TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Pirjanow B, Alçekow. A.

Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika

Aşgabat 2010

Giriş.

Täze Galkynyşlar eýýamynda Türkmenistan döwletimiz halk hojalygynyň ähli pudaklarynda, ylymda, bilimde, medeniýetde uly sepgitlere ýetdi we badyny gowşatman ähli babatlarda täze-täze ýeňişlere tarap öňe barýar.

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň parasatly ýolbaşçylygynda bilim we ylym ulgamlarynda örän düýpli tutumlar amala aşyrylýar. Ol ylym-bilimi ösdürmezden, täze tehnologiýalary önümçilige ornaşdyrmazdan, halk hojalygynyň pudaklaryny düýpli ösdürmegiň mümkin däldigini ençeme çykyşlarynda nygtap-nygtap aýdyp gelýär. Muny Hormatly Prezidentimiziň 2009-njy ýylyň 12-nji iýunynda Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde: “Häzirki şertlerde islendik döwletiň kuwwaty we gülläp ösüşi, ilkinji nobatda, ylmyň we tehnologiýalaryň, jemgyýetiň intellectual derejesi bilen kesgitlenýär” diýip aýdan sözi hem tassyklaýar.

Häzirki döwürde halkymyzyň hal-ýagdaýynyň has-da gowulanmagy, mähriban Watanymyzyň gülläp ösmegine, onuň ösen ýurtlarynyň öňdäki hataryna deňleşmegi üçin biziň hemmämize ylmyň iň täze gazananlaryny, öňdebaryjy tehnologiýalary önümçilige ornaşdyryp, özümiziň ylmy garaýyşlarymyzy has-da çuňlaşdyrmagymyz gerek. Eger şeýle etsek, onda biziň eziz Diýarymyz mundane buýana-da pajarlap öser.

Şu nukdaý nazardan matematikanyň ylymynyň häzirki zamanda has artmagy geljekki inženerleriň, ykdysadyýetçileriň we ylmy işgärleriň matematiki taýýarlygynyň ýokary bolmagyny talap edýär. Matematikany öwrenmek adamda logiki oýlanmany, takyk bolmagy, çylşyrymly hadysalary ýönekeýleşdirmegi we her bir meseläni çuňňur düşünmekligine terbiýeleýär.

Bu okuw kitaby, ýokary okuw jaýlarynyň talyplarynyň matematikany bilmekligine ýardam etmek maksady bilen tehniki ýokary okuw jaýlarynda häzirki hereket edýän maksatnama laýyklykda ýazyldy we ol awtorlaryň ençeme ýyllaryň dowamynda “Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika” bölümini okatmak tejribeleriniň esasynda döredi.

Bu kitapda teoretiki materialy berkitmek üçin ýeterlik sanda mysallar hem getirilýär.

Kitap tehniki ýokary okuw jaýlarynyň inženerçilik, ykdysatçylyk hünärleriniň talyplary üçin, şonuň ýaly hem inženerler, ykdysadyýetçiler şeýle-de ähtimallyklar we statistiki usullary önümçilik meselelerini çözmelikde ulanýan hünärmenler üçin niýetlenendir.

Birinji bölüm.
§1.Ähtimallyklar teoriýasy hakynda esasy düşünjeler.

1.Ähtimallyklar teoriýasynyň döräp başlan wagtyny adatça XVII asyra degişli edip, ony gyzyklandyryjy(humarly) oýunlary kombinatoriki meseleleri bilen baglanyşdyrýarlar. Gyzyklandyryjy(humarly) oýunlara,elbetde möhüm kesp ýaly garamak bolmaz. Ýöne XVII asyryň matematiki modelleriniň çäginde ýerleşdirip bolmaýan meseleleri hut humarly oýunlar ýüze çykardy we şeýlelikde, olar täze-täze çemeleşmeleriň, düşünjeleriň ideýalaryň ýüze çykmagyna itergi berdi. Ol ideýalary ilki başda girizenler Ýa. Bernulli, Laplas, Gauss, Paskal, Ferma we başgalardyr.

Ähtimallyklar teoriýasynyň praktiki ähmiýeti, aýdyň manysy hakyky ýa-da hyýalymyzdaky tejribeler, synaglar, hadysalar bilen baglanşykly ýüze çykýar. Haýsy-da bolsa bir hadysa gözegçilik edilmegine synag ýa-da tejribe diýilýär.
Synagyň tejtibäniň gözegçiligiň netijelerini (terminologiki bellik üçin) baha diýip atlandyrýarys.
Synagyň bolup biljek her bir netijesi elementar wakadyr. Elementar wakalaryň köplügine elementar wakalaryň giňişligi diýilýär.
2.Biziň gözegçilik edýän wakalarymyz esasan üç bölege bölünýär:
1) hökmany waka;
2) mümkindäl waka;
3) tötän waka.

Eger S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirilende mydama ýüze çykýan waka hökmany waka diýilýär we ol U bilen belgilenýär.
Meselem, normal atmosfera basyşynda we 20° temperaturada «gapdaky suw suwuk haldadyr» diýen waka hökmany wakadyr. Bu ýerde suwuň atmosfera basyşy we temperaturasy S şertleriň kesgitli toplumyny düzýär.

Eger S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirilende hiç ýüze çykmaýan waka mümkindäl waka diýilýär.
Meselem, öňki mysalyň şertlerinde «gapdaky suw buz görnüşdedir (gaty haldadyr)» diýen waka mümkindäl wakadyr we V bilen belgilenýär.
S şertleriň kesgitli toplumynda ýüze çykjagyny ýa-da çykmajagyny öňünden aýdyp bolmaýan waka tötän waka diýilýär we ol A,B,C,... harplar bilen belgilenýär.
Meselem. Atyjy 4 bölege bölünen nyşana ok atýar. Ok atmak bu synag. Nyşanyň belli bir bölegine okuň degmegi tötän wakadyr. Bu ýerde S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirildi diýmeklik – synag sözi bilen çalşyryldy. Mundan beýläk biz ony – synag diýip alarys.
Şeýlelikde synagyň netijelerini waka hökmünde seretjekdiris.
Eger şol bir synagda bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmagyny aradan aýyrýan bolsa, onda onuň ýaly wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär.Meselem:Teňňe ýokaryk zyňylýar. Şonuň şekilli ýüzüniň düşmegi, onuň ýazgy ýüzüniň düşmegini aradan aýyrýar. «Şekilli ýüzi düşdi» we «ýazgy ýüzi düşdi» diýen wakalar sygyşmaýan wakalardyr. Eger synagyň netijesinde birnäçe wakalaryň iň bolmanda biri ýüze çykýan bolsa onda ol wakalar doly topary emele getirýärler.Başgaça aýdanyňda doly topary emele getirýän wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr.Hususy halda eger doly topary düzýän wakalar jübüt-jübütden sygyşmaýan wakalar bolsalar onda tejribäniň netijesinde olaryň biri we diňe biri hökman ýüze çykýar.
Meselem, atyjy nyşana ok atýar.Okuň nyşana degmegi we degmezligi şolar ýaly wakadyr. Eger A we $\overline{A}$ wakalar üçin AU$\overline{A}$=U, A$\cap\overline{A}$ =$\vee$ iki gatnaşyk bir wagtda ýerine ýetseler onda A we A wakalara garşylykly wakalar diýilýär.Meselem nyşana ok atylanda oňa okuň degmegi we degmezligi garşylykly wakadyr.Eger okuň degmegi A waka bolsa,onda okuň degmezligi A waka bolar.

A we B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýa-da olaryň ikisiniň hem şol bir wagtyň özünde ýüze çykmagyny aňladýan waka A we B wakalaryň jemi diýilýär. Ol A+B ýa-da $A \cup B$ bilen bellenilýär.
A we B wakalaryň ikisiniň hem şol bir wagtda ýüze çykmagyndan ybarat waka A we B wakalaryň köpeltmek hasyly diýilýar. Ol AB ýa-da $A \cap B$ bilen bellenilýär.
Eger

$$U=B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ...B_n$$

bolsa we B_i-wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolsalar,ýagny $B_i \cap B_j = \vee$, $i \neq j$ onda $B_1,B_2,B_3,...,B_n$ wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalaryň doly toparyny emele getirýär. Bu ýagdaýda B_i-wakalaryň biri diňe biri synag netijesinde i hökman ýüze çykmalydyr.
Tötän wakalar üçin:
Kommutatiwlik A+B=B+A, AB=BA;
Assosiatiwlik A+(B+C)=(A+B)+C;
Distributiwlik $A \cap (B+C)=AB+AC$.
kanunlary ýerine ýetýärler.

§2. Ähtimallygyň klasiki kesgitlemesi.

Ähtimallyk-ähtimallyklar teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biri hasaplanýar. Bu düşünjäniň bir-näçe kesgitlemesi bardyr. Bu ýerde klassik kesgitleme diýilýän kesgitlemäni berýäris.
Mysala seredeliň. Goý gapyrjakda 6 sany birmeňzeş formaly, ýöne dürli reňkli şarlar bar bolsun. Olaryň 2 sanysy gyzyl reňkli, 3-si gök reňkl we 1 sanysy ak reňkli şar bolsunlar,Şarlar garyşan bolsun.
Biz gapyrjakdan reňkli (gyzyl ýada gök) şary çykarmak mümkinçiligini mukdar taýdan häsiýetlendirmek meselesine, ýagny reňkli şary çykarmak meselesine garap geçeliň.Bu ýerde gapyrjakdan çykarylan bir şaryň reňkli bolmagynyň mümkinçiligi ol şaryň ak bolmagyndan uludyr.Eger şol

mümkinçiligi san taýdan aňladyp bolýan bolsa,onda şol sana A wakanyň reňkli şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.Şunlukda, ähtimallyk munuň özi wakanyň ýüze çykmagyny häsiýetlendirýän sandyr.Başgaça aýdylanda tötän wakanyň ýüze çykmagynyň ölçegine şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.Elementar wakalaryň bizi gyzyklandyrýan wakanyň ýüze çykmagyna gatnaşýanlaryna şol waka ýardam edýän elementar wakalar diýilýär. Elementar wakalary $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_8$ diýip belläliň. Biziň mysalymyzda 6 sany elementar waka bolup biler. w_1 ak şar ýüze çykdy,w_2,w_3 gyzyl şar ýüze çykdy, w_4,w_5,w_6- gök şar ýüze çykdy diýen wakalardyr.,Bu netijeleriň her biri ýeke-täk mümkinçilikli wakalar, ýagny şar hökman ýüze çykmaly we olar deň mümkinçiliklidir. A wakanyň reňkli şaryň ýüze çykmagyna 5 sany elementar waka gatnaşýar.Şarlar garyşdyrylan,hemmesi meňzeş formaly, hem-de olar tötänleýin çykarylýarlar.

Biziň mysalymyzda A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň (olar 5 sany) sanynyň elementar wakalaryň umumy sanyna (olar 6 sany),ýagny 5/6-sana ,A wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol P(A) bilen belgilenýär.Bu san (5/6) şu mysalda çykarylan şaryň reňkli bolmagynyň ähtimallygyny berýän san. Şol sana hem biziň mysalymyzda reňkli şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.

Şeýlelikde P(A)=5/6 bolar.

Şu mysaldan ugur alyp, indi biz wakanyň ähtimallygynyň kesgitlemesini bereliň.

Kesgitleme:A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň m-sanynyň, doly topary düzýän, sygyşmaýan, deňmümkinçilikli elementar wakalaryň n umumy sanyna bolan gatnaşygyna A- wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol aşakdaky ýaly belgilenýär.

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Bu ýerde

P(A)-probaity(ähtimallyk) sözüniň birinji harpy,n-doly topary düzýän,sygyşmaýan elementar wakalaryň umumy sany, m-A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany.Bu kesgitlemeden ähtimallygyň aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar.

1)Hökmany wakanyň ähtimallygy bire deňdir,çünki bu halda m=n bolar.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1 \qquad (2)$$

2)Mümkin däl wakanyň ähtimallygy nola deňdir,çünki m=0, Ýagny,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0 \qquad (3)$$

1)Islendik tötän wakanyň ähtimallygy nol we bir arasyndaky

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad (4)$$

§3. Wakanyň otnositel ýygylygy. Ähtimallygyň statistiki kesgitlenişi.

Şol bir synag birnäçe gezek geçirilende A-waka birnäçe gezek ýüze çykar we birnäçe gezek ýüze çykman biler. Synaglaryň sanyny näçe köpeltsek, onda şol A-wakanyň ýüze çykýan sany hem üýtgär. Goý synaglaryň sany n-bolsun, A-wakanyň ýüze çykýan synaglaryň sany m bolsun. Onda m-sanyň (A-wakanyň näçe gezek ýüze çykandygyny aňladýan san) n-sana (synaglaryň umumy sany) bolan gatnaşygyna, A-wakanyň otnositel ýygylygy diýilýär we ol W(A) bilen bellenilýär, ýagny

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Bu ýerde n-synaglaryň umumy sany, m bolsa A-wakanyň näçe gezek ýüze çykandygyny aňladýan san.

Emma synaglaryň sanyny köpeltsek, ony $\overline{n}$ bilen belläliň, onda m-san hem ulalar, ýöne her bir ýagdaýda wakanyň otnositel ýygylygy dürliçe bolsa-da, şol bir hemişelik sana ýakyn bolýandygyny tejribeler görkezýär. Şol hemişelik sana hem A-wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol obýektiw ululykdyr. Eger wakanyň ähtimallygy deregine onuň otnositel ýygylygy alynsa, onda onuň ýaly kesgitlenen ähtimallyga, ähtimallygyň statistiki kesgitlenişi diýilýär.

Tötän wakanyň otnositel ýygylygy bilen ähtimallygynyň arasyndaky tapawut şu aşakdakydan ybaratdyr: Ähtimallyk tejribe geçirilmänkä hasaplanýar, emma otnositel ýygylyk bolsa tejribe geçirilenden soň hasaplanýar.

Ähtimallygyň klasiki kesgitlemesi tükenikli synaglar üçin ulanylýar, emma statistik kesgitlenişi synagyň sany has köp bolanda ýa-da tükeniksiz bolanda ulanylýar. Şonuň üçin hem statistik kesgitlenişi has giň hasaplanylýar.

§4. Ähtimallyklaryň goşmak teoremasy.

Ozal belli bolşy ýaly, iki sany A we B wakanyň jemi diýip (A+B), A-wakanyň ýa-da B-wakanyň, ýa-da bolmasa ikisiniň hem bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar. Hususy halda A we B sygyşmaýan wakalar bolsa, onda A+B (iki wakanyň jemi) diýip, haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar.

Goý A we B sygyşmaýan wakalar bolsun, özi hem bu wakalaryň ähtimallyklary berlen bolsun, onda A ýa-da B wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nädip tapmaly ?

Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema: *Sygyşmaýan iki sany A we B wakalaryň jeminiň ähtimallygy, haýsynyň ýüze çykanynyň tapawudy ýok, şol wakalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir, ýagny*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Subudy: Umumy elementar wakalaryň sany n bolsun. A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany m_1, B-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany m_2 bolsun, onda A bilen B wakanyň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyny aňladýan elementar wakalarynyň sany m_1+m_2 bolar.
Şeýlelikde ähtimallygyň kesgitlemesini ulanyp alarys:
$P(A)=m_1/n$, $P(B)=m_2/n$, $P(A+B) = (m_1+m_2)/n = m_1/n + m_2/n$ bolýandygyny göz öňünde tutup bu ýerden alarys:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Goý $A_1,A_2,...,A_n$ wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolsunlar, onda

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

bolar. Bu fakt induksiýa boýunça subut edilýär.
Teorema: *Doly topary düzýän $A_1,A_2,...,A_n$ wakalaryň jeminiň ähtimallygy bire deňdir, ýagny*

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Subudy: Doly topary düzýän $A_1,A_2,...,A_n$ wakalaryň biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr,hökmany wakanyň ähtimallygy hem bire deň. Onda

$$P(A_1,A_2,...,A_n)=1.$$

Doly toparyň islendik iki wakasy sygyşmaýan waka, şonuň üçin hem goşmak teoremasy esasynda

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

Soňky iki deňlikden

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

gelip çykýar.

<u>Teorema</u>: *Garşylykly iki sany A we $\overline{A}$ wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir, ýagny*

$$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Eger P(A)=p, $P(\overline{A}) = q$ diýip bellesek, onda p+q=1 bolar.

p=P(A) – A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy,

q=P($\overline{A}$) – A waka garşy wakanyň ähtimallygy.

<u>Mysal</u>. Eger ertir ýagyş ýagjakdygynyň ähtimallygy p=0,3 bolsa, onda ertir açyk gün boljakdygynyň ähtimallygy tapmaly.

<u>Çözlüşi</u>.Şerte görä p=0,3. Onda q=1-p=1-0,3=0,7.

Ýagny q=0,7. q=P($\overline{A}$). $\overline{A}$ we A wakalar garşylykly wakalar.

Ähtimallyklaryň köpeltmek teoremasy.

§ 5. Garaşly we garaşsyz wakalar.

Eger A wakanyň ähtimallygy beýleki B wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna bagly bolmasa, onda olara garaşsyz (özara bagly däl) wakalar diýilýär. Tersine bolsa ýagny A wakanyň ähtimallygy B wakanyň ýüze çykmagyna bagly bolsa, onda olara garaşly (özara bagly) wakalar diýilýär.

Mysal. Teňňe iki gezek ýokaryk zyňylýar. Şekilli ýüzüniň düşmeginiň ähtimallygy (A waka) ikinji gezek (B waka) zyňylanda gerb ýüzüniň düşmegine ýa-da düşmezligine bagly däl.

Şeýelelikde A we B waka biri birine bagly däl (garaşsyz).

Bir näçe wakalaryň her ikisi özara biri – birine garaşsyz bolsa, onda olara jübüt – jübütden garaşsyz (bagly däl) wakalar diýilýär.

<u>Mysal</u>. Teňňe üç gezek ýokaryk zyňylýar. Goý A,B,C degişlilikde gerb ýüzüniň ýüze çykmagy bolsun, ony birinjide

A, ikijide B, üçünjide C diýip belleýäris. Şu seredýän her bir iki wakamyz (A we B), (A we C), (B we C) bagly däl. Şeýlelikde A,B,C wakalar jübüt-jübütden bagly däldirler.

Eger birnäçe A_1 , A_2 , A_3 - wakalryň her biri, ýa-da olaryň islendik kombinasiýasy (galan hemme wakalry ýa-da olaryň käbir bölegini özünde saklaýan) garaşsyz (bagly däl) wakalar bolsalar, onda olara toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) waklar diýilýär. Eger birnäçe wakalar jübüt-jübütden bagly däl bolsalar, onda olara toplumlaýyn bagly däl wakalar diýip bolmaýar.

Şu manyda toplumlaýyn bagly däl diýmek talaby,jübüt-jübütden bagly däl talabyndan güýçlidir.

Meselem, eger A_1 ,A_2 ,A_3 wakalar toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) bolsalar onda A_1 we A_2 , A_1 we A_3 , A_2 we A_3 ,A_1A_2 we A_3 , A_1A_3 we A_2 , A_2A_3 we A_1 wakalar garaşsyz (bagly däl) wakalrdyr

§6. Garaşsyz wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.

<u>Teorema</u>: Bagly däl (garaşsyz) A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$$

<u>Subudy</u>: A-wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sanyny n-bilen belläliň, A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sanyny m; B-wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sanyny m bilen belläliň, B-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar netijeleriň sanyny m_1 diýeliň ($n_1<n$; $m<m_1$)

onda $P(A)=\dfrac{n_1}{n}$, $P(B)=\dfrac{m_1}{m}$ bolar.

Diýmek ähtimallygyň kesgitlemesine görä $P(AB)=\dfrac{n_1 m_1}{n\cdot m}$ bolar,

Onda

$$P(AB)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{m}=P(A)\cdot P(B)$$

ýa-da

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Mysal. Iki teňňe bir bada zyňylanda gerbiň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Birinji teňňede gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy P(A)=1/2, ikinji teňňede gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy P(B)=1/2. A we B wakalar bagly däl, şonuň üçin ýokardaky teorema esasynda

$$P(AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Teorema 2. *Toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) birnäçe $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny*

$$P(A_1,A_2,...,A_n)=P(A_1)*P(A_2)*...*P(A_n).$$

Indi goşmak we köpeltmek teoremalarynyň bilelikde ulanylyşyna mysal getireliň.

