Matematiki fizikanyň deňlemeleri

TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
HALKARA TÜRKMEN - TÜRK UNIWERSITETI

Matematiki fizikanyň deňlemeleri

Ýokary okuw mekdepleriniň matematika hünäriniň
talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Awtorlar: M.Meredow, N.Durdyýew, G.Gurbangulyýew

Ylmy redaktor: A.Narçaýew

Ylym
2010 - Aşgabat

Bu okuw kitaby Halkara türkmen-türk uniwersitetiniň matematika bölüminiň we Magtymguly adyndaky türkmen döwlet uniwersitetiniň matematiki analiz kafedrasynyň mugallymlary tarapyndan olaryň öz iş tejribeleriniň esasynda taýýarlanyldy.

Täze Galkynyş we Beýik Özgertmeler zamanasynda bilimi, ylmy ösdürmek hem-de ony kämilleşdirmek, ösen ýurtlaryň derejesine ýetirmek üçin türkmen dilinde ýazylan okuw kitaplary we okuw gollanmalary örän zerurdyr.

Bu okuw kitaby ýokary okuw mekdeplerinde okadylýan algebra, geometriýa, differensial deňlemeler, matematiki analiz, kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň nazaryýeti derslerini bilmekligi talap edýän özleşdirmesi kyn hasaplanylýan "Matematiki fizikanyň deňlemeleri" dersiniň okuw maksatnamasy boýunça ýazylandyr.

Okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň talyplaryna we "Matematiki fizikanyň deňlemeleriniň" öwrenilýän ýerlerinde okadýan mugallymlara hödürlenýär.

Mazmuny

Bap I. Ikinji tertipli deňlemeleriň toparlara bölünişi

Bap II. Matematiki fizikanyň esasy deňlemelerini getirip çykarmak

Bap III. Elliptik deňlemeler

Bap IV. Potensiallar nazaryýeti

Bap V. Giperbolik deňlemeler

Bap VI. Parabolik deňlemeler

BAP I. IKINJI TERTIPLI DEŇLEMELERIŇ TOPARLARA BÖLÜNIŞI

§1. Umumy düşünjeler

„Matematiki fizikanyň deňlemeleri“ dersiniň manysy fiziki hadysalar üçin differensial, integral we integro-differensial deňleme görnüşinde matematiki modeli gurmakdan, bu deňlemeler üçin meseleler goýmakdan we olary çözmekden ybaratdyr.

$U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ näbelli funksiýany, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ baglanyşyksyz üýtgeýän ululyklary we näbelli funksiýanyň hususy önümlerini baglanyşdyrýan deňlemä **hususy önümli differensial deňleme** diýilýär.

Ol aşakdaky görnüşlerde ýazylýar

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1}, \cdots, \partial x_n^{k_n}}, \cdots\right) = 0, \qquad (1.1)$$
$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

ýa-da

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_1 x_2 \ldots x_k}, ...) = 0$$

bu ýerde F – öz argumentlerine görä berlen funksiýadyr.

(1.1) deňlemäniň düzümine girýän hususy önümiň iň ulusynyň tertibine hususy önümli differensial deňlemäniň **tertibi** diýilýär.

x, y iki baglanyşyksyz üýtgeýän ululykly ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemäniň umumy görnüşi

$$\Phi\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$$

ýaly ýazylýar.

Deňlemäniň düzümine girýän önümleri bilen birlikde D ýaýlada üznüksiz we deňlemäni toždestwa öwürýän U(x,y) funksiýa ol deňlemäniň **regulýar** ýa-da **klassiki çözüwi** diýilýär.

Eger hususy önümli deňlemäniň düzümine girýän näbelli funksiýanyň iň uly tertipli önümleriniň ählisine görä çyzykly bolsa, onda ol deňlemä **kwaziçyzykly** deňleme diýilýär.

Mysal:

$$A(x,y,U,U_x,U_y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+B(x,y,U,U_x,U_y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+$$
$$+C(x,y,U,U_x,U_y)\frac{\partial U}{\partial y^2}+f(x,y,U,U_x,U_y)=0$$

deňleme iki üýtgeýänli ikinji tertipli **kwaziçyzykly** deňlemedir.

Eger hususy önümli deňleme näbelli funksiýa we onuň önümlerine görä çyzykly bolsa, onda ol deňlemä **çyzykly** deňleme diýilýär.

Mysal:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+$$
$$+a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+c(x,y)U=f(x,y)$$

deňleme $U(x,y)$ näbelli funksiýa görä iki üýtgeýänli **ikinji tertipli çyzykly** deňlemedir.

Eger $f(x,y)\neq 0$ bolsa,onda deňlemä **çyzykly birjynsly däl** we $f(x,y)=0$ bolsa **çyzykly birjynsly** deňleme diýilýär.

§2. Matematiki fizikanyň esasy deňlemeleri

Mehanikanyň we fizikanyň köp meseleleri ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemeleri derňemeklige syrykdyrylýar. Mysal üçin tolkunlaryň dürli görnüşleri öwrenilende **tolkunyň deňlemesi** diýip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \qquad \text{(A)}$$

bu ýerde a-berlen sredada tolkunyň ýaýramak tizligi, deňlemä gelinýär. Birjynsly izotrop jisimde ýylylygyň ýaýramagy, şeýle hem diffuziýa hadysasy, **ýylylyk ýaýramagynyň (geçirijiliginiň)** deňlemesi diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(B)}$$

deňleme görnüşinde ýazylýar. Birjynsly izotrop jisimde durnuklaşan ýylylyk ýagdaýyna garasak, onda biz **Puasson deňlemesi** diýip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-f(x,y,z) \qquad \text{(C)}$$

deňlemäni alarys. Eger jisimiň içinde ýylylyk çeşmesi ýok bolsa, onda (C) deňlemäniň ýerine **Laplas deňlemesi** diýip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \qquad \text{(L)}$$

deňlemäni alarys.

(A)-(L) deňlemelere matematiki fizikanyň **esasy deňlemeleri** diýilýär.

(A)-(L) deňlemeleriň her biriniň tükeniksiz köp çözüwi bar. Takyk fiziki meseleler çözülende şol çözüwleriň içinden meseläniň fiziki manysyndan gelip çykýan goşmaça şertleri kanagatlandyrýan çözüwi saýlap almak zerurdyr. Şeýlelik bilen, matematiki fizikanyň esasy meselesi hususy önümli differensial deňlemäniň goşmaça şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklykdyr. Şeýle goşmaça şertler **gyra şertler**, ýagny garalýan ýaýlanyň araçäginde berlen şertler we **başlangyç şertler** bolýarlar.

§3. Ikinji tertipli deňlemeleriň toparlara bölünişi

Aşakdaky ikinji tertipli deňlemä garalyň

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}+f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial U}{\partial x_n}\right)=0 \quad (3.1)$$

a_{ij} koeffisiýentler $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ giňişligiň D ýaýlasynda berlen funksiýalardyr, şunlukda $a_{ij}=a_{ji}$.

(3.1) deňlemäni nokatda toparlara böleliň. D ýaýladan kesgitli $\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$ nokady alalyň we

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\cdot \xi_i \xi_j \qquad (3.2)$$

kwadratik formany düzeliň.

Eger (3.2) kwadratik formanyň alamaty kesgitli bolsa, onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$ nokatda **elliptik** deňleme diýilýär.

Eger (3.2) kwadratik formany kwadratlaryň jemine getirlende bir koeffisiýentinden galan ähli koeffisiýentleriniň alamaty birmeňzeş, beýleki bir koeffisiýentiniň alamaty olara garşylykly bolsa, onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$ nokatda **giperbolik** deňleme diýilýär.

Eger (3.2) kwadratik formany kwadratlaryň jemine getirlende ol jem birden köp položitel koeffisiýentlere we birden köp otrisatel koeffisiýentlere eýe bolsa (şunlukda ähli koeffisiýentler nuldan tapawutly) , onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right)$ nokatda **ultragiperbolik** deňleme diýilýär.

Eger (3.2) kwadratik formany kwadratlaryň jemine getirlende bir koeffisiýent nula deň, beýleki koeffisiýentleriň alamatlary birmeňzeş bolsalar, onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right)$ nokatda **parabolik** deňleme diýilýär.

Eger (3.1) deňleme D ýaýlanyň her bir nokadynda elliptik, degişlilikde giperbolik we parabolik deňleme bolsa, onda ol deňlemä D ýaýlada elliptik, degişlilikde giperbolik we parabolik deňleme diýilýär.

Eger a_{ij} koeffisiýentler hemişelik bolsalar, onda deňlemäniň ol ýa-da beýleki görnüşe degişlidigi üýtgeýän ululygyň bahasyna bagly däldir.

Laplas deňlemesi elliptik deňlemelere, tolkunyň deňlemesi giperbolik deňlemelere we ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi bolsa parabolik deňlemelere degişli deňlemeleriň ýönekeýleridir.

§4. Köp üýtgeýänli ikinji tertipli hemişelik koeffisiýentli deňlemeleri kanonik görnüşe getirmek

Aşakdaky hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemä garalyň

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + cU = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \qquad (4.1)$$

$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ üýtgeýän ululyklaryň ornuna

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n \qquad (4.2)$$

çyzykly özgertmäniň kömegi bilen $\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\right)$ üýtgeýän ululyklary girizeliň. (4.2) özgertmede $\left\| c_{ki} \right\|$ kesgitleýji nuldan tapawutly diýeliň. Köne üýtgeýän ululyklar boýunça önümler täze üýtgeýän ululyklar boýunça önümleriň üsti bilen aşakdaky formulalar boýunça aňladylar

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{kl=1}^{n} c_{ki} \cdot c_{lj} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \qquad (4.3)$$

(4.3) önümleri (4.1) deňlemede goýup alarys

$$\sum_{kl=1}^{n} \bar{a}kl \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{l=1}^{n} \bar{b}l \frac{\partial U}{\partial \xi_l} + cU = f_1\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\right), \qquad (4.4)$$

bu ýerde

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{ki} \cdot c_{lj} \qquad (4.5)$$

Eger

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \qquad (4.6)$$

kwadratik formada

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \cdot \tau_k$$

çyzykly özgertme etsek, onda ol

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} \cdot \tau_k \cdot \tau_l$$

görnüşe gelýär we $\bar{a}_{kl}$ koeffisiýentler (4.5) formula bilen kesgitlenýär.

Algebradan belli bolşy ýaly c_{ki} koeffisiýentleri (4.6) forma kwadratlaryň jemine, ýagny

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \tau_k^2$$

görnüşe geler ýaly saýlap almak bolýar. λ_k koeffisiýentler degişlilikde ± 1 ýa-da nula deň. λ_k koeffisiýentleriň alamaty hem (4.1) deňlemäniň görnüşini kesgitleýär. Özgerdilen (4.4) deňleme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + c_1 U = f_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n). \qquad (4.7)$$

görnüşi alar. (4.7) deňlemä (4.1) deňlemäniň **kanonik görnüşi** diýilýär.

Elliptik deňlemeler üçin ähli λ_k=1 ýa-da λ_k=-1 . Soňky ýagdaýda deňlemäniň iki bölegini hem (-1)-e köpeldip ähli λ_k=1 diýip hasap etmek bolar. Şeýlelik bilen islendik çyzykly hemişelik koeffisiýentli elliptik deňlemäni, öňki belgilemämizi saklap,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + c_1 U = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

görnüşe getirmek bolýar.

Giperbolik deňleme ýagdaýynda üýtgeýän ululyklar (n+1) sany diýip hasap edeliň we $\xi_{n+1}=t$ diýeliň. Onda islendik çyzykly hemişelik koeffisiýentli giperbolik deňlemäni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+c_1U=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$$

görnüşe getirmek bolar.

Islendik çyzykly hemişelik koeffisiýentli parabolik deňleme

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+c_1U=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

görnüşe getirlip bilner.

§5. Iki üýtgeýänli ikinji tertipli deňlemäni kanonik görnüşe getirmek

Uly önümlere görä çyzykly iki üýtgeýänli ikinji tertipli

$$A\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+F\left(x,y,U,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0, \qquad (5.1)$$

bu ýerde A,B,C koeffisiýentler x,y üýtgeýänlere bagly üznüksiz funksiýalar, deňlemä garalyň. A,B,C koeffisiýentler bir wagtda nula deň däl diýip hasap etjekdiris.

(5.1) deňlemä

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2$$

kwadratik forma degişlidir.

(5.1) differensial deňlemä:

1) B^2-AC>0 (kwadratik formanyň alamaty üýtgeýän) bolanda giperbolik;
2) B^2-AC=0 (kwadratik formanyň alamaty hemişelik) bolanda parabolik;
3) B^2-AC<0 (kwadratik formanyň alamaty kesgitli) bolanda elliptik;

deňleme diýilýär.

$\Delta(x,y)$ = B^2-AC ululyga (5.1) deňlemäniň **diskriminanty** diýilýär.

(x,y) üýtgeýän ululyklaryň deregine täze (ξ,η) üýtgeýän ululyklary

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y) \qquad (5.2)$$

formulalaryň kömegi bilen girizeliň, bu ýerde $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ -iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar, şunlukda D ýaýlada ýakobian

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5.3)$$

$U = U(\xi,\eta)$ funksiýa (x,y)-den çylşyrymly funksiýa hökmünde garap alarys

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial U}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \qquad (5.4)$$

$$+\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial U}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Önümleriň aňlatmalaryny (5.1) deňlemede goýup, ony

$$A_1\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2B_1\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + C_1\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial \xi},\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (5.5)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde

$$A_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 ,$$

$$B_1(\xi,\eta) = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad (5.6)$$

$$C_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

Gös-göni barlamak bilen

$$\Delta_1(x,y) = B_1^2 - A_1C_1 = \left(B^2 - AC\right)\cdot\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right]^2 \qquad (5.7)$$

bolýandygyny görkezmek kyn däl. Bu ýerden görnüşi ýaly (5.2) özgertme deňlemäniň tipini üýtgetmeýär.

(5.2) özgertmede biziň garamagymyzda $\xi(x,y)$ we $\eta(x,y)$ iki funksiýa bar. Ol funksiýalary

1) $A_1=0$, $C_1=0$; 2) $A_1=0$, $B_1=0$; 3) $A_1=C_1$, $B_1=0$ şertleriň biri ýerine ýeter ýaly saýlap alyp bolýandygyny görkezeliň. Şonda özgertme bilen alnan (5.5) deňleme iň ýönekeý, ýagny **kanonik** görnüşi alar.

1) $\Delta(x,y)=B^2-AC>0$, ýagny D ýaýlada (1.1) deňleme giperbolik deňlemedir.

$A\neq 0$ diýip hasap edeliň. Birinji tertipli

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (5.8)$$

differensial deňlemä garalyň. Bu deňlemäni

$$\left[A\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]\cdot\left[A\frac{\partial z}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

görnüşde ýazalyň. Soňky deňleme bolsa

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (5.8a)$$

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (5.8b)$$

iki deňlemä dargaýar. Şeýlelikde (5.8a) we (5.8b) deňlemeleriň çözüwleri (5.8) deňlemäniň çözüwleridir.

(5.8a) we (5.8b) deňlemeleri integrirlemek üçin olara degişli ady differensial deňlemeleriň ulgamyny düzeliň:

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}}$$

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

ýa-da

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0 \qquad (5.9a)$$

$$Ady - \left(B - \sqrt{B^2 - AC} \right) dx = 0 \qquad (5.9b)$$

(5.9a) we (5.9b) deňlemeleri

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0 \qquad (5.9)$$

bir deňleme görnüşinde ýazmak bolýandygyny belläliň.

(5.9a) we (5.9b) deňlemeleri integrirläp alarys

$$\varphi(x, y) = C_1 \quad , \quad \psi(x, y) = C_2 . \qquad (5.10)$$

(5.10) integrallaryň çep bölekleri degişlilikde (5.8a) we (5.8b) deňlemeleriň , şeýle hem (5.8) deňlemäniň çözüwleridir.

(5.10) egrilere (5.1) deňlemäniň **häsiýetlendiriji egrileri** ýa-da ýöne **häsiýetlendirijileri**, (5.8) deňlemä (edil şonuň ýaly-da (5.9) deňlemä) **häsiýetlendirijileriň deňlemesi** diýilýär.

Giperbolik deňlemeler üçin B^2-AC>0, diýmek (5.10) integrallar hakyky we dürlidir. Şeýlelikde, giperbolik deňlemeleriň hakyky häsiýetlendirijileriniň iki sany dürli maşgalasy bardyr.

(5.2) özgertmede

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y)$$

diýeliň. Onda (5.6) deňlikden görnüşi ýaly (5.5) deňlemede A_1=C_1=0. Garalýan ýaýlada $B_1 \neq 0$, munuň şeýledigi (5.7) deňlikden görünýär

Soňky deňlikden görnüşi ýaly, berlen deňleme $x + y \neq 0$ bolanda giperbolik görnüşe eýedir. $x + y = 0$ göni çyzyk bolsa, onuň parabolik dänýän çyzygydyr.

Indi häsiýetlendiriji deňlemäni düzeliň:

$$y(dy)^2 - (x - y)dxdy - x(dx)^2 = 0$$

Bu deňlemäni özgerdip, alarys

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(x - y) \pm (x + y)}{2y}$$

$x + y \neq 0$ halda soňky ady differensial deňlemeleri integrirläp

$x + y = C_1, \quad x^2 - y^2 = C_2$ - göni çyzyklaryň we giperbolalaryň maşgalasyny alarys.

$\xi = x + y,\quad \eta = x^2 - y^2$ häsiýetlendirijileri (bellemeleri) girizip, . Şeýlelik bilen (5.5) deňleme

$$2B_1 \cdot \frac{\partial^2 U}{d\xi d\eta} + F_1\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0$$

görnüşi alar. Soňky deňlemäni $2B_1$-e bölüp

$$\frac{\partial^2 U}{d\xi d\eta} + F_2\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (5.11)$$

görnüşde ýazalyň. (5.11) deňlemä giperbolik deňlemäniň **birinji kanonik görnüşi** diýilýär.

Eger ξ, η üýtgeýän ululyklaryň deregine $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$ deňlikler bilen täze α, β üýtgeýän ululyklary girizsek, onda (5.11) deňlemäni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + \Phi\left(\alpha, \beta, U, \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial U}{\partial \beta}\right) = 0 \qquad (5.12)$$

görnüşde ýazmak bolýar. (5.12) deňlemä giperbolik deňlemäniň **ikinji kanonik görnüşi** diýilýär.

2) B^2-AC=0, ýagny garalýan ýaýlada (5.1) deňleme parabolik deňlemedir. Bu ýagdaýda A we C koeffisiýentleriň biri nuldan tapawutlydyr. Goý, $A \neq 0$ bolsun. Onda (5.8a) we (5.8b) deňlemeler gabat gelýärler:

$$A \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (5.13)$$

B^2-AC=0 şertiň esasynda (5.13) deňlemäniň her bir çözüwiniň

$$B \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (5.14)$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl. (5.13) deňlemä degişli

$$A \cdot dy - B \cdot dx = 0$$

ady differensial deňlemäni integrirläp, alarys

$$\varphi(x, y) = C,$$

ýagny parabolik deňlemeler hakyky häsiýetlendirijileriň bir maşgalasyna eýedir.

(5.2) özgertmede $\xi = \varphi(x, y)$ diýeliň, $\eta(x, y)$ funksiýa hökmünde bolsa (5.3) şerti kanagatlandyrýan islendik iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýany alalyň. Onda (5.5) deňlemede $A_1=0$ bolar. Indi B_1 koeffisiýenti aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$B_1 = \left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial\eta}{\partial y}$$

(5.13) we (5.14) deňliklerden $B_1 \equiv 0$ gelip çykýar. (5.5) deňlemedäki C_1 koeffisiýenti özgerdip

$$C_1 = \frac{1}{A} \cdot \left(A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} \right)^2$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerden $C_1 \neq 0$, sebäbi tersine bolaýsa (5.13) deňlik esasynda $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = 0$ bolar. Şeýlelik bilen (5.5) deňleme

$$C_1 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + F_1(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}) = 0$$

görnüşi alar. Soňky deňlemäni C_1-e bölüp

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + F_2(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}) = 0 \qquad (5.15)$$

görnüşde ýazalyň. (5.15) deňlemä **parabolik deňlemäniň kanonik görnüşi** diýilýär.

3) B^2-AC<0, ýagny D ýaýlada (5.1) deňleme elliptik deňlemedir. A, B, C koeffisiýentler x,y üýtgeýän ululyklardan analitik funksiýalar diýip hasap edeliň. Onda (5.8a) we (5.8b) deňlemeleriň koeffisiýentleri hem x,y üýtgeýän ululyklardan analitik funksiýalardyr we olaryň özara çatyrymly analitik

$$z(x,y) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y) = C_1$$
$$\bar{z}(x,y) = \varphi(x,y) - i \cdot \psi(x,y) = C_2$$

çözüwleri bardyr. (5.2) özgertmede

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$$

diýeliň. $z = \xi + i \cdot \eta$ ululygy

$$A\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0$$

toždestwoda goýup we onuň hakyky we hyýaly böleklerini saýlap, alarys

$$A\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=A\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=0,$$

ýa-da

$$A_1=C_1,\ B_1=0\ .$$

Şeýlelik bilen, bu ýagdaýda (5.1) deňleme

$$A_1\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+A_1\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}+F_1\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)=0$$

görnüşi alar. Soňky deňlemäniň iki bölegini hem A_1-e bölüp

$$\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}+F_2\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)=0 \qquad (5.16)$$

görnüsde ýazalyň. (5.16) deňlemä **elliptik deňlemäniň kanonik görnüşi** diýilýär.

Bellik. Goý, deňlemesi B^2-AC=0 bolan σ egri D ýaýlany iki bölege bölýän bolsun we onuň bir böleginde (5.1) deňleme elliptik, beýleki böleginde bolsa giperbolik bolsun. Bu ýagdaýda (1) deňlemä D ýaýlada **gatyşyk tipli** deňleme diýilýär, σ egrä bolsa deňlemäniň **parabolik dänýän çyzygy** diýilýär.

Eger (5.1) deňleme çyzykly deňleme bolsa, onda onuň kanonik görnüşi hem çyzykly deňlemedir:

$$\frac{\partial^2U}{\partial\xi\partial\eta}+a(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)U=f(\xi,\eta)$$

ýa-da

$$\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}+a(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)U=f(\xi,\eta)$$

(giperbolik deňleme ýagdaýynda);

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)U = f(\xi,\eta)$$

(parabolik deňleme ýagdaýynda);

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)U = f(\xi,\eta)$$

(elliptik deňleme ýagdaýynda).

§ 6. Umumy çözüw düşünjesi

Ikinji tertipli ady differensial deňlemäniň umumy çözüwi iki sany erkin hemişelik sana baglydygy bellidir. Koşi şertlerinden peýdalanyp erkin hemişelikleriň takyk bahalary tapylýar we bu tapylan bahalary umumy çözüwde goýup, berlen ady differensial deňlemäniň başlangyç (Koşi) şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini almak bolýar.

Hususy önümli differensial deňlemeler üçin bolsa,umumy çözüw düşünjesi girizilmeýär. Ýöne, hususy önümli differensial deňlemeler özgerdilende bir üýtgeýän ululyk (argument) boýunça iki gezek integrirlemeklige getirilýär we integrirlemekligiň netijesinde iki sany erkin funksiýa bagly bolan çözüw alynýar. Bu halda, ady differensial deňlemeler nazaryýetini göz öňünde tutup, alnan iki sany erkin funksiýa bagly bolan çözüwe hususy önümli differensial deňlemäniň **umumy çözüwi** diýilýär.

Käbir halatlarda hususy önümli differensial deňlemäniň umumy çözüwini tapmak üçin, ol deňlemede täze üýtgeýän ululyk ýa-da täze funksiýa girizmeklik amatly bolýar.

Mysal 1. $2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlemäniň diskriminantyny hasaplalyň

$$\Delta(x,y) = B^2 - AC = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4} > 0 \ .$$

Diýmek, berlen deňleme tekizligiň ähli ýerinde giperbolikdir. Indi onuň häsiýetlendiriji deňlemesini düzeliň

$$2(dy)^2 + 5\,dx\,dy + 3(dx)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5\frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

Soňky ady differensial deňlemäni integrirläp, alarys

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-5\pm 1}{4},$$

$$\frac{dy}{dx}=-1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}.$$

Bu ýerden

$x+y=C_1$, $3x+2y=C_2$ - göni çyzyklaryň iki sanysynyň maşgalasy.

$\xi=x+y$, $\eta=3x+2y$ belgilemeleri girizeliň we deňlemä girýän önümleri hasaplalyň

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial \xi}+3\frac{\partial U}{\partial \eta},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial \xi}+2\frac{\partial U}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}+9\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+5\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}+6\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}+4\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$$

Tapylan önümleri berlen deňlemede goýup, alarys

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)=0$$

Soňky deňligi ξ boýunça integrirläp alarys

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}=f(\eta).$$

Alnan deňlemä birinji tertipli ady differensial deňleme hökmünde garamak bolýar (ξ - berkidilen ululyk, η bolsa üýtgeýän ululyk).
Bu deňlemäni integrirläliň. Onda

$$U(\xi,\eta)=\int f(\eta)d\eta+f_2(\xi).$$

$\int f(\eta)d\eta=f_1(\eta)$ belgileme girizip we x, y üýtgeýän ululyklara geçip berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys

$$U(x,y)=f_1(3x+2y)+f_2(x+y),$$

bu ýerde f_1 we f_2 iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalardyr.

Mysal 2. $y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(x-y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen berlen deňlemäni ýönekeý görnüşe getireliň. Onuň üçin ol deňlemäniň diskriminantyny hasaplalyň

$$\Delta(x,y)=B^2-AC=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

berlen deňlemä girýän önümleri hasaplalyň

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial \xi}+2x\frac{\partial U}{\partial \eta},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial \xi}-2y\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+4x\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(-2y+2x)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}-4xy\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-4y\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+4y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

Tapylan önümleri berlen deňlemede goýup, alarys

$$2(x+y)^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+2(x+y)\frac{\partial U}{\partial \eta}=0$$

Soňky deňlemäni $x+y\neq 0$ ululyga gysgaldyp we häsiýetlendiriji üýtgeýän ululyklara geçip, alarys

$$\xi\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial U}{\partial \eta}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\xi\frac{\partial U}{\partial \xi}+U\right)=0$$

Soňky deňligi η ululyk boýunça integrirläliň. Onda

$$\xi\frac{\partial U}{\partial \xi}+U=f_1(\xi)\ ,$$

bu ýerde $f_1(\xi)$ - erkin funksiýadyr. Alnan deňlemä ξ üýtgeýän ululyk boýunça (η - berkidilen) birinji tertipli ady differensial deňleme hökmünde garamak mümkin. Şonuň üçin ol deňlemäni integrirläp, alarys

$$U = \frac{\int f_1(\xi)d\xi + \psi(\eta)}{\xi} \quad .$$

Soňky deňlikde $\frac{\int f_1(\xi)d\xi}{\xi} = f(\xi)$ belgileme girizip we köne x,y üýtgeýän ululyklara geçip, berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň

$$U(x,y) = f(x+y) + \frac{\psi(x^2 - y^2)}{x+y} \quad ,$$

bu ýerde f *we* ψ - iki gezek üznüksiz differensirlenýän erkin funksiýalardyr.

BAP II. MATEMATIKI FIZIKANYŇ ESASY DEŇLEMELERINI GETIRIP ÇYKARMAK

§7. Kirşiň yrgyldylarynyň deňlemesini çykarmak

Kesgitleme. Inçe, absolýut çeýe, maýyşgak sapaga **kiriş** diýilýär.

Goý, kirşiň ahyrky nokatlary (uçlary) berkidilen, özi bolsa gaty dartylan diýeliň. Beýle diýdigimiz nänäni aňladýar? Siz kirşiň nähili çekilendiginiň **dartma güýji** bilen kesgitlenýändigini öňden bilýänsiňiz. Eger kirşiň haýsy hem bolsa bir nokadyndan beýleki tarapynda ýatýan bölegini aýyrsak, onda şol aýyrlan bölegiň täsirini çalyşýan güýje **dartma güýji** diýilýär. Berk dartylan kirişde dartma güýjüne görä **agyrlyk** güýçlerini hasaba almasaň hem bolýar.

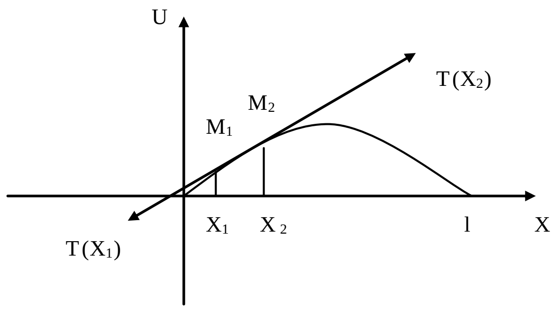
Indi kirşiň kesgitlemesinde ulanylan sözlerden nähili matematiki manylar çykaryp bolýandygyna garalyň.. „Inçe“ diýen söz sapagyň diňe bir çyzykly ölçeginiň (uzynlygynyň) bardygyny aňladýar. „Absolýut çeýe“ diýen sözler uzynlygyna üýtgemeýän forma üýtgemelerine sapagyň hiç hili garşylygynyň ýokdugyny aňladýar, bu bolsa matematikada $\vec{T}$ dartma (dartyş) güýjüniň kirşe galtaşýan boýunça ugrukdyrylandygyny aňladýar. “Maýyşgak“ diýen söz bolsa kirşiň **Gukuň kanunyna** boýun bolýandygyny aňladýar: dartma (dartyş) güýjüniň ululygynyň üýtgemesi kirşiň uzynlygynyň üýtgemesine göni proporsionaldyr.

Goý, deňagramlylyk ýagdaýynda kiriş x oky boýunça ugrukdyrylan bolsun. Eger kirşi deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarsak (mysal üçin, ony çekip goýbersek), onda ol yrgyldap başlar. Biz diňe kese yrgyldylara garajakdyrys, ýagny hereket diňe bir tekizlikde bolup geçýär we kirşiň hemme nokatlary x okuna dik hereket edýärler diýip hasap etjekdiris. Bu tekizlikde xou gönüburçly koordinatalar ulgamyny alalyň, onda U kirşiň deňagramlylyk ýagdaýyndan gyşarmasyny aňladar, şunlukda yrgyldy wagtynda U x we t ululyklara bagly bolar. Hereketi suratlandyrmak üçin biz U(x,t) tapmalydyrys. Her bir kesgitli (berkidilen) t-de U(x,t) funksiýanyň grafigi kirşiň şu wagtdaky (momentdäki) formasyny (şekilini), $\frac{\partial U}{\partial x}$ bolsa x absissaly nokatda galtaşma çyzygynyň burç koeffisiýentini kesgitleýär. Berkidilen x-da U(x,t) funksiýa x absissaly nokadyň Ou okuna parallel çyzyk boýunça hereketiniň kanunyny berýär, onda $\frac{\partial U}{\partial t}$ bu hereketiň tizligi, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ -bolsa tizlenmesi bolar.

Indi U(x,t) funksiýanyň kanagatlandyrýan differensial deňlemesini getirip çykaralyň.

Biz diňe kiçi yrgyldylara gararys, ýagny U we $\frac{\partial U}{\partial x}$ şeýle kiçi bolanlygy üçin $U^2 \approx 0$, $U_x^2 \approx 0$, $U \cdot U_x \approx 0$ bolar diýip hasap etjekdiris.

Kirşe onuň yrgyldaýan tekizliginde Ou okuna parallel güýçler täsir edýärler diýip kabul edeliň.Kirşiň yrgyldaýan sredasynyň garşylyk güýçlerini hasap etmäliň.



Kirşiň erkin (x_1,x_2) bölegini saýlap alalyň.Yrgyldy wagtynda ol bölek M_1M_2 duga deformirlenýän bolsun.

Islendik t wagtda M_1M_2 duganyň uzynlygy

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+U_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S$$

bolar, ýagny deformasiýa wagtynda uzalma bolmaýar. Onda kirşiň belli bir nokadyndaky $\vec{T}$ dartma güýjüniň ululygy Gukuň kanunyna laýyklykda wagta baglylykda üýtgemeýär, ýagny $\vec{T} = \vec{T}(x)$ bolýar.

Indi biziň çaklamalarymyzda $\vec{T}$ dartma güýjüniň x-e hem bagly däldigini, ýagny $\vec{T}=T_0=const$ bolýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, kirşiň M_1M_2 bölegine M_1 we M_2 nokatlarda kirşe geçirilen galtaşýanlar boýunça ugrukdyrylan galtaşma güýçleri, inersiýa güýji we daşky güýçler täsir edýärler. Bu güýçleriň x oka proýeksiýalarynyň jemi nula deň bolmaly. Biz diňe kese yrgyldylara garaýarys, diýmek inersiýa güýçleri we daşky güýçler Ou oka parallel ugrukdyrylandyrlar, onda

$$T(x_1)\cdot \cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cdot \cos\alpha(x_2) = 0,$$

bu ýerde $\alpha(x)$ – t wagtda kirşiň x absissaly nokadynda geçirlen galtaşýan bilen x okuň položitel ugrunyň arasyndaky burçdyr. Ýöne biziň çaklamamyzda

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+U_x^2}} \approx 1.$$

Diýmek

$$T(x_1)=T(x_2).$$

Biz x_1 we x_2 nokatlaryň erkinliginden T dartyş güýjüniň x-e bagly däldigini aldyk. Şeýlelik bilen x we t-niň islendik bahalarynda $T=T_0$ diýip hasap etmek bolýar.

Indi U(x,t) funksiýanyň kanagatlandyrýan differensial deňlemesini getirip çykaralyň. Onuň üçin Dalamber prinsipinden peýdalanalyň. Ol prinsipiň esasynda kirşiň saýlanyp alnan käbir bölegine täsir edýän güýçler deňagramlaşmalydyr.

Kirşiň erkin M_1M_2 bölegine garalyň we ol bölege täsir edýän ähli güýçleriň Ou oka proýeksiýalarynyň jeminiň nula deň bolmagynyň şertini tapalyň.

M_1 we M_2 nokatlarda täsir edýän dartma güýçleriniň proýeksiýalarynyň jemi

$$V_1 = T_0\left[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)\right]$$

bolýar. Biziň çaklamamyzda

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} \approx \frac{U_x}{\sqrt{1+U_x^2}} \approx U_x$$

Onda

$$V_1 = T_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right]$$

Indi

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx$$

bolýandygyny nazarda tutup, alarys

$$V_1 = T_0\cdot\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx \qquad (7.1)$$

Kirşe täsir edýän daşky güýjüň çyzykly dykyzlygyny p(x,t) diýip belläliň, onda M_1M_2 bölege täsir edýän daşky güýjüň Ou okuna proýeksiýasy

$$V_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx \qquad (7.2)$$

bolar.

Goý, $\rho(x)$ – kirşiň çyzykly dykyzlygy bolsun, onda M_1M_2 bölegiň inersiýa güýji

$$V_3 = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dx \qquad (7.3)$$

bolar.

Ýokarda aýdylanlaryň esasynda kirşiň M_1M_2 bölegine täsir edýän güýçleriň Ou oka (7.1)-(7.3) proýeksiýalaryň jemi nula deň bolmaly, ýagny

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + p(x,t)\right]dx = 0.$$

Bu ýerden x_1 we x_2-niň erkinliginden integral astyndaky funksiýanyň kirşiň her bir nokady üçin islendik t wagtda nula deň bolmalydygy gelip çykýar, ýagny

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + p(x,t) \qquad (7.4)$$

Bü deňlemä **kirşiň yrgyldysynyň deňlemesi** diýilýär.

Eger kiriş birjynsly, ýagny $\rho(x) = const$ bolsa, onda (7.4) deňleme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (7.5)$$

görnüşde ýazylýar,

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}.$$

(7.5) deňlemä **birjynsly kirşiň mejbury yrgyldysy** diýilýär.

Eger daşky güýç täsir etmeýän bolsa, onda p(x,t)=0 we (7.5) deňleme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (7.6)$$

görnüşi alar. (7.6) deňlemä **kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi** diýilýär.

§8. Membrananyň yrgyldylarynyň deňlemesini çykarmak

Kesgitleme. Membrana diýip erkin egreldip bolýan dartylan gabyga (plýonka) aýdylýar.

Goý, deňagramlylyk ýagdaýynda membrana xy tekizliginde ýerleşen we käbir D ýaýlany eýeleýän bolsun. Mundan başga hem membrana onuň gyralaryna goýlan deňölçegli T dartmanyň täsirinde ýerleşýär diýeliň. Bu diýildigi, eger membrana boýunça islendik ugra çyzyk geçirsek, onda ol çyzygyň elementi bilen bölünen iki bölegiň arasyndaky özara täsir edýän güýç elementiň uzynlygyna proporsional we onuň ugruna perpendikulýar: çyzygyň ds elementine täsir edýän güýjüň ululygy Tds bolar.

Membrananyň her bir nokadynyň xy tekizlige perpendikulýar U oka parallel hereket edýän kese yrgyldysyna garalyň. Onda membrananyň (x,y) nokadynyň U süýşmesi x,y we t-e bagly funksiýa bolar.

Membrananyň kiçi yrgyldysyna garap U(x,y,t) funksiýa we onuň x,y boýunça hususy önümleri, olaryň kwadratlaryny hem-de köpeltmek hasyllaryny ol ululyklaryň özleri bilen deňeşdireniňde hasap etmän bolar ýaly, kiçi diýip güman etjekdiris.

Membrananyň deňagramlylyk ýagdaýynda l-ýapyk egri bilen çäklenen σ bölegini alalyň. Haçanda membrana deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarylanda bu bölek l' giňişlik çyzygy bilen çäklenen σ' üste deformirlener. σ' üstüň t wagtdaky meýdanyny hasaplalyň

$$\sigma' = \iint_{\sigma} \sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \approx \iint_{\sigma} dxdy = \sigma .$$

Şeýlelik bilen biziň çaklamamyzda yrgyldy wagtynda membrananyň islendik böleginiň meýdanynyň üýtgemegini hasaba almasak hem bolýar we membrananyň islendik bölegi ilki başdaky T dartmanyň täsiri astynda ýerleşýär diýip hasap etmek bolýar.

Membrananyň yrgyldysynyň deňlemesini getirip çykaralyň. Membrananyň erkin σ' bölegine garalyň. Membrananyň bu bölegine onuň galan bölegi tarapyndan l' egriniň normaly boýunça ugrukdyrylan, membrananyň üstüne galtaşýan tekizlikde ýatan, deňölçegli paýlanan T dartyş güýji täsir edýär. Membrananyň σ' bölegini çäklendirýän l' egrä goýlan dartyş güýjüň U oka proýeksiýasyny tapalyň. ds' bilen l' egriniň dugasynyň elementini belgiläliň. Bu elemente ululygy boýunça $T \cdot ds'$-e deň dartyş güýji täsir edýär. $\vec{T}$ dartyş wektoryň Ou ok bilen emele getirýän burçunyň kosinusy, biziň çaklamamyzyň esasynda, $\frac{\partial U}{\partial n}$ -e deň, n-deňagramlylyk ýagdaýynda membrananyň σ bölegini çäklendirýän l egrä daşky normalyň ugry. Bu ýerden l' egriniň ds' elementine goýlan dartyş güýjüň U oka proýeksiýasynyň

$$T \cdot \frac{\partial U}{\partial n} ds'$$

deňdigi gelip çykýar. Diýmek l' egrä goýlan dartyş güýjüň U oka proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlener

$$T \cdot \int_{l'} \frac{\partial U}{\partial n} ds' \qquad (8.1)$$

Membrananyň kiçi yrgyldysynda $ds = ds'$ diýip hasap etmek bolar. Onda (8.1) integralda l' egrini l egri bilen çalşyrmak bolar. Grin formulasyny ulanyp alarys

$$T \cdot \int_{l} \frac{\partial U}{\partial n} ds = T \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dxdy \qquad (8.2)$$

Goý membrana Ou oka parallel birlik meýdana niýetlenen P(x,y,t) daşky güýç täsir edýän bolsun. Onda membrananyň σ' bölegine täsir edýän daşky güýjüň Ou oka proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlener

$$\iint_{\sigma} P(x,y,t) dxdy \qquad (8.3)$$

(8.2) we (8.3) güýçler membrananyň σ' böleginiň

$$-\iint_{\sigma} \rho(x,y) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dxdy$$

inersiýa güýji bilen islendik t wagtda deňagramlaşmagy, $\rho(x,y)$ – membrananyň üst dykyzlygy.

Şeýlelik bilen

$$\iint_{\sigma} \left[\rho(x,y) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - P(x,y,t) \right] dxdy = 0$$

Bu ýerden σ meýdanyň erkinliginden

$$\rho(x,y) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + P(x,y,t) \qquad (8.4)$$

gelip çykýar. (8.4) deňlemä membrananyň **kese yrgyldysynyň deňlemesi** diýilýär.

Eger $\rho(x,y) = const$ bolsa, ýagny membrana birjynsly bolsa, onda (8.4) deňleme aşakdaky görnüşde ýazylýar

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t), \qquad (8.5)$$

$$a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f(x,y,) = \frac{P(x,y,t)}{\rho}.$$

Eger daşky güýç P(x,y,t)=0 bolsa, onda (8.5) deňlemeden birjynsly membrananyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right).$$

erkin yrgyldysynyň deňlemesi alynýar.

§9. Elektrik yrgyldylarynyň deňlemesini çykarmak

Elektrik geçirijiniň ugrunda R garşylyk, L – induktiwlik, G – ýitgi we C – sygym üznüksiz we endigan paýlanan bolsun. L – samoinduksiýa koeffisiýenti bolup, ol toguň üýtgemesiniň tizligi bilen samoinduksiýanyň EHG – siniň arasyny baglanyşdyrýan proporsionallyk koeffisiýentidir, yagny

$$U = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

C – sygymlylyk süýşme tok bilen U – güýjenmäniň üýtgemesiniň tizligi arasyndaky proporsionallyk koeffisiýentidir, ýagny

$$i = C \cdot \frac{\partial U}{\partial t}$$

Garalýan dx bölekde güýjenmäniň peselmegi, Omuň kanunyna laýyklykda, elektrik hereketlendiriji güýçleriň jemine deňdir:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx = iRdx + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \cdot dx \qquad (9.1)$$

Geçirijiniň dx elementinden dt wagtda geçýän elektrik mukdary

$$[i(x,t) - i(x+dx,t)]dt = -\frac{\partial i}{\partial x} dxdt$$

dx elementi zarýadlandyrmak üçin gerek bolan

$$C \cdot [U(x,t+dt) - U(x,t)]dx = C\frac{\partial U}{\partial t} dxdt,$$

elektrik mukdaryna we izolýasiýanyň kämil däldigi üçin ýitýän

GUdxdt

elektrik mukdaryna deňdir:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}dxdt = C\frac{\partial U}{\partial t}dxdt + GUdxdt \qquad (9.2)$$

Şeýlelikde (9.1) we (9.2) formulalardan **telegraf deňlemeleriniň ulgamy** diýip atlandyrylýan

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x} + R\cdot i + L\cdot\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial i}{\partial x} + C\cdot\frac{\partial U}{\partial t} + GU = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

ulgamyny alarys.

(9.3) ulgamyň birinji deňlemesini x, ikinji deňlemesini bolsa t boýunça differensirläliň

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + R\cdot\frac{\partial i}{\partial x} + L\cdot\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} + C\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + G\cdot\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

Bu ulgamyň ikinji deňlemesinden alarys

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} = -C\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - G\cdot\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (9.5)$$

(9.2) we (9.5) deňliklerden peýdalanyp (9.4) ulgamyň birinji deňlemesinden **güýjenme** üçin

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\cdot\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{RG}{LC}\cdot U = 0 \qquad (9.6)$$

deňlemäni alarys. Edil şunuň ýaly edip **toguň güýji** üçin

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\cdot\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\cdot\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC}\cdot i = 0 \qquad (9.7)$$

deňlemäni alarys.

