

MAZMUNY

Birinji bölüm.

§1. Ähtimallyklar teoriýasy hakynda esasy düşüňjeler.	3
§2. Ähtimallygyň klasiki kesgitlemesi.	5
§3. Wakanyň otnositel ýygylgy. Ähtimallygyň statistiki kesgitleniş.	7
§4. Ähtimallyklaryň goşmak teoremasy.	8
§ 5. Garaşly we garaşsyz wakalar.	10
§6. Garaşsyz wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.	11
§7. İn bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy.	13
§8. Şertli ähtimallyk.	14
§9. Garaşly (özara bagly) wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.	16
§10. Sygyşýan wakalaryň ähtimallyklarynyň goşmak teoremasy.	16
§11. Doly ähtimallygyň formulasy.	18
§12. Çaklamanyň ähtimallygy. Beýesiň formulasy.	19
§13. Kombinatorikanyň esasy formulalary.	21
§14. Tejribeleriň gaýtalyňsy. Bernulliniň formulasy.	22
§15. Wakanyň ýüze çykmagynyň in uly ähtimallykly sany.	23
§16. Asimptotik formulalar.	24
§17. Bagly däl wakalarda otnositel ýygylgyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasynyň ähtimallygy.	28

Ikinji bölüm.

§1. Tötän ululyklar we olaryň görnüşleri.	30
§2. Diskret tötän ulylygyň ähtimallygynyň paýlanyş kanuny.	31
§3. Diskret tötäni ulylygyň ähtimallygynyň binomial paýlanyş kanuny.	32
§4. Puassonyň paýlanyş kanuny.	34
§5. Diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasy we onuň häsiýetleri.	35
§6. Binomial paýlanyş kanunynyň matematik garaşmasy.	38
§7. Diskret tötän ulylygyň dispersiýasy we onuň häsiýetleri.	38
§8. Dispersiýa we onuň häsiýetleri.	39
§9. Üznüksiz tötän ulylyklar.	41
§10. Üznüksiz tötän ulylygyň paýlanyşynyň differensial funksiýasy.	44
§11. Üznüksiz tötän ulylyklaryň san karakteristikalary.	46
§12. Deňölçegli paýlanyş kanuny.	47
§13. Normal paýlanyşyň kanuny.	49
§14. Normal tötän ulylygyň berlen aralyga düşmekliginiň ähtimallygy.	52
§15. Berlen gyşarmanyň ähtimallygynyň hasaplanyşy.	54
§16. Üç sigma düzgüni.	54
§17. Görkezijili paýlanyş kanuny.	55
§18. Paýlanyşyň momentleri hakynda düşünje.	58
§19. Uly sanlaryň kanuny.	59

TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRRLIGI TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Pirjanow B, Alçekow. A.

Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika

Aşgabat 2010

Barlagy ýeňilleşdirmek maksady bilen her öýjükdäki ($n_{UV} \cdot UV$) sanlary her meýdan üçin aýratyn jemleýärler, hasaplanýş her meýdanyň her setiri we her sütüni üçin aýratyn ýerine ýetirilýär; meýdanyň setiri üçin ($n_{UV} \cdot UV$) sanlaryň jemi, sag tarapda ýerleşen, şol meýdanyň nomerini özünde saklaýan (sanlaryň goşulan meýdany) goşmaça sütününde ýazylýar. Sütün üçin ($n_{UV} \cdot UV$) sanlaryň jemi, aşakda ýerleşen, şol meýdanyň nomerini özünde saklaýan goşmaça setirde ýazylýar. Her meýdan üçin aýratyn sanlaryň jemi tablisanyň sag aşaky burçundaky jemleýji öýjükdä ýazylýar. Iň soňynda jemleýji öýjügiň sanlarynyň jemini goşup gözlenýän sany tapýarlar.

Hasaplaýyş shemasy tablisa görnüşde aşakda görkezilendir.

U V	-3	-2	-1	0		1	2
-2	5 ⁶	7 ⁴	---			58	
-1	---	20 ⁴	23 ¹		2	63	
0				iň uly ýygylýk		3	4
		3			4		
1	30	68	23	2		121	2
3				4		3	4

Tablisanyň doldurylyşyny düşündirýäris:

Birinji meýdanyň setiri boýunça n_{UV} we UV sanlaryň köpeltmek hasylynyň jemini tapýarys. ($5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 58$; $20 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 63$), ony goşmaça 1 sütünde ýerleşdirýäris.

Birinji meýdanyň sütüni boýunça n_{UV} we UV sanlaryň köpeltmek hasylynyň jemini tapýarys. ($5 \cdot 6 = 30$; $7 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 68$, $23 \cdot 1 = 23$), ony goşmaça 1 sütünde ýerleşdirýäris.

Goşmaça 1 sütüniň sanlarynyň jemini tapýarys ($58 + 63 = 121$) ony birinji jemleýji öýjükdä ýazýarys.

Barlag üçin goşmaça setiriň hemme sanlaryny goşýarys ($30 + 68 + 23 = 121$).

Hasaplama meýdan bilen hem şonuň ýaly hasaplama geçirilýär.

paralleldirler.

2. Eger korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň absolýut ulylygy bire deň bolsa, onda gözegçilik edilýän nyşanlaryň bahalary çyzykly funksional baglylyk bilen baglydyr.

Eger $|r_B|=1$, onda $S_y = D_y(1 - r_B^2)$

Bu ýerden

$$y - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) = 0$$

deňlik gelip çykýar.

Bu ýerden görnüşi ýaly, islendik gözegçilik edilýän goşa (x,y) san X we y görä çyzykly deňlemäni kanagatlandyryrlar, ýagny nyşanlaryň bahalary çyzykly funksional baglylyk bilen baglydyr.

3. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň absolýut ulylygy artmagy bilen çyzykly korrelýasion baglanyşyk has ýakynlaşýar we $|r_B|=1$ bolanda funksional baglanyşyga geçýär.

Subudy.

$$S_y = D_y(1 - r_B^2), \quad S_x = D_x(1 - r_B^2)$$

formulardan görnüşi ýaly, r_B -niň absolýut ulylygynyň artmagy bilen S_y we S_x kemelýär, bu bolsa nyşanlaryň arasyndaky baglanyşygyň has ýakynlaşýandygyny aňladýar we $|r_B|=1$ bolanda funksional baglanyşyga öwrülýär.

Bellik 1. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň alamaty regressiýasynyň saýlanan koeffisienti bilen gabat gelýär. Ol aşakdaky formulalardan görünýär:

$$\rho_{yx} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \rho_{xy} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad (*)$$

Bellik 2. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti, regressiýanyň saýlanan koeffisientiniň orta geometrik bahasyna deňdir.

Hakykatdan hem (*) deňligiň sag we çep taraplaryny köpeldip alarys

$$\rho_{yx} \cdot \rho_{xy} = r_B^2$$

$$r_B = \pm \sqrt{\frac{98}{98 \cdot 98}}$$

Birinji bölüm.

§1. Ähtimallyklar teoriýasy hakynda esasy düşüňjeler.

1. Ähtimallyklar teoriýasynyň döräp başlan wagtyňy adaty XVII asyry degişli edip, ony gyzyklandyryjy(humarly) oýunlary kombinatoriki meseleleri bilen baglanyşdyrýarlar. Gyzyklandyryjy(humarly) oýunlara, elbetde möhüm kesp ýaly garamak bolmaz. Ýöne XVII asyryň matematiki modelleriniň çäginde ýerleşdirip bolmaýan meseleleri hut humarly oýunlar ýüze çykardy we şeýlelikde, olar täze-täze çemeleşmeleriň, düşüňjeleriň ideýalaryň ýüze çykmagyna itergi berdi. Ol ideýalary ilki başda girizenler Ýa. Bernulli, Laplas, Gauss, Paskal, Ferma we başgalardyr.

Ähtimallyklar teoriýasynyň praktiki ähmiýeti, aýdyň manysy hakyky ýa-da hyýalymyzdaky tejribeler, synaglar, hadysalar bilen baglanyşykly ýüze çykýar. Haýsy-da bolsa bir hadysa gözegçilik edilmegine synag ýa-da tejrife diýilýär.

Synagyň tejribäniň gözegçiligiň netijelerini (terminologiki bellik üçin) baha diýip atlandyryrlar.

Synagyň bolup biljek her bir netijesi elementar wakadyr. Elementar wakalaryň köplüğine elementar wakalaryň giňişligi diýilýär.

2. Biziň gözegçilik edýän wakalarymyz esasan üç bölege bölünýär:

- 1) hökmany waka;
- 2) mümkindäl waka;
- 3) tötän waka.

Eger S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirilende mydama ýüze çykýan waka hökmany waka diýilýär we ol U bilen belgilenýär.

Meselem, normal atmosfera basyşynda we 20° temperaturada «gapdaky suw suwuk haldadyr» diýen waka hökmany wakadyr. Bu ýerde suwuň atmosfera basyşy we temperaturasy S şertleriň kesgitli toplumyny düzýär.

Eger S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirilende hiç ýüze çykmaýan waka mümkindäl waka diýilýär.

Meselem, öňki mysalyň şertlerinde «gapdaky suw buz görnüşdedir (gaty haldadyr)» diýen waka mümkindäl wakadyr we V bilen belgilenýär.

S şertleriň kesgitli toplumynda ýüze çykgagyny ýa-da çykmajagyny öňünden aýdyp bolmaýan waka tötän waka diýilýär we ol A,B,C,... harplar bilen belgilenýär.

Meselem. Atyjy 4 bölege bölünen nyşana ok atýar. Ok atmak bu synag. Nyşanyň belli bir bölegine okuň degmegi tötän wakadyr. Bu ýerde S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirildi diýmeklik – synag sözi bilen çalşyryldy. Mundan beýläk biz ony – synag diýip alarys.

Şeýlelikde synagyň netijelerini waka hökmünde seretjekdiris.

Eger şol bir synagda bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmagyny aradan aýyrýan bolsa, onda onuň ýaly wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär. Meselem: Teňňe ýokaryk zyňylýar. Şonuň şekilli ýüzüniň düşmegi, onuň ýazgy ýüzüniň düşmegini aradan aýyrýar. «Şekilli ýüzi düşdi» we «ýazgy ýüzi düşdi» diýen wakalar sygyşmaýan wakalardyr. Eger synagyň netijesinde birnäçe wakalaryň iň bolmanda biri ýüze çykýan bolsa onda ol wakalar doly topary emele getirýärler. Başgaça aýdanynda doly topary emele getirýän wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr. Hususy halda eger doly topary düzýän wakalar jübüt-jübütünden sygyşmaýan wakalar bolsalar onda tejribäniň netijesinde olaryň biri we diňe biri hökman ýüze çykýar.

Meselem, atyjy nyşana ok atýar. Okuň nyşana degmegi we degmezligi şolar ýaly wakadyr. Eger A we \bar{A} wakalar üçin $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ iki gatnaşyk bir wagtda ýerine ýetseler onda A we \bar{A} wakalara garşylykly wakalar diýilýär. Meselem nyşana ok atylanda oňa okuň degmegi we degmezligi garşylykly wakadyr. Eger okuň degmegi A waka bolsa, onda okuň degmezligi \bar{A} waka bolar.

A we B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýa-da olaryň ikisiniň hem şol bir wagtyň özünde ýüze çykmagyny aňladýan waka A we B wakalaryň jemi diýilýär. Ol $A+B$ ýa-da $A \cup B$ bilen bellenilýär.

A we B wakalaryň ikisiniň hem şol bir wagtda ýüze çykmagyndan ybarat waka A we B wakalaryň köpeltmek hasyly diýilýär. Ol AB ýa-da $A \cap B$ bilen bellenilýär.

Eger

dispersiýasy.

S_x we D_x – hem şonuň ýaly manydyr.

1. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň absolýut ulylygy birden uly däl.

Subudy: Islendik dispersiýa otrisatel däl.

Hususy halda

$$S_y = D_y(1 - r_B^2) \geq 0$$

Diýmek

$$1 - r_B^2 \geq 0$$

bu ýerden

$$-1 \leq r_B \leq 1$$

ýa-da

$$|r_B| \leq 1.$$

2. Eger korrelýasiýasyň saýlanan koeffisienti nula deň bolsa we saýlanan regressiýa çyzyklary göni bolsa, onda X we Y özara çyzykly korrelýasion baglylyga eýe däl.

Subudy: Eger $r_B=0$ bolsa, onda Y-iň X-a regressiýasynyň saýlanan göni çyzykly deňlemesi

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

aşakdaky görnüşe eýe bolar

$$\bar{y}_x - \bar{y} = 0$$

ýa-da

$$\bar{y}_x = \bar{y}.$$

Eger $r_B=0$ bolsa, onda X-iň Y-e regressiýanyň göni çyzykly deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe bolar

$$\bar{X}_y = \bar{X}.$$

Şeýlelikde, eger $r_B=0$ bolsa, onda şertli orta bahalar, degişli argumentleriň üýtgemeginde henişelik bahasyny saklaýarlar; şonuň üçin hem X we Y çyzykly korrelýasion baglylyga eýe däl. Häzirki ýagdaýda regressiýa çyzyklary degişli koordinata oklaryna

bu ýerde

$$r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}.$$

Bellik 2. Regressiýanyň göni çyzykly deňlemeleri simmetrik görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar

$$\frac{\bar{y}_x - \bar{y}}{\sigma_y} = r_B \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}; \quad \frac{\bar{x}_y - \bar{x}}{\sigma_x} = r_B \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}.$$

Bellik 3. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti gerekli özbaşdak baha eýedir. Öňkilerden görnüşi ýaly korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti aşakdaky ýaly kesgitlenýär

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \quad (6)$$

bu ýerde

x, y – X we Y nyşanlaryň wariantlary,
 n_{xy} – goşa (xy) wariantyň ýygylgy,
 n – saýlanan göwrümi,
 \bar{x}, \bar{y} – saýlanan orta bahalar,
 σ_x, σ_y – saýlanan orta kwadratik gyşarma.

§ 27. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň häsiýetleri.

Çyzykly korrelýasion baglylygyň ýakynlygyny bahalandyrmak üçin hyzmat edýänligi gelip çykýan korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientleriniň häsiýetini getirýäris. Aşakdaky formuladan peýdalanýarys

$$\bullet \quad S_y = D_y(1 - r_B^2); \quad S_x = D_x(1 - r_B^2);$$

bu ýerde $S_y - \bar{y}_x$ - şertli orta bahanyň daşyndaky y -iň gözegçilik edilýän bahasynyň deňişli dispersiýasy; $D_y - \bar{y}$ - umumy orta bahanyň daşyndaky y -iň gözegçilik edilýän bahasynyň

$$U = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n$$

bolsa we B_i -wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolsalar, ýagny $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ onda $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalaryň doly toparyny emele getirýär. Bu ýagdaýda B_i -wakalaryň biri diňe biri synag netijesinde i hökman ýüze çykmalydyr.

Tötän wakalar üçin:

Kommutatiwlik $A+B=B+A$, $AB=BA$;

Assosiatiwlik $A+(B+C)=(A+B)+C$;

Distributiwlik $A \cap (B+C) = AB + AC$.

kanunlary ýerine ýetýärler.

§2. Ähtimallygyň klasiki kesgitlemesi.

Ähtimallyk-ähtimallyklar teoriýasynyň esasy düşüňjeleriniň biri hasaplanýar. Bu düşüňjäniň bir-näçe kesgitlemesi bardyr. Bu ýerde klassik kesgitleme diýilýän kesgitlemäni berýäris.

Mysala seredeliň. Goý gapyrjakda 6 sany birmeňzeş formaly, ýöne dürli reňkli şarlar bar bolsun. Olaryň 2 sanysy gyzyk reňkli, 3-si gök reňkl we 1 sanysy ak reňkli şar bolsunlar, şarlar garyşan bolsun.

Biz gapyrjakdan reňkli (gyzyl ýada gök) şary çykarmak mümkinçiligini mukdar taýdan häsiýetlendirmek meselesine, ýagny reňkli şary çykarmak meselesine garap geçeliň. Bu ýerde gapyrjakdan çykarylan bir şaryň reňkli bolmagynyň mümkinçiligi ol şaryň ak bolmagyndan uludyr. Eger şol mümkinçiligi san taýdan aňladyp bolýan bolsa, onda şol sana A wakanyň reňkli şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär. Şunlukda, ähtimallyk munuň özi wakanyň ýüze çykmagyny häsiýetlendirýän sandyr. Başgaça aýdylanda tötän wakanyň ýüze çykmagynyň ölçegine şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär. Elementar wakalaryň bizi gyzyklandyrýan wakanyň ýüze çykmagyna gatnaşýanlaryna şol waka ýardam edýän elementar wakalar diýilýär. Elementar wakalary $w_1, w_2, w_3, \dots, w_8$ diýip belläliň. Biziň mysalymyzda 6 sany

elementar waka bolup biler. w_1 ak şar ýüze çykdy, w_2, w_3 gyzyň şar ýüze çykdy, w_4, w_5, w_6 - gök şar ýüze çykdy diýen wakalarydyr. Bu netijeleriň her biri ýeke-täk mümkinçilikli wakalar, ýagny şar hökman ýüze çykmalý we olar deň mümkinçiliklidir. A wakanyň reňkli şaryň ýüze çykmagyna 5 sany elementar waka gatnaşýar. Şarlar garyşdyrylan, hemmesi meňzeş formaly, hem-de olar tötänleýin çykarylýarlar.

Biziň mysalymyzda A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň (olar 5 sany) sanynyň elementar wakalaryň umumy sanyna (olar 6 sany), ýagny $5/6$ -sana, A wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol $P(A)$ bilen belgilenýär. Bu san ($5/6$) şu mysalda çykarylan şaryň reňkli bolmagynyň ähtimallygyny berýän san. Şol sana hem biziň mysalymyzda reňkli şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.

Şeýlelikde $P(A)=5/6$ bolar.

Şu mysaldan ugur alyp, indi biz wakanyň ähtimallygynyň kesgitlemesini bereliň.

Kesgitleme: A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň m -sanynyň, doly topary düzýän, sygyşmaýan, deňmümkinçilikli elementar wakalaryň n umumy sanyna bolan gatnaşygyna A- wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol aşakdaky ýaly belgilenýär.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Bu ýerde

$P(A)$ -probaity(ähtimallyk) sözüniň birinji harpy, n -doly topary düzýän, sygyşmaýan elementar wakalaryň umumy sany, m -A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany. Bu kesgitlemeden ähtimallygyň aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar.

1) Hökmany wakanyň ähtimallygy bire deňdir, çünki bu halda $m=n$ bolar.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad (2)$$

Emma korrelýasiýa koeffisienti diýen ulylyga girizip regressiýasynyň deňlemesini başgaça ýazmak alamatlydyr. Onuň üçin (2) sistemanyň ikinji deňlemesinden b -ni tapalyň:

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}.$$

Bu deňlemäniň sag tarapyny $\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$ deňlemäni alyp goýup alarys

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}) \quad (3)$$

$\bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \sigma_x^2$ deňligi göz önünde tutup (2) sistemadan regressiýasynyň koeffisientini taparys:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n[\bar{x}^2 - (\bar{x})^2]} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ droba köpeldip alarys

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Deňligiň sag tarapyny r_B bilen belläp alarys

$$\rho_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_B$$

r_B -ni korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti diýip atlandyryarys.

Ýokary deňligi aşakdaky görnüşde ýazarys

$$\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Bu deňligiň sag tarapyny (3)-a goýup, Y -iň X -a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini aşakdaky görnüşde alarys

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \quad (4)$$

Bellik 1. X -iň Y -e regressiýasynyň saýlama deňlemesi hem öňkä meňzeşlikde aşakdaky görnüşde ýazylýar

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \quad (5)$$

§ 26. Göni çyzykly regressiýasynyň deňlemesiniň saýlama parametrleriniň gözleniş. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisienti.

Belli bolşy ýaly Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly deňlemesiniň parametrlerini kesgitlemek üçin aşakdaky deňleme sistemasy alnypdy:

$$\left. \begin{aligned} (\sum x^2) \rho_{yx} + (\sum x)b &= \sum xy \\ (\sum x) \rho_{yx} + nb &= \sum y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Onda X-yň bahasy we oňa degişi bolan Y-iň bahalary bir gezek gözegçilik edilipdi.

