N.Gurbanmämmedow, O.Aşyrow,
A.Aşyrow, B.Geldiýew

ÝOKARY MATEMATIKA

I

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

A ş g a b a t - 2 0 10

Ýokary matematika dersi boýunça şu okuw gollanmanyň birinji kitabyna analitik geometriýa, ýokary algebra we matematiki analiziň bölümleri (analiziň başlangyjy we bir üýtgeýänli funksiýanyň differensial we integral hasabyýeti) girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen çözülip görkezilen mysallar, bölümleriň ahyrynda bolsa amaly sapaklarda hem-de özbaşdak işlerde ulanar ýaly köpsanly mysallar getirilýär.

S Ö Z B A Ş Y

Matematikanyň usullary durmuşda duş gelýän köp meseleleri çözmeklige ýardam edýär. Şonuň üçin hem tebigy ugurlardan hünär alýan talyplaryň “Ýokary matematika” dersini oňat bilmekleri we onuň usullaryny tebigy ylymlarda duş gelýän dürli görnüşdäki meseleleri çozmeklikde ulanmaklygy başarmagy zerurdyr

Bu okuw gollanmasy uniwersitetiň tebigy ylymlary boýunça dürli hünärleri alýan talyplaryň hemmesi ulanyp biler ýaly edilip ýazyldy. Ol iki kitapdan ybarat bolup, onuň birinji kitabyna analitik geometriýa we ýokary algebra hem-de matematiki analiziň başlangyjy we bir üýtgeýänli funksiýanyň differensial we integral hasabyýeti girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen bölümde beýan edilen düşünjeleriň ulanylyşyny görkezýän mysallar getirilýär we olaryň çözülişleri görkezilýär. Şeýle hem her bölümiň ahyrynda talyplar bilen amaly sapaklar geçilende we özbaşdak işlerde ulanar ýaly köpsanly mysallar getirilýär.

Kitapda ýygy-ýygydan duş gelýän “bar bolup”(“tapylyp”) sözleriniň ýerine barlygy aňladýan $\exists$ belgi, “islendik” (“her bir”) sözleriniň ýerine bolsa umumylygy aňladýan $\forall$ belgi ulanylýar. $A \Rightarrow B$ ýazgy A sözlemden B sözlemiň gelip çykýandygyny aňladýar. Eger-de, onuň üstesine B sözlemden A sözlem hem gelip çykýan bolsa, onda ol $A \Leftrightarrow B$ ýazgyda aňladylýar. Mysal üçin, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall x \in B$, $P \ni m \exists$ gysgaça ýazgylar “islendik ε uludyr nol”, “islendik x degişli B”, “P degişli m tapylyp” diýlip okalýar. Teoremanyň subudynyň, mysalyň çözülişiniň başlangyjyny we ahyryny görkezmek üçin $\triangleleft$ we $\triangleright$ belgiler ulanylýar.

I bap. ANALITIK GEOMETRIÝA WE ÝOKARY ALGEBRA

I.1. TEKIZLIKDE ANALITIK GEOMETRIÝA

§ 1.1. Göni çyzykda koordinatalar

1. Ugrukdyrylan kesim. Käbir göni çýzyk alalyň we onuň kesgitleýän iki ugurlarynyň birini saýlap, ony položitel ugur, beýlekisini otrisatel ugur hasap edeliň. Položitel ugry kesgitlenen göni çyzyga ok diýilýär. Onuň islendik kesiminiň uzynlygyny ölçemek üçin ol okda uzynlyk birligini, ýagny masştab alalyň. Uçlary A we B nokatlar bolan kesime seredeliň. Eger A we B nokatlaryň haýsysynyň ol kesimiň başlangyjy, haýsynyň ahyrydygy görkezilen bolsa, onda oňa ugrukdyrylan kesim diýilýär. Kesimiň ugry diýlip başlangyçdan ahyra tarap bolan ugur hasap edilýär. Başlangyjy A we ahyry B nokat bolan ugrukdyrylan kesim $\overline{AB}$ bilen, onuň uzynlygy bolsa $\left|\overline{AB}\right|$ ýa-da $|AB|$ bilen belgilenýär. Dürli bolan iki A we B nokatlar iki sany $\overline{AB}$ we $\overline{BA}$ ugrukdyrylan kesimleri kesgitleýär. Eger A we B nokatlar gabat gelýän bolsa, onda $\overline{AA}$ kesime nol kesim diýilýär. Ugry okuň položitel ugry bilen gabat glende goşmak alamaty bilen, otrisatel ugry bilen gabat gelende aýyrmak alamaty bilen alynýan ugrukdyrylan $\overline{AB}$ kesimiň uzynlygyna şol kesimiň ululygy diýilýär we AB bilen belgilenýär, şunlukda $AB = -BA$ deňlik dogrudyr. Bu kesgitlemäniň esasynda okda islendik ýagdaýda ýerleşýän dürli A, B we C nokatlaryň ugrukdyrylan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ kesimleriniň ululyklary üçin

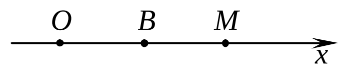
$$AB + BC = AC \tag{1}$$

deňlik ýerine ýetýär.

2. Koordinatalar oky. Käbir x göni çyzykda O we B nokatlary belläliň (1-nji surat) we olara degişlilikde koordinatalaryň başlangyç we birlik nokatlary diýeliň.

Göni çyzykda $\overline{OB}$ kesim bilen ugurdaş položitel ugry saýlap alalyň.

Položitel ugry, hasap başlangyjy we uzynlygy ölçemek üçin masştab birligi kesgitlenen Ox göni çyzyga koordinatalar oky diýilýär. Şol okuň erkin M nokady üçin (1-nji surat) ugrukdyrylan $\overline{OM}$ kesimiň ululygyna M nokadyň koordinatasy diýilýär. Eger ol nokadyň koordinatasy x



1-nji surat

bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$x = OM \tag{2}$$

bolar. Şunlukda, $M(x)$ ýazgy x-iň M nokadyň koordinatasydygyny aňladýar.

Şeýlelikde, eger koordinatalar okunyň nokady berlen bolsa, onda şol nokadyň koordinatasy bolan sany görkezmek bolar, şeýle hem berlen san üçin koordinatalar okunda şol san koordinatasy bolan ýeke-täk bir nokady gurmak bolar. Diýmek, koordinatalar okunyň nokatlary bilen hakyky sanlaryň köplüginiň arasynda özara birbahaly degişlilik gurnalandyr. Şoňa görä hakyky sanlaryň köplügine san oky we her bir hakyky sana san okunyň nokady hem diýilýär.

Ugrukdyrylan kesimiň ululygyny we onuň uzynlygyny şol kesimiň başlangyjynyň we ahyrynyň koordinatalary arkaly aňlatmak bolar.

Eger okuň $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ iki nokady berlen bolsa, onda ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimiň ululygy we onuň uzynlygy degişlilikde

$$M_1M_2 = x_2 - x_1; \quad |M_1M_2| = |x_2 - x_1| \tag{3}$$

formulalar boýunça aňladylýar.

Hakykatdan-da, koordinatalar okunyň O, M_1, M_2 nokatlary üçin (1) formula esasynda

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2$$

deňligi we (2) formula esasynda $x_1 = OM_1$, $x_2 = OM_2$ deňlikleri ýazmak bolar. Olardan bolsa $M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$ deňlik gelip çykýar. Ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimiň uzynlygynyň onuň ululygynyň absolýut ululygyna deňligi üçin $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$ bolar.

M_1 we M_2 nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\rho(M_1, M_2)$ bilen hem belgilenýär. Şonuň üçin (3) formulalaryň ikinjisi

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|$$

görnüşde ýazylýar. $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ deňligiň esasynda koordinatalar okunyň iki nokadynyň arasyndaky uzaklygy tapmaklyk (3) formula esasynda olaryň koordinatalarynyň birinden beýlekisini aýryp, tapawudyň modulyny almaklygy aňladýar.

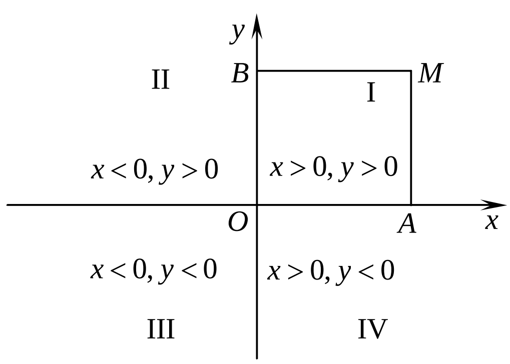
1-nji mysal. Berlen $M_1(2)$, $M_2(-7)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy we ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimiň ululygyny tapmaly.

◁ $x_1 = 2,\ x_2 = -7$ üçin (3) formulany ulanyp taparys:

$$\rho(M_1,\ M_2) = |-7-2| = |-9| = 9,\ \ M_1M_2 = -7-2 = -9\,.\ ▷$$

§ 1.2. Tekizlikde koordinatalar sistemasy

1.Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy. Umumy O başlangyjy we birmeňzeş masştab birligi bolan özara perpendikulýar Ox we Oy oklar tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny emele getirýär. Sol sistemadaky Ox oka absissa oky we Oy oka ordinata oky diýilýär. Ol oklaryň kesişme nokadyna koordinatalar başlangyjy, olaryň ýerleşýän tekizligine koordinatalar tekizligi diýilýär we Oxy bilen belgilenýär.Goý, seredilýän tekizlikde erkin M nokat berlen bolsun. Şol nokatdan Ox we Oy oklaryna degişlilikde MA we MB perpendikulýarlary geçireliň (2-nji surat). Şunlukda, perpendikulýarlaryň oklar bilen kesişmeginden alnan ugrukdyrylan $\overline{OA}$ we $\overline{OB}$ kesimleriň OA we OB ululyklaryna degişlilikde M nokadyň gönüburçly x we y koordinatalary diýilýär, ýagny $x = OA,\ y = OB$. M nokadyň x we y koordinatalaryna degişlilikde şol nokadyň absissasy we ordinatasy diýilýär. M nokadyň koordinatalarynyň x we y bolýandygy $M(x,\ y)$ ýazgyda aňladylýar. Şunlukda, ýaýyň içinde ilki onuň absissasy, ikinji ordinatasy görkezilýär. Absissa okunda ýerleşýän nokatlar üçin $y = 0$ we ordinata okunda

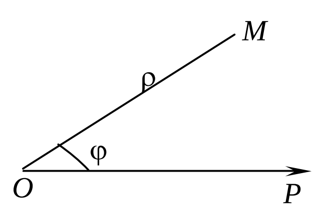


2-nji surat

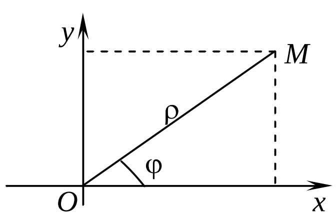
ýerleşýän nokatlar üçin $x=0$, koordinatalar başlangyjy üçin bolsa $x=0,\ y=0$. Koordinatalar oklary tekizligi dört böleklere bölýär. Olara çärýekler ýa-da kwadrantlar diýilýär. Olaryň nomerlenişi we şolarda ýerleşýän nokatlaryň koordinatalarynyň alamatlary 2-nji suratda görkezilendir.

Şeýlelikde, tekizligiň her bir M nokadyna onuň gönüburçly koordinatalary atlandyrýan tertipleşdirilen sanlaryň $(x,\ y)$ jübüti degişli we tersine, sanlaryň her bir $(x,\ y)$ jübütine tekizlikde koordinatalary şol sanlar bolan ýeke-täk nokat degişlidir. Beýle diýildigi tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügi bilen sanlaryň jübuti arasynda özära birbahaly degişliligi gurnaýar we ol geometrik meseleleri çözmekde algebraik usullary ulanmaklyga ýardam berýär.

2. Polýar koordinatalar sistemasy. Tekizlikde polýus atlandyrylýan O nokada we şol nokatdan çykýan hem-de polýar oky atlandyrylýan OP şöhlä seredeliň. Şeýle hem kesimleriň uzynlygyny ölçemek üçin masştab birligi we polýusyň töwereginde aýlawyň položitel ugry kesgitlenen hasap edeliň. Tekizligiň islendik M nokady bilen O polýusyň arasyndaky ρ uzaklyga şol nokadyň polýar radiusy, OM bilen gabat getirmek üçin OP polýar oky sagat diliniň hereketiniň garşysyna (položitel ugra) aýlamaly bolýan φ burça bolsa polýar burçy diýilýär (3-nji surat). Şunlukda, ρ we



3-nji surat



4-nji surat

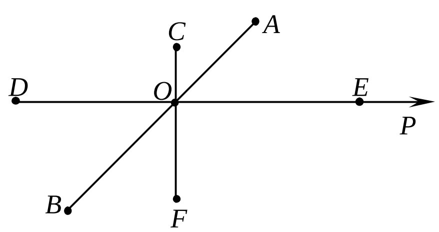
φ sanlara M nokadyň polýar koordinatalary diýilýär. ρ sana onuň birinji koordinatasy, φ sana - ikinji koordinatasy diýilýär we $M(\rho,\ \varphi)$ bilen belgilenýär. Polýus üçin $\rho=0$ bolup, ýöne φ kesgitlenmedikdir. Adatça ol koordinatalar $0\le\rho<+\infty;\ 0\le\varphi<2\pi$ çaklerde üýtgeýär hasap edilýär. Ýöne käbir hallarda 2π - den uly bolan burçlara, şeýle-de otrisatel, ýagny polýar okdan sagat diliniň hereketi boýunça alynýan bürçlara hem seretmeli bolýar.

Nokadyň polýar koordinatalary bilen gönüburçly koordinatalarynyň baglanyşygyny görkezmek üçin koordinatalar başlangyjy polýus bilen we položitel ýarym Ox oky polýar oky bilen gabat gelýän gönüburçly koordinatalar sistemasyna seredeliň (4-nji surat). Ol suratdan görnüsi ýaly M nokadyň gönüburçly $(x,\ y)$ koordinatalary bilen onuň $(\rho,\ \varphi)$ polýar koordinatalary şeýle baglanyşykdadyr:

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi\ . \tag{4}$$

Bu formula tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalaryny onuň polýar koordinatalary bilen aňladýar. Ol formuladan nokadyň polýar koordinatalaryny onuň dekart koordinatalary bilen aňladýan şeýle formula alynýar: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2-nji mysal. Polýar koordinatalarynda berlen $A\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(3,\ -\dfrac{3}{4}\pi\right)$, $C\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D(3,\ \pi)$, $E(4,\ 0)$, $F\left(2,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$ nokatlary gurmaly we koordinatalar başlangyjy polýus bilen we Ox okunyň položitel ugry polýar oky bilen gabat gelýän dekart koordinatalarynda ol nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.



5-nji surat

$\triangleleft$ Polýar koordinatalarynda A nokady gurmak üçin O polýusdan OP polýar okuna $\varphi = \pi/4$ burç boýunça şöhle geçireliň (5-nji surat) we şol şöhlede uzynlygy 2-ä deň bolan $[OA]$ kesimi guralyň. Şol kesimiň soňky ujy $A(2,\ \pi/4)$ nokat bolar. Beýleki $B,\ C,\ D,\ E,\ F$ nokatlar hem edil şolar ýaly gurulýar (5-nji surata seret). Berlen nokatlaryň dekart koordinatalaryny tapmak üçin (4) formuladan peýdalanarys. A nokat üçin

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\quad y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\quad A\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right).$$

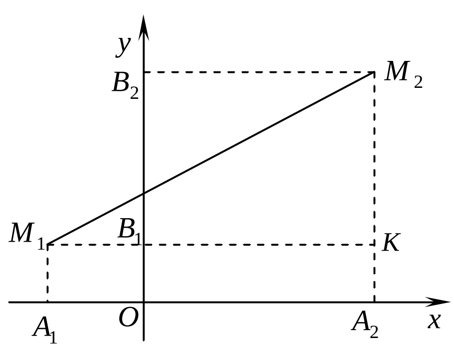
Edil şonuň ýaly beýleki nokatlaryň dekart koordinatalary tapylýar:

$$B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ C(0,\ 1),\ D(-3,\ 0),\ E(4,\ 0),\ F(0,\ -2).$$

§ 1. 3. Tekizlikde analitik geometriýanyň käbir meseleleri

1. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk. Tekizligiň işlndik $M_1(x_1,\ y_1)$ we $M_2(x_2,\ y_2)$ iki nokadynyň arasyndaky $\rho=\rho(M_1,\ M_2)$ uzaklyk

$$\rho=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{5}$$



6-njy surat

formula bilen kesgitlenýär.

Ony görkezmek üçin M_1 we M_2 nokatlardan Ox, Oy oklaryna perpendikulýarlary geçirip, olaryň esaslaryny $A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2$ bilen, perpendikulýarlaryň kesişme nokadyny K bilen belgiläliň (6-njy surat). Pifagoryň teoremasyny gönüburçly M_1KM_2 üćburçluga ulanyp,

$$\rho=\sqrt{M_1K^2+M_2K^2} \tag{6}$$

formulany alarys. Bu ýerde üćburçlugyň M_1K, M_2K katetleriniň $|M_1K|$, $|M_2K|$ uzynlyklary koordinata oklarynyň ugrukdyrylan $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ kesimleriniň uzynlyklary bilen gabat gelýär. Şoňa görä (3) formula boýunça

$$M_1K=A_1A_2=x_2-x_1,\quad M_2K=B_1B_2=y_2-y_1$$

deňlikleri we olaryň esasynda (6) deňlikden (5) formulany alarys.

M_1 nokadyň koordinatalaryň başlangyjy bilen gabat gelýän hususy haly üçin (5) formula

$$\rho(O,\ M_2)=\sqrt{x_2^2+y_2^2} \tag{7}$$

görňuşi alar.

3-nji mysal. $M_1(5,\ -2)$, $M_2(8,\ -6)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy we M_2 nokatdan koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklygy tapmaly.

$\lhd$ Berlen nokatlar üçin $x_1 = 5,\ y_1 = -2,\ x_2 = 8,\ y_2 = -6$ bolýandygy sebäpli, (5) we (7) formulalar esasynda taparys:

$$\rho(M_1,\ M_2) = \sqrt{(8-5)^2 + ((-6)-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$\rho(O,\ M_2) = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10.\ \rhd$$

2. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek. Tekizlikde dürli M_1 we M_2 nokatlary alyp (M_1 nokady birinji, M_2 nokady ikinji hasap edip) olar arkaly položitel ugry kesgitlenen göni çyzyk geçireliň we masştab birligini alalyň. Goý, M şol göni çyzygyň M_2 bilen gabat gelmeýän käbir nokady bolsun. Onda

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \tag{8}$$

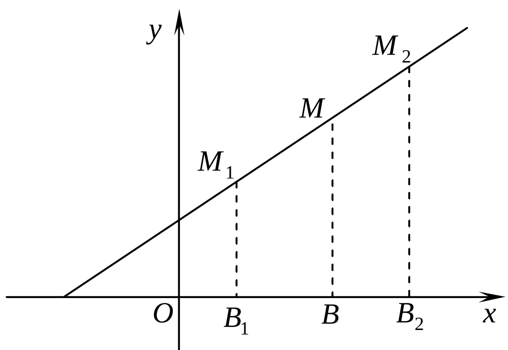
sana M nokadyň ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimi bölýän gatnaşygy diýilýär, bu ýerde $M_1M,\ MM_2$ görkezilen okuň ugrukdyrylan $\overline{M_1M},\ \overline{MM_2}$ kesimleriniň ululyklarydyr. Okuň položitel ugry başgaça kesgitlenende ýa-da masştab birligi başgaça alnanda hem (8) gatnaşyk üýtgemeýär, çünki iki halda hem sanawjy we maýdalawjy şol bir sana köpeldilýär. Eger M nokat M_1 we M_2 nokatlaryň arasynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda > 0$ bolar. Bu halda M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimi içinden bölýär diýilýär. Eger M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimiň daşynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda < 0$ bolar we bu halda M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimi daşyndan bölýär diýilýär. $\lambda = -1$ bolup bilmez, çünki tersine, ol deňlik ýerine ýetende $M_1M = -\ MM_2$ deňlik alnar we şonuň esasynda $M_1M + MM_2 = 0$ bolar, ýagny $M_1M_2 = 0$, ýöne ol deňlik M_1 we M_2 nokatlar gabat gelende bolup biler, ol bolsa şerte garşy gelýär. Eger M nokat M_1 nokat bilen gabat gelýän bolsa, onda $\lambda = 0$. Eger M nokat M_2 nokada ýakynlaşýan bolsa, onda $|\lambda|$ san artar.

Kesimi berlen gatnaşykda bölmek meselesi şeýle okalýar: M nokadyň $\overline{M_1M_2}$ kesimi böleklere belýän λ gatnaşygy berlen. Şol nokadyň koordinatalaryny tapmaly. Ol aşakdaky tassyklama esaslanýar.

Eger $M(x,\ y)$ nokat $M_1(x_1,\ y_1)$ we $M_2(x_2,\ y_2)$ nokatlar bilen çäklenen $\overline{M_1M_2}$ kesimi λ gatnaşykda bölýän bolsa, onda ol nokadyň koordinatalary

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{9}$$

formula boýunça kesgitlenýär.



7-nji surat

$\triangleleft$ $M_1,\ M,\ M_2$ nokatlardan Ox okuna perpendikulýar göýberip, olaryň esaslaryny $B_1,\ B,\ B_2$ bilen belgiläliň (7-nji surat). Onda parallel göni çyzyklaryň arasyndaky kesimleriň proporsionallyk häsiýeti boýunça (8) şertiň esasynda

$$\frac{B_1B}{BB_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$$

deňligi alarys. (3) formula esasynda alynýan $B_1B=x-x_1,\ BB_2=x_2-x$ deňlikleri ulanyp, bu deňligi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\quad x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2$$

görnüşde ýazmak bolar. Ondan bolsa $\lambda\neq -1$ şerti ulanyp, (9) formulanyň birinjisini alarys. Onuň ikinjisi edil şuňa meňzeşlikde ($M_1,\ M,\ M_2$ nokatlardan Oy okuna perpendikulýar geçirip) subut edilýär. $\triangleright$

Eger M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimiň ortasynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda=1$ bolar we bu halda (9) formula

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{10}$$

görnüsi alar.

4-nji mysal. Berlen $M_1(-1,\ -2),\quad M_2(3,\ 4)$ nokatlar boýunça M_1M_2 göni çyzykda M_1 nokada M_2 nokatdan üç esse ýakyn bolan we $\overline{M_1M_2}$ kesimiň daşynda ýerleşýän M nokady tapmaly.

$\lhd$ Şerte görä gözlenýän $M(x,\ y)$ nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimi $\lambda = -1/3$ gatnaşykda bölýär. Şoňa görä (9) formulany ulanyp we ol formulada $x_1 = -1,\ y_1 = -2,\ x_2 = 3,\ y_2 = 4$ göýup, M nokadyň koordinatalaryny taparys:

$$x = \frac{-1 + (-1/3)\cdot 3}{1 + (-1/3)} = -3, \quad y = \frac{-2 + (-1/3)\cdot 4}{1 + (-1/3)} = -5\,. \rhd$$

5-nji mysal. Tekizligiň $M_1(x_1,\ x_2),\ M_2(x_2,\ y_2), \ldots, M_n(x_n,\ y_n)$ nokatlarynda $m_1,\ m_2, \ldots, m_n$ massalar ýerleşdirilen. Ol massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

$\lhd$ Ilki $n = 2$ hala garalyň we $m_1,\ m_2$ massalar $M_1,\ M_2$ nokatlarda ýerleşýän bolsun. Onda mehanikanyň belli prinsipi esasynda ol massalaryň sistemasynyň $M(x,\ y)$ agyrlyk merkezi $\overline{M_1M_2}$ kesimi $m_1,\ m_2$ massalara ters proporsional böleklere, ýagny $\lambda = m_2 : m_1$ gatnaşykdaky böleklere bölýär. Şoňa görä (5) formula esasynda massalaryň sictemasynyň $M(x,\ y)$ agyrlyk merkeziiniň koordinatalary üçin

$$x = \frac{x_1 + (m_2/m_1)x_2}{1 + m_2/m_1}, \quad y = \frac{y_1 + (m_2/m_1)y_2}{1 + m_2/m_1};$$

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \tag{11}$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly $M_1(x_1,\ x_2),\ M_2(x_2,\ y_2),\ M_3(x_n,\ y_n)$ nokatlarda ýerleşen $m_1,\ m_2,\ m_3$ massalaryň sistemasynyň $M(x,\ y)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak bolar. Eger $m_1,\ m_2$ massalary şol sistemanyň $M'(x',\ y')$ agyrlyk merkezinde jemlesek, onda $M(x,\ y)$ nokadyň ýerleşýän ýeri üýtgemez. Indi $M(x,\ y)$ nokada M_3 nokatda ýerleşýän m_3 massa bilen $M'(x',\ y')$ nokatda jemlenen $m_1 + m_2$ massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkezi hökmünde gararys. Şunlukda, $M'(x',\ y')$ nokat $m_1,\ m_2$ massalaryň sistemasynyň hem agyrlyk merkezidir we $x',\ y'$ koordinatalar (11) formulanyň sag bölegi bilen kesgitlenýär. Şoňa görä $M(x,\ y)$ agyrlyk merkezi $\overline{M'M_3}$ kesimi $\lambda = m_3 : (m_1 + m_2)$ gatnaşykda bölýän nokat hökmünde (5) formulany ulanyp taparys:

$$x=\frac{x'+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_3x_3}{m_1+m_2}}{\dfrac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}},$$

$$y=\frac{\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_3y_3}{m_1+m_2}}{\dfrac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}},$$

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\ .$$

Matematiki induksiýadan peýdalanyp, $M_1,\ M_2,\dots,M_n$ nokatlarda ýerleşen $m_1,\ m_2,\ \dots,m_n$ massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak bolar:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\ .\ \triangleright$$

3. Üçburçlugyň meýdany. $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ depeleri bolan bir göni çyzykda ýatmaýan üçburçlugyň S meýdany (8-nji surat)

$$S=\frac{1}{2}\left|\,[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]\right| \qquad (12)$$

formula boýunça tapylýar.

$\triangleleft$ ABC üçburçlugyň meýdanyny

$$S_{ABC}=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}$$

deňlik boýunça tapmak bolar, bu ýerde S_{ADEC}, S_{BCEF}, S_{ABFD} trapesiýalaryň meýdanlarydyr. Ol meýdanlar bolsa şeýle tapylýar:

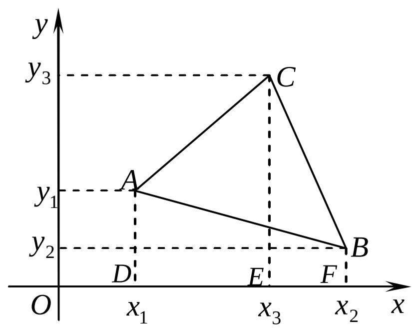
$$S_{ADEC}=|DE|\cdot\frac{|AD|+|CE|}{2}=\frac{(x_3-x_1)(y_3+y_1)}{2},$$

$$S_{BSEF}=|EF|\cdot\frac{|EC|+|BF|}{2}=\frac{(x_2-x_3)(y_2+y_3)}{2},$$

$$S_{ABFD}=|DF|\cdot\frac{|AD|+|BF|}{2}=\frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2},$$

olaryň bahalaryny formulada goup,

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_1)(y_3+y_1)\right]\right|$$



8-nji surat

formulany alarys. Ondan bolsa ýönekeý ögertmeler esasynda (12) formula gelip çykýar.Üçburçlugyň islendik başgaça ýerleşişi üçin hem (12) formula şonuň ýaly subut edilýär. ▷

6-njy mysal. Depeleri $A(1,\ 1)$, $B(6,\ 4)$, $C(8,\ 2)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň S meýdanyny tapmaly.

◁ Üçburçlugyň meýdanyny (12) formulany ulanyp taparys:

$$S=\frac{1}{2}\left[(6-1)(2-1)-(8-1)(4-1)\right]=\frac{1}{2}\left|\left[-16\right]\right|=8 \text{ (kw.birlik).} \ \triangleright$$

§ 1. 4. Tekizlikde koordinatalary baglanyşdyrýan deňlemeleriň geometrik manysy

1. Tekizlikde çyzygyň deňlemesi. Goý, gönüburçly dekart koordinatalarynda x we y üýtgeýänler

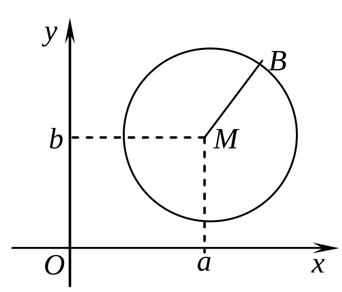
$$F(x,\ y)=0 \tag{13}$$

görnüşdäki deňligi kanagatlanyrýan bolsun. Eger bu deňlik x we y jübütleriň ähli bahalary üçin ýerine ýetse, onda oňa tozdestwo diýilýär, käbir bahalary üçin ýerine ýetende bolsa oňa deňleme diýilýär. Deňlemäniň mysallary: $x^2+y^2-25=0$, $2x+3y-5=0$, toždestwonyň mysallary: $(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$, $(x-y)-x+y=0$.

Eger L çyzykda ýerleşýän ähli nokatlaryň koordinatalary (13) deňlemäni kanagatlandyrýan bolup, şol çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň koordinatalary ol deňlemäni kanagatlandyrmasa, onda (13) deňlemä L çyzygyň deňlemesi diýilýär. Başgaça aýdylanda, L çyzyk (13) deňlemäni kanagatlandyrýan tekizligiň $(x,\ y)$ koordinatalarynyň köplügini aňladýar. Mysal üçin, $x-y=0$ deňleme göni çyzygy – birinji we üçünji koordinatalar burçlarynyň bissektrisasyny, $x^2+y^2-25=0$ deňleme merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy bäşe deň bolan töweregi kesgitleýär. Käbir deňleme bilen kesgitlenýän köplük bir nokady (mysal üçin, $x^2+y^2=0$ deňleme diňe bir $(0,\ 0)$ nokady), käbir deňleme bolsa boş köplügi kesgitleýär (mysal üçin, $x^2+y^2+1=0$ deňleme, çünki tekizligiň hiç bir nokady ol deňlemäni kanagatlandyrmaýar). Çyzygyň deňlemesiniň kesgitlemesi esasynda berlen nokadyň çyzykda ýatýanlygy aňsat görkezilýär. Eger nokadyň koordinatalary deňlemede goýulanda san deňlik (toždestwo) alynsa, onda nokat çyzykda ýatýar, eger-de toždestwo alynmasa, onda nokat çyzykda ýatmaýar.

7-nji mysal. Merkezi $M(a,\ b)$ nokatda we radiusy R bolan töweregiň deňlemesini düzmeli.

◁ Goý, $B=B(x,\ y)$ töweregiň erkin nokady bolsun (9-njy surat). Belli bolşy ýaly töweregiň – tekizligiň bir nokatdan (merkezden) deň daşlykda bolan nokatlarynyň köplügi bolýandygy esasynda we onuň islendik nokadynyň merkezden uzaklygynyň R sana deňligi üçin iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyny ulanyp,



9-njy surat

$$\rho(M,\ B)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

deňligi alarys. Ondan bolsa gözlenýän töweregiň deňlemrsini alarys:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \triangleright \tag{14}$$

Bu töweregiň islendik nokadynyň koordinatalary ol töweregiň deňlemesini kanagatlandyrýar. Eger $N(x,\ y)$ nokat şol towerekde ýatmaýan bolsa, onda $\rho(M,\ N)<R$ ýa-da $\rho(M,\ N)>R$ bolar we şonuň üçin onuň koordinatalary (14) deňlemäni kanagatlandyrmaýar. (14) deňlemeden $a=b=0$ bolanda alynýan

$$x^2+y^2=R^2 \tag{15}$$

deňlemä töweregiň kanonik deňlemesi diýilýär.

2. Çyzyklaryň kesişmesi. Goý, iki çyzyk

$$F(x,\ y)=0,\quad G(x,\ y)=0 \tag{16}$$

deňlemeler arkaly berlen bolsun. Olaryň kesişme nokadyny tapalyň. Olaryň kesişme nokady birinji çyzyga hem, ikinji çyzyga hem degişlidir, şonuň üçin onuň koordinatasy (16) deňlemeleriň birnji deňlemesini hem, ikinji deňlemesini hem kanagatlandyrýar, ýagny

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y)=0,\\ G(x,\ y)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (!7)$$

deňlemeler sistemasyny kanagatlandyrýar.Tersine, eger-de käbir $K(x_o,\ y_o)$ nokadyň $x_o,\ y_o$ koordinatalary (16) çyzyklaryň birinjisinde hem, ikinjisinde hem ýatýan bolsa, onda ol nokat şolaryň kesişme nokadydyr.

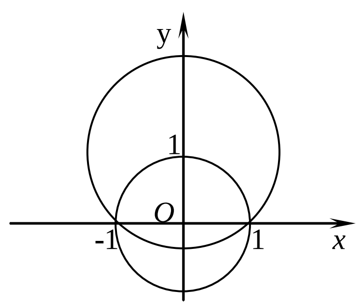
Şeýlelikde, çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmak üçin olaryň deňlemeleriniň sistemasyny çözmek zerurdyr. Şunlukda, hakyky kökleriň sany olaryň kesişme nokatlarynyň sanyna deňdir. Eger (17) sistemanyň hakyky kökleri ýok bolsa, onda (16) çyzyklar kesişýän däldir.

8-nji mysal. $x^2+y^2=1,\ \ x^2+(y-1)^2=2$ çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmaly (10-njy surat)..

◃ Kesişme nokatlary tapmak üçin

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2=1,\\ x^2+(y-1)^2=2 \end{aligned}\right\}$$

sistemany çözeliň. Ikinji deňlemeden birinjini aýryp alarys: $2y=0,\ \ y=0$. Birinji deňlemede $y=0$ goýup, $x_1=-1,\ \ x_2=1$ alarys. Şeýlelikde, çyzyklar $A(-1,\ 0),\ \ B(1,\ 0)$ nokatlarda kesişýärler. ▹



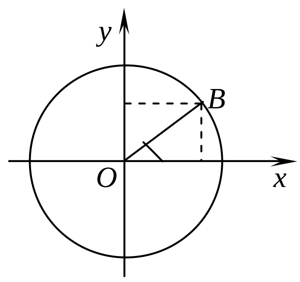
10-njy surat

3. Çyzygyň parametrik deňlemeleri. Goý, tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalarynda käbir çyzyk berlen bolsun. Käbir hallarda onuň erkin nokadynyň $(x,\ y)$ koordinatalaryny (parametr atlandyrylýän) üçünji t ululyk arkaly aňladyp bolýar:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \qquad (18)$$

Eger t parametr käbir (tükenikli ýa-da tükeniksiz) aralykda üýtgände (18) formuladan berlen çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalary alynýan bolup, çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň koordinatalary alynmaýan bolsa, onda (18) deňlemelere çyzygyň parametrik deňlemeleri diýilýär.

Mysal üçin, eger tekizlikde merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy R deň bolan töwerek berlen bolsa (11-nji surat), onda t parametr hökmünde töweregiň erkin $B = B(x,\ y)$ nokady üçin OB kesimiň Ox oky bilen emele getirýan burçuny almak bolar. Bu halda berlen töweregiň parametrik deňlemeleri

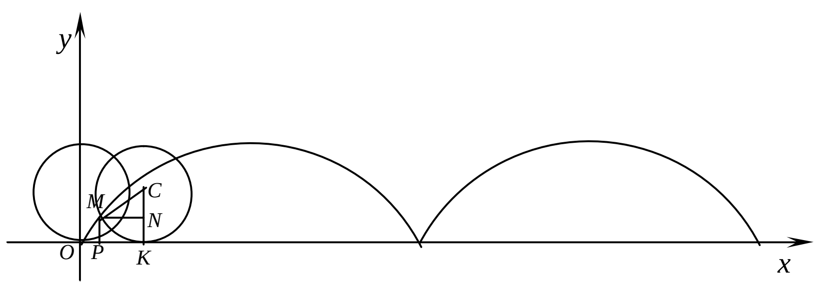


11-nji surat

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad (0 \le t < 2\pi) \qquad (19)$$

görnüşde bolar. Olardan t parametri ýoklap (olary kwadrata göterip we goşup), töweregiň (15) deňlemesini alarys.

Indi bolsa R radiusly töweregiň göni çyzyk boýunça togalananda onuň käbir bellenen nokadynyň çyzýan çyzygyna garalyň. Oňa sikloid diýilýär. Göni çyzygy gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň Ox oky hökmünde alalyň (12-nji surat). Goý, bellenen nokat töweregiň başlangyç ýagdaýynda koordinatalar başlagyjynda bolsun



12-nji surat

we töwerek t (MCN) burç öwrülenden soň ol $M = M(x,\ y)$ nokada barsyn.Onda suratdan görnüşi ýaly

$$x = OP = OK - PK, \quad y = MP = CK - CN, \quad CM = CK = R,$$

$OK = MK = Rt, \quad PK = MN = R\sin t, \quad CN = R\cos t$. Şonuň üçin hem

$$x = Rt - R\sin t, \quad y = R - R\cos t \text{ ýa-da}$$

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t) \qquad (20)$$

bolar. Bu deňlemelere sikloidiň parametrik deňlemeleri diýilýär.

G ö n ü k m el e r

1. Ugrukdyrylan $\overline{AB}$ kesimiň ululyklaryny tapmaly:
1) $A(2),\ B(5)$; 2) $A(3),\ B(-4)$; 3) $A(-6),\ B(8)$; 4) $A(-2),\ B(-7)$

2. Ugrukdyrylan $\overline{AB}$ kesimiň uzynlyklaryny tapmaly:
1) $A(3),\ B(8)$; 2) $A(4),\ B(-9)$; 3) $A(-5),\ B(1)$; 4) $A(-3),\ B(-8)$.

3. Belli bolan 1) $B(2),\ AB=5$; 2) $B(3),\ BA=-2$ 3) $B(5),\ BA=-3$ boýunça koordinatalar okunda A nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

4. Gönüburçly dekart koordinatalarynda nokatlary gurmaly:
$A(1,\ 4),\ B(2,\ -3),\ C(-3,\ 5),\ D(-1,\ -2),\ E(0,\ 1)\ \ F(5,\ 0)$.

5. Ox okuna görä $A(3,\ 4),\ B(-2,\ 5),\ C(-3,\ -3)$ nokatlara simmetrik nokatlary tapmaly.

6. Koordinatalar başlangyjyna göra $A(-1,\ 2),\ B(-3,\ -2),\ C(4,\ 7)$ nokatlara simmetrik nokatlary tapmaly.

7. Polýar koordinatalarynda $A(3,\ \pi/4),\ B(1,\ -\pi/4),\ C(4,\ 3\pi/4)$, $D(2,\ -3\pi/4)$ nokatlary gurmaly.

8. Polýar koordinatalarynda berlen $A(2,\ \pi/3),\ B(6,\ -\pi/2),\ C(5,\ \pi)$ nokatlaryň gönüburçly dekart koordinatalaryny tapmaly.

9. Dekart koordinatalarynda berlen $A(-1,\ 1),\ B(0,\ 2), C(3,\ 0),\ D(1,\ 1)$ nokatlaryň polýar koordinatalaryny tapmaly.

10. Berlen $A(4,\ 3),\ B(0,\ 0), C(-3,\ -4),\ D(6,\ 8)$ nokatlar boýunça
1) A we B; 2) A we C; 3) A we D; 4) B we C; 5) B we D nokatlaryň arasyndaky uzaklyklary hasaplamaly.

11. Iki çatyk depeleri $A(5,\ 6),\ B(9,\ 2)$ nokatlarda bolan kwadratyň meýdanyny hasaplamaly.

12. $A(0,\ 2),\ B(2,\ 0)$ depeleri berlen deňtaraply ABC üçburçlugyň C depesiniň koordinatalaryny tapmaly.

13. $A(-3,\ -5),\ B(5,\ 3)$ depeleri berlen deňtaraply ABC üçburçlugyň meýdanyny hasaplamaly.

14. $A(1,\ 1),\ B(1,\ 6),\ C(5,\ 9)$ depeleri berlen $ABCD$ rombuň meýdanyny hasaplamaly.

15. $[AB]$ kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapmaly: 1) $A(3,\ -7)$, $B(5,\ 9)$; 2) $A(-5,\ -1),\ B(-3,\ -1)$; 3) $A(2,\ 6),\ B(-8,\ -12)$.

16. Depeleri $A(-4,\ 2),\ B(6,\ 8),\ C(4,\ -10)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň medianalarynyň esaslaryny tapmaly.

17. Bir ujy $A(4,\ 5)$ nokatda bolan $[AB]$ kesimiň ortasy $C(-3,\ 7)$ nokatda ýerleşýär. Kesimiň beýleki ujyny tapmaly.

18. Berlen $A(1,\ 2)$ we $B(-1,\ 4)$ nokatlar boýunça $[AB]$ kesimi A nokatdan başlap 1:2 gatnaşykda bölýän C nokady tapmaly.

19. $[AB]$ kesim A nokatdan başlap $C(4,\ 1)$ nokat bilen 1:4 gatnaşykda bölünen. A nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

20. ABC üçburçluklaryň meýdanlaryny tapmaly:
1) $A(-2,\ -2),\ B(6,\ 2),\ C(4,\ 8)$; 2) $A(-1,\ 5),\ B(4,\ 8),\ C(6,\ 2)$.

21. Üçburçlugyň $A(3,\ 5)$, $B(6,\ -2)$ depeleri berlen. ABC üçburçlugyň meýdany 15-e deň bolar ýaly Oy okunda C nokady tapmaly.

J o g a p l a r

1. 1) 3; 2) -7; 3) 14; 4) -5. **2.** 1) 5; 2) 13; 3) 6; 4) 5. **3.** 1) $A(-3)$; 2) $A(1)$: 3) $A(8)$. **5.** 1) $A_1(3,\ -4),\ B_1(-2,\ -5), C_1(-3,\ 3)$. **6.** 1) $A_1(1,\ -2),\ B_1(3,\ 2), C_1(-4,\ -7)$. **8.** $A(1,\ \sqrt{3}),\ B(0,\ -6), C(-5,\ 0)$. **9.** $A(\sqrt{2},\ 3\pi/4),\ B(2,\ \pi/2),\ C(3,\ 0),\ D(\sqrt{2},\ \pi/4)$. **10.** 1) 5; 2) $7\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) 5; 5) 10. **11.** 32. **12.** $C_1(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ C_2(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$. **13.** $32\sqrt{3}$. **14.** 20. **15.** 1) (4, 1); 2) $(-4,\ 0)$; 3) $(-3,\ -3)$. **16.** 1) (1, 5); 2) (0, -4); 3) (5, -1). **17.** $B(-10,\ 9)$. **18.** $C(1/3,\ 8/3)$. **19.** $A(3,\ 0)$. **20.** 1) 24; 2) 18. **21.** $C_1(0,\ 2),\ C_2(0,\ 22)$.

I. 2. BIRINJI WE IKINJI TERTIPLI ALGEBRAIK CYZYKLAR

§ 2.1. Tekizlikde göni çyzyklar

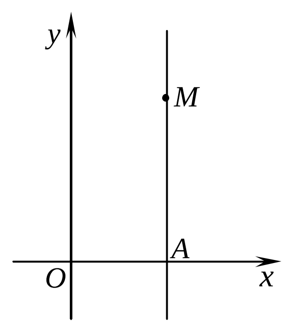
1. Göni çyzyklaryň dürli görnüşleri. Tekislikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä göni çyzyklary dürli usullar boýunça berip bolar. Şoňa baglylykda olar dürli görnüşdäki deňlemeler arkaly aňladylýar. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň Oy okuna parallel bolan we onuň Ox okuny $A(a,\ 0)$ nokatda kesýän göni çyzyga seredeleiň (1-nji surat). Ol göni çyzygyň deňlemesi

$$x = a \qquad (1)$$

görnüşdäki deňlemedir.Hakykatdan-da,ol göni çyzygyň islendik $M(x,\ y)$ nokadynyň x koordinatasy (1) deňlemäni kanagatlandyrýar we ol göni çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň x koordinatasy ony kanagatlandyrmaýar. Eger $a = 0$ bolsa, onda göni çyzyk Oy oky bilen gabat gelýär we onuň deňlemesi

$$x = 0 \qquad (2)$$

bolar.



1-nji surat

Orta mekdebiň matematikasyndan belli bolşy ýaly Oy okuny kesýän göni çyzygyň deňlemesi

$$y = kx + b \qquad (3)$$

görnüşdedir, bu ýerde $k = tg\alpha$ onuň burç koeffisiýenti bolup, α - göni çyzyk bilen Ox okunyň arasyndaky burçdyr, $b = OB$ bolsa göni çyzygyň Oy okunda kesip alýan ugrukdurulan $\overline{OB}$ kesiminiň ululygydyr. (3) deňlemä göni çyzygyň **burç koeffisiýentli** deňlemesi diýilýär. Eger göni çyzyk Ox okuna parallel bolsa, ýagny $\alpha = 0$, $k = 0$, onda (3) deňleme

$$y = b$$

görnüsi alar. Ox okunyň ähli nokatlarynyň y koordinatasy nola deňdir. Şoňa görä-de Ox okunyň deňlemesi

$$y = 0$$

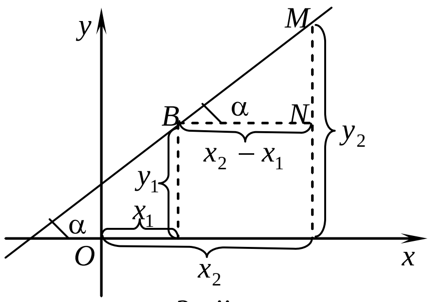
bolar. (3) göni çyzygyň burç koeffisiýentini şol göni çyzykda ýatýan iki dürli $B(x_1,\ y_1)$, $M(x_2,\ y_2)$ nokatlaryň koordinatalary arkaly aňlatmak bolar. (3) göni çyzykda ýatýandygy üçin olaryň koordinatalary şol deňlemäni kanagatlandyrýar, ýagny

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b\,.$$

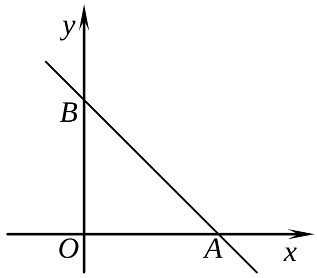
Olaryň birinjisini ikinjiden aýryp, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ deňligi, ondan bolsa

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{4}$$

deňligi alarys, çünki göni çyzygyň Oy okuny kesýändigi üçin $x_1 \neq x_2$.



2-nji surat



3-nji surat

Goý, göni çyzygyň k burç koeffisiýenti we onuň $N(x_1,\ y_1)$ nokady berlen bolsun. Onuň deňlemesini düzeliň. Goňi çyzygyň erkin $M(x,\ y)$ nokadyny belläp, (4) formula boýunça $x_2 = x,\ \ y_2 = y$ alyp, onuň burç koeffisiýentini tapalyň: $k = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$. Bu deňlikden bolsa

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{5}$$

gelip çykýar. Bu deňlemä **berlen ugur boýunça berlen nokat arkaly geçýän** göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

Tekizlikde berlen nokat (dessäniň merkezi) arkaly geçýän ähli göni çyzyklaryň köplügine göni çyzyklaryň **dessesi** diýilýär. (5) görnüşdäki deňlemede k islendik hakyky san bahany alýan bolsun. Şonuň esasynda $k = k_1$ alyp, göni çyzygyň käbir deňlemesini, $k = k_2$ alyp, göni çyzygyň başga deňlemesini we ş. m. göni çyzygyň dürli deňlemelerini alarys. Şeýlelikde, (5) görnüşdäki deňleme $N(x_1,\ y_1)$ nokat arkaly geçýän (Oy okuna parallel bolmadyk) ähli göni çyzyklaryň köplügini kesgitleýär. Şoňa görä merkezi $N(x_1,\ y_1)$ nokat bolan göni çyzyklaryň dessesi

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
deňleme boýunça kesgitlenýär.

Indi bolsa dürli iki $B(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzeliň.Göni çyzygyň $B(x_1, y_1)$ nokat arkaly geçýändigi sebäpli, (4) formula esasynda (5) deňleme

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{ýa-da} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6)$$

görnüşde ýazylar.Bu deňlemä **berlen iki nokat arkaly geçýän** göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

Deň gatnaşyklary t bilen belgiläp alarys:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t, \quad y - y_1 = (y_2 - y_1)t, \quad x - x_1 = (x_2 - x_1)t\,.$$

Olardan bolsa

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad (7)$$

deňlemeler gelip çykýar. (7) deňliklerden $t = 0$ bolanda $B(x_1, y_1)$ nokadyň, $t = 1$ bolanda $N(x_2, y_2)$ nokadyň $0 < t < 1$ bolanda bolsa $[BN]$ kesimiň islendik içki nokadynyň koordinatalary alynýar. Şunlukda, t ululyk tükeniksiz $(-\infty, +\infty)$ aralykda üýtgände $M(x, y)$ nokat seredilýän göni çyzygy çyzýar. (7) deňlemelere göni çyzygyň **parametrik** deňlemeleri diýilýär.

Goý, (AB) göni çýzyk koordinat oklarynda ululyklary a we b bolan kesimleri kesip alýan bolsun, ýagny $OA = a$, $OB = b$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ (3-nji surat). (6) deňlemäni $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$ üçin ulanyp,

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{-a}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (8)$$

deňlemäni alarys. Oňa **koordinata oklarynyň kesimlerindäki** göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

2. Göni çyzygyň umumy deňlemesi. x we y üýtgeýänlere görä birinji tertipli

$$Ax + By + C = 0 \qquad (9)$$

görnüşdäki deňlemä birinji tertipli umumy deňleme diýilýär, bu ýerde A we B koeffisiýentleriň ikisi birwagtda nola deň däldir, ýagny

$$A^2 + B^2 \neq 0\,. \qquad (10)$$

Birinji tertipli deňleme bilen nähili çyzygyň kesgitlenýändigine aşakdaky teorema jogap berýär.

1-nji teorema.Tekizlikde her bir göni çyzyk bellenen gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda birinji tertipli deňleme bilen kesgitlenýär we tersine, dekart koordinatalaryna görä birinji tertipli her bir deňleme tekizlikde käbir göni çyzygy kesgitleýär.

$\triangleleft$ Eger berlen göni çyzyk Oy okuny kesýan bolsa, onda onuň deňlemesi $y = kx + b$ ýa-da $kx - y + b = 0$ bolar.. Eger göni çyzyk Oy okuna parallel bolsa, onda ol $x = a$ ýa-da $x - a = 0$ deňleme bilen kesgitlenýär. Bu deňlemeleriň her birisi (9) görnüşdäki dekart koordinatalaryna görä birinji tertipli deňlemedir

Goý, birinji tertipli (9) deňleme berlen bosun. Eger $B \neq 0$ bolsa, onda ol deňlemäni y görä çözüp,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

deňlemäni alarys we ony $k = -A/B,\ b = -C/B$ begileme girizip,

$$y = kx + b$$

görnüşde ýazmak bolar. Ol deňleme bolsa göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesidir. Eger $B = 0$ bolsa, onda (10) şertiň esasynda $A \neq 0$ bolar. Şonuň üçin (9) deňlemäni $x = a$ $(a = -C/A)$ görnüşde ýazmak bolar. Ol bolsa Oy okuna parallel bolan öni çyzygyň deňlemesidir. Şeýlelikde, (9) deňleme tekizlikde käbir göni çyzygy kesgitleýär. $\triangleright$

Dekart koordinatalaryna görä birinji tertipli algebraik deňlemeler bilen kesgitlenýän çyzyklara biribji tertipli çyzyklar diýilýär. Subut edilen 1-nji teorema birinji tertipli çyzyklaryň göni çyzyklardygyny aňladýar.

(9) görnüşdäki deňlemä göni çyzygyň umumy deňlemesi diýilýär.

3. Iki göni çyzygyň arasyndaky burç. Hiç biri Oy okuna parallel bolmadyk iki göni çyzyga seredeliň. Bu halda göni çyzyklar burç koeffisiýentli deňlemeler arkaly berlip bilner:

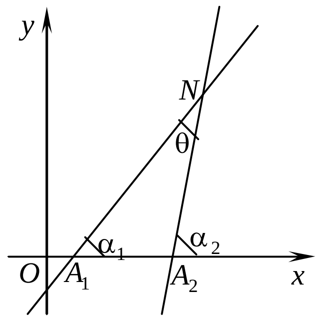
$$y = k_1 x + b_1, \quad k_1 = tg\alpha_1, \tag{11}$$

$$y = k_2 x + b_2, \quad k_2 = tg\alpha_2. \tag{12}$$

(Şerte görä $\alpha_1 \neq 90^\circ$, $\alpha_2 \neq 90^\circ$, $k_1 \neq \infty$, $k_2 \neq \infty$). Ikinji göni çýzygyň birinji göni çyzyga gyşarma bürçuny, ýagny kesişme nokadyň töwereginde birinji göni çyzygyň ikinji bilen gabat gelmegi üçin aýlanma burçuny θ bilen belgiläliň. k_1 we k_2 belli bolanda ol burçuň tapylyş formulasyny getirip çykaralyň. A_1A_2N üçburçlukdan (4-nji surat) $\alpha_1+\theta=\alpha_2$, $\theta=\alpha_2-\alpha_1$ deňlikler alynýar. Şonuň üçin hem

$$tg\theta = tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (13)$$

Eger göni çyzyklaryň birisi (mysal üçin ikinjisi) Oy okuna parallel bolsa, onda $\alpha_2=\pi/2$ we şoňa görä $\theta=\pi/2-\alpha_1$ bolar. Eger göni çyzyklar özara parallel bolsalar, onda $\alpha_1=\alpha_2$, $tg\alpha_1=tg\alpha_2$ bolar, ýagny $k_1=k_2$ deňlik ýerine ýetýär. Eger tersine, $k_1=k_2$ bolsa, onda $tg\alpha_1=tg\alpha_2$ bolar we burçlaryň 0 we π- iň arasynda bolýandygy üçin ol deňlikden $\alpha_1=\alpha_2$ deňlik gelip çykýar, ýagny göni çyzyklar paralleldir. Şeýlelikde, $k_1=k_2$ deňlik (11) we (12) göni çyzyklaryň parallelliginiň zerur we ýeterlik şertidir.



4-nji surat

Goý, (11) we (12) deňlikler boýunça berlen göni çyzyklar perpendikulýar bolsun, ýagny $\theta=\pi/2$. Bu halda $ctg\theta=0$ bolar we şonuň esasynda

$$ctg\theta=\frac{1}{tg\theta}=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0, \quad 1+k_1k_2=0$$

deňlik alynýar we ondan

$$k_1=-\frac{1}{k_2} \qquad (14)$$

deňlik gelip çykýar. Tersine, eger (14) şert ýerine ýetse, onda

$$1+k_1k_2=0, \quad ctg\theta=0, \quad \theta=\frac{\pi}{2},$$

ýagny göni çyzyklar özära perpendikulýar. Şeýlelikde, (14) deňlik (11) we (12) göni çyzyklaryň perpendikulýarlygynyň zerur we ýeterlik şertidir. Ol şert başgaça şeýle okalýar: perpendikulýar göni çyzyklaryň burç koeffisiýentleri ululyklary boýunça özara ters we alamatlary garşylykly.

Eger göni çyzyklar umumy görnüşde

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad (15)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (16)$$

deňlemeler bilen berlen bolsa, onda olaryň arasyndaky burçuň tangensi

$$tg\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \qquad (17)$$

formula boýunça kesgitlenýär. Hakykatdan-da, eger (15) we (16) deňlemeleri

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1},$$

$$y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

görnüşlerde ýazyp, olary degişlilikde (11) we (12) deňlemeler bilen deňeşdirsek, onda burç koeffisiýentler üçin

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2} \qquad (18)$$

deňlikleri alarys. Olary (13) formulada goýup we alnan deňligi özgerdip, (17) formulany alarys.

(18) deňlikleriň esasynda (15) we (16) görnüşdäki göni çyzyklaryň parallelliginiň zerur we ýeterlik şertleri

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

deňlik ýa-da

$$A_1 = A_2t, \quad B_1 = B_2t$$

deňlikler bilen aňladylýar, perpendikulýarlyk şerti bolsa

$$-\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{A_2} \text{ ýa-da } A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

deňlik bilen aňladylýär. Bu şertleriň esasynda

$$Ax + By + C = 0, \quad Bx - Ay + C = 0$$

deňlikler boýunça berlen göni çyzyklar özara perpendikulýardyr.

1-nji mysal. Umumy görnüşde berlen

$$3x - 5y + 15 = 0, \quad 8x - 2y - 1 = 0$$

göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmaly.

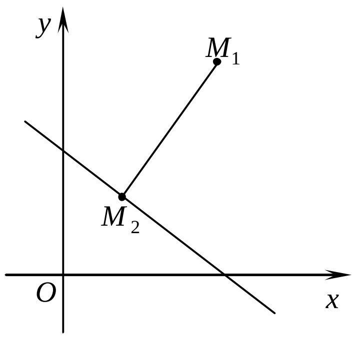
◁ Şerte görä $A_1 = 3, \quad B_1 = -5, \; A_2 = 8, \quad B_2 = -2$.Şoňa görä-de (17) formula esasunda taparys:

$$tg\theta = \frac{3\cdot(-2)-8(-5)}{3\cdot 8+(-2)\cdot(-2)} = \frac{34}{34} = 1, \quad \theta = 45^\circ . \triangleright$$

4. Nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk. Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalarynda $M_1(x_1,\ y_1)$ nokat we deňlemesi $Ax+By+C=0$ umumy görnüşde bolan göni çyzyk berlen bolsun (5-nji surat). $M_1(x_1,\ y_1)$ nokatdan şol göni çyzyga çenli uzaklygyň formulasyny getirip çykaralyň. Ol uzaklyk M_1 nokatdan göni çyzyga inderilen perpendikulýaryň kesiminiň uzynlygyna deňdir.Eger ol perpendikulýaryň esasy $M_2(x_2,\ y_2)$ nokat bolsa, onda gözlenýän uzaklyk

$$d = |M_1M_2| \qquad (19)$$

formula boýunça aňladylýar. Umumy görnüşde berlen göni çyzygyň burç koeffisiýenti $k=-A/B$. Şonuň üçin oňa perpendikulýar bolan M_1M_2 göni çyzygyň burç koeffisiýenti $k_1 = B/A$ bolar. Belli bolşy ýaly $M_1(x_1,\ y_1)$ we $M_2(x_2,\ y_2)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň bürç koeffisiýenti (4) formula boýunça kesgitlenýär. Şonuň esasynda



5-nji surat

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{B}{A}$$

deňligi ýazmak bolar. Deň gatnaşyklary t bilen belgiläp,

$$\frac{y_2-y_1}{B} = \frac{x_2-x_1}{A} = t, \quad x_2 = x_1 + At, \quad y_2 = y_1 + Bt$$

deňlikleri alarys. Onda $M_1(x_1,\ y_1)$ we $M_2(x_1+At,\ y_1+Bt)$ nokatlar üçin (19) formula esasynda

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(At)^2+(Bt)^2} = \sqrt{A^2+B^2}\,|t| \qquad (20)$$

bolar. Indi t parametri kesgitläliň. M_2 nokadyň berlen göni çyzykda ýatýandygy üçin onuň koordinatalary şol deňlemäni kanagatlandyrýar:

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \text{ ýa-da } A(x_1+At)+B(y_1+Bt)+C=0 .$$

Ondan bolsa $Ax_1 + By_1 + C + \left(A^2 + B^2\right)t = 0$ deňlik gelip çýkýar. Bu deňlikden bolsa $A^2 + B^2 \neq 0$ şertiň esasynda

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2} \qquad (21)$$

deňlik alynýar. (20) we (21) formulalaryň esasynda $M_1(x_1,\ y_1)$ nokatdan $Ax + By + C = 0$ göni çyzyga çenli uzaklygy tapmak üçin

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (22)$$

formula gelip çykýar.

2-nji mysal. $M(-6,\ 3)$ nokatdan $3x - 4y + 15 = 0$ deňleme boýunça berlen göni çýzyga çenli uzaklygy tapmaly.

◁ (22) formula esasynda

$$d = \frac{|3\cdot(-6) - 4\cdot 3 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-18 - 13 + 15|}{5} = \frac{|-15|}{5} = 3\,. ▷$$

§ 2.2. Töweregiň umumy deňlemesi

Tekizlikde x we y dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (23)$$

algebraik deňlemä seredeliň, bu ýerde $A,\ B,\ C$ koeffisiýentler birwagtda nola deň däldir, ýagny

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\,. \qquad (24)$$

§ 1. 4 -de töweregiň deňlemesiniň (14) formula boýunça aňladylyşyny görüpdik. Eger şol formulada ýaýlary açsak, onda ol

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = 0$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni (23) deňleme bilen deňeşdirip, $A = C = 1,\ B = 0$ bolýandygyny görýäris. Şondan ugur alyp, (23) deňlemäniň $A = C,\ B = 0$ bolan halyna garalyň:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (25)$$

Bu deňlemäniň nähili çyzygy kesgitleýändigi aşakdaky teoremadan görünýär.

2-nji teorema. Eger x we y dekart koordinatalaryna görä (25) deňleme tekizlikde käbir çyzygy kesgitleýän bolsa, onda ol töwerekdir.

$\lhd$ (25) deňlemäni agzalaýyn A $(A \neq 0)$ sana bölüp,

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (26)$$

deňligi alarys, bu ýerde $d = D/A$, $e = E/A$, $f = F/A$. Bu deňlemäniň çep böleginde doly kwadratlary almak üçin ony özgerdeliň:

$$\left(x^2 + 2\frac{d}{2}x + \frac{d^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{e}{2}y + \frac{e^2}{4}\right) + f - \frac{d^2}{4} - \frac{e^2}{4} = 0,$$

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f\,. \qquad (27)$$

Bu deňligiň sag bölegindäki algebraik jem položitel, otrisatel we nola deň bolup biler. Olaryň hersini aýratynlykda derňäliň.

1. Eger $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f > 0$ bolsa, onda $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f = R^2$, $\frac{d}{2} = -a$, $\frac{e}{2} = -b$ belgilemeleri girizip,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (28)$$

deňlemäni alarys we ol R radiusly we merkezi $M(a,\ b)$ nokatda bolan töweregi kesgitleýär.

2. Eger $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f = 0$ bolsa, onda (27) deňleme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$$

görnüşi alar.Ol deňlemäni koordinatalary $x = a,\ \ y = b$ $\left(a = -\frac{d}{2},\ b = -\frac{e}{2}\right)$ bolan ýeke-täk nokat kanagatlandyrýar.

3. $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f < 0$ bolsa, onda $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f = -R^2$ belgileme girizip, (27) deňlemäni

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = -R^2$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu deňligi tekizligiň hiç bir nokady kanagatlandyrmaýar, şoňa görä ol hiç bir çyzygy kesgitlemeýär.

Şeýlelikde, (25) deňleme ýa hiç bir deňlemäni kesgitlemeýär, ýa bir nokady kesgitleýär, ýa-da töweregi kesgitleýär. $\rhd$

3-nji mysal. $4x^2+4y^2-8x+16y+19=0$ deňleme bilen kesgitlenýän töweregiň merkezini we radiusyny tapmaly.

$\lhd$ Berlen deňlemäni özgerdeliň:

$$x^2+y^2-2x+4y+\frac{19}{4}=0,\ \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+4y+4\right)-1-4+\frac{19}{4}=0,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}.$$

Bu deňlemäni (28) deňleme bilen deňeşdirip, töweregiň merkeziniň $M(1,\ -2)$ nokat we radiusynyň $R=1/2$ bolýandygyny görýäris. $\rhd$

4-nji mysal. $x^2+y^2+6x-8y+25=0$ deňlemäniň tekizlikde nähili nokatlaryň köplügini kesgitleýändigini anyklamaly.

$\lhd$ Berlen deňlemäni özgerdip, $(x+3)^2+(y-4)^2=0$ görnüşde ýazmak bolar. Bu deňlemäni koordinatalary $x=-3,\ y=4$ bolan ýeke-täk nokat kanagatlandyrýar. Şonuň üçin hem berlen deňleme ýeke-täk $M(-3,\ 4)$ nokady kesgitleýär. $\rhd$

§ 2.3. Ellips

1. Ellipsiň kesgitlenişi we onuň deňlemesi. Tekizlikde berlen iki nokatlara (fokuslara) çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik bolan (we $2a$ sana deň alynýan) tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügine ellips diýilýär.

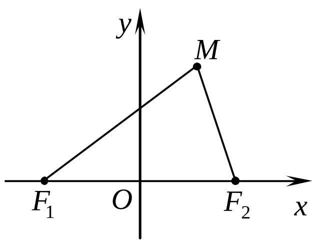
Fokuslary F_1 we F_2, olaryň arasyndaky uzaklygy $2c$ bilen belgiläliň, ýagny

$$|F_1F_2|=2c. \tag{29}$$

Eger $M(x,\ y)$ ellipsiň erkin nokady we $|F_1M|,\ |F_2M|$ şol nokatdan fokuslara çenli uzaklyklar bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$|F_1M|+|F_2M|=2a \tag{30}$$

deňlik ýerine ýetýär. F_1MF_2 üçburçlukdan görnüşi ýaly (6-njy surat)



6-njy surat

$|F_1M|+|F_2M|>|F_1F_2|$ deňsizlik ýerine ýetýär. Ol deňsizlik (29) we (30) deňlikler esasynda şeýle görnüşi alýar:

$$2a>2c,\quad a>c. \tag{31}$$

Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä ellipsiň deňlemesini düzeliň.Onuň üçin Ox okuny fokuslar arkaly geçer ýaly we položitel ugry F_1-den F_2 tarapa bolar ýaly alalyň (6-njy surat). Koordinatalar başlangyjy $[F_1F_2]$ kesimiň ortasynda alalyň, onda $F_1 = F_1(-c,\ 0)$, $F_2 = F_2(c,\ 0)$ bolar. M nokadyň koordinatalaryny $x,\ y$ bilen belgiläliň.

Iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy esasynda

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{32}$$

Bu aňlatmalary (30) deňlikde goýup, şeýle deňligi alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,. \tag{33}$$

Alnan deňleme ellipsiň deňlemesidir, çünki ony diňe ellipsiň islendik nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Ony ýönekeýleşdirmek üçin kökleriň birini deňligiň sag bölegine geçirip, alnan deňligi kwadrata götereliň we meňzeş agzalary toplalyň:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx, \quad a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Ahyrky deňlemäni kwadrata göterip alarys:

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right). \tag{34}$$

(31) deňsizligiň esasynda $a^2 - c^2 > 0$ we şonuň üçin $b^2 = a^2 - c^2$ belgileme girizmek bolar.Şonuň esasynda (34) deňlik $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ görnüşi alar. Ol deňlikden bolsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{35}$$

deňlik alynýar. Şeýlelikde, ellipsiň islendik nokadynyň koordinatalary (35) deňlemäni kanagatlandyrýar. Tersine hem dogrudygyny, ýagny koordinatalary (35) deňlemäni kanagatlandyrýan M nokadyň ellipsde ýatýandygyny we onuň üçin (30) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň. (35) deňlikden y^2 tapyp: $y^2 = b^2\left(1 - x^2/a^2\right)$ we ony (32) deňlikleriň birinjisinde goýup hem-de $b^2 = a^2 - c^2$ deňlikden peýdalanyp alarys:

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2} = \pm\left(a + \frac{c}{a}x\right),$$

bu ýerde alamat deňligiň sag bölegi položitel bolar ýaly saýlanyp alynýar. $c < a$ we (35) esasynda $|x| \le a$ bolany üçin goşmak alamatyny almak zerurdyr, ýagny

$$|F_1M| = a + \frac{c}{a}x. \tag{36}$$

Edil şonuň ýaly (32) deňligiň ikinjisinden

$$|F_2M| = a - \frac{c}{a}x \tag{37}$$

Ahyrky iki deňliklerden bolsa (30) deňlik gelip çykýar we ol M nokadyň ellipsde ýatýandygyny aňladýar. Şeýlelikde, (35) deňleme ellipsiň deňlemesidir. Oňa ellipsiň kanonik deňlemesi diýilýär. Onuň ikinji derejeli deňlemeligi ücin ellips ikinji tertipli çyzykdyr.

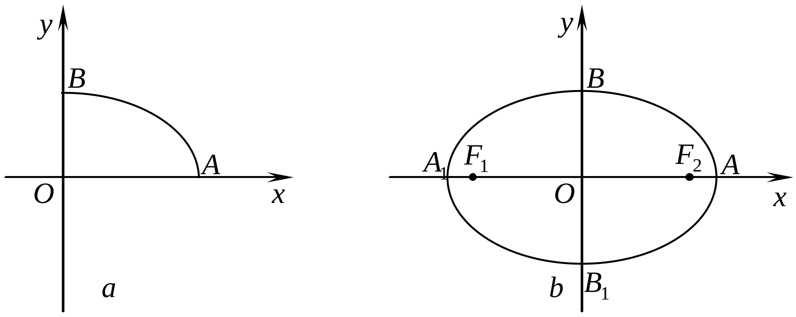
2. Ellipsiň formasynyň derňelişi. Ellipsiň (35) deňlemesiniň esasynda $x^2 \le a^2$, $y^2 \le b^2$, ýagny $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$.Bu deňsizlikler ellipsiň tutuşlygyna esasy $2a$ we beýikligi $2b$ bolan gönüburçlukda ýerleşýändigini we onuň merkeziniň koordinatalar başlangyjyndadygyny aňladýar. (35) deňlemä x-iň diňe ikinji (jübüt) derejesiniň girýändigi üçin ellips Oy okuna simmetrikdir. Hakykatdan-da, eger $M_1(x_1,\ y_1)$ nokat ellipsde ýatýan bolsa, onda $M_2(-x_1,\ y_1)$ nokat hem ellipsde ýatýandyr, çünki

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

ol bolsa M_1 we M_2 nokatlaryň Oy okuna görä simmetrikdigini aňladýar. Şonuň ýaly hem ellips Ox okuna görä-de simmetrikdir. Ellipsiň koordinata oklaryna görä simmetrikligi esasynda onuň formasyny diňe birinji çärýekde derňemek ýeterlikdir. (35) deňlemeden y-i tapalyň:

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{38}$$

Olaryň birinjisi ellipsiň Ox okundan aşakda ýerleşýän ýarysyny, ikinjisi bolsa şol okdan ýokarda ýerleşýän beýleki ýarsyny kesgitleýär. Bu deňlemeleriň ikinjisinden görnüşi ýaly, x 0-dan a çenli artanda y b-den 0-a çenli kemelýär. Şunlukda, $x=0$ bolanda $y=b$ bolar we $B(0,\ b)$ nokat, $x=a$ bolanda $y=0$ bolar we $A(a,\ 0)$ nokat alynýar we şonuň esasynda ellipsiň birinji çärýekde ýerleşýän bölegi 7-nji a suratdaky ýaly, tutuş ellipsiň özi bolsa 7-nji b suratdaky ýaly bolýar.



7-nji surat

Ellipsiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryna (7-nji suratdaky $A_1,\ A,\ B_1\ ,B$ nokatlara) ellipsiň depeleri diýilýär. Ellipsiň simmetriýa oklaryna (Ox we Oy oklara) onuň oklary, ellipsiň oklarynyň kesişme nokadyna ellipsiň merkezi diýilýär. $A_1A=2a,\ B_1B=2b$ kesimlere hem ellipsiň oklary diýilýär. Şoňa görä $OA=a,\ OB=b$ kesimlere ellipsiň ýarym oklary diýilýär. Fokuslar Ox okunda ýerleşýän halda $a>b$ bolar. Şonuň üçin hem $OA=a$ kesime uly ýarym ok, $OB=b$ kesime bolsa kiçi ýarym ok diýilýär.

(35) denlmemä $a<b$ bolanda hem seretmek bolar, ýöne bu halda ol uly ýarym oky $OB=b$ bolan ellipsi kesgitleýär, onuň fokuslary bolsa Oy okunda ýerleşýändir. $b=a=R$ bolan halda (35) denlmeme $x^2+y^2=R^2$ görnüşi alar we ol merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy R deň bolan töweregi kesgitleýär.

3.Ellipsiň ekssentrisiteti. Fokuslaryň arasyndaky uzaklygyň uly okuň uzynlygyna bolan gatnaşygyna ellipsiň ekssentrisiteti diýilýär. $a>b$ bolan halda (35) ellipsiň ekssenrtisiteti

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{39}$$

formula boýunça kesgitlenýär. Ellips üçin $0 < c < a$ bolýandygy esasynda (39) deňlikden $0 < \varepsilon < 1$ deňsizlik alynýar (töwerek üçin $c = 0$ bolany sebäpli $\varepsilon = 0$). $b^2 = a^2 - c^2$ we (39) deňligiň esasynda

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

formulalar gelip çykýar. Bu formulalaryň esasynda ekssentrisitet ellipsiň formasyny kesgitleýär; ekssentrisitet näçe uly boldugyça ellips şonça süýnmekdir. Ekssentrisitetiň örän kiçi bahalarynda a we b biri-birlerine ýakyndyr, ýagny ellips töwerege ýakyndyr. Eger-de ε bire ýakyn bolsa, onda b san a bilen deňeşdireniňde kiçidir we bu halda ellips uly okuň ugry boýunça gaty süýnmekdir.

Belli bolşy ýaly planetalar we käbir kometalar elliptik orbitalar boýunça hereket edýärler. Şunlukda, planetalaryň orbitalarynyň ekssentrisiteti örän kiçi bolup, kometalaryňky uludyr, ýagny bire ýakyndyr. Şeýlelikde, planetalar tas töwerek boýunça herket edýän bolup, kometalar bolsa birden Güne ýakynlaşýar (Gün fokuslaryň birinde ýerleşýär), birden bolsa ondan daşlaşýar

Ellipsiň M nokadyny onuň F_1 we F_2 fokuslary bilen birleşdirýän kesimine şol nokadyň fokal radiuslary diýilýär. Olaryň r_1 we r_2 uzynlyklary (36) we (37) formulalar boýunça kesgitlenýär. (39) deňlik esasynda olar

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

görnüşde ýazylýar.

4-nji mysal. $3x^2 + 16y^2 = 192$ deňlemäniň ellipsi kesgileýändigini görkezip, onuň ýarym oklaryny, fokusyny we ekssentrisitetini tapmaly.

◁ Berlen deňlemäni agzalaýyn 192-ä bölüp,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1$$

ellipsiň deňlemesini alarys. Bu ýerden görnüşi ýaly $a = 8$, $b = 2\sqrt{3}$ we $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{64 - 12} = \pm 2\sqrt{13}$. Şoňa görä hem $\varepsilon = \sqrt{13}/4$, $F_1(-2\sqrt{13}, \;\; 0)$, $F_2(2\sqrt{13}, \;\; 0)$. ▷

§ 2.4. Giperbola

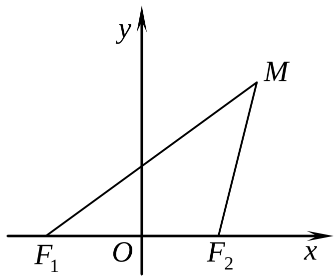
1. Giperbolanyň kesgitlenişi we onuň deňlemesi. Tekizlikde berlen iki nokatlara (fokuslara) çenli uzaklyklaryň tapawudynyň moduly hemişelik bolan (we $2a$ sana deň alynýan) tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügine giperbola diýilýär. F_1 we F_2 fokuslaryň arasyndaky (fokus) uzaklygy $2c$ bilen belgiläliň.Onda giperbolanyň erkin M nokady üçin (8-nji surat) kesgitleme boýunça

$$\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a \quad \text{ýada} \quad \left| F_1M \right| - \left| F_2M \right| = \pm 2a \tag{40}$$

bolar. F_1MF_2 üçburçlukdan görnüşi ýaly $\left| F_1M \right| - \left| F_2M \right| < \left| F_1F_2 \right|$, ýagny

$$a < c\,. \tag{41}$$

Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä giperbolanyň deňlemesini düzeliň. Onuň üçin Ox oky fokuslar arkaly geçer ýaly we položitel ugry F_1-den F_2 tarapa bolar ýaly alalyň (8-nji surat). Koordinatalar başlangyjyny $[F_1F_2]$ kesimiň ortasynda alalyň, onda $F_1 = F_1(-c,\ 0)$, $F_2 = F_2(c,\ 0)$ bolar. M nokadyň koordinatalaryny $x,\ y$ bilen belgiläliň. Onda iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy esasynda



8-nji surat

$$\left| F_1M \right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad \left| F_2M \right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{42}$$

Bu aňlatmalary (40) deňlikde goýup, şeýle deňligi alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a\,. \tag{43}$$

Alnan deňleme giperbolanyň deňlemesidir, çünki ony diňe giperbolanyň islendik nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Ony (33) deňlemäni ýönekeýleşdirişimiz ýaly ýönekeýleşdireliň:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\,,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2\,,$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2\,, \quad \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2\,.$$

Ahyrky deňlemäni kwadrata göterip alarys:

$$a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right). \qquad (44)$$

(41) deňsizligiň esasynda $c^2-a^2>0$ we şonuň üçin

$$b^2=c^2-a^2 \qquad (45)$$

belgileme girizip, (44) deňlikden

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (46)$$

deňlemäni alarys.Diýmek,giperbolanyň islendik nokadynyň koordinatalary (46) deňlemäni kanagatlandyrýar. Tersine hem dogrudygyny, ýagny koordinatalary (46) deňlemäni kanagatlandyrýan M nokadyň giperbolada ýatýandygyny we onuň üçin (40) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň. (45) we(46) deňliklerden peýdalanyp alarys:

$$|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right),$$

ýagny

$$|F_1M|=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right). \qquad (47)$$

Edil şonuň ýaly

$$|F_2M|=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right). \qquad (48)$$

Bu deňliklerde alamatlary onuň sag bölekleri otrisatel däl bolar ýaly almaly. (46) formulanyň esasynda $|x|\geq a$ we (41) esasynda $a<c$. Şoňa görä-de $x>a$ bolanda (47) we (48) deňlikler

$$|F_1M|=\frac{c}{a}x+a,\quad |F_2M|=\frac{c}{a}x-a \qquad (49)$$

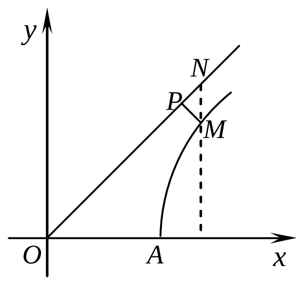
görnüşi alar. Şonuň üçin hem $|F_1M|-|F_2M|=2a$ bolar. $x<-a$ bolanda

$$|F_1M|=-\left(\frac{c}{a}x+a\right)=-\frac{c}{a}x-a,\quad |F_2M|=-\left(\frac{c}{a}x-a\right)=-\frac{c}{a}x+a. \qquad (50)$$

Sonuň üçin bu halda $|F_1M|-|F_2M|=-2a$ deňlik ýerine ýetýär. Şeýlelikde, koordinatalary (46) deňlemäni kanagatlandyrýan M nokadyň giperbolada ýatýandygyny we onuň üçin (40) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezdik.

(46) deňleme giperbolanyň deňlemesidir. Oňa giperbolanyň kanonik deňlemesi diýilýär. Onuň ikinji derejeli deňlemeligi ücin giperbola ikinji tertipli çyzykdyr.

2. Giperbolanyň formasynyň derňewi. Giperbolanyň (46) deňlemesi esasynda $x^2 \geq a^2$, ýagny $x<-a$ we $x>a$. Bu deňsizlikler $x=-a$ we $x=a$ göni çyzyklaryň arasynda giperbolanyň hiç bir nokadynyň ýokdugyny aňladýar. (46) deňlemä x we y ululyklaryň diňe ikinji (jübüt) derejesiniň girýändigi sebäpli giperbola koordinatalar oklaryna görä simmetrkdir. Şoňa görä-de onuň birinji çärýekde $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ deňleme bilen kesgitlenýän formasyny öwrenmek ýeterlikdir. $x=a$ bolanda $y=0$, şoňa görä $A(a,\ 0)$ nokat goperbolada ýatýandyr (9-njy surat). (46) deňlemeden görnüşi ýaly x-iň çaksiz artmagy bilen y çäksiz artýar.



9-njy surat

Giperbolanyň dugasynyň nokatlary koordinatalar başlangyjyndan daşlaşdygyça

$$y=\frac{b}{a}x \tag{51}$$

göni çycyga ýakynlaşýandygyny görkezeliň. Bellenen x üçin giperbolada oňa $M(x,\ y)$ nokat we (51) göni çyzykda $N(x,\ Y)$ nokat degişlidir. M nokatdan göni çyzyga MP perpendikulýar indereliň. Giperbolanyň dugasy göni çyzykdan aşakdadyr, çünki

$$Y=\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\sqrt{x^2}>\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=y, \quad Y>y.$$

MN kesimiň uzynlygy şeýle tapylýar:

$$|MN|=Y-y=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

Ony özgerdeliň:

$$|MN| = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

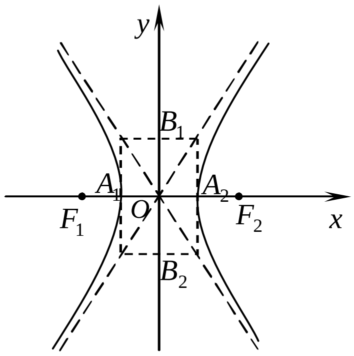
$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - \left(x^2 - a^2\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |MN| = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly x-iň çäksiz artmagy bilen MN kesimiň uzynlygy nola ymtylýar. Şoňa görä $|MP| < |MN|$ deňsizligiň esasynda $|MP|$ hem nola ymtylýar, ýagny M nokat koordinatalar başlangyjyndan daşlaşdygyça ol nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk nola ymtylýar. (46) giperbolanyň (51) göni çyzyk bilen umumy nokatlary ýokdur, çünki olaryň deňlemeleriniň sistemasynyň çözüwi ýokdur.

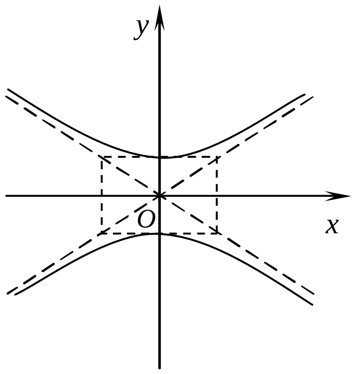
(51) deňleme bilen kesgitlenýän göni çyzyga giperbolanyň asimptotasy diýilýär. Giperbolanyň iki asimptotasy bar bolup, olar şeýle kesgitlenýär:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Giperbolanyň çyzgysyny şekillendirmek üçin ilki bilen taraplary $2a$ we $2b$, degişlilikde Ox we Oy oklaryna parallel we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan esasy gönübürçluk gurulýar. Onuň garşylykly depelerinden geçýän göni çyzyklar giperbolanyň asimptotalary bolýar.



10-njy surat



11-nji surat

Olary gurup, soňra giperbolanyň özüni gurýarys (10-njy surat). Ol (çep we sag) şahalary atlandyrylýan iki bölekden ybaratdyr. Giberbolanyň simmetriklik merkezine onuň merkezi, simmetriklik oklaryna bolsa ýöne oklary diýilýär. Oklaryň biri giperbolany onuň depeleri atlandyrylýan A_1 we A_2 nokatlarda kesýär (10-njy surat). Oňa giperbolanyň hakyky oky diýilýär, beýleki oka bolsa onuň hyýaly oky diýilýär, ol nokadyň giperbola bilen umumy nokady ýokdur. Kesimleriň $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2| = 2b$ uzynlyklaryna hem giperbolanyň oklary diýilýär. Şonuň üçin a we b ululyklara giperbolanyň ýarym oklary diýilýär. $a = b$ bolanda (46) deňleme

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{52}$$

görnüsi alýar we oňa deňtaraply giperbola diýilýär.

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{53}$$

deňleme Oy oky hakyky oky bolan giperbolany kesgitleýär (11-nji surat).

3.Giperbolanyň ekssentrisiteti. Giperbolanyň fokuslarynyň arasyndaky uzaklygyň onuň depeleriniň arasyndaky uzynlyga bolan gatnaşygyna giperbolanyň ekssentrisiteti diýilýär. Eger Ox oky giperbolanyň hakyky oky bolsa, onda kesgitleme boýunça ekssentrisitet

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{54}$$

deňlik boýunça kesgitlenýär. Giperbola üçin $c > a$ bolany sebäpli $\varepsilon > 1$ bolar. (45) formulanyň esasynda (54) deňlikden

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

deňlikler gelip çykýar. Şeýlelikde, giperbolanyň ekssentrisiteti esasy gönüburçlugyň formasyny we giperbolanyň özüniň formasyny häsiýetlendirýär.

Giperbolanyň M nokadyny onuň F_1 we F_2 fokuslary bilen birleşdirýän kesimlere şol nokadyň fokal radiuslary diýilýär. Olaryň r_1 we r_2 uzynlyklary (49) we (50) formulalar boýunça kesgitlenýär. (54) deňlik esasynda olar sag şaha üçin

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a$$

görnüşde we çep şaha üçin

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a$$

görnüşde ýazylýar.

5-nji mysal. $5x^2 - 4y^2 = 20$ deňleme boýunça berlen giperbolanyň ýarym oklaryny, fokuslarynyň koordinatalaryny we ekssentrisitetini tapmaly.

$\triangleleft$ Deňlemäniň iki bölegini hem 20-ä bölüp, giperbolanyň deňlemesini

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

görnüşde ýazarys we ony (46) deňleme bilen deňeşdirip, $a^2 = 4,\ b^2 = 5$ deňlikleri alarys, ýagny $a = 2,\ b = \sqrt{5}$. (45) deňlik esasynda

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9, \quad c = 3, \quad F_1(-3,\ 0), \quad F_2(3,\ 0), \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}. \ \triangleright$$

§ 2. 5. Ellipsiň we giperbolanyň direktrisalary

Ellipsiň uly okuna perpendikulýar, merkezine görä simmetrik we ondan a/ε uzaklykda ýerleşýän iki göni çyzyklara ellipsiň direktrisalary diýilýär (*a* – uly oky, ε – ekssentrisitet). Eger ellips (35) kanonik deňleme boýunça berlen bolsa, onda $a > b$. Şonuň üçin bu halda dekart kkordinatalar sistemasynda direktrisalar

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{55}$$

deňlemeler boýunça kesgitlenýär. Ellips üçin $0 < \varepsilon < 1$ bolýandygy sebäpli $a/\varepsilon > a$ bolar we şoňa görä direktrisalaryň ellips bilen umumy nokady ýokdur.

Giperbolanyň hakyky okuna perpendikulýar, merkezine görä simmetrik we ondan a/ε uzaklykda ýerleşýän iki göni çyzyklara giperbolanyň direktrisalary diýilýär (*a* – uly oky, ε – ekssentrisitet). Eger giperbola (46) kanonik deňleme boýunça berlen bolsa, onda şol dekart koordinatalar sistemasynda onuň direktrisalary (55) deňlemeler boýunça kesgitlenýär. Giperbola üçin $\varepsilon > 1$ bolýandygy sebäpli $a/\varepsilon < a$ bolar we şoňa görä direktrisalaryň giperbola bilen umumy nokady ýokdur.

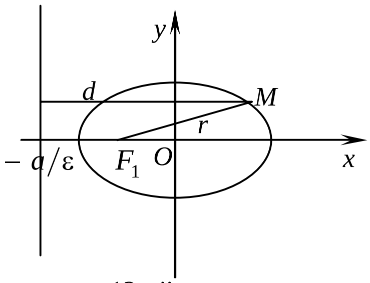
Elllipsiň we giperbolanyň direktrisalarynyň häsiýetleri aşakdaky teoremada görkezilýär.

3-nji teorema. Ellipsiň (giperbolanyň) erkin $M(x,\ y)$ nokadyndan fokusa çenli *r* uzaklygynyň şol nokatdan degişli direktrisa çenli *d* uzaklyga bolan gatnaşygy hemişelik ululykdyr we ellipsiň (giperbolanyň) ekssentrisitetine deňdir.

◃ Ellipsiň çep fokusyna we çep direktrisasyna seredeliň. Eger $M(x,\ y)$ ellipsiň erkin nokady bolsa (12-nji surat), onda

$$r = a + \varepsilon x, \quad d = x - \left(-\frac{a}{\varepsilon}\right) = x + \frac{a}{\varepsilon},$$

$$\frac{r}{d} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon .$$



12-nji surat

Eger $M(x,\ y)$ giperbolanyň çep şahasynyň erkin nokady bolsa, onda

$$r = -a - \varepsilon x, \quad d = -x - \frac{a}{\varepsilon},$$

$$\frac{r}{d} = \frac{-a - \varepsilon x}{-x - a/\varepsilon} = \varepsilon .$$

Beýleki hemme hallar hem şular ýaly görkezilýär. ▹

§ 2. 6. Parabola

1. Parabolanyň kesgitlenişi we onuň deňlemesi. . Tekizlikde berlen nokatdan (fokusdan) we berlen göni çyzykdan (direktrisadan) deň daşlykda bolan tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügine parabola diýilýär.