(9.6) we (9.7) deňlemelere **telegraf deňlemeleri** diýilýär. Bu ýerden görnüşi ýaly **güýjenme we toguň güýji** şol bir

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_0 \,\omega \qquad (9.8)$$

deňlemäni kanagatlandyrýarlar,

$$a_0 = LC\,, \quad 2b_0 = RC + LG\,, \quad c_0 = GR$$

Eger täze $V(x,t)$ funksiýany

$$\omega = \exp\left(-\frac{b_0}{a_0}t\right)\cdot V$$

diýip girizsek, onda (9.8) deňleme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b^2 V$$

ýönekeý görnüşi alar,

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\,, \quad b = \frac{\sqrt{b_0{}^2 - a_0 c_0}}{a_0}\,.$$

§10. Gyra we başlangyç şertler

Öň belläp geçişimiz ýaly ady, şeýle hem hususy önümli differensial deňlemeleriň, umuman aýdanyňda, tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Şonuň üçin hem fiziki meseleler hususy önümli differensial deňlemelere getirilen ýagdaýynda ol meseläni ýeke-täk häsiýetlendirmek üçin deňlemä käbir goşmaça şertleri birleşdirmek zerurdyr. Şeýle goşmaça şertler bolup başlangyç we gyra şertler hyzmat edýärler.

Kirşiň kese yrgyldysy hakyndaky ýönekeý meselä garalyň.

Kirşiň yrgyldaýan wagty onuň başlangyç formasyna we başlangyç tizligine baglydyr, diýmek

$$U(x,t_0) = \varphi(x),$$
$$\frac{\partial U(x,t_0)}{\partial t} = \psi(x)$$

„başlangyç şertleri“ bermeli, bu ýerde $\varphi(x), \psi(x)$ - berlen funksiýalardyr.

Birinji jynsly gyra şertler. Eger $0 \le x \le l$ kirşiň uçlary berkidilen bolsa, onda

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0 \qquad (10.1)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli. Eger kirşiň uçlary berlen kanun boýunça hereket edýän bolsa, onda

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(l,t) = \mu_2(t) \qquad (10.2)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli, $\mu_1(t), \quad \mu_2(t)$ - berlen funksiýalar.

Ikinji jynsly gyra şertler. Eger kirşiň uçlary ýumşak (gowşak) berkidilen bolsa (uçlary Ou okuň boýuna azat), onda

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0 \quad , \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad (10.3)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli. Eger kirşiň uçlarynda $\nu_1(t), \nu_2(t)$ güýçler berlen bolsa, onda gyra şertler

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \nu_1(t) \quad , \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = \nu_2(t) \qquad (10.4)$$

görnüşde bolýarlar.

Üçünji jynsly gyra şertler. Eger kirşiň uçlary maýyşgak berkidilen bolsa,onda

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - h_1 U(0,t) = 0 \quad , \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + h_2 U(l,t) = 0, h_1 > 0 \, , h_2 > 0 \qquad (10.5)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli.

Eger maýyşgak berkidilen uçlar gozganýan bolsalar we olaryň başlangyç ýagdaýdan gyşarmasy degişlilikde $\overline{\theta_1}(t)$ *we* $\overline{\theta_2}(t)$ funksiýalar bilen berlen bolsa, onda gyra şertler

$$\begin{gathered} \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - h_1 U(0,t) = \bar{\theta}1(t) \quad , h_1 > 0, \\ \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + h_2 U(l,t) = \bar{\theta}2(t), \, h_2 > 0 \, , \\ \theta_1(t) = -h_1 \bar{\theta}1(t) \, , \theta_2(t) = h_2 \bar{\theta}2(t) \end{gathered} \qquad (10.6)$$

görnüşde bolýarlar.

(10.1), (10.3), (10.5) gyra şertlere birjynsly gyra şertler, (10.2), (10.4), (10.6) gyra şertlere bolsa birjynsly däl gyra şertler diýilýär.

Gyra şertleriň üç görnüşiniň hemmesini birleşdirip

$$\alpha\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}+\beta U(0,t)=\mu_1(t)\quad,$$
$$\gamma\frac{\partial U(l,t)}{\partial x}+\delta U(l,t)=\mu_2(t),$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\delta-hemişelikler\ ,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0\ ,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0$$

bir görnüşde ýazmak bolýar.

§11. Giperbolik deňlemeler üçin goýulýan esasy meseleler

$Q=(0,l)\times(0,T)$ gönüburçlykda

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-q(x)U+f(x,t)\qquad(11.1)$$

deňlemä garalyň, $\rho(x)>0,\ p(x)>0,\ q(x)\geq 0$,şunlukda $\rho(x),\ p(x),\ p'(x),\ q(x)$ funksiýalar $[0,l]$ kesimde üznüksiz funksiýalardyr.

Gatyşyk mesele. Q gönüburçlykda (11.1) deňlemäniň

$$\alpha\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}+\beta U(0,t)=\mu_1(t),\quad \gamma\frac{\partial U(l,t)}{\partial x}+\delta U(l,t)=\mu_2(t)\qquad(11.2)$$

gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad 0\leq x\leq l\qquad(11.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan, araçäkde üznüksiz differensirlenýän regulýar çözüwini tapmaly.

Meseläniň goýluşynda garşylyk bolmaz ýaly

$$f(x,t)\in C(Q),\quad \varphi(x)\in C^1([0,l]),$$
$$\psi(x)\in C([0,l]),\quad \mu_1(t),\mu_2(t)\in C([0,T])$$

endiganlyk şertleri we goşmaça şertleriň

$$\alpha\varphi'(0)+\beta\varphi(0)=\mu_1(0),\quad \gamma\varphi'(l)+\delta\varphi(l)=\mu_2(l)$$

ylalaşyk şertleri ýerine ýetmeli.

Eger $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1$ bolsa birinji gatyşyk gyra mesele; Eger $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0$ bolsa ikinji gatyşyk mesele; Eger-de $\alpha = 1, \beta = -h_1, \gamma = 1, \delta = h_2$ bolsa üçünji gatyşyk gyra mesele diýilýär.

Koşi meselesi: Bu meselede (11.1) deňlemä $-\infty < x < \infty$ aralykda we islendik t>0 bolanda garalýar. Şonuň üçin hem x boýunça hiýç hili gyra şertler bolmaýar. Koşi meselesini formulirläliň :

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - q(x)U + f(x,t), \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0$$

deňlemäni we

$$U(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \ \ -\infty < x < +\infty$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan $U(x,t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ funksiýany tapmaly

$$f(x,t) \in C(t > 0), \quad \varphi(x) \in C^1(-\infty, +\infty), \ \psi(x) \in C(-\infty, +\infty)$$

Gursa meselesi. Giperbolik deňlemeler üçin goşmaça şertleri başgaça görnüşlerde goýmak mümkin. Mysal üçin Gursa meselesi diýip atlandyrylýan meselede goşmaça şertler häsiýetlendirijilerde berilýär. Gursa meselesini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(x,y)U = f(x,y) \qquad (11.2)$$

deňleme üçin goýalyň.

$Q = (0, x_0) \times (0, y_0)$ gönüburçlykda (11.2) deňlemäniň, araçäkde üznüksiz, regulýar çözüwi bolýan we $x = 0, \ y = 0$ häsiýetlendirijilerde

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq x_0$$
$$U(0,y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq y_0$$

şertleri kanagatlandyrýan U(x,y) funksiýany tapmaly.

§12. Gaty izotrop jisimde ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesini çykarmak

Gaty jisime garalyň we onuň t-wagtda (x,y,z) nokatdaky temperaturasyny U(x,y,z,t) diýip belläliň. Eger jisimiň dürli bölekleri dürli temperatura eýe bolsalar, onda jisimiň gaty gyzan böleklerinden pes gyzan böleklerine tarap ýylylyk geçýär. Jisimiň içinde käbir S üsti we onda ΔS kiçi elementi alalyň. Ýylylyk akymy diýip üstüň birlik meýdanyndan birlik wagtda geçýän ýylylyk mukdaryna aýdylýar we „q“ bilen bellenilýär. Eger **n** bilen şu birlik meýdanyň ýylylygyň hereketniň ugruna tarap bolan normalyny bellesek, onda Furýeniň kanuny boýunça

$$q = -k \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \qquad (12.1)$$

bolar, bu ýerde k>0 bolup, oňa içki ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti diýilýär. Eger ΔS elementden Δt wagtda geçýän ýylylyk mukdaryny ΔQ diýsek, onda (12.1) boýunça

$$\Delta Q = -k \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \qquad (12.2)$$

bolar.

Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesini çykarmak üçin jisimiň içinden endigan ýapyk S üst bilen çäklenen islendik V göwrümi alalyň we bu göwrümde $[t_1, t_2]$ wagt aralygynda ýylylyk mukdarynyň üýtgemesine garalyň . Eger **n** normal S üstüň içki normaly diýsek, onda $[t_1, t_2]$ wagt aralygynda S üstden, (12.2) formula boýunça V göwrüme

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x,y,z) \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

ýylylyk mukdary geçer.

Indi göwrümiň ΔV elementine garalyň. Δt wagt aralygynda onuň temperaturasyny $\Delta U = U(x,y,z,t_2) - U(x,y,z,t_1)$ ululyga üýtgetmek üçin

$$\Delta Q_2 = \gamma \cdot [U(x,y,z,t_2) - U(x,y,z,t_1)] \cdot \rho \cdot \Delta V$$

ýylylyk mukdaryny harçlamaly bolar, bu ýerde γ-jisimiň udel ýylylyk sygymy, ρ bolsa jisimiň udel dykyzlygy. Bu formuladan V göwrümiň temperaturasyny $U(x,y,z,t_1)$-den $U(x,y,z,t_2)$-e galdyrmak üçin gerek bolan ýylylyk mukdaryny alarys

$$Q_2 = \iiint_V \gamma [U(x,y,z,t_2) - U(x,y,z,t_1)] \cdot \rho dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} dV$$

çünki

$$U(x,y,z,t_2)-U(x,y,z,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial U}{\partial t}dt$$

Seredilýän jisimiň içinde ýylylyk çeşmeleriniň hem bar bolmagy mümkin. Ol ýylylyk çeşmeleriniň dykyzlygyny F(x,y,z,t) diýeliň. Onda ol çeşmäniň $[t_1,t_2]$ wagt aralygynda V göwrümde emele getirýän ýa-da siňdirýän ýylylyk mukdary

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V F(x,y,z,t)dV$$

bolar. Saýlanyp alnan islendik V göwrüm üçin ýylylyk mukdarynyň balansynyň deňlemesini ýazalyň

$$Q_2=Q_1+Q_3$$

ýagny

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dV=-\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_S k\frac{\partial U}{\partial n}dS+\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V F(x,y,z,t)dV \qquad (12.3)$$

Sag bölekdäki üst boýunça integrala Ostrogradskiý-Gaussyň formulasyny ulanyp, **n**-iň içki normalydygyny göz öňünde tutup alarys

$$\iint_S k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}dS=-\iiint_V div(k\cdot gradU)dV \qquad (12.4)$$

(12.4) deňlikden peýdalanyp (12.3) deňligi

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V\left[\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}-div(k\cdot gradU)-F(x,y,z,t)\right]dV=0 \qquad (12.5)$$

görnüşde ýazalyň.

(12.5) deňlikde integral aşagyndaky funksiýanyň üznüksizligi, V göwrümiň we $[t_1,t_2]$ kesimiň islendik bolany üçin garalýan jisimiň islendik (x,y,z) nokadynda we islendik t wagtda

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=div(k\cdot gradU)+F(x,y,z,t) \qquad (12.6)$$

bolmaly. (12.6) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)+F(x,y,z,t) \qquad (12.7)$$

(12.6) ýa-da (12.7) deňlemä birjynsly däl izotrop jisimde ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi diýilýär. Eger jisim birjynsly bolsa, onda γ, ρ we k hemişelik sanlar bolýar we (12.7) deňleme

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \qquad (12.8)$$

görnüşi alar,

$$a^2=\frac{k}{\gamma\rho}\ , \quad f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{\gamma\rho}.$$

(12.8) deňlemä **ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly däl** deňlemesi diýilýär.
Eger garalýan birjynsly jisimimizde ýylylyk çeşmesi bolmasa, ýagny F(x,y,z,t)=0 bolsa, onda (12.8) deňleme

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad (12.9)$$

görnüşi alar. (12.9) deňlemä **ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly** deňlemesi diýilýär.

Hususy halda, haçanda temperatura diňe x,y koordinatalara we t wagta bagly bolanda (12.9) deňleme

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

deňlemä öwrülýär.

Çyzykly ölçegli jisim üçin ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

görnüşe eýedir.

§13. Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi üçin goýulýan esasy meseleler

Aşakdake deňlemä garalyň.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (13.1)$$

Gatyşyk mesele. $Q = (0,l) \times (0,T)$ göniburuçlukda (13.1)deňlemöniň

$$U(x,0) = \varphi(x),$$

başlangyç şerti we

$$\alpha U_x(0,t) + \beta U(0,t) = \mu_1(t), \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ – berilen funksiýalar

Koşi meselesi. $-\infty < x < \infty$, t>0 ýarym tekizlikde (13.1) deňlemäniň

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde berlen üznüksiz funksiýa

§14. Laplas deňlemesine getirýän meseleler

Geçen bölek mowzukda bilişimiz ýaly içinde ýylylyk çeşmesi ýok izotrop birjynsly jisimde ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \qquad (14.1)$$

görnüşe eýe.

Goý jisimiň (x,y,z) içki nokatlarynda temperatura durnuklaşan bolsun, ýagna wagtyň geçmegi bilen üýtgemesin. Onda $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ we (14.1) deňleme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (14.2)$$

görnüşi alar. (14.2) deňlemä Laplas deňlemesi diýilýär. Şeýlelik bilen (14.2) Laplas deňlemesiniň çözüwi durnuklaşan birjynsly jisimiň $U(x,y,z)$ temperaturasyny kanagatlandyrýar. $U(x,y,z)$ funksiýany kesgitlemek üçin diňe wagta bagly bolmadyk gyra şertiň berilmegi ýeterlik.

Garalýan ýaýlada (14.2) deňlemäniň, onuň araçägindäki bahasy boýunça çözüwini kesgitlemek meselesine Dirihle meselesi diýip atlandyrylýar.

Garalýan ýaýlada (14.2) deňlemäniň, onuň araçäkdäki normal önüminiň bahasy boýunça, çözüwini kesgitlemek meselesine Neýmon meselesi diýilýär.

§15. Kowalewskaýa teoremasy

Ilki bilen aşakdaky iki kesgitlemäni bereliň.

1) $U(x,t)$ funksiýa görä differinsial deňleme

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k} = \Phi\left(x,t,u,\frac{\partial U}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha} U}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha}}\right) \qquad (15.1)$$

görnüşe eýe bolsun. Eger Φ funksiýa k-dan uly bolmadyk we t boýunça (k-1)–den uly bolmadyk önümi saklaýan bolsa, onda (1) deňlemä t boýunça normal görnüşde diýilýär:

$$\alpha_0+\alpha\le k \qquad \alpha_0\le k-1$$

Mysal üçin, tolkun deňlemesi, Laplas deňlemesi we ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi x,y we z boýunça normal görnüşdedir; tolkun deňlemesi bolsa t boýunça hem normal görnüşdedir.

2) Eger x_0 nokadyň etrabynda $f(x)$ funksiýany deňölçegli ýygnanýan

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k f}{dx^k}(x-x_0)^n$$

derejeli hatar görnüşde aňladyp bolýan bolsa, onda $f(x)$ funksiýa x_0 nokatda analitik funksiýa diýilýär.

(1) deňleme üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar:

(1) deňlemäniň $\quad U\Big|_{t=t_0}=\varphi_0(x);\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}\Big|_{\mathrm{t}=\mathrm{t}_0}=\varphi_1(x),\ldots,\frac{\partial^{k-1}U}{\partial t^{k-1}}\Big|_{t=t_0}=\varphi_{k=1}(x) \qquad (15.2)$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ funksiýalar käbir $D\subset R^2$ köplükde berlen funksiýalardyr.

Teorema 1: (Kowalewskaýa teoremasy). Eger x_0 nokadyň käbir etrabynda $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ funksiýalar analitik we $\Phi(x,t,U,\ldots,U_{\alpha_0\alpha},\ldots)$ funksiýa käbir

$$(x_0,t_0,\varphi_0(x_0),\ldots,\varphi^{(\alpha)}(x_0),\ldots)$$

nokadyň etrabynda analitik funksiýa bolsa, onda (15.1)-(15.2) Koşi meselesiniň çözüwi bardyr, özi hem analitik funksiýalaryň klasynda ýeke-täkdir.

§16. Koşi meselesi. Häsiýetlendiriji

Aşakdaky giperbolik deňlemä garalyň

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1,...,x_n)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + F(x_1,...,x_n,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},...,\frac{\partial U}{\partial x_n}) = 0, \qquad (16.1)$$

şunlukda $a_{ik} = a_{jk}$, a_{ij} funksiýalar käbir D ýaýlada kesgitlenen hakyky funksiýalar diýip kabul edeliň.

Goý D ýaýlada ýeterlikçe endigan (n-1)-ölçegi S üst we ol üstüň her bir nokadynda S üste galtaşmaýan hem-de S üst bilen hereket edilende çalt üýtgeýän l egri berilen bolsun.

Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar: (16.1) deňlemäniň

$$\begin{cases} U(x_1,...,x_n)\big|_l = \varphi_0(x_1,x_2,...,x_n) \\ \dfrac{\partial U(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}\Big|_l = \varphi_i(x_1,...,x_n), \quad \mathrm{i} = 1,2,...,\mathrm{n} \end{cases} \qquad (16.2)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

(16.2) Koşi şertleri $U(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiýany we onuň birinji tertipli önümlerini S üstde doly kesgitleýär.

Biz aşakdaky soragy goýalyň: (16.1) differinsial deňleme bilen, (16.2) Koşi şertlerini peýdalanyp, $U(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiýanyň ikinji we soňraky önümlerini tapyp bolarmy ?

Ilki bilen Koşi şertleri ýörüte görnüşde berlen ýagdaýa garalyň

$$U\Big|_{x_1=x_1^0} = \varphi_0(x_2,...,x_n), \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}_1}\Big|_{x_1=x_1^0} = \varphi_1(x_2,...,x_n), \qquad (16.3)$$

ýagny başlangyç şert $x_1 = x_1^0$ tekizlikde berlen we l egriniň ugry diýip normal alnan. (16.3) başlangyç şert $x_1 = x_1^0$ tekizlikde ähli birinji tertipli önümleri we $U_{x_1x_1}$ önümden galan ikinji tertipli önümleri tapmaga mümkinçilik berýär. $U_{x_1x_1}$ önümi tapmak üçin $x_1 = x_1^0$ belgileme girizip, (16.1) deňlemeden peýdalanalyň. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

I. $a_{11}(x_1^0,x_2,...,x_n) \neq 0,$ II. $a_{11}(x_1^0,x_2,...,x_n) = 0$

I ýagdaýda $x_1 = x_1^0$ tekizlikde $U_{x_1 x_1}$ önümi we ondan uly önümleri birbahaly kesgitläris.

II ýagdaýda $x_1 = x_1^0$ tekizlikde ýa-ha mümkin däl deňligi ýa-da toždestwo alarys.

Indi umumy ýagdaýa garalyň. Koşi şertleri käbir S üstde berlen bolsun. S üstüň deňlemesi

$$\omega_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{16.4}$$

görnüşde berlen bolsun. S üstiň etrapynda

$$\xi_i = \omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n} \ , \tag{16.5}$$

$\xi_i, \xi_2, \dots, \xi_n$ täze üýtgeýän ulylyklary girizeliň, şunlukda S üstde $\omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n}$ funksiýalaryň özgertmesiniň ýakabiýany nuldan tapawutly bolar ýaly saýlanyp alyndy. Önumleriň

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i \partial x_k}$$

bahalaryny (16.1) deňlemede goýup, alarys :

$$\overline{a_{11}} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \dots = 0 \quad , \tag{16.6}$$

bu ýerde

$$\overline{a_{11}} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \quad . \tag{16.7}$$

Ýazylmadyk agzalar özünde $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ önümi saklanoklar. (16.4) we (16.5) deňlikden görnüşi ýaly, özgerdilen (16.6) deňleme üçin başlangyç şertler $\xi_1 = 0$ tekizlikde berilýär , ýagny ýokardaky ýörite görnüşde. Şeýlelik bilen (16.7) deňlikden görnüşi ýaly, (16.4) üstde Koşi şertiniň berilmegi S üstde ikinji tertipli önümi kesgitlemeklik üçin kesgitsizligiň alynmagy $\omega_1(x_1, \dots, x_n)$ üstiň $\omega_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ şertde

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = 0 \tag{16.8}$$

deňligi kanagatlandyrmagy zerur we ýeterlikdir.

$\omega_1(x_1,...,x_n) = 0$ üste (16.1) deňlemäniň häsiýetlendiriji üsti diýilýär ýa-da gysgaça häsiýetlendirijisi diýilýär.

(16.8) deňleme daşyndan göreniňde birinji tertipli differensiýal deňleme ýaly, ýöne ol kesgitlemesine gýrä beýle däl. Hakykatdan hem (16.5) deňlik $x_1,...,x_n$ – e görä toždestwolaýyn däl-de, diňe $\omega_1(x_1, x_2...,x_n) = 0$ şertde ýerine ýetmeli.

Goý, (16.8) deňlik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ üýtgeýän ululyklara görä toždestwolaýyn ýerine ýetýän bolsun. Onda (16.8) deňleme birinji tertipli hususy önümli differensial deňleme bolar we onuň hemişelik sandan tapawutly islendik çözüwi diňe bir hasiýetlendirijini däl-de häsiýetlendirijileriň maşgalasyny berer:

$$\omega_i(x_1, x_2..., x_n) = c,$$

bu ýerde c -hemişelik san.

Eger $S: \omega_1 = 0$ üstde (16.8) deňlik ýerine ýetmese, onda U funksiýanyň ikinji önümi S üstde kesgitlener. Bu ýagdaýda (16.5) özgertmeden alynan (16.6) deňlemäni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} = \sum_{i,k=2}^{n} b_{ik} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1} + \sum_{i=2}^{n} b_{ik} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_i} + \ldots$$

görnüşde ýazmak bolar, şunlakda S üst $\xi_1 = 0$ tekizlige geçer. Bu bolsa S üstde berlen Koşi şertini $\xi_1 = 0$ tekizlikde berlen Koşi şerti bilen çalşylýandygyny aňladýar.

Eger S üst häsiýetlendiriji bolsa, onda $U(x_1,...,x_n)$ funksiýa we onuň birinjy tertipli önümleri ol üstde käbir baglanyşykda bolýar.

§17. Adamar mysaly

Eger käbir meseläniň çözüwi: 1) bar; 2) yeke - täk; 3) durnukly, ýagny şertiň az üýtgemegine meseläniň çözüwiniň hem az üýtgemesi degişli bolsa, onda ol meselä **korrekt goýulan mesele** diýilýär. Eger 1)-3) şertleriň iň bolmanda biri ýerine ýetmese, onda ol meselä **korrekt däl** ýa-da **korrekt goýulmadyk** mesele diýilýär.

Meseläniň korrekt däl bolmagynyň esasy sebäbi şertleriň oňaýsyz alynmagydyr. Bu aýdylanlary anyk mysalda düşündireliň.

Adamar mysaly diýlip atlandyrylýan mysaldan görnüşi ýaly, elliptik deňleme üçin Koşi meselesi korrekt däldir. Goý $U(x,y)$ funksiýa

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

deňlemäni we

$$U(x,y)\Big|_{y=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi(x)$$

Koşi şertlerini kanagatlandyrýan bolsun.

$$\vartheta(x,y) = U(x,y) + \frac{\sin nx \cdot sh\, ny}{n^2}$$

funksiýa hem Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Hakykatdan hem

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sin nx \cdot shnx\right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \sin nx \cdot shny\right) = 0$$

Mundan başga $\vartheta(x,y)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrýar:

$$\vartheta(x,y)\Big|_{y=0} = \left(U(x,y) + \frac{\sin nx \cdot shny}{n^2}\right)\Big|_{y=0} = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\sin nx \cdot chny}{n}\right)\Big|_{y=0} = \psi(x) + \frac{\sin nx}{n}.$$

$U(x,y)$ we $\vartheta(x,y)$ funksiýalar üçin başlangyç şertleriň tapawudyny tapalyň

$$\left|\vartheta(x,y) - U(x,y)\right|\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\left|\frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right|\Big|_{y=0} = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \quad .$$

Şeýlelik bilen ýeterlikçe uly n san üçin başlangyç şertler ýeterlikçe kiçidir, emma berlen çözüwler üçin bolsa

$$\left|\vartheta(x,y) - U(x,y)\right| = \left|\frac{\sin nx \cdot shnx}{n^2}\right|$$

tapawut $x \ne 0,\ \ y > 0$ bolanda ýeterlikçe ulydyr, sebäbi

$$\frac{shny}{n^2} = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \to \infty, \quad n \to \infty \ .$$

Diýmek, çözüw durnukly däl. Onda kesgitlemä görä, elliptik deňleme üçin Koşi meselesi korrekt däldir.

BAP III. ELLIPTIK DEŇLEMELER

§18. Laplas deňlemesi, onuň fundamental çözüwi

Elliptik deňlemeler stasionar, ýagny wagta görä üýtgemeýän dürli fiziki hadysalar öwrenilende ýüze çykýar.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \qquad (18.1)$$

Laplas deňlemesi elliptik deňlemeleriň ýönekeý görnüşidir. Öňden bilişimiz ýaly, Laplas deňlemesini birjynsly izotrop jisimiň durnuklaşan U(x,y,z) temperaturasy kanagatlandyrýar.

Kesgitleme 1. Eger U(x,y,z) funksiýa D ýaýlada ikinji tertipli üznüksiz önümlere eýe bolup, D ýaýlanyň her bir nokadynda (18.1) Laplas deňlemesini kanagatlandyrýan bolsa, onda U(x,y,z) funksiýa D ýaýlada **garmonik** funksiýa diýilýär.

Birjynsly däl

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-f(x,y,z), \qquad f=\frac{F}{a^2}$$

görnüşli deňlemä Puasson deňlemesi diýilýär. Tekizlikde Laplas we Puasson deňlemeleri degişlilikde aşakdaky ýaly ýazylýarlar:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \qquad (18.2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-f(x,y)$$

Kesgitleme 2. Laplas deňlemesiniň bir geometrik üýtgeýän ululyga, has takygy M(x,y,z) erkin nokatdan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ berlen nokada çenli

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

uzaklyga bagly U(r) çözüwine onuň fundamental ýa-da ýönekeý çözüwi diýilýär.

Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwini tapalyň. Onuň üçin

$$x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=z_0+r\cos\theta$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

sferik koordinatalar ulgamyny girizip (18.1) Laplas deňlemesini

$$\Delta U=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (18.3)$$

görnüşde ýazalyň.Kesgitlemä görä fundamental çözüw diňe r ululyga baglydyr. Şonuň üçin (18.3) deňleme

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=0$$

görnüşi alar. Bu ýerden

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0\Rightarrow r^2\frac{dU}{dr}=C_1\Rightarrow\frac{dU}{dr}=\frac{C_1}{r^2}\Rightarrow U(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

$C_1=-1$, $C_2=0$ bahalary goýup, giňişlikde Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwini

$$U(x,y,z)=U(r)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \qquad (18.4)$$

görnüşde alarys. (18.4)-den görnüşi ýaly bu fundamental çözüw $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokatdan başga nokatlarda garmonik funksiýadyr.

Indi (18.2) deňlemäniň fundamental çözüwini tapalyň. Onuň üçin

$$x=x_0+r\cos\varphi\qquad y=y_0+r\sin\varphi$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

formulalaryň kömegi bilen polýar koordinatalar ulgamyny girizip, (18.2) Laplas deňlemesini

$$\Delta_2 U \equiv \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (18.5)$$

görnüşde ýazalyň. Fundamental çözüwiň kesgitlemesine görä ol diňe r üýtgeýän ululyga baglydyr, diýmek $\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0$. Şeýle çözüwler üçin (18.5) deňleme

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial U}{\partial r}\right)=0$$

görnüşi alar. Bu ýerden

$$\frac{d}{dr}\left(r\ \frac{dU}{dr}\right)=0 \Rightarrow r\ \frac{dU}{dr}=C_1 \Rightarrow \frac{dU}{dr}=\frac{C_1}{r} \Rightarrow U(r)=C_1\cdot\ln r+C_2$$

$C_1=-1$, $C_2=0$ bahalar üçin fundamental çözüwi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$U(x,y)=U(r)=\ln\frac{1}{r}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \qquad (18.6)$$

(18.6) funksiýa (x_0,y_0) nokatdan başga nokatlarda garmonik funksiýadyr.

Bellik. Fundamental çözüw $M_0 \neq M$ bolanda M_0berlen nokadyň koordinatalary boýunça hem Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandyr.

§19. Grin formulalary

Goý, D-üçölçegli giňişlikde bölek-endigan S üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla bolsun. Bilişimiz ýaly
P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) $\in C^1(D)\cap C(\overline{D})$ funksiýalar üçin

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau=\oiint_S \left(P\cdot\cos(n,x)+Q\cdot\cos(n,y)+R\cdot\cos(n,z)\right)dS \qquad (19.1)$$

Gaus-Ostrogradski formulasy adalatlydyr, bu ýerde $d\tau=dxdydz$ -D ýaýlanyň elementi, **n** bolsa S üste geçirilen daşky normaldyr.

Grin formulalaryny getirip çykarmak üçin
U(x,y,z) , V(x,y,z)$\in C^2(D)\cap C^1(D)$ funksiýalara garalyň.

$$P=U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\ ,\quad Q=U\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\ ,\quad R=U\cdot\frac{\partial V}{\partial z}$$

funksiýalar üçin (19.1) Gaus-Ostrogradski formulasyndan peýdalanyp alarys:

$$\iiint\limits_D U\cdot\Delta V d\tau=\iint\limits_S U\cdot\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_D\left[\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right]d\tau \qquad (19.2)$$

bu ýerde $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ -Laplas operatory, $d\tau=dxdydz$ - üstüň elementi, $\frac{\partial}{\partial n}=\cos(n,x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\cos(n,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\cos(n,z)\cdot\frac{\partial}{\partial z}$ daşky normalyň ugry boýunça önüm. (19.2) formula **birinji Grin formulasy** diýilýär.

(19.2) formulada U we V funksiýalaryň orunlaryny çalşyryp alarys:

$$\iiint\limits_D V\cdot\Delta U d\tau=\iint\limits_S V\cdot\frac{\partial U}{\partial n}dS-\iiint\limits_D\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right]d\tau \qquad (19.3)$$

Indi (19.2) formuladan (19.3) formulany aýralyň. Alarys

$$\iiint\limits_D (U\cdot\Delta V-V\cdot\Delta U)d\tau=\iint\limits_S\left(U\cdot\frac{\partial V}{\partial n}-V\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS \qquad (19.4)$$

Alnan (19.4) formula **ikinji Grin formulasy** diýilýär.

Bellik. Eger D ýaýla birnäçe ýapyk üstler bilen çäklenen hem bolsa Grin formulalaryny ulanmak bolýar. Bu halda üst integrallary D ýaýlany çäklendirýän üstleriň hemmesi boýunça alynýar. D ýaýlanyň daşky normalynyň bolsa bu ýaýlany içinden çäklendirýän üstlerde üstüň içine ugrukdyrylandygyny belläliň.

U(x,y) we V(x,y) iki üýtgeýänli funksiýalar üçin hem Grin formulalary ýerine ýetýär. L ýapyk egri çyzyk bilen çäklenen D ýaýlada ikinji Grin formulasy

$$\iint\limits_D (U\cdot\Delta_2 V-V\cdot\Delta_2 U)dxdy=\int\limits_L\left(U\cdot\frac{\partial V}{\partial n}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS$$

görnüşe eýedir, bu ýerde $\Delta_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ -L egrä geçirilen **n** daşky normalyň ugry boýunça önüm.

§20. Garmonik funksiýanyň integral görnüşi

Ikinji Grin funksiýasy iki gezek üznüksiz differensirlenýän islendik funksiýanyň integral görnüşini tapmaga mümkinçilik berýär.

Teorema 1. Eger D - bölek-endigan S üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla bolsa we U(x,y) $\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ şertler ýerine ýetse, onda

$$U(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n}-U\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_D\frac{\Delta U}{r}\,d\tau \qquad (20.1)$$

bu ýerde r=$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ - D ýaýlanyň içinde ýatan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ berlen nokatdan erkin M(x,y,z) nokada çenli uzaklyk, **n** bolsa S üste geçirilen daşky normal.

Subudy. V= $\frac{1}{r}$ funksiýa garalyň. Bu funksiýa erkin M(x,y,z) nokat berlen $M_o(x_0,y_0,z_0)$ nokat bilen gabat gelende tükeniksizlige öwrülýär. Şonuň üçin hem U(x,y,z) we V(x,y,z) funksiýalara bütin D ýaýlada ikinji Grin formulasyny ulanmak bolmaýar. D ýaýladan merkezi M_0 nokatda bolan ρ radiusly $K(M_0,\rho)$ şary kesip aýralyň. D ýaýlanyň galan bölegini D_ρ bilen belläliň, ýagny D_ρ= $D\backslash K(M_0,\rho)$. Indi D_ρ ýaýlada U we V funksiýalar üçin ikinji Grin formulasyny ulanmak bolýar, sebäbi

$$U(x,y,z),V(x,y,z)\in C^2(D_\rho)\cap C^1(\overline{D_\rho})$$

$K(M_0,\rho)$ şaryň sferasyny σ_ρ bilen belgiläliň we $S\cup\sigma_\rho$ araçäkli ýaýlada U, V= $\frac{1}{r}$ funksiýalar üçin ikinji Grin formulasyny ulanyp, alarys:

$$\iiint\limits_{D_\delta}\left[U\cdot\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\Delta U\right]=$$
$$=\iint\limits_{S}\left[U\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+\iint\limits_{\sigma_\rho}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS \tag{20.2}$$

V= $\frac{1}{r}$ -Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwi, şonuň üçin D_ρ ýaýlada

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0\Rightarrow\iiint U\cdot\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\tau=0$$

Şeýlelik bilen (20.2) formula aşakdaky görnüşi alar

$$-\iiint\limits_{D_\rho}\frac{\Delta U}{r}d\tau=\iint\limits_{S}\left[U\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+\iint\limits_{\sigma_\rho}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS \tag{20.3}$$

Indi ρ radiusy nula ymtyldyryp predele geçeliň. Onda soňky (20.3) formulanyň çep böleginde bütin D ýaýla boýunça integral alarys. Formulanyň sag bölegindäki S üst boýunça integral ρ bagly däl. Indi sag bölekdäki ikinji goşulyja garalyň. σ_ρ sferada $\frac{1}{r}$ funksiýa hemişelik, ýagny

$$\frac{1}{r}\Big|_{\sigma_\rho}=\frac{1}{\rho}$$

σ_ρ sferada daşky normal D_ε ýaýladan çykýar we ol sferanyň radiusyna gapma-garşy ugrukdyrylandyr, şonuň üçin

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\Big|_{\sigma_\rho}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^2}$$

we

$$\iint_{\sigma_\rho} U \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{U(M_\rho)}{\rho^2} \iint_{\sigma_\rho} dS = \frac{U(M_\rho)}{\rho^2} \cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi U(M_{or}) \qquad (20.4)$$

bu ýerde M_ρ - σ_ρ sferanyň käbir nokadydyr.

U(x,y,z) funksiýanyň birinji tertipli önümleriniň $\overline{D}$ ýapyk ýaýlada üznüksizliginden olaryň çäklenendigi gelip çykýar. Diýmek şeýle bir A>0 san bar bolup

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos(n,x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos(n,y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos(n,z)\right| \le A$$

deňsizlik ýerine ýetýändir. Onda

$$\left|\iint_{\sigma_\rho} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS\right| \le \frac{1}{\rho} \iint_{\sigma_\rho} \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| dS \le \frac{A}{\rho} \cdot \iint_{\sigma_\rho} dS = \frac{A}{\rho} \cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi\rho A \qquad (20.5)$$

Indi (20.3) formulada $\rho \to 0$ bolanda predele geçip, (20.4) deňligi we (20.5) deňsizligi göz önünde tutup alarys.

$$-\iiint \frac{\Delta U}{r} d\tau = \iint \left[U \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n}\right] dS + 4\pi \cdot U(M_0) \qquad (20.6)$$

Sebäbi $\rho \to 0$ bolanda σ_ρ sfera M_0 nokada ýygnanýar. (20.6) formuladan bolsa (20.1) formula gelip çykýar. Teorema subut edildi.

(20.1) formuladan garmoniki funksiýa üçin örän möhüm integral görnüşi almak bolýar.

Teorema 2. D ýaýlada garmonik U $\in C^1(\overline{D})$ funksiýa üçin

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS \qquad (20.7)$$

integral görnüş adalatlydyr.

Subudy. Eger U(x,y,z) funksiýanyň D ýaýlada garmonikligini ($\Delta U = 0$) we $\overline{D}$ ýapyk ýaýlada üznüksiz differensirlenýändigini göz önünde tutsak, teoremanyň tassyklamasy (20.1) formuladan gelip çykýar.

Tekizlikde garmonik funksiýanyň integral görnüşi

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\ln\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r} \right) \right] dS$$

formula bilen aňladylýar, bu ýerde L ýapyk çyzyk D ýaýlany çäklendirýän çyzykdyr.

§ 21. Garmonik funksiýanyň esasy häsiýetleri

Goý D - giňişlikde S endigan üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla bolsun. Garmonik funksiýanyň integral görnüşini we Grin formulalaryny peýdalanyp garmonik funksiýanyň esasy häsiýetlerini subut edeliň.

Teorema 1. (normal önümden integral). Eger U(x,y,z)$\in C^1(\overline{D})$ garmonik funksiýa bolsa, onda onuň normal önüminden S üst boýunça integral nula deňdir

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0 \qquad (21.1)$$

Subudy. U(x,y,z) funksiýa D ýaýlada garmonik funksiýa we $\overline{D} = D \cup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz differensirlenýär, ýagny U(x,y,z) funksiýa üçin Grin formulalaryny ulanmak bolýar. Şonuň üçin birinji Grin formulasynda V≡1 goýup (21.1) deňligi alarys. Teorema subut edildi.

Teorema 2 (differensirlenmek). Eger U(x,y,z) funksiýa D ýaýlada garmonik bolsa, onda ol funksiýa D ýaýlada tükeniksiz gezek differensirlenýändir.

Subudy. Hakykatdan hem (x_0, y_0, z_0) nokat D ýaýlanyň içki nokady bolsun. Ol nokady durşuna D ýaýlanyň içinde ýatan $S_1 \subset D$ üst bilen gurşalyň. U(x,y,z) funksiýa D ýaýlada garmoniki funksiýadyr, onda ol funksiýa S_1 üst bilen çäklenen ýaýlada hem garmoniki funksiýadyr. Şunlukda U(x,y,z) funksiýa S_1 üste çenli ikinji tertipli üznüksiz önüme eýedir. (20.7) formulany ulanyp alarys

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r_{MM_0}} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right] dS \qquad (21.2)$$

$(x_0, y_0, z_0) \notin S_1$ bolany üçin

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

üznüksiz funksiýadyr , hem-de x_0, y_0, z_0 üýtgeýän ululyklar boýunça islendik tertipdäki üznüksiz önüme eýedir. Diýmek (21.2) formulanyň sag bölegini integral astynda x_0,y_0,z_0 üýtgeýänler boýunça m gezek (m-islendik natural san) differensirlemek bolýar. Bu ýerden bolsa teoremanyň tassyklamasy gelip çykýar.

Teorema 3 (orta baha hakyndaky teorema). Eger U(x,y,z) funksiýa $K(M_0,\rho)$ şarda garmonik, $\overline{K}(M_0,\rho)$ şarda üznüksiz bolsa, onda ol funksiýanyň $K(M_0,\rho)$ şaryň sferasyndaky orta bahasy onuň sferanyň merkezindäki bahasyna deňdir.

Subudy. $\overline{K_1}(M_0,R_1)$, $R_1<R$ ýapyk şarda U(x,y,z) funksiýa iki gezek üznüksiz differensirlenýär. $K_1(M_0,R_1)$ şara (20.7) formulany ulanyp alarys

$$U(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_{R_1}}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n}-U\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS \qquad (21.3)$$

S_{R_1} sferada r ululyk R_1 hemişelik sana deňdir, ýagny

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{S_{R_1}}=\frac{1}{R_1}$$

S_{R_1} üste daşky normalyň ugry şaryň radiusynyň ugry bilen gabat gelýändigi üçin alarys

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{S_{R_1}}=\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{r=R_1}=-\frac{1}{R_1^2}$$

Şeýlelik bilen (21.3) formula

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R_1}\iint_{S_{R_1}}\frac{\partial U}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi R_1^2}\iint_{S_{R_1}}UdS$$

görnüşi alar, ýa-da (21.1) deňligiň esasynda

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R_1^2}\iint_{S_{R_1}}UdS$$

Soňky deňlikde $R_1\rightarrow R$ bolanda predele geçip, alarys

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R}UdS=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}U(R,\theta,\varphi)\cdot\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (21.4)$$

Teorema subut edildi.

Teorema 4 (maksimum prinsipi). Eger U(M) funksiýa:

1. D ýaýlada garmonik ($\Delta U\equiv 0$),

2. $\overline{D}=D\cap S$ ýaýlada üznüksiz,

3. U(M) $\neq$ const

bolsa, onda ol özüniň iň uly we iň kiçi bahanlaryny D ýaýlanyň S araçäginde kabul edýär.

Subudy. U(M) funksiýanyň $\overline{D}=D\cap S$ ýaýlada üznüksizliginden onuň maksimumynyň barlygy gelip çykýar. Teoremany tersinden subut edeliň. Goý U(M) funksiýa özüniň in uly bahasyny $M_0 \in D$ içki nokatda kabul edýän bolsun:

$$\max_{\overline{D}} U(M)=U(M_0)=A$$

Tutuşlygyna D ýaýlanyň içinde ýatan , merkezi M_0 nokatda bolan R_0 radiusly S_0 sfera guralyň. Onda orta baha hakyndaky teorema boýunça

$$A=U(M_0)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint_{S_0} U(P)dS$$

$\max\limits_{\overline{D}} U(M)=A$ bolany üçin $U(P)\big|_{S_0}\leq A$ bolar. S_0 sferada U(M) funksiýanyň A-dan kiçi bahany alyp bilmeýändigini görkezeliň. Goý käbir $P_0 \in S_0$ nokatda $U(P_0)=A-2\delta<A$ bolsun, onda U(M) funksiýanyň üznüksizligi esasynda, alarys:

$$U(P)<A-\delta \quad \forall P\in S_0^1\subset S_0$$

$S_0''=S_0\setminus S_0^1$ diýip belgiläliň, onda

$$A=U(M_0)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\left[\iint_{S_0^1} U(P)dS+\iint_{S_0''} U(P)dS\right]<\frac{1}{4\pi R^2}\Big[(A\cdot\delta)\left|S_0'\right|+$$

$$+A\left|S_0''\right|\ \Big]=\frac{1}{4\pi R^2}\Big[\left(\left|S_0^1\right|+\left|S_0''\right|\right)A-\delta\left|S_0^1\right|\Big]=A-\frac{\delta\left|S_0^1\right|}{4\pi R^2}<A$$

Alnan gapma-garşylyk $U(M)\big|_{M\in S_0}=A$ bolmalydygyny görkezýär. P_0-erkin nokatdyr. Şonuň üçin hem $\overline{K}(M_0,R_0)$ şarda $U(M)\equiv A$.