Indi bolsa uly sanly netijeler alnan bolsun, olaryň içinde gaýtalanýanlary hem bar bolsun we olar korrelýasion tablisa görnüşde toparlanan bolsun. Aşakdaky toždestwolardan peýdalanyň (1) sistemasyny başgaça ýazýarys:

$$\sum x = n\bar{x} \quad \left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ deňlikden gelip çykýar} \right).$$

$$\sum y = n\bar{y} \quad \left(\bar{y} = \frac{\sum y}{n} \text{ deňlikden gelip çykýar} \right).$$

$$\sum x^2 = n\bar{x}^2 \quad \left(\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n} \text{ deňlikden gelip çykýar} \right).$$

$\square xy = \square n_{xy}xy$ ((xy) goşa sanlaryň n_{xy} gezek ýüze çykýandygy göz önünde tutulýar).

Ýokardaky deňlikleri göz önünde tutup (1) sistemanyň ikinji deňligini n-e alarys

$$\left. \begin{aligned} (n\bar{x}^2) \rho_{yx} + (n\bar{x})b &= \sum n_{xy}xy \\ (\bar{x}) \rho_{yx} + b &= \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Bu sistemany çözüp, ρ_{yx} we b parametrleri tapsak, onda gözlenýän deňleme aşakdaky görnüşde bolar

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b.$$

2)Mümkin däl wakanyň ähtimallygy nola deňdir,çünki $m=0$, Ýagny,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

1)Islendik tötän wakanyň ähtimallygy nol we bir arasyndaky

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

§3. Wakanyň otnositel ýygylgy. Ähtimallygynyň statistiki kesgitleniş.

Şol bir synag birnäçe gezek geçirilende A-waka birnäçe gezek ýüze çykar we birnäçe gezek ýüze çykman biler. Synaglaryň sanyny näçe köpeltsek, onda şol A-wakanyň ýüze çykýan sany hem üýtgär. Goý synaglaryň sany n-bolsun, A-wakanyň ýüze çykýan synaglaryň sany m bolsun. Onda m-sanyň (A-wakanyň näçe gezek ýüze çykandygyny aňladýan san) n-sana (synaglaryň umumy sany) bolan gatnaşygyna, A-wakanyň otnositel ýygylgy diýilýär we ol $W(A)$ bilen belenilýär, ýagny

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Bu ýerde n-synaglaryň umumy sany, m bolsa A-wakanyň näçe gezek ýüze çykandygyny aňladýan san.

Emma synaglaryň sanyny köpeltsek, ony n bilen belläliň, onda m-san hem ulalar, ýöne her bir ýagdaýda wakanyň otnositel ýygylgy dürliçe bolsa-da, şol bir hemişelik sana ýakyn bolýandygyny tejribeler görkezýär. Şol hemişelik sana hem A-wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol obýektiw ululykdyr. Eger wakanyň ähtimallygy deregine onuň otnositel ýygylgy alynsa, onda onuň ýaly kesgitlenen ähtimallyga, ähtimallygynyň statistiki kesgitleniş diýilýär.

Tötän wakanyň otnositel ýygylgy bilen ähtimallygynyň arasyndaky tapawut şu aşakdakydan ybaratdyr: Ähtimallyk tejribe geçirilmänkä hasaplanýar, emma otnositel ýygylgy bolsa tejribe geçirilenden soň hasaplanýar.

Ähtimallygyň klasiki kesgitlemesi tükenikli synaglar üçin ulanylýar, emma statistik kesgitleniş synagyň sany has köp bolanda ýa-da tükeniksiz bolanda ulanylýar. Şonuň üçin hem statistik kesgitleniş has giň hasaplanylýar.

§4. Ähtimallyklaryň goşmak teoremasy.

Ozal belli bolşy ýaly, iki sany A we B wakanyň jemi diýip $(A+B)$, A-wakanyň ýa-da B-wakanyň, ýa-da bolmasa ikisiniň hem bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar. Hususy halda A we B sygyşmaýan wakalar bolsa, onda $A+B$ (iki wakanyň jemi) diýip, haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar. Goý A we B sygyşmaýan wakalar bolsun, özi hem bu wakalaryň ähtimallyklary berlen bolsun, onda A ýa-da B wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nädip tapmaly?

Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema: Sygyşmaýan iki sany A we B wakalaryň jeminiň ähtimallygy, haýsynyň ýüze çykanynyň tapawudy ýok, şol wakalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir, ýagny

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Subudy: Umumy elementar wakalaryň sany n bolsun. A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany m_1 , B-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany m_2 bolsun, onda A bilen B wakanyň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyny aňladýan elementar wakalarynyň sany m_1+m_2 bolar.

Şeýlelikde ähtimallygyň kesgitlemesini ulanyp alarys:

$P(A)=m_1/n$, $P(B)=m_2/n$, $P(A+B) = (m_1+m_2)/n = m_1/n + m_2/n$ bolýandygyny göz önünde tutup bu ýerden alarys:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Goý A_1, A_2, \dots, A_n wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolsunlar, onda

§ 25. Korrelýasion tablisa.

Ýeterlik köp synag geçirilende x -yň şol bir bahasy n_x -gezek duş gelmegi mümkin, y -iň şol bir bahasy n_y -gezek gelmegi mümkin, (xy) -iň goşa bahasy n_{xy} gezek gözegçilik edilmegi mümkin. Şonuň üçin gözegçiligiň netijeleri toplanýar, ýagny n_x, n_y, n_{xy} ýygylýklar hasaplanýar. Hemme toparlanan netijeler tablisa görnüşde ýazylýar, ol tablisa hem korrelýasion tablisa diýilýär. Korrelýasion tablisanyň düzülişini mysalda görkezeliň:

x y	10	20	30	40	n_{xy}
0.4	5	-----	7	14	26
0.6	-----	2	6	4	12
0.8	3	19	-----	-----	22
n_x	8	21	13	18	$n=60$

Tablisanyň birinji hatarynda X-nyşanyň synag edilýan bahalary (10;20;30;40) görkezilen. Birinji sütünde bolsa Y-nyşanyň synag bahalary (0,4;0,5;0,6;0,8) görkezilen. Sütün bilen seteriň kesişýän ýerinde nyşanlaryň goşa synag bahalary n_{xy} ýygylýk ýazylan. Meselem 5 ýygylýk (10;0,4) goşa sanyň 5 gezek gabat gelendigini görkezýär. Ýygylýgyň hemme bahalary gapdal taraplary ýogyn çyzylan göniburçlygyň içinde ýerleşendir. Ýöne çyzyk meselem (20;0,4) hiç gabat gelmedigini aňladýar.

Soňky sütünde hatardaky ýygylýklaryň jemi ýazylan. Meselem birinji hataryň ýygylýklarynyň jemi $n_y=5+7+14=26$; bu san Y-nyşanyň 0,4-e deň bahasynyň 26 gezek gabat gelendigini aňladýar. Soňky setirde sütündäki ýygylýklaryň jemi ýazylandyr. Meselem 8 san X-nyşanyň 10 deň bolan bahasynyň 8 gezek gabat gelendigini aňladýar.

Tablisanyň aşaky sag tarapyndaky öýünde ähli ýygylýklaryň jemi $\square n_x = \square n_y = n$ ýerleşdirilendir. Biziň mysalymyzda

$$\square n_x = 8+21+13+18=60,$$

$$\square n_y = 26+12+22=60.$$

$$\rho_y = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2};$$

$$b = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

(3)

Şuňa meňzeşlikde, X-iň Y-e regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini tapyp bolýar:

Mysal. Berlen $n=5$ gözegçiligiň netijesinde Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini tapmaly:

x	1.00	1.50	3.00	4.50	5.00
y	1.25	1.40	1.50	1.75	2.25

Cözülüşi. Hasaplaýyş tablisasyny düzýäris:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1.00	1.25	1	1.250
1.50	1.40	2.25	2.100
3.00	1.50	9.00	4.500
4.50	1.75	20.25	4.875
5.00	2.25	25.00	11.250
$\square x_i=15$	$\square y_i=8.15$	$\square x_i^2=57.50$	$\square x_i y_i=26.975$

Tablisada tapylan jemleri (3) formula goýup gözlenýän parametrleri tapýarys:

$$\rho_{yx} = \frac{5 * 26.975 - 15 * 8.15}{5 * 5.75 - 15^2} = 0.202$$

$$b = \frac{57.5 * 8.15 - 15 * 26.975}{62.5} = 1.024.$$

Regressiýanyň gözlenýän deňlemesini ýazalyň

$$Y=0.202x+1.024.$$

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

bolar. Bu fakt induksiýa boýunça subut edilýär.

Teorema: Doly topary düzýän $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň jeminiň ähtimallygy bire deňdir, ýagny

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Subudy: Doly topary düzýän $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr, hökmany wakanyň ähtimallygy hem bire deň. Onda

$$P(A_1, A_2, ..., A_n)=1.$$

Doly toparyň islendik iki wakasy sygyşmaýan waka, şonuň üçin hem goşmak teoremasy esasynda

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

Soňky iki deňlikden

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

gelip çykýar.

Teorema: Garşylykly iki sany A we \bar{A} wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir, ýagny

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Eger $P(A)=p$, $P(\bar{A}) = q$ diýip bellesek, onda $p+q=1$ bolar.

$p=P(A)$ – A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy,

$q=P(\bar{A})$ – A waka garşy wakanyň ähtimallygy.

Mysal. Eger ertir ýagyş ýagjakdygynyň ähtimallygy $p=0,3$ bolsa, onda ertir açyk gün boljakdygynyň ähtimallygy tapmaly.

Cözülüşi. Şerte görä $p=0,3$. Onda $q=1-p=1-0,3=0,7$.

Ýagny $q=0,7$. $q=P(\bar{A})$. \bar{A} we A wakalar garşylykly wakalar.

Ähtimallyklaryň köpeltmek teoremasy.

§ 5. Garaşly we garaşsyz wakalar.

Eger A wakanyň ähtimallygy beýleki B wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna bagly bolmasa, onda olara

garaşsyz (özara bagly däl) wakalar diýilýär. Tersine bolsa ýagny A wakanyň ähtimallygy B wakanyň ýüze çykmagyna bagly bolsa, onda olara garaşly (özara bagly) wakalar diýilýär.

Mysal. Teňne iki gezek ýokaryk zyňylýar. Şekilli ýüzüniň düşmeginiň ähtimallygy (A waka) ikinji gezek (B waka) zyňylanda gerb ýüzüniň düşmegine ýa-da düşmezligine bagly däl. Şeýlelikde A we B waka biri birine bagly däl (garaşsyz).

Bir näçe wakalaryň her ikisi özara biri – birine garaşsyz bolsa, onda olara jübüt – jübüt-den garaşsyz (bagly däl) wakalar diýilýär.

Mysal. Teňne üç gezek ýokaryk zyňylýar. Goý A,B,C deňşililikde gerb ýüzüniň ýüze çykmagy bolsun, ony birinjide A, ikijide B, üçünjide C diýip belleýäris. Şu seredýän her bir iki wakamyz (A we B), (A we C), (B we C) bagly däl. Şeýlelikde A,B,C wakalar jübüt-jübüt-den bagly dälirler.

Eger birnäçe A_1, A_2, A_3 - wakalaryň her biri, ýa-da olaryň islendik kombinasiýasy (galan hemme wakalary ýa-da olaryň käbir bölegini özünde saklaýan) garaşsyz (bagly däl) wakalar bolsalar, onda olara toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) wakalar diýilýär. Eger birnäçe wakalar jübüt-jübüt-den bagly däl bolsalar, onda olara toplumlaýyn bagly däl wakalar diýip bolmaýar.

Şu manyda toplumlaýyn bagly däl diýmek talaby jübüt-jübüt-den bagly däl talabyndan güýçlidir.

Meselem, eger A_1, A_2, A_3 wakalar toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) bolsalar onda A_1 we A_2 , A_1 we A_3 , A_2 we A_3 , A_1A_2 we A_3 , A_1A_3 we A_2 , A_2A_3 we A_1 wakalar garaşsyz (bagly däl) wakalrдыr

§6. Garaşsyz wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.

Teorema: Bagly däl (garaşsyz) A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$$

göni çyzyga golaý ýerleşer ýaly edip « ρ_{yx} » we “b” parametrleri saýlap almakdyr.

Bu talabyň manysyny düşündireliň

$$Y_i - y_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

tapawudy gyşarma diýip atlandyralyň. Bu ýerde $Y_i - x_i$ -iň gözegçiligiň netijesinde alan bahalary boýunça (1) formula boýunça hasaplanan ordinata.

$y_i - x_i$ -e deňişli, gözegçilik edilýär ordinata. ρ_{yx} we b parametri, gyşarmanyň ($Y_i - y_i$) kwadratlarynyň jemi minimal bolar ýaly edip saýlap alarys. (iň kiçi kwadratyň jemi metody mundan ybaratdyr).

Belli bolşy ýaly her gyşarma gözlenýän parametrlere bagly, onda gyşarmanyň kwadratlarynyň jemi şol parametrlere görä F funksiýadyr (wagtlaýynça ρ_{yx} -yň deregine ρ ýazýarys):

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2$$

ýa-da

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i)^2.$$

Minimumy tapmak üçin deňişli hususy önümleri nola deňleýäris

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) = 0$$

deňlemeler sistemasyny alýarys.

$$\begin{cases} (\sum x^2) \rho + (\sum x) b = \sum xy; \\ (\sum x) \rho + nb = \sum y. \end{cases} \quad (2)$$

Bu sistemany çözüp, gözlenýän parametrleri aşakdaky formulalar boýunça tapýarys:

§ 24. Göni çyzykly regressiýasynyň saýlama deňlemesiniň parametrleriniň gözlenişi.

Goý X we Y mukdar nyşanlary çyzykly korrelýasion baglanyşyk bilen bagly bolsun. Bu ýagdaýda regressiýa çyzyklarynyň ikisi hem gönidir.

Goý şol göni çyzyklaryň deňlemesini gözlemek üçin n bagly däl synag geçirilsin, olaryň netijesinde n goşa san alynýar:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

Emma, gözegçilik edilýän goşa sanlary (X, Y) tötän ulylyklaryň mümkin bolan bahalarynyň hemmesiniň baş toplumyndan tötäni saýlama hökmünde seretmek bolar. Onda X we Y ulylyklary we şol berlen zatlaryň esasynda tapylan deňlemeleri saýlama diýip atlandyrylar.

Bu ýerde Y -iň X -a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini gözleýäris.

Ýönekeý ýagdaýa seredeliň: X -nyşanyň x -dürli bahalary we oňa deňişli Y -nyşanyň y -bahalary bir gezek gözegçilik edilýär.

Şonuň üçin gözlenýän

$$\bar{y}_x = kx + b$$

deňlemäni

$$Y = kx + b$$

Görnüşde ýazmak bolýar.

Y -iň X -a regressiýanyň göni çyzykly deňlemesiniň burç koeffisientini Y -iň X -a regressiýasynyň saýlama koeffisienti diýip atlandyrylar we ony ρ_{yx} bilen belleýärler.

Şeýlelikde Y -iň X -a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini

$$Y = \rho_{yx}x + b \quad (1)$$

görnüşde gözleýäris.

Biziň maksadymyz tejribäniň netijesi boýunça XOY tekizlikde gurlan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nokatlar mümkin boldygyça (1)

Subudy: A -wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sanyny n -bilen belläliň, A -wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sanyny m ; B -wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sanyny m bilen belläliň, B -wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar netijeleriň sanyny m_1 diýeliň ($n_1 < n$; $m < m_1$) onda

$$P(A) = \frac{n_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_1}{m} \text{ bolar.}$$

Diýmek ähtimallygyň kesgitlemesine görä $P(AB) = \frac{n_1 m_1}{n \cdot m}$ bolar,

Onda

$$P(AB) = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m} = P(A) \cdot P(B)$$

ýa-da

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Mysal.

Iki teňne bir bada zyňylanda gerbiň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Cözülişi.

Birinji teňnede gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P(A)=1/2$, ikinji teňnede gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P(B)=1/2$. A we B wakalar bagly däl, şonuň üçin ýokardaky teorema esasynda

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Teorema 2.

Toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) birnäçe $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Indi goşmak we köpeltmek teoremlarynyň bilelikde ulanylyşyna mysal getireliň.

Mysal.

Özara garaşsyz (bagly däl) üç sany A_1, A_2, A_3 wakalaryň ýüze çykmagynyň ähtimallyklary

değişlilikde P_1, P_2, P_3 olsun. Şol wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Cözülişi. Diňe birinji A_1 wakanyň ýüze çykmagy ($A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$) (birinji ýüze çykyş beýleki ikisiniň ýüze çykmazlygy) wakanyň ýüze çykmagyna deňgüçlidir.

Bellik girizeliň:

$B_1 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ diňe A_1 wakanyň ýüze çykmagy

$B_2 = \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$ diňe A_2 wakanyň ýüze çykmagy

$B_3 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ diňe A_3 wakanyň ýüze çykmagy

Şeýlelikde A_1, A_2, A_3 wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak üçin $P(B_1 + B_2 + B_3)$ ähtimallygyny, ýagny B_1, B_2, B_3 wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň (tapawudy ýok) ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly bolýarys.

B_1, B_2, B_3 wakalar sygyşmaýan wakalar bolany üçin goşmak teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

Indi bolsa B_1, B_2, B_3 wakalaryň her biriniň ähtimallygyny tapmak gerek. A_1, A_2, A_3 wakalar bagly däl, şonuň üçin A_1, A_2, A_3 wakalar hem bagly däl, onda ähtimallygynyň köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(B_1) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = p_1 q_2 q_3$$

Şonuň ýaly-da

$$P(B_2) = P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) = q_1 p_2 q_3$$

$$P(B_3) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = q_1 q_2 p_3$$

Şeýlelikde A_1, A_2, A_3 wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy şu aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3.$$

Bu ýerde $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$

$$q_1 = P(\bar{A}_1), q_2 = P(\bar{A}_2), q_3 = P(\bar{A}_3)$$

funksional baglylygy diýilýär:

$$\bar{y}_x = f(x) \quad (1)$$

(1) deňlemä Y -iň, X -a regressiýasynyň deňlemesi diýilýär; $f(x)$ funksiýa Y -iň X -a regressiýasy diýilýär; onuň grafigine Y -iň X -a regressiýasynyň çyzygy diýilýär. Ýokardaky meňzeşlikde $Y=y$ baha deňişli bolan X -iň orta arifmetik bahasyna \bar{y}_x -e şertli orta baha diýilýär.

X -iň Y -den Korrelýasion baglylyga şertli orta bahanyň y -e görä funksional baglylygy diýilýär:

$$\bar{y}_x = \varphi(y) \quad (2)$$

(2) deňlemä X -iň, Y -e regressiýasynyň deňlemesi diýilýär; $\varphi(y)$ funksiýa X -iň Y -e regressiýasy diýilýär; onuň grafigine X -iň Y -e regressiýasynyň çyzygy diýilýär.

§ 23. Korrelýasiýa teoriýasynyň esasy iki meselesi.

Korrelýasiýa teoriýasynyň birinji meselesi korrelýasion baglylygynyň formasyny anyklamadan ybaratdyr, ýagny regressiýanyň funksiýasynyň görnüşini (çyzykly, kwadrat, görkezijili we ş.m.). Köplenç ýagdaýda regressiýa funksiýasy çyzykly bolýar. Eger $f(x)$ we $\varphi(x)$ funksiýalar çyzykly bolsa, onda korrelýasiýa çyzykly diýilýär, tersine bolsa çyzykly däl. Diýmek çyzykly korrelýasiýa bolsa onda iki regressiýa çyzygy hem göni çyzykdyr.

Korrelýasiýanyň ikinji meselesi – korrelýasion baglanyşygynyň ýakynlygyny (güýjini) bahalandyrmakdan ybaratdyr. Y -iň X -dan korrelýasion baglylygynyň ýakynlygy \bar{y}_x şertli bahanyň töwereginde Y -iň bahasynyň dargaýşynyň bahasy bilen bahalandyrylýar. Eger dargadyş uly bolsa, onda Y , X -dan az baglydyr ýa-da ýokdyr. Eger dargaýş az bolsa, onda olaryň arasyndaky baglanyşyk güýçlidir.