Mysal. Özara garaşsyz (bagly däl) üç sany A_1,A_2,A_3 wakalaryň ýüze çykmagynyň ähtimallyklary degişlilikde P_1,P_2,P_3 bolsun. Şol wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Diňe birinji A_1 wakanyň ýüze çykmagy $(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$ (birinji ýüze çykyp beýleki ikisiniň ýüze çykmazlygy) wakanyň ýüze çykmagyna deňgüýçlidir.

Bellik girizeliň:

$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ diňe A_1 wakanyň ýüze çykmagy

$B_2=\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ diňe A_2 wakanyň ýüze çykmagy

$B_3=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ diňe A_3 wakanyň ýüze çykmagy

Şeýlelikde A_1,A_2,A_3 wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak üçin $P(B_1+B_2+B_3)$ ähtimallygyny, ýagny B_1,B_2,B_3 wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň (tapawudy ýok) ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly bolýarys.

B_1,B_2,B_3 wakalar sygyşmaýan wakalar bolany üçin goşmak teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$$

Indi bolsa B_1,B_2,B_3 wakalaryň her biriniň ähtimallygyny tapmak gerek. A_1,A_2,A_3 wakalar bagly däl, şonuň üçin A_1,A_2,A_3 wakalar hem bagly däldirler, onda ähtimallygyň köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=p_1q_2q_3$$

Şonuň ýaly-da

$$P(B_2)=P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=q_1p_2q_3$$

$$P(B_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=q_1q_2p_3$$

Şeýlelikde A_1,A_2,A_3 wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy şu aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$P(B_1+B_2+B_3)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3.$$

Bu ýerde $p_1=P(A_1)$, $p_2=P(A_2)$, $p_3=P(A_3)$

$q_1=P(A_1)$, $q_2=P(A_2)$, $q_3=P(A_3)$

§7. Iň bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy.

Teorema. Toparlaýyn garaşsyz (bagly däl) $A_1,A_2,...,A_n$ wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy, şol wakalara ters bolan wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylynyň birden aýrylmagyna deňdir:

$$P(A)=1-q_1q_2q_3...q_n.$$

<u>**Subudy**</u>. $A_1,A_2,...,A_n$ wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny A waka diýip belläliň. Onda A we $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$ wakalar garşylykly ýagny

$$P(A)+P(\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n)=1.$$

Bu ýerden, köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp alarys

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n)=1.-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot...\cdot P(\overline{A}_n).$$

ýa-da

$$P(A)=1-q_1q_2q_3...q_n.$$

<u>**Hususy ýagdaý**</u>. Eger $A_1A_2...A_n$ wakalar p sana deň bolan birmeňzeş ähtimallyga eýe bolsalar, onda olaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy aşakdaky formula bilen kesgitlenilýär:

$$P(A)=1-q^n.$$

<u>**Mysal**</u>**.** Toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl), üç synagda iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0.936.Wakanyň bir synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

<u>Çözülişi.</u> $P(A)=1-q_1q_2q_3...q_n$ formuladan peýdalanýarys. Bu ýerde P(A)=0,936, n=3. Şeýlelikde

$0,936=1-q^3$

$q^3=1-0,936=0,0064$

Bu ýerden $q = \sqrt[3]{0,064} = 0,4$
Gözlenýän ähtimallyk

$$p=1-q=1-0,4=0,6.$$

§8. Şertli ähtimallyk.

Goý A we B wakalar garaşly (biri-birine bagly) bolsunlar, ýagny bagly wakalaryň kesgitlemesinden bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna bagly bolup durýar. Şonuň üçin hem eger bizi B wakanyň ähtimallygy gyzyklandyrýan bolsa, onda bize A wakanyň ýüze çykandygyny ýa-da çykmandygyny bilmek zerurdyr.

Kesgitleme. B wakanyň ähtimallygy A waka eýýäm bolup geçenden soň hasaplanan bolsa, onda oňa B wakanyň şertli ähtimallygy diýilýär. Ol şeýle bellenýär $P_A(B)$.

Mesele. Gutyda 3 sany ak we 3 sany gara şar bar bolsun. Gapdan 2 gezek ýeke-ýekeden yzyna goýmazdan şar çykarylýar. Ikinji synagda ak şaryň (B waka) çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly, Eger 1-nji synagda gara şar çykan bolsa.

Çözülişi. Birinji synagdan soň 5 şar galar. Olaryň 3-si ak şar bolar. Onda ikinji synagda ak şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy (B wakanyň şertli ähtimallygy) ýagny gözlenýän ähtimallyk $P_A(B)=3/5$-e deň bolar. Eger $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$ bolsa, onda A we B bagly däldir.

§9. Garaşly (özara bagly) wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.

Goý A we B wakalar özara biri-birine garaşly (özara bagly) wakalar bolsunlar, şonuň ýaly-da olaryň ähtimallyklary P(A) we şertli $P_A(B)$ belli bolsun. Şu iki sany özara bagly wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nähili tapmaly?

Teorema. Iki sany özara bagly A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekisiniň şertli ähtimallygyna köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(AB)=P(A)P_A(B) \qquad (1)$$

$$P(AB)=P(B)P_B(A) \qquad (2)$$

Bellik: Şertli ähtimallygy (1)-den tapsak $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ aňlatmany alarys. Soňky deňligi şertli ähtimallygyň kesgitlemesu hökmünde alyp bolýar.

Subudy. Bellik girizeliň:

n – A wakanyň ýüze çykmagu üçin geçirilýän synaglaryň umumy sany, n_1- A wakanyň ýüze ýardam edýän elementar wakalaryň sany ($n_1<n$); m – A waka bolup geçenden soň, B – wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany, ýagny ol elementar wakalar AB – wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýär ($m<n_1$)

A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy:

$$P(AB)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m}{n_1}=\frac{m}{n}.$$

Bu ýerde $\frac{n_1}{n}=P(A),$ we $\frac{m}{n_1}=P_A(B)$

bolýandygyny göz öňünde tutup alarys

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B).$$

Netije. Birnäçe garaşly (özara bagly) wakalaryň bilelekde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakallaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekileriniň hemmesiniň şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylyna deňdir, özem soňky wakalaryň ähtimallyklary olaryň özünden öňki wakalar bolup geçenden soň hasaplanan bolmaly:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P_{A1}(A_2)\cdot P_{A1A3}(A_3)\ldots P_{A1A2\ldots An\text{-}1}(A_n).$$

Bu ýerde $P_{A1A2\ldots An\text{-}1}(A_n)$ – A_n wakanyň $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ wakalar bolup geçenden soň hasaplanan ähtimallykdyr.

Hususy halda üç sany A, B, C garaşly (özara bagly) wakalar üçin aşakdaky ýaly ýazyp bolýar

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Mysal. Gapda 5 sany ak, 4 gara, 3gök şar bar. Gapdan tötäni ýagdaýda 3 şar çekip alynýar. Çykarylan şarlar yzyna gaýtarylmaýar. Onda birinji synagda ak şaryň (A-waka), ikinji synagda gara şaryň (B-waka), üçünji synagda gök şaryň (C-waka), ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly ?

Çözülişi. Şerte görä $P(A)=\frac{5}{12}$, $P_A(B)=\frac{4}{11}$, $P_{AB}(C)=\frac{3}{10}$ bolar. Onda gözlenýän ähtimallyk formula görä

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

bolar.

§10. Sygyşýan wakalaryň ähtimallyklarynyň goşmak teoremasy.

Goý A we B sygyşýan wakalar bolsunlar, şonuň ýaly-da ol wakalaryň we olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallyklary belli bolsun. Onda (A+B) wakanyň, ýagny A ýa-da B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nähili tapmaly ?

Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema: Iki sany sygyşýan wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy, şol wakalaryň ähtimallyklarynyň jeminden olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygynyň aýrylmagyna deňdir, ýagny

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Subudy: Şerte görä A we B wakalar sygyşýan, onda (A+B) wakanyň ýüze çykmagy üçin 3 sany sygyşmaýan $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ we AB wakalaryň biri ýüze çykmaly. Onda sygyşmaýan wakalar üçin goşmak teoremasy esasynda

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)-P(AB) \qquad (1)$$

Bolar. Eger $A\overline{B}$ ýa-da AB wakalaryň biri ýüze çyksa, onda A waka hem ýüze çykýar. Onda goşmak teoremasy esasynda

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)$$

Bu ýerden

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB) \qquad (2)$$

Şonuň ýaly hem

$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)$$

Bu ýerden

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB) \qquad (3)$$

Şeýlelikde (2) we (3) (1) deňlige goýup alarys

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (4)$$

Bellik: Eger A we B özara bagly däl bolsalar

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Bellik 2: Eger A we B özara bagly bolsalar

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B) \qquad (5)$$

Şonuň ýaly-da, eger A we B sygyşmaýan wakalar bolsalar, onda olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P(AB)=0$ bolar, onda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Diýmek (5) formula sygyşýan we sygyşýan däl wakalar üçin dogrudyr.

Mysal. Atyşykda birinji we ikinji atyjynyň nyşana degmegiň ähtimallygy degişlilikde $p_1=0,7;p_2=0,8$ bolsun. Bir bada atylanda, iň bolmanda biriniň nyşana degmegiň ähtimallygyny tapmaly ?

Çözlüşi. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,78\cdot 0,8=0,56$

Onda

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94.$

§11. Doly ähtimallygyň formulasy.

Eger-de A waka, diňe sygyşmaýan we doly topary emele getirýän $B_1, B_2 \ldots, B_n$ wakalaryň biri ýüze çykanda ýerine ýetýän bolsa, şonuň ýaly hem $B_1, B_2 \ldots, B_n$ wakalaryň hem-de A – wakanyň şertli ähtimallyklary, ýagny $P(B_1)$, $P(B_2) \ldots P(B_n)$ we $P_{B1}(A), P_{B2}(A), \ldots, P_{Bn}(A)$ belli bolsa, onda A wakanyň ähtimallygy $B_1, B_2 \ldots, B_n$ wakalaryň ähtimallyklarynyň A – wakanyň degişli şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylynyň jemine dendir, onda A wakanyň ähtimallygyny hasaplamak üçin goşmak teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{Bn}(A).$$

ýa-da

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)$$

Bu formula doly ähtimallygyň formulasy diýilýär.

Subudy. Şerte görä $B_1,B_2,...,B_n$ sygyşmaýan wakalar. A wakanyň ýüze çykmagy üçin $B_1A,B_2A,...,B_nA$ wakalaryň haýsy-da bolsa biri ýüze çykmaly

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+P(B_3A)+...+P(B_nA)$$

Bu ýerde goşmak teoremasyndan peýdalandyk. Indi bagly bolan wakalar üçin goşulyjylaryň her birine köpeltmek teoremasyny peýdalanyp alarys

$$P(B_1A)=P(B_1)P_{B1}(A),\ P(B_2A)=P(B_2)P_{B2}(A),...,$$
$$P(B_nA)=P(B_n)P_{Bn}(A)$$

Şeýlelikde aşakdaky formulany alarys

$$PA)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)+...+P(B_n)P_{Bn}(A)$$

Mysal. Detalyň iki toplumy bar. 1-nji toplumdan alnan detalyň hiliniň gowylygynyň ähtimallygy 0,8-e deň, 2-nji üçin bolsa 0,9. Islendik toplumdan alnan islendik detalyň gowy hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly**.**

Çözlüşi**.** **Goý A waka detalyň hiliniň gowydygyny aňladýan bolsun. B_1 wakak şol detalyň birinji toplumdan** alnandygy, B_2 waka bolsa ikinji toplumdan alnandygyny aňladýan bolsun. Onda

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Birinji toplumdan gowy detal alnandygyny aňladýan şertli ähtimallyk $P_{B1}(A)=0,8$

Şonuň ýaly-da $P_{B2}(A)=0,9$.
Onda doly ähtimallygyň formulasy esasynda
$P(A)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)=0,5\cdot0,8+0,5\cdot0,9=0,85$.

§12. Çaklamanyň ähtimallygy. Beýesiň formulasy.

Goý A waka doly topary emele getirýän $B_1,B_2,...,B_n$ sygyşmaýan wakalaryň biri ýüze çykanda ýerine ýetýän bolsun. Emma öňünden şol $B_1,B_2,...,B_n$ wakalaryň haýsynyň ýüze çykjakdygy belli däl, şonuň üçin hem olara çaklama diýilýär. A wakanyň ähtimallygy doly ähtimallygyň formulasy bilen hasaplanýar. Onda $B_1,B_2,...,B_n$ wakalaryň şertli ähtimallyklaryny ýagny $P_A(B_1),P_A(B_2),...,P_A(B_n)$ ähtimallyklary nähili tapmaly ?
Ilki bilen $P_A(B_1)$- şertli ähtimallygy tapalyň.
Şonuň üçin ähtimallygyň köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp tapýarys

$$P(AB_1)P(A)=P_A(B_1) \text{ ýa-da } P(AB_1)=P(B_1)P_{B1}(A)$$

Soňky iki deňlikden

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(A)}$$ - formulany alarys.

Şonuň ýaly-da

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B2}(A)}{P(A)}.$$

Şeýlelikde

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{Bn}(A)}$$

ýa-da

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)} \qquad (i = \overline{1,n})$$

Bu formula Beýesiň formulasy diýilýär. Ol 1764ý. iňlis alymy Beýes tarapyndan ilkinji gezek açylýar.

Mysal. Priboryň döwülmegi (A waka) 3 sany sebäpleriň birinden bolmagy mümkin olary B_1, B_2, B_3 diýip belleýäris. Olaryň ähtimallyklary äýry-aýrylykda berlen bolsun, ýagny $P(B_1)$,=0,7; $P(B_2)$=0,2; $P(B_3)$=0,1.

Şu sebäpleriň barlygynda priboryň döwülmegi aşakdaky ähtimallyk bilen bolup geçýär $P_{B1}(A)$=0,1; $P_{B2}(A)$=0,2; $P_{B3}(A)$=0,99. Priboryň döwülendigi belli bolsa, onda $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, $P_A(B_3)$ ähtimallyklary tapmaly ?

<u>Çözülişi</u>. Beýesiň formulasyndan peýdalanyp tapýarys

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + P(B_3)P_{B3}(A)} =$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}1}{0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}99} = \frac{7}{13}$$

Şonuň ýaly-da

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}13} = \frac{4}{13}$$

$$P_A(B_3) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}99}{0{,}13} = \frac{0{,}099}{0{,}13} = \frac{1}{13}.$$

§13. Kombinatorikanyň esasy formulalary.

Kombinatorika belli şertlere bagly bolan kombinasiýalaryň sanyny öwredýär. Şonuň üçin ähtimallyklary göni hasaplamakda kombinatorikanyň formulasyny ulanýarlar.

Orun çalşyrma – **diýip şol bir n dürli elementden düzülen,** ýöne olaryň ýerleşiş tertibi üýtgeşik bolan kombinasiýalara aýdylýar. **Ol**

$$P_n = n! \qquad (1)$$

diýip bellenilýär. ($n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$).

<u>Mysal</u>. 1,2,3 sifrlardan näçe sany üçbelgili san düzmek bolar.

$P_3 = 3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$, ýagny 6 sany.

2) Ýerleşdirme diýip m elementden dürli n elementleri bilen ýöne, düzümi boýunça üýtgeşik bolan kombinasiýalara aýdylýar. Bolup biljek ýerleşdirmeleriň sany

$$A_n^m = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)) \qquad (2)$$

<u>**Mysal.**</u> 6 sany dürli reňkdäki baýdajyklardan alnan näçe signal düzmek bolar.

$$A_6^2 = 6(6-1) = 6\cdot5 = 30.$$

3) <u>Utgaşdyrma</u> diýip iň bolmanda bir elementi bilen tapawutlanyp m elementden düzlen n dürli elementleriň kombinasiýasyna aýdylýar. Ol şeýle bellenýär

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

<u>**Mysal.**</u> Ýaşşikde 10 detal bar. 2 detali näçe usulda saýlap bolar

$$C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!8!}=.45$$

Orun üýtgetmegiň, ornaşdyrmagyň, utgaşdyrmagyň özar baglaýşygy.

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_n} \qquad (4)$$

§14. Tejribeleriň gaýtalynyşy. Bernulliniň formulasy.

Eger bir näçe synaglar geçirilýän bolsa, özem her bir synagda A wakanyň ähtimallygy beýleki synaglaryň netijesine bagly bolmasa, onda şeýle synaglara A waka görä bagly däl synaglar diýilýär.

Goý bagly däl birnäçe synaglar geçirilende, olaryň her birinde A waka ýüze çykyp ýa-da çykman biler. Özem her bir synagda A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p sana deň diýip hasap edeliň. Onda A wakanyň ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy $P(\overline{A})=q$ bolar, ýagny q=1-p (p+q=1) sana deňdir. n synagda A wakanyň göni m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak talap edilýän bolsun. Eger A waka m gezek ýüze çykýan bolsa,onda (n-m) gezek ol ýüze çykmaýar. Gözlenýän ähtimallygymyzy $P_n(m)$ diýip belleýäris. Onda n synagda A wakalaryň göni m gezek ýüze çykmagynyň we (n-m) gezek ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy,bagly dal wakalaryň ähtimallygynyň, köpeltmek teoremasy esasynda ($p^m \cdot q^{n-m}$)-e deň bolar.

Şonuň ýaly çylşyrymly wakalaryň sany C_n^m gezek bolar. Şonuň üçin hem gözlenýän ähtimallyk aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-k} \text{ ýa-da } P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m\cdot q^{n-m}.$$

Bu formula Bernulliniň formulasy diýilýär.

Mysal. Teňňe 10 gezek ýokaryk zyňylanda, gerbiň 3 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly. $n=10$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$.

$$P_{10}(3)=\frac{10!}{3!7!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{2^3\cdot 2^7}=\frac{15}{128}=0{,}14.$$

Mysal. Teňňe 6 gezek ýokaryk zyňylanda, gerbiň 0,1,2,3,4,5,6 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.Bernullynyň formulasy boýnça:

$P_6(0)=(1/2)^6=1/64$. $P_6(1)=6!/5!\cdot(1/2)^6=6/64$. $P_6(2)=15/64$.

$P_6(3)=20/64$. $P_6(4)=15/64$. $P_6(5)=6/64$. $P_6(6)=1/64$.

§15. Wakanyň ýüze çykmagynyň iň uly ähtimallykly sany.

Ýokardaky mysalda $m=3$ bolanda gözlenýän ähtimallyk, beýlekiler bilen deňeşdirilende iň ulysy boldy.

$$P_6(3)=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}.$$

Şonuň üçin $m=3$ san iň uly ähtimallyga eýe bolan san.Wakanyň ýüze çykmagynyň iň uly ähtimallykly sanyny $m=m_0$ bilen belläliň, onda

$$P_n(m_0)\geq P_n(m_0-1) \qquad (1)$$
$$P_n(m_0)\geq P_n(m_0+1) \qquad (2)$$

m_0-1 m_0

m_0+1

(1) deňsizlikden Bernulliniň formulasy esasynda alarys

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)}p^{m0}q^{n-m0} \geq \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)}p^{m0-1}q^{n-m0+1}$$

bu ýerden

$$\frac{p}{m_0} \geq \frac{q}{n-m_0+1} \qquad \text{ýa-da} \quad np-m_op+p\geq m_oq$$

$$np+p\geq m_o(p+q)$$

$$m_o\leq np+p \qquad (3)$$

Şunuň ýaly hem (2) deňsizlikden

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!}p^{m0}q^{n-m0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)}p^{m0+1}q^{n-m0-1}$$

ýa-da

$$\frac{q}{n-m_0} \geq \frac{p}{m_0+1}$$

$$qm_0+q \geq np-m_0p \qquad \text{ýa - da}$$

$$m_0(q+p) \geq np-q$$

$$m_0 \geq np-q \qquad (4)$$

(2) we (4) deňsizliklerden

$$np\cdot q\leq m_o\leq np+p \qquad (5)$$

gelip çykýar. Şu formula boýunça iň uly ähtimallykly sany kesgitläp bolýar. Ol hemişe bütin san bolmalydyr.

§16. Asimptotik formulalar.
1. Muawr-Laplasyň lokal teoreması.

Eger synaglaryň sany n has uly san bolanda Bernulliniň formulasyndan peýdalanyp gözlenýän ähtimallygy hasaplamak has gyn bolýar.