Indi erkin N nokady alalyň we U(N)=A bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin M_0 we N nokatlary $L\subset D$ egri çyzyk bilen birikdireliň. Goý d>0 - L egriden S araçäge çenli iň gysga uzaklyk olsun. Ýokarda subut edileniň esasynda $\overline{K}\left(M_0,\frac{d}{2}\right)$

şarda U(N)=U(M_0)=A bolar. Goy M_1 nokat L egriniň $\overline{K}\left(M_0,\frac{d}{2}\right)$ şaryň sferasy bilen iň soňky kesişme nokady bolsun, U(M_1)=A. Ýokarda subut edileniň esasynda $\overline{K}\left(M_1,\frac{d}{2}\right)$ şarda U(M)=A alarys. Şeýle şarlaryň gutarnykly sanyny gurmak bilen L egrini şarlar bilen örteris. N nokat bolsa iň soňky şaryň içine düşer. Şonuň üçin U(N)=A bolar. Şeýlelik bilen U(M) funksiýa içki nokatda özüniň in uly bahasyny (maksimumyny) kabul edýär diýip, U(M)=A bahany aldyk. Bu bolsa teoremanyň 3 şertine garşy gelýär.

Indi U(M) funksiýa özüniň iň kiçi bahasyny (minimumyny) hem S araçäkde kabul edýändigini görkezeliň.

Goý, U(M) funksiýa özüniň minimumyna $M_0 \in D$ içki nokatda eýe bolýan bolsun. Bu bolsa (-U(M)) funksiýanyň özüniň maksimumyna D ýaýlanyň içki nokadynda eýe bolýandygyny aňladýar we teoremanyň subut edilen birinji bölegine garşy gelýär. Şeýlelik bilen ýapyk ýaýlada üznüksiz garmonik funksiýa özüniň ekstremal bahalaryny ýaýlanyň araçäginde kabul edýär ýa-da ol funksiýa hemişelik sana deňdir. Teorema subut edildi.

Maksimum prinsipden aşakdaky netijeler gelip çykýar.

Netije 1. Eger U(M) funksiýa D ýaýlada garmonik, $\overline{D} = D \cup S$ ýaýlada üznüksiz we $U(M)\big|_{M\in S} = 0$ bolsa, onda D ýaýlada

$$U(M) \equiv 0.$$

Subudy. Şerte görä

$$U_{max} = U_{min} = 0$$

Bilişimiz ýaly $U_{\min} \le U \le U_{\max}$ bu ýerden $U(M) \equiv 0 \quad \forall M \in D$ gelip çykýar.

Netije 2. Eger $U_1(M)$, $U_2(M)$ funksiýalar D ýaýlada garmonik , $\overline{D} = D \cup S$ ýaýlada üznüksiz we $\left(U_1 - U_2\right)\big|_S \le 0$ bolsa, onda D ýaýlada

$$U_1(M) - U_2(M) \le 0.$$

Subudy. U(M)= $U_1(M)$ - $U_2(M)$ tapawuda garalyň. Bu funksiýa D ýaýlada garmonik, $\overline{D} = D \cup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we $U(M)\big|_{M\in S} \le 0$ Maksimum prinsipine görä U(M) funksiýa özüniň maksimumyny S üstde kabul edýär, şoňa görä-de

$$U(M)\big|_{M\in D} \le 0 \Rightarrow \left(U_1(M) - U_2(M)\right)_{M\in D} \le 0.$$

Netije 3. Eger $U_1(M)$, $U_2(M)$ funksiýalar D ýaýlada garmonik, $\overline{D} = D \cup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we $\left|U(M)\right|\big|_{M\in S} \le U_2(M)\big|_{M\in S}$ bolsa, onda D ýaýlada

$$\left|U_1(M)\right| \le U_2(M).$$

Subudy. Şerte görä

$$-U_2(M)\big|_S \le U_1(M)\big|_S \le U_2(M)\big|_S$$

Bu ýerden

$$\left(-U_2(M)-U_1(M)\right)\big|_S \le 0, \left(U_1(M)-U_2(M)\right)\big|_S \le 0$$

$-U_2(M)-U_1(M)$, $U_1(M)-U_2(M)$ funksiýalar üçin netije 2-ni ulanyp, alarys:

$$\left(-U_2(M)-U_1(M)\right)\big|_D \le 0, \left(U_1(M)-U_2(M)\right)\big|_D \le 0$$

$\Rightarrow$ $-U_2(M) \le U_1(M)$, $U_1(M) \le U_2(M)$

Soňky iki deňsizligi birleşdirip islendik $M \in D$ üçin alarys

$$-U_2(M) \le U_1(M) \le U_2(M) \Rightarrow \left|U_1(M)\right| \le U_2(M).$$

§22. Drihle we Neýman gyra meselesiniň goýluşy

Eger proses stosionar ýa-da wagta bagly däl bolsa, onda temperaturanyň $U(x,y,z)$ paýlanşy durnuklaşyp wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär, şonuň üçin hem ol

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (22.1)$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Iki üýtgeýänli Laplas deňlemesi

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (22.2)$$

görnüşe eýe.

Goý giňişlikde S ýapyk üst bilen çäklenen D^+ içki ýaýla we D^- daşky ýaýla berilen bolsun. (22.1) deňleme, şeýle hem (22.2) deňleme üçin içki we daşky Dirihle we Neýmon meseleleri aşakdaky ýaly goýulýar.

Mesele D^+ (içki Dirihle meselesi).Aşakdaky

1) D^+ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz;

2) D^+ ýaýlada $\Delta U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýar;

3) $U(x,y,z)\big|_S = f(x,y,z)$, f -berilen funksiýa;

şertleri kanagatlandyrýan $U(x,y,z)$ funksiýany tapmaly.

Mesele D^-(daşky Dirihle meselesi).Aşakdaky

1) $D^- \cup S$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz;

2) D^- ýaýlada $\Delta U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan;

3) $U(x,y,z)\big|_S = f(x,y,z)$ $f(x,y,z) -$ berilen funksiýa;

4) $M \to \infty$ bolanda $U(x.y,z) \to 0$,ýagny $M(x,y,z)$ nokat tükeniksizlige ymtylanda $U(x,y,z)$ funksiýa nula ymtylýar;
şertli kanagatlandyrýan $U(x,y,z)$ funksiýany tapmaly.

Mesele N^+ (içki Neýman meselesi). $\overline{D}^+$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial n}|_S = f(x,y,z,) \quad f -\text{berilen funksiýa,}$$

bu ýerde $n - s$ üstüň normaly, şerti kanagatlandyrýan garmoniki, ýagny (22.1) deňlemäniň çözüwi bolýan $U(x,y,z)$ funksiýany tapmaly.

Mesele N^- (daşky Neýman meselesi). $D^- \cup S$ ýaýlada üznüksiz we

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial n}|_S = f(x,y,z,) \quad f -\text{berilen funksiýa,}$$

bu ýerde $n - s$ üstüň normaly, şerti kanagatlandyrýan garmoniki $U(x,y,z)$ funksiýany tapmaly.

(22.2) deňleme üçin hem Dirihle we Neýman meseleleri edil şunuň ýaly goýulýar.

§23. Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeketäkligi

Teorema 1. Içki we daşky Dirihle meselesiniň çözüwi ýeke – täkdir.

Subudy. Ilki bilen içki Dirihle meselesine garalyň.

Goý meseläniň U_1 we U_2 iki çözüwi bar bolsun. Onda $U = U_1 - U_2$ tapawut aşakdaky şertleri kanagatlandyrýar:

1) $\overline{D}^+$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz;
2) D^+ ýaýlada $\Delta U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýar;
3) $U(x,y,z)|_S = 0$.

Eger $U \neq 0$ we iň bolmanda bir nokatda $U > 0$ bolsa, onda ol funksiýa özüniň maksimumyna ýaýlanyň içinde eýe bolar. Bu bolsa maksimum prinsipine garşy gelýär. Edil şonuň ýaly $U < 0$ bolup bilmez. Diýmek

$$U = U_1 - U_2 \equiv 0$$

ýagny

$$U_1 \equiv U_2$$

Indi daşky Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligini görkezeliň.

Goý, meseläniň U_1 we U_2 iki çözüwleri bolsun. Onda $U = U_1 - U_2$ tapawut

1) $D^- \cup S$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz;
2) D^- ýaýlada $\Delta U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýar;
3) $U(M)|_S = 0$;
4) $M \to \infty$ bolanda $U(M) \to 0$

şertleri kanagatlandyrýar. U funksiýa üçin hem 4) şert ýerine ýetýär, onda islendik $\varepsilon > 0$ san üçin R^* sany $r \geq R^*$ bolanda

$$|U(x,y,z)| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly saýlap almak bolýar, bu ýerde r - M nokatdan koordinat başlangyjyna çenli uzaklyk. Goý, $\overline{M}(x,y,z)$ nokat D^- ýaýlanyň erkin nokady bolsun. $\overline{M}(x,y,z)$ nokady we S üsti durşuna öz içinde saklaýan, merkezi koordinat başlangyjynda we $r \geq R$ radiusly S_r sferany guralyň. Onda maksimum prinsipine görä S_r sfera we S üst bilen çäklenen D_1 ýaýlanyň $\overline{M}$ nokadynda $U(\overline{M}) < \varepsilon$ deňsizlik dogrudyr. ε sanyň erkinliginden bolsa $U \equiv 0$ deňsizlik dogrudyr. $\overline{M}$ nokat D^- ýaýlanyň erkin nokady, şonuň üçin hem D^- ýaýlada $U \equiv 0$, ýagny $U_1 \equiv U_2$. Bu bolsa daşky Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edýär.

§24. Tegelekde polýar koordinatlara geçip üýtgeýän ululyklary bölme usuly bilen Dirihle meselesini çözmek

S: $x^2 + y^2 = R^2$ töwerek bilen çäklenen içki we daşky ýaýlalary degişlilikde D^+, D^- bilen belgiläliň. D^+ we D^- ýaýlalarda içki we daşky Dirihle meselelerine (**mesele** D^+ we **mesele** D^-) garalyň.

Mesele D^+. D^+ ýaýlada

$$\Delta_2 U \equiv U_{xx} + U_{yy} = 0 \qquad (24.1)$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýan, $\overline{D}^+$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we

$$U(x,y)|_S = f(x,y),\ f(x,y) \in C^1(S) \qquad (24.2)$$

gyra şerti kanagatlandyrýan U(x,y) funksiýany tapmaly.

Mesele D^-. D^- ýaýlada (24.1) deňlemäni kanagatlandyrýan, $D^- \cup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz, tükeniksizlikde çäklenen we (24.2) gyra şerti kanagatlandyrýan U(x,y) funksiýany tapmaly.

1. Formal çözüwi gurmak

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ formulalar bilen (r,φ) polýar koordinatalara geçip (24.1)-(24.2) meseläni

$$\Delta_2 U \equiv \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0, \quad (24.3)$$

$$U(r,\varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi), f(\varphi+2\pi)=f(\varphi) \quad (24.4)$$

görnüşde ýazalyň.

U(r,φ) çözüwiň üznüksizliginden we tükeniksizlikde çäklenenliginden onuň periodikligi: U(r,φ+2π) = U(r,φ) we çäklenendigi : şeýle bir A>0 san bar bolup islendik (r, φ) üçin $|U(r,\varphi)| < A$ gelip çykýar.

Dirihle meselelerini Furýe usuly bilen çözeliň. Onuň üçin (24.3) deňlemäniň periodik we çäklenen çözüwini

$$U(r,\varphi)=T(r)\cdot\Phi(\varphi) \quad (24.5)$$

görnüşde gözläliň. U(r,φ) funksiýanyň periodikliginden we çäklenenliginden

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \quad (24.6)$$

$$|T(r)| < A \quad (24.7)$$

gelip çykýar.

(24.5) görnüşdäki çözüwi (24.3) Laplas deňlemesinde goýup, alarys

$$\frac{1}{r}\cdot(rT'(r))'\cdot\Phi(\varphi)+\frac{1}{r^2}T(r)\Phi''(\varphi)=0$$

ya-da

$$\Phi(\varphi)\cdot\left[r^2T''(r)+r\cdot T'(r)\right]+T(r)\cdot\Phi''(\varphi)=0$$

Üýtgeýän ululyklary bölüp alarys

$$\frac{r^2T''(r)+rT'(r)}{T(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Alnan deňligiň çep bölegi diňe r-e bagly, sag bölegi bolsa φ -e baglydyr. Deňligiň ýerine ýetmegi üçin bu gatnaşyklaryň ikisi hem käbir hemişelik sana deň bolmaly. Ol hemişelik sany λ^2 bilen belläp, alarys

$$\Phi''(\varphi)+\lambda^2\Phi(\varphi)=0 \quad (24.8)$$

$$r^2T''(r)+rT'(r)-\lambda^2T(r)=0 \quad (24.9)$$

Eger hemişelik sany $-\lambda^2$ bilen bellän bolsak, onda (24.8) deňlemeden

$$\Phi(\varphi)=C_1e^{\lambda\varphi}+C_2e^{-\lambda\varphi}$$

çözüwi alarys, bu bolsa periodik çözüw däldir. (24.8) deňlemäniň umumy çözüwi

$$\Phi(\varphi) = A' \cdot \cos\lambda\varphi + B' \cdot \sin\lambda\varphi$$

görnüşe eýe. (24.6) gyra şertden peýdalanyp λ=k, k=1,2,3, ... taparys.

Indi λ=0 ýagdaýa garalyň. λ=0 bolanda (24.8) deňlemeden alarys

$$\Phi''(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A_0^1 + B_0^1\varphi,$$

(24.6) şertden bolsa $B_0^1 = 0$ bolmalydygy gelip çykýar.

Şeýlelik bilen (24.8), (24.6) meseläniň $\lambda^2 = k^2$ hususy bahalaryna degişli hususy funksiýalary

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi,$$
$$k = 0,1,2,\ldots$$

görnüşe eýe.

λ=k, k≠0 bolanda (24.9) deňlemäniň çözüwini $T(r)=r^\mu$ görnüşde gözläliň, μ- näbelli san. Bu çözüwi (24.9) deňlemede goýup alarys

$$r^2\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + r\mu r^{\mu-1} - k^2 \cdot r^\mu = 0$$

ýa-da

$$\mu(\mu-1) + \mu - k^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm k.$$

(24.9) deňlemäniň r^k, r^{-k} hususy çözüwleri çyzykly bagly däldir. Onda onuň umumy çözüwi

$$T_k(r) = C_k \cdot r^k + D_k \cdot r^{-k}$$

görnüşde bolar. λ=k=0 bolsa (24.9) deňleme

$$r^2 T''(r) + rT'(r) = 0$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni integrirläp, onuň umumy çözüwini taparys

$$T_0(r) = C_0 \cdot \ln r + D_0$$

Çözüwiň çäklenendigini talap edýän (24.7) şertden $C_0=0$, $T_0(r) = D_0$ bolýandygy görünýär. Sebäbi lnr funksiýa r=0 nokadyň etrabynda (D^+ mesele üçin) we tükeniksizlikde (D^- mesele üçin) çäklenmedikdir ; şeýlelik bilen k=1, 2, 3, ... bahalar üçin tapylan çözüwleriň görnüşleri k=0 bolanda hem dogrudyr.

$\Phi_k(\varphi), T_k(r)$ funksiýalary (24.5) formulada goýup (24.3) deňlemäniň periodik çözüwlerini

$$U_k(r,\varphi) = \left(A_k^1 \cdot \cos k\varphi + B_k^1 \cdot \sin k\varphi\right) \cdot \left(C_k \cdot r^k + D_k \cdot r^{-k}\right), k = 0,1,2,\ldots$$

görnüşde ýazalyň. Çözüwiň çäklenen bolmagy, ýagny (24.7) şertiň ýerine ýetmegi üçin D^+ ýaýlada $D_k=0$, D^- ýaýlada bolsa $C_k=0$ diýip almaly.

Şeýlelik bilen, Laplas deňlemesiniň 2π-periodly hususy periodiki çözüwleri aşakdaky görnüşe eýe

$$U_k(r,\varphi) = r^k \cdot \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \quad (mesele D^+)$$

$$U_k(r,\varphi) = r^{-k} \cdot \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \quad (mesele\, D^-)$$

k=0, 1, 2, …

Eger-de hususy çözüwlerden düzülen hatar we ony r, φ boýunça iki gezek differensirlenip alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda bu hususy çözüwlerden düzülen hatar hem Laplas deňlemesiniň çözüwi bolýar. (24.1) we (24.2) meseläniň çözüwini

$$U(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cdot \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right), \quad (\ D^+ \text{ mesele üçin }) \quad (24.10)$$

$$U(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} \cdot \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right), \quad (\ D^- \text{ mesele üçin }) \quad (24.11)$$

görnüşde gözläliň.

A_k we B_k koeffisiýentleri kesgitlemek üçin (24.4) gyra şertden peýdalanalyň:

$$U(R,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) = f(\varphi) \quad \left(mesele\ D^+\right) \quad (24.10')$$

$$U(R,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{-k} \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) = f(\varphi) \quad \left(mesele\ D^-\right) \quad (24.11')$$

f(φ) funksiýanyň Furýe hataryna garalyň

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum\left(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi\right), \qquad (24.12)$$

bu ýerde

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos k\psi d\psi \qquad (24.13)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int f(\psi)\sin k\psi d\psi$$

k=1, 2, 3, …

(24.10^1) we (24.12), (24.11$^{|}$) we (24.12) hatarlary deňeşdirip, alarys

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2}, A_k=\frac{\alpha_k}{R^k}, B_k=\frac{\beta_k}{R^k} \qquad (mesele\, D^+)$$

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2}, A_k=\alpha_k R^k, B_k=\beta_k R^k \qquad (mesele\, D^-)$$

$A_k$we B_k koeffisiýentleriň bahalaryny (24.10) , (24.11$'$) hatarlarda goýup, tegelek üçin Dirihle meselesiniň formal çözüwlerini alarys:

$$U(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi) \quad (mesele\, D^+) \quad (24.14)$$

$$U(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\left(\frac{R}{r}\right)^k(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi) \quad (mesele\, D^-) \quad (24.15)$$

2.Usulyň esaslandyrylyşy

Indi biz (24.14), (24.15) hatarlaryň ýygnanýandygyny we D^+, D^- ýaýlalarda (24.3), (24.4) Dirihle meseleleriniň degişlilikde çözüwleri bolýan funksiýalary kesgitleýändigini görkezmeli.

Şerte görä $f(\varphi)\in C^1([0,2\pi])$, diýmek

$$\left|\frac{\alpha_0}{2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|+|\beta_k|)$$

hatar ýygnanýar we $\left|\frac{r}{R}\right|\le 1$ bolanda D^+ ýaýlada (24.14) hatar üçin, $\left|\frac{R}{r}\right|\le 1$ bolanda bolsa D^- ýaýlada (24.15) hatar üçin majorant hatar bolýar. Şonuň üçin (24.14), (24.15) hatarlar deňölçegli ýygnanýarlar, hem ol hatarlarda agzama-agza predele geçmek bolýar.

$r\to R$ bolanda (24.14), (24.15) hatarlaryň sag böleklerinde f(φ) funksiýa üçin Furýe hatarlary alynýar, diýmek

$$\lim_{r\to R}U(r,\varphi)=f(\varphi), \forall\varphi$$

ýagny (24.4) gyra şert ýerine ýetýär.

(24.14), (24.15) hatarlaryň Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandygyny görkezeliň.

(24.14) hatary r we φ boýunça iki gezek differensirläp, alarys

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R^2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{r}{R}\right)^{k-2}\cdot\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right)\\&\sum_{k=0}^{\infty} k^2\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\left(-\alpha_k\cos k\varphi-\beta_k\sin k\varphi\right)\end{aligned}\qquad(24.16)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^{k}\cdot N, N=\max_k\left(\left|\alpha_k\right|+\left|\beta_k\right|\right), r_0<R,$$

hatar ýygnanýar (Dalamber nyşany boýunça) we $r \le r_0 < R, 0 \le \varphi \le 2\pi$ bolanda (24.16) hatarlar üçin možarant hatar bolýar. Diýmek (24.16) hatarlar deňölçegli ýygnanýar we (24.14) hatary agzama-agza differensirlemek amaly kanuna laýykdyr. (24.14) hataryň her bir agzasynyň (24.3) deňlemäniň çözüwi bolany üçin umumylaşdyrylan superpozisiýa prinsipi esasynda (24.14) hatar D^+ ýaýlada (r<R) Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar.

(24.15) hataryň D^- ýaýlada (r>R) Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandygy şuňa meňzeş görkezilýär.

Şeýlelik bilen (24.14) funksiýa D^+ meseläniň $\overline{D}^+$ ýapyk ýaýlada , (24.15) funksiýa bolsa D^- meseläniň $\overline{D}^-$ yapyk ýaýlada üznüksiz çözüwi bolýar.

3.Puasson integraly

Tegelek üçin içki we daşky Dirihle meseleleriniň (24.14), (24.15) çözüwlerini integral görnüşinde hem ýazmak bolýar. Onuň üçin ol hatarlary

$$U(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} q^k\cdot\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right)\qquad(24.17)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde

$$q=\begin{cases}\dfrac{r}{R} & (mesele\,D^+)\\[2mm] \dfrac{R}{r} & (mesele\,D^-)\end{cases}\qquad 0\le q<1$$

α_k we β_k koeffisiýentleriň bahalaryny (24.13) formuladan alyp (24.17) hatara goýalyň

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot\left(\cos k\varphi\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos k\psi d\psi+\sin k\varphi\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin k\psi d\psi\right)$$

Integrallary birleşdirip, integrirlemegiň we jemlemegiň tertibini üýtgedip, alarys

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos k(\psi-\varphi)d\psi \qquad (24.18)$$

Cos kτ= $\frac{e^{ik\tau}+e^{-ik\tau}}{2}$ Eýler formulasyndan peýdalanyp $\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos k\tau$ jemi tapalyň

$$\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot\cos k\tau=\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot\frac{e^{ik\tau}+e^{-ik\tau}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot e^{ik\tau}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot e^{-ik\tau}$$

$|q|<1$ bolanda alnan hatarlar tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa bolýar, şonuň üçin

$$\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot\cos k\tau=\frac{1}{2}\cdot\frac{qe^{i\tau}}{1-qe^{i\tau}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{qe^{-i\tau}}{1-qe^{-i\tau}}=\frac{q}{2}\cdot\frac{\left(e^{i\tau}+e^{-i\tau}\right)-2q}{1-q\left(e^{i\tau}+e^{-i\tau}\right)+q^2}=\frac{q\cdot\cos\tau-q^2}{1-2q\cos\tau+q^2}$$

Bu deňligi peýdalanyp, (24.18) deňligi

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{q\cos(\psi-\varphi)-q^2}{1-2q\cos(\psi-\varphi)+q^2}d\psi$$

görnüşde ýazalyň we integrallary birleşdireliň, netijede alarys

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\psi-\varphi)+q^2}d\psi \qquad (24.19)$$

(24.19) integralda $q=\frac{r}{R}$, $q=\frac{R}{r}$ diýip (24.3), (24.4) Dirihle meselesiniň çözüwini Puasson integraly görnüşinde alarys

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{R^2-r^2}{1-2rR\cos(\psi-\varphi)+r^2}d\psi \qquad (\text{mesele } D^+)$$

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{r^2-R^2}{1-2rR\cos(\psi-\varphi)+r^2}d\psi \qquad (\text{mesele } D^-)$$

§25. Gönüburçlukda Laplas deňlemesi üçin Dirihle meselesi

Goý Q={ 0<x<p, 0<y<q } - gönüburçlyk berlen bolsun. Bu ýaýlada içki Dirihle meselesine garalyň.

Mesele D⁺. Q gönüburçlykda

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (25.1)$$

Laplas deňlemesiniň araçäge çenli üznüksiz we

$$U(x,y)\big|_{y=0} = \varphi(x), U(x,y)\big|_{y=q} = \Phi(x) \qquad (25.2)$$

$$U(x,y)\big|_{x=0} = 0, U(x,y)\big|_{x=p} = 0 \qquad (25.3)$$

bu ýerde φ(x), Φ(x) - üznüksiz funksiýalar bolup,

$$\varphi(0) = \varphi(p) = \Phi(0) = \Phi(p) = 0$$

ylalaşyk şertlerini kanagatlandyrýarlar, gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Bu meseläni Furýe usuly bilen çözeliň. Onuň üçin bu (25.1)-(25.3) meseläniň çözüwini

$$U(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \neq 0 \qquad (25.4)$$

görnüşde gözläliň. Onda (25.3) şertden peýdalanyp, alarys

$$\left.\begin{aligned} U(0,y) = X(0)\cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ U(p,y) = X(p)\cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X(p) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25.5)$$

Indi (25.4) çözüwi (25.1) deňlemede goýalyň

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Soňky deňligiň çep bölegi diňe x ululyga bagly bolup,sag bölegi bolsa diňe y ululyga baglydyr. Şonuň üçin bu deňlik diňe ondaky gatnaşyklar hemişelik sana deň bolanda dogrydyr. Ol hemişelik sany μ harpy bilen belläp, alarys

$$X''(x) - \mu \cdot X(x) = 0 \qquad (25.6)$$
$$Y''(y) + \mu \cdot Y(y) = 0 \qquad (25.7)$$

Biz X(x) funksiýa üçin

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \qquad (25.6)$$
$$X(0) = 0, X(p) = 0 \qquad (25.5)$$

Şturm-Liubill meselesini aldyk.

Aşakdaky hallara garalyň:

a) Goý, $\mu>0$ bolsun. Onda (25.6) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\mu}x} \qquad (25.8)$$

bolar. (25.5) gyra şertleri göz öňünde tutup, (25.8) umumy çözüwdäki C_1 we C_2 erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \qquad (25.9)$$
$$X(p) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot e^{\sqrt{\mu}p} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\mu}p} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1 \cdot \left(e^{\sqrt{\mu}p} - e^{-\sqrt{\mu}p}\right) = 0 \qquad (25.10)$$

Bu ýerden $e^{\sqrt{\mu}p} - e^{-\sqrt{\mu}p} \neq 0$ bolany üçin (25.10) deňlikden $C_1=0$. (25.9) deňlikden bolsa $C_2=0$ gelip çykýar. Şeýlelikde biz bu halda

$$X(x) \equiv 0$$

çözüw aldyk. Bu bolsa (25.4) şerti kanagatlandyrmaýar. Diýmek, alnan çözüw bizi gyzyklandyrmaýar.

b) Goý, $\mu=0$ bolsun. Onda bu halda (25.6) deňleme

$$X''(x) = 0$$

görnüşi alar. Onuň umumy çözüwi bolsa

$$X(x) = C_1 x + C$$

görnüşde bolar. Indi (25.5) şerti göz öňünde tutup, C_1 we C_2 erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys

$$X(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$
$$X(p)=0 \Rightarrow C_1 \cdot p=0$$

Bu ýerden $p \neq 0$ bolany üçin $C_2=0$. Diýmek bu halda hem

$$X(x) \equiv 0$$

çözüw aldyk.

ç) Goý, $\mu<0$, ýagny $\mu=-\lambda^2<0$ bolsun. Onda (25.6) deňleme

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \qquad (25.11)$$

görnüşi alar. Onuň umumy çözüwi bolsa

$$X(x)=C_1 \cdot \cos\lambda x+C_2 \cdot \sin\lambda x \qquad (25.12)$$

görnüşde bolar. Indi (25.5) şerti peýdalanyp C_1 we C_2 erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys

$$X(0)=0 \Rightarrow C_1=0$$
$$X(p)=0 \Rightarrow C_2 \cdot \sin\lambda p=0.$$

Eger soňky deňlikde $C_2=0$ diýsek, onda $X(x) \equiv 0$ görnüşli çözüw alarys. Şonuň üçin $C_2 \neq 0$ diýip,

$$\sin\lambda p=0$$

görnüşli trigonometrik deňleme alarys. Bu ýerden

$$\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \qquad (25.13)$$

-hususy bahalary, (25.12) umumy çözüwden bolsa

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{p}x, n=1,2,3,\ldots \qquad (25.14)$$

görnüşli hususy funksiýalary alarys. Şeýlelikde, (25.6), (25.5) Şturm-Liuwill meselesiniň hususy bahalary we hususy funksiýalary degişlilikde (25.13) we (25.14) görnüşdedirler.

$\mu=-\lambda^2<0$ bolanda (25.7) deňleme

$$Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0$$

görnüşi alar. Onuň umumy çözüwi bolsa

$$Y_n(y)=A_n\cdot ch\frac{n\pi}{p}y+B_n\cdot sh\frac{n\pi}{p}y$$

görnüşde bolar.

Tapylan $X_n(x)$, $Y_n(y)$ funksiýalary (25.4) deňlikde goýup hem-de superpozisiýa prinsipinden peýdalanyp, (25.1)-(25.3) meseläniň A_n we B_n erkin hemişeliklere bagly çözüwini alarys

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot ch\frac{n\pi}{p}y+B_n\cdot sh\frac{n\pi}{p}y\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{p}x \tag{25.15}$$

Indi (25.2) şerti peýdalanyp A_n we B_n erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys

$$U(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\frac{n\pi}{p}x$$
$$U(x,q)=\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot ch\frac{n\pi}{p}q+B_n\cdot sh\frac{n\pi}{p}q\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{p}x$$

Alnan bu deňliklere berlen φ(x) we Φ(x) funksiýalaryň Furýe hatary hökmünde garap alarys:

$$A_n=\frac{2}{p}\int_0^p\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$$
$$A_n\cdot ch\frac{n\pi}{p}q+B_n\cdot sh\frac{n\pi}{p}q=\frac{2}{p}\int_0^p\Phi(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$$

Bu sistemany çözüp A_n we B_n erkin hemişelikleri taparys, soňra olary (25.15) deňlikde goýup bolsa, berlen (25.1)-(25.3) meseläniň çözüwini alarys.

§26. Gönüburçlukda Puasson deňlemesi üçin Dirihle meselesi

Q gönüburçlykda Puasson deňlemesi üçin Dirihle meselesine garalyň.

Mesele D^+. Q gönüburçlykda

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x, y) \qquad (26.1)$$

Puasson deňlemesiniň

$$U\big|_{y=0} = \varphi(x), U\big|_{y=q} = \Phi(x) \quad (26.2)$$
$$U\big|_{x=0} = f(y), U\big|_{x=p} = F(y) \quad (26.3)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Bu (26.1)-(26.3) meseläniň çözüwini

$$U(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y) + W(x, y) \qquad (26.4)$$

görnüşde gözläliň. Onda (26.4) çözüwi (26.1) deňlemede we (26.2), (26.3) gyra şertlerde goýup, alarys:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta W = g(x, y),$$
$$\left(V_1 + V_2 + W\right)\big|_{y=0} = \varphi(x), \left(V_1 + V_2 + W\right)\big|_{y=q} = \Phi(x),$$
$$\left(V_1 + V_2 + W\right)\big|_{x=0} = f(y), \left(V_1 + V_2 + W\right)\big|_{x=p} = F(y).$$

Indi V_1 we V_2 funksiýalary degişlilikde aşakdaky şertleri kanagatlandyrar ýaly edip saýlalyň:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta V_1 = 0 \\ V_1\big|_{y=0} = \varphi(x), V_1\big|_{y=q} = \Phi(x) \\ V_1\big|_{x=0} = 0, V_1\big|_{x=p} = 0 \end{array}\right\} \qquad (26.5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta V_2 = 0 \\ V_2\big|_{y=0} = 0, V_2\big|_{y=q} = 0 \\ V_2\big|_{x=0} = f(y), V_2\big|_{x=p} = F(y) \end{array}\right\} \qquad (26.6)$$

Onda W(x,y) funksiýa

$$\Delta W = g(x,y) \qquad (26.7)$$

deňlemäniň

$$W\big|_{y=0} = W\big|_{y=q} = W\big|_{x=0} = W\big|_{x=p} = 0 \qquad (26.8)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwidir.

Biz (26.5) we (26.6) meseleleri ýokarda çözdik. Şonuň üçin garalýan (26.1)-(26.3) meseläni çözmekligi (26.7)-(26.8) meseläni çözmeklige getirdik.

Indi (26.7), (26.8) meseläniň çözüwini degişli birölçegli Şturm-Liuwilli meselesiniň hususy funksiýalary boýunça ýazylan hatar görnüşinde gözläliň:

$$W(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)\cdot \sin\frac{k\pi}{p}x \qquad (26.9)$$

W(x,y) funksiýa $W(0,y) = W(p,y) = 0$ gyra şertleri kanagatlandyrýar, ýöne onuň (26.8) gyra şertleri doly kanagatlandyrmagy üçin

$$Y_k(0) = Y_k(q) = 0 \qquad (26.10)$$

şertleri hem talap etmelidiris.

Indi g(x,y) funksiýany $\sin\frac{k\pi}{p}x$ funksiýalar boýunça hatara dagydyp, soňra ony we (26.9) çözüwi (26.7) deňlemede goýup, alarys:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \cdot Y_k(y)\cdot \sin\frac{k\pi}{p}x + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k''(y)\cdot \sin\frac{k\pi}{p}x = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y)\cdot \sin\frac{k\pi}{p}x,$$

bu ýerde

$$g_k(y) = \frac{2}{p}\int_0^p g(x,y)\cdot \sin\frac{k\pi}{p}x dx$$

Furýe hataryna dagytmaklygyň ýeke-täkliginden

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 Y_k(y) = g_k(y) \qquad (26.11)$$

deňlemäni aldyk.

Şeýlelikde, $Y_k(y)$ funksiýany tapmak üçin (26.11), (26.10) meseläni aldyk.

Goý, $\bar{Y}k(y)$ funksiýa (26.11) birjynsly däl deňlemäniň haýsy hem bolsa bir hususy çözüwi bolsun. Onda onuň umumy çözüwi

$$Y_k(y) = A_k \cdot ch\frac{k\pi}{p}y + B_k \cdot sh\frac{k\pi}{p}y + \bar{Y}k(y) \qquad (26.12)$$

görnüşde bolar. Indi (26.10) gyra şertleri peýdalanyp, alarys:

$$\left.\begin{aligned} &Y_k(0) = 0 \Rightarrow A_k + \bar{Y}k(0) = 0 \\ &Y_k(q) = 0 \Rightarrow A_k \cdot ch\frac{k\pi}{p}q + B_k \cdot sh\frac{k\pi}{p}q + \bar{Y}k(q) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (26.13)$$

Bu (26.13) sistemany çözüp A_k , B_k koeffisiýentleri taparys, soňra olary (26.12) deňlikde goýup, (26.12),(26.10) gyra meseläniň çözüwini alarys. Ol çözüwi bolsa (26.9) deňlikde goýup, (26.7)-(26.8) meseläniň çözüwini taparys.

Şeýlelikde, goýlan (26.1)-(26.3) meseläniň çözüwi (26.4) deňlik arkaly hatar görnüşinde ýazylýar. Eger-de bu hatar deňölçegli gygnanyp, ony x we y boýunça agzama-agza iki gezek differensirlemek hem mümkin bolsa, onda ol regulýar çözüwdir.

§27. Laplas deňlemesi üçin Dirihle meselesiniň Grin funksiýasy we onuň käbir häsiýeyleri

1.Dirihle meselesiniň Grin funksiýasy

Goý, D - S ýapyk üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla, U(M)=U(x,y,z) bolsa D ýaýlada garmonik funksiýa bolsun. Onda belli bolşy ýaly

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS \qquad (27.1)$$

formula ýerine ýetýär, bu ýerde r - $M_0 \in D$ nokatdan $M \subset S$ erkin üýtgeýän nokada çenli uzaklyk.

Bilşimiz ýaly Dirihle meselesinde S araçäkde diňe $U(M)|_S$ funksiýa berilýär, normal boýunça $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S$ önüm bolsa berilmeýär (näbelli). Eger (27.1) deňlikde normal boýunça önüm integral astyndan ýok bolar ýaly özgertme edip bilsek, onda ol deňlik D ýaýlada $U(M)|_S$ bahasy belli garmonik funksiýany tapmaklyga, ýagny Dirihle meselesiniň çözüwini ýazmaklyga mümkinçilik berer.

D ýaýlada garmonik $g(M,M_0)\in C^1(\overline{D})$ funksiýa garalyň. U(M) we g(M,M_0) funksiýalara (19.4) ikinji Grin formulasyny ulanyp alarys

$$0=\iint_S\left[U(M)\frac{\partial g(M,M_0)}{\partial n}-g(M,M_0)\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right]dS \quad (27.2)$$

(27.1) deňlikden (27.2) deňligi aýralyň

$$U(M_0)=\iint_S\left[\left(g(M,M_0)+\frac{1}{4\pi r}\right)\frac{\partial U(M)}{\partial n}-U(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(g(M,M_0)+\frac{1}{4\pi r}\right)\right]dS$$

Indi

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(M,M_0) \quad (27.3)$$

belgileme girizip, soňky deňligi

$$U(M_0)=\iint_S\left[G(M,M_0)\frac{\partial U(M)}{\partial n}-U(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\right]dS \quad (27.4)$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerden görnüşi ýaly, eger g(M,M_0) funksiýany $G(M,M_0)\big|_S=0$ bolar ýaly saýlap alsak, onda $\left.\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right|_S$ integral aşagyndan ýok bolar.

Kesgitleme. Eger G(M,M_0) funksiýa:

1^0. M nokada görä funksiýa hökmünde D ýaýlanyň M_0 nokadyndan başga ähli nokatlarynda garmonik;

2^0. $G(M,M_0)\big|_{M\in S}=0$

$3^{0.}$ G(M,M_0)=$\frac{1}{4\pi r}+g(M,M_0)$ (27.3)

bu ýerde r=$|M_0M|$, g(M,M_0) - D ýaýlada garmonik funksiýa; şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa Laplas deňlemesi üçin Dirihle meselesiniň **Grin funksiýasy** diýilýär.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, Grin funksiýasyny gurmaklyk , onuň

$$\Delta g(M,M_0)=0,\ g(M,M_0)\big|_S=-\frac{1}{4\pi r}\ (M_0\in D)$$

Dirihle meselesiniň çözüwi bolýan g(M,M_0) regulýar bölegini tapmaklyga getirilýär.

(27.4) formuladan aşakdaky tassyklama gelip çykýar.

Eger D ýaýlada Grin funksiýasy bar bolsa we

$$\Delta U(M)=0, U(M)|_S = f(M) \quad (27.5)$$

Dirihle meselesiniň $\overline{D}$ ýapyk ýaýlada özüniň birinji tertipli önümleri bilen birlikde üznüksiz çözüwi bar bolsa, onda ol çözüwi

$$U(M_0)=-\iint_S f(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}dS \quad (27.6)$$

formula görnüşinde berilýär.

Göräýmäge (27.6) formula peýdasyz (manysyz) ýaly, sebäbi bir Dirihle meselesi başga bir Dirihle meselesi bilen çalşyrylýar. Ýöne beýle däldir. Köp möhüm ýaýlalar üçin Grin funksiýasyny, diýmek (27.5) Dirihle meselesiniň çözüwini anyk görnüşde ýazmak bolýar.

(27.6) formuladan Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkliginiň we durnuklylygynyň gelip çykýandygyny belläliň.

Daşky Dirihle meselesi üçin Grin funksiýasy ýokardaky ýaly girizilýär (kesgitlenýär).

Bellik. (27.6) formula getirilip çykarylanda Dirihle meselesiniň $\overline{D}=D\cup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz differensirlenýän çözüwi bar diýip güman edildi. Eger S - Lýapunow üsti diýip atlandyrylýan üst bolsa, onda A.M. Lýapunowyň derňewleri (27.6) formulanyň Dirihle meselesiniň $U\in C(\overline{D})$ çözüwini hem berýändigini görkezýär.

2. Grin funksiýasynyň häsiýetleri

Häsiýet 1. Eger Grin funksiýasy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

Subudy. D ýaýlada

$$G_1(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g_1(M,M_0)$$

$$G_2(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g_2(M,M_0)$$

iki sany Grin funksiýasy bar diýip güman edeliň. Onda

$$g(M,M_0)=G_1(M,M_0)-G_2(M,M_0)=g_1(M,M_0)-g_2(M,M_0)$$

funksiýa D ýaýlada garmonik we

$$g(M,M_0)|_{M\in S}=0$$

Ýeke-täklik teoremasyndan

$$g(M,M_0)\equiv 0 \Rightarrow G_1(M,M_0)\equiv G_2(M,M_0)$$

gelip çykýar.

Häsiýet 2. G(M,M_0) Grin funksiýasy D ýaýlanyň içinde polojiteldir.

Subudy. M_0 nokatdyň etrabynda $\frac{1}{r}$ fündamental çözüw çäksiz artýar, ýagny $M \to M_0$ bolanda $\frac{1}{r}\to\infty$, g(M,M_0) funksiýa üznüksiz we çäklenen, şonuň üçin $\delta > 0$ san bar bolup merkezi M_0 nokatda bolan δ radiusly S(M_0, δ) = S_δ sferanyň üstünde

$$G(M,M_0)\Big|_{M\in S_\delta} = \left(\frac{1}{4\pi r} + g(M,M_0)\right)\Bigg|_{M\in S_\delta} > 0$$

alarys. G(M,M_0) funksiýa S üstde nula öwrülýär: $G(M,M_0)\big|_{M\in S} = 0$ Bu ýerden garmonik funksiýanyň maksimum prinsipinden G(M,M_0) funksiýanyň D ýaýlada polojiteldigi gelip çykýar.

Häsiýet 3. Grin funksiýasy simmetrikdir, ýagny

$$G(M,M_0) \equiv G(M_0,M). \qquad (27.7)$$

Subudy. D ýaýladan M_1 , M_2 erkin nokatlary alalyň we D ýaýladan $K(M_1,\varepsilon), K(M_2,\varepsilon)$ şarlary aýralyň. Bu şarlaryň üstlerini degişlilikde S_1 , S_2 bilen belgiläliň. $S\cup S_1\cup S_2$ araçäkli D_ε ýaýlada U= G(M,M_1) , V= G(M,M_2) funksiýalar garmonik funksiýalardyr. Bu funksiýalara D_ε ýaýlada (19.4) ikinji Grin formulasyny ulanalyň. Alarys

$$\iiint_{D_\varepsilon}\left[G(M,M_1)\cdot\Delta G(M,M_2) - G(M,M_2)\cdot\Delta G(M,M_1)\right]d\tau =$$

$$= \iint_{S\cup S_1\cup S_2}\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n} - G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right]dS \qquad (27.8)$$

D_ε ýaýlada $\Delta G(M,M_1) = 0, \Delta G(M,M_2) = 0$, şonuň üçin D_ε ýaýla boýunça integral nula deňdir. $G(M,M_1)\big|_{M\in S} = 0, G(M,M_2)\big|_{M\in S} = 0$ gyra şertleriň esasynda S üst boýunça integral hem nula deňdir. Bu aýdylanlaryň esasynda (27.8) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$\iint\limits_{S_1}\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}-G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right]dS=$$
$$=\iint\limits_{S_2}\left[G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}-G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}\right]dS \qquad (27.9)$$

(27.9) deňligiň çep bölegini özgerdeliň. S_1 sferada $\frac{1}{r}$ fundamental çözüw $\frac{1}{\varepsilon}$ hemişelik bahany kabul edýär:

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{M\in S_1}=\frac{1}{\varepsilon}$$

Şonuň üçin

$$G(M,M_1)\Big|_{M\in S_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}+\left.\frac{\partial g(M,M_1)}{\partial n}\right|_{M\in S_1} \qquad (27.10)$$

S_1 sfera $M\in S_1$ nokatda geçirlen **n** daşky (D_δ ýaýladan çykýan) normal ol sferanyň radiusy boýunça onuň garşysyna ugrukdyrylandyr, şoňa görä

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right|_{M\in S_1}=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon^2}$$

diýmek

$$\left.\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right|_{M\in S_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}+\left.\frac{\partial g(M,M_1)}{\partial n}\right|_{M\in S_1} \qquad (27.11)$$

bu ýerde $\frac{\partial g(M,M_1)}{\partial n}$ üznüksiz funksiýa, sebäbi g(M,M_1) funksiýa D ýaýlada garmonikidir. $\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}, G(M,M_2)$ funksiýalar S_1 sferada üznüksiz. Şeýlelik bilen S_1 üst boýunça integralda integral astyndaky funksiýa üznüksiz funksiýadyr. (27.10), (27.11) deňliklerden peýdalanyp we orta baha hakyndaky teoremany ulanyp, alarys

$$\iint_{S_1}\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}-G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right]=$$

$$=\left[\left(A+g\left(M^*,M_1\right)\right)\frac{\partial\left(M^*,M_2\right)}{\partial n}-G\left(M^*,M_2\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}+\frac{\partial g\left(M^*,M_1\right)}{\partial n}\right)\right]\cdot 4\pi\varepsilon^2,$$

bu ýerde M^* - S_1 sferanyň käbir nokady. $\varepsilon\to 0$ bolanda S_1 sfera M_1 nokada ýygnanýar, $M^*\to M_1, A\cdot\varepsilon^2\to 0,$ şoňa görä-de

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_1}\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}-G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right]dS=-G(M_1,M_2)\quad (27.12)$$

Şeýle pikir ýöretmäni ulanyp, S_2 üst boýunça integral üçin alarys:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_2}\left[G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}-G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}\right]dS=-G(M_2,M_1)\quad (27.13)$$

Indi (27.8) deňlikde $\varepsilon\to 0$ bolanda predele geçip we (27.12), (27.13) deňlikleri göz öňünde tutup, alarys

$$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1).$$

Bu ýerden, M_1 we M_2 nokatlaryň erkinligi esasynda (27.7) deňlik gelip çykýar.