X -iň Y -den korrelýasion baglylygy hem şunuň ýaly häsiýetlendirilýär.

olaryň arasynda Z_1 we Z_2 umumy faktorlar bardyr.

Hususy halda haýsy hem bolsa bir ulylygyň üýtgemegi bilen beýleki ulylygyň orta bahasy üýtgeýän bolsa, onda bu ýagdaýda hem statistik baglanyşyk ýüze çykýar, onuň ýaly statistik baglanyşyga korrelýasion baglanyşyk diýilýär.

X we Y tötän ulylyklaryň korrelýasion baglanyşyga mysal getireliň.

Goý Y dänäniň hasyly, X döküniň mukdary. Meýdany boýunça birmeňzeş ýerden, birmeňzeş mukdara dökün sarp edilende hem dürli hasyl alynýar, ýagny X ulylyk, Y ulylyga görä funksiýa däl. Munuň özi tötäni faktorlaryň täsiri astynda bolup geçýär (howanyň temperaturasy, ýagşy ýagmagy we ş.m.). Muňa seretmezden tejribäniň görkezişi ýaly, orta hasyl, döküniň mukdaryna görä funksiýadyr, ýagny Y ulylyk X ulylyk bilen korrelýasion baglydyr.

§ 22. Şertli orta baha. Korrelýasion baglylyk.

Korrelýasion baglylygyň kesgitlemesini anyklamak maksady bilen şertli orta baha düşünjesini girzýäris.

Goý X tötän ulylyk bilen Y tötän ulylygyň arasyndaky baglanyşyk öwrenilýän bolsun. X -iň her bahasyna Y -iň birnäçe bahasy degişli bolsun. Meselem: $x=2$ bolsa, $Y: y_1=5, y_2=6, y_3=10$ bahalary alýan bolsun. Şu sanlaryň orta arifmetik bahasyny tapalyň

$$\bar{y}_2 = \frac{5+6+10}{3} = 7.$$

\bar{y}_2 şertli orta baha diýilýär, y -iň ýokarsyndaky çyzyk orta arifmetik bahany 2 san Y -iň $x_1=2$ bolandaky bahalaryny aňladýar.

$X=x$ baha degişli bolan Y -iň orta arifmetik bahasyna \bar{y}_x -e şertli orta baha diýilýär.

Eger x -iň her bahasyna şertli orta bahanyň bir bahasy degişli bolsa, onda şertli orta baha x -a görä funksiýadyr. Bu ýagdaý-da X we Y tötän ulylyklaryň arasyndaky baglanyşyga korrelýasion baglylyk diýilýär.

Y -iň X -dan korrelýasion baglylygyna şertli orta bahanyň x -a görä

§7. Iň bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy.

Teorema. Toparlaýyn garaşsyz (bagly däl) A_1, A_2, \dots, A_n wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy, şol wakalara ters bolan wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylynyň birden aýrylmagyna deňdir:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 \dots q_n.$$

Subudy. A_1, A_2, \dots, A_n wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny A waka diýip belläliň. Onda A we $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ wakalar garşylykly ýagny

$$P(A) + P(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) = 1.$$

Bu ýerden, köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp alarys

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

ýa-da

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 \dots q_n.$$

Hususy ýagdaý. Eger $A_1 A_2 \dots A_n$ wakalar p sana deň bolan birmeňzeş ähtimallyga eýe bolsalar, onda olaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy aşakdaky formula bilen kesgitlenilýär:

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Mysal. Toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl), üç synagda iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0.936. Wakanyň bir synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. $P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 \dots q_n$ formuladan peýdalanýarys. Bu ýerde $P(A) = 0.936$, $n=3$. Şeýlelikde

$$0.936 = 1 - q^3 \\ q^3 = 1 - 0.936 = 0.064$$

Bu ýerden $q = \sqrt[3]{0.064} = 0.4$

Gözlenýän ähtimallyk

$$p = 1 - q = 1 - 0.4 = 0.6.$$

§8. Şertli ähtimallyk.

Goý A we B wakalar garaşly (biri-birine bagly) bolsunlar, ýagny bagly wakalaryň kesgitlemesinden bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna bagly bolup durýar. Şonuň üçin hem eger bizi B wakanyň ähtimallygy gyzyklandyrýan bolsa, onda bize A wakanyň ýüze çykydýgyny ýa-da çykmadygyny bilmek zerurdyr.

Kesgitleme. B wakanyň ähtimallygy A waka eýýäm bolup geçenden soň hasaplanan bolsa, onda oňa B wakanyň şertli ähtimallygy diýilýär. Ol şeýle bellýär $P_A(B)$.

Mesele. Gutyda 3 sany ak we 3 sany gara şar bar bolsun. Gapdan 2 gezek ýeke-ýekeden yzyna goýmazdan şar çykarylýar. Ikinji synagda ak şaryň (B waka) çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly, Eger 1-nji synagda gara şar çykan bolsa.

Cözülişi. Birinji synagdan soň 5 şar galar. Olaryň 3-si ak şar bolar. Onda ikinji synagda ak şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy (B wakanyň şertli ähtimallygy) ýagny gözlenýän ähtimallyk $P_A(B)=3/5$ -e deň bolar. Eger $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$ bolsa, onda A we B bagly däldir.

§9. Garaşly (özara bagly) wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.

Goý A we B wakalar özara biri-birine garaşly (özara bagly) wakalar bolsunlar, şonuň ýaly-da olaryň ähtimallyklary $P(A)$ we şertli $P_A(B)$ belli bolsun. Şu iki sany özara bagly wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nähili tapmaly?

Teorema. Iki sany özara bagly A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekisiniň şertli ähtimallygyna köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(AB)=P(A)P_A(B) \quad (1)$$

bu ýerde m_3 - üçünji tertipli merkezi moment.

Ekssess (empirik paýlanyş üçin) aşakdaky deňlik boýunça tapylýar

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3,$$

bu ýerde m_4 – dördünji tertipli merkezi moment.

m_3 we m_4 momentleri köpeltmek usuly bilen hasaplamak amatlydyr.

Mysal. Öňki mysaldaky statistik paýlanyşyň asimmetriýasy we ekssessini tapmaly.

§ 21. Korrelýasiýa teoriýasynyň elementleri.

1. Funksional statistik we korrelýasion baglyk.

Belli bolşy ýaly $y=f(x)$, $x \in X$ funksional baglylykdyr. Bu ýerde x -yň ($x \in X$) her bahasyna y -iň ($y \in Y$) belli bir bahasy degişlidir.

Emma hemme baglanyşyk funksional däldir.

Mesele. 1) Adamyň boýy we agramy. Eger adamyň boýy belli bolsa, şoňa görä onuň agramyny kesgitläp bolýar we tersine. Emma adamyň boýy bilen agramynyň arasynda baglanyşyk bardyr, ýöne ol baglanyşyk funksional baglanyşyk däldir.

2) Sygyryň ýaşy we ondan alynýan süýdň mukdary;

3) Şol bir talyplaryň dürli sapakdan alan bahalary we ş.m.

Şu görkezilen mysallardaky tötäni ululyklaryň özara baglanyşyklaryna statistik baglanyşyk diýilýär.

Kesgitleme. Eger X ulylygyň (tötäni) dürli bahalaryna, beýleki Y ulylygyň dürli paýlanyşy degişli bolsa, onda X we Y ulylyklaryň arasyndaky baglanyşyga statistik baglanyşyk diýilýär.

Başgaça aýdaňda, eger Y: z_1, z_2, V_1, V_2 tötäni faktora bagly bolsa; X: Z_1, Z_2, U_1, U_2 tötäni faktorlara bagly bolsa, onda X we Y şýtgeýän ulylyklaryň arasyndaky baglanyşyk statistik baglanyşykdyr, sebäbi

Netijede hasaplaýyş tablisasyny alarys.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
10.2	2	-4	-8	32	18
10.4	3	-3	-9	27	12
10.6	8	-2	-16	32	8
10.8	13	-1	-13	13	0
11.0	25	0	$A_1 = -46$		25
11.2	20	1	20	20	80
11.4	12	2	24	48	108
11.6	10	3	30	90	160
11.8	6	4	24	96	150
12.0	1	5	5	25	36
			$A_2 = 103$		
	$n=100$		$\sum n_i u_i = 57$	$\sum n_i u_i^2 = 383$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597$

Barlagy $\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597$.

$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597$. Hasaplama dogry.

Birinji we ikinji tertipli şertli momentleri tapalyň

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0,57; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 0,383.$$

$$h = 10,4 - 10,2 = 0,2.$$

Indi gözlenýän saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplaýň

$$\bar{X}_B = M_1^* \cdot h + C = 0,57 \cdot 0,2 + 11,0 = 11,1.$$

$$D_B = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [0,383 - (0,57)^2] \cdot 0,2^2 = 0,14.$$

§ 20. Asimmetriýa we eksess.

Empirik paýlanyşyň asimmetriýasy aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_B^3}$$

$$P(AB) = P(B)P_B(A) \quad (2)$$

Bellik: Şertli ähtimallygy (1)-den tapsak $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

aňlatmany alarys. Soňky deňligi şertli ähtimallygyň kesgitlemesi hökmünde alyp bolýar.

Subudy. Bellik girizeliň:

n – A wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sany, n_1 – A wakanyň ýüze ýardam edýän elementar wakalaryň sany ($n_1 < n$); m – A waka bolup geçenden soň, B – wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany, ýagny ol elementar wakalar AB – wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýär ($m < n_1$)

A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy:

$$P(AB) = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1} = \frac{m}{n}.$$

Bu ýerde $\frac{n_1}{n} = P(A)$, we $\frac{m}{n_1} = P_A(B)$ bolýandygyny

göz önünde tutup alarys

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Netije. Birnäçe garaşly (özara bagly) wakalaryň bilelekde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekileriniň hemmesiniň şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylyna deňdir, özem soňky wakalaryň ähtimallyklary olaryň özünden öňki wakalar bolup geçenden soň hasaplanan bolmaly:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) =$$

$$P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n).$$

Bu ýerde $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ – A_n wakanyň $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ wakalar bolup geçenden soň hasaplanan ähtimallykdyr.

Hususy halda üç sany A, B, C garaşly (özara bagly) wakalar üçin aşakdaky ýaly ýazyp bolýar

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Mysal. Gapda 5 sany ak, 4 gara, 3gök şar bar. Gapdan tötäni ýagdaýda 3 şar çekip alynýar. Çykarylan şarlar yzyna gaýtarylmaýar. Onda birinji synagda ak şaryň (A-waka), ikinji synagda gara şaryň (B-waka), üçünji synagda gök şaryň (C-waka), ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly ?

Cözülişi. Şerte görä $P(A)=\frac{5}{12}$, $P_A(B)=\frac{4}{11}$, $P_{AB}(C)=\frac{3}{10}$ bolar.

Onda gözlenýän ähtimallyk formula görä

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

bolar.

§10. Sygşýan wakalaryň ähtimallyklarynyň goşmak teoremasy.

Goý A we B sygyşýan wakalar bolsunlar, şonuň ýaly-da ol wakalaryň we olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallyklary belli bolsun. Onda (A+B) wakanyň, ýagny A ýa-da B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nähili tapmaly ? Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema: Iki sany sygyşýan wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy, şol wakalaryň ähtimallyklarynyň jeminden olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygynyň aýrylmagyna deňdir, ýagny

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Subudy: Şerte görä A we B wakalar sygyşýan, onda (A+B) wakanyň ýüze çykmagy üçin 3 sany sygyşmaýan \overline{AB} , \overline{AB} we AB wakalaryň biri ýüze çykmaly. Onda sygyşmaýan wakalar üçin goşmak teoremasy esasynda

$$P(A+B)=P(\overline{AB})+P(\overline{AB})-P(AB) \quad (1)$$

Bolar. Eger \overline{AB} ýa-da AB wakalaryň biri ýüze çyksa, onda A waka hem ýüze çykýar. Onda goşmak teoremasy esasynda

$$P(A)=P(\overline{AB})+P(AB)$$

$$\overline{X}_B = M_1^* \cdot h + C$$

$$D_B = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h.$$

Mysal. Aşakdaky statistik paýlanyşyň köpeltmek usuly bilen orta saýlamany we dispersiýany tapmaly:

Wariant	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4
	11.6	11.8	12.0				
Ýygylýk	2	3	8	13	25	20	12
	10	6	1				

Cözülişi. Hasaplama tablisasyny düzýäris, onuň üçin:

- 1) birinji sütünä wariantlary ýazýarys;
- 2) ikinji sütünä ýygylýgy ýazýarys, olaryň jemini sütüniň soňky öýüne ýerleşdirýäris;
- 3) ýalan nol derejine 11.0 alýarys (ol iň uly ýygylýga eýedir), iň uly ýygylýga eýe bolan hataryň degişli öýüne 0 ýazýarys, ondan ýokary -1,-2,-3,-4 aşak bolsa 1,2,3,4,5 ýazýarys.
- 4) ýygylýgy şertli warianta köpeldip ony dördünji sütünä ýazýarys; otrisatel we položitel sanlary aýratyn jemläp, ony sütüniň soňky öýüne ýerleşdirýäris. (57)
- 5) ýygylýgy şertli wariantyň kwadratyna köpeldip, ony başinji sütünä ýazýarys, hemme alnan sanlary jemläp sütüniň aşaky öýünde ýerleşdirýäris (383).
- 6) şertli wariantyň hersine 1-i goşup onuň kwadratyny ýygylýga köpeldip ony altynjy sütünä ýazýarys, ol sütünäki sanlaryň jemini (597) sütüniň aşaky öýünde ýerleşdirýäris.

bolsa, bize gerek bolan başlangyç we merkezi empirik momentleri tapmak kyn dälär. Hususy halda köpeltmek usuly bilen saýlanan orta bahany we saýlanan dispersiýany hasaplamak amatlydyr. Şonuň üçin aşaky tablisany ulanýarys. Ol şeýle düzülýär:

- 1) birinji sütünä (başdaky) saýlamanyň wariantlary artýan tertipde ýazylýar;
- 2) ikinji sütünä wariantyň ýygylgy ýazylýar, hemme ýygylklary goşup olaryň jemini aşaky öýjükde ýazýarlar.
- 3) üçünji sütünä $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ şertli wariantlar ýazylýar. h ýerine iki goňşy wariantyň tapawudy alynýar: praktikada üçünji sütün aşadaky ýaly doldurylýar, ýagny in uly ýygylgy bolan setirli, öýýe hul ýazýarlar, onuň aşagyndaky öýlere 1,2,3; ýokarsyndaky bolsa -1,-2,-3 we ş.m. sanlar ýazylýar.
- 4) ýygylgy şertli warianta köpeldip, ony dördünji sütünä ýazýarlar, hemme alnan sanlary jemläp, sütüniň aşaky öýüne ýazýarlar.
- 5) ýygylgy şertli wariantyň kwadratyna köpeldip ony başinji sütünä ýazýarlar, hemme alnan sanlary jemläp sütüniň aşaky öýüne ýazýarlar;
- 6) Şertli wariantyň hersine 1-i goşup onuň kwadratyny ýygylgyga köpeldip altynjy sütünä ýazýarys, olaryň jemini $\sum (n_i + 1)^2 \cdot n_i$ aşaky öýde ýerleşdirýäris.

Bellik.

Eger

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n$$

deňlik dogry bolsa, onda hasaplama tablisasynyň dogrydygy bolýar.

Tablisanyň dogrydygyny barlaňdan soň şertli momenti hasaplaýarlar:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

In soňynda orta saýlamany we dispersiýany aşadaky formula boýunça hasaplaýarlar:

Bu ýerden

$$P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) \quad (2)$$

Şonuň ýaly hem

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$$

Bu ýerden

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) \quad (3)$$

Şeýlelikde (2) we (3) (1) deňlige goýup alarys

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (4)$$

Bellik:

Eger A we B özara bagly däl bolsalar

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Bellik 2:

Eger A we B özara bagly bolsalar

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B) \quad (5)$$

Şonuň ýaly-da, eger A we B sygyşmaýan wakalar bolsalar, onda olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P(AB)=0$ bolar, onda

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Diýmek (5) formula sygyşýan we sygyşýan däl wakalar üçin dogrudyr.

Mysal.

Atyşykda birinji we ikinji atyjynyň nyşana degmegiň ähtimallygy degişlilikde $p_1=0,7; p_2=0,8$ bolsun. Bir bada atylanda, in bolmanda biriniň nyşana degmegiň ähtimallygyny tapmaly?

Çözüşi.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,78 \cdot 0,8 = 0,56$$

Onda

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

§11. Doly ähtimallygyň formulasy.

Eger-de A waka, diňe sygyşmaýan we doly toparý emele getirýän B_1, B_2, \dots, B_n wakalaryň biri ýüze çykanda ýerine ýetýän bolsa, şonuň ýaly hem B_1, B_2, \dots, B_n wakalaryň hem-de A – wakanyň şertli ähtimallyklary, ýagny $P(B_1), P(B_2) \dots P(B_n)$ we $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ belli bolsa, onda A wakanyň ähtimallygy B_1, B_2, \dots, B_n wakalaryň ähtimallyklarynyň A – wakanyň degişli şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylynyň jemine dendir, onda A wakanyň ähtimallygyny hasaplamak üçin goşmak teoremasyndan peýdalanyň alarys:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

ýa-da

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)$$

Bu formula doly ähtimallygyň formulasy diýilýär.

Subudy. Şerte görä B_1, B_2, \dots, B_n sygyşmaýan wakalar. A wakanyň ýüze çykmagy üçin $B_1 A, B_2 A, \dots, B_n A$ wakalaryň haýsy-da bolsa biri ýüze çykmaly

$$P(A) = P(B_1 A) + P(B_2 A) + P(B_3 A) + \dots + P(B_n A)$$

Bu ýerde goşmak teoremasyndan peýdalandyk. Indi bagly bolan wakalar üçin goşulyjylaryň her birine köpeltmek teoremasyny peýdalanyň alarys

$$P(B_1 A) = P(B_1) P_{B_1}(A), P(B_2 A) = P(B_2) P_{B_2}(A), \dots, P(B_n A) = P(B_n) P_{B_n}(A)$$

Şeýlelikde aşakdaky formulany alarys

$$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) P_{B_n}(A)$$

Mysal. Detalyň iki toplumy bar. 1-nji toplumdan alnan detalyň hiliniň gowylygynyň ähtimallygy 0,8-e deň, 2-nji üçin bolsa 0,9. Islendik toplumdan alnan islendik detalyň gowy hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözüşi. Goý A waka detalyň hiliniň gowydygyny aňladýan bolsun. B_1 wakak şol detalyň birinji toplumdan

momente, k tertipli şertli empirik mament diýilýär:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)^k}{n}.$$

Hususy halda

$$M_k^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)^k}{n} = \frac{1}{h} \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C \frac{\sum n_i}{n} \right] = \frac{1}{h} (\bar{X}_B - C).$$

Bu ýerden

$$\bar{X}_B = M_1^* h + C.$$

Şeýlelikde, saýlanan orta bahany tapmak üçin, birinji tertipli şertli momenti hasaplap, ony h-a köpeldip üstüne hem C-ni goşmak ýeterlidir.

Umumy momenti şertli nilen aňladalyň:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{M_k'}{h^k}.$$

Bu ýerden

$$M_k' = M_k^* \cdot h^k.$$

Merkezi momenti şertli bilen aşakdaky ýaly aňladyp bolar:

$$m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^k.$$

$$m_3 = [M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3] h^3.$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^* (M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4] h^4.$$

Şunuň ýaly hem, saýlanan dispersiýany hasaplamak üçin aşakdaky formulany alarys:

$$D_B = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2.$$

§ 19. Saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplamakda köpeltmek usulyň ulanylyşy.

Köpeltmek usuly wariasion hataryň dürli tertipli şertli momentlerini hasaplamakda has amatlydyr. Şertli momentler belli

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

Hususy halda

$$M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{X}_B.$$

Ýagny birinji tertipli başlangyç moment saýlama orta baha deňdir.