Meselem. Eger n=50, m=30, p=0,1 bolsa, onda

$$P_{50}(30)=\frac{50!}{30!20!}(0,1)^{30}(0,9)^{20}$$

bu ýerde

$$50!=30414093\cdot 10^{57},$$
$$30!=26525286\cdot 10^{25}$$
$$20!=24329020\cdot 10^{11}.$$

Ýokarda görnüşi ýaly bu ähtimallygy hasaplamak çylşyrymly bolýar. Şonuň ýaly bu ýagdaýda Bernulliniň formulasynyň deregine Laplasyň lokal teoremasyny peýdalanmak maslahat berilýär. Laplasyň lokal teoreması. Eger geçirilýän synagyň ählisinde p hemişelik $0<p<1$ san bolsa, onda $P_n(m)$- A wakanyň n synagda m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy şu aşakdaky ýakynlaşan formula bilen tapylýar, ýagny

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x) \qquad (1)$$

Bu ýerde

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň häsiýetleri:

1) $\varphi(x)$ funksiýa jübüt funksiýadyr, ýagny $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

φ(x) funksiýanyň x argumentiň položitel bahalary üçin tablisa bardyr. Otrisatel bahalary üçin hem şol tablisadan peýdalanyp bolýar, sebäbi ol jübütdir.

Mysal. 400 sany synagda A wakanyň 80 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly, eger-de p=0,2 bolsa.

<u>Çözülişi</u>. Şerte görä n=400; m=0,2; q=1-p=0,8.

$$\text{Onda } x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-80}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=\frac{0}{8}=0.$$

φ(0)=0,3988 tablisa boýunça.

Onda

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot 0б3988=\frac{1}{8}\cdot 0б3988=0{,}04986.$$

Eger şu mysaly Bernulliniň formulasy bilen işlesek hem $P_{400}(80)$=0,0498 şeýle netije alardyk.

2. Muawr-Laplasyň integral teoremasy.

Eger geçirilýän synaglaryň hemmesinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy nul bilen birden tapawutly hemişelik san bolsa, onda n synagda A wakanyň k_1-den k_2-ä çenli aralykda ýüze çykjagdygynyň ähtimallygy takmynan aşakdaky kesgitlenen integrala deňdir

$$P_n(k_1 k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (2)$$

bu ýerde

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(\mathrm{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2^2}dz$$

funksiýa üçin tablisa bardyr. Φ(x) täk funksiýadyr.
Tablisada x-yň x=5 çenli bahasy bardyr. Eger x>5 bolsa, onda Φ(x)=0,5.
Φ(x) funksiýa Laplasyň funksiýasy hem diýilýär. Ony şeýle ýönekeýleşdirip bolýar

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{0} e^{-z^2/2}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2} e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2} e^{-z^2/2}dz-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_1} e^{-z^2/2}dz=\Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

Şeýlelikde

$$\mathrm{P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1).}$$

Mysal. Teňňe ýokaryk 100 gezek zyňylanda, onuň şekilli ýüzüniň (45,55) aralykda düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.
<u>Çözülişi</u>. Şerte görä $k_1=45$, $k_2=55$, p=0,5 q=0,5. Onda

$$\mathrm{x_1}=\frac{45-100*0{,}5}{\sqrt{100*0{,}5*0{,}5}}=\frac{45-50}{5}=-\frac{5}{5}=-1.$$

$$\mathrm{x_2}=\frac{55-100*0{,}5}{\sqrt{100*0{,}5*0{,}5}}=\frac{55-50}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

Şeýlelikde

$$\mathrm{P_{100}}(45{,}55)=\overline{\Phi}(1)-\overline{\Phi}(-1)=\overline{\Phi}(1)+\overline{\Phi}(1)=2\overline{\Phi}(1)=2*0{,}3413=0{,}6826.$$

3. Puassonyň formulasy.

Goý n gezek synag geçirilendir diýeliň. A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p-sana deň bolsun. Belli bolşy ýaly, n synagda A wakanyň m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy Bernulliniň formulasy boýunça tapylýar. Eger n has uly san bolsa, onda Laplasyň asimptotik formulasyndan peýdlanylýar.

Emma, eger hadysanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy has kiçi bolsa ($p \le 0,1$), onda ol formuladan peýdalanyp bolmaýar. Şol ýagdaýda (n uly, p kiçi bolanda) Puassonyň asimptotik formulasyny ulanmak amatlydyr.

Geçirilýän dürli synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň ortaça bahasy hemişelik diýip kabul edeliň, ýagny $np=\lambda$ diýip belläliň. Bernulliniň formulasyny ulanalyň

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}{m!} p^m (1-p)^{n-m}$$

eger $np=\lambda$ bolsa, onda $p = \frac{\lambda}{n}$. Şeýlelikde

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

n - iň has uly sandygyny göz öňünde tutup $P_n(m)$-iň deregine $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)$ tapalyň.

Onda

$$P_n(m) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot$$

$$\cdot \lim \left[1 \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \times ... \left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \right] = \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1.$$

Şeýlelikde

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Bu formula Puassonyň formulasy diýilýär.

***Bellik*.** Eger n we λbelli bolsa onda $P_n(m)$ ähtimallygy tapmak üçin ýörite tablisa bar.

Mysal. Zawod bu bazadan 5000 sany oňat hilli önüm göýberýär. Ýolda önümiň zaýalanmagynyň ähtimallygy 0,0002 sana deň. Baza 3 sany hili ýaramaz önümiň geljekdiginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä n=5000, p=0,0002, m=3. Onda $\lambda=np=5000\cdot0{,}0002=1$.

Gözlenýän ähtimallyk $P_{5000}(3)$ Puassonyň formulasy esasynda

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} = 0{,}006.$$

§17. Bagly däl synaglarda otnositel ýygylygyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasynyň ähtimallygy.

Goý n gezek özara bagly däl synag geçirilýän bolsun, şolaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p sana deň bolsun (0<p<1). Wakanyň otnositel ýygylygynyň (m/n) onuň hemişelik p ähtimallygyndan gyşarmasynyň ähtimallygy absolýut ulylygy boýunça berlen ε>0 sandan uly däldir. Başgaça aýdaňda $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetjekdiginiň ähtimallygyny tapýarys. Ony şeýle belleýäris $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$. (1) deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$-\varepsilon \le \left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon \text{ ýa-da } -\varepsilon \le \frac{m-np}{n} \le \varepsilon$$

.

Soňky deňsizligi $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ položitel köpeldijä köpeldip alarys

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Indi Laplasyň integral teoremasyndan peýdalanýarys

$$x_1 = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \text{ we } x_2 = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}, \text{ onda}$$

$$P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Şeýlelikde, skobkadaky deňsizligi şoňa deňgüýçli bolan ilkinji deňsizlik bilen çalşyryp alarys:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Onda, $\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmeginiň ähtimallygy

$x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ bolanda ikeldilen Laplasyň funksiýasynyň 2Φ(x)-iň ýakynlaşan bahasyna deňdir.

Mysal. Detalyň standart däldiginiň ähtimallygy p=0,1. Otnositel ýygylygyň p=0,1 ähtimallykdan gyşarmasynyň ähtimallygynyň 400 sany saýlanyp alnan detalyň içinde 0,03 sandan köp däldiginiň ähtimallygyny tapmaly.

<u>Çözülişi</u>. N=400; p=0,1; q=0,9; ε=0,03. Onda

$$P\left\{\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right| < 0{,}03\right\} = 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1*0{,}9}}\right) = 2\Phi(2).$$

Φ(2)=0,4772 tablisa boýunça. Onda 2Φ(2)=0,9544.

Ikinji bölüm

Tötän ululyklar.

§1. Tötän ululyklar we olaryň görnüşleri.

1. Diskret we üznüksiz tötäni ululyklar.

Tötäni ululyklar ähtimallyk teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biridir.

Kesgitleme: Synagyň netijesinde şol ýa-da başga bahany alýan ululyga tötäni ululyk diýilýär. Synagyň netijesinde tötäni ululygyň haýsy bahany aljakdygy öňünden belli däl (näbelli).
Tötäni ululyk öwrenilende ilki bilen gyzyklandyrýan zat, ol hem onuň mümkin bolan köp bahalary, ýagny ol tükenikli sanlayň köplügi bolup biler.
Tötäni ululyklar esasan iki bölege bölünýärler:

a) Diskret tötäni ululyk.
b) Üznüksiz tötäni ululyk.

Eger tötäni ululygyň mümkin bolan bahalary tükenikli sanlaryň köplügini düzýän bolsa (meselem bütin sanlaryň köplügi), onda onuň ýaly tötän ululyklara diskret tötän ululyklar diýilýär.
Meselem. 100 sany täze dogan çaganyň içinde oglanlaryň sany. Ol tötän ululykdyr; onuň mümkin bolan alyp biljek bahalary 0,1,2,...,100.

Eger käbir tükenikli ýa-da tükeniksiz aralykda (ýa-da san okynyň kesiminde) hemme bahalary alyp bilýän ulylyga üznüksiz tötäni ulylyk diýilýär.
Meselem.Elektrik lampasynyň kemçiliksiz işleýän wagty [0,T]. Bu ýerde T elektrik lampanyň maksimal işleýän wagtyny aňladýar.
Tötän ululyklar uly X,Y,Z, ýa-da ξ,η,χ,τ we ş.m. harplar bilen bellenilýär. Emma olaryň alyp bilýän mümkin bolan bahalaryny $x_1,x_2,x_3,...$ diýip belleýärler.

§2. Diskret tötän ulylygyň ähtimallygynyň paýlanyş kanuny.

Diskret tötän ulylygyň berilmegi üçin onuň diňe hemme mümkin bolan, alýan bahalaryny we onuň ähtimallyklaryny görkezmek gerekdir.

Diskret tötän ulylygyň hemme mümkin bolan, alýan bahalarynyň we olaryň degişli ähtimallygynyň arasyndaky arabaglanyşyga şol tötän ulylygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Adatça diskret tötän ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky tablisa gönüşde berilýär

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

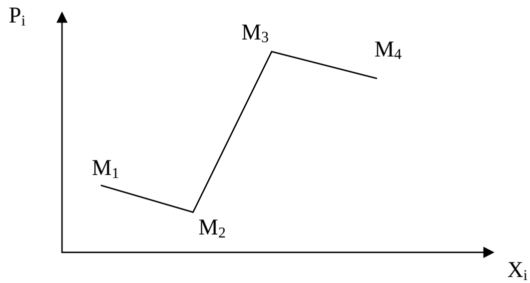
Tablisanyň birinji hatarynda, tötän ulylygyň alýan bahalary, ikinji hatarda bolsa onuň degişli ähtimallyklary ýerleşdirilendir.

Şu ýerde $X=x_1$, $X=x_2$, ... , $X=x_n$-wakalar doly topary düzýän wakalardyr. Şonuň üçin hem

$$p_1+p_2+...+p_n.=1, \quad \text{ýa-da} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Diskret tötäni ulylygyň mümkin bolan, alýan bahalary we onuň ähtimallyklary şol tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny doly häsiýetlendirýär.

Diskret tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny grafiki hem şekillendirip bolar. Onuň üçin göniburçly koordinatalar sistemasynda $M_1(x_1,p_1)$, $M_2(x_2,p_2)$, ... , $M_n(x_n,p_n)$ nokatlary guryarys.



§3. Diskret tötäni ulylygyň ähtimallygynyň binomial paýlanyş kanuny.

Goý A wakanyň ýüze çykmagy ýa-da çykmazlygy mümkin bolan n baglanyşyksyz synag geçirilsin. Wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemme synaglarda hemişelik we p deňdir. Onda q=1-p (wakanyň ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy) bolar.

A wakanyň ýüze çykma sanyny X tötäni ulylyk görnüşde seredeliň. Şol X tötäni ulylygyň (diskret) paýlanyş kanunyny kesgitlemek üçin X tötäni ulylygyň hemme mümkin bolan alyp biljek bahalaryny we olaryň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Görnüşi ýaly A wakanyň n synagda 1 gezek hem ýüze çykmazlygy, 1 gezek ýüze çykmagy, 2 gezek ýüze çykmagy ýa-da n gezek ýüze çykmagy mümkin. Şonuň üçin X diskret tötäni ulylygyň mümkin bolan bahalary $x_0=0, x_2=1, x_3=2, ..., x_n=n$ bolar.

Indi bolsa, şol mümkin bolan bahalaryň ähtimallyklaryny tapmak galýar. Onuň üçin Bernulliniň formulasyny ulanmak ýeterlikdir, ýagny n bagly bolmadyk synagda A wakanyň m gezek ýüze çykmagy

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1) \quad (m=0,1,2,...,n)$$

Şu formula gözlenýän paýlanyş kanunynyň analitik aňlatmasy bolup hyzmat edýär.

Ähtimallyklary Bernulliniň formulasy boýunça kesgitlenýän paýlanyş kanunyna, ähtimallygyň binomial paýlanyş kanunyny diýilýär. (1) deňligiň sag tarapyny, Nýuton binomynyň

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} q + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + C_n^0 q^n$$

umumy çleni ýaly seretmek bolar. Şonuň üçin oňa «binomial» kanun diýilýär. Şeýlelikde, birinji çlen p^n wakanyň n synagda n gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny aňladýar. Ikinji çlen $np^{n-1}q$ bolsa, (n-1) gezek ýüze çykýandygynyň ähtimallygyny ...; soňky çlen q^n wakanyň bir gezek hem ýüze çykmaýandygynyň ähtimallygyny aňladýar.

Ähtimallygyň binomial paýlanyş kanuny tablisa görnüşde aşakdaky ýaly berilýär

X	0	1	2...	m...	n-1	N
P	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$ ...	$C_n^m p^m q^n$	...	p^n

Ikinji hataryň jemi $(q+p)^n=1$

.

Mysal. Teňňe2 gezek zyňylýar. Gerbiň ýüze çykmagyny aňladýan X tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

<u>Çözülişi</u>. Belli bolşy ýaly, gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p we q ikisi hem ½-e deňdir, ýagny p=1/2, q=1/2. Iki gezek teňňe zyňylanda, gerb 0 gezek, 1 gezek, 2 gezek ýüze çykmagy mümkin, ýagny

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2.$$

Bu bahalaryň ähtimallyklaryny Bernulliniň formulasy boýunça tapýarys, onda:

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P_2(1) = C_2^1 q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P_2(2) = C_2^2 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Gözlenýän paýlanyş kanunyny ýazalyň

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

Barlagy: 0.25+0.5+0.25=1.

§4. Puassonyň paýlanyş kanuny.

Goý n sany bagly bolmadyk synag geçirilsin, A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p bolsun.
A wakanyň n synagda m gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak üçin Bernulliniň formulasyny ulanylýarlar.
Eger-de n synagyň sany uly bolsa, onda Laplasyň asimptotik formulasy ulanylýar. Emma, eger hadysanyň ýüze çykmgynyň ähtimallygy has kiçi bolsa ($p \leq 0.01$), onda bu formulany ulanyp bolmaýar, bu ýagdaýda (n uly, p has kiçi bolanda) Puassonyň formulasy ulanylýar.

Geçirilýan dürli synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň ortaça bahasy hemişelik diýip kabul edeliň, ýagny $np=\lambda$ diýip belläliň.
Şeýlelikde

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Bu formula Puassonyň paýlanyş kanunyny aňladýar. $P_n(m)$ ähtimallygy tapmak üçin ýörite tablisa bardyr.
Puassonyň paýlanyş kanuny tablisa arkaly aşakdaky ýaly aňladylýar.

X	0	1	2	...	m	...	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$		$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

Barlag:

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^4}{n!}\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Mysal. Okuw kitaby 100000 ekzemplýar tiraž bilen çap edilýär. Olaryň içinde hili ýaramaz edilendiginiň ähtimallygy p=0,0001-e deň. Şol tiraž edilen kitaplaryň içinde 5 sanysynyň hiliniň ýaramaz ediljekdiginiň ähtimallygyny tapmaly.
Çözülişi.Şerte görä n=100000, p=0.0001, m=5. Onda Puassonyň formulasy esasynda

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \cdot \lambda = np = 100000 \cdot 0.0001 = P_{100000}(5) =$$
$$= \frac{10^5 0.000045}{120} = 0.0375.$$

§5.Diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasy we onuň häsiýetleri.

1. Tötäni ulylygyň san harakteristikasy,

Bize belli bolşy ýaly, tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny ony doly häsiýetlendirýär. Ýöne köp halatlarda paýlanyş kanuny belli däl, şonuň üçin hem tötäni ulylyk barada az maglumatlar bilen çäklenmeli bolýar. Käbir halatlarda bolsa, tötäni ulylygy jem görnüşde häsiýetlendirýän sanlary ulanmaly bolýar. Ol sanlara tötäni ulylygyň san harakteristikasy diýilýär.
San harakteristikalaryň möhümleriniň biri hem, matematik garaşmadyr. Matematik garaşma tötäni ulylygyň takmynan orta bahasyna dňdir. Köp meseleler çözülende onuň matematik garaşmasyny bilmek ýeterlikdir.

Kesgitleme. Diskret tötäni ululygyň hemme mümkin bolan bahalaryň, onuň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylynyň jemine, şol tötäni ululygyň matematik garaşmasy diýilýär.

Goý X tötäni ululygyň alýan bahalary $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ bolsun, olaryň degişlilikde ähtimallyklary $p_1,p_2,p_3,...,p_n$ bolsun. Onda X tötäni ululygyň matematik garaşmasy – MX (ol MX bilen bellenilýär) aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär :

$$MX = x_i p_i + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1)$$

Matematik garaşma – MX hemişelik sandyr.
Mysal. X – tötäni ululygyň paýlanyş kanuny aşakdaky tablisa bilen berlen:

X	3	2	1
P	0,1	0,6	0,3

Onuň matematik garaşmasyny tapmaly.

Çözülişi. MX=3*0.1+2*0.6+1*0.3=0.3+1.2+0.3=1.8

1) Hemişelik sanyň matematik garaşmasy` şol sanyň özüne deňdir, ýagny $MC=C$.
2) Hemişelik sany matematik garaşma alamatynyň daşyna çykaryp ýazyp bolýar, ýagny

$$M(CX)=C*MX$$

3) Özara bagly däl X we Y tötäni ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmasynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$M(X*Y)=MX*MY$$

<u>Subudy</u>: Goý X we Y tötäni ululyklaryň paýlanyş kanunlary aşakdaky tablisa görnüşde berlen bolsun

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
P	p_1	p_2	q	q_1	q_2

Onda (XY) tötäni ulylygyň mümkin bolan bahalary x_1y_1 x_2y_2 x_2y_1 x_1y_2 x_2y_2 bolar, şeýlelikde onuň paýlanyş kanuny aşakdaky ýaly bolar.

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
Pq	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2

Şeýlelikde

$M(XY)=x_1y_1p_1q_1+x_2y_1p_2q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_2p_2y_2=y_1q_1(x_1p_1+x_2p_2)$ $+y_2q_2(x_1p_1+x_2p_2)=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1++y_2q_2)=MX\cdot MY$

Şonuň ýaly

$$M(X_1\cdot X_2\cdot...\cdot X_n)=MX_1\cdot MX_2\cdot...\cdot MX_n.$$

Iki sany X we Y tötäni ulylygyň algebraik jeminiň matematik garaşmasy, şol tötäni ulylyklaryň matematik garaşmalarynyň algebraik jemine deňdir, ýagny

$$M(X \pm Y) = MX \pm MY.$$

Şonuň ýaly hem

$$M(X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n) = MX_1 \pm MX_2 \pm \ldots \pm MX_n.$$

Diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasynyň ähtimallyk garaşmasynyň ähtimallyk manysy aşakdakydan durýar. Goý X tötäni ulylyk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalary alýan bolsun, şol bahalaryň orta arifmetik sany $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ bolsun.

Ähtimallyk manysy n uly böldügyça M(X) matematik garaşma orta arifmetik baha örän ýakyn bolýar we şol sebäbe görä matematik garaşma, tötäni ulylygyň orta arifmetik bahasy diýilýär. Ýene-de bellemeli zat, matematik garaşma tötäni ulylygyň häsiýetlerini häsiýetlendirýän sandyr. Başgaça aýtsak synagyň netijesinde alnan bahalaryň durnukly orta arifmetik sanydyr.

§6. Binomial paýlanyş kanunynyň matematik garaşmasy.

