H. Saryýew, G. Şadurdyýew, P.Gurbanow, Ş. Arazberdiýewa,
Ş. Nurmyradow, W. Akmyradow, S. Hudaýberdiýew,
A. Ýegenow, G. Nurnazarow, H. Babajykow

MATEMATIKANYŇ BAŞLANGYÇ KURSY

Mugallymçilik mekdepleri üçin synag okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
"Ylym" neşirýaty
2010

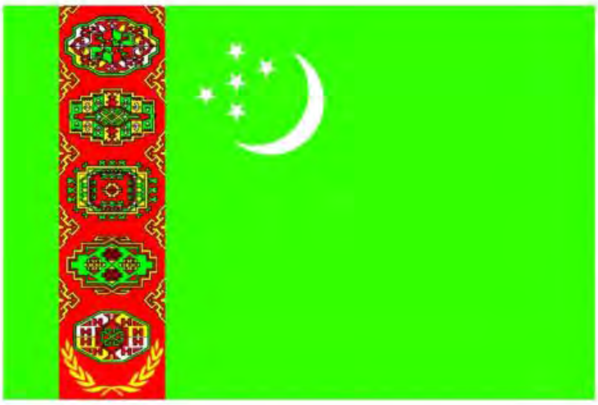
UOK 378:51
S 22

Saryýew H. we başg.
S 22 **Matematikanyň başlangyç kursy.** Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby – A.: "Ylym" neşirýaty. – 304 sah., 2010.

TDKP № 245, 2010 KBK № 22.1 ýa73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ
DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GIRIŞ

Kiçi ýaşly mekdep okuwçylaryna matematikany üstünlikli öwretmek üçin mugallymyň diňe bir metodiki (usuly) taýdan ussatlygy däl-de, onuň matematiki düşünjelere we faktlara çuňňur düşünmekligi zerurdyr. Başlangyç synplarda gabat gelýän köp matematiki düşünjeler anyk däl görnüşde ulanylýar, ýagny ol düşünjelere berk kesgitleme berilmeýär. Matematika dersiniň ilkinji sapaklarynda okuwçylara "san", "ululyk", "kesim", "geometrik figura" we ş.m. düşünjeler barada maglumatlar berlip başlanýar. Mugallym sanlaryň üstünde geçirilýän amallaryň dürli kesgitlemelerini we ol amallaryň häsiýetlerini düýpli öwrenmelidir. Ol özüniň meseledir mysallary çözmek üçin geçirýän her bir işini esaslandyrmagy başarmalydyr. Bulardan başga-da mugallym matematika sapagyny ýaşlary watansöýüjilik ruhunda terbiýelemek üçin ulanmagy başarmaly, olarda ylmy dünýägaraýşyň (formirlenmegini) emele gelmegini gazanmaly. Matematika hem edil beýleki ylymlar (fizika, himiýa, biologiýa we ş.m.) ýaly bizi gurşap alan dünýäni (tebigaty) öwrenýär. Umuman islendik matematiki obýektler – bu zatlardan we daş-töweregimizi gurşap alan tebigatdan mukdar hem-de giňişlik häsiýetleriň bölünip alynmagydyr. Şonuň üçin matematika ylmyna tebigy ylym hem diýýärler. Matematika ylmy tebigatda bolup geçýän özgerişliklere sanlaryň, çyzgylaryň we formulalaryň üsti bilen baha berýär. Bu ylmy öwrenmeklik düşünjeleriň üsti bilen amala aşyrylýar. Düşünje näme? Ilki bilen bu soraga jogap bermäge synanyşalyň.

Biz haýsyda bolsa bir zat (obýekt, predmet) barada başga birine gürrüň bermekçi bolanymyzda, ol obýekti (eger mümkin bolsa) gürrüňdeşimize görkezýäris ýa-da ol obýekti dil üsti bilen şekillendirip başlaýarys, obýektiň hut özüne degişli häsiýetlerini aýdyp ugraýarys. Ine şu ýagdaýda biz gürrüňi edilýän predmet barada düşünje berdik diýip aýdýarys.

Matematika ylmy abstrakt ylymdyr, ýagny onda gabat gelýän düşünjeler obýektiň käbir häsiýetlerini ulanmak bilen onuň başga bir häsiýetlerine asla üns bermeýär. Mysal üçin, "kesim" düşünjesini seljereliň.

Iki sany gazyk kakalyň we olaryň arasyna ýüp çekeliň. Ol gazyklaryň arasyndaky ýüpüň bölegine "kesim" diýeliň. Indi kakýan gazyklarymyzy inçeldeliň we ýüpe derek sapak geçireliň. Biz ýene-de kesim aldyk. Şu ýerde "kesim düşünjesini mundan beýläk hem takyklamak bolmazmy?" diýen sorag ýüze çykýar hem-de matematiki düşünjeleriň abstraktlygy gelip çykýar.

Matematika ylmy özüniň ösüşinde birnäçe etaplary başdan geçirip, olaryň hersine material dünýäde bolup geçýän özgerişlikleriň arasyndaky mukdar gatnaşyklarynyň dürli görnüşlerine düşünmek üçin kesgitli usullary döredýär. Häzirki döwürde material dünýäni öwrenmekligiň giňden ýaýran usullarynyň biri hem matematiki modelleri gurmakdyr. Bu modelleri öwrenmek bilen matematika dünýäde bolup geçýän real hakykaty öwrenýär.

Mysal üçin, $y=kx$ funksiýanyň häsiýetlerini öwrenmek dürli ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy ýazmaga mümkinçilik berýär. Meselem: wagt bilen göni çyzykly deňölçegli hereketiň, harydyň mukdary bilen onuň jemi bahasynyň arasyndaky baglanyşygy ýazmaga mümkinçilik berýär. Umuman matematikanyň umumylaşdyrmasy bilimleriň dürli oblastlarynda ulanmaga, tebigata akyl ýetirmäge we tehnikalary döretmäge ägirt kuwwatly gural bolup hyzmat edýär.

I bap
UMUMY DÜŞÜNJELER

§ 1. Düşünjäniň göwrümi we mazmuny

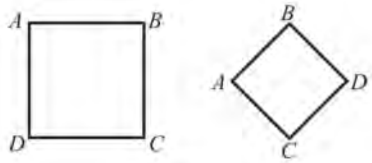
Her bir matematiki obýekt kesgitli häsiýete eýedir. Mysal üçin, kwadratyň dört tarapy, dört göni burçy, deň diagonallary bar. Ol geometrik figuranyň ýokarda agzalan häsiýetlerinden başga hem häsiýetleri bardyr.

Predmetler biri-birinden iki häsiýet bilen tapawutlandyrylýar. Olaryň biri **düýpli** häsiýetler, beýlekisi bolsa **düýpli däl** häsiýetlerdir.

Düşünjäniň diňe ady agzalýan obýekte mahsus bolup, şol häsiýeti bolmadyk ýagdaýynda düşünjäniň hem bolmaýanlygyny aňladýan häsiýetlere düşünjäniň **düýpli häsiýetleri** diýilýär.

Kwadratyň ýokarda agzalyp geçilen häsiýetleri düýpli häsiýetlerdir.

"AD tarap $ABCD$ kwadratyň gorizontal tarapy" diýen häsiýet düýpli däl häsiýetdir (eger $ABCD$ kwadraty öwürseň, onda AD tarap başga görnüşe öwrüler). Şonuň üçin hem berlen obýekte göz ýetirmek üçin, onuň düýpli häsiýetlerini bilmek ýeterlikdir. Şu ýagdaýda obýekt barada düşünje bar diýip aýdylýar.



1-nji surat

Öň hem belläp geçişimiz ýaly, haýsy-da bolsa bir predmet barada gürrüň gidende biz ol predmeti sözleriň üsti bilen suratlandyrýarys, ýagny şol predmetiň düýpli häsiýetlerini agzap geçýäris. Bu ýerde şol suratlandyrmanyň esasynda göz öňüne getirmek bolup geçýär, şonda biz gürrüňi edilýän predmet barada düşünje berdik diýip aýdýarys we mümkin bolan ýagdaýynda ol predmeti şekillendirýäris.

Predmetiň ähli özara baglanyşykly düýpli häsiýetleriniň toplumyna bu predmet baradaky düşünjäniň mazmuny diýilýär.

Matematikada, köplenç, obýektleriň toplumyny şol bir adalga (söz, at) bilen aňladýarlar. Mysal üçin, parallelogram hakynda gürrüň edilse – parallelogam bolan hemme geometrik figuralar göz öňünde tutulýar. Parallelogram diýilse eýýäm ol düşünjäniň dörtburçlugyň bir görnüşidigi göz öňüne gelmeli.

Umuman düşünjäniň göwrümi – bu şol bir adalga bilen aňladylýan obýektleriň toplumydyr. Mysal üçin, geometriýadaky köpburçluklar düşünjesi üçburçluklary, güberçek we güberçek däl dörtburçluklary we ş.m. düşünjeleri özünde saklaýar. Bu getirilen mysallardan görnüşi ýaly, "köpburçluk" düşünjesiniň göwrümi "üçburçluk", "dörtburçluk" we ş.m. düşünjeleriň aýratynlykda alnan göwrümlerinden has giňdir.

Düşünjäniň göwrümi we onuň mazmunynyň arasynda şeýle baglanyşyk bar: düşünjäniň göwrümi näçe "uly" bolsa, onuň mazmuny şonça "kiçidir" we tersine düşünjäniň göwrümi näçe "kiçi" bolsa, onda onuň mazmuny şonça "uludyr". Sebäbi uly göwrümli düşünjä degişli umumy häsiýetler (mazmun) kiçi bolýar, tersine kiçi göwrümli düşünjäniň umumy häsiýetleri köpdür, mazmun uludyr. Mysal üçin, "gönüburçly üçburçluk" düşünjesiniň göwrümi "üçburçluk" düşünjesiniň göwrüminden kiçidir, sebäbi birinji düşünjä hemme üçburçluklar girmeýär. Emma birinji düşünjäniň mazmuny ikinji düşünjäniňkiden "uludyr". Bu düşünjä girýän üçburçluklaryň bir burçy hökman göni bolmaly.

Başlangyç synplaryň matematikasy dürli matematiki düşünjelerden doludyr. Birinji synpda okuwçylar "sifr", "san", "goşulyjy", "jem", "kesim", "kesimiň uzynlygy" we ş.m. düşünjeler bilen tanyşdyrylýar. Ikinji synpda bu düşünjelere "köpeltmek", "bölmek" düşünjeleri hem goşulýar. Üçünji synpyň okuwçylary bolsa "drob", "figuranyň meýdany" we ş.m. beýleki käbir düşünjeler bilen tanyşdyrylýar.

Gönükmeler

1. Aşakdaky düşünjelere degişli üç sany dürli geometrik figuralary çyzyp bolarmy:

a) üçburçluk;

b) gönüburçluk;

ç) kwadrat;

d) romb?

2. Haýsy düşünjeleriň bäş sany düýpli häsiýeti bar:

a) üçburçluk;

b) gönüburçluk;

ç) trapesiýa?

3. Trapesiýanyň aşakdaky getirilen häsiýetleriniň haýsylary düýpli we haýsylary düýpli däl häsiýetlerdir:

a) trapesiýanyň iki tarapy paralleldir;

b) trapesiýanyň esasy gorizontal ýerleşendir;

ç) uly esasyndaky burçlarynyň ikisi hem ýiti burçlardyr;

d) kiçi esasyndaky burçlaryň ikisi hem kütek burçlardyr;

e) trapesiýanyň içki burçlarynyň jemi 360^0-a deňdir.

4. "Gönüburçluk" düşünjesiniň göwrümi "kwadrat" düşünjesiniň göwrüminden "uludyr" diýmek dogrumy? Bu düşünjeleriň mazmunlarynyň arasynda nähili baglanyşyk bar?

5. Gönüburçlugyň we kwadratyň birnäçe umumy häsiýetlerini aýdyň we haýsy tassyklamanyň dogrudygyny düşündiriň:

a) gönüburçlugyň her bir häsiýeti kwadrata degişlidir;

b) kwadratyň her bir häsiýeti gönüburçluga degişlidir.

§ 2. Düşünjäniň kesgitlemesi we oňa goýulýan talaplar

Haýsy-da bolsa bir matematiki obýekt baradaky düşünjäniň mazmunyna şol obýektiň dürli-dürli düýpli häsiýetleriniň birnäçesi girýär. Bu ýerde şol obýekti beýleki obýektlerden tapawutlandyrmak üçin onuň ähli düýpli häsiýetlerini sanamaklyk zerurmy diýen sorag ýüze çykýar. Belki ol obýekti beýleki obýektlerden tapawutlandyrmak üçin onuň düýpli häsiýetleriniň kabirlerini almak ýeterlikdir. Şu nukdaynazardan seredeniňde matematiki düşünjäniň kesgitlemesine aşakdaky ýaly kesgitleme berip bolar:

Kesgitleme – bu düşünjäniň mazmunyny açyp görkezýän logiki operasiýadyr.

Düşünjäni kesgitlemegiň dürli usullary bardyr. Ilkinji nobatda ***anyk* we *anyk däl*** kesgitlemeleri biri-birinden tapawutlandyrýarlar.

Anyk kesgitlemeler deňlik görnüşine eýe bolup, iki düşünje gabat gelýändir. Mysal üçin, gönüburçly üçburçluk - bu bir burçy göni bolan üçburçlukdyr. Eger "A" sözlem "gönüburçly üçburçluk", "B" sözlem bolsa "bir burçy göni bolan üçburçluk" diýsek, onda ýokarda getirilen kesgitlemämiz "A diýmek bu B diýmekdir" diýen sözlemi aňladýar.

Anyk görnüşli kesgitlemelerde iki düşünjäniň **barabarlygy** bellenilip geçilýär. Ol düşünjeleriň birine ***kesgitlenýän düşünje***, beýlekisine ***kesgitleýji düşünje*** diýilýär. Kesgitleýji düşünje öz gezeginde iki bölekden ybarat bolýar: olaryň biri ***asyl*** düşünje, beýlekisi ***görnüş aýratynlygydyr.***

Aýdylanlary göz öňünde tutup, kesgitlemäniň aşakdaky ýaly gurluşyny görkezmek bolar.

(*)	(**)	(***)
kesgitlenýän düşünje	**asyl düşünje**	**görnüş aýratynlygy**

Mysal üçin, kwadrat düşünjesine berilýän kesgitlemäni seljereliň. Ähli taraplary deň bolan gönüburçluga kwadrat diýilýär:

(*) – kwadrat

(**) – gönüburçluk

(***) – ähli taraplary deň.

Ýeri gelende matematikanyň mekdep kursunda ýokardaky gurluşly kesgitlemeleriň köp gabat gelýändigini belläp geçeliň.

Anyk däl kesgitlemelerde iki düşünje gabat gelýän däldir. Anyk däl kesgitlemeler iki görnüşde bolýar, olar kontekstual we ostensiw kesgitlemelerdir. Kontekstual kesgitlemede täze düşünjäniň mazmuny tekstiň üsti bilen berilýär. Ostensiw kesgitlemelerde adalgalary girizmek üçin obýektleri görkezýärler.

Mysal üçin,

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6$ | $3 \cdot 9 = 27$
$87 - 6 < 87$ | $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$
$37 + 6 > 37$ | $17 - 5 = 8 + 4$
Bular deňsizliklerdir. | Bular deňliklerdir.

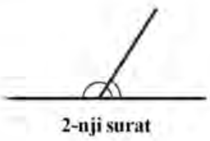
Matematikada düşünjelere kesgitleme bermekligiň başga görnüşleri hem bardyr (genetik, induktiw).

Her bir düşünjä berilýän kesgitleme şu aşakdaky talaplary kanagatlandyrmalydyr.

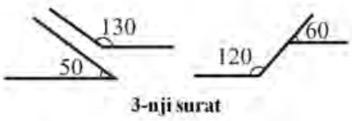
1. Kesgitlenýän we kesgitleýji düşünjeler ölçegdeş bolmalydyr. Meselem, "gönüburçluk" düşünjesi we "ähli burçy göni bolan dörtburçluk" düşünjeleri ölçegdeşdirler. Eger kesgitleýji düşünjäniň göwrümi kesgitlenýän düşünjäniň göwrümini öz içine alýan bolsa, onda örän giň kesgitlemäniň ýalňyşlygy barada gürrüň gidýär. Eger a we b gönüler umumy nokada eýe bolmasalar ýa-da gabat gelýän bolsalar, onda olara parallel diýilýär. Kesgitleme örän giň, atanak ýatýan göni çyzyklar hem muny kanagatlandyrýar. Eger kesgitleýji düşünjäniň göwrümi kesgitlenýän düşünjäniň göwrümi bilen gabat gelýän bolsa, onda dar kesgitlemede hem ýalňyşlyk bolýar.

2. Düşünjäni kesgitlemeklikde şol bir sözi gaýtalamak bolmaýar, ýagny düşünjäni başga bir düşünjäniň üsti bilen kesgitlemeli. Mysal üçin, "deňlemäniň çözüwi diýip onuň çözüwine aýdylýar". Bu ýerde "çözüw" sözi we söziň özi bilen kesgitlenendir, şonuň üçin hem kesgitleme nädogrudyr.

3. Kesgitlemede kesgitlenýän düşünjäniň göwrümine girýän, obýektleri biri-birinden tapawutlandyrýan ähli häsiýetler görkezilmelidir. Meselem, "çatyk burçlar" düşünjesiniň şeýle kesgitlemesine seredeliň: "Jemi 180° deň bolan burçlara çatyk burçlar diýilýär". Berlen kesgitlemä görä hakykatdan hem çatyk burçlar bolýan diňe 2-nji suratda şekillendirilen burçlar däl-de, eýsem 3-nji suratda şekillendirilen burçlary hem mysal getirmek bolýandygyny görýäris.



2-nji surat



3-nji surat

Näme üçin beýle boldy? Sebäbi çatyk burçlaryň getirilen kesgitlemesinde diňe bir jemde 180° getirmelidigi baradaky häsiýet görkezilendir, ol häsiýet bolsa çatyk burçy beýleki burçlardan tapawutlandyrmak üçin ýeterlik däldir.

4. Düşünjäni ýeke-täk kesgitlemek üçin talaplaryň artykmaçlyk etmegi hökman däldir.

Mysala seredeliň: Garşylykly taraplary deň we ähli burçlary göni bolan dörtburçluga gönüburçluk diýilýär. Bu ýerde getirilen kesgitlemedäki "garşylykly taraplary deň" bolan diýlen talap artykmaçlyk edýär. Garşylykly taraplarynyň deňligini "dört burçunyň gönüligi" kepillendirýär. Şeýlelik bilen, gönüburçluga berilýän kesgitlemäni ýokardaky talaplary göz öňünde tutup, aşakdaky ýaly beýan edip bileris: Dört burçy hem göni bolan dörtburçluga gönüburçluk diýilýär.

5. Eger şol bir düşünjä iki görnüşli kesgitleme berilýän bolsa, onda olar deňgüýçli bolmalydyr. Bu bolsa bir kesgitlemä girizilen häsiýetden beýleki kesgitlemä goýlan häsiýetiň esasynyň gelip çykýandygyny görkezýär we tersine.

6. Kesgitlenýän obýektiň bar bolmaklygy hökmandyr. Mysal üçin: Ähli burçy kütek bolan üçburçluga kütekburçly üçburçluk diýilýär. Onuň ýaly üçburçluk ýokdur.

Matematikada berlen kesgitlemäni kanagatlandyrýan obýektiň barlygy baradaky soraga obýektiň bar bolmagyny tassyklaýan ýörite teoremalary subut etmek arkaly jogap berýärler. Geometriýada bolsa kesgitlemäni kanagatlandyrýan obýektiň barlygy ony gurmak arkaly görkezilýär.

Gönükmeler

1. Orta mekdebiň geometriýa boýunça okuw kitabyndan birnäçe düşünjeleriň kesgitlemelerini göçürip almaly we olary derňemeli.

2. Aşakdaky matematiki düşünjeleriň, kesgitlemeleriň haýsylarynda ýalňyşlyklar bar? Eger mümkin bolsa olary düzediň.

a) üçburçlugyň bissektrisasy diýip, üçburçlugyň burçuny deň ikä bölýän göni çyzyga aýdylýar;

b) iki ýanaşyk tarapy deň bolan parallelograma romb diýilýär;

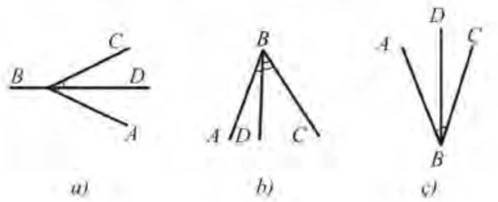
ç) deňtaraply üçburçluk diýip, ähli taraplary deň bolan we ähli burçlary deň bolan üçburçluga aýdylýar;

d) garşylykly taraplary jübüt-jübütden parallel bolan dörtburçluga parallelogram diýilýär;

e) tegelegiň diametri diýip, onuň merkezinden geçýän horda aýdylýar. Töwerege geçirilen galtaşýan çyzyk diýip, töwerek bilen ýeke-täk umumy nokady bolan göni çyzyga aýdylýar.

3. Okuwçy ýitiburçly üçburçlugyň kesgitlemesine laýyklykda ýitiburçly dörtburçluga şeýle kesgitleme berdi: "Ýitiburçly dörtburçluk diýip, ähli burçy ýiti bolan güberçek dörtburçluga aýdylýar". Bu kesgitlemäni kanagatlandyrýan dörtburçluk barmy?

4. Bir okuwçy gönüburçluk düşünjesini şeýle kesgitledi: "Gönüburçluk diýip ähli burçlary göni we taraplary jübüt-jübütden deň bolan dörtburçluga aýdylýar". Ikinji okuwçy şeýle diýdi: "Gönüburçluk diýip ähli burçy göni bolan dörtburçluga aýdylýar". Üçünji okuwçy bolsa şeýle kesgitleme berdi: "Gönüburçluk diýip garşylykly taraplary deň bolan dörtburçluga aýdylýar". Haýsy okuwçy gönüburçluk düşünjesine dogry kesgitleme berdi? Bu düşünjäni ýene başgaça kesgitlemek mümkinmi?



4-nji surat

5. Burçuň bissektrisasyna kesgitleme beriň we haýsy suratda *(4-nji surat) BD* şöhläniň burçuň bissektrisasydygyny aýdyň.

§ 3. Ýönekeý we düzme sözlemler

Adamlar dürli obýektleriň arasyndaky baglanyşyklary, häsiýetleri sözlemleriň kömegi bilen aýdýarlar. Mysal üçin: "Rombuň hemme taraplary deňdir", "24 san 8-e bölünýär".

Her bir matematiki sözlemiň mazmuny we logiki gurluşy bardyr.

Matematikada ýönekeý we düzme sözlemler tapawutlandyrylýar. Mysal getirilen sözlemler ýönekeý sözlemlerdir. Düzme sözlemler ýönekeý sözlemlerden "we", "ýa-da" we *ş.m.* baglaýjylaryň kömegi bilen emele getirilýärler. Mysal üçin:

1) 48 san jübüt we 8-e bölünýär;

2) x san 7-den kiçidir ýa-da oňa deňdir;

3) Eger üçburçluk deňýanly bolsa, onda onuň esasyndaky burçlar deňdirler.

Ol sözlemleriň logiki düzümine seredeliň, başgaça aýdanymyzda: düzme sözlemiň haýsy ýönekeý sözlemlerden emele gelýändigine, sözlemiň haýsy logiki baglaýjylar bilen emele getirilendigine seredeliň.

Birinji sözlem iki sany ýönekeý sözlemden:

A: "48 san jübüt",

B: "48 san 8-e bölünýär" hem "we" baglaýjydan durýar.

Onuň logiki gurluşy: "A we B" görnüşdedir.

Ikinji sözlem:

A: "x san 7-den kiçidir",

B: "x san 7-ä deň" sözlemler "ýa-da" baglaýjynyň kömegi bilen birikdirilip, "A ýa-da B" görnüşdedir.

Üçünji sözlemde:

A: "üçburçluk deňýanly",

B: "üçburçlugyň esasyndaky burçlary deňdir".

Onda üçünji sözlemiň logiki gurluşy:

"Eger A bolsa, onda B" görnüşdedir.

Gönükmeler

1. Aşakdaky sözlemleriň haýsysy ýönekeý we haýsysy bolsa düzme sözlemdir:

a) deňýanly üçburçlugyň esasyna geçirilen perpendikulýar onuň hem bissektrisasydyr, hem medianasydyr;

b) gönüburçly üçburçlukda gipotenuzanyň kwadraty onuň katetleriniň kwadratlarynyň jemine deňdir;

ç) üçburçlugyň meýdany onuň esasynyň uzynlygyny beýikligine köpeltmek hasylynyň ýarysyna deňdir;

d) eger uçburçluk deňýanly bolsa, onda onuň esasyndaky burçlary deňdir.

2. Aşakdaky sözlemleriň logiki gurluşyny açyp görkezmeli.

a) 12 san jübüt we 6-a bölünýär;

b) eger burçlar wertikal bolsalar, onda olar deňdirler.

3. Aşakdaky ýaly gurluşlary bolan matematiki sözlemleri mysal getiriň:

a) A we B;

b) A ýa-da B;

ç) eger A bolsa, onda B.

§ 4. Pikir aýtmalar. "we", "ýa-da", "däl" sözleriň manysy

Matematikada matematiki düşünjeleriň arasyndaky gatnaşyklarda pikir aýtmalar we pikir aýtma formalary tapawutlandyrylýar.

Pikir aýtma – bu ol "çynmy" ýa-da "ýalanmy" diýen soragy goýup bolýan sözlemdir.

Mysal üçin: 1) 6 jübüt sandyr; 2) şu gün 7-nji sentýabr; 3) $2\cdot2=4$; 4) 9 jübüt sandyr; 5) häzir gar ýagýar; 6) 3 ýönekeý sandyr; 7) Ýer Aýyň daşyndan aýlanýar; 8) $2+4=3^2$ we ş.m.

Mysallardan görnüşi ýaly, 1), 3), 6)-njy mysallar çyn pikir aýtmadyr, tersine 4), 7), 8)-nji mysallar ýalan pikir aýtmadyr, 2), 5)-nji mysallardaky sözlemleriň çyndygy ýa-da ýalandygy, olaryň aýdylýan wagtyna baglylykda üýtgäp durýar. Emma oňa garamazdan, ony pikir aýtma diýip hasap edýäris, sebäbi ýörite barlap görmek usuly bilen ondaky tassyklamanyň çyndygyny ýa-da ýalandygyny anyklap bolýar. Her bir sözleme pikir aýtma diýip bolmaýar. Mysal üçin, sorag ýa-da ýüzlenme sözlemler pikir aýtma däldir, sebäbi olaryň çyndygy ýa-da ýalandygy barada belli bir zat aýtmak mümkin däl. Mysal üçin: "Siziň ýaşyňyz näçe?", "Ýaşasyn dostluk!"

Sözlem ýönekeý bolanda onuň çyndygyny ýa-da ýalandygyny mazmunyna seredip aýtmak bolýar. Eger düzme sözlem bolsa, onda onuň çyndygyny ýa-da ýalandygyny aýtmak üçin ol sözlemiň logiki gurluşyna seretmeli.

"*A* we *B*" görnüşli pikir aýtma oňa girýän *A* we *B* sözlemleriň ikisi hem çyn bolanda çyndyr. Eger *A* we *B* sözlemleriň iň bolmanda biri ýalan bolsa, onda "*A* we *B*" görnüşli pikir aýtma ýalandyr.

Mysal üçin:

1) 102 san jübüt we 9-a bölünýär.

A: "102 san jübüt" – çyn.

B: "102 san 9-a bölünýär" – ýalan. Sözlem "*A* we *B*" görnüşde. Berlen sözlem ýalan pikir aýtmadyr.

2) 3<5<7. Bu sözlem "3<5" we "5<7" sözlemlerden durýar. Ol çyndyr, sebäbi iki sany çyn pikir aýtmadan "we" baglaýjynyň kömegi bilen gurlandyr.

"*A* ýa-da *B*" görnüşli pikir aýtmalar *A* we *B* pikir aýtmalaryň iň bolmanda biri çyn bolanda çyndyr. *A* we *B* pikir aýtmalaryň ikisi hem ýalan bolanda ýalandyr.

Mysal üçin: 1) 210 san jübüt ýa-da 3-e bölünýär.

Bu sözlem *A*: "210 san jübüt", *B*: "210 san 3-e bölünýär" sözlemlerden durýar, ol "*A* ýa-da *B*" görnüşde. Ol çyndyr, sebäbi *A* we *B* sözlemleriň ikisi hem çyndyr.

3) $3d \le 7$. *A*: 3<7 çyn,

B: 3=7 ýalan. Onda $3d \le 7$ çyn.

4) $5d \le 3$. *A*: 5<3 ýalan, 5=3 ýalan.

onda *B*: $5d \le 3$ ýalan.

A pikir aýtmanyň inkär etmesi $\overline{A}$ görnüşde belgilenýär we ol "*A* däl" diýlip okalýar.

Kesgitleme. *A* pikir aýtmanyň inkär etmesi diýip, *A* çyn bolanda ýalan, *A* ýalan bolanda çyn bolýan $\overline{A}$ pikir aýtma aýdylýar.

"*A* we *B*", "*A* ýa-da *B*", "*A* däl" görnüşli pikir aýtmalaryň hakykylyk tablisasyny düzeliň:

A	B	A we B	A ýa-da B	A däl
ç	ç	ç	ç	ýa
ç	ýa	ýa	ç	ýa
ýa	ç	ýa	ç	ç
ýa	ýa	ýa	ýa	ç

Gönükmeler

1. Aşakdaky sözlemleriň içinden pikir aýtmalary saýlaň we olaryň çynlygyny kesgitläň:

a) 8 bitin sandyr;

b) 42 sany 5-e bölsek, 3 galyndy galýar;

ç) $x<3$;

d) islendik gönüburçlugyň diagonallary deňdir;

e) $34\cdot2-17=51$.

2. Pikir aýtmalaryň haýsylary çyn?

a) 6 san 2-ä we 3-e bölünýär;

b) 123 san 3-e we 9-a bölünýär;

ç) $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$?

3. Aşakdaky pikir aýtmalaryň inkär etmesini guruň:

a) 132 san 9-a bölünýär;

b) $5<4$;

ç) 3,2 natural sandyr.

4. Eger A pikir aýtmanyň çyndygy belli bolsa,

"A we B", "A ýa-da B" pikir aýtmalaryň çynlygyny kesgitläp bolarmy?

5. Eger A pikir aýtmanyň ýalandygy belli bolsa, "A we B", "A ýa-da B" pikir aýtmalaryň çyndygyny kesgitläp bolarmy?

6. Aşakdaky getirilen pikir aýtmalaryň jübüti biri-birini inkär edýärmi 253 ýönekeý san, 253 düzme san?

§ 5. Pikir aýtma formalary

Matematikada, köplenç, bir ýa-da birnäçe üýtgeýän ululygy özünde saklaýan sözlemler duş gelýär. Mysal üçin: $3x+y=7$, $x<5$. Ol sözlemlere pikir aýtmalar diýip bolmaýar. Sebäbi olar barada "çyn" ýa-da "ýalan" diýmek mümkin däl. $x<5$ bolany üçin $x=2$ bahany goýsak, ol çyn pikir aýtma, eger $x=7$ goýsak, ýalan pikir aýtma öwrülýär.

Şunuň ýaly sözlemlere **pikir aýtma formalary** diýilýär. Her pikir aýtma formasy şol görnüşdäki pikir aýtmalary döretmäge mümkinçilik berýär. Mysal üçin: $x<5$, $1<5$, $2<5$, $3<5$, $10<5$, $17<5$ we ş.m. Bu sözlemlerde bir üýtgeýän ululyk bolany üçin, olara birorunly pikir aýtma formasy diýilýär. $3x+y=7$, $x>y$ sözlemlere iki orunly pikir aýtma formasy diýilýär.

Pikir aýtma formasy – bu özünde bir ýa-da birnäçe üýtgeýän ululygy saklaýan we üýtgeýän ululyklaryň anyk bahalarynda pikir aýtma öwrülýän sözlemdir.

Ol düşünjäni deňlemelerde, üýtgeýän ululykly deňsizliklerde we ş.m görmek bolar. Diýmek, **pikir aýtma formasy** bize öňden mälim bolan düşünjeleriň umumylaşdyrylmasydyr.

Edil pikir aýtma ýaly pikir aýtma formasy hem ýönekeý we düzme bolýarlar. Düzme pikir aýtma formasy ýönekeý sözlemlerden emele gelýärler we "ýa-da", "we", "däl" diýen baglaýjylar bilen baglanyşýarlar.

Gönükmeler

1. Aşakdaky sözlemleriň içinde pikir aýtma formalaryny görkeziň:

a) x^2-5x+4=0;

b) $2x-3<7$;

ç) $2\cdot 4-3<7$;

d) islendik san $2x-3<7$ deňsizligiň çözüwidir;

e) käbir sanlar $2x-3<7$ deňsizligiň çözüwidir.

2. $x^2-5x=0$ pikir aýtma formasyndan peýdalanyp, üç sany pikir aýtma almaly. x-iň haýsy bahalarynda berlen pikir aýtma formasy çyn pikir aýtma öwrülýär?

3. y üýtgeýän ululygyň haýsy bahalarynda aşakdaky pikir aýtma formasy çyn pikir aýtma öwrülýär:

a) $2y-5=7-y$;

b) $2y-3<7$.

4. 21, 52, 409, 248, 30, 2044, 322, 22, 371, 142, 2, 222, 14, 20 sanlar berlen:

a) ýazgysynda iki sifr we 2-lik sifr bolan sanlary görkeziň;

b) ýazgysynda 2 sifr ýa-da 2-lik sifr bolan sanlary görkeziň.

§ 6. "Hemme", "käbir" sözleriň manysy

Aşakdaky pikir aýtma seredeliň:

3, 4, 5, 8, 9 sanlar barada:

1) hemme berlen sanlar bir belgili;

2) berlen sanlaryň käbirleri jübütdir diýmek bolar.

Bu sözlemler barada çyn ýa-da ýalan diýip bolýandygy üçin olar pikir aýtmalardyr.

"Hemme", "käbir" sözlere **kwantorlar** diýilýär. "Kwantor" sözi latyn sözi bolup, "näçedigini" aňladýar, ýagny hemmesi ýa-da käbiridigi hakda gürrüň gidýändigini görkezýär.

Kwantorlar **umumylyk** kwantorlara we **barlyk** kwantorlara bölünýär. **Umumylyk kwantory**: "islendik", "her bir", "hemme", "ähli" we ş.m. ýaly sözlerdir. **Barlyk kwantory**: "bardyr", "käbir", "tapylar", "iň bolmanda biri" we ş.m. ýaly sözlerdir.

Eger bir orunly pikir aýtma formasynda kwantor ulansak, onda biz pikir aýtma alarys.

Mysal üçin: x^2-$5x$+4=0 pikir aýtma formasynda "islendik san deňlemäniň çözüwidir" diýsek, biz pikir aýtma alarys.

Kwantorly pikir aýtmalar matematikada köp duş gelýär. Mysal üçin: hemme kwadratlar gönüburçlukdyr; käbir jübüt sanlar 3-e bölünýär; islendik üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180^0-a deň.

Köplenç, umumylyk kwantory taşlanyp hem aýdylýar.

Mysal üçin: Goşmagyň orunçalşyrma kanuny: "$a+b=b+a$" deňlik görnüşinde berilýär. Ol "islendik a we b sanlar üçin $a+b=b+a$ deňlik dogrudyr" diýmegi aňladýar.

Umumylyk kwantorly pikir aýtmanyň çynlygy subut edilýär. Onuň ýalandygyna göz ýetirmek üçin, ýalandygyny görkezýän bir mysal getirmek ýeterlikdir. Mysal üçin: "hemme jübüt natural sanlar 4-e bölünýärler" ýalan pikir aýtmadyr. Onuň ýalandygyny görkezmek üçin 14 sany almak ýeterlik, ol 4-e bölünmeýär.

Barlyk kwantorly pikir aýtmalaryň çynlygy anyk mysalyň üsti bilen görkezilýär, ýalandygyna göz ýetirmek üçin bolsa subut edilýär. Mysal üçin: "3-e bölünýän birbelgili san bardyr" çyn pikir aýtma. Oňa mysal edip, 6 sany almak bolar.

Başlangyç synplarda kwantorly pikir aýtmalar köp duş gelýär. Olar umumylyk kwantorly pikir aýtmalardyr. Mysal üçin: $a+b=b+a$; $0 \cdot a=0$; $0+a=0$; $1 \cdot a=a$; $a \cdot b=b \cdot a$; $a:1=a$ we ş.m.

Gönükmeler

1. Aşakdaky sözlemleriň gurluşyna seljerme beriň:

a) käbir täk sanlar 9-a bölünýär;

b) islendik gönüburçlugyň diagonallary deňdirler;

ç) birinji onlukda düzme san bardyr;

d) islendik yzygider gelýän iki natural sanyň köpeltmek hasyly 2-ä kratnydyr.

2. Ýokarda getirilen mysallaryň haýsylarynyň çynlygy subut etmek arkaly görkezilýär?

3. Aşakdaky pikir aýtmalaryň haýsylary çyn:

a) islendik kwadrat parallelogramdyr;

b) islendik romb kwadratdyr;

ç) rombuň diagonallary kesişme nokadynda ýarpa bölünýärler.

§ 7. Kwantorly pikir aýtmalary inkär etmegiň düzgünleri

Şeýle pikir aýtma seredeliň: "Hemme natural sanlar 3-e bölünýär". Onuň [illegible] 3-e bölünmeýär. Onuň inkär etmesini düzeliň: "Hemme natural sanlar 3-e bölünýär diýmek nädogrudyr" ýa-da onuň bilen manydaş şeýle pikir aýtma alarys: "3-e bölünmeýän natural san bardyr". Biz iki dürli ýol bilen berlen pikir aýtmany inkär etdik:

1) berlen pikir aýtmanyň yzyna "diýmek, nädogrudyr" sözlerini goşduk.

2) umumylyk kwantoryny barlyk kwantory bilen, sözlemi bolsa onuň inkär etmesi bilen çalşyrdyk.

Indi barlyk kwantorly sözleme seredeliň.

"Käbir täk sanlar 4-e bölünýär" – ýalan pikir aýtma. Onuň inkär etmesini guralyň. "Käbir täk sanlar 4-e bölünýär diýmek nädogrudyr" – çyn pikir aýtma. Bu sözlemi başgaça hem aýdyp bolar.

"Täk sanlaryň hiç biri 4-e bölünmeýär" – çyn pikir aýtma. Bu halda hem iki usul bilen inkär etmäni gurduk.

1) Berlen pikir aýtmanyň yzyna "diýmek nädogrudyr" sözüni goşduk.

2) Barlyk kwantory umumylyk kwantory bilen, sözlemi bolsa onuň inkär etmesi bilen çalşyrdyk. Onda kwantorly pikir aýtmalary inkär etmegiň şeýle düzgünleri bar eken.

Kwantorly pikir aýtmalary iki usulda inkär etmek bolýar:

– berlen pikir aýtmanyň yzyna "diýmek, nädogrudyr" sözleri goşulýar;

– umumylyk kwantorly barlyk kwantory bilen (ýa-da barlyk kwantory umumylyk kwantory bilen) sözlemiň özi bolsa inkär etmesi bilen çalşyrylýar.

Pikir aýtmalary inkär etmegiň ýokarda getirilen düzgünleri kwantorly pikir aýtmalary inkär etmek üçin ýeterlikdir. Ýöne berlen pikir aýtmalary inkär etmekligiň başga görnüşleriniň (formalarynyň) bardygyny hem ýatladýarys. Bu ýerde iň esasy talap şu aşakdakylardan ybaratdyr: eger berlen pikir aýtma ýalan bolsa, onda onuň inkär etmesi çyn bolmalydyr we tersine, berlen pikir aýtma çyn bolsa, onda onuň inkär etmesi ýalan bolmalydyr.

Gönükmeler

1. Berlen sözlemler biri-birini inkär edýärmi:

a) 289 san 9-a kratny; 289 san 9-a kratny däl;

b) islendik natural san 5-e bölünýär; islendik natural san 5-e bölünmeýär;

ç) käbir natural sanlar birden kiçidir; islendik natural san birden kiçidir;

2. Aşakdaky getirilen pikir aýtmalaryň haýsylary "islendik jübüt san 3-e bölünýär" diýen pikir aýtmanyň inkär etmesi bolýar:

a) islendik jübüt san 3-e bölünmeýär;

b) islendik jübüt san 3-e bölünýär – bu ýalandyr;

ç) 3-e bölünmeýän jübüt san bardyr;

d) käbir jübüt sanlar 3-e bölünýär;

e) her bir san 3-e bölünmeýär.

3. 5+7=12, 11+15=26, 17+13=30 hasaplamalardan soň okuwçy şeýle netijä geldi: "islendik iki täk sanyň jemi jübüt sandyr". Bu netije dogrumy?

§ 8. "Gelip çykma" we "deňgüýçlülik" gatnaşygy

Islendik pikir ýöretmekligiň soňunda biz şeýle sözleri ulanýarys:

"Bu sözlemden gelip çykýar", "alarys", "onda", "şeýlelikde, alarys", "bu ýerden gelip çykýar". Ol sözleriň manysyny açyp görkezmeklige synanyşalyň:

Iki sany sözlemi alalyň:

A: "x san 4-e bölünýär".

B: "x san 2-ä bölünýär". Bu sözlemler baglanyşyklydyrlar: Islendik 4-e bölünýän san 2-ä hem bölünýändir. Başgaça aýdanymyzda sanyň 4-e bölünmekliginden onuň 2-ä bölünýändigi gelip çykýar.

Eger mydama A sözlem çyn bolanda, B sözlem hem çyn bolsa, onda A sözlemden B sözlem gelip çykýar diýilýär. "A sözlemden B sözlem gelip çykýar" sözlemi $\Rightarrow$ belginiň kömegi bilen $A \Rightarrow B$ görnüşde ýazylýar. $A \Rightarrow B$ şeýle okalýar:

a) A-dan B gelip çykýar.

b) B sözlem A-dan gelip çykýar.

ç) eger A bolsa, onda B.

Goý, indi şeýle sözlemler berlen bolsun:

A: "üçburçluk deňýanly".

B: "üçburçlugyň esasyndaky burçlar deňdirler". Sözlemleriň ikisi hem biri-birinden gelip çykýar: "Eger üçburçluk deňýanly bolsa, onda onuň esasyndaky burçlar deňdirler" – çyn pikir aýtma. Eger üçburçlugyň esasyndaky burçlary deň bolsalar, onda üçburçluk deňýanlydyr. Bu hem çyn pikir aýtma, ýagny: $A \Rightarrow B$ we tersine $B \Rightarrow A$.

Kesgitleme. Eger A sözlemden B sözlem gelip çykýan bolsa we B sözlemden bolsa A sözlem alynýan bolsa, onda A we B sözlemlere deňgüýçli sözlemler diýilýär. A we B sözlemler deňgüýçli bolsalar, ony $A \Leftrightarrow B$ ýaly belgilenýär. $A \Leftrightarrow B$ sözlem dürli hili okalýar: a) A sözlem B sözlem bilen deňgüýçli; b) haçan-da B sözlem çyn bolanda we diňe şonda A sözlem çyndyr we ş.m.

Gönükmeler

1. Aşakdaky getirilen A we B sözlemleriň arasynda gelip çykma gatnaşygy barmy?

a) A – x-san 3-e kratny;

B – x-san 9-a kratny.

b) A – F dörtburçlugyň diagonallary deňdir;

B – F dörtburçluk gönüburçlukdyr.

ç) A – x san jübütdir;

B – x-san 5-e kratnydyr.

d) A – F gönüburçly üçburçluk;

B – F deňýanly üçburçluk.

2. Aşakdaky getirilen A we B sözlemler deňgüýçlümi?
a) A – x san 3-e bölünýär;
B – x sanyň sifrleriniň jemi 3-e bölünýär.
b) A – jemiň her bir goşulyjysy 4-e bölünýär;
B – jem 4-e bölünýär.

3. Eger: a) A: x san 9-a bölünýär;
b) B: x sanyň sifrleriniň jemi 9-a bölünýär;
ç) A: jemiň her bir goşulyjysy 7-ä bölünýär;
B: Jem 7-ä bölünýär
sözlemler berlen bolsa "A $\Leftrightarrow$ B" dogrumy?

§ 9. Zerur we ýeterlik şertler

Pikir aýtmalaryň arasyndaky gelip çykma düşünjesi matematikada ýygy-ýygydan ulanylýan "zerur" we "ýeterlik" düşünjeleriniň (sözleriniň) manysyny açmaga mümkinçilik berýär.

Kesgitleme. Eger A sözlemden B sözlem gelip çykýan bolsa, onda B sözleme A sözlem üçin zerur şert, A sözleme bolsa B sözlem üçin ýeterlik şert diýilýär:

$A \Rightarrow B$
B sözlem A sözlem üçin zerur şert
A sözlem B sözlem üçin ýeterlik şert

Kesgitleme. Eger A we B sözlemler deňgüýçli bolsalar, ýagny $A \Leftrightarrow B$ bolsa, onda A sözleme B sözlem üçin zerur we ýeterlik şert diýilýär we tersine.

Mysallara seredeliň:

1. A: X we Y burçlar wertikal burçlar;
B: X we Y burçlar deň.

Onda burçlaryň wertikal bolmagy üçin olaryň deň bolmagy zerurdyr. Burçlaryň deň bolmagy üçin olaryň wertikal bolmagy ýeterlikdir.

2. A: X sanyň ýazgysy 0; 5 sifrleriň biri bilen gutarýar.
B: X san 5-e bölünýär.

Неподшитые заметки Стр.24

Bu halda *A* we *B* sözlemler deňgüýçlüdir. Onuň üçin hem şeýle diýmek bolar: sanyň 5-e bölünmegi üçin onuň ýazgysynyň "0" ýa-da "5" sifr bilen gutarmagy zerur we ýeterlikdir.

Goý, *A* sözlem – *x* sanyň ýazgysy 0, 2, 4, 6, 8 sanlaryň biri bilen gutarýar, *B* sözlem bolsa *x* san 2-ä bölünýär bolsun. Bilşimiz ýaly, *x* sanyň 0, 2, 4, 6, 8 san belgisi bilen gutarýanlygyndan ol sanyň 2-ä bölünýändigi gelip çykýar. Tersine tassyklama hem dogrudyr: sanyň 2-ä bölünýänliginden ol sanyň ýazgysynyň soňunyň 0, 2, 4, 6, 8 sanlaryň biri bilen gutarýandygy alynýar. Diýmek, *A* we *B* sözlemler deňgüýçli, olaryň her biri beýlekisi üçin zerur we ýeterlik şertdir. Şonuň üçin bu iki sözlemiň ýerine: sanyň 2-ä bölünmegi üçin ol sanyň ýazgysynyň 0, 2, 4, 6, 8 sanlaryň biri bilen gutarmagy zerur we ýeterlikdir diýmek bolar. Şeýlelikde, biz 2-ä bölünijilik nyşanyny aldyk.

Gönükmeler

1. Eger berlen san 4-e bölünýän bolsa, onda ol san 2-ä bölünýändir diýen pikir aýtma çyndyr. Bu pikir aýtmany "zerur" we "ýeterlik" sözlerini ulanyp aýdyp bolarmy?

2. Aşakda getirilen pikir aýtmalaryň haýsylary çyn?

a) sanyň 2-ä bölünmegi üçin, ol sanyň soňunyň 0 bilen gutarmagy zerur;

b) sanyň 3-e bölünmegi üçin, ol sanyň 6-a bölünmegi ýeterlikdir;

ç) sanyň 10-a bölünmegi üçin, ol sanyň 2-ä we 5-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir;

d) sanyň 15-e bölünmegi üçin, ol sanyň 5-e bölünmegi zerurdyr;

e) sanyň 100-e bölünmegi üçin, ol sanyň 10-a bölünmegi ýeterlik?

3. Aşakdaky pikir aýtmalaryň haýsylaryny "zerur we ýeterlik" düşünjesini ulanmak arkaly täzeden aýdyp bolar:

a) 3-e we 5-e bölünýän sanlar 15-e hem bölünýändir;

b) gönüburçlugyň diagonallary deňdirler;

ç) iki jübüt sanyň jemi ýene-de jübüt san bolar.

4. Sözlem çyn bolar ýaly köp nokadyň ornuna "zerurdyr", "ýeterlikdir" ýa-da "zerur we ýeterlikdir" sözlerini goýuň:

a) iki natural sanyň jeminiň 2-ä bölünmegi üçin, her bir goşulyjynyň 2-ä bölünmegi ...;

b) sanyň 72-ä bölünmegi üçin, onuň 8-e we 9-a bölünmegi ...;

ç) sanyň otrisatel bolmagy üçin onuň noldan kiçi bolmagy ...;
d) burçuň kütek bolmagy üçin onuň göni burçdan uly bolmagy... .

§ 10. Teoremalaryň görnüşleri we olaryň gurluşy

Haýsy-da bolsa bir matematiki obýekt barada gürrüň edilende, ol obýektiň esasy häsiýetleriniň, ýagny onuň mazmunynyň beýan edilýändigini biz öňden bilýäris. Ol häsiýetleriň birnäçesi düşünjäniň kesgitlemesinde görkezilýär. Düşünje barada doly maglumaty bilmek üçin onuň beýleki häsiýetleri hem öwrenilmelidir.

Käbir esasy matematiki düşünjelere kesgitleme berip bolmaýar. Mysal üçin: nokat, göni çyzyk, tekizlik, köplük we ş.m. Bular ilkinji esasy matematiki düşünjelerdir we olaryň häsiýetlerini subutsyz kabul edýäris, olary göz öňüne getirmek bilen çäklenýäris hem-de gerek ýerinde ulanýarys.

Umuman matematikada subutsyz kabul edilýän pikir aýtma aksioma diýilýär. Mysal üçin: Göni çyzygyň daşyndan alnan nokatdan şol göni çyzyga diňe bir parallel göni çyzyk geçirip bolar. Bu aksioma Ýewklidiň geometriýasynyň esasyny düzýändir.

Aksiomalar ulgamy (sistemasy) islendik matematiki nazaryýetiň (teoriýanyň) düşünjeleriniň esasy häsiýetlerini açyp görkezýär, ýagny kesgitleýär. Onuň ýaly kesgitlemelere **aksiomatik** kesgitlemeler diýilýär.

Düşünjäniň kesgitlemä girizilmedik häsiýetlerini, adatça, subut etmeklik arkaly görkezilýär we oňa kesgitlemeden gelip çykýan netije hökmünde garalýar. Indi teorema düşünjesine seredeliň.

Teorema bu A sözlemden B sözlem gelip çykýanlygy baradaky pikir aýtmadyr. Bu pikir aýtmanyň dogrudygy (çyndygyny) subut etmek ýoly bilen görkezilýär.

Başgaça aýdylanda teorema $A \Rightarrow B$ görnüşdäki pikir aýtmadyr. Bu ýerden teoremanyň iki bölekden ybaratdygy görünýär:

A – teoremanyň şertidir;

B – teoremanyň netijesidir (tassyklamasydyr).

Teoremalara başgaça **netijeler** ýa-da **nyşanlar** hem diýilýär. Algebrada bolsa olara **formulalar, toždestwolar, düzgünler** diýilýär. Atlandyrylyşynyň dürlüligine garamazdan olaryň gurluşy birmeňzeşdir.

Indi bolsa teoremanyň görnüşlerine seredeliň. Goý, bize $A \Rightarrow B$ görnüşdäki teorema berlen bolsun. Biz ol pikir aýtmadan $B \Rightarrow A$,

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ görnüşli sözlemleri emele getireliň. Onda $A \Rightarrow B$ we $B \Rightarrow A$ teoremalara **özara ters** teoremalar, $A \Rightarrow B$ we $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ teoremalara bolsa **özara garşylykly** teoremalar diýilýär.

$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ teorema bolsa **terse garşylykly teorema** diýilýär. Mysal üçin:

Teorema. Eger burçlar wertikal bolsalar, onda ol burçlar deňdirler. Oňa ters, garşylykly we terse garşylykly teoremalary düzeliň:

Ters teorema. Eger burçlar deň bolsalar, onda olar wertikaldyrlar. Bu ýalan pikir aýtmadyr.

Garşylykly teorema. Eger burçlar wertikal däl bolsalar, onda olar deň däldirler. Bu hem ýalan pikir aýtmadyr.

Terse garşylykly teorema. Eger burçlar deň däl bolsalar, onda olar wertikal däldirler. Bu pikir aýtma çyndyr. Umuman, $A \Rightarrow B$ we $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ teoremalar deňgüýçlüdirler, başgaça haçan-da $A \Rightarrow B$ teorema çyn bolsa, onda $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ teorema hem çyndyr we tersine.

$$\boxed{A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$$

Bu deňgüýçlülige kontropozisiýa kanuny diýilýär. Eger berlen teorema çyn bolup, oňa ters bolan teorema hem çyn bolsa, onda olary "şonda we diňe şonda, haçan-da" ýa-da "zerur we ýeterlik" düşünjeleri bilen baglanyşdyrmak bolar.

Gönükmeler

1. Aşakdaky berlen teoremalaryň şertini we netijesini aýry-aýry ýazmaly:

a) eger üçburçlugyň ähli taraplary deň bolsa, onda onuň ähli burçlary hem deňdirler;

b) iki jübüt sanyň jemi ýene-de jübüt san bolar;

ç) eger berlen san 3-e we 4-e kratny bolsa, onda ol san 12-ä hem kratnydyr;

d) tapawudyň berlen sana bölünmegi üçin, kemelijiniň we kemeldijiniň şol sana bölünmegi ýeterlikdir;

e) a we b natural sanlaryň tapawudynyň natural san bolmagy üçin $a > b$ bolmagy zerur we ýeterlikdir.

2. "Dörtburçlugyň parallelogram bolmagy üçin onuň garşylykly taraplarynyň deň bolmagy zerurdyr" diýen teorema berlen. Bu teoremadan onuň şertini we netijesini saýlap alyň. Teoremany:

a) gelip çykýar;

b) her bir;

ç) ýeterlik şertlerini ulanmak arkaly täzeden ýazyň.

3. Aşakdaky teoremalaryň haýsylary "Gönüburçlugyň diagonallary deňdirler" diýen teorema deňgüýçlüdir:

a) eger dörtburçluk gönüburçluk bolsa, onda onuň diagonallary deňdir;

b) eger dörtburçlugyň diagonallary deň däl bolsalar, onda ol dörtburçluk gönüburçluk däldir;

ç) dörtburçlugyň diagonallary deň bolsa, onda ol dörtburçluk gönüburçlukdyr;

d) dörtburçlugyň diagonallarynyň deň bolmagy üçin, ol dörtburçlugyň gönüburçluk bolmagy ýeterlikdir.

4. Aşakdaky teoremalar biri-birine tersmi?

a) eger dörtburçluk kwadrat bolsa, onda onuň göni burçlary bardyr; dörtburçlugyň kwadrat bolmagy üçin onuň göni burçunyň bolmagy ýeterlikdir;

b) sanyň natural san bolmagy üçin onuň položitel san bolmagy zerurdyr; eger san natural san bolsa, onda ol san položiteldir.

§ 11. Deduktiw pikir ýöretme

Düşünjäniň kesgitlemesinde onuň mazmuny açylyp görkezilýär. Egerde ol düşünjäniň goşmaça häsiýetleri bar bolsa, onda ol häsiýetler teorema görnüşinde beýan edilýär we olar subut etmäge degişlidir. $A \Rightarrow B$ teoremany subut etmeklik logiki ýol bilen amala aşyrylýar. Subut etmekligiň esasynda **pikir ýöretme** ýatýandyr, oňa kesgitleme bereliň.

Kesgitleme. Pikir ýöretme bu manysy boýunça özara baglanyşykly bir ýa-da birnäçe sözlemlerden täze bir bilimi almaklyk üçin geçirilýän logiki operasiýadyr.

Mysal: 7 we 8 sanlaryň arasynda "kiçi" gatnaşyga seredeliň. Okuwçylar: "7<8, sebäbi sanalanda 7 san 8-den öň aýdylýar" diýip pikir ýöredýärler. Olaryň haýsy faktlara esaslanýandygyna seredeliň:

1. Eger a san sanalanda b-den öň gelýän bolsa, onda a b (islendik a we b natural sanlar üçin);

2. 7 san sanalanda 8-den öň aýdylýar.

Birinji sözlem umumy häsiýetde, sebäbi islendik a we b natural sanlar üçin aýdylýar, oňa **umumy salgylanma** diýilýär.

Ikinji sözlem anyk 7 we 8 sanlar barada bolup, hususy ýagdaýa seredilýänligi üçin ol **hususy salgylanmadyr.**

Iki salgylanmadan netije (7<8) alynýar.

Umuman, islendik pikir ýöretmede salgylanmalar we netije bardyr. Salgylanmalar we netijäniň arasyndaky baglanyşyk bolsa pikir ýöretmäni emele getirýär.

Kesgitleme. Salgylanmalar we netije arasynda gelip çykma gatnaşygy bar bolan pikir ýöretmä deduktiw pikir ýöretme diýilýär. Aşakdaky mysallara seredeliň:

1-nji mysal. Şeýle pikir ýöretme berlen:

Umumy salgylanma: "Eger natural san 4-e kratny bolsa, onda ol san 2-ä hem kratnydyr";

Hususy salgylanma: "28 san 4-e kratny".

Netije: "28 san 2-ä kratny".

2-nji mysal. Pikir ýöretme berlen:

Umumy salgylanma: "Eger natural san 4-e kratny bolsa, onda ol san 2-ä kratnydyr";

Hususy salgylanma: "126 san 2-ä kratny".

Netije: "126 san 4-e kratny".

Bu pikir ýöretmede salgylanmalar çyn (dogry), emma netije ýalan (nädogry). Diýmek, bu pikir ýöretme **deduktiw däl.** Şeýlelikde, salgylanmalaryň çynlygy netijäniň dogrulygyny kepillendirmeýär. Ýokarda getirilen mysallardaky pikir ýöretmeleri täzeden derňäliň: Goý,

A umumy salgylanma: x – natural san 4-e kratny;

B sözlem: berlen natural san 2-ä kratny bolsun.

Simwoliki görnüşde bu mysallary aşakdaky ýaly aňladalyň:

	1-nji mysal	2-nji mysal
I umumy salgylanma:	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
II hususy salgylanma:	$A(28)$	$B(126)$
Netije:	$B(28)$	$A(126)$

Bu getirilen shemalar birmeňzeş däl. Olaryň birinjisinde dogry netijä, ikinjisinde bolsa nädogry netijä gelindi.

Getirilen mysallaryň esasynda deduktiw pikir ýöretmeklige aşakdaky ýaly kesgitleme berip boljakdygy gelip çykýar.

Kesgitleme. Çyn salgylanmalaryň esasynda dogry netijä gelmeklige deduktiw pikir ýöretme diýilýär.

Indi çyn salgylanmalaryň esasynda dogry netijä gelmeklik haýsy düzgünleriň üsti bilen amala aşyrylýar diýen soraga jogap bereliň. Olar, esasan, üç sany düzgündir we biz olary subutsyz kabul edýäris.

1. Netije cykarmak düzgüni: $(A \Rightarrow B$ we $A(a)) \Rightarrow B(a)$ bu ýerde $A \Rightarrow B$ – umumy salgylanma, $A(a)$ – hususy salgylanma, $B(a)$ – netije.

2. Inkär etme düzgüni: $(A \Rightarrow B$ we $\overline{B(a)}) \Rightarrow \overline{A(a)}$.

3. Logiki gelip çykma (Sillogizm) düzgüni: $(A \Rightarrow B$ we $B \Rightarrow C)$ $(A \Rightarrow C)$.

Bu düzgünleriň ulanylmagy pikir ýöretmäniň deduktiwligini kepillendirýär, ýagny çyn salgylanmalaryň esasynda dogry netije alynýar.

Mysallara seredeliň. Aşakdaky pikir ýöretmeler deduktiw pikir ýöretmäniň?

1) Soňy nol bilen gutarýan sanlar 5-e bölünýär. Berlen san 5-e bölünmeýär, diýmek, ol sanyň soňy nol bilen gutarmaýar.

Derňewi. A – umumy salgylanma, soňy nol bilen gutarýan san, B – san 5-e bölünýär, $\overline{A}$ – sanyň soňy nol bilen gutarmaýar, $\overline{B}$ – san 5-e bölünmeýär. Onda biz şeýle shemany alarys:

$(A \Rightarrow B$ we $\overline{B(a)}) \Rightarrow \overline{A(a)})$ (inkär etme düzgüni)

Bu deduktiw pikir ýöretmäniň shemasydyr.

2) Eger natural san 8-e kratny bolsa, onda ol san 4-e hem kratnydyr; eger natural san 4-e kratny bolsa, onda ol san 2-ä hem kratnydyr, diýmek, eger san 8-e kratny bolsa, onda ol san 2-ä kratnydyr.

Derňewi. A san 8-e kratny, B san 4-e kratny, C san 2-ä kratny $(A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. Logiki gelip çykma düzgüni esasynda bu pikir ýöretme deduktiwdir.

3) Eger sanyň soňy nol bilen gutarsa, onda ol san 5-e bölünýär; sanyň soňy nol bilen gutarmaýar, diýmek, ol san 5-e bölünmeýär.

Derňewi. 1-nji mysaldaka meňzeşlikde şeýle shema alarys:

($A \Rightarrow B$ we $\overline{A(a)} \Rightarrow \overline{B(b)}$).

Bu ýerde A sanyň soňy nol bilen gutarýar diýen sözlem, B – san 5-e bölünýär diýen sözlem, $\overline{A(a)}$ we $\overline{B(a)}$ ol sözlemleriň inkär etmesi (hususy pikir ýöretme üçin). Görşümiz ýaly, bu shema deduktiw däl. Mysal: 35 sanyň soňy nol bilen gutarmaýar, emma ol san 5-e bölünýär.

Matematikada deduktiw däl shemalary peýdalanmaklyk nädogry netijelere getirýär. Şonuň üçin matematikler göräýmäge çynaberimsiz nädogry pikir ýöretmeleri ulanmak arkaly bilgeşleýin geň netijeleriň alynýandygyny görkezipdirler. Şonuň ýaly pikir ýöretmelere **sofizmler** diýilýär. Mysal üçin, 5=4 bolýandygyny görkezeliň.

$$16-36=25-45$$

$$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}$$

$$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}\Rightarrow 4=5$$

Ýalňyşlyk nirede? Berlen sandan iki dürli kwadrat kök alynýar.

Gönükmeler

1. Kiçi ýaşly mekdep okuwçylarynyň pikir ýöretmesinde haýsy salgylanma anyk däl görnüşde ulanylýar:

a) 13·5=65 deňligiň dogrulygy esaslandyrylýar. 13 san 10 we 3 sanlaryň jemidir; 10-y 5-e köpeldip 50 alarys; 3-i 5-e köpeldip 15 alarys; 50+15=65. Diýmek, 13·5=65.

b) Teswirli meseläni çözmekde haysy amalyň ulanylmalydygy esaslandyrylýar: bir kitap 36 sahypadan, beýlekisi bolsa 18 sahypadan ybarat. Birinji kitapda ikinjidäkä garanda sahypalaryň sany näçe esse köp?

Bu meseläni çözmek üçin 36-ny 18-e bölmeli.

2. Aşakdaky deňlikleriň çynlygyny esaslandyryň:

a) $65:5=13$;	ç) $15 \cdot 6 = 90$;
b) $27+32=59$;	d) $76-54=22$.

3. Aşakdaky pikir ýöretmeler deduktiwmi?

a) III synpyň bäşlikçi okuwçylarynyň hemmesi küşt oýnamagy başarýar. Aman bäşlikçi, diýmek, ol küşt oýnap bilýär.

b) III synpyň bäşlikçi okuwçylarynyň hemmesi küşt oýnamagy başarýar. Myrat küşt oýnamagy başarmaýar, diýmek, ol bäşlikçi däl.

ç) III synpyň bäşlikçi okuwçylarynyň hemmesi küşt oýnamagy başarýar. Jeren bäşlikçi däl, diýmek, ol küşt oýnamagy başarmaýar.

d) III synpyň bäşlikçi okuwçylarynyň hemmesi küşt oýnamagy başarýar. Maral küşt oýnamagy başarýar, diýmek, ol bäşlikçi.

4. Aşakdaky sofizmleriň her haýsysynyň ýalňyşyny görkeziň.

a) Goý, $a=b$ bolsun. Aşakdaky tozdestwony alalyň: $a^2-2ab+b^2=b^2-2ab+a^2$, bu ýerden $(a-b)^2=(b-a)^2 \Rightarrow a-b \Rightarrow b-a \Rightarrow 2a=2b \Rightarrow a=b$.

b) Özara deň bolmadyk iki sanyň elmydama birinjisi uludyr. Goý, m=n bolsun. $(m-n)^2>0 \Rightarrow m^2-2mn+n^2>0 \Rightarrow m^2+n^2>2mn \Rightarrow m^2+n^2-2n^2>2mn-2n^2 \Rightarrow m^2-n^2>2mn-2n^2 \Rightarrow (m+n)(m-n)>2n(m-n) = m+n>2n \Rightarrow m>n$?

§ 12. Doly däl induksiýa usuly

n^2+n+41 aňlatmada n-iň ornuna 1, 2, 3, 4 we *ş.m.* bahalary goýsak, $n=1$ bolanda 43, $n=2$ bolanda 47, $n=3$ bolanda 53, $n=4$ bolanda 61 we *ş.m.* bahalary alarys. Alnan netijelere: 43,47,53,61,... seredip, n^2+n+41 aňlatma islendik n natural bahada ýönekeý sandyr diýip aýtmak bolar.

15 san 5-e bölünýär, 25 san 5-e bölünýär, 45 san 5-e bölünýär, 95 san 5-e bölünýär. Olary göz öňünde tutup, soňy 5 sifr bilen gutarýan san 5-e bölünýär diýip aýtmak bolar.

Seredilen sözlemlerde birnäçe hususy hallardan umumy netije çykardyk. Şonuň ýaly pikir ýöretmä **doly däl induksiýa** diýilýär.

Kesgitleme. Käbir toplumyň obýektleriniň kesgitli häsiýete eýe bolmaklygyndan ol toplumyň hemme obýektleri hem şol häsiýete eýedir diýip tassyklamaklyga **doly däl induksiýa** diýilýär.

Doly däl induksiýanyň netijeleri çyn hem, ýalan hem bolup biler. Islendik sanyň soňy 5 bilen gutarýan bolsa, ol sanyň 5-e bölünýändigi baradaky netije çyndyr. Emma "n-iň islendik natural bahasynda n^2+n+41 aňlatmanyň bahasy ýönekeý sandyr" diýen netijämiz ýalandyr. Ony görkezmek üçin n-iň ornuna 41bahany goýmak ýeterlikdir. $n^2+n+41=41^2+41+41=$ $=41\cdot(41+1+1)=41\cdot43$. Bu köpeltmek hasyly ýönekeý san däldir.

Doly däl induksiýanyň netijesiniň mydama çyn bolup bilmeýänligine garamazdan, onuň roly uludyr. Induktiw pikir ýöretmelerde anyk hususy hallardan umumylygy görmek endigi döreýär.

Başlangyç synplarda doly däl induksiýanyň netijesinden köp peýdalanylýar, başgaça aýdanymyzda umumy düzgünler induktiw ýoly bilen alynýar.

Oňa goşmagyň we köpeltmegiň orun çalşyrma kanunlary, $0+a=a$, $a\cdot1=a$, $0\cdot a=0$, $a:1=a$, $a:a=1$, $0:a=0$ deňlikleri we başga kanunalaýyklyklary mysal getirmek bolar.