Eger adaty momentde $C = \bar{X}_B$ bolsa, onda oňa k tertipli merkezi empirik moment diýilýär:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X}_B)^k}{n}.$$

Hususy halda (k=2):

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n} = D_B.$$

ýagny, ikinji tertipli merkezi empirik moment saýlanan dispersiýa deňdir.

Merkezi momenti umumy moment bilen aňlatmak kyn däl:

$$m_2 = M_2' - (M_1')^2;$$

$$m_3 = M_3' - 3M_2' \cdot M_1' + 2(M_1')^3;$$

$$m_4 = M_4' - 4M_3' M_1' + 6M_2' (M_1')^2 - 3(M_1')^4.$$

§ 18. Şertli empirik momentler.

Merkezi momentleri şertli momentler arkaly aňlatmak.

Merkezi momentleri hasaplamak çylşyrymly hasaplamaný talap edýär. Şonuň üçin birinji warianty şertli warianty bilen çalşyryrlar. Şertli wariant üçin hasaplanan k tertipli başlangyç

alnandygy, B_2 waka bolsa ikinji toplumdan alnandygyny aňladýan bolsun. Onda

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Birinji toplumdan gowy detal alnandygyny aňladýan şertli ähtimallyk $P_{B1}(A)=0,8$

Şonuň ýaly-da $P_{B2}(A)=0,9$.

Onda doly ähtimallygyň formulasy esasynda

$$P(A)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)=0,5 \cdot 0,8+0,5 \cdot 0,9=0,85.$$

§12. Çaklamanyň ähtimallygy. Beýesiň formulasy.

Goý A waka doly topary emele getirýän B_1, B_2, \dots, B_n sygyşmaýan wakalaryň biri ýüze çykanda ýerine ýetýän bolsun. Emma öňünden şol B_1, B_2, \dots, B_n wakalaryň haýsynyň ýüze çykjakdygy belli däl, şonuň üçin hem olara çaklama diýilýär. A wakanyň ähtimallygy doly ähtimallygyň formulasy bilen hasaplanýar. Onda B_1, B_2, \dots, B_n wakalaryň şertli ähtimallyklaryny ýagny $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ ähtimallyklary nähili tapmaly? Ilki bilen $P_A(B_1)$ - şertli ähtimallygy tapalyň.

Şonuň üçin ähtimallygyň köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp tapýarys

$$P(AB_1)P(A)=P_A(B_1) \text{ ýa-da } P(AB_1)=P(B_1)P_{B1}(A)$$

Soňky iki deňlikden

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(A)} - \text{formulany alarys.}$$

Şonuň ýaly-da

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B2}(A)}{P(A)}.$$

Şeýlelikde

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \dots + P(B_n)P_{Bn}(A)}$$

ýa-da

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A)} \quad (i = \overline{1, n})$$

Bu formula Beýesiň formulasy diýilýär. Ol 1764ý. inlis alymy Beýes tarapyndan ilkinji gezek açylýar.

Mysal. Priboryň döwürmegi (A waka) 3 sany sebäpleriň birinden bolmagy mümkin olary B_1, B_2, B_3 diýip belleýäris. Olaryň ähtimallyklary äýry-äýrylykda berlen bolsun, ýagny $P(B_1)=0,7$; $P(B_2)=0,2$; $P(B_3)=0,1$.

Şu sebäpleriň barlygynda priboryň döwürmegi aşakdaky ähtimallyk bilen bolup geçýär $P_{B_1}(A)=0,1$; $P_{B_2}(A)=0,2$; $P_{B_3}(A)=0,99$. Priboryň döwürlendigi belli bolsa, onda $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, $P_A(B_3)$ ähtimallyklary tapmaly?

Cözülişi. Beýesiň formulasyndan peýdalanyp tapýarys

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,99} = \frac{7}{13}$$

Şonuň ýaly-da

$$P_A(B_2) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,13} = \frac{4}{13}$$
$$P_A(B_3) = \frac{0,1 \cdot 0,99}{0,13} = \frac{0,099}{0,13} = \frac{1}{13}.$$

§13. Kombinatorikanyň esasy formulalary.

Kombinatorika belli şertlere bagly bolan kombinasiýalaryň sanyny öwredýär. Şonuň üçin ähtimallyklary göni hasaplamakda kombinatorikanyň formulasy ulanylýarlar.

1) Orun çalşyрма – diýip şol bir n dürli elementden düzülen,

§ 16. Saýlamanyň ýygnaýan häsiýetnamasyny hasaplamak usuly.

1. Şertli wariantlar.

Goý saýlamawariantlary artýan şertinde, ýagny wariasion hatar görnüşde ýerleşen bolsun.

Tapawudy h -a deň bolan, arifmetik progressiýany (emele getirýän) düzýän wariantlara deňduruýy wariantlar diýilýär.

Aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýän wariantlara şertli wariant diýilýär, ýagny

$$U_i = \frac{x_i - C}{h}$$

bu ýerde C ýalan nol.

h – ädim $(x_i - x_{i-1}) = h$ goňşy wariantyň tapawudy.

§ 17. Adaty, başlangyç we merkezi empirik momentler.

Saýlamanyň ýygnaýan karakteristikalaryny hasaplamak üçin, kesgitleniş deňişli teoretik momentleriň hasaplanyşy ýaly hasaplanýan empirik momentlerden peýdalanmak amatlydyr. Teoretik momentden tapawutly, empirik momentler gözegçiligiň netijesi boýunça hasaplanýar.

$(x_i - C)$ tapawudyň k derejesiniň orta bahasyna k tertipli adaty moment diýilýär. Ol şeýle bellenilýär:

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n}.$$

bu ýerde x_i - gözegçilik edilýän wariant,

n_i - wariantyň ýygnylygy,

C – hemişelik san (ýalan nol),

$\square n_i = n$ – saýlamanyň göwrümi.

Adaty momentde $C=0$ bolsa, onda oňa k tertipli başlangyç moment diýilýär.

§ 15. Wariasion hataryň beýleki häsiýetnamalary.

Saýlanan orta baha we saýlanan dispersiýadan başga-da wariasion hataryň başga hem karakteristikalary bardyr. Olaryň esaslaryny görkezeliň.

Iň uly ýygylýga eýe bolan warianta moda M_0 diýilýär. Meselem

wariant	1	4	7	9
ýygylýk	5	1	20	6.

Moda 7 deňdir.

Wariasion hatary wariantlaryň sany boýunça iki bölýän warianta mediana m_e diýilýär. Eger wariantlaryň sany täk bolsa $n=2k+1$, onda $m_e=x_{k+1}$, eger $n=2k$ jübt bolsa, onda

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Meselem. Eger hatar 2 3 5 6 7 9 bolsa, onda mediana 5 deňdir.

Eger hatar 2 3 5 6 7 9 bolsa, mediana $m_e = \frac{5+6}{2} = 5,5$.

Mundan başgada

$$\theta = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X}_B)}{\sum n_i}$$

bu ýerde θ - orta absolyút gyşarma.

Şeýle hem wariasiýa koeffisienti

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} \cdot 100\%$$

ýöne olaryň ýerleşiş tertibi üýtgeşik bolan kombinasiýalara aýdylýar. Ol

$$P_n = n! \quad (1)$$

diýip belenilýär. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$).

Mysal. 1,2,3 sifrlardan näçe sany üçbelgili san düzmek bolar.

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ýagny 6 sany.

2) Ýerleşdirme diýip m elementden dürli n elementleri bilen ýöne, düzümi boýunça üýtgeşik bolan kombinasiýalara aýdylýar. Bolup biljek ýerleşdirmeleriň sany

$$A_n^m = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)) \quad (2)$$

Mysal. 6 sany dürli reňkdäki baýdajyklardan alnan näçe signal düzmek bolar.

$$A_6^2 = 6(6-1) = 6 \cdot 5 = 30.$$

3) Utgaşdyрма diýip iň bolmanda bir elementi bilen tapawutlanyp m elementden düzlen n dürli elementleriň kombinasiýasyna aýdylýar. Ol şeýle belenýär

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (3)$$

Mysal. Ýaşşıkde 10 detal bar. 2 detali näçe usulda saýlap bolar

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

Orun üýtgetmegiň, ornaşdyrmagyň, utgaşdyrmagyň özar baglaýşygy.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} \quad (4)$$

§14. Tejribeleriň gaýtalyňyşy. Bernulliniň formulasy.

Eger bir näçe synaglar geçirilýän bolsa, özem her bir synagda A wakanyň ähtimallygy beýleki synaglaryň netijesine bagly bolmasa, onda şeýle synaglara A waka görä bagly däl synaglar diýilýär.

Goý bagly däl birnäçe synaglar geçirilende, olaryň her birinde A waka ýüze çykyp ýa-da çykman biler. Özem her bir synagda A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p sana deň diýip hasap edeliň. Onda A wakanyň ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy $P(\bar{A}) = q$ bolar, ýagny $q=1-p$ ($p+q=1$) sana deňdir. n synagda A wakanyň göni m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak talap edilýän bolsun. Eger A waka m gezek ýüze çykýan bolsa, onda $(n-m)$ gezek ol ýüze çykmaýar. Gözlenýän ähtimallygymyzy $P_n(m)$ diýip belleýäris. Onda n synagda A wakalaryň göni m gezek ýüze çykmagynyň we $(n-m)$ gezek ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy, bagly dal wakalaryň ähtimallygynyň, köpeltmek teoremasy esasynda $(p^m \cdot q^{n-m})$ -e deň bolar.

Şonuň ýaly çylşyrymly wakalaryň sany C_n^m gezek bolar. Şonuň üçin hem gözlenýän ähtimallyk aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \text{ ýa-da } P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}.$$

Bu formula Bernulliniň formulasy diýilýär.

Mysal. Teňne 10 gezek ýokaryk zyňylanda, gerbiň 3 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly. $n=10$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$.

$$P_{10}(3) = \frac{10!}{3!7!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2^3 \cdot 2^7} = \frac{15}{128} = 0,14.$$

çalşyryp alarys:

$$P\{|\bar{X} - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t).$$

Bu ýerden $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ tapyp, alarys

$$P\{|\bar{X} - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 2\Phi(t).$$

Soňky deňlikden

$$P\left\{\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Bu deňligiň manysy şeýle

$$\left(\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ aralyk näbelli } a \text{ parametri doly}$$

ýapýandygynyň ähtimallygy γ deňdir.

($\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ takyklygyň bahasy).

Mysal. X normal paýlanyşa eýe bolsun, $\sigma=3$ orta kwadratik gyşarmasy belli. Eger $n=36$, $\gamma=0,95$ bolsa ynamly aralygy tapmaly.

Şerte görä $2\Phi(t)=0,95$; onda $\Phi(t)=0,475$. Tablisa boýunça $t=1,96$; onda

$$\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98$$

Onda $(\bar{X} - 0,98; \bar{X} + 0,98)$.

Meselem, $\bar{X}=4,1$ bolsa, onda

$$\bar{X} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12; \quad \bar{X} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

Şeýlelikde $3,12 < a < 5,08$ ýa-da $]3,12; 5,08[$

nyň deregine bire has golaý san alynýar.

Meselem. $\gamma=0,95$; $\gamma=0,999, \dots$

Goý $P\{|\theta-\theta^*|<\delta\}=\gamma$

$|\theta-\theta^*|$ deňsizligi $-\delta<\theta-\theta^*<\delta$ görnüşde ýazalyň, ýa-da

$\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta$

onda

$$P\{\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\}=\gamma.$$

Bu deňlige şeýle düşümeli:

$(\theta^*-\delta, \theta^*+\delta)$ - aralygy θ näbelli parametriň özünde saklaýandygyny ähtimallygy γ deňdir.

$(\theta^*-\delta, \theta^*+\delta)$ - aralyga ynamly aralyk diýilýär.

Bu ýerde γ ynamdarlyk.

§14. Normal paýlanyşyň σ belli bolanda matematik garaşmanyň bahasy üçin ynamly aralygy.

Goý X mukdar nyşan, normal dargadyş kanunyna eýe bolsun, şeýle hem σ belli bolsun. Saýlanan orta baha boýunça a matematik garaşmany \bar{X} orta baha boýunça bahalandyrmak talap edilýän bolsun.

Saýlanan orta \bar{X} bahany, \bar{X} tötän ulylyk ýaly nyşanyň saýlanan x_1, x_2, \dots, x_n bahalaryny birmeňzeş dargadylan tötäni X_1, X_2, \dots, X_n ulylyklar ýaly seredeliň. Başgaça, olaryň her biriniň matematik garaşmasy (a) we orta kwadratik gyşarmasy (δ). Onda \bar{X} parametrleri

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Goý $P\{|\bar{X}-a|<\delta\}=\gamma$ deňlik ýerine ýetýän bolsun. Onda

$$P\{|\bar{X}-a|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan peýdalanyp X -y \bar{X} bilen we σ -ny $\sigma(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bilen

Mysal. Teňne 6 gezek ýokaryk zyňylanda, gerbiň 0,1,2,3,4,5,6 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Bernullynyň formulasy boýnça:

$$P_6(0)=(1/2)^6=1/64. \quad P_6(1)=6!/5! \cdot (1/2)^6=6/64. \quad P_6(2)=15/64.$$

$$P_6(3)=20/64. \quad P_6(4)=15/64. \quad P_6(5)=6/64. \quad P_6(6)=1/64.$$

§15. Wakanyň ýüze çykmagynyň iň uly ähtimallykly sany.

Ýokardaky mysalda $m=3$ bolanda gözlenýän ähtimallyk, beýlekiler bilen deňeşdirilende iň ulysy boldy.

$$P_6(3) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

Şonuň üçin $m=3$ san iň uly ähtimallyga eýe bolan san. Wakanyň ýüze çykmagynyň iň uly ähtimallykly sanyny $m=m_0$ bilen belläliň, onda

$$P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1) \quad (1)$$

$$P_n(m_0) \geq P_n(m_0+1) \quad (2)$$

$$(1) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ m_0-1 \quad m_0 \quad m_0+1 \end{array}$$

deňsizlikden Bernulliniň formulasy esasynda alarys

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}$$

bu ýerden

$$\frac{p}{m_0} \geq \frac{q}{n-m_0+1} \quad \text{ýa-da} \quad np-m_0p+p \geq m_0q$$

$$\frac{np+p \geq m_0(p+q)}{m_0 \leq np+p} \quad (3)$$

Şunuň ýaly hem (2) deňsizlikden

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}$$

ýa-da

$$\frac{q}{n-m_0} \geq \frac{p}{m_0+1}$$

$$qm_0 + q \geq np - m_0 p \quad \text{ýa - da}$$

$$m_0(q+p) \geq np - q$$

$$m_0 \geq np - q \quad (4)$$

(3) we (4) deňsizliklerden

$$np \cdot q \leq m_0 \leq np + p \quad (5)$$

gelip çykýar. Şu formula boýunça in uly ähtimallykly sany kesgitläp bolýar. Ol hemişe bütün san bolmalydyr.

§16. Asimptotik formulalar.

1. Muawr-Laplasyň lokal teoremasy.

Eger synaglaryň sany n has uly san bolanda Bernulliniň formulasyndany peýdalanyp gözlenýän ähtimallygy hasaplamak has gyn bolýar.

Meselem. Eger $n=50$, $m=30$, $p=0,1$ bolsa, onda

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!20!} (0,1)^{30} (0,9)^{20}$$

bu ýerde $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$, $30! = 26525286 \cdot 10^{25}$, $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$.

Ýokarda görnüşi ýaly bu ähtimallygy hasaplamak çylşyrymly bolýar. Şonuň ýaly bu ýagdaýda Bernulliniň formulasynyň deregine Laplasyň lokal teoremasyny peýdalanmak maslahat berilýär. Laplasyň lokal teoremasy. Eger geçirilýän synagyň ählisinde p hemişelik $0 < p < 1$ san bolsa, onda $P_n(m)$ - A wakanyň n synagda m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy şu aşakdaky ýakynlaşan formula bilen tapylýar, ýagny

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n}.$$

Teorema. $D = \bar{X}^2 - [\bar{X}]^2$.

Bu formula dispersiýanyň hasaplanyş formulasy diýilýär.

Bu ýerde

\bar{X} - umumy orta baha.

\bar{X}^2 - nyşanyň alýan bahalarynyň kwadraty.

Düzedilen dispersiýa $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n-1}$ formula bilen hasaplanylýar.

§ 13. Takyk baha. Ynamly ähtimallyk (ynamdarlyk). Ynamly aralyk.

Diňe bir san bilen aňladylýan baha takyk baha diýilýär. Iki san bilen, ýagny aralygyň çäkleri bilen aňladylýan baha aralyk baha diýilýär. Aralyk bahalar, takyk we ynamly bahalary gurmaklyga mümkinçilik döredýär.

Goý berlen saýlama boýunça tapylan statistik karakteristika - θ^* , θ parametriň bahasy bolup hyzmat edýän bolsun. θ hemişelik san diýip hasaplalyň, onda θ^* näçe takyk bolsa şonça hem θ parametri takyk hasaplanýar, eger-de $|\theta - \theta^*|$ tapawut absolyut ulylygy boýunça has kiçi bolsa, ýa-da başga-ça, eger $\delta > 0$ we $|\theta - \theta^*| < \delta$ bolsa, onda δ näçe kiçi boldygyça, baha hem şonça takykdyr. Şeýlelikde δ bahanyň takykdygyny häsiýetlendirýän položitel sandyr. Emma $|\theta - \theta^*| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyryan θ^* bahanyň deregine, şol deňsizligiň ýagny $|\theta - \theta^*| < \delta$ deňsizligiň ähtimallygyny tapýarlar. Şol ähtimallyga ynamly ähtimallyk (ynamdarlyk) diýilýär.

$|\theta - \theta^*| < \delta$ deňsizligiň ähtimallygyna θ bahanyň θ^* boýunça ynamly ähtimallygy γ diýilýär. Umuman ynamlylyk önünden berilýär, γ -

Subudy. (1) we (2) deňlikleri göz önünde tutup alarys

$$\sum n(x_i - \bar{X}) = \sum n_i x_i - \sum n_i \bar{X} = n\bar{X} - n\bar{X} = 0.$$

§ 11. Baş dispersiýa.

Baş toplumyň nyşanlarynyň bahalarynyň onuň orta bahasyndan \bar{X}_r gyşarmasynyň kwadratynyň orta arifmetik bahasyňa baş dispersiýa diýilýär we ol D bilen bellenilýär. Eger n göwrümlü baş toplumyň nyşanlarynyň bahalary dürli bolsa, onda

$$D_r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_r)^2}{N}.$$

Eger nyşanyň x_1, x_2, \dots, x_n bahalary degişlilikde N_1, N_2, \dots, N_n ýygylklara eýe bolsa, onda

$$D_r = \frac{\sum_{i=1}^n N_i (x_i - \bar{X}_r)^2}{N}.$$

§ 12. Saýlama dispersiýa.

Nyşanyň gözegçilik edilýän bahalarynyň \bar{X}_B orta bahasyndan gyşarmasynyň orta arifmetik bahasyňa saýlama dispersiýa diýilýär. Ol D_B bilen bellenilýär. Eger x_1, x_2, \dots, x_n bahalar dürli bolsa,

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_B)^2}{n} \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Eger-de x_1, x_2, \dots, x_n degişlilikde n_1, n_2, \dots, n_n ýygylklara eýe bolsa, hem-de $n_1 + n_2 + \dots + n_n = n$, onda

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

Bu ýerde

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň häsiýetleri:

1) $\varphi(x)$ funksiýa jübüt funksiýadyr, ýagny $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

$\varphi(x)$ funksiýanyň x argumentiň položitel bahalary üçin tablisa bardyr. Otrisetel bahalary üçin hem şol tablisadan peýdalanyp bolýar, sebäbi ol jübütdir.

Mysal. 400 sany synagda A wakanyň 80 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly, eger-de $p=0,2$ bolsa.

Cözülişi. Şerte görä $n=400$; $m=0,2$; $q=1-p=0,8$.

$$\text{Onda } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 80}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{0}{8} = 0.$$

$\varphi(0)=0,3988$ tablisa boýunça.

Onda

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot 0,3988 = \frac{1}{8} \cdot 0,3988 = 0,04986.$$

Eger şu mysaly Bernulliniň formulasy bilen işleseň hem $P_{400}(80)=0,0498$ şeýle netije alardy.

