Kakajan Körpäýew, Alladurdy Ataýew,
Allaberdi Aşyrow, Orazmämmet Annaorazow

ÝOKARY MATEMATIKA BOÝUNÇA MESELELER WE GÖNÜKMELER

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
"Ylym" neşirýaty
2012

UOK 510:378

K 76

Körpäýew K. we başg.

K76 Ýokary matematika boýunça meseleler we gönükmeler. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy. – A.: Ylym, 2012. – 576 sah.

TDKP № 222 KBK 22.11 ýa 73

I BÖLÜM
TEKIZLIKDE ANALITIK GEOMETRIÝA

§ 1. Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy

Tekizlikde alnan erkin nokadyň ornuny kesgitlemäge mümkinçilik berýän sistema koordinatalar sistemasy diýilýär. Şol sistemalaryň iň ýönekeýi gönüburçly dekart koordinatalar sistemasydyr.

Goý, tekizlikde iki sany özara perpendikulýar ugrukdyrylan göni çyzyklar berlen bolsun. Bu göni çyzyklaryň birini kese (gorizontal), beýlekisini dik (wertikal) ýerleşdireliň. Olaryň kesişme O nokadyna koordinatalar başlangyjy diýilýär. Kese göni çyzyga absissalar oky (Ox oky), dik göni çyzyga bolsa ordinatalar oky (Oy oky) diýilýär. Absissalar okunyň položitel ugry adatça koordinatalaryň başlangyjyndan sag tarapa, otrisatel ugry bolsa çep tarapa ugrukdyrylandyr. Ordinatalar okunyň položitel ugry koordinatalaryň başlangyjyndan ýokaryk, otrisatel ugry bolsa aşak ugrukdyrylandyr.

Erkin M nokadyň tekizlikdäki ornuny onuň absissalar we ordinatalar oklaryna bolan proýeksiýalary arkaly kesgitlemek bolar. A nokadyň absissasy 2, ordinatasy 3 diýip ýazmagyň deregine $A(2,3)$ görnüşde belgilenýär, okalanda bolsa A nokadyň koordinatalary 2 we 3 diýip okalýar. Umuman erkin M nokadyň absissasy x, ordinatasy y bolsa, ol şeýle ýazylýar: $M(x, y)$.

Eger $A(x_1, y_1)$ we $B(x_2, y_2)$ tekizligiň erkin nokatlary bolsa, onda olaryň arasyndaky d uzaklyk aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1)$$

Eger $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ we $C(x_3, y_3)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, onda onuň meýdany aşakdaky formula bilen hasaplanylýar:

$$S = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right| = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

1. Eger $A(6,0)$, $B(5,2)$, $C(0,3)$, $D(-7,1)$ we $E(-4,-6)$ nokatlar bäşburçlugyň depeleri bolsa, ol bäşburçlugy gurmaly.

2. Eger $A(5,3)$, $B(2,-1)$, $C(-1,4)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, onuň taraplarynyň uzynlyklaryny tapmaly.

Çözülişi. Iki nokadyň arasyndaky uzaklygy tapmagyň (1) formulasyny ulanyp alarys:

$$|AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5;$$

$$|BC| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34};$$

$$|AC| = \sqrt{(5+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}.$$

3. Depeleri $A(-2,-4)$, $B(2,8)$ we $C(10,2)$ nokatlar bolan üçburçlugyň meýdanyny hasaplamaly.

Çözülişi. (2) formulany ulanyp alarys:

$$S = \frac{1}{2}\left|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)\right| = \frac{1}{2}\left|24-144\right| = 60 \text{ kw.bir.}$$

4. $M_1(7,4)$ we $M_2(3,-5)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

5. Aşakdaky nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly:

1) $A(2,3)$ we $B(-10,2)$;

2) $C\left(\sqrt{2},-7\right)$ we $D\left(2\sqrt{2},0\right)$;

3) $A_1(3,-4)$ we $B_1(6,-8)$;

4) $A_2(10,0)$ we $B_2(2,-6)$;

5) $A_3(-11,-4)$ we $B_3(1,-9)$;

6) $A_4(8,-4)$ we $B_4(-2,1)$.

6. Depeleri O (0, 0), A (1, 1), B (2, –2) nokatlar bolan üçburçlugyň gönüburçly üçburçlukdygyny subut etmeli.

7. Depeleri A (1, 5), B (2, 7) we C (4, 11) nokatlar bolan üçburçlugyň meýdanyny hasaplamaly.

8. A (–1, 2), B (5, 6), C (1, 3) nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, C depeden inderilen beýikligiň uzynlygyny hasaplamaly.

9. Depeleri A (–3, 3), B (1, 3), C (1, –1) nokatlar bolan üçburçlugyň gönüburçly üçburçlukdygyny görkezmeli.

Çözülişi. AB, AC we BC kesimleriň uzynlyklaryny tapalyň:

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (3-3)^2} = 4; \quad AC = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2};$$

$$BC = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-3)^2} = 4.$$

Onda $AB^2 + BC^2 = AC^2$ deňligiň ýerine ýetýänligi üçin Pifagoryň teoremasynyň esasynda üçburçluk gönüburçlydyr.

§ 2. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek

$M_1(x_1, y_1)$ we $M_2(x_2, y_2)$ nokatlary birleşdirýän kesimiň üstünde ýatýan we $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ deňligi kanagatlandyrýan M nokadyň koordinatalary aşakdaky formulalar bilen kesgitlenýär:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (1)$$

Eger $M(x, y)$ nokat M_1M_2 kesimi deň iki bölege bölýän bolsa, onda $\lambda = 1$ we (1) formula

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

görnüşi alar.

10a. Depeleri $A(5,3)$ we $B(2,-1)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň medianalary $M(2,2)$ nokatda kesişýän bolsalar onuň $C(x, y)$ üçünji depesiniň koordinatalaryny tapmaly (*1-nji a çyzgy*).

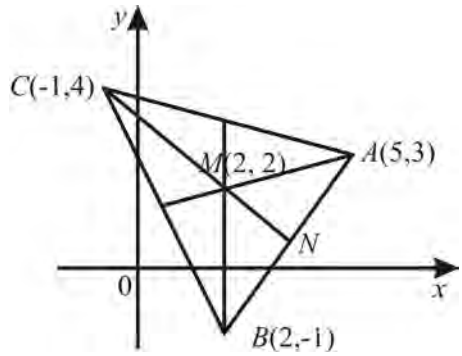
Çözülüşi. (2) formulany ulanyp, AB kesimi deň iki bölege bölýän N nokadyň x_0, y_0 koordinatalaryny tapalyň:

$$x_0 = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}, \qquad y_0 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Üçburçlugyň üçünji C depesi AB kesimi deň iki bölege bölýän N nokat bilen, medianalaryň kesişme M nokadyndan geçýän MN gönüde ýatýandyr. Medianany̆ häsiýetine görä MN kesimiň uzynlygy NC medianany̆ $\frac{1}{3}$ uzynlygyna deňdir. Şonuň üçin MN kesimiň daşynda ýatýan C nokat, kesimi $\lambda = \frac{NC}{CM} = -\frac{3}{2}$ gatnaşykda bölýär. Onda (1) we (2) formulalarda $x_1 = \frac{7}{2}$, $y_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 2$, $\lambda = -\frac{3}{2}$ goýup, C nokadyň x, y koordinatalaryny taparys.:

$$x = \frac{\frac{7}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)} = -1, \qquad y = \frac{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)} = 4.$$

Şunlukda, $C(-1, 4)$.



1-nji a çyzgy

10 b. $M_1(7,5)$ we $M_2(-2,3)$ nokatlary birleşdirýän kesimde M_1 nokada, M_2 nokatdan 3 esse golaý ýerleşen $M(x,y)$ nokady tapmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\dfrac{1}{3}$, onda $\lambda=\dfrac{1}{3}$. (1)

formulalary ulanyp alýarys:

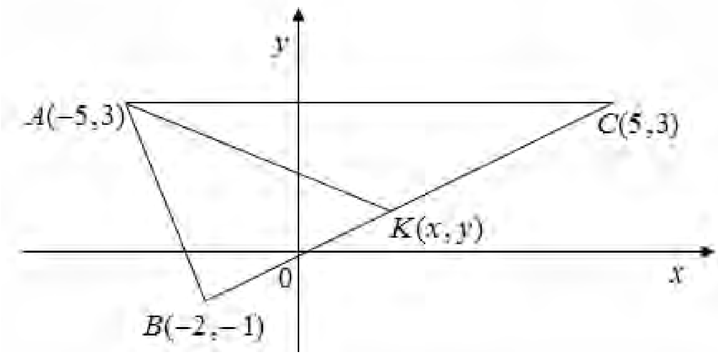
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{1}{3}(-2)}{1+\frac{1}{3}}=4{,}75;$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{5+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}=4{,}5.$$

Diýmek, $M(4{,}75\,,\,4{,}5)$ bolar.

11. Depeleri $A(-5,3)$, $B(-2,-1)$, $C(5,3)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň A depesiniň içki burçunyň bissektrisasynyň uzynlygyny tapmaly (*1-nji b çyzgy*).

Çözülişi. Goý, A burçuň bissektrisasy AK bolsun. Belli bolşy ýaly K nokat BC kesimi $\dfrac{|BK|}{|KC|}=\dfrac{|AB|}{|AC|}=\lambda$ bolan gatnaşykda bölýär.



1-nji b çyzgy

AB we AC kesimleriň uzynlyklaryny tapalyň:

$$|AB| = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-3)^2} = 5;$$

$$|AC| = \sqrt{(5+5)^2 + (3-3)^2} = 10.$$

(1) formuladan peýdalanyp, K nokadyň koordinatalaryny tapalyň:

$$x = \frac{-2+\frac{1}{2}.5}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{-1+\frac{1}{2}3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Indi AK kesimiň uzynlygyny tapalyň:

$$|AK| = \sqrt{\left(-5-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{16^2+8^2} = \frac{8}{3}\sqrt{5}.$$

12. $A(-2, 5)$ we $B(4, 11)$ nokatlary birleşdirýän kesimde A nokada B nokatdan 2 esse golaý bolan C nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

13. $C(2, 3)$ nokat AB kesimi deň iki bölege bölýär. Eger, $B(7, 5)$ bolsa, A nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

14. Eger $A(3, -2)$, $B(4, 11)$, $C(-1, 4)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, onda onuň medianalarynyň uzynlyklaryny tapmaly.

15. $A(5, 3)$ we $B(1, -4)$ nokatlary birleşdirýän kesimde ýatýan we $\frac{AC}{CB} = \lambda$ 1) $\lambda = 3$, 2) $\lambda = 1$ 3) $\lambda = \frac{1}{4}$ 4) $\lambda = \frac{2}{3}$ deňligi kanagatlandyrýan $C(x, y)$ nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

16. Depeleri $A(-3, 1)$, $B(0, -5)$, $C(-2, 4)$ nokatlar bolan ABC üçburçlugyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny kesgitlemeli.

§ 3. Tekizlikde göni çyzyk. Göni çyzygyň burç koeffisienti

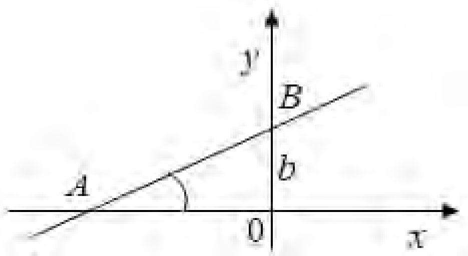
Göni çyzygyň umumy deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$Ax+By+C=0. \quad (A\neq 0 \text{ ýa-da } B\neq 0) \qquad (1)$$

Bu ýerde A,B,C erkin sanlar x,y bolsa üýtgeýän ululyklardyr. y ululyga görä çözülen

$$y=kx+b \qquad (2)$$

deňlemä, göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi diýilýär. Bu ýerde k göni zyzygyň burç koeffisiýentidir. Eger φ burç Ox okuň položitel ugry bilen göni çyzygyň aralygyndaky burç bolsa, $k=\mathrm{tg}\varphi$ bolar (*2-nji çyzgy*).

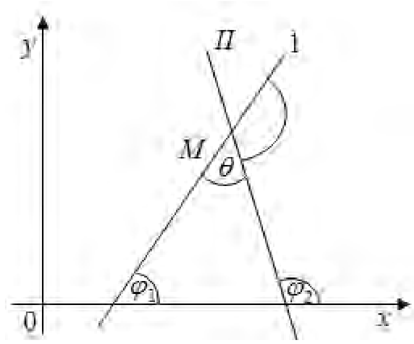


2-nji çyzgy

$b-$parametre başlangyç ordinata diýilýär. Ol OB kesimiň uzynlygyna deňdir. OB uzynlygyň B nokady Ox okdan ýokarda ýatsa b goşmak alamaty bilen, aşakda ýatsa aýyrmak alamaty bilen alynýar. Eger göni Ox oka parallel bolsa onuň deňlemesi $y=b$, Oy oka parallel bolsa onuň deňlemesi $x=a$ bolar.

$y=k_1x+b_1$ we $y=k_2x+b_2$ gönüleriň arasyndaky θ burçuň ululygy aşakdaky formula bilen kesgitlenýär (*3-nji çyzgy*).

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (3)$$



3-nji çyzgy

(3) formula getirlip çykarlanda k_1 we k_2 burç koeffisiýentli göni çyzyklar özara gabat gelýänçä M nokadyň daşynda aýlanýarlar diýilýän şert aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (3')$$

Iki göni çyzygyň aralygyndaky burça garalanda we olaryň (göni çyzyklaryň) tertibi görkezilmedik bolsa, onda ony erkin saýlap alyp bolar. Elbetde, tertibiň üýtgedilmegi burçuň tangensiniň alamatynyň üýtgemegine getirer.

Eger berlen göni çyzyklaryň iň bolmanda biri Oy oka parallel bolaýsa, onda (3) formulanyň manysy bolmaýar. Bu halda iki göni çyzygyň arasyndaky θ burç şeýle kesgitlener

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

$$k_1 = k_2. \qquad (4)$$

deňlik iki göniniň parallellik şerti,

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \text{ ýa-da } k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (5)$$

deňlik bolsa, perpendikulýarlyk şertidir.

Eger göni çyzyk $M_0(x_0, y_0)$ nokat arkaly geçýän bolsa we burç koeffisiýenti k deň bolsa, onda onuň deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (6)$$

17. Iki göni çyzygyň arasyndaky burçy tapmaly:

1) $\begin{cases} y = 3x \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 4x - 7 \\ y = -\frac{1}{4}x + 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = 5x + 8 \end{cases}$

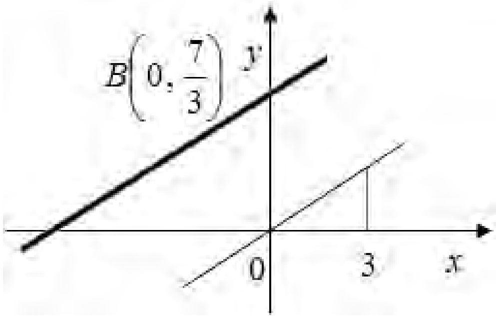
4) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 3 \\ y = -\sqrt{3}x + 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = 7x - 2 \\ y = x - \sqrt{2} \end{cases}$

18. $2x - 3y + 7 = 0$ göni çyzygy onuň burç koeffisiýenti we başlangyç ordinatasy boýunça gurmaly.

Çözülişi. Deňlemäni y görä çözeliň:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Şunlukda, $k=\frac{2}{3}$, $b=\frac{7}{3}$. Koordinatalar başlangyjyndan geçýän we absissalar oky bilen tangensi $\frac{2}{3}$ bolan φ burçy emele getirýän göni çyzygy gurmaly (*4-nji çyzgy*).



4-nji çyzgy

$B\left(0,\frac{7}{3}\right)$ nokat arkaly berlen gönä parallel bolan göni çyzygy geçireliň. Bu hem gözlenýän göni çyzykdyr.

19. Eger göni çyzyk $B(0,-1)$ nokatdan geçip Ox ok bilen $\varphi=60°$ burçy emele getirýän bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte görä göni çyzyk $B(0,-1)$ nokatdan geçýär we $\mathrm{tg}60°=\sqrt{3}$ burç koeffisiýente eýedir. (2) deňlemede $k=\sqrt{3}$ we $b=1$ goýup taparys: $y-\sqrt{3}x+1=0$ ýa-da $y=\sqrt{3}x-1$.

20. $x-3y+3=0$ we $6x-3y+2=0$ gönüleriň arasyndaky burçy tapmaly.

Çözülişi. Birinji deňlemede $A=1$, $B=-3$.

Onda $k_1=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$ bolar.

Şeýle hem ikinji göniniň k_2 burç koeffisiýentini taparys: $k_2=-\frac{6}{-3}=2$. $(3')$ formulany ulanyp alarys:

$$tg\varphi=\pm\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\pm\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\frac{1}{3}}=\pm\frac{1\frac{2}{3}}{1\frac{2}{3}}=\pm1.$$

Şunlukda, $\alpha=45^0$, $\beta=135^0$, $(\alpha+\beta=180^0)$.

21. Depeleri $A(2,1)$, $B(3,1)$, $C(1,2)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň içki burçlaryny tapmaly.

Çözülişi. AB, AC, BC gönileriň burç koeffisiýentlerini k_1, k_2, k_3 bilen belgiläp, olary (3) formula bilen hasaplalyň: $\left(k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$, $k_1=\dfrac{1-1}{3-2}=0$,

$k_2=\dfrac{2-1}{1-2}=-1$, $k_3=\dfrac{2-1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$.

Onda

$k_1=0$, $k_2=-1$ bolanda

$$\text{tg}A=\pm\frac{k_1k_2}{1+k_1k_2}=\pm\frac{0+1}{1+0(-1)}=\pm1,$$

$$\angle A=45°,\qquad \angle A=135°.$$

$k_1=0$, $k_3=-\dfrac{1}{2}$ bolanda

$$\text{tg}B=\pm\frac{k_1-k_3}{1+k_1k_3}=\pm\frac{0+\frac{1}{2}}{1+0\left(-\frac{1}{2}\right)}=\pm\frac{1}{2},$$

$$\angle B=\text{arctg}\frac{1}{2},\qquad \angle B=\text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$k_2=-1$, $k_3=-\dfrac{1}{2}$ bolanda

$$\text{tg}C=\pm\frac{k_2-k_3}{1+k_2k_3}=\pm\frac{-1+\frac{1}{2}}{1+(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)}=\pm\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\pm\frac{1}{3},$$

$$\angle C=\text{arctg}\frac{1}{3},\quad \angle C=\text{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Tapylan burçlaryň haýsylarynyň üçburçlugyň içki burçlarydygyny anyklamak üçin onuň taraplarynyň uzynlyklaryny hasaplalyň:

$AB=1$, $AC=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{5}$.

$BC^2>AB^2+AC^2$ $(5>1+2)$ diýmek ABC üçburçluk kütekburçlydyr; Çünki, BC tarapyň garşysyndaky A burç kütek burçdyr. Diýmek, $\angle A=135^0$, $\angle B$ we $\angle C$ ýiti burçlardyr.

$$B = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}, \qquad C = \mathrm{arctg}\frac{1}{3}.$$

22. $A(3,4)$ nokat arkaly geçýän hem-de $3x-2y-3=0$ göni çyzyga perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $3x-2y-3=0$ deňlemäni y görä çözeliň: $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$, $k_1=\frac{3}{2}$.

(6) formulany ulanyp $A(3,4)$ nokat arkaly geçýän, k_2 burç koeffisiýentli göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň:

$$y-4=k_2(x-3).$$

Şerte görä $k_1k_2=-1$, $\frac{3}{2}k_2=-1$, $k_2=-\frac{2}{3}$.

$$y-4=-\frac{2}{3}(x-3) \quad \text{ýa-da} \quad 3y+2x-18=0.$$

23. $y=3x+7$ göni çyzyga parallel we $A(3,-1)$ nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $y=3x+7$ deňlemede $k_1=3$, $b=7$. $A(3,-1)$ nokat arkaly geçýän we k_2 burç koeffisiýenti bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň:

$$y+1=k_2(x-3).$$

Şerte görä $k_1=k_2=3$. Şunlukda,

$$y+1=3(x-3) \quad \text{ýa-da} \quad y-3x+10=0.$$

24. Koordinatalar başlangyjyndan geçýän we Ox okuň oňyn ugry bilen aşakdaky burçlary emele getirýän göni çyzyklaryň deňlemesini ýazmaly:

1) 45°, 2) 135°, 3) 30°, 4) 180°.

25. $A(-1,-1)$, $B(0,-6)$ we $C(-10,-2)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, A depeden geçirlen medianasynyň uzynlygyny tapmaly.

26. $A(-3,7)$ we $B(5,11)$ nokatlar AB kesimiň çetki nokatlary we ol kesim üç nokadyň kömegi bilen deň dört bölege bölnen bolsun. Kesimi böleklere bölýän nokatlaryň koordinatalaryny kesgitlemeli.

27. Göni çyzyklaryň arasyndaky burçlaryň ululygyny tapmaly:

a) $\begin{cases} x+5y-3=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+4y+5=0 \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3x+5y+1=0 \\ 5x-3y-2=0 \end{cases}$

28. $M(5,7)$ nokat arkaly geçýän we koordinatalar oklaryna parallel bolan gönileriň deňlemesini ýazmaly.

29. Gönüburçly dörtburçlygyň iki tarapynyň deňlemesi $3x-4y+5=0$, $4x+3y-7=0$ we $A(-2,1)$ depesi berlen bolsa, beýleki iki tarapynyň deňlemesini ýazmaly.

30. $A(3,-2)$ nokatdan geçýän we $3x+4y=1$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

31. Göni çyzyklaryň özara ýerleşişini kesgitlemeli:

a) $3x-4y+5=0$
$0{,}75x-y=7$

b) $3x+4y+2=0$
$4x-3y+8=0$

§ 4. Berlen iki nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesi

Berlen iki $A(x_1,y_1)$ we $B(x_2,y_2)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (1)$$

Eger A we B nokatlar Ox okuna parallel göni çyzykda ýatýan bolsa, onda onuň deňlemesi

$$y=y_1 \qquad (2)$$

görnüşde, şeýle hem A we B nokatlar Oy okuna parallel göni çyzykda ýatýan bolsa, onda onuň deňlemesi

$$x=x_1 \qquad (3)$$

görnüşdedir.

Eger AB göni çyzyk (1) deňleme bilen ýazylýan bolsa we $C(x_3,y_3)$ nokat şol gönüde ýatýan bolsa, onuň koordinatalary hem şu deňlemäni kanagatlandyrýandyr:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (4)$$

Bu şert $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ nokatlaryň bir gönide ýatmaklyk şertidir.

Goý, göni çyzyk $A(a,0)$ we $B(0,b)$ nokatlar arkaly geçýän bolsun. Onda

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$$

deňlemä göni çyzygyň kesimlerdäki deňlemesi diýilýär.

32. Eger $A(-9,0)$, $B(-3,6)$, $C(3,4)$ we $D(6,-3)$ nokatlar dörtburçlugyň depeleri bolsa, onda onuň AC we BD diagonallarynyň kesişme nokadyny tapmaly.

Çözülişi. (1) formulany ulanyp, AC we BD diagonallaryň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x+9}{3+9}, \quad x-3y+9=0,$$

$$\frac{y-6}{-3-6}=\frac{x+3}{6+3}, \quad x+y-3=0.$$

Onda

$$\begin{cases} x-3y+9=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

sistemany çözüp diagonallaryň E kesişme nokadyny taparys: $x=0$, $y=3$, $E(0\,,\,3)$.

33. Depeleri $M(-5,0)$, $N(0,\,2)$, $R(5,\,0)$, $Q(0,-2)$ nokatlar bolan rombuň taraplarynyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Göni çyzygyň kesimlerdäki deňlemesini ((5) formula) ulanyp rombuň taraplarynyň deňlemesini ýazalyň:

$$MN: \frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1, \quad 2x-5y+10=0;$$

$$NR: \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1, \quad 2x+5y-10=0;$$

$$QM: \frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1, \quad 2x+5y+10=0;$$

$$QR: \frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1, \quad -2x+5y+10=0.$$

34. Eger $A(1,2)$, $B(4,3)$ we $C(1,3)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, onda onuň taraplarynyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. (1) formulany ulanalyň:

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{3-2}$$

ýa-da

$$x-3y+5=0.$$

A we C nokatlar şol bir absissa eýe bolýandyklary üçin onuň deňlemesi $x=1$ bolar. Şeýle hem B we C nokatlaryň ordinatalary meňzeş. Onda BC tarapyň deňlemesi $y=3$ görnüşde bolar.

35. Göni çyzygyň $2x-3y-6=0$ umumy deňlemesini onuň kesimlerdäki deňlemesi görnüşine getirmeli.

Çözülişi. Umumy deňlemäni $2x-3y=6$ görnüşde ýazalyň we onuň iki tarapyny hem azat agza böleliň:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$$

Bu bolsa göniniň gözlenýän deňlemesidir.

36. Berlen nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly:

1. $A(2,3)$ we $B(0,1)$;
2. $C(0\ 5)$ we $D(-2,-5)$;
3. $E(-3,4)$ we $F(0,0)$.

37. Üçburçlugyň depeleri $A(4,6), B(-4,0)$ we $C(-1,-4)$ berlen bolsa, onda:

1. Üçburçlugyň üç tarapynyň deňlemesini;
2. C depeden geçirlen medriananyň deňlemesini;
3. B burçuň bissektrisasynyň deňlemesini;
4. A depeden BC tarapa inderilen beýikligiň deňlemesini ýazmaly.

38. $A(-1,2), B(3,-1)$ we $C(0,4)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, onda her depeden garşylykly tarapa parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

39. $A(-2,-2), B(-3,1), C(7,7)$ we $D(3,1)$ nokatlaryň trapesiýanyň depeleridigini barlamaly we onuň:

a) orta çyzygynyň deňlemesini ýazmaly;
b) diagonallarynyň deňlemesini ýazmaly.

40. Aşakdaky nokatlaryň bir gönide ýatýandygyny barlamaly:

a) $(2,0), (6,4), (11,9)$; b) $(1,-3), (2,4), (3,-1)$.

41. $P(1,2), Q(5,-1)$ we $R(-4,3)$ nokatlar üçburçlugyň taraplaryny deň iki bölege bölýän bolsa onuň taraplarynyň deňlemesini ýazmaly.

42. Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemesi berlen: $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$, $5x-3y-14=0$. Onuň beýiklikleriniň deňlemesini ýazmaly.

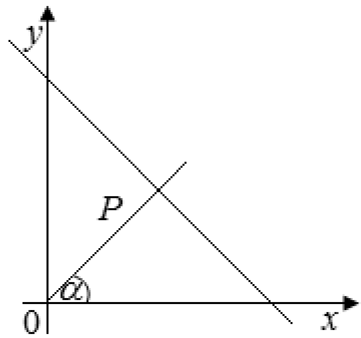
43. Aşakdaky göni çyzyklaryň umumy görnüşdäki deňlemelerini olaryň kesimlerdäki deňlemeleri görnüşinde ýazmaly:

1) $3x-4y+12=0$; 2) $5x-6y-30=0$;
3) $4x+5y-20=0$; 4) $3x-2y-12=0$.

§ 5. Göni çyzygyň normal deňlemesi. Nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk

Berlen göni çyzygyň koordinatalar oklaryna görä ýagdaýy ol göni çyzyga koordinatalar başlangyjyndan inderilen perpendikulýar we şol perpendikulýar bilen Ox okunyň ugrunyň arasyndaky α burç bilen kesgitlenýän deňleme aşakdaky görnüşdedir (*5-nji çyzgy*):

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \quad (1)$$



5-nji çyzgy

Bu deňlemä göni çyzygyň normal deňlemesi diýilýär. Normal deňlemede x we y koeffisiýentleriň kwadratlarynyň jemi 1-e deň.

Göni çyzygyň $Ax + By + C = 0$ umumy deňlemesini normal görnüşe getirmek üçin onuň ähli agzalaryny aşakdaky formula bilen kesgitlenýän normirleýji M köpeldijä köpeldilmelidir:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2)$$

Normirleýji köpeldijiniň alamaty umumy C agzanyň alamatyna garşylykly alamat bilen alynýar. Eger deňleme $Ax + By = 0$ görnüşde berlen bolsa, onda onuň alamatyny erkin alyp bolýar.

Nokadyň göni çyzykdan uzaklygyny kesgitlemek üçin göni çyzygyň deňlemesiniň çep bölegindäki x-i we y-i berlen nokadyň koordinatalary bilen çalşyryp, alnan netijäni umumy deňlemedäki x-iň we y-iň koeffisiýentleriniň kwadratlarynyň jeminden alnan kwadrat köke bölmeli we emele gelen sany absolýut ululygy boýunça almaly:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \qquad (3)$$

44. $A(-2,1)$ nokat bilen $3x-2y+1=0$ göni çyzygyň aralygyndaky uzaklygy tapmaly.

Çözülişi. (3) formulany ulanyp taparys:

$$d = \left| \frac{3(-2) - 2\cdot 1 + 1}{\sqrt{9+4}} \right| = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}. \qquad (3)$$

45. $3x-4y+10=0$ göni çyzyk we $M(4\,,3)$ nokat berlen. Göni çyzygyň normal deňlemesini we M nokadyň göni çyzykdan uzaklygyny tapmaly.

Çözülişi. Normirleýji köpeldijini tapalyň:

$$M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}.$$

Azat agza $C=10$ položitel san bolany üçin normirleýji köpeldiji $M = -\frac{1}{5}$. Onda, göni çyzygyň normal deňlemesi

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

bolar, bu ýerde $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha -$ kütek burçdur. Onda

$$d = \left| \frac{3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 10}{\sqrt{9+16}} \right| = \frac{10}{5} = 2.$$

46. Koordinatalar başlangyjy bilen $4x+3y-10=0$ göni çyzygyň aralygyndaky uzaklygy tapmaly.

Çözülişi

$$P = \left| \frac{7}{-\sqrt{4^2+3^2}} \right| = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

47. $M(2\,,7)$ nokat bilen $3x+4y-10=0$ göni çyzygyň arasyndaky uzaklygy kesgitlemeli.

48. Aşakdaky parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

$$3x+4y-15=0,$$
$$3x+4y+20=0.$$

$3x-y-4=0$ we $2x+6y+3=0$ göni çyzyklaryň kesişmesinden emele gelen burçlaryň bissektrisalarynyň deňlemelerini ýazmaly.

Çözülişi. Berlen göni çyzyklaryň kesişmesinden emele gelen burçlaryň bissektrisalarynyň islendik nokadynyň şol göni çyzyklardan deň uzaklykda ýatýandygyny nazara alsak, onda ol burçlaryň bissektrisalarynyň islendik $M(x,y)$ nokady üçin

$$\frac{|3x-y-4|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|2x+6y+3|}{\sqrt{4+36}}$$

deňlemäni ýazyp bileris.

Ýokardaky deňlik aşakdaky iki deňlik bilen deňgüýçlüdir:

$$\frac{3x-y-4}{\sqrt{10}}=\frac{2x+6y+3}{2\sqrt{10}}$$

we

$$\frac{3x-y-4}{\sqrt{10}}=-\frac{2x+6y+3}{2\sqrt{10}}.$$

Bu ýerden, ol burçlaryň bissektrisalarynyň deňlemelerini alýarys:

$$4x-8y-11=0 \quad \text{we} \quad 8x+4y-5=0.$$

50. Deňlemeleri normal görnüşe getirmeli:

a) $2x+5y+4=0$, b) $x+y-1=0$, ç) $2x-y+3=0$.

51. $A(1,2)$ nokat bilen aşakdaky göni çyzyklaryň aralygyndaky uzaklygy tapmaly:

a) $2x+4y-5=0$, b) $2x+8y+1=0$, ç) $x+y=0$.

52. Depeleri $A(-1,3)$, $B(4,-5)$ we $C(2,1)$ nokatlar bolan üçburçlugyň B depesinden inderilen perpendikulýaryň uzynlygyny kesgitlemeli.

53. Göni çyzyklaryň haýsysy normal görnüşde ýazylan?

a) $7x+5y-3=0$; b) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+1=0$;

ç) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-5=0$; d) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-2=0$;

e) $x-5=0$; f) $y-4=0$.

54. Üçburçlugyň üç tarapynyň deňlemeleri berlen: $x+3y-3=0$, $3x+y+11=0$ we $x-y-3=0$. Absissalar okunda ýatan depeden inderilen beýikligiň uzynlygyny kesgitlemeli.

55. $A(8,9)$, $B(-5,-7)$ we $C(-11,-3)$ nokatlaryň haýsysy $6x+8y-15=0$ göni çyzyga ýakyn ýerleşen?

§ 6. Iki göni çyzygyň özara ýerleşişi

Goý, iki göni çyzyk aşakdaky umumy deňlemeleri bilen berlen bolsun:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Bu gönileriň kesişme nokadyny tapmak üçin olaryň deňlemelerini bilelikde çözüp sistemanyň çözüwini tapmaly. Eger x-iň we y-iň koeffisiýentleri proporsional däl bolsa, ýagny $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, onda gönileriň kesişme nokady bardyr. Eger $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ bolsa, onda göni çyzyklar paralleldirler. Eger $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ bolsa, onda göni çyzyklar biri-biri bilen gabat gelýärler.

56. Göni çyzyklaryň kesişme nokadyny tapmaly.

a) $3x+4y-1=0;\qquad 2x+3y-1=0;$

b) $2x+3y+1=0;\qquad 4x+6y+1=0;$

ç) $x+y+1=0;\qquad 2x+2y+2=0.$

Çözülişi. a) Bu deňlemeler üçin $\frac{3}{2}\neq\frac{4}{3}$ we gönüler kesişýärler.

Kesişme nokadyny tapmak üçin deňlemeleri bilelikde çözeliň:

$$\begin{cases}3x+4-1=0\\2x+3y-1=0\end{cases}, \qquad x=\frac{\begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}=-1, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}=1.$$

Onda gönüler $N(-1,1)$ nokatda kesişýändirler.

b) Bu deňlemeler üçin $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$. Diýmek, göniler biri-birine parallelдirler.

ç) Bu deňlemeler şol bir göni çyzygy şekillendirýärler, çünki olaryň proporsionallyk koeffisiýentleri özara deňdirler, ýagny $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

57. $2x-5y+4=0$ göni çyzyga görä, $A(1,7)$ nokada simmetrik ýerleşen nokady kesgitlemeli.

Çözülişi. A nokat we gözlenýän A_1 nokat bir gönide ýatmalydyrlar we ol göni berlen gönä perpendikulýar bolmalydyr. A we A_1 nokatlar bolsa şol göni çyzyklaryň kesişme nokadyndan deň uzaklykda ýatýandyrlar.

$A(1, 7)$ nokatdan geçýän we berlen gönä perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň. $k=\frac{2}{5}$ berlen göni çyzygyň burç koeffisiýenti bolsa, oňa perpendikulýar bolan göni çyzygyň burç koeffisiýenti $k_1=-\frac{5}{2}$ deňdir. Onda:

$$y-7=-\frac{5}{2}(x-1) \quad \text{ýa-da} \quad 5x+2y-19=0.$$

Berlen göni çyzyk bilen bu göniniň kesişme N nokadyny kesgitläliň. Onuň üçin sistemany çözeliň:

$$\begin{cases} 2x-5y+4=0 \\ 5x+2y-19=0 \end{cases}$$

$x=3,\ y=2,\ N(3,2)$. Bu nokat AA_1 kesimiň ortasydyr. Onda A nokadyň koordinatalaryny x_1, y_1 bilen belgiläp alýarys:

$$3=\frac{1+x_1}{2}, \qquad 2=\frac{7+y_1}{2}.$$

Şunlukda, $x_1=5,\ y_1=-3,\ A(5,-3)$.

58. Göni çyzyklaryň kesişme nokadyny tapmaly.

1) $8x-3y-1=0;$ $\quad 4x+y-13=0;$

2) $3x+7y-15=0;$ $\quad 9x+21y-32=0;$

3) $5x-2y+13=0;$ $\quad x+3y-11=0.$

59. Üçburçlugyň taraplary öz deňlemeleri bilen berlen: $5x-3y-15=0$, $x+5y-3=0$, $3x+y+5=0$. Onuň depeleriniň koordinatalaryny tapmaly.

60. $A(-8, 3)$, $B(8, 5)$, $C(8,-5)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, onuň beýiklikleriniň deňlemelerini ýazmaly we olaryň bir nokatda kesişýändigini görkezmeli.

61. ABC üçburçlugyň AB tarapynyň deňlemesi, $x+7y-6=0$, AL we BM, bissektrisalarynyň deňlemeleri $x+y-5=0$, $x-3y-6=0$ bolsa, onuň depeleriniň koordinatalaryny tapmaly.

62. $x+y-5=0$ we $7x-y-19=0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

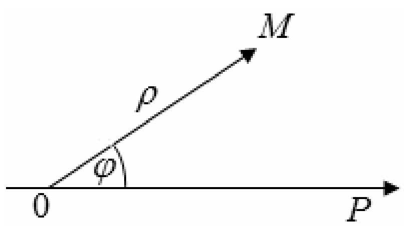
63. $3x+4y-20=0$ we $8x+6y-5=0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

64. Ordinatalar oky we taraplarynyň deňlemeleri $4x-3y+6=0$, $x+3y-36=0$ göni çyzyklar bolan üçburçlygyň perimetrini tapmaly.

65. $P(-4, 3), Q(2,-5)$ nokatdan geçýän, PQ gönä parallel bolan we $A(4,-7)$ nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzmeli.

§ 7. Tekizlikde polýar koordinatalar sistemasy

Tekizlikde haýsy bolsada bir O nokat we şol nokatdan çykýan OP şöhle berlen bolsun. Erkin M nokady alalyň we OM uzaklygy ρ bilen, OM we OP kesimleriň arasyndaky burçy φ bilen belgiläliň. (*6-njy çyzgy*). ρ, φ ululyklar M nokadyň tekizlikdäki ornuny kesgitleýär.



6-njy çyzgy

Bu görnüşdäki koordinatalar sistemasyna polýar koordinatalar sistemasy diýilýär. O nokada polýus, OP şöhlä polýar oky, $OM=\rho$ uzaklyga polýar radiusy, polýar radiusyň polýar oky bilen emele getirýän φ burçuna polýar burçy diýilýär (*6-njy çyzgy*).

Berlen dekart koordinatalar sistemasynyň Ox okuny polýar koordinatalar sistemasynyň polýar okunda, başlangyjyny bolsa polýusda ýerleşdirsek, M nokadyň dekart we polýar koordinatalarynyň arasyndaky baglanyşygy tapyp bileris:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Bu sistemadan ρ we φ aňsatlyk bilen tapylýar:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

66. Polýar koordinatalary bilen berlen nokatlary gurmaly: $A\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$,

$$C\left(3, -\frac{\pi}{3}\right),\ D\left(2, \frac{3\pi}{4}\right),\ E(1, \pi),\ F\left(1, -\frac{\pi}{3}\right),\ G\left(2, \frac{3\pi}{2}\right).$$

67. Nokadyň dekart koordinatalary $(1, -1)$ bolsa, onyň polýar koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. (2) formulany ulanýarys:

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = -1, \qquad \varphi = \frac{3\pi}{4}, \qquad \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Bu ýerde, y bahasy otrisatel, şonuň üçin $\sin\varphi$ hem otrisatel bolmaly, ýagny $\varphi = \frac{7\pi}{4}$

Şunlukda, berlen nokadyň polýar koordinatalary aşakdaky görnüşdedir:

$$\rho = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{7\pi}{4} \text{ ýa-da } \left(\sqrt{2}, \ \frac{7\pi}{4}\right).$$

68. Polýar koordinatalary $\left(2, \ \frac{3}{4}\pi\right)$ bolan nokady gurmaly.

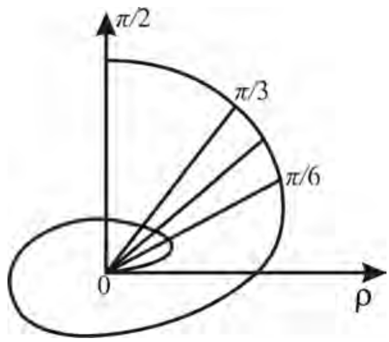
Çözülişi. Merkezi O polýusda, radiusy $\rho = 2$ bolan töweregi guralyň. Soňra polýar oky bilen $\frac{3}{4}\pi$ burçy emele getirýän 0A göni çyzygy geçireliň. Şu göni çyzygyň töwerek bilen kesişýän $A\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$ nokady gözlenýän nokatdyr.

69. Polýar koordinatalary $\rho = k\varphi$ deňlemäni kanagatlandyrýan egrini gurmaly (Arhimediň spiraly).

Çözülişi. Egrini çyzmak üçin φ erkin bahalary berip ρ-iň degişli bahalaryny alarys. Biz $k = \frac{1}{2}$ üçin degişli tablisany guralyň.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
ρ	0	0,26	0,36	0,52	0,79	1,05
φ		$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π
ρ		$\frac{3\pi}{8} \approx 1{,}18$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$	$\frac{3\pi}{4} \approx 2{,}36$	$\pi \approx 3{,}14$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$

Alnan nokatlary birikdirip Arhimediň spiraly ady bilen belli bolan egrini alýarys (*7-nji çyzgy*).



7-nji çyzgy

70. Eger polýus koordinatalar başlangyjy bilen, Ox ok bolsa polýar oky bilen gabat gelýän bolsa, $A\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ nokadyň gönüburçly koordinatalaryny tapmaly.

71. Nokadyň gönüburçly koordinatalaryny tapmaly: $A\left(10, \frac{\pi}{2}\right)$,

$B\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$, $D\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$.

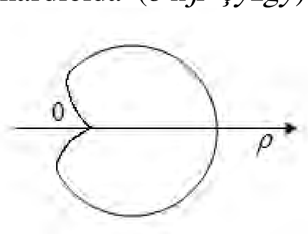
72. Nokadyň polýar koordinatalaryny tapmaly: $A\left(2\sqrt{2}\,,\,2\right)$, $B(0,-3)$,

$C(-4,\,4)$, $D\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $E\left(-\sqrt{2}\,,\,-\sqrt{6}\right)$, $F(-7,\,0)$.

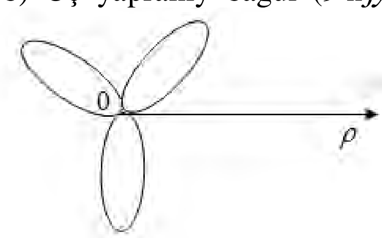
73. Polýar koordinatalarda berlen egrileri gurmaly:

a) $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$; b) $\rho = a\sin 3\varphi$.

a) kardioida (*8-nji çyzgy*) b) Üç ýaprakly bägül (*9-njy çyzgy*)



8-nji çyzgy



9-njy çyzgy

74. Deňlemeleri polýar koordinatalarda berlen egrileri gurmaly.

1) $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$; 2) $\rho = e^{\varphi}$; 3) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

75. $x = 1$ we koordinatalar başlangyjyndan geçmeýän göni çyzygyň polýar deňlemesini tapmaly.

§ 8. Dürli meseleler

76. $A(2,-1)$ nokatdan we $7x - y + 3 = 0,\ 3x + 5y - 4 = 0$ göni çyzyklaryň kesişme nokadyndan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

77. Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemeleri berlen: $2x - y + 3 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ Onuň beýikilikleriniň deňlemelerini ýazmaly.

78. Depeleri $A(1,\,1)$, $B\left(2,\,1+\sqrt{3}\right)$, $C(3,1)$ nokatlar bolan üçburçlugyň deňtaraply üçburçlukdygyny görkezmeli we onuň meýdanyny tapmaly.

79. $A(-1,\,7)$ we $B(8,-2)$ nokatlary birleşdirýän AB göni bilen 45° bnrç emele getirýän we $M(2,7)$ nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

80. $A(1,\,2)$ we $B(-2,3)$ nokatlaryň deňlemesi $2x - y + 4 = 0$ bolan göni çyzykdan dürli tarapda ýatýandygyny görkezmeli.

81. $3x-4y-7=0$ göni çyzyga görä $A(-5, 2)$ nokada simmetrik bolan nokady tapmaly.

82. Eger kesimiň $d = 2\sqrt{2}$ uzynlygy we $\varphi=135^{\circ}$ polýar burçy belli bolsa, onda kesimiň координаталar oklaryna bolan proýeksiýalaryny tapmaly.

83. $M_1\left(5, \sqrt{3}\right)$ nokatdan $M_2\left(6, 2\sqrt{3}\right)$ nokada ugrukdyrylan kesimiň polýar burçuny tapmaly.

84. $M_1(1, 1)$ hem $M_2(7, 4)$ nokatlar berlen. Şu iki nokatlary birleşdirýän göni çyzykda ýatmaýan we M_2 nokada garanda M_1 nokada iki esse ýakyn bolan kesimiň daşyndaky M nokady tapmaly.

85. Üçburçlugyň depeleri berlen: $A(5,-1)$, $B(-1,7)$, $C(1,2)$. A depeden geçirlen bissektrisanyň uzynlygyny tapmaly.

86. $B(-2, 2)$ we $D(0,-3)$ nokatlar kwadratyň garşylykly depeleri bolsa, onuň taraplarynyň deňlemelerini ýazmaly.

87. $(-3, 1)$ we $(-7,-5)$ nokatlar kwadratyň garşylykly depeleri bolsa, onuň beýleki iki depesini tapmaly.

88. Üçburçlugyň depeleri berlen: $A(0,0)$, $B(-1,-3)$, $C(-5,-1)$. Onuň depelerinden geçýän we taraplaryna parallel bolan göni çyzyklaryň deňlemelerini ýazmaly.

89. $3x+4y-20=0$ we $8x+6y-5=0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

90. $A(1,-5)$, $B(4, 3)$ nokatlary birleşdirýän AB kesim deň üç bölege bölnen bolsa, bölünme nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.

91. Gönüburçlugyň bir depesi $O(0,0)$ we iki tarapynyň deňlemeleri berlen: $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$. Onuň beýleki iki tarapynyň deňlemelerini ýazmaly.

92. $M(-2, 4)$ nokat arkaly geçýän we $2x-3y+6=0$ gönä parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

93. $M(2, 3)$ nokat arkaly geçýän we $5x-4y-20=0$ gönä perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

94. Üçburçlugyň depeleri berlen: $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$. A depeden geçirlen mediananyň uzynlygyny we agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly

95. $A(-5, 2)$ nokatdan we Ox okdan 10 birlik uzaklykda bolan nokady tapmaly.

96. Eger $A(-4,2)$, $B(1, 3)$ we $C(-3, 6)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, A depeden inderilen h beýikligiň uzynlygyny tapmaly.

II BÖLÜM
IKINJI TERTIPLI EGRILER

§1. Töwerek

Tekizlikde merkez diýlip atlandyrylýan nokatdan deňdaşlykda ýerleşen nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Töweregiň islendik nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän kesime, töweregiň radiusy diýilýär. Merkezi $C(a\,,\,b)$ nokatda bolan, R radiusly töweregiň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Eger koordinatalar başlangyjy töweregiň merkezinde ýerleşse, onda $a=b=0$ bolar we (1) deňleme has ýönekeý görnüşi alar:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2)$$

Ikinji tertipli deňlemeler umumy görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Eger $A\neq 0$, $B=0$, $C\neq 0$ bolsa, onda töweregiň umumy deňlemesini alarys:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

97. $x^2+y^2=25$ töwerek bilen aşakdaky göni çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmaly:

a) $x+2y-10=0$; b) $3x-4y+25=0$; ç) $x-y+10=0$.

Çözülişi. a) Töwerek bilen göni çyzygyň kesişme nokady bir wagtda töweregiň hem-de göni çyzygyň deňlemelerini kanagatlandyrýandyrlar. Şonuň üçin bu iki deňlemeden sistema düzeliň:

$$\begin{cases} x+2y-10=0, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

Onuň çözüwleri x_1=0, y_1=5, we x_2=4, y_2=3 bolar. Şunlukda, töwerek bilen gönüniň kesişme nokatlary $M(0,\,5)$, $N(4,\,3)$ nokatlardyr (*10-njy çyzgy*).

b) Şeýle hem

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 3x-4y+25=0 \end{cases}$$

sistemany çözüp $x_1=x_2=-3$, $y_1=y_2=4$ alarys. Diýmek, göni çyzyk bilen töwerek $P(-3\,,\,4)$ nokatda kesişýärler. Bu galtaşma nokadydyr.

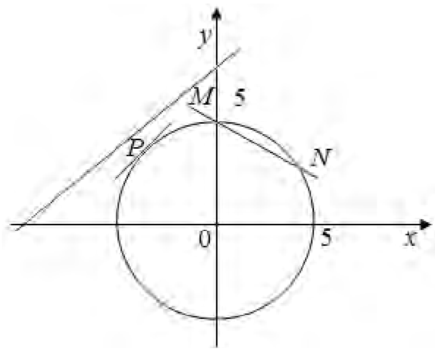
ç)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y + 10 = 0 \end{cases}$$

sistemany çözüp, alarys:

$$x = \frac{10 \pm 5\sqrt{2}\, i}{2}, \qquad y = \frac{-10 \pm 5\sqrt{2}\, i}{2}.$$

Sistemanyň hakyky sanlarda çözüwiniň ýokdugyna görä göni çyzyk bilen töwerek kesişmeýärler.



10-njy çyzgy

98. Töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny tapmaly.

$$x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0.$$

Çözülişi. Berlen deňlemäni özgerdip ýazalyň:

$$x^2 + (y^2 + 6y + 9) = 16 \qquad \text{ýa-da} \qquad x^2 + (y+3)^2 = 4^2.$$

Bu deňlemäni (1) formula bilen deňeşdirip töweregiň merkeziniň $M(0, -3)$ nokatda bolup, radiusynyň bolsa $R = 4$ bolýandygyny görýäris..

99. $A(1, 5), B(-4, 0), C(4, -4)$ nokatlar arkaly geçýän töweregiň merkezini we radiusyny tapmaly.

Çözülüşi. Töweregiň radiusyny R bilen, merkezini bolsa (a, b) bilen belgiläliň. Häzirlikçe bu parametrler näbellidirler. Şerte görä A, B, C nokatlar töwerege degişlidirler. Şonuň üçin olaryň koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrýandyrlar:

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (5-b)^2 = R^2 \\ (-4-a)^2 + (0-b)^2 = R^2 \\ (4-a)^2 + (-4-b)^2 = R^2 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} a^2+b^2-2a-10b+26=R^2 \\ a^2+b^2+8a+16=R^2 \\ a^2+b^2-8a+8b+32=R^2. \end{cases}$$

2-nji deňlikden ilki 1-nji deňligi, soňra bolsa 2-nji deňlikden 3-nji deňligi agzama-agza aýryp alýarys:

$$\begin{cases} 10a+10b-10=0 \\ 16a-8b-16=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=1 \\ 2a-b=2. \end{cases}$$

Bu ýerden, $a=1$, $b=0$. Bu bahalary ulgamyň haýsy hem bolsa bir deňlemesine goýup R taparys: $R=5$.

Onda, töweregiň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir: $(x-1)^2+y^2=25$.

Onuň merkezi $C(1,0)$, nokatda bolup, radiusy hem $R=5$ bolar.

100. Merkezi $A(5,-7)$ nokatda bolan we $M(2,-3)$ nokat arkaly geçýän töweregiň deňlemesini ýazmaly.

101. $A(3,1)$, $B(-2,6)$ we $C(-5,-3)$ nokatlar arkaly geçýän töweregiň deňlemesini ýazmaly.

102. Töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny tapmaly:

1. $y^2+x^2-8x-10y-8=0$;
2. $x^2+y^2+6x-10y+13=0$;
3. $x^2+y^2+12y-13=0$;
4. $4x^2+4y^2-4x+20y-23=0$;
5. $x^2+y^2-4x-10y+29=0$;
6. $x^2+y^2+6x+14y-101=0$.

103. Merkezi we radiusy boýunça töweregi gurmaly:

1) $A(2,-5)$, $R=4$;
2) $A(-3,4)$ we koordinatalar başlangyjyndan geçýär;
3) $A(0,4)$ we $B(5,-8)$ nokatdan geçýär.

104. Eger $A(1,4)$ we $B(-3,2)$ nokatlary birleşdirýän kesim töweregiň diametri bolsa, töweregiň deňlemesini ýazmaly.

105. Töweregiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmaly:

1) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$, 2) $x^2+y^2-4x+4y+4=0$,
3) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$, 4) $(x-5)^2+(y-3)^2=1$.

106. $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ töweregiň aşakdaky gönüler bilen kesişme nokatlaryny tapmaly:

1) $x-y-4=0$, 2) $3x-4y+36=0$, 3) $x-y-5=0$.

107. Merkezi $O(-5, 7)$ nokatda, radiusy 10-a deň bolan töwerek M (-11, 15) nokat arkaly geçýärmi?

108. Merkezi $O(12, -5)$ nokatda bolan töwerek koordinatalar başlangyjyndan geçýän bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

109. Koordinatalar oklaryna galtaşýan we M (2, 1) nokatdan geçýän töweregiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Töweregiň M (2, 1) nokadynyň birinji çärýekde ýatýandygyna görä we töweregiň koordinatalar oklaryna galtaşýandygynyň esasynda ol I çärýekde ýatýar we onuň merkezi $S(a, b)$ koordinatalar oklaryndan deň uzaklykda ýerleşýär. $a=b>0$, $r=a$. Şonuň üçin töweregiň ýönekeý deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2.$$

$M(2, 1)$ nokadyň töwerekde ýatýanlygyny ulanalyň:

$$(2-a)^2+(1-a)^2=a^2, \qquad a_1=1,\ a_2=5.$$

Diýmek, meseläniň şertini iki töwerek kanagatlandyrýandyr:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

110. Eger töwerek koordinatalar oklaryna galtaşyp, $M(-2,-4)$ nokat arkaly geçýän bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

111. Eger $O(-3, 1)$ nokat töweregiň merkezi bolsa, $4x+3y-16=0$ göni çyzyga galtaşýan töweregiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Bu göni çyzygyň burç koeffisiýenti $k_1=-\frac{4}{3}$. Onda oňa perpendikulýar bolan göni çyzygyň burç koeffisiýenti $k_2=\frac{3}{4}$. Şunlukda,

$$y-1=\frac{3}{4}(x+3), \qquad 3x-4y+13=0$$

sistemany çözüp,

$$\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ 4x+3y-16=0 \end{cases}$$

alarys: $x=1,\ y=4;\ A(1,\ 4)$. Indi töweregiň radiusyny tapalyň:

$r=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$. Onda töweregiň deňlemesi şu görnüşdedir:

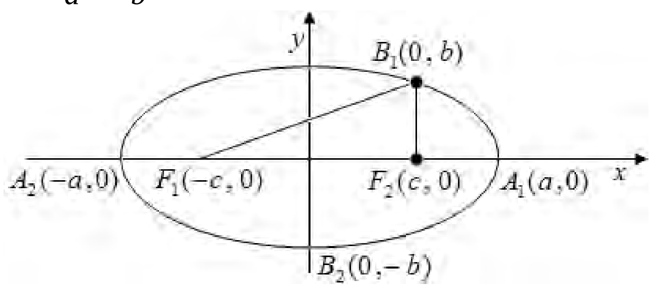
$$(x+3)^2+(y-1)^2=25.$$

112. $7x+y-3=0$, $x+7y-3=0$ göni çyzyklara galtaşýan we (1, 1) nokat arkaly geçýän töweregiň deňlemesini ýazmaly.

§ 2. Ellips

Fokuslar diýlip atlandyrylýan iki $F_1(-c, 0)$ we $F_2(c, 0)$ nokatlara çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik $2a$ sana deň bolan tekizligiň nokatlar köplügine ellips diýilýär (bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmaly). Şol hemişelik sany $2a$ bilen, fokuslaryň aralygyndaky uzaklygy bolsa $2c\,(a > c)$ bilen belgileýärler. $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nokatlar ellipsiň fokuslarydyr. Absissa oky F_1F_2 kesimiň üstüne düşer ýaly we koordinatalaryň başlangyjy F_1F_2 kesimi deň ýarpa böler ýaly edip koordinatalar sistemasy saýlanyp alnan bolsa, ellipsiň ýönekeý deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = a^2 - c^2, \qquad a > b$$



11-nji çyzgy

Ellips Ox oky bilen $A_1(a,0)$ we $A_2(-a,0)$ nokatlarda, Oy oky bilen $B_1(0,b)$ we $B_2(0,-b)$ nokatlarda kesişýärler. (*11-nji çyzgy*). Bu nokatlara ellipsiň depeleri diýilýär.

Ox we Oy oklara ellipsiň simmetriýa oklary diýilýär. Simmetriýa oklarynyň kesişme nokadyna ellipsiň merkezi diýilýär.

Ellipsiň Ox okdan uzynlygy $2a$ bolan bölüp alýan kesimine ellipsiň uly oky diýilýär (Umuman ellipsiň fokuslarynyň ýatýan okuna ellipsiň uly oky diýilýär). Ellipsiň Oy okdan uzynlygy $2b$ bolan bölüp alýan kesimine ellipsiň kiçi oky diýilýär.

Ellipsiň fokuslarynyň arasyndaky uzaklygyň ellipsiň uly okuna bolan $\frac{c}{a}$ gatnaşygyna ellipsiň ekssentrisiteti diýilýär:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

ýa-da

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}\,.$$

Deňlemeleri

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

bolan göni çyzyklara ellipsiň direktrisalary diýilýär.

Eger ellipsiň fokuslary Oy okda ýatýan bolsa, onda onuň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \;\; (b > a).$$

Bu halda ellipsiň depeleri $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$ nokatlarda, fokuslary bolsa $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ nokatlarda bolýar.

$a = b$ bolanda ellips töwerege öwrülýär. Şonuň üçin töwerege ellipsiň hususy haly hökmünde garamak mümkindir.

113. $M_1\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ we $M_2\left(2, \frac{\sqrt{12}}{4}\right)$ nokatlary belli bolan ellipsiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Ellipsiň merkeziniň koordinatalar başlangyjynda, fokuslarynyň bolsa abssisalar okunda ýatýandygy üçin ellipsiň gözlenilýän deňlemesi aşakdaky görnüşde bolmalydyr:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$M_1\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ we $M_2\left(2, \frac{\sqrt{12}}{4}\right)$ nokatlaryň koordinatalaryny ellipsiň deňlemesinde goýup, a we b sanlary tapmak üçin sistemany çözýäris:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{7}{16b^2} = 1 \\[2mm] \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{12}{16b^2} = 1. \end{cases}$$

Bu ýerden, $a^2 = 16, b^2 = 1$. a^2 we b^2 tapylan bahalaryny ellipsiň deňlemesine goýup alarys:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

114. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipsiň M nokadyndan çep fokusyna çenli uzaklyk sag fokusyna çenli uzaklykdan 2 esse uly bolsa, M nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä (*11-nji çyzgy*)

$$F_1M = 2F_2M. \qquad (1)$$

Ellipsiň $F_1(-c,0)$ we $F_2(c,0)$ fokuslarynyň absisasyny tapalyň:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-36}=8.$$

(1) deňligi iki nokadyň arasyndaky uzaklygy kesgitleýän formulanyň esasynda aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$\sqrt{(x+8)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-8)^2+y^2}$$

ýa-da

$$3x^2-80x+3y^2+192=0.$$

$M(x,\ y)$ nokat ellipse degişli bolany üçin berlen ellipsiň deňlemesinden

$y^2=36\left(1-\frac{x^2}{100}\right)$ bahasyny, soňky deňlige goýup alarys:

$$12x^2-500x+1875=0,$$

$$x_1=\frac{75}{2},\ x_2=\frac{25}{6}.$$

$x=x_1$ bolanda $y-$iň bahalary hyýaly bolýanlygy üçin $x=x_2$ köki almaly bolýarys. Onuň bahasyny ellipsiň deňlemesine goýup alarys: $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{119}$.

Şunlukda, berlen meseläniň şertini kanagatlandyrýan $M_1\left(\frac{25}{6},\ \frac{1}{2}\sqrt{119}\right)$ we $M_2\left(\frac{25}{6},-\frac{1}{2}\sqrt{119}\right)$ iki nokat bardyr.

115. Ekssentrisiteti $\frac{3}{\sqrt{17}}$, direktrisasynyň deňlemesi $x=\frac{17}{3}$ bolan ellipsiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{17}},\ x=\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a^2}{c}=\frac{17}{3}.$

Ýagny,

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{17}}, \qquad \frac{a^2}{c}=\frac{17}{3}.$$

Bu iki deňligi biri-birine agzama-agza köpeldip alýarys: $a=\sqrt{17}$. $a-$nyň tapylan bahasyny ýokardaky deňlige goýup $c=3$ alýarys. Ellipsiň kiçi ýarym oky

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{17-9}=2\sqrt{2}$$

bolar. Diýmek, ellipsiň deňlemesi

$$\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$$

görnüşdedir.

116. Dzeňlemesi $16x^2+25y^2=400$ bolan ellipsiň oklarynyň uzynlyklaryny, fokuslarynyň koordinatalaryny we ekssentrisitetini tapmaly.

Çözülişi. Ellipsiň deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmek üçin deňlemäniň ähli agzalaryny 400 böleliň:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Bu ýerden $a=\sqrt{25}=5$, $b=\sqrt{16}=4$, $2a=10,\ 2b=8$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3.$

Şunlukda, $F_1(3,0),\ F_2(-3,0)$, $e=\frac{3}{5}$.

117. Eger ellipsiň uly ýarym oky 10, ekssentrisiteti 0,8 bolsa, onuň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

118. Ellips bilen göni çyzygyň kesişme nokadyny tapmaly:

a) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1, \quad x+3y-21=0$;

b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, \quad 3x+5y-21=0$.

119. Ellipsiň depeleriniň koordinatalaryny we oklarynyň uzynlyklaryny tapmaly

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{81}=1$.

120. $3x^2+4y^2-21=0$ ellipsiň ýarym oklaryny, fokuslarynyň koordinatalaryny, ekssentrisitetini tapmaly.

121. $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipse görä nokatlaryň ýagdaýyny anyklamaly:

$A(6,-3),\ B(-2,-5),\ C(3,-6),\ D\left(\sqrt{50},0\right),\ E\left(-4,\ 2\sqrt{6}\right),\ G\left(1,\ \sqrt{26}\right).$

122. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ ellipsiň direktrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

123. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipsde onuň kiçi okundan bäş birlik uzakda ýerleşen nokady tapmaly.

124. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsiň aşaky depesinden we çep tarapky fokusyndan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

125. Ellipsiň deňlemesi berlen: $25x^2+169y^2=4225$. Onuň oklarynyň uzynlyklaryny, fokuslarynyň koordinatalaryny we ekssentrisitetini tapmaly.

§ 3. Giperbola

Fokuslar diýlip atlandyrylýan iki $F_1(-c,0)$ we $F_2(c,0)$ nokatlara çenli uzaklyklarynyň tapawudynyň, absolýut ululygy noldan tapawutlanýan hemişelik $2a$ sana deň bolan nokatlar köplügine giperbola diýilýär (bu hemişelik san položitel hem-de fokuslaryň aralygyndaky uzaklykdan kiçi bolmaly):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

deňleme giperbolanyň ýönekeý deňlemesidir. $b^2=c^2-a^2$.

Abssisa oky F_1F_2 kesimiň üstüne düşer ýaly ordinata oky F_1F_2 kesimiň ortasyndan geçer ýaly edip koordinata sistemasyny alalyň (12-nji çyzgy) we fokuslaryň arasyndaky uzaklygy $2c$ bilen belgiläliň. Onda fokuslaryň koordinatalary $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ bolar.

Giperbolanyň koordinata oklary bilen kesişme nokadyna onuň depeleri diýilýär. Giperbolanyň $A_1(-a,0)$ we $A_2(a,0)$ iki depesi bardyr. Giperbolanyň deňlemesiniň x we y görä diňe jübüt derejeli deňleme bolany üçin, giperbola koordinatalar başlangyjyna we koordinata oklaryna görä simmetrik şekildir.

Şonuň üçin koordinata oklaryna $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolanyň simmetriýa oklary diýilýär. Giperbolanyň simmetriýa oklarynyň kesişme nokadyna onuň simmetriýa merkezi diýilýär. Merkezi koordinatalar başlangyjynda, taraplary koordinata oklaryna parallel we giperbolanyň depesinden geçýän gönüburçlyga giperbolanyň esasy gönüburçlugy diýilýär. Onuň

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{2}$$

diagonallaryna giperbolanyň asimptotlary diýilýär.

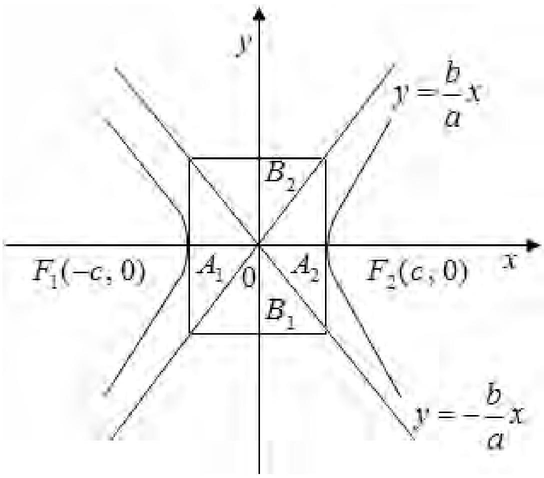
Giperbolanyň ekssentrisiteti

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

ýa-da

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,.$$

deňdir



12-nji çyzgy

Eger $a = b$ bolsa giperbola deňtaraplydyr. Bu halda gönüburçluk kwadrata öwrülýär, ekssentrisitet bolsa $\sqrt{2}$-ä deňdir.

Eger giperbolanyň fokuslary Oy okda ýerleşen bolsa, onda onuň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1. \tag{3}$$

Bu ýerde,

$$x = \pm \frac{b}{a} y$$

giperbolanyň asimptotydyr. Onuň depeleri $A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$, $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$ nokatlar, fokuslary bolsa $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ $(c^2 = a^2 + b^2)$ nokatlardyr.

126. $16x^2 - 25y^2 = 400$ giperbolanyň fokuslarynyň koordinatalaryny, asimptotynyň deňlemesini, ekssentrisitetini we oklarynyň uzynlyklaryny kesgitlemeli.

Çöz.üliși. Berlen deňlemäni ýönekeý görnüşe getireliň. Onuň üçin onuň ähli agzalaryny 400 böleliň:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Bu ýerde $a^2 = 25, b^2 = 16, a = 5, b = 4$. $c^2 = a^2 + b^2$ formulany ulanyp, $c-$ni tapýarys: $c^2 = 25 + 16 = 41$, $c = \sqrt{41}$. Şunlukda, giperbolanyň fokuslary $F_1\left(-\sqrt{41}, 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{41}, 0\right)$, oklary bolsa $2a = 10$, $2b = 8$ deň. Onda onuň ekssentrisitetiniň we asimptotynyň deňlemesini şeýle ýazyp bolar:

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{41}}{10} = \frac{\sqrt{41}}{5}, \qquad y = \pm\frac{4}{5}x.$$

127. Bir asimptoty $y = \frac{3}{2}x$ sag tarapky direktrisasy

$x = \frac{12}{\sqrt{13}}$, bolan giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Giperbolanyň asimptotynyň deňlemesini umumy görnüşde ýazalyň: $y = \frac{b}{a}x$. Meseläniň şertine görä

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{2}a.$$

Giperbolanyň sag tarapky direktrisasynyň deňlemesi $x = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$.

Meseläniň şertine görä

$$\frac{a^2}{c} = \frac{12}{\sqrt{13}}, \quad c = \frac{\sqrt{13}}{12}a^2.$$

$b^2 = c^2 - a^2$ deňlige *b*-niň we *c*-niň bahalaryny goýalyň:

$$\frac{9}{4}a^2 = \frac{13}{144}a^4 - a^2.$$

Bu deňlemäni çözüp tapýarys: $a = 6$ we $b = 9$. Diýmek, gözlenilýän giperbolanyň deňlemesi

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$$

bolar.

128. Giperbolanyň fokuslarynyň arasyndaky uzaklyk 16-a, ekssentrisiteti $\frac{4}{3}$-e deň bolsa, onuň ýönekeý deňlemesini we asimptotynyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte görä $2c = 16$, $e = \frac{4}{3}$, onda $c = 8$, $\frac{c}{a} = \frac{4}{3}$. Bu ýerden, $a = \frac{3c}{4} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$. $b^2 = c^2 - a^2$ formuladan alarys:

$$b^2 = 64 - 36 = 28,\ b^2 = 2.$$

Giperbolanyň we onuň asimptotlarynyň deňlemelerini ýazalyň:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1,$$

$$y = \pm\frac{2\sqrt{7}}{6}x \quad \text{ýa-da} \quad y = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}x.$$

129. Asimptotynyň deňlemesi $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ bolan giperbola $(6, 4)$ nokat arkaly geçýän bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte görä $\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. (1) deňlemä berlen nokadyň koordinatalaryny goýup aşakdaky sistemany çözeliň:

$$\begin{cases} \dfrac{6^2}{a^2} - \dfrac{(-4)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{b}{a} = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$$

$a^2 = 12,\ b^2 = 8,\ b^2 = 8$. a^2 we b^2 bahalaryny giperbolanyň deňlemesine goýalyň:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

130. Ox okda giperbolanyň fokuslarynyň koordinatalary we asimptotlarynyň deňlemesi berlen bolsa giperbolanyň deňlemesini ýazmaly:

1) $(\pm 5, 0)$, $y = \pm\frac{4}{3}x$;

2) $(\pm 3, 0)$, $y = \pm\sqrt{2}\,x$;

3) $(\pm 8, 0)$, $y = \pm\sqrt{3}\,x$.

131. Deňlemesi $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ bolan giperbolanyň depelerini, fokuslaryny, ekssentrisitetini we asimptotlaryny tapmaly

132. Giperbolanyň asimptotlarynyň deňlemesini ýazmaly:

1) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1,$

2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1.$

133. Eger giperbolada $2b=10$, asimptotlarynyň deňlemesi $y=\pm\frac{5}{3}x$ bolsa, onuň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

134. Eger giperbolanyň fokuslarynyň aralygyndaky uzaklyk $10\sqrt{2}$, asimptotlary bolsa $y=\pm\frac{3}{4}x$ görnüşde berlen bolsa, onuň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

135. Giperbolanyň ýarym oklarynyň jemi 17, ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{13}{12}$. Onuň ýönekeý deňlemesini ýazmaly we fokuslarynyň koordinatalaryny tapmaly.

136. $M(-5,\,2)$ nokat arkaly geçýän we $9x^2-4y^2=36$ giperbolanyň asimptotlaryna parallel bolan göni çyzyklaryň deňlemesini ýazmaly.

137. Eger $y=\pm\frac{2}{3}x$ asimptotyň deňlemesi, $M\left(6\,,-2\sqrt{2}\right)$ nokat bolsa, giperbolada ýatsa, onda onuň deňlemesini ýazmaly.

138. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolanyň aşakdaky göni çyzyklar bilen kesişme nokadyny tapmaly.

1) $x+6y=0;$

2) $x-3y=0;$

3) $5x+21y+6=0.$

139. $4y\pm3x=0$ giperbolanyň asimptotlarynyň deňlemesi, giperbolanyň fokuslarynyň aralygyndaky uzaklyk 20. Onuň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

140. $9x^2 - 16y^2 = 144$ giperbolany ýönekeý görnüşe getirmeli we onuň fokuslarynyň koordinatalaryny, depesini, ekssentrisitetini we asimptotynyň deňlemesini ýazmaly.

141. Eger $M(12, 3\sqrt{5})$ giperbolanyň bir nokady, $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$ fokuslary bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

142. Giperbolanyň deňlemesi berlen: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

1) fokuslarynyň koordinatalaryny tapmaly;

2) ekssentrisitetini tapmaly;

3) direktrisanyň we asimptotynyň deňlemesini ýazmaly.

143. Giperbolanyň deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmeli

1) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;

2) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;

3) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$;

4) $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$;

5) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$;

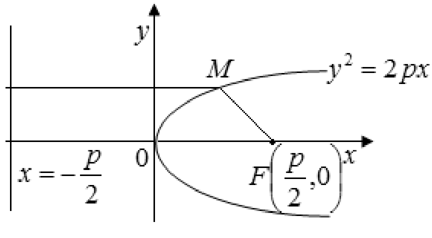
6) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

§ 4. Parabola

Fokus diýlip atlandyrylýan nokatdan we direktrisa diýlip atlandyrylýan göni çyzykdan deň daşlykda ýerleşýän nokatlar köplügine parabola diýilýär (elbetde, berlen nokat berlen göni çyzyga degişli däldir). Parabolanyň ýönekeý deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0),$$

bu ýerde p fokus bilen direktrisanyň arasyndaky uzaklykdyr (*13-nji çyzgy*).



13-nji çyzgy

Parabolanyň direktrisasynyň deňlemesini tapmak üçin abssissa okuny fokusyň üsti bilen direktrisa perpendikulýar edip geçireliň. Ordinata okuny bolsa direktrisa bilen fokusyň ortasyndan geçireliň. Onda $x=-\frac{p}{2}$ direktrisanyň deňlemesi bolar.

Fokusyň koordinatalary bolsa $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Koordinatalar başlangyjy parabolanyň depesidir, absissalar oky simmetriýa oky bolar. $\varepsilon=1$ parabolanyň ekssentrisitetidir.

Kähalatlarda parabolanyň aşakdaky görnüşlerine hem garaýarlar:

$$\text{a) } y^2=-2px,\ F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right),\ x=\frac{p}{2}.$$

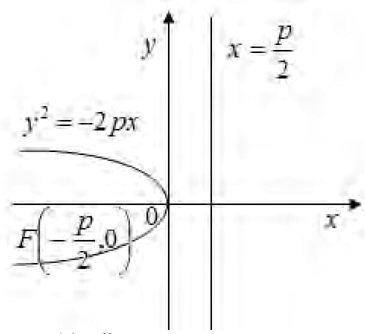
Bu halda parabola Ox oka görä simmetrikdir we onuň şahalary çep tarapa ugrukdyrylandyr (*14-nji çyzgy*)

$$\text{b) } x^2=2py,\quad F\left(0,\frac{p}{2}\right),\ y=-\frac{p}{2}.$$

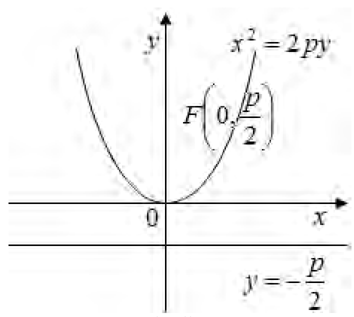
Parabolanyň simmetriýa oky Oy okudyr (*15-nji çyzgy*)

$$\text{ç) } x^2=-2py,\ F\left(0,-\frac{p}{2}\right),\ y=\frac{p}{2}.$$

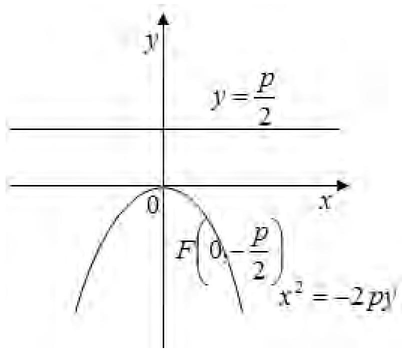
Bu halda Oy parabolanyň simmetriýa okudyr (*16-njy çyzgy*).



14-nji çyzgy



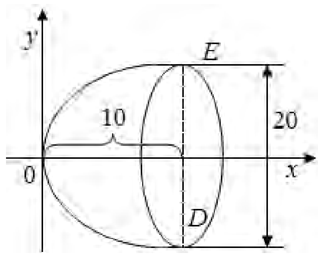
15-nji çyzgy



16-njy çyzgy

144. Awtomobiliň çyrasynyň öň ýüzündäki tegelek aýnanyň onuň çür depesinden inderilen diametriň üstünden geçýän tekizlik bilen kesişmesi parabolany emele getirýär. Awtomobiliň çyrasynyň diametri 20 *sm*, onuň ýerleşýän oýugynyň çuňlugy 10 *sm* bolsa, şol parabolanyň fokusyny tapmaly (*17-nji çyzgy*).

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny awtomobiliň çyrasynyň depesinde ýerleşer we abssissa oky *OD* bilen gabat geler ýaly edip parabolany guralyň.



17-nji çyzgy

Şonda parabolanyň deňlemesi $y^2 = 2px$ bolar. E nokadyň koordinatalary $(10, 10)$ bolar. Ony parabolanyň deňlemesine goýup alarys: $100sm^2 = 2p \cdot 10sm$, $p = 5\ sm$, $\frac{p}{2} = 2{,}5sm$. Parabolanyň fokusy $F(2{,}5,\ 0)$ nokat bolar.

145. Parabolanyň depesi koordinatalar başlangyjynda ýerleşip, $F(0,-3)$ nokat onuň fokusy bolsa, parabolanyň direktrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte görä fokus koordinatalar başlangyjyndan çepde ýatýar. Diýmek, parabolanyň deňlemesi $x^2 = -2py$ görnüşdedir. Şeýle hem, $-\frac{p}{2} = -3$, $p = 6$, bu ýerden $2p = 12$. Diýmek, parabolanyň deňlemesi $x^2 = -2py$ görnüşdedir. Direktrisanyň deňlemesini ýazalyň: $y = 3$ ýa-da $y - 3 = 0$ bolar.

146. Eger parabolanyň depesi koordinatalar başlangyjynda ýerleşip, $A(1,-2)$ nokat arkaly geçýän we Oy oka görä simmetrik bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Parabola Oy oka görä simmetrikdir we ordinatasy otrisatel bolan nokatdan geçýändir. Şonuň üçin $x^2 = -2py$, bu ýerde $p = \frac{1}{4}$.

Şunlukda, deňlemäni ýazyp bileris: $x^2 = -\frac{1}{2}y$ ýa-da $y = -2x^2$, $F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$ fokusy, $y = \frac{1}{8}$ onuň direktrisasydyr.

147. $y^2 = 18x$ parabola bilen göni çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmaly:

1) $6x + y - 6 = 0$, 2) $9x - 2y + 2 = 0$,
3) $4x - y + 5 = 0$, 4) $y - 3 = 0$.

148. $y^2 = 12x$ giperbolanyň $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellips bilen kesişme nokadyny tapmaly.

149. $y^2 = 24x$ parabolanyň direktrisasynyň deňlemesini ýazmaly we fokusyny tapmaly.

150. $y = x^2$ we $x = y^2$ parabolalaryň kesişme nokadyny tapmaly.

151. $2y + 7 = 0$ direktrisasynyň deňlemesi bolsa, depesi koordinatalar başlangyjynda ýerleşen parabolanyň deňlemesini ýazmaly.

152. $x^2 - 4y = 0$ parabolanyň fokusynyň koordinatalaryny kesgitlemeli we direktrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

153. Eger parabolanyň fokusy Ox oky bilen $4x-3y-4=0$ göni çyzygyň kesişme nokadynda ýerleşýän bolsa, parabolanyň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

154. $y^2=32x$ parabola bilen $4x+3y+10=0$ göni çyzygyň aralygyndaky uzaklyk 2-ä deň bolan parabolanyň nokadyny kesgitlemeli.

155. $y^2=24x$ parabola bilen $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ ellipsiň kesişme nokadyny tapmaly.

156. $2x^2-12x+y+13=0$ deňlemäniň parabolanyň deňlemesidigini görkezmeli we onuň çyzgysyny çyzmaly.

157. $y^2=36x$ parabolanyň, fokus bilen aralygyndaky uzaklygyň 34-e deň nokadyny tapmaly.

158. Depesi $(7,2)$ nokatda, fokusy bolsa $(7,5)$ nokatda ýerleşen parabolanyň deňlemesini ýazmaly.

§ 5. Ikinji tertipli egrilere galtaşýan çyzyk

Kesiji M_0M_1 göni çyzygyň M_1 nokady egri çyzykda bolmagyny dowam etmek bilen M_0 nokada çäksiz ýakynlaşandaky aňry çäk ýagdaýyna egri çyzygyň M_0 nokadyndaky galtaşýan çyzygy diýilýär.

1. Ellipsiň $M_0(x_0,y_0)$ nokadynda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1; \qquad (1)$$

2.
$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1, \qquad (2)$$

bu deňleme bolsa giperbola $M_0(x_0,y_0)$ nokatda geçirlen galtaşýan göni çyzygyň deňlemesidir.

3. $y^2=2px$ parabola $M_0(x_0,y_0)$ nokatda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$y\,y_0=p(x+x_0). \qquad (3)$$

Şeýle hem $Ax+By+C=0$ göni çyzygyň $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipse galtaşýan çyzyk bolmagynyň şerti

$$A^2a^2+B^2b^2-C^2=0, \qquad (4)$$

$Ax+By+C=0$ göni çyzygyň $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola galtaşýan çyzyk bolmagynyň şerti:

$$A^2a^2-B^2b^2-C^2=0, \qquad (5)$$

$Ax+By+C=0$ göni çyzygyň $y^2=2px$ parabola galtaşýan göni çyzyk bolmagynyň şertini ýazalyň:

$$pB^2-2AC=0\,. \qquad (6)$$

159. Eger $x+y+5=0$ we $x-4y-10=0$ göni çyzyklar ellipse galtaşýan bolsalar we ellipsiň oklary koordinata oklarynda ýatýan bolsalar, ellipsiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte laýyklykda ellipsi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ görnüşde gözleýäris. a we b sanlary kesgitlemek üçin göni çyzygyň ellipse galtaşma şertini, ýagny (4) deňligi ulanýarys:

$$1^2a^2+1^2b^2-25=0;$$

$$1^2a^2+4^2b^2-100=0.$$

Bu iki deňlikden sistema düzüp, ony çözüp taparys: $b^2=5,\ a^2=20.$ Şunlukda, ellipsiň deňlemesi

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$$

görnüşde bolar.

160. $x-y-2=0$ göni çyzyk, oklary koordinata oklarynda ýatýan giperbola $M(4\,,\,2)$ nokatda galtaşýan bolsa, onyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Goý, gözlenilýän giberbolanyň deňlemesi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ bolsun. a^2 we b^2 sanlary kesgitläliň. Giperbola üçin galtaşma nokadyň koordinatalary

$$x_0=-\frac{Aa^2}{C},\quad y_0=\frac{Bb^2}{C}$$

bolýar (özbaşdak getirip çykaryň). Meseläniň şertine görä

$$x_0=4,\ y_0=2,\ A=1,\ B=-1,\ C=-2.$$

Bu sanlary ýokarky deňlige goýup alýarys: $a^2 = 8$ we $b^2 = 4$. Şeýlelikde, giperbolanyň deňlemesi

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

görnüşde bolar.

161. $y^2 = 4x$ parabola we oňa galtaşýan $x + 3y + 9 = 0$ göni çyzyk berlen bolsa, galtaşma nokadyny tapmaly.

Çözülişi. Parabola üçin galtaşma nokadyň koordinatalary $x_0 = \frac{C}{A}$, $y_0 = \frac{Bp}{A}$ bolýar (özbaşdak getirip çykaryň).

Meselede $A = 1$, $B = 3$, $C = 9$ we $p = 2$ berlen. Ýokarky deňlikden $x_0 = 9$, $y_0 = 6$ tapýarys.

162. $x^2 + y^2 = 5$ töwerege $(1, -2)$ nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $x^2 + y^2 = R^2$ töwerege $M(x_1, y_1)$ nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi $x x_1 + y y_1 = R^2$ bolýar (özbaşdak getirip çykaryň). Meseläniň şertine görä $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, $R^2 = 5$. Şonuň üçin töwerege galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi $x - 2y = 5$ ýa-da $x - 2y - 5 = 0$ bolýar.

163. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ töwerege $(5, 5)$ nokatda geçirlen galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

164. $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ töwerege $(0, 3)$ nokatda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

165. $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ töwerege, koordinatalar başlangyjyndan geçýän hem-de oňa galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

166. Galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly

1) koordinatalar başlangyjyndan geçýän we $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2$ töwerege galtaşýanyň, 2) $(7, -1)$ nokatdan geçýän we $x^2 + y^2 = 25$ töwerege galtaşýanyň.

167. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ellipse $(2, -3)$ nokatda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

168. $A(-6, 3)$ nokatdan geçýän we $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipse galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

169. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipse galtaşýan we $2x-y+17=0$ gönä parallel bolan gönini tapmaly.

170. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipse galtaşýan, $13x+12y-115=0$ gönä perpendikulýar bolan gönini tapmaly.

171. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbola $(5,\,4)$ nokatdan geçirlen galtaşýan göniniň deňlemesini ýazmaly.

172. $(2\,,0)$, $(-4,3)$, $(5,-1)$ nokatlaryň her biriniň üstünden geçýän we $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbola galtaşýan göni çyzyk geçirmeli.

173. Berlen $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ giperbola galtaşýan göni çyzyk geçirmeli:

1) $x+y-7=0$ gönä parallel bolan;

2) $x-2y=0$ gönä parallel bolan;

3) $x-2y=0$ gönä perpendikulýar bolan.

174. $x-2=0$ göni çyzyk, giperbola $M(4\,,2)$ nokatda galtaşýan bolsa, onda onuň deňlemesini ýazmaly.

175. Giperbolanyň asimptotlarynyň deňlemesi $y=\pm\frac{1}{2}x$ we oňa galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi $5x-6y-8=0$ berlen. Giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

176. $y^2=12x$ parabola berlen. Oňa galtaşýan göni çyzygy geçirmeli.

1) Abssisasy $x=3$ bolan nokatdan,

2) $3x-y+5=0$ gönä parallel bolan,

3) $2x+y-7=0$ gönä perpendikulýar bolan,

177. $y^2=8x$ parabola $P(5,-7)$ nokatdan galtaşýan geçirmeli.

178. $y^2=4x$ parabola we oňa galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi berlen $x+3y+9=0$. Galtaşma nokadyny tapmaly.

179. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ ellips bilen $y^2=\frac{20}{3}x$ parabola umumy galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

§ 6. Ikinji tertipli egrileriň deňlemeleriniň ýönekeý görnüşe özgerdilişi

Ikinji tertipli egri çyzygyň umumy deňlemesi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

görnüşdedir. A, B, C hemişelik sanlar deňlemäniň baş koeffisientleridir we olaryň bolmanda birisi noldan tapawutlydyr, F san azat agzadyr. (1) deňleme bilen kesgitlenýän egrilere ikinji tertipli egriler diýilýär. Koordinatalar sistemasyny özgertmek bilen ikinji tertipli egrileri ýönekeý görnüşe getirýärler.

1) $B = 0$. Bu halda (1) deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (2)$$

Ol koordinata oklaryny parallel göçürmegiň

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \qquad (3)$$

formulasy bilen özgerdilip ýönekeý görnüşe getirilýär. Bu ýerde (x_0, y_0) täze O' başlangyç nokadyň koordinatalarydyr we ol nokat ellipsiň, gipebolanyň merkezi, parabolanyň bolsa depesidir. Täze $O'x'$ we $O'y'$ oklar köne Ox we Oy oklara paralleldirler.

(2) deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmekligi ondan doly kwadraty bölüp almak bilen amala aşyrmak amatlydyr.

180. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 26y + 4 = 0$ deňleme haýsy egri çyzygy aňladýar?

Çözülişi. Berlen deňlemäni özgerdeliň:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4;$$
$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4;$$
$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = -4 + 4 + 36;$$
$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36.$$

Täze koordinatalar sistemasynyň başlangyjyny $O'(1, 2)$ nokatda alyp, (3) parallel göçürmäniň formulasyny ulanalyň:

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 2. \end{cases}$$

Täze koordinatalar sistemasyna görä deňleme aşakdaky görnüşi alýar:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36, \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Bu bolsa ellipsdir.

181. $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$ deňleme haýsy egri çyzygy aňladýar?

Çözülişi. Deňlemäni özgerdeliň:

$$\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 9\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) = 44;$$

$$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 44 + 1 - 36;$$

$$(x+1)^2 - 9(y-2) = 9.$$

Täze koordinatalar sistemasynyň başlangyjyny $O'(-1, 2)$ nokatda alyp, parallel göçürmäniň formulasyny ulanalyň:

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

Täze koordinatalar sistemasyna görä berlen sistema aşakdaky görnüşi alýar:

$$x'^2 - 9y'^2 = 9, \quad \frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1.$$

Bu egri giperboladyr. Täze koordinatalar sistemasyna görä $y' = \pm\frac{1}{3}x'$ giperbolanyň asimptotlarydyr.

182. Ikinji tertipli egriniň

$$9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$$

deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmeli we onuň haýsy egridigini anyklamaly.

Çözülişi. Berlen deňlemäni özgerdeliň:

$$9\left(x^2 - 10x\right) + \left(16y^2 + 2y\right) + 97 = 0;$$

$$9\left(x^2 - 10x + 25 - 25\right) + 16\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) + 97 = 0;$$

$$9(x-5)^2 + 16(y+1)^2 - 225 - 16 + 97 = 0;$$

$$9(x-5)^2 + 16(y+1)^2 = 144.$$

Parallel göçürmäni ulanalyň:

$$\begin{cases} x = x' + 5 \\ y = y' - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Görnüşi ýaly koordinatalar başlangyjy $O'(5, -1)$ nokada geçýär.

$$9x'^2+16y'^2=144$$

ýa-da

$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1.$$

Onda, berlen ikinji tertipli egri ellipsdir. $a=4, b=3$. Onuň merkezi $O'(5,-1)$ nokatdadyr. $C=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$, $F\left(\sqrt{7},\ 0\right)$. Köne koordinatalar parallel göçürmäniň formulasyndan tapylýar:

$$x=x'+5=\sqrt{7}+5;$$
$$y=y'-1=0-1=-1.$$

183. Deňlemäniň haýsy egriniňkidigini anyklamaly

$$36x^2+36y^2-36x-36y-18=0.$$

184. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$ deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmeli.

185. Deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmeli. Egriniň görnüşini anyklamaly we fokusynyň koordinatalaryny tapmaly.

1) $y^2-2x+4y+2=0$;

2) $y=-x^2+2x$.

1) $B\neq 0$. (1) görnüşli ikinji tertipli egriniň umumy deňlemesini (2) görnüşe getirmek üçin koordinata oklaryny

$$\begin{cases} x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha \\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha \end{cases} \qquad (4)$$

formulanyň kömegi bilen α birça öwürýärler. Bu ýerde X, Y täze koordinatalar. α burç

$$B\text{tg}^2\alpha+(A-C)tg\alpha-B=0 \qquad (5)$$

deňlikden tapylýar.

Koordinata oklaryny α burça öwürmek täze OX we OY oklary ikinji tertipli egrileriň simmetriýa oklaryna parallel bolar ýaly edip alynýar.

$\text{tg}\alpha$ belli bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$ aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$\sin\alpha=\pm\frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}.$$

Eger öwrülme burçy ýiti bolsa, onda bu formulalaryň oňyn bahalaryny we (5) deňlemäniň bolsa oňyn çözüwini alýarys.

Eger $A=C$ bolsa, $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Diýmek, $\frac{\pi}{4}$ burça öwrülme formulasy aşakdaky görnüşdedir:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y). \end{cases} \qquad (6)$$

186. Deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmeli:

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

Çözülişi. Koordinata oklaryny öwürmek fomulasyny ((4) formula) ulanyp deňlemäni özgerdeliň:

$$(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2-2(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2-$$
$$-10(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)-6(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+25=0$$

ýa-da

$$(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)X^2+(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)Y^2+$$
$$+2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)XY-(10\cos\alpha+6\sin\alpha)X+(10\sin\alpha-6\cos\alpha)Y+25=0.$$

$X\cdot Y$ köpeltmek hasylynyň koeffisiýentlerini nula deňläliň: $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$, $tg^2\alpha=1$, ýagny $tg\alpha_1=1$, $tg\alpha_2=-1$. Eger $tg\alpha=1$ bolsa $\alpha=\frac{\pi}{4}$ we $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ bolar. Onda deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$2Y^2-8\sqrt{2}X+2\sqrt{2}Y+25=0$$

ýa-da

$$2\left(Y^2+\sqrt{2}Y\right)-8\sqrt{2}X+25=0,$$

$$2\left(Y^2+\sqrt{2}Y+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)=8\sqrt{2}-25+1,$$

$$2\left(Y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=8\sqrt{2}X-24,$$

$$\left(Y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\sqrt{2}\left(X-\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

$O'\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nokat täze sistemanyň koordinatalar başlangyjydyr.

Onda

$X'=X+\frac{3}{\sqrt{2}}$, $Y'=Y-\frac{\sqrt{2}}{2}$ özgertmäni ulanyp alarys:

$$Y'^2=4\sqrt{2}X'.$$

Bu bolsa parabolanyň deňlemesidir.

187. $2xy=a^2$ deňlemeni ýönekeý görnüşe getirmeli we egriniň görnüşini anyklamaly.

Çözülişi. Bu deňlemede $A=C=0$. Şonuň üçin koordinatalar ulgamyny $\alpha=\frac{\pi}{4}$ burça öwürmeli. $\frac{\pi}{4}$ burça öwürme formulasyny ýazalyň:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y);$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y).$$

Bulary deňlemä goýup alarys:

$$2\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}=a^2$$

ýa-da

$$X^2-Y^2=a^2, \qquad \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Bu bolsa deňtaraply giperbolanyň deňlemesidir..

188. $5x^2+4xy+8y^2-36=0$ deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmeli we egriniň görnüşini anyklamaly.

Çözülişi. Bu deňlemede $A=5, B=2, C=8$. Şonuň üçin α öwrülme burçy

$$2\mathrm{tg}^2\alpha-3\mathrm{tg}\alpha-2=0$$

deňlemeden alynýar. Deňlemäni çözüp alýarys: $\mathrm{tg}\alpha=2$ we $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

α burçyň ýiti burçdugyna görä birinji çözüw bilen çäkleneris. Onda

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

we

$$x = \frac{X-2Y}{\sqrt{5}}, \qquad y = \frac{2X+Y}{\sqrt{5}}$$

deňlemeleri alarys.

Bu bahalary berlen deňlemä goýalyň:

$$5\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\frac{2X+Y}{\sqrt{5}} + 8\left(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0$$

ýa-da

$$(X-2Y)^2 + \frac{4}{5}(X-2Y)(2X+Y) + \frac{8}{5}(2X+Y)^2 = 36$$

deňligi ýönekeýleşdirip,

$$9X^2 + 4Y^2 = 36$$

ýa-da

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$$

deňlemeleri alarys.

Bu bolsa ellipsiň deňlemesidir. $(a=3,\ b=2)$.

Ikinji tertipli egrileri ýönekeý görnüşe getirmeli we egrileriň görnüşlerini takyklamaly:

189. $3x^2 - 4xy + 4 = 0.$

190. $x^2 + xy + y^2 = 3.$

191. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$

192. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0.$

193. $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0.$

III BÖLÜM

KESGITLEÝJILER WE ÇYZYKLY DEŇLEMELER SISTEMASY

§ 1. Ikinji we üçünji tertipli kesgitleýjiler

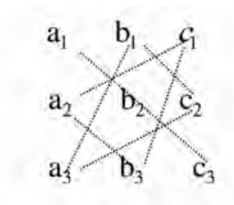
Ikinji we üçünji tertipli kesgitleýjiler aşakdaky görnüşde hasaplanylýar:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2, \qquad (1)$$

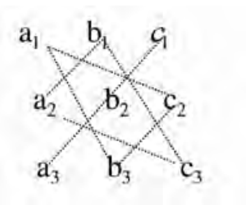
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \qquad (2)$$

a_i, b_j, c_k - sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. (1) – kesgitleýjide a_1, b_2 – elementleriň emele getirýän diagonalyna, (2) – kesgitleýjide bolsa, a_1, b_2, c_3 – elementleriň emele getirýän diagonalyna, onuň esasy (baş) diagonaly, a_2, b_1 – elementleriň emele getirýän we a_3, b_2, c_1 – elementleriň emele getirýän diagonalyna bolsa, onuň esasy däl (kömekçi) diagonaly diýilýär.

Ikinji tertipli kesgitleýjileri hasaplamak üçin, onuň esasy diagonalyndaky elementleriň köpeltmek hasylyndan, esasy däl diagonalyndaky elementleriň köpeltmek hasylyny aýyrmalydyr:



I Düzgün



II Düzgün

Üçünji tertipli kesgitleýjileri hasaplamak üçin köplenç üçburçlyk düzgünini ulanýarlar. (2) – deňlemäniň sag bölegindäki ilkinji üç agza 1 düzgün boýunça hasaplanylýar. Olar esasy diagonaldaky elementleriň köpeltmek hasylynyň we her üçburçlugyň depelerindäki elementleriň köpeltmek hasyllarynyň jemidir. Soňky üç agza II düzgün boýunça hasaplanyp, olar aýyrmak alamaty bilen alynýar.

195. Kesgitleýjileri hasaplamaly:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi: (1) formulany ulanalyň:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-8=-5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14+3=17, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 15+30=45.$$

196. Kesgitleýjini hasaplamaly

$$\Delta = \begin{vmatrix} 128 & 129 \\ 130 & 131 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Alarys:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 128 & 129 \\ 130 & 131 \end{vmatrix} = 128\cdot 131 - 130\cdot 129 = 16768 - 16770 = -2.$$

197. a-nyň haýsy bahalarynda kesgitleýji nola deň bolýar?

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix}.$$

Çözulişi. Berlen kesgitleýjini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix} = (a+3)(a-3) - 5(-1) = a^2 - 4.$$

Şunlukda, eger $a^2 - 4 = 0$ bolsa $\Delta = 0$, ýagny $a = \pm 2$ bolar.

198. Üçünji tertipli kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Üçburçluk düzgünini ulanalyň:

I düzgün boýunça	II düzgün boýunça
$1\cdot(-1)\cdot(-2)=2$	$6\cdot(-1)\cdot 3=-18$
$4\cdot(-7)\cdot 3=-84$	$4\cdot 2(-2)=-16$
$2\cdot 5\cdot 6=60$	$(-7)\cdot 5\cdot 1=-35$

II düzgün boýunça alnan köpeldijiler ters alamaty bilen alynýar. Şunlukda,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4 & 6\\ 2 & -1 & -7\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}=2-84+60+18+16+35=47.$$

199. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & -1 & 1\\ 2 & a & -2\\ -3 & 3 & a\end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Üçburçluk düzgünini ulanyp alarys:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & -1 & 1\\ 2 & a & -2\\ -3 & 3 & a\end{vmatrix}=a^3+6-6+3a+2a+6a=a^3+11a.$$

200. Kesgitleýjileri hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix}3 & 6\\ -5 & 10\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1 & 3\\ 6 & 2\end{vmatrix},$$

201. Kesgitleýjiniň $a-$nyň haýsy bahalarynda nola öwrülýändigini anyklamaly:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}.$$

Kesgitleýjileri hasaplamaly:

202.

$$\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & a-b \\ a^2+ab+b^2 & a+b \end{vmatrix}.$$

203.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-b & a \\ a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

204. Kesgitleýjileri hasaplamaly:

a) $\begin{vmatrix} a & в \\ в & a \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a^2 & в \\ в^2 & a \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$, h) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$, i) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$,

j) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$,

205. Kesgitleýjileri hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & b \\ b & o & a \\ b & b & a \end{vmatrix}.$$

§ 2. Kesgitleýjniň häsiýetleri. Kesgitleýjini setiriň we sütüniň elementleri boýunça dagytmak

1^0. Kesgitleýjiniň setirleri bilen sütünleriniň orunlaryny çalşyranyňda, onuň ululygy üýtgemeýär:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2^0. Kesgitleýjileriň iki sütüniniň (ýa-da iki setiriniň) orunlaryny çalşyrsak ol alamatyny tersine üýtgedýär:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3^0. Kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir sütünini (ýa-da setirini) şol bir sana köpeltmek, kesgitleýjini şol sana köpeltmek bilen deňgüýçlidir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4^0. Eger kesgitleýjiniň bir sütüni (ýa-da setiri) nola deň bolsa, onda ol kesgitleýji nola deňdir.

5^0. Eger kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir sütüni (setiri) beýleki sütünine (setirine) proporsional (ýa-da deň) bolsa, onda ol kesgitleýji nola deňdir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6^0.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' + c_1'' \\ a_2 & b_2 & c_2' + c_2'' \\ a_3 & b_3 & c_3' + c_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1'' \\ a_2 & b_2 & c_2'' \\ a_3 & b_3 & c_3'' \end{vmatrix}.$$

Eger kesgitleýjiniň bir sütüniniň (setiriniň) elementleri iki goşulyjynyň jemi görnüşinde ýazylan bolsa, onda ol iki kesgitleýjiniň jemine deňdir. Birinji kesgitleýjiniň degişli sütüni (setiri) birinji goşulyjylardan, ikinji kesgitleýjiniň degişli sütüni (setiri) ikinji goşulyjylardan düzülendir.

7^0. Kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir sütüniniň (setiriniň) degişli elementlerine, beýleki sütüniň (setiriniň) şol bir sana köpeldilen degişli elementlerini goşanymyzda, kesgitleýji ululygyny üýtgetmeýär:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8^0. Eger a_1 elementiň algebraik doldurgyjy $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, a_2 elementiň algebraik doldurgyjy $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, a_3 elementiň algebraik doldurgyjy $A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ bolsa, onda üçünji tertipli kesgitleýjini hasaplamak aşakdaky deňlik bilen amala aşyrylýar:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3.$$

Bu häsiýet kesgitleýjiniň setirleri üçin hem dogrudyr.

Şeýle hem kesgitleýji beýleki setirler (sütünler) boýunça hem dagydylyp hasaplanyp bilner. Mysal üçin ikinji sütün boýunça dagytmaklygy ýazalyň:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3.$$

206. Kesgitleýjini birinji sütün boýunça dagydyp hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Birinji sütüniň elementleriniň algebraik doldurgyçlaryny tapalyň:

$$A_1=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4+1=5,\qquad A_2=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-10,\qquad A_3=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2+2=0.$$

Onda,

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=1\cdot 5+2\cdot(-10)+3\cdot 0=-15.$$

207. Kesgitleýjini hasaplamaly.

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & -3\\ -2 & -3 & 2\end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Birinji sütünden 2-ni kesgitleýjiniň öňüne çykaralyň, soňra birinji setirden 3-i kesgitleýjiniň öňüne çykaralyň:

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & -3\\ -2 & -3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & -3 & 2\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & -3 & 2\end{vmatrix}.$$

Birinji sütüniň elementlerinden ikinji sütüniň degişli elementlerini aýranymyzda kesgitleýji ululygyny saklaýar:

$$\Delta=6\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}.$$

Birinji setirde diňe bir element (b_1=1) nola deň däl. Onuň algebraik doldurgyjyny tapalyň:

$$B_1=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8.$$

Onda, alarys: $\Delta=6\cdot 1\cdot(-8)=-48$.

208. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 3\\ 6 & -4 & -1\\ -3 & 2 & 11\end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Bu kesgitleýjiniň birinji sütüniniň elementleriniň ikinji sütüniň elementlerine proporsionaldygyna görä ol nola deňdir: $\Delta = 0$.

209. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Kesgitleýjini ikinji setiriň elementleri boýunça dagydyp hasaplalyň:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot [(-7) \cdot 6 - 5 \cdot 5] + 5 \cdot [5 \cdot 5 - 2(-7)] =$$

$$= -3 \cdot (-42 - 25) + 5 \cdot (25 + 14) = 3 \cdot 67 + 5 \cdot 39 = 201 + 195 = 396.$$

210. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & 17 & 32 \\ 35 & 49 & 56 \\ 9 & 11 & 16 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi. Ikinji setirden umumy köpeldiji bolan 7-ni kesgitleýjiniň öňüne çykaralyň:

$$\Delta = 7 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 17 & 32 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 16 \end{vmatrix}.$$

Üçünji sütünden umumy köpeldiji bolan 8-i kesgitleýjiniň öňüne çykaralyň

$$\Delta = 7 \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 17 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 9 & 11 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soňra ikinji setiriň elementlerini 4-e köpeldip birinji setiriň degişli elementlerinden aýyralyň. Ondan soň ikinji setiri 2-ä köpeldip alan sanlarymyzy üçünji setiriň elementlerinden aýralyň:

$$\Delta = 7\cdot 8\cdot \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot 8\cdot \Delta_1.$$

Δ_1 − kesgitleýjini hasaplamak üçin ony üçünji sütüniň elementleri boýunça dagydalyň.

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & -11 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 11 = 14.$$

Şunlukda,

$$\Delta = 7\cdot 8\cdot 14 = 784 \text{ alarys.}$$

211. Wandermondyň kesgitleýjisini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}.$$

Alan kesgitleýjimizi birinji setiriň elementleri boýunça dagydalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix}.$$

Birinji we ikinji sütünlerden umumy köpeldijini kesgitleýjiniň öňüne çykaryp alarys:

$$\Delta = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

Wandermondyň kesgitleýjisi x, y, z ululyklaryň haýsy hem bolsa ikisiniň biri-birine deň bolan ýagdaýynda nola deňdir. Ol bolsa kesgitleýjiniň iki deň sütüniniň bolýandygyny görkezýär.

212. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}.$$

213. Kesgitleýjini birinji setiriň elementleri boýunça dagydyp, hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -17 & 5 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

214. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}.$$

215. Kesgitleýjini hasaplamaly:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$, ç) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & в & c \\ a^3 & в^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

216. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix},$$

217. Kesgitleýjini hasaplamaly:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

ç) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

218. Kesgitleýjileri hasaplamaly:

a) $\begin{vmatrix} 13547 & 136647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$, ç) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

§ 3. Çyzykly deňlemeleriň sistemasy

1. Iki näbellili çyzykly iki deňlemeli sistema

Iki näbellili çyzykly iki deňlemeleriň sistemasyna garalyň

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

kesgitleýjä, sistemanyň esasy kesgitleýjisi diýilýär. Aşakdaky kesgitleýjileriň birinjisinde x – iň koeffisiýentlerinden düzülen sütün azat agzalardan düzülen sütün bilen, ikinjisinde bolsa y – iň koeffisiýentlerinden düzülen sütün, azat agzalardan düzülen sütün bilen çalşyrylandyr:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Garalýan sistema üçin aşakdakylary belläp geçeliň:

a) Eger (1) sistemanyň esasy kesgitleýjisi noldan tapawutly bolsa, onda sistemanyň ýeke-täk çözüwi bardyr. Ol Krameriň formulasy bilen tapylýar:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

b) Eger $\Delta = 0$, bolup $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bolsa sistema kökdeş däldir.

ç) Eger $\Delta = 0$, we $\Delta_x = \Delta_y = 0$ bolsa onda deňlemeler proporsionaldyr. Bu halda sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

219. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

Çözülişi. Alarys:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Şunlukda, sistema ýeke-täk çözüwe eýedir.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{16}{7}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{6}{7}.$$

220. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x - 12y = 7. \end{cases}$$

Çözülişi. Alarys:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Bu bolsa sistemanyň kökdeş däldigini görkezýär.

221. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x + 9y = 3. \end{cases}$$

Çözülişi. Alarys:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

Sistemalary çözmeli:

222. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 10. \end{cases}$ **223.** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 3. \end{cases}$ **224.** $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ x + 6y = -3. \end{cases}$

225. $\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ 7x + 3y + 17 = 0. \end{cases}$ **226.** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 9x - 6y = 6. \end{cases}$ **227.** $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 7. \end{cases}$

2. Üç näbellili çyzykly üç deňlemeli sistema

Goý, üç näbellili çyzykly üç deňlemeler sistemasy berlen bolsun:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases}.$$

Näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen kesgitleýjä

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

sistemanyň esasy kesgitleýjisi diýilýär. Aşakdaky kesgitleýjileri düzeliň:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema. Eger sistemanyň esasy kesgitleýjisi noldan tapawutly bolsa, onda sistema ýeke-täk çözüwe eýedir we ol çözüwler Krameriň formulasy bilen tapylýar:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

228. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}.$$

Çözülişi. Sistemanyň esasy kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 1 + 48 - 20 + 8 - 9 = -2 \neq 0.$$

Sistema ýeke-täk çözüwe eýedir. $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ kesgitleýjileri hem hasaplalyň:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -12, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20.$$

Krameriň formulasyny ulanyp alarys:

$$x = \frac{-10}{-2} = 5, \qquad y = \frac{-12}{-2} = 6, \qquad z = \frac{-20}{-2} = 10.$$

229. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0.$$

Şunlukda, bu sistema kökdeş däldir.

230. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 1 \\ 6x - 4y - z = 2 \\ -3x + 2y + 11z = 3. \end{cases}$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 56 \neq 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 84 \neq 0.$$

Sistemanyň çözüwi ýokdur, ýagny ol sistema kökdeş däldir.

231. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 4 \\ x + y + 3z = 0. \end{cases}$$

Çözülişi. Alarys:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Sistemanyň çözüwini tapalyň:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \qquad z = -\frac{4}{4} = -1.$$

Sistemalary çözmeli.

232. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$ **233.** $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = 8. \end{cases}$ **234.** $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1. \end{cases}$

235. $\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{cases}$

236. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

237. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

238. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

239. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$

§ 4. Birjynsly deňlemeleriň sistemasy

Eger çyzykly deňlemeler sistemasynyň deňlemeleriniň azat agzalary nola deň bolsa, onda ol deňlemeler sistemasyna birjynsly deňlemeler sistemasy diýilýär we aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases}$$

Bu sistemanyň nola deň bolan çözüwleriniň barlygyna görä ol kökdeş sistemadyr. Şu ýerde sistemanyň noldan tapawutly çözüwini tapmak meselesi gelip çykýar.

Teorema. Birjynsly sistemanyň noldan tapawutly çözüwiniň bolmagy üçin esasy kesgitleýjiniň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Şunlukda, $\Delta \neq 0$ bolsa $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ çözüw ýeke-täkdir. Eger $\Delta = 0$ bolsa, onda sistemanyň tükeniksiz köp noldan tapawutly çözüwi bardyr. Olar aşakdaky ýaly tapylyp bilner.

a) $\Delta = 0$, we haýsy hem bolsa bir ikinji tertipli minor noldan tapawutly bolsun. Ýönekeýlik üçin ol minor birinji we ikinji setirlerde ýerleşen diýeliň. Üçünji setiriň algebraik doldurgyçlary A_3, B_3, C_3 bolsun. Onda t – niň erkin bahalarynda $x = A_3t,\ \ y = B_3t,\ \ z = C_3t$ sanlar sistemanyň çözüwleridir.

b) $\Delta = 0$ we onuň ähli ikinji tertipli minorlary nola deň. Bu halda sistemanyň üç deňlemesi hem proporsionaldyr we sistema aşakdaky bir deňlemä getirilýär: $a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$.

Iki näbellä erkin bahalar berip üçünji näbellini taparys we olaryň üçüsi bilelikde sistemany kanagatlandyrýar.

240. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

Çözülişi. Sistemanyň kesgitleýjisini tapalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24.$$

Şunlukda, $\Delta \neq 0$ bolany üçin sistema ýeke-täk $x = y = z = 0$ çözüwe eýedir.

241. Sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

Çözülişi. Sistemanyň kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Şunlukda, sistemanyň noldan tapawutly çözüwleri bardyr. Birinji iki setirdäki minoryň nola deň däldigini görýäris:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7.$$

Üçünji setiriň algebraik doldurgyçlaryny tapalyň:

$$A_3=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=18; \qquad B_3=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-10; \qquad C_3=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-7.$$

Şunlukda, erkin t san üçin $x=18t$, $y=10t$, $z=-7t$ sanlar sistemanyň çözüwidir.

242. Sistemanyň çözüwlerini tapmaly.

$$\begin{cases}3x+2y+z=0\\ 2x+5y+3z=0\\ 3x+4y+2z=0.\end{cases}$$

Sistemany çözmeli.

243. $\begin{cases}2x-3y+z=0\\ x+y+z=0\\ 3x-2y+2z=0.\end{cases}$ **244.** $\begin{cases}x-y+2z=0\\ 2x-2y+4z=0\\ 5x-5y+10z=0.\end{cases}$

245. $a-$nyň haýsy bahalarynda sistemanyň nola deň bolmadyk çözüwleriniň barlygyny anyklamaly we olary tapmaly

$$\begin{cases}a^2x+3y+2z=0\\ ax-y+z=0\\ y+4z=0.\end{cases}$$

§ 5. Çyzykly deňlemeler sistemasynyň Gauss usuly boýunça çözülişi

Çyzykly deňlemeler sistemasyny kesgitleýjileriň kömegi bilen çözmek iki ýa-da üç sany çyzykly deňlemeleri bolan sistema üçin amatlydyr. Eger sistemada deňlemeleriň sany üçden köp bolsa onda Gauss düzgünini ulanmak amatlydyr. Goý dört näbellili çyzykly dört deňlemesi bolan sistema

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}u=a_{15} & (1)\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}u=a_{25} & (2)\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}u=a_{35} & (3)\\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}u=a_{45} & (4)\end{cases}$$

berlen bolsun we $a_{11} \neq 0$ bolsun (eger $a_{11} = 0$ bolsa, onda deňlemeleriň tertibini üýtgedip, ýagny 1-nji deňlemäniň ornuna x-iň koeffisýentiniň noldan tapawutlysyny alarys).

a) (1) deňlemäni a_{11}-e böleliň. b) alnan deňlemäni a_{21}-e köpeldip, (2) deňlemeden aýralyň, soňra a_{31}-e köpeldip (3) deňlemeden aýralyň, şeýle hem a_{41}-e köpeldip, (4) deňlemeden aýralyň. Netijede aşakdaky sistemany alýarys:

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15} & (5) \\ b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = b_{25} & (6) \\ b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u = b_{35} & (7) \\ b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u = b_{45} & (8) \end{cases}$$

(6), (7), (8) deňlemelere hem ýokardaky düzgüni ulanyp, aşakdaky "basgançakly" görnüşe gelýäris:

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15} \\ y + c_{23}z + c_{24}u = c_{25} \\ z + d_{34}u = d_{35} \\ u = l_{45} \end{cases}$$

Özgerdilen bu sistemadan näbelliler kynçylyksyz tapylýar.