Eger X tötän ulylyk binomial paýlanyş kanunyna eýe bolsa, onda onuň matematik garaşmasy (n bagly däl synagda A wakanyň ýüze çykmagynyň sany), synaglaryň sanynyň (n) onuň her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyna (p) köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny (np)-e deňdir. Oňa göz ýetirmek kyn däldir. (1) formula esasynda

$$MX = \left(nq^{n-1} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} + \ldots + m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} + \ldots + np^n \right) =$$

$$= np(q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \ldots + p^{n-1}) = np(q+p)^{n-1} = np.$$

Şeýlelikde binomial paýlanyş kanuny üçin alarys.

$$MX=np.$$

§7. Diskret tötän ulylygyň dispersiýasy we onuň häsiýetleri.

Dürli mümkin bolan bahalary alýan, emma bir meňzeş matematiki garaşma eýe bolýan tötäni ulylyklara duş gelýäris.
Meselem. X we Y tötäni ulylyklaryň paýlanyş kanunlary tablisa görnüşde berilipdir:

X	-5	5
P	0.5	0.5

Y	-100	100
p	0.5	0.5

Matematik garaşmasyny tapalyň

$$MX=-5*0.5+5*0.5=0$$
$$MY=-100*0.5+100*0.5=0$$

Bu ýerde iki tötäni ulylygyň hem matematik garaşmasy birmeňzeş. Matematik garaşma tötäni ulylygy doly häsiýetlendirip bilmeýär. Bu ýagdaýda tötäni ulylygyň beýleki san harakteristikalaryndan peýdalanmak gerek bolýar.
Onuň ýaly san harakteristika hem dispersiýadyr.
Dispersiýa geçmezden öňürti tötäni ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndan gyşarmasyna seredeliň.
1) Tötän ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndan gyşarmasy.

Goý X- tötän ulylyk, MX- onuň matematik garaşmasy. Onda (X-MX) tapawudy (täze) başga tötän ulylyk görnüşinde seredeliň. Ol tötän ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky ýalydyr:

X-MX	x_1-MX	x_2-MX	....	x_n-MX
P	p_1	p_2	.....	p_n

(X-MX) garaşmanyň matematik garaşmasy nula deňdir, ýagny

M(X-MX)=MX-M(MX)=MX-MX=0.

§8. Dispersiýa we onuň häsiýetleri.

Kesgitleme. X tötäni ulylygyňöziniň matematik garaşmasyndan gyşarmasynyň kwadratynyň matematik garaşmasyna şol X tötäni ulylygyň dispersiýasy diýilýär we ol şeýle bellenýär:

$$D\overline{X} = M\left[\overline{X} - M\overline{X}\right]^2 \qquad (1)$$

Eger $\overline{X}$ tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny

X	x_1	x_2	.....	x_k	.....
P	p_1	p_2	.....	p_k	.....

Bolsa, onda $(X-MX)^2$ tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky ýaly bolar

$(X-MX)^2$	$(x_1-MX)^2$	$(x_2-MX)^2$	.....	$(x_k-MX)^2$	.....
P	p_1	p_2	.....	p_k	.....

Diýmek, onda matematik garaşmanyň kesgitlemesinden

$$DX = M[X - MX]^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 \cdot P_k \qquad (2)$$

Dispersiýany hasaplamak üçin köplenç aşakdaky (3) formulany peýdalanýarlar

$$DX=\sum_k (x_k-MX)^2\cdot p_k=\sum\left(x_k^2-2x_k\cdot MX+(MX)^2\right)p_k=\sum_k x_k^2-p_k-2MX\cdot$$
$$\cdot\sum_k x_k p_k+(MX)^2\cdot\sum p_k=\sum_k x_k^2\cdot p_k-2MX\cdot MX+(MX)^2=MX^2-(MX)^2$$

ýagny

$$DX=MX^2-(MX)^2 \qquad (3)$$

Bu ýerde

X^2	x_1^2	x_2^2	.....	x_k^2	.....
P	p_1	p_2	.....	p_k	.....

Diýmek

$$x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2+.....+x_k^2\cdot p_k=\sum_k x_k^2\cdot p_k=MX^2.$$

Dispersiýanyň käbir häsiýetleri.

1) Hemişelik ulylygyň dispersiýasy nula deňdir. Hakykatdanda

$$DC=M[C-MC]^2=M(C-C)^2=M0=0.$$

2) C=const bolsa,onda

$$DCX=C^2\cdot DX.$$

Deňlik hakykatdanda

$$DC=M[CX-M(CX)]^2=M(C(X-MX)]^2=C^2\cdot M[X-MX]^2=C^2\cdot DX.$$

3) D(X+Y)=DX+DY. (eger X we Y garaşsyz bolsalar).

4) D(X-Y)=DX+DY.

onda

4) D(X·Y)=DX·DY

Orta kwadratik gyşarma.

Kesgitleme. X tötäni ulylygyň dispersiýasyndan alnan kwadrat köke şol X tötäni ulylygyň orta kwadratik gyşarmasy diýilýär we ol şeýle bellenilýär

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

Bellik. Binomial paýlanyşyň dispersiýasy, ýagny DX=npq formula bilen hasaplanýar.Onda $\sigma(X)=(npq)^{1/2}$ bolar.

§9.Üznüksiz tötän ulylyklar.

<u>9. Integral paýlanyş funksiýasy.</u>

Belli bolşy ýaly, diskret tötäni ulylygy, ol ulylygyň mümkin bolan bahalary $x_1,x_2,...,x_n$ we degişli ähtimallyklarynyň $p_1,p_2,...,p_n$ üsti bilen bermek mümkin.

Üznüksiz tötäni ulylygy ol ulylygyň mümkin bolan bahalarynyň we oňa degişli bolan ähtimallyklarynyň üsti bilen bermek mümkin däl.

Goý x hakyky san bolsun. X tötäni ulylygyň x-dan kiçi bahalary kabul edýändiginiň, (X<x) wakanyň ähtimallygy, x görä funksiýa bolar, ony F(x) diýip belleýäris. Onda $P\{X<x\}=F(x)$ bolar.

Bu F(x) funksiýa ähtimallygyň integral paýlanyş funksiýasy diýilýär. Eger F(x) üznüksiz bolsa, onda X tötäni ulylyk üznüksizdir.

<u>2. Integral paýlanyş funksiýanyň häsiýetleri.</u>

1) Paýlanyş funksiýanyň bahalary [0,1] kesimiň içindedir, ýagny

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2) F(x) kemelmeýän funksiýadyr, ýagny $F(x_2) \ge F(x_1)$ eger-de $x_2 > x_1$.

Subudy. Goý $x_2>x_1$ bolsun. $(X<x_2)$ diýen (wakany) tassyklamany 2 sany sygyşmaýan waka hökmünde seredip bolar.

a) $(X<x_1)$ wakanyň ähtimallygy $P(X<x_1)$;

b) $(x_1 \le X<x_2)$ wakanyň ähtimallygy $P(x_1 \le X<x_2)$. Bu wakalar sygyşmaýan wakalardyr. Şonuň üçin goşmak teoremasy esasynda $P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1 \le X<x_2)$

Onda bu ýerden

$$P(x_1 \le X<x_2)=P(X<x_2)-P(X<x^1)$$

ýa-da $$P(x_1 \le X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

emma $$F(x_2)-F(x_1) \ge 0 \text{ ýa-da } F(x_2) \ge F(x_1).$$

a) Eger X tötäni ulylyk (a,b) aralykda baha alýan bolsa, onda

$$P(a \le X<b)=F(b)-F(a).$$

Mysal. X tötäni ulylygyň integral funksiýasy berlen:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{eger } x \le -1, \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & \text{eger } -1 \le x \le 3, \\ 1, & \text{eger } x>3. \end{cases}$$

Synagyň netijesinde X tötäni ulylygyň (0,2) aralykda baha alýandygynyň ähtimallygyny tapmaly.

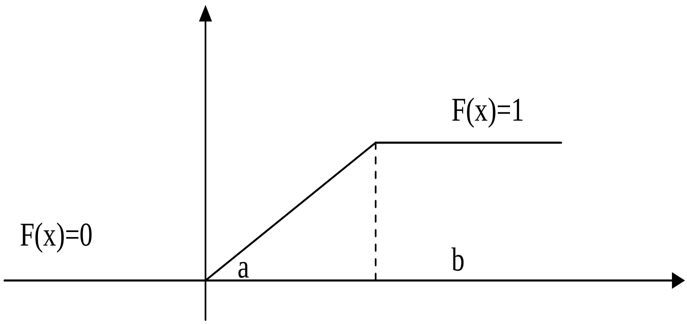
$$P\{0<X<2\}=F(2)-F(0)=\left(\frac{1}{4}*2+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}*0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2};$$

$$P\{0<X<2\}=\frac{1}{2}.$$

b) Eger X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) aralyga degişli bolsa, onda (X≤a) wakanyň ähtimallygy nula deňdir, (X>b) wakanyň ähtimallygy bolsa bire deňdir, ýagny

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger} \quad x \le a, \\ 1, & \text{eger} \quad x > b. \end{cases}$$

Integral funksiýanyň grafigi.
Eger x≤a bolsa grafigiň ordinatasy nula deňdir, eger x>b bolsa, onda grafigiň ordinatasy bire deňdir. Ol grafik aşakdaky ýaly bolar



Mysal. X diskret tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny tablisa arkaly berlen

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Integral funksiýany tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

Çözülişi. 1) Eger x≤1, onda F(x)=0.

2) Eger 1<x≤4 bolsa, onda F(x)=0,3.

Bu ýerde X tötäni ulylyk 1-e deň bahany 0,3 ähtimallyk bilen kabul edýär.

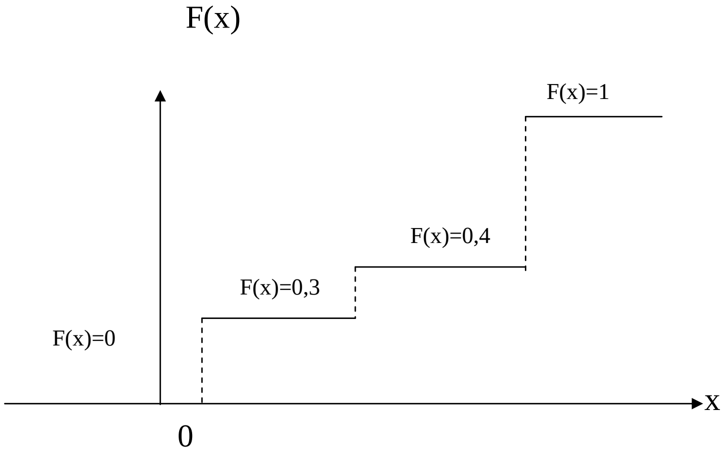
3) Eger 4<x≤8 bolsa, onda F(x)=0,4.

4) Eger x>8 bolsa, onda F(x)=1.

Şeýlelikde integral funksiýa aşakdaky ýaly ýazyp bolar

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{eger } \ x \le 1\\ 0{,}3, & \text{eger } \ 1 < x \le 4\\ 0{,}4, & \text{eger } \ 4 < x \le 8\\ 1, & \text{eger } \ x > 8.\end{cases}$$

Bu funksiýanyň grafigi aşakdaky ýaly bolar



§10. Üznüksiz tötän ulylygyň paýlanyşynyň differensial funksiýasy.

Kesgitleme. Integral funksiýanyň 1-nji tertipli önümine, şol üznüksiz tötän ululygyň differensial funksiýasy diýilýär we ol f(x) bilen belgilenýär, ýagny

$$F^{I}(x)=f(x).$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly F(x) integral funksiýa, f(x) differensial funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Differensial funksiýa f(x)-a ähtimallygyň dykyzlygy hem diýilýär.

<u>Differensial funksiýanyň häsiýtleri.</u>

1) Üznüksiz X tötän ulylygyň (a,b) aralkdaky baha alýandygynyň ähtimallygy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Eger f(x) belli bolsa, onda F(x) aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

3) Differensial funksiýa otrisatel däldir: f(x)≥0.

4) Differensial funksiýadan -∞-den +∞ çenli alnan hususy däl integral bire deňdir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Mysal. X tötäni ulylygyň differensial funksiýasy aşakdaky deňlik bilen berlen:

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}},$$

a – parametri tapmaly.

Çözülişi. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ formuladan peýdalanýarys, onda aşakdaky deňlik ýerine ýeter

$$a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = 1$$

bu ýerden

$$a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x}dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^{x},$$

Onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} + \lim_{b\to-\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \lim_{b\to-\infty} (-\operatorname{arctg} e^{b}) +$$

$$+ \lim_{b\to-\infty} (\operatorname{arctg} e^{b}) = \frac{\pi}{2}.$$

Şeýlelikde

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}. \qquad a = \frac{2}{\pi}.$$

Hususy ýagdaýda, ýagny X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) aralyga degişli bolsa, onda

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

§11. Üznüksiz tötän ulylyklaryň san harakteristikalary.

Belli bolşy ýaly diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasy

$$MX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k + \ldots = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$$

formula boýunça hasaplanýar. Emma üznüksiz tötäni ulylyk üçin matematik garaşma aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

ýagny X tötäni ulylygyň mümkin bolan alýan hemme bahalary x okunyň doly üstünde ýatýan bolsa, eger-de X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) aralykda ýatýan bolsa, onda

$$MX = \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

Şuňa meňzeşlikde üznüksiz tötäni ulylygyň dispersiýasy, aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \qquad (3)$$

Hususy ýagdaýda

$$DX = \int_{a}^{b} (x - MX)^2 f(x)dx \qquad (4)$$

Diskret tötäni ulylykdaky ýaly dispersiýadan alnan kwadrat köke orta kwadratik gyşarma diýilýär, ýagny $\sigma(X) = \sqrt{DX}.$

<u>Bellik 1</u>. Matematik garaşma we dispersiýanyň diskret tötäni ulylyk üçin berlen häsiýetleri bu ýerde hem saklanýar.

<u>Bellik 2</u>.Dispersiýany hasaplamak üçin

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [MX]^2$$

ýa-da

$$DX = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [MX]^2$$

formulalary getirip çykarmak kyn däldir.

Mysal. Eger X tötäni ulylygyň integral funksiýasy

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{eger } x\le 0\\ x, & \text{eger } 0<x\le 1\\ 1, & \text{eger } x>1.\end{cases}$$

berlen bolsa, onda matematik garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi. Differensial funksiýany tapýarys

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases}0, & \text{eger } x\le 0\\ 1, & \text{eger } 0<x\le 1\\ 0, & \text{eger } x>1.\end{cases}$$

$$MX=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Indi dispersiýasyny tapýarys.

$$DX=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Üznüksiz tötän ululyklaryň paýlanyş kanunlary.

§12. Deňölçegli paýlanyş kanuny.

Praktikada käbir meseleleri çözeňde üznüksiz tötäni ulylygyň paýlanyşynyň dürli görnüşlerine duş gelinýär. Şol paýlanyşlaryň differensial funksiýasy paýlanyş kanuny hem diýip atlandyrýarlar. Ol paýlanyş kanunlarynyň içinde has köp düş gelýäni deňölçegli we normal paýlanyş kanunlarydyr.

Eger X tötäni ulylygyň (üznüksiz) hemme bahalary (a,b) aralykda degişli bolsa, hem-de şol aralygyň ähli nokatlarynda, X tötäni ulylygyň differensial funksiýasy f(x) hemişelik bolsa,

ýagny f(x)=C bolsa, onda şeýle paýlanyşa deňölçegli paýlanyş diýilýär.
Belli bolşy ýaly

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

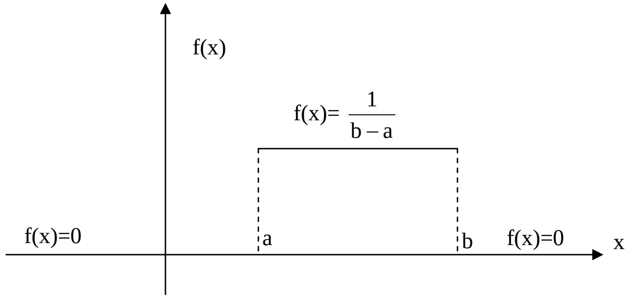
eger-de $x \in (a,b)$ bolsa.
Biziň goýýan şertimize görä, f(x)=C $C \in (a,b)$, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C \cdot dx = 1$$

ýagny
$C \cdot x\Big|_a^b = 1$ ýa-da C(b-a)=1.
bu ýerden $C = \dfrac{1}{b-a}$.
Şeýlelikde deňölçegli paýlanyş kanuny analitik görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{eger } a < x \le b, \\ 0, & \text{eger } x > b. \end{cases}$$

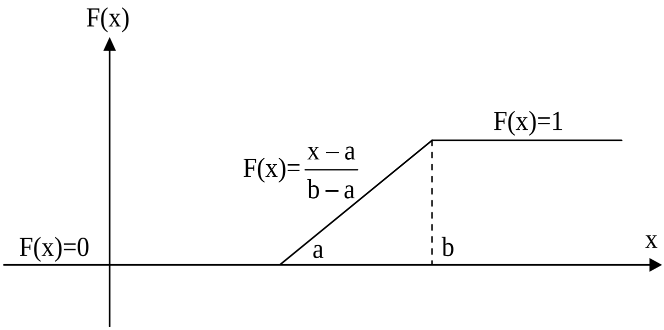
Deňölçegli paýlanyşyň differensial funksiýasynyň grafigi aşakdaky ýaly bolar



Integral funksiýa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{eger} \quad a < x \le b, \\ 1, & \text{eger} \quad x > b. \end{cases}$$

Onuň grafigi



§13. Normal paýlanyşyň kanuny.

Eger

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

bolsa, onda bu paýlanyşa normal paýlanyş diýilýar, ýagny differensial funksiýasy (1) deňlik bilen kesgitlenýän paýlanyşa normal paýlanyş diýilýar.
Görüşimiz ýaly normal paýlanyş iki sany a we δ parametrler bilen kesgitlenýär.
a - matematik garaşma,
δ - orta kwadratik gyşarma.
a) Matematik garaşmany hasaplalyň

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = a.$$

Bu integraly hasaplamak üçin üýtgeýän ulylyklary çalşyrmakdan peýdalanalyň

$$\frac{x-a}{\sigma} = z, \quad x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz.$$

Onda

Bu ýerde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$, şonuň üçin

MX=a

b) Indi dispersiýany hasaplalyň, MX=a bolýandygyny göz öňünde tutup alarys

$$DX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ýene-de belläp alýarys

onda x-a=σz, x=σz+a, dx=σdz.

Predeliniň üýtgeýändigini göz öňünde tutup alarys

$$DX = \frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Bölekleýin integrirlemek boýunça u=z

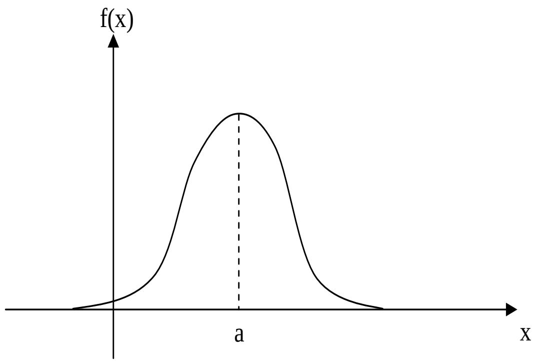
Taparys $DX=\sigma^2$, onuň σ(x)= σ.

Şeýlelikde normal paýlanyşyň orta kwadratik gyşarmasy δ parametre deňdir.

Eger a=0, σ=1 onda normal paýlanyşa normirlenen diýilýär.

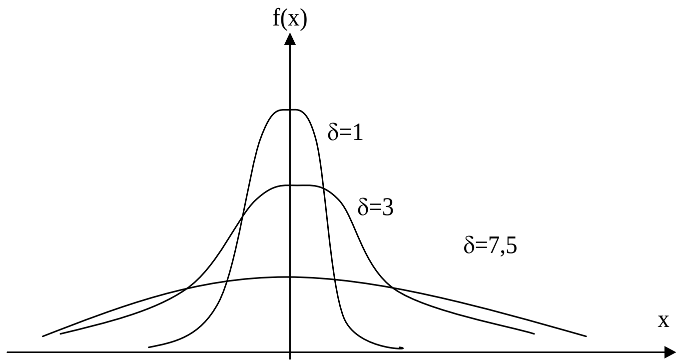
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Bu funksiýa üçin tablisa bardyr. Önümiň kömegi bilen funksiýany doly derňemek teoriýasynda peýdalanyp f(x) funksiýanyň grafigini gurup bolýar.



