek,  $x = t^6$ ,  $dx = 6t^5 dt$  çalşyрма girizmek bolar. Şonuň esasynda

$$\begin{aligned} &+ \frac{M_1^1 x + N_1^1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{M_{m_1}^1 x + N_{m_1}^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \dots + \\ &+ \frac{M_1^l x + N_1^l}{x^2 + p_l x + q_l} + \dots + \frac{M_{m_l}^l x + N_{m_l}^l}{(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}}. \end{aligned} \quad (11)$$

deňlik dogrudyr.

Bu deňlikde  $Q(x)$  köpagzanyň her bir  $k$  gat hakyky  $a$  köküne

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

görnüşdäki elementar droblaryň jemi we her bir çatyrymly kompleks  $m$  gat  $z, \bar{z}$   $((x-z)(x-\bar{z}) = x^2 + px + q$  bolan) köklere bolsa

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m}$$

görnüşdäki elementar droblaryň jemi degişlidir.

Amalyýetde alnan elementar droblaryň näbelli koeffisiýentlerini tapmak üçin (11) deňligiň iki bölegini hem umumy maýdalawja getirip, soňra olaryň sanawjylaryndaky  $x$  ululygyň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňleýäris. Şunlukda, şol näbellilere görä deňlemeler sistemasy alynýar we olar şol sistemany çözüp tapylýar.

**13-nji mysal.**  $\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$  rasional droby elementar droblaryň

jemine dagytmaly.

◁ 3-nji teorema boýunça

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Bu deňlemäni umumy maýdalawja getirip we sanawjylardaky  $x^0, x^1, x^2, x^3$  ululyklaryň koeffisiýentlerini deňläp, olary tapmak üçin

$$\left. \begin{aligned} x^3: & A_1 + M = 2, \\ x^2: & A_2 + N - 2M = 4, \\ x^1: & A_2 + M - 2N = 1, \\ x^0: & -A_1 + A_2 + N = 2 \end{aligned} \right\}$$

sistemany alarys we ony çözüp taparys:  $A_1 = 2, A_2 = 3, M = 0, N = 1$ .

Şeýlelikde, garalýan rasional drob şeýle ýazylyar:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Eger  $Q(x)$  köpagzanyň diňe hakyky we dürli kökleri bar bolsa, ýagny

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

onda

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

bolar. Bu deňlikden näbelli koeffisiýentleri tapmak aňsatdyr. Mysal üçin, eger bu deňligiň iki bölegini hem  $x - a_k$  köpeldijä köpeldip, alnan deňligiň

iki böleginde-de  $x = a_k$  goýsak, onda  $A_k$  koeffisiýenti tapmak üçin

$$A_k = \frac{P(a_k)}{(a_k - a_1) \dots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_n)}$$

formulany alarys. Bu formuladan görnüşi ýaly,  $A_k$  koeffisiýenti tapmak üçin  $P(x)/Q(x)$  drobuň maýdalawjysyndaky  $x - a_k$  köpeldijiniň üstüni çyzmaly we alnan drobda  $x = a_k$  goýup, ony hasaplamaly.

**14-nji mysal.**  $\frac{x+2}{(x-1)x(x+1)}$  droby elementar droblaryň jemine

dagytmaly.

◁ Teoremanyň esasynda

$$\frac{x+2}{(x-1)x(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x+1}.$$

$A_1$  koeffisiýenti tapmak üçin deňligiň çep bölegindäki drobuň maýdalawjysynda  $x-1$  tapawudy çyzyp, alnan aňlatmada  $x=1$  goýup alarys:  $A_1 = 3/2$ . Şoňa meňzeşlikde beýleki näbellileri tapýarys:

$A_2 = -2, A_3 = 1/2$ . Şeýlelikde,

$$\frac{x+2}{(x-1)x(x+1)} = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)}. \triangleright$$

## 2. Elementar droblaryň integrirlenişi

3-nji teoremadan görnüşi ýaly, dogry rasional droblary integrirlemeklik aşakdaky dört görnüşdäki elementar droblary integrirlemeklige getirilýär.

$$\text{I. } \frac{A}{x-a} \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^\alpha} \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}.$$

Bu ýerde  $\alpha = 2, 3, \dots, n$ ;  $\beta = 2, 3, \dots, m$ ;  $A, M, N, p, q, a$  — hemişelik hakyky sanlar we  $x^2 + px + q$  üçagzanyň hakyky köki ýokdur, ýagny  $q - p^2/4 > 0$ .

Bu elementar droblaryň integrirlenişine aýratynlykda garalýň.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

III we IV integrallar üçin  $x^2 + px + q$  kwadrat üçagzany şeýle görnüşde aňladalyň:

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) = t^2 + a^2, \quad t = x + p/2, \quad . \text{ Onda}$$

$$\text{II. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{M(x+p/2) + (N-Mp/2)}{(x+p/2)^2 + (q-p^2/4)} d(x+p/2) =$$

$$= M \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (N-Mp/2) \int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln |t^2+a^2| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C.$$

$$\text{IV } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$\alpha > 1$  bolsa, onda deňeşdirme nyşany we 11-nj mysal esasynda  $\int_1^{+\infty} g(x)dx$

integral ýygnanýandyr,  $g(x) \geq 1/x^\alpha$ ,  $\alpha \leq 1$  bolanda bolsa, ol integral dargaýandyr.

**8-nji teorema.** Eger  $[a, +\infty)$  aralykda alamaty üýtgeýän  $f$  funksiýa üçin  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  integral ýygnanýan bolsa, onda  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  integral hem ýygnanýandyr.

Bu halda  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  integrala absolyut ýygnanýan integral diýilýär.

**2. Çäksiz funksiýanyň hususy däl integrallary.** Eger  $f$  funksiýa  $b$  nokadyň käbir etrabynda çäksiz bolup,  $[a, b - \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ) kesimde uznuksiz

bolsa we  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$  predel bar bolsa, onda ol predele  $f$  funksianýň

$[a, b)$  aralykdaky ýygnanýan hususy däl integraly diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (36)$$

Eger (36) predel ýok ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda oňa dargaýan hususy däl integral diýilýär.

Eger  $f$  funksiýa  $a$  nokadyň käbir etrabynda çäksiz we  $[a + \varepsilon, b]$  ( $\varepsilon > 0$ ) kesimde uznuksiz bolsa, onda  $f$  funksiýanyň  $(a, b]$  aralykdaky hususy däl integraly edil şuna meňzeşlikde kesgitlenýär:

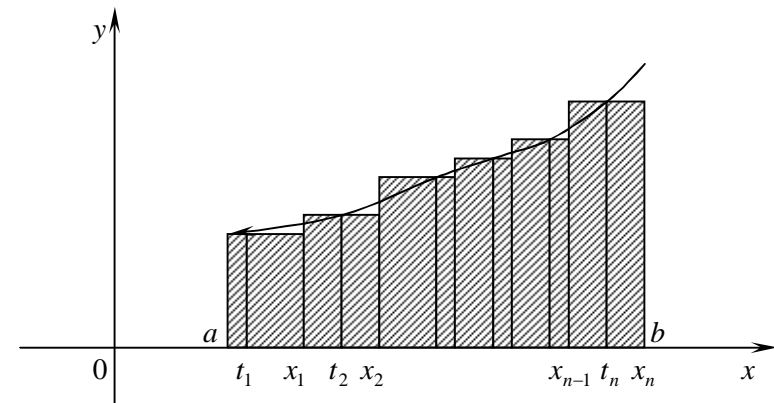
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (37)$$

Eger-de  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimiň käbir içki  $c$  nokadynyň etrabynda çäksiz bolsa, onda onuň  $[a, b]$  kesimdäki hususy däl integraly

## II. 6. KESGITLI INTEGRAL

### § 6. 1. Integral düşünjesine getirýän meseleler

**1.Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany hakyndaky mesele.** Egriçyzyly trapesiýa, ýagny ýokarsyndan otirisatel däl we üznüksiz bolan  $y = f(x)$  funksiýanyň çyzgysy, çepinden we sagyndan  $x = a$ ,  $x = b$  göni çyzyklar we aşagyndan  $Ox$  oky bilen çäklenen figura garalyň.  $[a, b]$  kesimi  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  nokatlar arkaly  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) böleklere böleliň we olaryň uzynlyklaryny  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) bilen belgiläliň.  $[x_{i-1}, x_i]$  kesimiň erkin  $t_i$  nokadyny alyp, funksiýanyň şol nokatdaky  $f(t_i)$  bahasyny hasaplalyň. Şunlukda,  $f(t_i)\Delta x_i$  köpeltmek hasyly esasy  $\Delta x_i$  we beýikligi  $f(t_i)$  bolan gönüburçluga meýdanydyr. Şeýle



1-nji surat

köpeltmek hasyllardan

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

lemi düzeliň. Oňa  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki integral jemi diýilýär. Ol integral jemiň her bir goşulyjysy degişli gönüburçluga meýdanyna, jemiň özi bolsa şol meýdanlaryň jemine, ýagny egriçyzykly trapesiýany takmyn çalşyryan basgançak figuranyň meýdanyna deňdir (1-nji surat).

Integral jem  $[a, b]$  kesimiň böleklere bölünişine we her bölek kesimde alynýan erkin  $t_i$  nokatlara baglydyr. Şunlukda, kesimiň böleklere bölünme  $n$  sany artdygyça basgançak figuranyň meýdany egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna ýakynlaşar. Goý,  $d = \max \Delta x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) bolsun.

Eger  $\forall \varepsilon > 0$  üçin  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tapylyp,  $[a, b]$  kesimiň islendik bölünme nokatlary we islendik  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) üçin  $d < \delta$  bolanda

$$|S_n - I| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda  $I$  sana  $S_n$  integral jemiň  $d \rightarrow 0$  bolandaky predeli diýilýär.

Eger  $d \rightarrow 0$  bolanda ( $[a, b]$  kesimiň bölek kesimleriniň sany çäksiz artanda) integral jemiň  $S$  predeline egriçyzykly trapesiýanyň meýdany diýilýär, ýagny

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

**2. Tizligi boýunça geçilen ýoly tapmak meselesi.** Goý,  $M$  nokat göni çyzyk boýunça üýtgeýän  $v = f(t)$  tizlik bilen hereket edýän bolsun.  $M$  nokadyň  $t_o$ -dan  $T$  çenli wagt aralygynda geçen ýoluny kesgitlemeli.

$[t_o, T]$  kesimi uzynlyklary  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  bolan  $[t_o, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$  ( $t_n = T$ ) böleklere böleliň. Kiçi bolan  $\Delta t_i$  wagt aralygynda hereketiň tizligi hemiselik we  $f(\tilde{t}_i)$  ( $\tilde{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ) deň hasap edeliň. Onda şol wagt aralygynda nokadyň geçen ýoly takmyn  $f(\tilde{t}_i) \Delta t_i$  deňdir. Bölek wagt aralyklarynda geçilen  $f(\tilde{t}_i) \Delta t_i$  ýollary jemläp,  $M$  nokadyň  $t_o$ -dan  $T$  çenli wagt aralygynda geçen ýolunyň takmyn bahasyny taparys:

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\tilde{t}_i) \Delta t_i.$$

Bu deňlikde  $d = \max \Delta t_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) nola ymtylanda predele geçip, nokadyň geçen ýolunyň takyk bahasyny taparys:

$$s = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tilde{t}_i) \Delta t_i.$$

Şeýlelikde,  $M$  nokadyň  $t_o$ -dan  $T$  çenli wagt aralygynda geçen ýoly

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty.$$

Diýmek, integral  $a > 1$  bolanda ýygnaýar,  $\alpha \leq 1$  bolanda bolsa dargaýar.  $\triangleright$

Eger  $F$  funksiýa  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda Nýuton-Leýbnis formulasy esasynda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a)$$

deňlik dogrudyr, bu ýerde  $F(+\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$ .

Aşaky çägi tükeniksiz bolan hususy däl integral hem edil şonuň ýaly kesgitlenýär:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (35)$$

Çäkleriniň ikisi hem tükeniksiz bolan hususy däl integral bolsa çäkleriniň biri tükeniksiz bolan iki integralyň jemi görnüşinde, ýagny

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

görnüşde ýazylyp derňelýär, bu ýerde  $c$  san  $(-\infty, +\infty)$  aralyga degişli erkin sandyr.

Bir çägi tükeniksiz bolan hususy däl integrallaryň ikisiniň hem derňelişi meňzeş bolany üçin, derňemekde ulanylýan teoremlary olaryň bir görnüşi, ýagny ýokarky çägi tükeniksiz bolan integral üçin getireris.

**7-nji teorema.** Eger  $\forall x \geq a$  üçin  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  deňsizlik ýerine ýetse

we  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral ýygnaýan bolsa, onda  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  integral hem

ýygnaýandyr; eger-de  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  integral dargaýan bolsa  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

integral hem dargaýandyr.

Bu teorema deňeşdirmе nyşany diýilýär. Ol nyşan ulanylanda, köplenç, integrallaryň biri hökmünde ýygnaýandygy ýa-da dargaýandygy belli bilan integral alynýar. Mysal üçin, eger  $[1, +\infty)$  aralykda  $g(x) \leq 1/x^\alpha$ ,

## § 6. 8. Hususy däl integrallar

Kesgitli integral düşünjesi girizilende aşakdaky şertleriň ýerine ýetmegi talap edilýärdi: 1) integralyň  $a$  we  $b$  çäkleriniň tükenikli san bolmagy; 2) integral astyndaky funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde çäkli bolmagy. Bu halda kesgitli integrallara hususy inegrallar hem diýilýär. Eger görkezilen iki şertleriň iň bolmanda biri ýerine ýetmese, onda kesgitli integrala hususy däl inegral diýilýär. Şeýle integrallaryň görnüşlerine aýratynlykda garap geçeliň.

**1. Çäkleri tükeniksiz bolan hususy däl integrallar.** Goý,  $f$  funksiýa  $\forall x \geq a$  üçin üznüksiz bolsun. Ýokarky  $b$  çägi üýtgeýänli

$$h(b) = \int_a^b f(x) dx \quad (33)$$

integrala garalyň. Ol integralyň birnäçe häsiýetleri, hususanda ýokarky çägiňe görä differensirlenýän funksiýadygy §6.4 –de görkezilipdi.

Eger (33) funksiýanyň  $b \rightarrow +\infty$  bolanda tükenikli predeli bar bolsa, onda ol predele  $f$  funksiýanyň  $[a, +\infty)$  aralykdaky ýygnaýan hususy däl integraly diýilýär we ol

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (34)$$

görnüşde belgilenýär. Eger (34) predel ýok ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda oňa dargaýan hususy däl integral diýilýär.

**11-nji mysal.** Hususy däl  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  integralyň  $\alpha$  parametriniň haýsy

bahalarynda ýygnaýandygyny barlamaly.

◁ Nýuton-Leýbnisiň formulasy ulanylyp alynýan

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln b, & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} \text{ bolanda,}$$

deňlik esasynda,  $\alpha > 1$  bolanda

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1},$$

$\alpha \leq 1$  bolanda bolsa

$v = f(t)$  funksiýanyň  $[t_o, T]$  kesimdäki integral jeminiň predeline deňdir.

**3. Tizligi boýunça jisimiň mukdaryny tapmak meselesi.** Goý, himiki reaksiýa gatnaşýan käbir jisimiň himiki öwürmesiniň tizligi  $t$  bagly üýtgeýän  $v = f(t)$  funksiýa bolsun.  $t_o$ -dan  $T$  çenli wagat aralygynda reaksiýa gatnaşýan jisimiň  $m$  mukdaryny kesgitlemeli. Edil 2-nji mysalda geçiren amallarymyz ýaly amallary ýerine ýetirip, jisimiň mukdaryny

$$m_n = \sum_{i=1}^n f(\tilde{t}_i) \Delta t_i$$

jemiň predeli hökmünde tapmak bolar, ýagny

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tilde{t}_i) \Delta t_i.$$

Şular ýaly başga-da dürli meseleleriň integral jemiň predelini tapmaklyga getirýändigini sebäpli, şeýle pedeli tapmaklyk aýratyn derňeldi we ol kesgitli integral düşünjesine getirdi.

## § 6. 2. Kesgitli integral düşünjesi

**1. Kesgitli integralyň kesgitlenişi.** Goý,  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde kesgitlenen bosun.  $[a, b]$  kesimi  $a = x_o < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  nokatlar arkaly  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) bölek kesimlere bölüp, olaryň uzynlyklaryny  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) bilen belgiläliň. Bölek kesimleriň iň ulusynyň uzynlygyny  $d$  bilen belgiläliň, ýagny  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ . Her bir bölek  $[x_{i-1}, x_i]$  kesimde erkin  $t_i$  nokady alyp we funksiýanyň  $f(t_i)$  bahasynyň sol kesimiň  $\Delta x_i$  uzynlygyna köpeldip,  $f(t_i) \Delta x_i$  köpeltmek hasyly alarys. Şeýle köpeltmek hasyllardan

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \quad (2)$$

lemi düzeliň. Oňa  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki integral jemi diýilýär.

(2) deňlikden görnüşi ýaly, integral jem  $[a, b]$  kesimi böleklerge bölýän nokatlara we bölek kesimlerde alynýan  $t_1, \dots, t_n$  nokatlara baglydyr, ýagny olaryň üýtgemegi bilen integral jem hem üýtgeýändir.

**Kesgitleme.** Eger  $d \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) bolanda (2) integral jemiň tükenikli  $I$  predeli bar bolsa, onda ol predele  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki kesgitli integraly diýilýär we ol şeýle belgilenýär:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} S_p(f). \quad (3)$$

Bu ýerde  $a$  we  $b$  sanlara degişlilikde kesgitli integralyň aşaky we ýokarky çäkleri diýilýär. Şunlukda,  $f$  funksiýanyň özüne  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Bu formuladan görnüşi ýaly, kesgitli integralyň bahasy hemişelik san bolup, ol  $f$  funksiýa hem-de  $a$  we  $b$  sanlara baglydyr. Şonuň üçin hem  $f$  funksiýa we integralyň çäkleri berlen bolsa, onda ol kesgitli integral ýeke-täk kesgitlenýär we käbir sana deňdir. Beýle diýildigi kesgitli integralyň integrirleme üýtgeýänine bagly dälidigini aňladýar, ýagny

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

deňlikler dogrudyr.

**2. Integrirlenýän funksiýanyň çäkliligi.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolsa, onda şol kesimde funksiýa çäklidir. Hakykatdan-da, eger tersine güman etsek, ýagny  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde çäksiz bolsa, onda ol funksiýa käbir  $[x_{i-1}, x_i]$  kesimde çäksiz bolar. Şeýle bolanda  $t_i$  nokady saýlap almak bilen integral jemi islendikçe ulaldyp bolar. Şonuň üçin bu halda integral jemiň tükenikli predeli bolup bilmez. Alnan garşylyk integrirlenýän funksiýanyň çäklidigini görkezýär. Ýöne bu tassyklamanyň tersi dogry dälir Onuň şeýledigi aşakdaky mysaldan aýdyň görünýär.

**1-nji mysal.**  $[a, b]$  kesimde Dirihle funksiýasy atlandyrylýan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasional san bolsa,} \\ 0, & x \text{ irrasional san bolsa} \end{cases}$$

funksiýa garalyň. Onuň  $[a, b]$  kesimde çäklidigi aýdyňdyr. Ýöne ol funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenmeýär, çünki  $[a, b]$  kesimiň islendik bölünmesi üçin  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  rasional sanlar bolanda integral jem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})].$$

Oňa parabolalar ýa-da Simpson formulasy diýilýär. Bu formulany ulanyp kesgitli intrgraly hasaplamaklyga parabolalar usuly diýilýär. Şunlukda,  $f$  funksiýanyň dördünji tertipli üznüksiz önümi bar halnda göýberilýän ýalňyşlyk

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{iv}(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar. .

**12-nji mysal.**  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  integraly Simpson usuly bilen 0,001 çenli

takyklykda hasaplamaly.

< Zerur bolan takyklykda integraly hasaplamak üçin ilki bilen  $f^{IV}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$  önümi tapalyň.  $[0, 1]$  kesimde  $e^{-x^2} \leq 1$  we  $|4x^4 - 12x^2 + 3| \leq 5$  bolýandygy sebäpli  $|f^{IV}(x)| \leq 20$ . Şonuň üçin

$$|R_n| \leq \frac{20}{2880n^4} < \frac{1}{1000}$$

deňsizlik  $n^4 > 1000/144$  bolanda ýerine ýetýär. Onuň üçin bolsa  $n = 2$ , ýagny  $2n = 4$  almak ýeterlikdir. Indi  $[0, 1]$  kesimi  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/4$ ,  $x_2 = 1/2$ ,  $x_3 = 3/4$ ,  $x_4 = 1$  nokatlar arkaly deň dört böleklere böleliň we şol nokatlarda funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň:  $y_0 = 1,0000$ ;  $y_1 = 0,9394$ ;  $y_2 = 0,7788$ ;  $y_3 = 0,5698$ ;  $y_4 = 0,3679$ . Onda. Simpson formulasy esasynda

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{12} [1,0000 + 0,3679 + 2 \cdot 0,7788 + 4(0,9394 + 0,5698)] \approx 0,7469.$$

Şeýlelikde, 0,001 takyklykda

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,747. \triangleright$$

$h = (b - a)/2n$  bolan jübut  $m = 2n$  deň böleklere bölüp, bölünme nokatlar arkaly  $Oy$  okuna parallel göni çyzyklary geçireliň. Onda trapesiýany ýokarsyndan çäklendirýän  $AB$  duga  $M_o, M_1, M_2, \dots, M_{2n-2}, M_{2n-1}, M_{2n}$  nokatlar boýunça böleklere bölüner. Ýokarsyndan  $M_o, M_1, M_2$  duga bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýany ýokarsyndan  $M_o, M_1, M_2$  nokatlar arkaly geçýän parabola bilen çäklenen parabolik trapesiýa bilen çalşyralyň. Şeýle parabolanyň deňlemesi  $y = ax^2 + bx + c$  görnüşde bolup, onuň koeffisiýentleri parabolanyň  $M_o, M_1, M_2$  nokatlar arkaly geçýänlik şertinden peýdalanylýap tapylýar. Beýleki  $M_2, M_3, M_4; M_4, M_5, M_6$  we ş.m. nokatlar üçin hem şeýle çalşyrmalary geçirýäris.

$K_1(-h, y_1), K_2(0, y_2), K_3(h, y_3)$  nokatlardan geçýän  $y = ax^2 + bx + c$  parabola bilen çäklenen parabolik trapesiýanyň meýdanyny tapalyň.

Parabolanyň  $K_1, K_2, K_3$  nokatlar arkaly geçýändigini üçin, parabolanyň deňlemesinden onuň koeffisiýentlerini tapmak üçin

$$y_1 = ah^2 - bh + c, y_2 = c, y_3 = ah^2 + bh + c$$

deňlikleri alarys. Olardan bolsa  $2ah^2 + 2c = y_1 + y_3; c = y_2$  deňlikler alynýar. Bu deňlikler esasynda parabolik trapesiýanyň meýdany üçin

$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \int_{-h}^h (ax^2 + c) dx + b \int_{-h}^h x dx = \\ = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3)$$

formulany alarys. Bu formulany

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx$$

deňligiň sagyndaky integrallara ulanylýp,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_o + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \\ + \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

deňligi alarys. Ony başgaça şeýle görnüşde ýazmak bolar

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a,$$

eger-de  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  irrasional sanlar bolsa, onda integral jem

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \Delta x_i = 0.$$

Bu bolsa  $S_n(f)$  integral jemiň  $d \rightarrow 0$  bolanda predeliniň ýokdugyny aňladýar, ýagny Dirihle funksiýasy  $[a, b]$  kesimde integrirlenmeýär.

$[a, b]$  kesimde integrirlenýän funksiýalaryň köplügi  $R[a, b]$  bilen belgilenýär. Şunlukda,  $f \in R[a, b]$  ýazgy  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde integrirlenýändigini aňladýar.

Subut etmezden käbir integrirlenýän funksiýalary belläp geçeliň:

1. Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolsa, onda şol kesimde ol funksiýa integrirlenýändir.

2. Eger  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde tükenikli sany birinji görnüşdäki üzülmä nokatlary bar bolsa, onda şol kesimde ol integrirlenýändir.

3. Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde monoton bolsa, onda şol kesimde ol funksiýa integrirlenýändir.

**2-nji mysal.**  $f(x) = C = const$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde integrirlenýändigini subut etmeli..

$\triangleleft [a, b]$  kesimiň  $[x_{i-1}, x_i]$  bölek kesimiň islendik  $t_i$  nokady üçin  $f(t_i) = C$  bolar. Şonuň üçin  $S_n(f) = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \dots + C\Delta x_n = C(b-a)$  we (2) formula esasynda

$$\int_a^b C dx = \lim_{d \rightarrow 0} S_n(f) = \lim_{d \rightarrow 0} C(b-a) = C(b-a). \triangleright$$

### § 6.3. Kesgitli integralyň esasy häsiýetleri

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0. \quad 2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

häsiýetleriň subutsyz kabul edilýändigini belläliň.