Netije. Grin funksiýasy M nokat üýtgemeýän bolsa, onda ol M_0 ($M\neq M_0$) nokadyň koordinatalary boýunça Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar.

Bellik. Tekizlikde Grin funksiýasy

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+g(M,M_0), r=|M_0M|$$

görnüşe eýedir. L ýapyk egri çyzyk bilen çäklenen D tekiz ýaýlada içki Dirihle meselesiniň çözüwi bolsa

$$U(M_0)=-\int_L f(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}dS\quad ,\quad U(M)\big|_{M\in L}=f(M)$$

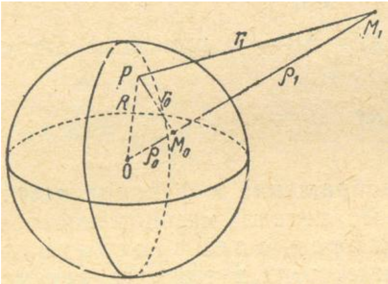
görnüşde ýazylýar.

§28. Şar üçin içki Dirihle meselesini Grin funksiýasynyň kömegi bilen çözmek. Puasson integraly

1. Şar üçin Grin funksiýasy.

Goý, şarynň içinde garmonik, ýapyk şarda üznüksiz we şaryň S üstünde berlen f(P) üznüksiz bahany kabul edýän U(M)=U(x,y,z) funksiýany tapmaly bolsun.

Bu meseläni çözmek üçin, ilki bilen şar üçin Grin funksiýasyny guralyň. Goý, R - merkezi O nokatda bolan şaryň radiusy bolsun. Şaryň içinden erkin M(x,y,z) nokady alalyň we ρ harpy bilen ol nokatdan şaryň merkezine çenli uzaklygy belläliň.



M nokadyň üstünden geçýän radiusyň ugrunda

$$\rho \cdot \rho_1 = R^2 \qquad (28.1)$$

deňligi kanagatlandyrýan $\rho_1 = |OM_1|$ kesimi alalyň.

M nokada kesgitli M_1 nokady degişli edýän (28.1) özgertme radiusa ters özgertme bolýar, M_1 nokada bolsa M nokada çatyrymly nokat diýilýär. Käbir $P(\xi,\eta,\zeta)$ nokady alalyň we ol nokatdan M, M_1 nokatlara çenli uzaklyklary degişlilikde r, r_1 bilen belgiläliň. P nokat şaryň üstünde ýatanda r we r_1 uzaklyklaryň arasyndaky gatnaşygy tapalyň. Onuň üçin OPM we OPM_1 üçburçluklara garalyň. Bu üçburçluklar meňzeşdirler, sebäbi O depedäki burc umumy, oňa sepleşýän taraplar bolsa (28.1) deňlik esasynda proporsionaldyr:

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1}$$

Üçburçluklaryň meňzeşliginden, alarys

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R}$$

ýa-da

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} = 0 (P \in S) \qquad (28.2)$$

gatnaşyk gelip çykýar.

Indi şar üçin Grin funksiýasynyň

$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} \qquad (28.3)$$

görnüşe eýedigini görkezeliň.

Hakykatdan hem, G(P,M) funksiýa P nokada görä funksiýa hökmünde şaryň içinde, M nokatdan başga nokatlarda, garmonik funksiýa, M nokatda bolsa - tükeniksizlige öwrülýär. (28.2) deňlikden görnüşi ýaly, şaryň üstünde ol nula öwrülýär. Şeýlelik bilen (28.3) deňlik boýunça kesgitlenýän funksiýa Dirihle meselesiniň Grin funksiýasynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýar.

2. Puasson integraly

Tapylan (28.3) Grin funksiýasyny (27.5) formulada goýup, alarys

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S f(P)\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}dS \qquad (28.4)$$

(28.4) formulany özgerdeliň. Alarys

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\cos(n\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\cos(n\eta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\cos(n\zeta) =$$
$$= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial\xi}\cdot\cos(n\xi)+\frac{\partial r}{\partial\eta}\cdot\cos(n\eta)+\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cdot\cos(n\zeta)\right] =$$
$$= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\xi-x}{r}\cos(n\xi)+\frac{\eta-y}{r}\cos(n\eta)+\frac{\zeta-z}{r}\cos(n\zeta)\right] =$$
$$= -\frac{1}{r^2}\left[\cos(r\xi)\cos(n\xi)+\cos(r\eta)\cos(n\eta)+\cos(r\zeta)\cos(n\zeta)\right] =$$
$$= -\frac{1}{r^2}\cdot\cos(r,n)$$

Edil şuňa meňzeşlikde, alarys

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{r_1^2}\cdot\cos(r_1,n)$$

Şeýlelik bilen

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\cos(r,n)+\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1^2}\cdot\cos(r_1,n) \qquad (28.5)$$

OMP we OM_1P üçburçluklardan kosinuslar teoremasyny peýdalanyp, alarys

$$\rho^2 = R^2+r^2-2rR\cos(r,n)$$
$$\rho_1^2 = R^2+r_1^2-2r_1R\cos(r_1,n)$$

Bu ýerden $\cos(r,n)$ we $\cos(r_1,n)$ tapalyň.

$$\cos(r,n)=\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2rR}, \cos(r_1,n)=\frac{R_1^2+r_1^2-\rho_1^2}{2r_1R}$$

Bu tapylan bahalary (28.5) formulada goýup, alarys

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}\right)=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2\rho r_1^2}=\left\{\rho_1=\frac{R^2}{\rho}, r_1=\frac{R}{\rho}r\right\}=$$

$$=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{R^2+\frac{R^2}{\rho^2}r^2-\frac{R^4}{\rho^2}}{2R^4r^3}=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{\rho^2R^2+R^2r^2-R^4}{2R^3r^3}=$$

$$=\frac{2\rho^2-2R^2}{2Rr^3}=\frac{\rho^2-R^2}{Rr^3}$$

Normal boýunça önümiň tapylan aňlatmasyny (28.4) formulada goýup, alarys

$$U(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_S f(P)\cdot\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3}dS \qquad (28.6)$$

(28.6) formula **Puasson formulasy** diýilýär.

Şeýlelik bilen, eger şar üçin içki Dirihle meselesiniň çözüwi bar bolup, ol çözüw özüniň birinji tertipli önümleri bilen birlikde ýapyk şarda üznüksiz bolsalar, onda ol çözüw (28.6) Puasson formulasy arkaly ýazylýar.

3. Puasson formulasynyň esaslandyrylyşy

Eger f(P) funksiýa üznüksiz bolsa, onda (28.6) Puasson formulasynyň şar üçin içki Dirihle meselesiniň çözüwi bolýandygyny subut edeliň. Onuň üçin (28.6) formuladaky integralyň şaryň içinde garmoniki funksiýa bolýandygyny we (6) formula bilen kesgitlenýän U(M) funksiýanyň ýapyk şarda üznüksizdigini hem-de şaryň S üstünde berlen üznüksiz f(P) bahany kabul edýändigini görkezmeli, ýagny M nokat S üstde alnan erkin P nokada ymtylanda U(M) funksiýanyň bahasy f(P) baha ymtylmaly.

$\rho<R$ bolanda U(M) funksiýanyň garmonikligi aşakdaky deňlikden gelip çykýar

$$\Delta\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)=\Delta\left(\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}\right)-\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=$$

$$=-2R\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-2R\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=0(P\in S)$$

Şaryň üstünden erkin N nokady alalyň we M→N bolanda U(M)→ f(N) bolýandygyny görkezeliň. Getirilip çykarylyşyndan görnüşi ýaly (28.6) formula f(P)≡1 hususy halda hem dogrydyr. Bu ýagdaýda Dirihle meselesiniň çözüwiniň bardygy aýdyňdyr, özünem ol çözüw

U(M)≡1

Şeýlelik bilen

$$1 = \iint_S \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \qquad (28.7)$$

(28.7) deňligiň iki bölegini hem f(N) funksiýa köpeldeliň we (28.6) Puasson formulasyndan aýyralyň

$$U(M) - f(N) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \qquad (28.8)$$

N nokady radiusy 2δ bolan şar bilen gurşalyň, özünem δ sany S sferanyň şu şaryň içine düşýän hemme nokatlarynda f(P) funksiýanyň üznüksizligi esasynda

$$| f(P) - f(N) | < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (28.9)$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly ýeterlikçe kiçi edip alalyň, ε>0 - ýeterlikçe kiçi erkin san. σ bilen S sferanyň merkezi N nokatda bolan 2δ radiusly şaryň içine düşýän bölegini belläliň, galan bölegini bolsa S\σ bilen belläliň. Onda (28.8) deňligi aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$\begin{aligned} U(M) - f(N) &= \\ &= \frac{1}{4\pi R} \cdot \iint_\sigma [f(P) - f(N)] \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi R} \cdot \iint_{S\setminus\sigma} [f(P) - f(N)] \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \end{aligned} \qquad (28.10)$$

(28.10) deňligiň sag bölegindäki goşulyjylaryň her birini aýratynlykda bahalandyralyň. (28.9) deňsizligiň we (28.7) deňligiň esasynda alarys

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{4\pi R} \cdot \iint_\sigma [f(P) - f(N)] \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4\pi R} \cdot \iint_\sigma \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4\pi R} \cdot \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \qquad (28.11)$$

(28.11) deňsizlik şaryň içindäki islendik M nokat üçin ýerine ýetýär. (28.10) deňligiň sag bölegindäki ikinji integraly bahalandyralyň. Onuň üçin merkezi N nokatda bolan δ radiusly täze şar guralyň. Goý M nokat N nokada ýakynlaşyp şu şaryň içinde ýatan bolsun. Eger P nokat S-σ üstde ýatan bolsa, onda M nokadyň şeýle ýagdaýynda r=$|MP| > \delta$ deňsizlik ýerine ýeter, f(P) funksiýa S sferanyň üstünde üznüksiz, diýmek ol çäklenendir, ýagny

$|f(P)| \le K.$

Şeýlelik bilen (28.10) deňligiň sag bölegindäki ikinji integral aşakdaky ýaly bahalandyrylar

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\cdot\iint\limits_{S\backslash\sigma}[f(p)-f(N)]\cdot\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS\right| \le$$

$$\le \frac{K}{2\pi R}\cdot\iint\limits_{S\backslash\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS \le \frac{K(R^2-\rho^2)}{2\pi R\delta^3}\cdot\iint\limits_{S'}dS = \frac{2KR(R^2-\rho^2)}{\delta^3}$$

M→N bolanda R^2-ρ^2→0, onda

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\cdot\iint\limits_{S\backslash\sigma}[f(P)-f(N)]\cdot\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (28.12)$$

(28.11) we (28.12) deňsizlikleriň esasynda (28.10) deňlikden alarys

$$|U(M)-f(N)| < \varepsilon$$

ε>0 - erkin san, şonuň üçin hem soňky deňsizlikden

$$\lim_{M\to N}U(M) = f(N)$$

gelip çykýar.

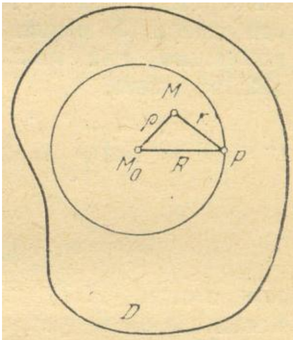
Merkezi O nokatda bolan sferik koordinatalary girizeliň. Goý (θ',φ') - P nokadyň burç koordinatalary bolsun. (ρ,θ,φ) - M nokadyň sferik koordinatalary bolsun, γ - bilen OP we OM wektorlaryň arasyndaky burçy belläliň. Onda (28.6) Puasson formulasy aşakdaky görnüşi alar:

$$U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{R}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\cdot\frac{(R^2-\rho^2)\cdot\sin\theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2-2R\rho\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}$$

4. Puasson integralynyň netijeleri

D ýaýlanyň içinde otrisatel däl $U(M)$ garmoniki funksiýa garalyň. D ýaýlanyň käbir M_0 nokadynyň daşyndan merkezi M_0 nokatda bolan, durşuna D ýaýlanyň içinde ýatan, R radusly S sferany guralyň.

M bilen S sferanyň içinde ýatan käbir nokady belgiläliň. M_0MP üçburuçlukdan alarys.



$$R-\rho \le r \le R+\rho$$
$$(R-\rho)^3 \le r^3 \le (R+\rho)^3$$
$$\frac{1}{(R+\rho)^3} \le \frac{1}{r^3} \le \frac{1}{(R-\rho)^3}$$

$$\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2} \le \frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{r^3} \le$$
$$\le \frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}$$

Soňky deňsizligi $U(P)$ funksiýa köpeldip alarys.

$$\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}U(P) \le \frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{r^3}U(P) \le \frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}U(P)$$

ýa-da

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S \frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}\iint_S U(P)ds \le \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}U(P)ds \le \frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{1}{(R-\rho)^2}\iint_S U(P)ds$$

Soňky deňsizlikden Puasson integralyny ulanyp alarys.

$$\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}\cdot\frac{1}{4\pi R}\iint_S U(P)ds \le U(M) \le \frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S U(P)ds$$

Orta baha hakynda teoremany ulanyp alarys.

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}U(M_0) \le U(M) \le \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}U(M_0) \qquad \mathbf{(28.13)}$$

(28.13) deňsizlige **Garnak deňsizligi** diýilýär. Bu deňsizlik funksiýanyň S sferanyň içinde ýatan nokatdaky bahasyny ol sferanyň merkezindäki bahasy bilen bahalandyrýar.

Teorema. Bütin giňişlikde garmoniki funksiýa toždestwolaýyn nula deňdir.

Subudy. Goý $U(M)$ funksiýa bütin giňişlikde garmoniki funksiýa bolsun. Merkezi koordinata başlangyjynda bolan erkin radusly S sferany guralyň. Bu sferanyň içinde $U(M)$ garmoniki funksiýa sferanyň üstündäki bahasynyň, ýagny Puasson formulasynyň kömegi bilen aňladyp bilner. Alarys

$$U(M) = \frac{1}{4\pi R}\iint_S U(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dr \qquad (28.14)$$

Indi R sany $|U(P)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly saýlalyň bu mümkin sebäbi $U(P) \to 0$ eger-de $P \to \infty$. Onda (28.14) deňlikden alarys

$$|U| = \left|\frac{1}{4\pi R}\iint_S U(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}ds\right| \le \frac{1}{4\pi R}\iint_S |U(P)|\frac{R^2-\rho^2}{r^3}ds$$

$$< \varepsilon\frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}ds = \varepsilon$$

sebäbi

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}ds = 1$$

Diýmek $|U(P)| < \varepsilon$ $.\varepsilon < 0$ sanyň erkinliginden $U(M) = 0$. M nokadyň erkinligi üçin bütin san okunda $U \equiv 0$. Teorema subut edildi.

§29. Şar üçin daşky Dirihle meselesi

Goý, R - merkezi O nokatda bolan şaryň radiusy bolsun we ol şaryň S üstünde erkin, üznüksiz f(P) funksiýa berlen bolsun.

Şar üçin daşky Dirihle meselesiniň çözüwi

$$U(M) = \frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{\rho^2-R^2}{r^3}f(P)dS \qquad (29.1)$$

$$\rho = |OM|, r = |MP|, \rho \to R,$$

Puasson integraly bilen berilýär.

Hakykatdan hem, $\rho>R$ bolanda, ýagny şaryň daşynda (29.1) integral bilen kesgitlenýän U(M) funksiýanyň

$$\Delta U(M)=0$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandygyny §28-däki ýaly subut etmek bolýar. Indi $M\to\infty$ bolanda U(M) funksiýanyň nula deňölçegli ymtylýandygyny görkezmeli. M nokady $\rho>2R$ ýa-da $R<\frac{\rho}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly koordinatalar başlangyjyndan ýeterlikçe daşda alalyň. Onda $r>\rho-R$ deňsizligiň esasynda

$$r>\rho-R>\rho-\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{2}$$

Bu ýerden

$$\frac{1}{r^3}<\frac{8}{\rho^3}$$

we

$$\frac{\rho^2-R^2}{r^3}<\frac{8\left(\rho^2-R^2\right)}{\rho^3}<\frac{8}{\rho}$$

Diýmek

$$|U(M)|<\frac{1}{\rho}\cdot\frac{2}{\pi R}\iint\limits_S|f(P)|dS<\frac{C}{\rho}$$

bu ýerde

$$C=\frac{2}{\pi R}\iint\limits_S|f(P)|dS$$

Soňky deňsizlikden görnüşi ýaly $\rho\to\infty(M\to\infty)$ bolanda U(M) funksiýanyň nula ymtylýandygy görünýär. $M\to N$ $(N\in S)$ bolanda $U(M)\to f(N)$ bolýandygyny görkezmek üçin (29.1) integraly sferik koordinatalarda ýazalyň

$$U(\rho,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}f(\theta',\varphi')\frac{\rho^2-R^2}{\left(R^2-2R\rho\cos\gamma+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \quad (29.2)$$

bu ýerde (ρ,θ,φ) - M nokadyň sferik koordinatalary, (θ',φ') -P nokadyň burç sferik koordinatalary, $\gamma=\angle MOP$. $M(\rho,\theta,\varphi)$ nokatda radiusa ters özgertme (inwersiýa) edeliň. Özgerdilen $M_1(\rho_1,\theta,\varphi)$ nokat OM gönüniň üstünde, şaryň merkezinden ρ_1 daşlykda, onuň içinde ýatar we

$$\rho\rho_1=R^2$$

şerti kanagatlandyrar.

Indi (29.2) integraly

$$U(\rho,\theta,\varphi)=\frac{\rho_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R^2-\rho_1^2}{\left(R^2-2R\rho_1+\rho_1^2\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \qquad (29.3)$$

görnüşde ýazalyň ($\rho_1<R$). $M(\rho,\theta,\varphi)$ nokat S sferanyň üstünde ýatan erkin $N(\rho,\theta,\varphi)$ nokada ymtylanda $M_1(\rho_1,\theta,\varphi)$ nokat hem şaryň içinden şol $N(\rho,\theta,\varphi)$ nokada ymtylar. Şarda içki Dirihle meselesi üçin alnan netijäniň esasynda, $M_1\to N$ bolanda alarys

$$\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R^2-\rho_1^2}{\left(R^2-2R\rho_1+\rho_1^2\right)^{3/2}}\cdot\sin\theta' d\theta' d\varphi' \to f(N)$$

Onda $M\to N$ bolanda $\rho_1\to R$ bolýandygyny göz öňünde tutup, (29.3) formulanyň sag bölegi hem f(N) baha ymtylar diýip tassyklamak bolýar.

Şeýlelikde, (29.1) Puasson integraly bilen kesgitlenýän U(M) funksiýa şar üçin daşky Dirihle meselesiniň ähli talaplaryny kanagatlandyrýar, ýagny onuň çözüwini berýär.

§30. Garmoniki funksiýanyň önümleriniň tükeniksizlikde özlerini alyp baryşlary

Goý, U(M) - S ýapyk üst bilen çäklenen D^- ýaýlada garmonik funksiýa bolsun. Koordinatalar başlangyjyny D^+ ýaýlanyň içinde ýerleşdireliň. Merkezi koordinatalar başlangyjynda we R radiusy S üsti durşuna öz içinde saklar ýaly ýeterlikçe uly S_R sferany guralyň. U(M) funksiýa D^- ýaýlada garmonik, diýmek ol S_R sferanyň daşynda we üstünde garmonik funksiýadyr. Şonuň üçin U(M) funksiýany S_R sferanyň daşynda

$$U(M)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R} U(P)\frac{\rho^2-R^2}{r^3}dS(\rho>R) \qquad (30.1)$$

Puasson integraly görnüşinde aňlatmak bolýar, bu ýerde

$$\rho=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$r=|MP|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

§29 -da U(M) funksiýa üçin ρ - ýeterlikçe uly bolanda

$$\left|U(M)\right| \le \frac{C}{\rho}, C = \frac{1}{\pi R}\iint_{S_R}\left|U(M)\right|dS$$

bahalandyrmany aldyk.

Indi (30.1) deňligi x boýunça differensirläp alarys

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R} U(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}\right)dS\,(r \ne 0) \qquad (30.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}\right) = \frac{2x}{r^3} - \frac{3\left(\rho^2 - R^2\right)}{r^4}\cdot\frac{x-\xi}{r}$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ önümi bahalandyralyň. Goý, M nokat ρ>2R, ýagny R< $\frac{\rho}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly koordinatalar başlangyjyndan ýeterlikçe daşda bolsun. Onda

$$r \ge \rho - R > \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \frac{1}{r} < \frac{2}{\rho}$$

$|x| \le \rho, \frac{|x-\xi|}{r} \le 1$ bolýandygyny bellälíň. Bu bahalandyrmalary göz öňünde tutup alarys

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}\right)\right| \le \frac{2|x|}{r^3} + \frac{3\left(\rho^2 - R^2\right)}{r^4}\cdot\frac{|x-\xi|}{r} < \frac{6\rho}{\rho^3} + \frac{48\rho^2}{\rho^4} = \frac{64}{\rho^2}$$

Soňky bahalandyrmany peýdalanyp (30.2)-den alarys

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < \frac{64}{\rho^2}\cdot\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\left|U(P)\right|dS = \frac{A}{\rho^2},$$

$$A = \frac{16}{\pi R}\iint_{S_R}\left|U(P)\right|dS.$$

Şuňa meňzeşlikde

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| < \frac{A}{\rho^2}$$

Şeýlelik bilen D^- ýaýlada garmonik U(M) funksiýa üçin ýaýlanyň koordinatalar başlangyjyndan ýeterlikçe daşlaşan nokatlary üçin

$$|U(M)| < \frac{A}{\rho}, \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| < \frac{A}{\rho^2} \qquad (30.3)$$

bahalandyrmalar ýerine ýetýär.

§31. Neýman meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligi barada

Teorema1. Içki Neýman meselesiniň çözüwi hemişelik goşulyjy takyklygynda ýeke-täkdir.

Subudy. Goý, $U_1(M)$ we $U_2(M)$ - D^+ ýaýlada içki Neýman meselesiniň şol bir

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial n}\right|_S = f(N), \left.\frac{\partial U_2}{\partial n}\right|_S = f(N)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan iki sany çözüwleri bolsunlar. Onda olaryň tapawudy $U=U_1-U_2$ D^+ ýaýlada

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad (31.1)$$

şerti kanagatlandyrýan garmonik funksiýa bolar.

$V \equiv U$ diýip (19.2) birinji Grin formulasyndan peýdalanalyň, onda

$$\iint_S U\frac{\partial U}{\partial n}dS = \iiint_{D^+}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau$$

(31.1) şert esasynda bu deňligiň çep bölegi nula deňdir, diýmek deňligiň sag bölegi hem nula deňdir:

$$\iiint_{D^+}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = 0$$

Bu ýerden U(M) funksiýanyň we onuň birinji tertipli önümleriniň üznüksizligi esasynda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

gelip çykýar. Soňky deňliklerden görnüşi ýaly U(M) funksiýa x,y,z üýtgeýän ululyklara bagly däldir, ýagny

$$U(M) \equiv const \Rightarrow U_1(M) \equiv U_2(M) + C$$

Teorema subut edildi.

Içki Neýman meselesiniň mydama çözüwiniň bolmaýandygyny belläliň. Onuň çözüwiniň bolmagy üçin

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = \iint_S f(N) dS = 0$$

şertiň ýerine ýetmegi zerurdyr. Bu şertiň zerurlygy garmonik funksiýanyň häsiýetlerinden gelip çykýar.

Laplas deňlemesiniň

$$|U(M)| < \frac{A}{\rho^{n-2}}, n = 2,3 \qquad (31.2)$$

deňsizligi kanagatlandyrýan U(M) çözüwine **tükeniksizlikde regulýar** diýilýär.

Teorema2. Daşky Neýman meselesiniň tükeniksizlikde regulýar çözüwi ýeke-täkdir.

Subudy. Goý, $U_1(M)$ we $U_2(M)$ - daşky Neýman meselesiniň şol bir gyra şerti kanagatlandyrýan iki sany çözüwleri bolsunlar. Onda ol çözüwleriň $U=U_1-U_2$ tapawudy D^- tükeniksiz ýaýlada

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0$$

şerti kanagatlandyrýan garmonik funksiýa bolar. D^+ ýaýlany içinde saklaýan S_R sferany guralyň. D_1 bilen bolsa S we S_R üstler bilen çäklenen ýaýlany belläliň. Birinji Grin formulasynda $V \equiv U$ diýip, soňra ony D_1 ýaýla üçin ulanyp, alarys

$$\iint_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS + \iint_{S_R} U \frac{\partial U}{\partial n} dS = \iiint_{D_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau \qquad (31.3)$$

Bu ýerde $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0$ bolany üçin birinji goşulyjy nula dendir. U(M) funksiýa tükeniksizlikde regulýar bolany üçin ýeterlikçe uly R - radiusda (31.2) bahalandyrmalar ýerine ýetýär. Alarys

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos(n,x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos(n,y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos(n,z)\right| < \frac{3A}{\rho^2}$$

Ýeterlik uly R üçin S_R sfera boýunça integrirlenýän ikinji goşulyjyny bahalandyralyň

$$\left|\iint_{S_R} U \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS\right| \le \iint_{S_R} |U| \cdot \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| dS < \frac{A}{R} \cdot \frac{3A}{R^2} \iint_{S_R} dS = \frac{3A^2}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}$$

Indi (31.3) deňlikde R$\to\infty$ bolanda predele geçip, alarys

$$\iiint\limits_{D^-}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=0$$

Bu ýerden $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial z}=0 \Rightarrow U=const$

Indi M $\to\infty$ bolanda U(M) $\to$0 bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys

const=0 .

Bu bolsa

$$U\equiv 0 \Rightarrow U_1(M)\equiv U_2(M)$$

bolýandygyny aňladýar. Teorema subut edildi.

BAP IV. POTENSIALLAR NAZARYÝETI

§32. Göwrüm potensiýalynyň kesgitlenilişi

$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}}$ funksiýa $M(\xi,\eta,\varsigma)$ nokatda ýerleşdirilen birlik massanyň potensiýalyny aňladýar we (ξ,η,ς) nokada görä Laplas daňlemesini kanagatlandyrýar. Bu funksiýada parametr boýunça alynan integrallara potensiýallar diýip atlandyrylýar.

Goý käbir $M_0(\xi,\eta,\varsigma)$ nokatda m_0 massa ýerleşdirilen bolsun. Bütin günýä dartylma kanuny boýunça $M(x,y,z)$ nokatda ýerleşdirilen m massa

$$\vec{F}=-\gamma\cdot\frac{m_0}{r^2}\vec{r_0}$$

dartyş güýji täsir eder, $\vec{r_0}=\frac{\vec{r}}{r}-M_0M$ ugry boýunça birlik wektor $\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$, γ - gwaritasion hemişelik. Ulgamy $\gamma=1$ bolar ýaly saýlap alalyň we $m=1$ diýeliň:

$$\vec{F}=-\frac{m_0}{r^2}\cdot\vec{r_1}$$

Bu güýjiň koordinat oklaryna proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlener.

$$X = F\cdot\cos\alpha = -\frac{m_0}{r^3}(x-\xi)$$
$$Y = F\cdot\cos\beta = -\frac{m_0}{r^3}(y-\eta) \qquad (32.1)$$
$$Z = F\cdot\cos\gamma = -\frac{m_0}{r^3}(z-\varsigma)$$

bu ýerde $\alpha,\beta,\gamma-\vec{F}$ güýjiň koordinat oklary bilen emele getirýän burçy.

Güýç meýdanynyň potensiýaly diýilýän we

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right\}$$

deňlik bilen kesgitlenýän $U(x,y,z)$ funksiýany girizeliň. Ýokarda seredilen mysalymyzda

$$U = \frac{m_0}{r}$$

n material nokadyň potensiýaly

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_0}{r_i}$$

formulanyň kömegi bilen aňladylýar.

Goý $\rho(\xi,\eta,\varsigma)$ dykyzlykly D jisim berilen bolsun. Onda $M(x,y,z)$ nokadyň D Jisime dartýan güýjiň komponentleri

$$X = -\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau$$
$$Y = -\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{y-\eta}{r^3}\,d\tau \qquad (32.2)$$
$$Z = -\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{z-\varsigma}{r^3}\,d\tau$$

$d\tau = d\xi\, d\eta\, d\varsigma.$ $M(x,y,z)$ nokadyň potensiýaly

$$U(M) = \iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{1}{r}\,d\tau \qquad (32.3)$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Eger D tekizlikde üznüksiz paýlanan $\mu(\xi,\eta)$ dykyzlykly ýaýla bolsa, onda $p(x.y)$ nokadyň dartyş güýjiniň komponentleri iki gat integral bilen aňladylýar

$$X = -2\iint_D \mu(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\xi d\eta$$

$$Y = -2\iint_D \mu(\xi,\eta)\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\xi d\eta$$

$p(x,y)$ nokadyň potensiýaly bolsa

$$U(p)=U(x,y)=2\iint_D \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\xi d\eta.$$

Eger $P(M)$ dykyzlyk çäklenen, ýagny $C>0$ san bar bolup $|\rho(M)|<C$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda (32.2) we (32.3) hususy däl integrallar D ýaýlanyň içinde ýatan $M(x,y,z)$ nokatda ýygnanýar. Munuň şeýledigi (32.2) integral üçin

$$\left|\rho\frac{x-\xi}{r^3}\right|=\left|\frac{p}{r^2}\right|\frac{(x-\xi)}{r}\le\frac{C}{r^2},\quad \alpha=2<3$$

deňsizlikden, (32.3) integral üçin bolsa

$$\left|\frac{\rho}{r}\right|\le\frac{c}{r},\qquad \alpha=1<3$$

deňsizlikden gelip çykýar.

$U(M)$ potensial we dartyş güýjiniň x,y,z komponentleri bütin giňişlikde üznüksiz funksiýalardyr.

§33.Göwrüm potensiýalynyň birinji önümi

$$X(M)=-\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{x-\xi}{r^3}d\tau_p$$

$$Y(M)=-\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{x-\eta}{r^3}d\tau_p$$

$$Z(M)=-\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{x-\varsigma}{r^3}d\tau_p$$

integrallaryň aşagyndaky funksiýalar

$$U(M)=\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\cdot\frac{1}{r_{Mp}}d\tau_p$$

integralyň aşagyndaky funksiýanyň degişli argumenti boýunça önümi bolup durýar.

Eger M nokat D ýaýla degişli däl bolsa, onda $U(M)$ integraly integral aşagynda differensirlemek kanuny we

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \; Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \; Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

D ýaýlanyň daşynda $U(M)$ potensiýalyň ýokary tertipli önümleri hem integral aşagynda differensirlemegiň kömegi bilen hasaplamak bolýar. Şonuň üçin $U(M)$ potensiýal D ýaýlanyň daşynda

$$\Delta U(M) = 0$$

Laplas dańlemesini kanagatlandyrýar.

M nokat D ýaýlanyň içinde ýatýan hem $U(M)$ potensiýalyň birinji tertipli önümini integral aşagynda differensirlemek arkaly hasap bolýandygyny görkezeliň.

Goý $\rho(x,y,z)$ dykyzlyk çäklenen bolsun: $|\rho(x,y,z)| < C$ $\forall \varepsilon > 0$ san üçin $\exists \delta > 0$ san tapylyp $|\Delta x| < \delta$ deňsizlik ýerine ýetende

$$\left| \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon$$

sizligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň.

M nokady merkezi M nokatda bolan δ^1 radusly $K(M,\delta^1)$ sap bilen gurşalyň we $U(M)$ potensiýal iki goşulja böleliň.

$$U(M) = U_1(M) + U_2(M),$$

bu ýerde $U_1(M)$ goşuljy $K(M,\delta^1)$ sap boýunça, integrirlemege, $U_2(M)$ goşulyjy bolsa $D_1 = D \setminus K(M,\partial')$ ýaýla boýunça integrirlemege degişli. Onda

$$\frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{U_1(x+\Delta x, x+y) - U_1(X)x,y,z}{\Delta x} + \frac{U_2(x+\Delta x, x+y) - U_2(x,y,z)}{\Delta x}$$

M nokat D_1 ýaýla degişli däl, şonuň üçin

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U_2(x+\Delta x,x,y)-U_2(x,y,z)}{\Delta x}=\iiint\limits_{D_1}\rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p=x_2 \qquad (33.1)$$

$X=X_1+X_2$ diýeliň, onda

$$\left|\frac{U(x+\Delta x,x,y)-U(x,y,z)}{\Delta x}-X\right|\le\left|\frac{U_2(x+\Delta x,x,y)-U_2(x,y,z)}{\Delta x}X_2\right|+$$

$$+\ |X_1|+\left|\frac{U_1(x+\Delta x,x,y)-U_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|$$

Soňky deňsizlikden goşulyjylaryň her biriniň $\frac{\varepsilon}{3}$-den kiçidigini görkezeliň.

$$|X_1|=\left|\iiint\limits_{D}\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\tau\right|<C\iiint\limits_{D}\frac{d\tau}{r^3}=$$

$$=C\int_0^{\delta'}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^2\cdot\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,d\varphi\,dr}{r^2}=C\delta'\cdot 2\cdot 2\pi=4\pi\delta'\cdot C<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (33,2)$$

$$|S|=\left|\frac{U_1(x+\Delta x,y,z)-U_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{K(M,\delta')}\rho\cdot\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)d\tau\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{K(M,\delta')}\rho\frac{r-\rho}{r\cdot\rho}d\tau\right|$$

bu ýerde

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}$$

$$\rho=\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}$$

MM_1P üçburuçlukdan $|r-\rho|<|\Delta x|$, şonuň üçin

$$|S|<C\iiint\limits_{K(M,\delta')}\frac{d\tau}{r\cdot\rho}\le\frac{C}{2}\left\{\iiint\limits_{K(M,\delta')}\frac{d\tau}{r}+\iiint\limits_{K(M,\delta')}\frac{d\tau}{\rho}\right\}=6\pi c\delta'<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (33.3)$$

δ' sany (33,3) deňsizlikden kesgitläp (33.2) we (33.3) deňsizlikleriň ikisi hem kanagatlandyrýarys. (4) deňsizlik $\varepsilon>0$ san $|\Delta x|<\delta''$ deňsizlik yerine yetirlende

$$\left|\frac{U_2(x+\Delta x, x, y) - U_2(x, y, z)}{\Delta x} - x\right| < \varepsilon$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigini aňladýar. Şeýlelik bilen $x = \dfrac{\partial U}{\partial x}$. $y = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, $z = \dfrac{\partial U}{\partial z}$ deňsizlikler şuňa meňzeş subut edilýär.

§34. Göwrüm potensialynyň ikinji önümi

Eger

$$\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{Mp}}\right)d\tau = -\iiint_D \rho(\xi,\eta,\varsigma)\left(\frac{1}{r_{Mp}^3} - 3\frac{(x-\xi)^2}{r_{Mp}^5}\right)d\tau$$

diýip alsak, onda alynýan integrallar dargaýarlar. Göwrüm potensialyny

$$U(M) = U_1(M) + U_2(M)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $U_1(M) - K(M,\vartheta)$ şar boýunça, $U_2(M) - D_1 = D_1 K(M,\vartheta)$ ýaýla boýunça integrirlemeklige aňladýar.

Goý $\rho(\xi,\eta,\varsigma)$ dykyzlyk üznüksiz we differensirlenýän bolsun. M nokat D_1 ýaýla degişli däl, onda

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \iiint_{D_1} \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p \qquad (34.1)$$

$U_1(M)$ potensial M nokatda birinji tertipli önüme eýe we ol önümi integral aşagyndaky differensirlemek arkaly hasaplamak bolýar:

$$\frac{\partial U_1}{\partial ä} = \iiint_{R(M,\vartheta)} \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p = -\iiint_{R(M,\vartheta)} \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p$$

Ostrogradskiý-Gauss formulasyna gora

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\iint_S \frac{\rho}{r}\cos\alpha ds + \iiint_{K(M,\delta)} \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}d\tau,$$

bu ýerde $S - K(M,\delta)$ şaryň sferasy, $\alpha - S$ üste daşky normal. Alarys

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\iint_S \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha ds + \iiint_{K(M,\delta)} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau \qquad (34.2)$$

(34.2) deňligiň sag bölegindäki goşylyjylary bahalandyralyň. Alarys

$$\left|\iiint\limits_{K(M,\delta)} \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p\right| < C_1 \iiint\limits_{K(M,\delta)} \frac{d\tau_p}{r^2} = 4\pi C_1\delta \qquad (34.3)$$

Birinji goşuljy üçin orta baha hakykndaky teoremany ulanyp alarys

$$-\iint\limits_S \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha ds = \iint\limits_S \rho\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha ds =$$

$$= -\iint\limits_S \rho\frac{\cos^2\alpha}{r^2}ds = -\frac{p^*}{3}\iint\limits_S \frac{1}{r^2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)ds = -\frac{4\pi}{3}\rho*$$

ýagny

$$-\iint\limits_S \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\, ds = -\frac{4\pi}{3}\rho^* \qquad (34.4)$$

bu ýerde $\rho^* - \rho$ funksiýanyň S sferanyň üstünde orta arifmetik bahasy.

Islendik $\delta > 0$ san üçin

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} \qquad (34.5)$$

deňlik dogry. (34.2), (34.3), (34.4) formulalardan peýdalanyp (34.5) deňlik $\delta \to 0$ bolanda pridela geçip alarys.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \overline{\overline{\iiint\limits_D}} \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p \qquad (34.6)$$

Edil şuňa meňzeş edip

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \overline{\iiint\limits_D} \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p \qquad (34.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \overline{\iiint\limits_D} \rho(\xi,\eta,\varsigma)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_p \qquad (34.8)$$

deňlikleri görkezilýär. (34.6), (34.7), (34.8) deňliklerden görnüşi ýaly göwrüm potensiýalynyň ikinji tertipli önümleri Puasson deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

§35.Goşa gatlagyň potensialy we onuň häsiýetleri

Lýapunow üsti boýunça paýlama, $\mu(N)$ dykyzlykly goşa gatlagyň potensiýalyna garalyň

$$W(x) = -\iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \iint_S \mu(N) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \qquad (35.1)$$

bu ýerde önüm S üstiň $N(\xi,\eta,\varsigma)$ nokatdaky $\vec{n}$ daşky normal boýunça alynýar, r wektor $M(x,y,z)$ nokatdan $N(\xi,\eta,\varsigma)$ nokada ugrukdurylan, $\varphi = (r,n)$.

Goşa gatlagyň potensiýaly S üstiň daşynda ähli teryipli önümi eýe we Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Goşa gatlagyň potensiýalynyň tükeniksizlikde nula ymtylýandygyny görkezeliň. Koordinat başlangyjjyny S üst bilen çäklenen D yaylanyň içinde alalyň. Onda

$$MN \geq OM - ON$$

ýada

$$r \geq R - ON$$

L bilen S üstiň koodinat başlangyjena çenli iň uzyn aralygy belläliň. Onda

$$r \geq R - L$$

M nokat kordinat başlangyjyndan $R \geq 2L$ ýa-da $L \leq \frac{R}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly daşlykda ýerleşen bolsun.Onda

$$|W(x)| \leq \iint_S |\mu(N)| \frac{|\cos\varphi|}{r^2} ds \leq \frac{4}{R^2} \iint_S |\mu(N)| ds = \frac{1}{R^2}$$

bu ýerde

$$A = 4\iint_S |\mu(N)| ds$$

Diýmek goşa gatlagyň potensiýaly tükeniksizlikde $\frac{1}{R^2}$ ýaly nula ymtylýar.

(1) goşa gatlagyň potensiýaly bütin giňişlikde kesgitlenendir.

$\mu(N) = 1$ bolanda goşa gatlagyň potensiýalyna garalyň. Onda

$$W_1(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \iint_S \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \qquad (35.2)$$

Goý N nokat S üstüň daşynda ýatan bolsun. $\frac{1}{r}$ funksiýa S üsyiň içinde garmoniki, diýmek

$$W_1(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0, \quad M \quad \text{noka} S \quad \text{üstiň daşynda.}$$

Goý M nokat S üstiň içinde ýatsyn. M nokady merkezi M nokatda bolan ρ radiýusly C_ρ sfera bilen gurşalyň. S we C_ρ sferaler bilen çäklenen D' ýaýlada $\frac{1}{r}$ garmoniki funksiýa.Onda

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds + \iint_{C_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0$$

C_ρ sferada $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{C_\rho} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{C_\rho} = \frac{1}{\rho^2}$ deňlik ýerine ýetýär. Onda

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds + \frac{1}{\rho^2}\iint_{C_\rho} ds = 0$$

ýa-da

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d + 4\pi = 0$$

Diýmek

$$W_1(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 4\pi, \quad M \text{ nokat } S \text{ üstiň içinde.}$$

M nokat S üstiň üsyünde ýatýar. (2) goşa gatlagyň potensiýalynyň göni bahasyny tapalyň. Merkezi M nokatda bolan $\rho \le d$ radusly C_ρ sferany guralyň. Bu sfera S üstiň käbir bölegini $S-\sigma$ bilen belgiläliň. Hususy däl integralyň kesgitlemesine görä

$$\lim_{\rho\to 0}\iint_{S-\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds \qquad (35.3)$$

Goý $C'_{\rho-}C_\rho$ sferanyň S üstüň içinde ýatan bölegi bolsun. $S-\sigma$ we C'_ρ sferalar bilen çäklenen ýaýla garalyň. M nokat bu ýaýla degişli däl, onda bu ýaýlada $\frac{1}{r}$ garmoniki funksiýa. Şeýýlelik bilen

$$\iint_{S-\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds + \iint_{C_\upsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds_\rho = 0$$

ýa-da (35.3) deňlik esasynda

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = -\lim_{\rho\to 0}\iint_{C'_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds_\rho$$

Merkezi M nokatda bolan sferik koordinatalary girizeliň. Alarys

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{C'_\rho} = \frac{1}{\rho^2} \quad \text{we} \quad ds_p = \rho^2 \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Onda

$$\iint_{C'_з} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds_p = \int_0^{2\pi}\int_{\theta(\varphi)}^{0} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}[1+\cos\theta(\varphi)]d\varphi = 2\pi + \int_0^{2\pi}\cos\theta(\varphi)d\varphi$$

Bu ýerden alarys

$$\lim_{\rho\to 0}\iint_{C'_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds_p = 2\pi$$

sebäbi

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\cos\theta(\varphi) = -2\pi, \quad M \text{ nokat } S \text{ üste degişli}$$

Diýmek aşakdaky dogrydyr

$$W_1(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \begin{cases} O, M \quad \text{nokat } S \text{ üstiňsdaşaşyn} \\ 2\pi, \text{M} \quad \text{nokat } S \text{ üsyšňsiüstünde} \\ 4\pi, \text{M} \quad \text{nokat } S\ \textit{üstiňstiňi e} \end{cases} \tag{35.4}$$

(35.4) integrala Gauss integraly diýilýär.