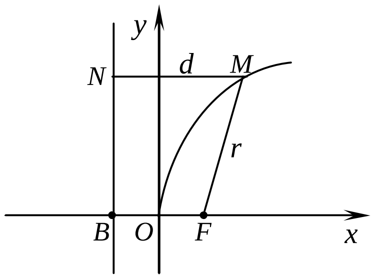
Parabolanyň deňlemesini getirip çykarmak üçin gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň Ox okuny fokusdan geçýän we direktrisa perpendikulýar alyp, položitel ugruny direktrisadan fokusa tarap hasap edeliň. Koordinatalar başlangyjyny fokus bilen direktrisanyň ortasynda ýerleşdireliň (13-nji surat). Eger fokus bilen direktrisanyň arasyndaky uzaklyk p bolsa, onda fokusyň koordinatalary $F(p/2,\ 0)$ bolar. Parabolanyň erkin $M(x,\ y)$ nokadyny alyp, ol nokatdan fokusa çenli uzaklygy r bilen we direktrisa çenli uzaklygy d bilen belgiläliň ($r = |MF|, \quad d = |MN|$). Onda kesgitleme boýunça $r = d$ bolar.Iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy boýunça

$$d = x + \frac{p}{2}, \quad r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

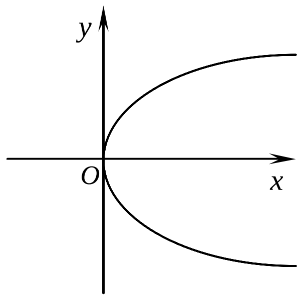
şoňa görä

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \qquad (56)$$

deňlemäni alarys. Ol parabolanyň deňlemesidir. Ony ýönekeý görnüşe



13-nji surat



14-nji surat

getirmek üçin onuň iki bölegini hem kwadrata göterip alarys:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

ýa-da

$$y^2=2px. \qquad (57)$$

(56) we (57) deňlemeler deňgüýçlüdirler.

(57) deňlemä parabolanyň kanonik deňlemesi diýilýär. Bu deňlemeden $x\geq 0$ deňsizlik gelip çykýar ($p>0$ bolany üçin), ýagny parabola tutuşlygyna Oy okdan sagda ýerleşýär. Deňlemä y-iň ikinji dereje bolup girýänligi üçin parabola Ox oka görä simmetrikdir; x-iň çäksiz artmagy bilen y hem çäksiz artýandyr. Parabolanyň $y=\sqrt{2px}$ deňlemä degişli dugasy 13-nji suratda, parabolanyň özi bolsa 14-nji suratda şekillendirilen. Direktrisanyň, ýagny $B(-p/2,\ 0)$ nokat arkaly geçýän we Oy okuna parallell bolan göni çyzygyň deňlemesi $x=-p/2$ bolar.

Bellik. Aşakdaky deňlemeleriň her birisi hem parabolany kesgitleýär:

$$y^2=-2px,\quad x^2=2qy,\quad x^2=-2qy.$$

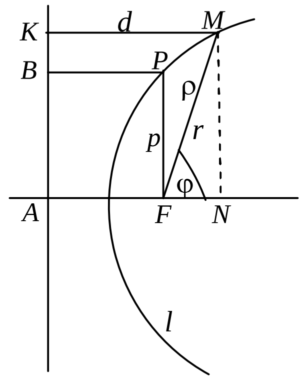
§ 2. 7. Ellipsiň giperbolanyň, parabolanyň polýar deňlemesi

Goý, l ellipsiň, giperbolanyň ýa-da parabolanyň dugasy bolsun. Onuň erkin M nokadyndan fokusa çenli uzaklygy r bilen, degişli direktrisa çenli uzaklygy bolsa d bilen belgiläliň (15-nji surat). Onda 2-nji teorema esasynda

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \tag{58}$$

Fokusdan direktrisa perpendikulýar göni çyzyk geçirip, kesişme nokadyny A bilen belgiläliň. M nokadyň şol göni çyzyga bolan proýeksiýasyny N bilen belgiläliň. F nokat arkaly AN göni çyzyga perpendikulýar geçirip,onuň l çyzyk bilen kesişme nokadyny P bilen belgiläliň. [FP] kesimiň uzynlygyny p bilen belgiläliň, ýagny

$$|FP| = p$$



15-nji surat

we oňa l çyzygyň fokal parametri diýeliň.

Polýusy F nokatda we polýar oky FN bolan koordinatalar sistemasynda M nokadyň ρ, φ polýar koordinatalary üçin

$$r = \rho, \quad d = |KM| = |AN| = |AF| + \rho\cos\varphi \tag{59}$$

deňlikleri alarys. (58) deňlik l çyzygyň islendik nokadynda, şol sanda P nokatda hem ýerine ýetýär, şonuň üçin hem

$$\frac{|FP|}{|BP|} = \varepsilon, \quad \frac{p}{|AF|} = \varepsilon, \quad |AF| = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Ahyrky deňligiň esasynda (59) formulanyň ikinjisi şeýle görnüşi alar:

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi. \tag{60}$$

(59) we (60) deňlikler esasynda (58) deňlik

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \tag{61}$$

görnüşde ýazylar. Oňa ellipsiň, giperbolanyň, parabolanyň polýar deňlemesi diýilýär (ol deňleme giperbolanyň iki şahasynyň birini kesgitleýär).

Parabola üçin fokal parametr (57) deňlemedäki p bilen gabat gelýär. Degişlilikde (35) we (46) deňlemeler bilen berilýän ellips we giperbola ücin fokal parametr

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{62}$$

formula boýunça aňladylýar. Hakykatdan-da, kesgitleme boýunça fokal parametr P nokadyň ordinatasynyň modulyna deňdir (AN oky Ox oky hasap edýäris). Ellipsiň $P(-c,\ y)$ nokadynyň koordinatalaryny (35) deňlemede goýup alarys:

$$\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^2\left(a^2 - c^2\right)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}.$$

Bu deňlikden bolsa (61) deňlik gelip çykýar. Bu netije $P(-c,\ y)$ nokadyň koordinatalaryny (46) deňlikde goýanymyzda hem alynýar. $P(-p/2,\ y)$ nokadyň koordinatalaryny (57) deňlemede goýmak arkaly parabolanyň fokal parametriniň fokusdan direktrisa çenli uzaklyga deňdigi barlanylýar.

6-njy mysal. Polýar koordinatarynda berlen $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$ deňlemäniň haýsy çyzygy kesgitleýändigini anyklamaly.

◁ Deňlemäniň sag böleginiň sanawjysyny we maýdalawjysyny 4-e bölüp, ony (61) görnüşdäki

$$\rho = \frac{9/4}{1 - (5/4)\cos\varphi}$$

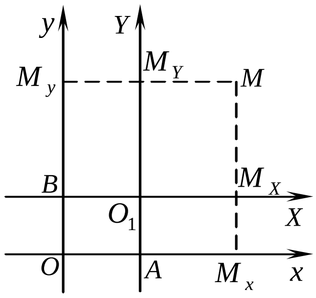
deňlemä getireris. Ony (61) deňleme bilen deňeşdirip alarys:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly berlen deňleme ýarym oklary $a = 4$, $b = 3$ bolan giperbolany kesgitleýär. ▷

§ 2. 8. Gönüburçly dekart koordinatalaryny özgertmek

1. Parallel göçürmek. Goý, umumy masştab kesimi we položitei ýarym oklarynyň ugurlary gabat gelýän iki sany Oxy (köne) we O_1XY (täze) gönübürçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun. Eger täze sistemanyň koordinatalarynyň başlangyjy $O_1(a,\ \mathrm{b})$ nokatda bolup, onuň köne koordinatalary $x = a$, $y = b$ bolsa, onda seýle sistemalaryň birisi parallel göçürmek arkaly beýlekisinden alynýar diýilýär (16-njy surat). Bu



16-njy surat

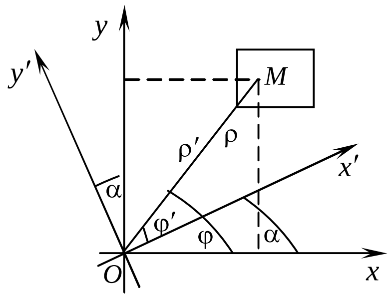
suratdan görnüşi ýaly Ox okunyň O, A, M_x we Oy okunyň O, B, M_y nokatlary üçin nokadyň koordinatasynyň kesgitlemesi esasynda M nokadyň köne x we y koordinatalaryny onuň täze koordinatalary arkaly aňlatmak bolar:

$$x = X + a, \quad y = Y + b. \tag{63}$$

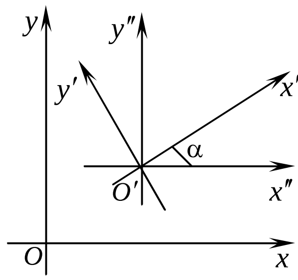
Bu formuladan peýalanyp, ol nokadyň täze koordinatalaryny onuň köne koordinatalary arkaly aňlatmak bolar:

$$X = x - a, \quad Y = y - b. \tag{64}$$

2. Koordinatalar oklaryny öwürmek. Goý, täze $Ox'y'$ gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy köne Oxy sistemanyň O nokadynyň daşyndan α burç öwrülmeginden alynýan bolsun (17-nji surat). Ol sistemalaryň her haýsy bilen degişlilikde ρ', φ' we ρ, φ polýar koordinatalaryny baglanyşdyralyň. !7-nji suratdan görnüşi ýaly ol polýar koordinatalar üçin $\rho = \rho'$, $\varphi = \alpha + \varphi'$ deňlikler dogrudyr. Bu deňlikler esasynda polýar we dekart koordinatalary baglanyşdyrýan



17-nji surat



18-nji surat

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ formulalary ulanyp alarys:

$$x = \rho\cos\varphi = \rho'\cos(\alpha + \varphi') = (\rho'\cos\varphi')\cos\alpha - (\rho'\sin\varphi')\sin\alpha =$$
$$= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = \rho \sin \varphi = \rho' \sin(\alpha + \varphi') = (\rho' \cos \varphi')\sin \alpha + (\rho' \sin \varphi')\cos \alpha =$$
$$= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

ýagny

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned}\right\}. \tag{65}$$

Täze x', y' koordinatalary köne x, y koordinatalar arkaly aňlatmak üçin bu sistemany x', y' görä çözmek zerurdyr. Ýöne ony başgaça hem görkezmek bolar: $Ox'y'$ sistemany köne sistema hökmünde alyp, ony $(-\alpha)$ burça öwürmek arkaly Oxy sistema alynýar, şonuň üçin (65) formulada x we x', y we y' koordinatalaryň orunlaryny çalşyryp, α-nyň ýerine $(-\alpha)$ ýazmak ýeterlikdir.

Umumy halda, eger Oxy we $O'x'y'$ iki gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsa (18-nji surat), onda goşmaça $O'x''y''$ sistemany girizip we yzygiderli (63) we (65) formulalary ulanyp,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

formulany alarys.

§ 2. 9. Koordinatalary özgertmek formulalarynyň ulanylyşy

1. $y = ax^2 + bx + c$ **deňlemäniň kesgitlýän çyzygy.** Deňlemäniň sag böleginde doly kwadraty almak üçin ony özgerdeliň:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c;$$

$$y + \frac{b^2}{4a^2} - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Bu deňlikde

$$X = x + \frac{b}{2a}, \quad Y = y + \left(\frac{b^2}{4a^2} - c\right)$$

formulalar boýunça täze koordinatalara geçip, ýagny parallel göçürme geçirip, özgerdilip alnan deňlemäni $Y = aX^2$ görnüşde ýazmak bolar. Ol deňleme bolsa O_1XY koordinatalar sistemasynda parabolany kesgitleýär. Diýmek, berlen deňleme oky Oy okuna parallel bolan parabolany kesgitleýär. Şonuň ýaly-da $x = Ay^2 + By + C$ deňleme hem parabolany kesgitleýär, ýone ol parabolanyň oky Ox okuna parallel bolýar.

2. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ **deňlemäniň kesgitleýän çyzygy.** Bu deňlemede $c \neq 0$ we $ad - bc \neq 0$ hasap edeliň, çünki $c = 0$ bolanda $y = kx + m$ görnüşdäki we $ad - bc = 0$ bolanda $y = l$ görnüşdäki göni çyzyk alynýar. Deňlemäni özgertmekligi aşakdaky ýaly geçireliň:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{bc - ad}{c}}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

ýagny

$$y = \frac{a}{c} + \frac{C}{x + \frac{d}{c}}, \quad C = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Bu deňlemäni

$$y - \frac{a}{c} = \frac{C}{x + \frac{d}{c}} \tag{67}$$

görnüşde ýazyp, täze koordinatalary

$$X = x + \frac{d}{c}, \quad Y = y - \frac{a}{c}$$

formulalar boýunça girizeliň. Onda täze O_1XY koordimatalarda (67) deňleme

$$Y = \frac{C}{X} \text{ ýa-da } XY = C, \quad C \neq 0 \tag{68}$$

görnüşde ýazylar. Bu deňleme bolsa deňtaraply giperbolany kesgitleýär. Şoňa görä seredilýän deňleme hem deňtaraply giperbolany kesgitleýär.

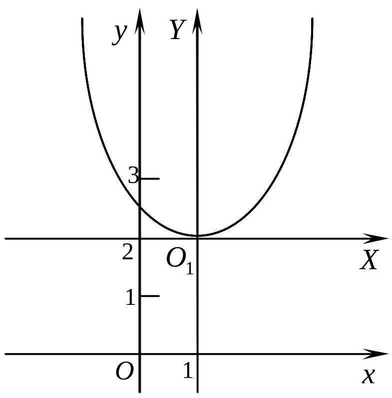
7-nji mysal. $2y = x^2 - 2x + 5$ deňlemäniň kesgitleýän çyzygyny anyklamaly we ony gurmaly.

⊲ Deňlemäni ýönekeýleşdirip alaryş:

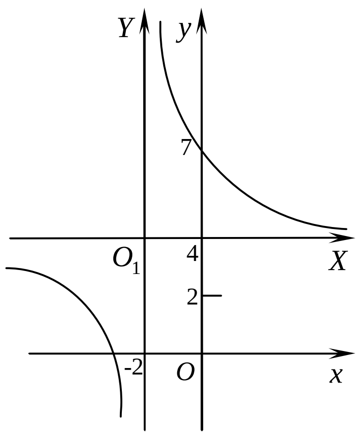
$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 1\right) - \frac{1}{2} + \frac{5}{2},$$

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2, \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Eger $X = x - 1$, $Y = y - 2$ belgileme girizsek, onda täze O_1XY dekart koordinatalar sistemasynda ol deňleme $Y = \frac{1}{2}X^2$ görnüşde ýazylar. Bu deňleme bolsa parabolany kesgitleýär. Indi Oxy we O_1XY koordinatalar sistemalaryny we täze sistemada $Y = \frac{1}{2}X^2$ kanonik deňlemesi boýunça parabolany guralyň (19-njy surat). ⊳



19-njy surat



20-nji surat

.

8-nji mysal. $y = \frac{4x + 14}{x + 2}$ deňlemäniň kesgitleýän çyzygyny anyklamaly we gurmaly.

⊲ Deňlemäni ýönekeýleşdirip alarys:

$$y(x+2)-4x-14=0, \quad y(x+2)-4x-8-6=0,$$
$$y(x+2)-4(x+2)-6=0, \quad (x+2)(y-4)=6$$

Eger $X = x+2, \quad Y = y-4$ formulalar boýunça täze sistemany girizsek, onda täze O_1XY sistemada $XY=6$ deňlemäni alarys, ol deňtaraply parabolany kesgitleýar. Oxy we O_1XY koordinatalar sistemalaryny we täze sistemada $XY=6$ giperbolany guralyň (20-nji surat).

§ 2. 10. Ikinji derejeli deňlemeleri ýönekeýleşdirmek

1. Koordinatalaryň köpeltmek hasylynyny özünde saklamaýan deňleme. Goý, dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{69}$$

görnüşdäki deňleme berlen bolsun, bu ýerde

$$A^2+C^2 \neq 0 \tag{70}$$

Aşakdaky üç hala seredeliň:

1) A we C koeffisiýentleriň alamatlary meňzeş ($AC>0$, bu halda (69) deňlemä elliptik görnüşli deňleme diýilýär);

2) A we C koeffisiýentleriň alamatlary dürli ($AC<0$, bu halda (69) deňlemä giperbolik görnüşli deňleme diýilýär);

3) A we C koeffisiýentleriň birisi nola deň ($AC=0$, bu halda (70) şertiň esasynda beýleki koeffisiýent noldan tapawutly we (69) deňlemä parabolik görnüşli deňleme diýilýär);

1) Deňlemäniň çep bölegini doly kwadratlara getirip alarys:

$$A\left(x^2+2\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{A^2}\right)+C\left(y^2+2\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{C^2}\right)-\frac{D^2}{A}-\frac{E^2}{C}+F=0.$$

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F. \tag{71}$$

Bu deňligiň sag bolegini K bilen belgiläp: $K=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F$ we

$$X=x+\frac{D}{A}, \quad Y=y+\frac{E}{C} \tag{72}$$

formulalar boýunça täze koordinatalary girizip, (71) deňligi

$$AX^2 + CY^2 = K \qquad (73)$$

görnüşe getireris. Bu deňlemäni K sana, ýagny $(KA > 0,\ KA < 0,\ KA = 0)$ şertlere baglylykda aşakdaky deňlemeleriň birine getirmek bolar:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \qquad (74)$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1\ , \qquad (75)$$

bu deňlemelerde $\frac{1}{a^2} = \frac{A}{K},\quad \frac{1}{b^2} = \frac{C}{K};$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0\,, \qquad (76)$$

bu ýerde $\frac{1}{a^2} = A,\quad \frac{1}{b^2} = C \quad (A > 0)$.

(74) deňleme ýarym oklary a we b bolan ellipsi ($a = b$ bolanda) töweregi kesgitleýär, (76) deňleme bir nokady ($X = 0,\ Y = 0$ täze koordinatalar sistemasynda, şunlukda onuň köne koordinatalary (72) formuladan tapylýar), (75) deňleme bolsa hiç bir çyzygy kesgitlemeýär.

2) Bu halda $AC < 0$ bolany üçin (73) deňleme aşakdaky deňlemeleriň birine getirilýär:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1; \qquad (78)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1,\quad -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \qquad (79)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0\,. \qquad (80)$$

(78) deňleme hakyky oky O_1X bolan giperbolany, (79) deňleme hakyky oky O_1Y bolan giperbolany,(80) deňleme bolsa iki sany kesişýän $Y = -\frac{b}{a}X,\quad Y = \frac{b}{a}X$ göni çyzyklary kesgitleýär.

3) Goý, $A = 0,\quad C \neq 0$ bolsun. Onda $D \neq 0$ bolanda (69) deňlemäni

$$C\left(y^2+2\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{C^2}\right)+2Dx-\frac{E^2}{C}+F=0,$$

$$C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=-2D\left(x+\frac{F-\frac{E^2}{C}}{2D}\right)x-+F=0$$

görnüşde ýazmak bolar. Ol deňlemeden $p=-D/C$ belgileme girizip we täze koordinatalary

$$X=x+\frac{FC-E^2}{2CD},\quad Y=y+\frac{E}{C}$$

formulalar boýunça kesgitläp,

$$Y^2=2pX \tag{81}$$

deňligi alarys.Bu deňleme oky O_1X bolan parabolany kesgitleýar.

Eger $D=0$ bolsa, onda (69) deňleme

$$C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{E^2}{C}-F$$

görnüşi alar. Ony bolsa $Y=y+\frac{E}{C},\quad L=\frac{E^2}{C}-F$ begileme girizip,

$$CY^2=L \tag{82}$$

görnüşde ýazmak bolar.Bu deňleme L sana,ýagny($LC>0,\ LC<0,\ L=0$) şertlere baglylykda aşakdaky deňlemeleriň birine getirilýär:

$$Y^2=b^2\ , \tag{83}$$

$$Y^2=-b^2 \tag{84}$$

$$Y^2=0\,. \tag{85}$$

Şunlukda, (83) deňleme iki sany parallel $Y=\pm b$ göni çyzyklary, (85) deňleme iki sany gabat gelýän göni çyzyklary kesgitleýär, (84) deňleme bolsa hiç bir çyzygy kesgitlemeýär.

Bellik. Eger $C=0,\quad A\neq 0$ bolsa, onda 3-nji hala meňzeşlikde (69) deňleme $E\neq 0$ bolanda $X^2=2qY$ deňlemä we $E=0$ bolanda

$$X^2=a^2,\quad X^2=-a^2,\quad X^2=0$$

görnüşdäki deňlemeleriň haýsy-da bolsa birine getirilýär.

9-njy mysal. $9y^2 - 16x^2 + 18y + 32x - 151 = 0$ deňlemäniň kesgitleýän çyzygyny anyklamaly we ony gurmaly.

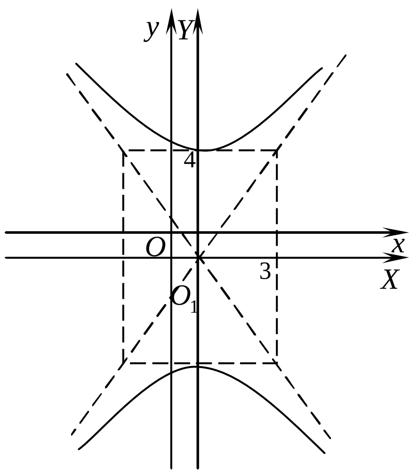
◁ Deňlemäni ýönekeýleşdirip alarys:

$$9(y^2 + 2y + 1) - 16(x^2 - 2x + 1) - 9 + 16 - 151 = 0,$$

$$9(y + 1)^2 - 16(x - 1)^2 = 144,$$

$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1, \quad -\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Bu deňlemede $X = x - 1,\ Y = y + 1$ formulalary ulanyp, koordinatalar başlangyjy $O_1(1,\ -1)$ nokatda bolan täze dekart koordinatalarynda



21-nji surat

$$-\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

deňlemäni alarys. Ol deňleme hakyky oky O_1Y we parametrleri $a = 3,\ b = 4$ bolan giperbolany kesgitleýär.Köne we täze dekart koordinatalaryny we täze koordinatalarda giperbolany guralyň. Şunlukda, berlen deňlemäniň köne dekart koordinatalar sistemasynda nähili çyzygy kesgitleýandigini hem göreris (21-nji surat).

2. Ikinji derejeli umumy deňleme. Gönüburçly x we y dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli umumy görnüşdäki

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (86)$$

deňlemä seredeliň we bu ýerde $B \neq 0$ hasap edeliň.

Bu deňlemede (65) formulany ulanyp, täze $x',\ y'$ koordinatalaryna geçeliň. Onda ol deňleme şeýle görnüşi alar:

$$A_1x'^2 + 2B_1x'y' + C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0, \qquad (87)$$

bu ýerde

$$A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha,$$

$$B_1 = (C - A)\cos\alpha\sin\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$
$$C_1 = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha\,.$$
(87) deňlemedäki B_1 koeffisiýent nola deň bolar ýaly α burcy şaýlap alalyň, ýagny ol burçy
$$(C - A)\cos\alpha\sin\alpha +$$
$$+ B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$
deňlemäniň çözüwi hökmünde alalyň. Ol deňlemeden
$$ctg2\alpha = \frac{A - C}{2B}\,. \tag{88}$$
deňligi alarys.Bu halda A_1 we C_1 koeffisiýentleriň ikisiniň birwagtda nola deň bolup bilmejegini subut edeliň. Tersine, $A_1 = 0,$ $C_1 = 0$ güman edip,
$$A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = 0\,,$$
$$A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha = 0$$
deňlemeleri alarys. Olaryň birijisinden ikinjisini aýryp, $ctg2\alpha = -\dfrac{2B}{A - C}$ deňligi alarys we ony (88) deňlik bilen deňeşdirip, $\dfrac{A - C}{2B} = -\dfrac{2B}{A - C}$ deňligi, ýagny $4B^2 = -(A - C)^2$ deňligi alarys, ol bolsa diňe $B = 0$ bolanda ýerine ýetýär we ol $B \neq 0$ şerte garşy gelýär.

Şeýlelikde, köne dekart koordinatalaryndan käbir α burça öwürmek arkaly täze dekart koordinatalaryna geçilende alynýan deňlemäniň derejesiniň peselip bimejekdigini subut etdik. Şonuň ýaly-da parallel göçürmekde we umumy bolan (66) formulalary ulanyp koordinatalary özgerdenimizde-de deňlemäniň derejesi peselmeýär. Başgaça aýdylanda, eger berlen çyzyk käbir dekart koordinatalar sistemasynda ikinji derejeli deňleme bilen kesgitlenýän bolsa, onda ol islendik başga dekart koordinatalar sistemasynda hem ikinji derejeli deňleme bilen kesgitlenýär.

Koeffisiýent $B_1 = 0$ bolanda (87) deňleme şeýle görnüşi alar:
$$A_1x'^2 + C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0\,.$$
Bu deňleme (69) görnüşdäki deňlemedir. Şonuň ücin onuň ýönekeý görnüşe getirilişi şol deňlemäniňki ýalydyr.

Alnan netijeleri aşakdaky teorema görnüşinde getirmek bolar.

3-nji teorema. Gönüburçly dekart koordinatalaryna görä ikinji derejeli deňleme ýa boş köplügi, ýa nokady, ýa (kesişýän, parallel, gabat gelýän) iki göni çyzygy ýa-da ellips (tówerek), giperbola, parabola çyzyklaryň birini kesgitleýär.

10-njy mysal. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y = 0$ deňleme bilen berlen çyzygyň görnüşini kesgitlemeli we ony gurmaly.

$\triangleleft$ Berlen deňlemäni (65) formulany ulanyp özgerdenimizde $x'y'$ köpeltmek hasylyň koeffisiýentini nola deň etmek üçin α burçy (88) deňlikden kesgitläris: $ctg2\alpha = \dfrac{A-C}{2B} = \dfrac{5-5}{-6} = 0,\quad 2\alpha = 90^\circ,\quad \alpha = 45^\circ$. Bu halda (65) formula

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'),\quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \tag{89}$$

görnüşi alar. Ony berlen deňlemede göýup alarys:

$$\frac{5}{2}\left(x'^2 - 2x'y' + y'^2\right) - 3\left(x'^2 - y'^2\right) + \frac{5}{2}\left(x'^2 + 2x'y' + y'^2\right) +$$

$$+ 8\sqrt{2}(x' - y') - 8\sqrt{2}(x' + y') = 0,$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16\sqrt{2}y' = 0.\quad x'^2 + 4y'^2 - 8\sqrt{2}y' = 0,$$

$$x'^2 + 4\left(y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2\right) - 8 = 0,\quad x'^2 + 4\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 - 8 = 0.$$

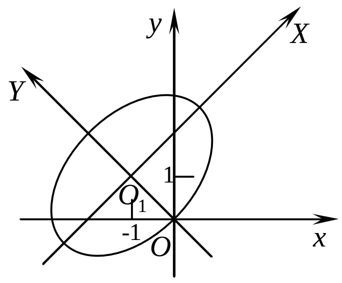
Bu deňlemede

$$X = x',\quad Y = y' - \sqrt{2} \tag{90}$$

formula boýunça täze koordinatalara geçip,

$$X^2 + 4Y^2 = 8,\quad \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{2} = 1 \tag{91}$$

deňlemäni alarys. Bu deňleme ýarym oklary $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ bolan ellipsi kesgitleýär. Onuň merkezi $X = 0$, $Y = 0$ bolan nokatdadyr.(89) we (90) formulalary ulanyp alarys:



22-nji surat

$x' = 0$, $y' = \sqrt{2}$, $x = -1$, $y = 1$. Şonuň üçin ellipsiň merkezi we täze O_1XY koordinatalar sistemasynyň başlangyjy $O_1(-1,\ 1)$ nokatda ýerleşýär. Şol sistemada (91) deňleme bilen kesgitlenýän ellipsi guralyň

(22-nji surat). Şunlukda, köne Oxy sistemada gurlan çyzygy hem alarys. Ol ellips köne sistemanyň koordinatalar başlangyjy boýunça geçýär (başdaky deňlemede azat agzanyň ýoklugy sebäpli ol deňlemäni $x = 0,\ \ y = 0$ nokat kanagatlandyrýar).

G ö n ü k m e l e r

1. Birinji koordinatalar burçunyň bissektrisasyna parallel we Oy okdan ululyklary 1) $b = 2$; 2) $b = -5$; 3) $b = 3/4$ bolan kesimleri kesýän göni çyzyklary düzmeli.

2. Koordinatalar başlangyjy we $B(4,\ 3)$ nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

3. Oy okundan $b = -3$ kesimi kesýän we Ox oky bilen 1) $\varphi = 135^\circ$; 2) $\varphi = 60^\circ$; 3) $\varphi = 45^\circ$ burçlary emele getirýän göni çyzyklary düzmeli.

4. Göni çyzyklaryň Ox oky bilen emele getirýän burçlaryny tapmaly: 1) $2x - 2y + 5 = 0$: 2) $3x + 3y - 7 = 0$; 3) $6x - 3y - 1 = 0$.

5. Göni çyzyklaryň koordinatalar oklarynda kesýän kesimleriniň ululyklaryny tapmaly we göni çyzyklary gurmaly: 1) $2x - 3y - 6 = 0$; 2) $3x + 4y - 12 = 0$; 3) $4x + 5y - 20 = 0$.

6. C-niň haýsy bahasynda $3x - 4y + C = 0$ göni çyzyk Oy okunda $b = 5$ kesimi kesýär?

7. Göni çyzyklaryň arasyndaky burçlary tapmaly: 1) $y = \frac{4}{3}x - 2,$ $y = \frac{1}{7}x + 3$; 2) $y = \frac{3}{5}x + 1,\ \ y = 4x - 5$; 3) $x - y + 5 = 0,\ 3x - y - 1 = 0$.

8. Göni çyzyklaryň haýsylary parallel, haýsylary perpendikulýar? 1) $2x - 7y + 3 = 0$; 2) $4x - 14y + 1 = 0$; 3) $7x + 2y - 5 = 0$, 4) $3x + 5y - 2 = 0$

9. $2x - 3y - 5 = 0,\ 3x - 4y - 7 = 0$ göni çyzyklaryň kesişme nokady arkaly $5x + 6y - 7 = 0$ göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk geçirmeli.

10. Depeleri $A(3,\ 4),\ B(-2,\ 1),\ C(-3,\ -5)$ bolan üçburçlugyň B depesinden AC tarapa geçirilen beýikliginiň deňlemesini düzmeli.

11. Üçburçlugyň $A(3,\ 4),\ B(6,\ 2),\ C(3,\ 1/2)$ depeleri üstünde ýatýan göni çyzyklaryň deňlemelerini düzmeli.

12. Depeleri $A(2,\ -8)$, $B(-3,\ 9)$, $C(7,\ -10)$ bolan üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokadyny tapmaly.

13. Berlen nokatdan göni çyzyga çenli uzaklygy tapmaly:
1) $M(2,\ -1)$, $4x-3y-15=0$; 1) $M(3,\ 1)$, $6x+8y-21=0$.

14. Depeleri $A(2,\ -1)$, $B(-1,\ -2)$, $C(3,\ 1)$ bolan üçburçlugyň B depesinden göyberilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapmaly.

15. $5x+12y-13=0$, $5x+12y-91=0$ göni çyzyklardan deň daşlaşan nokatlaryň köplüginiň deňlemesini düzmeli.

16. Radiusy $R=7$ we merkezi $C(-3,\ 5)$ nokatda bolan töweregiň deňlemesini ýazmaly.

17. Töwerekleriň radiuslaryny we merkezleriniň koordinatalaryny tapmaly: 1) $x^2+y^2+6x-8y-11=0$; 2) $4x^2+4y^2-8x+12y-3=0$.

18. $x^2+y^2+14x-6y-46=0$; $x^2+y^2+8x+2y+9=0$ töwerekleriň merkezleriniň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

19. Ellipsleriň ýarym oklaryny, fokuslaryny we ekssentrisitetlerini tapmaly: 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$, 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$, 3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

20. $16x^2+20y^2=320$ deňleme bilen kesgitlenýän ellipsiň direktrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

21. Deňsizlikler bilen kesgitlenýän köplükleri anyklamaly we olary dekart koordinatalar sistemasynda şekillendirmeli:
1) $3x^2+4y^2\le 48$, $x\ge 2$. 2) $25x^2+8y^2\le 200$, $y\le 2$.

22. Giperbolalaryň ýarym oklaryny, fokuslaryny, ekssentrisitetlerini we asimptotalaryny tapmaly:
1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, 3) $-\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$.

23. Giperbolalaryň hersiniň direktrisalaryny we olaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly: 1) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$, 2) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$, 3) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$.

24. Giperbola $7x^2-9y^2=63$ deňleme bilen kesgitlenen . $M\left(6,\ \sqrt{21}\right)$ we $N\left(-9,\ 2\sqrt{14}\right)$ nokatlaryň fokal radiuslaryny tapmaly.

25. Parabolanyň fokusyny, direktrisasynyň deňlemesini tapmaly we olaryň hemmesini gurmaly; 1) $y^2 = 8x$, 2) $y^2 = -10x$, 3) $x^2 = 2y$.

26. *Ox* okuna simmetrik we $M(5,\ 4)$, $N(7,\ -2\sqrt{2})$ nokatlar arkaly geçýän parabolanyň deňlemesini düzmeli we ol parabolanyň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmaly.

27. Deňlemeleri özgerdip we täze koordinatalara geçip, olaryň haýsy çyzyklary kesgitleýändigini anyklamaly we olary gurmaly:

1) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$. 2) $16y^2 - 9x^2 + 54x + 32y - 209 = 0$.

3) $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$. 4) $x^2 - 4x + 4y = 0$.

5) $xy - 4x + 3y - 7 = 0$. 6) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$

7) $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$. 8) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

9) $9y^2 - 4x^2 + 18y + 8x - 31 = 0$. 10) $x^2 + 4x - y - 1 = 0$.

J o g a p l a r

1. 1) $y = x + 2$, 2) $y = x - 5$, 3) $y = x + 3/4$. **2.** $3x - 4y = 0$. **3.** 1) $y = -x - 3$, 2) $y = \sqrt{3}x - 3$, 3) $y = x - 3$. **4.** 1) $\varphi = 45^\circ$, 2) $\varphi = 135^\circ$, 3) $\varphi = arctg2$. **5.** 1) $a = 3,\ b = -2$; 2) $a = 4,\ b = 3$; 3) $a = -5,\ b = 4$. **6.** $C = 20$. **7.** 1) $\varphi = 135^\circ$, 2) $\varphi = 45^\circ$, 3) $\varphi = arctg(1/2)$. **8.** 1) we 2) göni çyzyklar parallel, 1) we 3), 2) we 3) göni çyzyklar perpendikulýar. **9.** $6x - 5y - 11 = 0$. **10.** $2x + 3y + 1 = 0$. **11.** $2x + 3y - 18 = 0$ (AB), $x - 2y - 2 = 0$ (BC), $x - 3 = 0$ (AC). **12.** $(2,\ -3)$. **13.** 1) 0,8; 2) 0,5. **14.** 1 . **15.** $5x + 12y - 52 = 0$. **16.** $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 49$. **17.** 1) $a = -3$, $b = 4$, $R = 6$; 2) $a = 1,\ b = -3/2$, $R = 2$. **18.** 5. **19.** $a = 6,\ b = 2\sqrt{5}$, $F_1(-4,\ 0)$, $F_2(4,\ 0)$, $\varepsilon = 2/3$**:** 2) $a = 2\sqrt{7},\ b = 8$, $F_1(0,\ -6)$, $F_2(0,\ 6)$, $\varepsilon = 3/4$. **20.** $x = \pm 10$. **21.** 1) $3x^2 + 4y^2 = 48$ ellipsiň içi we $x = 2$ göni çyzygyň sagy; 2) $25x^2 + 8y^2 = 200$ ellipsiň içi we $y = 2$ göni çyzygyň aşagy. **22.** 1) $a = 4,\ b = 3$, $F_1(-5,\ 0)$, $F_2(5,\ 0)$, $\varepsilon = 5/4$, $y = \pm(3/4)x$**;**
2) $a = 8,\ b = 6$, $F_1(-10,\ 0)$, $F_2(10,\ 0)$, $\varepsilon = 5/4$, $y = \pm(3/4)x$**;**
3) $a = 12,\ b = 5$, $F_1(0,\ -13)$, $F_2(0,\ 13)$, $\varepsilon = 13/5$, $y = \pm(5/12)x$.

23. 1) $x = \pm 10/3,\ d = 20/3$; 2) $y = \pm 24/7,\ d = 48/7$; 3) $x = \pm 3{,}5,\ d = 7$.
24. M nokat üçin $r_1 = 11,\ r_2 = 5$; N nokat üçin $r_1 = 9,\ r_2 = 15$.
25. 1) $F(2,\ 0),\ x = -2$; 2) $F(-2{,}5,\ 0)$ $x = 2{,}5$. **26.** $y^2 = -4(x - 9)$,
$A(9,\ 0),\ B(0,\ -6),\ C(0,\ 6)$.

I. 3 ÇYZYKLY ALGEBRA
§ 3. 1. Kesgitleýjiler we olaryń häsiýetleri

1. Ikinji we üçünji tertipli kesgitleýjiler. $a_{11}\,a_{22}-a_{21}\,a_{12}$ sana $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dört sandan düzülen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

kwadrat tablisanyň ikinji tertipli kesgitleýjisi diýilýär we ol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

görnüşde belgilenýär, ýagny

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \qquad \textbf{(1)}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sanlara ikinji tertipli kesgitleýjiniñ elementleri diýilýär. Kesgitleýjiniñ her bir elementi iki indeksli harp bilen belgilenip, birinji indeksi onuñ ýerleşýän setiriniñ nomerini, ikinjisi sütüniniñ nomerini añladýar we şol elementiň olaryń kesişmesinde ýerleşýändigini görkezýär (mysal üçin, a_{21} element kesgitleýjiniñ ikinji setiri bilen birinji sütüniniñ kesişmesinde ýerleşýär)

$a_{ik}\ (i,k=1,2,3)$ dokuz sandan düzülen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kwadrat tablisadan kesgitlenýän

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11} \qquad \textbf{(2)}$$

sana üçünji tertipli kesgitleýji diýilýär, (2) formulanyñ sag bölegindäki algebraik jemiń her bir goşulyjysynyň kesgitleýjiniñ her bir setirinden we her bir sütüninden alnan bir we diñe bir elementleriň köpeltmek hasylydygyny belläliň. Bu köpeltmek hasyllar goşmak ýa-da aýyrmak alamaty bilen alynýar. Haýsylaryny “+” alamaty, haýsylaryny “–” alamaty bilen almalydygyny ýatda saklamak üçin 1-nji suratda görkezilen shema peýdalydyr.

“-” **“+”**

1-nji surat.

Kesgitleýjiniň haýsydyr bir elementiniň ýerleşýän setiriniñ we sütüniniň çyzylmagyndan alynýan kesgitleýjä şol elementiñ minory diýilýär. Mysal üçin,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

ikinji tertipli kesgitleýji (2) kesgitleýjiniň a_{21} elementiniñ minorydyr. (1) kesgitleýjiniñ a_{21} elementiniń minory a_{12} elementdir (birinji tertipli kesgitleýji), a_{ik} elementiň minoryny M_{ik} bilen belgiläliñ. Kesgitleýjiniň a_{ik} elementiniñ $(-1)^{i+k}$ alamat bilen alnan minoryna onuň algebraik doldurgyjy diýilýär. Mysal üçin, (2) kesgitleýjiniñ a_{21} elementiniň algebraik doldurgyjy minus alamaty bilen alnan (3) kesgitleýji bolar. a_{ik} elementiň algebraik doldurgyjy A_{ik} bilen belgilenýär. Şunlukda, $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

2. Kesgitleýjiniñ häsiýetleri .

Kesgitleýjileriň häsiýetleri aşakdaky teoremalar bilen berilýär.

1-nji teorema. 1) Ähli setirleri degişli sütünleri bilen çalşyrylanda kesgitleýji üýtgemez;

2) Iki sütüniniñ (setiriniň) orny çalşyrylanda kesgitleýjiniň diñe alamaty üýtgär;

3) Iki deń sütüni (setiri) bar bolan kesgitleýji nola deñdir;

4) Käbir sütüniň (setiriň) elementleri üçin umumy köpeldijini kesgitleýji belgisiniň öňüne çykarmak bolar;

5) Eger käbir sütüniň (setiriň) ähli elementleri nola deñ bolsa, onda ol kesgitleýji nola deñdir.

$\lhd$ Üçünji tertipli (2) kesgitleýjä garalyň.

1) Ol kesgitleýjide her bir setiri şol nomerli sütün bilen çalşyralyň, onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

täze kesgitleýji alarys.

Bu deňligi (2) bilen deñeşdirenimizde kesgitleýjileriň deńdigini görmek bolar, çünki, görkezilen deńlikleriň sag bölekleri deñdir.

2) Eger (2) kesgitleýjide ikinji we üçünji sütünleriň orunlaryny çalşyrsak, onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{33}a_{12} - a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} = -(a_{11}a_{22}a_{33} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11})$$

deňligi alarys. Ýaýdaky algebraik jemiň (2) formulanyň sag bölegine deň bolany üçin täze kesgitleýji ondan diňe alamaty bilen tapawutlanýar. Beýleki ýagdaýlar hem şuňa meňzeşlikde görkezilýär.

3) Kesgitleýjini Δ bilen belgiläliñ. Goý, onuñ iki deń sütüni bar bolsun. Bu sütünleri çalşyryp, şol bir Δ kesgitleýjini alarys. 2-nji häsiýete görä kesgitleýjiniñ alamaty üýtgeýändir, ýagny, $\Delta = -\Delta$ bolar, bu ýerden bolsa $\Delta = 0$ deñligi alarys.

4) Goý, (2) kesgitleýjide ikinji sütüniñ elementleriniñ umumy λ köpeldijisi bar bolsun. Onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

çünki

$$a_{11}\lambda a_{22}a_{33}+\lambda a_{12}a_{23}a_{31}+\lambda a_{32}a_{21}a_{13}-a_{13}\lambda a_{22}a_{31}-$$
$$-\lambda a_{12}a_{21}a_{33}-\lambda a_{32}a_{23}a_{11}=\lambda(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$
$$+a_{32}a_{21}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11})$$

5) Eger käbir sütüniň (setiriň) ähli elementleri nola deň bolsa, onda (2) deńligiň sag bölegindäki algebraik jemiň her bir goşulujysy, nol köpeldijisi bolan köpeltmek hasyly hökmünde nola deñ bolar we şonuñ üçin Δ nola deñdir $\triangleright$

Netije: Iki proporsional sütünli (setirli) kesgitleýji nola deñdir.

$\triangleleft$ Hakykyatdan-da, bu sütünleriñ biriniń elementleriniń umumy köpeldijisini kesgitleýjiniñ öñüne çykaryp, iki deń sütünli kesgitleýjini alarys. Ol bolsa nola deñdir. Ikinji tertipli kesgitleýjiniñ ähli häsiýetleri şuña meñzeşlikde subut edilýär. $\triangleright$

2-nji teorema. Eger käbir sütüniñ (setiriñ) elementlerini şol bir köpeldijä köpeldilip, beýleki sütüniñ (setiriñ) degişli elementlerine goşsak, onda kesgitleýji üýtgemez.

$\triangleleft$ Goý, mysal üçin, (2) kesgitleýjiniñ üçünji sütüniniñ elementlerine λ sana köpeldilen 2-nji sütüniń degişli elementleri goşulan bolsun. Onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bolar, çünki

$$a_{11}a_{22}(a_{33}+\lambda a_{33})+a_{12}(a_{23}+\lambda a_{22})a_{31}+a_{21}a_{32}(a_{13}+\lambda a_{12})-$$
$$-(a_{13}+\lambda a_{12})a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}(a_{33}+\lambda a_{32})-(a_{23}+\lambda a_{22})a_{32}a_{11}=$$
$$=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{23}a_{32}a_{11})+\lambda(a_{11}a_{22}a_{32}+a_{12}a_{31}a_{22}+a_{21}a_{32}a_{12}-a_{12}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{22}a_{32})$$

deňlik ýerine ýetýär we onuň sagyndaky ýaýyň içindäki algebraýik jem nola deňdir. $\triangleright$

Bellik. Bu teoremada şol bir wagtda käbir sütüniñ (setiriñ) hemme elementleri iki goşulyjynyñ jemine deñ bolan kesgitleüýjiniň iki kesgitleýjiniñ jemine deñ bolup, birinji kesgitleýjiniñ degişli sütününiñ (setiriniñ) elementleriniñ onuñ birinji goşulyjylary, ikinji kesgitleýjiniñki bolsa ikinji goşulyjylary bolýandygy subut edildi.

3-nji teorema. Kesgitleýji islendik setiriñ (sütüniñ) elementleriniñ olaryñ algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyñ jemine deñdir.

$\triangleleft$Ikinji tertipli kesgitleýji üçin teorema aýdyñ, onuñ tassyklamasy (1) formuladan gelip çykýar. (2) kesgitleýjini Δ bilen belgiläp, sag bölegini özgerdeliñ.

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$
$$- a_{23}a_{32}a_{11} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu ýerden

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

bolýany üçin

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad \textbf{(5)}$$

deňligi alarys, bu ýerde A_{11}, A_{12}, A_{13} degişlilikde a_{11}, a_{12}, a_{13} elementleriñ algebraik doldurgyçlary.

(5) deňlige birinji setiriñ elementleri boýunça kesgitleýjini dagytmak formulasy diýilýär. Beýleki setirleriñ we sütünleriñ elementleri boýunça dagytmak şuńa meñzeş görkezilýär.

4-nji teorema. Goý, Δ-käbir üçünji tertipli kesgitleýji bolsun. Haýsydyr bir setiriñ (sütüniñ) algebraik doldurguçlarynyñ islendik q_1, q_2, q_3 sanlara köpeltmek hasyllarynyñ jemi berlen Δ kesgitleýjiden şol setiriñ (sütüniñ) q_1, q_2, q_3 sanlar setiri (sütüni) bilen çalşyrylmagyndan alynýan Δ' kesgitleýjä deñdir.

$\triangleleft$ (2) kesgitleýjiniñ birinji setirine we Δ' kesgitleýjä seredeliñ:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3-nji teorema esasynda $\Delta' = q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_3 Q_3$, bu ýerde Q_1, Q_2, Q_3 degişlilikde q_1, q_2, q_3 elementleriń algebraik doldurguçlary. Şoña gőrä $Q_1 = A_{11},\ Q_2 = A_{12},\ Q_3 = A_{13}$ bolýany üçin bu ýerden $\Delta' = q_1 A_{11} + q_2 A_{12} + q_3 A_{13}$ deňligi alarys(bu ýerde A_{11}, A_{12}, A_{13} sanlar (4) formulalar arkaly kesgitlenýär). $\rhd$

5-nji teorema. Haýsydyr bir setiriñ (sütüniñ) elementleriniñ beýleki setiriñ (sütüniñ) degişli elementleriniń algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyñ jemi nola deñdir.

$\lhd$ Ikinji tertipli kesgitleýji üçin teorema aýdyñdyr (iki deń setirli kesgitleýjini alarys). (2) deñlik bilen kesgitlenýän Δ kesfitleýji berlen bolsun. $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{12} A_{23} = 0$ deňligi görkezeliń. 4-nji teorema boýunça

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Iki deň setirli kesgitleýji hökmünde bu deňligiň sagyndaky kesgitleýji nola deňdir. Şonuň üçin

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

bolar.

1-nji mysal.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

üçünji tertipli kesgitleýjini üç usul bilen hasaplamaly.

$\lhd$ 1) $\Delta = -7 - 60 - 96 + 18 + 56 + 40 = -49$;

2) $\Delta = 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot 33 + 2(-2) + 3(-26) = -49;$

3) Birinji setiri -4-e köpeldip, ikinji setiriñ degişli elementlerine goşup, soñra birinji setiri -6-a köpeldip, üçünjä goşanymyzda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & -11 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjini alarys.Bu kesgitleýjini birinji sütüniń elementleri boýunça dagydyp,

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = (-77+28) = -49$$

deňligi alarys. $\triangleright$

3. *n*-nji tertipli kesgitleýji. Matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, ýagny (n-1)-nji tertipli kesgitleýji düşünjesi belli hasap edip, n-nji tertipli kesgitleýji düşünjesini girizeliň. Onuň üçin n sütünden we n setirden ybarat bolan sanlaryñ kwadrat tablisasyna seredeliñ:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

Ońa n-nji tertipli matrisa diýilýär (§3.3 seret).

(6) matrisanyñ i-nji setirini we k-njy sütünini çyzmak arkaly alynýan (n-1)-nji tertipli kesgitleýjä n-nji tertipli matrisanyñ a_{ik} elementiniñ minory diýilýär. a_{ik} elementiñ minoryny M_{ik} bilen belgiläris. a_{ik} elementiñ algebraik doldurgyjy diýip, onuň $(-1)^{i+k}$ alamat bilen alnan minoryna aýdylýar we A_{ik} bilen belgilenýär, ýagny $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k}\, M_{1k}$ sana, (6) matrisanyñ n-nji tertipli kesgitleýjisi diýip aýdylýar, we ol şeýle belgilenýär.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{23} \\ \dots & \dots \dots \dots. \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{33} \end{vmatrix}$$

Şeýlelikde, kesgitlmä görä,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

ýa-da $\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, A_{1k}$.

Bu formula n-nji tertipli kesgitleýjini degişli matrisanyñ birinji setiriniñ elementleri we (n-1)-nji tertipli kesgitleýjiler bolan algebraik doldurgyçlary boýunça dagytmak düzgünini añladýar. Bu formuladan n=2 bolanda formula (1), n=3 bolanda formula (5) alynýar. Kesgitleýjini dagytmak üçin onuñ birinji setiriniñ elementlerini we oña degişli minorlaryndan başga beýleki setiriniñ elementlerini, şeýle hem islendik sütüniniñ elementlerini ulanyp bolmaýarmy diýen sorag ýüze çykýar .

Bu soraglara aşakdaky teoremalar jogap berýär.

1. n-nji tertipli kesgitleýji üçin $i(i$=1,2,..,$n)$ setiriñ nomeri nähili bolsa-da n-nji tertipli (7) kesgitleýji üçin

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, M_{ik}$$

ýa-da dagytmak formulasy diýip atlandyrylýan

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, A_{ik} \qquad (i = 1,2,3,\dots,n)$$

formula dogrudyr.

2. n-nji tertipli kesgitleýji üçin k-njy sütüniniñ (k=1,2,..,n) nomeri nähili bolsa-da n-nji tertipli (7) kegitleýji üçin

$$\Delta = \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, M_{ik}$$

ýa-da bu kesgitleýjini k-njy sütün boýunça dagytma formulasy diýip atlandyrylýan.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1,2,3...,n)$$

formula dogrudyr.

n-nji tertipli (n>3) kesgitleýjiler üçin hem 1-5-nji teoremalaryñ dogrudygyny subutsyz belläliñ. Hususanda, 5-nji teorema

$$a_{k1} A_{i1} + a_{k2} A_{i2} + ... + a_{kn} A_{in} = 0 \qquad (i \neq k)$$

deñlik arkaly añladylýar.

§ 3. 2. Kesgitleýjileriñ kömegi bilen çyzykly deñlemeler sistemasynyñ çőzülişi

1. Deňlemeler sistemasy we onuň çözüwi. $x_1, x_2, ..., x_n$ näbellilere görä *n* çyzykly deńlemeler sistemasyna garalyń:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n &= b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n &= b_{2;} \\ .... &......... \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n &= b_n . \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(8)}$$

Näbellileriñ koeffisiýentleri iki indeksli a harp bilen belgilenip, olaryń birinjisi deńlemäniñ nomerini, ikinjisi näbelliniñ nomerini görkezýär.

Eger azat agzalaryñ $(b_k$ hemişelikleriñ $k = 1,...,n)$ arasynda noldan tapawutlylary bar bolsa, onda deñlemeler sistemasyna birjynsly däl sistema diýilýär. Eger ähli azat agzalar nola deñ bolsa, onda oña birjynsly deňlemeler sistemasy diýilýär we ol

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n &= 0; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n &= 0; \\ .... &....... \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n &= 0 . \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(9)}$$

görnüşde ýazylýar.

Eger $x_1, x_2, ..., x_n$ näbelliler degişlelikde $c_1, c_2, ..., c_n$ sanlar bilen çalşyrylanda (8) sistemanyň her bir deňlemesi toždestwa öwrülýän bolsa, onda

$$x_1 = c_1 \;\;, \quad x_2 = c_2 \quad ,..., x_n = c_n \qquad \textbf{(10)}$$

sanlaryň toplumyna (8) sistemanyň çözüwi diýilýär.

2. Kramer düzgüni. (8) sistemanyñ deńlemeleriniñ näbellileriniń koeffisiýentlerinden düzülen kesgitleýjä deñlemeler sistemasynyñ kesgitleýjisi diýilýär. Ony Δ bilen belgiläliñ. Ol kesgitleýjiden x_k näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen sütüni azat agzalaryň sütüni bilen çalşyrylmagyndan alnan kesgitleýjini Δ_k bilen belgiläliň. Şeýlelikde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

bu ýerde k – 1,2,…,n sanlaryń biri

6-njy teorema (Kramer). Eger (8) sistemanyñ kesgitleýjisi noldan tapawutly bolsa, onda ol sistemanyñ ýeke-täk

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad \textbf{(12)}$$

çözüwi bardyr.

$\lhd$ (8) deñlemeller sistemanyñ birinjisiniň iki bölegini hem Δ kesgitleýjiniñ a_{1k} elementiniñ A_{1k} algebraik doldurgujyna, ikinji deńlemäniñ iki bölegini A_{2k} algebraik doldurguja we ş.m., ahyrsoñunda iń soñky deñlemäniñ iki bölegini A_{nk} köpeldeliñ. Olary agzalaýyn goşup we meñzeş agzalary toplap alarys:

$$(a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \ldots + a_{n1}A_{nk})x_1 + (a_{12}A_{1k} + a_{22}A_{2k} + \ldots +$$
$$+ a_{n2}A_{nk})x_2 + \ldots + (a_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk})x_k + \ldots + (a_{1n}A_{1k} +$$
$$+ a_{2n}A_{2k} + \ldots + a_{nn}A_{nk})x_n = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \ldots + b_nA_{nk} \quad .$$

5-nji teorema laýyklykda $x_i \; (i \neq k)$ näbellileriñ koeffisiýenleriniñ hemmesi nola deñ; 3-nji teorema görä x_k-nyń koeffisiýenti sistemanyñ Δ kesgitleýjisine deń; 4-nji teorema laýyklykda bu deńligiń sag bölegi Δ_k kesgitleýjä deñdir. Şunlukda soñky deńlik $\Delta x_k = \Delta_k$ görnüşi alar. $\Delta \neq 0$ we *k* san *1,2,…,n* sanlaryñ biri bolany sebäpli ol deñlikden (12) formulalar gelip çykýar. $\rhd$

2-nji mysal.

$$\begin{cases} x-2y+3z=2; \\ 4x-y+5z=15; \\ 6x-8y+7z=9; \end{cases}$$

deñlemeler sistemasyny çözmeli.

$\lhd$ Sistemanyñ Δ kesgitleýjisini we Δ_k kesgitleýjilerini *(k=1,2,3)* düzeliñ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 15 & -1 & 5 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix}, \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Şunlukda, $\Delta=-49\neq 0$, ýagny 6-njy teoremanyñ şerti ýerine ýetýär. $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ kesgitleýjileri hasaplap, (12) formulalary ulanýarys (*n=3* diýip). $\Delta_1=-147, \Delta_2=-98, \Delta_3=-49$ bolany üçin sistemanyñ $x=\dfrac{-147}{-49}=3$, $y=\dfrac{-98}{-49}=2$, $z=\dfrac{-49}{-49}=1$ ýeke-täk çözüwi bardyr.

Netije. Eger (9) birjynsly sistemanyñ nola deň bolmadyk çözüwi bar bolsa, onda onuń kesgitleýjisi nola deńdir. Hakykatdan hem, eger tersine, $\Delta\neq 0$ bolsa, onda (9) sistemanyñ ýeke-täk nol çözüwi bardyr (ähli $\Delta_k=0$ bolany üçin) we ol şerte garşy gelýär.

$\Delta=0$ bolanda (8) deňlemeler sistemasynyň ýa-ha tükenüksiz köp çözüwi bardyr ýa-da çözüwi ýokdur.

§ 3. 3. Matrisalar we olar bilen geçirilýän amallar

1. Matrisalar barada düşünje. *m* setirden we *n* sütünden ybarat gönüburçly tablisada ýerleşen $m\times n$ sanlaryń sistemasyna matrisa diýilýär. Matrisadaky sanlara onuň elementleri diýilýär. Matrisanyň (ýokardan aşak sanalýan) *i*-nji setiriniň we (çepden saga sanalýar) *k*-njy sütüniniň kesişmesinde ýerleşen element a_{ik} bilen belgilenýär, *i* we *k* sanlara bolsa elementiň indeksleri diýilýär. Matrisa aşakdaky belgileriň biri bilen belgilenýär:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(13)}$$

ýa-da has gysgaça

$$(a_{ik})_{mn}, \quad \|a_{ik}\|_{mn}, \quad [a_{ik}]_{mn} \qquad \textbf{(14)}$$

görnüşde hem ýazylýar, bu ýerde *i* san 1-den *m*-e çenli, *k* bolsa 1-den *n*-e çenli üýtgeýär. Käwagt matrisany bir harp, meselem, A, B bilen belgilenýär, ýöne şonda A, B diýip gönüburçly tablisa düşünilýär. Bir setirden ybarat bolan matrisa setir, bir sütünden ybarat bolan matrisa sütün matrisasy diýilýär. Hemme elementleri nola deň bolan matrisa nol matrisa diýilýär. *n* setiri we *n* sütüni bolan matrisa *n*-nji tertipli kwadrat matrisa diýilýär (birinji tertipli kwadrat matrisa ýeke-täk elemente deň bolýar):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(15)}$$

Matrisanyň elementleri ýaly elementleri bolan kesgitleýjä, ýagny (11) formulanyň Δ kesgitleýjisine Kwadrat matrisanyň kesgitleýjisi diýilýär. Kwadrat däl gönüburçly matrisanyň kesgitleýjisiniň ýokdugyny belläp geçeliň. (15) kwadrat matrisanyň $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlerden düzülen diogonalyna onuñ esasy diogonaly diýilip aýdylýar. Esasy diogonalda ýerleşmeýän ähli elementleri nola deň bolan kwadrat matrisa diagonal matrisa diýilýär:

$$diag(a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & a_{22} \dots 0 \\ 0 & 0 \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

Hemme diagonal elementleri 1-e deň bolan diagonal matrisa birlik matrisa diýilýär. Eger ony *E* bilen belgilesek, onda

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 \ldots & 0\\ 0 & 1 \ldots & 0\\ 0 & 0 \ldots & 1\end{pmatrix}=diag(1,1,\ldots,1) \qquad \textbf{(17)}$$

Setirleriniň we sütünleriniň sanlary deň matrisalara ölçegdeş matrisalar diýilýär.

Eger *A* we *B* deñ őlçegli matrisalar bolup, *A* matrisanyň her bir a_{ik} elementi degişlilikde B matrisanyň b_{ik} elementine deň, ýagny $a_{ik}=b_{ik}$ bolsa onda A we B matrisalara deň matrisalar diýilýär we

$$A = B \qquad \textbf{(18)}$$

görnüşde ýazylýar.

2. Matrisalaryň üstünde amallar. Ters matrisa

$$A=\begin{pmatrix}a_n & a_{12} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn}\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}b_n & b_{12} \ldots b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots & \\ b_{m1} & b_{m2} \ldots b_{mn}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

matrisalar üçin her bir elementi ol matrisalaryň degişli elementleriniň jemine deň bolan, ýagny elementleri

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n) \qquad \textbf{(20)}$$

deňlik boýunça kesgitlenýän

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots & \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots c_{mn}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(21)}$$

matrisa *A* we *B* matrisalaryñ jemi diýilýär. *A* we B matrisalaryň jemi

$$C = A+B \qquad \textbf{(22)}$$

görnüşde belgilenýär. Olaryň tapawudy hem ş.m. kesgitlenýär :

$$D=A-B\,, \qquad \textbf{(23)}$$

bu ýerde

$$D=(d_{ik})_{mn}, \quad d_{ik}=a_{ik}-b_{ik}\ . \qquad \textbf{(24)}$$

A matrisanyň ähli elementlerini λ sana köpeldilmegi bilen alnan

$$B=\lambda A \qquad \textbf{(25)}$$

matrisa A matrisanyň λ sana köpeltmek hasyly diýilýär, şunlukda,

$$b_{ik}=\lambda a_{ik}\,. \qquad \textbf{(26)}$$

Şol bir tertipli A we B iki kwadrat matrisa üçin aşakdaky düzgün boýunça düzülen şol tertipli üçünji P kwadrat matrisa olaryñ AB kőpeltmek hasyly diýilýär: P matrisanyň *i*-nji setir bilen *k*-njy sütüniniň kesişmesinde ýerleşýän ρ_{ik} elementi A matrisanyň *i*-nji setiriniň elementleriniň B matrisanyň *k*-njy sütüniniň degişli elementlerine köpeltmek hassyllarynyň jemine deň, ýagny

$$\rho_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{ik}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}+\ldots+a_{in}b_{nk}\,. \qquad \textbf{(27)}$$

Umuman matrissalar orun çalşyrma kanunyna boýun bolmaýarlar, ýagny

$$AB\neq BA\,. \qquad \textbf{(28)}$$

3-nji mysal. 2-nji tertipli

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

matrisalaryň *AB* we *BA* köpeltmek hassyllaryny tapmaly.

$\lhd$ $A=(a_{ik})_{22}$, $B=(b_{ik})_{22}$ matrisalar üçin (27) formulany ulanyp, görkezilen köpeltmek hassyllaryň umumy aňlatmalaryny tapýarys:

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix},$$

Biziň mysalymyzda

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0+0\cdot 4 & 3\cdot 0+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 4 & 0\cdot 0+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 3+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0\\ 4\cdot 3+0\cdot 0 & 4\cdot 0+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 12 & 0\end{pmatrix}.$$

Bu köpeltmek hassyllary üçin (28) deňsizlik ýerine ýetýär. Bu mysalda AB-nol matrisa. Bu mysal köpeldijileriň ikisiniň hem nol matrisa bolmadyk ýagdaýynda olaryň köpeltmek hasylynyň nol matrisa bolup biljekdigini görkezýär. Kwadrat matrisalar köpeldilende (17) birlik matrisa sanlary köpeltmekdäki birlik ýalydyr, ýagny

$$AE = EA = A \qquad \textbf{(29)}$$

Birlik E matrisa üçin

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \qquad \textbf{(30)}$$

deňligi kanagatlandyrýan A^{-1} matrisa A matrisanyň ters matrisasy diýilýär.

$$\Delta \neq 0 \qquad \textbf{(31)}$$

şerti kanagatlandyrýan matrisa aýratyn däl matrisa diýilýär.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(32)}$$

matrisa garalyň, bu ýerde A_{ik} (15) matrisanyň a_{ik} elementleriniň algebraik doldurgyçlary (setiriň algebraik doldurgyçlary sütünde ýazylýar). (32) matrisa üçin (30) deňligiň ýerine ýetýändigine barlagyň üsti bilen göz ýetirip bolýar. Diýmek, (32) matrisa (15) matrisanyň ters matrisasydyr. A^{-1} matrisanyň berlen aýratyn däl A matrisa üçin (30) şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk matrisadygyny belläliň. Hakykatdan hem, eger C matrisa AC=CA=E deňligi kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$CAA^{-1} = C\left(AA^{-1}\right) = CE = C, \quad CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$$

deňlikler esasynda $C = A^{-1}$.

Bellik. Matrisalaryň köpeltmek hasylynyň assosiatiwlik häsiýeti bardyr, ýagny (*AB*)*C*=*A*(*BC*). Goý, *n* tertipli üç erkin $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ matrisalar berlen bolsun. Belgilemeleri girizeliň:

$$AB = U = (u_{ij}), \qquad BC = V = (v_{ij}),$$
$$(AB)C = S = (s_{ij}), \qquad A(BC) = T = (t_{ij}).$$

$$u_{il} = \sum_{K=1}^{n} a_{ik} b \ , \ v_{kj} = b_{kl} c_{ej} \ , \ S=UC, \ T=AV$$

bolýany sebäpli,

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^{n} u_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \ ;$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

deňlikler ýerine ýetýär. Şoňa görä bu ýerden $i, j = 1,2,3,...,n$ üçin $s_{ij} = t_{ij}$ ýa-da (*AB*)*C*=*A*(*BC*) deňlik alynýar.

Ters matrisalar *AX*=*B* görnüşdäki matrisa deňlemeleri çözmekde peýdalanylýar, bu ýerde *A* we *B* – berlen matrisalar, özem *A* matrisanyň kesgitleýjisi noldan tapawutly, *X*-gözlenilýän matrisa. Deňlemäniň iki bölegini hem çepinden A^{-1}-e köpeldip, (30) deňlikleri ulansak, onda $X = A^{-1}B$ deňligi alarys. Eger *XA*=*B* deňleme berlen bolsa, onda ony sagyndan A^{-1}-e köpeltmek bilen $X = BA^{-1}$ deňligi alarys. Kesgitleýjisi nola deň bolan matrisa aýratyn matrisa diýilýär. Aýratyn matrisanyň ters matrisasy ýokdur.

AB köpeltmek hasylynyň kesgitlemesini *A* köpeldiji matrisanyň sütünleriniň sany *B* köpeldiji matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolan kwadrat däl matrisal üçin hem girizmek bolar. Bu şertde A matrisanyň islendik (*m*) sany setiri, *B* matrisanyň islendik (*n*) sany sütüni bolup biler. *AB* matrisanyň *m* setiri we *n* sütüni bolar, onuň elementleri (27) formula arkaly kesgitlenýär.

4-nji mysal. *AB* köpeltmek hasyly tapmaly:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix};$$

BA köpeltmek hasyly alyp bolarmy?

$\lhd$ *A* matrisanyň sütünleriniň sany *B* matrisanyň setirleriniň sanyna deň. (27) formula arkaly alarys:

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot3+3\cdot1+(-1)9 & 1\cdot4+2\cdot2+3(-5)+(-1)(-7) \\ 0\cdot5+4\cdot3+5\cdot1+(-2)9 & 0\cdot4+4\cdot2+5(-5)+(-2)\cdot(-7) \\ 7\cdot5+1\cdot3+0\cdot1+(-3)9 & 7\cdot4+1\cdot2+0\cdot(-5)+(-3)(-7) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \\ 11 & 51 \end{pmatrix}$$

BA kesgitlenen däl, sebäbi *B* matrisanyň sütünleriniň sany *A* matrisanyň setirleriniň sanyna deň gelenok. ▷

(19) formula arkaly kesgitlenýän *B* matrisa seredeliň. Setirleriniň sany sütünleriniň sanyna deň bolar ýaly edip, ýagny käbir kwadrat matrisa alnar ýaly ondan birnäçe setirleri we sütünleri çyzalyň; onuň kesgitleýjisine *B* matrisanyň minory diýip aýdylýar.

m setirli we *n* sütünli matrisanyň köp minorlary bar, olaryň käbiri nola deň, başgalary noldan tapawutly bolmagy mümkin. Noldan tapawutly minorlaryň iň uly tertibine matrisanyň rangy diýilýär. Mysal üçin ,

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangy 1-e deň çünki onuň 2-nji tertipli ähli minorlary

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$$

nola deň, birinji tertipli minorlaryň arasynda noldan tapawutlylary bar. Matrisanyň rangy tapylanda kiçi tertipli minorlardan uly tertipli minorlara geçmeli. Eger noldan tapawutly *k*-njy tertipli minor tapylan bolsa, onda diňe bu minory saklaýan (*k*+1)-nji tertipli minorlary hasaplamak gerek: eger-de olaryň hemmesi nola deň bolsa, onda matrisanyň rangy *k* deň. Matrisanyň rangyny hasaplamagyň ony diagonal görnüşe getirmeklige esaslanýan başga usuly hem bardyr. Eger *m* setirli we *n* sütünli matrisanyň $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ $\left(0\le r\le \min(m,n)\right)$ elementlerden başga ähli elementleri nola deň bolsa, onda oňa diagonal matrisa diýilýär. Şeýle matrisanyň rangy r-e deň, sebäbi onuň $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ esasy diagonally r-nji tertipli minory noldan tapawutly $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{rr}$ köpeltmek hasyla

deň, uly tertipli minorlary bolsa nola deňdir. Ýönekeý özgertmeleriň kömegi bilen islendik matrisany diagonal görnüşe getirip bolar:
1) iki setiriň ýa-da iki sütüniň ornuny üýtgedip; 2) sütüniň (setiriň) elementlerini noldan tapawutly erkin sana köpeldip; 3) bir setire (sütüne) käbir sana köpeldilen beýleki setiri (sütüni) goşup. Görkezilen özgertmelerde matrisanyň rangy üýtgemeýär.

§3. 4. Näbellileri yzygiderli ýoklamak usuly

Goý, n näbellili m çyzykly algebraik deńlemleriń

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_{2;} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m &= b_m. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(33)}$$

sistemasy berlen bolsun. (33) sistemada deńlemeleriń m sany näbellileriń n sanyndan kiçi, uly ýa-da deń bolup biler.

x_i näbelliler degişlilikde c_i sanlar *(i=1,…,n)* bilen çalşyrylandan soń sistemanyñ her bir deńlemesini tożdestwo öwürýän $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sanlaryń toplumyna (33) sistemanyñ çözüwi diýilýär.

Eger iki sany deńlemeler sistemasynyñ şol bir çözüwleri bar bolsa, onda olara ekwiwalent sistemalar diýilýär. (33) sistemanyñ bir deńlemesiniń iki bölegini hem $\lambda \neq 0$ sana köpeldip, şol sistemanyñ beýleki deńlmesiniń degişli elementleri bilen goşalyń, netijede täze deńlemäni alarys. Mysal üçin, eger birinji deńlemäni $\lambda \neq 0$ sana köpeldip, ikinjä goşsak, onda aşakdaky deńlemäni alarys:

$$\lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) =$$
$$= \lambda b_1 + b_2 \quad \textbf{(34)}$$

ýa-da

$$a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \quad \textbf{(35)}$$

bu ýerde

$$a'_{2k} = \lambda a_{1k} + a_{2k} \ (k = 1,2,\ldots,n), \quad b'_2 = \lambda b_1 + b_2. \quad \textbf{(36)}$$

(33) sistemadan (35) deňlik boýunça kesgitlenen ikinji deňlemesi bilen tapawutlanýan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1; \\ a'_{21}\, x_1 + a'_{22}\, x_2 + \ldots + a'_{2n}\, x_n = b'_{2;} \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + \ldots + a_{3n}\, x_n = b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m\,. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(37)}$$

deńlemeler sistemasyna garalyń:

Eger $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sanlar (33) sistemanyñ çözüwi bolsa, onda olar (37) sistemanyñ hem çözüwi bolarlar, ýagny eger $x_k = c_k$ ($k=1,2,\ldots,n$) bahalar (33) sistemanyñ hem her bir deńlemesini kanagatlandyrýan bolsa, onda olar (37) sistemanyñ hem her bir deńlemesini kanagatlandyrarlar, sebäbi ikinji deńlemeden başga hemmesi (33) sistemanyñ deñlemeleri ýaly, ikinjisi bolsa(36) deňlik esasynda (34) deňleme bilen gabat gelýär. Tersine hem dogry: eger $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sanlar (37) sistemanyñ çözüwi bolsa, onda olar (33) sistemanyñ hem çözüwi bolar, çünki (33) sistemanyñ ikinji deńlemesi (37) sistemanyñ birinji deńlemesini $(-\lambda)$ köpeldip, ikinji bilen goşulmagy netijesinde alynýar, beýleki deńlemeler iki sistemada-da deńdir. Şeýlelikde, (33) we (37) sistemalar ekwiwalentdir.

Eger (33) sistema birnäçe gezek görkezilen özgertmeler ulanylsa, onda alnan täze sistema berlen (33) sistema ekwiwalent boljakdygy düşnükli. Seredilen görnüşdäki özgertmeler geçirilende, täze sistemada ähli koeffisiýentleri nola deń bolan deńleme bolup biler. Eger şeýle deńlemäniń azat agzasy hem nola deń bolsa, onda deńlemäni näbellileriń islendik bahalary kanagatlandyrar; bu deńlemäni taşlap, berlen sistema ekwiwalent bolan deńlemeler sistemasyny alarys. Eger seredilýän deńlemede azat agza noldan tapawutly bolsa, onda näbellileriń hiç bir bahalary deńlemäni kanagatlandyrmaz, şonuń üçin alnan deńlemeler sistemasynyň we ońa ekwiwalent bolan berlen sistemanyň çözüwi ýokdur.

(33) sistemanyñ çözüwini tapmak üçin ulanaylýan näbellileri yzygiderli ýoklamak usuly, ýagny Gauss usuly diýip atlandyrylýan usul aşakdakydan ybarat:

$a_{11} \neq 0$ hasap edip, (33) ulgamyń birinji deńlemesini $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ sana köpeldip, ikinjä goşanymyzda x_1 näbelliniń koeffisiýenti nola öwrülýän deńlemäni alýarys. Birinji deńlemäni $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ sana köpeldip, üçünjä goşanymyzda hem x_1 agzany saklamaýan deńlemäni alýarys. Şeýle ýörelgäni dowam etdirip, (37) sistema ekwiwalent bolan şeýle sistema geleris:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1; \\ a'_{21}\, x_1 + a'_{22}\, x_2 + \ldots + a'_{2n}\, x_n = b'_{2;} \\ a'_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + \ldots + a'_{3n}\, x_n = b'_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1} x_1 + a_{mn}\, x_2 + \ldots + a'_{mn} x_n = b'_m\,. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(38)}$$

bu ýerde a'_{ik} $(i = 2,3,\ldots,m; k = 2,3,\ldots,n)$ -käbir täze koeffisiýentler.

$a'_{22} \neq 0$ hasap edip, (38) sistemanyñ başky iki deńlemesini üýtgetmän, galanlaryny x_2 näbellidäki koeffisiýent nola öwrüler ýaly özgerdeliń. Şu ýörelgäni dowam etdirip, (38) sistemany aşakdaky sistemalaryñ birine getirip bolar:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_{3+} \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1; \\ a'_{22}\, x_2 + a'_{23}\, x_3 + \ldots + a'_{2n}\, x_n = b'_{2;} \\ a'_{33}\, x_3 + \ldots + a'_{3n}\, x_n = b''_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{nn} x_n = b''_n\ , \end{array}\right\} \qquad \textbf{(39)}$$

bu ýerde $a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \ldots, a'_{kk} \neq 0 \quad (k = 3,4,\ldots,n)$;

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1k}x_{k+}\ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a'_{22}x_2 + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_{2;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{kk}x_k + \ldots + a''_{kn} = b''_k\ , \end{array}\right\} \qquad \textbf{(40)}$$

bu ýerde $k < n$;

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1k}x_{k+}\ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a'_{22}x_2 + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_{2;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot x_k + \ldots + 0\cdot x_n = b''_k \end{array}\right\}, \qquad \textbf{(41)}$$

bu ýerde $b''_k \neq 0\ ,\ k \leq n.$

(39) sistemanyñ ýeke-täk çözüwi bar, x_n sońky deńlemeden, x_{n-1} ondan öńki deńlemeden, we ş.m. x_1 bolsa birinji deńlemeden tapylýar.

(40) sistemanyñ tükeniksiz köp çözüwi bar. Sońky deńlemeden bir näbellini (mysal üçin, x_k-ny bu deńlemä girýän galan *n*-*k* sany $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ näbellileriń üsti bilen ańladyp bolýar. Sońkudan öńde gelýän deńlemeden x_{k-1} näbelli bu näbellileriń üsti bilen ańladylyp bilner we ş.m. Alnan formulalarda $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ näbelliler islendik bahalary alyp biler.

(41) sistemanyň çözüwi ýokdur, sebäbi onuń sońky deńlemesini näbellileriń hiç bir bahalary kanagatlandyryp bilmez.

Şunlukda, näbellileri yzygiderli ýoklamak usuly islendik çyzykly deńlemeler sistemasina ulanylarlyklydyr. Sistema şeýle usul bilen çözülende, özgertmeler deńlemeleriń üstünde däl-de, eýsem näbellileriń koffiýesentlerinden we azat agzalaryndan düzülen matrisalar üstünde geçirilýär.

5-nji mysal. Deńlemeler sistemasyny çözmeli:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 2; \\ x_1 - x_2 + 12x_3 + 6x_4 &= 6; \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

$\lhd$ Onuń matrisasyny düzeliń we ony özgerdeliń:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 12 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

Ikinji matrisa birinjiden onuń birinji setirini yzygiderlikde (-1)-e, (-4)-e, (-2)-ä köpeldilmegi we degişlilikde ikinji, üçünji, dördünji setirlerine goşulmagy arkaly alnandyr; dik çyzyk bilen bu ýerde azat agzalaryń sütüni bőlünip aýrylan. Ikinji matrisa aşakdaky deńlemeler sistemasy degişlidir:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 2; \\ -2x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 4; \\ -20x_3 - 9x_4 &= -8; \\ -9x_4 &= -3. \end{aligned}\right\}$$

Bu ýerden

$$x_4 = \frac{1}{3}, \quad 20x_3 = 8 - 9x_4 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}, \quad 2x_2 = 8x_3 + 3x_4 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = 2 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = \frac{1}{2}.$$

Şeýlelikde berlen sistemanyñ çözüwi:

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = \frac{1}{3}$. $\rhd$

6-njy mysal. Deńlemeler sistemasyny çözmeli:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0; \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 12; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

$\lhd$ Onuň matrisasyny düzeliň we özgerdeliň:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & -2 & 6 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -16 \end{array}\right)$$

Sistemanyň çözüwi ýokdur, çünki sońky matrisa näbellilerdäki ähli koeffisiýentler nola deń bolup, azat agzasy noldan tapawutly bolan deńlemä degişli setiri özünde saklaýar.

7-nji mysal. Deńlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 7; \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= 6. \end{aligned}\right\}$$

$\lhd$ Onuň matrisasyny ýazalyň we özgerdeliň

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

bolany üçin berlen sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1; \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1; \\ 2x_3 - 5x_4 &= -8. \end{aligned}\right\}$$

Deňlemeleriň sistemasyna getirilýär. Ondan bolsa

$$x_3 = \frac{5}{2}x_4 - 4;\ 2x_2 = 1 - x_3 + x_4 = 5 - \frac{3}{2}x_4;\ x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;$$

$$x = 1 - x_2 + x_4 = 1 - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4\right) - \left(\frac{5}{2}x_4 - 4\right) + x_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4$$

deňlikleri alarys. Şeýlelikde, berlen sistemanyñ

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;\ x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;\ x_3 = \frac{5}{2}x_4 - 4$$

çözüwi bardyr, bu ýerde x_4 islendik hakyky bahalary alyp bilýär. Diýmek bu sistemanyñ tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

Gönükmeler

Kesgitleýjileri hasaplamaly

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a^z & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **16.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. **28.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$

Kesgitleýjileriň kömegi bilen aşakdaky deňlemeler sistemalaryny çözmeli.

31. $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2 \end{cases}.$

32. $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 4x-5y=10. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 5x-7y=1, \\ x-2y=0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 4x+7y+13=0, \\ 5x+8y+14=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x\,tg\alpha + y = \sin(\alpha+\beta), \\ x - y\,tg\alpha = \cos(\alpha+\beta). \end{cases}$

37. $\begin{cases} 4x+6y=2, \\ 6x+9y=3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} ax+4y=2, \\ 9x+ay=3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} ax-9y=6, \\ 10x-by=10 \end{cases}.$

40. $\begin{cases} 2x+3y+5z=10, \\ 3x+7y+4z=3, \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 5x-6y+4z=3, \\ 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+2z=1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0, \\ 6x-2y+3z+1=0, \\ 5x-3y+2z+3=0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 5x+2y+3z+2=0, \\ 2x-2y+5z=0. \\ 3x+4y+2z+10 \end{cases}$

Näbellileri yzygiderli ýok etmek usuly bilen aşakdaky deňlemeler sistemalaryny çözmeli.

44. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 &= -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22. \end{aligned}$$

45. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 7 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + 1 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

46. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 + 3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

47. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7. \end{aligned}$$

48. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 &= 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 &= 0, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

49. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 &= 263, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 &= 146, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 &= 92. \end{aligned}$$

Matrisalaryň köpeltmek hasylyny tapmaly

50. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aşakdaky matrisalaryň ters matrisalaryny tapmaly.

55. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ **57.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **59.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

JOGAPLAR:

1) 1 ; 2) -2 ; 3) -1; 4) 0 ; 5) 0 ; 6) -1 ; 7) 4ab ; 8) $-2b^2$; 9) 1 ; 10) $\sin(\alpha-\beta)$; 11) $\cos\alpha+\beta$; 12) 1 ; 13) -1 ; 14) 40 ;
15) -3 ; 16)100 ; 17) -5 ; 18) 0 ; 19)1 ; 20) 1 ; 21) 2 ; 22) 4 ; 23) -8 24)6 ; 25)20 ; 26)0 ; 27) $3abc-a^2-b^2-c^2$; 28) $a^2+b^2+c^2-3abc$; 29)0 ; 30) $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$;
31) $x=3$; $y=-1$; 32) $x=5$; $y=2$ 33) $y=\dfrac{2}{3}$; $x=\dfrac{1}{3}$;
34) $x=2$; $y=-3$; 35) $x=\cos(\beta-\alpha)$; $y=\sin(\beta-\alpha)$;
36) $x=\cos\alpha\ \cos\beta$; $y=\cos\alpha\ \sin\beta$; 37)sistema kesgitlenen däl;
38) $a\neq\pm 6$ bolanda sistema kesgitlenen, $a=6$ bolanda sistema kesgitlenmedik, $a=-6$ bolanda garşylykly ; 39) $ab\neq 90$ bolanda sistema kesgitlenen, $a=6$; $b=15$ bolanda kesgitlenmedik, $ab=90$ emma $a\neq 6$; $b\neq 15$ bolanda garşylykly ;
40) $x=3; y=-2; z=2$; 41) $x=y=z=1$; 42) $x=1; y=2; z=-1$;
43) $x=2; y=-3; z=-2$; 44) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$
45) $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$ 46) $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=3$ 47) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1/3$, $x_4=-3/2$
48) $x_1=1/2$, $x_2=-2/3$, $x_3=2$, $x_4=-3$ 49) $x_1=104\dfrac{6}{7}$
$x_2=7\dfrac{4}{7}$, $x_3=-10$, $x_4=1$ 50) $\begin{pmatrix}7&2\\7&0\end{pmatrix}$ 51) $\begin{pmatrix}a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta\\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta\end{pmatrix}$

52) $\begin{pmatrix}1&5&-5\\3&10&0\\2&9&-7\end{pmatrix}$ 53) $\begin{pmatrix}11&-22&29\\9&-27&32\\13&-17&26\end{pmatrix}$ 54) $\begin{pmatrix}10&17&19&23\\17&23&27&35\\16&12&9&20\\7&1&3&10\end{pmatrix}$

55) $\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$ 56) $\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$ 57) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

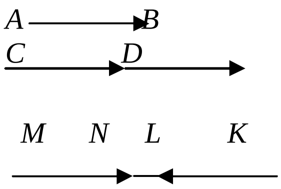
58) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 59) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

60) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 61) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

I. 4. WEKTOR ALGEBRASY

§ 4. 1. Esasy düşünjeler

Ugrukdyrylan kesime wektor diýilýär.Suratda wektoryň ugry adatça peýkam bilen belgilenýär .(1-nji surat)



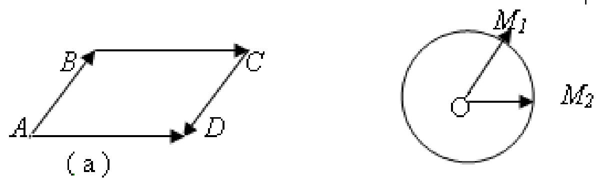
1-nji surat

Eger wektoryň başlangyjy A nokatda, ahyry B nokatda bolsa, onda wektor $\overline{AB}$ ýa-da $\overrightarrow{AB}$ bilen belgilenýär. Wektoryň başlangyjyna onuň goýma nokady hem diýilýär. Wektorlar $\mathbf{a},\mathbf{b}$ we ş .m bilen ýa-da $\bar{a}, \bar{b}$ we ş.m bilen belgilenýär. $\bar{a}$ wektoryň uzynlygyna bu wektoryň moduly diýilýär. Ol $|\bar{a}|$ görnüşde ýazylýar. Wektoryň moduly – otrisatel däl skalýar ululykdyr.

Başlangyjy we ahyry gabat gelyän wektora nol wektor diýilýär, we ol $\overline{O}$ bilen belgilenýär. Nol wektoryň moduly nola deň, ugry bolsa kesgitlenmedikdir. Uzynlygy bire deň bolan wektora birlik wektor diýilýär Parallel gönülerde (ýa-da bir gönüde) ýatýan wektorlara kollinear wektorlar diýilýär. Mysal üçin,

1-nji suratda $\overline{CD}$ we $\overline{MN}$,$\overline{KL}$ we $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ we $\overline{KL}$ wektorlar kollineardyrlar. Deň uzynlykly ugurdaş kollinear wektorlara deň wektorlar diýilýär.

(2-nji (a) suratdaky *ABCD* parallelogramyň $\overline{BC}$ we $\overline{AD}$ wektorlary deň) $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlaryň ugurlary garşylykly bolany üçin $\left(\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{CD}\right|\right)$, $\overline{AB} \neq \overline{CD}$



(a)

2-nji surat

(b)

$\overline{OM_1}$ $\overline{OM_2}$ wektorlaryň ugurlary dürli bolany üçin $\overline{OM_1} \neq \overline{OM_2}$ bolýandygyny belläliň, bu ýerde M_1, M_2 nokatlar *O* nokatda merkezi bolan *R* radiusly töweregiň dürli iki nokadydyr (2- nji (b) surat). Deň uzynlykly garşylykly ugrukdyrylan wektorlara garşylykly wektorlar diýilýär. (2-nji (a) suratdaky $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$). $\overline{a}$ wektora garşylykly wektor $-\overline{a}$ bilen belgilenýär.

Parallel tekizliklerde (ýa-da bir tekizlikde) ýatýan wektorlara komplanar wektorlar diýilýär.

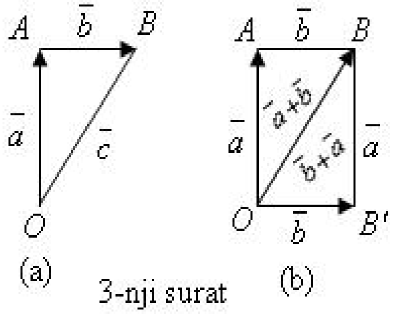
Her bir $\overline{a}$ wektor we *A* nokat üçin başlangyjy *A* nokatda we $\overline{a}$ wektora deň bolan, ýagny $\overline{AB}=\overline{a}$ bolýan ýeke-täk $\overline{AB}$ wektorlary gurup bolýanlygy wektorlarlaryň deňliginiň kesgitlemesinden gelip çykýar.

Goýma nokadyny erkin saýlap bolýan wektora erkin wektor diýilýar.

§ 4. 2. Wektorlar bilen geçirilýän çyzykly amallar

Wektorlary goşmaklyga, aýyrmaklyga we sana köpeltmeklige olar bilen geçirilýän çyzykly amallar diýilýär.

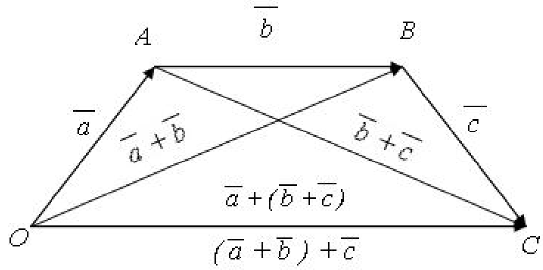
$\overline{b}$ wektor $\overline{a}$ wektoryň soňundan goýulanda başlangyjy $\overline{a}$ wektoryň başlangyjy bilen , soňy $\overline{b}$ wektoryň soňy bilen gabat gelýän üçünji $\overline{c}$ wektora $\overline{a}$ we $\overline{b}$ iki wektoryň jemi diýilýär (3-nji (a) surat). $\overline{c}$ wektor üçburçluk (3-nji (a) surat) ýa-da parallelogram (3-nji (b) surat) düzgüni boýunça alynýar.