Gönükmeler

1. Iki jübüt sanyň jemi nähili san bolar? Birnäçe hususy hallara seredip netije çykarmaly. Onuň çynlygyny nähili subut etmek bolar?

2. $1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$ deňliklere seredip, belli bir netijä gelmeli. Gelnen netijäniň çynlygyny subut etmegiň ýoluny görkezmeli.

3. 3^2, 5^2, 7^2 sanlaryň her birini 4-e bölmeli we galyndyny kesgitlemeli. Bu ýerden nähili netijä gelmek bolar? Bu gelnen netijäniň dogrulygyny kepillendirmek üçin näçe mysal almak ýeterlik bolar?

4. n^2-n+41 aňlatmanyň $n=1$, 2 we 3 bolandaky bahalaryny tapmaly. Alnan bahalaryň esasynda "n^2-n+41 aňlatma n islendik san bolanda ýönekeý sandyr" diýip tassyklamak bolarmy?

5. Başlangyç synp okuwçylary aşakdaky:

a) $0+a=a$;

b) $1\cdot a=a$;

ç) $0\cdot a=0$;

d) $a \cdot b = b \cdot a$ pikir aýtmalaryň çynlygy nähili usul bilen göz ýetirerler?

6. 3-e we 9-a bölünijilik nyşanlaryny göz öňünde tutup, okuwçy 27-ä bölünijilik nyşanyny aşakdaky ýaly beýan etdi: "Sanyň 27-ä bölünmegi üçin ol sanyň sifrleriniň jeminiň 27-ä bölünmegi zerur we ýeterlikdir". Bu netije dogrumy?

7. Okuwçy 96-ny 16-a bölmek bilen, paýyň 10-a deň bolýandygyny şeýle esaslandyrdy: 96:6=90:10+6:6=9+1=10. Okuwçy haýsy düzgünlerden nädogry peýdalanypdyr?

§ 13. Pikir aýtmalaryň çynlygyny subut etmegiň ýollary

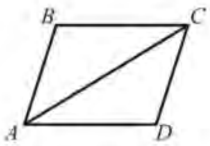
Matematiki subut etmeleriň esasy görnüşi deduktiw netije çykarmakdyr. Şonda subut etmek iň soňkudan başga hersiniň netijesi indiki üçin salgylanma bolýan deduktiw pikir ýöretmeleriň zynjyryny emele getirýär. Mysallara seredeliň.

Teorema 1. Parallelogramyň her bir diagonaly ony iki deň üçburçluga bölýär.

Subudy.

1) Islendik parallelogramyň garşylykly taraplary deňdir. $ABCD$ – parallelogram. Onda onuň garşylykly taraplary deňdir.

$AB=CD$, $BC=AD$. Pikir ýöretme netije çykarmak düzgüni boýunça ýerine ýetirildi, diýmek, alnan netije çyndyr (*5-nji surat*).



5-nji surat

1) Eger bir üçburçlugyň üç tarapy başga bir üçburçlugyň üç tarapyna degişlilikde deň bolsa, onda ol üçburçluklar deňdir: $AB=CD$ $BC=AD$, AC – tarap umumy. Bu ýerden ABC we ACD üçburçluklar deňdir, netije çyn. Bu ýerde hem gelip çykma düzgüninden peýdalanyldy. Teorema subut edildi.

Bu teoremanyň subudy pikir ýöretmäniň iki ädiminden durýar. Subudyny gysgaça görnüşde hem bermek bolýar.

Mysal üçin: ABC we ACD üçburçluklarda AB we CD, AD we BC taraplary deň, sebäbi olar parallelogramyň garşylykly taraplarydyr. AC tarap umumy. Bu ýerden, ABC we ACD üçburçluklar deňdirler.

2) Rombuň diagonallary özara perpendikulýardyr.

Subudy. AOB we AOD üçburçluga seredeliň. AB we AD – rombuň taraplary. BO we OD – rombuň diagonallary kesişme nokadynda ýarpa bölünýär.

AO – umumy tarap. Bu ýerden $\Delta AOB = \Delta AOD$.

Onda $\angle AOB = \angle AOD$ we ol burçlar çatyk burçlardyr.

Onda $\angle AOB$ we $\angle AOD$ göni burçlardyr. Diýmek, rombuň diagonallary özara perpendikulýardyr.

Bu subut etmäni hersine netije çykarmak düzgüni bolan pikir ýöretmeleriň zynjyryny düzeliň.

1. Rombuň hemme taraplary deňdirler.

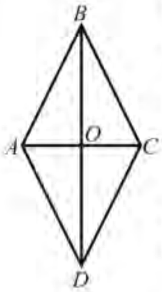
$ABCD$ – romb, onda $AB = AD$,

2. Rombuň diagonallary kesişme nokadynda ýarpa bölünýärler.

$ABCD$ – romb, $BO = OD$,

3. Bir üçburçlugyň üç tarapy başga bir üçburçlugyň üç tarapyna deň bolsa, onda ol üçburçluklar deňdirler. $AB = AD$, $BO = OD$, AO – umumy tarap, bu ýerde AOB we AOD üçburçluklar deňdirler.

4. Eger üçburçluklar deň bolsalar, onda olaryň degişli burçlary hem deňdirler. $\angle AOB = \angle AOD$,



6-njy surat

5. Eger çatyk burçlar deň bolsalar, onda olar göni burçlardyr. AOB we AOD çatyk we deň. Onda ol burçlar gönüdir.

6. Eger göni çyzyklar kesişende göni burç emele getirýän bolsalar, onda olar perpendikulýardyr.

$\angle AOB$ we $\angle AOD$ – gönüburçlar, onda AC we BD perpendikulýar.

Şeýlelikde, subut etmek hersiniň netijesi indiki üçin salgylanma bolan deduktiw pikir ýöretmeleriň 6 halkaly zynjyryny emele getirdi.

Pikir aýtmalaryň çynlygyny subut etmekligiň başgaça usullarynyň hem bardygyny görkezmek üçin aşakdaky mysallara seredeliň.

Teorema 2. Eger a we b göni çyzyklar üçünji bir c göni çyzyga parallel bolsalar, onda olar özara paralleldirler.

Subudy. Teoremanyň tassyklamasyny inkär edenimizide nähili netije alynjakdygyna seredeliň. Goý, a we b gönüler parallel däl diýeliň. Onda olar c gönüde ýatmaýan käbir P nokatda kesişerler. Diýmek, c gönüde ýatmaýan P nokatdan oňa parallel bolan iki göni geçýär (a we b). Bu bolsa parallellik aksiomasyna ters gelýär. Şeýlelikde, tassyklamany inkär etmegimiz gapma-garşylyga getirdi, şonuň üçin teoremanyň tassyklamasynyň dogrudygy gelip çykýar.

Teorema 3. Eger $\frac{a-b}{a+b}$ drob gysgalmaýan bolsa, onda $\frac{a}{b}$ drob hem gysgalýan däldir.

Subudy. Bu teoremany subut etmek üçin kontropozisiýa kanunyndan peýdalanalyň. A: $\frac{a-b}{a+b}$ – drob gysgalmaýar.

B: $\frac{a}{b}$ – drob gysgalmaýar.

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ onda $\overline{B}$: $\frac{a}{b}$ – drob gysgalýar, $\overline{A}$: $\frac{a-b}{a+b}$ – drob gysgalýar diýen sözlemlerdir. $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – gelip çykmany subut edeliň.

Goý, $\frac{a}{b}$ – drob gysgalýar diýeliň, onda $a=mq$, $b=mp$ bolar. Diýmek, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{mq-mp}{mq+mp} = \frac{m(q-p)}{m(q+p)} = \frac{q-p}{q+p}$ gysgalýan drob bolar. Şeýlelik bilen, kontropozisiýa kanunynyň esasynda başdaky teoremanyň dogrudygyny alarys.

Gönükmeler

1. "Yzygider gelýän üç natural sanyň jemi 3-e bölünýär" diýen pikir aýtmany subut ediň we logiki seljerme geçiriň.

2. Gönüburçlugyň diagonalynyň ony deň iki üçburçluga bölýändigini subut ediň we logiki seljerme geçiriň.

3. Aşakdaky pikir aýtmalaryň çyndygyny subut ediň:

a) eger $a>b$ bolsa, onda $23a>23b$;

b) eger a b bolsa, onda $-17a<-17b$;

ç) eger $7 \cdot 6=42$ bolsa, onda $6=42:7$.

4. Pikir ýoretmäniň çynlygyny esaslandyryň: "Näbelli köpeldijini tapmak üçin köpeltmek hasylyny belli köpeldijä bölmeli. $7x=42$ deňlemede ikinji köpeldiji näbelli. Diýmek, $x=42:7$; $x=6$".

5. Tassyklamany inkär etmek usuly bilen subut etmeli:

a) eger göni çyzyklar kesişýän bolsalar, onda olar diňe bir nokatda kesişýändirler;

b) dürli taraply üçburçlugyň burçlary hem dürlüdir;

ç) hiç bir üçburçlugyň iki burçy bir wagtda göni bolup bilmez.

6. $2+4=6$; $4+6=10$; $6+8=14$; $4+8=12$ deňlikleri almak bilen okuwçy netije çykardy: islendik iki jübüt sanyň jemi jübüt sandyr. Bu netije dogrumy? Okuwçynyň pikir ýoretmesini bu tassyklamanyň subudy diýip bolarmy?

§ 14. Teswirli mesele barada düşünje

Başlangyç matematikany öwrenmekde teswirli meseleleriň örän uly ähmiýetiniň bardygy bize mälimdir. Mesele çözmekde okuwçy täze-täze matematiki düşünjeler bilen tanyşýar, nazaryýetde alan bilimlerini durmuşda ulanmaga taýýarlaýar. Teswirli meseleler okuwçylaryň logiki pikirlenmek endiklerini ösdürýär. Mesele çözmekligiň okuwçylaryň şahsyýetini terbiýelemekdäki ähmiýetiniň hem uludygyny belläp geçeliň. Şonuň üçin her bir mugallymyň teswirli mesele baradaky düşünjesiniň çuňňur bolmagy zerurdyr we şol bir meseläni dürli usullar bilen çözmegi başarmalydyr.

Teswirli mesele – bu mukdar taýdan häsiýetnama bermegi talap edýän, durmuşda we tebigatda bolup geçýän hadysalaryň (wakalaryň) hem-de olaryň arasyndaky baglanyşyklary beýan edýän sözlemlerdir.

Her bir teswirli mesele iki bölekden: meseläniň şertinden we meseläniň talabyndan (soragyndan) durýar.

Meseläniň şertinde gürrüňi edilýän obýekt barada maglumatlar, ol obýekti häsiýetlendirýän ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklar hem-de ululyklaryň käbirleriniň bahalary berilýär.

Meseläniň talaby – bu çözüwi tapmak baradaky görkezmedir. Ol görkezme talap ýa-da sorag görnüşinde bolup biler. Mysal üçin:

"Köpburçlugyň perimetrini tapmaly" – talap görnüşinde bolup, "Köpburçlugyň perimetri näçä deň?" – sorag görnüşindedir.

Meselä seredeliň: Daýhan birleşiginiň ekin meýdanynyň bir bölegini "Jonn Deer" traktorynyň kömegi bilen 10 günde, "Belarus" traktory bilen bolsa 15 günde sürüp bolýar. Eger traktorlaryň ikisi bilelikde işleseler, şol meýdany näçe günde sürüp bolar?

Bu meseläni seljereliň. Meselede üç ululygyň arasyndaky gatnaşyk beýan edilýär: işiň möçberi, iş öndürijiligi we şol işiň ýerine ýetirilen wagty. Ol ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk üç dürli ýagdaýda görkezilendir:

1. Işiň käbir möçberi diňe "Jonn Deer" traktory bilen ýerine ýetirilýär we onuň belli bir iş öndürijiligi bardyr. Bu ýerde diňe bir ululyk, ýagny işiň näçe wagtda ýerine ýetirilendigi belli bolup, ol 10 güne deňdir. Beýleki iki ululyk näbellidir.

2. Işiň şol möçberi "Belarus" traktory bilen ýerine ýetirilýär hem-de onuň öz iş öndürijiligi bardyr. Bu ýerde işiň ýerine ýetirilen wagty 15 gün bolup, beýleki iki ululyk näbelliligine galýar.

3. Indi işiň şol bir möçberini iki traktor bilelikde ýerine ýetirýär. Ol traktorlaryň her haýsynyň öz iş öndürijiligi bardyr we ululyklaryň üçünjisiniň hem bahalary näbellidir.

Meseläniň talaby sorag görnüşinde berlendir. Ony aşakdaky ýaly beýan etmek bilen buýruk görnüşinde hem bermek bolardy: "Traktorlaryň ikisi bilelikde işlände şol ýeri näçe günde sürüp gutaryp biljekdigini kesgitlemeli". Bu meselede birnäçe näbelli ululyk bolup, olaryň biri meseläniň talabyna girizilendir. Şol ululyga gözlenilýän ululyk diýilýär.

Käwagt mesele şeýle düzülýär: Şertiň bir bölegi ýa-da tutuş şert talap bilen birlikde bir sözlemde getirilýär. Meselem, ýokarda getirilen mesele şeýle düzülip bilner: Daýhan birleşiginiň meýdanyny "Jonn Deer" traktory bilen 10 günde, "Belarus" traktory bilen bolsa 15 günde sürüp boljak. Eger iki traktor bile işlese, bu ýeri näçe günde sürüp bolar? Munda şertiň bir bölegi (eger iki traktor bile işlese) meseläniň talaby bilen bir sözlemde ýerleşdirilen. Indiki teswirlemede ähli şert sorag bilen bilelikde bir sözlemde berilýär: Eger daýhan birleşiginiň meýdanyny "Jonn Deer" tarktory bilen 10 günde, "Belarus" tarltory bilen bolsa 15 günde sürüp bolýan bolsa, olaryň ikisi bile işlese, şol meýdany näçe günde sürüp bolar?"

Biziň gündelik durmuşymyz dürli-dürli wakalardan doludyr. Ol wakalaryň esasynda beýan edilýän meseleleriň artykmaç (gerekmejek) maglumatlary hem saklamagy mümkindir. Mysal üçin, ýokarda getirilen meselede traktorlaryň markalary baradaky maglumatyň berilmegi hökman däldir. Ol ýerde traktorlaryň dürli iş öndürijiliginiň bardygy hakynda gürrüň gidýär.

Käbir meselelerde onuň şertinde berilýän maglumatlaryň ýeterlik däldigi sebäpli ol meseläniň soragyna jogap berip bolmaýar. Mysal üçin: "Eger gönüburçlugyň uzynlygynyň ininden 3 *m* uludygy belli bolsa, onuň uzynlygyny tapmaly". Meseläniň soragyna jogap bermek üçin ondaky berlen maglumatlar ýeterlik däldir. Bu meseläni çözmek üçin, goşmaça maglumat bermeli. Mysal üçin, şol meýdançanyň meýdany ýa-da bolmasa ikinji tarapyny tapmaga mümkinçilik berýän başga bir ululyk berilmelidir.

Mälim bolşy ýaly, mesele çözmekde okuwçylar we talyplar belli bir derejede kynçylyk çekýärler. Esasan hem, iş öndürijiligi bilen baglanyşykly meselelerde edilmeli işiň möçberi görkezilmeýändigi üçin ýa-da meseläniň şertinde az maglumatyň berilýändigi sebäpli olar has-da ýaýdanýarlar. Biziň gündelik durmuşymyz meseleler bilen gönüden-göni baglanyşyklydyr. Egerde okuwçy ýa-da talyp mesele çözmegi başarmasa, onda ol entek onuň alan biliminiň we özbaşdak pikirlenmek endiginiň ýeterlik däldigini aňladýar diýsek, hakykatdan daş düşdügimiz bolmasa gerek. Okuwçylara we talyplara mesele çözmek, özbäşdak pikirlenmek endiklerini öwretmek mugallymlaryň esasy borçlarynyň biridir.

Geliň, indi iş öndürijiligi bilen baglanyşykly iki sany mesela seredeliň:

1-nji mesele. Daýhan birleşiginiň bir meýdançasyny sürmek üçin "Jonn Deer" traktoryna 10 gün gerek. Edil şol meýdançany "Belarus" traktory bilen sürmek üçin bolsa 15 gün gerek. Traktorlaryň ikisi bilelikde işlese, şol meýdançany näçe günde sürüp gutarar?

Çözülişi. Bu meselede üç sany ululyk: işiň möçberi (görkezilmedik), iş öndürijiligi we işi ýerine ýetirmek üçin sarp edilen wagt görkezilendir.

I usul. Ilki bilen, traktorlaryň her haýsynyň aýratyn we iki traktoryň bilelikdäki iş öndürijiligini kesgitläliň: "Jonn Deer" traktory görkezilen meýdany 10 günde sürüp gutarýan bolsa, ol bir günde şol meýdanyň $\frac{1}{10}$ bölegini sürer. "Belarus" traktory bir günde şol meýdanyň $\frac{1}{15}$ bölegini sürer. Iki traktor bilelikde şol meýdanyň bir günde $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ bölegini sürer. Soňky alan aňlatmamyzy ýönekeýleşdireliň:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3}{30}+\frac{2}{30}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, iki traktor bilelikde işlände bir günde görkezilen meýdanyň $\frac{1}{6}$ bölegini sürüp biljek eken. Diýmek, ähli meýdançany sürmek üçin 6 gün gerek boljak. *Jogaby:* 6 günde.

II usul. Bu meselede 10 we 15 iki san bar. Bu sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy 30 bolar. Şeýlelikde, pikir ýöredýäris: 30 günde "Jonn Deer" traktory görkezilen meýdançanyň üçüsi ýaly ýerini sürüp biljek, "Belarus" traktory bolsa 30 günde şolar ýaly meýdançanyň ikisini sürüp biljek. Iki traktor bilelikde 30 günde 3+2=5 sany görkezilen meýdança ýaly ýeri sürüp biljek. Bize bolsa bu meýdançany bilelikde näçe günde sürüp bolýanlygyny bilmek gerekdir. Onda $\frac{30}{5}=6$ günde. *Jogaby:* 6 günde.

III usul. Iş öndürijiligi bilen baglanyşykly meselelerde, köplenç, edilmeli işiň möçberi anyk görkezilmeýär. Şonuň üçin biz özümizden edilmeli işiň möçberini öňünden alýarys. Biziň meselämizde 10 we 15 sanlaryň bar bolandygy üçin sürmeli meýdany 150 *ga* diýip alalyň (10-a we 15-e kratny san). Onda "Jonn Deer" traktory bir günde $\frac{150}{10}=15ga$ ýeri sürer. "Belarus" traktory bolsa bir günde $\frac{150}{15}=10ga$ ýeri sürer. Iki traktor bilelikde bir günde 10+15=25 *ga* ýeri sürer. Diýmek, $\frac{150}{25}=6$ günde. Jogaby: 6 günde.

Şeýle görnüşli meselelerde näme üçin edilmeli işiň möçberini anyk san görnüşinde berilmeginiň hökman däldigini görkezmek üçin 150 *ga* däl-de, 300 *ga* meýdany alalyň (10-a we 15-e kratny). Onda $\frac{300}{10}=30ga$. Bu "Jonn Deer" traktorynyň bir günki öndürijiligi $\frac{300}{15}=20ga$ – bu "Belarus" traktorynyň bir günki öndürijiligi. Diýmek, bir günde iki traktor birleşip, 30+20=50 *ga* ýer sürer. Onda 300 *ga* ýeri sürmek üçin iki traktor bilelikde işlände $\frac{300}{50}=6$ gün gerek bolar. *Jogaby:* 6 gün.

IV usul. Goý, S – sürülmeli meýdan diýeliň we ol traktorlar bilelikde işläp, şol meýdany x günde sürüp gutarýar diýeliň. Traktorlaryň bir günki iş öndürijiligi $\frac{S}{10}$ we $\frac{S}{15}$ bolar. Iki traktoryň bilelikdäki iş öndürijiligi bolsa $\frac{S}{x}$ bolar. Bu ýerden aşakdaky deňlemäni alarys:

$\frac{S}{10}+\frac{S}{15}=\frac{S}{x}$ bu deňlemäni çözeliň.

$$S\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)=S\cdot\frac{1}{x};\quad \frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{x};\ 5x=30;$$

$$\frac{5}{30}-\frac{1}{x};\quad x=\frac{30}{5};\quad x=6.$$

Meselä näbelli ululygy girizip, ony çözmek usulyna algebraik usul diýilýär. Bu usul bilen alan deňlemämizden görnüşi ýaly, meseläniň çözüwi edilmeli işiň möçberine bagly däldigi gönüden-göni görnüp dur, ýagny S berlen meýdanyň möçberine bagly däl. Bu bolsa ýokarda getirilen usullardaky aýdanlarymyzy doly tassyklaýar.

2-nji mesele. Iki işçi bilelikde işläp, tabşyrygy 6 günde ýerine ýetirýär. Eger olaryň biriniň iş öndürijiligi beýlekisiniňkiden 20 göterim ýokary bolsa, olar aýratynlykda tabşyrygy näçe günde ýerine ýetirer?

Çözülişi.

I usul. Bu mesele hem işiň öndürijiligi bilen baglanyşykly meseledir. Meseläniň şertini özümizçe dolduralyň. Goý, birinji işçi bir günde 100 kerpiç guýýar diýeliň. Onda ikinji işçi bir günde 120 kerpiç guýar. Sebäbi onuň iş öndürijiligi beýlekiniňkiden 20 göterim ýokary. Onda birinji işçi 6 günde $6 \cdot 100 = 600$ kerpiç, ikinji işçi bolsa $6 \cdot 120 = 720$ kerpiç guýar. Ikisi bilelikde 6 günde 600+720=1320 kerpiç guýar. Birinji içşi bu tabşyrygy 1320:100=13,2 günde ýerine ýetirer. Ikinji işçi bolsa bu tabşyrygy 1320:120=11 günde ýerine ýetirer.

Jogaby: 13,2 we 11 gün.

II usul: (algebraik usul). Goý, x – birinji işçiniň tabşyrygy ýerine ýetirmek üçin sarp eden güni bolsun. Onda ikinji işçä şol tabşyrygy ýerine ýetirmek üçin $x \cdot 1{,}2$ gün gerek boljakdygy düşnüklidir. Iki işçiniň bilelikdäki iş öndürijiligi $\frac{1}{6}$ deň. Olaryň aýratynlykda iş öndürijiligi $\frac{1}{x}$ we $\frac{1}{1{,}2 \cdot x}$ bolar. Onda aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}2 \cdot x} = \frac{1}{6},$$

$\frac{2{,}2}{1{,}2x} = \frac{1}{6}$ bu deňlemäni çözüp, $x = 11$ alarys.

Gönükmeler

1. Bir jaýy birinji ussa 4 aýda, ikinji ussa 6 aýda, üçünji ussa bolsa 12 aýda gurup gutarýar. Eger olar bilelikde işleseler, şol jaýy näçe wagtda gurup gutararlar?

2. Bir çelek suw çopanyň bir özüne 14 gün ulanmaga ýetýär. Eger ol çolugy bilen bilelikde ulansa, bir çelek suw 10 güne ýetýär. Bir çelek suw çolugyň bir özüne näçe gün ulanmaga ýeter?

3. Gämi derýanyň akymynyň ugruna 18 sagat hereket etdi. Eger derýanyň akyş tizligi 2 *km/sag*, gäminiň hususy tizligi bolsa 26 *km/sag* deň bolsa, onda ol yzyna gaýdyşyn şol ýoly näçe wagtda geçer?

4. Birinji mekdebiň okuwçylary 80 *t* metal bölegini, beýleki mekdebiň okuwçylary bolsa onuň $\frac{5}{8}$ bölegiçe metal bölegini ýygnadylar. Ýygnalan metal böleklerinden bolsa demir ýol relslerini ýasadylar. Eger her 10 *t* metaldan 70 *m* rels ýasap bolýan bolsa, ähli ýygnalan metal böleklerinden näçe metr rels ýasapdyrlar?

5. Çuwalda 100 *kg* däne bardy. Haçan-da ol ýerden 2 halta däne alanlaryndan soňra çuwalda ähli dänäniň 10% galdy. Eger haltalaryň birine beýlekisine garanyňda iki esse köp däne gaplanan bolsa, haltalaryň hersine näçe kilogram däne guýupdyrlar?

§ 15. Teswirli meseleleriň çözüliş usullary

Meseläni çözmek – logiki taýdan dogry yzygiderlilikde meselede bar bolan aýdyň we aýlaw sanlar, ululyklar we olaryň arasyndaky baglanyşyklar esasynda amallary ýerine ýetirmek we meseläniň soragyna jogap bermekdir.

Matematikada meseläniň esasy çözüliş usullary diýip arfimetiki we algebraik usullary tapawutlandyrýarlar. Arifmetik usulda meseläniň soragyna jogap sanlaryň üstünde arifmetik amallary ýerine ýetirmek arkaly tapylýar.

Şol bir meseläniň arifmetik usulda dürli çözülişi berlenleriň arasyndaky gatnaşyk, berlenleriň we näbelliniň, berlenleriň we gözlenýän sanyň arasynda arfimetiki amaly saýlamak esasynda ýa-da bu ulanylýan gatnaşyklaryň yzygider ulanylyşynda amallary saýlamak bilen tapawutlanýar. Meseläniň çözülişini dürli arifmetiki usullar bilen görkezeliň.

Mesele. Işçi 8 sagatda 96 sany birmeňzeş detal taýýarlaýar. Ol 5 sagatda näçe detal taýýarlar?

I usul	II usul	III usul
1) 96:8=12 (detal)	1) 8:5=1,6 (esse)	8 sag= 480 *min*
2) 12·5=60 (detal)	2) 96:1,6=60 (detal)	1) 480:96=5 *min*,
		5 sag=300 *min*,
		2) 300:5=60 (detal)

Jogaby: Işçi 5 sagatda 60 detal ýasar.

Meseläniň soragyna şert boýunça algebraik usulda deňleme düzmek we ony çözmek arkaly jogap berilýär.

Näbellini (näbellileri) harp (harplar) bilen belgilemeklige we pikir ýöretmäniň barşyna baglylykda şol bir meselä dürli deňleme düzmek mümkin. Bu ýagdaýda bu meseläniň dürli algebraik usulda çözülişi barada aýtmak bolar.

Meseläniň dürli algebraik usulda çözülişine seredeliň.

Mesele. Çäýnege we iki käsä 740 *g* suw sygýar. Çäýnege käseden 380*g* köp suw sygýar. Çäýnege näçe suw sygýar?

I usul. Goý, çäýnege x *g* suw sygýan bolsun, onda käsä $(x-380)$ *g* suw sygar, iki käsä $(x-380)\cdot 2$ *g* suw ýerleşer, bir çäýnege we iki käsä $(x+(x-380)\cdot 2)$ *g* suw ýerleşer. Şeýlelikde, çäýnege we iki käsä 740 *g* suw ýerleşýär, onda şeýle deňleme düzmek mümkin: $x+(x-380)\cdot 2=740$.

Ony çözmek bilen $x = 500$ *g*, başgaça çäýnege 500 *g* suw sygýandygyny taparys.

II usul. Goý, käsä x *g* suw sygýan bolsun, onda çäýnege $(x+380)$ *g* suw ýerleşer, iki käsä $2x$ *g* suw ýerleşer, çäýnege we iki käsä $((x+380)+2x)$ *g* suw ýerleşer. Çäýnege we iki käsä 740 *g* suw ýerleşýändigini bilip, deňleme düzüp bileris:

$(x + 380) + 2x = 740$. Ony çözüp $x = 120$ alarys.

Çäýnege näçe suw sygýandygyny bilmek üçin $x + 380$ aňlatmada x-yň bahasyny ornuna goýalyň. Onda $120+380 = 500$. Diýmek, çäýnege 500 *g* suw ýerleşýär.

III usul: Goý, çäýnege x *g* suw, bir käsä bolsa y *g* suw ýerleşýän bolsun. Onda iki käsä $2y$ *g* suw sygar, çäýnege we iki käsä $(x + 2y)$ *g* suw sygar. Bir käsä $(x - 380)$ *g* suw sygar. Şeýlelikde, $(x - 380)$ *g* y-a deň, çäýnege we iki käsä 740 *g* suw sygýar. Şeýlelikde,

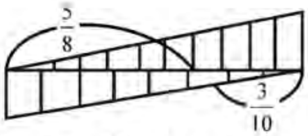
$$\begin{cases} x-380=y \\ x+2y=740 \end{cases}$$ deňleme ulgamyna geldik.

Bu ulgamy çözüp, $x = 500$, $y = 120$ alýarys.

Meselede edilýän talap: çäýnege näçe gram suw sygýar?

Teswirli meseleleri arifmetiki we algebraik usullarda çözmekden başgada matematikada dürli çözülüş usullar ulanylýar.

Meselä seredeliň: Iki punktdan biri birine tarap iki adam pyýada çykyp ugrady. Birinji ýoluň $\frac{5}{8}$-sini, ikinji $\frac{3}{10}$-sini geçdi. Pyýadalar duşuşarmy?



7-nji surat

Iki punktuň arasyndaky uzaklygy kesimde şekillendireliň (*7-nji surat*). Falesiň teoremasyna esaslanyp, kesimi 8 we 10 deň böleklere böleliň.

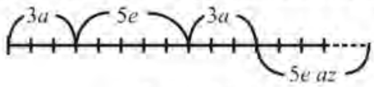
Diňe çyzga esaslanmak bilen meseläniň soragyna ýeňil jogap bermek mümkin: "Duşuşyk bolmady". Munuň ýaly çözüliş usulyna grafiki usul diýilýär.

Käwagt meseläniň grafiki usulda çözülişi diňe bir kesimleri gurmak bilen däl, eýsem olaryň uzynlygyny ölçemek bilen baglydyr.

Mesele. Okuwçylaryň bir topary mekdebiň ýanynda birinji gün 3 düýp alma we 5 düýp erik, ikinji gün almany şonça, erigi bolsa 2 düýp az ekdiler. Okuwçylaryň topary iki günde näçe düýp nahal oturtdy? Olar iki günde näçe düýp nahal oturtdylar?

Her bir agajy 1sm kesim bilen belgilemegi şertleşeliň. Onda iki günde oturdylan ähli nahallary AB kesim görnüşinde şekillendirmek bolar (*8-nji surat*).

Agaçlary şekillendirýän kesimi ölçäp, meseläniň soragyna jogap alarys.



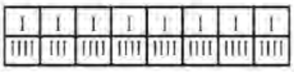
8-nji surat

Jogaby: Iki günde okuwçylar topary 14 düýp nahal oturtdylar.

Käbir meseläni predmetler bilen amaly ýerine ýetirmek arkaly amaly usulda çözmek mümkin.

Meselä seredeliň: "Daýhan birleşiginde 40 sany ýeňil we ýük maşyny bar, özünem her bir ýeňil maşyna 4 sany ýük maşyny düşýär. Daýhan birleşiginde näçe sany ýeňil we näçe sany ýük maşyny bar?".

Her bir maşyny çöpjagazlar bilen şekillendireliň (40 maşyn – 40 taýajyk). Her bir ýeňil maşyna 4 ýük maşynynyň düşýändigi belli. Şonuň üçin bir taýajygy goýýarys – ol bir ýeňil maşyny aňladar. Onuň aşagyndan 4 taýajygy goýýarys, bu 4 ýük maşyny aňladýar. 40 taýajyk bolýança taýajyklary goýalyň. Meseläniň soragyna jogap bermek üçin ýokarky hatarda näçe taýajygyň, aşaky hatarda näçe taýajygyň goýlandygyny bilmek ýeterlikdir.



9-njy surat

Bu çözülişi amaly usul diýip atlandyrmak bolar. Bu hem teswirli meseleleriň çözülişiniň bir usulydyr.

Gönükmeler

1. Aşakdaky meseleleri iki arifmetiki usulda çözüň:

a) Kitap çap edilende her sahypa 28 setir, her setire 40 harp ýerleşdirmek göz öňünde tutuldy. Ýöne kagyzyň ölçeginiň gabat gelmändigi üçin bir sahypa 35 setir ýerleşdirmeli boldy. Kitabyň umumy sahypasyny üýtgetmezlik şerti bilen her setire näçe harp ýerleşdirmeli bolar?

b) Motosikletçi 40 *km/sag* tizlik bilen hereket edip, käbir aralygy 12 minutda geçdi. Bu aralygy welosipedli 16 km/sag tizlik bilen näçe wagtda geçip biler?

2. Meseläni dürli algebraik usullarda çözüň: 560 sahypa kagyzdan iki görnüşli 60 depder taýýarladylar. Onuň birinji görnüşine 12 sahypa kagyz sarp etdiler. Her görnüşli depderden näçesi taýýarlandy?

Bu meseläni arifmetiki usulda çözüp bolarmy?

3. Ilki çyzgy çyzmak bilen aşakdaky meseleleri çözüň:

a) Bir bölek sim beýlekiden 54 *m* uzyn. Her bölekden 12 *m* kesip alanlaryndan soň, ikinji bölek birinjiden 4 esse gysga boldy. Her bir bölek simiň başdaky uzynlygyny tapyň.

b) Tekjede gap-gaçlar bardy. Ilki ähli gaplaryň $\frac{1}{3}$-ni, soňra galan (okara) gaplaryň $\frac{1}{2}$-ni aldylar. Şondan soň tekjede 9 gap galdy. Tekjede başda näçe gap bar eken?

4. Grafiki usulda çözüň:

Iki oglan 96 kömelek çöpledi. Birinji oglanyň çöplän kömelekleriniň $\frac{2}{3}$-si, ikinji oglanyň çöplän kömelekleriniň $\frac{2}{5}$-sine deň. Her oglan näçe kömelek tapdy?

§ 16. Meseläniň arifmetiki usulda çözülişiniň tapgyrlary. Meseläniň mazmunyny derňemegiň düzgünleri

Teswirli meseleleri arifmetiki usulda çözmek – bu berlen meseläniň mazmunyna we çözýäniň başarnygyna baglylykda çylşyrymly we döredijilikli işdir. Şoňa görä-de ony çözmekligi birnäçe tapgyrlara bölmek mümkin:

1. Meseläniň mazmuny bilen tanyşmak we seljerme bermek.
2. Meseläniň çözüwini gözlemek we meýilnamasyny düzmek.
3. Meýilnamany ýerine ýetirmek we meseläniň talabyna jogap bermek.
4. Çözüwi barlamak we eger bar bolsa ýalňyşlary düzetmek.

Meseläniň talabynyň ýerine ýetirilişiniň doly ýazgysy ýa-da meseläniň çözülişiniň tapgyrlary takyk çäklere eýe däldir we ol elmydama birmeňzeş bolmaýar.

Käwagt meseläni çözýän eýýäm meseläni kabul edende ol meseläniň nähili çözülýändigini bilýär. Bu ýagdaýda meseläniň çözülişiniň gözlegi aýratyn tapgyrlara bölünmeýär we ilkinji üç tapgyryň her bir ädimine esaslanyp, çözüliş ýerine ýetirilenden soň hökmany däl barlagy ýerine ýetirilýär. Ýöne logiki taýdan gutarnykly çözüliş ähli tapgyrlary özünde saklar.

Çözüwiň birinji tapgyrynyň esasy maksady – meseläni çözýäniň meseläniň şertine, talabyna ýa-da soragyna, ähli adalgalaryň manysyna we belgilere düşünmegidir. Meseläniň mazmunyna düşünmek üçin ulanylýan birnäçe usullar bar. Şeýle meseläni okaň:

Ýol bilen şol bir tarapa iki oglan gidip barýar. Ilkibaşda olaryň arasyndaky uzaklyk 2 kilometrdi. Öňdäki oglan 4 *km/sag*, yzdaky oglan bolsa 5 *km/sag* tizlik bilen ýöreýär, şonuň üçin hem ikinji oglan wagt geçdigiçe birinjä ýakynlaşýar. Hereket başlanandan ikinji oglan birinjiniň yzyndan ýetýänçä olaryň arasynda 8 *km/sag* tizlik bilen bir it ylgaýar. Yzdaky oglan birinji oglanyň yzyndan ýetýär-de, yzyna dolanýar. Ol it ikinji oglan birinjiniň yzyndan ýetýänçä ylgaýar. Şol wagt aralygynda it näçe aralygy geçer?

Meseläniň manysyna düşünmek üçin ýörite soraglar bermek, onuň şertini we soragyny sanamak we olara jogap bermek bolar.

1. Mesele näme barada? (Mesele iki oglanyň hereketi we it barada. Bu hereket oňa gatnaşýanlaryň her biri üçin tizlik, wagt we geçilen ýol bilen häsiýetlendirilýär).

2. Meselede nämäni tapmak talap edilýär? (Meselede hereket wagtynda itiň näçe aralygy ylgajakdygy talap edilýär).

3. "Hereket wagtynda" diýen söz nämäni aňladýar? (Meselede it "hereketiň başyndan ikinji oglan birinji oglanyň yzyndan ýetýänçä" iki oglanyň arasynda ylgaýar diýip aýdylýar. Şonuň üçin "ähli wagt aralygynda" diýen söz "hereketiň başyndan tä ikinji oglan birinji oglanyň yzyndan ýetýänçä geçýän wagt aralygynda" diýen manyny aňladýar).

4. Meselede oňa gatnaşýanlaryň her biriniň hereketi barada näme belli? Meselede belli: 1) oglanlar bir ugra barýarlar; 2) hereket başlanýança olaryň arasyndaky uzaklyk 2 *km*; 3) öňden barýan oglanyň tizligi 4 *km sag*; 4) yzyndan barýan oglanyň tizligi 5 *km sag*; 5) itiň ylgaýyş tizligi 8 *km sag*; 6) ähli hereket edýänleriň wagty birmeňzeş: bu wagt hereketiň başyndan, (haçan-da oglanlaryň arasyndaky uzaklyk 2 *km*-den) oglanlar duşuşýançalar geçen wagtdyr, (haçan-da olaryň arasyndaky uzaklyk 0 *km* bolýança).

5. Meselede näme näbelli? (Meselede ikinji oglanyň birinji oglanyň yzyndan näçe wagtda ýetjekdigi, başgaça, oňa gatnaşýanlaryň ählisiniň hereket wagty belli däl. Ýene-de oglanlaryň arasyndaky uzaklygyň haýsy tizlik bilen ýakynlaşýandygy belli däl. Şeýle hem itiň näçe aralygy ylgandygy belli däl – bu näbelliler meselede tapylmaly ululyklar).

6. Gözlenýän näbelli nähili san, ululygyň bahasy, gatnaşygyň käbir görnüşi. (Gözlenýän ululygyň bahasy – herekete gatnaşýanlaryň ählisiniň hereket wagtynda itiň ylgan aralygy).

Meseläniň mazmunyna akyl ýetirmekde we meseläniň çözülişini gözlemegiň esasyny goýmakda meseläniň tekstiniň täzeden düzülmegi uly ähmiýete eýedir. Munda berlen ähli gatnaşyklary saklaýan, baglanyşyk we mukdar häsiýetleri, ýöne has aýdyň aňladýan başga ýagdaýlar bilen çalşyrmak bolar. Bu ýerde meseläniň tekstini manyly böleklere bölmek has-da ähmiýetlidir.

Teksti täzeden düzmegiň ugry aşakdakylardan ybaratdyr: artykmaç maglumatlary taşlamak; berlen käbir düşünjeleri degişli adalgalar bilen çalyşmak we tersine; käbir adalgalary düşünjäniň manyly bölegi bilen çalyşmak; meseläniň çözülişini gözlemek üçin onuň tekstini käbir amatly görnüşe getirmeli. Teksti täzeden düzmegiň netijesi esasy ýagdaýlaryň bölünip berilmegidir. Ýokarda berlen meselede edilýän gürrüňiň hereket barada gidýändigini bilip, ony aşakdaky ýaly täzeden düzüp bolar: "Birinji oglanyň tizligi 4 *km/sag*, yzdan barýan ikinji oglanyň tizligi 5 *km/sag* (meseläniň birinji bölegi). Oglanlaryň ýakynlaşýan aralygy 2 *km* (ikinji bölek). Oglanlaryň ýörän wagty – bu ikinjiniň birinjiniň yzyndan ýetjek wagty, başgaça bu wagtda ikinji oglan birinji oglandan 2 *km* ýoly köp ýöreýär (üçünji bölek). Itiň ylgaýyş tizligi 8 *km/sag*. Itiň ylgan wagty oglanlaryň birigýänçä ýörän wagtyna deň. Itiň geçen aralygyny tapmak talap edilýär".

Ýene şunuň ýaly meselä seredeliň: "Iki tekjedäki kitaplaryň biri beýlekisinden 5 kitap köp. Beýleki tekjede näçe kitap bardy?" Meseläni birinji gezek okanymyzda, onda beýleki tekjäniň kitaplary hakynda maglumat doly däl ýaly. Geliň "5 kitap köp" diýen ýerini göz öňüne tutup, meseläniň berlişini üýtgetmäge çalşalyň. Indiki teksti alarys: "Iki tekjede bir tekjedäki ýaly kitap bar we ýene-de 5 sany artyk. Beýleki tekjede näçe kitap bar? Berlişi ýene-de bir gezek üýtgedeliň, ondaky "iki tekjedäki" diýen sözi "birinji we ikinji tekjede bilelikde" sözleri bilen üýtgedip: "Birinji tekjede näçe kitap bar bolsa, birinji we ikinji tekjede bilelikde şonça kitap bar we ýene-de 5 sany kitap artyk. Ikinji tekjede näçe kitap bar?" Ýene-de takyklaşdyrmak mümkinçiligi bar: "Birinji we ikinji tekjedäki kitaplaryň bilelikdäki mukdary – bu birinji tekjedäki kitaplaryň mukdary we ýene-de 5 sany kitap. Ikinji tekjede näçe kitap bar?"

Bu tekstden mälim bolşy ýaly, 5 kitap – bu beýleki tekjedäki kitaplaryň sanydyr. Şu ýagdaýda berlişiň üýtgedilmesi diňe bir meseläniň mazmunyna düşünmäge däl-de, eýsem jogabyny bermäge mümkinçilik döretdi.

Üýtgedilen tekst käwagt shema görnüşinde ýazmaga mümkinçilik berýär. Meselem: birinji meseläniň berlişini üýtgedip, soňra şunuň ýaly tablisada görkezmek bolar.

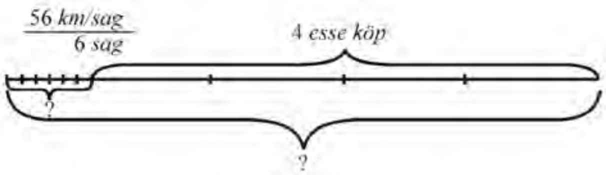
TIZLIK	WAGT	ARALYK
1-nji oglan 4 km/sag.	?	?
2-nji oglan 5 km/sag.	? Birmeňzeş	? 2 km köp
It 8 km sag	?	?

Üýtgedilen tekst shematik şekilde başga görnüşi alyp hem biler. Meselä seredeliň: "Syýahatçy 6 sagatlap otluda, sagatda 56 *km* ýol geçdi. Şondan soň oňa geçen ýolundan 4 esse köp ýoly geçmeli. Syýahatçy jemi näçe kilometr ýoly geçmeli? Tekst üýtgedilenden soň indiki görnüşi alyp biler. Syýahatçy 6 sagatlap 56 *km sag* tizlik bilen otluda ýöredi, galan ýol geçen ýolundan 4 esse köp. Jemi näçe ýoluň geçilmelidigini bilmek talap edilýär".

Şu meseläniň shematik görnüşli ýazylmasy şeýle ýerine ýetirilip bilner:

Geçdi - 6 sagat 56 *km sag* tizik bilen
Galdy - ?, 4 esse köp

Berlen ýazgylarda berlenler, belliler, näbelliler we olaryň aragatnaşygy görkezilendir.



10-njy surat

Meselä seljerme bermegiň möhüm serişdesi çyzgy bolup durýar. Meselem, iň soňky meselämiz üçin şeýle çyzgyny ýerine ýetirip bileris *(10-njy surat)*.

Gönükmeler

1. Aşakdaky berlen meselelere ýörite soraglar berip we berlen soraglara jogap beriň hem-de mazmunyny derňäň. Olaryň shematik ýazgysyny ýerine ýetiriň. Olary çözüň:

a) Gämi akymyň ugruna 18 sagat ýöredi. Eger-de gäminiň tizligi 26 *km sag* we derýanyň akyş tizligi 2 *km sag* bolsa, ol gaýdyşyn näçe wagt ýüzmeli bolar?

b) Oglanlar 8 düýp alma agajyna we 4 düýp ülje agajyna 140 bedre suw guýdular. Alma agajyna ülje agajyndan 3 esse köp suw guýlan bolsa, alma agajyna we ülje agajyna näçe bedre suw guýdular?

ç) Irden ammarda 96,5 *t* bugdaý bardy, gunortana çenli ýük göterijiligi 4,5 *t* bolan üç maşynda bugdaý daşadylar. Eger-de ammaryň bugdaýynyň 3/5 bölegi daşalan bolsa, ammarda näçe tonna bugdaý galdy?

2. Meseläniň tekstini manyly böleklere bölüp, esasy ýagdaýlaryny görkezip, ony üýtgediň. Meseläni çözüň.

a) Bir mekdebiň okuwçylary 80 *t* metal böleklerini ýygnadylar, beýlekisi şol mukdaryň 5/8-sini ýygnadylar. Ýygnalan metal böleklerden rels ýasaldy, eger-de her 10 *t* metal böleklerinden 70 metr rels çykýan bolsa, jemi näçe metr rels ýasalar?

b) Çelekde 100 *kg* bugdaý bar. 2 halta bugdaý alnandan soň, onda jemi bugdaýyň 10 göterimi (10%-i) galdy. Eger-de birine beýlekisinden 2 esse az guýan bolsalar, her halta näçe bugdaý saldylar?

3. Üýtgedilen tekstiň haýsy usulynyň meýilnama düzmäge has täsirlidigini anyklaň: dikuçar aeroportdan 210 *km/sag* tizlik bilen uçdy. 2 sagat soň şol aeroportdan başga bir uçar uçdy. Ol uçanyndan 3 sagat soň dikuçardan 840 *km* öňe geçipdir. Uçaryň tizligi näçe?

§ 17. Meseläniň çözülişini gözlemegiň we ony ýerine ýetirmegiň düzgünleri

Meseläniň arifmetiki usulda çözülişini gözlemegiň giň ýaýran düzgünleriniň biri meseläni teksti boýunça böleklere bölmekdir. Meseläniň teksti boýunça meseläni derňemek zynjyr görnüşli pikir ýöretmek esasynda alnyp barylýar. Ol meseläniň berlenlerinden we soraglaryndan başlap biler. Meseläni berlenlerinden soraga çenli derňemekde meseläniň tekstinde iki berleni we bilimler esasynda olaryň arasyndaky baglanyşygy (munuň ýaly bilimler çözülişi ýerine ýetirmegiň birinji döwründe alynmalydyr), haýsy näbelli şol berlen esasynda we haýsy amallaryň kömegi bilen tapylyp bilner. Bu näbellini berlen hasap edip, ýene iki sany özara bagly berleni bölüp almaly, gözlenýän san tapylýança, şol berlenler esasynda näbellini kesgitlemeli, şeýle hem degişli arifmetiki amallary kesgitlemeli we ş.m. 19-njy bölümde getirilen meseläniň tekst boýunça derňelişini mysal getireliň. "Syýahatçy 56 *km/sag* tizlik bilen 6 sag otluda ýöredi. Ýene ýörän ýolundan 4 esse köp ýol galdy.

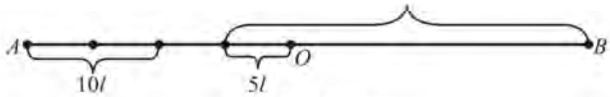
Ähli ýoly bilmek talap edilýär". Berlenlerden soraga tarap pikir ýöredeliň: "Syýahatçynyň 56 *km/sag* tizlik bilen 6 sagat ýöräni belli. Şu berlenler bilen syýahatçynyň 6 sagatda geçen ýoluny bilmek mümkin. Onuň üçin tizligi wagta köpeltmek ýeterlik. Geçilen ýoly we galan ýoluň 4 essedigini bilip, galan ýoluň näçä deňdigini tapmak mümkin. Onuň üçin geçilen ýoly 4-e köpeltmeli (4 esse ulaltmaly). Syýahatçynyň näçe kilometr geçendigini we ýene näçe geçmelidigini bilip, ähli ýoly tapyp bileris. Tapylan ýol kesimlerini goşup, ähli ýoly taparys. Şeýlelikde, birinji amal bilen syýahatçynyň otly bilen näçe aralygy geçendigini, ikinji amal bilen onuň ýene näçe ýol geçmelidigini, üçünji amal bilen bolsa ähli ýoly taparys".

Mesele soragdan berlenlere tarap derňelende, meseläniň soragyna üns bermeli we meseläniň soragyna jogap bermek (meseläniň teksti derňelende, alnan maglumatlar esasynda) ýeterlikdigini ýa-da däldigini kesgitlemeli. Munuň üçin meseläniň şertine üns bereliň we aýdyňlaşdyralyň. Eger şonuň ýaly berlen ýok bolsa ýa-da diňe bir berlen bar bolsa, ýetmeýän berleni tapmak üçin nämäni tapmalydygyny kesgitlemeli we ş.m. Soňra meýilnama düzýäris. Şeýlelikde, pikir ýöretme ters tertip boýunça ýöredilýär. Meseläniň soragyndan berlenlere tarap pikir ýöretmäniň zynjyryny düzüp, şol meseläniň derňelişine seredeliň: "Meselede ähli ýoly tapmak talap edilýär. Biz ähli ýoluň iki bölekden durýandygyny kesgitledik. Diýmek, meseläniň talabyny ýerine ýetirmek üçin syýahatçynyň näçe kilometr ýol geçendigini we ýene näçe ýol geçmelidigini bilmek ýeterlikdir. Ol we beýleki belli däl. Geçilen ýoly tapmak üçin syýahatçynyň näçe wagt we haýsy tizlik bilen ýörändigini bilmek ýeterlikdir. Bu meselede belli. Tizligi wagta köpeltmek bilen geçilen ýoly bileris. Galan ýoly bilmek üçin geçilen ýoly 4-e köpeltmek ýeterlikdir.

Şeýlelikde, başda geçilen ýoly, soňra geçilmän galan ýoly, ondan soň bolsa goşmak arkaly ähli ýoly bilmek mümkin".

Meseläniň çözülişiniň gözlegini birinji döwürde çyzgy we shematik ýazgy etmek bilen hem alyp baryp bolar. Çyzgy bilen meseläniň çözülişiniň gözleginiň nähili amala aşyrylýandygyny görkezeliň. Meselä seredeliň: "Bidonda süýt bardy. Ondan ilki ýarysyny we ýene 5 litr, soňra galan süýdüň 1/3-ini aldylar. Ondan soň bidonda 10 litr süýt galdy. Başda bidonda näçe litr süýt bar eken?

Goý, *AB* kesim (*11-nji surat*) gözlenýäni şekillendirýän bolsun.



11-nji surat

Bu kesimiň deň iki bölege bölünendigi çyzgydan görünýär: $AO=OB$; AO kesim birnäçe bölekden durýar. Çyzgydan görnüşi ýaly, 10 litr şekillendirýän kesim üç deň kesimiň ikisini saklaýar. Onda onuň biri (10:2)*l* aňladar, başgaça 5 *l* şekillendirýändigi indi görünýär. Onda meseläniň soragyna jogap bermek üçin 5-i 4-e we alnan netijäni ikä köpeltmek ýeterlikdir. Göz öňünde tutulan meýilnamany ýerine ýetirip, 10:2=5*(l)*, 5·4·2=40 *(l)* alarys.

Aşakdaky meseläniň çözüliş meýilnamasy meseläniň tekstiniň tablisanyň kömegi bilen berilmegi arkaly aňsat tapylýar.

Mesele. Eger 12 kg metaldan 8 detal ýasalýan bolsa, 36 kg metaldan näçe detal ýasap bolar?

1 detalyň agramy	Detalyň mukdary	Ähli detalyň agramy
Birmeňzeş	8	12 kg
	?	36 kg

Tablisanyň öýjüklerine üç ululygyň bahasy girizilen. Birinji setirde ýazylan belli bolan iki bahanyň kömegi bilen üçünji ululygyň bahasyny, başgaça bir detalyň agramyny tapmak mümkin. Netijede, ikinji setirde iki ululygyň bahasy alynýar, şolaryň kömegi bilen gözlenýän detallaryň mukdaryny kesgitlemek mümkin.

Çözülişiň üçünji döwründe göz öňünde tutulan meýilnamany amala aşyrmak galýar. Meýilnamanyň ýerine ýetirilişi dilden ýa-da ýazuw arkaly bolup biler. Meseläniň çözülişiniň ýazgysynyň aşakdaky görnüşleri bellidir:

I. Meseläniň şerti boýunça aňlatma düzmek. Çözülişiň ýazgysynyň bu görnüşi döwürler boýunça amala aşyrylýar. Ilki bilen netijä getirýän aýratyn ädimler bellenýär, ondan soň aňlatmanyň bahasy tapylýar we ýazgy deňlik görnüşe eýe bolýar. Çep böleginde meseläniň şerti boýunça düzülen aňlatma, sag böleginde bolsa onuň bahasy görkezilýär. Ol meseläniň talabynyň ýerine ýetirilişi barada netije çykarmaga mümkinçilik berýär (meseläniň soragyna jogap bermek).

Aşakda şu görnüşli ýazgynyň nusgasy görkezilen:

[illegible] *km*) – syýahatçynyň 6 sagatda otly bilen geçen aralygy.

56·6·4 (*km*) – syýahatçynyň indiki geçmeli ýoly.

56·6+56·6·4 (*km*) – syýahatçynyň geçmeli ähli ýoly.

56·6+56·6·4=1680 (*km*).

Jogaby: 1680 *km*.

II. Her bir amalyň ýerine ýetirilişini düşündirmek bilen amallar boýunça ýazgy aşakdakylardyr:

56·6=336 (*km*) – syýahatçy 6 sagatda otluda geçdi.

336·4=1344 (*km*) – syýahatça ýene geçmek galdy.

336+1344=1680 (*km*) – syýahatçynyň ähli geçmeli ýoly.

Eger düşündiriş dilden berilýän bolsa, onda çözülişiň ýazgysy aşakdaky ýaly bolar:

56·6=336 (*km*);
336·4=1344 (*km*);
336+1344=1680 (*km*).

Jogaby: 1680 *km*.

III. Meýilnamanyň her bir punktunyň degişli arifmetiki amal bilen ýazgysy.

Syýahatçynyň 6 sagatda geçen ýoluny tapalyň:

56·6=336 (*km*).

Syýahatça ýene näçe ýol geçmelidigini tapalyň:

336·4=1344 (*km*).

Syýahatçynyň ähli geçmeli ýoluny tapalyň:

336+1344=1680 (*km*).

Jogaby: 1680 *km*.

IV. Sorag bilen degişli amalyň ýazgysy.

1) Syýahatçy otluda näçe kilometr ýol geçdi?

56·6=336 (*km*).

2) Syýahatça ýene näçe kilometr geçmek galdy?

336·4=1344 (*km*).

3) Syýahatçy näçe kilometr ýol geçmeli?

336 +1344=1680 (*km*).

Jogaby: 1680 *km*.

Gönükmeler

1. Meseläniň mazmunyny derňäň, ony böleklere bölüň we çözülişi degişli amallar we sorag görnüşinde ýazyň:

"Gäminiň kapitany 540 *km* aralygy 16 sagatda geçmeli diýen tabşyrygy aldy. Gämi 180 *km* aralygy 30 *km sag* tizlik bilen ýüzdi. Berlen tabşyrygy ýerine ýetirmek üçin gämi galan ýoly näçe tizlik bilen ýüzmeli?"

2. Meseläniň iki sany arifmetiki çözülişi usulyny tapyň, bir çözülişini amallar boýunça ýazyň, beýlekisine añlatma düzüň: "Obadan şähere çenli 27 *km*. Ondan bir oglan welosipedli çykyp ugrady. Ol ýoluň $\frac{1}{3}$ bölegini geçip, yzyna oba tarap gaýtdy. Ol obada ýarym sagat boldy we ýene şähere sürüp gitdi. Eger welosipedliniň tizligi 15 *km sag* bolsa, onda ol ilki ugranyndan tä şähere barýança näçe wagt sarp etdi?

Bu meseläni algebraik usul bilen çözmek mümkinmi?

3. Meseläni arifmetiki usul bilen çözüň:

"Jaýyň üçeginde birnäçe kepderi otyrdy. Haçan-da üçege ýene 15 kepderi gonandan we 18 kepderi uçup gidenden soň, onda 16 kepderi galdy. Ilkibaşda üçekde näçe kepderi bardy?

Meseläniň çözülişini her bir ýerine ýetirilen amala düşündirişli amal bilen ýazyň.

4. Mesele berlen: "Iki ussa bilelikde 350 manat gazandylar. Olaryň biri 14 gün 7 sagatdan, beýlekisi 7 gün 6 sagatdan işledi. Eger olara sagatda deň mukdarda pul tölenýän bolsa, olaryň her biri näçe pul gazandy?

Meseläniň gysga şertini ýazyň.

Berlen meseläni böleklere bölüň, derňemegiň haýsy usuly has maksadalaýyk hasap edilýär?

Meseläni arifmetiki usulda çözüň.

5. Berlen meseläni derňemegiň haýsy usuly has maksadalaýykdyr?

"Bir bidonda 36 litr süýt bar. Haçan-da ondan beýleki bidona 4 litr guýanlaryndan soň, bidonlardaky süýtler deňleşdi. Beýleki bidonda näçe litr süýt bardy?"

6. Mesele berlen: "Aralyklary 76 *km* bolan iki obadan iki welosipedli biri-birine tarap ugrady. Olar 2 sagatdan duşuşdylar. Eger biriniň tizligi beýlekiniňkiden 3 *km/sag* az bolsa, her welosipedliniň tizligi näçe?" Onuň dürli usulda çözülişini deňeşdiriň.

I usul:	II usul:
1) 76:2=38 (*km*)	1) 3·2=6 (*km*)
2) 38-3=35 (*km/sag*)	2) 76-6=70 (*km*)
3) 35:2=17,5 (*km/sag*)	3) 70:2=35 (*km/sag*)
4) 17,5+3=20,5 (*km/sag*)	4) 35:2=17 (*km/sag*)
	5) 17,5+3=20,5 (*km/sag*)

Pikir ýöretmäniň haýsy usuly ýönekeý?

§ 18. Meseläniň çözülişini barlamagyň düzgünleri

Barlamak meseläniň çözülişiniň soňky tapgyrynda girizilýär, netijede onuň dogrudygy ýa-da ýalňyşdygy kesgitlenýär. Barlamakda pikir etmek we amaly işleriň esasynda "Şeýlelikde ..., onda mesele dogry (nädogry) çözüldi" pikir ýöretme görnüşli netije çykarmalydyr. Meseläniň dogrulygyny kesgitlemäge kömek berýän birnäçe düzgünler bellidir.

1. Çaklamak.

Bu düzgüniň manysy çözülişiň netijesiniň takyk dogrudygyna käbir derejede maglumat bermekdir. Çaklamak "Mesele dogry çözüldimi?" diýen soraga, eger çözmek bilen alynýan netije çaklanylýan netije bilen gabat gelmese, takyk şol ýagdaýda jogap berýär. Aşakdaky meseläniň çözülişini barlamakda bu pikir ýöretmäniň ulanylyş düzgünini görkezeliň:

Bir bölekde 5 *m* mata, beýleki bölekde bolsa şol matanyň 7 *m* bar. Eger iki bölege 36 manat tölenen bolsa, her bölek mata näçe manada durýar?

Başda meseläniň mazmuny esasynda her bölek matanyň bahasynyň 36 manatdan az we ikinji bölek birinjiden gymmat diýip kesgitläliň. Çözülişleri ýerine ýetirip, 5+7=12 (*m*), 36:12=3 (*man*), 3·5=15(*man*), 3·7=21(*man*), hakykatdan hem, her bölegiň 36 manatdan azdygyna we ikinji bölegiň birinjiden gymmatdygyna göz ýetirdik. Alnan netije çaklamamyza gabat gelýär, görnüşi ýaly, mesele dogry çözülipdir.

Goý, meseläni çözmek bilen birinji bölegiň bahasy 25 manat, ikinji bölek bolsa 21 manat bolupdyr diýeliň. Bu netijeleri çaklamamyz bilen deňeşdirip, her bir bölegiň 36 manatdan azdygyny, ýöne ikinji bölegiň birinjiden arzandygyny, hakykatda bolsa gymmat bolmalydygyny alarys.

Diýmek, çözülişiň bir ýerinde ýalňyşlyk goýberilipdir we nadogry netije alnypdyr. Ýalňyşlygy tapmak üçin ilki bilen hasaplamalar barlanylýar. Eger hasaplamada ýalňyşlyk tapylmasa, onda çözülişi täzeden geçirmeli. Her bir amaly meseläniň şerti bilen baglanyşdyryp we onuň manysyny aýdyňlaşdyryp, amalyň dogry saýlanandygyny ýa-da saýlanan däldigini barlamaly.

2. Alnan netijäniň we meseläniň şertiniň gabat gelmegi.

Bu düzgüniň manysy alnan netije meseläniň şertine girizilýär we pikir ýöretme esasynda gapma-garşylyk ýüze çykýarmy ýa-da çykmaýarmy diýen mesele kesgitlenilýär. "Ekmek üçin 600 düýp erik we 400 düýp alma nahallaryny getirdiler. Olary hatara deň edip oturtdylar. Şeýlelikde, erik nahallary alma nahallaryndan 5 hatar köp boldy. Erik we alma nahallary aýratynlykda näçe hatar boldy? Goý, meseläniň çözlüşinde alma 10 hatar, erik 15 hatar boldy diýen netije alnan bolsun. Meseläniň tekstini okalyň we onuň soragyny jogap bilen çalşyralyň. "Ekmek üçin 600 düýp erik we 400 düýp alma nahallaryny getirdiler. Olary hatarlara deň edip oturtdylar. Şeýlelikde, erik hatarlary alma hatarlaryndan 5 hatar köp boldy. Erik 15 hatar, alma 10 hatar boldy". Bu tekstde gapma-garşylygyň ýokdugyny kesgitläliň. Şeýle pikir ýöredeliň. Şertde "erik nahallary alma nahallaryndan 5 hatar köp boldy" diýip aýdylýar. Alnan erik nahallarynyň hatarynyň sanyny alma nahallarynyň hatarynyň sany bilen deňeşdireliň. Erik 15 hatar, alma 10 hatar. 15 san 10-dan 5 birlik köp. Diýmek, bu gatnaşyk ýerine ýetýär. Meselede bar bolan gatnaşyklaryň barysy barlandy we gapma-garşylygyň ýokdugy kesgitlenildi. Diýmek, mesele dogry çözülipdir.

3. Meseläni dürli usullarda çözmek.

Goý, meseläni haýsy-da bolsa bir usul bilen çözmek arkaly käbir netije alnan bolsun. Eger onuň başga usul bilen çözülişi hem şol netijä getirýän bolsa, onda şol meseläniň çözülişiniň dogrulygy barada netije çykarmak bolar. Aýdylanlary takyk mysalda düşündireliň. Meselä seredeliň: "*A* şäherden 60 *km sag* tizlik bilen ýük maşyny çykyp ugrady. Ondan 2 *sag* soň onuň yzyndan 90 *km sag* tizlik bilen ýeňil maşyn ugrady. A şäherden haýsy uzaklykda ýeňil maşyn ýük maşynyň yzyndan ýeter?

Goý, meseläniň çözülişi arifmetiki usul bilen ýerine ýetirilen bolsun.

90-60=30 (*km sag*);
60·2=120 (*km*);
120:30=4 (*sag*);

$90 \cdot 4 = 360$ (*km*).

Jogaby: Ýeňil maşyn ýük maşynyň yzyndan A şäherden 360 *km* uzaklykda ýeter.

Alnan netijäniň dogrulygyny barlamak üçin meseläni algebraik usulda çözmek bolar, başgaça $x \cdot 90 = (x+2) \cdot 60$, bu ýerde x sag ýeňil maşynyň hereket eden wagty, görnüşli deňleme düzmeli. Deňlemäni çözeliň:

$$90x = 60x + 120;$$
$$90x - 60x = 120;$$
$$30x = 120;$$
$$x = 4 \ (sag);$$
$$4 \cdot 90 = 360 \ (km).$$

Alnan netije arifmetiki usulda çözülen netije bilen gabat gelýär. Diýmek, berlen mesele arifmetiki usulda hem dogry çözülipdir.

Eger meseläniň çözülişi ilki arifmetiki usulda çözülen bolsa, onda onuň dogrulygy diňe bir deňleme düzmek bilen barlanylmaýar. Bu ýagdaýda barlamagyň usuly çyzgy boýunça çözmek we başga arifmetiki usulda hem bolup biler. Meseläniň barlagsyz çözülişi ýok diýip pikir etmek bolmaz. Çözülişiň dogrulygy ilki bilen takyk we logiki pikir ýöretme arkaly üpjün edilýär.

Gönükmeler

1. Meseläni çözüň we netije bilen meseläniň şertiniň arasynda baglanyşyk goýmak usulyndan peýdalanyp, barlagy ýerine ýetiriň:

a) Bagban miweli baglary saýaly agaçlardan 4 esse köp, başgaça aýdanyňda 56 düýp ekdi. Ol näçe düýp agaç ekdi?

b) Dürli iş öndürijilikli 2 işçi käbir işi 6 günde bilelikde ýerine ýetirdiler. Ýöne birinjiniň iş öndürijiligi ikinjiniňkiden 20% ýokary. Şeýle bolanda ikinji işçi ähli işi näçe wagtda ýerine ýetirip biler?

2. Meseläni dürli usullarda çözüň:

a) Awtomobil 60 *km/sag* tizlik bilen hereket edip, A şäherden B şähere çenli aralygy 3 *sag* 15 *min* geçýär. Eger awtomobil tizligini ýene-de 15 *km/sag* artdyrsa, onda şol aralygy näçe wagtda geçer?

b) 4,5 *m* mata 18 *manat* tölediler. Şol matanyň 27 metrine näçe manat tölemeli bolar?

§ 19. Meseläniň algebraik usulda çözülişi

Islendik mesele algebraik usulda çözülende, meseläniň mazmuny derňelenden soň, näbelli saýlanylýar, ol harp bilen belgilenýär, meseläniň tekstine girizilýär, soňra meseläniň mazmunynda berlenler esasynda deňlik gatnaşygy bilen baglanyşykly iki aňlatma düzülýär we degişli deňleme alynýar. Deňlemäni çözmek bilen alynýan kök meseläniň mazmunynda barlanylýar, meseläniň şertini kanagatlandyrmaýan kök bolsa taşlanylýar. Eger gözlenýän harp bilen belgilenen bolsa, onda galan kökler meseläniň soragyna bada jogap berip biler. Eger harp bilen gözlenýän hasaplanmaýan näbelli bellenen bolsa, onda gözlenýän san onuň bilen bagly harp bilen belgilenen näbelli esasynda tapylýar.

Aşakdaky meseläniň mysalynda algebraik usulda çözmegiň ähli döwürlerini görkezeliň:

"Gönüburçluk görnüşi bolan gök ekin meýdançasynyň bir tarapy beýleki tarapyndan 10 *m* uzyn. Şol meýdançanyň daşyna simden aýmança etmeli. Eger meýdançanyň meýdany 1200 m^2 bolsa, onda meýdançanyň daşyna sim aýlamak üçin näçe metr sim gerek bolar?"