(35.4) formulada görnüşi ýaly $\mu(N)=1$ bolanda goşa gatlagyň potensiýal S üstden geçende üzülýär. Indi islendik $\mu(N)$ dykyzlykly potensiýalynyň hem üzülýändigini gärkezeliň.

Teorema. $W(M)$ goşa gatlagyň potensiýaly M nokat S üstüň N_0 nokadyna daşyndan we içinden ymtylanda pridele eýe. Eger $W(M)$ goşa gatlagyň potensiýalynyň pridel bahalaryny daşyndan ymtylanda $W_d(N_0)$, içinden ymtylanda bolsa $W_i(N_0)$ bilen belgilesek, onda daşyndaky formulalar dogrydyr:

$$W_d(N_0) = \iint_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} ds - 2\pi\mu(N_0) = W(N_0) - 2\rho\mu(N_0)$$

$$W_i(N_0) = \iint_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} ds + 2\pi\mu(N_0) = W(N_0) + 2\pi\mu(N_0)$$

bu ýerde φ_0 $\vec{r} = \overrightarrow{N_0 N}$ ugyr bilen S üstüň N nokadyndaky $\vec{n}$ daşky normalyň srssyndaky burç.

Subudy: Goý N_0-sütiniň fiksirlenen n_0 ady bolsun. $W(M)$ goşa gatlagyň potensiýalyny aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$W(M) = \iint_S [\mu(N) - \mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \mu(N_0)\iint_S \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = W_0(M) + \mu W_1(M) \tag{35.5}$$

Goý S üstiň daşyndan we içinden $M \to N_0$ bolsun. $W_0(M)$ goşa gatlagyň potensiýalyna garalyň. S üstüň N_0 nokadyny kesip geçende hem $W_0(M)$ funksiýanyň üznüksizligini görkezeliň.

Goý $\varepsilon < 0$ san bolsun. $\mu(N)$ funksiýa üznüksiz, onda S üstüň N_0 nokady saklaýan bölek σ_0

Üsti bar bolup

$$|\mu(N)-\mu(N_0)|<\frac{\varepsilon}{4\pi} \qquad (35.6)$$

deňsizlik dogrydyr, K-hemişelik.

S üst σ_0 we $S-\sigma_0$ görnüşde şazyp alarys.

$$W_0(M)=W_0^{(1)}(M)+W_0^{(2)}(M) \qquad (35.7)$$

bu ýerde

$$W_0^{(1)}(M)=\iint_{\sigma_0}[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}ds$$

$$W_0^{(2)}(M)=\iint_{S-\sigma_0}[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}ds$$

M nokadyň islendik ýagdaýynda

$$\left|W_0^{(1)}(M)\right|\le\iint_{\sigma_0}|\mu(N)-\mu(N_0)|\frac{\cos\varphi}{r^2}ds$$

(35.6) deňligiň esasynda alarys

$$\left|W_0^{(1)}(M)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (35.8)$$

(35.7) deňlikden alarys

$$W_0(M)-W_0(N_0)=W_0^{(1)}(M)-W_0^{(1)}(N_0)+W_0^{(2)}(M)-W_0^{(2)}(N_0)$$

bu ýerde

$$|W_0(M)-W_0(N_0)|\le\left|W_0^{(1)}(M)\right|+\left|W_0^{(1)}(N_0)\right|+\left|W_0^{(2)}(M)-W_0^{(2)}(N_0)\right|$$

ýada (35.7) deňsizlik esasynda

$$|W_0(M)-W_0(N_0)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\left|W_0^{(2)}(M)-W_0^{(2)}(N_0)\right|$$

N_0 nokat ýakyn M nokatlar üçin

$$\left|W_0^{(2)}(M)-W_0^{(2)}(N_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

diýmek

$$|W_0(M)-W_0(N_0)|<\varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Şeýlelik bilen

$$\lim_{M\to N_0}W_0(M)=W_0(N_0)$$

Eger $M\to N_0$ içinde bolanda, onda

$$\lim_{M\to N_0}W_0(M)=W_0(N_0)+4\pi\mu(N_0) \qquad (35.9)$$

Goý (35.5) formulada M nokat S üstüň N_0 nokady bilen gabat gelsin.Onda

$$W(N_0) = W_0(N_0) + 2\pi\mu(N_0) \qquad (35.10)$$

(35.9)we (35.10) deňlikleri deňeşdirip alarys

$$W_i(N_0) = W(N_0) + 2\pi\mu(N_0)$$

Goý S üstiň daşynda $M \to N_0$ bolsun. Onda

$$\lim_{M \to N_0} W(M) = W_d(N_0) = W_0(N_0)$$

şonuň üçin hem (35.10) deňlikesasynda alarys

$$W_d(N_0) = W(N_0) - 2\pi\mu(N_0)$$

§36.Ýönekeý gatlagyň potensialy we onuň häsiýetleri

1.Ýönekeỳ gatlagyň potensialy

Sýapinow boýunça paýlanylan üznüksiz $\mu(N)$ dykyzlyk ýönekeý gatlagyň potensiýalyna garalyň:

$$U(M) = \iint_S \frac{\mu(N)}{r} ds \qquad (r = MN)$$

Giňişligiň S üste degişli däl ähli $M(x, y, z)$ nokatlarda ýönekeý gatlagyň potensiýaly islendik tertipli önüme eýe we Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Geçen mowzukdaky ýaly edip tükeniksizlikdäki ýönekeý gatlagyň potensiýalynyň nula $\frac{1}{R}$ ýaly ymtylýandygyny görkezmek bolýar, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Teorema. Üznüksiz dykyzlykly ýönekeý gatlagyň potensiýaly bütin giňişlikde üznüksiz funksiýadyr.

Subudy. S üste degişli däl M nokatlarda ýönekeý gatlagyň potensiýaly $U(M)$ üznzksiz funksiýa. S üste degişli nokatlarda hem $U(M)$ funksiýanyň üznüksizligini görkezeliň. Onuň üçin S üstüň nokatlarynda (36.1) integralyň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezeliň. Goý N_0 nokat S üstiň erkin nokady bolsun. N_0 nokatda ýerli koordinat ulgamyny girizeliň. Goý $\varepsilon > 0$ san berlen σ_1 *üst* $\xi^2 + \eta^2 \le d_1^2$ $(d_1 \le \frac{d}{4})$ şeti kanagatlandyrýar, S üstüň bölegi bolsun. N_0 nokadyň käbir etrabynda M nokat nähili hem ýerleşende

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} ds \right| < \varepsilon \tag{36.2}$$

deňsizlik ýerine ýeyer ýaly d_1 sany saýlap alyp bolýandygyny görkezeliň. Alarys

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} ds \right| \le 2 \cdot A \iint_{\sigma_1'} \frac{d\xi\, d\eta}{\rho_1} \tag{36.3}$$

bu ýerde σ_1'-merkezi N_0 nokatda bolan d_1 radusly töwerek, $\rho_1 - MN$ kesimiň N_0 nokatda S üste galtaşyan tekizlige bolan M_1N_1 proýeksiýanyň uzynlygy; $|\mu(N)| \le A$. M nokat merkezi N_0 nokatda bolan d_1 radiýusly sferanyň içinde ýatan bolsun. M_1nokat σ_1' tegelege degişli we eger (ξ,η) tekizlikde merkezi M_1 nokatda bolan $2d_1$ radusly σ_1'' tekizlige alsak, onda ol d_1 tegelegi saklar. (36.3) deňsizlikde alarys

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} ds \right| \le 2A \iint_{\rho_1 \le 2d_1} \frac{d\xi\, d\eta}{\rho_1} = 2A \int_0^{2\pi} \int_0^{2d_1} \frac{\rho_1 d\xi_1 d\varphi}{\rho_1} = 8\pi A d_1$$

Bu bahalandyrma S üste N_0 nokadyň ýerleşişine bagly däl. d_1 sany $8\pi A d_1 < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly berkidip merkezi N_0 nokat bolan d_1 radusly şarda M nokadyň ýerleşişine bagly bolmoýan (36.2) bahalandyrmany alarys. Bu bolsa (36.1) integralyň N_0 nokatda deňölçegli ýygnanýandygyny aňladýar. Şeýlelik bilen S üste degişli N_0 nokatda $U(M)$ üznüksiz funksiýa .
Teorema subut edildi.

2. Ýönekeý gatlagyň potensialynyň normal boýunça önümi

Goý $n_0 - S$ üstüň käbir N_0 nokadynda geçirilen daşky normalyň ugry bolsun. M nokat S üste degişli däl diýip ýönekeý gatlagyň (36.1) potensiýalynyň n_0 ugry boýunça önümini tapalyň.

$\frac{1}{r}$ köpeldijä diňe M nokat bagly, diýmek differensirlemegi integral astynda geçirmek bolar.

$$\frac{\partial U(M)}{\partial n_0} = \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \iint_S \mu(N) \frac{\cos\psi}{r^2} ds \tag{36.4}$$

Bu ýerde $\psi = (r, n_0)$. M nokat S üstüň N_0 nokady bilen gabat gelende hem (36.4) integral bardyr.

Ýönekeý gatlagyň potensiýalynyň normal boýunça önümi kesgitli pridele eýedir we ol prideller üçin aşakdaky deňlikler dogrydyr.

$$\left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_i = \iint_S \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}ds + 2\pi\mu(N_0) \qquad (36.5)$$

$$\left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n}\right)_d = \iint_S \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}ds - 2\pi\mu(N_0) \qquad (36.6)$$

bu ýerde $r_0 = \left|\overrightarrow{N_0N}\right|, \psi_0 = (r_0, n_0)$.

(36.5) we (36.6) deňliklerden gýrnüşi yaly ýönekeý gatlagyň potensiýalynyň normal boýunça önümi aşakdaky towusma eýedir:

$$\left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_d = 4\pi\mu(N_0).$$

BAP V. GIPERBOLIK DEŇLEMELER

§37. Dalamber formulasy

Bilşimiz ýaly kirisiň erkin yrgyldysy

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad a = \sqrt{\frac{T}{P}} \qquad (37.1)$$

deňleme bilen ýazylýar, bu ýerde T-kirişe täsir edýän dartyş güýji, ρ -kirişiň çyzykly dykyzlygy. (37.1) deňleme üçin Koşi meselesini goýalyň.

Koşi meselesi. $-\infty < x < +\infty$, t > 0 ýarymtekizlikde (37.1) deňlemäniň

$$U(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad (37.2)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi(x), \phi(x) \, (-\infty < x < +\infty)$ -berlen funksiýalar.

(32.1) deňlemäniň çözüwini tapmak üçin ony kanonik görnüşe getireliň. (32.1) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesini ýazalyň

$$(dx)^2 - (adt)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dx \pm adt = 0$$

Bu deňlemeleri integrirläp alarys

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2$$

ξ, η täze üýtgeýän ululyklary

$$\xi = x - at, \; \eta = x + at$$

formulalaryň kömegi bilen gireliň. Alarys

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -a\frac{\partial U}{\partial \xi} + a\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} - a^2\frac{\partial\ U}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial\ U}{\partial \eta^2}$$

Önümleriň tapylan aňlatmalaryny (32.1) deňlemede goýup, kirişiň erkin yrgyldysynyň deňlemesini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (32.3)$$

görnüşde ýazalyň. ξ boýunça integrirläp alarys

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = g(\eta)$$

bu ýerde $g(\eta)$ -differensirlenýän erkin funksiýa. Soňky deňlemäni η boýunça integrirläp alarys

$$U(\xi,\eta) = \int g(\eta)d\eta + f_1(\xi)$$

$\int g(\eta)d\eta = f_2(\eta)$ belgileme girizip (32.3) deňlemäniň umumy çözüwini

$$U(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

görnüşde ýazalyň. Köne x, t üýtgeýän ululyklara geçip (32.1) deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$U(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) \qquad (32.4)$$

bu ýerde f_1, f_2 iki gezek differensirlenýän erkin funksiýalar.

Eger (32.1)-(32.2) Koşi meselesiniň çözüwi bar diýip güman etsek, onda ol çözüwi f_1, f_2 funksiýalary (32.2) şertler kanagatlanar ýaly saýlap (32.4) görnüşde almak bolar. Alarys

$$U(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \qquad (32.5)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = -af_1'(x) + af_2'(x) = \phi(x) \qquad (32.6)$$

f_1, f_2 funksiýalary tapmak üçin (32.6) deňligi integrirläliň

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz + C, \quad C = const \qquad (32.7)$$

(32.5)we (32.7) deňliklerden alarys

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz - C \qquad (32.8)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz + C \qquad (32.9)$$

(32.8),(32.9) deňliklerde x ululygy $x-at$ we $x+at$ ululyklar bilen çalşyp alarys

$$f_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(z)dz-C$$

$$f_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(z)dz+C$$

Tapylan funksiýalary (32.4) formulada goýup we integrallary birleşdirip Dalamber formulasyny alarys

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \qquad (32.10)$$

Eger $\varphi(x)\in C^2(E_1)$, $\psi(x)\in C^1(E_1)$ bolsa, onda Dalamber formulasynyň (32.1)-(32.2) Koşi meselesiniň çözüwini berýändigini gös-göni barlamak arkaly göz ýetirmek bolýar.

1.Meseläniň korrektligi

(32.1)-(32.2) Koşi meselesiniň korrektligine göz ýetirmek üçin ol meseläniň çözüwiniň barlygyny, ol çözüwiň ýeke-täkligini we durnuklydygyny görkezmeli. Dalamber formulasynyň getirlip çykarlyşyndan çözüwiň barlygynyň gelip çykýandygyny belläliň. Hakykatdan hem, $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiýalaryň tapylan (32.5), (32.6) ulgamyny ýazmak bilen biz eýýäm (32.1) deňlemäniň (32.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bar diýip hasap edýäris.

(32.1)-(32.2) meseläniň çözüwiniň barlygyna (32.10) funksiýany (32.1) deňlemä we (32.2) başlangyç şertlere goýmak arkaly göz ýetirmek bolýar. Çözüwiň ýeke-täkligi Dalamber formulasynyň gurluşyndan gelip çykýar. Hakykatdan hem, eger meseläniň ýene bir $U_1(x,t)$çözüwi bar bolsa, onda ol çözüwi (32.1) deňlemäniň hemme çözüwlerini özünde saklaýan (32.4) görnüşde aňlatmak bolar. Öňki pikir ýöretmämizi gaýtalap ol çözüwi (32.10) görnüşe getirereris, bu bolsa çözüwiň ýeke-täkligini subut edýär.

Koşi meselesiniň $-\infty<x<+\infty,\ 0<t\le T$ ýaýlada çözüwiniň durnuklylygy, ýagny başlangyç şertlere üznüksiz baglydygy Dalamber formulasyndan gelip çykýar. Hakykatdan hem, goý $U_1(x,t)$ Koşi meselesiniň

$$U_1(x,t)\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\phi_1(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun, bu ýerde

$$|\varphi(x)-\varphi_1(x)|<\varepsilon,\quad |\psi(x)-\psi_1(x)|<\varepsilon\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\varepsilon>0$$

$U_1(x,t)$ çözüwi (32.10) görnüşde ýazalyň we $|U(x,t)-U_1(x,t)|$ tapawudy bahalandyralyň:

$$|U(x,t)-U_1(x,t)|\le\frac{1}{2}|\varphi(x-at)-\varphi_1(x-at)|+\frac{1}{2}|\varphi(x+at)-\varphi_1(x+at)|+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(z)-\psi_1(z)|dz<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2a}\varepsilon\cdot 2at<\varepsilon(1+T)$$

Şerte görä $\varepsilon>0$ ýeterlikçe kiçi, T - gutarnykly san, diýmek $\varepsilon\cdot(1+T)$ köpeltmek hasyly ýeterlikçe kiçi san, bu bolsa Koşi meselesiniň çözüwiniň durnuklydygyny aňladýar.

2.Göni we ters tolkunlar

Dalamber formulasyny özgerdip

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{0}\psi(z)dz\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{0}^{x+at}\psi(z)dz\right]$$

görnüşde ýazlyň we

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{0}\psi(z)dz\right]=f_1(x-at)$$
$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x+at}^{0}\psi(z)dz\right]=f_2(x+at)$$

belgilemeler girizip (32.1)-(32.2) meseläniň çözüwini

$$U(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at) \qquad (32.11)$$

görnüşde ýazalyň. Bu formulanyň her bir goşulyjysyna aýratynlykda garalyň. Goý $f_2\equiv 0$ bolsun, ýagny kirişiň süýşmesi

$$U_1(x,t)=f_1(x-at) \qquad (32.12)$$

formula bilen kesgitlenýän bolsun.

Gözegçi $t=0$ başlangyç wagtda kirişiň $x=C$ nokatdan çykyp x okunyň polojitel ugruna a tizlik bilen hereket edýär, ýagny onuň absissasy $x-at=C$ ýa-da $x+at=C$ kanun boýunça üýtgeýär diýeliň. Şeýle gözegçi üçin kirişiň (32.12) formula bilen kesgitlenýän süýşmesi islendik wagt $f_1(C)$ hemişelige deň bolar.

$U_1(x,t)=f_1(x-at)$ funksiýanyň kesgitleýän hadysasyna **göni tolkunyň ýaýramasy** diýilýär. Şeýlelik bilen (32.12) çözüw x okunyň polojitel ugruna a tizlik bilen ýaýraýan göni tolkundyr. Edil şunuň ýaly $U_2(x,t)=f_2(x+at)$ çözüw x okunyň otrisatel ugruna a tizlik bilen ýaýraýan **ters** tolkundyr.

Şeýlelik bilen (32.11) çözüw göni we ters tolkunlaryň jemidir.

Ýokarda aýdylanlar t momentde kirişiň formasynyň grafigini gurmaga mümkinçilik berýär. Onuň üçin $f_1(x)$ funksiýanyň grafigini saga, $f_2(x)$ funksiýanyň grafigini bolsa çepe at ululyga süýşürip $f_1(x-at)$ we $f_2(x+at)$ funksiýalaryň grafiklerini alýarys. Kirişiň grafigini almak üçin bu egrileriň ordinatalarynyň algebraik jemini gurmak ýeterlikdir.

§38.Bagly, kesgitleniş we täsir ediş ýaýlasy

(23.1) deňlemäniň bagly däl üýtgeýänleriniň Oxt tekizligine **faza tekizligi**, Koşi şerti berilýän $t=0$ çyzyga bolsa **başlangyç egri** diýilýär.

$M_0(x_0,t_0)$ nokatdan çykýan

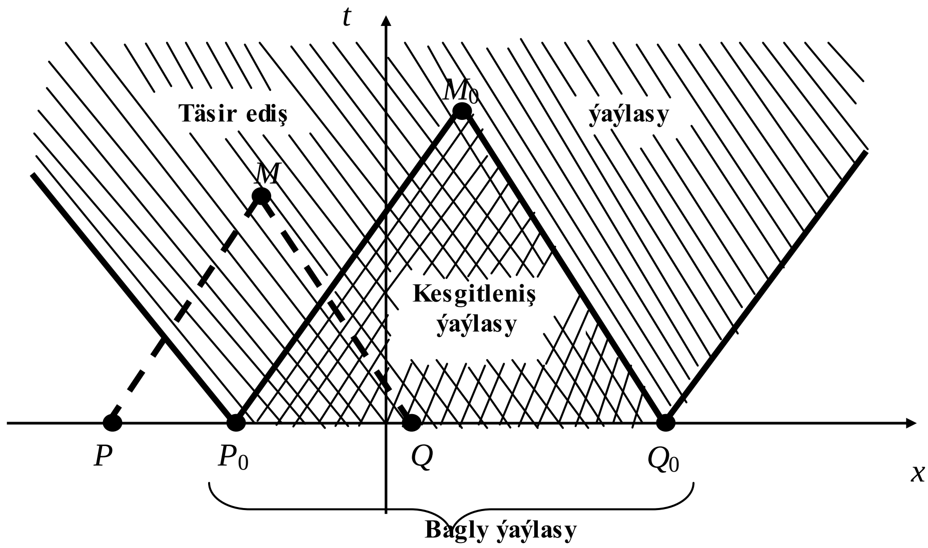
$$x-at=x_0-at_0 \quad , \quad x+at=x_0+at_0$$

häsiýetlendirijiler başlangyç egrini $P_0(x_0-at_0,0)$ $Q_0(x_0+at_0,0)$ nokatlarda kesýärler. Dalamber formulasynda $x=x_0, t=t_0$ diýip ony

$$U(M_0)=\frac{1}{2}[\varphi(P_0)+\varphi(Q_0)]+\frac{1}{2a}\int_{P_0Q_0}\psi(z)dz$$

görnüşde ýazalyň. Bu formuladan görnüşi ýaly $M_0(x_0,t_0)$ nokatda Koşi meselesiniň çözüwi φ funksiýanyň P_0, Q_0 nokatlardaky bahalary; ψ funksiýanyň bolsa P_0Q_0 kesimdäki bahasy bilen doly kesgitlenýär. M_0 nokatdan çykýan häsiýetlendirijileriň başlangyç egriden kesip alýan bölegine M_0 nokadyň **bagly** ýaýlasy diýilýär. Garalýan meselede M_0 nokadyň bagly ýaýlasy Ox okunyň P_0Q_0 kesimi bolýar.

Eger (32.2) başlangyç şertler bilen Ox okunda däl-de P_0Q_0 kesimde berlen bolsa, onda Dalamber formulasyndan görnüşi ýaly (32.1)-(32.2) meseläniň çözüwi depeleri M_0, P_0, Q_0 nokatlarda bolan üçburçlukda kesgitlener. $M \notin \Delta P_0Q_0M_0$ nokatda çözüw kesgitlenip bilmez, sebäbi onuň PQ bagly ýaýlasy P_0Q_0 kesime degişli däl. Şonuň üçin $P_0Q_0M_0$



Çyzgy1

häsiýetlendiriji üçburçluga P_0Q_0 kesimdäki başlangyç şertler boýunça çözüwiň **kesgitleniş** ýaýlasy diýilýär. Oxt tekizligiň P_0Q_0 kesimde berlen başlangyç şertleriň meseläniň çözüwine täsir edýän nokatlarynyň bölegine **täsir ediş** ýaýlasy diýilýär(çyzgy1). P_0Q_0 kesimiň täsir ediş ýaýlasy P_0Q_0 kesimiň we P_0, Q_0 nokatlardan geçýän häsiýetlendirijileriň aralygydyr.

§39. Birjynsly dӓl deňleme

Kirişiň yrgyldysynyň birjynsly dӓl deňlemesi üçin Koşi meselesine garalyň:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \qquad (34.1)$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,o)}{\partial t} = \psi(x),\quad -\infty < x < +\infty \quad (34.2)$$

Meselӓniň çözüwini $U = U_1 + U_2$ jem görnüşde gözlӓliň. Bu jemi (34.1) deňlemede we (34.4) başlangyç şertlerde goýup alarys

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}\right) + f(x,t)$$

$$U_1(x,0) + U_2(x,0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial t} + \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

$U_1(x,t)$ funksiýany birjynsly deňlemӓniň birjynsly dӓl başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar ýaly saýlap alalyň

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \\ &U_1(x,0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \end{aligned} \qquad (34.3)$$

onda $U_2(x,t)$ funksiýa üçin aşakdaky mesele alnar

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + f(x,t) \\ &U_2(x,0) = 0,\quad \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \qquad (34.4)$$

Bilşimiz ýaly (34.3) meselaniň çözüwi Dalamber formulasy bilen kesgitlenýӓr. (34.4) meselӓniň çözüwini tapmak üçin aşakdaky kömekçi meselӓ garalyň

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad V(x,\tau) = 0,\quad \frac{\partial V(x,\tau)}{\partial t} = f(x,\tau),\quad t > \tau \qquad (34.5)$$

$t_1 = t - \tau$ tӓze üýtgeýӓn ululyk girizip (34.5) meselӓni

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t_1^{\,2}} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad V(x,0) = 0,\quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t_1} = f(x,\tau),\quad t_1 > 0$$

görnüşde ýazalyň. Soňky meselӓniň çözüwini Dalamber formulasy boýunça tapylýar

$$V = \frac{1}{2a}\int_{x-at_1}^{x+at_1} f(z,\tau)dz$$

t üýtgeýän ululyga geçip (34.5) meseläniň çözüwini

$$V(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz$$

görnüşde alarys. Indi (34.4) meseläniň çözüwini

$$U_2(x,t) = \int_0^t V(x,t;\tau)d\tau \qquad (34.6)$$

görnüşde kesgitlenýändigini görkezeliň.

(34.6) funksiýany differensirläp we V funksiýa üçin başlangyç şertleri peýdalanyp, alarys

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = V(x,t;t) + \int_0^t \frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial t}d\tau = \int_0^t \frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial t}d\tau$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \left.\frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial t^2}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[f(x+a(t-\tau),\tau)a + f(x-a(t-\tau),\tau)a\right]_{\tau=t} +$$

$$+\int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial t^2}d\tau = f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t:\tau)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial x}d\tau \quad , \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial x^2}d\tau$$

Bu ýerden görnüşi ýaly (34.6) funksiýa (34.4) meseläniň çözüwi bolýar. Şeýlelik bilen (34.1)-(34.2) meseläniň çözüwini aşakdaky görnüşde alarys:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz$$

§40.Ýarymçäkli kiriş ýagdaýy

$x \geq 0$ ýarymçäkli gönide kirişiň yrgyldysyna garalyň. Bu ýagdaýda mesele aşakdaky ýaly goýulýar:

kirişiň yrgyldysynyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad t > 0 \qquad (35.1)$$

deňlemesiniň

$$U(0,t) = \mu(t) \qquad \left(\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \nu(t)\right) \quad (t \geq 0) \qquad (35.2)$$

gyra şerti we

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad 0\le x<\infty \qquad (35.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Ilki bilen kirişiň yrgyldysynyň deňlemesiniň tükeniksiz gönüde kesgitlenen çözüwiniň häsiýetleri baradaky iki sany lemmany subut edeliň.

Lemma 1. Eger (32.1)-(32.2) meselede $\varphi(x)$ *we* $\psi(x)$ funksiýalar $x=0$ nokada görä täk funksiýalar bolsalar, onda (32.10) Dalamber formulasy bilen kesgitlenýän $U(x,t)$ funksiýa

$$U(x,t)=0$$

şerti kanagatlandyrýar.

Lemma 2. Eger (32.1)-(32.2) meselede $\varphi(x)$ *we* $\psi(x)$ funksiýalar $x=0$ nokada görä jübüt funksiýalar bolsalar, onda (32.10) Dalamber formulasy bilen kesgitlenýän $U(x,t)$ funksiýa

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0$$

şerti kanagatlandyrýar.

Lemma 1-i subut edeliň. Şerte görä $\varphi(x)$ *we* $\psi(x)$ funksiýalar $x=0$ nokada görä täk funksiýalar, ýagny

$$\varphi(x)=-\varphi(-x),\quad \psi(x)=-\psi(-x)$$

$x=0$ we t>0 bolanda (32.10) formuladan alarys

$$U(0,t)=\frac{1}{2}[\varphi(at)+\varphi(-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)dz=0$$

sebäbi birinji goşulyjy $\varphi(x)$ funksiýanyň täkliginiň esasynda nula deň, ikinji goşulyjy bolsa täk funksiýadan koordinat başlangyjyna görä simmetrik kesim boýunça alnan integralyň nula deňliginiň esasynda nula deň.

Lemma 2 hem şuňa meňzeş subut edilýär. $\varphi(x)$ *we* $\psi(x)$ funksiýalaryň jübütlik şerti

$$\varphi(x)=\varphi(-x),\quad \psi(x)=\psi(-x)$$

görnüşde ýazylýar. Jübüt funksiýanyň önüminiň täk funksiýa bolýandygyny belläliň

$$\varphi'(x)=-\varphi'(-x)$$

(32.10) formuladan alarys

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}[-\varphi'(-at)+\varphi'(at)]+\frac{1}{2a}[\psi(at)-\psi(-at)]=0\quad ,\quad t>0$$

sebäbi birinji goşulyjy $\varphi'(x)$ funksiýanyň täkligi, ikinji goşulyjy bolsa $\psi(x)$ funksiýanyň jübütligi üçin nula deň.

Bu lemmalaryň kömegi bilen aşakdaky meseleleri çözmek bolýar: (35.1) deňlemäniň

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad 0\le x<\infty$$

başlangyç we

$$U(0,t)=0\,,\quad t>0$$

gyra şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

$\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň täk dowam etdirmesi bolan $\Phi(x)$ we $\Psi(x)$ funksiýalara garalyň:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x)\,, & x>0\\ -\varphi(-x)\,, & x<0\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x)\,, & x>0\\ -\psi(-x), & x>0\end{cases}.$$

(32.10) Dalamber formulasynyň esasynda

$$U(x,0)=\Phi(x),\qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\Psi(x)$$

şerti kanagatlandyrýan $U(x,t)$ funksiýa

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz \qquad (35.4)$$

görnüşde ýazylýar. (35.4) deňlik bilen kesgitlenýän funksiýa islendik x we t>0 üçin kesgitlenendir. Lemma 1-iň esasynda

U(0,t)=0.

Mundan başga hem bu funksiýa t=0, x>0 bolanda

$$\left.\begin{aligned}&U(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x)\\ &\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\Psi(x)=\psi(x)\end{aligned}\right\}\quad x>0$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýar. Şeýlelik bilen alnan U(x,t) funksiýa diňe $x\ge 0, t\ge 0$ üçin goýlan meseläniň hemme şertlerini kanagatlandyrýan funksiýadyr.

Öňki $\varphi(x),\psi(x)$ funksiýalara geçip aşakdaky ýaly ýazmak bolar

$$U(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\ t<\dfrac{x}{a},\ x>0\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz,\ t>\dfrac{x}{a},\ x>0\end{cases} \qquad (35.5)$$

Eger

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0$$

gyra şert berlen bolsa, onda $\varphi(x)$ *we* $\psi(x)$ funksiýalaryň jübüt dowam etdirmeleri bolan

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases} \qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

funksiýalary alyp kirişiň yrgyldysynyň deňlemesiniň $x\ge 0$ ýaýlada (34.3) başlangyç şertleri we $U_x(0,t)=0$ gyra şerti kanagatlandyrýan

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz$$

ýa-da

$$U(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, & t<\dfrac{x}{a}\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(z)dz+\int_{0}^{at-x}\psi(z)dz\right], & t>\dfrac{x}{a}\end{cases}$$

çözüwini alarys.

Indi umumy ýagdaýa garalyň. Onuň üçin (35.1) deňlemäniň

$$\overline{U}(x,0)=0\,,\quad \frac{\partial\overline{U}(x,0)}{\partial t}=0$$

$$\overline{U}(0,t)=\mu(t)\quad,\quad t>0$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. Bu meseläniň çözüwini

$$\overline{U}(x,t)=f(x-at)$$

görnüşde gözläliň. f funksiýany gyra şertden peýdalanyp kesgitläliň

$$\overline{U}(0,t)=f(-at)=\mu(t),$$

bu ýerden

$$f(z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

Şeýlelik bilen

$$\overline{U}(x,t)=\mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

Ýöne bu funksiýa diňe $x-at\le 0$ ýaýlada kesgitlenen, sebäbi $\mu(t)$ funksiýa $t\ge 0$ üçin kesgitlenen.

$\overline{U}(x,t)$ funksiýany argumentleriň islendik bahalarynda kesgitlemek üçin $\mu(t)$ funksiýany t-niň otrisatel bahalarynda $\mu(t)\equiv 0,\quad t<0$ diýip dowam etdireliň. Onda

$$\overline{U}(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

funksiýa argumentleriň islendik bahalary üçin kesgitlener we birjynsly başlangyç şertleri kanagatlandyrar.

Bu funksiýanyň we (35.5) funksiýanyň jemi (35.1)-(35.3) meseläniň çözüwini berer:

$$U(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, & t<\dfrac{x}{a}\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz, & t>\dfrac{x}{a}\end{cases}$$

Ikinji gyra meseläniň çözüwini hem şyňa meňzeşlikde çözmek bolýar.

§41. Gursa meselesi

Maglumatlary häsiýetlendiriji çyzyklarda berlen ýönekeý meselä garalyň:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=f(x,y),\\ &U(x,0)=\varphi(x), \qquad\qquad (36.1)\\ &U(0,y)=\phi(y)\end{aligned}$$

Goşmaça şertler (36.1) deňleme üçin häsiýetlendiriji çyzyklar bolýan x=0, y=0 gönülerde berlen. $\varphi(x)$ we $\phi(y)$ funksiýalar differensirlenýän funksiýalar we $\varphi(0)=\phi(0)$ ylalaşyk şertini kanagatlandyrýar diýip güman edeliň. (36.1) deňlemäni x we y boýunça yzygiderli integrirläp alarys

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial U(0,y)}{\partial y}+\int_0^x f(\xi,y)d\xi,$$

$$U(x,y)=U(x,0)+U(0,y)-U(0,0)+\int_0^y d\eta\int_0^x f(\xi,\eta)d\xi,$$

ýa-da

$$U(x,y)=\varphi(x)+\phi(y)-\varphi(0)+\int_0^y d\eta\int_0^x f(\xi,\eta)d\xi \qquad (36.2)$$

Şeýlelik bilen, ýönekeý deňleme üçin garalýan meseläniň çözüwini (36.2) anyk görnüşde ýazmak bolýar. (36.2) formuladan meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligi we barlygy gelip çykýar.

Bilişimiz ýaly käbir şertler ýerine ýetende, iki üýtgeýänli ikinji tertipli çyzykly giperbolik deňlemeleri

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(x,y)U = f(x,y) \qquad (36.3)$$

kanonik görnüşe getirmek bolýar. (36.3) deňleme üçin Gursa meselesi diýip atlandyrylýan meselä garalyň.

Gursa meselesi: $Q = (x_0, x_1) \times (y_0, y_1)$ gönüburçlykda (36.3) deňlemäniň $\overline{Q}$ ýaýlada üznüksiz, regulýar çözüwi bolýan we

$$U(x, y_0) = \varphi(x), \qquad U(x_0, y) = \phi(y) \qquad (36.4)$$

goşmaça şertleri kanagatlandyrýan U(x,t) funksiýany tapmaly,

$$\varphi(x_0) = \phi(y_0),$$
$$a, b, c, f \in C^1(\overline{Q}),$$
$$\varphi(x) \in C^1([x_0, x_1]) \quad , \quad \phi(y) \in C^1([y_0, y_1])$$

(36.3), (36.4) meseläni integral deňlemeleriň ulgamyna getireliň.

$$V = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad W = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (36.5)$$

täze funksiýalary girizip (36.3) deňlemäni oňa deňgüýçli üç deňlemeler ulgamy görnüşde ýazalyň

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= f - aV - bW - cU \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= f - aV - bW - cU \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= W \end{aligned}\right\} \qquad (36.6)$$

(36.4) şertden alarys

$$\left.\begin{aligned} V(x, y_0) &= \frac{\partial U(x, y_0)}{\partial x} = \varphi'(x), \\ W(x_0, y) &= \frac{\partial U(x_0, y)}{\partial y} = \phi''(y), \\ U(x, y_o) &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (36.7)$$

(36.6) ulgamynyň birinji we üçünji deňlemelerini $[y_0, y]$ kesim, ikinji deňlemesini bolsa $[x_0, x]$ kesim boýunça integrirläp hem-de (36.7) şertleri ulanyp aşakdaky integral deňlemeleriň ulgamyny alarys

$$\left.\begin{aligned}
V(x,y) &= \varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} f(x,\eta)d\eta - \int_{y_0}^{y}(aV + bW + cU)(x,\eta)d\eta \\
W(x,y) &= \phi'(y) + \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi - \int_{x_0}^{x}(aV + bW + cU)(\xi,y)d\xi \\
U(x,y) &= \varphi(x) + \int_{y_0}^{y} W(x,\eta)d\eta
\end{aligned}\right\} \quad (36.8)$$

1.Meseleleriň ekwiwalentligi

Gursa meselesiniň integral deňlemeleriň ulgamyna ekwiwalentdigini görkezeliň. Goý U(x,y) funksiýa (36.3)-(36.4) meseläniň çözüwi bolsun.

(36.3) orun çalyşmanyň kömegi bilen (36.3), (36.4) ulgamyny (36.6), (36.7) tojdestwolara getirmek bolýar. (36.6) ulgamyny integrirläp (36.8) integral deňlemeleriň ulgamyny alarys, ýagny (U,V,W) - integral deňlemeleriň ulgamynyň üznüksiz çözüwi. Tersine, goý (U,V,W) -(36.8) ulgamynyň üznüksiz çözüwi bolsun. (36.8) ulgamdan görnüşi ýaly (U,V,W) funksiýa (36.7) şertleri kanagatlandyrýar. (36.8) ulgamda integral aşagyndaky aňlatma üznüksiz, diýmek (36.8) ulgamyny differensirlemek bolýar. Birinji we üçünji deňlemeleri y boýunça, ikinji deňlemäni bolsa x boýunça differensirläp (36.6), (36.7) tojdestwolar bilen gabat gelýän täze tojdestwolaryň ulgamyny geleris. Diýmek (U,V,W) - (36.6),(36.7) meseläniň çözüwi, (36.6),(36.7) mesele bolsa (36.3), (36.4) Gursa meselesine ekwiwalentdir. Meseläniň ekwiwalentligi subut edildi.

2. (36.8) ulgamynyň çözülişi.

(36.8) ulgam Pikaryň yzygiderli ýakynlaşma usuly bilen çözeliň. Nulynjy ýakynlaşmany aşakdaky ýaly saýlap alalyň:

$$\left.\begin{aligned}
V_0(x,y) &= \varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} f(x,\eta)d\eta \\
W_0(x,y) &= \phi'(y) + \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi \\
U_0(x,y) &= \varphi(x)
\end{aligned}\right\} \quad (36.9)$$

onda soňky ýakynlaşmalar aşakdaky ýaly gurular:

$$
\left.\begin{aligned}
V_k(x,y) &= V_0(x,y) - \int_{y_0}^{y}\left(aV_{k-1} + bW_{k-1} + cU_{k-1}\right)(x,\eta)\,d\eta \\
W_k(x,y) &= W_0(x,y) - \int_{x_0}^{x}\left(aV_{k-1} + bW_{k-1} + cU_{k-1}\right)(\xi,y)\,d\xi \\
U_k(x,y) &= U_0(x,y) + \int_{y_0}^{y}W_{k-1}(x,\eta)\,d\eta
\end{aligned}\right\} \qquad (36.10)
$$

$$k = 1,2,3,\ldots$$

$\{V_k\}, \{W_k\}, \{U_k\}$ yzygiderlikleriň deňölçegli ýygnanýandygyny subut etmek üçin

$$V_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(V_k - V_{k-1}\right), \quad W_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(W_k - W_{k-1}\right), \quad U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_k - U_{k-1}\right) \quad (36.11)$$

hatarlary girizeliň. Bu hatarlaryň n-nji bölek jemleri V_n , W_n , U_n bilen gabat gelýär.

(36.10) ulganmdan alarys

$$
\left.\begin{aligned}
V_{k+1} - V_k &= -\int_{y_0}^{y}\left(a\left(V_k - V_{k-1}\right) + b\left(W_k - W_{k-1}\right)c\left(U_k - U_{k-1}\right)\right)(x,\eta)\,d\eta \\
W_{k+1} - W_k &= -\int_{x_0}^{x}\left(a\left(V_k - V_{k-1}\right) + b\left(W_k - W_{k-1}\right)c\left(U_k - U_{k-1}\right)\right)(\xi,y)\,d\xi \\
U_{k+1} - U_k &= \int_{y_0}^{y}\left(W_k - W_{k-1}\right)(x,\eta)\,d\eta
\end{aligned}\right\} \qquad (36.12)
$$

$$k = 1,2,3,\ldots$$

k=1,2, ... bolanda $\overline{D}$ ýaýlada aşakdaky bahalandyrmalaryň ýerine ýetýändigini görkezeliň

$$
\begin{aligned}
\left|V_k - V_{k-1}\right| &< A^{k-1}B\frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!} \\
\left|W_k - W_{k-1}\right| &< A^{k-1}B\frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (36.13) \\
\left|U_k - U_{k-1}\right| &< A^{k-1}B\frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}
$$

bu ýerde $A = \max(1, M)$, $M = \max_{\overline{D}}\left(|a| + |b| + |c|\right)$, B - käbir hemişelik san.

$k = 1$ bolanda bahalandyrmalaryň ýerine ýetýandigi äşgärdir. (36.13) deňsizlikleriň k-ni k+1 bilen çalşyranyňda hem ýerine ýetýändigini görkezeliň. (36.12) we (3613) deňsizliklerden alarys

$$|V_{k+1}-V_k|<\int_{y_0}^{y} A^{k-1}B\frac{(x+y-x_0-y_0)^{k-1}}{(k-1)!}(|a|+|b|+|c|)d\eta\le$$
$$\le A^k B\cdot\left(\frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!}-\frac{(x-x_0)^k}{k!}\right)\le A^k B\frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!}$$

$|W_{k+1}-W_k|$, $|U_{k+1}-U_k|$ üçin hem şuňa meňzeş görkezilýär.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k B\frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!}$$

hatar (x,y) tekizlikde ýygnanýar. Munuň şeýledigini, mysal üçin, Dalamber nyşanyny ulanyp görkezmek bolýar. (36.13) deňsizliklerden Weýerştrasyň nyşany esasynda , (36.11) hatarlaryň, şonuň ýaly hem $\{V_k\},\{W_k\},\{U_k\}$ yzygiderlikleriň $\overline{Q}$ ýaýlada deňölçegli ýygnanýandyklary gelip çykýar. (36.10)-da predele geçip (36.8) integral deňlemeleriň ulgamynyň (U,V,W) çözüwini taparys. Üznüksiz funksiýalaryň deňölçegli predeli hökmünde (U,V,W) çözüw $\overline{Q}$ ýaýlada üznüksizdir, diýmek, U(x,y) funksiýa (36.3)-(36.4) Gursa meselesiniň çözüwidir.

