TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
HALKARA TÜRKMEN-TÜRK UNIWERSITETI

ÝOKARY MATEMATIKADAN TEJRIBE IŞLERI

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin
okuw gollanmasy
Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

N.Nurullaýew, A.Orazgylyjow, A.Aşyralyýew

Aşgabat – 2010

**TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW**

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

GARAŞSYZ, BAKY BITARAP
TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GIRIŞ

**TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW:**

- Biz häzir Türkmenistanda milli bilim ulgamynda düýpli özgertmeler geçirmäge girişdik. Şol özgertmeleriň baş maksady - türkmen ýaşlaryna dünýäniň iň ösen talaplaryna laýyk gelýän bilim ulgamyny elýeterli etmekden ybaratdyr.

Size hödürlenýan bu okuw gollanmasy Türkmen politehniki institutynda geçilýän tejribe okuwlarynyň esasynda taýýarlanyldy.

Okuw gollanmasy 6 sany tejribe işlerinden ybarat. Olar inžener tejribeliginde giňden peýdalanylýan san çözüwli matematiki meselerden düzülip, berlen $y = f(x)$ formula boýunça funksiýanyň tablisasyny düzmek, deňlemäniň hakyky köküni horda we galtaşýanlar usuly bilen hasaplamak, n näbellili n çyzykly algebraik deňlemeler ulgamyny çözmek, kesgitli integraly takmyn hasaplamak, Runga-Kuttanyň usuly boýunça differensial deňlemäniň san çözüwlerini tapmak, empirik formulany saýlap almak we onuň parametrlerini iň kiçi kwadratlar usuly bilen kesgitlemek meseleleridir.

Gollanmada her bir tejribe işi boýunça teoriýa maglumatlary berilýär we alnan formulalaryň kömegi bilen tejribe işe degişli bir ýumuşyň ýerine ýetirilişi görkezilýär. Tejribe işiniň soňunda talyplara hödürlenmeli köp sanly ýumuşlar berilýär.

Tejribe işlerindäki ýumuşlaryň häzirki döwürde talyp ýaşlaryň, inženerleriň we alymlaryň arasynda giňden ýaýran Machcad matematiki programmalaryň toplumynyň (paketiniň) kömegi bilen çözüliş usullary-da görkezilendir. Machcad matematiki programmalaryň toplumy dürli matematiki meseleleri çözmeklige, ýokary derejede hasaplamalary amala aşyrmaga we hasabatlary taýýarlamaga mümkinçilik berýär. Agzalan programmalar toplumy meseleleriň analitiki, grafiki we san çözüwlerini tapmaklyk üçin giň serişdeler bilen üpjün edilendir.

Umuman, gollanma döwrebap hünärmenleri taýýarlamaklyga öz goşandyny goşar diýip umyt edýäris.

TEJRIBE IŞI №1

BERLEN $y = f(x)$ FORMULA BOÝUNÇA FUNKSIÝANYŇ TABLISASYNY DÜZMEK

1. Funksiýanyň tablisasynyň gurluşy.

$y = f(x)$ funksiýanyň tablisasy, adatça, şeýle ýazylýar:

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
. . .	. . .
x_k	y_k
. . .	. . .
x_n	y_n

(1)

Bu ýerde

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n, \quad x_k = x_0 + k \cdot h. \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

h - položitel san, argumentiň iki goňşy bahalarynyň tapawudyna deň; oňa tablisanyň ädimi diýilýär.

Tablisanyň takyklygy funksiýanyň tablisa bahalarynyň dogry sifrleriniň mukdary (sany) bilen kesgitlenilýär. Tablisalaryň aglaba köpüsinde funksiýanyň takmyn bahalary berlen kiçi onluk belgi diýilýän onluk belgä çenli tegeleklenilýär, ýagny tablisada oturdan soň onluk belgileriň deň sany ýazylýar. Funksiýanyň tablisasyndan alnan takmyn sanyň absolýut ýalňyşlygy kiçi onluk belginiň birliginiň ýarysyna deň.

$\sqrt{9{,}31} \approx 3{,}05123$ diýip ýazmak $\left|\sqrt{9{,}31} - 3{,}05123\right| < 0{,}000005$ diýmekligi aňladýar.

2. Tapawutlar tablisasy we onuň derňew üçin ulanylyşy

$y = f(x)$ funksiýanyň berlen ädime degişli derňew tapawutlar tablisasy aşakdaky ýaly kesgitlenilýär.

Funksiýanyň birinji tertipli tapawutlary:

$$\begin{cases} \Delta y_0 = y_1 - y_0, \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \\ \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}; \end{cases} \qquad (3)$$

ikinji tertipli tapawutlary:

$$\begin{cases} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \\ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}; \end{cases} \qquad (4)$$

üçünji tertipli tapawutlary:

$$\begin{cases} \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}. \end{cases}$$

Funksiýanyň k-njy tertipli tapawutlary (k–1)-nji tertipli tapawutlarynyň üsti bilen şeýle kesgitlenilýär:

$$\begin{cases} \Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0, \\ \Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^k y_{n-k} = \Delta^{k-1} y_{n-k+1} - \Delta^{k-1} y_{n-k}. \end{cases} \qquad (5)$$

Tapawutlaryň tablisasy şeýle düzülýär:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		
		Δy_4			
x_5	y_5				

$\Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y,\ \Delta^4 y$ tapawutlaryň her biri öňki sütünde öz deňinde duran ýanaşyk iki sanyň tapawudy bolup (aşak deňindäkisinden ýokary deňindäkisini aýyrmak bilen tapylýar), şol iki sanyň duran setirleriniň arasynda ýazylýar.

Tapawutlary tablisada bitin san görnüşinde we funksiýanyň tablisa bahalarynyň kiçi onluk belgileriniň birliklerinde ýazmaklyk kabul edilen. Funksiýanyň tablisa bahalary düzülende hasaplamalaryň dogrudygyny barlamak üçin funksiýanyň tapawudynyň tablisasyny ulanyp bolar. Eger funksiýanyň garalýan aralykda analitik aýratynlyklary bolmasa, onda onuň tapawudy, adatça, endigan üýtgeýär.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_{n-3}	y_{n-3}	Δy_{n-3}	$\Delta^2 y_{n-4}$	$\Delta^3 y_{n-4}$	$\Delta^4 y_{n-4}+\varepsilon$
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}+\varepsilon$	
					$\Delta^4 y_{n-3}-4\varepsilon$
x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta y_{n-1}+\varepsilon$	$\Delta^2 y_{n-2}+\varepsilon$	$\Delta^3 y_{n-2}-3\varepsilon$	
					$\Delta^4 y_{n-2}+6\varepsilon$
x_n	$y_n+\varepsilon$	$\Delta y_n-\varepsilon$	$\Delta^2 y_{n-1}-2\varepsilon$		
				$\Delta^3 y_{n-1}+3\varepsilon$	
x_{n+1}	y_{n+1}	Δy_{n+1}			$\Delta^4 y_{n-1}-4\varepsilon$
			$\Delta^2 y_n+\varepsilon$		
				$\Delta^3 y_n-\varepsilon$	
x_{n+2}	y_{n+2}	Δy_{n+2}			
					$\Delta^4 y_n+\varepsilon$
			$\Delta^2 y_{n+1}$		
				$\Delta^3 y_{n+1}$	
x_{n+3}	y_{n+3}				
			$\Delta^2 y_{n+2}$		

Şonuň üçin hem tapawudyň endigan üýtgemesiniň bozulmagy käbir ýagdaýlarda synagyň netijesinde tablisa görnüşinde berlen funksiýanyň aýry-aýry bahalarynda goýberilen ýalňyşlygy kesgitlemäge ýa-da analitik görnüşinde berlen funksiýanyň bahalarynyň hasaplanylyşyny barlamaga mümkinçilik berýär.

y_n-iň bahasy tapylanda goýberilen ýalňyşlygyň tablisadaky tapawutlaryň bahasyna nähili täsir edýändigine seredeliň. Ýokarky tablisadan görnüşi ýaly, funksiýanyň bahasynda goýberilen ujypsyz ýalňyşlyk onuň ýokary tertipli tapawutlarynda uly ýalňyşlyga getirýär. Şu ýagdaydа ýalňyşlyklaryň absolýut bahalarynyň jemi $2^k \cdot |\varepsilon|$ sana deňdir.

Funksiýanyň bahalarynyň tablisasyna garalyň:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,0	23,817			
		–196		
1,1	23,621		4	
		–192		1
1,2	23,429		5	
		–187		$\underline{5}$
1,3	23,242		$\underline{10}$	
		$\underline{-177}$		$\underline{-10}$
$\underline{1{,}4}$	$\underline{23{,}065}$		$\underline{0}$	
		$\underline{-177}$		$\underline{12}$
1,5	22,888		$\underline{12}$	
		–165		$\underline{-4}$
1,6	22,723		8	
		–157		2
1,7	22,566		10	
		–147		1
1,8	22,419		11	
		–136		
1,9	22,283			

Görşümiz ýaly, aşagy çyzylan ýerlerde birinji we ikinji tapawutlaryň endigan gidişi bozulýar we $x = 1{,}4$ bolanda ýalňyşlygyň mümkindigini görkezýär. Eger ikinji we üçünji tapawutlar hemişelige golaý bolsalar, onda ikinji tapawutlaryň üsti bilen tablisany

$$\overline{\Delta^2 y_{n-1}} = \frac{\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-1} + \Delta^2 y_n}{3} \tag{6}$$

formula boýunça düzedip bolar. Bu ýerde $\overline{\Delta^2 y_{n-1}}$ – ikinji tapawudyň düzedilen bahasy. Onda edil düzedilen ikinji tapawudyň ýerleşýän setirinde ýerleşen y_n-iň bahasyndaky ξ ýalňyşlyk şeýle tapylyp bilner:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{\Delta^2 y_{n-1}} - \Delta^2 y_{n-1} \right). \tag{7}$$

Ýalňyşlyk tablisa bahalarynyň kiçi onluk belgileriniň bitin birliginde aňladylýar.

Öz tablisamyza düzedişler edeliň:

$$\overline{\Delta^2 y_{n-1}} = \frac{1}{3}(0{,}010 + 0 + 0{,}012) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}022 \approx 0{,}007,$$

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot (0{,}007 - 0) \approx 0{,}004.$$

y_n-iň düzedilen $\overline{y_n}$ bahasy şeýle bolar: $\overline{y_n} = y_n - \xi = 23{,}065 - 0{,}004 = 23{,}061$.

Berlen aralykda tablisa tapawutlarynyň endigan üýtgemeginiň bozulmagyny tapawutlar hasaplanylanda goýberilen ýalňyşlyklaryň hem döredip biljekdigini göz öňünde tutmak gerek. Olary aşakdaky jemiň üsti bilen barlap bolar:

$$y_0 + (\Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{n-1}) = y_n,$$

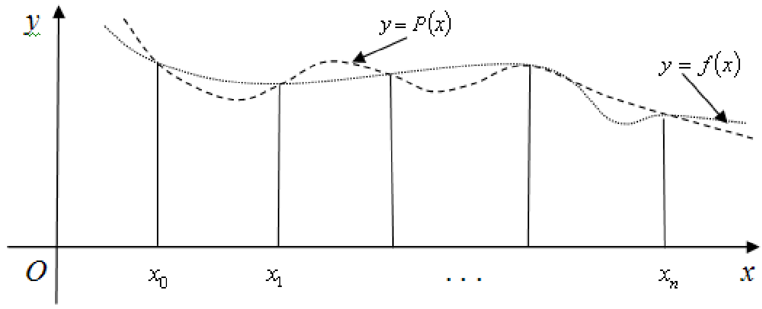
$$\Delta y_0 + (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{n-1}) = \Delta y_n \quad \text{we ş.m.}$$

3. Funksiýany interpolirlemek barada käbir maglumatlar

Goý, $y = f(x)$ funksiýa (1) tablisa görnüşinde berlen bolsun. Onda $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$ bolar. Interpolirlemek meselesi şundan ybarat.

Interpolirlemäniň düwünleri diýilýän $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ nokatlarda edil $f(x)$ ýaly bahalary alýan kesgitli görnüşli $P(x)$ funksiýany tapmaly, ýagny $y_k = P(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ deňlikler ýerine ýetmeli.

$f(x)$ funksiýany interpolirlemegiň geometrik manysy $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0,1,2,...,n$ nokatlardan geçýän kesgitli görnüşli $y = P(x)$ egrini tapmaklykdan ybaratdyr.



Eger $P(x)$ köpagzalardan alnan bolsa interpolirlemä paraboliki, köpagza bolsa interpolirleýji köpagza diýilýär. $P_n(x)$ köpagzany düzýän formulalara interpolirleýji formulalar diýilýär. Bu formulalar funksiýanyň aralyk bahalary tapylanda ulanylýar.

Eger x nokat $[x_0, x_n]$ kesimden daşarda ýatsa, onda interpolirlemä ekstrapolirleme diýilýär.

Interpolirleýji formulalaryň birini getirip çykaralyň. $P_n(x)$ köpagzany

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)\cdot \\ \cdot(x - x_1)(x - x_2) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_2) \quad (8)$$

görnüşde ýazalyň. $a_0, a_1, ..., a_n$ koeffisiýentleri kesgitlemek üçin (8) formulada x-iň ýerine $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ bahalary goýalyň. Goý, $x = x_0$ bolsun, onda $y_0 = P_n(x_0) = a_0$ ýa-da

$$a_0 = y_0.$$

$x = x_1$ bolsun, onda $y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$; $x_1 - x_0 = h$, $y_0 = a_0$ bolany üçin $y_1 = y_0 + a_1 h$ bolar. Bu ýerden,

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

$x = x_2$ bolsun, onda

$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ ýa-da

$y_2 = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}\cdot 2h + a_2 2hh;$ $\quad y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2h^2 a_2$. Bu

ýerden, $a_2 = \dfrac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2}$. Emma

$y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$.

Netijede,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

$x = x_3$ bolsun, onda

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}.$$

Şeýle hasaplamalar koeffisiýentleri tapmagyň umumy formulasyny ýazmaga mümkinçilik berýär:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}.$$

Koeffisiýentleriň tapylan bahalaryny (8) formula goýup, Nýutonyň birinji interpolirleýji formulasyny alarys:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \ \ldots \ (x - x_{n-1}). \tag{9}$$

Eger (9) formulada $n = 1$ diýsek, onda çyzykly interpolýasiýanyň formulasyny alarys:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0. \tag{10}$$

$y = f(x)$ funksiýa $P_n(x)$ interpolirleýji köpagza bilen çalşyrylanda käbir ýalňyşlyk goýberilýär.

Berlen kesimde $f(x)$ funksiýany interpolirlemegiň absolýut ýalňyşlygy diýip şol kesimde $|f(x) - P_n(x)|$ tapawudyň modulynyň iň uly bahasyna aýdylýar.

Argumentiň tablisada bolmadyk aralyk bahalarynda funksiýanyň ululygyny tapmaklyk interpolirlemegiň esasy meselesidir. Synagyň netijesinde alnan funksiýanyň argumentiň aralyk bahasyndaky bahasyny hasaplamak üçin synag geçirip bolmaýan ýa-da synag geçirmek maksada laýyk däl ýagdaýlarda şeýle meseläni çözmeli bolýarys. Şu maksat üçin interpolirleýji formulalar, hususan-da (9) we (10) formulalar ulanylýar.

Argumentiň tablisada ýok bahalary üçin funksiýanyň ululygyny hasaplaýan (10) formulanyň peýdalanylyşyna garalyň.

Eger birinji tertipli goňşy tapawutlar kiçi onluk belgileriniň dört birliginden artyk tapawutlanmasa, onda funksiýanyň tablisasynyň funksiýany çyzykly interpolirlemäge mümkinçilik berýändigini öňünden belläliň. Şonda biziň goýberýän ýalňyşlygymyz ikinji tertipli tapawudyň absolýut ululygynyň 1/8 böleginden kiçidir, ýagny

$$|f(x)-P_1(x)| < \frac{1}{8}\cdot\left|\Delta^2 y_0\right|.$$

Şerte görä $\left|\Delta^2 y_0\right| \le 4\cdot 10^{-m}$, onda $|f(x)-P_1(x)| < \frac{1}{2}\cdot 10^{-m}$, ýagny ýalňyşlyk kiçi onluk belginiň birliginiň ýarysyndan kiçidir (10^{-m} – berlen takyklyk, m – oturdan soňky sifrleriň sany). Diýmek, tablisanyň takyklygynyň çäklerinde interpolirleme ähli sifrleri dogry hasap eder ýaly ýalňyşlygy berip biler.