Bu ýerde a parametr egri çyzygyň formasyna täsiri ýokdyr. Diňe saga ýa-da çepe süýşmegine täsiri bardyr. Emma δ egri çyzygyň görnüşini üýtgedýär.

Belli bolşy ýaly normal paýlanyşyň differensial funksiýasynyň maksimumy $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ –e deň. Bu ýerden görnüşi ýaly, eger σ artýan bolsa, onda normal egriniň ordinatasy kemelýär, egriniň özi bolsa, x-okuna gysylýar,eger σ kemelýän bolsa onda egriniň depesi has-da ýitileşýär (çyzga seret).



Eger a=0, σ=1 bolsa, onda

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Egri çyzyga normirlenen diýilýär.

§14. Normal tötän ulylygyň berlen aralyga düşmekliginiň ähtimallygy.

Belli bolşy ýaly, eger X tötän ulylyk f(x) differensial funksiýa bilen berlen bolsa, onda X ulylygyň (α;β)aralykda baha aljakdygynyň ähtimallygy aşakdaky ýaýy bolar

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Goý X tötäni ulylyk normal paýlanyş kanuna eýe bolsun. Onda

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Bu formulany tablisadan peýdalanyp bolar ýaly ýönekeýleşdireliň. Şonuň üçin $Z = \frac{x-a}{\sigma}$ belläliň. Onda x=σz+a, dx=σdz bolar. Indi integrirlemäniň täze predelini tapalyň. Eger x=α, onda $Z = \frac{\alpha - a}{\sigma}$,

eger x=β bolsa, onda $Z = \frac{\beta - a}{\sigma}$ bolar.

Şeýlelikde

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Laplasyň

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

formulasyndan peýdalanyp alarys

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Mysal. Goý X tötäni ulylyk normal paýlanyş kanunyna eýe bolsun. MX=30, σ(X)=10 bolsun. X tötäni ulylygyň (10,50) interwalda ýatýan baha aljakdygynyň ähtimallygyny tapmaly.
Çözülişi. Şerte görä α=10, β=50, a=30, σ=10.
Onda

$$P\{10 < X < 50\} = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Tablisa boýunça

$$\Phi(2)=0,4772$$

Onda

$$P\{10<X<50\}=2*0,4772=0,9544$$

§15. Berlen gyşarmanyň ähtimallygynyň hasaplanyşy.

Goý normal paýlanyşa eýe bolan X tötäni ulylygyň gyşarmasy absolýut ulylygy boýunça berlen δ položitel sandan kiçidiginiň ähtimallygyny, ýagny $|X-a| < \delta$ deňsizligiň ähtimallygyny tapmak talap edilsin.
Deňsizligi şeýle ýazalyň

$$-\delta<X-a<\delta$$

ýa-da

$$a-\delta<X<a+\delta$$

formuladan peýdalanyp alarys

$$P\{|X-a|<\delta\}=P\{a-\delta<X<a+\delta\}=\Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right]-$$

$$-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right]=\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right].$$

Emma

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

onda

$$P\{|X-a|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

eger a=0, onda

$$P\{|X|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

§16. Üç sigma düzgüni.

Öňki punktdaky

$$P\{|X-a|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

formulany ýönekeýleşdireliň.
Goý $\delta=\sigma t$ bolsun. Onda

$$P\{|X-a|<\sigma t\}=2\Phi(t).$$

Eger t=3 bolsa, onda $\sigma t=3\sigma$ bolar.
Onda

$$P\{|X-a|<3\sigma\}=2\Phi(3)=2*0,49865=0,9973.$$

ýagny |X-a| gyşarmanyň üçeldilen orta kwadratik gyşarmadan kiçidigininiň ähtimallygy 0,9973 sana deňdir.
Başgaça |X-a| gyşarmanyň, orta kwadratik gyşarmanyň üçeldilenden ulydygynyň ähtimallygy örän az we 0,0027 sana deň. Bu bolsa 0,27% şeýle bolup biljekdigini aňladýar. Munuň ýaly wakalar has az ähtimallyga eýedir. Ony praktiçeski bolup bilmeýän waka diýip bolýar.

Eger tötäni ulylyk normal paýlanyş kanunyna eýe bolsa, onda onuň matematik garaşmasyndan gyşarmasy absolýut ulylygy boýunça üçeldilen orta kwadratik gyşarmadan uly däldir. Üç sigma düzgünininiň manysy şundan ybaratdyr.

§17. Görkezijili paýlanyş kanuny.

1. Görkezijili paýlanyşyň kesgitlenişi.

Egerde differensial funksiýasy aşakdaky görnüşde, ýagny

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{eger} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

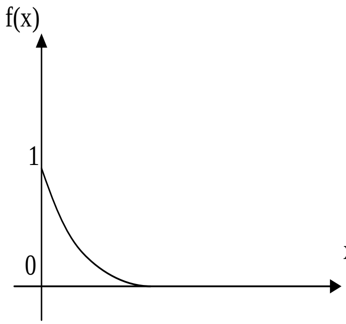
(bu ýerde λ hemişelik položitel ulylyk) berlen bolsa onda bu paýlanyşa ähtimallygyň görkezijili (eksponensial) paýlanyş diýilýär.

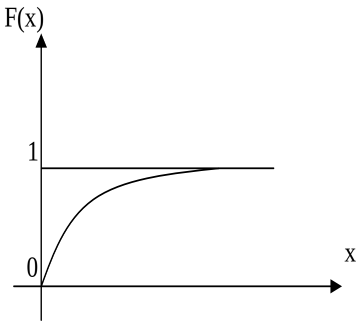
Bu ýerden görnüşi ýaly, görkezijili paýlanyş diňe bir λ parametr bilen kesgitlenýär.

Görkezijili paýlanyşyň integral funksiýasyny tapalyň

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Differensial we integral funksiýalaryň grafikleri aşakdaky ýaly bolar.





Integral funksiýasy

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}$$

Den bolan, görkezijili paýlanyş kanunyna eýe bolan X üznüksiz tötäni ulylygyň (a,b) interwala düşmeginiň ähtimallygyny tapalyň.
Belli bolşy ýaly

$$P\{a<X<b\}=F(b)-F(a).$$

Onda $F(a)=1-e^{-ax}$, $F(b)=1-e^{-bx}$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys

$$P\{a<X<b\}= e^{-ax}-e^{-bx}.$$

e^x funksiýanyň bahasy tablisadan tapylýar.
Mysal.
3. Görkezijili paýlanyşyň san harakteristikalary.

Goý üznüksiz X tötäni ulylyk görkezijili paýlanyş kanunyna eýe bolsun

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{eger} \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{eger} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

a)Matematik garaşmasyny tapalyň

$$MX=\int_0^\infty xf(x)dx=\lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx.$$

Bölekleýin integrirläp, alarys

$$MX=\frac{1}{\lambda}.$$

Şeýlelikde görkezijili paýlanyşyň matematik garaşmasy λ parametriň ters ulylygyna deňdir.

b)Dispersiýany tapalyň

$$DX=\int_0^\infty x^2 f(x)-[MX]^2=\lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Bölekleýin integrirläp taparys

$$\lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Şeýlelikde

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Diýmek

Orta kwadratik gyşarmasy

$$\sigma(x)=\sqrt{DX}=\frac{1}{\lambda}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly görkezijili paýlanyş kanunynyň matematik garaşmasy we orta kwadratik gyşarmasy özara deňdir.
Mysal. X üznüksiz tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny berlen\

$$f(x)=5e^{-5\lambda},\ \text{eger}\ x\geq 0; \quad f(x)=0,\ \ x<0.$$

Matematik garaşmany we dispersiýany X üznüksiz tötäni ulylyk üçin tapmaly.
Çözülişi. Şerte görä $\lambda=5$. Onda

$$MX=\sigma(x)=\frac{1}{5}=0,2.$$

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25^2}=0,04.$$

§18. Paýlanyşyň momentleri hakynda düşünje.

Goý diskret X tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny berlen bolsun

X	1	2	5	100
p	0.6	0.2	0.19	0.01

Matematik garaşmasyny tapalyň

$$MX=1*0.6+2*0.2+5*0.19+100*0.01=2.95$$

X^2-yň paýlanyş kanunyny ýazalyň

X^2	1	4	25	10000
p	0.6	0.2	0.19	0.01

$$MX^2=1*0.6+4*0.2+25*0.19+10000*0.01=106.15.$$

Şu ýerden görnüşi ýaly MX^2, MX-dan has uly.
Mümkin bolan alyp biljek bahalaryny kwadrata göteren soň, olar has köpeldiler, emma ähtimallyklary bolsa üýtgemedi.
Şeýlelikde MX-dan MX^2-a geçende matematik garaşma has üýtgedi. Şonuň üçin hem tötäni ulylygyň bütin položitel derejesiniň matematik garaşmasyny tapmagyň manysy bardyr.
Kesgitleme. X tötäni ulylygyň k derejesinden alnan matematik garaşma, ýagny MX^k, şol tötäni ulylygyň k derejeli başlangyç momenti diýilýär we ol ν_k bilen bellenilýär, ýagny

$$MX^k=\vartheta_k$$

Hususy halda

$$\nu_1=MX$$
$$\nu_2=MX^2.$$

Şu formuladan peýdalanyp dispersiýanyň hasaplanyş formulasyny aşakdaky ýaly ýazyp bolýar

$$DX=MX^2-(MX)^2 \text{ ýa-da}$$
$$DX=\nu_2-\nu_1^2.$$

Indi bolsa (X-MX) gyşarmanyň momentine seredeliň.
Kesgitleme. $(X-MX)^k$ ulylygyň matematik garaşmasyna, k derejeli merkezi moment diýilýär. Ol μ_k bilen bellenilýär, ýagny

$$\mu_k=M[X-MX]^k$$

Hususy halda

$$\mu_1=M[X-MX]=0.$$
$$\mu_2=M[X-MX]^k=DX$$

Şu aşakdaky formulalary almak kyn däldir:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1 - 3\nu_1^2.$$

§19. Uly sanlaryň kanuny.

Tötäni ulylygyň synagyň netijesinde haýsy bahany alyp biljekdigini öňünden görkezmek kyn bolýar. Munuň özi köp sebäplere bagly bolýar. Bu sebäpleriň hemmesini hasaba alyp bilmeýäris. Görüp durşumyz ýaly her bir tötäni ulylyk hakta az maglumat bolany üçin ýeterlik köp sandaky tötäni ulylyklaryň jeminiň özüni alyp barşyndaky kanunlaryny anyklamak mümkin däl ýaly görünýär. Emma bu beýle däl. Käbir giň ulylygyň toplumy şertlerde ýeterlik köp sandaky tötäni ulylygyň jeminiň özüni alyp barşy tötänlik häsiýetini ýitirýär we kanuna laýyk galýar. Praktikada örän köp jemleýji täsiriniň tötänligi bagly bolmadyk netijä getirýän şertleri bilmek wajypdyr, çüňki ol hadysalaryň gidişini öňünden bilmeklige mümkinçilik berýär. Şu şertler uly sanlaryň kanuny diýen ulylyga umumy ada, eýe bolan teoremalarda görkezýär. Ol teoremalar esasan Bernulliniň, Çebyşewiň we beýleki birnäçe teoremalardyr. Çebyşewiň teoremasy uly sanlar kanunyna degişli iň uly teoremadyr. Bernulliniň teoremasy bolsa iň ýönekeýdir. Bu teoremalary subut etmek üçin Çebyşewiň deňsizligini peýdalanýarys.

1. Çebyşewiň deňsizligi.

Çebyşewiň deňsizligi diskret we üznüksiz tötäni ulylyklar üçin dogrydyr. Biz bu ýerde deňsizligiň subudyny diskret tötäni ulylyk üçin görkezjekdiris.

Paýlanyş tablisasy

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

görnüşde berlen diskret tötäni ulylyga seredeliň. Goý MX we DX degişlilikde X tötäni ulylygyň matematik garaşmasy we dispersiýasy bolsun. $\varepsilon>0$ položitel san.
Çebyşewiň deňsizligi.X tötäni ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndan gyşarmasy absolýut ulylygyň boýunça ε položitel sandan kiçidir diýen wakanyň ähtimallygy $\left(1-\frac{DX}{\varepsilon^2}\right)$-den kiçi däldir:

$$P\{|X-MX|<\varepsilon\}\geq\left(1-\frac{DX}{\varepsilon^2}\right). \qquad (1)$$

Subudy. $|X-MX|<\varepsilon$ we $|X-MX|\geq\varepsilon$ deňsizlikleri aňladýan wakalar, özara garşylykly, şonuň üçin hem olaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir:

$$P\{|X-MX|<\varepsilon\}+P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}=1$$

Bu ýerden

$$P\{|X-MX|<\varepsilon\}=1-P\{|X-MX|\geq\varepsilon\} \qquad (2)$$

Goý MX=a.
Onda

$$DX=(x_1-a)^2p_1+(x_2-a)^2*p_2+...+(x_n-a)^2*p_n$$

Indi, aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$DX \geq (x_1-a)^2 p_{k+1}+(x_2-a)^2 * p_{k+2}+...+(x_n-a)^2 * p_n \qquad (3)$$

$|x_j-a| \geq \varepsilon$ $(j=k+1,k+2,...,n)$ deňsizligiň iki tarapy hem položitel, şonuň üçin ony aşakdaky ýaly ýazýarys

$$|x_j-a|^2 \geq \varepsilon^2$$

(3) deňsizlikde skobkanyň içini ε bilen çalşyryp alarys

$$DX \geq \varepsilon^2 * p_{k+1}+\varepsilon^2 * p_{k+2}+...\varepsilon^2 * p_n \qquad (4)$$

ýa-da

$$p_{k+1}+ p_{k+2}+...+ p_n \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Ýöne

$p_{k+1}+ p_{k+2}+...+ p_k$ jem $P\{|X-a| \geq \varepsilon\}$ ähtimallygy aňladýar. Şonuň üçin

$P\{|X-a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, *ýa-da ony (1) goýup alarys:*

$$P\{|X-a|<\varepsilon\} \geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2} \qquad (5)$$

subudy gutardy.

Şeýlelikde Çebyşewiň deňsizligi diňe (X-MX) gyşarmanyň ähtimallygynyň otrisatel däldigini görkezýär. Çebyşewiň deňsizliginiň ähmiýeti örän ulydyr. Ony Çebyşewiň teoremasyny subut etmek üçin hem ulanýarlar.

2. Çebyşewiň teoremasy.

Teorema. Eger $x_1, x_2, ..., x_n$ tötäni ulylyklar jübüt-jübütden özara bagly bolmasa, bu ulylyklaryň dispersiýasy hemişelik C sandan uly bolmasa, ýagny $DX_1 \leq C$, $DX_2 \leq C$,…, $DX_n \leq C$ bolsa onda islendik kiçi ε>0 san üçin, tötäni ulylyklaryň sany n ýeterlikçe uly bolanda

$$\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon \qquad (6)$$

(wakanyň) deňsizligiň ähtimallygy 1-e has golaýdyr, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{MX_1+MX_2+\ldots+MX_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (7)$$

Hususy halda, eger $MX_1=MX_2=\ldots=MX_n=a$ (8)
bolsa onda

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (9)$$

Şeýlelikde, dispersiýasy çäkli bolan bagly bolmadyk örän köp tötäni ulylyklara seredilýän bolsa, onda şol wakanyň hökmany waka hasap edip boljakdygyny Çebyşewiň teoremasy tassyklaýar.

Subudy. Bellik girizýäris

$$\bar{x} \stackrel{\wedge}{=} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

Matematik garaşmany tapalyň

$$M\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)=\frac{MX_1+MX_2+\ldots+MX_n}{n}$$

Çebyşewiň deňsizliginden görnüşine görä

$$P\left\{\left|\overline{X}-M\overline{X}\right|\leq\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D\overline{X}}{\varepsilon^2} \qquad (10)$$

Indi dispersiýany tapalyň

$$D\overline{X}=D\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \qquad (11)$$

dispersiýanyň häsiýetini ulanyp taparys

$$D\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}(DX_1+DX_2+...+DX_n) \qquad (12)$$

Teoremanyň şertine görä

$$DX_1\leq C,\ \ DX_2\leq C,...,\ DX_n\leq C$$

Şonuň üçin

$$D\left(\frac{DX_1+DX_2+...+DX_n}{n^2}\right)\leq\frac{C+C+...+C}{n^2}=\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}$$

Şeýlelikde

$$D\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n^2}\right)=\frac{C}{n^2} \qquad (13)$$

(13)-ini (10)-iň sag tarapyna goýup alarys

$$P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}-\frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Bu ýerden $n\rightarrow\infty$ predele geçip alarys

$$\lim_{n\rightarrow\infty}P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}-\frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}\geq 1$$

Emma, ähtimallyk birden uly bolup bilmeýär, şonuň üçin hem

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}-\frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1$$

Deňlik gelip çykýar.
Teorema subut edildi.

3. Bernulliniň teoremasy.

Goý garaşsyz (bagly däl) n synag geçirilýän bolsun, şol synagyň hersinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p (0<p<1) deň bolsun. Onda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň nähili boljakdygyny öňünden aýdyp bolarmy diýen sorag ýüze çykýar.
Ol soraga Ýa. Bernulliniň teoremasy jogap berýär.
Bernulliniň teoremasy. Eger garaşsyz (bagly däl) n synag giçirilende A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik p (0<p<1) sana deň bolsa, onda otnositel ýygylygyň p ähtimallykdan gyşarmasynyň ähtimallygy absolýut ulylygy boýunça, eger n synaglaryň sany ýeterlik uly bolanda bire has golaýdyr.
Başgaça aýdaňda, eger ε islendik kiçi položitel san bolsa, onda aşakdaky deňlik dogrydyr.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

Bu ýerde
$\frac{m}{n}$ - otnositel ýygylyk,
p – ähtimallyk.
n has uly bolanda $\frac{m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} P$

4. Markowyň deňsizligi.

Goý δ islendik položitel san bolsun, onda $(X<\delta)$ wakanyň ähtimallygy $\left(1-\frac{a}{\delta}\right)$-dan kiçi däldir, ýagny

$$P\{x<\delta\}\geq 1-\frac{a}{\delta}$$

Bu ýerde X položitel tötäni ulylyk, a=MX matematik garaşma, δ položitel san.

Üçünji bölüm
Matematiki statistikanyň elementleri.

§1. 1. Matematiki statistika düşünjeleri. Saýlama usuly.

Matematiki statistika ähtimallyklar teoriýasy bilen birbada XII asyrda döreýär. Belli bolşy ýaly ähtimallyklar teoriýasy tötän wakalaryň matematiki modellerini öwrenmek bilen gyzyklanýar, a matematik statistika bolsa, statistik maglumatlary taýarlamagyň analiziniň usullaryny we düzgünlerini öwredýär.

Matematiki statistikanyň birinji meselesi statistiki maglumatlary ýygnamagyň we toparlaşdyrmagyň usulyny görkezýär. Ikinji meselesi bolsa, tejribäniň maksada görä geçirilýändigi barada statistiki maglumatlary derňemegiň usulyny oýlap tapmakdan ybaratdyr.

Goý obýektleri häsiýetlendirýän käbir hil we mukdar nyşanlara baglylykda birjynsly obýektleriň toplumyny öwrenmek talap edilýän bolsun. Meselem, eger detallar toplumy bar bolsa, onda hil nyşany bolup onuň hiliniň oňatlygy hyzmat edýär, mukdar nyşany bolup detalyň derňelýän ölçegi hyzmat edýär.

Tötän ýagdaýda saýlanyp alnan obýektleriň toplumyna ýöne saýlama toplum diýilýär.

Saýlama geçirilýän obýektleriň toplumyna baş toplum diýilýär.

Toplumyň obýektleriniň umumy sanyna (baş ýa-da saýlama) toplumyň göwrümi diýilýär. Meselem, eger 1000 detaldan derňemek üçin 100 detal saýlanyp alnan bolsa, onda N=1000 baş toplumyň göwrümi n=100 saýlama toplumyň göwrümi bolar.

Birmeňzeş obýektleriň jemlenmesini häsiýetlendirýän hil ýa-da mukdar nyşany öwrenilende, jemlenmedäki obýektleriň her birini ýekän-ýekän barlap çykmak köplenç mümkin bolmaýar, (obýektleriň sany örän köp, ýöne, mysal üçin, snarýadlaryň hilini barlamak üçin, olary ýarmaly bolýar).