Meseläni algebraik usulda çözmekde onuň mazmunyny derňemek we onuň ýerine ýetiriliş düzgünleri meseläni arifmetiki usulda çözmekligiň düzgünlerinden tapawutlanmaýar, şonuň üçin şeýle derňewiň netijesini getirýäris. Meselede gönüburçly görnüşli meýdança seredilýär. Onuň bir tarapynyň beýleki tarapyndan 10 *m* uzyndygy, meýdanynyň bolsa 1200 m^2 deňdigi belli. Gönüburçluk meýdançasynyň çäginiň uzynlygyny tapmak talap edilýär. Eger gönüburçlugyň taraplary belli bolsa, onda onuň perimetrini tapmak mümkin. Şonuň üçin onuň bir tarapynyň uzynlygyny x harpy bilen belgiläliň. Onda onuň beýleki tarapynyň uzynlygy $(x+10)$ *m* bolar. Belli bolşy ýaly, gönüburçlugyň meýdanyny onuň taraplary bilen aňlatmak mümkin, onda $x\cdot(x+10)=1200$ deňlemäni alarys. Ony çözeliň:

$$x^2+10x=1200$$
$$x^2+10x-1200=0$$
$$x=-5\pm\sqrt{25+1200}=-5\pm35$$
$$x_1=30;\ x_2=-40$$

Meseläniň manysyna görä x (tarapynyň uzynlygy) položitel san bolmaly. Bu şerti diňe birinji kök kanagatlandyrýar. Diýmek, gönüburçly meýdançanyň bir tarapy 30 *m*, beýleki tarapy bolsa 40 *m*. (30+10=40) perimetri bolsa

$$2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 140\ m.$$

Alnan netijäni meseläniň şertinde goýup, onuň barlagyny ýerine ýetirip bolar. Onuň üçin tapylan netijäni meseläniň tekstine girizeliň: "Bir tarapy 30 *m*, beýlekisi 10 *m* uzyn gönüburçluk görnüşli gök ekin meýdançasynyň daşyna aýmança aýlamaly. Aýmançanyň uzynlygy 140 *m*, onuň meýdany bolsa 1200 m^2". Gönüburçlugyň bir tarapynyň uzynlygy 30 m, perimetri bolsa 140 *m*, onda onuň beýleki tarapynyň uzynlygy $(140-2 \cdot 30):2=40$ *m* bolar, başgaça, birinji tarapyndan 10 m uzyndyr. Mundan başga-da taraplarynyň uzynlygyny tapyp, gönüburçlugyň meýdanyny tapmak mümkin. $30 \cdot 40=1200\ m^2$. Görşümiz ýaly, alnan tekst gapma-garşylygy saklamaýar. Diýmek, tapylan netije meseläniň şertini kanagatlandyrýar. Meseläni başga usul bilen çözüp, onuň barlagyny başgaça hem geçirmek bolar.

Gönükmeler

1. Meseläni dürli algebraik usullarda çözüň:

a) Obadan etrap merkezine çenli 20 *km*, etrap merkezinden stansiýa çenli bolsa 40 *km*. Etrap merkezinden stansiýa tarap 12 *km sag* tizlik bilen welosipedli çykyp ugrady. Onuň bilen bir wagtda obadan etrap merkeziniň üstünden şol ýol bilen stansiýa tarap motosiklli ugrady. Welosipedlini stansiýa ýetmezden öň, ozup geçmek üçin motosiklli näçe tizlik bilen sürmeli?

b) Gönüburçlugyň perimetri 60 *sm*. Eger onuň uzynlygyny 10 *sm* ulaltsaň, inini bolsa 6 *sm* kiçeltseň, onda gönüburçlugyň meýdany 32 m^2 kiçeler. Gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

2. Meseläni algebraik usulda çözüň we ony arifmetiki usulda çözüp barlaň:

a) Daýhan birleşigi bugdaý we arpa ekmek üçin 700 *ga* ýer bölüp goýdy, özünem bugdaý üçin arpanyňkydan 60 *ga* köp ýer goýdy. Bugdaý we arpa ekmek üçin näçe ýer goýlupdyr?

b) Iki bölekde matanyň deň mukdary bar. Birinden 18 *m*, beýlekisinden 25 *m* kesip alanlaryndan soň, birinji bölekde ikinjidäkiden 2 esse köp mata galdy. Her bölekde näçe metr mata bar eken?

ç) A şäherden welosipedli çykyp ugrady. A şäherden 20 *km* uzakda bolan B şäherden motosiklli onuň yzyndan bir wagtda ugrady. Welosipedli 12 *km/sag*, motosiklli bolsa 16 *km/sag* tizlik bilen barýar. A şäherden haýsy uzaklykda motosiklli welosipedliniň yzyndan ýeter?

§ 20. Meseläni grafiki usulda çözmek

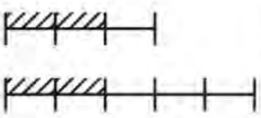
Bilşimiz ýaly, mesele çözmegiň birnäçe usuly bar. Şolaryň biri hem meseläni grafiki usulda çözmekdir. Köplenç ýagdaýda, berlen meseläni arifmetik ýa-da algebraik usulda çözýäris. Mesele çözmegiň grafiki usulyna az üns berýäris. Emma matematika dersinde we durmuşda gabat gelýän käbir meseleleri grafiki usulda çömek örän amatly bolýar. Ol çözgüdi düşündirmek mugallym üçin hiç bir kynçylyk döretmeýär. Meseleleri graiki usulda çözmegiň 4-*nji* synplarda ady droblar temasyny geçenimizden soňra öwretmek bolar. Elbetde, grafiki usulda çözülýän meseleleri deňleme ýa-da deňlemeler ulgamyny düzüp çözmek hem bolar. Ýöne çyzykly deňlemeler ulgamy temasy 6-*njy* synplarda geçilýär.

Biz bu ýerde grafiki usulda çözmäge degişli birnäçe meselä seretmekçi we olaryň käbiriniň çözüwlerini barlamak maksady bilen, başga usulda çözüp görkezeris.

1-nji mesele. Iki oglan bilelikde 96 kömelek tapdy. Olaryň birinjisiniň tapan kömelekleriniň $\frac{2}{3}$ bölegi ikinji oglanyň tapan kömelekleriniň $\frac{2}{5}$ bölegine deň bolsa, onda oglanlaryň hersi näçe kömelek tapdy?

Çözülişi.

Uzynlygy 3 we 5 bölekden ybarat $\frac{2}{3}$ we $\frac{2}{5}$ bölekleri deň bolan iki dürli kesim alalyň.



12-nji surat

Bu ýerde ululyklary deň bolan jemi 3+5=8 bölek bar. Tapylan kömelekleriň umumy sany 96. Indi her bölekdäki kömelekleriň sanyny tapalyň:

96:8=12 (kömelek).

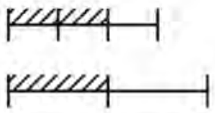
Diýmek, birinji oglan 12·3=36 (kömelek), ikinji oglan bolsa 12·5=60 (kömelek) tapypdyr.

Jogaby: 36 we 60 kömelek.

2-nji mesele. Dynç güni Aman bilen Maral özlerine degişli kärende ýerlerinden pagta ýygdylar. Olaryň ikisiniň bilelikdäki ýygan pagtasy 63 kilogram boldy. Eger Maralyň ýygan pagtasynyň $\frac{2}{3}$ bölegi Amanyň ýygan pagtasynyň ýarysyna deň bolsa, olaryň hersi näçe kilogram pagta ýygdy?

Çözülişi.

1) Meseläniň şertinde Maralyň ýygan pagtasynyň $\frac{2}{3}$ bölegi Amanyň ýygan pagtasynyň $\frac{1}{2}$ bölegine deň. Uzynlyklary 3 we 2 bölekden ybarat, $\frac{2}{3}$ we $\frac{1}{2}$ bölekleri deň bolan iki dürli kesim alalyň.

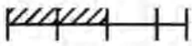


13-nji surat

3 bölekli çyzgy Maralyň ýygan pagtasy.

2 bölekli çyzgy Amanyň ýygan pagtasy. Çyzgydan görnüşi ýaly, kesimleriň bölekleriniň uzynlyklary deň däl. Bölekleriň uzynlyklaryny deňlemek üçin soňky kesimimizi täzeden bölýäris.

4 bölekli Amanyň ýygan pagtasy:



14-nji surat

Bu ýerde uzynlyklary deň bolan jemi 3+4=7 bölek bar.

Jemi ýyglan pagta 63 kilograma deň. Her bölekde näçe kilogram pagta bardygyny tapalyň: 63:7=9 (*kg*).

Diýmek, Maral 9·3=27 (*kg*), Aman bolsa 9·4=36 (*kg*) pagta ýygypdyr.

Barlagy: 27·2/3=18(*kg*), 36·1/2 =18(*kg*).

Jogaby: 27 *kg* we 36 *kg*.

2) Meseläniň algebraik usulda çözülişi.

x – Maralyň ýygan pagtasy (*kg*);

y – Amanyň ýygan pagtasy (*kg*);

Meseläniň şertine görä:

$$\begin{cases} x + y = 63; \\ \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Bu deňlemeler ulgamyny çözüp, x=27 we y=36 sanlary alarys.

3-nji mesele. Asmandan birnäçe kepderi uçup barýan eken. Şonda ýerde duran bir kepderi "Salam, eý, ýüz kepderi" diýip, olara ýüzlenipdir. Onda uçup barýan kepderileriň biri "Biz ýüz däl, ýene-de biz ýaly, biziň ýarymyz ýaly, ýarymyzyň ýarysy ýaly, onsoň hem sen bolsaň, şonda biz ýüz bolarys" diýip, jogap beripdir. Uçup barýan kepderileriň sany näçe?

$$1e \;+\; 1e \;+\; \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}e + 1 = 100$$

15-nji surat

Çözülişi.

Uçup barýan kepderileri 1 uzynlyk birligindäki kesim diýip hasap edeliň

Meseläniň şertine görä, ýene-de – 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ uzynlykdaky kesimler hem-de 100 kepderä deňlemek üçin 1 kepderi gerek.

Eger $\frac{1}{4}$ uzynlykdaky kesimi 1 birlik kesim diýsek, $\frac{1}{2}$ uzynlykdaky kesim 2 bölek, 1 uzynlykdaky kesimimiz 4 bölek bolar. Şerte görä:

Çyzgydan görnüşi ýaly, kesim 4+4+2+1=11 bölekden ybarat we kesimde 99 kepderi bar. Her bölekde näçe bardygyny tapalyň.

99:11=9 (kepderi).

Asmandan uçup barýan kepderiler 4 bölekden durýar. Ony hasaplalyň

4·9=36 (kepderi)

Barlagy:

36+36+18+9+1=72+18+10=90+10=100.

Jogaby: 36 kepderi.

Gönükmeler

1. Mergeniň jemi 91 sany dowary bar. Onuň goýunlarynyň $\frac{1}{4}$ bölegi geçileriniň $\frac{2}{5}$ bölegine deň bolsa, onda Mergeniň näçe goýny we näçe geçisi bar?

2. Daýhan özüne degişli kärende ýerinden 138 tonna bugdaý we arpa ýygnady. Onuň ýygnan arpasynyň $\frac{3}{4}$ bölegi ýygnan bugdaýynyň $\frac{2}{5}$ bölegine deň. Daýhan näçe bugdaý we näçe arpa ýygnady?

3. Kakasy, ogly, gyzy – üçüsiniň jemi ýaşy 88. Eger ogly kakasynyň ýarpy ýaşynda, gyzy bolsa kakasynyň $\frac{1}{3}$ ýaşynda bolsa, onda olaryň ýaşlary näçe bolar?

§ 21. Köplük düşünjesi we köplügiň elementleri

Matematikada, köplenç, ol ýa-da beýleki obýektleriň toplumyna bitewi zat hökmünde garalýar. Mysal üçin, birbelgili sanlar, üçburçluklar, tegelekler, ikibelgili jübüt sanlar we ş.m. Şonuň ýaly toparlara **köplükler** diýilýär.

Durmuşda "köplük" sözüniň ýerine "synp", "topar", "komanda", "brigada", "süri" we *ş.m.* sözlere köp duş gelýäris. Matematikada, olardan tapawutlylykda, diňe bir obýektden durýan ýa-da hiç bir obýekti bolmadyk köplükler hem bardyr.

Köplük matematikanyň esasy düşünjelerinden biri bolup, ol başga düşünjeleriň üsti bilen kesgitlenilmeýär.

Köplükler latyn elipbiýiniň baş harplary $A, B, C,...$ bilen belgilenýär. Köplügi emele getirýän obýektlere onuň elementleri diýilýär we olary latyn elipbiýiniň setir harplary $a, b, c,...$ bilen belgileýärler. Hiç bir elementi bolmadyk köplüge boş köplük diýilýär we ol $\varnothing$ ýaly belgilenýär.

Köplük hakynda gürrüň edilende, köplenç, haýsy elementleriň bu köplüge degişlidigini ýa-da haýsy elementleriň degişli däldigini anyklamaly bolýar. Mysal üçin, "17 iki belgili san" diýmek bilen, biz 17 sanyň ikibelgili sanlaryň köplügine degişlidigini aýdýarys. Eger "1,7 san natural san däldir" diýsek, onda 1,7 san natural sanlaryň köplügine degişli däldigini aňladýar. Elementiň köplüge degişlidigi ýa-da degişli däldigi matematikada ýörite $\in, \notin$ belgileriň kömegi bilen görkezilýär. Mysal üçin: $a \in A$ -a elementiň A köplüge degişlidigini (ýagny A köplügiň elementidigini), $a \notin A$ bolsa a elementiň A köplüge degişli däldigini aňladýar.

"a obýekt A köplüge degişlidir" görnüşli sözlemi $a \in A$ belgi bilen ýazmak kabul edilendir. Ony dürli görnüşde okamak mümkin.

a obýekt – A köplüge degişli;

a obýekt – A köplügiň elementi;

A köplük a elementi özünde saklaýar.

"a obýekt A köplüge degişli däl" diýen sözlem $a \notin$ A ýaly ýazylýar. Ony şeýle okaýarlar:

a obýekt A köplüge degişli däl;

a obýekt A köplügiň elementi däl;

A köplük a obýekti özünde saklamaýar.

Goý, A – birbelgili sanlaryň köplügi bolsun. Onda "$3 \in A$" sözlemi "3 – birbelgili san" görnüşinde, "$12 \notin A$" ýazgyny bolsa "12 san birbelgili hasaplanmaýar" görnüşinde okamak mümkin.

Köplükler **tükenikli** we **tükeniksiz** bolup biler. Mysal üçin: kitabyň sahypalarynyň köplügi tükenikli köplük, tekizlikdäki nokatlaryň köplügi tükeniksiz köplükdir. Matematikada käbir köplükleri belli bir harplaryň üsti bilen belgilemek kabul edilendir: N – natural sanlaryň köplügi, Q – rasional sanlaryň köplügi, Z – bitin sanlaryň köplügi, R – hakyky sanlaryň köplügi.

Köplük düşünjesine kesgitleme berilmän, köplükler öz elemetleri bilen kesgitlenilýär diýlip hasaplanylýar. Eger islendik element barada "köplüge degişli" ýa-da "degişli däl" diýip aýtmak mümkin bolsa, onda köplük berlipdir diýilýär.

Gönükmeler

1. A ikibelgili sanlaryň köplügi. Simwollaryň kömegi bilen

a) 27 ikibelgili san;

b) 365 ikibelgili san däl ýazgylary ýazyň.

2. $19 \in X$; $7 \notin X$ sözlemleri dürli usullarda okaň.

3. Pikir aýtmalary okaň we çynlygyny kesgitläň.

a) $365 \in N$; e) $67 \notin R$;

b) $-5 \notin N$; ä) $-5\frac{2}{3} \in N$;

ç) $3{,}7 \notin N$; f) $0 \in R$.

d) $\sqrt{3} \notin Q$;

4. C köplük 12-den uly, 20-den kiçi natural sanlaryň köplügi. 12, 17, 19, 4, 9 sanlaryň ol köplüge degişlidigini ýa-da degişli däldigini kesgitläň we jogabyny $\in, \notin$ belgilerden peýdalanyp ýazyň.

5. 632, 0, –13, 9, –5, –7, 8 sanlar berlen. Ol sanlaryň haýsylarynyň natural sanlar köplügine, bitin sanlar köplügine, rasional sanlar köplügine ýa-da hakyky sanlar köplügine degişlidigini kesgitläň.

6. "Garaşsyzlyk" sözündäki dürli harplaryň A köplügini, "Bitaraplyk" sözündäki dürli harplaryň B köplügini ýazyň.

7. Deňlemeleriň hakyky çözüwler köplüklerini ýazyň.

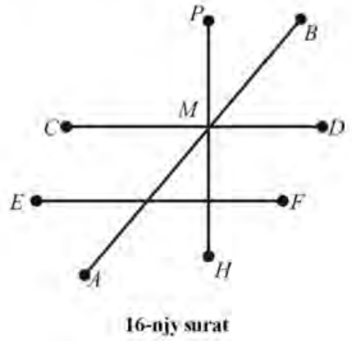
a) $x(x-13) = 0$;

b) $7\cdot(x+9) = 7x+63$;

ç) $5x+12= 27$;

d) $4\cdot(x-12) =4x-40$.

8. AB, CD, EF we PH kesimleriň haýsylarynyň M nokadyň üstünden geçýändigini, haýsylarynyň bolsa geçmeýändigini we $\notin$ belgini ulanyp ýazyň (*16-njy surat*).



16-njy surat

§ 22. Köplükleriň berliş usullary

Köplük hemme elementlerini görkezmek bilen berlip biler. Mysal üçin a, b, c, d elementleri bolan A köplük berlen bolsa, onda ony $A=\{a, b, c, d\}$ ýaly ýazýarlar.

Eger köplük tükeniksiz bolsa, onda onuň elementlerini görkezip bolmaýar. Bu halda köplük elementleriniň harakteristiki häsiýetini görkezmek bilen berilýär.

Harakteristiki häsiýet – berlen köplügiň her bir elementi üçin mahsus bolan, ol köplüge degişli bolmadyk elementleriň bolsa hiç birinde ýok bolan häsiýetdir.

Goý, B köplük birbelgili täk sanlaryň köplügi bolsun. "Birbelgili täk san bolmak" köplügiň elementleriniň harakteristiki hasiýetidir.

Eger 5 sany alsak, ol B köplüge degişlidir, 8 san ol köplüge degişli däldir, ýagny harakteristiki häsiýet elementiň B köplüge degişlidigini ýa-da däldigini bilmäge mümkinçilik berýär. Diýmek, köplügi ýa her bir elementini görkezmek bilen, ýa-da elementleriň harakteristiki häsiýetini görkezmek bilen berip bolýar. Soňky usuly tükenikli köplükler we tükeniksiz köplükler üçin hem ulanyp bolýandygy sebäpli, ol umumy usul hasaplanýar.

Şol bir köplügi iki usulda berip bolýandygyny hem belläp geçeliň. Mysal üçin: "birbelgili täk sanlaryň köplügi" harakteristiki häsiýet bilen berlen bolsa, ony elementlerini görkezmek bilen hem berip bolýar.

Şeýlelikde, köplügi bermek üçin onuň ähli elementlerini sanamaly ýa-da elementleriniň häsiýetlerini görkezmeli. Köplügiň harakteristiki häsiýet arkaly berliş usuly has umumy usuldyr. Sebäbi bu usul arkaly tükenikli we tükeniksiz köplükleri bermek bolýar. Käwagtlar tükeniksiz köplükler hem sanamak arkaly ýazylýar. Meselem: N – natural sanlaryň köplügi. $N=\{1,2,3,...\}$ – ýöne şeýle ýazgyda köp nokadyň näme aňladýandygy düşnükli bolmaly.

Köplük düşünjesi başlangyç synplarda anyk görnüşde öwrenilmesede peýdalanylýar. Mysal üçin "20-den uly, 36-dan kiçi bolan sanlary ýazyň" diýlen ýumşy okuwçylar elementleri görkezmek bilen 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 görnüşde ýazýarlar.

Şeýle ýumuşlara başlangyç synplarda diňe matematika sapaklarynda däl, eýsem beýleki sapaklarda hem duş gelip bolar. Meselem: türkmen dili sapagynda "çekimli we çekimsiz harplary görkezmeli", "sözlemdäki atlaryň ählisiniň aşagyny çyzmaly" we ş.m.

Gönükmeler

1. Köplükleriň elementlerini ýazyň:

a) A 3-den uly birbelgili sanlaryň köplügi;

b) B 13-e bölünýän ikibelgili sanlaryň köplügi;

ç) C 10-dan kiçi natural sanlaryň köplügi.

2. Berlen köplükleriň harakteristiki häsiýetlerini görkeziň:

a) $A=\{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}$;

b) $B=\{15, 14, 13, 12, 11, 10\}$;

ç) $C=\{a, e, i, o, u, ö, ü, ä, y\}$;

d) $D=\{23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15\}$;

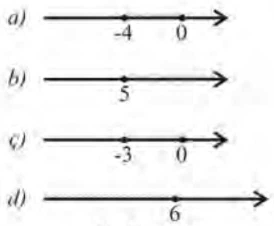
e) $E=\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$.

3. Deňsizlikleriň çözüwler köplügini koordinatalar göni çyzygynda şekillendirmeli (x – hakyky sanlar):

a) $x > 5{,}3$; ç) $-4{,}5 \le x < 4$;

b) $x \le -3{,}8$; d) $2{,}7 \le x \le 9$.

4. Koordinatalar göni çyzygynda görkezilen deňsizlikleriň çözüwler köplüklerini ýazyň.



17-nji surat

§ 23. Köplükleriň arasyndaky gatnaşyklar

$A=\{3,5,7,9\}$ we $B=\{4,5,6,8,9,10\}$ köplüklere seredeliň.

5 we 9 elementler A köplüge hem, B köplüge hem degişlidir. Bu halda 5 we 9 elementlere A we B köplükleriň umumy elementleri, A we B köplükleriň özlerine bolsa kesişýän köplükler diýilýär.

Kesgitleme. Eger köplükleriň umumy elementleri bar bolsa, onda ol köplüklere **kesişýän** köplükler diýilýär.

Indi $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ we $B=\{3, 5, 7\}$ köplüklere seredeliň. B köplügiň her bir elementi A köplügiň hem elementidir, ýagny $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$. Bu halda B köplüge A köplügiň bölegi (ýa-da bölek köplügi) diýilýär.

Kesgitleme. Eger B köplügiň her bir elementi A köplügiň hem elementi bolsa, onda B köplüge A köplügiň bölegi diýilýär.

B köplük A köplügiň bölegi bolsa , ol $B \subset A$ ýaly ýazylýar.

Mysallar: A – jübüt sanlaryň köplügi we Z – bitin sanlaryň köplügi bolsa, onda $A \subset Z$ bolar.

Boş köplük islendik köplügiň bölegi hasaplanýar, ýagny $\phi \subset A$, $\phi \subset B$

Her bir köplük özüniň hem bölegi hasaplanýar, ýagny $A \subset A$.

Eger köplügiň hemme bölek köplüklerini görkezmeli bolsa, onda boş köplügi hem, berlen köplügiň özüni hem görkezmelidir. n – elementli köplügiň 2^n sany bölek köplügi bardyr. $A = \{2,3,4\}$, $n = 3$; $2^3= 8$ sany bölek köplügi bardyr: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{2,4\}$, $\varnothing$, $\{2,3,4\}$ gaýtalanýar.

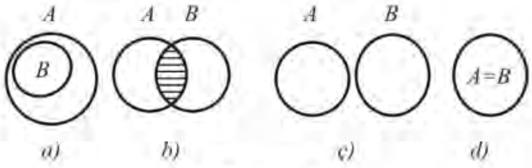
$X=\{a,b,c\}$ köplügiň bölek köplükleri $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$ we $\varnothing$ bolar.

$A=\{1, 3, 5, 7\}$ we $B=\{5, 3, 1, 7\}$ köplüklere seredeliň. A köplügiň her bir elementi B köplügiň elementi bolany üçin $A \subset B$. B köplügiň her bir elementi A köplügiň hem elementi bolany üçin $B \subset A$. Bu halda A we B köplüklere deň köplükler diýilýär.

Kesgitleme. Eger $A \subset B$ we $B \subset A$ bolsa, onda A we B köplüklere deň köplükler diýilýär.

Eger A we B köplükler deň bolsalar, onda ony $A=B$ ýaly ýazylýar.

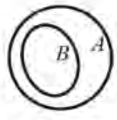
Köplükleriň arasyndaky gatnaşygy Eýleriň tegelekleri bilen şekillendirmek amatly bolýar. Eger B köplük A köplügiň bölegi bolsa, onda ol 18-*nji a*) suratdaky ýaly şeýle şekillendirilýär:



18-nji surat

Eger A we B köplükler kesişseler we biri-biriniň bölek köplügi bolmasa, onda olary b) suratdaky ýaly şekillendirmek mümkin.

Kesişmeýän köplükler ç) suratdaky ýaly görnüşde şekillendiriler. Deň köplükler d) suratdaky ýaly görnüşde şekillendirilýär.



19-njy surat

Eger $B \subset A$ bolsa, onda ony 19-*njy* suratdaky ýaly şekillendirmek bolar.

Başlangyç matematika kursunda köplük we bölek köplük düşünjeleri anyk görnüşde öw-renilmeýär, emma bölek köplügi tapmak bilen baglanyşykly mysallary okuwçylar çözýärler. Meselem: 1) berlen dörtburçluklaryň içinden gönüburçluklary saýlamaly. 2) sanlaryň içinden jübütlerini aýtmaly we ş.m.

Gönükmeler

1. $A=\{a,c,d,e,m,n,k\}$, $B=\{b,e,n\}$, $C=\{a,b,c,d\}$, $D=\{a, b, c, d, l, t, m\}$, $E=\{c, d, e, m,\}$ köplükler berlen. Ol köplükleriň haýsylary A köplügiň bölegidir. C köplük D köplügiň bölegi bolup bilermi?

2. $K=\{14, 24, 45, 171, 272\}$ köplük berlen. Ol köplükden 7-*ä* bölünýän sanlaryň, 9-a bölünýän sanlaryň, 5-e bölünmeýän, 4-e bölünmeýän sanlaryň bölek köplüklerini düzüň.

3. $A=\{3, 5, 7,\}$ köplügiň näme üçin $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ köplügiň bölegidigini we $Y=\{5, 6, 7, 8, 9\}$ köplügiň bölegi däldigini düşündiriň.

4. Aşakdaky köplükleriň üç sany bölegini görkeziň:

A – türkmen elipbiýiniň harplarynyň köplügi.

B – mugallymçylyk mekdebinde öwrenilýän dersleriň köplügi.

$Ç$ – ikibelgili sanlaryň köplügi.

D – topardaky talyplaryň köplügi.

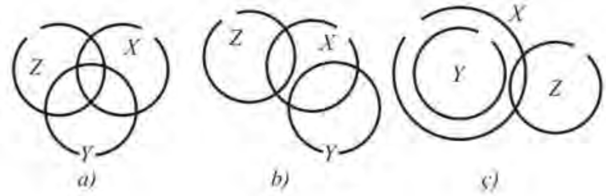
5. $P=\{12,24,36,48\}$ köplük berlen. Ol köplügiň: 1) bir elementli; 2) üç elementli hemme bölek köplüklerini ýazyň.

6. $A=\{a, b, ç, d\}$ köplügiň hemme mümkin bolan bölek köplüklerini ýazyň.

7. $a \in A$ we $a \in B$ bolmaklygyndan a) $A \subset B$; b) $B \subset A$; ç) $A = B$ gelip çykýarmy?

8. $A \subset B$, $B \subset C$ bolan A, B, C köplükler berlen. $A \subset C$ bolarmy? Mysallar getiriň.

9. Eger köplükleriň arasyndaky gatnaşyk aşakdaky ýaly şekillendirilen bolsa, onda X, Y we Z köplüklere mysal getirmeli.



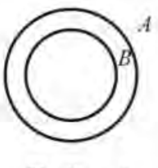
20-nji surat

§ 24. Köplük we düşünje

Öňden belli bolşy ýaly, islendik düşünjäniň göwrümi bardyr. Öň düşünjäniň göwrümi diýip, şol bir adalga (termin) bilen atlandyrylýan obýektleriň köplügine aýdypdyk. Indi bolsa nazary köplük nukdaýnazardan düşünjäniň göwrümi diýip düşünjäni söz bilen aňladýan obýektleriň köplügine aýdylýar. Meselem, "üçburçluk" düşünjesiniň göwrümine üçburçluklaryň köplügi, "gönüburç" düşünjesiniň göwrümine gönüburçlaryň köplügi degişlidir.

Düşünjäniň göwrümine köplük hökmünde garalmagy düşünjeleriň arasyndaky gatnaşygy aýdyň şekillendirmeklige mümkinçilik berýär.

Iki düşünjä garalyň: *a – gönüburçluk* düşünjesi we *b – kwadrat* düşünjesi. Bu düşünjeleriň göwrümlerini degişlilikde A we B harplar bilen belläliň. Islendik kwadratyň gönüburçlukdygy sebäpli, berlen düşünjeleriň göwrümleriniň arasyndaky gatnaşygy Eýleriň tegeleklerii arkaly aşakdaky ýaly şekillendirmek bolar *(21-nji surat)*.



21-nji surat

Şu ýagdaýda "gönüburçluk" düşünjesi "kwadrat" düşünjesine görä giň düşünjedir, "kwadrat" düşünjesi bolsa, "gönüburçluk" düşünjesiniň hususy haly. Asyl düşünje we görnüşi boýunça gelip çykma gatnaşygynda bolmaýan düşünjeler hem bardyr. Meselem, "kwadrat" we "üçburçluk" düşünjesiniň göwrümleri bölek köplük gatnaşygynda bolmaýarlar. Asyl we görnüşi boýunça gelip çykma düşünjeleri biri-birine görä (otnositellikde) bolýarlar: şol bir düşünje bir düşünjä görä asyl düşünje bolmagy, beýleki düşünjä görä bolsa görnüşi boýunça gelip çykma gatnaşygynda bolmagy mümkindir. Meselem, "gönüburçluk" düşünjesi "kwadrat" düşünjesine görä asyl düşünje, "dörtburçluk" düşünjesine görä bolsa, görnüşi boýunça gelip çykma gatnaşygyndadyr.

Şol bir düşünje üçin birnäçe asyl düşünjeleri görkezmek bolar. Meselem, "gönüburçluk" düşünjesine asyl düşünje bolup "dörtburçluk", "parallelogram", "köpburçluk" ýaly düşünjeler mysal bolup biler. Olaryň içinden iň ýakynyny hem görkezmek bolar. "Gönüburçluk" düşünjesine iň ýakyn asyl düşünje "parallelogram" düşünjesidir.

Gönükmeler

1. a we b düşünjeleriň arasyndaky gatnaşygy Eýleriň tegeleklerinde şekillendirmeli, eger:

a) a – üçburçluk, b – gönüburçly üçburçluk;

b) a – göni çyzyk, b – kesim;

ç) a – deňýanly üçburçluk, b – kütekburçly üçburçluk bolsa.

2. "Gönüburçluk" düşünjesiniň "dörtburçluk" düşünjesine görä görnüşi boýunça gelip çykma gatnaşygynda bolýandygyny Eýleriň tegeleklerinde görkeziň we dörtburçlugyň haýsy häsiýetlerine dönüburçlugyň eýedigini aýdyň.

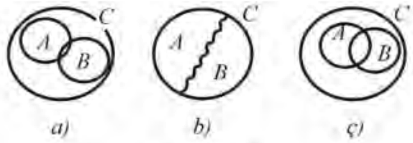
3. Pikir aýtmalary Eýleriň tegeleklerinde şekillendirmeli:

a) 6-a kratny sanlaryň ählisi 3-e hem kratnydyr;

b) 7-ä kratny sanlaryň içinde 5-e kratnylary hem bardyr;

ç) täk sanlaryň içinde 4-e bölünýän bir san hem ýokdur.

4. a – jübüt natural san, b – täk natural san, c – natural san düşünjeleri berlen (düşünjeleriň degişli göwrümleri A, B, C bilen bellenen). Çyzgylaryň haýsysy ýokardaky düşünjeleriň arasyndaky gatnaşygy aňladýar?



22-nji surat

5. Eýleriň tegeleklerinde a, b we c düşünjeleriň arasyndaky gatnaşygy şekillendirmeli:

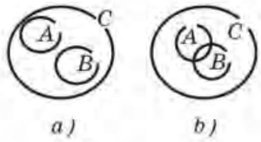
a) a – birbelgili san, b – ikibelgili san, c – natural san;

b) a – üçburçluk, b – deňtaraply üçburçluk, c – deňýanly üçburçluk;

ç) a – bir tekizlikde ýatýan gönüler, b – parallel gönüler, c – kesişýän gönüler;

d) a – natural san, b – bitin san, c – rasional san.

6. Düşünjeleriň arasyndaky gatnaşyk aşakdaky a) we b) çyzgylar bilen şekillendirilen düşünjelere mysal getirmeli:



23-nji surat

§ 25. Köplükleriň kesişmesi we birleşmesi

Köplükler bilen geçirilýän operasiýalar iki ýa-da birnäçe köplükden täze köplükleri almaklyga mümkinçilik berýär. Oňa iki ýa-da birnäçe köplükleriň umumy elementleriniň emele getirýän köplügini, köplügiň bölegini aýyrmaklygy, iki ýa-da birnäçe köplükleriň bir bitewi birikmesini we ş.m. mysal getirmek bolar.

Goý, $A=\{a,b,c,d,e\}$ we $B=\{b,d,m,n\}$ köplükler berlen bolsun. Ol köplükleriň ikisine hem degişli bolan umumy elementlerden durýan, täze

$C=\{b, d\}$ köplügi emele getirmek bolar. Täze alnan C köplüge A we B köplükleriň kesişmesi diýilýär.

Kesgitleme. A we B köplükleriň kesişmesi diýip, A köplüge we B köplüge degişli bolan elementleriň köplügine aýdylýar. A we B köplükleriň kesişmesi $A \cap B$ bilen belgilenýär.

Eger A we B köplükleriň hiç bir umumy elementi ýok bolsa, onda ol köplüklere kesişmeýän köplükler diýilýär we $A \cap B=\varnothing$ ýaly ýazylýar. Kesgitlemä görä köplükleriň kesişmesini şeýle ýazmak bolar:

$$\boxed{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ we } \mathbf{x} \in \mathbf{B}}$$

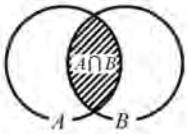
Eger A we B köplükler elementlerini görkezmek bilen berlen bolsa, onda olaryň kesişmesi A we B köplüklere degişli bolan umumy elementleriň köplügi bilen görkezilýär. Mysal üçin:

1) $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{b,d,m,n\}$, onda $A \cap B=\{b,d\}$

2) $A=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{k,l,m\}$, onda $A \cap C=\varnothing$.

Eger köplükler elementleriň harakteristiki häsiýetleri bilen berlen bolsa, onda olaryň kesişmesini elementleriň harakteristiki häsiýetleriniň arasynda "we" goýmak bilen aýdyp bolýar. Mysal üçin: A – bir belgili natural sanlaryň köplügi, B – täk natural sanlaryň köplügi bolsa, onda olaryň kesişmesi $A \cap B$: bir belgili we täk natural sanlaryň köplügi bolar.

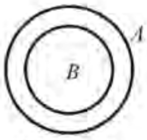
A we B köplükleriň kesişmesini Eýleriň tegelekleri arkaly aşakdaky ýaly şekillen dirmek bolar *(24-nji surat)*.



24-nji surat

Eger A – jübüt natural sanlaryň köplügi, B – 4-e kratny sanlaryň köplügi bolsa, ol köplükleriň ikisi hem tükeniksiz köplükdir we B köplük A köplügiň bölegidir. Şonuň ýaly hem B köplük A we B köplükleriň kesişmesidir, çünki B köplügiň elementleri A we B köplükleriň umumy elementleridir.

Diýmek, $A \cap B=B$ *(25-nji surat)*.



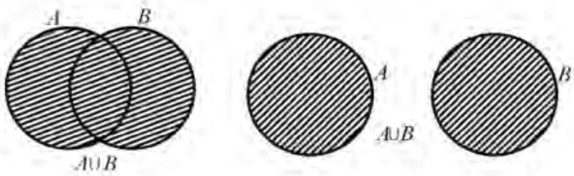
25-nji surat

Kesgitleme: A we B köplükleriň birleşmesi diýip, A köplüge ýa-da B köplüge degişli bolan elementleriň köplügine aýdylýar.

A we B köplükleriň birleşmesi $A \bigcup B$ ýaly belgilenýär.

$$\boxed{x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ýa-da } x \in B}$$

A we B köplükleriň birleşmesiniň Eýleriň tegelegi bilen şekillendirilişi. *(26-njy surat)*.



26-njy surat

Ştrihlenen köplük A we B köplükleriň birleşmesidir. Eger A we B köplükler kesişmeýän hem bolsalar, onda olary Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen şekillendirmek bolar *(26-njy surat)*. Eger A we B köplükler elementlerini görkezmek bilen berlen bolsa, onda $A \bigcup B$ köplük "A ýa-da B" köplüge degişli bolan elementleriň köplügidir. Mysal üçin: $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,m,n,k,d\}$ bolsa, onda $A \bigcup B=\{a,b,c,d,m,n,k\}$ bolar.

Eger A we B köplükler elementleriniň harakteristik häsiýetleri bilen berlen bolsa, onda olaryň birleşmesini elementleriň harakteristik häsiýetleriniň arasynda "ýa-da" sözüni goýmak bilen berip bolar. Mysal üçin: A – birbelgili natural sanlaryň köplügi, B – täk natural sanlaryň köplügi bolsa, onda $A \bigcup B$ – birbelgili ýa-da täk natural sanlaryň köplügi bolar.

Eger $B \subset A$ bolsa, onda $A \cup B = A$ bolar. Mysal üçin: A – jübüt natural sanlaryň köplügi, B – 4-e kratny natural sanlaryň köplügi bolsa, onda $A \cup B$ – jübüt natural sanlaryň köplügi bolar, çünki her bir 4-e kratny san hem jübüt sandyr.

Gönükmeler

1. Köplügiň birleşmesini we kesişmesini tapyň:

a) $A = \{13,25,37,49\}$; $B = \{1,2,3,5,7,4,9\}$;

b) $A = \{13,25,37,49\}$; $B = \{37,93,49,25\}$;

ç) $A = \{a,b,k,l,m\}$; $B = \{c,d,m,n\}$.

2. A – "Garaşsyzlyk" sözündäki, B – "Bitaraplyk" sözündäki dürli harplaryň köplükleri bolsun. A we B köplükleriň kesişmesini we birleşmesini tapyň.

3. Uçburçluk bilen dörtburçlugyň kesişmesinden, birleşmesinden haýsy figuralary alyp bolar?

Birnäçe hallara seretmeli.

4. A we B köplükleriň kesişmesini Eýleriň tegeleginde şekillendirmeli, eger:

a) $A \subset B$; b) $B \subset A$; ç) $A \cap B = \varnothing$ bolsa.

5. A we B köplükleriň kesişmesini tapmaly, eger:

a) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$; $B=\{b,e,f,k,l\}$;

b) $A=\{26,39,5,58,17,81\}$; $B=\{17,26,58\}$;

ç) $A=\{26,39,5,58,17,81\}$; $B=\{2,6,3,9,1,7\}$ bolsa.

6. "Matematika" we "geometriýa" sözlerindäki harplaryň köplüginiň kesişmesini tapmaly.

Türkmenistanyň Döwlet Tugrasyny haýsy geometrik şekilleriň birleşmesinden alyp bolar?

7. Eger:

a) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$; $B=\{b,e,f,k,l\}$;

b) $A=\{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B=\{17, 26, 58\}$;

ç) $A=\{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B=\{2, 6, 3, 9, 1, 7\}$ bolsa,

A we B köplükleriň birleşmesini tapyň.

8. "Matematika" we "geometriýa" sözlerindäki harplaryň köplüginiň birleşmesini tapmaly.

9. M – birbelgili natural sanlar köplügi, P – täk natural sanlar köplügi bolsa, M we P köplükleriň birleşmesine nähili sanlar degişli bolar? Bu birikmede 4, 14, 17 sanlar bolarmy? Jogabyny $\in$ we $\notin$ belgiler arkaly ýazmaly.

10. Deňsizligiň çözüwler köplüginiň birleşmesini tapmaly (bu ýerde $x \in R$).

a) $x > -2$, $x > 0$;

b) $x \geq 5$, $x < -7{,}5$;

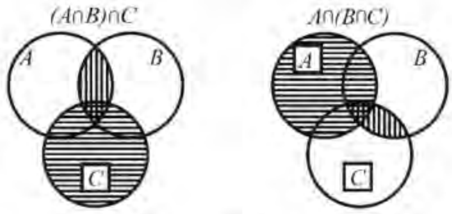
ç) $-7 \leq x < 5$; $-6 \leq x \leq 2$;

d) $x > -3{,}7$, $x \leq 4$;

e) $-2 < x < 4$, $x \geq -1$.

§ 26. Köplükleriň kesişmesiniň we birleşmesiniň kanunlary

Kesişmäniň we birleşmäniň orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryny Eýleriň tegelekleri bilen aýdyň şekillendirmek bolar. Köplükleriň kesişmesiniň utgaşdyrma kanunyna tabyndygyny görkeziň.



27-nji surat

Iki halda hem iki gezek ştrihlenen köplügi aldyk *(27-nji surat)*. Bu ýerden: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ kanunlary hem şonuň ýaly görkezmek bolar.

Kesişme we birleşme paýlaşdyrma kanuny bilen hem baglanyşyklydyr: islendik A, B we C köplükler üçin deňlikler dogrudyr:

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ – kesişmäniň birleşmä görä paýlaşdyrma kanuny.

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ – birleşmäniň kesişmä görä paýlaşdyrma kanuny.

Eger aňlatmada kesişme we birleşme bar bolup, ýaý ýok bolsa, onda ilki kesişme ýerine ýetirilýär. Kesişme amaly birleşme amalyndan "güýçli" hasap edilýär. Şeýlelikde, kesişmäniň birleşmä görä paýlaşdyrma kanunyny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$(A\cup B)\ C = A\cap C\cup B\cap C$.

Gönükmeler

1. Eger: a) $x\in A$; b) $x\in A$ we $x\in B$; ç) $x\in A$, $x\in B$ we $x\in C$; d) $x\notin A$, ýöne $x\in C$; e) $x\notin A$, ýöne $x\in C$ we $x\in B$ bolsa, x element A, B we C köplükleriň birleşmesine degişlimi?

2. y elementiň $A\cap B\cap C$ köplüge degişli bolmak şertini ýazmaly.

3. Aňlatmalardaky köplükleriň üstünde amallary haýsy tertipde ýerine ýetirmeli:

a) $A\cup B\cap C$; b) $A\cap(B\cup C)$; ç) $A\cap B\cap C$?

4. A – 20-den kiçi natural sanlar köplügi. B, C we D – bu köplügiň bölek köplükleri, özünem B – 3-e kratny sanlaryň köplügi, C – 4-e kratny sanlaryň köplügi, D – jübüt sanlaryň köplügi. Haýsy sanlar aşakdaky köplükleriň elementi bolýar?

a) $(A\cap B)\cap C$; ç) $A(B\cap C)$; e) $A\cap B\cup C$;

b) $A\cap(B\cap C)$; d) $(A\cup B)\cup C$; ä) $A\cap(B\cup C)$.

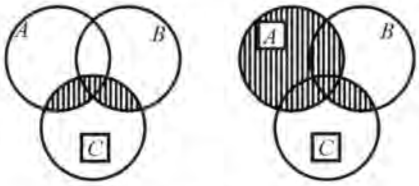
Köplükleriň içinde deňlerini atlandyrmaly.

5. Eýleriň tegelekleri bilen aşakdakylaryň çyndygyny görkezmeli *(28-nji surat)*:

a) birleşmäniň utgaşdyrma kanuny.

b) kesişmäniň birleşmä görä paýlaşdyrma kanuny.

a) we b) çyzgylardaky ştrihlenen ýerleriň haýsysy $A\cap B\cap C$ – köplügi aňladýar?



28-nji surat

6. X – ikibelgili sanlaryň köplügi;

Y – jübüt sanlaryň köplügi;

P – 4-e kratny sanlaryň köplügi.

$A=X\cap Y\cap P$ we $B=(X\cup Y)\cap P$ – köplükleriň elementleriniň harakteristik häsiýeti nähili?

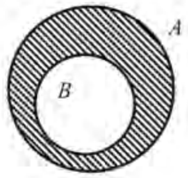
X, Y, P, A we B köplükleri Eýleriň tegelekleri bilen şekillendirmeli. A köplüge degişli üç sany we B köplüge degişli üç sany atlandyrmaly.

7. A – romblaryň köplügi, B – üçburçluklaryň köplügi, C – 60° burçy saklaýan köpburçluklaryň köplügi bolsa, $X=A\cap C\cup B\cap C$ köplüge degişli iki şekiliň çyzgysyny çyzmaly.

§ 27. Bölek köplügi doldurýan köplük

Meselä seredeliň. Tekjede 7 kitap bardy, ondan 4 kitaby aldylar. Näçe kitap galdy?

Bu meseläni çözmek üçin 7 kwadratjygy goýup, soň 4 kwadrat aýralyň we näçe kwadratyň galandygyny sanalyň. Bu meselede biz a elementi bolan köplükden b elementi bolan bölegini aýyrdyk. Köplükde şondan soň $a-b$ element galdy. Ony Eýleriň tegeleklerinde görkezeliň (*29-njy surat*).



29-njy surat

A köplükden onuň bölegi bolan B köplük aýrylanda galan köplük ştrihlenen köplükdir. Bu köplüge B köplügi A köplüge çenli dolduryan köplük diýilýär.

Kesgitleme. Goý, $B \subset A$ bolsun. Onda B köplügi A köplüge çenli doldurmak diýip, A köplügiň B köplüge degişli däl elementlerinden düzülen köplüge aýdylýar we $A \setminus B$ görnüşde bellenilýär.

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ we } x \notin B$$

Mysallar:

1. $A=\{1,2,3,5\}$; $B=\{1,5\}$ onda $A \setminus B=\{2,3\}$.

2. Eger köplük harakteristik häsiýet bilen berilse, onda:

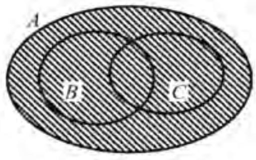
$A \setminus B$ köplük "$x \in A$ we $x \in B$" görnüşde bolmaly.

A – jübüt sanlaryň köplügi, B – 4-e kratny sanlaryň köplügi, onda $A \setminus B$ – jübüt we 4-e kratny däl sanlaryň köplügi bolar. $20 \in A \setminus B$, $26 \in A \setminus B$.

A – jübüt sanlaryň köplügi, B – 4-e kratny sanlaryň köplügi, C – 6-a kratny sanlaryň köplügi bolsa, $A \setminus B \cap C$ tapmaly. $A \setminus B \cap C$ aňlatmada ýaý ýok bolany üçin ilki kesişmäni ýerine ýetirmeli. $B \cap C$-4-e we 6-a bir wagtda kratny sanlaryň köplügi. Soňra $B \cap C$ – köplügi A – köplüge çenli doldurmaly. $A \setminus B \cap C$ – jübüt we 6-a, 4-e bir wagtda kratny däl sanlaryň köplügi bolýar.

$20 \notin A \setminus B \cap C$; $24 \in A \setminus B \cap C$.

Eýleriň tegelegi bilen 30-njy suratdaky ýaly şekillendirmek bolar.



30-njy surat

Gönükmeler

1. Aşakdaky pikir aýtmalar çyn bolar ýaly şertleri ýazmaly:

a) $5 \in A \setminus B$; b) $7 \in A \setminus B$.

2. $x \in A \setminus B$ belli bolsa, bu ýerden aşakdakylar gelip çykarmy?

a) $x \in A$; b) $x \in B$.

3. Eger:

a) $C = \{a,b,w,g,d,e\}$; $D = \{a,b,w,g,d,e,ž,i\}$;

b) $C = \{41,42\}$; $D = \{40,41,42,43,44\}$;

ç) $C = \{9, 10, 11, 12\}$; $D = \{11, 9, 12, 10\}$ köplükler berlen bolsa, onda C köplügiň D köplüge çenli doldurgyjyny tapmaly.

4. A – natural sanlaryň köplügi; B – 7-ä kratny natural sanlaryň köplügi berlen. Aşakdakylar çynmy?

a) $84 \in A \setminus B$; b) $17 \in A \setminus B$?

5. Eger:

a) Y – AB kesimdäki nokatlaryň köplügi, X – AB göni çyzykdaky nokatlaryň köplügi;

b) Y – kwadratyň nokatlarynyň köplügi, X – kwadratyň daşyndan çyzylan tegelekdäki nokatlaryň köplügi bolsa, Y – köplügiň X – köplüge çenli doldurgyjyny tapmaly.

6. F – deňýanly üçburçluklaryň köplügi, H – deňtaraply üçburçluklaryň köplügi. $F \setminus H$ – köplüge degişli bolan iki üçburçluk çyzmaly.

7. Doldurgyç nähili sanlardan durýar?

a) natural sanlar köplügini bitin sanlara çenli doldurmak;

b) bitin sanlar köplügini rasional sanlar köplügine çenli doldurmak.

ç) rasional sanlar köplügini hakyky sanlar köplügine çenli doldurmak

8. a) A – natural sanlar köplügi, B – 7-ä kratny natural sanlar köplügi, C – 3-e kratny natural sanlar köplügi;

b) A – natural sanlar köplügi, B – 4-e kratny natural sanlar köplügi, C – 8-e kratny natural sanlar köplügi bolsa, $A \setminus B \cap C$ köplüge nähili sanlar degişli?

Görkezme: aýyrmak we birleşdirmek amallary ýaýlar ýok bolan ýagdaýynda tertip boýunça ýerine ýetirilýär.

9. Meselede gürrüň edilýän köplükleriň ählisini atlandyrmaly:

a) Kerimde 10 kitap bardy, ol 2 kitabyny dostuna sowgat berdi. Keriminň näçe kitaby galdy?

b) Leňňejiň 10 aýagy bar, bal arysynyň bolsa leňňejiňkiden 4 aýagy az. Bal arysynda näçe aýak bar?

10. Meseledäki haýsy köplügiň beýleki köplügiň doldurgyjy bolýandygyny anyklamaly.

a) Howluda 12 maşyn dur. Eger olaryň 4-üsi ýük maşyny bolsa, näçesi ýeňil maşyn?

b) Welide 6 oýnawaç bar, Leýlide bolsa 2 oýnawaç az. Leýliniň näçe oýnawajy bar?

§ 28. Köplükleri synplara bölmek barada düşünje

Köplük we olaryň üstündäki amallar baradaky düşünje köplükleri synplara bölmek baradaky göz öňüne getirmelerimizi aýdyňlaşdyrmaga kömek edýär.

Synplara bölmek – bu obýektleri meňzeş häsiýetleri boýunça bir synpa ýygnamak we meňzeş däl häsiýetleri bolan obýektleri bolsa başga bir synpa (synplara) ýygnamakdyr.

Synplara bölmegiň maksady biziň bilimlerimizi tertipleşdirmekden (sistemalaşdyrmak) ybaratdyr. Meselem, biologiýa dersinde jandarlary synplara bölmek öz içine 1,5 müň sany dürli görnüşleri jandarlary alýandyr, botanika dersinde synplara bölmek – öz içine 500 müň görnüşli ösümlikleri alýandyr. Şunuň ýaly köpdürlüligi synpsifikasiýanyň üsti bilen bizi gyzyklandyrýan ösümlügi ýa-da jandary tapmak bolar.

Synplara bölmeklik nähili şertleri kanagatlandyrmaly?

Islendik synpsifikasiýa obýektleriň köplügini böleklere bölmek bilen baglanyşyklydyr. Şunlukda berlen köplügiň her bir elementi diňe bir bölek köplüge bir gezek düşmelidir, bölek köplükleriň birikmesi bolsa başdaky berlen köplük bilen gabat gelmelidir, şu şertler ýerine ýetende köplük synplara ýa-da böleklere bölünen hasaplanýar.

Kesgitleme: X köplügiň $X_1, X_2, \ldots, X_n$ synplara bölünmegi üçin aşakdaky şertler ýerine ýetmelidir:

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bölek köplükler jübüt-jübüt kesişmeli däl, ýagny

$X_i \cap X_j = \varnothing$ i:j, $i, j = \overline{i, n}$.

2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bölek köplükleriň birleşmesi X köplüge deň bolmaly.

$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X$.

Eger ýokardaky şertleriň biri ýerine ýetmese, köplük synplara bölünmeýär. Mysal üçin:

1. X – üçburçluklaryň köplügi bolsun. Bu köplügi üç synpa bölmek bolar: ýitiburçly, gönüburçly we kütekburçly üçburçluklaryň köplügi. Hakykatdan-da bölünen köplükler jübüt-jübütden kesişmeýärler (ýiti burçly üçburçluklaryň içinde gönüburçly we kütekburçly üçburçluk ýok, gönüburçly üçburçluklaryň içinde kütekburçly üçburçluk ýok) we olaryň birikmesi bolsa, X köpük bilen gabat gelýär).

2. X – üçburçluklaryň köplügini deňyanly, deňtaraply we durlitaraply diýen häsiýetler boýunça synplara bölüp bolmaýar, sebäbi deňyanly we deňtaraply üçburçluklaryň köplügi kesişýärler (ähli deňtaraply üçburçluklar deňyanly hem bolýandyr).

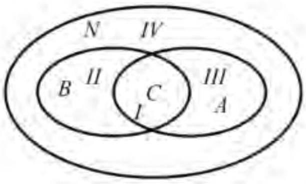
Şeýlelikde, synplara bölmek köplügiň bölek köplüklerini bölüp almak bilen baglanyşyklydyr. Bölek köplükleri almak üçin bolsa köplügiň elementleriniň harakteristiki häsiýetini görkezmek ýeterlikdir. Geliň, natural sanlaryň köplügine seredeliň. Onuň elementleri dürli häsiýetlere eýedir. Mysal üçin, natural sanlaryň içinde jübütleri, täkleri, 3-e kratnylary, 5-e kratnylary we ş.m. bar. Goý, bizi 3-e bölünýän natural sanlar gyzyklandyrsyn. Onda bu häsiýet boýunça natural sanlar köplügini iki bölege bölmek bolar, olaryň biri 3-e kratny sanlar, beýlekisi bolsa 3-e kratny däl sanlar. Bölünip alnan köplükler kesişmeýärler, birleşmesi bolsa natural sanlar köplügine deňdir. Şeýlelikde, natural sanlar köplügini elementleriniň bir häsiýeti boýunça ony iki synpa bölmek bolar: 3-e kratny sanlar köplügi (bu köplüge 3, 6, 15... sanlar degişlidir), beýlekesi bolsa 3-e kratny däl sanlar köplügi (bu köplüge 4, 5, 13... sanlar degişlidir). Çyzgyda şeýle şekillendirmek bolar (*31-nji surat*).

31-nji surat

Indi köpügiň elementini iki häsiýet boýunça bölege böleliň. Natural sanlarynyň iki häsiýetine seredeliň, "3-e kratny we 5-e kratny". Bu häsiýetler boýunça natural sanlar köplüginden iki köplügi bölüp almak bolar:

A – 3-e kratny sanlaryň bölek köplügi;

B – 5-e kratny sanlaryň bölek köplügi. Bu bölek köplükler kesişýärler, ýöne olaryň hiçisi biri-biriniň bölek köplügi bolmaýar. Ony çyzgyda şekillendireliň (*32-nji surat*).



32-nji surat

Çyzgydan görnüşi ýaly, natural sanlaryň N köplügi dört sany kesişmeýän böleklere bölünen, olar rim sifrleri bilen bellenen. Her bir bölek köplüge nähili sanlaryň düşendigini kesgitläliň.

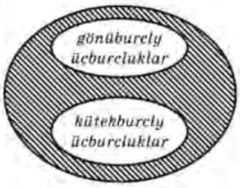
I – bölek köplük 3-e we 5-e kratny sanlar köplügi;

II – bölek köplük 3-e kratny, ýöne 5-e kratny däl sanlar köplügi;

III – 5-e kratny, ýöne 3-e kratny däl sanlar köplügi;

IV – 3-e kratny däl, 5-e hem kratny däl sanlar köplügi.

Diýmek, natural sanlaryň iki häsiýetini görkezmeklik ony 4 synpa bölmeklige getirdi. Ýöne elmydama iki häsiýet boýunça köplügi 4 synpa bölüp bolmaýan ýagdaýlar hem bardyr. Meselem: Üçburçluklaryň köplügini "gönüburçly bolmak" we "kütekburçly bolmak" diýen häsiýetler boýunça üç synpa bölmek bolar *(33-nji surat)*.



33-nji surat

I – gönüburçly üçburçluklaryň köplügi;

II – kütekburçly üçburçluklaryň köplügi;

III – gönüburçly hem bolmadyk we kütekburçly hem bolmadyk üçburçluklaryň köplügi. (Çyzgyda ştrihler bilen bellenendir).

Gönükmeler

1. $K=\{0,2,6,8,9,12,15\}$ köplükden iki köplügi bölüp almaly. Onuň birine 2-ä kratny sanlary, beýlekisine 3-e kratny sanlary almaly. K – köplük synplara bölündigi bolýarmy? K köplügi aşakdaky ýaly edip üç synpa bölmek bolýarmy? $K_1=\{0,2,6\}$, $K_2=\{8,9\}$, $K_3=\{12,15\}$.

2. Mekdep kitaphanasyndaky kitaplary: çeper eserler, okuw kitaplary, tehniki we çagalar edebiýaty diýen synplara bölmek bolarmy?

3. Aşakdaky ýaly edip synplara bölmek bolarmy?

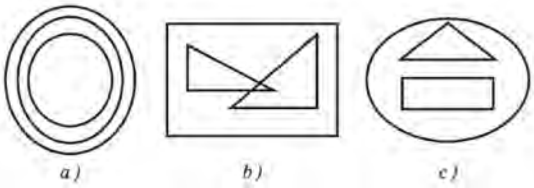
Burçlaryň köplügi ýiti we kütek burçlar diýen häsiýet boýunça böleklere bölünýär.

Parallelogramlaryň köplügi gönüburçluklar, romblar we kwadratlar diýen häsiýet boýunça bölek köplüklere bölünýär.

4. Türkmen elipbiýindäki harplaryň köplügini nähili synplara bölmek bolar?

5. Tekizlikdäki nokatlaryň köplügini: a) töwerek; b) tegelek; ç) göni çyzyk arkaly nähili synplara bölmek bolar?

6. Çyzgydaky kesişmeýän oblastlary ştrihleriň dürli görnüşi bilen bellemeli *(34-nji surat)*.

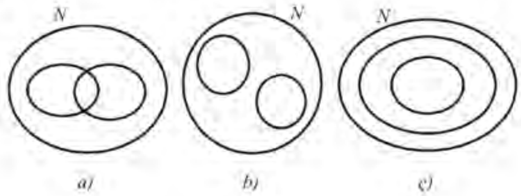


34-nji surat

7. Natural sanlar köplüginden 8-e kratny sanlaryň köplügini bölüp almaly. Şunlukda natural sanlar köplügi näçe synpa bölündi? Alnan synplary Eýleriň tegeleklerinde şekillendiriň we her synpdan iki elementi atlandyryň.

8. Üçburçluklaryň köplügini "ýitiburçly bolmaly" diýen häsiýet boýunça nähili synplara bölmek bolar? Synplaryň her birinden iki üçburçlugy çyzyp görkezmeli.

9. Natural sanlaryň käbiri "3-e kratny", käbiri bolsa "9-a kratny" diýen häsiýetlere eýe. Çyzgydaky görkezilen ýagdaýlaryň haýsysy ýokarda görkezilen şertleri kanagatlandyrýarlar, şu ýagdaýda natural sanlar köplügi näçe synpa bölünýär *(35-nji surat)*.



35-nji surat

§ 29. Tükenikli köplükleriň üstünde geçirilýän amallar bilen baglanyşykly käbir meseleler

Biziň gündelik durmuşymyzda diňe bir arifmetiki meseleler däl, eýsem tükenikli köplükler bilen baglanyşykly meseleler hem gabat gelýär. Ol meselelerde köplükleriň elementlerini, ýa-da bolmasa köplükleriň birleşmesindäki kesişmesini, dolduryjy köplükdäki elementleriň sanyny kesgitlemek gerek bolýar. Köplükler we olaryň üstünde geçirilýän amallar bilen baglanyşykly meseleleri çözmekligiň özboluşly usullary bardyr.

Goý, bize A köplük berlen bolsun. Bu köplügiň elementleriniň sanyny $n(A)$ bilen belläliň. Mysal üçin, $A=\{$□□□□$\}$, $n(A)=4$. Goý, indi iki köplük berlen bolsun: $A=\{a,b,ç\}$, $B=\{k,l,a,t\}$. $n(A)=3$, $n(B)=4$ bolýandygy düşnüklidir we $A \cap B \{a\}$, ýagny bu köplükleriň "a" umumy elementi bardyr. Bu köplükleriň birleşmesini alalyň.

$A \cup B=\{a,b,ç,k,l,t\}$ we elementleriniň sanyny ýazalyň $n(A \cup B)=6$.

Umuman, $A \cap B \neq \varnothing$ şertleri kanagatlandyrýan tükenikli A we B köplükleriň elementlerini

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)=6 \tag{1}$$

formulanyň üsti bilen hasaplaýarlar.

Eger-de A we B köplükler kesişmeýän bolsalar, ýagny $A \cap B=\varnothing$ bolsa, onda $n(A \cap B)=0$ bolar we (1) formulalar aşakdaky görnüşe geçer:

$$n(A \cup B)=n(A)+(B),\ A \cap B=\varnothing \tag{2}$$

Eger $B \subset A$, ýagny B köplük A köplügiň bölek köplügi bolsa, onda $A\ B$ dolduryjy köplügiň elementleriniň sanyny

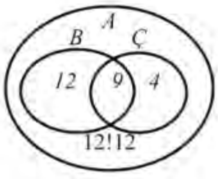
$$n(A\ B)=n(A)-n(B) \tag{3}$$

formulanyň üsti bilen hasaplamak bolar.

Umuman, tükenikli köplükler bilen baglanyşykly meseleler çözülende formulalar bilen bilelikde Eýleriň tegeleklerinden peýdalanýarlar.

Mysallara seredeliň: 1) Synpdaky 25 okuwçynyň 21-si gazete ýazylýar, 13-si žurnala, 9 okuwçy bolsa hem gazete, hem zurnala ýazylýar. Synpda abuna ýazylmaýan okuwçy barmy?

Çözülişi: A – synpdaky okuwçylaryň köplügi $n(A)=25$; B – gazete ýazylýan okuwçylar, $n(B)=21$ C – žurnala ýazylýan okuwçylar, $n(C)=13$,



36-njy surat

$n(B\cap C)=9$; $B\cap C$ – gazete we žurnala ýazylýan okuwçylar, onda $n(B\cap D)$ – abuna ýazylýan okuwçylaryň köplügi bolar $n(B\cap D)=n(B)+n(C)-$ $-n(BC)=21+13-9=25$. Bu ýerden abuna ýazylmaýan okuwçynyň ýokdugy görünýär. 36-njy suratda Eýleriň tegeleklerініň üsti bilen meseläniň şertindäki gatnaşyklar şekillendirilendir.

2) Synpdaky 24 okuwçynyň 18-si matematika bilen, 15-si bolsa edebiýat bilen gyzyklanýar:

a) hem matematika, hem edebiýat bilen gyzyklanýan okuwçylaryň sany näçe bolup biler?

b) iň bolmanda olaryň biri bilen gyzyklanýan okuwçylaryň sany näçe bolup biler?

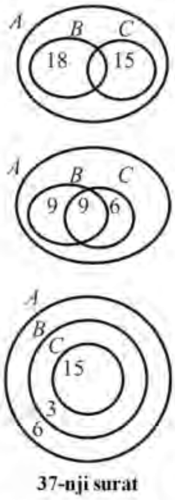
ç) hiç biri bilen gyzyklanmaýan okuwçylaryň sany näçe bolup biler?

Çözülişi.

A – synpdaky okuwçylaryň köplügi;

B – matematika bilen gyzyklanýan okuwçylaryň köplügi;

C – edebiýat bilen gyzyklanýan okuwçylaryň köplügi.



37-nji surat

$n(A)=24$, $n(B)=18$, $n(C)=15$ meseläniň a) punktuna jogap bermek üçin $n(B\cap C)$ näçe bolup biler diýen soraga jogap bermeli. Umuman, $n(B\cap C)\le 24$ bolmalydygy düşnüklidir, ýagny $n(B\cup C)=n(B)-$ $-n(B\cap C)\le 24$; $18+15-n(B\cap C)\le 24$; $33-24\le$ $\le n(B\cap C)$; $n(B\cap C)\ge 9$. Başga bir tarapdan, eger CB bolsa, onda $n(B\cap C)=15$ bolar. Onda $9\le n(B\cap C)\le 15$ deň-sizlikleri kanagatlandyrar. Meseläniň b) we ç) punktlaryna jogap bermek üçin Eýleriň tegeleklerinden peýdalanalyň *(37-nji surat)*.

Birinji bölümiň çözüwinden peýdalanyp, B we C köplükler özara kesişmesiniň maksimal bolup biljek ýagdaýlaryny täzeden şekillendireliň.

Çyzgydan $n(B\cup C)=24$ alarys.

Bu ýagdaýda synpdaky okuwçylaryň hemmesi iň bolmanda matematika ýa-da edebiýat bilen gyzyklanýarlar.

Çyzgydan $n(B \cup C)$=18 alarys.

Bu ýagdaýda 18 okuwçy iň bolmanda bir ders boýunça gyzyklanma gatnaşýar 6 okuwçy bolsa hiç bir gyzyklanma gatnaşmaýar.

Diýmek: $(B \cup C)$ -iň bolmanda bir ders boýunça gyzyklanma gatnaşýan okuwçylaryň köplügi bolsa onda ol $18 \leq n(B \cup C) \leq 24$ bolar. $A \backslash (B \cup C)$ hiç birine gatnaşmaýan okuwçylaryň köplügi bolsa, onda ol $0 \leq n(A \backslash (B \cup C)) \leq 6$ bolar.

Jogaplary:

a) $9 \leq n(B \cap C) \leq 15$; b) $18 \leq n(B \cup C) \leq 24$; ç) $0 \leq n(A \backslash (B \cup C)) \leq 6$.

Goý, indi bize A, B we C üç sany tükenikli köplük berlen bolsun. Bu köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sanynyň aşakdaky formula bilen hasaplanjakdygyny (1) formulany we köplükleriň kesişme, birleşme hem-de utgaşdyrma kanunlaryndan peýdalanyp, subut edeliň.

$$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-$$
$$-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C).$$

Subudy.

$n(A \cup B \cup C)=n((A \cup B) \cup C))=n(A \cup B)+n(C)-n((A \cup B)) \cap (C)=$
$=n(A)+n(B)-n(A \cap B)+n(C)-(n((A \cap C) \cup (B \cup C)))=n(A)+n(B)+(C)-$
$-n(A \cap B)-(n(A \cap C)+n(B \cap C)-n((A \cap C) \cap (B \cap C)))=n(A)+n(B)+n(C)-$
$-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$, onda $n(A \cup B \cup C)=$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$.

Mesele: 100 talybyň 44-si iňlis dilini, 50-si nemes dilini, 39-sy fransuz dilini, 13-si iňlis we nemes dilini, 14-si iňlis we fransuz dilini, 12-si nemes we fransuz dilini öwrenýär. Talyplaryň 5-si bu dilleriň üçüsini hem öwrenýär. Näçe talyp diňe bir dili öwrenýär? Näçe talyp hiç bir dili öwrenmeýär?

Çözülişi: (4) formulanyň üsti bilen üç köplügiň birleşmesindäki elementleriň sanyny kesgitläliň.