Mysal. $\sqrt{x}$ funksiýanyň $x_0 = 4{,}51$, $x_1 = 4{,}52$, ..., $x_5 = 4{,}55$ nokatlardaky baha-laryndan peýdalanyp, $\sqrt{4{,}518}$-iň bahasyny $\varepsilon = 10^{-5}$ takyklyk bilen hasaplamaly.

x	$y=\sqrt{x}$	Δy
4,50	2,12132	
		236
4,51	2,12368	

		235
4,52	2,12603	
		235
4,53	2,12838	
		235
4,54	2,13073	
		234
4,55	2,13307	

Δy birinji tapawudyň bahalaryny hasaplap, olaryň hemişelik baha deň diýen ýalydygyny we funksiýanyň tablisasynyň seredilýän aralykda funksiýany çyzykly interpolirlemäge mümkinçilik berýändigini anyklaýarys.
$x = 4{,}518$ baha $4{,}51$ we $4{,}52$ bahalaryň aralygynda ýatýar.

$x_0 = 4{,}51, \quad y_0 = 2{,}12368;$

$x_1 = 4{,}52, \quad y_1 = 2{,}12603;$
$x = 4{,}518, \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0{,}00235, \quad h = 0{,}01.$

$y(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0$ formulany ulanyp, taparys:

$$y(4{,}518) = 2{,}12368 + \frac{4{,}518 - 4{,}51}{0{,}01} \cdot 0{,}00235 =$$
$$= 2{,}12368 + \frac{0{,}008}{0{,}01} \cdot 0{,}00235 = 2{,}12368 + 0{,}8 \cdot 0{,}00235 =$$
$$= 2{,}12368 + 0{,}001880 = 2{,}12556.$$

Mysal.

1. Kesimiň bölünme sanyny $n=20$ diýip, [3; 6] kesimde $y=\frac{0,382x^2+5}{0,4385x+\sqrt{x}}$ funksiýanyň dörtbelgili tablisasyny düzmeli.
2. Funksiýanyň çyzykly interpolirleme formulasyny ulanyp, $x=c$ bolanda funksiýanyň bahasyny hasaplamaly.

1) Tablisanyň ädimini tapalyň: $h=\frac{b-a}{n}=\frac{6-3}{20}=0,15$.

Aşakdaky nusga boýunça hasap tablisasyny düzeliň.

№	x	$0,382x^2+5$	$\sqrt{x}$	$0,4385x+\sqrt{x}$	$y=\frac{0,382x^2+5}{0,4385x+\sqrt{x}}$	Δy	$\Delta^2 y$

Tablisa sütünler boýunça doldurylýar.

1-nji sütünde üýtgeýän ululyklaryň bahalarynyň – x_i-niň we y_i-niň ($i=0,1,...,20$) indeksleri tertip boýunça ýazylýar.

2-nji sütün $x_i=x_0+i\cdot h$ formula boýunça hasaplanylan x-iň bahalaryndan durýar. $x_0=3,00$, $h=0,15$, $i=0,1,2,...,20$.

3-nji sütün $0,382x^2+5$ funksiýanyň bir ätiýaç sifr saklanylyp mikrokalkulýatorda hasaplanylan bahalary bilen doldurylýar. Funksiýanyň dörtbelgili tablisasyny düzmelidigimize görä, funksiýanyň $x=3$ bolandaky bahasy

$$y=\frac{0,382\cdot 3^2+5}{0,4385\cdot 3+\sqrt{3}}\approx 2,8,$$

$x=6$ bolandaky bahasy

$$y=\frac{0,382\cdot 6^2+5}{0,4385\cdot 6+\sqrt{6}}\approx 3,7$$

bolandygy üçin, aradaky hasaplamalary oturdan soň dört onluk belgileri (goşmaça bir ätiýaç sifr) saklap geçireris, gutarnykly tablisada bolsa funksiýanyň bahalary oturdan soň üç onluk belgi saklamalydyr.

4-nji sütün $\sqrt{x}$-iň bir ätiýaç sifr saklanylyp mikrokalkulýatorda hasaplanylan bahalary bilen doldurylýar.

5-nji sütün $0,4385x+\sqrt{x}$ funksiýanyň bir ätiýaç sifr saklanylyp hasaplanylan bahalary bilen doldurylýar.

6-njy sütüni doldurmak üçin $y=\dfrac{0,382x^2+5}{0,4385x+\sqrt{x}}$ funksiýanyň bahalaryny oturdan soň dört onluk belgi goýup hasaplamaly. Soňra funksiýanyň dört belgili tablisasyny almak üçin alnan bahalary üç onluk belgä çenli tegeleklemeli.

2) Hasaplamalary barlamaklyk funksiýanyň tapawutlar tablisasynyň kömegi bilen amala aşyrylýar. Şeýle barlagyň hasaplamaklygyň sistematiki ýalňyşlaryny aýdyňlaşdyrmaýandygyny ýatdan çykarmaly däl. Sanlary esewanlyk bilen dürs ýazmaly, mümkinçilik bolan ýerinde bolsa, netijä garaşman, hasaplamalary gaýtalamaly. Tablisadaky birinji tertipli Δy we ikinji tertipli $\Delta^2 y$

tapawutlaryň endigan üýtgemesi hasaplamalarda ýalňyşlygyň ýoklugyny görkezýär.

Tablisa.

№	x	$0{,}382x^2+5$	$\sqrt{x}$	$0{,}4385x+\sqrt{x}$	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	3,00	8,4380	1,7321	3,0476	2,769		
						16	
1	3,15	8,7903	1,7748	3,1560	2,785		6
						22	
2	3,30	9,1599	1,8166	3,2636	2,807		4
						26	
3	3,45	9,5467	1,8574	3,3702	2,833		4
						30	
4	3,60	9,5507	1,8974	3,4760	2,863		4
						34	
5	3,75	10,3718	1,9365	3,5808	2,877		3
						37	
6	3,90	10,8102	1,9748	3,6849	2,934		3
						40	
7	4,05	11,2567	2,0125	3,7884	2,974		3
						43	
8	4,20	11,7384	2,0494	3,8911	3,017		2
						45	
9	4,35	42,2283	2,0857	3,9931	3,062		3
						48	
10	4,50	12,7355	2,1213	4,0945	3,110		3
						51	
11	4,65	13,2597	2,1564	4,1954	3,161		1
						52	
12	4,80	13,8012	2,1909	4,2957	3,213		2

						54	
13	4,95	14,3599	2,2249	4,3954	3,267		2
						56	
14	5,10	14,3358	2,2583	4,4946	3,323		2
						58	
15	5,25	15,5288	2,2913	4,5934	3,381		1
						59	
16	5,40	16,1391	2,3238	4,6917	3,440		3
						62	
17	5,55	16,7665	2,3537	4,7873	3,502		–1
						61	
18	5,70	17,4111	2,3875	4,8869	3,583		2
						63	
19	5,85	18,0729	2,4187	4,9839	3,626		2
						65	
20	6,00	18,7520	2,4495	5,0805	3,691		

2) Funksiýanyň $y(x) = y_0 + \dfrac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0$ çyzykly interpolirleme formulasyny ulanyp, x-iň tablisada görkezilmedik $x = 4{,}72$ bahasynda funksiýanyň bahasyny hasaplalyň. Tablisadaky $\Delta^2 y$ degişli tapawutlar tablisanyň kiçi onluk belgileriniň dört birliginden – $4 \cdot 10^{-3}$-den köp däldigi üçin, funksiýanyň bahalaryndan düzülen tablisa çyzykly interpolirlemäge mümkinçilik berýär.

$x = 4{,}72$ baha $x = 4{,}65$ we $x = 4{,}80$ aralykda ýatýar.

Goý, $x_0 = 4{,}65;$ $y_0 = 3{,}161;$

$x = 4{,}72,$

$x_1 = 4{,}80;$ $y_1 = 3{,}213,$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3{,}213 - 3{,}161 = 0{,}052$,

$h = 0{,}15$ bolsun. Onda

$$y(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0 \;\Rightarrow\; y(4{,}72) = 3{,}161 + \frac{4{,}72 - 4{,}65}{0{,}15} \cdot 0{,}052 =$$

$$= 3{,}161 + 0{,}4667 \cdot 0{,}052 = 3{,}161 + 0{,}0241 = 3{,}1851 \approx 3{,}185.$$

Diýmek,

$$y(4{,}72) = 3{,}185.$$

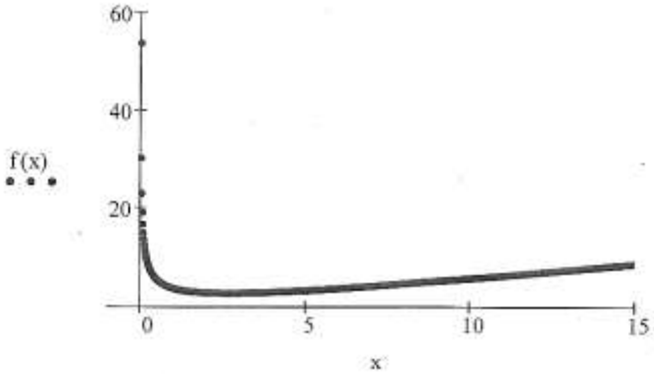
III. Mathcad programmasynda 1-nji tejribede berlen funksiýanyň grafigiň gurluşy.

$\alpha := 0.382$ $\beta := 5$ $\gamma := 0.4385$

$f(x) := \frac{\alpha \cdot x^2 + \beta}{\gamma \cdot x + \sqrt{x}}$ funksiýanyň grafigini gurmak üçin

grafiik panelinden  düwmäni basmaly.

Ekranda görünýän tekizlikdäki göniburçly koodirdinatalar ulgamynda gara we gyzyl dörtburçlyklaryň ýerine x we f(x) doldurmaly.



Ýumuş.

1. Kesimiň bölünme sanyny $n = 20$ alyp, $[a; b]$ kesimde $y = \dfrac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$ funksiýanyň dörtbelgili tablisasyny düzmeli.

2. Funksiýanyň çyzykly interpolirleme formulasyny ulanyp, berlen funksiýanyň $x = c$ nokatdaky bahasyny hasaplaň.

№	α	β	γ	a	b	c
1	0,388	3,5	0,4382	3	6	4,87
2	0,516	4,2	0,5161	3	6	5,15
3	0,304	2,5	0,4118	2,5	5,5	4,17
4	0,413	3,5	0,3912	3	6	3,77
5	0,618	5,5	0,4162	3	6	4,72
6	0,589	4,5	0,4817	3	6	4,25
7	0,256	2,5	0,6813	3	9	5,27
8	0,163	1,5	0,2141	3,1	5,1	3,25
9	0,182	1,5	0,9182	3,2	5,2	4,05
10	0,154	1,1	0,9761	3,5	5,5	4,35
11	0,147	1,3	0,7832	3,3	5,3	4,52
12	0,116	1,3	0,7151	2	3	2,46
13	0,208	2,1	0,8233	3,4	5,4	4,65
14	0,204	1,5	0,8961	3,4	6,4	4,25
15	0,196	1,5	0,7452	2,5	4,0	3,45
16	0,216	3,2	0,8842	3	6	4,42
17	0,188	2,2	0,7544	2,5	5,5	3,66

№	α	β	γ	a	b	c
18	0,342	3,8	0,4215	3	6	5,75
19	0,582	4,3	0,4612	3	6	3,82
20	0,132	1,2	0,7742	3,3	5,3	4,95
21	0,386	3,4	0,4281	3	6	3,97
22	0,418	3,4	0,3842	2,5	5,5	4,98
23	0,612	5,6	0,4062	3	6	3,42
24	0,184	1,4	0,7354	2,5	4,0	3,75
25	0,448	3,2	0,3813	3	6	5,86
26	0,582	4,3	0,4312	3	6	4,12
27	0,462	1,6	0,5325	2,7	4,3	3,22
28	0,246	1,8	0,7641	2,9	3,7	3,39
29	0,192	2,3	0,6912	3,6	5,8	4,76
30	0,274	2,7	0,6271	4,1	5,9	5,02

TEJRIBE IŞI №2

DEŇLEMÄNIŇ HAKYKY KÖKÜNI HORDA WE GALTAŞÝANLAR USULY BILEN HASAPLAMAK

Goý,

$$f(x)=0 \tag{1}$$

deňlemäniň hakyky köküni berlen ε takyklyk bilen hasaplamak talap edilýän bolsun.

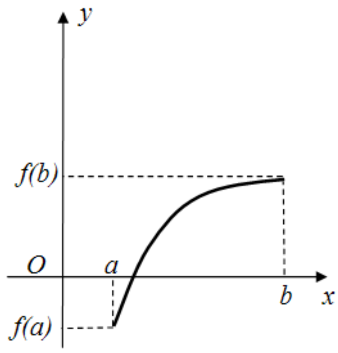
Köki hasaplamaklyk iki tapgyrdan durýar.

I tapgyr. Köki aýyl-saýyl etmek

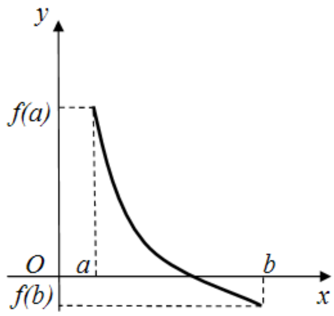
$f(x)=0$ deňlemäniň köküni aýyl-saýyl etmek işi arasynda (1) deňlemäniň ýeke-täk köki bolar ýaly a we b ($a<b$) sanlary tapmakdan durýar.

$f(x)$ funksiýadan $[a, b]$ kesimde aşakdaky şertleriň ýerine ýetmegini talap edeliň:

1. $f(x)$ funksiýa özüniň birinji we ikinji tertipli önümi bilen $[a, b]$ kesimde üznüksiz.
2. $f(x)$ funksiýanyň bahalary $[a, b]$ kesimiň uçlarynda dürli alamatlara eýe.
3. $f(x)$ funksiýanyň birinji we ikinji tertipli önümleri – $f'(x)$ we $f''(x)$ $[a, b]$ kesimde kesgitli alamatlaryny saklaýarlar (iki dürli ýagdaý suratda görkezilendir).



$f(a)<0,\ f(b)>0;$
$f'(x)>0,\ f''(x)<0.$



$f(a)>0,\ f(b)<0;$
$f'(x)<0,\ f''(x)>0.$

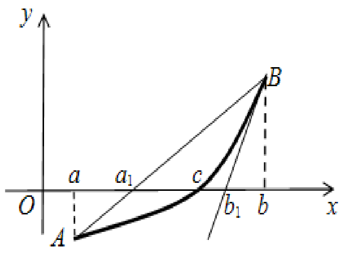
II tapgyr. Köki anyklamak

Köki anyklamak üçin «horda we galtaşýanlar» usulyndan peýdalanarys.

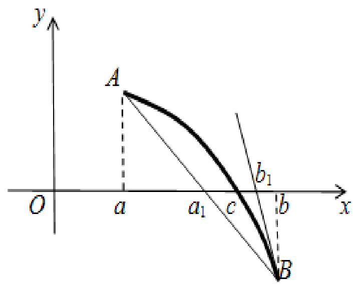
Goý, $f(x)=0$ deňlemäniň $x=c$ köküni ε takyklyk bilen tapmak talap edilsin ($\varepsilon -$käbir berlen kiçi položitel san). Bu köki öz içine alýan $[a, b]$ kesim I tapgyrda tapylan. Onuň ýalňyşlygy $\delta=|b-a|$ bolar.

Funksiýalaryň birinji we ikinji tertipli önümleriniň alamatlaryny göz öňünde tutup, aşakdaky iki ýagdaýa seretmek ýeterlikdir.