246. Sistemany çözmeli.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Çözülişi: Sistemanyň birinji deňlemesini 3-e böleliň we ikinji deňlemeden aýyralyň. Soňra alnan birinji deňlemäni 4-e köpeldip üçünji deňlemeden aýyralyň. Şunlukda, alarys:

$$\begin{cases} x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}y-\frac{4}{3}z=-\frac{5}{3} \\ -\frac{11}{3}y+\frac{11}{3}z=-\frac{11}{3} \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=\frac{5}{3} \\ y-\frac{4}{3}z=-\frac{5}{3} \\ -y+z=-1. \end{cases}$$

Şeýle hem bu usuly ýene bir gezek ulanyp,

$$\begin{cases} x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=\frac{5}{3} \\ y-4z=-5 \\ -3z=-6 \end{cases}$$

sistemany alarys. Bu ýerden, bolsa $z=2,\quad y=3,\quad x=-1$ taparys.

247. Sistemany çözmeli.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4+3x_5=5 \\ 2x_1+4x_2-x_3+5x_4+4x_5=-1 \\ x_1+3x_2+2x_5=-3 \\ 3x_1+7x_2-3x_3+9x_4+2x_5=-14 \\ 2x_1+8x_2-4x_3+2x_4+7x_5=-10. \end{cases}$$

Çözülişi: Birinji deňlemäni yzygiderli 2, 1, 3, 2-ä köpeldip, degişlilikde beýleki deňlemelerden aýyralyň:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\quad+2x_4+3x_5=5 \\ 2x_2-x_3+x_4-2x_5=-11 \\ 2x_2-2x_4-x_5=-8 \\ 4x_2-3x_3+3x_4-7x_5=-29 \\ 6x_2-4x_3-2x_4+x_5=-20. \end{cases}$$

Soňra ikinji deňlemäni degişlilikde yzygiderli 1, 2, 3 köpeldip beýleki deňlemelerden aýyralyň:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \quad 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -11 \\ x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 \\ -x_3 + x_4 - 3x_5 = -7 \\ -x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 13. \end{cases}$$

Üçünji deňleme bilen dördünji we bäşinji deňlemeleri goşalyň:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -11 \\ x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 \\ -2x_4 - 2x_5 = -4 \\ -8x_4 + 8x_5 = 16. \end{cases}$$

Dördünji deňleme bilen bäşinji deňlemäni goşalyň:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -11 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ -8x_4 - 2x_5 = -4 \\ 16x_5 = 32. \end{cases}$$

Soňky deňlemeden $x_5 = 2$ taparys, ony dördünji deňlemä goýup $x_4 = 0$, beýleki deňlemelerden hem $x_3 = 1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$ taparys.

Sistemalary çözmeli.

248. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

249. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

250. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$

251. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22. \end{cases}$

252. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$

253. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+2x_5=18 \\ 2x_1-5x_2+x_4+x_5=-7 \\ x_1-x_4+2x_5=8 \\ 2x_2+x_3+x_4-x_5=10 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$

§ 6. Çyzykly deňlemeler sistemasynyň matrisalar usuly bilen çözülişi

Goý, sistema berlen bolsun

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ ------------------ \\ a_{n_1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

(1) sistemanyň näbellilerinden, näbellileriniň koeffisiýentlerinden we azat agzalaryndan matrisalar düzeliň:

(2)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Onda (1) sistemany matrisa görnüşinde ýazyp bileris:

$$A\cdot X=B. \qquad (2)$$

Eger $\Delta(A)\neq 0$ bolsa A matrisanyň ters A^{-1} matrisasy bardyr. Şunlukda, deňligiň iki bölegini hem çepinden A^{-1} köpeldip alarys:

$$X=A^{-1}\cdot B \qquad (3)$$

deňlik (1) bolsa sistemanyň çözüwidir.

254. Deňlemeler sistemany matrisalar usuly bilen çözmeli.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Çözülişi: A, X, B matrisalary düzeliň:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berlen sistemany matrisa görnüşinde ýazalyň:

$$A \cdot X = B$$

A matrisanyň kesgitleýjisini tapalyň:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ýokarda getirilen formula boýunça

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6+9-10 \\ -18+3+5 \\ 6-6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Soňky sütün matrisadan alarys: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3.$

Deňlemeler sistemasyny matrisalar usuly bilen çözmeli.

255. $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ x+6y=-3. \end{cases}$

256. $\begin{cases} 3x-5y+1=0 \\ 7x+3y+17=0. \end{cases}$

257. $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x+5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$

258. $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1. \end{cases}$

259. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$

260. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4 \\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3 \\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7. \end{cases}$

IV BÖLÜM
WEKTOR ALGEBRASY

§ 1. Giňişlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy

Goý, giňişlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy $(Oxyz)$ berlen bolsun. Onda absissasy x, ordinatasy y we applikatasy z bolan M nokat $M(x, y, z)$ bilen belgilenýär.

Giňişlikde $A(x_1, y_1, z_1)$ we $B(x_2, y_2, z_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

$A(x_1, y_1, z_1)$ we $B(x_2, y_2, z_2)$ nokatlary birleşdirýän AB kesimi $M(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ nokat λ gatnaşykda bölýän bolsa, bu nokadyň koordinatalary aşakdaky formulalar boýunça tapylýar:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ \overline{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ \overline{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

AB kesimi deň ikä bölýän nokadyň koordinatalary

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \overline{z} = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (3)$$

formulalar boýunça tapylýar.

261. Ordinatalar okunda $A(1-3,7)$ we $B(5,7,-5)$ nokatlardan deň uzaklykda ýatýan nokady tapmaly.

Çözülişi. Gözlenýän nokady $M(0, y, 0)$ bilen belgiläliň. Onuň A we B nokatlar bilen arasyndaky uzaklygy tapalyň:

$$|MA| = \sqrt{(1-0)^2 + (-3-y)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{50 + (3+y)^2};$$

$$|MB| = \sqrt{(5-0)^2 + (7-y)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{50 + (7-y^2)}.$$

Meseläniň şertine görä $|MA| = |MB|$, ýagny

$$50 + (3+y)^2 = 50 + (7-y)^2, \ \ (3+y)^2 = (7-y)^2, \ \ 3 + y = \underline{+}(7-y).$$

Aýyrmak alamaty meseläniň şertine garşy gelýär, şonuň üçin

$$3 + y = 7 - y, \ \ y = 2.$$

Şunlukda, $M(0, 2, 0)$ gözlenýän nokatdyr.

262. $M_1(2,4,-2)$ we $M_2(-2,4,2)$ nokatlary birleşdirýän M_1M_2 kesimi

$\lambda = 3$ gatnaşykda bölýän M nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. Kesimi berlen gatnaşykda bölmekligiň (2) formulasyny ulanalyň:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{2+3(-2)}{1+3} = -1$$

$$y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4+3\cdot 4}{1+3} = 4$$

$$z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-2+3\cdot 2}{1+3} = 1.$$

Diýmek, $M(-1,4,1)$ gözlenilýän nokatdyr.

263. $A(-3,8,2)$ we $B(1,-2,0)$ nokatlary birleşdirýän AB kesimde absisasy $x_c = -2$ bolan nokady tapmaly.

Çözülişi. Görnüşi ýaly $x_A < x_C < x_B$, we C nokat AB kesimiň içinde ýatýar. C nokat bu kesimi $\lambda = \frac{|AC|}{|CB|}$ gatnaşykda bölýär. λ tapmak üçin (2) formuladan peýdalanalyň:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad -2 = \frac{-3+\lambda\cdot 1}{1+\lambda}.$$

Bu ýerden $\lambda = \frac{1}{3}$. (3) formulanyň ikinji we üçünji deňliklerinden peýdalanalyň:

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{8+\frac{1}{3}(-2)}{1+\frac{1}{3}},$$

$$z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{2+\frac{1}{3}\cdot 0}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Diýmek, $C\left(-2,\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right)$ gözlenilýän nokatdyr.

264. Giňişlikde $A(2,6,4)$, $B(-1,-3,2)$, $C(4,-1,2)$, $D(0,6,-2)$, $E(-5,-3,-4)$, $F(3,0,-8)$ nokatlary gurmaly.

265. M(4, -1, 2) we N(1, 3, -10) nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

266. Applikata okunda $A(-4,1,7)$ we $B(3,5,-2)$ nokatlardan deň daşlykda ýerleşen nokady tapmaly.

267. O (0,0,0) we A (1,2,2) nokatlary birleşdirýän kesimi $\frac{2}{3}$ gatnaşykda bölýän $M(x,y,z)$ nokady tapmaly.

268. Applikata okundaky $A(-3,4,-5)$ nokat bilen aralygyndaky uzaklyk 13-e deň bolan nokady tapmaly.

269. $A(3,3,3)$ we $B(-1,5,2)$ nokatlar berlen. Onda AB kesimi deň üç bölege bölýän C we D nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.

270. Depeleri $A(1,2,3)$, $B(7,10,3)$, $C(-1,3,1)$ nokatlar bolan ABC üçburçlugyň A burçunyň kütek burçdugyny görkezmeli.

271. Depeleri $A(5,1,12)$, $B(11,3,8)$, $C(2,5,0)$ nokatlar bolan ABC üçburçlugyň agyrlyk merkezini tapmaly.

272. Absissalar okunda $A(2,-4,5)$ we $B(-3,2,7)$ nokatlardan deň daşlykda ýatýan nokady tapmaly.

§ 2. Wektorlar we olaryň üstünde ýönekeý amallar

Giňişlikde islendik erkin $\vec{a}$ wektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wektorlaryň kömegi bilen aşakdaky görnüşde çyzykly aňlatmak bolýar:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (1)$$

bu ýerde a_x, a_y, a_z berlen wektoryň koordinata oklara bolan proýeksiýalarydyr.

$\vec{a}$ wektoryň uzynlygy $|\vec{a}|$ bilen belgilenip, aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (2)$$

Koordinata oklarynyň ugurlary bilen $\vec{a}$ wektoryň ugrunyň arasyndaky burçlary α, β, γ bilen belgiläp, olary aşakdaky formulalar bilen tapýarlar:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (3)$$

Bu ugrukdyryjy kosinuslar bolup,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$

deňlik bilen baglanyşýandyrlar.

Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar (1) görnüşde aňladylan bolsalar, onda olaryň jemi, tapawudy aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}\,; \qquad (5)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}\,. \qquad (6)$$

$\vec{a}$ wektoryň m skalýara köpeltmek hasyly

$$m\vec{a}=ma_x\vec{i}+ma_y\vec{j}+ma_z\vec{k} \qquad (7)$$

formula bilen tapylýar.

273. Üç wektor berlen: $\vec{a}=\{2,4,0\}$, $\vec{b}=\{0,-3,1\}$, $\vec{c}=\{5,-1,2\}$. $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ wektory tapmaly.

Çözülişi. (1) , (5) , (6) we (7) formulalardan peýdalanalyň:

$$\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}\,,\ \ \vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}\,,\ \ \vec{c}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\,,$$

$$2\vec{a}=2\cdot 2\vec{i}+2\cdot 4\vec{j}=4\vec{i}+8\vec{j}\,,\ \ 3\vec{b}=-3\cdot 3\vec{j}+3\vec{k}=-9\vec{j}+3\vec{k}\,.$$

Onda

$$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=4\vec{i}+8\vec{j}+9\vec{j}-3\vec{k}+5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=(4+5)\vec{i}+(8+9-1)\vec{j}+$$

$$+(-3+2)\vec{k}=9\vec{i}+16\vec{j}-\vec{k}.$$

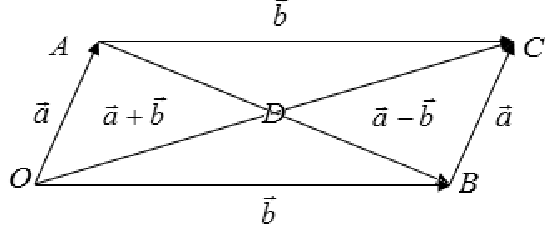
Şunlukda, $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}\{9,16,-1\}$.

274. 1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, 2) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$, 3) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ bolmagy üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özara nähili ýerleşmeli.

Çözülişi. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary umumy 0 başlangyja getireliň. Şonda $\vec{a}+\vec{b}$ we $\vec{a}-\vec{b}$ wektorlar taraplary $\vec{a}$ we $\vec{b}$ bolan parallelogramyň diagonallary bolarlar (18-nji çyzgy).

ΔOAB we ΔOBC garalyň. $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{BC}|$ we $\overrightarrow{OB}$ bu üçburçluklar üçin umumy tarapdyr. Şoňa görä

1) $\angle AOB=\angle OBC$ bolsa $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ bolýar. $\angle AOB+\angle OBC=\pi$ bolany üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar perpendikulýar bolmalydyr.



18-nji çyzgy

2) $\angle AOB < \angle OBC$ bolsa $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$ bolýar. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar ýiti burçy emele getirmeli.

3) $\angle AOB > \angle OBC$ bolsa $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$ bolýar. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kütek burç emele getirmelidir.

275. Uzynlygy 6-a deň bolan $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ wektor bilen 45° burç emele getirýär. $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proýeksiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 6 \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

276. $\vec{a}\{2,-3,1\}$ we $\vec{b}\{-4,1,-2\}$ wektorlary goşmaly.

Çözülişi. $\vec{a}+\vec{b}$ wektoryň koordinata oklaryna bolan proýeksiýalaryny tapalyň:

$$np_x(\vec{a}+\vec{b}) = 2+(-4) = -2;$$

$$np_y(\vec{a}+\vec{b}) = -3+1 = -2;$$

$$np_z(\vec{a}+\vec{b}) = 1+(-2) = -1.$$

Onda $\vec{a}+\vec{b} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ýa-da $\vec{a}+\vec{b} = \{-2,-2,-1\}$.

277. $\vec{a}\{-2,3,-5\}$ *we* $\vec{b}\{1,0,-5\}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

Çözülişi. Alýarys:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-5)^2} = \sqrt{38}.$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{-2}{\sqrt{38}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{3}{\sqrt{38}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{-5}{\sqrt{38}}.$$

Şeýle hem

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+0^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}, \quad \cos\beta_2 = 0, \quad \cos\gamma_2 = \frac{-5}{\sqrt{26}}.$$

Onda

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2 =$$

$$= \frac{(-2)\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-5)\cdot(-5)}{\sqrt{38}\sqrt{26}} = \frac{23}{\sqrt{988}}, \quad \varphi = \arccos\frac{23}{\sqrt{988}} + k\pi \text{ bolar.}$$

278. $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ wektoryň ugrukdyryjy kosinuslaryny tapmaly.

Çözülişi. (3) formulany ulanalyň.

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}} = \frac{8}{9}, \quad \cos\beta = -\frac{4}{9}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{9}.$$

279. $A(2,-6,-3)$ we $B(4,-1,-7)$ nokatlar berlen bolsa, $\overrightarrow{AB}$ wektory tapmaly.

280. $\vec{a}\{-3,4-1\}$, $\vec{b}\{-1,2,3\}$, $\vec{c}\{-4,-2,1\}$ wektorlar berlen bolsa, $4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$, $-5\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$ wektorlary tapmaly.

280*. $\vec{a} = 20\vec{i}+30\vec{j}-60\vec{k}$ wektoryň uzynlygyny we ugrukdyryjy kosinuslaryny tapmaly.

281. $\vec{a} = m\vec{i}+(m+1)\vec{j}+m(m+1)\vec{k}$ wektoryň uzynlygyny tapmaly.

282. Depeleri $A(1,2,3)$, $B(3,2,2)$ we $C(1,4,1)$ nokatlarda ýatan üçburçlugyň deňtaraply üçburçlukdygyny görkezmeli.

283. $\vec{a} = 2\vec{i}+3\vec{j}$ we $\vec{b} = \vec{i}+5\vec{j}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.
($\vec{i}, \vec{j}$ – birlik wektorlar).

284. Eger $\vec{i}, \vec{j}$ özara perpendikulýar bolan birlik wektorlar bolsa, $\vec{a} = 3\vec{i}-4\vec{j}$ wektoryň uzynlygyny tapmaly.

285. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}-6\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{i}+7\vec{j}$, $\overrightarrow{CA} = -3\vec{i}-\vec{j}$ wektorlar üçburçlugy emele getirýärler. Eger $\vec{i}, \vec{j}$ wektorlar özara perpendikulýar ortlar bolsa, üçburçlugyň burçlaryny kesgitlemeli.

286. Başlangyjy $A(x_1, y_1, z_1)$ ahyry $B(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar bolan $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalaryny tapmaly.

287. $\vec{a}\{3,2,1\}$ wektory $\vec{b}\{6,2,1\}$, $\vec{c}\{4,5,-2\}$, $\vec{d}\{1,-5,4\}$ bazisde dagydyp ýazmaly.

Çözülişi.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{b}+\alpha_2\vec{c}+\alpha_3\vec{d},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – sanlary kesgitlemek üçin bu deňlikde berlen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ wektorlaryň $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dekart bazisde dagytmalaryny goýalyň;

$$3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} = \alpha_1(6\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})+\alpha_2(4\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k})+\alpha_3(\vec{i}-5\vec{j}=4\vec{k}) =$$
$$= (6\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3)\vec{i}+(\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3)\vec{j}+(2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3)\vec{k}.$$

Bu ýerden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ näbelliler üçin çyzykly üç deňleme sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 1 \end{cases}.$$

Bu sistemany çözüp,

$$\alpha_1 = \frac{31}{8}, \quad \alpha_2 = -\frac{33}{8}, \quad \alpha_3 = -\frac{30}{8}$$

bahalary alarys. Şunlukda,

$$\vec{a} = \frac{31}{8}\vec{b} - \frac{33}{8}\vec{c} - \frac{30}{8}\vec{d}.$$

§ 3. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly

Iki $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly diýlip, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň uzynlyklarynyň, şol wektorlaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeldilmegine deň bolan skalýar ululyga aýdylýar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

1. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly, berlen wektorlaryň biri nola deň bolanda ýa-da berlen wektorlar özara perpendikulýar bolanda nola deňdir.

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, ýagny wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly orun çalşyrma kanunyna boýun egýär.

3. Iki wektoryň jeminiň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyly şol wektorlaryň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir:

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

4. Islendik hemişelik m köpeldiji üçin, wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly köpeltmegiň utgaşdyrma kanunyna boýun egýär:

$$m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a}(m\vec{b}).$$

5. Wektoryň öz-özüne skalýar köpeltmek hasyly şol wektoryň uzynlygynyň kwadratyna deňdir:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Goý, iki $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özüniň koordinatalary bilen berlen bolsun:

$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$. Onda olaryň skalýar köpeltmek hasyly aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2)$$

Olaryň arasyndaky burç

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (3)$$

formula boýunça tapylýar. Bir wektoryň beýleki wektora bolan proýeksiýasy aşakdaky görnüşdedir:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (4)$$

Nola deň bolmadyk $\vec{a}\{a_x,a_y,a_z\}$ we $\vec{b}\{b_x,b_y,b_z\}$ wektorlaryň kolleniarlyk şerti

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}, \qquad (5)$$

olaryň perpendikulýarlyk şerti bolsa

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \qquad (6)$$

görnüşdedir.

288. Skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlemesini ulanyp, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik wektorlaryň arasyndaky baglanyşygy getirip çykarmaly.

Çözülişi. Skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden alýarys:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cos 0^\circ=1\cdot1\cdot1=1,\quad \vec{i}^{\,2}=1;$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{j}^{\,2}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{k}^{\,2}=1;$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot0=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Belli bolşy ýaly $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$, onda $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$.

289. $\vec{a}\{5,3,2\}$, $\vec{b}\{1,-2,4\}$ bolsa $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proýeksiýasyny tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$$

Bu ýerden

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{5\cdot1-3\cdot2+2\cdot4}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

290. Nokada $\vec{f}$ güýç täsir edýär. Onuň koordinata oklara bolan proýeksiýalary $(9,5,-2)$ bolsa, onuň ululygyny we ugruny kesgitlemeli.

Çözülişi. $\vec{f}=\{9,5,-2\}$ güýç wektoryň ugrukdyryjy kosinuslaryny tapalyň:

$$\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{9^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{110}},$$

$$\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{110}},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{110}}.$$

$\vec{f}$ güýjüň ululygyny tapalyň:

$$\left|\vec{f}\right|=\sqrt{9^2+5^2+(-2)^2}=\sqrt{110}$$

291. Depeleri $A(3,2,-3)$, $B(5,1,-1)$ we $C(1,-2,1)$ nokatlar bolan üçburçlugyň içki A burçuny tapmaly.

Çözülişi. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň arasyndaky burçy φ bilen belgiläliň:

$$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\quad \overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}.$$

Bu ýerden

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{4+1+4}=3,\quad \left|\vec{AC}\right|=\sqrt{4+16+16}=6.$$

Skalýar köpeltmek hasylyny tapalyň:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-2)+(-1)(-4)+2\cdot 4=-4+4+8=8.$$

Onda

$$\cos\varphi=\frac{8}{3\cdot 6}=\frac{4}{9},\quad \varphi=\arccos\frac{4}{9}\approx 63^\circ 36.$$

292. Eger $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$ we $\vec{a}\perp\vec{b}$ bolsa $(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$ tapmaly.

Çözülişi. Alarys:

$$(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})\ =\ 10\cdot|\vec{a}|^2-5\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{b}\cdot\vec{a}-3\left|\vec{b}\right|^2=10\cdot 2^2-$$

$$5\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{2}+6\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\frac{\pi}{2}-3\cdot 3^2=40-27=13.$$

293. Eger $\vec{i}, \vec{j}$ özara biri-birine perpendikulýar bolan birlik wektorlar bolup, $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i}\,4\vec{j}$ bolsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ skalýar köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

294. $|\vec{a}| = \frac{1}{3}$, $|\vec{b}| = 6$ we $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bolsa $3|\vec{a}| - 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2$ aňlatmanyň san bahasyny tapmaly.

295. Eger $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$ $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$ we $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bolsa $\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} + 1$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

296. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ we $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$, onda $cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Alarys:

$$\vec{a}\vec{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 8, |\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}.$$

Şunlukda, $cos\,\varphi = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ we $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

297. Eger $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ bolsa $(3\vec{a} - 2\vec{b})(5\vec{a} - 6\vec{b})$ skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

298. Dörtburçlugyň depeleri berlen: $A(-4,-3,-2)$, $B(2,-2,-3)$, $C(-8,-5,1)$, $D(4,-3,-1)$. Onuň diagonallarynyň özara perpendikulýardygyny subut etmeli.

299. Depeleri $A(-1,-4,0)$, $B(-2,-2,-2)$ we $C(-3,-3,2)$ bolan üçburçlugyň içki burçlaryny tapmaly.

300. Eger $\vec{a}\{5,4,-6\}$, $\vec{b}\{2,-1,-1\}$ bolsa $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proýeksiýasyny tapmaly.

301. Wektorlaryň perpendikulýar ýa-da perpendikulýar däldigini barlamaly:

1) $\vec{a}\{3,4,-1\}$, $\vec{b}\{1,2,11\}$;

2) $\vec{a}\{1,3,4\}$, $\vec{b}\{2,-1,3\}$.

Çözülişi.

1) $3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 1\cdot 11 = 3 + 8 - 11 = 11 - 11 = 0$;

2) $1\cdot 2 + 3(-1) + 4\cdot 3 = 2 - 3 + 12 = 11 \neq 0$.

Görnüşi ýaly 1) perpendikulýar, 2) bolsa perpendikulýar däldir.

302. Wektorlaryň perpendikulýar ýada perpendikulýar däldigini barlamaly

1) $\vec{a}\{3,0,6\}$, $\vec{b}\{4,7,2\}$, 2). $\vec{c}\{-3,2,5\}$, $\vec{d}\{6,-3,1\}$.

303. Depeleri $A(1,4,3)$, $B(2,3,5)$, $C(2,5,1)$ we $D(3,4,3)$ nokatlar bolan dörtburçlugyň parallelogramdygyny görkezmeli.

304. Depeleri $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$ we $D(3,-5,3)$ nokatlar bolan dörtburçlugyň trapesiýadygyny görkezmeli.

§ 4. Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly

Goý, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsun. Şu wektorlaryň kömegi bilen aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan $\vec{g}$ wektory guralyň:

1. $|\vec{g}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, bu ýerde φ burç $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň aralygyndaky burç.
2. $\vec{g}$ wektor $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň her birine ortogonal bolmaly.
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{g}$ wektorlar sag üçlügi emele getirmeli.

Şu usul bilen gurlan $\vec{g}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly diýilýär we $\vec{a}\times\vec{b}$ bilen belgilenýär.

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$.
3. $(m\vec{a}\times n\vec{b})=(mn)(\vec{a}\times\vec{b})$.
4. Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň biri nol wektor bolan halda ýa-da $\vec{a}$ II $\vec{b}$ bolan halda we diňe şu iki halda, iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly nola deňdir.

Iki kolleniar bolmadyk $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň moduly, şu wektorlar bilen gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir.

Goý, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özüniň koordinatalary bilen berlen bolsun:

$\vec{a}\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}\{b_x,b_y,b_z\}$. Onda bu wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly aşakdaky kesgitleýji bilen kesgitlenip bilner:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

305. Depeleri $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ we $C(x_3, y_3, z_3)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň uzynlygy kesgitlemä görä $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlar bilen gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir. Biziň üçburçlugymyzyň S meýdany parallelogramyň meýdanynyň ýarysyna deňdir, ýagny $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ bolar.

$\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapalyň:

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},\quad \overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}.$$

Onda

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}+\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

bu ýerden alarys:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{AC}\right|=$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}.$$

Şunlukda,

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{AC}\right|=$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Eger ABC üçburçlugyň depeleri xOy tekizlikde ýatýan bolsa, ýagny $z_3 = z_2 = z_1 = 0$ bolsa, onda aşakdaky formulany alarys:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

306. Depeleri $A(2,2,2)$, $B(1,3,3)$, $C(3,4,2)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

307. Depeleri $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$ we $C(5,2,6)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

308. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlar $\vec{a} + b + \vec{c} = 0$ şerti kanagatlandyrýan bolsalar $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ deňligi subut etmeli.

Çözülişi. Berlen deňligi $\vec{b}$ wektora wektor köpeldeliň:

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} = \vec{0} \times \vec{b} = \vec{0},$$

bu ýerden

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} = 0.$$

Kesgitlemä görä $\vec{b} \times \vec{b} = 0$, $\vec{c} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{c})$. Onda $\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} = 0$ ýada $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$. Şeýle hem $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$ bolýandygy subut edilýär. Diýmek, berlen şertlerde $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

309. $\vec{a}\{1,0,-2\}$, $\vec{b}\{2,1,0,\}$, $\vec{c}\{-1,1,1\}$ wektorlar berlen. Onda $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ we $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ tapmaly.

Çözülişi.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.$$

$\vec{a} \times \vec{b}\{2,-4,1\}$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-5\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}.$$

Şeýle hem, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-4\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}$ (barlamaly). Diýmek,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

310. Deňligi subut etmeli $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

311. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ we $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ wektorlar berlen. Onda $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$ wektor köpeltmek hasylyny tapmaly.

312. Depeleri $A(2,-1,3)$, $B(1,4,2)$, $C(3,1,-1)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň S meýdanyny tapmaly.

313. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli

1) $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+4\vec{b})$;

2) $(3i-4j+5k)\times(2i+6j-k)$.

314. Skalýary hasaplamaly

$$A=(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\vec{b})^2.$$

315. Eger $\vec{A}\perp\vec{B}$ we $\vec{A}\perp\vec{C}$ bolsa $\vec{A}\times(B\times\vec{C})=0$ deňligi subut etmeli.

316. $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$ şert boýunça $\vec{a}=\overline{b}\times\vec{x}$ bolar ýaly edip $\vec{x}$ wektory tapmak hemişe mümkinmi?

Çözülişi. $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ we $\vec{x}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly bolmagy üçin kesgitlemä görä, $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ we $\vec{x}$ wektora perpendikulýar bolmagy zerur. $\vec{b}$ wektoryň üsti bilen $\vec{a}$ wektoryň okuna perpendikulýar tekizlik geçireliň we şol tekizligiň üstünde islendik bir $\vec{c}$ wektory alalyň. $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{d}$ belgiläliň. Wektor $\vec{a}\,\mathrm{II}\,\vec{d}$, şoňa göräde $\vec{a}=\lambda\vec{d}$, şeýle hem

$$\lambda\vec{d}=\lambda(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\times\lambda\vec{c}.$$

Eger $\lambda\vec{c}=\vec{x}$ diýip alsak, onda $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{x}$ meseläniň çözüwi bolar.

317. Eger $\vec{x}$ wektoryň $\vec{a}\{5,3,2\}$ we $\vec{b}\{1,-2,4\}$ wektorlara perpendikuýardygy belli hem-de $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})=85$ bolsa, $\vec{x}$ wektory tapmaly.

Çözülişi. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektora perpendikulýar bolan islendik wektor olaryň wektor köpeltmek hasylyna, ýagny $\vec{a}\times\vec{b}$ wektora kolleniar bolmaly.

Diýmek,

$$\vec{x}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=\lambda(16\vec{i}-18\vec{j}-13\vec{k}).$$

$\vec{x}$ bahasyny meseläniň ikinji şertindäki deňlige goýup alarys:

$$\lambda(16\vec{i}-18\vec{j}-13\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})=85$$

ýa-da

$$-85\lambda=85,\quad \lambda=-1\ .\ \text{Diýmek,}\ \ \vec{x}=-16\vec{i}+18\vec{j}+13\vec{k}.$$

318. Eger $|\vec{a}|=5,\ \ |\vec{b}|=2$ we $\vec{a}\vec{b}=6$ bolsa $|\vec{a}\times\vec{b}|$ tapmaly.

319. $M(1,2,3)$ nokada $\vec{F}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ güýç goýlan. Onda bu güýjüň $M(3,2,-1)$ nokada görä momentini tapmaly.

Çözülişi. Eger $\vec{F}$ güýç B nokada goýlan bolsa, onda bu güýjüň A nokada görä momenti $\vec{AB}$ wektoryň $\vec{F}$ wektora wektor köpeltmek hasylyna deňdir. $\vec{AB}$ wektory tapalyň:

$$\vec{AB}=(1-3)\vec{i}+(2-2)\vec{j}+(3+1)\vec{k}=-2\vec{i}+4\vec{k}.$$

Onda

$$m_A\vec{F}=\vec{AB}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 0 & 4\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=18\vec{i}-12\vec{j}-4\vec{k}.$$

320. $M(2,-1,1)$ nokada $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ güýç goýlan bolsa, bu güýjüň koordinatalar başlangyjyna görä momentini tapmaly.

§ 5. Dürli meseleler

321. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda $A(0,y,z), B(x,y,0)$ we $C(x,y,0)$ nokatlaryň ýerleşişini anyklamaly.

322. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda $A(2,0,0)$, $B(0,-5,0)$, $C(0,0,-1)$, $D(0,2,2)$, $E(5,-5,0)$ nokatlaryň ýerleşişini anyklamaly.

323. $A(a,b,c)$ nokadyň 1) xOy tekizlige görä, 2) yOz tekizlige görä, 3) Oy oka görä, 4) Koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik bolan nokatlarynyň koordinatalaryny tapmaly.

324. Applikatalar okunda $A(4,-1,2)$ we $B(0,2,-1)$ nokatlardan deň daşlykda ýatýan nokadyň koordinatalaryny tapmaly

325. Depeleri $A(3,-2,5)$, $B(-2,1,-3)$ we $C(5,1,-1)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň ýitiburçly üçburçlukdygyny subut etmeli.

326. $A(7,2,-3)$ we $B(-5,0,4)$ nokatlary birleşdirýän AB kesim C nokat bilen $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{5}$ gatnaşykla bölünen bolsa, C nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

327. AB kesim C,D,E,F nokatlar bilen deň bäş bölege bölinen. Iki $C(3,-5,7)$ we $F(-2,4,-8)$ nokatlar belli bolsa, galan A,B,D,E nokatlary tapmaly.

328. Goý, $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar berlen ok bilen degişlilikde $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π burçy emele getirýän wektorlar bolsun. Onda $3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ wektoryň oka bolan proýeksiýasyny tapmaly.

329. $\vec{AC}=\vec{m}$ we $\vec{BD}=\vec{n}$ parallelogramyň diagonallary bolsa, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ we $\vec{DA}$ wektorlary $\vec{m}$, $\vec{n}$ wektorlaryň üsti bilen aňlatmaly.

330. $ABCDA'B'C'D'$ parallelogramyň gapyrgalary bilen gabat gelýän $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, $\vec{AA'}=\vec{c}$ wektorlar berlen bolsa, $\vec{AC'}$, $\vec{A'C}$, $\vec{BD'}$, $\vec{B'D}$ diagonallary $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar bilen aňlatmaly.

331. Eger O nokat ABC üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady bolsa $\vec{AO}+\vec{OB}+\vec{OC}=0$ bolýandygyny subut etmeli.

332. Depeleri $A(2,1,-4)$, $B(1,3,5)$, $C(7,2,3)$ we $D(8,0,-6)$ nokatlarda bolan dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut etmeli. Onuň taraplarynyň uzynlyklaryny tapmaly.

333. $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-1)$ we $D(3,-5,3)$ nokatlaryň trapesiýanyň depeleridigini görkezmeli we parallel taraplaryngyň uzynlyklaryny tapmaly.

334. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ we $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ wektorlaryň özara perpendikulýardygyny görkezmeli.

335. Eger $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ wektora perpendikulýar bolsa we $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ belli bolsa $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$ tapmaly.

336. Material nokada aşakdaky güýçler täsir edýär diýeliň:

$$\vec{f}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{f}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

Ol nokady $A(0,-1,0)$ nokatdan $B(4,1,-1)$ nokada çenli üýtgetmek üçin deňtäsir edýän $\vec{R}$ güýjüň ýerine ýetiren işini tapmaly.

337. $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ wektorlar berlen bolsa $\vec{a} + \vec{c}$ wektoryň $\vec{b} + \vec{c}$ wektora bolan proýeksiýasyny tapmaly.

338. $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{c})$ we $\vec{c}$ wektorlaryň biri-birine perpendikulýardygyny görkezmeli.

339. Eger $\vec{i}, \vec{j}$ özara perpendikulýar birlik wektorlar bolsa $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ we $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ wektorlaryň arasyndaky burçy hasaplamaly.

340. $\overrightarrow{AB}\{2,1,-2\}$ we $\overrightarrow{BC}\{3,2,6\}$ wektorlar üçburçlugyň taraplary bilen gabat gelýän bolsa, ol üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

341. $\vec{a}\{3,0,-4\}$ we $\vec{b}\{1,-2,2\}$ wektorlar berlen. Bu wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny we olar bilen gurlan parallelogramyň meýdanyny tapmaly.

342. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli

1) $(2\vec{i} - \vec{j})\vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k})\vec{k} + (\vec{i} - 3\vec{k})^2$;

2) $(3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}) \times (2\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k})$;

3) $3\vec{i}(\vec{i} \times \vec{k}) + 5\vec{j}(\vec{i} \times \vec{k}) - 6\vec{k}(\vec{i} \times \vec{j})$;

4) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} \times \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

343. $\vec{x} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ wektoryň $\vec{c}$ wektora perpendikulýardygyny subut etmeli.

344. Degişlilikde ululyklary $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ bolan $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ şerti kanagatlandyrýan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsa, $|\vec{a} - \vec{b}|$ tapmaly.

345. Degişlilikde ululyklary $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ bolan $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$ şerti kanagatlandyrýan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsa, $|\vec{a} + \vec{b}|$ tapmaly.

346. Eger $\vec{i}, \vec{j}$ wektorlar biri-birine perpendikulýar bolan birlik wektorlar bolsa, $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ we $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly.

347. Eger $a = 4m - n,\ b = m + 2n,\ c = 2m - 3n$ we $m^2 = 4$, $n^2 = 1,\ (\widehat{mn}) = \frac{\pi}{2}$, bolsa $a^2 + 3(ab) - 2(bc) + 1$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

348. Üçburçlugyň depeleri berlen: $A(3,2,-3)$, $B(5,1,-1)$, $C(1,-2,1)$. Üçburçlçgyň A depesindäki içki burçy tapmaly.

349. Üçburçlugyň $A(-1,4,1)$, $B(3,4,-2)$, $C(5,2,-1)$ depeleri berlen bolsa, onuň B depesindäki içki burçy tapmaly.

350. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ we $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny tapmaly.

351. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ we $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ wektorlar bilen gurlan parallelogramyň meýdanyny tapmaly.

352. Depeleri $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyny hasaplamaly.

353. Eger $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ we $(\vec{a} \widehat{\ } \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ bolsa, $\vec{a} + 3\vec{b}$ we $3\vec{a} + \vec{b}$ wektorlar bilen gurlan parallelogramyň meýdanyny hasaplamaly.

354. Aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

$$\left[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right] + \left[(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})\right].$$

355. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ we $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny tapmaly.

356. P_1 parallelogramyň taraplary P_2 parallelogramyň diagonallaryna deň. Olaryň S_1 we S_2 meýdanlarynyň baglanyşygyny tapmaly.

357. Depeleri $A(1,1,2)$, $B(2,3,2)$, $C(5,-1,3)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň S meýdanyny tapmaly.

358. $\vec{a} = \{1,1,-2\}$, $\vec{b} = \{2,1,1\}$ we $\vec{c} = \{-1,1,1\}$ wektorlar berlen bolsa $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ tapmaly.

359. Eger $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ we $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ wektorlar berlen bolsa, onda $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$ wektor köpeltmek hasylyny tapmaly.

360. Eger $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ wektorlar berlen bolsa, onda $\vec{u}=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$ wektory tapmaly.

361. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ we $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ wektorlar bilen gurlan parallelogramyň meýdanyny tapmaly.

§ 6. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň $\vec{c}$ wektora skalýar köpeldilmegine $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} \quad \text{ýa-da} \quad (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}.$$

1. Berlen üç wektoryň orunlaryny töwerek boýunça süýşürip üýtgetsek, onda üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly üýtgemeýär:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\cdot\vec{a}=\left[\vec{c}\times\vec{a}\right]\cdot\vec{b}.$$

2. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynda wektorlaryň haýsy bolsada biriniň ornuny üýtgetmän, beýleki ikisiniň ornuny üýtgetseň, onda onuň alamaty üýtgeýär:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=-[\vec{b}\times\vec{a}]\cdot\vec{c}=\left[a\times\vec{c}\right]\cdot\vec{b}.$$

3. Üç wektor komplanar bolsa, onda olaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

362. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny tapmaly.

Çözülişi. Alarys:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=26+5+3=33.$$

363. $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ wektorlaryň komplanardygyny görkezmeli.

Çözülişi. Wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny tapalyň:

$$(\bar{a}\times\vec{b})\bar{c}=\begin{vmatrix}2&5&7\\1&1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Diýmek, wektorlar komplanardyrlar.

364. Depeleri $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$, $C(3,5,5)$ we $D(2,4,7)$ nokatlar bolan $ABCD$ piramidanyň göwrümini tapmaly.

Çözülişi. $\vec{AB}, \vec{AC}$ we $\vec{AD}$ wektorlary kesgitläliň:

$$\vec{AB}\{3,3,3\}, \vec{AC}\{2,4,4\}, \vec{AD}\{1,3,6\}.$$

Indi üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylyny tapalyň:

$$\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}3&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=18.$$

Bu bolsa $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ wektorlar bilen gurlan parallelepipediň göwrümidir:

$$V_{par}=18 \text{ kub. bir.}$$

Piramidanyň göwrümi bolsa parallelepipediň göwrüminiň altydan birine deňdir.

$$V_{pir}=\frac{1}{6}V_{par}=\frac{1}{6}18=3 \text{kub. bir.}$$

365. Depeleri $A(1,2,3)$, $B(4,1,2)$, $C(3,2,1)$ we $D(1,2,5)$ nokatlarda bolan piramidanyň göwrümini tapmaly.

366. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=5\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ wektorlaryň komplanardygyny görkezmeli.

367. $A(1,0,3)$, $B(-1,-1,2)$, $C(2,-2,2)$ we $D(0,1,9)$ nokatlaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut etmeli.

368. $\vec{a}\{1,1,3\}$, $\vec{b}\{0,2,-1\}$, $\vec{c}\{1,-1,4\}$ wektorlaryň komplanardygyny subut etmeli.

V BÖLÜM
GIŇIŞLIKDE ANALITIK GEOMETRIÝA

§ 1. Tekizlik we onuň deňlemesi

1. Tekizligiň umumy deňlemesi. Tekizligiň kesimlerdäki deňlemesi.

Eger giňişlikde dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsa, onda üstüň umumy deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Eger $F(x, y, z)$ n-nji tertipli köpagza bolsa, onda giňişlikde n-nji tertipli algebraik üst ýa-da n-nji tertipli üst berlen diýilýär.

Her bir birinji tertipli

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

deňleme giňişlikde tekizligi aňladýar. Bu ýerde A, B, C, D koeffisiýentler noldan tapawutlydyrlar. Şonuň üçin (1) deňlemä tekizligiň umumy deňlemesi diýilýär.

Koordinatalary (1) deňlemedäki x, y, z ululyklaryň koeffisiýentleri bolan $\vec{N}(A, B, C)$ wektor (1) tekizlige perpendikulýar wektordyr. Geljekde biz şu tassyklamany hemişe ulanarys.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{N}(A, B, C)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Eger (1) deňlemede $D = 0$ bolsa, onda ol tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýändir. Şeýle hem, $A = 0$ bolsa, tekizlik Ox oka, $B = 0$ bolsa Oy oka, $C = 0$ bolsa Oz oka paralleldir.

Eger $A = D = 0$ bolsa, tekizlik Ox boýunça, $B = D = 0$ bolsa Oy boýunça, $C = D = 0$ bolsa, Oz boýunça geçýändir.

Eger $A = B = 0$ bolsa, tekizlik xOy tekizlige, $B = C = 0$ bolsa, yOz tekizlige, $A = C = 0$ bolsa, xOy tekizlige paralleldir.

Eger (1) deňlemede A, B, C, D koeffisiýentler noldan tapawutly bolsalar, onda ony aşakdaky görnüşe getirip bolýar:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3)$$

bu ýerde a, b, c sanlar tekizligiň koordinata oklaryndan kesip alýan aralyklarynyň uzynlyklarydyr. Bu deňlemä tekizligiň kesimlerdäki deňlemesi diýilýär.

369. Deňlemesi $4x - y + 3z + 1 = 0$ bolan tekizligiň aşakdaky nokatlaryň haýsylary arkaly geçýändigini takyklamaly.

$A(-1, 6, 3)$, $B(3, -2, -5)$, $C(0, 4, 1)$, $D(2, 0, 5)$, $E(2, 7, 0)$, $F(0, 1, 0)$.

Çözülişi. Nokatlaryň koordinatalaryny berlen deňlemä goýup alýarys:

$$4(-1) - 6 + 3 \cdot 3 + 1 = -10 + 10 = 0;$$
$$4 \cdot 3 - (-2) + 3 \cdot (-5) + 1 = 15 - 15 = 0;$$
$$4 \cdot 0 - 4 + 3 \cdot 1 + 1 = -4 + 4 = 0;$$
$$4 \cdot 2 - 0 + 3 \cdot 5 + 1 = 8 + 16 = 24;$$
$$4 \cdot 2 - 7 + 3 \cdot 0 + 1 = 9 - 7 = 2;$$
$$4 \cdot 0 - 1 + 3 \cdot 0 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Şunlukda, tekizlik A, B, C, F nokatlaryň üstünden geçýär, $D, E -$ nokatlardan bolsa geçmeýär.

370. $M(1, -2, 1)$ nokatdan we Oz okdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Oz оку arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň:

$$Ax + By = 0 \qquad (C = D = 0)$$

Tekizligiň M nokatdan geçýändigine görä, ol nokadyň koordinatalary berlen deňlemäni kanagatlandyrmalydyr:

$$A \cdot 1 + B(-2) = 0, \qquad A = 2B.$$

Onda $2Bx + By = 0$, ýa-da $2x + y = 0$.

371. Tekizligiň $3x - 4y + 5z + 11 = 0$ umumy deňlemesini onuň kesimlerdäki deňlemesi görnüşinde ýazmaly.

Çözülişi. Azat agzany deňligiň sag bölegine geçirip, iki bölegini hem 11-e bölüp alarys:

$$3x - 4y + 5z = -11, \qquad \frac{3x}{-11} - \frac{4y}{-11} + \frac{5z}{-11} = 1$$

ýa-da

$$\frac{x}{-\frac{11}{3}} + \frac{y}{\frac{11}{4}} + \frac{z}{-\frac{11}{5}} = 1, \qquad a = -\frac{11}{3}, \quad b = \frac{11}{4}, \quad c = -\frac{11}{5}.$$

372. Eger tekizlik $P(2, -2, -4)$ nokat arkaly geçip abssisalar okuny $a = -3$ aralykdan, applikata okuny $c = 2$ aralykdan kesip geçýän bolsa, onuň kesimlerdäki deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. (3) formulany ulanýarys: ($a=-3,\quad c=2$)

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2}=1.$$

Tekizligiň P nokady arkaly geçýändigine görä ol nokadyň koordinatalary deňlemäni kanagatlandyrýandyr:

$$\frac{2}{-3}+\frac{-2}{b}+\frac{-4}{2}=1.$$

Bu ýerden $b=-\frac{6}{11}$. Şunlukda, tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-\frac{6}{11}}+\frac{z}{2}=1.$$

373. $O(0,0,0)$ we $A(1,2,3)$ nokatlary birleşdirýän kesime perpendikulýar bolan we ol kesimi deň ikä bölýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Goý, $M(x,y,z)$ tekizligiň erkin nokady bolsun. Meseläniň şertine görä $|MO|=|MA|$. Iki nokadyň arasyndaky uzaklygy tapmaklygyň formulasyny ulanyp, bu deňligi aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

ýa-da

$$2x+4y+6z-14=0, \qquad x+2y+3z-7=0.$$

Bu deňleme gözlenýän tekizligiň deňlemesidir.

374. $M_0(-3,0,2)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{N}(2,3,5)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. (2) formulany ulanalyň. Bu ýerde $A=2,\quad B=3,\quad C=5.$

$M_0(-3,0,2)$ – nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň:

$$2(x+3)+3(y-0)+5(z-2)=0$$

ýa-da

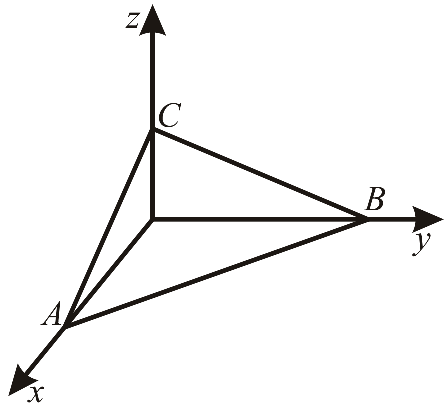
$$2x+3y+5z-4=0.$$

375. Tekizlikleri gurmaly.

1. $3x+2y+4z-8=0.$ 2. $2x+3y-6=0.$ 3. $2z-3=0.$

Gurluşy. 1) $D\neq 0$ bolany üçin tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçmeýär. Ol koordinata oklaryny dürli aralyklardan kesip geçýär. Tekizligiň Ox oky bilen kesişme nokadyny tapmak üçin deňlemede

$y = z = 0$ goýup alarys: $3x - 8 = 0$, $x = a = \frac{8}{3}$. Şeýle hem $x = z = 0$ bolsa $x = b = 4$ we $x = y = 0$ bolsa, $z = c = 2$. Şunlukda, $A\left(\frac{8}{3},0,0\right)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ (*19-njy çyzgy*).

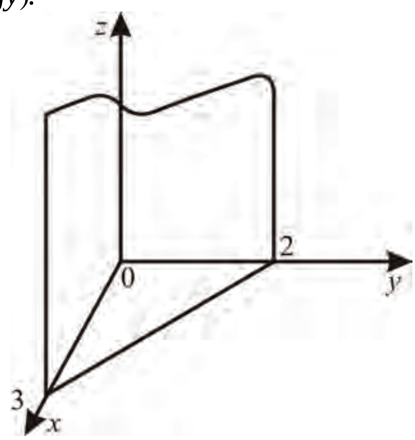


19-njy çyzgy

2. $D = -6$. $2x + 3y - 6 = 0$ deňlemäni

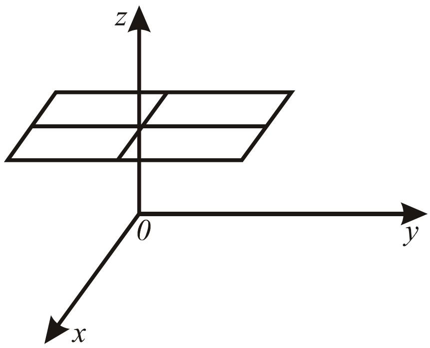
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerde $a = 3$, $b = 2$. Bu tekizlik Oz oka paralleldir (*20-nji çyzgy*).



20-nji çyzgy

3. Görnüşi ýaly $A=B=0$. Onda berlen tekizlik xOy koordinata tekizligine paralleldir we Oz oky $\frac{3}{2}$ aralykdan kesip geçýär (*21-nji çyzgy*).



21-nji çyzgy

376. Tekizlikleri gurmaly.

1) $x+2y-z-4=0;$ 2) $2x+3z-6=0;$

3) $2y-5=0;$ 4) $2y-3z=0.$

377. Ox oky we $M(3,2,4)$ nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Gözleýän deňlemämiziň umumy görnüşü aşakdaky ýalydyr: $By+Cz=0$. Bu deňlemä M nokadyň koordinatalaryny goýup alýarys:

$$2B+4C=0 \quad \text{ýa-da} \quad B=-2C.$$

Onda $-2Cy+Cz=0$ we $2y-z=0$ alarys.

378. Ox oka perpendikulýar bolan we $M(2,-1,3)$ nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Ox oka perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir: $Ax+D=0$. Şu deňlemä M nokadyň koordinatalaryny goýup alýarys:

$$Ax-2A=0, \qquad x-2=0.$$

379. Merkez diýip at berilýän $A(a,b,c)$ nokatdan, R radiusa deň bolan daşlykda ýatýan giňişligiň nokatlar köplüginiň emele getirýän şar üstüniň (sferanyň) deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Goý, $M(x,y,z)$ sferanyň erkin nokady bolsun. Meseläniň şertine görä $|AM| = R.$ Bu ýerde $|AM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$ Diýmek,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R \text{ ýa-da } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Eger sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa, onda

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

380. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ deňleme berlen. Şu deňlemäniň emele getirýän üstüni anyklamaly.

381. Deňlemesi $2x - 3y + 4z - 8 = 0$ bolan tekizligiň aşakdaky nokatlaryň haýsylary arkaly geçýändigini kesgitlemeli:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 0 \text{ we } 4x - 3y - 2z - 3 = 0.$$

382. $M_0(3,4,5)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{N}(-1,-3,2)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

383. Aşakdaky tekizlikleriň koordinata oklaryna görä ýerleşiş aýratynlyklaryny anyklamaly.

1. $3x - 5z + 1 = 0,$ 2. $9y - 2 = 0,$ 3. $x + y - 5 = 0,$

4. $2x + 3y - 7z = 0,$ 5. $8y - 3z = 0.$

384. Ox okdan we $Q(1,-1,3)$ nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

385. Oy okdan we $P(2,1,-1)$ nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

386. $M(4,-4,2)$ nokat arkaly geçýän we a) xOz tekizlige parallel, b) xOy tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

387. Tekizligiň umumy deňlemesi berlen: $x - 4y + 3z - 2 = 0$. Onuň kesimlerdäki deňlemesini ýazmaly.

388. $P(2,3,4)$ nokat arkaly geçýän we Ox, Oy oklary $a = 1$, $b = -1$ aralykdan kesip geçýän tekizligiň kesimlerdäki deňlemesini ýazmaly.

389. $P(-1,-1,4)$ nokatdan tekizligiň $Q(2,1,3)$ nokadyna perpendikulýar geçirilen bolsa, tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

390. Aşakdaky tekizlikleriň koordinatalar oklaryny näçe uzaklykdan kesip geçýändigini takyklamaly:

1) $2x - 3z - z + 12 = 0,$ 2) $5x + y - 3z - 15 = 0,$ 3) $x - y + z - 1 = 0,$

4) $x - 4z + 6 = 0,$ 5) $5x - 2y + z = 0,$ 6) $x - 7 = 0.$

391. Tekizligiň deňlemesini ýazmaly:

a) $(2,-5,3)$ nokat arkaly geçýän we xOz tekizlige parallel;

b) $(-3,1,2)$ nokat arkaly geçýän we Oz oka parallel

ç) Iki $(4,0,-2)$, $(5,1,7)$ nokat arkaly geçýän we Ox oka parallel.

392. $(-2,7,3)$ nokat arkaly geçýän we $x-4y+5z-1=0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

393. Koordinata tekizlikleri bilen we $x+2y-3z+2=0$ tekizlik bilen çäklenen piramidanyň göwrümini tapmaly.

§ 2. Tekizlikleriň özara ýerleşişi

Goý, deňlemeleri $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ bilen iki tekizlik berlen bolsun: Eger $\vec{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ we $\vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$ wektorlar degişlilikde tekizliklere geçirlen perpendikulýar wektorlar bolsa, onda iki tekizligiň arasyndaky burç aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$\text{Cos}\varphi=\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (1)$$

Eger $\vec{N}_1$ we $\vec{N}_2$ wektorlar kollinear bolsalar, onda tekizlikler paralleldirler:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (2)$$

$\vec{N}_1\vec{N}_2=0$ şert, ýagny

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (3)$$

şert tekizlikleriň perpendikulýarlyk şertidir.

Goý, üç tekizlik özüniň umumy deňlemeleri bilen berlen bolsun.

$$\begin{aligned}&A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\&A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;\\&A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Bu tekizlikleriň umumy nokadynyň bolmagy üçin,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

bolmalydyr.

394. $M(2,-1,4)$ nokat arkaly geçýän we $x - y + 2z - 3 = 0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. $M(2,-1,4)$ nokat arkaly geçýän tekizlikleriň toplumyny ýazalyň:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{2} = \lambda.$$

Bu ýerden $A = \lambda,\quad B = -\lambda,\quad C = 2\lambda.$ Eger $\lambda = 1$ bolsa $A = 1,\ B = -1,\ C = 2.$ Şunlukda, gözleýän tekizligimiziň deňlemesini ýazyp bileris:

$$(x-2) - (y+1) + 2(z-4) = 0,$$

ýa-da

$$x - y + 2z - 11 = 0.$$

395. Koordinatalar başlangyjyndan we $N(1,-4,2)$ nokat arkaly geçýän we $x - y + 2z - 3$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Tekizligiň umumy deňlemesinden peýdalanalyň. $Ax + By + Cz + D = 0.$ $D = 0$ bolsa tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýändir. $Ax + By + Cz = 0.$ Tekizligiň N nokat arkaly geçýändigine görä, ol nokadyň koordinatalary deňlemäni kanagatlandyrmalydyr.

$$A - 4B + 2C = 0.$$

Tekizligiň perpendikulýarlyk şertini ulanyp, ýenede bir deňleme alýarys:

$$A - B + 2C = 0$$

deňlemeleri bilelikde çözüp taparys:

$$B = 0,\quad A = -2C$$

onda

$$-2Cx + Cz = 0$$

ýa-da

$$2x - z = 0.$$

396. Koordinatalar başlangyjyndan tekizligiň $M(2,-1,2)$ nokadyna perpendikulýar geçirilen bolsa, tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte görä $\vec{r} = \vec{OM}$ radius-wektor tekizlige perpendikulýardyr we onuň koordinatalary M nokadyň koordinatalaryna deňdir: $\vec{r}\{2,-1,2\}$. Onda

$$2(x-2)-1(y+1)+2(z-2)=0$$

ýa-da

$$2x-y+2z-9=0.$$

397. $M(2,-1,2)$ we $N(8,-7,5)$ nokatlary birikdirýän $\vec{MN}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäni aşakdaky görnüşde gözläliň:

$$A(x-8)+B(y+7)+C(z-5)=0.$$

$\vec{MN}$ wektoryň proýeksiýalaryny tapalyň:

$A=8-2=6,\qquad B=-7-(-1)=-6,\qquad C=5-(-2)=7.$

Tapylanlary tekizligiň deňlemesine goýup, alýarys:

$$6(x-8)-6(y+7)+7(z-5)=0;$$

ýa-da

$$6x-6y+7z-125=0.$$

398. Berlen $(8,-3,1)$ we $(4,7,2)$ nokatlar arkaly geçýän we $3x+5y-7z-21=0$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Tekizligiň deňlemesini $A(x-8)+B(y+3)+C(z-1)=0$ görnüşde gözläliň. $(4,7,2)$ nokadyň şu tekizlikde ýatýanlygy üçin ol bu deňlemäni kanagatlandyrmalydyr.

$$A(4-8)+B(7+3)+C(2-1)=0,$$
$$-4A+10B+C=0.$$

Ýene-de bir deňlemäni iki tekizligiň perpendikulýarlyk şertinden alýarys:

$$3A+5B-7C=0.$$

Şunlukda, biz

$$\begin{cases} -4A+10B+C=0; \\ 3A+5B-7C=0. \end{cases}$$

sistemany çözüp, A we B sanlary tapalyň:

$$\frac{A}{C}=\frac{3}{2},\quad \frac{B}{C}=\frac{1}{2}.$$

Bu ýerden $A=\frac{3}{2}C, \quad B=\frac{1}{2}C.$ Tapylanlary tekizligiň deňlemesine goýup alarys:

$$\frac{3}{2}C(x-8)+\frac{1}{2}C(y+3)+C(z-1)=0,$$

$$3x+y+2z-23=0.$$

Bu bolsa gözleýän tekizligimiziň deňlemesidir.

399. $x+y-1=0$ we $2x-y+\sqrt{3}z+1=0$ tekizlikleriň arasyndaky burçy tapmaly.

Çözülişi. Berlen tekizliklere perpendikulýar bolan $\vec{N}_1$ we $\vec{N}_2$ wektorlaryň koordinatalaryny ýazalyň:

$$\vec{N}_1\{1,1,0\}, \qquad \vec{N}_2(2,-1,\sqrt{3}).$$

formulany ulanyp, alýarys:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{2-1}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+1+3}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\frac{1}{4}, \qquad \cos\varphi=\frac{1}{4},$$

bu ýerden

$$\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx 75^{o}30'$$

400. Eger tekizlik Oz oky arkaly geçip, $2x+y-\sqrt{5}z=0$ tekizlik bilen $\frac{\pi}{3}$ burçy emele getirýän bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Bilşimiz ýaly Oz oky arkaly geçýän tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$Ax+By=0.$ $m=\frac{A}{B}$ belgilemäni geçirip, alýarys: $mx+y=0.$

Şu tekizlige perpeňdikulýar bolaň $\vec{N}(m,1,0)$ wektor $\vec{N}_1(2,1,-\sqrt{5})$ wektor bileň $\frac{\pi}{3}$ burçy emele getirýär:

Diýmek,

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{N}\vec{N}_1}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\vec{N}_1\right|}, \qquad \frac{1}{2}=\frac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{4+1+5}},$$

$$\sqrt{10(m^2+1)} = 4m+2, \qquad 10(m^2+1) = 16m^2+16m+4$$

$$6m^2+16m-6=0, \qquad m_1 = \frac{1}{3}, \qquad m_2 = -3.$$

Şunlukda, meseläniň şertini aşakdaky iki tekizlik kanagatlandyrýar

$$\frac{1}{3}x + y = 0, \qquad -3x+y=0.$$

401. $M(-1,-1,2)$ nokat arkaly geçýän we $x-2y+z-4=0$, $x+2y-2z+4=0$ tekizliklere perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Berlen tekizliklere perpendikulýar bolan wektorlary ýazalyň:

$\vec{N}_1\{1,-2,1\}$, $\vec{N}_2\{1,2,-2\}$. Bu wektorlara perpendikulýar bolan wektory tapmak üçin kesgitleýjini hasaplalyň:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 * \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2i+3j+4k.$$

Indi $M(-1,-1,2)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{N}\{2,3,4\}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyp bileris:

$$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0;$$
$$2x+3y+4z-3=0.$$

402. Aşakdaky tekizlikleriň umumy nokadynyň bardygyny görkezmeli we ony tapmaly:

$$x-y-z-10=0;$$
$$4x+11z+43=0;$$
$$7x-5y-31=0.$$

Çözülişi. Berlen tekizliklere perpendikulýar bolan $\vec{N}_1,\ \vec{N}_2,\ \vec{N}_3$ wektorlary ýazalyň:

$$\vec{N}_1\{1,-1,-1\}, \quad \vec{N}_2\{4,0,11\}, \quad \vec{N}_3\{7,-5,0\}.$$

Bularyň koordinatalaryndan düzülen kesgitleýji noldan tapawutlydyr:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Şonuň üçin bu tekizlikler diňe bir nokatda kesişýärler. Ony tapmak üçin aşakdaky sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} x-y-z=10 \\ 4x+11z=-43 \\ 7x-5y=31 \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp taparys:

$$x=3, \quad y=-2, \quad z=-5.$$

Şunlukda, üç tekizligiň ýeke-täk kesişme nokady, $P(3,-2,-5)$ nokatdyr.

403. $2x-y+2z+10=0$ we $6x+2y-3z-1=0$ tekizlikleriň arasyndaky burçy tapmaly.

404. $(-4,-8,6)$ nokat arkaly geçýän, $\vec{a}\{2,-4,-3\}$ wektora parallel we $3x-7y-5z-8=0$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

405. Tekizlikleriň kesişme nokatlaryny tapmaly.

1) $5x+8y-z-7=0$
$x+2y+3z-1=0$
$2x-3y+2z-9=0$
$2x-y+5z-4=0.$

2) $x-4y-2z+3=0$
$3x+y+z-5=0$
$-3x+12y+6z-7=0$

3) $5x+2y-13z+23=0,$
$3x-z+5=0.$

406. Tekizlikleriň umumy nokadynyň bardygyny ýa-da ýokdygyny takyklamaly.

1) $5x-z+3=0,$
$2x-y-4z+5=0,$
$3y+2z-1=0,$
$3x+4y+5z-3=0.$

2) $5x+2y-6=0,$
$x+y-3z=0,$
$2x-3y+z+8=0,$
$3x+2z-1=0.$

407. $4x-y+3z-1=0$ we $x+5y-z+2=0$ tekizlikleriň kesişme çyzygy arkaly

1) Koordinatalar başlangyjyndan geçýän tekizlik geçirmeli,
2) (1,1,1) nokat arkaly geçýän tekizlik geçirmeli.

408. Tekizlikleriň arasyndaky burçy tapmaly.

1) $6x+2y-4z+5=0,$
$9x+3y-6z-2=0.$

2) $x-y+\sqrt{2}z-5=0,$
$x=0.$

3) $x+2y-z=0,$
$2x+y+4z+3=0.$

409. Oz oky arkaly geçip, $y=x$ tekizlik bilen $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ burçy emele getirýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.

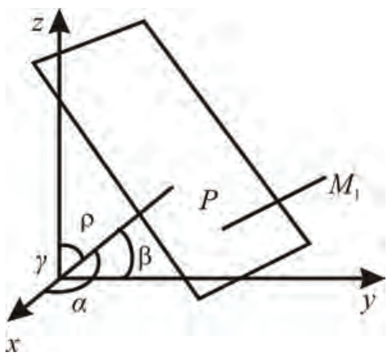
410. $5x+3y+10z+30=0,\quad 4x-5y+10z+20=0,$
$6x+11y+30z=0$
tekizlikleriň umumy nokadynyň barlygyny görkezmeli we ony tapmaly.

§ 3. Tekizligiň normal deňlemesi. Nokat bilen tekizligiň arasyndaky uzaklyk

Goý, giňişlikde tekizlik berlen bolsun. Eger α,β,γ burçlar koordinatalar başlangyjyndan tekizlige geçirlen perpendikulýar bilen koordinata oklarynyň arasyndaky burçlar, $\rho-$tekizlikler koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklyk bolsa, tekizligiň normal deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0. \qquad (1)$$

Tekizligiň normal deňlemesi umumy deňlemeden x,y,z ululyklaryň koeffisiýentleri we azat agza bilen tapawutlanýar. Ol koeffisiýentler tekizlige perpendikulýar bolan $\vec{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ birlik wektoryň koordinatalary, azat agza bolsa otrisatel bolmalydyr (*22-nji çyzgy*).



22-nji çyzgy

Tekizligiň umumy deňlemesini normirleýji

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2)$$

köpeldijä köpeldilip normal görnüşe getirilýär. Onuň alamaty D azat agzanyň alamatyna garşylykly alamat bilen alynýar.

M_1 nokadyň tekizlikden δ gyşarmasynyň absolýut ululygyna, ol nokadyň tekizlik bilen aralygyndaky d uzaklyk diýilýär. Eger M_1 nokat bilen O koordinatalar başlangyjy tekizlikden dürli tarapda ýatýan bolsalar d uzaklyk + alamaty bilen, M_1 we O tekizlikden bir tarapda ýatýan bolsalar d uzaklyk – alamaty bilen alynýar. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nokadyň (1) tekizlikden gyşarmasy aşakdaky deňlik bilen tapylýar:

$$\delta = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - \rho \qquad (3)$$

Şunlukda, nokat bilen tekizligiň arasyndaky uzaklygy tapmak üçin ilki bilen tekizligiň deňlemesini normal görnüşe getirmeli we onuň çep bölegindäki x, y we z ululyklaryň ornuna M nokadyň koordinatalaryny goýup δ-ni tapmaly, soňra $d = |\delta|$ almaly.

411. $6x - 3y - 2z + 35 = 0$ tekizligiň deňlemesini normal görnüşe getirmeli.

Çözülişi. Normirleýji köpeldijini tapalyň.

$$M = -\frac{1}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{7}.$$

($D = 35$ bolany üçin ol - alamaty bilen alynýar). Şunlukda, tekizligiň normal deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z - 5 = 0.$$

412. Parallel tekizlikleriň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

$$x - 2y + 3z + 7 = 0,$$

$$x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

Çözülişi. Meseläni çözmek üçin tekizlikleriň haýsy hem bolsa birindäki bir nokat bilen beýleki tekizligiň arasyndaky uzaklygy tapmak ýeterlikdir. Ikinji tekizligiň (1,0,0) nokadyny alyp, beýleki tekizligi bolsa normal görnüşe getireliň. Onuň üçin ony

$$M=\frac{-1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=-\frac{1}{\sqrt{14}}$$

normirleýji köpeldijä köpeldeliň.

$$-\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y-\frac{3}{\sqrt{14}}z-\frac{7}{\sqrt{14}}=0.$$

Bu tekizligiň normal deňlemesidir. Bu deňlemede x, y, z ululyklaryň ornuna (1,0,0) nokadyň koordinatalaryny goýup δ gyşarmany taparys:

$$\delta=\frac{-1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0-7}{\sqrt{14}}=-\frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Bu ýerde $d=\left|-\frac{8}{\sqrt{14}}\right|=\frac{8}{\sqrt{14}}$. Ikinji tekizlik bilen koordinatalar başlangyjy birinji tekizlikden dürli tarapda ýatýanlygy üçin $\delta<0$.

413. (1,2,1) nokat bilen $x+2y+2z-10=0.$ tekizligiň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Çözülişi. Tekizligiň deňlemesini normal görnüşe getireliň.

$$M=\frac{1}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{10}{3}=0.$$

δ gyşarmany tapalyň:

$$\delta=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{10}{3}=1.$$

Onda

$$d=|\delta|=1$$

bolar.

414. Tekizlikleriň deňlemesiniň normal ýa-da normal däldigini kesgitlemeli:

a) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0,$ b) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-z+1=0.$

Çözülişi. a) Berlen tekizlige perpendikulýar bolan wektory ýazalyň:

$$\vec{N}\left\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}.$$

Onuň uzynlygy

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

bolar.

Şunlukda, x, y, z ululyklaryň koeffisiýentleri birlik wektoryň koordinatalarydyr, azat agza bolsa otrisateldir. Diýmek, deňleme normal deňlemedir. Berlen deňlemäni (1) deňleme bilen deňeşdirip, alarys:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}, \quad \rho = -1.$$

b) $\vec{N}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$ wektor tekizlige perpendikulýar bolan wektordyr. Onuň uzynlygy

$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \neq 1.$ Şonuň üçin tekizligiň bu deňlemesi normal deňleme däldir.

415. $3x - 6y + 2z + 14 = 0$ tekizligiň umumy deňlemesini normal görnüşe getirmeli we koordinatalar başlangyjy bilen tekizligiň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Çözülişi. Normirleýji köpeldijini tapalyň.

$$M = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{7}.$$

Indi tekizligiň normal deňlemesini ýazalyň:

$$-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 2 = 0.$$

Onda

$$\delta = -\frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{6}{7}\cdot 0 - \frac{2}{7}\cdot 0 - 2 = -2,$$

$$d = |\delta| = 2.$$

416. Koordinatalar sistemasynyň abssisalar okunda $2x + y - 2z + 4 = 0$ tekizlikden $d = \frac{1}{3}$ aralykda ýatan nokadyny tapmaly.

Çözülişi. Gözlenýän nokadyň abssisalar okunda ýatýandygyna görä onuň koordinatalaryny ýazyp bileris: $M(x,0,0)$.

Berlen tekizligiň umumy deňlemesini normal görnüşe getireliň.

$$M=\frac{-1}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=-\frac{1}{3}, \qquad -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{4}{3}=0.$$

δ – gyşarmany tapalyň:

$$\delta=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}.$$

Meseläniň şertine görä $d=|\delta|=\frac{1}{3}$, $\delta=\pm\frac{1}{3}$. Şonuň üçin $-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=\pm\frac{1}{3}$. Bu ýerden $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$. Şunlukda, meseläniň şertini kanagatlandyrýan iki nokat bardar: $M_1\left(-\frac{5}{2},0,0\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$.

417. Berlen $x+y+z-1=0$ tekizlige parallel bolan we ondan $\sqrt{3}$ birlik uzaklykda bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Tekizligiň umumy deňlemesini normal görnüşe getireliň:

$$M=\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$$

Gözleýän tekizligimiz $d=|\delta|=\sqrt{3}$ şerti kanagatlandyrýan giňişligiň $M(x,y,z)$ nokatlarynyň köplügidir:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\sqrt{3}.$$

Bu ýerden, taparys:

$$x+y+z-4=0, \quad x+y+z+2=0.$$

418. Tekizligiň deňlemesiniň normal ýa-da normal däl görnüşdedigini barlamaly:

a) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0$, b) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z-2=0$.

419. Berlen $M(1,1,1)$ nokat bilen $x+2y+2z-8=0$ tekizligiň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

420. Tekizlilikleriň umumy deňlemesini normal görnüşe getirmeli:

1) $2x-9y+6z-22=0$; 2) $10x+2y-11z+60=0$;

3) $6x-6y-7z+33=0$.

421. $15x-10y+6z-190=0$ tekizlik bilen koordinatalar başlangyjynyň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

422. Nokat bilen tekizligiň arasyndaky uzaklygy tapmaly:

1) $(3,1,-1)$, $22x+4y-20z-45=0$;

2) $(4,3,-2)$, $3x-y+5z+1=0$;

3) $\left(2,0,-\dfrac{1}{2}\right)$, $4x-4y+2z+17=0$.

423. $16x-12y+15z-4=0$ tekizlik bilen $M(2,-1,-1)$ nokadyň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

424. Koordinatalar sistemasynyň applikata okunda $2x+3y-6z+4=0$ tekizlikden 2 birlik daşlykda bolan nokadyny tapmaly.

425. $x-2y+2z-2=0$ tekizlige parallel bolan we ondan $d=\dfrac{1}{3}$ uzaklykda bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

426. Koordinatalar sistemasynyň ordinatalar okunda $M(2,0,1)$ nokatdan we $x+2y+2z-5=0$ tekizlikden deň daşlykda bolan nokady tapmaly.

427. Iki $2x-3y-4z-3=0$ we $4x-3y-2z-3=0$ tekizlikleriň arasyndaky ikigranly burçy deň ikä bölýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

§ 4. Tekizligiň deňlemesini düzmeklige degişli esasy meseleler

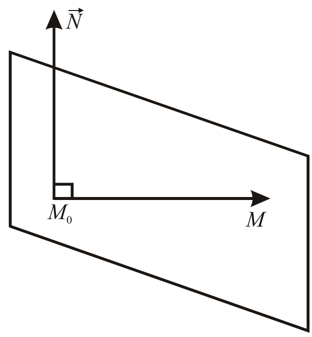
Tekizligiň deňlemesini düzmek meselesiniň aglaba köpüsi, köplenç halatlarda aşakdaky meselelere getirilýär.

1. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{N}(A,B,C)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Goý, $M(x,y,z)$ tekizligiň erkin nokady bolsun. Şerte görä, $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ wektor $\vec{N}(A,B,C)$ wektora perpendikulýardyr (*23-nji çyzgy*). Onda bularyň skalýar köpeltmek hasyly nola deňdir: $\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$.

Bu şerti koordinatalarda ýazyp gözleýän deňlemämizi alarys:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$



23-nji çyzgy

2. Berlen $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokat arkaly geçýän we iki $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ wektorlara (kollinear bolmadyk) parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly

Çözülişi. Tekizligiň erkin $M(x, y, z)$ nokadyny alalyň.

$\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ wektoryň, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň parallel tekizliklerde ýatýanlygy üçin olar komplanardyrlar (*24-nji çyzgy*). Diýmek, olaryň garyşyk köpetmek hasyly nola deňdir: $\overrightarrow{M_0M} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

24-nji çyzgy

Şu deňligi koordinatalarda ýazyp gözleýän tekizligimiziň deňlemesini alýarys:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

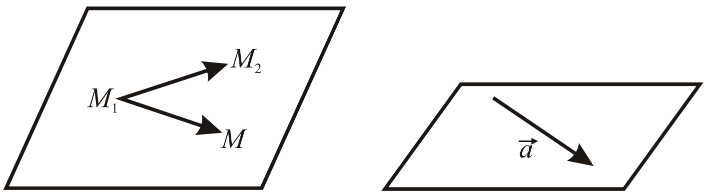
3. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar arkaly geçýän we berlen $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ wektora parallel bolan ($\overrightarrow{M_1M_2}$ we $\vec{a}$ wektorlar kollinear däldirler) tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Goý, $M(x, y, z)$ tekizligiň erkin nokady bolsun (*25-nji çyzgy*).

$\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ we $\vec{a}$ $\{a_x, a_y, a_z\}$ wektorlar dürli tekizliklerde ýerleşendirler, ýagny komplanardyrlar.

Bularyň garyşyk köpeltmek hasylyny nola deňläp gözleýän tekizligimiziň deňlemesini alarys:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$



25-nji çyzgy

4. Berlen $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Tekizligiň erkin $M(x, y, z)$ nokadyny alalyň we berlen nokatlaryň haýsy hem bolsa birini, mysal üçin M_1 nokady beýleki $M_1M_2M_3$ nokatlar bilen birleşdireliň. Onda $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ wektorlar komplanardyrlar. Şonuň üçin olaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Bu bolsa gözleýän tekizligimiziň deňlemesidir.

428. $N(8,-7,5)$ nokat arkaly geçýän we $M(2,-1,-2)$ nokady birleşdirýän $\overrightarrow{MN}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Berlen nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň:

$$A(x-8) + B(y-7) + C(z-5) = 0.$$

Meseläniň şertine görä $\overrightarrow{MN}\{A,B,C\}$ wektor tekizlige perpendikulýardyr.

Bu ýerde $A=8-2=6,\quad B=-7-(-1)=-6,\quad C=5-(-2)=7$.

Tapylanlary deňlemä goýup gözleýän tekizligimiziň deňlemesini alarys:

$$6(x-8)-6(y+7)+7(z-5)=0,\quad 6x-6y+7z-125=0.$$

429. Berlen $M_0(2,-1,3)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{a}\{3,0,-1\},\vec{b}\{-3,2,2\}$ wektorlara parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. (2) formulany ulanalyň:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$3(y+1)+6(z-3)-6(y+1)+2(x-2)=0.$$

430. $M_1(1,2,3)$, $M_2(4,-1,-2)$ we $M_3(4,0,3)$ nokatlar arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Goý, $M(x,y,z)$ tekizligiň erkin nokady bolsun. Onda $\overrightarrow{M_1M}\{x-1,y-2,z-3\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}\{3,-3,5\}$ we $\overrightarrow{M_1M_3}\{3,-2,0\}$ wektorlar komplanardyrlar. Şonuň üçin

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$-10x-15y+3z+31=0.$$

Bu bolsa gözleýän tekizligimiziň deňlemesidir.

431. Berlen $M(2,-3,-7)$ nokat arkaly geçýän we $2x-6y-3z+5=0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $\vec{N}(2,-6,-3)$ wektor $2x-6y-3z+5=0$ tekizlige perpendikulýardyr. Şeýle hem şu tekizlige parallel bolan erkin tekizlige hem perpendikulýardyr. Biziň gözleýän tekizligimiz $M(2,-3,-7)$ nokat arkaly geçmeli we $\vec{N}(2,-6,-3)$ wektora perpendikulýar bolmalydyr.

Onda

$$2(x-2)-6(y+3)-2(z-7)=0;$$
$$2x-6y-3z-43=0.$$

432. Berlen $M_1(2,3,1)$ we $M_2(1,3,5)$ nokatlar arkaly geçýän hem-de $3x-y+3z+5=0$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. $3x-y+3z+5=0$ tekizlige perpendikulýar bolan $\vec{N}(3,-1,3)$ wektor gözlenýän tekizlige paralleldir. Şunlukda, gözleýän tekizligimiz M_1 we M_2 nokatlardan geçip $\vec{N}$ wektora paralleldir. Diňe $\overrightarrow{M_1M_2}$ we $\vec{N}$ wektorlaryň kollinear däldigini barlaýmak galýar.

$\overrightarrow{M_1M_2}$ wektoryň koordinatalary şu wektoryň ahyryndan $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektoryň başlangyç koordinatalarynyň aýyrylmagyna deňdir. Hakykadanda $\overrightarrow{M_1M_2}$ we $\vec{N}$ wektorlaryň koordinatalary proporsional däldir, ýagny wektorlar kolleniar däldirler.

Goý, $M(x,y,z)$ tekizligiň erkin nokady bolsa, onda M_1M, $\overrightarrow{M_1M_2}$ we $\vec{N}$ wektorlar komplanardyr, ýagny olaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$2x+3y-z-14=0.$$

Bu bolsa gözleýän tekizligimiziň deňlemesidir.

433. Berlen $M(-3,0,2)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{N}(2,3,5)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

434. $M(2,-3,5)$ nokat arkaly geçýän we $2x+y-2z+1=0$, $x+y+z-5=0$ tekizlikleriň kesişme çyzygyna perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

435. Berlen $M_0(1,2,-3)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{A}(1,-2,3)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

436. Üç $(1,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(2,1,3)$ nokatlar arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

437. $(1,1,1)$ nokat arkaly geçýän we $2x+4y+z-5=0$ tekizlige a) perpendikulýar bolan; b) parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

438. $M(-2,7,3)$ nokat arkaly geçýän we $x-4y+5z+1=0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

439. $M(2,-3,1)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{a}(-3,2,1)$, $\vec{b}(1,2,3)$ wektorlara parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

440. Berlen $M(2,2,-2)$ nokat arkaly geçýän we $3x-2y-z+1=0$, $x-y-z=0$ tekizlikleriň kesişme çyzygyna perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

441. $M_1(2,-15,1)$, $M_2(3,1,2)$ nokatlar arkaly geçýän we $3x-y-4z=0$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

442. $M_1(1,1,1)$, $M_2(-1,1,-1)$ nokatlar arkaly geçýän we $A(5,-2,3)$, $B(6,1,0)$ nokatlary birleşdirýän göni çyzyga parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

443. $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,1)$, $M_3(2,0,2)$ nokatlar arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

444. Piramidanyň depeleri berlen: $S(1,4,-2)$, $A(0,-1,1)$, $B(3,5,1)$, $C(1,-3,1)$. S depeden ABC grana geçirlen beýikligi tapmaly.

§ 5. Göni çyzyk

Giňişlikde göni çyzyga iki tekizligiň kesişme çyzygy hökmünde garaýarlar.

Şonuň üçin göni çyzygyň umumy deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}. \tag{1}$$

Giňişligiň $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokadyndan geçýän we $\vec{S}=\{l,m,n\}$ wektora parallel bolan göni çyzygyň deňlemesi

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{2}$$

görnüşdedir. (2) deňlemä göni çyzygyň ýönekeý deňlemesi, $\vec{S}$ wektora bolsa, gönininiň ugrukdyryjy wektory diýilýär.

Eger (2) formulalaryň her birini t parametre deň diýip alsak, onda biz göni çyzygyň parametrik deňlemesini alarys:

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt. \tag{3}$$

Giňişlikde iki $M_1(x_1, y_1, z_1)$ we $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{4}$$

Giňişlikde ýönekeý deňlemesi bilen berlen iki

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}; \tag{5}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \tag{6}$$

göni çyzygyň arasyndaky burç

$$\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \tag{7}$$

formula bilen tapylýar. (5) we (6) formulalar bilen berlen göni çyzyklaryň parallelik we perpendikulýarlyk şertlerini ýazalyň:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}; \tag{8}$$

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{9}$$

Şu formulalardan görnüşi ýaly, göni çyzygyň (1) umumy deňlemesi (2) ýönekeý görnüşe getirilen bolsa, köp meseleler aňsatlyk bilen çözülýär. Ol aşakdaky ýaly amala aşyrylyp bilner. (1) sistemada ilki bir koordinatany 0 deň diýip, soňra beýleki koordinatany 0 deň diýip alyp, sistemany alýarys:

$$\begin{cases} x=mz+a; \\ y=nz+b. \end{cases}$$

Bu sistemanyň deňlemelerinden z-i tapyp, olary biri-birine deňläp, alýarys:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1}, \tag{10}$$

bu ýerde, $c=0$, $p=1$.

446.

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0; \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

göni çyzygyň deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmeli.

Çözülişi. Göni çyzygyň haýsy hem bolsa bir nokadynyň koordinatalaryny tapalyň. Onuň üçin iki deňlemede hem $z=0$ goýup, alýarys:

$$\begin{cases} x-2y-4=0; \\ 3x+2y-4=0. \end{cases}$$

Bu ýerden $x=2$, $y=-1$. Diýmek, $M_0(2,-1,0)$. Ugrukdyryjy $\vec{S}$ wektor

$$\vec{S}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

formula boünça tapylýar. Tekizlikleriň $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ wektorlaryny tapalyň: $\vec{N}_1\{1,-2,3\}$, $\vec{N}_2\{3,2,-5\}$. Onda

$$\vec{S}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}$$

Şunlukda, berlen göni çyzygyň ýönekeý deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

446. $M_0(1,-2,2)$ nokat arkaly geçýän we Ox oka parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý we parametrli deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Oy okdaky $\vec{j}\{0,1,0\}$ birlik wektor tapmaly göni çyzygymyza paralleldir. Şonuň üçin bu wektora gözleýän gönümiziň ugrukdyryjysy hökmünde garamak mümkindir. (2) formulanyň esasynda göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini ýazyp bileris:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

Göni çyzygyň parametrli deňlemesini ýazalyň. Birinji we üçünji gatnaşyklaryň tapawudynyň 0 bolmagy $x-1=0$ we $z-2=0$ deňligiň ýerine ýetýänligini aňladýar. Ikinji gatnaşygy t deň diýip, alýarys: $y=-2+t$.

Şunlukda, gönüniň parametrli deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$x=1, \quad y=-2+t, \quad z=2$$

447. $M(-1,0,5)$ nokat arkaly geçýän we koordinata oklary bilen degişlilikde $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{2\pi}{3}$ burçlary emele getirýän göni zyzygyň ýönekeý we parametrli deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $\vec{S}$ ugrukdyryjy wektor hökmünde gözlenýän gönüniň birlik wektoryny alalyň. Onuň koordinatalary bolup ugrukdyryjy kosinuslar hyzmat edýär.

$$\vec{S}=\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot\vec{i}+\mathrm{Cos}\,\beta\cdot\vec{j}+\mathrm{Cos}\,\gamma\cdot\vec{k}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}\cdot\vec{i}+\mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}\cdot\vec{j}+\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{3}\cdot\vec{k}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{j}-\frac{1}{2}\cdot\vec{k}$$

(2) formulany ulanyp göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini ýazyp bileris:

$$\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-0}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-5}{-\frac{1}{2}},\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1}.$$

Şu deňlikleri t deňläp alarys:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1}=t$$

ýa-da

$$x=-1+t,\quad y=\sqrt{2}t,\quad z=5-t.$$

Bu bolsa göni çyzygyň parametrli deňlemesidir.

448. Ýönekeý deňlemeleri bilen berlen iki göni çyzygyň arasyndaky burçy tapmaly.

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1},\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}.$$

Çözülişi. (7) formulany ulanalyň. $(l_1=3,\ l_2=1,\ m_1=-1,\ m_2=2,\ n_1=1,\ n_2=3)$:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot1-1\cdot2+1\cdot3}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{1+4+9}}=\frac{4}{5},\quad \varphi=\arccos\frac{4}{5}$$

449. Deňlemeleri ýönekeý görnüşde berlen göni çyzyklaryň, ugrukdyryjy kosinuslaryny tapmaly.

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$, 2) $\frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}$.

Çözülişi. 1) Şerte görä göni çyzygyň $M(1,5,-2)$ nokady we $\vec{S}\{4,-3,12\}$ ugrukdyryjy wektory berlen. Onda

$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

formulalary ulanyp, taparys:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2+12^2}} = \frac{4}{13}, \qquad \cos\beta = \frac{3}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

2) Şeýle hem göni çyzygyň $M(0,7,-3)$ nokady we $\vec{S}\{12,9,20\}$ ugrukdyryjy wektory berlen:

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{12}{\sqrt{625}} = \frac{12}{25}, \qquad \cos\beta = \frac{9}{25}, \qquad \cos\gamma = \frac{20}{25}. \ .$$

450. Deňlemeleri umumy görnüşde berlen göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmaly.

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$$

Çözülişi. Aşakdaky formula bilen her bir göni çyzygyň ugrukdyryjy wektoryny tapalyň:

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{S_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 11\vec{k}, \qquad \vec{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}$$

Göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapalyň:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S_1}\vec{S_2}}{|\vec{S_1}|\cdot|\vec{S_2}|} = \frac{10\cdot 3 + 2\cdot 12 + 4\cdot 11}{\sqrt{100+4+121}\sqrt{9+144+16}} = \frac{99}{195}$$

$$\varphi = \arccos\frac{99}{195} = 59^\circ 48'$$

451. $M(2,-3,-4)$ nokat arkaly geçýän we

$$\begin{cases} x+y-z+2=0; \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Berlen göni çyzygymyzyň ugrukdyryjy wektoryny tapalyň:

$$\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}, \qquad \vec{S}\{1,-3,-2\}.$$

Şerte görä şu wektor gözleýän göni çyzygymyza paralleldir. (2) formulany ulanyp, alarys:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+4}{-2}.$$

452. Ýönekeý deňlemeleri bilen berlen aşakdaky göni çyzyklaryň kesişýändigini subut etmeli we kesişme nokadyny tapmaly

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}, \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}.$$

Çözülişi. $M_1(1,-2,0)$ we $M_2(-1,-11,-6)$ nokatlar degişlilikde berlen göni çyzyklara degişlidir. $\overrightarrow{M_1M_2}\{-2,-9,-6\}$, $\vec{S}_1\{2,-1,-2\}$, $\vec{S}_2\{1,2,1\}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyna garalyň:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2=\begin{vmatrix}-2 & -9 & -6\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(2+18-24)-(6-18+8)=0.$$

Diýmek, berlen wektorlar komplanardyrlar we berlen iki göni çyzyk bir tekizlikde ýatýandyr. $\vec{S}_1$ we $\vec{S}_2$ wektorlaryň kollinear däldiklerine görä, ol göni zyzyklar parallel däldirler. Diýmek, olar kesişýändirler.

Kesişme nokadyny tapmak üçin göni çyzyklaryň biriniň parametrli deňlemesini ýazalyň: $x=1+2t,\quad y=-2-t,\quad z=-2t.$

Bulary ikinji göni çyzygyň deňlemesine goýup, t-ni tapalyň:

$$\frac{2+2t}{1}=\frac{9-t}{2}=\frac{6-2t}{1}.$$

Bu ýerden $t=1$ alarys. Şunlukda, kesişme nokady almak üçin deňlemede $t=1$ goýalyň:

$$x=1+2\cdot1=3, \quad y=-2-1=-3, \quad z=-2\cdot1=-2, \quad M(3,-3,-2).$$

453. Üçburçlugyň depeleri $A(2,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-3,2,2)$ nokatlarda bolsa, onuň AP medianasynyň ýönekeý deňlemesini düzmeli.

Çözülişi. P nokat BC tarapy deň iki bölege bölýär. Şonuň üçin P nokadyň koordinatalaryny tapyp bileris:

$$x=\frac{1-3}{2}=-1, \quad y=\frac{-2+2}{2}=0, \quad z=\frac{0+2}{2}=1.$$

Üçburçlugyň AP medianasy A we P nokatlar arkaly geçýär. (4) formulanyň esasynda, alýarys:

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{0-3}=\frac{z+1}{1+1}.$$

Şunlukda, gözleýän AP mediananyň ýönekeý deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{2}.$$

454. $\begin{cases} x+y-2z-1=0, \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$

göni çyzygyň umumy deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmeli.

455. Göni çyzygyň umumy deňlemesini normal görnüşe getirmeli

$$\begin{cases} x-4y-z-5=0, \\ 3x+y-16z-2=0. \end{cases}$$

Göni çyzygyň umumy deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmeli:

456. $\begin{cases} x-3y+2=0, \\ 2y-z+1=0. \end{cases}$ **457.** $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$

458. $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

459.

1) $\begin{cases} 3x-4y+5z-18=0, \\ 6x-5y+z-27=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y+z-10=0, \\ 4x-5y-z+24=0. \end{cases}$

460. $M_0(-1,1,-3)$ nokat arkaly geçýän we $\vec{S}\{1,-3,4\}$ wektora parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý we parametrli deňlemesini ýazmaly.

461. $M_0(-1,-2,2)$ nokat arkaly geçýän we Ox oka parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý we parametrli deňlemesini tapmaly.

462. $M(-7,-4,5)$ nokatdan geçýän, $\vec{S}\{2,-6,9\}$ wektora parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

463. $M(1,-5,3)$ nokat arkaly geçýän we koordinata oklary bilen degişlilikde $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ we $\frac{2\pi}{3}$ burçlary emele getirýän göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

Deňlemeleri ýönekeý görnüşde berlen göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmaly.

464. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}, \quad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}.$

465. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$

466. Umumy deňlemeleri bilen berlen göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmaly

$$\begin{cases} 4x+z-1=0, \\ x-2y+3=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y-z+4=0, \\ y+2z-8=0. \end{cases}$$

467. Göni çyzygyň ugrukdyryjy kosinusyny tapmaly

$$\begin{cases} 5x-6y+2z+21=0, \\ x-z+3=0. \end{cases}$$

468. Koordinatalar başlangyjyndan $4x-y+2z-3=0$ tekizlige inderilen perpendikulýaryň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

469. Koordinatalar başlangyjyndan $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-7}{11}$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

470. $M(2,-5,3)$ nokat arkaly geçýän we $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

471. $M(1,-3,4)$ nokat arkaly geçýän we

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+3y-z-1=0 \end{cases}$$

göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

472. $M(2,-5,3)$ nokat arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly:

1) Ox oka parallel bolan

2) $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-1=0 \end{cases}$ göni çyzyga parallel bolan.

473. $M(1,-3,5)$ nokat arkaly geçýän we

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$$

göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

474. $M(2,1,-1)$ nokatdan geçýän we $x+y+z-1=0$ tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

475. Koordinatalar başlangyjyndan geçip $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$ göni çyzyga perpendikulýar bolan we xOz tekizlikde ýatýan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

476. $M(1,2,-1)$ nokat arkaly geçýän we

$$\begin{cases} 3x+2y-2z+1=0, \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

477. Aşakdaky göni çyzyklaryň biri-biri bilen perpendikulýardyklaryny subut etmeli:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ we $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}.$

2) $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases},$ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t. \\ z=1-6t \end{cases}$

478. Aşakdaky iki göni çyzygyň özara paralleldigini subut etmeli:

$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1},$ $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

479. $M(2,3,1)$ nokatdan $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ göni çyzyga geçirilen perpendikulýaryň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

Göni çyzyklaryň kesişýändigini barlamaly:

480. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4},$ $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}.$

481. $\begin{cases} 4x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases},$ $\begin{cases} 3x+y-z+4=0, \\ y+2z-8=0. \end{cases}$

482. Aşakdaky göni çyzyklaryň kesişýändigini subut etmeli we olaryň kesişme nokadyny tapmaly:

$$\begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}, \quad \frac{x+3}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

483. $M(1,-1,2)$ we $N(4,1,5)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

484. Aşakdaky gönininiň koordinata tekizlikleri bilen kesişme nokadyny tapmaly

$$\begin{cases} 6x+2y-z-9=0, \\ 3x+2y+2z-12=0. \end{cases}$$

485. $M_1(2,-1,1)$, $M_2(3,3,-1)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň ýönekeý we parametrik deňlemesini tapmaly.

486. Üçburçlugyň depeleri berlen: $A(-5,7,1)$, $B(2,4,-1)$, $C(-1,3,5)$. B depeden AC tarapa geçirilen medianaнyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

487. Üçsburçlugyň depeleri berlen: $A(1,-1,3)$, $B(3,-4,9)$, $C(-5,11,7)$. A depedäki içki burçuň bissektrisasynyň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

488. Aşakdaky göni çyzyklara degişli birnäçe nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly:

a) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-1}$, b) $x=3+2t$, $y=3t$, $z=5$,

ç) $\begin{cases} x-3=0, \\ x+y+z-5=0. \end{cases}$

489. Göni çyzyklaryň parametrli deňlemelerini ýazmaly:

a) $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ y=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

490. Aşakdaky göni çyzyklaryň ýerleşiş aýratynlyklaryny görkezmeli:

1) $\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} Ax+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} By+Cz+D=0, \\ B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} Ax+Cz=0; \\ A_1x+C_1z=0. \end{cases}$

§ 6. Göni çyzyk we tekizlik

Goý, giňişlikde ýönekeý deňlemeleri bilen göni çyzyk we tekizlik berlen bolsun:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \qquad (1)$$

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Şu göni çyzyk bilen tekizligiň kesişme nokadyny tapmak üçin deňlemeleri bilelikde çözmeli bolýarys. Onuň üçin t parametri girizmek amatlydyr:

$x=mt+a, \quad y=nt+b, \quad z=pt+c$. Bulary (2) deňlemä goýup $t-$ni tapyp bolar. Soňra bolsa x, y, z koordinatalar tapylýar.

(1) göni çyzyk bilen (2) tekizligiň arasyndaky burç

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (3)$$

formuladan tapylýar.

(1) göni çyzyk bilen (2) tekizligiň parallelik we perpendikulýarlyk nyşanlary aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (4)$$

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (5)$$

(1) formula bilen berlen göni çyzygyň tutuşlygyna (2) tekizlikde ýatmaklygy aşakdaky iki deňleme bilen aňladylýar:

$$\begin{cases} Aa+Bb+Cc+D=0, \\ Am+Bn+Cp=0. \end{cases} \qquad (6)$$

491. $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ göni çyzyk bilen $3x+5y-z-2=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

Çözülişi. Göni çyzygyň deňlemesini parametrli görnüşe getireliň. Onuň üçin ol gatnaşyklary *t-e* deňläliň:

$$x=12+4t, \quad y=9+3t, \quad z=1+t.$$

Bulary tekizligiň deňlemesine goýup t-ni tapýarys:

$$3(12+4t)+(9+3t)-(1+t)-2=0, \quad t=-3.$$

Onda

$x=12+4(-3)=0$, $y=9+3(-3)=0$, $z=1+(-3)=-2$.

Şunlukda, $M_1(0,0,-2)$ gözleýän nokadymyzdyr.

492. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{3}$ göni çyzyk bilen $4x+2y+6z-11=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

Çözülişi. Bu ýerde $A=4$, $B=2$, $C=6$ we $m=2$, $n=1$, $p=3$.

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

şerti barlap göreliň. $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$. Diýmek, göni çyzyk tekizlige perpendikulýardyr. Hakykatdan-da,

$$\sin\varphi = \frac{8+2+18}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{16+4+36}} = \frac{28}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

492. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokat we $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ göni çyzyk berlen bolsunlar.

Şu nokat we göni çyzyk arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Göni çyzygyň deňlemesinden görnüşi ýaly ol $P(a, b, c)$ nokat we ugrukdyryjy $\vec{S}(m, n, p)$ wektor bilen kesgitlenýär.

Goý, $M(x, y, z)$ tekizligiň erkin nokady bolsun. Onda

$\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\overrightarrow{M_0P}\{a - x_0, b - y_0, c - z_0\}$ we $\vec{S}\{m, n, p\}$ wektorlar bir tekizlikde ýatýarlar. Şonuň üçin olaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a - x_0 & b - y_0 & z - c_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

Kesgitleýjini açyp gözleýän tekizligimiziň deňlemesini alarys.

494. $A(-1, 2, -3)$ we $B(3, -1, -1)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ formulany ulanyp alarys:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-1+1} = \frac{z-0}{-1-0}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}.$$

495. $M(-1, 2, -3)$ nokat arkaly geçýän we $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{2}$ göni çyzyga parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly gözleýän tekizligimiziň $\vec{n}$ normal wektory hökmünde, berlen göni çyzygyň ugrukdyryjysy $\vec{q}\{4,3,2\}$ wektoryna parallel bolan wektory almak bolar. Diýmek, M nokat arkaly geçýän we $\vec{q}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazaýmak galýar:

$$4(x+1)+3(y-2)+2(z+3)=0,\ 4x+3y+2z+4=0.$$

496. $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ göni çyzygyň $5x-2y+7z+3=0$ tekizlige paralleldigini görkezmeli.

Çözülişi. (4) formulany ulanalyň.

Bu ýerde $m=4$, $n=3$, $p=-2$, $A=5$, $B=-2$, $C=7$.

Onda

$$Am+Bn+Cp=5\cdot4+(-2)\cdot3+7\cdot(-2)=20-6-14=0.$$

Bu bolsa göni çyzygyň tekizlige paralleldigini görkezýär.

497. $A(5,2,-1)$ nokadyň $2x-y+3z+23=0$ tekizlige bolan proýeksiýasyny tapmaly.

Çözülişi. A nokadyň berlen tekizlige bolan proýeksiýasyny B bilen belgiläliň. Berlen tekizlige perpendikulýar bolan $\vec{N}\{2,-1,3\}$ wektor AB perpendikulýaryň ugrukdyryjy wektory hem bolup biler. Şonuü üçin göni çyzygyň ýönekeý deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}.$$

Bu göni çyzygyň parametrli deňlemesini ýazalyň:

$$x=5+2t,\quad y=2-t,\quad z=-1+3t.$$

Bulary tekizligiň deňlemesine goýup t-ni tapýarys:

$$2(5+2t)-(2-t)+3(-1+3t)+23=0,\quad t=-2.$$

Şunlukda, gözleýän nokadymyzyň proýeksiýalarynyň koordinatalaryny tapyp bileris:

$$x_B=5+2(-2)=1,\quad y_B=2-(-2)=4,\quad z_B=-1+3(-2)=-7.$$

498. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ göni çyzyk bilen $3x-3y-2z-5=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

499. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ göni çyzyk bilen $x-2y+3z-1=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

500. $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ göni çyzyk bilen $3x-y+2z-5=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

501. $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ göni çyzygyň $x+2y-4z-1=0$ tekizlikde ýatýandygyny görkezmeli.

502. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{2}$ göni çyzyk bilen $2x+3y+z-22=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

503. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$ göni çyzyk bilen $2x+2y-3z-4=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

504. $A(-1,0,-5)$ we $B(1,2,0)$ nokatlar arkaly geçýän çyzyk bilen $x-3y+z+5=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

505. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ göni çyzyk bilen $6x-3y+2z=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

506. $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{2}$ göni çyzyk bilen $x+2y-3z+4=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

507. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{2}$ göni çyzyk bilen $-2x+y+z-1=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

508. $M(2,0,1)$ nokat bilen $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ göni çyzykdan geçýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.

509. $M(4,-3,2)$ nokat bilen $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}$ göni çyzykdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

510. $A-$nyň haýsy bahasynda $Ax+3y-5z+1=0$ tekizlik $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ göni çyzyga parallel?

511. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ göni çyzygyň $2x-y-2z-9=0$ tekizlikde ýatýandygyny görkezmeli.

512. $A(4,-3,1)$ nokadyň $x+2y-z-3=0$ tekizlige bolan proýeksiýasyny tapmaly.

513. $A(1,2,1)$ nokadyň $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ göni çyzyga bolan proýeksiýasyny tapmaly.

514. $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ göni çyzygyň $x-y+3z+8=0$ tekizlige bolan proýeksiýasyny tapmaly.

515. $M(3,-2,4)$ nokat arkaly geçýän we $5x+3y-7z+1=0$ tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

516. Aşakdaky göni çyzyklaryň degişli tekizliklerde ýatýandygyny ýa-da ýatmaýandygyny anyklamaly:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$, $4x+3y-z+3=0$;

b) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$, $5x-8y-2z-1=0$;

ç) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$, $3x-2y-z+15=0$.

§ 7. Giňişlikde göni çyzyga we tekizlige degişli dürli meseleler

517. $M(-2,2,-3)$ nokat arkaly geçýän $\vec{q}=\{2,-4,5\}$ wektora parallel bolan göni çyzygyň ýönekeý we parametrli deňlemesini tapmaly.

518. $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ we $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$ göni çyzyklara parallel we $P(4,-3,1)$ nokat arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini tapmaly.

519. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ göni çyzyk arkaly geçýän we $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ göni çyzyga parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

520. $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$ göni çyzyk arkaly geçýän we $x+y-z+15=0$ tekizlige parallel bolan tekizlik geçirmeli.

521. Aşakdaky iki parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2},\quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{4}.$$

522. $P(7,9,7)$ nokat bilen $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ göni çyzygyň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

523. Göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmaly:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

524. $A(1,2)$ nokadyň we Oz oky arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini düzmeli.

525. $M(5,2,1)$ nokadyň $2x-y+3z+23=0$ tekizlige proýeksiýasyny tapmaly.

526. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ göni çyzyk bilen $6x-3y-2z=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapmaly.

527. $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ göni çyzyk bilen $3x+5y-z-2=0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapmaly.

528. $A(6,4,-2)$ nokadyň $x+y+z-3=0$ tekizlige görä simmetrik bolan A' nokadyny tapmaly.

529. Göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}, \quad \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}.$$

530. $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$ nokatlar üçburçlugyň depeleri bolsa, B depeden garşysyndaky tarapa geçirilen beýikligiň deňlemesini ýazmaly.

531. $A(5,10,4)$ nokadyň $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$ göni çyzyga görä simmetrik bolan A' nokadyny tapmaly.

532. $A(5,3,1)$ nokatdan $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ göni çyzyga geçirlen perpendikulýaryň ýönekeý deňlemesini tapmaly.

533. Koordinatalar başlangyjyndan $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{-2}$ göni çyzyga geçirilen perpendikulýaryň deňlemesini tapmaly.

534. Deňlemesi $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ bolan göni çyzygyň $x-y+3z+8=0$ tekizlige bolan proýeksiýasynyň ýönekeý deňlemesini ýazmaly.

535. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}$ göni çyzyk arkaly geçýän we $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{-5}$ göni çyzyga parallel bolan tekizligiň deňlemesini tapmaly.

536. Aşakdaky iki parallel göni çyzyk arkaly geçýän tekizligiň deňlemesini tapmaly

$$\frac{x}{7}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{5}, \quad \frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}.$$

537. $x=2+2t,\ y=3+t,\ z=-1+3t$ göni çyzygyň $x+y-z-6=0$ tekizlikde ýatýandygyny görkezmeli.

§ 8. Sfera

Giňişlikde merkez diýip atlandyrylýan nokatdan deňdaşlaşan nokatlar köplügine sfera diýilýär. Sferanyň islendik nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän kesimiň uzynlygyna sferanyň radiusy diýilýär. Merkezi $C(a,b,c)$ nokatda bolan, R radiusly sferanyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (1)$$

Eger sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa, (1) formula has ýönekeý görnüşi alýar:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Sferanyň umumy deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0.$$

Bu deňlemäni A bölüp, soňra bolsa doly kwadratlary bölüp almak bilen (1) görnüşe getirilip bilner.

638. Merkezi $C(1,4,-7)$ nokatda bolan $6x+6y-7z+42=0$ tekizlige galtaşýan sferanyň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Sferanyň radiusy tekizligiň galtaşma nokady bilen C merkeziň arasyndaky uzaklyga deňdir. Ony tapmak üçin normirleýji köpeldijini tapalyň:

$$M=-\frac{1}{\sqrt{36+36+49}}=-\frac{1}{11}.$$

Onda

$$-\frac{6}{11}x-\frac{6}{11}y+\frac{7}{11}z-\frac{42}{11}=0$$

alarys.

Deňligiň çep bölegine C nokadyň koordinatalaryny goýup, R radiusy tapýarys:

$$R = \left| -\frac{6}{11}\cdot 1 - 4\cdot\frac{6}{11} - 7\cdot\frac{7}{11} - \frac{42}{11} \right| = \left| -\frac{121}{11} \right| = 11.$$

(1) formulany ulanyp sferanyň deňlemesini ýazyp bileris:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 121.$$

539. Merkezi $C(1,-2,4)$ nokatda bolan $2x - y + 2z - 3 = 0$ tekizlige galtaşýan sferanyň deňlemesini ýazmaly.

540. Merkezi $C(0,4,0)$ nokatda bolan $2x + 6y - 3z - 3 = 0$ tekizlige galtaşýan sferanyň deňlemesini ýazmaly.

541. Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan we $M(6,-2,3)$ nokatdan geçýän sferanyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Sferanyň radiusy $\vec{OM}$ wektoryň uzynlygyna deňdir:

$$R = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7.$$

(2) formulany ulanyp alýarys:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49.$$

542. Merkezi $C(1,-1,-1)$ nokatda bolan, $M(4,2,2)$ nokat arkaly geçýän sferanyň deňlemesini ýazmaly.

543. Merkezi $M\left(2,-\frac{1}{2},1\right)$ nokatda bolan, $C(1,-1,3)$ nokat arkaly geçýän sferanyň deňlemesini ýazmaly.

544. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8y + 2z + \frac{1}{2} = 0$ görnüşde berlen sferanyň merkezini we radiusyny tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäni 2-ä böleliň:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y + z + \frac{1}{4} = 0.$$

Doly kwadratlary bölüp alalyň:

$$x^2 + \left(y^2 - 4y + 4\right) + \left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right) - 4 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0,$$

$$x^2 + \left(y-2\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

Bu deňlemäni (1) deňleme bilen deňeşdirip $R = 2$, $C\left(0,2,-\frac{1}{2}\right)$ bolýandygyny görýäris.

545. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$ görnüşdäki deňleme bilen berlen sferanyň radiusyny we merkezini tapmaly.

546. Sferanyň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny tapmaly.

1) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$;

2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$.

547. Merkezi xOy tekizlikde ýatýan we $A(1,2,-4)$, $B(1,-3,1)$, $C(2,2,3)$ nokatlar arkaly geçýän sferanyň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. A,B,C nokatlaryň sfera degişlidigine görä olaryň koordinatalary $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ deňlemäni kanagatlandyrýandyrlar. Şeýle hem sferanyň merkeziniň xoy tekizlikde ýatýandygyna görä $c=0$.

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=R^2;$$

$$(1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=R^2;$$

$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=R^2.$$

Bu ýerden,

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16^2=(1-a)^2+(-3-b)^2+1^2$$

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16^2=(2-a)^2+(2-b)^2+9$$

ýa-da

$$(2-b)^2-(-3-b)^2=-15, \quad 10b=10$$

$$(1-a)^2-(2-a)^2=-7, \quad 2a=-4.$$

Şunlukda, $a=-2$, $b=1$. $C(-2,1,0)$ nokat sferanyň merkezidir. Sferanyň radiusyny tapalyň:

$$R^2=(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1+2)^2+(2-1)^2+16=26.$$

Indi gözleýän sferamyzyň deňlemesini ýazyp bileris:

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

548. Radiusy $R=2$ deň bolan $A(1,-2,-1)$, $B(-5,10,-1)$, $C(-8,-2,2)$ nokatlar arkaly geçýän sferanyň deňlemesini ýazmaly.

§ 9. Silindr üstler

Haýsy bolsada bir göni çyzyk öz özüne paralleligini saklap başga bir berlen çyzygyň ugry bilen hereket edip üst emele getirýän bolsa, onda ol üste silindr üst diýilýär. Öz özüne parallelligini saklap hereket edýän göni çyzyga emele getiriji diýilýär. Emele getirijiniň hereket edýän göni çyzygyna ugrukdyryjy diýilýär.

Emele getirijisi oz oka parallel bolan silindr üstüň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Şeýle hem emele getirijisi Oy, Ox oklara parallel bolan silindr üstleriň deňlemeleri degişlilikde aşakdaky görnüşdedir:

$$F(x, z) = 0 \qquad (2)$$

$$F(y, z) = 0. \qquad (3)$$

Bu üstleriň ugrukdyryjylarynyň deňlemelerini ýazalyň:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

1. Elliptik silindr. (*26-njy çyzgy*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

Bu üstüň ugrukdyryjysy xOy tekizlikde ellipsdir. $a = b$ bolsa tegelek silindri alýarys.

2. Giperbolik silindr (*27-nji çyzgy*)

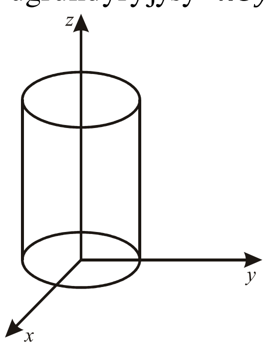
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bu üstüň ugrukdyryjysy xOy tekizlikde giperboladyr.

3. Parabolik silindr (*28-nji çyzgy*)

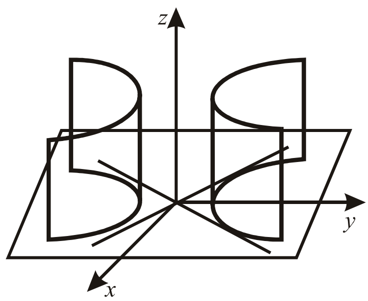
$$y^2 = 2px.$$

Bu üstüň ugrukdyryjysy xOy tekizlikde paraboladyr.



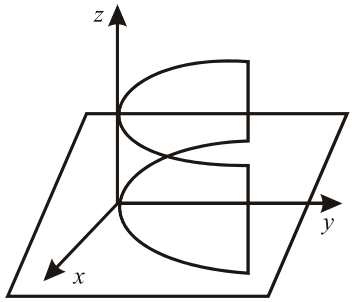
$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

26-njy çyzgy



$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

27-nji çyzgy



$y^2 = 2px$

28-nji çyzgy

549. $x^2 + y^2 = 2ax$ deňleme giňişlikde haýsy üsti aňladýar?

Çözülişi. Berlen deňleme özünde z-i saklamaýar. Şonuň üçin ol üst emele getirijisi Oz oka parallel bolan silindr üstdür. Onuň ugrukdyryjysy xOy tekizlikde

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

töwerekdir. Onuň merkezi $(a,0,0)$ nokatda bolup, radiusy $R = |a|$ deňdir. Şunlukda, berlen deňleme tegelek silindri aňladýar.

550. $x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ deňleme giňişlikde haýsy üsti aňladýar?

Çözülişi. Berlen deňleme z ululygy özünde saklamaýar. Şonuň üçin berlen deňleme emele getirijisi Oz oka parallel bolan silindr üstdür. Onuň ugrukdyryjysy

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (x+1)^2 = 4y \\ z = 0 \end{cases}$$

we depesi $(-1,0,0)$ nokatda bolan paraboladyr. Diýmek, garaýan üstümiz parabola silindridir.

551. $9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0$ deňleme giňişlikde haýsy üsti aňladýar?

Çözülişi. Deňleme özünde x ululygy saklamaýar. Şonuň üçin berlen deňleme emele getirijisi Ox oka parallel bolan silindr üstdür. Onuň ugrukdyryjysy

$$\begin{cases} 9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} \dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(z-2)^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

bolan giperboladyr. Onuň merkezi $(0,1,2)$ nokatda bolup, hakyky oky Oy oka paralleldir. Şunlukda, berlen deňleme giperbola silindrini aňladýar.

Deňlemeleriň giňişlikde haýsy üsti aňladýanlygyny takyklamaly.

552. $x^2 + z^2 = 9.$ **553.** $y^2 = -6x.$

554. $z^2 + 4z - 2x + 6 = 0.$ **555.** $x^2 + y^2 = 4y.$

§ 10. Aýlanma üstler

Haýsyda bolsa bir çyzygyň nokatlary ok diýip atlandyrylýan göni çyzygyň töwereginde, şol okdan uzaklygy üýtgemän şol oka perpendikulýar tekizlik boýunça 2π burça öwrülip üst emele getirýän bolsa, onda ol üste aýlanma üst diýilýär. Ýönekeýlik üçin aýlanýan çyzyk oka perpendikulýar bolan tekizlik bilen diňe bir nokatda kesişýär diýeliň.