3-nji surat

Üç we ondan-da köp wektorlaryń jemi hem şuńa meńzeşlikde kesgitlenýär. 4-nji suratda üç sany $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ wektorlaryň jemi şekillendirilen.
Görnüşi ýaly wektorlaryň jemi kommutatiwlik häsiýete eýe:

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$

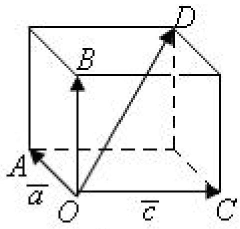


4-nji surat

çünki $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{a}+\overline{b}$ we $\overline{OB}=\overline{OB^1}+\overline{B^1B}=\overline{b}+\overline{a}$ (3-nji surat (b))
$\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\left(\overline{OA}+\overline{AB}\right)+\overline{BC}=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}$ we
$\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OA}+\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}$ bolandygyna görä wektorlar üçin assosiatiwlik häsiýeti ýerine ýetýär:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right). \qquad \textbf{(44)}$$

Jem kesgitlenende wektorlaryň komplanarlygy göz öňünde tutulmady. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ üç sany komplanar däl wektorlaryň jemi parallelepiped düzgüninden alynýar: ýagny $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ jem $\overline{OD}$ wektora deň, bu ýerde *OD* kesim *O* nokatda goýlan $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$, $\overline{OC}=\overline{c}$ wektorlarda gurlan parallelepipediň diagonaly (5-nji sur).



5-nji surat

Jemiň kesgiitlemesinden

$$\overline{a} + \overline{o} = \overline{a} \qquad \textbf{(45)}$$

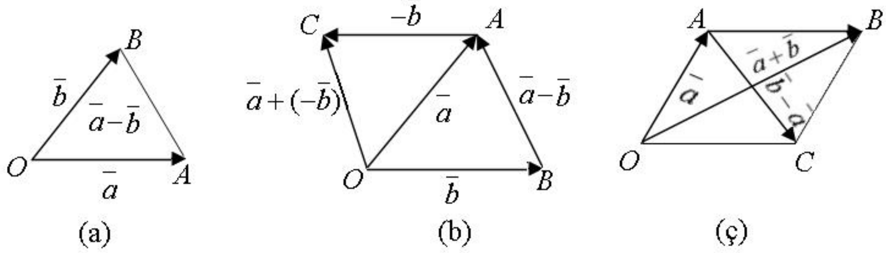
bolýandygy gelip çykýar.

$$\overline{a} + \left(-\overline{a}\right) = \overline{o} \;, \qquad \textbf{(46)}$$

ýagny garşylykly wektorlaryň jemi nol wektora deň. $\overline{b}$ wektor bilen jemde $\overline{a}$ wektory berýän $\overline{d}$ wektora $\overline{a}$ we $\overline{b}$ iki wektoryň $\overline{a} - \overline{b}$ tapawudy diýilýär.

$$\text{eger } \overline{b} + \overline{d} = \overline{a} \text{ bolsa, onda } \overline{a} - \overline{b} = \overline{d}, \qquad \textbf{(47)}$$

$\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň $\overline{a} - \overline{b}$ tapawudyny almak üçin olary bir nokatdan goýup, ikinji wektoryň soňuny birinji wektoryň soňy bilen birikdirmek zerurdyr (6-njy a surat).



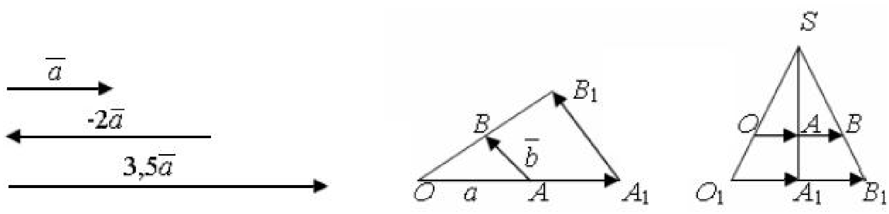
6-njy surat

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right) \qquad \textbf{(48)}$$

bolýandygyny bellaliň, $\overline{a} - \overline{b}$ tapawut $\overline{a}$ we $(-\overline{b})$ iki wektoryň jemine deň, bu ýerde $(-\overline{b})$ wektor $\overline{b}$ wektora garşylykly wektor (6-njy (b) surat). $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$ wektordan gurlan $OABC$ parallelogramyň wektor-diagonallary degişlilikde bu wektorlaryň jemi we tapawudydyr (6-njy (ç)surat).

$$\bar{b} = \alpha\ \bar{a} \qquad \textbf{(49)}$$

wektora $\bar{a}$ wektoryń α sana köpeltmesi diýilýär. Şunlukda, $\bar{b}$ wektor 1) $|\bar{b}| = |\alpha|\ |\bar{a}|$; 2) α > 0 bolanda $\bar{b}$ we $\bar{a}$ wektorlar birmeňzeş ugrukdyrylan ; 3) α < 0 bolanda garşylykly ugrukdyrylan şertleri kanagatlandyrýar. (7 –nji (a) suratda $\bar{a}, -2\bar{a}, 3{,}5\bar{a}$ wektorlar görkezilen); eger α =0 ýa-da $\bar{a}$ =0 bolsa, onda $\bar{b}$ =0 boljakdygy düşüniklidir.



(a) (b) (ç)

7-nji surat

Wektoryň sana köpeltmek hasylynyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

$$\alpha\,(\beta\ \bar{a}) = (\alpha\ \beta\ )\ \bar{a}; \qquad \textbf{(50)}$$

$$\alpha\,(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\ \bar{a}\ + \alpha\ \bar{b}; \qquad \textbf{(51)}$$

$$(\alpha + \beta)\,\bar{a} = \alpha\ \bar{a} + \beta\ \bar{a} \qquad \textbf{(52)}$$

Bu häsiýetleri subut edeliň

$$|\alpha(\beta\bar{a})| = |\alpha|\ |\beta\,\bar{a}| = |\alpha|\ |\beta|\ |\bar{a}|\ ,\ |(\alpha\beta)| = |\alpha\beta|\ |\bar{a}| = |\alpha|\ |\beta|\ |\bar{a}|\ ,$$

bolýanlygy üçin $\alpha(\beta\bar{a})$ we $(\alpha\beta)\bar{a}$ wektorlaryň deň uzynlyklary bardyr. we birmeňzeş ugrukldyrylandyr çünki bu ugurlar $\alpha\ \beta$ >0 bolanda $\bar{a}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýär we $\alpha\ \beta$ < 0 bolanda oňa garşylyklydyr netijede, $\alpha\ (\beta\ \bar{a}) = (\alpha\ \beta\ )\,\bar{a}$, ýagny (50) deňlik dogrudyr.

Eger α >0 bolsa, onda (51) deňlik $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlaryň kollinear däl bolanda OAB we OA_1B_1 (7-nji (b) surat) üçburçlyklaryň meňzeşliginden, bu ýerde $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{OA_1} = \alpha\ \bar{a}$, $\overline{OB_1} = \alpha\bar{b}$; ýa-da $\bar{a}$ we $\bar{b}$

wektorlar kollinear bolanda *SOB* we SO_1B_1 (7-nji (ç) surat) üçburçlyklaryň meňzeşliginden gelip çykýar, bu ýerde $\overline{SO_1} = \alpha \overline{SO}, \overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$.
$\alpha < 0$ bolan ýagdaý şuňa meňzeşlikde görkezilýär.

$\alpha\beta > 0$ diýip guman edeliň. (52) deňligiň iki böleginde duran wektorlaryň birmeňzeş ugurlary bar

$$\left|\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}\right| = \left|\alpha\overline{a}\right| + \left|\beta\overline{a}\right| = |\alpha|\,\left|\overline{a}\right| + |\beta|\,\left|\overline{a}\right| = \left(|\alpha| + |\beta|\right)\overline{a} = |\alpha + \beta|\,\left|\overline{a}\right| =$$

$$= \left|(\alpha + \beta)\overline{a}\right|$$

bolany üçin olaryň deň uzynlyklary bar. Şunlukda, $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\,\overline{a}$.
Eger $\alpha\ \beta < 0$ we mysal üçin, $|\beta| > |\alpha|$ bolsa, onda $\alpha + \beta$ we ($-\alpha$) - nyň birmenzeş alamatlary bar ; subut edileniň esasynda

$$(\alpha + \beta)\ \overline{a} + (-\alpha)\overline{a} = (\alpha + \beta - \alpha)\overline{a} = \beta\overline{a}\ ,$$

$$(\alpha + \beta)\,\overline{a} = \alpha\,\overline{a} + \beta\overline{a}.$$

Matematiki induksiýanyň usulynyň kömegi bilen

$$\alpha(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n) = \alpha\,\overline{a}_1 + \alpha\,\overline{a}_2 + \ldots + \alpha\,\overline{a}_n \qquad \textbf{(53)}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overline{a} = \alpha\,\overline{a}_1 + \alpha\,\overline{a}_2 + \ldots + \alpha\,\overline{a}_n \qquad \textbf{(54)}$$

deňlikleri subut etmek bolar

§4. 3. Iki wektoryň kollinearlyk şerti

Eger $\overline{a}$-käbir nol däl wektor we $\overline{a}_0$- şol wektoryň ugry boýunça ugrukdyrylan birlik wektor bolsa (8-nji surat), onda wektory sana köpeltmegiň kesgitlemesinden

$$\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\overline{a}_0 \qquad \textbf{(55)}$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňligiň iki bölegini $\alpha_0 = \dfrac{1}{\left|\overline{a}\right|}$

$\left(\left|\overline{a}\right| \neq 0\right)$ sana köpeldip alarys:

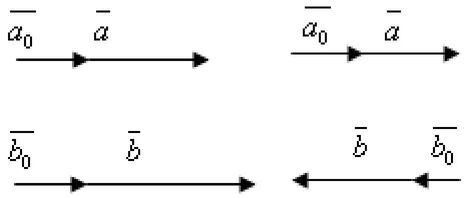
$$\overline{a}_0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} \qquad \text{ýa-da} \qquad \overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \qquad \textbf{(56)}$$

Teorema. Nol däl $\overline{a}$ we $\overline{b}$ iki wektoryň kollinear bolmagy üçin

$$\overline{b} = \alpha\,\overline{a} \qquad \textbf{(57)}$$

deňligiń ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

◁ Hakykatdan hem, wektory sana köpeltmegiň kesgitlemesine görä eger (57) deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\overline{b}$ we $\overline{a}$ wektorlar kollinear, bu bolsa çykýar.Tersine, eger $\overline{b}$ we $\overline{a}$ kollinear wektorlar bolsa , onda $\overline{a_0}$ we $\overline{b_0}$ birlik wektorlar birmeňzeş ugrukdurylan (8-nji (a)surat) ýa-da olaryň garşylykly ugurlary bar (8-nji (b) surat), ýagny,



8-nji surat

$$\overline{a}_0 = \overline{b}_0 \quad \text{ýa-da} \quad \overline{a}_0 = -\overline{b}_0 \qquad \textbf{(58)}$$

(56) formulany göz öňünde tutup, soňky deňlikleri şeýle ýazmak bolar:

$$\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} \qquad \text{ýa-da} \qquad \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = -\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}.$$

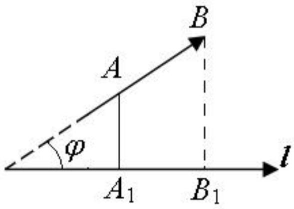
Bu deňliklerden

$$\overline{b} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a} \qquad \text{ýa-da} \qquad \overline{b} = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}$$

gelip çykýar, ýagny

$$\overline{b} = \alpha\,\overline{a}\ , \qquad \text{bu ýerde} \qquad \alpha = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|} \qquad \text{ýa-da} \qquad \alpha = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$$

§ 4. 4. Wektoryň oka bolan proýeksiýasy



9-njy surat

Giňişlikde $\overline{AB}$ wektor we l ok berlen bolsun. (9-njy surat). Goý, A_1 nokat A nokadyň l oka proýeksiýasy , B_1 nokat bolsa B nokadyň l oka proýeksiýasy bolsun. Ýagny berlen nokatlardan bu oka geçirilen perpendikulýarlaryń esaslary bolsun.

$\overline{A_1B_1}$ wektoryň ululygyna $\overline{AB}$ wektoryň l oka proýeksiýasy diýilýär we $pr_l\,\overline{AB}$ bilen belgilenýär, ýagny

$$A_1B_1 = pr_l\,\overline{AB} \tag{59}$$

$\overline{AB}$ wektoryń proýeksiýasy üçin

$$pr_l AB = /AB/ \cos\varphi \tag{60}$$

deńlik dogrudyr, bu ýerde φ burç $\overline{AB}$ wektor bilen l okuň arasyndaky burçdyr. $\overline{a} = \overline{b}$ bolanda (18) deňnlik easynda

$$pr_l\ \overline{a} = pr_l b \tag{61}$$

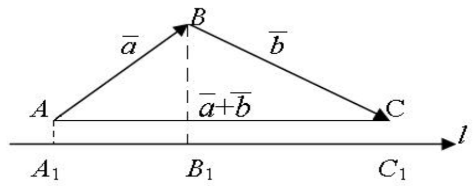
bolar. Ýagny, deň wektorlaryň şol bir oka proýeksiýalarynyń deńdigi gelip çykýar.

Wektoryň oka bolan proýeksiýalarynyń aşakdaky häsiýetleri bar :

$$pr_l(\overline{a} + \overline{b}) = pr_l\,\overline{a} + pr_l\,\overline{b}\ ; \tag{62}$$

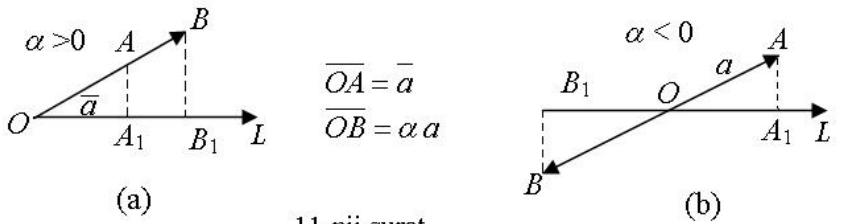
$$pr_l(\alpha\overline{a}) = \alpha\ pr_l\,\overline{a} \tag{63}$$

Goý, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$, $AC = \overline{a} + \overline{b}$, A_1, $B_{1,}$ C_1 bolsa, degişlilikde $A_,$ $B_,$ C nokatlaryň l oka proýeksiýalary bolsun (10-njy sur). l okuň A_1, B_1, C_1 üç nokady üçin esasy toždestwany ýazalyň: $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$.



10-njy surat

Kesgitlemä görä $A_1B_1 = pr_l\,\overline{a}, B_1C_1 = pr_l\,\overline{b}$, $\overline{AC} = pr_l\,(\overline{a} + \overline{b})$ Bu üç deňlikleri öňdäki deňlikde goýanymyzda, (62) deňligi alarys . (63) deňlik OAA_1, OBB_1 üçburçlyklaryň meňzeşliginden gelip çykýar. (11-nji surat)



11-nji surat

Matematiki induksiýa usulyny ulanyp,

$$pr_l\,(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_l) = pr_l\,\overline{a}_1 + pr_l\,\overline{a}_2 + ... + pr_l\,\overline{a}_l \qquad (64)$$

deňligi subut edip bolýar (özbaşdak görkeziň !).

Eger, $$\overline{a_1}\,,\ \overline{a_2}\ ,...,\overline{a_l} \qquad (65)$$

wektorlaryň erkin tükenikli sistemasy, α_1 , α_2 ,...,α_l hakyky sanlaryň erkin sistemasy bolsa, onda

$$a = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha\,\overline{a}_2 + ... + \alpha_l\,\overline{a}_l \qquad (66)$$

wektora (65) sistemanyň wektorlarynyň çyzykly kombinasiýasy diýilýär . (63) we (64) deňliklerden

$$pr_l\,(\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_l\,\overline{a}_l) = \alpha_1 pr_l\,\overline{a}_1 + \alpha_2 pr_l\,\overline{a}_2 + ... + \alpha_l\,pr_l\,\overline{a}_l \quad (67)$$

deňlik gelip çykýar.

§ 4. 5. Giňişlikde wektoryň gönüburçly dekart koordinatalary.Wektoryň uzynlygy. Wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary

Giňişlikde başlangyjy gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň başlangyjy bilen gabat gelýän, ahyry M nokatda bolan $\overline{r}=\overline{OM}$ wektora M nokadyň radius wektory diýilýär (12-nji surat).

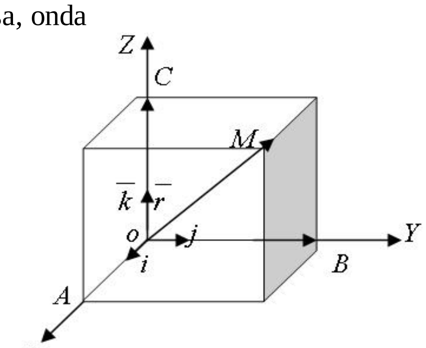
$\overline{r}$ wektoryň koordinatalar oklaryna bolan

$$X = pr_x\overline{r}\ ,\ \ Y = pr_y\overline{r}\ ,\ \ Z = pr_z\overline{r} \qquad (68)$$

proýeksiýalaryna onuň X, Y, Z gönüburçly dekart koordinatalary diýilýär.

$$\overline{r}(X,Y,Z),\ \overline{r}=\{X,Y,Z\},\ \overline{r}=(X,Y,Z) \qquad (69)$$

ýazgylaryň her biri r wektoryň X, Y, Z koordinatalarynyň bardygyny aňladýar. Eger x, y, z - giňişlikde M nokadyň gönüburçly dekart koordinatalary bolsa, onda



12-nji surat.

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z, \qquad (70)$$

Ýagny $\overline{OM}$ radius–wektoryň koordinatalary berlen nokadyň koordinatalaryna deňdir.

Koordinatalar oklarynyń (ortlar diýip atlandyrylýan) $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ birlik wektorlaryna we

$$\overline{OA}=X\overline{i}\ ,\ \overline{OB}=Y\overline{j}\ ,\ \overline{OC}=Z\overline{k} \qquad (71)$$

wektorlara garalyň , bu ýerde A, B, C - gönüburçly parallelepipediň depeleri, OM bolsalar onuň dioganaly (12-nji surat) (A, B, C nokatlar M nokadyň koordinatalar oklaryna bolan proýeksiýalary, $OA=X$, $OB=Y$, $OC=Z$ bolsa $\overline{OM}$ wektoryň koordinatalar oklaryna proýeksiýalary).

Wektorlaryń jeminiň kesgitlenişine görä $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, şonuň üçin

$$\overline{r} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}. \qquad (72)$$

Bu formula $\overline{r}$ wektoryň $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ bazis wektorlary boýunça dagytmasyny aňladýar. (72) formulanyň sag bölegindäki wektorlara $\overline{r}$ wektoryň düzüjileri ýa-da komponentleri diýilýär. Gönüburçly parallelepipediň diagonalynyň kwadraty hakyndaky teoremanyň esasynda (69) (ýa-da (72)) wektoryň uzynlygyny onuň koordinatalary arkaly aňladýan formulany alarys:

$$\left|\overline{r}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (73)$$

Wektoryň koordinatalar oklary bilen emele getirýän α, β, γ burçlarynyň kosinuslaryna wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary diýilýär. (18) formulany göz öňünde tutup, (69) wektor üçin

$$X = \left|\overline{r}\right|\cos\alpha,\ Y = \left|\overline{r}\right|\cos\beta,\ Z = \left|\overline{r}\right|\cos\gamma. \qquad (74)$$

deńlikleri alarys. (73) we (74) deňliklerden $\overline{r}$ wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary üçin:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};\ \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad (75)$$

formulalary alarys.

(75) deňlikleriň her biriniň iki bölegini hem kwadrata göterip we agzalaýyn goşup,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (76)$$

deńligi alarys. Şeýlelikde, wektoryň ugrukdurujy kosinuslarynyň kwadratlarynyň jemi bire deňdir.

(74) formulalardan $\overline{e}$ birlik wektoryň koordinatalarynyń onuň ugrukdyryjy kosinuslaryna deňdigi, ýagny

$$\overline{e} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) \qquad (77)$$

gelip çykýar .

1-nji mysal. $\overline{a}=(1,-2,2)$ wektor berlen . Onuň uzynlygyny we $\overline{a}$ wektoryň ugry boýunça ugrukdurylan $\overline{a}_0$ birlik wektory tapmaly.

◁ $\overline{a}$ wektoryń uzynlygyny (31) formula boýunça taparys:

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$; (33) formula boýunça

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\beta=-\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3},\ \overline{a}_0=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$ ▷

§ 4. 6. Wektor gatnaşyklaryndan koordinata gatnaşyklaryna geçmek

1. Wektory sana köpeltmegiň koordinatalary. Goý, $\overline{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$ wektor we $\alpha\neq 0$ san berlen bolsun. $\overline{b}=\alpha\,\overline{a}$ wektoryň koordinatalaryny tapmaly. Proýeksiýalaryň häsiýetleri we kesgitlemeleri esasynda $\overline{b}$ wektoryň gözlenilýän X_2, Y_2, Z_2 koordinatalary

$$X_2=\alpha X_1,\ Y_2=\alpha Y_1,\ Z_2=\alpha Z_1 \qquad (78)$$

formulalar arkaly aňladylýandygyny alýarys, sebäbi:

$$X_2=pr_x\overline{b}=pr_x(\alpha\,\overline{a})=\alpha\, pr_x\overline{a}=\alpha X_1,\ Y_2=pr_y\overline{b},\ Z_2=pr_z\overline{b}.$$

(78) deňlikler $\overline{a}=(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$, $\overline{b}=(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$ iki wektoryň kolinearlygynyň zerur we ýeterlik şertini aladýar. Eger X_1, Y_1, Z_1 sanlaryň hiç biri nola deň däl bolsa, onda bu deňlikleri şeýle ýazmak bolar:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}\ . \qquad (79)$$

Şeýlelikde, wektorlaryň biratly koordinatalary proporsional bolanda we diňe şonda wektorlar kollineardyr.

2. Iki wektoryň jeminiň (tapawudynyň) koordinatalary. Goý, iki sany $\overline{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$ we $\overline{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$ wektorlar berlen bolsun. (62) we (68) formulalar esasynda $\overline{a}+\overline{b}$ jemiň wektorynyň X, Y, Z koordinatalaryny alarys:

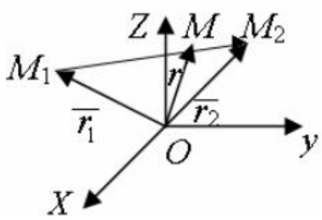
$$X=X_1+X_2,\ Y=Y_1+Y_2,\ Z=Z_1+Z_2 \qquad (80)$$

$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$ bolany üçin

$$X'=X_1-X_2,\ Y'=Y_1-Y_2,\ Z'=Z_1-Z_2\ , \qquad (81)$$

bu ýerde X', Y', Z' sanlar $\bar{a} - \bar{b}$ wektoryń koordinatalarydyr.

3. Iki nokat bilen berlen wektoryň koordinatalary. $\overline{M_1M_2}$ wektoryň başlangyjy $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ nokatda, ahyry M_2 (X_2, Y_2, Z_2) nokatda ýerleşär. M_1 we M_2 nokatlaryň koordinatalarynyň üsti bilen onuń koordinatalary üçin aňlatmany tapalyň. M_1 we M_2 nokatlaryň



13-nji surat

$\bar{r}_1 = \overline{OM_1}, \bar{r}_2 = \overline{OM_2}$ (13-nji surat) radius wektorlaryna garalyń.
$\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. (70) deňlige görä $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$ bolýandygyny göz öńünde tutup, (81) deńlikden $\overline{M_1M_2}$ wektoryň X, Y, Z koordinatalary üçin:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1 \tag{82}$$

deńlikleri alarys. Şeýlelikde, wektoryň koordinatalaryny tapmak üçin onuň ahyrynyň koordinatalaryndan başlangyjynyň degişli koordinatalaryny aýyrmak zerurdyr.

4. Wektorlaryň çyzykly kombinasiýasynyň koordinatalary. n sany $\bar{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \ldots,$ $\bar{a}_n = \{X_n, Y_n, Z_n\}$ wektorlar we olaryń çyzykly kombinasiýasy

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{a}_n \tag{83}$$

berlen bolsun. (67), (68) formulalary göz öňünde tutup, (83) wektoryň koordinatalaryny

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n; \\ Y &= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n; \\ Z &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \ldots + \alpha_n X_n; \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

deńlikler bilen kesgitlemek bolar.

§ 4. 7. Iki wektoryń skalýar köpeltmek hasyly

1. Skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlenişi. $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryń uzynlyklarynyń olaryń arasyndaky burçuń kosinusyna köpeltmek hasylyna deń bolan sana $\overline{a}$ we $\overline{b}$ iki wektoryń skalýar köpeltmek hasyly diýilýär. Biz skalýar köpeltmek hasylyny $\overline{a}\,\overline{b}$ görnüşde belgilejekdiris. Diýmek,

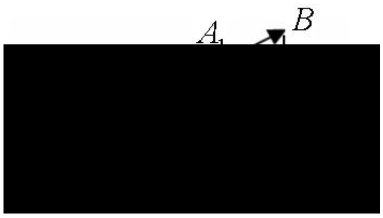
$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\varphi\ . \tag{85}$$

$|\overline{b}|\cos\varphi = pr_{\overline{a}}\overline{b}$ we $|\overline{a}|\cos\varphi = pr_{\overline{b}}\overline{a}$ (14-nji surat) bolýanlygyny göz öńünde tutup, (85) deńligi

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}|\ pr_{\overline{a}}\overline{b} \tag{86}$$

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{b}|\ pr_{\overline{b}}\overline{a} \tag{87}$$

görnüşde ýazmak bolar.



14-nji surat.

$\overline{a}$ wektoryń özüne skalýar köpeltmek hasylyna $\overline{a}$ wektoryń skalýar kwadraty diýilýär:

$$\overline{a}^2 = \overline{a}\,\overline{a} = |\overline{a}|\,|\overline{a}|\cos 0^0 = |\overline{a}|^2, \qquad \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2. \tag{88}$$

Şunlukda, wektoryń skalýar kwadraty onuń uzynlygynyń kwadratyna deń, şonuń üçin $|\overline{a}| \neq 0$ bolanda $\overline{a^2} > 0$, $|\overline{a}| = 0$ bolanda $\overline{a}^2 = 0$. Goý, $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar perpendikulýar bolsun, ýagny $\varphi = 90^0$, onda $\cos\varphi = 0$ we

$$\overline{a}\overline{b} = 0\ . \tag{89}$$

Tersine, eger (89) deńlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\overline{a}$ we $\overline{b}$ – nol däl wektorlar bolanda $\varphi = 90^0$, ýagny $\overline{a} \perp \overline{b}$. Eger wektorlaryń biri nol wektor bolsa, onda ony beýlekisine perpendikulýar hasap etmek bolar (sebäbi nol wektoryń kesgitli ugry ýok).

Skalýar köpeltmek hasylylynyń

1) Orun çalşyrma

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}; \qquad (90)$$

2) Utgaşdyrma (san köpeldijä görä)

$$(\alpha\,\bar{a})\bar{b} = \alpha\,\bar{a}\;\bar{b}; \qquad (91)$$

3) Wektorlaryń jemine görä paýlaşdyrma

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}\;. \qquad (92)$$

häsiýetleri bar.

(90)-(92) formulalaryń dogrudygyny görkezeliń. (90) formula (85) formuladan gelip çykýar. (87) we (63) formulalary ulanyp, (91) formulany alýarys.

$$(\alpha\,\bar{a}\bar{b}) = |\bar{b}|\;pr_{\bar{b}}\,(\alpha\,\bar{a}) = |\bar{b}|\alpha\;pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \alpha\,|\bar{b}|\,pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \alpha(\bar{a}\bar{b})$$

(92) formula hem şuńa meńzeş subut edilýär:

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|\;pr_{\bar{a}}\,(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|(\,pr_{\bar{a}}\bar{b} + pr_{\bar{a}}\bar{c}) = |\bar{a}|\;pr_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}|\;pr_{\bar{a}}\bar{c} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$$

(90), (91) formulalardan

$$(\alpha\,\bar{a})(\beta\,\bar{b}) = (\alpha\,\beta)(\bar{a}\bar{b}) \qquad (93)$$

deńlik gelip çykýar.

Hakykatdan-da,

$$(\alpha\,\bar{a})(\beta\bar{b}) = \alpha(\bar{a}(\beta\,\bar{b})) = \alpha((\beta\,\bar{b})\bar{a}) = \alpha(\beta(\bar{b}\bar{a})) = \alpha\beta(\bar{b}\bar{a}) = \alpha\beta(\bar{a}\bar{b})$$

2. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly.

2-nji teorema.

$$\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \bar{b} = (X_2, Y_2\, Z_2) \qquad (94)$$

iki wektoryń skalýar köpeltmek hasyly

$$\bar{a}\bar{b} = X_1\,X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1\,Z_2 \qquad (95)$$

formula arkaly ańladylýar.

◁ (88), (89) formulalaryń kömegi bilen $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ birlik wektorlaryń skalýar köpeltmek hasyly üçin

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}^2 = 1,\ \bar{i}\,\bar{j} = 0,\ \bar{i}\,\bar{k} = 0; \\ \bar{j}\,\bar{i} = 0,\ \bar{j}^2 = 1,\ \bar{j}\bar{k} = 0; \\ \bar{k}\,\bar{i} = 0,\ \bar{k}\,\bar{j} = 0,\ \bar{k}^2 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

deńlikleri alarys. $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlaryń birlik wektorlar boýunça

$$\bar{a} = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k}\,, \quad \bar{b} = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k}.$$

dagytmasyny peýdalanyp, (90)–(93) formulalara laýyklykda (96) deńlikleri göz óńunde tutup,

$$\bar{a}\bar{b} = (X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k})\ (X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k}) = Z_1X_2\bar{i}^2 + X_1Y_2\bar{i}\,\bar{j} +$$
$$+ X_1Z_2\bar{i}\,\bar{k} + Y_1X_2\bar{j}\,\bar{i} + Y_1Y_1\bar{j}\,\bar{i} + Y_1Z_2\bar{j}\bar{k} + Z_1X_2\bar{k}\bar{i} + Z_1Y_2\bar{k}\,\bar{j} +$$
$$+ Z_1Z_2\bar{k}^2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\ .$$

deńligi alarys. ▷

Bellik. Eger $\bar{b} = \bar{a}$ bolsa, onda (95) formula $\bar{a}\,\bar{a} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$ görnüşi alar. Şoňa görä $\bar{a}\,\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ deńligiń esasynda,

$$|\bar{a}|^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 \quad , \quad |\bar{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \qquad (97)$$

1-nji netije. (94) wektorlaryń arasyndaky burçuń kosinusy

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \qquad (98)$$

formula arkaly kesgitlenýär.

2-nji netije. (94) wektorlaryń perpendikulýarlygynyń zerur we ýeterlik şerti

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0 \qquad (99)$$

deńlik arkaly ańladylýar.

3-nji netije. Eger l ok koordinatalar oklary bilen degişlilikde α, β, γ burçlary emele getirýän bolsa, onda $\bar{c}$ =(X, Y, Z) wektoryń bu oka proýeksiýasy

$$pr_l\,\bar{c} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma \qquad (100)$$

deńlik bilen kesgitlenýär.

Hakykatdan hem, eger $\bar{e}$ wektor l - okuń birlik wektory bolsa, onda (86) formulanyń kömegi bilen taparys:

$$\bar{e}\bar{c} = |\bar{e}|\, pr_l\, \bar{c} = 1 \cdot pr_l\, \bar{c} = pr_l\, \bar{c}\ ,\ \ pr_l\, \bar{c} = \bar{e}\bar{c}$$

bu formuladan (95) deňlik esasynda (100) formula gelip çykýar.

2-nji mysal. Berlen $\bar{a} = (7, 2, -8)$, $\bar{b} = (11, -8, -7)$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

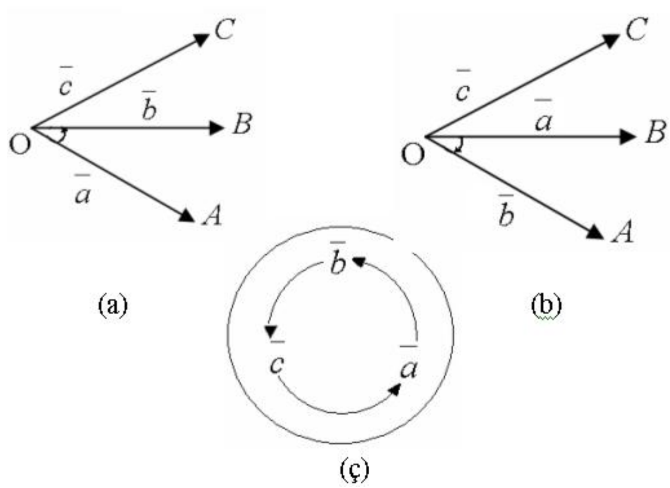
$\triangleleft$ (98) formuladan peýdalanyp taparys.

$$\cos\varphi = \frac{7\cdot 11 + 2\cdot(-8) + (-8)\,(-7)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2}\ \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\varphi = 45^0$ $\triangleright$

§ 4. 8. Wektorlaryń sag we çep üçlügi. Sag we çep koordinata sistemasy

Bir nokatdan çykýan we görkezilen tertipde alnan ($\bar{a}$-birinji wektor, $\bar{b}$ -ikinji, $\bar{c}$ -üçünji) $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ üç komplanar däl wektorlara $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ wektorlar üçlügi diýilýär (15-nji a,b surat.)



15-nji surat

$\overline{c}$ wektoryń ahyryndan $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryń emele getirýän tekizligine garalyń. Eger $\overline{a}$ wektordan $\overline{b}$ wektora iń gysga öwrüm sagat diliniň hereketiniń garşysyna edilýän bolsa, onda $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ wektor üçlügine sag üçlük (15-nji (a)surat), eger-de görkezilen öwrüm sagat diliniň ugry boýunça amala aşyrylýan bolsa, onda $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ wektorlar üçlügüne çep üçlük diýilýär (15-nji (b) surat).

Ikisi hem sag ýa-da ikisi hem çep bolan iki üçlüge ugurdaş (bir oriýentasiýaly) üçlükler diýilýär. Eger bir üçlük sag bolup, beýlekisi çep bolsa, onda olara ters ugurdaş (dürli oriýentasiýaly) üçlükler diýilýär. 15-nji (ç) suratda görkezilişi ýaly wektorlaryń aýlawly orun çalşyrmada (birinjisi ikinjisi bilen, ikinjisi üçünji bilen, üçünjisi birinji bilen çalşyrlanda) üçlügiń oriýentasiýasy üýtgemeýär. Eger iki wektoryń ornuny çalşyrsak, onda üçlügiń oriýentasiýasy üýtgeýär, mysal üçin, eger $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – sag üçlük emele getirýän bolsa, onda $\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}$ çep üçlük bolar. Şeýlelikde, eger üç sany $\overline{a}, \overline{b}$ we $\overline{c}$ komplanlar däl wektorlar berlen bolsa, onda olar alty sany üçlügi emele getirýär. Olardan $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$; $\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}$; $\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}$ üçlükler şol bir oriýentasiýaly $\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}$; $\overline{a}, \overline{c}\, \overline{b}$; $\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}$ beýleki orentasiýaly üçlüklerdir.

Eger $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ birlik wektorlaryń üçlügi sag (çep) üçlük bolsa, onda gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna sag (çep) koordinatalar sistemasy diýilýär.

§ 4. 9. Iki wektoryń wektor köpeltmek hasyly

1. Wektor köpeltmek hasylynyň kesgitlenişi. Eger $[\overline{a}, \overline{b}]$ bilen belgilenýän wektor aşakdaky

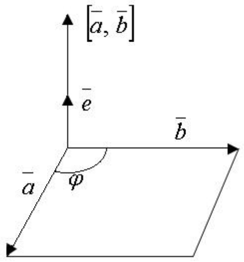
1) $\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\varphi$, bu ýerde φ burç $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryń arasyndaky burç.

2) $[\overline{a}, \overline{b}]$ wektor $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryń her birine perpendikulýar;

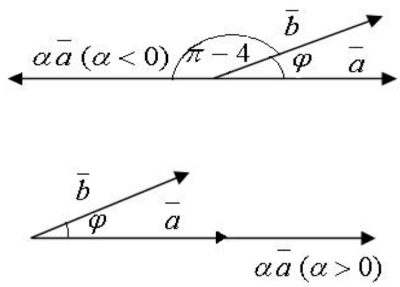
3) $(\overline{a}, \overline{b}, [\overline{a},, \overline{b}])$ *we* $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ üçlükler bir oriýentasiýaly üçlükler;

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda ońa $\overline{a}$ wektoryń $\overline{b}$ wektora wektor köpeltmek hasyly diýilýär.

Wektorlaryń wektor köpeltmek hasyly $\overline{a}\times\overline{b}$ görnüşde hem belgilenýär.



16-njy surat



(a)

(b)

17-nji surat

1) şertden $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ wektor köpeltmek hasylynyń modulynyń $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryń üstünde gurlan S parallelogramyń meýdanyna deńligi gelip çykýar (16-njy surata seret), ýagny

$$\left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right| = S \tag{101}$$

Şonuń üçin

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = S\overline{e}, \tag{102}$$

bu ýerde $\overline{e}$ wektor $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ wektora ugurdaş birlik wektorydyr.

Goý, $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar kollinear, ýagny $\varphi = 0$ ýa-da $\varphi = \pi$ bolsun. Onda $\sin\varphi = 0$ we $\left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right| = 0$. Şonuň üçin hem

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = 0\,. \tag{103}$$

Eger (103) deńlik ýerine ýetýän bolsa, onda nol däl wektorlar üçin $\sin\varphi = 0$, bu ýerden bolsa $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, ýagny $\overline{a}$ we $\overline{b}$ kollinear wektorlardyr. Eger wektorlaryń biri nol wektor bolsa, onda ony beýlekisine kollinear diýip hasap etmek bolar. Şunlukda, (103) deńlik $\overline{a}$ we $\overline{b}$ iki wektoryń kollinearlygynyń zerur we ýeterlik şertini ańladýar. Hususan-da, her bir $\overline{a}$ wektor üçin

$$\left[\overline{a}, \overline{a}\right] = 0 \tag{104}$$

Iki wektoryń wektor köpeltmek hasylynyń aşakdaky häsiýetleri bar:

1) $$[a, b] = -[b, a]; \tag{105}$$

2) $$\left[(\alpha\,\overline{a}), \overline{b}\right] = \alpha\left[\overline{a}, \overline{b}\right]; \tag{106}$$

$$\left[\overline{a}, (\beta\,\overline{b})\right] = \beta\left[\overline{a}, \overline{b}\right]; \tag{107}$$

3) Paýlama

$$\left[(\overline{a} + \overline{b}), \overline{c}\right] = \left[\overline{a}, \overline{c}\right] + \left[\overline{b}, \overline{c}\right]; \tag{108}$$

$$\left[\overline{a}, (\overline{b} + \overline{c})\right] = \left[\overline{a}, \overline{b}\right] + \left[\overline{a}, \overline{c}\right] \tag{109}$$

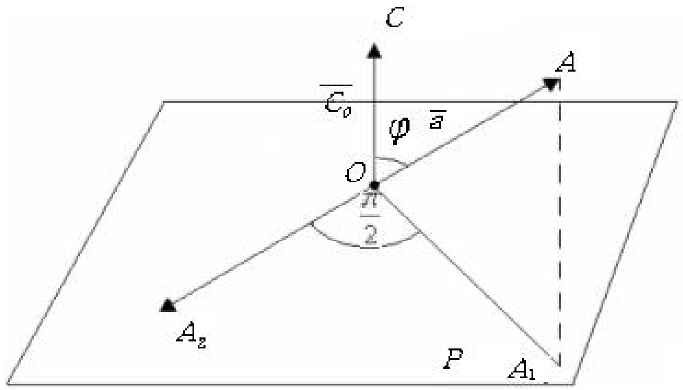
$\lhd$ (105) deńlik gös-göni kesgitlemeden gelip çykýar. Indi (106) deńligi görkezeliń. $\left[(\alpha\,\overline{a}), \overline{b}\right]$ we $\alpha\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ wektorlaryń deń uzynlyklary bar. Çünki $\alpha > 0$ (18-nji surat) bolanda $\left|\left[(\alpha\,\overline{a}), \overline{b}\right]\right| = |\alpha|\,|\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\varphi$, $\alpha < 0$ bolanda $\left|\left[(\alpha\,\overline{a}), \overline{b}\right]\right| = |\alpha\,\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin(\pi - \varphi) = |\alpha|\,|\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\varphi$. Şeýle hem bu wektorlar ugurdaş, sebäbi $\alpha > 0$ bolanda olaryń ugry $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ wektoryń ugry bilen gabat gelýär, $\alpha < 0$ bolanda bolsa ol wektorlar $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ wektora garşylykly ugrukdurlandyr.

(107) formula (105) we (106) formulalardan gelip çykýar. Hakykatdan-da,

$$\left[\overline{a}, (\beta\,\overline{b})\right] = -\left[(\beta\,\overline{b}), \overline{a}\right] = -\beta\left[\overline{b}, \overline{a}\right] = \beta\left[\overline{a}, \overline{b}\right].$$

(108) deńligi ilki bilen $\overline{c}$ birlik wektor bolandaky ýagdaý üçin, ýagny

$$\left[(\overline{a}+\overline{b}),\overline{c_0}\right]=\left[\overline{a}\,\overline{c_0}\right]+\left[\overline{b}\,\overline{c_0}\right] \qquad \left(\left|\overline{c_0}\right|=1\right) \qquad (108')$$



18-nji surat.

deńligi görkezeliń. Erkin $\overline{a}$ wektoryń birlik $\overline{c_0}$ wektora wektor köpeltmek hasylyny kesgitläliń. Bellenen O nokatdan $\overline{OC}=\overline{c_0}$ we $\overline{OA}=\overline{a}$ wektory alyp goýalyń. O nokadyń üsti bilen $\overline{c_0}$ wektora perpendikulýar bolan P tekizligi geçireliń (18-nji surat). Goý, A_1 nokat A nokadyń P tekizlige ortogonal proýeksiýasy bolsun. $\overline{c_0}$ wektoryń tarapyndan seredeninde $\overline{OA_1}$ wektory O nokadyń töwereginden sagat diliniň hereketiniń ugry boýunça 90^0 burça öwreliń.

Alnan $\overline{OA_2}$ wektor $\left[\overline{a},\overline{c_0}\right]$ wektor köpeltmek hasyly bolar.

Hakykatdan-da,

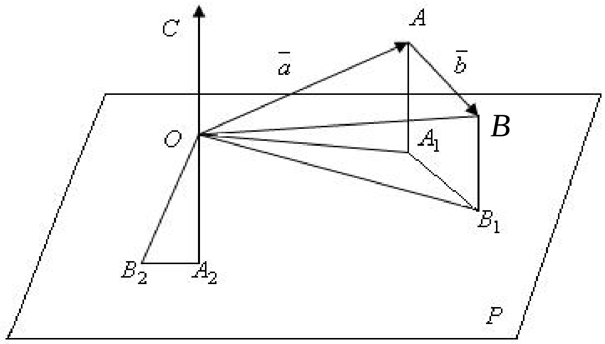
1) $\left|\overline{OA_2}\right|=\left|\overline{OA_1}\right|=\left|\overline{a}\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\right)=\left|\overline{a}\right|\sin\varphi=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{c_0}\right|\sin\varphi$;

2) $\overline{OA_2}$ wektor $\overline{a},\overline{c_0}$ wektorlaryń her birine perpendikulýar.

3) $\overline{a},\overline{c_0},\overline{OA_2}$ wektorlar sag üçlügi emele getirýär.

18-nji suratdaka meńzeş gurluşy geçireliń. A nokatdan $\overline{AB}=\overline{b}$ wektory alyp goýalyń, onda $\overline{OB}=\overline{a}+\overline{b}$. Goý, A_1 we B_1 nokatlar degişlilikde P tekizlige A we B nokatlaryń ortogonal proýeksiýalary bolsun. P tekizlikde O nokadyń töwereginden OA_1B_1 üçburçlugy

$\alpha = 90^0$ burça öwrüp, OA_2B_2 üçburçlugy alarys. 19-njy surat.. $\overline{OB}_2 = \overline{OA}_2 + \overline{A_2B_2}$ we



19-njy surat.

$\overline{OB}_2 = \left[(\overline{a}+\overline{b}), \overline{c_0}\right]$, $\overline{OA_2} = \left[\overline{a}, \overline{c_0}\right]$, $\overline{A_2B_2} = \left[\overline{b}, \overline{c_0}\right]$ bolýanlygy üçin bu ýerden ($108'$) deńlik gelip çykýar. Ony agzalaýyn $|\overline{c}|$ sana köpeldip, $\overline{c} = |\overline{c}|\overline{c_0}$ formulany göz öńünde tutsak, onda (108) deńligi alarys. (109) deńlik (105), (108) deńliklerden gelip çykýar:

$$\left[\overline{a}, (\overline{b}+\overline{c})\right] = -\left[(\overline{b}+\overline{c}), \overline{a}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right] - \left[\overline{c}, \overline{a}\right] = \left[\overline{a}, \overline{b}\right] + \left[\overline{a}, \overline{c}\right]. \triangleright$$

2. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly.

3-nji teorema.

$$\overline{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \overline{b} = (X_2, Y_2, Z_2) \qquad (110)$$

iki wektoryń $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ wektor köpeltmek hasyly

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \overline{k} \qquad (111)$$

formula bilen ańladylýar.

$\triangleleft$ Kesgitlemeden we (104) deńlikden sag gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ birlik wektorlaryń wektor köpeltmek hasyly üçin aşakdaky tablissa gelip çykýar:

$$\left[\bar{i},\bar{i}\right]=0,\quad \left[\bar{i},\bar{j}\right]=\bar{k},\quad \left[\bar{i},\bar{k}\right]=-\bar{j};$$
$$\left[\bar{j},\bar{i}\right]=-\bar{k},\left[\bar{j},\bar{j}\right]=0,\quad \left[\bar{j},\bar{k}\right]=\bar{i};$$
$$\left[\bar{k},\bar{i}\right]=\bar{j},\quad \left[\bar{k},\bar{j}\right]=-\bar{i},\quad \left[\bar{k},\bar{k}\right]=0.$$

Wektor köpeltmek hasylynyń häsiýetlerini we tablissany göz öńünde tutup,

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left[(X_1\bar{i}+Y_1\bar{j}+Z_1\bar{k}),(X_2\bar{i}+Y_2\bar{j}+Z_2\bar{k})\right]=(X_1Y_2-Y_1K_2)\left[\bar{i}\,\bar{j}\right]+$$
$$+(X_1Z_2-Z_1X_2)\left[\bar{i},\bar{k}\right]+(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\left[\bar{j},\bar{k}\right],$$

deňligi, ýagny

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\,\bar{i}-(X_1Z_2-Z_1X_2)\,\bar{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\,\bar{k}$$

deńligi alarys. Bu ýerde ikinji tertipli kesgitleýjä geçip, (111) formulany alarys. ▷

Bu formulany üçünji tertipli kesgitleýji görnüşünde hem ýazmak bolar:

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}. \tag{112}$$

1-nji netije. (68) wektorlaryń üstünde gurlan parallelogramyń meýdany

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}^2} \tag{113}$$

formula bilen hasaplanýar

2-nji netije. *ABC* üçburçlugyń meýdany

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right| \tag{114}$$

formula boýunça kesgitlenýär. Bu formula (101) formuladan gelip çykýar. Çünki *ABC* üçburçlugyń meýdany $\overline{AB}$ we $\overline{AC}$ wektorlaryń üstünde gurlan parallelogramyń meýdanynyń ýarysyna deńdir.

1-nji mysal. $\bar{a}=(7,-5,-6)$, $\bar{b}=(1,-2,-3)$ wektorlar berlen $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ wektor köpeltmek hasylynyń koordinatalaryny tapmaly.

◁ (112) formuladan peýdalanyp alarys:

$$[\bar a,\bar b]=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 7 & -5 & -6\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & -6\\ -2 & -3\end{vmatrix}\bar i-\begin{vmatrix}7 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}\bar j+\begin{vmatrix}7 & -5\\ 1 & -2\end{vmatrix}\bar k,$$

$$[\bar a,\bar b]=3\bar i+15\bar j-9\bar k,\qquad [\bar a,\bar b]=\{3,15,-9\}.\ \triangleright$$

2-nji mysal. Üçburçlugyń depeleri A (-1, -1, 1), B (1, -3, 4) C (3, -1, -5) nokatlarda ýerleşen. Onuń meýdanyny tapmaly.

$\triangleleft$ (82) formula boýunça $\overline{AB}=(2,-2,3)$, $\overline{AC}=(4,0,-6)$. wektorlary tapyp,

$$[\overline{AB},\ \overline{AC}]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right)=(12,24,8)$$ bolýanlygy

sebäpli (114) formuladan peýdalanyp taparys:

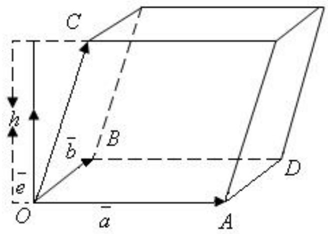
$$S=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB},\ \overline{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2(3^2+6^2+2^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}7\cdot 4=14\triangleright$$

§ 4. 10. Üç wektoryń garyşyk köpeltmek hasyly

1. Garyşyk köpeltmek hasylynyň kesgitlenişi. Goý $\bar a,\bar b,\bar c$ wektorlar berlen bolsun. $\bar a$ wektory $\bar b$ wektora wektor köpeldeliń, alnan $[\bar a,\bar b]$ köpeltmek hasyly $\bar c$ wektora skalýar köpeldeliń, netijede wektor-skalyar köpeltmek hasyly ýa-da $\bar a,\bar b,\bar c$ üç wektoryń $[\bar a,\bar b]\bar c$ garyşyk köpeltmek hasyly diýip atlandyrylýan sany alarys.

4-nji teorema. Üç komplanar däl wektorlaryń $[\bar a,\bar b]\bar c$ garyşyk köpeltmek hasyly, $(\bar a,\bar b,\bar c)$ sag üçlük bolanda, goşmak



20-nji surat.

alamaty bilen alnan, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ çep üçlük bolanda bolsa, “-” alamaty bilen alnan $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ wektorlarda gurlan parallelepipediń göwrümine deńdir.

◁ Taraplary $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$ wektorlar bolan parallelograma garalyń. (20-nji surat). Görnüşi ýaly bu parallelogram garalýan parallelepipediń esasydyr. Onuń S meýdany (101) formula boýunça tapylýar.

(102) deńligi ulanyp, $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = (S\bar{e})\bar{c} = S(\bar{e}\bar{c})$ deńligi alarys. (82) deńlige görä $(\bar{e}\bar{c}) = |\bar{e}|\, pr_{\bar{e}}\bar{c} = pr_{\bar{e}}\bar{c}$ bolar.

Beýleki tarapdan, $pr_{\bar{e}}\bar{c} = \pm h$, bu ýerde h parallelepipediń $OADB$ esasyna geçirilen beýikligidir (20-nji surat). Şunlukda, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$– sag üçlük bolsa onda “goşmak” , çep üçlük bolsa “aýyrmak” alamaty alynýar. Sońky üç deńliklerden,

$$[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = \pm S h, \qquad [\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = \pm V \qquad (115)$$

deńlikleri alarys. ▷

1-nji netije. Wektorlaryń komplanar bolmagy üçin

$$[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = 0 \qquad (116)$$

deńligiń ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

◁ Goý $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ komplanar wektorlar bolsun, onda $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{c}$ we bu ýagdaýda (116) deńlik ýerine ýetýär.

Eger-de (116) deńlik ýerine ýetýän bolsa, onda wektorlar komplanar bolar. Çünki, tersine bolan ýagdaýynda taraplary bu wektorlar bolan parallelepipediń göwrümi noldan tapawutly bolar. Ýagny, $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = \pm V \neq 0$. Bu bolsa şerte garşy gelýär. ▷

2-nji netije.

$$[\bar{a},\ \bar{b}]\ \bar{c} = \bar{a}\ [\bar{b},\ \bar{c}] \qquad (117)$$

$\triangleleft$ Skalýar köpeltmek hasylynyń köpeldijileriń tertibine bagly däldigine görä $\bar{a}[\bar{b},\bar{c}] = [\bar{b},\bar{c}]\bar{a}$. 3-nji teorema laýyklykda

$$[\bar{a},\ \bar{b}]\ \bar{c} = \pm V\ , \quad [\bar{b},\ \bar{c}]\ \bar{a} = \pm V\ .$$

$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, $(\bar{b},\bar{c},\bar{a})$ – ugurdaş üçlükler bolany üçin sońky iki deńlikde şol bir alamaty almaly. Onda,

$$[\bar{a},\ \bar{b}]\bar{c} = [\bar{b},\ \bar{c}]\bar{a} = \bar{a}[\bar{b},\ \bar{c}]. \ \triangleright$$

(116) deńligi göz öńünde tutup, $[\bar{a},\ \bar{b}]\bar{c}$ we $\bar{a}[\bar{b},\ \bar{c}]$ garyşyk köpeltmek hasyly $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ bilen belgileýärler, ýagny

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = [\bar{a},\ \bar{b}]\bar{c} = \bar{a}[\bar{b},\ \bar{c}]. \qquad (118)$$

Bellik. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ wektorlar üçin

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b} \qquad (119)$$

deńlikler dogrudyr.

2. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly.

4-nji teorema.

$$\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1),\ \ \bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2),\ \ \bar{c} = (X_3, Y_3, Z_3) \qquad (120)$$

üç wektoryń garyşyk köpeltmek hasyly

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ Z_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (121)$$

formula bilen kesgitlenýär.

$\triangleleft$ $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = [\bar{a},\ \bar{b}]\ \bar{c}$ bolany üçin,

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

deńligi alarys. Ol bolsa (121) formula deńgüýçlüdir. Çünki, sońky deńligiń sag bölegi (121) deńlikden kesgitlenýän üçünji tertipli kesgitleýjiniń üçünji setiriń elementleri boýunça dagytmasydyr. $\triangleright$

Gönükmeler

1. $\overline{a}(1,\ 2)$, $\overline{b}(-5,\ -1)$, $\overline{c}(-1,\ 3)$ wektorlar berlen. $2\overline{a}+3\overline{b}-\overline{c}$, $16\overline{a}+5\overline{b}-9\overline{c}$ wektorlaryň koordinatolaryny tapmaly.

2. $\overline{a}(1,3)$, $\overline{b}(2,-1)$, $\overline{c}(-4,1)$ wektorlar berlipdir.
$\alpha\,\overline{a}+\beta\,\overline{b}+\overline{c}=0$ deňlik ýerine ýeter ýaly α we β sanlary tapmaly.

3. $\overline{a}(3,0,-2)$, $\overline{b}(1,2,-5)$, $\overline{c}(-1,1,1)$, $\overline{d}(-1,3,4)$ wektorlar berlipdir. $\alpha\,\overline{a}+\beta\,\overline{b}+\gamma\overline{c}+\overline{d}=0$ deňlik ýerine ýeter ýaly α,β,γ sanlary tapmaly.

4. Eger,

1) $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=1$, $L(\overline{a},\overline{b})=45^0$

2) $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=2$, $L(\overline{a},\overline{b})=90^0$

3) $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$ $\overline{a}$ *we* $\overline{b}$ wektorlar garşylykly ugrukdurylan

bolsa $\overline{a}$ *we* $\overline{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

5. Eger,

1) $\overline{a}(4,-1)$, $\overline{b}(-1,-7)$

2) $\overline{a}(2,1)$, $\overline{b}(1,-3)$

3) $\overline{a}(1,2)$, $\overline{b}(-4,2)$

4) $\overline{a}(3,2,-5)$, $\overline{b}(10,1,2)$

5) $\overline{a}(1,0,3)$, $\overline{b}(-4,15,1)$

6) $\overline{a}(2,1,5)$, $\overline{b}(7,-9,-1)$

bolsa $\overline{a}$ *we* $\overline{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

6. $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

1) $\overline{a}(1,2)$, $\overline{b}(2,4)$

2) $\overline{a}(1,2)$, $\overline{b}(4,2)$

3) $\overline{a}(1,2)$, $\overline{b}(-2,1)$

4) $\overline{a}(1,-1)$, $\overline{b}(-4,2)$

5) $\overline{a}(1,-1,1)$, $\overline{b}(5,1,1)$

6) $\overline{a}(1,-1,1)$, $\overline{b}(-2,2,-2)$

7) $\overline{a}(1,-1,1)$, $\overline{b}(3,1,-2)$

7. $\overline{a}(-1,2)$, $\overline{b}(5,1)$, $\overline{c}(4,-2)$ üç wektor berlen.

Hasaplamaly

1) $\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})$

2) $|\bar{a}|^2-(\bar{b},\bar{c})$

3) $|\bar{b}|^2+(\bar{b},\bar{a}+3\bar{c})$

8. ABC üçburçlukda taraplarynyň uzynlygy berlipdir. Eger,

1) $|AB|=5$, $|BC|=3$, $|AC|=4$

2) $|AB|=7$, $|BC|=4$, $|AC|=5$

3) $|AB|=3$, $|BC|=2$, $|AC|=3$

bolsa $(\overline{AC},\overline{BC})$ skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

9. $\bar{a}$ *we* $\bar{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

1) $\bar{a}(3,-1,2)$, $\bar{b}(2,-3,-5)$

2) $\bar{a}(2,-1,1)$, $\bar{b}(-4,2,-2)$

3) $\bar{a}(6,1,0)$, $\bar{b}(3,-2,0)$

10. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli

1) $[\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b}]$

2) $\left[\bar{a}-\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}\ ,\ -\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}\right]$

11. Eger $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlar kollinear däl bolsa, onda λ -nyň haýsy bahasynda $\lambda\bar{a}+\bar{b}$ we $3\bar{a}+\lambda\bar{b}$ wektorlar kollinear bolar?

12. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny tapmaly.

1) $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(7,3,-5)$, $\bar{c}(-2,2,-2)$

2) $\bar{a}(3,5,1)$, $\bar{b}(4,0,-1)$, $\bar{c}(2,1,1)$

3) $\bar{a}(2,1,0)$, $\bar{b}(3,4,-1)$, $\bar{c}(-1,-3,1)$

4) $\bar{a}(1,2,3)$, $\bar{b}(3,-2,1)$, $\bar{c}(2,1,2)$

Jogaplar

1. $(-12\ ,\ -2)$; $(0,0)$;

2. $\alpha=\frac{2}{7}$, $\beta=\frac{13}{7}$

3. $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=-4$

4. 1) $3/\sqrt{2}$; 2) 0 ; 3) -6.

5. 1) 3 ; 2) -1 ; 3) 0 ; 4) 22 ; 5) -1 ; 6) 0.

6. 1) 0 ; 2) $\arccos(4/5)$; 3) 90^0 ; 4) $\arccos\left(-3/\sqrt{10}\right)$;
   5) $\arccos(5/9)$; 6) 180^0 ; 7) 90^0.

7. 1) $(-28\ ,\ -14)$; 2) -13 ; 3) 77.

8. 1) 0 ; 2) -4 ; 3) 2.

9. 1) $(-11\ ,19\ ,\ -7)$; 2) $(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$; 3) $(0,0,-15)$.

10. 1) $2\left[\bar{b}\ ,\ \bar{a}\right]$; 2) $\left[\bar{a}\ ,\ \bar{b}\right]+4\left[\bar{b}\ ,\ \bar{c}\right]+\frac{9}{2}\left[\bar{c}\ ,\ \bar{a}\right]$.

11. $\lambda=\pm\sqrt{3}$.

12. 1) 0 ; 2) -23 ; 3) 0 ; 4) 6.

I. 5. Kompleks sanlar barada düşunje

§ 5. 1. Kompeks sanlaryń kesgitlenişi we olar bilen geçirilýän amallar.

Goý, *x,y* hakyky sanlar bolsun. Onda $z=x+i\,y$ aňlatma kompleks san diýilýär, bu ýerde $i=\sqrt{-1}$. Şunlukda, *x*- onuň hakyky bölegi, *y*- bolsa onuň hyýaly bölegi diýip atlandyrylýar. Olar üçin Re*z* = *x*, Im *z* = *y* belgiler ulanylýar.

Eger *y* = 0 bolsa, onda $z=x$ hakyky sany alýarys. Diýmek, hakyky sanlar kompleks sanlaryň hususy kalydyr. *x* = 0 bolanda alynýan *z* = *i y* sana sap hyýaly san diýilýär.

Iki $z_1 = x_1 + iy_1$ we $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks san diňe $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ bolanda deň diýip hasap edilýär, ýagny

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2). \qquad (1)$$

Eger $x = 0$ we $y = 0$ bolsa, onda $z = x + i\,y$ kompleks san nola deň diýilýär.

Eger $z_1 = x_1 + iy, z_2 = x_2 + iy_2$ bolsa, onda $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ kompleks sana ol kompleks sanlaryň jemi diýilýär.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (2)$$

$z = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ kompleks sana bolsa ol kompleks sanlaryň köpelmek hasyly diýilýär. Bu formulany $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ köpeltmek hasyldan köpagzalaryň köpeldiliş düzgüninden peýdalanyp we $i^2 = -1$ deňligi ulanyp alyp bileris.

$\sqrt{x^2 + y^2}$ sana $z = x + iy$ kompleks sanyň moduly diýilýär we $|z|$ belgi bilen belgilenýär.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

$|z| \geq 0$ bolýandygy aýdyňdyr we $|z| = 0$ deňlik diňe z=0 bolanda ýerine ýetýär.

$x - iy$ kompleks sana $z = x + iy$ kompleks san bilen çatyrymly san diýilýär we $\bar{z}$ belgi bilen belgilenýär:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \qquad (4)$$

Kesgitlemä görä, $\overline{\overline{(z)}} = z$ deňlik islendik kompleks san üçin dogrudyr. Eger $z = x$ bolsa, onda $\bar{z} = \bar{x} = x.$ Diýmek, hakyky san bilen çatyrymly san onuň özi bolýar.

$\overline{(z^2)} = \overline{z \cdot z} = \overline{(z)}^2$ deňligi ulanyp, $\overline{(z^n)} = \overline{(z)}^n$ deňligi ýeňillik bilen alyp bileris. Bu deňlikden bolsa, hakyky a san üçin

$$\overline{az^n} = \bar{a} \cdot \overline{(z^n)} = a \cdot \overline{(z)}^n$$

deňligi alýarys.

Şonuň ýaly,

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{az^n + bz^m} = a\overline{(z)}^n + b\overline{(z)}^m$$

deňlikleriň dogrudugyny aňsatlyk bilen barlamak bolar.
Indi,

$$|z| = |\overline{z}|,$$

$$z\overline{z} = |z|^2$$

formulalary (3) we(4) deňliklerden alyp bolýandygyny belläliň.

Kompleks sanlary köpeltmek we goşmak amallary üçin aşakdaky

1. $z_1+z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3),$
3. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

deńlikleriń ýerine ýetýändigini görmek kyn däldir. (özbaşdak görkezmeli).

1-3 häsiýetlere görä, kompleks sanlar bilen geçirilýän köpeltmek we goşmak amallar hakyky sanlar bilen geçirilýän degişli amallar ýalydyr. 0 we 1 sanlaryň häsiýetleri kompleks sanlar köplüginde hakyky sanlar köplügindäki ýalydyr.

$$z + 0 = z, \qquad 1 \cdot z = z.$$

Kompleks sanlar üçin hem goşmak amalyna ters bolan aýyrmak amaly we köpeltmek amalyna ters bolan bölmek amaly bardyr.

Islendik iki z_1, z_2 kompleks sanlar üçin üçinji z kompleks san tapylyp, olar üçin

$$z + z_1 = z_2 \tag{5}$$

deňlik ýerine ýetýär. z ana z_2 hem-de z_1 sanlaryň tapawudy diýilýär we $z_2 - z_1$ belgi bilen belgilenýär :

$$z = z_2 - z_1.$$

0-z tapawut –z bilen belgilenýär. (1) we (2) deňliklerden islendik iki kompleks sanlar üçin (5) deňlemäniň diňe ýeke-täk çözüwiniň bardygy gelip çykýar.

Şeýlelikde,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_2) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{6}$$

z_1 we z_2 iki kompleks sanyň paýy diýip, $z_1 = z \cdot z_2$ deňligi kanagatlandyrýan z sana aýdylýar we $z_1 : z_2$ ýa-da $\dfrac{z_1}{z_2}$ belgi bilen belgilenýär:

$$z = z_1 : z_2 \quad \text{ýa-da} \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

Islendik iki $z_1, z_2 \neq 0$ kompleks san üçin $z_1 = z \cdot z_2$ deňligiň ýeke-täk çözüwi bardyr. Dogrudan hem, bu deňligiň iki bölegini-de $\overline{z_2}$ sana köpeldip,

$$z_1 \overline{z_2} = z \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \qquad (7)$$

deňligi alarys. Ýöne, $z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2$ we $|z_2| \neq 0$, çünki $z_2 \neq 0$.

Indi (7) deňligi $\dfrac{1}{|z_2|^2}$ sana köpeldip,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} \qquad (8)$$

deňligi alarys.

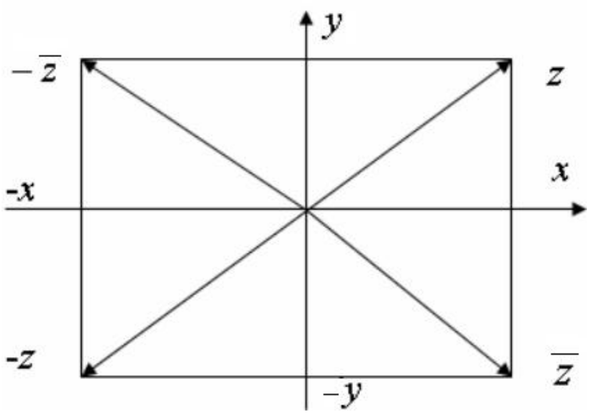
Eger $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ bolsa, onda (8) formula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_x y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

görnüşi alar.

§ 5. 2. Kompleks sanlaryń geometrik şekillendirilişi we olaryń trigonometrik görnüşi

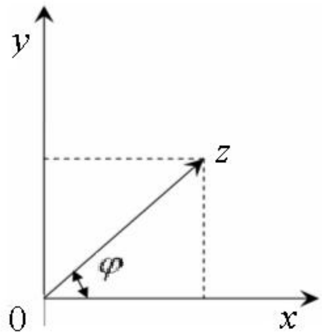
1. Kompleks sanyň şekillendirlişi. Goý, tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun. $z = x + iy$ kompleks san tekizlikde koordinatalary $(x; y)$bolan nokat bilen belgilenýär. Şeýlelik bilen, tekizligiň nokatlar köplügi we kompleks sanlaryň köplügi özara birbahaly degişlilikli köplüklerdir. Şunlukda, hakyky san absissalar okunda we hyýaly san ordinatalar okunda şekillendirilýär. Şonuń üçin hem absissalar okuny-hakyky ok, ordinatalar okuny bolsa-hyýaly ok diýip atlandyrýarlar. Kompleks sanlar şekillendirilen tekizlige kompleks tekizlik diýilýär. z we $-z$ sanlar 0 nokada görä, z we $\bar{z}$ sanlar bolsa hakyky oka görä simmetrik ýerleşýärler.



21-nji surat.

Kompleks sanlaryñ $z = x + i\,y$ görnüşdäki ỳazgysyna olaryñ algebraik görnüşi diỳilỳär .

2. Kompelks sanlaryň trigonometrik görnüşi. $z = x + iy$ kompleks sanyñ tekizlikdäki şekiline seredeliñ we tekizlikde polỳar kordinatalar ulgamyny alalyñ. Goỳ , O polỳus dekart kordinatalar sistemasynyň başlangyjy bilen we polỳar oky Ox oky bilen gabat gelsin . Onda z nokadyñ koordinalary $(r\,,\varphi)$ bolar , bu yerde $r = |z|$, φ bolsa hakyky Ox oky bilen z wektoryñ arasyndaky burç. Şunlukda, eger burç sagat diliniň hereketiniň tersine ösỳän hasaplanylsa $+\varphi$ we sagat diliniň hereketiniň ugruna hasaplansa $-\varphi$ kabul edilỳär. Bu burça $z(z \neq 0)$ kompleks sanyñ argumenti diỳilỳär we *argz* belgi bilen belgilenỳär . $z = 0$ san üçin argument kesgitlenmeỳär.



22-nji surat

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

alarys . Diymek,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Kompleks sanyñ şeỳle görnüşdäki ỳazgysyna onuň **trigonometrik görnüşi** diỳilỳär.

Eger $z = x + iy$ we $\arg z = \varphi$ bolsa , onda

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad . \tag{9}$$

$z = x+iy$ kompleks sanyń φ argumentini tapmak üçin (9) sistemany çözmek ýeterlik. (9) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr we ol çözüwler $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \ \ k = 0, \ \pm 1, \pm 2,$ …, formula boýunça ýazylýar, bu ýerde φ_0 (9) sistemanyň käbir çözüwi.

Şeýlelik bilen, kompleks sanyń argumenti bir bahaly kesgitlenmeýär. Eger $z=x+iy$ kompleks sanyń argumentiniń käbir bahasy φ_0 bolsa, onda $\arg z = \varphi_0 + 2k\pi$, $k = 0$, ± 1, ± 2,..., bolar.

1-nji bellik. (9) sistemanyň deregine

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \tag{10}$$

deńlemäni hem almak bolar, ýöne (10) deńlemäniń kökleri (9) sistemanyň çözüwi bolup bilmeýär.

Goý, $\arg z_1 = \varphi_1$ we $\arg z_2 = \varphi_2$ bolsun, onda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \right.$$
$$\left. - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right] = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \right.$$
$$\left. + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \qquad (11)$$

Diýmek,

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \ ; \ \arg(z_1\cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Matematiki induksiýa usuluny ulanyp,

$$\left.\begin{array}{l} \arg(z_1\cdot z_2 ... z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + ... + \arg z_n, \\ |z_1\cdot z_2 ... z_n| = |z_1||z_2|...|z_n| \end{array}\right\} \qquad (12)$$

deńlikleri alarys. Eger $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$ bolsa, onda

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

formulany alarys. Oňa Muawryń formulasy diýilýär.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \qquad (13)$$

Diýmek,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right| \quad , \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

2-nji bellik. Goý, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Onda, $z_1 = z_2$ deńlik dińe $r_1 = r_2$ we $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\kappa\pi, \kappa = 0, \pm1, \pm2, ...$ bolanda dogrudyr.

§ 5. 3. Kompleks sanlardan kök almak

Eger $z^n = a$ bolsa, onda z kompleks sana a kompleks sanyń n derejeli köki diýilýär we $\sqrt[n]{a}$ belgi bilen belgilenýär.

Goý, $\arg a = 0$, $|a| = \rho$, $\arg z = \varphi$, $|z| = r$ bolsun. Biz $\sqrt[n]{a} = z$ tapalyń. Kesgitlemä görä

$$z^n = a$$

Muawryń formulasyna görä,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Diýmek,

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

bu ýerden, ýokarda eden belligimizi ýatlap,

$$\rho = r^n, n\varphi = \theta + 2\kappa\pi, \ \kappa = 0, \ \pm 1, \pm\ 2, \ldots,$$

deńligi alarys. Ondan bolsa

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \ \varphi = \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

deńlikleri alarys.

Diýmek,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}\right).$$

Indi,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}\right)$$

kompleks sanlaryń dińe n sanynyń dürlüdigini görkezeliń $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sanlar dürlüdirler, çünki

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \ \varphi_1 = \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}, \ldots, \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

burçlar dürli we olaryń tapawudy 2π -den kiçi. $z_n = z_0$ bolýandygyna göz ýetireliń.

$$\varphi_n = n\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Onda,

$$z_n = \sqrt[n]{\rho}\ (\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + 2k\pi\right)\Big) = \sqrt[n]{\rho}\ \cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\Big) = z_0$$

Şunuń ýaly-da $z_{n+1} = z_1$, $z_{-1} = z_{n-1}$ we ş.m

Şeýlelik bilen $z^n = a$ deńlemäniń dińe n sany dürli

$$z_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}\right),\ \kappa = 0,1,\ ...,\ n-1,$$

kökleri bardyr.

Gönükmeler

1. Amallary ýerine ýetirmeli.

1) $(2+3i)(3-2i)$ 2) $(a+bi)(a-bi)$

3) $(3-2i)^2$ 4) $(1+i)^3$

5) $\dfrac{1+i}{1-i}$ 5) $\dfrac{2i}{1+i}$

2. Deňlemelri çözmeli

1) $x^2 + 25 = 0$, 2) $x^2 - 2x + 5 = 0$

3) $x^2 + 4x + 13 = 0$,

3. Aşakdaky kompleks sanllary wektor görnüşinde şekillendirmeli, olaryň modulyny we argumentini tapmaly hem-de trigonometrik görnüşde ýazmaly.

1) $z = 3$, 2) $z = -2$, 3) $z = 3i$, 4) $z = -2i$

5) $z = 2 - 2i$, 6) $z = 1 + i\sqrt{3}$, 7) $z = -\sqrt{3} - i$

8) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, 9) $z = \sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)$

4. Aşakdaky deňlikleri subut etmeli.

1) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, 4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

5. Muawryň formulasy boýunça hasaplamaly.

1) $(1+i)^{10}$, 2) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$, 3) $(-1+i)^5$

4) $\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$, 5) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$

6) $(1-i)^6$, 7) $\left(2+i\sqrt{12}\right)^5$, 8) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$

6. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$ deňlikden peýdalanyp $\sin 3\alpha$ we $\cos 3\alpha$ funksiýalary α burçuň funksiýalarynyň üsti bilen aňlatmaly.

7. $z=\sqrt[6]{1}$ köküň hemme bahalaryny tapmaly.

8. Tapmaly

1) $\sqrt[3]{i}$, 2) $\sqrt[6]{-1}$, 3) $\sqrt[3]{-2+2i}$

4) $\sqrt{i}$, 5) $\sqrt[3]{-1+i}$, 6) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$

9. Deňlemelri çözmeli

1) $x^3+8=0$, 2) $x^4+4=0$

10. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin x$ jemi tapmaly.

Görkezme. $\sin x=\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$ formuladan peýdalanmaly.

Jogaplar:

1. 1) $12+5i$, 2) a^2+b^2 , 3) $12-5i$
   4) $-2+2i$, 5) i , 6) $1+i$

2. 1) $\pm 5i$, 2) $1\pm 2i$, 3) $-2\pm 3i$

3. 8) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, 9) $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

4. $1)\ 32i$, $2)\ 64$, $3)\ 4(1-i)$, $4)\ 2\left(3+2\sqrt{2}\right)i$
$5)\ 8i$, $6)\ 8i$, $7)\ 512\left(1-i\sqrt{3}\right)$, $8)\ -27$

5. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \cos^3\alpha$
$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$

6. $\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}; \qquad k = 0,1,\ldots,5$

7. $1)\ -i$, $\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$, $2)\ +i$; $\frac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$, $3)\ -i$,

$4)\ \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $5)\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right); \quad \varphi = 45^0, 165^0, 285^0$

$6)\ \pm 2\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\pm 2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

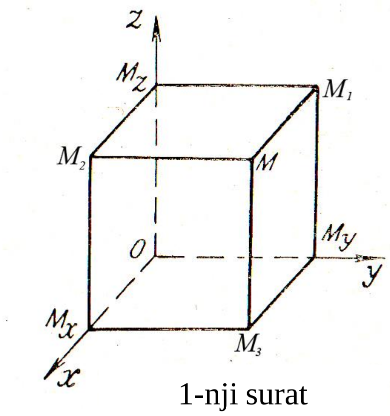
8. $1)\ -2$, $1\pm i\sqrt{3}$
$2)\ \pm 1 \pm i$

9. $$\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

I. 6. GIŇIŞLIKDE ANALITIK GEOMETRIÝA

§ 6. 1. Giňişlikde koordinatalar sistemasy

1. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy. Bir nokatda kesişýän özara perpendikulýar üç *Ox, Oy, Oz* oklardan ybarat bolan koordinatalar sistemasyna giňişligiň gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy diýilýär.



1-nji surat

Şunlukda, *Ox, Oy, Oz* oklara koordinata oklary,olaryň kesişme O nokadyna bolsa koordinatalar başlangyjy diýilýär. *Ox* oka absissalar oky, *Oy* oka ordinatalar oky, *Oz* - oka bolsa applikatalar oky diýilýär. Bu koordinata oklaryň položitel ugurlary peýkamjyklar bilen görkezilendir (1-nji surat).

Ox we *Oy*; *Ox* we *Oz*; *Oy* we *Oz* oklaryň üstünden geçýän tekizliklere koordinata tekizlikleri diýilýär we degişlilikde *Oxy, Oxz, Oyz* bilen belgilenýär. Olar giňişligi oktantalar diýlip atlandyrylýan sekiz bölege bölýär .

1-nji suratdan görnüşi ýaly ilkinji dört I, II, III, IV oktantalar *Oxy* tekizliginden yokarda, soňky V, VI, VII, VIII oktantalar bolsa *Oxy* tekizliginden aşakda ýerleşýär.

Gönüburçly koordinatalar sistemasy giňişlikde nokadyň ornuny kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Giňişligiň nokatlarynyň koordinatalarynyň alamatlary aşakdaky 1-nji tablisada görkezilendir.

Diýmek, eger giňişlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsa, onda giňişligiň her bir nokadyna tertipleşdirilen *(x, y, z)* sanlar üçlügini degişli etmek bolar.Tersine, eger tertipleşdirilen *(x, y, z)* sanlar üçlügi berlen bolsa, onda giňişlikde absissasy x, ordinatasy y, applikatasy z bolan ýeke-täk nokady görkezmek bolar. Şeýlelikde, giňişligiň nokatlary bilen sanlaryň tertipleşdirilen *(x, y, z)* üçlüginiň arasynda özara birbahaly degişlilik gurnalandyr.

Goý, giňişlikde erkin M nokadyň ýagdaýyny kesgitlemek gerek bolsun. Onuň üçin M nokatdan *Oyz,Oxz,Oxy* tekizliklere degişlilikde

MM_1, MM_2, MM_3 perpendikulýarlary geçireliň. Bu üç perpendikulýaryň ululygy M nokadyň giňişlikdäki ornuny kesgitleýär. Eger M_1 nokatdan Oy we Oz oklara, M_2 nokatdan Ox we Oz oklara, M_3 nokatdan Ox we Oy oklara perpendikulýarlar geçirsek, onda käbir $OM_x\, M_3\, M_y\, M_1\, M_z\, M_2\, M$ parallelepipedi alarys (1-nji surat).

1-nji tablisa

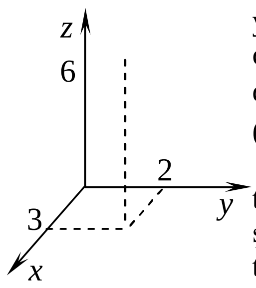
Oktantalar	Koordinatalaryň alamatlary		
	X	y	Z
I	+	+	+
II	-	+	+
III	-	-	+
IV	+	-	+
V	+	+	-
VI	-	+	-
VII	-	-	-
VIII	+	-	-

$MM_1=OM_x$, $MM_2=OM_y$, $MM_3=OM_z$ sanlara M nokadyň koordinatalary diýilýär we degişlilikde x, y, z bilen belgilenýär. Koordinatalary x, y, z bolan M nokat $M(x,y,z)$ görnüşde ýazylýar. Şunlukda, Oyz tekizligiň nokatlary üçin $x=0$, Oxz tekizligiň nokatlary üçin $y=0$ we Oxy tekizligiň nokatlary üçin $z=0$. Şeýle hem Ox okuň nokatlary üçin $y=0$, $z=0$; Oy okuň koordinatalary üçin $x=0$, $z=0$ we Oz okuň koordinatalary üçin $x=0$, $y=0$.

Şeýlelikde, giňişlikde islendik $M(x,y,z)$ nokadyň ýagdaýy başlangyjy koordinatalar başlangyjynda, ahyry M nokatda bolan $\overrightarrow{OM}$ wektor bilen kesgitlenýär.

1-nji mysal. $A(3;2;6)$ nokady gurmaly.

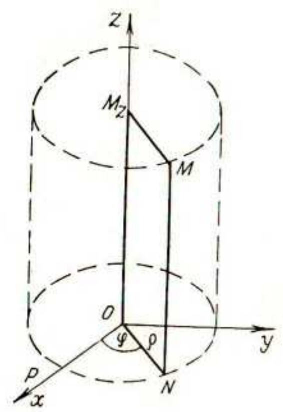
◅ A nokady guralyň.Onuň üçin Ox okuň položitel ugrunda uzynlygy 3 ölçeg birligine deň bolan kesimi alyp goýalyň. Şol kesimiň ahyryndan sag tarapa Oy okuna parallel bolan ýarym göni çyzyk geçireliň we onuň üstünde 2 ölçeg birligine deň bolan kesimi alyp goýalyň. Soňky kesimiň ahyryndan



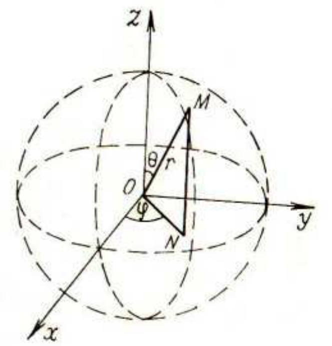
2-nji surat.

ýokarlygyna *Oz* okuna parallel bolan ýarym göni çyzyk geçireliň we onuň üstünde 6 ölçeg birligine deň bolan kesimi alyp goýalyň. $A(3; 2; 6)$ nokatdyr (2-nji surat). ▹

2. Silindrik we sferik koordinatalar. Käbir tekizlikde *O* nokady we *O* nokatdan çykýan *Op* şöhläni alalyň (3-nji surat). *O* nokatdan berlen tekizlige perpendikulýar göni çyzyk geçireliň we onuň položitel ugruny gorkezip, ol oky *Oz* bilen belgiläliň. Uzynlygy ölçemek üçin ölçeg birligini saýlap alalyň.



3-nji surat.



4-nji surat.

Goý, *M* giňişligiň erkin nokady, *N* onuň berlen tekizlige proýeksiýasy , M_z bolsa onuň *Oz* oka proýeksiýasy bolsun. *O* polýusa we *Op* polýar okuna görä *N* nokadyň tekizlikdäki polýar koordinatalaryny ρ *we* φ bilen belgiläliň.

ρ, φ, z sanlara *M* nokadyň silindrik koordinatalary diýilýär, bu ýerde ρ, φ sanlar *N* nokadyň polýar koordinatalary ($\rho \geq 0; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$), $z = OM_z$ bolsa *Oz* okundaky $\overline{OM_z}$ ugrukdyrylan kesimiň ululygy. $M(\rho; \varphi; z)$ ýazgy silindrik koordinatalary ρ, φ, z bolan *M* nokady aňladýar. Şeýle koordinatalaryň silindrik koordinatalary diýlip atlandyrylmagy $\rho = const$ koordinata üstüň, ýagny birinji koordinatalary şol bir hemişelik ρ san bolan nokatlaryň köplüginiň silindr bolany bilen düşündirilýär.

Eger gonüburçly dekart koordinatalar sistemasyny 3-nji suratdaky ýaly saýlap alsak, onda M nokadyň x, y, z dekart koordinatalary onuň ρ, φ, z silindrik koordinatalary bilen

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad z = z$$

formulalar bilen baglanşyklydyr.

Giňişlikde sferik koordinatalaryny girizmek üçin umumy O başlangyjy bolan üç özara perpendikulýar Ox, Oy, Oz oklara seredeliň we masştab birligini saýlap alalyň (4-nji surat).

Goý, M giňişligiň erkin nokady, N onuň Oxy tekizlige proýeksiýasy, r bolsa M nokatdan koordinata başlangyjyna çenli uzaklyk bolsun. θ bilen $\overrightarrow{OM}$ kesimiň Oz oky bilen emele getirýän burçuny, φ bilen Ox oky ON şöhle bilen gabat gelmegi üçin Ox oky sagat diliniň tersine öwürme burçy belgiläliň. θ bu ýerde giňişlik burçy, φ burça uzaklyk burçy diýilýär. r, θ, φ sanlara($0 \le r < +\infty$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi < 2\pi$) M nokadyň sferik koordinatalary diýilýar we ol $M(r;\, \theta;\, \varphi)$ görnüşde ýazylýar.Şeýle koordinatalara sferik koordinatalary diýilmegi r=const koordinata üstüň sfera bolýany bilen düşündirilýär.

Eger gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny 4-nji suratdaky ýaly saýlap alsak, onda M nokadyň x; y; z dekart koordinatalary onuň r; θ; φ sferik koordinatalary bilen

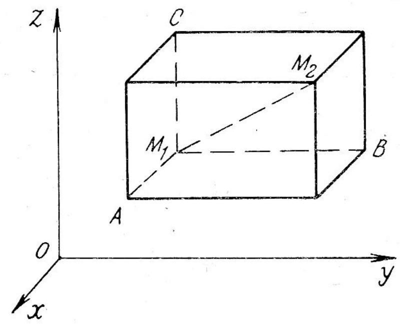
$$x = r\sin\theta\cos\varphi; \quad y = r\sin\theta\sin\varphi; \quad z = r\cos\theta$$

formulalar bilen baglanyşyklydyr.

3. Giňişlikde iki nokadyň arasyndaky uzaklyk. Goý, giňişligiň dekart koordinatalar sistemasynda $M_1(x_1, y_1, z_1)$ we $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar berlen bolsun. Ol nokatlaryň arasyndaky uzaklygyň

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formula boýunça tapylýandygyny görkezeliň. Onuň üçin M_1 we M_2 nokatlar arkaly koordinatalar tekizliklerine parallel tekizlikleri geçireliň. Şunlukda käbir parallelepipedi alarys (5-nji surat).



5-nji surat

M_1 we M_2 nokatlar ol parallelepipediň garşylykly depeleridir. M_1 nokatdan çykýan özara perpendikulýar gapyrgalaryň uçlaryny A, B, C bilen belgiläliň. Ol nokatlar üçin $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_1, y_2, z_1)$, $C(x_1, y_1, z_2)$ bolar.Stereometriýadan belli bolan formulanyň esasynda

$$|M_1M_2|^2 = |M_1A|^2 + |M_1B|^2 + |M_1C|^2$$

deňligi ýzyp bileris., bu ýerde M_1M_2 diagonalyň, M_1A; M_1B; M_1C gapdal gapyrgalaryň uzynlygydyr. $\rho(M_1, M_2) = M_1M_2$ belgileme girizeliň.

Şunlukda, $M_1A = |x_2 - x_1|$, $M_1B = |y_2 - y_1|$, $M_1C = |z_2 - z_1|$ bolýandygyndan peýdalanyp,

$$\rho(M_1, M_2) = M_1M_2 = \sqrt{|M_1A|^2 + |M_1B|^2 + |M_1C|^2}$$

formula esasynda görkezilmeli formulany alarys.

2-nji mysal. A(2;4;5) we B(1;2;6) nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

◁ Iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy esasynda

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)} =$$

$$\sqrt{(1-2)^2 + (2-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \text{ .▷}$$

3-nji mysal. Iki $A(-2;1;4)$ we $B(3;0;1)$ nokatlardan deňdaşlykda *Oz* okuň üstünde ýatan nokady tapmaly.

$\triangleleft$ *Oz* okuň üstünde ýatan nokadyň koordinatasy $C(0;0;z)$ bolar. *AC* we *BC* uzaklyklary tapalyň.

$$AC=\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{4+1+z^2-8z+16}=$$
$$=\sqrt{z^2-8z+21};\quad BC=\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2+(z-1)^2}=$$
$$=\sqrt{9+z^2-2z+1}=\sqrt{z^2-2z+10}.$$

AC=BC şerte görä

$$\sqrt{z^2-8z+21}=\sqrt{z^2-2z+10}$$

deňligi ýazyp bileris.Bu deňlemäni çözüp, *C* nokadyň applikatacyny taparys.

$$z^2-8z+21=z^2-2z+10;\quad -6z=-11;\quad z=\frac{11}{6}.$$

Şeýlelikde gözlenýän nokat $C\left(0;0;\frac{11}{6}\right)$ bolar. $\triangleright$

§6.2 Giňişlikde üstüň we çyzygyň deňlemeleri

1.Giňişlikde üstüň deňlemesi. Goý, üç x ,y , z üýtgeýänli käbir

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

deňleme berlen bolsun. Eger bu dekart koordinatalar sistemasynda T üstüň ähli nokatlary (1) deňlemäni kanagatlandyrýan bolsa we ol üstde ýatmaýan hiç bir nokat ol deňlemäni kanagatlandyrmaýan bolsa, onda (1) deňlemä T üstüň deňlemesi diýilýär.