2. Muawr-Laplasyň integral teoremasy.

Eger geçirilýän synaglaryň hemmesinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy nul bilen birden tapawutly hemişelik san bolsa, onda n synagda A wakanyň k_1 -den k_2 -ä çenli aralykda ýüze çykmagynyň ähtimallygy takmynan aşakdaky kesgitlenen

integrala deňdir

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2)$$

bu ýerde

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

funksiýa üçin tablisa bardyr. $\Phi(x)$ tak funksiýadyr.

Tablisada x -yň $x=5$ çenli bahasy bardyr. Eger $x>5$ bolsa, onda $\Phi(x)=0,5$.

$\Phi(x)$ funksiýa Laplasyň funksiýasy hem diýilýär. Ony şeýle ýönekeýleşdirip bolýar

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^0 e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Şeýlelikde

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Mysal. Teňňe ýokaryk 100 gezek zyňylanda, onuň şekilli ýüzüniň (45,55) aralykda düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Cözülişi. Şerte görä $k_1=45$, $k_2=55$, $p=0,5$ $q=0,5$. Onda

$$x_1 = \frac{45 - 100 * 0,5}{\sqrt{100 * 0,5 * 0,5}} = \frac{45 - 50}{5} = -\frac{5}{5} = -1.$$

$$x_2 = \frac{55 - 100 * 0,5}{\sqrt{100 * 0,5 * 0,5}} = \frac{55 - 50}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Şeýlelikde

§ 9. Umumy we toparlaýyn orta bahalar.

Nyşanyň topara degişli bolan orta arifmetik bahasyna toparlaýyn orta baha diýilýär.

Nyşanyň umumy topluma degişli bolan orta arifmetik bahasyna umumy orta baha diýilýär.

Toparyň göwrümi, toparlaýyn orta bahasy belli bolsa, onda onuň umumy orta bahasyny tapyp bolýar.

Mysal.

Topar	1-nji	2-nji
Nyşanyň bahalary	1 2	1 5
Ýygylgy	10 15	20 30
Göwrümi	10+15=25	20+30=50

§ 10. Umumy orta bahadan gyşarma we onuň häsiýeti.

Goý n göwrümlü saýlanan ýa-da umumy toplumyň mukdar nyşanyň X -yň bahalary x_1, x_2, \dots, x_n we ýygylgy n_1, n_2, \dots, n_n berlen bolsun.

Umumy orta bahany tapalyň

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad \left(\sum = \sum_{i=1}^n \right).$$

Onda

$$\sum n_i x_i = n \bar{X} \quad (1)$$

\bar{X} - hemişelik, şonuň üçin

$$\sum n_i x_i = \bar{X} \sum n_i = n \bar{X} \quad (\sum n_i = n) \quad (2)$$

Nyşanyň bahalary bilen umumy orta bahanyň tapawudyna, $(x_i - \bar{X})$ tapawuda gyşarma diýilýär.

Teorema. Gyşarmanyň degişli ýygylyklara köpeltmek hasylynyň jemi nyla deňdir.

$$\bar{X}_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Eger-de nyşanyň x_1, x_2, \dots, x_n bahalary, deňşilikde n_1, n_2, \dots, n_n ýygylara eýe bolsa, hem-de $n_1, n_2, \dots, n_n = n$ bolsa, onda

$$\bar{X}_B = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_n x_n}{n}$$

ýa-da

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{n}.$$

Bellik.

Berlen bir saýlamanyň esasynda tapylan saýlama orta baha kesgitli sana deňdir. Eger başga saýlama alsak onda saýlama orta baha üýtgär. Şeýlelikde saýlama orta bahany, tötän ulylyk ýaly seredip bolar. karakteristikalary, ýagny saýlama paýlanyşyň Onda onuň paýlanyşy we san matematik garaşmasy we dispersiýasy hakynda hem aýtmak bolar.

§ 8. Baş orta bahanyň saýlama orta baha boýunça bahalandyrylyşy.

Goý baş toplumdan bahalary x_1, x_2, \dots, x_n bolan n göwrümi gaýtalanýan saýlama, bölünip alnan bolsun. Şonuň ýaly-da baş orta baha \bar{X}_F belli bolsun, onda saýlamanyň netijesi boýunça, ony bahalandyrmak talap edilýän bolsun. Baş orta bahanyň bahasy deregine saýlama orta baha alynýar, ýagny

$$\bar{X}_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Onda, \bar{X}_B süýşürilmedik bahadygyna göz ýetirmek gyn däl. Şonuň ýaly-da, onuň matematik garaşmasy \bar{X}_F -e deňdir, ýagny

$$M(\bar{X}_B) = \bar{X}_F = a.$$

$$P_{100}(45,55) = \bar{\Phi}(1) - \bar{\Phi}(-1) = \bar{\Phi}(1) + \bar{\Phi}(1) = 2\bar{\Phi}(1) = 2 * 0,3413 = 0,6826.$$

3. Puassonyň formulasy.

Goý n gezek synag geçirilendir diýeliň. A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p -sana deň bolsun. Belli bolşy ýaly, n synagda A wakanyň m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy Bernulliniň formulasy boýunça tapylýar. Eger n has uly san bolsa, onda Laplasyň asimptotik formulasyndan peýdalanýlar.

Emma, eger hadysanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy has kiçi bolsa ($p \leq 0,1$), onda ol formuladan peýdalanyp bolmaýar. Şol ýagdaýda (n uly, p kiçi bolanda) Puassonyň asimptotik formulasyny ulanmak amatlydyr.

Geçirilýän dürli synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň ortaça bahasy hemişelik diýip kabul edeliň, ýagny $np = \lambda$ diýip belläliň. Bernulliniň formulasyny ulanalyň

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} p^m (1-p)^{n-m}$$

eger $np = \lambda$ bolsa, onda $p = \frac{\lambda}{n}$. Şeýlelikde

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

n - iň has uly sandygyny göz önünde tutup $P_n(m)$ -iň deregine $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m)$ tapalyň.

Onda

$$P_n(m) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \times \dots \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \right] = \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^m$$

Şeýlelikde

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Bu formula Puassonyň formulasy diýilýär.

Bellik. Eger n we λ belli bolsa onda $P_n(m)$ ähtimallygy tapmak üçin ýörite tablisa bar.

Mysal. Zawod bu bazadan 5000 sany oňat hilli önüm göýberýär. Ýolda önümiň zaýalanmagynyň ähtimallygy 0,0002 sana deň. Baza 3 sany hili ýaramaz önümiň geljekdiginiň ähtimallygyny tapmaly.

Cözülişi. Şerte görä $n=5000$, $p=0,0002$, $m=3$. Onda $\lambda=np=5000 \cdot 0,0002=1$.

Gözlenýän ähtimallyk $P_{5000}(3)$ Puassonyň formulasy esasynda

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} = 0,006.$$

§17. Bagly däl synaglarda otnositel ýygylgyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasynyň ähtimallygy.

Goý n gezek özara bagly däl synag geçirilýän bolsun, şolaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p sana deň bolsun ($0 < p < 1$). Wakanyň otnositel ýygylgynyň (m/n) onuň hemişelik p ähtimallygyndan gyşarmasynyň ähtimallygy absolýut ulylygy boýunça berlen $\varepsilon > 0$ sandan uly däl. Başgaça aýdaňda $\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetjekdiginiň ähtimallygyny tapýarys. Ony şeýle belleýäris $P\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\}$. (1) deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň

§ 6. Baş orta baha.

Goý X mukdar nyşanabaglylykda baş diskret toplum öwrenilýän bolsun.

Baş toplumyň nyşanynyň orta arifmetik bahasyna, baş orta baha diýilýär. Ol \bar{X}_r bilen bellenilýär.

Eger N göwrümi baş toplumyň nyşanynyň hemme x_1, x_2, \dots, x_N dürli bolsa, onda

$$\bar{X}_r = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}.$$

Eger-de nyşanyň x_1, x_2, \dots, x_k bahalary degişlilikde N_1, N_2, \dots, N_k ýygylyklara eýe bolup, $N_1, N_2, \dots, N_k = N$ bolsa, onda

$$\bar{X}_r = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_N N_k}{N}$$

bolar.

X nyşanyň ulylygyna tötän ulylyk, onuň mümkin bolan alyp biljek x_1, x_2, \dots, x_k bahalary $\frac{1}{N}$ -e deň bolan birmeňzeş ähtimallyga eýe bolan, tötän ulylyk ýaly seretsek, onda

$$MX = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + \dots + x_k \cdot \frac{1}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{N} = \bar{X}_r.$$

Eger baş toplumyň derňelýän nyşanyny X -y, tötän ulylyk ýaly seretsek, onda onuň matematik garaşmasy baş orta bahasyna deňdir, ýagny

$$MX = \bar{X}_r.$$

§ 7. Saýlama orta baha.

Goý baş toplumy onuň mukdary nyşany boýunça derňemek üçin n göwrümi toplum saýlanyp alnan bolsun.

Saýlama toplumyň nyşanynyň orta arifmetik bahasyna saýlama orta baha diýilýär we ol \bar{X}_B bilen bellenilýär.

Eger n göwrümi saýlamanyň nyşanynyň hemme bahalary x_1, x_2, \dots, x_n dürli bolsa, onda

Goý θ^* , teoretik paýlanyşyň näbelli θ parametriniň statistik bahasy bolsun. Şonuň ýaly hem, n göwrümlü saýlama boýunça θ_1^* baha tapylan bolsun. Tejribäni gaýtalap, şol göwrümlü başga saýlamany baş toplumdan alyp, onuň netijesinde θ_2^* bahany tapýarys. Tejribäni köp gezek gaýtalap, umuman aýdaňda özara dürli bolan $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$ sanlary alýarys. Şeýlelikde, θ^* bahany tötän ulylyk, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$ sanlary onuň mümkin bolan bahalary ýaly seretmek mümkin.

θ^* baha, θ -nyň artygy bilen alnan ýakynlaşan bahasyny berýär diýip göz önüne getirsek, onda berlen saýlama boýunça tapylan her θ_i^* ($i = \overline{1, n}$) san θ -nyň hakyky bahasyndan köp bolýar.

Onda, bu ýagdaýda θ^* tötän ulylygyň matematik garaşmasy (orta bahasy) θ -dan uly boljagy düşnükli, ýagny $M(\theta^*) > 0$. Eger-de θ^* baha kemi bilen alynsa, onda $M(\theta^*) < 0$.

Şeýlelikde matematik garaşmasy bahalandyrylan parametre deň bolmadyk statistik bahany ulanmaklyk, sistematik ýalňyşlyga getirýär. Şol sebäpli hem, θ^* bahanyň matematik garaşmasy bahalandyrylan parametre deň bolmagyny talap etmelidir.

Başgaça aýdaňda $M\theta^* = \theta$ bolmaklygy sistematik ýalňyşlygyň bolmazlyklygy üpjün edýär.

Eger islendik göwrümlü saýlamada, matematik garaşmasy bahalandyrylýan θ parametre deň bolan θ^* statistik baha, ýagny $M(\theta^*) = \theta$ bolsa, onda θ^* baha süýşürilmedik baha diýilýär.

Eger $M(\theta^*) \neq \theta$ bolsa, onda onuň ýaly baha süýşürilen baha diýilýär. Mümkin bolan iň kiçi dispersiýa eýe bolan statistik baha «effektiw» baha diýilýär.

Eger $n \rightarrow \infty$ ähtimallygy boýunça bahalandyrylýan parametre ymtylýan statistik baha «durnukly» baha diýilýär.

Meselem. Süýşürilmedik bahanyň dispersiýasy $n \rightarrow \infty$ nula ymtylsa, onda onuň ýaly baha durnukly baha diýilýär.

$$-\varepsilon \leq \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \text{ ýa-da } -\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon.$$

Soňky deňsizligi $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ položitel köpeldijä köpeldip alarys

$$-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Indi Laplasyň integral teoremasyndan peýdalanýarys

$$x_1 = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \text{ we } x_2 = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, \text{ onda}$$

$$P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Şeýlelikde, skobkadaky deňsizligi şoňa deňgüýçli bolan ilkinji deňsizlik bilen çalşyryp alarys:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Onda, $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmeginiň ähtimallygy

$x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$ bolanda ikeldilen Laplasyň funksiýasynyň $2\Phi(x)$ -iň

ýakynlaşan bahasyna deňdir.

Mysal. Detalyň standart dældiginiň ähtimallygy $p=0,1$. Otnositel ýygylýgyň $p=0,1$ ähtimallykdan gyşarmasynyň ähtimallygynyň 400 sany saýlanyp alnan detalyň içinde 0,03 sandan köp dældiginiň ähtimallygyny tapmaly.

Cözülişi. $N=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$. Onda

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| < 0,03\right\} = 2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{400}{0,1*0,9}}\right) = 2\Phi(2). \quad \Phi(2)=0,4772$$

tablisa boýunça. Onda $2\Phi(2)=0,9544$.

Ikinji bölüm. Tötän ululyklar.

§1. Tötän ululyklar we olaryň görnüşleri.

1. Diskret we üznüksiz tötäni ululyklar.

Tötäni ululyklar ähtimallyk teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biridir.

Kesgitleme: Synagyň netijesinde şol ýa-da başga bahany alýan ululyga tötäni ululyk diýilýär. Synagyň netijesinde tötäni ululygyň haýsy bahany aljakdygy öňünden belli däl (näbelli).

Tötäni ululyk öwrenilende ilki bilen gyzyklandyryýan zat, ol hem onuň mümkin bolan köp bahalary, ýagny ol tükenikli sanlaryň köplügi bolup biler.

Tötäni ululyklar esasan iki bölege bölünýärler:

a) Diskret tötäni ululyk.

b) Üznüksiz tötäni ululyk.

Eger tötäni ululygyň mümkin bolan bahalary tükenikli sanlaryň köplüginde düzýän bolsa (meselem bütün sanlaryň köplügi), onda onuň ýaly tötän ululyklara diskret tötän ululyklar diýilýär.

Meselem. 100 sany täze dogan çaganyň içinde oganlaryň sany. Ol tötän ululykdyr; onuň mümkin bolan alyp biljek bahalary 0,1,2,...,100.

Eger käbir tükenikli ýa-da tükeniksiz aralykda (ýa-da san okynyň kesiminde) hemme bahalary alyp bilýän ulylyga üznüksiz tötäni ulylyk diýilýär.

Meselem. Elektrik lampasynyň kemçiliksiz işleýän wagty $[0,T]$.

Bu ýerde T elektrik lampanyň maksimal işleýän wagtyny aňladýar.

§ 4. Paýlanyşyň parametrleriniň statistik bahalary.

Goý baş toplumyň mukdar nyşany öwrenmek göz önünde tutlýan bolsun. Şonuň ýaly hem mukdar nyşanyň nähili paýlanyşa eýedigini teoriýadan belli bolsun. Şol paýlanyşy kesgitleýän parametrleri bahalandyrmak meselesi ýüze çykýar. Meselem, eger baş toplumda öwrenilýän nyşanyň paýlanyşyna normaldygy öňünden belli bolsa, onda matematik garaşmany (a) we orta kwadratik gyşarmany (δ) bahalandyrmak zerurdyr. Sebäbi ol iki parametr (a we δ) normal paýlanyşy doly kesgitleýär. Eger-de mukdar nyşan Puassonyň paýlanyş kanunyna eýe bolsa, onda onuň bir λ parametri bardyr. Onda şol paýlanyşy kesgitleýän λ parametri bahalandyrmak gerek bolýar.

Goý gözegçiliniň ygtyýarynda diňe saýalamanyň bahalary, meselem, mukdar nyşanyň n tejribäniň netijesindeki x_1, x_2, \dots, x_n bahalary belli bolsun. Şolaryň esasynda hem bahalandyryýan parametr aňladylýar.

x_1, x_2, \dots, x_n bahalary, X_1, X_2, \dots, X_n bagly däl tötän ululyklar ýaly seredip, teoretiki paýlanyşyň näbelli parametriniň bahasyny tapmaklyk munuň özi, bahalandyrylýan parametrleriniň ýakynlaşan bahasyny, gözegçilik edilýän tötän ululyga bagly funksiýany tapmak diýmekdir. Meselem, normal paýlanyşyň matematik garaşmasyny bahalandyrmak üçin

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

funksiýa (mukdar nyşanyň gözegçilik edilýän bahalarynyň orta arifmetik bahasy) hyzmat edýär.

Şeýlelikde, teoretik paýlanyşyň näbelli parametriniň statistik bahasy, gözegçilik edilýän tötän ululyga bagly funksiýadyr.

§ 5. Süýürilmedik, effektiv we durnukly bahalar.

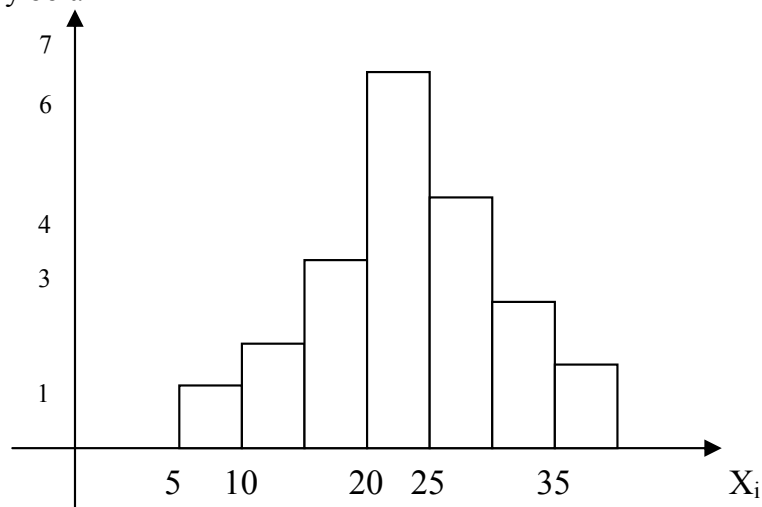
Statistik bahanyň bahalandyryýan parametre has ýakyn bolmagy üçin, olar käbir şerti kanagatlandurmalı. Olary aşakda görkezýäris.

$$\sum \mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1.$$

Mysal 1. Göwrümi $n=100$ bolan ýygylgyň paýlanyş tablisasy berlen.

$h=5$ interwalyň uzynlygy	$\sum n_i$	$\frac{n_i}{n}$ -ýygylgyň dykzlygy
5-10	4	0.8
10-15	6	1.2
15-20	10	3.2
20-25	36	7.2
25-30	24	4.8
30-35	10	2.0
35-40	4	0.8

Ýygylgyň paýlanyşynyň gistogrammasyny gurmaly. Ol aşakdaky ýaly bolar



Tötän ululyklar uly X, Y, Z , ýa-da ξ, η, χ, τ we ş.m. harplar bilen bellenilýär. Emma olaryň alyp bilýän mümkin bolan bahalaryny x_1, x_2, x_3, \dots diýip belleýärler.

§2. Diskret tötän ulylygyň ähtimallygynyň paýlanyş kanuny.

Diskret tötän ulylygyň berilmegi üçin onuň diňe hemme mümkin bolan, alýan bahalaryny we onuň ähtimallyklaryny görkezmek gerekdir.

Diskret tötän ulylygyň hemme mümkin bolan, alýan bahalarynyň we olaryň deňişli ähtimallygynyň arasyndaky arabaglanyşyga şol tötän ulylygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Adatça diskret tötän ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky tablisa gönüşde berilýär

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

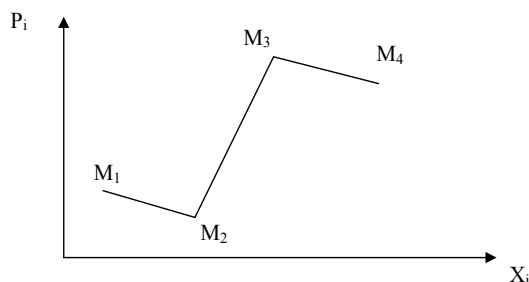
Tablisanyň birinji hatarynda, tötän ulylygyň alýan bahalary, ikinji hatarda bolsa onuň deňişli ähtimallyklary ýerleşdirilendir.