Goý, yOz tekizlikde deňlemesi

$$\begin{cases} F(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

bolan L çyzyk berlen bolsun. Şol çyzygy Oz okuň töwereginde aýlanymyzda emele gelen üstüň deňlemesini ýazalyň:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0. \tag{2}$$

Ýagny $F(x,y)=0$ deňlemede y koordinata $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ bilen çalşyrylýar. Şol egrini Oy okuň töwereginde aýlanymyzda emele gelen aýlanma üstüň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0. \tag{3}$$

556. xOz tekizlikde ýatýan $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsiň oz okuň töwereginde aýlanmagyndan emele gelen ellipsoidyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Berlen ellipsiň deňlemesini iki üstüň kesişmesi hökmünde ýazalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Bu deňlemeler sistemasyny x we y görä çözeliň hem-de kwadrata götereliň:

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-z^2) \\ y^2=0 \end{cases}.$$

Bu iki deňligi goşup alarys:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-z^2)$$

ýa-da

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Bu aýlanma ellipsoidyň deňlemesidir.

557. yOz tekizlikde ýatýan $y^2=2px$ parabolanyň oz okunyň töwereginde aýlanmagyndan emele gelen paraboloidyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Berlen parabolanyň deňlemesini iki üstüň kesişmesi görnüşinde ýazalyň:

$$\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}.$$

Bu deňlemeler sistemasyny y we x görä çözeliň hem-de kwadrata götereliň:

$$\begin{cases} y^2=2pz \\ x^2=0 \end{cases}.$$

Bu iki deňligi goşup alarys:

$$x^2+y^2=2pz.$$

Bu aýlanma paraboloidyň deňlemesidir.

558. yOz tekizlikde ýatýan $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ giperbolanyň Oz okuň töwereginde aýlanmagyndan emele gelen aýlanma giperboloidyň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Berlen giperbolanyň deňlemesini iki üstüň kesişmesi görnüşinde ýazalyň:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}.$$

Bu deňlemäni y we x görä çözeliň:

$$\begin{cases} y=b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}} \\ x=0 \end{cases}.$$

Deňlemeleri kwadrata götereliň we goşalyň:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ \frac{x^2}{b^2}=0 \end{cases}, \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Aşakdaky çyzyklaryň degişli oklaryň daşynda aýlanmagyndan emele gelen üstleriň deňlemelerini ýazmaly:

559. $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$ Oy okuň daşynda.

560. $\begin{cases} \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1 \\ x=0 \end{cases}$ Oy okuň daşynda.

561. $\begin{cases} y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$ Oz we Oy oklaryň daşynda.

562. $x^2+y^2=\sin^2 z$ üstüň görnüşini takyklamaly.

Çözülişi. Berlen üsti xOy tekizlige parallel bolan $z=h$ tekizlik bilen keseliň. Kesikde emele gelen L çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sin^2 z \\ z=h \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^2+y^2=\sin^2 h \\ z=h \end{cases}.$$

Şunlukda, erkin h üçin kesikde merkezi Oz okda, radiusy $R = |\sin h|$ deň bolan töweregi alarys. Bu ýerden görnüşi ýaly üst Oz okuň daşynda aýlanmagyndan alynýar.

Indi haýsy çyzygy aýlanymyzda üst alynýandygyny takyklamak üçin ony yoz tekizlik bilen keseliň.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sin^2 z \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \pm \sin z \\ x = 0 \end{cases}$$

Diýmek, berlen üst sinusoidyň Oz okuň daşynda aýlanmagyndan alynýar.

563. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ deňleme bilen berlen üstüň görnüşini takyklamaly.

§ 11. Ikinji tertipli üstler

Dekart koordinatalar sistemasynda ikinji tertipli üstler ikinji tertipli deňleme bilen berilýändir:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0. \qquad (1)$$

Ýörite koordinatalar sistemasyny almak bilen (1) deňleme ýönekeý görnüşe getirilýär. Ikinji tertipli üstleriň formasyny we ýerleşişini köplenç halatlarda parallel kesikleriň metody bilen öwrenilýär. Ol aşakdaky ýaly amala aşyrylýar. Berlen üst koordinata tekizliklerine parallel bolan tekizlikler bilen kesilýär. Alnan kesigiň formasy we ölçegi üstüň formasyny anyklamaga ýardam edýär.

564. Deňlemäniň geometrik manysyny bilmeli

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0.$$

Çözülişi. Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$(x + 2y + 3z)^2 - 4(x + 2y + 3z) + 3 = 0.$$

Deňlemäniň çep bölegini köpeldijilere dargadalyň:

$$(x + 2y + 3z - 1)(x + 2y + 3z - 3) = 0.$$

Şunlukda, deňleme giňişlikde iki tekizligiň toplumyny kesgitleýär:

$$x + 2y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

565. Üstüň deňlemesini ýönekeý görnüşe getirmeli:

$$4x^2 + 9y^2 + 35z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

Çözülişi. Deňlemäni özgerdip ýazalyň:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13.$$

Ýaýlardaky aňlatmalary doly kwadrata dolduralyň:

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36$$

ýa-da

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36.$$

Koordinata başlangyjyny $O'(1,1,1)$ nokat diýip almak bilen koordinata oklaryny parallel göçüreliň:

$$x-1=x', \quad y-1=y', \quad z-1=z'$$

$$x=1+x', \quad y=1+y', \quad z=1+z'$$

Şunlukda, biz üstüň deňlemesini alýarys:

$$4x'^2+9y'^2+36z'^2=36$$

ýa-da

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}+z'^2=1.$$

Bu ellipsoidyň deňlemesidir. Onuň ýarym oklary degişlilikde 3,2,1 bolup, merkezi koordinatalar başlangyjyndadyr.

Aşakdaky deňlemeleriň giňişlikde haýsy üsti aňladýandygyny bilmeli:

566. $x^2+z^2-4x-4z+4=0.$ **567.** $x^2-xy-xz+yz=0.$

568. $z^2+xy-yz-5x=0$ üst bilen $\frac{x}{-1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-10}{7}$ göni çyzygyň kesişme nokadyny tapmaly.

Çözülişi. Üst bilen göni çyzygyň kesişme nokatlaryny tapmak üçin olaryň deňlemelerini bilelikde çözüp x,y.z tapýarlar. Göni çyzygyň deňlemesinden alarys:

$$x=-t, \quad y=5+3t, \quad z=10+7t.$$

Bularyň bahalaryny üstüň deňlemesine goýup **t**-ni tapýarys:

$$(10+7t)^2+(-t)(5+3t)-(5+3t)(10+7t)-5(-t)=0.$$

$$25t^2+75t+50=0, \quad t^2+3t+2=0, \quad t_1=-1, \quad t_2=-2.$$

Onda

$$x=1, \quad y=5+3(-1)=2, \quad z=10+7(-3)=3;$$

$$x=2, \quad y=5+3(-2)=1, \quad z=10+7(-2)=-4.$$

Diýmek, $M_1(1,2,3)$, $M_2(2,-1,-4)$ gözlenýän nokatlardyr.

569. Üst bilen göni çyzygyň kesişme nokadyny tapmaly:

1) $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6zx+12x-36z=0;$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1}.$$

2) $x^2-2y^2+z^2-2xy-yz+4zx+3x-5z=0;$

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}.$$

570. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ ellipsoidyň $z=0,\pm1,\pm2,\pm3,$ $x=0$ we $y=0$ tekizlikler bilen kesişmesini derňemeli.

Çözülişi. Ilki bilen ellipsoidyň $z=h,$ $h=0,\pm1,\pm2,\pm3$ tekizlikler bilen kesilende emele gelen kesiklere garalyň. Ellipsoidyň deňlemesinde $z=h$ goýup alarys:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1-\frac{h^2}{9}$$

ýa-da

$$\frac{x^2}{36\left(1-\frac{h^2}{9}\right)}+\frac{y^2}{16\left(1-\frac{h^2}{9}\right)}=1.$$

Belgilemäni girizeliň:

$$a_h=6\sqrt{1-\frac{h^2}{9}},\quad b_h=4\sqrt{1-\frac{h^2}{9}}.$$

Şunlukda, kesikde ýarym oklary a_h we b_h bolan

$$\frac{x^2}{a_h^{\ 2}}+\frac{y^2}{b_h^{\ 2}}=1$$

ellipsi alýarys. Bu ýerde $h=0,\pm1,\pm2,\pm3$ bahalary goýup alýarys:

$$a_0=6,\quad a_{\pm1}=6\sqrt{\frac{8}{9}}=4\sqrt{2}=5{,}6$$

$$a_{\pm2}=6\sqrt{\frac{5}{9}}=2\sqrt{5}=4{,}5,\quad a_{\pm3}=0$$

$$b_0=4,\quad b_{\pm1}=4\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}=3{,}8,\quad b_{\pm2}=4\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{5}=3{,}0,\quad b_{\pm3}=0.$$

Görnüşi ýaly uly ellips $z=0$ bolanda bolýar. Oz ok boýunça $z=h$ tekizligi xOy tekizlige parallel edip galdyrsak ýa-da aşak düşürsek ellips kiçeler. Ahyrynda $(0,0,\pm3)$ nokada öwrüler. Edil şeýle ýagdaý xOz we

yOz tekizliklere parallel bolan kesiklerde ýüze çykýar. Bu ýagdaýda hem uly ellips $x=0$ we $y=0$ koordinata tekizlikler bilen kesilende bolýar:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1 \\ y=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \\ x=0 \end{cases}.$$

571. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ giperboloidyň $z=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,$ $x=0$ we $y=0$ tekizlikler bilen kesişmesini derňemeli.

572. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=2z$ elliptik paraboloidyň $x=0,$ $y=0$ we $z=h,$ $h=1,2,3$ tekizlikler bilen kesilendäki kesigini derňemeli.

VI BÖLÜM

§ 1. Funksiýa düşünjesi

1. Hakyky sanlar. Islendik rasional we irrasional sanlaryň toplumy hakyky sanlaryň toplumyny düzýär. Hakyky a sanyň absolýut ululygy (moduly) $|a|$ belgi bilen belgilenýär we

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eger } a \geq 0 \text{ bolsa,} \\ -a, & \text{eger } a < 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Islendik erkin hakyky a we b sanlar üçin

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{1}$$

deňsizlik dogrudyr.

2. Funksiýa düşünjesi. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty. Eger, X köplüge girýän her bir x elemente haýsy hem bolsa bir düzgün boýunça Y köplüge girýän bir ýa-da birnäçe elementler degişli edilse, onda x we y ululyklaryň arasynda funksional baglylyk berlen diýilýär. Eger şonda her bir $x \in X$ elemente diňe bir kesgitli $y \in Y$ element degişli edilse, onda y ululyga x-e bagly birbahaly funksiýa diýilýär. Garşylykly halda y ululyga x-e bagly köpbahaly funksiýa diýilýär. y ululyk x-e bagly funksiýa diýmek $y = f(x)$ ýaly belgilenýär. X köplüge funksiýanyň kesgitleniş (ýa-da barlyk) oblasty, Y köplüge bolsa funksiýanyň bahalarynyň köplügi diýilýär. x ululyga baglanyşyksyz üýtgeýän ululyk ýa-da argument diýilýär.

3. Ters funksiýalar. $y = f(x)$ funksiýany kesgitleýän düzgüni tersine hem peýdalanyp bileris, ýagny $M = \{y\}$ köplügi argumentiň bahalarynyň köplügi, $E = \{x\}$ köplüge bolsa funksiýanyň bahalarynyň köplügi diýip hasap ederis. Şunlukda, biz $M = \{y\}$ köplükde kesgitlenen $x = \varphi(y)$ funksiýany alarys. Bu funksiýany $y = f(x)$ funksiýanyň ters funksiýasy diýip atlandyrarys. Görnüşi ýaly ters funksiýanyň hem köpbahaly funksiýa bolmagy mümkindir.

4. Çylşyrymly we anyk däl funksiýalar. Eger $y = f(x)$ funksiýanyň x argumenti hem öz gezeginde t görä $x = \varphi(t)$ funksiýa bolsa, onda $u = f(\varphi(t))$ çylşyrymly funksiýany alarys.

Eger $y = y(x)$ funksiýa $F(x, y) = 0$ deňleme görnüşinde berlen bolsa, onda oňa anyk däl funksiýa diýilýär.

573. $|a-b| \geq |a|-|b|$ deňsizligi subut etmeli.

Subudy. Goý, $a-b=c$ bolsun. Bu ýerden $a=b+c$ Onda (1) deňsizligi ulanyp, alarys:

$$|a| = |b+c| \leq |b|+|c| \quad \text{ýa-da}$$

$$|c| \geq |a|-|b|, \ |a-b| \geq |a|-|b|.$$

574. Eger $|a-b| < \alpha$ we $|b| < \beta$ bolsa, onda $|a| < \alpha+\beta$ bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Hakykatdan-da, $a=(a-b)+b$ deňlikden

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| < \alpha+\beta$$

575. Deňsizlikleri çözmeli.

a) $|x-5| < 3$, b) $|x-4| > 5$.

Çözülişi. a) Absolýut ululygyň kesgitlemesini ulanyp, alarys:

$$x-5 > -3, \ x-5 < 3 \text{ we } x > 2, \ x < 8, \ 2 < x < 8.$$

b) $|x-4| > 5$ deňsizlik aşakdaky sistema bilen deňgüýçlidir:

$$x-4 < -5, \ x-4 > 5 \text{ we } x < -1, \ x > 9.$$

Bu ýerden, $-\infty < x < -1$, $9 < x < +\infty$.

576. Deňsizligi subut etmeli.

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Subudy. Bu deňsizligiň subudy

$$(a-b)^2 \geq 0$$

deňsizlikden gelip çykýar.

577. Deňsizligi subut etmeli:

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Subudy. Deňsizligi induksiýa usuly boýunça subut edeliň. Eger $n=1$ bolsa, $1+h \geq 1+h$. Diýmek, bu halda deňsizlik ähli h üçin dogrudyr. Goý ol $n=k$ üçin dogry bolsun, ýagny

$$(1+h)^k \geq 1+kh,$$

onda ony $(1+h)$-a köpeldip taparys:

$$(1+h)^{k+1} \geq (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 \geq 1+(k+1)h.$$

578. $\dfrac{3x^3+1}{2x^2+2}$ aňlatmanyň $x=-3$ bolandaky bahasyny tapmaly.

Çözülişi.

$$\left|\frac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|_{x=-3}=\left|\frac{3(-3)^3+1}{2(-3)^2+2}\right|=\left|\frac{-80}{20}\right|=|-4|=4.$$

579. Eger $f(x)=x^3+5x-1$ bolsa $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ bahalary tapmaly

Çözulişi.

$$f(-1)=(-1)^3+5(-1)-1=-1-5-1=-7,$$

$$f(0)=0^3+5\cdot 0-1=-1,$$

$$f(1)=1^3+5\cdot 1-1=5,$$

$$f(2)=2^3+5\cdot 2-1=8+10-1=17,$$

$$f(3)=3^3+5\cdot 3-1=27+15-1=41.$$

580. Eger $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$ bolsa, $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.

$$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x},\quad f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\lg\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}=\lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}.$$

$$f(x)+f(y)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\right)=\lg\frac{1+xy+x+y}{1-x-y+xy}.$$

Şunlukda, $f(x)+f(y)$ we $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ aňlatmalary deňeşdirip, deňligiň dogrudygyny görýäris.

581. Funksiýalaryň kesgitleniş oblastlaryny tapmaly.

1) $y=\sqrt{1-x^2}$, 2) $y=\lg x$, 3) $y=\frac{2x^2-\lg(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}$.

Çözülişi. 1) Görnüşi ýaly $x-$in her bir $-1\le x<1$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bahalarynda $\sqrt{1-x^2}$ aňlatmanyň hakyky bahalary bardyr. Şonuň üçin [–1, 1] kesim funksiýanyň kesgitleniş oblastydyr.

2) Logarifmiň kesgitlemesinden, bu funksiýanyň kesgitleniş oblastynyň $0<x<\infty$ tükeniksiz aralykdygy gelip çykýar.

3). Görnüşi ýaly $\lg(x+5)$ aňlatma $x>-5$ bahalar üçin kesgitlenendir.

$\sqrt{8-x^3}$ aňlatmanyň kesgitleniş oblasty $x \le 2$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügidir. Şu ýerde $x=2$ bolanda drobyň maýdalawjysynyň nola öwrülýändigi üçin $x<2$ deňsizlik dogrudyr. Şunlukda, funksiýanyň kesgitleniş oblasty $(-5<x<2), (-5, 2)$ aralykdyr.

582. $y=\sqrt[4]{6x-x^2-5}$ funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapmaly.

Çözülişi. Görnüşi ýaly $6x-x^2-5 \ge 0$ deňsizlik ýerine ýetmelidir. Şu deňsizligi özgerdip alarys: $(x-1)\cdot(x-5) \le 0.$ Bu deňsizlik bolsa

$$x-1 \ge 0,\ x-5 \le 0 \text{ we } x-1 \le 0,\ x-5 \ge 0$$

deňsizlikler ýerine ýetende dogrudyr. Birinji sistemadan taparys:

$$x \ge 1,\ x \le 5.$$

Bu ýerden $1 \le x \le 5.$

Ikinji deňsizlikler sistemasyny çözüp taparys: $x \le 1,\ x \ge 5.$

x-iň hiç bir bahasy bu sistemany kanagatlandyryp bilmez. Şunlukda, berlen funksiýanyň kesgitleniş oblasty [1, 5] kesimdir.

583. $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$ funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapmaly.

Çözülişi. Şu ýerde

$$x^2-3x-4 \ne 0,\ (x+1)\cdot(x-4) \ne 0$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi zerurdyr. Bu ýerden $x \ne -1,\ x \ne 4$ alarys. Şunlukda, funksiýanyň kesgitleniş oblasty

$$(-\infty, -1),\ (-1, 4),\ (4,\ \infty)$$

aralyklaryň birleşmesidir.

Kesgitleme. Eger $-l<x<l$ aralykda kesgitlenen $f(x)$ funksiýa, şu aralygyň islendik x-i üçin $f(-x)=f(x)$ deňligi kanagatlandyrsa, onda oňa jübüt funksiýa diýilýär.

584. $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ funksiýanyň jübüt funksýadygyny görkezmeli.

Çözülişi. $f(-x)=\dfrac{1}{2}\left(a^{-x}+a^x\right)=f(x).$

585. $y=1-2^{-x}$ funksiýanyň ters funksiýasyny tapmaly

Çözülişi. Deňlemäni x-a görä çözüp alarys:

$$2^{-x}=1-y,\ x=-\frac{\lg(1-y)}{\lg 2}.$$

Bu funksiýanyň kesgitleniş oblasty $-\infty<y<1$ aralykdyr.

586. $y=2x+3$ funksiýanyň ters funksiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

$$2x=y-3,\ x=\frac{y-3}{2}.$$

587. $y=\sin u,\ u=\lg\vartheta,\ \vartheta=\sqrt{x}$ çylşyrymly funsiýany bir deňlik görnüşinde ýazmaly.

Çözülişi. $u=\lg\vartheta$ funksiýada ϑ funksiýanyň $\vartheta=\sqrt{x}$ bahasyny goýalyň: $u=\lg\sqrt{x}$. Alnan u funksiýanyň bahasyny, bolsa $y=\sin u$ funksiýa goýup,

$$y=\sin(\lg\sqrt{x})$$

çylşyrymly funksiýany alarys.

588. Eger $\varphi(x)=3x+2$ we $f(x)=x^2-1$ bolsa, $f(\varphi(x))$ we $\varphi(f(x))$ çylşyrymly funksiýalary düzmeli.

Çözülişi.

$$f(\varphi(x))=(3x+2)^2-1=9x^2+12x+3,\ \varphi(f(x))=3x^2-1.$$

Şu ýerden görnüşi ýaly çylşyrymly $f(\varphi(x))$ we $\varphi(f(x))$ funksiýalar dürlüdirler.

589. $x^2-\arccos y=\pi$ deňlemäni $y=f(x)$ görnüşde ýazmaly.

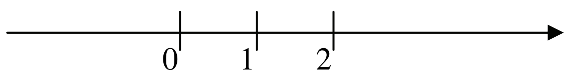
Çözülişi. Deňlemeden alarys: $\arccos y=x^2-\pi$.

Bu ýerden $y=\cos(x^2-\pi)=-\cos x^2$. Şunlukda, $y=-\cos x^2$.

590. Deňlemäni çözmeli:

$$|x-1|+|x-2|=3.$$

Çözülişi. Modullardaky aňlatmalar $x=1$ we $x=2$ bolanda nola öwrülýär. Olary san okuna geçireliň:



29-njy çyzgy

Berlen deňlemä $-\infty < x < 1,\ 1 \le x \le 2,\ 2 < x < \infty$ aralyklaryň her birine garalyň. Berlen deňlemeden aşakdaky deňsizlikden we deňlemelerden ybarat bolan üç sistemany ýazyp bileris:

$$\begin{cases} x < 1, \\ -(x-1)-(x-2)=3, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ (x-1)-(x-2)=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ (x-1)-(x-2)=3 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x < 1, \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x - x = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Birinji sistemany x=0 kanagatlandyrýar. Ikinji sistemanyn çözüwi ýokdur. Sebäbi x–x=2 hiç haçan ýerine ýetmeýär. Üçünji sistemany x=3 kanagatlandyrýar. Şunlukda, berlen deňlemäniň x_1=0 we x_2=3 kökleri bardyr.

591. Kwadraty 2-ä deň bolan rasional sanyň ýokdugyny subut etmeli.

592 Deňsizligi subut etmeli:

$$|ac+bd| \le \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}, \quad a,b>0.$$

593. Goý, $a \ge 0$ bolsun. Onda b sanyň haýsy bahalarynda aşakdakylaryň dogrudygyny anyklamaly:

a) $|a+b| = |a|+|b|$, b) $|a-b = |a|+|b|$,

ç) $|a+b| < |a|+|b|$, d) $|a-b| < |a|+|b|$.

594. $f(x)=x^2-5x+3$ berlen bolsa, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ tapmaly.

595. Eger $f(x)=\arccos(\lg x)$ bolsa, $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$ tapmaly.

596. Eger $f(x)=ax^2+bx+c$ bolsa,

$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$ bolýandygyny görkezmeli.

597. Eger $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$, $(a>0)$ bolsa,

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ deňligi subut etmeli.

598 $y=\dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[5]{0{,}5x^3}}{3}$ funksiýanyň x=4 nokatdaky bahasyny tapmaly.

599. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapmaly:

$$y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}.$$

600. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapmaly.

$$y = \lg\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}.$$

601. Eger

$$\begin{cases} f(x) = 4x^2 - 6x + 1 \\ \varphi(x) = 5x + 1 \end{cases} \quad \text{bolsa,} \quad \frac{f(5)}{\varphi(4) - 1} \quad \text{tapmaly.}$$

602. Funksiýalaryň kesgitleniş oblastlaryny tapmaly.

a) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$, b) $y\sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}}$

ç) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, d) $y = \sqrt{\sin x}$, e) y=x–arctg$x$

603. 2y=2x+5 funksiýanyň ters funksiýasyny tapmaly. Ters funksiýanyň kesgitleniş oblastyny anyklamaly.

604. $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ funksiýa ters bolan funksiýany tapmaly.

605. y = sin$x$ funksiýanyň ters funksiýasyny tapmaly.

606. Funksiýalaryň ters funksiýalaryny tapmaly:

a) $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$, b) $y = 5^{\lg x}$.

607. Aşakdaky funksiýalaryň jübütligini ýa-da täkligini anyklamaly.

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, b) $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$.

608. $f(x)$ funksiýa [0, 1] kesimde berlen bolsa, aşakdaky funksiýalaryň kesgitleniş oblastlaryny tapmaly:

a) $f(3x^2)$, b) $f(\mathrm{tg}x)$.

§ 2. Elementar funksiýalaryň derňelişi

Eger X köplügiň erkin x_1 we x_2 elementleri üçin $x_2 > x_1$ bolanda $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x)$ funksiýa X köplükde artýan (kemelýän) funksiýa diýilýär. Eger X köplügiň erkin x_1 we x_2 elementleri üçin $x_2 > x_1$ bolanda $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$ deňsizlik ýerine ýetse, $f(x)$ funksiýa kemelmeýän (artmaýan) funksiýa diýilýär. Eger X köplükde kesgitlenen $f(x)$ funksiýa üçin, $M \in R$ san tapylyp, $\forall x \in X$ üçin

$$f(x) \leq M \qquad (f(x) \geq M)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa X köplükde ýokardan (aşakdan) çäkli funksiýa diýilýär. Hem ýokardan hem aşakdan çäkli funksiýa **çäkli** funksiýa diýilýär.

San okunda kesgitlenen $f(x)$ funksiýa x argumentiň kesgitli erkin bahalary üçin $f(x+T)=f(x)$, $T \neq 0$ deňligi kanagatlandyrsa, T sana berlen funksiýanyň periody diýilýär. Noldan tapawutly periody bolan funksiýalara bolsa, periodik funksiýalar diýilýär.

Elementar funksiýalar derňelende aşakdaky shemadan peýdalanmak amatlydyr:

1) Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapmaly;

2) Funksiýanyň jübütligini, täkligini, periodikligini anyklamaly;

3) Funksiýanyň nola öwrülýän nokatlaryny tapmaly;

4) Nola öwrülýän nokatlaryň aralygynda funksiýanyň alamatlaryny barlamaly;

5) Funksiýanyň çäkliligini anyklamaly. Onuň iň uly, iň kiçi bahalaryny tapmaly;

609. Funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly:

$$y=3x^2+5x-1$$

Çözülişi. Kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp alalyň:

$$y = 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{4\cdot 3\cdot 1+5^2}{4\cdot 3} = 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{12}$$

Görnüşi ýaly, eger $x+\frac{5}{6}>0$, ýagny $x>-\frac{5}{6}$ bolsa funksiýa artýar. $x+\frac{5}{6}<0$ bolsa funksiýa kemelýär, Şunlukda, $\left(-\infty,-\frac{5}{6}\right)$ aralykda funksiýa kemelýär, $\left(-\frac{5}{6},\infty\right)$ aralykda bolsa funksiýa artýar. Diýmek, $x=-\frac{5}{6}$ nokatda funksiýa iň kiçi bahany kabul edýär.

$$y_{\min} = y\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{37}{12}.$$

610. $y=a^x, a>0, a\neq 1$ funksiýanyň a-nyň haýsy bahalarynda artýandygyny ýa-da kemelýändigini görkezmeli.

Çözülişi. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty sanlar okudyr.

$$y_2 - y_1 = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\,(a^{x_2 - x_1} - 1).$$

x_1-iň hemme bahalarynda a^{x_1} položiteldir. Eger, $0<a<1$ bolsa $x_2 - x_1>0$ bolýanlygy üçin $a^{x_2 - x_1} < 1$ we eger $a>1$ bolsa $a^{x_2 - x_1} > 1$. Şunlukda, $0<a<1$ bolsa $y = a^x$ funksiýa kemelýär, $a>1$ bolsa $y = a^x$ funksiýa artýar.

611. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly:

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Çözülişi. Trigonometriýadan belli formulalary ulanyp taparys:

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Belli bolşy ýaly $\cos x$ funksiýa

$$2n\pi \le x \le (2n+1)\pi, \qquad n=0, \pm1, \pm2,...$$

kesimde kemelip

$$(2n-1)\pi \le x \le 2n\pi, \qquad n=0, \pm1, \pm2,...$$

kesimde bolsa artýar. Şunlukda, $f(x) = \sin x + \cos x$ funksiýa

$$\frac{\pi}{4} + 2n\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \quad n = 0, \pm1, \pm2,...$$

kesimde kemelip,

$$\frac{\pi}{4} + (2n-1)\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad n=0, \pm1, \pm2,...$$

kesimde bolsa artýar.

612. Funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly:

$$f(x) = 3^{(x^2-2)^3+8}.$$

Çözülişi. $\varphi(x)=(x^2-2)^3+8$ belgilemäni girizeliň. Onda $f(x) = 3^{\varphi(x)}$ funksiýa iň kiçi bahany $\varphi(x)$ funksiýa iň kiçi bahany alanda alyp biler.

$$\varphi(x)=(x^2-2)^3+8=x^6-6x^4 +12x^2 = x^2(x^4-6x^2+12)+x^2[(x^2-3)^2 +3].$$

Şu ýerden görnüşi ýaly $\varphi(x)$ funksiýa in kiçi bahany $x=0$ bolanda alýar. Şunlukda, $f(x)$ funksiýa $x=0$ bolanda in kiçi bahany kabul edýär.

$$f(0) = 3^{(0-2)^3+8} = 3^0 = 1.$$

613. Funksiýanyň jübütligini ýa-da täkdigini anyklamaly:

1) $f(x) = x^2 - 5x\sin x;$ 2) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x} + 3x}.$

Çözülişi.

1) $f(-x)=(-x)^2-5(-x)\sin(-x)= x^2+5x\cdot\sin(-x)= x^2-5x\sin x=f(x).$

Diýmek., berlen funksiýa jübütdir.

2) $f(-x) = \dfrac{\cos(-2x)}{\sqrt[3]{-x} - 3x} = -\dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x} + 3x} = -f(x).$

Diýmek, funksiýa täk funksiýadyr.

614. $f(x) = \sin 3x$ funksiýanyň $T = \dfrac{2\pi}{3}$ periodly periodik funksiýadygyny görkezmeli.

615. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ funksiýanyň periodyny tapmaly.

Çozülişi.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = 1 -$$

$$-\frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin(4x + \frac{\pi}{2}).$$

Şu ýerden $T = \dfrac{\pi}{2}.$

616. Funksiýalaryň jübütligini ýa-da täkligini kesgitlemeli

a) $f(x) = 4 - 2x^2 + \sin^2 x,$ b) $f(x) = \dfrac{1 + a^{kx}}{1 - a^{kx}},$

ç) $f(x) = \sin x + \cos x,$ d) $f(x) = \mathrm{const},$

e) $f(x) = 2^x + 2^{-x},$ ä) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x.$

617. Aşakdaky funksiýalaryň periodikligini anyklamaly we ol periodik funksiýa bolsa onuň iň kiçi periodyny tapmaly:

a) $f(x) = 10\sin 3x,$ b) $f(x) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x,$

ç) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg} x},$ d) $f(x) = \sin^2 x,$ e) $f(x) = \sin(\sqrt{x}).$

618. $f(x) = \mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x$ funksiýanyň $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ aralykda artýandygyny ýada kemelýändigini barlamaly.

619. $f(x) = \mathrm{tg}(x + \dfrac{\pi}{3})$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

620. $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ funksiýanyň $(1,+\infty)$ aralykda kemelýändigini görkezmeli.

621. Eger x, y, z we t ululyklar hakyky bahalary alýan bolsa

$$f(x)=x^2+4y^2+3z^2+t^2-2x-12y-6z-2t$$

aňlatmanyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Aňlatmany özgerdip ýazalyň:

$$f(x)=(x-1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+3(z-1)^2+(t-1)^2-14.$$

Görnüşi ýaly, aňlatma iň kiçi bahany

$x=1,\quad y=\dfrac{3}{2},\quad z=1,\quad t=1$ bolanda kabul edýär. $f_{\min}=-14$.

622. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$

funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly

623. $f(x)=ax^2+bx+c$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny hem-de iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmaly.

624. Berlen perimetrli ähli gönüburçluklardan iň uly meýdany bolan gönüburçlugy tapmaly.

625. $f(x)=\cos x^2$ funksiýanyň periodiki funksiýa däldigini subut etmeli

626. Funksiýalaryň periodyny tapmaly

a) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$, b) $f(x)=2\cos\dfrac{x-\pi}{3}$.

§ 3. Funksiýanyň grafiginiň gurluşy

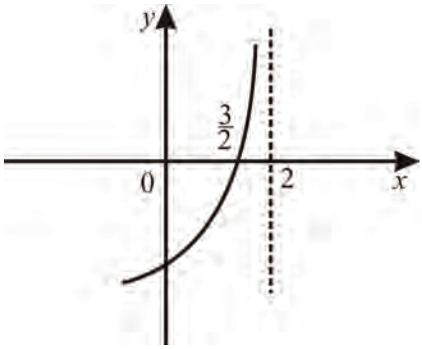
627. Funksiýanyň grafigini gurmaly: $y=\log_{1/2}(4-2x)$.

Çözülişi. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapalyň: $4-2x>0$, $x<2$. Onda funksiýanyn kesgitleniş oblasty $-\infty<x<2$ aralykdyr. Onuň grafiginin koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapalyň:

$y=0$ bolsa, $\log_{\frac{1}{2}}(4-2x)=0,\quad 4-2x=1,\quad x=\dfrac{3}{2}$

$x=0$ bolsa, $y=\log_{\frac{1}{2}}4=-2.$

Funksiýanyň grafigini guralyň.

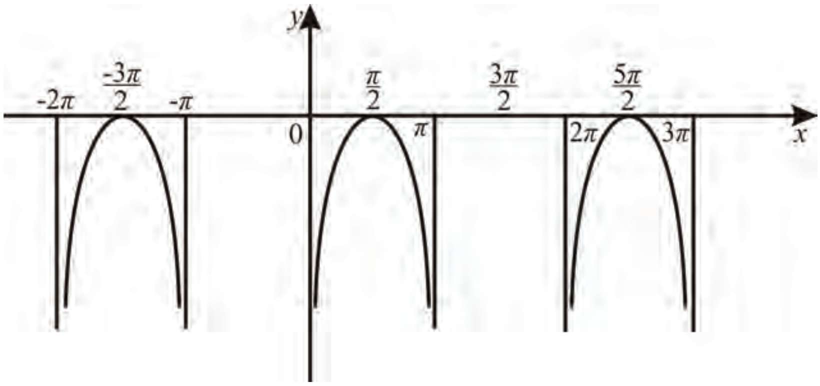


30-njy çyzgy

628. $y = \lg \sin x$ funksiýanyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty sin$x$ > 0 deňsizligi kanagatlandyrýan x-ň köplügidir. Ol Ox okuň $2\pi k < x < \pi + 2\pi k,$ (k-erkin bitin san), tükeniksiz kesimlerinden ybaratbyr. Bu kesimlerin çetki nokatlary funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli däldir. Bu funksiýa 2π periodly periodik funksiýadyr. Şonuň üçin funksiýany $0 < x < \pi$ aralykda derňemek ýeterlikdir. $\pi \leq x \leq 2\pi$ kesim funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli däldir. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ aralykda y=sin$x$ funksiýa 0-dan 1-e çenli artýar. y=lgsin$x$ funksiýa bolsa –∞-den 0-a çenli artýar. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ aralykda y=sin$x$ funksiýa 1-den 0-a çenli kemelýär. y=lgsin$x$ funksiýa bolsa, 0-dan –∞-e çenli kemelýär.

Gornuşi ýaly, $x = \frac{\pi}{2}$ bolanda funksiýa iň uly bahasyny, ýagny 0-y kabul edýär. Funksiýanyň grafigini guralyň:

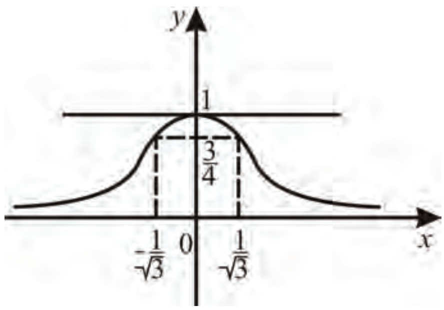


31-nji çyzgy

629. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ funksiýanyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Funksiýa Ox okuň ähli nokatlarynda kesgitlenen we jübüt funksiýadyr. x-ň erkin bahalary üçin drobyň maýdalawjysy $1+x^2 \geq 1$.

Onda $0 < y \leq 1$, $x = 0$ bolanda funksiýa iň uly bahany alýar. x tükeniksiz artmagy bilen y nola ymtylýar. Grafigi guralyň:



32-nji çyzgy

630. $y = x^2 + x + \sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2}$ funksiýanyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Arifmetiki köküň kesgitlemesiniň esasynda alarys:

$$y = x^2 + x + \sqrt{(x^2-1)^2} = x^2 + x + |x^2 - 1|.$$

Bu ýerde

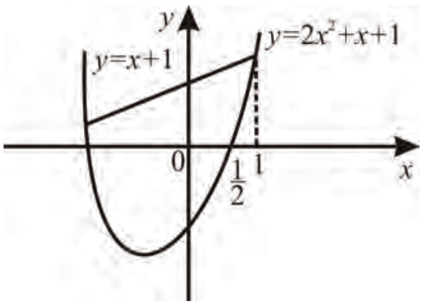
$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ eger } |x| \geq 1 \quad \text{bolanda,} \\ -(x^2-1) \text{ eger } |x| < 1 \text{ bolanda.} \end{cases}$$

Şunlukda,

$$y = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 \text{ eger } & |x| \geq 1 \text{ bolsa,} \\ x + 1 \quad \text{ eger } & |x| < 1 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

Görnüşi ýaly, berlen funksiýanyň grafigi iki bölekden ybaratdyr. Ol $y = 2x^2 + x + 1$ parabolanyň böleginden we $y = x + 1$ gönüniň kesiminden ybaratdyr. Bulary tapyp, degişli bölekleri gurup funksiýanyň grafigini alarys. Parabolanyň Ox oky bilen kesişme nokatlaryny tapalyň:

$2x^2 + x - 1 = 0,\quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}$. Diýmek, parabola Ox oky $x_1 = -1$ we $x_2 = \frac{1}{2}$ nokatlarda kesýär.



33-nji çyzgy

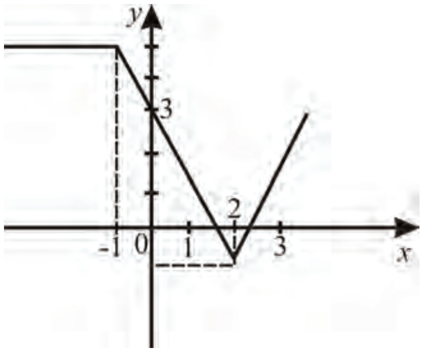
631. Funksiýanyň grafigini gurmaly:

$$y = 2|x - 2| - |x + 1| + x.$$

Çözülişi. Eger $x \geq 2$ bolsa, $y = 2(x-2) - (x+1) + x = 2x - 5$.
Eger $-1 \leq x < 2$ bolsa, $y = -2(x-2) - (x+1) + x = -2x + 3$.
Şeýle hem $x < -1$ bolsa, $y = -2(x-2) + (x+1) + x = 5$.
Şunlukda, berlen funksiýany aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$y = \begin{cases} 5, & x < -1 \quad \text{bolsa,} \\ -2x + 3, & -1 < x < 2 \quad \text{bolsa,} \\ 2x - 5, & x > 2 \quad \text{bolsa.} \end{cases}$$

Şonuň üçin funksiýanyň grafigi döwük çyzyklardan ybaratdyr.



34-nji çyzgy

632. Funksiýanyň grafigini gurmaly:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

Çözülişi. Bu funksiýa täk funksiýadyr. Şonuň üçin ony $x \geq 0$ bolanda derňemek ýeterlikdir. Ol funksiýany

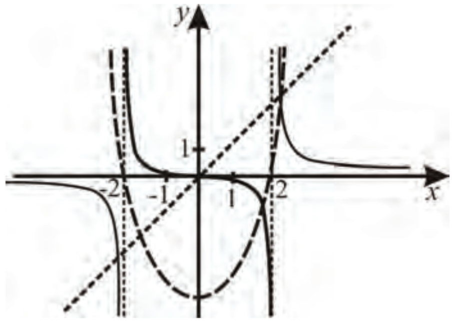
$$y_1 = x \quad \text{we} \quad y_2 = x^2 - 4,$$

funksiýalaryň $\frac{y_1}{y_2}$ gatnaşygy hökmünde garamak mümkindir.

Eger $x = 2$ bolsa, $y_2 = 0$ we berlen funksiýa bu nokatda kesgitlenen däldir. $[0, 2)$ aralykda y_1 funksiýa 0-dan 2-ä çenli artýar, y_2 bolsa noldan kiçidir we $|y_2| = 4 - x^2$ funksiýa 4-den 0-a çenli kemelýär. Şonuň üçin $f(x) = \frac{y_1}{y_2}$ noldan kiçidir we absolýut ululygy boýunça artýandyr. Şunlukda, $f(x)$ funksiýa $[0,2)$ aralykda 0-dan -∞-e çenli kemelýär. (2, ∞) aralykda y_1 we y_2 funksiýalar položiteldir we artýandyr. Olaryn gatnaşygy bolsa kemelýändir. Sebäbi $2 < x_1 < x_2$ bolanda

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2^2 - 4} - \frac{x_1}{x_1^2 - 4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 4)}{(x_2^2 - 4)(x_1^2 - 4)} < 0.$$

$x \to \infty$ bolanda funksiýa nola ymtylýar. Funksiýanyň grafigini guralyň:



35-nji çyzgy

633. Funksiýalaryň grafiklerini gurmaly:

a) $y = 1{,}5x + 2$, b) $y = 2 + x - x^2$, ç) $y = x^3$.

Funksiýalaryň grafiklerini gurmaly.

634. $y = \dfrac{2x - 3}{3x + 2}$.

635. a) $y = \pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$, b) $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$.

636. a) $y = 5\sin(2x\text{-}3)$, b) $y = 6\sin x - 8\cos x$.

637. a) $y = \log_2(1 + x)$, b) $y = \log_2 \cos x$.

638. a) $y = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$, b) $y = \sin x + |\sin x|$,

ç) $y = \begin{cases} 3 - x^2, & |x| \le 1 \\ \dfrac{3}{|x|}, & |x| > 1 \end{cases}$.

639. Funksiýanyn grafigini gurmaly

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x < \infty, \\ -x, & -\infty < x < 0. \end{cases}$$

§ 4. San yzygiderlikleri. Yzygiderligiň predeli

Eger $\forall \varepsilon > 0$ san üçin $N = N(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > N$ bolanda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

bolsa, onda a sana $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli diýilýär. Şunlukda, a sanyň $\{x_n\}$ yzygiderligiň predeli bolýandygy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ýazgy arkaly aňladylýar

Eger yzygiderligiň tükenikli predeli bar bolsa, onda oňa ýygnanýan yzygiderlik, eger-de onuň predeli bolmasa, ýa-da bar bolup tükeniksizlige deň bolsa, onda oňa dargaýan yzygiderlik diýilýär.

Eger $\lim x_n = 0$ bolsa $\{x_n\}$ yzygiderlige tükeniksiz kiçi, eger-de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bolsa, $\{x_n\}$ yzygiderlige tükeniksiz uly diýilýär.

640. Eger $\{x_n\}$ yzygiderligiň umumy agzasy

$$x_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$$

deňlik bilen kesgitlenýän bolsa, onda onuň ilkinji bäş agzasyny ýazmaly.

Çozülişi. Umumy $x_n = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$ agzada yzygiderli $n = 1,2,3,4,5$ bahalary berip alýarys:

$$x_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} = 1, \quad x_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2} = 0, \quad x_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$x_4 = \frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4} = 0, \quad x_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5} = \frac{1}{5}.$$

641. San yzygiderliginiň umumy agzasy boýunça ol yzygiderligi ýazmaly.

a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, b) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, ç) $x_n = (-1)^n$.

Çözülişi. $n =$ 1, 2, 3, ... bahalary berip alýarys:

a) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, .. , $\frac{1}{\mathrm{n}}$, ...

b) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ..., $\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}$, ...

ç) –1, 1 , –1, ... , $(-1)^n$...

642. Yzygiderligiň umumy agzasyny ýazmaly:
1, 4, 9, 16, 25, . . .

Çözülişi

$a_1 = 1 = 1^2, \quad a_2 = 4 = 2^2, \quad a_3 = 9 = 3^2,$

$a_4 = 16 = 4^2, \quad a_5 = 25 = 5^2, \ \dots \ a_n = n^2$

643. Yzygiderligiň umumy agzasyny tapmaly

$1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{7}, \quad \frac{1}{9}, \dots$

Çözülişi.

$|a_1| = |1| = 1 = \frac{1}{1},$ $\qquad |a_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1},$

$|a_3| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{2\cdot 2+1},$ $\qquad |a_4| = \left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7} = \frac{1}{2\cdot 3+1}, \dots .$

Şunlukda,

$$|a_n| = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-2+1} = \frac{1}{2n-1}.$$

Şeýle hem $a_1 > 0, \quad a_2 < 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 < 0$ we ş.m. Onda alarys:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

644. Goý, üýtgeýän x_n ululyk aşakdaky tükeniksiz san bahalaryň yzygiderligini alýar diýeliň:

0,1, 0,11, 0,111, 0,1111 ....

onda x_n ululygyň predeliniň $\frac{1}{9}$ deňdigini subut etmeli.

Çözülişi. Görnüşi ýaly

$$\frac{1}{9} - 0{,}1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{9\cdot 10} < \frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{9} - 0{,}11 = \frac{1}{9} - \frac{11}{100} = \frac{1}{9\cdot 100} < \frac{1}{10^2},$$

$$\frac{1}{9}-0{,}111=\frac{1}{9}-\frac{111}{1000}=\frac{1}{9\cdot 10^3}<\frac{1}{10^3},$$

.... ,

$$\frac{1}{9}-0{,}111...1=\frac{1}{9\cdot 10^n}<\frac{1}{10^n}.$$

Şunlukda, ε nähili kiçi bolsada, şeýle bir N san tapylyp, $n>N$ bolup başlanda

$$\left|x_n-\frac{1}{9}\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

deňsizlik ýerine ýetýändir.

Hakykatdan-da, goý ε = 0,000001 bolsun. Onda x_n = 0,11111 we

$$\left|0{,}11111-\frac{1}{9}\right|<\frac{1}{10^8}$$

ýa-da

$$\left|0{,}11111-\frac{1}{9}\right|<\varepsilon.$$

Şeýle hem x_n-iň geljekki agzalary $(n>6)$ hem, ýagny 0, 1111111, 0, 11111111 ... hem (1) deňsizligi kanagatlandyrýandyr. Bu bolsa x_n −iň $n\to\infty$ bolanda $\frac{1}{9}$ deňdigini görkezýär:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{9}.$$

645. Predeliň kesgitlemesinden peýdalanyp $x_n=\frac{2n-1}{2n+1}$ ululygyň, $n\to\infty$ mahalynda predeliniň 1-e deňdigini subut etmeli.

Çözülişi. Erkin $\varepsilon>0$ üçin şeýle bir $N(\varepsilon)$ san tapalyň, $n>N(\varepsilon)$ bolanda $|x_n-1|<\varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmegini gazanalyň.

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1}-1\right|=\left|\frac{-2}{2n+1}\right|=\frac{2}{2n+1}.$$

Şunlukda, $|x_n - 1| < \varepsilon$ deňsizlik $\dfrac{2}{2n+1} < \varepsilon$ bolanda ýerine ýetýär. Bu ýerden $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$. Şonuň üçin $N(\varepsilon)$ san hökmünde $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$ sanyň bitin bölegini almak bolar.

646. Umumy agzasy $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ bolan yzygiderligiň predeliniň nola deňdigini subut etmeli.

Çözülişi. Yzygiderligiň agzalaryny ýazalyň:

$$1, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{1}{16}, \ \frac{1}{25}, \ \frac{1}{36}, \ \frac{1}{49}, \ \frac{1}{64}, \ldots$$

we $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ diýeliň. Yzygiderligiň dördünji agzasyndan başlap, galan agzalary üçin $|a_n - 0| = |a_n| < \dfrac{1}{10}$, deňsizlik ýerine ýetýär.

Goý, indi $\varepsilon = \dfrac{1}{40}$ bolsun. Onda ýedinji agzadan başlap yzygiderligiň galan agzalary uçin

$$|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{40}.$$

Indi $N = 6$ diýip bolar. Eger $\dfrac{1}{40} = \varepsilon$ bolsa, onda $N \geq 10$ we ş. m. Bu ýagdaýda yzygiderlik üçin umumy N tapmaly bolýarys.

Yzygiderligiň umumy agzasy $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, ε sany erkin diýip, $n > N$ bolup başlanda $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ ýa-da $\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmegini gazanmaly. Deňsizligi n–e görä çözüp alarys: $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $N \geq \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ diýip almak bolar. Şunlukda, erkin $\varepsilon > 0$ üçin $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ bar bolup, $n > N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ bolup başlanda $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu bolsa yzygiderligiň predeliniň nola deňdigini görkezýär.

647. Eger $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$ bolsa, predeliň kesgitlemesinden peýdalanyp $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$ bolýandygyny subut etmeli. Haýsy n-den başlap $\left|x_n - \dfrac{3}{5}\right| < 0,01$ bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{5\left(5n^2-1\right)}.$$

Goý, $\varepsilon > 0$ berilen bolsun. Onda n sany

$$\frac{8}{5\left(5\mathrm{n}^2-1\right)} < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň. Bu deňsizligi çözüp taparys:

$$n > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Goý,

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right)$$

bolsun. Onda $N < n$ bolanda

$$\left|x_n - \frac{3}{5}\right| > \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýändir.

Eger $\varepsilon = 0{,}01$ bolsa, onda

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right) = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{805}\right) = 5.$$

Şunlukda, altynjy agzadan başlap yzygiderligiň ähli agzalary $\left(\dfrac{3}{5} - 0{,}01,\ \dfrac{3}{5} + 0,01\right)$ aralykda saklanýarlar.

648. Eger $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$ bolsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ deňligi subut etmeli.

Çözülişi. Goý, $K > 2a$ natural san bolsun. Onda $n > K$ bolanda

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{k}\right)\cdot\left(\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{n}\right) < a^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = (2a)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Belli bolşy ýaly $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$. Onda ýeterlik uly n üçin alýarys: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{\varepsilon}{(2a)^n}$ we $\dfrac{a^n}{n!} < \varepsilon$ bolar. Bu bolsa $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ deňligi aňladýar.

649. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n+1} = 5$ deňligi subut etmeli.

Çözülişi. 5 san yzygiderligiň predeli, diýmek erkin $\varepsilon > 0$ san üçin N belgi tapylyp $n > N$ bolanda

$$\left|\frac{5\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} - 5\right| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär diýmekdir. Şu deňsizligi n-e görä çözeliň:

$$\left|\frac{5n - 5n - 5}{n+1}\right| < \varepsilon, \qquad \frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

$n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$. Şunlukda, N san hökmünde $\dfrac{5}{\varepsilon} - 1-$den kiçi bolmadyk erkin sany alyp bileris. Goý, $\varepsilon = 0,01$. $\dfrac{5}{\varepsilon} - 1 = 499$ $x_{500} = \dfrac{2500}{501}$ ululygy tapalyň:

$$|x_{500} - 5| = \left|\frac{2500}{501} - 5\right| = \left|-\frac{5}{501}\right| = \frac{5}{501} < 0,01.$$

Ýagny $|x_{500} - 5| < \varepsilon = 0,01$. Şunlukda, yzygiderligiň 500 agzasyndan başlap ähli agzalary 5 sanyň ε etrabynda ýerleşendir. Ýagny $(4,99;\ 5,01)$ sanaralykda ýerleşendirler.

650. Umumy agzasy $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \cdots$ bolan yzygiderligiň predeliniň ýokdugyny görkezmeli.

Çözülişi. Goý, käbir a san yzygiderligiň predeli bolsun we onuň $\bigcup\left(a,\frac{1}{3}\right)$ etrabyna garalyň. Ol etrabyň, ýagny $\left(a-\frac{1}{3}, a+\frac{1}{3}\right)$ aralygyň uzynlygy $\frac{2}{3}$ – ä deň. Şonuň üçin ol etrap bir wagtda -1 we 1 nokatlary özünde saklap bilmez, sebäbi ol nokatlaryň aralygyndaky uzaklyk 2-ä deňdir. Eger a sany şol etraba degişli däl diýip alsak, onda $n=2,4,6,\cdots$ bolanda $x_n=1$ bolýanlygy üçin garalýan etrabyň daşynda yzygiderligiň tukeniksiz köp elementleri ýerleşýändir.

Diýmek, $x=a$ nokat yzygiderligiň predeli bolup bilmez. Ol nokadyň erkinligine görä yzygiderligiň predeliniň ýoklugy gelip çykýar.

651. Subut etmeli: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Çözülişi. Eger $n\geq 2$ bolsa, onda $\sqrt[n]{n}>1.$

Şoňa göräde, erkin $n\geq 2$ üçin şeýle $\alpha_n>0$ tapylyp $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$ deňlik ýerine ýetýär. Ondan bolsa $n=\left(1+\alpha_n\right)^n$ deňlik alynýar. Bu deňligiň sag bölegine

$$\left(1+\alpha\right)^n>\frac{n(n-1)}{2}\cdot\alpha^2$$

deňsizligi ulanyp alarys:

$$n=\left(1+\alpha_n\right)^n>\frac{n(n-1)}{2}\cdot\alpha_n^2.$$

Bu ýerden erkin $n>2$ üçin $0<\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ deňsizlik alynýar. Ondan bolsa $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$ bolýanlygyndan peýdalanyp, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ alarys. Şonuň üçin hem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)=1.$

652. Umumy agzasy $x_n=\frac{n!}{(n+1)!-n!}$ bolan yzygiderligiň tükeniksiz kiçi ululykdygyny subut etmeli.

Çözülişi. Subut etmek üçin $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ deňligi görkezmek ýeterlikdir

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots \mathrm{n}, \quad (n+1)!=n!\cdot(n+1).$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)-n!}=\lim\frac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

653. Umumy agzasy

$$x_n=3^{\sqrt[3]{n}}$$

bolan yzygiderligiň $n\to\infty$ mahalynda tukeniksiz uly ululykdygyny subut etmeli.

Çözülişi. Erkin položitel M sany alyp, $3^{\sqrt[3]{n}}>M$ densizligi çözeliň:

$$\sqrt[3]{n}>\log_3 M, \qquad n>\left(\log_3 M\right)^3$$

Eger $N=E\left[\left(\log_3 M\right)^3\right]$ diýip alsak, onda $n>N$ bolup başlanda $\left|x_n\right|>M$ deňsizlik ýerine ýetýändir. Ýagny, yzygiderlik tükeniksiz uly yzygiderlikdir.

654. Umumy agzasy $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ bolan yzygiderligiň tükeniksiz kiçi yzygiderlikdigini görkezmeli.

Çözülişi. Yzygiderligiň birnäçe agzalaryny ýazalyň:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \cdots$$

ε – bagly N sany tapalyň. Erkin $n>N$ san üçin $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon$ ýa-da $\frac{1}{n}<\varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan N sany tapsak 0 berlen yzygiderligiň predelidigi gelip çykýar. Deňsizligi çözüp alarys: $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Onda N sany $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$-e deň diýip almak bolar. Şunlukda, erkin $\varepsilon>0$ san uçin $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ san bar bolup, $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ bolup başlanda $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon$

deňsizlik ýerine ýetýändir. Ol bolsa 0 sanyň yzygiderligiň predelidigini görkezýär.

655. Yzygiderligiň ilkinji bäş agzasyny ýazmaly:

a) $x_n = 2n+5$, b) $x_n = \frac{1}{2^n} + 2^n$, ç) $x_n = 4n^2 + 3n + 2$.

656. $x_n - ?$

1) $1, 7, 13, 19, \ldots$ 2) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ 3) $1, 7, 17, 31, \ldots$

657. Deňlikleri subut etmeli.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{7n+3} = \frac{5}{7}$

658. Umumy agzasy

$$x_n = \frac{(-1)^n + 2}{n},$$

bolan yzygiderligin tükeniksiz kiçi yzygiderlikdigini görkezmeli.

659. Umumy agzalary

1) $x_n = \frac{1}{n^2}$, 2) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$, 3) $x_n = \frac{5}{n^2+4}$

bolan yzygiderlikleriň tükeniksiz kiçi yzygiderliklerdigini subut etmeli.

660. Yzygiderlikleriň umumy agzalaryny tapmaly.

a) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$ b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

661. Eger yzygiderligiň umumy agzasy berlen bolsa, onda onuň başdaky birnäçe agzasyny ýazmaly.

a) $x_n = \sin\frac{n\pi}{3}$, b) $x_n = 2^{-n}\cos n\pi$, ç) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

662. Subut etmeli:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, ç) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} = 0$.

663. Umumy agzasy $x_n = \frac{n+1}{n}$ bolan yzygiderligiň predeliniň 1-e deňligini subut etmeli.

664. Eger $x_n = \frac{3n-1}{3n+1}$ bolsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ bolýandygyny subut etmeli.

665. Eger $x_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}$ bolsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2}{3}$ deňligi subut etmeli. Haýsy belgiden başlap $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2-1} - \dfrac{2}{3}\right| \le 0,01$ deňsizlik ýerine ýetýär?

666. Eger $x_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ bolsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ deňligi görkezmeli.

Haýsy belgiden başlap $\left|\dfrac{2\mathrm{n}+3}{\mathrm{n}+1} - 2\right| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär?

Eger $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ bolsa

667. Umumy agzasy

a) $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{n}$, b) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$

bolan yzygiderlikleriň $n \to \infty$ mahalynda tükeniksiz kiçi yzygiderliklerdigini görkezmeli.

668. Umumy agzasy $x_n = \dfrac{(-1)^n\, 2}{5\sqrt[3]{n}+1}$ bolan yzygiderligiň $n \to \infty$ mahalynda tükeniksiz kiçi yzygiderlikdigini görkezmeli. Haýsy belgiden başlap yzygiderligiň agzalary $\left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$ aralykda ýatýandygyny anyklamaly.

669. Subut etmeli:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[a^{\frac{1}{n}} - 1\right] = \ln a.$$

§ 5. Yzygiderligiň predeliniň tapylyşy

Eger-de $\{a_n\}$ we $\{b_n\}$ ýygnanýan san yzygiderlikler bolsa, onda aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \qquad \left(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c\lim_{n\to\infty} a_n, \qquad c=\text{const.}$$

670. Predeli tapmaly:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}}{2}(n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2}}{2}(n-1)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

671. Predeli tapmaly

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right].$$

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1+2n-1}{2}n}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2\text{n}+1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{2n+2}=-\frac{3}{2}.$$

672. Yzygiderlikleriň predellerini tapmaly:

a) $x_n=\dfrac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$, b) $x_n=\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$.

Çözülişi.

a) $x_n=\dfrac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+1}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}=3;$

b) $1^2+2^2+3^2+...+\mathrm{n}^2=\dfrac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$,

$$x_n=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6\left(5n^3+n+1\right)}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6\left(5n^3+n+1\right)}=\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{30+\frac{6}{n^2}+\frac{6}{n}},\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{15}.$$

673. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ predeli tapmaly.

Çözülişi. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

674. Eger $x_n=\left(\dfrac{3n^2+n+2}{4n^2+2n+7}\right)^3$ bolsa, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ tapmaly.

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}.$$

675. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$ tapmaly.

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

deňlikden peýdalanalyň.

Onda, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\cdot1=1.$

676. Yzygiderlikleriň predellerini tapmaly.

a) $x_n=n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$, b) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$.

Çözülişi.

a)

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(-n\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)=-\infty.$$

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}} = +\infty.$

677. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$ deňligi subut etmeli

Çözülişi. Yzygiderligiň predeliniň kesgitlemesine görä

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad n > \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right] = N(\varepsilon).$$

Şunlukda, her bir položitel ε san üçin $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ san tapylyp, $n > N$ bolup başlanda $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu bolsa deňligi subut edýär.

678. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ yzygiderligiň predeliniň bire deňdigini görkezmeli

Çözülişi. Hakykatdan-da, yzygiderligiň umumy agzasyny ýazyp, yzygiderligiň predeliniň kesgitlemesine görä taparys:

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \qquad \left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Eger $n > \frac{1}{\varepsilon}-1$ bolanda, ýagny her bir $\varepsilon > 0$ san uçin $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ san bar bolup, $n > N$ bolup başlanda $|x_n - 1| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýändir. Bu bolsa yzygiderligiň predeliniň bire deňdigini görkezýär.

679. $\sin\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{2}, ..., \frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}, ...$
yzygiderligiň tükeniksiz kiçidigini görkezmeli.

Çözülişi. Onuň üçin $n \to \infty$ mahalynda yzygiderligiň umumy agzasynyň nola ymtylýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

$$|y_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} - 0\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Şu ýerde $n > \frac{1}{\varepsilon}$ şonuň üçin

$$y_n - 0 = \frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Tapawut n-iň jübütligine ýa-da täkligine baglylykda položitel ýa-da otrisatel bolar. Ýagny y_n noldan uly ýa-da noldan kiçi bolup, $n \to \infty$ mahalynda nola ymtylýandyr.

680. $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{2},\ldots,\sin\frac{n\pi}{2},\ldots$ yzygiderligiň predeliniň ýokdugyny görkezmeli.

Çözülişi. Hakykatdan-da, $y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ yzygiderlik $n = 1, 2, \ldots$ bolanda gezekli-gezegine 1, 0, -1, 0, we ş.m. bahalary kabul edýär. Bu bolsa y_n ululygyň predeliniň ýokdugyny görkezýär.

Aşakdaky predelleri tapmaly.

681. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

682. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

683. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$.

684. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

685. Umumy agzasy

$$a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}, \quad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)$$

bolan yzygiderligiň predelini tapmaly.

686. Umumy agzasy

$$a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

bolan yzygiderligiň predelini tapmaly.

687. Yzygiderlikleriň predellerini tapmaly.

a) $x_n = \sqrt[n]{n^5}$, b) $x_n = \sqrt[n]{6n+3}$.

688. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+3}+\dfrac{1-5n^2}{5n+1}\right)$

predeli tapmaly

689. Yzygiderlikleriň predellerini tapmaly:

a) $x_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$, b) $x_n = \sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}$.

ç) $x_n = \dfrac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}$, d) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

690. Yzygiderlikleriň predellerini tapmaly:

a) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$;

ç) $x_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n$; d) $x_n = \dfrac{1}{2n}\cos n^3 - \dfrac{3n}{6n+1}$;

e) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{n}{1-2n}\cdot\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$.

§ 6. Funksiýanyň predeli

a nokady özünde saklaýan her bir $(a-\delta, a+\delta)$ aralyga a nokadyň δ etraby diýilýär. Eger ξ nokadyň islendik etrabynda $\{x\}$ san köplüginiň bu nokatdan başga iň bolmanda bir elementi bar bolsa, onda ξ nokada $\{x\}$ san köplüginiň predel nokady diýilýär. Predel nokadyň $\{x\}$ san köplügine degişli bolmazlygy hem mümkin.

Kesgitleme (Köşi) Eger $\forall\varepsilon > 0$ san üçin $\delta = \delta(\varepsilon)$ san tapylyp $0 < |x-a| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|f(x)-A| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda A sana $f(x)$ funksiýanyň a nokatdaky predeli diýilýär.

A san $f(x)$ funksiýanyň a nokatdaky predeli diýilmegi

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ýa-da $f(x)\to A$ $(x\to a)$

ýazgylar arkaly aňladylýar.

Bu ýerden aşakdaky netijäni alarys: $f(x)-A$ tapawut, x argument a sana ymtylanda tükeniksiz kiçi ululykdyr. Ony $\alpha(x)$ bilen belgiläp,: $f(x)=A+\alpha(x)$ deňligi alarys. Bu ýerde x argument a sana ymtylanda $\alpha(x)\to 0.$

Kesgitleme (Geýne) Eger a sana ýygnanýan islendik $\{x_n\}$ yzygiderlik üçin $\{f(x_n)\}$ yzygiderlik A sana ýygnanýan bolsa, onda A sana $f(x)$ funksiýanyň a nokatdaky (ýa-da $x\to a$ bolanda) predeli diýilýär. Funksiýanyň predeliniň Geýne we Koşi kesgitlemeleri biri- birine deňgüýçlüdir.

691. $x\to 1$ bolanda $f(x)=2x+5$ funksiýanyň predeliniň 7-ä deň bolýandygyny subut etmeli.

Çözülişi. Subut etmek üçin x argumentiň absolýut ululygy boýunça birden tapawutlanýan hemme bahalary üçin, şeýle $\delta>0$ san tapylyp, $|x-1|<\delta$ deňsizlik ýerine ýetende $|(2x+5)-7|<\varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. Bu ýerde

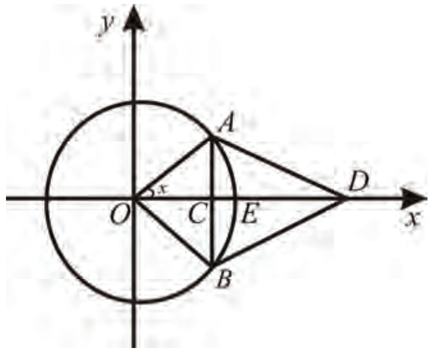
$$|(2x+5)-7|=|2x-2|=2|x-1|$$

bolýanlygy anykdyr. Şoňa görä-de, $|(2x+5)-7|<\varepsilon$ deňsizlik bolmagy üçin $|x\text{-}1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ deňsizligiň ýerine ýetmegi gerekdir. Diýmek, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ san alsak, şonda $(2x+5)-7$ tapawut absolýut ululygy boýunça $\varepsilon-$dan az tapawutlanýar.

692. Subut etmeli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Çözülişi. Subut etmek üçin radiusy 1-e deň bolan töwerek alalyň. Bu töwerekde AOC burçuň $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ deňsizligi kanagatlandyrýan radian ölçegini x bilen belgiläliň (*36-njy çyzgy*).



36-njy çyzgy

Berlen funksiýa x-ň nola deň bolmadyk bahalarynyň hemmesi üçin kesgitlenendir. Suratdan görnüşi ýaly

$$AC + CB < AE + EB < AD + DB.$$

Emma bu ýerde $AC = CB = \sin x$, $AD = DB = \operatorname{tg} x$.

Onda bu deňsizlikleri aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x, \qquad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Bu ýerde $\sin x > 0$ bolany üçin soňky densizlikleriň hemme agzalaryny $\sin x$ bölüp taparys:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ýa-da

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Indi bu deňsizligiň her bir agzasyny birden aýyralyň;

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x.$$

Bu ýerden taparys:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x. \qquad (1)$$

Munuň ýaly baglanyşygy argumentiň $-\frac{\pi}{2}<x<0$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bahalary üçin hem görkezmek kyn däldir:

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<-x. \qquad (2)$$

Şeýlelikde, x argumentiň islendik bahalary üçin $\varepsilon>0$ san üçin, elmydama, $\delta>0$ san tapylyp $|x|<\delta\,(x\neq 0)$ deňsizlik ýerine ýetende, $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$. deňsizlik hem ýerine ýetýändir. Hakykatdanda,

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|<\delta=\varepsilon, \qquad \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

Diýmek,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

693. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ funksiýanyň $x=0$ nokatdaky predeliniň nola deňdigini görkezmeli.

Çözülişi. Eger erkin $\varepsilon>0$ san üçin $\delta=\varepsilon$ sany alsak onda $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$ bolýandygyna görä, $0<|x|<\delta$ bolanda $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter. Şonuň üçin Koşiniň kesgitlemesiniň esasynda

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

694. $f\ (x)=\frac{4x^2+2x-3}{x-3}$ funksiýanyň x=0 nokatdaky predelini tapmaly.

Çözülişi. Goý, $\{x_n\},(x_n\neq 3)$ erkin nola ýygnanýan yzygiderlik bolsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x_n^2+2x_n-3}{x_n-3}=\frac{4(\lim x_n)^2+2\lim x_n-3}{\lim x_n-3}=1.$$

Şonuň üçin hem Geýnäniň kesgitlemesi esasynda $\lim_{x\to 0}f(x)=1.$

695. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiýanyň x=0 nokatdaky predelini anyklamaly.

Çözülişi. Bu funksiýa $x \neq 0$ nokatlaryň hemmesi üçin kesgitlenendir. Goý, $x_n = \dfrac{2}{\pi(2n+1)}$, $n = 0,1,2,\dots$

bolsun. Onda $\lim x_n = 0$ emma $f(x_n) = (-1)^n$ Şonuň üçin hem $\{f(x_n)\}$ yzygiderlik hiç bir predele ymtylmaýar. Diýmek, funksiýanyň x=0 nokatda predeli ýokdur.

696. $g(x) = \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x}$ funksiýanyň x=0 nokatdaky predelini tapmaly.

Çözülişi. $g(x)$ funksiýa x=0 nokatda kesgitlenen däldir. Sebäbi x=0 bolanda 0/0 kesgitsizligi alarys. Emma $x \neq 0$ bolanda $g(x) = f(x)$ we 694–nji mysalda $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ bolýandygyny görkezipdik. Şonuň üçin $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1.$

697. Geýne kesgitlemesini ulanyp,

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$$ bolýandygyny gorkezmeli.

Çözülişi. Aşakdaky iki şerti kanagatlandyrýan x-iň bahalary bolan yzygiderlige garalyň:

1) $x_1, x_2, x_3, \dots$ sanlaryň ählisi $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x+4}$ funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli bolsun. (ýagny $x_n \neq -\dfrac{4}{5}$)

2) $\{x_n\}$ yzygiderlik 2-ä ýygnanýan bolsun: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2.$

Şu yzygiderlige funksiýanyň bahalarynyň yzygiderligi degişlidir:

$$\frac{3x_1+1}{5x_1+4}, \quad \frac{3x_2+1}{5x_2+4}, \dots$$

Onda

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{3x_n+1}{5x_n+4} = \frac{\lim(3x_n+1)}{\lim(5x_n+4)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Şunlukda, 2-ä ýygnanýan $\{x_k\}$ yzygiderlige bagly bolmazdan $x_n = -\frac{4}{5}$, degişli funksiýanyň bahalarynyň $f(x_n)$, $n = 1, 2, ..$ yzygiderligi 1/2 ýygnalýandyr. Bu bolsa kesgitlemäniň esasynda

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

698. Aşakdaky predelleriň ýokdugyny subut etmeli.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x.$

Çözülişi. a) Predeli 1-e deň bolan iki yzygiderligi alalyň:

$x_n = 1 + \frac{1}{n\pi}$, $x_n' = 1 + \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $n = 1, 2, ...$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = 1$$

funksiýanyň bahalarynyň degişli yzygiderliginiň predeline garalyň:

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1} = \sin n\pi = 0;$$

$$f(x_n') = \sin\frac{1}{1+\frac{2}{(4n+1)\pi}-1} = \sin\frac{4n+1}{2}\pi = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Şunlukda,

$$\lim_{x_n\to 1} f(x_n) = 0, \qquad \lim_{x_n\to 1} f(x_n') = 1.$$

Ýagny $\{f(x_n)\}$ we $\{f(x'_n)\}$ yzygiderlikler dürli predellere eýedirler.

Diýmek, $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ predel ýokdur.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \infty$ deňligi kanagatlandyrýan $x_n = n\pi$ we $x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, ...$ yzygiderlikleri alalyň.

Onda $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi = 0$ we $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n' = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Diýmek, $\lim_{n\to\infty}\sin x_n$ predel ýokdur.

699. Koşiniň kesgitlemesini ulanyp aşakdaky deňlikleri subut etmeli:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}$, b) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

Çözülişi. a) Deňligi subut etmek üçin $\forall\varepsilon>0$ san üçin $M>0$ san tapylyp, $x>M$ bolup başlanda $\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon$ (*)
deňsizligiň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir. Şu deňsizlikden alýarys:

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|=\frac{14}{|3x+9|}<\varepsilon,\quad \frac{14}{3x+9}<\varepsilon$$

deňsizligi çözüp taparys.

$$x>\frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon},\qquad M=\frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}.$$

Şunlukda, erkin $\varepsilon>0$ san üçin $M=\frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$ san tapylyp, $x>M$ bolup başlanda (*) deňsizlik ýerine ýetýändir. Bu bolsa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}$$

bolýandygyny aňladýar. Goý, $\varepsilon=0,01$ bolsun. Onda

$$M=\frac{14-0,09}{0,03}=463\frac{2}{3}.$$

b) Bu mysalda, erkin K>0 san üçin $\delta>0$ tapylyp, $|x-1|<\delta$ bolanda $\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right|=\frac{1}{(1-x)^2}>K,$ deňsizlik ýerine ýetýär. Erkin $K>0$ sany alyp $\frac{1}{(1-x)^2}>K\ (**)$ deňsizligi çözeliň. Bu ýerden

$$|1-x|<\frac{1}{\sqrt{K}}\qquad (K>0).$$

Şunlukda, eger $\delta=\frac{1}{\sqrt{K}}$ bolsa, onda $|x-1|<\delta$ bolup başlanda (**) deňsizlik ýerine ýetýär. Ol bolsa $\lim\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$ deňligiň dogrudygyny görkezýär.

700. Deňligi subut etmeli /ikinji ajaýyp predel/

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

701. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ predeliň ýokdugyny subut etmeli.

702. Koşiniň kesgitlemesini ulanyp, aşakdaky deňlikleri subut etmeli

a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-9)=-6$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\frac{1}{2}$.

703. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ predeliň ýokdugyny subut etmeli.

704. Deňlikleri subut etmeli

a) $\lim\limits_{x\to 1}x^2=4$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

705. a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=3$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}$,

ç) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{2}$.

706. Koşi kesgitlemesinden peýdalanyp predelleri subut etmeli.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,

ç) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2}{3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

§ 7. Predeli hasaplamagyň düzgünleri

1. Eger $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ we $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ predeller bar bolsa, onda

1) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\qquad \left(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0\right).$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$

2. Ähli esasy elementar funksiýalaryň barlyk oblastynda aşakdaky deňlik dogrudyr:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f\left(\lim_{x\to a}x\right)=f(a).$$

3. Köplenç halatlarda predel hasaplanylanda aşakdaky belli predellerden peýdalanýarlar:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=2,7182,...$

ç) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,(a>0,a\neq 1),$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,(a>0).$

707. Tapmaly

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(5x^2-6x+7\right),$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(3x)^{x^2},$ ç) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x.$

Çözülişi.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(5x^2-6x+7\right)=\lim\limits_{x\to 1}5x^2-\lim\limits_{x\to 1}6x+\lim\limits_{x\to 1}7=$

$=5\lim\limits_{x\to 1}x^2-6\lim\limits_{x\to 1}x+7=5\cdot 1-6\cdot 1+7=6.$

b) Bu ýerde $\lim\limits_{x\to 2}3x=6$ we $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4.$

Şonuň üçin

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$$

formulany ulanyp, alarys:

$$\lim_{x\to 2}(3x)^{x^2}=6^4=1296.$$

ç) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1.$

708. Predelleri tapmaly.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$.

Çözülişi.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}=8.$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}=1.$$

709. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}=4.$$

710. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

711. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to8}\frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{x-8}=$$

$$=\lim_{x\to8}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)=2^2+2\cdot2+4=12.$$

712. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

713. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Çözülişi. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}1\cdot 1=\frac{1}{2}.$

714. Aşakdaky predelleri tapmaly.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

715. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}; \quad \lim_{x\to\infty}x^2=+\infty.$$

Şonuň üçin

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=0.$$

716. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Çözülişi.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{1+x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{1+x}}=e^{-2}.$$

Bu predeli başgaça usul bilen hem tapmak bolar:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

Umuman,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$$

717. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$, k–bitin san

ç) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

Çözülişi. (ornuna goýma usuly)

a) Goý, $26+x=z^3$ Onda $x=z^3-26$ we $x\to1$ bolanda $z\to3$ Şunlukda,

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim_{z\to3}\frac{2z^3-54}{z-3}=\lim_{z\to3}\frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3}=2\lim_{z\to3}(z^2+3z+9)=54.$$

b) Goý $1+x=z^k$ bolsun. $x=z^k-1$ we $x\to0$ bolanda $z\to1$

Şunlukda, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z-1}{z^k-1}=\dfrac{1}{k}$.

ç) Goý $x-\frac{\pi}{6}=z$ bolsun. Onda $x=z+\frac{\pi}{6}$ we $x\to\frac{\pi}{6}$ bolanda $z\to 0.$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos\left(z+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{z}{2}+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}}=1.$$

718. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

Çözülişi.

$c\operatorname{tg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x},\quad (x\to 0,\ \operatorname{tg}x\to 0).$

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{ctg\,x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{tg\,x}}=e.$$

Predelleri tapmaly:

719. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2x\right)^{\operatorname{ctg}^2x}$.

720. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

721. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+5}{x^2+3x+7}$.

722. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2\right)^{\operatorname{ig}x}$

723. $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{arctg}x$.

724. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

725. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}$.

726. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

727. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$.

728. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

729. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

730. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

731. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

732. $\lim\limits_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

733. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin2x}$.

734. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$.

735. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

736. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

737. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

738. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}$.

739. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

740. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+3}$.

741. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3tg^2x\right)^{ctg^2}x$.

742. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

743. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

744. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

745. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$

§ 8. Deňgüýçli tükeniksiz kiçi ululyklaryň ulanylyşy

Eger $x\to0$ bolanda $\alpha(x)\to0$ bolsa, onda

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{1}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{2}$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{3}$$

$$\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{4}$$

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x), \tag{5}$$

$$\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x), \tag{6}$$

$$\alpha^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln\alpha. \tag{7}$$

Başgaça aýdanymyzda, predel tapylan mahalynda tükeniksiz kiçi funksiýany ol funksiýa deňgüýçli bolan başga tükeniksiz kiçi funksiýa bilen çalşyrmak amatly bolýar.

746. Predeli tapmaly

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}.$$

(1) deňgüýçli deňligi ulanalyň

$$\sin(x-3)\sim x-3.$$

Şunluk-da, tükeniksiz kiçi $\sin(x-3)$ funksiýany ekwiwalent $x-3$ tükeniksiz kiçi funksiýa bilen çalşyranymyzda gatnaşygyň predeli üýtgemeýär.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

747. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}.$

Predeli tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen trigonometriýanyň belli formulasyny ulanalyň:

$$1-\cos mx=2\sin^2\frac{mx}{2},\ x\to 0$$

mahalynda $\sin\dfrac{mx}{2}\sim\dfrac{mx}{2}$ we $\sin^2\dfrac{mx}{2}\sim\left(\dfrac{mx}{2}\right)^2.$

Şonuň üçin sanawjydaky $1-\cos mx$ tükeniksiz kiçi funksiýany $2\left(\dfrac{mx}{2}\right)^2$ tükeniksiz kiçi funksiýa bilen çalşyryp alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{mx}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{m^2}{2}.$$

748. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}.$

Predeli tapmaly.

Çözülişi. $\ln x=\ln\left(1+(x-1)\right)$ Onda (6) formulanyň esasynda $\ln\left(1+(x-1)\right)$ funksiýany deňgüýçli tükeniksiz kiçi $x-1$ funksiýa bilen çalşyralyň:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x}=-1.$$

749. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}.$

Predeli tapmaly.

Çözülişi. (6) we (3) formulalary ulanalyň:

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sim\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\ln(1-x)=\ln\big(1+(-x)\big)\sim -x.$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-1.$$

750. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}.$

Predeli tapmaly.

Çözülişi. (4) we (5) formulalaryň esasynda ýazyp bileris:

$$\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x\sim\frac{7}{4}x,\quad e^{-2x}-1\sim(-2x),\quad x\to 0.$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{-2x}=-\frac{7}{8}.$$

751. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}.$

Predeli tapmaly.

Çözülişi. $x-1=t$ ornuna goýmany ulanalyň. Onda $x\to 1$ mahalynda $t\to 0$. Şonuň üçin

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = -\lim_{t\to 0} t\operatorname{tg}\frac{\pi(t+1)}{2} = -\lim_{t\to 0} t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} t\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{tg\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

752. Predeli tapmaly;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x}{3x}.$$

Çözülişi. Tükeniksiz kiçi deňgüýçli funksiýalaryň tablisasyny ulanalyň:

$$\sin 2x + \arcsin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x \sim \sin 2x \sim 2x$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

753. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)}.$$

Çözülişi.

$$\sin\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}, \qquad \ln(1+3x) \sim 3x,$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \qquad e^{5\sqrt[3]{x}} - 1 \sim 5\sqrt[3]{x}.$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^3\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}3x}{x5\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5}.$$

Deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalar bilen çalşyrmak düzgünini ulanyp, aşakdaky predelleri tapmaly.

754. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$. **755.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$.

756. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{4x+8}$. **757.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{tg(\alpha+x)-tg(\alpha-x)}$.

758. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$. **759.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

§ 9. Funksiýanyň üznüksizligi. Üzülme nokatlary we olaryň görnüşleri

a predel nokada eýe bolan käbir $E=\{x\}$ köplükde kesgitlenen $f(x)$ funksiýa seredeliň. Goý a nokadyň özi hem funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli bolsun. Diýmek, $x=a$ nokatda funksiýanyň $f(a)$ kesgitli bahasy bardyr.

Kesgitleme. Eger x argument a sana ymtylanda funksiýanyň tükenikli predeli bar bolup, şol hem $f(x)$ funksiýanyň a nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{1}$$

Onda $f(x)$ funksiýa a nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

Eger $\Delta x=x-a$ we $\Delta y=f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$ bilen degişlilikde argumentiň we funksiýanyň a nokatdaky artdyrmalaryny belgilesek, onda (1) deňligi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x)-f(a)]=0$$

görnüşde ýazyp bolar.

Eger $f(x)$ funksiýa üçin a nokatda

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$$

deňlikler ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x)$ funksiýa a nokatda sagdan üznüksiz funksiýa diýilýär. Eger-de, ol funksiýa a nokatda

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$$

şerti kanagatlandyrsa, onda $f(x)$ funksiýa a nokatda çepden üznüksiz funksiýa diýilýär. Eger a nokatda funksiýanyň birtaraplaýyn

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0), \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0) \tag{2}$$

predelleri bar bolup, olaryň iň bolmanda birisi funksiýanyň a nokatdaky $f(a)$ bahasyna deň bolmasa, a nokada $f(x)$ funksiýanyň aýrylýan üzülme nokady diýilýär.

Eger-de (2) predeller bar bolup $f(a-0) \neq f(a+0)$ bolsa, onda a nokada $f(x)$ funksiýanyň birinji jynsly üzülme nokady diýilýär, $f(a-0) - f(a+0)$ tapawuda bolsa funksiýanyň a nokatdaky towusmasy diýilýär.

Eger (2) predelleriň iň bolmanda birisi ýok bolsa ýa-da iň bolmanda birisi tükeniksiz bolsa, onda a nokada $f(x)$ funksiýanyň ikinji jynsly üzülme nokady diýilýär.

760. Hemişelik $f(x)=c$ funksiýa we $f(x)=x$ funksiýa san okundaky islendik ***a*** nokatda üznüksiz funksiýalardyr.

Çözülişi. Hakykatdan-da,

$$\lim_{x\to a} f(x) = c = f(a), \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a).$$

761. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiýanyň her bir $x \neq 0$ nokatda üznüksizdigini görkezmeli.

Çözülişi. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

deňligiň esasynda

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = -\frac{1}{x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{x+\Delta x} = -\frac{1}{x} \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x}{x + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x} = 0.$$

Bu bolsa funksiýanyň $x \neq 0$ nokatda üznüksizdigini görkezýär.

762. $f(x) = \sin x$ funksiýanyň erkin $x \in R$ nokatda üznüksizdigini görkezmeli.

Çözülişi. Eger $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ bolsa $|\sin x| \leq |x|$ Şoňa görä-de $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ bolanda $|\sin x| < \sin|x| \leq |x|$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin hem

$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x) - \sin x| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leq 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

deňsizlikden $\lim\limits_{\Delta x\to 0} |\Delta y| = 0$ gelip çykýar. Bu bolsa $f(x) = \sin x$ funksiýanyň erkin $x \in R$ nokatda üznüksizdigini görkezýär.

763. $f(x)=\cos x$ funksiýanyň erkin $x\in R$ nokatda üznuksizdigini görkezmeli.

Çözülişi. Biz $\sin x$ funksiýanyň üznüksizdigini bilýäris. Şoňa görä-de $x+\frac{\pi}{2}$ funksiýanyň üznüksiz bolany üçin çylşyrymly funksiýanyň häsiýeti esasynda $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ funksiýa hem özüniň kesgitlenen oblastynda üznüksizdir.

764. Kesgitlemeden peýdalanyp

$$f(x)=3x^4+5x^3+2x^2+3x+4$$

funksiýanyň erkin $x\in R$ nokatda üznüksizdigini görkezmeli.

Çözülişi. Goý, x_0 erkin nokat bolsun. Ilki bilen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ hasaplalyň:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(3x^4+5x^3+2x^2+3x+4)=3x_0^4+5x_0^3+2x_0^2+3x_0+4.$$

Soňra funksiýanyň x_0 nokatdaky bahasyny tapalyň:

$$f(x_0)=3x_0^4+5x_0^3+2x_0^2+3x_0+4.$$

Şunlukda,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Diýmek, berlen funksiýa erkin $x_0\in R$ nokatda üznüksizdir.

765. Erkin $x\ge 0$ üçin $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň üznüksizdigini görkezmeli.

Çözülişi. Goý, $x_0\ge 0$ erkin nokat bolsun, Δy artdyrmany tapalyň $\Delta y=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$.

Onda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=0.$$

Bu bolsa berlen funksiýanyň üznüksizdigini görkezýär.

766. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiýany üznüksizlige derňemeli we üzülme nokatlaryny tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $\sin x$ we x funksiýalar üznüksiz funksiýalardyr. Onda olaryň gatnaşygy $x \neq 0$ nokatdan başga nokatda üznüksizdir. $x_0 = 0$ nokatda funksiýa kesgitlenen däldir we ol üzülme nokatdyr. Ýöne $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ predel bardyr. Şonuň üçin ol aýraty üzülme nokatdyr. Eger $f(0) = 1$ diýsek,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

funksiýa $x = 0$ nokatda hem üznüksizdir.

767. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ funksiýanyň üznülme nokadyny anyklamaly.

Çözülişi. Bu funksiýanyň $x = 0$ nokatda sag predeli hem, çep predeli hem ýokdur. Hakykatdan-da, nola ymtylýan $x_k = \dfrac{2}{\pi(2k+1)} > 0, \quad k = 0,1,...$ üçin $f(x_k) = (-1)^k$ bolýanlygy sebäpli $\{f(x_k)\}$ yzygiderligiň predeli ýokdur. Diýmek, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ funksiýanyň $x = 0$ nokatda sag predeli ýokdur. $\sin\dfrac{1}{(-x)} = -\sin\dfrac{1}{x}$ bolýanlygy üçin, funksiýanyň $x = 0$ nokatda çep predeli hem ýokdur. Şonuň üçin $x = 0$ nokat $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ funksiýanyň ikinji jynsly üzülme nokadydyr.

768. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1}, & x > 1 \\ 1 \quad , & x < 1 \end{cases}$

funksiýanyň üzülme nokadyny anyklamaly.

Çözülişi. Bu funksiýa $x \neq 1$ nokatlarda üznüksiz bolup $x = 1$ nokatda funksiýanyň sag predeli hem, çep predeli hem tükeniksizlige deňdir. Şonuň üçin $x = 1$ nokat funksiýanyň ikinji jynsly üzülme nokadydyr.

769. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

funksiýanyň üzülme nokadyny tapmaly.

Çözülişi. Bu ýerde $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1.$

$x = 0$ nokadyň özünde $f(x)$ funksiýanyň belli bahasy ýokdur. Şonuň üçin hem $x = 0$ nokat funksiýanyň birinji jynsly üzülme nokadydyr.

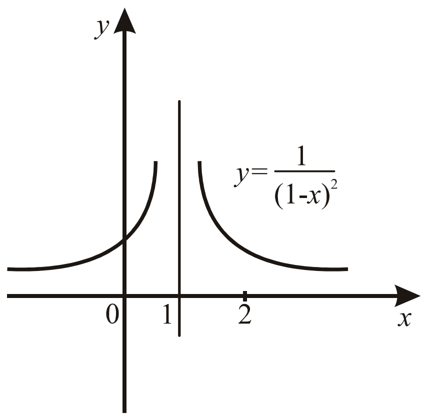
770. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}.$

Çözülişi. Bu ýerde $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 \quad f(0) = 1$ bolýanlygy üçin $x = 0$ nokat birinji jynsly üzülme nokatdyr.

771. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

funksiýanyň üzülme nokadyny anyklamaly.

Çözülişi. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ funksiýa $x \neq 1$ nokatda üznüksizdir. $x = 1$ nokatda bu funksiýa kesgitlenen däldir. Şonuň üçin $f(1)$ sany nähili alanymyzda-da üsti ýetirlen funksiýa $x = 1$ nokatda üznükli bolup bilmez (*37-nji çyzgy*).



37-nji çyzgy

772. $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$ funksiýanyň üzülme nokadyny anyklamaly.

Çözülişi. $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$ funksiýa $x = 0$ nokatda ikinji jynsly üzülme nokada eýedir. Sebäbi bu ýerde $\lim\limits_{x\to 0-} \cos\dfrac{\pi}{x}$ we $\lim\limits_{x\to 0+} \cos\dfrac{\pi}{x}$ birtaraply predeller ýokdur.

773. $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ bitin rasional funksiýanyň erkin x bahalarynda üznüksiz funksiýadygyny subut etmeli.

774. x-iň haýsy bahalarynda a) tg x, b) ctg x funksiýalar üznüksiz? Funksiýalaryň üznüksizligini barlamaly:

775. $y=\frac{x^2}{x-2}$. **776.** $y=\frac{\sqrt{1+x-3}}{x^2-4}$. **777.** $y=\frac{x}{\sin x}$.

778. $y=ax^2+bx+c$ funksiýanyň erkin x üçin üznüksizdigini subut etmeli.

Funksiýalaryň üzülme nokatlaryny tapmaly:

779. a) $y=\frac{2}{x-5}$, b) $y=\frac{3}{x^2-2x+1}$.

780. Funksiýany üznüksizlige derňemeli:

$$y=\frac{e^x-1}{x}.$$

781. Funksiýalaryň üzülme nokatlaryny tapmaly we towusmalaryny anyklamaly:

a) $f(x)=\frac{4}{x^2-2x+1}$, b) $f(x)=x+\frac{x+2}{|x+2|}$.

782. Funksiýanyň üznüksizligini barlamaly we üzülme nokadyny tapmaly:

$$y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

783. Funksiýanyň üznüksizligini barlamaly we üzülme nokadyny tapmaly:

$$y=\frac{x}{x^2-4}.$$

784. Funksiýanyň üznüksizligini anyklamaly we üzülme nokadyny tapmaly:

a) $y=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$, b) $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$,

ç) $y=\frac{1}{x-x^3}$, d) $y=\frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}$.

785. $f(x)=|x|$ funksiýanyň üznüksizligini subut etmeli.

VII BÖLÜM
ÖNÜM WE DIFFERENSIAL

§ 1. Ýönekeý funksiýalaryň önümleri

Goý, $y = f(x)$ funksiýa x nokadyň käbir $U(x)$ etrabynda kesgitlenen bolup, x – üýtgeýäniň Δx artdyrmasy üçin $x + \Delta x \in U(x)$ bolsun. Eger

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

tükenikli predel bolsa, onda oňa $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky önümi diýilýär we $f'(x)$ ýa-da $y'(x)$ bilen belgilenýär. Berlen $f(x)$ funksiýanyň $f'(x)$ önümini tapmaklyga bolsa, bu funksiýanyň differensirlenilişi diýilýär. Bu halda funksiýa berlen nokatda üznüksizdir. Şu kesgitlemäni ulanyp, aşakdaky ýönekeý funksiýalaryň önümleriniň tablisasyny ýazyp bileris:

1. $(C)' = 0, \quad C = \text{const};$

2. $\left(x^p\right)' = p\,x^{p-1}, \quad p \in \mathbf{R}, \; x > 0, \; \left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \quad n \in N, \quad x \in \mathbf{R};$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \left(e^x\right)' = e^x;$

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x > 0,$

   $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \neq 0,$

   $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x, \quad x \in \mathbf{R};$

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R};$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z;$

9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1;$

10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1;$

11. $\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$

12. $\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$

13. $(shx)' = chx, \quad x \in \mathbf{R};$

14. $(chx)' = shx, \quad x \in \mathbf{R};$

15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in \mathbf{R};$

16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

Diferensirlemegiň esasy düzgünleri. Eger $u = u(x)$ we $\vartheta = \vartheta(x)$ funksiýalaryň önümleri bar bolsa, onda aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$$(u \pm \vartheta)' = u' \pm \vartheta';$$

$$(cu)' = c \cdot u';$$

$$(u\vartheta)' = u'\vartheta + \vartheta' u;$$

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \frac{u'\vartheta - \vartheta' u}{\vartheta^2}.$$

786. $y = x^2$ funksiýanyň Δx we Δy artdyrmalaryny tapmaly:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}1$.

Çözülişi.

1) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1,$ $\qquad \Delta y = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$

2) $\Delta x = x_2 - x_1 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1,$ $\qquad \Delta y = (1{,}1)^2 - 1^2 = 1{,}21 - 1 = 0{,}21.$

787. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ funksiýanyň önümini tapmaly.

Çözülişi.

$$y' = \left(x^5 - 4x^3 + 2x - 3\right)' = \left(x^5\right)' - \left(4x^3\right)' + (2x)' - (3)' = \left(x^5\right)' - 4\left(x^3\right)' + 2(x)' =$$
$$= 5x^4 - 12x^2 + 2.$$

788. $y = 5x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-3}$ funksiýanyň önümini tapmaly.

Çözülişi.

$$y' = \left(5x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-3}\right)' = 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot 3x^{-3-1} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x^4}.$$

789. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+0{,}1\cdot x^{10}$ funksiýanyň önümini tapmaly.

Çözülişi. Berlen funksiýany

$$y=x^{1/2}+x^{-\frac{1}{2}}+0{,}1\cdot x^{10}$$

görnüşde ýazalyň. Onda önümiň tablisasyndan peýdalanyp alarys:

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+0{,}1\cdot 10x^{9}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}^{3}}+x^{9}.$$

790. $y=e^{x}\left(\cos x+\sin x\right)$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. Köpeltmek hasylyndan önüm almaklygyň düzgüninden peýdalanalyň:

$$y=(e^{x})'\cdot(\cos x+\sin x)+e^{x}(\cos x+\sin x)'=e^{x}(\cos x+\sin x)+e^{x}(-\sin x+\cos x)=$$
$$=2e^{x}\cos x.$$

791. $y=\dfrac{x^{2}}{\ln x}$ funksiýanyň y'-önümini tapmaly.

Çözülişi. Paýdan önüm almagyň düzgüninden peýdalanyp, alarys:

$$y'=\left(\frac{x^{2}}{\ln x}\right)'=\frac{\left(x^{2}\right)'\cdot\ln x-\left(\ln x\right)'\cdot x^{2}}{\left(\ln x\right)^{2}}=\frac{2x\ln x-\frac{1}{x}x^{2}}{\left(\ln x\right)^{2}}=\frac{x\left(2\ln x-1\right)}{\left(\ln x\right)^{2}}.$$

Aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapmaly.

792. $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}+x^{2}-0{,}5x^{4}$.

793. $y=x^{n}+nx^{3}+3n$, n – hemişelik san.

794. $y=\dfrac{2x+3}{x^{2}-5x+5}$.

795. $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$.

796. $y=x\operatorname{ctg}x$.

797. $y=x\ln x-x$.

798. $y=e^{x}\left(\sin x-\cos x\right)$.

799. $y=3^{x}\arcsin x$.

800. $y=\dfrac{\arccos x}{1+x^{2}}$.

801. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^{2}}$.

802. $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$.

803. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

§ 2. Çylşyrymly funksiýalaryň önümi

Eger $u=\varphi(x)$ funksiýanyň x nokatda, $y=f(u)$ funksiýanyň u nokatda önümi bar bolsa, onda çylşyrymly $y=f(\varphi(x))$ funksiýanyň x nokatda önümi bardyr we ol önüm üçin

$$y'=f'(u)\cdot u'(x),\quad (y'_x=f'_u\cdot u'_x)$$

formula dogrudyr. Aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapmaly:

1) $y=\sqrt{x^2+3x+1}$, 2) $y=(5x^4+2x^3-x^2+x-1)^3$.

Çözülişi. 1) $u=x^2+3x+1$ goşmaça funksiýany girizeliň:

Onda $y=\sqrt{u}$, bu ýerde $u=x^2+3x+1$ onda

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}(2x+3)$$

ýa-da

$$y'=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}.$$

2) $y=u^3$; $u=5x^4+2x^3-x^2+x-1$,

$$y'=(u^3)'=3u^2\cdot u'=3u^2(20x^3+6x^2-2x+1)$$

ýa-da

$$y'=[(5x^4+2x^3-x^2+x-1)^3]'=3(5x^4+2x^3-x^2+x-1)^2(20x^3+6x^2-2x+1).$$

805. $y=\sin(8x-7)$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. $u=8x-7$ we $y=\sin u$ funksiýalaryň önümleriniň barlygyndan peýdalanyp, taparys:

$$y'=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'(8x-7)'=8\cos(8x-7).$$

Eger $y=y(x)$ funksiýa $F(x,y)=0$ deňleme arkaly anyk däl görnüşde berlen bolsa, onda $F(x,y)$ funksiýa x ululyga görä çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, $y=y'(x)$ önümi $[F(x,y)]'=0$ deňlemeden tapmak bolar.

806. $xy+\cos y=0$ deňleme arkaly anyk däl görnüşde berlen $y=y(x)$ funksiýanyň $y'=y'(x)$ önümini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäniň çep bölegine x ululyga görä zylşyrymly funksiýa hökmünde garap alýarys:

$$y + xy' - \sin y \cdot y' = 0$$

ýa-da

$$y'(x - \sin y) = -y.$$

Bu ýerden

$$y' = \frac{y}{\sin y - x}.$$

807. $y = \ln \mathrm{tg} x$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. $u = \mathrm{tg} x$ belgilemäni girizsek, $y = \ln u$ çylşyrymly funksiýadyr.

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\mathrm{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

808. $y = \lg \sin(x^2 + 1)$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. Eger $u = x^2 + 1$ bolsa, $y = \lg \sin u$ çylşyrymly funksiýadyr.

$$y' = (\lg \sin u)' = \frac{1}{\sin u} \cdot [\sin u]' = \frac{1}{\sin u} \cdot \cos u \cdot u' =$$

$$= \frac{1}{\sin(x^2 + 1)} \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x \cdot \mathrm{ctg}(x^2 + 1).$$

809. $y = e^{\mathrm{arctg} x}$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. $u = arctgx$ bilen belgiläp, $y = e^u$ funksiýany alarys:

$$y' = (e^u) \cdot u' = e^{arctgx} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

810. $y = (3 - 2 \sin x)^5$ funksiýanyň önümini tapmaly.

Çözülişi. $u = 3 - 2 \sin x$ bilen belgiläp $y = u^5$ funksiýany alarys:

$$y' = 5u^4 \cdot u' = 5(3 - 2 \sin x)^4 \cdot (3 - 2 \sin x)' = 5(3 - 2 \sin x)^4 \cdot (-2 \cos x) =$$
$$= -10 \cos x (3 - 2 \sin x)^4.$$

811. Eger $y = \sqrt{1 + x^2} \mathrm{arctg} x$ bolsa, y'-tapmaly.

Çözülişi. Köpeltmek hasylynyň önümini tapmaklygyň formulasyny ulanyp, alýarys:

$$y' = (\sqrt{1 + x^2})' \mathrm{arctg} x + \sqrt{1 + x^2} (\mathrm{arctg} x)'.$$

$\sqrt{1+x^2}$ aňlatmadan önüm alanymyzda $1+x^2=u$ bilen belgiläp taparys:

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'==\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Şunlukda,

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\sqrt{1+x^2}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapmaly.

812. $y=\left(1+3x+5x^2\right)^4$.

813. $y=\sin 3x+\cos\frac{x}{5}+\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

814. $y=\arccos\sqrt{x}$.

815. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg}x)$.

816. $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$.

817. $y=\sqrt{\operatorname{ctg}x}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$.

818. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

819. $y=x^2 10^{2x}$.

820. $y=5e^{-x^2}$.

821. $y=\cos^4 x$.

822. $y=(\arcsin x)^2$.

823. $y=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

824. $y=e^{-x}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)$.

825. $y=\sqrt{x}\cos^2 x$.

826. $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

827. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x$.

§ 3. Dürli funksiýalar

Geçen bölümçedäki garap geçen çylşyrymly funksiýalarymyzdan has çylşyrymly bolan funksiýalaryň önümlerini tapmagyň birnäçe mysallaryna garap geçeliň. Mysal üçin,

$$y=f(u)$$

funksiýada $u=\varphi(\vartheta)$ bolup, $\vartheta=g(x)$ bolsa, çylşyrymly bolan

$$y=f(\varphi(\vartheta))=f(\varphi(g(x)))$$

funksiýany alarys. Bu görnüşdäki funksiýalardan önüm almak üçin bolsa, öňden belli bolan düzgünlerden we formulalardan peýdalanýarlar.

828. Eger $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ bolsa, y' tapmaly.

Çözülişi.. $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ bilen belgiläp, alarys:

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$$

$\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ funksiýadan önüm almak üçin $\sqrt{x}$ funksiýany kömekçi funksiýa hökmünde garap, taparys:

$$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)}.$$

$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'$ -ň bahasyny, $y'-$ aňlatmada goýup alýarys:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$$

829. $y = \operatorname{arctg}\ln\frac{1}{x}$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. $\ln\frac{1}{x} = u$ bilen belgiläp, taparys:

$$y' = (\operatorname{arctg}u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Öz gezeginde $$\left(\ln\frac{1}{x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}.$$

Onda $$y' = \frac{-\frac{1}{x}}{1+(\ln\frac{1}{x})^2} = \frac{-1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

830. Eger $y = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^4$ bolsa, y' önümi tapmaly.

Çözülişi. $u = \arcsin\sqrt{x}$ bilen belgiläp, alarys:

$$y' = \left(u^4\right)' = 4\cdot u^3\cdot u'. \quad u' = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

onda.

$$y' = 4\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3 \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x-x^3}}.$$

831. $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$ bolsa y' önümi tapmaly.

Çözülişi. Goşmaça $u = ctg\frac{1}{x}$ funksiýany girizeliň. Onda

$$y' = \left(3^u\right)' = 3^u \cdot \ln 3 \cdot u',$$

$$u' = \left(\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2\sin^2\frac{1}{x}}.$$

Şunlukda,

$$y' = 3^u \cdot \ln 3 \frac{1}{x^2\sin^2\frac{1}{x}} = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}} \ln 3 \frac{1}{x^2\sin^2\frac{1}{x}}.$$

832. $y = \ln\sin 5x$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi.

$$y' = \frac{1}{\sin 5x}\cos 5x \cdot 5 = 5 \cdot \operatorname{ctg}5x.$$

833. Eger $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ bolsa, y' önümi tapmaly.

Çözülişi.

$$y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapmaly:

834. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$.

835. $y = 4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}$.

836. $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$.

837. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}$.

838. $y = \operatorname{arctg}\ln x$.

839. $y = \ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.

840. $y = \frac{\sin^3 x}{1+2^{x^2}}$.

841. $y = \arcsin(e^{x^2})$.

842. $y = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$. **843.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$.

844. $y = \frac{e^{-x^2}}{2x^2}$ funksiýanyň $xy' + 2y = -e^{-x^2}$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

845. $y = xe^{-x}$ funksiýanyň $xy' = (1-x)y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

Aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapmaly:

846. $y = \ln^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{3}$. **847.** $y = \ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$.

848. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. **849.** $y = \ln\arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}$.

§ 4. Funksiýanyň logarifmik önümi

Goý $f(x)$ we $\varphi(x)$ funksiýalaryň x nokatda önümleri bar bolsun, şeýle hem $f(x) > 0$ bolanda

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

funksiýa garalyň. Bu deňligiň iki bölegini hem logarifmirläliň:

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x).$$

$\ln y$ funksiýa çylşyrymly funksiýa hökmünde garap, ondan önüm alalyň:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}:$$

$\frac{y'}{y}$ aňlatma y funksiýanyň logarifmik önümi diýilýär. Bu deňlikden y' önümi tapyp bileris:

$$y' = [f(x)]^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

850. $y = \left(x^2 + 1\right)^{\sin x}$ funksiýanyň önümini tapmaly.

Çözülişi. Logarifmik önümiň formulasy esasynda

$$\frac{y'}{y} = \left[\ln(x^2 + 1)^{\sin x}\right]'.$$

bolar. Ýokardaky garalan düzgünleri ulanyp, alýarys:

$$\left[\sin x\cdot\ln(x^2+1)\right]'=\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}.$$

Onda berlen funksiýanyň önümi aşakdaky görnüşde bolar:

$$y=(x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right].$$

851. Eger $y=(\text{ctgx})^{x^3}$ bolsa, y' önümi tapmaly.

Çözülişi. Logarifmik önümiň formulasyny

$$\ln y=x^3\ln\text{ctg}x$$

funksiýa ulanalyň:

$$\frac{y'}{y}=-x^3\frac{1}{\text{ctg}x\cdot\sin^2 x}+3x^2\ln\text{ctg}x=3x^2\ln\text{ctg}x-\frac{x^3}{\sin x\cos x}.$$

Şunlukda,

$$y'=(\text{ctg}x)^{x^3}\left(3x^2\ln\text{ctg}x-\frac{x^3}{\sin x\cos x}\right).$$

852. $y=(\ln x)^x$ funksiýanyň y' önümini tapmaly.

Çözülişi. Logarifmik önümiň formulasyny

$$\ln y=x\cdot\ln\ln x.$$

funksiýa ulanalyň

$$\frac{y'}{y}=\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}.$$

Bu deňlikden alarys:

$$y'=\left[\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right](\ln x)^x=(\ln x)^{x-1}\left[1+\ln x\cdot\ln\ln x\right].$$

853. Eger

$$y=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x}\sin^3 x\cos^2 x \quad \text{bolsa, } y' \text{ önümi tapmaly.}$$

Çözülişi.

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\cdot\frac{-2}{1+x}+3\frac{1}{\sin x}\text{cosx}-\frac{2\sin x}{\cos x}.$$

Bu ýerden, taparys

$$y'=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x}\sin^3 x\cos^2 x\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{1-x^2}+3\text{ctg}x-2\text{tg}x\right).$$

854. Eger $y=(\sin x)^x$ bolsa, y' önümi tapmaly.

Çözülişi.

$$\ln y = x\ln\sin x, \quad \frac{y'}{y} = \ln\sin x + x\cdot \operatorname{ctg} x.$$

onda $y = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$.

855. Funksiýanyň önümini tapmaly:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}.$$

Çözülişi. Logarifmirläp alýarys

$$\ln y = \ln\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} = \ln x + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln(5-x),$$

onda

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} = \frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

Funksiýalaryň önümini tapmaly:

856 $y = (\cos x)^{\sin x}$.

857. $y = \sqrt[5]{\frac{\sin 3x}{1-\sin 3x}}$.

858. $y = \ln\frac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}}$.

859. $y = e^x \operatorname{tg}^3 x \arcsin x$.

860. $y = x^x$.

861. $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.

862. $y = \left(x^2+3\right)^{\sqrt{x}}$.

863. $y = x^{x^x}$.

864. $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

865. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.

§ 5. Parametrik görnüşde berlen funksiýanyň önümi

Goý, x we y ululyklar t parametre görä

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$

funksiýalar görnüşinde berlen bolsun.. Onda parametrik görnüşde berlen funksiýanyň y'_x önümi aşakdaky deňlik bilen tapylýar

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

866. Parametrik görnüşde berlen

$$x = \ln\sin\frac{t}{2}, \quad y = \ln\sin t, \quad 0 \le t < \pi$$

funksiýanyň $y'(x)$ önümini tapmaly.

Çözülişi. Ilki berlen funksiýalaryň t parametre görä önümlerini tapalyň

$$x'(t) = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}, \quad y'(t) = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly $(0,\pi)$ aralykda $x(t)$ funksiýa $x'(t) \ne 0$ şerti kanagatlandyrýandyr. Şonuň üçin $y'(x)$ önümi tapmak bolar:

$$y'(x) = \frac{2\operatorname{ctgt}}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} = \frac{2\cos t\sin\frac{t}{2}}{\sin t\cos\frac{t}{2}} = \frac{2\cos t}{1+\cos t}.$$

867. Eger

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad (x^2 + y^2 = a^2).$$

bolsa, $y'(x)$ önümi tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t.$$

Şunlukda,

$$y'(x) = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

868. Eger

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

bolsa, $y'(x)$ tapmaly.

Çözülişi. x we y funksiýalaryň t parametre görä önümlerini tapmaly:

$$x'_t = a(1-\cos t) \quad y'_t = a\sin t.$$

Onda

$$y'(x) = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad (t \ne 2k\pi).$$

869.

$$\begin{cases} x = 2\ln \text{ctg}t \\ y = \text{tg}t + \text{ctg}t \end{cases}$$

funksiýanyň $y'(x)$ önümini tapmaly.

Çözülişi.

$$x'(t) = \frac{-2\text{cosec}^2 t}{\text{ctg}t} = -\frac{4}{\sin 2t}, \quad y'_t = \sec^2 t - \text{cosec}^2 t = -\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos 2t \sin 2t}{4\sin^2 2t} = \text{ctg}2t, \quad \left(t \neq \frac{k\pi}{2}\right).$$

870. Eger

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = te^{3t} \end{cases}$$

bolsa, $y'(x)$ önümi tapmaly.

Çözülişi.

$$x_t' = 2 \quad y_t' = e^{3t} + 3te^{3t} = e^{3t}(1+3t).$$

Onda

$$y'(x) = \frac{e^{3t}(1+3t)}{2}.$$

Aşakdaky funksiýalaryň $y'(x)$ önümlerini tapmaly.

871. $\begin{cases} x = K\sin t - \sin Kt, \\ y = K\cos t - \cos Kt. \end{cases}$

872. $\begin{cases} x = e^{ct}, \\ y = e^{-ct}. \end{cases}$

873. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

874. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

875. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

876. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

877. $\begin{cases} x = a(\ln \text{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t), \\ y = a(\sin t + \cos t). \end{cases}$

§ 6. Önümiň berlen nokatdaky bahasy

Önümiň geometriki we mehaniki manysy

1. Bilşimiz ýaly $y = f(x)$ funksiýanyň önümi hem x görä funksiýadyr. Köplenç halatlarda funksiýanyň önüminiň berlen nokatdaky bahasyny tapmaly bolýarys. Eger-de funksiýanyň önüminiň aňlatmasynda argumentiň bahasyny goýanymyzda onuň manysy ýok bolsa, onda biz önümiň kesgitlemesinden peýdalanmaly bolýarys. Bu halda funksiýadan önüm almagyň tehnikasy ulanylmaýar.

878. Eger $f(x) = 5x^2 - x + 4$ bolsa, $f'(0)$ tapmaly.

Çözülişi. Önümi tapalyň:

$$f'(x) = 10x - 1$$

onda

$$f'(0) = 10 \cdot 0 - 1 = -1.$$

879. Eger $f(x) = arctg 5x + x^2$ bolsa, $f'\left(\frac{1}{5}\right)$ hasaplamaly.

Çözülişi.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(5x)^2}(5x)' + 2x = \frac{5}{1+25x^2} + 2x$$

onda

$$f'\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{1+25 \cdot \frac{1}{25}} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10}.$$

880. Eger, $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ bolsa, onda $f'(1)$ hasaplamaly.

Çözülişi.

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' - \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+1)} = -\frac{13}{20}.$$

881. Eger

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

bolsa, $f'(0)$ hasaplamaly.

Çözülişi. $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ aňlatmanyň we onuň önüminiň $x=0$ bolanda manysy ýokdur. Şonuň üçin $f'(0)$ önümiň kesgitlemesiniň üsti bilen hasaplamaly. Kesgitlemä görä

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

h – argumentiň artdyrmasy. $x=0$ bolanda

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Bu ýerde $f(h)=\hbar^2\sin\dfrac{1}{h}$, $f(0)=0$.

Şunlukda,

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

882. Eger $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{16}{x}$ bolsa, $f'(-8)$ hasaplamaly.

883. Eger $f(t)=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ bolsa $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ hasaplamaly.

884. Eger $2y=1+3x^2$ bolsa, y' önümiň $M(1,1)$ nokatdaky bahasyny hasaplamaly.

885. Eger $f(x)=e^{-x}\cos 3x$ bolsa, $f'(0)$ hasaplamaly.

886. Eger $f(x)=\ln(1+x)\arcsin\dfrac{x}{2}$ bolsa, $f'(1)$ hasaplamaly.

887. Eger $f(x)=\ln(1+2^x)$ bolsa, $f'(2)$ hasaplamaly.

888. Eger $f(x)=2\sin x+3\cos x$ bolsa, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ hasaplamaly.

889. Eger

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sin\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

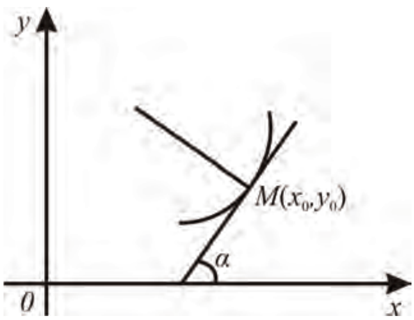
bolsa, $f'(1)$ hasaplamaly.

2. Önümiň geometriki manysy. Goý deňlemesi $y=f(x)$ bolan käbir egri berlen diýeliň. $M(x_{1,}y_1)$ nokat şol egriniň erkin nokady bolsun:

Eger $y=f(x)$ funksiýanyň $x=x_0$ nokatda önümi bar bolsa, onda ol funksiýanyň grafigine $M(x_0,y_0)$ nokatda gatnaşýan göni çyzyk geçirmek bolar we gatnaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýenti $\text{tg}\alpha=f'(x_0)$. Başgaça aýdanymyzda, gatnaşýan göni çyzygyň Ox okuna ýapgytlyk α burçy $\text{arctg}\, f'(x_0)$ deňdir, ýagny $\alpha=\text{arctg}\, f'(x_0)$; $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $M(x_0,y_0)$ nokada geçirilen gatnaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentiniň $k=f'(x_0)$ bolýandygy üçin, ol gatnaşýan göni çyzygyň deňlemesi

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

görnüşde ýazylýar.