3. Eger  $f$  funksiýa  $[a, b], [a, c], [c, b]$  kesimleriň iň ulusynda

integrirlenýän bolsa, onda ol funksiýa beýleki kesimleriň ikisinde hem integrirlenýändir we  $a, b, c$  nokatlaryň islendik ýerleşşi üçin

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (4)$$

deňlik dogrudyr.

◁ Goý,  $a < c < b$  bolsun, onda  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde integrirlenýändigini üçin, onuň şol kesimdäki islendik integral jeminiň predeli bardyr. Şonuň üçin  $c$  nokady kesimi böleklere bölýän nokatlaryň biri bilen gabat gelýär hasap edeliň. Mysal üçin, eger  $c = x_m$  bolsa, onda integral jemi

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(t_i) \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

görnüşde ýazyp, ol deňlikde  $d \rightarrow 0$  bolanda predele geçip, (4) deňligi alarys. Nokatlaryň başgaça ýerleşýän hallarynda (4) deňligiň subudy seredilen hala getirilýär. Mysal üçin, eger  $a < b < c$  bolsa, onda subut edileniň esasynda

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

deňlik dogrudyr. Şoňa görä 2-nji häsiýet boýunça

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

ýagny (4) deňlik ýerine ýetýär. ▷

**4.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolsa, onda hemişelik  $k$  san üçin  $kf$  funksiýa hem şol kesimde integrirlenýändir we

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

deňlik dogrudyr.

**5.** Eger  $f$  we  $g$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolsalar, onda  $f \pm g$  funksiýa hem şol kesimde integrirlenýändir we

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad (5)$$

tapmaklygy gönüburçlugyň, gönüçyzykly trapesiýanyň we parabolik trapesiýanyň meýdanyny tapmak bilen çalşyrmaklygy aňladýar.

**1. Gönüburçluklar usuly.** Kesgitli integraly hasaplamagyň iň ýönekeý usuly onyň kesgitlenmesi bilen bagly bolan takmyn usuldyr. Eger  $[a, b]$  kesimi  $x_i = a + ih$ ,  $h = (b - a)/n$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) nokatlar arkaly deň  $n$  böleklere bölüp, bölek  $[x_{i-1}, x_i]$  kesimde alynýan erkin nokady  $x_{i-1}$  deň alsak, onda  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $f$  funksiýa üçin düzülen integral jeme integralyň takmyn bahasy hökmünde garamak bolar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad y_k = f(x_k) \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Bu formulany ulanyp, kesgitli integraly hasaplamaklyga gönüburçluklar usuly diýilýär. Şunlukda, kesgitli integral bu usul bilen hasaplanylanda göýberilýän ýalňyşlyk ( $f'(x)$  önüm  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolanda)

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar.

**2. Trapesiýalar usuly.** Eger egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin ýene-de  $[a, b]$  kesimi deň  $n$  böleklere bölüp, her bölekdäki egri çyzykly trapesiýany gönüçyzykly trapesiýa bilen çalşyrsak, onda olaryň meýdanlarynyň jemine egriçyzykly trapesiýanyň takmyn meýdany hökmünde garamak bolar, ýagny

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[ \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right], \quad y_k = f(x_k).$$

Bu formulany ulanyp, kesgitli integraly hasaplamaklyga trapesiýalar usuly diýilýär. Şunlukda, kesgitli integral trapesiýalar usuly bilen hasaplanylanda (ikinci tertipli üznüksiz önümi bolan  $f$  funksiýa üçin) göýberlen ýalňyşlyk

$$|R_n| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar. Bu formula kesgitli integral trapesiýalar usuly bilen hasaplanylanda göýberlen ýalňyşlygyň gönüburçluklar usuly bilen hasaplanylandykdan azdygyny görkezýär.

**1. Parabolalar usuly.** Berlen  $[a, b]$  kesimi hersiniň uzynlygy



◁ Bilşimiz ýaly, jisimiň ýylylyk sygymy diýip jisimiň birlik massasynyň temperaturasyny  $1^{\circ}C$  ýokarlandyrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdaryna aýdylýar. Ýöne tejribäniň görkezişi ýaly, ýylylygyň ol mukdary jisimiň dürli temperaturasynda dürlüdür. Şoňa görä hem ýylylygyň sygymy

diýip,  $C_u = \frac{dQ}{du}$  deňlik boýunça kesgitlenýän ululyga düşünilýär, bu ýerde  $dQ$  differensial jisimi  $u$ -dan  $u + du$  temperatura çenli gyzdýrmak üçin jisimiň birlik massasyna täsir edilýän ýylylyk mukdarydyr. (Massa birligi hökmünde gramm, ýylylyk birligi hökmünde kaloriýa alynýar).

Ýylylyk sygymyň kesgitlenmesinden we meseläniň sertinden

$$\frac{dQ}{du} = 0,1053 + 0,000142u \text{ ýa-da}$$

$$dQ = (0,1053 + 0,000142u)du$$

deňlemäni alarys. Şonuň esasynda  $1 \text{ kg}$  demiri  $10^{\circ}C$ -dan  $100^{\circ}C$  çenli gyzdýrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdary

$$Q = \int_{10}^{100} (0,1053 + 0,000142u)du = \left(0,1053u + 0,000071u^2\right) \Big|_{10}^{100} = 10,1799 \text{ kkal}$$

Şonuň üçin  $20 \text{ kg}$  demiri gyzdýrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdary  $203,5982 \text{ kkal}$ . ▷

### §6.7. Kesgitli integrallary hasaplamagyň takmyn usullary

Mälim bolşy ýaly, kesgitli integrallary hasaplamaklyk, esasan Nýuton-Leybnis formulasyna esaslanyp, ol integral astyndaky funksiýanyň asyl funksiýasyny bilmekligi talap edýär. Ýöne her bir funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmak aňsat mesele däldir, çünki elementar funksiýanyň asyl funksiýasynyň elementar funksiýa bolmaýany hem bardyr. Käbir hallarda bolsa asyl funksiýalary tapmaklyk köp hasaplamalary talap edýär. Şeýle ýagraýlarda kesgitli integrallary hasaplamak üçin takmyn usullary ulanmak amatly bolýar.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

kesgitli integralyň egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna deňdigi üçin, bu integraly hasaplamagyň aşakda getiriljek takmyn usullary ol meýdany

deňlik dogrudyr.

◁ 4-nji we 5-nji häsiýetleriň subudynyň meňzeşligi üçin, 5-nji häsiýeti subut etmek bilen çäkleneris.  $[a, b]$  kesimiň islendik böleklerä bölünmesi üçin

$$S_n(f \pm g) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) \pm g(t_i)] \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i = S_n(f) \pm S_n(g)$$

deňlik ýerine ýetýär. Bu deňlikde  $d \rightarrow 0$  bolanda predele geçip, onuň sag böleginiň predeliniň barlygyndan çep böleginiň hem predeliniň bardygyny, ýagny  $f \pm g$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde integrirlenýändigini we (5) formulany alarys. ▷

6. Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolup,  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $f(x) \geq 0$  bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (6)$$

◁ Deňsizligiň subudy bu halda  $f$  funksiýanyň integral jeminiň we onuň predeliniň otrisatel däldiginden gelip çykýar. ▷

7. Eger  $f$  we  $g$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolup,  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $f(x) \leq g(x)$  bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (7)$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

◁ Subudy 6-njy häsiýetden gelip çykýar, çünki bu halda  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $g(x) - f(x) \geq 0$ . ▷

8. Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolsa, onda  $|f|$  funksiýa hem şol kesimde integrirlenýär we

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (8)$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

◁ Eger  $\forall x \in [a, b]$  üçin ýerine ýetýän  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  deňsizlige 7-nji häsiýeti ulansak, onda

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

deňsizligi alarys, ol bolsa (8) deňsizlige deňgüýçlüdir. ▷

**9.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolup,  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $m \leq f(x) \leq M$  deňsizlikleri kanagatlandyryýan bolsa, onda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (9)$$

◁ Eger  $m \leq f(x) \leq M$  deňsizlikleri  $a$ -dan  $b$  çenli integrirläp, 7-nji häsiýeti we 2-nji mysaly ulansak, onda (9) deňsizlik gelip çykýar. ▷

**10. (Orta baha hakyndaky teorema).** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolup,  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $m \leq f(x) \leq M$  deňsizlikleri kanagatlandyryýan bolsa, onda şeýle  $\mu$  ( $m \leq \mu \leq M$ ) tapylyp,

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a) \quad (10)$$

deňlik dogrudyr.

◁ Bu teoremanyň şertlerinde (9) deňsizlik ýerine ýetýär, ondan bolsa

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

deňsizlik gelip çykýar. Eger

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

belgileme girizsek, onda subut edilmeli deňligi alarys. ▷

**Bellik.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolsa, onda şol kesimde ol funksiýa integrirlenýändir we  $m \leq f(x) \leq M$ . Şoňa görä bu halda hem (10) ýerine ýetýär we  $m \leq \mu \leq M$ . Soňky iki deňsizlikler esasynda bolsa kesimde üznüksiz funksiýanyň aralyk bahalary hakyndaky

mukdarynyň üýtgeýşini kesgitläliň. Bir minurtda  $4 \text{ l}$  suwuklyk,  $\Delta t$  minutda  $4\Delta t \text{ l}$  suwuklyk girýär we şol  $4\Delta t \text{ l}$  suwuklukda  $0,2 \cdot 4\Delta t = 0,8\Delta t \text{ kg}$  duz bar. Şeýle hem  $\Delta t$  wagtda gapdan  $4\Delta t \text{ l}$  suwuklyk çykýar. Eger  $t$  pursatda ( $20 \text{ l}$ ) gapda  $y(t) \text{ kg}$  duz bar bolsa, onda gapdan çykýan  $4\Delta t \text{ l}$  suwuklukda  $0,2\Delta t y(t) \text{ kg}$  duz bolar ( $\Delta t$  wagtda gapda duzuň mukdary üýtgedemik halda). Ýöne şol wagtda onuň  $\Delta t \rightarrow 0$  bolanda tükeniksiz kiçi bolan ululyk üýtgeýändigini üçin, gapdan çykýan  $4\Delta t \text{ l}$  suwuklukda  $0,2\Delta t[y(t) + \alpha] \text{ kg}$  duz bardyr, bu ýerde  $\Delta t \rightarrow 0$  bolanda  $\alpha = \alpha(\Delta t) \rightarrow 0$ . Şeýlelikde,  $\Delta t$  wagtda gaba girýän suwuklykda  $0,8\Delta t \text{ kg}$  duz, gapdan çykanda bolsa  $0,2\Delta t[y(t) + \alpha] \text{ kg}$  duz bardyr. Onda şol wagtda duzuň  $y(t + \Delta t) - y(t)$  artymy olaryň tapawudyna deňdir:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,8\Delta t - 0,2\Delta t[y(t) + \alpha].$$

Deňligiň iki bölegini hem  $\Delta t$  bölüp, alnan deňlikde  $\Delta t \rightarrow 0$  bolanda predele geçip,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = 0$  deňligiň esasynda

$$\frac{dy}{dt} = 0,8 - 0,2y$$

deňligi alarys. Ol ikinji görnüşdäki denlemedir we onuň çözüwi

$$0,8 - 0,2y = C_1 e^{-0,2t}$$

görnüşde bolar. Ony 5-e köpeldip alarys:

$$y = 4 - C e^{-0,2t}, C = 5C_1.$$

Hemişelik  $C$  sany meseläniň  $t = 0$  bolanda  $y = 0$  şertini ulanyp taparys

$$0 = 4 - C e^0 = 4 - C, C = 4.$$

Şeýlelikde,  $y = 4 - 4e^{-0,2t}$ . Şoňa görä 10 min geçende gapda

$$y = 4 - 4e^{-0,2 \cdot 10} = 4 - 4e^{-2} \approx 4 - 4 \cdot 0,1353 \approx 3,459 \text{ kg}$$

duz bardyr. ▷

**13-nji mysal.** Eger 0-dan  $200^\circ$  çenli temperaturada  $C_u$  demiriň ýylylyk sygymy

$$C_u = 0,1053 + 0,000142u$$

formula boýunça kesgitlenýän bolsa, onda  $10^\circ$  temperaturasy bolan  $20 \text{ kg}$  demiri  $100^\circ$  temperatura çenli gyzdymak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdaryny tapmaly.

gözleniýän funksiýa hökmünde almalydygyny anyklamalydyr. Soňra  $x$  argument  $\Delta x$  artym alanda gözlenilýän  $y$  funksiýanyň alýan artymyny kesgitläp,  $y(x + \Delta x) - y(x)$  tapawudy meseläniň şertlerindäki

ululyklar bilen baglanyşdyrmaly. Ol tapawudy  $\Delta x$ -a bölüp we  $\Delta x \rightarrow 0$

bolanda predele geçip,  $y' = \frac{dy}{dx}$  önümi özünde saklaýan deňleme alarys.

Oňa differensial deňleme diýilýär (şeyle deňlemeleri soňra II.12-nji bölümde giňişleýin öwreneris). Onuň ýönekeý görnüşlerine garap geçeliň:

1.  $y' = f(x)$ ,  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ . Ony  $dy = f(x)dx$  görnüsde ýazyp, we ol deňligi integrirläp, gözlenilýän funksiýany taparys:

$$y = \int f(x)dx + C = F(x) + C,$$

bu ýerde  $F(x)$  funksiýa  $f(x)$ -iň asyl funksiýasydyr. Bu deňlikdäki  $C$  hemişelik san meseläniň şertinden kesgitlenilýär.

2.  $\frac{dy}{dx} = ay + b$ . Ony  $\frac{dy}{ay + b} = dx$  görnüsde ýazyp, we ol deňligi integrirläp, gözlenilýän funksiýany taparys:

$$\int \frac{dy}{ay + b} = x + C, \quad \int \frac{d(ay + b)}{ay + b} = a(x + C),$$

$$\ln(ay + b) = ax + \ln C_1, \quad ay = C_1 e^{ax} - b, \quad (aC = \ln C_1).$$

Himiki reaksiýalaryň we fiziki prosesleriň köpüsi üçin üýtgeýän ululygyň tizliginiň üýtgeýşi ol ululygyň birinji derejesine proporsionaldyr

we olar  $\frac{dx}{dt} = kx$  deňleme bilen aňladylyr. Şunlukda, olara birinji tertipli prosesler diýilýär. Ol deňleme ikinji görnüşdäki deňlemäniň hususy haly bolup, himiki proses üçin oňa girýän  $x$  ululyk jisimiň mukdaryny,  $k$  reaksiýanyň tizlik hemişeligini we  $t$  wagty aňladýar.

**12-nji mysal.** Her litrinde 0,2 kg duz bolan suwuklyk minutda 4 l tizlik bilen içinde 20 l suw bolan gaba üznüksiz guýulýar. Gaba guýulan suwuklyk suw bilen garyşýar we garyndy şol tizlik bilen gapdan çykýar. 10 minut geçenden soň gapda näçe duz bolar?

◁ Baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk hökmünde  $t$  wagty, tejribe başlanandan  $t$  minut geçenden soňky duzuň mukdary hökmünde  $y(t)$  funksiýany alalyň.  $t$  wagtdan  $t + \Delta t$  wagta çenli aralykda duzuň

teorema boýunça şeyle  $c \in [a, b]$  tapylýp,  $\mu = f(c)$  bolar. Şoňa görä-de (10) deňlikden

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a). \quad (11)$$

deňlik gelip çykýar. Şunlukda, bu deňlikden alynýan

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

sana  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki orta bahasy diýilýär.

**3-nji mysal.**  $\int_0^\pi (3 + \sin^6 x)dx$  integraly bahalandyrmaly.

◁  $f(x) = 3 + \sin^6 x$  funksiýa üçin  $[0, \pi]$  kesimde  $3 \leq 3 + \sin^6 x \leq 4$  deňsizligiň yerine ýetýändigini üçin, 9-njy häsiýet esasynda

$$3\pi \leq \int_0^\pi (3 + \sin^6 x)dx \leq 4\pi$$

deňsizligi alarys. ▷

#### § 6.4. Ýokarky çägi üýtgeýänli integral

**1.Ýokarky çägi üýtgeýänli integralyň üznüksizligi.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolsa, onda ol funksiýa 3-nji häsiýet boýunça  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $[a, x]$  kesimde hem integrirlenýär. Şonuň üçin

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (12)$$

integrala garamak bolar. Bu funksiýa ýokarky çägi üýtgeýänli integral diýilýär.

**1-nji teorema.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde integrirlenýän bolsa, onda  $F$  funksiýa şol kesimde üznüksizdir.

◁ Goý, erkin  $x \in [a, b]$  nokat üçin  $x + \Delta x \in [a, b]$  bolsun. Onda (12) deňlik esasynda

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde integrirlenýändigini üçin ol funksiýa şol kesimde çäklidir, ýagny  $\forall x \in [a, b]$  üçin  $m \leq f(x) \leq M$  ýerine ýetýär. Şoňa görä orta baha hakyndaky teorema esasynda şeýle  $\mu$  ( $m \leq \mu \leq M$ ) tapylyp,

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \Delta x$$

deňlik ýerine ýetýär. Bu deňlikden bolsa  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda  $\Delta F \rightarrow 0$  gelip çykýar we ol (12) deňlik boýunça kesgitlenýän funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksizdigini görkezýär.

**2. Ýokarky çägi üýtgeýänli integralyň differensirlenmegi.** (12) integralyň esasy häsiýetleriniň biri-de onuň differensirlenme häsiýetidir.

**2-nji teorema.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolsa, onda (12) formula boýunça kesgitlenen  $F$  funksiýa differensirlenýändir we

$$F'(x) = f(x). \quad (13)$$

◁ Goý,  $x \in [a, b]$  üçin  $x + \Delta x \in [a, b]$  bolsun. Onda (12) deňlik esasynda

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

deňligi alarys. (11) formula esasynda ony

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x, \quad c = x + \theta\Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

görnüşde ýazmak bolar, ýagny  $\Delta F = f(c)\Delta x$ . Ondan gelip çykýan

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c) = f(x + \theta\Delta x)$$

deňlikde  $\Delta x \rightarrow 0$  bolanda predele geçip,  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksizligi esasynda, (12) deňlik boýunça kesgitlenýän  $F$  funksiýanyň differensirlenýändigini we (13) deňligi alarys. ▷

**3. Üznüksiz funksiýanyň asyl funksiýasynyň barlygy.**  $[a, b]$  kesimde üznüksiz her bir  $f$  funksiýanyň şol kesimde asyl funksiýasy bardyr we onuň erkin  $\varphi$  asyl funksiýasy

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$

formula dogrudyr.

**11-nji mysal.**  $xy = 6$ ,  $x = 1$ ,  $x = 6$  çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň  $Ox$  okuň daşyndan aýlanmagyndan alynýan jisimiň göwrümünü tapmaly.

◁ Trapesiýany ýokarsyndan çäklendirýän  $xy = 6$  giperbolanyň deňlemesinden  $y = 6/x$  tapyp we (32) formulany ulanyp alarys:

$$V = \pi \int_1^6 \frac{36}{x^2} dx = -36\pi \frac{1}{x} \Big|_1^6 = -36\pi \left( \frac{1}{6} - 1 \right) = 30\pi. \quad \triangleright$$

**5. Üýtgeýän güýjüň işi.** Goý,  $M$  material nokat  $F = F(x)$  üýtgeýän güýjüň täsiri esasynda  $Ox$  ok boýunça güýjüň ugruna ugurdaş hereket edýän bolsun.  $M$  nokadyň  $a$ -dan  $b$  geçmegi üçin  $F = F(x)$  güýjüň eden işini tapmaly, bu ýerde  $F(x)$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksizdir.

$[a, b]$  kesimi uzynlyklary  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  bolan  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ )  $n$  böleklere böleliň. Her bölekde erkin  $t_i$  nokat alyp, şol bölekdeki güýç hemişelik we  $F(t_i)$  deň hasap edeliň. Onda  $F(t_i)\Delta x_i$  köpeltmek hasyl güýjüň  $\Delta x_i$  kesimdäki işiniň takmyn bahasyny aňladýar. Şeýle köpeltmek hasyllary jemläp,  $F = F(x)$  güýjüň  $[a, b]$  kesimdäki işiniň

$$A_n = \sum_{i=1}^n F(t_i)\Delta x_i \quad (33)$$

takmyn bahasyny alarys. Ol jem  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $F(x)$  funksiýanyň integral jemidir. Şoňa görä-de  $d = \max \Delta x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) üçin ol jemiň  $d \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) bolanda predeli bardyr we ol üýtgeýän  $F = F(x)$  güýjüň  $[a, b]$  kesimdäki işini aňladýar. Şeýle hem ol predel  $F(x)$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki integralyna deňdir, ýagny

$$A = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(t_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx.$$

**6. Käbir fiziki we himiki meseleler.** Fiziki we himiki meseleler çözümlende ilki bilen haýsy ululygy baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk, haýsyny

$$V_n = \sum_{k=1}^n S(t_k) \Delta x_k \quad (31)$$

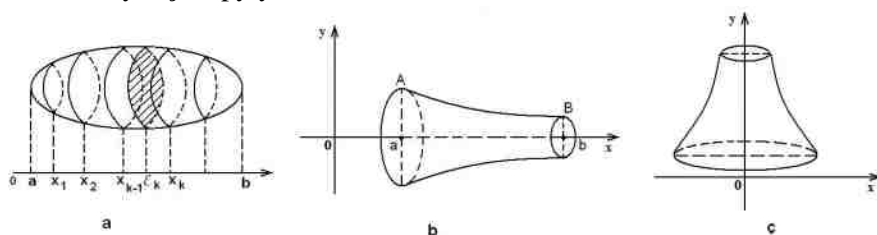
jem  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $S(x)$  funksiýanyň integral jemidir. Ol jem bölek silindrlerden düzülen we berlen jisimi takmyn çalşyryan basgançak jisimiň göwrümini aňladýar.

Eger  $d = \max \Delta x_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) üçin  $d \rightarrow 0$  bolanda (31) jemiň  $V$  predeli bar bolsa, onda şol predele  $G$  jisimiň göwrümi diýilýär.

$S(x)$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksizligi esasynda (31) integral jemiň predeli bardyr, ýagny jisimiň göwrümi

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(t_k) \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx$$

formula boýunça tapylýar.



9-njy surat

Eger jisim ýokarsyndan üznüksiz  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) funksiýanyň grafiginiň dugasy bilen çäklenen egričyzykly trapesiýanyň  $Ox$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan alnan bolsa (9-njy b surat), onda onuň  $Ox$  okuna perpendikulýar kese-kesigi tegelekdir we  $x$  nokat üçin onuň radiusy  $f(x)$  deňdir. Şonuň üçin ol kese-kesigiň meýdany  $S(x) = \pi f^2(x)$  we (31) formula esasynda aýlanma jisimiň göwrümi üçin

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (32)$$

formula alynýar. Şuňa meňzeşlikde,  $x = 0$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = g(y)$  çyzyklar bilen çäklenen  $cCdd$  egričyzykly trapesiýanyň (9-njy ç surat)  $Oy$  okunyň daşyndan aýlananda alnan jisimiň göwrümi üçin

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt + C \quad (14)$$

görnüşdedir (bu ýerde  $C$  – hemişelik san).

$\triangleleft f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksizligi esasynda şol kesimde  $F$  funksiýa differensirlenýär we  $F'(x) = f(x)$  deňlik ýerine ýetýär, ýagny  $F$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde  $f$  funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Dürli  $\varphi$  we  $F$  asyl funksiýalaryň biri-birlerinden hemişelik san bilen tapawutlanýandygy üçin,  $\varphi(x) = F(x) + C$  bolar, ýagny (14) formula ýerine ýetýär.  $\triangleright$

**4. Nýuton - Leybnis formulasy.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol kesimde integrirlenýändir we onuň  $\varphi$  asyl funksiýasy üçin

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x) \Big|_a^b \quad (15)$$

formula dogrudyr.

$\triangleleft$  Bu şertlerde  $f$  funksiýanyň integrirlenýändigini we onuň erkin asyl funksiýasynyň (14) formula boýunça kesgitlenýändigini esasynda, (14) formulada  $x = a$  goýup,  $\varphi(a) = C$  deňligi alarys we ol formulany

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt + \varphi(a)$$

görnüşde ýazarys. Bu formuladan bolsa  $x = b$  bolanda (15) formula gelip çykýar.  $\triangleright$

(15) deňlige Nýuton - Leybnis formulasy diýilýär.

## § 6. 5. Integrirlemegiň usullary

**1. Üýtgeýäni çalşyrmak usuly.** Bu usul şeýle teorema esaslanýar.

**3-nji teorema.** Eger  $f$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we  $g$  funksiýa  $[\alpha, \beta]$  kesimde üznüksiz differensirlenýän bolup,  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$  bolsa we  $\forall t \in [\alpha, \beta]$  üçin  $g(t)$  funksiýanyň bahalary  $[a, b]$  kesime degişli bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt \quad (16)$$

formula dogrudyr.