A – iňlis dilini öwrenýän talyplar; $n(A)$=44;

B – nemes dilini öwrenýän talyplar; $n(B)$=50;

C – fransuz dilini öwrenýän talyplar; $n(C)$=39;

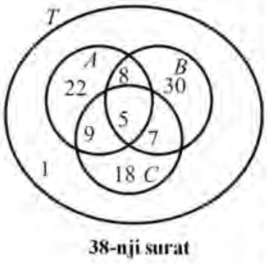
$A \cap B$ – iňlis we nemes dilini öwrenýän talyplar; $n(A \cap B)$=13;

$A \cap C$ – iňlis we fransuz dilini öwrenýän talyplar; $n(A \cap C)$=14;

$B \cap C$ – nemes we fransuz dilini öwrenýän talyplar; $n(B \cap C)=12$;

$A \cap B \cap C$ – üç dili hem öwrenýän talyplar, $n(A \cap B \cap C)=5$, onda $n(A \cup B \cup C)=44+50+39-13-14-12+5=138-39=99$, ýagny 100 talybyň 99-sy iň bolmanda bir dili öwrenýär, bir talyp bolsa hiç bir dili öwrenmeýär.

Meseläniň birinji soragyna jogap bermek üçin talyplaryň köplügini T bilen belgiläliň we meseläniň şertinde berlen köplükleri we sanlary Eýleriň tegelekleriniň üsti bilen şekillendireliň.



38-nji surat

Çyzgydan (*38-nji surat*) diňe bir dili öwrenýän talyplaryň sanynyň 22+30+18=70 boljakdygy görünýär.

Jogaby: 1) 70 talyp diňe bir dili öwrenýär; 2) 1 talyp hiç bir dili öwrenmeýär.

Görşümiz ýaly, meseläniň şerti beýan edilýärkä ol çylşyrymly ýaly bolup görünse-de, formulalar bilen Eýleriň tegelekleri utgaşdyrylsa, ol meseleleriň aňsat çözülýändigine göz ýetirýäris.

Gönükmeler

1. Eger synpda 12 oglan we 14 gyz bar bolsa, 12 oglan we 7 başlikçı bar bolsa, synpdaky okuwçylaryň sanyny bilip bolarmy?

2. 50 okuwçynyň 37-si iňlis dilini, 17-si nemes dilini öwrenýär. Näçe okuwçy iki dili hem öwrenýär?

3. Synpdaky okuwçylaryň 9-sy waleýbol, 12-si basketbol, 5-si bolsa hem woleýbol, hem basketbol bilen meşgullanýar. Eger-de synpda 23 okuwçy bar bolsa, näçe okuwçy sportuň bu görnüşleri bilen meşgullanmaýar?

4. Toparda 28 talyp bar. Olaryň 17-si matematika, 15-si bolsa rus dili bilen gyzyklanýar. Iki predmet bilen hem gyzyklanýan okuwçylaryň sany näçe bolup biler? Iň bolmanda biri bilen gyzyklanýanlaryň sany näçe bolup biler?

5. 30 gyzyň 15-si jorap örüp, 12-si tikin tikip bilýär. Olaryň näçesi jorap örüp we tikin tikip bilýär? Näçesi iň bolmanda bir işi başarar? Näçesi hiç haýsyny başarmaz?

6. Iki synpda bilelikde 40 okuwçy bar. Olaryň 26-sy basketbol, 25-si suwda ýüzmek, 27-si woleýbol oýnamaklyk bilen gyzyklanýar. Şol bir wagtda suwda ýüzmek bilen basketbolda 15 okuwçy, basketbol bilen woleýbolda 16 okuwçy, suwda ýüzmek bilen woleýbolda 18 okuwçy bar. 1 okuwçy bedenterbiýe sapagyndan boşadylan. Sportuň bu 3 görnüşi bilen hem gyzyklanýan okuwçylaryň sany näçe? Näçe okuwçy sportuň diňe bir görnüşi bilen gyzyklanýar?

§ 30. Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly

Başlangyç synp okuwçylary aşakdaky ýaly meseleleri çözmeli bolýar; 1, 2 we 3 sifrleri peýdalanyp mümkin bolan ikibelgili sanlaryň ählisini düzmeli. Çagalar saýlamak arkaly aşakdaky sanlary alýarlar:

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Sanlaryň her biri iki sifrden durýar we sifrler belli bir tertip boýunça alynýar, meselem, 1 we 2sifrlerden iki dürli san düzülen: 12 we 21. Köplügiň elementleri tertip boýunça ýazylanda, matematikada bu ýazgylara tertipleşdirilen elementleriň toplumy diýilýär. Ýokardaky meselede tertipleşdirilen jübüt bilen iş salyşdyk.

Umuman, a we b elementleri bolan tertipleşdirilen jübütleri (a, b) görnüşde ýazmaklyk kabul edilen, a – elemente jübütiň birinji koordinatasy diýilýär, b – elemente bolsa bu jübütiň ikinji koordinatasy diýilýär. (a, b) we (c, d) jübütleriň deň bolmaklary üçin $a=c$ we $b=d$ bolmagy gerekdir. Tertipleşdirilen jübütde $a=b$ bolmagy mümkindir. Sebäbi 11, 22, 33 sanlara (1,1), (2,2), (3,3) görnüşli tertipleşdirilen jübütler hökmünde seretmek bolar. Başdaky meselä dolanyp geleliň, bu meselede biz $\{1, 2, 3\}$ köplük bilen iş salyşýarys, bu köplügiň elementlerinden mümkin bolan tertipleşdirilen jübütleri düzýäris: $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

Tertipleşdirilen jübütleri dürli iki köplügiň elementlerinden hem düzmek bolar. Meselem, $A=\{1,2,3\}$ we $B=\{3,5\}$ köplüklerden tertipleşdirilen jübütleri aşakdaky ýaly edip düzeliň, birinji komponenti A köplükden alynmaly, ikinji komponenti B köplükden alynmaly. Onda tertipleşdirilen jübütleriň köplügini alarys: $\{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$.

B A	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

Indi bu meselämize anyk many bereliň: onluklaryny 1, 2, 3 sifrlerden almak bilen, birliklerini 3 ýa-da 5 sifrlerden almak bilen mümkin bolan ikibelgili sanlaryň ählilsini düzmeli. Bu meseläni çözen wagtymyzda berlen iki A we B köplüklerden täze köplük emele geldi, bu köplügiň elementleri bolsa tertipleşdirilen jübütlerdir. Bu alnan täze köplüge A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diýilýär.

Kesgitleme. A we B köplükleri dekart köpeltmek hasyly diýip, birinji komponenti A köplüge degişli bolan, ikinji komponenti B köplüge degişli bolan jübütleriň köplügine aýdylýar.

A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasyly $A \times B$ görnüşde bellenýär. Dekart köpeltmek hasyly orunçalyşma kanunyna boýun egmeýär, ýagny A we B köplükler üçin $A \times B \neq B \times A$. Munuň şeýledigine göz ýetirmek üçin $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$ köplükler üçin

$A \times B$ we $B \times A$-ny tapalyň:

$A \times B=\{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,1), (3,5)\}$

$B \times A=\{(3,1), (3,2), (3,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

Bu ýerden görnüşi ýaly, $A \times B$ we $B \times A$ dürli köplüklerden durýandyr. Dekart köpeltmek hasyly utgaşdyrma kanunyna hem boýun egmeýär, ýöne köplükleriň birleşmesine görä paýlaşdyrma kanuny bilen baglanyşyklydyr: islendik A, B we C köplükler üçin aşakdaky deňlik dogrudyr:

$(A \cup B) \times C=(A \times C) \cup (B \times C)$. Bu deňligi subutsyz kabul edýäris. Matematikada diňe tertipleşdirilen jübütlerden başga-da tertipleşdirilen üçlük, dörtlük we ş.m. hem seredilýär. Meselem: (1,5,6) uzynlygy 3-e deň kortež (ýagny üç elementi).

Kesgitleme. Ikiden köp köplükleriň dekart köpeltmek hasyly netijesinde alynýan elementlere **kortež** diýilýär. Elementleriniň sanyna görä 3, 4, 5 we ş.m. ölçegli kortežler bolup biler.

Kortež düşünjesinden peydalanmak arkaly n – köplükleriň dekart köpeltmek hasylyna hem kesgitleme bermek bolar.

Kesgitleme. $A_1, A_2, ..., A_n$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diýip, birinji komponenti A_1 köplükden, ikinji komponenti A_2 köplükden ..., n-nji komponenti A_n köplükden bolan uzynlygy n-e deň bolan kortežleriň köplügine aýdylýar. $A_1, A_2, \ldots A_n$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ görnüşde bellenilýär. Mysal. $A_1=\{2,3\}$, $A_2=\{3,4,5\}$, $A_3=\{7,8\}$ bolsa, $A_1 \times A_2 \times A_3$ – tapmaly. $A_1 \times A_2 \times A_3$ dekart köpeltmek hasylynyň elementleri uzynlygy 3-e deň kortež bolup: 1-nji komponenti A_1-den alnan, 2-nji komponenti A_2-den alnan, 3-nji komponenti A_3-den alnan üçlükleriň köplügidir.

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2,3,7), (2,3,8), (2,4,7), (2,4,8), (2,5,7), (2,5,8), (3,3,7), (3,3,8), (3,4,7), (3,4,8), (3,5,7), (3,5,8)\}$.

Gönükmeler

1. $2x$-y=3 deňleme berlen. Bu deňlemäniň birnäçe çözüwini tapmaly. Bu çözüwleriň her biri nämäni aňladýar? (4,5) jübüt deňlemäniň çözüwi bolýarmy? (5,4) jübüt nähili?

2. A we B köplükleriň elementleri bolup aşakdaky jübüt sanlar hyzmat edýär: $A=\{(1,12), (2,9), (3,6), (4,3), (5,0)\}$, $B=\{(1,9), (2,7), (3,6), (4,7), (5,0)\}$. Bu köplükleriň kesişmesine haýsy jübüt sanlar girer? Birleşmesine haýsy jübüt sanlar girer?

3. Sanawjysy $A=\{4,5\}$ köplükden, maýdalawjysy $B=\{3,7,9\}$ köplükden bolan droblaryň köplügini ýazmaly.

4. $A \times B$ dekart köpeltmek hasylyny tapmaly, eger:

a) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,n,r\}$; ç) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c\}$;

b) $A=\{a,b,c\}$, $B=\varnothing$; d) $A=\varnothing$, $B=\{b,n,r\}$ bolsa.

5. $A=\{a,b\}$, $B=\{c,d\}$ bolsa, C – köplük A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasyly bolarmy, eger:

a) $C=\{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$;

b) $C=\{(a,d), (b,d), (a,c)\}$;

ç) $C=\{(a,d), (b,d), (c,d), (a,c)\}$ bolsa?

6. 1, 2, 3, 4 sifrleri ulanyp, dürli ikibelgili sanlary ýazmaly. Olaryň içinde näçesi 3 sifr bilen başlaýar?

7. Eger $A=\{1,3,5,7\}$; $B=\{0,2,4,6,8\}$ bolsa, $A\times B$ we $B\times A$-ny gönüburçly tablisada ýazmaly. Alnan dekart köpeltmek hasyly näçe element saklaýar? $A\times B=B\times A$ diýip tassyklamak bolarmy?

8. $X=\{1,2,3,4,5\}$ we $Y=\{0,4,6,8\}$ köplükler berlen. Haýsy ýagdaýda $A\subset X\times Y$ – pikir aýtma çyn, eger:

a) $A=\{(1,4), (2,4), (3,4), (5,4)\}$;

b) $A=\{(2,0), (2,6), (0,6), (4,4)\}$;

ç) $A=\{(3,4), (4,3), (5,4), (3,6)\}$ bolsa?

9. $A=\{3,5,7\}$; $B=\{6,8,9\}$; $C=\{0,1\}$ bolanda,

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ deňligiň dogrudygyny barlamaly.

10. $A=\{3,5,7,8,9\}$; $B=\{8,9\}$; $C=\{0,1,2\}$ bolanda,

$(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$ deňlik ýerine ýetýärmi?

11. "Babarap" sözünde näçe harp bar? Bu sözde näçe dürli harp bar? Köplük düşünjesi we kortež düşünjelerini peýdalanmak arkaly meseläni başgaça düzmeli (formulirlemeli).

12. 56576 sanyň ýazgysyndaky sifrleriň köplüginiň, bu sandaky sanbelgileriň kortežinden näme tapawudy bar?

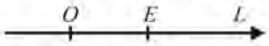
13. 1, 2, 3 sifrlerden peýdalanyp, mümkin bolan üçbelgili sanlary ýazmaly. Şeýle sanlardan näçesi emele geler?

§ 31. Iki köplügiň dekart köpeltmek hasylyny koordinatalar tekizliginde şekillendirmek

Haçan-da A we B köplükleriň tükenikli we köp bolmadyk elementi bar bolsa, onda olaryň dekart köpeltmek hasylyny tapmak kyn däldir. Eger A we B köplükler tükeniksiz bolsa, näme etmeli? Mysal üçin, A köplük 3-den uly natural sanlaryň köplügi we B köplük 5-den uly natural sanlaryň köplügi bolsa, dekart köpeltmek hasylyny nädip tapmaly?

Eýleriň tegelekleri bilen hem bu ýagdaýda şekillendirip bolmaýar. Matematikada şeýle ýagdaýdan çykalga tapypdyrlar. Iki köplügiň dekart köpeltmek hasylyny koordinatalar tekizliginde aýdyň şekillendirmek mümkin

Nädip şekillendirmeli? Soraga jogap bermek üçin koordinata göni çyzyk we koordinata tekizlik baradaky düşünjelerimizi gaýtalalyň.



39-njy surat

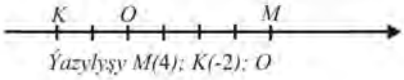
Koordinata göni çyzygy diýip hasap başlangyjy, ölçeg birligi we položitel ugry kesgitlenen göni çyzyga aýdylýar. Koordinata göni çyzygy nämä niýetlenen?

L – göni çyzygynda M nokady belläliň (M nokat O nokat bilen gabat gelmesin) we bu nokada şeýle bir x sany aşakdaky ýaly degişli edeliň *(39-njy surat)*:

1) bu sanyň moduly O nokatdan M nokada çenli uzaklyga deňdir.

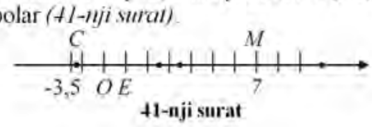
2) eger M nokat OE şöhläniň üstünde ýatýan bolsa, onda bu san položiteldir, eger M nokat OE şöhlä garşylykly şöhläniň üstünde ýatýan bolsa, onda ol san otrisateldir.

Şeýle usul bilen kesgitlenen x sana M nokadyň koordinatasy diýilýär we $M(x)$ görnüşde ýazylýar. Meselem, çyzgyda M nokadyň koordinatasy 4-e deň, K nokadyň koordinatasy 2-ä deň *(40-njy surat)*.

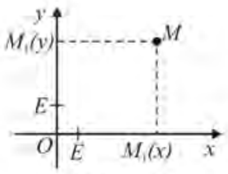


40-njy surat

Eger M nokat O nokat bilen gabat gelse, M nokadyň koordinatasy nola deň diýilýär we $M(0)$ görnüşde ýazylýar. Şeýlelikde, koordinata göni çyzygynyň her bir nokady bilen hakyky sanlar arasynda baglanyşyk guralýar: koordinata göni çyzygynyň her bir M nokadyna ýeke-täk hakyky x san degişlidir. Tersine hem dogrudyr: her bir hakyky x sana koordinata göni çyzygynyň ýeke-täk M nokady degişlidir. Meselem, 7 sany koordinata göni çyzykda $M(7)$ nokat arkaly 3,5 sany bolsa $C(-3,5)$ nokat arkaly şekillendirmek bolar *(41-nji surat)*.



41-nji surat



42-nji surat

Umumy başlangyçly we $OE_1=OE_2$ uzynlyk ölçeg birlikli, özara perpendikulýar bolan Ox we Oy koordinata göni çyzyklaryny alalyň. Ox we Oy göni çyzyklara koordinatalar oky diýilýär, Ox oka absissalar oky, Oy oka ordinatalar oky diýilýär. Koordinata oklary arkaly gurlan tekizlige koordinata tekizligi diýilýär *(42-nji surat)*.

Koordinata tekizligi näme üçin niýetlenen? Koordinata tekizliginde M nokady alalyň, onuň tekizlikde ýerleşiş ýagdaýy iki sany san bilen aňladylýar: absissa we ordinata. M nokadyň absissasy Ox okuň üstündäki M_1 nokadyň koordinatasydyr. M nokadyň ordinatasy Oy okuň üstündäki M_2 nokadyň koordinatasydyr. Eger M nokadyň absissasy x, ordinatasy y bolsa, onda ol $M(x, y)$ görnüşde ýazylýar we M nokadyň x we y koordinatalary bar diýilýär.

Gönüburçly koordinatalar ulgamy tekizliginiň her bir nokadyna ýeke-täk hakyky sanlar jübütini degişli etmäge mümkinçilik berýär we tersine, hakyky sanlaryň her bir (x,y) jübütine tekizligiň ýeke-täk x we y koordinatalary bolan M nokady degişlidir.

Koordinatalar usulyny girizmegiň wajyp ähmiýeti bardyr, sebäbi göni çyzykda we tekizlikde koordinatalary girizmek arkaly köp geometrik meseleler, sanlar üstünde amallar algebraik usulda çözülýär, bu bolsa öz gezeginde *EHM*-i geometrik meseleler çözmekde ulanmaklyga getirdi. Bulardan başga-da koordinata göni çyzygynyň we koordinata tekizliginiň üsti bilen algebranyň köp meselelerini aýdyň çözmek bolýar.

Nokadyň göni çyzykdaky we tekizlikdäki koordinatasy düşünjesi geometriýa ilkinji gezek fransuz alymy we filosofy Rene Dekart tarapyndan XVII asyrda girizilen. Bu açyşlar matematikada täze bir eýýamyň ýüze çykmagyna getiripdir. Rene Dekardyň hatyrasyna gönüburçly koordinatalar tekizligi dekart tekizligi diýip hem atlandyrylýar.

XVII asyrda ýaşap geçen Dekardyň ady bilen matematikada XIX asyryň ahyrynda girizilen köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň nähili baglanyşygy bar? Bu soraga jogap bermek üçin, ilki gönüburçly koordinatalar ulgamyny ulanmak bilen iki san köplükleriň dekart köpeltmek hasylyny nähili aýdyň şekillendirmek bolýandygyny görkezeliň. Goý, A we B – san köplükleri bolsun. Onda bu köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň elementleri bolup tertipleşdirilen jübütler hyzmat eder. Sanlaryň her bir jübütini koordinata tekizliginde şekillendirmek bilen, biz bir şekili alarys, bu şekil bolsa A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasylyny aýdyň şekillendirer.

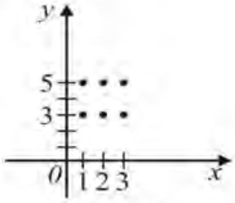
Eger:

1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$; 2) $A=\{1,2,3\}$, $B=[3,5]$;

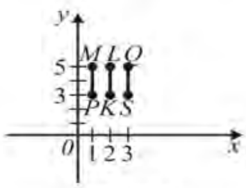
3) $A=[1,3]$, $B=[3,5]$; 4) $A=R$, $B=[3,5]$; 5) $A=R$, $B=R$ bolsa, A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasylyny kooordinataly tekizlikde şekillendirmeli.

1-nji mysalda köpükler tükenikli we köp bolmadyk elementleri saklaýandygy üçin dekart köpeltmek hasylynyň ähli elementlerini sanamak bolar: $A \times B=\{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$.

Bu nokatlary koordinata tekizliginde gursak, alty nokatdan ybarat şekil alarys *(43-nji surat)*.

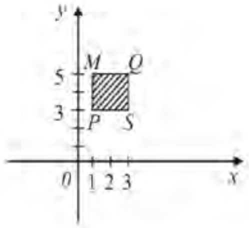


43-nji surat

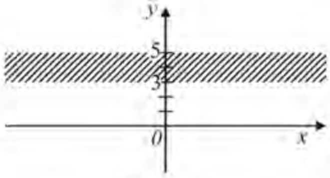


44-nji surat

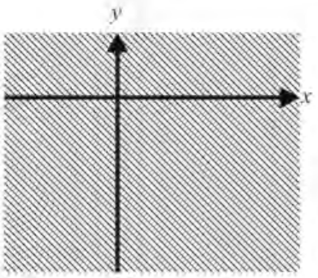
2-nji mysalda dekart köpeltmek hasylynyň ähli elementlerini şekillendirmek mümkin däl, sebäbi B – köplük tükeniksizdir. Ähli jübütleriň birinji koordinatasy 1 san, ikinji koordinatasy bolsa 3-den 5-e çenli hakyky sanlaryň ähli̇si bu nokatlaryň köplügi PM kesimini emele getirýär; jübütleriň birinji koordinatasy 2 san, ikinji koordinatasy bolsa, [3,5] kesimdäki hakyky sanlar bu jübütleriň ähli̇si KL kesimi emele getirýär. Jübütleriň birinji koordinatasy 3 san, ikinjisi bolsa, [3,5] aralykdaky hakyky sanlaryň ähli̇si, bu jübütler SQ kesimi emele getirýär. Şeýlelikde, dekart köpeltmek hasyly PM, KL, SQ kesimlerdir *(44-nji surat)*. 3-nji mysalda B – köplükden başga-da A – köplük hem tükeniksizdir. $A \times B$ dekart köpeltmek hasylynyň 1-nji koordinatasy [1;3] kesime degişli, 2-nji koordinatasy [3;5] kesime degişli. Şonuň üçin dekart köpeltmek hasyly $KLMP$ kwadrat bolar *(45-nji surat)*.



45-nji surat



46-njy surat



47-nji surat

4-nji mysalda öňki mysallardan tapawutly ýeri A – köplük tutuş hakyky san göni çyzygydyr.

$A \times B$ – köpeltmek hasylynyň absissasyna tutuş x-lar okunyň san bahalary degişlidir, ordinatasyna bolsa [3,5] kesimiň nokatlary degişlidir. Çyzgy bir zolak emele getirýär *(46-njy surat)*.

5-nji mysalda $R \times R$ dekart köpeltmek hasyly koordinata tekizligini durşuna tutýar *(47-nji surat)*.

Mysallarda görnüşi ýaly, köplükleriň "dekart köpeltmek hasyly" diýip, ýöne ýere aýdylmandyr, sebäbi sanlaryň tertipleşdirilen jübütlerini gönüburçly dekart koordinata ulgamy arkaly şekillendirmek berk baglanyşyklydyr.

Gönükmeler

1. Koordinata tekizliginde (–1,0), (–1,4), (3,0), (3,4) nokatlar nähili şekil emele getirýärler?

2. Koordinata tekizliginde absissasy otrisatel, ordinatasy položitel bolan nokatlaryň köplüginiň ählisini şekillendirmeli.

3. Absissasy [–2;2] köplüge, ordinatasy [–3;3] köplüge degişli bolan nokatlaryň köplügi nähili şekil emele getirýär?

4. $A=\{0,2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$ bolsa, $A \times B$ dekart köpeltmek hasylyny gönüburçly koordinata tekizliginde şekillendirmeli. Bu şekile (2,3), (3,0) nokatlar degişlimi?

5. Eger:

a) $A=[-2;2]$, $B=\{2,3,4\}$;

b) $A=[-2;2]$, $B[2,4]$;

ç) $A=R$; $B=[2,4]$ bolsa,

$A \times B$ dekart köpeltmek hasylyny gönüburçly koordinata tekizliginde şekillendirmeli.

6. $A=\{3,2,1\}$ we $B=\{4,5,6\}$ köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň orun çalyşma kanunyna boýun egmeýändigini grafiki usulda görkezmeli.

§ 32. Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly bilen baglanyşykly käbir meseleleri

Teorema. Eger A köplügiň k elementi B köplügiň bolsa n elementi bar bolsa, onda $A \times B$ dekart köpeltmek hasylynyň $k \cdot n$ elementi bardyr.

Subudy. Goý, $A = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$, $B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bolsun. Onda $A \times B$ dekart köpeltmek hasyly şu aşakdaky ähli mümkin bolan jübütlerden ybaratdyr:

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n) \\ (a_k, b_1), (a_k, b_2), \dots, (a_k, b_n) \end{Bmatrix}$$

Bu tablisanyň her sütüninde k sany jübüt bar we şolar ýaly n sany sütün bar. Diýmek, AxB köplügiň $k \cdot n$ elementi bar. Teorema subut edildi.

Bu teoremany n sany köplügiň dekart köpeltmek hasyly üçin umumylaşdyrmak bolar, ýagny

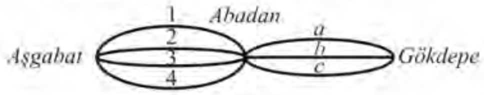
$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \dots \cdot n(A_n).$$

Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly bilen baglanyşykly meseleler durmuşda ýygy-ýygydan gabat gelýär. Mysal üçin, soňky döwürlerde paýtagtymyz Aşgabatdan dürli ugurlara birnäçe ýollar çekildi.

Aşgabatdan Abadan şäherine 4 sany dürli dürli ýol barýar. Abadan şäherinden Gökdepe şäherçesine bolsa 3 ýol barýar *(48-nji surat)*.

Mesele. Aşgabatdan Abadan şäheriniň üsti bilen Gökdepe şäherçesine näçe dürli ýol bilen baryp bolar?

Çözülişi. Aşakdaky çyzgylary we bellikleri girizeliň.



48-nji surat

Aşgabatdan Abadan şäheriniň üsti bilen Gökdepe şäherçesine $(1,a)$, $(1,b)$, $(1,c)$, $(2,a)$, $(2,b)$, $(2,c)$, $(3,a)$, $(3,b)$, $(3,c)$, $(4,a)$, $(4,b)$, $(4,c)$ dürli ýollar bilen baryp boljakdygyny çyzga seredip aýdyp bileris. Olaryň sany 12-ä deňdir.

Bu meseläni çözmek üçin biz çyzgydan peýdalandyk. Indi çyzgydan peýdalanman soraga jogap bereliň:

Goý, $A=\{1,2,3,4\}$ – Aşgabatdan Abadan şäherine barýan ýollaryň köplügi, $B=\{a,b,c\}$ bolsa Abadan şäherinden Gökdepä barýan ýollaryň köplügi bolsun. Onda goýlan meseläniň jogabyna AxB dekart köpeltmek hasylynyň köplüginiň elementlerini düzmek arkaly gelmek bolar, ýagny

$A \times B=\{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c), (4,a), (4,b), (4,c)\}$.

Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly we ol ýerdäki emele gelýän elementleriň sany bilen baglanyşykly meselelere kombinatoriki meseleler diýilýär.

Matematikanyň kombinatoriki meseleleri çözmeklik bilen baglanyşykly bölümine kombinatorika diýilýär. Kombinatorika ähtimallyklar nazaryýetinde (teoriýasynda), kibernetikada, hasaplaýyş tehnikasynda we matematikanyň dürli ugurlarynda giňden ulanylýar.

Kombinatorikada köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň elementlerini sanamaklygyň düzgünine köpeltmek düzgüni diýilýär. Bu düzgüni gysgaça aşakdaky ýaly beýan etmek bolar:

Eger a – elementi k – usul bilen,

b – elementi n – usul bilen

saýlap alyp bolýan bolsa, onda (a,b) jübüti $k\cdot n$ usul bilen saýlap bolar. Bu meseleler kombinatorikada **ýerleşdirmeler** ady bilen bellidir.

Indi köplükleriň dekart köpeltmek hasyly bilen baglanyşykly birnäçe meselelere seredeliň:

1-nji mesele. 2, 3, 4, 5 sifrleriň kömegi bilen näçe sany 1) sifrleri gaýtalanýan hem-de 2) sifrleri gaýtalanmaýan 2 belgili sanlary ýazyp bolar?

Çözülişi. 1) Birinji we ikinji sifrlere derek şolaryň dördüsini hem alyp bilýäris, ýagny biz $4\cdot4=16$ sany sifrleri gaýtalanýan 2 belgili san ýazyp bileris. Hakykatdan hem 22, 23, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 42, 43, 44, 45, 52, 53, 54, 55 şol sanlardyr.

2) Birinji sifre derek 4 sifri, ikinji sifre derek bolsa 3-sini ulanyp bilýäris, onda $4\cdot3=12$ sany sifrleri gaýtalanmaýan 2 belgili san alarys. Olar 23, 24, 25, 32, 34, 35, 42, 43, 45, 52, 53, 54 sanlardyr.

2-nji mesele a,b,c harplary näçe dürli usulda ýerleşdirmek bolar?

Çözülişi. Bu meseläni çözmek üçin sifrleriň kömegi bilen sifrleri gaýtalanmaýan sanlaryň ýazylyşyndan peýdalanýarys. Birinji orna harplaryň 3-sini, ikinji orna ikisini, üçünji orna bolsa birini ýazyp bilýäris, ýagny

$3\cdot2\cdot1=6$ dürli usulda ýerleşdirýäris.

Olary ýazalyň: *abc*, *acb*, *cab*, *cba*, *bac*, *bca*.

Ýokarda getiren meselämize başgaça **orunçalşyrma** meselesi hem diýilýär. Umuman n elementden ybarat bolan (düzümde) $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ sany orunçalşyrma bolýar, $\boldsymbol{P_n=n!}$ (çalşyrmalaryň sany).

3-nji mesele. Toparda 18 sany okuwçy (talyp) bar. Olaryň birini topar baştutanlygyna, birini ýaşlar guramasyna, birini bolsa kärdeşler arkalaşygyna başlyk saýlamaly. Muny näçe usulda amala aşyryp bolar?

Çözülişi: Eger wezipeleriň birinjisine 18 talybyň haýsy-da bolsa birini (18 usul) saýlasalar, ikinji wezipä galan 17 talybyň birini, soňky wezipä bolsa galan 16 talybyň birini saýlap bolar.

Diýmek, bu wezipelere $18\cdot17\cdot16=4896$ usul bilen saýlap bolar.

Kombinatorika n elementden ybarat bolan köplügiň m elementini ýerleşdirmeleriň sanyny kesgitlemek üçin

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

formuladan peýdalanýarlar.

Bu formulany getirip çykaralyň: goý, käbir köplügiň n elementi bar bolsun we bize olardan m elementden ybarat bolan topary düzmek gerek bolsun. Muny näçe usuldan amala aşyryp bolar?

1-nji elementi n usulda;

2-nji elementi (n–1) usulda;

3-nji elementi (n–2) usulda;

---

m-nji elementi (n–m+1) usulda saýlap almak bolar. Olaryň umumy sany

$$A_n^m = (n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-2)(n-1)n =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(n-m)(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!},$$ ýagny

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$ bolar.

4-nji mesele. Toparda 18 talyp bar. Olardan üçüsini etrapda geçirilýän ýaşlar guramasynyň konferensiýasyna delegat saýlamaly. Muny näçe usulda amala aşyrmak bolar?

Çözülişi: Göräýmäge bu mesele 3-nji meselä meňzeş hem bolsa, ol meseleden düýpli tapawudy bardyr. 3-nji meseledäki saýlap almalarda her saýlanmanyň öz ýeri bar bolsa, 4-nji meselede ol saýlanmalaryň biri-birinden hiç hili tapawudy ýokdur. Şonuň üçin eger-de biz 3-nji meseläniň jogabynda alan sanymyzy 3 elementden ybarat bolan köplükdäki orunçalşyrmalaryň sanyna bölsek, özümizi gyzyklandyrýan soragyň jogabyny aljakdygymyza göz ýetirýäris, ýagny 3!-a bölýäris:

$$\frac{4896}{3!} = \frac{4896}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{4896}{6} = 816.$$

Jogaby: 816 usulda.

4-nji meselä kombinatorikada **utgaşdyrma** meselesi diýilýär. Utgaşdyrmalaryň sany

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ formulanyň kömegi bilen hasaplanýar.

Umuman, orunçalşyrmalaryň, ýerleşdirmeleriň we utgaşdyrmalaryň arasynda

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_n$$

baglanyşygyň bardygyna göz ýetirmek kyn däldir.

5-nji mesele. 6 suratdan 3-sini näçe usul bilen saýlap almak bolar?

Çözülüşi. Bu utgaşdyrma meselelesidir, ýagny saýlanyp alnan suratlaryň haýsy orunda duranlygynyň hiç hili tapawudy ýokdur.

Onda $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot3)} = \dfrac{4\cdot5\cdot6}{6} = 4\cdot5 = 20$.

Jogaby: 20-usul bilen saýlap bolar.

Gönükmeler

1. 0, 2, 3, 4 sifrleriň kömegi bilen näçe sany sifrleri gaýtalanmaýan üçbelgili san ýazyp bolar?

2. 1, 2, 3, 4 sifrleriň kömegi bilen näçe sany sifrleri gaýtalanmaýan 4 belgili san ýazyp bolar?

3. Eger synpda 26 orun bar bolsa, onda 6 okuwçyny näçe dürli usulda ýerleşdirmek bolar?

4. 5-e bölünýän näçe sany 4 belgili san ýazmak bolar?

5. Synpda 10 dürli ders öwrenilýär. Hepdäniň duşenbe güni 5 sagat okalýar we olar dürli derslerdir. Şol günki sapaklaryň tertibini näçe dürli usul bilen düzmek bolar?

6. 5 sany adamyň sapagyny näçe dürli usul bilen düzmek bolar?

§ 33. Gatnaşyk düşünjesi

Matematikada diňe bir sanlar, şekiller we ululyklar öwrenilmän, olaryň arasyndaky baglanyşyklar, gatnaşyklar hem öwrenilýär. Mysal üçin, başlangyç matematikanyň iň bir esasy düşünjeleriniň biri bolan natual san düşünjesinde olaryň elementleriniň arasyndaky gatnaşyklar ol köplügi öwrenmekde uly ýardam edýär:

- 3 san 1-den uly;
- 7 san 5-den 2 san uly;
- 9 san 8-iň yzyndan gelýär;
- 12 san 3-den 4 esse uly;
- 5 san 35-den 7 esse kiçi we ş.m.

Bu getirilen mysallardan görnüşi ýaly, sanlaryň arasynda: "uly", "san uly", "yzyndan gelýär", "esse uly" we ş.m. gatnaşyklar bardyr.

Geometriýada kesimleriň arasynda "uzyn", "gysga", "deň" we ş.m gatnaşyklary, göni çyzyklaryň arasynda "parallel", "perpendikulýar", "atanak ýatýar" we ş.m. gatnaşyklar öwrenilýär.

Köplükleri biri-biri bilen deňeşdirip görmek arkaly biz ol köplükler "kesişýärler", "deňdir", "bölek köplükdir" we *ş.m.* ýaly gatnaşyklar bilen iş salyşýarys.

Matematikada, köplenç, diňe iki obýektiň arasyndaky gatnaşyga seredilýär. Ol gatnaşyklara binar gatnaşyklar diýilýär.

Şol bir köplügiň elementleriniň arasynda dürli-dürli gatnaşyklaryň bolup biljekdigini mysallaryň üsti bilen düşündirmäge synanyşalyň: $X=\{3,4,5,6,8\}$ köplügiň elementleriniň arasynda "uludyr" we "2 san uludyr" gatnaşyklaryny guralyň; $4>3$, $5>3$, $6>3$, $8>3$, $5>4$, $6>4$, $8>4$, $6>5$, $8>5$, $8>6$; "uludyr" gatnaşygy;

5 san 3-den 2 san uludyr;

6 san 4-den 2 san uludyr;

8 san 6-dan 2 san uludyr – "2 san uludyr" gatnaşyklarydyr.

Bu gatnaşyklaryň düzülişine üns berip seretsek, onda ol ýerde tertipleşdirilen jübütler bilen iş salşylýandygyna göz ýetirýäris. "Uludyr" gatnaşygy üçin (4;3), (5;3), (6;3), (8;3), (5;4), (6;4), (8;4), (6;5), (8;5), (8;6); "2 san uludyr" gatnaşygy üçin bolsa (5;3), (6;4), (8;6) jübütleri alarys.

Edil şol X köplükde başga gatnaşyklar alnan bolsa hem şol X köplügiň elementlerinden düzülen jübütleri alardyk.

Şeýlelik bilen, biz X köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşyga köplükleriň dekart köpeltmek hasyly düşünjesinden peýdalanmak arkaly aşakdaky ýaly kesgitleme berip bileris.

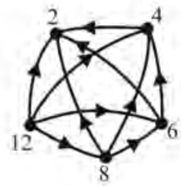
Kesgitleme. X köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşyk diýip $X\times X$ – dekart köpeltmek hasylynyň islendik bölek köplügine aýdylýar we ol gatnaşyk latyn elipbiýiniň baş harplary bilen belgilenilýär.

Tükenikli köplükleriň arasyndaky gatnaşyklary çyzgylaryň kömegi bilen aňlatmak bolar. Ol çyzgylary graflar diýip atlandyrýarlar.

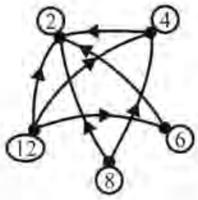
Mysal üçin, $X=\{2,4,6,8,12\}$ köplükde R "uludyr" gatnaşygyny we onuň grafyny guralyň *(49-njy surat)*:

$R=\{(4;2), (6;2), (8;2), (12;2), (6;4), (8;4), (12;4), (8;6), (12;6), (12;8)\}$, Bu gatnaşygyň grafyny gurmak uçin X köplügiň elementlerini nokatlar bilen şekillendireliň hem-de uly sandan kiçi sana tarap strelkany geçireliň.

Indi, edil şu köplükde P "kratnydyr" gatnaşygyny alalyň we onuň grafyny guralyň *(50-nji surat)*:



49-njy surat



50-nji surat

R gatnaşykdan tapawutlylykda P gatnaşygymyzda her elementiň daşyna halka aýlandy, onuň sebäbi bolsa sanyň özüniň özüne kratnylygyndandyr.

Gönükmeler

1. Natural sanlaryň arasynda bolup biljek gatnaşyklaryň sanawyny ýazmaly.

2. Tekizlikde göni çyzyklaryň arasyndaky mümkin bolan gatnaşyklary sanaň.

3. Üçburçluklaryň arasynda bolup biljek gatnaşyklara degişli mysallary getiriň.

4. $X=\{0,3,6,9,12,18\}$ köplükde aşakdaky gatnaşyklaryň graflaryny guruň:

"x san y-den 3 esse uludyr";

"x san y-den 3 san uludyr".

5. Aşakdaky köplükleriň haýsysy $A=\{0,3,6,9,12\}$ köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşykdyr:

a) $P\{(6;3), (9;3), (12;3), (12;6), (3;3), (6;6), (9;9), (12;12)\}$;

b) $T=\{(3;3), (3;6), (3;9), (3;12), (6;6), (9;9), (12;12)\}$;

ç) $M=\{(3;6), (6;12), (9;18)\}$.

6. $X=\{0,2,4,6,8\}$ köplükde:

P – "kiçidir";

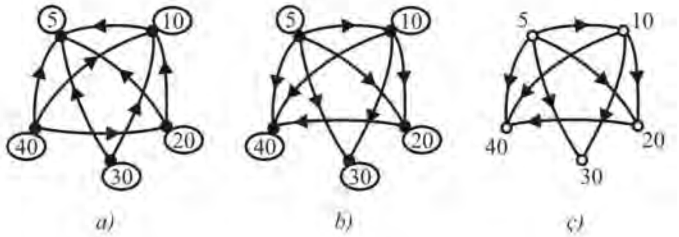
Q – "2 esse kiçidir";

S – "2 san kiçidir" gatnaşyklaryň graflaryny guruň.

7. a) natural sanlaryň; ç) tekizlikdäki göni çyzyklaryň;
b) üçburçluklaryň; d) köplükleriň

arasynda bar bolan gatnaşyklara mysal getirmeli.

8. Çyzgydaky graflaryň haýsysy $B=\{5,10,20,30,40\}$ köplükde "x san y sanyň bölüjisidir" gatnaşygyň grafy bolýar? (*51-nji surat*)



51-nji surat

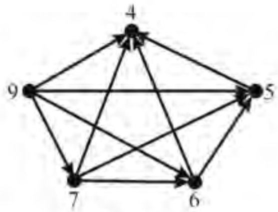
§ 34. Gatnaşygyň berliş usullary

Kesgitlemä görä, X köplügiň elementleriniň arasyndaky R gatnaşyk diýip $X\times X$ dekart köpeltmek hasylynyň islendik bölek köplügine aýdylýar. Diýmek, gatnaşyk – bu tertipleşdirilen jübütleriň köplügidir. Şonuň üçin gatnaşygyň berliş usullary köplükleriň berliş usullaryna meňzeşdir.

1. X köplükde R gatnaşygy onuň ähli jübütlerini görkezmek arkaly bermek bolar. Mysal üçin $X=\{4,5,6,7,9\}$ köplükde R gatnaşygy $\{(5,4), (6,4), (6,5), (7,4), (7,5), (7,6), (9,4), (9,5), (9,6), (9,7)\}$ ähli jübütleri görkezmek arkaly berip bolar. Edil şu gatnaşygy grafyň kömegi bilen hem bermek bolar *(52-nji surat)*.

2. Köplenç ýagdaýlarda, X köplügiň elementleriniň arasyndaky R gatnaşyk jübütleriň harakteristik häsiýetlerini görkezmek arkaly berilýär.

Gatnaşygy bu usulda bermek üçin iki sany üýtgeýän ululykdan peýdalanyp, sözlem düzülýär, käbir ýagdaýlarda bolsa ol üýtgeýän ululyklary bellemän düşürip ýazýarlar.



52-nji surat

Mysal üçin, N natural sanlar köplüginde: "x san y sandan uludyr"; "bölüjisidir"; "3 esse kiçidir" diýip ýazmak bolar.

Matematikada iki üýtgeýän ululyk bilen baglanyşykly sözlemleri simwollary ulanmak arkaly ýazýarlar. Mysal üçin, "uludyr" gatnaşygyny san köplüginde $x>y$ deňsizlik görnüşinde ýazýarlar. Tekizlikde berlen göni çyzyklaryň arasyndaky parallellik we perpendikulýarlyk gatnaşyklaryny x||y $x \| y$, $x \perp y$, görnüşinde bermeklik kabul edilendir.

Üçburçluklaryň arasyndaky gatnaşyklary aňlatmak üçin hem ýörite belgiler bardyr: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$. Bu ýazgylary umumylaşdyryp, X köplügiň elementleriniň arasyndaky R gatnaşygy xRy görnüşinde ýazýarlar. Ol ýazgyny şeýle okaýarlar: X köplügiň x elementi şol köplügiň y elementi bilen R gatnaşykdadyr.

Matematikanyň başlangyç kursunda-da, orta mekdebiň matematikasynda hem gatnaşyk düşünjesi umumy görnüşde girizilmeýär. Bu ýerde diňe dürli obýektleriň arasynda bolýan takyk gatnaşyklar öwrenilýär.

Başlangyç matematikada, esasan, sanlaryň arasyndaky gatnaşyklara uly üns berilýär. Ol gatnaşyklary dürli görnüşde: iki üýtgeýän ululykly sözlemiň gysga ýazgysynyň üsti bilen ("uludyr", "kiçidir", "san uly", "3 esse uly" we ş.m.), tablisalary doldurmaklyk bilen berýärler. Sanlaryň üstünde bolup biljek dürli gatnaşyklar bilen başlangyç synp okuwçylary tekstli meselelerde (gabat gelýärler) tanyş bolýarlar. Mysal üçin, "Daýhan birleşigi döwlete 1650 t. bugdaý, ondan 743 t az arpa, 3 esse az mekgejöwen tabşyrdy. Daýhan birleşigi döwlete jemi näçe däne tabşyrdy?" diýen meselede sanlaryň arasynda birnäçe gatnaşyklar bar. Meseläni çözmek üçin okuwçy ol gatnaşyklaryň manysyna oňat düşünmelidir.

Gönükmeler

1. A ={3, 6, 9, 18, 27} – köplügiň elementleriniň arasynda bolup biljek gatnaşyklary dürli usullar arkaly beriň.

2. Aşakdaky sözlemleri deňlik görnüşinde ýazyň:

a) x san y sandan 5 san uly;

b) x san y sandan 5 esse kiçi;

ç) x san y sandan 5 esse uly;

d) x san y sandan 7 san kiçi.

3. Aşakdaky gatnaşyklary iki üýtgeýän ululykly deňsizlik görnüşinde beriň:

a) "kiçidir";

b) "kiçidir ýa-da deňdir";

ç) "uludyr";

d) "uludyr ýa-da deňdir".

4. Natural sanlar köplüginde bolup biljek gatnaşyklara mysallary getiriň.

5. Kesimler bilen baglanyşykly gatnaşyklara mysallar getiriň.

6. B={0,1,2,3,4} köplükde "uludyr ýa-da deňdir" gatnaşygyny ýazyň we onuň grafyny guruň.

7. A= {2,4,6,8,12,16,24} berlen köplügiň elementleriniň arasynda birnäçe gatnaşyklary goýup ýazmaly:

a) R "bölünýär";

b) R "bölüjisi";

ç) R "2 esse uly";

d) R "2 – birlik uly".

8. Üýtgeýän ululykly deňsizlikler arkaly gatnaşyklary ýazmaly:

a) "kiçidir"; b) "kiçidir ýa-da deňdir".

9. Başlangyç synplarda öwrenilýän gatnaşyklara mysal getirmeli:

a) natural sanlar köplüginde;

b) kesimler köplüginde;

ç) teswirli meselelerde.

10. X={0, 1, 3, 4, 6} köplügiň elementleri P={(0, 1), (0, 3), (0, 4), (0, 6), (1, 4), (6,6)} gatnaşyga eýedir. Bu gatnaşygyň grafyny gurmaly.

11. Meselede seredilýän gatnaşygy ýüze çykaryp, meseläni çözmeli:

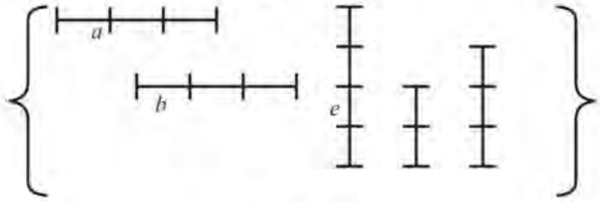
a) Birinji tekjedäki kitaplar ikinji tekjedäkiden 3 esse köp. Eger-de birinji tekjeden 8 kitaby alyp, ikinji tekjä bolsa 5 kitaby goýanlaryndan soň, birinji tekjedäki kitaplaryň sany ikinji tekjedäki kitaplaryň sanyndan 2 esse köp boldy. Her tekjede başda näçe kitap bardy?

b) Ulaglar kärhanasynda ýük maşynlary awtobuslardan 46 birlik köp. Eger ýük maşynlary awtobuslardan 3 esse köp bolsa, kärhanada näçe ýük maşyny bar?

§ 35. Gatnaşygyň häsiýetleri

Şol bir X köplügiň elementleriniň arasynda dürli-dürli gatnaşyklary berip bolýandygyna biz eýýäm göz ýetirdik. Ol gatnaşyklar belli bir düzgün (kanun) esasynda emele getirilen jübütleriň köplügidir.

Biz gatnaşyklaryň häsiýetlerini biri-birinden tapawutlandyrmaga degişli kesimler bilen baglanyşykly bir mysala ýüzlenýäris.

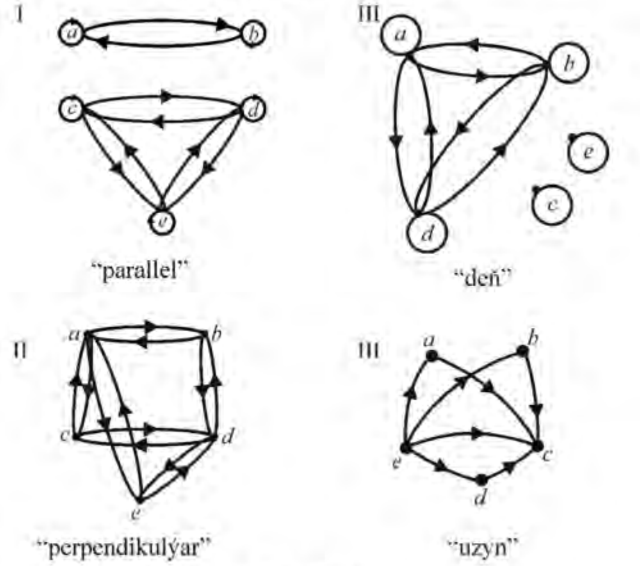


53-nji surat

Suratda berlen kesimleriň arasynda "paralleldir", "perpendikulýardyr", "deňdir" we "uzyndyr" gatnaşyklarynyň graflaryny guralyň *(53-nji surat)*.

Bu gatnaşyklaryň graflaryna seredip, parallellik we deňlik gatnaşyklarynda käbir meňzeşlikleriň bardygyna göz ýetirýäris. Parallellik, deňlik, perpendikulýarlyk gatnaşyklarynyň graflarynda hem meňzeşlik ýok däl. Ýöne parallellik we deňlik gatnaşyklarynda her bir elementiň halkasy bar. X – köplügiň haýsy elementini (kesimini) alsak hem, ol kesim özüne paralleldir ýa-da kesim özüne deňdir. Parallellik we deňlik gatnaşyklarynyň bu häsiýetine refleksiwlik diýilýär.

Parallellik gatnaşygyň grafy



54-nji surat

Kesgitleme. Eger X köplügiň her bir elementi öz-özi bilen R gatnaşykda bolsa, onda ol gatnaşyga X köplükde berlen refleksiw gatnaşyk diýilýär.

Bu kesgitlemäni gysgaça aşakdaky ýaly ýazýarlar:

X – köplükde R – refleksiw $\Leftrightarrow$ xRx, $x \in X$.

Belläp geçişimiz ýaly, eger R gatnaşyk refleksiw bolsa, onda ol gatnaşygyň grafynda her elemetiň daşynda halka bolýar.

Indi berlen kesimleriň parallellik, perpendikulýarlyk we deňlik gatnaşyklarynyň graflaryna seredeliň *(54-nji surat)*. Bu gatnaşyklaryň graflarynda umumylyk bardyr, ýagny strelka bir elementden başga bir elemente gidýän bolsa, ikinji elementden birinji elemente hem gidýändir. Strelkanyň iki elemente hem gidýändiginiň nämäni aňladýandygyny anyklalyň:

a) eger birinji kesim ikinji kesime parallel bolsa, onda ikinji kesim hem birinji kesime paralleldir;

b) eger birinji kesim ikinji kesime perpendikulýar bolsa, onda ikinji kesim hem birinji kesime perpendikulýardyr;

ç) eger birinji kesim ikinji kesime deň bolsa, onda ikinji kesim hem birinji kesime deňdir.

Bu halda parallellik, perpendikulýarlyk we deňlik gatnaşyklary simmetriklik häsiýete eýedir diýilýär.

Kesgitleme: Eger X – köplükde berlen R gatnaşykda x elementiň y elemente R gatnaşykda bolanlygyndan y elementiň x elemente R gatnaşykda bolýandygy gelip çykýan bolsa, onda R gatnaşyga simmetrik diýilýär.

X köplükde R gatnaşyk simmetrikdir – $\Leftrightarrow xRy \Rightarrow yRx$.

Simmetrik gatnaşygynyň grafynyň aýratynlygy bardyr: ýagny stelka x-dan y-e gidýän bolsa, onda y-den x-a gidýän strelka hem bardyr. Tersine tassyklama hem dogrudyr: ýagny gatnaşygyň grafynda ikitaraplaýyn strelka bar bolsa, onda ol gatnaşyk simmetrikdir.

Simmetrik häsiýetli bolmadyk gatnaşyklar hem bardyr. Mysal üçin, "uzyndyr" gatnaşygy simmetrik däldir.

Bu gatnaşygyň grafyna seredeliň. Ol gatnaşygyň grafynda iki elementi baglanyşdyrýan ýekeje strelka bar we ol gatnaşyk ("uzyndyr") antisimmetrik häsiýete eýedir diýilýär.

Kesgitleme. Eger X köplükde berlen R gatnaşykda x we y dürli elementleriň arasynda R gatnaşygyň bolmaklygyndan y we x elementleriň R gatnaşykda bolmaýanlygy gelip çykýan bolsa, onda R gatnaşyga X köplükde antisimmetrik diýilýär.

X köplükde R gatnaşyk antisimmetrik $\Leftrightarrow (xRy$ we $x \neq y \Rightarrow \overline{yRx})$.

"Paralleldir", "deňdir" we "uzyndyr" gatnaşyklarynyň grafyna üns berip seretsek, onda şeýle ýagdaýa göz ýetireris. Eger strelka birinji elementden ikinjä barýan bolsa, ikinjiden üçünjä barýan bolsa, onda strelka birinjiden üçünjä hem barýandyr. Graflaryň bu aýratynlygyna gatnaşygyň tranzitiwlik häsiýeti diýilýär.

Kesgitleme. Eger X köplükde berlen R gatnaşykda $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ elementler üçin xRy we yRz gatnaşyklardan xRz gatnaşyk gelip çykýan bolsa, onda R gatnaşyga tranzitiw diýilýär.

X köplükde R gatnaşyk tranzitiw $\Leftrightarrow xRy$ we $yRz \Rightarrow xRz$.

Tranzitiwlik häsiýetine eýe bolmadyk gatnaşyklara perpendikulýarlyk gatnaşygyny mysal getirmek bolar.

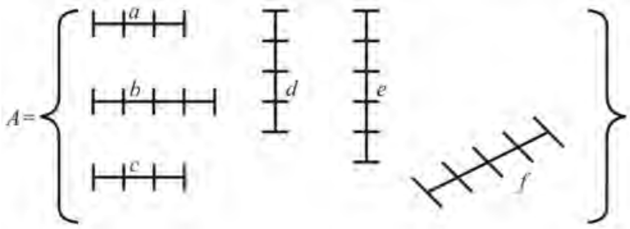
Gönükmeler

1. $X=\{1,2,4,8,12\}$ köplükde "x san y sana kratnydyr" gatnaşygy berlen. Bu gatnaşygyň grafyny guruň we onuň häsiýetlerini aýdyň.

2. $B=\{0,2,4\}$ köplükde berlen "kratny" gatnaşygy refleksiwlik häsiýetine eýemi?

3. $X=\{2,3,4,5,6\}$ köplükde "uludyr" we "uludyr ýa-da deňdir" gatnaşyklary berlen. Bu gatnaşyklaryň graflaryny guruň we häsiýetlerini aýdyň. Gatnaşyklaryň haýsysy refleksiw we näme üçin?

4. A kesimler köplüginde "deňdir" we "gysgadyr" gatnaşyklar berlen. Bu gatnaşyklaryň graflaryny guruň we häsiýetlerini aýdyň *(55-nji surat)*.



55-nji surat

5. $X=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ köplükde berlen "x san y sanyň bölüjisidir" diýen gatnaşygyň grafy, bu köplükde "x san y sana kratnydyr" gatnaşygynyň grafyndan nähili tapawutlanýar? Bu gatnaşyklaryň häsiýetlerinde tapawut barmy?

6. $X=\{2,3,4,5,6\}$ köplükde "kiçidir" we "kiçidir ýa-da deňdir" gatnaşyklar berlen. Bu gatnaşyklaryň grafyny gurmaly we häsiýetlerini kesgitlemeli. Bu gatnaşyklaryň haýsysy refleksiw häsiýete eýedir? Näme üçin refleksiw häsiýete eýe?

7. $y=\{2, 4, 6, 8, 12\}$ köplükde berlen "2 esse uludyr" we "2 birlik uludyr" gatnaşyklaryň häsiýetleri nähili? Aşakdaky pikir ýöretme dogrumy? "2 esse uludyr" gatnaşygy, antisimmetrikdir, sebäbi x-ň y-den 2 esse ulylygyndan y-ň x-dan 2 esse uludygy gelip çykmaýar.

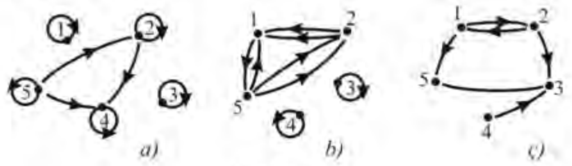
8. R – gatnaşygyň grafyny gurdular, bu grafda a elementden b elemente we b elementden c elemente geçýän peýkamlar (strelkalar) bar, a elementden c elemente barýan peýkam (strelka) bolsa ýok. R – gatnaşyk tranzitiw häsiýete eýemi? Näme üçin?

9. S gatnaşygyň grafynda x elementden y elemente barýan peýkam bar. S gatnaşyk tranzitiw häsiýete eýe bolarmy?

10. $E=\{a,b,c,d\}$ köplügiň elementleriniň arasynda R gatnaşyk goýlup, aşakdaky jübütler alnypdyr. Ol gatnaşyk boýunça haýsy häsiýetler ýerine ýetýär.

$R=\{(a,b), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (c,d), (c,a), (a,d)\}$.

11. $X=\{1,2,3,4,5\}$ köplükde berlen gatnaşyklaryň graflary, çyzgyda şekillendirilen *(56-njy surat)*.



56-njy surat

Bu gatnaşyklaryň haýsysy:

a) refleksiw; b) tranzitiw; ç) simmetrik we tranzitiw;

d) antisimmetrik we tranzitiw häsiýetlere eýe?

12. Y köplükde S gatnaşyk berlen.

$Y=\{y/y\in Z,-12\le y<-1\}$.

S: "x san y sandan 2 esse kiçi, $x\in Y$, $y\in Y$ bolsa, aşakdakylaryň haýsy dogry?

a) $(-6,-3)\in S$; ç) $(-4,-2)\in S$; e) $(-4,2)\in S$;

b) $(-3,-6)\in S$; d) $(4,8)\in S$; ä) $(-12,-6)\in S$.

13. X köplükde $y=x-3$ gatnaşyk berlen. Berlen gatnaşygyň grafigini guruň. Eger:

a) $X=\{x/x\in Z,-3\le x\le 4\}$, ç) $X=\{x/x\in R,-3\le x\le 4\}$;

b) $X=R$ bolsa.

Berlen mysallardan kesgitleniş oblasty we bahalar oblasty tapyň.

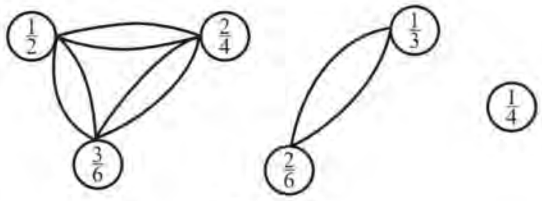
§ 36. Ekwiwalentlik we tertip gatnaşyklary

$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{6},\frac{2}{6}\right\}$ droblar köplüginde "deňdir" gatnaşygyna seredeliň we onuň grafyny guralyň *(57-nji surat)*.

Berlen gatnaşykdaky jübütleriň köplügini ýazalyň:

$$P=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2},\frac{2}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{6}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{2}{4},\frac{2}{4}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{2}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2}{4},\frac{3}{6}\right),\left(\frac{2}{6},\frac{2}{6}\right),\left(\frac{2}{6},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right),\left(\frac{3}{6},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{6},\frac{2}{4}\right)\right\}.$$



57-nji surat

Bu gatnaşygyň häsiýetlerine seredeliň.

Ol refleksiwdir, ýagny drob özüne deňdir.

Ol simmetrikdir, ýagny x drobuň y-e deňliginden, y drobuň x-e deňligi gelip çykýar. Ol tranzitiwdir, ýagny $x=y$ we $y=z$ droblaryň deňliginden $x=z$ deňlik gelip çykýar. Diýmek, droblaryň arasyndaky deňlik gatnaşygy refleksiwlik, simmetriklik we tranzitiwlik häsiýetlerine eýe eken.

Kesgitleme. Eger X köplükde berlen R gatnaşyk refleksiw, simmetrik we tranzitiw häsiýetlere eýe bolsa, onda ol gatnaşyga ekwiwalentlik gatnaşygy diýilýär.

Kesimleriň arasyndaky parallellik gatnaşygy we geometrik figuralaryň arasyndaky deňlik gatnaşyklary ekwiwalentlik gatnaşyklarydyr.

Indi matematikada näme üçin gatnaşyklaryň arasynda ekwiwalentlik gatnaşygyna aýratyn üns berilýär diýen soraga jogap bermäge synanyşalyň.

Droblaryň deňliginiň, kesimleriň parallelliginiň we deňliginiň graflaryny seredeliň. Bu gatnaşyklaryň graflary beýleki gatnaşyklaryň graflaryndan tapawutlydyr, ýagny bu graflardan berlen köplügiň birnäçe bölek köplükden ybaratdygy görünýär. Mysal üçin, droblaryň deňligi üç bölek köplükden $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6}\right\},\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{6}\right\},\left\{\frac{1}{4}\right\}$ ybaratdyr. Bu bölek köplükleriň özara kesişmesi ýokdur, ýagny boş köplükdir we olaryň birleşmesi A köplüge deňdir. Kesimleriň deňliginiň we parallelliginiň hem edil şular ýaly häsiýetiniň bardygyny olaryň graflaryna seretmek arkaly göz ýetirýäris.

Teorema. Eger X köplükde ekwiwalentlik gatnaşygy berlen bolsa, onda ol gatnaşyk şol X köplügi özara jübüt-jübütden kesişmeýän bölek köplükleriň synplaryna (ýagny ekwiwalentlik synplara) bölýär.

Teorema. (*Ters teorema*). Eger X köplükde berlen haýsy-da bolsa bir gatnaşyk şol köplügi özara jübüt-jübütden kesişmeýän bölek köplüklere bölýän bolsa, onda ol gatnaşyk ekwiwalentlik gatnaşygydyr.

Bu teoremalary subutsyz kabul edýäris.

Geliň, indi biziň gündelik durmuşymyzda we matematikada ýygy-ýygydan gabat gelýän "tertip" we "tertip gatnaşygy" düşünjelerine seredeliň.

Mysallara seredeliň.

a) synpdaky okuwçylar köplügini tertipleşdirmek üçin olaryň boýunyň uzynlygy boýunça duruzmak ýeterlikdir. Bu gatnaşyk antisimmetrik we tranzitiwdir;

b) synpdaky okuwçylaryň köplügini olaryň doglan senesine görä hem tertipleşdirmek bolar, ýagny ol köplükde "ýaşy uludyr" gatnaşygyny ulanmaly. Bu gatnaşygynyň hem tranzitiwligi we antisimmetrikligi aýdyňdyr;

ç) synpyň okuwçylarynyň köplüginiň sanawyny türkmen elipbiýiniň harplarynyň geliş tertibinde ýazmak arkaly tertipleşdirmek bolar. Bu gatnaşyk hem antisimmetrik we tranzitiwdir.

Kesgitleme. Eger X köplükde berlen R gatnaşyk antisimmetrik we tranzitiw bolsa, onda oňa tertip gatnaşygy diýilýär.

Kesgitleme. Tertip gatnaşygy berlen X köplüge tertipleşen köplük diýilýär.

Mysal üçin, $X=\{2,8,12,32\}$ köplükde "kiçidir" we "kratnydyr" gatnaşyklaryna seredeliň:

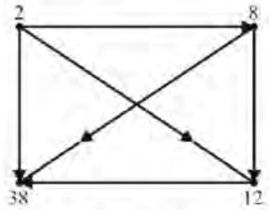
"Kiçidir" gatnaşygy:

$Q = \{(2,8),(2,12),(2,32),(8,12),(8,32),(12,32)\}$.

"Kratny" gatnaşygy:

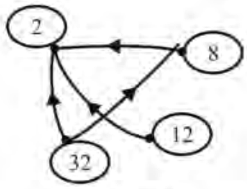
$R = \{(2,2),(8,8),(8,2),(12,12),(12,2),(32,32),(32,2),(32,8)\}$.

Olaryň graflary *(58-nji surat)*:



58-nji surat

Bu köplügi "kratny" gatnaşygy boýunça hem tertipleşdirmek bolar *(59-njy surat)*:



59-njy surat

Bu gatnaşyklaryň graflaryndan olaryň antisimmetriklik we tranzitiwlik häsiýetleriniň bardygy görünýär.

Bellik. Ähli gatnaşyklar diňe ekwiwalentlik ýa-da tertip gatnaşygyna bölünýändir diýmeklik ýalňyşdyr. Ol gatnaşyklaryň hiç birine degişli bolmadyk gatnaşyklar köpdür.

Gönükmeler

1. $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ köplükde "3-e böleniňde birmeňzeş galyndy galýar" diýen gatnaşyk berlen. Bu gatnaşygyň ekwiwalentlik gatnaşygydygyny görkeziň. X köplügi ekwiwalentlik synplaryna bölüň we ol synplary görkeziň. Näçe sany ekwiwalentlik synpy boldy?

2. Ýokarda berlen X köplükde "4-e böleniňde şol bir galyndy galýar" diýen gatnaşyk berlen bolsa, onda ol köplük näçe synpa bölündi? Ol synplaryň ählisini görkeziň.

3. X – kesimler köplüginde;

a) x parallel y;

b) x perpendikulýar y;

ç) x deňdir y;

d) x uludyr y;

e) x y-den 2 san kiçidir;

ä) x y-den 3 esse uludyr

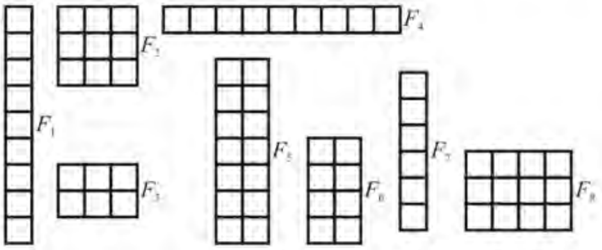
gatnaşyklar berlen. Bu gatnaşyklaryň haýsylary ekwiwalentlik we haýsylary tertip gatnaşygy bolýar?

4. $X = \{3,6,12,15\}$ köplükde "x san y sanyň bölüjisidir" diýen gatnaşyk berlen. Bu gatnaşygyň tertip gatnaşygy bolýandygyny görkeziň we onuň "uludyr" gatnaşygyndan näme tapawudynyň bardygyny aýdyň.

5. $Y = \{213,37,21,87,82\}$ köplükde "ýazgysynda birmeňzeş sifrler bar" diýen P gatnaşyk berlen. P gatnaşyk ekwiwalentlik gatnaşygy bolýarmy?

6. $Y = \{0,1,2,3,...,999\}$ köplükde "ýazgysynda deň mukdarda sifrler bar" diýen gatnaşyk berlen. Bu gatnaşygyň şol köplükde ekwiwalentlik gatnaşygydygyny görkezmeli.

7. $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8\}$ gönüburçluklaryň köplügi berlen. Bu köplükde "deňululyklydyr" diýen gatnaşygy guruň we onuň ekwiwalentlik synpy bolýandygyny görkeziň *(60-njy surat)*.



60-njy surat

8. N – natural sanlar köplügini "yzyndan gelýär" diýen gatnaşygyň kömegi bilen tertipleşdirip bolarmy?

9. 2-nji ýumuşdaky X köplügi "4-e böleninde şol bir galyndy galýar" gatnaşygy boýunça synplara böleninde näçe synp emele gelýär? Bu synplary ýazmaly. Her synpdan bir elementi atlandyrmaly.

10. Näme üçin kesimleriň deňligi ekwiwalentlik gatnaşygy bolýar, "gysgadyr" gatnaşygy bolsa ekwiwalentlik gatnaşygy bolmaýar?

11. {1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11} – köplükde T – "şol bir bölüjileri bar" gatnaşygy berlen. T gatnaşygyň ekwiwalentlik gatnaşygydygyny görkezmeli we ekwiwalentlik synplaryň ählisini görkezmeli.