38-nji çyzgy

$M(x_{0,}y_0)$ galtaşma nokatda egrä geçirilen galtaşýana inderilen perpendikulýara normal diýilýär. Onuň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

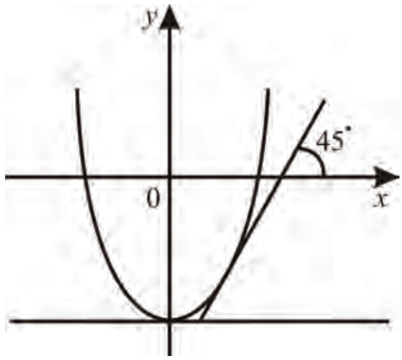
890. $y=x^2-1$ egriniň haýsy nokadynda geçirilen galtaşýan:

a) Ox oka parallel;

b) Ox ok bilen 45^0 burç emele getirýär.

Çözülişi. a) Şerte görä göni çyzyk Ox oka parallel, şonuň üçin 0^0 burçy emele getirýär. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ önümi tapalyň $y' = 2x$.

Onda $2x = 0$ ýagny $x_0 = 0$. Bu ýerden $y_0 = -1$. Diýmek, $M(0, -1)$ nokatda geçirilen galtaşýan Ox oka parallel.



39-njy çyzgy

b) Şerte görä göni çyzyk Ox oky bilen 45^0 burçy emele getirýär.

$$\operatorname{tg} 45^0 = 1, y' = 2x, 1 = 2x_0, x_0 = \frac{1}{2}$$

şunlukda,

$$y_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}.$$

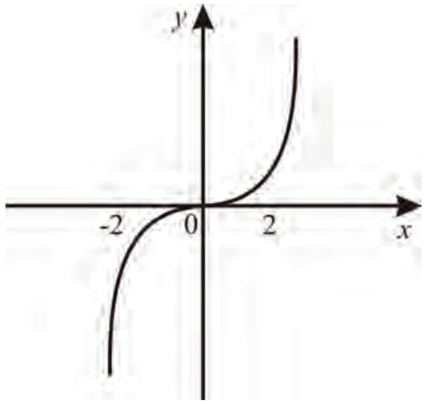
Bu ýerden, galtaşýanyň $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ nokat arkaly geçip, Ox oky bilen 45^0 burçy emele getirýändigi gelip çykýar.

891. $y = x^3$ egrä $M(-2, 8)$ nokatda geçirilen gatnaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentini tapmaly.

Çözülişi. $x = -2$ nokatda $y = x^3$ funksiýanyň önüminiň bahasyny tapalyň

$$y' = (x^3)' = 3x^2, \qquad y'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12.$$

Şunlukda, $y = x^3$ egrä $D(-2, -8)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýenti 12-ä deňdir.



40-njy çyzgy

892. $y=\frac{x^2}{4}$ egrä $M(2\ ,1)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

$M(2\ ,1)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň umumy deňlemesi

$$y-1=y'(x-2)$$

görnüşdedir. $y'=\frac{x}{2}$. $x=2$ bolanda

$$k=y'=\frac{2}{2}=1.$$

Tapylan y' önümiň hususy bahasyny galtaşýan göni çyzygyň deňlemesinde ornuna goýup,

$$y-1=(x-2), \quad -x+y+1=0$$

deňlemäni alarys. Gatnaşýan göni çyzyk bilen normalyň biri-birine perpendikulýardygyny nazara alsak

$$y-1=-(x-2), \quad x+y-3=0$$

deňleme normalyň deňlemesi bolar.

893. $y=\frac{1}{1+x^2}$ egrä $\left(2\ ,\frac{3}{2}\right)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $\left(2\ ,\frac{3}{2}\right)$ nokat arkaly geçýän göni çyzyklar toplumynyň deňlemesini ýazalyň:

$$y-\frac{1}{5}=k(x-2).$$

Galtaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentini tapalyň

$$k=y'(2)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\Bigg|_{x=2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\Bigg|_{x=2}=-\frac{4}{25}.$$

Onda gatnaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$y-\frac{1}{5}=-\frac{4}{25}(x-2), \qquad 125x-20y-246=0.$$

894. $y=-x^2+4$ egri berlen. Şu egrä abssisasy $x=-1$ bolan nokatda gatnaşýan göni çyzyk geçirmeli.

Çözülişi. Galtaşma nokadynyň ordinatasyny tapalyň

$$y\big|_{x=1}=(-x^2+4)\big|_{x=-1}=-(-1)^2+4=3.$$

Şunlukda, $A(-1,3)$ nokat galtaşma nokadydyr. A nokat arkaly geçýän göniniň umumy deňlemesini ýazalyň: $y-3=k(x+1)$ Onda göniniň galtaşýan bolmagy üçin $k=y'/x=1$ bolmagy zerur we ýeterlikdir. $k-$ burç koeffisiýenti tapalyň:

$$y'=(-x^2+4)'=-2x, \quad k=y'_{x=-1}=(-2)(-1)=2.$$

Şunlukda, gatnaşýan göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir

$$y-3=2(x+1), \quad y=2x+5.$$

895. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ egri çyzyga (a, a) nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

896. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^h+\left(\dfrac{y}{b}\right)^h=2$ egri çyzyga (a, b) nokatdaky gatnaşýan göni çyzygyň deňlemesiniň $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ bolýandygyny görkezmeli.

897. Ox oky bilen 45° burç emele getirip, $y^2=20x$ parabola galtaşýan göni zyzygyň deňlemesini tapmaly.

898. $y=x^2+2x$ egrä $M(1, 3)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

899. $y=x^2+5x-1$ egrä $M(1, 5)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

900. $y=2\sqrt{2}\sin x$ egrä $M\left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$ nokatda geçirlen gatnaşýan göni zyzygyň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

901. $y = \dfrac{x-1}{1+x^2}$ egriniň abssisalar okuny nähili burç bilen kesip geçýändigini kesgitlemeli.

902. $y = x^2 + 3x - 5$ parabolanyň haýsy nokadynda geçirlen gatnaşýan göni gyzyk $7x - 5y + 3 = 0$ göni çyzyga paralleldir?

903. $y = 2^x$ we $y = \sqrt{x+1}$ egriler nähili burç bilen kesişýärler?

3. Önümiň mehaniki manysy. Önümiň mehaniki manysyna ilkinji gezek I. Nýuton tarapyndan seredildi. Ol hereket edýän material nokadyň tizliginiň belli bir pursatda, geçilen ýoldan wagta görä alnan önüme deňdigini görkezdi

$$\vartheta = \frac{ds}{dt}.$$

Şunlukda, eger hereket edýän material nokadyň deňlemesi $s = f(t)$ görnüşde berlen bolsa, belli bir pursatda tizligi tapmak üçin $s' = f'(t)$ önümi kesgitlemeli we onda t wagtyň degişli hususy bahasyny goýmaly. Kesgitlilik üçin geçilen ýol metr, wagt bolsa sekunt bilen ölçelýär diýip kabul edeliň.

904. Material nokadyň geçen ýoly wagta görä $s = 3t^2 - 2t + 4$ kanun boýunça üýtgeýän bolsa, onuň hereketiniň 5-nji sekundynyň ahyryndaky tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi: Önümi tapalyň

$$s' = \frac{ds}{dt} = (3t^2 - 2t + 4)' = 6t - 2.$$

Bu ýerde t=5 bolsa, $\dfrac{ds}{dt} = 6 \cdot 5 - 2 = 28\dfrac{m}{c}$. Şunlukda, $\vartheta = \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=5} = 28\dfrac{m}{s}$.

905. Ýokarlygyna dik zyňlan jisimiň ýokary göteriliş beýikligi wagta görä $h = 200t - 4{,}9t^2$ kanun boýunça üýtgeýär. Hereketiň 10-njy sekundynyň ahyrynda jisimiň tizligini kesgitlemeli. Jisim näçe wagt ýokarlygyna hereket eder we ol haýsy iň ýokary beýiklige galar?

Çözülişi: Jisimiň tizligi $\vartheta = \dfrac{dh}{dt}$ bilen kesgitlenýär. Onda

$$\vartheta = \frac{dh}{dt} = 200 - 9{,}8t.$$

Bu ýerde $t = 10$ bolanda $\vartheta = 102\, m/s$.

Jisim iň ýokary beýiklige baranda onuň tizligi nola deňdir. Şunlukda, şol pursat üçin

$$\frac{dh}{dt} = 200 - 9{,}8t = 0.$$

Bu ýerden $t = \frac{200}{9,8} = 20,4s$.

Şu bahany hereketiň deňlemesine goýup, iň ýokary beýikligi taparys:

$$s = 200 \cdot 20,4 - 4,9 \cdot (20,4)^2 = 2040,8\, m.$$

906. Massasy 8 kg bolan jisim $s = 2t^2 + 3t - 1$ kanuna laýyklykda hereket edýär. Hereket başlanandan 3s geçenden soň jisimiň kinetiki energiýasyny $\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right)$ kesgitlemeli.

Çözülişi. Erkin t wagtda hereket edýän jisimiň islendik wagt pursadyndaky tizligini kesgitläliň $\vartheta = \frac{ds}{dt} = (2t^2 + 3t - 1)' = 4t + 3$.

Wagtyň $t = 3s$ pursadynda jisimiň tizligi $\vartheta_{t=3} = 4 \cdot 3 + 3 = 15 \frac{m}{s}$ bolar. Indi wagtyň $t = 3s$ pursadyndaky kinetiki energiýasyny kesgitlemek aňsatdyr.

907. Nokat $s = 2t^3 + t^2 - 4$ kanuna laýyklykda göniçyzykly hereket edýär. Wagtyň $t = 4s$ pursadynda onuň tizligini kesgitlemeli.

908. Eger nokadyň hereketiniň deňlemesi $s = t^2 + 11\mathrm{t} + 30$ bolsa, onda 3-nji sekundyň ahyrynda onuň hereketiniň tizligini kesgitlemeli.

909. Nokat $s = 6t - t^2$ kanuna laýyklykda gönüçyzykly hereket edýär. Onuň hereketiniň tizligi wagtyň haýsy pursadynda nola deň bolar?

Çözülişi. $\vartheta = s' = 6 - 2t$, $\quad 6 - 2t = 0$, $\quad t = 3s$.

910. Iki jisimiň biri $s = t^3 + t^2 - 27t$ kanuna görä beýlekisi bolsa, $s = t^2 + 1$ kanuna görä gönüçyzykly hereket edýärler. Şu iki jisimleriň tizlikleriniň wagtyň haýsy pursadynda deň boljakdygyny anyklamaly.

911. Massasy 25 kg bolan jisim $s = 3t^2 - 1$ kanuna laýyklykda hereket edýär. Hereket başlanandan $t = 4\, sek$ soňra onuň kinetiki energiýasyny kesgitlemeli.

§ 7. Önümiň fizikanyň meselelerini çözmekde ulanylyşy

Belli bolşy ýaly geçilen ýoldan wagta görä alnan önüm gönüçyzykly hereketiň wagtyň käbir pursatyndaky tizligini aňladýar. $y = f(x)$ funksiýa haýsy baglanşygy aňlatsa-da, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gatnaşyk y ululygyň x görä üýtgeýşiniň orta tizligini aňladýar, $y'(x_0)$ bolsa y ululygyň $x = x_0$ bolandaky pursat tizligini görkezýär.

Şunuň esasynda islendik tebigy akym we hadysa öwrenilende önümiň kömegi bilen özara baglanyşykly ululyklaryň biriniň beýlekä görä üýtgeýiş tizligini görkezmek bolar.

1. **Toguň güýji.** Goý $q = f(t)$ funksiýa geçirijiniň kese-kesiginden geçýän elektrik zarýadynyň mukdaryny aňladýan bolsun. Onda $q(t+\Delta t) - q(t)$ tapawut geçirijiniň kese-kesiginden t wagtdan $t+\Delta t$ wagta çenli aralykda geçýän elektrik zarýadynyň mukdary bolar. Şunlukda, $\Delta q(t)/\Delta t$ gatnaşyga Δt wagt dowamyndaky **toguň orta güýji** diýilýär.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = q'(t)$$

predele bolsa toguň t wagt pursatyndaky güýji diýilýär we J bilen belgilenýär. Şeýlelikde, $J(t) = q'(t)$, ýagny elektrik zarýadynyň mukdarynyň t-e görä önümi şol pursatdaky toguň güýjine deňdir.

2. **Sterženiň dykyzlygy.** Uzynlygy L bolan birhilli bolmadyk sterženi alalyň. Onuň x uzynlygynyň massasyny $m(x)$ bilen belgiläliň.

Onda $m(x+\Delta x) - m(x)$ tapawut sterženiň Δx uzynlykly böleginiň massasydyr. Şunlukda,

$$\frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x}$$

gatnaşyga sterženiň Δx uzynlykly böleginiň orta dykyzlygy diýilýär.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x} = m'(x)$$

predele sterženiň x nokatdaky dykyzlygy diýilýär we $\rho(x)$ bilen belgilenýär. $\rho(x) = m'(x)$, ýagny massanyň x görä önümi sterženiň şol nokatdaky dykyzlygydyr.

912. Göniburçlugyň a we b taraplary $a = (2t+1)sm$, $b = (3t+2)\,sm$ kanun boýunça üýtgeýär. Onda $t = 4s$ wagt pursatynda meýdanyň nähili tizlik bilen üýtgeýändigini kesgitlemeli.

Çözülişi.

$$S = ab = (2t+1)(3t+2) = 6t^2 + 7t + 2,$$

$$\vartheta = s'_t = (6t^2 + 7t + 2)' = 12t + 7.$$

Onda $t = 4s$ bolanda

$$\vartheta = 12 \cdot 4 + 7 = 55\ sm/s.$$

913. Mahowik t wagtda $\varphi = 8t - 0,5t^2$ (t – sekunt, φ – radian) burça öwrülýär. 3-nji sekundyň ahyrynda aýlanmagyň ω burç tizligini we hereketiň togtaýan pursadyny kesgitlemeli.

Çözülişi: Aýlanmagyň ω – burç tizligi aýlanma burçundan t wagta görä alnan önüme deňdir: $\omega = \varphi'_t$. Onda $\omega = \varphi'_t = (8t - 0,5t^2)' = $
$= (8 - t)\, rad / s.$

Diýmek, $\omega = \varphi' /_{t=3} = 8 - 3 = 5\, rad / s;$

$\omega = 0$ bolanda aýlanma hereketi togtaýar. Ol bolsa $t = 8s$ bolanda bolýar. Sebäbi,

$$\omega = 8 - t = 0, \quad t = 8s.$$

914. Geçirijiden geçýän elektrik zarýadynyň mukdary $t = 0$ pursatdan başlap, $Q = 3t^2 - 3t + 4$ kanun boýunça üýtgeýän bolsa, hereketiň 6-njy minutynyň ahyrynda toguň güýjüni kesgitlemeli.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly toguň I güýji elektrik zarýadynyň mukdaryndan wagta görä alnan önüme deňdir: $I = Q'_t$.

Onda

$$Q'_t = (3t - 3t + 4)'_t = 6t - 3.$$

Meseläniň şertinden alarys:

$$I = Q'\big|_{t=6} = (6t - 3)\big|_{t=6} = 36 - 3 = 33A, \quad I = 33A.$$

915. Haýsy hem bolsa bir maddany 0-dan T – gradusa çenli gyzdyrlanda, onuň alýan ýylylyk mukdary

$$Q = 0{,}1054t + 0{,}000002t^2$$

(Q – joulda, t – kelwinde) kanuna görä üýtgeýär diýeliň. Onda $T = 100K$ bolanda maddanyň alýan ýylylyk mukdaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. Ýylylyk mukdaryny kesgitläliň:

$$C = Q = 0{,}1054 + 0{,}000004 \cdot t.$$

Onda $T = 100\,K$ goýup alarys:

$$C\big|_{T=100} = 0{,}1054 + 0{,}000004 \cdot 100 = 0{,}1058\ I / K.$$

916. Jisimiň temperaturasy $T = 0{,}2t^2$ kanun boünça üýtgeýän bolsa, $t = 10s$ wagt pursatynda jisimiň nähili tizlik bilen gyzýandygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Jisimiň gyzyş tizligi T temperaturadan t wagta görä alynýan önüme deňdir:

$$\frac{dT}{dt} = (0,2t^2)' = 0,4t.$$

Onda $t=10c$ bolanda jisimiň gyzyş tizligi

$$\left(\frac{dt}{dt}\right)_{t=10}=0,4\cdot 10=4\ grad/s \text{ bolar.}$$

917. Massasy 6 *kg* bolan jisim $s=-1+\ln(t+1)+(t+1)^3$ ($S-sm,\ t-s$) kanuna laýyklykda hereket edýär. Hereket başlanandan $1s$ geçenden soň onuň kinetik energiýasyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Hereketiň tizligi geçilen ýoldan wagta görä alnan önüme deňdir:

Şonuň üçin

$$\vartheta(1)=\frac{1}{1+1}+3(1+1)^2=\frac{1}{2}+12=12\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{m\vartheta^2}{2}=\frac{6}{2}\left(12\frac{1}{2}\right)^2=468\frac{3}{4}\ J.$$

918. Nokat $s=2t^3+t^2-4$ kanuna görä gönüçyzykly hereket edýär Onda $t=4s$ wagt pursatynda tizligi we tizlenmäniň ululygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Nokadyň hereketiniň islendik t wagt pursatyndaky tizligini kesgitläliň

$$\vartheta=\frac{ds}{dt}=6t^2+2t.$$

Indi bolsa onuň $t=4s$ pursatdaky bahasyny kesgitläliň.

$$\vartheta(4)=6\cdot 4^2+2\cdot 4=104\frac{m}{s}.$$

Nokadyň hereketiniň islendik t wagt pursatyndaky tizlenmesi

$$a=\frac{d\vartheta}{dt}=12t+2.$$

Tizlenmäniň $t=4s$ wagt pursatyndaky bahasy $a=50$.

919. Erkin nokatda $y=0,3x^2+0,2x-5$ funksiýanyň üýtgeýiş tizligini kesgitlemeli.

920. $x=6$ bolanda $y=(x^2+2)x-1$ funksiýaň üýtgeýiş tizligini kesgitlemeli.

921. 100 *кг* massaly jisim $s=2t^2+3t+1$ kanuna laýyklykda göni çyzykly hereket edýän bolsa, $5s$ geçeninden soňra onuň kinetik energiýasyny kesgitlemeli.

922. 100 *кг* massaly jisim $s=5t^2-2$ kanuna görä göniçyzykly hereket edýän bolsa, $2s$ geçenden soň, onuň kinetik energiýasyny kesgitlemeli.

923. Jisimiň gönüçyzykly hereketiniň tizligi geçilen ýoldan alnan kwadrat köke proporsionaldyr (meselem jisim erkin gaçanda). Şol ýagdaýda jisimiň hemişelik güýjüň täsiri astynda hereket edýändigini subut etmeli.

924. Ýeriň emeli hemrasy (ÝeEH) ýer şarynyň daşynda elliptik orbita boýunça hereket edýär. Emeli hemra bilen ýer şarynyň merkeziniň aralygyndaky r uzaklyk wagta baglylykda aşakdaky deňleme bilen takmynan kesgitlenip bilner:

$$r = a\left[1 - \varepsilon\cos M - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M - 1)\right], \quad M = \frac{2\pi}{\rho}(t - t_n).$$

Bu ýerde $a,\ \varepsilon,\ \rho$ we t_n – hemişelik sanlar, a – orbitanyň uly oky, ε – eksentrisitet, ρ – ÝeEH-nyň aýlanma periody t_n ÝeEH-nyň perigeý boünça geçýän wagty (perigeý ÝeEH-y bilen ýer şarynyň aralygyndaky iň ýakyn uzaklyk). Onda ýer şarynyň merkezi bilen ÝeEH-nyň aralygyndaky r aralygyň üýtgeýşiniň tizligini kesgitlemeli.

925 Geçirijide toguň mukdary $q = \sin(2t+1)k$ kanun boýunça üýtgeýän bolsa, bu funksiýanyň t wagta görä üýtgeýiş I tizligini kesgitlemeli (I -amperde, t-bolsa sekuntda ölçelýär).

§ 8. Funksiýanyň differensialy

1. Differensialyň kesgitlenişi. $y = f(x)$ funksiýanyň $f'(x)$ önüminiň baglanşyksyz üýtgeýän x ululygyň Δx artdyrmasyna köpeltmek hasylyna berlen funksiýanyň differensialy diýilýär we aşakdaky ýaly ýazylýar

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Eger $y = f(x) = x$ bolsa, $dy = dx = x'\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$ ýagny, $dx = \Delta x$.

Şunlukda, differensirlenýän $y = f(x)$ funksiýanyň differensialy şu aşakdaky formula bilen aňladylýar

$$dy = f'(x)dx. \tag{1}$$

Şu formuladan görnüşi ýaly funksiýanyň differensialyny tapmak üçin ol funksiýanyň önümini dx köpeltmek ýeterlikdir. Şonuň üçin differensialy tapmak üçin önüm tapmagyň formulalaryndan peýdalanmaly bolýarys.

Differensirlemegiň esasy düzgünleri. Eger c hemişelik san bolup, önümleri bar bolan $u = u(x)$ we $\vartheta = \vartheta(x)$ funksiýalar bolsa, onda aşakdaky deňlikler dogrudyr

$d(c)=0$, (2) $\qquad d(u\vartheta)=ud\vartheta+\vartheta du$, (5)

$d(u\pm\vartheta)=du\pm d\vartheta$, (3) $\qquad d\left(\dfrac{u}{\vartheta}\right)=\dfrac{\vartheta\, d\,u-ud\vartheta}{\vartheta^2}$. (6)

$d(cu)=cdu$, (4)

Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapmagyň düzgüninden peýdalanyp $y=f(u)$ $u=\varphi(x)$ çylşyrymly funksiýa üçin

$$dy=f'(u)\cdot u'dx$$

formulany alarys. Emma,

$$u'=\frac{du}{dx} \quad \text{we} \quad dy=f'(u)\frac{du}{dx}dx.$$

Şunlukda,

$$dy=f'(u)du. \qquad (7)$$

926. $y=\ln x\sin x$ funksiýanyň differensialyny tapmaly.

Çözülişi. Differensirlemegiň düzgünlerinden peýdalanyp alarys:

$$dy=\ln x d(\sin x)+\sin x d(\ln x)=\ln x(\sin x)'dx+\sin x(\ln x)'dx=$$

$$=\ln x\cos xdx+\sin x\frac{1}{x}dx=\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)dx.$$

927. $y=3x^2-x$ funksiýanyň artdyrmasyny we differensialyny tapmaly.

Çözülişi. $\Delta y=3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-3x^2+x$

ýa-da

$$\Delta y=(6x-1)\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

Şunlukda, kesgitlemä görä

$$dy=(6x-1)\Delta x=(6x-1)dx.$$

Muny başgaça hem tapyp bolar:

$$y'=6x-1, \quad dy=y'\,\mathrm{d}\,x=(6x-1)dx.$$

928. $y=3x^3+x-1$ funksiýanyň Δy artdyrmasynyň we dy differensialynyň $x=1$ we $\Delta x=0{,}1$ bolandaky bahalaryny tapmaly.

Çözülişi.

$$\Delta y=9x^2\cdot\Delta x+9x\cdot\Delta x^2+3\cdot\Delta x^3+\Delta x,$$

$$dy=(9x^2+1)\Delta x, \quad dy=1,$$

$$\Delta y=9\cdot 1^2\cdot 0{,}1+9\cdot 1\cdot 0{,}1^2+3\cdot 0{,}1^3+0{,}1=1{,}093.$$

929. $y=\ln(1+\mathrm{e}^{10x})-\mathrm{arctg}\,e^{5x}$ funksiýanyň differensialynyň $x=0$ we $dx=0{,}2$ bolandaky bahasyny hasaplamaly.

Çözülişi.

$$dy=\left[\frac{\left(1+e^{10x}\right)'}{1+e^{10x}}-\frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right]dx=\frac{5e^{5x}\left(2e^{5x}-1\right)}{1+\mathrm{e}^{10x}}dx.$$

$x=0$ we $dx=0,2$ goýup, alarys

$$dy=\frac{5\cdot e^{5\cdot 0}(2e^{5\cdot 0}-1)}{1+e^{10\cdot 0}}0{,}2=\frac{5}{2}0{,}2=0{,}5.$$

930. Eger $x^2+2xy-y^2=a^2$ bolsa, dy tapmaly.

Çözülişi. $2xdx+2(ydx+xdy)-2ydy=0$

Bu ýerden

$$dy=-\frac{x+y}{x-y}dx.$$

931. Eger $y=e^{-\frac{x}{y}}$ bolsa, dy tapmaly.

Çözülişi.

$$dy=e^{-\frac{x}{y}}d\left(-\frac{x}{y}\right)=e^{-\frac{x}{y}}\left(-\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)=-e^{-\frac{x}{y}}\frac{dx}{y}+e^{-\frac{x}{y}}\frac{xdy}{y^2},$$

$$dy\left(1-e^{-\frac{x}{y}}\frac{x}{y^2}\right)=-e^{-\frac{x}{y}}\frac{dx}{y},$$

$$dy=\frac{-e^{-\frac{x}{y}}dx}{y}:\frac{y^2-e^{-\frac{x}{y}}x}{y^2}=y\frac{e^{-\frac{x}{y}}dx}{y^2-e^{-\frac{x}{y}}\cdot x}.$$

933. Funksiýalaryň diferensiallaryny tapmaly:

a) $y=\dfrac{x}{1-x}$, b) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, ç) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Funksiýanyň differensialyny tapmaly.

934. $y=(\arcsin x)^5$. **935.** $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$.

936. $y=\operatorname{ctg}^5(x^3+x^2)$. **937.** $y=\sqrt{1+\operatorname{arctg} x}$.

938. $y=\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}$. **939.** $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

2. Differensialyň takmyn hasaplamada ulanylyşy. $y=f(x)$ funksiýanyň artdyrmasynyň Δx – e görä baş çyzykly bölegine onuň differensialy diýilýändigini bilýäris. Başgaça aýdanymyzda Δy artdyrma dy differensial bilen aşakdaky deňlik bilen baglanyşýandyr:

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon \Delta x \quad \text{ýa-da} \quad \Delta y = dy + \varepsilon\Delta x.$$

Bu ýerde $\varepsilon \to 0$, eger $\Delta x \to 0$. Şunlukda, artdyrma bilen differensialyň tapawudy ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr. Şonuň üçin $f'(x) \neq 0$ bolanda,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Ýagny funksiýanyň artdyrmasy bilen onuň differensialy deňgüýçli tükeniksiz kiçi ululyklardyr. Şonuň üçin ýeterlik kiçi ε üçin

$$\Delta y = dx \qquad \text{ýa-da} \qquad f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x.$$

Amalyýetde ulanmak üçin käbir hallarda bu deňligi

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \tag{8}$$

görnüşde ýazmak amatly bolýar.

940. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ funksiýanyň $x=0$ nokadyň etapynda ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

Çözülişi. (8) formulany aşakdaky görnüşde ýazalyn

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Onda şu formulany $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ funksiýa üçin ulanyp, $x_0 = 0$ we $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ bolýandygyndan peýdalanyp

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x \tag{9}$$

formulany alarys.

941. $\sqrt[3]{27{,}027}$ aňlatmanyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen ony $\sqrt[3]{27{,}027} = \sqrt[3]{27 + 0.027} = 3\sqrt[3]{1 + 0.001}$ görnüşde ýazyp, soňra $\sqrt[3]{1+0{,}001} = (1+0{,}001)^{1/3}$ aňlatmany hasaplalyň. Onuň üçin (9) formulada $x = 0{,}001$ we $\alpha = \dfrac{1}{3}$ goýup alarys

$$(1+0{,}001)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}001 = \frac{3{,}001}{3}, \qquad \sqrt[3]{27{,}27} = 3(1+0{,}001)^{1/3} = 3{,}001.$$

942. $\sin 29^0 57'$ aňlatmanyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

Çözülişi. (8) formuladan peýdalanyp, alarys

$$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x.$$

Bu formulada $x_0 = 30^0$ we $\Delta x = -3' = -\dfrac{\pi}{3600}$ goýup,

$$\sin 29^0 57' = \sin(30^0 - \frac{\pi}{3600}) \approx \sin 30^0 - \cos 30^0 \cdot \frac{\pi}{3600} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3600} =$$

$$= 0{,}5 - \frac{\pi\sqrt{3}}{7200} = 0{,}499237.$$

943. Eger $f(x) = x^{\alpha}$ bolsa, onda

$$(x_0 + \Delta x)^{\alpha} \approx x_0^{\alpha} + \alpha\, x_0^{\alpha-1} \cdot \Delta x.$$

Goý, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ diýeliň. Onda $\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}$.

şu formuladan peýdalanyp $\sqrt{9{,}0066}$ aňlatmany takmyny hasaplamaly.

$$\sqrt{9{,}0066} = \sqrt{9 + 0{,}0066} = \sqrt{9} + \frac{0{,}0066}{2\sqrt{9}} == 3 + \frac{0{,}0066}{6}$$

ýa-da

$$\sqrt{9{,}0066} \approx 3{,}0011.$$

Aňlatmalaryň ýakynlaşan bahalaryny tapmaly:

944. $\sqrt[4]{16{,}64}$, **945**. $\sin 29^0$, **946**. $\arcsin 0{,}54$.

947. Takmyn formulany getirip çykarmaly:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Şu formulanyň kömegi bilen $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[3]{200}$ aňlatmalaryň takmyn bahalaryny tapmaly.

948. Funksiýalaryň takmyn bahalaryny tapmaly

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, $x = 1{,}03$, b) $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $x = 0{,}2$.

§ 9. Ýokary tertipli önümler we differensiallar

Goý, $y = f(x)$ funksiýanyň $f'(x)$ önümi x ululyga görä funksiýa bolsun. Eger şol funksiýanyň hem önümi bar bolsa, ondan önüm alyp täze bir funksiýany alarys. Soňky alnan funksiýa berlen funksiýanyň önüminiň önümi diýilýär ýa-da oňa berlen funksiýanyň ikinji tertipli önümi diýilýär we

$$y'',\quad f''(x) \quad \text{ýa-da} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{görnüşde belgilenýär.}$$

Berlen funksiýanyň ikinji tertipli önüminden alnan önüme üçünji tertipli önüm diýilýär we ş. m. Eger $y=f(x)$ funksiýanyň $(n-1)$ tertipli önümi bar bolsa, onda olar aşakdaky ýaly bolar

$$y^{(n)}=\left[y^{(n-1)}\right]'.$$

Iki u we ϑ funksiýalaryň köpeltmek hasylyndan n tertipli önüm aşakdaky formula bilen tapylýar

$$(u\vartheta)^{(n)}=u^{(n)}\vartheta+nu^{(n-1)}\vartheta'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}\vartheta''+....+u\cdot\vartheta^{(n)}. \qquad (1)$$

Belli bolşy ýaly $y=f(x)$ funksiýanyň differensialy $dy=f^{i}(x)dx$ görnüşde ýazylýar we ol x-e görä funksiýadyr. Ondan alnan differensiala bolsa ikinji tertipli differensial diýilýär we şeýle ýazylýar: $d(dy)=d^2y$. d^2y hasaplanan mahalynda dy-i differensirlemeli bolýarys. Şol prosesde $dx=\Delta x$ differensial x-e bagly däldir. Ýagny x-e görä differensirlenende ol hemişelikdir. Şunlukda,

$$d^2y=y''dx^2.$$

Şeýle hem

$$d^3y=y'''dx^3,$$

$$..............$$

$$d^ny=y^{(n)}dx^{\text{n}}.$$

Eger birinji tertipli önüm bir hereketiň tizligini aňladýan bolsa, onda ikinji tertipli önümiň mehaniki manysy şol hereketiň tizlenmesini aňladýandyr.

949. Eger $y=\cos^2 x$ bolsa y''-i tapmaly.

Çözülişi. Birinji tertipli önümi tapalyň

$$y'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

Kesgitlemä görä ikinji tertipli önüm birinji tertipli önümden alnan önümdir

$$y''=(-\sin 2x)'=-\cos 2x\cdot 2=-2\cos 2x.$$

950. $y=a^x$ funksiýanyň $n-$nji tertipli önümini tapmaly.

Çözülişi. y', y'', $y'''-$önümleri tapalyň

$$y'=a^x\ln a,\qquad y''=a^x(\ln a)^2,\qquad y'''=a^x(\ln a)^3.$$

Şu deňliklerden önümleriň yzygiderlikleriniň kanuna laýyklygy görünýär. Şonuň üçin

$$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$$

951. $y=x^3e^x$ bolsa, $y^{(4)}$ tapmaly.

Çözülişi. Her bir köpeldijiden degişli önümleri tapalyň:

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (x^3)'' = 6x, \quad (x^3)''' = 6, (x)^{(4)} = 0, \quad (e^x)' = (e^x)'',$$
$$= (e^x)''' = (e^x)''' = (e^x)^{(4)} = e^x.$$

Indi (1) formulany $n = 4$ üçin ýazalyň

$$(u\vartheta)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''\vartheta' + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}u''\vartheta'' + 4u'\vartheta''' + u\vartheta^{(4)}.$$

Şu formulada $u = x^3$, $\vartheta = e^x$ goýup alarys

$$y^{(4)} = (x^3e^x)^{(4)} = 4\cdot 6e^x + 6\cdot 6xe^x + 4\cdot 3x^2e^x + x^3e^x.$$

ýa-da

$$y^{(4)} = (x^3 + 12x^2 + 36x + 24)e^x.$$

952. $s = 2t^3 - 6t^2 + 4t$ kanuna laýyklykda hereket edýän material nokadyň hereketiniň 3-nji sekundyň ahyryndaky tizlenmesini kesgitlemeli.

Çözülişi. Alarys: $\vartheta = s' = 6t^2 - 12t + 4$.

Onda $a = \vartheta' = s'' = 12t - 12$

Bu ýerde $t = 3$ goýup alarys

$$a = 12\cdot 3 - 12 = 24\ m/s^2$$

953. Eger-de jisim t wagt pursadynda hereketiň başlanan nokadyndan $s = \frac{1}{4}t^4 + 4t^3 + 16t^2\ km$ daşlykda bolsa, onda onuň 2 sagatdan soňky tizlenmesini kesgitlemeli.

Çözülişi. Taparys $\vartheta = s' = t^3 + 12t^2 + 32t$, $a = \vartheta' = s'' = 3t^2 + 24t + 32.$

Onda $t = 2$ goýup alarys $a = 3\cdot 4 + 24\cdot 2 + 32 = 92\ km/sag^2$.

954. Massasy 30 kg bolan jisim $s = 4t^2 + t$ kanuna laýyklykda gönüçyzykly hereket edýär. Jisimiň şol hereketiniň hemişelik güýjiň täsiri astynda bolýandygyny subut etmeli.

Çözülişi. $s' = 8t + 1$, $s'' = 8$ Şunlukda, $a(t) = 8\,m/s^2$. Bu bolsa berlen kanuna laýyklykda jisimiň hemişelik $8m/s^2$ tizlenme bilen hereket edýändigini görkezýär. Onda Nýutonyň ikinji kanunyna görä oňa täsir edýän güýç hem hemişelikdir

$$F = ma = 30\cdot 8 = 240H.$$

955. $y = x^2$ funksiýanyň d^2y differensialyny tapmaly.

Çözülişi. Önümi tapalyň $y' = 2x$. Onda $dy = y'dx = 2xdx,$

$d^2y = y''dx^2 = 2dx^2$, şunluk-da, $d^2y = 2\cdot dx^2$.

956. Eger $y = \cos 5x$ bolsa, d^2y tapmaly.

Çözülişi. $d^2y = y''dx^2 = -25\cos 5x\cdot dx^2$.

957. Aşakdaky funksiýalaryň ikinji tertipli differensialyny tapmaly:

$$1)\quad y=\ln\sin^2 2x,\qquad 2)\quad y=e^{-x}.$$

Çözülişi. 1) Birinji we ikinji tertipli önümleri tapalyň:

$$y'=\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2=4\operatorname{ctg}2x,$$

$$y''=-\frac{4}{\sin^2 2x}2=-\frac{8}{\sin^2 2x}.$$

Onda

$$d^2y=y''dx^2=-\frac{8}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x^2.$$

$$2)\quad y'=-e^{-x},\qquad y''=e^{-x},$$

$$d^2y=y''dx^2=e^{-x}dx^2.$$

958. $y=\cos x$ funksiýanyň n-nji tertipli önümini tapmaly.

Çözülişi. Bu funksiýanyň n-nji tertipli önümi üçin

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\tag{2}$$

formulanyň dogrudygyny görkezeliň.

$$(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

deňlik (2) formulanyň $n=1$ bolanda dogrudygyny görkezýär. Goý, ol formula käbir $n=k$ üçin dogry bolsun. Onda $n=k+1$ üçin

$$(\cos x)^{(k+1)}=\left[\left(\cos x\right)^{(k)}\right]'=\left[\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right]'=-\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

bolar. Bu bolsa (2) formulanyň $n=k+1$ bolanda hem dogrudygyny görezýär. Şonuň üçin, hem matematiki induksiýa usulynyň esasynda (2) formula erkin n üçin hem dogrudyr.

959. $y=x^{\alpha}$ funksiýanyň n-nji tertipli önümini tapmaly.

Çözülişi. Bu funksiýanyň n-nji tertipli önüminiň

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha+1)....(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\tag{3}$$

bolýandygyny görkezeliň.. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ deňlik (3) formulanyň $n=1$ bolanda ýerine ýetýändigini görkezýär. Goý, ol formula $n=k$ bolanda dogry bolsun. Onda $n=k+1$ üçin

$$(x^{\alpha})^{(k+1)}=\left[\left(x^{\alpha}\right)^{(k)}\right]'=\left[\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}\right]'=$$

$$=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(\alpha-k)x^{\alpha-(k+1)}$$

bolar, ýagny (*3*) formula $n=k+1$ bolanda hem ýerine ýetýär. Şonuň üçin matematiki induksiýa usuly esasynda (3) formula erkin n üçin hem dogrudyr.

960. $y=x^3\cos x$ funksiýanyň n-nji tertipli önümini tapmaly.

Çözülişi. Goý, $u=\cos x$ we $\vartheta=x^3$ bolsun. Onda

$$u^{(n)}=(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2}),\ \ \vartheta'=3x^2,\ \ \vartheta''=6x,\ \ \vartheta'''=6,\ \ \vartheta^{(4)}=\vartheta^{(5)}=...=0$$

bolýandygy üçin Leýbnis formulasyndan peýdalanyp taparys

$$(x^3\cos x)^{(4)}=x^3\cos(x+n\frac{\pi}{2})+3nx^2\cos\left[x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]+$$

$$+3n(n-1)x\cos\left[x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right]+(n-1)n(n-2)\cos\left[x+(n-3)\frac{\pi}{2}\right].$$

961. $(e^x)^{(n)}=e^x$ deňligi subut etmeli.

962. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ formulany subut etmeli.

963. Eger-de $u=u(x)$ we $\vartheta=\vartheta(x)$ funksiýalaryň n-nji tertipli önümleri bar bolsa, aşakdaky deňlikleri subut etmeli:

$$d^n(u\pm\vartheta)=d^nu\pm d^n\vartheta,$$

$$d^n(u\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_m^n d^{n-m}u\cdot d^m\vartheta.$$

964. Aşakdaky funksiýalaryň ikinji tertipli differensiallaryny tapmaly:

1) $y=\ln\cos^2 x$, 2) $y=\ln\mathrm{tg}\,2x$, 3) $y=a^{3x}$,

4) $y=\arccos x$, 5) $y=\mathrm{arctg}\,x^2$.

965. Formulany subut etmeli:

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

966. $y=\sin 5x\cos 2x$ funksiýanyň n-nji tertipli önümini tapmaly.

967. $y=x\sqrt{1+x^2}$ funksiýanyň ikinji tertipli önümini tapmaly.

968. Eger $y=4^{-x^2}$ bolsa d^2y tapmaly.

969. Leýbnis formulasyndan peýdalanyp degişli tertipli önümleri tapmaly:

a) $y=e^{-x}\sin x$ bolsa, y''' tapmaly.

b) $y=(1-x^2)\cos x$ bolsa, $y^{(2n)}$ tapmaly.

§ 10. Parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň ýokary tertipli önümleri

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t). \tag{1}$$

parametrli görnüşde berlen funksiýanyň y'_x önümi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{2}$$

formula boýunça tapylýar.

Onda ikinji tertipli önümi, (2) funksiýany x görä differensirlemek bilen alyp bolar. Şeýle hem

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t}, \ldots$$

970. Parametrik görnüşde berlen

$$x = \ln\sin\frac{t}{2}, \quad y = \ln\sin t, \quad 0 < t < \pi$$

funksiýanyň y''_{x^2} −önümini tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly funksiýanyň $\frac{dy}{dx}$ önümini tapypdyk.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{2\cos t}{1+\cos t}.$$

Onda $x'_t = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ we

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{2\cos t}{1+\cos t}\right)'_t}{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} = \frac{-2\sin t(1+\cos t) - (-\sin t)2\cos t}{(1+\cos t)^2} : \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{-2\sin t}{(1+\cos t)^2}\cdot\frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{-\sin t}{\cos^4\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} = \frac{-\sin t\sin\frac{t}{2}}{\cos^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{-2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = -2\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\cdot(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}).$$

971. $[-a, a]$ kesimde berlen $y=\sqrt{a^2-x^2}$ funksiýany $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesimde parametrik görnüşde aňlatmaly we y''_{x^2} önümi tapmaly.

Çözülişi. Goý $x=a\sin t$ bolsun. Onda $y=\sqrt{a^2-x^2}$ deňlikde x-yň bahasyny goýup, taparys

$$y=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t.$$

Şunlukda,

$$y=a\cos t, \qquad x=a\sin t, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin t}{a\cos t}=-\operatorname{tg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-(\operatorname{tg} t)'_t}{a\cos t}=-\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{a\cos t}=-\frac{1}{a\cos t\cos^2 t}=-\frac{a^2}{y^3}.$$

972. Eger

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t)$$

bolsa, y''_{x^2} – tapmaly.

Çözülişi. Funksiýanyň $\frac{dy}{dx}$ önümini ýazalyň

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}, (t\neq 2k\pi) \quad x'_t=a(1-\cos t),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\operatorname{ctg}\frac{t}{2})'_t}{a(1-\cos t)}=-\frac{\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

973. Parametrik görnüşde berlen funksiýalar üçin $\frac{d^2y}{dx^2}$ önümi tapmaly:

$$\text{a)}\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$$

Çözülişi. a) Ilki bilen y'_x tapalyň

$$dy=3b\sin^2 t\cos t dt, \quad dx=-3a\cos^2 t\sin t dt,$$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{-3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}tgt, \qquad t=(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

y''_{x^2} − önümi tapalyň

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t}, \qquad (y'_x)'_t = -\frac{b}{a\cos^2 t}.$$

Onda

a) $$y''_{x^2} = \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-\dfrac{b}{a\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t},$$

b) $dy = (3t^2 - 3)dt, \qquad dx = (3t^2 + 3)dt,$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$(y'_x)'_t = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

Onda alarys

$$y''_{x^2} = \frac{\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}}{3(t^2+1)} = \frac{4t}{3(t^2+1)^3}.$$

974. Eger

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases} \quad \text{bolsa,} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{tapmaly.}$$

Çözülişi. Ilki bilen y'_x önümi tapalyň

$$dy = 3t^2 dt, \quad dx = \frac{1}{t}dt.$$

Onda

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 dt}{\frac{1}{t}dt} = 3t^3,$$

$$(y'_x)'_t = 9t^2, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3.$$

975. $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ önümi tapmaly:

a) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^3) \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

976. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ önümi tapmaly:

a) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\cos t) \end{cases}$.

977. Eger

$\begin{cases} x = e^{t}\cos t, \\ y = e^{t}\sin t \end{cases}$ bolsa, onda $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tapmaly.

978. Eger a we b sanlar hemişelik sanlar bolup, x we y bolsa t parametre görä $x = \sin t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$ deňlikler bilen kesgitlenýän bolsa, olaryň

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$$

differensial deňlemäni kanagatlandyrýanlygyny görkezmeli.

979. Eger $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$, bolsa y'''_{x^3} tapmaly.

Çözülişi. Alarys $x'_t = -e^{-t}$, $y'_t = 3t^2$.

Onda

$$y'_x = -3t^2 : e^{-t} = -3e^t t^2.$$

Ikinji tertipli önümi tapalyň

$$y''_{x^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\left(3e^t t^2 + 6te^t\right)}{-e^{-t}} = 3te^{2t}(t+2).$$

Yzygiderli differensirlemek bilen üçünji tertipli önümi alarys

$$y'''_{x^3} = \frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t} = \frac{3e^{2t}\left[2(t^2+2t) + 2t + 2\right]}{-e^{-t}} = -6e^{3t}\left(t^2 + 3t + 1\right)..$$

980. $y = e^{2x}\sin 5x$ funksiýanyň $y'' - 4y' + 29y = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýanlygyny görkezmeli.

981. Eger $x = e^{dt}$, $y = e^{-dt}$ bolsa $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ önümi tapmaly.

982. Eger $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \sin 2t \end{cases}$ bolsa y''_{x^2} tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlikleri t – e görä differensirläliň:

$$dx = \frac{1}{t}dt, \quad dy = 2\cos 2tdt.$$

Bu ýerden

$$\frac{dy}{dx} = 2t\cos 2t.$$

Ikinji tertipli önümi tapalyň

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(2t\cos 2t)}{dx} = \frac{d(2t\cos 2t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d(2t\cos 2t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} == \frac{2\cos 2t - 4t\sin 2t}{\frac{1}{t}} =$$

$$= 2t(\cos 2t - 2t\sin 2t).$$

983. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$ bolsa, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tapmaly.

984. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t \end{cases}$ bolsa, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – tapmaly.

985. Eger $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\sin t) \end{cases}$ bolsa, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tapmaly.

§ 11. Anyk däl görnüşde berlen funksiýalaryň differensirlenilişi

Kesgitleme. Eger $y = y(x)$ funksiýa

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

deňlik bilen berlen bolsa, y ululyga x görä anyk däl funksiýa diýilýär. $y' = y'(x)$ önümi

$$[F(x, y)]' = 0. \qquad (2)$$

deňlikden tapmak bolar

Ikinji tertipli önümi tapmak üçin (2) deňligi ýene bir gezek differensirläp, alnan deňlemede birinji önümiň bahasyny goýmaly.

986. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ bolsa, y'_x tapmaly.

Çözülişi.

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3a(y + xy') = 0.$$

Bu ýerden taparys

$$y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

987. Eger $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ bolsa, y'_x-i tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlemäni x görä differensirläliň

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0.$$

Bu deňlemäni y' – önüme görä çözüp alarys

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

988. Eger $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$ bolsa y''_{xx} tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňligi differensirläp y'_x önümi tapalyň

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0 \ , \quad y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0.$$

Bu ýerden alarys

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

y'' – önümi tapalyň

$$y'' = -2y^{-3} y'.$$

Şu deňligiň sag böleginde y' önümiň bahasyny goýup alarys

$$y'' = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

989. Eger $x^3 - 2x^2y^2 + 5xy - 5 = 0,$ we $y\big|_{x=1} = 1$ bolsa, y'' önümiň $x = 1$ bolandaky bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlemäni x görä differensirläp taparys

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0.$$

$x = 1$ we $y = 1$ goýup, y' önümiň $x = 1$ bolandaky bahasyny tapary.

$$3-4-4y'+5+y'=0, \quad y'=\frac{4}{3}.$$

Differensirlenip alnan de□ligi x görä differensirläliň

$$6x-4y^2-8xy'-8xy'-4x^2y'^2-4x^2yy''+y''=0.$$

$x=1$, $y=1$ we $y'=\frac{4}{3}$ goýup, y'' önümiň $x=1$ bolandaky bahasyny taparys

$$6-4-\frac{64}{3}-\frac{64}{9}-3y''=0, \quad y''=-8\frac{22}{27}.$$

990. Eger $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$ bolsa, y' tapmaly.

991. Eger $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0$ bolsa, y'' önümiň (1, 1) nokatdaky bahasyny tapmaly.

Aşakdaky anyk däl görnüşde berlen funksiýalaryň birinji tertipli önümlerini tapmaly:

992. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

993. $\mathrm{tg}\, y = xy$,

994. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = d$,

995. $x^y = y^x$.

996. Eger $2y=1+xy^3$ bolsa, y' önümiň (1, 1) nokatdaky bahasyny tapmaly.

997. Eger $(x+y)^3=27(x-y)$ bolsa, y' önümiň $x=1$ we $y=1$ bolandaky bahasyny tapmaly.

998. Eger $xy^3+2y-1=0$ bolsa y'' tapmaly.

VIII BÖLÜM

DIFFERENSIRLENÝÄN FUNKSIÝALAR HAKYNDA ESASY TEOREMALAR

§ 1. Funksiýalaryň aralyk bahalary hakyndaky teoremalar

Roll teoremasy. Goý $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolup, onuň içki nokatlarynda differensirlenýän we $f(a)=f(b)$ bolsun. Onda iň bolmanda bir $\xi \in (a, b)$ nokat tapylyp,

$$f'(\xi)=0$$

deňlik ýerine ýetýär.

Lagranž teoremasy. Goý $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolup, onuň her bir içki nokadynda differensirlenýän bolsun. Onda $\xi \in (a, b)$ nokat tapylyp,

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \qquad (1)$$

deňlik ýerine ýetýär.

(1) formula Lagranž formulasy diýilýär.

Koşi teoremasy. Goý, $[a,b]$ kesimde üznüksiz $f(x)$ we $\phi(x)$ funksiýalar onuň her bir içki nokadynda differensirlenýän bolup, erkin $x \in (a,b)$ üçin $\phi'(x) \neq 0$ bolsun. Onda $\xi \in (a, b)$ nokat bar bolup,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad (2)$$

deňlik ýerine ýetýär.

(2) formula Koşi formulasy diýilýär.

Eger $\varphi(x)=x$ bolsa Lagranž teoremasy Koşi teoremasynyň hususy haly bolýar. Hykykatdan-da, $\varphi(x)=x$ diýip alsak, onda $\varphi(a)=a,\ \varphi(b)=b,\ \varphi'(c)=1.$ Şoňa görä-de Koşi formulasy aşakdaky görnüşe eýe bolar

$$\frac{f(b)-f(f)}{b-a}=\frac{f'(\xi)}{1} \quad \text{ýa-da} \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Şeýle hem $f(a)=f(b)$ bolanda Roll teoremasy Lagranž teoremasynyň hususy haly bolýar. Hakykatdan-da, $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ formulada $f(a)=f(b)$ diýip hasap etsek, onda $a=b$ bolmagy üçin $f'(\xi)=0$ bolmaly.

999. $-1 \le x \le 0$ we $0 \le x \le 1$ kesimlerde $f(x) = x - x^3$ funksiýanyň Roll teoremasynyň şertlerini kanagatlandarýanlygyny görkezmeli we ξ-niň degişli bahalaryny tapmaly.

Çözülişi. $f(x) = x - x^3$ funksiýa x-iň ähli bahalarynda üznüksizdir we differensirlenýändir. $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Şunlukda, $-1 \le x \le 0$ we $0 \le x \le 1$ kesimlerde $f(x)$ fuhksiýa Roll teoremasyny ulanyp bolýar $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$.

Bu ýerden $\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $(-1 < \xi_1 < 0,\ 0 < \xi_2 < 1)$.

1000. Goý $p(x) = (x+3)(x+2)(x-1)$ bolsun. Onda $(-3,1)$ aralykda $p'(\xi) = 0$ deňlemäniň köküniň bardygyny görkezmeli.

Çözülişi. $p(x)$ köpagza $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ nokatlarda nola öwrülýär. $[-3,-2]$ we $[-2,1]$ kesimlerde $p(x)$ funksiýa Roll teoremasyny ulanyp bolýar. Sebäbi $p(x)$ funksiýa x-iň ähli bahalarynda differensirlenýändir we $p(-3) = p(-2) = 0$, $p(-2) = p(1) = 0$. Şonuň üçin $\xi_1(-3 < \xi_1 < -2)$ we $\xi_2(-2 < \xi_2 < 1)$ nokatlar bar bolup $p'(\xi_1) = p'(\xi_2) = 0$.

1001. $[-2,1]$ kesimde $f(x)=x-x^3$ funksiýanyň Lagranž teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýandygyny görkezmeli we ξ-niň degişli bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Görnüşi ýaly $f(x)=x-x^3$ funksiýa üznüksizdir we x änli bahalarynda differensirlenýändir. $f'(x) = 1 - 3x^2$. Onda Lagranž formulasynyň esasynda alarys $f(1) - f(-2) = 0 - 6 = [1 - (-2)]f'(\xi)$ ýa-da $f'(\xi) = -2$. Şunlukda, $-2 = 1 - 3\xi^2$ we $\xi = \pm 1$. Görnüşi ýaly $\xi = -1$ nokat Lagranž teoremasynyň şertini kanagatlandyrýandyr.

1002. $[-1,1]$ kesimde $f(x) = \arcsin x$ funksiýanyň Lagranž teoremasynyň şertini kanagatlandyrýandygyny görkezmeli we (1) deňligi kanagatlandyrýan ξ – niň bahasyny tapmaly.

Çözülişi. $[-1,1]$ kesimde berlen funksiýa üznüksizdir. $f'(x)$ önümi tapalyň

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

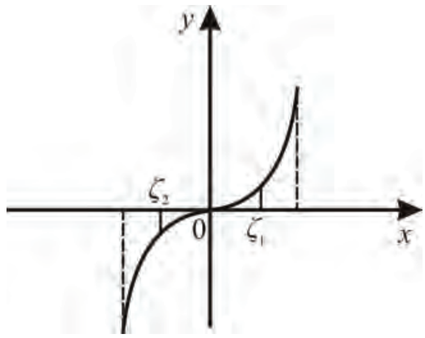
Önüm $(-1\,,1)$ aralykda tükeniklidir we $x = \pm 1$ bolanda bolsa ýokdur. Ol Lagranž teoremasyny ulanmaklyga päsgel berip bilmeýär, (1) deňligi kanagatlandyrýan ξ nokady tapalyň:

$$\frac{\arcsin 1-\arcsin(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \frac{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Bu ýerden taparys:

$$\sqrt{1-\xi^2} = \frac{2}{\pi}, \qquad \xi_{1,2}=\pm\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}.$$

Görnüşi ýaly (1) deňlik iki nokatda ýerine ýetýär (*41-nji çyzgy*).



41-nji çyzgy

1003. $f(x)=x^2-2x+3$ we $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ funksiýalaryň $[1,4]$ kesimde Koşi teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýandygyny görkezmeli we ξ – niň degişli bahalaryny tapmaly.

Çözülişi. $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar $[1,4]$ kesimde üznüksizdirler we olaryň $f'(x)=2x-2$ we $g'(x)=3x^2-14x+20$ önümleri tükeniklidirler. Şeýle nem $g'(x)$ hiç bir nokatda nola öwrülýän däldir (barlamaly).

Şunlukda, Koşi formulasyny berlen funksiýalara ulanyp bolýandyr.

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ýa-da

$$\frac{11-2}{27-9}=\frac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20}, \quad (1 < \xi < 4)$$

deňlemäni çözüp taparys $\xi_1=2,\ \xi_2=4.$ Şunlukda, (3) formulany kanagatlandyrýan ýeke-täk $\xi=2$ nokat bardyr.

1004. $3x^5+15x-8=0$ deňlemäniň ýeke-täk hakyky köküniň bardygyny subut etmeli.

Çözülişi. Deňlemäniň iň bolmanda bir köküniň barlygy

$f(x)=3x^5+15x-8$ köpagzanyň täk derejeli köpagzalygyndan gelip çykýar. Deňlemäniň hakyky köküniň ýeke-täkligini tersinden subut edeliň. Goý, deňlemäniň $x_1<x_2$ iki köki bar diýeliň. Onda $f(x)=3x^5+15x-8$ funksiýa $[x_1, x_2]$ kesimde Roll teoremasynyň ähli şertleini kanagatlandyrýandyr. Ol üznüksiz bolup, çetki nokatlarda nola öwrülýändir we her bir nokatda önüme eýedir. Onda $x_1<\xi<x_2$ nokatda $f'(\xi)=0$. Emma $f'(x)=15(x^4+1)>0$. Bu bolsa berlen deňlemäniň ýeke-täk köküniň bardygyny görkezýär.

1005. $[-1, 4]$ kesimde $f(x)=x^2-2x+5$ funksiýa üçin Lagranž teoremasyny barlamaly.

Çözülişi.

$$f(-1)=1+2+5=8, \qquad f(4)=16-8+5=13,$$

$$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=f'(c)=2c-2,\ \ 1=2c-2,\ \ c=\frac{3}{2}, \qquad \left(-1<\frac{3}{2}<4\right).$$

1006. $f(x)=\ln x$ funksiýa $[1,e]$ kesimde Lagranž formulasyny ulanmaly we ξ-niň degişli bahasyny tapmaly.

1007. Aşakdaky funksiýalaryň degişli aralyklarda Roll teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýanlygyny barlamaly:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 1]$ kesimde;

b) $f(x)=\ln\sin x$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ kesimde.

1008. $f(x)=e^x$ we $g(x)=\dfrac{\tilde{o}^2}{1+\tilde{o}^2}$ funksiýalaryň $[-3,3]$ kesimde Koşi teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýandygyny barlamaly

1009. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesimde $f(x)=\cos x$ we $\varphi(x)=x^3$ funksiýalar üçin Koşi teoremasyny barlamaly.

1010. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kesimde $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ funksiýanyň Lagranž teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýandygyny barlamaly we ξ-niň degişli bahasyny tapmaly.

1011. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kesimde $f(x)=\cos x$ we $\varphi(x)=\sin x$ funksiýalaryň Koşi teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýandygyny barlamaly we ξ-niň degişli bahalaryny tapmaly.

1012. Eger $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ bolsa, onda $f'(x)=0$ deňlemäniň üç hakyky kökiniň barlagyny görkezmeli.

1013. $f(x)=\operatorname{tg} x$ funksiýa üçin $[0,\pi]$ kesimde Roll teoremasynyň şertlerini barlamaly.

1014. Lagranž teoremasyny ulanyp $\sin(x+h)-\sin x=h\cos\xi$, $(x<\xi<x+h)$ formulany subut etmeli.

1015. $[1,2]$ kesimde $f(x)=x^2+2$ we $g(x)=x^3-1$ funksiýalaryň Koşi teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýandygyny barlamaly we ξ-niň degişli bahasyny tapmaly.

§ 2. Teýlor formulasy

Eger $f(x)$ funksiýanyň a nokadyň käbir etrapynda $n+1$ tertipli önümi bar bolsa, onda etraba degişli islendik $x\neq a$ üçin a we x nokatlaryň arasynda şeýle s nokat tapylyp,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+r_n(x),$$

formula dogrudyr. Bu ýerde

$$r_n(\mathrm{x})=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$a=0$ bolanda Teýlor formulasyndan alynýan

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n,$$

$$(\xi=\theta x,\quad 0<\theta<1)$$

formula Makloren formulasy diýilýär.

1016. $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ köpagzany x–2 tapawudyň derejeleri boýunça dagytmaly.

Çözülişi. $f'(x)=3x^2-4x+3,\quad f''(x)=6x-4,$

$$f'''(x)=6,\qquad n\geq 4 \quad \text{bolsa} \quad f^{(n)}(x)=0.$$

Onda $f(2)=11,\quad f'(2)=7,\quad f''(2)=8,\quad f'''(x)=6.$

Şunlukda,

$$x^3-2x^2+3x+5=\ 11+7(x-2)+\frac{8}{2!}(x-2)^2+6\frac{(x-2)^3}{3!}$$

ýa-da

$$x^3-2x^2+3x+5=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

1017. $f(x)=1+2x-x^2+x^3$ köpagzany x–1 tapawudyň derejelerine görä Teýlor formulasy boýunça dagytmaly.

Çözülişi. Berlen funksiýadan üç gezek yzygiderli önüm alalyň:

$$f'(x)=2-2x+3x^2,\quad f''(x)=-2+6x,\quad f'''(x)=6.$$

Indi bu deňliklerde x=1 goýup taparys $f(1)=1+2-1+1=3,$

$$f'(1)=2-2+3=3,\quad f''(1)=4,\quad f'''(1)=6$$

Onda alarys: $1+2x-x^2+x^3=3+3(x-1)+2(x-1)^2+(x-1)^3.$

1018. $f(x)=e^x$ funksiýany x+1 aňlatmanyň derejeleri boýunça $(x+1)^3$ agzany saklaýan goşulyja çenli Teýlor formulasy boýunça dagytmaly.

Çözülişi. $\forall n$ üçin

$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(-1)=\frac{1}{e}.$$

Onda

$$e^x=\frac{1}{e}+(x+1)\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^4}{4!}e^{\xi},$$

Bu ýerde $\xi=-1+\theta(x+1),\quad 0<\theta<1.$

1019. $f(x)=\sin x$ funksiýany x=0 nokadyň etrabynda Teýlor formulasy boýunça dagytmaly.

Çözülişi. Funksiýa üznüksizdir we erkin derejeli önümlere eýedir. Teýlor formulasyndaky $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ koeffisiýentleri tapalyň:

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2}).$$

bu ýerde

$$f^{(n)}(0)=\sin(0+n\frac{\pi}{2}).$$

Onda eger $n=2k$ $(k=0,1,...)$ jübüt bolsa $f^{(2k)}(0)=\sin k\pi=0$. Şonuň üçin Teýlor formulasynda bu funksiýa üçin jübüt belgili agzalar ýokdur. Eger n täk san bolsa, ýagny $n=2k-1$ $(k=1,2,3,...)$. Onda

$$f^{(2k-1)}(0)=\sin\frac{2k-1}{2}\pi=(-1)^{k-1}.$$

Bu bolsa täk belgili agzalaryň alamatlarynyň gezekleşip çalyşýandygyny görkezýär

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad a_7 = -\frac{1}{7!}, \ldots$$

Şunlukda,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin\xi,$$

Şu ýerde $\xi = \theta\, x, \quad 0 < \theta < 1.$

1020. $f(x) = \ln(1+x)$ funksiýany Makloren formulasy boýunça dagytmaly.

Çözülişi. $f(0) = \ln 1 = 0$. Belli bolşy ýaly

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

we

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Onda alarys

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^9}{9} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)}\xi^{n+1},$$

$$\xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

1021. 0,0001 takyklykda e sanyň ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly.

Çözülişi. $0 < \theta < 1$ we $2 < e < 3$ bolany üçin $0 < \frac{e^\theta}{n!} < \frac{3}{n!}$ we $8! > 30000$. Onda $n = 8$ goýup, alýarys

$$\frac{e^\theta}{8!} < \frac{3}{8!} < \frac{3}{30000} = \frac{1}{10000} = 0,0001.$$

Diýmek,

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\right) \right| = \left|\frac{e^\theta}{n!}\right| < \frac{\varepsilon}{n!}.$$

Şunlukda, ýalňyşy 0,0001-den uly bolmadyk e sanyň kemi bilen ýakynlaşan bahasy aşakdaky görnüşdedir:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{7!} \qquad \text{ýa-da} \quad e = 2,7182.$$

1022. $0,000004-$takyklykda $f(x)=\sin x$ funksiýanyň $x=10^{O}$ bolandaky ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly.

Çözülişi. Ilki bilen gradus ölçegini duga ölçegine geçireliň.

$\frac{2\pi}{360}\cdot 10=\frac{\pi}{18}=0,17$ we $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ bolany üçin $f(0)=0$, $f'(0)\approx 1$, $f'''(0)=-1$, $f''(0)=0$, $f^{(IV)}(0)=0$ sanlar şu tertipde gaýtalanyp duryandyrlar. Şoňa göräde Makloreniň formulasynda ýerine goýup alarys (1019 mysala seret):

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Bu ýerde $\left|\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|<1$ bolany üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\right|\le\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|.$$

Talap edilýän takyklyk üçin $n=2$ diýip taparys:

$$\sin\frac{\pi}{18}-\left(\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\right)\le\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{5!}<\frac{(0,2)^5}{5!}$$

(bu ýerde $\frac{\pi}{18}=0,17\ldots$ drobuň ýerine $0,2$ alnandyr) , ýa-da

$$\sin\frac{\pi}{18}-\left(\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\right)<\frac{1}{120}\left(\frac{2}{10}\right)^5<4\cdot 10^{-6}=0,000004.$$

Görkezilen takyklyk boýunça taparys:

$$\frac{\pi}{18}=0,174533,\quad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3=0,000886.$$

Tapylanlary ýerine goýup alarys:

$$\sin\frac{\pi}{18}=0,173647.$$

Şunlukda, tapylan ýakynlaşan bahanyň ýalňyşy 0,000004-den uly däldir.

1023. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ ýakynlaşan formulada x argumentiň haýsy bahalarynda ýalňyşlyk 0,00005-den uly däldir?

Çözülişi. $\cos x$ funksiýanyň Teýlor formulasy boýunça dagytmasynyň 4-nji agza çenlisi bilen çäkleneliň

$$cos\, x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\cos\theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Görnuşi ýaly, bu meseläni çözmek üçin $|r_n(x)| \le \frac{|x^6|}{6!} < 0{,}00005$ deňsizligi çözmek ýeterlikdir. Bu ýerden $|x| < 0{,}575$ alynýar.

1024. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. Bu predeli tapmak üçin galyndy agzany Peanonyň formasynda aňladylan Teýloryň aşakdaky formulalaryndan peýdalanalyň:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Bu ýerde $o(x^n)$ bilen $x \to 0$ bolanda x^n görä tükenüksiz kiçi funksiýa belgilenendir.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

$$x\sqrt[6]{1-x^2} = x\,(1-x^2)^{\frac{1}{6}} = x\,(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o\,(x^4)) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{72}x^5 + o\,(x^5)\,,$$

$$\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2} = \frac{7}{90}x^5 + o(x^5).$$

Şonuň üçin $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7}{90}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{7}{90}.$

1025. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\,\cos x}{x^4}.$$

Çözülişi. Sanawjydaky funksiýalaryň Teýlor formulasy boýunça dagytmasynyň 4 agzasyna çenlisi bilen çäkleneliň:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\,\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\cos x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{(1/2)\cdot(-1/2)}{2}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{3}.$$

1026. $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ köpagzany $x-1$ ikiagzanyň derejelerine görä Teýlor formulasy boýunça dagytmaly.

1027. 0,000001 takyklykda $f(x)=\cos x$ funksiýanyň $x=5^{\circ}$ bolandaky ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly.

1028. 10^{-5} takyklyk bilen $\sin 20^{\circ}$ aňlatmanyň ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly.

1029. $P(x)=x^4-2x^5+7x-4$ köragzany $x-1$ ikiagzanyň derejelerine görä Teýlor formulasy boýunça dagytmaly.

1030. $P(x)=(x^2-2x+3)^2$ köpagzany x-yň derejeleri boýunça dagytmaly.

1031. $f(x)=xe^x$ funksiýany Makloren formulasy boýunça dagytmaly.

1032. $f(x)=\sin^2 x$ funksiýany Makloren formulasy boýunça dagytmaly.

1033. 0,01 takyklykda $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sanyň ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly.

1034. $e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ formulanyň takyklygyny anyklamaly.

Predelleri tapmaly:

1035. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$.

1036. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

§ 3. Lopitalyň düzgüni

Kähalatlarda funksiýalaryn predelleri tapylanda argumentiň ymtylýan bahasyny funksiýa goýanymyzda $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ görnüşlerdäki kesgitsiz aňlatmalary alýarys. Şu ýagdaýlarda funksiýanyň predelini tapmaklyga kesgitsizligiň açylyşy diýilýär.

1. 0/0 we ∞/∞ görnüşdäki kegitsizlikleriň açylyşy.

Lopitalyň birinji düzgüni. Eger (a,b) aralykda kegitlenen we differensirlenýän f we g funksiýalar

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$
2. $\forall x \in (a,b)$ üçin $g'(x) \neq 0;$
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$ predel bar.

şertleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ predel hem bardyr we

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)g} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Lopitalyň ikinji düzgüni. Eger (a,b) aralykda kegitlenen we differensirlenýän f we g funksiýalar

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$
2. $\forall x \in (a,b)$ üçin $g'(x) \neq 0;$
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$

şertleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ predel hem bardyr we

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1037. $\alpha > 0$ bolanda $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ predeli tapmaly.

Çözülişi.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{õ\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

1038. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=0$ we $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$

bolýanlygyna görä $0/0$ görnüşdäki kesgitsizligi alarys. üç şert hem ýerine ýetýändir.

$$(x^3-1)'=3x^2,\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

3-nji şerti barlap göreliň:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=3.$$

Şunlukda,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(\ln x)'}=3.$$

1039. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{5^x}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. $f(x)=x^2$ we $g(x)=5^x$ funksiýalar üçin $f'(x)=2x$ we $g'(x)=5^x\ln 5$ önümleriň gatnaşygy ∞/∞ kesgitsizligi aňladýar hem-de ol önümler islendik aralykda lopitalyň şertini kanagatlandyrýandyr.

Şunlukda,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(5^x\ln 5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5^x\ln^2 5}=0.$$

Şonuň üçin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)''}{(5^x)''}=0.$$

1040. Lopital düzgünini ulanyp

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$$

predeli tapmaly.

Çözülişi. Goý $f(x)=e^{ax}-e^{-2ax}$ we $g(x)=\ln(1+x)$ bolsun.

Onda

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1-1=0,\quad \lim_{x\to 0}g(x)=\ln 1=0.$$

$x=-1$ nokady özünde saklaýan $x=0$ nokadyň etrapynda $f'(x)$ we $g'(x)$ önümler bardyr.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \neq 0 \text{ , } (x > -1).$$

Onümleriň gatnaşygynyň predeli bardyr

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax} + 2ae^{-2ax}}{\frac{1}{1+x}} = 3a.$$

Diýmek, Lopital düzgünini ulanyp bolýandyr

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax} + 2ae^{-2ax}}{\frac{1}{1+x}} = 3a.$$

1041. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)}.$$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x\cos 3x^2 \cdot \cos(2x^2 - x)}{(4x-1)\sin(2x^2 - x)} =$$

$$= -6\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x^2 \cdot \cos(2x^2 - x)}{(4x-1)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x^2 - x)}.$$

Birinji köpeldijini hasaplamak aňsatdyr, ikinji köpeldiji bolsa $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlikdir. Onuň predelini Lopitalyň düzgüni boýunça tapalyň:

$$-6\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x^2 \cdot \cos(2x^2 - x)}{4x-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x^2 - x)} =$$

$$= -6 \cdot \frac{1\cdot 1}{-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(4x-1)\cos(2x^2 - x)} = 6 \cdot \frac{1}{-1\cdot 1} = -6.$$

1042. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}.$$

Çözülişi. Bu ýerde bu $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Görnüşi ýaly lopitalyň şertleri ýerine ýetýändir. Şonuň üçin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\text{arctgx}}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctgx}\right)'}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=+\infty.$$

Şunlukda, önümleriň gatnaşygynyň predeli ∞ deňdir. Şonuň üçin predel hem ∞ deňdir.

Lopitalyň düzgüninden peýdalanyp predelleri tapmaly:

1043. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$. **1044.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{\sin x-x^2}$.

1045. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$. **1046.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}$.

1047. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$. **1048.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$.

1049. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$. **1050.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

1051. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$. **1052.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

2. $0\cdot\infty$ we $\infty-\infty$ görnüşdäki kesgitsizlikleriň açylyşy.

Goý $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ we $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ bolsun. Onda

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

deňlikleriň esasynda $0\cdot\infty$ gornüşdäki kesgitsizlikden $0/0$ ýa-da ∞/∞ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar.

Eger $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ we $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bolsa,

$$f(x)-g(x)=\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]:\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}$$

deňligiň esasynda $\infty-\infty$ görnüşdäki kesgitsizlikden $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar.

1053. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\cdot\ln x.$$

Çözülişi. Şu ýerde $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}=0,\ \ \alpha>0$ we $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\infty.$

Bu mysal $0\cdot\infty$ görnüşdäki kesgitsizlige degişlidir

$$\lim_{x\to +0} x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha}=0,(\alpha>0).$$

1054. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}x.$

Çözülişi. Bu ýerde

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}\,x=\infty,\quad \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right):\mathrm{ctg}\,x$$

aňlatma $x\to\frac{\pi}{2}$ bolanda $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlikdir.

Lopitalyň düzgünini ulanalyň:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ctg}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\mathrm{ctg}x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1;$$

b) Eger berlen funksiýany

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}\,x:\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$$

görnüşe özgertsek, onda $x\to\frac{\pi}{2}$ bolanda ∞/∞ görnüşdäki kesgitsizligi alýarys. Lopitalyň düzgünini ulanalyň:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x-\pi/2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\left(\frac{1}{x-\pi/2}\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(x-\pi/2)^2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\pi/2)^2}{\cos^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{[(x-\pi/2)^2]'}{\left(\cos^2 x\right)'} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{2(x-\pi/2)}{2\cos\ x(-\sin x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2(x-\pi/2)}{\sin 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{2(x-\pi/2)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2}{2\cos 2x} = -1.$$

1055. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right).$$

Çözülişi. Şu ýerde $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x - 1} = \infty.$

Ýagny $\infty - \infty$ görnüşdäki kesgitsizligi alýarys. Funksiýany özgerdeliň:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

Onda alarys:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1 - x)'}{[x(e^x - 1)]'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + xe^x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

1056. Predeli tapmaly

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Çözülişi. Bu ýerde $\infty - \infty$ görnüşdäki kesgitsizlik alynýar. Ony özgerdip $0/0$ görnüşdäki kesgitsizlige getireliň we Lopital düzgünini ulanalyň

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)\ln x}(x - 1 - \ln x);$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{[(x-1)\ln x]'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x + x - 1)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

1057. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x).$$

Çözülişi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0..$$

Aşakdaky predelleri tapmaly:

1058. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right).$ **1059.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right].$

1060. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-\sqrt{x}).$ **1061.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right).$

1062. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right).$ **1063.** $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\cdot\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)].$

1064. $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)\,x,\ (a\succ 0).$ **1065.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x.$

1066. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$ **1067.** $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x.$

3. 0^0, ∞^0, 1^∞ görnüşdäki kesgitsizlikleriň açylyşy.

Goý, $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ aňlatma x argumentiň a deň bolan hususy bahasynda 0^0, ∞^0, 1^∞ kesgitsizlikleriň bir görnüşini kabul edýär diýeliň. Onda berlen funksiýany logarifmirlemek arkaly $\ln y=\varphi(x)\cdot\ln f(x)$ görnüşe getirmek bolar.

Bu bolsa ozal seredilen $0\cdot\infty$ görnüşdäki kesgitsizlikdir. Şoňa görä-de, belli usul bilen $\lim\ln y$ tapyp, logarifmiň kesgitlemesinden peýdalanyp alarys:

$$\lim y=e^{\ln\lim y}.$$

1068. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}x^{\sin x}$$

Çözülişi: $y=x^{\sin x}$ bilen belgiläp taparys:

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x=\ln x:\frac{1}{\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}(\ln x:\frac{1}{\sin x})=$$

$$=-\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}:\frac{\cos x}{\sin^2 x})=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0.$$

Şunlukda,

$$\ln\lim_{x\to 0} y = 0,\quad \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1 \text{ ýa-da } \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 1.$$

1069. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0} x^x$$

Çözülişi. $y = x^x$ bilen belgiläp taparys:

$$\ln y = x\ln x,\ \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

Şunlukda, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$ we $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

1070. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

Çözülişi. $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ bilen belgiläp taparys:

$$\ln y = \operatorname{tg} x\cdot\ln\frac{1}{x} = \ln\frac{1}{x} : \operatorname{ctg} x,\quad \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = 0.$$

Onda, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, x} = 1$.

1071. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

Çözülişi. Bu ýerde ∞^0 görnüşdäki kesgitsizlikdir. Goý

$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ bolsun. Onda $\ln y = \sin x\cdot\ln\frac{1}{x}$ we

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = 0.$$

Şunlukda, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

1072. Predeli tapmaly.

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x.$$

Çözülişi. Bu ýerde $\lim_{x\to 0+}\ln\frac{1}{x}=+\infty$. Şonuň üçin bu ∞^0 görnüşdäki kesgitsizlikdir. Goý $y=\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$ bolsun. Onda

$$\ln y = x\cdot\ln\ln\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0+}(\ln\frac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}.$$

$t=\frac{1}{x}$ ornuna goýmany ulanalyň. Onda $x\to 0$ bolanda, $t\to+\infty$ we

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln\ln t)'}{t'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t}=0.$$

Şunlukda, $\lim_{x\to 0+}(\ln\frac{1}{x})^x=e^0=1.$

1073. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}.$$

Çözülişi. Bu ýerde 1^∞ görnüşdäki kesgitsizlikdir. $x^{\frac{1}{x-1}}$ funksiýany $e^{\frac{\ln x}{x-1}}$ görnüşde ýazsak, onda derejäniň görkezijisinde kesgitsizlik alynýar. Lopitalyň düzgüninden peýdalanyp şol predeli tapalyň.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$$

Şonuň esasynda

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{\ln x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}}=e^1=e.$$

1074. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{ctg^2 x}.$$

Çözülişi. Bu 1^{∞} görnüşdäki kesgitsizlikdir.

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{ctg^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}^2 x\cdot \ln\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x\cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$e^{1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\sin^2 x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x}{2\sin x\cdot\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

1075. Predeli tapmaly:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Çözülişi.

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{x}}{4\frac{\sin x}{x}+2\cos x} = -\frac{1}{4+2} = -\frac{1}{6}.$$

Diýmek, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

Predelleri tapmaly:

1076. $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\ln x}$.

1077. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\mathrm{tg}\, x}$.

1078. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

1079. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

1080. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1081. $\lim\limits_{x\to 0+}[\ln(x+e)]^{\frac{1}{x}}$.

1082. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}$.

1083. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

1084. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1085. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{\frac{n}{x^2}}$.

IX BÖLÜM
DIFFERENSIAL HASAPLAMALARYŇ FUNKSIÝANY DERŇEMEKDE ULANYLYŞY

§ 1. Funksiýanyň birsydyrgynlyk nyşanlary

Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f funksiýa üçin $\delta > 0$ tapylyp, $|\Delta x| < \delta$ bolanda funksiýanyň a nokatdaky $\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$ artdyrmasy üçin $\frac{\partial f}{\partial x} > o$ $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0\right)$ bolsa, onda f funksiýa a nokatda artýan (kemelýän) funksiýä diýilýär.

1-nji teorema. Eger f funksiýa a nokatda differensirlenýän bolup, $f'(a) > 0$ $\left(f'(a) < 0\right)$ bolsa, onda ol funksiýa a nokatda artýar (kemelýär).

2-nji teorema. (a, b) aralykda differensirlenýän f funksiýanyň şol aralykda kemelmeýän (artmaýan) bolmagy üçin (a, b) aralykda $f'(a) \geq 0$, $\left(f'(a) \leq 0\right)$ bolmagy zerur we ýeterlikdir.

2. Funksiýanyň ekstremumy. Goý $f(x)$ funksiýa $x = x_0$ nokady öz içine alýan kesimde kesgitlenipdir diýeliň. Onda

1) Eger käbir $\delta > 0$ san üçin $|\Delta x| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme $\Delta x -$ler üçin $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $x = x_0$ nokada $f(x)$ funksiýanyň maksimum nokady diýilýär.

2) Eger käbir $\delta > 0$ san uçin $|\Delta x| < \delta$ densizligi kanagatlandyrýan hemme $\Delta x -$ler üçin $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $x = x_0$ nokada $f(x)$ funksiýanyň minimum nokady diýilýär.

$f(x)$ funksiýanyň maksimum nokadyndaky bahasyna $f(x)$ funksiýanyň maksimumy, minimum nokadyndaky bahasyna bolsa, funksiýanyň minimumy diýilýär. Funksiýanyň maksimum we minimum nokatlaryna onuň ekstremum nokatlary diýilýär.

Ekstremumy tapmaklygyň birinji düzgüni. $f(x)$ funksiýanyň ekstremumyny tapmak üçin şol funksiýanyň önümini tapyp, nola deňlemeli. Soňra, $f'(x) = 0$ deňlemäniň kökleri we funksiýanyň önüminiň ýok nokatlary tapylýar. Şol nokatlaryň hemmesi $f(x)$ funksiýanyň kritiki nokatlary bolýar. Eger x argument x_0 nokatdan geçende $f'(x)$

alamatyny goşmakdan aýyrmaga üýtgetse, onda berlen $f(x)$ funksiýa kritiki nokatda maksimuma eýedir, eger $f'(x)$ alamatyny aýyrmakdan goşmaga üýtgetse, onda $f(x)$ şol kritiki nokatda minimuma eýedir. Eger x argument x_0 nokatdan geçende $f'(x)$ alamatyny üýtgetmese, onda şol kritiki nokatda $f(x)$ funksiýanyň ekstremumy ýokdur.

Ekstremum tapmagyň ikinji düzgüni. Goý, x_0 nokatda $f(x)$ funksiýanyň ikinji tertipli önümi bar bolup, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ bolsun. Onda $f''(x_0)<0$ bolanda x_0 nokat funskiýanyň maksimum $f''(x_0)>0$ bolanda bolsa minimum nokadydyr.

Ekstremum tapmagyň üçünji düzgüni. Goý, $f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatda $n-$nji tertipli önümi bar bolup, $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bolsa, onda n täk san bolanda, $f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatda ekstremumy ýokdur, eger n jübüt san bolup $f^{(n)}(x_0)<0$ bolsa, onda $f(x)$ funksiýa x_0 nokatda maksimuma, eger-de $f^{(n)}(x_0)>0$ bolsa, onda $f(x)$ funksiýa şol nokatda minimuma eýedir.

1086. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi. Funksiýanyň önümini tapalyň:

$$y'=x^4-x^2.$$

$x^4-x^2=0$ deňlemäni çözüp, önümiň nola öwrülýän nokatlaryny tapýarys: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Belli bolşy ýaly y' önüm alamatyny diňe şu nokatlardan geçende ýütgedip biler. Şunlukda, biz aşakdaky aralyklary aldyk: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ we $(1,+\infty)$. Eger $x=-2$ bolsa, $y'(-2)=12>0$ we funksiýa $(-\infty,-1)$ aralykda artýandyr. Eger $x=-\frac{1}{2}$ bolsa $y'<0$. Şeýle hem $(-1,1)$ aralykda $y'<0$. Diýmek, $(-1,1)$ aralykda funksiýa kemelip, $(1,+\infty)$ aralykda bolsa artýar.

1087. $y=1-4x-x^2$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi. Önümi tapalyň: $y'=-4-2x$; $-2x-4=0$ deňlemäni çözüp taparys: $x=-2$. Şunlukda, biz $(-\infty,-2)$, $(-2,\infty)$ aralyklary aldyk:

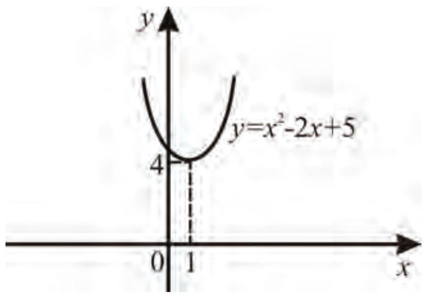
$(-\infty,-2)$ aralykda $f'(x)>0$ we funksiýa arýandyr, $(-2,\infty)$ aralykda bolsa, funksiya kemelýär.

1088. $f(x)=x^2-2x+5$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi. Önümi tapalyň:

$$f'(x)=2x-2=2(x-1).$$

Bu ýerde $x=1$ bolanda, $f'(1)=0$. Şunlukda, san okunda $(-\infty,1)$ we $(1,+\infty)$ aralyklary aldyk. $-\infty<x<1$ bolanda $f'(x)<0$ we $(-\infty,1)$ aralykda funksiýa kemelýändir. Eger $1<x<\infty$ bolsa, $f'(x)>0$ we berlen funksiýa $(1,+\infty)$ aralykda artýandyr (*42-nji çyzgy*).



42-nji çyzgy

1089. $y=x^3-3x^2+1$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi. Önümi tapalyň: $y'=3x^2-6x$, $3x^2-6x=0$ deňlemäni çözüp, $x_1=0$, $x_2=2$ nokatlary taparys.

Şunlukda, biz $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$ aralyklary aldyk. Görnüşi ýaly $(-\infty,0)$ aralykda, $(2,\infty)$ aralykda, y' önüm noldan ulydyr. Diýmek, şu aralyklarda funksiýa artýar. $(0,2)$ aralykda bolsa, $f'(x)$ funksiýa noldan kiçidir. Diýmek, bu aralykda funksiýa kemelýär.

1090. $y=\dfrac{1}{x+2}$ funksiýanyň artýanlygyny ýa-da kemelýänligini kesgitlemeli.

Çözülişi. $x=-2$ nokat üzülme nokatdyr we $x\neq-2$ bolsa

$$y'=-\frac{1}{(x+2)^2}<0.$$

Şunlukda, $(-\infty,-2)$, $(-2,\infty)$ aralyklarda funksiýa kemelýär.

1091. $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi. Bu funksiýa üçin

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right),$$

$$f'(x)=0 \text{ ýa-da } 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right)=0.$$

Bu deňlemäni çözüp, onuň $x=\pm1$ köklerini alarys. Ondan başgada $x=0$ nokatda $f'(x)$ önüm tükeniksizlige deňdir. Şunlukda, biz $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ we $(1,\infty)$ aralyklary aldyk. $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ aralyklarda $f'(x)>0$ bolýanlygy üçin funksiýa artýar. $(-1,0)$, $(1,\infty)$ aralyklarda $f'(x)<0$ bolýanlygy üçin funksiýa kemelýär.

Funksiýalaryň kemelýän we artýan aralyklaryny tapmaly.

1092. $y=1-6x-x^2$. **1093.** $y=(x+4)^3$.

1094. $y=\dfrac{x}{x-2}$. **1095** $y=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$.

1096. $y=x\ln x$. **1097.** $y=2e^{x^2-4x}$.

1098. $y=2x^3+3x^2-12x+1$ funksiýanyň $(-2,1)$ aralykda kemelýän funksiýadygyny görkezmeli.

1099. $y=\sqrt{2x-x^2}$ funksiýanyň $(0,1)$ aralykda artýandygyny, $(1,2)$ aralykda bolsa kemelýändigini görkezmeli.

1100. $y=\operatorname{arctg}x-x$ funksiýanyň kemelýän funksiýadygyny görkezmeli.

1101. $y=\dfrac{\sin x}{x}$ funksiýanyň $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ aralykda kemelýändigini görkezmeli.

1102. $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

Çözülişi. Funksiýanyň önümini tapalyň:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}+$$

$$+\frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)+2(x-1)}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{3x-4}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}},$$

$$f'(x)=\frac{x-\frac{4}{3}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Bu ýerden taparys: $f'\left(\frac{4}{3}\right)=0$. $x=1$, $x=2$ nokatlarda bolsa berlen funksiýanyň önümi ýokdur. Diýmek, berlen $f(x)$ funksiýa üçin $x_1=1$, $x_2=\frac{4}{3}$, $x_3=2$ nokatlar kritiki nokatlardyr.

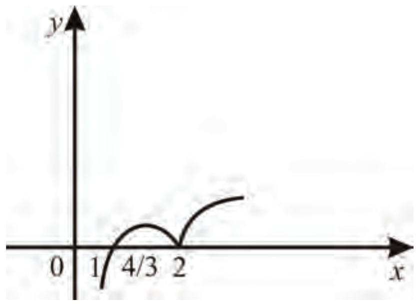
Goý, $\varepsilon>0$ erkin kiçi san diýeliň. Onda $f'(1-\varepsilon)>0$, $f'(1+\varepsilon)<0$.

Diýmek, $x=1$ nokat $f(x)$ funksiýanyň maksimum nokadydyr.

$f'\left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)>0$, $f'\left(\frac{4}{3}+\varepsilon\right)<0$. Diýmek, $x=\frac{4}{3}$ nokatda $f(x)$ funksiýa maksimuma eýedir.

$$f'(2-\varepsilon)<0,\ f'(2+\varepsilon)>0.$$

Şunlukda, $x=2$ nokatda funksiýa minimuma eýedir (*43-nji çyzgy*).



43-nji çyzgy

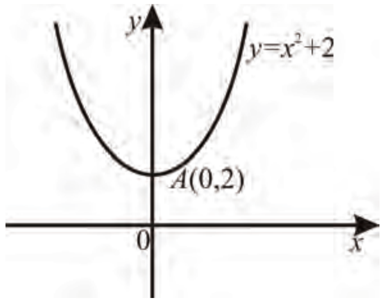
1103. Funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly

$$y=x^2+2.$$

Çözülişi. Funksiýanyň önümini tapyp nola deňläp, kritiki nokady taparys:

$y'=2x$, $x=0$. Önümiň alamatyny $x=0$ nokadyň çepinde we sagynda barlap göreliň. Mysal üçin $x=-1$, $y'(-1)=2\cdot(-1)=-2<0$. Görnüşi ýaly $x=0$ nokatdan geçilende önüm alamatyny „–“ dan „+“-a üýtgedýär. Diýmek, $x=0$ bolanda funksiýa minimuma eýedir (*44-nji çyzgy*).

$$y'(1) = 2 > 0, \quad y(0) = 2.$$



44-nji çyzgy

1104. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

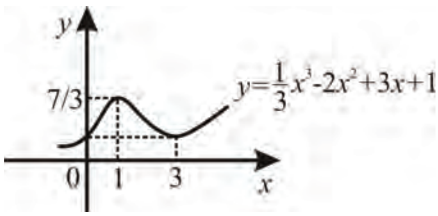
Çözülişi. Funksiýanyň önümini nola deňläp, kritiki nokatlary tapalyň:

$$y' = x^2 - 4x + 3, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = 3$$

y' funksiýany özgerdip ýazalyň: $y' = (x-1)(x-3)$.

Eger $x < 1$ bolsa, $(x = 0)$, $y' > 0$. Eger-de, $1 < x < 3$ bolsa $(x = 2)$, $y' < 0$. Diýmek, $x = 1$ nokatda funksiýa maksimuma eýedir. Şeýle hem, $x > 3$ bolsa $(x = 4)$, $y' > 0$. Diýmek, $x = 3$ nokatda funksiýa minimuma eýedir. Olary tapyp funksiýanyň takmyny grafigini guralyň:

$y(1) = \frac{7}{3}$, $y(3) = 1$ (*45-nji çyzgy*).



45-nji çyzgy

1105. Funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

$$y = (x-5)e^x.$$

Çözülişi. $y' = (x-5)'e^x + (e^x)'(x-5) = e^x + e^x(x-5) = e^x(x-4)$,

$e^x(x-4) = 0$, $e^x \neq 0$, $x - 4 = 0$, $x = 4$. Görnüşi ýaly $(-\infty, 4)$ aralykda önüm noldan kiçi bolup, $(4, \infty)$ aralykda bolsa noldan ulydyr. Diýmek, $x = 4$ funksiýanyň minimum nokadydyr.

1106. Funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

$$y = 1 - \sqrt[5]{(x-2)^4}.$$

Çözülişi. $y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}.$

Önüm hiç bir nokatda nola öwrülmeýär. Ol diňe $x=2$ nokatda ýokdur. Şol hem kritiki nokatdyr. Görnüşi ýaly, $(-\infty, 2)$ aralykda önüm noldan uludyr, $(2, \infty)$ aralykda bolsa önüm noldan kiçidir. Diýmek, $x=2$ nokatda maksimuma eýedir. $y(2) = y_{\max} = 1.$

1107. Funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Çözülişi. $f'(x) = \cos x - \sin x$; $\cos x - \sin x = 0$ deňlemäni çözeliň: $1 - \operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$. Eger $x < \frac{\pi}{4}$, mysal üçin $x = 0$ bolsa $f'(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1 > 0$. Eger $x > \frac{\pi}{4}$, mysal üçin $x = \frac{\pi}{4}$ bolsa $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Diýmek, $x = \frac{\pi}{4}$ funksiýanyň maksimum nokadydyr.

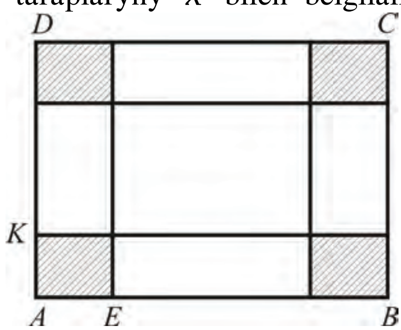
1108. Funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

$$y = xe^x.$$

1109. Ölçegleri 24×24 sm^2 bolan kagyz berlen. Onuň her bir burçundan deň kwadratlary kesip aýryp, onuň gyralaryny epip, kagyz gabyny ýasamaly. Kesilen kwadratlar nähili ululykda bolanynda gabyň köp sygymly bolýandygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä $AB = 24\,sm$, $AD = 24\,sm$.

Kesilen kwadratyň taraplaryny x bilen belgiläliň (*46-njy çyzgy*).



46-njy çyzgy

Onda ýasalan gabyň beýikligi x, esasynyň taraplary bolsa, $24 - 2x$ bolar. Gabyň göwrümi

$$V(x) = x(24-2x)^2$$

den bolar. Gabyň köp sygymly bolmagyny kesgitlemek üçin, şu $V(x)$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Bu meseläni matematikanyň dilinde şeýle aýtmak bolar.

$V(x)$ funksiýanyň $[0,12]$ kesimde iň uly bahasyny tapmaly. Onuň önümini nola dëňläp alarys:

$$V'(x) = (24-2x)(24-6x) = 0, \quad x = 12, \quad x = 4.$$

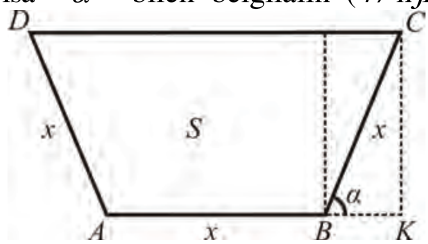
Görnüşi ýaly $x = 4$ nokat $[0,12]$ kesimiň içinde ýerleşýär. funksiýanyn $x = 0$, $x = 4$, $x = 12$ nokatlardaky bahalaryny tapalyň:

$$V(0) = 0, \quad V(4) = 1024, \quad V(12) = 0.$$

Şunlukda, kesilen gabyň kop sygymly bolmagy üçin, kwadratyň tarapy $4\,sm$ bolmaly.

1110. Suwaryş kanalynyň deňýanly trapesiýa meňzeş formasy bar bolsun. Onuň kiçi esasy bolsa gapdal taraplaryna deň diýelin. Onda gapdal taraplary nähili ýapgyt bolanlarynda kanalyň kesigi iň uly sygyma eýe bolar?

Çözülişi. Trapesiýanyň kiçi esasyny x bilen, meýdanyny S we ýapgytlyk burçuny bolsa α bilen belgiläliň (*47-nji çyzgy*).



47-nji çyzgy

Meseläniň şertine görä, $|AB| = |AD| = |BC| = x$. ΔBCK-dan taparys: $|BK| = x\cos\alpha$. Onda $|CD| = x + 2x\cos\alpha$.

Trapesiýanyň beýikligi $|CK| = x\sin\alpha$. Trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň:

$$S = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |CK| = \frac{x + x + 2x\cos\alpha}{2} x\sin\alpha = x^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$$

$S = S(\alpha)$ meýdanyň iň uly bahasyny tapmak üçin, onuň $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykdaky kritiki nokadyny tapmaly we şu funksiýanyň şol nokatlardaky bahalaryny we kesimiň uçlaryndaky bahalaryny tapmaly. Önümi tapalyň:

$$S'(\alpha)=x^2\left[(1+\cos\alpha)'\sin\alpha+(1+\cos\alpha)(\sin\alpha)'\right]=x^2(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1).$$

Önümi nola deňläp, denlemäni çözeliň:

$$2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0,\quad \cos\alpha_1=\frac{1}{2},\quad \cos\alpha_2=-1.$$

Bu ýerden, alýarys: $\alpha_1=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad \alpha_2=\pi+2n\pi.$

Görnüşi ýaly $\alpha_1=\frac{\pi}{3}$ nokat $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralyga degişlidir.

$$S(\alpha_1)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=x^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2,\ S(0)=0.$$

$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=x^2.$ Tapylanlary deňeşdirip, $S(\alpha)$ funksiýanyň $\alpha=\frac{\pi}{3}$ bolanda iň uly bahany alýandygyny görýäris. Şunlukda, ýapgytlyk burçy 60^0 bolanda kanalyň kesiginiň sygymy iň uludyr.

1111. Suw gämisiniň bir gije-gündizde ýakýan ýangyjy iki bölekden ybarat. Onuň bir bölegi hemişelik a bolsa, beýleki bölegi tizligiň kubuna proporsional bolup artýar. Suw gämisiniň ýangyjy has tygşytly sarp edýän tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä, bir gije-gündizde sarp edilýän ýangyç $a+k\vartheta^3$. ($k-$proporsionallyk koeffisiýenti). Şeýle hem bir gije-gündizde gämi $24\cdot\vartheta$ uzaklygy geçer. Onda $1km$ aralygy geçmek üçin

$$P=\frac{a+k\vartheta^3}{24\vartheta}$$

ýangyç sarp edilýär. Başlangyç tizlikde bu funksiýa üznüksiz däldir. Ol bizi gyzyklandyrmaýar. Önümi tapalyň:

$$P'=\frac{2k\vartheta^3-a}{24\vartheta^2}.$$

$P'=0$ deňlemeni çözüp, önümiň nola öwrülýän nokadyny tapalyň:

$$2k\vartheta^3-a=0,\quad \vartheta=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

Şu nokadyň çepinde önümiň bahasy noldan kiçi, sagynda bolsa noldan ulydyr Diýmek, P funksiýa şu nokatda minimuma eýedir.

Şunlukda, gäminiň has amatly tizligi $\vartheta=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ deňdir.

Aşakdaky funksiýalaryň ekstremum nokatlaryny tapmaly.

1112. $y=6x^2-x^4$.

1113. $y=2x^3-3x^2+1$.

1114. $y=2x^3-6x^2-18x+1$.

1115. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$.

1116. $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.

1117. $y=x-\ln(1+x)$.

1118. $y=x-\ln(1+x^2)$.

1119. $y=(x^2-2x)\cdot\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

1120. $y=x^{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{x+3}$.

1121. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)(x+3)}$.

1122. Berlen konusyň içinden iň uly göwrümli silindr çyzmaly.

1123. Göwrümi $32m^3$ bolan basseýniň düýbüniň formasy kwadrat bolsa, onuň düýbüni we gapdallaryny mermerlemek üçin iň az mermer gerek bolar ýaly onuň ölçeglerini kesgitlemeli.

1124. Köpeltmek hasyly iň uly baha eýe bolar ýaly 100 sany iki sanyň jemi görnüşinde ýazmaly.

1125. Togalak agaçdan zyňyndysy az bolar ýaly edip dörtgyran pürs kesmeli.

§ 2. Güberçekligi bilen ýokarlygyna we aşaklygyna ugrykdyrylan egri çyzyklar. Epin nokatlar

Goý, $x=x_0$ nokatda $f'(x_0)$ önümi bar bolan $f(x)$ funksiýa berlen bolsun. Diýmek, şol egri çyzyga $M(x_0, f(x_0))$ nokatda geçirilen galtaşma bardyr.

Eger absisalary x_0 nokadyň $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ etrapynda bolan egri çyzygyň hemme nokatlary şol egri çyzyga M_0 nokatda geçirlen galtaşmadan ýokarda (aşakda) ýerleşen bolsalar, onda egri çyzygyň güberçekligi aşak (ýokaryk) ugrukdyrylan diýilýär.

Eger egri çyzyk nokadyň çepräginde güberçekligi bilen bir tarapa ýüzlenip, sagragynda beýleki tarapa ýüzlenen bolsa, onda $M(x_0, f(x_0))$ nokada egri çyzygyň epin nokady diýilýär.

Eger $f''(x_0)>0$ bolsa, onda egri çyzyk özüniň güberçekligi bilen aşaklygyna ýüzlenen, eger-de $f''(x_0)<0$ bolsa, onda egri çyzyk özüniň güberçekligi bilen ýokarlygyna ýüzlenendir.

Eger x_0 nokadyň etrapynda $f''(x)$ özüniň hemişelik alamatyny saklamasa, ýagny funksiýanyň ikinji önümi x_0 nokadyň üstünden geçende alamatyny üýtgetse, onda $M(x_0,\ f(x_0))$ nokat $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň epin nokadydyr.

1126. $y = f(x) = x^3$ funksiýanyň epin nokatlaryny we güberçeklik ugurlaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. $f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x.$ Onda $f''(0-\varepsilon) < 0,\quad f''(0+\varepsilon) > 0$. Diýmek, $x = 0$ funksiýanyň epin nokady bolup, funksiýanyň grafigi bu nokadyň çepinde güberçekligi ýokaryk, sagynda bolsa aşakdyr.

1127. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ funksiýanyň grafigini epin nokatlaryny we güberçeklik ugurlaryny kesgitlemeli.

Çözülişi.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,\quad f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1),$$

$$f''(x) = 0,\quad x_1 = 0,\, x_2 = 1.$$

Indi şu nokatlaryň ýeterlik golaýynda $f''(x)$ önümiň alamatyny barlalyň:

$$f''(0-\varepsilon) > 0,\ f''(0+\varepsilon) < 0,\ f''(1-\varepsilon) < 0,\ f''(1+\varepsilon) > 0$$

Diýmek, bu nokatlar funksiýanyň epin nokatlarydyr, $x = 0$ nokadyň çepinde egri çyzygyň güberçekligi aşakdyr, sagynda bolsa ýokarykdyr. $x = 1$ nokadyň çepinde güberçeklik ýokaryk, sagynda bolsa aşakdyr.

1128. $f(x) = \sin x$ funksiýanyň güberçeklik aralyklaryny kesgitlemeli.

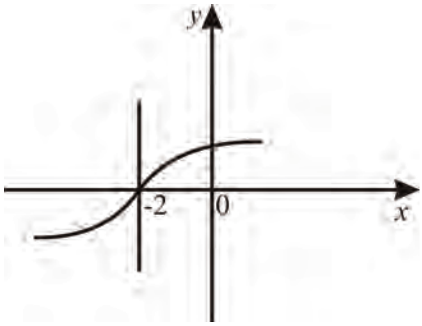
Çözülişi. $f'(x) = \cos x,\quad f''(x) = -\sin x$ bolýandygy üçin $(2k\pi, (2k+1)\pi),\quad (k = 1,2...)$ aralykda $f''(x) < 0$ we $((2k-1)\pi,\ 2k\pi)$ aralykda bolsa $f''(x) > 0$. Diýmek, şol aralyklarda funksiýanyň grafigi degişlilikde ýokaryk we aşak güberçekdir.

1129. $y = \sqrt[3]{x+2}$ funksiýanyň grafigini epin nokadyny tapmaly.

Çözülişi.

$$y' = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}},\quad y'' = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

Görnüşi ýaly, y'' önüm hiç bir nokatda nola öwrülmeýär. $x = -2$ nokatda y'' önüm ýokdur. $x < -2$ bolanda, $y'' > 0,\quad x > -2$ bolanda $y'' < 0$. Şonuň üçin $x = -2$ nokat epin nokadydyr (*48-nji çyzgy*).



48-nji çyzgy

Funksiýanyň grafiginiň epin nokatlaryny tapmaly we güberçeklik ugurlaryny kesgitlemeli.

1130. $y=(x-1)^4$.

1131. $y=\dfrac{1}{x+3}$.

1132. $y=x^3-6x^2+2x-1$.

1133. $y=x^3\left(x^2-5x+\dfrac{20}{3}\right)$.

1134. $y=x^3-3x^2-9x+11$.

1135. $y=x^4$.

1136. $y=x^5$.

Funksiýanyň epin nokadyny tapmaly.

1137. $y=\dfrac{x^2}{x^2+3a}$, $(a>0)$.

1138. $y=(x-b)^3$.

1139. $y=(x^2+1)^{-1}$.

1140. $y=\operatorname{tg} x$.

1141. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$.

1142. $y=xe^{-x}$.

§ 3. Egri çyzygyň asimptotalary we olaryň tapylyşy

Eger $y=f(x)$ funksiýany

$$y=kx+b+\alpha(x),\quad \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0$$

görnüşde aňladyp bolýan bolsa, onda $y=kx+b$ göni çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy diýilýär.

Eger $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ ýa-da $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ bolsa, $x=a$ çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasy diýilýär.

Eger $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ bolsa, onda $x=a$ göni çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kese asimptotasy diýilýär.

1143. $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ egri çyzygyň asimptotalaryny tapmaly.

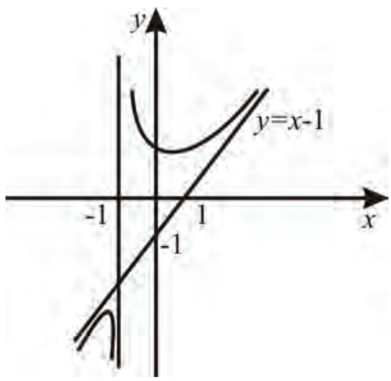
Çözülişi. Berlen egri çyzygyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$y = \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2-1+2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{2}{x+1} = (x-1) + \frac{2}{x+1}$$

ýa-da

$$y = (x-1) + \frac{2}{x+1}.$$

Diýmek, kesgitlemä görä $y = x-1$ göni çyzyk berlen egri çyzygyň ýapgyt asimptotasynyň deňlemesidir (*49-njy çyzgy*).



49-njy çyzgy

1144. Egriniň asimptotalaryny tapmaly

a) $y = \dfrac{5x}{x-3}$, b) $y = \dfrac{3x}{x-1} + 3x$, c) $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Çözülişi.

$$\lim_{x\to\pm 0+3} y = \lim_{x\to 3\pm 0} \frac{5x}{x-3} = \pm\infty.$$

Şonuň üçin $x = 3$ göni çyzyk dik asimptotdyr.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x-3} = 5.$$

Onda $x = 5$ göni çyzyk funksiýanyň grafigini□ kese asimptotasydyr. Şunlukda, berlen egri çyzyk dik we kese asimptotlara eýedir.

$$\text{b)} \lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1+0} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x\right) = +\infty.$$

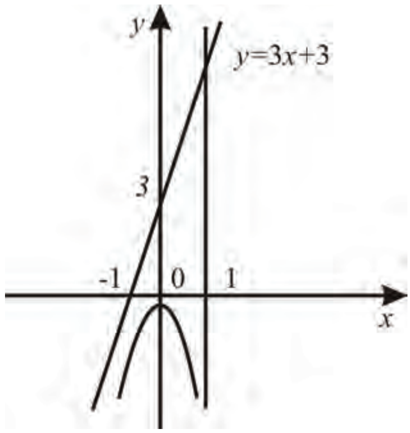
Şonuň üçin $x = 1$ göni kese asimptotasydyr.

Ýapgyt asimptotalary tapalyň:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3}{x-1}+3)=3,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3x}{x-1}+3x-3x)=3.$$

Şunlukda, $y=3x+3$ göni çyzyk berlen egri çyzygyň ýapgyt asimptotasydyr (*50-nji çyzgy*).



50-nji çyzgy

d) $\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{t=\frac{1}{x}\to\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty.$

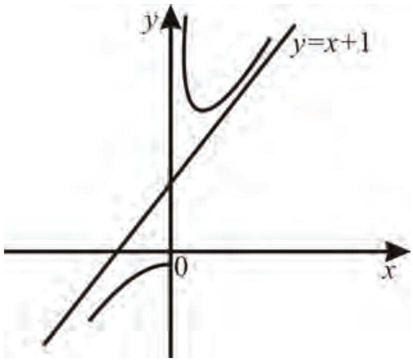
Şonuň üçin $x=0$ dik asimptotasydyr.

Ýapgyt asimptotalary tapalyň:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{\frac{1}{x}=z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.$$

Şunlukda, $y=x+1$ göni çyzyk berlen egri çyzygyň ýapgyt asimptotasydyr (*51-nji çyzgy*).



51-nji çyzgy

1145. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$ egriniň asimptotalaryny tapmaly

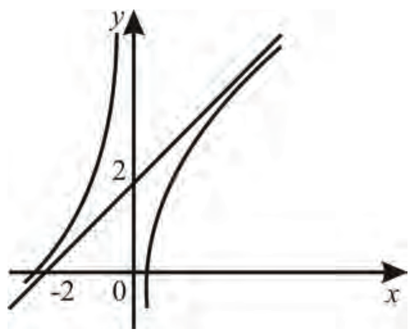
Çözülişi. $x\to+0$ bolanda $y\to-\infty$, $x\to-0$ bolanda bolsa $y\to+\infty$. Diýmek, $x=0$ göni egriniň dik asimptotasydyr.

Ýapgyt asimptotalary tapalyň:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right]=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[y-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2-\frac{1}{x}\right]=2.$$

Şunlukda, $y=x+2$ göni çyzyk berlen egriniň ýapgyt asimptotasydyr (*52-nji çyzgy*).



52-nji çyzgy

1146. Egriniň asimptotalaryny tapmaly

$$y=e^{-x}\cdot\sin x+x.$$

Çözülişi. Görnüşi ýaly egriniň dik asimptotasy ýokdur. Egriniň ýapgyt asimptotalaryny tapalyň:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{-x}\sin x}{x}+1\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}\sin x+x-x]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0.$$

Şunlukda, $x\to+\infty$ bolanda $y=x$ göni çyzyk berlen egri çyzygyň ýapgyt asimptotasydyr.

Berlen egriniň $x\to-\infty$ bolanda ýapgyt asimptotasy ýokdur.

Hakykatdanda, bu ýagdaýda $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}$ predel ýokdur.

$$\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}\sin x+1$$

deňligiň sag bölegindäki birinji goşulyjy $x\to-\infty$ bolanda çäksiz artýar. Diýmek, predel ýokdur.

1147. $y=\ln x$ egriniň asimptotalaryny tapmaly.

Çözülişi. $y=\ln x$ funksiýa $(0,\infty)$ aralykda kesgitlenendir.

$$\lim_{x\to0+}\ln x=-\infty.$$

Diýmek, $x=0$ dik asimptotasydyr.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\quad b=\lim_{x\to+\infty}[\ln x-0\cdot x]=+\infty.$$

Şunlukda, $x\to+\infty$ bolanda berlen egriniň ýapgyt we kese asimptotalary ýokdur.

Egriniň asimptotalaryny tapmaly.

1148. $y=\frac{1}{(x+2)^2}.$ 1149. $y=e^{\frac{1}{x}}-1.$

1150. $y^2=\frac{x^2}{(2a-x)}.$ 1151. $y^2(x-2a)=x^2-a^2.$

1152. $y=\frac{x}{x+4x+3}.$ 1153. $y=\sqrt{x^2-1}.$

1154. $y=\frac{1}{1-e^x}.$ 1155. $y=\frac{3x}{2}\ln(e-\frac{1}{3x}).$

1156. $y=\sqrt{1+x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}.$ 1157. $y=2x+\frac{2}{x-1}.$

1158. $y=\frac{\sin x}{x}.$

§ 4. Funksiýanyň grafigini gurmak

Funksiýalaryň grafigini gurmak üçin her berlen funksiýanyň özüne degişli aşakdaky maglumatlary barlap görmeli:

1. Funksiýanyň kesgitlenen oblastyny tapmaly;
2. Funksiýanyň haýsy aralykda artýanlygyny (kemelýänligini) kesgitlemeli;
3. Funksiýanyň täkligini, jübütligini, periodikligini anyklamaly;
4. Funksiýanyň maksimum we minimum nokatlaryny kesgitlemeli we ekstremumyny tapmaly;
5. Egri çyzygyň haýsy aralykda güberçekligi ýokarykdygyny (aşakdygyny) bilmeli;
6. Egri çyzygyň epin nokatlaryny tapmaly;
7. Egri çyzygyň asimptotalaryny tapmaly.

1159. $y = e^{-x^2}$ funksiýanyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty ähli hakyky sanlar köplügi. Funksiýanyň grafiginiň Oy oka simmetrik ýerleşendigi onuň berlişinden görünýär. Berlen funksiýanyň 1-nji we 2-nji tertipli önümlerini tapalyň:

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = -2\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}.$$

$x = 0$ bolanda funksiýanyň bire deň bolan maksimumy bardyr we şol maksimum funksiýanyň iň uly bahasydyr. x argumentiň otrisatel bahalarynda funksiýanyň birinji tertipli önümi noldan ulydyr. Onda $x = 0$ nokatdan çepde funksiýa artýar. x argumentiň položitel $(x > 0)$ bahalarynda funksiýanyň birinji tertipli önümi otrisateldir. Diýmek, $x = 0$ nokatdan sagda funksiýa kemelýär. Bulardan başgada $x \to \pm\infty$ bolanda ordinata elmydama položitel bolup nola ymtylýandyr, ýagny Ox oky berlen egri çyzygyň asimptotasydyr. Indi funksiýanyň epin nokatlaryny tapmak üçin ikinji tertipli önümi nola deňläliň:

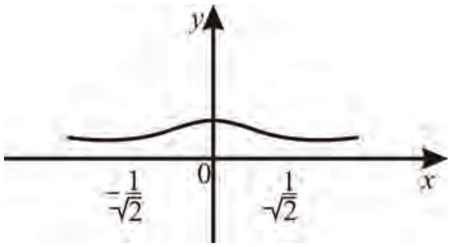
$$y'' = -2\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2} = 0.$$

Bu ýerde $2e^{-x^2} \neq 0$, onda $2x^2 - 1 = 0$. Bu ýerden taparys:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bu tapylan nokatlar egri çyzygyň epin nokatlarydyr. x argumentiň $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ kesime degişli bahalarynda $y'' < 0$ bolany üçin şol kesimde egri çyzygyň güberçekligi ýokaryk ugrukdyrylan. Şol aralygyň daşynda $y'' > 0$ bolany üçin egri çyzygyň güberçekligi aşak ugrukdyrylan.

Bu alnan maglumatlardan peýdalanyp berlen funksiýanyň grafigini aşakdaky görnüşde alarys (*53-nji çyzgy*).



53-nji çyzgy

1160. $y=-\dfrac{x^2}{x^2-1}$ funksiýanyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty $x=1,\ x=-1$ nokatlardan başga Ox okuň hemme nokatlarydyr. $x=-1$ we $x=1$ nokatlaryň golaýynda berlen funksiýa absolýut ululygy boýunça çäksiz artýandyr. Şoňa görä-de $x=-1$ we $x=1$ göni çyzyklar berlen egri çyzygyň asimptotlary bolup hyzmat edýändirler. Egri çyzyk Oy oka simmetrik ýerleşendir.