I ýagdaý



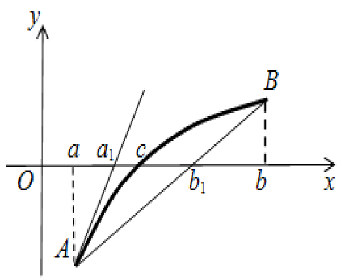
$f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$



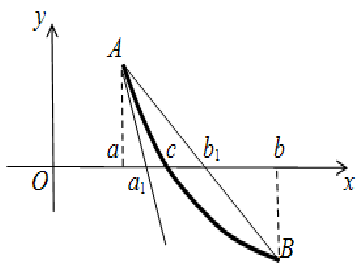
$f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$

Suratlaryň ikisinde-de birinji we ikinji tertipli önümleriň alamatlary gabat gelýär.

II ýagdaý



$f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$



$f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

Suratlaryň ikisinde-de birinji we ikinji tertipli önümleriň alamatlary garşylykly.

Horda we galtaşýanlar usuly ulanylanda **I ýagdaýda** *B*, **II ýagdaýda** bolsa *A* nokatdan geçýän galtaşýanyň abssissa okuny kesýän nokady köküň takmyn bahasy diýlip kabul edilýär.

a_1 we b_1 bahalary hasaplamak üçin gerek formulany **I ýagdaý** üçin getirip çykaralyň.

AB hordanyň deňlemesi $A(a; f(a))$ we $B(b; f(b))$ iki nokatdan geçýän gönüniň deňlemesidir. Alarys:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

AB hordanyň abssissa oky bilen kesişme nokadyny tapalyň ($y = 0$, $x = a_1$):

$$\frac{a_1 - a}{b - a} = \frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a - \frac{(b - a)\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

$y = f(x)$ funksiýanyň grafigine $B(b; f(b))$ nokatda geçirilen galtaşýanyň deňlemesini ýazalyň:

$$y - y_B = f'(x_B)\cdot(x - x_B) \quad \Rightarrow \quad y - f(b) = f'(b)\cdot(x - b).$$

Galtaşýanyň abssissa oky bilen kesişme nokadyny tapalyň $(y = 0,\ x = b_1)$:

$$0 - f(b) = f'(b)\cdot(b_1 - b) \quad \Rightarrow \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

II ýagdaý üçin hem degişli formulalary edil ýokardaky ýaly usul bilen aňsatlyk bilen tapyp bolar.

Diýmek, a_1 we b_1 bahalary hasaplamak üçin gerek formulalar:

I ýagdaý üçin –

$$a_1 = a - \frac{(b - a)\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}, \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}; \qquad (2.1)$$

II ýagdaý üçin –

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}; \qquad b_1 = b - \frac{(b-a)\cdot f(b)}{f(b) - f(a)}. \tag{2.2}$$

Eger $|b_1 - a_1|$ ýalňyşlyk talap edilýän ε takyklygy bermese, onda horda we galtaşýanlar usuly ýene bir gezek $[a_1, b_1]$ üçin ulanylýar. Bu iş tä $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ deňsizlik (talap edilýän takyklyk) ýerine ýetýänçä dowam etdirilýär we netijede $f(x) = 0$ deňlemäniň hakyky köki berlen ε takyklykda tapylýar: **I ýagdaýda** $x = b_k$, **II ýagdaýda** $x = a_k$.

Mysal.

$x^3 - 6x^2 - 10 = 0$ deňlemäniň hakyky köküni $\varepsilon = 10^{-2}$ takyklyk bilen hasaplamaly.

Işi ýerine ýetirmegiň tertibi.

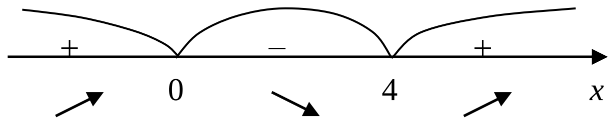
I. $x^3 - 6x^2 - 10 = 0$ deňlemäniň hakyky kökleriniň sanyny kesgitlemek.

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 10$ funksiýa bütin san okunda kesgitlenen – $D(f) = (-\infty; +\infty)$ we üznüksiz;

2) Funksiýanyň monoton aralyklaryny kesgitläliň. Onuň üçin funksiýanyň birinji tertipli önümini nola deňläp, onuň köklerini tapalyň:

$f'(x) = 3x^2 - 12x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0$; $3x(x-4) = 0$;

$x_1 = 0; \quad x_2 = 4$.



$\left]-\infty;\, 0\right[$ aralykda birinji tertipli önüm položitel $\left[f'(x)>0\right]$ ($f'(-1)=3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)=3+12=15>0$), funksiýa artýar;

$\left]0;\, 4\right[$ aralykda birinji tertipli önüm otrisatel $\left[f'(x)<0\right]$ ($f'(1)=3\cdot 1^2-12\cdot 1=3-12=-9<0$), funksiýa kemelýär;

$\left]4;\, +\infty\right[$ aralykda birinji tertipli önüm položitel $\left[f'(x)>0\right]$ ($f'(5)=3\cdot 5^2-12\cdot 5=75-60=15>0$), funksiýa artýar.

$\left]-\infty;\, 0\right[$, $\left]0;\, 4\right[$ we $\left]4;\, +\infty\right[$ aralyklaryň gyraky nokatlarynda $f(x)=x^3-6x^2-10$ funksiýanyň alamatyny kesgitläliň:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2-10)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2(x-6)-10\right]=$$

$$=(-\infty)^2\cdot(-\infty-6)-10=(+\infty)\cdot(-\infty)-10=-\infty-10=-\infty<0;$$

$$f(0)=(x^3-6x^2-10)\Big|_{x=0}=0^3-6\cdot 0^2-10=-10<0;$$

$$f(4)=(x^3-6x^2-10)\Big|_{x=4}=4^3-6\cdot 4^2-10=64-96-10=-42<0;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^3-6x^2-10)=\lim_{x\to\infty}\left[x^2(x-6)-10\right]=$$

$$=\infty^2\cdot(\infty-6)-10=\infty-10=\infty>0.$$

Funksiýa diňe $\left]4;\, +\infty\right[$ aralykda alamatyny üýtgedýär.

Görşümiz ýaly, $\left]4;\, +\infty\right[$ aralykda birinji tertipi önüm položitel $\left[f'(x)>0\right]$, funksiýa artýar hem-de bu aralykda alamatyny üýtgedýär. Şonuň üçin hem funksiýanyň $\left]4;\, +\infty\right[$ aralykda diňe bir hakyky köki bardyr.

Netije: $x^3 - 6x^2 - 10 = 0$ deňlemäniň $]4; +\infty[$ aralykda ýerleşýän bir hakyky köki bar.

II. Köki aýyl saýyl etmek.

Indi içinde gözlenýän $x = c$ köki saklaýan, uzynlygy ýeterlik kiçi bolan $[a, b]$ kesimi kesgitleýän a we b sanlary tapmak talap edilýär. Berlen $y = f(x)$ funksiýada x-iň ýerine I bölümde tapylan $]4; +\infty[$ aralyga degişli bitin sanlary goýup, funksiýanyň alamatynyň üýtgeýän kiçi aralygyny tapalyň:

$$f(4) = -42 < 0;$$

$$f(5) = (x^3 - 6x^2 - 10)\Big|_{x=5} = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 10 = -35 < 0;$$

$$f(6) = -10 < 0; \quad f(7) = +39 > 0.$$

Görşümiz ýaly, $[6,\ 7]$ kesimde funksiýanyň alamaty üýtgeýär. Diýmek, köki şol kesimde gözlemelidiris.

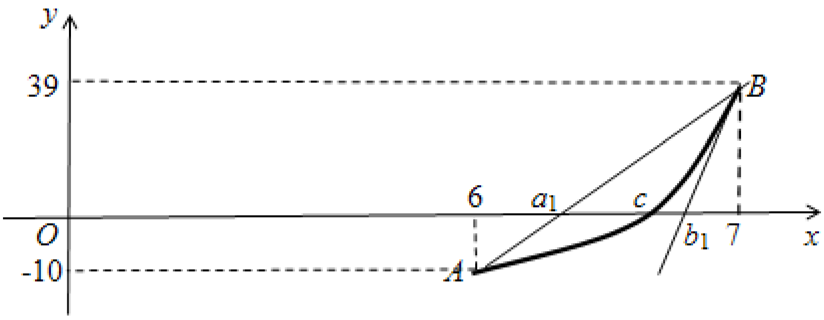
III. Köki anyklamak.

Biziň mysalymyzda $a = 6, \quad b = 7$ boldy.

$[6; 7]$ kesimde birinji tertipli önüm položitel: $f'(x) > 0$.

Ikinji tertipli önümi tapalyň: $f''(x) = 6x - 12$. $[6; 7]$ kesimde ikinji tertipli önüm-de položitel $[f''(x) > 0]$. Şeýlelikde, $[6; 7]$ kesimde $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ – birinji we ikinji tertipli önümleriň alamatlary gabat gelýär. Bu ýagdaýda a_1 we b_1 sanlar (2.1) formulalar boýunça hasaplanýar (I ýagdaý).

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 10$ funksiýanyň grafiginiň $[6; 7]$ kesime degişli bölegini guralyň ($f(6) = -10; \quad f(7) = 39$):



I ýagdaý üçin horda we galtaşýanlar formulasy:

$$a_1 = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

1) $[a, b]=[6,\ 7]$ kesim üçin horda we galtaşýanlar usulyny ulanýarys:

$f(a) = f(6) = -10; \qquad f(b) = f(7) = 39;$

$$a_1 = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)} = 6 - \frac{(7-6)\cdot f(6)}{f(7)-f(6)} = 6 - \frac{1\cdot(-10)}{39-(-10)} =$$

$$= 6 - \frac{-10}{49} \approx 6 + 0{,}204 = 6{,}204;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x; \quad f'(7) = 3\cdot 7^2 - 12\cdot 7 = 147 - 84 = 63,$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 7 - \frac{f(7)}{f'(7)} = 7 - \frac{39}{63} = 7 - 0{,}619 = 6{,}381.$$

Köküň tapylmaly takyklygyna degişli $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ şerti barlalyň:

$$|b_1 - a_1| = |6{,}381 - 6{,}204| = 0{,}177 > 0{,}01.$$

Şert ýerine ýetenok, hasaplamalarymyzy dowam edýäris.

2) $[a_1, b_1] = [6{,}204;\ 6{,}381]$ kesim üçin horda we galtaşýanlar usulyny ulanýarys:

$$f(a_1) = f(6{,}204) = (x^3 - 6x^2 - 10)\Big|_{x=6,204} = 6{,}204^3 - 6 \cdot 6{,}204^2 - 10 =$$

$$= 238{,}790 - 6 \cdot 38{,}490 - 10 = 238{,}790 - 230{,}940 - 10 = -2{,}150;$$

$$f(b_1) = f(6{,}381) = (x^3 - 6x^2 - 10)\Big|_{x=6,381} = 6{,}381^3 - 6 \cdot 6{,}381^2 - 10 =$$

$$= 259{,}816 - 6 \cdot 40{,}717 - 10 = 259{,}816 - 244{,}302 - 10 = 5{,}514;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x; \qquad f'(b_1) = f'(6{,}381) = \left(3x^2 - 12x\right)\Big|_{x=6,381} =$$

$$= 3x \cdot (x-4)\Big|_{x=6,381} = 3 \cdot 6{,}381 \cdot (6{,}381 - 4) = 3 \cdot 6{,}381 \cdot 2{,}381 = 45{,}579;$$

$$a_2 = a_1 - \frac{(b_1 - a_1) \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 6{,}204 - \frac{(6{,}381 - 6{,}204) \cdot f(6{,}204)}{f(6{,}381) - f(6{,}204)} =$$

$$= 6{,}204 - \frac{0{,}177 \cdot (-2{,}150)}{5{,}514 - (-2{,}150)} = 6{,}204 - \frac{-0{,}381}{7{,}664} = 6{,}204 + 0{,}050 = 6{,}254;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 6{,}381 - \frac{f(6{,}381)}{f'(6{,}381)} = 6{,}381 - \frac{5{,}514}{45{,}579} = 6{,}260.$$

Köküň tapylmaly takyklygyna degişli $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ şerti barlalyň:

$|b_2 - a_2| = |6{,}260 - 6{,}254| = 0{,}006 < 0{,}01.$ Şert ýerine ýetýär. Diýmek, $x = b_2 = 6{,}26$.

Machcad programmasynda 2-nji terjribe işiniň ýetine ýetirilişi.

Mathcad programynda 2-nji terjibe işi ýerine ýetirmek üçin programmanyň üçinde ýerleşen **root(f(x),x,a,b))**-funsiýasyndan peýdalanylýar. Bu ýerde:

f(x)-deňlemede berlen funksiýa,
x- üýtgeýän ululyk.
[a,b]-köküň ýerleşýän kesimi.

I. Machcad programma

$f(x) := x^3 - 6 \cdot x^2 - 10$

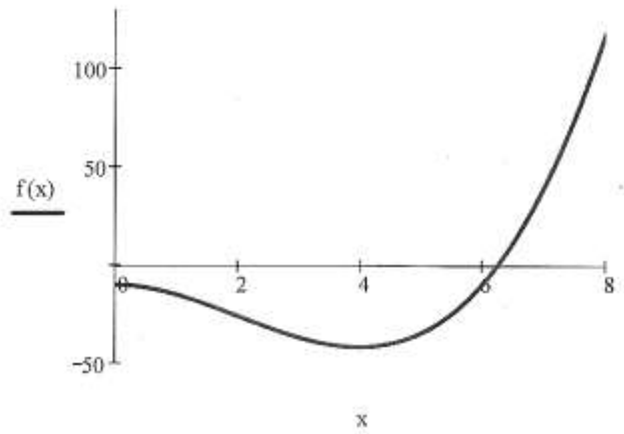
$a := 6$

$b := 7$

solution := root(f(x),x,6,7)

solution = 6.26

II Berlen funksiýanyň grafiginiň Mathcad programmasynyň kömegi bilen gurluşy



Ýumuş. Deňlemäniň hakyky köküni horda we galtaşýanlar usuly bilen $\varepsilon = 0{,}01$ takyklykda tapmaly.

1. $x^3 + 2x^2 - 3x - 7 = 0$	2. $8x^3 + 8x^2 - 6x - 7 = 0$
3. $x^3 - x^2 - 4x - 3 = 0$	4. $8x^3 - 4x^2 - 8x - 3 = 0$
5. $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$	6. $8x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$
7. $x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	8. $8x^3 - 16x^2 - 12x + 1 = 0$
9. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	10. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$
11. $x^3 + 8x^2 + 15x + 7 = 0$	12. $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$
13. $x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$	14. $x^3 + 2x^2 - 8 = 0$
15. $x^3 + x^2 - 4x + 3 = 0$	16. $7x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$
17. $7x^3 + 6x^2 - 8x - 8 = 0$	18. $3x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$
19. $3x^3 + 8x^2 + 4x - 8 = 0$	20. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$
21. $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	22. $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$
23. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$	24. $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$
25. $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$	26. $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
27. $x^3 - 12x - 5 = 0$	28. $x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$
29. $x^3 - 3x^2 - 25x + 13 = 0$	30. $5x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

TEJRIBE IŞI №3

n NÄBELLILI n ÇYZYKLY ALGEBRAIK DEŇLEMELER ULGAMYNY ÇÖZMEK

Çyzykly deňlemeler ulgamynyň çözmeklik amaly matematikanyň iň esasy meseleleriniň biridir. Bu inžener hasaplamalarynda köp gabat gelýän meseledir. Çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmekligiň giň ýaýran usullarynyň biri Gaussyň näbellileri yzygider ýok etmek usulydyr. Ýönekeýlik üçin 3 näbellili 3 çyzykly deňlemeler ulgamyna seredeliň.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 +_{22} x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases} \tag{1}$$

Goý, bu ulgamyň kesgitleýjisi noldan tapawutly we $a_{11} \neq 0$ bolsun. Onda a_{11}-i kesgitleýji element hökmünde kabul edip, (1) ulgamdaky birinji deňlemäniň koeffisiýentlerini a_{11}-e bölüp, alarys:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}, \tag{2}$$

bu ýerde $b_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j = 2,\ 3,\ 4).$

Indi ikinji we üçünji deňlemeden x_1 näbellini ýok edeliň. Onuň üçin (1) ulgamyň ikinji deňlemesinden a_{21} sana köpeldilen (2) deňlemäni aýralyň, ulgamyň üçünji deňlemesinden bolsa a_{31} sana köpeldilen (2) deňlemäni aýralyň. Netijede iki deňlemeli ulgam alarys:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = a'_{24}, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = a'_{34}, \end{cases} \tag{3}$$

bu ýerde koeffisiýentler $a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot b_{1j} \quad (i = 2, 3; \; j = 2, 3, 4)$ formula boýunça kesgitlenilýär.