Bu kesgitleme boýunça T üst koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügini aňladýar.

Mysal hökmünde merkezi $C(a;b;c)$ nokatda, radiusy *R*-e deň bolan sferanyň deňlemesini düzeliň.

Bilşimiz ýaly sfera merkez diýlip atlandyrylýan berlen C nokatdan deň uzaklykda bolan giňişligiň nokatlarynyň köplügi hökmünde kesgitlenýär. Şonuň üçin sferanyň erkin $M(x,y,z)$ nokady üçin $\rho(C,M)=R$ bolar we

$$\rho(C,M)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

formulanyň esasynda

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R \qquad (2)$$

ýa-da

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (3)$$

Bu sferada ýatmaýan N nokat üçin (2) deňlik ýerine ýetmeýär we şonuň üçin onuň koordinatalary (3) deňlemäni kanagatlandyrmaýar. Şeýlelikde, (3) deňleme merkezi $C(a,b,c)$ nokatda we radiusy R bolan sferanyň deňlemesidir. Hususy halda, sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjy bilen gabat gelende, onuň deňlemesi

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

bolar.Bu deňlemä sferanyň kanonik (ýönekeý) deňlemesi diýilýär.

Dekart koordinatalaryna görä n-nji derejeli algebraik deňleme bilen kesgitlenýän üste n-nji tertipli üst diýilýär.

Mysal üçin,

$$8x^2y^2z^2+12x^3y^4z-2xy+5=0$$

deňlemä sekizinji derejeli deňleme ýa-da sekizinji tertipli üst diýilýär. Tekizlik birinji tertipli üst, sfera bolsa ikinji tertipli üstdir.

2.Giňişlikde çyzygyň deňlemesi. Giňişlikde çyzyga iki üstüň kesişmesi hökmünde seretmek bolar, şonuň üçin çyzyk iki deňleme bilen kesgitlenýär.

Goý , l çyzyk $F_1(x;y;z)=0$; $F_2(x;y;z)=0$ deňlemeler bilen kesgitlenýän üstleriň kesişme çyzygy bolsun, ýagny l çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalary

$$\left.\begin{aligned} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

deňlemeler sistemasyny kanagatlandyrýar.Şonuň üçin hem **(**4) deňlemeler l çyzygyň deňlemesidir.

Mysal üçin,

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=9, \\ z=0 \end{aligned}\right\}$$

deňlemeler sistemasy Oxy tekizlikde ýatýan radiusy $R=3$ bolan $x^2+y^2=R^2$ töweregi kesgitleýär.Bu sistemanyň birinjisi merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy R=3 bolan sferanyň deňlemesi, ikinjisi bolsa *Oxy* koordinatalar tekizligiň deňlemesidir. Dekart koordinatalar sistemasynda koordinata oklarynyň deňlemelerini ýazalyň.

Oxz we *Oxy* koordinata tekizlikleriň kesişme çyzygy bolan *Ox* oky $y = 0$; $z=0$ deňlemer bilen kesgitlenýär; *Oy* oky *Oyz* ,*Oxy* tekizlikleriň kesişme çyzygy hökmünde $x = 0$; $z = 0$ deňlemeler bilen kesgitlenýär; *Oz* koordinata oky bolsa $x=0$; $y=0$ deňlmeler bilen kesgitlenýär.

3. Giňişligiň koordinatalarynyň bir we iki deňlemeleriniň geometrik manysy.

Goý, giňişlikde dekart koordinatalar sistemasynda

$$\Phi(x, y, z) = 0 \qquad (5)$$

deňleme berlen bolsun.

Koordinatalary (5) deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlar köplügine seredeliň. Giňişligiň her bir nokatlar köplügine figura diýilýär. Şeýlelikde her bir (5) deňleme giňişlikde käbir figurany kesgitleýär.

Giňişligiň haýsy nokatlar köplüginiň

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0 \qquad (6)$$

deňlemäni kesgitleýändigini göreliň. Bu ikinji derejeli deňleme bolup, üýtgeýänleriň kwadratlarynyň koeffisiýenti şol bir sana deňdir. Şeýle hem bu deňleme üýtgeýänleriň köpeltmek hasylyny saklamaýar.

Teorema. Eger (6) deňleme giňişlikde käbir üsti kesgitleýän bolsa, onda ol üst sferadyr.

$\lhd A \neq 0$ bolany üçin (6) deňligiň iki bölegini hem A sana bölüp alarys:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2B}{A}x + \frac{2C}{A}y + \frac{2D}{A}z + \frac{E}{A} = 0$$

bu ýerde $\frac{B}{A} = b$; $\frac{C}{A} = c$; $\frac{D}{A} = d$, $\frac{E}{A} = e$ belgileme girizip alarys:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0$$

Doly kwadraty bölüp alarys:

$$(x+b)^2 + (y+c)^2 + (z+d)^2 = f \qquad (7)$$

bu ýerde $f = b^2 + c^2 + d^2 - e$.

$f\,(f > 0,\ f = 0,\ f < 0)$ funksiýa baglylykda (7) deňleme aşakdaky deňlemeleriň birine getirilýär:

$$(x+b)^2 + (y+c)^2 + (z+d)^2 = R^2, \qquad (8)$$

$$(x+b)^2+(y+c)^2+(z+d)^2=0 \ , \qquad (9)$$
$$(x+b)^2+(y+c)^2+(z+d)^2=-R^2. \qquad (10)$$

(8) deňleme merkezi $C(-b;-c;-d)$ nokatda, radiusy R bolan sferany kesgitleýär, (9) deňleme görkezilen nokady kesgitleýär; (10) boş köplükdir. ▷

$x=a$ deňleme Ox oka perpendikulýar bolan tekizligi kesgitleýär; $x^2-a^2=0$ deňleme deňlemeleri $x=a; x=-a$ bolan iki tekizligi kesgitleýär; $\frac{x}{|x|}-\frac{2y}{|y|}+\frac{z}{|z|}=0$ deňleme bolsa iki oktantany dolduryan giňişligiň nokatlar köplügini kanagatlandyrýar.

Goý,

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z)=0,\\ \Phi(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

iki sany deňleme berlen bolsun. Eger bu deňlemeleriň her biri üsti kesgitleýän bolsa we bu üstler käbir göni çyzyk boýunça kesişýän bolsalar, onda (11) sistema üstleriň kesişmesiniň çyzygyny kesgitleýär. Umumy ýagdaýda (11) sistema giňişligiň käbir nokatlar köplügini kesgitleýär.

Mysal üçin,

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1,\\ \frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}-\frac{2z}{|z|}=0 \end{aligned}\right\}$$

sistema $x^2+y^2+z^2=1$ sferanyň birinji we ýedinji oktanta degişli bolan nokatlar köplügini kesgitleýär.

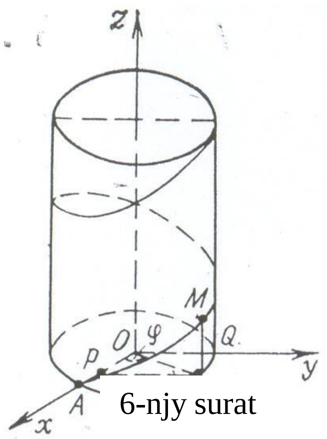
4. Giňişlikde çyzygyň parametrik deňlemeleri.

$$x=\varphi_1(t), y=\varphi_2(t), z=\varphi_3(t)$$

görnüşdäki deňlemelere çyzygyň parametrik deňlemesi diýilýär, bu ýerde $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ käbir t üýtgeýänden funksiýalardyr.

Parametrik deňlemeler esasan hem hereket edýän nokadyň traýektoriýasyny beýan etmek üçin mehanikada has köp ulanylýar, bu ýagdaýda t üýtgeýän wagt bolup hyzmat edýär. Mysal hökmünde aýlawly çyzygyň parametrik deňlemesini getirip çykaralyň.

Hemişelik burç tizligi bilen Oz okuň daşyndan aýlanýan tegelek silindriň emele getirijisi boýunça hereket edýän nokatlaryň emele getirýän çyzygyna aýlawly çyzyk diýilýär.



6-njy surat

Giňişligiň dekart koordinatalar sistemasynyň Oz oky hökmünde silindriň aýlanma okuny alalyň (6-njy surat). V bilen emele getirijiniň ugruna gönüçyzykly hereket edýän nokadyň hemişelik tizligini, ω bilen aýlanma hereketiň tizligini, R bilen silindriň radiusyny belgiläliň. Goý, başlangyç ýagdaýda nokat Ox okuň üstünde bolsun (A nokat bilen gabat gelsin), t wagtda bolsa M ýagdaýda bolsun. M nokadyň Oxy tekizlige proýeksiýasyny N bilen, N nokadyň Ox oka proýeksiýasyny P bilen, N nokadyň Oy oka proýeksiýasyny bolsa Q bilen belgiläliň, OP we ON çyzyklaryň arasyndaky burçy φ bilen belgiläp alarys:

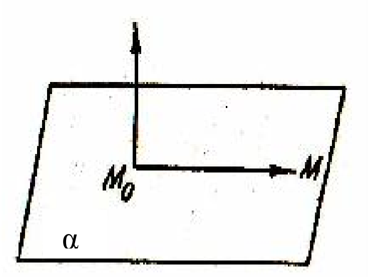
$x = OP = R\cos\varphi;\ y = OQ = R\sin\varphi;\ z = MN = Vt$.

$\varphi = \omega t$ bolany üçin $x = R\cos\omega t;\ y = R\sin\omega t;\ z = vt$ (12)

Bu deňlemä aýlawly çyzygyň parametrik deňlemeleri diýilýär.

§6.3. Giňişlikde tekizlik

1.**Berlen nokadyň üstünden geçýän berlen wektora perpendikulýar tekizlik.** Goý, gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokat we nola deň bolmadyk $\overline{n} = (A; B; C)$ wektor berlen bolsun. M_0 nokadyň üstünden geçýän $\overline{n}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini düzeliň. Bu halda $\overline{n}$ wektora tekizligiň normal wektory diýilýär.Ol tekizligi α bilen belgiläliň we şol tekizlikde erkin $M(x; y; z)$ nokat alalyň (6-njy surat).



7-nji surat

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ wektoryň α tekizlikde ýatýanlygy sebäpli, ol $\overline{n}$ wektora perpendikulýardyr. Şeýlelikde ol wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deňdir, ýagny

$$\overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{n} = 0$$

Ýöne $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$; $\overline{n} = (A; B; C)$, şonuň üçin koordinatalary bilen berlen wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň formulasyny ulanyp,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (13)$$

deňlemäni alarys.

Oňa berlen nokadyň üstünden geçýän berlen wektora perpendikulýar tekizligiň deňlemesi diýilýär.Ony $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ belgileme girizip

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (14)$$

görnüşde ýazmak bolar. (13) we (14) deňlemelerde *x, y, z* ululyklaryň koeffisiýentleriniň normal wektoryň koordinatalarydygyny belläp geçeliň.

4-nji mysal. $M_0(1; 2; -1)$ nokadyň üstünden geçýän $\overline{n}$ *(4;7;9)* wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini düzmeli.

◁ (13) deňligi ulanyp alarys:

$$4(x - 1) + 7(y - 2) + 9(z + 1) = 0$$

ýa-da $\qquad 4x + 7y + 9z - 9 = 0$. ▷

5-nji mysal. $M(3;0;4)$ we $N(5;6;9)$ nokatlar berlipdir. *M* nokadyň üstünden geçýän we $\overline{MN}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini düzmeli.

◁ *M* nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň.

$$A(x - 3) + B(y - 0) + C(z - 4) = 0$$

$\overline{MN}$ normal wektory tapalyň.

$$\overline{MN} = (5-3)\bar{i} + (6-0)\bar{j} + (9-4)\bar{k} = 2\bar{i} + 6\bar{j} + 5\bar{k}\,.$$

Şeýlelikde gözlenýän tekizligiň deňlemesi

$$2(x-3) + 6(y-0) + 5(z-4) = 0$$

ýa-da $\quad 2x + 6y + 5z - 26 = 0$ bolar. ▷

2.Tekizligiň umumy deňlemesi. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda islendik tekizlik birinji derejeli algebraik deňleme, ýagny

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (15)$$

görnüşdäki deňleme bilen kesgitlenýär, bu ýerde *A,B,C* hemişelik sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutlydyr. Hakykatdan-da, eger x_0, y_0, z_0 (15) deňlemäni kanagatlandyrýan sanlar bolsa, onda $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ bolar. Bu toždestwony (15) – den aýryp alarys:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Bu deňleme (13) görnüşdäki deňleme bolup, ol $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokat arkaly geçýän we normal wektory $\bar{n}$ =*(A, B, C)* bolan tekizlikdir. Şeýlelikde, (14) deňleme hem tekizligi kesgitleýär. (14) deňlemä tekizligiň umumy deňlemesi diýilýär.

(14) deňlemäniň käbir hususy hallaryna seredeliň.

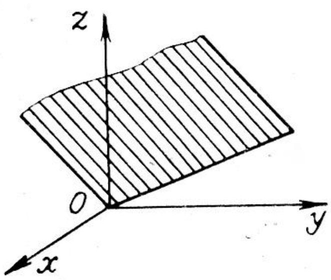
1)*D=0*. Bu ýagdaýda (14) deňleme

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (16)$$

görnüşi alar. Bu deňlemani $O(0;0;0)$ koordinata başlangyjy kanagatlandyrýar. Şonuň üçin (16) deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän tekizligiň deňlemesidir (8-nji surat).

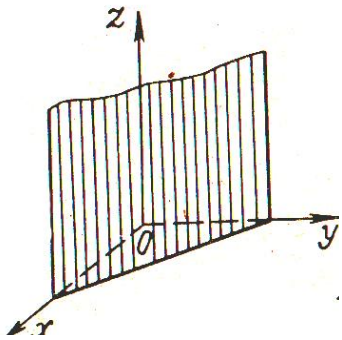
2) *C=0*. Bu halda (14) şeýle görnüşi alar :

$$Ax + By + D = 0 \qquad (17)$$



8-nji surat

Bu ýagdaýda $\overline{n}=(A;B;0)$ wektor *Oz* oka we berlen tekizlige perpendikulýar bolar. Şonuň üçin (16) tekizlik *Oz* oka parallel bolar (9-njy surat).

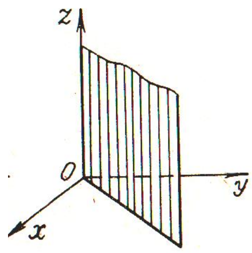


9-njy surat.

3) *B=0* bolandaky $Ax+Cz+D=0$ tekizlik *Oy* oka parallel bolar.

4) *A=0* bolandaky $By+Cz+D=0$ tekizlik *Ox* oka parallel bolar.

5) *C=0,D=0* bolanda $Ax+By=0$ deňlemäni alarys.*D=0* bolanda tekizligiň koordinatalar başlangyjyndan geçýändigi, *C=0* bolanda bolsa *Oz* oka parallel bolýandygy sebäpli $Ax+By=0$ tekizlik *Oz* okuň üstünden geçýän tekizlikdir (10-njy surat).



10-njy surat.

6) *B=0;D=0* bolanda alynýan $Ax+Cz=0$ tekizlik *Oy* okuň üstünden geçer.

7) *A=0; D=0* bolanda alynÿan *By+Cz=0* tekizlik *Ox* okuň üstünden geçer.

8) *A=0; B=0* bolanda $Cz+D=0$ deňlemani alarys.Bu tekizligiň $\vec{n}=(0;0;C)$ normal wektory *Ox* we *Oy* oklara perpendikulýardyr, $Cz+D=0$ tekizlik bolsa *Oxy* tekizlige paralleldir.

9) *A=0; C=0* bolanda alynýan $By + D = 0$ tekizlik *Oxz* tekizlige parallel bolar.

10) *B=0;C=0* bolsa $Ax + D = 0$ tekizlik *Oyz* tekizlige parallel bolar.

11) *A=0; B=0; D=0* bolsun. *D=0* bolanda tekizligiň koordinatalar başlangyjyndan geçýändigi, *A=0;B=0* bolanda bolsa tekizligiň *Oxy* tekizlige parallel bolýandygy sebäpli $Cz = 0$ ýa-da $z = 0$ deňleme *Oxy* tekizligiň deňlemesidir.

12) *A=0; C=0; D=0* bolanda alynýan $By = 0$ ýa-da $y = 0$ deňleme *Oxz* tekizligiň deňlemesidir.

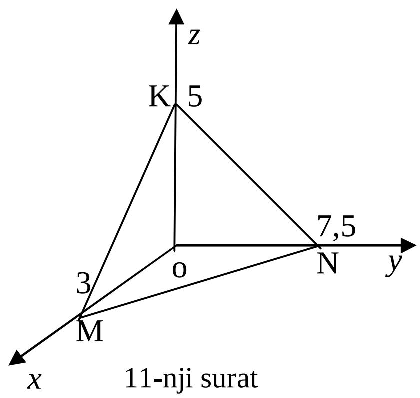
13) *B=0; C=0; D=0* bolanda alynýan $Ax = 0$ ýa-da $x = 0$ deňleme *Oyz* tekizligiň deňlemesidir.

Deňlemesi bilen berlen tekizligi gurmak üçin bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan üç nokady tapmaly.Tekizligiň bir nokadyny tapmak üçin *x* we *y* üýtgeýänlere erkin x_0 we y_0 san bahalaryny berip, tekizligiň deňlemesinden z_0 bahany tapýarys we $M(x_0; y_0; z_0)$ nokady kesgitleýäris. Edil şuňa meňzeşlikde beýleki iki nokady hem tapyp bolýar.

Adatça şol üç nokat hökmünde tekizligiň koordinata oklary bilen kesişme nokatlary alynýar. Soňra tapylan üç nokadyň üsti bilen tekizlik geçirmeli.

6-njy mysal. $5x + 2y + 3z - 15 = 0$ tekizligi gurmaly.

$\lhd$ Onuň üçin berlen deňlemede *y=0 ,z=0* goýup *x=3* alarys, şoňa meňzeşlikde *x=0*; *z=0*; *y=7,5* we *x=0*; *y=0*; *z=5* nokatlary taparys. Şeýlelikde *M(3;0;0)*; *N(0;7,5;0)* we *K(0;0;5)* nokatlary aldyk. Bu tapylan nokatlary göni çyzyklar bilen birleşdireliň. Ol hem gözlenýän tekizligi berer (11-nji surat). $\rhd$



11-nji surat

7-nji mysal. *M(1;-2;3)* nokatdan geçýän we *Oz* oka perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini düzmeli.

$\triangleleft$ *Oz* oka perpendikulýar tekizlik *Oxy* koordinata tekizligine paralleldir we onuň deňlemesi *Cz+D=0.* Bu deňlemede *M* nokadyň koordinatalaryny goýup alarys: *3C+D=0*, bu ýerden *D=-3C*. Şeýlelikde *Cz-3C=0, C(z-3)=0,* $C \neq 0$ bolany üçin *z-3=0* ýa-da *z=3.* $\triangleright$

8-nji mysal. *M(4;2;-5)* nokatdan we *Oy* okuň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini düzmeli.

$\triangleleft$ *Oy* okuň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi *Ax+Cz=0* bolar.Bu deňlemede *M* nokadyň koordinatalaryny goýup alarys: *4A-5C=0,* bu ýerden $A=\frac{5}{4}C$. Şeýlelikde gözlenýän tekizligiň deňlemesi

$\frac{5}{4}Cx+Cz=0$ ýa-da $C\left(\frac{5}{4}x+z\right)=0;\ 5x4z=0$ bolar. $\triangleright$

9-njy mysal. *M(1;1;2)* we *N(5;3;-2)* nokatlardan geçýän we *Ox* okuna parallel tekizligiň deňlemesini düzmeli.

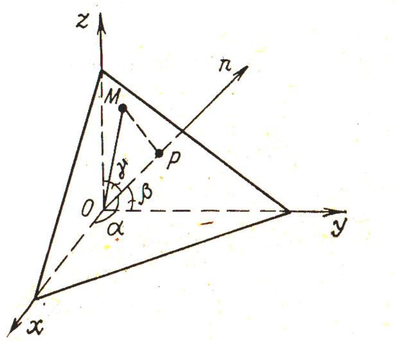
$\triangleleft$ *Ox* okuna parallel tekizligiň deňlemesi *By+Cz+D=0* bolar. Gözlenýän tekizlik *M* we *N* nokatlaryň üstünden geçýäňligi sebäpli, olaryň koordinatalary soňky deňlemäni kanagatlandyrmaly. *M* we *N* nokatlaryň koordinatalaryny deňlemede goýup alarys:

B+2C+D=0; 3B-2C+D=0 , bu ýerden $B=-\frac{D}{2};\ C=-\frac{D}{4}$.

Şeýlelikde gözlenýän tekizligiň deňlemesi

$-\frac{D}{2}y-\frac{D}{4}z+D=0$ ýa-da *2y+z-4=0* bolar.

3. Tekizligiň normal deňlemesi.Goý, käbir tekizlik berlen bolsun. Koordinata başlangyjyndan berlen tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk geçireliň we olaryň kesişme nokadyny P bilen belgiläliň. Şol göni çyzygyň ($\overline{n}$ normalyň) položitel ugry $\overrightarrow{OP}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýär diýeliň. $\overline{n}$ normalyň Ox, Oy, Oz koordinata oklary bilen emele getirýän burçlaryny degişlilikde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ bilen, $\overrightarrow{OP}$ wektoryň ululygyny bolsa *p* bilen belgiläliň, ýagny $p=OP.$ (12-nji surat).



12-nji surat.

Eger *M(x; y; z)* nokat tekizligiň erkin nokady we $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ - onuň radius wektory bolsa, onda

$$n\rho_n \overrightarrow{OM} = p.$$

Şeýlelikde, $\overrightarrow{OM}$ wektoryň $\bar{n}$ oka proýeksiýasy

$$n\rho_n \overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Soňky iki deňlikden alarys:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0. \qquad (18)$$

Bu deňlemä tekizligiň normal deňlemesi diýilýär.

Tekizligiň umumy deňlemesini (18) görnüşe getirmek bolar. Onuň üçin $Ax + By + Cz + D = 0$ deňlemaniň iki bölegini hem $\mu \neq 0$ sana köpeldip alarys:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0 \qquad (19)$$

μ sany aşakdaky deňlikler ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň:

$$\mu A = \cos\alpha;\ \mu B = \cos\beta;\ \mu C = \cos\gamma;\ \mu D = -\rho \qquad (20)$$

Birinji üç deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip, soňra agzalaýyn goşup alarys:

$$\mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Belli bolşy, ýaly $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, onda

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (21)$$

(21) deňlik bilen kesgitlenýän μ sana normirleýji köpeldiji diýilýär. $\mu D = -p$ deňlikden görnüşi ýaly (21) deňlikde alamat tekizligiň umumy deňlemesindäki D azat agzanyň alamatyna garşylykly saýlanyp alynmalydyr. μ köpeldijiniň bu bahasyny (20) deňliklerde goýup, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ we ρ ululyklary berlen A,B,C we D koeffisiýentler arkaly aňladýan formulany alarys:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad p = \frac{D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Bu formulalar tekizligiň umumy deňlemesinden normal deňlemä geçiş formulalarydyr. Şeýlelikde tekizligiň umumy deňlemesi μ normirleýji köpeldijä köpeltmek arkaly normal görnüşe getirilýär.

10-njy mysal. *2x+3y-6z+21=0* tekizligiň deňlemesini normal görnüşe getirmeli.

$\triangleleft$ *(21)* deňlikden peýdalanyp, μ normirleýji köpeldijini tapalyň. *D=21>0* bolany üçin formulada “minus” alamatyny alarys:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = -\frac{1}{7}.$$

Şeýlelikde berlen tekizligiň normal deňlemesi

$$-\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 3 = 0.$$

§ 6.4. Berlen nokatlaryň üstünden geçýän tekizlikler

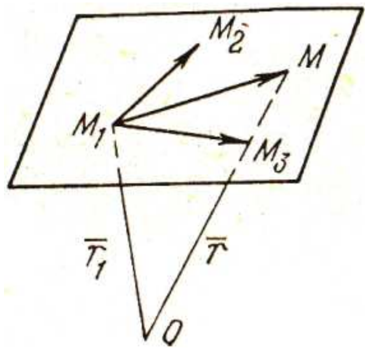
1. Berlen üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi. Goý bir goni çyzygyň üstünde ýatmaýan berlen $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ üç nokadyň üstünden geçýän α tekizligiň deňlemesini düzmek gerek bolsun. α tekizlikde erkin *M(x; y; z)* nokat alalyň (13-nji surat).

$$\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1); \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$$

wektorlar α tekizlikde ýatýarlar, olar komplanardyr. Şonyň üçin olaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$



13-nji surat.

Wektorlaryň komplanarlyk şertiniň esasynda alarys:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (22)$$

Bu deňleme M_1, M_2, M_3 nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesidir.

11-nji mysal. $M_1(3;0;4)$,$M_2(5; 2; 6)$ we $M_3(2; 3; -3)$ nokatlaryň üstünden geçýän telkizligiň deňlemesini ýazmaly.

⊲ formuladan peýdalanyp alarys:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-4 \\ 5-3 & 2-0 & 6-4 \\ 2-3 & 3-0 & -3-4 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0$$

Bu kesgitleýjini birinji setiriň elementleri boýunça dagydyp ýazalyň :

$-20(x-3)+12y+8(z-4)=0$, $\quad 5x-3y-2z-7=0$.

2. Berlen iki nokadyñ üstünden geçýän tekizligiñ deñlemesi. Berlen iki $M_1(x_1,y_1,z_1)$ we $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nokatlaryñ üstünden geçýän tekizlikleriñ deñlemesini yazalyñ.Onuñ üçin erkin üçünji $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nokady alalyñ we (22) formulany ulanyp, üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

M_3 nokadyň erkin bolany üçin, $x_3-x_1=k_1$, $y_3-y_1=k_2, z_3-z_1=k_3$ erkin sanlardyr.Şeýlelikde, islendik erkin k_1,k_2,k_3 sanlar üçin

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0$$

deňlik ýerine ýetýändir. Bu deňleme M_1 we M_2 nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiñ deñlemesidir.Şoňa görä k_1,k_2,k_3 sanlara dürli bahalary bermek bilen, berlen M_1 we M_2 nokatlaryñ üstünden geçýän dürli tekizlikleri almak bolar.

§6.5.Iki tekizligiñ özara ýerleşişi

1.Iki tekizligiň parallellik we perpendikulýarlyk şerti.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{we} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

deñlemeleri bilen berlen tekizlikelere seredeliñ. Bu tekizlikleriñ degişlilikde $\overline{n_1}=(A_1,\ B_1,\ C_1), \overline{n_2}=(A_2,\ B_2,\ C_2)$ normal wektorlary bardyr.

Eger tekizlikler parallel bolsalar, onda olara perpendikulyar bolan

$$\overline{n_1}=(A_1;B_1;C_1) \text{ we } \overline{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$$

wektorlar kollinear bolar we tersine.Şonuň üçin hem wektorlaryň kollinearlyk şertine görä

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (23)$$

(23) deñlik iki tekizligiñ parallellik şertidir.

Eger (23) şert ýerine ýetmese, onda tekizlikler kesişýärler. Hususy halda, eger tekizlikler perpendikulýar bolsalar, onda olara perpendikulýar bolan $\overline{n_1}$ we $\overline{n_2}$ wektorlar hem özara perpendikulýar bolarlar. Wektorlaryñ perpendikulýarlyk şertine göra

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (24)$$

Bu deñlik iki tekizligiñ perpendikulýarlyk şertidir.

12-nji mysal. $6x + 8y - 4z - 6 = 0$ we $3x + 4y - 2z + 3 = 0$ tekizlikleriñ paralleldigini görkezmeli .

◃Tekizlikleriň deňlemelerinden görnüşi ýaly

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{3} = 2; \ \frac{B_1}{B_2} = \frac{8}{4} = 2; \ \frac{C_1}{C_2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Şeýlelikde, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ýagny tekizlikler paralleldirler. ▹

13-nji mysal. $2x + 3y - 4z + 1 = 0$ we $5x - 2y + z + 6 = 0$ tekizlikleriñ özara perpendikulýardygyny görkezmeli .

◃ Tekizlikleriñ perpendikulýarlyk şerti ýerine ýetýär, yagny

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = 0 .$$

Şeýlelikde, tekizlikler özara perpendikulýardyr. ▹

2. Iki tekizligiñ arasyndaky burç. Goý iki tekizlik $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ deñlemeleri bilen berlen bolsun. Bu tekizlikleriñ kesişmeginden emele gelýän ikigranly burçlaryñ biri bu tekizliklere perpendikulýar bolan $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ we $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ wektorlaryñ arasyndaky φ burça deñ bolar.Şoňa görä-de iki wektoryñ skalýar köpeltmek hasylynyñ kesgitlemesi esasynda alarys:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \ . \quad (25)$$

Bu formula iki tekizligiñ arasyndaky φ burçy tapmaklygyñ formulasy diýilýär.

14-nji mysal. $x - 2y + 3 = 0$ we $y + 2z - 5 = 0$ tekizlikleriñ arasyndaky burçy tapmaly .

◃(25) formulany ulanyp alarys:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 0\cdot 2}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{-2}{5} = -0{,}4\,.$$

Şeýlelikde, $\varphi \approx 113°35$. $\triangleright$

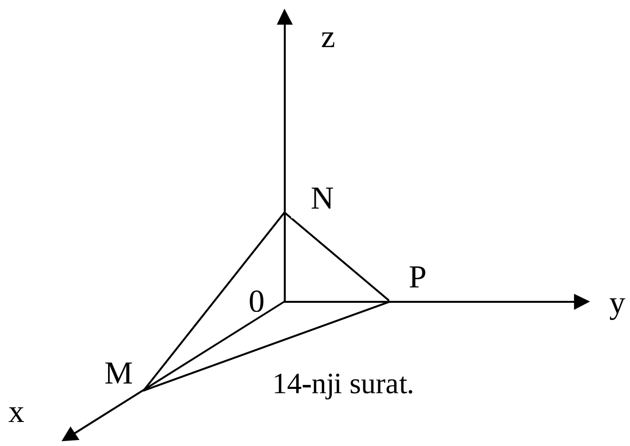
§6.6. Tekizligiň kesimlerdäki deňlemesi

Eger tekizlik ähli koordinata oklaryny kesip, koordinata başlangyjyndan geçmeýän bolsa, onda onuň deňlemesini "kesimlerdäki deňleme" diýlip atlandyrylýan görnüşde bermeklik amatly bolýar.

Giňişlikde koordinata oklaryny kesýän we koordinata başlangyjyndan geçmeýän tekizlige seredeliň. Ol tekizligiň deňlemesini

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 \quad (26)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ koeffisiýentleriň hiç biri hem nola deň däldir.



14-nji surat.

Tekizligiñ koordinata oklaryndan kesip alýan kesiminiň uzynlyklaryny degişlilikde a, b, c bilen bellgiläliñ. $M(a;0;0)$ nokat berlen tekizlige degişli nokatdyr.Şonuñ üçin bu nokadyñ koordinatalary (26) deñlemäni kanagatlandyrmalydyr, ýagny

$$Aa + D = 0 \quad \text{ýa-da} \quad A = -\frac{D}{a}\,.$$

Şuña meñzeşlikde $P(0;b;0)$ we $N(0;0;c)$ nokatlaryñ koordinatalary hem (26) deñlemäni kanagatlandyrmalydyr:

$$Bb + D = 0 \quad \text{ýa-da} \qquad B = -\frac{D}{b}$$

$$\mathrm{Cc} + \mathrm{D} = 0 \quad \text{ýa-da} \qquad \mathrm{C} = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{c}}.$$

A, B, C koeffisiýentleriñ bu tapylan bahalaryny (26) deñlemede ornuna goýup alarys:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

Deñligiñ iki bölegini hem –D sana bölüp alarys:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (27)$$

Bu deñlemä tekizligiñ kesimlerdäki deñlemesi diýilýär .

15-nji mysal. Tekizligiñ umumy $4x - 3y + 2z - 12 = 0$ deñlemesini onuñ kesimlerdäki deñlemesine getirmeli.

⊲ Berlen $4x - 3y + 2z - 12 = 0$ deñlemäniñ iki bölegini hem 12-ä bölüp alarys:

$$\frac{4x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{2z}{12} = 1\ , \qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{6} = 1. \ ⊳$$

§6.7.Nokatdan tekizlige çenli uzaklyk

Nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryñ uzynlygyna nokadyñ tekizlikden uzaklygy diýilýär.

Nokatdan tekizlige çenli uzaklygyñ formulasyny getirip çykaralyñ.

Goý, $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizlik we tekizligiñ üstünde ýatmaýan $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nokat berlen bolsun.Berlen M_0 nokatdan berlen tekizlige perpendikulýar geçireliñ.Şol perependikulýaryñ esasyny

M(x,y,z) bilen, M_0 nokatdan tekizlige çenli uzaklygy *d* bilen belgiläliñ (15-nji surat).

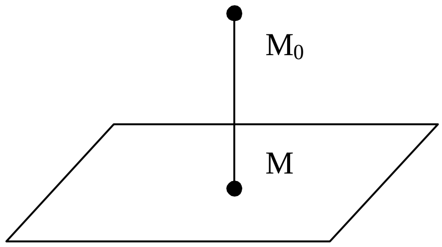
Iki nokadyñ arasyndaky uzaklygyñ formulasyny ulanyp alarys:

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad .$$

Gurluşa görä $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ wektor tekizligiñ $\bar{n} = (A, B, C)$ normal wektoryna paralleldir, ýagny $\overrightarrow{M_oM} \,//\, \vec{n}.$

$\overrightarrow{M_0M}$ we $\bar{n}$ wektorlaryñ parallellik şerti boýunça

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}=\lambda .$$



15-nji surat.

Şoňa görä-de

$$x-x_0=\lambda A;\ y-y_0=\lambda B;\ z-z_0=\lambda C. \qquad (28)$$

Bu bahalary formulada goýup alarys:

$$d=\sqrt{\lambda^2A^2+\lambda^2B^2+\lambda^2+C^2}=|\lambda|\sqrt{A^2+B^2+C^2} \qquad (29)$$

λ -ny kesgirtlemek üçin (28) deñliklerden, *x, y, z* ululyklaryñ bahalaryny tapalyñ:

$$x=x_0+\lambda A, \qquad y=y_0+\lambda B, \qquad z=z_0+\lambda C.$$

Bu tapylan bahalary berlen tekizligiñ deñlemesinde goýup,

$$A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C(z_0+\lambda C)+D=0$$

deňligi alarys we bu deñlikden λ -ny kesgitläris:

$$\lambda(A^2+B^2+C^2)+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

$$\lambda=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}.$$

Bu bahany (19) deñlikde goýup alarys:

$$d=\left|-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right|\sqrt{A^2+B^2+C}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} . \qquad (30)$$

Bu formula nokatdan tekizlige çenli uzaklygyñ formulasy diýilýär.

16-njy mysal. $M_0(7;-8;3)$ nokatdan $x+2y-2z-12=0$ tekizlige çenli uzaklygy tapmaly.

$\triangleleft$ (30) formulany ulanyp alarys

$$d=\frac{|1\cdot 7+2\cdot(-8)+(-2)\cdot 3-12|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|-27|}{3}=9 \ \triangleright$$

17-nji mysal. *x+2y-2z+7=0* tekizlige parallel bolan we *M(4;3;-2)* nokatdan *d=7* aralyk daşlykda ýatan tekizligiň deňlemesini düzmeli.

$\triangleleft$ Gözlenýän tekizligiň deňlemesini *x+2y-2z+D=0* görnüşde gözläliň. *M* nokatdan bu tekizlige çenli uzaklyk

$$d=\frac{|4+2\cdot 3-2\cdot(-2)+D|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|14+D|}{3}.$$

Şerte görä *d=7*. Onda *D*-ni kesgitlemek üçin alarys: $7=\dfrac{|14+D|}{3}$ ýa-da $21=\pm(14+D)$, bu ýerden $D_1=7$; $D_2=-35$.

Şeýlelikde, meseläniň şertini *x+2y-2z+7=0 ; x+2y-2z-35=0* tekizlikler kanagatlandyrýar. Birinji tekizlik berlen tekizlik bilen gabat gelýär. $\triangleright$

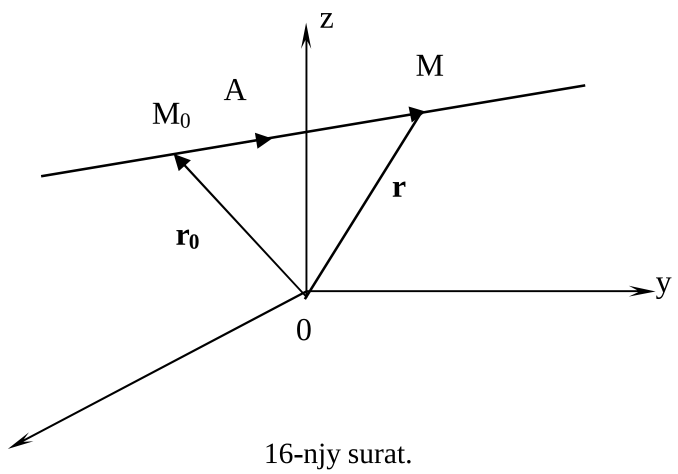
§6.8.Giňişlikde göni çyzyk

1. Göni çyzygyñ wektor-parametrik deñlemesi. Göni çyzygyñ üstünde ýatýan ýa-da oňa parallel bolan islendik wektora ol göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory diýilýär.Ugrukdyryjy wektoryň ugrukdyryjy kosinuslaryna bolsa göni çyzygyň ugrukdyryjy kosinuslary diýilýär. Berlen $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nokatdan geçýän we $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ugrukdyryjy wektory bolan göni çyzygyñ deñlemesini düzeliñ. Onuñ üçin $\overrightarrow{M_0A}=\vec{a}$ wektora seredeliñ (16-njy surat).

Goý, M(x, y, z) göni çyzygyñ erkin nokady, $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ onuñ radius- wektory, $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ bolsa M_0 nokadyň radius-wektory bolsun, onda $\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{M_0M}=\vec{a}t$ bolar. Şonuñ üçin

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$$

wektor deňlemäni alarys.Oňa göni çyzygyñ wektor-parametrik deñlemesi diýilýär. Bu deňlemedäki wektorlaryň koordinatalardaky



16-njy surat.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z);\ \vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0);\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

ýazgylaryny ulanyp, wektor formasyndaky deňlemeden göni çyzygyň koordinata formasyndaky parametrik deňlemesini alarys:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= a_1 t, \\ y - y_0 &= a_2 t, \\ z - z_0 &= a_3 t. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

(31) sistemadan alarys:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = t;\ \frac{y - y_0}{a_2} = t;\ \frac{z - z_0}{a_3} = t.$$

Bu deňlikler esasynda alynýan

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (32)$$

deñlemä göni çyzygyñ kanonik deñlemesi diýilýär.

18-nji mysal. M(-1;2;5) nokatdan geçýän $\vec{a} = (9;-2;4)$ wektora parallel bolan göni çyzygyñ parametrik deñlemesini düzmeli.

◁ (31)deñligi ulanyp alarys:

$$x = -1 + 9t;\ y = 2 - 2t;\ z = 5 + 4t\ . \quad ▷$$

19-njy mysal. $M_1(1; 0; -1)$ we $M_2(-2; 1; 2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyñ kanonik deñlemesini düzmeli.

◁ Göni çyzygyñ ugrukdyryjy wektory $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3;1;3)$ bolar. Onda (32) formula esasynda alarys:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}. \ \triangleright$$

20-nji mysal. *Oy* okuna parallel we M(1; 0; 2) nokatdan geçýän göni çyzygyñ kanonik deñlemesini düzmeli.

◁ Göni çyzygyñ ugrukdyryjy wektory hökmünde $\vec{j} = (0;1;0)$ birlik wektory almak bolar. Şoňa görä (32) deñlik esasynda alarys:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}. \ \triangleright$$

2. Berlen iki nokadyñ üstünden geçýän göni çyzygyñ deñlemesi. Goý, iki sany dürli $M_1(x_1, y_1, z_1)$ we $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar berlen bolsun. Bu nokatlaryñ üstünden geçýän göni çyzygyñ deñlemesini düzeliñ. Ugrukdyryjy $\bar{a}$ wektor hökmünde

$$\bar{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

wektory almak bolar.

Onda göni çyzygyñ kanonik deñlemesi esasynda

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (33)$$

deňlemäni alarys.Oňa iki nokadyñ üstünden geçýän göni çyzygyñ deñlemesi diýilýär.

21-nji mysal. *A(1;2;-1)* we *B(0;3;-4)* nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzmeli.

◁ (33) formulanyň esasynda alarys:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-3} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}. \triangleright$$

3. Giňişlikde göni çyzyklaryň özara ýerleşişi. Goý, iki göni çyzyk parametrik deñlemeleri bilen berlen bolsun

$$x = x_1 + a_1t;\ y = y_1 + a_2t;\ z = z_1 + a_3t, \qquad (34)$$

$$x = x_2 + b_1t;\ y = y_2 + b_2t;\ z = z_2 + b_3t\ . \qquad (35)$$

(34) göni çyzyk $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nokatdan, (35) göni çyzyk bolsa $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nokatdan geçýär. Bu göni çyzyklaryň degişlilikde $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ we $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ugrukdyryjy wektorlary bolar. (34) we (35) göni çyzyklaryñ arasyndaky burç $\overline{a}$ we $\overline{b}$ ugrukdyryjy wektorlaryň arasyndaky burça deñdir. Eger berlen iki göni çyzygyñ arasyndaky burçy φ bilen belgilesek, onda

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Eger göni çyzyklar parallel bolsa, onda olaryñ ugrukdyryjy wektorlary paralleldir. Diýmek, iki göni çyzygyñ parallellik şerti

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}.$$

Eger göni çyzyklar perpendikulýar bolsa, onda olaryñ ugrukdyryjy wektorlary perpendikulýardyr.Diýmek, iki göni çyzygyñ perpendikulýarlyk şerti

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

22-nji mysal. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ we $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ göni çyzyklaryñ arasyndaky ýiti burçy tapmaly .

$\triangleleft$ Formuladan peýdalanyp alarys:

$$\cos\varphi=\frac{1-1+2}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2},\quad \cos\varphi=\frac{1}{2};\varphi=60°.$$

Indi parametrik deňlemeleri bilen berlen iki göni çyzygyň giňişlikde özara ýerleşişine seredeliň. Onuň üçin $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ugrukdyryjy wektorlara, şeýle hem $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ wektora seredeliň. $\overline{a}, \overline{b}$ we $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektorlar komplanar däl bolanda we diňe şonda berlen çyzyklaryň atanak çyzyklardygy aýdyňdyr.Bu halda $\overline{a}$, $\overline{b}$ we $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly noldan tapawutlydyr, ýagny

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0 \qquad \text{ýa-da}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}\neq 0 .$$

$\overline{a},\overline{b}$ we $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektorlar komplanar bolanda we diňe şonda berlen göni çyzyklar tekizlikde ýatýarlar we $\overline{a},\overline{b},\overrightarrow{M_1M_2}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir, ýagny

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0 .$$

Eger bu kesgitleýjiniň ilkinji iki setiri proporsional bolmasa, onda çyzyklar kesişýärler, eger kesgitleýjiniň ilkinji iki setiri proporsional bolsa, onda göni çyzyklar parallel bolarlar, eger $\overline{a},\overline{b},\overrightarrow{M_1M_2}$ wektorlaryň üçüsi hem kollinear bolsa, ýagny kesgitleýjiniň ähli setirleri proporsional bolsa, onda göni çyzyklar gabat gelýärler.

23-nji mysal. $M_0(2;-3;-7)$ nokatdan geçýän we ugrukdyryjy wektory $\overline{a}=(4;-6;5)$ bolan göni çyzygyň parametrik deňlemesini düzmeli.

◁ Meseläniň şertine görä

$$x_0=2; y_0=-3; z_0=-7; a_1=4; a_2=-6; a_3=5 .$$

Onda formuladan peýdalanyp alarys:

$$x=2+4t;\ y=-3-6t;\ z=-7+5t. \ ▷$$

24-nji mysal. $x=1-9t;\ y=2+8t;\ z=3-7t$ we $x=6-2t; y=5+3t; z=4+t$ parametrik deňlemeleri bilen berlen iki göni çyzygyň özara ýerleşişini derňemeli:

$\triangleleft$ Deňlemeleriň koeffisiýentlerini ulanyp, alarys:

$$\begin{vmatrix} -9 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6-1 & 5-2 & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 8 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7(8+21) \neq 0, \text{ ýagny}$$

göni çyzyklar atanakdyrlar.

§6.9. Giňişlikde göni çyzygyň we tekizligiň käbir meselesi

1. Iki tekizligiň kesişme göni çyzygy hökmünde.

Umumy deňlemeleri bilen berlen iki tekizlige seredeliň**:**

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Bu tekizlikler üçin olaryň parallellik şerti ýerine ýetmeýär diýip güman edeliň. Goý,

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ýagny} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{bolsun.}$$

Bu ýagdaýda tekizlikler

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (36)$$

deňlemeler bilen kesgitlenýän göni çyzyk boýunça kesişýärler.(36) deňlemäni,ýagny göni çyzygy parametrik görnüşe getireliň. Onuň üçin göni çyzykda nokady we ugrukdyryjy wektory saýlap almak zerurdyr. Ugrukdyryjy wektor hökmünde $\overline{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ wektory almak bolar, bu ýerde $\overline{n_1}$ we $\overline{n_2}$ seredilýän tekizlikleriň normal wektorlarydyr. $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$, bolýandygy üçin iki wektoryň wektor köpeltmek hasylynyň formulasy boýunça

$$\overline{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

bolar.Nokady saýlap almak üçin (36) sistemada erkin $z=z_0$ bahany belläp, aşakdaky deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2. \end{array}\right\}$$

Bu sistemanyň kesgitleýjisi noldan tapawutlydyr. Ony çözüp, $x=x_0$ we $y=y_0$ bahalary alarys. Şeýlelikde $M(x_0,y_0,z_0)$ nokat bellenildi.
Şeýlelikde, göni çyzygyň parametrik deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix} t; \quad y = y_0 + \begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix} t; \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} t.$$

24-nji mysal. Umumy görnüşde berlen tekizlikleriň kesişmesi hökmünde berlen

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 4y + z - 2 = 0 \\ 7x - 5y + 5z - 9 = 0 \end{array}\right\}$$

göni çyzygyň umumy deňlemesi bilen berlen göni çyzygyň parametrik deňlemesini ýazmaly.

⊲ Sistemadan $z_0=0$ bolanda alynýan

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 4y = 2 \\ 7x - 5y = 9 \end{array}\right\}$$

sistemany çözüp $x_0 = 2; y_0 = 1$ bahalary alarys, ýagny göni çyzygyň bellenen $M_0(2;1;0)$ nokady alyndy. $\vec{n}_1 = (3;-4;1)$; $\vec{n}_2 = (7;-5;5)$ bolany üçin

$$\boldsymbol{a} = [\vec{n}, \vec{n}_2] = \left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \right) = \{-15;-8;13\}.$$

bolar.Şonuň üçin göni çyzygyň parametrik deňlemesi
$x = 2 - 15t;\ y = 1 - 8t;\ z = 13t$ bolar. ⊳

2. Giňişlikde göni çyzygyň we tekizligiň özara ýerleşişi. Umumy görnüşde berlen

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (37)$$

hem-de parametrik deňlemeleri bilen berlen

$$x = x_0 + a_1 t,\ \ y = y_0 + a_2 t,\ \ z = z_0 + a_3 t \quad (38)$$

göni çyzyga seredeliň.

Göni çyzygyň we tekizligiň umumy nokadyny tapmak üçin olaryň deňlemeleriniň sistemasyny çözmek zerurdyr. (38) deňlikler bilen kesgitlenýän *x, y, z* ululyklary (37) deňlemede goýup alarys:

$$A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0$$

ýa-da

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0 \quad (39)$$

Eger $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$ bolsa, onda (34) deňlemäniň ýeke-täk çözüwi bardyr:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}.$$

Göni çyzyk bilen tekizlik koordinatalary t-niň bahasyny (38) deňliklerde ornuna goýmak bilen tapylýan ýeke-täk nokatda kesişýärler.Eger $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0,\quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ bolsa, onda (39) deňleme t-niň hiç bir bahasyny kanagatlandyrmaýar, bu ýagdaýda göni çyzyk bilen tekizligiň umumy nokady ýokdyr. Eger $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ bolsa, onda (39) deňleme t-niň islendik bahasyny kanagatlandyrýar, bu ýagdaýda göni çyzyk tutuşlygyna tekizlikde ýatýar.

Bellik. Soňky iki halda ỳerine ỳetỳän $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ şert göni çyzyk bilen tekizligiň parallelliginiň zerur we ỳeterlik şertini aňladỳar (ol şert özara perpendikulỳar bolan $\overline{n}=(A,B,C)$ we $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ wektorlaryň skalỳar köpeltmek hasylynyň nola deňliginden hem gelip çykỳar).

25-nji mysal. $x = 1 - t,\ y = 2 + 3t,\ z = 6 - 4t$ göni çyzygyň $x + y + z - 3 = 0$ tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmaly.

$\triangleleft$ $\mathrm{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0}$ şertiň ýerine ýetmeýändigi sebäpli (ýagny $1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) \neq 0$) göni çyzyk we tekizlik kesişýärler. Göni çyzygyň deňlemesindäki $\mathrm{x, y, z}$ -leriň bahalaryny tekizligiň deňlemesinde ornuna goýup alarys:

$$\mathrm{1 - t + 2 + 3t + 6 - 4t - 3 = 0, \quad -2t + 6 = 0, \quad t = 3}.$$

t-niň bu bahasyny göni çyzygyň deňlemesinde goýup, göni çyzyk bilen tekizligiň kesişme nokadyny taparys:

$$x = 1 - 3 = -2,\quad y = 2 + 9 = 11,\quad z = 6 - 12 = -6.\ \ M(-2; 11; -6). \triangleright$$

3. Göni çyzygyň we tekizligiň arasyndaky burç. Parametrik görnüşde berlen

$$x = x_0 + a_1 t,\quad y = y_0 + a_2 t,\quad z = z_0 + a_3 t$$

göni çyzyk bilen $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizligiň arasyndaky φ burçy

tapalyň. $\overline{n} = (A, B, C)$ wektoryň berlen tekizlige perpendikulýar bolany üçin, göni çyzygyň ugrukdyryjy $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ wektory $\vec{n}$ wektor bilen $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ ýa-da $\psi = \dfrac{\pi}{2} + \varphi$ burçy emele getirýär (17-nji surat).
Bize belli bolşy ýaly

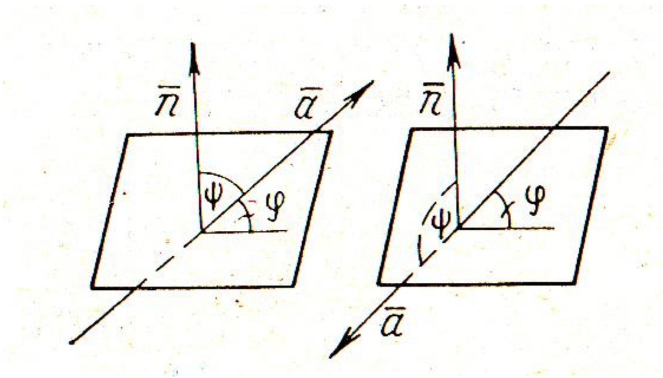
$$\cos\psi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

Emma φ burçuň ỳiti we položitel bolỳandygy sebäpli

$$\sin\varphi = |\cos\psi|.$$

Şonuň üçin hem

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$



17-nji surat.

Bu formula göni çyzygyň we tekizligiň arasyndaky burçy kesgitleýär.

Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa, onda göni çyzygyň ugrukdyryjy $\vec{a}$ wektory tekizligiň normal $\vec{n}$ wektoryna perpendikulýar bolar.
Şonuň üçin göni çyzygyň tekizlige paralellik şerti

$$x^2 + y^2 = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z)$$

bolar. Eger göni çyzyk tekizlige perpendikulýar bolsa, onda göni çyzygyň ugrukdyryjy $\vec{a}$ wektory tekizligiň normal $\vec{n}$ wektoryna parallel bolar. Şoňa görä-de göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk şerti

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$$

bolar.

26-njy mysal. $x=-3+2t, \quad y=1-3t, \quad z=t$ göni çyzyk bilen $2x-y+z+3=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

$\lhd$ Tekizligiñ normal wektory $\vec{n}=(2;-1;1)$, göni çyzygyñ ugrukdyryjy wektory $\vec{a}=(2;-3;1)$ bolar.

Formulanyñ esasynda alarys:

$$Sin\varphi=\frac{|2\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{8}{2\sqrt{21}}=\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\cdot\sqrt{21}}{21}\approx 0,8730$$

$$\sin\varphi\approx 0,8730 \quad , \qquad \varphi\approx 60^\circ 49' \rhd .$$

6.10. Ikinji tertipli üstler

1. Ellipsoid. *Oxyz* göniburçly koordinatalar sistemasynda

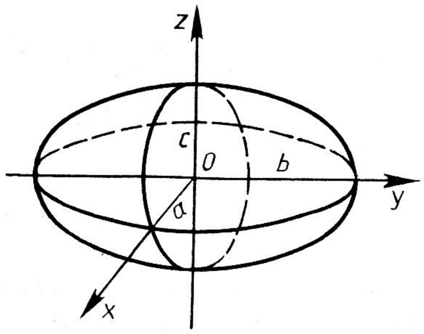
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (40)$$

deňleme bilen kesgitlenýän üste ellipsoid diýilýär (18-nji surat).

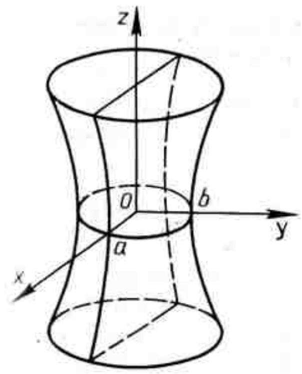
(40) deňlemä ellipsoidiň kanonik deňlemesi diýilýär, a ,b, c ululyklara ellipsoidiň ýarym oklary diýilýär.(40) deňlemeden görnüşi ýaly koordinata tekizlikleri ellipsoidiň simmetriýa tekizlikleridir, koordinatalar başlangyjy simmetriýa merkezidir.Koordinata oklarynyň ellipsoid bilen kesişme nokatlaryna ellipsoidiň depeleri diýilýär.

Ellipsoidiň *Oxy* tekizligine parallel tekizlik bilen kesigine seredeliň, goý ol tekizlik $z=h$ deňleme bilen berlen bolup, $|h|<c$ bolsun. Onda kesikde emele gelýän çyzyk aşakdaky deňlemeler bilen kesgitlenýär.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2};\quad z=h. \quad (41)$$



18-nji surat



19-njy surat.

$1-\frac{h^2}{c^2}$ položitel sany k^2 bilen belgiläp,(41) deňlemäni

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1;\quad z=h$$

görnüşde ỳazmak bolar. Bu ỳerden görnüşi ýaly, (40) ellipsoidiň $z=h$ ($|h|<c$) tekizlik bilen kesigi $|h|$ ululygyň artmagy bilen kemelýän ak we bk ỳarym oklary bolan ellipsdir, $|h|=c$ bolanda bu ellips ellipsoidiň depelerine dartylýar. Ellipsoidiň Oxz we Oyz koordinatalar tekizliklerine parallel tekizlikler bilen kesigi ýokardaka meňzeşdir.

Oxz koordinata tekizligi ellipsoid bilen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad y=0$ deňleme bilen kesgitlenýän ellips boýunça kesişýär, Oyz tekizlik bolsa ellipsoid bilen $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\quad x=0$ deňlemeli ellips boýunça kesişýär.

Eger ellipsoidiň iki ýarym oky deň bolsa, mysal üçin , eger $a=b$ bolsa, onda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (42)$$

deňlemäni alarys.Bu ellipsoidiň Oxy tekizlige parallel $z=h$ tekizlik bilen kesişmeginden merkezi Oz okunda bolan

$$x^2+y^2=(1-\frac{h^2}{c^2})a^2;\ z=h$$

töwerek alynýar.Şonuň üçin şeýle ellipsoid Oxz tekizliginde ýerleşen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsiň Oz okunyň daşyndan aýlanmagyndan alnyp bilner. Şoňa görä (42) ellipsoide aýlanma ellipsoid diýilýär. Eger (40) ellipsoidiň ähli üç ýarym oklary deň bolsa, ýagny a=b=c bolsa, onda

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

deňlemäni alarys.Bu deňleme sferanyň deňlemesidir.Sfera ellipsoidiň hususy halydyr.

27-nji mysal. $9x^2+16y^2+36z^2-18x+64y-216z+253=0$ üsti kanonik görnüşe getirmeli we görnüşini kesgitlemeli.

⊲ Berlen deňlemäniň çep bölegini özgerdip alarys:

$$9(x^2-2x+1)+16(y^2+4y+4)+36(z^2-6z+9)-9-64-324+253=0$$

ýa-da $\quad 9(x-1)^2+16(y+2)^2+36(z-3)^2=144$.

Deňligiň iki bölegini 144-e bölüp alarys:

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{4}=1$$

Bu deňlemäni (40) deňleme bilen deňeşdirsek, ol üstüň ýarym oklary *a=4; b=3; c=2*, merkezi *(1;-2;3)* nokatda bolan ellipsoid üstdügini görmek bolar. ⊳

2. Giperboloid. *Oxyz* gönüburçly koordinatalar sistemasynda

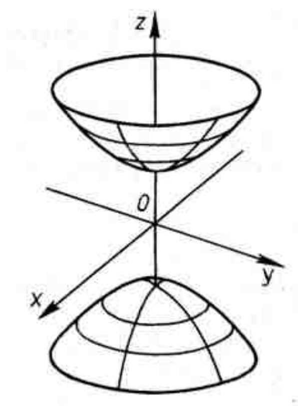
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (43)$$

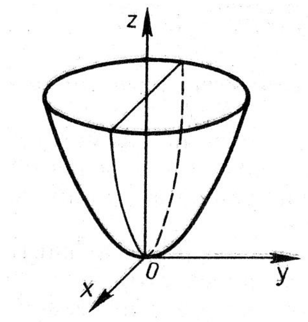
deňleme bilen kesgitlenýän üste bir oýukly giperboloid diýilýär (19-njy surat).

Oxyz gönüburçly koordinatalar sistemasynda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (44)$$

deňleme bilen kesgitlenýän üste bolsa iki oýukly giperboloid diýilýär (20-nji surat)





20-nji surat.

21-nji surat.

(43) we (44) deňlemelere giperboloidiň kanonik deňlemeleri diýilýär. *a,b,c* ululyklara bir oýukly (iki oýukly) giperboloidiň ýarym oklary diýilýär.Bir oýukly we iki oýukly giperboloidleriň ikisi üçin hem koordinatalar tekizlikleri simmetriýa tekizlikleridir, koordinatalar başlangyjy simmetriýa merkezidir.

Giperboloidiň koordinatalar tekizliklerine parallel tekizlikler bilen käbir kesigini belläliň.Mysal üçin, bir oýukly (43) giperboloid $z=h$ tekizlik bilen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2};\quad z=h.$$

ellips boýunça, $y=h(|h|\neq b)$ tekizlik bilen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2};\quad y=h.$$

giperbola boýunça; $y=b$ tekizlik bilen bolsa

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\quad y=b$$

iki göni çyzyk boýunça kesişýär.

Ellipsoida meňzeşlikde eger bir oýukly ýa-da iki oýukly giperboloidiň *a* we *b* ýarym oklary deň bolsa, onda oňa aýlanma giperboloid diýilýär we bir oýukly giperboloid *Oz* okuň daşyndan

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \quad y=0$$

giperbolanyň aỳlanmagyndan alynỳar, iki oýukly giperboloid bolsa *Oz* okuň daşyndan giperbolanyň aýlanmagyndan alynỳar.

28-nji mysal. $4x^2-9y^2+36z^2-16x-54y-72z-65=0$ deňlemäni kanonik görnüşe getirmeli we görnüşini kesgitlemeli.

$\lhd$ Berlen deňlemäniň çep bölegini özgerdeliň.

$4(x^2-4x+4)-9(y^2+6y+9)+36(z^2-2z+1)-16+81-36-65=0$

ÿa-da $\quad 4(x-2)^2-9(y+3)^2+36(z-1)^2=36$

Deňligiň iki bölegini 36-a bölüp alarys:

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{1}=1$$

X=x-2;Y=y+3;Z=z-1 täze koordinatalary girizip, alarys:

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}+\frac{Z^2}{1}=1$$

Bu üst bir oÿukly giperboloidi kesgitleÿär. $\rhd$

29-njy mysal. $3x^2-4y^2+6z^2+24x+8y-36z+122=0$ üstüň gönüşini kesgitlemeli.

$\lhd$ Berlen deňlemäni ÿönekeÿleşdireliň.

$3(x^2+8x+16)-4(y^2-2y+1)+6(z^2-6z+9)-48+4-54+122=0$ ÿa-da

$3(x+4)^2-4(y-1)^2+6(z-3)^2=-24$;

$\frac{(x+4)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{6}+\frac{(z-3)^2}{4}=-1$.

Bu deňlemäni aşakdaky görnüşde ÿazmak bolar:

$$\frac{X^2}{8}-\frac{Y^2}{6}+\frac{Z^2}{4}=-1$$; bu ÿerde *X=x+4; Y=y-1; Z=z-3.*

Bu deňleme iki oÿukly giperboloidi kesgitleÿär. $\rhd$

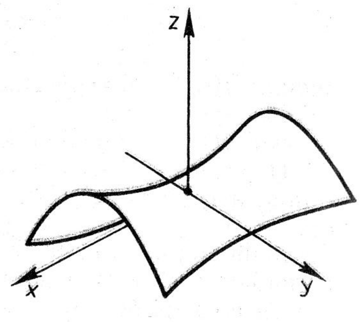
3. Paraboloid. *Oxyz* gönüburçly koordinatalar sistemasynda

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad (45)$$

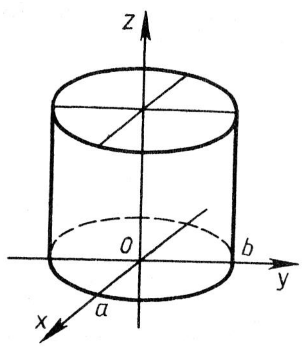
deňleme bilen kesgitlenýän üste elliptik paraboloid diýilýär **(**21-nji surat**).**
Oxyz gönüburçly koordinatalar sistemasynda

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad (46)$$

deňleme bilen kesgitlenýän üste giperboloik paraboloid diýilýär **(**22-nji surat)



22-nji surat.



23-nji surat

(45) we (46) deňlemelere paraboloidiň kanonik deňlemeleri diýilýär.

Oxz we *Oyz* tekizlikler paraboloidiň simmetriýa tekizlikleridir.Bu tekizlikleriň kesişmesine (*Oz* oka) paraboloidiň oky, *Oz* okuň paraboloid üst bilen kesişmesine onuň depesi diýilýär.

Elliptik we giperbolik paraboloidleriň ikisi hem *Oxz* we *Oyz* koordinatlar tekizliklerine parallel bolan tekizlikler bilen parabola boýunça kesişýärler. $x=h$ tekizlik elliptik paraboloidi

$$z-\frac{h^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}; \quad x=h$$

parabola boýunca kesýär.(44) deňlikden *Oxy* tekizlige parallel $z=h(h>0)$ tekizligiň elliptik paraboloidi ellips boýunça kesýändigi gelip çykýar.(46) deňlikden bolsa $z=h(h\neq 0)$ tekizligiň giperbolik paraboloidi giperbola boýunça kesýändigi görünýär. *Oxy* tekizlik giperbolik paraboloidi iki göni çyzyk boýunça kesýär.

Eger $a=b$ bolsa, onda elliptik paraboloide aýlanma paraboloid diýilýär.Aỳlanma paraboloid $z=\frac{x^2}{a^2}$; $y=0$ parabolanyň Oz okuň daşyndan aýlanmagyndan alynýar.

30-njy mysal. $4x^2-9y^2-8x-36y-72z+184=0$

deňlemäni kanonik görnüşe getirmeli we görnüşini kesgitlemeli.

⊲ Deňlemäniň çep bölegini özgerdeliň.

$$4(x^2-2x+1)-9(y^2+4y+4)-72z-4+36+184=0;$$

ýa-da $4(x-1)^2-9(y+2)^2=72(z-3)$; $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=2(z-3)$

ýa-da $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=2Z$

bu ýerde *X=x-1, Y=y+2, Z=z-3.*

Soňky deňlemäni (46) deňleme bilen deňeşdirsek, onda bu deňlemäniň giperbolik paraboloiddigine göz ýetirmek bolar.

§ 6.11 Ikinji tertipli silindr we konus

1. Ikinji tertipli silindr. Ol dürli görnüşde bolup, *Oxyz* gönüburçly koordinatalar sistemasynda aşakdaky deňlemeler bilen kesgitlenýär: *a*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (47)

(elliptik silindr, hususy *a=b* halda tegelek silindr,23-nji surat).

b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (giperbolik silindr) (48)

ç) $y^2=2px$ (parabolik silindr) (49)

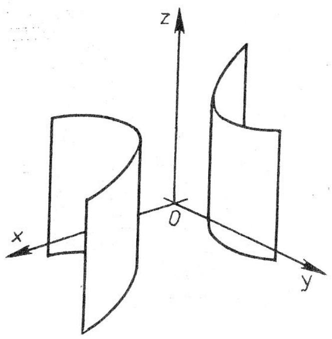
(47)-(49) deňlemelere silindriň kanonik deňlemeleri diýilýär.

(47)-(49) deňlemeler *z* üýtgeýäni saklamaýar.*Oxy* tekizlikde (47) deňleme ýarym oklary *a* we *b* bolan ellipsi kesgitleýär.Eger *(x;y)* nokat şol ellipsde ýatýan bolsa, onda islendik *z* üçin *(x;y;z)* nokat (47) üste degişli bolar.

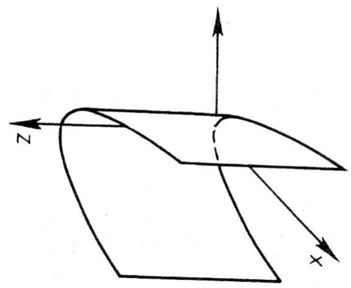
Şeýle nokatlaryň köplügi *Oxy* tekizlikde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips bilen kesişýän we *Oz* oka parallel göni çyzyklaryň emele getirýän üstünden ybaratdyr. Ol $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipse berlen üstüň ugrukdyryjy çyzygy diýilýär, hereket edýän göni çyzygyň ähli mümkin bolan ýagdaýlaryna onuň emele getirijileri diýilýär.

Käbir berlen ugra parallel we berlen *L* çyzygy kesýän göni çyzyklar bilen çyzylan üste silindrik üst diýilýär.(47) üst 23-nji suratda şekillendirilendir.

Giperbolik we parabolik silindrilerde ((48) we (49)) üstüň ugrukdyryjy çyzyklary giperbola we paraboladyr, emele getirijileri bolsa *Oxy* tekizliginde giperbolanyň we parabolanyň üstünden geçýän we *Oz* oka parallel bolan göni çyzyklardyr.(48) we (49) üstler degişlilikde 24-nji we (25)-nji suratlardada şekillendiriilendir.



24-nji surat



25-nji surat.

31-nji mysal. $x^2+4y^2-6x+16y+9=0$ üstüň görnüşini kesgitlemeli.

◁ Deňlemäniň çep bölegini ýönekeýleşdireliň.

$$(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)-16=0$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=16; \quad \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}=1$$; bu ýerde $X=x-3$;$Y=y+2$.

Bu deňleme $a=4$, $b=2$ bolan elliptik silindri kesgitleýär. ▷

32-nji mysal. $y^2-4x-6y+17=0$ üstüň görnüşini kesgitlemeli.

◁ Berlen deňlemäni ýönekeýleşdireliň.

$(y^2-6y+6)-4x-9+17=0;\ \ (y-3)^2=4(x-2);\ \ Y^2=4X\ ;$

bu ýerde *Y=y-3 ; X=x-2.*

Şeýlelikde berlen üst parabolik silindri kesgitleýär ▹

2. Ikinji tertipli konus. *Oxyz* gönüburçly koordinatalar sistemasynda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (50)$$

deňleme bilen kesgitlenýän üste ikinji tertipli konus ýa-da gysgaça konus diýilýär.(44) deňlemä konusyň kanonik deňlemesi diýilýär.Bu üst koordinatalar tekizliklerine görä simmetrikdir. Üste degişli we simetriýa merkezi bolan koordinata başlangyjyna konusyň depesi diýilýär.Konusyň *x=0* we *y=0* tekizlikler bilen kesiginiň deňlemeleri

$$z=\pm\frac{c}{b}y \quad we \quad z=\pm\frac{c}{a}x$$

bolan göni çyzyklardyr. $z=h\ (h\neq 0)$ tekizlikde ỳarym oklary $a_1=\frac{a|h|}{c}$, $b_1=\frac{b|h|}{c}$ bolan $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ ellips alynỳar.Eger $a=b$ bolsa, onda konusa aýlanma konus diýilýär.Aylanma konus üçin $z=h\ (h\neq 0)$ tekizlikde $x^2+y^2=a^2$ töwerek alynỳar.

Bellik. Göni çyzygyň hereket etmeginden alynỳan üste çyzyklaỳyn üst,onda ỳatỳan göni çyzyklara bolsa göni çyzykly emele getirijiler diỳilỳär.

Şeỳle üstlere ikinji tertipli üstler bolan silindr, konus, bir gowakly giperboloid we giperbolik paraboloid mysal bolup bilerler.

Gönükmeler.

1. a) A(4; 1; 2); b) B(2; -1; 3); ç) C(7; 1; 2); d) D(3; 0; 4); e) E(0; -4; 2) nokatlaryñ haýsylary $3x-5y+2z-17$ tekizlige degişli?
2. Berlen M_1 (0;-1;3) we M_2 (1;3;5) nokatlar üçin M_1 nokatdan geçýän we $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiñ deñlemesini düzmeli.
3. M(a;a;0) nokatdan geçýän we şol nokadyñ radius wektoryna perpendikulýar bolan tekizligiñ deñlemesini düzmeli.

4. M_1 (2;-1;3) nokatdan geçýän we koordinatalar oklaryndan deñ kesimleri kesip alýan tekizligiñ deñlemesini düzmeli.

5. A(-4;0;4) nokatdan geçýän, Ox we Oy koordinatalar oklaryndan $a=4, b=3$ kesimleri kesip alýan tekizligiñ deñlemesini düzmeli.

6. Tekizlikleri gurmaly:

$a)\ 2x+y-z+6=0$; $b)\ x-y-z=0$;

ç) $y-2z+8=0$; d) $7x-5=0$;

e) $y+z=0$; f) $x+z=1$.

7. A (5;1;-1) nokatdan $x-2y-2z+4=0$ tekizlige çenli uzaklygy tapmaly.

8. A (1;2;3) nokatdan $2x-2y+z-3=0$ tekizlige çenli uzaklygy tapmaly.

9. $x-2y+2z-8=0$ we $x+z-6=0$ tekizlikleriñ arasyndaky burçy tapmaly.

10. M (2;2;-2) nokatdan geçýän we $x-2y-3z=0$ tekizlige parallel bolan tekizligiñ deñlemesini düzmeli.

11. M(-1;-1;2) nokatdan geçýän we $x-2y+z-4=0$, $x+2y-2z+4=0$ tekizliklere perpendikulýar bolan tekizligiñ deñlemesini ýazmaly.

12. a) A(7; 6; 7), B(5; 10; 5), C(-1; 8; 9); b) A(2; 4; 8),B(-3; 1; 5),C(6; -2; 7) nokatlardan geçýän tekizligiñ deñlemesini düzmeli .

13. A (4;3;0) noklatdan geçýän $\overline{S}$ (-1; 1; 1) wektora parallel bolan göni çyzygyň deñlemesini ýazmaly.

14. A (3;-2;-1) we B (5; 4; 5) nokatlardan geçýän göni çyzygyň deñlemesini düzmeli

15. Koordinatalar başlangyjyndan we A(a;b;c) nokatdan geçýän göni çyzygyñ deñlemesini ýazmaly.

16. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-12}=\frac{z-1}{3}$ göni çyzygyň ugrukdyryjy wektorynyñ ugrukdyryjy kosinuslaryny kesgitlemeli.

17. A(2;-3;-8) nokatdan geçýän a) Oz oka b) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{5}$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyñ kanonik deñlemesini ýazmaly.

18. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ göni çyzygyñ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{8}{1}$ göni çyzyga

perpendikulýardygyny görkezmeli.

19. A (3;-2;-1) nokatdan geçýän $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizligiñ deñlemesini ýazmaly.

20. A(1;2;3) nokatdan $4x-5y-8z+21=0$ tekizlige inderilen perpendikulýaryñ deñlemesini ýazmaly.

21. $y=x$ göni çyzygyñ Ox okuñ daşyndan aýlanmagyndan alnan üstüñ deñlemesini düzmeli.

22. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ konusyñ $z=c$ tekizlik bilen kesişmeginden emele gelen çyzygynyñ deñlemesini düzmeli.

23. $x^2+y^2+4z^2-1=0$ deňleme haýsy üsti kesgitleýär?

24. $x^2+y^2-z^2-1=0$ deňleme haýsy üsti kesgitleýär?

25. $x^2-y^2-z^2-4=0$ deňleme haýsy üsti kesgitleýär?

26 $z=x^2+y^2$ deñleme haýsy üsti kesgitleýär?

27. Aşakdaky deñlemeler haýsy üstleri kesgitleýär?

$a)\ x^2+y^2=25;\ b)\ x^2+y^2+z^2=16;\ c)\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1;$

$d)\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1;\quad e)\ y^2=5x;\quad f)\ x^2+y^2=z^2\,?$

Jogaplar

1. B(2;-1;3) , D(3,0,4). **2.** $x+4y+2z=2$. **3.** $x+y=a$ **.**

4. $x+y+z=4$. **7.** 3. **8.** $\frac{2}{3}$ **. 9.** $\frac{\pi}{4}$. **10.** $x-2y-3z=4$.

11. $2x+3y+4z=3$. **12.** a) $3x+5y+7z=100$,

b) $15x+17y-42z+238=0$. **13.** $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$.

14. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{3}$**.** **15.** $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$**.**

16. $\cos\alpha=\frac{4}{13}, \cos\beta=-\frac{12}{13}, \cos\gamma=\frac{3}{13}.$

17. a) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+8}{1}$ $b)$ $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+8}{5}$

19. $4x-y+3z-11=0.$ **20.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{-8}.$

21. $x^2=y^2+z^2.$ **22.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ z=c.$ **23.** Ellipsiň *Oz* okunyň daşyndan aýlanmagyndan alnan ellipsoid $x^2+\frac{z^2}{1/4}=1;\ y=0.$

24. Giperbolanyň *Oz* okunyň daşyndan aỳlanmagyndan alnan oỳukly giperboloid: $x^2-z^2=1; y=0.$ **25**. Giperbolanyň *Ox* okuň daşyndan aýlanmagyndan alnan iki oýukly giperboloid: $x^2-y^2=4, y=0.$ **26.** Parabolanyň *Oz* okunyň daşyndan aýlanmagyndan alnan paraboloid: $z=x^2; y=0.$

27. a) Tegelek silindr, b) sfera, ç)elliptik silindr, d) giperbolik silindr, e)parabolik silindr, f) konus.

II bap. MATEMATIKI ANALIZ

II.1. KÖPLÜK WE FUNKSIÝA DÜŞÜNJESI

§ 1.1. Köplük düşünjesi

Matematikada ýygy-ýygydan köplükler bilen iş salşylýar. Köplük diýip käbir nyşan boýunça birleşdirilen ulgama, topluma, ýygynda düşünýäris. Mysal hökmünde okalgadaky matematiki analiz kitaplarynyň köplügine, üçburçlugyň depeleriniň köplügine, jübüt sanlaryň köplügine garamak bolar. Köplügi düzüjilere onuň agzalary ýa-da elementleri diýilýär. Ýokardaky mysallarda köplügiň agzalary bolup degişlilikde matematiki analiz kitaplary, üçburçlugyň depeleri we jübüt sanlar hyzmat edýärler. Ol köplükleriň ilki ikisi tükenikli, üçünjisi bolsa tükeniksiz köplükdir. Köplükler baş harplar bilen, onuň agzalary bolsa setir harplary bilen belgilenýär. Eger a element A köplügiň agzasy bolsa, onda ol $a \in A$ (ýa-da $A \ni a$) ýazgyda belgilenýär we a degişli A köplüge (ýa-da A köplüge degişli a) diýlip okalýar, a elementiň A köplüge degişli däldigi bolsa $a \notin A$ ýazgyda belgilenýär we a degişli däl A köplüge diýlip okalýar. Eger A köplük a, b, c we şolar ýaly berlen beýleki agzalardan düzülen bolsa, onda ol $A = \{a, b, c, ...\}$ ýazgyda aňladylýar. Mysal üçin, $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ we $\mathrm{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ degişlilikde natural we bitin sanlaryň köplügini aňladýar. Şunlukda, $-3 \in \mathrm{Z}$, ýöne $-3 \notin \mathrm{N}$.

Eger B köplügiň islendik agzasy A köplügiň hem agzasy bolsa, onda B köplüge A köplügiň bölek köplügi ýa-da A köplügiň bölegi diýilýär we $B \subset A$ (ýa-da $A \supset B$) görnüşde aňladylýar (bu ýagdaýda A köplük B köplügi özünde saklaýar hem diýilýär). Mysal üçin, jübüt sanlaryň köplügi bitin sanlaryň Z köplüginiň bölek köplügidir. Özünde hiç bir agzany saklamaýan köplüge boş köplük diýilýär we Ø bilen belgilenýär. M köplügiň P häsiýetdäki M_1 bölegi $M_1 = \{x \in M : P(x)\}$ görnüşde aňladylýar. Mysal üçin, $\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{Z} : (x > 0)\}$ bitin sanlaryň köplüginiň položitel bölegidir we $\varnothing = \{x \in N : x^2 + 1 = 0\}$.

Rasional sanlar diýip p/q $(p, q - \text{bitin}, \mathrm{q} \neq 0)$ görnüşdäki sanlara, irrasional sanlar diýip rasional bolmadyk sanlara aýdylýar. Her bir rasional san ýa bitin , ýa tükenikli ýa-da tükeniksiz periodik droblar görnüşinde aňladylýan sandyr. Irrasional san bolsa tukeniksiz periodik däl droblar görnüşinde aňladylýan sandyr. Ähli rasional we irrasional sanlaryň köplügine hakyky sanlaryň ***R*** köplügi diýilýär. Hakyky sanlar ululyklary boýunça tertipleşdirilendirler, ýagny islendik iki a we b hakyky sanlar üçin $a<b,\ a=b,\ a>b$ hallaryň birden biri dogrudyr. Analitik geometriýadan mälim bolşy ýaly, hakyky sanlaryň köplügi bilen san okunyň nokatlarynyň arasynda birbahaly degişlilik gurnalandyr, yagny san okunyň her bir nokadyna diňe bir hakyky san degişlidir we tersine. Şoňa görä “x nokat” we “x san” düşünjelerini deň manyda ulanmak bolar.

A we B köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan ähli agzalaryň köplügine olaryň birleşmesi diýilýär we $A\bigcup B$ bilen belgilenýär.

A we B köplükleriň ikisine-de degişli bolan ähli agzalaryň köplügine olaryň kesişmesi diýilýär we $A\bigcap B$ bilen belgilenýär.

A köplügiň B köplüge degişli bolmadyk ähli agzalarynyň köplügine olaryň tapawudy diýilýär we $A\backslash B$ bilen belgilenýär.

§ 1. 2. Aralyk, kesim we sanyň absolýut ululygy

Hakyky a we b $(a<b)$ sanlar üçin $a<x<b$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan x nokatlaryň köplügine aralyk diýilýär we (a,b) bilen belgilenýär.Seýlelikde, $(a,b)=\{x:\ a<x<b\}$. Edil şonuň ýaly, çepi ýapyk $[a,b)=\{x:\ a\le x<b\}$ we sagy ýapyk $(a,b]=\{x:\ a<x\le b\}$ aralyklar kesgitlenýär. $a\le x\le b$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan x nokatlaryň köplügine bolsa kesim diýilýär we $[a,b]$ bilen belgilenýär, ýagny $[a,b]=\{x:\ a\le x\le b\}$. Şeýle hem aralyklaryň beýleki görnüşleri üçin aşakdaky belgilemeler ulanylýar:

$$(a,+\infty)=\{x:\ x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x:\ x\ge a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x:\ x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x:\ x\le b\}.$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x:\ -\infty<x<+\infty\}$$

c nokady özünde saklaýan islendik (a,b) aralyga c nokadyň etraby, $(c-\delta,c+\delta)$ aralyga bolsa c nokadyň δ etraby diýilýär. Mysal üçin, $c=1$ nokadyň $\delta=0{,}5$ etraby $(1-0{,}5;\ 1+0{,}5)=(0{,}5;\ 1{,}5)$ aralykdyr. Eger

c nokat aralykda özüniň käbir etraby bilen saklanýan bolsa, onda ol nokada aralygyň içki nokady diýilýär. (a, b) aralygyň ähli nokatlary onuň içki nokatlarydyr. a w*e* b nokatlara aralygyň gyra ýa-da uç nokatlary diýilýär, olar aralyga degişli däldir. $[a, b]$ kesim bolsa içki we uç nokatlardan durýandyr.

a sanyň absolýut ululygy (moduly) $|a|$ bilen belgilenýär we

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eger } a \geq 0 \text{ bolsa}, \\ -a, & \text{eger } a < 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Bu kesgitlemeden aşakdaky häsiýetler gelip çykýar.

1. Islendik a san üçin $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$, $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$.

2. $(|a| < \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon < a < \varepsilon)$. $(|a - b| < \varepsilon) \Leftrightarrow (b - \varepsilon < a < b + \varepsilon)$.

3. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

4. $|a \pm b| \geq ||a| - |b||$.

5. $|abc| = |a||b||c|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

§ 1. 3. Köplügiň çäkleri

Çoý, X käbir san köplügi bolsun.

1-nji kesgitleme. Eger şeýle B san tapylyp, $\forall x \in X$ üçin $x \leq B$ $(x \geq B)$ bolsa, onda X köplüge ýokardan (aşakdan) çäkli köplük, B sana bolsa ol köplügiň ýokarky (aşaky) çägi diýilýär.

(Ýazgylary gysgaltmak üçin bu ýerde iki kesgitleme birden getirilendir,olaryň birisi ýaýyň içinde alnan sözlere degişlidir. Iki sözlemiň bir sözlemde aňladylyş bu usulyndan soňra-da köp peýdalanjakdyrys)

Yokardan we aşakdan çäkli köplüge.çäkli köplük diýilýär.

Islendik tükenikli aralyk ($[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b)) çäklidir, $(a, +\infty)$ aralyk bolsa aşakdan çäklidir, ýöne ýokardan çäkli däldir.

Eger B san X köplügiň ýokarky (aşaky) çägi bolsa, onda B sandan uly (kiçi) bolan islendik B' san hem ol köplügiň ýokarky (aşaky) çägi bolar, ýagny ýokardan (aşakdan) çäkli köplügiň tükeniksiz köp ýokarky (aşaky) çäkleri bardyr.

Yokardan (aşakdan) çäkli X köplügiň ýokarky (aşaky) çäkleriniň iň kiçisine (iň ulusyna) ol köplügiň takyk ýokarky (takyk aşaky) çägi diýilýär we

$$M = \sup X \quad (m = \inf X)$$

bilen belgilenýär (sup we inf latynça supremum–iň uly we infimum-iň kiçi sözlerden alnandyr).

Takyk ýokarky M (takyk aşaky m) çägiň şeýle häsiýeti bardyr: $\forall \varepsilon > 0$ üçin $X \ni x_\varepsilon$ tapylyp, $x_\varepsilon > M - \varepsilon$ $(x_\varepsilon < m + \varepsilon)$ bolar.

1-nji mysal. $X = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ köplügiň çäklidigini subut etmeli we onuň takyk çäklerini tapmaly.

◁ Islendik natural n san üçin $0 < 1/n \le 1$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny köplük çäklidir we 1 onuň ýokarky, 0 bolsa aşaky çägidir..Yokarky $M = 1$ çägiň köplügiň takyk ýokarky çägidigini görkezmek üçin takyk ýokarky çägiň häsiýeti boýunça $\forall \varepsilon > 0$ üçin $1/n > 1 - \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan n natural sanyň bardygyny görkezmeli. Şeýle san $n = 1$ bolup biler, çünki $1 > 1 - \varepsilon$ deňsizlik $\forall \varepsilon > 0$ üçin dogrudyr. Indi bolsa $m = 0$ sanyň köplügiň takyk aşaky çägi bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin takyk aşaky çägiň häsiýeti boýunça $\forall \varepsilon > 0$ üçin $1/n < 0 + \varepsilon$ ýa-da $1/n < \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan n natural sanyň bardygyny görkezmeli. Ony çözüp, $n > 1/\varepsilon$ deňsizligi alarys. Şonuň üçin gözlenýän san hökmünde bu deňsizligi kanagatlandyrýan islendik natural sany almak bolar. Şeýlelikde, $m = 0$ san köplügiň takyk aşaky çägidir. ▷

Eger hakyy sanlaryň X köplügi ýokardan (aşakdan) çäkli bolmasa, onda kesgitleme boýunça $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$) alynýar.

Ýokardan (aşakdan) çäkli islendik köplügiň takyk ýokarky (takyk aşaky) çägi bardyr.

§ 1. 4. Ululyklaryň takmyn bahalary

1. Takmyn bahalaryň absolýut we otnositel hatalary. Amalyýetde ölçegler bilen baglanyşykly ululyklaryň san bahalaryny kesgitlänimizde, dürli sebäplere görä, biz olaryň takmyn bahalaryny tapýarys. Şeýle hem tehnikada, fizikada, himiýada we beýleki ylymlarda ululyklaryň hemmesiniň diýen ýaly takmyn bahalary berilýär. Şoňa görä ululyklaryň takyk bahalaryna seýrek gabat gelinýär we, köplenç, ululyklaryň takmyn bahalary bilen iş salyşmaly bolýar.

Käbir ululygyň takyk A bahasy bilen onuň takmyn a bahasynyň tapawudynyň absolýut ululygyna, ýagny $\Delta_a = |A - a|$ sana A ululygyň a takmyn bahasynyň absolýut hatasy diýilýär. Bu kesgitlemaniň esasynda $A = a \pm \Delta_a$ deňligi ýazmak bolar. Şunlukda, absolýut hata näçe kiçi boldugyça takmyn baha şonça takyk baha ýakyn bolar. Adatça gözlenýän ululygyň takyk bahasy belli bolmaýar. Şonuň üçin hem ol ululygyň absolýut hatasyny tapyp bolmaýar.Bu hallarda absolýut hatany ondan kiçi bolmadyk käbir položitel san bilen bahalandyrmaly bolýar. Ol sana ululygyň a takmyn bahasynyň absolýut hatasynyň çägi diýilýär we h bilen belgilenilýär. Şeýlelikde, $|A - a| = \Delta_a \le h$ deňsizligi ýazmak bolar. Amalyýetde absolýut hatanyň çägi hökmünde $\Delta_a \le h$ deňsizligi kanagatlandyrýan we Δ_a sana has ýakyn bolah h san alynýar. Ol sany ulanyp, şeyle ýazgyny alarys:

$$(A = a \pm h) \Leftrightarrow (a - h \le A \le a + h).$$

Bu halda a sana A sanyň h çenli takyklykdaky takmyn bahasy diýilýär. Bu ýerden görnüşi ýaly, ululygyň takyk bahasy $a_1 = a - h,\ a_2 = a + h$ sanlaryň arasyndadyr. Şoňa görä bu deňlik esasynda ululygyň takmyn bahasy we onuň absolýut hatasynyň çägi, degişlilikde

$$a = \frac{a_2 + a_1}{2} \quad \text{we} \quad h = \frac{a_2 - a_1}{2} \tag{1}$$

deňliklerden tapylýar.

2-nji mysal. Eger pejiň tenperaturasynyň $1130^\circ C$-dan kiçi däldigi we $1140^\circ C$-dan uly däldigi belli bolsa, onda temperatura haýsy takyklykda bellidir?