◁ Goý,  $F$  funksiýa  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimdäki käbir asyl funksiýasy bolsun, diýmek  $F$  funksiýa  $[a, b]$  kesimde differensirlenýär. Şonuň üçin hem çylşyrymly  $F[g(t)]$  funksiýa hem  $[\alpha, \beta]$  kesimde differensirlenýär we

$$\{F[g(t)]\}' = F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t).$$

Bu deňlik  $F[g(t)]$  funksiýanyň  $[\alpha, \beta]$  kesimde  $f[g(t)]g'(t)$  funksiýanyň asyl funksiýasydygyny aňladýar. Şeýlelikde, Nýuton-Leýbnis formulasy esasynda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

we

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt = F[g(\beta)] - F[g(\alpha)].$$

Şerte görä,  $g(\beta) = b$ ,  $g(\alpha) = a$ . Şonuň esasynda soňky deňlikleriň sag bölekleri deň bolar. Şonuň üçin olaryň çep bölekleri hem deňdir, ýagny (16) formula ýerine ýetýär. ▷

Ol formula kesgitli integralyň üýtgeýäni çalşyrmak formulasy diýilýär.

**4-nji mysal.**  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Integraly hasaplamak üçin  $t = \sqrt{x+1}$  çalşyrmany ulanarys. Onda  $x = t^2 - 1$ ,  $dx = 2tdt$  bolar.  $t = \sqrt{x+1}$  deňligi ulanyp, integralyň çäklerini taparys:  $x_1 = 0$  bolanda  $t_1 = 1$  we  $x_2 = 3$  bolanda  $t_2 = 2$  bolar. Onda (16) formula esasynda

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \int_1^2 t^2 dt - 2 \int_1^2 dt = \\ &= \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 - 2t \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) - 2(2 - 1) = \frac{8}{3}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

(29) funksiýanyň integral jeminiň predeline deňdigini görkezmek bolar. Şonuň esasynda hem aýlanma üstüň meýdanynyň

$$q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (30)$$

formula boýunça tapylýandygy subut edilýär.

**Bellik.** Eger üst  $x = g(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) deňleme bilen berlen  $AB$  duganyň  $Oy$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan alynýan bolsa, onda onuň meýdany

$$q = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + g'(y)^2} dy$$

formula boýunça tapylar.

**10-njy mysal.**  $y + x = 2$  göni çyzygyň koordinata oklarynyň arasynda ýerleşýän kesiminiň  $Ox$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan alynýan üstüniň meýdanyny tapmaly.

◁ Göni çyzygyň kesimi üçin  $y = 2 - x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ),  $y' = -1$ . Şoňa görä (30) formula esasynda

$$\begin{aligned} q &= 2\pi \int_0^2 (2 - x) \sqrt{1 + 1} dx = 2\sqrt{2} \pi \int_0^2 (2 - x) dx = \\ &= 2\sqrt{2} \pi \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 4\sqrt{2} \pi. \quad \triangleright \end{aligned}$$

**5. Jisimiň göwrümi.** Goý,  $x$  nokatda  $Ox$  okuna perpendikulýar tekizlik geçirilende berlen  $G$  jisimiň kese kesiginde alynýan  $S(x)$  meýdany belli bolsun we ol  $x$  görä  $[a, b]$  kesimde üznüksiz funksiýa bolsun. Ol jisimiň  $V$  göwrümini tapmak üçin  $[a, b]$  kesimi  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  nokatlar arkaly bölekler böleliň we şol nokatlar boýunça  $Ox$  oka perpendikulýar tekizlikler geçireliň. Şunlukda, jisim  $n$  gatlaklara bölünär (9-njy  $a$  surat). Eger  $x = x_{k-1}$  we  $x = x_k$  tekizlikleriň arasyndaky gatlagy beýikligi  $\Delta x_k$  we esasyň meýdany  $S(t_k)$ ,  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  bolan silindr bilen çalşyrsak, onda ol silindriň göwrümi  $S(t_k) \Delta x_k$  deň bolar. Onda şeýle göwrümleriň jeminden düzülen

$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)$$

deňlikler esasynda, polýar koordinatalarynda berlen duganyň uzynlygy

$$l = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta$$

formula boýunça tapylar

**4. Aýlanma üstüň meýdany.** Goý,  $[a, b]$  kesimde üznüksiz we otrisatel däl  $f$  funksiýa üçin  $AB$  duga  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) funksiýanyň grafigi arkaly berlen bolsun. Eger  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  nokatlar arkaly  $[a, b]$  kesimi bölekler bölsek, onda olara  $AB$  duganyň  $M_i = M_i(x_i, f(x_i))$  ( $i = \overline{1, n}$ ) nokatlary degişli bolar (8-nji surat). Ol nokatlary yzygiderli birikdirip, käbir döwür çyzyk alarys, şunlukda onuň  $M_{i-1}M_i$  böleginiň uzynlygy

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \quad (26)$$

deňdir. Döwür çyzygyň  $M_{i-1}M_i$  bölegi  $Ox$  okuň daşyndan aýlananda kesik konusy ( $f(x_{i-1}) = f(x_i)$ ) bolan halda silindri emele getirýär. Ol aýlanma üstüň meýdany  $\pi(y_{i-1} + y_i)l_i$  deňdir. Onda ähli döwür çyzygyň  $Ox$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüniň meýdany

$$q_n = \pi \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) l_i, \quad y_i = f(x_i) \quad (27)$$

deňdir. Eger  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimde üznüksiz önümi bar bolsa, onda (26) deňligi (25) görnüşde ýazmak bolar. Şonuň üçin (27) deňlik

$$q_n = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{(y_{i-1} + y_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leq c_i \leq x_i) \quad (28)$$

görnüşü alar. Bu jemiň  $d \rightarrow 0$  bolandaky  $q$  predeline aýlanma üstüň, ýagny  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  funksiýanyň grafiginin  $Ox$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüniň meýdany diýilýär.

(28) deňlikden görnüşü ýaly, ol jem

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \quad (29)$$

funksiýanyň integral jemi dälir. Ýöne ol jemiň  $d \rightarrow 0$  bolandaky predelinin

**2. Bölekleyin integrirlemek usuly.** Bu usul şeýle teorema esaslanýar.

**4-nji teorema.** Eger  $u$  we  $v$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda şeýle formula dogrudyr

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (17)$$

◁ Köpeltmek hasyly differensirmek düzgünini ulanyp,  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  deňligi alarys. Bu deňligiň sag böleginiň  $[a, b]$  kesimde üznüksizligi üçin onuň çep bölegi hem şol kesimde üznüksizdir. Şonuň üçin ol deňligi  $a$ -dan  $b$  çenli integrirläp, integralyň häsiýetini we çep bölekdeki funksiýanyň asyl funksiýasynyň  $u(x)v(x)$  bolýandygy üçin, Nýuton-Leýbnis formulasyny ulanyp,

$$u(x)v(x)|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

deňligi alarys. Bu ýerden bolsa aňsatlyk bilen (17) formula alynýar. ▷

Ol formula gysgaça

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

görnüşde ýazylýar we oňa bölekleyin integrirlemeginiň formulasy diýilýär.

**5-nji mysal.**  $\int_{1/2}^3 x e^{2x} dx$  integraly hasaplamaly.

◁ Eger  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = e^{2x}$ ,  $a = 1/2$ ,  $b = 3$  alsak, onda  $u'(x) = 1$  we  $v(x) = e^{2x}/2$  bolýandygy esasynda, (17) formulany ulanyp taparys:

$$\int_{1/2}^3 x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{1/2}^3 - \frac{1}{2} \int_{1/2}^3 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right) \Big|_{1/2}^3 = \frac{5}{4} e^6. \quad \triangleright$$

## § 6. 6. Kesgitli integralyň ulanylyşy

**1. Egriçyzykly figuranyň meýdany.** Ilki bilen egriçyzyly trapesiýanyň, ýagny ýokarsyndan  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ) üznüksiz funksiýanyň grafigi, çepinden we sagyndan deňşilikde  $x = a$  we  $x = b$  göni çyzyklar we aşagyndan  $Ox$  oky bilen çäklenen figuranyň (1-nji surat) meýdanynyň integral arkaly tapylyş formulasyny görkezeliň. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany hakyndaky meselä seredenimizde onuň meýdanynyň (1) predele deňdigini we kesgitli integral düşüňjesini girizenimizde ol predeliň kesgitli integrala deňdigini (3) formulada görüpdik. Şoňa görä-de (1) we (3) formulalar boýunça egriçyzykly trapesiýanyň meýdany üçin

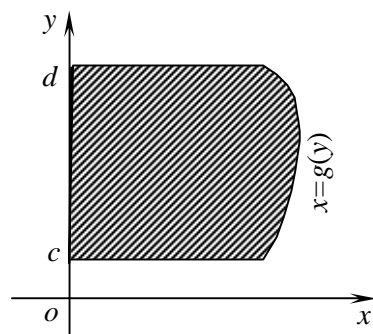
$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (18)$$

formulany alarys.

Şuňa meňzeşlikde, eger egriçyzykly trapesiýa sagyndan  $x = g(y)$  funksiýanyň grafigi, aşagyndan we ýokarsyndan  $y = c$ ,  $y = d$  göni çyzyklar we çepinden  $Oy$  oky bilen çäklenen bolsa, onda onuň meýdany

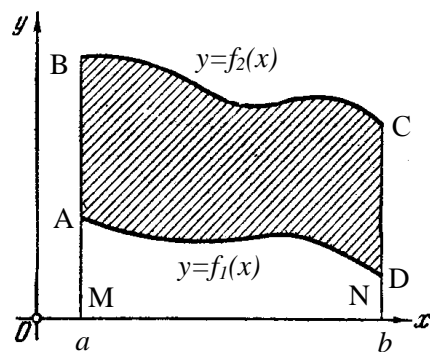
$$S = \int_c^d g(y) dy \quad (19)$$

formula boýunça tapylýar (2-nji surat).



2-nji surat

Eger  $ABCD$  figura aşagyndan  $y = f_1(x)$  we ýokarsyndan  $y = f_2(x)$  funksiýalaryň grafikleri, çepinden we sagyndan bolsa  $x = a$  we  $x = b$  göni çyzyklar bilen çäklenen bolsa, onda onuň meýdanyna  $MBCN$  we  $MADN$  egriçyzykly trapesiýalaryň meýdanlarynyň tapawudy hökmünde tapmak bolar (3-nji surat).



3-nji surat

Şonuň üçin hem formula (18) esasynda ol figuranyň meýdany üçin

$$P_n = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \Delta x_i$$

deňligi, ýagny (24) integralyň integral jemini alarys.  $[a, b]$  kesimde  $\sqrt{1 + f'^2(x)}$  funksiýanyň üznüksizligi esasynda,  $\tilde{d} = \max \Delta x_i$  ( $i = 1, n$ ) üçin  $\tilde{d} \rightarrow 0$  bolanda ol jemiň predeli bardyr we ol predel (24) integrala deňdir.  $\tilde{d} \leq d$  bolýandygy üçin  $(d \rightarrow 0) \Rightarrow (\tilde{d} \rightarrow 0)$ . Şoňa görä

$$l = \lim_{d \rightarrow 0} P_n = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx . \triangleright$$

**9-njy mysal.**  $y = \sqrt{x^3}$ ,  $0 \leq x \leq 5$  duganyň uzynlygyny tapmaly.

$\triangleleft$   $y = \sqrt{x^3}$  deňlikden  $y' = 3\sqrt{x}/2$  önümi tapyp we (24) formulany ulanyp alarys:

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{4}{9} \int_0^5 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9x}{4}\right) = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27} . \triangleright$$

Eger  $AB$  duga  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) parametrik görnüşde berlen bolup,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $\varphi(\beta) = b$  bolsa, onda  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t)dt$  çalşyрма girizip we parametrik görnüşdäki funksiýanyň önüminiň formulasyndan peýdalanyň, (24) formuladan onuň uzynlygy üçin

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

formulany alarys.

Eger  $AB$  duga polýar koordinatalarynda  $\rho = \rho(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) deňleme arkaly berlen bolsa, bu ýerde  $\rho = \rho(\theta)$  üznüksiz differensirlenýän funksiýa we  $A$  we  $B$  nokatlara  $\alpha$  we  $\beta$  deňşli bilsa, onda polýar we dekart koordinatalaryny baglanyşdyrýan formula esasynda  $AB$  duganyň  $\theta$  parametre görä  $x = \rho(\theta)\cos \theta$ ,  $y = \rho(\theta)\sin \theta$  deňlemesini alarys. Şoňa görä

$$x' = \rho'(\theta)\cos \theta - \rho(\theta)\sin \theta, \quad y' = \rho'(\theta)\sin \theta + \rho(\theta)\cos \theta,$$



bilen belgiläliň. Eger döwürk çyzygyň  $i$ -nji böleginiň uzynlygy  $l_i$  bolsa, onda perimetr ol bölekleriň jemine deň bolar:

$$P_n = \sum_{i=1}^n l_i$$

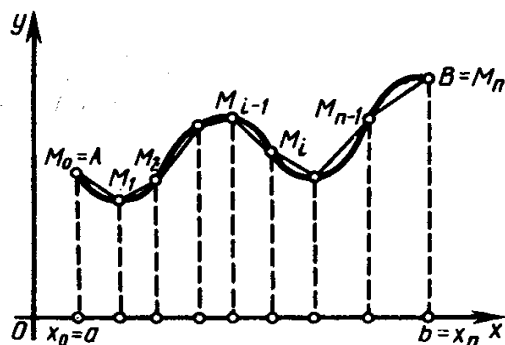
Goý,  $d = \max l_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) bolsun. Eger  $d \rightarrow 0$  bolanda perimetriň  $l$  predeli bar bolsa, onda şol predele  $AB$  duganyň uzynlygy diýilýär:

$$l = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n l_i$$

Bu kesgitlemeden peýdalanyň,  $[a, b]$  kesimde üznüksiz differensirlenýän  $f$  funksiýa üçin,  $AB$  duganyň uzynlygynyň

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (24)$$

formula boýunça tapylýandygyny görkezeliň.



8-nji surat

Eger  $M_i = M_i(x_i, f(x_i))$  bolsa, onda döwürk çyzygyň  $i$ -nji böleginiň uzynlygy  $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$  bolar. Lagranžyň formulasy esasynda

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} < c_i < x_i).$$

Şonuň üçin

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}). \quad (25)$$

Bu deňlik esasynda döwürk çyzyklaryň perimetri üçin

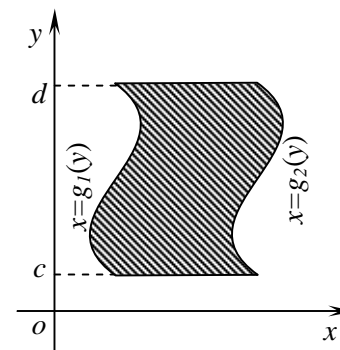
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (20)$$

formulary alarys.

Eger egričyzykly figura çepinden we sagyndan  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  funksiýalaryň grafikleri, aşagyndan we ýokarsyndan  $y = c$ ,  $y = d$  göni çyzyklar bilen (4-nji surat) çäklenen bolsa, onda onuň meýdany

$$S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy \quad (21)$$

formula boýunça tapylýar.



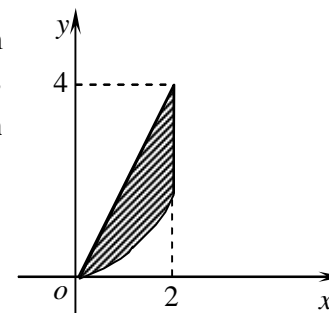
4-nji surat

Egričyzykly figuranyň başga görnüşleriniň meýdanlaryny tapmak üçin olary her böleginde ýokarda getirilen formulalary ulanyň bolar ýaly bölekler bölme.

**6-njy mysal.**  $y = x^2/2$  parabola we  $x = 2$ ,  $y = 2x$  göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly (5-nji surat).

◁ Çyzyklar  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$  we  $(2, 4)$  nokatlarda kesişýärler. Ol figuranyň ýokarsyndan  $y = 2x$  göni çyzyk bilen, aşagyndan  $y = x^2/2$  parabola bilen çäklenýänligi esasynda, (20) formuladan peýdalanarys:

$$S = \int_0^2 \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \triangleright$$



5-nji surat

**1-nji bellik.** Eger egričyzykly trapesiýany ýokarsyndan çäklendirýän egri çyzyk  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) parametrik görnüşde berlen bolup,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $\varphi(\beta) = b$  bolsa, onda  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t)dt$  çalşyрма girizip, (18) formuladan onuň meýdany üçin

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \quad (22)$$

formulany alarys.

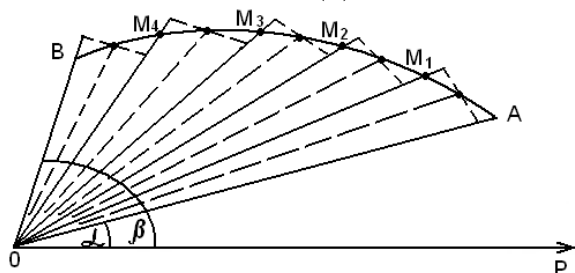
**7-nji mysal.**  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ellips bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly.

◁ Ellipsiň koordinatalar oklaryna görä simmetrikligi sebäpli, onuň birinji çäryýekde ýerleşýän böleginiň meýdanyny tapyp, ony 4-e köpeltmek ýeterlikdir. Bu halda  $x$  ululyk 0-dan  $a$  çenli ýütgeýär. Şonuň üçin  $t$  parametr  $\pi/2$ -den 0-a çenli üýtgeýär. Şoňa görä (22) formula esasynda

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi/2} dt - 2ab \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt = 2ab \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab. \triangleright \end{aligned}$$

## 2. Polýar koordinatalarynda meýdanyň formulasy. Goý, $\rho(\theta)$

funksiýa  $[\alpha, \beta]$  kesimde üznüksiz we otrisatel däl bolsun. Polýar koordinatalarynda  $\rho = \rho(\theta)$  funksiýanyň grafigi we polýar oky bilen  $\alpha$



6-njy surat

we  $\beta$  burçlary emele getirýän şöhleler bilen çäklenen egriçyzykly  $OAB$  sektoryň (6-njy surat) meýdanynyň

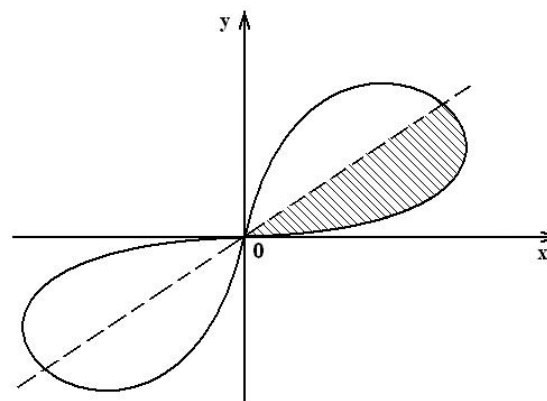
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (23)$$

formula boýunça

tapylýandygyny görkezeliň.

Onuň üçin  $OAB$  sektory  $OM_{i-1}M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) elementar sektorlara böleliň we  $i$ -nji sektoryň burçuny  $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$  bilen belgiläliň.  $\varphi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$  üçin  $i$ -nji bölek sektory radiusy  $\rho_i = \rho(\varphi_i)$  we merkezi burçy  $\Delta\theta_i$  bolan tegelek sektor bilen çalşyralyň. Onuň meýdany  $\Delta S_i = (\rho_i^2 \Delta\theta_i)/2$  deňdir. Şeýle sektorlaryň meýdanlarynyň

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i^2 \Delta\theta_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i^2(\varphi_i) \Delta\theta_i$$



7-nji surat

jemi bolsa egriçyzykly sektory takmyn çalşyran başgaçak sektoryň meýdanyna deňdir. Eger  $d = \max \Delta\theta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) üçin ol jemiň  $d \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele egriçyzykly sektoryň meýdany diýilýär. Şeýlelikde, kesgitleme esasynda ol sektoryň meýdany

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i^2(\varphi_i) \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

bolar, çünki bu halda integral jemiň predeli bardyr.

**8-nji mysal.**  $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$  lemniskata bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly (7-nji surat).

◁ Lemniskatanyň  $\theta = \pi/4$  şöhlä görä simmetrikligi esasynda, onuň  $1/4$  böleginiň meýdanyny taparys:

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta d(2\theta) = -\frac{a^2}{4} \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} a^2.$$

Şonuň esasynda  $S = a^2$ .  $\triangleright$

**3. Egri çyzygyň dugasynyň uzynlygy.** Goý,  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $f$  funksiýa üçin,  $AB$  duga  $y = f(x)$  funksiýanyň grafigi hökmünde berlen bolsun.  $[a, b]$  kesimi  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  nokatlar arkaly böleklere böleliň. Ol nokatlara  $AB$  dugada  $M_1, M_2, \dots, M_n$  nokatlar deňişli bolar (8-nji surat). Olary hordalar arkaly birleşdirip,  $AB$  duganyň içinden çyzylan käbir döwür çyzygy alarys. Onuň perimetrini  $P_n$

Bu funksiýany we onuň  $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^n = k^n e^{kx}$  önümlerini (25) deňlemede ornunda goýup, alarys:

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0.$$

$$\text{Ýa-da } e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n) = 0$$

(26) funksiýanyň (25) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (27)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

(27) deňleme häsiýetlendiriji deňleme diýilýär. Bu n-nji tertipli algebraik deňlemäniň n sany köki bardyr, olaryň gabat gelýänide, kompleks san bolmagy mümkin.

1) Häsiýetlendiriji deňlemäniň n-sany dürli hakyky köki bolsun. Bu kökleri  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ( $k_i \neq k_j, i \neq j$ ) bilen belgiläliň. Bu sanlara degişli (25) deňlemäniň kökleri

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x} \quad (28)$$

funksiýalar bolar. Bu funksiýalar  $[a, b]$  kesimde çyzykly bagly däl (15-e seret).

Teorema 6 –yň netijesine görä, (25) deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x} \quad (29)$$

formuladan kesgitlenýär.

**Mysal 5.**  $y''' - 2y'' - 3y' = 0$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu deňlemäniň häsiýetlendirijileri deňlemesini ýazalyň:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0$$

Deňlemäniň kökleri  $k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3$  bolar. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \text{ bolar.}$$

**2.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri hakyky bolup, olaryň m sanysy özara deň, beýlekileri dürli bolsun:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n$$

berlen deňlemäniň çözüwleri.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (38)$$

görnüşde kesgitlenýär. Şunlukda, ol integral (38) deňligiň sag bölegindäki integrallaryň ikisi hem ýygnananda ýygnanýandyr. Edil şonuň ýaly  $f$  funksiýanyň  $[a, b]$  kesimiň uçlarynyň ikisiniň etrabynda-da çäklenmedik halynda hem hususy däl integral (38) deňlik boýunça keskitlenýär, ýöne ol deňlikde  $c \in [a, b]$  erkin nokatdyr.

**12-nji mysal.**  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$  integralyň  $\alpha > 0$  parametriň haýsy bahalarynda ýygnanýandygyny barlamaly.

◁ Bu integral (37) görnüşdäki integraldyr. Şonuň üçin hem Nýuton-Leybnis formulasyny ulanyp, (37) deňlik esasynda  $\alpha \neq 1$  bolanda

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-1)}{(x-1)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

deňligi we  $\alpha = 1$  bolanda

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-1)}{(x-1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(x-1) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \varepsilon) = \infty$$

deňligi alarys. Şeýlelikde, integral  $0 < \alpha < 1$  bolanda ýygnanýar,  $\alpha \geq 1$  bolanda dargaýar. ▷

Çäksiz funksiýanyň hususy däl integrallary üçin hem 7-nji we 8-nji teoremlalar ýaly teoremlar dogrudyr. Bu halda hem deňeşdirilýän integral hökmünde ýygnanýandygy ýa-da dargaýandygy belli bolan integral alynýar.

**13-nji mysal.**  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1} + 5(x-1)^2}$  integralyň ýygnanýandygyny

barlamaly.

◁ Integral astyndaky funksiýa üçin

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1} + 5(x-1)^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} = \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigini we 12-nji mysal esasynda

$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$  integralyň ýygnaýandygyny üçin, deňeşdirmişniň boýunça integral ýygnaýandyr.  $\triangleright$

## § 6.9. Eýler integrallary barada düşüňje

### 1. Eýler gamma-funksiýasy.

Hususy däl

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (39)$$

görnüşdäki ntegrala Eýler integralynyň ikinji görnüşini ýa-da Eýler gamma-funksiýasy diýilýär.

Bu integral hususy däl integrallara mahsus bolan aýratynlyklaryň ikisini hem özünde saklaýandyr. Birinjiden-ä integrirlemeklik tükeniksiz bolan  $[0, +\infty)$  aralykda geçirilýär, ikinjiden bolsa  $x < 1$  bolanda integral astyndaky funksiýa  $t = 0$  nokatda çäksizdir. Mälim bolşy ýaly, beýle integraly derňemek üçin ony  $\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$  integrallaryň jemi görnüşinde ýazýarlar, bu ýerde

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Bu integrallaryň birinjisi  $\forall x > 0$  üçin deňeşdirmişniň boýunça ýygnaýandyr, çünki  $\forall t \in [0, 1]$  üçin

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \text{we} \quad \int_0^1 t^{x-1} dt$$

integral ýygnaýandyr. Integrallaryň ikinjisi hem şol nyşan boýunça

ýygnaýar, çünki  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$  deňlik esasynda ýeterlik uly

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

şerti kanagatlandyryýan (20) çözüwinden  $c_1, c_2, \dots, c_n$  hemişelikleri kesgitläliň, ýagny

$$\left. \begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) &= y_0', \\ &\dots \dots \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Bu sistemanyň kesgitleýjisi Wronskiniň kesgitleýjisi. Teoremynyň şertine görä  $[a, b]$  kesimde kesgitlenen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiýalar çyzykly bagly däl, şonuň üçin islendik  $x_0 \in [a, b]$  nokat üçin  $W(x_0) \neq 0$  Diýmek, (24) sistemanyň ýeke-täk  $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$  çözüwi bardyr.