Berlen funksiýanyň birinji we ikinji tertipli önümlerini tapalyň:

$$y'=-\frac{2x}{(x^2-1)^2},\quad y''=-\frac{2+6x^2}{(x^2-1)^3}.$$

$y'=0$ deňlemäniň köki $x=0$. Şol köki ikinji tertipli önümde goýup taparys: $y''=2$. Diýmek, $x=0$ nokatda funksiýanyň nola deň maksimumy bardyr.

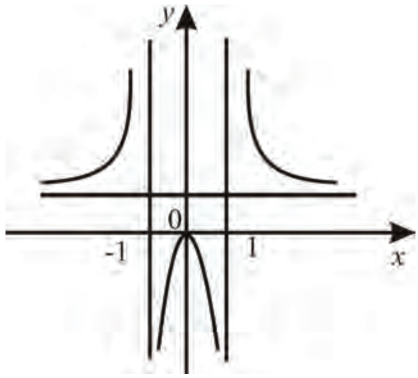
x argumentiň $(-1,1)$ aralyga degişli bahalarynda $y''<0$. Diýmek, şol aralykda funksiýanyň güberçekligi ýokaryk ýüzlenen, x argumentiň $(-\infty,-1)$ we $(1,+\infty)$ aralyklara degişli bahalarynda $y''>0$. Diýmek, şol aralyklarda egri çyzygyň güberçekligi aşak ýüzlenen. y'' hiç ýerde nola deň däldir: $y''\neq 0$ şonuň üçin egri çyzygyň epin nokady ýokdur.

Aşakdaky gerek boljak predeli ýazalyň:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1.$$

Diýmek, $y=1$ göni çyzyk egri çyzygyň asimptotydyr we argumentiň $x<-1$, $x>1$ bahalarynda $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}>1$ ýagny x argumentiň şol bahalarynda funksiýanyň çyzgysy $y=1$ asimptotadan ýokarda ýerleşýär.

Ýokarda berlen maglumatlardan peýdalanyp, aşakdaky çyzgyny çyzalyň (*54-nji çyzgy*).



54-nji çyzgy

1161. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$ funksiýany derňemeli we onuň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Funksiýa Ox okuň ähli nokatlarynda kesgitlenendir we üznüksizdir. Şonuň üçin onuň dik asimptotlary ýokdur. $f(-x) = f(x)$ bolýanlygy üçin ol jübüt funksiýadyr. Ol bolsa onuň grafiginiň Oy oka görä simmetrikdigini aňdladýar. Şunlukda, berlen funksiýany $[0, \infty)$ aralykda derňemek ýeterlikdir.

Funksiýanyň ýapgyt asimptotlary hem ýokdur.

Birinji tertipli önümi tapalyň:

$$y = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 6x(x^4 - 2x^2 + 1) = 6x(x^2 - 1)^2,$$

$$y' = 0, \ 6x(x^2 - 1)^2 = 0,$$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$ nokatlar kritiki nokatlardyr.

Görnüşi ýaly $[0, \infty)$ aralykda $y' > 0$ we berlen funksiýa artýandyr.

Ikinji tertipli önümi alalyň:

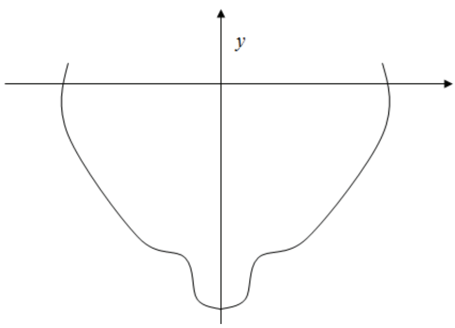
$$y'' = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 6(5x^4 - 6x^2 + 1), \quad y'' = 0, \quad 6 \cdot (5x^4 - 6x^2 + 1) = 0,$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = 1, \quad y'', \ y'$$

Hasaba alyp bizi gyzyklandyrýan nokatlary artýan tertipde ýerleşdirip, aşakdaky tablisany düzeliň:

x	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
y'	0	+	1,7	+	0	+
y''	6	+	0	1	0	+
y	-5		-4,5		-4	

Şu tablisany ulanmak bilen berlen funksiýanyň grafigini gurup bileris (*55-nji çyzgy*).



55-nji çyzgy

1162 $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ funksiýany derňemeli we onyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Funksiýa (-∞, ∞) sanaralykda kesgitlenendir. Ol 2π periodly periodiki funksiýadyr. Hakykatdan-da,

$$\frac{1}{2}\sin 2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x.$$

Şonuň üçin onuň grafigini erkin $T = 2\pi$ uzynlygy bolan kesimde gurmak eeterlikdir. Ol kesim hökmünde $[-\pi, \pi]$ kesimi alalyň. Kesimiň ahyrlarynda funksiýanyň bahalaryny tapalyň:

$$y_{x=\pi} = y_{x=-\pi} = \frac{1}{2}\sin 2\pi + \cos 2\pi = -1.$$

Funksiýanyň grafigi $A(-\pi, -1)$, $B(\pi, -1)$ nokatlar arkaly geçýär.

Funksiýanyň grafiginiň koordinata oklary bilen kesişme nokatlaryny tapalyň. Eger $x=0$ bolsa, $y=1$ we $C(0,1)$. Eger $y=0$ bolsa, onda

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=0,$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=\cos x(1+\sin x),$$

$$\cos x(1+\sin x)=0, \quad \cos x=0,$$

$$x_k=\frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

Şu deňlemäniň kökleriniň $[-\pi,\pi]$ kesimde ýatýanlaryny alalyň:

$$x_1=-\frac{\pi}{2}, \quad (k=1), \quad x_2=\frac{\pi}{2} \quad (k=0).$$

$\sin x=1$ ýa-da $\cos x=0$. Şonuň üçin bu deňlemeniň köki $\cos x=0$ deňlemeniň kökleriniň içinde bolar. Şunlukda, funksiýanyň grafigi Ox oky $D\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ we $E\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ nokatlarda kesýär.

Önümleriň kömegi bilen funksiýany derňäliň:

$$y'=\cos 2x-\sin x, \cos 2x-\sin x=0.$$

Deňlemäni çözüp, kritiki nokatlary tapalyň:

$$cos2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x,$$

$$1-2\sin^2 x-\sin x=0, \quad \sin x=t,$$

$$2t^2+t-1=0, \quad t_1=-1, \quad t_2=\frac{1}{2}.$$

$\sin x=-1$ we $\sin x=\frac{1}{2}$. Şu deňlemeleriň kökleriniň $[-\pi,\pi]$ kesime degişlilerini alalyň:

$$x_1=-\frac{\pi}{2}, \quad x_2=\frac{\pi}{6}, \quad x_3=\frac{5\pi}{6}.$$

Ikinji tertipli önümi tapalyň:

$$y''=(\cos 2x-\sin x)'=-2\sin 2x-\cos x,$$

$$y''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin(-\pi)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0,$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{10\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}>0.$$

$x_2=\frac{\pi}{6}$ nokatda funksiýa maksimuma, $x_3=\frac{5\pi}{6}$ nokatda bolsa, minimuma eýedir. Şu nokatlardaky funksiýanyň bahalaryny tapalyň:

$$y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}3,$$

$$y_{\min}=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx -1{,}3.$$

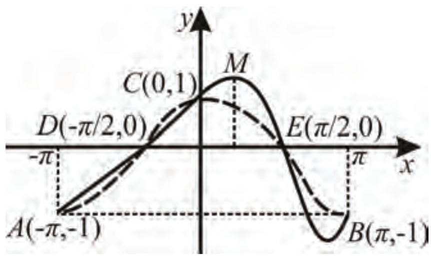
$x_1=-\frac{\pi}{2}$ nokatda üçünji tertipli y''' önümiň bahasy bilen funksiýany derňäliň:

$$y'''=-4\cos 2x+\sin x,$$

$$y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\cos(-\pi)+\sin(-\frac{\pi}{2})=3\neq 0.$$

Bu bolsa şu nokatda funksiýanyň ekstrekmumynyň ýokdugyny görkezýär.

Şu barlaglaryň esasynda funksiýanyň grafigini guralyň (*56-njy çyzgy*).



56-njy çyzgy

1163. Funksiýany derňemeli we onuň grafigini gurmaly.

a) $y=x^2+x+5;$ b) $y=x(2-x)^2;$

ç) $y=\frac{1}{x^2-1};$ d) $y=x+\sin x;$

e) $y=\frac{1}{x}2^x;$ f) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}.$

g) $y=e^{2x-x^2};$

X BÖLÜM
KESGITSIZ INTEGRAL

§ 1. Integrirleme

Eger $[a, b]$ kesimiň her bir x nokady üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetse, onda $F(x)$ funksiýa şol kesimde $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär. Eger $F(x)$ funksiýa $f(x)$ üçin asyl funksiýa bolsa, onda $F(x) + C$ ($C -$heimşelik san) hem şol funksiýanyň asyl funksiýasydyr.

Ähli asyl funksiýalaryň toplumyna $f(x)$ funksiýadan alnan kesgitsiz integral diýilýär we

$$\int f(x)dx$$

görnüşde ýazylýar. Şu ýerde $f(x)$ integral aşagyndaky funksiýa, $f(x)dx$ aňlatma bolsa integral aşagyndaky aňlatma diýilýär, $\int$ belgi bolsa integral belgisidir. Şunlukda,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Haýsy hem bolsa bir funksiýanyň kesgitsiz integralyny tapmaklyga integrirlemek diýilýär. $F(x)$ haýsy hem bolsa $f(x)$ üçin asyl funksiýa bolsa, onda

$$F'(x) = f(x)$$

ýa-da

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Bu ýerden aşakdaky deňlikler gelip çykýar:

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{2}$$

Differensirlemegiň we integrirlemegiň biri-birine ters amallardygy (1) we (2) denliklerden görünýär. Bu bolsa aşakdaky kesgitsiz integralyň tablisasyny ýazmaklyga ýardam edýär:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n = \text{const}, \quad n \neq -1;$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$

3. $\int e^x dx = e^x + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$

5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0;$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0;$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C; \qquad a \neq 0$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (-|a| < x < |a|);$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C,$

12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C;$

13. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Kesgitsiz integralyn aşakdaky ýönekeý iki häsiýetini belläp geçeliň:

1. Hemişelik köpeldijini integral belgisiniň daşyna çykarmak bolar ýa-da kesgitsiz integral belgisiniň aşagyna girizmek bolýar:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

2. Iki funksiýanyň jeminiň (tapawudynyň) integraly şol goşulyjylardan alnan integrallaryň jemine (tapawudyna) deňdir:

$$\int[f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

Ýokardaky tablisanyň we düzgünleriň kömegi bilen integrirlemegiň birnäçe mysallaryna garalyň.

1164. $\int(6x^2 + 8x + 3)dx.$

Çözülişi. Kesgitsiz integralyň häsiýetlerinden we integrirlemegiň tablisasyndan peýdalanyp alýarys:

$$\int(6x^2+8x+3)dx=\int 6x^2dx+\int 8xdx+\int 3dx=$$

$$=6\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+3x+C=2x^3+4x^2+3x+C.$$

1165. $\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýada agzama-agza bölmäni amala aşyryp we (1), (2) formulalary ulanyp alarys: $\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$

$$=2\int x^{-\frac{3}{2}}dx+3\int x^{-\frac{5}{6}}dx+5\int\frac{dx}{x}=2\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+3\frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1}+5\ln|x|+C=$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{x}}+18\sqrt[6]{x}+5\ln|x|+C.$$

1166. $\int\frac{dx}{x^2+7}.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýany integralyň tablisasyny ulanar ýaly görnüşde ýazyp, alarys:

$$\int\frac{dx}{x^2+7}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x}{\sqrt{7}}+C.$$

1167. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýanyň sanawjysyndaky birligi $1=\cos^2 x+\sin^2 x$ bilen çalşyryp, integrirlemegiň tablisasyny ulanalyň:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctgx+tgx+C.$$

1168. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

Çözülişi. Integrirlenýän $\frac{x^2}{1+x^2}$ funksiýanyň sanawjysyna 1 goşup we aýyryp, integrirlemegiň tablisasyny ulanyp, alýarys:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\mathrm{arctg}x+C.$$

Integrallary topmaly.

1169. $\int (2x^2 - 5x + 1)dx.$ 1170. $\int \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 3} dx.$

1171. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$ 1172. $\int \frac{x^2 + 2}{1 + x^2} dx.$

1172. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} dx.$ 1173. $\int \frac{3 - \sqrt{5 + x^2}}{5 + x^2} dx.$

1174. $\int \frac{2x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx.$ 1175. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$

1176. $\int \frac{x \sin 2x + \sqrt[3]{x} \cos x}{x \cos x} dx.$ 1177. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

§ 2. Ornuna goýmak bilen integrirlemek

Goý, $f(x)$ üznüksiz funksiýadan $\int f(x)dx$ kesgitsiz integraly hasaplamak gerek bolsun. Eger $x = \varphi(t)$ ornuna goýmany ulansak, kesgitsiz integralyň deregine $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ integraly hasaplamak eeterlikdir. Diýmek,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1178. Integraly hasaplamaly

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Çözülişi. $u = \ln x$ ornuna goýmany ulanalyň. Onda

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx.$$

Çözülişi. Integrirlenýän $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ funksiýanyň maýdalawjysyndan doly kwadraty bölüp alalyň:

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}=(x+\frac{p}{2})^2\pm a^2, \quad \left(\pm a^2=q-\frac{p^2}{4}\right).$$

$x+\dfrac{p}{2}=t$ diýip belläp alarys:

$$dx=dt, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad Mx+N=M(t-\frac{p}{2})+N=Mt+N-\frac{Mp}{2}.$$

Onda:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)}{t^2\pm a^2}dt=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2\pm a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|t^2\pm a^2\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4p-q^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2}+C$$

(eger-de $q-\dfrac{p^2}{2}>0$ bolsa) ýada

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4p-q^2}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{4q-p^2}}{2x+p+\sqrt{4q-p^2}}\right|+C$$

(eger-de $q-\dfrac{p^2}{2}<0$ bolsa).

1179. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx.$

Çözülişi. $u=\operatorname{arctg}x, \quad du=\dfrac{dx}{1+x^2}.$

$$\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx=\int\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}\,d(\operatorname{arctg}x)=\int\sqrt[3]{u}\,du=\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}(\operatorname{arctg}x)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1180. $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýanyň maýdalawjysyndan doly kwadraty bölüp alalyň:

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

$x+\frac{1}{2}=t$ diýip belläp alarys: $dx=dt$ we $x+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)+1=t+\frac{1}{2}.$

Onda

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}+C.$$

Alnan netijede t-niň ornuna $x+\frac{1}{2}$ goýup taparys:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+\sqrt{x^2+x+1}+C.$$

Kähalatlarda $f(x)$ funksiýa üçin asyl funksiýa belli bolup, $f(ax)$ funksiýanyň asyl funksiýasyny tapmak gerek bolýar. Mysal üçin, goý $\int f(x)dx=F(x)+C$ belli diýeliň. Onda $a\neq 0$ diýip $ax=t$ ornuna goýmany ulanyp taparys:

$$dx=\frac{1}{a}dt,\quad \int f(ax)dx=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax)+C.$$

Şunuň esasynda aşakdaky deňlikleri ýazyp bileris:

$$\int\sin(ax)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+C,$$

$$\int\cos(ax)dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+C,$$

$$\int\sec^2(ax)dx=\frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax)+C,$$

1181. $\int\cos x\cos 3x\cos 5x dx.$

Çözülişi.

$$(\cos x\cos 2x)\cos 5x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)\cos 5x=\frac{1}{4}[\cos 4x+\cos 6x]+$$

$$+\frac{1}{4}[\cos 2x+\cos 8x].$$

Şunlukda,

$$\int\cos x\cos 3x\cos 5xdx=\frac{1}{4}\left[\int\cos 2xdx+\int\cos 4xdx+\int\cos 6xdx+\int\cos 8xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{32}\sin 8x+C.$$

1182. $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}.$

Çözülişi.

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}tg^2x+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$\frac{a}{b}tgx=t$ ornuna goýmany ulanalyň. $dt=\frac{a}{b}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Onda alarys:

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}\mathrm{arctg}t+C.$$

Alnan netijede t-niň ornuna $\frac{a}{b}\mathrm{tg}x$ goýup alarys:

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\mathrm{arctg}(\frac{a}{b}\mathrm{tg}x)+C.$$

Integrallary tapmaly.

1183. $\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}dx.$

1184. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{1-x+x^2}}dx.$

1185. $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}.$

1186. $\int e^{x^2+4x+2}(x+2)dx.$

1187. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}}.$

1188. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$

1189. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

1190. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}.$

1191. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx.$

1192. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

1193. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

1194. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx.$

§ 3. Böleklebýin integrirlemek

Eger $u=\varphi(x)$ we $\vartheta=\psi(x)$ differensirlenýän funksiýalar bolsa, onda

$$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du. \qquad (1)$$

Integrallary tapmaly.

1195. $\int x\ln x dx.$

Çözülişi. Bu ýerde $u=\ln x,\quad d\vartheta = xdx$ bilen belgiläliň. Onda

$du=\frac{dx}{x},\quad \vartheta=\frac{x^2}{2}$ we (1) formulany ulanalyň:

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+C.$$

1196. $\int x^2\ln x dx.$ 1197. $\int e^x\cos x dx.$

Çözülişi. $u=e^x\quad du=e^x dx,\quad d\vartheta=\cos x dx,\quad \vartheta=\sin x$. Onda

$$\int e^x\cos x dx = e^x\sin x - \int e^x \sin x dx.$$

$$u=e^x,\quad du=e^x dx,\quad d\vartheta=\sin x dx,\quad \vartheta=-\cos x.$$

Onda $\int e^x\cos x dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx.$

Şunlukda

$$\int e^x\cos x dx = e^x(\sin x+\cos x) - \int e^x\cos x dx.$$

Bu ýerden

$$\int e^x\cos x dx == \frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C.$$

1198. $\int x^n e^x dx.$ 1199. $\int e^x\sin x dx.$

1200. $\int \ln x dx.$ 1201. $\int \mathrm{arctg} x dx.$

1202 a) $\int x\cos x dx,$ 1203. $\int \sqrt{x^2+a}dx.$

b) $\int x\sin x dx.$

Çözülişi.

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}+\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx=$$

$$=a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx=a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+$$

$$+x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx,$$

$$u=x\,,\quad d\vartheta=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}},\quad du=d\vartheta,\quad \vartheta=\sqrt{x^2+a}.$$

Deňligiň sag bölegindäki integraly onuň çep bölegine geçirip, alarys:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

1204. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **1205.** $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$

Çözülişi.

$$I_n(x)=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\quad u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad d\vartheta=dx,$$

$$du=\frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx,\quad \vartheta=x.$$

(1)-nji formulany ulanalyň:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+$$

$$+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}+2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}.$$

Soňky integraly deňligiň çep bölegine, berlen integraly bolsa sag bölegine geçirip, alarys:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

ýa-da

$$I_{n+1}(x)=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n(x). \qquad (2)$$

Bu formula gaýdymly formula diýilýär. Eger $n=1$ bolsa, onda

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

Indi (2)-nji formuladan peýdalanyp $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ we ş.m. integrallary aňsatlyk bilen tapyp bileris:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

1206. $\int \sin(\ln x)dx.$

1207. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

1208. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x} dx.$

1209. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx.$

1210. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$

1211. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx.$

1212. $\int e^{5x} \cos 4x dx.$

1213. $\int (1+x^2)^2 \cos x dx.$

1214. $\int (x^2+2x-1)\sin 3x dx.$

1215. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx.$

1216. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

§ 4. Kwadrat üçagzany saklaýan, ýönekeý integrallar

1) $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ görnüşdäki integrallar.

Şu görnüşdäki integrallary integrirlemeklik ax^2+bx+c kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp almaklyga esaslanandyr.

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2 + l, \quad (a,l,k = const). \qquad (1)$$

Eger $m=0$ bolsa, kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp alyp, tablisa boýunça tapylýan integrallary alýarys.

Integrallary tapmaly.

1217. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

Çözülişi.

$$\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2-2\frac{5}{4}x+\frac{25}{16})+(\frac{7}{2}-\frac{25}{16})}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{5}{4})}{(x-\frac{5}{4})^2+\frac{31}{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=\frac{1}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{31}}+C.$$

1218. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Çözülişi. x^2+2x+5 kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp alyp, taparys:

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4=(x+1)^2+2^2,$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

1219. $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}$. **1220.** $\int\frac{dx}{x^2+2x}$.

Eger $m\neq 0$ bolsa, onda sanawjyda maýdalawjydaky kwadrat üçagzanyň önümi bolan $2ax+b$ köpeldijini bölüp alýarlar:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+(n-\frac{mb}{2a})}{ax^2+bx+c}dx=\frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+$$

$$+(n-\frac{mb}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

1221. $\int\frac{x-1}{x^2-x-1}dx.$

Çözülişi.

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4},$$

$$\int\frac{x-1}{x^2-x-1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}=$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x - 1\right| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ \ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

1222. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$ 1223. $\int \frac{xdx}{2x^2+3x+1}.$

1224. $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}.$ 1225. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx.$

1226. $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx.$ 1227. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx.$

1228. $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx.$ 1229. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}.$

2. $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}dx,\quad \frac{p^2}{4}-q<0,\quad n>1$ **görňüşdäki integrallar.**

Bu görnüşdäki integrallaryň integrirlenilişi ýokardaky garap geçen integrallaryň integrirlenilişine meňzeşdir. Eger $a>0$ bolsa, tablisanyň 11-nji folrmulasyny ulanyp, eger $a<0$ bolsa tablisanyň 10-njy formulasyny ulanyp integrirlenilýändir.

1230. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$

Çözülişi. x^2+px+q kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp alalyň:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Onda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{2}}} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{2}}} =$$

$$= \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C.$$

1231. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

Çözülişi. $2+3x-2x^2$ kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp alalyň:

$$2+3x-2x^2 = 2\left[\frac{25}{16} - (-\frac{3}{4}+x)^2\right].$$

Onda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-(x-\frac{3}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

1232. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$

Çözülişi.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

1233. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}.$ **1234.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}.$

1235. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$ **1236.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}.$

1237. $\int \frac{(x+4)}{\sqrt{2x^2-3x+5}}.$ **1238.** $\int \frac{(4x+7)}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

3. $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **görnüşdäki integrallar.**

Bu görnüşdäki integrallar $\frac{1}{mx+n}=t$ ornuna goýmany ulanyp, 2-nji bölümçedäki garap geçen integrallarymyza getirilýär.

1239. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

Çözülişi. $x-1=\frac{1}{t}$ ornuna goýmany ulanalyň: $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Onda

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}+1)^2-2}} = -\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C =$$

$$= -\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C$$

1240. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$. **1241.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+2x+5}}$.

1242. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$. **1243.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

4. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ **görnüşdäki integrallar.**

Bu görnüşdäki integrallary integrirlemek üçin ilki bilen kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp almaly, soňra bolsa aşakdaky esasy integrallardan peýdalanmaly:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{x^2+A}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

1244. $\int \sqrt{2-x-x^2}dx.$

Çözülişi.

$$\int \sqrt{2-x-x^2}dx = \int \sqrt{(\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2}+x)^2}d(\frac{1}{2}+x) = \frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2} +$$

$$+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C.$$

1245. $\int \sqrt{x^2+2x+5}dx.$

Çözülişi. $\int \sqrt{x^2+2x+5}dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}d(x+1) = \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} +$

$$+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$$

1246. $\int \sqrt{x-x^2}dx.$ **1247.** $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx.$

1248. $\int \sqrt{x-4x^2}dx.$

§ 5. Ýönekeý droblaryň integrirlenilişi

Eger $P(x)$ we $Q(x)$ hakyky koeffisientli köpagza bolsa, onda

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

görnüşdäki funksiýalara rasional droblar diýilýär. Eger sanawjydaky köpagzanyň derejesi maýdalawjydaky köpagzanyň derejesinden kiçi bolsa, onda oňa dogry rasional drob diýilýär.

Her bir rasional droby aşakdaky ýaly tükenikli ýönekeý droblaryn jemi görnüşinde ýazyp bolýandyr:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^2}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

şu erde n natural san bolup, $n>1$, x^2+px+q köpagzanyň kökleri bolsa hyýaly sanlardyr.

1249. $\int \frac{A}{x-a}dx.$

Çözülişi.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

1250. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx.$

Çözülişi.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

1251. $\int \frac{dx}{x-17}.$

1252. $\int \frac{dx}{1+5x}.$

1253. $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}.$

1254. $\int \frac{dz}{(5z+1)^3}.$

1255. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

1256. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

1. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx, \quad \frac{p^2}{4}-q<0$ integrallar.

Bu görnüşdäki integrallary integrirlemek üçin ilki bilen maýdalawjydan doly kwadraty bölüp almaly

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Soňra $x+\frac{p}{2}=t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ ornuna goýmany ulanyp, ol aşakdaky görnüşe getirilýär:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{At+B}{t^2+1}dt=A\int\frac{tdt}{t^2+1}+B\int\frac{dt}{t^2+1}.$$

1257. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}.$

Çözülişi.

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

1258. $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx.$

Çözülişi. Bu ýerde x^2-x+1 kwadrat üçagzanyň hakyky kökleri ýokdur.

$$\frac{p^2}{4}-q=\frac{(-1)^2}{4}-1<0.$$

Şunlukda, ol biziň garaýan integrallarymyza degişlidir.

$$x^2-x+1=x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Onda

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{3x-1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Ornuna goýmany ulanalyň:

$$x-\frac{1}{2}=t\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x=\frac{t\sqrt{3}+1}{2},\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt;$$

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{(3\frac{t\sqrt{3}+1}{2}-1)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}(t^2+1)}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctgt}+C=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1259. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$

Çözülişi. Görnüşi ýaly

$$\frac{p^2}{4}-q=\frac{(-4)^2}{4}-5=-1<0, \quad x^2-4x+5=(x-2)^2+1.$$

Onda alarys:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{3x-2}{(x-2)^2+1}dx.$$

Ornuna goýmany ulanalyň:

$$x-2=t\sqrt{5-\frac{(-4)^2}{4}}=t, \quad x=t+2, \quad dx=dt, \ 3x-2=3t+4;$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{3t+4}{t^2+1}dt=3\int \frac{tdt}{t^2+1}+4\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right|+4\text{arctgt}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+4\text{arctg}(x-2)+C.$$

1260. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}.$ 1261. $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx.$

1262. $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx.$ 1263. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx.$

2. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx, \ \frac{p^2}{4}-q<0, \ n>1$ **görnüşdäki integrallary.**

Bu integrallary hasaplamak hem ýokardaky garap geçen halymyzyň hasaplanylyşyna meňzeşdir. Ilki bilen x^2+px+q kwadrat üçagzadan doly kwadraty bölüp almaly

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Soňra $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ ornuna goýmany ulanyp aşakdaky deňligi alarys:

$$\int \frac{At+B}{(t^2+1)^n}dt=A\int \frac{tdt}{(t^2+1)^n}+B\int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

bu ýerde A we B hemişelik sanlardyr. Bu deňligiň sag bölegindäki integrallaryň birinjisi aňsat tapylýandyr, ikinjisi bolsa gaýdymly formulalaryň kömegi bilen tapylýar.

1264. $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx.$

Çözülişi. Bu mysalda $\frac{p^2}{4}-q=1-3<0$ we $x^2+2x+3=(x+1)^2+2.$

Onda

$$x+1=t\sqrt{2},\quad x=t\sqrt{2}-1,\quad dx=\sqrt{2}dt,$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int \frac{t\sqrt{2}-2}{4(t^2+1)^2}\sqrt{2}dt=\frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{4(t^2+1)}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Aşakdaky deňlik dogrudyr:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Şunlukda,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=-\frac{1}{4(t^2+1)}-\frac{\sqrt{2}t}{4(t^2+1)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}t+1}{4(t^2+1)}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}t+C=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

1265. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx.$ **1266.** $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+5)^2}dx.$

§ 6. Rasional droblaryň integrirlenilişi

Rasional droblary integrirlemegiň tertibi. Eger $P(x)$ we $Q(x)$ hakyky koeffisiýentli köpagzalar bolsa, onda

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

rasional droby integrirlemek üçin aşakdaky üç düzgüni amala aşyrmaly:

a) Eger drob nädogry bolsa onda sanawjyny maýdalawja bölüp, onuň galyndysynda dogry drob almaly:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

b) Galyndydaky $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ dogry droby ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde ýazmaly. Onuň üçin $Q(x)=0$ deňlemäni çözüp, ony birinji we ikinji tertipli köpeldijilere dargadýarlar:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l...(x^2+px+q)^n(x^2+rx+s)^n.$$

Şunlukda $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ drob aşakdaky birnäçe ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde ýazylýar:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-a}+\frac{B_2}{(x-a)^k}+...+\frac{B_l}{(x-a)^l}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

bu ýerde $A_1, B_1, \cdots, N_1, M_1, \cdots$ tapmaklyga degişli näbelli koeffisiýentlerdir.

ç) Bitin bölekdäki dogry droblaryň integrallaryny tapmaly.

2. Drobyň maýdalawjysy gaýtalanmaýan birinji tertipli köpagzalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde berlip bilner.

3. Drobyň maýdalawjysy birnäçe gezek gaýtalanýan birinji tertipli köpagzalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde berlip bilner.

4. Drobyň maýdalawjysy gaýtalanmaýan birinji we ikinji tertipli köpagzalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde berlip bilner.

5. Drobyň maýdalawjysynda ikinji tertipli köpagzalaryň gaýtalanýanlary bolup biler.

1267. $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx.$

Çözülişi.

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$$

nädogry drobdyr. Onuň bitin bölegini bölüp alalyň:

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}.$$

Şunlukda,

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int(x+1)dx-\int\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}dx.$$

Indi $\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}$ dogry droby ýönekeý droblara dargadalyň:

$$\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+1}.$$

Bu ýerden alýarys:

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-2).$$

Şunlukda,

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx==\int(x+1)dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

1268. $\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx.$ **1269.** $\int\frac{x^4dx}{(2+x)(x^2-1)}.$

1270. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$ **1271.** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

1272. $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýa dogry drobdyr. Ol droby birnäçe ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde ýazalyň:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A_0}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Bu ýerden alarys:

$$x^2+2=A_0(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3,$$

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A_0-A_1-3A_2+3B)x+B-2A_0-2A_1-2A_2.$$

Birmeňzeş derejeli näbellileriň koeffisiýentlerini biri-birine deňläp, soňky deňlikden alýarys:

$$A_2+B=0,$$

$$A_1+3B=1,$$

$$A_0-A_1-3A_2+3B=0,$$

$$B-2A_0-2A_1-2A_2=2.$$

Bu ulgamy çözüp taparys:

$$A_0 = \frac{11}{29}, \quad A_1 = \frac{47}{29}, \quad A_2 = -\frac{6}{29}, \quad B = \frac{6}{29}.$$

Indi berlen droby aşakdaky ýaly ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde ýazyp bileris:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{11}{29}\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{47}{29}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6}{29}\frac{1}{x+1} + \frac{6}{29}\frac{1}{x-2}.$$

Şunlukda,

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx = \frac{11}{29}\int \frac{1}{(x+1)^3}dx + \frac{47}{29}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \frac{6}{29}\int \frac{1}{x+1}dx +$$

$$+\frac{6}{29}\int \frac{1}{x-2}dx = -\frac{11}{29}\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{47}{29}\frac{1}{x+1} - \frac{6}{29}\ln|x+1| + \frac{6}{29}\ln|x-2| + C =$$

$$= \frac{11}{58}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{47}{29}\frac{1}{x+1} + \frac{6}{29}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

1273. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx.$ **1274.** $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}.$

1275. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx.$ **1276.** $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx.$

Çözülişi. $\frac{x^4}{x^4-1}$ drob nädogry drobdyr. Ondan bitin bölegini bölüp aýyralyň:

$$\frac{x^4}{x^4-1} = \frac{x^4-1+1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1}.$$

Diýmek,

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}dx = \int dx + \int \frac{1}{x^4-1}dx.$$

Deňligiň sag bölegindäki ikinji integraly integrirläliň:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

ýa-da

$$1 = (A+B+\tilde{N})x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + A-B-D.$$

Bu ýerden

$A+B+C=0$, $A-B+D=0$, $A+B-C=0$, $A-B-D=1$.

sistemany çözüp taparys:

$$A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{2}.$$

Onda

$$\int\frac{x^4}{x^4-1}dx=x+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=x+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

1277. $\int\frac{dx}{x^3+1}$. **1278.** $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

1279. $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+4x+5)}$ **1280.** $\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýanyň maýdalawjysyndaky kwadrat üçagzanyň hyýaly kökleri bardyr. Integrirlenýän funksiýany ýönekeý droblara dargadalyň:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+3}+\frac{F}{x+1},$$

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(Ax+B)(x+1)+(Dx+E)(x^2+2x+3)(x+1)+$$
$$+F(x^2+2x+3)^2.$$

Hemişelik koeffisientleri tapalyň:

$$A=1,\ B=-1,\ D=0,\ E=0,\ F=1.$$

Şunlukda,

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+K.$$

Indi

$$K=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

integraly hasaplalyň. $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ bolany üçin $x+1=t$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$K=\int\frac{t-2}{(t^2+2)^2}dt=\int\frac{tdt}{(t^2+2)^2}-2\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=-\frac{1}{2(t^2+2)}-2K_1.$$

Şu ýerde $K_1=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}$. Bu integral bolsa, ozal belli bolan gaýdymly formulanyň kömegi bilen tapylýar:

$$K_1=\frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Şunlukda,

$$K=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

1281. $\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$.   1282. $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$.

1283. $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

§ 7. Irrasional aňlatmalaryň integrirlenilişi

Irrasional aňlatmalaryň integrirlenilişiniň birnäçe görnüşine garap geçeliň.

I. $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right)dx$ **görnüşdäki integrallar.**

Bu integrallar $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^m$ ornuna goýmany ulanmak bilen rasional funksiňlaryň integrirlenilişine getirilýändir.

Hususy hallara garalyň.

1. Goý $a_1=0$, $b_1=1$ bolsun. Bu halda $ax+b=t^m$ ornuna goýmany ulanmak bilen rasional funksiýalardan integrirlemeklige getirilýändir.

2. $a=1$, $b=0$, $a_1=0$, $b_1=1$ bolsa, $x=t^m$ ornuna goýma ulanylmaly.

Umumy görnüşdäki

$$\int R\left[x,(\frac{ax+b}{a_1x+b_1})^r,(\frac{ax+b}{a_1x+b_1})^s\cdots\right]dx$$

integrallara garalyň (bu ýerde görkezijiler rasional san bolmalydyr). Bu görnüşdäki integrallary I görnüşe getirmek üçin r, s,... rasional droblary umumy m maýdalawja getirip bir kök görnüşinde, ýagny $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}$ görnüşde ýazmak ýeterlikdir.

II. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ **görnüşdäki integrallar.**

1. Eger $a>0$ bolsa $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ ornuna goýma ulanylýar.

2. Eger $c>0$ bolsa, onda $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$ (bu erde aýyrmak alamatyny hem ulanmak bolýar) oruna goýma ulanylýar.

3. Eger ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň kökleri hakyky we dürli bolsalar, mysal üçin bir köki α, beýleki köki β bolanda, onda kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydyp

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha) \text{ (ýa-da } \sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\beta))$$

ornuna goýma ulanylýar.

1284. $\int\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}\frac{1}{1-2x}dx.$

Çözülişi.

$\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}=t$ onda $\frac{1+2x}{1-2x}=t^3$. Bu ýerden taparys:

$$x=\frac{t^3-1}{2(1+t^3)},\quad dx=\frac{6t^2dt}{2(1+t^3)^2},\quad 1-2x=\frac{2}{1+t^3}.$$

Tapylanlary berlen integralda ornuna goýup alýarys:

$$\int\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}\frac{1}{1-2x}dx=\int t\frac{1+t^3}{2}\frac{3t^2dt}{(1+t^3)^2}=\frac{3}{2}\int\frac{t^3}{1+t^3}dt=\frac{3}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{1}{1+t^3}dt=$$

$$=\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\int(\frac{1}{1+t}-\frac{t-2}{t^2-t+1})dt=\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\ln|1+t|+\frac{3}{8}\ln|t^2-t+1|x-$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}-\frac{3}{4}\ln\left|1+\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}\right|+$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}+1\right|-\frac{3\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1285. $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Çözülişi. Integrilenýän funksiýadaky x ululygyň dereje görkezijileriniň maýdalawjylary 2 we 3 sanlardyr. Şonuň uçin $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ ornuna goýma ulanylmalydyr.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt=6\int\frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt=6\int(t^2+1)dt+$$

$$+\int\frac{6dt}{(t-1)(t+1)}=2t^3+6t+3\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt=2t^3+6t+3\int\frac{dt}{t-1}-$$

$$-3\int\frac{dt}{t+1}=2t^3+6t+3\ln|t-1|-3\ln|t+1|+C=2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

1286. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$ **1287.** $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx.$

1288. $\int\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}dt.$ **1289.** $\int\frac{x-1}{x\sqrt{x^2+3x+1}}dx.$

Çözülişi. Bu mysalda $\sqrt{x^2+3x+1}=t-x$ ornun goýma usulyny ulanalyň. Onda $x^2+3x+1=t^2-2tx+x^2$.

Şunlukda,

$$\int\frac{x-1}{x\sqrt{x^2+3x+1}}dx=\int\frac{\frac{t^2-1}{2t+3}-1}{\frac{t^2-1}{2t+3}\cdot\frac{t^2+3t+1}{2t+3}}\cdot\frac{2t^2+6t+2}{(2t+3)^2}dt=2\int\frac{t^2-2t-4}{(t^2-1)(2t+3)}dt=$$

$$=2\int\frac{(t^2-1)-(2t+3)}{(t^2-1)(2t+3)}dt=2\int\frac{dt}{2t+3}-2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln|2t+3|-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(2t+3)(t+1)}{t-1}t\right|+C=\ln\left|\frac{[2(\sqrt{x^2+3x+1}+x)+3](\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)}{\sqrt{x^2+3x+1}-1}\right|+C;$$

1290. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Çözülişi. Bu ýerde $c=1>0$ bolany üçin $\sqrt{x^2+x+1}=tx+1$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$x=\frac{1-2t}{t^2-1},\quad dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}dt,\quad \sqrt{x^2+x+1}=-\frac{t^2-t+1}{t^2-1}.$$

Tapylanlary berlen integralda ornuna goýup alarys:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}}{\frac{1-2t}{t^2-1}\,\frac{t^2-1+1}{t^2-1}}dt=-\int \frac{2dt}{1-2t}=\ln|1-2t|+C=$$

$$=\ln\left|(1-2\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x})\right|+C;$$

1291 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+6}}$.

Çözülişi. Bu ýerde $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ bolany üçin $\sqrt{(x-2)(x-3)}=t(x-2)$ ornuna goýma usulyny ulanalyň. Deňligiň iki bölegini hem kwadrata göterip, ýönekeýleşdirenimizden soň alýarys:

$$x=\frac{2t^2-3}{t^2-1},\quad dx=\frac{4t(t^2-1)-2t(2t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt=\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt.$$

Onda

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+6}}=-\int \frac{t^2-1}{2t^2-3}\,\frac{t^2-1}{t}\,\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt=-\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{3}{2}}}{t+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}-\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right|+C.$$

1292. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx.$ **1293.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

1294. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. **1295.** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$.

1296. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$. **1297.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$.

1298. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

Çözülişi. Bu ýerde $a=1>0$. Şonuň üçin $\sqrt{x^2+3}=t-x$ ornuna goýmany ulanalyň. Onda

$$dt=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+1\right)dx\,,\qquad \frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^3+3}}.$$

Şunlukda,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

1299. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. **1300.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

1301. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$. **1302.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Çözülişi. Bu ýerde $a=1>0$. Şonuň üçin $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$ ornuna goýmany ulanalyň. Onda

$$2x+2tx=t^2-2,\quad x=\frac{t^2-2}{2(1+t)},\quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt.$$

Tapylanlary integrala goýup alýarys:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{(t^2+2t+2)}{(1+t)(t+2)^2}dt.$$

Integrirlenýän funksiýa dogry rasional drobdyr:

$$\frac{t^2+2t+2}{(1+2t)(t+2)^2}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2}.$$

Bu ýerden taparys: $A=1,\ B=0,\ C=-2$.

Şunlukda,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{dt}{t+1}-2\int \frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C=$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C.$$

1303. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Çözülişi. Bu ýerde $c=1>0$ bolany üçin $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\ dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt,\quad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

Tapylanlary berlen integrala goýalyň:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt,$$

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{t+1}.$$

Bu ýerden taparys: $A=2,\quad B=-\frac{1}{2},\quad D=-3,\quad E=-\frac{3}{2}.$

Şunlukda,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = 2\int\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} - 3\int\frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1} = 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}\right| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}-1\right| + \frac{3}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}+1\right| + C.$$

§ 8. Trigonometrik aňlatmalaryň integrirlenilişi

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ görnüşdäki integrallar.

Bu görnüşdäki integrallary integrirlemek üçin $tg\frac{x}{2}=t$ ornuna goýma ulanylýar. Hakykatdan-da,

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Berlen integralda tapylanlary ornuna goýup alýarys:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ ornuna goýma käbir ýagdaýlarda çylşyrymly hasaplamalara getirýär. Şonuň üçin aşakdaky hususy ornuna goýmalar integral aşagyndaky funksiýany rasionallaşdyrmak üçin amatlydyr:

a) Eger $R(\sin x, \cos x)$ funksiýa sinusa görä täk funksiýa bolsa, ýagny

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

bolsa, onda $\cos x = t$ ornuna goýmany ulanylýar.

b) Eger $R(\sin x, \cos x)$ funksiýa kosinusa göre täk funksiýa bolsa, ýagny

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

bolsa, onda $\sin x = t$ ornuna goýmany ulanearlýar.

Eger $R(\sin x, \cos x)$ funksiýa sinusa we kosinusa görä jübüt funksiýa bolsa,

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

bolsa, onda $\operatorname{tg} x = t$ ornuna goýmany ulanýarlar.

1304. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Çözülişi. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

onda alarys:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

1305. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Çözülişi.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = \ln\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right| + C.$$

1306. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

Çözülişi. $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ ornuna goýmany ulanyp alarys:

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}=\frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}+C=\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}+C.$$

1307. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. **1308.** $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$. **1309.** $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

1310. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. **1311.** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

1312. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$.

Çözülişi. Bu mysalda integrirlenýän funksiýa sinusa görä täk funksiýadyr:

$$\frac{(-\sin x)^3}{\cos x-3}=-\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}.$$

Şonuň üçin $\cos x=t$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$\sin x=\sqrt{1-t^2},\quad x=\arccos t,\quad dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Şunlukda,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx=-\int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{t-3}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{t^2-1}{t-3}dt=\int \frac{t^2-9+8}{t-3}dt=$$

$$=\int (t+3)dt+8\int \frac{dt}{t-3}=\frac{t^2}{2}+3t+8\ln|t-3|+C=\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+$$

$$+8\ln|\cos x-3|+C.$$

1313. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Çözülişi.

$$\cos x = t, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{t^4}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^4} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

1314. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$ **1315.** $\int \sin^5 x dx.$ **1316.** $\int \cos^4 x \sin^3 x dx.$

1317. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$ **1318.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx.$

Çözülişi. Bu mysalda integrirlenýän funksiýa kosinusa görä täk funksiýadyr:

$$\frac{(-\cos x)^3}{\sin^4 x} = -\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}.$$

Şonuň üçin $\sin x = t$ ornuna goýmany ulanýarys:

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}, \quad x = \arcsin t, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{t^4}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^2} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

1319. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx.$

Çözülişi. Bu mysalda integrirlenýän funksiýa kosinusa görä täk funksiýadyr

$$\sin x = t, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x dx = \int (\sqrt{1-t^2})^5 t^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int t^2 dt -$$

$$-2\int t^4 dt + \int t^6 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

1320. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$ 1321. $\int \frac{\cos^3 x dx}{4\sin^2 x - 1}.$

2. $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$ görnüşdäki integrallar.

Bu integrallar aşakdaky formulalardan peýdalanyp integrirlenýärler:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

1322. $\int \cos 7x \cos 3x dx.$

Çözülişi.

$$\int \cos 7x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x) dx = \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

1323. $\int \sin 7x \sin 5x dx.$

Çözülişi.

$$\int \sin 7x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 12x) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$$

1324. $\int \sin 3x \cos 2x dx.$

Çözülişi.

$$\int \sin 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x) dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

1325. $\int \sin 3x \cos 5x dx.$ 1326. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} dx.$

1327. $\int \sin 10x \sin 15x dx.$ 1328. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \phi) dt.$

1329. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx.$ 1330. $\int \cos x \cos^2 3x dx.$

3. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **görnüşdäki integrallaryň hasaplanylyşy**. Goý, m ýa-da n sanlaryň haýsy hem bolsa birisi täk san bolsun.

1331. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$

Çözülişi. Bu mysalda m täk sandyr.

$$\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt$$

ornuna goýmany ulanyp alarys:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^4 x \sin x}{\sin^4 x} dx = -\int \frac{t^4 dt}{(1-t^2)^2}.$$

Bu ýerde bölekler boünça integrirlemek amatlydyr:

$$u = t^3, \quad d\vartheta = \frac{tdt}{(1-t^2)^2}, \quad du = 3t^2 dt, \quad \vartheta = \frac{1}{2(1-t^2)},$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\int \frac{t^4 dt}{(1-t^2)^2} = -\frac{t^3}{2(1-t^2)} + \frac{3}{2}\int \frac{t^2 dt}{1-t^2} = -\frac{t^3}{2(1-t^2)} +$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{t^2-1+1}{1-t^2} dt = -\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} -$$

$$-\frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$$

1332. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx.$ **1333.** $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\, dx.$

1334. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx.$ **1335.** $\int \sin^3 x dx.$

1336. $\int \frac{\cos x}{9+\sin^2 x} dx.$

Çözülişi. Bu mysalda n täk sandyr. Şonuň üçin $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$\int \frac{\cos x dx}{9+\sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{3} + C.$$

1337. $\int \cos^3 x\, dx$ **1338.** $\int \frac{\cos axdx}{\sqrt{a^2+\sin^2 ax}} dx.$

Eger $m+n$ otrisatel jübüt san bolsa, onda $\operatorname{tg} x = t$ ornuna gomany ulanýarlar.

1339. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}.$

Çözülişi. $m+n=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=-4$. Onda $\mathrm{tg}x=t$ ornuna goýmany ulanalayň:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x\sin x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x tgx}}=\int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\mathrm{tg}x}}=\int\frac{\sec^2 xd(\mathrm{tg}x)}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}=$$

$$=\int\frac{t^2+1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{\frac{3}{2}}dx+\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5 x}+2\sqrt{\mathrm{tg}x}+C.$$

1340. $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$. **1341.** $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

6. m, n položitel jübüt sanlar. Onda $\int\sin^m x\cos^n xdx$ integraly hasaplamak üçin

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

formulalardan peýdalanýarlar.

1342. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx.$

Çözülişi.

$$\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1+\cos 4x}{2}\cos 2x)dx=\frac{1}{16}\int(1+\cos 2x-\cos 4x-$$

$$-\cos 4x\cos 2x)dx.$$

şu ýerde

$$\cos 4x\cos 2x=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x$$

formulany ulanalyň:

$$\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\frac{1}{16}\int\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C.$$

1343. $\int\sin^4 x\cos^2 xdx.$ **1344.** $\int\cos^6 xdx.$

§ 9. Kesgitsiz integralyň ulanylyşy

1345. Önümi $y' = 3x^2 - 6x + 2$ bolan y funksiýany tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $y' = 3x^2 - 6x + 2$ ýa-da $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 2$

$dy = (3x^2 - 6x + 2)dx$. Şu deňligiň iki bölegini hem integrirläliň:

$$C = C_2 - C_1, \quad y = x^3 - 3x^2 + 2x + C$$

1346. Önümi $y' = 2x - 3$ bolup, $x = 2$ bolanda bahasy 6 bolan funksiýany tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $y' = 2x - 3$, $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$, $dy = (2x - 3)dx$. Bu deňligi integrirläp alarys:

$$\int dy = \int (2x - 3)dx, \quad y = x^2 - 3x + C.$$

Meseläniň şertine görä x=2 bolanda y=6. Diýmek, $6 = 2^2 - 3 \cdot 2 + C$, $C = 8$. Şunluk-da, meseläniň şertini kanagatlandyrýan funksiýa aşakdaky görnüşdedir:

$$y = x^2 - 3x + 8.$$

1347. Egriniň erkin (x, y) nokadynda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisienti $2x$ bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Şerte görä

$$k = 2x, \quad k = \text{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = x^2 + C.$$

$C-$niň erkin sanlygyna görä, egriniň erkin nokadynda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisienti $2x$ bolan egriler toplumyny aldyk. Ol egriler biri-biri bilen hemişelik san bilen tapawutlanýandyrlar. $C = 0$ bolsa, depesi koordinatalar başlangyjynda bolan $y = x^2$ parabolany, $C = 1$ bolsa, depesi (0, 1) nokatda bolan $y = x^2 + 1$ parabolany, $C = -2$ bolsa, depesi (0,-2) nokatda bolan parabolany alarys. Şu prosesi tükeniksiz dowam etdirip bolar.

1348. Erkin nokatda burç koeffisienti $\frac{y}{x}$ bolan egriniň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $k = \frac{y}{x}$, $k = \frac{dy}{dx}$ we $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Bu deňligi integrirläp alarys:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad y = Cx.$$

1349. Erkin (x, y) nokatda burç koeffisienti $x^2 - 2x$ bolan, (3,4) nokadyň üstunden geçýän egriniň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$. Şerte görä

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x, \quad dy = (x^2 - 2x)dx, \quad y = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C.$$

Indi şu egrileriň toplumyndan (3,4) nokadyň üstünden geçýänini tapalyň:

$$4 = \frac{1}{3}3^2 - 3^2 + C, \quad C = 4.$$

Onda $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$ egri meseläniň şertini kanagatlandyrýandyr.

1350. Egriniň erkin (x, y) nokadynda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisienti 1) $-3x$, 2) $x + 2$ bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

1351 $M(1,3)$ nokadyň üstünden geçýän egriniň erkin (x, y) nokadynda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisieenti $x^2 - 1$ bolsa, onuň denlemesini ýazmaly.

1352. Erkin (x, y) nokadynda burç koeffisieenti $3x^2$ funksiýa deň bolan nokatdan geçýän egriniň deňlemesini ýazmaly.

1353. Eger,

1) $y' = 4x^3 - 2x + 3$, 2) $dy = (2x + 6)dx$.

bolsa, $y(x)$ funksiýany tapmaly.

1354. $x = \pi$ bolanda asyl funksiýasy 4-e deň bolsa,

$$\int (\sin x + 3\cos x)dx$$

tapmaly.

1355. Nokadyň göniçyzykly hereketiniň tizligi $\vartheta = 3t^2 - 2t$ deňleme bilen kesgitlenen bolsa, onda onuň hereketiniň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly nokadyň goniçyzykly hereketiniň tizligi geçilen s ýoldan t wagta görä alnan önümdir:

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} = 3t^2 - 2t, \quad dS = (3t^2 - 2t)dt.$$

Integrirläp alňrys:

$$\int dS = \int (3t^2 - 2t)dt, \quad S = t^3 - t^2 + C.$$

1356 Nokadyň göniçyzykly hereketiniň tizligi $\vartheta = 3t^2 + 4$ kanun boýunça üýtgeýär. Eger $t = 2$ sekuntda nokat $20m$ aralygy geçen bolsa, onuň hereketiniň kanunyny kesgitlemeli.

Çözülişi.

$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4, \quad dS = (3t^2 + 4)dt.$$

Integrirläp taparys:

$$\int dS = \int (3t^2 + 4)dt, \quad S = t^3 + 4t + C.$$

Başlangyç şerti ulanyp, hemişelik C sany kesgitläliň:

$20 = 2^3 + 4 \cdot 2 + C, \quad C = 4$ Şunlukda, nokadyň hereketiniň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir: $S = t^3 + 4t + 4$.

1357. Başlangyç pursatda dynçlykda duran jisim hemişelik g tizlenme bilen aşak gaçýar. Onuň hereket kanunyny tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşy jisimiň göniçyzykly hereketiniň a tizlenmesi geçilen s ýoldan t wagta görä alnan ikinji tertipli önümdir.

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = g, \quad d\vartheta = gdt, \quad \vartheta = gt + C_1$$

Başlangyç şerti ulanalyň: $t = 0, \quad \vartheta = 0, \quad 0 = g \cdot 0 + C_1, \quad C_1 = 0$. Şunlukda, jisimiň hereketiniň tizligi $\vartheta = gt$ kanun boýunça üýtgeýär.

Indi jisimiň hereketiniň kanunyny tapalyň:

$$\vartheta = \frac{dS}{dt}, \quad \frac{dS}{dt} = gt, \quad dS = gtdt.$$

Integrirläp alarys:

$$S = \frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Şerte görä $t = 0$ bolanda $S = 0, \quad 0 = g\frac{0^2}{2} + C_2, \quad C_2 = 0$. Şunlukda, erkin gaçýan jisimiň hereketiniň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir: $S = \frac{gt^2}{2}$

1358. Jisim $a = (t^2 + 1)m/c$ tizlenme bilen hereket edýär. Eger $t = 1s$ pursatda jisimiň $\vartheta = 2m/s$ tizlik bilen geçen ýoly $S = 4sm$ bolsa, onda jisimiň hereket deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. $a = \vartheta'(t)$ bolanlygy üçin ilki bilen $\vartheta(t)$ kesgitläp, soňra bolsa

$S(t)$ tapalyň:

$$d\vartheta = adt = (t^2 + 1)dt, \quad \vartheta = \frac{t^3}{3} + t + C.$$

Şerte görä $t=1s$ bolanda $\vartheta=2$. Onda $2=\frac{1}{3}+1+C_1$, $C_1=\frac{2}{3}$..

Şunlukda,

$$\vartheta=\frac{t^3}{3}+t+\frac{2}{3}. \quad \frac{dS}{dt}=\vartheta, \quad dS=\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{2}{3}dt\right), \quad S=\int\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{2}{3}\right)dt=$$

$$=\frac{t^4}{12}+\frac{t^2}{2}+\frac{2}{3}t+C_2.$$

Bu ýerde $t=1$ bolanda, $S=4$. Diýmek, $4=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+C_2$, $C_2=\frac{11}{4}$.

Şunlukda,

$$S=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{11}{4}.$$

1359. Nokadyň göniçyzykly hereketiniň tizligi aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär:

1) $\vartheta=t^2-8t+2$, 2) $\vartheta=4t-3t^2$.

Onuň hereketiniň deňlemesini kesgitlemeli.

1360. Jisim $a=24t^2+8$ tizlenme bilen hereket edýär. Eger jisim $t=1s$ pursatda $\vartheta=10m/s$ tizlik bilen $S=12m$ ýoly geçen bolsa, jisimiň hereket deňlemesini ýazmaly.

1361. Nokat $a=6t-12$ tizlenme bilen göniçyzykly hereket edýär. Başlangyç $t=0$ pursatda $\vartheta_0=9m/s$ tizlik bilen geçilen ýol bolsa, 1) nokadyň hereket kanunyny we tizligini kesgitlemeli, 2) $t=1s$ wagtdan soň geçilen ýoly, tizligi, tizlinmäniň bahasyny kesgitlemeli. 3) tizligiň haýsy wagtda iň kiçi bahany alýanlygyny anyklamaly.

1362. Jisim ϑ_0 başlangyç tizlik bilen dik ýokarlygyna zyňylan bolsa, onuň hereket kanunyny tapmaly (howanyň garşylygyny hasaba almazdan).

XI BÖLÜM
KESGITLI INTEGRALLAR

§ 1. Kesgitli integralyň kesgitlemesi. Nýuton-Leýbnis formulasy

Goý, $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde kesgitlenen we çäklenen bolsun. $[a,b]$ kesimi $a = x_0 < x_1 < .. < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ nokatlar bilen n bölege böleliň we

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i) \tag{1}$$

jeme garalyň. Bu jeme integral jem diýilýär. Bu jemiň ululygy $f(x)$ funksiýadan başgada, $[a,b]$ kesimiň bölünişine we ξ_i, x_i nokatlaryň alnyşyna baglydyr. $[x_{i-1}, x_i]$ kesimleriň iň ulysynyň uzynlygyny λ bilen belgiläliň: $\lambda = \max|\Delta x_i| \to 0$ bolanda (1) jemiň predelini (eger ol bar bolsa) I bilen belgiläliň:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Eger tükenikli I san bar bolsa, onda oňa $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki kesgitli integraly diýilýär we

$\int_a^b f(x)dx$, $a,b-$sanlar integralyň çäkleri görnüşde ýazylýar. Şunlukda,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Eger $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol kesimde integrirlenýändir, onuň asyl funksiýasy bardyr we $F(x)$ asyl funksiýasy üçin

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \tag{3}$$

formula dogrudyr.

(3) deňlige Nýuton-Leýbnis formulasy diýilýär.

Nýuton-Leýbnis formulasyny ulanyp integraly hasaplamaly.

1363. $\int\limits_{-1}^{1}(2x+1)dx.$

Çözülişi.

$$\int\limits_{-1}^{1}(2x+1)dx=(x^2+x)\Big|_{-1}^{1}=(1^2+1)-((-1)^2-1)=2.$$

1364. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx.$

Çözülişi.

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx=\sin x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1365. $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x^2}.$

Çözülişi.

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Bigg|_{a}^{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

1366. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

Çözülişi.

$$\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\frac{d\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\arcsin\ln x\Big|_{1}^{\sqrt{e}}=\arcsin\ln\sqrt{e}-arc\sin(\ln 1)=$$

$$=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}.$$

Integrallary hasaplamaly.

1367. $\int\limits_{1}^{2}\frac{(x-1)^3}{x^2}dx.$

1368. $\int\limits_{0}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

1369. $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$

1370. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{y^5dy}{y+2}.$

1371. $\int\limits_{0}^{1}\frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}.$

1372. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\,d\alpha.$

1373. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi\, d\varphi.$

1374. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx.$

1375. $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$

1376. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

1377. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx.$

§ 2. Kesgitli integralda ornuna goýma usuly

Kesgitli integrallary hasaplamakda kesgitsiz integrallary hasaplamak üçin belli bolan ähli usullary ulanmak bolar.

Teorema. Goý, $y=f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde kesgitlenen hem-de üznüksiz bolsun we $x=\varphi(t)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrsyn: 1) $[\alpha, \beta]$ kesimde kesgitlenen we üznüksiz differensirlenýär, 2) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ bolsa we erkin $t\in[a, b]$ özin $a\le\varphi(t)\le b$. Onda

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

formula dogrudyr.

1378. $x=2t-1$ ornuna goýmany ulanyp, $\int\limits_1^3 \sqrt{x+1}dx$ integraly özgertmeli.

Çözülişi: $x=2t-1$ ornuna goýmadan alarys: $dx=2dt$. Eger $x=1$ bolsa $t=1$ we $x=3$ bolsa $t=2$. Şunlukda,

$$\int\limits_1^3 \sqrt{x+1}dx = \int\limits_1^2 \sqrt{2t}\cdot 2dt = 2\sqrt{2}\int\limits_1^2 \sqrt{t}dt.$$

1379. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi: $x=t^2$ ornuna goýmany ulanalyň. $dx=2tdt$. Eger $x=0$ bolsa $t=0$ we $x=4$ bolsa $t=2$ (1) formulanyň esasynda taparys:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dt = 2\left[t-\ln|1+t|\Big|_0^2\right] = 4-2\ln 3.$$

1380. $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Goý, $x=a\sin t$ bolsun. Onda $dx=a\cos t dt$. Täze integralyň predellerini tapmak üçin berlen interalyň zdklerini güman eden deňligimize goýup taparys:

$x=a\sin t$ ornuna goýmada $x=0$ bolanda $t=0$, $x=a$ bolanda $t=\frac{\pi}{2}$. Onda

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi a^2}{4}.$$

1381. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. $\sin x=t$ ornuna goýmany ulanalyň. Eger $x=0$ bolsa $t=0$ we $x=\frac{\pi}{2}$ bolsa $t=1$.

Diýmek,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}=\int\limits_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2}=\ln\frac{t-3}{t-2}\Bigg|_0^1=\ln\frac{4}{3}.$$

Integrallary hasaplamaly.

1382. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}.$

1383. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

1384. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

1385. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$

1386. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx,\quad (x=\mathrm{tg}t).$

1387. $x=\sin t$ ornuna goýmany ulanyp, $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ integraly özgertmeli.

1388. $x = \operatorname{arctg} t$ ornuna goýmany ulanyp, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ integraly özgertmeli.

Aşakdaky integrallary hasaplamaly.

1389. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$, $e^x - 1 = t^2$. **1390.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

1391. $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$.

§ 3. Bölekleýin integrirlemek

Eger $u(x)$ we $\vartheta(x)$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolup, üznüksiz önümlere eýe bolsalar, onda aşakdaky deňlik adalatlydyr:

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = [u(x)\vartheta(x)]_a^b - \int_a^b \vartheta(x)du(x)$$

ýa-da

$$\int_a^b u d\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b - \int_a^b \vartheta du. \tag{1}$$

Bu ýerde $u\vartheta\Big|_a^b$ belgileme $u(b)\vartheta(b) - u(a)\vartheta(a)$ tapawudy aňladýar.

Integrallary hasaplamaly

1392. $\int_1^2 x \ln x dx$.

Çözülişi. Bu ýerde $\ln x = u$, $d\vartheta = xdx$ hasap edip, (1) formulany ulanyp alarys:

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x} = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{4}(4-1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

1393. $\int_0^1 xe^x dx.$

Çözülişi: Eger $x=u,\ e^x dx = d\vartheta$ diýsek, onda $du = dx,\ \vartheta = e^x$ we

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

1394. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx.$

Çözülişi. Eger $e^{2x}=u,\ \cos xdx = d\vartheta$ bolsa, $du = 2e^{2x}dx,\ \vartheta = \sin x.$
(1) formulany ulanyp taparys:

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin xdx = e^{\pi} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin xdx =$$

$$= e^{\pi} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin xdx. \qquad (2)$$

(2) deňligiň sag bölegindäki integraly bölekleýin integrirläliň:

$$e^{2x}=u,\ \sin xdx = d\vartheta,\quad du = 2e^{2x}dx,\ \vartheta = -\cos x.$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx = -e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = e^{\pi} - 2(1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx) = e^{x} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx.$$

Bu ýerden taparys:

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = e^{\pi} - 2, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

1395. $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

1396. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx.$

1397. $\int_0^{\pi} x^3\sin xdx.$

1398. $\int_1^e \ln xdx.$

1399. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx.$ **1400.** $\int\limits_1^{e} \ln^3 x dx.$

1401. $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx.$ **1402.** $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx.$

§ 4. Kesgitli integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmak

Eger berlen $\int\limits_a^b f(x)dx$ kesgitli integralyň irtegrirlenýän $f(x)$ funksiýasynyň $F(x)$ asyl funksiýasyny tapmak kyn bolsa, ýa-da $f(x)$ funksiýa üçin $F(x)$ funksiýa ýok bolsa, onda kesgitli integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaga geçilýär. Kesgitli integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmak bolsa aşakdaky usullaryň kömegi bilen amala aşyrylýar.

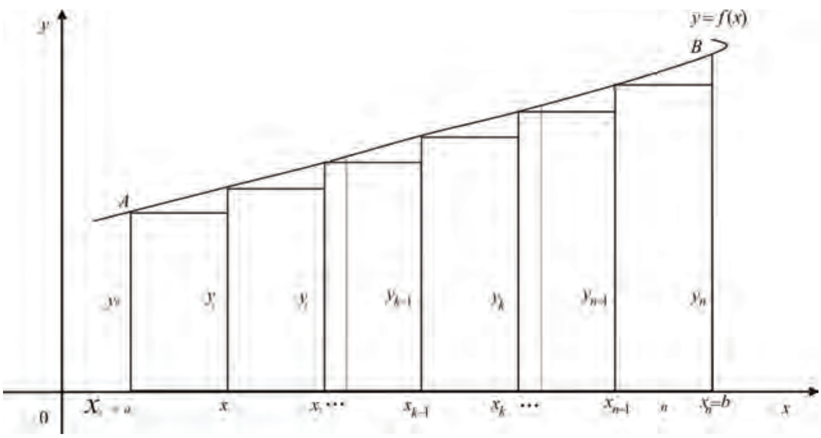
1. Gönüburçluklar usuly.

$[a,b]$ kesimi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b$ nokatlar bilen özara deň n böleklere bölelіň we $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$ bilen bolsa, $y = f(x)$ funksiýanyň degişli bahalaryny belgilälіň. Takmyn deňligi ýazalyň:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_{k-1}\Delta x_k, \quad (k=1,\ldots,n) \qquad (1)$$

şu ýerde

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$



57-nji çyzgy

Bu bolsa egriçyzykly *aABb* trapesiýanyň her bir bsleginiň meýdanynyň beýikligi y_{k-1} bolan, esasy Δx_k (57*-nji çyzgy*) bolan gönüburçluk bilen çalşyrylýandygyny görkezýär. (1) deňligi ähli $k=1,2,3,...,n$ bahalar boýunça jemläp, gönüburçluklar formulasyny alarys:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \qquad (2)$$

Eger $f'(x)$ önüm bar bolup, $[a,b]$ kesimde çäklenen bolsa, onda (2) formulanyň ýalňyşlygy üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$|\delta_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x_k\right| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \qquad (3)$$

bu ýerde $M = \max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$.

2. Trapesiýalar usuly

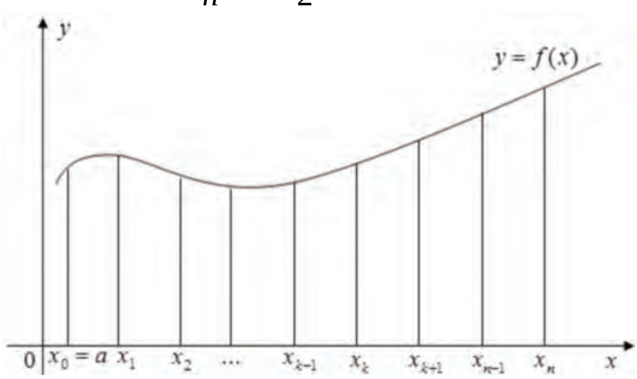
Gönüburçluklar formulasyndaky ýaly kesimi deň n böleklere bölüp, takmyny deňligi ýazalyň:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{y_{k-1} + y_k}{2}\Delta x_k. \qquad (4)$$

Bu bolsa *aABb* trapesiýany böleklere bölenimizde onuň her bir zolagynyň meýdany takmynan degişli trapesiýanyň meýdany bilen çalşyrylýanlygyny görkezýär. Degişlilikde $k=1,2,...,n$ bahalary berip trapesiýalar formulasyny alýarys:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2}\Delta x_k = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 .. + 2y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}\right). \qquad (5)$$



58-nji çyzgy

Eger $f'(x)$ bar bolup $[a,b]$ kesimde çäklenen bolsa, onda (5) formulanyň ýalňyşlygy üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$|\delta_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x_k \right| \le \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}, \qquad (6)$$

bu ýerde $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

3. Simpson usuly

$[a,b]$ kesimi $x_0 = a < x_1 < ... < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$ nokatlaryň kömegi bilen deň $2n$ böleklere böleliň we

$$y_0, y_1, y_2, ..., y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$$

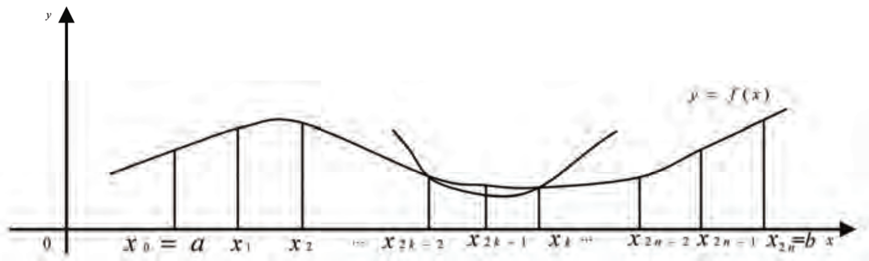
bilen $y = f(x)$ funksiýanyň degişli bahalaryny belgiläliň (*59-njy çyzgy*).

Indi trapesiýanyň meýdanyny parabola zolagynyň meýdany bilen çalşyralyň. Onda *aABb* trapesiýanyň meýdanyny takmynan hasaplamagyň formulasyny ýazyp bileris:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \big[(y_0 + 2y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{2n-1}) + \qquad (7)$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{2n-2}) \big].$$



59-njy çyzgy

Bu formula Simpson formulasy diýilýär.

Eger $[a,b]$ kesimde $f^{(IV)}(x)$ önüm bar bolup, çäklenen bolsa, onda (7) formulanyň ýalňyşlygy üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$|\delta_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \right| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \qquad (8)$$

bu ýerde $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

1403. Gönüburçluklar formulasyny ulanyp, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $(n=10)$ integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly we onuň ýalňyşlygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Ilki bilen integralyň takyk bahasyny ýazalyň:

$$\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1, \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n} = 0 + k\cdot 0,1 = k\cdot 0,1, \quad (k = 0,1,2,...,10).$$

Funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{1+(0.1)^2} \approx 0.990,$$

$$y_2 = \frac{1}{1+(0.2)^2} \approx 0.962, \quad y_3 = 0.917, \quad y_4 \approx 0.862,$$

$$y_5 = 0.8, \quad y_6 \approx 0.735, \quad y_7 \approx 0.671, \quad y_8 \approx 0.610, \quad y_9 \approx 0.552, \quad y_{10} = 0,5.$$

Onda

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,1\cdot(1+0,990+0,962+0,917+0,862+0,8+0,735+0,671+$$

$$+0,610+0,552) \approx 0,810.$$

Indi göýberilen ýalňyşlygy tapalyň:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

onda $|f'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ funksiýa [0,1] kesimde monoton kemelýär. Şonuň üçin $M_1 = \max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)| = f'(1) = \frac{2\cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = 0,5.$

$$|\delta_n| \le \frac{0,5\cdot(1-0)^2}{2\cdot 0,1} = \frac{0,5}{0,2} = 0,25.$$

Şunlukda,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,810 \pm 0.25.$$

alarys.

1404. Trapesiýalar formulasy boýunça $n=10$ bolanda

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

Çözülişi. $a=0,\quad b=1,\quad \frac{b-a}{10}=\frac{1}{10}.$ Indi integral aşagyndaky funksiýanyň bahalaryny tapalyň:

$x_0=0,\quad y_0=\frac{1}{1+0}=1,\quad x_1=0{,}1,\quad y_0=\frac{1}{1+0{,}1}=\frac{1}{1{,}1}=0{,}9091.$

$y_2=0{,}833,\quad y_3=0{,}7992,\quad y_4=0{,}7143,$

$y_5=0{,}667,\quad y_6=0{,}6250,\quad y_7=0{,}5882,$

$y_8=0{,}5556,\quad y_9=0{,}5263,\quad y_4=0{,}5000.$

Onda trapesiýalar formulasy boýunça alarys:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{10}\Big(\frac{1.0000+0{,}5000}{2}+0{,}9091+0{,}8333+0{,}7692+0{,}7143+0{,}6667+$$

$$+0{,}6250+0{,}5882+0{,}5556+0{,}5263)=\frac{1}{10}\cdot 6{,}9377=0{,}69377\approx 0{,}6938.$$

Şu takmyn hasaplamanyň ýalňyşlygyny anyklalyň:

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\qquad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

Eger $0\le x\le 1$ bolsa, $|f''(x)|\le 2$. Şonuň üçin $M_2=2$ diýip almak bolar.

$$|\delta_n|\le\frac{2\cdot 1}{12\cdot 10^2}=\frac{1}{600}<0{,}0017.$$

1405. Simpson formulasyny ulanyp takyklygy 0,0001 çenli ýakynlyk bilen

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly.

Çözülişi. [0,1] kesimi deň 10 bölege böleliň:

$x_0=0, x_1=0.1, x_2=0.2,\ldots,x_{10}=1{,}0.$ Bulara degişli funksiýanyň bahalaryny tapalyň. Şonda takyklyk 0,0001 çenli bolanlygy üçin hasaplamany oturdan soň bäş belgä çenli alyp, ony dört belgä dogrulap alarys:

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = e^{-0^2} = 1,$$
$$x_1 = 0,1, \quad y_1 = e^{-0,12^2} = 0,99005,$$
$$x_2 = 0,2, \quad y_2 = 0,96079,$$
$$x_3 = 0,3, \quad y_3 = 0,91393,$$
$$x_4 = 0,4, \quad y_4 = 0,85214,$$
$$x_5 = 0,5, \quad y_5 = 0,77680,$$
$$x_6 = 0,6, \quad y_6 = 0,69768,$$
$$x_7 = 0,7, \quad y_7 = 0,61263,$$
$$x_8 = 0,8, \quad y_8 = 0,52729,$$
$$x_9 = 0,9, \quad y_9 = 0,44486,$$
$$x_{10} = 1,0, \quad y_{10} = 0,36788.$$

Bu ýerden:

$$y_0 + y_{10} = 1,36788.$$
$$4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 3,74027 = 14,96108,$$
$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3,03790 = 6,07580.$$

Meseläniň şertine görä rusgat berilýän nätakyklyk $0,0001$-den geçmeli däl. Şonuň üçin [0,1] kesimi $2n$ böleklere bölmeklik aşakdaky deňsizlikden tapylýar:

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} < 0,0001.$$

$b - a = 1$ bolany üçin M_4 tapmaly.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$f''(x) = 2(2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2},$$
$$f'''(x) = -4(2x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2},$$
$$f^{(IV)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3) \cdot e^{-x^2},$$
$$f^{(IV)}(0) = 12, \quad f^{(IV)}(1) = -\frac{20}{e}, \quad \left| f^{(IV)}(1) \right| = \frac{20}{e} < 12.$$

Şunlukda,

$$M_4 = \max \left| f^{(IV)}(x) \right| = f^{(IV)}(0) = 12,$$
$$\frac{12}{180 \cdot (2n)^4} < 0,0001, \quad n^4 > \frac{125}{3}, \quad n \geq 3.$$

Hasaplamak üçin $n=5$ alýarys. Şonda nätakyklyk 0,0001-den geçmeýär.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{1,36788+6,07580+14,86108}{6\cdot 5}\approx 0,7468.$$

1406. Gönüburçluklar formulasyny ulanyp,

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx, \quad (n=12)$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

1407. Gönüburçluklar formulasyny ulanyp,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad (n=10)$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

1408. Trapesiýalar formulasyny ulanyp,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad (n=8)$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

1409. $n=10$ diýip $\int_2^4 x^2dx$ kesgitlenen integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

1410. Simpson formulasyny ulanyp,

$$\int_0^1 x^2dx, \quad (n=10)$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

1411. Simpson formulasyny ulanyp, 0,001 takyklyk bilen

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$$

integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

§ 5. Hususy däl integrallar

1. Çäklenmedik funksiýanyň integraly

Goý, $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimiň a nokadyndan başga nokatlarda kesgitlenen bolsun. Eger, $f(x)$ funksiýa her bir $[a+\varepsilon, b]$, $(\varepsilon > 0, a+\varepsilon < 0)$ kesimde integrirlenýän bolup $\varepsilon \to 0$ bolanda

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = I \tag{1}$$

predel bar bolsa, şol predele $[a, b]$ kesimde $f(x)$ funksiýadan alnan hususy däl integral diýilýär we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{2}$$

Şu halda (2) hususy däl integral bar diýilýär we şol integrala ýygnanýan integral diýilýär. Tersine bolan halda bolsa hususy däl integrala dargaýan integral diýilýär.

Şeýle hem, eger b nokatda $f(x)$ funksiýa çäklenmedik bolsa,

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

hususy däl integral kesgitlenip bilner,

Goý, indi $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimiň $c\,(a < c < b)$ nokadynda çäklenmedik bolsun. Onda $[a,b]$ kesimi $[a,c)$ we $(c,a]$ böleklere bölüp, alarys:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Eger-de $f(x)$ funksiýa $[a,c-\varepsilon]$ we $[c-\varepsilon,b]$ kesimlerde integrirlenýän bolup, $\varepsilon \to 0$ bolanda tükenükli

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx = I_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx = I_2$$

predeller bar bolsa, $\int_{a}^{b} f(x)dx$ integrala $f(x)$ funksiýadan $[a, b]$ kesim boýunça alnan hususy däl integral diýilýär.

Eger-de $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimiň a,b we c nokatlarynda çäklenmedik bolsa, onda erkin $\varepsilon>0$ sany almak bilen $[a,b]$ kesimi

$$[a+\varepsilon,d],[d,c-\varepsilon],[c+\varepsilon,k],[k,b-\varepsilon]$$

kesimlere bölüp,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+\varepsilon}^{d} f(x)dx+\int_d^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{k} f(x)dx+\int_k^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

deňlikde $\varepsilon\to 0$ bolanda predele geçip $[a,b]$ kesimde $f(x)$ funksiýadan alnan hususy däl integraly kesgitläp bolar.

Köplenç halatlarda çäklenmedik funksiýadan hususy däl integrallaryň ýygnanýandygyny anyklamak üçin aşakdaky nyşanlardan peýdalanýarlar:

Goý, takyklyk üçin $f(x)$ funksiýa $x=a$ nokatda çäklenmedik bolsun. Onda $\int_a^b f(x)dx$ integral:

a) $|f(x)|\le\dfrac{M}{(x-a)^m}$ we $m<1$ bolsa ýygnanýar;

b) $|f(x)|\ge\dfrac{M}{(x-a)^m}$ we $m\ge 1$ bolsa dargaýar.

1412. $I=\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Kesgitlemä görä I hususy integral bardyr we $x=0$ nokatda $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ funksiýa çäklenmedikdir. Onda alarys:

$$\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2-2\sqrt{\varepsilon}.$$

Diýmek,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim 2-2\sqrt{\varepsilon})=2.$$

1413. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, $(0<x<1)$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $(0<x<1)$ funksiýa $x=0$ we $x=1$ nokatlarda çäklenmedik funksiýadyr. Şu funksiýadan alnan hususy däl integraly tapmak üçin

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1/2}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

predelleri tapmaly bolýarys:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to 0}2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1/2}=$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-\arcsin\sqrt{\varepsilon}\right]=2\cdot\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=2\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\sqrt{x}\Big|_{1/2}^{1-\varepsilon}=2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\sqrt{1-\varepsilon}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=$$

$$=2\left[\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Şunlukda,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{1-\varepsilon}\right)\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

1414. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ hususy däl integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Integral aşagyndaky $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ funksiýa $x=2$ nokatda tükeniksizlige öwrülýär. Ol integrirleme aralygyň galan nokatlarynda üznüksiz funksiýadyr. Şoňa görä $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ funksiýa islendik $[0,2-\varepsilon]$ aralykda integrirlenýän funksiýadyr. Şunluk bilen kesgitlemä görä alarys:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1415. $\alpha > 0$ görkezijiniň haýsy bahalarynda

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

hususy däl integral ýygnanýar we haýsy bahalarynda dargaýar?

Çözülişi. $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ funksiýa $\alpha > 0,\ x = 0$ nokatda tükeniksizlige öwrülýär we integrirleme kesimiň galan nokatlarynda üznüksizdir. Şoňa görä $[\varepsilon,\ 1]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ kesimde integrirlenýän funksiýadyr. Ilki bilen $\alpha \neq 1$ diýip, kesgitlemä görä ýazyp bileris:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon^{1-\alpha}).$$

Bu ýerde iki halyň bolmagy mümkin:

1) $\alpha < 1$ onda $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-\alpha} = 0$ we $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$

Bu halda hususy däl integral ýygnanýar.

2) $\alpha > 1$ onda $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-\alpha} = \infty$ we $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty.$

Bu halda hususy däl integral dargaýar.

Eger $\alpha = 1$ bolsa, onda

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = +\infty.$$

Hususy däl integral bu halda hem dargaýar.

Berlen integrallaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny görkezmeli.

1416. $\displaystyle\int_0^5 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$

Çözülişi. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ funksiýa $x = 0$ nokatda tükeniksizlige öwrülýär. Galan nokatlarda bolsa üznüksizdir. $x > 0$ bolanda

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

bu ýerde $M = 1$ we $m = \frac{1}{2} < 1$. Ýygnanma nyşany esasynda integral ýygnanýar.

1417. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}\,dx.$

Çözülişi. Integrirlenýän funksiýa

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}.$$

$x = 0$ nokatda kesgitlenen däldir. Integrirleme aralygynyň galan nokatlarynda bolsa funksiýa üznüksizdir. Deňgüýçli tükeniksiz kiçi ululyklary ýazalyň:

$$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x, \qquad \ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right) \sim \sqrt[5]{x^3}, \qquad x \to 0.$$

Onda

$$\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}.$$

Bu ýerde $m = \frac{2}{5} < 1$ we $M = 1$. Diýmek, integral ýygnanýar.

1418. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}\,dx.$

Çözülişi. Integral aşagyndaky funksiýa

$$f(x) = \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}$$

integrirleme aralygyň içki $x = 1$ nokadynda tükeniksizlige öwrülýär. Şoňa görä-de integraly iki integralyň jemi görnüşinde ýazyp, olaryň her haýsysyny aýratynlykda derňäliň:

$$\frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx = \int_0^1 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx.$$

Ähli $x-$lar üçin $2+\sin x > 0$. Şoňa görä

$$\frac{2+\sin x}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Bu ýerde $M=1, m=2>1$. Şonuň üçin iki integral hem dargaýandyr. Diýmek, berlen integral dargaýar.

Integrallary hasaplamaly

1419. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$.

1420. $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1421. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

1422. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$.

1423. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

1424. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg} x dx$.

1425. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

1426. $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x^3-7x+10}$.

1427. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

2. Tükeniksiz predelli hususy däl integrallar

Goý, $f(x)$ funksiýa $x>a$ üçin kesgitlenen we $a \leq x \leq b$ aralykda berlip şol aralygyň islendik böleginde integrirlenýän bolup, $b \to \infty$ bolanda

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = I, \quad (b>a)$$

predel bar bolsa, şol predele $f(x)$ funksiýadan a-dan ∞ çenli alnan hususy däl integral diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$I = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Eger-de şu predel tükeniksizlige deň bolsa ýa-da ýok bolsa, hususy däl integrala dargaýan integral diýilýär. Tersine bolan halda bolsa hususy däl integrala ýygnanýan integral diýilýär.

$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ hususy däl integral hem edil şoňa meňzeşlikde kesgitlenýär:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Şeýle hem $(-\infty,\infty)$ aralykda hususy däl integral kesgitlenip bilner:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Şu görnüşdäki hususy däl integrallaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny köplenç halatlarda aşakdaky nyşanlaryň kömegi bilen kesgitlenilýär:

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad (a>0).$$

Integral:

a) $|f(x)| \le \dfrac{M}{x^m}$ we $m>1$ bolsa ýygnanýar;

b) $|f(x)| \ge \dfrac{M}{x^m}$ we $m \le 1$ bolsa dargaýar.

M we m hemişelik sanlardyr.

1428. Integraly hasaplamaly:

$$\int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \qquad (a>1)$$

Çözülişi. Integral aşagyndaky funksiýanyň $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x=0$ nokatdan beýleki nokatlarda üznüksiz bolany sebäpli, şol funksiýanyň $[a,+\infty)$, $(a>0)$ kesimdäki integralyna garalyň:

$$\int\limits_{à}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{a}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a}.$$

1429. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ funksiýanyň $(-\infty,\infty)$ aralykda hususy däl integralyny hasaplamaly.

Çözülişi. $(-\infty,\infty)$ aralygy $(-\infty,0)$ we $(0,\infty)$ aralyklara bölüp, alarys:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\text{arctg}b-\text{arctg}0)=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}(\text{arctg}0-\text{arctg}a)=\frac{\pi}{2}.$$

Şunlukda,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

1430. $\int_0^{\infty}x\sin xdx$ hususy däl integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Kesgitlemeden peýdalanalyň:

$$\int_0^{\infty}x\sin xdx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}x\sin xdx.$$

Bölekleýin integrirlemäni ulanalyň:

$$u=x,\quad d\vartheta=\sin xdx,\quad du=dx,\quad \vartheta=-\cos x,$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}x\sin xdx=\lim_{b\to\infty}\left(-x\cos x\Big|_0^b+\int_0^{b}\cos xdx\right)=\lim_{b\to\infty}(-b\cos b+\sin b).$$

Şu predeliň ýoklugyna görä integral dargaýar.

Nyşanlary ulanyp, aşakdaky integrallaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny barlamaly.

1431. $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx.$

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $|\cos x|\le 1$. Onda integrirlenýän $f(x)=\frac{\cos x}{x^3}$ funksiýa üçin

$$\left|\frac{\cos x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$$

deňsizlik dogrudyr.

Bu ýerde $M=1$ we $m=3>1$. Diýmek, integral ýygnanýar.

1432. $\int_2^{\infty}\frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx.$

Çözülişi. Ähli $x\ge 2$ üçin alarys:

$$0 < \arcsin\frac{1}{x} \le \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1, \quad 1 + x\sqrt{x} > x\sqrt{x}.$$

Bu ýerden

$$\frac{3 + \arcsin\frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}} < \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$m = \frac{3}{2} > 1$ we $M = 4$. Diýmek, integral ýygnanýar.

1433. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}dx.$

1434. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx.$

1435. $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}.$

1436. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

1437. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

1438. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin xdx.$

1439. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx.$

1440. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$

1441. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2}dx.$

1442. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1443. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$

§ 6. Tekiz şekiliň meýdanyny hasaplamak

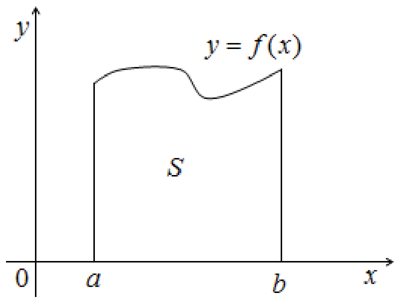
Deňlemesi $y = f(x)$ bolan üznüksiz egri çyzyk, absissa oky we $x = a$, $x = b$ gönüler bilen çäklenen şekiliň meýdany (*60-njy çyzgy*)

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

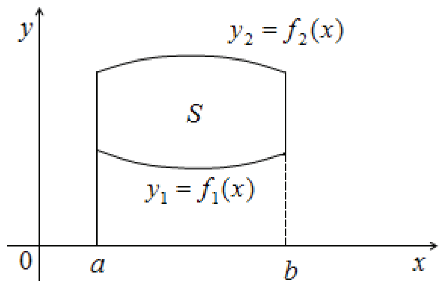
formula bilen tapylýar.

Egerde şekil aşakdan $y_1 = f_1(x)$, ýokardan bolsa $y_2 = f_2(x)$ üznüksiz egri çyzyklar bilen $(a \le x \le b)$ çäklenen bolsa, (*61-nji çyzgy*), ol şekiliň meýdanyny tapmaklygyň formulasy aşakdaky görnüşdedir

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (2)$$



60-njy çyzgy

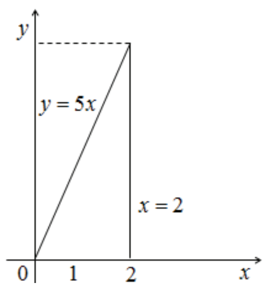


61-nji çyzgy

1444. $y = 5x$ göni çyzyk, Ox oky we $x = 2$ göni çyzyk bilen çäklenen tekiz şekiliň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. $y = 5x$ we $x = 2$ göni zyzyklary gurup (*62-nji çyzgy*) üçburçlugy alarys:

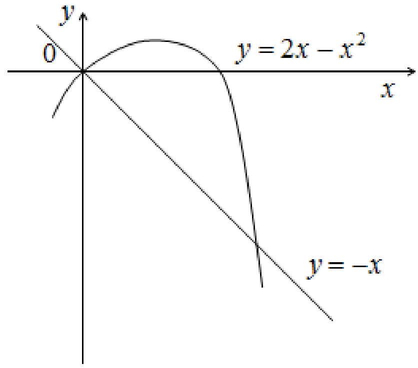
$$\int_0^2 5xdx = \left.\frac{5x^2}{2}\right|_0^2 = 10.$$



62-nji çyzgy

1445. $y = 2x - x^2$ parabola we $y = -x$ göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. Berlen parabolany we göni çyzygy guralyň (*63-nji çyzgy*). Bu deňlemeleri bilelikde çözüp kesişme nokatlaryň koordinatalaryny taparys.



63-nji çyzgy

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}, \quad 3x - x^2 = 0,$$

$$x(3-x) = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 3.$$

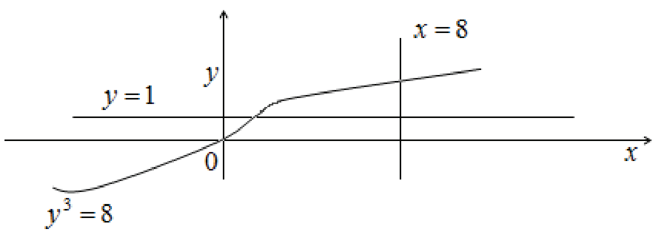
Onda taparys:

$$S = \int_0^3 \left[(2x - x^2) - (-x) \right] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

1446. $y^3 = x$ egri $y = 1$ göni çyzyk we $x = 8$ dik göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. Funksiýalaryň grafigini gurup şekili tapalyň (*64-nji çyzgy*).



64-nji çyzgy

$$S = \int_1^2 \left[8 - y^3 \right] dy = 8 \cdot y \Big|_1^2 - \frac{y^2}{4} \Big|_1^2 = 8 - \frac{15}{4} = 4\frac{1}{4}\ kw.bir.$$

1447. $y^2 = 9x$ egri çyzyk we $y = 3x$ göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

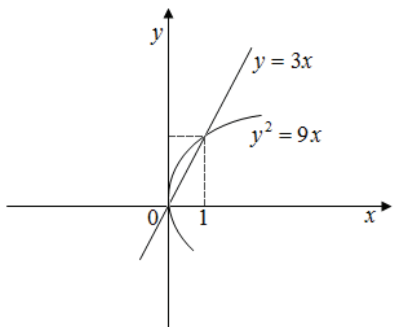
Çözülişi. $y^2 = 9x$ we $y = 3x$ çyzyklary guralyň (*65-nji çyzgy*). Ilki bilen berlen çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapalyň. Onuň üçin

$$\begin{cases} y^2 = 9x \\ y = 3x \end{cases}$$

sistemanyň çözüwini tapalyň. $x_1 = 0,\quad y_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad y_2 = 3.$ Onda alarys:

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 \sqrt{9x}dx - \int_0^1 3xdx = 3\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int_0^1 xdx =$$

$$= 3\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - 3\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\ kw.bir.$$



65-nji çyzgy

1448. $y = \ln x$ egri, Ox ok we $x = e$ göni bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1449. $y^2 = 2px$ we $x^2 = 2py$ parabolalar bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1450. $y = x^3$ egri çyzyk., $y = 8$ göni çyzyk we Ox ok bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1451. $y = 2 - x^2$ we $y^3 = x^2$ egriler bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1452. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbola bilen we $x = 2a$ göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1453. $y=e^x$, $y=e^{-x}$ egriler bilen we $x=1$ göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1454. $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$ parabolalar bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

2. Deňlemesi parametrik görnüşde berlen egri çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdany hasaplamak

Goý, egriniň deňlemesi parametrik görnüşde berlen bolsun $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Onda Ox ok, $x=a$, $x=b$ dik göni çyzyklar we berlen egri çyzyk bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdany aşakdaky formulalaryň biri bilen tapylýar:

$$S_1=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,\qquad S_2=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt, \tag{2}$$

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')dt, \tag{3}$$

bu ýerde α we β, sanlar t parametriň üýtgeýän aralygy.

1455. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ ellips bilen çäklenen meýdany tapmaly.

Çözülişi. Bu ýerde (3) formuladan peýdalanmak amatlydyr.

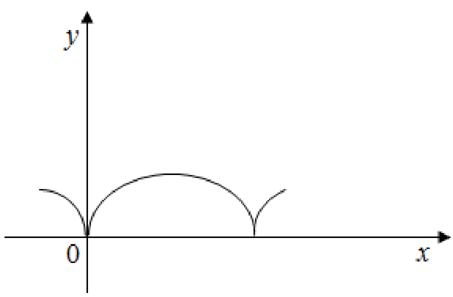
$y'=b\cos t$, $x'=-a\sin t$, $xy'-yx'=a\cos tb\cos t+b\sin ta\sin t=ab.$

Onda

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-yx')dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abdt=\pi ab.$$

1456. $\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$

egriniň bir şahasy we Ox ok bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly (*66-njy çyzgy*).



66-njy çyzgy

Çözülişi.

Bu ýerde (2)-nji formulany ulanmak amatlydyr.

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\left[a(t-\sin t)\right]' dt=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt=$$

$$=a^2(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

1457. Deňlemesi $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1 \quad (x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi)$ bolan astroida bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1458. $x=a(2\cos t-\cos 2t), \quad y=a(2\sin t-\sin 2t)$ kardoida bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1459. Deňlemesi parametrik görnüşde berlen $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t), (0\le t\le 2\pi),\ x=a,\ y\le 0$ ýapyk egri bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1460. Deňlemesi parametrik görnüşde berlen $x=a\cos t$, $y=b\sin t cos^2 t$ egri bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

3. Deňlemesi polýar koordinatalar sistemasynda berlen egri çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanynyň hasaplanylyşy

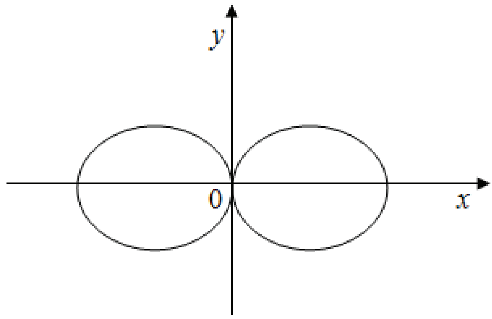
Deňlemesi $\rho=\rho(x)$ bolan üznüksiz egri çyzyk polýar koordinatalar sistemasynda berlen bolsun. Onda $\rho=\rho(x)$ egri, $\varphi_1=\alpha$ we $\varphi_2=\beta$ şöhleler bilen çäklenen sektoryň meýdany

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$$

formula bilen tapylýar

1461. Polýar deňlemesi $\rho^2=2a^2 cos 2\varphi$ bolan ($a-$hemişelik san) egri çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly. Bu şekile Bernulli lemniskatasy diýilýär (*67-nji çyzgy*).

Çözülişi.

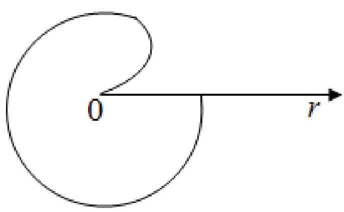


67-nji çyzgy

Lemniskatanyň meýdanyny S bilen belgiläp, onuň dörtden biriniň meýdanyny tapalyň. Şol bölekde φ burç $0-$dan $\frac{\pi}{4}$ çenli üýtgeýär. Şonuň üçin

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}a^2,\quad S=a^2.$$

1462. Deňlemesi $r=a\varphi$ bolan Arhimed spiralynyň bir aýlawy we polýar oky bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly (*68-nji çyzgy*).



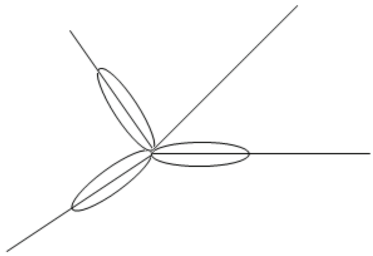
68-nji çyzgy

Çözülişi.

$$S=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

1463. Deňlemesi $r=a\cos 3\varphi$ egri bilen çäklenen meýdany tapmaly. Bu şekile üçýaprakly bägül diýilýär (*69-njy çyzgy*).

Çözülişi.



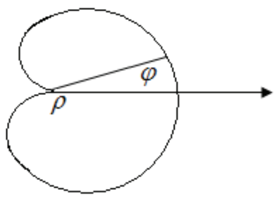
69-njy çyzgy

Ähli şekiliň altydan bir böleginiň meýdany $\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi d\varphi$ deňdir. Şonuň üçin

$$S = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi d\psi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

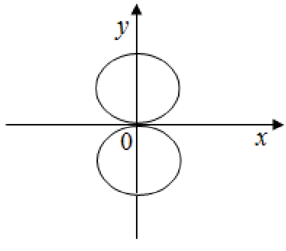
1464. $r = a\sin 3\varphi$ egri bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1465. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ kardioida bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly (*70-nji çyzgy*).



70-nji çyzgy

1466. Deňlemesi $\rho = 4\sin^2\varphi$ bolan egri bilen çäklenen şekiliň meýdanynyň bir bölegini tapmaly (*71-nji çyzgy*).



71-nji çyzgy

1467. $\rho = a(1-\cos\varphi)$ kardioida we $\rho = a$ töwerek bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

§ 7. Duganyň uzynlygynyň hasaplanylyşy

Deňlemesi $y = f(x)$ görnüşde berlen egri çyzyga garalyň. Onda bu egriniň $A(a, f(a))$ we $B(b, f(b))$ nokatlaryny birikdirýän dugasynyň uzynlygy aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx. \qquad (1)$$

Eger-de, egri çyzyk özüniň parametrik deňlemesi bilen berlen bolsa, ýagny $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t_0 \le t \le T)$ (bu ýerde $\varphi(t)$ we $\psi(t)$ funksiýalar $[t_0, T]$ kesimde üznüksiz $\varphi'(t)$ we $\psi'(t)$ önümlere eýedirler), onda egriniň dugasynyň uzynlygy aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (2)$$

Goý, egri özüniň polýar koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi bilen berlen bolsun:

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

Bu halda egriniň dugasynyň uzynlygy aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi. \qquad (3)$$

1468. Töweregiň uzynlygyny hasaplamaly.

Çözülişi. $x^2 + y^2 = R^2$ töweregiň deňlemesinden alarys.

$$y^2 = R^2 - x^2, \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad y'^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2}.$$

(1) formuladan peýdalanyp, taparys:

$$L = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = 2R\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2R\left[\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R} = 2\pi R.$$

1469. $y^2 = x^3$ ýarymkub görnüşli parabolanyň koordinatalar başlangyjy bilen $B(4, 8)$ nokady birleşdirýän dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

Çözülişi. $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$ (1) formuladan peýdalanalyň:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx.$$

Goý, $1+\frac{9}{4}x = t$ bolsun. $dx = \frac{4}{9}dt$. Eger $x = 0$ bolsa $t = 1$ we $x = 4$ bolsa $t = 10$.

Şonuň üçin

$$L = \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}dt = \frac{4}{9}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{10} = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

1470. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ astroidanyň uzynlygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Astroidanyň parametrik deňlemesini ýazalyň:

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Bu ýerden

$$dx = -3\cos^2 t\sin t dt, \quad dy = 3\sin^2 t\cos t dt,$$

$$y' = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t} = -\mathrm{tg}t.$$

(1)-nji formuladan peýdalanalyň:

$$L = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}(-3)\cos^2 t\sin t dt = -12\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t\cos t dt = 12\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

1471. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ parametrli deňlemesi bilen berlen egri çyzygyň bir şahasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Alarys:

$$x'(t) = a(1-\cos t), \quad y'(t) = a\sin t.$$

(2)-nji formuladan peýdalanalyň:

$$L = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

1472. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at$ wintli çyzygyň t_1-den t_2 aralykdaky dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Alarys: $x' = -r\sin t$, $y' = r\cos t$, $z' = a$. Onda

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + a^2} = \sqrt{r^2+a^2}.$$

Şunlukda,

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{r^2+a^2}\left(t_2 - t_1\right).$$

1473. $x = t^2$, $y = \dfrac{t^3}{3} - t$ egriniň Ox ok bilen kesişýän nokatlarynyň aralygyndaky dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Integrirlemegiň predellerini anyklalyň.

$x = 0$ bolsa $t = 0$, $y = 0$ bolsa $\dfrac{t}{3}(t^2 - 3) = 0$, $t = 0$, $t = \pm\sqrt{3}$.

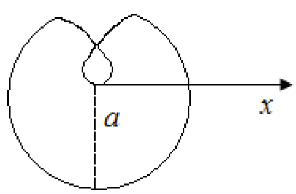
Alarys: $x' = 2t$, $y' = t^2 - 1$.

(2)-nji formuladan peýdalanalyň:

$$L = \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2 + (t^2-1)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\sqrt{3}} + t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

1474. $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ egriniň uzynlygyny hasaplamaly (*72-nji çyzgy*).

Çözülişi.



72-nji çyzgy

Bu ýerde φ burç 0 – dan 3π -e çenli üýtgeýär:

$$r' = a\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{3}.$$

(3) formulanyň esasynda alarys:

$$L = \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

1475. $\rho = a(1+\cos\varphi), \quad a>0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi)$ kardioidanyň dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

Çözülişi.

$$\rho' = -a\sin\varphi, \quad \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} =$$

$$\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| =$$

$$= \begin{cases} 2a\cos\frac{\varphi}{2}, & 0\le\varphi\le\pi. \\ -2a\cos\frac{\varphi}{2}, & \pi\le\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

Bu funksiýanyň grafiginiň simmetrikdigine görä

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a.$$

1476. $y^2 = 2px$ parabolanyň depesinden $(x,\, y)$ nokada çenli dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly $\left(x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t\right)$.

1477. $y = e^x$ egriniň $(0,1)$ we $(1,\,2)$ nokatlary birleşdirýän dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

1478. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ egriniň $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ we $\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2},\, e\right)$ nokatlary birleşdiredn dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

1479. $y = \ln x$ egriniň $x = \sqrt{3}$ – den $x = \sqrt{8}$ çenli dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

1480. $y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]$ egriniň $x = 1$ – den $x = a+1$ çenli dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

1481. $x = 2r\sin^2 t, \quad y = 2r\sin^2 t\,\mathrm{tg}t$ sissoidanyň $0-$dan t çenli dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

1482. $x = 4\sqrt{2}a\sin t, \quad y = a\sin 2t$ ýapyk egriniň uzynlygyny hasaplamaly.

1483. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$

egriniň uzynlygyny hasaplamaly.

1484. $r = a\varphi$ Arhimed spiralynyň bir aýlawynyň uzynlygyny hasaplamaly

1485. $r = a\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ egriniň dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

1486. $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{2}$ ýapyk egriniň uzynlygyny hasaplamaly.

1487. $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ egriniň $r = 2-$den $r = 4$ çenli dugasynyň uzynlygyny hasaplamaly.

§ 8. Aýlanma jisimiň göwrümi. Aýlanma üstüň meýdany

1. Eger deňlemesi $y = f(x)$ bolan üznüksiz egri çyzyk, Ox ok, $x = a$, $x = b$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýany Ox okuň daşynda aýlasak, onda emele gelen jisimiň göwrümi aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (1)$$

Eger-de egriçyzykly trapesiýa aşakdan $y_1 = f_1(x)$ ýokardan $y_2 = f_2(x)$ üznüksiz egriçyzyklar bilen çäklenen bolsa, onda bu trapesiýanyň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümi aşakdaky deňlik bilen tapylýar:

$$V = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx = \pi\int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right]dx. \qquad (2)$$

Şeýle hem $x = \varphi(y)$ üznüksiz egri çyzyk, Oy ok, $y = c,\ y = d$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň Oy okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümi aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (3)$$

1488. $y^2 = x,\quad x^2 = y$ egri çyzyklar bilen çäklenen tekiz şekiliň Ox okuň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini tapmaly.

Çözülişi.

$$x = y^2,\quad x^2 = y,\quad x^2 = y^4,\quad y^4 - y = 0,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 1.$$

(2)-nji formulany ulanyp taparys;

$$V = \pi\int_0^1 (x - x^4)dx = \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 0{,}3\pi \quad kub.\ birlik.$$

1489. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsiň uly okunyň daşynda aýlanmagyndan emele gelen ellipsoidanyň göwrümini tapmaly.

Çözülişi. Ellipsiň deňlemesinden taparys: $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$, $(-a \le x \le a)$.

$$V = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi\, a\, b^2 \quad kub\ birlik.$$

Eger-de $a = b$ bolsa göwrümi $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ bolan şary alarys.

1490. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsiň Oy okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen göwrümi hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde (3) formuladan peýdalanmak amatlydyr:

$$V = \pi\int_{-b}^{b} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left(b^2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-b}^{b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad kub.\ birlik.$$

1491. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ parametrik deňleme bilen berlen şekiliň bir arkasynyň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen şekiliň göwrümini tapmaly.

Çözülişi. Berlen şekiliň bir arkasy t parametr 0-dan 2π çenli üýtgände emele gelýändir. Şunlukda,

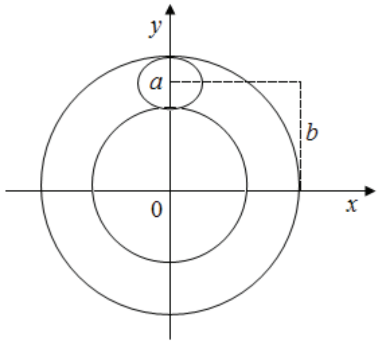
$$V = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi a^3\left\{\int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t)dt + \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}(1 + \cos 2t)dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)d(\sin t)\right\} =$$

$$= \pi a^3 \left(t - 3\sin t + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 \text{ kub. birlik.}$$

1492. Merkezi (a, b) nokatda, radiusy a bolan töweregiň öz okunyň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini tapmaly (*73-nji çyzgy*).

Çözülişi.



73-nji çyzgy

Aýlanýan töweregiň deňlemesini ýazalyň:

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2, \quad y = b - \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left[(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right] dx = 8\pi b \int_0^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Bu ýerde $x = a\sin t$ ornuna goýmany ulanyp, taparys:

$$V = 8\pi b a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8\pi b a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8\pi b a^2 \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 a^2 b.$$

1493. Esasynyň meýdany Q, beýikligi H bolan piramidanyň göwrümini integrirlemegiň kömegi bilen tapmaly.

1494. Absissa oky we $y = 2x - x^2$ parabola bilen çäklenen tekiz şekiliň abssisa okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen figuranyň göwrümi tapmaly.

1495. $x = 0$ we $x = \pi$ bolanda $y = \sin^2 x$ egriniň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini tapmaly.

1496. $y = 0{,}25x^2 + 2$ parabola we $5x - 8y + 14 = 0$ göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini hasaplamaly.

1497. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola we $y=b,$ $y=-b$ göni çyzyklar bilen çäklenen şekiliň Oy okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini tapmaly.

2. Aýlanma üstüň meýdany

$y=f(x)$ egri bilen we $x=a,$ $x=b$ göni çyzyklar bilen çäklenen şekiliň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdany aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$S=2\pi\int_a^b yds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx. \tag{4}$$

Eger egri özüniň parametrik deňlemesi bilen berlen bolsa, ýagny

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad (t_1\le t\le t_2).$$

onda aşakdaky formula dogrudyr:

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt. \tag{5}$$

1498. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $(a>b)$ ellipsiň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen ellipsoidanyň üstüniň meýdanyny hasaplamaly.

Çözülişi. Ellipsiň deňlemesinden alarys:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}.$$

(4) formulany ulanyp, alarys:

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx=\frac{4\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx=$$

$$=2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

bu ýerde $\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{c}{a}$ ellipsiň ekssentrisitetidir.

1499. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$ parametrik deňleme bilen berlen egri çyzygyň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen şekiliň üstüniň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi.

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

(5) formulany ulanalyň:

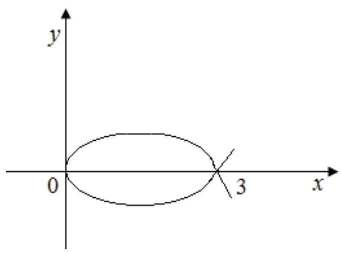
$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2(-2a\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 8\pi a^2(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}) = \frac{64}{3}\pi a^2 \text{ kw.birlik.}$$

1500. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$ astroidanyň absissalar okunyň daşynda aýslanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny tapmaly.

1501. Deňlemesi $9y^2 = x(3-x)^2$ bolan syrtmagyň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny hasaplamaly (*74-nji çyzgy*).

Çözülişi.



74-nji çyzgy

Görnüşi ýaly $0 \le x \le 3$. Onda

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}, \quad ds = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx.$$

(4) formulany ulanalyň:

$$S = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = 3\pi.$$

1502. $y = tgx$ tangensoidanyň $x = 0$ we $x = \frac{\pi}{2}$ aralykdaky böleginiň Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny hasaplamaly.

1503. Deňlemesi $4x^2 + y^2 = 4$ bolan ellipsiň Oy okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny hasaplamaly.

XII BÖLÜM
HATARLAR

§ 1. San hatarlary we olaryň ýygnanmagy

1. Esasy düşünjeler. Goý,

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

tükeniksiz san yzygiderligi berlen bolsun. Bu yzygiderligiň agzalaryndan düzülen

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

aňlatma san hatary diýilýär. a_n sana hataryň n-nji agzasy ýa-da hataryň umumy agzasy diýilýär:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (2)$$

jeme hataryň n-nji bölek jemi diýilýär. Eger bölek jeminiň yzygiderliginiň $n \to \infty$ bolanda tükenikli $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ predeli bar bolsa, onda (1) hatara ýygnanýan hatar, tersine bolan halda bolsa hatara dargaýan hatar diýilýär. Eger (1) hatar ýygnanýan bolsa, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ sana hataryň jemi,

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$$

tapawuda bolsa hataryň galyndysy diýilýär.

1504. Hataryň a_n umumy agzasy boýunça hatary ýazmaly we onuň jemini tapmaly $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Çözülişi. n sana yzygiderli 1, 2, 3,... bahalary berip, alýarys

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \; a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \; a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}, ...$$

Onda hatar aşakdaky görnüşdedir

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Şu hataryň n-nji bölek jemini ýazalyň

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Bu bölek jemiň $n \to \infty$ bolanda predelini tapmak üçin, ony aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

ýa-da

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Onda

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Diýmek, berlen hatar ýygnanýan hatardyr we onuň jemi 1-e deňdir.

1505. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

hataryň dargaýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Hataryň S_n bölek jemini ýazalyň:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Bu deňligiň sag bölegindäki her bir goşulyjyny $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bilen çalşyryp, alarys:

$$S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} n = \sqrt{n}, \quad S_n > \sqrt{n}, \text{ erkin } n \text{ üçin.}$$

Bu ýerden görnüşi ýaly n-iň çäksiz artmagy bilen S_n hem çäksiz artýandyr. Şoňa görä-de, $n \to \infty$ bolanda S_n jem tükeniksizlige ymtylýandyr:

$$S = \lim_{n\to\infty} = \infty.$$

Şunlukda, kesgitlemäniň esasynda berlen hatar dargaýandyr.

1506. $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (3)$$

garmoniki hataryň dargaýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Öňden belli bolan deňligi ýazalyň:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Şu ýerde $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ululyk artýan ululykdyr. Diýmek, n – iň islendik bahasynda

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Deňsizligiň iki bölegini hem e esasa görä logarifmirläp, alarys:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1,$$

$$\ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}.$$

n – e $1, 2, 3, ..., n$ bahalary bereliň:

$$\ln 2-\ln 1 < \frac{1}{1};$$

$$\ln 3-\ln 2 < \frac{1}{2};$$

$$\ln 4-\ln 3 < \frac{1}{3};$$

$$......................;$$

$$\ln n-\ln(n-1) < \frac{1}{n-1};$$

$$\ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}.$$

Bu deňsizlikleri yzygiderli agzama-agza goşup, alarys:

$$\ln(n+1)-\ln 1 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Deňligiň sag bölegindäki jem berlen hataryň n-nji bölek jemidir we $\ln 1 = 0$. Şunlukda,

$$S_n > \ln(n+1).$$

Şu ýerden görnüşi ýaly n sanyň çäksiz artmagy bilen $\ln(n+1)$ çäksiz artýar we şonuň bilen birlikde S_n hem çäksiz artýar, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Diýmek, berlen hatar dargaýan hatardyr.

1507. $$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... \qquad (4)$$

hataryň ýygnanýandygyny ýada dargaýandygyny anyklamaly.

Çözülişi. Hataryň $n-$nji bölek jemine garalyň

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

ýa-da

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Şu ýerde birnäçe hallaryň bolmagy mümkin.

1. Goý, $|q| > 1$, onda $|q| = 1 + \lambda$, $(\lambda > 0)$ we $|q|^n = (1+\lambda)^n > 1 + n\lambda$. $n \to \infty$ bolanda deňsizligiň sag bölegi çäksiz artýandyr, şoňa görä-de $S = \lim\limits_{n\to\infty} = \infty$;

2. Goý, $0 < |q| < 1$, onda $|q| = \frac{1}{b}$ $(b > 1)$ we

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^n} = 0, \quad (b > 1).$$

Indi hataryň bölek jeminiň tükenikli predele, tükeniksiz predele we hiç hili predele eýe bolmaýan hallaryna garalyň. Şu hallaryň her haýsysyna aýratynlykda garap geçeliň.

1. $|q| < 1$ diýeliň. Onda ýokardaky bellik esasynda $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ýagny

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Diýmek, bu halda hatar ýygnanýandyr.

2. $|q| > 1$, onda ýokardaky bellik esasynda $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Diýmek,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \infty.$$

Bu halda hatar dargaýandyr.

3. $q = -1$. Onda

$$S_n = a - a + a - a + ... + (-1)^{n-1}a = \frac{a}{2} - \frac{(-1)^n a}{2},$$

$$S_n = \frac{a}{2}(1 - (-1)^n), \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Şunlukda,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} a, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Diýmek, bu bölek jemiň predeli ýokdur. Kesgitlemä görä hatar dargaýandyr.