Goý, indi $a'_{22} \neq 0$ (kesgitleýji element) bolsun. (3) ulgamyň birinji deňlemesiniň koeffisiýentlerini a'_{22}-ä bölüp, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$x_2 + b'_{23}x_3 = b'_{24}, \tag{4}$$

bu ýerde $b'_{2j} = \dfrac{a'_{2j}}{a'_{22}} \quad (j = 3, 4).$

(4) deňlemäni ulanyp, (3) ulgamyň ikinji deňlemesinden x_2 näbellini ýok edeliň. Onuň üçin (3) ulgamyň ikinji deňlemesinden a'_{32}-ä köpeldilen (4) deňlemäni aýryp, alarys:

$$a''_{33}x_3 = a''_{34}, \tag{5}$$

bu ýerde $a''_{3j} = a'_{3j} - a'_{32} \cdot b'_{2j} \quad (j = 3, 4).$

(2), (4) we (5) deňlemeleri birleşdirip, aşakdaky ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}, \\ \qquad x_2 + b'_{23}x_3 = b'_{24}, \\ \qquad\quad a''_{33}x_3 = a''_{34}. \end{cases} \tag{6}$$

Bu ýerden yzygiderli taparys:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a''_{34}}{a''_{33}}, \\ x_2 = b'_{24} - b'_{23}x_3, \\ x_1 = b_{14} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3. \end{cases} \tag{7}$$

(6) ulgamyň koeffisiýentlerini hasaplamak işine göni hasaplamak, x_1, x_2, x_3 näbel-lileri (7) formula boýunça hasaplamak işine bolsa tersine hasaplamak diýilýär.

Gaussyň usuly anyk usuldyr. Ýöne hasaplamalaryň netijeleriniň tegeleklenmesi ýalňyşlaryň döremegine we köpelmegine getirýär. Ony azaltmak üçin hasaplamalar goşmaça bir ýa-da birnäçe ätiýaç sifrler bilen alnyp barylýar. Gaussyň usulynyň birnäçe hasaplaýyş tertibi (shemasy) bardyr. Esasy elementi saýlamak bilen näbellileri yzygider ýok etmek hasaplaýyş tertibi (shemasy) hasaplamanyň ýalňyşlygyny azaltmaga kömek edýär. Esasy element diýlip (1) ulgamdaky näbellileriň koeffisiýentleriniň absolýut ululygy boýunça iň ulusyna aýdylýar.

Mysal. Gaussyň näbellileri yzygider ýok etmek usulyny ulanyp, dört näbellili dört çyzykly deňlemeler ulgamyny 10^{-3} takyklykda çözmeli.

$$\begin{cases} 6{,}8x_1 - 7{,}3x_2 + 5{,}4x_3 - 1{,}2x_4 = -2{,}9; \\ 5{,}4x_1 + 3{,}2x_2 + 4{,}7x_3 - 2{,}8x_4 = 3{,}0; \\ 3{,}4x_1 - 2{,}9x_2 + 3{,}1x_3 + 4{,}3x_4 = 9{,}1; \\ -2{,}3x_1 + 3{,}5x_2 - 6{,}1x_3 + 1{,}7x_4 = 4{,}6. \end{cases}$$

Ulgamyň 1-nji deňlemesini peýdalanyp, soňky üç deňlemeden x_1 näbellini ýok edeliň. Onuň üçin ulgamyň 1-nji deňlemesini 6,8-e bölüp, alarys:

$$x_1 - 1{,}0735x_2 + 0{,}7941x_3 - 0{,}1765x_4 = -0{,}4265. \quad (8)$$

Bu deňlemäni -5,4-e köpeldip alnan

$$-5{,}4x_1 + 5{,}7969x_2 - 4{,}2881x_3 + 0{,}9531x_4 = 2{,}3031$$

deňlemäni ulgamyň 2-nji deňlemesiniň üstüne goşup, alarys:

$$5,4x_1+3,2x_2+4,7x_3-2,8x_4+(-5,4x_1+5,7969x_2-$$
$$-4,2881x_3+0,9531x_4)=3,0+2,3031$$

ýa-da

$$8,9969x_2+0,4119x_3-1,8469x_4=5,3031. \qquad (9)$$

(8) deňlemäni -3,4-e köpeldip alnan

$$-3,4x_1+3,6499x_2-2,6999x_3+0,6001x_4=1,4501$$

deňlemäni berlen ulgamyň 3-nji deňlemesiniň üstüne goşup, alarys:

$$3,4x_1-2,9x_2+3,1x_3+4,3x_4+(-3,4x_1+3,6499x_2-$$
$$-2,6999x_3+0,6001x_4)=9,1+1,4501$$

ýa-da

$$0,7499x_2+0,4001x_3+4,9001x_4=10,5501. \qquad (10)$$

(8) deňlemäni -2,3-e köpeldip alnan

$$2,3x_1-2,4691x_2+1,8264x_3-0,4060x_4=-0,9810$$

deňlemäni berlen ulgamyň 4-nji deňlemesiniň üstüne goşup, alarys:

$$-2,3x_1+3,5x_2-6,1x_3+1,7x_4+(2,3x_1-2,4691x_2+$$
$$+1,8264x_3-0,4060x_4)=4,6+(-0,9810)$$

ýa-da

$$1,0309x_2-4,2736x_3+1,2940x_4=3,6190. \qquad (11)$$

(8)-(11) deňlemeleri birleşdirip, aşakdaky ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x_1-1,0735x_2+0,7941x_3-0,1765x_4=-0,4265, \\ 8,9969x_2+0,4119x_3-1,8469x_4=5,3031, \\ 0,7499x_2+0,4001x_3+4,9001x_4=10,5501, \\ 1,0309x_2-4,2736x_3+1,2940x_4=3,6190. \end{cases} \qquad (12)$$

(12) ulgam berlen ulgam bilen deňgüýçlidir. Bu ulgamyň soňky üç deňlemesi üç näbellili üç çyzykly deňlemeler ulgamyny düzýär.

Görnüşi ýaly, soňky üç deňlemede x_1 näbelli ýokdur. Ulgamyň 2-nji deňlemesini peýdalanyp, soňky iki deňlemeden x_2 näbellini ýok edeliň. Onuň üçin ulgamyň 2-nji deňlemesini 8,9969-a bölüp, alarys:

$$x_2 + 0{,}0458x_3 - 0{,}2053x_4 = 0{,}5894. \qquad (13)$$

Bu deňlemäni –0,7499-a köpeldip alnan

$$-0{,}7499x_2 - 0{,}0343x_3 + 0{,}1540x_4 = -0{,}4420$$

deňlemäni ulgamyň 3-nji deňlemesiniň üstüne goşup, alarys:

$$0{,}7499x_2 + 0{,}4001x_3 + 4{,}9001x_4 + (-0{,}7499x_2 -$$
$$-0{,}0343x_3 + 0{,}1540x_4) = 10{,}5501 + (-0{,}4420)$$

ýa-da

$$0{,}3658x_3 + 5{,}0541x_4 = 10{,}1081. \qquad (14)$$

(13) deňlemäni 1,0309-a köpeldip alnan

$$-1{,}0309x_2 + 0{,}0472x_3 + 0{,}2116x_4 = -0{,}6076$$

deňlemäni ulgamyň 4-nji deňlemesiniň üstüne goşup, alarys:

$$1{,}0309x_2 - 4{,}2736x_3 + 1{,}2940x_4 + (-1{,}0309x_2 + 0{,}0472x_3 +$$
$$+ 0{,}2116x_4) = 3{,}6190 + (-0{,}6076)$$

ýa-da

$$-4{,}3208x_3 + 1{,}5056x_4 = 3{,}0114. \qquad (15)$$

(8), (13)-(15) deňlemeleri birleşdirip, aşakdaky ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x_1 - 1{,}0735x_2 + 0{,}7941x_3 - 0{,}1765x_4 = -0{,}4265, \\ x_2 + 0{,}0458x_3 - 0{,}2053x_4 = 0{,}5894, \\ 0{,}3658x_3 + 5{,}0541x_4 = 10{,}1081, \\ -4{,}3208x_3 + 1{,}5056x_4 = 3{,}0114. \end{cases} \qquad (16)$$

Bu ulgamyň soňky iki deňlemesi iki näbellili iki çyzykly deňlemeler ulgamyny düzýär. (16) ulgamyň 3-nji deňlemesini peýdalanyp, iň soňky deňlemeden x_3 näbellini ýok edeliň. Onuň üçin (16) ulgamyň 3-nji deňlemesini 0,3657-ä bölüp, alarys:

$$x_3 + 13{,}8166 x_4 = 27{,}6329. \qquad (17)$$

(17) deňlemäni 4,3208-e köpeldip alnan $4{,}3208 x_3 + 59{,}6988 x_4 = 119{,}3962$ deňlemäni ulgamyň 4-nji deňlemesiniň üstüne goşup, alarys:

$$\begin{aligned} &-4{,}3208 x_3 + 1{,}5056 x_4 + (4{,}3208 x_3 + 59{,}6988 x_4) = \\ &= 3{,}0114 + 119{,}3962 \end{aligned}$$

ýa-da

$$61{,}2044 x_4 = 122{,}4076. \qquad (18)$$

(8), (13), (17) we (18) deňlemeleri birleşdirip, aşakdaky ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x_1 - 1{,}0735 x_2 + 0{,}7941 x_3 - 0{,}1764 x_4 = -0{,}4265, \\ \qquad x_2 + 0{,}0458 x_3 - 0{,}2053 x_4 = 0{,}5894, \\ \qquad\qquad x_3 + 13{,}8166 x_4 = 27{,}6329, \\ \qquad\qquad\qquad 61{,}2044 x_4 = 122{,}4076. \end{cases}$$

Bu ulgamyň -

4-nji deňlemesinden x_4 näbelliniň;

3-nji deňlemesinde x_4-iň bahasyny ornuna goýup, x_3 näbelliniň;

2-nji deňlemesinde x_4-iň we x_3-iň bahasyny ornuna goýup, x_2 näbelliniň;

1-nji deňlemesinde x_4-iň, x_3-iň we x_2-niň bahasyny ornuna goýup, x_1 näbelliniň bahalaryny tapalyň:

$$x_4 = \frac{122{,}4076}{61{,}2044} = 2{,}0000;$$

$$x_3 = 27{,}6329 - 13{,}8166 x_4 = 27{,}6329 - 13{,}8166 \cdot 2{,}0000 =$$
$$= 27{,}6329 - 27{,}6332 = -0{,}0003;$$

$$x_2 = 0{,}5894 - 0{,}0458 x_3 + 0{,}2053 x_4 = 0{,}5894 - 0{,}0458 \cdot (-0{,}0003) +$$
$$+ 0{,}2053 \cdot 2{,}0000 = 0{,}5894 + 0{,}000014 + 0{,}4106 = 1{,}0000;$$

$$x_1 = -0{,}4265 + 1{,}0735 x_2 - 0{,}7941 x_3 + 0{,}1764 x_4 = -0{,}4265 +$$
$$+ 1{,}0735 \cdot 1{,}0000 - 0{,}7941 \cdot (-0{,}0003) + 0{,}1764 \cdot 2{,}0000 =$$
$$= -0{,}4265 + 1{,}0735 + 0{,}0002 + 0{,}3528 = 1{,}4265 - 0{,}4265 = 1{,}0000.$$

Diýmek, berlen ulgamyň çözüwi – näbellileriň 10^{-3} takyklykda tapylan bahalary şeýle bolar:

$$x_1 = 1{,}000, \quad x_2 = 1{,}000, \quad x_3 = 0{,}000, \quad x_4 = 2{,}000.$$

Barlagy.

Näbellileriň tapylan bahalaryny berlen ulgamyň deňlemelerinde ornuna goýup, alarys:

$$\begin{cases} 6{,}8x_1 - 7{,}3x_2 + 5{,}4x_3 - 1{,}2x_4 = -2{,}9; \\ 5{,}4x_1 + 3{,}2x_2 + 4{,}7x_3 - 2{,}8x_4 = 3{,}0; \\ 3{,}4x_1 - 2{,}9x_2 + 3{,}1x_3 + 4{,}3x_4 = 9{,}1; \\ -2{,}3x_1 + 3{,}5x_2 - 6{,}1x_3 + 1{,}7x_4 = 4{,}6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6{,}8\cdot 1 - 7{,}3\cdot 1 + 5{,}4\cdot 0 - 1{,}2\cdot 2 = 6{,}8 - 7{,}3 + 0 - 2{,}4 = -9{,}7 + 6{,}8 \equiv -2{,}9; \\ 5{,}4\cdot 1 + 3{,}2\cdot 1 + 4{,}7\cdot 0 - 2{,}8\cdot 2 = 5{,}4 + 3{,}2 + 0 - 5{,}6 = 8{,}6 - 5{,}6 \equiv 3{,}0; \\ 3{,}4\cdot 1 - 2{,}9\cdot 1 + 3{,}1\cdot 0 + 4{,}3\cdot 2 = 3{,}4 - 2{,}9 + 0 + 8{,}6 = 12 - 2{,}9 \equiv 9{,}1; \\ -2{,}3\cdot 1 + 3{,}5\cdot 1 - 6{,}1\cdot 0 + 1{,}7\cdot 2 = -2{,}3 + 3{,}5 - 0 + 3{,}4 = 6{,}9 - 2{,}3 \equiv 4{,}6. \end{cases}$$

A we B matrisalary girizmek üçin Mathcad programmanyň Insert menýusyndan Matrix punkutyny saýlap almaly we matrisalaryň ölçeglerini girizmeli. A matrisa näbellileriň koeffisentlerinden, B matrisa azat agzalardan düzülen matrisadyr.

Matrisany girizmek üçin  matrýsalar panelinden  düwmäni basmaly.

Penjirede görnen tablisa matisanyň setir we sütün sanyny giriziň, soňra dörtburçlyklaryň ýerini dolduryň.

Mathcad programma: ORIGIN := 1

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 6.8 & -7.3 & 5.4 & -1.2 \\ 5.4 & 3.2 & 4.7 & -2.8 \\ 3.4 & -2.9 & 3.1 & 4.3 \\ -2.3 & 3.5 & -6.1 & 1.7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -2.9 \\ 3.0 \\ 9.1 \\ 4.6 \end{pmatrix}$$

Ar := augment(A ,B)

$$Ar = \begin{pmatrix} 6.8 & -7.3 & 5.4 & -1.2 & -2.9 \\ 5.4 & 3.2 & 4.7 & -2.8 & 3 \\ 3.4 & -2.9 & 3.1 & 4.3 & 9.1 \\ -2.3 & 3.5 & -6.1 & 1.7 & 4.6 \end{pmatrix}$$

Ag := rref(Ar)

$$Ag = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 2.0000 \end{pmatrix}$$

X := submatrix(Ag , 1 , 4 , 5 , 5)

$$X = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$$

Tapylan $x_1 = 1.0000$ $x_2 = 1.0000$ $x_3 = 0.0000$ we $x_3 = 2.0000$ bahalary 3 belgä çenli tegelekläp alarys.

$x_1 = 1.000$ $x_2 = 1.000$ $x_3 = 0.0000$ we $x_3 = 2.000$

Ýumuş. Gaussyň näbellileri yzygider ýok etmek usulyny ulanyp, dört näbellili dört çyzykly deňlemeler ulgamyny 10^{-3} takyklykda çözmeli.