12. 0-dan 999-a çenli bitin sanlaryň köplüginde R – "ýazgysynda şol bir sifrler bar" gatnaşygy berlen. R gatnaşygyň ekwiwalentlik gatnaşygydygyny görkezmeli. Berlen sanlaryň köplügi näçe synpa bölünýär? Her bir synpyň iň kiçi we iň uly elementini atlandyrmaly.

13. Natural sanlar köplügi "şol bir sifr bilen tamamlanýar" diýen gatnaşyk boýunça näçe synpa bölünýär?

14. X – kesimleriň köplügi. Aşakdaky gatnaşyklaryň haýsysy bu köplükde tertip gatnaşygy bolýar.

a) "x deňdir y-e";
b) "x y-den 2 *sm* gysgadyr";
ç) "x uzyndyr y-den";
d) "x y-den 3 *sm* uzyndyr".

15. X = {3, 6, 9, 12, 15} köplügi "kiçidir ýa-da deňdir" gatnaşygy tertipleşdirýärmi? Bu gatnaşygyň grafyny gurmaly.

16. "Soňundan gelýär" gatnaşygy natural sanlar köplügini tertipleşdirýärmi? "gönüden-göni soňundan gelýär" gatnaşygy nähili?

17. M – tekizlikdäki töwerekleriň köplügi.

R – "x töwerek y töweregiň içinde ýerleşýär" gatnaşygy berlen M köplügi tertipleşdirýärmi?

18. Tekizlikdäki göni çyzyklaryň köplügini aşakdaky gatnaşyklar bilen tertipleşdirmek bolarmy:

a) "x göni çyzyk y göni çyzygy kesýär";
b) "x göni çyzyk y göni çyzyga perpendikulýar".

§ 37. Degişlilik düşünjesi

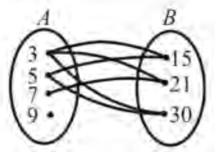
Biz ýokarda köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşyklara seretdik. Ol gatnaşyklardan başga matematikada iki köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşyga hem seredilýär. Onuň ýaly gatnaşyklara degişlilik diýilýär. Oňa koordinata göni çyzygyndaky nokatlar we ol nokatlaryň koordinatalaryny görkezýän hakyky sanlaryň arasyndaky degişliligi, koordinata tekizligindäki nokatlar bilen hakyky sanlaryň jübütleriniň (ol nokatlaryň koordinatalarynyň) arasyndaky degişliligi mysal getirmek bolar.

Kesgitleme. X we Y köplügiň elementleriniň arasyndaky degişlilik diýip X we Y köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň jübütler köplüginiň bölegine aýdylýar.

Oňa mysal getireliň:

$A=\{3,5,7,9\}$, $B=\{15,21,30\}$ köplükleriň elementleriniň arasynda P: "x san y sanyň bölüjisi" degişlilik berlen bolsun (ony gysgaça P: "bölüjisi" diýip hem bermek bolar). Bu degişliligiň jübütleriniň köplügi $\{(3,15);\ (3,21);\ (3,30);\ (5,15);\ (5,30);\ (7,21)\}$ bolar. Ol hakykatdan hem $A\times B=\{(3,15), (3,21), (3,30), (5,15), (5,21), (5,30), (7,15), (7,21), (7,30), (9,15), (9,21), (9,30)\}$ köplügiň bölegidir.

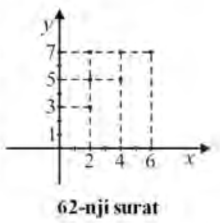
Degişliligiň hem gatnaşyklardaky ýaly grafyny gurmak bolar. Onuň üçin her köplügiň elementlerini aýratyn ýapyk konturda ýerleşdirýäris, her bir elementi nokat bilen belgiläp, degişli elementlere strelkalar geçirýäris *(61-nji surat)*.



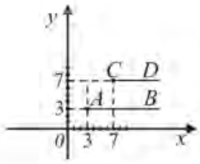
61-nji surat

Grafda 3-e degişli nokatdan 15-e degişli nokada strelka gidýän bolsa, onda 3 san 15-iň bölüjisidir, ýagny "bölüjisi" degişlilik ýerine ýetýändir. San köplükleriniň elementleriniň arasynda berlen degişliligiň koordinatalar tekizliginde grafigini gurmak bolar. Onuň üçin berlen degişlilikdäki hemme emele gelen elementleriň jübütleriniň köplügini koordinatalar tekizliginde ýerleşdirilýär. Koordinatalar tekizliginde emele gelen nokatlaryň köplügi berlen degişliligiň grafigidir.

Goý, $X=\{2,4,6\}$ we $Y=\{1,3,5,7\}$ köplükleriň elementleriniň arasynda "kiçi" degişlilik berlen bolsun. Bu degişliligiň grafigini guralyň *(62-nji surat)*. Onuň üçin ilki berlen degişlilikde boljak elementleriň jübütlerini ýazalyň: (2,3), (2,5), (2,7), (4,5), (4,7), (6,7). X köplügiň elementlerini Ox okda, Y köplügiň elementlerini bolsa Oy okda ýerleşdirmek bilen grafigi guralyň.



62-nji surat



63-nji surat

Alnan grafik X we Y köplükleriň elementleriniň arasyndaky "kiçi" degişliligiň grafigidir.

Köplükleriň elementleri tükeniksiz bolanda emele gelýän jübütler hem tükeniksiz bolar. Şonuň ýaly halda hem degişliligiň grafigini gurup bolar. Mysal hökmünde $X=R$ we $Y=\{3,7\}$ köplükleriň elementleriniň arasyndaky "uly" degişliligiň grafigini guralyň. Bu halda X köplügiň elementleri absissalar okuny durşuna dolduryar, Y köplük bolsa 3 we 7 elementlerden duryar *(63-nji surat)*.

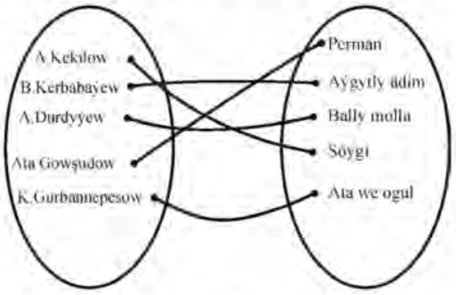
3-den uly hemme sanlar OX okunda 3 nokatdan sagda ýerleşer we $(3;\infty)$ köplüge degişli bolan absissasy bardyr, ordinatasy 3-e deňdir. (3;3) nokat grafige degişli däldir, şonuň üçin hem emele gelýän AB şöhläniň başlangyjy ýokdur. Şonuň ýaly-da absissasy $(7;\infty)$ köplüge degişli, ordinatasy 7-ä deň nokatlaryň köplügi CD şöhläni emele getirer.

Gönükmeler

1. Tablisada gurnaklaryň we sport seksiýalarynyň iş tertibi görkezilen, hepdäniň çarşenbe güni haýsy gurnaklar we seksiýalar işleýär? Matematikadan gurnak haýsy gün geçirilýär? Tablisada haýsy köplükleriň arasyndaky haýsy degişlilik görkezilipdir? Bu degişlilikde haýsy köplükler barada gürrüň gidýär.

Hepdäniň günleri / Gurnagyň ady	Duşenbe	Sişenbe	Çarşenbe	Penşenbe	Anna	Şenbe
Matematika				■		
Ansambl		■				
Tans			■			
Woleýbol	■					
Küşt						■
Futbol					■	

2. A we B köplükleriň elementleriniň arasyndaky degişliligiň manysyny düşündiriň. B köplügiň elementlerinden A köplügiň iki elementini degişli edýäni barmy? Eger şeýle bolan bolsa, ol degişlilik nämäni aňladardy?



64-nji surat

3. Tablisa berlen. a setiriň we b sütüniň kesişmesinde ýerleşýän "a san b sana kratny" bolan kletkalary ştrihläň. Hemme ştrihlenen kletkalaryň köplügi nämäni aňladýar? Ol degişliligiň grafyny guruň.

a b	165	357	207	363	273	246
7						
6						
11						
13						

4. $X = \{1,2,3,4,6\}$ we $Y = \{3,7\}$ köplükleriň elementleriniň arasynda P: "x san y sandan kiçi" $x \in X$, $y \in Y$ degişlilik berlipdir.

a) P degişlilikde bolan jübütleriň köplügini ýazyň.

b) X we Y köplükleriň elementleriniň arasynda berlen P degişliligiň grafyny we grafigini guruň.

5. A={suw, howa, demir, mermer, benzin, süýt} we B={gaty, suwuk, gaz} köplükleriň elementleriniň arasynda "a element b haldadyr" degişlilik berlen $(a \in A, b \in B)$.

a) A we B köplükleriň elementleriniň berlen degişlilikde bolan jübütleriniň köplügini ýazyň;

b) Berlen degişliligiň grafyny guruň.

6. M we P köplükleriň elementleriniň arasyndaky degişlilik grafyň kömegi bilen berlipdir;

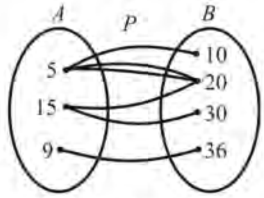
a) M köplügiň we P köplügiň elementlerini ýazyň;

b) ol köplükleriň grafyna degişli jübütleriniň köplügini ýazyň.

7. $C=\{15,16,17,18,19\}$ we $D=\{12,13,14,15,16\}$ köplükler berlen C we D köplükleriň elementleriniň arasynda "c san d sandan 3 san uly" $c \in C, d \in D$ degişlilik berlen. Ol degişliligiň grafyny guruň.

8. $K=\{-5,2,-3,3,4,-10,11,13\}$ köplük we N natural sanlaryň köplügi berlen. Ol köplükleriň elementleriniň arasynda "$k \in K$ we onuň kwadraty $n \in N$" degişlilik berlen. Berlen degişlilikdäki hemme jübütleriň köplügini ýazyň. Grafyny guruň.

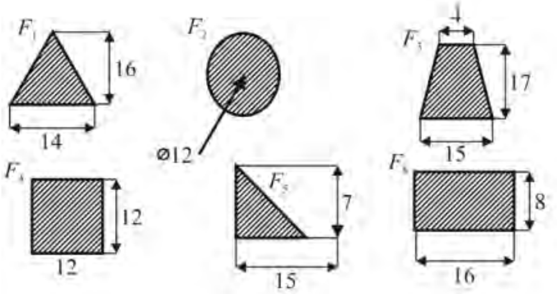
9. A we B köplükleriň elementleriniň arasyndaky P degişlilik grafyň kömegi bilen berlipdir. Berlen P degişliligiň nähili degişlilikdigini sözleriň kömegi bilen ýazyň *(65-nji surat)*.



65-nji surat

10. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ we $B=\{5, 6, 7\}$ köplükleriň elementleriniň arasyndaky degişlilik birinji komponenti A köplüge, ikinji komponenti B köplüge degişli boljak "ikinji komponenti birinji komponentinden uly" degişlilik berlen. Hemme jübütleriň köplügini ýazyň. Grafyny guruň.

11. Çyzgydaky figuralaryň meýdanyny hasaplamaly. Haýsy köplükleriň arasynda degişlilik guraldy? Her bir figurany $F_1, F_2, ..., F_6$ bilen belläp, bu degişliligiň grafyny gurmaly *(66-njy surat)*.



66-njy surat

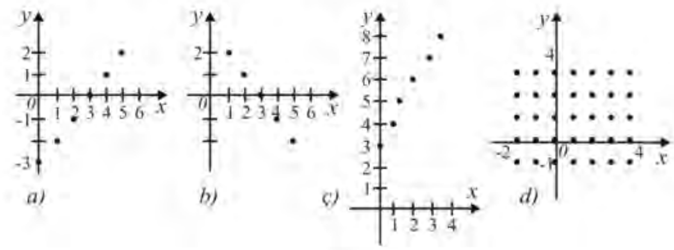
12. $M=\{-1,1,-2,2,-3,3,0,-4,4\}$ we N natural sanlar köplügi berlen. Bu köplükleriň arasynda R – "$\underline{m}$ sanyň kwadraty $\underline{n}$ sana deň" degişliligi berlen, bu ýerde, $m \in M$, $n \in N$. Berlen degişlilikde bolan jübütleri ýazmaly. Aşakdakylar çynmy:

a) $(-3,9) \in R$; b) $(0,0) \in R$; ç) $(-4,16) \in R$?

13. $A=\{1, 2, 4, 6\}$ we $B=\{5, 7\}$ köplükleriň elementleriniň arasynda "kiçidir" degişliligi berlen. Bu degişliligiň grafigini gurmaly. Bu köplükleriň elementleriniň arasyndaky "1 san kiçidir" degişliliginiň grafigi nähili bolar?

14. $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ we $Y=Z$ köplükleriň elementleri "x san y-dan 3 san kiçidir" degişliligi bilen baglanyşykly, bu ýerde $x \in X$, $y \in Y$ *(67-nji surat)*.

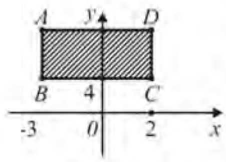
Aşakdaky çyzgylaryň haýsysy berlen degişliligiň grafigi?



67-nji surat

Неподшитые заметки Стр.122

Çyzgyda X we Y köplükleriň arasyndaky degişlilik berlen: a) berlen degişlilige näçe jübüt eýedir?; b) X köplüge 2; 0; 2, 7; –1,5 sanlar degişlimi?; ç) Y köplüge 4; 0; –1; 0,5 sanlar degişlimi?; d) (0; 0), (–1; 4), (–2; –4) – jübütler berlen degişlilige eýemi?



68-nji surat

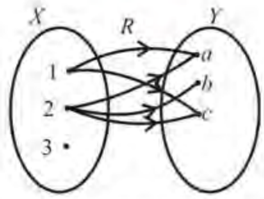
15. X we Y köplükleriň arasyndaky P degişliligiň grafigi $ABCD$ gönüburçluk bolýar. Bu grafiga degişli nokatlaryň koordinatalaryny aýtmaly.

X we Y köplügine degişli sanlaryň harakteristik häsiýetini görkezmeli *(68-nji surat)*.

16. $X=\{2,5\}$ we $Y=\{3,6\}$ köplükler berlen. Berlen köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň elementlerini sanamaly we alnan köplügiň ähli bölek köplügini tapmaly. Bölek köplükleriň haýsysy:

a) "uludyr"; b) "kiçidir"; ç) "uludyr ýa-da deňdir" degişliligi kesgitleýär?

§ 38. Berlen degişlilige ters degişlilik



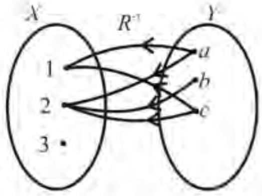
69-njy surat

Goý, $X=\{1, 2, 3\}$ we $Y=\{a, b, c\}$ köplükleriň elementleriniň arasyndaky R degişlilik grafyň kömegi bilen berlen bolsun *(69-njy surat)*.

Grafdan görnüşi ýaly, X köplügiň 1 elementine Y köplügiň a elementi we c elementi degişli, $2 \in X$ elemente Y köplügiň hemme elementleri degişli. Ol degişliligi başgaça $1Ra$, $1Rc$, $2Ra$, $2Rb$, $2Rc$ görnüşinde ýazmak bolar.

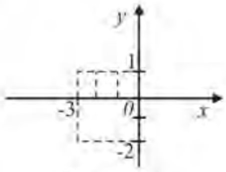
Şol grafyň kömegi bilen $a \in Y$ elemente X köplügiň 1 we 2 elementleri, $b \in Y$ elemente $2 \in X$ element, $c \in Y$ elemente Y köplügiň 1 we 2 elementleri degişli bolan täze degişliligi alyp bileris. Bu halda X we Y köplügiň elementleriniň arasynda berlen R degişlilige Y we X köplükleriň elementle- [illegible] R degişlilige ters degişliligi R^{-1} bilen belgiläris. R^{-1} degişliligiň grafy R degişliligiň grafyndaky strelkalary tersine üýtgetmek bilen alnar.

X we Y köplükleriň arasyndaky degişlilik $R=\{(1,a), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$ bolsa, Y we X köplükleriň elementleriniň arasynda berlen R^{-1} degişlilik $R^{-1}=\{(a,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c, 2)\}$ bolar, ýagny R^{-1} degişliligi R degişlilikde berlen her bir jübütiň kömponentleriniň ornuny çalşyrmak bilen alyp bolýar *(70-nji surat)*.



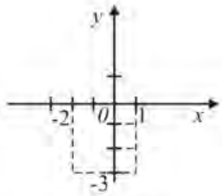
70-nji surat

Geliň, gönüburçly kordinatalar ulgamynda R we R^{-1} degişlilikleriň özara ýerleşişlerine seredeliň. Goý, $X=\{-3,-2,-1,0\}$ we $Y=\{0,1,-2\}$ san köplükleriniň arasynda R "$x \in X$ san $y \in Y$ sandan kiçi" degişlilik berlen bolsun. Onuň jübütleriniň köplügi $R=\{(-3,0),(-3,1), (-3,-2), (-2,0), (-2,1), (-1,0), (-1,1), (0,1)\}$ bolar. R degişliligiň grafyny gönüburçly koordinatalar ulgamynda guralyň *(71-nji surat)*.



71-nji surat

Berlen degişlilige ters degişlilik bolan $R^{-1}=\{(0,-3), (1,-3), (-2,-3), (0,-2), (1,-2), (0,-1), (1,-1), (1,0)\}$ degişliligiň grafigini guralyň *(72-nji surat)*.

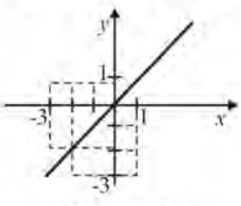


72-nji surat

Geliň, R we R^{-1} degişlilikleriň grafiklerini bir çyzgyda ýerleşdireliň *(73-nji surat)*.

Bu ýerde R degişliligiň we oňa ters bolan R^{-1} degişliligiň grafikleriniň birinji we üçünji koordinata burçlarynyň bissektrisasyna görä simmetrikdigine göz ýetireris.

Biziň mysalymyzdaky Y we X köplükleriň arasyndaky R^{-1} degişliligiň "$y \in Y$ san $x \in X$ sandan uly" boljakdygyny bellä̈liň.



73-nji surat

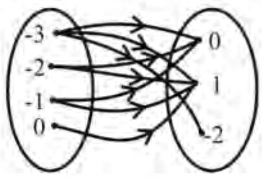
Kesgitleme. X we Y köplükleriň arasyndaky R degişlilige ters degişlilik diýip, Y we X köplükleriň arasyndaky xRy bolanda we diňe şonda $yR^{-1}x$ $(y \in Y, x \in X)$ boljak R^{-1} degişlilige aýdylýar.

Ters degişlilikden biz köp peýdalanýarys. Oňa mysal getireliň. Goý, X mekdepdäki synplaryň köplügi, Y bolsa şol synplaryň synp ýolbaşçylarynyň köplügi bolsun. Onda X we Y köplükleriň arasyndaky R degişlilik: "x synpyň ýolbaşçysy y mugallym" bolsa Y we X köplükleriň arasyndaky R^{-1} degişlilik "y mugallym x synpyň ýolbaşçysy" bolar.

Gönükmeler

1. ABC üçburçlugy çyzyň. Goý, X şol üçburçlugyň burçlarynyň köplügi, Y bolsa onuň taraplarynyň köplügi bolsun. R: "x burç y tarapyň garşysynda ýatýar" degişliligiň R degişlilige degişli hemme jübütleri görkeziň. Berlen degişlilige ters R^{-1} degişliligi formulirläň we bu degişliligiň hemme jübütlerini görkeziň.

2. X we Y köplükleriň elementleriniň arasyndaky P degişlilik grafyň kömegi bilen berlipdir *(74-nji surat)*. X we Y köplükleri, berlen degişlilikdäki jübütleriň köplügini ýazyň. P degişliliginiň grafigini guruň.



74-nji surat

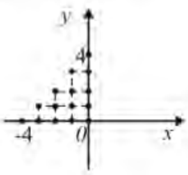
3. 2-nji meseledäki P degişlilige ters P^{-1} degişliligiň grafyny guruň, P^{-1} degişliligiň jübütleriniň köplügini ýazyň we gönüburçly koordinatalar ulgamynda grafyny guruň.

4. Q degişlilik grafigiň kömegi bilen berlipdir (*75-nji surat*).

a) Q degişliligiň jübütleriniň köplügini ýazyň.

b) Q degişlilige ters Q^{-1} degişliligiň grafyny we grafigini guruň.

ç) Q we Q^{-1} degişlilikleriň grafiklerini deňeşdiriň.

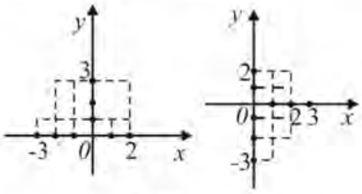


75-nji surat

5. Q we P degişlilikleriň grafikleri berlen. Q we P degişlilikler özara ters diýip bolarmy? Näme üçin?

6. Kesimleriň köplüginde şeýle degişlilikler berlen: "gysga", "2 esse gysga", "6 *sm* gysga". Olara ters degişlilikleri nähili berip bolar?

7. P={(1,1), (3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (6,1)} köplük X={1, 3, 4, 6} we Y={0,1} köplükleriň arasyndaky degişliligi emele getirýär. P degişlilige ters bolan P^{-1} degişliligi tapmaly. P we P^{-1} degişlilikleriň grafigini bir koordinata tekizliginde gurmaly *(76-njy surat)*.



76-njy surat

8. X={0, 2, 4, 6, 8, 10} köplükde, T "x san y sandan 2 birlik kiçi" degişlilik berlen. Bu degişlilige ters bolan T^{-1} degişliligi tapmaly we koordinata tekizliginde grafigini gurmaly.

9. X – ABC üçburçlugyň burçlarynyň köplügi, Y – ABC üçburçlugyň taraplarynyň köplügi. X we Y köplükleriň arasynda P "x burç y tarapyň garşysynda ýatýar" degişlilik berlen. P degişlilige ters bolan P^{-1} degişliligi: a) üýtgeýän iki ululykly sözlem; b) graf arkaly bermeli.

10. Kesimleriň köplüginde "uzyndyr", "3 esse uzyndyr", "5 *sm* uzyndyr" gatnaşyklar berlen. Berlen gatnaşyklara ters gatnaşyklary nädip bermek bolar?

11. Aşakdaky meseleler başlangyç synplaryň okuw kitaplaryndan alnan. Meseläni düşündirip çözmeli, mesele çözülende nähili gatnaşyklara seredilýär:

a) Galamyň uzynlygy 15 *sm*. Ol ruçkadan 1 *sm* uzyn. Ruçkanyň uzynlygy näçä deň?

b) Bagda 8 arça bar. Bu bolsa sosnalardan 2 san az. Bagda näçe sosna bar?

ç) Uçarlar 6, bu bolsa dikuçarlardan 2 esse köp. Dikuçarlar uçarlardan näçe esse az? Dikuçarlaryň sany näçe?

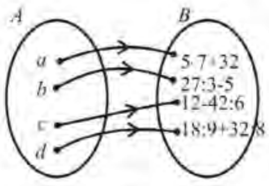
d) Iki kesim çyzmaly: birinji kesimiň uzynlygy 6 *sm*. Ol ikinjiden 2 esse uzyn. Ikinji kesimiň uzynlygy näçe?

e) Stoluň bahasy 240 man., bu bolsa oturgyçdan 6 esse gymmat. Oturgyjyň bahasy näçe?

§ 39. Özara bir bahaly degişlilik. Deňkuwwatly köplükler

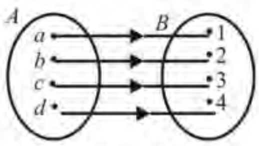
X we Y köplükleriň arasyndaky mümkin bolan degişliliklerden, köplenç, X köplügiň her bir elementine Y köplügiň diňe bir elementi degişli boljak we Y köplügiň her bir elementi X köplügiň diňe bir elementine degişli boljak degişlilik bilen köp iş salşylýar. Şonuň ýaly degişliliklere özara bir bahaly degişlilik diýilýär. Özara bir bahaly degişliliklere mysallar getireliň.

1-nji mysal. Goý, $A=\{a,b,c,d\}$ we $B=\{5\cdot7-32;\ 27:3-5;\ 12-42:6;\ 18:9+32:9\}$ köplükler berlen we olaryň arasyndaky degişlilik grafyň kömegi bilen berlen bolsun *(77-nji surat)*. A köplügiň her bir elementine B köplügiň diňe bir elementi degişli bolsun ($a\to5\cdot7-32$; $b\to27:3-5$; $c\to12-42:6$; $d\to18:9+32:9$) we B köplügiň her bir elementi A köplügiň ýeke-täk elementine degişli bolsun. Onda A we B köplükleriň arasyndaky degişlilik özara bir bahalydyr.



77-nji surat

2-nji mysal. Goý, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ bolsun. Ol köplükleriň elementleriniň arasyndaky degişlilik şeýle şekillendirilen bolsun *(78-nji surat)*.



78-nji surat

Şeýlelikde, A köplügiň her bir elementine (A köplügiň her bir nokadyndan bir strelka gaýdýar) we B köplügiň her bir elementine A köplügiň diňe bir elementi degişli edilip graf gurlan. Berlen degişlilige A we B köplükleriň elementleriniň arasyndaky "özara bir bahaly" degişlilik diýilýär.

3-nji mysal. Goý, X koordinata gönüsiniň nokatlarynyň köplügi, $Y=R$ (hakyky sanlar) köplügi bolsun, onda koordinata gönüsiniň her bir nokadyna bir san degişli bolýar. Şol sana bolsa nokadyň koordinatasy diýilýär. Bu ýerde berlen degişlilik *X* köplük bilen *Y* köplügiň arasyndaky özara bir bahaly degişlilik bolýar.

4-nji mysal. Goý, *X* koordinata tekizliginiň nokatlarynyň köplügi, *Y* hakyky sanlar köplüginden ybarat bolan jübütleriň (koordinatalaryň) köplügi bolsun, onda tekizligiň her bir nokadyna diňe sanlaryň bir jübüti degişli bolýar. Bu degişlilik hem özara birbelgili degişlilikdir. Özara bir bahaly degişliligi matematikanyň başlangyç düşünjelerinde tejribeliligiň üsti bilen ýüze çykaryp görkezip bolýar.

$3=3$ düşünjäni özara bir bahaly degişlilikde beýan edip bolýar.

Ilki 3 sany kwadrat almaly:

Soňra 3 sany tegelek almaly:

Bu figuralary bir kwadratyň üstüne bir tegelekden goýup çykmaly:

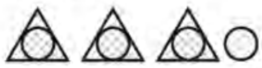
Şonda kwadrat bilen tegelegiň sanynyň deňligi görünýär. Sebäbi artyk kwadrat ýa-da tegelek galmady.

5-nji mysal. $3<4$ düşünjäni beýan etmek üçin hem özara birbelgili degişliligi ulanmak ýerliklidir.

3 (üç) sany üçburçluk:

4 (dört) sany tegelek:

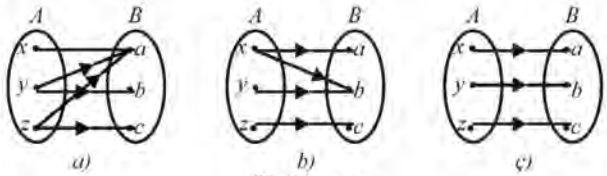
Öňki mysaldaky düzgüni gaýtalamak:



Bu ýerden görnüşi ýaly, bir tegelek artyk galdy ýa-da bir üçburçluk ýetmedi diýip aýdyp bolýar. Onda üçburçluklar tegeleklerden az diýilýär.

Şoňa görä-de, üçburçluklaryň we tegeleklerin sany boýunça 3<4 diýip, netije çykaryp bolýar. Ýene-de birnäçe mysallar bilen düşünjäni berkideliň.

6-njy mysal. $A=\{x,y,z\}$ we $B=\{a,b,c\}$ köplükleriň arasynda birnäçe degişlilik guralan *(79-njy surat)*. Olaryň haýsysy özara bir bahaly degişlilik bolýar?



79-njy surat

a) ç şekilde berlen degişlilik özara bir bahaly degişlilik bolýar, sebäbi A köplügiň her bir elementi B köplügiň diňe bir elementi bilen degişli we B köplügiň her bir elementi A köplügiň diňe bir elementi bilen degişli. Bu kesgitlemä görä gabat gelýär.

b) a şekildäki gatnaşyk özara bir bahaly däl. Sebäbi B köplügiň b elementi A köplügiň hiç bir elementi bilen gatnaşmaýar.

ç) b şekildäki gatnaşyk hem özara bir bahaly degişlilik däl. Sebäbi A köplügiň y elementi B köplügiň hiç bir elementi bilen degişli däl.

Şeýlelikde, berlen şekilleriň ç görnüşi özara bir bahaly gatnaşyk, a, b görnüşleri özara bir bahaly gatnaşyk däl.

7-nji mysal. Goý, X koordinata göni çyzygynyň nokatlarynyň köplügi, $Y=R$ bolsun. Her bir nokada onuň koordinatasyny aňladýan ýeke-täk san degişli we her bir hakyky san ýeke-täk nokada degişli bolany üçin, bu degişlilik özara bir bahalydyr.

Başlangyç synplarda matematikada özara bir bahaly degişlilikden peýdalanylýar, ýöne onuň ýaly degişlilik düşünjesi girizilmeýär. Sanlary sanamak, deňeşdirmek özara bir bahaly degişlilige esaslanandyr. Mysal üçin, 4 bilen 5 sanlary deňeşdirilende 5 sany kwadratyň üstüne 4 sany üçburçlugy her kwadrata bir üçburçluk goşmak bilen özara bir bahaly degişlilik ýola goýulýar we bir kwadratyň artyk galýany üçin 5>4 bolýandygy aýdylýar. 4=4 bolýandygy hem şoňa meňzeş ýola goýulýar.

Biz özara bir bahaly degişlilik barada düşünje alanymyzdan soň köplükleriň arasyndaky ýene bir gatnaşygy – deňkuwwatlylyk gatnaşygy ýola goýup bileris.

Kesgitleme. Eger X we Y köplükleriň arasynda ozara birbelgilik bar bolsa, onda X we Y köplüklere deňkuwwatly köplükler diýilýär.

"X köplük Y köplüge deňkuwwatly" diýen ýazgy gysgaça $X \sim Y$ görnüşde belgilenilýär. Mysal üçin, $X=\{1,3,5,7,9\}$ we $Y=\{10,30,50,70,90\}$ köplükler deňkuwwatlydyr, sebäbi X we Y köplükleriň arasynda özara birbelgili degişliligi goýup bolýar.

Deňkuwwatlylyk gatnaşygy ekwiwalentlik gatnaşygydyr. Sebäbi ol refleksiwdir, simmetrikdir we tranzitiwdir. Çünki her bir köplük öz-özüne deňkuwwatly bolany üçin ol refleksiwdir, ýagny $X \sim X$.

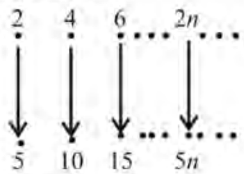
Eger X köplük Y köplük bilen deňkuwwatly bolsa, onda Y köplük hem X köplük bilen deňkuwwatlydyr, ýagny $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$. Bu simmetrikligi aňladýar.

Eger X köplük Y köplük bilen, Y köplük hem Z köplük bilen deňkuwwatly bolsa, onda X köplük hem Z köplük bilen deňkuwwatlydyr, ýagny $X \sim Y$ we $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$, bu bolsa tranzitiwligi aňladýar.

Köplükleriň deňkuwwatly gatnaşykda bolmagy üçin olaryň tükenikli köplükler bolmagy hökman däldir, tükeniksiz köplükleriň arasynda hem deňkuwwatlylyk bolup biler. X we Y köplükler deňkuwwatly bolsalar, ol köplükler barada "elementleriniň sany deň" ýa-da "X köplükde näçe element bar bolsa, Y köplükde hem şonça element bar" diýilýär.

Tükeniksiz köplüklere seredeliň.

Goý, X jübüt natural sanlaryň köplügi we Y 5-e kratny natural sanlaryň köplügi bolsun. Ol köplükleriň elementleriniň arasynda her bir $2n$ natural sana $5n$ sany degişli edip goýsak, özara bir bahaly degişlilik alarys *(80-nji surat)*. Her bir $2n$ natural sana $5n$ san degişli we her bir $5n$ sana diňe bir $2n$ san degişli. Diýmek, $X \sim Y$.



80-nji surat

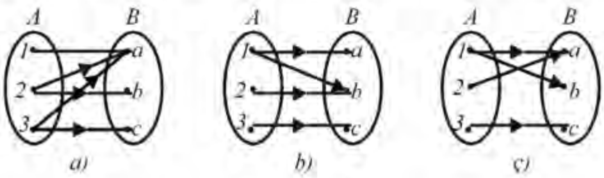
Şonuň ýaly N natural sanlar köplügi bilen X jübüt sanlaryň köplüginiň deňkuwwatlylygyny görkezmek bolar. Umuman, bu mysalyň üsti bilen tükeniksiz köplügiň özüniň bölek köplügine deňkuwwatlydygyny görkezmek bolar.

Gönükmeler

1. $A=\{1,3,5\}$ köplüge deňkuwwatly bolan üç sany köplügi mysal getiriň.

2. 3-e kratny natural sanlaryň köplügi bilen N natural sanlaryň köplügi deňkuwwatlymy?

3. $A=\{1,2,3,4\}$ we $B=\{a,b,c,d\}$ köplükleriň arasynda birnäçe degişlilik guralan *(81-nji surat)*. Olaryň haýsysy özara bir bahaly degişlilik bolýar?



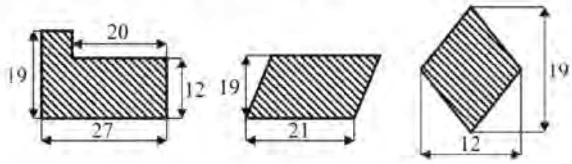
81-nji surat

4. $X=\{k,l,m,n,p\}$ we $Y=\{1,2,3,4,5\}$ köplükler berlen. Berlen köplükleriň arasynda üç sany dürli görnüşli özara bir bahaly degişlilik guramaly. X we Y köplükleriň arasynda şeýle degişlilikden näçesini guramak bolar?

5. $A=\{1,2,5\}$ we $B=\{3,7\}$ köplükler berlen. $A\times B$ we $B\times A$ köplükleri tapmaly. Haýsy-da bolsa bir usul bilen bu köplükleriň arasynda özara bir bahaly degişlilik guramak bolarmy?

6. N – natural sanlaryň köplügi, Y – natural sanlaryň kwadratlarynyň köplügi. X we Y köplükleriň arasynda özara bir bahaly degişlilik guramak boljakdygyny görkezmeli.

7. M – 82-nji çyzgyda şekillendirilen geometrik figuralaryň köplügi.



82-nji surat

R – hakyky sanlaryň köplügi.

Her bir figura onuň meýdanyny degişli edeliň. Bu degişlilik M we R köplükleriň arasynda özara bir bahaly bolarmy?

8. P gatnaşykda bolan (x, y) jübütleriň degişli bahalary tablisada berlen:

x	-1	-1	-2	-2	0	0	1
y	3,5	7	3,5	7	3,5	7	3,5

Bu gatnaşyga özara birbelgili degişlilik diýip bolarmy?

9. Funksiýa tablisa görnüşinde berlen.

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	0	0,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-0,5	0

Funksiýanyň kesgitleniliş ýaýlasyny we bahalary ýaýlasyny tapmaly, funksiýanyň grafigini gurmaly.

10. a) $X\sim X$; b) $X\sim Y \Rightarrow Y\sim X$; ç) $X\sim Y$ we $Y\sim Z \Rightarrow X\sim Z$ bolýandygyny subut etmeli.

11. Köplükleriň deňlik gatnaşygynyň häsiýetine kesgitleme bermeli. Bu gatnaşyk ekwiwalentlik gatnaşygy bolýarmy?

12. Köplükleriň arasyndaky bölek köplük gatnaşygy nähili häsiýetlere eýe? Bu gatnaşygyň tertip gatnaşygy bolýandygy çynmy?

13. Jübüt natural sanlar köplüginiň we täk natural sanlar köplüginiň deňkuwwatlydygyny subut etmeli.

14. Natural sanlaryň N köplüginden onuň bilen deňkuwwatly bolan üç sany bölek köplügi bölüp almaly.

15. Meselede gürrüň edilýän köplükleriň deňkuwwatlydygyny subut etmeli:

a) 20-den kiçi ähli ikibelgili sanlary ýazmaly. Her bir sany 5 esse ulaltmaly;

b) birbelgili jübüt sanlaryň ählisini ýazmaly we bu sanlaryň her birini 3 esse ulaltmaly. Nähili sanlar emele geldi: jübütmi ýa-da täk?

16. A – jübüt natural sanlaryň köplügi; B – droblaryň köplügi – $\frac{1}{n}, n \in N$; C – sanlaryň köplügi – $2^n, n \in N$; D – droblaryň köplügi – $\frac{1}{2n}, n \in N$. Köplükler berlen. Deň kuwwatly köplükleriň jübütlerini tapyň. Berlen köplükleriň haýsysy natural sanlar köplügine deň kuwwatly.

II bap
NATURAL WE NOL SANLAR

§ 40. Noluň we natural sanyň ýüze çykyşynyň taryhy

1, 2, 3, 4 ... sanlara natural sanlar diýilýär. Natural san baradaky düşünje matematikanyň esasy düşünjeleriniň biridir. Bu sanlaryň ýüze çykmagyna esasy sebäp, adamlaryň gündelik durmuşda san we sanamak arkaly çözülýän meselelere duçar bolmagydyr.

Natural sanlar baradaky düşünjäniň kemala gelmegi özüniň birnäçe döwürlerini başdan geçiripdir. Gadymy döwürlerde tükenikli iki köplügi deňeşdirmek üçin, bu köplügi başga bir köplük bilen özara bir bahaly degişlilik gurapdyrlar, ýagny şu döwürde adamlar köplügiň elementini sanamazdan kabul edipdirler. Meselem, bäş zatdan durýan köplüge, olar "bir elindäki barmaklaryça", ýigrimi zatdan durýan köplüge, "bir adamyň eliniň we aýagynyň barmagyça" diýip düşünipdirler. Şu usulda deňeşdirmek käbir kemçiliklere eýe bolupdyr, ýagny deňeşdirilýän köpçülikler bir wagtda aýdyň görünmeýär.

Birnäçe müňýyllyklardan soň, adamlar natural sanlary döretmek tapgyryna geçipdirler, köplükleri deňeşdirmek üçin araçy köplükleri: ownuk daşjagazlary, balykgulaklary, barmaklary ulanyp başlapdyrlar. Şu araçy köplükler natural sanlaryň ýüze çykmagyna sebäp bolupdyr, şu döwürde san barada hiç hili gürrüň bolman, diňe bäş sany daşjagaz, bäş barmak barada gürrüň gidipdir. Köplügiň elementleri araçy köplükler arkaly atlandyrylypdyr. Meselem, haýsy-da bolsa bir taýpalarda bäş elementli köplük "el", ýigrimi elementli köplük "tutuş bir adam" diýip atlandyrylypdyr.

Adamlar haçan-da araçy köplükler bilen amallar geçirmegi öwrenenlerinden soň, bar bolan umumylygy ýüze çykarmagy başarypdyrlar.

Meselem, baş barmak we baş almanyň arasyndaky umumylyk. Meselem, şu döwürde almalar sanalanda, bir alma, iki alma we *ş.m.* däl-de, "bir, iki, üç, we ş.m." sözler aýdylypdyr. Şu döwür natural sanlaryň ýüze çykmagynda esasy döwür bolupdyr. Bu barada görnükli matematik N.N.Luzin şeýle diýipdir: "Birlikleri döreden (açan däl-de, döreden) adamzadyň öňünde biz baş egmelidiris. Sanlaryň ýüze çykmagy bilen, "Matematika" hem ýüze çykypdyr. Beýik ylmyň taryhy sanlaryň ýüze çykmagy bilen başlapdyr". Wagtyň geçmegi bilen adamlar sanlary atlandyrmak däl-de, olary bellemegi, olaryň üstünde amallar geçirmegi öwrenipdirler. Gadymy Hindistanda sanlaryň onluk ýazgysynyň we noluň ýüze çykmagy sanlar bilen geçirilýän amallardaky köp kynçylyklary ýeňip geçmäge mümkinçilik beripdir. Ýuwaş-ýuwaşdan natural sanlaryň köplüginiň tükeniksizligi baradaky göz öňüne getirmeler kemala gelipdir.

Natural san düşünjesi kesgitlenenden soň, sanlar özbaşdak obýekt bolýarlar we olary özbaşdak matematiki obýekt hökmünde öwrenmek mümkinçiligi ýüze çykýar. Sanlar we olaryň üstünde geçirilýän amallary öwrenýän ylma arifmetika diýilýär.

Arifmetika gadymy Wawilonda, Hytaýda, Hindistanda, Müsürde ýüze çykypdyr. Şu ýurtlardaky toplanan matematiki bilimler gadymy grek alymlary tarapyndan ösdürilen we dowam etdirilen. Orta asyrlarda arifmetikanyň ösmegine hindi, arap ýurtlary we Orta Aziýanyň alymlary uly goşant goşupdyrlar. XIII asyrdan başlap bolsa ýewropaly alymlar hem goşantlaryny goşupdyrlar.

"Natural san" adalgasyny ilkinji gezek rim alymy A.Boessiý (480-524 ý.) ulanypdyr. Häzirki döwürde natural sanlaryň häsiýetini, olaryň üstünde amallary öwrenýän matematikanyň bölümine "sanlar teoriýasy" diýilýär.

§ 41. Tertip we mukdar natural sanlar. Sanamak

Biziň bilşimiz ýaly, natural san diýip, predmetleri sanamak üçin ulanylýan sanlara aýdylýar. Sanamak prosesi nämäni aňladýar?

$A=\{k,l,m,r\}$ köplügiň elementlerini nädip hasaplamaly? Bu köplügiň her bir elementini görkezip, biz "birinji", "ikinji", "üçünji", "dördünji" diýip aýdýarys. Şeýlelikde, A köplügiň ähli elementlerini agzamak bilen, sanamak prosesi gutarýar. Sanamak bilen biz birnäçe düzgünleri berjaý edýäris. Sanamakda A köplügiň islendik elementi birinji bolup biler, ýöne hiç bir element sanalman galmaly däldir we iki gezek sanalmaly däldir.

A köplügiň elementlerini sanamak bilen, A köplükde dört element bar diýip aýdýarys. Başgaça, bu köplügiň mukdar häsiýetini aýdýarys. Ýöne ony almak üçin biz "birinji", "ikinji", "üçünji", "dördünji" tertip natural sanlary ulandyk. Başga sözler bilen aýdylanda, biz natural san hatarynyň kesimi diýip, atlandyrylýan $\{1,2,3,4\}$ köplügi ulandyk.

Kesgitleme. N_a natural san hatarynyň kesimi diýip, natural a sandan geçmeýän natural sanlaryň köplügine aýdylýar. Meselem: N_4 kesim 1, 2, 3, 4 natural sanlaryň köplügidir.

Natural san hatarynyň kesimi baradaky kesgitlemäniň girizilmegi köplügiň elementlerini sanamak düşünjesini anyklamaga mümkinçilik berýär. Bu ýerde köplügiň elementi bilen N_a kesimiň arasynda özara bir bahaly degişlilik goýulýar.

Kesgitleme. A köplügiň elementleriniň sany diýip, A köplük bilen N_a natural san hatarynyň kesiminiň arasynda goýlan özara bir bahaly degişlilige aýdylýar.

A köplügiň elementleriniň ***a*** sany $n(A)=a$ ýaly ýazylýar. Bu a san ýeketäkdir we mukdar natural sandyr.

Şeýlelikde, sanamakda tükenikli A köplügiň elementleri diňe bir kesgitlenen tertipde goýulman, eýsem A köplükde näçe elementiň bardygyny hem kesgitleýär.

Tertip we mukdar sanlar bir-biri bilen berk baglydyr. Mekdepde matematika dersinden çagalar ilkinji onlugy öwrenende bu sanlar bilen tanyşýarlar. Bu köplügiň elementini sanamakda bolup geçýär. Berlen köplükde näçe element saklanýar diýen sorag mukdar, natural san bilen aňladylýar. Tertip natural san bolsa, şol zadyň näçenji orunda durýandygyny görkezýär.

Gönükmeler

1. N_8, N_{10} köplükleriň ähli elementlerini ýazmaly. Bu köplükler nähili atlandyrylýar?

2. Köplüklere natural san hatarynyň kesimi diýmek bolarmy:

a) {0,1,2,3}; b) {1,3,5,7}; ç) {1,2,3}; d) {3,4,5}?

3. Tükenikli köplügiň elementleri sanalanda, berjaý edilmeli düzgüni kesgitlemeli.

4. $n(A)=7$, $n(B)=2$ sözlemleri okamaly. Bu ýerde 7 we 2 natural sanlar nämäni aňladýar? Berlen şerti kanagatlandyrýan A we B köplüklere mysal getirmeli.

5.

A	B	C
{1,2,3,4,5}	{0,2,4,6,8,10}	{1,3,5,7,9,11,13}

Berlen köplüklere deňkuwwatly bolan iki sany köplügi görkeziň.
$n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ – nämä deň?
N_a, N_b, N_c – tapyň.

Köplügiň belgilenişi	Köplükleriň harakteristik häsiýeti	Köplügiň ýazgysy	Köplügiň elementleriniň sany
A	Bäşden kiçi bolan otrisatel däl bitin sanlaryň köplügi		
B		B = {0,1,2}	
C	Nuldan kiçi otrisatel däl bitin sanlaryň köplügi		
D			n(D)=2

§ 42. Mukdar natural sanyň we noluň nazary köplük manysy

Sanamak tükenikli köplügiň elementlerini tertipleşdirmek üçin ulanylýar, şeýle hem onuň mukdaryny kesgitlemek üçin we umumy ýagdaýda tertip san mukdar sana getirýär.

Mukdar sanyň manysyny deňkuwwatly köplükleri ulanyp, nazary köplük taýyndan kesgitlemek mümkin.

Haýsy hem bolsa tükenikli A köplügi alalyň we oňa deňkuwwatly köplükleriň hemmesini bir klasa ýygnalyň. Eger A üçburçlugyň depeleriniň köplügi bolsa, onda şonuň bilen bir klasa üçburçlugyň taraplarynyň köplügi, "bäş" sözündäki harplaryň köplügi we ş.m. köplükler düşer.

A köplüge deňkuwwatly bolmadyk başga *B* köplügi alalyň we oňa deňkuwwatly köplükleri başga bir klasa toparlalyň. Netijede, tükenikli köplükleriň täze klasyny alarys. Şu ýagdaýy dowam etdirsek, deňkuwwatly gatnaşyk ekwiwalentlik gatnaşygyna eýe bolar. Şeýlelikde, şol bir klasdaky köplükler deňkuwwatly bolar, dürli klasdaky köplükler deňkuwwatly bolmaz. Şol bir klasdaky köplükleriň näme umumylygy bar? Olar şol birmeňzeş kuwwata eýedir. Bu bolsa ekwiwalentlik klasyndaky köplükleriň umumy häsiýetidir we natural san hasaplanýar.

Meselem, üçburçlugyň depeleriniň köplügine deňkuwwatly köplükleriň umumy häsiýeti "üç" natural sandyr, gönüburçlugyň taraplarynyň köplügine deňkuwwatly köplükleriň umumy häsiýeti bolsa "dört" natural sandyr.

Şeýlelikde, nazary köplük taýyndan mukdar natural san tükenikli deňkuwwatly köplükler klasynyň umumy häsiýetidir.

Her bir klasa bir we diňe bir natural san degişlidir, her bir natural sana tükenikli deňkuwwatly köplükler klasy degişlidir.

Deňkuwwatly köplükler klasyny onuň elementlerini görkezmek bilen berip bolar.

Umuman, her bir tükenikli *A* köplüge ýeke-täk $a=n(A)$ natural san degişlidir, ýöne her bir natural a sana dürli tükenikli deňkuwwatly köplükler degişlidir.

"Nol" san hem nazary köplük many taýyndan kesgitlenýär, ol boş köplüge degişli edilýär: $0=n(\varnothing)$.

Başlangyç matematika kursunda mukdar natural sana tükenikli deňkuwwatly köplükleriň klasynyň umumy häsiýeti hökmünde seredilýär. Şonuň üçin hem, okuwçylar "bir" sany öwrenende, kitap sahypasynda bir predmetiň (zadyň) suraty görkezilýär, "üç" san öwrenende, üç zadyň: üç taýajygyň, üç daşjagazyň suraty şekillendirilýär. Şeýlelikde, tertip we mukdar natural sanlar ýakyn arabaglanyşykda öwredilýär.

Gönükmeler

1. $n(A)=n(B)=7$ şerti kanagatlandyrýan dürli *A* we *B* köplüklere mysal getirmeli. *A* we *B* köplükler nähili gatnaşykda bolýar?

2. "Bäş" natural sanyň köplük manysy nähili?

3. *I* synplaryň matematika kitabyndan "üç" sany öwredilýän sahypany açmaly. Ýazgylaryň we suratlaryň haýsysy "üç" sanyň tertip we mukdar häsiýetini düşündirýär. Şu maksat üçin başga nähili ýazgylar we suratlar goşmak boljak?

4. Başlangyç synplaryň matematika kitabyndan sanyň tertip we mukdar many aňladýandygyna mysal getirmeli.

5. Köplükler özünde näçe elementi saklaýar?

a) $A = \{x / x \in Z_0, x < 10\}$;

b) $C = \{x / x \in Z_0, 0 < x < 1\}$;

ç) $B = \{x / x \in Z_0, x < 1\}$;

d) $D = \{x / x \in Z_0, x \leq 0\}$.

6. Berlen $n(A)=1$. Eger aşakdakylar belli bolsa, B köplüge mysal getiriň.

a) $n(B) < n(A)$;

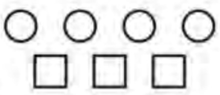
b) $n(B) \quad n(A)$.

§ 43. Otrisatel däl bitin sanlary goşmak

1-nji synp okuwçylarynyň çözýän meselesine seredeliň: Aman 4 kömelek, Jeren bolsa 3 kömelek tapdy. Çagalaryň hemme tapan kömelekleriniň sany näçe? Bu meseläni goşmak amalynyň kömegi bilen çözüp bolýandygyny düşündireliň.

Amanyň tapan her kömelegini tegelejik bilen, Jereniň tapan kömelekleriniň hersini bolsa kwadrat bilen görkezeliň *(83-nji surat)*.

Meseläniň soragyna jogap bermek üçin Amanyň tapan kömeleklerine Jereniň tapan kömeleklerini goşmaly, başgaça aýdanymyzda kömelekleriň köplüklerini birleşdirmeli we birleşdirmede alnan köplügiň elementlerini sanamaly.



83-nji surat

Görşümiz ýaly, bitin otrisatel däl sanlary goşmak köplükleriň birleşme amaly bilen berk baglanyşygy bar eken.

Ýene bir mesela seredeliň: $A=\{a,b,c,d\}$ we $B=\{c,x,y\}$ köplükleriň birleşmesiniň elementleriniň sanyny tapalyň: $n(A)=4$, $n(B)=3$, $A\cup B=\{a,b,c,d,x,y\}$ bolup, $n(A\cup B)\neq 4+3$ boljakdygyna göz ýetirmek kyn däldir. Bu näme üçin beýlekä?

Bu meselede A we B köplükler kesişýärler. Şonuň üçin hem ol köplükleriň birleşmesiniň elementleriniň sany $n(A)+n(B)$ jemden kiçi bolýar.

Şonuň üçin otrisatel däl bitin sanlaryň jemini kesişmeýän köplükleriň birleşmesiniň kömegi bilen kesgitleýärler.

Kesgitleme. $n(A)=a$, $n(B)=b$ bolan a we b otrisatel däl bitin sanlaryň jemi diýip kesişmeýän A we B köplükleriň birleşmesiniň elementleriniň sanyna aýdylýar:

$$a+b=n(A\cup B).$$

Bu ýerde $n(A)=a$, $n(B)=b$, $A\cap B=\varnothing$.

Mysala seredeliň:

Berlen kesgitlemeden peýdalanyp, 4+2=6 bolýandygyny, 4 käbir A köplügiň 2 käbir B köplügiň elementleriniň sany bolup, ol köplükleriň kesişmesiniň boş köplük bolmalydygyny düşündireliň:

Mysal hökmünde $A=\{x,y,z,l\}$ $B=\{a,b\}$ köplükleri alalyň. Olaryň birleşmesi $A\cup B=\{x,y,z,l,a,b\}$ bolar. Sanamak bilen $n(A\cup B)=6$ bolýandygyny göreris. Bu ýerden 4+2=6 alarys.

Seredilen mysal bilen baglanyşykly "4 we 2 sanlaryň jemi $n(A)=4$, $n(B)=2$ bolan A we B kesişmeýän köplüklere baglymy, başgaça aýdylanda özara kesişmeýän başga $n(A_1)=4$, $n(B_1)=2$ bolan A_1 we B_1 köplükler alynsa, 4+2 jem üýtgemezmi?" diýen soragyň ýüze çykmagy mümkin. Görşümiz ýaly, ol üýtgemez. Umuman, $a+b$ jem $n(A)=a$, $n(B)=b$ bolan A we B kesişmeýän köplükleriň saýlanyşyna (alnyşyna) bagly däldir. Bu umumy tassyklamany subutsyz kabul ederis.

Otrisatel däl bitin sanlaryň jemi hemişe bardyr we ýeke-täkdir. Islendik otrisatel däl bitin a we b sanlar alynsa, olaryň hemişe jemini tapyp bolýar, ol hem käbir c otrisatel däl bitin sandyr we şonuň ýaly san a we b berlen sanlar üçin ýeke-täkdir. Jemiň barlygy we ýeke-täkligi iki köplügiň birleşmesinden gelip çykýar.

Jemi tapmak üçin ýerine ýetirilýän amala goşmak, goşulýan sanlara bolsa goşulyjylar diýilýär.

Biz ýokarda iki goşulyjynyň jemi hakda gürrüň etdik. Eger goşulyjylar birnäçe bolsa, onda jemi nädip tapmaly?

Goý, 2 sany goşulyjynyň jemi kesgitlenen we n sany goşulyjynyň jemi kesgitlenen bolsun. Onda $n+1$ sany goşulyjynyň jemi, ýagny $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}$ şeýle bolar: $(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}$.

Eger, mysal üçin, 2+7+15+19 jemi tapjak bolsak, kesgitmelä görä: 2+7+15+19=(2+7+15)+19=((2+7)+15)+19=(9+15)+19=24+19=43 alarys.

Başlangyç matematika kursunda otrisatel däl bitin sanlary goşmak iki sany predmetler köplükleriniň birleşmesi bilen tejribe usulynda düşündirilýär (nazary köplük düşünjesindäki adalgalar, simwollar ulanylmaýar). Goşmagyň manysyny nazary köplük düşünjesinde görkezmekligiň esasy serişdesi bolup, ýönekeý arifmetiki meseleleri çözmeklik hyzmat edýär.

Gönükmeler

1. Bitin otrisatel däl sanlaryň jeminiň kesgitlemesinden peýdalanyp, aşakdakylary düşündiriň.

a) 4+1=5; ç) 2+7=9;

b) 1+5=6; d) 3+0=3.

2. Okuwçylara 16+4=20 aňlatmadan peýdalanyp çözer ýaly iki mesele düzmek tabşyrylýar. Şolar ýaly üç, bäş mesele düzmek bolarmy? Köplükleriň haýsy düzgüninden peýdalanyp şeýtmek bolar?

3. 1 sany bitin otrisatel däl iki sanyň jemi görnüşinde, näçe usulda ýazmak bolar?

4. 2 sany bitin otrisatel däl sanlaryň jemi görnüşinde näçe usulda ýazmak bolar?

5. 3 sany haýsy iki sanyň jemi görnüşinde ýazmak bolar? Mümkin bolan ähli jemi ýaz.

6. 6 depderi 2 okuwçynyň arasynda nähili paýlap bolar?

7. Jemiň kesgitlemesinden peýdalanyp, aňlatmanyň bahasyny tapyň:

a) 13+6+18+34+29;

b) 15+28+4+17+36+1.

8. Aşakdaky mesele näme üçin goşmak amaly bilen çözülýär?

Jereniň 2 sany akja, 3 sany garaja guzujygy bar. Jereniň jemi näçe guzujygy bar?

§ 44. Goşmagyň kanunlary

Otrisatel däl bitin sanlary goşmak orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryna tabyndyr.

Goşmagyň orun çalşyrma kanuny: islendik a we b otrisatel däl bitin sanlar üçin $a+b=b+a$ deňlik dogrudyr.

Subudy.

Goý, $a=n(A)$, $b=(B)$ we $A \cap B=\varnothing$ bolsun, ýagny a we b sanlar A, B kesişmeýän köplükleriň elementleriniň sanlaryny aňladýan bolsun.

$a+b$ jem kesgitlemä görä A we B köplükleriň birleşmesiniň elementleriniň sanyna deňdir $a+b=n(A \cup B)$. Şonuň ýaly hem $b+a=n(B \cup A)$. Islendik A we B köplük üçin $A \cup B = B \cup A$ bolýandygyny, ýagny birleşmek orun çalşyrma häsiýete eýedigini biz öň subut edipdik. Bu ýerden $n(A \cup B) = n(B \cup A)$. Diýmek, $a+b=b+a$.

Goşmagyň utgaşdyrma kanuny:

Islendik a, b we c otrisatel däl bitin sanlar üçin $(a+b)+c=a+(b+c)$ deňlik dogrudyr.

Subudy. Goý, $a=n(A)$, $b=(B)$, $c=n(C)$ we A, B, C köplükler özara jübüt-jübütden kesişmeýän bolsun. Jemiň kesgitlemesine görä

$(a+b)+c=n(A \cup B)+n(C)=n((A \cup B) \cup C)$

$a+(b+c)=n(A)+n(B \cup C)=n((A \cup (B \cup C))$.

Köplükleriň birleşmesiniň utgaşdyrma kanunyna tabyndygyny, ýagny $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$ bolýandygyny öň subut edipdik. Bu ýerden $(a+b)+c=a+(b+c)$ deňlik dogrudyr.

Utgaşdyrma kanuny birinji we ikinji goşulyjylarynyň jemine üçünji goşulyjyny goşmak üçin birinji goşulyja ikinji we üçünji goşulyjylaryň jemini goşup bolýandygyny görkezýär. Bu kanunlaryň ikisi hem goşulyjylaryň sany islendigiçe bolanda hem dogrudyr. Mysala seredeliň: Goşmak kanunlaryndan peýdalanyp, 78+63+106+22+194 jemi hasaplamaly bolsun.

Goşmak kanunlaryndan peýdalanyp ýazyp bileris:

$78+63+106+22+194=(78+22)+(106+194)+63=100+300+63=463$.

Başlangyç synp okuwçylary goşmagyň orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryndan peýdalanýarlar. Goşmagyň orun çalşyrma kanuny bilen ilkinji onlugy öwrenenlerinde tanyşýarlar. Goşmagyň utgaşdyrma kanuny anyk görnüşde öwrenilmeýän hem bolsa, jeme sany goşmakda, sana jemi goşmakda, jeme jemi goşmakda ol kanundan peýdalanylýar.

Gönükmeler

1. 23+7+30 peýdalanyp bolar ýaly üç sany mesele düzüň. Şonuň ýaly şerti kanagatlandyrýan bäş sany mesele düzüp bolarmy? Haýsy nazary esaslardan peýdalandyňyz?

2. Iki sany otrisatel däl bitin sanyň jemi 1-e deň bolup bilermi?

3. Jemi 2-ä deň boljak otrisatel däl bitin sanlary ýazyň.

4. 4 almany iki okuwça nähili paýlap bolar?

5. (7+5)+3 aňlatmany 5+(3+7) görnüşe özgerdiň. Özgertmede haýsy (häsiýetlerden) kanunlardan peýdalandyňyz?

6. Aňlatmanyň bahasyny amatly usulda tapyň we goşmagyň haýsy kanunlaryndan peýdalanandygyňyzy düşündiriň.

a) (20+6)+(30+7);

b) 26+8+32+24;

ç) 2009+567+365+1991+133.

7. "5+3=3+5, 8+6=6+8; 12+7=7+12 bu ýerden goşulyjylaryň ornuny çalyşmak bilen jem üýtgemeýär" pikir ýöretme goşmagyň orun çalşyrma kanunynyň subudy bolup bilermi?

8. Bitin otrisatel däl sanlaryň jeminiň kesgitlemesinden peýdalanyp, aşakdakylary düşündiriň:

a) 4+1=5; b) 2+7=9; ç) 1+5=6; d) 3+0=3.

9. Okuwçylara 16+4=20 aňlatmadan peýdalanyp çözer ýaly iki mesele düzmek tabşyrylýar. Şolar ýaly üç, bäş mesele düzmek bolarmy? Köplükleriň haýsy düzgüninden peýdalanyp şeýtmek bolar?

10. Goşmagyň kanunlaryndan peýdalanyp hasapla we düşündir.

(4+5)+6=(5+4)+6=5+(4+6)=5+10=15.

Bu ýerde ilki orun çalşyrma, soňra utgaşdyrma kanunlary ulanylýar we hasaplama ýerine ýetirilýär.

11. Amatly usuldan peýdalanyp hasapla we haýsy kanuny ulanylandygyny düşündir:

a) (30+7)+(10+4);

b) (16+9)+21+14;

ç) 1809+393+678+191+1607.

12. Jemi iki usulda hasapla, ilki birnäçe goşulyjylaryň jemini tapmak düzgüninden, soňra goşmagyň kanunlaryndan peýdalanyp, aňlatmanyň bahasyny tapyň:

a) 273+1227+154+446;

b) 372+4356+23+544;

ç) 871+2475+89+325.

13. Meseläni dürli usulda çöz.

Çagalar bagynda 20 sany gyzyl we 10 sany ýaşyl top bardy. Olara ýene-de 8 top sowgat etdiler. Çagalar bagynda näçe top bar?

14. Aşakdaky pikir aýtmalaryň haýsysy dogry?

Şeýle bir otrisatel b san bardyr we aşakdaky deňlik ýerine ýetýändir:

$(9+b) + 14 + 11 = 9 + (b+14) + 11.$

Bitin otrisatel däl b san nähili bolanda-da aşakdaky deňlik ýerine ýetýändir:

$(9+b) + 14 + 11 = 9 + (b+14) + 11.$

Aşakdaky deňligi kanagatlandyrýan otrisatel b san tapylýandyr. Şeýle bir otrisatel b san bardyr we aşakdaky deňlik ýerine ýetýändir:

$(9+b) + 14 + 11 = 9 + (77+14) + 11.$

Bitin otrisatel däl b san nähili bolanda-da aşakdaky deňlik ýerine ýetýändir:

$(9+b) + 14 + 11 = 9 + (77+14) + 11.$

Şeýle bir otrisatel däl a, b, c, d sanlar bardyr we aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$(a+b) + c + d = a + (b+c) + d,$

$a + b + (c+d) = (a+d) + (c+d).$

§ 45. "Kiçidir" we "deňdir" gatnaşygy

Sanlary deňeşdirmegiň nazary (teoretiki) manysyny düşündireliň.

Goý, otrisatel däl bitin a we b sanlar berlen bolsun. Bu sanlar tükenikli A we B köplükleriň elementleriniň sanydyr, $a=n(A)$ $b=n(B)$. Eger bu köplükler deňkuwwatly bolsa, onda olaryň elementleriniň sanyny aňladýan şol bir sanlar degişli bolar, ýagny $a=b$ bolar.

Kesgitleme. Eger a we b sanlar A we B deňkuwwatly köplükleriň elementleriniň sanyny aňladýan bolsa, onda a we b sanlara deň sanlar diýilýär.

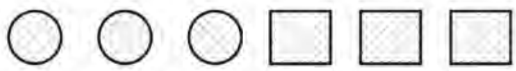
$a=b \Leftrightarrow A \sim B$, bu ýerde $n(A)=a$, $n(B)=b$.

Eger A we B köplükler deňkuwwatly däl bolsa, onda a we b sanlar deň däldirler.

Eger A köplük, B köplügiň bölek köplügine deňkuwwatly bolsa we $n(A)=a$, $n(B)=b$ bolsa, onda a san b sandan kiçi diýilýär we $a<b$ diýip ýazylýar, bu ýagdaýda b san a sandan uly diýilýär we $b>a$ diýip ýazylýar.

$a<b \Leftrightarrow A \sim B_1$ bu ýerde $B_1 \subset B$, $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \varnothing$.

Başlangyç synplarda 2=2, 3=3, 2<3, 3<4 deňlikler we deňsizlikler düşündirilende "deňdir" we "kiçidir" gatnaşyklarynyň kesgitlemesinden peýdalanylýar. Mysal: 3=3 deňlik düşündirilende hersinde 3 elementi bolan deňkuwwatly köplüklerden peýdalanylýar.



3<4 deňsizlik düşündirilende 4 sany ýaşyl, 3 sany gyzyl tegelejik bar, ýaşyl tegelejikleriň üstünde gyzyl tegelejikleri goýup başlaýarys. Bir ýaşyl tegelejigiň üstüne goýmaga gyzyl tegelejik ýetmeýär, onda 3<4 diýilýär. Bu usuly jübüti düzmek, köplükleriň elementleri a, 20-den kiçi bolanda ulanmak amatly.

Bitin otrisatel däl sanlary başga nähili deňeşdirip bolar?

Goý, $a<b$ bolsun, onda kesgitlemä görä $a=n(A)$, $b=n(B)$ $A \sim B_1$ $B_1 \subset B$, onda B köplüg B_1 we $B \setminus B_1$ köplükleriň birikmesi hökmünde garamak bolar. Eger $B \setminus B_1 = B_1^1$ diýip belgilesek, onda $B = B_1 \cup B_1^1$, şeýlelikde $n(B) = n(B_1 \cup B_1^1)$. B_1 we B_1^1 köplükler kesişmeýär, onda kesgitlemä görä $n(B)= n(B_1)+n(B_1^1)$. (I) şerte görä $B_1 \sim A$, onda $n(B_1)=n(A)$. Eger $n(B_1^1)=c$ diýip belgilesek, onda (I) deňlikden $b=a+c$ deňligi alarys.

Kesgitleme. a san b sandan kiçidir. Eger $a+c=b$ deňlik ýerine ýeter ýaly c san $(c \neq 0)$ bar bolsa, onda a san b sandan kiçidir diýilýär.

Kesgitlemeden peýdalanyp 3<7 deňsizligi düşündireliň, 3<7, sebäbi 3+4=7.

"Kiçidir" gatnaşygyň bu häsiýeti başlangyç synplarda ulanylýar, 7<8, sebäbi 8-i almak üçin 7-niň üstüne bir san goşmaly.

Sanlary deňeşdirmegiň ýene-de bir usulyna seredip geçeliň.

Goý, $a<b$ bolsun. Onda islendik x natural san üçin $x \le a$ bolan x san üçin $x<b$ diýip aýtmak bolar.

Bu bolsa $a<b$ bolanda N_a natural sanlaryň N_a kesimi, N_b natural sanlaryň kesiminiň bölegini aňladýar.

Eger N_a natural sanlaryň köplügi N_b natural sanlaryň köplüginiň bölek köplügi bolsa, onda a san b sandan kiçidir:

$$a<b \Leftrightarrow N_a \subset N_b \text{ we } N_a \neq N_b.$$

Mysal: 3<7 $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Sanlary deňeşdirmegiň bu usuly hem başlangyç synplarda ulanylýar 3<7, sebäbi sanlar sanalanda 7 san 3 sandan soň gelýär.

Gönükmeler

1. Üç usulda düşündir, näme üçin: a) 3<6; b) 0<5?