Şonuň üçin saýlama usuly ulanylýar. Ol şeýle baş topardan tötän ýagdaýda n- sanysy alynyp (saýlama topar diýilýär) olar jikme-jik öwrenilýär we soňra ähli baş topar hakynda pikir ýöredilýär. Saýlama topardaky elementleriň garaşsyzlygyny talap edýäris.

§1. 2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.

Goý X – mukdar nyşany öwrenmek üçin baş toplumdan n – göwrümli x_1 , x_2 , x_3 , … x_k - saýlama bölünip alnan bolsun. Şonuň ýaly hem x_1 , n_1 – gezek, x_2 , n_2 – gezek, x_k , n_k – gezek gözegçilik edilýän bolsun.

Bu ýerde, gözegçilik edilýän x_i (x_1 , x_2 , x_3 , … x_k) bahalara wariantlar diýilýär. Artýan tertipde ýerdeşdirilen wariantlaryň yzygiderligine – wariasion hatar diýilýär. Käbir wariantlaryň gabat gelmekleri hem mümkin .

ýygylygy $n_1,n_2,...,n_k$ bilen bellesek,onda saýlama toplumynyň göwrümi deň bolar:

$n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$-saýlamanyň göwrümi

Ýygylygyň göwrüme bolan gatnaşygyna, ýagny

$\frac{n_1}{n}=\mu_1, \frac{n_2}{n}=\mu_2,..., \frac{n_k}{n}=\mu_k$ - sanlara otnositel ýygylyk diýilýär.

Bu ýerde $\mu_1+\mu_2+...+\mu_k=\sum\mu_k=1.$

Degişli ýygylyklary n_i – bilen ýa-da otnositel ýygylyklary μ_i – bilen berilen wariantlaryň x_i toplumyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy ýa-da emperiki kanuny diýilýär. Ol tablisa görnüşde aşakdaky ýaly berilýär

wariantlar	X_1	X_2	...	X_k
ýygylyk	n_1	n_2	...	n_k
otnositel ýygylyk	μ_1	μ_2	...	μ_k

Saýlama orta baha diýip

$$\overline{X}_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j$$

ulylyga aýdylýar.

§ 2.Empirik paýlanyş funksiýasy.

Goý X mukdar nyşanyň ýygylygynyň statistik paýlanyşy belli bolsun.

Bellik girizýäris:

n_x- x-dan kiçi wariantlaryň ýygylyklarynyň jemi;

n- saýlamanyň göwrümi.

Onda (X<x) wakanyň otnositel ýygylygy $\frac{n_x}{n}$ -e deň bolar. Eger

x ýygylyk n_i 12 18 30

<u>Çözülişi.</u> Saýlamanyň göwrümini tapýarys, ýagny $n_1+n_2+n_3=12+18+30+=60$.

Iň kiçi wariant $x_1=2$, diýmek

$F_B(x)=0$, eger $x\le 2$.

(X<6) baha, ýagny $x_1=2$ 12 gezek gözegçilik edildi, diýmek

$$F_B(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2 \qquad \text{eger } 2<x\le 6$$

(X<10) baha, $x_1=2$ we $x_2=6$ jemi 12+18=30 gezek gözegçilik edildi, diýmek

$$F_B(x) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ eger } 6<x\leq 6.$$

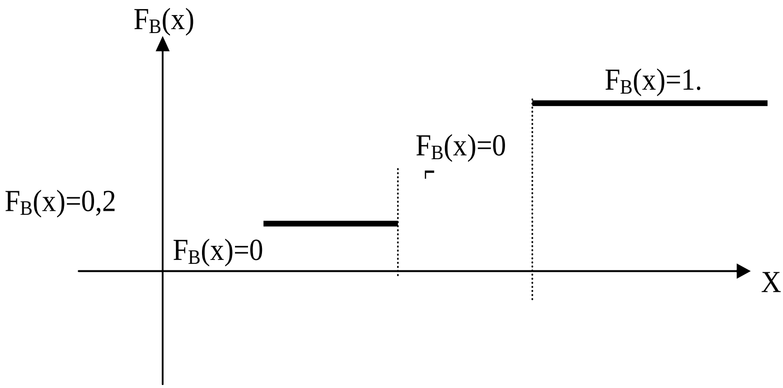
Bu ýerde x=10-iň uly wariant,diýmek

$$F_B(x)=1, \text{ eger } X>10.$$

Şeýlelikde, gözlenýän empirik funksiýa aşakdaky ýaly bolar.

$$F_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \leq 2, \\ 0{,}2, & \text{eger } 2 < x \leq 6, \\ 0{,}5, & \text{eger } 6 < x \leq 10, \\ 1, & \text{eger } x > 10. \end{cases}$$

Onuň grafigi



§ 3.Poligon we gistogramma.

Statistik paýlanyşy doly göz öňüne getirmek maksady bilen onuň dürli grafikleri gurulýar, olaryň içinde has köp duş <u>gelýänleri</u> poligon we <u>gistogrammadyr</u>.

(x_1,n_1), (x_2,n_2),..., (x_k,n_k)- nokatlary birleşdirýän kesimlerden emele gelen döwük çyzyga ýygylygyň poligony diýilýär. Ony gurmak üçin abssissalar okunda wariantlary (x_i), a ordinatalar okunda bolsa, oňa degişli ýygylyklar (n_i) ýerleşdirilýär. Soňra (x_i,n_i)-nokatlary göni çyzygyň kesimleri bilen birleşdirip ýygylygyň poligonyny alarys.

(x_1,μ_1), (x_2, μ_2),..., (x_k, μ_k)- nokatlary birleşdirýän döwük çyzyga, otnositel ýygylygyň (μ_i) poligony diýilýär. Ony gurmak üçin abssissalar okunda x_i we ordinata okunda μ_i bahalary ýerleşdirýärler. (x_i,μ_i)- nokatlary birleşdirip otnositel ýygylygyň poligony alynýar.

Eger nyşan üznüksiz bolsa, onda gistogramma gurulýar. Esasynyň uzynlygy h-a deň bolan bölek aralyklardan beýikligi $\frac{n_i}{n}$ (ýygylygyň dykyzlygy) gatnaşyga deň bolan tekjeli şekile ýygylygyň *gistogrammasy* diýilýär.

Ony gurmak üçin, abssissalar okunda bölekleýin kesimleri ýerleşdirýäris, şolardan arasynyň uzaklygy $\frac{n_i}{n}$ bolan abssissa okuna parallel kesimleri ýerleşdirýäris. i-gönibürçlugyň meýdany $h\cdot\frac{n_i}{n}=n_i$ bolar. Şeýlelikde, ýygylygyň gistogrammasynyň meýdany, hemme ýygylyklaryň jemine, ýagny saýlamanyň göwrümine deňdir.

Eger uzaklygy h, beýikligi μ_i bolsa, onda oňa otnositel ýygylygyň gistogrammasy diýilýär.

Otnositel ýygylygyň gistogrammasynyň meýdany, hemme otnositel ýygylyklaryň jemine, ýagny bire deňdir.

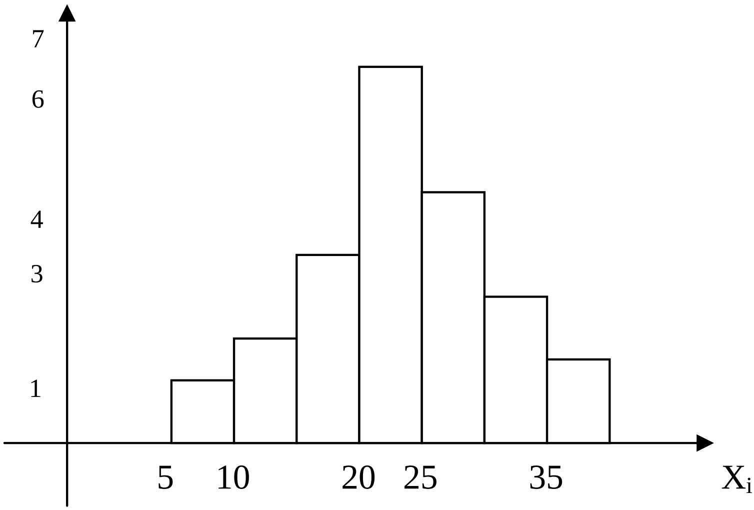
Sebäbi

$$\sum \mu_i = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = 1.$$

<u>Mysal 1</u>. Göwrümi n=100 bolan ýygylygyň paýlanyş tablisasy berlen.

h=5 interwalyň uzynlygy	$\sum n_i$	$\frac{n_i}{n}$ -ýygylygyň dykyzlygy
5-10	4	0.8
10-15	6	1.2
15-20	10	3.2
20-25	36	7.2
25-30	24	4.8
30-35	10	2.0
35-40	4	0.8

Ýygylygyň paýlanyşynyň gistogrammasyny gurmaly. Ol aşakdaky ýaly bolar



§ 4.Paýlanyşyň parametrleriniň statistik bahalary.

Goý baş toplumyň mukdar nyşany öwrenmek göz öňünde tutlýan bolsun. Şonuň ýaly hem mukdar nyşanyň nähili paýlanyşa eýedigi teoriýadan belli bolsun. Şol paýlanyşy kesgitleýän parametrleri bahalandyrmak meselesi ýüze çykýar. Meselem, eger baş toplumda öwrenilýän nyşanyň paýlanyşyna normaldygy öňünden belli bolsa, onda matematik garaşmany (a) we orta kwadratik gyşarmany (δ) bahalandyrmak zerurdyr. Sebäbi ol iki parametr (a we δ) normal paýlanyşy doly kesgitleýär. Eger-de mukdar nyşan Puassonyň paýlanyş kanunyna eýe bolsa, onda onuň bir λ parametri bardyr. Onda şol paýlanyşy kesgitleýän λ parametri bahalandyrmak gerek bolýar.

Goý gözegçiliniň ygtyýarynda diňe saýalamanyň bahalary, meselem, mukdar nyşanyň n tejribäniň netijesindäki $x_1,x_2,...,x_n$ bahalary belli bolsun. Şolaryň esasynda hem bahalandyrýan parametr aňladylýar.

$x_1,x_2,...,x_n$ bahalary, $X_1,X_2,...,X_n$ bagly däl tötän ulylyklar ýaly seredip, teoretiki paýlanyşyň näbelli parametriniň bahasyny tapmaklyk munuň özi, bahalandyrylýan parametrleriniň ýakynlaşan bahasyny, gözegçilik edilýän tötän ulylyga bgly funksiýany tapmak diýmekdir. Meselem, normal paýlanyşyň matematik garaşmasyny bahalandyrmak üçin

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

funksiýa (mukdar nyşanyň gözegçilik edilýän bahalarynyň orta arifmetik bahasy) hyzmat edýär.

Şeýlelikde, teoretik paýlanyşyň näbelli parametriniň statistik bahasy, gözegçilik edilýän tötän ulylyga bagly funksiýadyr.

§ 5.Süýşürilmedik, effektiw we durnukly bahalar.

Statistik bahanyň bahalandyrýan parametre has ýakyn bolmagy üçin, olar käbir şerti kanagatlandurmaly. Olary aşakda görkezýäris.

Goý θ^*, teoretik paýlanyşyň näbelli θ parametriniň statistik bahasy bolsun. Şonuň ýaly hem, n göwrümli saýlama boýunça θ_1^* baha tapylan bolsun. Tejribäni gaýtalap, şol göwrümli başga saýlamany baş toplumdan alyp, onuň netijesinde θ_2^* bahany tapýarys. Tejribäni köp gezek gaýtalap, umuman aýdaňda özara dürli bolan $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sanlary alýarys. Şeýlelikde, θ^* bahany tötän ulylyk, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sanlary onuň mümkin bolan bahalary ýaly seretmek mümkin.

θ^* baha, θ-nyň artygy bilen alnan ýakynlaşan bahasyny berýär diýip göz öňüne getirsek, onda berlen saýlama boýunça tapylan her $\theta_i^* \quad (i = \overline{1,n})$ san θ-nyň hakyky bahasyndan köp bolýar.

Onda, bu ýagdaýda θ^* tötän ulylygyň matematik garaşmasy (orta bahasy) θ-dan uly boljagy düşnüklidir, ýagny $M(\theta^*)>0$.

Eger-de θ^* baha kemi bilen alynsa, onda $M(\theta^*)<0$.

Şeýlelikde matematik garaşmasy bahalandyrýan parametre deň bolmadyk statistik bahany ulanmaklyk, sistematik ýalňyşlyga getirýär. Şol sebäpli hem, θ^* bahanyň matematik garaşmasy bahalandyrýan parametre deň bolmagyny talap etmelidir.

Başgaça aýdaňda $M\theta^*=\theta$ bolmaklygy sistematik ýalňyşlygyň bolmazlyklygy üpjün edýär.

Eger islendik göwrümli saýlamada, matematik garaşmasy bahalandyrylýan θ parametre deň bolan θ^* statistik baha, ýagny $M(\theta^*)=\theta$ bolsa, onda θ^* baha süýşürilmedik baha diýilýär.

Eger $M(\theta^*)\neq\theta$ bolsa, onda onuň ýaly baha süýşürilen baha diýilýär.

Mümkin bolan iň kiçi dispersiýa eýe bolan statistik baha «effektiw» baha diýilýär.

Eger $n\to\infty$ ähtimallygy boýunça bahalandyrylýan parametre ymtylýan statistik baha «durnukly» baha diýilýär.

Meselem. Süýşürilmedik bahanyň dispersiýasy $n\to\infty$ nula ymtylsa, onda onuň ýaly baha durnukly baha diýilýär.

§ 6.Baş orta baha.

Goý X mukdar nyşanabaglylykda baş diskret toplum öwrenilýän bolsun.

Baş toplumyň nyşanynyň orta arifmetik bahasyna, baş orta baha diýilýär. Ol $\overline{X}_{\Gamma}$ bilen bellenilýär.

Eger N göwrümi baş toplumyň nyşanynyň hemme $x_1,x_2,...,x_N$ dürli bolsa, onda

$$\overline{X}_{\Gamma}=\frac{x_1+x_2+...+x_N}{N}.$$

Eger-de nyşanyň $x_1,x_2,...,x_k$ bahalary degişlilikde $N_1,N_2,...,N_k$ ýygylyklara eýe bolup, $N_1,N_2,...,N_k=N$ bolsa, onda

$$\overline{X}_{\Gamma}=\frac{x_1N_1+x_2N_2+...+x_NN_k}{N}$$

bolar.

X nyşanyň ulylygyna tötän ulylyk, onuň mümkin bolan alyp biljek $x_1,x_2,...,x_k$ bahalary $\frac{1}{N}$-e deň bolan birmeňzeş ähtimallyga eýe bolan, tötän ulylyk ýaly seretsek, onda

$$MX=x_1\cdot\frac{1}{N}+x_2\cdot\frac{1}{N}+...+x_k\cdot\frac{1}{N}=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{N}=\overline{X}_{\Gamma}.$$

Eger baş toplumyň derňelýän nyşanyny X-y, tötän ulylyk ýaly seretsek, onda onuň matematik garaşmasy baş orta bahasyna deňdir, ýagny

$$MX=\overline{X}_{\Gamma}.$$

§ 7.Saýlama orta baha.

Goý baş toplumy onuň mukdary nyşany boýunça derňemek üçin n göwrümi toplum saýlanyp alnan bolsun.

Saýlama toplumyň nyşanynyň orta arifmetik bahasyna saýlama orta baha diýilýär we ol $\overline{X}_B$ bilen bellenilýär.

Eger n göwrümi saýlamanyň nyşanynyň hemme bahalary $x_1, x_2, ..., x_n$ dürli bolsa, onda

$$\overline{X}_B = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Eger-de nyşanyň $x_1, x_2, ..., x_n$ bahalary, degişlilikde $n_1, n_2, ..., n_n$ ýygylyklara eýe bolsa, hem-de $n_1, n_2, ..., n_n = n$ bolsa, onda

$$\overline{X}_B = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_n x_n}{n}$$

ýa-da

$$\overline{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n}.$$

Bellik. Berlen bir saýlamanyň esasynda tapylan saýlama orta baha kesgitli sana deňdir. Eger başga saýlama alsak onda saýlama orta baha üýtgär. Şeýlelikde saýlama orta bahany, tötän ulylyk ýaly seredip bolar. harakteristikalary, ýagny saýlama paýlanyşyň Onda onuň paýlanyşy we san matematik garaşmasy we dispersiýasy hakynda hem aýtmak bolar.

§ 8.Baş orta bahanyň saýlama orta baha boýunça bahalandyrylyşy.

Goý baş toplumdan bahalary $x_1, x_2, ..., x_n$ bolan n göwrümi gaýtalanýan saýlama, bölünip alnan bolsun. Şonuň ýaly-da baş orta baha $\overline{X}_Г$ belli bolsun, onda saýlamanyň netijesi boýunça, ony bahalandyrmak talap edilýän bolsun. Baş orta bahanyň bahasy deregine saýlama orta baha alynýar, ýagny

$$\overline{X}_В = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Onda, $\overline{X}_В$ süýşürilmedik bahadygyna göz ýetirmek gyn däldir. Şonuň ýaly-da, onuň matematik garaşmasy $\overline{X}_Г$-e deňdir, ýagny

$$M(\overline{X}_В) = \overline{X}_Г = a.$$

§ 9.Umumy we toparlaýyn orta bahalar.

Nyşanyň topara degişli bolan orta arifmetik bahasyna toparlaýyn orta baha diýilýär.

Nyşanyň umumy topluma degişli bolan orta arifmetik bahasyna umumy orta baha diýilýär.

Toparyň göwrümi, toparlaýyn orta bahasy belli bolsa, onda onuň umumy orta bahasyny tapyp bolýar.

Mysal.

Topar	1-nji	2-nji
Nyşanyň bahalary	1 2	1 5
Ýygylygy	10 15	20 30
Göwrümi	10+15=25	20+30=50

§ 10.Umumy orta bahadan gyşarma we onuň häsiýeti.

Goý n göwrümli saýlanan ýa-da umumy toplumyň mukdar nyşanynyň X-yň bahalary $x_1, x_2, ..., x_n$ we ýygylygy $n_1, n_2, ..., n_n$ berlen bolsun.

Umumy orta bahany tapalyň

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \qquad \left(\sum = \sum_{i=1}^{n} \right).$$

Onda

$$\sum n_i x_i = n\overline{X} \qquad (1)$$

$\overline{X}$ - hemişelik, şonuň üçin

$$\sum n_i x_i = \overline{X} \sum n_i = n\overline{X} \qquad \left(\sum n_i = n \right) \qquad (2)$$

Nyşanyň bahalary bilen umumy orta bahanyň tapawudyna, (x_i-$\overline{X}$) tapawuda gyşarma diýilýär.

Teorema. Gyşarmanyň degişli ýygylyklara köpeltmek hasylynyň jemi nyla deňdir.

Subudy. (1) we (2) deňlikleri göz öňünde tutup alarys

$$\sum n(x_i - \overline{X}) = \sum n_i x_i - \sum n_i \overline{X} = n\overline{X} - n\overline{X} = 0.$$

§ 11.Baş dispersiýa.

Baş toplumyň nyşanlarynyň bahalarynyň onuň orta bahasyndan $\overline{X}_\Gamma$ gyşarmasynyň kwadratynyň orta arifmetik bahasyna baş dispersiýa diýilýär we ol D bilen bellenilýär.

Eger n göwrümli baş toplumyň nyşanlarynyň bahalary dürli bolsa, onda

$$D_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}_\Gamma)^2}{N}.$$

Eger nyşanyň $x_1, x_2, ..., x_n$ bahalary degişlilikde $N_1, N_2, ..., N_n$ ýygylyklara eýe bolsa, onda

$$D_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i (x_i - X_\Gamma)^2}{N}.$$

§ 12.Saýlama dispersiýa.

Nyşanyň gözegçilik edilýän bahalarynyň $\overline{X}_B$ orta bahasyndan gyşarmasynyň orta arifmetik bahasyna saýlama dispersiýa diýilýär. Ol D_B bilen bellenilýär.

Eger $x_1,x_2,...,x_n$ bahalar dürli bolsa,

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}_B)}{n} \qquad \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Eger-de $x_1,x_2,...,x_n$ degişlilikde $n_1,n_2,...,n_n$ ýygylyklara eýe bolsa, hem-de $n_1+n_2+...+n_n=n$, onda

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{X}_B)^2}{n}.$$

Teorema. $D = \overline{X}^2 - [\overline{X}]^2.$

Bu formula dispersiýanyň hasaplanyş formulasy diýilýär.