1. $$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3; \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8; \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8; \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4; \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}3x_4 = 4{,}5: \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3; \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_{.3} - 8{,}3x_4 = 2{,}7; \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5; \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6; \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8; \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7; \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7; \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4; \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6; \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7; \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5; \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5; \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6; \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4; \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6; \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4; \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1; \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1; \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9; \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10; \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19; \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20; \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5; \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2; \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7; \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 5{,}1x_4 = 6{,}01; \\ 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10; \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1; \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} 35{,}8x_1 + 2{,}1x_2 - 34{,}5x_3 - 11{,}8x_4 = 0{,}5; \\ 27{,}1x_1 - 7{,}5x_2 + 11{,}7x_3 - 23{,}5x_4 = 12{,}8; \\ 11{,}7x_1 + 1{,}8x_2 - 6{,}5x_3 + 7{,}1x_4 = 1{,}7; \\ 6{,}3x_1 + 10x_2 + 7{,}1x_3 + 3{,}4x_4 = 20{,}8. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} 35{,}1x_1 + 1{,}7x_2 + 37{,}5x_3 - 2{,}8x_4 = 7{,}5; \\ 45{,}2x_1 + 21{,}1x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 11{,}1; \\ -21{,}1x_1 + 31{,}7x_2 + 1{,}2x_3 - 1{,}5x_4 = 2{,}1; \\ 31{,}7x_1 + 18{,}1x_2 - 31{,}7x_3 + 2{,}2x_4 = 0{,}5 \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 11{,}2x_2 + 11{,}1x_3 - 13{,}1x_4 = 1{,}3; \\ -3{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 30{,}1x_3 - 20{,}1x_4 = 1{,}1; \\ 7{,}5x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}1x_3 + 10x_4 = 20; \\ 1{,}7x_1 + 7{,}5x_2 - 1{,}8x_3 + 2{,}1x_4 = 1{,}1. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} 7{,}5x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}1x_3 - 7{,}7x_4 = 1{,}1; \\ -10x_1 + 1{,}3x_2 - 20x_3 - 1{,}4x_4 = 1{,}5; \\ 2{,}8x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}9x_3 + 4{,}8x_4 = 1{,}2; \\ 10x_1 + 31{,}4x_2 - 2{,}1x_3 - 10x_4 = -1{,}1. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 30{,}1x_1 - 1{,}4x_2 + 10x_3 - 1{,}5x_4 = 10; \\ -17{,}5x_1 + 11{,}1x_2 + 1{,}3x_3 - 7{,}5x_4 = 1{,}3; \\ 1{,}7x_1 - 21{,}1x_2 + 7{,}1x_3 - 17{,}1x_4 = 10; \\ 2{,}1x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}5x_3 + 3{,}3x_4 = 1{,}7. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} 7{,}3x_1 - 8{,}1x_2 + 12{,}7x_3 - 6{,}7x_4 = 8{,}8; \\ 11{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 9{,}2x_4 = 21{,}5; \\ 8{,}2x_1 - 5{,}4x_2 + 4{,}3x_3 - 2{,}5x_4 = 6{,}2; \\ 2{,}4x_1 + 11{,}5x_2 - 3{,}3x_3 + 14{,}2x_4 = -6{,}2. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 4{,}8x_1 + 12{,}5x_2 - 6{,}3x_3 - 9{,}7x_4 = 3{,}5; \\ 22x_1 - 31{,}7x_2 + 12{,}4x_3 - 8{,}7x_4 = 4{,}6; \\ 15x_1 + 21{,}1x_2 - 4{,}5x_3 + 14{,}4x_4 = 15; \\ 8{,}6x_1 - 14{,}4x_2 + 6{,}2x_3 + 2{,}8x_4 = -1{,}2. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 6{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 42x_4 = 2{,}23, \\ 5{,}8x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 6{,}2x_4 = 17{,}1, \\ 8{,}6x_1 + 7{,}7x_2 - 18{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = -5{,}4, \\ 13{,}2x_1 - 5{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 12{,}2x_4 = 6{,}5. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 14{,}2x_1 + 3{,}2x_2 - 4{,}2x_3 + 8{,}5x_4 = 13{,}2; \\ 6{,}3x_1 - 4{,}3x_2 + 12{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = -4{,}4; \\ 8{,}4x_1 - 22{,}3x_2 - 5{,}2x_3 + 4{,}7x_4 = 6{,}4; \\ 2{,}7x_1 + 13{,}7x_2 + 6{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}5. \end{cases}$$

21. $\begin{cases} 7{,}3x_1 + 12{,}4x_2 - 3{,}8x_3 - 14{,}3x_4 = 5{,}8; \\ 10{,}7x_1 - 7{,}7x_2 + 12{,}5x_3 + 6{,}6x_4 = -6{,}6; \\ 15{,}6x_1 + 6{,}6x_2 + 14{,}4x_3 - 8{,}7x_4 = 12{,}4; \\ 7{,}5x_1 + 12{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 3{,}7x_4 = 9{,}2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 13{,}2x_1 - 8{,}3x_2 - 4{,}4x_3 + 6{,}2x_4 = 6{,}8; \\ 8{,}3x_1 + 4{,}2x_2 - 5{,}6x_3 + 7{,}7x_4 = 12{,}4; \\ 5{,}8x_1 - 3{,}7x_2 + 12{,}4x_3 - 6{,}2x_4 = 8{,}7; \\ 3{,}5x_1 + 6{,}6x_2 - 13{,}8x_3 - 9{,}3x_4 = -10{,}8. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 8{,}1x_1 + 1{,}2x_2 - 9{,}1x_3 + 1{,}7x_4 = 10; \\ 1{,}1x_1 - 1{,}7x_2 + 7{,}2x_3 - 3{,}4x_4 = 1{,}7; \\ 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 10x_3 + 2{,}3x_4 = 2{,}1; \\ 1{,}3x_1 + 1{,}7x_2 - 9{,}9x_3 + 3{,}5x_4 = 27{,}1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3{,}3x_1 - 2{,}2x_2 - 10x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}1; \\ 1{,}8x_1 + 21{,}1x_2 + 1{,}3x_3 - 2{,}2x_4 = 2{,}2; \\ -10x_1 + 1{,}1x_2 + 20x_3 - 4{,}5x_4 = 10; \\ 70x_1 - 1{,}7x_2 - 2{,}2x_3 + 3{,}3x_4 = 2{,}1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 1{,}7x_1 + 9{,}9x_2 - 20x_3 - 1{,}7x_4 = 1{,}7; \\ 20x_1 + 0{,}5x_2 - 30{,}1x_3 - 1{,}1x_4 = 2{,}1; \\ 10x_1 - 20x_2 + 30{,}2x_3 + 0{,}5x_4 = 1{,}8; \\ 3{,}3x_1 - 0{,}7x_2 + 3{,}3x_3 + 20x_4 = -1{,}7. \end{cases}$

26. $$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}3x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 2{,}2; \\ 10x_1 - 10x_2 - 1{,}3x_3 + 1{,}3x_4 = 1{,}1; \\ 3{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}3x_4 = 1{,}2; \\ 1{,}3x_1 + 1{,}1x_2 - 1{,}3x_3 - 1{,}1x_4 = 10. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 11{,}3x_2 - 1{,}7x_3 + 1{,}8x_4 = 10; \\ 1{,}3x_1 - 11{,}7x_2 + 1{,}8x_3 + 1{,}4x_4 = 1{,}3; \\ 1{,}1x_1 - 10{,}5x_2 - 1{,}7x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}1; \\ 1{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}8x_3 - 1{,}1x_4 = 10. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 1{,}4x_1 + 2{,}1x_2 - 3{,}3x_3 + 1{,}1x_4 = 10; \\ 10x_1 - 1{,}7x_2 + 1{,}1x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}7; \\ 2{,}2x_1 + 34{,}4x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 20, \\ 1{,}1x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}4x_4 = 1{,}3. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} 1{,}3x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}3x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}1; \\ 10x_1 + 5{,}5x_2 - 1{,}3x_3 + 3{,}4x_4 = 1{,}3; \\ 1{,}1x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}2x_3 - 1{,}1x_4 = 1{,}0; \\ 1{,}3x_1 - 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 2{,}2x_4 = 1{,}8. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} 1{,}2x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}2x_3 - 4{,}1x_4 = 1{,}3; \\ 10x_1 - 5{,}1x_2 + 1{,}2x_3 + 5{,}5x_4 = 1{,}2; \\ 2{,}2x_1 - 30{,}1x_2 + 3{,}1x_3 + 5{,}8x_4 = 10; \\ 10x_1 + 2{,}4x_2 - 30{,}5x_3 - 2{,}2x_4 = 34{,}1. \end{cases}$$

TEJRIBE IŞI №4

KESGITLI INTEGRALY TAKMYN HASAPLAMAK

Kesgitli integraly $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - Nýuton-Leýbnisiň formulasy arkaly hasaplamak elmydama mümkin däldir. Käbir ýagdaýlarda asyl funksiýany elementar funksiýalaryň kömegi bilen aňladyp bolmaýar. Şeýle ýagdaýlarda kesgitli integraly hasaplamak üçin ýakynlaşan usullar ulanylýar. Funksiýa tablisanyň kömegi bilen berlen ýagdaýynda bolsa bu usuly peýdalanmak beýleki usullardan has amatlydyr.

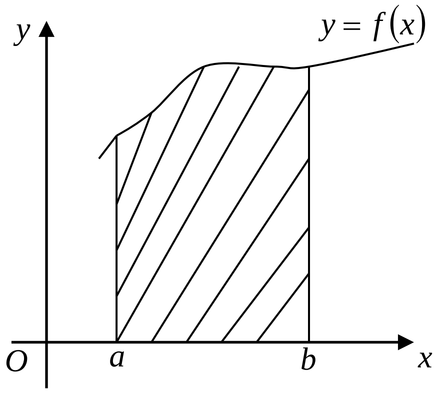
Kesgitli integraly takmyn hasaplamakda dürli usullar ulanylýar. Olardan ýönekeýleri:

I. Gönüburçluk usuly (integralyň kesgitlemesine esaslanýar);

II. Trapesiýa usuly (interpolirlemä esaslanýar);

III. Parabola usuly (interpolirlemä esaslanýar).

Goý, $\int_a^b f(x)dx$ integraly hasaplamak talap edilsin, bu ýerde a we b integralyň predelleri, $a < b$, $f(x)$ $[a, b]$ kesimde üznüksiz funksiýa. $x = a$, $x = b$, $y = 0$ gönüler we $y = f(x)$ egri bilen çäklenen figura seredeliň. Ol egriçyzykly trapesiýa diýlip atlandyrylýar.



Integral jemi

düzeliň. Onuň üçin Ox okuň $[a,b]$ kesimini erkin usulda n elementar kesimlere böleliň. Olaryň Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n uzynlyklary gyraky nokatlarynyň koordinatalarynyň tapawudy arkaly hasaplanylýar:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Elementar kesimleriň her biriniň içinden erkin usulda ξ_k nokady saýlalyň we $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ jemi düzeliň. $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ integral jemiň n (bölünme sany) tükeniksizlige ymtylandaky ($n \to \infty$) we Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n kesimleriň her biriniň uzynlygynyň 0-a ymtylandaky ($\max \Delta x_k \to 0$) predeline kesgitli integral diýilýär we $\int_a^b f(x)dx$ bilen belgilenýär. Diýmek,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Bu integralyň bahasy ýokardaky suratda görkezilen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna deňdir. Eger $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ bolsa, onda $h = \frac{b-a}{n}$ bölünme ädimini integral jem belgisiniň öňüne çykaryp bolar, ýagny

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).$$

Takmyn hasaplamada n bölünme sany ýeterlik uly bolanda aşakdaky formula ulanylýar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot [f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_n)]. \qquad (1)$$

Bu ýagdaýda egriçyzykly trapesiýanyň meýdany basgançak görnüşindäki figuranyň meýdany bilen çalşyrylýar.

I. Gönüburçluk usuly

Gönüburçluk usulynda ξ_k derek $[x_{k-1};\ x_k]$ kesimiň başlangyç nokady alynýar, ýagny $\xi_k = x_{k-1}$, onda

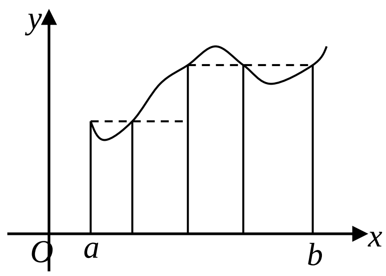
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}), \qquad (2^a)$$

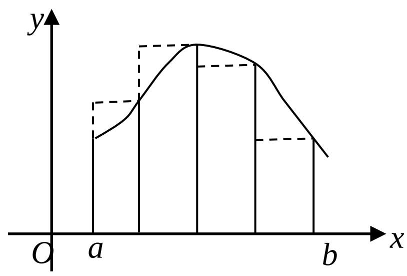
bu ýerde $y_k = f(x_k)$ ýa-da ξ_k derek $[x_{k-1};\ x_k]$ kesimiň ahyrky nokady alynýar –

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_n), \qquad (2^b)$$

bu ýerde $\xi_k = x_k$, $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, ..., n$.

(2^a) we (2^b) formulalar gönüburçluk formulalary diýlip atlandyrylýar. Bu ýerde egriçyzykly trapesiýadaky basgançakly figuranyň meýdany gönüburçluklardan düzülendir.





n bölünme sany ulaldygyça (2^a) we (2^b) formulalar takyklaşýandyr, ýöne n ulaldygyça hasaplamalar hem kynlaşýandyr.

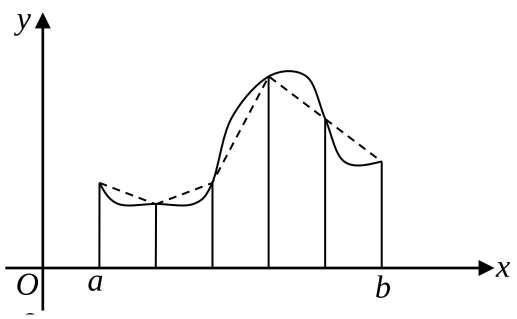
II. Trapesiýa usuly

Şol bir n bölünme sanynda trapesiýa usuly has takyk netijeler berýär. Bu usulda egriçyzykly trapesiýanyň meýdany $\left(\int_a^b f(x)dx\right)$ $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň her bir elementar kesimde dartylýan horda bilen çalşyrylmagyndan alynýan geometriki figuranyň meýdanyna deň diýlip hasaplanylýar. Trapesiýa usulynda $f(\xi_k) = \frac{y_{k-1} + y_k}{2}$ alynýar. Onda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k}{2} \qquad (3)$$

(3) formulada meňzeş agzalary jemläp, trapesiýa formulasyny alarys:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad (4)$$



Hasaplamada ýalňyşlygy hasaba almak üçin R_n galyndy agza girizilýär we dogry deňlik alynýar:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)+R_n\ .$$

R_n galyndy agzany $f''(x)$ ikinji tertipli önümiň kömegi bilen $|R_n| \le \frac{(b-a)\cdot h^2}{12}\cdot M_2$ formula bilen bahalandyrmak bolar, bu ýerde M_2 $f''(x)$-iň $[a,\,b]$ kesimdäki iň uly bahasy.

III. Parabola usuly

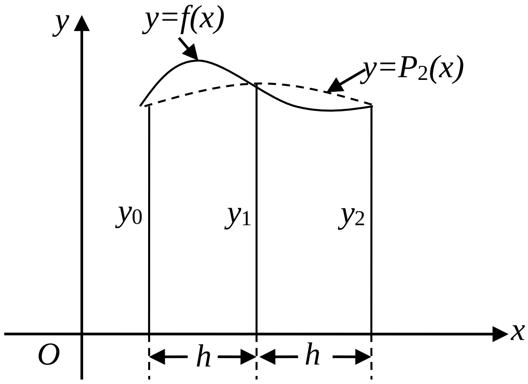
Şol bir n bölünme sanynda parabola usuly öňki usullara garanda has takyk netijeler berýär. Bu usulda $f(x)$ funksiýanyň $[x_0;\,x_2]$ kesimdäki grafiginiň dugasy $(x_0,\,y_0)$, $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$ üç nokadyň üstünden geçýän parabolanyň dugasy bilen çalşyrylýar, ýagny $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$ ýakynlaşan deňlik alynýar, bu ýerde $y = P_2(x)$ görkezilen nokatlardan geçýän parabolanyň deňlemesidir ýa-da $P_2(x)$ Nýutonyň ikinji tertipli interpolýasiýa köpagzasydyr:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_1}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\,,$$

$$x_1 = x_0 + h; \quad h = \frac{b-a}{2m} = \frac{b-a}{n};$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0;$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_2 - 2y_1 + y_0\,.$$



Onda

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + 2h\Delta y_1 + \frac{h}{3}\cdot\Delta^2 y_1 = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (5)$$

(5) formulany $\int_a^b f(x)dx$ integralyň bahasyny takmyn hasaplamakda ulanalyň. $[a;\, b]$ kesimi jübüt sanly $n = 2m$ bölege böleliň we her iki jübüt bölek üçin (5) formulany ulanalyň:

$$\begin{cases} \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot(y_2 + 4y_3 + y_4), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \end{cases} \qquad (5')$$

(5) we $(5')$ formulalary birleşdirip, alarys:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})], \quad n = 2m. \tag{6}$$

(6) formula parabola formulasy diýlip atlandyrylýar, ol iňlis matematigi T.Simpson (1710-1761) tarapyndan subut edilendir. Simpsonyň galyndy agzasynyň formulasy

$$|R_n| \le \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M_4 \tag{7}$$

formula bilen kesgitlenýär, bu ýerde $M_4 -$ $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki $f^{IV}(x)$ dördünji tertipli önüminiň iň uly bahasydyr.