2. Goşmagyň kiçidir gatnaşygynyň kesgitlemesinden peýdalanyp islendik a, b, c natural san üçin, eger $c<b$ bolsa $a+c<b+c$ dogrudygyny düşündir.

3. Näme üçin "kiçidir" gatnaşygy bitin otrisatel däl sanlar köplügini tertipleşdirýär, "yzyndan gelýär" gatnaşyk tertipleşdirmeýär.

4. Amallary ýerine ýetirmezden ýyldyzjygyň ornuna dogry pikir aýtma emele geler ýaly =, <, > belgilerini goýuň.

a) 27 185 – (7 000 + 185) * (27 185 – 7 000) – 185;

b) 27 185 – (7 000 + 185) * (27 185 – 185) – 7 000;

ç) 27 185 – (7 000 + 185) * 27 185 – 7 000 +185;

d) 27 185 – 7 000 – 185 * 27 185 – (7 000 – 185).

5. Aşakdaky pikir aýtmalar dogry bolar ýaly A we B köplükler haýsy şerti kanagatlandyrmaly?

a) $n(A) + n(B) > n(A \cup B)$;

b) $n(A) + n(B) = n(A)$;

ç) $n(A) + n(B) = n(B)$?

6. Haýsy pikir aýtma çyn?

a) Islendik iki A we B köplükler üçin $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$;

b) Islendik iki A we B köplükler üçin $n(A) + n(B) \geq n(A \cup B)$;

ç) Şeýle bir A we B köplük bardyr we $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$.

§ 46. Otrisatel däl bitin sanlary aýyrmak

Aşakdaky suratlarda şekillendirilen A we B köplüklere seredeliň.

A={▲, ■, ▮, ◣, ▰}

B={■, ▰}

Berlen köplüklerden görnüşi ýaly, B köplük A köplügiň bölegidir, ýagny $B \subset A$.

B köplügi A köplüge çenli dolduryan köplük A B={▲, ▮, ◣} bolar.

$n(A)=5$, $n(B)=2$ we $n(A \setminus B)=3$ bolýandygyny görmek kyn däldir. Bu köplükleriň elementleriniň arasynda $n(A)-n(B)=n(A/B)$ bolýandygyny görýäris. Diýmek, sanlary aýyrmak köplükleriň bölegini dolduryan köplük bilen baglanyşykly eken.

Kesgitleme. $a=n(A)$, $b=n(B)$ we $B \subset A$ bolan a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy diýip, B köplügi A köplüge çenli dolduryan köplügiň elementleriniň sanyna aýdylýar.

$a-b=n(A \setminus B)$, bu ýerde $n(A)=a$, $n(B)=b$, $B \subset A$

Mysala seredeliň.

Goý, $A = \{a, b, c, d, m, n, k\}$ $B = \{a, d, m\}$ bolsun.

B köplügi A köplüge çenli dolduryan köplügi tapalyň $n(A)=7$, $n(B)=3$.

$A / B = \{b, c, n, k\}$, bu ýerden $n(A \setminus B)=4$.

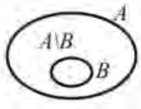
Diýmek, $n(A \setminus B)= n(A)-n(B)=7-3=4$.

"Otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy hemişe barmyka?" diýen sorag ýüze çykar.

$B \subset A$ bolmaklygyndan $n(B) \leq n(A)$ boljakdygy gelip çykýar. Diýmek, $n(A)=a$, $n(B)=b$ we $B \subset A$ bolan a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy diňe $b \leq a$ bolanda we diňe şonda bardyr.

a-b tapawudy tapmak üçin ýerine ýetirilýän amala aýyrmak amaly a sana kemeliji, b sana bolsa kemeldiji diýilýär.

Biz, köplenç, aýyrmak amalynyň ýerine ýetirilişiniň dogrulygyny goşmagyň kömegi bilen bilen barlaýarys. Onuň sebäbi goşmak we aýyrmak amallarynyň baglanyşygynyň barlygyndadyr. Oňa göz ýetirmek üçin $a=n(A)$, $b=n(B)$ we $B \subset A$ bolan A we B köplükler alalyň. Goý, a we b sanlaryň tapawudy a-b=$n(A \setminus B)$ bolsun. Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen A, B, $A \setminus B$ köplükleri şekillendireliň *(85-nji surat)*.



85-nji surat

$A=B \cup (A \setminus B)$ boljakdygy bellidir.

Onda $n(A)=n(B \subset (A/B))$,

$B \cap (A \setminus B)=\varnothing$ bolany üçin.

Diýmek,

$$n(A)=n(B \cup (A/B))=n(B)+n(A/B)=b+(a-b) \quad a=b+(a-b),$$

bu ýerden a–b tapawut b san bilen goşulanda a sana deň boljak sandyr.

Biz şeýle kesgitlemä geldik.

Kesgitleme. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy diýip b san bilen goşulanda a sana deň boljak n sana aýdylýar.

$$a-b=c \Leftrightarrow a=b+c$$

Aýyrmak amalyna goşmaga ters amal hem diýilýär.

Tapawut hemişe barmyka? Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy diňe $b \le a$ bolanda we diňe şonda bardyr.

Subudy. Eger $a=b$ bolsa, onda a–b=0, diýmek a–b tapawut bar.

Eger $b<a$ bolsa, onda a–b tapawut käbir c natural sandyr we $a=b+c$ deňdir. Bu ýerden kesgitlemä görä $c=a-b$, ýagny a–b tapawut bardyr.

Diýmek, $b \le a$.

Teorema. Eger a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

Subudy. Goý, a-b tapawut ýeke-täk däl, ýagny $a-b=c_1$ we $a-b=c_2$ bolan c_1 we c_2 dürli sanlara deň diýeliň. Onda kesgitlemä görä: $a=b+c_1$ we $a=b+c_2$ alarys. Bu ýerden $b+c_1=b+c_2$, diýmek $c_1=c_2$.

Başlangyç matematika kursunda otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudyna diňe mysallaryň üsti bilen seredilýär we olarda köplükden onuň bölegini aýyrmagy täze köplük–köplügiň bölegini dolduryan köplügi almak bilen görkezýär. Nazary köplük düşünjesinde ulanylýan adalgalar, simwollar görkezilýär.

Aýyrmagyň goşmak bilen baglanyşygy anyk görnüşde görkezilmeýär, diňe mysallaryň üsti bilen: 37-den 12-ni aýyrmak – 12 san bilen goşulanda 37 alynjak sany tapmaklygy, ol bolsa 25 sandygy, ýagny 37–12=25 bolýandygy aýdylýar.

Gönükmeler

1. A={Aşgabat, Tejen, Mary, Daşoguz, Türkmenbaşy, Türkmenabat}, B={Tejen, Daşoguz} köplükleri berlen.

B köplügi A köplüge çenli dolduryan köplügiň näçe elementi bar?

2. Berlen deňlikleriň nazary köplük düşünjesinden peýdalanyp düşündiriň:

a) 9–4=5; b) 7–7=0; ç) 5–0=0.

3. $A=\{k,l,m,h,p\}$, $B=\{k,m,l\}$ köplükler berlen.

a) $n(A)$, $n(B)$, $A\setminus B$, $n(A\setminus B)$ tapyň;

b) $n(A)-n(B)=n(A\setminus B)$ pikir aýtma çynmy?

4. $C=\{a,b,c,d,e\}$ we $D\{a,c,e\}$ köplükler berlen. Aşakdaky pikir aýtmalaryň haýsylary çyn:

a) $n(C)-n(D)=n(C\setminus D)$;

b) $n(C)-n(D)\neq n(C\setminus D)$.

5. $n(A)=a$, $n(B)=b$ bolan A we B köplükler berlen. Haýsy şertde $n(A)-n(B)=n(A\setminus B)$ deňlik dogrudyr.

6. Çözüwi 13–5=8 boljak 3 sany mesele düzüň. Nazary köplük düşünjesinden peýdalanyp düşündiriň.

7. Deňlemäniň köki bolan bitin otrisatel däl sanlaryň köplügini tapyň.

a) $20+x=43$; d) $20-x=43$;

b) $43+x=20$; e) $x-20=43$;

ç) $43-x=20$; ä) $x-43=20$.

§ 47. "San uly", "san kiçi" gatnaşyklar. Jemden sany we sandan jemi aýyrmagyň düzgünleri

Köplenç, meseleler çözülende bir sanyň beýleki sandan uludygyny ýa-da kiçidigini bilmek däl-de, näçe san uludygyny ýa-da näçe san kiçidigini bilmeli bolýar. "San uly", "san kiçi" gatnaşyklaryň manysyna köplük düşünjesinden peýdalanyp seredeliň.

Goý, $a = n(A)$, $b = n(B)$ bolan a we b otrisatel däl bitin sanlar we $a<b$ bolsun. Beýle diýildigi B köplükden A köplüge deňkuwwatly bolan B_1 köplügi bölüp almak mümkin diýildigidir, $B \setminus B_1$ köplük boş köplük bolmaly däldir.

Goý, $n(B \setminus B_1)=c$ bolsun, $(c \neq 0)$.

Onda B köplükde A köplükdäki ýaly we ýene c sany element bardyr. Bu halda a sana b sandan c san kiçi ýa-da b sana a sandan c uly diýilýär.

$c = n(B \setminus B_1)$ we $B_1 \subset B$ bolany üçin $c = b - a$ alarys. Bu ýerden bir sanyň beýleki sandan näçe kiçidigini ýa-da uludygyny bilmek üçin sanlaryň ulusyndan kiçisini aýyrmalydygy gelip çykýar.

Meselä seredeliň. Zähmet sapagynda Myrat kagyzdan 5 güljagaz gyrkdy, Jeren bolsa ondan 2 güljagazy köp ýasady. Jeren näçe güljagaz ýasapdyr?

Meselede iki köplük barada: Myradyň we Jereniň kagyzdan ýasan güljagazlary barada gürrüň gidýär. Ol köplükleri M we J belgiläliň. $n(M) = 5$ bize belli. $n(J)$ tapmaklygy talap edilýär.

$n(J) = 2 + n(M) = 2 + 5 = 7$ bolýandygyny taparys. Okuwçylaryň düşünmekleri üçin şeýle suratdan peýdalanmak bolar.

M: ■ ■ ■ ■ ■

$$J: \underbrace{00000}_{J_1}\ \overbrace{00}^{J_2}$$

J köplükde M köplükdäki 2 element köp bolany üçin onda M köplük ýaly we ýene 2 element bardyr. Başgaça aýdylanda J köplük J_1 we J_2 köplükleriň birleşmesinden durýar.

$n(J) = n(J_1 \cup J_2) = n(J_1) + n(J_2) = 5 + 2 = 7$.

Başlangyç klaslarda şonuň ýaly meseleleri çözülende düşündirilişi başgaçadyr, ýöne onuň manysy ýokarda görkezilişi ýalydyr.

"7 san 4-den 3 san uly" ýazgyny ">" belgisiniň kömegi bilen ýazyp bolmaýandygyny, "san uly", "san kiçi" gatnaşygy üçin ýörite belginiň ýokdygyny bellemelidiris.

Jemden sany aýyrmagyň düzgüni

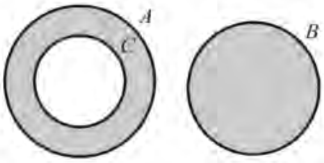
Jemden sany aýyrmak üçin ol sany goşulyjylaryň birinden aýyrmak we alnan tapawuda beýleki goşulyjyny goşmak ýeterlikdir.

Bu düzgüni simwollaryň kömegi bilen ýazalyň. a, b, c – otrisatel däl bitin sanlar bolsun. Onda

- eger $a \geq c$ bolsa, onda $(a+b)-c = (a-c)+b$;
- eger $b \geq c$ bolsa, onda $(a+b)-c = a+(b-c)$;
- eger $a \geq c$ we $b \geq c$ bolsa, onda ýokarky formulalaryň islendik birini ulanmak bolar.

Goý, $a \geq c$ bolsun, onda $a-c$ tapawut bardyr. Ol tapawudy p bilen belgiläliň: $a-c=p$. Bu ýerde $a=p+c$. Bu jemi a-nyň ornuna goýsak $(a+b)-c=(p+c+b-c)=p+b+c-c=p+b$ alarys:
$(a+b)-c=(a-c)+b$.

2-nji haly hem şoňa meňzeş subut edilýär. Subut eden düzgünlerimize Eýleriň tegeleginde seredeliň. Goý, A, B, C tükenikli köplükler, $A \cap B = \varnothing$, $C \subset A$ bolsun $n(A)=a$, $n(B)=b$, $n(C)=c$ diýeliň.



86-njy surat

Onda $(a+b)-c$ san $(A \cup B)/C$ köplügiň elementleriniň sanydyr. $(a-c)+b$ san bolsa $(A \setminus C) \cup B$ köplügiň elementleriniň sanydyr. $(A \cup B) \setminus C$ – ştrihlenen köplükdir. $(A \setminus C) \cup B$ köplük hem şol ştrihlenen köplük bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir. Diýmek, $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$. Bu ýerden $n((A \cup B) \setminus C) = n((A \setminus C) \cup B)$

$$n((A \cup B) \setminus C) = n(A \cup B) - n(C) = (a+b) - c.$$

$n((A \cup C) \setminus B) = n(A \cup C) + n(B) = (a-b) + b$ bolýandygy üçin $(a+b) - c = (a-c) + b$.

Beýleki haly hem Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen görkezmek bolar.

Sandan jemi aýyrmagyň düzgüni.

Sandan jemi aýyrmak üçin ol sandan her bir goşulyjyny yzygiderli aýyrmak ýeterlikdir, ýagny eger a, b, c otrisatel däl bitin sanlar üçin $a \geq b + c$ bolsa, onda $a - (b+c) = (a-b) - c$ deňlik dogrudyr.

Bu düzgün jemden sany aýyrmagyň düzgüni ýaly girizilýär.

Gönükmeler

1. "San uly" gatnaşyga degişli 2 sany we "san kiçi" gatnaşyga degişli 2 sany meseläni düzüň.

2. Çözüwi 8–5=3 deňlik görnüşinde ýazyljak 2 sany ýönekeý meseläni düzüň.

3. Sandan jemi aýyrmagyň düzgünini Eýleriň tegeleklerinden peýdalanyp subut ediň.

4. Aňlatmanyň bahasyny has amatly usuldan peýdalanyp tapyň:

a) (5467+36576)–26576;

b) 6938–(769+4938);

ç) 397+865–297;

d) 817–235–317.

5. Amatly usuldan peýdalanyp hasaplaň:

a) (3748+10392)–8392;   ç) 763+945–263;

b) 7273–(396+1173);   d) 568–229–168.

6. Aşakdaky meseleleriň näme üçin goşmak amaly bilen çözülýändigini düşündir.

a) Baýramyň 7 depderi bar, Keýigiň ondan 3 depderi köp. Keýigiň näçe depderi bar?

b) Dynç alyş meýdançasynda 8 düýp sosna agajy bar, ol bolsa derekleriň sanyndan 2 san azdyr. Näçe derek agajy bar?

7. Aşakdaky meseleleriň aýyrmak amaly bilen çözülýändigini düşündir.

a) Baýram 9 kömelek, Keýik ondan 4 kömelek az tapdy. Keýik näçe kömelek tapdy?

b) Myratda 4 sany kletkaly we 9 sany çyzykly depder bar. Kletkaly depderleriniň sany çyzykly depderlerden näçe sany az?

8. Iki sanyň tapawudyndan üçünji sany aýyrmak üçin kemelijiden beýleki iki sanyň jemini aýyrmagyň ýeterlikdigini subut ediň.

9. Meseläni dürli usulda çöz we düşündir.

Bir bankada 10 sany, beýleki bankada 6 sany duzlanan hyýar bar. Günorta naharda 4 sany hyýary iýdiler. Näçe hyýar galdy?

10. Eger a, b, c otrisatel däl bitin sanlar bolsa, onda aşakdaky deňlikleriň çyn bolýan ýagdaýyny görkeziň.

a) $(a+b) - c = (a-c) + b$; d) $(a-b) - c = (a-c) - b$;
b) $(a+b) - c = a + (b-c)$; e) $a-(b-c) = (a+c) - b$;
ç) $a - (b+c) = (a-b) - c$; ä) $a-(b-c) = (a-b) + c$.

§ 48. Otrisatel däl bitin sanlary köpeltmek

Matematikanyň mekdep kursunda birmeňzeş goşulyjylaryň jemini tapmak bilen baglanyşykly meseleler gabat gelýär.

Mysal üçin, çaga köýnegini tikmek üçin 2 m. mata gerek. Şonuň ýaly 7 sany çaga köýnegini tikmek üçin näçe metr mata gerek bolar? Ony tapmak üçin 2+2+2+2+2+2+2 jemi hasaplamaly bolýarys. Bu jemi ýazmaklyk we ony hasaplamaklyk belli bir derejede köp wagty talap edýär. "Ony hasaplamaklygy ýönekeýleşdirip bolmazmy?" diýen sorag ýüze çykýar.

Kesgitleme. a we n otrisatel däl bitin sanlaryň köpeltmek hasyly diýip $a \cdot n$ görnüşde belgilenýän $a \cdot n = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}$ bolan we n=1 bolanda $a \cdot 1 = a$, n=0 bolanda $a \cdot 0 = 0$ şertleri kanagatlandyrýan sana aýdylýar.

Birbelgili sany birbelgili sana köpeltmekligiň tablisasy düzülýär we ol tablisa ýatdan öwrenilýär.

Koplük nukdaýnazaryndan $a \cdot n$ sany aşakdaky ýaly düşündirmek bolar. Goý, $A_1, A_2, ..., A_n$ özara jübüt-jübütden kesişmeýän deňkuwwatly köplükler bolsun, ýagny $n(A_i)=a$ bolsun $(i=\overline{1,n})$. Onda $a \cdot n$ sany $n(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n)$ köplükleriň birleşmesiniň elementleriniň sany görnüşinde aňlatmak bolar, ýagny:

$$a \cdot n = (A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + ... + \underbrace{n(A_n = a + a + ...) + a}_{n \text{ sany goşulyjy}},$$

$A_i \cap A_j, i \neq j$. Indi $A=\{a,b,c,d\}$ we $B=\{x,y,z\}$ köplükleriň dekart köpeltmek hasylyna seredeliň. $A \times B$ dekart köpeltmek hasylyny gönüburçly tablisa görnüşinde ýazalyň.

(a,x), (a,y), (a,z)
(b,x), (b,y), (b,z)
(c,x), (c,y), (c,z)
(d,x), (d,x), (d,z)

Bu dekart köpeltmek hasylynyň elementleriniň sany 4+4+4=12 bolar. Öňden mälim bolşy ýaly, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4 \cdot 3 = 12$. Şeýlelik bilen, biz otrisatel däl bitin sanlary köpeltmekligiň aşakdaky kesgitlemesine geldik.

Kesgitleme. $n(A)=a$, $n(B)=b$ bolan a we b bitin otrisatel däl sanlaryň köpeltmek hasyly diýip, A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň elementleriniň sanyna aýdylýar.

$a \cdot b=n(A \times B)$, bu ýerde $a=n(A)$ we $b=n(B)$

Eger-de köpeldijileriň sany ikiden köp bolsa, onda ol sanlary köpeltmek üçin aşakdaky formuladan peýdalanylýar:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3=(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4=(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot a_4$

$a_1 \cdot a_2 ... a_n \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2 ... a_n) \cdot a_{n+1}$

Mysal üçin, 5·2·7=(5·2)·7=10·7=70

5·3·2·4=((5·3)·2)·4=(15·2)4=30·4=120

Gönükmeler

1. Jemi köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyň.

a) 2009+2009+2009+2009;

b) (55–23)+(55–23)+(55–23);

ç) $x+x+x+x+x+x+x$;

d) $(7-a)+(7-a)+(7-a)+(7-a)+(7-a)+(7-\ddot{U})$.

2. Köpeltmek hasylyny jem görnüşinde ýazyň.

a) $365\cdot7$; d) $1\cdot18$;

b) $0\cdot8$; e) $(a-4)\cdot6$;

ç) $(x+y)\cdot3$; ä) $x\cdot3$.

3. Näme üçin $3\cdot4=12$, $1\cdot5=5$, $0\cdot3=0$ bolýandygyny a) jemiň, b) dekart köpeltmek hasylynyň kömegi bilen düşündiriň.

4. Birnäçe köpeldijileriň köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden peýdalanyp hasaplaň.

a) $7\cdot8\cdot9\cdot10$; b) $3\cdot6\cdot10\cdot13\cdot14$.

5. $A=(1,3,5,7,9)$ we $B=(x,y)$ köplükleriň dekart köpeltmek hasylyny tapyň. Dekart köpeltmek hasylynyň elementlerini tablisada ýazyň.

a) $n(A)$ we $n(B)$ köpeltmek hasylyny dekart köpeltmek hasylynyň elementlerini sanamak bilen;

b) birmeňzeş goşulyjylaryň jemini her goşulyjy bir sütündäki elementleriniň sany bolar ýaly edip tapyň.

6. Eger $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=15$, $a_4=3$, $a_5=1$ bolsa $(((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)\cdot a_4)\cdot a_5$ köpeltmek hasylyny tapyň.

7. Birnäçe sanlaryň köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden peýdalanyp hasaplaň.

a) $7\cdot8\cdot9\cdot10$; b) $4\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14$.

8. Aşakdaky meseleleriň näme üçin köpeltmek arkaly çözülýändigini düşündir.

a) 3 bankanyň hersine 8 hyýardan saldylar. Bankalarda jemi näçe hyýar bar?

b) täze ýyl arçasyny bezemek üçin 5 oglanyň hersi 4 oýunjak ýasady. Jemi näçe oýunjak ýasadylar?

ç) 4 gutujygyň hersine 7 galam saldylar. Gutujyklara salnan hemme galam näçe?

d) çagalaryň hersi kagyzdan 3 gülјagaz ýasady. Çagalar näçe gülјagaz ýasadylar?

9. Hasaplaň $n(C\times D)$, eger

a) $C=\{1,2,3\}$, $D=\{a,b,c,d\}$; d) $C=\{3,4,5\}$, $D=\{a\}$;

b) $C=\varnothing$, $D=\{10,100\}$; e) $C=\varnothing$, $D=\varnothing$.

ç) $C=\{=x,-y\}$, $D=\{0,1\}$;

§ 49. Köpeltmegiň kanunlary

Indi köplükleriň dekart köpeltmek hasylyndan peýdalanyp, köpeltmek kanunlaryny subut edeliň.

1. Köpeltmegiň orun çalşyrma kanuny.

Islendik otrisatel däl bitin a we b sanlar üçin $a\cdot b=b\cdot a$ deňlik dogrudyr

Subudy. Goý, $a=n(A)$ we $b=n(B)$ bolsun. Köpeltmegiň kesgitlemesine görä $a\cdot b=n(A\times B)A\times B$ we $B\times A$ köplükler üçin $A\times B\neq B\times A$ bolýandygyny bilýäris, ýöne $A\times B$ we $B\times A$ köplükleriň her biriniň jübütleriniň sany deňdir, $A\times B$ köplügiň her bir (a, b) jübüti üçin $B\times A$ köplügiň diňe bir (b, a) jübütini degişli etmek bolar we tersine. Onda $n(A\times B)=n(B\times A)$. Şonuň üçin $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)=a\cdot b$ we $n(B\times A)=n(B)\cdot n(A)$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, $a\cdot b=b\cdot a$ bolar.

2. Köpeltmegiň utgaşdyrma kanuny.

Islendik a, b we c sanlar üçin $(a\cdot b)\cdot c=a(b\cdot c)$ deňlik dogrudyr.

Subudy. Goý, $a=n(A)$, $b=n(B)$ we $c=n(C)$ bolsun. Köpeltmegiň kesgitlemesine görä $(a\cdot b)\cdot c=n((A\times B)\times C)$, şonuň ýaly-da $a\cdot(b\cdot c)=n(A\times(B\times C))$. Emma $(A\times B)\times C$ we $A\times(B\times C)$ köplükler dürlüdirler. $(A\times B)\times C$ köplük $((a,b),ç)$ görnüşli jübütlerden, $A\times(B\times C)$ köplük bolsa $(a,b),c$ görnüşli jübütlerden durýandyr. $(a\in A, b\in B, c\in C)$, ýöne $A\times(B\times C)$ we $A\times(B\times C)$ köplükleriň jübütleriniň arasynda özara bir bahalý degişlilik barlygy üçin olar deňkuwwatlydyrlar.

Onda

$$n((A\times B)\times C)=n(A\times(B\times C))=n((A\times B)\times C)=n(A\times B)\cdot n(C)=(a\cdot b)\cdot c$$

$$n(A\times(B\times A))=n(A)\cdot n(B\times C)=a\cdot(b\cdot c)\cdot c$$

bolany üçin $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

3. Köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanuny.

Islendik a, b, c otrisatel däl bitin sanlar üçin $(a+b)\cdot c=ac+bc$ deňlik dogrudyr.

Subudy. Köplükleriň birleşmesi bilen başga bir köplügiň dekart köpeltmek hasyly üçin (I) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ deňligiň dogrudygyny bilýäris. Goý, $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ we $A\cap B=\varnothing$ bolsun. Onda kesgitlemä görä: $(a+b)\cdot c=n((A\cup B)\times C)$. Bu ýerden (1) deňlikden peýdalansak:

$$n((A\cup B)\times C)=n((A\times C)\cup(B\times C))$$

$$m((A\times C)\cup(B\times C))=n(A\times C)+n(B\times C)=ac+bc.$$

Diýmek, $(a+b)\cdot c=ac+bc$.

4. Köpeltmegiň aýyrmaga görä paýlaşdyrma kanuny.

Islendik a, b we c, $a\geq b$ bolan otrisatel däl bitin sanlar üçin $(a-b)c=ac-bc$ deňlik dogrudyr.

Subudy. Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly üçin $(A\backslash B)\times C=(A\times C)\backslash(B\times C)$ deňlikden peýdalanarys.

$n((A\backslash B)\times C)=n((A\times C)\backslash(B\times C))$ onda

$n((A\setminus B)\times C)=n(A\setminus B)\cdot n=(a-b)\cdot c$ we $n((A\times C)\backslash(B\times C))=n(A\times C)-$ $-n(B\times C)=ac-bc$ bolany üçin $(a-b)\cdot c=ac-bc$.

Köpeltmegiň orunçalyşma, utgaşdyrma kanunlary köpeldijileriň islendik sany üçin hem dogrudyr.

Gönükmeler

1. Köpeltmegiň orunçalyşma we utgaşdyrma kanunlaryny peýdalanyp, $(7\cdot8)\cdot5$ aňlatmany $(7\cdot5)\cdot8$ görnüşe özgerdiň. Özgretmeleriň her bir ädimini esaslandyryň.

2. Köpeltmegiň paýlaşdyrma kanunyndan peýdalanyp aňlatmalaryň bahasyny tapyň.

a) $9\cdot24+9\cdot76$; ç) $7\cdot(13+64)$;

b) $19\cdot17-19\cdot7$; d) $398\cdot8$.

3. Köpeltmegiň paýlaşdyrma kanunyndan peýdalanyp amatly usulda hasaplaň we her ädimi düşündiriň.

a) $125\cdot13\cdot8$; d) $(40\cdot7\cdot3)\cdot25$;

b) $4\cdot379\cdot25$; e) $126\cdot24+126\cdot6+126\cdot10$;

ç) $24\cdot19\cdot25\cdot5$; ä) $61\cdot101$.

4. Islendik a, b, c natural sanlar üçin $a<b$ bolsa, $ac<bc$ deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

5. Aňlatmanyň bahasyny jeme görä, haýsy kanun esasynda hasaplamak bolar?

a) orun çalyşma;

b) utgaşdyrma;

ç) paýlaşdyma.

6. Amatly usuldan peýdalanyp hasaplaň we düşündiriň.

a) $4 \cdot 17 \cdot 25$;	d) $(40 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 25$;
b) $(8 \cdot 379) \cdot 125$;	e) $126 \cdot 24 + 126 \cdot 6 + 126 \cdot 10$;
ç) $24 \cdot 19 \cdot 25 \cdot 5$;	ä) $61 \cdot 101$.

7. Hasaplamany ýerine ýetirmezden $842 \cdot 58 < 842 \cdot 61$ deňsizligiň dogrulygyny aýdyp bolarmy?

8. Deňlik dogry bolar ýaly "<", ">", "=" belgileri goýuň.

a) $3 \cdot 29 + 7 \cdot 29 * 10 \cdot 29$;	ç) $7 \cdot 43 + 9 \cdot 43 * 15 \cdot 43$;
b) $8 \cdot 31 - 3 \cdot 31 * 6 \cdot 31$;	d) $3 \cdot 17 + 9 \cdot 17 * 13 \cdot 17$.

9. Meseläni dürli usulda çöz we düşündir.

Iki oglanyň hersine 3 gyzyl, 4 ýaşyl tegelejikden paýladylar. Jemi iki oglana näçe tegelejik paýladylar?

10. Hasaplaň we deňeşdiriň, $n(C \times D)$, $n(D \times C)$ eger

a) $C = \{1,2,3\}$, $D = \{a,b,c,d\}$;

b) $C = \varnothing$, $D = \{10,100\}$;

c) $C = \{=,x,-,y\}$, $D = \{0,1\}$;

d) $C = \{3,4,5\}$, $D = \{a\}$;

e) $C = \varnothing$, $D = \varnothing$.

§ 50. Otrisatel däl bitin sanlary bölmek

Meselä seredeliň: "15 sany agaç nahallaryny 3 sany birmeňzeş hatara oturtdylar. Her hatarda näçe agaç boldy?"

Meseläniň soragyna jogaby bölmek amalyndan peýdalanyp tapalyň $15:3=5$.

Bu meselede 15 elementi bolan köplüge seredilýär. Ol köplük üç sany kesişmeýän deňkuwwatly bölek köplüklere bölündi. Şol bölek köplükleriň hersinde näçe element boljakdygy soralýar.

1-nji hatar O O O O O

2-nji hatar O O O O O

3-nji hatar O O O O O

Başga bir meselä seredeliň: "12 depderi her parta 2 depder goýmak bilen paýladylar. Näçe parta 2 depderden goýdular?"

Bu mesele hem bölmegiň kömegi bilen çözülýär. 12:2=6 (parta). Meselede 12 elementli köplüge seredilýär. Ol hersinde 2 element bolan bölek köplüklere, ýagny deňkuwwatly köplüklere bölünýär. Ol bölek köplükler jübüt-jübütden kesişmeýär. Meselede şonuň ýaly bölek köplükleriň näçesiniň boljakdygy soralýar.

$$\overbrace{\underbrace{OO}_{2}\quad\underbrace{OO}_{2}\quad\underbrace{OO}_{2}\quad\underbrace{OO}_{2}\quad\underbrace{OO}_{2}\quad\underbrace{OO}_{2}}^{n(A)=12}$$

Jogapda tapylan 6 san berlen 12 elementli köplügiň iki elementli bölek köplükleriniň sanydyr.

Bu meseleleriň ikisi hem bölmek bilen çözüldi. Umuman, a otrisatel däl bitin sany b natural sana bölmegi şeýle kesgitlemek bolar:

Kesgitleme. Goý, $a=n(A)$ we A köplük jübüt-jübütden kesişmeýän bölek köplüklere bölünen bolsun.

Eger b san A köplügiň bölünen her bir bölek köplüginiň elementleriniň sany bolsa, onda a we b sanlaryň paýy diýip A köplügiň bölünen bölek köplükleriň sanyna aýdylýar.

Eger b san A köplügiň bölünen bölek köplükleriniň sany bolsa, onda a we b sanlaryň paýy diýip, her bir bölek köplügiň elementleriniň sanyna aýdylýar.

$a:b$ paýy tapmak üçin ýerine ýetirilýän amala bölmek, amaly a sana bölüniji, b sana bölüji diýilýär.

Köplenç bölmegiň ýerine ýetirilişiniň dogrulygyny barlamak üçin köpeltmekden peýdalanylýar. Onuň sebäbi köpeltmek bilen bölmegiň özara baglanyşyklydygydyr.

Oňa göz ýetirmek üçin $n(A)=a$ bolan A köplügi b sany jübüt-jübütden kesişmeýän $A_1, A_2, \ldots, A_n$ deňkuwwatly bölek köplükler alalyň. Onda $c=a:b$ her bölek köplügiň elementleriniň sanydyr, ýagny

$c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=\ldots=n(A_b)$.

Şerte görä $A=A_1$.

Köpeltmegiň kesgitlemesine görä her biri c deň bolan b sany goşulyjynyň jemi c deň bolan b sany goşulyjynyň jemi $c \cdot b$ köpeltmek hasylydyr. Diýmek, $a = c \cdot b$, ýagny a we b sanlaryň paýy diýip b san bilen köpeldilende a san alynjak c sana aýdylýar. Täze kesgitleme aldyk.

Kesgitleme. Otrisatel däl bitin a we b natural sanlaryň paýy diýip b san bilen köpeldilende a san alynjak $c = a : b$ otrisatel däl bitin sana aýdylýar.

$a : b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b$.

a we b sanlaryň paýy hemişe barmyka diýen soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema. a we b natural sanlaryň paýynyň bar bolmagy üçin $b \le a$ ýerine ýetmegi zerurdyr.

Subudy. Goý, a we b natural sanlaryň paýy bar bolsun, $a = c \cdot b$ bolan c natural san bardyr. c natural san bolany üçin $c \ge 1$. Deňsizligiň iki tarapyny hem b natural sana köpeltsek $c \cdot b \ge b$ alarys. $c \cdot b = a$ bolany üçin $a \ge b$ ýa-da $b \le a$.

Eger a=0 bolsa, b natural sana bölünende alynýan paýa seredeliň. Kesgitlemä görä $c \cdot b = 0$ bolar, $b \ne 0$ bolany üçin c=0. Bu ýerden $0:b=0$.

Teorema. Eger a we b natural sanlaryň paýy bar bolsa, onda ol ýeketäkdir.

Subudy. Goý, $a:b$ paýyň iki dürli bahasy bar diýip guman edeliň: $a:b=c_1$ we $a:b=c_2$ diýeliň. Onda kesgitlemä görä: $a=b \cdot c_1$ we $a=b \cdot c_2$. Bu ýerden $b \cdot c_1=b \cdot c_2$ ýa-da $c_1=c_2$. Paý ýeke-täk eken. Teorema subut edildi.

Indi $a \ne 0$, $b = 0$ bolan hala seredeliň. Goý, a we b sanlaryň paýy bar diýeliň. Onda kesgitlemä görä $a=c \cdot 0$ boljak c otrisatel däl bitin san bardyr. Bu ýerden a=0 gelip çykýar. Biz gapma-garşylyk aldyk. Diýmek, $a \ne 0$, $b = 0$ bolanda paý ýokdur. Eger a=0 we b=0 bolsa $0=c \cdot 0$ deňlik alarys. Ol c-niň islendik bahasynda deňligiň dogrudygyny aňladýar. Şonuň üçin hem matematikada noly nola bölmek mümkin däl hasaplanylýar.

Biz otrisatel däl bitin sanlary nola bölüp bolmaýandygyny görkezdik.

Gönükmeler

1. Aşakdaky deňlikleri nazary köplük düşünjesinden peýdalanyp düşündiriň.

a) 8:4=2;   ç) 6:6=1;   e) 4:1=4;
b) 6:3=2;   d) 4:4=1;   ä) 3:1=3.

2. Islendik n natural san üçin $n:n=1$ deňligiň dogrudygyny subut ediň.

a) Eger bölünijini 72 esse we bölüjini 24 esse azaldylsa, paý nähili üýtgär?

b) Eger bölüniji 52 esse, bölüniji 13 esse ulalsa, paý nähili üýtgär?

3. 6992:76 bölmegi ýerine ýetiriň. Hasaplamanyň dogrudygyny köpeltmek arkaly barlaň.

4. 4524:78 bölmegi ýerine ýetiriň. Hasaplamanyň dogrudygyny bölmek arkaly barlaň.

5. Aşakdaky meseleleriň näme üçin bölmek amaly bilen çözülýändigini düşündiriň.

a) Ejesi 12 almany çagalaryna 4 almadan deň paýlap berdi. Näçe çaga alma aldy?

b) 8 käşiri 4 towşana deň paýlap berdiler. Her towşana näçe käşirden ýetdi?

6. Pikir ýöretmedäki ýalňyşlygy tapyň: 35+10–45=42+12–54, bu deňlik dogry.

7. Meňzeş köpeldijileri ýaýyň daşyna çykaryp alarys,

5·(7+2–9)=6·(7+2–9),

bu deňligiň iki tarapyny hem 7+2–9 san aňlatmasyna bölüp alarys, 5=6.

8. Aşakdaky deňlikler dogry bolar ýaly şert görkeziň:

a) $(a+b) : c = a : c + b : c$;

b) $(a-b) : c = a : c - b : c$.

9. Paýy iki usulda hasaplaň.

a) (390+39) : 13;   ç) (6432) : 8;
b) (740+37) : 37;   d) (22553) : 15.

10. Aşakdaky pikir aýtmalaryň haýsysy çyn, haýsysy ýalan?

a) 273 san 5-e kratny;

b) 273 san 5 sana kratny däl;

ç) 3 san 273 sanyň bölüjisidir;

d) 3 san 243 sanyň bölüjisidir diýmek nädogrudyr.

§ 51. "Esse uly" we "esse kiçi" gatnaşyklary

Meselä seredeliň: "4 düýp alma agajyny we 12 düýp erik agajyny oturtdylar. Alma agaçlaryny erik agaçlaryndan näçe esse az oturdypdyrlar?"

Meseläni bölmek amalynyň kömegi bilen çözýärler: 12:4=3 (esse). Onuň manysyna düşünmek üçin şeýle suratdan peýdalanmak bolar.

A ▲▲▲▲

E ■■■■ ■■■■ ■■■■

"Esse uly", "esse kiçi" gatnaşyklar başga görnüşlerdäki meselelerde hem gabat gelýär.

Meselem: Aman 8 kömelek tapdy. Onuň jigisi Bahar ondan 2 esse az kömelek tapdy. Bahar näçe kömelek tapdy?

Bu meselede iki köplük barada gürrüň gidýär. A köplük Amanyň tapan kömelekleriniň köplügi bolsun, onda $n(A)=8$. B köplük Baharyň tapan kömelekleriniň köplügi $n(B)$ näbelli. Meseläniň şertine görä, A köplük B köplüge deňkuwwatly iki sany bölek köplükden durýar. Onda B köplügiň elementleriniň sany 8:2=4 bölmek bilen tapylar. Diýmek, $n(B)=4$, ýagny Bahar 4 kömelek tapypdyr. Ony suratda şeýle görkezmek bolar.

$OO\Delta$
$OO\Delta$
$OO\Delta$
$\underbrace{OO}_{A}\underbrace{\Delta}_{B}$

"a san b sandan c esse uly" sözlemi gysgaça ">" belgiden peýdalanyp ýazyp bolmaýandygyny belläp geçeliň. "Esse uly", "esse kiçi" gatnaşyklary ýazmak üçin ýörite belgi ýokdur.

Gönükmeler

1. Manysyny düşündiriň:

a) 10 san 5 sandan 2 esse uly;

b) 2 san 8 sandan 4 esse kiçi.

2. Aşakdaky meselelerde haýsy gatnaşyklaryň bardygyny düşündir we çöz.

a) täze ýyl arçasyny bezemek üçin gyzjagaz 3 sany ýyldyzjyk we ondan 2 esse köp baýdajyk taýýarlady. Gyzjagaz näçe baýdajyk taýýarlady?

b) ýer uçastogynda 4 sany erik agajy ösüp otyr. Ol almalardan 3 esse az. Näçe düýp alma agajy bar?

ç) Myratda 8 sany ýaşyl tegelejik bar, gyzyl tegelejikleri ondan 2 esse az. Myradyň gyzyl tegelejikleriniň sany näçe?

d) Gutuda 12 sany reňkli galam bar. Gara galamlaryň sany ondan iki esse köp. Gutuda näçe gara galam bar?

3. Deňlemeleriň köki bolýan bitin otrisatel däl sanlaryň köplügini ýazyň.

a) $x \cdot 5 = 0$;	ç) $x : 10 = 10$;	e) $15 : x = 2$;
b) $10 : x = 10$;	d) $x\ 5 = 15$;	ä) $x : 15 = 2$.

4. "Esse uly" gatnaşygyny ýola goýýan we çözülende 12:4=3 görnüşli deňligi emele getirýän iki sany ýönekeý meseläni düzüň.

5. Meseläni çözüň we ulanylan amallary esaslandyryň.

Kitabyň 96 sahypasy bar. Jeren ol kitapda bar bolan sahypalardan 8 esse az sahypany okady. Ol ýene näçe sahypany okamaly.

§ 52. Galyndyly bölmek

37 san 8-e galyndysyz bölünmeýär. Ýöne $37=8\cdot4+5$ deňlik ýerine ýeter ýaly 4 we 5 sanlar bardyr. Bu ýagdaýda 37 san 8-e galyndyly bölündi diýip aýdylýar, 4 sana doly däl paý, 5 sana bolsa galyndy diýilýär.

Kesgitleme. Bitin otrisatel däl a sany, b natural sana galyndyly bölmek diýip, $a=b\cdot q+r$ deňlik ýerine ýeter ýaly q we r bitin otrisatel däl sanlary tapmaklyga aýdylýar. Bu ýerde $o \le r < b$.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, r galyndy bölüjiden kiçi bolmaly, ýagny 0, 1, 2, 3, ... b-1 bolup biler.

Mysal. San 5-e bölünende, galyndyda 0, 1, 2, 3, 4 sanlar bolup biler.

Eger $a \le b$ bolsa, onda a sany b sana bölenińde doly däl paý q=0 we $a=r$ bolar, ýagny deňlik a we b sanlaryň islendik noldan tapawutly bahasynda ýerine ýetýär. $a=0\cdot b+a$ bolar.

Teorema. Islendik bitin otrisatel däl a we natural b sanlar uçin $a=b\cdot q+r$, (bu ýerde $0\leq r\leq b$) ýerine ýeter ýaly q we r sanlar bardyr. Bu häsiýeti kanagatlandyrýan (q,r) bahalar jübüti ýeke-täkdir.

Galyndyly bölmegiň nazary köplük manysyny düşündireliň.

Goý, $a=n(A)$ we A köplük $A_1, A_2, \ldots, A_q, \ldots, X$ köplüge bölünen bolsun. $A_1, A_2, \ldots, A_q$ köplükler deňkuwwatly we her biri b elementi saklaýan bolsun, X köplügiň elementleriniň sany $n(X)=r$ we $o\leq r<b$ bolsun. Onda $a=b\bullet q+r$ deňlikde q – deňkuwwatly köplükleriň sanyny (her biri b element saklaýan), galyndy r – bu X köplügiň elementleriniň sanyny aňladar.

Başlangyç synplarda galyndyly bölmek ýönekeý meseleler çözülende ýüze çykýar.

Mysal: 9 çaga jübüt-jübütden durdular, 1 çaga jübüt tapylmady. Galyndyly bölmek 9:2=4 (1 gal.) görnüşde ýazylýar.

Gönükmeler

1. Galyndyly bölmegi ýerine ýetiriň:

a) 42:5; b) 82:9; ç) 677:42; d) 105:82.

2. Bitin otrisatel däl sany natural a) 3; b) 8; ç) 35 sanlara böleniňde galyndyda haýsy sanlar bolup biler?

3. a sany 7-ä böleniňde galyndyda a) 0; b) 3; ç) 6 sanlar galýan bolsa, a sany nähili görnüşde ýazyp bolar?

4. 228 sany b sana bölüp, paýda 8, galyndyda 4 san aldylar. 228 san haýsy sana bölünipdir?

5. 5-den 23-e çenli sanlaryň köplügini 4-e böleniňde, şol bir galyndy galar ýaly klaslara bölüň. Näçe klas alyndy?

6. Bitin otrisatel däl sanlaryň köplügini 6 natural sana böleniňde, ol köplük näçe klasa bölüner? Her klasdan 2 sany san belgisini aýdyň.

7. a we b sanlary 8-e böleniňde, şol bir galyndy 7 galýar.

a) $a+b$; b) a-b; ç) $a\cdot b$ – 8-e böleniňde näçe galyndy galar?

8. Dogry pikir aýtmany görkeziň.

a) $(x-8):4=5$ deňligi kanagatlandyrýan x-iň bitin otrisatel däl bahasy bardyr.

b) $(x-8):4=5$ deňligi kanagatlandyrýan x-iň bitin otrisatel däl bahasy ýokdur.

ç) $(x-8):4=5$ x-iň islendik bahasy üçin deňlik dogrudyr diýmek nädogrudyr.

§ 53. Otrisatel däl bitin sanlaryň häsiýetleri

Bitin otrisatel däl sanlaryň birnäçe häsiýetleri bardyr. Bitin otrisatel däl sanlar tertipleşdirilendir we tükeniksizdir.

"Kiçidir" gatnaşykdan peýdalanyp, bitin otrisatel däl sanlaryň tertipleşdirilendigini subut edeliň. Onuň üçin bu gatnaşygyň tranzitiw we antisimmetrik häsiýetleriniň bardygyny jemden peýdalanyp görkezeliň.

Teorema. Eger $a<b$, $b<c$ bolsa, onda $a<c$.

Subudy. Şerte görä, $a<b$ we $b<c$, onda, "kiçidir" gatnaşygynyň kesgitlemesine görä, $b=a+x$ we $c=b+y$ deňlikler ýerine ýeter ýaly, x we y natural sanlar tapylar, onda $c=(a+x)+y$ goşmagyň utgaşdyrmak kanunyna görä,$c=a+(x+y)$, bu ýerde $x+y$ natural sandyr, onda "kiçidir" gatnaşygynyň kesgitlemesine görä, $a<c$.

Teorema. Eger $a<b$ bolsa, onda $b<a$ bolup bilmez.

Subudy. Hiç bir bitin otrisatel däl a san üçin $a<a$ deňsizligiň ýerine ýetmejegine göz ýetirmek kyn däldir. Eger $a<a$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $a=a+c$ deňlik ýerine ýeter ýaly ń natural san tapylar. Emma bu jemiň ýeke-täkligine görä bolup bilmez. Bu ýerde $c=0$ alarys.

Goý, $a<b$ we $b<a$ deňsizlikler ýerine ýetýän bolsun, bu "kiçidir" gatnaşygynyň tranzitiwlik häsiýetine görä, $a<a$ bolar, bu mümkin däl.

Şeýlelikde, bitin otrisatel däl sanlar köplüginde "kiçidir" gatnaşygy tranzitiw we antisimmetrik häsiýetleri ýüze çykarýar. Diýmek, bu tertip gatnaşygydyr, onda bitin otrisatel däl sanlar köplügi tertipleşdirilendir.

Seredilip geçilen bitin otrisatel däl sanlar köplüginde "kiçidir" gatnaşykda a we b sanlar $a<b$, $a=b$, $b>a$ bolup biler.

Islendik iki sanyň kiçisini ilki ýazyp, onuň yzyndan gelýän sanlaryň tükeniksiz köplügini ýazmak bolar. 1, 2, 3, 4 ..., bu yzygiderlilik tükeniksizdir.

$a=n(A)$ bolar ýaly, A köplügi alalyň. Bu köplüge bir elementi goşup, täze bir B köplügi alarys, onuň $a+1$ elementi bolar. a sanyň yzyndan gelýän sany $a+1$ diýip atlandyralyň. Onda islendik bitin otrisatel däl sanyň yzyndan gelýän ýeke-täk natural sany görkezmek bolar. Tersine, islendik bitin otrisatel däl sanyň öňünden gelýän natural sany hem görkezmek bolar. 0 san hiç bir sanyň yzyndan gelmeýär.

"Yzyndan gelýär" gatnaşygy bitin otrisatel däl sanlaryň jemi we köpeltmek hasyly bilen berk baglanyşyklydyr, eger a+b jem belli bolsa, $a+(b+1)$ jemi tapmak bolar, $a+(b+1)=(a+b)+1$, ýagny ol $a+b$ jemiň yzyndan gelýän sandyr.

Mysal: eger 4+2=6 bolsa, onda 4+3=(4+2)+1=6+1=7.

Köpeltmek üçin hem "yzyndan gelýär" gatnaşygyny tapmak bolar.

Mysal: eger $7\cdot5=35$ bolsa, onda $7\cdot(5+1)=7\cdot5+7=35+7$.

Bitin otrisatel däl sanlaryň ýene-de bir häsiýeti, eger a käbir bitin otrisatel däl san, $a+1$ onuň yzyndan gelýän san bolsa, $a<x<a+1$ deňsizligi kanagatlandyrýan hiç bir x san ýokdur, a we $a+1$ sanlara goňşy sanlar diýilýär.

Başlangyç synplarda ilkinji onluklar geçilende, öňünden gelýär, yzyndan gelýär düşünjeleri geçilýär, yzyndan gelýän sany tapmak üçin bir sany goşmaly, öňünden gelýän sany tapmak üçin bir sany aýyrmaly.

Gönükmeler

1. 1-nji synp okuwçysyna 1, 2, □, 4, 5 goýberilen sany ýazmak tabşyrylýar. Okuwçy öz jogabyny nädip düşündirmeli? Ol bitin otrisatel däl sanlaryň köplüginiň haýsy häsiýetinden peýdalanýar?

2. 1-nji synp okuwçysyna 7 sanyň goňşy sanlaryny aýtmak talap edilýär. Ol öz jogabyny esaslandyrmak üçin bitin otrisatel däl sanlaryň haýsy häsiýetinden peýdalanmaly?

3. Okuwçy 5+3=8 jemi hasaplady. Ol 6+3 jemi nädip hasaplamaly?

4. 2-nji synp okuwçysy $4\cdot7=28$ bolýandygyny bilýär. Ol $4\cdot8$ we $4\cdot9$ köpeltmek hasylyny nädip hasaplamaly?

5. $n(A\cup B)$ we $n(B\cup A)$ tapyň, eger

a) $A=\{m,n,k\}$, $B=\{a,b,c,d\}$;

b) $A=\{a,1,2,x\}$, $B=\{1,2\}$;

ç) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,2,1,0\}$;

d) her bir jübüti Eýleriň tegeleginde şekillendiriň.

6. Aňlatmalary goşmagyň utgaşdyrma häsiýetini peýdalanyp deňeşdiriň

a) (489+578) + 422 we 489 + (578+422);

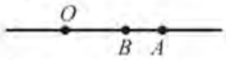
b) 7934 + (2066+4303) we (7934+2066) + 4303.

§ 54. Kesimleri deňeşdirmek. Kesimler üstünde amallar

Goý, a we b kesimler berlen bolsun. Bu kesimlere deň bolan kesimleri 0 başlangyçly şöhläniň üstünde goýalyň, $a=OA$, $b=OB$, üç ýagdaýyň bolmagy mümkin.

1. A we B nokatlar gabat gelýärler. Onda OA we OB kesimler bir kesim, a we b kesimler deň, diýmek, $OA = OB$, $a=b$.

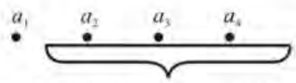
2. B nokat $0A$ kesimiň aralygynda ýatýar. Onda $0B$ kesim, $0A$ kesimden kiçi ýa-da $0A$ kesim $0B$ kesimden uly diýip aýdylýar we $OB<OA$ ($OA>OB$) ýa-da $b<a$ ($a>b$), diýip belgilenýär.



3. A nokat $0B$ kesimiň aralygynda ýatýar, onda $0A<0B$ ($0B>0A$) ýa-da $a<b$ ($b>a$).

Kesimleriň üstünde dürli amallar ýerine ýetýär.

Kesgitleme. Eger a_1, a_2, a_3, ..., a_n kesimleriň hiç bir içki umumy nokady bolman, olar biri-biriniň yzyndan gelýän bolsa, onda kesimleriň birikmesi a kesime bu kesimleriň jemi diýilýär we $a=a_1+a_2+a_3+ ... +a_n$ diýip ýazylýar.



Kesgitleme. a we b kesimleriň tapawudy ($a-b$) diýip, $b+c=a$ deňlik ýerine ýeter ýaly c kesime aýdylýar. a we b kesimleriň tapawudy şeýle tapylýar:

a) uzynlygy a kesime deň bolan AB kesimi alyp goýmaly.

b) bu kesimiň üstünde uzynlygy b kesime deň bolan AC kesimi alyp goýmaly.

ç) CB kesim a we b kesimleriň tapawudy bolar.

$CB=a-b$

a we b kesimleriň tapawudy bolmagy üçin $b<a$ bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Kesimler üstünde amallaryň birnäçe häsiýetleri bardyr:

a) islendik a we b kesimler üçin orun çalyşma kanuny ýerine ýetýändir: $a+b=b+a$.

b) islendik a, b we c kesimler üçin utgaşdyrma kanuny ýerine ýetýändir: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

ç) islendik a we b kesimler üçin $a+b\neq a$.

d) islendik a, b we c kesimler üçin; eger $a<b$ bolsa, onda $a+c<b+c$.

Gönükmeler

1. Gönüburçluk çyzyň, oňa diagonal geçiriň. Onuň taraplaryny, diagonalyny deňeşdirmek talap edilýär. Siz muny nähili ýerine ýetirersiňiz?

2. Dörtburçluk çyzyň. Onuň taraplaryny artýan tertipde ýerleşdirmek talap edilýär. Siz muny nähili ýerine ýetirersiňiz?

3. $a<b$ bolar ýaly a we b kesimleri çyzyň. Bu kesimleriň jemini we tapawudyny gurmaly.

4. Dürli taraply üçburçluk çyzyň. Onuň haýsy tarapynyň uludygyny kesgitlemeli. Bu uly tarapyň üstünde beýleki iki tarapy yzygider goýuň.

5. A, B we C nokatlar bir döni çyzykda ýatýarlar we $AB>BC$, $AC>BC$ diýip, netije çykarmak bolarmy?

6. Kesimler köplüginde "kiçidir" gatnaşygynyň tranzitiw häsiýetiniň bardygyny subut ediň.

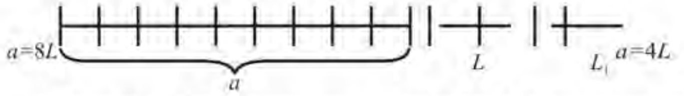
7. Kesimleri goşmakda utgaşdyrma kanunynyň ýerine ýetýändigini subut ediň.

§ 55. Natural san kesimiň uzynlygy hökmünde

Kesimiň uzynlygynyň nähili ölçenilýändigini ýada salalyň. Kesimler köplüginden uzynlygy L bolan uzynlyk birligini saýlap alýarys. Eger bu kesim a kesimiň üstünde n gezek ýerleşýän bolsa, onda:

$$a = \underbrace{L + L_{\dots} + L}_{n\ goşulyjy} = n \cdot L$$

diýip ýazylýar we n natural sana bolsa, L uzynlyk birligindäki a kesimiň uzynlygy diýip aýdylýar. Mysal:



Eger uzynlyk birligiň deregine başga kesimi saýlap alsak, onda a kesimiň uzynlygy üýtgär. Eger uzynlyk birligiň deregine L_1 kesimi alsak, onda a kesimiň uzynlygy $4L$ deň bolar.

Şeýlelikde, a kesimiň uzynlygyny aňladýan n natural san saýlanyp alnan L kesimiň a kesimde näçe gezek ýerleşýändigini görkezýär.

Bu san üçin "deňdir", "kiçidir" gatnaşygynyň manysyny düşündireliň.

Goý, saýlanyp alnan L kesimde a kesimiň uzynlygy n, b kesimiň uzynlygy m natural san bolsun. Eger a we b kesimler deň bolsa, onda olaryň san bahalary hem deňdir, ýagny $n=m$.

Eger a kesim b kesimden kiçi bolsa, onda a kesimiň san bahasy, b kesimiň san bahasyndan kiçidir, ýagny $n<m$.

Kesimiň uzynlygy bilen onuň san bahasynyň arasyndaky özara baglanyşyk kesimleri deňeşdirmek üçin olaryň san bahalaryny deňeşdirmeklige getirýär. Mysal, 5 *sm.* > 3 *sm.*, sebäbi 5>3.

Biz n natural sanyň kesimiň uzynlygyny ölçemekde ulanylyşyny düşündirdik. Muny beýleki ululyklar (massa, meýdan, wagt ...) üçin hem ulanmak bolar.

Gönükmeler

1. Bir göni çyzykda MP, PZ, ZQ deň kesimleri guruň. Kesimiň uzynlygy näçä deň bolar? Uzynlyk birligi deregine MZ, MQ kesimler saýlanyp alynsa, onda bu kesimiň uzynlygy näçä deň bolar?

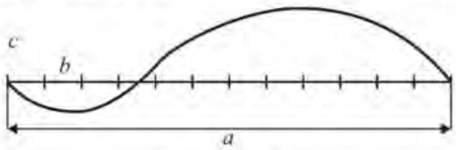
2. Iki kesimiň uzynlygyny, saýlanyp alnan L uzynlyk birliginde ölçäp, birinji kesim ikinjiden 2 esse uzyn diýip kesgitlediler. Soňra uzynlyk birligini 10 esse kiçeltdiler. Kesimleriň uzynlyklaryny deňeşdirmegiň netijesi üýtgärmi?

3. Okuwçylar "Çyzgyda näçe kesim şekillendirilipdir?" diýen meseläni çözenlerinde haýsy düşünjäni aýdyň däl görnüşde ulanýarlar?

§ 56. Ululyklaryň san bahasy bolan sanlary goşmagyň we aýyrmagyň manysy

Kesimleri ölçemek netijesinde alnan natural sany goşmagyň we aýyrmagyň nähili manysynyň bardygyny düşündireliň.

1. Goşmak. Goý, L uzynlyk birliginde b we c kesimleriň uzynlyklary 3 we 8 natural sanlar bolsun, onda $b=3L$, $c=8L$, $3+8=11$. 11 san haýsy kesimiň uzynlygy? Ol $a=b+c$ kesimiň uzynlygydyr we 11 L-e deňdir.



87-nji surat

Düşündirişini umumy görnüşde geçireliň. Goý, a kesim b we c kesimlerden durýan bolsun we $b=mL$, $c=nL$, m, n natural sanlar bolsun, onda b kesim m sany L kesimden, c kesim n sany L kesimden ybarat bolar, a kesim bolsa $m+n$ sany kesime bölüner. Ýagny $a=(m+n)\cdot L$.

Şeýlelikde, m we n natural sanlaryň jemini uzynlyklary m we n sanlar bolan b we c kesimlerden ybarat bolan a kesimiň uzynlygy hökmünde garamak bolar.

2. Aýyrmak. Eger a kesim b we c kesimlerden ybarat bolsa, a we b kesimleriň uzynlyklarynyň san bahasy m we n natural sanlar bolsa, (şol bir uzynlyk birliginde) onda c kesimiň uzynlygynyň san bahasy a we b kesimleriň uzynlyklarynyň san bahalarynyň tapawudyna deňdir $c=(m-n)\cdot L$.

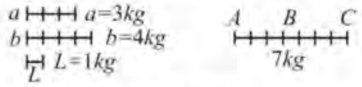
Mysal. Eger $a=9L$ kesim b we c kesimlerden ybarat bolsa we $b=4L$ bolsa, onda $c=(9-4)\cdot L=5L$.

Bu häsiýeti diňe bir kesimiň uzynlyklaryny tapmakda däl, eýsem beýleki ululyklar üçin hem ulanmak bolar.

Başlangyç synplaryň matematika kitaplarynda dürli meseleler, ululyklar we olaryň üstünde arifmetiki amallar arkaly çözülýär.

Mesele: "Ýer uçastogyndan 4 *kg* pomidor we 3 *kg* hyýar ýygdylar. Jemi näçe *kg* gök ýygnadylar?"

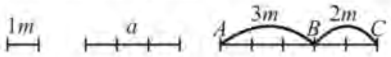
Mesele goşmak arkaly çözülýär. Näme üçin? Ýygnalan pomidory a, hyýary b kesim görnüşinde añladalyñ, onda jemi ýygnalan gök önümleri AC kesim görnüşde añlatmak bolar. Bu kesim bolsa AB we BC kesimlerden ybaratdyr. AC kesimiñ san bahasy bolsa AB we BC kesimleriñ san bahalarynyñ jemine deñdir. Ýagny 4+3=7.



88-nji surat

Mesele: Jalbar tikmek üçin 2 m mata gerek, kostýum tikmek üçin ondan 1 m köp mata gerek. Kostýum üçin näçe metr mata gerek?

Jalbar üçin gerek matany a ýa-da bu kesime deñ bolan AB kesim arkaly añlatmak, BC kesim 1 m bolar.



89-njy surat

AC kesimiñ uzynlygynyñ san bahasy AB we BC kesimleriñ san bahalarynyñ jemine deñdir, $2m+3m=(2+3)m=5m$.

Gönükmeler

1. Üçburçluk çyzyñ. Onuñ perimetrini tapmaly. Muny näçe usulda tapmak bolar?

2. Gönüburçluga diagonal geçiriñ. Gönüburçlugyñ perimetri we alnan üçburçlugyñ biriniñ perimetri belli. Diagonalyñ uzynlygyny tapyp bolarmy?

3. Üçburçlugyñ islendik iki tarapynyñ jemi 10 sm. Onuñ perimetrini tap.

4. Dörtburçluga diagonal geçirdiler. Eger emele gelen üçburçluklaryñ perimetrleri belli bolsa, dörtburçlugyñ perimetrini tapyp bolarmy?

5. Näme üçin aşakdaky meseläniñ goşmak, aýyrmak arkaly çözülýändigini düşündir:

a) ýüpden ilki 8 m, soñra 2 m kesip aldylar. Näçe metr ýüp kesip aldylar?

b) Maksat 9 ýaşynda, Kuwwat ondan 3 ýaş kiçi. Kuwwat näçe ýaşynda?

6. Meseläni dürli usulda çöz we düşündir:

Birinji gapda 4 *l*, ikinji gapda 3 *l* süýt bardy. Günorta naharda onuň 2 *l* aldylar. Näçe *l* süýt galdy?

§ 57. Ululyklaryň bahasy bolan sanlary köpeltmegiň we bölmegiň manysy

II synplar üçin meselä seredip geçeliň. Her biri 3 *l*. bolan 4 sany bankada alma suwy bardy. Bu bankalarda jemi näçe litr alma suwy bardy?

Näme üçin bu mesele 3·4=12 *l* köpeltmek arkaly çözülýär?

4 bankada jemi näçe litr bardygyny tapmak üçin 3*l*+3*l*+3*l*+3*l* jemi tapmak ýeterlik.

4 sany birmeňzeş goşulyjylaryň jemini köpeltmek hasyly bilen çalşyp alarys.

3*l*+3*l*+3*l*+3*l*=(3+3+3+3)·1*l*=(3·4)·*l*=12*l*. Bu meselede esasy gürrüň bankadaky alma suwunyň iki sany banka we litr göwrüm birlikleri barada gidýär.

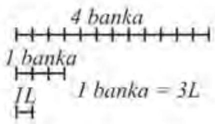
Ilki ol banka göwrüm birliginde, soňra bolsa litr ölçeg birliginde ölçenilýär. Bir banka ölçeg birliginde 3 litr ölçeg birligi bar, onda

4·1*b*=4·(3*l*)=(4·3)·1*l*=12*l*.

Şeýlelikde, natural sanlary köpeltmek täze has kiçi birlige geçmäge mümkinçilik berýär. Bu tassyklamany kesimiň uzynlygy üçin hem ulanmak bolar.

Eger a kesim m sany deň uzynlykly L kesimden, L kesim bolsa, n sany deň uzynlykly L_1 kesimden ybarat bolsa, onda a kesimiň uzynlygy L_1 kesim arkaly

$$a=\underbrace{n+n+n+...+n}_{m\text{ goşulyjy}}=(n\cdot m)\cdot L_1$$ kesgitläp bolar.



90-njy surat

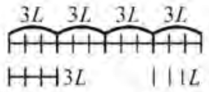
Ululyklaryň bahasy bolan sanlary bölmegiň manysyny düşündireliň.

Mesele: Bir banka 3*l* suw ýerleşýär. 12*l* suwy ýerleşdirmek üçin näçe banka gerek bolar?

Meseläni çözmek üçin, $12l$ kesim görnüşinde we bu kesimde $3l$-iň näçe gezek alynjakdygyny şekillendireliň.

Şeýlelikde, $12l:3l=4(b)$.

Bu ýerden görnüşi ýaly, biz litr ölçeg birliginden banka ölçeg birligine geçdik.



91-nji surat

Muny umumy görnüşde kesimler arkaly aşakdaky ýaly görkezmek bolar:

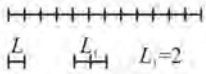
$L_1=nL$; $L=L_1:n$, onda $a=mL=m(L_1:n)=(m:n)\cdot L_1$

Şeýlelikde, natural sanlary bölmek, kesimiň uzynlygy hökmünde täze birlige (has uly birlige) geçmegi aňladýar.

Mysal. Eger $a=12L$ we $L_1=2L$ bolsa, onda kesimiň uzynlygy L_1 uzynlyk birliginde, $6L_1$ bolar.

$a = 12L = 12(L_1:2) = (12:2)\,L_1 = 6L$.

Bu ýagdaýy aşakdaky ýaly şekillendirmek bolar:



92-nji surat

$a=12L$ $a=(12:2)\,L_1=6L_1$.

Başlangyç synplarda dürli ululyklaryň üstündäki ýönekeý meseleler amaly usulda ýerine ýetirilip görkezilýär.

Bu ýerde köpeltmek birmeňzeş goşulyjylaryň jemi görnüşinde, bölmek bolsa köpeltmegiň ters amaly hökmünde görkezilýär.

Gönükmeler

1. Kesimiň uzynlygynyň bahasy nähili üýtgär?

a) uzynlyk birligi 4 esse kiçelse;

b) uzynlyk birligi 5 esse ulalsa.

2. Aşakdaky meseleleriň näme üçin köpeltmek arkaly çözülýändigini düşündiriň.

a) dükana her birinde 9 *kg* alma bolan 3 ýaşik getirdiler. Jemi näçe *kg* alma getirdiler?

b) her metri 8 manatdan 3 *m* matanyň bahasy näçe?

ç) ogly 8 ýaşynda. Kakasy ondan 4 esse uly, kakasy näçe ýaşynda?

3. Aşakdaky meseleleriň näme üçin bölmek arkaly çözülýändigini düşündiriň.

a) çaga paltosy üçin 2 *m* mata harçladylar. 12 *m* matadan şonuň ýaly näçe palto tikip bolar?

b) naharhanada 80 *kg* kartoşka we 8 *kg* käşir harçladylar. Kartoşkany käşirden näçe esse köp harçladylar?

4. Meseläni dürli usulda çözüň:

a) ussahanalaryň birinde 15 *m*, beýlekisinde 12 *m* mata bardy. Ol matalaryň her 3 metrinden bir köýnek tikdiler. Näçe köýnek tikdiler?

b) bir sygyr gije-gündiziň dowamynda 14 *kg* süýt berýär. Şolar ýaly 10 sygyrdan 7 gije-gündizde näçe *kg* süýt almak bolar?

§ 58. Sanlaryň onluk hasaplanyş ulgamynda ýazylyşy

Biz her ädimde diýen ýaly sanlar bilen iş çalyşýarys, şonuň üçin hem islendik sany dogry aýtmagy, ýazmagy, sanlar üstünde amallary ýerine ýetirmegi başarmalydyrys. Olaryň hemmesini ýerine ýetirmäge bize sanlaryň onluk hasaplanyş ulgamy kömek edýär.

Hasaplanyş ulgamy diýip sanlaryň atlandyrylyşy, ýazylyşy we olar üstünde amallaryň ýerine ýetirilişi üçin gerek bolan dile aýdylýar.