4. $|q|=1$. Onda $S_n = a+a+a+...+a = na,$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Kesgitlemä görä hatar bu halda hem dargaýar. Şunlukda, aşakdaky netijäni aldyk. Berlen hatar $|q|<1$ bolanda ýygnanyp galan hallaryň ählisinde dargaýandyr.

1508. Eger

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+....$$

hatar berlen bolsa, onuň n-nji agzasyny ýazmaly.

Çözülişi.

$$a_1 = \frac{1}{2\cdot 1-1}, \quad a_2 = \frac{1}{2\cdot 2-1}, \quad a_3 = \frac{1}{2\cdot 3-1}, \quad a_4 = \frac{1}{2\cdot 4-1},...$$

Şunlukda,

$$a_n = \frac{1}{2\cdot n-1}.$$

1509. Hataryň jemini tapmaly.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+2)}+...$$

1510. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapmaly.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

1511. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4},..., \frac{n+1}{n},...$

tükeniksiz yzygiderligiň agzalaryndan hatary ýazmaly we onuň $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ bölek jemlerini tapmaly.

1512. Hataryň umumy agzasy $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ formula bilen berlen bolsa, hatary we onuň S_n bölek jemini ýazmaly.

1513. Hataryň umumy agzasynyň formulasyny ýazmaly.

a) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+...$

b) $1-1+1-1+...$

ç) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{8}{25}+...$

Hataryň jemini tapmaly.

1514. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$

1515. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^n}-...$

1516. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+...+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+...$

1517. Eger

$$a_n=\frac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$$

hataryň umumy agzasy bolsa, onda onuň ilkinji 4-5 agzasyny ýazmaly.

3. Hataryň ýygnanmagynyň zerurlyk şerti

Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda $n\to\infty$ bolanda onuň umumy agzasy nola ymtylýar. Bu şert ýeterlik däldir, ýagny hataryň umumy agzasynyň nola ymtylmagyndan hataryň ýygnanmagy gelip çykýan däldir.

1518. Hataryň dargaýandygyny görkezmeli.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}+...$$

Çözülişi. Hataryň umumy agzasyny ýazalyň:

$$a_n=\frac{n}{n+1}.$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Görnüşi ýaly hataryň ýygnanmagynyň zerurlyk şerti ýerine ýetmeýär. Diýmek, hatar dargaýar.

1519. $1-2+3-4+...+(-1)^{n-1}n+...$

Çözülişi. $a_n=(-1)^{n-1}n$ umumy agzanyň $n\to\infty$ bolanda predeliniň ýokdugyna görä, berlen hatar dargaýar.

1520. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+...+\frac{2n}{2n+1}+...$

hataryň dargaýandygygny görkezmeli.

Çözülişi. Hataryň $a_n=\frac{2n}{2n+1}$ umumy agzasynyň predelini tapalyň:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}=1.$$

Diýmek, hatar dargaýar.

Hataryň ýygnanmagynyň zerurlyk şertiniň ýerine ýetýändigini ýa-da ýetmeýändigini barlamaly.

1521. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+...+\frac{n^2}{2n^2+1}+...$

1522. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{(3n-1)^2}+...$

1523. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+...+\frac{2n-1}{2n}+...$

1524. $2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+3\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+4\mathrm{arctg}\frac{1}{4}+...+n\mathrm{arctg}\frac{1}{n}+...$

§ 2. Hemişelik alamatly hatarlar

1. Deňeşdirme nyşany. Goý, agzalary položitel bolan

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n$$

iki hatar berlen bolsun. Eger $n=1,2,3,...$ sanlar üçin $u_n\le\vartheta_n$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n$ hataryň ýygnanmagyndan $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hataryň ýygnanmagy, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hataryň dargamagyndan bolsa, $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n$ hataryň dargamagy gelip çykýar.

Deňeşdirme nyşanyny ulanyp, berlen hatarlary ýygnanmaklyga derňemeli.

1526. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Çözülişi. Bu hatary dargaýan (3)-nji hatar bilen deňeşdireliň:

$$u_n = \frac{1}{\ln n}, \quad \vartheta_n = \frac{1}{n},$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \right)$$

Görnüşi ýaly $n = 2,3,4,\ldots$ sanlar üçin $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ ($u_n \geq \vartheta_n$).

Şunlukda, (3)-nji hataryň dargaýandygyna görä, bu hatar hem dargaýandyr.

1527. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hatar ýygnanýan hatardyr. Onda $n = 2$ sandan başlap $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ $(n = 2,3,4,\ldots)$ deňsizlik ýerine ýetýär. Diýmek, deňeşdirme nyşanynyň esasynda berlen hatar hem ýygnanýar.

1528. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^n}$.

Çözülişi. Bu hatary $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ ýygnanýan (4)-nji hatar bilen deňeşdireliň. $n = 1,2,3,\ldots$ bolanda $\frac{1}{(n+1)5^n} < \frac{1}{5^n}$ deňsizlik dogrudyr. Diýmek, berlen hatar hem ýygnanýan hatardyr.

Deňeşdirme nyşanyny ulanyp, aşakdaky hatarlaryň dargaýandygyny ýa-da ýygnanýandygyny görkezmeli:

1529. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n}$. 1530. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. 1531. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+3)^{5/3}}$.

1532. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$. 1533. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{3^n}$. 1534. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2. Koşi nyşany. Goý, položitel alamatly agzalary bolan

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

hatar berlen bolsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$$

predel bar bolsa, 1) $q<1$ bolanda hatar ýygnanýar. $q>1$ bolanda hatar dargaýar. $n\to\infty$ bolanda $\sqrt[n]{u_n}$ aňlatmanyň predeli bolmasa ýa-da bar bolup bire deň $(q=1)$ bolsa, Koşi nyşany boýunça hataryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny kesgitläp bolmaýar.

1535. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5\cdot n+1}\right)^n$ hatary ýygnanmaklyga derňemeli.

$$u_n=\left(\frac{n}{5\cdot n+1}\right)^n,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{5\cdot n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5\cdot n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+\frac{1}{n}}=\frac{1}{5}<1.$$

Hatar ýygnanýar.

1536. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n$ hatary ýygnanmaklyga derňemeli.

Çözülişi.

$$u_n=\left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Hatar dargaýar.

1537. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hatary Koşi nyşany bilen derňäp bolmaýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.

$u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}$, $\alpha_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}$ belgilemäni girizip alarys:

$$\ln\alpha_n = \frac{2}{n}\ln\frac{1}{n} = -\frac{2\ln n}{n}.$$

Şu gatnaşygyň predelini tapmak üçin Lopital düzgünini ulanalyň

$$\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_n = -\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1$$

ýa-da

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Şunlukda, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = 1$ bolany üçin Koşi nyşanyny ulanyp bolmaýar. Emma, ozaldan belli bolşy ýaly berlen hatar ýygnanýan hatardyr.

1538. Koşi nyşanyny ulanyp, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ hataryň ýygnanýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n} = 0 < 1.$$

Bu deňligiň dogrudygyny görkezmek üçin $e^{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + 0\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$ deňligi ulanmak ýeterlikdir.

1539. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\cdot n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$ hatary ýygnanmaklyga derňemeli.

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt[n]{n^2}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

hatar dargaýar.

Koşi ýygnanma nyşanyny ulanyp, hatarlary ýygnanmaklyga derňemeli.

1540. $\frac{2}{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+...+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+...$

1541. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3+...+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n+...$

1542. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+...$

1543. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$

1544. $1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+...$

1545. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+...+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+...$

1546. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+...+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+...$

3. Dalamber ýygnanma nyşany. Goý, položitel alamatly agzalary bolan

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

hatar berlen bolsun. Eger şu hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$$

predel bar bolsa, onda

a) $D<1$ bolanda hatar ýygnanýar;

b) $D>1$ bolanda hatar dargaýar;

ç) $D=1$ bolsa, Dalamber nyşany boýunça hataryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny kesgitläp bolmaýar.

Aşakdaky hatarlaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny barlamaly.

1547. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}.$

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot 10^n}{10^{n+1}\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{10}=\infty$$

hatar dargaýar.

1548. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}).$

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+3}})}{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+3}})=\sqrt{2}-\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2n+3}}=\sqrt{2}-1<1$$

hatar ýygnanýar.

1549. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)!\right]^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

hatar ýygnanýar.

1550. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

hatar ýygnanýar.

1551. Aşakdaky hatar üçin Dalamber nyşanynyň netije bermeýändigini görkezmeli:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Çözülişi. Dalamber nyşanyny ulanalyň

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

Görnüşi ýaly bu hataryň ýygnanýandygy ýa-da dargaýandygy barada Dalamber nyşany boýunça kesgitläp bolmaýar. Hakykatda bolsa öňden bilşimiz ýaly bu hatar ýygnanýandyr.

Hatarlaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny barlamaly:

1552. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

1553. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

1554. $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 3}{3^2}+\frac{3\cdot 4}{3^3}+\ldots+\frac{n(n+1)}{3^n}+\ldots$

1555. $1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\ldots+\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

1556. $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^{\acute{\imath}}\cdot n!}{n^n}+\ldots$

1557. $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+2^3}+\ldots+\frac{1}{1+2^{\acute{\imath}}}+\ldots$

1558. $1+\frac{3^3}{2^{2^2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{3^8}{2^{3^2}\sqrt{3}}+\ldots+\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}+\ldots$

1559. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$

1560. $\frac{3}{2}+\frac{9}{2\cdot 2^2}+\frac{27}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$

1561. $\frac{1\cdot 2}{7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{7^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{7^3}+\ldots$

1562. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots$

1563. $\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{8}}+\frac{10}{\sqrt{24}}+\ldots+\frac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}+\ldots$

4. Ýygnanmagyň integral nyşany. Goý,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

hatar berlen bolsun. Eger $x \geq 1$ argumentiň hemme bahalary üçin artmaýan üznüksiz $f(x)$ funksiýa bar bolup, $f(n)=u_n$ deňlik ýerine ýetse, onda $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hususy däl integralyň ýygnanmagy hataryň ýygnanmagynyň zerur we ýeterlik şertidir.

1564. Ýygnanmagyň integral nyşanyny ulanyp, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hatary derňemeli.

Çözülişi. Bu ýerde $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $x \geq 1$ diýip alalyň. Integraly hasaplalyň:

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{p-1}.$$

$p>1$ diýeliň. Onda $1-p<0$ we $b\to\infty$ bolanda $b^{1-p}\to 0$ we

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\frac{1}{p-1}.$$

Diýmek, bu halda

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}, \quad (p>0).$$

Ýagny hususy däl integral ýygnanýar. Onda berlen hatar hem ýygnanýar.

2) $p<1$ diýeliň. Onda $1-p>0$ we $b\to\infty$ bolanda $b^{1-p}\to\infty$ bolýar, ýagny

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p}=\infty.$$

Diýmek, hatar dargaýar.

3) Eger $p=1$ bolsa, berlen hatar dargaýan garmonik hatara öwrülýär.

1565. $\frac{1}{2(\ln 2)^2}+\frac{1}{3(\ln 3)^2}+\frac{1}{4(\ln 4)^2}+...+\frac{1}{n(\ln n)^2}+...$ hataryň ýygnanýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Goý, $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ bolsun. $x\geq 2$ bolanda $f(x)$ funksiýa üznüksizdir we x-iň artmagy bilen kemelýändir. Hususy däl integraly hasaplalyň.

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\int_2^\infty f(x)dx=\frac{1}{\ln 2}.$$

Görnüşi ýaly hususy däl integral bardyr, şoňa görä-de berlen hatar ýygnanýar.

1566. $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ hataryň dargaýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ funksiýa kemelýän üznüksiz funksiýadyr.

$$\int_2^b f(x)dx=\int_2^b \frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^b=\ln\ln b-\ln\ln 2,$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b f(x)dx=\infty.$$

Onda hususy däl integralyň dargaýandygyna görä berlen hatar hem dargaýar.

Hatarlary ýygnanmaklyga derňemeli.

1567. $\frac{1}{2\ln 2\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\ln\ln 4}+...$

1568. $\frac{1}{\ln(2!)}+\frac{1}{\ln(3!)}+\frac{1}{\ln(4!)}+...+\frac{1}{\ln(n!)}+...$

1569. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+...+\frac{1}{\sqrt{3n+1}}+...$

1570. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+...$

1571. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{1+n^2}+...$

1572. $\frac{e^{-1}}{1}+\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+...+\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+...$

§ 3. Absolýut ýygnanýan hatarlar. Alamaty gezekleşýän hatarlar.

Leýbnis teoremasy

Goý, islendik alamaty bolan san hatary berlen bolsun:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

Indi şu hataryň absolýut ululyklaryndan düzülen täze hatara garalyň:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|+... \qquad (2)$$

Eger (2) hatar ýygnanýan bolsa. onda (1) hatara absolýut ýygnanýan hatar diýilýär.

Eger (1) hatar ýygnanýan bolup, (2) hatar dargaýan bolsa, onda (1) hatara şertli ýygnanýan hatar diýilýär.

Alamaty gezekleşip gelýän hatarlar aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+a_{2n-1}-a_{2n}+...$$

Bu ýerde $a_1, a_2, a_3,...$ položitel sanlardyr.

Leýbnis teoremasy. Eger alamaty gezekleşýän hataryň umumy agzasy absolýut ululygy boýunça monoton kemelip, $a_n \to 0$ şert ýerine ýetse, onda ol hatar ýygnanýandyr.

1573. Hataryň absolýut ýygnanýandygyny görkezmeli:

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}+...$$

Çözülişi. Berlen hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen hatara garalyň

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}+...$$

Bu hataryň položitel alamatly agzalary bolan hatardygyna görä Dalamber nyşanyny ulanyp bolýar:

$$|a_n|=\frac{1}{n!},\quad |a_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Diýmek, hatar absolýut ýygnanýan hatardyr.

1574. $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3-...+(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$ hatary derňemeli.

Çözülişi. Berlen hataryň absolýut ululyklaryndan ybarat bolan hatar düzeliň:

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$$

Koşi nyşanyny ulanyp, alýarys

$$|a_n|=(\frac{n}{2n+1})^n,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Hatar absolýut ýygnanýan hatardyr.

1575. Hatary derňemeli:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$$

Çözülişi. Görnüşi ýaly

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>...\quad \text{we}\quad n\to\infty\ \text{bolanda}\ \frac{1}{n}\to 0.$$

Onda Leýbnis teoremasynyň esasynda bu hatar absolýut ýygnanýandyr.

Bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan hatar düzeliň:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Bu bolsa dargaýan garmoniki hatardyr. Diýmek, berlen hatar şertli ýygnanýandyr.

1576. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$ hataryň ýygnanýandygyny subut etmeli.

Çözülişi. Hataryň umumy agzasyny ýazalyň

$$a_n=(-1)^n\frac{2n+1}{2^n},\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Bu ýerde $b_n=\frac{2n+1}{2^n}$ belli bir belgiden başlap birsyhly nola ymtylýar. Onda Leýbnis teoremasynyň esasynda hatar ýygnanýandyr.

1577. Hataryň ýygnanýandygyny görkezmeli:

$$\sin\sqrt{1+k^2}\pi+\sin\sqrt{4+k^2}\pi+\sin\sqrt{9+k^2}\pi+\ldots+\sin\sqrt{n^2+k^2}\pi+\ldots$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$\sin\sqrt{n^2+k^2}\pi=(-1)^n\sin\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)=(-1)^n b_n \text{ we}$$

$$b_n=\sin\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)=\sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}.$$

Bu bolsa $n>n_0$ bolup başlanda b_n birsyhly kemelýändir we $n\to\infty$ bolanda nola ymtylýandyr. Diýmek, Leýbnis teoremasynyň esasynda hatar ýygnanýandyr.

1578. $-\frac{1}{\ln^2 2}+\frac{1}{\ln^2 3}-\frac{1}{\ln^2 4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}+\ldots$ hatary derňemeli.

1579. Hataryň absolýut ýa-da şertli ýygnanýandygyny kesgitlemeli.

a) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

b) $-1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}+\ldots$

1580. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$ hatara Leýbnis teoremasyny ulanyp bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny barlamaly.

Aşakdaky hatarlaryň absolýut ýa-da şertli ýygnanýandygyny anyklamaly:

1581. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+...$

1582. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...+(-1)^{\acute{\imath}-1}\frac{1}{3^{\acute{\imath}-1}}+...$

1583. $-(\sqrt{2}-1)+(\sqrt[2]{2}-1)-(\sqrt[3]{2}-1)+...+(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)+...$

1584. $-\sin\frac{\pi}{\sqrt{1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}}+...+(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}+...$

§ 4. Funksional hatarlar. Ýygnanma oblasty

Goý, umumy kesgitleniş oblastlary bolan

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_n(x), ...$$

funksiýalaryň tükeniksiz yzygiderligi berlen bolsun. Şu funksiýalardan düzülen

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

hatara funksional hatar diýilýär. Kesgitleniş oblastyň her bir $x=x_0$ nokadynda berlen funksional hatar

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+...+u_n(x_0)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

san hataryna öwrülýär. Eger şu san hatary ýygnanýan bolsa, x_0 nokada funksional hataryň ýygnanma nokady diýilýär. Ýygnanma nokatlarynyň toplumyna bolsa funksional hataryň ýygnanma oblasty diýilýär.

Funksional hatarlaryň ýygnanma oblasty köplenç halatlarda öňden belli bolan nyşanlaryň kömegi bilen tapylýar.

1585. Hataryň ýygnanma oblastyny we jemini tapmaly:

$$1+x+x^2+...+x^{n-1}+...$$

Çözülişi. Hataryň $f_n(x)$ bölek jemini ýazalyň:

$$f_n(x)=1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

Predele geçip alarys:

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x}.$$

Eger $|x|<1$ bolsa, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x}=0$, $|x|>1$ bolanda bolsa $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x}=\infty$.

Şunlukda, hatar $|x|<1$ bolanda ýygnanýandyr. Diýmek, $(-1,1)$ aralyk ýygnanma oblastydyr. Şu aralykda hataryň jemi $\frac{1}{1-x}$ ululyga deňdir.

1586. $e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+...+e^{-nx}+...$ funksional hataryň ýygnanma oblastyny tapmaly.

Çözülişi $f_n(x)=e^{-nx}$. Koşi ýygnanma nyşanyny ulanalyň:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}}=e^{-x}=\begin{cases}<1, & \text{eger } x>0\\ >1, & \text{eger } x<0\end{cases}$$

Görnüşi ýaly $x>0$ bahalar üçin hatar ýygnanýandyr, $x<0$ bahalar üçin bolsa hatar dargaýandyr. Eger $x=0$ bolsa

$$1+1+1+...$$

dargaýan hatary alýarys. Şunlukda, funksional hataryň ýygnanma oblasty $(0,+\infty)$ aralykdyr.

1587. Funksional hataryň ýygnanma oblastyny tapmaly.

$$\frac{|x|}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{|x|}{x}\right)^3+...+\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n+...$$

Çözülişi. Bu funksional hataryň ähli agzalary $x\neq 0$ nokatlaryň ählisinde kesgitlenendir. $x=0$ nokat bolsa hataryň ýygnanlma oblastyna degişli däldir.

Eger $x<0$ bolsa, $\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$. Şonuň üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

hatar alamaty gezekleşip gelýän san hatarydyr. Ol Leýbnis teoremasynyň esasynda ýygnanýandyr.

Eger $x>0$ bolsa $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$ Şonuň üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

dargaýan garmoniki hatardyr. Şunlukda, berlen hataryň ýygnanma oblasty $(-\infty,0)$ aralykdyr.

Hatarlaryň ýygnanma oblastyny tapmaly:

1588. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$

1589. $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$

1590. $x+\frac{2!}{2^2}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n!}{n^n}x^n+\ldots$

1591. $x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{(1\cdot2\cdot3)^2}{6!}x^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\ldots$

1592. $(3-x^2)+(3-x^2)^2+(3-x^2)^3+\ldots+(3-x^2)^n+\ldots$

1593. $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^n}+\ldots$

1594. $(2-x^2)+(2-x^2)^2+(2-x^2)^3+\ldots+(2-x^2)^n+\ldots$

1595. $x(x+1)+\left[\frac{x(x+2)}{2}\right]^2+\left[\frac{x(x+3)}{3}\right]^3+\ldots+\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n+\ldots$

§ 5. Mažorirlenýän hatarlar

Eger

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n+\ldots,\quad c_n\ge 0$$

ýygnanýan san hatary bolsa we

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

funksional hataryň her bir agzasy

$$|u_n(x)|\le c_n,\quad n=1,2,3,\ldots$$

deňsizligi kanagatlandyrsa, onda funksional hatara mažorirlenýän hatar, san hataryna bolsa mažorant diýilýär.

1596. $\frac{\sin x}{1+x^2}+\frac{\sin 2x}{2^2+x^2}+\frac{\sin 3x}{3^2+x^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2+x^2}+\ldots,\quad (-\infty<x<\infty)$

hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}, \quad |u_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{|n^2 + x^2|} < \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

san hatarynyň ýygnanýandygyndan berlen funksional hataryň deňölçegli ýygnanýandygy gelip çykýar.

1597. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$ hataryň deňölçegli ýygnanma aralygyny tapmaly.

Çözülişi.

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad |u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{|h|^n}{n} \le |h|^n.$$

Belli bolşy ýaly

$$|h| + |h|^2 + |h|^3 + ... + |h|^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |h|^n, \quad (|h| < 1)$$

hatar, $(-1, 1)$ aralykda ýygnanýan geometrik natardyr. Diýmek, $(-1, 1)$ aralyk hataryň deňölçegli ýygnanma aralygydyr.

1598. Funksional hataryň deňölçegli ýygnanma oblastyny tapmaly:

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^3} + ... + \frac{\sin nx}{n^n} + ...$$

Çözülişi.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^n}\right| \le \frac{1}{n^n}$$

deňsizlik x-iň ähli bahalary üçin dogrudyr.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$$

san hatary ýygnanýandyr. Hakykatdan-da,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Şunlukda, berlen funksional hatar san okunyň ähli nokatlarynda deňölçegli ýygnanýandyr.

1599. $-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}+...+\frac{(-1)^n}{x+2^n}+...\quad -2<x<\infty$ hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmeli.

1600. $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+2^5x^2}+\frac{3x}{1+3^5x^2}+...+\frac{nx}{1+n^5x^2}+...\quad |x|<+\infty$ hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmeli.

Hatarlaryň deňölçegli ýygnanma oblastlaryny tapmaly.

1601. $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+...+\frac{\cos nx}{n^2}+...$

1602. $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{4\sqrt{1+2x}}+\frac{1}{6\sqrt{1+3x}}+...+\frac{1}{2n\sqrt{1+nx}}+...$

1603. $\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{4+\cos^2 x}+\frac{1}{9+\cos^2 x}+...+\frac{1}{n^2+\cos^2 x}+...$

1604. $e^{-x^2}+\frac{e^{-2^2x^2}}{2^2}+\frac{e^{-3^2x^2}}{3^2}+...+\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}+...$

§ 6. Derejeli hatarlar. Derejeli hatarlaryň ýygnanma aralygy we ýygnanma radiusy

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{l=1}^{\infty}a_л x^л \qquad (1)$$

ýa-da

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k \qquad (2)$$

görnüşdäki funksional hatarlara derejeli hatarlar diýilýär. Bu ýerde $a_0, a_1, a_3, ...$ hemişelik sanlar bolup, olara derejeli hataryň koeffisiýentleri diýilýär. a_0 hataryň nolunjy agzasy, a_nx^n hataryň n-nji agzasydyr. (1) hatar $x=0$ bolanda ýygnanýandyr. Eger (2) hatar $|x-x_0|<R$ bolanda ýygnanýan bolup, $|x-x_0|>R$ bolanda hatar dargaýan bolsa, onda R sana hataryň ýygnanma radiusy diýilýär. $(-R,R)$ aralyga bolsa hataryň ýygnanma aralygy diýilýär. Eger derejeli hatar diňe $x=0$ bolanda ýygnanýan bolsa, onda $R=0$, eger x-ler okunyň ähli nokatlarynda ýygnanýan bolsa, $R=+\infty$.

Ýygnanma aralygyň gyraky nokatlarynda derejeli hatarlar özlerini dürli hili alyp baryarlar. Olar ol nokatlarda ýygnanyp hem, dargap hem bilerler. Ýygnanma aralygyň içki nokatlarynda hatar absolýut ýygnanýandyr.

Şu ýerde derejeli hatarlaryň ýygnanma radiuslaryny tapmak meselesi gelip çykýar. Biz derejeli hataryň ýygnanma radiusyny hataryň $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ koeffisiýentleri bilen tapmagyň iki usulyna garalyň. Onuň üçin Koşi we Dalamber nyşanlary ulanylýar.

1605. $1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + ... + n!x^n + ...$ hataryň $x = 0$ nokatda ýygnanýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Dalamber nyşanyny ulanalyň:

$$u_n = n!x^n, \quad u_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}, \quad (x \neq 1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x^n|} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty \ , \ x \neq 0$$

görnüşi ýaly bu hatar hem diňe $x = 0$ nokatda ýygnanýandyr.

1606. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ hatary derňemeli.

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}n!|}{|x^n(n+1)!|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Diýmek, bu hatar $x -$ ler okunyň ähli nokatlarynda ýygnanýandyr.

1607. $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ hatary dernemeli.

Çözülişi. Bu hatar maýdalawjysy x bolan geometrik progressiýadyr. Ol $|x| < 1$ bolanda ýygnanyp, $|x| \geq 1$ bolanda dargaýar. Şeýlelikde, bu hataryň ýygnanma oblasty $-1 < x < 1$ aralykdyr.

1608. $(1+1)^1 x + \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2^2} x^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3^2} x^3 + ... + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n + ...$ hataryň ýygnanma radiusyny tapmaly.

Çözülişi. Hataryň ýygnanma radiusy $R = \frac{1}{l}$ deňlik bilen tapylýar:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad R = \frac{1}{l} = \frac{1}{e},$$

1609. Derejeli hataryň ýygnanma radiusyny tapmaly.

$$\alpha x+\alpha^{2^2}x^2+\alpha^{3^2}x^3+\ldots+\alpha^{n^2}x^n+\ldots,\qquad (0<\alpha<1).$$

Çözülişi. $a_n=\alpha^{n^2}$, $\quad l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=0.$

Onda

$$R=\frac{1}{l}=\frac{1}{0}=\infty,\qquad R=\infty.$$

1610. Derejeli hataryň ýygnanma radiusyny tapmaly

$$\frac{(1!)^2}{2!}x+\frac{(2!)^2}{4!}x^2+\frac{(3!)^2}{6!}x^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\ldots$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!},\qquad a_{n+1}=\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}.$$

$R=\dfrac{1}{l}=4.$ Hatar $|x|<4$ bolanda hatar absolýut ýygnanýar. $(-4,4)$ hataryň ýygnanma aralygydyr.

Eger $x=4$ bolsa, biz

$$\frac{(1!)^2}{2!}4+\frac{(2!)^2}{4!}4^2+\frac{(3!)^2}{6!}4^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n+\ldots$$

san hataryny alýarys. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n(n+1)}$ bolýanlygy üçin $a_n<a_{n+1}$.

Bu ýerde a_n, $(n=1,2,3,\ldots)$ yzygiderligiň birsyhly artýandygyny görkezýär. Ol bolsa hataryň umumy agzasynyň nola ymtylýandygyny görkezýär, ýagny hatar dargaýar. Bu sebäbe görä $x=-4$ nokatda hem hatar dargaýandyr.

1611. Derejeli hataryň ýygnanma radiusyny we ýygnanma aralygyny tapmaly.

$$\frac{(x+1)}{2\cdot2\cdot3}+\frac{(x+1)^2}{2^2\cdot3\cdot4}+\frac{(x+1)^3}{2^3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$a_n=\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)},\quad a_{n+1}=\frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)(n+3)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|x+1|}{(n+3)2}=\frac{|x+1|}{2}.$$

Onda $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$ bolanda hatar ýygnanýar. $|x+1|<2,\ -2<x+1<2,$ $-3<x<1.$ Şunlukda, hataryň ýygnanma aralygy $(-3,\,1)$ bolup, onuň ýygnanma radiusy bolsa $R=2$.

1612. $\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ hataryň ýygnanma oblastyny tapmaly.

Çözülişi.

$$|a_n|=\frac{1}{n^2},\quad |a_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)^2},$$

$$R=\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

$(-1,\,1)$ aralygyň gyraky nokatlarynda hatary derňäliň. $x=1$ bahany goýup alarys:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^3}{3^3}-\frac{1^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Bu hatar bolsa absolýut ýygnanýandyr. Şeýle hem, $x=-1$ bolanda

$$-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}-\ldots+(-1)^{2n-1}\frac{1}{n^2}-\ldots$$

absolýut ýygnanýan hatary alarys. Şunlukda, hataryň ýygnanma oblasty $[-1,1]$ kesimdir.

1613. $1+2(x-1)+2^2(x-1)^2+\ldots+2^n(x-1)^n+\ldots$ hataryň ýygnanma oblastyny tapmaly.

Çözülişi. Berlen hatarda $x-1=y$ ornuna goýmany ulanalyň

$$1+2y\ +2^2y^2+\ldots+2^ny^n+\ldots$$

Şu hataryň ýygnanma radiusyny tapalyň

$$a_n=2^n,\quad a_{n+1}=2^{n+1},\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Hatary $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ aralygyň gyraky nokatlarynda derňäliň. Goý $y=\frac{1}{2}$ bolsun. Onda $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}1^n$ dargaýan hatardyr. Eger $y=-\frac{1}{2}$ bolsa, $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ dargaýan hatardyr. Şunlukda, hatar $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ aralykda ýygnanýandyr. y-i $x-1$ bilen çalşyralyň

$$-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

Diýmek, berlen hataryň ýygnanma oblasty $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ aralykdyr.

1624. $\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

Çözülişi.

$$a_n=\frac{1}{n^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}},\qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)=e\cdot\infty=\infty.$$

Diýmek, berlen hatar $(-\infty,\infty)$ aralykda ýygnanýandyr.

Hatarlaryň ýygnanma oblastlaryny tapmaly:

1615. $x-\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}-\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

1616. $1+10x+10^2x^2+10^3x^3+\ldots+10^nx^n+\ldots$

1617. $\frac{x-2}{5}+\frac{(x-2)^2}{2\cdot5^2}+\frac{(x-2)^3}{3\cdot5^3}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{n\cdot5^n}+\ldots$

1618. $\frac{2x}{1}-\frac{4x^2}{\sqrt[3]{2}}+\frac{8x^3}{\sqrt[3]{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$

1619. $1-(x-3)+(x-3)^2+\ldots+(x-3)^n+\ldots$

1620. $\frac{x-2}{\ln 2}+\frac{(x-2)^2}{\ln^2 3}+\frac{(x-2)^3}{\ln^3 4}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

1621. $\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2!}{3^{2^2}}(x-1)^2-\frac{3!}{3^{3^2}}(x-1)^3+...+(-1)^n\frac{n!}{3^{n^2}}(x-1)^n+...$

Hatarlaryň ýygnanma radiusyny we aralygyny tapmaly. Ýygnanma aralygyň ahyrlarynda hatary derňemeli.

1622. $xtg1+x^2tg\frac{1}{2}+x^3tg\frac{1}{3}+...+x^ntg\frac{1}{n}+...$

1623. $x+\frac{3^{2^2-1}}{2}x^{2^2}+\frac{3^{3^2-1}}{3}x^{3^2}+...+\frac{3^{n^2-1}}{n}x^{n^2}+...$

1624. $\sin^2(x-1)+\sin^2\frac{1}{2}(x-1)^2+\sin^2\frac{1}{3}(x-1)^3+...+\sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n+...$

§ 7. Teýlor hatary

Eger a nokady özünde saklaýan haýsy hem bolsa bir aralykda $f(x)$ funksiýanyň üznüksiz ähli önümleri bar bolsa, onda aşakdaky formula dogrudyr

$$f(x)=f(a)+f^{/}(x)(x-a)+\frac{f^{//}(a)}{2!}(x-a)^2+...\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n,$$

bu ýerde $R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$, $(a\le\xi\le x$ we n erkin bitin san). Bu formula Teýlor formulasy diýilýär.

Eger x-iň käbir bahalary üçin $n\to\infty$ bolanda $R_n\to0$ bolsa, x-iň şol bahalarynda predele geçip, Teýlor formulasyndan Teýlor hataryny alarys:

$$f(x)=f(a)+f^{/}(x)(x-a)+\frac{f^{//}(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+...$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n.$$

$a=0$ bolanda alynýan

$$f(x)=f(0)+f^{/}(x)x+\frac{f^{//}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Hatara Makloren hatary diýilýär.

Şunlukda, $f(x)$ funksiýanyň Teýlor hataryna dagydylmagy üçin aşakdaky iki şert ýerine ýetmelidir.

1) $f(x)$ funksiýanyň x argumentiniň garalýan bahalary üçin ähli tertipli önümleri bolmalydyr.

2) $n \to \infty$ bolanda $R_n \to 0$ ýerine ýetmelidir.

1625. $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ köpagzany $x-1$ tapawuda görä Teýlor hataryna dargatmaly.

Çözülişi.

$$x_0 = 1, \quad f(1) = 1, \quad f^{/}(x) = 1 - 2x + 6x^2,$$
$$f^{/}(1) = 5, \quad f''(x) = -2 + 12x, \quad f^{//}(1) = 10,$$
$$f^{///}(x) = 12, \quad f^{///}(1) = 12.$$

Onda

$$-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

1626. $f(x) = (1+x)^n$ köpagzany $x-0$ tapawuda görä Teýlor hataryna dargatmaly.

Çözülişi.

$$f(0) = 1, \quad f^{/}(0) = n, \quad f^{//}(0) = n(n-1), ...,$$
$$f^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1), ...,$$
$$f^{(n)}(0) = n(n-1), ..., 3 \cdot 2 \cdot 1,$$
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ... +$$
$$+ \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}x^k + ... + x^n.$$

Görnüşi ýaly binom üçin Nýuton formulasy Teýlor formulasynyň hususy halydyr.

1627. $f(x) = \ln(x+2)$ funksiýany $x-1$ tapawuda görä Teýlor hataryna dagytmaly.

Çözülişi. $f(x) = \ln(x+2)$ funksiýanyň önümlerini we ol önümleriň $x = 1$ nokatdaky bahalaryny tapalyň:

$$f(x) = \ln(x+2), \quad f(1) = \ln 3, \quad f^{/}(x) = \frac{1}{x+2}, \quad f'(1) = \frac{1}{3},$$
$$f^{//}(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad f^{//}(1) = -\frac{1}{9}, \quad f^{///}(x) = \frac{1 \cdot 2}{(x-2)^3},$$
$$,..., f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}, ..., f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3^n},$$

. . . .

Onda $f(x) = \ln(x+2)$ funksiýanyň Teýlor hatary aşakdaky görnüşdedir

$$\ln(x+2)=\ln 3+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{3^2}\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{2}{3^2}\frac{(x-1)^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\frac{(x-1)^n}{n}+...$$

1628. $f(x)=x^3-2x^2+5x-7$ köpagzany $x-1$ tapawuda görä Teýlor hataryna dargatmaly.

1629. $f(x)=x^{10}+2x^9-3x^7-6x^6+3x^4+6x^3-x-2$ köpagzany $x-1$ tapawu- da görä Teýlor hataryna dargatmaly.

1630. $f(x)=\dfrac{1}{10+x}$ funksiýany $x-1$ tapawuda Teýlor hataryna dargatmaly we ýygnanma aralygyny tapmaly.

1631. $f(x)=\ln x$ funksiýany $x-1$ tapawuda görä Teýloryň hataryna dargatmaly.

1632. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiýany $x-4$ tapawuda görä Teýlor hataryna dargatmaly.

1633. $f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{(x-1)(x+2)}$ funksiýany $x-$ iň derejeleri boýunça hatara dargatmaly.

2. Ýönekeý dargatmalaryň tablisasynyň ulanylyşy. Geçen bölümçedäki mysallardan görnüşi ýaly funksiýa hatara dargadylan mahalynda dagytmanyň koeffisiýentlerini tapmak üçin funksiýany birnäçe gezek differensirlemeli we şol önümleriň berlen nokatdaky bahalaryny tapmaly bolýardyk. Soňra bolsa $x-$ iň haýsy bahalarynda $n\to\infty$ bolanda $R_n\to 0$ bolýandygyny öwrenýärdik. Kähalatlarda berlen funksiýany köp gezek differensirlemek kynçylyk döredýär. Şol kynçylyklary ýeňilleşdirmek üçin öňden belli bolan aşakdaky dargatmalary ulanýarlar:

1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...;$

2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...;$

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+...;$

4. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+...;$

5. $\mathrm{arctg}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+...;$

6. $(1+x)^n = 1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot[\alpha-(n-1)\alpha]}{n!}x^n+...,$
$(-1<x<1);$

7. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...,(-1<x<1).$

1634. $f(x)=x\ln(1+x^2)$ funksaýany x görä hatara dargatmaly.

Çözülişi. (4) dargatmada x ululygy x^2 bilen çalşyryp alarys:

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+... \ , \quad (|x|<1).$$

Onda

$$x\ln(1+x^2)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n}+... \ , \quad (|x|<1).$$

1635. $f(x)=e^{-x^2}$ funksiýany x boýunça hatara dargatmaly.

Çözülişi. (1) dargatmada x ululygy $-x^2$ bilen çalşyryp alarys:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-..., \quad (-\infty<x<\infty).$$

1636. $f(x)=\ln x$ funksiýany $x-1$ tapawuda görä hatara dargatmaly.
Çözülişi. 4-nji dagytmada x ululygy $x-1$ bilen çalşyryp alarys:

$$\ln x=(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}+... \quad (0<x\le 2).$$

1637. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiýany $x-2$ tapawuda görä hatara dargatmaly.

Çözülişi.

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}.$$

Deňlikden peýdalanalyň. Bu deňligiň sag bölegine tükeniksiz kemelýän geometrik hataryň jemi görnüşinde garamak mümkin. Onuň birinji agzasy $a=\frac{1}{2}$, maýdalawjysy bolsa $q=-\frac{x-2}{2}$ deň diýip almak bolar:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots$$

ýa-da

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots$$

Şerte görä $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1, \quad 0<x<4.$

1638. $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ funsiýany x görä hatara dargatmaly.

Çözülişi. 4-nji dargatmada x ululygy $2x$ we $-x$ bilen çalşyryp alýarys

$$\ln(1+2x)=2x-2x^2+4x^3-\ldots(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n}+\ldots$$

$$\left(\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots \quad (-1<x<1).$$

Şunlukda

$$\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}\left[\ln(1+2x)-\ln(1-x)\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}2^n+1\right]\frac{x^n}{n}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{3}x^3-\frac{15}{4}x^4+\ldots\right)=x-\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{5}{4}x^4+\ldots,$$

1639. $f(x)=\ln(x+a), \quad a>0$ funksiýany x boýunça hatara dargatmaly.

1640. $f(x)=\sqrt{x+a}, \ a>0$ funkiýany x boýunça hatara dargatmaly.

1641. $f(x)=(x-\text{tg}x)\cos x$ funksiýany x boýunça hatara dargatmaly.

1642. $f(x)=\frac{1}{x-4}$ funksiýany $x+2$ jem boýunça hatara dargatmaly.

1643. $f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ funksiýany x boýunça hatara dargatmaly.

1644. $f(x)=\frac{1+x}{e^x}$ funksiýany x boýunça hatara dagytmaly.

§ 8. Furýe hatarlary

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \qquad (1)$$

hatara $[-\pi,\pi]$ kesimde kesgitlenen $f(x)$ funksiýanyň Furýe hatary diýilýär.

Bu ýerde

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad (m=0,1,2,...),$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m=1,2,3,...).$$

Eger x_0 nokat $f(x)$ funksiýanyň birinji tertipli üzülme nokady bolsa, onda (1) hatar funksiýanyň üzülme nokatlarynda Furýe hatary bolup, onuň jemi $f(x)$ deňdir, üzülme nokatlarda bolsa $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ bahany alýar. Şeýle hem, $[-\pi,\pi]$ kesimiň gyraky nokatlarynda $f(x)$ funksiýa

$$\frac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2}$$

bahany alýar diýip kabul edeliň. Eger berlen $f(x)$ funksiýanyň $[-\pi,\pi]$ kesimde tükenikli sany ekstremumy we birinji tertipli üzülme nokatlary bar bolsa, onda $[-\pi,\pi]$ kesimde Furýe hatary $f(x)$ funksiýa ýygnanýandyr (Dirihle teoremasy).

Görnüşi ýaly Furýe hatarynyň jemi bolan $f(x)$ funksiýa 2π periodly periodik funksiýadyr.

$[-l,l]$ ($l-$erkin san) kesimde berlen $f(x)$ funksiýa Dirihläniň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrsa, onda ol aşakdaky Furýe hatarynyň jemine deňdir.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m cos\frac{m\pi x}{l}+b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right).$$

Bu ýerde

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx, \quad (m=0,1,2,...),$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx, \quad (m=1,2,3,...).$$

Eger $f(x)$ jübüt funksiýa bolsa, onda onuň Furýe hatary diňe azat agzany we kosinusly agzalary saklaýar.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l},$$

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx, \quad (m = 0,1,2,...).$$

Eger $f(x)$ täk funksiýa bolsa, onda onuň Furýe hatary diňe sinusly agzalary saklaýar:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx, \quad (m = 1,2,3,...).$$

1645. $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \le 0, \\ bx, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ funksiýany Furýe hataryna dargatmaly.

Çözülişi. $f(x)$ funksiýanyň Furýe koefisiýentlerini kesgitläliň:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ax\cos mxdx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} bx\cos mxdx =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left(\frac{x\sin mx}{\pi}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos mx}{m^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{b}{m}\left(\frac{x\sin mx}{m}\Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{\cos mx}{m^2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{a}{\pi m^2}(1-\cos m\pi) + \frac{b}{\pi m^2}(\cos m\pi - 1) = \frac{a-b}{\pi m^2}\left[1-(-1)^m\right],$$

$$a_1 = \frac{a-b}{\pi}\cdot 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{a-b}{\pi\cdot 3^2}\cdot 2,\ a_4 = 0,...$$

Eger $n = 0$ bolsa

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} axdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bxdx = \frac{b-a}{2}\pi.$$

Şeýle hem

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \frac{a+b}{m}(-1)^{m+1}.$$

Şunlukda

$$b_1=\frac{a+b}{1},\quad b_2=-\frac{a+b}{2},\quad b_3=\frac{a+b}{3},\quad b_4=-\frac{a+b}{4},\dots$$

Diýmek, berlen funksiýanyň Furýe hataryny aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$f(x)=\frac{b-a}{4}\pi+\left(\frac{a-b}{2}2\cos x+\frac{a+b}{1}\sin x\right)-\frac{a+b}{2}\sin 2x+$$

$$+\left(\frac{a-b}{\pi}\frac{2}{3^2}\cos 3x+\frac{a+b}{3}\sin 3x\right)-\frac{a+b}{4}\sin 4x+\dots$$

ýa-da

$$f(x)=\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\dots)+$$

$$+(a+b)\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\dots\right)$$

1646. $f(x)=\begin{cases}2, & -2<x\le 0,\\ 2-x, & 0\le x\le 2.\end{cases}$ funksiýany Furýe hataryna dargatmaly.

Çözülişi. Furýe koefisiýentlerini tapalyň:

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}2dx+\int_0^2(2-x)dx\right]=3,$$

$$a_m=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}2\cos\frac{m\pi}{2}xdx+\int_0^2(2-x)\cos\frac{m\pi}{2}xdx\right]=$$

$$=\frac{4}{m^2\pi^2}\sin^2\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}\dfrac{4}{m^2\pi^2}, & m=1,3,\dots\\ 0, & m=2,4,\dots\end{cases}$$

$$b_n=\left[\int_{-2}^{0}2\sin\frac{n\pi}{2}xdx+\int_0^2(2-x)\sin\frac{n\pi}{2}xdx\right]=$$

$$=\int_{-2}^{0}(-2)\sin\frac{n\pi}{2}dx-\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{n\pi}\cos n\pi=\begin{cases}-\dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,\dots\\ \dfrac{2}{n\pi}, & n=2,4.\end{cases}$$

Şunlukda, funksiýanyň Furýe hatary aşakdaky görnüşdedir:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{2}+\ldots\right).$$

1647. $f(x)=|x|$ funksiýany 2π periodly funksiýalardan düzülen Furýe hataryna dargatmaly.

Çözülişi. Bu jübüt funksiýadyr.

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi},$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=2\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right).$$

Onda alarys:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

1648. $[-\pi,\pi]$ kesimde berlen $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ funksiýany Furýe hataryna dargatmaly.

Çözülişi.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}0dx+\int_0^{\pi}dx\right]=\frac{1}{\pi}\pi=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_0^{\pi}1\cdot\sin nxdx\right]=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

Bu ýerden

$$b_1=\frac{2}{\pi},\ b_2=0,\ \ b_3=\frac{2}{3\pi},\ \ b_4=0,\ \ b_5=\frac{2}{5\pi},\dots$$

Şunlukda, $f(x)$ funksiýanyň Furýe hatary aşakdaky görnüşdedir:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\dots\right)$$

$x=0$, $x=\pm n\pi$ $(n=1,2,\dots)$ nokatlarda berlen funksiýanyň üznüge eýedigini barlamak kyn däldir. Şu nokatlarda hataryň jemi $\frac{1}{2}$-e deňdir.

1649. $f(x)=5x+2$ funksiýany 2π periodly Furýe hataryna dargatmaly.

1650. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ funksiýany $(0,\,2\pi)$ aralykda Furýe hataryna dargatmaly.

1651. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0 \\ 2x, & 0\le x\le\pi \end{cases}$ funksiýany $(-\pi,\pi)$ aralykda Furýe hataryna dargatmaly.

1652. $f(x)=x\sin x$ funksiýany $(-\pi,\pi)$ aralykda Furýe hataryna dargatmaly.

1653. Berlen $f(x)$ funksiýa $f(x+\pi)=-f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan bolsa, onuň jübüt Furýe koeffisiýentleriniň nola deňdigini görkezmeli $(a_0=a_2=b_2=a_4=b_4=\dots=0)$.

1654. Berlen $f(x)$ funksiýa $f(x+\pi)=f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan bolsa, onuň jübüt Furýe koeffisiýentleriniň nola deňdigini görkezmeli.

1655. Birsydyrgyn kemelýän agzalary bolan $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ hatar ýygnanýan bolsa, $\lim_{n\to\infty}na_n=0$ bolýandygyny subut etmeli.

1656. Deňligiň dogrudygyny görkezmeli.

$$x+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\dots=\frac{1}{2}\text{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

XIII BÖLÜM
KÖP ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝALAR

§ 1. Esasy düşünjeler

Kesgitleme. Eger M köplügiň her bir (x, y) nokadyna haýsy hem bolsa bir kanuna ýa-da düzgüne görä Z köplügiň ýeke-täk nokady degişdi bolsa, onda M we Z köplükleriň arasynda funksional baglylyk bar diýilýär. Ol funksional baglylyk aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$z = f(x,y), \quad z = \varphi(x,y), \quad z = z(x,y), ...$$

Şu ýerde z, baglanyşyksyz üýtgeýän x, y ululyklara (argumentlere) görä funksiýadyr. M köplük funksiýanyň kesgitleniş oblastydyr, Z köplük bolsa funksiýanyň üýtgeýiş oblastydyr.

Eger $(x_{0,}\, y_0)$ nokat M köplüge degişli bolsa, onda funksiýanyň $x = x_0$ we $y = y_0$ bolandaky $f(x_{0,}\, y_0)$ bahasy, funksiýanyň hususy (san) bahasydyr.

Argumentiň her bir jübüt (x, y) bahasy xOy tekizlikde P nokady kesgitleýär. Funksiýanyň şu nokatdaky bahasy bolsa giňişlikde $M(x, y, z)$ nokadyň applikatasydyr. Bu nokatlaryň köplügi giňişlikde käbir üsti emele getirýär. Onuň proýeksiýasy bolsa xOy tekizlikde D oblastdyr.

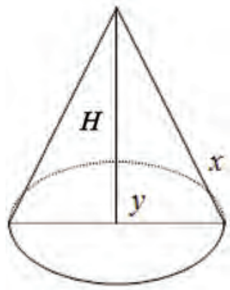
Goý, $n -$ölçegli giňişlikde erkin M köplük berlen bolsun. Şu köplügiň her bir nokady $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklara baglydyr. Egerde, M körlügiň her bir nokadyna haýsy hem bolsa bir kanun ýa-da düzgün esasynda başga bir N köplügiň ýeke-täk nokady degişli bolsa, onda M we N köplükleriň arasynda funksional baglylyk bar diýilýär we ol funksional baglylyk aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \quad u = f(M).$$

Şu kesgitlemeden görnüşi ýaly üýtgeýän n ululuykly funksiýanyň kesgitlemesi iki üýtgeýän ululykly funksiýanyň kesgitlemesine meňzeşdir. Şonuň üçin şu bölümiň galan bölümçelerinde biz köplenç iki uýtgeýän ululykly funksiýalara garamak bilen çäkleneris. Şeýle hem üýtgeýän üç ululykly funksiýalara degişli formulalary ýazmak bilen çäkleneris.

1657. Konusyň V göwrümini onuň emele getirijisi we esasynyň radiusy x bolan y-e görä funksiýa görnüşinde ýazmaly.

Çözülüşi. Belli bolşy ýaly konusyň göwrümi onuň esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeltmek hasylynyň üçden birine deňdir: $V = 1/3SH$ (*75-nji çyzgy*).



75-nji çyzgy

$$S = \pi y^2 \quad \text{we} \quad H = \sqrt{x^2 - y^2}. \quad \text{Onda} \quad V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

1658. Eger üçburçlugyň iki tarapynyň uzynlygy x we y bolup, onuň perimetri $2p$ bolsa, onda onuň S meýdanyny x, y taraplara görä funksiýa görnüşinde ýazmaly.

Çözülişi. Geron formulasyny ulanalyň

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

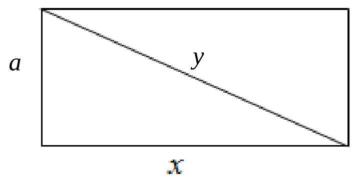
bu ýerde p ýarym perimetr, a, b, c bolsa üçburçlugyň taraplarynyň uzynlyklarydyr. Şerte görä

$$a = x,\ b = y,\ 2p = a+b+c,\ 2p = x+y+c,\quad c = 2p-x-y.$$

Şunluk-da,

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-2p+x+y)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

1659. Eger gönüburçlugyň bir tarapy x bolup, diagonaly y bolsa, onuň meýdanyny x, y görä funksiýa görnüşinde ýazmaly (*76-njy çyzgy*).
Çözülişi.



76-njy çyzgy

Bu ýerden $x^2+a^2=y^2$, $a^2=y^2-x^2$, $a=\sqrt{y^2-x^2}$. Şunlukda,

$$S=ax=x\sqrt{y^2-x^2}.$$

1660. Eger $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ bolsa $f(2,-3)$ we $f(1,\dfrac{y}{x})$-ni tapmaly.

Çözülişi $x=2$ we $y=-3$ goýup taparys:

$$f(2,-3)=\frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)}=-\frac{13}{12}.$$

$x=1$ goýup we y ululygy $\dfrac{y}{x}$ bilen çalşyryp alarys:

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot 1\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

1661. Eger $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ bolsa $f(y,x)$ we $f(-x,-y)$, $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{1}{f(x,y)}$ tapmaly.

Çözülişi. x we y argumentleriň ýerini çalşyralyň:

$$f(y,x)=\frac{y^2-x^2}{2yx},$$

$$f(-x,-y)=\frac{(-x)^2-(-y)^2}{2(-x)(-y)}=\frac{x^2-y^2}{2xy},$$

$$f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{y}\right)^2}{2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{2}{xy}}=\frac{\frac{y^2-x^2}{y^2x^2}}{\frac{2}{xy}}=\frac{y^2-x^2}{2yx},$$

$$\frac{1}{f(x,y)}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

1662. Eger $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$ bolsa, $f\left(\dfrac{1}{2},3\right)$, $f(1,-1)$ tapmaly.

1663. Eger $f(x,\ y)=\sqrt{xy^2+x+1}$, bolsa $f\left(\frac{1}{2},1\right)$ we $f\,(2,-1)$ -ni tapmaly.

1664. Dogry dörtburçly piramidanyň V göwrümini onuň x beýikligine we y gapdal gapyrgasyna görä funksiýa görnüşinde ýazmaly.

1665. Eger $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, $y>0$ bolsa $f(x)$ kesgitlemeli.

1666. Eger $f\ (x+y,x-y)=xy+y^2$ bolsa, $f(x,\ y)$ tapmaly.

Çözülişi. $x+y=u,\ x-y=V$ belgilemäni girizeliň. Onda

$$x=\frac{u+V}{2},\quad y=\frac{u-V}{2},$$

$$f\ (u,v)=\frac{u+V}{2}\cdot\frac{u-V}{2}+\left(\frac{u-V}{2}\right)^2=\frac{u^2-uV}{2}.$$

Indi u we V ululyklary x we y ululyklar bilen çalşyraýmak galdy.

1667. Omuň kanunyna görä elektrik zynjyryndaky R garşylyk, toguň I güýji we zynjyryň ahyryndaky U napryýaženiýe bilen $R=\frac{U}{I}$ formula arkaly baglanyşýar. Eger 120 W napryýaženiede zynjyrdan 2,5 A tok geçende onuň garşylygy näçe bolar?

1668. Silindriň göwrümini onuň x beýikligi we esasynyň radiusyna görä funksiýa görnüşinde ýazmaly.

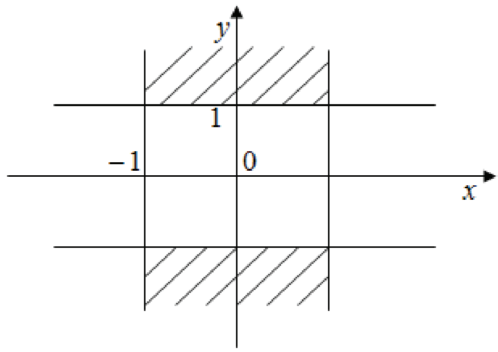
1669. Eger $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ bolsa $f(0,\ 2,-3)$ we $f\left(x,\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}\right)$ -ni tapmaly.

$z=f(x,y)$ funksiýanyň kesgitleniş oblasty umumy halda çylşyrymlydyr. Biz diňe ýönekeý hallara seretmek bilen çäkleneris. Ýagny ol oblast bir ýa-da birnäçe egriler bilen çäklenip, tekizligiň tükenikli ýa-da tükeniksiz bölegini tutýar. Ol ýapyk oblast hem, açyk oblast hem bolup biler.

Aşakdaky funksiýalaryn kesgitleniş oblastyny tapmaly

1670. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}.$

Çözülişi. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty $1-x^2\geq 0$ we $y^2-1\geq 0$ deňsizlikleri kanagatlandaryan x we y ululyklaryň bahalar köplügidir (*77-nji çyzgy*).



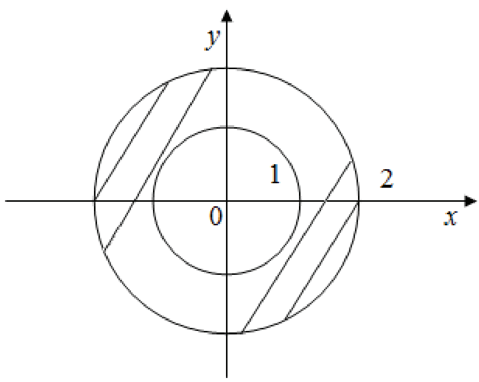
77-nji çyzgy

1671. $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}.$

Çözülişi.. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty $(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)\geq 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan x we y ululyklaryň bahalarynyň tertipleşdirilen köplügidir. Şu deňsizliklerden alarys:

$$x^2+y^2\geq 1,\ \ 4\geq x^2+y^2.$$

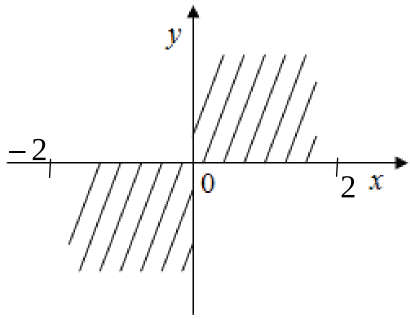
Şunlukda, funksiýanyň kesgitleniş oblasty $1\leq x^2+y^2\leq 4$ halkadyr (*78-nji çyzgy*).



78-nji çyzgy

1672. $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}.$

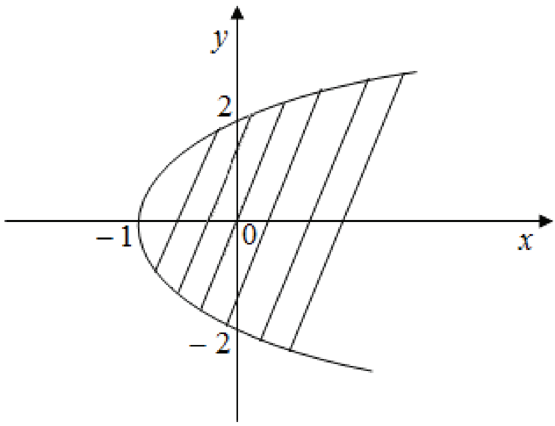
Çözülişi. Birinji goşulyjy x argumentiň $-1\leq\dfrac{x}{2}\leq 1$ ýa-da $-2\leq x\leq 2$ bahalary üçin kesgitlenendir. Ikinji goşulyjy $xy\geq 0$ deňsizligi ýa-da $x\geq 0, y\geq 0$ we $x\leq 0, y\leq 0$ deňsizligi kanagatlandyrýandyr. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty aşakdaky çyzgyda görkezilendir (*79-njy çyzgy*).



79-njy çyzgy

1673. $z = \ln(4 + 4x - y^2)$.

Çözülişi Logarifmik funksiýa argumentiň diňe položitel bahalary üçin kesgitlenendir. Diýmek, $4 + 4x - y^2 > 0$ ýa-da $4 + 4x > y^2$. Bu oblasty tekizlikde görkezmek üçin onuň araçäklerini tapalyň: $4 + 4x = y^2$ ýa-da $y^2 = 4(x+1)$. Bu depesi $O(-1,0)$ nokatda bolan paraboladyr. Funksiýanyn grafigi Oy oky bolsa, ol $(0,\pm 2)$ nokatda kesip geçýär (*80-nji çyzgy*).



80-nji çyzgy

1674. $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$.

Çözülişi. Giňişlikdäki bu oblast aşakdaky deňsizliklerden tapylýar:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0 \quad \text{ýada} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Bu oblastyň çäkleri

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipsoidanyň üstüdir. Şonuň üçin oblast ellipsoidanyň içki nokatlaryndan ybaratdar.

Aşakdaky funksiýalaryň kesgitleniş oblastlaryny tapmaly.

1675. $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}, \quad (a>0).$

1676. $z=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{y}.$ **1677.** $z=x+\arccos y.$

1678. $z=\ln(x+y).$ **1679.** $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}.$

1680. $z=\sqrt{x+y}\ln(y^2-x^2).$ **1681.** $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

1682. $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z.$

§ 2. Predel we üznüksizlik

Goý, $z=f(x,\,y)$ funksiýa xOy tekizligiň G oblastynda kesgitlenen bolsun. Merkezi $M_0(a,\,b)$ nokatda bolan r radiusly tegelegiň içindäki xOy tekizligiň $M(x,\,y)$ nokatlarynyň toplumyna $M_0(a,\,b)$ nokadyň r radiusly etraby diýilýär.

Eger-de, erkin, ýeterlik kiçi $\varepsilon>0$ san üçin $r>0$ san bar bolup, merkezi $M_0(a,\,b)$ nokatda bolan r radiusly etrabyň içindäki $M(x,\,y)$ nokatlaryň toplumy

$$|f\ (x,y)-A|<\varepsilon$$

deňsizligi kanagatlandyrsa, A sana $f(x,\,y)$ funksiýanyň $(x,\,y)$ nokatdaky predeli diýilýär we aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$\lim_{x\to a,\,y\to b} f(x,y)=A.$$

Aşakdaky kesgitleme ýokardaky kesgitleme bilen deňgüýçlüdir.

Eger erkin, ýeterlik kiçi $\varepsilon>0$ san üçin, $\delta>0$ san bar bolup,

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

deňsizlik $|x-a|<\delta,\ \ |y-b|<\delta$ bolanda ýerine ýetse, A sana $f(x,\,y)$ funksiýanyň $M(a,\,b)$ nokatdaky predeli diýilýär we

$$\lim_{x\to a,\,y\to b} f(x,y)=A$$

görnüşde belgilenýär.

Bir argumentli funksiýa degişli jemiň, tapawudyň, köpeltmek hasylynyň we gatnaşygyň predeli baradaky teoremalar iki üýtgeýän ululykly funksiýalar üçin hem dogrudyr.

Eger-de ýeterlik kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin $\delta > 0$ san bar bolup, merkezi $M_0(a, b)$ nokatda bolan δ radiusly etrapyň içindäki $M(x, y)$ nokatlaryň toplumy

$$\left| f(x,y) - f \quad (a,b) \right| < \varepsilon$$

deňsizligi kanagatlandyrsa, $f(x, y)$ funksiýa $M_0(a, b)$ nokatda üznüksiz diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x,y) = f(a,b)$$

Bu şertleriň biriniň ýerine ýetmeýän halynda funksiýa üznüge eýe diýilýär. Aşakdaky kesgitleme ýokardaky kesgitleme bilen deňgüýçlüdir.

Erkin $\varepsilon > 0$ san üçin $\delta > 0$ san bar bolup, $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$ bolanda

$$\left| f(x,y) - f(a,b) \right| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetse, $f(x, y)$ fuknksiýa $M_0(a, b)$ nokatda üznüksiz diýilýär.

1683. $\lim\limits_{x \to 0,\, y \to a} \dfrac{\sin xy}{x}$ predeli tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin xy}{xy} \cdot y.$$

Belli bolşy ýaly

$$\lim_{x \to 0,\, y \to a} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad (xy = t, \quad a \neq \infty).$$

Onda

$$\lim_{x \to 0,\, y \to a} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{y \to a} y = a.$$

1684. $\lim\limits_{x \to 0,\, y \to o} \left(x^2 + y^2 \right) \sin \dfrac{1}{xy}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. Bu predeli $P(x, y) \to P(0, 0)$ bolanda tapmaly. Şonuň üçin $\rho = 0$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Onda

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\sin\frac{1}{xy}=0.$$

Bu ýerde aşakdaky teorema ulanyldy. Tükenikli kiçi ululygyň çäkli $\left|\sin\frac{1}{xy}\right|\le 1$ ululyga köpeltmek hasyly tükeniksiz kiçi ululykdyr.

1685. $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. Goý, $P(x,\, y)$ nokat koordinatalar başlangyjyna $y=kx$ göni çyzyk boünça ýakynlaşsyn. Şu gönüniň ugrunda funksiýanyň bahasy hemişelikdir:

$$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Eger $P(x,\, y)$ nokat koordinatalar başlangyjyna dürli tarapdan ýakynlaşýan bolsa $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funksiýa dürli predel bahalary kabul edýär. Hakykatdan-da $\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ ululyk her bir k üçin dürli bahalary alýar. Mysal üçin, Ox $(k=0)$ ok boýunça $P\to 0$ bolanda bire deň, $y=kx$ $(k=1)$ bissektrisa boýunça bolsa ol nola ymtylýar.

Şunlukda, bu funksiýanyň predeli ýokdur.

1686. $z=x^2-xy$ funksiýanyň xOy tekizlikde üznüksizdigini görkezmeli.

Çözülişi.

$$\Delta z=\left[(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)(y+\Delta y)\right]-(x^2-xy)=2x\Delta x-\Delta x^2-x\Delta y-y\Delta x-\Delta x\Delta y.$$

Onda

$$\lim_{\Delta x\to 0,\, \Delta y\to 0}\Delta z=0.$$

1687. $x=1,\ y=1$ nokatlaryn $z=\dfrac{1+xy}{1-xy}$ funksýanyň üzülme nokatlary bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Hakykatdan-da, $x=1,\ y=1$ bolanda $M(1,\,1)$ nokatda funksiýa kesgitlenen däldir. Ýagny şu nokatda

$$\lim_{\Delta x\to 0,\, \Delta y\to 0} f(a+\Delta x, b+\Delta y)=f(a,b)$$

şert ýerine ýetmeýär.

1688. Eger $x^2+y^2\neq 0$ bolsa $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ funksiýanyň $O(0,0)$ nokatda predeliniň ýokdugyny görkezmeli.

Çözülişi. Eger koordinatalar başlangyjyna dürli ýollar bilen ýakynlaşsak biz dürli bahalary alarys. Hakykatdan-da:

1. Eger koordinatalar başlangyjyna Ox oky ýada Oy oky boýunça ýakynlaşsak, onda

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

2. Eger koordinatalar başlangyjyna $y=x$ göni çyzyk boýunça ýakynlaşsak, onda

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0,\, y\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

1689. $\lim\limits_{x\to\infty,\, y\to\infty}\dfrac{x^2-y^2}{x^4+x^4}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. Goý, $x\neq 0,\quad y\neq 0$ bolsun, onda

$$0<\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}=\frac{x^2}{x^4+y^4}-\frac{y^2}{x^4+y^4}\leq\frac{x^2}{x^4}+\frac{y^2}{y^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}.$$

Bu ýerde $\lim\limits_{x\to\infty,\, y\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$ bolýanlygy üçin

$$\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty}\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}=0.$$

1690. $f\ (x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$ bolsa, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)$ we $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}f(x,y)$ tapmaly.

Çözülişi. Berlen funksiýa her bir kesgitli x üçin $y-$e görä üznüksiz we her bir kesgitli y üçin $x-$a görä üznüksiz funksiýadyr. Şonuň üçin

$$\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi}{2+\dfrac{y}{x}}=1.$$

Şunlukda,

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=0,\qquad \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=1.$$

Predelleri tapmaly.

1691. $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}$.

1692. $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} \dfrac{x}{x+y}$.

1693. $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to k} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

1694. $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} \dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$.

1695. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ funksiýanyň üzülme nokatlaryny tapmaly.

1696. Eger $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$ bolsa, $\lim\limits_{x\to+\infty,\, y\to 0} f(x,y)$ we $\lim\limits_{y\to 0,\, x\to+\infty} f(x,y)$ tapmaly.

1697. Funksiýanyň üzülme nokatlaryny tapmaly:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

§3. Hususy önümler

$z=f(x,y)$ funksiýanyň hususy önümleri aşakdaky görnüşde kesgitlenilýär

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Bu ýerde birinji deňlikde y, ikinji deňlikde bolsa x hemişelik diýlip alynýar.

$u=f(x,y,z)$ funksiýanyň hususy önümi hem şuna menzeşlikde kesgitlenilýär.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\ (x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},\ldots .$$

1698. $z=x^3+y^3-3axy$ funksiýanyň hususy önümlerini tapmaly we olaryň $P(1,1)$ nokatdaky bahalaryny hasaplamaly.

Çözülişi. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3-3axy\right)'_x=3x^2-3ay$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3-3axy\right)'_y=3y^2-3ax.$$

Önümleriň $P(1,1)$ nokatdaky bahalaryny hasaplalyň.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Bigg|_P = 3-3a\,, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_P = 3-3a.$$

1699. Funksiýalaryň hususy önümlerini tapmaly:
a) $z = x^2 \sin y$, b) $z = x^y$, ç) $z = x^2 + y^2 + e^{xy}$.
Çözülişi.

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$,

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$,

ç) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + xe^{xy}$.

1700. Eger $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$ bolsa $f'_x(x,1)$ -i tapmaly.

Çözülişi. Hususy önümiň kesgitlemesinden alarys:

$$f'_x(x,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,1) - f(x,1)}{\Delta x},$$

bu ýerde

$$f(x+\Delta x,1) = x + \Delta x\,, \quad f(x,1) = x,$$

onda

$$f'_x(x,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

1701. $u = x^2 + y^2 + xt\,z^3$ funksiýanyň hususy önümlerini tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xt\,z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

1702. $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$ funksiýanyň hususy önümlerini tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

1703. $z=\ln(x^2+xy+y^{2)}$ funksiýanyň

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. Hususy önümleri tapalyň we ol hususy önümleri berlen deňlemä goýalyň.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x^2+xy+y^2\right)'_x=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x^2+xy+y^2\right)'_y=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2},$$

$$x\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}+y\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}=2.$$

Funksiýalaryň hususy önümlerini tapmaly.

1704. $z=\frac{x-y}{x+y}.$

1705. $z=\sqrt{x^2-y^2}.$

1706. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}).$

1707. $z=x^y.$

1708. $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}.$

1709. $u=(xy)^z.$

1710. $u=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}.$

1711. $u=x\sqrt[4]{z}+zy+\frac{y}{\sqrt[4]{x}}.$

Çözülişi.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt[4]{z}-\frac{y}{4x\sqrt[4]{x}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=z+\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{4\sqrt[4]{z^3}}+y.$$

1712. $u=\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$

1713. $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$ funksiýanyň hususy önümleriniň $M\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)$ nokatdaky bahalaryny hasaplamaly.

1714. $u=(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$ funksiýanyň

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

1715. $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ funksiýanyň

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

1716. $z=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ funksiýanyň

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

1717. Eger $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ bolsa

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}$$

hasaplamaly.

1718. Eger $u=x+\frac{x-y}{y-z}$ bolsa, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$ bolýandygyny görkezmeli.

§ 4. Doly differensial

Differensialyň kesgitlenilişi we hasaplanylyşy. Goý, D oblastda kesgitlenen $z=f(x,y)$ funksiýa berlen bolsun. Eger-de üýrgeýän x we y ululyklara bir wagtda Δx we Δy artdyrmalary bersek, $z=f(x,y)$ funksiýa hem

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (1)$$

artdyrmany alar (1) formula funksiýanyň doly artdyrmasy diýilýär.

Eger-de funksiýanyň doly artdyrmasyny $M(x,y)$ nokatda

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y \qquad (2)$$

(bu ýerde $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bolanda $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$ A, B ululyklar Δx we Δy artdyrmalara bagly däldir) görnüşde ýazyp bolýan bolsa, $f(x,y)$ funksiýa berlen nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär.

(2) deňlikde $\varepsilon_1\Delta x$ we $\varepsilon_2\Delta y$ goşulyjylar Δx, Δy ululyklara görä tükeniksiz kiçi ululyklardyr. Δz artdyrmanyň

$$A\Delta x + B\Delta y, \quad (A^2 - B^2 \neq 0)$$
çyzykly bölegine funksiýanyň doly differensialy diýilýär we

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \tag{3}$$

görnüşde ýazylýar. Eger-de (2) aňlatmada $dx = \Delta x$ we $dy = \Delta y$ bolsa, onda

$$dz = Adx + Bdy. \tag{4}$$

Şunlukda $z = f(x, y)$ funksiýanyň doly differensialy

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad A = \frac{\partial z}{\partial x}, \ B = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{5}$$

formula bilen tapylýar.

Edil şuna menzeşlikde $u = f\ (x, y, z)$ funksiýanyň doly differensialy kesgitlenýär:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{6}$$

$y = f(x)$ funksiýanyň differensialyna degişli teoremalar we formulalar $z = f\ (x, y)$, $u = f\ (x, y, z), ...$ funksiýalar üçin hem dogrudyr. u we ϑ funksiýalaryň näçe argumente baglydygyna garamazdan aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$d(u \pm \vartheta) = du \pm d\vartheta, \quad d(u\vartheta) = \vartheta du + ud\vartheta,$$
$$d\left(\frac{u}{\vartheta}\right) = \frac{\vartheta du - ud\vartheta}{\vartheta^2}, \quad dF(u) = F'(u)du.$$

1719. $f\ (x, y) = x^2 + xy + y^2$ funksiýanyň doly artdyrmasyny we doly differensialyny tapmaly.

Çözülişi.

$$f\ (x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2,$$
$$\Delta f\ (x, y) = \left((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2\right) -$$
$$-\left(x^2 + xy + y^2\right) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y + 2y\Delta y + \Delta y^2 =$$
$$= \left[(2x + y)\Delta x + (x + 2y)\Delta y\right] + (\Delta x^2 + \Delta x\Delta y + \Delta y^2).$$

Bu ýerde $df = (2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y$ aňlatma funksiýanyň doly differensialydyr, $(\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$ bolsa tükeniksiz kiçi ululykdyr.

1720. $z = 3axy - x^3 - y^3$, $z = x^y$ funksiýalaryň doly differensiallaryny tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3ay-3x^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3ax-3y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,$$

$$dz=(3ay-3x^2)dx+(3ax-3y^2)dy, \qquad dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy.$$

1721. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiýanyň doly differensialyny tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1722. $f(x,y)=x^2y$ funksiýanyň $(0,2)$ nokatda doly artdyrmasyny we doly differensialyny tapmaly.

Funksiýalaryň doly differensialyny tapmaly.

1723. $z=x^2+xy^2+\sin y$ 1724. $z=\ln(xy)$

1725. $z=e^{x^2+y^2}$ 1726. $u=\arcsin\dfrac{x}{y}$

1727. $(1,0)$ nokatda $z=\ln(x^2+y^2)$ funksiýanyň doly differensialyny tapmaly.

1728. $\omega=x^2y\sin xyz$ funksiýanyň doly differensialyny tapmaly.

1729. Eger $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ bolsa, $df(3,4,5)$ tapmaly.

2. Differensialyň takmyny hasaplamalarda ulanylyşy. Funksiýanyň Δz artdyrmasy we onuň dz differensialy aşakdaky deňlik bilen baglanyşýarlar

$$\Delta z=dz+\alpha,$$

bu ýerde α ululyk $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ululyga görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr. Bu ululygy argumentleriň ýeterlik kiçi artdyrmalarynda $\Delta z\approx dz$ diýip kabul etmek bolar. Ol aşakdaky takmyny hasaplamagyň formulasyna getirýär:

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \text{ýa-da}$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\ (x,y)}{\partial y}\Delta y. \qquad (7)$$

Şu formulanyň kömegi bilen $f(x,y)$ funksiýanyň we onuň hususy önümleriniň $P(x,y)$ nokatdaky bahalary belli bolanda $f\ (x+\Delta x, y+\Delta y)$ takmyny bahasyny hasaplap bolýar.

1730. Konusyň beýikligi $H=10sm$, esasynyň radiusy R=5 *sm*. Eger onuň beýikligi 2*mm* artdyrylsa, esasynyň radiusy bolsa 2*mm* kemeldilse onuň göwrümi nähili üýtgär?

Çözülişi.. Konusyň göwrümi $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ deňlik bilen tapylýar. Onda

$$\frac{\partial V}{\partial R}=\frac{1}{3}2\pi RH\,,\quad \frac{\partial V}{\partial H}=\frac{1}{3}\pi R^2,\quad dV\approx\Delta V=\frac{1}{3}\pi(2RHdR+R^2dH).$$

Bu ýerde $R=5\,sm,\ H=10\,sm,\ dR=-0,2\,sm,\ dH=0,2\,sm$ goýup alarys:

$$dV=\frac{1}{3}\pi\left[25\cdot 10\cdot(-0,2)+25\cdot 0,2\right]=-5\pi\approx -15,7.$$

Şunlukda konusyň göwrümi takmynan 15,7 sm^2 kemelýär.

1731. Kesik konusyň esaslarynyň radiuslary $R=40sm$, $r=15sm$ beýikligi bolsa $H=50\,sm$. Eger R radius $2\,mm$, r radius $3\,mm$, H beýiklik bolsa $1\,mm$ artdyrylsa onuň göwrümi näçe artar?

Çözülişi. Kesik konusyň göwrümini tapmaklygyň formulasyny ýazalyň:

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Bu üç üýtgeýän ululykly funksiýadyr. Göwrümi tapmaklygyň takmynan formulasyny ýazalyň:

$$\Delta V\approx dV=\frac{\partial V}{\partial H}dH+\frac{\partial V}{\partial R}dR+\frac{\partial V}{\partial r}dr$$

alarys:

$$\frac{\partial V}{\partial H}=\frac{\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)\,,\quad \frac{\partial V}{\partial R}=\frac{\pi H}{3}(2R+r)\,,\quad \frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\pi H}{3}(2r+R),$$

$$dV\approx\frac{\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)\Delta H+\frac{\pi H}{3}\left(2R+r\right)\Delta R+\frac{\pi H}{3}\left(2r+R\right)\Delta r.$$

$$R=40\,sm,\ r=15\,sm\,,\ \ H=50\,sm\,,$$

$$\Delta R=0,2\ sm,\quad \Delta r=0,3\,sm,\quad \Delta H=0,1\,sm.$$

goýup alarys:

$$dV=\frac{\pi}{3}\left(40^2+15^2+40\cdot 15\right)0,1+\frac{50\pi}{3}\left(80+15\right)0,2+\frac{50\pi}{3}\left(30+40\right)0,3$$

ýa-da

$$dV=747,5\pi$$

Şunlukda, kesik konusyň göwrümi $747{,}5\,\pi$ *kub. bir* artýar.

1732. Silindriň esasynyň R radiusy $4\,sm$, H biýikligi bolsa $20\ sm$. Eger olaryň her birisi $1mm$ artdyrylsa onuň göwrümi näçe artar?

Çözülişi. Belli formulany ýazalyň:

$$V = \pi R^2 H$$

Bu iki üýtgeýän ululykly funksiýadyr:

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H,$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2, \qquad dV = 2\pi RH\Delta R + \pi R^2\Delta H.$$

Bu deňlikde $R = 4\ sm,\ H = 20\ sm,\ \Delta R = 0{,}1\ sm,\ \Delta H = 0{,}1\ sm$ goýup alarys:

$$dV = \pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1) = 17{,}6\ \textit{kub.bir.}$$

Şunlukda, silindriň göwrümi 17,6 *kub.bir.* artar.

1733. Maýatnigiň yrgyldysynyň T periody

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{e}{g}}$$

formula bilen hasaplanylýar. Bu ýerde e maýatnygyň uzynlygy, g agyrlyk güýjüniň tizlenmesi. Eger-de e we g ölçenen mahalynda $\Delta e = \alpha$ we $\Delta g = \beta$ ýalnyşlyk göýberilse, T periodda göýberilen ýalňyşylygy anyklamaly.

Çözülişi. Bu şertlerde T ululygy e we g ululyklara görä funksiýa hökmünde garamak bolar.

$$\frac{\partial T}{\partial e} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{\pi}{\sqrt{eg}}, \qquad \frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi\left(-\frac{\sqrt{e}}{2g\sqrt{g}}\right) = -\frac{\pi\sqrt{e}}{g\sqrt{g}},$$

onda

$$\Delta T \approx dT = \frac{\partial T}{\partial e}de + \frac{\partial T}{\partial g}\Delta g = \pi\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{e}}\Delta e + \pi\sqrt{e}\left(-\frac{1}{g\sqrt{g}}\right)\Delta g =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ge}}\left(\Delta e - \frac{e}{g}\Delta g\right) = \frac{\pi}{\sqrt{ge}}\,\frac{g\Delta e - e\Delta g}{g}.$$

Bu deňlikde $\Delta e = \alpha,\quad \Delta g = \beta$ goýup, alarys:

$$\Delta T \approx \frac{\pi}{g\sqrt{ge}}(g\alpha - e\beta).$$

1734. $1{,}02^{3{,}01}$ sany takmyny hasaplamaly.

Çözülişi. $z = x^y$ funksiýa garalyň. $x = 1,\ \ y = 3, \Delta x = 0{,}02$ we $\Delta y = 0{,}01$ diýip $z = 1^3 = 1$ alarys.

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Şunlukda

$$1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$$

1735. Takmynan hasaplamaly.

a) $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$, b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

1736. Eger gönüburçlugyň taraplary $a = 10sm,\ b = 24sm$ bolup, a tarapy $4\,mm$ artdyrylsa, b tarapy bolsa $1\,mm$ kemeldilse, onuň dioganalynaň nähili üýtgeýändigini kesgitlemeli.

1737. Konusyň esasynyň radiusy $1{,}02 \pm 0{,}1\,sm$, emele getirijisi $44{,}2 \pm 0{,}1\ sm$ bolsa onuň göwrümini tapmaly.

§ 5. Çylşyrymly funksiýanyň differensirlenilişi

Goý, üýtgeýän iki ululykly $z = f\ (x, y)$ funksiýa berlen bolsun. Öz gezeginde üýtgeýän x we y ululyklar hem baglanyşyksyz üýtgeýän t ululyga görä funksiýalar diýeliň:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

Onda biz $z = f\ (\varphi(t), \psi(t))$ çylşyrymly funksiýany alýarys. Bu funksiýanyň önümi aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

Eger x we y ululyklar iki baglanyşyksyz üýtgeýän u we ϑ ululyklara bagly bolsa, onda

$$z = z(u, \vartheta) = f\ \ (\varphi(u, \vartheta), \psi(u, \vartheta))$$

çylşyrymly funksiýanyň önümi aşakdaky görnüşdedir

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}. \tag{2}$$

Şeýle hem $\omega = f(x, y, z) = f(u) = f(x(u, \vartheta), y(u, \vartheta), z(u, \vartheta))$ funksiýanyň hususy önümi aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}. \tag{3}$$

Eger $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$ bolsa, onda

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

1738. Goý $z=x^y$ bolsun. Eger $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ bolsa $\frac{dz}{dt}$-ni tapmaly.

Çözülişi. (1) formulany ulanalyň

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=yx^{y-1}\frac{dx}{dt}+x^y\ln x\frac{dy}{dt}==\psi(t)\left[\varphi(t)\right]^{\psi(t)-1}\varphi'(t)+$$

$$+\left[\varphi(t)\right]^{\psi(t)}\ln\varphi(t)\cdot\psi'(t).$$

1739. Eger, $z=\ln(u^2+\vartheta)\,, u=e^{x+y^2},\quad \vartheta=x^2+y$ bolsa $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ hususy önümleri hasaplamaly.

Çözülişi

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+\vartheta},\quad \frac{\partial z}{\partial\vartheta}=\frac{1}{u^2+\vartheta},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2},$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}=1.$$

Onda

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+\vartheta}\,e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+\vartheta}\,2x=\frac{2}{u^2+\vartheta}(ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+\vartheta}\,2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+\vartheta}=\frac{1}{u^2+\vartheta}\left(4u\,ye^{x+y^2}+1\right)$$

1740. Eger $z=e^{3x+2y},\quad x=\cos t,\quad y=t^2$ bolsa $\frac{dz}{dt}$-ni tapmaly.

Çözülişi. (1) formulany ulanalyň:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=e^{3x+2y}3(-\sin t)+e^{3x+2y}2\cdot 2t=$$

$$=e^{3x+2y}(4t-3\sin t)=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\sin t).$$

1741. Eger $z=f\ (x,y),\quad x=u\vartheta,\quad y=\frac{u}{\vartheta}$ bolsa $\frac{\partial z}{\partial u}$ we $\frac{\partial z}{\partial\vartheta}$-ni tapmaly.

Çözülişi. (2) formuladan peýdalanalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=f_x^{'}(x,y)\vartheta+f_y^{'}(x,y)\frac{1}{\vartheta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}=f_x^{'}(x,y)u-f_y^{'}(x,y)\frac{u}{\vartheta^2}.$$

1742. Eger $z=e^{xy}$, $y=\varphi(x)$ bolsa $\frac{\partial z}{\partial x}$ we $\frac{\partial z}{\partial y}$ tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\varphi'(x).$$

1743. Eger $t=x^2+y^2$ bolsa, $z=\varphi(t)$ funksiýanyň

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

Çözülişi. φ funksiýa x we y ululyklara, hem-de $x^2+y^2=t$ goşmaça argumente baglydyr. Şonuň üçin

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'\left(x^2+y^2\right)2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)2y.$$

Tapylanlary deňlemä goýalyň

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\varphi'\left(x^2+y^2\right)2x-x\varphi'\left(x^2+y^2\right)2y=0.$$

Şunlukda, funksiýa deňlemäni kanagatlandyrýar.

1744. Eger $z=\frac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$, bolsa $\frac{dz}{dt}$-ni tapmaly.

1745. Eger $u=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x=3t^2$, $y=\sqrt{y^2+1}$ bolsa $\frac{du}{dt}$-ni tapmaly.

1746. Eger $z=u+\vartheta^2, u=x^2+\sin x,\ \vartheta=\ln(x+y)$ bolsa $\frac{\partial z}{\partial x}$ we $\frac{\partial z}{\partial y}$-i tapmaly.

1747. Eger $z=\sqrt{\frac{1+u}{1+\vartheta}}$, $u=-\cos x$, $\vartheta=\sin x$ bolsa $\frac{dz}{dx}$-i tapmaly.

1748. Eger $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ funksiýa differensirlenýän bolsa, onda ol

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

1749. Eger $z=\left(3x^2+y\right)^{4x+2y}$ bolsa, $\frac{\partial z}{\partial x}$-i tapmaly.

1750. Eger $u=\mathrm{tg}(3x+2y^2-z)$, $y=\frac{1}{x}$, $z=\sqrt{x}$, bolsa $\frac{du}{dx}$-i tapmaly.

§ 6. Anyk däl funksiýalaryň differensirlenilişi

Bir üýtgeýän ululykly anyk däi funksiýalar. Eger-de x görä y funksiýa

$$F(x,\ y)=0 \tag{1}$$

deňleme bilen kesgitlenen bolsa, onda ol funksiýa anyk däl funksiýa ýa-da $y-$e görä çözülmedik funksiýa diýilýär. Beýle diýmek, her bir $x=x_0$ üçin anyk däl funksiýa kesgitlenen bolsa, onda ol käbir y_0 bahany alýar we $F(x_0,y_0)=0$ diýmekdir.

Eger $F(x,\ y)$ funksiýa x we y görä differensirlenýän bolup, $F'_y(x,y)\neq 0$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda anyk däl funksiýanyn önümi aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{2}$$

1751. Eger $F(x,y)=y-xe^y+x=0$ bolsa $\frac{dy}{dx}$-i tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^y+1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1-xe^y,$$

onda

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y-1}{1-xe^y}.$$

1752. Eger $\sin(x+y)-y=0$ bolsa, $\frac{dy}{dx}$-i tapmaly.

Çözülişi.

$$F(x,\ y)=\sin(x+y)-y, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\cos(x+y)-1, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)-1}.$$

1753. Eger $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ bolsa $\frac{dy}{dx}$-i tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

1754. Eger $F(x,y)=e^y-e^x+xy=0$ bolsa $\frac{dy}{dx}$-i tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^x+y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=e^y+x, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{-e^x+y}{e^y+x}=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

Aşakdaky anyk däl görnüşde berlen funksiýalaryň önümlerini tapmaly.

1755. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ **1756.** $y^x=x^y.$

1757. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ **1758.** $y=1+y^x.$

1759. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, bolsa $\frac{dy}{dx}$ we $\frac{d^2y}{dx^2}$ tapmaly.

2. Iki üýtgeýän ululykly anyk däl funksiýalar. Eger-de x we y ululyklara bagly z ululyk

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

deňleme bilen berlen bolsa, onda ol funksiýa anyk däl funksiýa ýa-da z-e görä çözülmedik funksiýa diýilýär. Beýle diýmek funksiýanyň kesgitleniş oblastynda her bir $x=x_0$ we $y=y_0$ bahalarynda z_0 bahany kabul edip $F(x_0,y_0,z_0)=0$ bolýar diýmekdir. Eger $F(x,y,z)$ funksýa x,y,z ululyklara görä differensirlenýän we $F'_z(x,y,z)\neq 0$ bolsa, (3) deňlik bilen kesgitlenýän anyk däl $z=z(x,y)$ funksiýa hem differensirlenýändir we onuň hususy önümleri aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{4}$$

Funksiýalaryn hususy önümlerini tapmaly.

1760. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$.

Çözülişi. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

1761. $e^z+x^2y+z+5=0.$

Çözülişi $F(x,y,z)=e^z+x^2y+z+5$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x^2,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=e^z+1,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{e^z+1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{e^z+1}$$

1762. Eger $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$ bolsa, $\frac{\partial z}{\partial x}$ we $\frac{\partial z}{\partial y}$ tapmaly.

Çözülişi. Deňligiň çep bölegini $F(x,y,z)$ bilen belgilälin:

$$F(x,y,z)=x^2-2y^2+3z^2-yz+y.$$

Hususy önümleri tapalyň:

$$F'_x(x,y,z)=2x,\quad F'_y(x,y,z)=-4y-z+1,\quad F'_z(x,y,z)=6z-y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{2x}{6z-y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{1-z-4y}{6z-y}.$$

1763. $x^2-3xyz=a^2$ deňleme bilen berlen $z(x,y)$ funksiýanyň doly differensiýalyny tapmaly.

Çözülişi. $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy.$$

Hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^z-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

Şunlukda

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy.$$

1764. Eger $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$ bolsa, $\frac{\partial z}{\partial x}$ we $\frac{\partial z}{\partial y}$-i tapmaly.

1765. Eger $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$ bolsa, $\frac{\partial z}{\partial x}$ we $\frac{\partial z}{\partial y}$-i tapmaly.

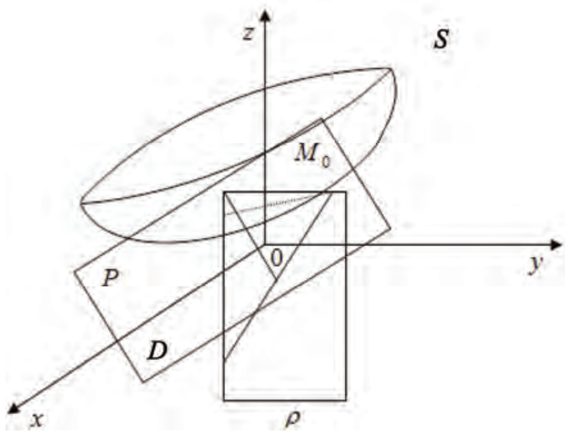
1766. Eger $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$ bolsa $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$ bolýandygyny görkezmeli.

1767. Eger $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ bolsa $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ we dx-i tapmaly.

1768. Eger $z=e\frac{x}{z}y$ bolsa dz-i tapmaly.

§ 7. Üste galtaşýan tekizlik we normal

Goý, S käbir üst, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şol üstüň erkin nokady bolsun (*81-nji çyzgy*).



81-nji çyzgy

Eger S üstüň M nokady bilen D tekizligiň P nokadynyň arasyndaky MP uzaklyk M_0M uzaklyk nola ymtylanda, ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululyk bolsa, D tekizlige M_0 nokatda S üste geçirilen galtaşýan tekizlik diýilýär. M_0 nokatdan geçýän üste galtaşýan tekizlige inderilen perpendikulýara üste geçirilen normal diýilýär. M_0 nokatda üste geçirilen galtaşýan tekizligiň deňlemesini ýazmak üçin normal boýunça ugrukdyrylan $\vec{N}(A,B,C)$ wektory bilmek ýeterlikdir. Şol halda D tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Şeýle hem normalyň deňlemesini ýazyp bolar:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}, \quad C=-1. \qquad (3)$$

Eger S üstüň deňlemesi anyk däl $F(x,y,z)=0$ görnüşde berilen bolsa, $\vec{N}$ wektoryň koordinatalary aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$A=\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}, \quad B=\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}, \quad C=\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}. \qquad (4)$$

1769. $z=x^2+y^2$ üste $M(1,-2,5)$ nokatda geçirilen gaitaşýan tekizligiň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. z funksiýanyň hususy önümleriniň berlen nokatdaky bahalaryny tapalyň

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-4$ (1) we (2) formulalary ulanyp alarys:

$$z-5=2(x-1)-4(y+2),$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-4}=\frac{z-5}{-1}$$

ýa-da $2x-4y-z-5=0$.

Üste berlen nokatda geçirilen normalyň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-4}=\frac{z-5}{-1}.$$

1770. $3xyz-z^3=a^3$ üste $x=0,\ y=a$ bolanda galtaşýan tekizligiň deňlemesini we normalyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Deňlemede $x=0,\ y=a$ goýup galtaşma nokadynyň applikatasyny tapalyň $-z^3=a^3$, $z=-a$. Şunlukda, $M(0,a,-a)$ galtaşma nokatydyr. Deňlemäniň çep bölegini $F(x,y,z)$ bilen belgiläp hususy önümleriň M nokatdaky bahalaryny tapalyň:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3yz, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M=-3a^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=3xz, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=3xy-3z^2,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M=-3a^2.$$

Onda alarys:

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0$$

ýa-da $x+z+a=0$ – bu galtaşýan tekizligiň deňlemesi.

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2},$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}.$$

Bu bolsa normalyň deňlemesidir.

1771. $x^2+y^2+z^2=R^2$ sfera $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Alarys:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}=2x_0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=2y_0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=2z_0.$$

Onda galtaşýan tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0,$$

$$x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2.$$

Indi normalyň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0},$$

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

1772. $x+y-z=0$ tekizlige parallel we $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ aýlanma ellipsoide erkin $M(x_0,y_0,z_0)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=2x_0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=y_0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=2z_0.$

Onda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0. \tag{1}$$

Tekizlikleriň parallellik nyşanyndan alarys:

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}.$$

M_0 nokadyň ellipsoidda ýatýanlygyna görä $x_0^{\,2}+\frac{y_0^{\,2}}{2}+z_0^{\,2}=1.$

Şunlukda üç näbellili üç deňleme sistemany aldyk. Ony çözüp,

$$M_1\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right),\ \ M_2\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right).$$

nokatlary alarys. Tapylan nokatlary (1) deňlemä goýup, meseläniň şertini kanagatlandyrýan iki tekizligi alarys:

$$x+y-z=2,\quad x+y-z=-2.$$

1773. Aşakdaky üstlere görkezilen nokatlarda geçirilen galtaşýan tekizligiň we normalyň deňlemesini ýazmaly:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ konusa $M(4,3,4)$ nokatda;

b) $x^2+y^2+z^2=2Rz$ sfera $M(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$ nokatda.

1774. $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ üste $M(2,-1,1)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

1775. $x^2yz+2x^2z-3xyz+2=0$ üste $M(1,0,-1)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

1776. $z^2=x^2+y^2$ konus bilen $x^2+y^2+(z-2)^2=2$ sferanyň $M(0,1,1)$ nokatda galtaşýandygyny görkezmeli.

1777. $x^2+2y^2-4z^2=5$ üste $M(1,2,1)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň we normalyň deňlemesini ýazmaly.

1778. $x+4y+6z=0$ tekizlige parallel $x^2+2y^2+3z^2=21$ üste galtaşýan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

1779. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ konus bilen

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}\left(b^2+c^2\right)$$

sferanyň $M(0,\pm b,c)$ nokatda galtaşýandygyny görkezmeli.

§8. Ýokary tertipli önümler we differensiallar

Goý, D oblastda kesgitlenen $z = f\ (x, y)$ funksiýanyň $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ hususy önümleri bar bolup, olar x, y üýtgeýän ululyklara görä funksiýalar diýeliň. Onda olardan alnan hususy önümlere ikinji tertipli hususy önümler diýilýär we aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\,f'_x(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\,f'_y(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\,f'_x(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\,f'_y(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

Üçünji, dördünji we ş.m önümler şuňa meňzeşlikde kesgitlenilýär. $z = f\ (x, y)$ funksiýanyň $d^2 z, d^3 z$ ikinji we üçünji tertipli differensiallary aşakdaky formulalar boýunça tapylýar:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

1779. $z = x^4 + 4x^2 y^3 + 7xy + 1$ funksýanyň $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ önümlerini tapmaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2 y^2 + 7x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 7, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2 y.$$

1780. $z = \sin x \cos y$ funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapmaly.

Çözülişi. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

1781. Eger $z = x^4 - 4x^2y^2 + y^4$ bolsa $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ önümi tapmaly.

Çözülişi $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x.$

1782. $z = x^2 + 3x^2y^2 + y^2$ funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapmaly.

Çözülişi. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6xy^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + 6y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y + 2y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + 6x^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12xy.$$

1783. $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$ funksiýanyň ikinji tertipli doly differensialyny tapmaly.

Çözülişi. Birinji we ikinji tertipli hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Onda $d^2z = 6ydx^2 + 2(6x-2)dxdy + 2dy^2.$

1784. $z = 2x^2 - 3xy + y^2$ funksiýanyň birinji we ikinji tertipli doly differensialyny tapmaly.

Çözülişi. Differensirläp alarys:

$$dz = 4xdx - 3(ydx + xdy) + 2ydy = (4x - 3y)dx - (3x - 2y)dy.$$

dx we dy ululyklar x we y bagly bolmaýandyklaryny nazara alyp, ýenede bir gezek differensirläliň

$$d^2z = (4dx - 3dy)dx - (3dx - 2dy)dy = 4dx^2 - 6dxdy + 2dy^2.$$

1785. Eger $z = \ln(x^2 + y)$ bolsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ önümleri tapmaly.

1786. Eger $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ bolsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ önümi tapmaly.

1787. $u = xy + yz + zx$ funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapmaly.

1788. Eger $z=\sin(xy)$ bolsa, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ önümi tapmaly.

1789. Ikinji tertipli hususy önümleri tapmaly.

$$z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$$

1790. Eger $u=x^3y^5z^7$ bolsa, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ önümi tapmaly.

1791. Eger $z=x\ln\frac{y}{x}$ bolsa, d^2z differensialy tapmaly.

1792. Eger $z=e^x\cos y$ bolsa, d^2z differensialy tapmaly

1793. Eger $z=x^3+y^3+3xy$ bolsa, d^3z differensialy tapmaly.

1794. Eger $z=\arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}$ bolsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ bolýandygyny görkezmeli.

1795. Eger $z=x^y$ bolsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ bolýandygyny görkezmeli.

1796. $z=arctg\frac{y}{x}$ funksiýanyň $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýandygyny görkezmeli.

1797 $u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$ funksiýanyň

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

deňlemäni kanagatlandyrýanlygyny görkezmeli.

1798. Eger $z=e^{xy}$ bolsa d^2z differensialy tapmaly.

1799. Eger $z=\varphi(t),\quad t=x^2+y^2$ bolsa d^2z differensialy tapmaly.

1800. Eger $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ bolsa, onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ bolýandygyny görkezmeli.

1801. Eger $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$ bolsa, $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$ denligi subut etmeli.

1802. Eger $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ bolsa, onda $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ bolýandygyny görkezmeli.

§ 9. Köp öýtgeýänli funksiýalaryň ekstremumy

Goý, $z = f(x,y)$ funksiýa $P_0(a,b)$ nokady özünde saklaýan D oblastda kesgitlenen bolsun. Eger D oblastda ýatan käbir etrabyň hemme P nokatlary üçin $f(P_0) < f(P)$, $(f(P_0) > f(P))$ deňsizlik ýerine ýetse, onda *f(P)* funksiýa P_0 nokatda minimuma (maksimuma) eýe diýilýär, P_0 nokada minimum (maksimum) nokady, funksiýanyň P_0 nokatdaky bahasyna funksiýanyň minimal (maksimal) bahasy diýilýär.

Eger-de $P_0(x_0, y_0)$ nokatda $z = f(x,y)$ funksiýa ekstremuma eýe bolsa, onda şol nokatda onuň hususy önümi nola deňdir.

Funksiýanyň hususy önümleriniň nol we hususy önümlerinin ýok nokatlaryna onun ekstremumynyň bolup biljek nokatlary diýilýär.

Funksiýanyň ekstremumynyň bolmagynyň ýeterlik şertine garalyň. Goý, $P_0(x_0, y_0)$ nokat $z = f(x,y)$ funksiýanyň ekstremumynyň bolup biljek nokady bolsun.

$P_0(x_0, y_0)$ nokatda funkssiýanyň ikinji tertipli önümleriniň bahalaryny tapalyň we olary A, B, C bilen belgiläliň, ýagny

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}, \qquad A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}, \qquad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}$$

Eger $B^2 - AC < 0$, bolsa, onda $z = f(x,y)$ funksiýa $P_0(x_0, y_0)$ nokatda ekstremuma eýedir. $A > 0$ we $C > 0$ bolsa minimuma, $A < 0$ we $C < 0$ bolanda maksimuma eýedir.

Eger $B^2 - AC > 0$, bolsa, $P_0(x_0, y_0)$ nokat ekstremum nokat däldir. Eger $B^2 - AC = 0$ bolsa, duruw nokatda funksiýa maksimuma ýa-da minimuma eýe diýip bolmaýar. Bu halda goşmaça derňewi geçirmeli bolýarys.

1803. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ funksiýanyň ekstremumynyň bolup biljek nokatlaryny tapmaly.

Çözülişi. Alarys: $\frac{\partial z}{\partial x} = 8x^3 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4y,$

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

sistemany çözüp,

$$M_1(0{,}0),\ M_2(0{,}1),\ M_3(0,-1),\ M_4\left(\frac{1}{2},0\right),\ M_5\left(\frac{1}{2},1\right),\ M_6\left(\frac{1}{2},-1\right),$$

$$M_7\left(-\frac{1}{2},0\right),\quad M_8\left(-\frac{1}{2},1\right),\quad M_9\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

nokatlaryny taparys.

1804. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly

Çözülişi.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0,\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Sistemany çözüp, ekstremumyň bolup biljek nokatlaryny tapýarys: $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$.. Ikinji tertipli önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,$$

onda

$$B^2 - AC = 9 - 36xy,\quad (B^2 - AC)\Big|_{(0,0)} = 9.$$

Diýmek, $(0,0)$ nokatda funksiýanyň ekstremumy ýokdur M_2 (1, 1) nokatda: $B^2 - AC = -27 < 0$, $A > 0,\ C > 0$. Şunlukda, M_2 (1,1) nokatda funksiýa minimuma eýedir: $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

1805. Funksiýanyň ekstremumyny tapmaly

$$z = 1 - 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Çözülişi. Hususy önümleri tapalyň.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -6 - 2x - y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y,$$

$$\begin{cases} -6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

$x_0 = -4,\ \ y_0 = 2$. Diýmek, $P_0(-4,2)$ ekstremumyň bolup biljek nokadydyr.

Funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$B^2 - AC = (-1)^2 - (-2)(-2) = -3 < 0$$

$A = -2 < 0,\ C = -2 < 0$. Diýmek, $P_0(-4,2)$ nokatda funksiýa maksimuma eýedir.

$$z_{\max} = 1 - 6\cdot(-4) - (-4)^2 - (-4)\cdot 2 - 4 = 13.$$

1806. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi. Hususy önümleri tapalyň we deňlemeler sistemasyny düzeliň:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12,$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ xy-2=0 \end{cases}$$

sistemany çözüp, $P_1(1,2)$, $P_2(2,1)$, $P_3(-1,-2)$, $P_4(-2,-1)$. nokatlary alarys. Ikinji tertipli önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x.$$

Her bir duruw nokatda B^2-AC aňlatmany hasaplalyň:

1) $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1}=6,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_1}=12,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1}=6.$

Diýmek, P_1 nokatda ekstremum ýokdur.

2) P_2 nokatda $A=12,\ B=6,\ C=12$ we $B^2-AC=36-144<0$, $A>0,\ C>0$ funksiýa bu nokatda minimuma eýedir.

$$z_{\min}=z(P_2)=8+6-30-12=-28.$$

3) P_3 nokatda $A=-6,\ B=-12,\ C=-6$ we $B^2-AC=144-36>0$. Funksiýanyň bu nokatda ekstremumy ýokdur.

4) P_4 nokat üçin $A=-12,\ B=-6,\ C=-12$ we $B^2-AC=36-144<0,\ A<0,\ C<0$. Şunlukda, P_4 nokatda funksiýa maksimuma eýedir.

$$z_{\max}=z(P_4)=-8-6+30+12=28.$$

Funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

1807. $z=(x-1)^2+2y^2$.

1808. $z=(x-1)^2-2y^2$.

1808. $z=-4+6x-x^2-xy-y^2$.

1809. $z=x^3y^2(a-x-y)$.

1810. $z=x^2+xy+y^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

1811. $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$.

XIV BÖLÜM
IKIGAT WE ÜÇGAT INTEGRALLAR

§ 1. Ikigat integrallar

1. Ikigat integralyň kesgitlenilişi we hasaplanylyşy. Goý, erkin, çäkli D oblastda iki üýtgeýän ululykly $f(x,y)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. D oblasty erkin tükenikli D_i oblastlara bölmek bilen, her bir D_i oblastda degişlilikde $P_i(x_i, y_i)$ nokady alalyň. $f(x,y)$ funksiýanyň $P_i(x_i, y_i)$ nokatdaky bahasyny $f(x_i, y_i)$ bilen belgiläp, aşakdaky integral jemi düzeliň:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i, \tag{1}$$

bu ýerde $\Delta\sigma_i$ degişlilikde D_i oblastlaryň meýdanlarydyr. (1) jeme $f(x,y)$ funksiýanyň D oblastdaky integral jemi diýilýär.

Eger bölek D_i oblastlaryň ulusynyň diametri $\lambda = \max\limits_i diamD_i \to 0$ bolanda (1) integral jemiň tükenikli predeli bar bolsa, şol predele $f(x,y)$ funksiýanyň D oblast boýunça alnan ikigat integraly diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Ikigat integralyň aşakdaky ýönekeý häsiýetlerini belläp geçeliň:

1. Eger $C = const$ bolsa, onda

$$\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy;$$

2. $\iint[f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy;$

3. Eger D oblast iki – D_1 we D_2 oblastlara bölünen bolsa, onda

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Ikigat integrallar gaýtalanýan integrallara getirilip hasaplanylýar:

Goý, D oblast $y = y_1(x)$ we $y = y_2(x)$ üznüksiz egri çyzyklar we $x = a$, $x = b$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsun. Onda aşakdaky deňlik dogrudyr:

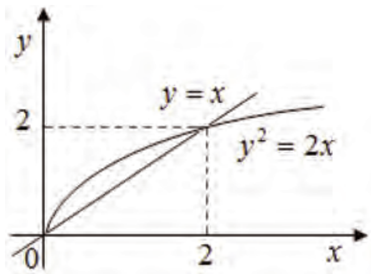
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (2)$$

2. Eger D oblast $x = x_1(y)$ we $x = x_2(y)$ üznüksiz egri çyzyklar we $y = c,\ y = d$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsa, onda

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3)$$

1812. $y^2 = 2x$ parabola we $y = x$ göni çyzyk bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. Parabolany we göni çyzygy guralyň (*82-nji çyzgy*):



82-nji çyzgy

$$S = \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2x}} dy = \int_0^2 (\sqrt{2x} - x)dx = \frac{2}{3}.$$

1813. $P = \{3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2\}$ gönüburçluk bolsa,

$$\iint_P (x+y)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

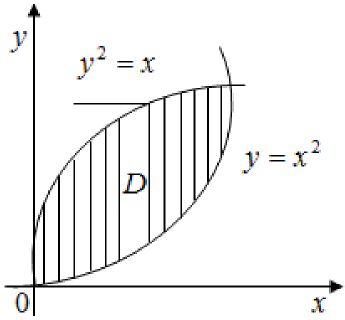
$$\iint_P (x+y)dxdy = \int_1^2 dy \int_3^4 (x+y)dx = \int_1^2 \left(\frac{7}{2} + y\right)dy = 5.$$

1814. Eger D oblast $y = x^2$ we $y^2 = x$ parabolalar bilen çäklenen bolsa

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. $y = x^2$ we $y^2 = x$ parabolalar bilen çäklenen oblasty guralyň (*83-nji çyzgy*):



83-nji çyzgy

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

sistemany çözüp alýarys: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. (2) formulanyň esasynda alarys:

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)dy) \right\} dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

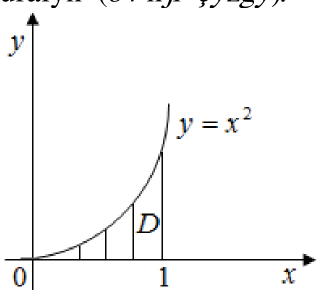
$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right] \Bigg|_0^1 = \frac{18}{105}.$$

1815. Eger D oblast $y = 0$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsa

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. D oblasty guralyň (*84-nji çyzgy*):



84-nji çyzgy

(2) formulany ulanalyň:

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3\cdot 7} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

1816. $I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x+y)dy$ integraly hasaplamaly

$$I = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^1 dx = \int_0^1 \left[(x+\frac{1}{2}) - (x^2 + \frac{x^2}{2}) \right] dx = \frac{1}{2}.$$

1817. Eger $f(x,y)$ oblast $x=3$, $x=4$, $y=1$, $y=2$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsa

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$$

integraly hasaplamaly.

1818. Integrallary hasaplamaly.

a) $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)dx$, b) $\int_0^1 dx \int_o^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy$, ç) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr.$

1819. Eger D oblast depeleri $O(0,0)$, $A(1,1)$ we $B(0,1)$ nokatlar bolan üçburçluk bolsa, $\iint_D xdxdy$ integraly hasaplamaly.

1820. Eger D oblast depeleri $O(0,0)$, $A(1,-1)$ we $B(1,1)$ nokatlar bolan üçburçluk bolsa, $\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$ integraly hasaplamaly.

1821. Eger D oblast $y^2=x$ parabola we $x=0$, $y=1$ göni çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly üçburçluk bolsa, $\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ integraly hasaplamaly.

1822. Eger D oblast $x=2$, $y=x$ göni çyzyklar bilen we $y=\frac{1}{x}$ giperbola bilen çäklenen bolsa, $\iint_D x^2 y^{-2} dxdy$ integraly hasaplamaly.

2. Integrirlemegiň tertibini çalşyrmak. Eger D oblast 1) we 2) görnüşdäki oblastlar bolsa, onda aşakdaky deňlikler dogrudyr:

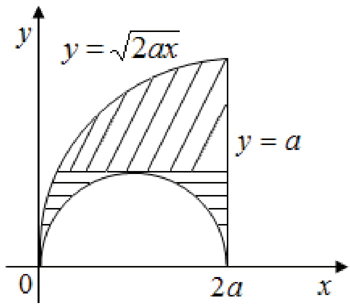
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

1823. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$ integralda integrirlemegiň tertibini çalşyrmaly.

Çözülişi. D oblasty guralyň (*85-nji çyzgy*): $x=0$, $x=2a$, $y=\sqrt{2ax}$

,

$y=\sqrt{2ax-x^2}$ ýa-da $x=0,\ x=2a,\ y^2=2ax,\ y^2+(x-a)^2=a^2.$



85-nji çyzgy

$D=\left\{0\le x\le 2a, \sqrt{2ax-x^2}\le y\le \sqrt{2ax}\right\}$. Şu oblasty $y=a$ göni çyzygyň kömegi bilen üç oblastyň jemi görnüşinde garalyň. Onda alýarys:

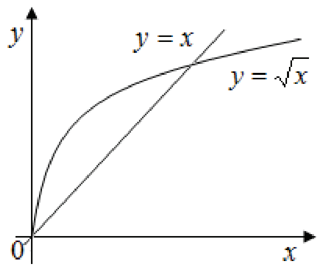
$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx +$$

$$+\int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

1824. Integrirlemegiň tertibini çalşyrmaly.

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx.$$

Çözülişi. Integrirleme oblasty $y = x$ göni bilen we $y = \sqrt{x}$ parabola bilen çäklenendir (*86-njy çyzgy*).



86-njy çyzgy

Bu ýerde $\psi_1(y) = y^2, \psi_2(y) = y, 0 \le y \le 1$. Onda

$$\int_0^1 \Big(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \Big) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx \right) dy.$$

§ 2. Ikigat integralda üýtgeýän ululyklary çalşyrmak

Ikigat integrallary hasaplamak üçin köplenç halatlarda üýtgeýän ululyklary çalşyryp hasaplamak amatly bolýar.

Goý,

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ \vartheta = \vartheta(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

funksiýalar xOy tekizligiň D oblastynda kesgitlenen we hususy önümleri bar bolan funksiýalar bolsun. Goý, (1) sistema x we y görä çözülýän bolsun:

$$\begin{cases} x = x(u,\vartheta) \\ y = y(u,\vartheta) \end{cases} \tag{2}$$

Başgaça aýdanymyzda, D oblastyň her bir $P(x, y)$ nokadyna $Ou\vartheta$ tekizligiň ýeke-täk $P_1(u,\vartheta)$ nokady degişlidir. Bu halda aşakdaky formula dogrudyr:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f\big[x(u,\vartheta), y(u,\vartheta)\big]\left|I(u,\vartheta)\right| du d\vartheta, \tag{3}$$

bu ýerde D_1 oblasta, xOy tekizlikde D oblast degişlidir. $I(u,\vartheta)$ bolsa

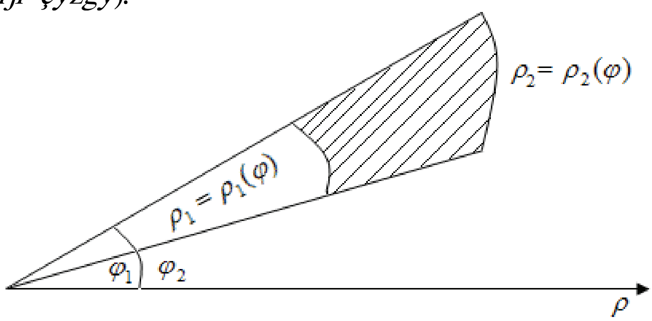
$$I(u,\vartheta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \vartheta}-\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

ýakobiýandyr.

Polýar koordinatalar sistemasynda (2) formula aşakdaky görnüşdedir:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \tag{4}$$

Eger polýus koordinatalar başlangyjynda bolup, polýar oky Ox okuň ugry boýunça ugrukdyrylan bolsa, (4) formula gönüburçly koordinatalar sistemasyndan polýar koordinatalar sistemasyna geçmekligi aňladýar (*87-nji çyzgy*).