Şu ýerde $X=x_1, X=x_2, \dots, X=x_n$ -wakalar doly topary düzýän wakalardyr. Şonuň üçin hem

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, \quad \text{ýa-da} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Diskret tötäni ulylygyň mümkin bolan, alýan bahalary we onuň ähtimallyklary şol tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny doly häsiýetlendirýär.

Diskret tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny grafiki hem şekillendirip bolar. Onuň üçin göniburçly koordinatlar sistemasynda $M_1(x_1, p_1), M_2(x_2, p_2), \dots, M_n(x_n, p_n)$ nokatlary gurýarys.



§3. Diskret tötäni ulylygyň ähtimallygynyň binomial paýlanyş kanuny.

Goý A wakanyň ýüze çykmagy ýa-da çykmazlygy mümkin bolan n baglanyşyksyz synag geçirilsin. Wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemme synaglarda hemişelik we p deňdir. Onda $q=1-p$ (wakanyň ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy) bolar.

A wakanyň ýüze çykma sanyny X tötäni ulylyk görnüşde seredeliň. Şol X tötäni ulylygyň (diskret) paýlanyş kanunyny kesgitlemek üçin X tötäni ulylygyň hemme mümkin bolan alyp biljek bahalaryny we olaryň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Görnüşi ýaly A wakanyň n synagda 1 gezek hem ýüze çykmazlygy, 1 gezek ýüze çykmagy, 2 gezek ýüze çykmagy ýa-da n gezek ýüze çykmagy mümkin. Şonuň üçin X diskret tötäni ulylygyň mümkin bolan bahalary $x_0=0, x_1=1, x_2=2, \dots, x_n=n$ bolar.

Indi bolsa, şol mümkin bolan bahalaryň ähtimallyklaryny tapmak galýar. Onuň üçin Bernulliniň formulasyny ulanmak ýeterlikdir, ýagny n bagly bolmadyk synagda A wakanyň m gezek ýüze çykmagy

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (1) \quad (m=0,1,2,\dots,n)$$

Şu formula gözlenýän paýlanyş kanunynyň analitik aňlatmasy bolup hyzmat edýär.

Ähtimallyklary Bernulliniň formulasy boýunça kesgitleňýän paýlanyş kanunyňa, ähtimallygyň binomial paýlanyş

§ 3. Poligon we gistogramma.

Statistik paýlanyşy doly göz önüne getirmek maksady bilen onuň dürli grafikleri gurulýar, olaryň içinde has köp duş gelyänleri poligon we gistogrammadyr.

$(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ - nokatlary birleşdirýän kesimlerden emele gelen döwür çyzyga ýygylýgyň poligony diýilýär. Ony gurmak üçin absissalar okunda wariantlary (x_i) , a ordinatalar okunda bolsa, oňa degişli ýygylýklar (n_i) ýerleşdirilýär. Soňra (x_i, n_i) -nokatlary göni çyzygyň kesimleri bilen birleşdirip ýygylýgyň poligonyny alarys.

$(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), \dots, (x_k, \mu_k)$ - nokatlary birleşdirýän döwür çyzyga, otnositel ýygylýgyň (μ_i) poligony diýilýär. Ony gurmak üçin absissalar okunda x_i we ordinata okunda μ_i bahalary ýerleşdirýärler. (x_i, μ_i) - nokatlary birleşdirip otnositel ýygylýgyň poligony alnýar.

Eger nyşan üznüksiz bolsa, onda gistogramma gurulýar.

Esasynyň uzynlygy h -a deň bolan bölek aralyklardan beýikligi $\frac{n_i}{n}$

(ýygylýgyň dykzlygy) gatnaşyga deň bolan tekjeli şekile ýygylýgyň gistogrammasy diýilýär.

Ony gurmak üçin, absissalar okunda bölekleyin kesimleri ýerleşdirýäris, şolardan arasynyň uzaklygy $\frac{n_i}{n}$ bolan absissa

okuna parallel kesimleri ýerleşdirýäris. i -göniburçlugyň meýdany $h \cdot \frac{n_i}{n} = n_i$ bolar. Şeýlelikde, ýygylýgyň gistogrammasynyň

meýdany, hemme ýygylýklaryň jemine, ýagny saýlamanyň göwrümüne deňdir.

Eger uzaklygy h , beýikligi μ_i bolsa, onda oňa otnositel ýygylýgyň gistogrammasy diýilýär.

Otnositel ýygylýgyň gistogrammasynyň meýdany, hemme otnositel ýygylýklaryň jemine, ýagny bire deňdir.

Sebäbi

ýygýlyk n_i 12 18 30

Cözülişi. Saýlamanyň göwrümini tapýarys, ýagny $n_1+n_2+n_3=12+18+30=60$.

Iň kiçi wariant $x_1=2$, diýmek

$F_B(x)=0$, eger $x \leq 2$.

($X < 6$) baha, ýagny $x_1=2$ 12 gezek gözegçilik edildi, diýmek

$$F_B(x) = \frac{12}{60} = 0,2 \quad \text{eger } 2 < x \leq 6$$

($X < 10$) baha, $x_1=2$ we $x_2=6$ jemi $12+18=30$ gezek gözegçilik edildi, diýmek

$$F_B(x) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{eger } 6 < x \leq 6.$$

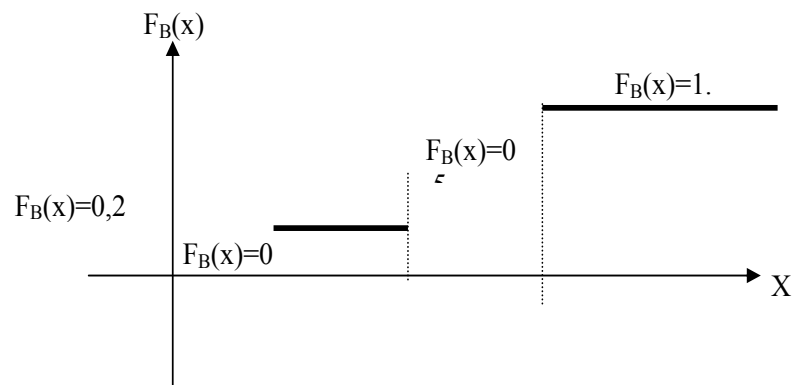
Bu ýerde $x=10$ -iň uly wariant, diýmek

$F_B(x)=1$, eger $X > 10$.

Şeýlelikde, gözlenýän empirik funksiýa aşakdaky ýaly bolar.

$$F_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq 2, \\ 0,2, & \text{eger } 2 < x \leq 6, \\ 0,5, & \text{eger } 6 < x \leq 10, \\ 1, & \text{eger } x > 10. \end{cases}$$

Onuň grafigi



kanunyny diýilýär. (1) deňligiň sag tarapyny, Nýuton binomynyň

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} q + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + C_n^0 q^n$$

umumy çleni ýaly seretmek bolar. Şonuň üçin oňa «binomial» kanun diýilýär. Şeýlelikde, birinji çlen p^n wakanyň n synagda n gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny aňladýar. Ikinji çlen $np^{n-1}q$ bolsa, $(n-1)$ gezek ýüze çykýandygynyň ähtimallygyny ...; soňky çlen q^n wakanyň bir gezek hem ýüze çykmaýandygynyň ähtimallygyny aňladýar.

Ähtimallygyň binomial paýlanyş kanuny tablisa görnüşde aşakdaky ýaly berilýär

X	0	1	2...	m...	n-1	N
P	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

Ikinji hataryň jemi $(q+p)^n=1$

Mysal.

Teňne2 gezek zyňylýar. Gerbiň ýüze çykmagyny aňladýan X tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

Cözülişi.

Belli bolşy ýaly, gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p we q ikisi hem $\frac{1}{2}$ -e deňdir, ýagny $p=1/2$, $q=1/2$. Iki gezek teňne zyňylanda, gerb 0 gezek, 1 gezek, 2 gezek ýüze çykmagy mümkin, ýagny

$x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$.

Bu bahalaryň ähtimallyklaryny Bernulliniň formulasy boýunça tapýarys, onda:

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P_2(1) = C_2^1 q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P_2(2) = C_2^2 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

Gözlenýän paýlanyş kanunyny ýazalyň

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25
Barlagy:	0.25+0.5+0.25=1.		

§4. Puassonyň paýlanyş kanuny.

Goý n sany bagly bolmadyk synag geçirilsin, A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p bolsun.

A wakanyň n synagda m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak üçin Bernulliniň formulasyny ulanylýarlar.

Eger-de n synagyň sany uly bolsa, onda Laplasyň asimptotik formulasy ulanylýar. Emma, eger hadysanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy has kiçi bolsa ($p \leq 0.01$), onda bu formulany ulanyp bolmaýar, bu ýagdaýda (n uly, p has kiçi bolanda) Puassonyň formulasy ulanylýar.

Geçirilýän dürli synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň ortaça bahasy hemişelik diýip kabul edeliň, ýagny $np = \lambda$ diýip belläliň.

Şeýlelikde

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Bu formula Puassonyň paýlanyş kanunyny aňladýar. $P_n(m)$ ähtimallygy tapmak üçin ýörite tablisa bardyr.

Puassonyň paýlanyş kanuny tablisa arkaly aşakdaky ýaly aňladylýar.

üýtgeşe otnositel ýygylýk hem üýtgär, ýagny $\frac{n_x}{n}$ -otnositel ýygylýk

x -a görä funksiýa bolar. Ol funksiýa tejribe üsti bilen tapylýar, şonuň üçin hem oňa empirik funksiýa diýilýär. Ol $F_B(x)$ bilen belgilenýär.

Kesgitleme: x -yň her bahasy üçin ($X < x$) wakanyň otnositel ýygylýgyny kesgitleýän $F_B(x)$ funksiýa empirik paýlanyş funksiýa diýilýär.

Kesgitlemä görä

$$F_B(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu ýerde n_x - x -dan kiçi wariantlaryň sany (ýygylýgyň jemi), n -saýlamanyň göwrümi. Şeýlelikde, meselem $F_B(x)$ -ni tapmak üçin x_2 -den kiçi wariantlaryň sanyny, n göwrüme paýlamaly, ýagny

$$F_B(x) = \frac{n_x}{n}$$

Ozal belli bolşy ýaly, eger x hakyky üýtgeýän ulylyk bolsa, onda

$$F(x) = P\{X < x\}$$

$\{X < x\}$ -wakanyň ähtimallygyna X tötän ulylygyň toplumynyň paýlanyş funksiýasy diýilýär. Oňa $F(x)$ şonuň ýaly hem, teoretik paýlanyş funksiýasy hem diýilýär.

Empirik paýlanyş funksiýa $F_B(x)$ munuň özi $F(x)$ teoretik paýlanyş funksiýanyň anyklamasy bolýar.

$F_B(x)$ funksiýanyň kesgitlemesinden şu aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar:

1) empirik funksiýanyň bahalary $[0;1]$ kesimde ýatýar, ýagny

$$F_B(x) \in [0;1].$$

2) $F_B(x)$ kemelmeýän funksiýadyr.

3) eger x_1 -iň kiçi warianty bolsa, onda $x \leq x_1$ bolanda $F_B(x_1) = 0$, eger x_k -iň uly warianty bolsa, onda $x \geq x_k$ bolanda $F(x) = 1$.

Empirik funksiýa baş toplumyň teoretik paýlanyş funksiýasyny bahalandyrmak üçin hyzmat edýär.

Mysal. Berlen saýlamanyň paýlanyşy boýunça empirik funksiýany gurmaly:

wariant	x_i	2	6	10
---------	-------	---	---	----

ýygylygy n_1, n_2, \dots, n_k bilen bellesek, onda saýlama toplumynyň göwrümi deň bolar:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n - \text{saýlamanyň göwrümi}$$

Ýygylygyň göwrüme bolan gatnaşygyna, ýagny

$$\frac{n_1}{n} = \mu_1, \frac{n_2}{n} = \mu_2, \dots, \frac{n_k}{n} = \mu_k - \text{sanlara otnositel ýygylyk diýilýär.}$$

$$\text{Bu ýerde } \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = \sum \mu_k = 1.$$

Degişli ýygylyklary n_i – bilen ýa-da otnositel ýygylyklary μ_i – bilen berilen wariantlaryň x_i toplumyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy ýa-da emperiki kanuny diýilýär. Ol tablisa görnüşde aşakdaky ýaly berilýär

wariantlar	X_1	X_2	...	X_k
ýygylyk	n_1	n_2	...	n_k
otnositel ýygylyk	μ_1	μ_2	...	μ_k

Saýlama orta baha diýip

$$\bar{X}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j x_j$$

ulylyga aýdylýar.

§ 2. Empirik paýlanyş funksiýasy.

Goý X mukdar nyşanyň ýygylygynyň statistik paýlanyşy belli bolsun.

Bellik girizýäris:

n_x - x -dan kiçi wariantlaryň ýygylyklarynyň jemi;
 n - saýlamanyň göwrümi.

Onda ($X < x$) wakanyň otnositel ýygylygy $\frac{n_x}{n}$ -e deň bolar. Eger x

X	0	1	2	...	m	...	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$		$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

Barlag:

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Mysal. Okuw kitaby 100000 ekzemplýar tiraž bilen çap edilýär. Olaryň içinde hili ýaramaz edilendiginiň ähtimallygy $p=0,0001$ -e deň. Şol tiraž edilen kitaplaryň içinde 5 sanysynyň hiliniň ýaramaz ediljekdiginiň ähtimallygyny tapmaly.

Cözülişi. Şerte görä $n=100000$, $p=0.0001$, $m=5$. Onda Puassonyň formulasy esasynda

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \cdot \lambda = np = 100000 \cdot 0.0001 = P_{100000}(5) = \frac{10^5 \cdot 0.000045}{120} = 0.0375.$$

§5. Diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasy we onuň häsiýetleri.

1. Tötäni ulylygyň san karakteristikasy.

Bize belli bolşy ýaly, tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny ony doly häsiýetlendirýär. Ýöne köp halatlarda paýlanyş kanuny belli däl, şonuň üçin hem tötäni ulylyk barada az maglumatlar bilen çäklenmeli bolýar. Käbir halatlarda bolsa, tötäni ulylygy jem görnüşde häsiýetlendirýän sanlary ulanmaly bolýar. Ol sanlara tötäni ulylygyň san karakteristikasy diýilýär.

San karakteristikalaryň möhümleriniň biri hem, matematik garaşmadyr. Matematik garaşma tötäni ululygyň takmynan orta bahasyna dňdir. Köp meseleler çözülide onuň matematik garaşmasy bilmek ýeterlikdir.

Kesgitleme. Diskret tötäni ululygyň hemme mümkin bolan bahalaryň, onuň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylynyň jemine, şol tötäni ululygyň matematik garaşmasy diýilýär.

Goý X tötäni ululygyň alýan bahalary $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bolsun, olaryň degişlilikde ähtimallyklary $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ bolsun. Onda X tötäni ululygyň matematik garaşmasy – MX (ol MX bilen belenilýär) aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär :

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

Matematik garaşma – MX hemişelik sandyr.

Mysal. X – tötäni ululygyň paýlanyş kanuny aşakdaky tablisa bilen berlen:

X	3	2	1
P	0,1	0,6	0,3

Onuň matematik garaşmasy tapmaly.

Cözülişi. $MX=3*0.1+2*0.6+1*0.3=0.3+1.2+0.3=1.8$

- 1) Hemişelik sanyň matematik garaşmasy` şol sanyň özüne deňdir, ýagny $MC=C$.
- 2) Hemişelik sany matematik garaşma alamatynyň daşyna çykaryp ýazyp bolýar, ýagny

$$M(CX)=C*MX$$

- 3) Özara bagly däl X we Y tötäni ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmasyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$M(X*Y)=MX*MY$$

Subudy: Goý X we Y tötäni ululyklaryň paýlanyş kanunlary

oýlap tapmakdan ybaratdyr.

Goý obýektleri häsiýetlendirýän käbir hil we mukdar nyşanlara baglylykda birjynsly obýektleriň toplumyny öwrenmek talap edilýän bolsun. Meselem, eger detallar toplumy bar bolsa, onda hil nyşany bolup onuň hiliniň oňatlygy hyzmat edýär, mukdar nyşany bolup detalyň derňelýän ölçegi hyzmat edýär.

Tötän ýagdaýda saýlanyp alnan obýektleriň toplumyna ýöne saýlama toplum diýilýär.

Saýlama geçirilýän obýektleriň toplumyna baş toplum diýilýär.

Toplumyň obýektleriniň umumy sanyna (baş ýa-da saýlama) toplumyň göwrümi diýilýär. Meselem, eger 1000 detaldan derňemek üçin 100 detal saýlanyp alnan bolsa, onda $N=1000$ baş toplumyň göwrümi $n=100$ saýlama toplumyň göwrümi bolar.

Birmeňzeş obýektleriň jemlenmesini häsiýetlendirýän hil ýa-da mukdar nyşany öwrenilende, jemlenmedäki obýektleriň her birini ýekän-ýekän barlap çykamak köplenç mümkin bolmaýar, (obýektleriň sany örän köp, ýöne, mysal üçin, snaryadlaryň hilini barlamak üçin, olary ýarmaly bolýar).

Şonuň üçin saýlama usuly ulanylýar. Ol şeýle baş topardan tötän ýagdaýda n - sanysy alynyp (saýlama topar diýilýär) olar jikme-jik öwrenilýär we soňra ähli baş topar hakynda pikir ýöredilýär. Saýlama topardaky elementleriň garaşsyzlygyny talap edýäris.

§1. 2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.

Goý X – mukdar nyşany öwrenmek üçin baş toplumdan n – göwrümlü $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ - saýlama bölünip alnan bolsun. Şonuň ýaly hem x_1, n_1 – gezek, x_2, n_2 – gezek, x_k, n_k – gezek gözegçilik edilýän bolsun.

Bu ýerde, gözegçilik edilýän x_i ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$) bahalara wariantlar diýilýär. Artýan tertipde ýerdeşdirilen wariantlaryň zygiderligine – wariasion hatar diýilýär. Käbir wariantlaryň gabat gelmekleri hem mümkin .

Bu ýerde

$\frac{m}{n}$ - otnositel ýygyllyk,

p – ähtimallyk.

n has uly bolanda $\frac{m}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$

4. Markowyň deňsizligi.

Goý δ islendik položitel san bolsun, onda $(X < \delta)$ wakanyň ähtimallygy $\left(1 - \frac{a}{\delta}\right)$ -dan kiçi däl, ýagny

$$P\{x < \delta\} \geq 1 - \frac{a}{\delta}$$

Bu ýerde X položitel tötäni ulylyk, $a = MX$ matematik garaşma, δ položitel san.

Üçünji bölüm

Matematiki statistikanyň elementleri.

§1. 1. Matematiki statistika düşüňjeleri.

Saýlama usuly.

Matematiki statistika ähtimallyklar teoriýasy bilen bir-bada XII asyrdan döreýär. Belli bolşy ýaly ähtimallyklar teoriýasy tötän wakalaryň matematiki modellerini öwrenmek bilen gyzyklanýar, a matematik statistika bolsa, statistik maglumatlary taýarlamagyň analiziniň usullaryny we düzgünlerini öwredýär.

Matematiki statistikanyň birinji meselesi statistiki maglumatlary ýygnamagyň we toparlaşdyrmagyň usulyny görkezýär. Ikinji meselesi bolsa, tejribäniň maksada görä geçirilýändigini barada statistiki maglumatlary derňemegiň usulyny

aşakdaky tablisa görmüşde berlen bolsun

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
P	p_1	p_2	q	q_1	q_2

Onda (XY) tötäni ulylygyň mümkin bolan bahalary x_1y_1 x_2y_2 x_2y_1 x_1y_2 x_2y_2 bolar, şeýlelikde onuň paýlanyş kanuny aşakdaky ýaly bolar.

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
Pq	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2

Şeýlelikde

$$M(XY) = x_1y_1p_1q_1 + x_2y_1p_2q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_2p_2q_2 = y_1q_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2q_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = MX \cdot MY$$

Şonuň ýaly

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = MX_1 \cdot MX_2 \cdot \dots \cdot MX_n.$$

Iki sany X we Y tötäni ulylygyň algebraik jeminiň matematik garaşmasy, şol tötäni ulylyklaryň matematik garaşmalarynyň algebraik jemine deňdir, ýagny

$$M(X \pm Y) = MX \pm MY.$$

Şonuň ýaly hem

$$M(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = MX_1 \pm MX_2 \pm \dots \pm MX_n.$$

Diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasynyň ähtimallyk garaşmasynyň ähtimallyk manysy aşakdakydan durýar. Goý X tötäni ulylyk x_1, x_2, \dots, x_n bahalary alýan bolsun, şol bahalaryň orta

arifmetik sany $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ bolsun.