Bu bolsa (23) funksiýanyň (20) deňlemäniň umumy çözüwidigini aňladýar.

**Netije 2.2** çyzykly birjynsly deňlemäniň çyzykly bagly däl çözüwleriniň iň uly sany deňlemäniň tertibine deňdir.

**Kesgitleme:** n-nji tertipli çyzykly birjynsly deňlemäniň islendik n çyzykly bagly däl çözüwlerine bu deňlemäniň fundamental çözüwi diýilýär.

## § 2.3 n-nji tertipli hemişelik koeffisiýentli birjynsly çyzykly deňlemeler

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (25)$$

Deňleme n-nji tertipli hemişelik koeffisiýentli birjynsly çyzykly deňleme diýilýär, bu ýerde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  hemişelik sanlar.

(25) deňleme (6) deňlemäniň hususy halydyr. Şonuň üçin §2.2-däki alnan netijeler (25) deňleme üçin dogrudyr.

(25) deňlemäniň çözüwini

$$y = e^{kx} \quad (k = \text{Const}) \quad (26)$$

görnüşde gözläliň.

↯ tersine güman edeliň, ýagny  $x_0 \in [a, b]$  nokatda Wronskiniň kesgitlējýjisi nola deň bolsun. Şeýlelikde,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) &= 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Algebraik deňlemeler sistemasynyň noldan tapawutly çözüwi bardyr, ýagny  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ .

Teorema 2.1 we 2.2-den

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (22)$$

funksiýa (20) deňlemäniň çözüwidir.

Bu deňlemäniň çözüwi (21)-e görä

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýar. Bu başlangyç şert (20) deňlemäniň  $y \equiv 0$  çözüwini-de kanagatlandyrýar. Diýmek teorema 2.1 –e görä (22) deňlemäniň çözüwi  $y(x_0) = 0$ , diýmek

$$a_1 y_1(x_0) + a_2 y_2(x_0) + \dots + a_n y_n(x_0) = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0)$$

Bu ýerden  $x_0 \in [a, b]$  nokatda  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiýalar çyzykly bagly. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Bu garşylyk teoremany subut edýär.

### 3. n tertipli birjynsly çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi

**6-njy teorema.** Eger  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde kesgitlenen koeffisiýentleri bu kesimde üznüksiz bolan birjynsly (20) deňlemäniň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsalar, onda bu deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (23)$$

formula bilen kesgitlenýär, bu ýerde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  erkin hemişelikdir.

↯ 3-nji teoremany göz önünde tutup, (23) funksiýanyň (20) deňlemäni toždestwa öwürýändigini göreris.

Indi

$t$  üçin  $\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} < 1$ , ýagny  $t^{x-1}e^{-t} < t^{-2}$  we  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  integral ýygnanýar.

Şeýlelikde,  $\Gamma_1(x)$  we  $\Gamma_2(x)$  integrallaryň ikisi birden  $\forall x > 0$  üçin ýygnanýar we şonuň esasynda  $\Gamma(x)$  integral hem  $\forall x > 0$  üçin ýygnanýar. Şeýlelikde,  $x$ -iň her bir položitel bahasy üçin Eyler gamma-funksiýasy kesgitlenendir.

Bölekleýin integrirleme formulasyny ulanyp,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t^x d(e^{-t}) = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

deňligi alarys, çünki  $-t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{t^x}{e^t} \right) = 0$ . Şeýlelikde,  $\forall x > 0$  üçin

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (40)$$

formula dogrudyr. (39) formuladan  $x = 1$  bolanda alynýan

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

deňlik esasynda (40) formuladan  $x = 1, 2, \dots, n$  bolanda alarys:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!, \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!, \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(2) = 3 \cdot 2! = 3!, \\ \Gamma(n+1) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (41)$$

### 2. Eyler beta-funksiýasy. Hususy däl

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (42)$$

integrala Eyler integralynyň birinji görnüşi ýa-da Eyler beta-funksiýasy diýilýär.

Bu integrala hususy däl integral diýilmegi  $f(t, x, y) = t^{x-1} (1-t)^{y-1}$  funksiýanyň  $0 < x < 1$  bolanda  $t = 0$  nokatda we  $0 < y < 1$  bolanda  $t = 1$  nokatda çäksizligi esasyndadyr. Şonuň üçin integrally

$$B_1(x, y) = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad B_2(x, y) = \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

integrallaryň  $B(x, y) = B_1(x, y) + B_2(x, y)$  jemi görnüşinde aňladarys.

$t \in [0, 1/2]$  bolanda  $(1-t)^{y-1}$  funksiýanyň üznüksizligi sebäpli ol çäklidir, ýagny  $(1-t)^{y-1} \leq M_1$  we şonuň üçin  $f(t, x, y) \leq M_1 t^{x-1}$ .  $t \in [1/2, 1]$  bolanda  $t^{x-1}$  funksiýanyň üznüksizligi sebäpli ol funksiýa çäklidir, ýagny  $t^{x-1} \leq M_2$  we  $f(t, x, y) \leq M_2 (1-t)^{y-1}$ . Şonuň esasynda,  $B_1(x, y)$  integraly  $x > 0$  bolanda ýygnanýan  $\int_0^{1/2} t^{x-1} dt$  integral bilen,

$B_2(x, y)$  integraly bolsa  $y > 0$  bolanda ýygnanýan  $\int_{1/2}^1 (1-t)^{y-1} dt$

integral bilen deňeşdirip,  $B(x, y)$  integralyň  $x > 0, y > 0$  bolanda ýygnanýandygyny alarys. Şeýlelikde, Eýler beta-funksiýasy  $x > 0, y > 0$  bolanda kesgitlenendir.

(43) integralda  $u = 1-t$  çalşyрма girizip,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = -\int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = \\ &= \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1} du = B(y, x) \end{aligned} \quad (44)$$

deňligi alarys, ýagny beta-funksiýa üýtgeýänlerine görä simmetrikdir.

Eýleriň gamma-funksiýasy bilen beta-funksiýasyny baglanyşdyrýan şeýle formula bardyr:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (45)$$

Bu formuladan  $x = y = 1/2$  bolanda  $\Gamma(1) = 1$  deňlik esasynda

$$\begin{aligned} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = \\ &= \int_0^1 \frac{d(t-1/2)}{\sqrt{1/4 - (t-1/2)^2}} = \arcsin(2t-1) \Big|_0^1 = \pi \end{aligned}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (17)$$

funksiýalar islendik  $[a, b]$  kesimde çyzykly bagly dälär.

**4-nji teorema** Eger  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde çyzykly bagly bolsa, onda

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (18)$$

kesgitleýji  $[a, b]$  kesimde toždestwalaýyn nola deňdir.

◁ Teoremanyň şertine görä  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde çyzykly baglydyr. Kesgitlemä görä bu kesimde  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$  deňlik  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$  bolanda ýerine ýetýär.

Bu toždestwony (n-1) gezek differensirläp alarys:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n &= 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Islendik  $x \in [a, b]$  üçin  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  näbellilere görä birjynsly algebraik deňlemeler sistemasyny aldyk. Bu sistemanyň noldan tapawutly çözüwi bolmagy üçin kesgitleýjisi nola deň bolmaly, ýagny (10) deňlik ýerine ýetmeli.

(10) kesgitleýjä Wronskiniň kesgitleýjisi diýilýär.

**5-nji teorema.** Eger  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$  funksiýalar  $[a, b]$  kesimde üznüksiz  $P_k(x)$  ( $k = \overline{0, n}$ ) koeffisiýentli

$$y_n^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \dots + P_n(x) y = 0 \quad (20)$$

Deňlemäniň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsa, onda Wronskiniň  $W = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  kesgitleýjisi  $[a, b]$  kesimiň islendik nokadynda nola deň dälär.



Hakykatdan-da,  $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_n x^{n-1} = 0$  deňlik  $\forall x \in [a, b]$  üçin diňe  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  bolanda ýerine ýetýär. Sebäbi hakyky koeffisiňentli (n-1) derejeli köpagzanyň nollarynyň sany (n-1) den köp dälär.

Eger  $i \neq j$  bolanda  $k_i \neq k_j$  bolsa

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}, \quad (15)$$

we

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{n_1} e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, \dots, x^{n_2} e^{k_2 x}, \dots, e^{k_p x}, x e^{k_p x}, \dots, x^{n_p} e^{k_p x} \quad (16)$$

funksiýalar hem islendik  $[a, b]$  kesimde çyzykly bagly dälär.

Eger  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiýalaryň iň bolmanda biri nola deň bolsa, onda bu funksiýalar çyzykly baglydyr. Hakykatdan-da, eger  $y_1 \equiv 0$  bolsa, onda

$$1 y_1(x) + 0 y_2 + \dots + 0 y_n = 0 \text{ bolar, bu ýerde: } \alpha_1 = 1 \neq 0$$

Eger n sany funksiýalaryň arasynda  $k(k < n)$  sanysy çyzykly bagly bolsa, onda ähli funksiýalar hem çyzykly baglydyr. Hakykatdan-da, ýönekeýlik üçin  $\alpha_1 \neq 0$  bolanda  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k = 0$  bolsun, onda

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k + 0 y_{k+1} + \dots + 0 y_n = 0, \alpha_1 \neq 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(x) \text{ we } \alpha_2 = \alpha_2(x) \quad (y_1 \neq 0, y_2 \neq 0) \text{ funksiýalaryň}$$

çyzykly bagly bolmagy üçin olaryň proporsional bolmagy zerur we ýeterlikdir. Hakykatdan-da, eger  $y_2 = k y_1$  ( $k = \text{Const}$ ) bolsa, onda  $k y_1 - y_2 = 0$ ,  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$  bu ýerde  $\alpha_2 = -1 \neq 0$ . Tersine, eger  $\alpha_1^2 y_1^2 \neq 0$  bolanda  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$  bolsun. Goý,  $\alpha_2 \neq 0$ , onda  $y_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1$  ýa-da

$$y_2 = k y_1, \quad k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Mysal üçin:  $y_1 = x, y_2 = 2x$  funksiýalar islendik  $[a, b]$

kesimde çyzykly baglydyr;  $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$  ( $k_1 \neq k_2$ ) funksiýalar çyzykly bagly dälär.

deňligi alarys. Şoňa görä  $x > 0$  bolanda  $\Gamma(x) > 0$  bolýandygy üçin

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1,772. \quad (46)$$

deňligi alarys. Ony ulanyp, hususy däl  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  integraly hasaplamak

bolar. Onuň üçin ol integralda  $x = \sqrt{t}$  çalşyрма girizip, alarys:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\text{ýagny } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## G ö n ü k m e l e r

1. Nýuton-Leýbnis formulasyndan peýdalanyň, kesgitli integrallary hasaplamaly:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 x^4 dx. \quad 2) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx. \quad 3) \int_1^4 \sqrt{x} dx. \quad 4) \int_1^2 \frac{dx}{x}. \\ 5) \int_{-1}^0 e^{-2x} dx. \quad 6) \int_0^{\pi/2} \sin 4x dx. \quad 7) \int_0^{\pi/2} \cos x dx. \quad 8) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

2. Üýtgeýäni çalşyrmak usulyndan peýdalanyň, integrallary hasaplamaly

$$\begin{aligned} 1) \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}. \quad 2) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx. \quad 3) \int_0^7 \sqrt{49 - x^2} dx. \quad 4) \int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}. \\ 5) \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}. \quad 6) \int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x} dx. \quad 7) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}. \quad 8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} dx. \\ 9) \int_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}. \quad 10) \int_0^{1/2} \frac{5x dx}{(1-x^2)^3}. \quad 11) \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}. \quad 12) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

3. Bölekleýin integrirlemek usulyndan peýdalanyň, kesgitli integrallary hasaplamaly:

$$1) \int_1^e \ln^2 x dx. \quad 2) \int_1^e x^2 \ln x dx. \quad 3) \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}. \quad 4) \int_0^2 (3-2x)e^{-3x} dx.$$

4. Berlen egri çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny hasaplamaly:

$$1) y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 4. \quad 2) y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e. \\ 3) y^2 - x + 1 = 0, x - 5 = 0. \quad 4) x^2 - 4x + y = 0, y = 0. \\ 5) y - x^2 = 0, y - x = 0. \quad 6) x = y - y^2 + 6 = 0, x = 0.$$

5. Polýar koordinatalarynda berlen egri çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny hasaplamaly:

$$1) r = a(1 - \cos \varphi) \text{ (kardioida)}. \quad 2) r = a \cos 2\varphi.$$

6. Egri çyzyklaryň dugalarynyň uzynlygyny hasaplamaly:

$$1) y = \frac{x^2}{2} - 1 \text{ egri çyzygyň } ox \text{ oky bilen kesilen bölegi.} \\ 2) y^2 = x^3 \text{ egri çyzygyň } x = \frac{4}{3} \text{ göni çyzyk bilen kesilen bölegi.} \\ 3) y = \ln \sin x \left( \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

7. Egri çyzygyň dugasynyň  $ox$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny hasaplamaly:

$$1) y = ach \frac{x}{x} \quad (-a \leq x \leq a). \quad 2) y = \frac{x^3}{3} \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

8. Egri çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň  $ox$  okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimleriniň görümini hasaplamaly:

$$1) 2y^2 = x^3, x = 4. \quad 2) y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), y = 0, x = 0, x = 1.$$

9. Her litrinde 0,3 kg duz bolan suwuklyk minutda 2 l tizlik bilen içinde 10 l suw bolan gaba üznüksiz guýulýar. Gaba guýulan suwuklyk suw bilen garyşýar we garyndy şol tizlik bilen gapdan çykýar. 5 minut geçenden soň gapda näçe duz bolar?

10. Göwrümi  $200 m^3$  bolan otagyň howasynda 0,15 % kömürturşy gaz ( $CO_2$ ) saklanýar. Wentilýator otaga düzüminde 0,04%  $CO_2$  bolan howany minutda  $20 m^3$  tizlik bilen salýar. Näçe minutdan soň otagyň

Diýmek,  $y_1 + y_2$  funksiýa  $L[y] = 0$  deňlemäniň çözüwi. ▷

**1-nji netije.** Eger  $y_1, y_2, \dots, y_n$  funksiýalar  $L[y] = 0$  deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

Funksiýa hem bu deňlemäniň çöwüdir, bu ýerde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  erkin hemişelikdir. Bu tassyklama 1-nji we 2-nji teoremlardan gelip çykýar.

**3-nji teorema.** Eger  $P_k(x)$  ( $k = \overline{0, n}$ ) hakyky koeffisiýentli  $L[y] = 0$  deňlemäniň çözüwi  $y(x) = u(x) + iv(x)$  kompleks funksiýa bolsa, onda hakyky  $u(x)$  we hyýaly  $v(x)$  bölekler hem bu deňlemäniň çözüwidir.

◁ Teoremanyň şertine görä  $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$  (9), (10) formulalary ulanyp, alarys:

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0,$$

bu ýerden  $L[u(x)] \equiv 0$  we  $iL[v(x)] \equiv 0$  toždestwalary alarys.

## 2. Çyzykly bagly we çyzykly bagly däl funksiýalar. Wronskiniň kesgitleýjisi

Eger  $[a, b]$  kesimde kesgitlenen

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x) \quad (11)$$

funksiýalar üçin  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$  şerti kanagatlandyrylan hakyky  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sanlar bar bolup,

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0, \forall x \in [a, b] \quad (12)$$

deňlik ýerine ýetse, onda (11) funksiýalara çyzykly bagly diýilýär.

Eger (12) deňlik diňe

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (2.13)$$

bolanda ýerine ýetse, onda (11) funksiýalar çyzykly bagly diýilýär.

Mysal üçin,  $[a, b]$  kesimde kesgitlenen

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, \dots, y_n = x^{n-1} \quad (14)$$

funksiýalar bu kesimde çyzykly bagly däl.



görnüşleri alar.

$$L[y] = y^{(n-1)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y \quad (7)$$

belgilemäni girizp, (6) deňlemäni

$$L[y] = 0 \quad (8)$$

görnüşde ýazalyň.

$L[y]$  belgilemäni geljekde çyzykly differensial operator aşakdaky häsiýetlere eýedir:

$$L[Cy] = CL[y] \quad (C = \text{const}) \quad (9)$$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \quad (10)$$

Hakykatdan-da,

$$L[Cy] \equiv (Cy)^{(n)} + P_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \dots + P_n(x)(Cy) \equiv$$

$$C(y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y) = CL[y]$$

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + P_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots$$

$$+ P_n(x)(y_1 + y_2)$$

$$= (y_1^n + P_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y_1)$$

$$+ (y_2^n + P_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y_2)$$

$$= L[y_1] + L[y_2]$$

(9),(10) formulalary ulanyp, aşakdaky tassyklamalary subut edeliň:

**1-nji teorema.**Eger  $y_1$  çyzykly birjynsly  $L[y] = 0$  deňlemäniň çözüwi bolsa, onda  $Cy_1$  hem bu deňlemäniň çözüwidir, bu ýerde  $C = \text{const}$ .

◁ Teoremanyň şertine görä  $L[y_1] \equiv 0$ , onda (2.9) formulany peýdalanylýarys.  $L[Cy_1] \equiv CL[y_1] \equiv 0$ ,  $L[Cy_1] \equiv 0$ . ▷

**2-nji teorema.**Eger  $y_1$  we  $y_2$  funksiýalar  $L[y] = 0$  birjynsly deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda  $y_1 + y_2$  funksiýa hem bu deňlemäniň çözüwidir. ▷

◁ Teoremanyň şertine görä  $L[y_1] \equiv 0$ ,  $L[y_2] \equiv 0$  (10) formulany peýdalanylýarys:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv 0, \quad L[y_1 + y_2] \equiv 0$$

howasyndaky kömürtürşy gazyň mukdary üç esse azalar?

**11.** Trapeziýalar usuly bilen  $n = 10$  alyp, integrallary hasaplamaly:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}. \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{1+2x^3}. \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{1+3x^3}. \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{1+4x^3}.$$

**12.** Parabolalar usuly bilen  $2n = 10$  alyp, integrallary hasaplamaly:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{2^2+x^2}. \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{3^2+x^2}. \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{4^2+x^2}.$$

**13.** 0,001 çenli takyklykda integrallary hasaplamaly:

$$1) \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx. \quad 2) \int_1^2 e^x \, dx. \quad 3) \int_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} \, dx. \quad 4) \int_0^3 \frac{dx}{2+x}.$$

**14.** Hususy däl integrallaryň ýygnaýandygyny ýa-da dargaýandygyny barlamaly:

$$1) \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^6}. \quad 2) \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^3+1)^2} \, dx. \quad 3) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}. \quad 4) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}. \quad 6) \int_0^1 \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 7) \int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \quad 8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}.$$

## J o g a p l a r

- 1.** 1)  $1/5$ . 2)  $8/3$ . 3)  $14/3$ . 4)  $\ln 2$ . 5)  $(e^2 - 1)/2$ . 6) 0. 7) 1. 8) 1.
- 2.** 1)  $(3\sqrt{2})/2$ . 2)  $(4 - \pi)/2$ . 3)  $49\pi/4$ . 4)  $4/3$ . 5)  $1/4$ . 6)  $194/3$
- 7)  $\pi/2$ . 8)  $2/3$ . 9)  $0,24$ . 10)  $35/36$ . 11) 3. 12) 1. **3.** 1)  $e^{-2}$ . 2)  $(2e^3 + 1)/9$ . 3) 8. 4)  $(5e^{-6} + 7)/9$ . **4.** 1) 24. 2) 1. 3)  $32/2$ . 4)  $32/2$ .
- 5)  $1/6$ . 6)  $125/6$ . **5.** 1)  $(3\pi a^2)/2$ . 2)  $(\pi a^2)/2$ . **6.** 1)  $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
- 2)  $112/27$ . 3)  $(\ln 3)/2$ . **7.** 1)  $\pi a^2(\text{sh} 2 + 2)$ . 2)  $(34\sqrt{17} - 2)\pi/9$ . **8.**
- 1)  $\pi$ . 2)  $\pi(e^2 - e^{-2})/8 + \pi/2$ . **9.**  $\approx 1,9 \text{ kg}$ . **10.** 24 min. **11.** 1) 0,83502. 2) 0,74766. 3) 0,68976. 4) 0,64719. **12.** 1) 0,785398. 2) 0,231824. 3) 0,107250. 4) 0,061245. **13.** 1) 1,000001. 2) 4,67078. 3) 1,414214. 4) 0,916402. **14.** 1)  $1/5$ . 2)  $1/3$ . 3), 4) ýygnaýar. 5), 8) dargaýar. 6), 7) ýygnaýar.

### III. bab. DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

#### III. 1. Birinji tertipli differensial deňlemeler

##### §1.1 Differensial deňlemeler barada esasy düşüňjeler

Eger gözlenýän funksiýa we onuň dürli tertipdäki önümleri deňlemede saklanýan bolsa, onda bu deňlemä differensial deňleme diýilýär. Deňlemedäki gözlenýän funksiýanyň önüminiň ýokary tertibine deňlemäniň tertibi diýilýär.

Eger gözlenýän funksiýa bir üýtgeýänli bolsa, onda degişli differensial deňlemä ady differensial deňleme diýilýär. Eger gözlenýän funksiýa birnäçe üýtgeýänli bolsa, onda bu differensial deňlemä hususy önümlü differensial deňleme diýilýär.

n-nji tertipli umumy ady differensial deňleme

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde  $x$  bagly däl üýtgeýän ululyk,  $y = y(x)$  gözlenýän funksiýa,  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  gözlenýän funksiýanyň önümleri,  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  bolsa berlen funksiýa.

Eger (1) deňleme  $y^{(n)}$ -e görä çözülen bolsa, onda ol

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

görnüşü alar.

(a, b) interwalda kesgitlenen  $y = \varphi(x)$  funksiýanyň n-gezek önümleri hem (a,b) interwalda kesgitlenen bolup, (1) deňlemäni  $\forall x \in (a, b)$  üçin

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

toždestwa öwürse, onda  $y = \varphi(x)$  funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi diýilýär.

(1) deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

$\triangleleft y' = z(y), y'' = z \frac{dz}{dy}$  aňlatmalary ulanyp, alarys:

$$z \frac{dz}{dy} + z^2 = 2e^{-y} \quad z^2 = u \text{ ornunda goýmany}$$

$$\text{ulanyp, } \frac{1}{2} \frac{du}{dy} + u = 2e^{-y} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{du}{dy} + 2u = 4e^{-y} \text{ çyzykly}$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy çözüwini (19) formulany peýdalanyň taparys:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int 2dy} \left( \int 4e^{-y} e^{\int 2dy} dy + C_1 \right) = \\ &= e^{-2x} \left( 4 \int e^{-y} e^{2y} dy + C_1 \right) = e^{-2y} (4e^y + C_1) = \\ &= 4e^{-y} C_1 e^{-2y} \end{aligned}$$

$$y^{12} = u = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y} \quad \text{ýa-da} \quad y' = \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}},$$

#### §2.2 n-nji tertipli differensial deňlemeler

##### I. n-nji tertipli çyzykly deňlemäniň çözüwleriniň häsiýetleri

$$q_0(x)y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = f_1(x) \quad (4)$$

görnüşli deňlemä n-nji tertipli çyzykly differensial deňleme diýilýär, bu ýerde  $y = y(x)$  gözlenýän funksiýa,

$f_1(x)$ ,  $q_k(x)$  ( $k = \overline{0, n}$ ) berlen funksiýalar. Bu funksiýalar käbir  $[a, b]$  kesimde üznüksiz funksiýalar diýip hasap ederis.

Eger  $f_1(x) \not\equiv 0$  bolsa, onda (4) deňlemä birjynsly däl deňleme, eger  $f_1(x) \equiv 0$  bolsa birjynsly deňleme diýilýär.

$q_0(x) \neq 0$  bolanda (4) deňlemäni  $q_0(x)$  bölüp, alarys:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \quad (5)$$

bu ýerde

$$P_k(x) = \frac{q_k(x)}{q_0(x)} \quad (k = \overline{1, n}), \quad f(x) = \frac{f_1(x)}{q_0(x)}$$

$q_0(x) \neq 0$  bolanda n-nji tertipli birjynsly deňleme

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0, \quad (6)$$

$x \frac{dz}{dx} = z, \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ , Bu deňlemäni integrirläp alarys:

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \text{ýa-da} \quad z = C_1 x$$

deňligi alarys. Belgilemäni göz önünde tutup,  $y^{IV} = C_1 x$  deňlemäni alarys. Ony dört gezek yzygiderli integrirläliň

$$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 \frac{x^4}{4!} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$y = C_1 \frac{x^5}{5!} + C_2 \frac{x^3}{3} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

ýa-da

$$y = \overline{C}_1 x^5 + \overline{C}_2 x^3 + \overline{C}_3 x^2 + C_4 x + C_5,$$

bu ýerde:  $\overline{C}_1 = \frac{C_1}{5!}, \overline{C}_2 = \frac{C_2}{3!}, \overline{C}_3 = \frac{C_3}{2!}$ .

$$3. F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

$y' = z$  ornunda goýmany ulanyp, berlen deňlemäniň tertibini bir birlik kemeldilýär. Bu ýerde täze üýtgeýän bagly däl funksiýa  $y$ -e baglydyr:  $z = z(y)$  Alarys:

$$y' = \frac{dy}{dx} = z, \quad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left( z \frac{dz}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left( z \frac{dz}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = z \left( \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 + z \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \\ = z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + z \left( \frac{dz}{dy} \right)^2$$

we. ş.m. Bu aňlatmalary (4) deňlemede ornunda goýup,  $(n-1)$  tertipli deňleme alarys.