Simpsonyň formulasy $[a, b]$ kesimde şol bir n bölünme sany boýunça trapesiýanyň formulasyna garanda oňat netijeler berýär. Şonuň üçin köp hasaplamalary talap edýän hem bolsa Simpsonyň formulasy peýdalanylýar.

Simpsonyň formulasy boýunça $\int_a^b f(x)dx$ integraly ε takyklykda hasaplamak talap edilsin. Integralyň bahasyny talap edilýän ε takyklykda kesgitlemek üçin ilkinji nobatda degişli $h = \frac{b-a}{2m}$ ädimi saýlap almak gerek.

Bu meseläniň çözülişiniň iki usulyna seredeliň.

1) Birinji usul (7) formula esaslanýar; (7) formuladan alarys:

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}$$

Görşümiz ýaly, h ädim $\sqrt[4]{\varepsilon}$ tertibe eýe. $f^{IV}(x)$ önümiň bahasyny tapmagyň çylşyrymlaşýandygy üçin köplenç ýagdaýda bu usul ulanylmaýar.

2) Ikinji usul integralyň bahasyny iki gezek gaýtalap hasaplamaga esaslanan – ilki h ädim, soňra $\frac{h}{2}$ ädim (başgaça n san ikeldilýär) boýunça hasaplanýar.

Ýalňyşlygyň takmyn bahasyny kesgitlemek üçin aşakdaky formula ulanylýar:

$$\Delta = \frac{1}{15} \cdot \left| I_n - I_{2n} \right|, \tag{8}$$

bu ýerde I_n $\int_a^b f(x)dx$ integralyň h ädim, I_{2n} bolsa $\frac{h}{2}$ ädim bilen hasaplanan bahasy. Eger $\Delta < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda talap edilýän takyklyk ýerine ýetýär we integralyň takmyn bahasy hökmünde I_{2n}-iň bahasy alynýar.

Mysal. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ integraly Simpsonyň formulasy boýunça $\varepsilon = 10^{-3}$ takyklykda hasaplamaly.

Çözülişi. Ilki $[0;1]$ kesimi 10 sany deň bölege böleliň, onda $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1.$

Tablisany guralyň:

x_i	$y_i = \sqrt{1-x_i^3}$	x_i	$y_i = \sqrt{1-x_i^3}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}0000$	$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}8854$
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}9995$	$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}8106$
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}9960$	$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 0{,}6986$
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}9864$	$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 0{,}5206$
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}9675$	$x_{10} = 1{,}0$	$y_{10} = 0{,}0000$
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}9354$		

Simpsonyň

$$I_n = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right)\right], \quad n = 2m,$$

formulasyny ulanyp, alarys:

$$I_{10} = \int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx \approx \frac{0{,}1}{3}\cdot\left[y_0 + y_{10} + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right) + \right.$$
$$\left. + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right)\right] = \frac{0{,}1}{3}\left[1 + 0 + 4(0{,}9995 + 0{,}9864 + 0{,}9354 + \right.$$
$$\left. + 0{,}8106 + 0{,}5206) + 2\left(0{,}9960 + 0{,}9675 + 0{,}8854 + 0{,}6986\right)\right] =$$
$$= 0{,}0333\left(1 + 4\cdot 4{,}2525 + 2\cdot 3{,}547\right) = 0{,}0333\left(1 + 17{,}01 + 7{,}095\right) =$$
$$= 0{,}0333\cdot 25{,}105 = 0{,}8360.$$

Diýmek, $I_{10} \approx 0{,}836$.

Indi $[0;1]$ kesimi 20 sany deň bölege böleliň, onda $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{20} = 0{,}05.$

Tablisany guralyň:

x_i	$y_i = \sqrt{1-x_i^3}$	x_i	$y_i = \sqrt{1-x_i^3}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}0000$	$x_{11} = 0{,}55$	$y_{11} = 0{,}9130$
$x_1 = 0{,}05$	$y_1 = 0{,}9999$	$x_{12} = 0{,}60$	$y_{12} = 0{,}8854$
$x_2 = 0{,}10$	$y_2 = 0{,}9995$	$x_{13} = 0{,}65$	$y_{13} = 0{,}8517$
$x_3 = 0{,}15$	$y_3 = 0{,}9983$	$x_{14} = 0{,}70$	$y_{14} = 0{,}8106$
$x_4 = 0{,}20$	$y_4 = 0{,}9960$	$x_{15} = 0{,}75$	$y_{15} = 0{,}7604$
$x_5 = 0{,}25$	$y_5 = 0{,}9922$	$x_{16} = 0{,}80$	$y_{16} = 0{,}6986$
$x_6 = 0{,}30$	$y_6 = 0{,}9864$	$x_{17} = 0{,}85$	$y_{17} = 0{,}6212$
$x_7 = 0{,}35$	$y_7 = 0{,}9783$	$x_{18} = 0{,}90$	$y_{18} = 0{,}5206$
$x_8 = 0{,}40$	$y_8 = 0{,}9675$	$x_{19} = 0{,}95$	$y_{19} = 0{,}3777$
$x_9 = 0{,}45$	$y_9 = 0{,}9534$	$x_{20} = 1{,}00$	$y_{20} = 0{,}0000$
$x_{10} = 0{,}50$	$y_{10} = 0{,}9354$		

Simpsonyň formulasyny ulanyp, alarys:

$$I_{20} = \int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx \approx \frac{0{,}05}{3} \cdot \left[y_0 + y_{20} + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + \right.$$

$$\left. + y_{13} + y_{15} + y_{17} + y_{19}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14} + y_{16} + y_{18})\right] =$$

$$= \frac{0,05}{3} \cdot [1 + 0 + 4(0,9999 + 0,9983 + 0,9922 + 0,9783 + 0,9534 +$$

$$+ 0,9130 + 0,8517 + 0,7604 + 0,6212 + 0,3777) + 2(0,9995 + 0,9960 +$$

$$+ 0,9864 + 0,9675 + 0,9354 + 0,8854 + 0,8106 + 0,6986 + 0,5206)] =$$

$$= \frac{0,05}{3} \cdot (1 + 4 \cdot 8,4461 + 2 \cdot 7,8) = \frac{0,05}{3} \cdot (1 + 33,7844 + 15,6) =$$

$$= \frac{0,05}{3} \cdot 50,444 = \frac{2,5222}{3} = 0,8407.$$

$$\Delta = \frac{1}{15} \cdot |I_n - I_{2n}| = \frac{1}{15} \cdot |0,8407 - 0,8360| = \frac{0,0047}{15} = 0,00031 < \varepsilon,$$

$\varepsilon = 0,001.$ Diýmek, takyklyk ýerine ýetýär. Şonuň üçin,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^3} dx \approx 0,841.$$

MATHCAD programmasynda tejribe işiniň ýerine ýetirilişi.

Integralyň Simpsonyň formulasyny ulanyp hasaplanyşy:

Ýumuşda berlen integral aşagyndaky funkişýany, integralyň aşaky we ýokarky predellerini hem-de kesim sanyny girizmeli.

$y(x) := \sqrt{1 - x^3}$

$a := 0 \qquad b := 1 \qquad n := 20 \qquad h := \frac{(b - a)}{n}$

$x_0 := a \qquad i := 0..n \qquad x_{i+1} := x_i + h$

$i =$	$x_i =$	$y(x_i) =$
0	0.00	1.0000
1	0.05	0.9999
2	0.10	0.9995
3	0.15	0.9983
4	0.20	0.9960
5	0.25	0.9922
6	0.30	0.9864
7	0.35	0.9783
8	0.40	0.9675
9	0.45	0.9533
10	0.50	0.9354
11	0.55	0.9130
12	0.60	0.8854
13	0.65	0.8517
14	0.70	0.8106
15	0.75	0.7603
16	0.80	0.6986
17	0.85	0.6212
18	0.90	0.5206
19	0.95	0.3777
20	1.00	0.0000i

$y_i := y(x_i)$

$I_1 := y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15} + y_{17} + y_{19}$

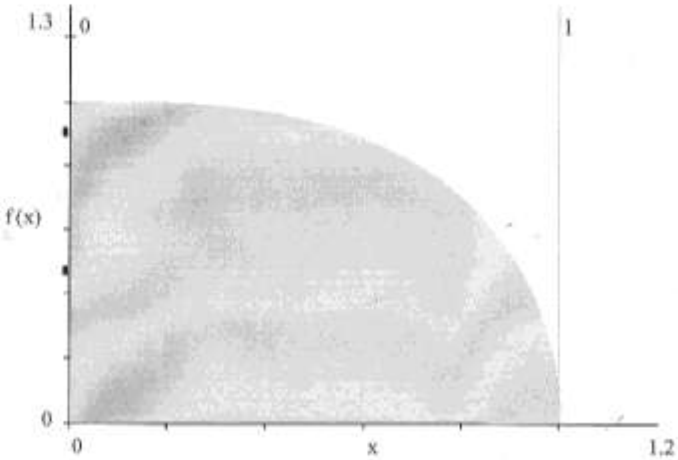
$I_2 := y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14} + y_{16} + y_{18}$

$I_{20} := \frac{h}{3} \cdot (y_0 + y_{20} + 4 \cdot I_1 + 2I_2) \qquad I_{20} = 0.84$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}\, dx = 0.84$$

b) Integralyň aşagyndaky y=f(x) funksiýanyň grafigi, y=0, x=a we x=b gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň Mathcad programmasynyň kömegi bilen gurluşy:

$$f(x) := \sqrt{1 - x^3}$$



$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}\,dx = 0.841$$

Ýumuş.

Integrallary Simpsonyň formulasy boýunça $\varepsilon = 10^{-3}$ takyklykda hasaplamaly.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^5}\,dx$
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$
3. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$
4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$
5. $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$
6. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$
7. $\int_0^{0,5} \sqrt{1-x^2}\,dx$
8. $\int_0^{2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$
9. $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$
10. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
11. $\int_1^{2} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}$
12. $\int_1^{2} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$
13. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
14. $\int_1^{2} \frac{3dx}{\sqrt{9-x^3}}$
15. $\int_1^{2} \sqrt{10-x^3}\,dx$
16. $\int_1^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx$
17. $\int_0^{1} e^{x^2}\,dx$
18. $\int_2^{3} \sqrt{10-x^3}\,dx$
19. $\int_0^{1} \sqrt{2-x^3}\,dx$
20. $\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$
21. $\int_0^{0,25} e^{-x^2}\,dx$
22. $\int_1^{3} \frac{e^x dx}{x}$
23. $\int_1^{2} e^{-2x^2}\,dx$
24. $\int_{0,5}^{1} \sqrt{2+3x^2}\,dx$
25. $\int_2^{3} \frac{e^x dx}{x^2}$
26. $\int_0^{3} \left(1+\sqrt{x^3}\right)dx$
27. $\int_1^{2} \sqrt{1+x^4}\,dx$
28. $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
29. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
30. $\int_{2,3}^{3,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

TEJRIBE IŞI №5

RUNGA-KUTTANYŇ USULY BOÝUNÇA DIFFERENSIAL DEŇLEMÄNIŇ SAN ÇÖZÜWLERINI TAPMAK

Goý,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \tag{1}$$

differensial deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan san çözüwini tapmak talap edilsin, başgaça aýdylanda $x = x_i$ ($x_i = x_0 + ih$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$, $h = x_i - x_{i-1}$ hasap ädimi) bahalar üçin $y = y(x)$ funksiýany ($y_i = y(x_i)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$) tapmaly.

(1), (2) Koşi meselesiniň $x = x_0$ nokadyň töweregindäki gözlenilýän çözüwini Teýloryň formulasy boýunça aňladalyň we onuň Teýloryň formulasy boýunça dargatmasynyň koeffisiýentlerini (1) deňlemäniň sag tarapyndaky funksiýanyň üsti bilen, (2) başlangyç şerti ulanyp, hasaplalyň. Dargatmanyň agzalarynynyň sanyny $(x - x_0)$-uň 4-nji derejesini özünde saklaýan agza çenli kesgitläp, alarys:

$$y(x) \approx y_0 + (x - x_0)\cdot\frac{dy(x_0)}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\cdot$$
$$\cdot\frac{d^2y(x_0)}{dx^2} + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\cdot\frac{d^3y(x_0)}{dx^3} + \frac{(x - x_0)^4}{4!}\cdot\frac{d^4y(x_0)}{dx^4}.$$

Goý, $x = x_1$ bolsun, onda:

$$y_1 = y(x_1) \approx y_0 + h \cdot \frac{dy(x_0)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{d^3 y(x_0)}{dx^3} +$$
$$+ \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{d^4 y(x_0)}{dx^4}, \qquad h = x_1 - x_0 .$$

Umumy ýagdaýda

$$y_{i+1} = y_i + \lambda_i \tag{3}$$

bolar, bu ýerde

$$\lambda_i = h \cdot \frac{dy(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{d^3 y(x_i)}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{d^4 y(x_i)}{dx^4},$$
$$i = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

λ_i ululygy

$$\lambda_i = \alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3 + \delta k_4 \tag{4}$$

çyzykly kombinasiýanyň kömegi bilen aňladalyň, bu ýerde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - degişli koeffisiýentler, k_1, k_2, k_3, k_4 - aşaky deňlikler bilen kesgitlenýän sanlar:

$$k_1 = h\, f(x_i, y_i); \qquad k_2 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2}{2}\right); \qquad k_4 = h\, f(x_i + h,\ y_i + k_3). \tag{5}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koeffisiýentler k_1, k_2, k_3, k_4-leri iki üýtgeýänli funksiýa hökmünde Teýloryň formulasy boýunça dargatmanyň üsti bilen kesgitlenýär. Netijede alarys:

$$\alpha = \delta = \frac{1}{6}, \qquad \beta = \gamma = \frac{1}{3}.$$

Bu bahalary (4) deňlikde ornuna goýup, alarys:

$$\lambda_i = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \qquad i = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{6}$$

Onda $y(x)$ funksiýanyň $x_{i+1} = x_0 + (i+1)h$ nokatdaky bahasyny hasaplamak üçin kesgitlenen (3) formula aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \tag{7}$$

(1), (2) meseläniň çözüwini (6), (7) formulalaryň üsti bilen tapmaklyga Runga-Kuttanyň usuly diýilýär. Hasap işleri 1-nji tablisadaky tertip (shema) boýunça ýerine ýetirilse talabalaýyk bolar.

Tablisa 1.

i	x	y	$k = h\,f\,(x,\,y)$	λ_i
0	x_0	y_0	k_1	$\lambda_0 = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	k_2	
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	k_3	
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4	

Başlangyç hasap ädimi

$$h^4 < \varepsilon \tag{8}$$

deňsizligiň esasynda kesgitlenýär, bu ýerde ε - berlen takyklyk. h we $2h$ ädimler boýunça, degişlilikde, $y_i^{(h)}$ we $y_i^{(2h)}$

funksiýalar hasaplanylýar.

Haçan

$$\Delta = \frac{\left| y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)} \right|}{15} < \varepsilon \qquad (9)$$

deňsizlik (Runga-Kuttanyň düzgüni) ýerine ýetse, diňe şonda hasaplama berlen takyklykda ýerine ýetirildi diýlip hasap edilýär. Bu ýagdaýda meseläniň çözüwi $y_i^{(h)}$ bolar. Eger (9) şert ýerine ýetmese, ýagny $\Delta > \varepsilon$ bolsa, onda hasap ädimini kiçeltmek zerur bolýar we hasaplama h we $\frac{h}{2}$ ädimler boýunça ýerine ýetirilýär. Şunuň ýaly hasaplamalar $[x_0;\, x_i]$ kesimi böleklere bölmegiň ähli bölünme nokatlarynda ýerine ýetirilýär. (9) deňsizlik ähli i-ler üçin ýerine ýetse hasaplamalar tamamlanýar.