Ähtimallyk manysy n uly böldügyçe $M(X)$ matematik garaşma orta arifmetik baha örän ýakyn bolýar we şol sebäbe görä matematik garaşma, tötäni ulylygyň orta arifmetik bahasy diýilýär. Ýene-de bellemeli zat, matematik garaşma tötäni ulylygyň häsiýetlerini häsiýetlendirýän sandyr. Başgaça aýtsak synagyň netijesinde alnan bahalaryň durnukly orta arifmetik sanydyr.

§6. Binomial paýlanyş kanunynyň matematik garaşmasy.

Eger X tötän ulylyk binomial paýlanyş kanunyna eýe bolsa, onda onuň matematik garaşmasy (n bagly däl synagda A wakanyň ýüze çykmagynyň sany), synaglaryň sanynyň (n) onuň her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyna (p) köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny (np) -e deňdir. Oňa göz ýetirmek kyn däl. (1) formula esasynda

$$MX = \left(nq^{n-1} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} + \dots + m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} + \dots + np^n \right) =$$

$$= np(q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \dots + p^{n-1}) = np(q+p)^{n-1} = np.$$

Şeýlelikde binomial paýlanyş kanuny üçin alarys.

$$MX=np.$$

§7. Diskret tötän ulylygyň dispersiýasy we onuň häsiýetleri.

Dürli mümkin bolan bahalary alýan, emma bir meňzeş matematiki garaşma eýe bolýan tötäni ulylyklara düş gelýäris.

Meselem. X we Y tötäni ulylyklaryň paýlanyş kanunlary tablisa görnüşde berilipdir:

X	-5	5	Y	-100	100
P	0.5	0.5	p	0.5	0.5

Matematik garaşmasyny tapalyň

$$MX = -5 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.5 = 0$$

$$MY = -100 \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.5 = 0$$

Bu ýerde iki tötäni ulylygyň hem matematik garaşmasy birmeňzeş. Matematik garaşma tötäni ulylygy doly häsiýetlendirip bilmeýär. Bu ýagdaýda tötäni ulylygyň beýleki san karakteristikalaryndan

$$D\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n^2}\right) = \frac{C}{n^2} \quad (13)$$

(13)-ini (10)-iň sag tarapyna goýup alarys

$$P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Bu ýerden $n \rightarrow \infty$ predele geçip alarys

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1$$

Emma, ähtimallyk birden uly bolup bilmeýär, şonuň üçin hem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Deňlik gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

3. Bernulliniň teoremasy.

Goý garaşsyz (bagly däl) n synag geçirilýän bolsun, şol synagyň hersinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p ($0 < p < 1$) deň bolsun. Onda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylgynyň nähili boljakdygyny öňünden aýdyp bolarmy diýen sorag ýüze çykýar.

Ol soraga Ýa. Bernulliniň teoremasy jogap berýär.

Bernulliniň teoremasy. Eger garaşsyz (bagly däl) n synag giçirilende A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p ($0 < p < 1$) sana deň bolsa, onda otnositel ýygylgynyň p ähtimallykdan gysarmasynyň ähtimallygy absolýut ulylygy boýunça, eger n synaglaryň sany ýeterlik uly bolanda bire has golaýdyr.

Başgaça aýdaňda, eger ε islendik kiçi položitel san bolsa, onda aşakdaky deňlik dogrydyr.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

(7)
Hususy halda, eger $MX_1=MX_2=...=MX_n=a$ (8)
bolsa onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (9)$$

Şeýlelikde, dispersiýasy çäkli bolan bagly bolmadyk örän köp
tötäni ulylyklara seredilýän bolsa, onda şol wakanyň hökmany
waka hasap edip boljakdygyny Çebyşewiň teoremasyny tassyklaýar.
Subudy. Bellik girizýäris^

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Matematik garaşmany tapalyň

$$M \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) = \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n}$$

Çebyşewiň deňsizliginden görmüşine görä^

$$P \left\{ |\bar{X} - M\bar{X}| \leq \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} \quad (10)$$

Indi dispersiýany tapalyň

$$D\bar{X} = D \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \quad (11)$$

dispersiýanyň häsiýetini ulanyp taparys

$$D \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} (DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n) \quad (12)$$

Teoremanyň şertine görä

$$DX_1 \leq C, DX_2 \leq C, \dots, DX_n \leq C$$

Şonuň üçin

$$D \left(\frac{DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n}{n^2} \right) \leq \frac{C + C + \dots + C}{n^2} = \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$$

Şeýlelikde

peýdalanmak gerek bolýar.

Onuň ýaly san karakteristika hem dispersiýadyr.

Dispersiýa geçmezden öňürti tötäni ulylygyň özüniň matematik
garaşmasyndyndan gyşarmasyna seredeliň.

1) Tötän ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndyndan gyşarmasy.

Goý X - tötän ulylyk, MX - onuň matematik garaşmasy.
Onda $(X-MX)$ tapawudy (täze) başga tötän ulylyk görnüşinde
seredeliň. Ol tötän ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky ýalydyr:

$X-MX$	x_1-MX	x_2-MX	x_n-MX
P	p_1	p_2	p_n

$(X-MX)$ garaşmanyň matematik garaşmasy nula deňdir, ýagny
 $M(X-MX)=MX-M(MX)=MX-MX=0.$

§8. Dispersiýa we onuň häsiýetleri.

Kesgitleme. X tötäni ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndyndan
gyşarmasynyň kwadratynyň matematik garaşmasyna şol X tötäni
ulylygyň dispersiýasy diýilýär we ol şeýle bellenýär:

$$D\bar{X} = M[\bar{X} - M\bar{X}]^2 \quad (1)$$

Eger \bar{X} tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny

X	x_1	x_2	x_k
P	p_1	p_2	p_k

Bolsa, onda $(X-MX)^2$ tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky
ýaly bolar

$(X-MX)^2$	$(x_1-MX)^2$	$(x_2-MX)^2$	$(x_k-MX)^2$
P	p_1	p_2	p_k

Diýmek, onda matematik garaşmanyň kesgitlemesinden

$$DX = M[X - MX]^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - MX)^2 \cdot P_k \quad (2)$$

Dispersiýany hasaplamak üçin köplenç aşakdaky (3) formulany peýdalanýarlar

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 \cdot p_k = \sum_k (x_k^2 - 2x_k \cdot MX + (MX)^2) p_k = \sum_k x_k^2 \cdot p_k - 2MX \cdot \sum_k x_k p_k + (MX)^2 \cdot \sum_k p_k = \sum_k x_k^2 \cdot p_k - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$$

ýagny

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \quad (3)$$

Bu ýerde

X^2	x_1^2	x_2^2	x_k^2
P	p_1	p_2	p_k

Diýmek

$$x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_k^2 \cdot p_k = \sum_k x_k^2 \cdot p_k = MX^2.$$

Dispersiýanyň käbir häsiýetleri.

1) Hemişelik ulylygyň dispersiýasy nula deňdir. Hakykatdanda

$$DC = M[C - MC]^2 = M(C - C)^2 = M0 = 0.$$

2) $C = \text{const}$ bolsa, onda

$$DCX = C^2 \cdot DX.$$

Deňlik hakykatdanda

$$DC = M[CX - M(CX)]^2 = M(C(X - MX))^2 = C^2 \cdot M[X - MX]^2 = C^2 \cdot DX.$$

3) $D(X + Y) = DX + DY$. (eger X we Y garaşsyz bolsalar).

4) $D(X - Y) = DX + DY$.

onda

4) $D(X \cdot Y) = DX \cdot DY$

şonuň üçin ony aşakdaky ýaly ýazýarys

$$|x_j - a|^2 \geq \varepsilon^2$$

(3) deňsizlikde skobkanyň içini ε bilen çalşyryp alarys

$$DX \geq \varepsilon^2 \cdot p_{k+1} + \varepsilon^2 \cdot p_{k+2} + \dots + \varepsilon^2 \cdot p_n \quad (4)$$

ýa-da

$$p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Ýöne

$p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_k$ jem $P\{|X - a| \geq \varepsilon\}$ ähtimallygy aňladýar. Şonuň üçin

$$P\{|X - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}, \text{ ýa-da ony (1) goýup alarys:}$$

$$P\{|X - a| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad (5)$$

subudy gutardy.

Şeýlelikde Çebyşewiň deňsizligi diňe $(X - MX)$ gyşarmanyň ähtimallygynyň otrisatel dälidigini görkezýär. Çebyşewiň deňsizliginiň ähmiýeti örän ulydyr. Ony Çebyşewiň teoremasyny subut etmek üçin hem ulanýarlar.

2. Çebyşewiň teoremasy.

Teorema. Eger x_1, x_2, \dots, x_n tötäni ulylyklar jübüt-jübütdeň özara bagly bolmasa, bu ulylyklaryň dispersiýasy hemişelik C sandan uly bolmasa, ýagny $DX_1 \leq C, DX_2 \leq C, \dots, DX_n \leq C$ bolsa onda islendik kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin, tötäni ulylyklaryň sany n ýeterlikçe uly bolanda

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \quad (6)$$

(wakanyň) deňsizligiň ähtimallygy 1-e has golaýdyr, ýagny

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

ýönekeýdir. Bu teoremlary subut etmek üçin Çebyşewiň deňsizligini peýdalanýarys.

1. Çebyşewiň deňsizligi.

Çebyşewiň deňsizligi diskret we üznüksiz tötäni ulylyklar üçin dogrydyr. Biz bu ýerde deňsizligiň subudyny diskret tötäni ulylyk üçin görkezjekdiris.

Paýlanyş tablisasy

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

görnüşde berlen diskret tötäni ulylyga seredeliň. Goý MX we DX degişlilikde X tötäni ulylygyň matematik garaşmasy we dispersiýasy bolsun. $\varepsilon > 0$ položitel san.

Çebyşewiň deňsizligi. X tötäni ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndanyň gysarmasy absolýut ulylygyň boýunça ε položitel sandan kiçidir diýen wakanyň ähtimallygy $\left(1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}\right)$ -den kiçi däl:

$$P\{|X-MX| < \varepsilon\} \geq \left(1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}\right). \quad (1)$$

Subudy. $|X-MX| < \varepsilon$ we $|X-MX| \geq \varepsilon$ deňsizlikleri aňladýan wakalar, özara garşylykly, şonuň üçin hem olaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir:

$$P\{|X-MX| < \varepsilon\} + P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} = 1$$

Bu ýerden

$$P\{|X-MX| < \varepsilon\} = 1 - P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \quad (2)$$

Goý $MX = a$.

Onda

$$DX = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \dots + (x_n - a)^2 p_n$$

Indi, aşadaky görnüşde ýazalyň

$$DX \geq (x_1 - a)^2 p_{k+1} + (x_2 - a)^2 p_{k+2} + \dots + (x_n - a)^2 p_n \quad (3)$$

$|x_j - a| \geq \varepsilon$ ($j = k+1, k+2, \dots, n$) deňsizligiň iki tarapy hem položitel,

Orta kwadratik gysarma.

Kesgitleme. X tötäni ulylygyň dispersiýasyndan alnan kwadrat köke şol X tötäni ulylygyň orta kwadratik gysarmasy diýilýär we ol şeýle bellenilýär

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}$$

Bellik. Binomial paýlanyşyň dispersiýasy, ýagny $DX = npq$ formula bilen hasaplanýar. Onda $\sigma(X) = (npq)^{1/2}$ bolar.

§9. Üznüksiz tötän ulylyklar.

9. Integral paýlanyş funksiýasy.

Belli bolşy ýaly, diskret tötäni ulylygy, ol ulylygyň mümkin bolan bahalary x_1, x_2, \dots, x_n we degişli ähtimallyklarynyň p_1, p_2, \dots, p_n üsti bilen bermek mümkin.

Üznüksiz tötäni ulylygy ol ulylygyň mümkin bolan bahalarynyň we oňa degişli bolan ähtimallyklarynyň üsti bilen bermek mümkin däl.

Goý x hakyky san bolsun. X tötäni ulylygyň x -dan kiçi bahalary kabul edýändiginiň, $(X < x)$ wakanyň ähtimallygy, x görä funksiýa bolar, ony $F(x)$ diýip belleýäris. Onda $P\{X < x\} = F(x)$ bolar.

Bu $F(x)$ funksiýa ähtimallygyň integral paýlanyş funksiýasy diýilýär. Eger $F(x)$ üznüksiz bolsa, onda X tötäni ulylyk üznüksizdir.

2. Integral paýlanyş funksiýanyň häsiýetleri.

1) Paýlanyş funksiýanyň bahalary $[0, 1]$ kesimiň içindedir, ýagny $0 \leq F(x) \leq 1$.

2) $F(x)$ kemelmeýän funksiýadyr, ýagny $F(x_2) \geq F(x_1)$ eger-de $x_2 > x_1$. Subudy. Goý $x_2 > x_1$ bolsun. $(X < x_2)$ diýen (wakany) tassyklamany 2 sany sygyşmaýan waka hökmünde seredip bolar.

a) $(X < x_1)$ wakanyň ähtimallygy $P(X < x_1)$;

b) $(x_1 \leq X < x_2)$ wakanyň ähtimallygy $P(x_1 \leq X < x_2)$. Bu wakalar sygyşmaýan wakalardyr. Şonuň üçin goşmak teoremasyny esasynda

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

Onda bu ýerden

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$$

$$\text{ýa-da } P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\text{emma } F(x_2) - F(x_1) \geq 0 \text{ ýa-da } F(x_2) \geq F(x_1).$$

a) Eger X tötäni ulylyk (a, b) aralykda baha alýan bolsa, onda

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Mysal. X tötäni ulylygynyň integral funksiýasy berlen:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq -1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & \text{eger } -1 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{eger } x > 3. \end{cases}$$

Synagyň netijesinde X tötäni ulylygynyň $(0, 2)$ aralykda baha alýandygynyň ähtimallygyny tapmaly.

$$P\{0 < X < 2\} = F(2) - F(0) = \left(\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$P\{0 < X < 2\} = \frac{1}{2}.$$

b) Eger X tötäni ulylygynyň alýan bahalary (a, b) aralyga degişli bolsa, onda $(X \leq a)$ wakanyň ähtimallygy nula deňdir, $(X > b)$ wakanyň ähtimallygy bolsa bire deňdir, ýagny

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq a, \\ 1, & \text{eger } x > b. \end{cases}$$

Integral funksiýanyň grafigi.

Eger $x \leq a$ bolsa grafigiň ordinatasy nula deňdir, eger $x > b$ bolsa, onda grafigiň ordinatasy bire deňdir. Ol grafik aşakdaky ýaly bolar

Şu formuladan peýdalanyň dispersiýanyň hasaplanyş formulasyny aşakdaky ýaly ýazyp bolýar

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \text{ ýa-da}$$

$$DX = v_2 - v_1^2.$$

Indi bolsa $(X - MX)$ gyşarmanyň momentine seredeliň.

Kesgitleme. $(X - MX)^k$ ulylygynyň matematik garaşmasyna, k derejeli merkezi moment diýilýär. Ol μ_k bilen bellenilýär, ýagny

$$\mu_k = M[X - MX]^k$$

Hususy halda

$$\mu_1 = M[X - MX] = 0.$$

$$\mu_2 = M[X - MX]^2 = DX$$

Şu aşakdaky formulalary almak kyn däldir:

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4.$$

§19. Uly sanlaryň kanuny.

Tötäni ulylygynyň synagyň netijesinde haýsy bahany alyp biljekdigini öňünden görkezmek kyn bolýar. Munuň özi köp sebäplere bagly bolýar. Bu sebäpleriň hemmesini hasaba alyp bilmeýäris. Görüp durşumyz ýaly her bir tötäni ulylyk hakta az maglumat bolany üçin ýeterlik köp sandaky tötäni ulylyklaryň jeminiň özüni alyp barşyndaky kanunlaryny anyklamak mümkin däl ýaly görünýär. Emma bu beýle däl. Käbir giň ulylygynyň toplumy şertlerde ýeterlik köp sandaky tötäni ulylygynyň jeminiň özüni alyp barşy tötänlik häsiýetini ýitirýär we kanuna laýyk galýar. Praktikada örän köp jemleýji täsiriniň tötänligi bagly bolmadyk netijä getirýän şertleri bilmek wajypdyr, çünki ol hadysalaryň gidişini öňünden bilmeklige mümkinçilik berýär. Şu şertler uly sanlaryň kanuny diýen ulylyga umumy ada, eýe bolan teoremlarda görkezýär. Ol teoremlar esasan Bernulliniň, Çebyşewiň we beýleki birnäçe teoremlardyr. Çebyşewiň teoremasy uly sanlar kanunyna degişli iň uly teoremadyr. Bernulliniň teoremasy bolsa iň

§18. Paýlanyşyň momentleri hakynda düşünje.

Goý diskret X tötäni ulylygynyň paýlanyş kanuny berlen bolsun

X	1	2	5	100
p	0.6	0.2	0.19	0.01

Matematik garaşmasy tapalyň

$$MX = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.19 + 100 \cdot 0.01 = 2.95$$

X^2 -yň paýlanyş kanunyny ýazalyň

X^2	1	4	25	10000
p	0.6	0.2	0.19	0.01

$$MX^2 = 1 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.2 + 25 \cdot 0.19 + 10000 \cdot 0.01 = 106.15.$$

Şu ýerden görnüşi ýaly MX^2 , MX -dan has uly.

Mümkin bolan alyp biljek bahalaryny kwadrata göteren soň, olar has köpeldiler, emma ähtimallyklary bolsa üýtgemedi.

Şeýlelikde MX -dan MX^2 -a geçende matematik garaşma has üýtgedi. Şonuň üçin hem tötäni ulylygynyň bütin položitel derejesiniň matematik garaşmasy tapmagyň manysy bardyr.

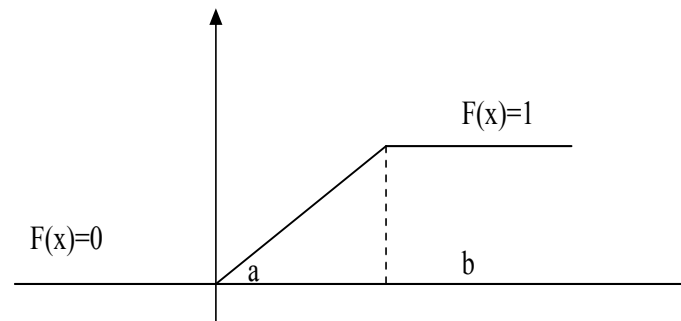
Kesgitleme. X tötäni ulylygynyň k derejesinden alnan matematik garaşma, ýagny MX^k , şol tötäni ulylygynyň k derejeli başlangyç momenti diýilýär we ol v_k bilen bellenilýär, ýagny

$$MX^k = v_k$$

Hususy halda

$$v_1 = MX$$

$$v_2 = MX^2.$$



Mysal. X diskret tötäni ulylygynyň paýlanyş kanuny tablisa arkaly berlen

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Integral funksiýany tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

Cözülişi.

1) Eger $x \leq 1$, onda $F(x) = 0$.

2) Eger $1 < x \leq 4$ bolsa, onda $F(x) = 0,3$.

Bu ýerde X tötäni ulylyk 1-e deň bahany 0,3 ähtimallyk bilen kabul edýär.

3) Eger $4 < x \leq 8$ bolsa, onda $F(x) = 0,4$.