◁ Şerte görä $1130^\circ C$ we $1140^\circ C$ bahalaryň pejiň temperaturasynyň kemi we artygy bilen alnan bahalary bolýandygy sebäpli, $a_1 = 1130^\circ$, . $a_2 = 1140^\circ$ bolar. Şonuň üçin hem

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1130^\circ + 1140^\circ}{2} = 1135^\circ,$$

$$h=\frac{a_2-a_1}{2}=\frac{1140^\circ-1130^\circ}{2}=5^\circ,$$

ýagny pejiň temperaturasy 5° çenli takyklykda bellidir we onuň bahasy $1135^\circ\pm5^\circ$ deňdir. $\rhd$

Olçegleriň we hasaplamalaryň takyklygyny häsiýetlendiriji san absolýut hata bolman, ol otnositel hatadyr. Absolýut hatanyň a bahanyň absolýut ululygyna bolan gatnaşygyna, ýagny

$$\omega_a=\frac{\Delta_a}{|a|}=\frac{|A-a|}{|a|}$$

sana A sanyň takmyn a bahasynyň otnositel hatasy diýilýär. $\delta=h/|a|$ sana bolsa otnositel hatanyň çägi diýilýär.Şeýlelikde, otnositel hatanyň çägi belli bolanda absolýut hatanyň çägi $h=\delta|a|$ formuladan tapylýandyr. Otnositel hata köplenç prosentde hasaplanylýar.

3-nji mysal. Agramy 25 t demirýöl wagonyň 25 kg çenli takyklykdaky ýa-da 2 gr dermanyň 0,02 gr çenli takyklykdaky çekimleriniň haýsysy has takyk geçirilipdir?

$\lhd$ Meseläni çözmek üçin ol çekimleriň otnositel hatalaryny kesgitläliň:

$$\delta_1=\frac{25}{25000}=0{,}001=0{,}1\%,\quad \delta_2=\frac{0{,}02}{2}=0{,}01=1\%.$$

Bu deňliklerden görnüşi ýaly, demirýol wagonynyň çekiminiň otnositel hatasy dermanyň çekiminiň otnositel hatasyndan 10 esse kiçidir. $\rhd$

2. Takmyn bahalar bilen geçirilýän amallar. Eger h_a, h_b sanlar degişlilikde A, B sanlaryň a, b takmyn bahalarynyň absolýut hatalarynyň çäkleri bolsa, ýagny $a=A\pm h_a$, $b=B\pm h_b$, onda $A+B$ we $A-B$ sanlaryň $a+b$ we $a-b$ takmyn bahalarynyň h_{a+b}, h_{a-b} absolýut hatalarynyň çäkleri üçin

$$h_{a+b}=h_a+h_b,\quad h_{a-b}=h_a+h_b \tag{2}$$

deňlikler dogrudyr. Başgaça aýdylanda, jemiň we tapawudyň absolýut hatalarynyň çäkleri absolýut bahalaryň çäkleriniň jemine deňdir.

Eger δ_a, δ_b deişlilikde A, B sanlaryň a, b takmyn bahalarynyň otnositel hatalarynyň çäkleri bolsa, onda AB we A/B sanlaryň ab we a/b takmyn bahalaryň δ_{ab}, $\delta_{a/b}$ otnositel hatalarynyň çäkleri üçin

$$\delta_{ab}=\delta_a+\delta_b,\quad \delta_{a/b}=\delta_a+\delta_b \tag{3}$$

deňlikler dogrudyr.

Absolýut we otnositel hatalaryň çäklerini baglanyşdyrýan

$$h = \delta|a|, \quad \delta = \frac{h}{|a|}$$

formulalary we (2) we (3) deňlikleri ulanyp, köpeltmek hasylynyň we paýyň absolýut hatalarynyň çäklerini hem-de jemiň we tapawudyň otnositel hatalarynyň çäklerini taparys:

$$h_{ab} = \delta_{ab}|ab| = (\delta_a + \delta_b)|ab| = \left(\frac{h_a}{|a|} + \frac{h_b}{|b|}\right)|ab| = h_a|b| + h_b|a|,$$

$$h_{a/b} = \delta_{a/b}|a/b| = (\delta_a + \delta_b)|a/b| = \left(\frac{h_a}{|a|} + \frac{h_b}{|b|}\right)|a/b| = \frac{h_a b + h_b a}{b^2},$$

$$\delta_{a+b} = \frac{h_{a+b}}{|a+b|} = \frac{h_a + h_b}{|a+b|} = \frac{\delta_a|a| + \delta_b|b|}{|a+b|} = \delta_a\frac{|a|}{|a+b|} + \delta_b\frac{|b|}{|a+b|},$$

$$\delta_{a-b} = \frac{h_{a-b}}{|a-b|} = \frac{h_a + h_b}{|a-b|} = \frac{\delta_a|a| + \delta_b|b|}{|a-b|} = \delta_a\frac{|a|}{|a-b|} + \delta_b\frac{|b|}{|a-b|},$$

Bellik. Iň soňky formuladan görnüşi ýaly, biri-birlerine ýakyn bolan uly sanlar üçin olaryň tapawudynyň otnositel hatasynyň çäginiň örän uly san bolmagy ähtimaldyr. Şonuň üçin käbir özgertmeler geçirip, olar ýaly sanlaryň tapawudyny tapmakdan daşlaşjak bolmaly.

4-nji mysal. Okalýan otagyň (dürli ýerinde geçirilen ölçegler esasynda) uzynlygy $a = 12{,}2 \pm 0{,}03(m)$ we ini $b = 8{,}3 \pm 0{,}02$ alyndy. Otagyň meýdanyny we hatalarynyň çäklerini kesgitlemeli.

◁ Onuň meýdany $S \approx 12{,}2 \cdot 8{,}3 = 101{,}26$. Şunlukda, otnositel we absolýut hatalaryň çäkleri şeýle kesgitlener:

$$\delta_a = \frac{0{,}03}{12{,}2} = 0{,}0025, \quad \delta_b = \frac{0{,}02}{8{,}3} = 0{,}0025,$$

$$\delta_S = \delta_a + \delta_b = 0{,}0050, \quad h_s = \delta_S \cdot S = 0{,}0050 \cdot 101{,}26 \approx 0{,}51.$$

Şeýlelikde, $S = 101{,}26 \pm 0{,}51(m^2)$. ▷

§ 1.5. Funksiýa düşünjesi

Tebigatyň hadysalary öwrenilende we derňelende, şeýle hem dürli amaly we tehniki meselelerde garalýan ululyklaryň içinde şol bir bahalary alýanlary hem, dürli bahalary alýanlary hem duşýar. Olara degişlilikde hemişelik we üýtgeýän ululyklar diýilýär.. Seýrek duş gelýän hemişelik ululyklara töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine bolan gatnaşygyny aňladýan we π deň, kwadratyň diagonalynyň onuň tarapyna bolan gatnaşygyny aňladýan we $\sqrt{2}$ deň, üçburçlugyň içki burçlarynyň jemini aňladýan we 180^o deň sanlar mysal bolup biler. Howanyň temperaturasy, atmosferanyň basyşy, ýurdumyzda ilatyň aýlyk köpelişi wagta baglylykda üytgeýändir. Amalyýetde her bir üýtgeýän ululygyň üýtgemegi bir ýä-da birňäçe ululyklara baglydyr. Mysal üçin, töweregiň C uzynlygy we tegelegiň S meýdany onuň R radiusyna, hemişelik temperaturada gabyň içindäki gazyň basyşy ol gazyň göwrümine, hemişelik tizlik bilen hereket edýän jisimiň geçen ýoly wagta baglydyr. Bu mysallaryň hemmesinde bir ululygyň her bir bahasyna beýleki ululygyň kesgitli bahasy degişlidir.

2-nji kesgitleme. X köplügiñ her bir x agzasyna Y köplügiñ kesgitli y agzasyny degişli edýän f düzgüne (amala) X köplükde kesgitlenen funksiýa ýa-da X köplügiñ Y köplüge öwürmesi diýilýär.

Funksiýa $f: X \to Y$, $x \to f(x)$ ýa-da $y = f(x)$ görnüşlerde, käbir ýagdaýda bolsa diñe f bilen hem belgilenýär. Şunlukda, $X \ni x$ ululyga baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk ýa-da f funksiýanyñ üýtgeýäni (argumenti), $Y \ni y = f(x)$ bolsa f funksiýanyñ x ululyga degişli bahasy diýilýär.. Mysal üçin, eger $y = \sqrt{x^2 + 8}$ bolsa, onda f her bir hakyky x sany kwadrata göterip we oňa 8 goşup, alnan jemden kwadrat kök almaklygy aňladýar. Funksiýanyñ kesgitlenen X köplügine onyñ kesgitleniş köplügi, bahalarynyñ köplügine bolsa bahalar köplügi diýilýär we ol

$f(X) = \{f(x): x \in X\}$ bilen belgilenýär.

Eger f funksiýa X köplügiñ her bir agzasyna Y köplügiñ diñe bir agzasyny degişli edýän bolsa, onda oňa birbahaly funksiýa, eger-de birden köp agzasyny degişli edýän bolsa – köpbahaly funksiýa diýilýär. Mysal üçin, $y^2 = 5x$ deňleme x görä ikibahaly $y = \pm\sqrt{5x}$ funksiýany kesgitleýär. Biz, köplenç, birbahaly funksiýalara garajakdyrys.

y ululygyň diňe bir x ululygyň funksiýasy hökmünde kesgitlenişi ýaly, iki ululygyň $z = f(x, y)$, üç ululygyň $u = f(x, y, z)$ we köp ululygyň $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ funksiýalaryny hem kesgitlemek bolar.

Eger f funksiýa X köplügiñ Y köplüge öwürmesi, F funksiýa bolsa Y köplügiñ Z köplüge öwürmesi bolsa, onda $z = F[f(x)]$ funksiýa x görä çylşyrymly funksiýa ýa-da F we f funksiýalaryň çylşyrymy diýilýär. Oňa funksiýanyň funksiýasy hem diýilýar. Ony z we u ululyklar arkaly $z = F(u)$, $u = f(x)$ görnüşde ýazmak bolar.Şonuň ýaly ikiden kop funksiýalaryň çylşyrymly funksiýasy kesgitlenýär.Mysal üçin, x görä çylşyrymly $z = \ln^2\left(\sqrt{x^2+3}\right)$ funksiýany $z = u^2$, $u = \ln v$, $v = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3$ funksiýalar arkaly aňlatmak bolar.

Her bir x ululyga y ululygy degişli edýän f düzgüne baglylykda funksiýalar esasan aşakdaky usullarda berilýändir:

1. Analitik usul. Funksiýa bu usulda x we y ululyklaryň arasyndaky baglylygy görkezýän, ýagny argumentiň bahasy bilen haýsy amallary ýerine ýetireniňde funksiýanyň degişli bahasynyň alynýandygyny görkezýän formula arkaly berilýär. Mysal üçn,

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$ formula kesgitleniş köplügi $[-2,\ 2]$ kesim we bahalar köplügi $[0,\ 2]$ kesim bolan funksiýany aňladýar.

2) $y = sgn\ x = \begin{cases} 1,\ x > 0 & bolanda, \\ 0,\ x = 0 & bolanda, \\ -1,\ x < 0 & bolanda \end{cases}$

(*sgn* latynça s*ignum* – alamat sözünden alnan . Ol “*y* deňdir *signum* *x*” diýlip okalýar). Bu funksiýa birnäçe formulanyň üsti bilen berlendir. Ol san okunda kesgitlenip, onuň bahalar köplügi –1, 0 we 1 üç nokatdan duryan köplükdir.

2. Tablisa usuly. Bu usulda funksiýanyň kesgitleniş köplügine degişli bolan x ululygyň her bir bahasynyň ýanynda y ululygyň degişli bahasy ýazylyp, tablisa alynýar. Aşakdaky tablisada hlor-wodorod garyndysyna ýagtylygyň täsiriniň netijesi görkezilendir. Şunlukda, onuň bir setirinde emele gelen duzly kislotanyň m mukdarynyň san bahalary, beýlekisinde bolsa ýagtylygyň garynda täsir edýän t wagtynyň degişli mukdary görkezilendir.

T sek	4	5	6	7	8	9	10
M mg	2,1	2,6	4,7	19,3	48,5	79,6	110

Funksiýanyň beýle berlişiniň kemçiligi, tablisada funksiýanyň bahalary argumentiň hemme bahalary üçin görkezilmän, diňe käbir bahalary üçin görkezilýändir. Funksiýanyň tablisa usulynda berlişine bize mekdepden tanyş nolan logarifmleriň we trigonometrik funksiýalaryň tablisalary mysal bolup biler.

3. Grafik usuly. Ilki bilen $y = f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş köplügine degişli ähli x ücin koordinatalary $(x, f(x))$ bolan tekizligiň nokatlarynyň köplügine onuň grafigi diýlip aýdylýandygyny ýatlalyň. Funksiýanyň grafigi bir ýa-da birnäçe böleklerden durýan çyzyklardyr. Funksiýanyň grafik usul boyunça berlişiniň dürli mysallary bize mekdep matematikasyndan mälimdir. Bu usul fiziki ölçeglerde köp ulanylýar we grafikleri özi ýazýan abzallar çyzýar. Mysal üçin, atmosferanyň basyşynyň beýikliklere baglylykda üýtgeýşini barograf atly özi ýäzýän abzal lentada grafik görnüşinde çyzýar. Funksiýanyň şeýle usul boýunça berlişiniň ýönekeý mysallarynyň biri-de ýüregiň işleýşini häsiýetlendirýän kardiogrammadyr.

4. Kompýuter usuly. Funksiýanyň berlişiniň bu usuly bir ululygyň beýleki ululyga baglylygynyň programmalaryň we algoritmleriň kömegi bilen kompýuterleri ulanyp görkezilişini aňladýar. Ol usul kompýuterleri peýdalanyp, dürli amaly meseleleri çözmekde ulanylýandyr.

x we y ululyklaryň arasyndaky baglylygyň formulanyň üsti bilen $y = f(x)$ görnüşde berlişine anyk funksiýa, $F(x, y) = 0$ görnüşde berlişine bolsa anyk däl funksiýa diýilýär. Ýönekeýlik üçin üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglylygyň parametr atlandyrylýän üçünji t ululygyň üsti bilen

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

görnüsde berilýän hallaryna hem duş gelinýär. Funksiýanyň şeyle berlişine parametrik görnüsde berlen funksiýa diýilýär.

Eger X köplükde kesgitlenen f funksiýa üçin şeýle M (m) san tapylyp, $\forall x \in X$ üçin $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$ bolsa, onda f funksiýa ýokardan (aşakdan) çäkli funksiýa diýilýär. X köplükde hem ýokardan, hem aşakdan çäkli funksiýa şol köplükde çäkli funksiýa diýilýär. Seýlelikde, X köplükde f funksiýanyň çäkli bolmaklygy şeýle $K > 0$ can tapylyp, $\forall x \in X$ üçin $|f(x)| \le K$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini aňladýar.

X köplükde kesgitlenen f funksiýanyň bahalar köplüginiň käbir köplük bolýandygy esasynda, ýokardan (aşakdan) çäkli funksiýanyň X köplükdäki takyk ýokarky $\sup\limits_X f(x)$ (takyk aşaky $\inf\limits_X f(x)$) çäginiň kesgitlenişi köplügin takyk çäkleriniň kesgitlenişi ýalydyr.

5-nji mysal. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ funksiýanyň $X = [0, +\infty)$ aralykdaky takyk çäklerini tapmaly.

$\lhd$ $\forall x \in [0, +\infty)$ üçin $0 \le \dfrac{x}{1+x} < 1$, şoňa görä-de ol funksiyanyň bahalarynyň $Y = [0,1]$ köplüginiň aşaky $m = 0$, ýokarky $M = 1$ çäkleri bardyr we $m = 0$ onuň takyk aşaky çägidir. $M = 1$ sanyň ol funksiýanyň takyk ýokarky çägidigini görkezmek üçin, takyk ýokarky çägiň häsiýetinden peýdalanarys: $\forall \varepsilon > 0$ üçin $[0, +\infty) \ni x$ tapylyp, $\dfrac{x}{1+x} > 1 - \varepsilon$ ýa-da $x > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny x-iň bu deňsizlikleri kanagatlandyrýan bahalary üçin $f(x) > 1 - \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Ol bolsa $M = 1$ sanyň funksiýanyň takyk ýokarky çägidigini görkezýär. $\rhd$

§ 1. 6. Elementar funksiýalar

$y = C$ hemişelik, $y = x^a$ derejeli, $y = a^x$ $(0 < a \ne 1)$ görkezijili, $y = \log_a x$ $(0 < a \ne 1)$ logarifmik, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, trigonometrik we $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$, ters trigonometrik funksiýalara esasy elementar funksiýalar diýilýär.Esasy elementar funksiýalar bilen tükenikli sany arifmetik amallaryň geçirilmeginden hem-de olaryň çylşyrymlaryndan alynýan islendik funksiýalara elementar funksiýalar diýilýär. Olar aşakdaky toparlara bölünýär.

1) Bitin rasional funksiýa. Eger $m \geq 0$ bitin san bolsa, onda

$$y = P_m(x), \quad P_m(x) = a_o x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

($a_o \neq 0, a_1, \ldots, a_m$ - hemişelik sanlar) görnüşdäki funksiýa bitin rasional funksiýa ýa-da m derejeli köpagza diýilýär.

2) Drob rasional funksiýa (rasional drob). m we n derejeli $P_m(x)$ we $Q_n(x)$ köpagzalar üçin, $y = P_m(x)/Q_n(x)$ görnüşdäki funksiýa drob rasional funksiýa diýilýär.

Bitin we drob rasional funksiýalara rasional funksiýalar diýilýär.

3) Irrasional funksiýa. Görkezijileri bitin hem-de drob bolan derejeli funksiýalaryň üstünde tükenikli sany arifmetik amallaryň geçirilmeginden hem-de olaryň çylşyrymlaryndan alynýan funksiýalara irrasional funksiýalar diýilýär. Olara

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x + \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[3]{(x-4)/x + \sqrt{x}}$$

funksiýalar mysal bolup bilerler.

4) Transsendent funksiýa. Rasional we irrasional bolmadyk islendik funksiýalara transsendent funksiýalar diýilýär. Olara ähli trigonometrik we ters trigonometrik funksiýalar, görkezijili we logarifmik funksiýalar hem-de

$$y = cos\sqrt{x}, \quad y = x + tg\, x$$

görnüşdäki we şolar ýaly funksiýalar degişlidirler.

5) Giperbolik funksiýalar.Aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenen

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

funksiýalara degişlilikde giperbolik sinus we giperbolik kosinus diýilýär. Olaryň üsti bilen kesgitlenen

$$thx = \frac{shx}{chx}, \qquad cthx = \frac{chx}{shx}$$

funksiýalara degişlilikde giperbolik tangens we giperbolik kotangens diýilýär. Bu funksiýalar üçin

$$ch(x+y) = chxchy + shxshy, \quad sh(x+y) = shxchy + chxshy,$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x, \;\; sh2x = 2shxchx, \;\; ch^2x - sh^2x = 1,$$

$$ch^2x=\frac{1+ch2x}{2},\quad sh^2x=\frac{ch2x-1}{2}$$

formulalar dogrudyr.

6. Funksiýanyň grafigi. Esasy elementar funksiýalaryň grafikleri bize mekdepden belli bolsa, elementar funksiýalaryň grafikleriniň käbirleri bilen biz I bapda tanşypdyk. Funksiýalaryň grafikleri gurlanda peýdalanylýan onuň käbir häsiýetlerini ýatlalyň.

Eger funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli islendik x we $-x$ üçin $f(-x)=f(x)$ $\left(f(-x)=-f(x)\right)$ deňlik ýerine ýetse, onda f funksiýa jübüt (täk) funksiýa diýilýär.

Eger şeýle $T>0$ san bar bolup, f funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli islendik x, $x+T$ üçin $f(x+T)=f(x)$ deňlik ýerine ýetse, onda oňa periodik funksiýa diýilýär. Şeýle T sanlaryň iň kiçisine bolsa onuň periody diýilýär. Şunlukda, funksiýanyň özüne T-periodik funksiýa diýilýär.Jübüt funksiýanyň grafigi oy okuna, täk funksiýanyňky bolsa koordinatalar başlangyjyna görä simmetrikdir.

Eger $\forall x_1, x_2\in X$ üçin $x_1<x_2$ bolanda $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ ýa-da $f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$ bolsa, onda f funksiýa X köplükde, degişlilikde, artýan (kemelýän) ýa-da kemelmeýän (artmaýan) funksiýa diýilýär.

Bu häsiýetler funksiýanyň grafigini gurmaklygy ýeňilleşdirýär.

§ 1.7. Ters funksiýa

Goý, $f: X\to Y$ we her bir $y\in Y_1=f(X)$ ululyga $y=f(x)$ bolýan $x\in X$ ululyk degişli bolsun. Onda Y_1 köplükde, umuman aýdylanda, köpbahaly $x=g(y)$ funksiýa kesgitlenendir. Oňa $y=f(x)$ funksiýanyň ters funksiýasy diýilýär.

Mysal üçin, eger $y=x/3$ bolsa, onda $x=3y$ onuň birbahaly ters funksiýasydyr, eger $y=x^2$ bolsa, onda $x=\pm\sqrt{y}$ onuň köpbahaly ters funksiýasydyr, ýöne ol funksiýanyň [0, 4] kesimde kesgitlenen we $[0,2]$ kesimde birbahaly bolan $x=\sqrt{y}$ ters funksiýasy bardyr.

1-nji teorema. X köplükde artýan (kemelýän) f funksiýanyň

$Y = f(X)$ köplükde kesgitlenen birbahaly artýan (kemelýän) ters $g(y)$ funksiýasy bardyr.

◁ Teoremany artýan funksiýa üçin subut edeliň. Ilki bilen ters funksiýanyň birbahalydygyny görkezeliň. Onuň üçin tersine güman edeliň. Goý, $Y \ni y$ ululyga $y = f(x)$ şerti kanagatlandyrýan iki sany $x_1 \neq x_2$ ululyklar degişli bolsun, ýagny $y = f(x_1)$ we $y = f(x_2)$, onda $f(x_1) = f(x_2)$ bolar. Ýöne ol mümkin däl, sebäbi $x_1 \neq x_2$ bolanda $x_1 > x_2$ ýa-da $x_1 < x_2$ bolýanlygy üçin, $f(x)$ funksiýanyň artýanlygyndan $f(x_1) > f(x_2)$ ýa-da $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik alynýar, ýagny iki halda-da $f(x_1) = f(x_2)$ deňlik ýerine ýetmeýär. Diýmek, $Y \ni y$ ululyga diňe bir $x = g(y)$ ululyk degişli bolýar, ýagny ters funksiýa birbahalydyr. Indi onuň artýandygyny görkezeliň. Goý, erkin $y_1, y_2 \in Y$ üçin $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bolsun. Eger $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$ bolsa, onda $x_1 < x_2$ bolar, ýagny $x_1 = x_2$ ýa-da $x_1 > x_2$ bolup bilmez, çünki beýle bolanda f funksiýanyň artýanlygy esasynda $f(x_1) = f(x_2)$ ýa-da $f(x_1) > f(x_2)$ bolardy. Olar bolsa $f(x_1) < f(x_2)$ şerte garşy gelýär. Şeýlelikde, $y_1 < y_2$ şerti kanagatlandyrýan islendik y_1, y_2 üçin $x_1 = g(y_1) < g(y_2) = x_2$ deňsizlik alynýar, ol bolsa $g(y)$ funksiýanyň artýandygyny aňladýar. Teoremanyň ikinji bölegi hem şonuň ýaly subut edilýär. ▷

Bellik. f funksiýanyň ters funksiýasy, köplenç, f^{-1} bilen belgilenilýär. Özara ters funksiýalaryň grafikleri $y = x$ göni çyzyga görä simmetrikdir.

G ö n ü k m e l e r

1. Köplügiň ähli elementlerini kesgitlemeli:

1) $A = \{x \in \boldsymbol{R} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$. 2) $A = \{x \in \boldsymbol{N} : x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$.

3) $A = \{x \in Z : 1/4 \leq 2^x < 5\}$. 4) $A = \{x \in \boldsymbol{N} : -4 \leq x < 6\}$.

2. $A = \{x \in \boldsymbol{R} : x^2 + x - 20 = 0\}$ we $B = \{x \in \boldsymbol{R} : x^2 - x + 12 = 0\}$ üçin $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ köplükleriň elementlerini kesgitlemeli.

3. $A=(-1,\ 2]$ we $B=[1,\ 4)$ üçin $A\bigcup B,\ A\bigcap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$ köplükleri kesgitlemeli.

4. Deňlemeleri çözmeli:

1) $|x|=4.$ 2) $|x-2|=3.$ 3) $|x+3|=5.$ 4) $|x^2-5x+5|=1.$

5) $|x^2-6x+6|=|x|.$ 6) $|x^2-7x+12|=x^2-7x+12.$

5. Deňsizlikleri çözmeli:

1) $|3x-2|\le 3.$ 2) $|2x+5|\le 3$ .3) $\left|\frac{x+1}{x}\right|\le 3.$ 4) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\le 1.$

6. Jisimiň agramy kesgitlenende absolýut hatasy $\Delta_a \le 0{,}01g$ bolan a=2,57 g takmyn netije alnan. a sanyň otnositel hatasynyň δ çägini kesgitlemeli.

7. Funksiýanyň görkezilen nokatlardaky bahalaryny hasaplamaly:

1) $f(x)=\frac{2x^2-3}{x+2},\ -1;\ 0;\ 1.$ 2) $f(x)=\sin 3x,\ 0;\ \pi/6;\ \pi/3$.

8. Funksiýanyň kesgitleniş köplügini kesgitlemeli:

1) $y=3\sqrt{4-x^2}.$ 2) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}.$ 3) $y=\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}.$

4) $y=\frac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}.$ 5) $y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}.$ 6) $y=5^x$.

9. Funksiýalaryň nokatlar boýunça grafiklerini gurmaly:

1) $y=2x.$ 2) $y=2x+2.$ 3) $y=2x-2.$ 4) $y=x^2.$ 5) $y=x^2+1.$

6) $y=x^2-1.$ 7) $y=x^3/3.$ 8) $y=x^3/3+1.$ 9) $y=x^3/3-1;$ 10) $y=|x|.$

10. Berlen $f(x)=3x^2-2x+1$ boýunça funksiýanyň $f(x-2),\ f(x/2)$ bahalaryny tapmaly.

11. Berlen $f(x)=\sqrt{x+1}$ we $g(x)=x^2-2$ funksiýalar boýunça çylşyrymly $f[g(x)]$ we $g[f(x)]$ funksiýalary kesgitlemeli.

12. Funksiýalaryň ters funksiýalaryny kesgitlemeli:

1) $y=ax+b.$ 2) $y=(x-1)^3.$ 3) $y=\ln 2x.$ 4) $y=2^{x/2}$.

13. Funksiýalaryň haýsysy jübüt, täk , jübüt hem däl, täk hem däl?

1) $y = 3x^4 + 5x^2$. 2) $y = 3x^2 + 2x$. 3) $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$. 4) $y = x|x|$.

J o g a p l a r

1. 1) $A = \{0,\ 1,\ 2\}$; 2) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; 3) $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$; 4) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. **2.** $A \cup B = \{-5,\ 3,\ 4\}$; $A \cap B = \{4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$. **3.** $A \cup B = (-1,\ 4)$; $A \cap B = [1,\ 2]$; $A \setminus B = (-1,\ 1)$; $B \setminus A = (2,\ 4)$. **4.** 1) $x_1 = -4,\ x_2 = 4$; 2) $x_1 = -1,\quad x_2 = 5$; 3) $x_1 = -8,\ x_2 = 2$; 4) $x_1 = 1,\quad x_2 = 2;\ x_3 = 3,\quad x_4 = 4$; 5) $x_1 = 1,\quad x_2 = 2;\ x_3 = 3,\ x_4 = 6$. 6) $x \le 3,\ x \ge 4$. **5.** 1) $-1/3 \le x \le 5/3$; 2) $-4 \le x \le -1$; 3) $x \le -1/4,\ x \ge 1/2$; 4) $x \ge 0$. **6.** $\delta \approx 0{,}4\ \%$. **7.** 1) $f(-1) = -1,\ f(0) = -3/2,\ f(1) = -1/3$ **;** 2) $f(0) = 0,\ f(\pi/6) = 1,\ f(\pi/3) = 0$ **.**
8. 1) $[-2,\ 2]$; 2) $[-3,\ 7]$; 3) $(-5,\ 5)$; 4) $[2,\ 5]$; 5) $(-\infty,\ +\infty)$; 6) $(-\infty,\ +\infty)$. **10.** $f(x-2) = 3x^2 - 14x + 17,\ f(x/2) = 3x^2/4$.
11. $f[g(x)] = \sqrt{x^2 - 1},\ g[f(x)] = x - 1$. **12.** 1) $x = (y - b)/a$; 2) $x = \sqrt[3]{y} + 1$; 3) $x = e^y/2$; 4) $x = 2\log_2 y$. **13.** 1) jübüt. 2) jübüt hem däl, täk hem däl. 3) täk. 4) täk.

II. 2. FUNKSIÝANYŇ PREDELI

§ 2.1. Yzygiderligiň predeli

1.Yzygiderligiň predeliniň kesgitlenişi. Funksiýanyň predelini ilki onuň hususy haly bolan yzygiderligiň predeli düşunjesini girizmekden başlarys.

Eger her bir n natural sana $x_n = f(n)$ hakyky san degişli edilse, onda

$$x_n = f(n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{1}$$

sanlaryň toplumyna hakyky sanlaryň yzygiderligi ýa-da gysgaça yzygiderlik diýilýär we ol $\{x_n\}$ ýa-da x_n, $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ bilen belgilenýär.

Yzygiderligi düzýän sanlara onuň agzalary diýilýär. Yzygiderlik, köplenç, umumy agzasy diýip atlandyrylýan x_n arkaly berilýär.

Mysal üçin,

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots$; 2) $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} = -1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{9},\ \ldots$;

3) $\{\cos \pi n\} = -1, +1, -1, +1, \ldots$; 4) $\{1 + (-1)^n\} = 0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots$.

Yzygiderligiň agzalary tükeniksiz köp bolup, onuň içinde gabat gelýänleri hem bardyr (3-nji, 4-nji yzygiderliklere seret).

1-nji kesgitleme. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle $n_o = n_o(\varepsilon)$ belgi (nomer) tapylyp, $\forall n > n_o$ üçin

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{2}$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda a sana $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli (ýa-da limiti) diýilýär.

Şunlukda, a sanyň $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli bolýandygy

$$\lim x_n = \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

ýazgy arkaly aňladylýar we ol "limit x_n deňdir a" diýlip okalýar (bu ýerde "lim" belgisi latynça "limites" sözüniň başky üç harpy bolup, ol predel diýmekdir) . Tükenikli predeli bar yzygiderlige ýygnanýan, predeli ýok yzygiderlige bolsa dargaýan yzygiderlik diýilýär.

Eger $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $x_n = a$ bolsa, ýagny ol hemişelik bolsa, onda bu halda $|x_n - a| = 0$ we $\forall\varepsilon > 0$ we $\forall n \in N$ üçin $|x_n - a| < \varepsilon$ ýerine ýetýär, ýagny a san $\{x_n\}$ yzygiderligiň predelidir. Diýmek, hemişelik sanyň predeli onuň özüne deňdir.

Logiki belgilemeleriň kömegi bilen a sanyň $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli bolýandygyny gysgaça şeýle ýazmak bolar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\mathrm{N} \ni n_o \exists)(\forall n > n_o) : |x_n - a| < \varepsilon .$$

1-nji mysal. $\{1 + 1/n\}$ yzygiderligiň predeliniň bire deňdigini subut etmeli we $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$ üçin n_o belgini kesgitlemeli.

◃ Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $n_o \geq 1/\varepsilon$ alsak, ýagny n_o belgi hökmünde $1/\varepsilon$ sana deň ýa-da ondan uly bolan iň kiçi natural sany alsak, onda $\forall n > n_o$ üçin

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_o} \leq \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter we kesgitleme boýunça yzygiderligiň predeli bire deňdir. Şunlukda, $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$ bolanga degişlilikde $n_o = 10$, $n_o = 100$ bolar. ▹

Bu mysalyň çözüwinden $\{1/n\}$ yzygiderligiň hem predeliniň bardygy we onuň nola deňligi gelip çykýar.

(2) deňsizligiň $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ deňsizliklere deňgüýçlüdigini we $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ aralygyň a nokadyň ε etrabydygyny nazara alsak,onda a sanyň $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli bolmaklygynyň geometrik manysy onuň islendik ε etrabynda yzygiderligiň tükeniksiz köp agzalarynyň, ýagny etrabyň daşynda diňe tükenikli sany agzalarynyň ýerleşýändigini aňladýar.

Eger yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda ol predel ýeke-täkdir. Hakykatdan-da, eger $\{x_n\}$ yzygiderligiň a we b deň hem-de $a < b$ bolan iki predeli bar diýsek, onda $\varepsilon = (b - a)/3$ üçin $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ we $(b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ aralyklaryň her biri yzygiderligiň tükeniksiz köp agzalaryny özünde saklaýan bolmaly, ýöne ol beýle bolup bilmez, çünki görkezilen aralyklaryň umumy nokady ýokdur.

2. Yzygiderligiň predeliniň esasy häsiýetleri. Eger şeýle B san tapylyp, $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $x_n \leq B$ $(x_n \geq B)$ bolsa, onda $\{x_n\}$

yzygiderlige ýokardan (aşakdan) çäkli yzygiderlik, B sana bolsa yzygiderligiň ýokarky (aşaky) çägi diýilýär. Hem ýokardan, hem aşakdan çäkli yzygiderlige bolsa çakli yzygiderlik diýilýär.

Bu kesgitlemäniň esasynda $\{x_n\}$ yzygiderligiň çäkli bolmagy üçin şeýle $K>0$ san tapylyp, $\forall n \in N$ üçin $|x_n| \le K$ deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Mysal üçin, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\cos\frac{\pi n}{2}\right\}$ yzygiderlikler çakli, $\{n^2\}$ yzygiderlik bolsa aşakdan çäkli bolup, ýokardan çäkli däldir.

1-nji teorema. Eger $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda ol yzygiderlik çäklidir.

$\triangleleft$ Goý, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bolsun. Onda kesgitleme boýunça, $\varepsilon = 1$ üçin şeýle n_o belgi tapylyp, $\forall n > n_o$ üçin $|x_n - a| < 1$ bolar, ýagny $|x_n| < |a| + 1$. Şonuň üçin, eger K san $|a|+1, |x_1|, ..., |x_{n_o}|$ sanlaryň iň ulusy bolsa, onda $\forall n \in N$ üçin $|x_n| \le K$ bolar we ol $\{x_n\}$ yzygiderligiň çäklidigini aňladýar. $\triangleright$

2-nji teorema. Eger $\{x_n\}$ we $\{y_n\}$ yzygiderlikleriň predelleri bar bolsa, onda $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ we $\{x_n / y_n\}$ (paý kesgitlenende) yzygiderlikleriň hem predelleri bardyr we

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \left(\lim_{n\to\infty} y_n \ne 0\right) \tag{5}$$

deňlikler dogrudyr (subudynyň funksiýanyň predeli üçin soňra subut ediljek teoremanyňky ýaly bolany sebäpli, biz ony subutsyz ulanarys).

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. Ýygnanýan yzygiderlikleriň tükenikli algebraik jeminiň predeli goşulyjylaryň predelleriniň şol algebraik jemine deňdir.

2-nji netije. Eger $\{x_n\}$ yzygiderlik ýygnanýan bolsa, onda hemişelik c san üçin $\{cx_n\}$ yzygiderlik hem ýygnanýandyr we $\lim cx_n = c \lim x_n$ **.**

2-nji mysal. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-2n+3}{6n^2+7n-9}$ predeli tapmaly.

$\lhd$ Drobuň sanawjysyny we maýdalajysyny n^2 bölüp we predeliň häsiýetlerinden peýdalanyp alarys:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n+3}{6n^2+7n-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-2/n+3/n^2}{6+7/n-9/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-2/n+3/n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+7/n-9/n^2\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(3/n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}6+\lim\limits_{n\to\infty}(7/n)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(9/n^2\right)}=\frac{5}{6},$$

çünki hemişelik c san üçin $\lim\limits_{n\to\infty}(c/n)=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(c/n^2\right)=0$. $\rhd$

3. Monoton yzygiderligiň predeli. Eger $\forall n\in N$ üçin $x_n\le x_{n+1}$ $\left(x_n\ge x_{n+1}\right)$ ýa-da $x_n<x_{n+1}$ $\left(x_n>x_{n+1}\right)$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{x_n\}$ yzygiderlige,degişlilikde kemelmeýän (artmaýan) ýa-da artýan (kemelýän) yzygiderlik diýilýär. Olara gysgaça monoton yzygiderlikler diýilýär.

3-nji teorema. Ýokardan (aşakdan) çäkli kemelmeýän (artmaýan) islendik $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli bardyr we

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}\quad \left(\lim_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}\right).$$

Islendik monotonn yzygiderligiň ýa aşakdan, ýä-da ýokardan çäkli bolýandygy üçin, bu teorema gysgaça şeýle hem okalýär: monoton çäkli yzygiderligiň predeli bardyr.

$\lhd$ Eger yzygiderlik ýokardan çäkli we kemelmeýän bolsa, onda onuň takyk ýokarky $M=\sup\{x_n\}$ çägi bardyr. Takyk ýokarky çägiň häsiýeti boýunça $\forall n\in N$ üçin $x_n\le M$ we $\forall\varepsilon>0$ san üçin n_o belgi tapylyp, $x_{n_o}>M-\varepsilon$. Onda yzygiderligiň kemelmeýändigi sebäpli $\forall n\ge n_o$ üçin $M-\varepsilon<x_{n_o}\le x_n\le M<M+\varepsilon$ deňsizlik, ýagny $|x_n-M|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter. Ol bolsa $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M=\sup\{x_n\}$ deňligi aňladýar. Aşakdan çäkli artmaýan yzygiderlik üçin $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=m=\inf\{x_n\}$ deňlik edil şonuň ýaly subut edilýär. $\rhd$

Teoremanyň şertlerinde $\{x_n\}$ yzygiderligiň islendik agzalary üçin $x_n\le M$ $\left(x_n\ge m\right)$ deňsizlik dogrudyr.

Bu teoremadan peýdalanyp,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \qquad (6)$$

yzygiderligiň predeliniň bardygyny subut edeliň. Nýuton binomy diýip atlandyrylýan

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}b^n$$

formuladan peýdalanyp alarys:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (7)$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly, n sanyň ulalmagy bilen birinjiden başga her bir goşulyjy we goşulyjylaryň sany ulalýandyr.Şoňa görä hem-de goşulyjylaryň ählisiniň položiteldigi sebäpli, $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $x_n < x_{n+1}$ bolar, ýagny yzygiderlik artýandyr. Onuň ýokardan çäklidigini görkezmek üçin ilki (7) deňsizligiň sag bölegindäki ähli ýaýlaryň içindäki aňlatmalary birlik bilen we soňra alnan droblaryň maýdalawjylaryndaky köpeldijileriň hemmesini 2 bilen çalşyryp,

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

deňsizligi alarys. Bu ýerden geometrik progressiýanyň jeminiň formulasy esasynda, $x_n < 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$, ýagny $\forall n \in \mathrm{N}$ üçin $x_n < 3$ deňsizlik alynýar. Şeýlelikde, yzygiderlik artýar we ýokardan çäkli, şonuň üçin hem 3-nji teorema esasynda (6) yzygiderligiň predeli bardyr. Ony e bilen belgilemek kabul edilendir, ýagny

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,. \qquad (8)$$

Ol irrasional san bolup, $e = 2,718281828459045\ldots$ .Esasy e san bolan logarifmik funksiýa $\ln x$ görnüşde belgilenýär.

4. Saklanýan kesimler teoremasy. Eger kesimleriň $\{[a_n, b_n]\}$ yzygiderliginiň her bir soňkysy öňündäkiniň içinde saklanýan bolsa:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots ,$$

ýagny islendik n üçin $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$ deňsizlik ýerine ýetse, onda ol yzygiderlige saklanýan kesimler yzygiderligi diýilýär

4-nji teorema. Eger saklanýan kesimleriň $\{[a_n, b_n]\}$ yzygiderligi üçin $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ deňlik ýerine ýetse, onda ol yzygiderligiň ähli kesimlerine degişli ýeke-täk nokat bardyr.

$\lhd$ Şerte görä $\{a_n\}$ kemelmeýän, $\{b_n\}$ artmaýan yzygiderlikdir we islendik n ücin $a_n \le b_1,\ b_n \ge a_1$. Şeýlelikde, monoton we çäkli yzygiderlikler bolup, olaryň 2-nji teorema esasynda predelleri bardyr:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Şoňa görä bu deňlikleriň we $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ deňligiň esasynda

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a$$

deňligi alarys, ýagny ol yzygiderlikleriň predelleri deňdir. Ony c bilen belgiläp, islendik n ücin $a_n \le c \le b_n$ deňsizligi alarys, ýagny c nokat yzygiderligiň ähli kesimlerine degişlidir. Ol nokadyň ýeke-täkdigini görkezmek üçin tersine güman edeliň. Goý, şol kesimleriň ählisine degişli ýene bir c_1 $(c_1 \ne c)$ nokat bar bolsun. Onda islendik n ücin $b_n - a_n \ge |c - c_1|$ bolar we şonuň esasynda $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \ge |c - c_1| \ne 0$, ol bolsa şerte garşy gelýär. $\rhd$

§ 2.2. Funksiýanyň predeli

1.Funksiýanyň predeliniň kesgitlenişi. Goý, f funksiýa a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun (funksiýanyň a nokatdaky predeli düşünjesi girizilende onuň şol nokatda kesgitlenmegi hökman däldir).

2-nji kesgitleme. Eger a sana ýygnanýan $\forall\{x_n\}$ $(x_n \ne a)$ yzygiderlik üçin $\{f(x_n)\}$ yzygiderlik B sana ýygnanýan bolsa, onda B sana f funksiýanyň a nokatdaky (ýa-da $x \to a$ bolandaky) predeli diýilýär.

B sanyň f funksiýanyň a nokatdaky predeli bolýandygy

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \quad \text{ýa-da} \quad f(x) \to B \quad (x \to a)$$

görnüşde belgilenýär.

3-nji mysal. $f(x) = C,\quad g(x) = x$ funksiýalaryň a nokatdaky predelini tapmaly.

◁ a sana ýygnanýan $\forall\{x_n\}\ (x_n \neq a)$ yzygiderlik ücin $f(x_n) = C$, $g(x_n) = x_n$ bolýandygy üçin, degişlilikde, olaryň predelleri C we a sanlara deňdir. Şoňa görä-de 1-nji kesgitleme esasynda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$ we $\lim\limits_{x\to a} g(x) = a$ bolar. ▷

4-nji mysal. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiýanyň $a = 0$ nokatda predeliniň ýokdugyny subut etmeli.

◁ Bu funksiýa $x \neq 0$ nokatlaryň hemmesinde kesgitlenendir. Goý, $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ bolsun. Onda $\lim x_n = 0$, ýöne $f(x_n) = (-1)^n$. Şonuň üçin ol hiç bir predele ymtylmaýar. Şoňa görä-de 2-nji kesgitleme esasynda funksiýanyň $a = 0$ nokatda predeli ýokdur. ▷

Funksiýanyň predeliniň 2-nji kesgitlemesine deňgüýçli bolan ýene bir kesgitlemesini getireliň.

3-nji kesgitleme. Eger $\forall\varepsilon > 0$ san üçin $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tapylyp, $0 < |x - a| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|f(x) - B| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda B sana f funksiýanyň a nokatdaky predeli diýilýär.

B sanyň f funksiýanyň a nokatdaky predeli bolýandygyny gysgaça

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\delta > 0\exists)\ (0 < |x - a| < \delta, \forall x)) : |f(x) - B| < \varepsilon \tag{9}$$

görnüşde aňlatmak bolar.

1-nji bellik. Belgileriň kömegi bilen käbir tassyklamalaryň inkär edilişini hem gysgaça ýazmak bolar. Mysal üçin, B sanyň f funksiýanyň a nokatdaky predeli däldigini aňladýan ýazgyny gysgaça

$$(\varepsilon > 0\ \exists)\ (\forall\delta > 0)\ (0 < |x-a| < \delta,\ x\exists) : |f(x) - B| \geq \varepsilon \tag{10}$$

görnüşde aňlatmak bolar.

5-nji mysal. $f(x)=x\sin(1/x)$ funksiýanyň $a=0$ nokatdaky predeliniň nola deňdigini subut etmeli.

$\lhd$ Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin $\delta=\varepsilon$ alsak, onda $|x\sin(1/x)|\le|x|$ deňsizlik esasynda $0<|x|<\delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|x\sin(1/x)|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin hem 3-nji kesgitleme esasynda $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)=0$. $\rhd$

6-njy mysal. 3-nji kesgitlemeden peýdalanyp, $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)=1$ deňligi subut etmeli we ε sanyň 0,1 we 0,01 bahalaryna degişli δ sany kesgitlemeli.

$\lhd$ Kesgitleme boýunça, $\forall\varepsilon>0$ üçin $|2x+5-1|=|2x+4|=$ $=2|x+2|<\varepsilon$ deňsizligiň $|x+2|<\delta$ bolanda ýerine ýetmegi üçin δ san hökmünde $\delta=\varepsilon/2$ sany ýa-da ondan kiçi bolan položitel sany almak bolar. Şunlukda, $\varepsilon=0{,}1$ bolanda $\delta(0{,}1)=0{,}05$ we $\varepsilon=0{,}01$ bolanda $\delta(0{,}01)=0{,}005$ bolar. $\rhd$

Indi f funksiýanyň $x\to\infty$ bolandaky predeli düşünjesini girizeliň. Eger $\forall\varepsilon>0$ san üçin şeýle $K>0$ san tapylyp, $|x|>K$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|f(x)-B|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda B sana f funksiýanyň $x\to\infty$ bolandaky predeli diýilýär we ol $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$ görnüşde ýazylýar. Şunlukda, eger x diňe položitel ýa-da diňe otrisatel bahalary alýan bolsa, onda olar degişlilikde

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=B \qquad \text{we} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=B$$

görnüşde aňladylýar

. **2. Birtaraplaýyn predeller.** Funksiýanyň argumentiniň a sana haýsy tarapyndan ymtylýanlygyna baglylykda birtararaplaýyn predel düşünjesi girizilýär. Eger 2-nji kesgitlemede goşmaça islendik n üçin $x_n>a$ $(x_n<a)$ şert ýerine ýetse, onda B sana f funksiýanyň a nokatdaky sag (çep) predeli diýilýär we ol şeýle belgilenýär:

$$B=\lim_{x\to a+o} f(x)=f(a+0)\ \left(B=\lim_{x\to a-o} f(x)=f(a-0)\right).$$

Eger 3-nji kesgitlemede $0<|x-a|<\delta$ şertiň ýerine $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ şert ýerine ýetse, onda B sana f funksiýanyň a nokatdaky sag (çep) predeli diýilýär.

Eger f funksiýanyň a nokatda sag we çep predelleri bar bolup, $f(a+0)=f(a-0)=B$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B.$ Eger birtaraplaýyn predeller dürli bolsa, ýa-da olaryň iň bolmanda birisi ýok bolsa, onda a nokatda funksiýanyň predeli ýokdur.

7-nji mysal. *f*(*x*)=*sgnx* funksiýanyň $a=0$ nokatdaky sag we çep predellerini hasaplamaly.

$\lhd$ Goý, $\forall n\in N$ üçin $x_n>0,\ x'_n<0,\ \lim x_n=\lim x'_n=0$ bolsun, onda $\lim \operatorname{sgn} x_n=1,$ $\lim \operatorname{sgn} x'_n=-1$. Şonuň üçin hem kesgitleme esasynda $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sgn} x=1,$ $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sgn} x=-1.$ $\rhd$

§ 2. 3. Tükeniksiz kiçi we tükeniksiz uly funksiýalar

1. Tükeniksiz kiçi funksiýalar we olaryň häsiýetleri. Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin $\delta>0$ san tapylyp, $0<|x-a|<\delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|\alpha(x)|<\varepsilon$ bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiýa a nokatda (ýa-da $x\to a$ bolanda) tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär. Ol $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ görnüşde aňladylýar.

5-nji teorema. f funksiýanyň a nokatda predeliniň B sana deň bolmagy üçin

$$f(x)=B+\alpha(x),\qquad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \tag{11}$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

$\lhd$ Goý, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ bolsun. Onda $\alpha(x)=f(x)-B$ we $\forall\varepsilon>0$ üçin $0<|x-a|<\delta$ bolanda $|\alpha(x)|=|f(x)-B|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny (11) deňlikler ýerine ýetýär.

Eger-de (11) deňlikler ýerine ýetýän bolsa, onda

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}[B+\alpha(x)]=B+\lim_{x\to a}\alpha(x)=B\ . \rhd$$

6-njy teorema. $x\to a$ bolanda tükeniksiz kiçi bolan tükenikli sany funksiýalaryň algebraik jemi $x \to a$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

◃ Goý, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ funksiýalar $x \to a$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýalar bolsun, ýagny $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta_1 > 0$ tapylyp, $0 < |x-a| < \delta_1$ bolanda $|\alpha(x)| < \varepsilon/3$, $\delta_2 > 0$ tapylyp, $0 < |x-a| < \delta_2$ bolanda $|\beta(x)| < \varepsilon/3$ we $\delta_3 > 0$ tapylyp, $0 < |x-a| < \delta_3$ bolanda $|\gamma(x)| < \varepsilon/3$ deňsizlikler ýerine ýetýär. Onda $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ san üçin $0 < |x-a| < \delta$ bolanda deňsizlikleriň üçüsi hem ýerine ýeter. Şoňa görä $u(x) = \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)$ funksiýa üçin

$$|u(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny $x \to a$ bolanda $u(x) = \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýadyr. ▹

7-nji teorema. Tükeniksiz kiçi funksiýanyň çäkli funksiýa köpeltmek hasyly tukeniksiz kiçi funksiýadyr.

◃Eger $x = a$ nokadyň käbir etrabynda $b(x)$ çäkli funksiýa bolsa, ýagny şeýle $C > 0$ tapylyp,şol etrapda $|b(x)| < C$ we $x \to a$ bolanda $\alpha(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýa bolsa, ýagny $\forall \varepsilon > 0$ üçin $x = a$ nokadyň käbir etrabynda $|\alpha(x)| < \varepsilon/C$ deňsizlik ýerine ýetse, onda ol etraplaryň kiçisinde

$$|\alpha(x)b(x)| = |\alpha(x)||b(x)| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter, ýagny $x \to a$ bolanda $\alpha(x)b(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýadyr. ▹

Bu teoremalardan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Iki tükeniksiz kiçi funksiýalaryň köpeltmek hasyly, şeyle hem tükeniksiz kiçi funksiýanyň hemişelik sana köpeltmek hasyly tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

2. Tükeniksiz uly funksiýalar. Eger $\forall K > 0$ üçin $\delta > 0$ tapylyp, $0 < |x-a| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|f(x)| > K$ bolsa, onda ol funksiýa a nokatda tükeniksiz uly funksiýa diýilýär we ol $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ýazgyda aňladylýar. Şunlukda, diňe $f(x) > K$ ýa-da diňe $f(x) < -K$ deňsizlik ýerine ýetse, onda degişlilikde $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

ýa-da $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Mysal üçin, eger $f(x)=1/x$, $x\to 0$ bolsa, onda ol tükeniksiz uly funksiýadyr, çunki $\forall K>0$ üçin $|x| = |x-0| < 1/K = \delta$ bolanda $|1/x| > K$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şunlukda, $x<0$ bolanda $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ we $x>0$ bolanda $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Eger $f(x)=1/(x-3)^2$, $x\to 3$ bolsa, onda $\forall K>0$ üçin $|x-3| < 1/\sqrt{K} = \delta$ bolanda $1/(x-3)^2 > K$ bolar, ýagny ol funksiýa $x\to 3$ bolanda tükeniksiz uludyr we funksiýanyň diňe položitel bahalary alýandygy üçin $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$.

Tükeniksiz kiçi we tükeniksiz uly funksiýalar şeýle baglanyşykdadyr.

Eger $\delta>0$ san tapylyp, $0<|x-a|<\delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $f(x)\neq 0$ bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň a nokatda tükeniksiz kiçi funksiýa bolmagy üçin $1/f(x)$ funksiýanyň tükeniksiz uly funksiýa bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Hakykatdan-da, eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ bolsa, onda islendik $1/\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ san üçin şeýle $\delta>0$ tapylyp, $0<|x-a|<\delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|f(x)|<1/\varepsilon$, ýagny $|1/f(x)|>\varepsilon$ bolar. Diýmek, $1/f(x)$ funksiýa a nokatda tükeniksiz uludyr. Tersi hem dogry bolýandygy şuňa meňzeşlikde görkezilýär.

Şunlukda,eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $f(x)\neq 0$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = \infty$, eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

§ 2. 4. Funksiýanyň predeliniň esasy häsiýetleri

9-njy teorema. Eger f we g funksiýalaryň a nokatda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ predelleri bar bolsa, onda $f(x)\pm g(x)$,

$f(x)\cdot g(x)$ we $f(x)/g(x)$ funksiýalaryň hem a nokatda predelleri bardyr we aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x), \qquad (12)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x), \qquad (13)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)} \qquad (\lim_{x\to a}g(x)\neq 0). \qquad (14)$$

⊲ Teoremanyň şertlerinde 5-nji teorema boýunça

$$f(x)=A+\alpha(x),\ \ g(x)=B+\beta(x),\ \ \lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)=0 \qquad (15)$$

deňlikleri ýazmak bolar. Şonuň üçin (15) deňlikler esasynda

$$f(x)\pm g(x)=(A\pm B)+\left[\alpha(x)\pm\beta(x)\right],\ \ \lim_{x\to a}\left[\alpha(x)\pm\beta(x)\right]=0$$

deňlikler ýerine ýetýär. Şoňa görä-de 5-nji teorema boýunça

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x),$$

ýagny (12) deňlik subut edildi. (15) deňlikler esasynda

$$f(x)\cdot g(x)=(A\cdot B)+\left[A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right],$$

$$\lim_{x\to a}\left[A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right]=0$$

deňlikler ýerine ýetýär. Şonuň üçin 5-nji teorema boýunça

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)\,.$$

Şeýlelikde, (13) deňlik hem subut edildi. (14) deňligi subut etmek üçin $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$ şert ýerine ýetende (15) deňligi ulanyp alarys:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B\left[B+\beta(x)\right]}\ . \qquad (16)$$

Eger $u(x)=\dfrac{1}{B\left[B+\beta(x)\right]}$, $v(x)=B\alpha(x)-A\beta(x)$ belgileme girizsek, onda (16) deňlik esasynda

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=u(x)v(x),\quad \lim_{x\to a}\left[u(x)v(x)\right]=0\,,$$

çünki $x\to a$ bolanda $u(x)$ çäkli funksiýadyr, $v(x)$ bolsa tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Şonuň üçin hem 5-nji teorema boýunça

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$

ýagny (14) deňlik hem subut edildi. ▷

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. Eger funksiýalaryň algebraik jeminiň her bir goşulyjysynyň a nokatda predeli bar bolsa, onda ol jemiň hem predeli bardyr we goşulyjylaryň predelleriniň şolar ýaly algebraik jemine deňdir.

2-nji netije. Hemişelik köpeldijini predel belgisiniň daşyna çykarmak bolar.

3-nji netije. Eger f funksiýanyň a nokatda predeli bar bolsa, onda natural m san üçin

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^m\right]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^m$$

deňlik dogrudyr. Hususan-da, $\lim\limits_{x\to a}(x)^m=\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)^m=a^m$.

8-nji mysal. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^2+8x-7\right)$ predeli tapmaly**.**

◁ 9-njy teorema we onuň netijeleri esasynda

$$\lim_{x\to -1}\left(3x^2+8x-7\right)=\lim_{x\to -1}\left(3x^2\right)+\lim_{x\to -1}(8x)-\lim_{x\to -1}(7)=$$

$$=3(-1)^2+8(-1)-7=-12\text{.} \ ▷$$

Bellik. Funksiýalaryň predelleri tapylanda, köplenç,

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\times\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$$

görnüşdäki kesgitsizliklere duş gelinýär. Şonuň üçin ilki olary özgerdip, belli bolan formulalary ulanyp bolar ýaly görnüşlere getirmeli. Sunlukda, predel tapylanda şeýle häsiýetden hem peýdalanylýar.

Eger $\forall x\neq a$ üçin $f(x)=g(x)$ deňlik ýerine ýetip, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ predel bar bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ predel hem bardyr. Bu häsiýetiň ulanylyşyny görkezeliň.

9-njy mysal. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ predeli tapmaly.

$\triangleleft$ $x\to 2$ bolanda sanawjy hem, maýdalawjy hem nola ymtylýar we $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony açmak üçin ilki özgertmeler geçirip, soňra predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x-3)}=\frac{1}{-1}=-1. \ \triangleright$$

10-njy teorema. Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f funksiýanyň $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B\neq 0$ predeli bar bolsa, onda a nokadyň $U(a)$ etraby tapylyp, şol etrapda $B>0$ bolanda $f(x)$ položiteldir we $f(x)>\dfrac{B}{2}$, $B<0$ bolanda otrisateldir we $f(x)<\dfrac{B}{2}$.

$\triangleleft$ Teoremanyň şertlerinde $\varepsilon=|B|/2$ üçin $\delta>0$ tapylyp, $0<|x-a|<\delta$ bolanda

$$B-\frac{|B|}{2}<f(x)<B+\frac{|B|}{2}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär.Olaryň çepindäkisinden $B>0$ bolanda, $f(x)>\dfrac{B}{2}>0$ deňsizligi, sagyndakysyndan bolsa $B<0$ bolanda, $f(x)<\dfrac{B}{2}<0$ deňsizligi alarys. $\triangleright$

11-nji teorema. Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f we g funksiýalar üçin şol etrabyň $x\neq a$ bolan islendik nokadynda $f(x)<g(x)$ we $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ predeller bar bolsa, onda $A\leq B$ bolar.

$\triangleleft$ Eger tersine, $A>B$ diýip güman etsek, onda şert esasynda 9-njy teorema boýunça $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=A-B>0$ bolar. Şoňa görä 10-njy teorema esasynda a nokadyň $x\neq a$ bolan islendik etrabynda $f(x)-g(x)>0$, ýagny $f(x)>g(x)$ bolar. Ol bolsa şerte garşy gelýär. Diýmek, $A\leq B$ deňsizlik ýerine ýetýär. $\triangleright$

Bu teorema iki böleginiň hem predeli bar bolan deňsizlikde predele geçip bolýandygyny aňladýar, şunlukda deňsizlik belgisine deňlik belgisi hem goşulýar. Mysal üçin, islendik $x \neq 0$ nokatda $5 + x^2 > 5 - x^2$, ýöne $\lim_{x \to 0}(5 + x^2) = \lim_{x \to 0}(5 - x^2)$.

12-nji teorema. Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f, φ, g funksiýalar üçin şol etrapda

$$f(x) \le \varphi(x) \le g(x) \tag{17}$$

deňsizlikler ýerine ýetse we $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = B$ predel bar bolsa, onda $\lim_{x \to a} \varphi(x) = B$.

◃ Şertleriň esasynda $\forall \varepsilon > 0$ üçin a nokadyň şeýle δ_1, δ_2 etraplary tapylyp, şol etraplarda degişlilikde $B - \varepsilon < f(x)$ we $g(x) < B + \varepsilon$ bolar. Onda $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ üçin a nokadyň δ etrabynda ol deňsizlikleriň ikisi hem ýerine ýeter. Şonuň üçin şol etrapda (17) deňsizlikler esasynda

$$B - \varepsilon < f(x) \le \varphi(x) \le g(x) < B + \varepsilon,$$

ýagny $|\varphi(x) - B| < \varepsilon$. Diýmek, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = B$. ▹

§ 2.5. Ajaýyp predeller

1. Birinji ajaýyp predel. Radiusy r, merkezi burçunyň radian ölçegi x $(0 < x < \pi/2)$ bolan töwerege seredeliň (1-nji surat).

OAB üçburçlugyň meýdany OAB sektoryň meýdanyndan, ol sektoryň meýdany bolsa OAK üçburçlugyň meýdanyndan kiçidir. Şoňa görä

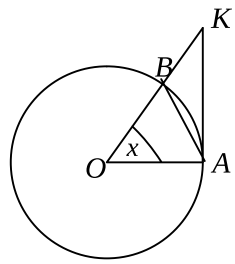
$$\frac{r^2}{2}\sin x < \frac{r^2}{2}x < \frac{r^2}{2}tgx$$

deňsizlikleri we olary $(r^2/2)$ bölüp,

$$\sin x < x < tgx \tag{18}$$

deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



1-nji surat

deňsizlikler gelip çykýar. Ahyrky deňsizliklerden bolsa

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x \tag{19}$$

deňsizlikler alynýar. Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin δ sany $\pi/2$ we ε sanlaryň kiçisi bolar ýaly alsak, onda $0<x<\delta$ bolanda (19) deňsizliklerden

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|\le|1-\cos x|=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x<\varepsilon$$

deňsizlik gelip çykýar.Ol bolsa

$$\lim_{x\to+o}\frac{\sin x}{x}=1$$

predeliň bardygyny aňladýar.Şoňa görä $\sin x$ funksiýanyň täkligi esasynda

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+o}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Diýmek, garalýan funksiýanyň $a=0$ nokatda biri-birine deň bolan birtaraplaýyn predelleri bardyr we şonuň esasynda

$$\lim_{x\to o}\frac{\sin x}{x}=1$$

deňligi alarys. Oňa birinji ajaýyp predel diýilýär.

Bellik. Birinji ajaýyp predel subut edilende $0<x<\pi/2$ bolanda görkezilen $\sin x<x,\ 1-\cos x<x$ deňsizlikleri ulanyp, $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0,$ $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ deňlikleri subut etmek bolar (özbaşdak görkeziň).

10-njy mysal. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ predeli tapmaly.

$\triangleleft$ $x=0$ bolanda $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar, Soňa görä ol predeli tapmak üçin ilki käbir özgertmeleri geçirmeli we soňra birinji ajaýyp predeli ulanmaly:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\lim_{x\to0}\sin(x/2)=1\cdot0=0\ \triangleright$$

2. Ikinji ajaýyp predel. Goý, $x>1$ bolsun. Eger x-iň bitin bölegini aňladýan $[x]$ funksiýa üçin $n=[x]$ alsak, onda $x=n+a$ bolar, bu ýerde n natural sandyr we a san $0\le a<1$ şerti kanagatlandyrýar. Şunlukda,

$n \le x < n+1,\quad 1/(n+1) < 1/x \le 1/n$ bolar we bu deňsizlikler esasynda

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (20)$$

deňsizlikler gelip çykýär. Mälim bolşy ýaly $\lim(1+1/n)^n = e$. Şoňa görä

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))} = \frac{e}{1} = e$$

predeller hem bardyr. Şonuň esasynda $x \to +\infty$ $(n \to \infty)$ bolanda (20) deňsizliklerde predele geçip,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

deňligi alarys.Goý, $x < -1$ bolsun. Eger $x = -y$ alsak, onda subut edilen deňligiň esasynda

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e$$

deňlik gelip çykýär. Bu iki halyň esasynda

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ikinji ajaýyp predel atlandyrylýan deňlik alynýar. Bu deňlikden $u = 1/x$ belgileme girizip, $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e$ formulany alarys.

11-nji mysal. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2/x)^x$ predeli tapmaly.

$\lhd$ Eger $x = 2t$ çalşyrma girizsek, onda $x \to \infty$ bolanda $t \to \infty$ bolýandygy esasynda

$$\lim_{x\to\infty}(1+2/x)^x = \lim_{t\to\infty}(1+1/t)^{2t} = \lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t \lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t = e\cdot e = e^2 . \rhd$$

§ 2. 6. Funksiýalaryň deňeşdirilişi

Tükeniksiz kiçi funksiýalaryň algebraik jeminiň we köpeltmek hasylynyň tükeniksiz kiçi funksiýa bolýandygy bellidir.Ýöne olaryň paýy beýle däldir. Goý, $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim_{x\to a}\beta(x)=0$ bolsun. Eger:

1. $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiýa $x\to a$ bolanda $\beta(x)$ görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär. Bu halda

$$\alpha(x)=o(\beta(x)),\ \ x\to a$$

ýazgy ulanylýar we ol şeýle okalýar: $\alpha(x)$ deňdir o kiçi $\beta(x)$, $x\to a$ bolanda.

2. $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$ bolsa, onda $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ funksiýalara $x\to a$ bolanda deň tertipli tükeniksiz kiçi funksiýalar diýilýär. Onuň üçin

$$\alpha(x)=O(\beta(x)),\ \ x\to a$$

ýazgy ulanylýar we ol şeýle okalýar: $\alpha(x)$ dendir O uly $\beta(x)$ $x\to a$ bolanda. Hususanda, eger $C=1$ bolsa, onda olara deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalar diýilýär we $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to a$ görnüsde belgilenýär.

3. $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq 0$ bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiýa $x\to a$ bolanda $\beta(x)$ görä k tertipli tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär.

Mysal üçin, $x\to 0$ bolanda $\sin x$ we x deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalardyr, $1-\cos x$ funksiýa bolsa x görä ikinji tertipli tükeniksiz kiçi funksiýadyr, çünki

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalaryň predelleri tapylanda ulanylýan şeýle häsiýeti bardyr. Eger $\alpha(x) \sim \alpha_1(x),\ \beta(x) \sim \beta_1(x),\ x \to a$ we $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$ predel bar bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$. Ony subut etmek üçin $x \to a$ bolanda

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$$

deňlikde predele geçmek ýeterlikdir.

12-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x + x^3}$ predeli tapmaly.

$\triangleleft$ $x \to 0$ bolanda $\sin 5x \sim 5x,\quad x + x^3 \sim x$ bolýandygy üçin agzalan häsiýetiň esasynda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x + x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x} = 5$. $\triangleright$

Tükeniksiz uly funksiýalar hem şular ýaly deňeşdirilýändir. Ony mysallarda düşündireliň.

1. $p(x) = x^2 + 5$ funksiýa $x \to \infty$ bolanda $q(x) = x^3 - 4$ görä kiçi tertipli tükeniksiz uly funksiýadyr, cünki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^3-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+5/x^2}{x-4/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

2. $p(x) = (1+x)/x$ we $q(x) = 1/x$ funksiýalar $x \to 0$ bolanda deňgüýçli tükeniksiz uly funksiýalar,çünki $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1$.

3. $p(x) = 2x^4 + 3x + 1$ funksiýa $x \to \infty$ bolanda $q(x) = x^2 + 1$ funksiýa görä ikinji tertipli tükeniksiz uly funksiýadyr, çünki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x+1}{(x^2+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x+1}{x^4+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+3/x^3+1/x^4}{1+2/x^3+1/x^4} = 2.$$

Şunlukda, $p(x) = 2x^4 + 3x + 1$ we $g(x) = x^4 + 2x + 1$ funksiýalar

$x \to \infty$ bolanda deň tertipli tükeniksiz uly funksiýalardyr.

§ 2. 7. Üznüksiz funksiýalar

Goý, f funksiýa a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun.

1-nji kesgitleme. Eger f funksiýanyň a nokatda predeli bar bolup, ol predel funksiýanyň şol nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \tag{21}$$

onda f funksiýa a nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

13-nji mysal. Hemişelik $f(x) = C$ we $g(x) = x$ funksiýalar san okunyň islendik a nokadynda üznüksizdir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = C = f(a), \quad \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x = a = g(a).$$

Şonuň üçin $\lim\limits_{x \to a} x = a$ deňlik esasynda funksiýanyň a nokatda üznüksizligini aňladýan (21) deňligi

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x \right),$$

görnüşde ýazmak bolar. Ol deňlik üznüksiz funksiýa üçin predeliň "lim" belgisi bilen funksiýany häsiýetlendirýän " f " belginiň ornuny çalşyryp bolýandygyny aňladýar.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, funksiýanyň nokatda üsnüksiz bolmagynyň esasy şertleriniň biri-de ol funksiýanyň şol nokatda predeliniň bolmagydyr. Şonuň üçin hem funksiýanyň predeliniň 1-nji we 2-nji kesgitlemelerini ulanyp, funksiýanyň nokatda üznüksizlik kesgitlemesini giňişleýin şeýle düşündirmek bolar.

2-nji kesgitleme. Eger a sana ýygnanýan $\forall \{x_n\}$ yzygiderlik üçin $\{f(x_n)\}$ yzygiderlik $f(a)$ sana ýygnanýan bolsa, onda f funksiýa a nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

3-nji kesgitleme. Eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tapylyp, $|x - a| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda f funksiýa a nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

Bu kesgitlemäni ulanyp, funksiýanyň a nokatda üznüksizligini aňladýan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ýazgyny gysgaça şeýle ýazmak bolar:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\delta > 0\ \ \exists)\ (|\,x - a\,| < \delta, \forall x) :|\ f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Kesgitlemelerden görnüşi ýaly, predeliň kesgitlemelerinden tapawuklylykda bu ýerde $x_n \neq a$ ýa-da $x \neq a$ şert talap edilmeýär.

Eger $\Delta x = x - a$ we $\Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ tapawutlar degişlilikde x üýtgeýäniň we funksiýanyň a nokatdaky artymlary bolsa, onda (21) deňligi $\lim\limits_{\Delta x \to o} \Delta f = 0$ görnüşde ýazmak bolar. Şoňa görä-de funksiýanyň a nokatda üznüksizliginiň kesgitlemesini ýene bir görnüşde getirmek bolar.

4-nji kesgitleme. Eger f funksiýanyň x üýtgeýäniniň a nokatdaky Δx artymy nola ymtylanda funksiýanyň şol nokatdaky artymy nola ymtylýan bolsa, onda f funksiýa a nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

14-nji mysal. $f(x) = \sin x$ funksiýanyň $\forall a \in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdigini görkezmeli.

◃ Mälim bolşy ýaly, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ bolanda $|\sin x| \leq |x|$. Şonuň esasynda $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ bolanda hem $|\sin x| = \sin|x| \leq |x|$ bolar. Eger $|x| \geq \dfrac{\pi}{2}$ bolsa, onda $|\sin x| \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} \leq |x|$. Şeýlelikde $\forall a \in R$ üçin $|\sin x| \leq |x|$. Bu deňsizligiň esasynda:

$$|\Delta f| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left|2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right| \leq 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$

Şonuň üçin hem $\lim\limits_{\Delta x \to o} \Delta f = 0$, ýagny $f(x) = \sin x$ funksiýa $\forall a \in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdir. ▹

§ 2.8. Üznüksiz funksiýalaryň esasy häsiýetleri

Nokatda üznüksiz funksiýanyň şol nokatda predeliniň barlygy esasynda, predeli bar funksiýalar üçin ýerine ýetýän häsiýetleriň hemmesi üznüksiz funksiýalar üçin hem dogrudyr. Olaryň esasylaryny ýatlalyň.

Eger f we g funksiýalar a nokatda üznüksiz bolsalar, onda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ we $f(x)/g(x)$ $(g(a)\neq 0)$ funksiýalar hem a nokatda üznüksizdirler.

Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz bolup, $f(a)\neq 0$ bolsa, onda ol nokadyň käbir etrabynda funksiýanyň alamaty $f(a)$ sanyň alamaty bilen gabat gelýär.

15-nji mysal. $\forall n\in N$ üçin $f(x)=x^n$ funksiýa $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdir.

⊲ Bu funksiýanyň $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksiligi $g(x)=x$ funksiýanyň üznüksizliginden esasy häsiýet boýunça gelip çykýar. ⊳

16-njy mysal. $P_n(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ bitin rasional funksiýa $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdir.

⊲ Bu funksiýanyň $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizligi 13-nji we 15-nji mysallarda garalan funksiýalaryň $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizliginden, esasy häsiýet boýunça gelip çykýar.⊳

17-nji mysal. $f(x)=P_n(x)/Q_m(x)$ drob rasional funksiýa $Q_m(x)$ köpagzanyň köki bolmadyk $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdir.

⊲ Bu funksiýanyň üznüksizligi esasy häsiýet boýunça 16-njy mysaldaky funksiýanyň üznüksizliginden gelip çykýar. ⊳

13-nji teorema (**Çylşyrymly funksiýanyň üznüksizligi**). Eger $u=\varphi(x)$ funksiýa a nokatda üznüksiz, $y=f(u)$ funksiýa $b=\varphi(a)$ nokatda üznüksiz bolsa, onda $F(x)=f[\varphi(x)]$ çylşyrymly funksiýa a nokatda üznüksizdir.

⊲ Eger $x\to a$ bolsa, onda φ funksiýanyň a nokatda üznüksizliginden $\varphi(x)\to\varphi(a)$ gelip çykýar, ýagny $u\to b$. Şonuň üçin f funksiýanyň b nokatda üznüksizliginden $f(u)\to f(b)$ gelip çykýar. Şeýlelikde,

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to b}f(u)=f(b)=f[\varphi(a)]=F(a),$$

ýagny $F(x)=f[\varphi(x)]$ funksiýa a nokatda üznüksizdir. ⊳

18-nji mysal. $f(x)=\cos x$ funksiýa $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdir.

◁ Bu funksiýa üznüksiz $u=\frac{\pi}{2}-x$ we $y=\sin u$ funksiýalara görä çylşyrymly $F(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ funksiýa hökmünde 13-nji teorema boýunça üznüksizdir. ▷

19-njy mysal. $f(x)=tg\ x$ funksiýa $\forall x\neq \pi/2+k\pi,\ k\in Z$ nokatda üznüksizdir.

◁ Bu funksiýanyň üznüksizligi $\sin x$ we $\cos x$ funksiýalaryň üznüksizliginden gelip çykýar. ▷

20-nji mysal. $f(x)=a^x\ (0<a\neq 1)$ görkezijili funksiýa $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizdir.

◁ Ilki bilen bu funksiýanyň $x=0$ nokatda üznüksizdigini, ýagny $\lim\limits_{x\to o} a^x=1$ deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň.

Goý, $a>1$ bolsun, onda $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ bolanda $a^{-1/n}<a^x<a^{1/n}$ deňsizlikler ýerine ýetýändir. Bu deňsizliklerden $n\to\infty$ bolanda, $x\to 0$ we $\lim a^{1/n}=1$ bolýandygy sebäpli $\lim\limits_{x\to o} a^x=1$ gelip çykýar. $a<1$ bolanda hem ol edil şonuň ýaly görkezilýär. Şoňa görä $\forall b\in \boldsymbol{R}$ üçin hem

$$\lim_{x\to b} a^x=\lim_{x\to b} a^b a^{x-b}=a^b\lim_{x\to b} a^{x-b}=a^b .$$

Bu ýerden b nokadyň erkinliginden $f(x)=a^x$ funksiýanyň $\forall x\in \boldsymbol{R}$ nokatda üznüksizligi gelip çykýar. ▷

§ 2. 9. Funksiýanyň birtaraplaýyn üznüksizligi we üzülme nokatlary

1. Funksiýanyň birtaraplaýyn üznüksizligi. Eger f funksiýanyň a nokatda sag (çep) predeli bar bolup, ol predel funksiýanyň a nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a)\quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a)\right),$$

onda f funksiýa a nokatda sagdan (çepden) üznüksiz funksiýa diýilýär.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, eger f funksiýa a nokatda hem çepden, hem sagdan üznüksiz bolsa, onda

$$f(a+o)=f(a-o)=f(a) \qquad (22)$$

deňlikler ýerine ýeter, ýagny f funksiýa a nokatda üznüksiz bolar. Funksiýanyň a nokatda üznüksizliginden, onuň şol nokatda hem çepden, hem sagdan üznüksizligi gelip çykýar we şonuň esasynda (22) deňlikler ýerine ýetýär. Şeýlelikde, f funksiýanyň a nokatda üznüksiz bolmagy üçin onuň şol nokatda hem sagdan, hem çepden üznüksiz bolmagy, ýagny (22) deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

2. Funksiýanyň üzülme nokatlary. Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz bolmasa, onda a nokada f funksiýanyň üzülme nokady diýilýär.

Eger funksiýanyň a nokatda biri-birine deň bolmadyk birtaraplaýyn

$$f(a-o)=\lim_{x\to a-o} f(x) \quad \text{we} \quad f(a+o)=\lim_{x\to a+o} f(x) \qquad (23)$$

predelleri bar bolsa, onda a nokada f funksiýanyň üzülme nokadynyň birinji görnüşi diýilýär.

Başgaça aýdylanda, eger (23) predeller bar bolup, olaryň iň bolmanda birisi funksiýanyň $f(a)$ bahasyna deň bolmasa, onda a nokada f funksiýanyň üzülme nokadynyň birinji görnüşi diýilýär. Şunlukda, $f(a+o)-f(a-o)$ tapawuda funksiýanyň a nokatdaky bökmesi diýilýär.

21-nji mysal. $x=0$ nokat $f(x)=\operatorname{sgn} x$ funksiýanyň üzülme nokadynyň birinji görnüşidir, çünki $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{sgn} x=-1$, $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{sgn} x=1$ we $f(0)=0$ .Onuň bökmesi $f(+o)-f(-o)=1-(-1)=2$ bolar.

Eger (23) predeller bar bolup,

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a-o)=f(a+o)=A$$

deňlikler ýerine ýetse we $A\neq f(a)$ bolsa ýa-da a nokatda f kesgitlenen bolmasa, onda a nokada f funksiýanyň aýrylýan üzülme nokady diýilýär. Bu halda üzülme nokadyň şeýle atlandyrylmagy, funksiýanyň şol nokatdaky bahasyny üýtgedip, ýagny $f(a)=A$ alyp, funksiýany a nokatda hem üznüksiz edip (ýagny üzülme nokadyny aýryp) bolýandygy bilen düşündirilýär.

Mysal üçin, $x=0$ nokat $g(x)=|\operatorname{sgn} x|$ funksiýanyň üzülme nokadydyr, çünki

$$\lim_{x\to -o} |\operatorname{sgn} x)| = \lim_{x\to +o} |\operatorname{sgn} x| = 1 \neq |\operatorname{sgn} 0| = g(0).$$

Eger $g(0)=1$ alsak, onda $x=0$ nokatda $g(x)$ funksiýa üznüksiz bolar, ýagny $x=0$ ol funksiýanyň aýrylýan üzülme nokadydyr.

Eger funksiýanyň a nokatda birtaraplaýyn predelleriniň iň bolmanda biri ýok ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda a nokada f funksiýanyň üzülme nokadynyň ikinji görnüşi diýilýär.

22-nji mysal. $f(x)=1/x$ we $g(x)=3^{1/x}$ funksiýalaryň üzülme nokadyny anyklamaly.

◃ Bu funksiýalar üçin $x=0$ nokat üzülme nokadynyň ikinji görnüşidir, çünki $f(-0)=-\infty$, $f(+0)=+\infty$ we $g(-0)=0$, $g(+0)=+\infty$. ▹

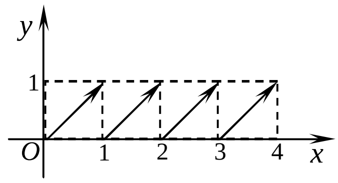
Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimiň tükenikli sany birinji görnüşdäki üzülme nokatlaryndan başga ähli nokatlarynda üznüksiz bolsa, onda f funksiýa $[a,b]$ kesimde bölek üznüksiz funksiýa diýilýär.

23-nji mysal. $f(x)=x-[x]$ funksiýanyň $[0,\ b]$, $b>1$ kesimde bölek üznüksizdigini subut etmeli.

◃ Ol funksiýanyň $a=n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ nokatlar üçin birtaraplaýyn predellerini hasaplalyň:

$$\lim_{x\to n-o} (x-[x]) = 1 \neq n-[n],$$

$$\lim_{x\to n+o} (x-[x]) = 0 = n-[n]$$



2-nji surat

ýagny $a=n$ nokatlar funksiýanyň birinji görnüşdäki üzülme nokatlary bolup, ähli beýleki nokatlarda ol funksiýa üznüksizdir, ýagny ol bölek üznüksizdir. Onuň çyzgysy 2-nji suratda şekillendirilendir ▹

§ 2. 10. Käbir wajyp predeller

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$**.** Bu deňligi subut etmek üçin

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

deňlikden we logarifmik funksiýanyň üznüksizliginden peýdalanarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e\,.$$

Bu ýerden $a=e$ bolan hususy halda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ formula alynýar.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ **.** Görkezijili funksiýanyň üznüksizligi esasynda $x\to 0$ bolanda $y=a^x-1\to 0$ bolar. $y=a^x-1$ deňligiň esasynda $a^x=y+1,\ \ x=\log_a(1+y)$. Şonuň üçin hem

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a\,\textbf{.}$$

Bu ýerden $a=e$ bolanda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ formula gelip çykýar.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lambda$. Bu formulany subut etmek üçin 1-nji we 2-nji wajyp predellerden we $x\to 0$ bolanda $y=\lambda\ln(1+x)\to 0$ bolýanlygyndan peýdalanyp alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda\ln(1+x)}-1}{\lambda\ln(1+x)}\lambda\frac{\ln(1+x)}{x}=\lambda.$$

24-nji mysal. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}$ predeli hasaplamaly.

◁ Predeli hasaplamak üçin 1--nji wajyp predeliň hususy halyny ulanarys:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos^2 x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(1-\cos^2 x\right)}{-\cos^2 x}=-\frac{1}{2}.\ \triangleright$$

25-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-5x+6}$ predeli hasaplamaly.

◁ Predeli hasaplamak üçin 2-nji wajyp predelden peýdalanarys:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-x-2}\times\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}\right)=$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-x-2} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = -3\ln 3. \ \triangleright$$

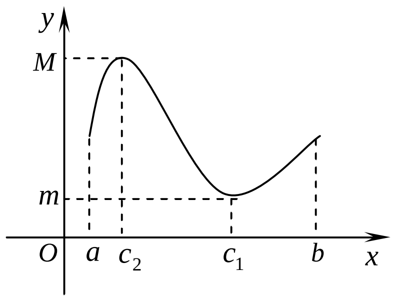
§ 2. 11. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň häsiýetleri

Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimiň ähli içki nokatlarynda üznüksiz bolup, a nokatda sagdan we b nokatda çepden üznüksiz bolsa, onda f funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiýa diýilýär.

Eger şeýle $c \in [a,b]$ nokat tapylyp, $\forall x \in [a,\ b]$ üçin $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$) deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(c)$ sana f funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki iň uly (iň kiçi) bahasy diýilýär.

23-nji mysaldaky funksiýanyň bahalar köplügi $[0,\ 1)$ aralykdyr, şoňa görä ol funksiýa çäklidir we onuiň takyk çäkleri bardyr.Şunlukda, takyk aşaky çägi funksiýanyň iň kiçi bahasy bilen gabat gelýär (ol nola deň), ýone funksiýa iň uly bahany almaýar.

14-nji teorema (Weýerştras). Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol kesimde çäklidir we iň kiçi m we iň uly M bahalary alýandyr, ýagny şeýle $c_1, c_2 \in [a,b]$ tapylyp, $f(c_1) = m$ we $f(c_2) = M$ bolar.



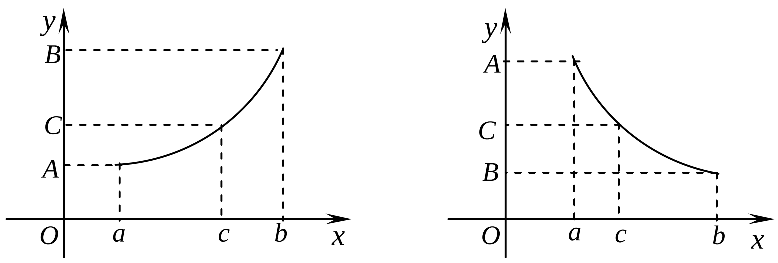
3-nji surat

Bu teoremanyň geometrik manysy 3-nji suratda şekillendirilendir.

Kesimde üznüksiz funksiýa üçin ýerine ýetýän bu teorema aralykda üznüksiz funksiýa üçin dogry däldir. Mysal üçin, $(0,\ 1)$ aralykda üznüksiz $y = 5x^2$ funksiýa şol aralykda $m = 0$ we $M = 5$ bahalary almaýar, çunki funksiýa ol bahalary $x = 0$ we $x = 1$ nokatlarda alýar, olar bolsa seredilýän aralyga degişli däldir.

15-nji teorema (Aralyk baha hakynda). Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolup, $A = f(a) \ne f(b) = B$ bolsa, onda ol funksiýa A we B bahalaryň arasyndaky islendik C bahany alýar, ýagny $(a,\ b) \ni c$

tapylyp, $f(c)=C$ deňlik ýerine ýeter.
Bu teoremanyň geometrik manysy 4-nji suratda görkezilendir we ol $A<C<B$ (ýa-da $A>C>B$) şerti kanagatlandyrýan islendik C üçin $y=C$ göni çyzygyň $y=f(x)$ funksiýanyň çyzgysyny kesýändigini aňladýar.



4-nji surat

Eger $[a, b]$ kesimiň käbir c nokadynda $f(c)=0$ bolsa, onda ol nokada f funksiýanyň noly diýilýär.

16-njy teorema (Funksiýanyň noly hakynda). Eger $[a, b]$ kesimde üznüksiz f funksiýanyň şol kesimiň uçlaryndaky bahalarynyň alamatlary dürli bolsa, ýagny $f(a)\cdot f(b)<0$ deňsizlik ýerine ýetse, onda funksiýanyň (a, b) aralykda iň bolmanda bir noly bardyr.

Bu teorema 15-nji teoremanyň $A\cdot B<0$ we $C=0$ bolýan hususy haly bolup**,** onuň geometrik manysy $f(a)\cdot f(b)<0$ bolanda $(a,\ f(a))$ we $(b,\ f(b))$ nokatlary birleşdirýän $y=f(x)$ üznüsiz funksiýanyň çyzgysy Ox okuny kesýändir.

$[a, b]$ kesimde üznüksiz funksiýalaryň köplügini $C[a,b]$ bilen belgiläris. Şunlukda, $f\in C[a,b]$ ýazgy f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde üznüksizdigini aňladýar.

G ö n ü k m e l e r

1. Umumy agzasy berlen yzygiderligiň ilkinji bäş agzasyny ýazmaly:

1) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$. 2) $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2}$. 3) $x_n = 2^{n-(-1)^n}$.

2. Yzygiderligiň ilkinji $1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ agzalaryny ulanyp, onuň umumy agzasynyň formulasyny ýazmaly.

3. Yzygiderligiň ilkinji n agzalarynyň jemi $S_n = 3n^2$ formula bilen aňladylýar. Ol yzygiderligiň arifmetik progressiýadygyny subut etmeli we onuň ilkinji agzasyny we tapawudyny tapmaly.

4.Yzygiderlikleriň haýsysynyň ýokardan, aşakdan, ýokardan we aşakdan çäklidigini anyklamaly:

1) $x_n = n^2 - 1$. 2) $x_n = \dfrac{n+2}{n^2+2}$. 3) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. 4) $x_n = \dfrac{n}{3^n}$.

5. Yzygiderlikleriň haýsysynyň artýandygyny, kemelýändigini, monoton däldigini kesgitlemeli:

1) $x_n = \dfrac{2}{n+3}$. 2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. 3) $x_n = \ln(1+n)$. 4) $x_n = 3^{-n}$.

6. Kesgitlemeden peýdalanyp, deňlikleri subut etmeli:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2} = 0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+3} = 2$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-1}{4^4} = 1$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 0$

.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1} = 2$ predeli ulanyp, $\left|\dfrac{2n+3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ deňsizligiň $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01$ üçin $n > n_o$ bolanda ýerine ýetýän n_o belgileri görkezmeli.

8, Predelleri tapmaly:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+3^n}$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$. 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+4}$. 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{2n^2+1}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}$. 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}$. 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3}{2n^3+2}$.

9. Yzygiderlikleriň predelerini tapmaly:

1) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. 2) $x_n=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1}$.

3) $x_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. 4) $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots\dfrac{1}{n(n+1)}$.

10. Funksiýalaryň predellerini tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+6x+8)$. 2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-2x^2+3x-1)$.

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{7x}$.

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$. 8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$.

9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$.

11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$. 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$. 14) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$.

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. 16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$.

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$. 18) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$.

19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. 20) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$.

21) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$. 22) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

23) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. 24) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}{(x-5)^2}$.

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)^3}{x^3}$. 26) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$.

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$. 28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$.

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$. 30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$. 34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

35) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$. 36) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$.

37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$. 38) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$. $\left\langle\dfrac{m}{n}.\right\rangle$ 40) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$. $\left\langle\dfrac{2}{\pi}.\right\rangle$

41) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}$. 42) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{1+x^2}-1\right)tg\dfrac{x}{3}}{x}$.

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x}$. 44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cos\pi x}{x}$.

45) $\lim\limits_{x\to 0}xctgx$. 46) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3tg^2x\right)^{ctg^2x}$.

Käbir predelleri hasaplamak üçin belli bolan trigonometrik formulalary peýdalanmak zerur bolýar:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \ tg\,2x = \frac{2tgx}{1-tg^2 x},$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},\ \ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2},\ \ \ tg^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

$$.\ \ \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \ \ \sin x - \sin y =$$

$$= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},\ \ \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

47) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$. 48) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

49) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$. 50) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x}$.

51) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$. 52) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

53) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos x}$. 54) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

55) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 2x-2\cos x}{2\cos x-2}$. 56) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

57) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2 x}$. 58) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$.

11. Aşakdaky $x\to 0$ bolanda tükeniksiz kiçi bolan funksiýalaryň haýsysy $\beta(x)=x$ funksiýa görä deň tertipli, ýokary tertipli, kiçi tertipli tükeniksiz kiçi funksiýadyr?

1) $\alpha(x)=3x;$ 2) $\alpha(x)=4\sin x;$ 3) $\alpha(x)=5x^2;$

4) $\alpha(x)=3\sin^2 x;$ 5) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2+x};$ 6) $\alpha(x)=\sqrt[3]{tgx};$

12. Berlen funksiýalaryň berlen nokatlarda üznüksizligini barlamaly:

1) $f(x)=x+1$ funksiýanyň $x=-1,\ x=1$ nokatlarda.

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\geq 1,\\ x, & x<1\end{cases}$ funksiýanyň $x=1$ nokatda.

3) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ 3, & x=1,\\ x+1, & x>1\end{cases}$ funksiýanyň $x=1$ nokatda.

13. Funksiýa görkezilen nokatda nähili kesgitlenende şol nokatda ol üznüksiz bolar:

1) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x=1$. 2) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $x=0$.

14. Funksiýanyň üzulme nokatlaryny tapmaly, olaryň görnüşlerini kesgitlemeli we funksiýanyň çyzgysyny gurmaly:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$. 2) $f(x)=\dfrac{9}{9-x^2}$. 3) $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$.

15. Funksiýanyň üzulme nokatlaryny tapmaly we şol nokatlarda onuň bökmesini kesgitlemeli:

1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 2,\\ x+1, & x>2\end{cases}$. 2) $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1,\\ 3x+2, & x\geq 1\end{cases}$

16. Deňlemäniň görkezilen aralykda iň bolmanda bir köküniň bardygyny subut etmeli:

1) $x^3+4x-6=0,\ (1,\ 2)$. 2) $x^4-2{,}15x+0{,}95=0,\ (1,\ 2)$

J o g a p l a r

1. 1) $x_1=1$; $x_2=3/5$; $x_3=2/5$; $x_4=5/17$; $x_5=3/13$. 2) $x_1=2$; $x_2=-3/4$; $x_3=4/9$; $x_4=-5/16$; $x_5=6/25$. 3) 4; 2; 16; 8; 64.
2. $x_n=1/(2n-1)^2$. **4.** 1) aşakdan . 2) - 4) ýokardan we aşakdan.
5. 1) kemelýär. 2) monoton däl. 3) artýar. 4) kemelýär.
7. $n_o(0{,}1)=9$; $n_o(0{,}01)=99$. **8.** 1) 1. 2) 0. 3) e^{-1}. 4) e^3. 5) $2/3$.

6) 0. 7) 2. 8) 1/2 . 9) 3/2 . **9.** 1) 0. 2) 1/2 . 3) 1/3 . 4) 1.
10. 1) 0 . 2) –7 . 3) 3 . 4) -1. 5) 3. 6) –1/7. 7) 2. 8) 1/3. 9) 2/3. 10).3/2 . 11) –8. 12) 1/2. 13) 1/3. 14) 1/3. 15) 1/2 . 16) 1. 17) 1. 18) 1/2 . 19) 15/2. 20) 1/2. 21) 3. 22) 5/2. 23) 12/5. 24) 1/16.
25) –1. 26) 0. 27) ∞. 28) 2/3. 29) e^{-1}. 30) e^{-1}. 31) *e*. 32) e^2. 33) 2. 34) 2. 35) 0. 36) 1/2 . 37) 2. 38) *x*. 39) m/n . 40) $2/\pi$. 41) *e*.
42) 0. 43) 0. 44) 1/2 . 45) 1. 46) e^3. 47) $-\sin\alpha$. 48 $2\cos\alpha$. 49) $(n^2-m^2)/2$. 50) $-2\cos\alpha$. 51) 1/2 . 52) $-1/4$. 53) $\sqrt{2}/2$. 54) $\sqrt{3}/2$. 55) 1. 56) $1/2$. 57) $1/4$. 58) $1/2$. **11.** 1), 2) - deň tertipli. 3), 4) - ýokary tertipli, 5), 6) - kiçi tertipli. **12.** 1) ikisinde-de üznüksiz .2) üznüksiz .3) üznüksiz däl. **13.** 1) $f(1)=3/2$. 2) $f(0)=1$.
14. 1) $x=-3$ ikinji görnüşli üzülme nokat. 2) $x=-3,\ x=3$ ikinji görnüşli üzülme nokatlar. 3) $x=-1$ ikinji görnüşli üzülme nokat. **15.** 1) $x=2$, $f(2+0)-f(2-0)=1$. 2) $x=1$, $f(1+0)-f(1-0)=4$.

II. 3. FUNKSIÝANYŇ ÖNÜMI WE DIFFERENSIALY

§ 3.1. Eunksiýanyň önümi

1. Önüm düşünjesi. Funksiýanyň predeli düşünjesi bilen ýakyn baglanyşykda bolan ýene bir wajyp düşünjeleriň biri-de funksiýanyň önümi düşünjesidir.

Goý, $y = f(x)$ funksiýa x nokadyň käbir $U(x)$ etrabynda kesgitlenen bolup, x üýtgeýäniň Δx artymy üçin $x + \Delta x \in U(x)$ bolsun. $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ artymynyň üýtgeýäniň Δx artymyna bolan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

gatnaşygyna garalyň.

1-nji kesgitleme. Eger (1) gatnaşygyň $\Delta x \to 0$ bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky önümi diýilýär.

$y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky önümi $f'(x)$ bilen, ýa-da $y'(x)$ bilen, ýa-da gysgaça y' bilen belgilenilýär.

Diýmek, önümiň kesgitlemesi boýunça

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Kesgitlemeden peýdalanyp, mysal hökmünde käbir elementar funksiýalaryň önümlerini tapalyň.

1-nji mysal.. $f(x) = C$ – hemişelik funksiýa.

Islendik x we Δx üçin bu funksiýanyň artymy nola deňdir, ýagny $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Onda (2) formula esasynda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad C' = 0.$$

Şeýlelikde, hemişelik funksiýanyň önümi nola deňdir.

2-nji mysal. $f(x) = x^p$, $p \in \boldsymbol{R}$.

Bu funksiýa üçin $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^p - x^p$. Şonuň üçin hem (2) formula esasynda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^p - x^p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^p \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^p - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^{p-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^p - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{p-1} \cdot p = px^{p-1}, \quad \left(x^p\right)' = px^{p-1}.$$

Bu formuladan hususy hal hökmünde

$$x' = 1, \ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

formulalar alynýar.

Funksiýanyň nokatdaky sag we çep predelleri düşünjelerinden peýdalanyp, funksiýanyň nokatdaky sag we çep önümleri düşünjelerini girizeliň.

2-nji kesgitleme. Eger (1) gatnaşygyň $\Delta x \to +0$ $(\Delta x \to -0)$ bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky sag (çep) önümi diýilýär.

$y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky sag (çep) önümi $f'_+(x)$ $(f'_-(x))$ bilen belgilenilýär. Diýmek, kesgitlemä görä,

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \left(f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Bu önümlere birtaraplaýyn önümler diýilýär. Olar $f'(x+0)$ we $f'(x-0)$ görnüşde hem belgilenilýär.

1-nji we 2-nji kesgitlemelerden hem-de funksiýanyň birtaraplaýyn predelleriniň häsiýetleri esasynda aşakdaky tassyklamalar alynýar.

1. Eger f funksiýanyň x nokatda önümi bar bolsa, onda onuň x nokatda sag önümi hem, çep önümi hem bardyr we olar deňdirler:

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x).$$

2. Eger f funksiýanyň x nokatda sag we çep önümleri bar bolup, olar deň bolsalar, onda ol funksiýanyň x nokatda önümi bardyr we ol önümleriň hemmesi deňdirler.

3. Eger f funksiýanyň x nokatda sag we çep önümleri bar bolup, olar deň bolmasalar, onda x nokatda onuň önümi ýokdur.

3-nji mysal. $f(x) = |x|$.

Eger $x > 0$ bolsa, onda $f(x) = x$ bolar we şonuň üçin 2-nji mysal esasynda $|x|' = 1$. Şuňa meňzeşlikde $x < 0$ bolanda $|x|' = -1$. Eger-de $x = 0$ bolsa, onda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

deňlik esasynda

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{(-\Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

Diýmek, $f(x) = |x|$ funksiýanyň $x = 0$ nokatdaky sag önümi 1 we çep önümi -1 bolýandyr. Şoňa görä, 3-nji tassyklama esasynda $f(x) = |x|$ funksiýanyň $x = 0$ nokatda önümi ýokdur.

Eger käbir x nokatda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = +\infty$$

ýa-da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\infty$$

predel bar bolsa, onda funksiýanyň $+\infty$ ýa-da $-\infty$ deň bolan tükeniksiz önümi bar diýilýär. Geljekde funksiýanyň önümi bar diýip tükenikli önüme düşünjekdiris

2. Önümiň fiziki manysy. Goý, material nokat göni çyzyk boýunça hereket edýän bolup, $y = f(x)$ şol nokadyň hereketiniň kanunyny, ýagny $t = 0$ wagtdan $t = x$ wagt aralygynda geçen ýoluny aňlatsyn. Onda $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ tapawut $t = x$ wagtdan $t = x + \Delta x$ wagt aralygynda, ýagny Δx wagtda geçilen ýoly aňladýar. Şonuň üçin hem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = v_{or} \tag{3}$$

gatnaşyk material nokadyň şol wagt aralygyndaky ortaça tizligidir. Eger hereket deňölçegli bolmasa, onda bellenen x üçin Δx ululygyň üýtgemegi bilen ortaça v_{or} tizlik hem üýtgär we Δx näçe kiçi boldugyça v_{or} tizlik nokadyň x pursatdaky hereketini şonça oňat häsiýetlendirer.

Eger (3) gatnaşygyň, ýagny ortaça tizligiň $\Delta x \to 0$ bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele material nokadyň x pursatdaky tizligi diýilýär. Diýmek,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = v. \qquad (4)$$

Ýöne bu predel f funksiýanyň x nokatdaky önümini hem aňladýar.

Şeýlelikde, $f'(x)=v$ we ol deňlik önümiň mehaniki manysyny aňladýar. Diýmek, x nokatda funksiýanyň $f'(x)$ önüminiň barlyk meselesi material nokadyň x pursatdaky tizligini kesgitlemek meselesidir.

2. Onümiň himiki manysy. Goý, $y=f(x)$ himiki reaksiýa geçýän jisimiň x pursatdaky mukdaryny aňladýan bolsun. Onda Δx wagt aralygynda himiki reaksiýa geçýän jisimiň mukdary $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ bolar. Şoňa görä $\Delta y/\Delta x$ gatnaşyk Δx wagt aralygyndaky himiki reaksiýanyň ortaça tizligidir. Ol gatnaşygyň (4) predeline bolsa himiki reaksiýanyň x pursatdaky tizligi diýilýär. Ol predel f funksiýanyň x nokatdaky önümini hem aňladýar, ýagny $f'(x)=v$. Ol deňlik onümiň himiki manysyny aňladýar we himiki reaksiýanyň tizligini tapmak meselesiniň önüm düşünjesine getirýändigini görkezýär.

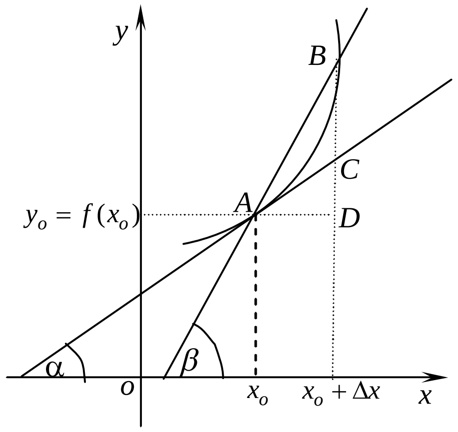
3. Önümiň geometrik manysy. Goý, $y=f(x)$ funksiýa x_o nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen we üznüksiz bolsun. Ol funksiýanyň çyzgysyndaky $A(x_o, y_o)$ $(y_o = f(x_o))$ we $B(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)$ nokatlar arkaly kesiji göni çyzyk geçireliň. Onuň Ox oky bilen emele getirýän burçuny $\beta = \beta(\Delta x)$ bilen belgiläliň (1-nji surat). Eger $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta(\Delta x) = \alpha$ predel bar bolsa, onda $k = tg\alpha$ burç koeffisiýentli AC göni çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň çyzgysyna A nokatda geçirilen galtaşma diýilýär. 1-nji surat esasynda

$$tg\beta(\Delta x) = \frac{BD}{AD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}, \qquad (5)$$

ýagny $\beta(\Delta x) = arctg(\Delta y/\Delta x)$. Eger f funksiýanyň x_o nokatda önümi bar bolsa, onda arktangensiň üznüksizligi sebäpli,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} arctg\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = arctgf'(x_o)$$

deňligi alarys. Diýmek, çyzgynyň A nokadynda galtaşma bardyr we $\alpha = arctgf'(x_o)$, ýagny galtaşmanyň $tg\alpha = k$ burç koeffisiýenti $f'(x_o)$ önüme deňdir: $tg\alpha = f'(x_o)$ we ol önümiň geometrik manysyny aňladýar.



1-nji surat

Şeýlelikde, egri çyzyga galtaşma geçirmek meseläniň hem önüm düşünjesine getirýändigini gördük.

Indi x_o nokatda önümi bar bolan $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine $A(x_o, y_o)$ nokatda geçirilen galtaşmanyň

$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

we normalyň

$$y = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o) + f(x_o)$$

deňlemelerini ýazyp bileris.

§ 3. 2. Funksiýanyň differensirlenmegi

1. Differensirlenmegiň üznüksizlik bilen baglanyşygy. Eger x nokatda funksiýanyň önümi bar bolsa, onda oňa şol nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. Şoňa görä funksiýanyň önümini tapmaklyga differensirlemek hem diýilýär. x nokatda differensirlenýän f funksiýa üçin (2) deňlik ýerine ýetýändir we predeliň häsiýeti esasynda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

deňligi hem-de ondan gelip çykýan

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (6)$$

deňligi ýazyp bileris, bu ýerde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

1-nji teorema. Eger f funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda ol funksiýa şol nokatda üznüksizdir.

$\lhd$ x nokatda differensirlenýän $y = f(x)$ funksiýanyň Δy artymy üçin (6) ýerine ýetýändir we şonuň üçin hem $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, ýagny funksiýa x nokatda üznüksizdir. $\rhd$

Bu teoremanyň tersi dogry däldir, ýagny funksiýanyň nokatda üznüksizliginden ol funksiýanyň şol nokatda differensirlenmegi gelip çykmaýar. Oňa $x = 0$ nokatda üznüksiz, ýöne şol nokatda önümi ýok bolan 3-nji mysaldaky $y = |x|$ funksiýany mysal görkezmek bolar.

Eger funksiýa käbir aralygyň ähli nokatlarynda differensirlenýän bolsa, onda oňa şol aralykda differensirlenýän funksiýa diýilýär. 1-nji teorema boýunça aralykda differensirlenýän funksiýa şol aralykda üznüksizdir.

2. Differensirlemegiň esasy düzgünleri. Funksiýalaryň önümini tapmak üçin, köplenç, aşakdaky teorema ulanylýar.

2-nji teorema. Eger $u = u(x)$ we $v = v(x)$ funksiýalaryň x nokatda önümleri bar bolsa, onda şol nokatda $u \pm v$, $u \cdot v$ we u / v ($v(x) \neq 0$ bolanda) funksiýalaryň hem önümleri bardyr hem-de

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (7)$$

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad (8)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (9)$$

formulalar dogrudyr.

$\lhd$ Goý, $y(x) = u(x) \pm v(x)$ bolsun, onda

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x) - [u(x) \pm v(x)] =$$
$$= u(x + \Delta x) - u(x) \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v .$$

Bu ýerden $\Delta x \neq 0$ bolanda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

deňlik alynýar. Ol deňlikde $\Delta x \to 0$ bolanda, predele geçip,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v'$$

deňligi alarys, ýagny $y'=(u\pm v)'=u'\pm v'$.

Goý, indi $y(x)=u(x)v(x)$ bolsun, onda

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)=$$
$$=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]$$

Bu ýerden $\Delta x\neq 0$ bolanda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad (10)$$

deňlik alynýar. 1-nji teorema esasynda

$$\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x). \qquad (11)$$

Şoňa görä $\Delta x\to 0$ bolanda (10) deňlikde predele geçip,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'v+uv'$$

deňligi alarys, ýagny $y'=(uv)'=u'v+uv'$.

Goý, $y(x)=u(x)/v(x)$ we $v(x)\neq 0$ bolsun, onda

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=$$
$$=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}=$$
$$=\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

Şeýlelikde, $\Delta x\neq 0$ bolanda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}. \qquad (12)$$

(I1) deňlik esasynda bu deňlikde $\Delta x\to 0$ bolanda predele geçip,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

deňdigi alarys, ýagny $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. ▷

1-nji netije. Hemişelik c we differensirlenýän $u,\ v,\ w$ funksiýalar üçin

$$(u+v-w)' = u' + v' - w', \quad (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw',$$

$$(cu)' = cu', \quad \left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{cu'}{u^2}$$

formulalar dogrudyr.

3.Trigonometrik we logarifmik funksiýalaryň önümi. $f(x) = \sin x$ funksiýa üçin

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Şoňa görä hem (2) formula we 1-nji ajaýyp predel esasynda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

ýagny $(\sin x)' = \cos x$. Şuňa meňzeşlikde $(\cos x)' = -\sin x$. Onda (9) formulanyň esasynda $tgx = \sin x/\cos x$ $(x \neq \pi/2 + \kappa\pi, \kappa \in Z)$ we $ctgx = \cos x/\sin x$ $(x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in Z)$ funksiýalaryň önümlerini taparys:

$$(tgx)' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(ctgx)' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1,\ x > 0)$ logarifmik funksiýa üçin

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a(1 + \Delta x/x)$$

bolar. Şoňa görä ikinji ajaýyp predelden we logarifmik funksiýanyň üznüksizliginden peýdalanyp,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x \to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x}\right] = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

deňligi alarys, ýagny $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$. Bu ýerden $a = e$ bolanda $(\ln x)' = 1/x$ formula alynýar.

§ 3. 3. Ters we çylşyrymly funksiýanyň önümi

1.Ters funksiýanyň önümi. Goý, $y = f(x)$ we $x = g(y)$ özara ters funksiýalar bolsun.

3-nji teorema. Eger $y = f(x)$ we $x = g(y)$ differensirlenýän özara ters funksiýalar bolup, $f'(x) \neq 0$ bolsa, onda olaryň önümleri üçin

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{13}$$

formula dogrudyr.

◁ Differensirlenýän funksiýalar üçin $(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow (\Delta y \to 0)$. Şoňa görä

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

deňlikde predele geçip, (13) deňligi alarys. ▷

2.Ters trigonometrik we görkezijili funksiýalaryň önümi. Mälim bolşy ýaly, $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$ funksiýa $x = \sin y$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$ funksiýanyň ters funksiýasydyr we $(\sin y)' = \cos y \neq 0$. Şoňa görä 3-nji teorema esasynda

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Edil şuňa meňzeşlikde

$$.\ (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = arctgx$ funksiýanyň bolsa $x = tgy$ funksiýa üçin ters funksiýa bolýandygy sebäpli, $(tgy)' = 1/\cos^2 y = 1 + tg^2 y$ deňlik we (13) formula esasynda

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad .$$

Edil şonuň ýaly

$$(arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = \frac{1}{-1/\sin^2 y} = \frac{1}{-(1+ctg^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$y = a^x (0 < a \neq 1)$ görkezijili funksiýanyň $x = \log_a y$ logarifmik funksiýanyň ters funksiýasydygy esasynda 3-nji teorema boýunça

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{(\log_a e)/y} = \frac{y}{\log_a e} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a .$$

Bu formuladan $(e^x)' = e^x$ formulany alarys.

3. Çylşyrymly funksiýanyň önümi. Bu funksiýanyň önümini tapmak aşakdaky teorema esaslanýar.

4-nji teorema. Eger $u = \varphi(x)$ we $y = f(u)$ funksiýalar özleriniň üýtgeýänlerine görä diferensirlenýän bolsa, onda $y = f[\varphi(x)]$ çylşyrymly funksiýanyň önümi üçin

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x) \qquad (y'_x = f'_u \cdot u'_x) \tag{14}$$

formula dogrudyr.

◁ $y = f(u)$ funksiüanyň u boýunça differensirlenýändigi üçin, (6) deňlik esasynda

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u . \tag{15}$$

Bu deňligi $\Delta x \neq 0$ bölüp, ony

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{16}$$

görnüşde ýazmak bolar. $u = \varphi(x)$ funksiýanyň x nokatda önüminiň barlygyndan onuň şol nokatda üznüksizligi gelip çykýar, ýagny $\Delta x \to 0$ bolanda, $\Delta u \to 0$ bolar we şonuň esasynda $\alpha(\Delta u) \to 0$. Şonuň üçin (16) deňlikde $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip, $y = f[\varphi(x)]$ çylşyrymly funksiýa üçin (14) formulany alarys. ▷

4-nji mysal. $y = \sin(5x - 7)$ funksiýanyň önümini tapmaly.

◁ Eger berlen funksiýany $y = \sin u$, $u = 5x - 7$ görnüşde ýazsak, onda $y'(u) = \cos u = \cos(5x-7)$, $u'(x) = 5$ deňlikleriň esasynda (14) formula boýunça $y'(x) = \cos(5x-7) \cdot 5 = 5\cos(5x-7)$. ▷

Eger $y = y(x)$ funksiýa $F(x,y)=0$ deňleme arkaly anyk däl görnüşde berlen bolsa, onda $F(x,y)$ funksiýa x ululyga görä çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, $y' = y'(x)$ önümi $[F(x,y)]' = 0$ deňlemeden tapmak bolar.

5-nji mysal. $xy + \cos y = 0$ anyk däl deňlemäniň kömegi bilen berlen $y = y(x)$ funksiýanyň $y' = y'(x)$ önümini tapmaly.

$\triangleleft$ Deňlemäniň çep bölegine x ululyga görä çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, (8) we (9) formulalary ulanyp taparys:

$$y + xy' - \sin y \cdot y' = 0, \qquad y' = y/(\sin y - x). \ \triangleright$$

4. Funksiýanyň logarifmik önümi. Eger $x \neq 0$ bolsa, onda

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$$

deňlikleriň esasynda $(\ln|x|)' = 1/x$ bolar.Bu formulany ulanyp, çylşyrymly $y = \ln|f(x)|$ funksiýanyň önümini tapalyň. (14) formula esasynda

$$y' = (\ln|f(x)|)' = (\ln|u|)' = \frac{1}{u}u' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{17}$$

Şunlukda, $(\ln|f(x)|)'$ önüme $f(x)$ funksiýanyň logarifmik önümi diýilýär we ol (17) formula boýunça tapylýar.

6-njy mysal. $y = x^x$ funksiýanyň önümini tapmaly.

$\triangleleft$ Položitel x üçin funksiýany logarifmläp, ony $\ln y = x \ln x$ görnüşde ýazarys. (17) we logarifmiň önüminiň formulasyny .ulanyp alarys:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1). \triangleright$$

5. Giperbolik funksiýalaryň önümi. Çylşyrymly we görkezijili funksiýalaryň önüminiň formulasy esasynda $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

Şoňa görä $$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx\ ,$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx,$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'chx - (chx)'shx}{ch^2x} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x},$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)'shx - (shx)'chx}{sh^2x} = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}.$$

6. Funksiýalaryň önüminiň tablisasy. Funksiýalaryň önümleri tapylan ýokardaky mysallary bir ýere toplap, önümler üçin şeýle tablisany alarys.

1. $(C)' = 0, \quad C = const.$
2. $(x^p)' = px^{p-1}, \quad p \in \boldsymbol{R}, \quad x > 0$

   $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathrm{N}, \quad x \in \boldsymbol{R}.$
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in \boldsymbol{R}; \quad (\boldsymbol{e}^x)' = e^x.$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x > 0.$

   $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad 0 < a \neq 1, \quad x \neq 0.$

   $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$
5. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \boldsymbol{R}.$
6. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \boldsymbol{R}.$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathrm{Z}..$
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathrm{Z}..$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \boldsymbol{R}$.

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \boldsymbol{R}$.

13. $(shx)' = chx, \quad x \in \boldsymbol{R}$

14. $(chx)' = shx, \quad x \in \boldsymbol{R}$

15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in \boldsymbol{R}$

16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$

7. Parametrik görnüşdäki funksiýanyň önümi. Goý, x we y ululyklar t parametriň funksiýasy hökmünde

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{18}$$

görnüşde berlen bolsun. Eger $\varphi(t)$ we $\psi(t)$ funksiýalaryň önümleri we $x = \varphi(t)$ funksiýanyň $t = g(x)$ ters funksiýasy bar bolsa, onda ters funksiýanyň önümi (13) formula esasynda $g'(x) = 1/\varphi'(t)$ deňlik boýunça tapylýar. Şoňa görä çylşyrymly $y = \psi[g(x)]$ funksiýanyň önümi (14) formula boýunça şeýle tapylýar:

$$y'(x) = \{\psi[g(x)]\}' = \psi'(t)g'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} . \tag{19}$$

7-nji mysal. Parametrik görnüşde berlen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

funksiýanyň $y'(x)$ önümini tapmaly.

◁ Ilki bilen funksiýalaryň t görä önümlerini tapalyň:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t .$$

Şonuň üçin $y'(x)$ önümi (19) formula boýunça tapmak bolar:

$$y'(x) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = ctg\frac{t}{2} . \ \triangleright$$

§ 3. 4. Ýokary tertipli önümler

1. Anyk funksiýanyň ýokary tertipli önümleri. Eger $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatda önümi bar bolsa, onda $f'(x)$ önüme ol funksiýanyň birinji (ýa-da birinji tertipli) önümi diýilýär. Eger ol funksiýanyň $f'(x)$ önüminiň hem önümi bar bolsa, onda bu önüme $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky ikinji (ýa-da ikinji tertipli) önümi diýilýär, Ikinji önümiň önümine üçünji tertipli önüm diýilýär we ş,m. Ikinjiden başlap ähli önümlere ýokary tertipli önümler diýilýär we

$$y'',\ y''',\ y^{(4)},\ y^{(5)},\ \ldots \text{ ýa-da } f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ f^{(5)}(x), \ldots$$

bilen belgilenýär.

Umuman, $y = f(x)$ funksiýanyň $f^{(n-1)}(x)$ önüminiň birinji önümine ol funksiýanyň $n-$nji önümi ýa-da n tertipli önümi diýilýär:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Funksiýanyň nolunjy önümi diýlip funksiýanyň özüne düşünilýändigini belläliň. Ýokary tertipli önümler fizikada we beýleki ylymlarda giňişleýin ulanylýandyr. Mysal hökmünde, ikinji önümiň mehaniki manysyny görkezeliň.

Eger $y = f(x)$ funksiýa material nokadyň göni çyzyk boýunça hereketini aňladýan bolsa, onda $f'(x)$ önümiň material nokadyň x pursatdaky tizligidigini ýokarda görüpdik. Şonuň üçin funksiýanyň $f''(x)$ ikinji önümi tizligiň üýtgeýiş tizligi bolar, ýagny hereket edýän material nokadyň x pursatdaky tizlenmesidir.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, ýokary tertipli önümleri tapmaklyk üçin diňe birinji tertipli önümleri tapmaklygy başarmalydyr.

8-nji nysal. $f(x) = \cos x$ funksiýanyň $n-$nji önümi üçin

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n(\pi/2)) \tag{20}$$

formulany subut etmeli.

◁ $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$ deňlik (20) formulanyň $n = 1$ üçin dogrudygyny görkezýär. Goý, ol formula $n = k$ üçin dogry bolsun, onda

$$(\cos x)^{(k+1)} = [(\cos x)^{(k)}]' = [\cos(x + k(\pi/2))]' =$$
$$= -\sin(x + k(\pi/2)) = \cos(x + (k+1)\pi/2)$$

deňlik ol formulanyň $n = k + 1$ bolanda hem dogrudygyny görkezýär.

Şonuň üçin matematiki induksiýa usuly esasynda (20) formula $\forall n \in N$ üçin dogrudyr. ▷

Şuňa meňzeşlikde, $\forall n \in N$ üçin $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n(\pi/2))$ deňligi subut etmek bolar.

2. Anyk däl we parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň ýokary tertipli önümleri. Eger anyk däl $F(x,\ y) = 0$ deňleme käbir $y = y(x)$ funksiýany kesgitleýän bolsa, onda ol deňlemäniň iki bölegini hem differensirläp, $y'(x)$ önümiň nähili tapylýandygy bize ozaldan mälimdir. Şonuň üçin differensirlenip alnan deňligi ýene bir gezek differensirläp we alnan deňlemede birinji önümiň bahasyny goýup, funksiýanyň ikinji önümini tapmak bolar.

13-njy mysal. Anyk däl $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ deňleme arkaly kesgitlenýän $y = y(x)$ funksiýanyň ikinji önümini tapmaly.

◁ Çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, deňligiň iki bölegini hem differensirläliň we birinji önümi tapalyň:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} y' = 0, \quad y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Differensirlenip alnan deňligi ýene bir gezek differensirläliň we birinji önümiň bahasyny deňlemede goýup, ikinji önümi tapalyň:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} y'^2 - \frac{y}{b^2} y'' = 0,$$

$$y'' = \frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2} - y'^2\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{b^4}{a^2 y^3}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \ ▷$$

Parametrik görnüşde $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ deňlikler arkaly berlen funksiýanyň birinji önümi (19) formula bilen tapylýar. Şol formuladan hem-de çylşyrymly we ters funksiýalaryň önümleri tapylýan formulalardan peýdalanyp ikinji önümi taparys:

$$y''(x)=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'_x=\frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

Bu önümden peýdalanyp funksiýanyň üçünji we soňky önümleri tapylýar.

§ 3. 5. Funksiýanyň differensialy

1.Differensial düşünjesi. Eger $y=f(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda (6) deňlikden görnüşi ýaly, onuň şol nokatdaky artymy

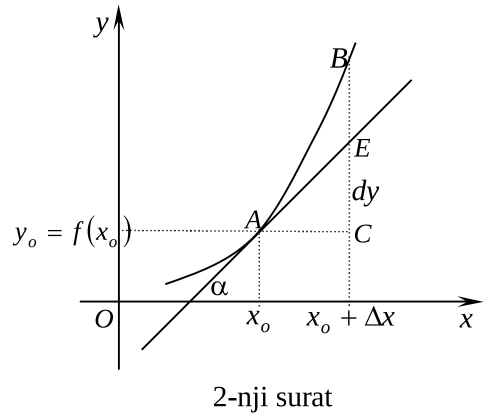
$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \tag{21}$$

görnüşde aňladylýar. Şunlukda, bu deňligň sag bölegindäki göşulyjylaryň ikisi hem $\Delta x\to 0$ bolanda tükeniksiz kiçidir, ýöne

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)}=0$$

deňlikden görnüşi ýaly, ikinji goşulyjy birinjä görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr. Şol sebäpli $f'(x)\Delta x$ goşulyja differensirlenýän funksiýanyň Δy artymynyň baş bölegi diýilýär.

Kesgitleme. $y=f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky artymynyň baş bölegine şol funksiýanyň x nokatdaky differensialy diýilýär we dy ýa-da $df(x)$ bilen belgilenilýär.



2-nji surat

Şeýlelikde, eger $y=f(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{22}$$

Bu formulanyň esasynda (21) deňligi

$$\Delta y=dy+\alpha(\Delta x)\Delta x \tag{23}$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden görnüşi ýaly $\Delta y\neq dy$.

2.Differensialyň geometrik manysy. Ony görkezmek üçin $y = f(x)$ funksiýanyň çyzgysynda $A(x_o, y_o)$ we $B(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ nokatlary alyp, A nokatda çyzga galtaşma geçireliň. Onda 2-nji suratdan görnüşi ýaly, Δx artyma degişli Δy artym CB kesimiň ululygyna, dy differensial bolsa CE kesimiň ululygyna deňdir, çünki ΔACE – den

$$tg\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{\Delta x}$$

deňlik alynýar.Bu deňlikden bolsa önümiň geometrik manysynyň we (22) formula esasynda $CE = = tg\alpha\Delta x = f'(x)\Delta x = dy$, $dy = f'(x)\Delta x$ deňligi alarys we ol differensialyň geometrik manysyny aňladýar. 2-nji suratdan $\Delta y \neq dy$ bolýandygy has aýdyň görünýär.

3. Differensialyň formulasy we düzgünleri. Eger $y = x$ bolsa, onda $dy = dx$ we (22) deňlik esasynda $dy = x'\Delta x = \Delta x$, ýagny $\Delta x = dx$ bolar. Şonuň üçin (22) formula

$$dy = f'(x)dx \tag{24}$$

görnüşde ýazylar we ol $y = f(x)$ funksiýanyň differensialyny tapmak üçin esasy formuladyr.

(24) formula esasynda (8), (9), (10) formulalardan peýdalanyp, differensialy tapmaklygyň esasy düzgünlerini görkezeliň:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Hemişelik $u = c$ funksiýa üçin (24) formulanyň esasynda $du = dc = 0$ we soňky iki formulalardan aşakdakylar alynýar:

$$d(cv) = cdv, \qquad d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{cdv}{v^2}$$

9-njy mysal. $y = \sqrt{x}\sin x$ funksiýanyň differensialyny tapmaly.

⊲ Differensialyň düzgünlerinden, (24) formuladan we önümiň tablisasyndan peýdalanyp, differensialy taparys:

$$dy = \sqrt{x}d(\sin x) + \sin xd\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}(\sin x)'dx + \sin x\left(\sqrt{x}\right)'dx =$$

$$= \sqrt{x}\cos xdx + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}dx. \triangleright$$

. **4. Çylşyrymly funksiýanyň differensialy.** Eger $y = f(x),\ x = \varphi(t)$ özleriniň üýtgeýänlerine görä differensirlenýän funksiýalar bolsa, onda $y = f[\varphi(t)]$ funksiýa t görä çylşyrymly funksiýadyr. Şoňa görä (24) formulany ulanyp,

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}'dt, \qquad dx = \varphi'(t)dt \tag{25}$$

deňlikleri alarys. (14) formula boýunça $\{f[\varphi(t)]\}' = f'(\varphi)\cdot\varphi'(t)$. Şonuň üçin (25) deňlikler esasynda

$$dy = f'(\varphi)\varphi'(t)dt = f'(\varphi)dx = f'(x)dx. \tag{26}$$

deňligi alarys. (24) we (26) formulalary deňeşdirip, çylşyrymly $f[\varphi(t)]$ funksiýanyň hem differensialynyň ýene-de şol bir (24) formula boýunça kesgitlenýändigini görýäris. Funksiýanyň differensialynyň bu häsiýetine differensialyň inwariantlyk häsiýeti diýilýär

Differensialyň inwariantlyk häsiýetini ulanmaklyk çylşyrymly funksiýalaryň differensialyny tapmaklygy ýönekeýleşdirýär. Ony mysalda görkezeliň.

10-njy mysal. $y = arctg^2\sqrt{x^2-1}$ funksiýanyň differensialyny tapmaly.

$$d(arctg^2\sqrt{x^2-1}) = 2arctg\sqrt{x^2-1}d(arctg\sqrt{x^2-1}) =$$

$$= 2arctg\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2}d(\sqrt{x^2-1}) =$$

$$= 2arctg\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2}\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}d(x^2-1) =$$

$$= \frac{arctg\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}2xdx = \frac{2arctg\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}dx..$$

5.Takmyn hasaplamalarda differensialyň ulanylyşy. Funksiýanyň differensialy düşünjesi girizilende dy differensialyň Δy artyma deň däldigini görüpdik. $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x),\ \Delta x \to 0$ bolýandygy esasynda (24) formulany $\Delta u - dy = o(\Delta x),\ \Delta x \to 0$ görnüşde ýazmak bolar. Şonuň üçin

Δx -den ýokary tertipde bolan tükeniksiz kiçi takyklykda

$$\Delta y \approx dy. \qquad (27)$$

Bu formula $y = f(x)$ funksiýanyň Δy artymyny dy differensialyň takmyn bahasy bilen çalşyrmaklyga mümkinçilik berýär. (22) formulany we $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ deňligi ulanyp, (27) formulany

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (28)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu formula x üýtgeýäne ýakyn bolan bahalar üçin (ýagny ýeterlik kiçi Δx üçin) funksiýanyň bahalaryny (28) deňligiň sag bölegindäki Δx göra çyzykly funksiýa bilen ýakynlaşdyrýar. Ony ulanmak üçin

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (29)$$

görnüşde ýazmaklyk amatlydyr.

11-nji mysal. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ funksiýanyň $x = 0$ nokadyň etrabyndaky takmyn bahasyny tapmaly.

$\lhd$ (29) formulany $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ funksiýa we $a = 0$ üçin ulanalyň:

$$(1+x)^{\alpha} \approx f(0) + f'(0)x,$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = \alpha, \quad f(0) = 1.$$

Şeýlelikde,

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x. \ \rhd \qquad (30)$$

12-nji mysal. $\sqrt[3]{27{,}027}$ aňlatmanyň takmyn bahasyny tapmaly.

$\lhd$ Ilki bilen ony $\sqrt[3]{27{,}027} = \sqrt[3]{27+0{,}027} = 3\sqrt[3]{1+0{,}001}$ görnüşde ýazyp, soňra $\sqrt[3]{1+0{,}001} = (1+0{,}001)^{1/3}$ aňlatmany hasaplalyň. Onuň üçin (30) formulada $x = 0{,}001$, $\alpha = 1/3$ goýup, $(1+0{,}001)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}001 = \frac{3{,}001}{3}$ takmyn deňligi alarys. Şonuň üçin $\sqrt[3]{27{,}027} = 3(1+0{,}001)^{1/3} \approx 3{,}001$. $\rhd$

13-nji mysal. $\sin 29^0 57'$ aňlatmanyň takmyn bahasyny tapmaly.

$\lhd$ Bu aňlatmany tapmak üçin (28) formulany ulanarys. Onuň üçin şol formulada $f(x)$ funksiýanyň ornunda $\sin x$ goýup,

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

formulany alarys. Bu formulada $x = 30^o$, $\Delta x = -3^o = -\frac{\pi}{3600}$ alsak, onda

$$\sin 29^0 57' = \sin\left(30^0 - \frac{\pi}{3600}\right) \approx \sin 30^0 - \cos 30^0 \cdot \frac{\pi}{3600} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3600} = 0{,}5 - \frac{\pi\sqrt{3}}{7200} = 0{,}499237. \ \triangleright$$

6. Ýokary tertipli differensiallar. Mälim bolşy ýaly, eger $y = y(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň differensialy

$$dy = f'(x)dx \tag{31}$$

formula boýunça kesgitlenilýär we oňa funksiýanyň x nokatdaky birinji differensialy ýa-da birinji tertipli differensialy diýilýär. Ol differensial x-e görä funksiýadyr. Eger onuň hem x nokatda differensialy bar bolsa, onda şol differensiala $y = y(x)$ funksiýanyň x nokatdaky ikinji differensialy diýilýär we ol d^2y ýa-da $d^2 f(x)$ bilen belgilenýär

Şeýlelikde,

$$d^2 y = d(dy) \quad \text{ýa-da} \quad d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Sunlukda,

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)dx^2 \quad \left(dx^2 = (dx)^2\right).$$

Şuňa meňzeşlikde, $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky n tertipli $d^n y$ differensialy $d^{n-1}y$ differensialyň differensialyna deňdir, ýagny

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

$y = f(x)$ funksiýanyň n tertipli $d^n y$ differensialy üçin

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \tag{32}$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar.Bu deňlikden önüm üçin

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \tag{33}$$

deňligi alarys. Görkezilen deňlikler diňe baglanyşyksyz üýtgeýän x ücin dogry bolup, $x = x(t)$ funksiýa bolan haly üçin ýerine ýetýän däldir.

G ö n ü k m e l e r

1. Kesgitlemeden peýdalanyp, funksiýalaryň önümini tapmaly:

1) $y = 3x$. 2) $y = 8 - x^2$. 3) $y = (4x - 1)^2$.

4) $y=\frac{x^3}{3}$. 5) $y=\frac{1}{x-3}$. 6) $y=\sqrt{1+x^2}$..

2. Funksiýalaryň önümini tapmaly:

1) $y=1-2x^3$. 2) $y=\frac{x+2}{x}$. 3) $y=\frac{3}{x^2-1}$.

4) $y=\frac{1}{x^2}$. 5) $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+5$. 6) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x^3}$.

7) $y=\frac{2x+1}{5}$. 8) $y=x^2(2x-1)$. 9) $y=(x^3+3)(4x^2-5)$.

10) $y=(x-5)^4(x+3)^5$. 11) $y=(x-1)\sqrt{x}$. 12) $y=\frac{x^3-3}{5-x^2}$.

13) $y=\frac{5x}{(5-2x)^3}$. 14) $y=\frac{(3x^2+5)^3}{2x-3}$. 15) $y=\frac{2}{(x^3+5)^5}$.

16) $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$. 17) $y=\frac{5}{\sqrt{x^2+4}}$. 18) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$.

19) $y=\sin^3 x$. 20) $y=\sin x^2$. 21) $y=\cos^2\frac{x}{2}$.

22) $y=\cos\frac{x^3}{2}$. 23) $y=x^2\cos x$. 24) $y=\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

25) $y=(x^2-2)\sin x+2x\cos x$. 26) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$. 27) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

28) $y=tg^4(x^2+1)$. 29) $y=(tgx-ctgx)^2$. 30) $y=x-tgx$.

31) $y=\frac{tgx}{\sqrt{x}}$. 32) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$. 33) $y=\ln^2 x$.

34) $y=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$. 35) $y=\ln tg\frac{x}{2}$. 36) $y=\ln x^2$.

37) $y=(x-1)e^x$. 38) $y=(x^2-4x+8)e^{x/2}$. 39) $y=e^{x\ln x}$.

40) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. 41) $y=x^2 2^x$. 42) $y=e^{\sqrt{x}}$.

43) $y = tg^3 2x\cos^2 2x$. 44) $y = \ln\left(e^{-x} + xe^{-x}\right)$. 45) $y = \ln\dfrac{x^3 - 9}{x^3 - 1}$.

46) $y = x - arctgx$. 47) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$.

48) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1}{2}arctgx..$ 49) $y = \ln\sin\dfrac{2x + 4}{x + 1}$.

50) $y = \arcsin\left(e^{x^2}\right)$. 51) $y = \ln\dfrac{e^x}{e^x + 1}$. $\left\langle y' = \dfrac{1}{e^x + 1}.\right\rangle$

52) $y = \ln\dfrac{\sqrt{5} + tg(x/2)}{\sqrt{5} - tg(x/2)}$. 53) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

54) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{2x + 3}{\sqrt{5}}$. 55) $y = arctg\dfrac{3}{2}x$.

56) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{x}{x + 5}}$. 57) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

58) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. 59) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$.

60) $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x + 1}} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x}$.

61) $y = arctg\dfrac{a}{x} + \ln\sqrt{\dfrac{x - a}{x + a}}$. 62) $y = \arcsin\dfrac{x - 2}{3}$.

3. $y = x^2$ egri çyzyga $A(2;\ 4)$ nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini ýazmaly.

4. $y = \sin x$ sinusoida $A(\pi;\ 0)$ nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini ýazmaly.

5. $y = 5 - 3x^2$ egri çyzyga absissasy $x = -2$ bolan nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentini tapmaly.

6. $y^2 = x$ parabola $A(8;\ 4)$ nokatda geçirilen normalyň deňlemesini ýazmaly.

7. $x^2 + y^2 = 25$ töwerege $A(3; -4)$ nokatda geçirilen normalyň deňlemesini ýazmaly.

8. Nokadyň hereketiniň $x = t - \sin t$ deňlemesi boýunça onuň tizligini kesgitlemeli.

9. Hereketiniň kanyny $s = t^2 - 3t + 5$ deňleme bilen berlen nokadyň wagtyň $t = 2$ pursatdaky a) geçen ýoluny we b) tizligini tapmaly.

10. Hereketiniň kanuny $s = 4t^2 - 3$ deňleme bilen berlen jisimiň wagtyň $t = 2$ pursatdaky tizligini tapmaly.

11. Herekete başlanyndan soň t wagtda (sekuntda) geçen ýoly (metr) $s = 1{,}5t^2 + 2t + 125$ deňleme bilen berlen liftiň wagtyň $t = 2$ pursatdaky tizligini tapmaly.

12. Funksiýalaryň ikinji tertipli önümini tapmaly:

1) $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 1$. 2) $y = x \ln x$. 3) $y = e^{\cos x}$.

4) $y = \sin 2x$. 5) $y = arctgx$. 6) $y = x + \sqrt{4 - x}$.

13. Funksiýalaryň üçünji tertipli önümini tapmaly:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. 2) $y = e^{2x}$. 3) $y = x^3 \ln x$. 4) $y = xe^{-x}$.

14. Funksiýalaryň dördünji tertipli önümini tapmaly:

1) $y = x^3 + 3x^2 + 1$. 2) $y = e^x + x^4$.

15. Parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň birinji we ikinji önümlerini tapmaly:

1) $x = t^2$, $y = t^2/3 - t$. 2) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$.

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

16. Anyk däl görnüşde berlen funksiýalaryň önümini tapmaly:

1) $x^2 + 5xy + y^2 - 7 = 0$. 2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. 3) $y^2 + xy + \sin y = 0$.

17. Funksiýalaryň differensialyny tapmaly:

1) $y = arcctg \dfrac{1}{x}$. 2) $y = (\arcsin x)^2$. 3) $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$.

4) $y = \dfrac{arctgx}{\sqrt{1 + x^2}}$. 5) $y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}$. 6) $y = \arccos(2^x)$.

18. Differensialyň kömegi bilen funksiýalaryň takmyn bahasyny tapmaly:

1) $\sqrt{1{,}006}$. 2) $\sqrt[3]{9}$. 3) $(1{,}03)^5$. 4) $e^{0{,}1}$. 5) $\cos 61^\circ$. 6) $\lg 10{,}21$.

19. $y = 4^{-x^2}$ funksiýanyň ikinji tertipli differensialyny tapmaly.

J o g a p l a r

1. 1) 3. 2) $-2x$. 3) $8(4x-1)$. 4) x^2. 5) $-\dfrac{1}{(x-3)^2}$. 6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 1) $-6x^2$. 2) $-\dfrac{2}{x^2}$. 3) $-\dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$. 4) $-\dfrac{2}{x^3}$. 5) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

6) $x^2-\dfrac{9}{x^4}$. 7) $\dfrac{2}{5}$. 8) $6x^2-2x$. 9) $20x^4-15x^2+24x$.

10) $(x-5)^3(x+3)^4(9x-13)$. 11) $\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. 12) $-\dfrac{x^4-15x^2+6x}{(5-2x)^4}$.

13) $\dfrac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}$. 14) $\dfrac{(3x^2+5)^2(30x^2-54x-10)}{(2x-3)^2}$. 15) $-\dfrac{30x^2}{(x^3+5)^6}$.

16) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$. 17) $-\dfrac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$. 18) $\dfrac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}$.

19) $3\sin^2 x\cos x$. 20) $2x\cos x^2$. 21) $-\dfrac{\sin x}{2}$. 22) $-\dfrac{3}{2}x^2\sin\dfrac{x^3}{2}$.

23) $x(2\cos x-x\sin x)$. 24) $\dfrac{5\cos x-\cos 5x}{2\cos^2 3x}$. 25) $x^2\cos x$. 26) $\dfrac{1}{1-\sin x}$.

27) $\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$. 28) $\dfrac{8xtg^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$. 29) $-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$. 30) $-tg^2 x$.

31) $-\dfrac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$. 32) $-\dfrac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$. 33) $\dfrac{2\ln x}{x}$. 34) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x-2}{x^2}$.

35) $\dfrac{1}{\sin x}$. 36) $\dfrac{2}{x}$. 37) xe^x. 38) $\dfrac{x^2}{2}e^{x/2}$. 39) $e^{x\ln x}(1+\ln x)$

40). $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 41). $(2x+x^2\ln 2)2^x$. 42). $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$..

43) $2tg^2 2x(3-2\sin^2 2x)$. 44) $-\dfrac{x}{1+x}$. 45) $\dfrac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$.

46) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$. 47) $\sqrt{1-x^2}$. 48) $\dfrac{1}{1-x^4}$. 49) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}ctg\dfrac{2x+4}{x+1}$.

50) $\dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$. 51) $\dfrac{1}{e^x+1}$. 52) $-\dfrac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}$. 53) $\sqrt{a^2-x^2}$.

54) $\dfrac{1}{2x^2+6x+7}$. 55) $\dfrac{6}{4+9x^2}$. 56) $\dfrac{1}{x^2+5x}$. 57) $\dfrac{1}{4(x^2-1)}$.

58) $-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. 59) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. 60) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. 61) $\dfrac{2a^3}{x^4-a^4}$.

62) $\dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 63) $xarctg$. 64) $4^{arctg\sqrt{x^2+1}}\ln 4\cdot\dfrac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$.

65) $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$. **3.** $y=4x-4$. **4.** $y=\pi-x$. **5.** $k=12$.

6. $y=36-4x$. **7.** $4x+3y=0$. **8.** $v=1-\cos t$. **9.** $a)$ 3; $b)$ 1.

10. 16 . **11.** $8(m/s)$. **12.** 1) $20x^3-36x^2+6x-10$. 2) $1/x$.

3) $e^{\cos x}(\sin^2 x-\cos x)$. 4) $-4\sin 2x$. 5) $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. 6) $-\dfrac{1}{4(4-x)^{3/2}}$

13. 1) 12 . 2) $8e^{2x}$. 3) $6\ln x+11$. 4) $e^{-x}(3-x)$

14. 1) $y^{IV}=0$. 2) $e^x+4!$. **15.** 1) $y'=\dfrac{t^2-1}{2t}$; $y''=\dfrac{1+t^2}{4t^3}$.

2) $y'=3e^t/2$; $y''=3/4e^t$. 3) $y'=ctg(t/2)$; $y''=-1/4a\sin^4(t/2)$.

16. 1) $-\dfrac{2x+5y}{5x+2y}$. 2) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 3) $\dfrac{y}{x+2y+\cos y}$. **17.** 1) $\dfrac{dx}{1+x^2}$.

2) $\dfrac{2\arcsin x\,dx}{1+x^2}$. 3) $\dfrac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$. 4) $\dfrac{1-xarctgx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$. 5) $-\dfrac{2\sin x\,dx}{3\sqrt[3]{2+\cos x}}$.

6) $-\dfrac{2^x\ln 2\,dx}{\sqrt{1-2^{2x}}}$. **18.** 1) 1,003 . 2) 2083 . 3) 1,15 . 4) 1,1 . 5) 0,4849

6) 1,009 . **19.** $4^{-x^2}\,2\ln 4(2x^2\ln 4-1)dx^2$.+

II. 4. DIFFERENSIRLENÝÄN FUNKSIÝALAR HAKYNDAKY ESASY TEOREMALAR

§ 4. 1. Funksiýanyň orta bahasy hakyndaky teoremalar

1. Önümiň noly hakyndaky teoremalar. Eger $f'(c)=0$ deňlik ýerine ýetse, onda c sana $f'(x)$ önümiň noly ýada köki diýilýär.

Fermanyň teoremasy. Eger (a,b) aralykda kesgitlenen f funksiýa $c\in(a,b)$ nokatda differensirlenýän bolup, şol nokatda iň kiçi ýa-da iň uly bahany alsa, onda $f'(c)=0$.

$\lhd$ Kesgitlilik üçin f funksiýa c nokatda iň uly bahany alýan bolsun, ýagny $\forall x\in U(c)$ üçin $f(x)\le f(c)$ .Onda $\Delta x>0$ üçin

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \tag{1}$$

we $\Delta x<0$ üçin

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 . \tag{2}$$

f funksiýanyň c nokatda differensirlenýänligi esasynda

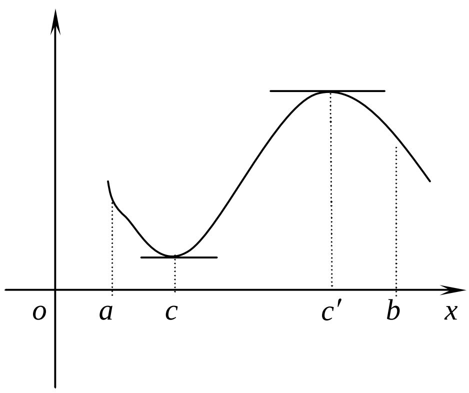
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c) \tag{3}$$

predel bardyr. Şonuň üçin (1) we (2) deňsizliklerde $\Delta x\to 0$ bolanda predele geçip, degişlilikde $f'(c)\le 0$ we $f'(c)\ge 0$ deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa $f'(c)=0$ deňlik gelip çykýar. $\rhd$

Önümiň geometrik manysynyň esasynda, funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahany alýan nokadynda funksiýanyň önüminiň nola deň bolmagy $y=f(x)$ funksiýanyň çyzgysyna $(c, f(c))$ nokatda geçirilen galtaşmanyň ox oka paralleldigini aňladýar we ol bu teoremanyň geometrik manysyny görkezýär (1-nji surat). Bu teoremanyň fiziki manysy göni çyzyk boýunça hereket edilip, yzyna gaýdylyp başlanjak pursatda tizligiň nola deňdigini, ýagny hereketiň ýokdugyny aňladýar. Şoňa görä c nokada funksiýanyň duruw nokady hem diýilýär.

1-nji bellik. Eger funksiýa $[a, b]$ kesimde kesgitlenen bolup, iň uly ýa-da iň kiçi bahany kesimiň ujunda alýan bolsa onda şol nokatda funksiýanyň önüminiň nola deň bolmazlygy hem mümkindir. Ony aşakdaky mysal tassyklaýar.

1-nji mysal. $f(x) = x$ funksiýa $[0,1]$ kesimiň $x = 0$ nokadynda iň kiçi bahany we $x = 1$ nokadynda iň uly bahany alýar, ýöne ol nokatlaryň ikisinde hem funksiýanyň önümi bire deňdir.



1-nji surat

Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimiň içki nokatlarynda differensirlenýän bolup, a we b nokatlarda onuň degişlilikde sag we çep önümleri bar bolsa, onda oňa şol kesimde differensirlenýän funksiýa diýilýär.

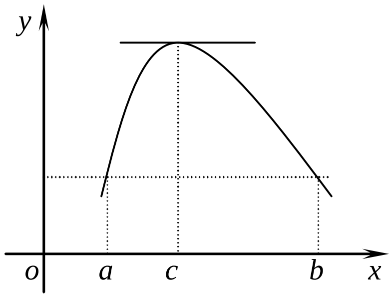
Roluň teoremasy. Goý, f funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän bolup, $f(a) = f(b)$ bolsun. Onda iň bolmanda bir $c \in (a, b)$ nokat tapylyp, $f'(c) = 0$.

$\lhd$ f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde üznüksizligi üçin Weýerştrasyň teoremasy esasynda funksiýa şol kesimde iň uly $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ we iň kiçi $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ bahalary alýar. Şunlukda, eger:

1) $M = m$ bolsa, onda $[a, b]$ kesimde ýerine ýetýän $m \le f(x) \le M$ şertiň esasynda funksiýa şol kesimde hemişelik bolar we şonuň üçin onuň önümi (a,b) aralygyň ähli nokatlarynda nola deňdir.

2) $M > m$ bolsa, onda $f(a) = f(b)$ şertiň esasynda funksiýa M we m bahalaryň iň bolmanda birini içki $c \in (a, b)$ nokatda alar. Şoňa görä Fermanyň teoremasy esasynda $f'(c) = 0$ bolar. $\rhd$

$f(a) = f(b) = 0$ hususy hal üçin bu teorema gysgaça şeýle okalýar: diefferensirlenýän funksiýanyň iki dürli kökleriniň arasynda onuň onüminiň iň bolmanda bir köki bardyr.



2-nji surat

Bu teoremanyň şeýle geometrik manysy bardyr: a we b nokatlaryň arasynda in bolmanda bir c nokat bar bolup, şol nokatda funksiýanyň çyzgysyna geçirilen galtaşma Ox okuna paralleldir (2-nji surat).

Roluň teoremasynyň hemme şertleri wajypdyr, ýagny onuň şertleriniň haýsy-da bolsa biri ýerine ýetmese, onda onuň tassyklamasy dogry däldir. Ony aşakdaky mysal tassyklaýar.

2-nji mysal. $f(x) = |x|$, $-1 \le x \le 1$. Bu funksiýa üçin Roluň teoremasynyň $x = 0$ nokatda differensirlenýär diýlen şertlerinden başgalary ýerine ýetýär. Oňa garamazdan $(-1, 1)$ aralykda funksiýanyň önüminiň nola deň nokady ýokdur, çünki $-1 < x < 0$ bolanda $f'(x) = -1$, $0 < x < 1$ bolanda $f'(x) = 1$. $x = 0$ nokatda bolsa onuň önümi ýokdur.

2. Orta baha hakyndaky teoremalar. (a, b) aralygyň içindäki c nokat bilen baglanyşykly subut edilýän tassyklamalara orta baha hakyndaky teoremalar diýilýär

Koşiniň teoremasy. Goý, $[a, b]$ kesimde üznüksiz f we g funksiýalar onuň hemme içki nokatlarynda differensirlenýän bolup, $g'(x) \ne 0$ bolsun. Onda $(a, b) \ni c$ nokat bar bolup,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4}$$

deňlik ýerine ýetýär.

◁ Ilki bilen $g(b) - g(a) \ne 0$ bolýandygyny görkezeliň. Eger onuň tersine güman etsek, onda $[a, b]$ kesimde g funksiýa üçin Roluň teoremasynyň hemme şertleri ýerine yeterdi we şonuň üçin $(a, b) \ni c$ nokat tapylyp, $g'(c) = 0$ bolardy. Ol bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Diýmek, $g(b) - g(a) \ne 0$. Şoňa görä

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

funksiýa garap bileris. Teoremanyň şertlerinde bu funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýär hem-de

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x).$$

Ondan başga-da $F(a) = F(b)$. Şeýlelikde, F funksiýa Roluň teoremasynyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar. Sonuň üçin hem $(a,b) \ni c$ nokat tapylyp,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0.$$

Bu deňlikden bolsa $g'(c) \neq 0$ şertin esasynda (4) formulany alarys. ▹

Oňa Koşiniň formulasy diýilýär.

Koşiniň teoremasyndan netije hökmünde aşakdaky teoremany alarys.

Lagranžyň teoremasy. Goý, f funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän bolsun. Onda $(a,b) \ni c$ nokat tapylyp,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \tag{5}$$

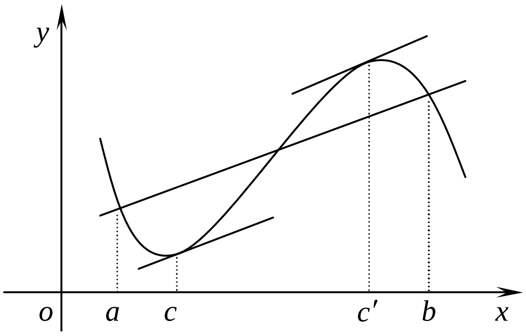
deňlik yerine ýetýär.

◃ Teoremanyň şertlerinde $f(x)$ we $g(x) = x$ funksiýalar Koşiniň teoremasynyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar we şol funksiýalar üçin hem Koşiniň formulasy dogrudyr. Şoňa görä şol formuladan $g(x) = x$ hususy halda (5) formula gelip çykýar. ▹

Oňa Lagranžyň ýa-da tükenikli artymyň formulasy diýilýär. Lagranžyň formulasyny

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

görnüşde ýazyp, onuň çep böleginiň $A(a, f(a))$ we $B(b, f(b))$ nokatlardan geçýän kesiji göni çyzygyň burç koeffisiýentidigini, sag böleginiň bolsa $C(c, f(c))$ nokatda çyzga geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentidigini görýäris. Şonuň esasynda Lagranžyň teoremasynyň geometrik manysy $[a,b]$ kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän $y = f(x)$ funksiýanyň çyzgysynda absissasy c deň bolan nokat bar bolup, şol nokatda çyzga geçirilen galtaşmanyň $A(a, f(a))$ we $B(b, f(b))$ nokatlaryny birleşdirýän kesiji göni çyzyga paralleldigini aňladýar (3-nji surat).



3-nji surat

Lagranžyň formulasyndaky c nokat a we b nokatlaryň arasyndaky nokatdyr, ýagny $a < c < b.$ Onda

$$\theta = (c-a)/(b-a)$$

üçin $0<\theta<1$ we $c = a+\theta(b-a)$ bolar. Şoňa görä Lagranžyň formulasyny

$$f(b) - f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a) \qquad (0<\theta<1)$$

görnüşde ýazmak bolar.

Lagranžyň teoremasyndan şeýle netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. Eger (a,b) aralygyň hemme nokatlarynda f funksiýanyň önümi nola deň bolsa, onda şol aralykda funksiýa hemişelikdir.

$\triangleleft$ (a,b) aralygyň erkin x we x_o nokatlary üçin Lagranžyň teoremasy boýunça $f(x) - f(x_o) = f'(c)(x-x_o)$ $(x_o < c < x)$deňlik ýerine ýetýär. Ol deňlikden bolsa $f'(c)=0$ şertiň esasynda (a,b) aralykda $f(x) = f(x_o)$ deňlik alynýar, ýagny funksiýa şol aralykda hemişelikdir. $\triangleright$

2-nji netije. Eger (a,b) aralygyň hemme nokatlarynda φ we g funksiýalaryň önümleri deň bolsalar, onda şol aralykda olaryň tapawudy hemişelikdir.

$\triangleleft$ Teoremanyň şertlerinde (a,b) aralykda $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ funksiýa üçin $f'(x) = 0$ bolar. Şonuň üçin 1-nji netije esasynda şol aralykda $f(x) = \varphi(x) - g(x) = c$. $\triangleright$

§4. 2. Lopitalyň kesgitsizlikleri açmak düzgüni

Funksiýalaryň $f(x)/g(x)$ gatnaşygynyň $x \to a$ bolanda predeli tapylanda $0/0$ we ∞/∞ görnüşdäki kesgirsizliklere köp duş gelipdik. Bu halda kesgitsizlikleri açmaklygyň ýönekeý usullarynyň biri bolan Lopitalyň düzgünini ulanmak bolar.

1, Kesgitsizligiň $0/0$ görnüşiniň açylyşy. Bu görnüşdäki kesgitsizligi açmaklyk aşakdaky teorema esaslanýar.

Lopitalyň teoremasy (düzgüni). Eger f we g funksiýalar $x=a$ nokadyň käbir etrabynda differensirlenýän bolup, şol nokatda nola deň bolsalar we $x \to a$ bolanda $f'(x)/g'(x)$ gatnaşygyň predeli bar bolsa, onda $f(x)/g(x)$ gatnaşygyň hem predeli bardyr we

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6}$$

deňlik dogrudyr.

$\lhd$ Goý, $x \neq a$ nokat f we g funksiýalaryň differensirlenýän etrabyna degişli nokat bolsun. Onda Koşiniň teoremasy boýunça x we a nokatlaryň arasynda şeýle c nokat tapylyp,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

deňlik ýerine ýetýär. Şerte görä $f(a)=g(a)=0$. Şonuň üçin ol deňlik

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{7}$$

görnüşi alar. c nokadyň x we a nokatlaryň arasynda ýerleşýändigi üçin $(x\to a)\Rightarrow(c\to a)$.. Şonuň esasynda (7) deňlikde predele geçip,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

deňligi alarys, ýagny (6) subut edildi. $\rhd$

1-nji bellik. Bu teorema f we g funksiýalar $x=a$ nokatda kesgitlenmedik bolup, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ deňlik ýerine ýetende hem dogrudyr. Hakykatdan-da, eger f we g funksiýalary $x=a$ nokatda hem üznüksiz bolar ýaly

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0, \quad g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

deňlikleri kanagatlandyrýar diýip alsak, onda bu hal ýokarda subut edilen teorema getirilýär.

2-nji bellik. Bu teorema $a=\infty$ bolanda, ýagny

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

deňlikler ýerine ýetende hem dogrudyr. Hakykatdan-da, eger $x=1/t$ alsak, onda $(x\to\infty)\Rightarrow(t\to 0)$ esasynda

$$\lim_{t\to 0} f(1/t)=0, \quad \lim_{t\to 0} g(1/t)=0$$

bolar. Şeýle hem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)\left(-1/t^2\right)}{g'(1/t)\left(-1/t^2\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Şoňa görä bu deňligiň sagyndaky predel bar bolanda onuň çepindäki predel hem bardyr we

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

deňlik dogrudyr.

3-nji bellik. Eger $f'(x)/g'(x)$ gatnaşyk hem 0/0 kesgitsizligi aňladyp, $f'(x)$ we $g'(x)$ funksiýalar $x=a$ nokadyň etrabynda differensirlenýän bolup, $x\to a$ bolanda $f''(x)/g''(x)$ gatnaşygyň predeli bar bolsa, onda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

deňlik dogrudyr, ýagny degişli şertler ýerine ýetende Lopitalyň düzgünini birnäçe gezek ulanmak bolar.

3-nji mysal. $f(x)=x-\sin x$ we $g(x)=x^3$ funksiýalar üçin $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ predeli tapmaly.

$\triangleleft$ $f'(x)=1-\cos x$ we $g'(x)=3x^2$ funksiýalaryň $f'(x)/g'(x)$ gatnaşygy hem 0/0 kesgitsizligi aňladýar hem-de olar $x=0$ nokadyň etrabynda 3-nji belligiň şertlerini kanagatlandyrýar. Soňa görä-de

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{6}. \ \triangleright$$

2.Kesgitsizligiň ∞/∞ görnüşiniň açylyşy. Bu görnüşdäki kesgitsizlik üçin hem Lopitalyň teoremasy dogrudyr.Ýöne ol teoremada

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ şerti $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ şert bilen çalşyrmaly..

4-nji mysal. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ $(p > 0)$ predeli tapmaly.

◁ Bu predel üçin ∞/∞ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony açmak üçin Lopitalyň düzgüninden peýdalanmak bolar:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{px^p} = 0. \triangleright$$

5-nji mysal. $\lim_{x\to+\infty} [x^2 / 5^x]$ predeli tapmaly.

◁ $f(x) = x^2$ we $g(x) = 5^x$ funksiýalar üçin $f'(x) = 2x$ we $g'(x) = 5^x \ln 5$ önümleriň $f'(x)/g'(x)$ gatnaşygy ∞/∞ kesgitsizligi aňladýar hem-de ol önümler üçin Lopitalyň teoremasynyň şertleri ýerine ýetýär. Şunlukda,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)'}{(5^x \ln 5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{5^x \ln^2 5} = 0.$$

Şonuň üçin hem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)''}{(5^x)''} = 0. \quad \triangleright$$

3. Kesgitsizlikleriň beýleki görnüşleriniň açylyşy. Kesgitsizlikleriň beýleki

$$0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

görnüşleri yokarda garalan iki kesgitsizliklere getirilýär. Ilki bilen soňky üçüsiniň $0\cdot\infty$ görnüşdäki kesgitsizlige getirilýändigini görkezeliň. Eger $x \to a$ bolanda $f(x)$ funksiýa 0, 1 ýa-da ∞ ymtylýan bolup, $g(x)$ funksiýa bolsa degişlilikde 0, ∞ ýa-da 0 ymtylýan bolsa, onda soňky üç kesgitsizlikler $x \to a$ bolanda $y = [f(x)]^{g(x)}$ funksiýanyň predeli tapylanda alynýar. Ol predeli tapmak üçin bolsa

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \qquad (f(x) > 0) \tag{8}$$

funksiýanyň predelini tapmak ýeterlikdir. (8) deňligiň sag böleginiň predeli tapylanda ýokarda agzalan üç ýagdaýda hem $0\cdot\infty$ görnüsdäki kesgitsizlik alynýar. Şonuň üçin diňe $0\cdot\infty$ we $\infty-\infty$ görnüsdäki kesgitsizlikleri açmaklygy öwrenmeklik ýeterlikdir. Ölar bolsa $0/0$ we ∞/∞ görnüşdäki kesgitsizliklere getirilýär.

Goý, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ we $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bolsun, onda

$$f(x)\cdot g(x)= f(x)\Big/\frac{1}{g(x)}=g(x)\Big/\frac{1}{f(x)}$$

deňlikleriň esasynda $0\cdot\infty$ görnüşdäki kesgitsizlikden $0/0$ ýa-da ∞/∞ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar.

Eger $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ we $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ bolsa, onda

$$f(x)-g(x)=\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]\Big/\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}$$

deňligiň esasynda $\infty-\infty$ görnüşdäki kesgitsizlikden $0/0$ görnüsdäki kesgitsizlik alynýar.

6-njy mysal. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ predeli tapmaly.

◁ Bu ýerde $\infty-\infty$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony ýönekeýleşdirip, $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlige getireliň we soňra Lopitalýn düzgünini ulanalyň :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{[e^x-1-x]'}{[x(e^x-1)]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{[e^x+xe^x-1]'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}. \ \triangleright$$

Bellik. $[f(x)]^{g(x)}$ görnüşdäki funksiýanyň predelini tapmak üçin ilki (8) deňligiň sag böleginiň predeli tapylýar we soňra şeýle deňlikden peýdalanylýar:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

7-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$ predeli tapmaly.

◁ Bu predel 1^∞ görnüşdäki kesgitsizlikdir. $x^{1/(x-1)}$ funksiýany

$e^{\ln x/(x-i)}$ görnüşde ýazsak, onda derejäniň görkezijisinde $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Lopitalyň düzgünini peýdalanyp, ilki şol predeli tapalyň:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$$

Şonuň üçin hem

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)}=\lim_{x\to 1}e^{\ln x/(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}}=e^1=e. \triangleright$$

§ 4. 3. Teýloryň formulasy we onuň ulanylyşy

1. Köpagza üçin Teýloryň formulasy. Goý, x görä n derejeli

$$P(x)=b_o+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n \quad (b_n\neq 0) \qquad (9)$$

köpagza berlen bolsun. Kbir a san üçin ony hemişe $x-a$ görä n derejeli köpagza görnüşinde aňladyp bolýandygyny görkezeliň.Onuň üçin (9) deňlikde $x-a=t$ çalşyrma girizip,

$$P(t+a)=b_o+b_1(t+a)+b_2(t+a)^2+\ldots+b_n(t+a)^n$$

deňligi alarys. Bu deňligiň sag bölegini derejelere göterip we t görä deň derejeli agzalary toplaşdyryp,

$$P(t+a)=c_o+c_1t+c_2t^2+\ldots+c_nt^n$$

köpagzany alarys.Eger bu deňlikde $t=x-a$ goýup, ýene öňki x ululyga geçsek, onda $P(x)$ köpagzanyň $x-a$ tapawudyň derejesi boýunça dagydylyşyny alarys:

$$P(x)=c_o+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n. \qquad (10)$$

Bu köpagzanyň näbelli c_k $(k=0,1,\ldots,n)$ köeffisiýentlerini tapmak üçin ony yzygiderli n gezek differensirläliň:

$$P'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\ldots+nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$P''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+\ldots+(n-1)nc_n(x-a)^{n-2},$$

$$P^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdots nc_n$$

Bu deňliklerde we (10) deňlikde $x=a$ goýup,

$$P(a)=c_o,\quad P'(a)=c_1,\quad P''(a)=2!c_2,\ldots,P^{(n)}(a)=n!c_n$$

deňlikleri alarys we olardan näbelli koeffisiýentleri taparys:

$$c_o = P(a), \quad c_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \quad c_2 = \frac{P'(a)}{2!}, \; \dots, c_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Olary (9) deňlikde goýup, köpagza üçin Teýloryň formulasy diýilýän

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

formulany alarys. Bu formula x-iň derejesine görä $P(x)$ köpagzany $x-a$ tapawudyň derejesi boýunça köpagza görnüşinde aňlatmaklyga mümkinçilik berýär we ony köpagzanyň a sana ýakyn bolan bahalaryny hasaplamakda ulanmak amatlydyr, çünki $x-a$ tapawudyň ýeterlik kiçi bolýandygy üçin käbir derejeden başlap goşulyjylary taşlamak bolar.

2. Erkin funksiýa üçin Teýloryň formulasy. Indi bolsa erkin $f(x)$ funksiýanyň haýsy şetlerde $x-a$ tapawudyň derejesi boýunça köpagza görnüşinde aňladylýandygyny görkezeliň we şunlukda göýberilýän ýalňyşlygy tapalyň.

Teýloryň teoremasy. Eger f funksiýanyň a nokadyň käbir etrabynda $n+1$ tertipli önümi bar bolsa, onda şol etraba degişli islendik $x \neq a$ üçin a we x nokatlaryň arasynda şeýle c nokat tapylyp,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x) \tag{11}$$

formula dogrudyr, bu ýerde

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12}$$

$\lhd$ Goý,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad f(x) - P_n(x) = r_n(x) \tag{13}$$

bolsun. Onda teoremany subut etmek üçin $r_n(x)$ ücin (12) deňligi görkezmek ýeterlikdir. Bellenen $x > a$ ücin $[a, x]$ kesimde

$$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1} r_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

funksiýa garalyň.Teoremanyň şertlerinde ol funksiýa $[a, x]$ kesimde üznüksiz we differensirlenýändir we (13) esasynda

$$F(a) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - r_n(x) = r_n(x) - r_n(x) = 0,$$

$$F(x) = f(x) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k - \frac{(x-x)^{n+1} r_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$$

ýagny F funksiýa $[a, x]$ kesimde Roluň teoremasynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýar. Şoňa görä $(a,\, x) \ni c$ nokat tapylyp,

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{(n+1)(x-c)^n r_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Bu deňlikden bolsa (12) formula gelip çykýar we teorema subut bolýar. ⊳

1-nji bellik. Teoremanyň şertlerinde $f^{(n+1)}(c)$ funksiýa çäklidir, şoňa görä (12) deňlik esasynda

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)}{(n+1)!} = 0,$$

ýagny $x \to a$ bolanda $r_n(x)$ funksiýa $(x-a)^n$ görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi funksiýadyr, Şonuň esasynda

$$r_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a) \tag{14}$$

deňligi ýazmak bolar.

(11) formula Teýloryň formulasy, ondaky $r_n(x)$ funksiýa bolsa şol formulanyň galyndy agzasy diýilýär. Şunlukda, (12) we (14) formulalar boýunça kesgitlenen funksiýalara deişlilikde Lagranžyň we Peanonyň galyndy agzalary diýilýär.

. **3. Makloreniň formulasy.** Teýloryň (11) formulasyndan $a = 0$ bolanda alynýan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x) \tag{15}$$

formula Makloreniň formulasy diýilýär. Bu halda (12) we (14) galyndy agzalar

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad r_n(x) = o(x^n) \tag{16}$$

görnüşlerde ýazylar.

2-nji bellik. Mälim bolşy ýaly, islendik üznüksiz we täk funksiýanyň $x=0$ nokatdaky bahasy nola deňdir. Şonuň üçin $(-a, a)$ aralykda differensirlenýän täk funksiýanyň önüminiň jübütligini we jübüt funksiýanyň önüminiň täkligini nazara alsak, onda islendik tertipdäki önümi bar bolan täk f funksiýa üçin $f^{(2k)}(0)=0$ we jübüt f funksiýa üçin $f^{(2k+1)}(0)=0$ bolar. Şonuň esasynda Makloreniň formulasy islendik tertipdäki önümi bar bolan jübüt funksiýa üçin

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+r_{2n}(x) \tag{17}$$

görnüşde, täk funksiýa üçin bolsa

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+r_{2n+1}(x) \tag{18}$$

görnüşde ýazylar

4.Käbir funksiýalaryň Teýlor formulasy. Eger $f(x)=e^x$ bolsa, onda $f^{(k)}(x)=e^x$ bolýandygy üçin $f^{(k)}(0)=1, \quad k\in N$. Şoňa görä ol funksiýa üçin (15) formula şeýle görnüşi alar:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)\ . \tag{19}$$

$f(x)=\sin x$. Bu funksiýa täkdir we $f^{(k)}(x)=\sin(x+k\pi/2)$ (§ 3.4, mysal 8 seret). Şoňa görä (18) formula we $f^{(2n+1)}(0)=\sin(n\pi+\pi/2)=$ $=\cos n\pi=(-1)^n$ deňlik boýunça

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_{2n+1}(x). \tag{20}$$

$f(x)=\cos x.$ Bu funksiýa üçin $f^{(k)}(x)=\cos(x+k\pi/2)$ (§ 3.4, mysal 8 seret). Onuň jübütligi üçin (17) formula we $f^{(2n)}(0)=\cos(n\pi)=(-1)^n$ deňlik esasynda

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n}(x)\ . \tag{21}$$

$f(x)=\ln(1+x)$ $(x>-1)$. Bu funksiýa üçin matematiki induksiýanyň esasynda

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\ k\in N$$

formulany görkezmek bolar (ony özbaşdak görkeziň!). Şonuň üçin $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ deňlik esasynda. bu funksiýa üçin Makloreniň formulasy şeýle bolar:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x). \qquad (22)$$

$f(x)=(1+x)^m$. Bu funksiýa üçin

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)...(m-k+1)(1+x)^{m-k},\ k\in N$$

bolýandygy aňsat görkezilýär. Şoňa görä $f^{(k)}(0)=m(m-1)...(m-k+1)$ deňlik esasynda bu funksiýa üçin Makloreniň formulasy

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+r_n(x) \qquad (23)$$

görnüşde bolar.

Eger $m=n-$ natural san bolsa, onda $f^{(n+1)}(x)=0$, ýagny $r_n(x)=0$ bolar we ol formuladan Nýutonyň binomynyň forrmulasy alynýar:

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+x^n.$$

5. Teýloryň formulasynyň ulanylyşy. Bu formulanyň käbir meseleler çözülende ulanylyşyny mysallarda görkezeliň.

8-nji mysal. $f(x)=(1+x)/(1+x^2)$ funksiýany x üýtgeýäniň bitin položitel derejesi boýunça x^4 çenli dagytmaly we $f^{(4)}(0)$ hasaplamaly.

$\lhd$ Berlen funksiýany $f(x)=1+(x-x^2)(1+x^2)^{-1}$ görnüşde ýazyp, (23) formulany ulanarys:

$$f(x)=1+(x-x^2)(1-x^2+x^4+r_4(x))=$$

$$=1+x-x^2-x^3+x^4+r_4(x).$$

Bu deňligi Makloreniň formulasy bilen deňeşdirip, $f^{(4)}(0)/4!=1$ deňligi alarys. Bu ýerden $f^{(4)}(0)=24$. $\rhd$

Indi bolsa islendik takyklykda e sany hasaplap bolýan formulany getirip çykaralyň. $f(x)=e^x$ funksiýa üçin Teýlor formulasynyň hususy haly bolan Makloren formulasyndan $x=1$ bolanda

$$e=1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+r_n$$

deňlik alynýar. Şu formula boýunça e san kesgitlenip, n sanyň näçä deňdigi e sanyň haýsy takyklykda hasaplanylýandygyna baglydyr. Ol san Lagranžyň galyndy agzasyndan alynýan

$$|r_n(1)|<\frac{e}{(n+1)!}\le\frac{3}{(n+1)!}$$

deňsizlik ulanylyp tapylýar.

9-njy mysal. 10^{-6} takyklykda e sany hasaplamaly.

⊲ Ony görkezmek üçin (20) formuladan $x=1$ bolanda alynýan

$$e=1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+r_n(1)$$

deňlikden peýdalanarys.

$$|r_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-6}$$

deňsizligiň $n=9$ bolanda ýerine ýetýändigi esasynda

$$e\approx 1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{9!}\approx 2{,}718281. \ ⊳$$

10-njy mysal. $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ ýakynlaşan formulada x üýtgeýäniň haýsy bahalarynda ýalňyşlyk 0,00005 sandan kiçidir?

⊲ $f(x)=\cos x$ funksiýa üçin görkezilen Makloreniň (21) formulasyndan we Lagranžyň galyndy agzasyndan görnüşi ýaly, meseläni çözmek üçin

$$|r_6(x)| \leq \frac{|x|^6}{6!} < 0{,}00005$$

deňsizligi çözmek ýeterlikdir. Bu ýerden $|x| < 0{,}575$ alynýar. ▹

11-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 0}[(\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2})/x^5]$ predeli hasaplamaly.

◃ Bu predeli hasaplamak üçin galyndy agzasy Peanonyňky bolan aşakdaky Makloreniň formulalaryndan peýdalanarys:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$(1+x)^m =$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Gözlenýän predeliň maýdalawjysynda x^5 bolany üçin, sanawjydaky funksiýalara Makloreniň formulasyny ulananymyzda x üýtgeýäniň bäşinji derejeden soňkylarynyň hemmesini $o(x^5)$ girizeris:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

$$x\sqrt[6]{1-x^2} = x(1-x^2)^{1/6} = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{72}x^5 + o(x^5),$$

$$\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2} = \frac{7}{90}x^5 + o(x^5).$$

Şonuň üçin hem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{90}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{7}{90}. \quad ▹$$

§ 4. 4. Funksiýanyň monotonlygy we ekstremumy

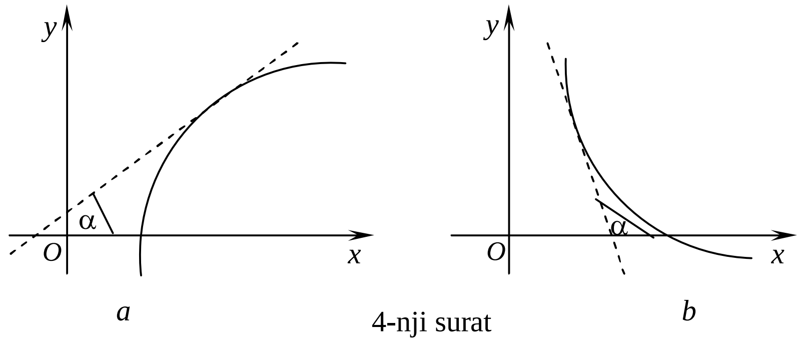
1. Funksiýanyň monotonlyk nyşanlary. Ilki bilen funksiýanyň hemişelikliginiň zerur we ýeterlik şertini görkezeliň. Mälim bolşy ýaly $f(x)=C$ hemişelik funksiýanyň önümi nola deňdir. Lagranžyň teoremasynyň 1-nji netijesi boýunça önümi nola deň bolan funksiýa hemişelikdir. Şonuň üçin hem $f'(x)=0$ şert f funksiýanyň hemişelik bolmagynyň zerur we ýeterlik şertidir.

1-nji teorema. Eger (a,b) aralykda differensirlenýän f funksiýa üçin şol aralykda $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) bolsa, onda (a,b) aralykda ol funksiýa kemelmeýändir (artmaýandyr). Eger-de $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bolsa, onda funksiýa (a,b) aralykda artýandyr (kemelýändir).

$\triangleleft$ Goý, (a,b) aralykda $f'(x)\geq 0$ we $\forall x_1, x_2 \in (a,\ b)$ üçin $x_1<x_2$ bolsun. Onda $[x_1,x_2]$ kesimde Lagranžyň teoremasynyň hemme şertleri ýerine ýetýär we şonuň esasynda (x_1,x_2) aralykda c nokat tapylyp,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \tag{24}$$

deňlik ýerine ýetýär.Bu deňlikden bolsa $f'(c)\geq 0,\ x_2>x_1$ şertler esasynda $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$ deňsizlik gelip çykýar, ýagny f funksiýa (a,b) aralykda kemelmeýändir. $f'(x)\leq 0$ bolandaky subudy şonuň ýalydyr. Şeýle hem $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bolanda f funksiýanyň artýandygy (kemelýändigi) şonuň ýaly subut edilýär. $\triangleright$



4-nji surat

Bu teoremanyň ýönekeý geometrik manysy bardyr. Eger käbir aralykda

$y = f(x)$ funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşma Ox oky bilen ýiti α $(tg\alpha > 0)$ burçy emele getirýän bolsa (4-nji a surat), onda funksiýa şol aralykda artýandyr. Eger-de galtaşma Ox oky bilen kütek α $(tg\alpha < 0)$ burçy emele getirýän bolsa (4-nji b surat), onda funksiýa şol aralykda kemelýändir.

12-nji mysal. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ funksiýanyň artýan we kemelýan aralyklaryny tapmaly.

$\lhd$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$ deňligiň esasynda $x < 1$ we $x > 3$ bolanda önüm položiteldir we funksiýa $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ aralyklarda artýandyr, $1 < x < 3$ bolanda önüm otrisateldir we funksiýa $(1, 3)$ aralykda kemelýändir. $\rhd$

2. Funksiýanyň ekstremumy. Ekstremumyň zerur şerti. Goý, f funksiýa a nokadyň käbir $U(a,\delta)$ etrabynda kesgitlenen bolsun. Eger $\forall x \in U(a, \delta)$ üçin $f(x) \le f(a)$ $(f(x) \ge f(a))$ deňsizlik ýerine ýetse, onda a nokada f funksiýanyň maksimum (minimum) nokady diýilýär. Funksiýanyň maksimum (minimum) nokatdaky bahasyna bolsa ol funksiýanyň maksimumy (minimumy) diýilýär. Funksiýanyň maksimumyna we minimumyna bolsa onuň ekstremumy diýilýär.

Funksiýanyň a nokatdaky bahasynyň onuň diňe şol nokadyň käbir etrabyndaky bahalary bilen deňeşdirilýändigi üçin bu kesgitlemedäki ekstremuma funksiýanyň etrap ekstremumy hem diýilýär.

2-nji teorema (Ekstremumyň zerur şerti). Eger f funksiýa a ekstremum nokadynda differensirlenýän bolsa, onda $f'(a) = 0$.

$\lhd$ a nokadyň funksiýanyň ekstremum nokady bolany üçin ol nokadyň şeýle $U(a,\delta)$ etraby tapylyp, funksiýanyň $f(a)$ bahasy şol etrapdaky bahalarynyň iň ulusy ýa-da iň kiçisidir. Şoňa görä Fermanyň teoremasy esasynda $f'(a) = 0$ bolar. $\rhd$

Şeýlelikde, differensirlenýän funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmak üçin $f'(x) = 0$ deňlemäni çözmek zerurdyr (onuň çözüwine önümiň nol nokady ýa-da funksiýanyň duruw nokady diýilýär). Ol nokadyň ekstremum nokady bolman hem bilýändigini belläliň. Mysal üçin, $f(x) = x^3$ funksiýanyň $f'(x) = 3x^2$ önümi üçin $f'(0) = 0$, ýöne $x = 0$ ol funksiýanyň ekstremum nokady däldir, sebäbi $(-1, 1)$ aralykda ol artýar.

Şonuň üçin hem $f'(x)=0$ şerte ekstremumyň zerur şerti diýilýär. Funksiýanyň differensirlenmeýän, ýagny önüminiň tükeniksizlige öwrülýän ýa-da ýok nokady hem onuň ekstremum nokady bolup biler, ol aşakdaky mysallarda görkezilýär.

13-nji mysal. a) $f(x)=|x|$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiýalaryň ekstremum nokatlaryny tapmaly..

$\lhd$ $x=0$ nokatda olaryň birinjisiniň önümi ýokdur, ikinjisiniň önümi bolsa tükeniksizlige deňdir, ýöne ol nokat funksiýalaryň ikisiniň hem minimum nokadydyr, çünki $\forall\delta>0$ üçin $-\delta<x<\delta$ bolanda olaryň ikisi üçin hem $f(x)\geq 0=f(0)$. $\rhd$

Funksiýanyň duruw nokadyna, şeýle hem onüminiň tükeniksizlige deň ýa-da ýok nokadyna onuň ekstremumynyň bolup biljek nokady diýilýär. Ol nokadyň haçan hakykatdan hem funksiýanyň ekstremum nokady bolýandygyny bilmek üçin goşmaça barlag geçirmeli. Onuň üçin bolsa ýeterlik şertleri ulanmaly.

2.Ekstremumyň ýeterlik şertleri. Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f funksiýa üçin $\delta>0$ tapylyp, $(a-\delta, a)$ we $(a, a+\delta)$ aralyklarda funksiýanyň alamatlary dürli-dürli bolsa, onda ol funksiýa a nokatdan geçende alamatyny üýtgedýär diýilýär.

3-nji teorema (Birinji ýeterlik şert). Eger f funksiýa a nokadyň käbir etrabynda differensirlenýän bolup, $f'(a)=0$ we a nokatdan geçende f' önüm alamatyny üýtgedýän bolsa, onda a nokatda f funksiýanyň ekstremumy bardyr. Şunlukda, eger:

1. Önümiň alamaty goşmakdan aýyrmaga üýtgese, onda a nokat f funksiýanyň maksimum nokadydyr.
2. Önümiň alamaty aýyrmakdan goşmaga üýtgese, onda a nokat f funksiýanyň minimum nokadydyr.