**Mysal 4.**  $y^{11} + y^{12} = 2e^{-y}$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

başlangyç şertleri kanagatlandyryan çözüwini tapmaklyga (1) deňleme üçin Koşiniň meselesi diýilýär.

(1) deňleme üçin Koşiniň meselesiniň çözüwiniň barlygynyň we ýeke-täkliginiň şertleri aşakdaky teoremda getirilýär (teoremany subutsyz kabul etjekdiris).

**1-nji teorema.** Eger  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  funksiýa we onuň  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  boýunça hususy önümleri

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b \quad (a > 0, b > 0)$$

deňsizlikler bilen kesgitlenen  $G$  oblastda üznüksiz we çäklenen bolsa, ýagny

$$|F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})| \leq C, \left| \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}} \right| \leq C_1$$

$(k = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} \equiv y)$ , onda (1) deňlemäniň (3) şerti

kanagatlandyryan  $|x - x_0| \leq h$  aralykda ýeke-täk  $y = y(x)$  çözüwi

bardyr, bu ýerde  $C > 0, C_1 > 0, h = \min(a, \frac{b}{\max(C, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)})$ ,

$$M(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \in G, M(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$$

Eger

$$\varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (4)$$

funksiýa 1)  $C_1, C_2, \dots, C_n$  erkin hemişelikleriň islendik bahalarynda

(1) deňlemäni toždestwa öwürýän bolsa;

2) (3) şerti kanagatlandyryan  $C_1, C_2, \dots, C_n$  tapylýan bolsa, onda

(4) funksiýa (1) differensial deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär.

(1) deňlemäniň (4) umumy çözüwinden erkin hemişelikleriň berlen bahasyndan alnan çözüwine, ýagny  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$  çözüwe berlen deňlemäniň hususy çözüwi diýilýär.

## §1.2 Birinji tertipli differensial deňlemeler. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler

$$F(x, y, y') = 0 \quad (5)$$

deňlemä umumy görnüşdäki birinji tertipli differensial deňleme diýilýär.

Eger (5) deňlemäni  $y$ -e görä çözüp bolsa, onda ol  $y' = f(x, y)$  ýa-da  $dy - f(x, y)dx = 0$  görnüşde ýazylyar.

$$p(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (6)$$

deňleme onuň hususy görnüşidir.

(5) deňlemäniň  $y(x_0) = y_0$  şerti kanagatlandyryýan  $\varphi = \varphi(x)$  çözüwini tapmaklyga Koşiniň meselesi diýilýär.

Indi deňlemäniň

$$p(x, y) = f(x)\varphi(y), Q(x, y) = f_1(x)\varphi_1(y)$$

bolandaky hususy halyna seredeliň:

$$f(x)\varphi(y) dx + f_1(x)\varphi_1(y)dy = 0 \quad (7)$$

Bu deňlemä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňleme diýilýär.

$f_1(x)\varphi(y) \neq 0$  bolanda (7) deňlemäni  $f_1(x)\varphi(y)$  bölüp alarys:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)} dy = 0 \quad (8)$$

Bu deňlemäniň birinji goşulyjysy diňe  $x$ -e, ikinjisi diňe  $y$ -e baglydyr.

(8) deňlemäni integrirläp, ol deňlemäniň

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)} dy = C$$

umumy çözüwini alarys.

**Mysal 1.**  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$  deňlemäniň  $y(1) = 1$  şerti kanagatlandyryýan çözüwini tapmaly.

◁ Berlen deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \text{ deňlemäni } y \neq 0 \text{ bolanda } y^{-\frac{2}{3}} dx \text{ köpeldip,}$$

$y^{-\frac{2}{3}} dy = 3dx$  görnüşde ýazarys. Alnan deňlemäni integrirläliň:

$$y^{(n-1)} = z \quad \text{ornunda} \quad \text{goýmany} \quad \text{ulanyp,} \quad (2)$$

deňlemäni  $F(z, z') = 0$  görnüşde ýazarys.

Eger alnan deňlemäniň çözüwi  $z = \varphi(x, C_1)$  bolsa, ornunda goýmany ulanyp, (1) görnüşdäki  $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$  differensial deňlemäni alarys.

**Mysal 2.**  $y'' = \sqrt{1 + (y'')^2}$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁  $y'' = z$  ornunda goýmany ulanyp alarys:  $z' = \sqrt{1 + z^2}$  ýa-da  $\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$ . Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň we integrirläliň:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = x + c$$

$z = \text{sht}, dz = \text{chtdt}$  ornunda goýmany ulanallyň:

$$\int \frac{\text{chtdt}}{\sqrt{1+\text{sh}^2 t}} = x + c \quad \text{ýa-da} \quad t = x + C_1$$

diýmek:  $z = \text{sht}(x + C_1)$ .  $y'' = z$  ornunda goýmany peýdalanalýň:

$y'' = \text{sh}(x + C_1)$  iki gezek yzygiderli integrirläp, alarys:

$$y' = \text{ch}(x + C_1) + C_2,$$

$$y = \text{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

$$3. F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

$y^{(k)} = z$  ornunda goýmany ulansak, onda

$y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$ . Bu ýagdaýda (3)

deňleme  $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$  görnüşü alar. Alnan deňlemäniň

umumy çözüwi  $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$  bolsa, onda (1.1)

görnüşdäki  $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$  deňlemäni alarys. Bu

deňlemäni  $k$  gezek yzygiderli integrirläp, berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys.

**Mysal 3.**  $xy^V - y^{IV} = 0$  deňlemäniň umumy çözüwini tapyň.

◁  $y^{IV} = z$  belgilemäni girizeliň, onda  $y^V = z'$  bolar. Berlen deňleme  $xz' - z = 0$  görnüşü alar. Bu deňlemäni üýtgeýän ululyklara görä aýyl-saýyl edip, alarys:

Koşi formulasyny peýdalanyp, umumy çözüwi

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + C_1 \frac{x^{n-1}}{n-1} + C_2 \frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

görnüşde ýazarys. Eger (1) deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyran çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun. Onda (1) deňlemäni yzygiderli  $n$  gezek  $x_0$  dan  $x - e$  çenli integrirläp, bu meseläniň çözüwini alarys:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \dots + y_0^{(1)}(x-x_0) + y_0,$$

ýa-da

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_0^{(i)}}{i!} (x-x_0)^i$$

**Mysal 1.**  $y''' = \sin x \cos x$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Üç gezek yzygiderli integrirläp, alarys:

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1,$$

$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Indi berlen deňlemäniň  $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2$  şertleri kanagatlandyran çözüwini tapalyň.

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 = 1 \\ -1 + C_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3, C_2 = -2, C_3 = \frac{1}{2}$$

$$y = \cos x - \sin x + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$2. F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (2)$$

$$\int y^{\frac{2}{3}} dy = \int 3 dx, \quad y^{\frac{1}{3}} = x + c \quad \text{ýa-da} \quad y = (x + c)^3$$

$y(1) = 1$  şerti ulanyp,  $C$ -ni tapalyň:

$$y(1) = (1 + c)^3 = 1, \quad c = 0$$

Diýmek berlen meseläniň çözüwi  $y = x^3$  bolar. ▷

### §1.3 Birinji tertipli birjynsly deňlemeler

Eger  $F(x, y)$  funksiýa üçin

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y) \quad (9)$$

tożdestwo ýerine ýetýän bolsa, onda  $F(x, y)$  funksiýa  $n$  ölçegli birjynsly funksiýa diýilýär.

Mysal üçin:

$$F_1(x, y) = 4x + 3y, \quad F_2(x, y) = x^2 \cos \frac{x}{y} + xy, \quad F_3(x, y) = \frac{x-y}{y}$$

funksiýalar degişlilikde bir, iki we nol ölçegli birjynsly funksiýalardyr. Hakykatdan-da,

$$F_1(tx, ty) = 4tx + 3ty = t(4x + 3y) = tF_1(x, y),$$

$$F_2(tx, ty) = (tx)^2 \cos \frac{tx}{ty} + txt y = t^2 \left( x^2 \cos \frac{x}{y} + xy \right) = t^2 F_2(x, y),$$

$$F_3(tx, ty) = \frac{tx - ty}{ty} = \frac{x - y}{y} = t^0 F_3(x, y).$$

Eger  $P(x, y)$  we  $Q(x, y)$  funksiýalar şol bir  $n$  ölçegli birjynsly funksiýalar bolsalar, onda (6) differensial deňlemä birjynsly differensial deňleme diýilýär. Diýmek, eger (6) deňleme birjynsly differensial deňleme bolsa, onda

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y), Q(tx, ty) = t^n Q(x, y) \quad \text{bolar.}$$

Eger  $t = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) bolsa, onda bu ýerden

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} P(x, y), Q\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} Q(x, y)$$

deňlikler alnar. Diýmek,

$$P(x, y) = x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right), Q(x, y) = x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$P(x, y)$  we  $Q(x, y)$  funksiýalary (6)-da ornunda goýup,

$$x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0$$

ýa-da

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0 \quad (10)$$

deňlemäni alarys.

$U = \frac{y}{x}$  ýada  $y = ux$  belgilemäni girizip, (10)-dan alarys:

$$P(1, u)dx + Q(1, u)(udx + xdu) = 0 \quad ýa-da \\ (P(1, u) + uQ(1, u))dx + xQ(1, u)du = 0.$$

Alnan deňleme üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemedir. Goý, bu differensial deňlemäniň umumy çözüwi  $\Phi(x, u, c) = 0$  bolsun. Bu belgilemäni göz önünde tutup, (6) birjynsly differensial deňlemäniň umumy  $\Phi\left(x, \frac{y}{x}, c\right) = 0$  çözüwini alarys.

**Mysal 2.**  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$  deňlemäni çözmeli.

◁ Berlen deňlemäni  $x(x \neq 0)$  bolup, aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Bu deňlemäniň birjynsly differensial deňlemedigi aýdyňdyr.  $y = ux$  belgilemäni ulanyp, alarys:  $u'x + u = \sqrt{1 - u^2} + u$  ýa-da

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$$

üýtgeýänleri aýyl-saýyl edeliň :

$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$ , integrirläliň  $\arcsin u = \ln|x| + \ln C_1$  ( $C_1 > 0$ ) ýa-da  $\arcsin u = \ln C_1 |x|$ ;  $C_1 |x| = \pm C_1 x$  bolanlygy üçin  $\pm C_1 = C$  belgilemäni ulanallyň.

$$\arcsin u = \ln cx, \text{ bu ýerde } |\ln cx| \leq \frac{\pi}{2}$$

belgilemäni göz önünde tutup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

Alnan deňlemäniň doly differensial deňlemedigini görkezmek kyn däl.  $(x_0, y_0)$  nokady (1;0) diýip, (20) formulany ulanyp, berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$\int_1^x \frac{y}{x} dx + \int_0^y (-y^3) dy = C, \quad y \ln|x| \int_1^x -\frac{y^4}{4} \int_0^y = C$$

ýa-da  $y \ln|x| - \frac{y^4}{4} = C.$  ▷

### III. 2. Ýokary tertipli differensial deňlemeler.

#### §2.1 Käbir n-nji tertipli integrirlenýän differensial deňlemeleriň görnüşleri. Tertibini peseldip bolýan deňlemeler

1. Sag bölegi üznüksiz  $x$ -e bagly funksiýa bolan deňlemäniň hususy halyna seredeliň, ýagny

$$y^{(n)} = f(x) \quad (1)$$

Bu deňlemäni  $n$  gezek integrirläp, alarys:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-1)} = \int \int f(x) dx dx + C_1 x + C_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_{x_0} f(x) dx \dots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{n-1} + C_2 \frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

alnan funksiýa (1) deňlemäniň umumy çözüwidir. (2) çözüwde kesgitsiz integrallary ýokarky çägi üýtgeýän ululykly kesgitli integrallar bilen çalşyrmak bolar, ýagny ony:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{x_0} f(x) dx \dots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{n-1} + C_2 \frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

görnüşde ýazmak bolar.

$$\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$



Eger(20) şert ýerine ýetmese, onda (6) deňleme doly differensially deňleme däldir. Käbir ýagdaýlarda bu deňlemäni  $\mu(x, y)$  funksiýa köpeldip, doly differensially deňleme alyp bolýar.  $\mu = \mu(x, y)$  funksiýa integrirleýji köpeldiji diýilýär.

**1-nji hal.** Eger

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk  $x$ -e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji

$$\mu = e^{\int \varphi(x) dx} \quad (21)$$

**2-nji hal.** Eger

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \psi(y)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk  $y$ -e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji

$$\mu = e^{-\int \psi(y) dy} \quad (22)$$

formuladan tapylýar.

**Mysal 5.**  $ydx + x(\ln x - y^3)dy = 0$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu ýerde  $P(x, y) = y, Q(x, y) = x(\ln x - y^3)$

**Alarys:**  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \ln x - y^3$ . (20) şert ýerine ýetmeýär.

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1 - 1 - \ln x + y^3}{x(\ln x - y^3)} = -\frac{1}{x} = \varphi(x)$$

(21) formulany ulanyp, alarys:  $\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

Berlen deňlemäniň iki bölegini hem  $1/x$ -e köpeldip alarys:

$$\frac{y}{x} dx + (\ln x - y^3) dy = 0.$$

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln cx \quad \text{ýa-da} \quad y = x \sin \ln cx$$

deňlemäniň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edenimizde, deňlemäniň iki bölegini hem  $x\sqrt{1-u^2}$  bölüpdik. Şonuň üçin käbir çözüwleri ýitirmegimiz mümkin.

$x = 0$  we  $\sqrt{1-u^2} = 0$  bolsun. Ýöne  $x \neq 0$ , sebäbi  $u = \frac{y}{x}$  ornunda goýmany ulandyk. Ikinjisinden  $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$  ýa-da  $y = \pm x$  alarys. Ornunda goýmany ulanyp  $y = x$  we  $y = -x$  funksiýalaryň hem berlen deňlemäniň çözüwidigini alarys. ▷

### §1.3 Birinji tertipli çyzykly differensial deňlemeler

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (11)$$

deňlemä birinji tertipli çyzykly differensial deňleme diýilýär, bu ýerde  $y = y(x)$  gözlenýän funksiýa,  $a(x), b(x), c(x)$  ( $\alpha \leq x \leq \beta$ ) funksiýalar berlen üznüksiz funksiýalar, şunlukda  $a(x) \neq 0$  bölüp,

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (12)$$

deňlemäni alarys, bu ýerde

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, f(x) = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

(12) deňlemäniň çözüwini  $u = u(x), v = v(x)$  funksiýalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň:

$$y = uv. \quad (13)$$

$y' = u'v + uv'$  deňligi göz önünde tutup, (12) den alarys:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

ýa-da

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x) \quad (14)$$

$v = v(x)$  funksiýany

$$v' + p(x)v = 0 \quad (15)$$

deňlemäni çözüp taparys. (15)-i göz önünde tutup, (14)-den alarys:

$$u'v = f(x). \quad (16)$$

(15) we (16) deňlemeler üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemelerdir. (15) deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$  deňlemäni integrirläliň:

$$v(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}. \quad (17)$$

(16) deňlemeden alarys:  $u' = \frac{1}{C_1} f(x) e^{\int p(x)dx}$  ony integrirläp alarys:

$$u(x) = \frac{1}{C_1} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_2. \quad (18)$$

(17), (18) deňlikleri ulanyp, (13)-den berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \quad (C = C_1 C_2). \quad (19)$$

**Mysal 3.**  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$  deňlemäni çözmeli.

◁ (19) formulany peýdalanyň, berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x)dx} \left( \int 2xe^{-x^2} dx + C \right) \\ &= e^{-x^2} \left( 2 \int x dx + C \right) = e^{-x^2} (x^2 + C). \end{aligned}$$

### §1.4 Doly differensially deňlemeler

Eger (6) deňlemäniň çep bölegi käbir  $F = F(x, y)$  funksiýanyň doly differensialy, ýagny  $dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  bolsa, onda bu deňlemä doly differensially deňleme diýilýär.

Bu ýagdaýda (6) deňlemäni  $dF(x, y) = 0$  görnüşde ýazyp bolar, diýmek  $F(x, y) = C$ .

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Bu deňlik esasynda alarys:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

Aşakdaky tassyklama dogrudyr.

(6) deňlemäniň doly differensially deňleme bolmagy üçin,  $P(x, y)$  we  $Q(x, y)$  funksiýalaryň kesgitlenen  $D$  oblastynda  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$  üznüksiz önümleri bar bolup,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (20)$$

şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Bu ýagdaýda, eger (20) şert ýerine ýetýän bolsa, onda (6) deňlemäniň umumy çözüwi

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C$$

ýa-da

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C$$

görnüşde ýazylýar.

**Mysal 4.**  $2x \cos^2 y dx + (8 \sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y) dy = 0$  deňlemäniň çözüwini tapmaly.

◁ Bu ýerde

$$P(x, y) = 2x \cos^2 y, \quad Q(x, y) = 8 \sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y$$

Şonuň esasynda

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= 2x(-2 \sin y \cos y) = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \\ &= -2x \sin 2y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x 2x \cos^2 y dx + \int_0^y 8 \sqrt[3]{y} dy &= 0 \\ x^2 \cos^2 y + 6y \sqrt[3]{y} &= C \end{aligned}$$

Bu ýerde  $(x_0, y_0)$  nokadyň ornuna koordinatalar başlangyjyny aldyk.



bolar. ▷

**2-nji mesele.** Tekjede dürli 20 kitap bar. Olaryň onusynyň her biriniň banasy 60 manat, dördüsiniň her biriniň bahasy 50 manat, altysynyň her biriniň bahasy 40 manat. Şowuna alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A-şowuna alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagy bolsun. 20 kitapdan 2 kitaby

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

usul boýunça saýlap almak bolar. Ikisiniň bahasy 100 manat bolan 2 kitaby

$$m = C_{10}^1 \cdot C_6^1 + C_4^2 = \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 60 + 6 = 66$$

usul boýunça saýlap almak bolar.

Onda

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95} . \quad \triangleright$$

**3-nji mesele.** Eger 200 önümden ybarat toplumda zaýa önümleriň otnositel ýygylgy 0,33 bolsa, bu toplumdaky zaýa önümleriň sanyny tapmaly.

◁ Goý A-zaýa önümler bolsun.  $N=200$ ,  $W(A)=0,33$  bolandygy sebäpli, zaýa önümleriň sany  $N(A) = N \cdot W(A) = 200 \cdot 0,33 = 66$  bolar. ▷

**4-nji mesele.** R radiusly tegelegiň içinden a taraply kwadrat çyzylan. Tegelege sowuna oklanan nokadyň kwadrata düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka tegelege şowuna oklanan nokadyň kwadrata düşmegi bolsun. Kwadratynyň meýdany  $S_{kw.} = a^2 = 2R^2$ , tegelegiň meýdany  $S_{teg.} = \pi R^2$ . Onda ähtimallygyň geometrik kesgitlemesinden peýdalanyň, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_1 x}, \dots, y_m = e^{k_1 x}, y_{m+1} = e^{k_{m+1} x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$  bolar.

Bu çözüwler çyzykly baglydyr, sebäbi m sany çözüw gabat gelyär. m-sany gabat gelyän çözüwlere m-sany çyzykly bagly däl.

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_1 x}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$$

çözüwleri degişli edip bolar, şeýlelikde

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_1 x}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}, y_{m+1} = e^{k_{m+1} x}, \dots, y_n = e^{k_n x};$$

Çözüwler çyzykly bagly däldir. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi.  $y =$

$$c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} + \dots + c_m x^{m-1} e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

ýa-da  $y = (c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$  funksiýalar bolar.

**6-njy mysal.**  $y''' - 2y'' + y' = 0$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Häsiýetlendirijileri deňlemesi:  $k^3 + 2k^2 + k = 0$  bolar. Bu deňlemäniň çözüwleri  $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0$  bolar. Umumy çözüwi ýazalyň:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + C_3.$$

**3) Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň arasynda kompleks sanlar hem bar bolsun:**  $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$ . Alarys:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Teorema 3-iň netijesine görä,  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$  funksiýalar berlen deňlemäniň çözüwidir.

Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň galan  $k_3, k_4, \dots, k_n$  kökleri dürli we hakyky sanlar bolsa, berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} + c_3 e^{k_3 x} + \dots + c_n e^{k_n x} \text{ bolar.}$$

**7-nji mysal.**  $y''' + 4y'' + 13y' = 0$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Häsiyetlendiriji deňleme  $k^3+4k^2+13k=0$  bolar.

Bu deňlemäniň köklerini tapalyň:  $\lambda_1=-2-3i$ ;  $\lambda_2=-2+3i$ ,  $\lambda_3=0$ . Umumy çözüwini ýazalyň:

$$y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^{-2x}+C_3.$$

## §2.4. n-nji tertipli birjynsly däl deňlemeler

Aşakdaky n-nji tertipli birjynsly differensial deňlemä garalyň:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x), \quad (30)$$

bu ýerde  $p_k(x)$  ( $k=\overline{1,n}$ ),  $f(x)$  funksiýalar  $[a,b]$  kesimde üznüksiz.

Berlen deňlemäni

$$L[y]=f(x) \quad (31)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y.$$

**7-nji teorema.** Eger  $y_0 = y_0(x)$  funksiýa birjynsly  $L[y]=0$  deňlemäniň çözüwi,  $y_1 = y_1(x)$  funksiýa degişli birjynsly däl  $L[y]=f(x)$  deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda  $y_0 + y_1 = y_0(x) + y_1(x)$  funksiýa birjynsly däl deňlemäniň çözüwidir.

◁ Teoremanyň şertine görä  $L[y_0]\equiv 0$ ,  $L[y_1]\equiv f(x)$  alarys.

$$L[y_0 + y_1] = L[y_0] + L[y_1] \equiv 0 + f(x),$$

$$L[y_0+y_1] \equiv f(x).$$

Bu ýerden  $y_0 + y_1 - L[y] = f(x)$  deňlemäniň çözüwidigi gelip çykýar.

**Netije 2.3** Eger  $y_0 = y_0(x)$  funksiýa  $L[y]=0$  deňlemäniň umumy çözüwi,  $y_1 = y_1(x)$  funksiýa  $L[y]=f(x)$  deňlemäniň haýsyda bolsa bir hususy çözüwi bolsa, onda  $y_0 + y_1 - L[y] = f(x)$  deňlemäniň umumy çözüwidir.

## §2.5 n-nji tertipli birjynsly däl hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemeler

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \quad (32)$$

**3.Ähtimallygyň statistiki kesgitlemesi.** Goý,  $N$  synag geçirilýän bolsun. Bu synaglaryň  $N(A)$  sanysynda  $A$  waka ýüze çykýan bolsun.

$$W(A) = \frac{N(A)}{N} \quad (4)$$

gatnaşyga  $A$  wakanyň otnositel ýygylgy diýilýär. Bu otnositel ýygylgy hem ätimallygyň statistiki kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär.

**4.Ähtimallygyň geometrik kesgitlemesi.** Giňişlikdäki  $G$  ýaýlanyň ölçegini (uzynlygyny, meýdanyny, göwrümünü)  $mes G$  bilen we bu ýaýlada saklanýan  $g$  ýaýlanyň ölçegini  $mes g$  bilen belgiläliň.  $G$  ýaýla şowuna oklanan nokadyň  $g$  ýaýla düşmegini  $A$  waka diýip belgiläliň. Nokadyň  $g$  ýaýla düşmeginiň ähtimallygy bu ýaýlanyň ölçegine proporsional we onuň  $G$  ýaýlada ýerleşişine bagly däl diýip hasap edeliň. Onda  $A$  wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{mes g}{mes G} \quad (5)$$

gatnaşyk bilen kesgitlenýär. Bu formula ähtimallygyň geometrik kesgitlemesi diýilýär.

**1-nji mesele.** Gapda her birinde  $G, A, R, S, Y, Z, L, K$  harplaryň biri ýazylan 11 tagtajak bar. Bu tagtajaklar gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylyp, çepden saga yzygider goýulýar. “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý,  $A$  waka “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagy bolsun. Tagtajaklaryň hemmesi gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylyp, çepden saga yzygider goýulsa, bolup biljek ähli elementar wakalaryň sany bu 11 harpdan düzmek mümkin bolan çalşymalaryň sanyna deňdir, ýagny,  $n=11!$  “GARAŞSYZLYK” sözünde iki sany  $A$  harpy we iki sany  $Y$  harpy bolanlygy sebäpli,  $A$  wakanyň ýüze çykmagyna getirýän ähli elementar wakalaryň sany  $m=2!2!$  bolar. Şeýlelikde, “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11!}$$

Sygyşmaýan  $A$  we  $B$  wakalar üçin  $AB = \emptyset$  deňgüýçlülük adalatlydyr.  $A$  we  $\bar{A}$  garşylykly wakalar üçin şol bir wagtda  $A + \bar{A} = \Omega$  we  $A\bar{A} = \emptyset$  deňgüýçlülükler adalatlydyrlar.