3. Çözüwiň ýeke-täkligi

(36.8) ulgamynyň (U_1,V_1,W_1) *we* (U_2,V_2,W_2) iki sany üznüksiz çözüwi bar diýeliň, onda

$$U=U_1-U_2\ ,\quad V=V_1-V_2\ ,\quad W=W_1-W_2$$

tapawutlar

$$V=-\int_{y_0}^{y}(aV+bW+cU)(x,\eta)d\eta$$
$$W=-\int_{x_0}^{x}(aV+bW+cU)(\xi,y)d\xi \qquad (36.14)$$
$$U=\int_{y_0}^{y}W(x,\eta)d\eta$$

birjynsly ulgamyň çözüwi bolar. $U\equiv V\equiv W\equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň. (U,V,W) çözüwiň $\overline{Q}$ ýaýlada üznüksizliginden onuň çäklenendigi gelip çykýar:

$$|U|<B\ ,\quad |V|<B\ ,\quad |W|<B$$

(36.14) ulgamynyň birinji deňlemesinden alarys

$$|V|\le B\int_{y_0}^{y}(|a|+|b|+|c|)d\eta<AB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!}$$

$|W|$, $|U|$ üçin hem şuňa meňzeş deňsizlik ýerine ýetýär. Induksiýa usulyny ulanyp, (36.14) ulgamyny we alnan deňsizlikleri peýdalanyp islendik n üçin alarys

$$|V| < A^n B \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}$$
$$|W| < A^n B \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}$$
$$|U| < A^n B \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}$$

Soňky deňsizliklerden $U \equiv V \equiv W \equiv 0$ gelip cykýar,ýagny (U_1, V_1, W_1) *we* (U_2, V_2, W_2) çözüwler gabat gelýärler. Diýmek (36.3)-(36.4) Gursa meselesiniň çözüwi ýeketäkdir.

§42. Çatyrymlanan operator

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y) \qquad (37.1)$$

operatora garalyň.

Eger $V(x,y) \cdot LU(x,y) - U(x,y) \cdot L^* V(x,y)$ aňlatmany käbir wektoryň dwirgensiýasy görnüşde aňladyp bolýan bolsa, ýagny

$$V \cdot LU - U \cdot L^* V \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}$$

Bolar ýaly $Q(x,y), P(x,y)$ funksiýalar bar bolsa, onda L^* operatora L operatora **çatyrymlanan** operator diýilýär.

L operatora çatyrymlanan L^* operatory tapalyň. $V \cdot LU$ aňlatmada aşakdaky özgertmeleri edeliň

$$V \cdot cU = cV \cdot U$$
$$V \cdot b\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(bV \cdot U) - \frac{\partial}{\partial y}(bV) \cdot U$$
$$V \cdot a\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(aV \cdot U) - \frac{\partial}{\partial x}(aV) \cdot U$$
$$V \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(V \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(V\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(V_y U) - V_{yx} U\right]$$

Bu deňlikleri goşup alarys

$$V \cdot LU \equiv U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(aV) - \frac{\partial}{\partial y}(bV) + cV\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U + aVU\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V\frac{\partial U}{\partial x} + bVU\right) =$$
$$= U \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial V}{\partial x} - b\frac{\partial V}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)V\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U + aVU\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V\frac{\partial U}{\partial x} + bVU\right)$$

$$L^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) \quad ,$$
$$\mathrm{Q} = -V_y U + aVU, \quad P = VU_x + bUV$$

belgilemeler girizip

$$V \cdot LU - U \cdot L^* V \equiv \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}$$

bolýandygyny görmek bolýar, ýagny L^* operator L operatora çatyrymlanan operatordyr. $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ aňlatmany goşup we aýryp funksiýalary başga görnüşde ýazalyň

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial V}{\partial y}U + aVU + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[V\frac{\partial U}{\partial x} + bVU - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right]$$

Şeýlelik bilen aşakdaky toždestwony alarys:

$$V \cdot LU - U \cdot L^* V \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[V\frac{\partial U}{\partial x} + bVU - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right] \quad (37.2)$$

§43. Riman usuly

Eger Koşi meselesiniň çözüwi bar bolsa, onda Riman usuly ol çözüwi tapmaklyga we ony integral görnüşde aňlatmaga mümkinçilik berýär.

$$LU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(x,y)U = f(x,y) \qquad (38.1)$$

deňlemä garalyň. Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi $dx \cdot dy = 0$ görnüşe eýe, şonuň üçin hem deňlemäniň häsiýetlendirijileri koordinat oklaryna parallel bolan $x = const$ we $y = const$ gönülerdir.

Oxy tekizlikde koordinat oklaryna parallel bolan göni çyzyklar bilen birden köp bolmadyk nokatda kesişýän AB egri çyzyk berlen bolsun. (38.1) deňleme üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar.

Koşi meselesi. (38.1) deňlemäniň

$$U\big|_{AB} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{AB} = \psi \qquad (38.2)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\vec{n}$ -AB egriniň normaly.

Tekizlikde erkin $M(x_0, y_0)$ nokady alalyň we ol nokatdan AB egri bilen degişlilikde P we Q nokatlarda kesişýän $x = x_0, y = y_0$ häsiýetlendirijileri geçireliň. Bu häsiýetlendiriji çyzyklar we PQ duga bilen çäklenen ýaýlany D bilen belläliň.

(37.2) toždestwonyň iki bölegini hem D ýaýla boýunça integrirläp we

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{PQMP} Pdx + Qdy$$

Grin formulasyny ulanyp, alarys

$$\iint_D \left[VLU - UL^*V\right] dxdy =$$

$$= \iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[V\frac{\partial U}{\partial x} + bUV - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right]\right\} dxdy =$$

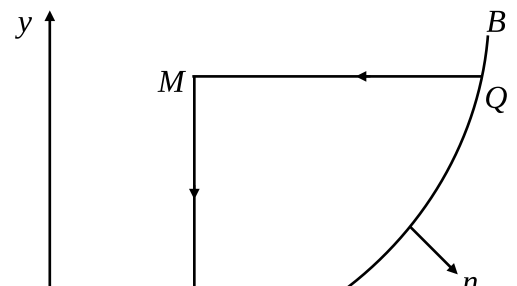
$$= \int_{PQMP} \left(-V\frac{\partial U}{\partial x} - bUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right) dx + \left(-\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right) dy$$

D ýaýlanyň PQMP araçägini PQ, QM, MP böleklere bölüp we QM kesimde $dy = 0$, MP kesimde bolsa $dx = 0$ bolýandygyny nazarda tutup, alarys (çyzgy 2)

$$\iint_D \left[VLU - UL^*V\right] dxdy = \int_{PQ} \left(-V\frac{\partial U}{\partial x} - bUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right) dx +$$

$$+\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right) dy + \int_{QM} \left(-V\frac{\partial U}{\partial x} - bUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right) dx + \qquad (38.3)$$

$$+ \int_{MP} \left(-\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right) dy$$



x

Çyzgy 2

Soňky iki goşulyjyny özgerdeliň

$$\int_{QM}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x}-bUV+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right)dx=$$

$$=\int_{QM}\left(-(VU)_x+V_xU-bUV+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right)dx=$$

$$=\int_{QM}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-bV\right)Udx-\frac{1}{2}(UV)_M+\frac{1}{2}(UV)_Q\ ,$$

$$\int_{MP}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U+aUV+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right)dy=$$

$$=\int_{MP}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}+aV\right)Udy+\frac{1}{2}(UV)_P-\frac{1}{2}(UV)_M$$

Bu ýerde $(UV)_P$ aňlatma UV köpeltmek hasylyň P nokatdaky bahasyny aňladýar. Integrallaryň bu bahalaryny (38.3) formulada goýup, PQ duga boýunça integraly özgerdip we $(UV)_M$ görä çözüp alarys

$$(UV)_M=\frac{(UV)_P+(UV)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int_{PQ}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial V}{\partial x}-2bUV\right)dx+$$
$$+\left(-U\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}V+2aUV\right)dy+\int_{QM}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-bV\right)Udx-\int_{MP}\left(\frac{\partial V}{\partial y}-aV\right)Udy-\qquad(38.4)$$
$$-\iint_D\left[V\cdot LU-U\cdot L^*V\right]dxdy$$

Goý $U(x,y)$ -(38.1) deňlemäniň (38.2) şertleri kanagatlandyrýan çözüwi we $V(x,y)$ funksiýa bolsa

$$L^*V\equiv\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(aV)-\frac{\partial}{\partial y}(bV)+cV=0\qquad(38.5)$$

çatyrymlanan deňlemäniň haýsy hem bolsa bir çözüwi bolsun. Onda (38.4) formulany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar

$$\begin{aligned}(UV)_M &= \frac{(UV)_P + (UV)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial V}{\partial x} - 2bUV\right)dx + \\ &+ \left(-U\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}V + 2aUV\right)dy + \int_{QM}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - bV\right)Udx - \int_{MP}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - aV\right)Udy - \\ &- \iint_D V\cdot f\,dxdy\end{aligned} \qquad (38.6)$$

(38.6) formuladaky QM we MP häsiýetlendirijileriň boýuna alynýan integrallara $U(x,y)$ funksiýanyň näbelli bahasy girýär. Ol integrallary ýok etmek üçin (38.5) deňlemäniň aşakdaky üç şerti kanagatlandyrýan çözüwini alalyň:

1. $\frac{\partial V}{\partial x} - bV = 0$ QM häsiýetlendirijide,
2. $\frac{\partial V}{\partial y} - aV = 0$ MP häsiýetlendirijide,
3. $V = 1$ M nokatda.

$V(x,y)$ funksiýany ýokardaky ýaly saýlap alsak (38.6) formula

$$\begin{aligned}U(M) &= \frac{(UV)_P + (UV)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial V}{\partial x} - 2bUV\right)dx + \\ &+ \left(-U\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}V + 2aUV\right)dy - \iint_D V\cdot f\,dxdy\end{aligned} \qquad (38.7)$$

görnüşi alar. (38.7) formula **Riman formulasy** diýilýär. (38.7) formula (38.1),(38.2) Koşi meselesiniň çözüwini berýär, sebäbi PQ duganyň boýuna alynýan integralyň astynda belli funksiýalar saklanýar. Hakykatdan hem, $V(x,y)$ funksiýa ýokarda kesgitlendi, $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ funksiýalar bolsa (38.2) şertiň esasynda AB egri çyzykda kesgitlenen. Eger s-AB egriniň dugasy bolsa, onda

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{AB} &= \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos(s,x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos(s,y)\right)\right|_{AB} = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \\ \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{AB} &= \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos(n,x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos(n,y)\right)\right|_{AB} = \psi(x)\end{aligned}\right\} \qquad (38.8)$$

$$\begin{vmatrix}\cos(s,x) & \cos(s,y) \\ \cos(n,x) & \cos(n,y)\end{vmatrix} \neq 0,$$

şonuň üçin hem (38.8) ulgamynyň ýeke-täk çözüwi bardyr.

(38.5) deňlemäniň 1-3 şertleri kanagatlandyrýan çözüwi üýtgeýänleriň iki jübütine, ýagny x, y jübütine we fiksirlenen x_0, y_0 jübüte bagly funksiýadyr. Şonuň üçin

$$V = R(x, y; x_0, y_0)$$

belgileme girizeliň. Onda (38.5) deňleme we 1-3 şertler aşakdaky görnüşlerde ýazylar:

$$L^* R \equiv \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(aR) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) + cR = 0 \qquad (38.9)$$

1^0. $\dfrac{\partial R(x, y_0; x_0, y_0)}{\partial x} = b(x, y_0) R(x, y_0; x_0, y_0)$

2^0. $\dfrac{\partial R(x_0, y; x_0, y_0)}{\partial y} = a(x_0, y_0) R(x_0, y; x_0, y_0)$

3^0. $R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1,$

(38.6) formula bolsa

$$U(M) = \frac{U(P)R(P,M) + U(Q)R(Q,M)}{2} + \frac{1}{2}\int_{QP}\left(R\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial R}{\partial x} + 2bUR\right)dx - \qquad (38.10)$$

$$-\left(R\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial R}{\partial y} + 2aUR\right)dy - \iint_D R \cdot f\, dxdy$$

görnüşi alar

$1^0 - 3^0$ şertleri integrirläp alarys

$$R(x, y_0; x_0, y_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(t, y_0)dt\right)$$

$$R(x_0, y; x_0, y_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} a(x_0, \tau)d\tau\right) \qquad (38.11)$$

(38.9) deňlemäniň (38.11) şertleri kanagatlandyrýan çözüwine **Riman funksiýasy** diýilýär. Ol funksiýa Gursa meselesiniň çözüwi hökmünde bardyr we ýeke-täkdir.

§44. Telegraf deňlemesi üçin Koşi meselesi

Telegraf deňlemesi diýip

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 U \qquad (39.1)$$

deňlemä aýdylýar.

(39,1) deňlemäniň Koşi şertlerini

$$U(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad (39.2)$$

kanagatlandyrýan çözüwini tapmak üçin Rimman usulyny ulanalyň.

(39.1) deňlemede ξ we η üýtgeýän ululyklary

$$\xi = \frac{b}{a}(x+at) \qquad \eta = \frac{b}{a}(x-at) \qquad (39.3)$$

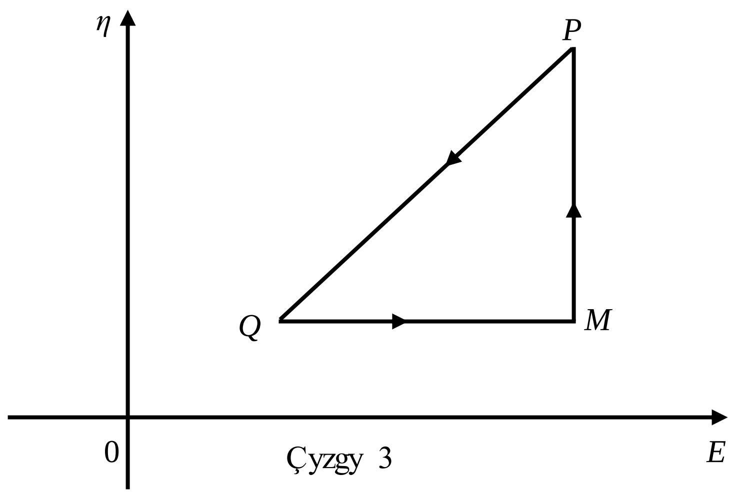
formulalaryň kömegi bilen girizip kanonik görnüşe geçireliň. Onda ol deňleme aşakdaky görnüşi alar.

$$L(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}U = 0 \qquad (39.4)$$

Täze üýtgeýänlerde $t=0$ göni çyzyk

$$\xi = \eta \qquad (39.5)$$

bissektrisa bolar. (çyzgy 3)



Çyzgy 3

(39.3) formuladan alarys

$$\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial U}{\partial\eta} = \frac{1}{b}\frac{\partial U}{\partial t}$$

Şeýlelik bilen (39.2) şertleriň esasynda alarys

$$U(\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi} = \varphi(\frac{a}{b}\xi) \qquad (39.6)$$

$$\left(\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi} = \frac{1}{b}\psi(\frac{a}{b}\xi) \qquad (39.7)$$

(38.9) Rimman formulasyndaky $a=0,\ b=0,\ f=0$ diýip we (38.5) deňligi göz öňünde tutup alarys

$$U(\xi_0,\eta_0) = \frac{U(\xi_0,\xi_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi_0\xi_0) + U(\eta_0,\eta_0)R(\xi_0\eta_0;\eta_0,\eta_0)}{2} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0} R(\xi_0,\eta_0;\xi,\xi)\left(\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi} d\xi - \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta_0} U(\xi,\xi)\left(\frac{\partial R}{\partial\xi} - \frac{\partial R}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi} d\xi \qquad (39.8)$$

Indi $R(\xi,\eta;\xi_0\eta_0)$ Rimman funksiýasyny tapalyň, ol funksiýa çatyrymly

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{4}R=0 \qquad (39.9)$$

deňlemäni kanagatlandyrmaly we MP, MQ häsiýetlendirijileriň birligi öwrülmeli.

(39.9) deňlemäniň çözüwini

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\omega(\lambda), \quad \lambda=\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}$$

görnüşde gözläliň. Bu aňlatmany (39.9) deňlemede goýup $R(\xi,\eta;\xi_0\eta_0)$ funksiýany

$$\omega''(\lambda)+\frac{1}{\lambda}\omega'(\lambda)+\omega(\lambda)=0 \qquad (39.10)$$

ady differensiýal deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görýäris. (39.10) deňlemäniň hususy çözüwini bolup nulynjy tertipli

$$I_0(\lambda)=1-\frac{\lambda^4}{2^2}+\frac{\lambda^4}{(2\cdot4)^2}-\frac{\lambda^8}{(2\cdot4\cdot6)^2}+\ldots \qquad (39.11)$$

Bessel funksiýasy hyzmat edýär. (39.11) dargytmadan görnüşi ýaly

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=I_0(\lambda) \qquad (39.12)$$

diýip (39.9)deňlemäniň

$$R(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=1$$

$$R(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=1$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini alarys, ýagny (39.12) deňlik bilen kesgitlenýän funksiýa MP, MQ kesgitleýjide birligi öwrülýär.

Diýmek Rimman funksiýasy guruldy, ol aşakdaky görnüşe eýe

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=I_0\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right) \qquad (39.13)$$

Bu ýerden alarys

$$\frac{\partial R}{\partial\xi}\Big|_{\eta=\xi}=\frac{\partial I_0}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\Big|_{\eta=\xi}=\frac{1}{2}\frac{\xi-\eta_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}}I_0'(\lambda)\Big|_{\eta-\xi}$$

$$\frac{\partial R}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\xi}=\frac{\partial I_0}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\xi}=\frac{1}{2}\frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}}I_0'(\lambda)\Big|_{\eta-\xi}$$

bu ýerde

$$\left(\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)\Big|_{\eta=\xi}=\frac{1}{2}\frac{\xi_0-\eta_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}I_0'\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right) \qquad (39.14)$$

Indi (39.6), (39.7), (39.14) deňlikleri (39.8) formulada goýup we

$$U(\xi_0,\xi_0)=\varphi\left(\frac{a}{b}\xi_0\right) \qquad U(\eta_0,\eta_0)=\varphi\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)$$

deňlikleri göz öňünde tutup alarys

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{f\left(\frac{a}{b}\xi_0\right)+f\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)}{2}+\frac{1}{2b}\int_{\eta_0}^{\xi_0}I_0\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right)\psi\left(\frac{a}{b}\xi\right)d\xi-$$

$$-\frac{\xi_0-\eta_0}{4}\int_{\eta_0}^{\xi_0}\varphi\left(\frac{a}{b}\xi\right)\frac{I_0'\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right)}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}d\xi$$

x we t köne üýtgeýänlere geçip (0 belgileme taşlanylan) hem-de $z=\frac{a}{b}\xi$ orun çalşyrma edip alarys

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}\right)dz+$$

$$+\frac{bt}{2}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(z)\frac{I_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}\right)}{\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}}dz$$

§45. Tolkunyň deňlemesi üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň ýeke-täklik teoremasy

1.Koşi meselesiniň goýluşy

Bilişimiz ýaly

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^{\ 2}}+\ldots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^{\ 2}}\right)+f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (40.1)$$

deňlemä **tolkunyň deňlemesi** diýilýär. (40.1) deňleme üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar.

Koşi meselesi. $(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ üýtgeýänleriň $t>0$ ýarymgiňişliginde (40.1) deňlemäni we

$$U\ (x_1,x_2,\ldots,x_n,0)=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$\frac{\partial U(x_1,x_2,\ldots,x_n,0)}{\partial t}=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan $U(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\in C(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$ funksiýany tapmaly,

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\in C(t>0),\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\in C^1(E_n),\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\in C(E_n)$

2.Ýeke-täklik teoremasy

Tolkunyň deňlemesi üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň. Ýönekeýlik üçin $a=1$ diýeliň, munuň üçin deňlemede t-ni $\frac{t}{a}$ bilen çalşyrmak ýeterlik. Kesgitlilik üçin üç baglanyşyksyz üýtgeýänli ýagdaýa, ýagny

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^{\ 2}} \qquad (40.2)$$

$$U(x,y,0)=\varphi(x,y),\ \frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y) \qquad (40.3)$$

meselä garalyň

Iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň klasynda (40.2), (40.3) Koşi meselesiniň ýeke-täk çözüwiniň bardygyny subut edeliň. Tersine güman edeliň. Goý, (40.2), (40.3) meseläniň $U_1(x,y,t)\ we\ U_2(x,y,t)$ iki çözüwi bar bolsun. Onda ol çözüwleriň $U=U_1-U_2$ tapawudy (40.2) deňlemäniň

$$U(x,y,0)=0,\ \frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t}=0 \qquad (40.4)$$

birjynsly başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(x,y) islendik bahasynda we islendik $t>0$ üçin $U(x,y,t)\equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň. (x,y,t) üç ölçegli giňişlige garalyň we erkin $M_0(x_0,y_0,t_0)$ $(t_0>0)$ nokady alalyň. Depesi M_0 nokatda bolan

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0$$

konusy $t=0$ tekizlik bilen kesişdireliň. Goý D -konusyň gapdal üsti we $t=0$ tekizligiň konusyň içinde ýatan bölegi bilen çäklenen ýaýla bolsun.

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

aňlatmada aşakdaky özgertmeleri edeliň

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]$$

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]$$

Netijede alarys

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Soňky deňligi D ýaýla boýunça integrirläliň. Çep böleginiň integraly nula deň bolar, sebäbi $U(x,y,t)$ funksiýa (40.2) deňlemäniň çözüwi: Alarys

$$0=\iiint\limits_D\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right\}dxdydt$$

Ostrogradskiniň formulasyndan peýdalanyp D ýaýla boýunça integraly üst boýunça integrala özgerdeliň. Γ bilen konusyň gapdal üstüni, σ bilen bolsa onuň esasyny belläliň. (40.4) başlangyç şertleriň esasynda σ-de

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

şonuň üçin hem Γ boýunça integral galar

$$\iint_{\Gamma}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n,t)-2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial t}\cdot\cos(n,x)-2\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,y)\right\}ds=0 \text{ ýa-da}$$

$$\iint_{\Gamma}\frac{1}{\cos(n,t)}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n,t)-\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,x)\right]^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\cos^2(n,x)+\right.$$
$$+\left[\frac{\partial U}{\partial y}\cos(n,t)-\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,y)\right]^2- \tag{40.5}$$
$$\left.-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\cos^2(n,y)+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\cos^2(n,t)\right\}ds=0$$

Häsiýetlendiriji konusyň Γ gapdal üstünde

$$\cos^2(n,t)-\cos^2(n,x)-\cos^2(n,y)=0$$

Şonuň üçin (40.5) formula aşakdaky görnüşi alar

$$\iint_{\Gamma}\frac{1}{\cos(n,t)}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n,t)-\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,x)\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial U}{\partial y}\cos(n,t)-\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,t)\right]^2\right\}ds=0 \tag{40.6}$$

Γ üstde $Cos(n,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ we integral astyndaky funksiýa üznüksiz hem-de otrisatel däl. Şonuň üçin hem (40.6) deňlikden ol funksiýanyň nula deňligi gelip çykýar, ýagny

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n,t)-\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,x)=0$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}\cos(n,t)-\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,y)=0$$

ýa-da

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\cos(n,x)}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\cos(n,y)}=\frac{\frac{\partial U}{\partial t}}{\cos(n,t)}=\lambda \qquad (40.7)$$

Goý $\vec{l}$ -konusyň käbir emelegetirijisi bolsun. (40.7) formulalardan peýdalanyp alarys

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos(l,x)+\frac{\partial U}{\partial y}\cos(l,y)+\frac{\partial U}{\partial t}\cos(l,t)=$$
$$=\lambda\,[\,\cos(n,x)\cdot\cos(l,x)+\cos(n,y)\cdot\cos(l,y)+\cos(n,t)\cdot\cos(l,t)]=$$
$$=\lambda\cdot\cos(n,l)=0$$

sebäbi konusyň emelegetirijisi normal bilen elmydama göni burç emele getirýär. Diýmek l emelegetirijiniň boýuna

$$U(x,y,t)=const$$

l emelegetiriji $t=0$ tekizlik bilen kesişende $U(x,y,t)=0$, şonuň üçin L emelegetirijiniň boýuna $U(x,y,t)=0$. Bu deňlik M_0 nokatda hem ýerine ýetýär. M_0 erkin nokat, şonuň üçin hem

$$U(x,y,t)\equiv 0 \;\Rightarrow\; U_1(x,y,t)\equiv U_2(x,y,t).$$

§46. Kirhgof formulasy

Tolkunyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad (41.1)$$

birjynsly deňlemesiniň

$$U(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$$
$$\frac{\partial U(x,y,z,0)}{\partial t}=\psi(x,y,z) \qquad (41.2)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga garalyň, bu ýerde φ özüniň üçünji tertibe çenli, ψ bolsa özüniň ikinji tertibe çenli önümleri bilen birlikde üznüksiz funksiýalar.

Ilki bilen

$$U(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r \qquad (41.3)$$

funksiýanyň (41.1) deňlemäniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň, S_{at}^M -merkezi $M(x,y,z)$ nokatda bolan $r=at$ radiusly sfera.

S_{at}^M sferanyň nokatlarynyň koordinatalary

$$\xi=x+\alpha\cdot at,\quad \eta=y+\beta\cdot at,\quad \zeta=z+\gamma\cdot at$$

görnüşde aňladylyp bilner, (α,β,γ) - S_{at}^{M} sferanyň radiusynyň ugrukdyryjy kosinuslary:

$$\alpha=\sin\theta\cdot\cos\varphi\,,\quad \beta=\sin\theta\cdot\sin\varphi\,,\quad \gamma=\cos\theta\,,\quad 0\le\theta\le\pi\,,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\,.$$

Bu calyşmadan soň S_{at}^{M} sfera merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik S_1 sfera geçer, bu sferalaryň degişli $d\sigma_r$ *we* $d\sigma_1$ elementleriniň meýdanlary aşakdaky ýaly baglanyşykda bolar

Onda (41.3) integral

$$U(x,y,z,t)=\frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\mu(x+\alpha at,y+\beta at,z+\gamma at)d\sigma_1 \qquad (41.4)$$

Bu ýerden, eger $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ funksiýa özüniň ikünji tertibe çenli önümleri bilen birlikde üznüksiz bolsa, onda $U(x,y,z,t)$ funksiýanyň ikünji tertipli üznüksiz önüme eýedigini görmek kyn däl.

(41.4) formuladan alarys

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_1$$

ýa-da, S_{at}^{M} sfera geçip alarys

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^{M}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_r \qquad (41.5)$$

(41.4) formulany t boýunça differensirläp alarys

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\mu(x+\alpha at,y+\beta at,z+\gamma at)d\sigma_1+$$
$$+\frac{at}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\mu}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)d\sigma_1 \qquad (41.6)$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ önümi hasaplamak üçin (41.6) deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{U}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iint_{S_{at}^{M}}\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\mu}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)d\sigma_r$$

Ostrogradski formulasyny ulanyp soňky deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{U}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iiint_{D_{at}^{M}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

bu ýerde D_{at}^{M} -merkezi $M(x,y,z)$ nokatda bolan $r=at$ radiusly şar.

$$I=\iiint_{D_{at}^{M}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

diýip alarys

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{U}{t}+\frac{I}{4\pi at}$$

Bu aňlatmany t boýunça differensirläp alarys

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}&=-\frac{U}{t^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}=\\&=-\frac{U}{t^2}+\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{U}{t}+\frac{I}{4\pi at}\right)-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}\end{aligned}\tag{41.7}$$

$\frac{\partial I}{\partial t}$ önümi hasaplalyň. Onuň üçin I integralda merkezi $M(x,y,z)$ nokatda bolan (ρ,φ,θ) sferik koordinatalara geçeliň:

$$I=\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho$$

t boýunça differensirläp alarys

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t}&=a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)(at)^2\sin\theta\, d\theta d\varphi=\\&=a\iint_{S_{at}^M}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r\end{aligned}\tag{41.8}$$

(41.7) we (41.8) deňliklerden alarys

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\iint_{S_{at}^M}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r\tag{41.9}$$

(41.5) we (41.9) deňlikleri deňeşdirip, iki gezek üznüksiz differensirlenýän islendik $\mu(x,y,z)$ funksiýa üçin, (41.3) deňlik bilen kesgitlenýän $U(x,y,z,t)$ funksiýanyň (41.1) deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl. (41.4) we (41.6) formulalardan görnüşi ýaly (41.3) deňlik bilen kesgitlenýän $U(x,y,z,t)$ funksiýa

$$U(x,y,z,0)=0,\quad \frac{\partial U(x,y,z,0)}{\partial t}=\mu(x,y,z)\tag{41.10}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýar.

Eger $U(x,y,z,t)$ funksiýa (41.1) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda $V(x,y,z,t)=\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t}$ funksiýa hem şol deňlemäniň çözüwi bolar. Hakykatdan hem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)-a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\right]=0$$

$V(x,y,z,t)$ funksiýanyň

$$V(x,y,z,0)=\mu(x,y,z),\quad \frac{\partial V(x,y,z,0)}{\partial t}=0 \qquad (41.11)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl.

Indi (41.10) başlangyç şertler ýagdaýynda $\mu(x,y,z)=\psi(x,y,z)$, (41.11) başlangyç şertler ýagdaýynda bolsa $\mu(x,y,z)=\varphi(x,y,z)$ diýip we alnan çözüwleri goşup (41.1) deňlemäniň (41.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini alarys.

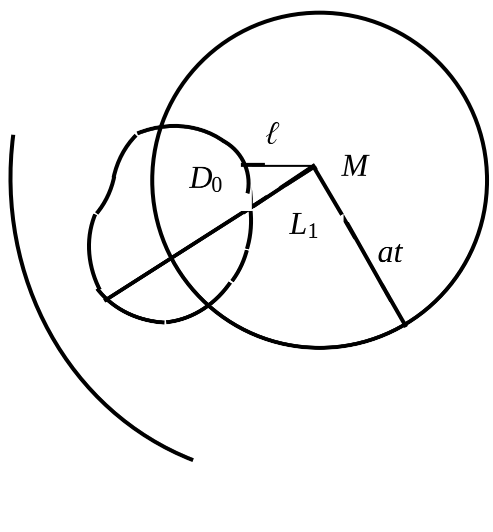
Şeýlelik bilen (41.1) deňlemäniň (41.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi aşakdaky görnüşde alarys.

$$U(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r\right)+\frac{1}{4\pi a}\cdot\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r \qquad (41.12)$$

(41.12) formula Kirhgof formulasy diýilýär.

Kirhgof formulasy üç ölçegli giňişlikde tolkunyň ýaýraýşyny fiziki taýdan düşündirmäge mümkinçilik berýär.

Goý, başlangyç şertler giňişlikde l okallaşdyrylan bolsunlar, ýagny gutarnykly $\overline{D}_0$ ýaýlanyň daşynda $\varphi(x,y,z)=0, \psi(x,y,z)=0$ bolsunlar. $M(x,y,z)\notin\overline{D}_0$ nokady alalyň we ony soňra üýtgetmäliň (fiksirläliň). L we l bilen $M(x,y,z)$ nokatdan D_0 ýaýlanyň S üstüne çenli degişlilikde iň daş we iň golaý uzaklyklary belläliň. $at<l$ ýa-da $t<\frac{l}{a}$ bolsa S_{at}^{M} sfera D_0 ýaýlanyň daşynda ýatýar, şonuň üçin S_{at}^{M} sferada $\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)$ funksiýalaryň ikisi hem nula deň we Krihgof formulasyndan $U\equiv 0$ alarys, ýagny başlangyç şertler $M(x,y,z)$ nokada gelip ýetişenoklar, $t<\frac{l}{a}$ momentde S_{at}^{M} sfera S üste galtaşýar we tolkunyň öňki fronty $M(x,y,z)$ nokatdan geçýär, $t=\frac{l}{a}$ momentden başlap $t=\frac{L}{a}$ momente çenli S_{at}^{M} sfera S üsti kesýär we $U\neq 0$. $t=\frac{L}{a}$ momentden başlap S_{at}^{M} sferanyň S üst bilen umumy nokady bolanok we $U\equiv 0$. $t=\frac{L}{a}$ momente bolsa $M(x,y,z)$ nokatdan tolkunyň yzky frontynyň geçmesi degişli



Çyzgy 4

Şeýlelik bilen giňişlikde lokallaşdyrylan başlangyç şertler her bir $M(x,y,z)$ nokatda

$$\frac{l}{a}<t<\frac{L}{a}$$

wagt aralygynda bolup geçýän lokallaşdyrylan hereket döredýärler (Gýugens prinsipi).

§47. Silindrik tolkunlar. Gaýtma usuly

$\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)$ funksiýalaryň diňe x,y üýtgeýän ululyklara bagly bolan hususy hala garalyň, ýagny olar z okuna parallel bolan her bir gönüde özleriniň hemişelik bahalaryny saklaýan bolsunlar. Eger $M(x,y,z)$ nokady z okuna parallel süýşürseň , onda (41.12) Krihgof formulasynyň sag bölegindäki integrallaryň bahasy üýtgemez, ýagny $U(x,y,z)$ funksiýa hem z-e bagly bolmaz we (41.12) formula

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \qquad (42.1)$$

deňlemäniň

$$U(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y) \qquad (42.2)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini berer. (41.12) çözüwe xy tekizlikde seretmek bolýar. Onuň üçin (41.12) formuladaky S_{at}^M sfera boýunça integrallary xy tekizliginde ýatan töwerek boýunça integrallara özgertmeli. xy tekizliginden $M(x,y)$ nokady alalyň. (ξ,η,ζ) koordinatalary

$$\xi=x+\alpha at, \eta=y+\beta at, \zeta=z+\gamma at$$

formulalar bilen kesgitlenýän nokat z=0 bolanda merkezi $M(x,y,0)$ nokatda bolan at radiusly S_{at}^M sferanyň üýtgeýän nokatlary bolarlar. Ol sferanyň xy tekizlikden aşakda we ýokarda ýatan bölekleri tekizlige merkezi $M(x,y)$ nokatda bolan at radiusly C_{at}^M tegelek görnüşinde proýektirlenýärler. Sferanyň we onuň proýeksiýasynyň $d\sigma_r$, dC_{at} elementleriniň meýdanlary

$$dC_{at}=\cos(n,z)d\sigma_r$$

deňlik bilen baglanyşykly, bu ýerde n-S_{at}^M sfera normalyň ugry, ýagny z oky bilen ýiti burç emele getirýän radiusy. Eger N sferanyň üýtgeýän nokady, N_1 onuň xy tekizlige proýeksiýasy bolsa ,onda

$$\cos(n,z)=\frac{|NN_1|}{|MN|}=\frac{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at},$$

bu ýerde (ξ,η) - C_{at}^M tegelegiň üýtgeýän nokadynyň koordinatalary. (41.12) formulany özgertmäniň netijesinde alarys

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{C_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)+ \\ +\frac{1}{2\pi a}\iint_{C_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \tag{42.3}$$

(42.1) deňlemäniň (42.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini berýän (42.3) formula **Puasson formulasy** diýilýär.

$\varphi(x,y)$ *we* $\psi(x,y)$ başlangyç oýanmalar xy tekizligiň S kontur bilen çäklenen D gutarnykly ýaýlasynda nuldan tapawutly, ýaýlanyň daşynda bolsa nula deň bolsun. Goý $M(x,y)$ nokat D ýaýlanyň daşynda ýatan bolsun. $M(x,y)$ nokatdan S kontura çenli iň golaý uzaklygy l bilen, iň daş uzaklygy bolsa L bilen belläliň. $t<\frac{l}{a}$ bolsa C_{at}^M tegelegiň D ýaýla bilen umumy nokady ýok, $\varphi(x,y)$ *we* $\psi(x,y)$ funksiýalar bütin C_{at}^M tegelekde nula deň we (42.3) formulanyň esasynda $U(x,y,t)=0$ − $M(x,y)$ nokada tolkun heniz gelip ýetişenok. $t=\frac{l}{a}$ momentde M nokada tolkunyň öňki fronty gelýär. $t>\frac{L}{a}$ bahalar üçin C_{at}^M tegelek D ýaýlany öz içinde saklaýar we (42.3) formulanyň esasynda

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{D}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)+ \\ +\frac{1}{2\pi a}\iint_{D}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \tag{42.4}$$

bu ýagdaýda $t=\frac{L}{a}$ wagtdan soň üç ölçegli ýagdaýdaky ýaly $U(x,y,t)$ funksiýa nula öwrülmeýär. Ýöne maýdalawjyda a^2t^2–niň barlygyny nazarda tutup $t\to\infty$ bolanda $U(x,y,t)\to 0$ diýip tassyklap bilýäris. Şeýlelik bilen başlangyç oýanmalar tekizlikde lokallaşan bolanda hereket wagt boýunça lokallaşan däldir. Bu ýagdaýda öňki fronty bar bolup, yzky fronty bolsa ýok tolkun döreýär (Gýugens prinsipi ýerine ýetmeýär).

§48. Birjynsly däl deňleme üçin Koşi meselesi

Aşakdaky meselä garalyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \qquad (43.1)$$

$$U(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t} = \psi(x,y) \qquad (43.2)$$

Bu meseläniň çözüwüni

$$U = U_1 + U_2 \qquad (43.3)$$

jem görnüşde gözläliň. (43.3) jemi (43.1) deňlemede we (43.2) başlangyç şertlerde goýup alarys

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t)$$

$$U_1(x,y,0) + U_2(x,y,0) = \varphi(x,y)$$

$$\frac{\partial U_1(x,y,0)}{\partial t} + \frac{\partial U_2(x,y,0)}{\partial t} = \psi(x,y)$$

Goý, U_1 funksiýa

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)\\ U_1(x,y,0) = \varphi(x,y)\\ \frac{\partial U_1(x,y,0)}{\partial t} = \psi(x,y)\end{gathered} \qquad (43.4)$$

meseläniň çözüwi bolsun. Onda U_2 funksiýa

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t)\\ U_2(x,y,0) = 0\\ \frac{\partial U_2(x,y,0)}{\partial t} = 0\end{gathered} \qquad (43.5)$$

meseläniň çözüwi bolar.

(43.4) meseläniň çözüwi (43.3) Puasson formulasy bilen berilýär.
(43.5) meseläniň çözüwini tapmak üçin

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right), \; t > \tau\\ V\big|_{t=\tau} = 0, \quad \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x,y,\tau)\end{cases} \qquad (43.6)$$

kömekçi meselä garalyň. (43.6) meseläniň çözüwini, t-ni $t-\tau$ bilen çalşyryp, Puasson formulasyny ulanyp ýazmak bolýar, sebäbi başlangyç şertler $t=0$ bolanda däl-de $t=\tau$ bolanda berilýär. Alarys

$$V(x,y,t;\tau)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C^M_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \qquad (43.7)$$

Indi

$$U_2(x,y,t)=\int_0^t V(x,y,t;\tau)d\tau \qquad (43.8)$$

formula bilen kesgitlenýän $U_2(x,y,t)$ funksiýanyň (43.5) meseläniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň.

Hakykatdan hem, (43.8) formuladan alarys

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}=\int_0^t\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}\right)d\tau \qquad (43.9)$$

(43.8) aňlatmany t boýunça differensirläp alarys

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}=V(x,y,t;\tau)\Big|_{t=\tau}+\int_0^t\frac{\partial V}{\partial t}d\tau \qquad (43.10)$$

Bu ýerde integralyň daşyndaky agza başlangyç şertiň esasynda nula deň. t boýunça ýene bir gezek differensirläp alarys

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=\frac{\partial V(x,y,t;\tau)}{\partial t}\Bigg|_{t=\tau}+\int_0^t\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}d\tau\,,$$

özünem integralyň daşyndaky agza başlangyç şertiň esasynda $f(x,y,t)$ funksiýa deň, ýagny

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=f(x,y,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}d\tau\,. \qquad (43.11)$$

(43.9), (43.11) formulalardan we (43.5) meseläniň deňlemesinden $U(x,y,t)$ funksiýanyň (43.5) deňlemäni kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Başlangyç şertleriň ýerine ýetýändigi (43.8) we (43.10) formulalardan görünýär.

U_1 *we* U_2 funksiýalaryň aňlatmalaryny (43.3) formulada ornyna goýup (43.1) deňlemäniň (43.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini aşakdaky görnüşde alarys

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{C^M_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C^M_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\iint\limits_{C^M_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

§49. Umumylaşdyrylan çözüw düşünjesi

Ýönekeýlik üçin kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin Koşi meselesine garalyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<+\infty, t>0 \qquad (44.1)$$

$$U(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \quad -\infty<x<+\infty \qquad (44.2)$$

Bilşimiz ýaly Dalamber formulasy $\varphi(x)\in C^2(E_1)$ $\psi(x)\in C^1(E_1)$ bolanda (44.1)-(44.2) Koşi meselesiniň çözüwini berýär we ol çözüw $\varphi(x),\psi(x)$ funksiýalara üznüksiz bagly bolýar. Dalamber formulasy bilen kesgitlenýän $U(x,t)$ funksiýa $\varphi(x),\psi(x)$ funksiýalar diňe üznüksiz bolanda hem olara üznüksiz bagly bolýar. Ýöne ol funksiýa kirşiň yrgyldysynyň (44.1) deňlemesini kanagatlandyrmaýar, sebäbi $U(x,t)$ funksiýanyň gerekli tertipdäki önümleri bolmaýar.

$\varphi(x)\in C^1(E_1)$, $\psi(x)\in C(E_1)$ bolanda $U(x,t)$ funksiýanyň olara üznüksiz baglydygyndan peýdalanyp umumylaşdyrylan çözüw düşünjesi girizilýär.

$\varphi(x)\in C^1(E_1)$, $\psi(x)\in C(E_1)$ funksiýalara deňölçegli ýygnanýan $\varphi_k(x)\in C^2(E_1)$, $\psi_k(x)\in C^1(E_1)$ funksiýalara garalyň. Onda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U(x,0)=\varphi_k(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi_k(x),$$

Koşi meselesiniň çözüwi bardyr we ol çözüw

$$U_k(x,t)=\frac{\varphi_k(x-at)+\varphi_k(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_k(z)dz$$

Dalamber formulasy bilen berilýär. Soňky deňlikde predele geçip alarys

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

Alnan $U(x,t)$ funksiýa Koşi meselesiniň **umumylaşdyrylan çözüwi** diýilýär.Umumylaşdyrylan çözüwiň Dalamber formulasy bilen aňladylyşyndan, onuň başlangyç şertleri kanagatlandyrýandygy gelip çykýar.

Şeýlelik bilen, Koşi meselesiniň umumylaşdyrylan çözüwi diýip $\varphi_k(x)\in C^2(E_1)$, $\psi_k(x)\in C^1(E_1)$ funksiýalar $\varphi(x)\in C^1(E_1)$, $\psi(x)\in C(E_1)$ funksiýalara deňölçegli ýygnananda $U_k(x,t)$ regulýar çözüwleriň $U(x,t)$ deňölçegli predeline aýdylýar.

§50. Giperbolik deňlemeler üçin gatyşyk meseleäniň çözüwiniň ýeke-täkligi, başlangyç maglumatlar bilen üznüksiz baglylygy

1. Meseläniň goýluşy

$Q=\{0<x<l,\ 0<t<T\}$ gönüburçlykda

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-q(x)U+f(x,t) \qquad (45.1)$$

deňlemä garalyň, bu ýerde $\rho(x), p(x), \rho'(x), q(x)-[o,l]$ kesimde üznüksiz funksiýalar, şunlukda

$$\rho(x)>\rho_0>0,\ \ p(x)>p_0>0, q(x)\geq 0 \quad .$$

(45.1)deňleme üçin birinji, ikinji we üçünji gatyşyk mesele diýip atlandyrylýan meseleler aşakdaky ýaly goýulýar.