87-nji çyzgy

Bu halda $|I|=\rho$ we (3) formula aşakdaky görnüşi alýar:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Goý, D oblast polýar oky bilen φ_1 we φ_2 burçy emele getirýän iki $\rho=\alpha$ we $\rho=\beta$ şöhle bilen hem-de $\rho_1=\rho_1(\varphi)$ we $\rho_2=\rho_2(\varphi)$ $\left(\rho_1(\varphi)<\rho_2(\varphi)\right)$

egriler bilen çäklenen bolsun (*87-nji çyzgy*):

$$D_1=\{\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\ ,\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\}$$

Bu halda aşakdaky formula dogrudyr:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{5}$$

Eger D oblasta koordinatalar başlangyjy degişli bolsa, onda

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho, \tag{6}$$

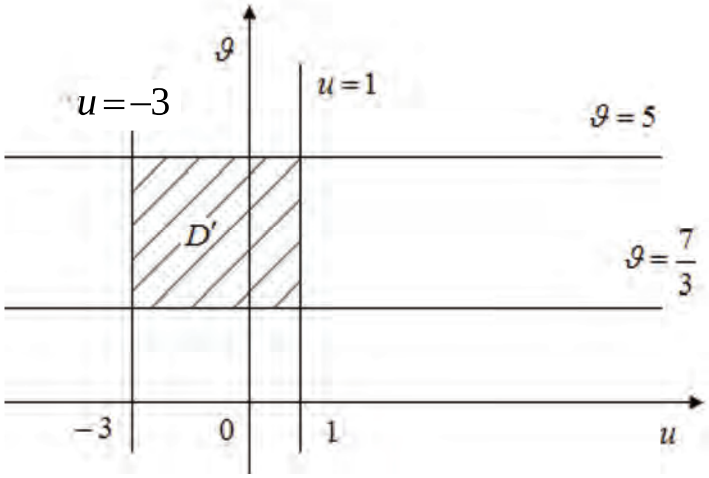
bu ýerde $\rho = \rho(\varphi)$, D oblasty çäklendirýän egriniň polýar deňlemesidir.

1825. Eger D oblast $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$ göniler bilen çäklenen bolsa

$$\iint_D (y-x)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Bu integraly D oblasty gurup hasaplamak çylşyrymly hasaplamalara getirýär. Şonuň üçin bu ýerde ýönekeý ornuna goýmany ulanmak amatlydyr. Goý, $u = y - x$, $\vartheta = y + \frac{1}{3}x$ bolsun. Onda $y = x+1$, $y = x-3$ gönilere $u = 1$, $u = -3$ gönüler, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$ gönilere bolsa, $uO\vartheta$ tekizlikde $\vartheta = \frac{7}{3}$, $\vartheta = 5$ gönüler degişlidir (*88-nji çyzgy*).



88-nji çyzgy

Şunlukda, berlen D oblast $uO\vartheta$ tekizlikde D_1 gönüburçly oblasta özgerýär. Ýakobiany hasaplamak üçin x we y ululyklary u we ϑ ululyklaryň üsti bilen aňladalyň:

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}\vartheta,\quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}\vartheta.$$

Şunlukda,

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4},\quad |I|=\frac{3}{4},$$

$$\iint\limits_D (y-x)dxdy=\iint\limits_{D_1}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}\vartheta\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}\vartheta\right)\right]\frac{3}{4}dud\vartheta=$$

$$=\iint\limits_{D_1}\frac{3}{4}udud\vartheta=\frac{4}{3}\int\limits_{7/3}^{5}\int\limits_{-3}^{1}udud\vartheta=-8..$$

1826. Eger D oblast $x^2+y^2=1$ tőwerek bilen çäklenen bolsa

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

ikigat intengraly hasaplamaly.

Çözülişi. Görnüşi ýaly D oblast merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan tegelekdir. Polýar koordinatalara geçeliň:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$$

Onda töweregiň deňlemesi $\rho=1$ görnüşi alýar we

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$

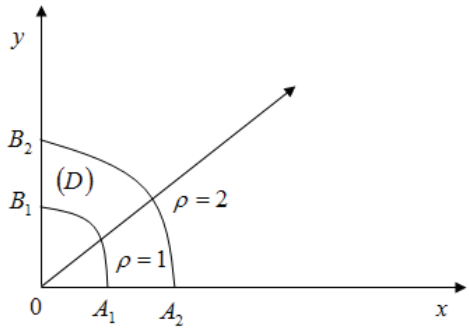
1827. Eger D oblast tegelek halkanyň bölegi bolsa, ýagny Ox we Oy ok, hem-de $x^2+y^2=1$ we $x^2+y^2=4$ töwerekler bilen çäklenen bolsa (*89-njy çyzgy*)

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Polýar koordinatalar ulgamyna geçeliň:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$



89-njy çyzgy

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\rho d\rho = \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\rho^3\Big|_1^2 \int_0^{\pi/2} \left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{7}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi = \frac{7}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

1828. Eger D oblast $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilen çäklenen bolsa

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

ikigat integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Bu mysalda umumylaşdyrylan polýar koordinatalaryny ulanmak amatlydyr:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$$

bu özgertmäniň ýakobianyny tapalyň:

$$I = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$=ab\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=ab\rho,\quad |I|=ab\rho,$$

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\sqrt{1-\rho^2}.$$

bolýanlygyny göz önünde tutup, (6) formulanyň esasynda alarys:

$$\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=ab\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{ab}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi ab}{3}.$$

Integrallary hasaplamay.

1829. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydx$ **1830.** $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(x^2+y^2)dxdy$

1831. $\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dxdy$

1832. Eger D oblast $x^2+y^2=\pi^2$, $x^2+y^2=4\pi^2$ töwerekler bilen çäklenen bolsa $\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ integraly hasaplamaly.

1833. Eger D osblast merkezi $C\left(\frac{a}{2},0\right)$ nokatda, diametri a bolan ýarym tegelek bolsa $\iint_D ydxdy$ integraly hasaplamaly.

1834. Eger D oblast $x^2+y^2=2ax$ töwerek bilen çäklenen bolsa, polýar koordinatalar sistemasyna geçip,

$$\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

1835. $u=x+y$ we $\vartheta=x-y$ ornuna goýmany ulanyp, integraly özgertmeli.

$$\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$$

1836. Eger D oblast $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ egriler bilen çäklenip, birinji çärýekde ýatýan bolsa

$$\iint_D \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

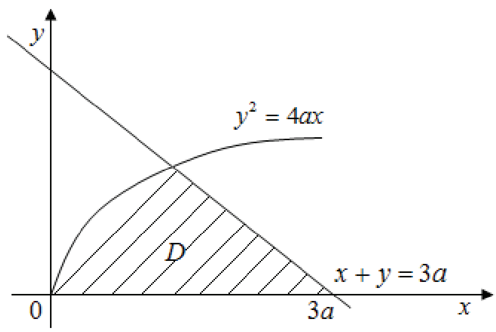
integraly hasaplamaly.

§ 3. Tekiz oblastyň meýdanynyň hasaplanylyşy

XOY tekizlikde berlen D oblastyň S meýdany aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$S=\iint_D dxdy$$

1837. Eger D osblast Ox okdan ýokarda ýerleşip, şol ok bilen., hem-de $y^2=4ax$ parabola we $x+y=3a$ $(a>0)$ göni çyzyk bilen çäklenen bolsa, onuň meýdanyny tapmaly (*90-njy çyzgy*).



90-njy çyzgy

Meýdany (1) formulany ulanyp tapalyň. Onuň üçin integralyň predellerini anyklalyň. $x=3a-y$. Onda $y^2=4a(3a-y)$ ýa-da $y^2+4ay-12a^2=0$.

Bu ýerden

$$y_{1,2}=-2a\pm\sqrt{4a^2+12a^2}=-2a\pm 4a.$$

Şerte görä $y\geq 0$. Onda $y_1=-2a+4a=2a$. Diýmek, y ululyk dan 0-dan 2-ä çenli üýtgeýär. Şeýle hem x ululyk $\frac{y^2}{4a}$-dan $3a-y$ çenli üýtgeýär. Şunlukda,

$$S=\int_0^{2a}\left\{\int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y}dx\right\}dy=\int_0^{2a}\left(3a-y-\frac{y^2}{4a}\right)dy=\left(3ay-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12a}\right)\Bigg|_0^{2a}=$$

$$=6a^2-2a^2-\frac{8a^3}{12a}=4a^2-\frac{2a^2}{3}=\frac{10a^2}{3},$$

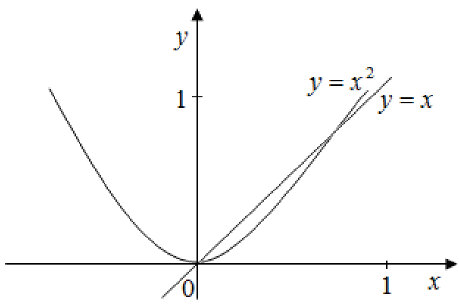
$$S=\frac{10}{3}a^2\ kw.birlik.$$

1838. $y=x^2$ parabola we $y=x$ göni çyzyk bilen çäklenen D oblastyň S meýdanyny tapmaly (*91-nji çyzgy*).

Çözülişi. $y=x^2$ parabola we $y=x$ göni çyzygyň kesişme nokatlaryny tapmak üçin

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases}$$

sistemany çözüp $(0,0)$ we $(1,1)$ nokatlary alarys:



91-nji çyzgy

onda

$$S=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x}dy\right]dx=\int_0^1 y\Big|_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

1839. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k},\ a>0, b>0, h>0\ k>0$, egri bilen çäklenen tekiz figuranyň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. Berlen oblastyň deňlemesini özgerdip ýazalyň:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}.$$

Umumylaşdyrylan polýar koordinatalara geçeliň:

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=\rho\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=\rho\sin\varphi,$$

onda

$$I=ab\rho\,,\,0\le\varphi\le 2\pi\,,\,0\le\rho\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}.$$

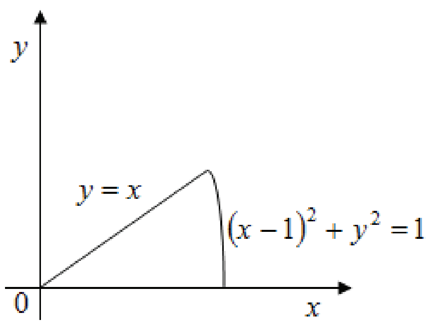
Şunlukda

$$S=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}\rho d\rho=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

1840. $y=0,\quad y=x$ gönüler we $x^2+y^2=2x$ töwerek bilen çäklenen tekiz figuranyň meýdanyny tapmaly (*92-nji çyzgy*).

Çözülişi. Polýar koordinatalara geçeliň:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$



92-nji çyzgy

Onda D oblasty çäklendirýän D_1 oblast $\rho^2=2\rho\cos\varphi$ görnüşi alýar ýa-da $\rho=2\cos\varphi$. φ burç 0-dan $\frac{\pi}{4}$ çenli. ρ radius bolsa 0-dan $2\cos\varphi$ çenli üýtgeýär:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

1841. $x=y,\ x=2y,\ x+y=a,\ x+3y=a\ (a>0)$ göni çyzyklar bilen çäklenen şekiliň meýdanyny tapmaly.

1842. $y^2=10x+25$ we $y^2=-6x+9$ parabolalar bilen çäklenen tekiz oblastyň meýdanyny hasaplamaly.

1843. $x=0,\ y=0,\ x=2$ göni çyzyklar we $y=e^x$ egri bilen çäklenen tekiz oblastyň meýdanyny tapmaly.

1844 $y=-1,\ y=-x$ göni çyzyklar we $x^2+y^2=-2y$ töwerek bilen çäklenen tekiz oblastyň meýdanyny hasaplamaly.

1845. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ egri we $x+y=a$ göni çyzyk bilen çäklenen tekiz şekiliň meýdanyny hasaplamaly.

1846. $y=\sin x,\ y=\cos x$ egriler we $x=0$ göni çyzyk bilen çäklenen tekiz oblastyň meýdanyny hasaplamaly.

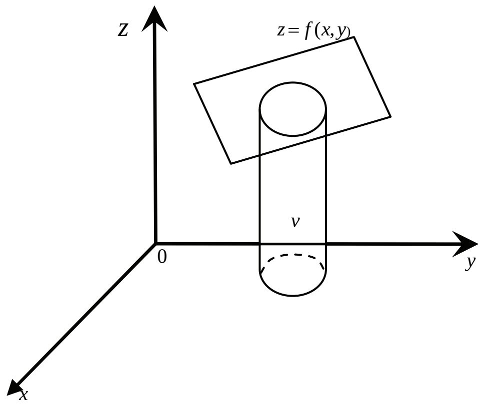
1847. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$ syrtmak görnüşli egri bilen çäklenen tekiz oblastyň meýdanyny hasaplamaly.

1848. $y^2=x+2$ parabola we $x=2$ göni çyzyk bilen çäklenen tekiz şekiliň meýdanyny hasaplamaly.

1849. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ egri bilen çäklenen tekiz oblastyň meýdanyny hasaplamaly.

§ 4. Göwrümiň hasaplanylyşy

Goý silindrik jisim ýokardan $z=f(x,y)$ üst aşakdan bolsa xOy tekizlikde ýatýan D oblast bilen çäklenen bolsun (*93-nji çyzgy*).



93-nji çyzgy

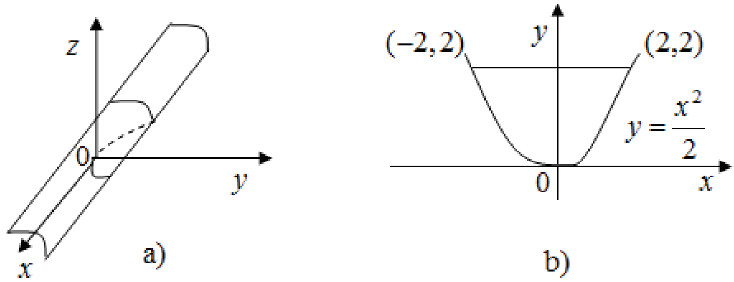
Onda ol jisimiň göwrümi

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy \qquad (1)$$

formula bilen hasaplanylýar

1850. $z = 4 - y^2,\ y = \dfrac{x^2}{2}$ silindrik üstler we $z = 0$ tekizlik bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly (*94-nji çyzgy*).

Çözülişi. Jisimi ýokardan çäklendirýän üstüň deňlemesini ýazalyň $z = 4 - y^2$. Integrirleme D oblastyň çäklerini anyklalyň.



94-nji çyzgy

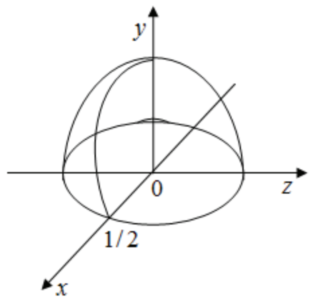
Ol $y = \dfrac{x^2}{2}$ parabolanyň, $z = 4 - y^2$ silindr we $z = 0$ tekizlik bilen kesişmelerinden emele gelendir. Jisimiň *yOz* tekizlige görä simmetrikligine görä onuň ýarysyny hasaplalyn:

$$\frac{1}{2}V=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^2\left(4-y^2\right)dy=\int_0^2\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^2 dx=$$

$$=\int_0^2\left(8-\frac{8}{3}-2x^2+\frac{x^6}{24}\right)dx=\left(\frac{16}{3}x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^7}{168}\right)\Bigg|_0^2=\frac{128}{21}\ kub.birlik.$$

1851. $z=1-4x^2-y^2$ üst bilen we xOy tekizlik bilen çäklenen jisimiň göwrümini hasaplamaly.

Çözülişi. Berlen jiisim xOy tekizligiň ýokarky böleginde ýerleşen elliptik paraboloidanyň artymydyr (*95-nji çyzgy*).



95-nji çyzgy

Parabola xOy tekizlik bilen kesişip $4x^2+y^2=1$ ellipsi emele getirýär. Şunlukda, biz esasy ellips bilen çäklenen $z=1-4x^2-y^2$ paraboloidanyň göwrümini tapmaly bolýarys. Jisimiň simmetrikligine görä onuň göwrüminiň dörtden birini taparys: $4x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\ y\ge 0,$

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}\left(1-4x^2-y^2\right)dy=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-4x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx,$$

$$2x=\sin t,\quad 2dx=\cos t dt,$$

$$\frac{1}{4}V=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16}\pi,\quad V=\frac{\pi}{4}.$$

1852. Ýokardan $z=x^2+y^2$ aýlanma paraboloid bilen, aşakdan xOy tekizlik bilen, gapdaldan bolsa $y=x^2$ üst we $y=1$ tekizlik bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

Çözülişi. Berlen üstüň proýeksiýasy bolan D oblastyň çäklerini takyklalyň.

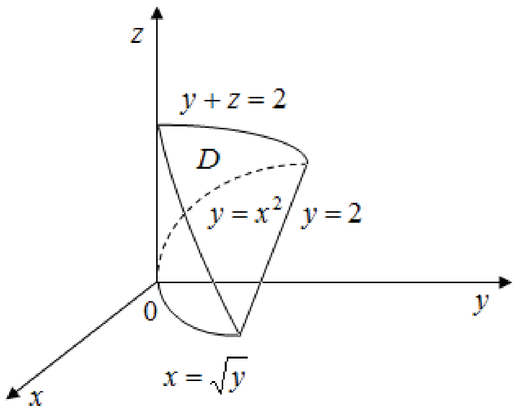
$D = \{-1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$. Şonuň üçin

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{88}{105}.$$

1853. $z = 0$, $y + z = 2$ tekizlik we $y = x^2$ silindr bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

Çözülişi. Berlen jisim ýokardan $z = 2 - y$ tekizlik bilen çäklenendir (*96-njy çyzgy*).



96-njy çyzgy

D oblast xOy tekizlikde $y = 2$ göni çyzyk we $y = x^2$ parabola bilen çäklenen oblastdyr. D oblasty Oy oka proýeksiýasyny alalyň. Jisimiň yOz tekizlige görä simmetrikliginden peýdalanyp alýarys:

$$\frac{V}{2} = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} (2 - y)dx = \int_0^2 (2 - y)x\Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^2 \left(2\sqrt{y} - y\sqrt{y}\right)dy =$$

$$\left(\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right)\Bigg|_0^2 = 2y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{5} \right)\Bigg|_0^2 = 4\sqrt{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{2}{15} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{15}, \quad V = \frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

1854. $z = 3 - x^2 - y^2$ paraboloid we $z = 0$ tekizlik bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

Aşakdaky üstler bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

1855. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=6,\ z=0$,

$x+y+z=a, \quad 3x+y=a.$

1856. $\frac{3}{2}x+y=a, \quad y=0, \quad z=0.$

1857. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=\frac{b}{a}x,\ y=0,\ z=0.$

1858. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y-12=0$ tekizlik we $z=\frac{1}{2}y^2$ silindr bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

1859. xOy tekizlik, $x^2+y^2=R^2$ silindr we $x^2+y^2=z^2$ konus bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

1860. $x^2+y^2-az=0$ paraboloid, $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ silindr we $z=0 \quad (a>0)$ tekizlik bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

1861. $z=ax, \quad z=0$ tekizlikler we $x^2+y^2=2ax$ silindr bilen çäklenen jisimiň göwrümini tapmaly.

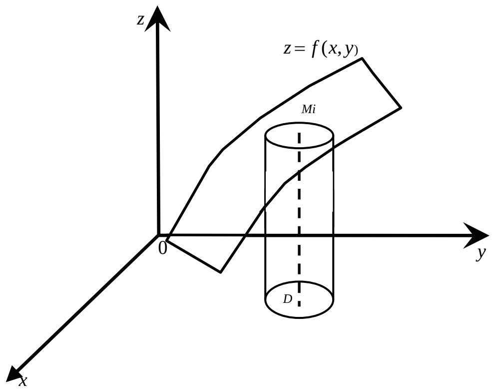
1862. $z=h^2$ tekizlik we $z=x^2+y^2$ paraboloid bilen çäklenen jisimiň göwrümini hasaplamaly.

1863. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidanyň göwrümini hasaplamaly.

§ 5. Üstüň meýdanynyň tapylyşy

Goý, giňişlikde deňlemesi $z=f(x,y)$ bolan endigan üst berlen bolsun (*97-nji çyzgy*). $f(x,y)$ funksiýa üznüksiz we üznüksiz hususy önümlere eýe diýeliň. Onda, üstüň xOy tekizlige bolan proýeksiýasy D oblast bolsa, onuň S meýdany aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$



97-nji çyzgy

1864. $x^2 + y^2 = a^2$ silindrde ýerleşen $az = xy$ üstüň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi.

$$z = \frac{xy}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{a}, \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{a},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}},$$

onda

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}} dxdy.$$

Şu integraly hasaplamak üçin üýtgeýän ululyklary çalşyralyň:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = a\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Onda alarys:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\rho\sin\varphi & a\cos\varphi \\ a\rho\cos\varphi & a\sin\varphi \end{vmatrix} = -a^2\rho,$$

$$S = a^2 \iint\limits_{\substack{0\le\rho\le1\\0\le\varphi\le2\pi}} \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho d\varphi = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi a^2\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

1865. $x^2 + y^2 = 2x$ silindrde ýerleşen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ üstüň meýdanyny hasaplamaly.

Çözülişi. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ töwerek bilen silindr xOy tekizlikde kesişýändirler $(z = 0)$. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýadan hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

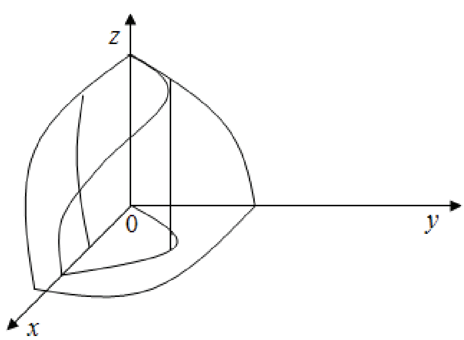
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.$$

Onda

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le1} dxdy = \pi\sqrt{2}.$$

1866. Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan şardan, radiusy şaryň radiusyndan iki esse kiçi bolan we şaryň merkezinden geçýän silindr bilen bölnüp alnan şar şekilli üstüň S meýdanyny hasaplamaly (*98-nji çyzgy*).

Çözülişi.



98-nji çyzgy

Goý, $x^2+y^2+z^2=a^2$ şar üstüniň deňlemesi, $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ bolsa töweregiň deňlemesi bolsun. xOy tekizlikde D oblast silindriň esasydyr.

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z}, \qquad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

polýar koordinatalar sistemasyna geçeliň. Berlen töwerek $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ polýar koordinatalar sistemasynda aşakdaky görnüşde ýazylýar: $\rho=a\cos\varphi$. Bu ýerde $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-\rho^2}$.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{a\cos\varphi}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho\right\}d\varphi=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\ kw.birlik.$$

1867. $z^2=2xy$ üstden $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ tekizlikler bilen bölünip alnan böleginiň üstüniň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi. $z^2=2xy$ deňlemäni differensirläp alarys:

$$2zdz=2ydx+2xdy, \quad zdz=ydx+xdy,$$

bu ýerden

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{(x+y)^2}{z^2}=\frac{(x+y)^2}{2xy}.$$

Görnüşi ýaly, berlen üst xOy tekizlige simmetrikdir we onuň ýokarky böleginiň şu tekizlige proýeksiýasy $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$ üçburçlugy emele getirýär. Onda

$$S = 2\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x}}\left(x^{1/2}y^{-1/2} + x^{-1/2}y^{1/2}\right)dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^{1/2}y^{-1/2} + x^{-1/2}y^{1/2}\right)dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1\left(x^{1/2}(1-x)^{1/2} + \frac{1}{3}x^{-1/2}(1-x)^{3/2}\right)dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

1868. $z^2 = 2xy$ üstüň $x = 1, y = 4, z = 0$ tekizlikler bilen bölünip alnan böleginiň meýdanyny tapmaly.

1869. $x + y + z = 4$ tekizligiň $x = 0, y = 0, x = 2, y = 2$ tekizlikler bilen bölünip alnan böleginiň üstüniň meýdanyny tapmaly.

1870. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ tekizligiň koordinata tekizlikleriniň arasyndaky böleginiň üstüniň meýdanyny tapmaly.

1871. $x^2 + y^2 = R^2$, $(z \ge 0)$ silindriň $z = mx$ we $z = nx$, $(m > n > 0)$ tekizlikleriň arasyndaky üstüniň meýdanyny hasaplamaly.

1872. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ sferanyň $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(b \le a)$ silindriň içindäki böleginiň üstüniň meýdanyny hasaplamaly.

§ 6. Ikigat integralyň mehanikada ulanylyşy

Goý, xOy tekizlikde galyňlygy kiçi bolan tekiz plastinka berlen bolsun. Onuň meýdanyny S bilen belgiläliň. Eger plastinkanyň galyňlygy ýeterlik kiçi bolsa, onda onuň dykyzlygyna garamasak hem bolar.

Şeýle plastinkanyň berlen nokatdaky üst dykyzlygyna, şol nokady çäklendirýän oblastyň meýdanynyň massasynyň, onuň meýdanyna bolan gatnaşygy hökmünde seredilýär. Görnüşi ýaly şeýle kesgitlenen üst dykyzlygy berlen nokadyň ýerleşişine baglydyr. Başgaça aýdanymyzda, şol nokadyň koordinatalaryna görä funksiýadyr:

$$\mu = \mu(x, y)$$

Onda

a) plastinkanyň m massasy aşakdaky formula bilen tapylýar

$$m = \iint_D \mu(x,y)dxdy. \tag{1}$$

b) Ox we Oy koordinata oklaryna görä plastinkanyň M_x we M_y statiki momentleri aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenýär:

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)dxdy, \tag{2}$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)dxdy. \tag{3}$$

ç) Plastinkanyň agyrlyk merkeziniň x_c we y_c koordinatalaryny aşakdaky deňlikler bilen kesgitleýärler:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \tag{4}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}. \tag{5}$$

d) Ox, Oy koordinata oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä plastinkanyň I_x, I_y we I_0 inersiýa momentleri aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)dxdy, \tag{6}$$

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)dxdy, \tag{7}$$

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy. \tag{8}$$

Birjynsly plastinkalar üçin $\mu = const$ ýa-da has ýönekeýlik üçin $\mu = 1$ diýip kabul ederis.

1873. $ay = x^2$, $x + y = 2a$, $(a > 0)$ parabola we göni çyzyk bilen çäklenen birjynsly plakstinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. $x + y = 2a$ göni çyzyk we $y = \dfrac{x^2}{a}$ parabola abssisalary $x = -2a$ we $x = a$ bolan nokatlarda kesişýärler. Onda birjynsly plastinka aşakdaky ýapyk oblastdyr:

$$D = \left\{-2a \le x \le a, \frac{x^2}{a} \le y \le 2a - x\right\}.$$

Plastinkanyň massasy aşakdaky integral bilen tapylýar:

$$m=\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\int_{-2a}^{a}\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\frac{9}{2}a^2,$$

$$x_c=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}xdx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}\left(2ax-x^3-\frac{x^3}{a}\right)dx=-\frac{a}{2},$$

$$y_c=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}ydy=\frac{1}{9a^2}\int_{-2a}^{a}\left[(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\right]dx=\frac{8}{5}a.$$

1874. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2,\ x=0,\ y=0,\ (0\le x\le a)$ çyzyklar bilen çäklenen birjynsly plastinkanyň Ox we Oy kordinatalar oklaryna görä inersiýa momentini tapmaly.

1875. Eger R radiusly tegelek plastinkanyň her bir nokadyndaky $\mu(x,y)$ üst dykyzlygy onuň erkin (x,y) nokady bilen merkeziniň aralygyndaky uzaklyga proporsional bolsa, ýagny

$$\mu(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2},$$

onda onuň massasyny tapmaly.

Çözülişi. (1) formulany ulanalyň:

$$m=\iint_D k\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Bu ýerde D integrirleme oblasty $x^2+y^2\le R^2$ tegelekdir.

Polýar koordinatalara geçip, alarys:

$$m=k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\rho\rho d\rho\right)d\varphi=k\cdot 2\pi\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^R=\frac{2}{3}k\pi R^3.$$

1876. R radiusly, D meýdanly tegelegiň O merkeze görä inersiýa momentini hasaplamaly.

Çözülişi. (8) formulany ulanalyň:

$$I_0=\iint_D(x^2+y^2)dxdy.$$

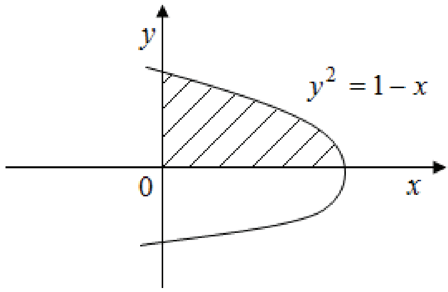
Integraly hasaplamak üçin polýar koordinatalaryna geçeliň:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad |I|=\rho,\quad \rho=R.$$

Onda alarys:

$$I_0 = \int_0^{2\pi} (\int_0^R \rho^2 \rho d\rho) d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

1877. Her bir nokadynda üst dykyzlygy y bolan $y^2 = 1 - x$, $y = 0$, $x = 0$ çyzyklar bilen çäklenen D figuranyň Oy oka görä inersiýa momentini hasaplamaly (*99-njy çyzgy*).

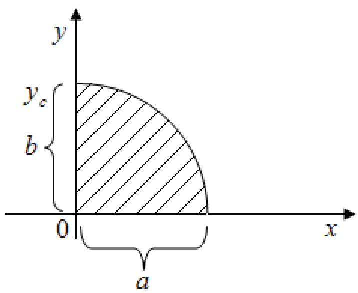


99-njy çyzgy

$$I_y = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dydx) = \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x) x^2 dx = \frac{1}{24}.$$

1878. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsiň dörtden biriniň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny kesgitlemeli (üst dykyzlygy $\mu = 1$) (*100-nji çyzgy*).

Çözülişi.



100-nji çyzgy

(4) formulany ulanalyň:

$$x_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xdy\right)dx}{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx}=\frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,xdx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy\right)dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

1879. Taraplary a we b bolan birjynsly gönüburçlugyň a tarapa görä statiki momentini tapmaly.

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny gönüburçlugyň bir depesinde ýerleşdirip, Ox okuň ugruny a tarapyň ugryna ugrukdyralyň. Şonuň üçin gönüburçlugyň a tarap boýunça statiki momenti Ox oka görä statiki momentine deňdir. (2) formulanyň esasynda alarys:

$$M_a=M_x=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b ydy=\frac{1}{2}\int\limits_0^a y^2\Big|_0^b dx=\frac{b^2}{2}\int\limits_0^a dx=\frac{b^2}{2}x\Big\|_0^a=\frac{ab^2}{2}.$$

1880. $y^2=4x-4$ we $y^2=-2x+4$ parabolalar bilen çäklenen oblastyň meýdanynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny kesgitlemeli.

1881. $ay=x^2$ parabola we $y=2,\ (a>0)$ göni çyzyk bilen çäklenen birjynsly plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny kesgitlemeli.

1882. $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$ gönüler bilen çäklenen gönüburçlugyň koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentini tapmaly.

1883. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ x=0,\ y=0$ çyzyklar bilen çäklenen şekiliň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

1884. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ (0\le t\le 2\pi)$ sikloida we $y=0$ çyzyk bilen çäklenen şekiliň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

1885. $xy=4$ giperbola we $x+y=5$ göni çyzyk bilen çäklenen meýdanyň $x=y$ göni çyzyga görä inersiýa momentini hasaplamaly.

§ 7. Üçgat integrallar we olaryň hasaplanylyşy

Goý, giňişligiň V oblastynda $f(x,y,z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. V oblasty umumy nokatlary bolmadyk $\Delta V_1,\ \Delta V_2,...,\ \Delta V_n$ göwrümleri bolan, $V_1,\ V_2,...,V_n$ oblastlara böleliň. Her bir V_i oblastda (x_i,y_i,z_i) nokady almak bilen, berlen funksiýanyň (x_i,y_i,z_i) nokatdaky bahasyny V_i oblastyň göwrümine köpeldip, integral jemi düzeliň:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta V_i. \tag{1}$$

Kesgitleme. Eger $\lambda = max\mathrm{diam}\mathrm{V_i} \to 0$ bolanda (1)-nji integral jemiň tükenikli predeli bar bolsa, şol predele $f(x,y,z)$ funksiýadan V oblast boýunça alnan üçgat integral diýilýär we aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i.$$

Üçgat integralyň häsiýetleri hem ikigat integralyň häsiýetlerine meňzeşdir.

Şunlukda, dekart koordinatalar sistemasynda göwrüm hasaplamagyň formulasyny aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz.$$

xOy tekizlige proýeksiýasy $P = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$ gönüburçluk bolan $V = \{a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le l\}$ parallelepiped boýunça alnan üçgat integraly hasaplamak üçin aşakdaky formula dogrudyr:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x,y,z)dz. \tag{2}$$

Goý, aşakdan $z = z_1(x,y)$ üst bilen, ýokardan bolsa $z = z_2(x,y)$ üst bilen, gapdaldan bolsa silindrik üst bilen çäklenen egriçyzykly oblast berlen bolsun.

Şu oblastyň xOy tekizlige bolan proýeksiýasy D bolsa, aşakdaky formula dogrudyr

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_{1(x,y)}}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

1886. Eger V oblast $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$ deňsizlikler bilen kesgitlenen bolsa $I = \iiint\limits_V x^3 y^2 z dxdydz$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Alarys:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3 y^2 z dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^3 y^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \frac{x^5 y^4}{2} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2} \cdot \frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{10}}{10} dx = \frac{1}{110}.$$

1887. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid boýunça alnan $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ üçgat integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int\limits_{-a}^{a} x^2 dx \iint\limits_{S_{yz}} dydx = \int\limits_{-a}^{a} x^2 S_{yz} dx.$$

Bu ýerde S_{yz} ellipsiň meýdanydyr.

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad x = \text{const},$$

$$S_{yz} = \pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}).$$

Şunlukda

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \pi bc \int\limits_{-a}^{a} x^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \frac{4}{15} \pi a^3 bc.$$

1888. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$ integraly $V = \{0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$ parallelepiped boýunça hasaplamaly.

Çözülişi.

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV = \int_0^a \left[\int_0^b \left\{\int_0^c (x^2+y^2+z^2)dz\right\}dy\right]dx =$$

$$=\int_0^a \left[\int_0^b (cx^2+cy^2+\frac{c^3}{3})dy\right]dx = \int_0^a \left[bcx^2+\frac{b^3}{3}c+b\frac{c^3}{3}\right]dx =$$

$$=\frac{a^3bc}{3}+\frac{ab^3c}{3}+\frac{abc^3}{3}=\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

1889. $\iiint_V (2x+3y-z)dV$ integraly

$$z=0,\ z=a\ ,\ x=0,\ y=0,\ x+y=b,\quad (a>0\ ,\ b>0)$$

üçgranly prizma boýunça hasaplamaly.

Çözülişi. $z_1(x,y)=0,\ \ z_2(x,y)=0$. Prizmanyň xOy tekizlige proýeksiýasy $x=0,\ y=0,\ x+y=b$ göni çyzyklar bilen çäklenen üçburçlukdyr. Onda alarys:

$$\iiint_V (2x+3y-z)dV = \iint_{S_1}\left\{\int_0^a (2x+3y-z)dz\right\}dS =$$

$$=\iint_{S_1}\left[(2x+3y)a-\frac{a^2}{2}\right]dS = \int_0^b dx\int_0^{b-x}\left[(2x+3y)a-\frac{a^2}{2}\right]dy = \frac{3}{6}ab^3-\frac{1}{4}a^2b^2.$$

1890. Eger V jisim

$$0\le x\le \frac{1}{2},\quad x\le y\le 2x\ ,\quad 0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}$$

deňsizlikler bilen kesgitlenen bolsa,

$$\iiint_V zdxdydz$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^{2x} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^{2x}\left(z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{2x}(1-x^2-y^2)dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\left(y-yx^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^{2x}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x-2x^3-\frac{8}{3}x^3-x+x^3+\frac{1}{3}x^3\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^4\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16}\right]=\frac{7}{192}.$$

1891. Eger V jisim $x^2+y^2+z^2=1$ sfera we $x=0$, $y=0$, $z=0$ tekizlikler bilen çäklenen bolsa $\iiint\limits_V xyzdxdydz$ integraly hasaplamaly.

1892. Eger V jisim $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ tekizlikler bilen çäklenen tetraedr bolsa $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ integralyň çäklerini goýmaly.

1893. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xyzdz$ integraly hasaplamaly.

1894. Eger V jisim koordinata tekizlikleri we $x+y+z=1$ tekizlik bilen çäklenen bolsa $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2}$ integraly hasaplamaly.

1895 Eger V jisim $x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=2,\ z=5$ tekizlikler bilen çäklenen bolsa $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz$ integraly hasaplamaly.

1896. Eger V oblast $x^2+y^2=1$ silindr we $z=0,\ z=3$ tekizlikler bilen çäklenen bolsa $\iiint\limits_V xdxdydz$ integraly hasaplamaly.

§ 8. Üçgat integrallarda silindrik we sferik koordinatalara geçmek

Üçgat integrallary hasaplamany ýeňilleşdirmek üçin köplenç halatlarda ornuna goýmany ulanmak amatly bolýar. Silindrik we sferik koordinatalara geçip, ornuna goýmaklyga garalyň.

Goý, φ,ρ we z üýtgeýän ululyklar x,y we z ululyklar bilen

$$x=\rho\cos\varphi\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=h, \tag{1}$$

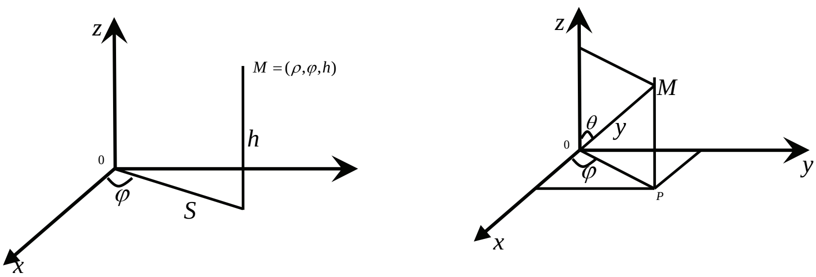
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le +\infty, \quad -\infty < z < +\infty.$$

gatnaşyklar bilen baglanyşýan bolsunlar.

Onda üçgat integralda gönüburçly koordinatalar sistemasyndan silindrik koordinatalar sistemasyna geçmeklik aşakdaky formula bilen amala aşyrylýar:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz \qquad (2)$$

Bu ýerde V' silindrik koordinatalardaky oblastdyr.



101-nji çyzgy

Sferik we dekart koordinatalar sistemalary aşakdaky gatnaşyklar bilen baglanyşýarlar:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \; y = r\sin\varphi\sin\theta, \; z = r\cos\theta, \; dV = r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta, \qquad (3)$$

$$0 \le \phi \le 2\pi, \; 0 \le \theta \le \pi, \; 0 \le r < +\infty.$$

Üçgat integralda *x,y,z* ululyklary (3) formulalar bilen calşyrsak, göwrümi tapmak aşakdaky fomula bilen amala aşyrylýar:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr. \qquad (4)$$

Bu ýerde V' sferik koordinatalardaky oblastdyr.

1897. Eger V oblast $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ şar bolsa $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Sferik koordinatalaryna geçeliň:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \; y = r\sin\varphi\sin\theta, \; z = r\cos\theta,$$

$$\iiint_V x^2 dxdydz = \iiint_{V'} r^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5\cdot 2}\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}\left(\cos^2\theta - 1\right) d\left(\cos\theta\right) = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

1898. Eger V oblast $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ýapyk oblast bolsa

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz.$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Umumylaşdyrylan sferik koordinatalara geçeliň:

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta,\ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ z = cr\cos\theta,$$
$$0 \le \varphi \le \pi,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Onda alarys

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz = abc\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 dr =$$

$$= \frac{2\pi abc}{5}\cos\varphi\Big|_{\pi}^{0} = \frac{4\pi abc}{5}.$$

1899. Eger V oblast $x^2+y^2=2x$ silindr we $y=0,\ z=0,\ z=a$ tekizlikler bilen çäklenen bolsa,

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Silindrik koordinatalara geçeliň:

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \rho \le +\infty,\quad -\infty < z < +\infty,$$

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \iiint_{V'} z\rho^2 d\rho d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 d\rho \int_0^a z dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right) d\left(\cos\varphi\right) =$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{9}a^2.$$

1900. Eger integrirleme oblasty $x^2+y^2=z^2$, $z=1$ üstler bilen çäklenen bolsa, $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Görnüşi ýaly berlen V jisim $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konik üst we $z=1$ tekizligiň bölegi bilen çäklenendir. Şu jisimi xOy tekizlige proýeksiýasy $x^2+y^2\le 1$ tegelekdir.

Berlen integralda silindrik koordinatalara geçip, alarys:

$$V=\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 1, \rho\le z\le 1\},$$

$$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho\int_\rho^1dz=2\pi\int_0^1\rho^2(1-\rho)d\rho=\frac{\pi}{6}.$$

1901. Eger V oblast $x^2+y^2+z^2=z$ sfera bilen çäklenen bolsa, sferik koordinatalara geçip, $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ integraly hasaplamaly.

1902. Eger integrirleme oblasty $x^2+y^2=2z$, $z=2$ üstler bilen çäklenen bolsa, silindrik koordinatalara geçip, $\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz$ integraly hasaplamaly.

1903. Silindrik koordinatalara geçip, $\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$ integraly hasaplamaly.

1904. Integraly hasaplamaly:

$$\int_0^1dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^a dz.$$

1905. Eger V oblast $x^2+y^2=1$ silindr we $y=0$, $y=1$ tekizlikler bilen çäklenen bolsa, silindrik koordinatalara geçip, $\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$ integraly hasaplamaly.

1906. Eger V oblast $x^2+y^2+z^2\le 1$ şar bolsa, sferik koordinatalara geçip,

$\iiint\limits_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz$ integraly hasaplamaly.

§ 9. Üçgat integralyň mehanikada ulanylyşy

Goý, giňişlikde $\mu(x,y,z)$ dykyzlygy bolan V jisim berlen bolsun:

a) bu jisimiň massasy

$$m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz \tag{1}$$

formula bilen tapylýar;

b) Ox, Oy, Oz koordinata oklaryna görä I_x, I_y, I_z inersiýa momentleri, şeýle hem xOy, xOz, yOz koordinata tekizliklere we koordinatalar başlangyjyna görä $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_0$ inersiýa momentleri aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(z^2+y^2\right)\mu dxdydz$$

$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)\mu dxdydz$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\mu dxdydz \tag{2}$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\mu dxdydz, \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\mu dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\mu dxdydz, \tag{3}$$

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu dxdydz. \tag{4}$$

ç) jisimiň agyrlyk merkeziniň koordinatalary aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_V \mu x dxdydz}{m}, \qquad y_0 = \frac{\iiint\limits_V \mu y dxdydz}{m},$$

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_V \mu z dxdydz}{m}. \tag{5}$$

1907. $x=0,\ z=0,\ y=1,\ y=3, x+2z=3$ tekizlikler bilen çäklenen prizma görnüşli jisimiň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny kesgitlemeli $(\mu=1)$.

Çözülişi.

$$m=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz=\int_0^3 dx\int_1^3 \frac{3-x}{2}dy=$$

$$=\int_0^3(3-x)dx=\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]\Bigg|_0^3=\frac{9}{2},$$

$$x_0=\frac{2}{9}\iiint\limits_V xdxdydz=\frac{2}{9}\int_0^3 xdx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz=\frac{2}{9}\int_0^3 xdx\int_1^3 \frac{3-x}{2}dy=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3 x(3-x)dx=\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_0^3=1,$$

$$y_0=\frac{2}{9}\iiint\limits_V ydxdydz=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 ydy\int_0^{\frac{3-x}{2}} dz=\frac{1}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y(3-x)dy=$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^3(3-x)dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^3=2,$$

$$z_0=\frac{2}{9}\iiint\limits_V zdxdydz=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} zdz=\frac{2}{9}\int_0^3\frac{(3-x)^2}{8}dx\int_1^3 dy=$$

$$\frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}.$$

1908. Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan R radiusly şaryň ýarysynyň her bir (x,y,z) nokatdaky F dykyzlygy esasy bilen arasyndaky uzaklyga göni proporsional bolsa, $F=kx,$ onuň massasyny tapmaly.

Çözülişi. Sferanyň ýokarky böleginiň deňlemesini ýazalyň:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Bu deňlemäni silindr koordinatalarda ýazalyň $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$. Onda

$$m = \iiint_V kz\rho d\theta d\rho dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} kzdz\right)\rho d\rho\right]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho d\rho\right]d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]d\theta = \frac{k}{2}\cdot\frac{R^4}{4}2\pi = \frac{k\pi R^4}{4}.$$

1909. Radiusy 1-e deň bolan birjynsly şaryň öz merkezine görä inersiýa momentini hasaplamaly.

Çözülişi. Şaryň mertkezini koordinatalar başlangyjynda ýerleşdireliň. Onda şaryň merkezine görä inersiýa momenti koordinatalar başalangyjyna görä inersiýa momentine deňdir. (4) formulany ulanyp alarys:

$$I_0 = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz.$$

Bu integralda sferik koordtnatalara geçeliň

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta,$$

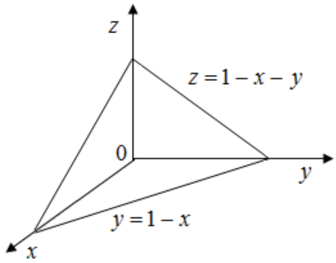
$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r < 1,$$

$$I_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^4 dr = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot r^5\Big|_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{2}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{5}.$$

1910. Eger birjynsly piramida $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0$ tekizlikler bilen çäklenen bolsa (*102-nji çyzgy*), onda xOy koordinata tekizlige görä inersiýa momentini tapmaly.

Çözülişi.



102-nji çyzgy

(3) formulanyň esasynda alarys:

$$I_{xy}=\iiint\limits_V z^2dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}z^2dz=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}z^3\Big|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)^3dy=-\frac{1}{12}\int\limits_0^1(1-x-y)^4\Big|_0^{1-x}dx=\frac{1}{12}\int\limits_0^1(1-x)^4dx=$$

$$=-\frac{1}{60}(1-x)^5\Big|_0^1=\frac{1}{60}.$$

1911. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=a,\ y=b,\ z=c$ tekizlikler bilen çäklenen $\mu=x+y+z$ dykyzlygy bolan jisimiň massasyny tapmaly.

1912. $y^2+2z^2=4x$ paraboloid we $x=2$ tekizlik bilen çäklenen jisimiň agyrlyk merkezini tapmaly.

1913. $x+y=1,\ z=x^2+y^2\ x=0,\ y=0,\ z=0$ tekizlikler bilen çäklenen jisimiň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

1914. $z=x^2+y^2$ paraboloid we $z=4$ tekizlik bilen çäklenen jisimiň koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentini tapmaly.

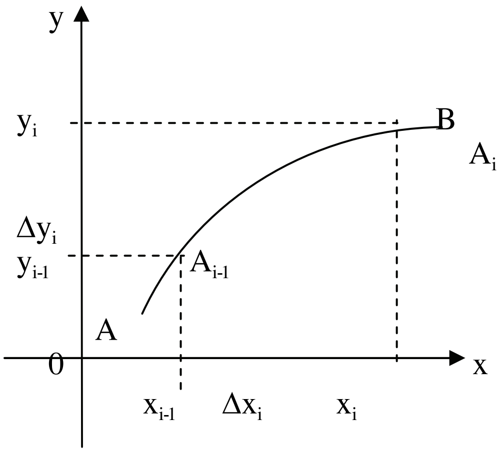
1915. Beýikligi h, esasynyň radiusy a bolan konusyň diametrine we okuna $(\mu=1)$ görä inersiýa momentini tapmaly.

1916. $z=x^2+y^2,\ x+y=\pm1,\ x-y=\pm1,\ z=0$ tekizlikler bilen çäklenen birjynsly jisimiň Oz oka görä inersiýa momentini tapmaly.

XV BÖLÜM
EGRIÇYZYKLY WE ÜST INTEGRALLARY

§ 1. Birinji jynsly egriçyzykly integrallar

Goý, deňlemesi $y = f(x)$ üznüksiz funksiýa bolan AB egri çyzyk berlen bolsun. AB egri çyzygy $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ nokatlaryň kömegi bilen erkin böleklere böleliň (*103-nji çyzgy*).



103-nji çyzgy

Uzynlygy Δl_i bolan her bir $A_{i-1}A_i$ dugada degişlilikde M_i nokady almak bilen, integral jemi düzeliň:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} f(M_i)\Delta l_i. \tag{1}$$

Şu integral jem AB egri çyzygyň böleklere bölnüşine we M_i nokadyň alnyş usulyna baglydyr.

Kesgitleme. Eger $\lambda = \max_i |\Delta l_i| \to 0$ bolanda AB egri çyzygyň böleklere bölünişine we $A_{i-1}A_i$ dugada M_i nokatlaryn saýlanyp alnyşyna bagly bolmazdan (1) integral jemiň tükenikli predeli bar bolsa, şol predele $f(M)$ funksiýadan AB egri boýunça alnan birinji jynsly egriçyzykly integral diýilýär we

$$I = \int_{(AB)} f(M)dl \tag{2}$$

görnüşde belgilenýär.

Birinji jynsly egrijyzykly integrallar aşakdaky ýönekeý häsiýetlere eýedir:

1) $\int\limits_{AB}\left(c_1 f_1 \pm c_2 f_2\right)dl = c_1\int\limits_{l} f_1 dl \pm c_2\int\limits_{l} f_2 dl;$

2) $\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{AC} f(M)dl + \int\limits_{CB} f(M)dl, \quad \left(AB = AC + CB\right).$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly birinji jynsly egriçyzykly integrallar integrirlemegiň ugruna bagly däldirler:

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl.$$

Birinji jynsly egriçyzykly integrallary hasaplamak üçin aşakdaky formulalardan peýdalanylýar.

a) Goý, egri çyzyk $y=\varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ deňleme bilen berlen bolsun. Onda

$$dl = \sqrt{1+\left[\varphi'(x)\right]^2}\,dx$$

we

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\,\sqrt{1+\left[\varphi'(x)\right]^2}\,dx. \qquad (3)$$

b) Goý, AB egri çyzyk

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad \left(\alpha \le t \le \beta\right)$$

parametrli deňlemesi bilen berlen bolsun. Onda

$$dl = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\,\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt.$$

ç) Eger egri çyzygyň deňlemesi $\rho=\rho(\varphi)$, $(\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$ görnüşde berilen bolsa, odna

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi,$$

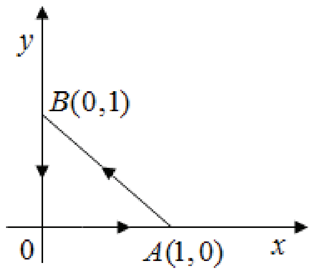
$$\int\limits_{AB} f(M)dl == \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (5)$$

1917. Eger $A(1,0)$, $B(0,1)$ we $O(0,0)$ nokatlar ABO üçburçlugyň depeleri bolsa,

$$\int_{ABO}(x+y)dl$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly (*104-nji çyzgy*).

Çözülişi.



104-nji çyzgy

Bu ýerde AB göni çyzygyň deňlemesi $y=1-x$, OB-niň deňlemesi $x=0$ we OA-nyň deňlemesi bolsa $y=0$. Şonuň üçin alarys:

$$\int_C(x+y)dl=\int_{AB}(x+y)dl+\int_{BO}(x+y)dl+\int_{OA}(x+y)dl=$$

$$=\int_0^1\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy+\int_0^1 xdx=\sqrt{2}+1.$$

1918. Eger C, deňlemesi $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$ bolan egri çyzyk bolsa, onda

$$\int_C y^2dl$$

birinji jynsly egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi. $x'_t=a(1-\cos t), y'_t=a\sin t,$

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Şunlukda,

$$\int_C y^2dl=2a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sin\frac{t}{2}dt=8a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2\sin\frac{t}{2}dt=\frac{26a^3}{15}.$$

1919. $O(0,0)$ we $A(1,\,2)$ nokatlary birleşdirýän C egri çyzyk boýunça

$$\int_k \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi. $O(0,0)$ we $A(1,\,2)$ nokatlary birleşdirýän göni çyzygyň deňlemesi $y=2x$ görnüşdedir:

$$y'=2, dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{5}dx.$$

Onda alarys:

$$\int_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\int_0^1 \frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{(\sqrt{5}x)^2+4}}=$$

$$=\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+4}\right|_0^1=\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

1920. Egriçyzykly integraly hasaplamaly.

$I=\int_l xdl.$

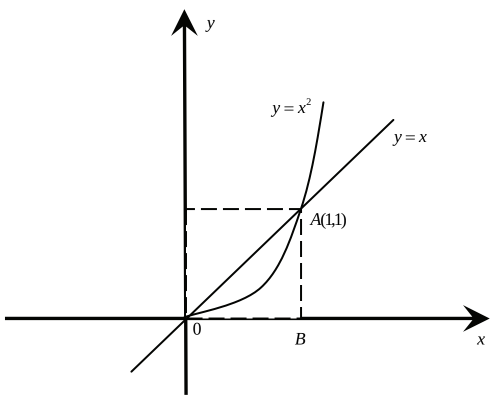
a) I, $O(0,0)$ we $A(1,1)$ nokatlary birleşdirýän kesim;

b) şu nokatlary birleşdirýän parabolanyň dugasy.

Çözülişi. a) OA göni çyzygyň deňlemesi $y=x$ bolýar. $y'=1$

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{2}dx,$$

$$I=\int_l xdl=\int_0^1 x\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



105-nji çyzgy

b) $y = x^2, \quad y' = 2x, \quad dl = \sqrt{1+4x^2}\,dx,$

$$I = \int_l x\,dl = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4x^2) =$$

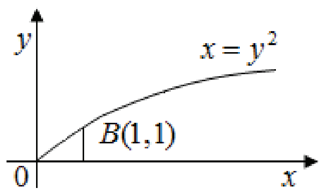
$$= \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

1921. Eger $L, O(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli $x = y^2$ parabolanyň dugasy bolsa (*106-njy çyzgy*)

$$I = \int_L xy\,dl$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi.



106-njy çyzgy

$$x = y^2,\ dl = \sqrt{1+4y^2}\,dy,$$

$$I = \int_L xy\,dl = \int_0^1 y^2 y\sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac{1}{32}\int_1^5 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

1922. Eger $C, x = t, y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}, z = t^3.$ $(0 \le t \le 1)$ egri çyzygyň dugasy bolsa

$$\int_C (x+z)\,dl$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

$$x'_t = 1,\quad y'_t = \frac{6t}{\sqrt{2}},\quad z'_t = 3t^2,\quad dl = \sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt.$$

Şunlukda,

$$\int_C (x+z)dl = \int_0^1 \left(t+t^3\right)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^1 \left(36t+36t^3\right)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt,$$

$$1+18t^2+9t^4 = u,\quad (36t+36t^3)dt = du,$$

$$\int_c (x+z)dl\,\frac{1}{36}\int_1^{28}\sqrt{u}du = \frac{2}{108}u^{3/2}\Big|_1^{28} = \frac{1}{54}\left(56\sqrt{7}-1\right).$$

1923. Eger L, $A(0,-2)$ we $B(4,0)$ nokatlary birleşdirýän $y = \frac{1}{2}x - 2$ göni çyzygyň kesimi bolsa $\int_L \frac{dl}{x-y}$ egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1924. Eger L, depeleri $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,\,2)$, $C(0,2)$ nokatlarda bolan gönüburçluk bolsa

$$\int_L \frac{dl}{x-y}$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1925. Eger L deňlemesi $x = a(\cos t + t\sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t)$, $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$ bolan egri çyzygyň dugasy bolsa $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1926. Eger L, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroidanyň dugasy bolsa

$$\int_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)dl$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1927. Eger L, deňlemesi $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,$ $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$ bolan egri çyzygyň dugasy bolsa

$$\int_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

§ 2. Ikinji jynsly egriçyzykly integrallar

Goý, AB egri çyzykda üznüksiz $f(x,y)$ funksiýa berlen bolsun. AB egri çyzygy $A=A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ nokatlaryň kömegi bilen erkin böleklere böleliň. Her bir A_iA_{i+1} dugada islendik M_i nokady almak bilen $f(M_i)=f(x_i,y_i)$ funksiýanyň bahasyny duganyň $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ proýeksiýasyna köpeldip, integral jemi düzeliň:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

Kesgitleme. Eger $\lambda = \max\limits_i |A_iA_{i+1}| \to 0$ bolanda M_i nokadyň alnyşyna we duganyň böleklere bölünişine bagly bolmazdan, (1) irtegral jemiň tükenikli predeli bar bolsa, şol predele $f(x,y)$ funksiýadan AB egri çyzyk boýunça alnan ikinji jynsly (tertipli) egriçyzykly integral diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$I = \int\limits_{AB} f(M)dx = \int\limits_{AB} f(x,y)dx. \tag{2}$$

Şeýle hem

$$I^* = \int\limits_{AB} f(M)dy = \int\limits_{AB} f(x,y)dy$$

egriçyzykly integral kesgitlenilýär.

Eger AB egri çyzykda $P(M)=P(x,y)$, $Q(M)=Q(x,y)$ funksiýalar kesgitlenen bolsa we

$$\int\limits_{\grave{A}B} f(M)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)dx, \quad \int\limits_{AB} Q(M)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

integrallar bar bolsa, onda biz umumy görnüşde alnan ikinji jynsly (tertipli) egriçyzykly integraly ýazyp bileris:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy. \tag{3}$$

Ikinji jynsly egriçyzykly integrallar integrirlemegiň ugruna baglydyrlar.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = -\int\limits_{BA} f(x,y)dx, \quad \int\limits_{AB} f(x,y)dy = -\int\limits_{BA} f(x,y)dy.$$

Ikinji jynsly egriçyzykly integrallary hasaplamak üçin aşakdaky formulalardan peýdalanýarlar.

Eger-de AB egriçyzyk $y=\varphi(x)$, $(\alpha \le x \le \beta)$ anyk deňleme bilen berlen bolsa, ikinji jynsly egriçyzykly integraly hasaplamagyň formulasy aşakdaky görnüşdedir:

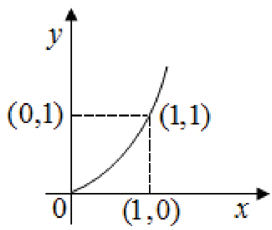
$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi'(x))\}\, dx. \qquad (4)$$

Eger-de AB egri çyzyk $x=\varphi t)$, $y=\psi(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$ parametrli deňleme bilen berilen bolsa, onda aşakdaky formula dogrudyr:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P(\varphi(t),\psi(t)\varphi'(t)) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))\}\, dt. \qquad (5)$$

1928. $\int_{AB} 3x^2ydx + (x^3+1)dy$ ikinji jynsly egriçyzykly integraly hasaplamaly. Bu ýerde AB egri (0,0) we (1,1) nokatlary birleşdirýän $y=x^2$ paraboladyr.

Çözülişi. Geljekde biz sagat strelkasynyň hereketiniň tersine bolan ugry položitel ugur hökmünde kabul ederis (*107-nji çyzgy*).



107-nji çyzgy

$$dy = 2xdx,$$

$$\int_{AB} 3x^2ydx + (x^3+1)dx =$$

$$= \int_0^1 \left[3x^2 \cdot x^2 + \left(x^3+1\right)\cdot 2x\right]dx = \int_0^1 \left(5x^4 + 2x\right)dx = \left(x^5 + x^2\right)\Big|_0^1 = 2.$$

1929. $\int_{\tilde{N}} \left(x^2 + 2xy\right)dy$ egriçyzykly integraly hasaplamaly. Bu ýerde C, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsiň ýokarky bölegidir.

Çözülişi. Ellipsiň parametrli deňlemesini ýazalyň:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad (0 \le t \le \pi).$$

Onda

$$dy = b\cos t dt,$$

$$\int_{\tilde{N}} \left(x^2 + 2xy\right)dy = \int_0^{\pi} \left(a^2\cos^2 t + 2ab\cos t\sin t\right) b\cos t dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

1930. $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ egriçyzykly integraly hasaplamaly. Bu ýerde C, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ellipsiň ýokarky bölegidir.

Çözülişi. $dx = -a\sin t dt, dy = b\cos t dt$,

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^{\pi} \left\{ b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t \cdot b\cos t \right\} dt =$$

$$= -ab^2\int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \sin t dt + a^2 b\int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot \cos t dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

1931. $\int_{OA} 2xy dx - x^2 dy$ egriçyzykly integraly hasaplamaly. Bu ýerde OA, $O(0,0)$ we $A(2,1)$ nokatlary birleşdirýän göni çyzykdyr.

Çözülişi. $O(0,0)$ we $A(2,1)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň:

$$y = \frac{x}{2}, \quad dy = \frac{1}{2}dx,$$

$$\int_{OA} 2xy dx - x^2 dy = \int_0^2 \left(2x \cdot \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

1932. $\int_C (2a - y)dx + xdy$ egriçyzykly integraly hasaplamaly. Bu ýerde C, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ arka sikloidanyň bir böleginiň dugasydyr.

Çözülişi.

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t dt,$$

$$\int_C (2a - y)dx + xdy = \int_0^{\pi} (2a - a + a\cos t)a(1 - \cos t)dt + a(t - \sin t)a\sin t dt = a^2\pi.$$

1933. Eger $C, M(1,1)$ we $N(2,8)$ nokatlary birleşdirýän $y = x^3$ egri çyzygyň dugasy bolsa

$$\int_{\tilde{N}} 6x^2ydx + 10xy^2dy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1934. Eger $C, x = a\cos t, y = a\sin t$ töwerek bolsa

$$\int_C y^2dx - 2xydy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1935. $\int_C ydx - xdy$ egriçyzykly integraly $C, x = a\cos t, y = b\sin t$ ellipsiň dugasy boýunça hasaplamaly.

1936. Eger $C, A(1,1)$ we $B(2,2)$ nokatlary birleşdirýän göni çyzyk bolsa

$$\int_C \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1937. Eger AB egri $A(0,\pi)$ we $B(\pi,0)$ nokatlary birleşdirýän kesim bolsa,

$$\int_{AB} \sin ydx + \sin xdy$$

egrizyzykly integraly hasaplamaly.

1938 . Eger L egri $A(2,-2)$ we $B(-2,2)$ nokatlary birleşdirýän kesim bolsa,

$$\int_L \cos ydx - \sin xdy$$

egrizyzykly integraly hasaplamaly.

§ 3. Grin formulasy

Goý, xOy tekizlikde C bölek endigan çyzyklar bilen çäklenen D oblast berlen bolsun. Eger şu oblastda kesgitlenen üznüksiz $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ funksiýalaryň üznüksiz hususy önümleri bar bolsa, onda aşakdaky Grin formulasy dogrudyr:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

bu ýerde C egri çyzyk boýunça hereket edilende D oblast elmydama çep tarapda ýatýandyr. Bu formula haýsy hem bolsa bir oblast boýunça alnan ikigat integral bilen, sol oblasty çäklendirýän ilen egriçyzyk boýunça alnan integraly baglanyşdyrýan formuladyr.

1939. Grin formulasyny ulanyp, egriçyzykly integraly hasaplamaly.

$$\int_C xy^2 dy - x^2 y dx, \quad \text{bu} \quad \text{yerde} \quad C: x^2 + y^2 = a^2.$$

Çözülişi.

$$P(x, y) = -x^2 y, \quad Q(x, y) = xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

formulany ulanyp, alýarys:

$$\int_C xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = 4\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} a^2 dy = 4a^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^4.$$

1940. Eger C ýapyk egri çyzyk D oblasty çäklendirýän bolsa, Grin formulasyny ulanyp egriçyzykly integraly özgertmeli.

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dy.$$

Çözülişi.

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = y\left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; \frac{\partial Q}{\partial x} = y\left[y + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right] = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(1) formulany ulanyp alýarys:

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y\left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \iint_D y^2 dxdy.$$

1941. Eger L depeleri $A(1,1), B(2,2)$ we $C(1,3)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň kontury bolsa, Grin formulasyny ulanyp,

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

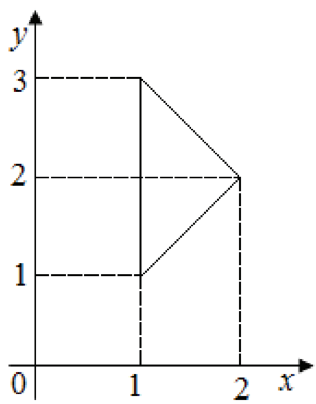
Çözülişi.

$$P = 2(x^2+y^2),\ Q = (x+y)^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y),\ \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$$

Griniň formulasyny ulanyp, alarys:

$$\oint_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \iint_{\Delta ABC} \left[2(x+y) - 4y\right]dxdy.$$

Ikigat integraly hasaplalyň (*108-nji çyzgy*):



108-nji çyzgy

$$\oint_l 2\left(x^2+y^2\right)dx + \left(x+y\right)^2 dy = 2\int_1^2 dx \int_x^{-x+4} \left(x-y\right)dy =$$

$$= -\int_1^2 (x-y)^2\Big|_x^{-x+4} dx = -4\int_1^2 \left(x-2\right)^2 dx = -\frac{4}{3}\left(x-2\right)^3\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

1942. Eger L merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan töwerek bolsa

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Şonuň üçin Grin formulasynyň esasynda integral nola deňdir.

1943. Eger L egri çyzyk $x^2+y^2=a^2$ töwerek bolsa

$$\int_L y^2dx+2xydy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1944. Eger L egri $x^2+y^2=4$ töweregiň ýokarky bölegi bolsa,

$$\int_L x^2dx+y^2dy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1945. Eger L egri zyzyk $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips bolsa, Grin formulasyny ulanyp, $\oint_L\left(xy^2+x+y\right)dx+\left(x^2y+x+y\right)dy$ egriçyzykly integraly hasaplamaly.

1946. Eger L egri çyzyk $x^2+y^2=ax$ töwerek bolsa, Griniň formulasyny ulanyp, $\oint_L\left(xy^2+x+y\right)dx+\left(x^2y+x+y\right)dy$ egriçyzykly integraly hasaplamaly

1947. Eger L egri çyzyk birlik töwerek bolsa

$$\int_L (2x-3y)dx+(x-y)dy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

§ 4. Egriçyzykly integrallaryň ulanylyşy

1. Eger D oblast L ýapyk egri çyzyk bilen çäklenen bolsa, onda şol oblastyň meýdany aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx, \tag{1}$$

bu ýerde L egri çyzyk boýunça integrirlemek sagat strelkasynyň ugrunyň tersine bolan ugur boýunça alynýar.

2. Goý, dykyzlygy $\mu(x, y)$ bolan L egri çyzyk berlen bolsun. Onda:

a) Egriniň m massasy

$$m = \int_L \mu(x, y)ds \tag{2}$$

formula bilen tapylýar.

b) Egriniň agyrlyk merkeziniň koordinatalary aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$x_0 = \frac{\int_L x\mu(x, y)ds}{m}, \quad y_0 = \frac{\int_L y\mu(x, y)ds}{m} \tag{3}$$

3. Ox, Oy koordinata oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä I_x, I_y we I_0 inersiýa momentleri aşakdaky formulalar bilen tapylýar:

$$I_x = \int_L y^2\mu(x, y)ds, \quad I_y = \int_L x^2\mu(x, y)ds, \tag{4}$$

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\mu(x, y)ds. \tag{5}$$

1950. Parametrli deňlemesi $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$ bolan astroida bilen çäklenen oblastyň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi.

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 2tdt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

1951. Hemişelik dykyzlygy $(\mu{=}1)$ we parametrli deňlemesi

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

bolan aýlaw çyzygyň bir aýlawynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. (2) we (3) formulalardan peýdalanalyň.

$$m=\int_L \mu(x,y)ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2},$$

$$x_0=\frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t dt=0.$$

Şeýle hem $y_0=0$,

$$z_0=\frac{\int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b\cdot 4\pi^2}{2\pi\cdot 2}=\pi b.$$

Şunlukda, aýlaw çyzygyň bir aýlawynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary aşakdaky görnüşde bolar:

$$x_0=0,\quad y_0=0,\quad z_0=\pi b.$$

1952. Parametrli deňlemesi $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ bolan töweregiň her bir nokadyna $F(P,Q)=P(x,y)i+Q(x,y)j=(x+y)i+2xj$, $P=x+y$, $Q=2x$ güýç täsir edýär. Şu töwerek boýunça material nokady süýşürmek üçin edilmeli işi hasaplamaly.

Çözülişi. Gözlenýän işi A bilen belgiläliň. Ol

$$A=\int_L Pdx+Qdy$$

formula boýunça tapylýar.

Meseläniň şertine görä L ýapyk kontur. Ol parametrli deňlemesi bilen berlen töwerekdir. Şonuň üçin başlangyç nokat $t=0$ ahyrky nokat bolsa $t=2\pi$

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

$$P = x + y = a(\cos t + \sin t), Q = 2x = 2a\cos t,$$

$$dx = -a\sin t dt, \quad dy = a\cos t dt,$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left[-a^2(\cos t + \sin t)\sin t + 2a^2\cos^2 t\right]dt =$$

$$a^2 \int_0^{2\pi} \left[2\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t \sin t\right]dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left[(1 + \cos 2t) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) - \sin t \cos t\right]dt =$$

$$= a^2 \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin^2 t\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \pi a^2 .$$

1953. Dykyzlygy $\mu = y$ bolan

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

ellipsiň birinji çärýekdäki böleginiň massasyny tapmaly.

1954. $y = x^2$ parabola we $y = 1$ göni çyzyk bilen çäklenen oblastyň meýdanyny tapmaly.

1955. Eger $0 \le t \le 2\pi$ bolsa

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

egri bilen çäklenen oblastyň meýdanyny kesgitlemeli.

1956. Radiusy a bolan töweregiň dörtden biriniň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly $(\mu = 1)$.

§ 5. Birinji jynsly üst integrallary

Goý, L egri çyzyk bilen çäklenen bölek endigan S üstde $f(x, y, z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. S üsti bölek-endigan egriçyzyklar bilen meýdanlary $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ bolan $(S_1), (S_2), (S_3), ..., (S_n)$ üstlere böleliň. Her bir S_i üstde $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nokady alyp, şol nokatda funksiýanyň bahasyny tapalyň:

$$f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$$

Funksiýanyň şu nokatdaky bahasyny degişlilikde S_i üstüň ΔS_i meýdanyna köpeldip, integral jemi düzeliň:

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_x, y_i, z_i)\Delta S_i$$

Kesgitleme. Eger $\lambda = \max\limits_i diam\Delta S_i \to 0$ bolanda, (1) integral jemiň tükenikli predeli bar bolsa, şol predele $f(x, y, z)$ funksiýadan S üst boýunça alnan birinji jynsly üst integraly diýilýär we aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$I = \iint_S f(M)ds = \iint_S f(x, y, z)ds \qquad (1)$$

Eger S üst xOy tekizlige proýektirlenen bolsa, S üstüň proýeksiýasy bolan D üstüň ds bölegi aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma(M)|} \qquad (2)$$

Eger üstüň deňlemesi $z = z(x, y)$ bolsa, onda

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (3)$$

Şunlukda, (1) integral aşakdaky formula bilen hasaplanylýar:

$$\iint_S f(x, y, z)ds = \iint_D \left.\frac{f(x, y, z)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)} dxdy =$$

$$\iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (4)$$

1957. Eger S üst $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ ýarym sferanyň üsti bolsa

$$I = \iint_S (x + y + z)ds$$

birinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

Çözülişi. Şerte görä integrirlemek

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

sferanyň ýokarky bölegi boýunça alnandyr. Onda

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

(4) formulanyň esasynda alarys

$$I=a\iint\limits_D\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\iint\limits_D\left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+1\right)dxdy,\quad (D):x^2+y^2\le a^2.$$

Polýar koordinatalar sistemasyna geçeliň:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

$$I=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{a^2-r^2}}+1\right)rdr=a\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr+$$

$$+a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr=0+a\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}d\varphi=\pi a^3.$$

1958. $I=\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dS$ integraly hasaplamaly, bu ýerde S ust $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ jisimiň araçägidir.

Çözülişi. Integrirlemek konusyň gapdal üsti we esasy boýunça amala aşyrylýar. Şonuň üçin

$$I=\iint\limits_{S_1}\left(x^2+y^2\right)dS+\iint\limits_{S_2}\left(x^2+y^2\right)dS.$$

S_1 konusyň gandal üsti, S_2 bolsa onuň esasydyr. S_2 esas üçin $dS=dxdy$.

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho=\frac{2\pi}{3}.$$

S_1 gapdal üstde $dS=\sqrt{2}dxdy$. Onda

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Şunlukda

$$I=\frac{2\pi}{3}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

1959. Radiusy R bolan birjynsly ýarym sferanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. Ýarym sferanyň merkezini koordinatalar başlangyjynda we xOy tekizlikde ýatar ýaly edip, koordinatalar sistemasyny alýarys. Onda ol ýarym sferanyň deňlemesi $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0$ görnüşde bolar. Üstüň birjynslydygyna görä onuň maddasynyň dykyzlygy hemişelikdir. Şeýle hem $x_c=0,\ y_c=0$. Birjynsly σ üstüň agyrlyk merkeziniň z_c koordinatasyny tapmaklyk aşakdaky formula bilen amala aşyrylýar

$$z_c=\frac{\iint_\sigma zd\sigma}{\iint_\sigma d\sigma}.$$

Şerte görä

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0,\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ ds=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Ýarym sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan R radiusly tegelekdir.

$$\iint_\sigma zd\sigma=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\iint_D Rdxdy=RS=\pi R^3,$$

$$\iint_\sigma ds=\iint_D\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=2\pi R\int_0^R\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(R^2-\rho^2\right)}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=-\pi R2\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^R=-\pi R(0-2R)=2\pi R^2.$$

Onda

$$z_c=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}.$$

1960. Eger, S $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$ kubuň üsti bolsa,

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS$$

integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Kubuň ýokarky granynyň $(z=1)$ we aşaky granynyň $(z=0)$ üst integrallaryny tapalyň

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y+1)dxdy + \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)dxdy = 3.$$

Şunlukda, gözleýän integralymyz mundan üç esse köpdür:

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = 9.$$

1961. $2z = x^2 + y^2$ parabolanyň aýlanmagyndan emele gelen paraboloidanyň $x^2 + y^2 = R^2$ silindriň içinde galan böleginiň üstüniň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi.

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \quad z'_x = x, \quad z'_y = y,$$

$$S = \iint\limits_S \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$$

Bu ýerde D oblast berlen üstüň xOy tekizlige bolan proýeksiýasy bolan R radiusly tegelegiň meýdanydyr. Polýar koordinatalara geçip alarys:

$$x = r\cos\varphi \ \ y = r\sin\varphi,\ I = r,$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1+r^2}\,rdr = \frac{4\pi}{3}\left[\left(1+R^2\right)^{3/2} - 1\right].$$

1962. Eger S üst $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $0 \le z \le b$ konusyň gapdal üsti bolsa

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$$

birinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

1963. Eger S üst $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sfera bolsa

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$$

birinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

1964. Eger S üst $4y+6x+3z=12$ tekizligiň birinji çaryekde ýatýan bölegi bolsa

$$\iint_S (z+2x+\frac{4}{3}y)ds$$

integraly hasaplamaly.

1965. $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferanyň $z=H$ tekizlik bilen kesilip alnan bölegininiň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

§ 6. Ikinji jynsly üst integrallary

Goý, giňişlikde iki taraplaýyn endigan S üst berlen bolsun. Ikinji jynsly üst integrallaryny kesgitlemek üçin integral jem düzülen mahalynda üstüň ýokarky böleginiň xOy tekizlige bolan proýeksiýasynyň meýdanyny goşmak alamaty bilen, aşaky böleginiň proýeksiýasynyň meýdanyny bolsa aýyrmak alamaty bilen alýarys.

Goý, S üstde haýsy hem bolsa $f(M)=f(x,y,z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. S üsti bölek endigan egri çyzyklaryň kömegi bilen $S_1, S_2,...,S_n$ böleklere böleliň we her bir S_i üstde $M_i(x_i,y_i,z_i)$ nokatlary alalyň. Berlen funksiýanyň şu nokatlardaky $f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$ bahalaryny S_i bölekleriň xOy tekizlige bolan D_i proeksiýasynyň meýdanyna köpeldip, integral jemi düzeliň:

$$T=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i. \qquad (1)$$

Kesgitleme. Eger $\lambda=\max_i diam\Delta D_i \to 0$ bolanda, (1)-nji integral jemiň tükenikli predeli bar bolsa, onda şol predele, $f(M)=f(x,y,z)$ funksiýadan alnan ikinji jynsly üst integraly diýilýär we aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$I=\iint_S f(M)dxdy=\iint_S f(x,y,z)dxdy. \qquad (2)$$

Şeýle hem berlen üsti yOz we zOx tekizliklere proýektirläp,

$$\iint_S f(x,y,z)dydz, \quad \iint_S f(x,y,z)dzdx \qquad (2')$$

ikinji jynsly üst integrallaryny alýarys. Eger-de, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ funksiýalar S üstde kesgitlenen üznüksiz funksiýalar bolsalar, onda ikinji jynsly üst integralyny umumy görnüşde aşakdaky ýaly ýazýarlar:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

1. Goý, S üst özüniň anyk deňlemesi bilen berlen bolsun:

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

bu ýerde $z(x, y)$ funksiýa we onuň $p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}$ hususy önümleri üznüksiz funksiýalardyr. Onda aşakdaky formula dogrudyr:

$$\iint_S f(x, y, z)dxdy = \iint_D f(x, y, z(x, y))dxdy. \tag{3}$$

2. Eger S üst özüniň parametrli deňlemesi bilen berlen bolsa,

$$z = z(x(u, \vartheta), y(u, \vartheta)) = z(u, \vartheta),$$

onda aşakdaky foormula dogrudyr

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint_D \left[P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)\right]\sqrt{EG - F^2}\,dud\vartheta, \tag{4}$$

bu ýerde

$$\cos(n, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(n, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos(n, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix},$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

1966. Eger S üst $x^2+y^2=z^2, (0 \le z \le h)$ üstüň daşky tarapy bolsa

$$I=\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

ikinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

Çözülişi. (4) formulanyň esasynda alýarys

$$I=\iint_S \left[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma\right]ds.$$

Berlen üste geçirilen birlik normal bilen Oz okuň arasyndaky burçuň kütek burçdugyna görä, aşakdaky formulalardaky kök belgisiniň öňüne aýyrmak alamatyny goýýarys.

$$\cos\alpha=\frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \qquad \cos\beta=\frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}.$$

Şeýle hem

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z'_x=\frac{x}{z}, \quad z'_y=\frac{y}{z}, \quad (z\ne 0),$$

$$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{2},$$

onda

$$\cos\alpha=\frac{x}{z\sqrt{2}}, \quad \cos\beta=\frac{y}{z\sqrt{2}}, \quad \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tapylanlary (4) aňlatma goýup, $ds=\sqrt{2}dxdy$ deňligi ulanyp, üst boýunça ikinji jynsly integraldan ikigat integrala geçeliň:

$$I=\iint_{x^2+y^2<h^2}\frac{(y-z)x+(z-x)y+(y-x)z}{z}dxdy=2\iint_{x^2+y^2<h^2}(y-x)dxdy=$$

$$=2\int_0^{2\pi}(-\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^h\rho^2d\rho=\frac{2}{3}h^3\int_0^{2\pi}(\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi=0.$$

1967. Eger S üst $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferanyň daşky tarapy bolsa,

$$I=\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$$

ikinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

Çözülişi. Integrala garalyň:

$$I_1 = \iint_S zdxdy$$

Bu integraly sferanyň aşaky tarapy we ýokarky tarapy boýunça alnan iki integrlalyň jemi görnüşinde ýazyp bolar. Olary degişlilikde S_+ we S_- bilen belgiläliň:

$$I = \iint_{S_+} zdxdy + \iint_{S_-} zdxdy.$$

S_+ üstde $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ deňlik, S_- üstde bolsa $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ deňlik ýerine ýetýär. S_+ üstüň xOy tekizlige bolan proýeksiýasyny D bilen belgiläliň. Şonuň üçin

$$I_1 = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\,d\rho =$$

$$\frac{4}{3}\pi (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Belli bolşy ýaly

$$\iint_S xdydz = \iint_S ydzdx = I_1.$$

Şunlukda,

$$I = 4\pi a^3,$$

1968. Eger S üst $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sferanyň daşky tarapy bolsa

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

ikinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

1969. Eger S üst $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = a$ tekizlikler bilen çäklenen tetraedryn daşky tarapy bolsa $\iint_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$ ikinji jynsly üst integralyny hasaplamaly.

XVI BÖLÜM
DIFFERENSIAL DEŇLEMELER
Birinji tertipli differensial deňlemeler

§ 1. Esasy düşünjeler. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilýän differensial deňlemeler

Baglanyşyksyz üýtgeýän ululygy, näbelli funksiýany we onuň önümlerini (ýa-da differensialyny) baglanyşdyrýan deňlemä differensial deňleme diýilýär. Eger baglanyşyksyz üýtgeýän ululyklaryň sany bir bolsa, deňlemä ady differensial deňleme, eger iki ýa-da ondan köp bolsa deňlemä hususy önümli differensial deňleme diýilýär. Deňlemä girýän önümiň ýokarky tertibi differensial deňlemäniň tertibini kesgitleýär.

Bu bölümde $F(x, y, y') = 0$ görnüşdäki ýa-da önüme görä çözülen $y' = f(x, y)$ görnüşdäki birinji tertibli differensial deňlemelere gararys.

Deňlemäni toždestwa öwürýän, önüme eýe bolan $y = \varphi(x)$ funksiýa differensial deňlemäniň çözüwi diýilýär.

Eger-de, hemişelik C sana bagly $y = \varphi(x, C)$ funksiýa aşakdaky şertleri: a) hemişelik C sanyň erkin kesgitli bahalarynda differensial deňlemäni; b) $y\big|_{x=x_0} = y_0$ şerte bagly $C = C_0$ üçin $y = \varphi(x, C_0)$ funksiýa başlangyç şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda ol funksiýa differensial deňlemäniň umumy çözüwidir. Eger-de biz $y = \varphi(x, C)$ umumy çözüwde $C = C_0$ bahany goýsak $y = \varphi(x, C_0)$ hususy çözüwi alarys. Hususy çözüwe degişli çyzga integral egri diýilýär.

Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilýän differensial deňlemeler umumy görnüşde aşakdaky ýalydyr:

$$f_1(x) f_2(y) dx + \varphi_1(x) \varphi_2(y) dy = 0.$$

Eger $f_1(x),\ f_2(y),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(y)$ funksiýalar nola deň bolmasa, deňlemäni $f_2(y) \cdot \varphi_1(x) \neq 0$ köpeltmek hasylyna bölüp,

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0$$

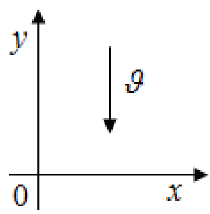
deňlemäni alýarys. Bu deňligi integrirlemek

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = C$$

baglanyşyga getirýär. Bu bolsa deňlemäniň çözüwidir.

1970. Fizikadan belli bolşy ýaly, t wagtda ýokardan erkin gaçýan jisimiň tizligi $\vartheta = gt$ $(g = 9,81\, m/sek^2)$ formula bilen kesgitlenýär. Onda y_0 beýiklikden erkin gaçýan jisimiň t wagtda ýerden näçe uzaklykda boljakdygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny ýeriň tekizliginde ýerleşdirip, Oy oky bolsa dik ýokaryk ugrukdyralyň. Onda tizlik wektor ululyk bolup dik aşak ugrykdyrylandyr we onuň Oy oka bolan proýeksiýasy $-gt$ deňdir. Şeýle hem, tizlik geçilen ýoldan wagta görä alnan $\frac{dy}{dt}$ önümdir. Bu aňlatmalary biri-birine deňläp alýarys (*109-njy çyzgy*):



109-njy çyzgy

$$\frac{dy}{dt} = -gt, \quad dy = -gtdt.$$

Bu deňlemäni integrirläliň:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C.$$

C sanyň erkin baha eýe bolýanlygy üçin tükeniksiz köp funksiýalary alarys. Bu funksiýalardan $t = t_0 = 0$ bolanda $y = y_0$ şerti kanagatlandyrýan funksiýany tapalyň: $C = y_0$.

Şunlukda, ýokardan erkin gaçýan jisim kesgitli t wagtda ýerden

$$y = -\frac{gt^2}{2} + y_0$$

uzaklykda bolar.

1971. Berlen egriniň erkin nokadyndan geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýenti $M(x,y)$ nokadyň absisasyna deň bolan $N(-2{,}3)$ nokat arkaly geçýän egriniň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly berlen egriniň $M(x,y)$ nokadynda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýenti $\frac{dy}{dx}$ deňdir. Şeýle hem meseläniň şertine görä bu burç koeffisiýent galtaşma nokadynyň absisasyna deňdir. Şunlukda,

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad dy = xdx.$$

Integrirläp alýarys:

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Bu deňleme C sanyň erkin bahalary alyp bilýändigine görä parabolalar maşgalasynyň köplüginiň deňlemesidir. Bu köplükden $N(-2{,}3)$ nokat arkaly geçýänini saýlap almak üçin N nokadyň koordinatalaryny deňlemä goýalyň:

$$3 = \frac{(-2)^2}{2} + C, \quad C = 1.$$

Şunluk-da, meseläniň şertini kanagatlandyrýan deňleme aşakdaky görnüşdedir:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1.$$

1972. Tamdyrdan çykarylan çörek 10 minutda $100^\circ C$-den $60^\circ C$-e çenli sowady. Eger daşky sredanyň temperaturasy $20^\circ C$-de saklanýan bolsa, näçe wagtdan soň çöregiň temsperaturasy $25^\circ C$ bolar?.

1973. t wagtyň dowamynda bakteriýalaryň köpelmeginiň tizligi olaryň mukdaryna göni proporsionaldyr. Eger 5 sagadyň dowamynda bakteriýalaryň mukdary 3 esse köpelen bolsa, bakteriýalaryň mukdary bilen wagtyň arasyndaky baglanyşygy tapmaly.

1974. Goý, käbir $t = t_0$ wagtyň pursadynda R_0 gram radiniň barlygy belli bolsun. Eger radiniň dargamagynyň tizligi onuň mukdaryna göni proporsional bolsa, islendik wagt pursadynda radiniň mukdaryny kesgitlemeli.

1975. Material nokat käbir göni çyzyk boýunça (mysal üçin, Ox ok boýunça), $2t$ tizlik bilen hereket edýär diýeliň ($t-$wagt). Hereket edýän nokadyň $t = t_0$ bolanda $x = x_0$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan $x = x(t)$ hereket deňlemesini kesgitlemeli.

1976. Jisim wagtyň kwadratyna proporsional ϑ tizlik bilen göniçyzykly hereket edýär. Eger başlangyç $t = 0$ wagt pursadynda geçilen ýol $S = S_0$ bolsa, geçilen ýol bilen wagtyň arasyndaky baglanyşygy kesgitlemeli.

1977. Jisim dynçlyk ýagdaýyndan çykyp islendik t wagt pursadynda $v = 5t^2 + 2\ m/sek$ tizlik bilen hereket edýär. Jisimin hereket kanunyny we ilkinji 3 sek. dowamynda geçen ýolunyň uzynlygyny kesgitlemeli.

1978. Radioaktiw dargaýyş kanunyna laýyklykda radiniň dargaýyş tizligi onuň N mukdaryna proporsional. Eger 1600 ýyldan soň radiniň başlangyç mukdarynyň ýarysynyň galjakdygy belli bolsa, onda t pursatda radiniň näçe mukdarynyň galjakdygyny kesgitlemeli.

1979. Goý, egri çyzyk (1,2) nokat arkaly geçýän bolsun. Eger egri çyzyga geçirilen galtaşýan göni çyzyk $y = 1$ göni çyzygy, absisasy $2x$ bolan nokatda kesip geçýän bolsa, onuň deňlemesini ýazmaly.

1980. $xy' - y = y^3$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$xy' = y + y^3 \quad \text{ýa-da} \quad x\frac{dy}{dx} = y + y^3, \quad xdy = (y + y^3)dx.$$

Bu deňleme näbellileri aýyl-saýyl edilýän differensial deňlemedir. Deňligiň iki bölegini hem $x(y + y^3) \neq 0$ bölüp alarys:

$$\frac{dy}{y + y^3} = \frac{dx}{x}.$$

Deňligiň iki bölegini hem integrirläliň

$$\ln|y| - \frac{1}{2}\ln\left|1 + y^2\right| = \ln|x| - \ln c, \quad \ln\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} = \ln\frac{x}{c}.$$

Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

1981. $\mathrm{tg}x \sin^2 y dx + \cos^2 x \mathrm{ctg} y dy = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

§ 2. Birjynsly differensial deňlemeler

Kesgitleme. Eger $f(x,y)$ funksiýa

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

deňligi kanagatlandyrsa, oňa m ölçegli birjynsly funksiýa diýilýär. Şeýle hem, $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ funksiýalar şol bir ölçegli birjynsly funksiýalar bolsalar

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

görnüşdäki differensial deňlemelere bitjynsly differensial deňlemeler diýilýär. Birjynsly differensial deňlemäni

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

görnüşe getirip bolýandyr. $u = \dfrac{y}{x}$ ornuna goýmany ulanmak bilen berlen deňleme näbellileri aýyl-saýyl edilýän differensial deňlemelere getirilýär:

$$y = ux, \quad y' = xu' + u.$$

Onda (1) deňleme aşakdaky görnüşi alýar:

$$xu' + u = \varphi(u), \quad x\frac{dy}{dx} = \varphi(u) - u, \quad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Integrirlemek bilen alarys:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln x + c.$$

Umumy çözüwde $u = \dfrac{y}{x}$ goýup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys.

1982. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňlemäniň sag bölegi birjynsly funksiýadyr. $y = ux$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \quad u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Bu deňlemede üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+u^2}{u-u^3}du.$$

Integrirläp alarys:

$$\ln|x| = \int \frac{1+u^2}{u-u^3}du + \ln c$$

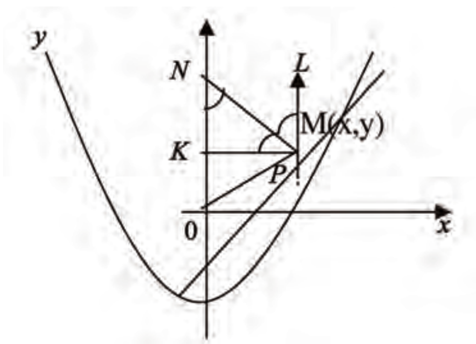
ýa-da

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln|1-u| - \ln|1+u| + \ln c.$$

Bu ýerden $\frac{cu}{1-u^2} = x$ deňligi alarys. $u = \frac{y}{x}$ goýup, deňlemäniň umumy çözüwini alarys: $x^2 - y^2 = cy$.

1983. Berlen 0 nokatdan çykýan ähli şöhleleri berlen ugra parallel serpikdiriji aýnanyň formasyny aňladýan formulany tapmaly.

Çözülişi. Aýnanyň tekiz kesigine garalyň. Koordinatalar başlangşyjy 0 nokatda, Oy oky bolsa berlen ugra parallel ýerleşdireliň (*110-njy çyzgy*).



110-njy çyzgy

Bu ýerde OM düşýän şöhle, ML serpikdiriji şöhle, MN normal, MP gözlenýän egrä geçirilen galtaşmadyr.

Şerte görä $\angle KMN = \angle NML$. Onda

$$ON = OM, \quad OM = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad ON = OK + KN = OK + KM \cdot \text{ctg}\alpha =$$

$$= OK + \frac{KM}{\text{tg}\alpha} = y + \frac{x}{y'}.$$

Diýmek,

$$\sqrt{x^2+y^2}=y+\frac{x}{y'}, \qquad \sqrt{x^2+y^2}=y+x\frac{dx}{dy},$$

$$\frac{x}{y}=u, \quad x=uy, \quad \frac{dx}{dy}=u+\frac{du}{dy}y.$$

Onda alarys:

$$u+yu'=\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u}, \quad \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)}=\frac{dy}{y},$$

$$1+u^2=z^2, \ 2udu=2zdz, \quad \frac{zdz}{z(1-z)}=\frac{dy}{y},$$

$$-\ln(z-1)=\ln y+\ln C, \ Cy=\frac{1}{z-1},$$

$$z^2=1+u^2=1+\frac{x^2}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{y^2}.$$

Şunlukda

$$Cy=\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}-y}, \quad y=\frac{x^2-C_1^2}{2C_1}, \qquad C_1=\frac{1}{C}.$$

Deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

1984. $y'=\frac{y}{x}-1.$

1985. $(x-y)ydx-x^2dy=0.$

1986. $(x^2+y^2)dx-xydy=0.$

1987. $yy'=2y-x.$

1988. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$

§ 3. Çyzykly differensial deňlemeler

Näbelli funksiýa we onuň önümine görä çyzykly bolan deňlemä birinji tertipli çyzykly differensial deňleme diýilýär. Çyzykly differensial deňleme

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde $P(x)$ we $Q(x)$ funksiýalar (a,b) aralykda berlen üznüksiz funksiýalardyr.

Indi (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmagyň Bernully usulyny beýan edeliň. Çözüwi $y=u\vartheta$ görnüşde gözleýäris. Bu ýerde $u(x)$ we $\vartheta(x)$ täze gözlenýän funksiýalardyr. Ony (1) deňlemä goýup alarys:

$$\frac{du}{dx}\vartheta+\left[\frac{d\vartheta}{dx}+P(x)\vartheta\right]u=Q(x),$$

$$\frac{d\vartheta}{dx}+P(x)\vartheta=0,\quad \vartheta=Ce^{-\int P(x)dx},$$

$$\frac{du}{dx}Ce^{-\int P(x)dx}=Q(x),\quad Cdu=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Bu deňligi integrirläp alarys:

$$u=\frac{1}{C}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C_1\right].$$

Şunlukda

$$y=u\vartheta=C_1e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Bu bolsa deňlemäniň umumy çözüwidir.

1989. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Eger $y=u\vartheta$ bolsa. onda

$$u'\vartheta+\vartheta'u-\frac{u\vartheta}{x}=x,\quad u'\vartheta+u\left(\vartheta'-\frac{\vartheta}{x}\right)=x,$$

$$\vartheta'-\frac{\vartheta}{x}=0,\quad u'\vartheta=x.$$

$\vartheta'-\frac{\vartheta}{x}=0$ deňlemäni çözeliň $\frac{d\vartheta}{dx}=\frac{\vartheta}{x}$, $\vartheta=x$. $\vartheta-$ň bahasyny $u'\vartheta=x$ deňlemä goýup alarys:

$$\frac{du}{dx}x=x,\quad u=x+C.$$

Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y=(x+C)x=x^2+Cx.$$

1990. $xy'+y=x+1$ deňlemäniň $x=2$ bolanda $y=3$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Bu çyzykly deňlemedir: $y=u\vartheta$, $y'=u'\vartheta+\vartheta'u$. Onda berlen deňleme aşakdaky görnüşi alýar:

$$u\vartheta' + u'\vartheta + \frac{1}{x}u\vartheta = 1 + \frac{1}{x}$$

ýa-da

$$u\vartheta' + \vartheta\left(u' + \frac{1}{x}u\right) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Onda

$$u' + \frac{1}{x}u = 0 \quad \text{we} \quad u\vartheta' = 1 + \frac{1}{x},$$

$$\ln|u| = -\ln|x|, \quad u = \frac{1}{x}.$$

Şunlukda,

$$\frac{1}{x}\vartheta' = 1 + \frac{1}{x}, \quad \vartheta' = x + 1, \quad \vartheta = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Onda deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = u\vartheta = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}.$$

Indi başlangyç şerti ulanyp hususy çözüwi tapalyň:

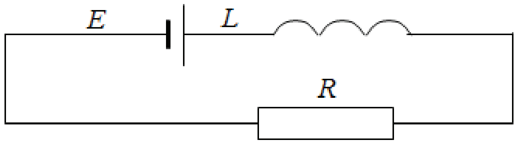
$$3 = 1 + 1 + \frac{C}{2}, \quad C = 2, \quad y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}.$$

1991. Garşylygy R, induktiwligi L we elektrik hereketlendiriji güýji E bolan zynjyrdaky toguň güýji

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

differensial deňlemäni kanagatlandyrýar. Eger R hemişelik, $E = Kt$ elektrik hereketlendiriji güýç wagta proporsional artýan bolsa, onda toguň güýjüniň wagt bilen baglanyşygyny tapmaly (*111-nji çyzgy*).

Çözülişi.



111-nji çyzgy

$L\dfrac{dI}{dt}+RI=Kt$ differensial deňleme näbelli I funksiýa görä çyzykly deňlemedir. Goý $I=u\vartheta,\quad I'=u'\vartheta+u\vartheta'.$

Onda bu deňlemäniň umumy çözüwini aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$I=u\vartheta=\frac{K}{R}t-\frac{KL}{R^2}+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Başlangyç şertleri ulanalyň:

$$0=-\frac{KL}{R^2}+C,\quad C=\frac{KL}{R^2}.$$

Şunlukda, toguň güýji bilen wagtyň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky görnüşdedir:

$$I(t)=\frac{K}{R}t+\frac{KL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right).$$

1992. $\dfrac{dy}{dx}-2yx=3x^2-2x^4$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemede deňligiň çep bölegine garalyň: $\dfrac{dy}{dx}-2yx=0$. Bu deňlemäniň $y=0$ çözüwi bardyr. Beýleki çözüwlerini tapmak üçin näbellileri aýyl-saýyl edip, deňlemäni çözeliň:

$$\frac{dy}{y}=2xdx,\quad \ln|y|=x^2+\ln C, C>0,\quad y=Ce^{x^2}.$$

Berlen deňlemäniň çözüwini $y=c(x)e^{x^2}$ görnüşde gözläliň. Bu funksiýany deňlemä goýup alýarys:

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{x^2}+2xe^{x^2}C(x)-2xe^{x^2}C(x)=3x^2-2x^4,$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{-x^2}\left(3x^2-2x^4\right),$$

$$C(x)=\int e^{-x^2}\left(3x^2-2x^4\right)dx=x^3e^{-x^2}+C.$$

Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y=(C+x^3e^{-x^2})e^{x^2}=Ce^{x^2}+x^3.$$

1993. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^3$ deňlemäni çözmeli.

Aşakdaky çyzykly deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly.

1994. $y'-a\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}.$ **1995.** $\dfrac{ds}{dt}\cos t+s\sin t=1.$

1996. $y'-\dfrac{n}{x}y=e^x x^n.$ **1997.** $y'=1-\dfrac{1-2x}{x^2}y.$

1998. $xy'+y-e^x=0,\quad y=b,\quad x=a.$

1999. $y'-y\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x},\quad y=0,\quad x=0.$

2000. $y'+\dfrac{2y}{x}=x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2001. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\cos y+a\sin 2y}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

§ 4. Doly differensially deňlemeler

Eger käbir oblastda üznüksiz $M(x,y)$ we $N(x,y)$ funksiýalaryň $\dfrac{\partial M}{\partial y},\ \dfrac{\partial N}{\partial x}$ üznüksiz önümleri

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{1}$$

deňligi kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2}$$

görnüşdäki deňlemelere doly differensially deňlemeler diýilýär. Görnüşi ýaly (2) deňlemäniň doly differensially deňleme bolmagy üçin (1) şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Bu halda $du=Mdx+Ndy$ we $u(x,y)=C$ berlen deňlemäniň umumy integralydyr. $u(x,y)$ funksiýa

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

deňlemeler ulgamyndan kesgitlenip bilner.

Eger-de deňlemäniň çep bölegi haýsy hem bolsa bir funksiýanyň doly differensialy bolmasa, onda ol deňlemäni μ köpeldijä köpeldip, onuň doly differensially deňleme bolmagyny gazanýarlar. Şol halda soňky deňlemäniň umumy çözüwi berlen deňlemäniň hem umumy çözüwidir. Ol köpeldijä integrirleýji köpeldiji diýilýär. Eger-de berlen deňlemäniň integrirleýji köpeldijisi bar bolup, diňe x-e bagly bolsa, onda ol

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

deňlik bilen, şeýle hem ol y-e bagly bolsa

$$\mu = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dy}$$

deňlnik bilen tapylýar.

2002. $ydx + xdy = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemäniň çep bölegini

$$d(x, y) = ydx + xdy$$

görnüşde ýazalyň. Onda deňleme $d(x, y) = 0$ görnüşi alýar. Bu deňlemäni integrirläp, onuň umumy integralyny $xy = c$ görnüşde taparys.

2003. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäniň çep bölegindäki aňlatmanyň (2) şerti kanagatlandyrýandygyny barlalyň:

$$M(x, y) = x^2 + 2xy - y^2, \quad N(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y.$$

Diýmek, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ şert ýerine ýetýär. Şunlukda, deňlemäniň çep bölegi haýsy hem bolsa $u(x, y)$ funksiýanyň doly differensialydyr:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 2xy - y^2, \quad u(x, y) = \int (x^2 + 2xy - y^2)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 y - y^2 x + \varphi(y).$$

Bu deňligi y görä differensirläliň:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xy + \varphi'(y).$$

Onda alarys:

$$x^2 - 2xy + \varphi'(y) = x^2 - 2xy - y^2,$$

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\int y^2 dy = -\frac{1}{3} y^3.$$

Bu alnan funksiýany ornuna goýmak bilen taparys:

$$u(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y-y^2x-\frac{1}{3}y^3.$$

Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$\frac{x^3}{3}+x^2y-y^2x-\frac{1}{3}y^3=C.$$

2004. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$ deňlemäni çözmeli.

2005. $\left(3y^2+2xy+2x\right)dx+\left(6xy+x^2+3\right)dy=0$ deňlemäni çözmeli.

2006. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ deňlemäni çözmeli.

Deňlemeleri çözmeli.

2007. $\left(x^2+y\right)dx+\left(x-2y\right)dy=0.$

2008. $\left(y-3x^2\right)dx-\left(4y-x\right)dy=0.$ **2009.** $\left(y^3-x\right)y'=y.$

2010. $2\left(3xy^2+2x^3\right)dx+3\left(2x^2y+y^2\right)dy=0.$ **2011.** $\dfrac{x^2dy-y^2dx}{(x-y)^2}=0.$

2012. $\left(\ln y-2x\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-2y\right)dy=0.$

2013. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

2014. $3x^2e^y+\left(x^3e^y-1\right)y'=0$ deňlemäniň $y\big|_{x=0}=1$ şerti kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

§ 5. Bernulli deňlemesi

Eger $p(x)$ we $q(x)$ üznüksiz funksiýalar bolsa, onda

$$y'+p(x)y=q(x)y^n$$

görnüşdäki deňlemlere Bernulli deňlemeleri diýilýär. Bu görnüşdäki deňlemeler $z=y^{1-n}$ ornuna goýmany ulanyp, çyzykly deňlemelere getirilýär. Bernulli deňlemesi $y=u\left(x\right)\vartheta(x)$ ornuna goýma bilen hem çözülip bilner.

2015. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=xy^2$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Täze $y^{-1}=z$ näbelli funksiýany girizeliň $-y^{-2}y'=z'$. Onda berlen deňleme aşakdaky görnüşi alýar:

$$-z'+\frac{z}{x}=x.$$

Bu bolsa çyzykly deňlemedir. $z=u\vartheta,\quad z'=u'\vartheta+\vartheta' u.$

$$-u'\vartheta-u\left(\vartheta'-\frac{\vartheta}{x}\right)=x,$$

$$\vartheta'-\frac{\vartheta}{x}=0,\quad u'\vartheta=-x,\quad \vartheta=x,\quad u=-x+c.$$

Onda $z=x(C-x)$. Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir: $\dfrac{1}{y}=-x^2+Cx,\quad y\left(Cx-x^2\right)=1.$

2016. $\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ deňlemäni çözmeli.

Deňlemeleri çözmeli.

2017. $\dfrac{dy}{dx}+2y=e^xy^2.$

2018. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^2\ln x.$

2019. $xdy=\left(x^5y^2-2y\right)dx.$

2020. $yy'-4x-y^2\sqrt{x}=0.$

2021. $y'+xy=x^3y^3.$

2022. $\left(1-x^2\right)y'-xy-axy^2=0.$

2023. $\left(y\ln x-2\right)ydx=xdy.$

2024. $y-y'\cos x=y^2\cos x\left(1-\sin x\right).$

§ 6. Ýokary tertipli differensial deňlemeler

1. Umumy düşünjeler. $n-$nji tertipli differensial deňlemeleriň umumy görnüşi aşakdaky ýalydyr:

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0. \tag{1}$$

$n-$nji tertipli önüme görä çözülen differensial deňlemeler aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}\right). \tag{1'}$$

Bu deňlemede x argument bolup, y bolsa näbelli funksiýadyr. Bu deňlemeleriň umumy çözüwleri n sany hemişelik sana baglydyr:

$$y=\varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right).$$

Umumy çözüwden kesgitli şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwi almak üçin başlangyç şertleri ulanmaly bolýar. Ýagny $x=x_0$ bolanda funksiýanyň we onuň $(n-1)$-nji tertipli önümleriniň bahalary berilýär:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, y'\big|_{x=x_0}=y_0', \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Umumy çözüwi $(n-1)$ gezek differensirläp we (2) şertleri ulanyp, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sanlary tapmak üçin n deňlemeler sistemasyny alýarys.

1. Eger deňleme $y^{(n)}=f(x)$ görnüşde berlen bolsa,

$$y=\int dx \int \ldots \int f(x) dx+C_1 x^{n-1}+C_2 x^{n-2}+\ldots+C_n.$$

2. Eger differensial deňleme y ululygy anyk görnüşinde saklamaýan bolsa, ýagny $F(x, y', y'')=0$ onda, $y'=p$ ornuna goýmany ulanyp, deňlemäniň tertibi bir birlik kemeldilýär:

$$F(x, p, p')=0.$$

3. Eger differensial deňleme x ululygy anyk görnüşinde saklamaýan bolsa, ýagny

$$F(y, y', y'')=0,$$

onda $y'=p, \quad y''=\frac{dp}{dy} p$ ornuna goýma ulanyp deňlemäniň tertibi bir birlik kemeldilýär:

$$F\left(y, p, p \frac{dP}{dy}\right)=0.$$

2025 $y^V=\cos x$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Yzygiderli integrirläp alarys:

$$y^{IV}=\sin x+C_1,$$
$$y'''=-\cos x+C_1 x+C_2,$$

$$y' = \cos x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,$$

$$y = \sin x + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5.$$

2026. $\left(1+x^2\right)y'' = 2xy'$ deňlemäniň $y\big|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 3$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýaň hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y' = p, \quad y'' = p'$

$$\left(1+x^2\right)p' = 2xp,$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{2xdx}{1+x^2}, \quad \ln p = \ln\left|1+x^2\right| + \ln C = \ln C\left|1+x^2\right|,$$

$$\frac{dy}{dx} = C\left(1+x^2\right), \quad y = C_1x + C_1\frac{x^3}{3} + C_2,$$

$$y' = C_1 + C_1x^2, \quad y'' = 2C_1x.$$

Bu önümleriň bahalaryny berlen $\left(1+x^2\right)y'' = 2xy'$ deňlemä goýup, toždestwo alýarys:

$$\left(1+x^2\right)2C_1x = 2x\left(C_1 + C_1x^2\right).$$

Şunlukda, $y = C_1x + C_1\frac{x^3}{3} + C_2$ berlen deňlemäniň umumy çözüwidir. Indi başlangyç şertleri ulanyp, hususy çözüwi tapalyň:

$$y\big|_{x=0} = C_1\cdot 0 + C_1\frac{0^3}{3} + C_2 = 0, C_2 = 0,$$

$$y'\big|_{x=0} = C_1 + C_2\cdot 0 = 3, C_1 = 3.$$

Onda, $y = 3x + x^3$ deňlemäniň hususy çözüwidir.

2027. $y''' = \frac{12}{(x+1)^3}$ deňlemäniň

$$y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = 2, y''\big|_{x=0} = 1$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Denlemeleri çözmeli.

2028. $y'' = \frac{1}{x}.$ **2029.** $y'' = \cos x.$

2030. $y''' = x.$ **2031.** $y'' + y'\mathrm{tg}x = \sin 2x.$

2032. $y'' = 4\cos 2x$ deňlemäniň umumy çözüwini we

$$y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 0$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2033. $y'' = x\sin x$ deňlemäniň umumy çözuwini tapmaly.

2. $F\left[x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right] = 0$ **görnuşdäki deňlemeler.** Görnüşi ýaly bu görnüşdäki deňlemeler y funksiýany we onuň $(n-1)$ tertibe çenli önümlerini özünde saklamaýar. Şeýle differensial deňlemeleri çözmek üçin $p(x) = y^{(n-1)}$ belgilemäni girizip, biriňji tertipli $F(x, p, p') = 0$ deňlemäňi alarys. Bu ýerde $p(x)$ näbelli funksiýadyr. Eger $n = 2$ bolsa, $F(x, y', y'') = 0$ differensial deňleme y funksiýany özünda saklamaýar. Bu halda hem $y' = p$ belgilemäni girizip, biriňji tertipli $F(x, p, p') = 0$ deňlemäni alarys.

2034. $xy'' - y' = x^2 e^x$ deňlemäňiň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Bu deňleme y özünde saklamaýar $y' = p$ ornuna goýmany ulanyp, $p(x)$ näbellä görä biriňji tertipli differensial deňlemäňi alarys:

$$xp' - p = x^2 e^x.$$

Deňlemäni çözeliň: Goý $p = u\vartheta$ bolsun. Onda $p' = u'\vartheta + \vartheta' u$,

$$x(u'\vartheta + u\vartheta') - u\vartheta = x^2 e^x,$$

$$u'\vartheta x + u(\vartheta' x - \vartheta) = x^2 e^x.$$

$\frac{d\vartheta}{dx}x - \vartheta = 0$ deňlemäni çözeliň:

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta} \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\vartheta = \ln x, \quad \vartheta = x.$$

$u(x)$ funksiýany tapalyň:

$$\frac{du}{dx} x \cdot x = x^2 e^x, \quad du = e^x dx, \quad u = e^x + C_1.$$

Şunlukda,

$$p = \left(e^x + C_1\right)x$$

ýa-da

$$\frac{dy}{dx} = x\left(e^x + C_1\right),$$

$$dy = \left(xe^x + C_1 x\right)dx, \quad y = \int xe^x dx + C_1 \int xdx = xe^x - e^x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

2035. Ýuwaşlyk bilen suwa çümýän jisimiň $\vartheta -$tizligi we $\omega -$tizlenmesi takmynan aşakdaky deňlik bilen özara baglanyşýarlar:

$$\omega = g - k\vartheta,$$

bu ýerde $k, g -$hemişelikdir. Eger $t = 0$ bolanda $S = \vartheta = 0$ bolsa, geçilen ýol bilen wagtyn arasyndaky baglanşygy kesgitlemeli.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly $\omega = \frac{d^2S}{dt^2} -$tizlenme, $\vartheta = \frac{dS}{dt} -$tizlikdir. Onda S bilen t wagtyň baglanyşygy ikinji tertipli differensial deňleme bilen aňladylýar:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = g - k\frac{dS}{dt}.$$

$\frac{dS}{dt} = \vartheta$ we $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}$ belgilemeleri girizip, $\vartheta(t)$ näbellä görä näbellileri aýyl-saýyl edilen birinji tertipli differensial deňleme alarys:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g - k\vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{g - k\vartheta} = dt.$$

Deňligi integrirläp alarys:

$$-\frac{1}{k}\ln(g - k\vartheta) = t + C_1.$$

$\vartheta(0) = 0$ şerti ulanyp C_1 tapalyň:

$$-\frac{1}{k}\ln g = C_1.$$

Bu bahany ýokardaky deňlige goýüp $\vartheta(t)$ görä deňlemäni çözeliň:

$$t = \ln\left(\frac{g}{g - k\vartheta}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad \frac{g}{g - k\vartheta} = e^{kt}.$$

Bu ýerden

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)..$$

Näbellileri aýyl-saýyl edip, $\vartheta(t)$ funksiýa görä differensial deňleme alarys. Ony çözüp, taparys:

$$S(t)=\frac{g}{k}\int\left(1-e^{-kt}\right)dt+C_2,$$

ýa-da

$$S(t)=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}e^{-kt}+C_2.$$

$S(0)=0$ şerti ulanyp C_2 – tapalyň:

$$0=\frac{g}{k^2}+C_2\Rightarrow C_2=-\frac{g}{k^2}.$$

Bu bahany ýokardaky deňlige goýup gözlenýäň baglanyşygy taparys:

$$S(t)=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}\left(e^{-kt}-1\right)..$$

2036. $ay''=-\left(1+y'^2\right)$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2037. $x^3y''+x^2y'=1.$

2038. $xy'''+y''-x-1=0.$

2039. $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0.$

3. $F(y,y',y'')=0$ **görnüşdäki deňlemeler**. Bu görnüşdäki differensial deňlemeler özünde baglanyşyksyz üýtgeýän x ululygy anyk görnüşinde saklamaýar. $y'=p(y)$ belgilemäni girizip, taparys:

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'=p\frac{dp}{dy}.$$

Şunlukda, biz aşakdaky birinji tertipli differensial deňlemäni alýarys:

$$F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Bu ýerde $p(y)$ näbelli funksiýadyr

2040. $y\cdot y''-(y')^2+(y')^3=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Bu deňlemäni çözmek üçin $y'=p,\quad y''=p\dfrac{dp}{dy}$ belgilemäni girizip, birinji tertipli differensial deňlemäni alarys:

$$y \cdot p\frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p - p^2},$$

$$yc_1 = \frac{p}{1-p}, \quad p = \frac{c_1 y}{c_1 y + 1}.$$

Onda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1 y}{c_1 y + 1}, \quad y + \frac{1}{c_1}\ln y = x + c_2.$$

Bu bolsa deňlemäniň umumy çözüwidir.