### § 3. Ähtimallygyň dürli kesgitlemeleri

**1.Ähtimallyk.** Ähtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşüňjeleriniň ýene biri ähtimallyk düşüňjesidir.

**Kesgitleme.** Eger  $P(A)$  san funksiýasy:

- 1) Islendik  $A \in F$  waka üçin  $P(A) \geq 0$  (otrisatel dälilik aksiomasy);
- 2)  $P(\Omega) = 1$  (normirlenenlik aksiomasy);
- 3) Sygyşmaýan  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  wakalar üçin

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\text{hasaply additiwlik aksiomasy});$$

şertleri kanagatlandyran bolsa, onda oňa ähtimallyk diýilýär.

Ähtimallyk aşakdaky häsiýetlere eýedir:

- 1) Eger  $B \subseteq A$  bolsa, onda  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ .
- 2) Eger  $B \subseteq A$  bolsa, onda  $P(B) \leq P(A)$ .
- 3) Garşylykly wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir, ýagny  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .
- 4) Mümkün däl wakanyň ähtimallygy nola deňdir, ýagny  $P(\emptyset) = 0$ .
- 5) Islendik  $A$  waka üçin  $0 \leq P(A) \leq 1$  deňsizlikler adalatlydyrlar.

**2.Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi.** Hususy halda,  $\Omega$  elementar wakalar giňişligi diskret bolanda we  $w$  elementar wakalar deňähtimallykly bolanlarynda islendik  $A$  wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (3)$$

gatnaşyk bilen hasaplanýar, bu ýerde  $n$ -synag geçirilende ýüze çykyp biljek ähli elementar wakalaryň sany,  $m$ - $A$  wakanyň ýüze çykmagyna getirýän elementar wakalaryň sany. (3) gatnaşyga ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi diýilýär.

deňlemä garalyň, bu ýerde  $a_k (k = \overline{1, n})$  hakyky sanlar,  $f(x) - [a, b]$  kesimde üznüksiz funksiýa.

(32) deňlemäniň birjynsly deňlemesini ýazalyň:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (33)$$

Eger (33) deňlemäniň umumy  $y_0$  çözüwi, we (32) deňlemäniň haýsyda bolsa bir  $y_1$  hususy çözüwi belli bolsa, onda netije 2-den  $y_0 + y_1$  (32) deňlemäniň umumy çözüwidir. (33) deňlemäniň umumy çözüwiniň tapylyşyny §2.3-de seredipdik.

(32) deňlemäniň hususy çözüwi näbelli koeffisiýentler usuly bilen tapylýar.

1)  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ , bu ýerde  $P_n(x)$ -derejeli köpagza.

Eger  $\alpha$  san degişli häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl bolsa, onda  $y_1 = e^{\alpha x} Q_n(x)$  bolar, bu ýerde  $n$ -derejeli  $Q_n(x)$  köpagzanyň koeffisiýentlerini kesgitlemeli.

**Mysal 8.**  $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$  deňlemäniň umumy çözüwlerini tapmaly.

◁ Ilki bilen bu deňlemäniň birjynslysynyň umumy çözüwini tapalyň. Häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerini tapalyň.

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1,$$

diýmek:

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x, \\ y_1 = ax^2 + bx + c$$

Önümlerini tapyp, berlen deňlemede ornunda goýup,  $a, b, c$  sanlary tapalyň:

$$y_1' = 2ax + b, y_1'' = 2a, y_1''' = 0, \\ 0 - 2a + 2ax + b - ax^2 - bx - c = x^2 + x \\ -ax^2 + (2a - b)x - 2a + b - c = x^2 + x$$

alarys:

$$\left. \begin{aligned} -a &= 1, \\ 2a - b &= 1, \\ -2a + b - c &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad a = 1, b = 1, c = -1, y_1 = x^2 + x - 1.$$

Berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x^2 + x - 1 \text{ bolar.}$$

Eger  $\alpha$  san häsiýetlendiriji deňlemäniň  $m$  kratny köki bolsa, onda

$$y_1 = x^m e^{\alpha x} Q_n(x) \text{ bolar.}$$

**9-njy mysal.**  $y''' + 7y' = e^{-7x}$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu deňlemäniň birjynslýsynyň umumy çözüwini tapalyň:

$$k^2 + 7k = 0 \Rightarrow k_1 = -7, k_2 = 0.$$

$$y_0 = C_1 e^{-7x} + C_2.$$

$y_1 = x a e^{-7x}$ , bu funksiýanyň önümlerini tapyp, berlen deňlemäde ornunda goýalyň:

$$\begin{aligned} y_1' &= a e^{-7x} - 7 a x e^{-7x}, y_1'' \\ &= -14 a e^{-7x} + 49 a x e^{-7x}, -14 a e^{-7x} + 49 a x e^{-7x} \\ &+ 7 a x e^{-7x} - 49 a x e^{-7x} = e^{-7x} - \\ -7a &= 1, a = -\frac{1}{7}, y_1 = -\frac{1}{7} x e^{-7x} \end{aligned}$$

diýmek:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{-7x} + C_2 - \frac{1}{7} x e^{-7x}$$

$$2) f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x).$$

Eger  $\alpha \pm i\beta$  kompleks san häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri bolmasa, onda

$$y_1 = e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x), \text{ bolar, bu ýerde}$$

$$k = \max\{n, m\}.$$

**10-njy mysal.**  $y'' + 25y = \cos x$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$$\triangleleft k^2 + 25 = 0, k_1 = 5i, k_2 = 5i. \text{ Şonuň üçin}$$

$$y_0 = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$$

$$y_1 = a \cos x + b \sin x, y_1' = -a \sin x + b \cos x, y_1'' = -a \cos x - b \sin x.$$

$$-a \cos x - b \sin x + 25a \cos x + 25b \sin x = \cos x$$

Şol bir synagda bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligini ýok edýän bolsa, onda şeýle wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär.

A wakanyň ýüze çykmadyň wagty we diňe şonda ýüze çykýan waka A wakanyň garşylykly wakasy diýilýär we  $\bar{A}$  bilen belgilenýär (okalyşy: A däl).

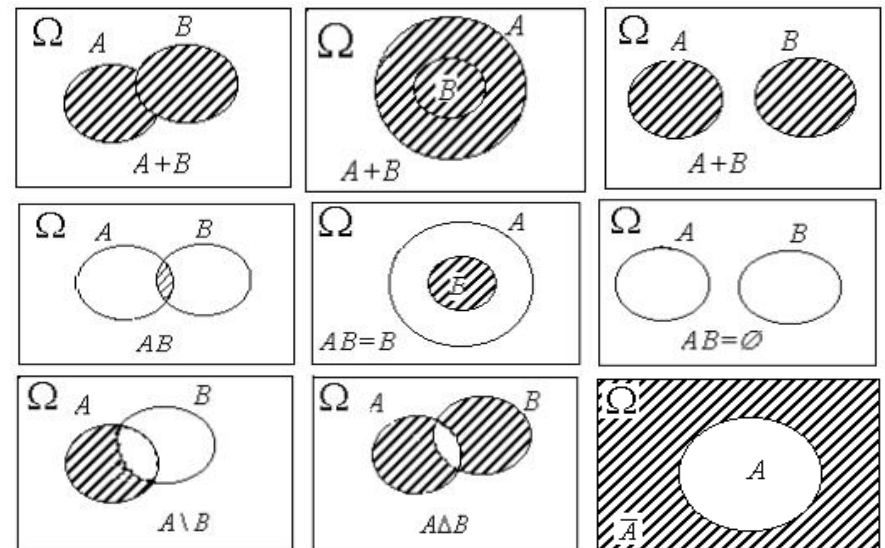
**2. Wakalar üstünde amallar.** A we B iki wakanyň jemi ýa-da birleşmesi diýlip, bu wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar we  $A+B$  ýa-da  $A \cup B$  bilen belgilenýär.

A we B iki wakanyň köpeltmek hasyly ýa-da kesişmesi diýlip, bu wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar we  $AB$  ýa-da  $A \cap B$  bilen belgilenýär.

AweB wakalaryň tapawudy diýlip, A wakanyň ýüze çykyp, B wakanyň ýüze çykmazlygyna aýdylýar we  $A \setminus B$  bilen belgilenýär.

$A \setminus B$  we  $B \setminus A$  wakalaryň jemine A we B wakalaryň simmetrik tapawudy diýilýär we  $A \Delta B$  bilen belgilenýär.

Wakalar üstünde amallary Wýenniň diagrammalarynda görkezeliň: (2-nji surat).



2-nji surat.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2)$$

ululyga deňdir.

## § 2. Wakalar we olaryň üstünde amallar.

**1. Wakalaryň synplaşdyrylmasy.** Ahtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleriniň biri waka düşünjesidir. Wakanyň kesgitlemesi ýokdyr. Şol sebäpli, wakalara matematiki usullary ulanmak maksady bilen elementar wakalar giňişligi diýlip atlandyrylan erkin  $\Omega = \{w\}$  köplüge garalýar we bu köplügiň islendik bölek köplügi waka diýlip atlandyrylýar.  $\Omega$  köplügiň  $w$  elementlerine elementar wakalar iýilýär.

Wakalary üç topara bölýärler:

- 1) Hökmany wakalar.
- 2) Mümkün däl wakalar.
- 3) Tötän wakalar.

Islendik wakanyň ýüze çykmagy üçin käbir şertler toplumynyň bolmagy zerurdyr. Bu şertler toplumy synag ýa-da tejribe diýlip atlandyrylýar. Käbir şertler toplumynda hökman ýüze çykyan wakalara hökmany wakalar, ýüze çykmajakdygy öňden belli bolan wakalara mümkin däl wakalar, ýüze çykmaklygy hem, çykmazlygy hem mümkin bolan wakalara tötän wakalar diýilýär. Hökmany wakalary  $\Omega$  ýa-da  $U$  bilen, mümkin däl wakalary  $\emptyset$  ýa-da  $V$  bilen, tötän wakalary bolsa latyn elipbiýiniň  $A, B, C, D, \dots$  baş harplary bilen belgileýärler. Mysal üçin, gapda 10 sany ak şar bar bolsun. Bu gapdan şowuna çykarylan şaryň ak bolmagy hökmany wakadyr. Bu şertde ol gapdan şowuna çykarylan şaryň ak däl bolmagy mümkin däl wakadyr. Eger gapdaky 10 şaryň birnäçesi ak, birnäçesi ak däl bolsa, onda bu gapdan şowuna çykarylan şaryň ak ýa-da ak däl bolmagy tötän wakadyr.

“A wakanyň ýüze çykmagy  $B$  wakanyň ýüze çykmagyna getirýär” diýlen tassyklama  $A \subseteq B$  görnüşde ýazylýar. Eger  $A$  wakanyň ýüze çykmagy  $B$  wakanyň ýüze çykmagyna we  $B$  wakanyň ýüze çykmagy  $A$  wakanyň ýüze çykmagyna getirýän bolsa, onda ol wakalara deňgüýçli diýilýär we  $A=B$  görnüşde belgilenýär.

$$24a \cos x + 24b \sin x = \cos x, \quad a = \frac{1}{24}, b = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{24} \cos x, \quad y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + \frac{1}{24} \cos x.$$

Eger  $\alpha \pm i\beta$  kompleks san häsiýetlendiriji deňlemäniň  $r$  kratny köki bolsa, onda

$$y_1 = x^r e^{\alpha x} (Q_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

**Mysal 11.**  $y'' + y = \sin x - \cos x$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$$\triangleleft k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -i, k_2 = i, \text{ şonuň üçin}$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$y_1 = x(a \cos x + b \sin x),$$

$$y_1' = a \cos x + b \sin x + x(-a \sin x + b \cos x),$$

$$y_1''$$

$$= -2a \sin x + 2b \cos x$$

$$+ x(-a \cos x - b \sin x), -2a \sin x + 2b \cos x$$

$$- (a \cos x + b \sin x) + x(a \cos x + b \sin x)$$

$$= \sin x - \cos x,$$

$$-2a \sin x + 2b \cos x = \sin x - \cos x, \quad a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} x(\cos x + \sin x)$$

$$y = y_0 + y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x(\cos x + \sin x).$$

## §2.6 n-nji tertipli çyzykly defferensial deňleme. Lagranžyň usuly

Eger

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0 \quad (34)$$

deňlemäniň  $y_1(x)$  hususy çözüwi belli bolsa, onda  $y = y_1 z$  belgilemäni girizip, deňlemäniň tertibini bir birlik kemeldip bolýar, alnan deňlemede çyzykly deňlemedir.



Eger (34) deňlemäniň  $k$  sany hususy çözüwi belli bolsa, onda bu deňlemäniň tertibini  $k$  birlik kemeldip bolar.

Eger (34) deňlemäniň umumy çözüwi belli bolsa, onda onuň kömegi bilen

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = f(x) \quad (35)$$

deňlemäniň çözüwini tapyp bolar, bu usula Lagranžyň usuly diýilýär. Goý,  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  funksiýa (34) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. (35) deňlemäniň çözüwini.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n \quad (36)$$

görnüşde gözlenilýär, bu ýerde  $C_1(x) + C_2(x) + \dots + C_n(x)$  funksiýalar häzirlilikçe näbellidir. Olary aşakdaky görnüşde kesgitläliň :

$$\left. \begin{aligned} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \dots + y_n C_n' &= 0, \\ y_1' C_1 + y_2' C_2 + \dots + y_n' C_n &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \dots + y_n^{(n-1)} C_n' &= f(x). \end{aligned} \right\}$$

bu sistemadan  $C_k'(x) (k = \overline{1, n})$  tapalyň,

$\frac{dC_k}{dx} = \varphi_k(x), k = \overline{1, n}$ , integrirläp alarys:

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x) dx + \overline{C_k} \quad (k = \overline{1, n})$$

bu ýerde  $\overline{C_k} (k = \overline{1, n})$  erkin hemişeliler.  $C_k (k = \overline{1, n})$  bahalaryny (36)-da ornunda goýup, (35) deňlemäniň umumy çözüwini taparys.

**Mysal 12.** Hususy çözüwi  $y_1 = \frac{\sin x}{x}$  bolan

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\triangleleft y = \frac{\sin x}{x} z$  ornunda goýmany girizeliň, bu ýerde  $z$ -täze gözlenýän funksiýa.

$$y = y_1 z, \quad y' = y_1' z + y_1 z', \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

berlen deňlemede ornunda goýup, alarys:

$$(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)z + xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0,$$

## 2. Çalşyrmalar.

**Kesgitleme.** 1-den  $n$ -e çenli natural sanlaryň köpeltmek hasylyna  $n$ -faktorial diýilýär we  $n!$  bilen belgilenýär.

Mysal üçin,  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ . Kesgitlemeden peýdalanyň, bu sany  $5! = 4! \cdot 5 = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$  deňlikler görnüşinde hem ýazmak bolar. Şol sebäpli, islendik natural  $n$  san üçin

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

deňlik adalatlydyr.

**Bellik.**  $0! = 1$  diýlip kabul edilýär.

Goý,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elementler berlen bolsun. Bu elementleriň islendik tertipde ýazylan yzygiderligine çalşyрма diýilýär. Bu elementleriň islendik ikisinden, mysal üçin,  $a_1$  we  $a_2$  elementlerden  $a_1, a_2$  we  $a_2, a_1$  görnüşli  $2! = 1 \cdot 2 = 2$  sany çalşyрма düzmek bolar. Şuňa meňzeşlikde, berlen elementleriň islendik üçüsinden, mysal üçin,  $a_1, a_2$  we  $a_3$  elementlerden  $a_1, a_2, a_3$ ;  $a_1, a_3, a_2$ ;  $a_2, a_1, a_3$ ;  $a_2, a_3, a_1$ ;  $a_3, a_1, a_2$ ;  $a_3, a_2, a_1$  görnüşli  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  sany çalşyрма düzmek bolar. Bu pikir ýöretmäni dowam edip,  $n$  elementden  $n!$  sany çalşyрма düzmek boljakdygyna göz ýetirmek bolar.

## 3. Utgaşdyrmalar.

**Kesgitleme.**  $n$  elementli köplügiň  $k$  elementli erkin bölek köplüğine  $n$  elementden  $k$  element boýunça utgaşdyrma diýilýär. Şeýle utgaşdyrmalaryň sany

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1)$$

ululyga deňdir.

## 4. Ýerleşdirmeler.

**Kesgitleme.** Her bir elementine 1-den  $n$ -e çenli käbir san (elementiň nomeri) degişli edilen  $n$  elementli köplüğe tertipleşdirilen diýilýär.

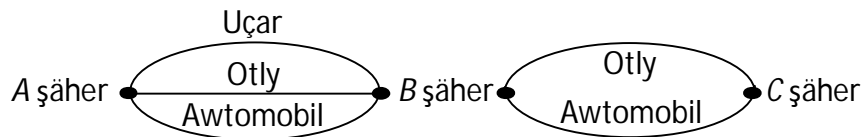
**Kesgitleme.**  $n$  elementli köplügiň tertipleşdirilen  $k$  elementli bölek köplüğine  $n$  elementden  $k$  element boýunça ýerleşdirmе diýilýär.

Şeýle ýerleşdirmeleriň sany

**IVbap. Ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň elementleri**  
**§ 1. Kombinatorikanyň elementleri.**

**1. Köpeltmek düzgüni.** Kombinatorika diskret matematikanyň bölümleriniň biri bolup, ol ähtimallyklar nazaryýetinde, matematiki logikada, sanlar nazaryýetinde, hasaplaýyş tehnikaşynda we kibernetikada giňden ulanylýandygy bilen möhüm ähmiýete eýedir. Amalyýetde köplenç käbir hereketi amala aşyrmagyň mümkin bolan ýagdaýlaryny hasaplamagyň usullarynyň sanyny anyklamak bilen baglanyşykly meseleler bilen iş salyşmaly bolýar. Şeýle meselelere kombinatoriki meseleler diýilýär. Kombinatoriki hasaplamalary geçirmek bilen ylmyň dürli pudaklarynyň wekilleri iş salyşmaly bolýarlar. Mysal üçin, himik molekulalardaky atomlaryň mümkin bolan baglanyşyklarynyň görnüşlerini anyklamaly bolanda, biolog belok birleşmelerindäki aminokislotalaryň mümkin bolan dürli gezeleşmeler yzygiderliklerini hasaplada, agramom ekin meýdanlarynda ekişiň dürli usullaryny öwrenende, dispetçer ulaglaryň ugurlar boýunça hereketleriniň grafigini düzende, müdiriň okuw işleri boýunça orunbasary sapaklaryň tertibini düzende we şuňa meňzeş ýagdaýlarda kombinatoriki hasaplamalary geçirmeli bolýarlar.

Eger  $A$  hereketi  $n$  usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa we bu usullaryň her biri üçin  $B$  hereketi  $m$  usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa, onda görkezilen tertipde  $A$  we  $B$  hereketleri  $n \times m$  usul bilen amala aşyrmak bolar. Kombinatorikanyň bu esasy düzgünine köpeltmek düzgüni diýilýär. Mysal üçin,  $A$  şäherden  $B$  şähere uçarda, otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa,  $B$  şäherden  $C$  şähere otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa, onda  $A$  şäherden  $C$  şähere  $3 \times 2 = 6$  usul bilen barmak bolar (1-nji surat).



1-nji surat.

$xy''_1 + 2y'_1 + xy_1 = 0$ , sebäbi  $y_1$  berlen deňlemäniň çözüwi. Alarys:

$$xy_1 z'' + 2(xy'_1 + y_1)z' = 0$$

$y_1 = \frac{\sin x}{x}$  funksiýany göz önünde tutup,  $z'' \sin x + 2z' \cos x = 0$  deňlemäni alarys. Alnan deňlemäni  $\frac{z''}{z'} + 2 \frac{\cos x}{\sin x} = 0$  görnüşde ýazalyň. Integrirläp alarys

$$\ln|z'| + 2\ln|\sin x| = \ln C_1 \quad \text{ýada} \quad z' \sin^2 x = C_1.$$

Ýene-de bir gezek integrirläliň:

$z = -C_1 \operatorname{ctg} x + C_2$ , ýada  $z = \overline{C}_1 \operatorname{ctg} x + \overline{C}_2$  ( $\overline{C}_1 = -C_1$ ) ornunda goýmadan alarys:

$$y = \overline{C}_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$$

**Mysal 13.**  $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$  deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Ilki bilen  $y'' + y = 0$  deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -i, \quad k_2 = i,$$

Sonuň üçin  $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Indi berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly. Ony

$$y_0 = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. \quad (2.37)$$

görnüşde gözläliň, bu ýerde  $C_1(x), C_2(x)$  näbelli funksiýalar. Bu näbellileri

$$\left. \begin{aligned} \cos x C_1'(x) + \sin x C_2'(x) &= 0 \\ -\sin x C_1'(x) + \cos x C_2'(x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned} \right\}$$

sistemadan tapalyň

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x, \quad C_2'(x) = 1$$

Integrirläp alarys:  $C_1(x) = \ln|\cos x| + \overline{C}_1$ ,  $C_2(x) = x + \overline{C}_2$ .

Tapylan funksiýalary (2.37) ornunda goýup, alarys:

$$y = \overline{C}_1 \cos x + \overline{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + \overline{C}_2 \sin x.$$

## G ö n ü k m e l e r

**§1.1.**  $y = \varphi(x, c)$  ( $c$ -erkin hemişelik) funksiýa berlen differensial deňlemäniň çözüwimi ?

- 1)  $y = x^2 \left(1 + ce^{1/x}\right), x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2;$
- 2)  $y = ce^x - e^{-x}, xy'' + 2y' - xy = 0;$
- 3)  $y = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x, y' + 2y = e^x;$
- 4)  $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}, (1 - x^2)y' + xy = 2x$
- 5)  $x^2 + y^4 = cy^2, xydy = (x^2 - y^4)dy$
- 6)  $y = cx + \frac{1}{c}, xy' - y + \frac{1}{y} = 0;$
- 7)  $y = \frac{2+cx}{1+2x}, 2(1+x^2 y') = y - xy'.$

**§1.2.** Differensial deňlemäni çözmeli.

- 1)  $(1+y^2)dx + (1+h^2)dy = 0;$
- 2)  $xydx + (x+1)dy = 0;$
- 3)  $xy' = y^2 + 1;$
- 4)  $(x+xy)dy + (y-xy)dx = 0, y(1)=1;$
- 5)  $(1+y^2)dx + xydy = 0;$
- 6)  $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0;$
- 7)  $\sqrt{y^2+1} dx = xydy = 0;$
- 8)  $e^{-y}(1+y') = 1;$
- 9)  $y' = a^{x+y} (a > 0, a \neq 1);$
- 10)  $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0;$
- 11)  $e^x \sin^3 y + (1+e^{2x}) \cos y y' = 0;$
- 12)  $2x^2 yy' + y^2 = 2$

**§ 1.3.** Deňlemäni çözmeli.

- 1)  $(x+ey)dx - xdy = 0;$
- 2)  $xy' = y(\ln y - \ln x);$
- 3)  $(x-y)dx + (x+y)dy = 0;$
- 4)  $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0;$
- 5)  $x^2 dy - (y^2 - xy + x^2)dx = 0;$
- 6)  $xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0;$
- 7)  $y^2 + x^2 y' - xyy' = 0;$
- 8)  $xy' - y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0;$
- 9)  $xy' - y \cos \ln \frac{y}{x} = 0;$
- 10)  $(y + \sqrt{xy})dx = xdy.$

**§ 1.4.** Berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapyň.

- 1)  $xy' - 2y = 2x^4;$
- 2)  $(2x - y^2)y' = 2y;$
- 3)  $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1); y(-2) = 2;$

$$7) y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + e^{-x}(c_5 + c_6 x);$$

$$8) y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x);$$

$$9) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x;$$

$$10) y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{x/2}.$$

$$\S 2.5. 1) y = 4(e^x - e^{2x}) + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x};$$

$$2) y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x};$$

$$3) y = e^x(c_1 + c_2 - \ln \sqrt{x^2 + 1} + x \operatorname{arctg} x);$$

$$4) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x};$$

$$5) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (2x - 2)e^x;$$

$$6) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2;$$

$$7) y = c_1 e^{-(\sqrt{6}+2)x} + c_2 e^{(\sqrt{6}+2)x} - \frac{16 \cos 2x + 12 \sin 2x}{25};$$

$$8) y = c_1 \cos x + c_2 \sin 2x + x \cos x + x^2 \sin 2x;$$

$$9) y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x} \cos 2x;$$

$$10). y = c_1 + c_2 e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02(\cos 5x - \sin 5x).$$

$$11) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12) \cos x - (0,3x + 0,34) \sin x;$$

$$12) y = (c_1 + c_2 x + x^3)e^x; 13) y = \left(c_1 - \frac{x^2}{4}\right) \cos x + \left(c_2 + \frac{x}{4}\right) \sin x;$$

$$14) y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right)e^{2x};$$

$$15) y = \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x + x \sin x\right)e^{2x};$$

$$16) y = (c_1 - x) \cos x + (c_2 + \ln |\sin x|) \sin x;$$

$$17) y = e^x(x \ln |x| + c_1 x + c_2);$$

$$18) y = c_1 e^x + c_2 + (e^x + 1) \ln(1 + e^{-x});$$

$$19) y = c_1 e^x + c_2 - \operatorname{cose}^x;$$

$$20) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + 1 - x + x \ln |x|;$$

$$21) y = e^{-x} \left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + c_1 + c_2 x\right).$$



- 11)  $2x + \ln(x^2 + y^2) = c$ ; 12)  $x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = c$ ;  
 13)  $xy^2 - 2x^2y - 2 = cx$ ,  $\mu = 1/x^2$ ; 14)  $x - \frac{y}{x} = c$ ,  $\mu = \frac{1}{x^2}$ ;  
 15)  $x \ln|x| - y^2 = cx$ ,  $\mu = \frac{1}{x^2}$ ; 16)  $5 \operatorname{arctg} x + 2xy = c$ ,  $x=0, \frac{1}{1+x^2}$ ;  
 17)  $y^3 + x^3(\ln x - 1) = cx^2$ ,  $\mu = \frac{1}{x^4}$ ; 18)  $2e^x \sin y + 2e^x(x-1) +$   
 $+ e^x(\sin x - \cos x) = c$ ,  $\mu = e^x$ ; 19)  $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = c$ ,  $\mu = \frac{1}{y^2}$ .