Bilşimiz ýaly, onluk hasaplanyş ulgamynda on sany belgi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ulanylýar we olardan sanlaryň gysgaça ýazylyşy emele getirilýär. Oňa mysal edip 36789 sany getirmek bolar. Bu san

30000+60000+700+80+9 sanyň, ýagny

3 on müňe + 6 müňe + 7 ýüze + 8 on + 9 birlige deň bolan sanyň ýa-da

$3\cdot10^4+6\cdot10^3+7\cdot10^2+8\cdot10+9$ sanyň gysgaça ýazgysydyr.

Kesgitleme.

Islendik x natural sanyň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysy diýip $x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\dots a_1\cdot10+a_0$ ýazga aýdylýar. Bu ýerde $a_1, a_2, \dots, a_n$ koeffisiýentler 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bahalary alyp bilýär we $a_n\neq0$

$a_n10_n+a_{n-1}10^{n-1}+\dots a_1 10+a_0$ jemi gysgaça $a_n a_{n-1} \dots a_0$ ýazmak kabul edilendir.

Berlen x sanyň ýazgysyndaky 1, 10, 10^2,..., 10^n sanlara razrýad birlikleri diýilýär. Her razrýadyň 10 birligi ol razrýaddan ýokary bolan razrýadyň 1 birligine deňdir, ýagny islendik iki goňşy razrýadyň paýy 10-a deňdir. 10 sana hasaplaýyş ulgamynyň esasy diýilýär. Sanyň ýazgysyndaky ilkinji üç belgi (sifr) bir topary emele getirýär we birinji klas ýa-da birlikler klasy diýip atlandyrylýar. Oňa birlikler, onluklar we ýüzlükler girýär.

Birlikler klasyndan soň müňlükler klasy gelýär we oňa müňlükler, onmüňlükler, ýüzmüňlükler razrýadlary degişlidir.

Şondan soňky gelýän klas millionlar klasy bolup, oňa millionlar, onmillionlar, ýüzmillionlar razrýadlary degişlidir.

Indiki üç razrýad hem täze klasy emele getirýär. Sanlaryň klaslara bölünmegi ol sanlary ýazmaga, okamaga amatlyklar döredýär.

Onluk hasaplanyş ulgamynda her bir sany $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... a_1 \cdot a_0$ görnüşde ýazyp bolýar, bu ýerde $a_0, a_1 ..., a_n$ koeffisiýentler 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bahalary alyp bilýär we $a_n \neq 0$.

Sanlaryň atlandyrylyşy, ýazylyşy ilkinji on san we birligiň atlandyrylyşy bilen alynýar. Ikinji onlugyň sanlaryny $1 \cdot 10 + a_0$ görnüşde aňlatmak bolar. Ol sanlary atlandyrylanda öňünde "on" sözi aýdylýar. On bir, on iki, on üç we ş.m.

Dördünji, bäşinji, altynjy, ýedinji, sekizinji we dokuzynjy onlugyň sanlary hem şoňa meňzeş aýdylýar, olarda diňe tegelek onluklaryň atlary (kyrk, elli, altmyş, ýetmiş, segsen, togsan) üýtgeýär. 10 sany onluk bir ýüzlügi aňladýar we ýüzden uly sanlar $1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ görnüşe eýe bolýar. Olaryň aýdylyşynda ilki ýüzlügiň sanyny aňladýan san, soň onluklaryň we şondan soň birlikleriň atlaryny aňladýan sanlar bilen aýdylýar. Ýüzlükler hem iki ýüz, üç ýüz we ş.m. ikibelgili sanyň öňünden aýdylýar. On sany ýüzlüge ýetilende aýratyn at "müň" sözi goşulýar. Müňlükleri sanamak hem ýüzlüklerdäki ýaly iki müň, üç müň we ş.m. dowam edilýär. Müň sany müňlügi alanymyzda "million" sözüne geçýäris. Millionlar hem müň sany milliona ýetýänçä ýokarda agzalanlar ýaly sanalýar. Müň sany million "milliard" diýen aýratyn ada eýedir. Milliardlardan müň sanysy, ýagny million sany million "billion" diýip atlandyrylýar. Hasaplamalarda köp sifr ýazmaz ýaly milliony

– 10^6, milliardy 10^9, billiony 10^{12} görnuşde ýazylýar. Olardan uly sanlary hem şoňa meňzeş alynýar.

Natural sanlaryň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysyndan peýdalanyp, sanlary deňeşdirmegiň ýene bir usulyny görkezmek bolar.

Goý, x we y natural sanlar berlen bolsun. Olaryň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysyny ýazalyň:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0$$

Bu sanlary deňeşdirmeli bolsun.

Eger $n<m$, ýazgyny x – sanyň razrýad birlikleriniň sany y sanyndakydan az;

$n=m$, ýöne $a_n < b_m$, ýagny sanlaryň razrýad birlikleriň sany deň, ýöne x sanyň birinji koeffisiýenti y sanyň birinji koeffisiýentinden kiçi;

$n=n$, $a_n=b_n$, $a_{k+1}<b_{k+1}$, ýagny sanlaryň razrýad birlikleriniň sany deň, k-njy koeffisiýente çenli koeffisiýentler hem deň, ýöne x sanyň k+1-nji koeffisiýenti y sanyňkydan kiçi bolsa, onda x san y sandan kiçidir.

Bu tassyklamany subutsyz kabul edilýär. Ondan peýdalanyp, sanlary aňsat deňeşdirmek bolýar.

Mysal üçin:

a) 9876<10123, sebäbi 9876 sanyň sifrleriniň sany 10123 sanyň sifrleriniň sanyndan az.

b) 7683>8107 sifrleriniň sany deň, emma müňlükler razrýadynyň sifri 7683 sanda 8107 sandakydan kiçi.

ç) 8327<8329 sifrlerniň sany deň, müňlükleriň, ýüzlükleriň sanlary deň, onluklaryň sany birinji sanda ikinji sanyňkydan kiçi.

Başlangyç synplarda sanlaryň atlandyrylyşy (belgilenilişi) konsentrlere bölüp öwredilýär.

Gönükmeler

1. Sanlaryň ýazgysy onluk hasaplanyş ulgamynda haýsy jem bolup biler?

a) 6957;	ç) 564;	e) 76405;	f) 864300;
b) 7452;	d) 772;	ä) 20308;	g) 245300.

2. Jem haysy sany aňladyar?

a) $2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9$; ç) $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$;

b) $3 \cdot 10^4 + 10^3 + 4 \cdot 10 + 6$; d) $10^4 + 10^2$.

3. Meseläni çöz:

a) 3 ýüz müňlügi, 2 on müňlügi we 5 müňlügi bolan sany ýaz.

b) 6 on müňlügi we 8 müňlügi bolan sany ýaz.

ç) 8 müňlügi, 7 ýüzlügi we 5 onlugy bolan sany ýaz.

d) ikinji klasyň 25 birligi, birinji klasyň 180 birligi bolan sany ýaz.

4. Sany ýaz we oka, haýsy birligiň we razrýadyň ýokdugyny aýdyp ber: üç ýüz ýigrimi bäş million, bäş ýüz million, iki ýüz bäş müň.

5. Razrýadlaryň jemi görnüşinde ýaz:

6952, 5200, 7805, 9036.

6. Sanlary deňeşdir:

a) 325174 we 32500184; ç) 3001257 we 3100257;

b) 418000035 we 418035; d) 8060060 we 8006006.

7. Onluklary, birliklerinden 3 esse kiçi bolan ikibelgili sanlaryň ählisini ýaz.

8. Birinji sifri 8 we ähli sifrleri dürli bolan 3-e kratny iň kiçi üçbelgili sany ýaz. Şu şerti kanagatlandyrýan iň uly üçbelgili san barmy?

9. Her bir razrýad birligi öňdäkiden bir san uly we sifrleriniň jemi 30-a deň bolan bäşbelgili sany ýaz.

10. 9-a kratny bolar ýaly 10 sanyň sagyndan we çepinden haýsy san belgilerini goýmaly?

11. Iki sanyň jemi 715-e deň. Olaryň biri nul bilen gutarýar. Eger ol nuly çyzsaň, birinji san alynýar. Ol sanlary tap.

12. Ýyldyzjyklaryň ornuna haysy sany goýmaly?

(hasaplama onluk hasap ulgamynda geçirilýär).

a) $\begin{array}{r} +{*}246 \\ \underline{3{*}1{*}} \\ 4960 \end{array}$; b) $\begin{array}{r} -{*}3{*}8 \\ \underline{123{*}} \\ 4143 \end{array}$; ç) $\begin{array}{r} +378{*} \\ \underline{4{*}{*}9} \\ {*}909 \end{array}$; d) $\begin{array}{r} -11{*}7 \\ \underline{{*}9{*}} \\ 111 \end{array}$

§ 59. Otrisatel däl bitin sanlaryň ýazylyşy we döreýşi barada

Onluk hasaplanyş ulgamynda sanlaryň ýazylyşy biziň eramyzdan öň VI asyrda Hindistanda, olardan araplara we ýewropa X-XIII asyrlarda ýaýrapdyr diýen taryhy maglumatlar bar.

Sanlar baradaky düşünje örän ir döräpdir we ol sanlary ýazmak zerurlygy ýüze çykypdyr. Sanlaryň ýazylyşy ýüze çykmanka, adamlar sanap bilipdirler, bu ýerde olara elleriniň, aýaklarynyň, barmaklary, daşjagazlar, taýajyklar, ýüp düwünleri kömek edipdir. Bu usul uly sanlary ýazmakda, deňeşdirmekde, olaryň üstünde amallary geçirmekde kynçylyk döredipdir. Bu ýerde sanamagyň has amatly usuly, sanlary toparlaýyn sanamak usuly ýüze çykypdyr. Ýagny deň elementi bolan köplükleri deňeşdirmek arkaly sanapdyrlar. Mysal: aw eti bäş güne ýetjek bolsa, ony bir eliniň barmaklary bilen deňeşdiripdirler. Şeýlelikde, dürli hasaplaýyş ulgamlary bäşlik, onluk, ýigrimilik hasaplaýyş ulgamlary ýüze çykypdyr.

Iň irki hasaplaýyş ulgamy ikilik hasaplaýyş ulgamydyr. Bu adamlar sany barmaklaryň kömegi bilen däl-de, elleriniň kömegi bilen sanaýarka ýüze çykypdyr. Ýagny onda iň kiçi razrýad birligi onuň bir eli, iň uly razrýad birligi onuň iki eli bolupdyr. Bu hasaplaýyş ulgamy häzir hem saklanyp galypdyr (Predmetleri jübütden sanamak).

Adamlaryň kem-kemden ösen tygşytlylyk talaby sanamagyň usulynyň döremegine sebäp bolupdyr. Bu bolsa ýuwaş-ýuwaşdan ilkinji matematiki düşünjeleriň, natural sanlaryň döremegine sebäp bolupdyr.

Sanlaryň soňky ösüşi bäş müň ýyl mundan öň gadymy Wawilon, Müsür, Hytaý döwletleriniň döremegi bilen baglanyşyklydyr.

Gadymy Wawilonda toparlaýyn altmyşlyk hasaplanyş ulgamyndan peýdalanypdyr. Mysal, gadymy Wawilon matematigi 137 sany $137=2\cdot60+17$ görnüşde ýazypdyr. Bu sanlar dürli belgilemeleriň, üçburçluklaryň kömegi bilen ýazylypdyr. Bu üçburçluklary galypda guýup palçykdan ýasapdyrlar, soňra olary guradyp ýakypdyrlar.

Sanlary ýazmak üçin üçburçlugyň ýerleşişinden peýdalanypdyrlar. Eger üçburçlugyň ýiti burçy aşak bolsa, ol birligi we altmyşy, ýiti burçy çep tarapa baksa, ol onlugy aňladypdyr. Beýleki sanlar bu belgileriň we goşmak amalynyň üsti bilen şekillendirilipdir.

Mysal:

5 san ▼ ▼ ▼ görnüşde şekillendirilipdir.

▼▼

137 sany ýazmak üçin ▼ ▼ ▼ şekillerden peýdalanylypdyr.

▼▼◀▼▼▼

▼

Bu ýazgy altmyşlyk hasaplanyş ulgamyndaky 60+60+10+7=2·60+17 ýazgyny aňladypdyr.

Gadymy Wawilondaky sanlaryň bu görnüşde ýazylyşy, uly sanlary ýazmakda köp kynçylyklary döredipdir.

Näme üçin gadymy Wawilonda 60-lyk hasaplanyş ulgamy ýüze çykypdyr? diýen soraga gönümel jogap bermek kyn.

Ýöne gadymy Wawilonda matematika, astronomiýa ylymlaryndan ýeterlik gorlary bolupdyr, töweregiň 360^0-a bölünmegi, bir ýylda 360 günüň bolmagy, 60-lyk hasaplanyş ulgamynyň döremegine sebäp bolupdyr diýen çaklamalar bar.

60-lyk hasaplanyş ulgamynyň galyndylary biziň şu günlerimizde hem burçy gradiuslarda, minutlarda, sekuntlarda ölçemekden saklanyp galypdyr.

Gadymy Müsürde onluk hasaplaýyş ulgamynda sanalypdyr. Olaryň birlik, onluk, ýüzlük, müňlük razrýadlar boýunça belgileri bolupdyr.

1-9 sanlar bir çyzyk (|), onluk (∩), ýüzlük (e), müňlük (Γ) belgi bilen ýazylypdyr. Mysal: gadymy Müsürde:

122 san e∩∩|| görnüşde, 1314 san bolsa, Γeee |||| görnüşde ýazylypdyr.

Gadymy Müsürde sanlary köpeltmek, yzygider iki esse ulaltmak arkaly ýerine ýetirilipdir.

Mysal üçin: 15 we 17 sanlary köpeltmek aşakdaky ýaly ýerine ýetirilipdir:

$15\cdot17=15\cdot(1+2\cdot2\cdot2\cdot2)=15\cdot1+15\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=15+30\cdot2\cdot2\cdot2=$

$=15+60\cdot2\cdot2=15+120\cdot2=15+240=255.$

Umuman, gadymy Müsürde we Wawilonda matematika ylmy has ösüpdir. Ýöne netijeleri jemlemek, subut etmek kem-kemden uzak wagtyň dowamynda bolupdyr.

Matematika ylmynyň ösmegine uly goşandyny goşan alymlar gadymy Gresiýadan: Fales (624-547 b. e. öň), Pifagor (580-500 b. e. öň), Demokrit

(460-370 b. e. öň), Platon (427-347 b. e. öň), Ewklid (300 b. e. öň), Arhimed (287-212 b. e. öň), Eratesten (276-194 b. e. öň) we başgalar. Bu sanlaryň ösüşi baradaky giden bir taryhdyr.

Gadymy Gresiýada sanlary ýazmagyň alfawit düzgüni ýüze çykýar. Bu usulda sanlar harplaryň üsti bilen ýazylypdyr. Ilkinji dokuz harp 1-9 sanlary, soňky dokuz harp bolsa, ýüzlükleri aňladypdyr. Sözden tapawutlandyrmak üçin harplaryň ýokarsyndan çyzyjaklar goýlupdyr. Mysal üçin, 543 san φμ£ (φ-500, μ-40, £-3) görnüşde ýazylypdyr. Has uly sanlary ýazmak üçin başga belgilemeler ulanylypdyr.

Iki müň ýyl ozal Ýewropa we Aziýanyň köp döwletleri gadymy rimlileriň belgilemelerinden peýdalanypdyrlar.

Rimleriň sanbelgileri:

I – bir;	L – elli;	M – müň.
V – bäş;	C – ýüz;	
X – on;	D – bäş ýüz.	

Galan sanlar belgileriň gelşine baglylykda goşmak we aýyrmak amalynyň kömegi bilen ýazylypdyr. Ýagny kiçi san uly sanyň öňünden gelse, aýrylypdyr, yzyndan gelse, goşulypdyr. Mysal, IV (5–1=4), XC (100––10=90), LVI (50+5+1=56).

Rim belgilemelerinden peýdalanyp, birnäçe sanlary ýazalyň.

165=CLXV, 347=CCCLXXIV

Dört, bäş we alty belgili sanlar ýazylanda belginiň sag tarapynda aşakda m harpyny goýmak bilen ýazylypdyr.

29635=XXIX_mDCXXXXV, 137745=CXXXVIIDCCXLV.

Hindistanyň alymlarynyň matematika ylmyna esasy goşandy, arifmetikada onluk hasaplanyş ulgamyny girizmekleridir. Ýagny häzirki wagtda bütin dünýädäki adamlaryň sanlaryň ýazylyşyny we okalyşyny girizmekleridir. Bu biziň eramyzdan öň VI asyra degişlidir.

Bu usulda sanlaryň ýazylyşynda we okalyşynda sifrleriniň ýerleşýän ýerine baglydyr.

Mysal üçin:

703, bu ýerde 7 san belgisi 7 ýüzlügi; 72 ýazgyda 7 sifr 7 onlugy; 68917 ýazgyda bolsa, 7 sifr birligi aňladýar. Şeýlelikde, on sany sifrleri arkaly ähli sanlary ýazmak bolýar. Şonuň üçin bu ulgama pozision san hasaplaýyş ulgamy diýilýär.

Gönükmeler

1. Onluk hasaplanyş ulgamynda ýaz:

XXVII, XXI, XLIV, LXII, LXXVIII, XCV, CDXXIII, MCDVII, MCDXIX, MDCCCLXXI.

2. Rim hasaplaýyş ulgamynda ýaz:

24, 49, 117, 204, 468, 1243, 1905, 1941, 1986, 2000.

§ 60. Onluk hasaplanyş ulgamynda köpbelgili sanlary goşmak

Natural sanlary goşmagyň nähili ýerine ýetirilýändigine seredeliň. Eger a we b sanlar birbelgili sanlar bolsa, onda olaryň jemi $a=n(A)$, $b=n(B)$ we $A \cap B=\varnothing$ bolan A we B köplükleriň birleşmesiniň elementleriniň sanyna deňdir. Şonuň ýaly birbelgili sanlaryň jemini tablisada ýazylýar we ony ýatdan öwrenilýär. Onuň ýaly tablisa bir belgili sanlary goşmak tablisasy diýilýär.

Eger a we b sanlar köpbelgili bolsalar, onda olary "sütünleýin" goşmak usulynda peýdalanyp goşulýar. Haýsy nazary esaslardan peýdalanyp ýerine ýetirilýändigine düşüenliň.

364+5223 jeme seredeliň.

Goşulyjysy jem görnüşinde ýazsak, goşmagyň orun çalyşma, utgaşdyrma, köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanunlaryndan peýdalansak, alarys:

$$364+5223=\left(3\cdot 10^2+6\cdot 10+4\right)+\left(5\cdot 10^3+2\cdot 10^2+3\right)=5\cdot 10^3+$$
$$+3\cdot 10^2+2\cdot 10^2+6\cdot 10+2\cdot 10+4+3=5\cdot 10^3+\left(3+2\right)\cdot 10^2+$$
$$+\left(6+2\right)\cdot 10+\left(4+3\right)=5\cdot 10^3+5\cdot 10^2+8\cdot 10+7.$$

Alnan jem 5587 sandyr.

Sanlary "sütünleýin" goşmak:

Sanlaryň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysyna goşmagyň orun çalşyrma we utgaşdyrma, köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanunyna, birbelgili sanlary goşmak tablisasyna esaslanandyr.

Birbelgili sanlaryň jemi 10-a deň ýa-da 10-dan uly bolanda goşmaklygyň nazary esaslaryna seredeliň:

Goý, 368+927 jemi tapmaly bolsun.

Goşulyjylary jem bilen çalşyrsak

$(3\cdot10^2+6\cdot10+8)+(9\cdot10^2+2\cdot10+7)=(3+9)\cdot10^2+(6+2)\cdot10+(8+7)$ alarys 3+9, 8+7 birbelgili sanlaryň jemi 10-dan geçýär, emma koeffisiýenti 10-dan kiçi bolar ýaly ýazmaly. Onuň üçin 3+9 jemi 10+2; 8+7, jemi 10+5 görnüşde ýazsak:

$(3+9)\cdot10^2+(6+2)\cdot10+(8+7)=(1\cdot10+2)\cdot10^2+(6+2)\cdot10+(1\cdot1+5)$ bolar. Bu ýerden:

$1\cdot10^3+2\cdot10^2+(6+2+1)\cdot10+5$ ýa-da $1\cdot10^3+2\cdot10^2+9\cdot10+5$ alarys. Bu jem 1295 sanyň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysydyr.

Diýmek, 368+927=1295.

Onluk hasap ulgamyndaky köpbelgili sanlary goşmagyň algaritmi şeýle formulirlener:

a) ikinji goşulyjyny birinji goşulyjynyň aşagyndan degişli razrýadlary biri-biriniň aşagynda bolar ýaly ýazmaly.

b) birlikler razrýadynyň sifrlerini goşmaly. Eger jem ondan kiçi bolsa, ony birlikler razrýadynda ýazyp, indiki onluklar razrýada geçmeli.

ç) eger birlikleriň sifrleriniň jemi 10-a deň ýa-da 10-dan uly bolsa, ol jemi $10+c_0$ (c_0 – birbelgili san) görnüşde göz öňünde tutup, birlikler razrýadynda c_0 ýazyp, 1 onlugy onluklar razrýadyna goşýarys.

d) onluklar razrýadynda, soň ýüzlükler goşulanda we ş.m hem ýokardaky ýaly ýerine ýetirilýär. Goşmak ýokary razrýadyň birlikleri goşulansoň tamamlanýar.

Başlangyç klaslarda köpbelgili sanlary goşmak düzgünine anyk mysallarda seretmek bilen çäklenilýär.

Gönükmeler

1. 347 we 429 sanlary goşmak üçin haýsy nazary bilimleri ulanylanlygyny görkeziň.

2. Amallary ýatdan ýerine ýetiriň. Ulanylan usullary esaslandyryň:

a) 3547+6453+7839;

b) 6248+8978+2762;
ç) (8672+3465)+1328;
d) 4232+1419+5768+2591;
e) (467+758+479)+(221+242+533);
ä) 2746+7254+9876;
f) 7238+8978+2762;
g) (4729+8473)+5271;
h) 4232+7419+5768+2591;
i) (357+768+589)+(211+332+643).

3. Haýsy jem uly:
4096+5267+2307+625 ýa-da 3805+6341+1911+216.

4. Meseleleri çözüň we näme üçin bu meseleleriň goşmak bilen çözülýändigini düşündiriň.

a) Iki şäherden biri-biriniň garşysyna iki awtomobil çykyp ugrady. Olaryň biri duşuşýançalar 168 *km*, beýlekisi 147 *km* ýol geçdi. Şäherleriň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

b) Dükanda 308 sany kletkaly depder satyldy. Kletkaly depderleri çyzykly depderlerden 153-si az satylan bolsa, näçe sany çyzykly depderler satylypdyr?

5. Meseläniň çözüwini sanly aňlatma görnüşinde ýazyň we bahasyny tapyň.

Kitaphana 367 sany türkmen dili kitabyny, 124 sany matematika kitabyny getirdiler, getirilen hemme kitaplaryň sany näçe?

6. Başlangyç synplarda üçbelgili sanlary goşmagyň algoritmi öwredilende näme üçin aşakdaky yzygiderlilikde öwredilýär?
231+342;   425+135;   237+526.

7. Amatly usulda hasapla. Goşmagyň haýsy kanunlary ulanyldy?
a) (498+3895) + (502+1105);
b) (10109+703) + (1397+9891);
ç) 7349 + (9976+2651) + 24;
d) (9999+99999) + (1001+100001);
e) (9811+5637+109) + 363.

§ 61. Onluk hasaplanyş ulgamynda köpbelgili sanlary aýyrmak

18-den uly bolmadyk a sandan birbelgili b sany aýyrmaklyk $a=b+c$ boljak c sany tapmaklyga getirýär we ol birbelgili sanlary goşmak tablisasyndan peýdalanyp tapylýar.

Eger a we b sanlar köpbelgili sanlar bolsalar we $b<a$ bolsa, $a-b$ tapawudy nähili tapmalydygyna seredeliň.

Köpbelgili sanlary aýyrmak "sütünleýin" usul bilen ýerine ýetirilýär. Köpbelgili sanlary aýyrmagyň algoritminiň nazary köplük düşünjesinde esaslaryna seredeliň. 865-423 tapawudy tapalyň.

Berlen sanlary jem görnüşinde ýazalyň:

$865-423=(8\cdot10^2+6\cdot10+5)-(4\cdot10^2+2\cdot10+3)$;

$8\cdot10^2+6\cdot10+5$ jemden

$4\cdot10^2+2\cdot10+3$ jemi aýyrmak üçin ondan her goşulyjyny yzygiderli aýyrmaly. Ony şeýle ýazyp bileris:

$(8\cdot10^2+6\cdot10+5)-(4\cdot10^2+2\cdot10+3)=(8\cdot10^2-4\cdot10^2)+(6\cdot10-2\cdot10)$

köpeltmegiň aýyrmaga görä paýlaşdyrma kanuny esasynda

$(8-4)\cdot10^2+(6-2)\cdot10+(5-3)=4\cdot10^2+4\cdot10+2$

alnan aňlatma 442 sanyň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysydyr.

Umuman "Sütünleýin" aýyrmak sanlaryň onluk hasap ulgamynda ýazylyşyna jemden sany we sandan jemi aýyrmagyň düzgünlerine; köpeltmegiň aýyrmaga görä paýlaşdyrma häsiýetine; birbelgili sanlary goşmak tablisasyna esaslanandyr.

Kemeldijiniň razrýad birlikleri kemelijiniň razrýad birliklerinden kiçi ýagdaýynda aýyrmagyň ýerine ýetirilişine seredeliň.

Goý, 630-316 tapawudy tapmaly bolsun.

$630=6\cdot10^2+3\cdot10+0$ bolýandygyny göz öňünde tutup:

$316=3\cdot10^2+1\cdot10+6$

$630-316=(6\cdot10^2+3\cdot10+0)-(3\cdot10^2+1\cdot10+6)$ ýazyp bileris.

0 san 6 sandan kiçi bolany üçin birlikleri aýryp bolmaýar. Şonuň üçin 630 sanyň bir onlugyny 10 birlik görnüşinde ýazalyň.

$$(6\cdot10^2+2\cdot10+10)-(3\cdot10^2+1\cdot10+6)=(6\cdot10^2-3\cdot10^2)+$$
$$+(2\cdot10-1\mp\cdot10)+(10-6)=(6-3)\cdot10^2+(2-1)\cdot10+(10-6)=$$
$$=3\cdot10^2+1\cdot10+4=314.$$

Umumy görnüşde köpbelgili sanlary onluk hasap ulgamynda aýyrmagyň algoritmi aşakdaky ýaly bolar:

Goý, $x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0$

$y=b_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+b_1\cdot10+b_0$

sanlar berlen bolsun.

Kemeldijini kemelijiniň aşagyndan degişli razrýadlary gabat geler ýaly ýazýarys.

Eger kemeldijiniň birlik razrýadynyň sifri kemelijiniň birlik razrýadynyň sifrinden uly däl bolsa, onda olary aýryp, indiki razrýada geçýäris.

Eger kemeldijiniň birlik sifri kemelijiniňkiden uly bolsa, ýagny $a_0 < b_0$ bolsa, onda onluklar razrýadynyň sifrini bir birlik kiçeldip, birlikler razrýadyň sifrini 10 san ulaldýarys, ýagny $10 + a_0$ görnüşe getirýäris we ondan b_0 sany aýryp, netijäni birlikler razrýadynda ýazyp, indiki razrýada geçýäris.

Eger kemelijiniň onluklar razrýadynyň sifri kemeldijiniň sifrinden kiçi bolsa ýene-de birlikleri aýrylandaky ýaly ýerine ýetirilýär.

Indiki razrýadlar hem ýokarka agzalanlar gaýtalanýar.

Aýyrmak ýokary razrýadyň birlikleri aýrylansoň tamamlanýar.

Başlangyç matematika kursunda köpbelgili sanlary aýyrmagyň düzgünleri öwrenilende "sütünleýin" aýyrmakda anyk mysallarda seredilýär.

579–342=(500+70+9)–(300+40+2)=(500–300)+(70–40)+
+(9–2)=237.

Ýene-de ýetirilen özgertmeleriň her ädimi esaslandyrylýar.

Ilki 579 we 342 sanlar razrýad goşulyjylaryň jemi bilen çalşyryldy, ýagny onluk hasaplanyş ulgamyngda ýazyldy, soň jemden jemi aýyrmaklyga esaslanyp, birinji sanyň ýüzlüklerinden ýüzlükler, onluklardan onluklar, birliklerinden birlikler aýryldy. Şeýlelikde, 579 sandan 342 sany aýyrmaklyk razrýadlar boýunça birlikleri, onluklary, ýüzlükleri aýyrmaklyga getirdi. Ony "sütünleýin" ýazmak amatlydyr.

$$\begin{array}{r}-579\\342\\\hline237\end{array}$$

Gönükmeler

1. Ýatdan hasapla we düşündir:

a) 7549–(1020+2549); ç) (3949+5027+4843)–(2027+3843).

b) (9547+2395)–7547;

2. Amatly usuldan peýdalanyp, hasapla:

a) 8034+472–(34+472); b) 1743–295+(257+295).

3. Aňlatmanyň bahasyny deňeşdir:

a) 6387–1486-821 we 6387–(1486+821);

b) 5247–(4524–2805) we 5247–4524–2805.

4. 875 we 528 sanlary aýyrmak arkaly köpbelgili sanlary aýyrmagyň algoritmini düşündir.

5. Başlangyç synplarda üçbelgili sanlary aýyrmagyň algoritmi öwredilende, näme üçin aşakdaky yzygiderlilikden peýdalanylýar?

563–321, 540–236, 875–528, 826–351, bu aýyrmak amalynyň hersiniň näme aýratynlygy bar?

6. Meseläniň çözüwini sanly aňlatma görnüşinde ýazyň we onuň bahasyny tapyň.

a) aralaryndaky uzaklyk 420 *km* bolan iki şäherden biri-biriniň garşysyna iki awtobus ugrady. Eger olaryň biri 165 *km*., beýlekisi 134 *km* geçen bolsa, onda awtobuslaryň arasyndaky uzaklyk näçe *km* bolar?

b) gül satylýan dükana 372 sany gül getirildi. Ir bilen 47 gül satyldy, öýlän bolsa 125 gül satyldy. Ýene näçe gül galdy?

7. Meseleleri arifmetik usulda çözüň.

Bir kitabyň 315 sahypasy bar, ol ikinji kitabyň sahypalaryndan 37 sahypa azdyr. Üçünji kitabyň sahypalary bolsa birinji we ikinji kitaplaryň bilelikdäki sahypalarynyň sanyndan 112 sahypa az. Üçünji kitabyň näçe sahypasy bar?

Fabrikleriň birinde 7216 işçi bar, ol ikinji fabrikdäkiden 1867 işçi köpdür. Üçünji fabrikde birinji we ikinji fabrikdäki işçileriň bilelikdäkisinden 874 adam köp. Üçünji fabrikde näçe işçi bar?

8. Aşakdaky mesele näme üçin aýyrmak arkaly çözülýär?

Birinji meýdandan 380 *t*. bugdaý, ikinji meýdandan birinjidäkiden 127 *t* az bugdaý ýygnaldy. Ikinji meýdandan näçe tonna bugdaý ýygnaldy?

§ 62. Onluk hasaplanyş ulgamynda köpbelgili sanlary köpeltmek

Bilşimiz ýaly, $a=n(A)$, $b=n(B)$ şertlerde a we b sanlary köpeltmek üçin $A \times B$ dekart köpeltmek hasylynyň elementlerini sanamak ýeterlikdir. Iki sanyň köpeltmek hasylyny tapmak üçin her gezek köplükleriň dekart köpeltmek hasylyny ýazyp, onuň elementlerini sanamak aňsat däldir. Şonuň üçin iki sany birbelgili sanyň köpeltmek hasyly üçin ýörite tablisa düzülýär we ol ýatdan öwrenilýär.

Köpbelgili sanlary köpeltmeklik üçin "sütünleýin" köpeltmek usulyndan peýdalanýarlar. Köpeltmegiň bu usulynyň nähili nazary esaslara daýanýanlygyny anyklalyň.

Mysal üçin, 476 sany 243 sana köpeldeliň:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}476\\243\end{array}\\
\hline
1428\\
+\,1904\\
952\\
\hline
115668
\end{array}
$$

Ýazgydan görnüşi ýaly, ahyrky netijäni almak üçin 476-ny 3,4,2 sanlara, ýagny birbelgili sanlara köpeltmeli bolduk.

Ýazga üns berip seretseňiz, 476 san 4 we 2 köpeldilende alnan sanlar bir razrýad çepe süýşmek arkaly ýazylandyr. Hakykatda biz 476 sany 4 onluga we 2 ýüzlüge köpeltdik. Soňra alan sanlarymyzyň hemmesini jemledik.

Şeýlelik bilen köpbelgili sany köpbelgili sana köpeltmek üçin şu aşakdakylary başarmak zerurdyr.

a) köpbelgili sany birbelgili sana köpeltmegi.

b) köpbelgili sany 10-yň derejelerine köpeltmegi.

ç) köpbelgili sanlary goşmagy.

Köpbelgili sanlary goşmaklygy biz öň öwrendik. Geliň, indi ol sanlary birbelgili sana we 10-yň derejelerine köpeltmekligiň nazary esaslaryny açyp görkezmeklige synanyşalyň. Onuň üçin 476 sany 3-e köpeltmek prosesini yzarlalyň. Sanyň 10-lyk hasap ulgamynda ýazylyşynyň esasynda 476-ny $4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6$ görnüşinde aňlatmak bolar.

Onda $476 \cdot 3 = (4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6) \cdot 3$ bolar.

Köpeltmegiň goşmaga göra paýlaşdyrma kanunyndan peýdalanyp alarys: $(4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (7 \cdot 10) \cdot 3 + 6 \cdot 3$.

Orunçalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryndan peýdalanyp, $12 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10 + 18$ aňlatmany alarys. Soňky ýazgy sanyň 10-lyk hasap ulgamyndaky ýazgysy däldir we ony aşakdaky ýaly örgertmeler arkaly 10-lyk hasap ulgamyna geçireliň.

$$(10+2) \cdot 10^2 + (20+1) \cdot 10 + (10+8) = 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 10 + 10 + 8 = 10^3 +$$

$+ 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$, ýagny $476 \cdot 3 = 1428$ bolar. Umuman, $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ sany y birbelgili sana köpeltmekligiň algoritmini aşakdaky ýaly beýän etmek bolar:

1. Ikinji sany birinjiniň aşagyndan ýazýarys.
2. a_0 sifri ý-e köpeldýäris. Eger köpeltmek hasyly 10-dan kiçi bolsa, ony birlik razrýadyna ýazýarys we indiki razrýadynyň sifrine, ýagny a_1-i y sana köpeltmeklige geçýäris.
3. Eger $a_1 \cdot y$ – hasaplaýarys we onuň üstüne y_1 sany goşýarys, soňra 2 we 3 bölümlerdäki (punktlardaky) prosesi gaýtalaýarys.
4. Haçan-da $a^n \cdot y$ – hasaplanandan soňra köpeltmek prosesi tamamlanýar.

Indiki x – sany 10^k – görnüşindäki razrýad sana köpeltmek prosesine seredeliň:

$$x \cdot 10 = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot 10 = a_n \cdot 10^n \cdot 10^k + a_{n-1}$$
$$10^{n-1} \cdot 10^k \ldots + a_1 \cdot 10 \cdot 10^k + a_0 \cdot 10^k$$

ýagny $x \cdot 10^k = a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \ldots a_0 \cdot 10^k$ we bu aňlatma $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 00 \ldots 0$ sanyň onluk hasap ulgamyndaky ýazgysydyr.

Mysal üçin,

$$875 \cdot 10 = (8 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5) \cdot 10 = 8 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 8750000$$

Geliň, indi köpbelgili sany köpbelgili sana köpeltmek prosesini yzarlalyň. onuň üçin öň alan 476, 243 mysalymyza seredeliň:

$$476\cdot 243=476\cdot\left(2\cdot 10^2+4\cdot 10+3\right)=$$
$$=476\cdot\left(2\cdot 10^2\right)+476\cdot\left(4\cdot 10\right)+476\cdot 3=$$
$$=\left(476\cdot 2\right)\cdot 10^2+\left(476\cdot 4\right)\cdot 10+476\cdot 3.$$

Şeýlelik bilen, köpbelgili sany köpbelgili sana köpeltmeklik köpbelgili sany birbelgili sana we 10-yň derejesine köpeltmek hem-de jemlemek bilen çalşyryldy.

Umuman, $x=a_n\ a_{n-1}\ \ldots a_1\ a_0$ sany $y=b_k\ b_{k-1}\ \ldots\ b_1\ b_0$ sana köpeltmekliginiň algoritmini aşakdaky ýaly formulirlemek (beýan etmek) bolar:

a) köpeldijileri biri-biriniň aşagyndan ýazýarys;

b) x sany y sanyň b_0 birlik razrýad sanyna köpeldýäris, ýagny $x\cdot b_0$ we ony y sanyň aşagyndan ýazýarys;

ç) x sany y sanyň b_1 indiki razrýad sanyna köpeldýäris, ýagny $x\cdot b_0$ we $x\cdot b_0$ sanyň aşagyndan bir razrýad çepe süýşmek arkaly ýazýarys;

d) bu prosesi tä $x\cdot b_k$-ny hasaplaýançak dowam etdirýäris;

e) soňra alnan sanlary jemleýäris.

Sözümiziň ahyrynda başlangyç synplaryň matematikasynda köpeltmekligi öwrenmekligiň birnäçe etapdan duranlygyny belläp geçýäris. 100 – içindäki ähli arifmetiki amallar ýatdan ýerine ýetirilýär, ýagny setirden çykman hasaplanylýar.

"Sütünleýin" köpeltmeklik düzgünini öwrenmeklik üç belgili sany birbelgili sana köpeltmekden başlanýar we ol ýazuw üsti bilen köpeltmek diýip atlandyrylýar.

Gönükmeler

1. Amatly usuldan peýdalanyp hasapla:

a) (420–394)·405–25·405·300;

b) 105·209–(963–859)·209·400;

ç) 1987·19861986–1986·19871987.

2. 397 we 6 sanlary köpeltmek arkaly üçbelgili sany birbelgili sana köpeltmegiň algoritmini düşündir.

3. 96·77 köpeltmek hasylyny 96·77=96·(70+7)=96·70+96·7 görnüşde özgertmek bolarmy? 96·7 we 96·70 köpeltmek hasylyny nädip tapmaly?

4. 13·11, 27·11, 35·11, 43·11, 54·11 köpeltmek hasyllaryny hasapla we düzgünlerini düşündir, netije çykar.

5. Meseläniň näme üçin köpeltmek arkaly çözülýändigini düşündir. Ýeriň diametri takmynan, 12740 *km*. Aý Ýerden, Ýeriň diametrinden 30 esse köp uzaklykda ýerleşýär. Ýerden Aýa çenli uzaklyk näçe?

6. Bilşimiz ýaly, Ýer Günüň daşyndan aýlanýar we her sutkada 2505624 *km* ýol geçýär. 365 günde Ýer näçe ýol geçýär?

§ 63. Onluk hasaplanyş ulgamynda köpbelgili sanlary bölmek

Goý, 54-i 9-a bölmek gerek bolsun. Köpeltmek tablisasynyň esasynda 54:9=6 bolýandygyny taparys.

Indi 51-i 9-a böleliň. 9-a köpeldeniňde 51 bolýan san tablisada ýok. Şonuň üçin oňa ýakyn bolan kiçi sany 45-i alalyň. 45-i 9-a bölsek, doly däl 5 paý alnar. Galyndyny tapmak üçin 51-den 45-i aýyrýarys:

51–45=6. Şeýlelikde, $51 = 9 \cdot 5 + 6$ bolar ýa-da 51:9=5 (gal. 6) ýaly ýazmak bolar.

Köpbelgili sanlaryň birbelgili sanlara nähili bölünýändigini aýdyňlaşdyralyň. Goý, 238-i 4-e bölmek talap edilsin. Şeýle diýildigi doly däl q paý we r galyndyny tapyp 238=4 · q+r, $0 \le r < 4$ bolmaly diýildigidir. 238 we 4 sanlaryň doly däl q paýy üçin ýazgyny ýazmak bolar:

$$4q \le 238 < 4(q+1).$$

Ilki q sanyň ýazgysynda näçe san belgisi bolar? Şony kesgitläliň. Q – birbelgili san bolup bilmez. Sebäbi 4-i birbelgili sana köpeldip, üstüne-de galyndyny goşanyňda 238-e deň bolmaýar. Eger-de q ikibelgili san bolsa, ýagny eger 10<q<100 bolsa, onda 238 san 40 we 400 sanlaryň arasynda ýerleşmeli bolar, bu bolsa dogry. Diýmek, 238 we 4 sanlaryň paýy ikibelgili sandyr.

Paýyň onlugynyň san belgisini tapmak üçin 4-i yzygider 20-a, 30, 40 we ş.m. köpeltmeli. $4 \cdot 50 = 200$; $4 \cdot 60 = 240$ we 200<238<240, onda doly däl paý 50 we 60 sanlaryň arasynda ýerleşýär, ýagny q=50+q_0.

Onda 238 san barada şeýle ýazmak bolar:

$4 \cdot (50 + q_0) \le 238 < 4 (50 + q_0 + 1)$ bu ýerden:

$200 + 4q_0 \le 238 < 200 + 4(q_0 + 1)$ we $4q_0 \le 238 < 4(q_0 + 1)$.

Berlen şerti kanagatlandyrýan q_0 sany tapmak üçin köpeltmek tablisadan peýdalanýarys.

Alarys q_0=9, diýmek, doly däl paý q=50+9=59 bolar. Galyndy aýyrmak bilen tapylýar: $238 - 4 \cdot 59 = 2$. Diýmek, 238 san 4-e bölünende 59 doly däl paý we 2 galyndy galdy: $238 = 4 \cdot 59 + 2$. Görkezilen ýazgylaryň esasynda burçlaýyn bölmek ýatyr:

$$\begin{array}{r|l} \underline{}238 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{20} & 59 \\ \underline{}38 & \\ \underline{36} & \\ 2 & \end{array}$$

Edil şunuň ýaly edip köpbelgili sanlary köpbelgili sana bölmek düşündirilýär. Mysal üçin, 5658-i 46-a böleliň. Bu diýildigi 5658=46$\times q+r$, $0 \le r < 46$ bolar ýaly q we r sanlary tapmaly diýildigi. Bu ýerden $46 \cdot q \le 5658 < 46(q+1)$. Paýda, ýagny q näçe belgili san bolýandygyny kesgitläliň. Bu ýerden q paý 100 we 1000 sanlaryň arasynda ýerleşýändigi belli, sebäbi:

$$4000 < 5658 < 46000.$$

Paýyň ýüzlüginiň san belgisini tapmak üçin 46-ny yzygider 100-e, 200-e, 300-e we ş.m. köpeldeliň. 46·100 = 4600, 46·200 = 9200 we 4600<5658< 9200 bolýandygy üçin doly däl paý 100 we 200 sanlaryň arasynda ýerleşýär, ýagny 46:q = 100 + q_1, bu ýerde q_1 ikibelgili san. Bu ýerden aşakdaky deňsizlik adalatlydyr:

$$46 \cdot (100 + q_1) \le 5658 < 46 \cdot (100 + q_1 + 1).$$

Ýaýlary açyp we 4600-y aýryp alarys:

$$46 \cdot q_1 \le 1058 < 46 \cdot (q_1 + 1)$$

bu ýerde q_1 ikibelgili san. Paýyň onlugynyň san belgisini tapmak üçin 46-ny yzygider 10, 20, 30 we ş.m. sanlara köpeltmeli: $46 \cdot 20 = 920$, $46 \cdot 30 = 1380$ we $920 < 1058 < 1380$ bolýandygy üçin $20 < q_1 < 30$, $q_1 = 20 + q_0$. 1058 san barada aşakdakylary aýtmak bolar:

$46 \cdot (20 + q_0) \le 1058 < 46(20 + q_0 + 1)$, ýagny

$46 \cdot 20 + 46 \cdot q_0 \le 1058 < 46 \cdot 20 + 46 \cdot (q_0 + 1)$

$46 \cdot q_0 \le 138 < 46 \cdot (q_0 + 1)$.

q_0 sany (deňsizligi kanagatlandyrýan) 46-ny yzygider 1,2,3…9 sanlara köpeldip tapmak bolýar. $46 \times 3 = 138$, ýagny galyndy nul bolýar. Diýmek, 5658:46=123. Ýokarda görkezilenleriň esasynda burçlaýyn bölmek ýatyr:

$$\begin{array}{r|l} 5658 & 46 \\ \underline{46} & 123 \\ 105 & \\ \underline{92} & \\ 138 & \\ \underline{138} & \\ 0 & \end{array}$$

Indi otrisatel däl bitin a sany natural b sany bölmegiň algoritmini kesgitläliň:

Eger $a=b$ bolsa, onda $q=1$ we $r=0$.

Eger $a>b$ we a we b sanlaryň razrýadlary deň bolsa, onda paýy b sany 1,2,3,4,5,6,7,8,9 sanlara yzygider köpeltmek bilen tapmak bolar, $a<10b$.

Eger $a>b$ we a sanyň razrýadlaryndan köp bolsa, onda burçlaýyn bölmek bilen paýy tapmak bolar.

Gönükmeler

1. Bölmegi ýerine ýetirmezden paýda näçe belgili san alynjakdygyny kesgitlemeli:

a) 368 we 7; ç) 4368 we 39;
b) 83622 we 27874; d) 2184 we 318.

2. a – sany b sana bölmekligi esaslandyrmaly:

a) a=1899; b=6;　　ç) a=432; b=4;

b) a=1242; b=54;　　d) a= 1254; b= 38.

3. Hasaplamazdan bölmegiň nädogry ýerine ýetirilendigini nädip kesgitlemek bolar:

a) 51054 : 127= 42;　　b) 405945 : 135 = 307.

4. Burçlaýyn bölmegi ýerine ýetirmeli:

a) 11455 : 145;　　ç) 261960 : 740;

b) 105754 : 253;　　d) 213664 : 352.

5. Ýazgylary doldurmaly:

a) 1986 : 1986 = … sebäbi … ;

b) 1986 : 1 = … sebäbi … ;

ç) 0 : 1986 = … sebäbi … ;

d) 1986 : 0=… sebäbi … .

6. Aňlatmanyň bahasyny tapmaly:

a) 8919 : 9+114240 : 21 =;　　b) 1190–35360 : 34+271 = ;

ç) 8631–(99–44352:63)=;

d) $48600\cdot(5045-2040):243-(8604343+504)\cdot 200=$;

e) $4880\cdot(546+534):122-6390\cdot(8004-6924):213=$.

7. Aňlatmalaryň bahasyny iki usulda tapmaly:

a) (297+405+567) : 27 =;　　ç) (240·23):48 = ;

b) 56·(378:14) =;　　d) 15120:(14·5·18) =.

§ 64. Onlukdan tapawutly pozision hasap ulgamynda sanlaryň ýazylyşy

Pozision onluk hasap ulgamynda berlen x sanyň nähili görnüşde ýazylýandygyny ýatlalyň.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

bu ýerde $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, a_n \neq 0$ we $i \in \left[\overline{0,n}\right]$, ýagny i-0-dan n-e çenli bahalary alýar.

Bu hasap ulgamynda şol bir sifriň bahasy onuň haýsy orunda durandygyna baglydyr. Mysal üçin, 3404 sanda 3 – sany müňlük, 4 – sany ýüzlük we 4-sany birlik bar.

Adamzat jemgyýetiniň ösüş taryhynda onlukdan tapawutly pozision hasap ulgamlarynyň bolandygyny subut edýän birnäçe faktlar bardyr. Mysal üçin, gadymy Wawilonda 60-lyk hasap ulgamyny, Amerikanyň maýýa taýpalary 20-lik hasap ulgamyny ulanypdyrlar. Bir ýylyň 12 aýa bölünmegi, gije-gündiziň hersiniň 12 sagada bölünmegi gadymy wagtlarda ulanylan 12-lik hasap ulgamynyň biziň şu günki durmuşymyza gelip ýeten mysalydyr.

Bilşimiz ýaly, 10-luk hasap ulgamynda sanlary ýazmak üçin 10 dürli belgi (sifr) ulanylýar: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Eger biz islendik sany diňe iki sifriň, mysal üçin 0 we 1-iň üsti bilen bersek, onda hasaplaýşyň 2-lik pozision ulgamyny alarys. Diýmek, hasaplamaklygyň 3-lik ulgamynda 0, 1, 2 sifrleriň, 8-lik ulgamynda bolsa 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sifrleriň boljakdygy aýdyňdyr. Umuman, P esasly hasap ulgamynda sanlary ýazmak üçin P sany belgi (sifr) gerek: 0, 1, 2, ...p–1.

Kesgitleme. X sanyň p esasly pozision hasaplama ulgamyndaky ýazgysy diýip,

$x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ \ + a_1 \cdot p + a_0$, bu ýerde $a_n \neq 0$ we $a_1 \in \{0,1,2,....p-1\}$ i=0, p–1 görnüşdäki aňlatma aýdylýar.

Islendik x natural sany ýokardaky kesgitleme esasynda ýeke-täk usulda aňladyp bolýandygy hakyndaky pikir aýtmany subutsyz kabul edýäris.

Köplenç, $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_1 \cdot p + a_0$ görnüşde berlen sany gysgaça $x = a_n \cdot a_{n-1} ... a_1 a_0$ görnüşde ýazýarlar, mysal üçin $x = 2 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 0^1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4$ sany gysgaça $x = 24034_5$ görnüşde ýazýarlar. Bu sany 5-lik hasap ulgamynda berlen "Iki, dört, nol, üç, dört" diýip okamaly.

Onlukdan tapawutly hasap ulgamlarynyň içinde has köp ulanylýany 2-lik hasap ulgamydyr. Bu hasap ulgamynda diňe iki sifr: 0 we 1 ulanylýar.

Mysal üçin,

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

$$10101_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

$1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0$.

Görşümiz ýaly, bu hasap ulgamynda berlen islendik sanyň gysgaça ýazgysy 0 we 1 sifrleriň tükenikli yzygiderliliginden ybaratdyr.

Radioelektron elementleriň iki durnukly ýagdaýyny hem 0 we 1 sifrleriň üsti bilen häsiýetlendirmek bolar. Mysal üçin: tranzistor "açyk" ýa-da "ýapy". Häzirki zaman kompýuterleriniň 2-lik hasap ulgamynda işleýändiginiň esasy sebäpleriniň biri ol hasap ulgamynyň aýratynlygydyr. EHM-da 2-lik hasap ulgamynyň ulanylmagynyň ýene-de bir esasy sebäpleriniň biri hem bu hasap ulgamynda sanlar üstünde arifmetiki amallaryň ýerine ýetirilişiniň ýönekeýligidir.

Onlukdan tapawutly islendik p esasly pozision hasap ulgamynda sanlary deňeşdirmeklik edil 10-lyk hasap ulgamyndaky ýaly geçirilýär. Mysal üçin: $3021_4 < 3023_4$, $2101_3 < 2102_3$ we ş.m.

Gönükmeler

1. 5-lik hasap ulgamynda haýsy sifrleri ulanmak boljakdygyny we olaryň sanyny hasaplaň.

2. Berlen sanlary esaslarynyň derejeleriniň jemi görnüşinde ýazyň:

a) 2021_3; b) 30412_5; ç) 67043_8.

3. Aşakdaky san ýazgylarynyň haýsylary 8-lik hasap ulgamyndaky sanlaryň ýazgysy bolup biler:

a) 507; b) 2109; ç) 1011; d) 378?

4. Aşakdaky köpçlenleriň (köpagzalarynyň) üsti bilen haýsy sanlary aňladypdyrlar:

a) $1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$; ç) $3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 4$;

b) $7 \cdot 8^6 + 5 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8 + 3$; d) $1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1$.

5. Näme üçin 1203_4 sany "Bir müň iki ýüz üç" diýip okap bolmaýandygyny düşündiriň.

§ 65. Onlukdan tapawutly pozision hasap ulgamynda amallaryň ýerine ýetirilişi

Onlukdan tapawutly pozision hasap ulgamy barada düşünje bermäge geçmezden öň "Ýatda bellenilen sany bilmek" oýnuna seredeliň. Bu oýunda okuwça belli bir san aralykdan ýadynda haýsy-da bolsa bir sany bellemeklik tabşyrylýar. Mugallym okuwçydan bellän sanynyň jübütdigini ýa-da täkdigini soraýar. Eger-de bellenilen san täk bolsa, onda ol sandan birligi aýyrmagy soraýar we okuwçydaky sanyň jübüt bolmagyny gazanýar. Bellenilen san jübüt bolsa hiç san almaýar. Soňra emele gelen sany okuwçynyň ikä bölmegini tabşyrýar we alnan sanyň jübütdigini ýa-da täkdigini soraýar. Edil ýokardaky ýaly täk san bolsa, ol sandan birini alýar, jübüt san bolsa hiç san almaýar.

Mugallym her bir sorag-jogap alşylandan soňra özüne gerek bellikleri geçirýär we okuwçynyň bellän sanyny aýdýar.

Mysal üçin: mugallym okuwça 20-30 aralygynda bir sany bellemekligi tabşyrýar. Okuwçy 29 – sany ýatdan belläpdir diýeliň, onda sorag-jogaplaryň netijesinde: 29-täk, (29-1=28 jübüt), 28:2=14 jübüt; 14:2=7 täk; (7-1=6 jübüt), 6:2=3 täk, ýatdaky ýazgylary alarys we şu ýerde sorag-jogap gutaýar. Şonda mugallymyň özünde şeýle belgileri alýar. 11101 we okuwçynyň bellän sanynyň 29 sandygyny aýdýar. Birnäçe okuwçy bilen şular ýaly oýun geçirilenden soňra okuwçylar mugallymyň bellenilen sany tapyşynyň tötänlik däldigine göz ýetirýär we bilesigelijiligi artýar. Onlukdan tapawutly pozision hasaply ulgamy baradaky düşünje öwrenilenden soňra okuwçylar öz bellän sanlarynyň özlerine aýtdyrylýandygyna düşünýär.

Onlukdan tapawutly $p(p \neq 1)$ esasly hasap ulgamynda amallaryň ýerine ýetirilişi edil onluk hasap ulgamyndaky ýalydyr. Ilki bilen birbelgili sanlary goşmak we köpeltmek üçin tablisa düzülýär. Ol tablisany aýyrmak we bölmek amallaryny hem-de köpbelgili sanlaryň üstünde amallary ýerine ýetirmek üçin ulanylýar Ikilik hasap ulgamynda goşmak we köpeltmek tablisasyny düzeliň:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Bu tablisalary ulanmak arkaly islendik sanlary goşmak we köpeltmek bolar.

Mysal üçin:

$$1)\quad \begin{array}{r} 1101 \\ +\ \ 111 \\ \hline 10100 \end{array} \quad \left(\begin{array}{r} 13 \\ +\ \ 7 \\ \hline 20 \end{array}\right); \qquad 2)\quad \begin{array}{r} 111 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 111 \\ +\ \ 111\ \ \\ \hline 10101 \end{array} \quad \left(\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 3 \\ \hline 21 \end{array}\right).$$

Edil şonuň ýaly hem aýyrmak hem-de bölmek amallary ýerine ýetirilýär.

Mysal üçin:

$$3)\quad \begin{array}{r} 111 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 111 \\ +\ \ 111\ \ \\ \hline 10101 \end{array} \quad \left(\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 3 \\ \hline 21 \end{array}\right); \qquad 4)\quad \begin{array}{l} -10101\,\underline{|11} \\ \ \ \underline{11}\quad\ \ 111 \\ \ -\underline{100} \\ \ \ \ \ \underline{11} \\ \ \ -\underline{011} \\ \ \ \ \ \ \underline{11} \\ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad (21:3=7).$$

1. Üçlük hasap ulgamynda goşmak we köpeltmek tablisasyny düzeliň.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Bu tablisalary ulanmak arkaly islendik sanlar üstünde arifmetik amallary ýerine ýetirip bolýar. Mysal üçin:

1) $\begin{array}{r} 1221 \\ +\;112 \\ \hline 2110 \end{array}$ $\left(\begin{array}{r} 52 \\ +\;14 \\ \hline 66 \end{array}\right)$ 2) $\begin{array}{r} 2120 \\ -\;121 \\ \hline 1222 \end{array}$ $\left(\begin{array}{r} 67 \\ -\;16 \\ \hline 51 \end{array}\right)$

3) $\begin{array}{r} 212 \\ \times\;21 \\ \hline 212 \\ +\;1201 \\ 12222 \end{array}$ $\left(\begin{array}{r} 23 \\ \times\;7 \\ \hline 161 \end{array}\right)$ 4) $\begin{array}{r|l} 12222 & 212 \\ -\;1201 & \overline{21} \\ \hline 212 & \\ -\;212 & \\ \hline 0 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 161 & 23 \\ -\;161 & \overline{7} \\ \hline 0 & \end{array}$

Getirilen mysallardan görnüşi ýaly, onlukdan tapawutly hasap ulgamyndaky amallaryň ýerine ýetirilişi edil onluk hasap ulgamyndaka meňzeşdigine göz ýetirýäris.

Gönükmeler

1. Goşmagy ýerine ýetiriň we hasaplamalaryň dogry geçirilendigine onluk hasap ulgamynda barlap görüň:

a) $1010111_2+1110101_2$;

b) $1101111_2+10101001_2$;

ç) 1022_3+2101_3;

d) 402_5+31_5.

2. Aýyrmagy ýerine ýetiriň we hasaplamalaryň dogry geçirilendigini onluk hasap ulgamynda barlaň:

a) $1011010_2-10101_2$;

b) 111100_2-1011_2;

ç) 20758-6478.

3. Köpeltmegi ýerine ýetiriň:

a) 11012 . 1012;

b) 21013 . 2013.

4. 5-lik hasap ulgamynda birbelgili sanlary goşmak we köpeltmek tablisasyny düzüň.

5. Aşakdaky deňlikler dogry bolar ýaly P haýsy bahalary almaly:

a) $21_P = 15_{10}$;

b) $203_P = 53_{10}$;

ç) $1000_p = 27_{10}$;

d) $10_p = 12_{10}$.

6. Deňlemeleri çözüň:

a) $306_p + 124_p = 220_{10}$;

b) $102_p + 212_p = 34_{10}$;

ç) $752_p - 647_p = 67_{10}$.

§ 66. Bölünijilik gatnaşygy düşünjesi

Mälim bolşy ýaly, otrisatel däl bitin sanlary aýyrmak we bölmek hemişe mümkin däl. Mysal üçin: 3 we 7 sanlaryň tapawudy we paýy hiç haçan otrisatel däl bitin san bolup bilmeýär. Ýöne tapawudyň barlygy, ýagny otrisatel däl bitin a we b sanlaryň tapawudynyň barlygy aňsat çözülýär, ýagny $a > b$ bolmagy ýeterlikdir. Bölmek üçin şular ýaly umumy we ýönekeý nyşan ýok. Şonuň üçin matematikler önden bäri gönüden-göni a sany b sana bölmezden a sanyň b sana bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini bilmek üçin umumy düzgünler gözläp gelipdirler. Netijede, bölünijilik nyşanlary we sanlara degişli häsiýetleri oýlap tapdylar. Bölünijilik nyşanlara seretmezden öň bölünijilik gatnaşygy düşünjesini aýdyňlaşdyralyň.

Kesgitleme. Goý, otrisatel däl bitin a san we natural b san berlen bolsun. Eger-de a sany b sana böleniňde galyndy 0-a deň bolsa, onda b sana a sanyň bölüjisi diýilýär.

Eger-de b san a sanyň bölüjisi bolsa, onda otrisatel däl bitin q san bar bolup, $a = b \cdot q$ bolýanlygy kesgitlemeden gelip çykýar. Mysal üçin: 8 san 32 -niň bölüjisi, sebäbi şeýle otrisatel däl bitin $q = 4$ san bar bolup $32 = 8 \cdot 4$ deňlik ýerine ýetýär. Şu ýerde "berlen sanyň bölüjisi" we "bölüji" düşünjeleri tapawutlandyrmak zerurdyr. Mysal üçin: 18 san 5-e bölünýän bolsa, onda 5 -bölüji bolýar, ýöne 18 sanyň bölüjisi bolmaýar. Eger 18 san 6-a bölünýän bolsa "bölüji" we "berlen sanyň bölüjisi" düşünjeler gabat gelýär.

Eger b san a sanyň bölüjisi bolsa, onda a san b sana kratny ýa-da a san b sana bölünýär diýilýär we şeýle belgilenýär: $a \vdots b$.

$a \vdots b$ ýazgy bölünijilik gatnaşygynyň ýazgysy. Ol bölmek amalyny aňlatmaýar, ýagny $a{:}b = c$ diýip ýazmak bolmaýar.

Berlen sanyň bölüjisi şol sandan uly bolmanlygy üçin onuň bölüjisi tükeniklidir. Mysal üçin: 36 sanyň ähli bölüjilerini ýazmak bolar: {1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36}. Natural sanlar bölüjileriň sanyna baglylykda ýönekeý we düzme sanlara bölünýär.

Kesgitleme. Diňe iki bölüjisi, ýagny bir we özi bolan natural sanlara ýönekeý sanlar diýilýär. Mysal üçin: 17 ýönekeý san, onuň bölüjileri 1 we 17 ýa-da 5 ýönekeý san, onuň bölüjileri 1 we 5.

Kesgitleme. Düzme san diýip, ikiden köp bölüjisi bolan natural sanlara aýdylýar. Mysal üçin: 4 düzme san, onuň üç bölüjisi bar: 1; 2 we 4; 12 düzme san, onuň alty bölüjisi bar: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

1 san düzme san hem däl, ýönekeý san hem däl. Sebäbi onuň bir bölüjisi bar.

Berlen sana kratny bolan sanlar tükeniksizdir. Mysal üçin: 4-e kratny sanlar tükeniksiz köplügi emele getirýär: 0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; ... Şu hataryň hemme sany 4-e kratny bolany üçin olary $x = 4 \cdot q$ formula esasynda almak bolar (q san 0; 1; 2; 3; ... sanlary alýar).

Gönükmeler

1. Näme üçin 15 san a) 60-yň bölüjisi; b) 3-e kratny bolýar?

2. 2; 3; 5 sanlaryň haýsylary a) 230; b) 225; ç) 450 sanlaryň bölüjisi bolýar?

3. 804; 144; 75; 150; sanlaryň haýsysy a) 2-ä; b) 3-e; ç) 5-e; d) 9-a kratny?

4. 3-e kratny bolan bäş san aýtmaly. 3-e kratny bolan ähli sanlary haýsy formula bilen ýazmak bolar?

5. Berlen sanlaryň bölüjileriniň köplügini ýazmaly:

a) 24; b) 38; ç) 13; d) 1.

6. Islendik natural a sanyň bölüjileriniň köplüginiň tükenikli köplükdigini subut etmeli.

7. Näme üçin 19-yň ýönekeýdigini, 18-iň düzme sandygyny düşündirmeli.

8. $11 \cdot q$ aňlatma q-yň haýsy bahasynda ýönekeý san bolýar?

9. 60-yň hemme ýönekeý bölüjilerini sanamaly.

§ 67. Bölünijilik gatnaşygynyň häsiýetleri

Bölünijilik gatnaşygy refleksiw, antisimmetrik we tranzitiw häsiýetlere eýedir. Şu häsiýetleri subut edeliň, onda otrisatel däl bitin sanlar üstünde amallaryň düzgünlerini we kesgitlemelerini peýdalanarys.

Teorema. Bölünijilik gatnaşygy refleksiwdir, ýagny islendik natural san öz-özüne bölünýändir.

Subudy. Islendik natural a san üçin $a = a \cdot 1$ deňlik dogrudyr. Bu başgaça şeýle bir $q = 1$ san bar bolup, $a = a \cdot 1$ bolýar diýildigidir, bu ýerden bölünijilik gatnaşygyň kesgitlemesi boýunça $a \vdots a$. Subut edilen teoremadan "islendik otrisatel däl bitin san 1-e bölünýär" diýen netije çykýar.

Teorema. Bölünijilik gatnaşygy antisimmetrikdir, ýagny islendik dürli a we b sanlar üçin $a \vdots c$ gatnaşykdan $b \vdots a$ gatnaşyk gelip çykmaýar.

Subudy. $b \vdots a$ diýip guman edeliň. Ýöne b-niň a sana bölünmegi üçin $b \geq a$ bolmagy zerurdyr. Şert boýunça $a \vdots b$, diýmek, $a \geq b$ $b \geq a$ we $a \geq b$ deňsizlikler diňe $a = b$ bolanda çyndyr, emma a we b sanlar dürli sanlardyr. Şert bilen garşylykly netijä gelindi, ýagny bölüjilik gatnaşygy antisimmetrik häsiýetdedir.

Teorema. Bölünijilik gatnaşygy tranzitiwdir, ýagny $a \vdots b$ we $b \vdots c$ $a \vdots c$.

Subudy. $a \vdots b$ bolanlygy üçin bitin otrisatel däl q san bar bolup, $a = b \cdot q$ deňlik ýerine ýeter. $b \vdots c$ bolanlygy üçin otrisatel däl bitin t san bar bolup, $b = c \cdot t$ deňlik ýerine ýeter. Birinji deňlikde b-niň deregine $c \cdot t$ goýalyň: $a = (c \cdot t) \cdot q$, bu ýerden $a = (c \cdot t) \cdot q = c \cdot (t \cdot q) = c \cdot p$, p – otrisatel däl bitin san bolany üçin $a = c \cdot p$ deňlik $a \vdots c$ – aňladýar. Teorema subut edildi.

Bölünijiligi we oňa degişli meseleleri has-da giňişleýin öwrenmek üçin aşakdakylary anyklamak zerurdyr. Mysal üçin: eger-de san 4-e bölünýän bolsa, onda ol $4 \cdot q$ (q – bitin otrisatel däl san) görnüşde ýazylyp bilner. Eger-de bolünmeýän bolsa nähili ýazmak bolar. Belli bolşy ýaly, eger-de san 4-e bölünmeýän bolsa, onda ol galyndyly bölmek bolýar, şunlukda galyndy 4-den kiçi bolar. Olar 1, 2 ýa-da 3 bolar. Onda 4-e böleniňde 1 galyndy galýan san $4 \cdot q+1$ bolar, 4-e böleniňde 2 galyndy galýan san $4 \cdot q+2$, 4-e böleniňde 3 galyndy galýan san $4 \cdot q+3$ bolar. $4 \cdot q$, $4 \cdot q+1$,

$4\cdot q+2$, $4\cdot q+3$ sanlar jübüt-jübütden kesişmeýän, birleşmesi bolsa otrisatel däl bitin san bolan köplügi emele getirýär. Ony çyzgyda aşakdaky ýaly şekillendirmek bolar:

Gönükmeler

1. Belgileriň kömegi bilen bölünijilik gatnaşygynyň häsiýetlerini ýazmaly.

2. $X=\{12; 9; 6; 3; 18\}$ köplükde "x- san y sanyň bölüjisi" diýen gatnaşygyň grafyny gurmaly.

3. $a\vdots c$ we $c\vdots 2$ bolýanlygy belli. a sanyň 2 bölünijiligi hakda nähili netije çykarmak bolar?

4. a sany 3-e böleniňde nähili galyndylar galyp biler? 3-e bölünmeýän sanlar nähili görnüşde bolar?

5. $A-3\cdot q$ görnüşdäki otrisatel däl bitin sanlaryň köplügi, $B-3\cdot q+1$ görnüşdäki otrisatel däl bitin sanlaryň köplügi, $C-3\cdot q+2$ görnüşdäki otrisatel däl bitin sanlaryň köplügi. $A\cup B\cup N=Zo$ diýmek bolarmy?