Bu ýerde $\overline{X}$ - umumy orta baha.

$\overline{X}^2$ - nyşanyň alýan bahalarynyň kwadraty.

Düzedilen dispersiýa

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{X}_B)^2}{n-1}$$

formula bilen hasaplanylýar.

§ 13.Takyk baha. Ynamly ähtimallyk (ynamdarlyk). Ynamly aralyk.

Diňe bir san bilen aňladylýan baha takyk baha diýilýär. Iki san bilen, ýagny aralygyň çäkleri bilen aňladylýan baha aralyk baha diýilýär. Aralyk bahalar, takyk we ynamly bahalary gurmaklyga mümkinçilik döredýär.

Goý berlen saýlama boýunça tapylan statistik harakteristika - θ^*, θ parametriň bahasy bolup hyzmat edýän bolsun. θ hemişelik san diýip hasaplalyň, onda θ^* näçe takyk bolsa şonça hem θ parametri takyk hasaplanýar, eger-de $|\theta-\theta^*|$ tapawut absolýut ulylylgy boýunça has kiçi bolsa, ýa-da başgaça, eger $\delta>0$ we $|\theta-\theta^*|<\delta$ bolsa, onda δ näçe kiçi boldygyça, baha hem şonça takykdyr. Şeýlelikde δ bahanyň takykdygyny häsiýetlendirýän položitel sandyr. Emma $|\theta-\theta^*|<\delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan θ^* bahanyň deregine, şol deňsizligiň ýagny $|\theta-\theta^*|<\delta$ deňsizligiň ähtimallygyny tapýarlar. Şol ähtimallyga ynamly ähtimallyk (ynamdarlyk) diýilýär.

$|\theta-\theta^*|<\delta$ deňsizligiň ähtimallygyna θ bahanyň θ^* boýunça ynamly ähtimallygy γ diýilýär. Umuman ynamlylyk öňünden berilýär, γ- nyň deregine bire has golaý san alynýar.

Meselem. $\gamma=0,95$; $\gamma=0,999,...$

Goý $P\{|\theta-\theta^*|<\delta\}=\gamma$

$|\theta-\theta^*|$ deňsizligi $-\delta<\theta-\theta^*<\delta$ görnüşde ýazalyň, ýa-da $\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta$

onda

$$P\{\theta^*-\delta<\theta<\theta^*-\delta\}=\gamma.$$

Bu deňlige şeýle düşümeli:

$(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$- aralygy θ näbelli parametriň özünde saklaýandygyň ähtimallygy γ deňdir.

$(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$- aralyga ynamly aralyk diýilýär.

Bu ýerde γ ynamdarlyk.

§14.Normal paýlanyşyň σ belli bolanda matematik garaşmasynyň bahasy üçin ynamly aralygy.

Goý X mukdar nyşan, normal dargadyş kanunyna eýe bolsun, şeýle hem σ belli bolsun. Saýlanan orta baha boýunça a matematik garaşmany $\overline{X}$ orta baha boýunça bahalandyrmak talap edilýän bolsun.

Saýlanan orta $\overline{X}$ bahany, $\overline{X}$ tötän ulylyk ýaly nyşanyň saýlanan $x_1,x_2,...,x_n$ bahalaryny birmeňzeş dargadylan tötäni $X_1,X_2,...,X_n$ ulylyklar ýaly seredeliň. Başgaça, olaryň her biriniň matematik garaşmasy (a) we orta kwadratik gyşarmasy (δ). Onda $\overline{X}$ parametrleri

$$M(\overline{X}) = a, \qquad \sigma(\overline{X}) = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Goý $P\{|\overline{X}-a|<\delta\}=\gamma$ deňlik ýerine ýetýän bolsun. Onda

$$P\{|\overline{X}-a|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan peýdalanyp X-y $\overline{X}$ bilen we σ-ny $\sigma(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

bilen

çalşyryp alarys:

$$P\{|\overline{X}-a|<\delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t).$$

Bu ýerden $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ tapyp, alarys

$$P\{|\overline{X}-a\}|<t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\Phi(t).$$

Soňky deňlikden

$$P\left\{|\ \overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Bu deňligiň manysy şeýle

$\left(\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ aralyk näbelli a parametri doly ýapýandygynyň ähtimallygy γ deňdir.

(δ=t$\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ takyklygyň bahasy).

Mysal. X normal paýlanyşa eýe bolsun, σ=3 orta kwadratik gyşarmasy belli. Eger n=36, γ=0,95 bolsa ynamly aralygy tapmaly.

Şerte görä 2Φ(t)=0,95; onda Φ(t)=0,475. Tablisa boýunça t=1,96; onda

$$\delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$$

Onda ($\overline{X}$ -0,98; $\overline{X}$ +0,98).

Meselem, $\overline{X}$ =4,1 bolsa, onda

$\overline{X}$ -0,98=4,1-0,98=3,12; $\overline{X}$ +0,98=4,1+0,98=5,08.

Şeýlelikde 3,12<a<5,08 ýa-da]3,12; 5,08[

§ 15.Wariasion hataryň beýleki häsiýetnamalary.

Saýlanan orta baha we saýlanan dispersiýadan başga-da wariasion hataryň başga hem harakteristikalary bardyr. Olaryň esaslaryny görkezeliň.

Iň uly ýygylyga eýe bolan warianta moda M_0 diýilýär. Meselem

wariant	1	4	7	9
ýygylyk	5	1	20	6.

Moda 7 deňdir.

Wariasion hatary wariantlaryň sany boýunça iki bölýän warianta mediana m_e diýilýär. Eger wariantlaryň sany täk bolsa $n=2k+1$, onda $m_e=x_{k+1}$, eger $n=2k$ jübt bolsa, onda

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

<u>Meselem</u>. Eger hatar 2 3 5 6 7 9 bolsa, onda mediana 5 deňdir.

Eger hatar 2 3 5 6 7 9 bolsa, mediana

$$m_e = \frac{5+6}{2} = 5{,}5.$$

Mundan başgada

$$\theta = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{X}_B)}{\sum n_i}$$

bu ýerde θ - orta absolýut gyşarma.

Şeýle hem wariasiýa koeffisienti

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{X}_B} \cdot 100\%$$

§ 16.Saýlamanyň ýygnalan häsiýetnamasyny hasaplamak usuly.

<u>1. Şertli wariantlar.</u>

Goý saýlamawariantlary artýan şertinde, ýagny wariasion hatar görnüşde ýerleşen bolsun.

Tapawudy h-a deň bolan, arifmetik progressiýany (emele getirýän) düzýän wariantlara deňdurujy wariantlar diýilýär.

Aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýän wariantlara <u>şertli</u> wariant diýilýär, ýagny

$$U_i = \frac{x_i - C}{h}$$

bu ýerde C ýalan nol.
h – ädim $(x_i-x_{i-1})=h$ goňşy wariantyň tapawudy.

§ 17.Adaty, başlangyç we merkezi emprik momentler.

Saýlamanyň ýygnalan harakteristikalaryny hasaplamak üçin, kesgitlenişi degişli teoretik momentleriň hasaplanyşy ýaly hasaplanýan emprik momentlerden peýdalanmak amatlydyr. Teoretik momentden tapawutly, emprik momentler gözegçiligiň netijesi boýunça hasaplanýar.
(x_i-C) tapawudyň k derejesiniň orta bahasyna k tertipli adaty moment diýilýär. Ol şeýle bellenilýär:

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n}.$$

bu ýerde x_i - gözegçilik edilýän wariant,
n_i - wariantyň ýygylygy,
C – hemişelik san (ýalan nol),
$\sum n_i=n$ – saýlamanyň göwrümi.

Adaty momentde C=0 bolsa, onda oňa k tertipli başlangyç moment diýilýär.

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

Hususy halda

$$M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \overline{X}_B.$$

Ýagny birinji tertipli başlangyç moment saýlama orta baha deňdir.

Eger adaty momentde $C = \overline{X}_B$ bolsa, onda oňa k tertipli merkezi emprik moment diýilýär:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{X}_B)^k}{n}.$$

Hususy halda (k=2):

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{X}_B)^2}{n} = D_B.$$

ýagny, ikinji tertipli merkezi emprik moment saýlanan dispersiýa deňdir.

Merkezi momenti umumy moment bilen aňlatmak kyn däldir:

$$m_2 = M_2^{'} - (M_1^{'})^2;$$
$$m_3 = M_3^{'} - 3M_2^{'} \cdot M_1^{'} + 2(M_1^{'})^3;$$
$$m_4 = M_4^{'} - 4M_3^{'}M_1^{'} + 6M_2^{'}(M_1^{'})^2 - 3(M_1^{'})^4.$$

§ 18.Şertli emprik momentler.

Merkezi momentleri şertli momentler arkaly aňlatmak.

Merkezi momentleri hasaplamak çylşyrymly hasaplamany talap edýär. Şonuň üçin birinji warianty şertli warianty bilen çalşyrýarlar. Şertli wariant üçin hasaplanan k tertipli başlangyç momente, k tertipli şertli emprik mament diýilýär:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{n}\right)^2}{n}.$$

Hususy halda

$$M_k^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)}{n} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C\frac{\sum n_i}{n}\right] = \frac{1}{h}\left(\overline{X}_B - C\right).$$

Bu ýerden

$$\overline{X}_B = M_1^* h + C.$$

Şeýlelikde, saýlanan orta bahany tapmak üçin, birinji tertipli şertli momenti hasaplap, ony h-a köpeldip üstüne hem C-ni goşmak ýeterlikdir.

Umumy momenti şertli nilen aňladalyň:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{M_k^{'}}{h^k}.$$

Bu ýerden

$$M_k^{'} = M_k^* \cdot h^k.$$

Merkezi momenti şertli bilen aşakdaky ýaly aňladyp bolar:

$$m_2 = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right]h^k.$$
$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3\right]h^3.$$
$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^*(M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4\right]h^4.$$

Şunuň ýaly hem, saýlanan dispersiýany hasaplamak üçin aşakdaky formulany alarys:

$$D_B = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right]h^2.$$

§ 19.Saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplamakda köpeltmek usulynyň ulanylyşy.

Köpeltmek usuly wariasion hataryň dürli tertipli şertli momentlerini hasaplamakda has amatlydyr. Şertli momentler belli bolsa, bize gerek bolan başlangyç we merkezi empirik momentleri tapmak kyn däldir. Hususy halda köpeltmek usuly bilen saýlanan orta bahany we saýlanan dispersiýany hasaplamak amatlydyr. Şonuň üçin aşaky tablisany ulanýarys. Ol şeýle düzülýär:

1) birinji sütüne (başdaky) saýlamanyň wariantlary artýan tertipde ýazylýar;
2) ikinji sütüne wariantyň ýygylygy ýazylýar, hemme ýygylyklary goşup olaryň jemini aşaky öýjikde ýazýarlar.
3) üçünji sütüne $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$ şertli wariantlar ýazylýar. h ýerine iki goňşy wariantyň tapawudy alynýar: praktikada üçünji sütün aşakdaky ýaly doldurylýar, ýagny iň uly ýygylygy bolan setirli, öýýe hul ýazýarlar, onuň aşagyndaky öýlere 1,2,3; ýokarsyndaky bolsa –1,-2,-3 we ş.m. sanlar ýazylýar.
4) ýygylygy şertli warianta köpeldip, ony dördünji sütüne ýazýarlar, hemme alnan sanlary jemläp, sütüniň aşaky öýüne ýazýarlar.
5) ýygylygy şertli wariantyň kwadratyna köpeldip ony bäşinji sütünde ýazýarlar, hemme alnan sanlary jemläp sütüniň aşaky öýüne ýazýarlar;
6) Şertli wariantyň hersine 1-i goşup onuň kwadratyny ýygylyga köpeldip altynjy sütünde ýazýarys, olaryň jemini $\sum (n_i + 1)^2 \cdot n_i$ aşaky öýde ýerleşdirýäris.

***Bellik*.** Eger

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

deňlik dogry bolsa, onda hasaplama tablisasynyň dogrydygy bolýar.

Tablisanyň dogrydygyny barlaňdan soň şertli momenti hasaplaýarlar:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \qquad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

Iň soňynda orta saýlamany we dispersiýany aşakdaky formula boýunça hasaplaýarlar:

$$\overline{X}_B = M_1^* \cdot h + C$$
$$D_B = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] \cdot h.$$

Mysal. Aşakdaky statistik paýlanyşyň köpeltmek usuly bilen orta saýlamany we dispersiýany tapmaly:

Wariant	*10.2*	*10.4*	*10.6*	*10.8*	*11.0*	*11.2*	*11.4*	*11.6*	*11.8*	*12.0*
Ýygylyk	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Çözülişi. Hasaplama tablisasyny düzýäris, onuň üçin:

1) birinji sütüne wariantlary ýazýarys;
2) ikinji sütüne ýygylygy ýazýarys, olaryň jemini sütüniň soňky öýüne ýerleşdirýäris;
3) ýalan nol deregine 11.0 alýarys (ol iň uly ýygylyga eýedir), iň uly ýygylyga eýe bolan hataryň degişli öýüne 0 ýazýarys, ondan ýokary –1,-2,-3,-4 aşak bolsa 1,2,3,4,5 ýazýarys.
4) ýygylygy şertli warianta köpeldip ony dördünji sütüne ýazýarys; otrisatel we položitel sanlary aýratyn jemläp, ony sütüniň soňky öýüne ýerleşdirýäris. (57)

5) ýygylygy şertli wariantyň kwadratyna köpeldip, ony bäşinji sütünde ýazýarys, hemme alnan sanlary jemläp sütüniň aşaky öýünde ýerleşdirýäris (383).
6) şertli wariantyň hersine 1-i goşup onuň kwadratyny ýygylyga köpeldip ony altynjy sütünde ýazýarys, ol sütündäki sanlaryň jemini (597) sütüniň aşaky öýünde ýerleşdirýäris.

Netijede hasaplaýyş tablisasyny alarys.

x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
10.2	2	-4	-8	32	18
10.4	3	-3	-9	27	12
10.6	8	-2	-16	32	8
10.8	13	-1	-13	13	0
11.0	25	0	$\boxed{A_1=-46}$		25
11.2	20	1	20	20	80
11.4	12	2	24	48	108
11.6	10	3	30	90	160
11.8	6	4	24	96	150
12.0	1	5	5	25	36
			$\boxed{A_2=103}$		
	n=100		$\square n_iu_i=57$	$\square n_iu_i^2=383$	$\square n_i(u_i+1)^2=597$

Barlagy $\square n_iu_i^2+2\square n_iu_i+n=383+2*57+100=597.$

$\square n_i(u_i+1)^2=597.$ Hasaplama dogry.

Birinji we ikinji tertipli şertli momentleri tapalyň

$$M_1^* = \frac{\Sigma n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0{,}57; \qquad M_2 = \frac{\Sigma n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 0{,}383.$$

h=10,4-10,2=0,2.

Indi gözlenýän saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplalyň

$$\overline{X}_B = M_1^* \cdot h + C = 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 11{,}0 = 11{,}1.$$

$$D_B = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] \cdot h^2 = \left[3{,}83 - (0{,}57)^2\right] \cdot 0{,}2^2 = 0{,}14.$$

§ 20.Asimmetriýa we ekssess.

Empirik paýlanyşyň <u>asimmetriýasy</u> aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$a_s = \dfrac{m_3}{\sigma_B^3}$ bu ýerde m_3 - üçünji tertipli merkezi moment.

<u>*Ekssess*</u> (empirik paýlanyş üçin) aşakdaky deňlik boýunça tapylýar

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3,$$

bu ýerde m_4 – dördünji tertipli merkezi moment.
m_3 we m_4 momentleri köpeltmek usuly bilen hasaplamak amatlydyr.

<u>**Mysal**</u>. Öňki mysaldaky statistik paýlanyşyň asimmetriýasy we ekssessini tapmaly.

§ 21.Korrelýasiýa teoriýasynyň elementleri.

<u>1. Funksional statistik we korrelýasion baglyk.</u>

Belli bolşy ýaly $y=f(x)$, $x \in X$ funksional baglylykdyr. Bu ýerde x-yň ($x \in X$) her bahasyna y-iň ($y \in Y$) belli bir bahasy degişlidir.

Emma hemme baglanyşyk funksional däldir.

Mesele. 1) Adamyň boýy we agramy. Eger adamyň boýy belli bolsa, şoňa görä onuň agramyny kesgitläp bolýar we tersine. Emma adamyň boýy bilen agramynyň arasynda baglanyşyk bardyr, ýöne ol baglanyşyk funksional baglanyşyk däldir.

2) Sygyryň ýaşy we ondan alynýan süýdüň mukdary;
3) Şol bir talyplaryň dürli sapakdan alan bahalary we ş.m.
Şu görkezilen mysallardaky tötäni ululyklaryň özara baglanşyklaryna statistik baglanyşyk diýilýär.

Kesgitleme. Eger X ulylygyň (tötäni) dürli bahalaryna, beýleki Y ulylygyň dürli paýlanyşy degişli bolsa, onda X we Y ulylyklaryň arasyndaky baglanyşyga statistik baglanyşyk diýilýär.

Başgaça aýdaňda, eger Y: z_1, z_2, V_1, V_2 tötäni faktora bagly bolsa; X: Z_1, Z_2, U_1, U_2 tötäni faktorlara bagly bolsa, onda X we Y şýtgeýän ulylyklaryň arasyndaky baglanyşyk statistik baglanyşykdyr, sebäbi olaryň arasynda Z_1 we Z_2 umumy faktorlar bardyr.

Hususy halda haýsy hem bolsa bir ulylygyň üýtgemegi bilen beýleki ulylygyň orta bahasy üýtgeýän bolsa, onda bu ýagdaýda hem statistik baglanyşyk ýüze çykýar, onuň ýaly statistik baglanyşyga korrelýasion baglanyşyk diýilýär.

X we Y tötän ulylyklaryň korrelýasion baglanyşyga mysal getireliň.

Goý Y dänäniň hasyly, X döküniň mukdary. Meýdany boýunça birmeňzeş ýerden, birmeňzeş mukdara dökün sarp edilende hem dürli hasyl alynýar, ýagny X ulylyk, Y ulylyga görä funksiýa däldir. Munuň özi tötäni faktorlaryň täsiri astynda bolup geçýär (howanyň temperaturasy, ýagyş ýagmagy we ş.m.). Muňa seretmezden tejribäniň görkezişi ýaly, orta hasyl, döküniň mukdaryna görä funksiýadyr, ýagny Y ulylyk X ulylyk bilen korrelýasion baglydyr.

§ 22.Şertli orta baha. Korrelýasion baglylyk.

Korrelýasion baglylygyň kesgitlemesini anyklamak maksady bilen şertli orta baha düşünjesini girzýäris.

Goý X tötän ulylyk bilen Y tötän ulylygyň arasyndaky baglanyşyk öwrenilýän bolsun. X-iň her bahasyna Y-iň birnäçe bahasy degişli bolsun. Meselem: $x=2$ bolsa, Y: $y_1=5$, $y_2=6$,

$y_3=10$ bahalary alýan bolsun. Şu sanlaryň orta arifmetik bahasyny tapalyň

$$\bar{y}_2 = \frac{5+6+10}{3} = 7.$$

$\bar{y}_2$ şertli orta baha diýilýär, y-iň ýokarsyndaky çyzyk orta arifmetik bahany 2 san Y-iň $x_1=2$ bolandaky bahalaryny aňladýar.

X=x baha degişli bolan Y-iň orta arifmetik bahasyna $\bar{y}_x$–e şertli orta baha diýilýär.

Eger x-iň her bahasyna şertli orta bahanyň bir bahasy degişli bolsa, onda şertli orta baha x-a görä funksiýadyr. Bu ýagdaý-da X we Y tötän ulylyklaryň arasyndaky baglanyşyga korrelýasion baglylyk diýilýär.

Y-iň X-dan korrelýasion baglylygyna şertli orta bahanyň x-a görä funksional baglylygy diýilýär:

$$\bar{y}_x = f(x) \qquad (1)$$

(1) deňlemä Y-iň, X-a regressiýasynyň deňlemesi diýilýär; f(x) funksiýa Y-iň X-a regressiýasy diýilýär; onuň grafigine Y-iň X-a regressiýasynyň çyzygy diýilýär. Ýokardaky meňzeşlikde Y=y baha degişli bolan X-iň orta arifmetik bahasyna $\bar{y}_x$-e şertli orta baha diýilýär.