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2041. $y \cdot y'' - y'(1 + y') = 0.$ **2042.** $y'' = 1 - y'^2.$

2043. $y'(1 + y'^2) = ay''.$

2044. $2yy'' = y'^2$ deňlemäniň $x = -1$ bolanda $y = 4,$ $y' = 1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ ornuna goýmany ulanyp birinji tertipli differensial deňleme alarys:

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2, \quad 2y\frac{dp}{dy} = p,$$

$$\ln p = \frac{1}{2}\ln y + \ln C_1, \quad p = \sqrt{y}\,C_1.$$

Başlangyç näbellä dolanyp geleliň:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\,C_1, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = C_1 dx, \quad 2\sqrt{y} = C_1 x + C_2.$$

Bu deňlemäniň umumy çözüwidir. Hususy çözüwi tapmak üçin başlagyç şertleri ulanalyň:

$$1 = 2C_1, \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad 2 \cdot 2 = -C_1 + C_2, \quad C_2 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Şunlukda,

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = \frac{x+9}{2}, \quad y = \frac{(x+9)^2}{16}.$$

2045. $y''\cdot y^2=1$ deňlemäniň $x=\frac{1}{2}$ bolanda $y=2,\quad y'=2$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2046. $y''-y'^2+y'(y-1)=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=1,\quad y'=2$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2047. $y''+y=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=1,\quad x=\pi$ bolanda $y=-1$ gyraky şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen differensial deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

bu ýerde c_1 we c_2 erkin hemişelik sanlardyr. Umumy çözüwe gyraky şertleri ulanyp, alýarys:

$$1=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0,\quad -1=C_1(-1)+C_2\cdot 0.$$

Bu ýerden $C_1=1$ alýarys. C_2 bolsa kesgitlenmän galdy. C_1 umumy çözüwe goýsak, aşakdakyny alarys:

$$y=\cos x+C_2\sin x.$$

Diýmek, biz tükeniksiz köp çözüwi aldyk, çünki ikinji goşulyjynyň C_2 koeffisiýenti erkin hemişelik sandyr.

2048. $yy''-y'^2=y^4$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=1,\ y'=0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen differensial deňleme baglanyşyksyz üýtgeýän x ululygy anyk görnüşinde saklamaýar. $y'=p,\quad y''=p\frac{dp}{dy}$ ornuna goýmany ulanyp alarys:

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^4.$$

Biz p görä birinji tertipli çyzykly däl deňlemäni aldyk. Bu deňlemäni çözmek üçin $z=p^2$ täze funksiýany girizeliň. Onda

$$\frac{dz}{dy}=2p\frac{dp}{dy}.$$

Onda deňleme aşakdaky görnüşi alar

$$y\frac{dz}{dy}-2z=2y^4 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{dz}{dy}-\frac{2z}{y}=2y^3.$$

Bu deňleme z görä birinji tertipli çyzykly differensial deňlemedir. Ony $z = u\vartheta$ ornuna goýmany ulanyp çözeliň:

$$u\left(\frac{d\vartheta}{dy} - \frac{2}{y}\vartheta\right) + \vartheta\frac{du}{dy} = 2y^3, \;\; \vartheta = y^2, \;\; u = y^2 + C_1$$

deňlikleri alýarys. Diýmek,

$$z = y^2(y^2 + C_1)$$

ýa-da

$$p^2 = y^2(y^2 + C_1), \qquad p = \pm y\sqrt{y^2 + C_1}.$$

$y' = p$ goýup alarys:

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 + C_1}.$$

Bu deňlemede başlangyç şerti ulanyp, $C_1 = -1$ alarys:

Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip deňlemäni çözüp, alarys:

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

$x = 0$ bolanda $y = 1$ goýup, $C_2 = 0$ alýarys. Bu ýerden,

$$\frac{1}{y} = \cos x, \quad y = \sec x.$$

2049. $yy'' - y'^2 = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlemäni

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$$

görnüşde ýazalyň. Onda

$$(\ln y')' = (\ln y)'$$

soňky deňlemäniň iki bölegini hem integrirläp,

$$\ln y' = \ln y + \ln C_1, \qquad y' = C_1 y$$

deňligi alarys. Bu deňlemäni çözüp,

$$y = C_2 e^{c_1 x}$$

çözüwi alarys. Bu hem berlen deňlemäniň umumy çözüwidir.

2050. $yy'' + y'^2 = 1$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = 1$, $y' = 1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2051. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

§ 7. Hemişelik koeffisiýentli ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemeler

1. Birjynsly deňlemeler. a_0, a_1, a_2 – koeffisiýentleri hemişelik sanlar bolan

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

görnüşdäki deňlemelere hemişelik koeffisiýentli ikinji tertipli çyzykly birjynsly differensial deňlemeler diýilýär.

Eger k_1 we k_2 sanlar

$$H(k) = a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (2)$$

häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri bolsa, onda (1) deňlemäniň umumy çözüwi degişlilikde aşakdaky görnüşde ýazylýar:

1. k_1 we k_2 hakyky sanlar bolsa, $k_1 \neq k_2$,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. $k_1 = k_2 = k$ bolsa $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$.

3. $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$ kompleks çatrymly sanlar bolsa

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

2. Birjynsly däl deňlemeler. Hemişelik koeffisiýentli ikinji tertipli birjynsly däl

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (3)$$

deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

görnüşde ýazyp bolýar. Bu ýerde y_0 (1) deňlemäniň umumy çözüwi, $\tilde{y}$ bolsa (3) deňlemäniň hususy çözüwidir.

$\tilde{y}$ funksiýa aşakdaky ýönekeý hallarda näbelli koeffisiýentleriň usuly bilen tapylýar

1. $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, $P_n(x)-n$-nji tertipli köpagzadyr. Eger a san (2) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köki bolmasa $H(a)\neq 0$, onda hususy çözüw $\tilde{y}=e^{ax}Q_n(x)$ görnüşde gözlenilýär, bu ýerde $Q_n(x)$ koeffisiýentleri näbelli bolan $n-$nji tertipli köpagzadyr.

Eger a san (2) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köki bolsa $H(a)=0$ onda hususy çözüwi $\tilde{y}=x^r e^{ax}Q_n(x)$ görnüşde gözlenilýär, bu ýerde r şol kögüň kratnylygy $(r=1$ ya-da $r=2)$.

1. $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$.

Eger $a+i\beta$ san (2) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köki bolmasa $H(a+i\beta)\neq 0$, onda hususy çözüwi

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x\right]$$

görnüşde gözleýärler. Bu ýerde $S_N(x)$ we $T_N(x)$, $N=\max\{n,m\}$ tertipli köpagzadyr.

Eger $\alpha+i\beta$ san (2) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köki bolsa, $H(\alpha+i\beta)=0$ onda hususy çözüwi

$$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x\right].$$

$r-$häsiýetlendiriji deňlemäniň $\alpha+i\beta$ kökiniň kratnylygy (ikinji tetipli deňleme üçin $r=1$).

2052. $y''-7y'+12y=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemäni düzeliň we onuň köklerini tapalyň:

$$k^2-7k+12=0,\quad k_1=3,\quad k_2=4.$$

Onda, umumy çözüwi ýazyp bileris:

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}.$$

2053. $y''-5y'+4y=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=5$, $y'=8$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemäni düzüp onuň köklerini tapalyň:

$$k^2-5k+4=0,\quad k_1=4,\quad k_2=1.$$

Berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{x}.$$

Hemişelik C_1, C_2 sanlary tapalyň:

$$y' = 4C_1e^{4x} + C_2e^x,$$

$$5 = C_1 + C_2, \quad 8 = 4C_1 + C_2, \quad C_2 = 4, \quad C_1 = 1.$$

Şunlukda, deňlemäniň hususy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = e^{4x} + 4e^x.$$

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2054. $2y'' + 5y' + 2y = 0.$ **2055.** $y'' - 9y = 0.$

2056. $y'' - y' = 0.$

2057. $y'' + 3y' + 2y = 0$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = 1,$ $y' = 1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2058. $y'' + 12y = 7y'$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2059. $y'' + 4y' + 4y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemäni düzeliň

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k+2)^2 = 0.$$

Bu ýerden alýarys $k_1 = k_2 = -2$. Onda

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}.$$

deňlemäniň umumy çözüwidir.

2060. $y'' - 2y' + y = 0$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = 4,$ $y' = 2$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $k^2 - 2k + 1 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň biri-birine deň kökleri bardyr. $k_1 = k_2 = 1$. Şonuň üçin berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir

$$y = e^x(C_1 + C_2x).$$

Hususy çözüwleri tapmak üçin

$$y = e^x(C_1 + C_2x), \quad y' = e^x(C_1 + C_2 + C_2x)$$

deňliklere başlangyç şertleri ulanalyň:

$$4 = C_1, \quad 2 = C_1 + C_2, \quad C_2 = -2.$$

Bulary umumy çözüwe goýup hususy çözüwi alarys:

$$y = e^x(4 - 2x).$$

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2061. $y'' - 2ay' + a^2y = 0.$ **2062.** $y'' + 2y' + y = 0.$

2063. $y'' + 6y' + 25y = 0.$

Çözülişi. $k^2+6k+25=0$ häsiýetlendiriji deňlemäni düzýäris we onuň koklerini tapalyň:

$$k_1=-3+4i, k_2=-3-4i,$$

bu koklere

$$y_1=e^{-3x}\cos 4x, y_2=e^{-3x}\sin 4x$$

hususy çözüwler degişlidir. Diýmek,

$$y=e^{-3x}\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right)$$

funksiýa deňlemäniň umumy çözüwidir.

2064. $y''+4y=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=0,\ y'=2$ şertleri kanagatlandyrýäň hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $k^2+4=0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň kokleri $k_1=2i$, $k_2=-2i$ sanlardyr. Deňlemäniň umumy çözüwini ýazyp bileris:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

c_1 we c_2 sanlary tapmak üçin başlangyç şertleri ulanalyň:

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x,\quad C_1=0,\quad C_2=1..$$

Onda deňlemäniň hususy çözüwini ýazyp bileris:

$$y=\sin 2x$$

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2065. $y''+4y'+13y=0.$ **2066** $y''+2y'+10y=0.$

2067. $y''-2y'=0.$ **2068.** $y''+\pi^2y=0,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$

2069. $y''-2y'-3y=2x+1$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y''-2y'-3y=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Onuň üçin häsiýetlendiriji deňlemäni düzeliň. $k^2-2k-3=0$. Bu deňlemäniň kökleri $k_1=3$, $k_2=-1$ sanlardyr. Onda birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y_0=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}.$$

Deňlemäniň hususy çözüwini $\tilde{y}=Ax+B$ görnüşde gözläliň. A we B sanlary tapalyň

$\tilde{y}' = A,\ \tilde{y}'' = 0,\quad -2A - 3(Ax + B) = 2x + 1,$

$-3A = 2,\ -2A - 3B = 1,\quad A = -\frac{2}{3},\quad B = \frac{1}{9}.$ Onda $\tilde{y} = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{9}.$

Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}.$$

2070. $y'' - 6y' + 8y = e^x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y'' - 6y' + 8y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$k_1 = 2\,,\ k_2 = 4.$$

Şunlukda,

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

funksiýa çyzykly birjynsly deňlemäniň umumy çözüwidir.

Deňlemäniň hususy çözüwini $\tilde{y} = Ae^x$ görnüşde gözläliň: $\tilde{y}' = Ae^x$, $\tilde{y}'' = Ae^x$.

$$Ae^x - 6Ae^x + 8Ae^x = e^x,\quad e^x \neq 0,$$

$$A - 6A + 8A = 1,\quad 3A = 1,\quad A = \frac{1}{3}.$$

Şunlukda, $\tilde{y} = \frac{1}{3}e^x$ we berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^x.$$

2071. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y'' - 5y' + 4y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$k^2 - 5k + 4 = 0,\quad k_1 = 1,\quad k_2 = 4$. Onda

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

birjynsly deňlemäniň umumy çözüwidir.

Deňlemäniň sag bölegi ikinji derejeli köpagza $m = 2$, hem-de görkezijili funksiýanyň derejesiniň koeffisiýenti $k = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl, şoňa görä-de berlen deňlemäniň hususy çözüwini

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$$

görnüşde gözläliň. $\tilde{y}, \tilde{y}'$ we $\tilde{y}''$ bahalary berlen deňlemä goýup alýarys

$$2A - 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$$

ýa-da

$$4Ax^2 + (-10A + 4B)x + (2A - 5B + 4C) = x^2 + 1.$$

Bu ýerde näbelli koeffisientleriň düzgünini ulanyp A, B, C sanlary tapalyň:

$$4A = 1, \quad A = \frac{1}{4}, \; -10A + 4B = 0, \quad B = \frac{5}{8},$$

$$2A - 5B + 4C = 1, \quad C = \frac{13}{4}.$$

Şunlukda

$$\tilde{y} = \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{8} + \frac{13}{4}.$$

Onda berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşde bolar

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{8} + \frac{13}{4}.$$

2072. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2073. $y'' + 2y' = 24x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2074. $y'' + 4y = 2\cos 2x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y'' + 4y = 0$, $k^2 + 4 = 0$, $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i.$ Berlen deňlemäniň hususy çözüwini $\tilde{y} = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$ görnüşde gozleýäris. $\tilde{y}, \tilde{y}'$ we $\tilde{y}''$ önümleriň bahalaryny berlen deňlemede ornuna goýup taparys:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 2\cos 2x,$$

$$-4A = 0, A = 0, 4B = 2, B = \frac{1}{2}.$$

Diýmek,

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} x\cos 2x,$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x.$$

2075. $y'' - 2y' + y = \sin x + \cos x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $k^2 - 2k + 1 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň $k_1 = k_2 = 1$ kökleri bardyr. Onda $y'' - 2y' + y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

Berlen deňlemäniň hususy çözüwini

$$\tilde{y} = A_1 \sin x + A_2 \cos x$$

görnüşde gözläliň. Differensirläp taparys:

$$\tilde{y}' = A_1 \cos x - A_2 \sin x, \quad \tilde{y}'' = -A_1 \sin x - A_2 \cos x.$$

$\tilde{y}$ funksiýanyň we $\tilde{y}', \tilde{y}''$ önümleriň bahalaryny berlen deňlemä goýup alarys:

$$-A_1 \sin x - A_2 \cos x - 2A_1 \cos x + 2A_2 \sin x + A_1 \sin x + A_2 \cos x = \sin x + \cos x$$

ýa-da

$$-2A_1 \cos x + 2A_2 \sin x = \sin x + \cos x, \quad A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}.$$

Onda berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x.$$

2076. $y'' + 4y' - 5y = e^x (\cos x - 7 \sin x)$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Degişli birjynsly çyzykly differensial deňlemäni integrirläliň:

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \quad k^2 + 4k - 5 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -5, \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x}.$$

Berlen deňlemäniň hususy çözüwini aşakdaky görnüşde gözläris:

$$\tilde{y} = e^x (A \cos x + B \sin x).$$

$\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ önümleriň bahalaryny berlen deňlemede ornuna goýup, alýarys:

$$e^x\left(\left(-A+3B\right)\cos x-\left(B+3A\right)\sin x\right)=e^x\left(\cos x-7\sin x\right).$$

$e^x \neq 0$ gysdaldyp we $\cos x$ hem $\sin x$ koeffisiýentlerini deňläp, A we B näbelli koeffisientleri kesgetlemek üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$-3A-B=-7,\quad -A+3B=1,\quad A=2B=1.$$

Diýmek,

$$\tilde{y}=e^x\left(2\cos x+\sin x\right).$$

Berlen deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-5x}+e^x\left(2\cos x+\sin x\right).$$

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2077. $y''+y'-6y=xe^{2x}$ **2078.** $y''+7y'-18y=e^x+e^{2x}$

2079. $y''+y=4x\sin x$ **2080.** $y''-2y=2xe^x\left(\cos x-\sin x\right)$

Çözülişi. $k^2-2=0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň $k_1=\sqrt{2}$, $k_2=-\sqrt{2}$ kökleri bardyr we $y''-2y=0$ deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y_0=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}$$

Şu ýerde

$$\alpha=1,\ P\left(x\right)=x,\ \theta\left(x\right)=-2x,\ \beta=1.$$

Onda deňlemäniň hususy çözüwini

$$\tilde{y}=e^x\left[\left(A_1x+B_1\right)\cos x+\left(A_2x+B_2\right)\sin x\right]$$

görnüşde gözlemelidir. Bu funksiýany we $\tilde{y}''$ önümiň bahasyny berlen deňlemä goýup taparys:

$$A_2=1,\ \ B_1=1,\ A_1=0,\ B_2=0.$$

Onda alarys:

$$\tilde{y}=xe^x\sin x+e^x\cos x.$$

Şunlukda, deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+xe^x\sin x+e^x\cos x.$$

2081. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \dfrac{x}{2}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $k^2 - 4k + 4 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň $k_1 = k_2 = 2$ kökleri bardyr. Onda $y'' - 4y' + 4y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini ýazyp bileris:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

Hasaplamalaryň kömegi bilen $y = x^2 e^{2x}$ funksiýanyň

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$$

deňlemäniň hususy çözüwidigini, $y = \dfrac{x+1}{8}$ funksiýanyň bolsa, $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{x}{2}$ deňlemäniň hususy çözüwidigini görkezip bolýar. Onda berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + x^2 e^{2x} + \frac{x+1}{8}.$$

Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly.

2082. $y'' + 13y' + 42y = 112e^{x}$. **2083.** $y'' + 9y = 60e^{-x}$.

2084. $y'' + 4y' + 3y = 8\cos x - 6\sin x$. **2085.** $y'' + y = 12\sin 2x$.

2086. $y'' + 5y' + 6y = 12$. **2087.** $y'' + \dfrac{5}{2}y' + y = \dfrac{5}{2} + x$.

2088. $y'' + 4y = 2x^2$. **2089.** $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^{x}$.

2090. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$. **2091.** $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.

2092. $y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^{x}$.

2093. $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = \dfrac{1}{8}$, $y' = 1$ şertleri kanagatlandyrýaň hususy çözüwini tapmaly.

2094. $y'' + 4y = \sin x$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = 1$, $y' = 1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2095. $y'' - y' = 2(1 - x)$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = 1$, $y' = 1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

§ 8. Hemişelik koeffisiýentli ýokary tertipli çyzykly differensial deňlemeler $(n>2)$

1. Birjynsly deňlemeler. Hemişelik $a_0, a_1, a_2, ..., a_n-$ koeffisiýentleri bolan ýokary tertipli birjynsly çyzykly differensial deňlemeleriň umumy görnüşi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (2)$$

(2) algebraik deňlemä (1) differensial deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi diýilýär.

1) Eger k san (2) deňlemäniň m sany gaýtalanýan köki bolsa, onda onuň m sany çyzykly bagly däl çözüwleri bardyr

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}, ..., y_m = x^{m-1} e^{kx}.$$

2) Eger $\alpha + i\beta$ sanlar (2) deňlemäniň m sany gaýtalanýan köki bolsa, onda oňa $2m$ çyzykly bagly däl çözüwler degişlidir:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x, ...,$$

$$y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2. Birjynsly däl deňlemeler

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (3)$$

deňlemäniň hususy çözüwi geçen bölümçedäki düzgünler esasynda tapylýar.

2096. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesini ýazalyň:

$$k^3 + 5k^2 + 6k = 0, k\left(k^2 - 5k + 6\right) = 0.$$

Onuň kökleri $k_1 = 0,\ k_2 = 2,\ k_3 = 3$ sanlardyr. Onda (3) formulanyň esasynda onuň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}.$$

2097. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2098. $y^{IV} - y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2099. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemäni duzeliň: $k^4+8k^2+16=0$. Bu deňlemäniň $k_1=k_2=2i$ we $k_3=k_4=-2i$ kökleri bardyr. Onda

$$y=\left(C_1+C_2x\right)\cos 2x+\left(C_3+C_4x\right)\sin 2x.$$

2100. $y^{IV}+y'=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäniň $k^2+k=0$ häsiýetlendiriji deňlemesini çözeliň

$$k\left(k^3+1\right)=0,\quad k\left(k+1\right)\left(k^2-k+1\right)=0,$$

$$k_1=0, k_2=-1,\ k^2-k+1=0,$$

$$k_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ k_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Onda deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y=C_1+C_2e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly.

2101. $y'''+y=0$. **2102.** $y'''-3y''+3y'-y=0$.

2103. $y^{IV}-2y'=0$. **2104.** $y^{IV}-2y''+y=0$.

2105. $y^{IV}-a^4y=0$. **2106.** $y^{IV}+a^2y''=0$.

2107. $y^{IV}+2y'''+y''=0$.

2108. $y'''+y'=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=2,\ y'=0,\ y''=-1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2109. $y^{V}-y'=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=0,\ y'=1,\ y''=0,$ $y'''=1,\ y^{IV}=2$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2110. $y'''+2y''+10y'=0$ deňlemäniň $x=0$ bolanda $y=2,\ y'=1,$ $y''=1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2111. $y^{IV}-2y'''+y''=e^x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $k^4-2k^3+k^2=0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köklerini tapalyň:

$$k^2\left(k^2-2k+1\right)=0,\quad k^2\left(k-1\right)^2=0,$$

$$k_1=k_2=0,\quad k_3=k_4=1.$$

Şunlukda, birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y_0 = C_1 + C_2 x + \left(C_3 + C_4 x\right)e^x.$$

Deňlemäniň hususy çözüwini $\tilde{y} = Ax^2 e^x$ görnüşde gözläliň. Önümleri tapalyň:

$$\tilde{y}' = \left(2Ax + Ax^2\right)e^x,$$

$$\tilde{y}'' = \left(Ax^2 + 4Ax + 2A\right)e^x,$$

$$\tilde{y}''' = \left(Ax^2 + 6Ax + 6A\right)e^x,$$

$$\tilde{y}^{IV} = \left(Ax^2 + 8Ax + 12A\right)e^x.$$

Bulary $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x$ deňlemä goýup A koeffisiýenti taparys:

$$A = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$\tilde{y} = \frac{x^2}{2}e^x.$$

Şunlukda, deňlemäniň umumy çözüwini ýazyp bileris:

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 + C_2 x + \left(C_3 + C_4 x + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

2112. $y^{IV} + y''' = \cos 4x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

2113. $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$ deňlemäniň $y\big|_{x=0} = 1,\ \ y'\big|_{x=0} = 0,\ \ y''\big|_{x=0} = 1$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Birjynsly deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. $k^3 - 2k^2 + k = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1$ kökleri bardyr. Onda

$$y_0 = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x$$

funksiýa birjynsly deňlemäniň umumy çözüwidir. Berlen deňlemäniň hususy çözüwini

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x$$

görnüşde gözläliň. Önümleri tapalyň:

$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x,$$

$$\tilde{y}''' = A\sin x - B\cos x.$$

Bulary deňlemäniň çep bölegine goýup, taparys:

$$A\sin x - B\cos x + 2\left(A\cos x + B\sin x\right) - A\sin x + B\cos x = 4\cos x + 4\sin x$$

ýa-da

$$2A\cos x + 2B\sin x = 4\cos x + 4\sin x.$$

Şunlukda $A = 2,\ B = 2$ we

$$\tilde{y} = 2\cos x + 2\sin x.$$

Diýmek berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 + \left(C_2 + C_3 x\right)e^x + 2\cos x + 2\sin x.$$

Başlangyç şertleri ulanmak üçin y', y'' önümleri tapalyň:

$$y' = \left[C_2 + C_3\left(1 + x\right)\right]e^x + 2\left(-\sin x + \cos x\right),$$

$$y'' = \left[C_2 + C_3\left(2 + x\right)\right]e^x - 2\left(\cos x + \sin x\right).$$

$x = 0$ bolanda $y = 1,\ y' = 0,\ y'' = -1$ başlangyç şertleri ulanyp, C_1, C_2, C_3 sanlary tapmak üçin üç deňleme alarys:

$$1 = C_1 + C_2 + 2, \quad 0 = C_2 + C_3 + 2, \quad -1 = C_2 + 2C_3 - 2.$$

Bu ýerden $C_1 = 4,\ C_2 = -5,\ C_3 = 3.$

Şunlukda, $y = 4 + \left(-5 + 3x\right)e^x + 2\left(\cos x + \sin x\right)$ gözlenýän çözüwdir.

Deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly.

2114. $y^{IV} - y = 5e^x \sin x.$ **2115.** $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3.$

2116. $y^{V} + y''' = x^2 - 1.$ **2117.** $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

2118. $y''' + 2y'' + 2y' + y = x$ deňlemäniň $y\left(0\right) = y'\left(0\right) = y''\left(0\right) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2119. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x},\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$ meseläniň çözüwini tapmaly.

§ 9. Erkin hemişelikleriň wariasiýa usuly. (Lagraňžyň usuly)

Çyzykly birjynsly däl deňlemäniň umumy çözüwini ýazmak üçin iň bolmanda onuň bir hususy çözüwini bilmegimiziň zerurdygyny görýäris.

Çyzykly birjynsly däl deňlemäniň hususy çözüwini tapmak meselesi köp halatlarda şol deňlemäniň öz görnüşine baglydyr. Eger-de, meselem, çyzykly birjynsly däl deňlemäniň koeffisiýentleri hemişelik bolup, deňlemäniň $f(x)$ sag bölegi kesgitli görnüşe eýe bolsa, onda bu deňlemäniň hususy çözüwini tapmagyň has ýönekeýräk usulyny görkezmek bolar. Bu usul aşakdaky görnüşdedir. Ýönekeýlik üçin ikiňji tertipli

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

deňlemä garamak bilen çäkleneris. Bu usulyň özeni, çyzykly birjynsly deňlemäniň umumy çözüwine, ýagny $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ girýän C_1 we C_2 hemişelikler üýtgeýärler. Çyzykly birjynsly däl deňlemäniň çözüwini tapmaga geçilende, olar $C_1(x), C_2(x)$ funksiýalar bilen çalşyrylýar. Näbelli $C_1(x)$ we $C_2(x)$ funksiýalar bolsa

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyndan tapylýar.

2120. $y'' + y = tgx$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y'' + y = 0$ birjynsly deňlemäniň $k^2 + 1 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemesiniň $k_{1,2} = \pm i$ kökleri bardyr. Bu deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

c_1, c_2 sanlary tapmaklygyň sistemasyny duzeliň:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \mathrm{tg} x \end{cases}$$

sistemany çözüp, taparys:

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, C_2' = \sin x.$$

Onda

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad \frac{dC_2}{dx} = \sin x,$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \left| tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c_1,$$

$$C_2 = \int \sin x dx = -\cos x + A_2.$$

Şunlukda, berlen deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = \left[\sin x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C_1 \right] \cos x + \left[-\cos x + C_2 \right] \sin x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln \left| ctg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2121. $xy'' + y' = x^2$. **2122.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Lagranž usulyny ulanyp, deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly.

2123. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$. **2124.** $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

2125. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$. **2126.** $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

2127. $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$ deňlemäniň $x = 0$ bolanda $y = 1, y' = 2$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

§ 10. Hemişelik koeffisiýentli çyzykly differensial deňlemeleriň sistemasy

Aşakdaky differensial deňlemeleriň sistemasyna garalyň:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = f_2(x), \\ ------------------- \\ \frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Bu ýerde x argument, a_{11}, $a_{12},...$ hemişelik sanlar bolup, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x),...,y_n(x)$, bolsa baglanyşyksyz üýtgeýän x ululyga görä näbelli funksiýalardyr. Şu görnüşdäki sistemalara hemişelik koeffisiýentli birinji tertipli çyzykly differensial deňlemeler sistemasy diýilýär.

Eger

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x) \tag{2}$$

funksiýalary (1) sistemanyň deňlemelerine goýanymyzda olar toždestwa öwrulýän bolsa, onda şu funksiýalaryň toplumyna sistemanyn çözüwi diýilýär.

(1) sistemanyn umumy çözüwi $C_1, C_2,..., C_n$ erkin hemişelik ululyklary özünde saklaýar. Şu ululyklara baha berip sistemanyn hususy çözüwini alyp bolýar. Umumy çözüwden hususy çözüwi tapmak üçin

$$y_1\Big|_{x=x_0} = a_1\,, y_2\Big|_{x=x_0} = a_2,..., y_n\Big|_{x=x_0} = a_n$$

başlangyç şertlerden peýdalanmaly bolýarys. Sistemanyn şu şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga Köşi meselesi diýilýar.

Biriňji tertipli differensial deňlemeleriň sistemasy bir näbellili bir differensial deňlemä getrilip bilner.

Biz bu ýerde sistemany çözmekligin beýleki çylşyrymly usullaryna garamarys.

2128. Sistemany çözmeli.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$$

Çözülişi. Sistemanyn biriňji deňlemesini x görä differensirläp taparys:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = -y, \ \frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

Deňlemäniň $k^2 + 1 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemesiniň $k_1 = k_2 = \pm i$ kökleri bardyr. Onuň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Onda deňlemäniň ikiňji deňlemesi aşakdaky görnüşi alar:

$$\frac{dz}{dx} = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

ýa-da

$$dz = -C_1 \cos x dx - C_2 \sin x dx.$$

Bu ýerden z tapalyň:

$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Şunlukda, sistemanyn umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$
$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

2129. Sistemany çözmeli

$$\begin{cases} y' = y + 5x \\ z' + y + 3z = 0 \end{cases}$$

2130. Sistemany çözmeli

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}$$

2131. $\begin{cases} 5\dfrac{dz}{dx} - 2\dfrac{dy}{dx} + 4z - y = e^{-x} \\ \dfrac{dz}{dx} + 8z - 3y = 5e^{-x} \end{cases}$

sistemanyn $x = 0$ bolanda $z = 1, y = 2$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Ikinji deňlemeden y tapalyň:

$$y = \frac{1}{3}\left(z' + 8z - 5e^{-x}\right).$$

Ony sistemanyn birinji deňlemesine goýup taparys:

$$z'' + z' - 2z = -4e^{-x}.$$

Bu deňleme z näbelli funksiýa görä ikinji tertipli differensial deňlemedir. Onuň umumy çözüwini tapalyň: $z'' + z' - 2z = 0$ deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerini tapalyň: $k^2+k-2=0,\ k_1=1,\ k_2=-2.$ Onda bu deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$z=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

Birjynsly däl deňlemäniň hususy çözüwini $\tilde{z}=Ae^{-x}$ görnüşde gözläliň.

Önümleri tapalyň:

$$\tilde{z}'=-Ae^{-x},\ \tilde{z}''=Ae^{-x}.$$

Bulary deňlemä goýup taparys: $A=2$. Şunluk-da, deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir:

$$z=C_1e^x+C_2e^{-2x}+2e^{-x}.$$

$z'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}-2e^{-x}$ deňligi ulanyp, $y=\frac{1}{2}\left(z'+8z-5e^{-x}\right)$ deňlikden y tapyp bileris:

$$y=3cC_1e^x+2C_2e^{-2x}+3e^{-x}.$$

Diýmek, sistemanyn umumy çözüwi aşakdaky ýalydyr:

$$z=C_1e^x+C_2e^{-2x}+2e^{-x},$$
$$y=3C_1e^x+2C_2e^{-2x}+3e^{-x}.$$

Başlangyç $z\big|_{x=0}=1,\ y\big|_{x=0}=2$ şertleri ulanyp hususy çözüwi tapalyň:

$$1=C_1+C_2+2,\ \ 2=3C_1+2C_2+3,$$
$$C_1=1, C_2=-2.$$

Şunlukda, sistemanyn hususy çözüwini ýazyp bileris:

$$z=e^x-2e^{-2x}+2e^{-x}$$
$$y=3e^x-4e^{-2x}+3e^{-x}$$

2132. $\begin{cases} y'=y+z+x \\ z'=-4y-3z+2x \end{cases}$

sistemanyn $y\big|_{x=0}=1,\ z\big|_{x=0}=0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2133. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y. \end{cases}$$

sistemanyn umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Birinji deňlemäni t görä differensirläliň:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=(x+z)+(x+y),$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z.$$

$\dfrac{dx}{dt}=y+z$ we $\dfrac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z$ deňlemelerden taparys:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0.$$

Bu deňlemäni çözüp, alarys:

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}.$$

Onda

$$\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t},$$
$$y=\frac{dx}{dt}-z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-z.$$

Sistemanyn üçunji deňlemesine x we y bahalaryny goýup, z tapmak üçin deňleme alarys:

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_2e^{2t}.$$

Bu deňlemäni çözüp, z taparys:

$$z = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

Onda

$$y = -\left(C_1 + C_2\right) e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Şunlukda, sistemanyn umumy çözüwi aşakdaky görnüşdedir :

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t},$$
$$y = -\left(C_1 + C_3\right) e^{-t} + C_2 e^{2t},$$
$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

2134. $\begin{cases} y'' = z, \\ z'' = y. \end{cases}$ sistemanyn umumy çözüwini tapmaly.

2135. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$

sistemanyn $t = 0$ bolanda $x = 1,\ y = 1$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

2136. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

sistemanyn umumy çözüwini we $t = 0$ bolanda $x = 1,\ y = 1$ şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Sistemalaryn umumy çözüwini tapmaly.

2137. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \end{cases}$

2138. $\begin{cases} y' = 4y - z \\ z' = 2z + y \end{cases}$

2139. $\begin{cases} y' = z - y \\ z' = -y - 3z \end{cases}$

2140. $\begin{cases} y' + z = 0 \\ z' + 4y = 0 \end{cases}$

2141. $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x \\ z' - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$

JOGAPLAR

I BÖLÜM

4. $\sqrt{97}$. **5**. 1) 13, 2) 3, 3) 5, 4) 10, 5) 13. **6.** $5\sqrt{5}$. **7**. *S*=0, *A, B, C* nokatlar bir gönüde ýatýarlar. 8. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. 12. *C*(0,7). 13. *A*(-3,1). 14. $\sqrt{26}, \sqrt{17}, \sqrt{41}$.

15. 1) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$, 2) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 3) $\left(\frac{13}{5}, \frac{16}{5}\right)$, 4) $\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$. **16**. $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.

17. 1) $\frac{\pi}{4}$, 2) $\frac{\pi}{2}$, 3) 0, 4) $\frac{\pi}{3}$, 5) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. **24**. 1) $y = x$, 2) $y = -x$, 3) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 4) $y = 0$. **25**. 5. 26. (-1,8), (1,9), (3,10). **27**. a) $\frac{\pi}{4}$, b) 0, c) $\frac{\pi}{2}$.

28. $y - 7 = 0,\ \ x - 5 = 0$. **29**. $3x - 4y + 10 = 0$, $4x + 2y + 5 = 0$.

30. $4y + 3x - 1 = 0$. **31**. a) parallel; b) perpendikulýar. **36**. 1) $x - y + 1 = 0$, 2) $y + 5 = 0$, 3) $4x + 3y = 0$. **37**. 1) $3x$–$4y$+12=0, $4x$+$3y$+16=0, $2x$–y–2=0; 2) $7x$–y+3=0; 3) x+$7y$+4=0; 4) x–y+4=0. **38**. $3x + 4y - 16 = 0, 5x + 3y - 1 = 0, 2x - y - 7 = 0$. **39**. *BC II DA*, $3x - 5y + 5 = 0,\ x - y = 0,\ y - 1 = 0$.

40. a) ýatýar, b) ýatmaýar. **41**. $4x$+$9y$–22=0, x+$5y$=0,$3x$+$4y$=0.

42. $x - y = 0, 5x + 3y - 26 = 0,\ 3x + 5y - 26 = 0$. **43**. 1) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$; 2) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-5} = 1$; 3) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$; 4) $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$. **47**. 4,8. **48.** *d*=8. 50.

$a)\ \frac{-2x}{\sqrt{29}} - \frac{5y}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}} = 0,\quad b)\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,\quad s) -\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0.$

51. $a)\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ b)\ \frac{\sqrt{68}}{68},\ s)\ \frac{3}{\sqrt{2}}$. **52.** 5,2. 53. *w,s,d,g* – normal formada, ω) –1 köpeldilenden soňra normal formada ýazylýar. **54.** $2\sqrt{10}$. **55.** *B* nokat. **58.** 1) (2,5), 2) parallel, 3) (–1,4). **60.** 8*x*+*y*–59=0, 2*x*–*y*–11=0, *y*–3=0, *H*(7,3).

61. $A(\frac{4}{3},\frac{2}{3}), B(6,0), C(2,-4)$. **62.** 3*x*+*y*–11=0, *x*–3*y*+3=0,

$\left(\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0\right)$. **63.** 14*x*+14*y*–45=0, 2*x*–2*y*+35=0.

64. $20+2\sqrt{10}$. **65**. $4x+3y+5=0$. **70**. *A*(–2,2). **71**. *A*(0,10), $B(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $C(0,0)$, $D(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $E(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $F(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. **72.** $A(4,\frac{\pi}{6})$, $B(3,-\frac{\pi}{2})$, $C(4\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$, $D(2,-\frac{\pi}{4})$, $E(2\sqrt{2},\frac{4\pi}{3})$, *F*(7,π). **73.** a) kardioida, b) üç ýaprakly bägül. **74.** 1) giperboliki spiral, 2) logarifmik spiral, 3) lemniskata. **75.** 1) $\rho=\frac{1}{\cos\varphi}$; 2) $\rho=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$.. **76.** 25*x*+29*y*–21=0.

77. 22*x*+33*y*–35=0, 5*x*–*y*+3=0, 17*x*+34*y*–38=0. **78.** $\sqrt{3}$ kw. birlik. **79**. *x*–2=0, *y*–7=0. **81.** $(\frac{11}{5},-\frac{38}{5})$. **82.** $x=-2, y=2$. **83.** $\varphi=60^\circ$. **84.** *M*(–5, –2).

85. $\frac{14\sqrt{2}}{3}$. **86.** 7*x*–3*y*+20=0 (*AB*), 3*x*+7*y*–8=0 (*BC*), 7*x*–3*y*–9=0 (*CD*), 3*x*+7*y*+21=0 (*AD*). **87.** $(-8,0)$, $(-2,-4)$. **88**. 3*x*–*y*+14=0, *x*–5*y*–14=0, *x*+2*y*=0.

89. 14*x*+14*y*–45=0, 2*x*–2*y*+35=0. **90.** $M_1(2,-\frac{7}{3})$, $M_2(3,\frac{1}{3})$. **91.** 2*x*–3*y*=0, 3*x*+2*y*=0. **92.** 2*x*–3*y*+16=0. **93.** 4*x*+5*y*–23=0. **94.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}, x=\frac{7}{3}, y=\frac{13}{3}$.

95. $B_1(1,10), B_2(-11,10)$. **96**. *h*=3,8.

100. $(x-5)^2+(y+7)^2=25$. **101.** $(x+2)^2+(y-1)^2=25$. **102.** 1) (4, 5), *R*=7, 2) (-3, 5), $R=\sqrt{21}$. 3) (0,6), *R*=7, 4) $(\frac{1}{2},-\frac{5}{2})$, $R=\frac{7}{2}$, 5) *R*=0, töwerek ýokdur. **103.** 1)$(x-2)^2+(y+5)^2=16$, 2) $(x+3)^2+(y-4)^2=$ $=25$, 3) $x^2+(y-4)^2=169$. **104.** $(x+1)^2+(y-3)^2=5$. **105.** 1) *Ox* ok (0, 0) we (8, 0), *Oy* ok (0, 0) we (0,-6); 2) *Ox* ok bilen (3, 0) nokatda galtaşýar, *Oy* oky (0, 9) we (0, 1) nokatda kesýär; 3) *Ox* oka (2, 0) nokatda galtaşýar, *Oy* ok bilen (0, -2) nokatda galtaşýar; 4) galtaşmaýar. **106.** 1) (3, -1), (2, -2) 2) (-4, 6) nokatda galtaşýar; 3) kesişmeýär. **107.** Geçýär. **108.** $(x+12)^2+(y+5)^2=169$. **110.** $(x+10)^2+$ $+(y+10)^2=100$, $(x+2)^2+(y+2)^2=4$. **112.** $(x-\frac{7}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{25}{2}$, $(x-\frac{13}{18})^2+(y-\frac{13}{18})^2=\frac{25}{162}$. **117.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **118.** a) (12, 3) we (9, 4), b) (4, 1,8) we (3, 2,4). 119. 1) (-5, 0), (5, 0), (0,-3), (0, 3), 2*a*=10, 2*b*=6; 2) (-4, 0), (4, 0), (0, -9), (0, 9), 2*a*=18, *2b*=8. 120. $a=2,$ $b=\sqrt{3}$, $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, $\varepsilon=0,5$.

121. *A, E* ellipse degişli, *B, G* ellipisň içinde, *C, D* ellipsiň daşynda.

122. $x=\pm 9$. **123.** $(\pm 5, \pm 2)$. **124.** 4*x*+3*y*+12=0. **125.** 2*a*=26, 2*b*=10, *e*=$\frac{12}{13}$, $F_1(12,0)$, $F_1(-12,0)$. **130.** 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$; 3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$.

131. $a=\pm 6$, $b=\pm 8$, $A_1(0,-6)$, $A_2(0,6)$, $F_1(0,-10)$, $F_2(0,10)$, $y=\pm\frac{4}{3}x$.

132. 1) $y=\pm\frac{3}{4}x$, 2) $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$. **133.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$. **134.** $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$.

135. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1;\quad F_1(-13,0),\,F_2(13,0);\quad -\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1;\quad F_1(0,-13),\,F_2(0,13).$

136. 3x-2y+19=0, 3x+2y+11=0. **137.** $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$. **138.** 1) $(4\sqrt{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3})$, $(4\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$; 2) kesişmeýärler; 3) $(10,-\frac{8}{3}),(-\frac{15}{2},\frac{3}{2})$. **139.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

140. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, $F_1(-5,0),\,F_2(5,0)$, $A_1(-4,0),\,A_2(4,0)$, $B_1(0,-3)$, $B_2(0,3),\varepsilon=\frac{5}{4},\ y=\pm\frac{3}{4}x.$ **141.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$ **142.** 1) $F_1(5,0),F_2(-5,0)$, 2) $e=\frac{5}{3}$, 3) $y=\pm\frac{4}{3}x,\ x=\pm\frac{9}{5}.$ **143.** 1) $\frac{(x-1)^2}{5^2}-\frac{(y+1)^2}{3^2}=1,\ x_1=1,\quad y_1=-2,$ a=5, b=3; 2) $\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{5}=1,\quad x_1=-1,a=\sqrt{6},b=\sqrt{5};$ 3) $\frac{(x+3)^2}{4}-y^2=1,\ x_1=-3,\quad y_1=0,$ a=2, b=1; 4) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{12}=$ $=1,x_1=y_1-2,a=2,b=2\sqrt{3};$ 5) $\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(x+1)^2}{8}=1,\quad x_1=-1,\quad y_1=2,$ hakyky ýarym ok Oy oka parallel we $\sqrt{2}$ deň, hyýaly ýarym ok $2\sqrt{2}$ deň; 6) $(x-2)^2-(y-3)^2=0,x+y-5=0,x-y+1=0$. **147.** 1) (2, -6) we $(\frac{1}{2},3)$; 2) $(\frac{2}{9},2)$; 3) kesişmeýär; 4) göni simmetriýa oka parallel.

148. $(\frac{5}{4},\sqrt{15}),(\frac{5}{4},-\sqrt{15})$. **149**. $F(6,0),\,x=-6.$ **150**. (0, 0) we (1, 1). **151.** $x^2=14y$. **152.** $F(6,0),x=6=0$. **153.** $y^2=4x$. **154.** M(0, 0), M_1(18, -24). **155.** $(\frac{5}{2},2\sqrt{15}),(\frac{5}{2},-2\sqrt{15})$. **157.** (25, 30), (25, -30). **158.** $(x-7)^2=12(y-2)$.

163. $4x+3y-35=0$ $\quad ((x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2)$. **164.** $2x-3y+9=0$. $20x-21y=0$. **166.** 1) $y-7x=0$ we $x-y=0$; 2) $4x-3y-25=0$ we $3x+4y-25=0$. **167.** $x-2y-8=0$. **168.** $y=3$, $12x+7y+51=0$. **169.** $2x-y\pm 12=0$. **170.** $12x-13y\pm 169=0$. **171.** $x+y=0$. **172.** 1) $3x+2y=6, 3x-2y=6$; 2) $3x+2y+6=0$ geçirip bolmaýar. **173.** 1) $x+y+3=0,\ x+y-3=0$; 2) galtaşýan göni çyzyk ýok; 3) $2x+y+\sqrt{54}=0$, $2x+y-\sqrt{54}=0$. **174.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$. **175.** $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. **176.** 1) (3, -6) nokatda x-y+3=0, (3, 6) nokatda x-y+3=0; 2) $y=3x+1$; 3) $x-2y+12=0$. **177.** $x+y+2=0$, $2x+5y+25=0$. **178.** (9, -6). **179**. $x+3y+15=0$, $x-3y+15=0$. **183.** $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$ töwerek. **184.** $\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1,\ O'(1,-1)$ ellips. **185.** Parabola $y'^2=2x'$, $p=1,\ O'(-1,-2), F(-\frac{1}{2},-2)$. 2) Parabola $y'=2x'^2,\ p=\frac{1}{2},\ O'(1,1),\ F(1,\frac{3}{4})$. **189.** Giperbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. **190.** Ellips $\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1,\ \alpha=\frac{\pi}{4}$. **191.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$. **192.** $\frac{x'^2}{30}+\frac{y'^2}{5}=1$. **193.** Töwerek **194.** Parabola.

III BÖLÜM

200. 61, -16. **201.** a = +1, a = -2. **202.** $2b^3$. **203.** 1,$-(b^2+ac)$. **204.** -44, -29, -202, $b(b^2-a^2)$. **205.** a) (a-b)(a+b); b) (a-b)(a^2+ab+b^2); d) $\sin(\alpha-\beta)$; $e)\cos(\alpha+\beta)$; $f)\sec^2\alpha$; $g)-2$; $h)0$; $i)4ab$; $k)-1$; 21. a) 4; b) 0. **213.** -190. **215.** 18, 180, $(a+b+c)\ (b-a)\ (c-a)(c-b)$. **216.** 0. **217.** a) 1; b) 2; c) $2a^2(a+x)$; $d)1$. **218.** a) –1487600; b) –29400000; c) 12; d) $-2(x^3+y^3)$. **222.** x=5, y=2. **223.** Sistema kökdeş däldir. **224.** X=2, y=-1.

225. x=-2, y=-1. **226.** tükeniksiz köp çözüwi bar. **227.** Sistema kökdeş däldir. **232.** $x=\frac{1}{2}, y=2, z=\frac{3}{2}$. **233.** x=1, y=1, z=1. **234.** x=2, y=3, z=1. **235.** $x=bc, y=ac, z=ab$. **236.** x = 3, y=z=1. **237.** x=1, y=2, z=-2. **238.** x=2, y=-2, z=3. **239.** x=3, y=4, z=5. **242.** x=0, y=0, z=0. **243.** X=-4t, y=-t, z=5t, t erkin san. **244.** x=y-2z, y we z erkin sanlar. **245.** a=0 bolanda x=t, y=0, z=0, a=-2 bolanda x=5t, y=-8t, z=2t, t -erkin san. **248.** x_1=1, x_2=5, x_3=2. **249.** x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4. **250.** x=-1, y=3, z=2. **251.** x_1=-1, x_2=3, x_3=-2, x_4=2. **252.** $x_1=0, x_2=2, x_3=-\frac{1}{3}, x_4=-\frac{3}{2}$. **253.** x_1=5, x_2=4, x_3=3, x_4=1, x_5=2. **255.** x = 3, y = -1. 56. x=-2, y=-1. **257.** x=1, y=, z=1. **258.** x=2, y=3, z=1. **259.** $x_1=0,\ x_2=2,\ \ x_3=\frac{1}{3}, x_4=-\frac{3}{2}$. **260.** $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{2}{3},\ \ x_3=2, x_4=-3.$

IV BÖLÜM

265. 13. **266.** $(0,0,\frac{14}{9})$. **267.** $M(\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{4}{5})$. **268.** M(0,0,7) we N(0,0,-17). **269.** $C(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{8}{3})$, $D(\frac{1}{3},\frac{13}{3},\frac{7}{3})$. **271.** $(6,3,\frac{20}{3})$. **272.** M(-1,7,0,0). **279.** $\overrightarrow{AB}=\{2,5,-4\}$. **280.** $5\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}=7i-14j+18k$. **281.** m^2+m+1. **283.** $\frac{\pi}{4}$. **284.** 5. **285.** <A=$\frac{\pi}{4}$, $<B=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}, <C=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **286.** $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$. **293.** -5. **294.** 143. **295.** 104. **297.** 336. **299.** $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}$. **300.** $2\sqrt{6}$. **302.** 1) perpendikulýar; 2) perpendikulýar däl. **306.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$kub. birlik. **307.** 14 kw.birlik **311.** $25\vec{i}+5\vec{j}+35\vec{k}$. **312.**

$S=\frac{1}{2}\sqrt{498}$ kw. birlik. **313.** 1) $11\vec{a}+\vec{b}$, 2) $-26\vec{i}+13\vec{j}+26\vec{k}$. **314.** 8-$A$=$a^2b^2$.

318. 8. **320.** $2\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}$ (m_0 $F = r \times \vec{F}$). **322.** A nokat $0x$ okda B nokat $0y$ okda C nokat $0z$ okda ýatýar, D nokat yOz tekizlikde E nokat xOy tekizlikde ýatýar. **323.** $A_1(a,b,-c)$, $A_2(-a,b,c)$, $A_3(-a,b,-c)$, $A_4(-a,-b,-c)$. **324.** $(0,0,\frac{8}{3})$. **326.** $C(5,\frac{5}{3,}-\frac{11}{6})$. **327.** $A(\frac{14}{3,-8,12})$,$B(-\frac{11}{3},7,-13)$, $D(\frac{4}{3},-2,2)$, $E(-\frac{1}{3},1,-3)$. **328.** $-\frac{1}{2}$. **329.** $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$, $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$, $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$, $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$. **330.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$.

322. $\sqrt{88},\sqrt{43}$. **333.** $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\,DC$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{22}$, $\left|\overrightarrow{DC}\right|=2\sqrt{22}$. **335.** 13.

336. $W=\vec{R}\cdot\vec{S}=7$. **337.** $\frac{3}{\sqrt{89}}$. **339.** $\frac{\pi}{4}$. **340.** $S=\frac{5\sqrt{17}}{2}$. **341.** $\vec{a}\times\vec{b}=\{-8,-10,-6\}$, $\vec{a}\times\vec{b}=10\sqrt{2}$. **342.** 1) 7; 2) $34i-7j+26k$; 3) -8); 4) 2(k-i).

344. 22. **345.** 20. 346. -5. **347.** 104.

348. $\varphi=\arccos\frac{4}{9}\approx 63^o36'349$; $\varphi=\arccos(-\frac{1}{3})$. **350.** $\vec{a}\times\vec{b}=-7i+3j+k$.

351. 49 kw.birlik. **352.** $\sqrt{24}$ kw.birlik. **353.** 4 kw.birlik. **354.** $[\vec{a}\,\vec{c}]$.

355. $-i+j+k$. **356.** $S_1=2S_2$. **357.** $S=\frac{1}{2}\sqrt{105}$ kw.birlik.

358. $-4i+2j-2k$; $-3i-3j-3k$. **359.** $15i+5j+25k$. **360.** $\vec{u}=-42\vec{a}$.

361. 3 kw.birlik. **365.** 1 kw.birlik.

V BÖLÜM

366. R=5; Sfera. **381.** A,B,D nokat arkaly geçýär, C nokatdan geçmeýär. **382.** $x+3y-2z-5=0$. **383.** 1) tekizlik Oy oka parallel; 2) tekizlik xOz tekizlige parallel; 3) tekizlik Oz oka parallel; 4) tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýär; 5) tekizlik abssisalar okuňdan geçýär. **384.** $3x + z = 0$. **385.** $x + 2z = 0$. **386.** a) $y + 4 = 0$, b) z-2=0, **387.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1$. **388.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **389.** $3x+2y-z=0$. Görkezme. Berlen tekizlik Q nokat arkaly geçip $\overrightarrow{PQ}$ wektora perpendikulýardyr. **390.** 1) 6, 4, 12; 2) 3, 15, -5; 3) 1, -1, 1; 4) -6,∞, $\frac{3}{2}$ tekizlik $0y$ oka parallel; 5) 0,0,0; 6) 7, ∞, ∞ tekizlik $y0z$ tekizlige parallel. **391.** a) x+5=0; b) $x+3y=0$; c) $9y–z–2=0$. **392.** $x+4y+5z+15=0$. **393.** $\frac{2}{9}$ kub. birlik. Görkezme. $V=\frac{1}{6}|a||b||c|$. **403.** $\varphi=\arccos\frac{4}{21}$. **404.** $x-y+2z-16=0$. **405.** 1) (3, -1, 0); 2) 1 we 3 tekizlikleriň biri-birine paralleldiklerine görä, tekizlikleriň kesişme nokady ýokdur; 3) Tekiz-likleriň şol bir göni arkaly geçýändigi sebäpli, olaryň kesişme nokady näbellidir. **406.** 1) tekizlikler şol bir nokat arkaly geçýär; 2) Tekizlikleriň umumy nokady ýok. **407.** 1) $9x + 3y + 5z = 0$, 2) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$. **408.** 1) Tekizlikler aralleldirler; 2) $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 3)$\varphi=\frac{\pi}{2}$. **409.** $y\pm z=0$. **410.** (-10, 0, 2). **418.** a) normal görnüşde; b) normal görnüşde däl. **419.** d=1. **420.** 1)$\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z=0$;

2) $-\frac{2}{3}x-\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-4=0$; 3)$-\frac{6}{11}x+\frac{6}{11y}++\frac{7}{11}z-3=0$.

421. $d = 10$; 422. 1) $d = \frac{3}{3}$, $d = 0$ nokat tekizlikde ýatýar; 3) d=4; 423. d=1. 424. $M_1(0, 0,)$, M (0, 0, 3). 425. x-2y+2z-1=0, x-2y+2z-3=0. 426. (0, -2, 0). 427. x+z=0, $x - y - z - 1 = 0$. Görkezme. Gözleýän tekizligimiz berlen tekizlikden deň daşlykda bolan nokatlaryň geometrik köplügidir. 433. $2x + 3y + 5z - 4 = 0$. 434. $3x - 4y + z - 23 = 0$. 435. $(x-1) - 2(y-2) + +3(z+3) = 0$. 436. $4x + y - 2z - 3 = 0$. 437. $a)$ $A(x-1) + B(y-1) - -2(A + 2B)(z-1) = 0$, bu ýerde A, B bir wagtda nula deň balmadyk erkin sanlar; b) $2(x-1) + 4(y-1) + (z-1) = 0$. 438. $x - 4y + 5z + 15 = 0$. 439. $x + y - z + 2 = 0$. 440. $x + 2y - z - 8 = 0$. 441. $9x - y + 7z - 40 = 0$. 442. $3x - 4y - 3z + 4 = 0$. 443. $3x + 3y + z - 8 = 0$. 444. h=3. Görkezme. Beýikligi S, bolan A,B,C nokatlar bilen kesgitlenýän tekizligiň aralygyndaky uzaklyk hökmünde garamak mümkin.

454. $\frac{x + \frac{1}{2}}{3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{4}$. 455. $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. 456. $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.

457. $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$. 458. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. 459. 1) $\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{9} = \frac{z}{3}$;

2) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-11}$. 460. $\frac{x+1}{1} == \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}$, $x = -1 + t,\ y = 1 - 3t,$ $z = -3 + 4t$. 461. $x = -1 + t, y = -2, z = 2$.

462. $\frac{x+7}{2} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{9}$. 463. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$. 464. $\cos\varphi = \frac{72}{77}$.

465. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 466. $\cos\varphi = \frac{57}{\sqrt{3786}}$. 467. $\cos\alpha = \frac{6}{11}, \cos\beta = \frac{7}{11}, \cos\gamma = \frac{6}{11}$.

468. $\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$. 469. $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{11}$. 470. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$.

471. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{7}$. 472. 1) $\begin{cases} x-2=0 \\ y+5=0 \end{cases}$, 2) $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+3}{17}=\frac{z-3}{13}$.

473. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$. 474. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$. 475. $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$.

476. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{1}$. 479. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$. 482. $(1,-2,3)$.

483. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$. 484. $A(-1,7,5,0), B(2,0,2), C(0,5,1)$.

485. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{6}$, $x=2+t, y=-1+4t, z=-1+6t$.

486. $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{6}$. 487. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{8}$.

489. a) $x=-t, y=0, z=t$. $b) x=t, y=t+1, z=-3t-1$. 490. 1) göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçýär; 2) Oz oka parallel; 3) Ox oka parallel; 4) Oy ok bilen gabat gelýär. 498. $M(-\frac{7}{6},\frac{8}{3},-\frac{1}{4})$.

499. $M(-1,-0,4,0,4)$. 500. $(2,3,1)$ 502. $(1,7,-1)$. 503. $M(6,5,4)$.

504. $\varphi=\arcsin\frac{1}{11\sqrt{3}}$. 505. $\varphi=\arcsin\frac{18}{91}$. 506. $\varphi=21^{\circ}1'$.

507. $\sin\varphi=0,248, \varphi=14^{\circ}4'$. 508. $5x-3y-9=0$. 509. $9x+8y-6z=0$.

510. A=-1. 512. $(5,-1,0)$. 513. $(-\frac{5}{13},-\frac{7}{13},\frac{27}{13})$. 514. $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

515. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$. 516. a) ýatýar; b) ýatmaýar; c) ýatmaýar.

517. $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+3}{5}$, $x=-2+2t, y=2-4t, z=-3+5t$.

518. $16x-27y+14z-159=0.$ 519. $23x-16y+10z-153=0.$

520. $x+y-z+15=0.$ **521.** $d=3.$ 522. $d=\sqrt{22}.$ 523. $\frac{\pi}{4}.$

524. $2x+y=0.$ 525. $(1,4,7).$ 526. $\arcsin\frac{6}{91}.$ 527. $(0.0,-2).$

528. $A'(8,-2,0);$ Görkezme. A nokadyň tekizlige bolan B proeksiýasyny tapmaly. B nokat AA' kesimiň ortasydyr. 529. d=13. 530.
$\frac{x-2}{74}=\frac{y}{57}=\frac{z}{-110}.$ 531. $A'(1,2,12).$ 532. $\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-1}.$

533. $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}.$ 534. $\frac{x-0,8}{7}=\frac{y-4,6}{4}=\frac{z+4}{3}.$

535. $-7x+8y+2z+23=0.$ **536.** $17x-132y-16z-10=0.$ 539. $(x-1)^2+$ $+(y+2)^2+(z-4)^2=9.$ 540. $x^2+(y-4)^2+z^2=9.$ 542. $(x-1)^2+(y+1)^2+$ $+(z+1)^2=27.$ 543. $x^2+y^2+z^2-4x+y-27=0.$ 545. $C(1,-2,2), R=4.$
546. 1)$(3,-4,-1), R=4;$ 2)$(-1,2,0), R=3.$ 548. $(x+2)^2+(y-4)^2+$ $+(z-5)^2=81.$ 552. R=3, Tegelek silindr. 553. Parabolik silindr. 554. $(z+2)^2=2(x-1)$ parabolik silindr. 555. Tegelek silindr x=0, y=0. 559. $x^2+y^2+z^2=4.$ 560. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1.$ 561. $x^2+y^2-z^2=1,$

$x^2-y^2+z^2=1.$ 563. $\begin{cases} z=\frac{1}{y^2} \\ x=0 \end{cases}$ çyzygy Oz okuň daşynda aýlanmagyndan alnan üst. 566. $(x-2)^2+(z-2)^2=4,$ togalak silindr. 567. Iki tekizlik $x=y$ we $x=z$. 569. 1) göni çyzyk üstde ýatýar; 2) göni çyzyk üste (-3, 0, 0) nokatda galtaşýar. 571. x=0 we y=0 bolanda giperbola, $z=h$, $|h|\geq 2$

bolanda ellips. **572.** $x=0, y=0$ bolanda parabola, $z=h$ (h>0) bolanda ellips.

VI BÖLÜM

593. ç) b<0, d) b>0. **594.** 3, -1, -3, -3. **595.** $\pi, \frac{\pi}{2}, 0$. **598.** 4. **599.** -2<$x \leq 0$.

600. -1<x<1, 2<x<∞. **601.** $\frac{71}{30}$. **602.** $[1,2], б)\ x \leq -3,\ x \geq \frac{2}{3}$;

ç) $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$; d) $[2n\pi,(2n+1)\pi],\ n=0,\pm1,\pm2,...$

e) $(-\infty,+\infty.)$ **603.** $x=\frac{2y-5}{2}, (-\infty,+\infty)$. **604.** $x=\frac{1}{2}(a^y-a^{-y})$.

605. $x=(-1)^n \arcsin y+n\pi,\ n=\pm1,\pm2,...$

606. a) $x=\frac{\log_2 y}{\log_2 9-1}=\frac{\lg y}{\lg\frac{y}{2}}$ $(0<y<2, 2<y<\infty)$. **607.** a) jübüt funksiýa b) täk funksiýa **608.** $a) -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; $b)\ k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $k=0,\pm1,\pm2,...$ 616. a) jübüt; b) täk; g) täk hem däl, jübüt hem däl; d) jübüt; s) jübüt; ä) täk. **617.** a) periodik funksiýa $T=\frac{2}{3}\pi$, b) periodik funksiýa $T=\frac{2\pi}{\lambda}$, ç) periodik funksiýa $T=\pi$; d) periodik funksiýa; s) periodik däl funksiýa. **618.** Funksiýa $0<x\leq\frac{\pi}{4}$ aralykda ∞ – den 2-ä çenli kemelýär, $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ aralykda bolsa 2-den 8-e çenli

artýar. **619.** $-\frac{5\pi}{6}+\kappa\pi<x<\frac{\pi}{6}+\kappa\pi, \quad \kappa=0,\pm1,\pm2,...$ aralykda artýar we beýleki aralyklarda bolsa kemelýär. **622.** $f(1)=2$. Bellik. Funkyiýanyň iň uly bahasy $2x^2-4x+3$ kwadrat üçagzanyň iň kiçi bahany alýan nokadynda bolýandyr. **623.** a>0, bolsa funksiýa $(-\infty,-\frac{б}{2a})$ aralykda kemelýär, $(-\frac{в}{2a},+\infty)$ aralykda bolsa artýar $f_{\min}=f(-\frac{b}{2a})=$ $=\frac{4ac-b^2}{4a}, a<0,$ bolsa funkusiýa $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ aralykda artýar $(\frac{b}{2a},+\infty)$ aralykda bolsa kemelýär $f_{max}=f(-\frac{b}{2a})=\frac{4ac-b^2}{4a}$. **624.** Kwadrat $a=\frac{p}{2}, b=\frac{p}{2}$. 626. $a)\ T=\pi, b)T=6\pi$. **655.** $a)7,9,11,13,15,...\ b)\frac{5}{2},\frac{17}{4},\frac{65}{8},$ $\frac{257}{16},\frac{1025}{32};$ $c)\ 8,23,46,77,116$. **656.** 1) $6n$-5, 2) 2^n, 3) $2n^2$-1

660. $a)x_n=\frac{n}{n+1}, b)x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ **661.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2},...;$ $b)-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},...;\ v)2,\ 2,25,\ 2\frac{10}{27},\ 2\frac{113}{256},...$ **665.** 57-i belgili agzadan başlap deňsizlik ýerine ýetýär. **666.** n=10, n=100, n=1000. **668.** n=54. **681.** $\frac{1}{3}$. **682.** 1. **683.** 1. **684.** 1. **685.** 0. **686.** 1. **687.** $a)$1; $б)$1. **688.** $\frac{1}{5}$. **689.** a) 1, b) 0, ç) $-\frac{1}{3}$, d) 1. **690.** a) $\frac{1}{2}$, $b)$1, ç) 0, d) $-\frac{1}{2}$, s) 0 **719.** e^3. **720.** 0. **721.** $\frac{3}{5}$. **722.** 1. **723.** $\frac{\pi}{6}$. **724.** $-\frac{1}{2}$. **725.** 2. **726.** $\frac{3}{4}$. **727.** $-\frac{1}{2}$. **728.** 4. **729.** $\frac{5}{2}$. **730.** $\frac{1}{2}$. **731.** $\frac{3}{2}$. **732.** $-\frac{1}{3}$. **733.** $\frac{5}{2}$. **734.** $\frac{1}{2}$. **735.** $-\sin a$. **736.** e^2. **737.** e^{-4}. **738.** e^7. **740.** e^4.

741. e^3. **742**. e^{-1}. **743**. $\frac{1}{9}$. **744**. $-\sqrt{5}$. **745**. $-\frac{1}{2}$. **754**. $-\frac{1}{2}$. **755**. $\frac{1}{2}$. **756**. $\frac{1}{4}$.

757. $\cos^3\alpha$. **758**. $\frac{2}{3}$. **759**. -2. **774**. a) $x \neq \frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \kappa -$ bitin san, b) $x \neq \kappa\pi$, $\kappa -$ *bitin san.* **775**. x=2 nokat ikinji jynsly üzülme nokat. **776**. x=-2 nokat ikinji jynsly üzülme nokat, x=2 nokat düzlenýän üzülme nokat. **777**. x=0 nokat düzlenýän üznük nokat,
$x=\kappa\pi, \kappa = \pm1, \pm2, \ldots$ tükeniksiz üzülme nokatlar. 779. a) x=5 nokat üznük nokat; b) x=1 nokat üzülme nokat. 780. x=0 düzlenýün üzülme nokat. Ol üznük nokady düzlemek üçin $f(0)$=1 goýup goşmaça funksiýa girizmek bolar. 781. a) x=1 nokat ikinji jynsly üzülme nokat; b) x=-2 nokat birinji jynsly üzülme nokatdyr, funksiýanyň towusmasy bolsa 2 deňdir. 782. Funksiýa $x \neq 1$ nokatlaryň ählisinde üznüksizdir, x=1 nokat bolsa ikinji jynsly üzülme nokatdyr. 783. $x \neq \pm2$ nokatlaryň ählisinde funksiýa üznüksizdir, $x=\pm2$ nokat ikinji jynsly üzülme nokatdyr.

784. a) x=0 nokat düzlenýän üzülme nokat, $y = \begin{cases} \frac{\mathrm{tg}x}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$ funksiýa x=0 nokatda üznüksizdir. b) x=0 nokat birinji jynsly üzülme nokat. $\lim\limits_{x\to0+} y = 1,\ \lim\limits_{x\to0-} y = -1,$ ç) x=0, x=1 we x=-1 nokatlar ikinji jynsly üzülme nokatlar, $\lim\limits_{x\to0+} y = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0-} y = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1+} y = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1-} y = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-1+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-} y = +\infty;$ d) x=6 nokat ikinji jynsly üzülme nokat $\lim\limits_{x\to6+} y = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 6-} y=-\infty$, x=-6 nokat düzlenýän üzülme nokat. Funksiýa y=

$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}, x\neq -6 \\ -\dfrac{1}{72}, \quad x=-6 \end{cases}$, x= - 6 nokatda üznüksizdir.

VII BÖLÜM

792. $\frac{1}{x^2}+2x-2x^3$. **793**. $nx^{n-1}+3nx^2$. **794**. $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **795**. $\frac{bc-a\partial}{(c+\partial x)^2}$.

797. $\text{ctg}x-\frac{x}{\sin^2 x}$. **797**. $\ln x$. **798**. $2e^x\sin x$. **799**. $\frac{3^x}{\sqrt{1-x^2}}+3^x\ln 3\arcsin x$.

800. $-\frac{1+2x\,\text{arctg}x}{(1+x^2)^2}$. **801**. $\frac{2x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$. **802**. $-\frac{3\sqrt{x}+8\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{\frac{1}{x}}}{6(x-2\sqrt[3]{x})}$.

803. $\frac{1}{1-\sin x}$. **812**. $4(1+3x+5x^2)^3(3+10x)$. **813**. $3\cos 3x-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}+$
$+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}$. **814**. $-\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$. **815**. $\frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}+\frac{1}{\text{arctg}x}\frac{1}{1+x^2}$.

816. $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$. **817**. $-\frac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\text{ctg}x}}$. **818**. $-\frac{1}{1+x^2}$.

819. $2x10^{2x}(1+x\ln 10)$. **820**. $-10xe^{-x^2}$. **821**. $4\cos^3 x\sin x$. **822**. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$.

823. $-2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$. **824**. $-x^3e^{-x}$. **825**. $\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\cos x\sin x$.

826. $\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{1+x^2}}$. **827**. $\text{tg}^3 x$. 834. $\frac{x+1}{x^3-1}$. **835**. $4^{\text{arctg}\sqrt{x^2-1}}\ln 4\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

836. $-\frac{1}{x^2}\text{tg}\frac{x-1}{x}$. **837**. $-\frac{e^{\arcsin\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x^2-1}}$. **838**. $-\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. **839**. $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$.

840. $\dfrac{\sin^2 x\left[3(1+2^{x^2})\cos x-2x2^{x^2}\sin x\ln 2\right]}{(1+2^{x^2})^2}$. 841. $\dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$.

842. $\dfrac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$. **843**. $\dfrac{1}{1+x^2}$.**846**. $2\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}\dfrac{1}{\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}}\dfrac{3}{9+x^2}$.

847. $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$. **848**. $\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.**849.** $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$.

856.$(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x--\mathrm{tg}x\sin x)$.**857.** $\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x(1-\sin 3x)^4}}$.

858.$\dfrac{2x+3}{4(x^2+3x+1)}-\dfrac{2x}{3(x^2+4)}$. **859**.$e^{x^2}\mathrm{tg}^3 x\arcsin x(2x+\dfrac{3}{\sin x\cos x}+$

$+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x})$. **860**.$x^x(1+\ln x)$. **861.** $(\cos x)^{\mathrm{arctg}x}(\dfrac{\ln\cos x}{1+x^2}-\mathrm{tg}x\mathrm{arctg}x)$.

862.$(x^2+3)^{\sqrt{x}}(\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+3}+\dfrac{\ln(x^2+3)}{2\sqrt{x}})$. 889. 0. 895. x-2y-a=0 galtaşýanyň deňlemesi, x-2y-3a=0 normalyň deňlemesi. 897. y=x+3. 898. 5x-y-2=0 galtaşýanyň deňlemesi, x+5y–16=0 normalyň deňlemesi 899. 7x-y-2=0. 327. 2x-y+2-$\dfrac{\pi}{2}=0$ galtaşýanyň deňlemesi, x+2y-4-$\dfrac{\pi}{4}=0$ normalyň deňlemesi.

901. $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}\approx 26^\circ 34$. **902**.$(2,5)$. **908**. $v=104m/s$. **910**. $3s$ sonra.

911. 7200 d j 919. $0,6x+0,2$. 920. y’(6)=110. 921. 26450 dj. 922. 20000 dj. 924. $v=\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{2\pi a\varepsilon}{\rho}\sin M(1+2\varepsilon\cos M)$. **925.** $J=2K\cos(2t+1)K$.

932.$\dfrac{12x}{3y^2-1}dx$. 933. $a)$ $\dfrac{dx}{(1-x)^2}$; $b)$ $\dfrac{adx}{x^2+a^2}$; $c)$ $-\dfrac{2dx}{1-x^2}$. **934**.$\dfrac{5(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

935. $\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$. **936**. $-5\mathrm{ctg}^4(x^3+x^2)\dfrac{1}{\sin^2(x^3+x^2)}(3x^2+2x)dx$.

937. $\dfrac{dx}{2(1+x^2)\sqrt{1-\operatorname{arctg} x}}$. 938. $-\dfrac{2\sin x}{3\sqrt[3]{2+\cos x}}dx$. **939**. $(2x\operatorname{arctg}x-1)dx$.

944.2,02. **945**.0,485. **946**.0,57. **947**.$\sqrt[3]{10}\approx 2{,}16$, $\sqrt[3]{70}\approx 4{,}13$,

$\sqrt[3]{100}\approx 5{,}85$. **948**. *a*)5; *b*)1. **964**.1) $-\dfrac{2dx^2}{\cos^2 x}$; 2) $-\dfrac{16\cos 4x}{\sin^2 4x}dx^2$;

3) $9\ln^2 a a^{3x}dx^2$; 5) $-\dfrac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}dx^2$.

966. $\dfrac{1}{2}\left[7^n\sin(7x+n\dfrac{\pi}{2})+3^n\sin(3x+n\dfrac{\pi}{2})\right]$.

966. $\dfrac{1}{2}\left[7^n\sin(7x+n\dfrac{\pi}{2})+3^n\sin(3x+n\dfrac{\pi}{2})\right]$. **967.** $\dfrac{2x^2+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

968. $d^2y=4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)dx^2$. **969**. $a)2e^{-x}(\sin x+\cos x)$;

$b)(-1)^n\left[(4n^2+2n+1-x^2)\cos x-4nx\sin x\right]$. **975**. $a)2t^2+2$; $b)-\sqrt{1-t^2}$.

976. $a)\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$; $b)\ -\dfrac{1}{at\sin^3 t}$. **977**. $-\dfrac{2e^{-t}}{(\cos t-\sin t)^3}$.

981.$-2e^{-2dt}$. **983**.0. **984**.$\dfrac{t^2+t-1}{e^{2t}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$. **985**.$-\dfrac{1}{at\sin^3 t}$.

990.$-\dfrac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. **991**.$\dfrac{111}{256}$. **992**.$-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **993**.$\dfrac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **994**.$\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$.

995.$\dfrac{x\ln y-y}{x\ln x-x}\cdot\dfrac{y}{x}$. **996**.0. **997**.$\dfrac{12y^5(xy^2+1)}{(3xy^2+2)^3}$..

VIII BÖLÜM

1002. $\xi=e-1$. 1007. a) kanagatlandyrmaýar; b) kanagatlandyrýar; w) x=0 nokatda; önümiň ýoklugyna görä bu funksiýa Rollyň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrmaýar 1008. g(-3)=g(3) bolýanlygy üçin Koşiniň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrmaýar. 1009. Ulanyp bolmaýar.

1010.$\xi=1$. 1011.$\xi=\dfrac{\pi}{4}$. 1013.$x=\dfrac{\pi}{2}$. nokadyň üznük nokatlygy üçin, Rollyň teoremasynyň şertleri ýerine ýetmeýär. **1015.** $\xi=\frac{14}{9}$.

1026. $f(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5$. **1027.** $\cos 5^\circ=\cos\frac{\pi}{36}=$
$=1-0,00381=0,99619$. **1028.** $0,34201$. 1029. $P(x)=$
$=(x-1)^4-2(x-1)^3+5(x-1)+2$. **1030.** $P(x)=x^6-6x^5+21x^4-$
$-44x^3-66x^2-54x+9$. **1031.** $xe^x=x+\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{(n-1)!}+$
$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x+n+1)e^{\theta x}$, $(0<\theta<1)$. **1032.** $\frac{2\cdot x^2}{2!}-\frac{2^3\cdot x^2}{4!}+\frac{2^2\cdot x^6}{6!}-$
$-\frac{2^7\cdot x^8}{8!}+...+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin^2\theta x$, $(0<\theta<1)$.
1033. $\max\left|\delta(x)\right|=\max\left|R(x)\right|<\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}<0,01, (0<x\le\frac{1}{2})$.
1034. $\frac{3}{5!}=\frac{1}{40}-$ *kici*. **1035.** $-\frac{1}{2}$. **1036.** 1. **1043.** $\frac{2}{3}$. **1044.** 0.

1045. $\frac{1}{4}$. **1046.** -2. **1047.** $\frac{4}{9}$. **1048.** $-\frac{1}{2}$. **1049.** ∞. **1050.** ∞. **1051.** 3.

1052. 0. **1058.** $\frac{1}{5}$. **1059.** $\frac{1}{12}$. **1060.** $-\infty$. **1061.** -1. **1062.** $\frac{2}{3}$. **1063.** 1. **1064.** $\ln a$.

1065. 0. **1066.** $\frac{2}{\pi}$. **1067.** 1. **1076.** 1. **1077.** 1. **1078.** 1. **1079.** 1. **1080.** 1.

1081. $e^{\frac{1}{e}}$. **1082.** e. **1083.** $e^{-\frac{1}{30}}$. **1084.** $\frac{2}{\pi}$. **1085.** $e^{-\frac{m^2n}{2}}$.

IX BÖLÜM

1092. $(-\infty,-2)$ aralykda artýar, $(-2,\infty)$ aralykda bolsa, kemelýär. **1093.** $(-\infty,+\infty)$ aralykda funksiýa artýar. **1094.** $(-\infty,2)$ we $(2,\infty)$ aralyklarda funksiýa kemelýär. **1095.** $(-\infty,2),(-2,8)$ we $(8,\infty)$

aralyklarda funksiýa kemelýär. **1096**. $(0,\frac{1}{e})$ aralykda funksiýa kemelýär, $(\frac{1}{e},\infty)$ aralykda bolsa, funksiýa artýar. **1097**.$(-\infty,2)$ aralykda kemelýär, $(2,\infty)$ aralykda bolsa artýar. 1108. $y_{\min}=-0,369$. **1112**. $x_1=0$ minimum nokat, $x_2=\sqrt{3}$ we $x_3=-\sqrt{3}$ nokatlar maksimum nokatlar. **1113**. x_1=0 maksimum nokat, x_2=1 minimum nokat. **1114**. x_1=-1 maksimum nokat, x_2=3 minimum nokat. **1115**. maksimum nokat, h=2 minimum. *h*=0 nokat. 1116. $x=\frac{12}{5}$ maksimum nokat. **1117**. *x*=0 minimum nokat. **1118**. Birsyhly artýar. **1119**. x=1 maksimum nokat, *x*=e minimum nokat. **1120**. *x*=0 nokat minimum nokat, x=4 maksimum nokat. **1121**. x=1-$\sqrt{19}$ minimum nokat, x=1+$\sqrt{19}$ maksimum nokat. **1122**. $V=\frac{4}{27}\pi R^2H$. **1123**. 4m, 2m. **1124**. 50, 50. **1125**. Inedördül. **1130**. $(-\infty,\infty)$ aralykda ýokarlygyna güberçeklenen. **1131**. $(-\infty,-3)$ aralykda aşaklygna oýuk, $(-3,\infty)$- aralykda ýokarlygyna oýuk, epin nokady ýok. **1132**. $x=2$. **1133**. $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$. **1134**. $x=1,\ (-\infty,1)$. ýokaryk göberçeklenen, $(1,\infty)$ aşak güberçeklenen. **1135**. Epin nokady ýok. **1136**. x<0 ýokaryk güberçek, x>0 aşak güberçek, (0, 0) epin nokat. **1137**. $(-3a,-\frac{9a}{4}),\ (0,0),\ (3a,\frac{9a}{4})$. **1138**. (b,0) epin nokat. **1139**. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ epin nokatlar. **1140**. $x=n\pi$, (n=$\pm1,\pm2,...$) epin nokatlar. **1141**. (*b*,*a*) epin nokat. **1142**. *x*=2 epin nokat. **1147**. $x=-2,\ y=0$. **1148**. $x=0,\ y=0$. **1149**. $x=2a$. **1150**. $x=2a,\ y=\pm(x+a)$. **1151**. *x*=1, *x*=3, *y*=0. **1152**. *y=-x, y=x* **1153**. *x*=0, *y*=1 çep asimptot, *y*=0 sag asimptot.

1154. $y=\frac{1}{3c}$ dik asimptot, $y=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2c}$ ýapgyt asimptot **1155**. y=1, y=-1 kese asimptot. **1156**. x=1, y=2x. **1157**. y=0.

X BÖLÜM

1169.$\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x+x+C.$ **1170.**$\frac{x^2}{2}+2x+C.$ **1171.**$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

1172.$x+\text{arctg}x+C.$ **1172.**1.$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C.$ **1173.**$\frac{3}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C.$

1174.$x^2-\text{ctg}x+C.$ **1175.**$\frac{1}{2}\text{tg}x+\frac{1}{2}x+C.$ **1176.**$-2\cos x+3\sqrt[3]{x}+C.$

1177.$\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C.$ **1184.**$2\sqrt{1-x+x^2}+C.$ **1185.**$\ln(\text{tg}x)+C.$

1186.$\frac{1}{2}e^{x^2+4x+2}+C.$ **1187.**$\frac{1}{3}\sqrt[3]{3x^3-2}+C.$ **1888.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C.$

1190.$\arccos\frac{x}{\sqrt{2}}+C$ *eger* $x>\sqrt{2}$. **1191.**$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C.$

1192.$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$ **1192.**$-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$ **1194.**$2\arcsin\sqrt{x}+C.$

1196.$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$ **1198.**$x^ne^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)x^{n-2}e^x+$

$+n(n-1)(n-2)x^{n-2}e^x+...+(-1)^n n!e^x+C.$ **1193.**$\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$

1200.$x\ln x-x+C.$ **1201.** $x\text{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$ **1204.**$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+$

$+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$ **1206.**$\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C.$ **1207.** $-x\text{ctg}x+\ln\left|\sin x\right|+C.$

1208.$-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x}+\text{ctg}x)+C.$ **1209.**$\frac{x^3}{3}\text{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)+C.$

1210.$-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C.$ **1211.**$\frac{e^{-x}}{2}(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1)+C.$

1212.$\frac{4}{41}e^{5x}(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x)+C.$

1213. $(x^4-10x^2+21)\sin x+x(4x^2-20)\cos x+C.$ **1214**. $\frac{9x^2+18x-11}{27}\cos 3x+$
$+\frac{2x+2}{9}\sin 3x+C.$ **1215**. $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C.$ **1216**. $\frac{x^3}{3}\arccos x-$
$-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C.$ **1219**. $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C.$ **1220**. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C.$

1222. $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x)+5+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$ **1223**. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C.$

1224. $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C.$ **1225**. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

1226. $\frac{2}{3}\ln\left|3x^2+2x+5\right|+\frac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C.$

1227. $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+2x+3\right|++\frac{9}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

1228. $\frac{5}{16}\ln\left|8x^2+x+1\right|-\frac{117}{8\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{16x+1}{\sqrt{31}}+C.$ **1229**. $-\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}+C.$

1233. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-x+3}\right|+C.$ **1234.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+C.$

1235. $\sqrt{x^2+4x+5}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$

1236. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|10x+3+2\sqrt{5}\sqrt{5x^2+3x+2}\right|+C.$

1237. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3x+5}+\frac{19}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-3x+5}\right|+C.$

1238. $-4\sqrt{3-2x-x^2}+3\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$ 1240. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6+5x}{7x}+C.$

1241. $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+5+\sqrt{5}\sqrt{7x^2+2x+5}}{5x}\right|+C.$ **1242.** $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$

1243. $-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}}+C.$ **1246**. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C.$

1247. $\frac{1+x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}+C.$

1248. $\frac{8x-1}{16}\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)+C.$ **1251.** $\ln|x-17|+C.$

1252. $\frac{1}{5}\ln|1+5x|+C.$ **1253.** $\frac{1}{3(4-3x)}+C.$ **1254.** $-\frac{1}{10(5z+1)^2}+C.$

1255. $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$ **1256.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|+C.$

1260. $\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+13|+\frac{7}{\sqrt{3}}\mathit{arctg}\,\frac{2x-7}{\sqrt{3}}+C.$

1261. $\frac{2}{3}\ln|3x^2+2x+5|+\frac{20}{2\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C.$

1262. $\frac{5}{16}\ln|8x^2+x+1|--\frac{117}{8\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{16x+1}{\sqrt{31}}+C.$

1263. $\frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+3|+\frac{9}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

1268. $\ln\left|(x-3)^2(x+4)^5(x-1)^7\right|+C.$ **1265.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

1266. $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+5)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$

1269. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+3)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C.$

1270. $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$

1271. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln x+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$

1273. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$ **1274.** $-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+3\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C.$

1275. $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C.$ **1277.** $\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

1278. $\frac{1}{3}\text{arctgx} - \frac{1}{6}\text{arctg}\frac{x}{2} + C.$ **1279.** $\frac{2}{3\sqrt{7}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\text{arctg}(x+2) + C.$

1281. $\frac{x+2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + 2\text{arctg}x + C.$

1282. $-\frac{1}{x^2+1} + \text{arctg}x + C.$ **1283.** $\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\text{arctg}x}{2} + C.$

1286. $6\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C.$

1287. $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}.$

1288. $3\left[\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}}\right] -$

$-3\left[\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}} + \text{arctg}(2x-3)^{\frac{1}{6}}\right] + C.$ **1292.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$

1293. $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + C.$ **1294.** $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + C.$ **1295.** $2\sqrt{1+x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C.$

1296. $\frac{1}{3}(3x+4) - \frac{1}{2}(3x+4)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln\left|\sqrt[3]{3x+4}+1\right| + C.$

1297. $-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$ **1299.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right| + C.$

1300. $-2\text{arctg}\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C.$ **1301.** $-2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-1}\right| + C.$

1307. $\frac{1}{2}\text{arctg}2\text{tg}\frac{x}{2} + C.$ **1308.** $\ln(2x\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$

1309. $\frac{1}{1-\text{tg}\frac{x}{2}} + C.$ **1310.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\text{tg}\frac{x}{2}-2}{\text{tg}\frac{x}{2}+2}\right| + C.$ **1311.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$

1315. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$ **1316.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$

1317. $\cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C$. **1320**. $-\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{3\cos^3 x} + C$.

1321. $-\dfrac{1}{4}\sin x + \dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{2\sin x - 1}{2\sin x + 1}\right| + C$. **1325.** $-\dfrac{\cos 8x}{16} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

1326. $\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}\cos x + C$. **1327.** $-\dfrac{\sin 25x}{50} + \dfrac{\sin 5x}{10} + C$.

1328. $\dfrac{\cos\varphi}{2} - \dfrac{\sin(2\omega t + \varphi)}{4\omega} + C$. **1329**. $\dfrac{3}{5}\sin\dfrac{5x}{6} + +3\sin\dfrac{x}{6} + C$.

1330. $\dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 5x}{20} + \dfrac{\sin 7x}{28} + C$. **1332.** $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x + \dfrac{2\cos^7 x}{7} - \dfrac{\cos^9 x}{6} + C$.

1333. $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \dfrac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x} + C$.

1334. $3\sqrt[3]{\cos x}(\dfrac{1}{7}\cos^2 x - 1) + C$. **1335**. $-\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$.

1337. $\sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$. **1343**. $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin 2x}{64} - \dfrac{\sin 4x}{64} + \dfrac{\sin 6x}{192}$.

1344. $\dfrac{5}{16}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{48}\sin^3 2x + \dfrac{3}{64}\sin 4x$.

1350. 1) $y = -\dfrac{3x^2}{2} + C$; 2) $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$. **1351**. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{11}{3}$.

1352. $y = x^3 + 3$. **1353**. 1) $y = x^4 - x^2 + 3x + C$. 2) $y = x^2 + 6x + C$.

1354. $-\cos x + 3\sin x + 3$. **1359.** 1) $S = \dfrac{t^3}{3} - 4t^2 + 2 + C$. 2) $S = 2t^2 - t^3 + C$.

1360. $S = 2t^4 + 4t^2 - 6t + 12$.

XI BÖLÜM

1367. $\ln 8 - 2$. **1368**. $-\dfrac{2}{3}$. 1369. $\operatorname{arctge} - \dfrac{\pi}{4}$. **1370**. $35\dfrac{1}{15} - 32\ln 3$.

1371. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. **1372**. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$. **1373**. $\dfrac{2}{3}$. **1374**. $\dfrac{7}{4}$. **1375**. 0.

1376. $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **1377**. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$..

1382. $7+2\ln 2$. **1383**. $\frac{\pi}{16}$. 1384. $\ln 2$. **1385**. $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 1386. $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

1387. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$. **1388**. $\int\limits_0^{\infty}\frac{f(\operatorname{arctg}t)}{1+t^2}dt$. **1389**. $2-\frac{\pi}{2}$. **1390**. $\frac{\pi}{2}$. **1391**. $\frac{1}{5}\ln 112$.

1395. $1-\frac{2}{e}$. **1396**. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **1398**. 1. **1399**. $\frac{a}{a^2+b^2}$. **1400**. $6-2e$. **1401**. 2.

1402. $\pi\sqrt{2}-4$. **1406**. $-6{,}1389$. **1408**. $0{,}6941$. **1409**. $18{,}6$. **1410**. $0{,}200013$. **1411**. $2{,}590$.

1419. $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$. **1420**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1421**. $\frac{3}{2}$. **1422**. ∞. **1423**. $\frac{\pi}{2}$. 1424. Dargaýar.

1425. Dargaýar. 1426. Dargaýar. 1427. ýygnanýar. 1433. $\frac{1}{a}$. **1432**. $\frac{\pi}{2}$.

1437. π. **1438**. $\frac{1}{2}$. **1439**. ýygnanýar. 1440. Dargaýar. 1441. ýygnanýar.

1442. Dargaýar. 1443. ýygnanýar. **1452**. $ab\left[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})\right]$. **1453**. $\frac{(e-1)^2}{e}$.

1454. $\frac{4}{3}$. **1457**. $\frac{3\pi a^2}{8}$. **1458**. $6\pi a^2$. **1459**. $\frac{a^2 3}{}(4\pi^2+3\pi)$. **1460**. $\frac{1}{4}\pi a в$.

1464. $\frac{1}{4}a^2\pi$. **1465**. $\frac{3}{2}\pi a^2 (S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}16\sin^4\varphi d\varphi)$. **1467**. $2a^2(\frac{5\pi}{8}-1)$.

1476. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. **1477**. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$.

1478. $\frac{1}{4}(e^2+1)$. **1479**. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **1480**. $\frac{a(a+2)}{2}$.

1481. $2r\left[\dfrac{\sqrt{1+3\cos^2 t}}{\cos t}-\sqrt{3}\ln(\sqrt{2}\cos t+\sqrt{1+3\cos^2 t})\right]-2+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3}).$

1482. $8\pi a.$ **1483.** $16a.$ **1484.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}).$

1485. $2a.$ 1486. $\dfrac{16}{3}a.$ **1487.** $3+\dfrac{\ln 2}{2}.$ **1493.** $V=\dfrac{1}{3}QH.$ **1494.** $\dfrac{16}{15}\pi.$

1495. $\dfrac{3}{8}\pi^2.$ **1496.** $\dfrac{891}{1280}\pi.$ **1497.** $\dfrac{8\pi a^2 b}{3}.$ **1500.** $\dfrac{12}{5}\pi a^2\ (0\le t\le\pi).$

1503. $2\pi(1+\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}).$

XII BÖLÜM

1509. $\dfrac{3}{4}$. 1510. $\dfrac{2}{3}$. 1512. $\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{7},\dfrac{5}{10},\dfrac{7}{13},\ldots,\dfrac{2n-1}{3n+1},\ldots;\ S_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{5}{10}+\dfrac{7}{13}+\dfrac{2n-1}{3n+1};$

1513. a) $u_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$; b) $u_n=(-1)^{n+1}$;, w); $u_n=\dfrac{n+2}{(n+1)^2}$. 1514. $\dfrac{1}{2}$. 1515. 0. 1516. 1.

1521. ýerine ýetmeýär, ýerine ýetýär. 1522. ýerine ýetýär. 1523. ýerine ýetmeýär. 1524. ýerine ýetmeýär. 1529. Ýygnanýar. 1530. Dargaýar. 1531. ýygnanýar. 1532. ýygnanýar 1533. Ýygnanýar. 1534. Ýygnanýar. 1540. Ýygnanýar. 1541. Ýygnanýar. 1542. Ýygnanýar. 1543. Ýygnanýar. 1544. Ýygnanýar. 1545. Ýygnanýar. 1546. Ýygnanýar. 1552. Ýygnanýar. 1553. Ýygnanýar. 1554. Ýygnanýar. 1555. Ýygnanýar. 1556. Dargaýar. 1557. Ýygnanýar. 1558. Dargaýar. 1559. Ýygnanýar. 1560. Dargaýar. 1561. Dargaýar. 1562. Ýygnanýar. 1563. Ýygnanýar. 1567. Dargaýar. 1568. Dargaýar. 1569. Dargaýar. 1570. Ýygnanýar. 1571. Dargaýar. 1572. ýygnanýar. 1578. Ýygnanýar. 1579. a) absolýut ýygnanýar; b) şertli ýygnanýar. 1580. ulanyp bolmaýar. 1581. şertli ýygnanýar. 1582. absolýut ýygnanýar. 1583. şertli ýygnanýar. 1584. şertli ýygnanýar. 1588. $-2<x<2.$

1589. $|x|<\dfrac{1}{3}.$ 1590. $-e<x<e.$ 1591. $-4<x<4.$ 1592. $(-2,-\sqrt{2}),(\sqrt{2},2)$.

1593. $(-\infty,-1),(1,\infty)$. **1594.** $(-\sqrt{3},-1),(1,\sqrt{3})$. **1595.** $|x|<1$. **1601.** $-\infty<x<\infty$.

1602. $0\le x<+\infty$. **1603.** $-\infty<x<\infty$. **1604.** $-\infty<x<\infty$. **1615** $-1<x\le 1$.

1616. $-0{,}1<x<0{,}1$. **1617.** $-3\le x\le 7$. **1618.** $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$. **1619.** $2<x<4$.

1620. $R=+\infty$. **1621.** $R=+\infty$. **1622.** $R=1$, $(-1,1), x=-1$ bolanda hatar ýygnanýar, $x=1$ bolanda hatar dargaýar. **1623.** $R=\frac{1}{3}, (-\frac{1}{3},\frac{1}{3}), x=-\frac{1}{3}$ bolanda hatar ýygnanýar, $x=\frac{1}{3}$ bolanda hatar dargaýar. **1624.** $R=1, (0,2)$, $x=0$, $x=2$ bolanda hatar ýygnanýar. **1628.** $-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$.

1630. $-10<x<10$ **1631.** $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+...$

1632. $2\left[1+\frac{x-4}{2^2 1!}-...+(-1)^{n+1}\frac{(x-4)^n}{2^{2n}n!}+...\right]$ **1633.** $1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$.

1639. $\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+...,\ (-a<x\le a)$.

1640. $\sqrt{a}\left[1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{(2a)^2 2!}+\frac{1\cdot 3x^3}{(2a)^3 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^4}{(2a)^4 4!}+...\right]$, $(-a<x\le a)$.

1641. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. $(-\infty<x<\infty)$. **1642.** $-\frac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{6^n}, (-\infty<x<4)$.

1643. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n 2^{n+1}\right]x^n$. **1644.** $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty<x<\infty)$.

1649. $2+10\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. **1650.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

1651. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...)-3(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...)$.

XIII BÖLÜM

1662. $f(\frac{1}{2},3)=\frac{5}{3},\ f(1,-1)=-2.$ **1663.** $f(\frac{1}{2},1)=\sqrt{2},\ f(2,-1)=\sqrt{5}.$

1664. $V=\frac{2}{3}(y^2-x^2)x.$ **1665.** $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$ **1667.** R=40 om.

1668. $V=\pi y^2x.$ **1669.** $-\frac{1}{13}\frac{x^5+x^3+x^2}{x^6+x^2+1}.$ **1675.** Araçäkleri kesgitleniş oblastadegişli bolan $x^2+y^2=a^2$ we $x^2+y^2=2a^2$ töwerekleriň aralygyndaky halka. **1676.** $x=1$ we $y=0$ göni çyzyklaryň nokatlaryndan başga ähli tekizlik. **1677.** $y=\pm 1$ göniçyzyklaryň aralygyndaky zolak $(-1\le y\le +1)$. **1678.** $x+y=0$ $(x+y>0)$ göni çyzyk öilen çäklenen ýarym tekizlik. **1679.** Ähli xoy tekizlik. **1680.** $x+y>0$, $y-x>0$ açyk oblast. **1681.** $x>0, y>0, z>0$ 1-oktant. **1682.** $x=\pm 1,\ y=\pm 1,\ z=\pm 1$ tekizlikler bilen çäklenen kub. **1691.** –4. **1692.** predeli ýokdyr. **1693.** e^x. **1694.** $-\frac{1}{6}.$ **1695.** (0,0). **1696.** $(\frac{1}{2},\ 1)$.

1697. $y=-x$ göni çyzygyň koordinatalary we (0,0) nokat $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}.$ **1705.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}.$

1706. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}.$ **1707.** $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$ **1708.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}.$

1709. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy).$

1710. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}.$

1712. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2\cos^2\frac{y}{x}}$; 1713. $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

1722. $\Delta f=4\Delta x+\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta x\cdot\Delta y+\Delta x^2+\Delta y,\quad df=4dx+dy.$

1723. $dz=(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy.$ 1724. $dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}.$

1725. $dz=2e^{x^2+y^2}(xdx+ydy).$ 1726. $du=\frac{ydx-xdy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}.$ 1727. $dz=2dx.$

1728. $d\omega=(2xy\sin xyz+x^2y^2z\cos xyz)dx+(x^2\sin xyz+x^2yz\cos xyz)dy$

$+x^2y\cos xyzdz$ .1729. $df(3,4,5)=\frac{1}{25}(5dz-3dx-4y)$.1735. $a)$ 1,00 , $b)$4,998

1736. $dl=0{,}062sm.$ 1737. $v=4730\pm100sm^3$ 1744. $\frac{dz}{dt}=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}.$

1745. $\frac{du}{dt}=\frac{t}{\sqrt{y}}\mathrm{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}(6-\frac{x}{2y^2}).$ 1746. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2\frac{\ln(x+y)}{x+y},\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+2\frac{\ln(x+y)}{x+y}.$

1747. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$ 1749. $\frac{\partial z}{\partial x}=(4x+2y)(3x^2+y^2)^{4x+2y-1}6x+$

$+(3x^2+y^2)^{4x+2y}4\ln(3x^2+y^2)$.1760. $(t=x,\frac{dx}{dt}=1)\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}=$

$=\frac{1}{\cos^2(3x+2y^2-z)}(3-\frac{4y}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}},y=\frac{1}{x},\ z=\sqrt{x}.$ 1755. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$

1756. $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$. 1757. $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

1758. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$. 1759. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}$.

1767. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}; dz=-\frac{\sin 2x dx+\sin 2y dy}{\sin 2z}$.

1768. $dz=\frac{ze^{\frac{z}{x}}(zdy+ydx)}{z^2+xye^{\frac{x}{z}}}$. 1773.b) $3x+4y-6z=0, \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$;

w) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0, \frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$.

1774. $2x-2y-z-1=0, \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

1775. $2x-y-z=0, \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$.

1777. $x+4y-4z=5, \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{-4}$. 1778. $x+4y+6z=\pm 21$.

1785. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$. 1786. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

1787. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=1$. 1788. $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=$

$=-x^2y\cos(xy)-2x\sin(xy)$. 1789. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin y}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\sin y\ln x$. 1790. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=105x^2y^4z^6$.

1791. $d^2z=-\dfrac{dx^2}{x}+2\dfrac{dxdy}{y}-x\dfrac{dy^2}{y^2}$. **1792.** $d^2z=e^x\cos y(dx^2-dy^2)-$ $-2e^x\sin ydxdy$. **1793.** $d^3z=6(dx^3+dy^3)$. **1798.** $d^2z=$ $=e^{xy}\left[(ydx+xdy)^2+2dxdy\right]$. **1799.** $d^2z=4\varphi''(t)(xdx+ydy)^2+$ $+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$. **1807.** $x=1,\ y=0$ bolanda $z_{\min}=0$. **1808.** Ekstremum ýokdur. **1808.1** $z_{\max}=8$. **1809.** $x=\dfrac{a}{2},\ \ y=\dfrac{a}{2}$ bolanda funksiýa maksimuma eýedir. **1810.** $x=y=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ bolanda funksiýa minimuma eýedir. **1811.** $P_0(0,0)$ nokatda $z_{\min}=0,P_{1,2}(0,\pm1)$ nokatda ekstremum ýokdur.

XIV BÖLÜM

1817. $\ln\dfrac{25}{24}$. **1818.** $a)\ 4\dfrac{2}{3},\ b)\ \dfrac{\pi}{12},\ c)\ \dfrac{\pi a^2}{2}$. **1819.** $\dfrac{1}{6}$. **1820.** $\dfrac{\pi}{6}$. **1821.** $\dfrac{1}{2}$. **1822.** $\dfrac{9}{4}$.

1829. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=\dfrac{\pi}{6}a^3$. **1830.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a}\rho^2 d\rho d\varphi=\dfrac{\pi}{8}a^4$.

1831. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho^2 d\rho d\varphi=\dfrac{\pi a^2}{2}$. **1832.** $-6\pi^2$. **1833.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a\cos\phi}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi=\dfrac{a^2}{12}$.

1836. $2\dfrac{\sqrt{3}\pi ab}{2}$. **1841.** $\dfrac{7a^2}{120}$. **1842.** $\dfrac{16}{3}\sqrt{15}$. **1843.** e^2-1. **1844.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$. **1845.** $\dfrac{a^2}{3}$.

1846. $\sqrt{2}-1$. **1847.** $\dfrac{a^2b^2}{c^2}$. **1848.** $\dfrac{32}{3}$. **1849.** $2a^2$. **1854.** $\dfrac{9\pi}{2}$. **1855.** $\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$. **1856.** $\dfrac{a^2}{18}$.

1857. $\dfrac{abc}{3}$. **1858.** 16. **1859.** $\dfrac{2\pi R^3}{3}$. **1860.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **1861.** $\pi\alpha a^3$. **1862.** $\dfrac{\pi h^4}{2}$.

1863. $\frac{4}{3}\pi abc$. 1868. $\frac{16}{3}\pi$. 1869. $4\sqrt{3}$. 1870. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a}$.

1871. $4(m-n)R^2$. 1872. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 1880. $x_c=\frac{2}{5}, y_c=0$. 1881. $x_c=0, y_c=\frac{6}{5}$.

1882. $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$. 1883. $x_c=\frac{a}{5}, y_c=\frac{a}{5}$. 1884. $x_c=a\pi, \quad y_c=\frac{3a}{6}$.

1885. $16\ln 2-9\frac{3}{7}$. 1891. $\frac{1}{48}$. 1892. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$. 1893. $\frac{1}{720}$.

1894. $\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$. 1895. $\frac{728}{3}$. 1896. 0. 19012. $\frac{\pi}{10}$. 1903. $\frac{16}{3}\pi$. 1904. $\frac{8}{9}a^2$.

1905. $\frac{\pi a}{2}$. 1906. $\frac{3}{2}\pi$. 1907. $\frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. 1911. $\frac{abc}{3}(a+b+c)$.

1912. $x_0=\frac{4}{3}, y_0=0, z_0=0$. 1913. $x_0=y_0=\frac{2}{5}, z_0=\frac{7}{30}$. 1914. $\frac{224\pi}{3}$.

1915. $I_x=I_d=\frac{\pi ha^4}{60}(2h^2+3a^2)$, $I_{0x}=I_z=\frac{\pi ha^4}{10}$. 1916. $\frac{14}{45}$.

XV BÖLÜM

1923. $\sqrt{5}\ln 2$. 1924. 24. 1925. $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. 1926. $4a^{\frac{4}{3}}$.

1927. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$. 1933. 3132. 1934. 0. 1935. $-2\pi ab$.

1936. $\ln 2$. 1937. 0. 1938. $-2\sin 2$. 1943. 0. 1944. $\frac{16}{3}$. 1945. 0. 1946. $-\frac{\pi a^3}{8}$.

1947. 4π. 1953. $m=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln(\sqrt{3}+2)$. 1954. $\frac{4}{3}$. 1955. $\frac{3a^2\pi}{8}$. 1956. $x_0=y_0=\frac{2a}{\pi}$.

1962. $\frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}$. 1963. $\frac{8}{3}\pi a^4$. 1964. $4\sqrt{61}$. 1965 $x_c=0$, $y_c=0$, $z_c=\frac{R+H}{2}$. 1968. $2\pi a^4$. 1969. 0.

XVI BÖLÜM

1972. 40 min.soň. 1973. $x(t)=x_0e^{22t}$. **1974**. $R(t)=R_0e^{-k(t-t_0)}$.

1975. $x(t)=t^2+(x_0-t_0)^2$. **1976**. $S(t)=\dfrac{kt^3}{3}+S_0$. **1977**. $S=5\dfrac{t^3}{3}+2t,\ S=51m$.

1978. $N=N_0e^{-0,00044t}$. **1979**. $y=1+\dfrac{1}{x}$. **1981**. $\mathrm{tg}^2x=\mathrm{ctg}^2y+C$. **1984**. $y=x\ln\dfrac{C}{x}$.

1985. $x=Ce^{\frac{x}{y}}$. **1986**. $y^2=x^2(\ln x-C)$. **1987**. $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$.

1988. $\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$. **1993**. $y=\dfrac{(x+1)^2}{2}+C(x+1)^2$.

1994. $y=Cx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}$. **1995**. $S=\sin t+C\cos t$. **1996**. $y=x^n(e^x+C)$.

1997. $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$. **1998**. $y=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{ab-e^a}{x}$.

1999. $y=\dfrac{x}{\cos x}$. **2000**. $y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{C}{x^2}$. **2001**. $x=e^{\sin y}\left[-2a(\sin y+1)e^{-\sin y}+C\right]$.

2004. $y=x^2-\left[\dfrac{3}{2}(C-x^2)\right]^{\frac{3}{2}}$. **2005**. $3xy^2+x^2y+3y+x^2=C$. **2006**. $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$.

2007. $\dfrac{x^3}{3}+yx-y^2=C$. **2008**. $2y^2-xy+x^3=C$. **2009**. $y^4=4xy+C$.

2010 $x^4+3x^2y^2+y^3=C$. **2011**. $\dfrac{xy}{x-y}=C$. **2012**. $x\ln y-x^2-y^2=C$.

2013. $\dfrac{\sin^2 x}{y}+\dfrac{x^2+y^2 2}{}=C$. **2014**. $x^3e^y-y=-1$. **2016**. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}$.

2017. $y(e^x+Ce^{2x})=1$. **2018**. $y=\dfrac{1}{x(C-\frac{1}{2}\ln^2 x)}$. **2019**. $y=-\dfrac{1}{\frac{1}{3}x^5+Cx^2}$.

2020. $x=\dfrac{y^4}{4}\ln^2(Cx)$. **2021**. $y^3(x^2+1+Ce^{x^2})=1$. **2022**. $(C\sqrt{1-x^2}-a)y=1$.

2023. $y(Cx^2+\ln x^2+1)=4$. 2024. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+\sec x}{\sin x+C}$.

2027. $y=6\ln|x+1|+\dfrac{7}{2}x^2-4x+1$. 2028. $y=x\ln x+C_1x+C_2$.

2029. $y=-\cos x+C_1x+C_2$. 2030. $y=\dfrac{x^4}{24}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

2031. $y=-x-\dfrac{\sin 2x}{2}+3\sin x+1$. 2032. $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$, $y=1-\cos 2x$.

2033. $y=-x\sin x-2\cos x+C_1x+C_2$. 2036. $y=\dfrac{1}{a}\ln\sin\dfrac{x}{a}+C_1x+C_2$.

2037. $y=\dfrac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. 2038. $y=\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^2}{2}+C_1x\ln x+C_2x+C_3$.

2039. $y=(1+C_1^2)\ln(x+C_1)-C_1x+C_2$. 2041. $\dfrac{1}{Ñ_1}\ln|yC_1-1|=x+C_2$.

2042. $y=\ln|e^{2x}+C_1|-x+C_2$. 2043. $x-C_1=a\ln\left|\sin\dfrac{y-C_2}{a}\right|$.

2045. $2y^2-4x^2=1$. 2046. $y=2e^x$. 2050. $y=x+1$.

2051. $\ln y=1-\dfrac{1}{C_1x+C_2}$. 2054. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{x}{2}}$. 2055.. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

2056. $y=C_1+C_2e^x$. 2057. $y=e^{-x}$. 2058. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$.

2061. $y=e^{ax}(C_1+C_2x)$. 2062. $y=(C_1+C_2x)e^x$.

2065. $y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. 2066. $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

2067. $y=c_1+c_2e^{2x}$. 2068. $y=C\sin\pi x$. 2082. $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{-7x}+2e^x$.

2083. $y=C_1\cos 3x++C_2\sin 3x+3e^{-x}$.

2084. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 2\cos x + \sin x$. 2085. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x -$

$-4\sin 2x$. 2086. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + 2$. 2087. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}} + C_2e^{-2x} + x$.

2088. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}$. 2089. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) +$

$+e^x(x+1)^2$. 2090. $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$.

2091. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x - e^{-x}$.

2092. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x\sin x + e^x(1 - x + \frac{x^2}{2})$.

2093. $y = \frac{1}{8}e^{2x}(4x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$. 2094. $y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin x + \sin 2x)$.

2095. $y = e^x + x^2$. 2097. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

2098. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

2101. $y = C_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$. 2102. $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

2103. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x\sqrt{2}} + C_4e^{-x\sqrt{2}}$. 104 $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-x} + \left(C_3 + C_4x\right)e^x$.

2105. $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. 2106. $y = C_1 + C_2x + C_3 \cos ax +$

$+C_4 \sin ax$. 2107. $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$. 2108. $y = 1 + \cos x$.

2109. $y = e^x + \cos x - 2$. 2110. $y = 2{,}3 + e^{-x}(-0{,}3\cos 3x + \frac{7}{30}\sin 3x)$.

2112. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\frac{1}{272}\cos 4x-\frac{1}{1088}\sin 4x$.

2114. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-e^x\sin x$.

2115. $y=C_1+C_2x+12x^2+3x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{20}x^5+(C_3+C_4x)e^x$.

2116. $y=\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{2}x^3+C_1x^2+C_2x+C_3+C_4\cos x+C_5\sin x.$

2117. $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+e^x(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}).$

2118. $y=e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+x-2.$ **2119.** $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}.$

2121. $y=\frac{x^3}{9}+A_1\ln x+A_2.$ **2122.** $y=(A_1+xA_2)e^x-xe^x+xe^x\ln x.$

2123. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln x.$ **2124.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+$ $+\cos x\ln|\cos x|$. **2125.** $y=(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{3x^2}{4}+C_1+C_2x)e^{-2x}.$

2126. $y=-\cos e^x+C_2e^x+C_1.$

2127. $y=-x+e^x(3-\ln 2-x)+(1+e^x)\ln(1+e^x)-2-\ln 2.$

2129 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $z=\frac{1}{5}e^{-x}\left[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x\right].$

2130. $x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t),$

$x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}(\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_2}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t),$

$x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}(-\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_2}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t).$

2132. $x=(10+6x)e^{-x}+5x-9;\ z=(-14-12x)e^{-x}-6x+14.$

2134. $y=-x+e^x(3-\ln 2-x)+(1+e^x)\ln(1+e^x)-2.$ **2135.** Umumy çözüwi $x=C_1e^t-C_2e^{-t}-1,\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-1;\quad x=-e^{-t}-1,\ y=e^{-t}-1.$

2136. $y = C_1\cos t + C_2\sin t$; $x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t$ $x = \cos t - \sin t$, $y = \cos t$. **2137.** $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$, $y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t$.

2138. $y = \left(C_1 + C_2 + C_2 x\right)e^{2x}$, $z = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{3x}$. **2139.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$, $z = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x}$. **2140.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, $z = -2(C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x})$.

2141. $y = C_1 + C_2 x + 2\sin x$, $y = -2C_1 - C_2(2x+1) - 3\sin x - 2\cos x$.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. **Gurbanguly Berdimuhamedow.** Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr – Aşgabat, 2007.

2. **Gurbanguly Berdimuhamedow.** Ösüşiň täze belentliklerine tarap. – Aşgabat, 2007.

3. **Gurbanguly Berdimuhamedow.** Eserler ýygyndysy. – Aşgabat, 2008. I jilt.

4. **N. Gurbanmämmedow, O. Aşyrow, A. Aşyrow, B. Geldiýew.** Ýokary matematika I bölüm. – Aşgabat, TDNG, 2010.

5. **O. Hudaýberenow.** Ýokary matematika – Aşgabat, TDNG, 2009.

6. **O. Aşyrow.** Matemaiki seljermäniň esaslary. I, II. – Aşgabat, TDNG, 2006.

7. **B. Kakabaýew, K. Körpäýew, A. Hojaýew, G. Hekimow.** Differensial deňlemeler. – Aşgabat, 1995.

8. **S. Aşyrow.** Birinji tertipli ady differensial deňlemeler.–Aşgabat, Ylym, 1994.

9. **У. В. Проскуряков.** Сборник задач по линейной алгебре. – Москва, Наука, 1974.

10. **Н. В. Богомолов.** Сборник задач по математике. – Москва, Высшая школа, 1990.

11. **П. Е. Данко, А.Г. Попов.** Сборник задач и упражнений по высшей математике.
I, II ч. – Москва, 1974.

12. **В. А. Подольский, А. М. Суходский.** Сборник задач по математике. – Москва, Высшая школа, 1978.

13. **Б. П. Демидович.** Задачи и упражнений по математическому анализу. – Москва, Наука, 1969.

14. **Г. Н. Берман.** Сборник задач по курсу математического анализа. –Москва, 1966.

15. **О. Н. Цубербиллер.** Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – Москва, Наука, 1968.

16. **А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестяк.** Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – Москва, Высшая школа, 1989.

17. **K. Körpäýew, G.Gylyçdurdyýew**. Meýdan nazaryýeti. Ylym 2010.

MAZMUNY

Kakajan Körpäýew, Alladurdy Ataýew,
Allaberdi Aşyrow, Orazmämmet Annaorazow

ÝOKARY MATEMATIKA BOÝUNÇA MESELELER WE GÖNÜKMELER

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Redaktor A. Çaryýew
Teh. redaktor T. Aslanowa
Operator O. Nawruzow

Ýygnamaga berildi 16.04.2012. Çap etmäge rugsat edildi 24.08.2012.
Möçberi 70x100 1/16. Ofset kagyzy. Edebi garnitura.
Ofset çap ediliş usuly. Çap listi 36,00. Hasap-neşir listi 28,82.
Neşir № 47. Sargyt № 88. Sany 200.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň “Ylym” neşirýaty.
744000. Aşgabat, Türkmenbaşy şaýoly, 18.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň “Ylym” çaphanasy.
744000. Aşgabat, Bitarap Türkmenistan şaýoly, 15.