- §2.1.** 1)  $y = \frac{1}{3(x-3)} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ ;  
 2)  $y = \frac{x^4}{24} - \sin x + c_1x^2 + c_2x + c_3$ ; 3)  $y = (x-2)e^x + x + 2$ ;  
 4)  $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{5}{18}x^3 + c_1x + c_2$ ; 5)  $y = c_3 + c_2x - \sin(x + c_1)$ ;  
 6)  $y = \operatorname{ch}(x + c_1) + c_2$ ; 7)  $y = c_2 - \ln|c_1 - x|$ ;  
 8)  $y = c_2 - \cos(c_1 + x)$ ; 9)  $y = c_2 - \ln|\cos(c_1 + x)|$ ;  
 10)  $y = \frac{(x+c_1)^3}{12} - X + C_2$ ; 11)  $y = x$ ; 12)  $y = -2x$ ;  
 13)  $y = (x + c_1) \ln|x + c_1| + c_2x + c_3$ ; 14)  $y = c_1 \ln|x| + c_2$ ;  
 15)  $y = c_1e^{x^2} + c_2$ ; 16)  $y = \frac{x^3}{3} + c_1x^2 + c_2$ ;  
 17)  $y = c_1x(\ln x - 1)$ ; 18)  $y = (c_1x - c_1^2)e^{\frac{x}{c_1}+1} + c_2$ ;  
 19)  $x = 3c_1P^2 + \ln c_2P$ ,  $y = 2c_1P^3 + P$ ;  
 20)  $12(c_1y - x) = c_1^2(x + c_2)^3 + c_3$ ; 21)  $\ln y = c_1 \operatorname{tg}(c_1x + c_2)$ ,

$$\ln|(\ln y - c_1)/(\ln y + c_1)| = 2c_1x + c_2, (c-x)\ln y = 1, y = c.$$

- §2.2.** 1) Hawa; 2) Ýok; 3) Ýok; 4) Hawa; 5) Hawa; 6) Ýok;  
 7) 1; 8)  $-\frac{2}{x}$ ;  $x \neq 0$ ; 9) 0; 10)  $e^{-2x}$ ; 11) 0; 12)  $y'' - y = 0$ ;  
 13)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ; 14)  $y''' + 3y'' + 3y' - y = 0$ ; 15)  $y''' + y' = 0$ ;  
 16)  $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ ; 17)  $y''' + 2y'' + 2y' = 0$ .

- §2.3.** 1)  $y = c_1e^{(1+\sqrt{5})x} + c_2e^{(1-\sqrt{5})x}$ ; 2)  $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-\frac{4}{3}x}$ ;  
 3)  $y = e^{-3x}(c_1 + c_2x)$ ; 4)  $y = e^x(1+x)$ ;  
 5)  $y = e^{3x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ ; 6)  $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$ ;

- 4)  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ; 5)  $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$ ;  
 6)  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3}$ ,  $y(0) = 0$ ; 7)  $(e^{-y^2/2} - xy)dy - dx = 0$ ;  
 8)  $y' + xe^xy = e^{(1-x)e^x}$ ; 9)  $(2e^y - x)y' = 1$ ;  
 10)  $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$ ; 11)  $y' = \frac{y}{34 - y^2}$ ;  
 12)  $y' + 2xy = e^{-x^2}$ .

### § 1.5. Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

- 1)  $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$ ;  
 2)  $\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0$ ;  
 3)  $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$ ;  
 4)  $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ ;  
 5)  $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$ ; 6)  $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ ;  
 7)  $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$ ;  
 8)  $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$ ; 9)  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$ ;  
 10)  $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$ ;  
 11)  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ ; 12)  $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$ ;  
 13)  $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$ ; 14)  $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ ;  
 15)  $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ ; 16)  $(2x^2 + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$ ;  
 17)  $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$ ; 18)  $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$ ;  
 19)  $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$ ;

### § 2.1. Aşakdaký deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

- 1)  $y^{IV} = \frac{8}{(x-3)^5}$ ; 2)  $y''' = x + \cos x$ ;  
 3)  $y'' = xe^x$ ,  $y(0) = 0$ ; 4)  $y'' - 2x \ln x$ ;  
 5)  $y''' = \sqrt{1 - y'^2}$ ; 6)  $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ ;  
 7)  $y'' = y'^2$ ; 8)  $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$ ;  
 9)  $y'' = 1 + y'^2$ ; 10)  $y'' = \sqrt{1 + y'}$ ;

- 11)  $y'' = y' \ln y'$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  ;  
 12)  $y'' + y' + 2 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$  ;  
 13)  $y''' + y''^2 = 0$  ;  
 14)  $xy'' + y' = 0$  ;  
 15)  $xy'' = (1 + 2x^2)y'$  ;  
 16)  $xy'' = y' + x^2$  ;  
 17)  $x \ln x y'' = y'$  ;  
 18)  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$  ;  
 19)  $y'^2 = (3y - 2y')y''$  ;  
 20)  $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$  ;  
 21)  $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$  ;

**§ 2.2. Aşağıdaki funksiýalar özleriniň kesgitleniş oblastynda çyzykly baglymy ?**

- 1) 4, x ; 2) 1, 2, x,  $x^2$  ; 3) x, 2x,  $x^2$  ;  
 4)  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\cos 2x$  ; 5) 1,  $\sin x$ ,  $\cos 2x$  ; 6) 5,  $\cos^2 x$ ,  $\sin^2 x$  ;  
**Wronskiniň kesgitleýjisini hasaplamaly.**  
 7) 1, x ; 8)  $x, \frac{1}{x}$  ; 9) 1, 2,  $x^2$  ; 10)  $e^{-x}$ ,  $xe^{-x}$  ; 11)  $e^x$ ,  $2e^x$ ,  $e^{-x}$  ;

**Çözüwleriň fundamental sistemasy berlen. Çyzykly birjynsly differensial deňlemäni ýazmaly:**

- 12)  $e^{-x}$ ,  $e^x$  ; 13)  $e^{-2x}$ ,  $xe^{-2x}$  ; 14)  $e^x$ ,  $xe^x$ ,  $x^2e^x$  ;  
 15) 1,  $\sin x$ ,  $\cos x$  ; 16)  $e^{2x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  ; 17) 1,  $e^{-x} \sin x$ ,  $e^{-x} \cos x$  .

**§ 2.3. Aşağıdaki deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly:**

- 1)  $y'' - 2y' - 4y = 0$  ; 2)  $3y'' - 2y' - 8y = 0$  ; 3)  $y'' + 6y' + 9y = 0$  ;  
 4)  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 3$  ;  
 5)  $y'' - 6y' + 18y = 0$  ; 6)  $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$  ; 7)  $y^{VI} + 2y^V + y^{IV} = 0$  ;  
 8)  $y^{IV} - 8y = 0$  ; 9)  $y^{IV} - y = 0$  ; 10)  $2y''' - 3y'' + y' = 0$  ;

**§ 2.5. Aşağıdaki deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapyň:**

- 1)  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$  ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$  ;  
 2)  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$  ; 3)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$  ;  
 4)  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$  ; 5)  $y'' - y = 2e^x - x^2$  ;  
 6)  $y'' - 3y' + 2y = \sin x$  ; 7)  $y'' + 4y' - 2y = 8 \sin 2x$  ;  
 8)  $y'' + y = 4x \cos x$  ; 9)  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$  ;  
 10)  $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$  ; 11)  $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$  ;  
 12)  $y'' - 2y' + y = 6xe^x$  ; 13)  $y'' + y = x \sin x$  ;  
 14)  $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$  ; 15)  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2 \cos x)$  .

Logranžyň usulyňy peýdalanyp çözmeli :

- 16)  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$  ; 17)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$  ;  
 18)  $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$  ; 19)  $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$  ;  
 20)  $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$  ; 21)  $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$  ;

**J o g a p l a r**

- §1.1.** 1) Hawa, 2) Ýok, 3) Hawa, 4) Hawa, 5) Hawa, 6) Ýok,  
 7) Howwa. **§1.2.1)**  $\arctg x + \arctg y = c$  ; 2)  $y = c(x+1)e^{-x}$ ,  $x = -1$  ;  
 3)  $\arctg y = \ln|cx|$  ; 4)  $y - x + \ln|cx| = 0$  ; 5)  $x^2(1+y^2) = c$  ;  
 6)  $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$  ; 7)  $\ln|x| = c + \sqrt{y^2 + 1}$ ,  $x = 0$  ;  
 8)  $e^x = c(1 - e^{-y})$  ; 9)  $a^x + a^{-y} = c$  ; 10)  $1 + e^y = c(1 + x^2)$  ;  
 11)  $\arctg e^x = \frac{1}{2 \sin^2 y} + c$  ; 12)  $y^2 - 2 = ce^{1/x}$  ;

- §1.3.** 1)  $x + y = cx^2$ ,  $x = 0$  ; 2)  $y = xe^{1+cx}$  ;  
 3)  $\ln(x^2 + y^2) = c - 2 \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$  ; 4)  $x(y-x) = cy$ ,  $y = 0$  ;  
 5)  $(x-y) \ln cx = x$  ; 6)  $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2$ ,  $y = x$  ;  
 7)  $y = ce^{y/x}$  ; 8)  $\sin \frac{y}{x} = cx$  ; 9)  $\ln cx = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x}\right)$ ,  $y = xe^{2\pi k}$ ,  
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ; 10)  $x \ln cx = 2\sqrt{xy}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  .

- §1.4.** 1)  $y = cx^2$  ; 2)  $x = cy - \frac{1}{2}y^2$  ; 3)  $y = x^2 - \frac{3x}{x-1}$  ;

- 4)  $y = \sin x + \cos x$  ; 5)  $y = (c + x^2) \ln x$  . 6)  $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  ;  
 7)  $x = (c + y)e^{-\frac{y^2}{2}}$  ; 8)  $y = (c + x)e^{(1-x)e^x}$  ; 9)  $x = ce^{-y} + e^y$  ;  
 10)  $x = -\cos y \sin y + \cos y$  ; 11)  $x = cy^3 + y^2$ ,  $y = 0$  ;  $y = (c + x)e^{-x^2}$  .  
**§1.5.1)**  $x^4 + 4xy(\ln y - 1) - 4x^2y + 4 \sin y = c$  ; 2)  $x^2 + y^2 + 2 \arcsin \frac{x}{y} = c$  ;  
 3)  $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$  ; 4)  $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$  ; 5)  $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$  ;  
 6)  $xe^{-y} - y^2 = c$  ; 7)  $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = c$  ; 8)  $x - y^2 \cos^2 x = c$  ;  
 9)  $x + \frac{x^5}{y^2} + \frac{5}{y} = c$  ; 10)  $x^2 + 1 = 2(c - 2x) \sin y$  ;

- § 2. 3 n-nji tertipli hemişelik kosffisiýentli birjynsly çyzykly deňlemeler  
 § 2. 4. n-nji tertipli birjynsly däl deňlemeler  
 § 2. 5 n-nji tertipli birjynsly däl hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemeler  
 § 2. 6 n-nji tertipli çyzykly defferensial deňleme. Lagranžyň usuly

## G ö n ü k m e l e r

IVbap. Ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň elementleri

- § 1. Kombinatorikanyň elementleri.  
 § 2. Wakalar we olaryň üstünde amallar.  
 § 3. Ähtimallygyň dürli kesgitlemeleri.  
 § 4. Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek teoremlary.  
 § 5. Tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary.  
 § 6. Tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri.  
 § 7. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy

$$P(A) = \frac{S_{kw.}}{S_{reg.}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}. \triangleright$$

## § 4. Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek teoremlary.

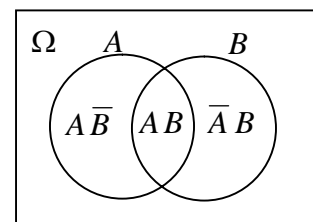
### 1. Ähtimallyklary goşmak teoremasy.

**Teorema.** Erkin  $A$  we  $B$  wakalar üçin

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (6)$$

formula adalatlydyr.

$\triangleleft$   $A$  we  $B$  wakalaryň jemini sygyşmaýan  $\bar{A}\bar{B}$ ,  $AB$ ,  $\bar{A}B$  wakalaryň jemi görnüşinde äňladalyň ( 3-nji surat ):



3-nji surat.

$$\begin{aligned} A+B &= \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}B \\ \text{Bu deňgüýçlülige göz önünde tutup,} \\ P(A+B) &= P(\bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}B) = \\ &= P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{deňligi ýazyp bileris. } A &= \bar{A}\bar{B} + AB \\ \text{bolandygy sebäpli, } P(A) &= P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) \\ \text{deňlik adalatlydyr. Bu ýerden taparys:} \\ P(\bar{A}\bar{B}) &= P(A) - P(AB) \end{aligned} \quad (8)$$

Edil şuna meňzeşlikde  $B = \bar{A}\bar{B} + AB$  deňgüýçlülige ýazyp bileris. Onda  $P(B) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB)$  deňlik adalatlydyr. Bu ýerden

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(B) - P(AB) \quad (9)$$

deňligi alarys. (8) we (9) aňlatmalary (7) deňlikde ornuna goýup, (6) formulanyň adalatlydygyna göz ýetirmek bolar.  $\triangleright$

(6) formula ähtimallyklary goşmak teoremasy diýilýär. Hususy halda, sygyşmaýan  $A$  we  $B$  wakalar üçin  $P(AB) = 0$  bolandygy sebäpli, şeýle wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasy

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (10)$$

görnüşe geler.

### 2. Şertli ähtimallyk. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasy.

Goý,  $P(A) > 0$  bolsun.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (11)$$

gatnaşyga  $B$  wakanyň  $A$  waka ýüze çykan şertdäki şertli ähtimallygy diýilýär. (11) deňligi özgerdip,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

deňligi alarys.  $P(B) > 0$  bolan şertde şuna meňzeşlikde ýazyp bileris:

$$P(BA) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$AB=BA$  bolandygy sebäpli,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (12)$$

formulany alarys. (12) formula ähtimallyklary köpeltmek teoremasy diýilýär.

Bagly däl  $A$  we  $B$  wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (13)$$

görnüşe geler. (13) deňlik iki wakanyň jübütleyin bagly dälliginiň kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär. Ondan başga-da, wakalaryň toplumlaýyn bagly dällik düşüňjesi hem bardyr.

**Kesgitleme.** Eger  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wakalaryň islendik kombinasiýasy bilen beýlekileriniň islendik kombinasiýasy bagly däl bolsalar, onda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wakalara toplumlaýyn bagly däl ýa-da bagly däl diýilýär.

Mysal üçin,  $A_1, A_2, A_3$  wakalaryň toplumlaýyn bagly däl bolmaklary üçin  $A_1$  we  $A_2$ ,  $A_1$  we  $A_3$ ,  $A_2$  we  $A_3$ ,  $A_1$  we  $A_2A_3$ ,  $A_2$  we  $A_1A_3$ ,  $A_3$  we  $A_1A_2$ , wakalaryň bagly däl bolmaklary zerurdyr. Toplumlaýyn bagly däl  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasynyň umumlaşdyrmasy

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (14)$$

görnüşe geler.

## G ö n ü k m e l e r

### II. 5. KESGITSIZ INTEGRAL

§ 5. 1. Kesgitsiz integralyň kesgitlenişi we onuň häsiýetleri

§ 5. 2. Integrirlemegiň esasy usullary

§ 5. 3. Rasional droblaryň integrirlenişi

§ 5. 4. Irrasional we trigonometrik funksiýalaryň integrirlenişi

## G ö n ü k m e l e r

### II. 6. KESGITLI INTEGRAL

§ 6. 1. Integral düşüňjesine getirýän meseleler

§ 6. 2. Kesgitli integral düşüňjesi

§ 6. 3. Kesgitli integralyň esasy häsiýetleri

§ 6. 4. Ýokarky çägi üýtgeýänli integral

§ 6. 5. Integrirlemegiň usullary

§ 6. 6. Kesgitli integralyň ulanylyşy

§ 6. 7. Kesgitli integrallary hasaplamagyň takmyn usullary

§ 6. 8. Hususy däl integrallar

§ 6. 9. Eýler integrallary barada düşüňje

## G ö n ü k m e l e r

### III bap. DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

#### III. 1. Birinji tertipli differensial deňlemeler

§ 1.1 Differensial deňlemeler barada esasy düşüňjeler

§ 1.2 Birinji tertipli differensial deňlemeler. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler

§ 1.3 Birinji tertipli birjynsly deňlemeler

§ 1.4 Birinji tertipli çyzykly differensial deňlemeler

§ 1.5 Doly differensial deňlemeler

#### III. 2. Ýokary tertipli differensial deňlemeler.

§ 2. 1 Käbir  $n$ -nji tertipli integrirlenýän differensial deňlemeleriň görnüşleri. Tertibini peseldip bolýan deňlemeler

§ 2. 2  $n$ -nji tertipli differensial deňlemeler

- § 2. 1. Yzygiderligiň predeli
- § 2. 2. Funksiýanyň predeli
- § 2. 3. Tükeniksiz kiçi we tükeniksiz uly funksiýalar
- § 2. 4. Funksiýanyň predelinin esasy häsiýetleri
- § 2. 5. Ajaýyp predeller
- § 2. 6. Funksiýalaryň deňşdirilişi
- § 2. 7. Üznüksiz funksiýalar
- § 2. 8. Üznüksiz funksiýalaryň esasy häsiýetleri
- § 2. 9. Funksiýanyň birtaraplaýyn üznüksizligi we üzülme nokatlary
- § 2. 10. Käbir wajyp predeller
- § 2. 11. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň häsiýetleri

## G ö n ü k m e l e r

### II. 3. FUNKSIÝANYŇ ÖNÜMI WE DIFFERENSIALY

- § 3. 1. Eunksiýanyň önümi
- § 3. 2. Funksiýanyň differensirlenmegi
- § 3. 3. Ters we çylşyrymly funksiýanyň önümi
- § 3. 4. Ýokary tertipli önümler
- § 3. 5. Funksiýanyň differensialy

## G ö n ü k m e l e r

### II. 4. DIFFERENSIRLENÝÄN FUNKSIÝALAR HAKYNDAKY ESASY TEOREMALAR

- § 4. 1. Funksiýanyň orta bahasy hakyndaky teoremlar
- § 4. 2. Lopitalyň kesgitsizlikleri açmak düzgüni
- § 4. 3. Teýloryň formulasy we onuň ulanylyşy
- § 4. 4. Funksiýanyň monotonlygy we ekstremumy
- § 4. 5. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligi we epin nokatlary
- § 4. 6. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary we derňelişi
- § 4. 7. Funksiýanyň iň kiçi we iň uly bahalary we meseleleri çözmekde olaryň ulanylyşy
- § 4. 8. Deňlemeleri takmyn çözmekligiň usullary

**Bellik.**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wakalaryň toplumlaýyn bagly dældiklerinden olaryň jübüt-jübütünden bagly dældikleri we  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  wakalaryň hem toplumlaýyn bagly dældikleri gelip çykýandyr.

**1-nji mesele.** Kärhananyň öndürýän önümleriniň 98% -i standart önümler. Şünlukda standart önümleriň 85% -i ýokary hilli. Bu kärhanada öndürilen şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý,  $A$ -şowuna alnan önümiň standart bolmagy bolsun.  $B$ -şowuna alnan standart önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Köpeltmek teoremasyndany peýdalanyň, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{98}{100} \cdot \frac{85}{100} = 0,833. \quad \triangleright$$

**2-nji mesele.** Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjy üç gezek nyşana atýar. Nyşananyň üç gezek urulmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý,  $A$ -atyjynyň birinji gezekde nyşanany urmagy,  $B$ -ikinji gezekde nyşanany urmagy,  $C$ - üçünji gezekde nyşanany urmagy bolsun.  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , wakalar bagly däl. Onda bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasyndany peýdalanyň, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512. \quad \triangleright$$

**3-nji mesele.** Ulgamyň näsaz işleýändigini habar bermek üçin biri-birine bagly bolman işleýän iki duýduryjy goýlan. Ulgamyň näsaz işleýändigini birinji duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygy 0,99-a deň. Ikinji duýduryjy üçin bu ähtimallyk 0,98-e deň. Ulgamyň näsaz işleýändigini diňe bir duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Wakalary girizeliň:

$A_1$  -birinji duýduryjynyň habar bermegi.

$A_2$  -ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

$B_1$  -diňe birinji duýduryjynyň habar bermegi.

$B_2$  -diňe ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

Sygysmaýan wakalar üçin goşmak teoremasyndan we bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasyndan peýdalanyň, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$\begin{aligned} P((B_1 + B_2)) &= P(B_1) + P(B_2) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,99 \cdot 0,02 + 0,01 \cdot 0,98 = 0,0296. \triangleright \end{aligned}$$

## § 5. Tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary.

### 1. Diskret tötän ululyk we onuň paýlanyş kanuny.

**Kesgitleme.**  $\Omega$  elementar wakalar giňişligini  $R$  san okuna öwürýän hakyky  $X(w)$  san funksiýasyna tötän ululyk diýilýär.

Başgaça aýdylanda, tötän ululyk bu tötän wakalara baglylykda ol ýa-da beýleki bahalary kabul edýän üýtgeýän ululykdyr.

Tötän ululyklaryň diskret, üznüksiz we singulyar görnüşleri bardyr. Ähtimallyklar nazaryýetinde diskret we üznüksiz tötän ululyklar has giňişleýin öwrenilýär.

Eger tötän ululyk tükenikli ýa-da hasaply köplükden bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa diskret tötän ululyk diýilýär. Belli bir wagt aralygynda duralga gelyän awtobuslaryň sany, synagda talybyň bilim derejesine goýulýan bahanyň san ululygy, gözegçilik edilýän ýylda ekinde alynýan hasylyň mukdary, ýurdumyza gyslamaga gelyän guşlaryň sany, hassahanadaky gany şol bir topara degişli bolan näsaglaryň sany, nyşanany urmaga sarp ediljek oklaryň sany we ş.m. diskret tötän ululygyň mysallarydyrlar.

Tötän ululyklary latyn elipbiýiniň baş harplary bilen, olaryň kabul edýän bahalaryny bolsa setir harplary bilen belgilemegi şertleşeliň. Diskret tötän ululygyň kabul edýän  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bahalary bilen bu bahalaryň degişli  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ähtimallyklarynyň sanawyna diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Paýlanyş kanunda  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ähtimallyklar  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  şerti kana-

§ 4. 1. Esasy düşüňjeler

§ 4. 2. Wektorlar bilen geçirilýän çyzykly amallar

§ 4. 3. Iki wektoryň kollinearlyk şerti

§ 4. 4. Wektoryň oka bolan proyeksiýasy

§ 4. 5. Giňişlikde wektoryň gönüburçly dekart koordinatalary.