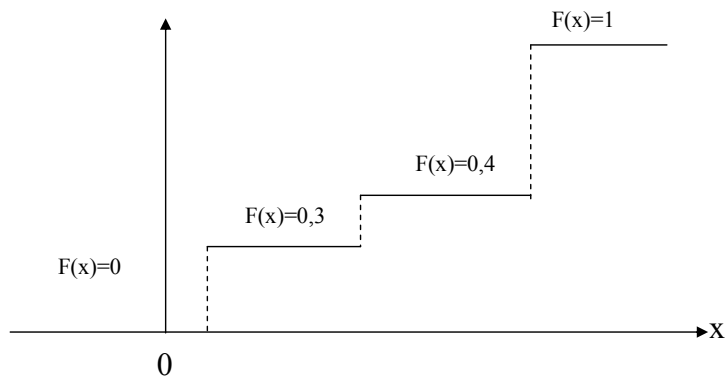
4) Eger $x > 8$ bolsa, onda $F(x) = 1$.

Şeýlelikde integral funksiýa aşadaky ýaly ýazyp bolar

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq 1 \\ 0,3, & \text{eger } 1 < x \leq 4 \\ 0,4, & \text{eger } 4 < x \leq 8 \\ 1, & \text{eger } x > 8. \end{cases}$$

Bu funksiýanyň grafigi aşadaky ýaly bolar

$F(x)$



§10. Üznüksiz tötän ulylygnyň paýlanyşynyň differensial funksiýasy.

Kesgitleme. Integral funksiýanyň 1-nji tertipli önümine, şol üznüksiz tötän ulylygnyň differensial funksiýasy diýilýär we ol $f(x)$ bilen belgilenýär, ýagny $F'(x)=f(x)$.

Bu deňlikden görnüşi ýaly $F(x)$ integral funksiýa, $f(x)$ differensial funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Differensial funksiýa $f(x)$ -a ähtimallygnyň dykzlygy hem diýilýär.

Differensial funksiýanyň häsiýtleri.

1) Üznüksiz X tötän ulylygnyň (a,b) aralkdaky baha alýandygynyň ähtimallygy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Eger $f(x)$ belli bolsa, onda $F(x)$ aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

3) Differensial funksiýa otrisatel däldir: $f(x) \geq 0$.

4) Differensial funksiýadan $-\infty$ -den $+\infty$ çenli alnan hususy däl integral bire deňdir:

$$MX = \frac{1}{\lambda}.$$

Şeýlelikde görkezijili paýlanyşyň matematik garaşmasy λ parametriň ters ulylygyna deňdir.

b) Dispersiýany tapalyň

$$DX = \int_0^{\infty} x^2 f(x) - [MX]^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bölekleyin integrirläp taparys

$$\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Şeýlelikde

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Diýmek

Orta kwadratik gyşarmasy

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \frac{1}{\lambda}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly görkezijili paýlanyş kanunynyň matematik garaşmasy we orta kwadratik gyşarmasy özara deňdir.

Mysal. X üznüksiz tötäni ulylygnyň paýlanyş kanuny berlen $f(x)=5e^{-5\lambda}$, eger $x \geq 0$; $f(x)=0$, $x < 0$.

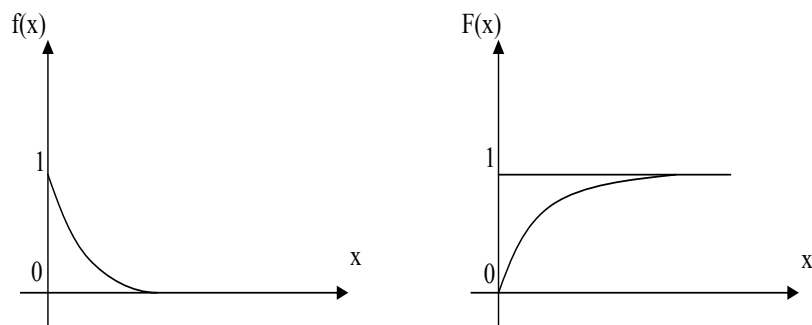
Matematik garaşmany we dispersiýany X üznüksiz tötäni ulylyk üçin tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $\lambda=5$. Onda

$$MX = \sigma(x) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$DX = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04.$$

bolar.



Integral funksiýasy

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Den bolan, görkezijili paýlanyş kanunyna eýe bolan X üznüksiz tötäni ulylygyn (a,b) interwala düşmeginiň ähtimallygyny tapalyň. Belli bolşy ýaly

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Onda $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$ bolýandygyny göz önünde tutup alarys

$$P\{a < X < b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

e^x funksiýanyň bahasy tablisadan tapylýar.

Mysal.

3. Görkezijili paýlanyşyň san karakteristikalary.

Goý üznüksiz X tötäni ulylyk görkezijili paýlanyş kanunyna eýe bolsun

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{eger } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Matematik garaşmasyny tapalyň

$$MX = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx.$$

Bölekleyin integrirläp, alarys

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Mysal. X tötäni ulylygyn differensial funksiýasy aşakdaky deňlik bilen berlen:

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}},$$

a – parametri tapmaly.

Çözülişi. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ formuladan peýdalanýarys, onda aşakdaky deňlik ýerine ýeter

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = 1$$

bu ýerden

$$a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \arctg e^x,$$

Onda

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{e^{-x} + e^x} + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \lim_{b \rightarrow -\infty} (-\arctg e^b) + \\ &+ \lim_{b \rightarrow -\infty} (\arctg e^b) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Şeýlelikde

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}. \quad a = \frac{2}{\pi}.$$

Hususy ýagdaýda, ýagny X tötäni ulylygyn alýan bahalary (a,b) aralyga degişli bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

§11. Üznüksiz tötän ulylyklaryň san harakteristikalary.

Belli bolşy ýaly diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasy

$$MX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k + \dots = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$$

formula boýunça hasaplanýar. Emma üznüksiz tötäni ulylyk üçin matematik garaşma aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (1)$$

ýagny X tötäni ulylygyň mümkin bolan alýan hemme bahalary x okunyň doly üstünde ýatýan bolsa, eger-de X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) aralykda ýatýan bolsa, onda

$$MX = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Şuňa meňzeşlikde üznüksiz tötäni ulylygyň dispersiýasy, aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x) dx \quad (3)$$

Hususy ýagdaýda

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x) dx \quad (4)$$

Diskret tötäni ulylykdaky ýaly dispersiýadan alnan kwadrat köke orta kwadratlik gyşarma diýilýär, ýagny $\sigma(X) = \sqrt{DX}$.

Bellik 1. Matematik garaşma we dispersiýanyň diskret tötäni ulylyk üçin berlen häsiýetleri bu ýerde hem saklanýar.

Bellik 2. Dispersiýany hasaplamak üçin

$$P\{|X-a| < \sigma t\} = 2\Phi(t).$$

Eger $t=3$ bolsa, onda $\sigma t=3\sigma$ bolar.

Onda

$$P\{|X-a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

ýagny $|X-a|$ gyşarmanyň üçeldilen orta kwadratlik gyşarmadan kiçidiginiň ähtimallygy 0,9973 sana deňdir.

Başgaça $|X-a|$ gyşarmanyň, orta kwadratlik gyşarmanyň üçeldilenden ulydygynyň ähtimallygy örän az we 0,0027 sana deň. Bu bolsa 0,27% şeýle bolup biljekdigini aňladýar. Munuň ýaly wakalar has az ähtimallyga eýedir. Ony praktiçeski bolup bilmeýän waka diýip bolýar.

Eger tötäni ulylyk normal paýlanyş kanunyna eýe bolsa, onda onuň matematik garaşmasyndan gyşarmasy absolýut ulylygy boýunça üçeldilen orta kwadratlik gyşarmadan uly däl. Üç sigma düzgüniniň manysy şundan ybaratdyr.

§17. Görkezijili paýlanyş kanuny.

1. Görkezijili paýlanyşyň kesgitlenişi.

Egerde differensial funksiýasy aşakdaky görnüşde, ýagny

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{eger } x \geq 0. \end{cases}$$

(bu ýerde λ hemişelik položitel ulylyk) berlen bolsa onda bu paýlanyşa ähtimallygyň görkezijili (eksponensial) paýlanyş diýilýär.

Bu ýerden görnüşi ýaly, görkezijili paýlanyş diňe bir λ parametr bilen kesgitlenýär.

Görkezijili paýlanyşyň integral funksiýasyny tapalýň

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Differensial we integral funksiýalaryň grafikleri aşakdaky ýaly

§15. Berlen gyşarmanyň ähtimallygynyň hasaplanyşy.

Goý normal paýlanyşa eýe bolan X tötäni ulylygynyň gyşarmasy absolýut ulylygy boýunça berlen δ položitel sandan kiçidiginiň ähtimallygyny, ýagny $|X - a| < \delta$ deňsizligiň ähtimallygyny tapmak talap edilsin.

Deňsizligi şeýle ýazalyň

$$-\delta < X - a < \delta$$

ýa-da

$$a - \delta < X < a + \delta$$

formuladan peýdalanyp alarys

$$P\{|X - a| < \delta\} = P\{a - \delta < X < a + \delta\} = \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right] - \Phi\left[-\frac{\delta}{\sigma}\right].$$

Emma

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

onda

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

eger $a=0$, onda

$$P\{|X| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

§16. Üç sigma düzgüni.

Öňki punktdaky

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

formulany ýönekeýleşdireliň.

Goý $\delta = \sigma t$ bolsun. Onda

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [MX]^2$$

ýa-da

$$DX = \int_a^b x^2 f(x) dx - [MX]^2$$

formulalary getirip çykarmak kyn däldir.

Mysal. Eger X tötäni ulylygynyň integral funksiýasy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq 0 \\ x, & \text{eger } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{eger } x > 1. \end{cases}$$

berlen bolsa, onda matematik garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi. Differensial funksiýany tapýarys

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq 0 \\ 1, & \text{eger } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{eger } x > 1. \end{cases}$$

$$MX = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Indi dispersiýasyny tapýarys.

$$DX = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Üznüksiz tötän ululyklaryň paýlanyş kanunlary.

§12. Deňölçegli paýlanyş kanuny.

Praktikada käbir meseleleri çözeňde üznüksiz tötäni ulylygynyň paýlanyşynyň dürli görnüşlerine duş gelinýär. Şol paýlanyşlaryň differensial funksiýasy paýlanyş kanuny hem diýip atlandyryrlar. Ol paýlanyş kanunlarynyň içinde has köp düş

gelýäni deňölçeqli we normal paýlanyş kanunlarydyr.

Eger X tötäni ulylygyny (üzüksiz) hemme bahalary (a, b) aralykda deňişli bolsa, hem-de şol aralygynyň ähli nokatlarynda, X tötäni ulylygynyň differensial funksiýasy $f(x)$ hemişelik bolsa, ýagny $f(x)=C$ bolsa, onda şeýle paýlanyşa deňölçeqli paýlanyş diýilýär.

Belli bolşy ýaly

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

eger-de $x \in (a, b)$ bolsa.

Biziň goýýan şertimize görä, $f(x)=C$ $C \in (a, b)$, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C \cdot dx = 1$$

ýagny

$$C \cdot x \Big|_a^b = 1 \quad \text{ýa-da} \quad C(b-a)=1.$$

$$\text{bu ýerden} \quad C = \frac{1}{b-a}.$$

Şeýlelikde deňölçeqli paýlanyş kanuny analitik görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{eger } -a < x \leq b, \\ 0, & \text{eger } x > b. \end{cases}$$

Deňölçeqli paýlanyşynyň differensial funksiýasynyň grafiki aşakdaky ýaly bolar

$$\text{eger } x=\beta \text{ bolsa, onda } Z = \frac{\beta - a}{\sigma} \text{ bolar.}$$

Şeýlelikde

$$\begin{aligned} P\{\alpha < X < \beta\} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Laplasynyň

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

formulasından peýdalanyp alarys

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Mysal.

Goý X tötäni ulylyk normal paýlanyş kanunyna eýe bolsun. $MX=30$, $\sigma(X)=10$ bolsun. X tötäni ulylygynyň $(10, 50)$ interwalda ýatýan baha aljakdygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Şerte görä $\alpha=10$, $\beta=50$, $a=30$, $\sigma=10$. Onda

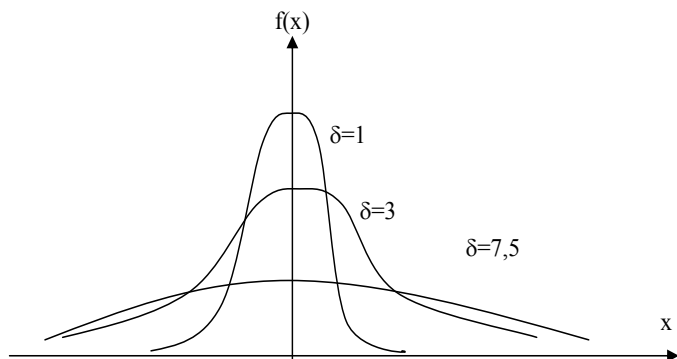
$$P\{10 < X < 50\} = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Tablisa boýunça

$$\Phi(2)=0,4772$$

Onda

$$P\{10 < X < 50\} = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$$



Eger $a=0$, $\sigma=1$ bolsa, onda

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Egri çyzyga normirlenen diýilýär.

§14. Normal tötän ulylygyň berlen aralyga düşmekliginiň ähtimallygy.

Belli bolşy ýaly, eger X tötän ulylyk $f(x)$ differensial funksiýa bilen berlen bolsa, onda X ulylygyň $(\alpha; \beta)$ aralykda baha aljakdygynyň ähtimallygy aşakdaky ýaýy bolar

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

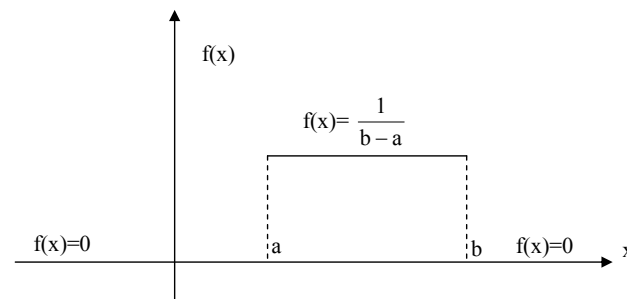
Goý X tötäni ulylyk normal paýlanyş kanuna eýe bolsun. Onda

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Bu formulany tablisadan peýdalanyp bolar ýaly ýönekeýleşdireliň.

Şonuň üçin $Z = \frac{x-a}{\sigma}$ belläliň. Onda $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$ bolar. Indi

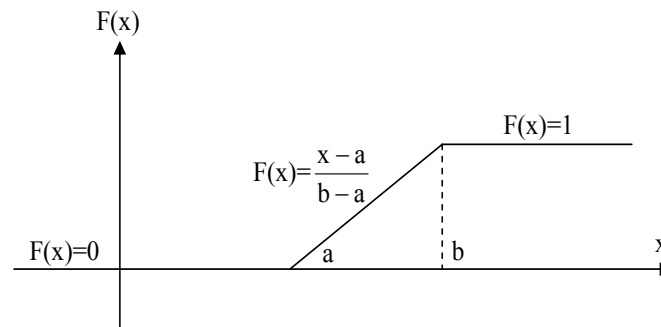
integrirlemäniň täze predelini tapalyň. Eger $x = \alpha$, onda $Z = \frac{\alpha - a}{\sigma}$,



Integral funksiýa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{eger } a < x \leq b, \\ 1, & \text{eger } x > b. \end{cases}$$

Onuň grafigi



§13. Normal paýlanyşyň kanuny.

Eger

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

bolsa, onda bu paýlanyşa normal paýlanyş diýilýär, ýagny

differensial funksiýasy (1) deňlik bilen kesgitlenýän paýlanyşa normal paýlanyş diýilýar.

Görüşimiz ýaly normal paýlanyş iki sany a we σ parametrler bilen kesgitlenýär.

a - matematik garaşma,

σ - orta kwadratik gyşarma.

a) Matematik garaşmany hasaplalyň

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = a. \end{aligned}$$

Bu integraly hasaplamak üçin üýtgeýän ulylyklary çalşyrmakdan peýdalanalyň

$$\frac{x-a}{\sigma} = z, \quad x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz.$$

Onda

Bu ýerde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$, şonuň üçin

$$MX = a$$

b) Indi dispersiýany hasaplalyň, $DX = a$ bolýandygyny göz önünde tutup alarys

$$DX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ýene-de belläp alýarys

onda $x-a = \sigma z$, $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$.

Predeliniň üýtgeýändigini göz önünde tutup alarys

$$DX = \frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Bölekleyin integrirlemek boýunça $u=z$

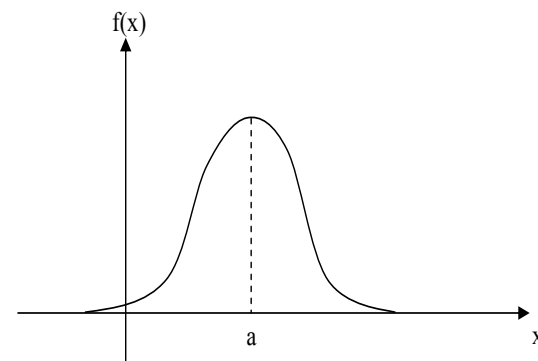
Taparys $DX = \sigma^2$, onuň $\sigma(x) = \sigma$.

Şeýlelikde normal paýlanyşyň orta kwadratik gyşarmasy σ parametre deňdir.

Eger $a=0$, $\sigma=1$ onda normal paýlanyşa normirlenen diýilýär.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bu funksiýa üçin tablisa bardyr. Önümiň kömegi bilen funksiýany doly derňemek teoriýasynda peýdalanyp $f(x)$ funksiýanyň grafigin gurup bolýar.



Bu ýerde a parametr egri çyzygyň formasyna täsiri ýokdyr. Diňe saga ýa-da çepesüýşmegine täsiri bardyr. Emma σ egri çyzygyň görnüşini üýtgedýär.

Belli bolşy ýaly normal paýlanyşyň differensial funksiýasynyň

maksimumy $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ -e deň. Bu ýerden görnüşi ýaly, eger σ artýan

bolsa, onda normal egriniň ordinatasy kemelýär, egriniň özi bolsa, x -okuna gysylýar, eger σ kemelýän bolsa onda egriniň depesi has-da ýitileşýär (çyzga seret).

Üçünji bölüm

§ 1. 1. Matematiki statistika düşünjeleri. Saýlama usuly.....	64
§ 1. 2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.....	65
§ 2. Empirik paýlanyş funksiýasy.....	66
§ 3. Poligon we gistogramma.....	69
§ 4. Paýlanyşyň parametrleriniň statistik bahalary.....	71
§ 5. Süýürilmedik, effektiv we durnukly bahalar.....	71
§ 6. Baş orta baha.....	73
§ 7. Saýlama orta baha.....	73
§ 8. Baş orta bahanyň saýlama orta baha boýunça bahalandyrylyşy.....	74
§ 9. Umumy we toparlaýyn orta bahalar.....	75
§ 10. Umumy orta bahadan gyşarma we onuň häsiýeti.....	75
§ 11. Baş dispersiýa.....	76
§ 12. Saýlama dispersiýa.....	76
§ 13. Takyk baha. Ynamly ähtimallyk (ynamdarlyk). Ynamly aralyk.....	77
§ 14. Normal paýlanyşyň σ belli bolanda matematik garaşmasynyň bahasy üçin ynamly aralygy.....	78
§ 15. Wariasion hataryň beýleki häsiýetnamalary.....	80
§ 16. Saýlamanyň ýygnaýan häsiýetnamasyny hasaplamak usuly.....	81
§ 17. Adaty, başlangyç we merkezi empirik momentler.....	81
§ 18. Şertli empirik momentler. Merkezi momentleri şertli momentler arkaly. aňlatmak.....	82
§ 19. Saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplamakda köpeltmek usulynyň ulanylyşy.....	83
§ 20. Asimmetriýa we eksses.....	86
§ 21. Korrelýasiýa teoriýasynyň elementleri.....	87
§ 22. Şertli orta baha. Korrelýasion baglylyk.....	88
§ 23. Korrelýasiýa teoriýasynyň esasy iki meselesi.....	89
§ 24. Göni çyzykly regressiýasynyň saýlama deňlemesiniň parametrleriniň gözleniş.....	89
§ 25. Korrelýasion tablisa.....	92
§ 26. Göni çyzykly regressiýasynyň deňlemesiniň saýlama parametrleriniň gözleniş. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisienti.....	93
§ 27. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň häsiýetleri.....	96
§ 28. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientini hasaplamakda dört meýdan usuly.....	98