Birinji gatyşyk mesele. Q gönüburçlykda (45.1) deňlemäniň $\overline{Q}$ ýapyk gönüburçlykda üznüksiz,

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (0\leq x\leq l) \qquad (45.2)$$

başlangyç şertleri we

$$U(0,t)=\mu_1(t),\quad U(l,t)=\mu_2(t) \qquad (0\leq t\leq T) \qquad (45.3)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly,

$$\varphi(0)=\mu_1(0)\quad ,\quad \varphi(l)=\mu_2(0), \psi(0)=\mu_1{}'(0),\quad \psi(l)=\mu_2{}'(0).$$

Ikinji gatyşyk mesele. Q gönüburçlykda (45.1) deňlemäniň $\overline{Q}$ gönüburçlykda üznüksiz, (45.2) başlangyç şertleri we

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=\nu_1(t),\quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x}=\nu_2(t) \qquad (45.4)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Üçünji gatyşyk mesele. Q gönüburçlykda (45.1) deňlemäniň $\overline{Q}$ gönüburçlykda üznüksiz, (45.2) başlangyç şertleri we

$$\frac{\partial U(o,t)}{\partial x}-h_1U(0,t)=\theta_1(t)$$
$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial x}+h_2U(l,t)=\theta_2(t) \qquad (45.5)$$
$$h_1>0\,,\quad h_2>0$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

2.Ýeke-täklik teoremasy

.Q gönüburçlykda iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň toparynda gatyşyk meseleleriň çözüwleriniň ýeke-täkligini subut edeliň.

Goý (45.1), (45.2), (45.3) gatyşyk meseläniň $U_1(x,t)$ we $U_2(x,t)$ iki sany çözüwi bar bolsun. Onda olaryň $V(x,t)=U_1(x,t)-U_2(x,t)$ tapawudy

$$\rho(x)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial V}{\partial x}\right)-q(x)V \qquad (45.6)$$

birjynsly deňlemäniň

$$V(x,0)=0, \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t}=0 \qquad (45.7)$$

$$V(0,t)=0, \; V(l,t)=0 \qquad (45.8)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. $\overline{Q}$ gönüburçlykda $V(x,t)\equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň.

Energiýa integralyna garalyň

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+q(x)V^2\right]dx \qquad (45.9)$$

(45.7) başlangyç şertleriň esasynda $E(0)=0$. (45.6) deňlemäniň (45.8) gyra şertleri kanagatlandyrýan islendik çözüwi üçin $E(t)$ funksiýanyň hemişelikdigini görkezeliň. Hakykatdan hem, (45.9) deňligi differensirläp alarys

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l\left[\rho(x)\frac{\partial V}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+p(x)\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}+q(x)V\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\right]dx$$

Ortaky agzany bölekler boýunça integrirläp alarys

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l\left[\rho(x)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial V}{\partial x}\right)+q(x)V\right]\frac{\partial V}{\partial t}dx+\left(p(x)\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} \qquad (45.10)$$

Bu ýerden, (45.6) deňlemäniň we (45.8) gyra şertleriň esasynda

$$\frac{dE(t)}{dt}=0 \;\Rightarrow\; E(t)=const$$

gelip çykýar. $E(0)=0$ bolanlygy üçin $E(t)\equiv 0$. Onda (45.9) deňlikden alarys

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}=0 \;\Rightarrow\; V(x,t)=const$$

(45.7) başlangyç şertiň esasynda $t=0$ bolanda $V(x,t)$ nula deň. Şonuň üçin hem $\overline{Q}$ gönüburçlykda $V(x,t)=0$. Diýmek $U_1(x,t)\equiv U_2(x,t)$.

Ikinji gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň. Goý (45.1), (45.2), (45.4) meseläniň $U_1(x,t)$ *we* $U_2(x,t)$ iki çözüwi bar bolsun. Onda ol çözüwleriň $V(x,t)=U_1(x,t)-U_2(x,t)$ tapawudy (45.6) deňlemäniň (45.7) başlangyç şertleri we

$$\frac{\partial V(0,t)}{\partial x}=0\,, \quad \frac{\partial V(l,t)}{\partial x}=0 \qquad (45.11)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. (45.10) deňlikden (45.6) deňlemäniň we (45.11) gyra şertiň esasynda

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = const$$

gelip çykýar. Ýene-de $E(0) = 0$ bolany üçin $E(t) \equiv 0$. Onda (45.9) deňlikden

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x,t) = const$$

Bu ýerden (45.7) başlangyç şertiň esasynda $\overline{Q}$ ýaýlada $V(x,t) = 0$ bolýandygy gelip çykýar. Diýmek $U_1(x,t) \equiv U_2(x,t)$, ýagny ikinji gatyşyk gyra meseläniň çözüwi ýeke-täkdir.

Indi üçünji gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň. Goý (45.1), (45.2), (45.5) meseläniň $U_1(x,t)$ *we* $U_2(x,t)$ iki çözüwi bar bolsun. Onda ol çözüwleriň $V(x,t) = U_1(x,t) - U_2(x,t)$ tapawudy (45.6) deňlemäniň (45.7) başlangyç şertleri we

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(0,t)}{\partial x} - h_1 V(0,t) = 0 \\ &\frac{\partial V(l,t)}{\partial x} + h_2 V(l,t) = 0 \end{aligned} \qquad (45.12)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. (45.6) deňlemäni we (45.12) gyra şertleri peýdalanyp (4510) deňlikden alarys

$$\frac{dE(t)}{dt} = p(l)\frac{\partial V(l,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial V(l,t)}{\partial t} - p(0)\frac{\partial V(0,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial V(0,t)}{\partial t} =$$
$$= -h_2 p(l) V(l,t)\frac{\partial V(l,t)}{\partial t} - h_1 p(0) V(0,t)\frac{\partial V(0,t)}{\partial t},$$

ýa-da

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[h_2 p(l) V^2(l,t) + h_1 p(0) V^2(0,t)\right]$$

Soňky deňligi $[0,t]$ kesimde integrirläp alarys

$$E(t) - E(0) = -\frac{1}{2}\left[h_2 p(l) V^2(l,t) - h_2 p(l) V^2(l,0) + h_1 p(0) V^2(0,t) - h_1 p(0) V^2(0,0)\right]$$

Bu ýerden (45.7) başlangyç şertleriň esasynda

$$E(t) = -\frac{1}{2}\left[h_2 p(l) V^2(l,t) + h_1 p(0) V^2(0,t)\right] \le 0$$

(45.9) formulanyň sag bölegindäki integralyň astyndaky funksiýanyň otrisatel däldiginden $E(t) \ge 0$ gelip çykýar. Diýmek $E(t) = 0$. Onda (45.9) formuladan alarys

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

ýagny
$$V(x,t)=const\ .$$

$V(x,0)=0$ şertden $V(x,t)=0 \Rightarrow U_1(x,t)\equiv U_2(x,t)$.
Şeýlelik bilen üçünji gatyşyk gyra meseläniň ýeke-täkligi subut edildi.

3.Çözüwiň başlangyç şertlere üznüksiz baglylygy

Teorema 1. Goý $U_1(x,t)$ *we* $U_2(x,t)$ Q gönüburçlykda (45.1) deňlemäniň (45.3) birmeňzeş gyra şertleri we

$$U_1(x,0)=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial t}=\psi_1(x)$$
$$U_2(x,0)=\varphi_2(x),\quad \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial t}=\psi_2(x)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan iki sany çözüwi bolsun. Eger $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, $\psi(x)=\psi_1(x)-\psi_2(x)$ tapawutlar we $\varphi'(x)$ önüm $[0,l]$ kesimde absolýut ululyklary boýunça ýeterlikçe kiçi bolsalar, onda $U(x,t)=U_1(x,t)-U_2(x,t)$ tapawut hem Q gönüburçlykda absolýut ululygy boýuça ýeterlikçe kiçidir.

Subudy. $U(x,t)=U_1(x,t)-U_2(x,t)$ tapawut

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-q(x)U \qquad (45.13)$$

birjynysly deňlemäni

$$U(0,t)=0,\quad U(l,t)=0 \qquad (45.14)$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (45.15)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýar.

Ýene-de energiýa integralyna garalyň

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+q(x)U^2\right]dx$$

Bilişimiz ýaly $E(t)$ funksiýa (45.13) deňlemäniň (45.14) gyra şertleri kanagatlandyrýan islendik çözüwinde hemişelik alamatyny saklaýar. Şeýlelik bilen $E(t)=E(0)\quad (0\le t\le T)$ ýa-da (45.15) başlangyç şertleriň esasynda

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+q(x)U^2\right]dx=$$
$$=\int_0^l\left[\rho(x)\psi^2(x)+p(x)\varphi'^2(x)+q(x)\varphi^2(x)\right]dx$$

Goý $M=\max\limits_{[0,l]}\{\rho(x),p(x),q(x)\}$ bolsun, onda

$$\int_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + q(x)U^2\right]dx \le$$
$$\le M\int_0^l \left[\psi^2(x) + \varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\right]dx$$

Şerte görä deňsizligiň sag bölegi ýeterlikçe kiçi. Şonuň üçin hem islendik $t \in [0,T]$ üçin alarys

$$\int_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + q(x)U^2\right]dx < \varepsilon^2$$

Bu ýerden

$$\int_0^l p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx < \varepsilon^2$$

Alarys

$$U(x,t) - U(0,t) = \int_0^x \frac{\partial U}{\partial x}dx$$
$$|U(x,t)| \le \int_0^x \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot \sqrt{p(x)} \cdot \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|dx \le$$
$$\le \left[\int_0^x \frac{dx}{p(x)} \cdot \int_0^x p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{1/2} \le \left[\int_0^l \frac{dx}{p(x)} \cdot \int_0^l p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{1/2} < K \cdot \varepsilon$$

bu ýerde K-hemişelik san. Şeýlelik bilen $U(x,t)$ funksiýa Q gönüburçlykda ýeterlikçe kiçi. Teorema subut edildi.

Bellik. Çözüwiň başlangyç şertlere üznüksiz baglydygyny ikinji we üçünji gyra şertler üçin hem subut etmek bolýar.

§51. Kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin birinji gyra mesele. Furýe usuly

Üýtgeýän ululyklary bölme ýa-da Furýe usuly hususy önümdäki differensial deňlemeleri çözmekde giňden ýaýran usullaryň biridir. Bu usuly uçlary berkidilen kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin beýan edeliň

Goý

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (46.1)$$

deňlemäniň

birjynsly gyra şertleri we

$$U(0,t)=0\,,\quad U(l,t)=0 \qquad (46.2)$$

$$U(x,0)=\varphi(x)\,,\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (46.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun.

1. Formal çözüwiň gurluşy

Ilki bilen (46.1) deňlemäniň toždestwolaýyn nuldan tapawutly (46.2) birjynsly gyra şertleri kanagatlandyrýan we

$$U(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad (46.4)$$

köpeltmek hasyly görnüşde aňladyp bolýan hususy çözüwini tapalyň.
(46.4) görnüşdäki çözüwi (46.1) deňlemede goýup alarys

$$X(x)\cdot T''(t)=a^2X''(x)\cdot T(t)$$

ýa-da

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2\cdot T(t)} \qquad (46.5)$$

(46.4) funksiýanyň (46.1) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin (46.5) gatnaşyk $0<x<l\,,\;\; t>0$ üýtgeýän ululyklaryň islendik bahasynda ýerine ýetmeli. (5) deňligiň sag bölegi diňe t-e bagly funksiýa, çep bölegi bolsa diňe x-a bagly funksiýa. Diýmek deňligiň ýerine ýetmegi üçin gatnaşyklaryň ikisi hem şol bir hemişelik sana deň bolmaly, ol hemişeligi $-\lambda$ bilen belläliň:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2\cdot T(t)}=-\lambda \qquad (46.6)$$

(46.6) gatnaşyklardan $X(x)$, $T(t)$ funksiýalary kesgitlemek üçin

$$x''(x)+\lambda X(x)-0 \qquad X(x)\neq 0 \qquad (46.7)$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \quad\; T(t)\neq 0 \qquad (46.8)$$

ady differensial deňlemeleri alarys. (46.2) şertlerden $X(x)$ funksiýa üçin gyra şertleri alarys:

$$U(0,t)=X(0)\cdot T(t)=0,\quad U(l,t)=X(l)\cdot T(t)=0,$$

bu ýerden görnüşi ýaly $X(x)$ funksiýa

$$X(0)=0,\quad X(l)=0 \qquad (46.9)$$

gyra şertleri kanagatlandyrmaly.

Şeýlelik bilen $X(x)$ funksiýany kesgitlemek üçin ýönekeý hususy baha hakyndaky mesele alyndy: λ parametriň

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,\; X(l)=0 \end{cases} \qquad (46.10)$$

meseläniň nuldan tapawutly çözüwi bolar ýaly bahalaryny we ol çözüwleri tapmaly. λ parametriň şeýle bahalaryna (46.10) meseläniň **hususy bahalary**, olara degişli çözüwlere bolsa **hususy funksiýalary** diýilýär.

(46.10) meseläniň hususy bahalaryny we hususy funksiýalaryny tapalyň. Onuň üçin $\lambda<0$, $\lambda=0$, $\lambda>0$ üç ýagdaýa aýratynlykda garalyň.

1. $\lambda<0$ bolanda (46.7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x)=C_1\cdot e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

görnüşde ýazylýar. C_1 we C_2 erkin hemişelik sanlar. (46.9) gyra şertlerden alarys

$$X(0)=C_1+C_2=0$$
$$X(l)=C_1\cdot e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$$

Bu ýerden

$$C_2=-C_1 \quad , \quad C_1\cdot\left(e^{\sqrt{-\lambda}l}-e^{-\sqrt{-\lambda}l}\right)=0$$

$\sqrt{-\lambda}\,l$-hakyky we položitel, şonuň üçin $e^{\sqrt{-\lambda}l}-e^{-\sqrt{-\lambda}l}\neq 0$. Onda

$$C_1=0,\quad C_2=0$$

diýmek

$$X(x)\equiv 0.$$

2. $\lambda=0$ bolanda (46.7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x)=C_1x+C_2$$

görnüşe eýe. (46.9) gyra şertlerden alarys

$$X(0)=C_1\cdot 0+C_2=0$$
$$X(l)=C_1\cdot l+C_2=0$$

ýagny

$$C_1=0, C_2=0$$

diýmek

$$X(x)\equiv 0.$$

3. $\lambda>0$ bolanda (46.7) deňlemäniň umumy çözüwini

$$X(x)=C_1\cdot\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

görnüşde ýazmak bolýar. (46.9) gyra şertleri ulanyp alarys

$$X(0)=C_1+C_2\cdot 0=0$$
$$X(l)=C_1\cdot\cos\sqrt{\lambda}\,l+C_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$$

Bu ýerden

$$C_1=0\,,\quad C_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,l=0\,.$$

Eger $X(x)\neq 0$ boljak bolsa $C_2\neq 0$ bolmaly, şonuň üçin hem

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$$

ýa-da

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Diýmek (46.10) meseläniň toždestwolaýyn nuldan tapawutly çözüwi diňe

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ \ n=1,2,3...$$

bahalar üçin mümkin. Bu hususy bahalara

$$X_n(x)=C_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,3...$$

C_n-erkin hemişelik, hususy funksiýalar degişli.

Şeýlelik bilen λ parametriň diňe

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,3,\ldots \qquad (46.11)$$

bahalarynda (46.10) meseläniň hemişelik köpeldijä çenli takyklykda kesgitlenýän

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ n=1,2,3... \qquad (46.12)$$

nuldan tapawutly çözüwi bar. λ parametriň (46.11) bahalaryna (46.8) deňlemäniň

$$T_n(t)=A_n\cdot\cos\frac{n\pi}{l}at+B_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}at$$

çözüwleri degişli, A_n , B_n-erkin hemişelikler.

$X_n(x), T_n(t)$ funksiýalary (46.4) deňlikde goýup (46.1) deňlemäniň (46.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan

$$U_n(x,t) = \left(A_n \cdot \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}at \right) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

hususy çözüwlerini alarys.

Umumylaşdyrylan superpozisiýa prinsipinden peýdalanyp (46.1)-(46.3) meseläniň formal çözüwini

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}at \right) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (46.13)$$

görnüşde ýazalyň.

(46.13) hatary t boýunça formal differensirläliň

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \cdot \frac{n\pi a}{l} \cdot \sin\frac{n\pi}{l}at + B_n \cdot \frac{n\pi a}{l} \cdot \cos\frac{n\pi}{l}at \right) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (46.14)$$

we (46.13) , (46.14) funksiýalaryň (46.3) başlangyç şertleri kanagatlandyrmagyny talap edeliň:

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (46.15)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{n\pi a}{l} \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (46.16)$$

(46.15),(46.16) hatarlar degişlilikde $\varphi(x)$ *we* $\psi(x)$ funksiýalar üçin Furýe hatarlarydyr, şonuň üçin

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\ , \quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (46.17)$$

A_n , B_n hemişelikleri (46.12) hatarda goýup (46.1)-(46.3) meseläniň formal çözüwini alarys.

2. Furýe usulyny esaslandyrma

Ilki (46.13) deňlik bilen kesgitlenýän $U(x,t)$ funksiýanyň üznüksizdigini görkezmeli, bu ýerden $U(x,t)$ funksiýanyň başlangyç we gyra şertleri kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Onuň üçin $U(x,t)$ funksiýany kesgitleýän hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik, sebäbi ol hataryň umumy agzasy üznüksiz funksiýa, üznüksiz funksiýalardan düzülen deňölçegli ýygnanýan hatar bolsa üznüksiz funksiýany kesgitleýär.

$$|U_n(x,t)| \le |A_n| + |B_n|$$

deňsizligiň esasynda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|A_n| + |B_n|\right) \qquad (46.18)$$

san hatary (46.13) hatar üçin mažorant hatar bolýar. Eger (46.18) mažorant hatar ýygnanýan bolsa, onda (46.13) hatar deňölçegli ýygnanýar, ýagny $U(x,t)$ üznüksiz funksiýadyr.

$\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}$ funksiýanyň başlangyç şerti kanagatlandyrýandygyna göz ýetirmek üçin ol funksiýanyň üznüksizdigini görkezmeli. Onuň üçin (46.14) hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny ýa-da

$$\frac{\pi a}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\left(|A_n| + |B_n|\right) \qquad (46.19)$$

mažorant hataryň ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik.

$U(x,t)$ funksiýanyň (46.1) deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmek üçin (46.13) hatary x we t boýunça iki gezek agzama-agza differensirläp bolýandygyny görkezmeli. Onuň üçin bolsa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cdot \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}at\right) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cdot \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}at\right) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

hatarlaryň deňölçegli ýygnanýandygyny ýa-da hemişelik köpeldijä çenli takyklykdaky

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(|A_n| + |B_n|\right) \qquad (46.20)$$

san hatarynyň ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

$$A_n = \varphi_n\,,\; B_n = \frac{l}{na\pi}\psi_n\,,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\,,\quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

bolýandygyny nazara alsak (46.18), (46.19), (46.20) hatarlaryň ýygnanýandygyny görkezmek üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot \varphi_n \quad , \quad k = 0, 1, 2 \qquad (46.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot \psi_n \quad , \quad k = -1, 0, 1 \qquad (46.22)$$

hatarlaryň ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik. (46.21), (46.22) hatarlaryň ýygnanýandygyny görkezmek üçin Furýe hatarynyň belli häsiýetlerinden peýdalanalyň.

Eger $2l$ periodik $F(x)$ periodik funksiýa k-njy tertipli üznüksiz önüme eýe bolup, (k+1)-nji tertipli önümi bölek-üznüksiz bolsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot (|a_n| + |b_n|)$$

hatar ýygnanýar, a_n , b_n -Furýe koeffisiýentleri.

Eger diňe $(0, l)$ aralykda berlen $f(x)$ funksiýanyň $\sin \frac{na}{l} x$ funksiýalar boýunça dagytmasyna garasak, onda ýokardaky şertler $f(x)$ funksiýany täk dowam etdirip alnan $F(x)$ funksiýa üçin ýerine ýetmeli.

$f(x)$ funksiýany täk dowam etdirip alnan $F(x)$ funksiýanyň üznüksiz bolmagy üçin $x = 0$, $x = l$ nokatlarda $f(0) = f(l) = 0$ bolmaly. $F(x)$ funksiýanyň birinji tertipli önümi $x = 0$, $x = l$ nokatlarda üznüksiz. Umuman jübüt tertipli önümleriň üznüksiz bolmagy üçin

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0 \,, \quad k = 0, 2, 4, \ldots, 2n$$

şertleriň ýerine ýetmegini talap etmeli.

Şeýlelik bilen (46.21) hataryň ýygnanmagy üçin $\varphi(x)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

1. $\varphi(x)$ funksiýanyň ikinji tertibe çenli önümleri üznüksiz, üçünji tertipli önümi bolsa bölek-üznüksiz bolmaly we

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

(46.22) hataryň ýygnanmagy üçin $\psi(x)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

2. $\psi(x)$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän, bölek-üznüksiz ikinji tertipli önüme eýe bolmaly we

$$\psi(0) = \psi(l)$$

Şeýlelik bilen aşakdaky teorema subut edildi.

Teorema 1. Eger $\varphi(x)$ funksiýa $[0 \,, l]$ kesimde iki gezek üznüksiz differensirlenýän bölek-üznüksiz üçünji tertipli önüme eýe we

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \,, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, $\psi(x)$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän bölek-üznüksiz ikinji tertipli önüme eýe we

$$\psi(0)=\psi(l)=0$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda (46.13) formula bilen kesgitlenýän $U(x,t)$ funksiýa ikinji tertipli üznüksiz önüme eýe, (46.1) deňlemäni, (46.2) gyra şertleri, (46.3) başlangyç şertleri kanagatlandyrýar. Özünem (46.13) hatary x,t boýunça iki gezek agzama-agza differensirlemek bolýar we alnan hatarlar absolýut hem-de deňölçegli ýygnanýar.

§52. Şturm-Liuwil meselesi. Hususy bahalar we hususy funksiýalar

1. Meseläniň goýluşy

Matematiki fizikanyň deňlemeleri üçin gatyşyk meseleleri Furýe usuly bilen çözmeklik Şturm-Liuwil meselesi diýlip atlandyrylýan meselä getirýär.

Aşakdaky giperbolik deňlemä garalyň

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]-q(x)U \qquad (47.1)$$

bu ýerde $p(x),\, p'(x),\, \rho(x),\, q(x)$ $-[0\,,l]$ kesimde üznüksiz funksiýalar, özünem $p(x)\geq p_0>0\,,\ \rho(x)\geq\rho_0>0\,,\ q(x)\geq 0\,.$

Goý (1) deňlemäniň

$$\begin{aligned}
&\alpha\cdot\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}+\beta\, U(0,t)=0 \quad ,\alpha^2+\beta^2\neq 0\\
&\gamma\cdot\frac{\partial U(l,t)}{\partial x}+\delta\, U(l,t)=0 \quad ,\gamma^2+\delta^2\neq 0
\end{aligned} \qquad (47.2)$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (47.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun.

Ilki bilen (47.1) deňlemäniň nuldan tapawutly , (47.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini

$$U(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad (47.4)$$

köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň. (47.4) çözüwi (47.1) deňlemede goýalyň

$$T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]-q(x)X(x)T(t)=\rho(x)X(x)T''(t)$$

ýa-da

$$\frac{\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)]-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)} \qquad (47.5)$$

Soňky deňligiň çep bölegi diňe x ululyga, sag bölegi bolsa diňe t ululyga bagly. Şonuň üçin hem (47.5) deňlik gatnaşyklaryň bahalary hemişelik bolanda mümkin, ol hemişeligi $-\lambda$ bilen belläliň. Onda (47.5) deňlikden iki sany ady differensial deňleme alarys

$$T''(t) + \lambda\, T(t) = 0 \qquad (47.6)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] + \left[\lambda\, \rho(x) - q(x)\right]X(x) = 0 \qquad (47.7)$$

(47.1) deňlemäniň (47.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan (47.4) görnüşdäki nuldan tapawutly çözüwini almak üçin $X(x)$ funksiýanyň

$$\begin{aligned} \alpha\, X'(0) + \beta\, X(0) = 0 \\ \gamma\, X'(l) + \delta\, X(l) = 0 \end{aligned} \qquad (47.8)$$

gyra şertleri kanagatlandyrmagy zerur.

(47.7) deňlemäniň (47.8) gyra şertleri kanagatlandyrýan nuldan tapawutly çözüwini tapmaklyga Şturm-Liuwil gyra meselesi ýa-da hususy baha hakyndaky mesele diýilýär. λ parametriň (47.7)-(47.8) gyra meseläniň nuldan tapawutly çözüwi bolýan bahalaryna Şturm-Liuwil meselesiniň **hususy bahalary**, olara degişli çözüwlerine bolsa **hususy funksiýalary** diýilýär. (47.7) deňlemäniň we (47.8) gyra şertleriň çyzyklylygy hem-de birjynslylygy üçin hususy funksiýalar hemişelik köpeldiji takyklygynda kesgitlenýär. Berlen λ hususy baha degişli çyzykly bagly däl hususy funksiýalaryň sanyna onuň **kratnylygy** diýilýär. Eger λ hususy bahanyň kratnylygy bire deň bolsa, onda oňa ýönekeý hususy baha diýilýär.

Eger

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_s(x)\, dx = 0\,, \quad k \neq s$$

bolsa, onda $X_1(x), X_2(x), \ldots, x \in (0\,, l)$ funksiýalaryň toplumyna $[0\,, l]$ kesimde **agram bilen ortogonal** diýilýär.

2. Hususy bahalaryň we hususy funksiýalaryň häsiýetleri

Häsiýet 1. (47.7)-(47.8) gyra meseläniň hususy bahalary hasaply köplükdir.

Häsiýet 2. (47.7)-(47.8) Şturm-Liuwil meselesiniň hususy bahalarynyň hemmesi ýönekeýdir, ýagny her bir hususy baha diňe bir hususy funksiýa degişlidir.

Subudy. Goý käbir λ hususy baha iki sany çyzykly bagly däl $X_1(x), X_2(x)$ hususy funksiýa degişli bolsun. Onda olaryň

$$X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x)$$

çyzykly kombinasiýasy hem (47.7) deňlemäniň çözüwi bolar we (47.8) şertleri kanagatlandyrar. Hususy ýagdaýda, islendik $C_1\,, C_2$ hemişelikler üçin

$$\alpha X'(0)+\beta X(0)=0$$

Başga tarapdan $X(x)$ funksiýa (47.7) deňlemäniň umumy çözüwi, sebäbi $X_1(x)$, $X_2(x)$ çyzykly bagly däl. Diýmek $X(0)=\beta$, $X'(0)=\alpha$ bolar ýaly C_1, C_2 sanlary tapmak bolar. Onda (47.9) deňlik esasynda alarys $\alpha^2+\beta^2=0$, bu bolsa α, β sanlara goýlan şerte garşy gelýär.

Häsiýet 3. (47.7)-(47.8) meseläniň dürli hususy bahalaryna degişli hususy funksiýalary $[0, l]$ kesimde $\rho(x)$>0 agram bilen ortogonaldyr.

Subudy. Goý λ_s, λ_k dürli hususy bahalar, $X_s(x), X_k(x)$ olara degişli hususy funksiýalar bolsunlar. Aşakdaky toždestwolary ýazalyň:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_s'(x)\right]-q(x)X_s(x)+\lambda_s\rho(x)X_s(x)=0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_k'(x)\right]-q(x)X_k(x)+\lambda_k\rho(x)X_k(x)=0$$

Bu toždestwolaryň birinjisini $X_k(x)$, ikinjisini $X_s x)$ köpeldip, birinjiden ikinjini aýryp we $[0, l]$ kesim boýunça integrirläp,alarys

$$\int_0^l \frac{d}{dx}[p(x)X_s'(x)]\cdot X_k(x)dx-\int_0^l \frac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)]\cdot X_s(x)dx+$$
$$+(\lambda_s-\lambda_k)\cdot\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx=0$$

Ilkinji iki goşulyjyny bölekler boýunça integrirläliň

$$p(x)X_s'(x)X_k(x)\Big|_0^l-\int_0^l p(x)X_s'(x)X_k'(x)dx-p(x)X_k'(x)X_s(x)\Big|_0^l+$$
$$+\int_0^l p(x)X_k'(x)X_s'(x)dx+(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx;$$

$$(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx+\left\{p(x)\left[X_s'(x)X_k(x)-X_k'(x)X_s(x)\right]\right\}\Big|_0^l=0$$

$X_s(x), X_k(x)$ funksiýalar (47.8) gyra şertleri kanagatlandyrýarlar, şonuň esasynda

$$\begin{cases}\alpha X_s'(0)+\beta X_s(0)=0\\ \alpha X_k'(0)+\beta X_k(0)=0\end{cases}$$

deňlikleri ýazmak bolýar. Bu deňliklere α, β görä birjynsly sistema hökmünde garamak mümkin. Ulgamynyň nuldan tapawutly çözüwi bar (şerte görä $\alpha^2+\beta^2\neq 0$). Diýmek onuň kesgitleýjisi nula deň bolmaly

$$X_s'(0)X_k(0)-X_s(0)X_k'(0)=0$$

Edil şunuň ýaly edip

$$X_s'(l)X_k(l)-X_s(l)X_k'(l)=0$$

bolýandygyny subut etmek bolýar. Şeýlelik bilen alarys

$$(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx=0$$

$\lambda_s-\lambda_k\neq 0$, onda

$$\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx=0 \qquad (47.10)$$

Subut edildi.

Häsiýet 4. (47.7)-(47.8) meseläniň hususy bahalarynyň ählisi hakyky sanlardyr.

Subudy. Goý $\lambda=\alpha+i\beta$ kompleks san (47.7)-(47.8) meseläniň hususy bahasy, $X(x)=X_1(x)+iX_2(x)$ oňa degişli hususy funksiýasy bolsun. Onda

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot(X_1'+iX_2')\right]-q(x)(X_1+iX_2)+\rho(x)(\alpha+i\beta)(X_1+iX_2)=0$$

Soňky deňligiň hakyky we hyýaly bölegini nula deňläp alarys

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_1'\right]-q(x)X_1+\alpha\rho(x)X_1-\beta\rho(x)X_2=0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_2'\right]-q(x)X_2+\alpha\rho(x)X_2+\beta\rho(x)X_1=0$$

Ikinji deňligi i-e köpeldip birinjiden aýralyň

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot(X_1'-iX_2')\right]-q(x)(X_1-iX_2)+\alpha\rho(x)(X_1-iX_2)-\beta\rho(x)(X_1-iX_2)=0$$

ýa-da

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X^*\right]-q(x)X^*+\bar{\lambda}\rho(x)X^*=0$$

Diýmek $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ san hem (47.7)-(47.8) meseläniň hususy bahasy, ol hususy baha $X^*=X_1-iX_2$ hususy funksiýa degişli.

$X(x)$ we $X^*(x)$ hususy funksiýalara 3-nji häsiýeti ulanalyň

$$\int_0^l \rho(x)X(x)X^*(x)dx = 0\,;$$

$$\int_0^l \rho(x)(X_1 + iX_2)(X_1 - iX_2)dx = 0$$

Bu ýerden

$$\int_0^l \rho(x)(X_1^2 + X_2^2)dx = 0$$

Soňky deňlikden $X_1(x) = 0$, $X_2(x) = 0$ ýagny $X(x) \equiv 0$. Subut edildi.

Häsiýet 5. Eger gyra şertler

$$\rho(x)X(x)X'(x)\Big|_0^l \leq 0$$

deňsizligi kanagatlandyrýan bolsa, onda (47.7)-(47.8) meseläniň ähli λ_n hususy bahalary otrisatel däldir.

Subudy. Goý λ_k-(47.7)-(47.8) meseläniň hususy bahasy, $X_k(x)$-oňa degişli hususy funksiýasy bolsun.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_k'(x)\right] + \left[\lambda_k \rho(x) - q(x)\right]X_k(x) = 0$$

toždestwony $X_k(x)$ köpeldeliň we integrirläliň

$$\int_0^l X_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_k'(x)\right]dx + \lambda_k \int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx - \int_0^l q(x)X_k^2(x)dx = 0$$

Birinji goşulyjyny bölekler boýunça integrirläp alarys

$$X_k(x)p(x)X_k'(x)\Big|_0^l - \int_0^l p(x)X_k'^2(x)dx + \lambda_k \int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx - \int_0^l q(x)X_k^2(x)dx = 0$$

Bu deňlikden $\lambda_k \geq 0$ gelip çykýar, sebäbi birinji goşulyjy otrisatel däl,

$p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

Netije. Eger gyra şertler

a) $X(0) = 0$, $X(l) = 0$

b) $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$

ç) $X'(0) - h_1 X(0) = 0$, $X'(l) + h_2 X(l) = 0$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$

görnüşlerde bolsalar, onda ähli hususy bahalar $\lambda_k \geq 0$.

Häsiýet 6. Eger $q(x)=0$, $\beta=0$, $\delta=0$ bolsa, ýagny

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X'(0)=0\, ,\, X'(l)=0$$

bolsa, onda $\lambda=0$ san diňe we diňe şonda (47.7)-(47.8) gyra meseläniň hususy bahasydyr.

$\lambda=\lambda_n$ bolanda (6) deňlemäniň umumy çözüwi

$$T_n(t)=A_n\cdot\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}t$$

görnüşe eýe, bu ýerde A_n, B_n -erkin hemişelik sanlar.

Şeýlelik bilen (47.4) deňlik esasynda

$$U_n(x,t)=(A_n\cdot\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x)$$

funksiýalaryň her biri (47.1) deňlemäniň (47.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(47.3) başlangyç şertleri kanagatlandyrmak üçin

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cdot\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x) \qquad (47.11)$$

hatary düzeliň. Eger bu hatar we ony x,t boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsalar, onda onuň jemi (47.1) deňlemäniň (47.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(47.3) başlangyç şertleriň ýerine ýetmegi üçin

$$U(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x) \qquad (47.12)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda}X_n(x) \qquad (47.13)$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur. Şeýlelik bilen biz erkin funksiýany (47.7)-(47.8) gyra meseläniň $X_n(x)$ hususy funksiýalary boýunça hatara dagytmak hakyndaky meselä geldik. (47.12) we (47.13) hatarlary $\rho(x)X_n(x)$ köpeldip we x boýunça 0-dan l-e çenli integrirläp A_n, B_n koeffisiýentleri tapyp bileris. Onda (47.10) deňligi nazarda tutup alarys

$$A_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\cdot\int_0^l\rho(x)\varphi(x)X_n(x)dx$$

$$B_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot\frac{1}{\|X_n\|^2}\cdot\int_0^l\rho(x)\psi(x)X_n(x)dx$$

$$\|X_n\|^2=\int_0^l\rho(x)X_n^2(x)dx$$

Eger-de (47.10) hatar we ony x,t boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsalar, onda A_n, B_n koeffisiýentleriň bu bahalaryny (47.11) hatarda goýup (47.1)-(46.3) gatyşyk meseläniň çözüwini alarys.

§53. Birjynsly däl deňleme we birjynsly däl gyra şertler ýagdaýynda Furýe usuly bilen gatyşyk meseläni çözmek

1. Uçlary berkidilen kirşiň mejbury yrgyldysy

Goý kirşiň mejbury yrgyldysynyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)\,,\ 0 < x < l\,,\ t > 0 \qquad (48.1)$$

deňlemesiniň

$$U(0,t) = 0\,,\ U(l,t) = 0 \qquad (48.2)$$

gyra şertleri we

$$U(x,0) = \varphi(x)\,,\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x)\,,\ 0 \le x \le l\,, \qquad (48.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun.

(48.1)-(48.3) meseläniň çözüwini

$$U(x,t) = V(x,t) + \omega(x,t)$$

jem görnüşde gözläliň.

Goý $V(x,t)$ funksiýa birjynsly däl

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t)\,,\ 0 \le x \le l\,,\ t > 0 \qquad (48.4)$$

deňlemäniň

$$V(0,t) = 0\,,\ V(l,t) = 0 \qquad (48.6)$$

gyra şertleri we

$$V(x,0) = 0\,,\ \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad (48.7)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun. Onda $\omega(x,t)$ funksiýa birjynsly

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\,,\ 0 \le x \le l\,,\ t > 0 \qquad (48.8)$$

deňlemäniň

$$\omega(0,t) = 0\,,\ \omega(l,t) = 0 \qquad (48.9)$$

gyra şertleri we

$$\omega(x,0) = \varphi(x)\,,\ \frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} = \psi(x)\,,\ 0 \le x \le l\,, \qquad (48.10)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(48.8)-(48.10) meseläniň çözüwi §46-a tapyldy. Şonuň üçin hem bu ýerde (48.5)-(48.7) meseläniň çözüwini tapmaklyga garalyň. (48.5)-(48.7) meseläniň çözüwini

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (48.11)$$

hatar görnüşde gözläliň, $T_n(t)$-häzirlikçe näbelli funksiýa.

$V(x,t)$ funksiýa (48.6) gyra şertleri kanagatlandyrýar.Indi $T_n(t)$ funksiýany (48.11) hatar (48.5) deňlemäni we (48.7) başlangyç şertleri kanagatlandyrar ýaly kesgitläliň.

$f(x,t)$ funksiýany $(0,l)$ aralykda sinuslar boýunça Furýe hataryna dagydalyň:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (48.12)$$

bu ýerde

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (48.13)$$

(48.11) we (48.12) hatarlary (48.5) deňlemede goýalyň

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{na\pi}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)\right]\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

Soňky dagytmanyň hemme koeffisiýentleri nula deň bolmaly, ýagny

$$T_n''(t)+\left(\frac{na\pi}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t) \qquad (48.14)$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

$T_n(t)$ funksiýany kesgitlemek üçin hemişelik koeffisiýentli ady differensial deňleme aldyk. (48.7) başlangyç şertlerden alarys

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

$$\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

Bu ýerden $T_n(t)$ funksiýa üçin

$$T_n(0)=0\,,\,T_n'(0)=0 \qquad (48.15)$$

şertleri alarys. (48.14) deňlemäniň (48.15) başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi

$$T_n(t)=\frac{l}{na\pi}\cdot\int_0^l f_n(\tau)\sin\frac{na\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

görnüşe eýe, ýa-da $f_n(\tau)$ funksiýalaryň ornuna onuň (48.13) aňlatmasyny goýup alarys

$$T_n(t)=\frac{2}{na\pi}\cdot\int_0^l\sin\frac{na\pi}{l}(t-\tau)d\tau\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (48.16)$$

Eger-de (48.11) hatar we ony x,t boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsalar, onda T üçin tapylan aňlatmany (48.11) hatarda goýup (48.5)-(48.7) meseläniň çözüwini alarys. Munuň şeýle bolmagy üçin üznüksiz $f(x,t)$ funksiýanyň x boýunça ikinji tertibe çenli üznüksiz hususy önüminiň bolmagyny we islendik t üçin

$$f(0,t)=0\,,\; f(l,t)=0$$

şertleriň ýerine ýetmegini talap etmekligiň ýeterlikdigini görkezmek bolýar.

Ýokarda aýdylanlardan görnüşi ýaly (48.1)-(48.3) meseläniň çözüwini, (48.4) deňlik esasynda aşakdaky hatar görnüşinde ýazmak bolýar

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{na\pi}{l}x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{na\pi}{l}t+b_n\sin\frac{na\pi}{l}t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Bu ýerde $T_n(t)$ koeffisiýent (46.16) formula bilen kesgitlenýär,

$$a_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\;\;,\;\;b_n=\frac{2}{na\pi}\cdot\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\,.$$

2. Birinji gatyşyk meseläniň umumy görnüşi

Kirşiň yrgyldysynyň deňlemesi üçin birinji gatyşyk meseläniň umumy görnüşine garalyň:

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+f(x,t)\,,\;0<x<l\,,\;t>0 \qquad (48.17)$$
$$U(0,t)=\mu_1(t)\,,\;U(l,t)=\mu_2(t)\quad,\quad t\ge 0 \qquad (48.18)$$
$$U(x,0)=\varphi(x)\,,\;\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\,,\;0\le x\le l \qquad (48.19)$$
$$\mu_1(0)=\varphi(0)\,,\;\mu_2(0)=\varphi(l)\,,\;\mu_1'(0)=\psi(0)\,,\;\mu_2'(0)=\psi(l)\;\;.$$

(48.17)-(48.19) meseläni birjynsly gyra şertli meselä getirmek kyn däl. Hakykatdan hem täze $\overline{V}(x,t)$ näbelli funksiýany

$$U(x,t)=\overline{U}(x,t)+\overline{V}(x,t)$$

formulanyň kömegi bilen girizeliň. Onda $\overline{V}(x,t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial x^2}+\left[f(x,t)+a^2\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right] \qquad (48.20)$$

deňlemäniň

$$\begin{aligned}\overline{V}(0,t)&=U(0,t)-\overline{U}(0,t)=\mu_1(t)-\overline{U}(0,t)\\ \overline{V}(l,t)&=U(l,t)-\overline{U}(l,t)=\mu_2(t)-\overline{U}(l,t)\end{aligned} \qquad (48.21)$$

gyra şertleri we

$$\bar{V}(x,0) = U(x,0) - \bar{U}(x,0) = \varphi(x) - \bar{U}(x,0)$$
$$\frac{\partial \bar{V}(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \frac{\partial \bar{U}(x,0)}{\partial t} \qquad (48.22)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

$\bar{U}(x,t)$ funksiýany (48.18) gyra şertler ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň

$$\bar{U}(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

Bu ýerde

$$\bar{U}(0,t) = \mu_1(t)\ ,\ \bar{U}(l,t) = \mu_2(t)$$

bolýandygyny barlamak kyn däl. $\bar{U}(x,t)$ funksiýanyň aňlatmasyny (48.20)-(48.22) meselede goýup alarys

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \left[f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}\left(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right) \right]$$
$$\bar{V}(0,t) = 0\ ,\ \bar{V}(l,t) = 0 \qquad (48.23)$$
$$\bar{V}(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right]$$
$$\frac{\partial \bar{V}(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\right]$$

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$\bar{f}(x,t) = f(x,) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}\left[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right]$$
$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right]$$
$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\right]$$

Onda (48.23) meseläni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \bar{f}(x,t) \\ \bar{V}(0,t) = 0\ ,\ \bar{V}(l,t) = 0 \qquad (48.24) \\ \bar{V}(x,0) = \bar{\varphi}(x)\ ,\ \dfrac{\partial \bar{V}(x,0)}{\partial t} = \bar{\psi}(x) \end{cases}$$

görnüşde ýazyp bileris. (48.24) meseläniň çözüliş usuly 1-nji punktda beýan edildi.

3. Birjynsly däldigi wagta bagly bolmadyk

(stasionar) gatyşyk mesele

Goý birinji gatyşyk meseläniň umumy görnüşindäki gyra şertler we deňlemäniň sag bölegi wagta bagly däl bolsun:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x) \qquad (48.25)$$

$$\begin{cases} U(0,t) = \alpha\,, & \alpha = const \\ U(l,t) = \beta & \beta = const \end{cases} \qquad (48.26)$$

$$U(x,0) = \varphi(x)\,, \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \qquad (48.27)$$

Bu meseläniň çözüwini

$$U(x,t) = \omega(x) + V(x,t) \qquad (48.28)$$

jem görnüşde gözläliň. (48.28) jemi (48.25) deňlemede, (48.26) gyra şertlerde we (48.28) başlangyç şertlerde goýalyň

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2 \omega''(x) + f(x) \\ V(0,t) + \omega(0) = \alpha\,, \quad V(l,t) + \omega(l) = \beta \\ V(x,0) + \omega(x) = \varphi(x)\,, \quad \dfrac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \end{cases}$$

$\omega(x)$ funksiýany

$$\begin{cases} a^2 \omega''(x) + f(x) = 0 \\ \omega(0) = \alpha\,, \quad \omega(l) = \beta \end{cases}$$

gyra meseläniň çözüwi bolar ýaly saýlap alalyň:

$$\omega(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{x}{l} + \frac{x}{l} \cdot \int_0^l d\xi \int_0^\xi \frac{f(\eta)}{a^2} d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{f(\eta)}{a^2} d\eta\ .$$

Onda $V(x,t)$ funksiýa üçin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V(0,t) = 0\,, \quad V(l,t) = 0 \\ V(x,0) = \overline{\varphi}(x)\,, \quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \omega(x) \\ \dfrac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \end{cases}$$

meseläniň çözüwi bolar. Bu meseläniň çözüliş usuly §46-da beýan edildi.