Wektoryň uzynlygy. Wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary

§ 4. 6. Wektor gatnaşyklaryndan koordinata gatnaşyklaryna geçmek

§ 4. 7. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly

§ 4. 8. Wektorlaryň sag we çep üçlügi. Sag we çep koordinatalar sistemasy

§ 4. 9. Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly

§ 4. 10. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

Gönükmeler

## I. 5. Kompleks sanlar barada düşüňje

§ 5. 1. Kompleks sanlaryň kesgitlenişini we olar bilen geçirilýän amallar

§ 5. 2. Kompleks sanlaryň geometrik şekillendirilişi we olaryň trigonometrik görnüşi

§ 5. 3. Kompleks sanlardan kök almak

Gönükmeler

## II bap. MATEMATIKI ANALIZ

### II.1. KÖPLÜK WE FUNKSIÝA DÜŞÜNJESI

§ 1. 1. Köplük düşüňjesi

§ 1. 2. Aralyk, kesim we sanyň absolýut ululygy

§ 1. 3. Köplügiň çäkleri

§ 1. 4. Funksiýa düşüňjesi

§ 1. 5. Elementar funksiýalar

§ 1. 6. Ters funksiýa

G ö n ü k m e l e r

### II. 2. FUNKSIÝANYŇ PREDELI

## SÖZBAŞY

### I bap. ANALITIK GEOMETRIÝA WE ÝOKARY ALGEBRA

#### I.1. TEKIZLIKDE ANALITIK GEOMETRIÝA

- § 1. 1. Göni çyzykda koordinatalar
- § 1. 2. Tekizlikde koordinatalar sistemasy
- § 1. 3. Tekizlikde analitik geometriýanyň käbir meseleleri
- § 1. 4. Tekizlikde koordinatalary baglanyşdyrýan deňlemeleriň geometrik manysy

#### G ö n ü k m e l e r

#### I. 2. BIRINJI WE IKINJI TERTIPLI ALGEBRAIK ÇYZYKLAR

- § 2. 1. Tekizlikde göni çyzyklar
- § 2. 2. Töweregiň umumy deňlemesi
- § 2. 3. Ellips
- § 2. 4. Giperbola
- § 2. 5. Ellipsiň we giperbolanyň direktrisalary
- § 2. 6. Parabola
- § 2. 7. Ellipsiň giperbolanyň, parabolanyň polýar deňlemesi
- § 2. 8. Gönüburçly dekart koordinatalaryny özgertmek
- § 2. 9. Koordinatalary özgertmek formulalarynyň ulanylyşy
- § 2. 10. Ikinji derejeli deňlemeleri ýönekeýleşdirmek

#### G ö n ü k m e l e r

#### I. 3 ÇYZYKLY ALGEBRA

- § 3. 1. Kesgitleýjiler we olaryň häsiýetleri
- § 3. 2. Kesgitleýjileriň kömegi bilen çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözülişi
- § 3. 3. Matrisalar we olar bilen geçirilýän amallar
- § 3. 4. Näbellileri yzygiderli ýoklamak usuly

#### Gönükmeler

#### I. 4. WEKTOR ALGEBRASY

gatlandyryandyrlar. Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny tablisa, grafik we formula arkaly bermek bolar. Tablisa arkaly ol

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

görnüşde berilýär.

Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny grafik görnüşde bermek üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Absissalar okunda diskret tötän ululygyň kabul edýän  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bahalaryny, ordinatlar okunda bolsa bu bahalaryň degişli  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ähtimallyklaryny bellemeli. Soňra  $(x_i, p_i)$ ,

$i = \overline{1, n}$  nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli. Emele gelen döwür çyzyga paýlanyşyň köpburçlugy diýilýär.

**2. Paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary.** Diskret tötän ululyk kabul edýän bahalary we olaryň degişli ähtimallyklary bilen berilýär. Emma üznüksiz tötän ululyklar üçin şeýle berlişi amala aşyryp bolmaýar. Şol sebäpli, öz tebigaty boýunça köpdürli tötän ululyklaryň ähtimallyklaryny şol bir usul bilen bermeklik üçin tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy düşünjesi girizilýär.

$$F(x) = P(X < x) \quad (15)$$

funksiýa  $X$  tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy diýilýär, bu ýerde  $x (-\infty < x < \infty)$  üýtgeýän hakyky ululyk.

Paýlanyş funksiýasy aşadaky häsiýetlere eýedir:

- 1) Paýlanyş funksiýanyň bahalar ýaýlasy  $[0; 1]$  kesimdir.
- 2) Paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr.
- 3) Paýlanyş funksiýasy çepden üznüksizdir.
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$  we  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$  predel deňlikler adalatlydyrlar.

Eger

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (16)$$

aňlatma adalatly bolsa, onda  $F(x)$  paýlanyş funksiýasyna absolýut üznüksiz diýilýär. Şeýle paýlanyş funksiýaly tötän ululyga absolýut üznüksiz ýa-da üznüksiz diýilýär. (16) aňlatmadaky integral aşagyn-daky funksiýa tötän ululygyň dykzlyk funksiýasy diýilýär. Dykzlyk funksiýasy paýlanyş funksiýasynyň birinji önümidir:

$$f(x) = F'(x). \quad (17)$$

Dykzlyk funksiýasy aşadaky häsiýetlere eýedir:

$$1) f(x) \geq 0.$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

## § 6. Tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri.

**1. Matematiki garaşma.** Belli bolşy ýaly, tötän ululygyň berilmegi üçin onuň paýlanyş funksiýasynyň berilmegi ýeterlikdir. Emma köp meselelerde tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaklyk kyn bolýar ya-da ony tapmaklyga zerurlyk hem bolma-ýar. Mysal üçin, birinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sany ikinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sanyndan uly bolsa, onda bu birinji atyjynyň ikinji atyja görä mergenlik derejesiniň ýokarydygy barada netije çykarmaklyk üçin ýeterliklidir. Başgaça aýdylanda, tötän ululyklaryň umumy mukdar häsiýetlendirijileri bolan hemişelik ululyklary bilmek ýeterlik bolýar. Bu hemişelik ululyklara tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri diýilýär. Şeýle san häsiýetlendirijileriň biri hem matematiki garaşmadyr.

**Kesgitleme.** Diskret  $X$  tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip, ol tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar:

$$MX = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (18)$$

13. Баврин И.И. Высшая математика. Москва, Просвещение, 1980.

14. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1, 2. Минск. Изд-во БГУ, 1983.

15. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. ч. 1, 2. Минск. «Вышейш. Школа», 1972.

16. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. Москва, Наука, 1971.

17. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Наука, 1986.

18. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва, Высш. школа, 1990.



## E D E B I Ý A T

1. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow (gysgaça terjimehal). Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 128 sah.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 96 sah.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 44 sah.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygındysy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 416 sah.
5. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Umumy milli “Galkynyş” Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 48 sah.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – Saglygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 175 sah.
7. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 64 sah.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Ýurdy täzedan galkyndyrmak baradaky syýasaty. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 133 sah.
9. Aşyrow O., Töräýew A. Matematiki analiz. t. 1, Aşgabat, Magaryf, 1990.
10. Aşyrow O. Matematiki seljermäniň esaslary. I. Aşgabat, TDNG, 2006.
11. Aşyrow O. Matematiki seljermäniň esaslary. II. Aşgabat, TDNG, 2006.
12. Gurbanmämmedow N., Aşyrow O., Aşyrow A., Geldiýew B. Ýokary matematika. I. Aşgabat, TDNG, 2010.

Bu ýerde  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $X$  tötän ululygyň kabul edýän bahalary,

$p_k = p(X = x_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , ol bahalaryň degişli ähtimallyklary.

**Kesgitleme.** Üznüksiz  $X$  tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip,

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (19)$$

integrala aýdylýar, bu ýerde  $f(x)$  funksiýa  $X$  tötän ululygyň dykzlyk funksiýasy.

Indi matematiki garaşmanyň häsiýetlerine garalyň.

1) Hemişelik ululygyň matematiki garaşmasy ol ululygyň özüne deňdir, ýagny

$$MC = C,$$

bu ýerde  $C$  hemişelik ululyk.

2) Hemişelik ululygy matematiki garaşma belgisiniň daşyna çykarmak bolar:

$$M(CX) = C \cdot MX$$

3) Iki tötän ululygyň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir:

$$M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2.$$

**Netije.** Tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n$$

4) Bagly däl iki tötän ululygyň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$M(X_1 X_2) = MX_1 \cdot MX_2$$

**Netije.** Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = MX_1 \cdot MX_2 \cdot \dots \cdot MX_n.$$

**2.Dispersiýa.** Dürli tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bolup biler.

Şeýle ýagdaýda tötän ululyklary biri-birinden tapawutlandyrmak maksady bilen dispersiýa diýlip atlandyrylýan ýene bir umumy häsiýetlendiriji girizilýär.

**Kesgitleme.**  $X$  tötän ululygyň dispersiýasy diýlip, ol tötän ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndygyň kwadratynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar we  $DX$  bilen belgilenýär:

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (20)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde  $x_k, k = \overline{1, n}$ ,  $X$  tötän ululygyň kabul edýän bahalary,  $p_k = p(X = x_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , bolsa bu bahalaryň degişli ähtimallyklary.

Matematiki garaşmanyň häsiýetlerinden peýdalanyň, (20) formulany oňa deňgüýçli we amaly maksatlar üçin amatly bolan

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \quad (21)$$

görnüşde ýazmak bolar.

Dispersiýa tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň ol tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň töweregindäki ýaýrawyny häsiýetlendirýär. Bu onuň ähtimallyk manysydyr.

Indi dispersiýanyň häsiýetlerine garalyň.

1) Hemişelik ululygyň dispersiýasy nola deňdir:

$$DC = 0,$$

bu ýerde  $C$ -hemişelik ululyk.

2) Hemişelik ululygy dispersiýa belgisiniň daşyna kwadrata göterip çykarmak bolar:

$$D(CX) = C^2 \cdot DX.$$

3) Bagly däl iki tötän ululygyň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2.$$

**Netije.** Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyk-

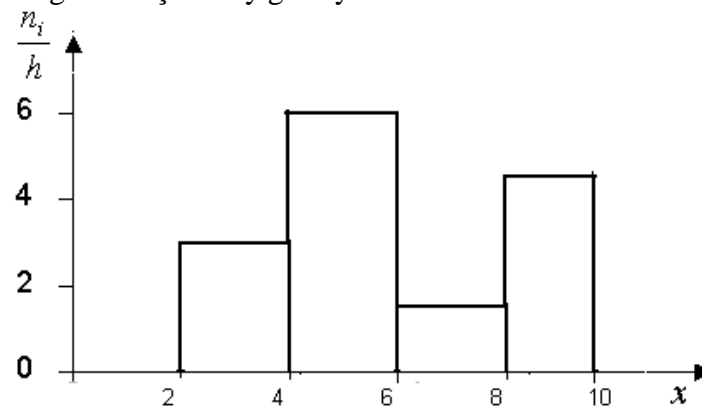
Çyzgydan görnüşi ýaly, empirik paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr. ▷

**3-nji mesele.** Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

Interwalyň belgisi $i$	Bölek interwal $x_i - x_{i+1}$	Bölek interwalyň ýygylgy $n_i$	Ýygylgyň dykzlygy $\frac{n_i}{h}$
1	2-4	6	3
2	4-6	12	6
3	6-8	3	1,5
4	8-10	9	4,5

Ýygylgyň gistogrammasyny gurmaly.

◁ Tablisadan görnüşi ýaly, saýlamanyň göwrümi  $n = 6 + 12 + 3 + 9 = 30$ . Bölek interwallaryň uzynlyklary  $h = 2$ . Ýygylgyň gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly koordinatlar sistemasyny guralyň. Absissalar okunda  $(2;4), (4;6), (6;8), (8;10)$  bölek interwallary, ordinatlar okunda bolsa  $3; 6; 1,5; 4,5$  ululyklary belläliň. Soňra esaslary bölek interwallaryň  $h = 2$  uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa,  $3; 6; 1,5; 4,5$  ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň:



6-njy surat. Ýygylgyň gistogrammasy. ▷

lege böleliň we  $x$  üýtgeýän ululygyň her bölekdäki bahalaryna aýry-aýrylykda garalyň. Goý,  $-\infty < x \leq 1$  bolsun.  $x$  üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi warianta ýokdur. Şol sebäpli  $n_x = 0$  bolar. Onda:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{10} = 0.$$

Goý,  $1 < x \leq 6$  bolsun.  $x$  üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik warianta bar we ol 5 gezek duş gelýär, ýagny,  $n_x = 5$ . Onda:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

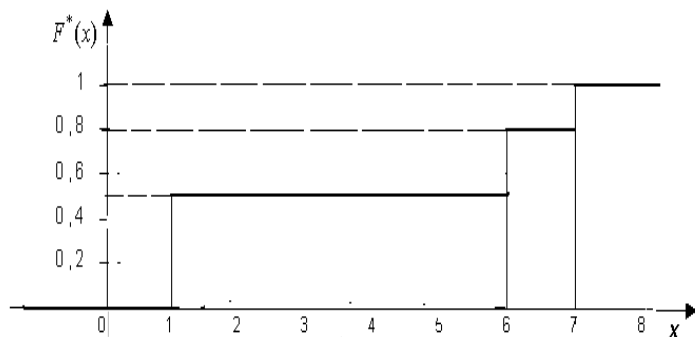
Goý,  $6 < x \leq 7$  bolsun.  $x$  üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik we 6-lyk wariantlar bar. Bu wariantlar deňşililikde 5 we 3 gezek duş gelýärler. Diýmek,  $n_x = 8$ . Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Goý,  $7 < x < \infty$  bolsun.  $x$  üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik, 6-lyk we 7-lik wariantlar bar. Bu wariantlar deňşililikde 5, 3 we 2 gezek duş gelýärler. Diýmek,

$$n_x = 10. \text{ Onda } F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{10}{10} = 1.$$

Indi  $F^*(x)$  empirik paýlanyş funksiýanyň grafigini guralyň:



5-nji surat.

laryň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n.$$

**Netije.** Bagly däl iki tötän ululygyň tapawudynyň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X_1 - X_2) = DX_1 + DX_2.$$

**Netije.** Tötän ululyk bilen hemişelik ululygyň jeminiň dispersiýasy tötän ululygyň dispersiýasyna deňdir:

$$D(X + C) = DX.$$

**Kesgitleme.** Dispersiýadan alnan arifmetiki kwadrat köke orta kwadratik gyşarma diýilýär:

$$\sigma_x = \sqrt{DX}. \quad (22)$$

**1-nji mesele.** Diskret  $X$  tötän ululyk

$X$	1	2	3
$p$	0,3	0,5	0,2

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

◁ (18) formuladan peýdalanyp, matematiki garaşmany tapalyň:

$$MX = \sum_{k=1}^n x_k p_k = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 = 1,9.$$

Indi  $MX^2$  başlangyç ikinji momenti tapalyň:

$$MX^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot p_k = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,2 = 4,1.$$

(21) formuladan peýdalanyp, dispersiýany tapalyň:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 4,1 - (1,9)^2 = 0,49.$$

Orta kwadratik gyşarmany tapalyň:

$$\sigma_x = \sqrt{DX} = \sqrt{0,49} = 0,7. \quad \triangleright$$

**2-nji mesele.** Üznüksiz  $X$  tötän ululyk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

◁ Ilki  $X$  tötän ululygyň dykzlyk funksiýasyny tapalyň:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Onda (19) formula boýunça matematiki garaşmany tapalyň:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = 2 \int_0^1 x \cdot x dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Indi  $MX^2$  ululygy tapalyň:

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 \cdot x dx = \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18},$$

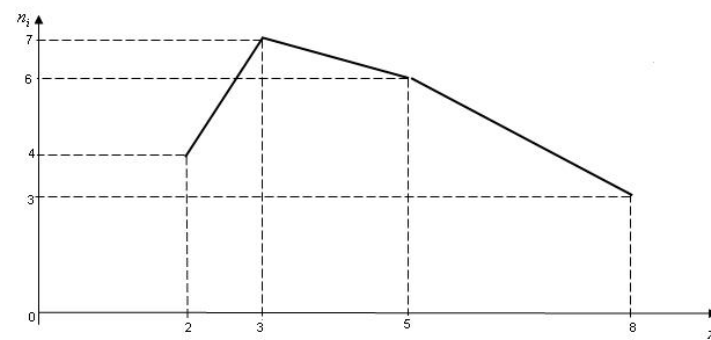
$$\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,24. \quad \triangleright$$

## § 7. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy

**1. Baş toplum we saýlama.** Matematiki statistika XVII asyryň başynda döreýär we ähtimallyklar nazaryýeti bilen bilelikde giň gerim bilen ösýär. Statistika adalgasy latyn “status” (ýagdaý) sözünden gelip çykýar.

Matematiki statistika esasan iki meselä garaýar:

nokatlary guralyň we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdireliň:



4-nji surat. Ýygylgyň poligony.

ç)  $n_1 = 4, n_2 = 7, n_3 = 6, n_4 = 3$  we  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 20$  bolandygy sebäpli,

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

formuladan peýdalanyň, oňnositel ýygylklary tapalyň:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{20} = 0,2, \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{7}{20} = 0,35,$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{20} = 0,3, \quad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

Onda

$x_i$	2	3	5	8
$W_i$	0.2	0.35	0.3	0.15

**2-nji mesele.** Ýygylgyň statistiki paýlanyşy berlen:

$x_i$	1	6	7
$n_i$	5	3	2

Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

◁ Bütün san okuny 1, 6, 7 nokatlar bilen, kesişmeýän dört bö-

deň, beýiklikleri bolsa  $\frac{n_i}{h} \left( \frac{W_i}{h} \right)$  ululyklara deň bolan gönüburçluklary gurmaly.

### 3. Empirik paýlanyş funksiýasy.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \quad (24)$$

funksiýa empirik paýlanyş funksiýasy diýilýär, bu ýerde  $n_x$  ( $0 \leq n_x \leq n$ ) üýtgeýän hakyky  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) ululykdan kiçi wariantalaryň sany,  $n$  saýlamanyň göwrümi. Empirik paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir:

- 1) Empirik paýlanyş funksiýasynyň bahalar ýaýlasy  $[0;1]$  kesimdir.
- 2) Empirik paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr.
- 3) Eger  $x_1$  iň kiçi warianta bolsa, onda  $x$  üýtgeýän ululygyň  $x \leq x_1$  deňsizligi kanagatlandyryan hemme bahalary üçin  $F^*(x) = 0$ . Eger  $x_k$  iň uly warianta bolsa, onda  $x$  üýtgeýän ululygyň  $x > x_k$  deňsizligi kanagatlandyryan hemme bahalary üçin  $F^*(x) = 1$ .

**1-nji mesele.** Baş toplumdan  $n=20$  göwrümlü saýlama geçirilip, 2, 8, 5, 3, 3, 5, 2, 3, 8, 5, 3, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 5, 2, 3 sanlar alnan.

- a) Ýygylýgyň statistiki paýlanyşyny tablisa görnüşinde ýazmaly.
  - b) Ýygylýgyň poligonyny gurmaly.
  - ç) Otnositel ýygylýgyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly.
  - d) Otnositel ýygylýgyň poligonyny gurmaly.
- ◁ a) Saýlamadan görnüşi ýaly, 2-lik warianta 4 gezek, 3-lik warianta 7 gezek, 5-lik warianta 6 gezek, 8-lik warianta 3 gezek düşgeliýär. Onda:

$x_i$	2	3	5	8
$n_i$	4	7	6	3

- b) Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatlar sistemasyny guralyň. Absissalar okunda 2, 3, 5, 8 wariantalary, ordinatlar okunda bolsa 4, 7, 6, 3 ýygylýyklary belläliň. Soňra (2;4), (3;7), (5;6), (8;3)

1) gözegçilikler netijesinde statistiki maglumatlary toplamak we olary toparlamaklygyň usullaryny görkezmek.

2) ylmy we amaly netijeleri almak üçin toplanan statistiki maglumatlary maksadalaýyk derňemekligiň usullaryny işläp düzmek.

Matematiki statistikanýň başlangyç düşüňjeleri hökmünde baş we saýlama toplumlar düşüňjelerine garaýarlar. Birjynsly elementleriň köplügini baş toplum diýip atlandyryarlar. Bu toplum haýsy hem bolsa bir hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenilýär. Baş toplumyň hemme elementlerini ýeke-ýekeden öwrenmeklik wagtyň we serişdeleriň köp sarp edilmegi bilen baglanyşyklydyr. Şol sebäpli, baş toplumdan elementleriň bölek köplügini şowuna saýlap alýarlar we gyzyklandyryan nyşana görä öwrenýärler. Bu bölek köplüğe saýlama diýilýär.

Toplumyň elementleriniň sanyna toplumyň göwrümi diýilýär. Saýlama geçirilende dürli saýlap alyş usullary ulanylýar:

a) **Mehaniki saýlap alyş usuly.** Bu usulda baş toplum birnäçe bölek toplumlara mehaniki bölünýär we her bölek toplumdan bir element şowuna saýlanyp alnyp, gyzyklandyryan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, öndürilen  $N$  önümiň 20% -ni saýlap almaly bolsa, onda önümleriň hemmesiniň köplügini  $\frac{N}{5}$  bölege bölmeli we her bölekden bir elementi şowuna alyp, gyzyklandyryan nyşana görä öwrenmeli.

b) **Kysmy saýlap alyş usuly.** Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden şowuna bir element alnyp, gyzyklandyryan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, köwüş fabriginiň öndürýän köwüşlerini pasyllaýyn görnüşleri we ölçegleri boýunça birnäçe kysmy böleklere bölýärler we her bölekden şowuna bir jübüt köwüş alyp, hil ya-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

ç) **Tapgyrly saýlap alyş usuly.** Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden elementleriň tapgyry şowuna alnyp, gyzyklandyryan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, çörek öndürýän kärhananyň her tamdyrynda bişirilýän çörekleri görnüşleri we ölçegleri boýunça kysmy böleklere bölýärler we her bölekden

çörekleriň tapgyryny şowuna saýlap alyp, hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

Amalyýetde bu usullary utgaşdyryp ulanýarlar.

Eger baş toplumdan alnan element gyzyklandyrylan nyşana görä öwrenilip, ýene-de baş topluma gaýtarylsa, onda şeýle saýlama gaýtalanýan diýilýär. Eger element baş topluma gaýtarylmasa, onda şeýle saýlama gaýtalyňmaýan diýilýär.

Haýsy saýlap alyş usulynyň ulanylandygyna garamazdan, öwrenilýän nyşan barada dogry netijeleri çykarmaklyga mümkinçilik bermegi üçin, saýlamanyň wekilçilikli (reprezentatiw) bolmagy gerekdir.

**2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.** Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşan tötän ululykdyr, sebäbi şol bir göwrümlü dürli saýlamalarda ol öňden belli bolmadyk dürli bahalary kabul edýär. Goý, baş toplumdan  $n$  göwrümlü saýlama geçirilen bolsun we bu saýlamada  $x_1$  baha  $n_1$  gezek,  $x_2$  baha  $n_2$  gezek, we ş.m.  $x_k$  baha  $n_k$  gezek duş gelýän bolsun. Nyşanyň kabul edýän  $x_1, x_2, \dots, x_k$  bahalaryna wariantalar diýilýär. Wariantalaryň artýan tertipde ýazylan yzygiderligine wariasiýa hatary diýilýär. Wariantalaryň gözegçilik edilýän  $n_1, n_2, \dots, n_k$  sanlaryna bu wariantalaryň degişli ýygylýklary diýilýär. Hemme ýygylýklaryň jemi saýlamanyň göwrümine deňdir, ýagny,  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Wariantalar bilen olaryň degişli ýygylýklarynyň sanawyna ýygylýgyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Ýygylýgyň statistiki paýlanyşy tablisas we grafik görnüşde berilýär. Tablisas görnüşde ol

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	$\dots$	$n_k$

ýaly berilýär. Ýygylýgyň statistiki paýlanyşyny grafiki bermeklik üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Absissalar okunda  $x_1, x_2, \dots, x_k$  wariantalary, ordinatalar okunda bolsa  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ýygylýklary bellemeli. Soňra

$(x_i, n_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli. Emele gelen döwür çyzyk ýygylýgyň statistiki paýlanyşynyň grafiki berlişidir. Bu döwür çyzyga ýygylýgyň poligony diýilýär. “Poligonos” grek sözi bolup, köpburçluk diýen manyny berýär.

$$W_i = \frac{n_i}{n} \quad (23)$$

gatnaşyga  $x_i$  wariantanyň otnositel ýygylýgy diýilýär, bu ýerde  $n_i$  ululyk  $x_i$  wariantanyň ýygylýgy,  $n$  saýlamanyň göwrümi. Wariantalar bilen degişli otnositel ýygylýklaryň sanawyna otnositel ýygylýgyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Bu paýlanyş hem edil ýygylýgyň paýlanyşy ýaly tablisas we grafik görnüşinde berilýär. Ýygylýgyň we otnositel ýygylýgyň paýlanyşyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy diýilýär.

Eger baş toplum üznüksiz nyşana görä öwrenilýän bolsa, onda bu nyşanyň kabul edýän bahalarynyň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir  $h$  uzynlykly bölek interwallara bölýärler. Her bir bölek interwalyň ýygylýgy hökmünde bu bölek interwala düşen wariantalaryň ýygylýklarynyň jemini alýarlar we gistogramma diýlip atlandyrylýan figurany gurýarlar.

**Kesgitleme.** Ýygylýň (otnositel ýygylýgyň) gistogrammasy diýlip, esaslary bölek interwallaryň  $h$  uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa,  $\frac{n_i}{h} \left( \frac{W_i}{h} \right)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , gatnaşyklara deň bolan gönüburçluklardan ybarat basgançakly figura aýdylýar.

Ýygylýň (otnositel ýygylýgyň) gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Absissalar okunda  $h$  uzynlykly bölek interwallary, ordinatalar

okunda bolsa  $\frac{n_i}{h} \left( \frac{W_i}{h} \right)$  ululyklary bellemeli we esaslary  $h$  ululyga