X-iň Y-den Korrelýasion baglylyga şertli orta bahanyň y-e görä funksional baglylygy diýilýär:

$$\bar{y}_x = \varphi(y) \qquad (2)$$

(2) deňlemä X-iň, Y-e regressiýasynyň deňlemesi diýilýär; φ(y) funksiýa X-iň Y-e regressiýasy diýilýär; onuň grafigine X-iň Y-e regressiýasynyň çyzygy diýilýär.

§ 23.Korrelýasiýa teoriýasynyň esasy iki meselesi.

Korrelýasiýa teoriýasynyň birinji meselesi korrelýasion baglylygyň formasyny anyklamadan ybaratdyr, ýagny regressiýanyň funksiýasynyň görnüşini (çyzykly, kwadrat, görkezijili we ş.m.). Köplenç ýagdaýda regressiýa funksiýasy çyzykly bolýar. Eger f(x) we φ(x) funksiýalar çyzykly bolsa, onda korrelýasiýa çyzykly diýilýär, tersine bolsa çyzykly däl. Diýmek çyzykly korrelýasiýa bolsa onda iki regressiýa çyzygy hem göni çyzykdyr.

Korrelýasiýanyň ikinji meselesi – korrelýasion baglanyşygynyň ýakynlygyny (güýjini) bahalandyrmakdan ybaratdyr. Y-iň X-dan korrelýasion baglylygyň ýakynlygy $\overline{y}_x$ şertli bahanyň töwereginde Y-iň bahasynyň dargaýşynyň bahasy bilen bahalandyrylýar. Eger dargadyş uly bolsa, onda Y, X-dan az baglydyr ýa-da ýokdyr. Eger dargaýyş az bolsa, onda olaryň arasyndaky baglanyşyk güýçlidir.
X-iň Y-den korrelýasion baglylygy hem şunuň ýaly häsiýetlendirilýär.

§ 24.Göni çyzykly regressiýasynyň saýlama deňlemesiniň parametrleriniň gözlenişi.

Goý X we Y mukdar nyşanlary çyzykly korrelýasion baglanyşyk bilen bagly bolsun. Bu ýagdaýda regressiýa çyzyklarynyň ikisi hem gönidir.
Goý şol göni çyzyklaryň deňlemesini gözlemek üçin n bagly däl synag geçirilsin, olaryň netijesinde n goşa san alynýar:

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n).$$

Emma, gözegçilik edilýän goşa sanlary (X,Y) tötän ulylyklaryň mümkin bolan bahalarynyň hemmesiniň baş toplumyndan tötäni saýlama hökmünde seretmek bolar. Onda X we Y ulylyklary we şol berlen zatlaryň esasynda tapylan deňlemeleri saýlama diýip atlandyrýarlar.

Bu ýerde Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini gözleýäris.
Ýönekeý ýagdaýa seredeliň: X-nyşanyň x-dürli bahalary we oňa degişli Y-nyşanyň y-bahalary bir gezek gözegçilik edilýär. Şonuň üçin gözlenýän

$$\overline{y}_x = kx + b$$

deňlemäni

$$Y = kx + b$$

Görnüşde ýazmak bolýar.
Y-iň X-a regressiýanyň göni çyzykly deňlemesiniň burç koeffissientini Y-iň X-a regressiýasynyň saýlama koeffisienti diýip atlandyrýarlar we ony ρ_{yx} bilen belleýärler.
Şeýlelikde Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini

$$Y = \rho_{yx} x + b \qquad (1)$$

görnüşde gözleýäris.
Biziň maksadymyz tejribäniň netijesi boýunça XOY tekizlikde gurlan (x_1,y_1), (x_2,y_2),...,(x_n,y_n) nokatlar mümkin boldygyça (1) göni çyzyga golaý ýerleşer ýaly edip «ρ_{yx}» we “b” parametrleri saýlap almakdyr.

Bu talabyň manysyny düşündireliň

$$Y_i - y_i \qquad (i=1,2,...,n)$$

tapawudy gyşarma diýip atlandyralyň. Bu ýerde Y_i-x_i-iň gözegçiligiň netijesinde alan bahalary boýunça (1) formula boýunça hasaplanan ordinata.

y_i-x_i-e degişli, gözegçilik edilýär ordinata. ρ_{yx} we b parametri, gyşarmanyň (Y_i-y_i) kwadratlarynyň jemi minimal bolar ýaly edip saýlap alarys. (iň kiçi kwadratyň jemi metody mundan ybaratdyr).

Belli bolşy ýaly her gyşarma gözlenýän parametrlere bagly, onda gyşarmanyň kwadratlarynyň jemi şol parametrlere görä F funksiýadyr (wagtlaýynça ρ_{yx}-yň deregine ρ ýazýarys):

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - y_i\right)^2$$

ýa-da

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho x_i + b - y_i\right)^2.$$

Minimumy tapmak üçin degişli hususy önümleri nola deňleýäris

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(r x_i + b - y_i\right) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(r x_i + b - y_i\right) = 0$$

deňlemeler sistemasyny alýarys.

$$\begin{cases} (\Sigma x^2)\rho + (\Sigma x)b = \Sigma xy; \\ (\Sigma x)\rho + nb = \Sigma y. \end{cases} \qquad (2)$$

Bu sistemany çözüp, gözlenýän parametrleri aşakdaky formulalar boýunça tapýarys:

$$\rho_y = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2};$$

$$b = \frac{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y - \Sigma x \cdot \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad (3)$$

Şuňa meňzeşlikde, X-iň Y-e regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini tapyp bolýar:

- $$\overline{X}_y = \rho_{xy} \cdot x + C.$$

Mysal. Berlen n=5 gözegçiligiň netijesinde Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini tapmaly:

x	**1.00**	**1.50**	**3.00**	**4.50**	**5.00**
y	1.25	1.40	1.50	1.75	2.25

Çözülişi. Hasaplaýyş tablisasyny düzýäris:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1.00	1.25	1	1.250
1.50	1.40	2.25	2.100
3.00	1.50	9.00	4.500
4.50	1.75	20.25	4.875
5.00	2.25	25.00	11.250
□x_i=15	□y_i=8.15	□x_i^2=57.50	□$x_i y_i$=26.975

Tablisada tapylan jemleri (3) formula goýup gözlenýän parametrleri tapýarys:

$$\rho_{yx} = \frac{5*26.975-15*8.15}{5*5.75-15^2} = 0.202$$

$$b = \frac{57.5*8.15-15*26.975}{62.5} = 1.024.$$

Regressiýanyň gözlenýän deňlemesini ýazalyň

$$Y=0.202x+1.024.$$

§ 25.Korrelýasion tablisa.

Ýeterlik köp synag geçirilende x-yň şol bir bahasy n_x-gezk duş gelmegi mümkin, y-iň şol bir bahasy n_y-gezek gelmegi mümkin, (xy)-iň goşa bahasy n_{xy} gezek gözegçilik edilmegi mümkin. Şonuň üçin gözegçiligiň netijeleri toplanýar, ýagny n_x, n_y, n_{xy} ýygylyklar hasaplanýar. Hemme toparlanan netijeler tablisa görnüşde ýazylýar, ol tablisa hem korrelýasion tablisa diýilýär. Korrelýasion tablisanyň düzülişini mysalda görkezeliň:

x / **y**	10	20	30	40	n_{xy}
0.4	5	-----	7	14	26
0.6	-----	2	6	4	12
0.8	3	19	-----	-----	22
n_x	8	21	13	18	n=60

Tablisanyň birinji hatarynda X-nyşanyň synag edilýan bahalary (10;20;30;40) görkezilen. Birinji sütünde bolsa Y-nyşanyň synag bahalary (0,4;0,5;0,6;0,8) görkezilen. Sütün bilen seteriň kesişýän ýerinde nyşanlaryň goşa synag bahalary n_{xy} ýygylyk ýazylan. Meselem 5 ýygylyk (10;0,4) goşa sanyň 5 gezek gabat gelendigini görkezýär. Ýygylygyň hemme bahalary gapdal taraplary ýogyn çyzylan göniburçlygyň içinde ýerleşendir. Ýöne çyzyk meselem (20;0,4) hiç gabat gelmedigini aňladýar.

Soňky sütünde hatardaky ýygylyklaryň jemi ýazylan. Meselem birinji hataryň ýygylyklarynyň jemi $n_y=5+7+14=26$; bu san Y-nyşanyň 0,4-e deň bahasynyň 26 gezek gabat gelendigini aňladýar.

Soňky setirde sütündäki ýygylyklaryň jemi ýazylandyr. Meselem 8 san X-nyşanyň 10 deň bolan bahasynyň 8 gezek gabat gelendigini aňladýar.

Tablisanyň aşaky sag tarapyndaky öýünde ähli ýygylyklaryň jemi $\square n_x=\square n_y=n$ ýerleşdirilendir. Biziň mysalymyzda

$\square n_x=8+21+13+18=60,$ $\square n_y=26+12+22=60.$

§ 26.Göni çyzykly regressiýasynyň deňlemesiniň saýlama parametrleriniň gözleniş. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisienti.

Belli bolşy ýaly Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly deňlemesiniň parametrlerini kesgitlemek üçin aşakdaky deňleme sistemasy alnypdy:

$$\left.\begin{aligned}\left(\Sigma x^2\right)\rho_{yx} + (\Sigma x)b &= \Sigma xy \\ \left(\Sigma x\right)\rho_{yx} + nb &= \Sigma y\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Onda X-yň bahasy we oňa degişi bolan Y-iň bahalary bir gezek gözegçilik edilipdi.

Indi bolsa uly sanly netijeler alnan bolsun, olaryň içinde gaýtalanýanlary hem bar bolsun we olar korrelýasion tablisa görnüşde toparlanan bolsun. Aşakdaky toždestwolardan peýdalanyp (1) sistemasyny başgaça ýazýarys:

$\Sigma x = n\overline{x}$ ($\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ deňlikden gelip çykýar).

$\Sigma y = n\overline{y}$ ($\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$ deňlikden gelip çykýar).

$\Sigma x^2 = n\overline{x}^2$ ($\overline{x}^2 = \dfrac{\Sigma x^2}{n}$ deňlikden gelip çykýar).

$\Sigma xy = \Sigma n_{xy}xy$ ((xy) goşa sanlaryň n_{xy} gezek ýüze çykýandygy göz öňünde tutulýar).

Ýokardaky deňlikleri göz öňünde tutup (1) sistemanyň ikinji deňligini n-e alarys

$$\left.\begin{aligned}(n\overline{x^2})\rho_{yx} + (n\overline{x})b &= \Sigma n_{xy}xy \\ (\overline{x})\rho_{yx} + b &= \overline{y}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Bu sistemany çözüp, ρ_{yx} we b parametrleri tapsak, onda gözlenýän deňleme aşakdaky görnüşde bolar

$$\overline{y}_x = \rho_{yx}x + b.$$

Emma korrelýasiýa koeffisienti diýen ulylyga girizip regressiýasynyň deňlemesini başgaça ýazmak alamatlydyr. Onuň üçin (2) sistemanyň ikinji deňlemesinden b-ni tapalyň:

$$b = \overline{y} - \rho_{yx}\overline{x}.$$

Bu deňlemäniň sag tarapyny $\overline{y}_x = \rho_{yx}x + b$ deňlemäni alyp goýup alarys

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x}) \qquad (3)$$

$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \sigma_x^2$ deňligi göz öňünde tutup (2) sistemadan regressiýasynyň koeffisientini tapýarys:

$$\rho_{yx} = \frac{\Sigma n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n[\overline{x^2} - (\overline{x})^2]} = \frac{\Sigma n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ droba köpeldip alarys

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Deňligiň sag tarapyny r_B bilen belläp alarys

$$\rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_B$$

r_B-ni korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti diýip atlandyrýarys. Ýokary deňligi aşakdaky görnüşde ýazýarys

$$\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Bu deňligiň sag tarapyny (3)-a goýup, Y-iň X-a regressiýasynyň göni çyzykly saýlama deňlemesini aşakdaky görnüşde alarys

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \qquad (4)$$

Bellik 1. X-iň Y-e regressiýasynyň saýlama deňlemesi hem öňkä meňzeşlikde aşakdaky görnüşde ýazylýar

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}) \qquad (5)$$

bu ýerde

$$r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}.$$

Bellik 2. Regressiýanyň göni çyzykly deňlemeleri simmetrik görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar

$$\frac{\overline{y}_x - \overline{y}}{\sigma_y} = r_B \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x}; \qquad \frac{\overline{x}_y - x}{\sigma_x} = r_B \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y}.$$

Bellik 3. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti gerekli özbaşdak baha eýedir. Öňkilerden görnüşi ýaly korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti aşakdaky ýaly kesgitlenýär

$$r_B = \frac{\Sigma n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x \sigma_y} \qquad (6)$$

bu ýerde

x,y – X we Y nyşanlaryň wariantlary,

n_{xy} – goşa (xy) wariantyň ýygylygy,

n – saýlanan göwrümi,

$\overline{x}, \overline{y}$ - saýlanan orta bahalar,

σ_x, σ_y – saýlanan orta kwadratik gyşarma.

§ 27.Korrelýäsiýanyň saýlanan koeffisientiniň häsiýetleri.

Çyzykly korrelýasion baglylygyň ýakynlygyny bahalandyrmak üçin hyzmat edýänligi gelip çykýan korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientleriniň häsiýetini getirýäris. Aşakdaky formuladan peýdalanýarys

- $S_y = D_y(1 - r_B^2)$; $S_x = D_x(1 - r_B^2)$;

bu ýerde $S_y - \bar{y}_x$ - şertli orta bahanyň daşyndaky y-iň gözegçilik edilýän bahasynyň degişli dispersiýasy; $D_y - \bar{y}$ - umumy orta bahanyň daşyndaky y-iň gözegçilik edilýän bahasynyň dispersiýasy.

S_x we D_x – hem şonuň ýaly manydyr.

1. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň absolýut ulylygy birden uly däldir.

Subudy: Islendik dispersiýa otrisatel däl.

Hususy halda

$$S_y = D_y(1 - r_B^2) \geq 0$$

Diýmek

$$1 - r_B^2 \geq 0$$

bu ýerden

$$-1 \leq r_B \leq 1$$

ýa-da

$$|r_B| \leq 1.$$

2. Eger korrelýasiýasyň saýlanan koeffisienti nula deň bolsa we saýlanan regressiýa çyzyklary göni bolsa, onda X we Y özara çyzykly korrelýasion baglylyga eýe däldir.

Subudy: Eger r_B=0 bolsa, onda Y-iň X-a regressiýasynyň saýlanan göni çyzykly deňlemesi

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

aşakdaky görnüşe eýe bolar

$$\overline{y}_x - \overline{y} = 0$$

ýa-da

$$\overline{y}_x = \overline{y}.$$

Eger r_B=0 bolsa, onda X-iň Y-e regressiýanyň göni çyzykly deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe bolar

$$\overline{X}_y = \overline{X}.$$

Şeýlelikde, eger r_B=0 bolsa, onda şertli orta bahalar, degişli argumentleriň üýtgemeginde henişelik bahasyny saklaýarlar; şonuň üçin hem X we Y çyzykly korrelýasion baglylyga eýe däldir. Häzirki ýagdaýda regressiýa çyzyklary degişli koordinata oklaryna paralleldirler.

2. Eger korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň absolýut ulylygy bire deň bolsa, onda gözegçilik edilýän nyşanlaryň bahalary çyzykly funksional baglylyk bilen baglydyr.

Eger $|r_B|$=1, onda $S_y = D_y(1 - r_B^2)$

Bu ýerden

$$y - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X}) = 0$$

deňlik gelip çykýar.

Bu ýerden görnüşi ýaly, islendik gözegçilik edilýän goşa (x,y) san X we y görä çyzykly deňlemäni kanagatlandyrýarlar, ýagny nyşanlaryň bahalary çyzykly funksional baglylyk bilen baglydyr.

3. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň absolýut ulylygy artmagy bilen çyzykly korrelýasion baglanyşyk has ýakynlaşýar we $|r_B|$=1 bolanda funksional baglanyşyga geçýär.

Subudy.

$$S_y = D_y(1 - r_B^2), \qquad S_x = D_x(1 - r_B^2)$$

formulardan görnüşi ýaly, r_B-niň absolýut ulylygynyň artmagy bilen S_y we S_x kemelýär, bu bolsa nyşanlaryň arasyndaky baglanyşygyň has ýakynlaşýandygyny aňladýar we $|r_B|=1$ bolanda funksional baglanyşyga öwrülýär.

***<u>Bellik 1</u>*.** Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisientiniň alamaty regressiýasynyň saýlanan koeffisienti bilen gabat gelýär. Ol aşakdaky formulalardan görünýär:

$$\rho_{yx} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad \rho_{xy} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad (*)$$

<u>Bellik</u> <u>2</u>. Korrelýasiýanyň saýlanan koeffisienti, regressiýanyň saýlanan koeffisientiniň orta geometrik bahasyna deňdir.
Hakykatdan hem (*) deňligiň sag we çep taraplaryny köpeldip alarys

$$\rho_{yx} \cdot \rho_{xy} = r_B^2$$

Barlagy ýeňilleşdirmek maksady bilen her öýjükdäki ($n_{UV} \cdot UV$) sanlary her meýdan üçin aýratyn jemleýärler, hasaplanyş her meýdanyň her setiri we her sütüni üçin aýratyn ýerine ýetirilýär; meýdany ň setir üçin ($n_{UV} \cdot UV$) sanlaryň jemi, sag tarapda ýerleşen, şol meýdanyň nomerini özünde saklaýan (sanlaryň goşulan meýdany) goşmaça sütününde ýazylýar. Sütün üçin ($n_{UV} \cdot UV$) sanlaryň jemi, aşakda ýerleşen, şol meýdanyň nomerini özünde saklaýan goşmaça setirde ýazylýar. Her meýdan üçin aýratyn sanlaryň jemi tablisanyň sag aşaky burçundaky jemleýji öýjükde ýazylýar. Iň soňynda jemleýji öýjügiň sanlarynyň jemini goşup gözlenýän sany tapýarlar.
Hasaplaýyş shemasy tablisa görnüşde aşakda görkezilendir.

U V	-3	-2	-1	0		1	2
-2	5 6	7 4	---			58	
-1	---	20 4	23 1		2	63	
0				iň uly ýygylyk		3	4
		3			4		
1	30	68	23	2		121	2
3				4		3	4

Tablisanyň doldurylyşyny düşündirýäris:
Birinji meýdanyň setiri boýunça n_{UV} we UV sanlaryň köpeltmek hasylynyň jemini tapýarys. (5·6+7·4=58; 20·2+23·1=63), ony goşmaça 1 sütünde ýerleşdirýäris.
Birinji meýdanyň sütüni boýunça n_{UV} we UV sanlaryň köpeltmek hasylynyň jemini tapýarys. (5·6=30; 7·4+20·2=68, 23·1=23), ony goşmaça 1 sütünde ýerleşdirýäris.
Goşmaça 1 sütüniň sanlarynyň jemini tapýarys (58+63=121) ony birinji jemleýji öýjükde ýazýarys.
Barlag üçin goşmaça setiriň hemme sanlaryny goşýarys (30+68+23=121).
Hasaplama meýdan bilen hem şonuň ýaly hasaplama geçirilýär.

Edebiýatlar

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.
10. Hudaýberenow Ö.G., Ýokary matematika. Aşgabat, 2007.
11. Вентцель Е.С., Теория вероятностей. «Наука» 1964.
12. Гнеденко Б.В., Курс теория вероятностей. «Наука» 1965.
13. Гмурман В.Е., Теория вероятностей. Издательство «высшая школа» Москва 1970.

14.Королюк В. С., Портенко Н.М., Скороход А.В., Турбин А.Ф., Справочник по теории вероятностей и математической статистики. «Наука» 1985.
15.Гмурман В.Е., Руководство к решению задач по и математическая статистика. Издательство «Высшая школа» Москва 1970.
16.Гутер Р.С., Овчинский Б.В. численного анализа и математической обработки результатов опыта. Физматгиз. 1967.
17.Румшиский Л.З., Элементы тероии вероятностей. «Наука» 1967.

MAZMUNY

Birinji bölüm.

Ikinji bölüm.

Üçünji bölüm