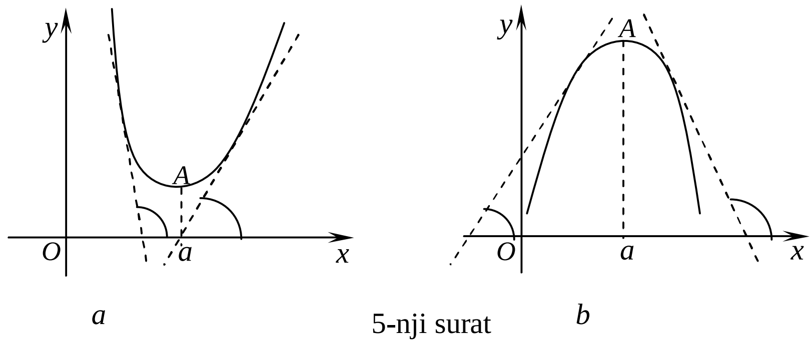
Eger-de funksiýanyň önümi a nokatdan geçende alamatyny üýtgetmese, onda ol nokatda funksiýanyň ekstremumy ýokdur.

$\lhd$ Goý, x garalýan etraba degişli erkin nokat bolsun. Onda $[a, x]$ (ýa-da $[x, a]$) kesimde f funksiýa Lagranžyň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýar we şonuň üçin $(a, x)\ni c$ (ýa-da $(x, a)\ni c$) nokat tapylyp, $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ deňlik dogrudyr. Eger $x<a$ bolanda

$f'(x) > 0$ we $a < x$ bolanda $f'(x) < 0$ bolsa, onda iki ýagdaýda-da ol deňlikden $f(x) < f(a)$ deňsizlik alynýar we ol a nokadyň f funksiýanyň maksimum nokadydygyny aňladýar. 2-nji şert ýerine ýetende a nokadyň funksiýanyň minimum nokadydygy şonuň ýaly görkezilýär.

Eger funksiýanyň f' önümi a nokatdan geçende alamatyny üýtgetmese, onda şol nokatda onuň ekstremumynyň ýokdugy 16-njy teoremadan gelip çykýar, çünki bu halda funksiýa monotondyr. ▹

Bu teoremanyň şeýle geometrik manysy bardyr: eger differensirlenýän funksiýanyň grafiginiň $A(a,\ f(a))$ nokadynda galtaşma Ox okuna parallel, ondan çepdäki nokatlarynda galtaşma şol ok bilen kütek, sagdaky nokatlarda bolsa ýiti burç emele getirýän bolsa, onda a onuň maksimum nokadydyr (5-nji a surat). Eger-de galtaşma ondan çepdäki nokatlarda şol ok bilen kütek, sagdaky nokatlarynda bolsa ýiti burç emele getirýän bolsa, onda a onuň minimum nokadydyr (5-nji b surat)



5-nji surat

Bu düzgün boýunça funksiýanyň ekstremumyny tapmak üçin onuň kesgitlenen aralygyny differensirlenmeýän we duruw nokatlary arkaly aralyklara bölmeli we olarda önümiň alamatlaryny kesgitlemeli (onuň üçin bolsa her aralygyň bir nokadynda önümiň alamatyny bilmek ýeterlikdir).

14-nji mysal. $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

◃ Funksiýanyň san okunyň ähli nokatlarynda önümi bardyr:

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x+2)(x-1)^2(5x+4)\ .$$

Funksiýanyň önüminiň nollary $x_1 = -2$, $x_2 = -0{,}8$, $x_3 = 1$. Şol nokatlar arkaly san okuny $(-\infty, -2)$, $(-2, -0{,}8)$, $(-0{,}8, 1)$, $(1, +\infty)$ aralyklara böleliň we şolara degişli –3, –1, 0, 2 nokatlarda önumiň alamatlaryny kesgitläp, önümiň degişli aralyklardaky alamatlaryny anyklarys:

1) $(-\infty, -2)$ aralykda $f'(x) > 0$,
2) $(-2, -0{,}8)$ aralykda $f'(x) < 0$,
3) $(-0{,}8,\ 1)$ aralykda $f'(x) > 0$,
4) $(1, +\infty)$ aralykda $f'(x) > 0$.

Şeýlelikde, ekstremumyň birinji ýeterlik şerti boýunça $x = -2$ nokat funksiýanyň maksimum, $x = -0{,}8$ nokat minimum nokadydyr, $x = 1$ nokatda bolsa onuň ekstremumy ýokdur. Şunlukda, funksiýanyň maksimum bahasy $f(-2) = 0$, minimum bahasy bolsa $f(-0{,}8) = -8{,}4$. ▷

Bellik. Bu teorema f funksiýa a nokatda üznüksiz bolup, şol nokatda onuň önümi ýok halynda hem dogrudyr.

Kabir hallarda ekstremumy tapmak üçin funksiýanyň ikinji önüminiň barlygyny talap edýän aşakdaky teoremany ulanmak amatly bolýar.

4-nji teorema (Ikinji ýeterlik şert). Goý, f funksiýanyň a nokatda ikinji önümi bar bolup, $f'(a) = 0$ bolsun.Onda a nokat $f''(a) > 0$ bolanda funksiýanyň minimum, $f''(a) < 0$ bolanda bolsa maksimum nokadydyr.

◁ Ikinji onümiň kesgitlemesine we teoremanyň şertine görä

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x - a}$$

deňligi ýazmak bolar.Bu deňlik esasynda $f''(a) > 0$ bolanda, funksiýanyň predeliniň häsiýeti boýunça a nokadyň käbir δ – etrabynda

$$\frac{f'(x)}{x - a} > 0$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şonuň üçin $x < a$ bolanda $f'(x) < 0$ we $x > a$ bolanda $f'(x) > 0$ bolar we ekstremumyň birinji ýeterlik şerti boýunça a nokat funksiýanyň minimum nokadydyr. Ikinji tassyklama hem şonuň ýaly subut edilýär. ▷

15-nji mysal. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

◁ $f'(x)=4x^3-20x=0$ deňlemäniň $x_1=-\sqrt{5},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{5}$ çözüwleri bardyr. Şol nokatlarda $f''(x)=12x^2-20$ ikinji önümiň bahalarynyň alamatlaryny kesgitläliň: $f''(-\sqrt{5})=40>0,\ f''(0)=-20<0,$ $f''(\sqrt{5})=40>0$. Şeýlelikde, ekstremumyň ikinji ýeterlik şerti boýunça $x_1=-\sqrt{5},\ x_3=\sqrt{5}$ nokatlar funksiýanyň minimum, $x_2=0$ nokat bolsa maksimum nokadydyr. Şunlukda, $f(-\sqrt{5})=f(\sqrt{5})=-10$ funksiýanyň minimum bahasy we $f(0)=15$ maksimum bahasy bolar. ▷

Şeýlelikde, funksiýanyň ekstremumy üçin ýene-de bir düzgün aldyk.

Bu düzgüni funksiýanyň a nokatda ikinji önümi ýok ýa-da $f''(a)=0$ bolanda ulanyp bolmaýar. Bu halda ekstremumy tapmak üçin aşakdaky teoremany ulanmak amatlydyr.

5-nji teorema (Üçünji ýeterlik şert). Goý, f funksiýanyň a nokatda n tertipli önümi bar bolup,

$$f^{(i)}(a)=0 \quad (i=1,...,n-1), \qquad f^{(n)}(a)\neq 0$$

şertler ýerine ýetsin. Onda n jübüt bolup, $f^{(n)}(a)<0$ bolanda a nokat f funksiýanyň maksimum, $f^{(n)}(a)>0$ bolanda bolsa minimum nokadydyr. Eger n täk bolsa, onda a nokatda f funksiýanyñ ekstremumy ýokdur.

◁ Teoremanyň şertlerinde

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

Teýlor formulasy dogrudyr. Onda $x\to a$ bolanda

$$b(x,a)=\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}\to 0$$

bolýandygy üçin, $x\to a$ bolanda $b(x,a)$ tükeniksiz kiçidir. Şonuň üçin Teýlor formulasyndan alynýan

$$f(x)-f(a)=\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+b(x,a)\right](x-a)^n$$

deňlikdäki kwadrat ýaýyň içindäki aňlatmanyň alamaty $f^{(n)}(a)$ önümiň alamaty bilen gabat gelýär. Şonuň üçin n jübüt bolanda,

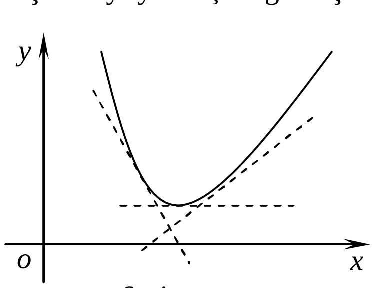
$(x-a)^n > 0$ bolýandygy sebäpli, $f(x)-f(a)$ tapawudyň alamaty hem $f^{(n)}(a)$ önümiň alamaty bilen gabat gelýär. Şol sebäpli $f^{(n)}(a) > 0$ bolanda $f(x)-f(a) > 0$, ýagny a nokat f funksiýanyň minimum nokadydyr, $f^{(n)}(a) < 0$ bolanda bolsa $f(x)-f(a) < 0$ we a nokat maksimum nokadydyr. Eger n täk san bolsa, onda $(x-a)^n$ aňlatma we onuň bilen birlikde bolsa $f(x)-f(a)$ tapawut a nokatdan geçende alamatyny üýtgedýär, şoňa görä hem a nokat funksiýanyň ekstremum nokady bolup bilmez. ▹

16-njy mysal. $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+3$ funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

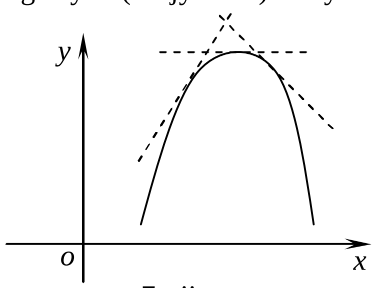
◃ $f'(x)=4x^3+12x^2+12x+4$ önümiň ýeke-täk $x=-1$ nol nokady bardyr. Şol nokatda beýleki önümleriň bahalaryny hasaplalyň: $f''(x)=12x^2+24x+12$, $f''(-1)=0$,. $f'''(x)=24x+24$, $f'''(-1)=0$ we $f^{IV}(x)=24$, $f^{IV}(-1)=24>0$ bolany üçin, ekstremumyň üçünji ýeterlik şerti boýunça $x=-1$ nokat funksiýanyň minimum nokadydyr we minimum bahasy $f(-1)=2$. ▹

§ 4. 5. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligi we epin nokatlary

1.Funksiýanyň grafiginiň güberçeklik ugurlary. Eger käbir aralykda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi oňa geçirilen islendik galtaşmadan ýokarda (aşakda) ýerleşýän bolsa, onda onuň grafigi şol aralykda aşak (ýokaryk) güberçek diýilýär. Aşak güberçek grafige oýuk (6-njy surat) we ýokaryk



6-njy surat



7-nji surat

güberçek grafige bolsa ýöne güberçek grafik (7-nji surat) hem diýilýär.

6-njy teorema. Eger f funksiýanyň $(a,\ b)$ aralykda ikinji önümi bar bolup, $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ bolsa, onda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi şol aralykda aşak (ýokaryk) güberçekdir.

◁ Goý, $(a,\ b)$ aralykda $f''(x)>0$ bolsun. Bellenen $x_o\in(a,\ b)$ üçin $(x_o,\ f(x_o))$ nokatda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine galtaşma geçireliň. Eger onuň nokatlarynyň üýtgeýän ordinatasyny Y bilen belgilesek, onda ol galtaşmanyň deňlemesi

$$Y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$$

görnüşde bolar. $y=f(x)$ funksiýany x_o nokadyň käbir etrabynda $n=2$ üçin Teýloryň formulasy boýunça dagydyp,

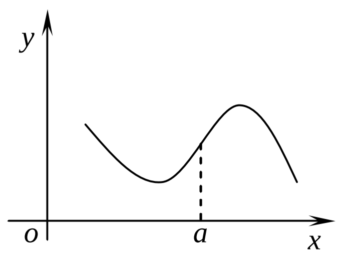
$$y=f(x)=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+\frac{f''(c)}{2}(x-x_o),\ c\in(x_o,\ x)$$

deňligi alarys. Soňky iki deňlikden bolsa

$$y-Y=\frac{f''(c)}{2}(x-x_o)^2$$

deňlik gelip çykýar. Şerte görä $f''(c)>0$ bolýandygy üçin bu deňlikden $y-Y>0$, ýagny $y>Y$ deňsizlik gelip çykýar. Ol deňsizlik $y=f(x)$ funksiýanyň grafigynyň şol grafiga erkin $M(x,\ f(x))$ $(x\in(a,b))$ nokatda geçirilen galtaşmadan ýokarda ýerleşýändigini aňladýar, ýagny $(a,\ b)$ aralykda . $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi aşak güberçekdir. Teoremanyň ikinji tassyklamasy şonuň ýaly subut edilýär. ▷

2. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady. Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f üçin $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň şol etrapda a nokadyň çepinde we sagynda güberçeklik ugurlary dürli-dürli bolsa, onda $A(a,\ f(a))$ nokada onuň grafiginiň epin nokady (8-nji surat)., a nokada bolsa f funksiýanyň epin nokady diýilýär.



8-nji surat

7-nji teorema (zerur şert). Eger $A(a,\ f(a))$ epin nokady üçin f funksiýanyň a nokatda üžnüksiz ikinji önümi bar bolsa, onda $f''(a)=0$.

◁ Eger tersine $f''(a)>0$ (ýa-da $f''(a)<0$) bolsa, onda f'' önümiň a nokatda üznüksizligi esasynda a nokadyň käbir etrabynda hem şol alamat saklanar we 6-njy teorema esasynda a nokadyň şol etrabynda funksiýanyň grafigi aşak (ýa-da ýokaryk) güberçek bolar, ýagny a nokat funksiýanyň epin nokady bolup bilmez. Bu garşylyk teoremany subut edýär. ▷

Teoremanyň $f''(a)=0$ şerti zerur bolup, ýöne ol ýeterlik däldir. Mysal üçin, $f(x)=x^4$ funksiýanyň $f''(x)=12x^2$ ikinji önümi $x=0$ nokatda nola deňdir, ýöne ol nokat funksiýanyň epin nokady däldir, çünki $x=0$ nokadyň islendik etrabynda ol funksiýa aşak güberçekdir.

Funksiýanyň ikinji önüminiň ýok nokady hem onuň epin nokady bolup biler. Ony $x=0$ nokatda önümi ýok, ýöne şol nokat onuň epin nokady bolan $f(x)=x^{1/3}$ funksiýa tassyklaýar.

8-nji teorema (Ýeterlik şert). Eger a nokadyň käbir etrabynda ikinji önümi bar bolan f funksiýa üçin $f''(a)=0$ bolup, f'' önümiň şol etrapda a nokadyň çepinde we sagynda alamatlary dürli-dürli bolsa, onda $A(a, f(a))$ nokat $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň epin nokadydyr.

◁ Funksiýanyň ikinji önüminiň a nokatdan çepde we sagda alamatlarynyň dürlüligi esasynda, 6-njy teorema boýunça a nokatdan çepde we sagda funksiýanyň grafiginiň güberçeklik ugurlary dürli bolar. Şonuň üçin $A(a, f(a))$ nokat $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň epin nokadydyr. ▷

Şeýlelikde, funksiýanyň epin nokatlaryny hem-de onuň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny kesgitlemek üçin aşakdaky düzgünden peýdalanmak bolar.

1. Funksiýanyň ikinji önüminiň nola deň hem-de ikinji önüminiň ýok (ýa-da tükeniksizlide deň) nokatlaryny tapmaly.
2. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny şol nokatlar hem-de funksiýanyň üzülme nokatlary arkaly aralyklara bölmeli we alnan aralyklaryň her birinde funksiýanyň ikinji önüminiň alamatlaryny kesgitlemeli.

17-nji mysal. $f(x)=\frac{1}{x}+4x^2$ funksiýanyň epin nokatlaryny, aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny tapmaly.

$\lhd$ Funksiýanyň ikinji önümini tapalyň:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+8x, \qquad f''(x)=\frac{2}{x^3}+8=8\frac{x^3+1/4}{x^3}.$$

Diýmek, funksiýanyň ikinji önümi $x=0$ nokatda tükeniksizlige deňdir we $x=-1/\sqrt[3]{4}$ nokatda nola deňdir. Şonuň üçin hem funksiýanyň kesgitleniş oblastyny $\left(-\infty,-1/\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-1/\sqrt[3]{4},0\right)$, $(0,+\infty)$ aralyklara bölüp, olaryň her birinde ikinji önümiň alamatyny kesgitläliň.

1) Eger $x\in\left(-\infty,-1/\sqrt[3]{4}\right)$ bolsa, onda $f''(x)>0$ we funksiýa aşak güberçekdir.

2) Eger $x\in\left(-1/\sqrt[3]{4},0\right)$ bolsa, onda $f''(x)<0$ we funksiýa ýokaryk güberçekdir.

3) Eger $x\in(0,+\infty)$ bolsa, onda $f''(x)>0$ we funksiýa aşak güberçekdir.

Şeýlelikde, ikinji önüm $x=-1/\sqrt[3]{4}$ we $x=0$ nokatlardan geçende alamatyny üýtgedýär. Şunlukda, $x=-1/\sqrt[3]{4}$ funksiýanyň epin nokady bolup, $x=0$ epin nokady däldir, çünki ol nokatda funksiýa kesgitlenmedikdir. $\rhd$

§ 4. 6. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary we derňelişi

1. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary, Eger $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ predelleriň iň bolmanda birisi $+\infty$ ýa-da $-\infty$ deň bolsa, onda $x=a$ göni çýzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasy diýilýär. Eger f funksiýa

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \quad \lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0 \tag{25}$$

görnüşde aňladylýan bolsa, onda $y=kx+b$ göni çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy diýilýär.

9-njy teorema. $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $x\to+\infty$ bolanda $y=kx+b$ ýapgyt asimptotasynyň bolmagy üçin

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b \tag{26}$$

predelleriň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

◁ **Zerurlyk.** Goý, $y=kx+b$ göni çyzyk $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy bolsun, ýagny (25) deňlikler ýerine ýetsin, onda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=k+\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b\,.$$

Ýeterlik. Goý, (26) predeller bar bolsun, onda onuň ikinji deňligi $\alpha(x)=f(x)-kx-b$ funksiýanyň $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidigini aňladýar we bu ýerden (25) deňlikler alynýar, ýagny $y=kx+b$ göni çyzyk $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasydyr. ▷

Funksiýanyň grafiginiň $x\to-\infty$ bolandaky ýapgyt asimptotasy hem şonuň ýaly kesgitlenýär.

18-nji mysal. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ funksiýanyň grafiginiň asimptotalaryny tapmaly.

◁ $x=1$ göni çýzyk funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasydyr, çünki $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\infty$. Funksiýany

$$f(x)=\frac{x^2+x+2-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)-2}{x-1}=x+2-\frac{2}{x-1}$$

görnüşde ýazyp, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ deňligiň esasynda $y=x+2$ göni çyzygyň funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasydygyny alarys. ▷

2. Funksiýanyň derňelişi we onuň grafigi. Funksiýany derňemekligi şeýle tertipde geçirmek bolar.

1. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny we üzülme nokatlaryny tapmaly.

2. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalaryny tapmaly.

3. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny kesgitlemeli we ekstremum nokatlaryny hem-de ekstremum bahalaryny tapmaly.

4.Funksiýanyň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny hem-de epin nokatlaryny kesgitlemeli.

5. Funksiýanyň grafiginiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmaly.

6. Alnan maglumatlar esasynda funksiýanyň grafigini gurmaly.

Funksiýa jübüt ýa-da täk bolanda onuň grafiginiň simmetrikligini nazara alyp, ony diňe $x \geq 0$ bolanda derňemek ýeterlikdir.

19-njy mysal. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ funksiýany derňemeli we grafigini gurmaly.

◁ I. Funksiýa $x=-1,\ x=1$ nokatdan başga $\forall x \in \boldsymbol{R}$ nokatlarda kesgitlenen we üznüksizdir, $x=-1,\ x=1$ onuň üzülme nokatlarydyr.

2. $\lim\limits_{x\to\pm1}[(x^2+1)/(x^2-1)] = \infty$. Diýmek, $x=-1,\ x=1$ göni çyzyklar grafigiň dik asimptotalarydyr, $y=1$ bolsa onuň ýapgyt asimptotasydyr, çünki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right] = 1.$$

3. Funksiýanyň önümlerini tapalyň:

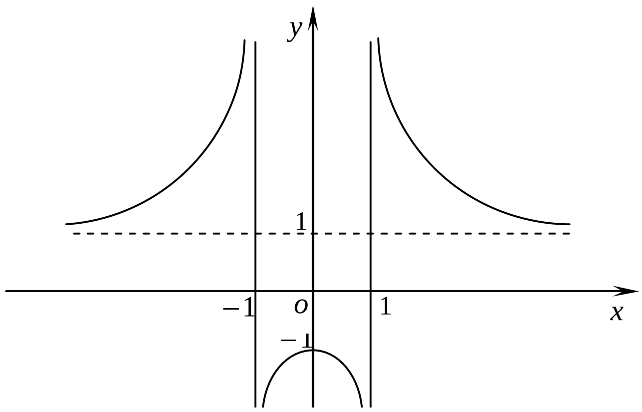
$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Önümi nola deňläp, onuň $x=0$ köküni taparys. $x=-1,\ x=1$ nokatlaryň önümiň hem üzülme nokatlary bolýandygy üçin, san okuny $x=-1,\ x=1$ we $x=0$ nokatlar arkaly böleklere bölüp, olarda önümiň alamatlaryny anyklalyň. $x<-1,\ -1<x<0$ bolanda $f'(x)>0$ we funksiýa şol aralyklarda artýar, $0<x<1,\ x>1$ bolanda $f'(x)<0$ we funksiýa şol aralyklarda kemelýär. $f'(0)=0,\ f''(0)=-4<0$ bolýandygy esasynda $x=0$ funksiýanyň maksimum nokadydyr we funksiýanyň maksimum bahasy $f(0) = -1$.

4. $x < -1$ we $x > 1$ bolanda $f''(x) > 0$ we funksiýanyň grafigi şol aralyklarda aşak güberçekdir, $-1 < x < 1$ bolanda bolsa $f''(x) < 0$ we funksiýanyň grafigi şol aralykda ýokaryk güberçekdir. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady ýokdur, çünki ikinji önümi hiç bir nokatda nola deň däldir we funksiýanyň kesgitlenmedik nokatlarynda kesgitlenmedikdir.

5. $x = 0$ bolanda $y = f(0) = -1$ bolýandygy üçin funksiýanyň grafigi Oy oky bilen $A(0, -1)$ nokatda kesişýändir, Ox bilen bolsa kesişýän däldir, çünki $(x^2 + 1)/(x^2 - 1) = 0$ deňlemäniň hakyky köki ýok.

6. Ýokardaky maglumatlary ulanyp, funksiýanyň grafigini gurýarys.



9-njy surat

§ 4. 6. Funksiýanyň iň kiçi we iň uly bahalary we meseleleri çözmekde olaryň ulanylyşy

Matematikada, fizikada, himiýada we durmuşda duş gelýän köp meseleler käbir funksiýalaryň kesimdäki iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaklyga getirilýär. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň Weýerştrasyň teoremasy boýunça şol kesimde iň uly we iň kiçi bahalary alýandygy üçin, ol funksiýanyň $[a, b]$ kesimiň içindäki iň uly bahalaryny $f(a)$ we $f(b)$ bahalary bilen deňeşdirip, f funksiýanyň iň uly bahasyny taparys. Şonuň ýaly hem funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki iň kiçi bahasy tapylýar.

20-nji mysal. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ funksiýanyň $[-2,\ 3]$ kesimdäki iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaly.

$\lhd$ $f'(x)=6x^2-6x-12$ önümi nola deňläp, onuň $x=-1$ we $x=2$ nol nokatlaryny tapalyň we funksiýanyň şol nokatlardaky bahalaryny kesimiň uçlaryndaky bahalary bilen deňeşdireliň:

$$f(-2)=-3,\ f(-1)=8,\ f(2)=-19,\ f(3)=-8.$$

Şeýlelikde, funksiýanyň iň kiçi bahasy $f(2)=-19$ we iň uly bahasy $f(-1)=8$. $\rhd$

Käbir ýagdaýda funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak üçin aşakdaky teoremany ulanmak amatlydyr.

10-njy teorema. Eger $[a,b]$ kesimde üznüksiz f funksiýa üçin

1) $f(a)=f(b)=0$ bolup, $\forall x\in(a,\ b)$ üçin $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ bolsun;

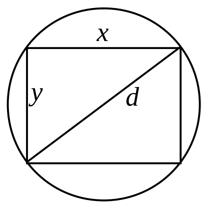
2) $(a,\ b)$ onuň differensirlenýän aralygy bolup, şol aralygyň diňe bir c nokadynda $f'(c)=0$ bolsun.

Onda funksiýanyň iň uly (iň kiçi) bahasy $f(c)$ deňdir.

$\lhd$ Goý, $\forall x\in(a,\ b)$ üçin, $f(x)>0$ bolsun, onda birinji şert boýunça f funksiýa iň uly bahany diňe kesimiň içinde alyp biler. Fermanyň teoremasy esasynda bolsa şol nokatda funksiýanyň önümi nola deňdir. Ikinji şertiň esasynda bolsa $f'(x)=0$ deňlik diňe bir $c\in(a,\ b)$ nokatda ýerine ýetýär. Şonuň üçin hem funksiýanyň iň uly bahasy $f(c)$ deňdir. Teoremanyň ikinji bölegi şonuň ýaly subut edilýär. $\rhd$

21-nji mysal. Togalak agaçdan zyňyndysy az bolar ýaly dörtgyraň pürs kesmeli.

Geometriýa dilinde bu mesele şeýle okalýar: berlen tegelegiň içinden iň uly meýdanly gönüburçluk çyzmaly (9-njy surat).



9-njy surat

$\lhd$ Eger gönüburçlugyň taraplary x, y we diametri d bolsa, onda onuň meýdany $S=xy$. Bu deňlikde $y=\sqrt{d^2-x^2}$ goýup, gönüburçlugyň meýdany üçin

$$S(x)=x\sqrt{d^2-x^2}$$

funksiýany alarys. Şunlukda, meseläniň manysyna görä $0\le x\le d$ bolar.

Şeýlelikde, başdaky mesele $S(x)=x\sqrt{d^2-x^2}$ funksiýanyň $[0,\ d]$ kesimde iň uly bahasyny tapmaklyga getirildi. Ol funksiýa üçin

$$S'(x)=\frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=0$$

deňlemäniň $[0,\ d]$ kesime degişli bolan diňe bir $x=d/\sqrt{2}$ köki bardyr.Şol kesimde $S(x)$ funksiýa üçin 10-njy teoremanyň ähli şertleri ýerine ýetýär: $\forall x\in(0,\ d)$ üçin $S(x)>0$ we $S(0)=S(d)=0$ we ol funksiýa şol kesimde üznüksizdir. Şoňa görä şol teorema boýunça $S(x)$ funksiýa iň uly bahany $x=d/\sqrt{2}$ nokatda alýandyr. x-iň bu bahasyny $y=\sqrt{d^2-x^2}$ deňlikde goýup, $y=d/\sqrt{2}$ bolýandygyny görýäris. Diýmek, tegelegiň içinden çyzylan gönüburçluklaryň iň uly meýdanlysy kwadratdyr. Şeýlelikde, togalak agaçdan kesilip alnan zyňyndysy az bolan pürsiň kese kesigi kwadrat bolmalydyr, ýagny ol esasy kwadrat bolan gönüburçly parallelepiped görnüşdäki pürsdir. $\rhd$

22-nji mysal. Gaz garyndysy azodyň we kislorodyň oksidinden durýar. Garyndydaky azot oksidini maksimal tizlik bilen okislendirýän kislorodyň konsentrasiýasyny tapmaly

$\lhd$ Amalyýetiň öwrülmezlik şertlerinde $2NO+O_2=2NO_2$ reaksiýanyň tizligi $v=cx^2y$ formula boýunça aňladylýar, bu ýerde x NO-nyň wagtyň islendik pursadyndaky konsentrasiýasy; y O_2-niň konsentrasiýasy; c bolsa reaksiýanyň tizliginiň konsentrasiýasy bolup, ol reagirleýji komponentlere bagly bolman diňe temperatura baglydyr $(c>0)$. Gazyň konsentrasiýasyny göwrüm prosentinde aňladyp alarys:

$$y=100-x,\quad v=cx^2(100-x)=c\left(100x^2-x^3\right).$$

$v=v(x)$ funksiýany derňemek üçin onuň önümlerini tapalyň:

$$v'(x)=c\left(200x-3x^2\right),\quad v''(x)=c(200-6x).$$

Birinji önümi nola deňläp, funksiýanyň $x_1=0,\ x_2=200/3$ duruw nokatlaryny taparys. Şunlukda, $v''(0)>0,\ v''(200/3)<0$ bolýandygy esasynda $x_1=0$ funksiýanyň minimum, $x_2=200/3$ maksimun nokady bolar. Şeýlelikde, $x=x_2=66{,}7\,\%$, $y=100-x=33{,}3\,\%$ ýa-da $y/x\approx 0{,}5$ bolanda okislenmegiň tizligi maksimal bolar. $\rhd$

§ 4. 7. Deňlemeleri takmyn çözmekligiň usullary

Matematikada, tehnikada we beýleki tebigy ylymlarda duş gelýän dürli meseleler çözülende

$$f(x)=0 \qquad (27)$$

görnüşdäki deňlemäniň çözüwlerini tapmaly bolýar. Eger f çyzykly, kwadrat ýa-da käbir başga ýönekeý funksiýa bolsa, onda (27) deňlemäniň çözüliş usullary bize mekdep matematikasyndan bellidir. Ýöne f funksiýanyň çylşyrymly hallarynda (27) görnüşdäki deňlemäniň çözüwlerini tapmaklyk kynlaşýar. Aşakda (27) görnüşdäki deňlemäni takmyn çözmekligiň käbir usullaryna serederis.

1. Grafik usuly. Bu usul bilen deňlemäniň çözüwini tapmak üçin berlen $f(x)$ funksiýa boýunça $y=f(x)$ funksiýanyň grafigini gurýarlar we onuň absissa oky bilen kesişme nokadyny tapýarlar.Şol nokadyň absissasy deňlemäniň köküdir. $y=f(x)$funksiýanyň grafigini gurmak kyn bolanda deňlemäni $p(x)=r(x)$ görnüşde ýazyp, $y=p(x)$, $y=r(x)$ funksiýalaryň grafiklerini gurýarlar we deňlemäniň köküni olaryň kesişme nokadynyň absissasy hökmünde tapýarlar. Grafik usulyndan deňlemäniň ýeke-täk köki ýerleşýän aralygy kesgitlemekde hem peýdalanmak bolar. Mysal üçin, eger f funksiýa käbir $[a,\ b]$ kesimde üznüksiz we monotonn ($f'(x)>0$ ýa-da $f'(x)<0$) bolup, kesimiň uçlaryndaky bahalarynyň alamatlary dürli bosa, onda şol kesimde (27) deňlemäniň ýeke-täk köküniň bardygy grafikden görünýär.

2. Kesimi ýarpa bölmek usuly. Goý, f funksiýa (27) deňlemäniň ýeke-täk köküni içinde saklaýan $[a,\ b]$ kesimde üznüksiz we kesimiň uçlarynda funksiýanyň bahalarynyň alamatlary dürli bolsun. Kesgitlilik üçin, $f(a)<0,\ \ f(b)>0$ hasap edeliň. $[a,\ b]$ kesimi ýarpa bölüp, olardan uçlarynda funksiýanyň bahalarynyň alamatlary dürli bolýan kesimi saýlap alalyň we ony $[a_1,\ b_1]$ bilen belgiläliň. Indi $[a_1,\ b_1]$ kesimi deň ikä bolüp, uçlarynda funksiýanyň bahalarynyň alamatlary dürli bolan bölegini $[a_2,\ b_2]$ bilen belgiläliň we şu ýörelgäni dowam etdireliň. Şeýlelikde, uzynlyklary $b_n-a_n=(b-a)/2^n$ bolan kesimleriň $\{[a_n,\ b_n]\}$ yzygiderligini alarys. Şunlukda, islendik n üçin $f(a_n)<0<f(b_n)$ bolar. Saklanýan kesimler hakyndaky teorema esasynda ol kesimleriň hemmesine

degişli bolan ýeke-täk c nokat bar bolup, $\lim a_n = \lim b_n = c$ deňlik dogrudyr. Şoňa görä-de, $f \in C[a,\, b]$ bolýandygy üçin $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ deňsizlikde predele geçip, $f(c) = 0$ deňligi alarys, ýagny c deňlemäniň köküdir. Onuň takmyn bahasy hökmünde $[a_n,\, b_n]$ kesimiň ortasyny, ýagny $(a_n + b_n)/2$ nokady almak bolar. Şunlukda, köküň ol nokatdan uzaklygy $(b-a)/2^{n+1}$ sandan uly däldir.

3. Hordalar usuly. Goý, deňlemäniň c köki içinde bolan $[a,\, b]$ kesimde üznüksiz hemişelik alamatly $f'(x)$ we $f''(x)$ önümler bar bolup, funksiýanyň kesimiň uçlaryndaky bahalarynyň alamatlary dürli bolsun. Onümiň alamatlarynyň hemişelikligi esasynda $[a,\, b]$ kesimde funksiýa ýa artýandyr, ýa-da kemelýändir. Şoňa görä hem deňlemäniň köki ýeke-täkdir. Ikinji önümiň alamatynyň hemişelikligi esasynda bolsa $y = f(x)$ funksiýanyň çyzgysy ýokaryk ýä-da aşak güberçekdir.

Kesgitlilik üçin, $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ bolsun. Onda bu halda $y = f(x)$ funksiýanyň çyzgysy aşak güberçekdir we funksiýa artýandyr (10-njy surat). Nolunjy (başlangyç) ýakynlaşma hökmünde $x_o = a$ alyp, birinji x_1 ýakynlaşmany $A(a,\, f(a))$ we $B(b,\, f(b))$ nokatlary birleşdirýän

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

hordanyň ox oky bilen kesişme nokadynyň absissasyny almak bolar:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Şunlukda, f funksiýanyň kanagatlandyrýan şertlerinde $a < x_1 < b$ bolar. Indi $A_1(x_1,\, f(x_1))$ nokady alyp, A_1B hordany geçireliň we ol hordanyň ox oky bilen kesişme nokadynyň absissasyny ikinji x_2 ýakynlaşma hökmünde alalyň:

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Şunlukda, $a < x_1 < x_2 < b$ bolar. Şonuň ýaly dowam etdirip, (n-1)-nji x_{n-1} ýakynlaşmany ulanyp, n-nji x_n ýakynlaşmany

$$x_n = \frac{x_{n-1} f(b) - bf(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{28}$$

formuladan taparys. Şeýdip tapylan ýakynlaşmalaryň $\{x_n\}$ yzygiderligi çäkli we monotondyr. Şoňa görä hem onuň predeli bardyr we ol predel (27) deňlemäniň takmyn çözüwidir. Şunlukda, deňlemäniň c köküniň x_n ýakynlaşmadan tapawudy şeýle bahalandyrylýar:

$$|x_n - c| \le \frac{|f(x_n)|}{r} \quad \left(r = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|\right). \tag{29}$$

$f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$ bolanda hem ýakynlaşmalar (28) –den kesgitlenýär.

23-nji mysal. Hordalar usuly boýunça $x^3 + x - 1 = 0$ deňlemäniň hakyky köküni tapmaly.

◁ $f(x) = x^3 + x - 1$ funksiýa üçin $f(0{,}5) < 0,\ f(1) > 0$ we islendik x ücin $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ bolýandygy sebäpli, $[0{,}5;\ 1]$ kesimde deňlemäniň ýeke-täk köki bardyr. $f''(x) = 6x > 0$ şertiň ýerine ýetýändigi esasynda,

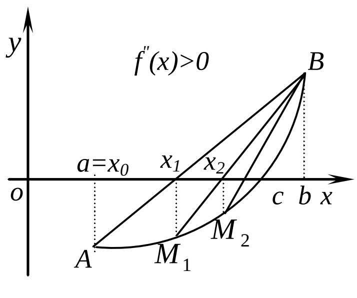
$$x_o = 0{,}5,\ \ f(x_o) = f(0{,}5) = -0{,}375,\ \ b = 1,\ \ f(b) = f(1) = 1$$

bahalary ulanyp, (28) formuladan peýdalanyp taparys:

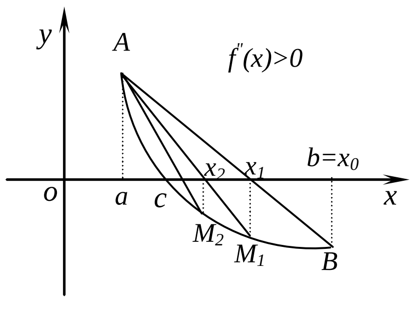
$$x_1 = \frac{x_o f(b) - bf(x_o)}{f(b) - f(x_o)} = \frac{0{,}5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0{,}375)}{1 + 0{,}375} \approx 0{,}636364;$$

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{0{,}636364 - (-0{,}105935)}{1 + 0{,}105935} \approx 0{,}671196;$$

$$x_3 = \frac{x_2 f(b) - bf(x_2)}{f(b) - f(x_2)} = \frac{0{,}671196 - (-0{,}026428)}{1 + 0{,}026428} \approx 0{,}679662.$$



10-njy surat



11-nji surat

Şonuň ýaly dowam edip, $x_4 = 0{,}681691$, $x_5 = 0{,}682176$, $x_6 = 0{,}682292$, $x_7 = 0{,}682319$, $x_8 = o{,}682326$, $x_9 = 0{,}682327$ ýakynlaşmalary taparys. Şeýlelikde, 0,0001 takyklykda deňlmäniň köki tapyldy.

1-nji bellik. Eger $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$ (ýa-da $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$) bolsa, onda bu halda $x_o = b$ alynýar we $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ýakynlaşmalar

$$x_n = \frac{x_{n-1} f(a) - bf(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{30}$$

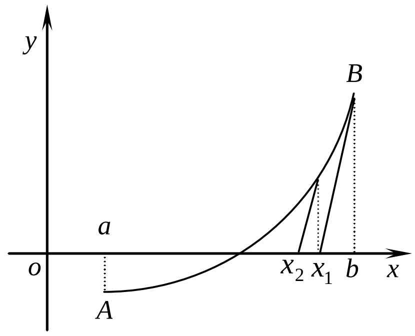
formuladan kesgitlenilýär (11-nji surat).

4. Galtaşmalar usuly. Goý, deňlemäniň c köki içinde bolan $[a,\ b]$ kesimde f funksiýa üçin hordalar usulyndaky şertler ýerine ýetsin. Bu halda nolunjy ýakynlaşmany $x_o = b$ alyp, birinji x_1 ýakynlaşmany B nokatda $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine geçirilen (12-nji surat)

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

galtaşmanyň ox oky bilen kesişme nokadynyň absissasy hökmünde alaryş:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$



12-nji surat

Şunlukda, $a < x_1 < b$ bolar. Indi $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine $B_1(x_1,\ f(x_1))$ nokatda galtaşma geçirip, x_2 ýakynlaşmany galtaşmanyň Ox oky bilen kesişme nokadynyň absissasy hökmünde taparys:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Edil şonuň ýaly dowam etdirip, n-nji ýakynlaşmany taparys:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{31}$$

Bu deňlik boýunça kesgitlenen $\{x_n\}$ yzygiderligiň hem predeli bardyr, ol predel deňlemäniň takmyn köküdir we onuň üçinem (29) ýerine ýetýändir.

2-nji bellik. Nolunjy x_o ýakynlaşma $f(x_o) f''(x_o) > 0$ şertden kesgitlenýär.

24-nji mysal. Galtaşmalar usuly boýunça $x^3 + x - 3 = 0$ deňlemäniň hakyky köküni tapmaly.

$\lhd$ $f(x) = x^3 + x - 3$ funksiýa üçin $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$ we $[1,\ 2]$ kesimde

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, $f''(x) = 6x > 0$ bolýany üçin, şol kesimde deňlemäniň ýeke-täk köki bardyr we ony (31) formulany ulanyp tapmak bolar. Önuň üçin ilki bilen deňlemäniň köküni içinde saklaýan has kiçi kesimi tapalyň.

. $f(1{,}2) = (1{,}2)^3 + 1{,}2 - 3 = -0{,}072 < 0$, $f(1{,}3) = (1{,}3)^3 + 1{,}3 - 3 = 0{,}497 > 0$

deňsizlikleriň esasynda kök $[1{,}2;\ 1{,}3]$ kesimiň içindedir. Ol kesimiň ortasyndaky $x = 1{,}25$ nokatda $f(1{,}25) = (1{,}25)^3 + 1{,}25 - 3 = 0{,}203125 > 0$ bolýandygy üçin, köki içinde saklaýan $[1{,}20;\ 1{,}25]$ kesimi alarys.Nolunjy ýakynlaşma hökmünde $x_o = 1{,}25$ alarys, çünki $f(x_o)f''(x_o) > 0$. (31) formulany ulanyp, aşakdaky tablisany düzeliň:

N	x_n	x_n^3	$f(x_n) = x_n{}^3 + x_n - 3$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 1$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,25	1,953125	0,203125	5,6875	0,035714	1,214286
1	1,214286	1,790452	0,004738	5,42347	0,000874	1,213412
2	1,213412	1,786590	0,000002	5,417107	0,0000004	1,2134116

Bu tablisadan görnüşi ýaly, deňlemäniň köki $c = 1{,}21341$ deňdir. $\rhd$

3-nji bellik. Hordalar we galtaşmalar usullarynyň ulanylýan şertlerinde ol usullaryň ikisini birwagtda hem ulanmak bolar. Şunlukda, ol usullar bilen tapylýan ýakynlaşmalaryň yzygiderliginiň birisi artyp, beýlekisi bolsa kemelip deňlemäniň köküne ymtylýandyr. Ol usullary gezeklesdirip hem ulanmak bolar.

5. Iterasiýa usuly. Bu usuly ulanmak üçin ilki bilen (27) görnüşdäki deňlemäni

$$x = g(x) \tag{32}$$

görnüşdäki deňlemä getirmeli (ony dürli usullar bilen ýerine ýetirmek bolar). Eger x_o (32) deňlemäniň köküniň käbir ýakynlaşan bahasy bolsa, onda ony deňlemäniň köküne nolunjy ýakynlaşma hökmünde alyp, birinji x_1 ýakynlaşma

$$x_1 = g(x_o)$$

deňlikden tapylýar.Şonuň ýaly dowam etdirip, islendik x_n ýakynlaşmany

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{33}$$

formula boýunça yzygiderlikde kesgitleýäris. Şonuň üçin (33) formula boýunça deňlemäniň çözüwini tapmaklyga yzygiderli ýakynlaşmalar usuly ýa-da iterasiýa usuly diýilýär. Haýsy şertlerde yzygiderli ýakynlaşmalar (33) deňlemäniň çözüwine ýygnanýarka diýen soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

11-nji teorema. Eger (32) deňlemäniň c köküni we onuň (33) formula boýunça hasaplanylýan yzygiderli ýakynlaşmalaryny özünde saklaýan aralykda

$$|g'(x)| \le q < 1 \tag{34}$$

şert ýerine ýetse, onda yzygiderli ýakynlaşmalar deňlemäniň köküne ýygnanýandyr, ýagny

$$\lim x_n = c\,. \tag{35}$$

◁ (33) formuladan alynýan $x_1 = g(x_o)$ we c sanyň (32) deňlemäniň köki bolýandygy üçin ýerine ýetýän $c = g(c)$ deňlikler esasynda Lagranžyň teoremasyny ulanyp,

$$c - x_1 = g(c) - g(x_o) = g'(d_o)(c - x_o)$$

deňligi alarys, bu ýerde d_o san c we x_o-yň arasyndaky sandyr. Şonuň ýaly deňlikleri beýleki ýakynlaşmalar üçin hem ýazmak bolar:

$$c - x_2 = g(c) - g(x_1) = g'(d_1)(c - x_1),$$

$$c - x_3 = g(c) - g(x_2) = g'(d_2)(c - x_2),$$

$$c - x_n = g(c) - g(x_{n-1}) = g'(d_{n-1})(c - x_{n-1})$$

bu ýerde d_i $(i = 1,\ 2, \ldots, n-1)$ c we x_{i-1}-iň arasyndaky käbir sanlar.Bu deňlikleri agzalaýyn köpeldip we soňra gysgaldyp,

$$c - x_n = (c - x_o)g'(x_o)g'(x_1) \ldots g'(x_{n-1})$$

deňligi alarys. Bu deňlikden bolsa (34) şertiň esasynda

$$|c - x_n| \le |c - x_o| q^n$$

deňsizlik gelip çykýar. $0<q<1$ şertiň esasynda $\lim q^n =0$ we şonuň üçin bu deňsizlikden (35) deňlik gelip çykýar.

25-nji mysal. Iterasiýa usuly boýunça $x^7+x+4=0$ deňlemäniň hakyky köküni tapmaly.

$\triangleleft$ Deňlemäni $x^7=-x-4$ görnüşde ýazyp we $p(x)=x^7$, $r(x)=-x-4$ funksiýalaryň grafikleriniň kesişme nokadyny tapyp, deňlemäniň kötüniň $[-2,\ -1]$ kesime degişlidigini bilýäris.Deňlemäniň köküni içinde saklaýan uzynlygy kiçi bolan kesimi tapalyň. $f(-1{,}2)<0$, $f(-1{,}1)>0$ bolýandygy üçin, deňlemäniň köki $[-1{,}2,\ -1{,}1]$ kesimiň içindedir. $g(x)=\sqrt[7]{-x-4}$ belgileme girizip, deňlemäni (32) görnüşde ýazmak bolar. Şunlukda, $\forall x\in[-1{,}2,\ -1{,}1]$ üçin

$$|g'(x)|=\left|\frac{-1}{7\sqrt[7]{(-x-4)^6}}\right|=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{(-x-4)^6}}\le q=0{,}06<1$$

deňsizlik, ýagny (34) şert ýerine ýetýär.Nolunjy ýakynlaşmany $x_o=-1{,}15$ alyp we beýleki ýakynlaşmalary $x_n=\sqrt[7]{-x_{n-1}-4}$ formula boýunça hasaplap, aşakdaky tablisany düzeliň:

n	x_{n-1}	$-x_{n-1}-4$	$x_n=g(x_{n-1})=\sqrt[7]{x_{n-1}-4}$
1	$-1{,}15$	$-2{,}85$	$-1{,}1614$
2	$-1{,}1614$	$-2{,}8386$	$-1{,}1607$
3	$-1{,}1607$	$-2{,}8393$	$-1{,}1607$

Bu tablisadan görnüsi ýaly, deňlemäniň köki $c=-1{,}1607$ deňdir. $\triangleright$

G ö n ü k m e l e r

1. Funksiýalara $[-1,\ 1]$ kesimde Roluň teoremasyny ulanyp bolmaýandygyny subut etmeli:

1) $y=\sqrt[3]{x}$. 2) $y=1-|x|$. 3) $y=|\sin x|+x$.

2. Funksiýalara görkezilen kesimde Lagranžyň teoremasyny ulanyp, c sany kesgitlemeli:

1) $y = \ln x$, $x \in [1, e]$. 2) $y = x - x^3$, $x \in [-2, 1]$. 3) $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$.

3. $3x^5 + 15x - 8 = 0$ deňlemäniň ýeke-täk hakyky kögüniň bardygyny subut etmeli.

4. Lopitalyň düzgüninden peýdalanyp, predelleri tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 10x}$. 2) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$. 6) $\lim\limits_{x\to +0} x^n \ln x \ (n>0)$. 7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$. 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{e^{2x}-1}\right)\dfrac{1}{x^2}$. 10) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$. 11) $\lim\limits_{x\to 0} x ctg \dfrac{x}{4}$.

12) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln ctgx}}$.13) $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^{tgx}$. 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{1/x^2}$. 15) $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. 17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$.

5. Funksiýalaryň kemelýän we artýan aralyklaryny kesgitlemeli:

1) $y = 3x - x^3$. 2) $y = x^2 - 4x$. 3) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x + 1$.4) $y = 3x + \dfrac{3}{x} + 5$

6. Funksiýalaryň ekstremumyny tapmaly:

1) $y = 2x - x^2$. 2) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$. 3) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 7$.

4) $y = x \ln x$. 5) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$. 6) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2$.

7. Funksiýalaryň grafikleriniň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny we epin nokatlaryny tapmaly:

1) $y = x^3 - 6x + 7$. 2) $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 9$.

4) $y = x^5 - 10x^3 + 6x + 2$. 5) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

8. Funksiýalaryň grafikleriniň asimptotalaryny tapmaly:

1) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$. 2) $y = \dfrac{4+2x-x^2}{x}$. 3) $y = \sqrt{x^2-4}$. 4) $y = e^{\frac{1}{1-x}}$.

9. Funksiýalary derňemeli we grafiklerini gurmaly:

1) $y = x^3 - 3x + 2$. 2) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$. 3) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

4) $y = x^4 - 4x^2 + 3$. 5) $y = 5x^2 - x^4 - 6$. 6) $y = x^5 - 5x + 3$.

7) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 3}$. 8) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. 9) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

10. Funksiýalaryň $[-2,\ 2]$ kesimde iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaly:

1) $y = x^3 + 3x - 5$. 2) $y = x^3 + 3x^2 - 6$. 3) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

11. Trapesiýanyň gapdal taraplarynyň we kiçi esasynyň uzynlygy a sana deň . Trapesiýanyň meýdany iň uly bolar ýaly onuň uly b tarapyny kesgitlemeli.

12. Meýdany S deň bolan ähli gönüburçluklaryň içinde iň kiçi perimetrlisini tapmaly.

13. Položitel a sany kublarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly iki goşulyja dagytmaly.

14. Yokarsy ýarym töwerek bolan gönüburçluk görnüşdäki äpişgäniň perimetri p sana deň. Iň köp ýagtylyk göýbermek üçin äpişgäniň ölçegleri nähili bolmaly ?

15. Silindrik görnüşli konserwa bankasynyň göwrümi V deň. Onuň beýikligi we esasynyň diametri nähili bolanda ony ýasamaklyga az galaýy sarp ediler?

16. $M(1,\ 2)$ nokat arkaly göni çyzyk nähili geçirilende onuň birinji kwadrantda kesip alýan üçburçlugynyň meýdany iň kiçi bolar?.

17. Hordalar ýa-da galtaşmalar usulyny ulanyp, deňlemeleriň hakyky köklerini tapmaly:

1) $x^3 - 2x + 7 = 0$. 2) $x^3 - 1{,}96x - 0{,}89 = 0$.

2) 3) $x^3 + 4x + 3 = 0$. 4) $x^3 + x - 1 = 0$.

J o g a p l a r

2. 1) $e - 1$. 2) -1. 3) $9/4$. **4.** 1) 1/2. 2) -3. 3) 1/2. 4) 1. 5) 0. 6) 0. 7) 0. 8) 0. 9) 10. 11) 4. 12) 1/e. 13) 1. 14) $e^{-1/8}$. 15) $e^{2/\pi}$. 16) 2. 17) $1/2$. **5.** 1) $(-\infty,\ -1)$ we $(1,\ +\infty)$ aralyklarda kemelýär, $(-1,\ 1)$ aralykda artýar. 2) $(-\infty,\ 2)$ aralykda kemelýär, $(2,\ +\infty)$ aralykda artýar. 3) $(-1, 1)$ aralykda kemelýär, $(-\infty, -1)$ we $(1, +\infty)$ aralyklarda artýar. 4) $(-1, 0)$ we $(0, 1)$ aralyklarda kemelýär, $(-\infty, -1)$ we $(1, +\infty)$ aralyklarda artýar. **6.** 1) $y_{\max} = y(1) = 1$. 2) $y_{\max} = y(1) = 4$, $y_{\min} = y(5) = -28$. 3) $y_{\max} = y(2) = 35/3$, $y_{\min} = y(3) = 23/2$. 4), $y_{\min} = y(1/e) = -1/e$. 5) $y_{\max} = y(2) = 1/4$, $y_{\min} = y(-2) = -1/4$. 6) $y_{\max} = y(0) = 2$, $y_{\min} = y(-1) = 5/12$, $y_{\min} = y(3) = -37/4$. **7.** 1) $(-\infty, 0)$ aralykda ýokaryk güberçek, $(0, +\infty)$ aralykda aşak güberçek we $A(0, 7)$ epin nokady. 2) $(-\infty, -1)$ we $(1, +\infty)$ aralyklarda aşak güberçek, $(-1, 1)$ aralykda ýokaryk güberçek , $A(-1, -19)$, $B(1, -9)$ epin nokatlary. 3) $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ we $\left(0, \sqrt{3}\right)$ aralyklarda ýokaryk güberçek, $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ we $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ aralyklarda aşak güberçek, $A\left(-\sqrt{3}, 15\sqrt{3}+2\right)$, $B(0, 2)$, $C\left(\sqrt{3}, -15\sqrt{3}+2\right)$ epin nokatlary. 4) $\left(-\infty, -1/\sqrt{3}\right)$ we $\left(1/\sqrt{3}, +\infty\right)$ aralyklarda aşak güberçek, $\left(-1/\sqrt{3}. 1/\sqrt{3}\right)$ aralykda ýokaryk güberçek, $A\left(-1/\sqrt{3}, 4/3\right)$, $B\left(1/\sqrt{3}, 4/3\right)$, epin nokatlary. **8.** 1) $x = -1$, $x = 1$. 2) $x = 0$, $y = -x + 2$. 3) $y = -x$, $y = x$. 4) $x = 1$, $y = 1$. **10.** 1) -19; 9. 2) -6; 14. 3) -13; 3. **11.** $b = 2a$. **12.** Tarapy $\sqrt{S}$ bolan kwadrat. **13.** Goşulyjylaryň ikisi hem *a/2* deň. **14.** Äpişgäniň ini $2p/(4+\pi)$. **15.** Esasynyň diametri $\sqrt[3]{V/2\pi}$. **16.** Üçburçlugyň katetleri 2 we 4 deň bolmaly. **17.** 1) $-2{,}25826$. 2) 2,13459 . 3) $-0{,}673593$. 4) 0,682328 .

II. 5. KESGITSIZ INTEGRAL

§ 5.1. Kesgitsiz integralyň kesgitlenişi we onuň häsiýetleri

1. Asyl funksiýa we kesgitsiz integral. Mälim bolşy ýaly, differensial hasabyýetiň esasy meseleleriniň biri funksiýany differensirlemekdir. Ýöne matematikada, tebigy ylymlarda we tehnikada differensirlemeklige ters bolan meseleler hem duş gelýär. Mysal üçin, berlen tizligi arkaly material nokadyň göni çyzyk boýunça geçen ýoluny kesgitlemek we himiki reaksiýanyň tizligi boýunça oňa gatnaşýan jisimiň mukdaryny tapmak şeyle meselelerdir. Başgaça aýdylanda, bu meseleler berlen $F'(x)=f(x)$ önüm boýunça F funksiýanyň özüni tapmaklygy aňladýar.

Eger X aralykda F funksiýa üçin $F'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetse, onda F funksiýa şol aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär.

Mysal üçin, $F(x)=\sin x$ funksiýa san okunda $f(x)=\cos x$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr, çünki $\forall x\in \boldsymbol{R}$ üçin $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$; $F(x)=\ln x$ funksiýa $\forall x>0$ üçin $f(x)=1/x$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr, çünki $\forall x>0$ üçin $F'(x)=(\ln x)'=1/x=f(x)$.

Eger F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda islendik hemişelik C san üçin $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$, ýagny $G(x)=F(x)+C$ funksiýa hem X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Şunlukda, dürli iki asyl funksiýalaryň tapawudy hemişelik C sana. deňdir: $G(x)-F(x)=C$.

Şeýlelikde, eger F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň birisi bolsa, onda şol aralykda onuň islendik asyl funksiýasy $G(x)=F(x)+C$ görnüşde aňladylýar (C-erkin hemişelik san), ýagny $\{F(x)+C\}$ köplük f funksiýanyň X aralykdaky ähli asyl funksiýalarynyň köplügidir.

Kesgitleme. f funksiýanyň X aralykdaky ähli asyl funksiýalarynyň köplügine f funksiýanyň şol aralykdaky kesgitsiz integraly diýilýär we ol

$$\int f(x)dx \qquad (1)$$

bilen belgilenilýär. Bu ýerde $\int$ belgä integral belgisi, $f(x)dx$ aňlatma integral astyndaky aňlatma, f funksiýa bolsa integral astyndaky funksiýa diýilýär.

Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ . \tag{2}$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, funksiýanyň kesgitsiz integralyny tapmaklyk ol funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmaklygy aňladýar. Şonuň üçin berlen funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmaklyga integrirlemek hem diýilýär. Ony tapmak üçin bolsa (2) formula ulanylýar. Kesgitsiz integrala, köplenç ýöne integral hem diýilýär..

2.Kesgitsiz integralyň esasy häsiýetleri. 1. Eger f funksiýanyň X aralykda asyl funksiýasy bar bolsa, onda

$$a)\ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad \text{b)}\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

deňlikler dogrudyr.

◁ Eger F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda (2) formula esasynda

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

Bu deňlik we differensialyň kesgitlemesi boýunça

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx\,. \ \triangleright$$

Bu häsiýet önüm we integralyň, şeýle hem differensial we integralyň özara biri-birlerine ters bolan amallardygyny görkezýär.

2. Eger g funksiýa X aralykda differensirlenýän bolsa, onda

$$\int dg(x) = \int g'(x)dx = g(x) + C\,. \tag{3}$$

◁ Bu deňlik X aralykda g funksiýanyň $f = g'$ funksiýa üçin asyl funksiýasy bolýandygy sebäpli kesgitlemeden gelip çykýar. ▷

3. Eger f funksiýanyň X aralykda asyl funksiýasy bar bolsa, onda islendik hemişelik k san üçin kf funksiýanyň hem şol aralykda asyl funksiýasy bardyr we $k \neq 0$ bolanda

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx\,, \tag{4}$$

deňlik dogrudyr, ýagny hemişelik $k \neq 0$ köpeldijini integralyň astyndan çykaryp bolar.

◁ Goý, F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsun, ýagny $F'(x) = f(x)$. Onda $[kF(x)]' = kf(x)$ deňligiň esasynda $kF(x)$ funksiýa $kf(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasy bolar we şonuň üçin

$$k\int f(x)dx = k[F(x) + C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x)dx,$$

bu ýerde $C_1 = kC$. ▷

4. Eger f we g funksiýalaryň X aralykda asyl funksiýalary bar bolsa, onda $f \pm g$ funksiýanyň hem şol aralykda asyl funksiýasy bardyr we

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \qquad (5)$$

formula dogrudyr, ýagny algebraik jemiň integraly integrallaryň algebraik jemine deňdir.

◁ Goý, F we G funksiýalar X aralykda degişlilikde f we g funksiýalaryň asyl funksiýalary bolsun, ýagny $F'(x) = f(x)$ we $G'(x) = g(x)$. Onda $[F(x) \pm G(x)]' = f(x) \pm g(x)$ we şonuň üçin

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] =$$

$$= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)]dx,$$

bu ýerde $C = C_1 \pm C_2$. ▷

Bu häsiýet islendik tükenikli sany funksiýalaryň goşulyjylary üçin hem dogrudyr.

3. Kesgitsiz integrallaryň tablisasy. Integrirlemegiň differensirlemege ters amaldygy esasynda elementar funksiýalaryň önümleriniň tablisasyndan peýdalanyp, kesgitsiz integrallaryň tablisasyny almak bolar. Onuň üçin önümiň tablisasynyň her bir formulasyndan, ýagny $F'(x) = f(x)$ görnüşdäki deňlikden, integralyň kesgitlemesi boýunça

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

formulanyň alynýandygyny bilmek ýeterlikdir. Mysal üçin, önümiň tablisasynyň $(\sin x)' = \cos x$, $(tgx)' = 1/\cos^2 x$ formulalaryndan kesgitsiz integral üçin

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

formulalary alarys. Şuňa meňzeşlikde, önümiň tablisasynyň beýleki formulalaryny ulanyp, kesgitsiz integrallaryň aşakdaky tablisasyny alarys:

1. $\int 1dx = \int dx + C$.

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (\ x \neq o \ )$.

5. $\int cosx\, dx = \sin x + C$.

6. $\int sinx\, dx = -\cos x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right)$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \ (x \neq k\pi, k \in Z)$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C \ (-1 < x < 1)$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C.$

11. $\int chx\, dx = shx + C$.

12. $\int shx\, dx = chx + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C \quad (x \neq o)$.

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|\, x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\, | + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (|\, x\,| \neq a).$

Bu formulalaryň, şonuň ýaly-da her bir tapylan integralyň dogrudygyny barlamak üçin olaryň iki bölegini hem differensirlemeli. Şunlukda, eger integrirlenip alnan funksiýanyň önümi integral astyndaky funksiýa deň bolsa, onda ol integralyň dogry hasaplanylandygyny aňladýar.

Bellik. Kesgitsiz integrallaryň tablisasynda x baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk bolup, ol käbir differensirlenýän funksiýa bolanda hem tablisa dogrudyr. Hakykatdan-da, Goý, $F'(x)=f(x)$ we (2) deňlik ýerine ýetýän bolsun hem-de $u=g(x)$ differensirlenýän funksiýa bolsun. Onda birinji differensialyň inwariantlyk häsiýeti esasynda $dF(u)=F'(u)du=f(u)du$ we şonuň esasynda

$$\int f(u)du=F(u)+C\,. \tag{6}$$

Şeýlelikde, (2) formulanyň ýerine ýetýänliginden (6) formulanyň ýerine ýetýändigi gelip çykýar we ol (2) formuladan $x=u$ goýup alynýar. Şonuň üçin integrallaryň tablisasynyň ähli formulalary x-iň ornunda u bolanda hem dogrudyr. Olary ulanmak üçin integral astyndaky aňlatmany ýönekeý özgertmeler arkaly $f(x)dx=g(u)du$ görnüşe getirmeli.

§ 5. 2. Integrirlemegiň esasy usullary

1.Dagytmak usuly. Bu usul ýönekeý özgertmeler geçirip, integral astyndaky f funksiýany asyl funksiýalary aňsat tapylýan $f_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ funksiýalaryň kömegi bilen $f=\sum_{i=1}^{n}k_i f_i$ görnüşde aňladyp ulanylýar. Şunlukda, integralyň 3-nji we 4-nji häsiýetleri boýunçä f funksiýanyň integralyny hasaplamak üçin şeýle formula alynýar:

$$\int f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}k_i\int f_i(x)dx \tag{7}$$

1-nji mysal. $\int\left(x-\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Ýaýyň içini kwadrata göterip we (7) deňligi hem-de integralyň tablisasynyň 2-nji we 4-nji formulalaryny ulanyp, integraly hasaplarys:

$$\int\left(x-\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int\left(x^2-10\sqrt{x}+\frac{25}{x}\right)dx=$$

$$= \int x^2 dx - 10\int x^{1/2} dx + 25\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{20}{3} x^{3/2} + 25 \ln |x| + C . \ \triangleright$$

Integrallaryň jemi tapylanda, adatça, hemişelik sanlar jemlenip, olar bir C bilen belgilenýär.

2-nji mysal. $\int \left(4\sin x + 3e^x - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2+1} + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Integralyň 3-nji, 4-nji häsiýetlerinden we tablisanyň 3-nji, 6-njy, 2-nji, 7-nji we 10-njy formulalaryndan peýdalanyp alarys:

$$\int \left(4\sin x + 3e^x - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2+1} + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= 4\int \sin x dx + 3\int e^x dx - \int x^{-3} dx + 7\int \frac{dx}{x^2+1} + 5\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= -4\cos x + 3e^x + \frac{1}{2} x^{-2} + 7 arctgx - 5 ctgx + C . \ \triangleright$$

3-nji mysal. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Integral astyndaky funksiýany $1+2x^2 = 1+x^2+x^2$ görnüşde ýazyp we integraly iki integralyň jemi görnüşinde aňladyp hem-de tablisanyň 2-nji we 7-nji formulalaryny ulanyp, integraly hasaplarys:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C . \ \triangleright$$

2.Üýtgeýäni çalşyrmak usuly. Integral hasaplanylanda köplenç halda täze üýtgeýäni girizmek bilen ol aňsat hasaplanylýan integrala getirilýär. Bu usula üýtgeýäni çalşyrmak usuly diýilýär. Ol usul şeýle teorema esaslanýar.

1-nji teorema. Eger F funksiýa f funksiýanyň asyl funksiýasy we $t = \varphi(x)$ differensirlenýän bolsa, onda $F[\varphi(x)]$ funksiýa $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr, ýagny

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C \qquad (8)$$

formula dogrudyr.

◁ Çylşyrymly $F[\varphi(x)]$ funksiýa üçin

$$\{F[\varphi(x)]\}' = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

deňlik ýerine ýetýär, ýagny $F[\varphi(x)]$ funksiýa $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr we şonuň esasynda (7) formula ýerine ýetýär. ▷

Amalyýetde (8) formulany ulanmak üçin ony amatly bolan

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) =$$

$$= \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$$

görnüşde ýazýarlar, ýagny ilki $\varphi(x)$ funksiýa u bilen çalşyrylýar we alnan funksiýanyň ýokarda getirilen bellik esasynda u görä asyl funksiýasy tapylýar, soňra ýene-de öňki x üýtgeýäne geçilýär. Bu formulany ulanmak üçin ilki berlen integraly (8) görnüşe özgertmeli.

4-nji mysal. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-1)}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{3}\int (x^3-1)^{-\frac{1}{2}} d(x^3-1) =$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1} + C .$$

Eger $f(u) = \dfrac{1}{u}$ bolsa, onda onuň asyl funksiýasynyň $F(u) = \ln|u|$ bolýandygy üçin, (8) formula şeýle görnüşi alar:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C .$$

5-nji mysal. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-4)'}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C .$

Garalan mysallaryň hemmesinde integral ilki (8) görnüşe getirilip, soňra şol formula ulanylýar, ýöne amalyýetde başgaça hem çemeleşilýär, ýagny üýtgeýäni gönümel çalşyrmak bilen integral aňsat hasaplanylýan görnüşe getirilýär.

6-njy mysal. $\int \cos(5x-4)dx$ integraly hasaplamaly.

◁ Bu integraly hasaplamak üçin $t = 5x - 4$ çalşyrmany girizeliň. Onda $x = (t+4)/5$, $dx = dt/5$. Şonuň üçin hem

$$\int \cos(5x-4)dx = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin(5x-4) + C \quad \triangleright$$

Bu integraly başgaça ýokarda getirilen bellikden peýdalanyp hem hasaplamak bolar:

$$\int \cos(5x-4)dx = \int \cos(5x-4)\cdot\frac{1}{5}d(5x-4) =$$

$$= \frac{1}{5}\int \cos u du = \frac{1}{5}\sin u + C = \frac{1}{5}\sin(5x-4) + C.$$

Üýtgeýäni çalşyrmagyň bir görnüşi bolan şeýdip integraly hasaplamaklyga differensial astyna girizmek usuly hem diýilýär we ol dürli görnüşdäki kesgitsiz integrallary hasaplamakda giňişleýin ulanylýar.

7-njy mysal. $\int \sin^m x \cos x\, dx$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Bu integraly hasaplamak üçin differensial astyna girizmek usulyndan peýdalanarys:

$$\int \sin^m x \cos x\, dx = \int \sin^m x\; d(\sin x) =$$

$$= \int u^m du = \frac{1}{m+1}\cdot u^{m+1} + C = \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x + C. \quad \triangleright$$

3. Bölekleýin integrirlemek usuly. Bu usul şeýle teorema esaslanýar.

2-nji teorema. Eger $u = u(x)$ we $\upsilon = \upsilon(x)$ funksiýalar käbir aralykda differensirlenýän bolup, $\int \upsilon(x)du(x)$ integral bar bolsa, onda $\int u(x)d\upsilon(x)$ integral hem bardyr we

$$\int u(x)d\upsilon(x) = u(x)\upsilon(x) - \int \upsilon(x)du(x) \qquad (9)$$

formula dogrudyr.

$\triangleleft$ Differensirlemegiň düzgüni esasynda

$$d[u(x)\cdot\upsilon(x)] = \upsilon(x)du(x) + u(x)d\upsilon(x).$$

Bu ýerden alynýan

$$u(x)d\upsilon(x) = d[u(x)\cdot\upsilon(x)] - \upsilon(x)du(x)$$

deňligiň iki bölegini hem integrirläp we integralyň 4-nji hem-de 2-nji häsiýetlerini ulanyp, (9) formulany alarys. $\triangleright$

Oňa bölekleýin integrirlemegiň formulasy diýilýär we ol gysgaça

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du$$

görnüşde ýazylýar.

Bu formula esasynda $\int u d\upsilon$ görnüşdäki integral köplenç hasaplamasy aňsat bolan $\int \upsilon du$ görnüşdäki integrala getirilýär.

8-nji mysal. $\int xe^x dx$ integraly hasaplamaly.

◁ Eger $u = x$, $d\upsilon = e^x dx$ bolsa, onda bu deňlikleriň birinjisini differensirlesek, ikinjisini integrirlesek $du = dx$, $\upsilon = e^x$ bolar. Şonuň üçin hem (9) formulanyň esasynda

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C. \;▷$$

9-njy mysal. $\int x^n \ln x dx \;\; (n \neq -1)$ integraly hasaplamaly.

◁ Eger $u = \ln x, d\upsilon = x^n dx$ bolsa, onda $du = \frac{dx}{x}$, $\upsilon = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ bolar. Şonuň üçin hem (9) formulany ulanyp alarys:

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \;▷$$

Käbir integrallar hasaplanylanda bölekleýin integrirlemek usuly gaýtalanylyp birnäçe gezek ulanylýar.

10-njy mysal. $\int x^2 \cos x\, dx$ integraly hasaplamaly.

◁ Eger $u = x^2$, $d\upsilon = \cos x\, dx$ bolsa, onda $du = 2x\, dx, \upsilon = \sin x$ bolar. Şonuň üçin hem (9) formulany ulanyp,

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\, dx$$

deňligi alarys. Soňky integraly hasaplamak üçin ýene-de bölekleýin integrirlemek usulyny ulanarys. Goý, $u = x$, $d\upsilon = \sin x\, dx$ bolsun, onda $du = dx$, $\upsilon = -\cos x$ bolar. Şonuň üçin hem (9) formulanyň esasynda

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x\, dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C .▷$$

Käbir halatlarda bölekleýin integrirlemek usulyny gaýtalap ulanmaklyk başdaky integrala görä çyzykly deňlemä getirýär. Ony indiki mysal tassyklaýar.

11-nji mysal. $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$ (a, b – hemişelik) integraly hasaplamaly.

◁ Eger $u = e^{ax}, d\upsilon = \cos bx\, dx$ bolsa, onda $du = ae^{ax}\, dx,$ $\upsilon = \frac{1}{b}\sin bx$ bolar. Şonuň üçin (9) formulany ulanyp alarys:

$$I = \frac{1}{b}\sin bx \cdot e^{ax} - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\, dx$$

Eger bu integraly hasaplamak üçin $u = e^{ax}$, $d\upsilon = \sin bx\, dx$ alsak, onda $du = ae^{ax} dx$, $\upsilon = -\frac{1}{b}\cos bx$ bolar. Şonuň üçin integrala ýene-de (9) formulany ulanyp, I integrala görä çyzykly

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

deňlemäni alarys. Ol deňlemäni I görä çozüp, integraly hasaplarys:

$$I = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a\cos bx)}{a^2 + b^2} + C \,. \;\triangleright$$

Amalyýetiň görkezişi ýaly, bölekleýin integrirlemek usuly bilen hasaplanylýan integrallaryň köpüsi aşakdaky ýaly iki topara bölünýärler.

Birinji topara $P(x)$ köpagza üçin

$$\int P(x) f(x) dx$$

görnüşdäki integrallar degişlidir. Şunlukda, $f(x)$ funksiýa

$$\ln x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad arctg\, x, \quad arcctgx$$

görnüşdäki funksiýalaryň biri bolanda $u(x)$ hökmünde şol funksiýa alynýar, e^{kx}, $\sin ax$, $\cos ax$ görnüşdäki funksiýalaryň biri bolan halynda bolsa $u(x) = P(x)$ alynýar.

Ikinji topara

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx\, dx, \quad \int \sin(\ln x) dx, \quad \int \cos(\ln x) dx$$

görnüşdäki integrallar girýärler. Bu integrallary hasaplamak üçin 11-nji mysaldaky ýaly bölekleýin integrirlemek usuly iki gezek ulanylýar.

Bölekleýin integrirlemek usuly bilen hasaplanylýan integrallaryň içinde bu iki topara girmeýänleriniň hem bardygyny belläliň.

12-nji mysal. $B_k = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$ integraly hasaplamaly.

◁ Bu integral ýokardaky iki toparyň hiç birine-de degişli däldir. Hasaplamak üçin ilki ony

$$B_k = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^k}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int x\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}B_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int x\frac{d(a^2+x^2)}{(x^2+a^2)^k}$$

görnüşe getirip, soňky integraly hasaplamak üçin bölekleýin integrirlemek usulyny ulanarys. Goý, $u = x,\ d\upsilon = \frac{d(a^2+x^2)}{(x^2+a^2)^k}$ bolsun, onda $du = dx$,

$\upsilon = -\frac{1}{(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}}$. Sonuň üçin integral şeýle görnüşi alar:

$$B_k = \frac{1}{a^2}B_{k-1} + \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2(k-1)}B_{k-1}.$$

Bu ýerden bolsa B_k integraly hasaplamak üçin rekurrent formula alynýar:

$$B_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}B_{k-1}. \tag{10}$$

Alnan formulanyň kömegi bilen $\forall k = 2,3,...$ üçin B_k integraly hasaplap bolar. Hakykatdan-da, differensialyň astyna girizmek usuly we integralyň tablisasynyň 10-njy formulasy ulanylyp tapylýan

$$B_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a} + C$$

integraly peýdalanyp, B_2 integraly hasaplarys. Soňra B_2 integraly ulanyp, B_3 integraly taparys. Şonuň ýaly dowam etdirip, $\forall k \in N$ üçin B_k integraly hasaplap bileris.

§ 5. 3. Rasional droblaryň integrirlenişi

1.Rasional droblaryň elementar droblara dagydylyşy. Goý, $P(x)$ we $Q(x)$ koeffisiýentleri hakyky sanlar bolan köpagzalar bolsun. Eger $P(x)$ köpagzanyň derejesi $Q(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi bolsa, onda $P(x)/Q(x)$ aňlatma dogry rasional drob diýilýär. Eger $P(x)/Q(x)$ dogry rasional drob bolmasa, onda köpagzany köpagza bölmegiň düzgüni boýunça ony

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde $R(x)$ we $P_1(x)$ käbir köpagzalar, $P_1(x)/Q(x)$ bolsa dogry rasional drob. Şonuň üçin biz diňe dogry rasional droblaryň $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ dörnüşdäki elementar droblaryň jemleri görnüşinde aňladylyşyny görkezeris, bu ýerde k, m narural sanlar A, M, N, a, p, q hakyky sanlar we $p^2/4 - q < 0$, ýagny kwadrat üçagzanyň kökleri kompleks sanlardyr. Onuň üçin aşakdaky teoremadan peýdalanylýar.

3-nji teorema. Goý, $P(x)/Q(x)$ rasional drobuň maýdalawjysy

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_n)^{k_n}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\ell_1}\ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{\ell_m}$$

görnüşde aňladylýan bolsun, bu ýerde a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ sanlar $Q(x)$ köpagzanyň k_i gat dürli hakyky kökleri, $x^2+p_sx+q_s = (x-z_s)(x-\bar{z}_s)$ we z_s, $\bar{z}_s$ $(s=1,2,\ldots,l)$ sanlar bolsa $Q(x)$ köpagzanyň m_s gat dürli kompleks kökleridir. Onda şeýle

$$A_i^p \ \left(i=1,2,\ldots,k_p;\ p=1,2,\ldots,n\right),$$

$$M_s^r,\ N_s^r \ \left(s=1,2,\ldots,m_r;\ r=1,2,\ldots,l\right)$$

hakyky sanlar bar bolup,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_1^n}{x-a_n} + \ldots + \frac{A_{k_n}^n}{(x-a_n)^{k_n}} +$$

$$+\frac{M_1^1 x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_{m_1}^1 x+N_{m_1}^1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1^l x+N_1^l}{x^2+p_lx+q_l}+\ldots+\frac{M_{m_l}^l x+N_{m_l}^l}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{m_l}}. \qquad (11)$$

deňlik dogrudyr.

Bu deňlikde $Q(x)$ köpagzanyň her bir k gat hakyky a köküne

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

görnüşdäki elementar droblaryň jemi we her bir çatyrymly kompleks m gat $z,\ \bar{z}$ $\left((x-z)(x-\bar{z})=x^2+px+q \text{ bolan}\right)$ köklere bolsa

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}$$

görnüşdäki elementar droblaryň jemi degişlidir.

Amalyýetde alnan elementar droblaryň näbelli koeffisiýentlerini tapmak üçin (11) deňligiň iki bölegini hem umumy maýdalawja getirip, soňra olaryň sanawjylaryndaky x ululygyň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňleýäris. Şunlukda, şol näbellilere görä deňlemeler sistemasy alynýar we olar şol sistemany çözüp tapylýar.

13-nji mysal. $\dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$ rasional droby elementar droblaryň jemine dagytmaly.

◃ 3-nji teorema boýunça

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Bu deňlemäni umumy maýdalawja getirip we sanawjylardaky x^o, x^1, x^2, x^3 ululyklaryň koeffisiýentlerini deňläp, olary tapmak üçin

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & A_1+M=2,\\ x^2: & A_2+N-2M=4,\\ x^1: & A_2+M-2N=1,\\ x^0: & -A_1+A_2+N=2 \end{array}\right\}$$

sistemany alarys we ony çözüp taparys: $A_1 = 2, A_2 = 3, M = 0, .\ \ N = 1$. Şeýlelikde, garalýan rasional drob şeýle ýazylýar:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Eger $Q(x)$ köpagzanyň diňe hakyky we dürli kökleri bar bolsa, ýagny

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).,$$

onda

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

bolar. Bu deňlikden näbelli koeffisiýentleri tapmak aňsatdyr. Mysal üçin, eger bu deňligiň iki bölegini hem $x - a_k$ köpeldijä köpeldip,alnan deňligiň iki böleginde-de $x = a_k$ goýsak, onda A_k koeffisiýenti tapmak üçin

$$A_k = \frac{P(a_k)}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)}$$

formulany alarys. Bu formuladan görnüşi ýaly, A_k koeffisiýenti tapmak üçin $P(x)/Q(x)$ drobuň maýdalawjysyndaky $x - a_k$ köpeldijiniň üstüni çyzmaly we alnan drobda $x = a_k$ goýup, ony hasaplamaly.

14-nji mysal. $\dfrac{x+2}{(x-1)x(x+1)}$ droby elementar droblaryň jemine dagytmaly.

◁ Teoremanyň esasynda

$$\frac{x + 2}{(x-1)x(x+1)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x + 1}.$$

A_1 koeffisiýenti tapmak üçin deňligiň çep bölegindäki drobuň maýdalawjysynda $x - 1$ tapawudy çyzyp, alnan aňlatmada $x = 1$ goýup alarys: $A_1 = 3/2$. Şoňa meňzeşlikde beýleki näbellileri tapýarys: $A_2 = -2,\ A_3 = 1/2$. Şeýlelikde,

$$\frac{x+2}{(x-1)x(x+1)} = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)}.\ ▷$$

2 . Elementar droblaryň integrirlenişi

3-nji teoremadan görnüşi ýaly, dogry rasional droblary integrirlemeklik aşakdaky dört görnüşdäki elementar droblary integrirlemeklige getirilýär.

I. $\dfrac{A}{x-a}$ **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ **III.** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ **IV.** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}}$ **.**

Bu ýerde $\alpha = 2,3,...,n;$ $\beta = 2,3,...,m;$ A, M, N, p, q, a – hemişelik hakyky sanlar we x^2+px+q üçagzanyň hakyky köki ýokdur, ýagny $q - p^2/4 > 0$.

Bu elementar droblaryň integrirlenişine aýratynlykda garalyň.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III we IV integrallar üçin x^2+px+q kwadrat üçagzany şeýle görnüşde aňladalyň:

$x^2+px+q = (x+p/2)^2 + \left(q-p^2/4\right) = t^2+a^2,\ t = x+p/2,$. Onda

$$\text{II.}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M(x+p/2)+(N-Mp/2)}{(x+p/2)^2+\left(q-p^2/4\right)}d(x+p/2) =$$

$$= M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (N-Mp/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C.$$

$$\text{IV}\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \left(N-\frac{MP}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$$

$$= \frac{M}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(N - \frac{MP}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} .$$

Soňky integraly bölekleýin integrirlemek usuly bilen hasaplap bolýar, çünki ol integral ýokarda hasaplanan B_m integraldan diňe integrirlemäniň üýtgeýän t ululygy bilen tapawutlanýar. Şonuň üçin hem

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$$

görnüşdäki integral 17-nji mysalda görkezilen B_k integral ýaly hasaplanylýar.

Şeýlelikde, $P(x)/Q(x)$ dogry rasional drobuň integralynyň hemişe elementar funksiýalarda aňladylýandygyny görkezdik. Bu ýerden islendik $P(x)/Q(x)$ rasional drobuň köpagza bilen dogry rasional drobuň jemi görnüşinde aňladylýandygy esasynda, islendik rasional drobuň integralynyň tapylýandygyny alýarys.

§ 5. 4. Irrasional we trigonometrik funksiýalaryň integrirlenişi

Irrasional we trigonometrik funksiýalaryň integrallary üýtgeýäni çalşyrmak bilen rasional funksiýalaryň integrallaryna getirilýär. Şeýle integrallaryň dürli görnüslerine aýratynlykda garap geçeliň. Garalýan integrallaryň hemmesinde integral astyndaky funksiýa üytgeýänlerine görä rasional funksiýadyr.

1. $\int R\left(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_k}\right)dx$ **görnüşdäki integral.** Bu ýerde $r_1, \dots, r_k$ rasional sanlar. Eger olaryň umumy maýdalawjylary m sana deň bolsa, onda $x = t^m$, $dx = mt^{m-1}$ esasynda x-iň rasional derejeleri, t-niň bitin derejelerine geçer we netijede integral astyndaky funksiýa t görä rasional funksiýa bolar.

15-nji mysal. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ integraly hasaplamaly.

$\lhd$ Bu integralda $r_1 = 1/2$ we $r_2 = 1/3$. Şonuň üçin hem olaryň umumy maýdalawjysy $m = 6$ bolýar. Diýmek, $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$ çalşyrma girizmek bolar. Şonuň esasynda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1}.$$

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

deňligi ulanyp, integraly hasaplarys:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \left(t^2 - t + 1\right)dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\int t^2 dt - 6\int t dt + 6\int dt - 6\int \frac{d(t+1)}{t+1} =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[3]{x}+1| + C. \;\rhd$$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **görnüşdäki integral.** Bu integraly hasaplamak üçin aşakdaky Eýler ornuna goýma usullary ulanylýar.

1) eger $a > 0$ bolsa, onda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

çalşyrma girizilýär.

2) eger $c > 0$ bolsa, onda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

çalşyrma girizilýär.

3) eger-de kwadrat üçagzanyň hakyky $x_1 \neq x_2$ kökleri bar bolsa,onda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1)t$$

çalşyrma ulanylýar. Üç halda hem irrasional funksiýanyň integraly rasional funksiýanyň integralyna özgerdilýär.

16-njy mysal. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$ integraly hasaplamaly.

$\lhd$ $a = 1 > 0$ bolany üçin $\sqrt{x^2+c} = t - x$ goýalayň. Onda

$$x^2 + c = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2-c}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+c}{2t^2}dt$$

bolar. Şonuň esasynda

$$\sqrt{x^2+c}=t-x=t-\frac{t^2-c}{2t}=\frac{t^2+c}{2t}$$

we integral t görä rasional funksiýanyň integraly bolar we aňsat hasaplanylar:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int\frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C. \ \triangleright$$

Käbir hususy hallarda integrallar differensial astyna girizmek ýa-da bölekleýin integrirlemek usullaryny ulanyp hasaplanylýar.

17-nji mysal. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Ilki bilen kök astyndaky funksiýany özgerdip, ony

$$3x^2+6x+4=3\left[(x+1)^2+\frac{1}{3}\right]$$

görnüşde ýazalyň we soňra integraly hasaplamak üçin differensial astyna girizmek usulyny hem-de tablisanyň 15-nji formulasyny ulanalyň:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1/3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{3}}\right|+C. \triangleright$$

18-nji mysal. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Bölekleýin integrirleme usulyny ulanmak üçin $u=\sqrt{x^2+a}$, $dv=dx$ alalyň. Onda $du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v=x$ bolar. Şonuň üçin (9) formula esasynda

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Soňky integraly ýönekeýleşdireliň:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx-$$

$$-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\sqrt{x^2+a}\,dx-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Şeýlelikde,

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

deňligi alarys, ondan bolsa

$$2\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

deňlik gelip çykýar. Soňky integrala jedweliň 15-nji formulasyny ulanyp alarys:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right]+C.\ \triangleright$$

3. $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ **görnüşdäki integral.** Bu ýerde $R(u,\ v)$ funksiýa u we v görä rasional funksiýadyr. Bu halda $t=tg(x/2)\ (-\pi<x<\pi)$ çalşyrmany ulanyp, integraly rasional funksiýanyň integralyna getirmek bolar. Bu çalşyrmany we

$$\sin x=\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)},\qquad \cos x=\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$$

formulalary ulanyp,

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

deňlikleri alarys. Şeýlelikde, garalýan integral

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

görnüşi alar, ýagny integral rasional funksiýanyň integralyna getirildi.

19-njy mysal. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ (25) formulanyň esasynda alarys:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{2dt}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C.\ \triangleright$$

Integral astyndaky funksiýanyň käbir hususy görnüşleri üçin, ýagny

1. $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bolanda $t=\sin x$ çalşyrma;

2. $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bolanda $t=\cos x$ çalşyrma;

3. $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ bolanda $t=tgx$ çalşyrma;

ulanylýar we integral rasional funksiýanyň integralyna getirilýär.

20-nji mysal. $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$ integraly hasaplamaly.

$\triangleleft$ Bu ýerde integral astyndaky $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}$ funksiýa 2-nji şerti kanagatlandyrýar. Şonuň üçin ony ilki

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}=\frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}\sin x$$

görnüşde ýazyp, soňra $t=\cos x$ çalşyrmany ulanarys:

$$\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}\sin x\,dx=-\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}d\cos x=$$

$$=-\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt=-\int t^{-4}dt+2\int t^{-2}dt-\int dt=$$

$$=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}-t+c=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C.\ \triangleright$$

Indi $R(\sin x,\cos x)=\sin^m x\cos^n x$ hala aýratynlykda garap geçeliň. Goý, m we n bitin sanlar bolsun.

a) Eger n-täk bolsa, onda 1-nji şert ýerine ýetýär, şonuň üçin hem $t=\sin x$ çalşyrma ulanylýar.

b) Eger m- täk bolsa, onda 2-nji şert ýerine ýetýär, şonuň üçin hem $t=\cos x$ çalşyrma ulanylýar.

c) Eger m we n sanlaryň ikisi hem birwagtda täk ýa-da jübüt bolsalar, onda 3-nji şert ýerine ýetýär, şonuň üçin hem $t=tg\,x$ çalşyrmany ulanmak bolar. Ýöne bu halda integraly başgaça hasaplamak amatlydyr. Mysal üçin, m we n görkezijileriň ikisi hem täk we položitel bolanda integraly

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\, 2\sin x \cos x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{k} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{l} d(\cos 2x)$$

görnüşde ýazyp, $t = \cos 2x$ çalşyrmany ulanmak amatly bolýar

1-nji bellik. Käbir hallarda trigonometrik aňlatmanyň integralyny hasaplamaklygy trigonometrik formulalardan peýdalanmak arkaly hem ýönekeýleşdirmek bolar. Meselem, eger m we n görkezijileriň ikisi hem jübüt bolsa, onda

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

formulalardan peýdalanmak integraly hasaplamagy aňsatlaşdyrýar.

21-nji mysal. $\int \sin^2 x\ \cos^4 x\,dx$ integraly hasaplamaly.