Mysal. $y' = x + y$ deňlemäniň $y(0) = 1$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwiniň $[0;\, 0{,}6]$ kesimdäki $y_i = y(x_i)$ bahalaryny $\varepsilon = 0{,}001$ takyklykda tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen (8) formulany ulanyp, hasap ädiminiň başlangyç bahasyny tapýarys $h^4 < 0{,}001 \Rightarrow h = 0{,}15$. Onda $[0;\, 0{,}6]$ kesimi böleklere bölmegiň sany $n = \frac{0{,}6 - 0}{0{,}15} = 4$ bolar.

Ähli hasaplamalar berlen $\varepsilon = 0{,}001$ takyklykdan bir onluk belgi artykmaçlykda, ýagny oturdan soňra dört onluk belgi bilen ýerine ýetirilýär.

I. Bu tapgyrda $y(0)=1$ ($x_0=0$, $y_0=1$) başlangyç şert we $h=0{,}15$ hasap ädimi peýdalanylyp, x_1 we y_1 bahalar tapylýar.

1. $x_0=0$, $y_0=1$ başlangyç bahalar üçin x_1-i we (5) formula boýunça k_1, k_2, k_3, k_4 sanlary hasaplalyň:

$$x_1=x_0+h=0+0{,}15=0{,}15;$$

$$k_1=h\cdot f(x_0,\,y_0)=0{,}15\cdot(0+1)=0{,}15;$$

$$k_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\,y_0+\frac{k_1}{2}\right)=0{,}15\left(\frac{0{,}15}{2}+1+\frac{0{,}15}{2}\right)=0{,}1725;$$

$$k_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\,y_0+\frac{k_2}{2}\right)=0{,}15\left(\frac{0{,}15}{2}+1+\frac{0{,}1725}{2}\right)=0{,}1742;$$

$$k_4=hf(x_0+h,\,y_0+k_3)=0{,}15(0{,}15+1+0{,}1742)=0{,}1986.$$

2. (6) formulanyň kömegi bilen λ_0 hasaplanylýar:

$$\lambda_0=\frac{1}{6}(0{,}15+2\cdot 0{,}1725+2\cdot 0{,}1742+0{,}1986)=0{,}1737.$$

3. (7) formuladan y_1 tapylýar:

$$y_1=y_0+\lambda_0=1+0{,}1737=1{,}1737.$$

II. Indi $x_1=0{,}15$ we $y_1=1{,}1737$ bahalaryň esasynda x_2 we y_2 bahalary tapmak üçin I tapgyrdaky tertipde degişli hasaplamalary geçireliň:

$$x_2=x_0+2h=x_1+h=0{,}15+0{,}15=0{,}3;$$

$k_1 = 0{,}15(0{,}15 + 1{,}1737) = 0{,}1986\,,$

$$k_2 = 0{,}15\left(0{,}15 + \frac{0{,}15}{2} + 1{,}1737 + \frac{0{,}1986}{2}\right) =$$
$$= 0{,}15(0{,}15 + 0{,}075 + 1{,}1737 + 0{,}0993) = 0{,}2247,$$

$$k_3 = 0{,}15\left(0{,}15 + \frac{0{,}15}{2} + 0{,}1737 + \frac{0{,}2247}{2}\right) =$$
$$= 0{,}15(0{,}15 + 0{,}075 + 1{,}1737 + 0{,}1123) = 0{,}2267,$$

$$k_4 = 0{,}15(0{,}15 + 0{,}15 + 1{,}1737 + 0{,}2267) = 0{,}15 \cdot 1{,}7004 = 0{,}2551\,;$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{6}(0{,}1986 + 2 \cdot 0{,}2247 + 2 \cdot 0{,}2267 + 0{,}2551) = 0{,}2261\,;$$

$$y_2 = y_1 + \lambda_1 = 1{,}1737 + 0{,}2261 = 1{,}3998\,.$$

Şeýlelikde, I we II tapgyrda görkezilen tertip boýunça degişli hasaplamalary geçirip, $x_3 = 0{,}45$ üçin $y_3 = 1{,}6867$; $x_4 = 0{,}6$ üçin bolsa $y_4 = 2{,}0443$ bahalary taparys.

III. Hasap ädimini iki esse kiçeldeliň, ýagny $\tilde{h} = \frac{0{,}15}{2} = 0{,}075$ bolsun, onda $\tilde{n} = 8$. Degişli hasaplamalary geçirip, taparys:

$$\tilde{x}_1 = x_0 + \tilde{h} = 0 + 0{,}075 = 0{,}075\,;$$
$$\tilde{k}_1 = 0{,}075(0 + 1) = 0{,}075\,,$$

$$\widetilde{k}_2 = 0{,}075\left(\frac{0{,}075}{2} + 1 + \frac{0{,}075}{2}\right) = 0{,}0806\,,$$

$$\widetilde{k}_3 = 0{,}075\left(\frac{0{,}075}{2} + 1 + \frac{0{,}0806}{2}\right) = 0{,}0808\,,$$

$$\widetilde{k}_4 = 0{,}075(0{,}075 + 1 + 0{,}0808) = 0{,}0867\,;$$

$$\widetilde{\lambda}_0 = \frac{1}{6}(0{,}075 + 2 \cdot 0{,}0806 + 2 \cdot 0{,}0808 + 0{,}0867) = 0{,}0808\,;$$

$$\widetilde{y}_1 = y_0 + \widetilde{\lambda}_0 = 1 + 0{,}0808 = 1{,}0808\,.$$

$\widetilde{y}_i$ -niň galan bahalary-da ýokardaky tertipde tapylýar. Hasaplamalaryň netijesini tablisa ýerleşdireliň.

Tablisa 2.

x_i	y_i	$\widetilde{x}_i$	$\widetilde{y}_i$	$y_i - \widetilde{y}_{2i}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$\widetilde{x}_0 = 0$	$\widetilde{y}_0 = 1$	0
		$\widetilde{x}_1 = 0{,}075$	$\widetilde{y}_1 = 1{,}0808$	
$x_1 = 0{,}15$	$y_1 = 1{,}1737$	$\widetilde{x}_2 = 0{,}15$	$\widetilde{y}_2 = 1{,}1737$	0
		$\widetilde{x}_3 = 0{,}225$	$\widetilde{y}_3 = 1{,}2796$	
$x_2 = 0{,}3$	$y_2 = 1{,}3998$	$\widetilde{x}_4 = 0{,}3$	$\widetilde{y}_4 = 1{,}3997$	0,0001
		$\widetilde{x}_5 = 0{,}375$	$\widetilde{y}_5 = 1{,}5350$	
$x_3 = 0{,}45$	$y_3 = 1{,}6867$	$\widetilde{x}_6 = 0{,}45$	$\widetilde{y}_6 = 1{,}6866$	0,0001
		$\widetilde{x}_7 = 0{,}525$	$\widetilde{y}_7 = 1{,}8559$	
$x_4 = 0{,}6$	$y_4 = 2{,}0443$	$\widetilde{x}_8 = 0{,}6$	$\widetilde{y}_8 = 2{,}0442$	0,0001

2-nji tablisadan görnüşi ýaly, Runga-Kuttanyň düzgüni -

$\Delta = \dfrac{|\tilde{y}_{2i} - y_i|}{15} < \varepsilon$ ähli i-ler üçin ýerine ýetýär, diymek, talap edilýän takyklyk ýerine ýetdi.

IV. Çözüwiň $[0;\,0{,}6]$ kesimdäki $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) bahalarynyň tablisasyny düzeliň:

Tablisa 3.

i	x_i	y_i
0	0	1,000
1	0,15	1,174
2	0,3	1,400
3	0,45	1,687
4	0,6	2,044

Matchcad programmasynda tejribe işiň ýerine ýetirilişi

I. Machcad programmasynda tejribe işini ýerine ýetirmek üçin programmanyň içinde ýerleşen rkf ixed *(y_0, a, b,n , f)* funksiýasy peýdalanylýar. Bu ýerde:

y_0-nx1- ölçegli wektor,

a, b-berlen kesim,
n-ädim sany,
f-differensial deňlemäniň sag tarapyndaky *f(x, y)* funksiýa.

Biziň mysalymyzda:
a=0, b=0,6, n=4 we f(x,y)=x+y)
rkf ixed *(y_0, a, b,n , f)* funksiýasy deňlemäniň çözüwini 2 sütünden ybarat (x we y)

tablisa görnüşinde berýär.
Mathcad programma:

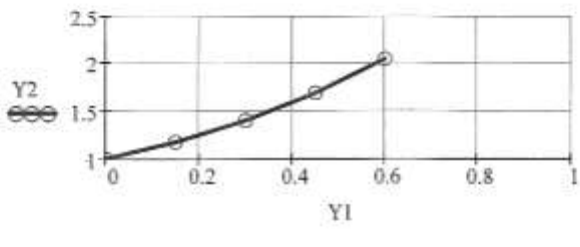
origin := 1 y := 1
f(x,y) := x + y
Y := rkfixed(y,0,0.6,4,f)

Y =

	0	1
0	0	1
1	0.15	1.174
2	0.3	1.4
3	0.45	1.687
4	0.6	2.044

II.Alnan çözüwiň grafiginiň Mathcad programmasynyň kömegi bilen gurluşy.
Tablisadan Y1 we Y2 sütün matrisalary girzeliň.

$$Y1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0.3 \\ 0.45 \\ 0.6 \end{pmatrix} \qquad Y2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.174 \\ 1.4 \\ 1.687 \\ 2.044 \end{pmatrix}$$



Ýumuş. $y' = f(x,\ y)$ deňlemäniň $y(x_0) = y_0$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan $y_i(x)$ çözüwiniň $[x_0,\ b]$ kesimdäki bahalaryny $\varepsilon = 0{,}001$ takyklykda tapmaly.

	Deňleme:	*Başlangyç şert:*	*Kesim:*
1.	$y' = x + y^2$	$y(0) = 0$	$[0;\ 0{,}75]$
2.	$y' = xy^3 + x^2$	$y(0) = 0$	$[0;\ 0{,}9]$
3.	$y' = x^2 + y$	$y(0) = 1$	$[0;\ 0{,}6]$
4.	$y' = 1 + x - y^2$	$y(0) = 1$	$[0;\ 0{,}75]$
5.	$y' = x + y + 1$	$y(0) = 1$	$[0;\ 0{,}9]$
6.	$y' = \dfrac{x^2 + y^2}{10}$	$y(1) = 1$	$[1;\ 1{,}6]$
7.	$y' = xy^3 + x^2$	$y(0) = 0$	$[0;\ 0{,}9]$
8.	$y' = \sqrt{x}y^2 + 1$	$y(1) = 0$	$[1;\ 1{,}75]$
9.	$y' = xy^3 - 1$	$y(0) = 0$	$[0;\ 0{,}6]$

10. $y' = y^3 - x$	$y(0)=1$	$[0;\ 0{,}9]$
11. $y' = x^2 - y^2$	$y(0)=0$	$[0;\ 0{,}6]$
12. $y' = x^2 y^2$	$y(0)=1$	$[0;\ 0{,}75]$
13. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$	$y(1)=1$	$[1;\ 1{,}9]$
14. $y' = \dfrac{x}{y}$	$y(0)=1$	$[0;\ 0{,}6]$
15. $y' = 4x - 2y$	$y(0{,}5)=1$	$[0{,}5;\ 1{,}25]$
16. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$	$y(0{,}5)=1$	$[0{,}5;\ 1{,}4]$
17. $y' = x^2 + y^2$	$y(0)=0$	$[0;\ 0{,}9]$
18. $y' = x + y$	$y(0)=1$	$[0;\ 0{,}6]$
19. $y' = 2y - 3$	$y(0)=1$	$[0;\ 0{,}75]$
20. $y' = 2xy$	$y(0)=1$	$[0;\ 0{,}9]$
21. $y' = xy^2$	$y(0)=0$	$[0;\ 0{,}6]$

22. $y' = x^2 y^3 + x^2$ $\quad y(0) = 0$ $\quad [0;\ 0{,}75]$

23. $y' = x^2 y^2 - 1$ $\quad y(0) = 1$ $\quad [0;\ 0{,}9]$

24. $y' = x^3 + y^2 x$ $\quad y(0) = 0$ $\quad [0;\ 0{,}6]$

25. $y' = x^2 y + y^2$ $\quad y(0{,}5) = 0{,}7$ $\quad [0{,}5;\ 1{,}1]$

26. $y' = 2x + y^2$ $\quad y(0) = 0{,}3$ $\quad [0;\ 0{,}7]$

27. $y' = x^2 + 2y^2$ $\quad y(0) = 0{,}1$ $\quad [0;\ 0{,}5]$

28. $y' = x^2 + xy$ $\quad y(0) = 0{,}2$ $\quad [0;\ 0{,}65]$

29. $y' = xy + y^2$ $\quad y(0) = 0{,}6$ $\quad [0;\ 0{,}75]$

30. $y' = 2x^2 + xy$ $\quad y(0) = 0{,}5$ $\quad [0;\ 0{,}9]$

TEJRIBE IŞI №6

EMPIRIK FORMULANY SAÝLAP ALMAK WE ONUŇ PARAMETRLERINI IŇ KIÇI KWADRATLAR USULY BILEN KESGITLEMEK

Goý,

$$y = f(x) \tag{1}$$

görnüşdäki näbelli funksional baglanyşygy emele getirýän x we y üýtgeýän ululyklaryň bahalary n synagyň netijesinde kesgitlenen bolsun ((2) tablisa).

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n

(2)

(2) tablisadaky maglumatlaryň esasynda

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x) \tag{3}$$

görnüşdäki empirik formulany tapmak talap edilýär, bu ýerde argumentiň $x = x_i$ bahasy üçin funksiýanyň $\tilde{y}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ bahasy (3) formula boýunça hasaplanýar we ol bahalar tejribede kesgitlenen bahalara ((2) tablisa) mümkin derejede golaý bolmaly. Empirik formulany tapmagyň geometriki manysy kesgitli topara degişli bolan egrileriň içinden $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ nokatlaryň ýeterlik golaýyndan geçýänini saýlamakdyr.

Mesele aşakdaky tapgyrlardan durýar:

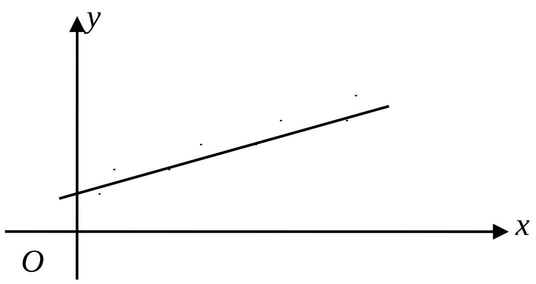
1. $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ formulany saýlamak.

2. Empirik formula girýän parametrleriň bahalaryny kesgitlemek.

1. $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ formulanyň saýlanylyşy.

Eger x we y üýtgeýänleriň biri-birine baglanyşygy näbelli häsiýetde bolsa, onda $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ formula iň ýönekeý görnüşde gözlenilýär. Ýönekeý görnüşdäki formulany x-iň ähli üýtgeýän aralygynda tapmak başartmasa, onda x-iň üýtgeýän aralygynyň aýratyn bölekleri üçin degişli formulalar gözlenilýär.

Empirik formulany saýlamagyň köp dürli usullary bardyr. Ilki bilen koordinatalar sistemasynda tejribede alnan maglumatlara degişli $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ nokatlary gurmaly. Bu nokatlary göni kesimler arkaly birleşdirip, ýeterlik endik bolanda, nokatlara iň golaý geçýän egriniň haýsy görnüşe degişlidigini çak edip bolýar.