§54. Köpölçegli ýagdaýda Furýe usuly

Aşakdaky deňlemä garalyň

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu \qquad (49.1)$$

bu ýerde

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)u \,,$$

koeffisiýentleri $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ üýtgeýänleriň gutarnykly, birbaglanyşykly D ýaýlasinda kesgitlenen we

$$a(x) \ge 0\,,\ a_{ij} = a_{ji}\,,\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\,, \quad \alpha > 0 \qquad (49.2)$$

şertleri kanagatlandyrýar.

(49.2) şertleriň ikinjisi (49.1) deňlemäniň giperbolik deňlemedigini aňladýar.

(49.1) deňleme üçin aşakdaky gatyşyk meselä garalyň: $Q_T = D\times[0 < t < T]$ silindrde (49.1) deňlemäniň

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \qquad (49.3)$$

başlangyç şertleri we

$$u(x,t)\big|_S = 0\,, \quad t\in[0\,,T] \qquad (49.4)$$

gyra şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde S-D ýaýlanyň araçägi.

Ilki bilen (49.1) deňlemäniň (49.4) gyra şerti kanagatlandyrýan, nuldan tapawutly çözüwini

$$u(x,t) = V(x)\cdot T(t) \qquad (49.5)$$

köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň. (49.5) çözüwi (49.1) deňlemede goýalyň

$$V(x)T''(t) = \left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) - a(x)V\right]\cdot T(t)$$

ýa-da

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{LV}{V} = -\lambda\ .$$

Soňky deňliklerden $V(x), T(t)$ funksiýalary kesgitlemek üçin

$$T''(t) + \lambda\, T(t) = 0 \qquad (49.6)$$

$$LV + \lambda\, V = 0 \qquad (49.7)$$

deňlemeleri alarys. (49.1) deňlemäniň nuldan tapawutly (49.4) gyra şerti kanagatlandyrýan (49.5) görnüşdäki çözüwini almak üçin $V(x)$ funksiýanyň

$$V(x)\big|_S = 0 \qquad (49.8)$$

gyra şerti kanagatlandyrmagy zerurdyr. Şeýlelik bilen biz aşakdaky hususy baha hakyndaky meseläni aldyk:

λ parametriň (49.7) deňlemäniň (49.8) gyra şerti kanagatlandyrýan nuldan tapawutly çözüwi bolar ýaly bahalaryny tapmaly. λ parametriň şeýle bahalaryna (49.7)-(49.8) meseläniň **hususy bahalary**, oňa degişli çözüwlerine bolsa-**hususy funksiýalary** diýilýär.

(49.7) deňlemäniň we (49.8) gyra şertiň birjynsly bolany sebäpli $V_k(x)$ hususy funksiýa hemişelik köpeldiji takyklygynda kesgitlenýär.

Hususy bahalaryň we hususy funksiýalaryň käbir häsiýetlerine garalyň.

Häsiýet 1. (49.7)-(49.8) meseläniň tükeniksiz köp hususy bahasy bar

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Häsiýet 2. (49.7)-(49.8) meseläniň dürli hususy bahalaryna degişli hususy funksiýalary özara ortogonaldyrlar.

Subudy. Goý λ_k, λ_s -(49.7)-(49.8) meseläniň dürli hususy bahalary we V_k, V_s olara degişli hususy funksiýalary bolsun. Aşakdaky deňlikleri ýazalyň

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) - a(x)V_k + \lambda_k V_k = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_s}{\partial x_j} \right) - a(x)V_s + \lambda_s V_s = 0$$

Bu deňlikleriň birinjisini V_s funksiýa, ikinjisini V_k funksiýa köpeldip, soňra birinjiden ikinjini aýryp, alnan deňligi bolsa D ýaýla boýunça integrirläp alarys

$$\int_D V_s \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) dx - \int_D V_k \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_s}{\partial x_j} \right) dx +$$
$$+ (\lambda_k - \lambda_s) \int_D V_k(x) V_s(x) dx = 0$$

Birinji iki goşulyjyny bölekler boýunça integrirläliň

$$\int_S V_s \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\cos(x_i,n)dS - \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V_s}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V_k}{\partial x_j}dx -$$
$$- \int_S V_k \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V_s}{\partial x_j}\cos(x_i,n)dS + \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V_s}{\partial x_j}dx +$$
$$+ (\lambda_k - \lambda_s)\cdot \int_D V_k(x) V_s(x) dx$$

bu ýerde n-S üste geçirilen daşky normal. Onda

$$(\lambda_k - \lambda_s)\cdot\int_D V_k(x)V_s(x)dx = 0 .$$

Şerte görä $\lambda_k - \lambda_s \neq 0$, onda

$$\int_D V_k(x)V_s(x)dx = 0$$

Subut edildi.

Häsiýet 3. (49.7)-(49.8) meseläniň hususy bahalary otrisatel däldir.

Subudy. Goý, λ_k-(49.7)-(49.8) meseläniň hususy bahasy, $V_k(x)$-funksiýa oňa degişli hususy funksiýasy bolsun.

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right) - a(x)V_k = -\lambda_k V_k$$

deňligiň iki bölegini hem $V_k(x)$ funksiýa köpeldeliň we alnan deňligi D ýaýla boýunça integrirläliň

$$\lambda_k\int_D V_k^2(x)dx = -\int_D V_k\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right)dx + \int_D a(x)V_k^2(x)dx .$$

Soňky deňligiň sag bölegindäki birinji integraly bölekler boýunça integrirläp we $V_k|_S = 0$ şerti peýdalanyp alarys

$$\lambda_k\int_D V_k^2(x)dx = \int_D\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V_k}{\partial x_j}dx + \int_D a(x)V_k^2(x)dx$$

(49.1)şertiň esasynda alarys

$$\lambda_k\int_D V_k^2(x)dx \geq \int_D\sum_{i=1}^{n}\alpha\cdot\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_D a(x)V_k^2(x)dx$$

Bu ýerden $\lambda_k \geq 0$ gelip çykýar. Subut edildi.

$\lambda = \lambda_k$ bolanda (6) deňleme

$$T_k(t) = A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t$$

görnüşdäki çözüwe eýe, A_k , B_k -erkin hemişelik sanlar.

Şeýlelik bilen, (49.5) esasynda

$$u_k(x,t) = V_k(x)T_k(t) = \left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)\cdot V_k(x)$$

görnüşdäki funksiýalar (1) deňlemäniň (4) gyra şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

Aşakdaky hatary düzeliň:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)\cdot V_k(x) \qquad (49.9)$$

(49.3) başlangyç şertleri kanagatlandyryp alarys

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) \quad , \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} V_k(x)$$

Bu ýerden

$$A_k = \frac{1}{\|V_k\|^2} \cdot \int_D \varphi(x) V_k(x) dx \quad , \quad B_k = \frac{1}{\|V_k\|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \int_D \psi(x) V_k(x) dx$$

Eger (49.9) hatar we ony x,t boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda A_k, B_k koeffisiýentleriň tapylan bahalaryny goýup (49.1), (49.3), (49.4) meseläniň çözüwini alarys.

BAP VI. PARABOLIK DEŇLEMELER

§55. ÝYLYLYK ÝAÝRAMAGYNYŇ DEŇLEMESI ÜÇIN MAKSIMUMLYK PRINSIPI

1. Maksimumlyk prinsipi

Matematiki fizikanyň deňlemeleri üçin mesele goýlanda esasy soraglaryň biri olaryň korrektligi, ýagny goýlan meseläniň çözüwiniň barlygy, ol çözüwiň ýeke-täkligi we durnuklylygydyr. Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi üçin çözüwiň ýeke-täkligi we durnuklylygy baradaky sorag maksimum prinsipiniň kömegi bilen çözülýär. Ol prinsipi beýan edeliň.

Teorema 1 (maksimum prinsipi). $\bar{Q} = (0 \le x \le l) \times (0 \le t \le T)$ gönüburçlykda kesgitlenen we üznüksiz, $Q = (0 < x < l) \times (0 < t \le T)$ gönüburçlykda ýylylyk ýaýramagynyň

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (50.1)$$

deňlemesini kanagatlandyrýan $U(x,t)$ funksiýa özüniň iň uly we iň kiçi bahalaryny ýa-ha $t = 0$ başlamgyç momentde, ýa-da Q gönüburçlygyň gapdal taraplarynda ($x = 0$ ýa-da $x = l$ bolanda) kabul edýär.

Subudy. Ilki bilen teoremanyň birinji bölegini, ýagny iň uly baha üçin subut edeliň. $U(x,t)$ funksiýanyň Q gönüburçlykda üznüksiz bolany üçin iň uly bahany kabul edýär. Goý $U(x,t)$ özüniň iň uly bahasyny (x_0, t_0), $(0 < x_0 < l) \times (0 < t_0 \le T)$ nokatda kabul edýän bolsun.

$$\max_{\bar{Q}} U(x,t) = U(x_0, t_0) = M$$

$U(x,t)$ çözüwiň $t = 0$ $(0 \le x \le l)$ ýa-da $x = 0$ ýa-da $x = l$ $(0 \le t \le T)$ bolandaky iň uly bahasy m we $m < M$ diýeliň.

Maksimumyň zerurlyk şertinden alarys: eger $t_0 < T$ bolsa, onda

$$\frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 U(x_0,t_0)}{\partial x^2}\le 0 .$$

Eger $U(x,t)$ funksiýa maksimum bahany $t_0 = T$ bolanda kabul edýän bolsa, onda $U(x,t)$ funksiýa T nokadyň çepinde artýan bolmaly, diýmek $t_0 = T$ bolanda

$$\frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial t}\ge 0 \quad , \quad \frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 U(x_0,t_0)}{\partial x^2}\le 0 .$$

Aşakdaky kömekçi funksiýany girizeliň

$$V(x,t)=\frac{M-m}{2l^2}(x-x_0)^2+U(x,t)$$

$t=0$ ýa-da $x=0$ ýa-da $x=l$ bolanda

$$V(x,t)\le \frac{M-m}{2l^2}\cdot l^{2+m}=\frac{M+m}{2}<M$$

we

$$V(x_0,t_0)=U(x_0,t_0)=M .$$

Diýmek $V(x,t)$ funksiýa iň uly bahany ýa-ha gönüburçlygyň içki nokadynda ýa-da t=T bolanda kabul edýär. Goý $U(x,t)$ funksiýa iň uly bahany (x_1,t_1), $(0<x_0<l)\times(0<t_0\le T)$ nokatda kabul edýän bolsun. Onda

$$\frac{\partial V(x_1,t_1)}{\partial t}\ge 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 V(x_1,t_1)}{\partial x^2}\le 0$$

Bu ýerden

$$\frac{\partial V(x_1,t_1)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V(x_1,t_1)}{\partial x^2}\ge 0$$

Başga tarapdan, $V(x,t)$ funksiýany (1) deňlemede goýup we $U(x,t)$ funksiýanyň şol deňlemäniň çözüwidigini nazarda tutup alarys

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{M-m}{l^2}\right)=-a^2\frac{M-m}{l^2}<0 .$$

Şeýlelik bilen biz gapma-garşylyga geldik we $U(x,t)$ funksiýa iň uly bahany (x_0,t_0) nokatda kabul edýär diýip eden gümanymyz ýalan bolup çykdy.

Teoremanyň iň kiçi baha hakyndaky bölegini subut etmek üçin $U(x,t)$ funksiýany $-U(x,t)$ funksiýa bilen çalşyrmak ýeterlik. $U(x,t)$ funksiýanyň iň kiçi bahany kabul edýän nokadynda $-U(x,t)$ funksiýa iň uly bahany kabul edýär, özünem $-U(x,t)$ funksiýa hem (1) deňlemäniň çözüwi bolýar. Teorema subut edildi.

Bu teoremadan aşakdaky netijeler gelip çykýar.

Netije 1. Eger ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesiniň $U_1(x,t)$ *we* $U_2(x,t)$ iki çözüwi

$$U_1(x,0) \le U_2(x,0)\,,\, U_1(0,t) \le U_2(0,t)\,,\, U_1(l,t) \le U_2(l,t)$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda islendik $x,t \quad (0 \le x \le l \quad , \quad 0 \le t \le T)$ üçin

$$U_1(x,t) \le U_2(x,t)$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

Subudy. Hakykatdan hem $V(x,t) = U(x,t) - U(x,t)$ tapawut maksimum prinsipiniň hemme şertlerini kanagatlandyrýar we

$$V(x,0) \ge 0\,,\, V(0,t) \ge 0\,,\, V(l,t) \ge 0\,.$$

Şonuň üçin

$$V(x,t) \ge 0 \quad , \quad 0 \le x \le l \quad , \quad 0 \le t \le T\,.$$

Sebäbi tersine bolsa, onda $V(x,t)$ funksiýa $0 < x < l\,, 0 < t \le T$ ýaýlada otrisatel minimuma eýe bolar.Onda $U_1(x,t) \le U_2(x,t),\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le 1$

Netije 2. Eger ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesiniň $U_1(x,t)\,, U(x,t)\,, U_2(x,t)$ üç çözüwi

$$U_1(x,0) \le U(x,0) \le U_2(x,0)$$
$$U_1(0,t) \le U(0,t) \le U_2(0,t)$$
$$U_1(l,t) \le U(l,t) \le U_2(l,t)$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda

$$U_1(x,t) \le U(x,t) \le U_2(x,t) \quad , \quad 0 \le x \le l\,, 0 \le t \le T$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

Bu tassyklamany subut etmek üçin netije 1-i

$$U_1(x,t)\,, U(x,t) \quad we \quad U(x,t)\,, U_2(x,t)$$

funksiýalar üçin ulanmak ýeterlik.

Netije 3. Eger ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesiniň $U_1(x,t)$ we $U_2(x,t)$ çözüwleri

$$|U_1(x,0)-U_2(x,0)|<\varepsilon$$
$$|U_1(0,t)-U_2(0,t)|<\varepsilon$$
$$|U_1(l,t)-U_2(l,t)|<\varepsilon$$

deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda

$$|U_1(x,t)-U_2(x,t)|<\varepsilon \quad , 0\le x\le l \, , 0\le t\le T \, .$$

Bu netijäni subut etmek üçin netije 2-ni ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesiniň

$$-(U_1-U_2)\, , \varepsilon \, , U_1-U_2$$

üç çözüwi üçin ulanmak ýeterlik.

2. Ýeke-täklik teoremasy

Maksimum prinsipinden peýdalanyp birinji gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň.

Teorema 2.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t)\, , 0<x<l\, , 0<t\le T \qquad (50.2)$$

$$U(0,t)=\mu_1(t)\, , U(l,t)=\mu_2(t) \qquad (50.3)$$

$$U(x,0)=\varphi(x) \qquad (50.4)$$

meseläniň çözüwi $\overline{Q}=(0\le x\le l)\times(0\le t\le T)$ ýaýlada ýeke-täkdir.

Subudy. Goý (50.2)-(50.4) meseläniň $U_1(x,t)$ we $U_2(x,t)$ iki sany çözüwi bar bolsun, onda $V(x,t)=U_1(x,t)-U_2(x,t)$ funksiýa ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly deňlemesiniň

$$V(0,t)=0\, , V(l,t)=0\, , V(x,0)=0$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Şonuň üçin hem maksimum prinsipine laýyklykda

$$V(x,t)=0$$

ýa-da

$$U_1(x,t) \equiv U_2(x,t)$$

Teorema subut edildi.

Teorema 3. (50.2)-(50.4) gatyşyk meseläniň üznüksiz çözüwi $\overline{Q}$ ýaýlada durnuklydyr.

Subudy. Goý $U(x,t)$ funksiýa (50.2)-(50.4) meseläniň çözüwi, $U^*(x,t)$ bolsa (50.2) deňlemäniň

$$U^*(0,t) = \mu_1^*(t)\,,\; U^*(l,t) = \mu_2^*(t)\,,\; U^*(x,0) = \varphi(x)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun, bu ýerde $\mu_1^*(t)\,,\; \mu_2^*(t)\,,\; \varphi(x)$ funksiýalar degişlilikde $0 \le t \le T\,,\; 0 \le x \le l$ kesimlerde üznüksiz funksiýalar we

$$\left|\mu_1^*(t) - \mu_1(t)\right| < \varepsilon\,,\; 0 \le t \le T$$
$$\left|\mu_2^*(t) - \mu_2(t)\right| < \varepsilon\,,\; 0 \le t \le T$$
$$\left|\varphi(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon\,,\; 0 \le x \le l$$

$V(x,t) = U^*(x,t) - U(x,t)$ funksiýa ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly deňlemesiniň

$$|\,V(0,t)| = \left|\mu_1^*(t) - \mu_1(t)\right| < \varepsilon$$
$$|\,V(l,t)| = \left|\mu_2^*(t) - \mu_2(t)\right| < \varepsilon$$
$$|\,V(x,0)| = \left|\varphi(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Onda maksimum prinsipinden gelip çykýan netije 3-e laýyklyjda

$$|\,V(x,t)| < \varepsilon\,,\; 0 \le x \le l\,,\; 0 \le t \le T$$

ýa-da

$$\left|\,U^*(x,t) - U(x,t)\right| < \varepsilon\,,\; 0 \le x \le l\,,\; 0 \le t \le T\,.$$

Teorema subut edildi.

§ 56. Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi üçin birinji gatyşyk gyra meselesini Furýe usuly bilen çözmek

1.Birjynsly meseläniň çözüwi

Goý

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T \qquad (51.1)$$

birjynsly deňlemäniň

$$U(0,t) = 0 \quad , \qquad U(l,t) = 0 \qquad (51.2)$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U(x,0) = \varphi(x) \qquad (51.3)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun.

(51.1)-(51.3) meseläniň formal çözüwini Furýe usuly bilen tapalyň. (51.1) deňlemäniň (51.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan nuldan tapawutly çözüwini

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (51.4)$$

görnüşde gözläliň. (51.4) görnüşdäki çözüwi (51.1) deňlemede goýup alarys

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

ýa-da

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Deňligiň çep bölegi diňe t bagly, sag bölegi bolsa x ululyga baglydyr. Deňligiň ýerine ýetmegi üçin gatnaşyklaryň ikisi hem şol bir hemişelige deň bolmaly; ol hemişeligi $-\lambda$ bilen belläp alarys

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (51.5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (51.6)$$

(4) çözüw gyra şertleri kanagatlandyrmaly, şoňa görä (51.2) şertlerden alarys

$$U(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad U(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

bu ýerden

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \qquad (51.7)$$

Şeýlelik bilen X(x) funksiýany kesgitlemek üçin birjynsly kirişiň yrgyldysy hakyndaky meselede derňelen hususy baha hakyndaky (51.6)-(51.7) mesele alyndy. Şol ýerde λ parametriň diňe

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

bahalarynda (51.6)-(51.7) meseläniň nuldan tapawutly çözüwiniň barlygy we ol çözüwleriň

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

görnüşdedigi görkezilipdi. $\lambda = \lambda_n$ bahalara (51.5) deňlemäniň

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

çözüwleri degişli. $X_n(x)$, $T_n(t)$ funksiýalary (51.4) çözüwde goýup, (51.1) deňlemäniň (51.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwlerini alarys

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

(51.1)-(51.3) meseläniň çözüwini tapmak üçin

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (51.8)$$

hatary düzeliň. (51.3) başlangyç şertiň ýerine ýetmegini talap edip alarys

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Soňky hatar berlen $\varphi(x)$ funksiýanyň (0,l) aralykda sinuslar boýunça Furýe hataryna dagytmasyny berýär. A_n koeffisiýentler belli bolan

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot dx \qquad (51.9)$$

formula bilen kesgitlenýär. A_n koeffisiýentleriň bahalaryny (51.8) hatarda goýup (51.1)-(51.3) meseläniň formal çözüwini alarys.

2. Usulyň esaslandyrylyşy

Koeffisiýentleri (51.9) formula bilen kesgitlenýän (51.8) hataryň (51.1)-(51.3) meseläniň çözüwi bolmagy üçin $\varphi(x)$ funksiýanyň kanagatlandyrmaly şertlerini tapalyň.

Teorema 1. Eger $\varphi(x)$ funksiýa $[0,l]$ kesimde üznüksiz , ikinji tertipli bölek-üznüksiz önüme eýe we

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda (51.8) hatar (51.1)-(351.3) gatyşyk meseläniň $(0\le x\le l)\times(0\le t\le T)$ ýaýlada üznüksiz çözüwi bolýar we $0<t_1\le t\le T$, $0\le x\le l$ bolanda tükeniksiz differensirlenýär.

Subudy. $\varphi(x)$ funksiýa goýlan şertlerden $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|$ hataryň ýygnanýandygy gelip çykýar. Islendik t>0 üçin

$$\left|A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\le|A_n|$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Diýmek (51.8) hatar $(0\le x\le l)\times(0<t_1\le t\le T)$ gönüburçlykda deňölçegli ýygnanýar we üznüksiz U(x,t) funksiýany kesgitleýär.

U(x,t) funksiýanyň $(0\le x\le l)\times(0<t_1\le t\le T)$ gönüburçlykda tükeniksiz differensirlenýändigini subut etmek üçin onuň m+k tertipli önümini hasaplalyň we alnan hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezeliň

$$\frac{\partial^{m+k}U}{\partial t^m\partial x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot(-1)^m\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2m+k}\cdot a^{2m}\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x+k\frac{\pi}{2}\right)\quad(51.10)$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň A_n Furýe koeffisiýenti çäklenen. Şonuň üçin

$$\left|A_n(-1)^m\cdot\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2m+k}\cdot a^{2m}\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x+k\frac{\pi}{2}\right)\right|\le A\cdot n^{2m+k}\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}$$

A-käbir hemişelik, $0<t_1\le t$.

Dalamber nyşanynyň esasynda

$$\sum_{n=1}^{\infty}A\cdot n^{2m+k}\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\quad(51.11)$$

hatar ýygnanýar. Hakykatdan hem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n+1)^{2m+k}\cdot e^{-\left(\frac{n+1}{l}\pi a\right)^2 t_1}}{A\cdot n^{2m+k}\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t_1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2m+k}\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(2n+1)t_1}=0<1$$

(51.11) hatar (51.10) hatar üçin majorant hatar, diýmek (51.10) hatar deňölçegli ýygnanýar we (51.8) hatary agzama-agza differensirlemek mümkinçiligini peýdalanyp (51.8) hatar (51.1) deňlemäni we (51.2) gyra şertleri kanagatlandyrýar diýip jemläp bilýäris. (51.3) başlangyç şert çözüwiň gurluşy boýunça ýerine ýetýär. Teorema subut edildi.

§57. Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi úçin birjynsly däl mesele

Parabolik deňlemeler üçin birjynsly däl gatyşyk meseleler çözülende hem, giperbolik deňlemelerdäki ýaly, Furýe usulyny ulanmak bolýar.

Goý

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0 \qquad (52.1)$$

birjynsly däl deňlemäniň

$$U(0,t)=\mu_1(t),\quad U(l,t)=\mu_2(t) \qquad (52.2)$$

birjynsly däl gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x) \qquad (52.3)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaktalap edilýän bolsun.

(52.1)-(52.3) meseläniň çözüwini

$$U(x,t)=\omega(x,t)+V(x,t) \qquad (52.4)$$

jem görnüşde gözläliň we $\omega(x,t)$ funksiýany (52.2) gyra şertler ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň:

$$\omega(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]$$

Onda $V(x,t)$ funksiýa üçin

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+f_1(x,t),\quad f_1=f-\frac{\partial\omega}{\partial t} \qquad (52.5)$$

$$V(0,t)=0\,,\quad V(l,t)=0 \qquad (52.6)$$

$$V(x,0)=\varphi_1(x)\,,\quad \varphi_1(x)=\varphi(x)-\omega(x.0) \qquad (52.7)$$

meseläni alarys.

(52.5)-(52.7) meseläniň çözüwini

$$V(x,t)=V_1(x,t)+V_2(x,t)$$

jem görnüşde gözläliň, bu ýerde $V_1(x,t)$ funksiýa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\,, \quad 0<x<l\,, \quad t>0 \\ V_1(0,t)=0\,,\quad V_1(l,t)=0 \\ V_1(x,0)=\varphi_1(x) \end{cases} \qquad (52.8)$$

meseläniň çözüwi, $V_2(x,t)$ funksiýa bolsa birjynsly däl deňlemäniň birjynsly gyra we birjynsly başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+f_1(x,t) \quad 0<x<l\,, \quad t>0 \\ V_2(0,t)=0\,,\quad V_2(l,t)=0 \\ V_2(x,0)=0 \end{cases} \qquad (52.9)$$

Geçen temadan bilişimiz ýaly (52.8) meseläniň çözüwini koeffisiýentleri (51.9) formulalar bilen kesgitlenýän (51.8) hatar görnüşinde ýazalyň:

$$V_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (52.10)$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot dx \qquad (52.11)$$

(52.9) meseläniň çözüwini

$$V_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (52.12)$$

hatar görnüşinde gözläliň, bu ýerde T(t) häzirlikçe näbelli funksyýa. $V_2(x,t)$ funksiýa gyra şertleri kanagatlandyrýar, sebäbi hataryň her bir agzasy ol şertleri kanagatlandyrýar. Indi $f_1(x,t)$ funksiýany Furýe hataryna dagydalyň

$$f_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (52.13)$$

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot dx \qquad (52.14)$$

(22) çözüwi we (23) dargatmany (52.9) deňlemede goýup alarys

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=a^2\sum_{n=1}^{\infty}-T_n(t)\cdot\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

ýa-da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

Alnan deňlige nul funksiýanyň sinuslar boýunça hatar dargytmasy ýaly garamak mümkin, diýmek

$$T_n'(t)+\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \qquad (52.15)$$

$V_2(x,t)$ funksiýanyň başlangyç şerti kanagatlandyrmagy üçin

$$T_n(0)=0 \qquad (52.16)$$

şert ýerine ýetmeli.

(52.15)-(52.16) Koşi meselesiniň çözüwi

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2\cdot(t-\tau)}d\tau$$

görnüşde ýazylýar.

$T_n(t)$ funksiýany (52.12) çözüwde goýup (52.9) meseläniň çözüwini alarys

$$V_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_n(\tau)\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2\cdot(t-\tau)}d\tau\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (52.17)$$

V_1(x,t) we V_2(x,t) funksiýalary goýup (52.5)-(52.7) meseläniň $V(x,t)$ çözüwini taparys. $\omega(x,t)$ we V(x,t) funksiýalary (52.4) formulada goýup bolsa, (52.1)-(52.3) meseläniň çözüwini taparys.

$$U(x.t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 \cdot t} \sin\frac{n\pi}{l}x +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 (t-\tau)} d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

bu ýerde A_n - (52.11) formula, $f_n(t)$ - (52.14) formula bilen kesgitlenilýär.

§58.Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligi

1. Meseläniň goýluşy

Ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesi üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar.

Koşi meselesi. $-\infty < x < +\infty, \quad o < t \le T$ zolakda

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (53.1)$$

deňlemäniň

$$U(x,0) = \varphi(x)\ , \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (53.2)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan U(x,t) çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi(x)$ – üznüksiz we çäklenen funksiýa.

2.Ýeke-täklik teoremasy

Teorema1. (53.1)-(53.2) Koşi meselesiniň çäklenen çözüwi ýeke-täkdir.

Subudy. Goý meseläniň $U_1(x,t)$ we $U_2(x,t)$ iki çözüwi bar bolsun, onda ol çözüwleriň

$$U(x,y) = U_1(x,t) + U_2(x,t)$$

tapawudy ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly deňlemesiniň

$$U(x,0)=0 \quad , \quad (-\infty < x < \infty)$$

şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Çözüwleriň çäklenendiginden M>0 san bar bolup

$$|\, U_1(x,t) \,| \le M \quad , \quad |\, U_2(x,t) \,| \le M$$

deňsizlikleriň ýerine ýetýändigi gelip çykýar, diýmek

$$|\, U(x,t) \,| = |\, U_1(x,t) \,| + |\, U_2(x,t) \,| \le 2M \,.$$

Maksimum prinsipini çäklenmedik ýaýla üçin gös-göni ulanmak bolmaýar, sebäbi U(x,t) funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahany hiç ýerde kabul etmezligi mümkin. Bu prinsipi ulanmak üçin

$$|\, x \,| \le L \quad , \quad 0 \le t \le T \qquad (53.3)$$

gutarnykly ýaýlada

$$V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

kömekçi funksiýany girizeliň. V(x,t) funksiýanyň ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly deňlemesiniň çözüwi bolýandygyny görmek kyn däl. Alarys

$$V(x,0) \ge U(x,0)$$
$$V(\pm L,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{L^2}{2} + a^2 t\right) \ge 2M \ge |\, U(\pm L,t) \,|$$

(53.3) ýaýlada $V(x,t)-U(x,t)$ we $V(x,t)+U(x,t)$ funksiýalara maksimum prinsipini ulanyp alarys

$$V(x,t)-U(x,t) \ge 0 \quad , \quad V(x,t)+U(x,t) \ge 0 \quad , |\, x \,| \le L \,, \quad 0 \le t \le T \,,$$

Bu ýerden

$$-V(x,t) \le U(x,t) \le V(x,t) \quad , \quad |\, x \,| \le L \,, \quad 0 \le t \le T$$

ýa-da

$$|U(x,t)| \le V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \quad , |x| \le L \, , 0 \le t \le T.$$

Soňky deňsizlikde (x,t) nokady fiksirläp $L \to \infty$ bolanda predele geçip alarys

$$U(x,t) = U_1(x,t) - U_2(x,t) \equiv 0$$

ýa-da

$$U_1(x,t) \equiv U_2(x,t)$$

Teorema subut edildi.

§59. Ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly deňlemesi üçin Koşi meselesi

1. Formal çözüwiň gurluşy

Goý

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty \, , 0 < t \le T \qquad (54.1)$$

birjynsly deňlemäniň

$$U(x,0) = \varphi(x) \ , \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (54.2)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun, $\varphi(x)$ – üznüksiz we çäklenen funksiýa.

Ilki bilen (54.1) deňlemäniň

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (54.3)$$

görnüşdäki hususy çözüwini tapalyň. (54.3) görnüşdäki çözüwi (54.1) deňlemede goýup alarys

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

ýa-da

$$\frac{T'(t)}{a^2\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

Şeýlelik bilen T(t), X(x) funksiýalar üçin

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

deňlemeleri alarys. Bu ýerden

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\ , \quad X(x) = A \cdot \cos\lambda x + B \cdot \sin\lambda x$$

A,B - λ parametre bagly bolan funksiýalar. Gyra şertleriň ýoklugy üçin λ-parametr erkin.

(54.3) deňligiň esasynda

$$U_\lambda(x,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot [A(\lambda) \cdot \cos\lambda x + B(\lambda) \cdot \sin\lambda x] \qquad (54.4)$$

funksiýa islendik A(λ), B(λ) üçin (54.1) deňlemäniň hususy çözüwi bolar. (54.4) deňligi λ boýunça integrirläp alarys

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot [A(\lambda) \cdot \cos\lambda x + B(\lambda) \cdot \sin\lambda x] d\lambda \qquad (54.5)$$

Eger integral deňölçegli ýygnanýan bolsa we ony integral astynda t boýunça bir, x boýunça iki gezek differensirlemek bolýan bolsa, onda (54.5) deňlik bilen kesgitlenýän U(x,t) funksiýa (54.1) deňlemäniň çözüwi bolýar.

$A(\lambda), B(\lambda)$ funksiýalary (54.2) başlangyç şert ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň. (54.5) deňlikde t=0 goýup (54.2) esasynda alarys

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cdot \cos\lambda x + B(\lambda) \cdot \sin\lambda x] d\lambda \qquad (54.6)$$

Deňligiň sag bölegindäki integraly $\varphi(x)$ funksiýa üçin

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \cos\lambda(\xi - x) d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos\lambda x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos\lambda\xi\, d\xi + \sin\lambda x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin\lambda\xi\, d\xi \right] d\lambda$$

Furýe integraly bilen deňeşdirip, (54.6) deňligi

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi$$
$$B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \qquad (54.7)$$

diýip, kanagatlandyryp bolýandygyny görýäris. $A(\lambda), B(\lambda)$ funksiýalaryň (54.7) aňlatmalaryny (8) deňlemede goýup (54.1)-(54.2) Koşi meselesiniň formal çözüwini alarys

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right)\sin\lambda x\right]\cdot e^{-\lambda^2a^2t}d\lambda$$

ξ boýunça integrallary birleşdirip we integrirlemegiň tertibini çalşyryp alarys

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\cos\lambda(\xi-x)d\xi\,.$$

Bilişimiz ýaly

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2}\cdot\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\cdot e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

Eger bu ýerde $\alpha^2=a^2t$, $\beta=\xi-x$ diýsek, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\cos\lambda(\xi-x)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

Şeýlelik bilen Koşi meselesiniň formal çözüwi üçin

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi \qquad (54.8)$$

formulany alarys.

(54.8) görnüşde ýazylan çözüwe **Puasson integraly** diýilýär.

$$G(x,t;\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\quad ,\quad t>0 \qquad (54.9)$$

funksiýanyň ýylylyk ýaýramagynyň (54.1) deňlemesiniň çözüwi bolýandygyny gös-göni barlamaklyk bilen görkezmek bolýar. (54.9) funksiýa ýylylyk ýaýramagynyň (54.1) deňlemesiniň **fundamental çözüwi** diýilýär.

2. Usulyň esaslandyrylyşy

Indi haýsy şertler ýerine ýetende (54.8) funksiýanyň (54.1)-(54.2) Koşi meselesiniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň.

Lemma. Eger $\varphi(x)$ funksiýa san okunda üznüksiz we çäklenen bolsa, onda (54.8) Puasson integraly t>0 bolanda tükeniksiz differensirlenýän funksiýany kesgitleýär we ol funksiýanyň önümleri integral astynda differensirlemek bilen hasaplanýar.

Subudy. (54.8) integralyň integral astynda differensirlemäniň kanuna laýykdygyna göz ýetirmek üçin ol integralyň we ony x,t boýunça birnäçe gezek formal differensirlenip alnan integrallaryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik. (54.8) integraly x we t boýunça birnäçe gezek differensirläp

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot t^{-m} \cdot (\xi - x)^n \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \qquad (54.10)$$

görnüşdäki integrallaryň jemini alarys. (54.10) integralda $\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \alpha$ orun çalşyrma edip, alarys

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x + 2a\sqrt{t}\alpha\right) \cdot t^{-m+\frac{n+1}{2}} \cdot (2a)^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha$$

Şerte görä $\varphi(x)$ çäklenen funksiýa, onda $t \geq t_1 > 0$ bolanda M>0 san tapylyp

$$\left| \varphi\left(x + 2a\sqrt{t}\alpha\right) \cdot t^{-m+\frac{n+1}{2}} \cdot (2a)^{n+1} \right| < M$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şeýlelik bilen

$$I < M \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^n \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha$$

Soňky integral islendik n üçin ýygnanýar, onda (54.10) integral deňölçegli ýygnanýar we (54.8) integraly integral astynda differensirlemek kanuna laýyk. Lemma subut edildi.

Teorema 1. Eger $\varphi(x)$ san okunda üznüksiz we çäklenen bolsa, onda (54.8) Puasson integraly (54.1)-(54.2) Koşi meselesiniň regulýar çözüwi bolýar.

Subudy. Puasson integralyny

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

görnüşde ýazalyň. $G(x,t;\xi)$ funksiýa ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesiniň çözüwi we lemma laýyklykda differensirlemäni integral astynda ýerine ýetirmek bolýar. Şoňa görä-de

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi = 0 \ ,$$

ýagny (54.8) funksiýa (54.1) deňlemäni kanagatlandyrýar.

(54.8) çözüwiň (54.2) başlangyç şerti kanagatlandyrýandygyny görkezeliň. x fiksirläp $t \to +0$ bolanda $|U(x,t) - \varphi(x)|$ tapawudy bahalandyralyň. Puasson integralynda $\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \alpha$ orun çalşyrma edip alarys

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x + 2a\sqrt{t} \cdot \alpha\right) \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha$$

Analizden belli bolşy ýaly

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 \qquad (54.11)$$

Alarys

$$|U(x,t) - \varphi(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x + 2a\sqrt{t}\alpha\right) \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi\left(x + 2a\sqrt{t}\alpha\right) - \varphi(x) \right| \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha$$

$(-\infty, +\infty)$ aralyk boýunça integraly $(-\infty, -N), (-N, N), (N, +\infty)$ aralyklar boýunça üç integrala böleliň

$$\left|U(x,t)-\varphi(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{-N}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi(x)\right|\cdot e^{-\alpha^2}d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-N}^{+N}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi(x)\right|\cdot e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{N}^{+\infty}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi(x)\right|\cdot e^{-\alpha^2}d\alpha$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň san okunda çäklenendiginden

$$\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi(x)\right| < 2M$$

deňsizlik gelip çykýar. Şonuň üçin

$$\left|U(x,t)-\varphi(x)\right| \le \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{-N}e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-N}^{+N}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi(x)\right|\cdot e^{-\alpha^2}d\alpha +$$

$$+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{N}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha$ integral ýygnanýar, şonuň üçin N sany

$$\left|\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-\alpha^2}d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad \left|\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

deňsizlikler ýerine ýeter ýaly saýlap almak bolýar. Indi N fiksirlenen bolsun. $\varphi(x)$ funksiýa san okunda üznüksiz, diýmek, ol $\left[x-2a\sqrt{t}N, x+2a\sqrt{t}N\right]$ kesimde deňölçegli üznüksiz we nula golaý islendik t üçin

$$\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şeýlelik bilen

$$\left|U(x,t)-\varphi(x)\right| < \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

ýa-da nula golaý islendik t-ler we islendik x üçin $\left|U(x,t)-\varphi(x)\right| < \varepsilon$. Bu ýerden ε sanyň erkinliginden

$$\lim_{t\to\infty}U(x,t)=\varphi(x)$$

gelip çykýar. Teorema subut edildi.

3. Çözüwiň başlangyç funksiýa üznüksiz baglylygy

Goý U(x,t)- (54.1) deňlemäniň (54.2) başlangyç şerti, $U_1(x,t)$ bolsa (54.1) deňlemäniň

$$U_1(x,0)=\varphi_1(x) \qquad (54.12)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolsun.

Eger $(-\infty,+\infty)$ aralyga degişli islendik x üçin $|\varphi(x)-\varphi_1(x)|<\varepsilon$ bolsa, onda

$$|U(x,t)-U_1(x,t)|<\varepsilon,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0\ .$$

Hakykatdan hem, (54.1) deňlemäniň (54.12) başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi (54.8) formula bilen aňladylýar. U(x,t) we U_1(x,t) funksiýalaryň tapawutlaryny bahalandyralyň

$$|U(x,t)-U_1(x,t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-\varphi_1(x)]\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right|<\frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$\alpha=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$ diýip alarys

$$|U(x,t)-U_1(x,t)|<\varepsilon\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\varepsilon$$

(54.8) formuladan ýylylygyň sterjniň boýuna tükeniksiz tizlik bilen ýaýraýandygy gelip çykýar. Hakykatdan hem, goý $\varphi(x)$ başlangyç temperatura $\alpha\le x\le\beta$ kesimde polojitel we bu kesimiň daşynda nula deň bolsun. Onda temperaturanyň soňraky paýlanyşy üçin alarys

$$U(x,t)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

Bu ýerden islendik kiçi t>0 üçin we islendik uly x üçin U(x,t)>0 bolýandygy görünýär. Bu häsiýet ýylylyk ýaýramagynyň deňlemesiniň kämil däldigi, deňlemäni getirip çykarylanda peýdalanylýan fiziki nätakyklygy bilen düşündirilýär.

4. Fundamental çözüwiň fiziki manysy

Ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly deňlemesiniň

$$G(x,t;\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

fundamental çözüwiniň fiziki manysyny anyklalyň.

Goý t=0 momentde tükeniksiz uzyn sterjnde ýylylyk $U(x,0)=\varphi_\varepsilon(x)$ kanun boýunça paýlanan bolsun, bu ýerde $\varphi_\varepsilon(x)\equiv 0$ haçanda $x\notin(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ bolsa we

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=1$$

Eger t=0 momentde nul temperaturasy bolan sterjniň y nokadynyň ε etrapyna mgnowenno

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(\xi)c\rho\,d\xi=c\rho\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=c\rho$$

mukdardaky ýylylyk berilse, onda ýokarda görkezilen paýlanyşyk alynýar.

t>0 momentde sterjnde ýylylygyň paýlanyşy Puasson integraly bilen kesgitlenýär

$$U_\varepsilon(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}G(x,t;\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi$$

Orta baha hakyndaky teoremany ulanyp we $\varphi_\varepsilon(x)$ funksiýanyň häsiýetini nazarda tutup alarys

$$U_\varepsilon(x,t)=G(x,t;\xi^*)\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=G(x,t;\xi^*),$$

$$\xi^*\in(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$$

(x,t) nokady fiksirläp $\varepsilon\to 0$ bolanda predele geçip alarys

$$\lim_{\varepsilon\to 0}U_\varepsilon(x,t)=G(x,t;y).$$

Şeýlelik bilen , eger t=0 momentde nul temperaturasy bolan sterjniň x=y nokadyna mgnowenno $c\rho$ deň mukdardaky ýylylyk berlen bolsa, onda ýylylyk ýaýramagyň G(x,t:y) fundamental çozüwi t bolanda sterjnde paýlanyşygy berýär, ýagny G(x,t;y) çeşme funksiýasy bolar.

§ 60. Ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly däl deňlemesi üçin Koşi meselesi

Goý, ýylylyk ýaýramagynyň birjynsly däl

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \qquad (55.1)$$

deňlemesiniň

$$U(x,0) = 0 \qquad (55.2)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun.

Eger başlangyç şert nula deň däl bolsa, ýagny $U(x,0) = \varphi(x)$ bolsa, onda

$$U(x,t) = \omega(x,t) + \varphi(x)$$

formulanyň kömegi bilen täze $\omega(x,t)$ funksiýa girizip başlangyç şerti nula deň bolan mesele alarys:

$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} + \left(f(x,t) - \varphi''(x) \right), \qquad \omega(x,0) = 0$$

(55.1)-(55.2) Koşi meselesiniň çözüwini tapmak üçin

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}, \quad t > \tau \qquad (55.3)$$

$$V(x,\tau) = f(x,\tau) \qquad (55.4)$$

kömekçi meselä garalyň. (55.3)-(55.4) mesele birjynsly deňleme üçin başlangyç şert t=0 bolanda däl-de t=τ bolanda berlen Koşi meselesi. Şonuň üçin hem bu meseläniň çözüwini t-ni t-τ bilen çalşyp Puasson integralynyň kömegi bilen ýazmak bolýar

$$V(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,t) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}$$

Indi (55.1)-(55.2) meseläniň çözüwini

$$U(x,t) = \int_0^t V(x,t;\tau) d\tau$$

ýa-da

$$U(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi$$

görnüşde ýazmak bolýar.

EDEBIÝATLAR

1. Koşlýakow N.S., Gliner .B., Smirnow M.M. Matematika fizikanyň hususy önümli deňlemeler. M., “Ýokary mekdep”, 1970.
2. Kurant R. Hususy önümli deňlemeler. M., “Mir”, 1964.
3. Petrowskiý I.G. Hususy önümli deňlemeler barada leksiýalar. M., Fizmatgiz, 1961.
4. Smirnow W.I., Ýokary matematikanyň kursy, t.II-IV. M., Fizmatgiz, 1958-1967.
5. Sobolew S.L., Matematika fizikanyň deňlemeleri. M., Gostehizdat, 1966.
6. Tihonow A.N., Samarskiý A.A. Matematika fizikanyň deňlemeleri. M., “Nauka”, 1966