◁ Integral astyndaky funksiýany

$$\sin^2 x \cos^4 x = = \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(\cos 2x + 1),$$

görnüşde ýazalyň. Onda integral aňsat hasaplanylar:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) + \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C \quad \triangleright$$

2-nji bellik. Eger-de, integral astyndaky funksiýa $\sin\alpha x \cos\beta x$, $\sin\alpha x \sin\beta x$ ýa-da $\cos\alpha x \cos\beta x$ köpeltmek hasylyna (ýa-da olaryň položitel derejelerine) deň bolsa, onda ol integraly hasaplamak üçin trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasylyny jeme öwürýän formulalar ulanylýar.

22-nji mysal. $\int \sin 4x \cos 3x\,dx$ integraly hasaplamaly.

◁ $\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]$ formulany ulanyp alarys:

$$\int \sin 4x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin x] dx = \frac{1}{14}\int \sin 7x\, d(7x) +$$
$$+\frac{1}{2}\int \sin x\, dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + C. \ \triangleright$$

4. $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ **görnüşdäki integral.** Bu ýerde $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ we $m,\ n,\ p$ - rasional sanlar. Bu integrala binomial differensialyň integraly diýilýär. Ol integralyň diňe üç halda, ýagny $p,\ \frac{m+1}{n}$ we $\frac{m+1}{n}+p$ sanlaryň haýsy-da hem bolsa biri bitin san bolanda integrirlenýändigini, beýleki hallarda bolsa elementar funksiýalarda aňladylmaýandygyny XIX asyryň ortalarynda rus matematigi *P.Ž.* Çebyşew subut edipdir.

3-nji bellik. Elementar funksiýalarda aňladylmaýan başga integrallar hem bardyr. Olara aşakdaky integrallar mysal bolup biler:

1. $\int e^{-x^2} dx$ 2. $\int cos(x^2)dx.$ 3. $\int sin(x^2)dx.$

4. $\int \frac{dx}{\ln x}$ 5. $\int \frac{\cos x}{x}dx.$ 6. $\int \frac{\sin x}{x}dx$.

G ö n ü k m e l e r

1. Integrallary hasaplamaly:

1) $\int x^6 dx.$ 2) $\int \sqrt[3]{x}dx.$. 3) $\int \frac{dx}{x^5}.$

4) $\int (x - x^3)dx.$ 5) $\int (x^5 - 4x^3 + x - 1)dx.$ 6) $\int (2x - 3\sqrt{x})dx.$

7) $\int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}\right)dx.$ 8) $\int (2+\sqrt{x})^2 dx.$ 9) $\int \frac{(x\sqrt{x}-3)^2}{x^3}dx.$

10) $\int \frac{(2+x)dx}{x}.$ 11) $\int x^2(1+2x)dx.$ 12) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3}dx.$

13) $\int \ell^{-4x}dx.$ 14) $\int (e^x - e^{-x})^2 dx.$ 15) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$

16) $\int \frac{dx}{x^2+16}$. 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$. 18) $\int \sin 7x\,dx$.

19) $\int 3^x\,dx$. 20) $\int \left(e^x+e^{-2x}\right)dx$. 21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

22) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$. 23) $\int \cos 3x dx$. 24) $\int \frac{dx}{x^2-16}$.

25) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. 26) $\int (2+\cos x)dx$. 27) $\int (3+x-\sin x)dx$.

28) $\int e^{2x+1}dx$. 29) $\int 3^x\cdot 2^{2x}\,dx$. 30) $\int (x+5)^3\,dx$

31) $\int \sqrt{1+2x}dx$. 32) $\int x\left(x^2-1\right)^3 dx$. 33) $\int \left(x^2+5\right)^7 2xdx$.

34) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$. 35) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$. 36) $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$.

37) $\int e^{x+x^2}(1+2x)dx$. 38) $\int \left(\sin x^2\right)xdx$. 39) $\int \cos^5 4x \sin 4xdx$.

40) $\int \frac{x^3dx}{x+1}$. 41) $\int \frac{2x-1}{2x+3}dx$. 42) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$.

43) $\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$. 44) $\int e^{x^3+x^2-x+1}\left(3x^2+2x-1\right)dx$.

45) $\int e^{tg3x}\sec^2 3xdx$. 46) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$. 47) $\int \frac{dx}{9x^2-4}$.

48) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. 49) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}$. 50) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

51) $\int \frac{(4-\ln x)^2}{x}dx$. 52) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}$. 53) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.

54) $\int 2^{x^3}x^2dx$. 55) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; 56) $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$;

57) $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$. 58) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$. 59) $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$.

60) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$. 61) $\int \frac{dx}{4 + 2x + x^2}$; 62) $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$.

63) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$. 64) $\int (\cos 3x - \sin 2x)dx$. 65) $\int (\sin 3x + \cos 5x)dx$.

66) $\int \cos(x + 3)dx$. 67) $\int \sin^3 x \cos x dx$. 68) $\int \cos^5 x \sin x dx$.

69) $\int (1 - \sin^2 x)dx$. 70) $\int (1 - \cos^2 x)dx$. 71) $\int \sin 2x \cos 2x dx$.

72) $\int \cos \frac{3}{4} x \sin \frac{1}{4} x dx$. 73) $\int \cos 3x \cos \frac{4}{3} x dx$. 74) $\int \sin^5 x dx$.

75) $\int \cos^5 x dx$. 76) $\int \sin x \sin 5x dx$. 77) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

78) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. 79) $\int \frac{dx}{3x^2 + 7}$. 80) $\int \frac{dx}{5x^2 - 2}$.

81) $\int \sqrt[3]{2x - 3} dx$. 82) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$. 83) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$.

84) $\int (2x - 5)e^{-3x} dx$. 85) $\int x \cos 2x dx$. 86) $\int x e^{-2x} dx$.

87) $\int (2x - 3)\sin \frac{x}{2} dx$. 88) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. 89) $\int (x^2 - 5x + 8)\sin 2x dx$.

90) $\int (3x - 4)\ln x dx$. 91) $\int \sqrt{x} \ln x dx$. 92) $\int (x^2 + 1)e^x dx$.

93) $\int \ln^2 x dx$. 94) $\int \frac{\ln x dx}{(x + 1)^2}$. 95) $\int \frac{x}{x + 2} dx$.

96) $\int \frac{dx}{(x + 1)^4}$. 97) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$. 98) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$.

99) $\int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}$. 100) $\int \frac{dx}{(x - 2)(x - 3)}$. 101) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

102) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$. 103) $\int \frac{dx}{2 + 3\cos x}$. 104) $\int \frac{(1 + \sin x)dx}{(1 + \cos x)\sin x}$.

J o g a p l a r

1. 1) $\frac{x^7}{7}+C$; 2) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$; 3) $-\frac{1}{4x^4}+C$; 4) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C$;

5) $\frac{x^6}{6}-x^4+\frac{x^2}{2}-x+C$; 6) $x^2-2x\sqrt{x}+C$; 7) $\frac{x^4}{12}-\frac{3}{2x^2}+C$;

8) $4x+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$; 9) $x+\frac{12}{\sqrt{x}}-\frac{9}{2x^2}+C$; 10) $2\ln|x|+x+C$;

11) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C$; 12) $2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$; 13) $-\frac{1}{4}e^{-4x}+C$;

14) $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)-2x+C$; 15) $\sqrt{x^2+1}+C$; 16) $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}+C$;

17) $\arcsin\frac{x}{5}+C$; 18) $-\frac{1}{7}\cos 7x+C$; 19) $\frac{3^x}{\ln 3}+C$; 20) $e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$;

21) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C$; 22) $\frac{1}{5}tg5x+C$; 23) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$;

24) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$; 25) $-\frac{1}{3}ctg3x+C$; 26) $2x+\sin x+C$;

27) $3x+\frac{x^2}{2}+\cos x+C$; 28) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$; 29) $\frac{12^x}{\ln 12}+C$;

30) $\frac{1}{4}(x+5)^4+C$; 31) $\frac{1}{3}(1+2x)\sqrt{1+2x}+C$; 32) $\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4+C$;

33) $\frac{\left(x^2+5\right)^8}{8}+C$; 34) $\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}+C$. 35) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$;

36) $-\frac{1}{3(x-1)^3}+C$; 37) $e^{x+x^2}+C$; 38) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$;

39) $-\frac{1}{24}\cos^6 4x+C$. 40) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln|x+1|+C$;

41) $x-2\ln|2x+3|+C$; 42) $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$; 43) $-\ln(1+e^{-x})+C$;

44) $e^{x^3+x^2-x+1}+C$; 45) $\frac{1}{3}e^{tg3x}+C$; 46) $\frac{1}{6}arctg\frac{2x}{3}+C$;

47) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+C$; 48) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$; 49) $\frac{5}{2}\arcsin x^2+C$;

50) $\arcsin(\ln x)+C$; 51) $-\frac{1}{3}(4-\ln x)^3+C$; 52) $2\sqrt{e^x+4}+C$;

53) $e^{-\frac{1}{x}}+C$; 54) $\frac{2^{x^3}}{3\ln 2}+C$; 55) $-\ln\left|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right|+C$;

56) $\frac{1}{3}tgx^3+C$; 57) $-\frac{1}{x-1}+C$; 58) $\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$;

59) $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 60) $\arcsin(2x-3)+C$; 61) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$;

62) $arctg(2x-1)+C$; 63) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$;

64) $\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$; 65) $-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+C$;

66) $\sin(x+3)+C$; 67) $\frac{\sin^4 x}{4}+C$; 68) $-\frac{\cos^6 x}{6}+C$;

69) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 70) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 71) $-\frac{1}{8}\cos 4x+C$.

72) $-\frac{1}{2}\cos x+\cos\frac{1}{2}x+C$. 73) $\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x+\frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x+C$.

74) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. 75) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\sin x+C$.

76) $\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$. 77) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

78) $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$. 79) $\frac{1}{\sqrt{21}}arctg\left(x\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+C$.

80) $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right|+C$. 81) $\frac{3}{8}(2x-3)\sqrt[3]{2x-3}+C$.

82) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$. 83) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C$.

84) $\frac{13-6x}{9}e^{-3x}+C$. 85) $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$. 86) $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C$.

87) $(6-4x)\cos\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}+C$. 88) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$.

89) $-\frac{2x^2-10x+15}{4}\cos 2x+\frac{2x-5}{4}\sin 2x+C$.

90) $\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\frac{3}{4}x^2+4x+C$. 91) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$.

92) $e^x\left(x^2-2x+3\right)+C$. 93) $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$.

94) $\frac{x}{x+1}\ln x-\ln(x+1)+C$. 95) $x-2\ln|x+2|+C$. 96) $-\frac{1}{3(x+1)^3}+C$.

97) $\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}+C$. 98) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$.

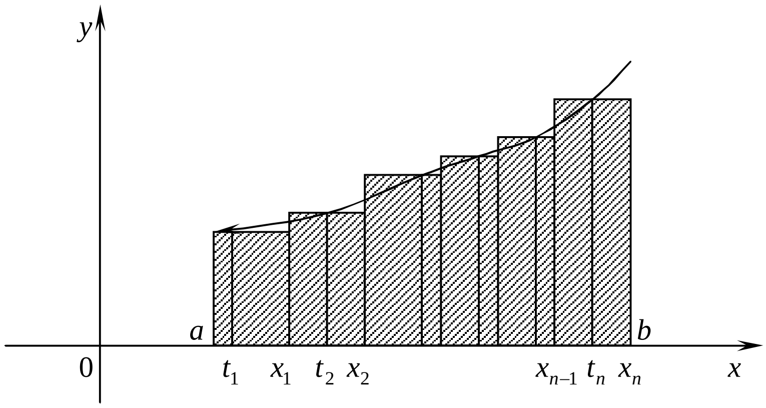
99) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}+C$. 100) $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.

101) $tgx-2ctgx-\frac{1}{3}ctg^3x+C$. 102) $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\,\frac{x}{2}\right)+C$.

103) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{tg\,\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|+C$. 104) $tg\,\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg^2\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+C$.

II. 6. KESGITLI INTEGRAL
§ 6. 1. Integral düşünjesine getirýän meseleler

1.Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany hakyndaky mesele. Egriçyzyly trapesiýa, ýagny ýokarsyndan otrisatel däl we üznüksiz bolan $y = f(x)$ funksiýanyň çyzgysy, çepinden we sagyndan $x = a$, $x = b$ göni çyzyklar we aşagyndan Ox oky bilen çäklenen figura garalyň. $[a, b]$ kesimi $a = x_o < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ nokatlar arkaly $[x_{i-1}, x_i]\ (i = \overline{1, n})$ böleklere böleliň we olaryň uzynlyklaryny $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = \overline{1, n})$ bilen belgiläliň. $[x_{i-1}, x_i]$ kesimiň erkin t_i nokadyny alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(t_i)$ bahasyny hasaplalyň. Şunlukda, $f(t_i)\Delta x_i$ köpeltmek hasyly esasy Δx_i we beýikligi $f(t_i)$ bolan gönüburlugyň meýdanydyr.Şeýle



1-nji surat

köpeltmek hasyllardan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

lemi düzeliň. Oňa f funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäkii integral jemi diýilýär. Ol integral jemiň her bir goşulyjysy degişli gönüburçlugyň meýdanyna, jemiň özi bolsa şol meýdanlaryň jemine, ýagny egriçyzykly trapesiýany takmyn çalşyrýan basgançak figuranyň meýdanyna deňdir (1-nji surat).

Integral jem $[a, b]$ kesimiň böleklere bölünişine we her bölek kesimde alynýan erkin t_i nokatlara baglydyr. Şunlukda, kesimiň böleklere bölünme n sany artdygyça basgançak figuranyň meýdany egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna ýakynlaşar. Goý, $d = \max \Delta x_i \ \left(i = \overline{1, n}\right)$ bolsun.

Eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tapylyp, $[a, b]$ kesimiň islendik bölünme nokatlary we islendik $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \left(i = \overline{1, n}\right)$ üçin $d < \delta$ bolanda

$$| S_n - I | < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda I sana S_n integral jemiň $d \to 0$ bolandaky predeli diýilýär.

Eger $d \to 0$ bolanda ($[a, b]$ kesimiň bölek kesimleriniň sany çäksiz artanda) integral jemiň S predeline egriçyzykly trapesiýanyň meýdany diýilýär, ýagny

$$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i \ . \tag{1}$$

2.Tizligi boýunça geçilen ýoly tapmak meselesi. Goý, M nokat göni çyzyk boýunça üýtgeýän $v = f(t)$ tizlik bilen hereket edýän bolsun. M nokadyň t_o-dan T çenli wagt aralygynda geçen ýoluny kesgitlemeli.

$[t_o, T]$ kesimi uzynlyklary $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ bolan $[t_o, t_1]$, $[t_1, t_2]$, . . . , $[t_{n-1}, t_n]$ $(t_n = T)$ böleklere böleliň. Kiçi bolan Δt_i wagt aralygynda hereketiň tizligi hemiselik we $f(\tilde{t}_i)$ $(\tilde{t}_i \in [t_{i-1}, t_i])$ deň hasap edeliň. Onda şol wagt aralygynda nokadyň geçen ýoly takmyn $f(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ deňdir. Bölek wagt aralyklarynda geçilen $f(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ ýollary jemläp, M nokadyň t_o-dan T çenli wagt aralygynda geçen ýolunyň takmyn bahasyny taparys:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{t}_i) \Delta t_i \ .$$

Bu deňlikde $d = \max \Delta t_i \ \left(i = \overline{1, n}\right)$ nola ymtylanda predele geçip, nokadyň geçen ýolunyň takyk bahasyny taparys:

$$s = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{t}_i) \Delta t_i \ .$$

Şeýlelikde, M nokadyň t_o-dan T çenli wagt aralygynda geçen ýoly $v = f(t)$ funksiýanyň $[t_o, T]$ kesimdäki integral jeminiň predeline deňdir.

3. Tizligi boýunça jisimiň mukdaryny tapmak meselesi. Goý, himiki reaksiýa gatnaşýan käbir jisimiň himiki öwürmesiniň tizligi t bagly üýtgeýän $v = f(t)$ funksiýa bolsun. t_o-dan T çenli wagt aralygynda reaksiýa gatnaşýan jisimiň m mukdaryny kesgitlemeli. Edil 2-nji mysalda geçiren amallarymyz ýaly amallary ýerine ýetirip, jisimiň mukdaryny

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

jemiň predeli hökmünde tapmak bolar, ýagny

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\tilde{t}_i)\Delta t_i \ .$$

Şular ýaly başga-da dürli meseleleriň integral jemiň predelini tapmaklyga getirýändigi sebäpli, şeýle pedeli tapmaklyk aýratyn derňeldi we ol kesgitli integral düşunjesine getirdi.

§ 6. 2. Kesgitli integral düşünjesi

1. Kesgitli integralyň kesgitlenişi. Goý, f funksiýa $[a, b]$ kesimde kesgitlenen bosun. $[a, b]$ kesimi $a = x_o < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ nokatlar arkaly $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$ bölek kesimlere bölüp, olaryň uzynlyklaryny $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = \overline{1, n})$ bilen belgiläliň. Bölek kesimleriň iň ulusynyň uzynlygyny d bilen belgiläliň, ýagny $d = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Her bir bölek $[x_{i-1}, x_i]$ kesimde erkin t_i nokady alyp we funksiýanyň $f(t_i)$ bahasyny şol kesimiň Δx_i uzynlygyna köpeldip, $f(t_i)\Delta x_i$ köpeltmek hasyly alarys. Şeýle köpeltmek hasyllardan

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \tag{2}$$

lemi düzeliň. Oňa f funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäkii integral jemi diýilýär.

(2) deňlikden görnüşi ýaly, integral jem $[a, b]$ kesimi böleklere bölýän nokatlara we bölek kesimlerde alynýan $t_1,...,t_n$ nokatlara baglydyr, ýagny

olaryň üýtgemegi bilen integral jem hem üýtgeýändir.

Kesgitleme. Eger $d \to 0$ $(n \to \infty)$ bolanda (2) integral jemiň tükenikli I predeli bar bolsa, onda ol predele f funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki kesgitli integraly diýilýär we ol şeýle belgilenýär:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to o} S_p(f). \tag{3}$$

Bu ýerde a we b sanlara degişlilikde kesgitli integralyň aşaky we ýokarky çäkleri diýilýär. Şunlukda, f funksiýanyň özüne $[a, b]$ kesimde integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Bu formuladan görnüşi ýaly, kesgitli integralyň bahasy hemişelik san bolup, ol f funksiýa hem-de a we b sanlara baglydyr. Şonuň üçin hem f funksiýa we integralyň çäkleri berlen bolsa, onda ol kesgitli integral ýeke-täk kesgitlenýär we käbir sana deňdir. Beýle diýildigi kesgitli integralyň integrirleme üýtgeýänine bagly däldigini aňladýar, ýagny

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

deňlikler dogrudyr.

2. Integrirlenýän funksiýanyň çäkliligi. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda şol kesimde funksiýa çäklidir. Hakykatdan-da, eger tersine güman etsek, ýagny f funksiýa $[a, b]$ kesimde çäksiz bolsa, onda ol funksiýa käbir $[x_{i-1}, x_i]$ kesimde çäksiz bolar. Şeýle bolanda t_i nokady saýlap almak bilen integral jemi islendikçe ulaldyp bolar. Şonuň üçin bu halda integral jemiň tükenikli predeli bolup bilmez. Alnan garşylyk integrirlenýän funksiýanyň çäklidigini görkezýär. Ýöne bu tassyklamanyň tersi dogry däldir Onuň şeýledigi aşakdaky mysaldan aýdyň görünýär.

1-nji mysal. $[a, b]$ kesimde Dirihle funksiýasy atlandyrylýan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ } \textit{rasional san bolsa}, \\ 0, & x \text{ } \textit{irrasional san bolsa} \end{cases}$$

funksiýa garalyň. Onuň $[a, b]$ kesimde çäklidigi aýdyňdyr. Ýöne ol funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenmeýär, çünki $[a, b]$ kesimiň islendik bölünmesi üçin $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ rasional sanlar bolanda integral jem

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a\,,$$

eger-de $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ irrasional sanlar bolsa, onda integral jem

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_1 = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0\,.$$

Bu bolsa $S_n(f)$ integral jemiň $d \to 0$ bolanda predeliniň ýokdugyny aňladýar, ýagny Dirihle funksiýasy $[a,\ b]$ kesimde integrirlenmeýär.

$[a, b]$ kesimde integrirlenýän funksiýalaryň köplügi $R[a,b]$ bilen belgilenýär. Şunlukda, $f \in R[a,b]$ ýazgy f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde integrirlenýändigini aňladýar.

Subut etmezden käbir integrirlenýän funksiýalary belläp geçeliň:

1. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda şol kesimde ol funksiýa integrirlenýändir.

2. Eger f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde tükenikli sany birinji görnüşdäki üzülme nokatlary bar bolsa, onda şol kesimde ol integrirlenýändir.

3. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde monoton bolsa, onda şol kesimde ol funksiýa integrirlenýändir.

2-nji mysal. $f(x) = C = const$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimde integrirlenýändigini subut etmeli..

$\triangleleft$ $[a, b]$ kesimiň $[x_{i-1}, x_i]$ bölek kesimiň islendik t_i nokady üçin $f(t_i) = C$ bolar. Şonuň üçin $S_n(f) = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + ... + C\Delta x_n = C(b-a)$ we (2) formula esasynda

$$\int_a^b C dx = \lim_{d \to o} S_n(f) = \lim_{d \to o} C(b-a) = C(b-a)\,. \ \triangleright$$

§ 6. 3. Kesgitli integralyň esasy häsiýetleri

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ **2.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

häsiýetleriň subutsyz kabul edilýändigini belläliň.

3. Eger f funksiýa $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ kesimleriň iň ulusynda integrirlenýän bolsa, onda ol funksiýa beýleki kesimleriň ikisinde hem integrirlenýändir we a, b, c nokatlaryň islendik ýerleşişi üçin

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{4}$$

deňlik dogrudyr.

$\lhd$ Goý, $a < c < b$ bolsun, onda f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde integrirlenýändigi ücin, onuň şol kesimdäki islendik integral jeminiň predeli bardyr. Şonuň üçin c nokady kesimi böleklere bölýän nokatlaryň biri bilen gabat gelýär hasap edeliň. Mysal üçin, eger $c = x_m$ bolsa, onda integral jemi

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

görnüşde ýazyp, ol deňlikde $d \to 0$ bolanda predele geçip, (4) deňligi alarys. Nokatlaryň başgaça ýerleşýän hallarynda (4) deňligiň subudy seredilen hala getirilýär. Mysal üçin, eger $a < b < c$ bolsa, onda subut edileniň esasynda

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

deňlik dogrudyr. Şoňa görä 2-nji häsiýet boýunça

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

ýagny (4) deňlik ýerine ýetýär. $\rhd$

4. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda hemişelik k san üçin kf funksiýa hem şol kesimde integrirlenýändir we

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_c^b f(x)dx$$

deňlik dogrudyr.

5. Eger f we g funksiýalar $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsalar,onda $f \pm g$ funksiýa hem şol kesimde integrirlenýändir we

$$\int_a^b [\, f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \tag{5}$$

deňlik dogrudyr.

⊲ 4-nji we 5-nji häsiýetleriň subudynyň meňzeşligi üçin, 5-nji häsiýeti subut etmek bilen çäkleneris. $[a,b]$ kesimiň islendik böleklere bölünmesi üçin

$$S_n(\, f \pm g) = \sum_{i=1}^{n} [\, f(t_i) \pm g(t_i)]\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i = S_n(f) \pm S_n(g)$$

deňlik ýerine ýetýär. Bu deňlikde $d \to 0$ bolanda predele geçip, onuň sag böleginiň predeliniň barlygyndan çep böleginiň hem predeliniň bardygyny, ýagny $f \pm g$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimde integrirlenýändigini we (5) formulany alarys. ⊳

6. Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimde integrirlenýän bolup, $\forall x \in [a,b]$ üçin $f(x) \geq 0$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{6}$$

⊲ Deňsizligiň subudy bu halda f funksiýanyň integral jeminiň we onuň predeliniň otrisatel däldiginden gelip çykýar. ⊳

7. Eger f we g funksiýalar $[a,b]$ kesimde integrirlenýän bolup, $\forall x \in [a,b]$ üçin $f(x) \leq g(x)$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{7}$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

⊲ Subudy 6-njy häsiýetden gelip çykýar, çünki bu halda $\forall x \in [a,b]$ üçin $g(x) - f(x) \geq 0$. ⊳

8. Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda $|f|$ funksiýa hem şol kesimde integrirlenýär we

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \tag{8}$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

◁ Eger $\forall x \in [a,b]$ üçin ýerine ýetýän $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ deňsizlige 7-nji häsiýeti ulansak, onda

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

deňsizligi alarys, ol bolsa (8) deňsizlige deňgüýçlüdir. ▷

9. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolup, $\forall x \in [a,b]$ üçin $m \le f(x) \le M$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{9}$$

◁ Eger $m \le f(x) \le M$ deňsizlikleri a-dan b çenli integrirläp, **7**-nji häsiýeti we 2-nji mysaly ulansak, onda (9) deňsizlik gelip çykýar. ▷

10. (Orta baha hakyndaky teorema). Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolup, $\forall x \in [a,b]$ üçin $m \le f(x) \le M$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda şeýle μ $(m \le \mu \le M)$ tapylyp,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \tag{10}$$

deňlik dogrudyr.

◁ Bu teoremanyň şertlerinde (9) deňsizlik ýerine ýetýär, ondan bolsa

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

deňsizlik gelip çykýar. Eger

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

belgileme girizsek, onda subut edilmeli deňligi alarys. ▷

Bellik. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda şol kesimde ol funksiýa integrirlenýändir we $m \le f(x) \le M$. Şoňa görä bu halda hem (10) ýerine ýetýär we $m \le \mu \le M$. Soňky iki deňsizlikler esasynda bolsa kesimde üznüksiz funksiýanyň aralyk bahalary hakyndaky teorema boýunça şeýle $c \in [a, b]$ tapylyp, $\mu = f(c)$ bolar. Şoňa görä-de (10) deňlikden

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{11}$$

deňlik gelip çykýar. Şunlukda, bu deňlikden alynýan

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

sana f funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki orta bahasy diýilýär.

3-nji mysal. $\int_0^\pi (3+\sin^6 x)dx$ integraly bahalandyrmaly.

$\triangleleft$ $f(x) = 3+\sin^6 x$ funksiýa üçin $[0, \pi]$ kesimde $3 \le 3+\sin^6 x \le 4$ deňsizligiň ýerine ýetýändigi üçin, 9-njy häsiýet esasynda

$$3\pi \le \int_0^\pi (3+\sin^6 x)dx \le 4\pi$$

deňsizligi alarys. $\triangleright$

§ 6. 4. Ýokarky çägi üýtgeýänli integral

1.Ýokarky çägi üýtgeýänli integralyň üznüksizligi. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda ol funksiýa 3-nji häsiýet boýunça $\forall x \in [a,b]$ üçin $[a, x]$ kesimde hem integrirlenýär. Şonuň üçin

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b) \tag{12}$$

integrala garamak bolar. Bu funksiýa ýokarky çägi üýtgeýänli integral diýilýär.

1-nji teorema. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda F funksiýa şol kesimde üznüksizdir.

$\triangleleft$ Goý, erkin $x \in [a, b]$ nokat üçin $x + \Delta x \in [a, b]$ bolsun. Onda (12) deňlik esasynda

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

f funksiýanyň $[a,b]$ kesimde integrirlenýändigi üçin ol funksiýa şol kesimde çäklidir, ýagny $\forall x\in[a,b]$ üçin $m\le f(x)\le M$ ýerine ýetýär.Şoňa görä orta baha hakyndaky teorema esasynda şeýle μ $(m\le\mu\le M)$ tapylyp,

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\mu\Delta x$$

deňlik ýerine ýetýär. Bu deňlikden bolsa $\Delta x\to 0$ bolanda $\Delta F\to 0$ gelip çykýar we ol (12) deňlik boýunça kesgitlenýän funksiýanyň $[a,b]$kesimde üznüksizdigini görkezýär.

2.Ýokarky çägi üýtgeýänli integralyň differensirlenmegi. (12) integralyň esasy häsiýetleriniň biri-de onuň differensirlenme häsiýetidir.

2-nji teorema. Eger f funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda (12) formula boýunça kesgitlenen F funksiýa differensirlenýändir we

$$F'(x)=f(x). \tag{13}$$

$\lhd$ Goý, $x\in[a,b]$ üçin $x+\Delta x\in[a,b]$ bolsun.Onda (12) deňlik esasynda

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

deňligi alarys. (11) formula esasynda ony

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x,\ \ c=x+\theta\Delta x\ \ (0<\theta<1)$$

görnüşde ýazmak bolar, ýagny $\Delta F=f(c)\Delta x$. Ondan gelip çykýan

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(c)=f(x+\theta\Delta x)$$

deňlikde $\Delta x\to 0$ bolanda predele geçip, f funksiýanyň $[a,b]$ kesimde üznüksizligi esasynda, (12) deňlik boýunça kesgitlenýän F funksiýanyň differensirlenýändigini we (13) deňligi alarys. $\rhd$

3. Üznüksiz funksiýanyň asyl funksiýasynyň barlygy. $[a,b]$ kesimde üznüksiz her bir f funksiýanyň şol kesimde asyl funksiýasy bardyr we onuň erkin φ asyl funksiýasy

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt+C \qquad (14)$$

görnüşdedir (bu ýerde C – hemişelik san).

$\triangleleft$ f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde üznüksizligi esasynda şol kesimde F funksiýa differensirlenýär we $F'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär, ýagny F funksiýa $[a, b]$ kesimde f funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Dürli φ we F asyl funksiýalaryň biri-birlerinden hemişelik san bilen tapawutlanýandygy üçin, $\varphi(x)=F(x)+C$ bolar, ýagny (14) formula ýerine ýetýär. $\triangleright$

4. Nýuton - Leýbnis formulasy. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol kesimde integrirlenýändir we onuň φ asyl funksiýasy üçin

$$\int_a^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi(x)\Big|_a^b \qquad (15)$$

formula dogrudyr.

$\triangleleft$ Bu şertlerde f funksiýanyň integrirlenýändigi we onuň erkin asyl funksiýasynyň (14) formula boýunça kesgitlenýändigi esasynda, (14) formulada $x=a$ goýup, $\varphi(a)=C$ deňligi alarys we ol formulany

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt+\varphi(a)$$

görnüşde ýazarys. Bu formuladan bolsa $x=b$ bolanda (15) formula gelip çykýar. $\triangleright$

(15) deňlige Nýuton - Leýbnis formulasy diýilýär.

§ 6. 5. Integrirlemegiň usullary

1. Üýtgeýäni çalşyrmak usuly. Bu usul şeýle teorema esaslanýar.

3-nji teorema. Eger f funksiýa $[a, b]$ kesimde üznüksiz we g funksiýa $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän bolup, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$ bolsa we $\forall t\in[\alpha, \beta]$ üçin $g(t)$ funksiýanyň bahalary $[a, b]$ kesime degişli bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt \qquad (16)$$

formula dogrudyr.

◁ Goý, F funksiýa f funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki käbir asyl funksiýasy bolsun, diýmek F funksiýa $[a, b]$ kesimde differensirlenýär. Şonuň üçin hem çylşyrymly $F[g(t)]$ funksiýa hem $[\alpha, \beta]$ kesimde differensirlenýär we

$$\{F[g(t)]\}' = F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t).$$

Bu deňlik $F[g(t)]$ funksiýanyň $[\alpha, \beta]$ kesimde $f[g(t)]g'(t)$ funksiýanyň asyl funksiýasydygyny aňladýar. Şeýlelikde, Nýuton-Leýbnis formulasy esasynda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

we

$$\int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt = F[g(\beta)] - F[g(\alpha)].$$

Şerte görä, $g(\beta) = b,\ g(\alpha) = a$. Şonuň esasynda soňky deňlikleriň sag bölekleri deň bolar. Şonuň üçin olaryň çep bölekleri hem deňdir, ýagny (16) formula ýerine ýetýär. ▷

Ol formula kesgitli integralyň üýtgeýäni çalşyrmak formulasy diýilýär.

4-nji mysal. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ integraly hasaplamaly.

◁ Integraly hasaplamak üçin $t = \sqrt{x+1}$ çalşyrmany ulanarys. Onda $x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt$ bolar. $t = \sqrt{x+1}$ deňligi ulanyp, integralyň çäklerini taparys: $x_1 = 0$ bolanda $t_1 = 1$ we $x_2 = 3$ bolanda $t_2 = 2$ bolar. Onda (16) formula esasynda

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\int_1^2 t^2dt - 2\int_1^2 dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3\Big|_1^2 - 2t\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) - 2(2-1) = \frac{8}{3}. \ ▷$$

2. Bölekleýin integrirlemek usuly. Bu usul şeýle teorema esaslanýar.

4-nji teorema. Eger u we v funksiýalar $[a,\, b]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda şeýle formula dogrudyr

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx\ . \qquad (17)$$

◁ Köpeltmek hasyly differensirlemek düzgünini ulanyp, $[u(x)v(x)]' =$ $= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ deňligi alarys. Bu deňligiň sag böleginiň $[a,\, b]$ kesimde üznüksizligi üçin onuň çep bölegi hem şol kesimde üznüksizdir. Şonuň üçin ol deňligi a-dan b çenli integrirläp, integralyň häsiýetini we çep bölekdäki funksiýanyň asyl funksiýasynyň $u(x)v(x)$ bolýandygy üçin, Nýuton-Leýbnis formulasyny ulanyp,

$$u(x)\times v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

deňligi alarys. Bu ýerden bolsa aňsatlyk bilen (17) formula alynýar. ▷

Ol formula gysgaça

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

görnüşde ýazylýar we oňa bölekleýin integrirlemegiň formulasy diýilýär.

5-nji mysal. $\int_{1/2}^{3} xe^{2x}dx$ integraly hasaplamaly.

◁ Eger $u(x) = x,\ v'(x) = e^{2x},\ a = 1/2,\ b = 3$ alsak, onda $u'(x) = 1$ we $v(x) = e^{2x}/2$ bolýandygy esasynda, (17) formulany ulanyp taparys:

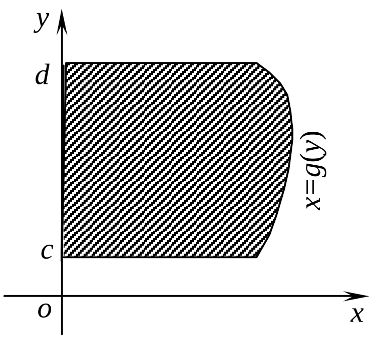
$$\int_{1/2}^{3} xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_{1/2}^{3} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{3} e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{1/2}^{3} = \frac{5}{4}e^6\ .\ ▷$$

§ 6. 6. Kesgitli integralyň ulanylyşy

1. Egriçyzykly figuranyň meýdany. Ilki bilen egriçyzyly trapesiýanyň, ýagny ýokarsyndan $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ üznüksiz funksiýanyň grafigi, çepinden we sagyndan degişlilikde $x = a$ we $x = b$ göni çyzyklar we aşagyndan Ox oky bilen çäklenen figuranyň (1-nji surat) meýdanynyň integral arkaly tapylyş formulasyny görkezeliň. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany hakyndaky meselä seredenimizde onuň meýdanynyň (1) predele deňdigini we kesgitli integral düşünjesini girizenimizde ol predeliň kesgitli integrala deňdigini (3) formulada görüpdik. Şoňa görä-de (1) we (3) formulalar boýunça egriçyzykly trapesiýanyň meýdany ücin

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (18)$$

formulany alarys.



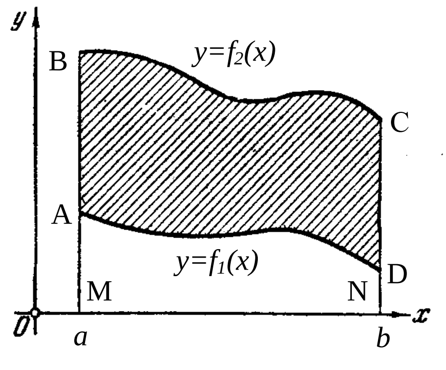
2-nji surat

Şuňa meňzeşlikde, eger egriçyzykly trapesiýa sagyndan $x = g(y)$ funksiýanyň grafigi, aşagyndan we ýokarsyndan $y = c,\ y = d$ göni çyzyklar we çepinden Oy oky bilen çäklenen bolsa, onda onuň meýdany

$$S = \int_c^d g(y)dy \qquad (!9)$$

formula boýunça tapylýar (2-nji surat).

Eger $ABCD$ figura aşagyndan $y = f_1(x)$ we ýokarsyndan $y = f_2(x)$ funksiýalaryň grafikleri, çepinden we sagyndan bolsa $x = a$ we $x = b$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsa, onda onuň meýdanyna $MBCN$ we $MADN$ egriçyzykly trapesiýalaryň meýdanlarynyň tapawudy hökmünde tapmak bolar (3-nji surat).



3-nji surat

Şonuň üçin hem formula (18) esasynda ol figuranyň meýdany üçin

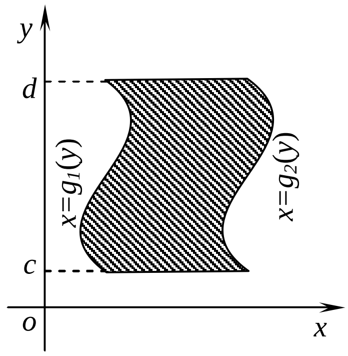
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (20)$$

formulany alarys.

Eger egriçyzykly figura çepinden we sagyndan $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ funksiýalaryň grafikleri, aşagyndan we ýokarsyndan $y = c$, $y = d$ göni çyzyklar bilen (4-nji surat) çäklenen bolsa, onda onuň meýdany

$$S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy \qquad (21)$$

formula boýunça tapylýar.



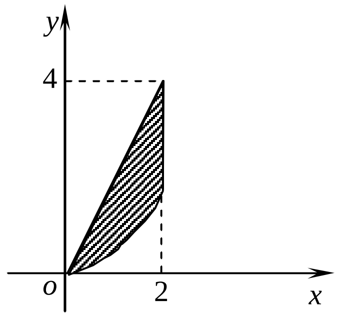
4-nji surat

Egriçyzykly figuranyň başga görnüşleriniň meýdanlaryny tapmak üçin olary her böleginde ýokarda getirilen formulalary ulanyp bolar ýaly böleklere bölmeli.

6-njy mysal. $y = x^2/2$ parabola we $x = 2$, $y = 2x$ göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly (5-nji surat).

◁ Çyzyklar $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ we $(2,\ 4)$ nokatlarda kesişýärler. Ol figuranyň ýokarsyndan $y = 2x$ göni çyzyk bilen, aşagyndan $y = x^2/2$ parabola bilen çäklenýänligi esasynda, (20) formuladan peýdalanarys:

$$S = \int_0^2 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}. \ ▷$$



5-nji surat

1-nji bellik. Eger egriçyzykly trapesiýany ýokarsyndan çäklendirýän egri çyzyk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ parametrik görnüşde berlen bolup, $a = \varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta) = b$ bolsa, onda $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ çalşyrma girizip, (18) formuladan onuň meýdany üçin

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (22)$$

formulany alarys.

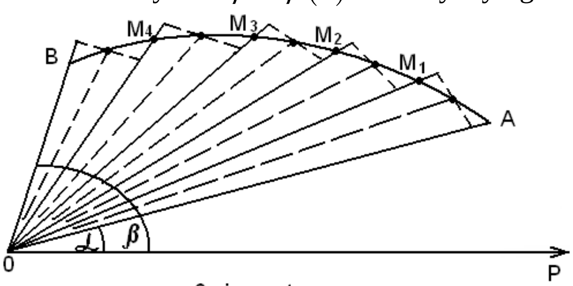
7-nji mysal. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ ellips bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly.

$\lhd$ Ellipsiň koordinatalar oklaryna görä simmetrikligi sebäpli, onuň birinji çärýekde ýerleşýän böleginiň meýdanyny tapyp, ony 4-e köpeltmek ýeterlikdir. Bu halda x ululyk 0-dan a çenli ýütgeýär. Şonuň üçin t parametr $\pi/2$-den 0-a çenli üýtgeýär. Şoňa görä (22) formula esasynda

$$S=4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 tdt==4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2ab\int_{0}^{\pi/2}dt-2ab\int_{0}^{\pi/2}\cos 2tdt=2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\pi ab\ . \rhd$$

2. Polýar koordinatalarynda meýdanyň formulasy. Goý, $\rho(\theta)$ funksiýa $[\alpha,\beta]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl bolsun. Polýar koordinatalarynda $\rho=\rho(\theta)$ funksiýanyň grafigi we polýar oky bilen α we β burçlary emele getirýän şöhleler bilen çäklenen egriçyzykly *OAB* sektoryň (6-njy surat) meýdanynyň



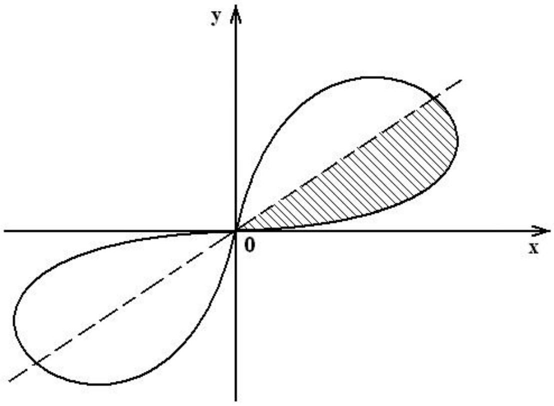
6-njy surat

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta \qquad (23)$$

formula boýunça tapylýandygyny görkezeliň.

Onuň üçin *OAB* sektory $OM_{i-1}M_i$ $(i=1,2,\ \dots\ ,n)$ elementar sektorlara böleliň we i-nji sektoryň burçuny $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$ bilen belgiläliň. $\varphi_i\in[\theta_{i-1},\theta_i]$ üçin i-nji bölek sektory radiusy $\rho_i=\rho(\varphi_i)$ we merkezi burçy $\Delta\theta_i$ bolan tegelek sektor bilen çalşyralyň. Onuň meýdany $\Delta S_i=(\rho_i^2\Delta\theta_i)/2$ deňdir. Şeýle sektorlaryň meýdanlarynyň

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i^2 \Delta\theta_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(\varphi_i)\Delta\theta_i$$



7-nji surat

jemi bolsa egriçyzykly sektory takmyn çalşyrýan basgançak sektoryň meýdanyna deňdir. Eger $d = \max \Delta\theta_i \ \left(i = \overline{1,\ n}\right)$ üçin ol jemiň $d \to 0$ $(n \to \infty)$ bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele egriçyzykly sektoryň meýdany diýilýär. Şeýlelikde, kesgitleme esasynda ol sektorýn meýdany

$$S = \lim_{d\to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(\varphi_i)\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)d\theta$$

bolar, çunki bu halda integral jemiň predeli bardyr.

8-nji mysal. $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$ lemniskata bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly (7-nji surat).

$\lhd$ Lemniskatanyň $\theta = \pi/4$ şöhlä görä simmetrikligi esasynda, onuň $1/4$ böleginiň meýdanyny taparys:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2 \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4}a^2 \int_{0}^{\pi/4} \sin 2\theta d(2\theta) = -\frac{a^2}{4}\cos 2\theta\Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{1}{4}a^2 .$$

Şonuň esasynda $S = a^2$. $\rhd$

3. Egri çyzygyň dugasynyň uzynlygy. Goý, $[a,\ b]$ kesimde üznüksiz f funksiýa üçin, AB duga $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi hökmünde berlen bolsun. $[a, b]$ kesimi $a = x_o < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nokatlar arkaly böleklere böleliň. Ol nokatlara AB dugada $M_1,\ M_2, \ldots, M_n$ nokatlar degişli bolar (8-nji surat). Olary hordalar arkaly birleşdirip, AB duganyň içinden çyzylan käbir döwük çyzygy alarys. Onuň perimetrini P_n

bilen belgiläliň. Eger döwük çyzygyň i-nji böleginiň uzynlygy l_i bolsa, onda perimetr ol bölekleriň jemine deň bolar:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

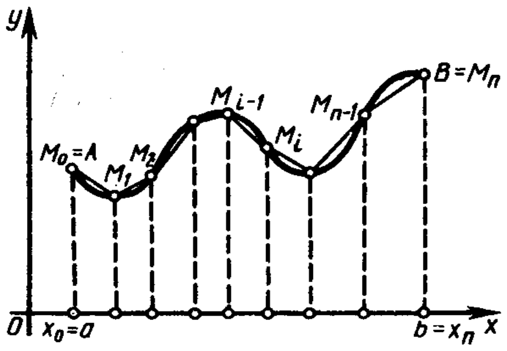
Goý, $d = \max l_i \ \left(i = \overline{1, n}\right)$ bolsun. Eger $d \to 0$ bolanda perimetriň l predeli bar bolsa, onda şol predele AB duganyň uzynlygy diýilýär:

$$l = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} l_i$$

Bu kesgitlemeden peýdalanyp, $[a, b]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän f funksiýa üçin, AB duganyň uzynlygynyň

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad (24)$$

formula boýunça tapylýandygyny görkezeliň.



8-nji surat

Eger $M_i = M_i\left(x_i,\ f(x_i)\right)$ bolsa, onda döwük çyzygyň i-nji böleginiň uzynlygy $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]^2}$ bolar.Lagranžyň formulasy esasynda

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \ \ (x_{i-1} < c_i < x_i).$$

Şonuň üçin

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(c_i)}\Delta x_i \ \ \left(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\right). \qquad (25)$$

Bu deňlik esasynda döwük çyzyklaryň perimetri ücin

$$P_n=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\Delta x_i$$

deňligi, ýagny (24) integralyň integral jemini alarys. $[a,\,b]$ kesimde $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funksiýanyň üznüksizligi esasynda, $\tilde d=\max\Delta x_i\ \left(i=\overline{1,\,n}\right)$ ücin $\tilde d\to 0$ bolanda ol jemiň predeli bardyr we ol predel (24) integrala deňdir. $\tilde d\le d$ bolýandygy üçin $(d\to 0)\Rightarrow(\tilde d\to 0)$. Şoňa görä

$$l=\lim_{d\to 0}P_n=\lim_{\tilde d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx\ .\ \triangleright$$

9-njy mysal. $y=\sqrt{x^3}$, $0\le x\le 5$ duganyň uzynlygyny tapmaly.

$\triangleleft$ $y=\sqrt{x^3}$ deňlikden $y'=3\sqrt{x}/2$ önümi tapyp we (24) formulany ulanyp alarys:

$$l=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^5\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{1/2}d\left(1+\frac{9x}{4}\right)=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5=\frac{335}{27}.\ \triangleright$$

Eger AB duga $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$ parametrik görnüşde berlen bolup, $a=\varphi(\alpha),\ \varphi(\beta)=b$ bolsa, onda $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$ çalşyrma girizip we parametrik görnüşdäki funksiýanyň önüminiň formulasyndan peýdalanyp, (24) formuladan onuň uzynlygy üçim

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

formulany alarys.

Eger AB duga polýar koordinatalarynda $\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$ deňleme arkaly berlen bolsa, bu ýerde $\rho=\rho(\theta)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa we A we B nokatlara α we β degişli bilsa, onda polýar we dekart koordinatalaryny baglanyşdyrýan formula esasynda AB duganyň θ parametre görä $x=\rho(\theta)\cos\theta,\ y=\rho(\theta)\sin\theta$ deňlemesini alarys.Şoňa görä

$$x'=\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta,\quad y'=\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta\,,$$

$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)$$

deňlikler esasynda, polýar koordinatalarynda berlen duganyň uzynlygy

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$$

formula boýunça tapylar

4. Aýlanma üstüň meýdany. Goý, $[a, b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl f funksiýa üçin AB duga $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ funksiýanyň grafigi arkaly berlen bolsun. Eger $a = x_o < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nokatlar arkaly $[a, b]$ kesimi böleklere bölsek, onda olara AB duganyň $M_i = M_i(x_i, f(x_i))$ $(i = \overline{1, n})$ nokatlary degişli bolar (8-nji surat). Ol nokatlary yzygiderli birikdirip, käbir döwük çyzyk alarys, şunlukda onuň $M_{i-1}M_i$ böleginiň uzynlygy

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \tag{26}$$

deňdir. Döwük çyzygyň $M_{i-1}M_i$ bölegi Ox okuň daşyndan aýlananda kesik konusy $(f(x_{i-1}) = f(x_i)$ bolan halda silindri) emele getirýär. Ol aýlanma üstüň meýdany $\pi(y_{i-1} + y_i)l_i$ deňdir. Onda ähli döwük çyzygyň Ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüniň meýdany

$$q_n = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) l_i, \quad y_i = f(x_i) \tag{27}$$

deňdir. Eger f funksiýanyň $[a, b]$ kesimde üznüksiz önümi bar bolsa, onda (26) deňligi (25) görnüşde ýazmak bolar. Şonuň üçin (27) deňlik

$$q_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{i-1} + y_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(c_i)}\, \Delta x_i \quad (x_{i-1} \le c_i \le x_i) \tag{28}$$

görnüşi alar. Bu jemiň $d \to 0$ bolandaky q predeline aýlanma üstüň, ýagny $y = f(x)$, $a \le x \le b$ funksiýanyň grafiginiň Ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüniň meýdany diýilýär.

(28) deňlikden görnüsi ýaly, ol jem

$$2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} \tag{29}$$

funksiýanyň integral jemi däldir. Ýöne ol jemiň $d \to 0$ bolandaky predeliniň

(29) funksiýanyň integral jeminiň predeline deňdigini görkezmek bolar. Şonuň esasynda hem aýlanma üstüň meýdanynyň

$$q = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\,dx \qquad (30)$$

formula boýunça tapylýandygy subut edilýär.

Bellik. Eger üst $x = g(y)$ $(c \le y \le d)$ deňleme bilen berlen AB duganyň Oy okunyň daşyndan aýlanmagyndan alynýan bolsa, onda onuň meýdany

$$q = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+g'^{\,2}(y)}\,dy$$

formula boýunça tapylar.

10-njy mysal. $y + x = 2$ göni çyzygyň koordinata oklarynyň arasynda ýerleşýän kesiminiň Ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan alynýan üstüniň meýdanyny tapmaly.

◁ Göni çyzygyň kesimi üçin $y = 2 - x$ $(0 \le x \le 2)$, $y' = -1$. Şoňa görä (30) formula esasynda

$$q = 2\pi\int_0^2 (2-x)\sqrt{1+1}\,dx = 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2-x)dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4\sqrt{2}\,\pi. \ ▷$$

5. Jisimiň göwrümi. Goý, x nokatda Ox okuna perpendikulýar tekizlik geçirilende berlen G jisimiň kese kesiginde alynýan $S(x)$ meýdany belli bolsun we ol x görä $[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiýa bolsun. Ol jisimiň V göwrümini tapmak üçin $[a,b]$ kesimi $a = x_o < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nokatlar arkaly böleklere böleliň we şol nokatlar boýunça Ox oka perpendikulýar tekizlikler geçireliň. Şunlukda, jisim n gatlaklara bölüner (9-njy *a* surat). Eger $x = x_{k-1}$ we $x = x_k$ tekizlikleriň arasyndaky gatlagy beýikligi Δx_k we esasynyň meýdany $S(t_k)$, $t_k \in \lfloor x_{k-1},\ x_k \rfloor$ bolan silindr bilen çalşyrsak, onda ol silindriň göwrümi $S(t_k)\Delta x_k$ deň bolar. Onda şeýle göwrümleriň jeminden düzülen

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta x_k \tag{31}$$

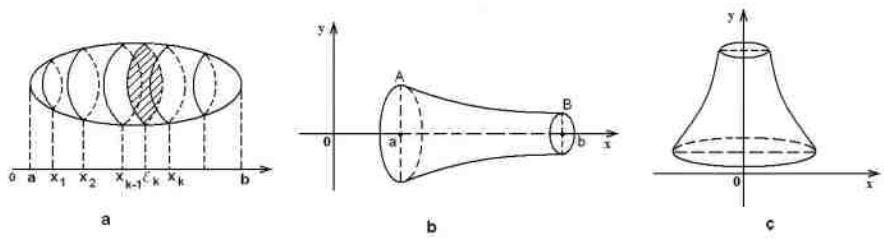
jem $[a,b]$ kesimde üznüksiz $S(x)$ funksiýanyň integral jemidir. Ol jem bölek silindrlerden düzülen we berlen jisimi takmyn çalşyrýan basgançak jisimiň göwrümini aňladýar.

Eger $d = \max \Delta x_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ üçin $d \to 0$ bolanda (31) jemiň V predeli bar bolsa, onda şol predele G jisimiň göwrümi diýilýär.

$S(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimde üznüksizligi esasynda (31) integral jemiň predeli bardyr, ýagny jisimiň göwrümi

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx$$

formula boýunça tapylýar.



9-njy surat

Eger jisim ýokarsyndan üznüksiz $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ funksiýanyň grafiginiň dugasy bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň Ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan alnan bolsa (9-njy b surat), onda onuň Ox okuna perpendikulýar kese-kesigi tegelekdir we x nokat üçin onuň radiusy $f(x)$ deňdir. Şonuň üçin ol kese-kesigiň meýdany $S(x) = \pi f^2(x)$ we (31) formula esasynda aýlanma jisimiň göwrümi üçin

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{32}$$

formula alynýar. Şuňa meňzeşlikde, $x = 0$, $y = c$, $y = d$, $x = g(y)$ çyzyklar bilen çäklenen $cCDd$ egriçyzykly trapesiýanyň (9-njy ç surat) Oy okunyň daşyndan aýlananda alnan jisimiň göwrümi üçin

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)du$$

formula dogrudyr.

11-nji mysal. $xy = 6,\ x = 1,\ x = 6$ **ç**yzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň Ox okuň daşyndan aýlanmagyndan alynýan jisimiň göwrümini tapmaly.

⊲ Trapesiýany ýokarsyndan çäklendirýän $xy = 6$ giperbolanyň deňlemesinden $y = 6/x$ tapyp we (32) formulany ulanyp alarys:

$$V = \pi \int_1^6 \frac{36}{x^2} dx = -36\pi \frac{1}{x}\bigg|_1^6 = -36\pi\left(\frac{1}{6} - 1\right) = 30\pi\ . \ ⊳$$

5. Üýtgeýän güýjüň işi. Goý, M material nokat $F = F(x)$ üýtgeýän güýjüň täsiri esasynda Ox ok boýunça güýjüň ugruna ugurdaş hereket edýän bolsun. M nokadyň a-dan b geçmegi üçin $F = F(x)$ güýjüň eden işini tapmaly, bu ýerde $F(x)$ funksiýa $[a,\ b]$ kesimde üznüksizdir.

$[a,\ b]$ kesimi uzynlyklary $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bolan $[x_{i-1},\ x_i]$ $\left(i = \overline{1,\ n}\right)$ n böleklere böleliň. Her bölekde erkin t_i nokat alyp, şol bölekdäki güýç hemişelik we $F(t_i)$ deň hasap edeliň. Onda $F(t_i)\Delta x_i$ köpeltmek hasyl güýjüň Δx_i kesimdäki işiniň takmyn bahasyny aňladýar. Şeýle köpeltmek hasyllary jemläp, $F = F(x)$ güýjüň $[a,\ b]$ kesimdäki işiniň

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta x_i \tag{33}$$

takmyn bahasyny alarys. Ol jem $[a,\ b]$ kesimde üznüksiz $F(x)$ funksiýanyň integral jemidir. Şoňa görä-de $d = \max \Delta x_i$ $\left(i = \overline{1,\ n}\right)$ üçin ol jemiň $d \to 0$ $(n \to \infty)$ bolanda predeli bardyr we ol üýtgeýän $F = F(x)$ güýjüň $[a,\ b]$ kesimdäki işini aňladýar. Şeýle hem ol predel $F(x)$ funksiýanyň $[a,\ b]$ kesimdäki integralyna deňdir, ýagny

$$A = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx\ .$$

6. Käbir fiziki we himiki meseleler. Fiziki we himiki meseleler çözülende ilki bilen haýsy ululygy baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk, haýsyny gözlenýän funksiýa hökmünde almalydygyny anyklamalydyr. Soňra x argument Δx artym alanda gözlenilýän y funksiýanyň alýan artymyny kesgitläp, $y(x+\Delta x)-y(x)$ tapawudy meseläniň şertlerindäki ululyklar bilen baglanyşdyrmaly. Ol tapawudy Δx - a bölüp we $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ önümi özünde saklaýan deňleme alarys. Oňa differensial deňleme diýilýär (şeýle deňlemeleri soňra II.12-nji bölümde giňişleýin öwreneris). Onuň ýönekeý görnüşlerine garap geçeliň:

1. $y' = f(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$. Ony $dy = f(x)dx$ görnüsde ýazyp, we ol deňligi integrirläp, gözlenilýän funksiýany taparys:

$$y = \int f(x)dx + C = F(x) + C,$$

bu ýerde $F(x)$ funksiýa $f(x)$- iň asyl funksiýasydyr. Bu deňlikdäki C hemişelik san meseläniň şertinden kesgitlenilýär.

2. $\dfrac{dy}{dx} = ay + b$. Ony $\dfrac{dy}{ay+b} = dx$ görnüsde ýazyp, we ol deňligi integrirläp, gözlenilýän funksiýany taparys:

$$\int \frac{dy}{ay+b} = x + C, \quad \int \frac{d(ay+b)}{ay+b} = a(x+C),$$

$$\ln(ay+b) = ax + \ln C_1, \quad ay = C_1 e^{ax} - b, \quad (aC = \ln C_1).$$

Himiki reaksiýalaryň we fiziki prosesleriň köpüsi üçin üýtgeýän ululygyň tizliginiň üýtgeýşi ol ululygyň birinji derejesine proporsionaldyr we olar $\dfrac{dx}{dt} = kx$ deňleme bilen aňladylýar. Şunlukda, olara birinji tertipli prosesler diýilýär. Ol deňleme ikinji görnüşdäki deňlemäniň hususy haly bolup, himiki proses üçin oňa girýän x ululyk jisimiň mukdaryny, k reaksiýanyň tizlik hemişeligini we t wagty aňladýar.

12-nji mysal. Her litrinde 0,2 kg duz bolan suwuklyk minutda 4 l tizlik bilen içinde 20 l suw bolan gaba üznüksiz guýulýar. Gaba guýulan suwuklyk suw bilen garyşýar we daryndy şol tizlik bilen gapdan çykýar. 10 minut geçenden soň gapda näçe duz bolar?

◁ Baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk hökmünde t wagty, tejribe başlanandan t minut geçenden soňky duzuň mukdary hökmünde $y(t)$ funksiýany alalyň. t wagtdan $t + \Delta t$ wagta çenli aralykda duzuň mukdarynyň üýtgeýşini kesgitläliň. Bir minurtda $4\ l$ suwuklyk, Δt minutda $4\Delta t\ l$ suwuklyk girýär we şol $4\Delta t\ l$ suwuklukda $0{,}2\cdot 4\Delta t =$ $= 0{,}8\,\Delta t\ kg$ duz bar. Seýle hem Δt wagtda gapdan $4\Delta t\ l$ suwuklyk çykýar.Eger t pursatda (20 l) gapda $y(t)\ kg$ duz bar bolsa,onda gapdan çykýan $4\Delta t\ l$ suwuklukda $0{,}2\,\Delta t\, y(t)\ kg$ duz bolar (Δt wagtda gapda duzuň mukdary üýtgemedik halynda). Ýöne şol wagtda onuň $\Delta t \to 0$ bolanda tükeniksiz kiçi bolan ululyk üýtgeýändigi üçin, gapdan çykýan $4\Delta t\ l$ suwuklukda $0{,}2\,\Delta t[y(t)+\alpha]\ kg$ duz bardyr, bu ýerde $\Delta t \to 0$ bolanda $\alpha = \alpha(\Delta t) \to 0$. Seýlelikde, Δt wagtda gaba girýän suwuklykda $0{,}8\,\Delta t\ kg$ duz, gapdan çykanda bolsa $0{,}2\,\Delta t[y(t)+\alpha]\ kg$ duz bardyr. Onda şol wagtda duzuň $y(t+\Delta t) - y(t)$ artymy olaryň tapawudyna deňdir:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = 0{,}8\,\Delta t - 0{,}2\,\Delta t[y(t)+\alpha].$$

Deňligiň iki bölegini hem Δt bölüp, alnan deňlikde $\Delta t \to 0$ bolanda predele geçip, $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \alpha = 0$ deňligiň esasynda

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}8 - 0{,}2y$$

deňligi alarys. Ol ikinji görnüşdäki denlemedir we onuň çözüwi

$$0{,}8 - 0{,}2y = C_1 e^{-0{,}2t}$$

görnüşde bolar. Ony 5-e köpeldip alarys:

$$y = 4 - Ce^{-0{,}2t},\ C = 5C_1.$$

Hemişelik C sany meseläniň $t = 0$ bolanda $y = 0$ şertini ulanyp taparys

$$0 = 4 - Ce^0 = 4 - C,\ \ C = 4.$$

Şeýlelikde, $y = 4 - 4e^{-0{,}2t}$. Şoňa görä 10 min geçende gapda

$$y = 4 - 4e^{-0{,}2\cdot 10} = 4 - 4e^{-2} \approx 4 - 4\cdot 0{,}1353 \approx 3{,}459\ kg$$

duz bardyr. ▹

13-nji mysal. Eger 0-dan 200° çenli temperaturada C_u demiriň ýylylyk sygymy

$$C_u = 0{,}1053 + 0{,}000142\,u$$

formula boýunça kesgitlenýän bolsa, onda 10° temperaturasy bolan 20 kg demiri 100° temperatura çenli gyzdyrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdaryny tapmaly.

◁ Bilşimiz ýaly, jisimiň ýylylyk sygymy diýip jisimiň birlik massasynyň temperaturasyny $1^\circ C$ ýokarlandyrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdaryna aýdylýar.Ýöne tejribäniň görkezişi ýaly, ýylylygyň ol mukdary jisimiň dürli temperaturasynda dürlüdir.Şoňa görä hem ýylylygyň sygymy diýip, $C_u = \dfrac{dQ}{du}$ deňlik boýunça kesgitlenýän ululyga düşünilýär, bu ýerde dQ differensial jisimi u-dan $u + du$ temperatura çenli gyzdyrmak üçin jisimiň birlik massasyna täsir edilýän ýylylyk mukdarydyr. (Massa birligi hökmünde gramm, ýylylyk birligi hökmünde kaloriýa alynýar).

Ýylylyk sygymyň kesgitlemesinden we meseläniň sertinden

$$\frac{dQ}{du} = 0{,}1053 + 0{,}000142\,u$$

deňlemäni ýa-da

$$dQ = (0{,}1053 + 0{,}000142\,u)du$$

deňlemäni alarys. Şonuň esasynda $1\ kg$ demiri $10^\circ C$ -dan $100^\circ C$ çenli gyzdyrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdary

$$Q = \int_{10}^{100} (0.1053 + 0.000142\,u)du = \left(0{,}1053u + 0{,}000071u^2\right)\Big|_{10}^{100} = 10{,}1799\ \text{kkal}$$

Şonuň üçin 20 kg demiri gyzdyrmak üçin zerur bolan ýylylygyň mukdary 203,5982 kkal. ▷

§6.7. Kesgitli integrallary hasaplamagyň takmyn usullary

Mälim bolşy ýaly, kesgitli integrallary hasaplamaklyk, esasan Nýuton-Leýbnis formulasyna esaslanyp, ol integral astyndaky funksiýanyň asyl funksiýasyny bilmekligi talap edýär. Ýöne her bir funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmak aňsat mesele däldir, çünki elementar funksiýanyň asyl funksiýasynyň elementar funksiýa bolmaýany hem bardyr. Käbir hallarda bolsa asyl funksiýalary tapmaklyk köp hasaplamalary talap edýär. Şeýle ýagraýlarda kesgitli integrallary hasaplamak üçin takmyn usullary ulanmak amatly bolýar.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

kesgitli integralyň egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna deňdigi üçin, bu integraly hasaplamagyň aşakda getiriljek takmyn usullary ol meýdany tapmaklygy gönüburçlugyň, göniçyzykly trapesiýanyň we parabolik trapesiýanyň meýdanyny tapmak bilen çalşyrmaklygy aňladýar.

1. Gönüburçluklar usuly. Kesgitli integraly hasaplamagyň iň ýönekeý usuly onyň kesgitlemesi bilen bagly bolan takmyn usuldyr. Eger $[a,b]$ kesimi $x_i = a + ih,\ h = (b-a)/n\ \left(i = \overline{1, n-1}\right)$ nokatlar arkaly deň n böleklere bölüp, bölek $[x_{i-1}, x_i]$ kesimde alynýan erkin nokady x_{i-1} deň alsak, onda $[a,b]$ kesimde üznüksiz f funksiýa üçin düzülen integral jeme integralyň takmyn bahasy hökmünde garamak bolar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_o + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right),\ y_k = f(x_k)\ \left(k = \overline{0, n-1}\right).$$

Bu formulany ulanyp, kesgitli integraly hasaplamaklyga gönüburçluklar usuly diýilýär. Şunlukda, kesgitli integral bu usul bilen hasaplanylanda göýberilýän ýalňyşlyk ($f'(x)$ önüm $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolanda)

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^2}{2n} M, \quad M = \max_{a \le x \le b} |f'(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar.

2. Trapesiýalar usuly. Eger egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin ýene-de $[a,b]$ kesimi deň n böleklere bölüp, her bölekdäki egri çyzykly trapesiýany gönüçyzykly trapesiýa bilen çalşyrsak, onda olaryň meýdanlarynyň jemine egriçyzykly trapesiýanyň takmyn meýdany hökmünde garamak bolar, ýagny

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right],\ y_k = y(x_k).$$

Bu formulany ulanyp, kesgitli integraly hasaplamaklyga trapesiýalar usuly diýilýär Şunlukda, kesgitli integral trapesiýalar usuly bilen hasaplanylanda (ikinji tertipli üznüksiz önümi bolan f funksiýa üçin) göýberlen ýalňyşlyk

$$|R_n| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M, \quad M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar. Bu formula kesgitli integral trapesiýalar usuly bilen hasaplanylanda göýberlen ýalňyşlygyň gönüburçluklar usuly bilen hasaplanylandakydan azdygyny görkezýär.

3. Parabolalar usuly. Berlen $[a,b]$ kesimi hersiniň uzynlygy $h=(b-a)/2n$ bolan jübut $m=2n$ deň böleklere bölüp, bölünme nokatlar arkaly *Oy* okuna parallel göni çyzyklary geçireliň. Onda trapesiýany ýokarsyndan çäklendirýän *AB* duga $M_o, M_1, M_2, \dots, M_{2n-2}, M_{2n-1}, M_{2n}$ nokatlar boýunça böleklere bölüner. Ýokarsyndan $M_o M_1 M_2$ duga bilen çäklenen egriçýzykly trapesiýany ýokarsyndan M_o, M_1, M_2 nokatlar arkaly geçýän parabola bilen çäklenen parabolik trapesiýa bilen çalşyralyň. Şeýle parabolanyň deňlemesi $y=ax^2+bx+c$ görnüşde bolup, onuň koeffisiýentleri parabolanyň M_o, M_1, M_2 nokatlar arkaly geçýänlik şertinden peýdalanyp tapylýar. Beýleki M_2, M_3, M_4; M_4, M_5, M_6 we ş.m. nokatlar üçin hem şeýle çalşyrmalary geçirýäris.

$K_1(-h, y_1)$, $K_2(0, y_2)$, $K_3(h, y_3)$ nokatlardan geçýän $y=ax^2+bx+c$ parabola bilen çäklenen parabolik trapesiýanyň meýdanyny tapalyň.

Parabolanyň K_1, K_2, K_3 nokatlar arkaly geçýändigi üçin, parabolanyň deňlemesinden onuň koeffisiýentlerini tapmak üçin

$$y_1 = ah^2 - bh + c,\ y_2 = c,\ y_3 = ah^2 + bh + c$$

deňlikleri alarys. Olardan bolsa $2ah^2 + 2c = y_1 + y_3$; $c = y_2$ deňlikler alynýar. Bu deňlikler esasynda parabolik trapesiýanyň meýdany üçin

$$S = \int_{-h}^{h}\left(ax^2+bx+c\right)dx = \int_{-h}^{h}\left(ax^2+c\right)dx + b\int_{-h}^{h} x\,dx =$$

$$= \frac{h}{3}\left(2ah^2+6c\right) = \frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+y_3\right)$$

formulany alarys. Bu formulany

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

deňligiň sagyndaky integrallara ulanyp,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_o+4y_1+y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2+4y_3+y_4\right) + \dots +$$

$$+ \frac{h}{3}\left(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}\right)$$

deňligi alarys. Ony başgaça şeýle görnüşde ýazmak bolar

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_o + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right].$$

Oňa parabolalar ýa-da Simpson formulasy diýilýär. Bu formulany ulanyp kesgitli intrgraly hasaplamaklyga parabolalar usuly diýilýär. Şunlukda, f funksiýanyň dördünji tertipli üznüksiz önümi bar halynda göýberilýän ýalňyşlyk

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M, \quad M = \max_{a\le x\le b}\left|f^{iv}(x)\right|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar. .

12-nji mysal. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ integraly Simpson usuly bilen $0,\ 001$ çenli takyklykda hasaplamaly.

⊲ Zerur bolan takyklykda integraly hasaplamak üçin ilki bilen $f^{IV}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$ önümi tapalyň. $[0,1]$ kesimde $e^{-x^2} \le 1$ we $|4x^4 - 12x^2 + 3| \le 5$ bolýandygy sebäpli $|f^{IV}(x)| \le 20$. Şonuň üçin

$$|R_n| \le \frac{20}{2880n^4} < \frac{1}{1000}$$

deňsizlik $n^4 > 1000/144$ bolanda ýerine ýetýär. Onuň üçin bolsa $n = 2$, ýagny $2n = 4$ almak ýeterlikdir. Indi $[0,1]$ kesimi $x_o = 0,\ x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4,\ x_4 = 1$ nokatlar arkaly deň dört böleklere böleliň we şol nokatlarda funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň: $y_o = 1,\ 0000$; $y_1 = 0,\ 9394$; $y_2 = 0,\ 7788$; y_3=0,5698; y_4=0,3679. Onda. Simpson formulasy esasynda

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{12}\left[1{,}0000 + 0{,}3679 + 2\cdot 0{,}7788 + 4(0{,}9394 + 0{,}5698)\right] \approx 0{,}7469.$$

Şeýlelikde, $0,\ 001$ takyklykda

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}747. \ \triangleright$$

§ 6. 8. Hususy däl integrallar

Kesgitli integral düşünjesi girizilende aşakdaky şertleriň ýerine ýetmegi talap edilýärdi: 1) integralyň a we b çäkleriniň tükenikli san bolmagy; 2) integral astyndaky funksiýanyň $[a,\ b]$ kesimde çäkli bolmagy.Bu halda kesgitli integrallara hususy inegrallar hem diýilýär. Eger görkezilen iki şertleriň iň bolmanda biri ýerine ýetmese, onda kesgitli integrala hususy däl inegral diýilýär. Şeýle integrallaryň görnüşlerine aýratynlykda garap geçeliň.

1. Çäkleri tükeniksiz bolan hususy däl integrallar. Goý, f funksiýa $\forall x \geq a$ ücin üznüksiz bolsun.Ýokarky b çägi üýtgeýänli

$$h(b) = \int_a^b f(x)dx \tag{33}$$

integrala garalyň. Ol integralyň birnäçe häsiýetleri, hususanda ýokarky çägine görä differensirlenýän funksiýadygy §6.4 –de görkezilipdi.

Eger (33) funksiýanyň $b \to +\infty$ bolanda tükenikli predeli bar bolsa, onda ol predele f funksiýanyň $[a,\ +\infty)$ aralykdaky ýygnanýan hususy däl integraly diýilýär we ol

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{34}$$

görnüşde belgilenýär.Eger (34) predel ýok ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda oňa dargaýan hususy däl integral diýilýär.

11-nji mysal. Hususy däl $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ integralyň α parametriň haýsy bahalarynda ýygnanýandygyny barlamaly.

⊲ Nýuton-Leýbnisiň formulasy ulanylyp alynýan

$$\int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \ln b, \quad \alpha = 1 & \text{bolanda,} \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \text{ bolanda} \end{cases}$$

deňlik esasynda, $\alpha > 1$ bolanda

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1},$$

$\alpha \leq 1$ bolanda bolsa

$$\lim_{B\to+\infty}\int_1^B \frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty .$$

Diýmek, integral $a > 1$ bolanda ýygnanýar, $\alpha \le 1$ bolanda bolsa dargaýar. ▹

Eger F funksiýa f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda Nýuton-Leýbnis formulasy esasynda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a)$$

deňlik dogrudyr, bu ýerde $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

Aşaky çägi tükeniksiz bolan hususy däl integral hem edil şonuň ýaly kesgitlenýär:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx . \tag{35}$$

Çäkleriniň ikisi hem tükeniksiz bolan hususy däl integral bolsa çäkleriniň biri tükeniksiž bolan iki integralyň jemi görnüşinde, ýagny

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx .$$

görnüşde ýazylyp derňelýär, bu ýerde c san $(-\infty, +\infty)$ aralyga degişli erkin sandyr.

Bir çägi tükeniksiz bolan hususy däl integrallaryň ikisiniň hem derňelişi meňzeş bolany üçin, derňemekde ulanylýan teoremalary olaryň bir görnüşi, ýagny ýokarky çägi tükeniksiz bolan integral üçin getireris.

7-nji teorema. Eger $\forall x \ge a$ üçin $0 \le g(x) \le f(x)$ deňsizlik ýerine ýetse we $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral ýygnanýan bolsa, onda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integral hem ýygnanýandyr; eger-de $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integral dargaýan bolsa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral hem dargaýandyr.

Bu teorema deňeşdirme nyşany diýilýär. Ol nyşan ulanylanda, köplenç, integrallaryň biri hökmünde ýygnanýandygy ýa-da dargaýandygy belli bilan integral alynýar. Mysal üçin, eger $[1, +\infty)$ aralykda $g(x) \le 1/x^{\alpha}$,

$\alpha > 1$ bolsa, onda deňeşdirme nyşany we 11-nj mysal esasynda $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ integral ýygnanýandyr, $g(x) \geq 1/x^{\alpha}$, $\alpha \leq 1$ bolanda bolsa, ol integral dargaýandyr.

8-nji teorema. Eger $[a, +\infty)$ aralykda alamaty üýtgeýän f funksiýa üçin $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ integral ýygnanýan bolsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral hem ýygnanýandyr.

Bu halda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integrala absolýut ýygnanýan integral diýilýär.

2. Çäksiz funksiýanyň hususy däl integrallary. Eger f funksiýa b nokadyň käbir etrabynda çäksiz bolup, $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ kesimde uznüksiz bolsa we $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ predel bar bolsa, onda ol predele f funksianyň $[a, b)$ aralykdaky ýygnanýan hususy dal integraly diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{36}$$

Eger (36) predel ýok ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda oňa dargaýan hususy däl integral diýilýär.

Eger f funksiýa a nokadyň käbir etrabynda çäksiz we $[a+\varepsilon, b]$ $(\varepsilon > 0)$ kesimde üznüksiz bolsa, onda f funksiýanyň $(a, \text{b}]$ aralykdaky hususy däl integraly edil şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{37}$$

Eger-de f funksiýa $[a, b]$ kesimiň käbir içki c nokadynyň etrabynda çäksiz bolsa, onda onuň $[a, b]$ kesimdäki hususy däl integraly

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{38}$$

görnüşde kesgitlenýär. Şunlukda, ol integral (38) deňligiň sag bölegindäki integrallaryň ikisi hem ýygnananda ýygnanýandyr. Edil şonuň ýaly f funksiýanyň $[a, b]$ kesimiň uçlarynyň ikisiniň etrabynda-da çäklenmedik halynda hem hususy däl integral (38) deňlik boýunça keskitlenýär, ýone ol deňlikde $c \in [a, b]$ erkin nokatdyr.

12-nji mysal. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ integralyň $\alpha > 0$ parametriň haýsy bahalarynda ýygnanýandygyny barlamaly.

◁ Bu integral (37) görnüşdäki integraldyr. Şonuň ücin hem Nýuton-Leýbnis formulasyny ulanyp, (37) deňlik esasynda $\alpha \neq 1$ bolanda

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-1)}{(x-1)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

deňligi we $\alpha = 1$ bolanda

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-1)}{(x-1)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(x-1)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \to 0}(-\ln \varepsilon) = \infty$$

deňligi alarys. Şeýlelikde, integral $0 < \alpha < 1$ bolanda ýygnanýar, $\alpha \geq 1$ bolanda dargaýar. ▷

Çäksiz funksiýanyň hususy däl integrallary üçin hem 7-nji we 8-nji teoremalalar ýaly teoremalar dogrudyr. Bu halda hem deňeşdirilýän integral hökmünde ýygnanýandygy ýa-da dargaýandygy belli bolan integral alynýar.

13-nji mysal. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1} + 5(x-1)^2}$ integralyň ýygnanýandygyny barlamaly.

◁ Integral astyndaky funksiýa üçin

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1} + 5(x-1)^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} = \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigi we 12- nji mysal esasynda

$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$ integralyň ýygnanýandygy üçin, deňeşdirme nyşany boýunça integral ýygnanýandyr. $\triangleright$

§ 6. 9. Eýler integrallary barada düşünje

1.Eýler gamma-funksiýasy. Hususy däl

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{39}$$

görnüşdäki ntegrala Eýler integralynyň ikinji görnüşi ýa-da Eýler gamma-funksiýasy diýilýär.

Bu integral hususy däl integrallara mahsus bolan aýratynlyklaryň ikisini hem özünde saklaýandyr. Birinjiden-ä integrirlemeklik tükeniksiz bolan $[0, +\infty)$ aralykda geçirilýär, ikinjiden bolsa $x < 1$ bolanda integral astyndaky funksiýa $t = 0$ nokatda çäksizdir. Mälim bolşy ýaly, beýle integraly derňemek üçin ony $\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$ integrallaryň jemi görnüşinde ýazýarlar, bu ýerde

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad \Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\ .$$

Bu integrallaryň birinjisi $\forall\ x > 0$ üçin deňeşdirme nyşany boýunça ýygnanýandyr, çünki $\forall\ t \in [0, 1]$ üçin

$$t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1} \quad \text{we} \quad \int_0^1 t^{x-1} dt$$

integral ýygnanýandyr. Integrallaryň ikinjisi hem şol nyşan boýunça ýygnanýar, çünki $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ deňlik esasynda ýeterlik uly t üçin $\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} < 1$, ýagny $t^{x-1}e^{-t} < t^{-2}$ we $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ integral ýygnanýar.

Şeýlelikde, $\Gamma_1(x)$ we $\Gamma_2(x)$ integrallaryň ikisi birden $\forall\ x > 0$ üçin ýygnanýar we şonuň esasynda $\Gamma\ (x)$ integral hem $\forall\ x > 0$ üçin ýygnanýar. Şeýlelikde, x-iň her bir položitel bahasy üçin Eýler gamma-funksiýasy kesgitlenendir.

Bölekleýin integrirleme formulasyny ulanyp,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt=-\int_0^{+\infty} t^x d\left(e^{-t}\right)=-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

deňligi alarys, çünki $-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{t^x}{e^t}\right)=0$.Şeýlelikde,$\forall$ $x>0$ üçin

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{40}$$

formula dogrudyr. (39) formuladan $x=1$ bolanda alynýan

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$$

deňlik esasynda (40) formuladan $x=1, 2, \ldots, n$ bolanda alarys:

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1!,\ \Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\,!,\ \Gamma(4)=3\cdot\Gamma(2)=3\cdot 2!=3!,$$

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n! \tag{41}$$

2. Eýler beta-funksiýasy. Hususy däl

$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{42}$$

integrala Eýler integralynyň birinji görnüşi ýa-da Eýler beta-funksiýasy diýilýär.

Bu integrala hususy däl integral diýilmegi $f(t, x, y)=t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ funksiýanyň $0<x<1$ bolanda $t=0$ nokatda we $0<y<1$ bolanda $t=1$ nokatda çäksizligi esasyndadyr. Şonuň üçin integraly

$$B_1(x, y)=\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad B_2(x, y)=\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

integrallaryň $B(x, y)=B_1(x, y)+B_2(x, y)$ jemi görnüşinde aňladarys.

$t\in[0, 1/2]$ bolanda $(1-t)^{y-1}$ funksiýanyň üznüksizligi sebäpli ol çäklidir, ýagny $(1-t)^{y-1}\le M_1$ we şonuň üçin $f(t, x, y)\le M_1 t^{x-1}$. $t\in[1/2, 1]$ bolanda t^{x-1} funksiýanyň üznüksizligi sebäpli ol funksiýa çäklidir, ýagny $t^{x-1}\le M_2$ we $f(t, x, y)\le M_2(1-t)^{y-1}$. Şonuň esasynda,

$B_1(x, y)$ integraly $x > 0$ bolanda ýygnanýan $\int\limits_0^{1/2} t^{x-1} dt$ integral bilen, $B_2(x, y)$ integraly bolsa $y > 0$ bolanda ýygnanýan $\int\limits_{1/2}^{1} (1-t)^{y-1} dt$ integral bilen deňeşdirip, $B(x, y)$ integralyň $x > 0,\ y > 0$ bolanda ýygnanýandygyny alarys. Şeýlelikde, Eýler beta-funksiýasy $x > 0,\ y > 0$ bolanda kesgitlenendir.

(43) integralda $u = 1 - t$ çalşyrma girizip,

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = -\int\limits_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du =$$

$$= \int\limits_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1} du = B(y, x) \qquad (44)$$

deňligi alarys, ýagny beta-funksiýa üýtgeýänlerine görä simmetrikdir.

Eýleriň gamma-funksiýasy bilen beta-funksiýasyny baglanyşdyrýan şeýle formula bardyr:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ . \qquad (45)$$

Bu formuladan $x = y = 1/2$ bolanda $\Gamma(1) = 1$ deňlik esasynda

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{d(t-1/2)}{\sqrt{1/4-(t-1/2)^2}} = \arcsin(2t-1)\Big|_0^1 = \pi$$

deňligi alarys. Şoňa görä $x > 0$ bolanda $\Gamma(\mathrm{x}) > 0$ bolýandygy üçin

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1{,}772\,. \qquad (46)$$

deňligi alarys. Ony ulanyp, hususy däl $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ integraly hasaplamak bolar. Onuň üçin ol integralda $x = \sqrt{t}$ çalşyrma girizip, alarys:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ýagny $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

G ö n ü k m e l e r

1. Nýuton-Leýbnis formulasyndan peýdalanyp, kesgitli integrallary hasaplamaly:

1) $\int_0^1 x^4 dx$. 2) $\int_{-1}^1 (x^2+1)dx$. 3) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$. 4) $\int_1^2 \frac{dx}{x}dx$.

5) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$. 6) $\int_0^{\pi/2} \sin 4xdx$. 7) $\int_0^{\pi/2} \cos xdx$. 8) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Üýtgeýäni çalşyrmak usulyndan peýdalanyp,integrallary hasaplamaly

1) $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$. 2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$ 3) $\int_0^7 \sqrt{49-x^2}dx$. 4) $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

5) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. 6) $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}\,dx$. 7) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}dx$.

9) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}$. 10) $\int_0^{1/2} \frac{5xdx}{(1-x^2)^3}$. 11) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$. 12) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

3. Bölekleýin integrirlemek usulyndan peýdalanyp, kesgitli integrallary hasaplamaly:

1) $\int_1^e \ln^2 xdx$. 2) $\int_1^e x^2 \ln xdx$. 3) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$. 4) $\int_0^2 (3-2x)e^{-3x}dx$.

4. Berlen egri çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny hasaplamaly:

1) $y=x^2+1,\ y=0,\ x=1,\ x=4$. 2) $y=\ln x,\ y=0,\ x=1,\ x=e$.

3) $y^2-x+1=0,\ x-5=0$. 4) $x^2-4x+y=0,\ y=0$.

5) $y-x^2=0,\ y-x=0$. 6) $x=y-y^2+6=0,\ x=0$.

5. Polýar koordinatalarynda berlen egri çyzyklar blen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny hasaplamaly:

1) $r = a(1-\cos\varphi)$ (kardioida). 2) $r = a\cos 2\varphi$.

6. Egri çyzyklaryň dugalarynyň uzynlygyny hasaplamaly:

1) $y = \frac{x^2}{2} - 1$ egri çyzygyň ox oky bien kesilen bölegi .

2) $y^2 = x^3$ egri çyzygyň $x = \frac{4}{3}$ göni çyzyk bien kesilen bölegi .

3) $y = \ln\sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

7. Egri çyzygyň dugasynyň ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny hasaplamaly:

1) $y = ach\frac{x}{x}$ $(-a \le x \le a)$. 2) $y = \frac{x^3}{3}$ $(-2 \le x \le 2)$.

8. Egri çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimleriň göwrümini hasaplamaly:

1) $2y^2 = x^3$, $x = 4$. 2) $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

9. Her litrinde 0,3 kg duz bolan suwuklyk minutda 2 l tizlik bilen içinde 10 l suw bolan gaba üznüksiz guýulýar. Gaba guýulan suwuklyk suw bilen garyşýar we garyndy şol tizlik bilen gapdan çykýar. 5 minut geçenden soň gapda näçe duz bolar?

10. Göwrümi 200 m^3 bolan otagyň howasynda 0,15 % kömürturşy gaz (CO_2) saklanýar. Wentilýator otaga düzüminde 0,04% CO_2 bolan howany minutda 20 m^3 tizlik bilen salýar. Näçe minutdan soň otagyň howasyndaky kömürtürşy gazyň mukdary üç esse azalar?

11. Trapesiýalar usuly bilen $n = 10$ alyp, integrallary hasaplamaly:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$. 2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^3}$. 3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^3}$. 4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+4x^3}$.

12. Parabolalar usuly bilen $2n = 10$ alyp, integrallary hasaplamaly:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 2) $\int_0^1 \frac{dx}{2^2+x^2}$. 3) $\int_0^1 \frac{dx}{3^2+x^2}$. 4) $\int_0^1 \frac{dx}{4^2+x^2}$.

13. 0,001 çenli takyklykda integrallary hasaplamaly:

1) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx.$. 2) $\int_1^2 e^x dx$. 3) $\int_0^{\pi/2} \cos\frac{x}{2}dx.$. 4) $\int_0^3 \frac{dx}{2+x}$.

14. Hususy däl integrallaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny barlamaly:

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^6}$. 2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$. 3) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$. 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

5) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$. 6) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 7) $\int_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 8) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

J o g a p l a r

1. 1) 1/5 . 2) 8/3 . 3) 14/3 . 4) ln2 . 5) $(e^2-1)/2$. 6) 0. 7) 1. 8) 1. **2.** 1) $(3\sqrt{2})/2$. 2) $(4-\pi)/2$. 3) $49\pi/4$. 4) 4/3 . 5) 1/4. 6) 194/3 7) $\pi/2$. 8) 2/3 . 9) 0,24 . 10) 35/36 . 11) 3 . 12) 1 . **3.** 1) e^{-2} . 2) $(2e^3+1)/9$. 3) 8 . 4) $(5e^{-6}+7)/9$. **4.** 1) 24. 2) 1. 3) 32/2 . 4) 32/2 . 5) 1/6 . 6) 125/6 . **5.** 1) $(3\pi a^2)/2$. 2) $(\pi a^2)/2$. **6.** 1) $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 2) 112/27 . 3) $(\ln 3)/2$. **7.** 1) $\pi a^2(sh2+2)$. 2) $(34\sqrt{17}-2)\pi/9$. **8.** 1) π. 2) $\pi(e^2-e^{-2})/8+\pi/2$. **9.** $\approx 1{,}9\,kg$. **10.** 24 min . **11.** 1) 0,83502. 2) 0,74766 . 3) 0,68976 . 4) 0,64719 . **12.** 1) 0,785398. 2) 0,231824 . 3) 0,107250 . 4) 0,061245 . **13.** 1) 1,000001 . 2) 4,67078 . 3) 1,414214 . 4) 0,916402 . **14.** 1) 1/5 . 2) 1/3 . 3) , 4) ýygnanýar. 5), 8) dargaýar. 6), 7) ýygnanýar .

E D E B I Ý A T

1. Saparmyrat Türkmenbaşy. Ruhnama. Aşgabat, TDNG, 2001.
2. Saparmyrat Türkmenbaşy. Ruhnama. II kitap. Aşgabat, TDNG, 2004.
3. Aşyrow O., Töräýew A. Matematiki analiz. t. 1, Aşgabat, Magaryf , 1990.
4. Aşyrow O. Matematiki seljermäniň esaslary. I .Aşgabat, TDNG, 2006.
5. Баврин И.И. Высшая математика. Москва, Просвещение, 1980.
6. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1, Минск. Изд-во БГУ, 1983.
7. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. ч. 1, Минск. «Вышейш. Школа», 1972.
8. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. Москва, Наука, 1971.
9. Кудрявцев В.А..Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Наука, 1986.
10. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва, Высш. школа, 1990.

M A Z M U N Y