Empirik formulany saýlamak işi çyzgynyň esasynda ýa-da

$$\overline{\Delta y_i} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \quad (\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \ \ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \ \ i = 1, 2, ..., n-1) \quad (3)$$

birinji tertipli tapawutlaryň gatnaşyklarynyň biri-birinden az tapawutlanýandygynyň esasynda,

$$y = ax + b \tag{4}$$

çyzykly baglylygy barlamakdan başlanýar. Eger çyzykly baglylygy barlamaklyga getirýän şertler ýok bolsa, onda

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \tag{5}$$

kwadrat baglylyk arkaly aňladylýan formula barlanylýar. Bu formula

$$\overline{\Delta^2 y_i} = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i}, \quad (i = 1, 2, ..., n-2), \tag{6}$$

ikinji tertipli tapawutlaryň gatnaşyklary biri-birinden ujypsyz tapawutlananda ulanylýar. Eger-de bu şert hem ýerine ýetmese, onda

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{7}$$

dört parametrli funksiýany derňemekden öň, aşakdaky formulalardan empirik formulany tapmaklyga çalyşmaly:

$$\begin{gathered} y = a \cdot x^b, \ \ y = a \cdot b^x, \ \ y = a + \frac{b}{x}, \\ y = \frac{1}{ax+b}, \ \ y = \frac{x}{ax+b}, \ \ y = a \cdot \lg x + b \end{gathered} \tag{8}$$

Bu egri çyzyklaryň grafikleri tejribede alnan maglumatlaryň esasynda gurlan grafik bilen deňeşdirilýär we has meňzeşi saýlanyp alynýar (bu ýagdaýda käbir $M_i(x_i, y_i)$ nokadyň saýlanan grafikden daşrakda ýerleşenligini hasap etmeseň-de bolýar). (8) funksiýalaryň aýratynlygy degişli öwürmeleriň geçirilmeginiň netijesinde olaryň çyzykly funksiýalara getirilýänligidir. Meselem, $y = a \cdot x^b$ funksiýa logarifmirlemäniň üsti bilen çyzykly funksiýa getirilýär.

Eger (4), (5), (7) we (8) formulalaryň hiç biri gabat gelmeýän bolsa, onda empirik formulany

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_k x^k \quad (k > 3) \tag{9}$$

görnüşli funksiýalaryň ýa-da ýörite görnüşli funksiýalaryň (meselem, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ we ş.m.). arasyndan gözlemeli. Netijede empirik formulany saýlamagyň işiň iň kyn bölegidigini belläliň.

2. Empirik formula girýän parametrleriň bahalarynyň kesgitlenişi.

$\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ empirik formulanyň görnüşi haýsy hem bolsa bir usul bilen saýlanan diýeliň. Bu formulanyň parametrleri birnäçe usul bilen tapylýar, ýöne olaryň içinde amatlysy iň kiçi kwadratlar usulydyr. Bu usul ulanylanda parametrleriň bahalary ýokary takyklykda tapylýar. Häzirki döwrüň hasaplaýyş tehnikasy bu usulyň kemçiligini – hasaplamalaryň has köpdigini nazara almazlyga mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde, k sany $a_1, a_2, ..., a_k$ näbelli parametrlerden düzülen

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x, a_1, a_2, ..., a_k) \tag{10}$$

formulanyň görnüşi kesgitlendi. x_i we y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ maglumatlaryň ((2) tablisa) tejribede tapylandygyny, ýagny olaryň takmyn bahalardygyny we $n > k$ bolmalydygyny ýatlalyň.

Iň kiçi kwadratlar usulynda $a_1, a_2, ..., a_k$ parametrleriň bahalary $\tilde{y}_i - y_i$ gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi

$$S(a_1, a_2, ..., a_k) = \sum_{i=1}^{n} \left[\tilde{f}(x, a_1, a_2, ..., a_k) - y_i\right]^2 \qquad (11)$$

ýa-da

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\tilde{f}(x, a_1, a_2, ..., a_k) - y_i\right]^2$$

minimal baha deň bolar ýaly edilip kesgitlenýär.

$a_1, a_2, ..., a_k$ parametrleri kesgitlemek üçin (funksiýanyň minimumynyň kesgitlemesiniň esasynda) deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad ..., \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0\,. \qquad (12)$$

$\tilde{f}(x, a_1, a_2, ..., a_k)$ funksiýa $a_1, a_2, ..., a_k$ parametrlere görä çyzykly bagly bolan ýagdaýda bu sistemanyň çözüwi has ýönekeý bolar. Biz şu ýagdaýa seretmek bilen hem çäkleneris. Empirik formulany $y = ax + b$ ýa-da

$$ax + b - y = 0 \qquad (13)$$

görnüşde gözläliň. Tejribede kesgitlenen ((2) tablisa) x_i we y_i bahalary (13) deňlikde ornuna goýup, alarys:

$$\begin{cases} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n, \end{cases} \qquad (14)$$

bu ýerde ε_i - funksiýanyň empirik formula boýunça kesgitlenen bahasynyň onuň takyk bahasyndan gyşarmasy. Iň kiçi kwadratlar usulyna görä, $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = \min$ şert talap edilýär. a we b görä hususy önümleri alyp we olary nola deňläp, alarys:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Bu ýerden

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + n\cdot b = \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp, parametrleri kesgitlemek üçin formulalary alarys:

$$a = \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i y_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \quad (15)$$

n - synaglaryň sany.

Mysal. Tablisada berlenlere görä y-i x-e baglylykda aňladýan empirik formulany saýlamaly we bu formulanyň parametrlerini kesgitlemeli.

x	-2,0	-1,0	0,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,1	7,0	8,0
y	1,3	1,5	1,7	2,1	2,2	2,5	2,6	2,9	3,0	3,2

(16)

Çözülişi. Bu mysaly iň kiçi kwadratlar usulyny ulanyp çözeliň. Ilki bilen parametrleri a we b bolan çyzykly baglanyşygyň $y = ax + b$ ýa-da $ax + b - y = 0$ formulasyny girizeliň. Birnäçe öwürmeden soň, alarys:

$$ax_i + b - y_i = \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, 10}; \qquad \sum_{i=1}^{10} (ax_i + b - y_i)^2 = \min;$$

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{10} (ax_i + b - y_i) x_i = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{10} (ax_i + b - y_i) = 0; \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{10} x_i - \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0, \\ a\sum_{i=1}^{10} x_i + n \cdot b - \sum_{i=1}^{10} y_i = 0. \end{cases}$$

Bu ýerden:

$$a=\frac{10\cdot\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i}{10\cdot\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\right)^2},\qquad b=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i-\sum_{i=1}^{10}x_iy_i\cdot\sum_{i=1}^{10}x_i}{10\cdot\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\right)^2}.$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5+x_6y_6+x_7y_7+x_8y_8+$$

$$+x_9y_9+x_{10}y_{10}=-2{,}0\cdot1{,}3+(-1{,}0)\cdot1{,}5+0{,}4\cdot1{,}7+2{,}0\cdot2{,}1+$$

$$+3{,}0\cdot2{,}2+4{,}0\cdot2{,}5+5{,}0\cdot2{,}6+6{,}1\cdot2{,}9+7{,}0\cdot3{,}0+8{,}0\cdot3{,}2=$$

$$=-2{,}6-1{,}5+0{,}68+4{,}2+6{,}6+10+13+17{,}69+21+25{,}6=94{,}67.$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_i=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=$$

$$=-2{,}0+(-1{,}0)+0{,}4+2{,}0+3{,}0+4{,}0+5{,}0+6{,}1+7{,}0+8{,}0=32{,}5.$$

$$\sum_{i=1}^{10}y_i=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}=$$

$$=1{,}3+1{,}5+1{,}7+2{,}1+2{,}2+2{,}5+2{,}6+2{,}9+3{,}0+3{,}2=23.$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_{10}^2=$$

$=(-2{,}0)^2+(-1{,}0)^2+0{,}4^2+2{,}0^2+3{,}0^2+4{,}0^2+5{,}0^2+6{,}1^2+7{,}0^2+8{,}0^2=$

=4,0+1,0+0,16+4,0+9,0+16,0+25,0+37,21+49,0+64,0= 209,37.

$$a=\frac{10\cdot 94{,}67-32{,}5\cdot 23}{10\cdot 209{,}37-32{,}5^2}=0{,}192\,,$$

$$b=\frac{209{,}37\cdot 23-94{,}67\cdot 32{,}5}{10\cdot 209.37-32{,}5^2}=1{,}676.$$

MATHCAD programmasynda tejribe işiniň ýerine ýetirilişi.

$$X := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0.4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6.1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.5 \\ 1.7 \\ 2.1 \\ 2.2 \\ 2.5 \\ 2.6 \\ 2.9 \\ 3.0 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

$N := \mathrm{length}(X)$

$N = 10$

$$a := \frac{\left[N \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} X_i \cdot Y_i\right) - \sum_{i=0}^{N-1} X_i \cdot \sum_{i=0}^{N-1} Y_i\right]}{\left[N \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (X_i)^2\right] - \left(\sum_{i=0}^{N-1} X_i\right)^2\right]}$$

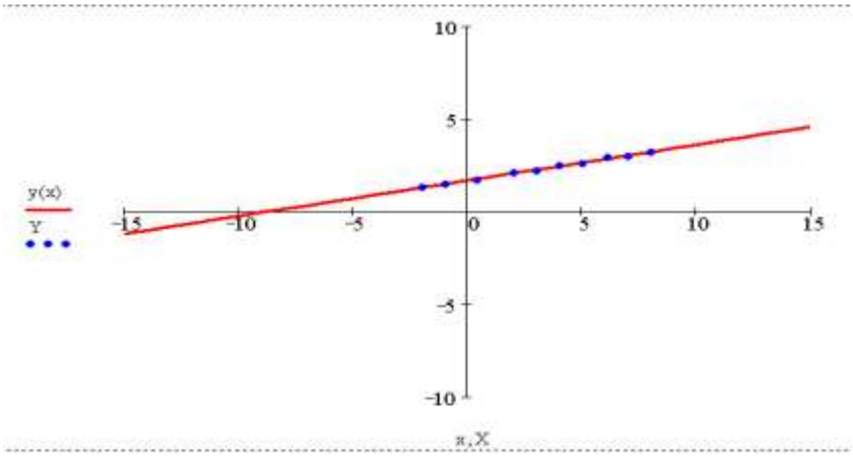
$a = 0.192$

$$b := \frac{\left[\left[\sum_{i=0}^{N-1} (X_i)^2 \cdot \sum_{i=0}^{N-1} Y_i\right] - \sum_{i=0}^{N-1} X_i \cdot Y_i \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X_i\right]}{\left[N \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (X_i)^2\right] - \left(\sum_{i=0}^{N-1} X_i\right)^2\right]}$$

$b = 1.676$

$y(x) := a \cdot x + b$

MACHCAD programmasynyň kömegi bilen tablisada berlen nohatlaryň we $y(x)=ax+b$ funksiýanyň grafiginiň gurluşy



Bu tapylan a we b bahalary $ax+b-y=0$ deňlikde goýup, empirik formulany alarys:

$$0{,}192\cdot x+1{,}676-y=0 \quad \text{ýa-da} \quad y=0{,}192\cdot x+1{,}676.$$

Ýumuş. Tablisada berlenlere görä y-i x-e baglylykda aňladýan empirik formulany saýlamaly we bu formula girýän parametrleri kesgitlemeli.

1.

x	1,1	2,0	3,0	4,0	5,2	6,2	7,0	8,0	9,0	10,0
y	0,8	1,1	1,5	1,7	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,7

2.

x	0,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	8,5	9,5
y	3,1	2,7	2,4	2,1	1,8	1,6	1,3	1,0	0,8	0,4

3.

x	1,0	2,2	3,2	4,0	5,0	6,0	7,0	7,9	8,5	9,5
y	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,4	4,5	4,5	4,6	4,8

4.

x	-1,0	1,0	2,0	3,0	4,0	4,9	6,0	6,6	7,5	8,0
y	0,1	0,6	1,0	1,2	1,5	1,7	2,1	2,2	2,5	2,6

5.

x	2,0	1,0	0,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,1	7,0	8,0
y	1,3	1,5	1,7	2,1	2,2	2,5	2,6	2,9	3,0	3,2

6.

x	1,0	1,0	2,2	3,3	4,0	5,1	6,0	7,2	8,1	9,1
y	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	3,9	4,0

7.

x	1,0	2,4	3,2	4,0	5,0	6,0	7,0	8,1	9,1	10,0
y	-1,0	-0,3	0,1	0,5	1,0	1,7	2,1	2,6	3,2	3,6

8.

x	-4,0	-3,0	-1,0	1,0	2,0	3,9	5,0	6,5	7,5	8,9
y	2,0	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,3	4,5

9.

x	0,9	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,8
y	5,4	5,6	5,6	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4

10.

x	1,8	2,3	3,3	6,0	6,0	7,0	9,1	10,1	11,1	12,2
y	6,2	6,4	6,7	6,0	7,1	7,4	7,7	7,9	8,2	8,3

11.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,5	8,0	9,0	10,0	12,0
y	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	1,1	1,3	2,4	1,6	1,9

12.

x	0,7	1,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,1	8,5	10,1	11,0
y	1,6	1,9	2,3	2,6	3,0	3,2	3,6	4,0	4,5	4,7

13.

x	1,0	1,9	3,0	4,0	5,1	6,1	6,9	8,0	9,0	10,0
y	2,9	3,4	3,8	4,3	4,9	5,4	5,7	6,3	6,8	7,2

14.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,1	6,3	7,0	8,0	9,0	10,0
y	6,1	6,6	7,0	7,5	8,0	8,5	8,8	9,2	9,6	10,1

15.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,5	7,0	7,5	8,5	9,4	10,0
y	8,5	9,0	9,5	10,1	10,9	11,6	12,0	12,5	12,9	13,3

16.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	8,5	9,0
y	0,3	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,0	3,1

17.

x	0,6	1,7	2,5	3,0	4,5	5,6	7,1	8,0	9,0	10,0
y	0,7	1,2	1,5	1,8	2,4	2,9	3,7	4,0	4,5	5,0

18.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,2	6,2	7,1	8,0	9,0	9,5
y	1,5	2,2	2,8	3,5	4,2	4,9	5,5	6,0	6,7	7,0

19.

x	0,7	2,0	3,0	4,0	5,0	6,1	7,0	8,0	8,5	9,6
y	3,0	4,0	4,7	5,5	6,2	7,0	7,8	8,5	8,9	9,7

20.

x	1,0	2,0	3,0	4,1	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
y	6,1	6,8	7,3	8,0	8,5	9,0	9,7	10,3	10,8	11,5

21.

x	1,0	2,1	3,0	4,2	5,0	6,0	7,0	8,0	9,1	10,1
y	1,2	2,4	3,4	4,7	5,6	6,7	7,8	9,8	10,1	11,2

22.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
y	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

23.

x	0,5	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2
y	2,8	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0	4,2	4,5

24.

x	1,0	2,0	3,0	4,1	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
y	0,7	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4

25.

x	1,0	1,3	1,5	2,0	2,3	2,5	3,0	3,3	3,5	4,0
y	3,0	3,4	3,7	4,2	4,7	5,0	5,6	6,0	6,3	6,9

26.

x	1,1	1,3	1,5	2,0	2,1	2,3	2,5	3,0	3,1	3,3
y	2,9	3,6	3,9	4,6	4,7	5,0	5,3	6,0	6,1	6,4

27.

x	1,0	1,2	1,7	1,8	2,0	2,2	2,7	2,8	3,0	4,0
y	2,9	3,2	4,0	4,2	4,5	4,8	5,6	5,8	6,1	7,7

28.

x	1,0	1,4	1,8	2,0	2,4	2,8	3,0	3,4	3,8	4,0
y	3,.0	3,7	4,4	4,8	5,5	6,2	6,6	7,3	8,0	8,4

29.

x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
y	3,2	3,9	4,6	5,3	6,0	6,7	7,4	8,1	8,8	9,5

30.

x	5,4	6,0	6,4	7,0	7,4	8,0	8,4	9,0	9,4	10,0
y	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3

EDEBIÝATLAR

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.
10. Hudaýberenow Ö.G., Ýokary matematika. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw kitaby. A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.
11. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.1, изд.3-е. М.: Наука, 1966.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики, М.: Наука, 1970.
13. Гутер Р.С., Овчинский В.В, Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970.

14. Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972.
15. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. Под ред. А.В.Петрова. М: Высшая школа, 1984.
16. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике, Учебное пособие для втузов. М: Высшая школа, 1983.
17. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1982.

MAZMUNY