6. Otrisatel däl bitin sanlar köplüginden 7-ä kratny sanlary bölüp aldylar. 7-ä kratny däl sanlary haýsy hem bolsa bir usul bilen bölüp alyň. a_0 näçe klasa bölündi?

§ 68. Otrisatel däl bitin sanlaryň jeminiň, tapawudynyň we köpeltmek hasylynyň bölünijiligi

Tejribeçilikde şeýle sorag ýüze çykýar: hasaplamalar geçirmezden jem (tapawut köpeltmek hasyly) berlen sana bölünýärmi ýa-da bölünmeýärmi? Nädip kesgitlemeli? Şu soraga aşakdaky teoremalar jogap berýär.

Jemiň bölünijiligi barada teorema:

Eger her bir goşulyjy natural n sana bölünýän bolsa onda jem hem şol sana bölünýändir.

Subudy: Goý, a we b sanlar n sana bölünýän bolsun, onda $a+b$ jemiň hem n sana bölünýändigini subut edeliň. a sanyň n sana bölünýändigi sebäpli, ýagny $a\vdots n$, şeýle bir bitin otrisatel däl q san bar bolup, $a=n\cdot q$ deňlik ýerine ýeter; b sanyň n sana bölünýändigi sebäpli, ýagny $b \vdots n$, şeýle bir bitin otrisatel däl p san bar bolup, $b = n \cdot p$ deňlik ýerine ýeter. $a + b$ jemde a-nyň we b-nyň bahasyny ýerine goýalyň:

$$a + b = n \cdot q + n \cdot p.$$

Ýaýyň daşyna n umumy köpeldijini çykaralyň we ýaýda alynjak otrisatel däl bitin $q + p$ sany t bilen belläp alarys:

$$a + b = n \cdot q + n \cdot p = n(q + p) = n \cdot t.$$

Biz $a + b$ jemi n san bilen käbir otrisatel däl bitin t sanyň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazdyk. Bu bolsa $a + b$ jemiň n sana bölünýändigini görkezýär.

Biz teoremany iki goşulyjy üçin subut etdik, islendik n sany goşulyjy bolan ýagdaýynda-da edil ýokarky ýaly şubut edilýär.

Mysal. Hasaplamalar geçirmezden 114+348+908 jemiň 2-ä bölünýändigini aýtmak bolar. Sebäbi guşulyjylaryň her biri 2-ä bölünýär.

Tapawudyň bölünijiligi barada teorema.

Eger a we b sanlar n sana bölünýän bolsa we $a \geq b$ bolsa, onda $a–b$ tapawut hem n sana bölünýändir.

Bu teoremanyň subudy jemiň bölünijiligi hakyndaky teorema ýaly subut edilýär.

Köpeltmek hasylynyň bölünijiligi hakda teorema.

Eger köpeltmek hasylynda köpeldijileriň biri n – natural sana bölünýän bolsa, onda köpeltmek hasylly hem n sana bölünýändir.

Subudy. Subudyny iki sany otrisatel däl bitin a we b sanlaryň köpeltmek hasyly üçin görkezeliň. Goý, a san (köpeldiji) n sana bölünýän bolsun. Onda şeýle bir otrisatel däl bitin q san bar bolup, $a = n \cdot q$ deňlik ýerine ýeter. Bu deňligiň iki tarapyny hem b sana köpeldeliň: $a \cdot b = (n \cdot q) \cdot b$, bu ýerden

$$a \cdot b = n(qb)$$

$q \cdot b$ – otrisatel däl bitin san, ony t bilen belläp $a \cdot b = n \cdot t$ alarys. Diýmek, $ab \vdots n$. Eger m sany köpeldiji bolan ýagdaýynda-da teorema şular ýaly subut edilýär.

Mysal: $24\cdot976\cdot305$ köpeltmek hasyly 12-ä bölünýär. Sebäbi $24 \vdots 12$. Geliň, indi bölünijilige degişli meseleler çözülende ýygy-ýygydan ulanylýan 2 sany teorema seredeliň.

Teorema: Eger $a\cdot b$ köpeltmek hasylynda a köpeldiji natural m sana, b köpeldiji natural n sana bölünýän bolsa, onda $a\cdot b$ köpeltmek hasyly $m\cdot n$ sana bölünýändir.

Bu teoremanyň subudy köpeltmek hasylynyň bölünijiligi hakyndaky teoremanyň subudyna meňzeşdir.

Mysal : $24\cdot36$ köpeltmek hasyly 108 sana bölünýändir. Sebäbi 24 san 12-ä, 36 san 9-a bölünýär. $12\cdot9=108$.

Teorema: Eger jemde goşulyjylaryň haýsy hem bolsa biri m sana bölünmeýän bolsa, galanlary m sana bölünýän bolsa, onda jem m sana bölünýän däldir.

Subudy.

Goý, $S=a_1+a_2+\ldots+a_n+c$ we $a_1 \vdots m, a_2 \vdots m, \ldots, a_n \vdots m$, ýöne $\overline{c \vdots m}$

$\overline{S \vdots m}$ bolýandygyny subut edeliň. Tersinden güman edeliň: goý, $S \vdots m$ - bolsun. S jemi özgerdeliň:

$$c=S-(a_1+a_2\ldots+a_n).$$

Güman edişimize görä, $S \vdots m$, jemiň bölünijiligi hakyndaky teorema esasynda

$(a_1+a_2\ldots+a_n) \vdots m.$

Onda tapawudyň bölünijiligi esasyndaky teorema boýunça $c \vdots m$. Berlene garşy netije gelip çykdy. Şeýlelik bilen $\overline{S \vdots m}$.

Mysal üçin: 34 + 125 + 376 + 1024 jem 2-ä bölünmeýär. Sebäbi: $34 \vdots 2$, $376 \vdots 2$, $1024 \vdots 2$, ýöne $\overline{125 \vdots 2}$.

Seredilen teorema sanlaryň bölünijiligi bilen baglanyşykly meseleler çözülende esas bolup durýar.

Mesele. Islendik iki sany yzygider natural sanlaryň köpeltmek hasylynyň 2-ä bölünýändigini subut etmeli .

Çözülişi. Belgileri ulanyp meseläniň şertini ýazalyň. Eger bir natural sany n diýip bellesek, onuň yzyndaky natural san $n+1$ bolar. Diýmek, biz islendik natural n san üçin $n(n+1) \vdots 2$ bolýandygyny subut etmeli . Belli bolşy ýaly, otrisatel däl bitin sanlaryň köplügini 2 klasa bölmek bolýar: jübüt sanlar (ýagny $2\cdot q$ görnüşli sanlar) we täk sanlar (ýagny $2q+1$ görnüşli sanlar). Eger $n=2\cdot q$ bolsa, onda $n(n+1)=2q(2q+1)$ köpeltmek hasylynda 2-ä bölünýän köpeldiji bar. Onda köpeltmek hasylynyň bölünijiligi hakdaky teorema laýyklykda $n(n+1)\vdots 2$.

Eger $n=2q+1$, onda $n(n+1)=(2q+1)(2q+2)$. Alnan köpeltmek hasylynda 2-ä bölünýän köpeldiji $((2q+2)\vdots 2)$ bar bolany üçin hemme köpeltmek hasyly 2-ä bölünýär. Diýmek, $n(n+1)\vdots 2$. Şu tassyklama islendik natural san üçin dogrudyr.

Gönükmeler

1. Aşakdaky pikir aýtma çynmy?

Eger goşulyjylaryň hiç biri n sana bölünmeýän bolsa, onda jem hem n sana bölünýän däldir. Mysallar getir, netije çykar, düşündir.

2. 34+19+48+24+71 jem ikä bölünermi?

3. Hasaplamany ýerine ýetirmezden 5645 köpeltmek hasylynyň 105 sana bölünýändigini kesgitlemeli.

§ 69. Onluk hasaplanyş ulgamynda bölünijilik nyşanlary

Bize 2-ä, 3-e, 4-e, 5-e we ş.m. sanlara bölünijilik nyşanlar bellidir. Bularyň hemmesi onluk hasaplanyş ulgamynda ýazylan sanlar üçin niýetlenen. Biziň esasy meselämiz onluk hasaplanyş ulgamynda we bölünijilik gatnaşyklarynyň kesgitlemelerine esaslanyp, şol nyşanlary esaslandyrmak.

2-ä bölünijilik nyşany: x sanyň 2-ä bölünmegi üçin onuň onluk hasap ýazgysynyň 0; 2; 4; 6; 8 sifrleriň biri bilen gutarmagy zerur we ýeterlikdir.

Subudy. Goý, x san onluk hasaplanyş ulgamynda ýazylan bolsun, ýagny $x=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10+a_0$ (1). Bu ýerde a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sanlary alýar, bu ýerde $a_n\neq 0$, a_0 san 0, 2, 4, 6, 8 sanlary alýar. Onda $x \vdots 2$ bolýandygyny subut edeliň. $10 \vdots 2$ bolýanlygy üçin $10^2 \vdots 2; 10^3 \vdots 2; \ldots 10^n \vdots 2$. Diýmek,

$$\left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10\right) \vdots 2 \text{ bolar.}$$

Şert boýunça a_0 hem 2-ä bölünýär. Şonuň üçin x sana her bir goşulyjysy 2-ä bölünýän iki sanyň jemi görnüşinde garamak bolýar. Onda jemiň bölünijiligi hakyndaky teorema esasynda x san hem 2-ä bölünýändir.

Indi tersine subut edeliň: eger x san 2-ä bölünýän bolsa, onda onuň onluk ýazgysy 0; 2; 4; 6; 8 san belgileriniň biri bilen gutarýandyr. (1) deňligi şeýle görnüşde ýazýarys: $a_0 = x - (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10)$; tapawudyň bölünjiligi hakdaky teorema boýunça $a_0 \vdots 2$. Sebäbi $x \vdots 2$ we $(a_n 10^n +$ $+ 10^{n-1} + \ldots + a_1 10) \vdots 2$. Birbelgili a_0 san 2-ä bölünmegi üçin ol 0; 2; 4; 6; 8 bahalary almaly.

5-e bölünijilik nyşany: x sanyň 5-e bölünmegi üçin onuň onluk ýazgysynyň 0 ýa-da 5 san belgileri bilen gutarmagy zerur we ýeterlikdir.

Bu bölünijilik nyşanynyň subudy edil 2-ä bölünijilik nyşanynyňky ýaly subut edilýär.

4-e bölünijilik nyşany: x sanyň 4-e bölünmegi üçin onuň onluk ýazgysyndaky soňky iki san belgisiniň emele getirýän ikibelgili sanyň 4-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy. Goý, x san onluk hasaplanyş ulgamynda ýazylan bolsun:

$$X = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 \left(a_n \neq 0\right).$$

Bu ýerde $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ koeffisiýentler, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 bahalary alýar we yzky iki san belgisi bilen emele gelen ikibelgili san 4-e bölünýär. Onda $x \vdots 4$ bolýandygyny subut edeliň. $100 \vdots 4$ bolýanlygy üçin $\left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2\right) \vdots 4$. Şert boýunça $a_1 \cdot 10 + a_0$ (bu ikibelgili sanyň ýazgysy) 4-e bölünýär. Şonuň üçin x-sana her bir goşulyjysy 4-e bölünýän iki goşulyjynyň jemi görnüşinde garamak bolar. Onda jemiň bölünijiligi hakyndaky teorema esasynda x-san hem 4-e bölünýändir.

Tersinden subut edeliň ýagny eger x-san 4-e bölünýän bolsa, onda yzky iki san belgi bilen emele gelen ikibelgili san hem 4-e bölünýändir. (1) deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$a_1 10 + a_0 = x - \left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2\right).$$

Bu ýerde x:4 we $\left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2\right) ⋮ 4$, onda tapawudy bölünijiligi hakyndaky teorema esasynda $\left(a_1 10 + a_0\right) ⋮ 4$. Bu ýerde $a_1 10 + a_0$ san x sanyň soňky iki san belgisi bilen emele gelen ikibelgili sanyň ýazgysy.

9-a bölünijilik nyşany: x sanyň 9-a bölünmegi üçin onuň onluk ýazgysyndaky san belgileriň jeminiň 9-a bölünmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy: Öňi bilen $10^n - 1$ sanyň 9-a bölünýändigini subut edeliň. Hakykatdan-da

$$10^n - 1 = \left(9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1}\right) - 1 = \left(9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-2}\right) - 1 =$$

$$= \left(9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 10\right) - 1 = 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9.$$

Alnan jemiň her bir goşulyjysy 9-a bölünýär, diýmek $10^n - 1$ san 9-a bölünýär.

Goý, x san onluk hasaplanyş ulgamynda ýazylan bolsun:

$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ bu ýerde

$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$ koeffisiýentler 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sanlary alýar $(a_n \neq 0)$ we $\left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0\right) ⋮ 9$. Onda $x ⋮ 9$ bolýandygyny subut edeliň.

$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$ jemi özgerdýäris, oňa

$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$ aňlatmany goşýarys hem-de ondan aýyrýarys, netijesini aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$X = \left(a_n 10^n - a_n\right) + \left(a_{n-1} 10^{n-1} - a_{n-1}\right) + \ldots + \left(a_1 10 - a_1\right) +$$

$$+ \left(a_0 - a_0\right) + \left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0\right) = a_n\left(10^n - 1\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) +$$

$$+ \ldots + a_1\left(10 - 1\right) + \left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0\right).$$

Alnan jemde her bir goşulyjy 9-a bölünýär:

$a_0\left(10^n - 1\right) ⋮ 9$ sebäbi $\left(10^n - 1\right) ⋮ 9$

$a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) ⋮ 9$ sebäbi $\left(10^{n-1} - 1\right) ⋮ 9$

$$a_1(10-1)\vdots 9 \text{ sebäbi } (10-1)\vdots 9$$

$(a_n + a_n - 1 + \ldots + a_0)\vdots 9$ bu şert boýunça.

Diýmek, $x\vdots 9$.

Tersinden subut edeliň, eger x san 9-a bölünýän bolsa, onda san belgileriň jemi hem 9-a bölünýändir.

(1) deňligi şeýle ýazýarys: $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 =$

$$= x - \left(a_n\left(10^n - 1\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) + \ldots + a_1\left(10 - 1\right)\right).$$

$x\vdots 9$ we $a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1(10 - 1)\vdots 9$ bolýanlygy sebäpli tapawudyň bölünijiligi teorema esasynda $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0)\vdots 9$.

$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$ jem bolsa x sanyň onluk ýazgysyndaky san belgileriniň jemidir.

3-e bölünijilik nyşany:

x sanyň 3-e bölünmegi üçin onuň onluk ýazgysyndaky san belgileriniň jeminiň 3-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir. Bu nyşanyň subut edilişi edil 9-a bölünijilik nyşanyňky ýaly subut edilýär.

Aşakdaky bölünijilik nyşanlaryny subutsyz berýäris.

8-e bölünijilik nyşany: x sanyň 8-e bölünmegi üçin bu sany emele getirýän soňky üç san belgisiniň nullar bolmagy, ýa-da 8-e bölünýän san bolmagy zerur we ýeterlikdir.

25-e bölünijilik nyşany: x sanyň 25-e bölünmegi üçin bu sany emele getirýän san belgileriniň iň soňky ikisiniň nullar ýa-da 25-e bölünýän sanlary emele getirmegi zerur we ýeterlikdir.

Tersin däl bitin sanlaryň bölünijiligi başlangyç synp matematika kursunda ýörite öwrenilmeýär. Ýöne jemi sana bölmek we sany köpeltmek hasylyna bölmek düzgünlerini ulanmaklyk öňünden şeýle soraga jogap bermegi talap edýär: bir san beýleki sana bölünýärmi ýa-da ýok? Başlangyç synp okuwçylary bölünijilik nyşanlaryň esasynda däl-de, köpeltmek gözeneginiň esasynda jogap berýärler. Şonuň üçin kitapdaky ýumuşlar hem köpeltmek gözeneginiň esasynda jogap bermeklige esaslanandyr. Mysal üçin :

(62 + 18) : 8; (36 + 27) : 9; (40 + 16) :7

añlatmalarda her bir goşulyjysy görkezilen sana bölünýändigini bilmek üçin, 36-nyñ 9-a, 27-niñ 9-a, 62-niñ we 18-iñ 8-e bölünmeýändigini okuwçylar oñat bilmelidirler.

Edil şular ýaly okuwçylar $720:(9\cdot 5)$ añlatmanyñ bahasyny tapmak üçin añlatmany $(720:9):5$ görnüşde ýazyp, 720-niñ 9-a bölünýändigini, 80-iñ 5-e bölünýändigini bilmelidirler, ýagny mundan başga-da gözeneksiz bölmegi-de bilmelidirler.

Mysal: 56:4=(40+16):4=40:4+16:4=10+4=14.

Gönükmeler

1. 1, 5, 2, 3 we 8 sifrlerden peýdalanyp, 3-e we 9-a bölünýän birnäçe dört belgili san ýaz. Şol bir sifr iki gezek gaýtalanmaly däl.

a sanyñ yzyna 2-ä bölüner ýaly bir sifri ýazyñ. Alnan sanlaryñ içinde 3-e, 4-e, 5-e, 8-e, 9-a, 11-e, 25-e bölünýänleri barmy?

2. Mesele: Bir bölek ýüpi 3 metrden ýa-da 4 metrden bölseñ galyndy galmaýar. Eger ýüpüñ uzynlygynyñ 345 metrden uzynlygy, 355 metrden gysgalygy belli bolsa, ýüpüñ uzynlygy näçe?

3. 5-e, 25-e we 3-e bölünijilik nyşanlary subut etmeli.

4. Sanyñ ýazgysy 5 bilen gutarmaýanlygy belli. Ol 5-e bölünermi?

5. $10^{26}+8$ – san 9-a bölünermi?

6. Aşakdaky sanlaryñ haýsysyny $9\cdot q$ görnüşinde ýazyp bolar:

a) 333; b) 8021; ç) 10800.

7. Goşmak amalyny ýerine ýetirmezden añlatmalaryñ bahasynyñ 4-e bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitlemeli:

a) 284+1440+113; ç) 284+1440+792224;

b) 284+1441+113; d) 284+1441+113+164.

8. Aýyrmagy ýerine ýetirmezden tapawudyñ 9-a bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitlemeli:

a) 360–144; b) 946–540; ç) 30240–9720; d) 321–248.

9. 7-nji mysalyñ haýsysynda tapawut 4-e bölünýär?

10. 9 sanyñ $204\cdot 402$ köpeltmek hasylynyñ bölüjisi bolýandygyny subut etmeli.

11. Islendik dörtbelgili san bilen şol sanlaryň san belgisini ters tertipde ýazylyp alnan sanlaryň tapawudynyň 9-a bölünýändigini subut etmeli.

12. Eger-de a sany 5-e böleniňde 3 galyndy galýan bolsa, onda a^2+1 sanyň 5-e bölünýändigini subut etmeli.

13. Başlangyç synp okuw kitabyndan berlen sana bölünijiligi barlamak talap edilýän mysallar getirmeli.

§ 70. Iň uly umumy bölüji we iň kiçi umumy kratny

Kesgitleme. Natural a we b sanlaryň umumy bölüjisi diýip, a we b sanlaryň ikisiniň hem bölüjisi bolan natural sanlara aýdylýar.

12 we 8 sanlaryň ähli bölüjilerini ýazalyň.

12-iň bölüjileri: 1;2;3;4;6;12;

8-iň bölüjileri: 1; 2; 4; 8.

Görnüşi ýaly, 1;2;4 sanlar 12 we 8 sanlaryň ikisiniň hem bölüjileridir. Bu sanlara 12 we 8 sanlaryň umumy bölüjileri diýilýär. Bu umumy bölüjileriň iň ulusy 4-dir. Onda 4 sana 12 we 8 sanlaryň iň uly umumy bölüjisi diýilýär.

Kesgitleme. a we b natural sanlaryň iň uly umumy bölüjisi diýip umumy bölüjileriň iň ulusyna aýdylýar.

a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisi şeýle belgilenýär: $IUUB\ (a;b)$ ýagny ýokarky mysal üçin $IUUB(12;8)=4$ ýaly ýazmak bolar. Iň uly umumy bölüjiniň käbir häsiýetlerini agzap geçeliň:

1. a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisi hemişe bardyr we ýeketäkdir.

2. a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisi şol sanlaryň iň kiçisinden uly däldir, ýagny eger $a<b$ bolsa, onda $IUUB(a;b)\le a$.

3. a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisi umumy bölüjileriň islendigine bölünýändir. Mysal üçin, 12 we 8 sanlaryň umumy bölüjileri 1; 2; 4. Bu ýerde 4 san 12 we 8 sanlaryň iň uly umumy bölüjisidir. Ol 1-de, 2-de bölünýär.

Ýene-de 12 we 8 sanlary alalyň we olaryň kratnylarynyň birnäçesini ýazalyň.

12-ä kratny sanlar 12; 24; 36; 48; 60; 72...

8-e kratny sanlar 8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 72...

12 we 8 sanlaryň umumy kratnylary bar. Olar 24; 48; 72; ... Olaryň arasynda iň kiçisi 24. Şol sana 12 we 8 sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy diýilýär. Şu düşünjä kesgitleme bereliň:

Kesgitleme. *a* we *b* natural sanlaryň umumy kratnylary diýip, şu sanlaryň her birine kratny bolan hemme natural sanlara aýdylýar.

Kesgitleme. *a* we *b* natural sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy diýip sanlaryň ikisine-de kratnylarynyň iň kiçisine aýdylýar. *a* we *b* natural sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy *IKUK* (*a*;*b*) görnüşde belgilenýär. Diýmek, *IKUK* (12; 8)=24.

Iň kiçi umumy kratnynyň käbir häsiýetini subutsyz agzap geçeliň:

1. *a* we *b* natural sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy hemişe bardyr we ýeke-täkdir.

2. *a* we *b* natural sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy şol sanlaryň ulusyndan kiçi däldir. Ýagny eger $a > b$, onda $IKUK\left(a;b\right) \geq a$.

3. *a* we *b* natural sanlaryň islendik umumy kratnysy iň kiçi umumy kratna bölünýändir.

Mysal üçin: 12 we 8 sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy 24: 48:24; 72 : 24 we ş.m, *a* we *b* sanlaryň iň uly umumy bölüjisi we iň kiçi umumy kratnysy özara baglanyşyklydyr. Belli bolşy ýaly, *IUUB* (12; 8) = 4

IKUK (12; 8) =24.

Iň uly umumy bölüjini we iň kiçi umumy kratnyny köpeldeliň:

IUUB (12;8) · *IKUK* (12;8) = 24 · 4 = 96.

Indi berlen sanlaryň köpeltmek hasylyny tapalyň: 12 · 8 = 96 .

Bu ýerden görnüşi ýaly aşakdaky tassyklama dogry:

a we *b* sanlaryň iň uly umumy bölüjisi bilen iň kiçi umumy kratnynyň köpeltmek hasyly *a* we *b* sanlaryň köpeltmek hasylyna deňdir; *IUUB* (*a*; *b*) · *IKUK* (*a*;*b*) = *a*·*b*.

Bu deňlik iň uly umumy bölüjini bilip iň kiçi kratnyny tapmaklyga mümkinçilik berýär:

$$IKUK\left(a;b\right) = \frac{ab}{IUUB\left(a;b\right)}.$$

Hususan-da *a* we *b* sanlaryň iň uly umumy bölüjisi 1-e deň bolsa, şol sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy *a*·*b* bolar. Mysal üçin, *a*=17; *b*=5 bolsa bu sanlaryň 1-den başga umumy bölüjisi ýok. $IUUB\,(17;5) = 1$, onda $IKUK\,(17;5) = 17 \cdot 5 = 85$. $IUUB$ -i 1-e deň bolan sanlara ýönekeý sanlar diýilýär.

Gönükmeler

1. Aşakdaky sanlaryň iň uly umumy bölünijilerini tapyň.

a) 32 we 40; ç) 99 we 135;
b) 24 we 36; d) 136 we 148.

2. Aşakdaky sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapyň.

a) 18 we 27; ç) 24 we 36;
b) 9 we 11; d) 14 we 21.

3. Deňlik dogrumy?

a) $IUUB\,(32;\,8) = 8$; b) $IKUK\,(32;\,8) = 32$.

4. Okuwçylar 136 we 225 sanlaryň iň uly umumy bölüjisini we iň kiçi umumy kratnysyny tapdylar:

$IUUB\,(136;\,225) = 17$; $IKUK\,(136;\,225) = 2040$.

Şu netijeleriň dogrudygyny nädip barlamaly?

5. Eger a) $IUUB\,(315;\,385) = 35$; b) $IUUB\,(47;\,105) = 1$ bolsa a we b sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapmaly.

§ 71. Düzme sanlara bölünijilik nyşanlary

Subut edilen bölünijilik nyşanlary sanlaryň 2-ä, 3-e, 4-e, 5-e, 8-e, 9-a, 11-e we 25-e bölünijiligini kesgitlemeklige mümkinçilik döredýär. Bölmegi ýerine ýetirmezden sanlaryň 6-a, 12-ä, 30-a bölünýändigini nädip bilmeli?

6-a bölünijilik nyşany:

x sanyň 6-a bölünmegi üçin onuň 2-ä we 3-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy. Goý, x san 6-a bölünýän bolsun, onda $x \vdots 6$ we $6 \vdots 2$ bu ýerden $x \vdots 2$ gelip çykýar, $x \vdots 6$ we $6 \vdots 3$, bu ýerden $x \vdots 3$ bolýanlygy gelip çykýar. Bu ýerde biz x sanyň 6-a bölünmegi üçin onuň 2-ä we 3-e bölünmeginiň zerurdygyny görkezdik.

Yeterlik şertini subut edeliň. $x \vdots 2$ we $x \vdots 3$ bolýanlygy üçin x san 2-ä we 3-e umumy kratny. Ýöne islendik umumy kratny, sanlaryň iň kiçi kratnysyna bölünýär. Diýmek, $x \vdots IKUK(2;3)$. $D(2;3)=1$ bolýanlygy üçin $K(2;3)=2 \cdot 3=6$. Diýmek, $x \vdots 6$.

12-ä bölünijilik nyşany:

x-sanyň 12-ä bölünmegi üçin onuň 3-e we 4-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir. Bu teoremanyň subudy edil ýokarky ýalydyr.

15-e bölünijilik nyşany:

x-sanyň 15-e bölünmegi üçin onuň 3-e we 5-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir.

Düzme sanlara bölünijilik nyşanlary dowam etdirmek bolar. Olary aşakdaky teorema umumylaşdyrýar.

Teorema. Natural sanyň düzme $n=bc$, (bu ýerde $IUUB\ (b;c)=1$), sana bölünmegi üçin onuň b we c sanlara bölünmegi zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremanyň subudy 6-a bölünijilik nyşanynyňky ýalydyr. Berlen teoremany köp gezek ulanmak mümkinçiligini bellemeli. Mysal üçin: 60-a bölünijilik nyşanyny kesgitläliň.

Berlen sanyň 60-a bölünmegi üçin onuň 4-e we 15-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir. Ýöne öz gezeginde sanyň 15-e bölünmegi üçin onuň 3-e we 5-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir. Şonuň üçin 60-a bölünijilik nyşanyny şeýle kesgitlemek bolar:

Sanyň 60-a bölünmegi üçin onuň 3-e, 4-e we 5-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir. Mysal üçin, 1548 we 912 sanlar 18-e bölünýärmi?

Çözülişi: Ilki 18-e bölünijilik nyşany kesgitläliň. Sanyň 18-e bölünmegi üçin onuň 2-ä we 9-a bölünmegi zerur we ýeterlikdir. Näme üçin 2 we 9 saýlanyp alyndy? Birinjiden $2 \cdot 9=18$. Ikinjiden $IUUB\ (2;9)=1$, ýagny 2 we 9 düzme sanlara bölünijilik hakyndaky teoremany kanagatlandyrýar.

18 sanyň $3 \cdot 6$ görnüşde ýazylmagy kanagatlanarsyz.

Sebäbi $IUUB(3;6) \neq 1$.

2-ä we 9-a bölünijilik nyşanyndan peýdalanyp $1548 \vdots 2$ we $1548 \vdots 9$ bolýandygyny kesgitleýäris. Diýmek, $1548 \vdots 18$.

$942 \vdots 2$ ýöne 9-a bölünmeýär. Diýmek, 942 san 18-e bölünmeýär.

Gönükmeler

1. Berlen sanlaryň haýsysynyň 12-ä kratnydygyny kesgitlemeli: 1032, 2964, 5604, 8910 we 7008.

2. 15-e bölünýän üç sany dörtbelgili san ýazmaly.

3. 20-ä bölünijilik nyşany kesgitlemeli we 20-ä bölünýän 3 sany bäşbelgili san ýazmaly.

4. Berlen sanlaryň haýsylarynyň $30 \cdot q$ (q – natural san) görnüşinde ýazyp bolýandygyny kesgitlemeli.

a) 22530; b) 53420.

5. Goý, A – 7-ä we 3-e kratny natural sanlaryň köplügi bolsun, B – 21-e kratny sanlaryň köplügi. $A=B$ bolýandygyny subut ediň.

6. 14, 35, 70 sanlaryň haýsylary 840-yň bölüjileri.

7. n-iň islendik natural bahasynda $11n$ aňlatma:

a) 11-e kratny; b) 7-ä kratny däl. Şular dogrumy?

8. Burçlaýyn bölmegi ýerine ýetirmezden köpeltmek hasyllarynyň haýsylarynyň 70-e bölünýändigini kesgitlemeli.

a) $105 \cdot 20$; b) $42 \cdot 12 \cdot 5$; ç) $85 \cdot 33 \cdot 4$.

9. Alnan san 15-e bölüner ýaly, 15-iň çepinden we sagyndan bir san ýazmaly.

§ 72. Ýönekeý köpeldijilere dargatmak usuly bilen iň uly umumy bölüjini we iň kiçi umumy kratnyny tapmak

Sanyň ýönekeý sanlaryň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazylyşyna onuň ýönekeý köpeldijilere dargadylyşy diýilýär. Mysal üçin: $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$, bu ýerde 110 san 2; 5 we 11 ýönekeý köpeldijilere dargadylypdyr. Umuman aýdanyňda hemme düzme sanlary ýönekeý köpeldijilere dargadyp bolýar. Şunlukda köpeldijileriň tertibini hasaba almasaň şol bir dargatma alynýar: $110=2 \cdot 5 \cdot 11$ ýa-da $5 \cdot 2 \cdot 11 = 110$.

Sany ýönekeý köpeldijilere dargatmagyň usulyny ýatlalyň. Mysal üçin, 720-i ýönekeý köpeldijä dargadalyň. 720 san 2-ä bölünýär. Diýmek, 2 san 720-i dargatmasynda bir ýönekeý köpeldiji. 720-ni 2-ä böleliň. 2-ni deňligiň sag tarapyndan ýazalyň, 360-y bolsa 720-niň aşagyndan ýazalyň. 360-y

2-ä böleliň, 180 alynýar. 180-i 2-ä bölеliň, 90 alynýar, 90-y 2-ä bölеliň 45 alynýar, 45-i 3- e bölеliň 5 alynýar, 5 ýönekeý san ony 5-e bölsek 1 alynýar. Köpeldijilere dargatmak tamamlandy:

$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
360
180
90
45
15
5
1

Birmeňzeş köpeldijileriň köpeltmek hasylyny dereje görnüşinde ýazmak kabul edilen: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. 720-iň şeýle görnüşinde ýazylmagyna onuň kanonik görnüşi diýilýär. Sanlary ýönekeý köpeldijilere dargatmak olaryň iň uly umumy bölüjisini we iň kiçi umumy kratnysyny tapylanda ulanylýar. Mysal üçin: 3600 we 288 sanlaryň iň uly umumy bölüjisini we iň kiçi umumy kratnysyny tapalyň. Berlen sanlaryň hersini kanonik görnüşde ýazalyň:

$3600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^2$;

1800	144
900	72
450	36
225	18
75	9
25	3
5	1
1	

3600 we 288 sanlaryň iň uly umumy bölüjisine umumy ýönekeý köpeldijiler girmeli, şunlukda kiçi derejelisini almaly. Onda

$IUUB(3600; 288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

3600 we 288 sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyna umumy ýönekeý köpeldijileriň uly derejelisi, umumy dälleriň hemmesi bilen alynmaly. $IKUK(3600; 288) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$.

Umuman, $IUUB$ tapmak üçin:

1. Berlen sanlary kanonik görnüşde ýazmaly.

2. Berlen sanlaryň kanonik görnüşinden umumy köpeldijileriň kiçi dereje görkezijisini almaly we köpeltmeli.

3. Köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

Şol hem berlen sanlaryň *IUUB* bolýar.

Berlen sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapmak üçin:

1. Berlen sanlary kanonik görnüşde ýazmaly.

2. Ýönekeý köpeldijilerden bu sanlaryň iň bolmanda birinde bar bolan uly derejäni almaly.

3. Alnan köpeltmek hasylynyň bahasyny tapmaly. Ol hem berlen sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy bolar.

Birnäçe mysallara seredeliň.

Mysal 1. 60; 252 we 264 sanlaryň iň uly umumy bölüjisini we iň kiçi umumy kratnysyny tapmaly. Sanlary kanonik görnüşde ýazalyň. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$. Bu sanlaryň iň uly umumy bölüjisini tapmak üçin ýönekeý köpeldijileriň umumylarynyň kiçi dereje görkezijilisini alýarys we köpeltmek hasylyny hasaplaýarys:

IUUB $(60; 252; 264) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Iň kiçi umumy kratnyny tapmak üçin umumy köpeldijileriň iň uly dereje görkezijisini we galan köpeldijileriň hemmesini alýarys hem-de köpeltmek hasylyny hasaplaýarys:

$K\ (60; 252; 264) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$.

Mysal 2. 48 we 245 sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapalyň. Berlen sanlary kanonik görnüşinde ýazalyň:

$48 = 2^4 \cdot 3$; $245 = 5 \cdot 7^2$.

IKUK $(48; 245) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 11760$; *IUUB* $(48; 245) = 1$.

Gönükmeler

1. Sanlary ýönekeý köpeldijilere dargytmaly:

124, 588, 2700, 3780.

2. Haýsy san şeýle dargadylýar:

a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$.

3. Iň uly umumy bölüjini we iň kiçi umumy kratnyny tapmaly:

a) 175 we 245; b) 540 we 558; ç) 120; 80 we 280; d)675 we 154.

4. Hemme bir belgili sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapmaly.

5. Biri 600 bolan iki sanyň iň uly umumy bölüjisi 120. Şol sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy 4800. Beýleki sany tapmaly.

§ 73. Ýewklidiň algoritmi

Ýönekeý köpeldijilere dargatmak arkaly *IUUB*-ni tapmak käwagtlar kynçylyklar döredýär. Mysal üçin, 6815-i ýönekeý köpeldijä dargatsak birinji bölüji 5, paý 1363 bolar. Bu sanyň iň kiçi ýönekeý bölüjisi 29 bolýar, ýöne ony tapmak üçin 1363-iň 2, 3, 5, 7, 1, 13, 17, 19, 23, 29 bölünýändigini barlap görmeli. Bu bolsa kynçylyk döredýär. Berlen sanlaryň *IUUB* aňsatlyk bilen tapmak üçin netijeli usuly bar. Şol usula geçmezden öň iki sanyň umumy bölüjisiniň esasy häsiýetine seredeliň . Mysal üçin, 525 we 231 sanlary alalyň we galyndyly bölmegi ýerine ýetireliň. Alarys: $525 = 231 \cdot 2 + 63$.

A köplük bilen 525-iň we 231-iň umumy bölüjilerini *B* bilen 231 bilen 63-iň umumy bölüjilerini belläliň. $A = B$ bolýandygyny subut edeliň.

Öňi bilen 525 we 231 sanlaryň islendik umumy bölüjileriniň 231 we 63 sanlaryň hem umumy bölüjileri bolýandygyny subut edeliň. Hakykatdan-da, eger $525 \vdots d$ we $231 \vdots d$, onda tapawudyň bölünijiligi teoremasyna laýyklykda $63 \vdots d$. Muňa göz ýetirmek ýeňil: eger 525=231·2+63 deňligi şeýle ýazsak 63=525-231· 2. Bu ýerde $225 \vdots d$, $231 \vdots d$, onda $63 \vdots d$. Şeýlelik bilen 525 we 231 sanlaryň islendik umumy bölüjisi 231 we 63 sanlaryň hem umumy bölüjisidir, ýagny $A \subset B$.

Tersine: Eger *t* san 231 we 63 sanlaryň umumy bölüjisi bolsa, ýagny $231 \vdots t$ we $63 \vdots t$, onda jemiň bölünijiligi teorema laýyklykda $525 \vdots t$. Diýmek, 231 we 63 sanlaryň islendik umumy bölüjisi 525 we 231 sanlaryň hem umumy bölüjisidir,

ýagny $B \subset A$.

Deň köplükleriň kesgitlemesi esasynda $A=B$, eger berlen jübütleriň köplügi deň bolsa, onda olaryň iň uly umumy bölüjileride deňdir.

$$D\,(525;\ 231) = D\,(231;\ 63).$$

Umuman, eger *a* we *b* natural san we $a = b\,q + r$, bu ýerde $r < b$ bolsa $D(a;b) = D(b;r)$. Bu teoremanyň subudy ýokarky ýaly edilýär.

Şu häsiýetiň zerurlygy nämede? Bu *a* we *b* sanlaryň iň uly umumy bölüjisi tapylanda şol sanlary kiçi san bilen çalşyrmaga we gysga hasaplama geçirmeklige mümkinçilik berýär.

525-i 231-e galyndyly bölüp, galyndyda 63 alýarys. Diýmek, *IUUB* (525; 231)=*IUUB* (231; 63). 231-i 63-e galyndyly bolup 231= 633 + 42, ýagny *IUUB* (231; 63)=*IUUB* (63; 42) alarys. Diýmek, *D* (63; 42)=*D* (42; 21); 42-ni 21-e galyndyly böleniňde galyndyda 0 alynýar ýagny *IUUB* (42; 21)=*IUUB* (21;0). 21 we 0 sanlaryň iň uly umumy bölüjisi 21. Diýmek, 21, 525 we 231 sanlaryň iň uly umumy bölüjisidir. Sebäbi *IUUB* (525; 231)=*IUUB* (231; 63)=*IUUB* (63; 42)=*IUUB* (42; 21)=*IUUB* (21; 0)=21.

Geçirilen hasaplamalary şeýle ýazmak bolar:

```
       _525|231
        462  2
    231 |_63
    189   3
  _63|42
   42 1
 _42|21
  42 2
  0
```

$525=231\cdot2+63$
$231=63\cdot3+42$
$63=42\cdot1+21$
$42=21\cdot2+0$

Iň uly umumy bölüjini tapylyşynyň şu usuly galyndyly bölmeklige esaslanan. Bu düzgün gadymy grek alymy Ewklid tarapyndan esaslandyrylýar we onuň ady dakylýar.

Umumy görnüşde Ewklidiň algoritmi şeýle aýdylýar:

Goý, a we b natural san we $a>b$ bolsun. Eger a sany b sana galyndyly bölsek, soňra b sany alnan galynda galyndyly bölsek, soňra birinji galyndyny ikinji galynda bölsek we ş.m. Onda iň soňky nuldan tapawutly galyndy a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisi bolar.

Gönükmeler

1. *IUUB* (576;252)= *IUUB* (252;72). Subut ediň.

2. Ewklidiň algoritiminiň kömegi bilen sanlaryň iň uly umumy bölüjisini tapmaly:

a) 375 we 645; ç) 960 we 1200;

b) 12345 we 7565; d) 36354 we 30295.

3. *IUUB* (6025; 1728) = 1 bolýandygyny subut etmeli.

4. *IUUB* (6855; 10005)-si san *IUUB* (1679; 2231)-den näçe esse uly?

III bap
SAN DÜŞÜNJESI

§ 74. Drob düşünjesi

Drob sanlar bilen ilkinji tanyşlyk başlangyç klasdan başlanýar. Soňraky klaslarda ol düşünje anyklanýar we giňeldilýär. Drob düşünjesiniň ýüze çykmagynyň düýp sebäbi ululyklary ölçemek bilen baglanyşyklydyr.

Goý, bize a kesim berilsin we ol kesimiň uzynlygyny ölçemeklik talap edilsin. Ony ölçemek üçin e birlik kesimi saýlap alalyň. Goý, ölçegleriň netijesinde a kesimiň uzynlygy 3-e deň uly 4-e deň bolsa kiçi bolupdyr diýeliň. Onda a kesim uzynlygyny e birlik kesimde ölçäp, natural sanyň üsti bilen aňladyp bolmajakdygy aýdyňdyr. Eger indi e birlik kesimi 4 sany deň bölege bölsek

we her bölegi e_1 bilen bellesek, onda a-kesimiň uzynlygy $14e_1$-deň bolar. (çyzga seret). a kesimiň uzynlygyny ilkibaşdaky e kesimiň üsti bilen anyklamaklyk talap edise, onda e kesimiň 4-e bolanlygyny göz üstünde tutup, $\frac{14}{4}$ ony e görnüşinde ýazarys. Bu ýerde $\frac{14}{4}$ alnan sany (simwola, belgä) drob diýýäris.

Kesgitleme. Goý, bize a kesim we e birlik kesim berlen bolsun hem-de e kesim n-sany e_1 kesime deň diýeliň. Eger a kesim m sany e_1 kesime deň bolsa, onda onuň uzynlygyny $\frac{m}{n}e$ görnüşde aňlatmak bolar. $\frac{m}{n}$ ýazga drob diýilýär we bu ýerde m hem-de n natural sanlardyr. Ol drob sany "en-den em" diýip okamaklyk kabul edilendir we m sana sanawjy, n sana bolsa maýdalawjy diýilýär. Biz e_1 kesimi e kesimiň dörtden bir bölegi ýaly edip saýlap aldyk. Bu a kesimde bitin sany gezegine ýerleşgirip bolýan ýeketäk kesim däldir. Eger e sekizden bir bölegini alan bolsak, onda a kesim 28 sany bölejik ülüşden ybarat bolardy hem-de onuň uzynlygy $\frac{28}{8}e$ deň bolardy. e kesimiň 16-dan bir bölegi hem almak bolardy we şonda a kesim 56 ülüşden ybarat bolup, onuň uzynlygy $\frac{56}{16}e$ görnüşde aňladylardy. Bu prosesi çäksiz dowam etdirmek arkaly a kesimiň uzynlygyny aňladýan $\frac{14}{4}, \frac{28}{8}, \frac{56}{16}, \ldots$ dürli droblaryň tükeniksiz köplügini alarys.

Umuman, e birlik kesimde a kesimiň uzynlygy $\frac{m}{n}$ drob bilrin aňladylýan bolsa, onda ony k islendik natural san bolanda, $\frac{mk}{nk}$ aňladyp bolar.

Kesgitleme. e birlik kesimde, şol bir kesimiň uzynlygyny aňladýan droblara deň droblar diýilýär.

Eger $\frac{m}{n}$ we $\frac{p}{q}$ droblar deň bolsalar, onda ony $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ diýip ýazýarlar

Mysal üçin, $\frac{14}{4}$ we $\frac{28}{8}$ droblar şol bir kesimiň uzynlygyny aňladýarlar, diýmek, olar deňdirler, ýagny $\frac{14}{4}=\frac{28}{8}$. Droblaryň deňlik nyşany. $\frac{m}{n}$ we $\frac{p}{q}$ droblaryň deň bolmagy üçin $mq=np$ deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy. Zerurlygy. Goý, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ bolsun.

Onda islendik natural q- san üçin $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$, islendik natural p san üçin bolsa $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$ deňlikler dogrudyr. Ol deňliklerden bolsa $mq = np$ gelip çykýar.

Ýeterlikligi. Goý, $mq = np$ bolsun. Çyn san deňliginiň iki tarapyny hem nq–natural sana bölsek, onda ýene-de çyn san deňligi alnar, ýagny

$\frac{mq}{nq} = \frac{np}{nq}$. Bu ýerden $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ gelip çykýar.

Mysal üçin, $\frac{13}{15}$ we $\frac{22}{25}$ droblaryň deňligini barlap göreliň. Onuň üçin 13×25 we 15×22 köpeltmek hasyllaryny deşdirýäris, $13 \times 25 = 325$, $15 \times 22 = 330$, $325 = 330$, şonuň üçin $\frac{13}{15} \neq \frac{22}{25}$.

Ýokarda getirilen faktlardan droblaryň esasy häsiýeti gelip çykýar.

Drobuň esasy häsiýeti. Eger berlen drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny şol bir natural sana köpeltsek ýa-da bölsek, onda başda berlen droba deň bolan drob alnar.

Droblaryň bu esasy häsiýetiniň esasynda droblary gysgaltmak we olary umumy maýdalawja getirmek amala aşyrylýar.

Kesgitleme. Berlen droby özüne deň, ýöne maýdalawjysy ondan kiçi bolan başga drob bilen çalyşmaklyga droblary gysgaltmak diýilýär.

Eger drobuň sanawjysy we maýdalawjysy diňe 1-e bölünýän bolsa, ýagny olaryň birden başga umumy bölüjisi bolmasa, onda ol droblara gysgalmaýan droblar diýilýär.

Mysal üçin, $\frac{8}{15}$ gysgalmaýan drobdyr.

Kesgitleme. Gysgalmaýan drobuň sanawjysyndaky we maýdalawjysyndaky sanlara özara ýönekeý sanlar diýilýär.

Droblary gysgaltmagyň netijesinde sanawjysy we maýdalawjysy özara ýönekeý san bolan gysgalmaýan drob alynýar.

Mysal. $\frac{48}{80}$ – droby gysgaltmaly.

Droby sanlaryň bölünijilik nyşanlaryndan peýdalanyp gysgaldalyň:

$\frac{48}{80}=\frac{24}{40}=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Indi ol droby 48 we 80 sanlaryň *IUUB* tapmak arkaly gysgaldalyň. D(48,80)=16.

Berlen drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny 16-a bölüp alarys.

$\frac{48}{80}=\frac{3}{5}$

Kesgitleme. Berlen droby özlerine deň bolan, ýöne maýdalawjylary birmeňzeş täze droblar bilen çalyşmaklyga droblary umumy maýdalawja getirmek diýilýär. $\frac{m}{n}$ we $\frac{p}{q}$ – droblary umumy maýdalawja getirmek üçin p we q sanlaryň umumy kratnylaryny tapmaly. Ol droblary iň kiçi umumy maýdalawja getirmek üçin berlen n we q sanlaryň *IKUK* tapmaly.

Mysal. $\frac{8}{15}$ we $\frac{4}{35}$ we sanlary umumy maýdalawja getirmeli. 15 we 35 sanlary ýönekeý köpeldijilere dagytmak arkaly olaryň *IKUK*-ny tapalyň. $15=3\cdot5$; $35=5\cdot7$; $K(15{,}35)=3\cdot5\cdot7=105$.

Onda $\frac{8}{15}=\frac{8\cdot7}{15\cdot7}=\frac{56}{105}$; $\frac{4}{35}=\frac{4\cdot3}{35\cdot3}=\frac{12}{105}$.

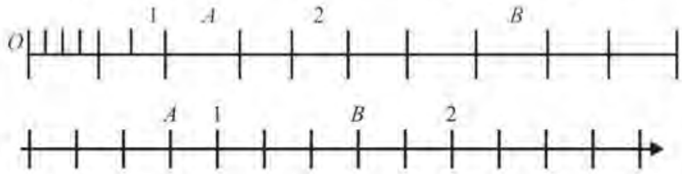
Gönükmeler

1. $\frac{12}{5};\frac{17}{4};\frac{2}{3}$ droblary kesimleri ölçemek prosesiniň üsti bilen almaly.

2. Berlen droblara deň bolan azyndan 5 sany drob ýazmaly.

a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{7}{5}$; ç) $\frac{19}{6}$; d) $\frac{5}{12}$.

3. Çyzgyda berlen OA we OB kesimleriň uzynlygyny kesgitlemeli.



4. Berlen droblary umumy maýdalawja getirmeli.

a) $\frac{17}{24}$ we $\frac{11}{30}$; b) $\frac{7}{10}$ we $\frac{8}{15}$; ç) $\frac{19}{136}$ we $\frac{23}{208}$.

5. Orta mekdebiň "Matematika-4" okuw kitabyndan droblary gysgaltmaga we olary umumy maýdalawja getirmäge degişli gönükmeler almaly we olary ýerine ýetirmeli.

§ 75. Položitel rasional san düşünjesi

Şol bir kesimiň uzynlygy aňladýan özara deň tükeniksiz köp droblaryň bardygy bize mälimdir. Şeýlelikde, biz özara deň droblary şol bir sanyň dürli ýazgysy diýip kabul edip bileris.

Kesgitleme. Položitel rasional san – bu özara deň droblaryň köplügidir. Ol köplüge degişli her bir drob bolsa şol sanyň ýazgysydyr. Mysal üçin: $\left\{\frac{7}{2}, \frac{14}{4}, \frac{28}{8}, \frac{56}{16}, \ldots\right\}$ köplük käbir rasional sandyr we $\frac{7}{2}, \frac{14}{4}, \frac{28}{8}$ we ş.m. droblar bolsa şol sanyň dürli ýazgysydyr. $\left\{\frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \frac{9}{30}, \ldots\right\}$ köplük bolsa başga bir položitel rasional sandyr. Kesgitlemä görä položitel rasional sany bermek üçin biz hökman köplük bermelidiris. $\frac{m}{n}$ ýazga biz drob diýmeli ýa-da $\frac{m}{n}$ drob görnüşinde berlen položitel rasion san diýmeli. Biz, köplenç, gysgalyk üçin $\frac{m}{n}$ droba položitel rasional san diýýäris. Ýöne bu gysgaltmaklyk položitel rasional san we drob düşünjeleriniň gabat gelýändigini aňladýan däldir. Mysal üçin, $\frac{9}{25}$ ýazgy nämäni aňladýar diýen soraga "Ol droby aňladýar" ýa-da "Ol položitel rasional sanyň ýazgysy" diýmeli. "$\frac{5}{9}$ sana položitel rasional san diýmek bolarmy?" diýen soraga "Hawa, gysgaça aýdanyňda" diýip jogap bermek bolar.

Şeýlelikde, položitel rasional sany bermek üçin deň droblaryň köplügini bermeli. Ol droblaryň içinde sanawjysynyň we maýdalawjysynyň $IUUB$-si 1-e deň bolan droby saýlap alyň.

Mysal üçin, $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \ldots\right\}$ käbir rasional sany aňladýan deň droblaryň köplüginde ol $\frac{2}{7}$ drobdyr.

Umuman, islendik položitel rasional san üçin, şol sanyň ýazgysy diýilýän, gysgalmaýan ýeke-täk drob bardyr.

Položitel rasional san düşünjesini kesgitlemek üçin biz kesimiň uzynlygyny takyk ölçemek meselesinden peýdalandyk, ýagny ugur aldyk.

Indi, eger bize käbir položitel rasional san berlen bolsa, onda ol sana degişli kesimi gurup bolarmy diýen meselä seredeliň.

Goý, $\frac{m}{n}$ käbir rasional sanyň ýazgysy bolsun. Onda $\frac{m}{n}$ drobuň üsti bilen aňladylýan kesimiň bardygy subut edilendir we biz ony mysal almak arkaly düşündireliň.

Uzynlygy $\frac{11}{3}$ san bilen aňladylýan kesimi guralyň. Onuň üçin e birlik kesim alalyň we ony deň 3 bölege böleliň. Soňra OX şöhläniň üstünde her biri e birlik kesimiň üçden bir bölegine deň bolan 11 sany ülüşi goýalyň. Şeýlelikde, biz uzynlygy $\frac{11}{3}$ drobuň üsti bilen aňladylýan OA kesimi alarys.

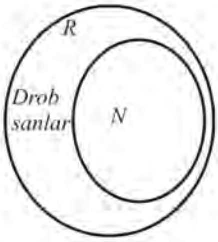
Položitel rasional sanlaryň köplügi Q_+ bile bellemeklik kabul edilendir.

N natural sanlar köplügi bilen Q_+ položitel rasional sanlar köplüginiň arasynda $N \subset Q_+$ gatnaşyk bardyr, ýagny başgaça aýdanyňda, natural sanlar köplügi položitel rasional sanlar köplüginiň bölek köplügidir.

Mysal üçin, goý, $5 \in N$ natural san berlen bolsun. Ol sany ulanmak bilen aşakdaky tükeniksiz deň droblaryň köplügini düzeliň:

$$\left\{5, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{20}{4}, \ldots\right\}$$

Bu köplük bolsa položitel rasional sandyr we $5 \in N$ sanyň $5 \in Q_+$ bolanlygyndan $N \subset Q_+$ netijä geleris. N we Q_+ köplükleriň arasyndaky gatnaşygy Eýleriň tegelekleri arkaly şekillendireliň.



Natural sanlar köplügini položitel rasional sanlaryň köplügine çenli dolduryan köplügiň elementlerine **drob sanlar** diýilýär.

Gönükmeler

1. $\frac{5}{8}$ – san drobdyr diýen tassyklama (pikir aýtma) dogrumy?

2. $\frac{5}{8}$ drob kabir položitel rasional sanyň ýazgysydyr diýen pikir aýtma dogrumy?

3. $\frac{15}{7}$ – položitel rasional sanmy?

4. Deňlikleri subut ediň.

a) $\frac{131313}{191919}=\frac{1313}{1919}=\frac{13}{19}$;

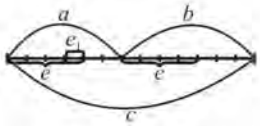
b) $\frac{343434}{454545}=\frac{343434}{4545}=\frac{34}{45}$.

5. Eger $\frac{a}{b}$ – drob gysgalmaýan bolsa $\frac{a}{b+ba}$ drob gysgalarmy?

6. Birlik kesimi saýlap almak bilen $\frac{8}{5}$ we $\frac{4}{7}$ droblara degişli kesimleri guruň.

§ 76. Droblary goşmak we aýyrmak

Goy, $c=a+b$ bolan a, b, c kesimler saýlanan e birlik kesimde berlen we $a=\frac{6}{4}e$, $b=\frac{7}{4}e$ bolsun.



Onda $e_1=\frac{e}{4}$ bilen bellesek

$c=a+b=\frac{6}{4}e+\frac{7}{4}e=6e_1+7e_1=(6+7)e_1=13e_1=\frac{13}{4}e$ bolar, ýagny c kesimiň uzynlygy $\frac{13}{4}$ san bilen aňladylýandyr $\frac{6}{4}$ we $\frac{7}{4}$ ol we sanlaryň jemidir.

Kesgitleme. Eger a we b položitel rasional sanlar $\frac{m}{n}$ we $\frac{p}{n}$ droblar bilen aňladylýan bolsa, onda a we b sanlaryň jemi diýip $\frac{m+p}{n}$ drob bilen aňladylyan sana aýdylýar.

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$$

Eger a we b položitel rasional sanlar dürli maýdalawjyly droblar bilen aňladylan bolsa, onda ol droblary iň kiçi umumy maydalawja getirilýär, şondan soň goşmak amaly ýerine ýetirilýär.

Mysal üçin; $\frac{7}{18}+\frac{5}{12}=\frac{14}{36}+\frac{15}{36}=\frac{14+15}{36}=\frac{29}{36}$.

Islendik iki položitel rasional sanlaryň jemi bardyr we ýeke-täkdir. Ony biz subutsyz kabul ederis.

Položitel rasional sanlary goşmak natural sanlary goşmaklyga getirilýär diýip hasap etmek bolar.

Položitel rasional sanlary goşmak orun çalşyrma we utgaşdyrma häsiýetlere eýedir.

Islendik a we $b \in Q_+$ sanlar üçin $a+b=b+a$ deňlik dogrudyr.

Islendik $a, b, c \in Q_+$ sanlar üçin $(a+b)+c=a+(b+c)$ deňlik dogrudyr.

Orun çalşyrma kanunyny subut edeliň. Goý, a we b sanlar $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$ droblar bilen aňladylan bolsun.

$a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$ $\frac{m+p}{n}$ drobuň sanawjysynda natural sanlary goşulýar, olar üçin bolsa orun çalşyrma kanuny öň subut edilipdi. Onda $\frac{m+p}{n}=\frac{p+m}{n}$.

Rasional sanlary goşmak düzgüninden peýdalansak

$\frac{p+m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{m}{n}=b+a$.

Şeýlelikde, položitel rasional sanlar üçin goşmagyň orun çalşyrma kanuny natural sanlar üçin orun çalşyrma kanunyndan gelip çykýar.

Utgaşdyrma kanuny hem şoňa meňzeş subut edilýär.

Dogry we nädogry droblar tapawutlandyrylýar.

Eger $\frac{m}{n}$ drobuň sanawjysy maýdalawjysyndan kiçi bolsa, onda ol droba dogry drob, eger sanawjysy maýdalawjysyna deň ýa-da ondan uly bolsa, ol broba nädogry drob diýilýär.

Goý $\frac{m}{n}$ nädogry drob bolsun, ýagny $m \geq n$. Eger m san n sana kratny bolsa, onda $\frac{m}{n}$ drob natural sanyň ýazgysydyr. Mysal üçin, $\frac{18}{3}$ drob berlen bolsa, onda $\frac{18}{3}=6$.

Eger m san n sana kratny däl bolsa, onda m sany n sana galyndyly bölmek esasynda $m=nq+r$ ýazyp bolar, bu ýerde $r<n$. $nq+r$ sany $\frac{m}{n}$ drobda m-iň ornuna goýsak alarys:

$$\frac{m}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n}.$$

$r<n$ bolany üçin drob dogry drobdyr. Bu ýerde drob q natural san bilen drobuň jemi bilen aňladyldy. Şeýlelikde, biz nädogry drobuň bitin bölegini bölüp çykardyk. Mysal üçin,

$$\frac{17}{5}=\frac{5\cdot 3+2}{5}=\frac{5\cdot 3}{5}+\frac{2}{3}=3+\frac{2}{5}.$$

Bu ýazgyny $3\frac{2}{5}$ ýazylýar we ony garyşyk san diýip atlandyrylýar.

Tersine, her bir garyşyk sany nädogry drob görnüşinde ýazyp bolýar. Mysal üçin,

$$3\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}, \text{ ýagny } 3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{1\cdot 5}=\frac{17}{5}.$$

Kesgitleme. a we b položitel rasional sanlaryň tapawudy diýip $a=b+c$ bolan c položitel rasional sana aýdylýar.

Tapawudy tapmak üçin bir položitel rasional sandan beýlekisini aýyrmalydyr.

Goý, $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$ bolsun we $\frac{x}{n}$ drob bilen aňladylan $a–b$ tapawudy tapmaly bolsun. Kesgitlemä görä $\frac{m}{n} = \frac{p}{n} + \frac{x}{n}$; $\frac{p}{n} + \frac{x}{n} = \frac{p+x}{n}$ bolany üçin $m = p + x$, $x = m - p$ (bu ýerde m, p, x – natural sanlardyr). Onda şeýle düzgüni alarys:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}.$$

Gönükmeler

1. Droblary gysgaldyň we amallary ýerine ýetiriň:

a) $\frac{13}{52} + \frac{43}{86} - \frac{15}{120}$;

b) $5\frac{3}{7} + 7\frac{3}{21} + 2\frac{3}{9}$;

ç) $4\frac{15}{60} + 7\frac{3}{24} + 2\frac{10}{80}$;

d) $4\frac{2}{3} + 2\frac{4}{12} + 7\frac{5}{9}$.

2. Goşmak kanunlaryndan peýdalanyp amatly usulda hasaplaň:

a) $\frac{2}{17} + 3\frac{2}{7} + 1\frac{13}{34} + 5\frac{3}{14}$;

b) $2\frac{4}{9} + 5\frac{1}{12} + 2\frac{7}{12} + 4\frac{5}{9}$;

ç) $3\frac{15}{24} + 3\frac{22}{33} + 1\frac{7}{24} + \frac{2}{3}$.

3. Tapawudy tapyň:

a) $17\frac{67}{72} - 8\frac{5}{54}$;

b) $201\frac{7}{13} - 198\frac{5}{7}$.

4. $19\frac{5}{24}$ we $17\frac{5}{6}$ sanlaryň jemini $12\frac{7}{12}$ san kiçeldiň. Näçe usulda ýerine ýetirip bolar?

5. Sanlaryň haýsysy uly: $\frac{67}{93}$ ýa-da $\frac{79}{97}$?

6. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

a) $6\frac{11}{12} - 3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4} + \left(3\frac{7}{9} - 1\frac{5}{18} + 3\frac{1}{2}\right)$;

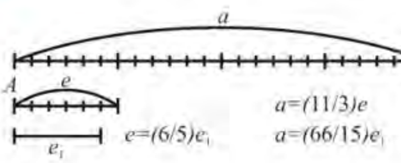
b) $\left(19 - 2\frac{13}{36}\right) - \left(10\frac{11}{12} - 2\frac{13}{18}\right)$.

7. Deňlemäni çözüň:

a) $e = \frac{6}{5}e_1$; ç) $21\frac{3}{13} - y = 8\frac{25}{39}$;

b) $x + 8\frac{3}{4} = 15\frac{5}{15}$; d) $14\frac{3}{10} + y = 25\frac{1}{10}$.

§ 77. Droblary köpeltmek we bölmek



Goý, a kesim, e we e_1 birlik kesimler berlen we $x = \frac{11}{3}e$; $e = \frac{6}{5}e_1$ bolsun. Ol kesimiň uzynlygy birlik kesimde näçä deň bolýandygyny tapalyň.

$3a \equiv 11e$ we $5e \equiv 6e_1$ bolany üçin birinji deňligi 5-e we ikinji deňligi 11-e köpeltsek, $5 \cdot 3a \equiv 11 \cdot 5e$ we $11 \cdot 5e = 6 \cdot 11e1$ alarys. Bu ýerden $15a \equiv 66e_1$ ýa-da $a \equiv \frac{66}{15}e_1$ bolar. Diýmek, a kesimiň e_1 birlik kesimde uzynlygy $\frac{66}{15}$ san bilen aňladylýar. $\frac{11}{3}$ we $\frac{6}{5}$ san sanlaryň köpeltmek hasylydyr.

Kesgitleme 1.

Eger položitel rasional sanlar $\frac{m}{n}$ we $\frac{p}{q}$ droblar bilen aňladylan bolsa, onda olaryň köpeltmek hasyly $\frac{mp}{nq}$ drob bilen aňladylan sandyr.

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \equiv \frac{mp}{nq}.$$

Položitel rasional sanlary köpeltmek orun çalyşma, utgaşdyrma we goşmaga görä paýlaşdyrma kanunlaryna tabyndyr.

Kesgitleme 2.

a we b položitel rasional sanlaryň paýy diýip, $a=bc$ bolan c položitel rasional sana aýdylýar.

Eger $a = \frac{m}{n}$ we $b = \frac{p}{q}$ bolsa kesgitlemämizde aýdylýan c sanyň nähili boljakdygyny tapalyň. c sanyň, ýagny paýyň $c = \frac{mq}{np}$ bolýandygyny görkezeliň. Birinji kesgitlemämize görä

$$a = b \cdot c = \frac{p}{q} \cdot \frac{mq}{np} = \frac{p(mq)}{q(np)} = \frac{(pq)m}{(qp)n} = \frac{m}{n}.$$

Onda iki položitel rasional sanyň paýy şeýle formula arkaly tapylýandyr:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}.$$

Bu formula islendik položitel rasional sanlar üçin paýyň bardygyny, ýagny $Q+$ köplükde mydama bölmegi ýerine ýetirip bolýandygyny görkezýär.

$\frac{m}{n}$ drobuň ýazgysyndaky drob çyzygynyň bölmegi aňladýandygyny belläp geçmegimiz gerek.

Goý, m we n natural sanlar bolsun, onda: $m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$

Tersine: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m : n$ hem dogrudyr, diýmek $\frac{m}{n} = m : n$

Bu deňlik islendik položitel rasional sany iki sany natural sanyň paýy hökmünde garap bolýandygyny görkezýär.

Gönükmeler

1. Položitel rasional sanlar üçin köpeltmek amalynyň kanunlaryny ýazyň we subut ediň.

2. Amallary köpeltmek amalynyň kanunlaryndan peýdalanyp ýerine ýetiriň:

a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8}$;

b) $\frac{6}{13} \cdot 5\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{17}$;

ç) $\frac{7}{12} \cdot \frac{11}{18} \cdot 1\frac{7}{11} \cdot \frac{6}{7}$;

d) $\left(5\frac{2}{3} + 4\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{10}{23}$;

e) $\left(6\frac{3}{7} + 3\frac{5}{12}\right) \cdot \frac{7}{45}$.

3. Amallary ýerine ýetiriň:

a) $6\frac{12}{57} : 7\frac{3}{19}$; b) $\left(4\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2}\right) : 6\frac{3}{4}$; ç) $4\frac{5}{8} : \left(11\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{4}\right)$

4. Deňlemäni komponentler we netijeleriň arasyndaky baglanyşyk esasynda çözmeli:

a) $5 \cdot \left(\frac{3}{4}x - 20\right) = 8$; ç) $\left(10\frac{2}{5} + x\right) : 1\frac{1}{7} = 9\frac{1}{3}$;

b) $\left(4\frac{1}{2} - 2x\right) \cdot 3\frac{2}{3} = \frac{11}{15}$; d) $\frac{4}{9} : \left(3\frac{2}{5} - 5x\right) = \frac{1}{6}$.

5. Meseläni arifmetiki usulda çözüň. Oglanjyk 360 sahypaly kitaby dört günde okady. Birinji günde ol kitabyň $\frac{5}{18}$ bölegini okady, ikinji we üçünji günleriň her birinde birinji gündäkiden soň galan $\frac{4}{13}$ sahypalaryň bölegini okady. Ol dördünji günde näçe sahypany okapdyr?

§ 78. Položitel rasional sanlar köplügi tertipleşen köplükdir

Eger rasional sanlar deň droblaryň üsti bilen aňladylan bolsalar, onda olar deňdirler. Mysal üçin, a rasional $\frac{3}{5}$ san $\left(a = \frac{3}{5}\right)$, b rasional san bolsa $\frac{6}{10}\left(b = \frac{6}{10}\right)$ aňladylan bolsalar onda $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ bolany üçin $a=b$ bolar.

Bu ýerden, eger a we b rasional sanlar berlen bolsalar, onda olaryň haýsysynyň uludygyny (kiçidigini) nädip bilmeli diýen sorag ýüze çykýar.

Kesgitleme. Goý, a we b položitel rasional sanlar bolsun. Eger $a+c=b$ deňligi kanagatlandyrýan käbir c položitel rasional san bar bolsa, onda a kiçidir $b(a<b)$ diýilýär. Kesgitlemedäki deňsizligi $a>b$ görnüşinde ýazsak, b sanyň a sandan uly bolmagy üçin $b=a+c$ deňligi kanagatlandyrýan käbir c položitel rasional san bardyr.

Bu kesgitlemäniň esasynda položitel rasional sanlar köplüginde iki sanyň tapawudynyň bar bolmagynyň zerur we ýeterlik şertini formulirlemek bolar.

Teorema. a we b položitel rasional sanlaryň tapawudynyň bar bolmagy üçin $b<a$ şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremanyň subudy edil natural sanlar köplügindäki ýaly geçirilýär we biz ony okyjynyň özüne tabşyrýarys.

"Kiçidir" gatnaşygynyň kesgitlemesinden gelip çykýan netijeler:

1. Eger $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$ bolsa, onda haçan-da $m<p$ bolsa $a<b$ bolar.

Mysal üçin: $\frac{7}{15}<\frac{11}{15}$, sebäbi $7<11$.

2. Eger $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{g}$ bolsa, onda $a<b$ bolar, haçan-da $mg<np$ bolsa

Hakykatdan hem ol droblary umumy maýdalawja getirip, alarys:

$A=\frac{m}{n}=\frac{mn}{ng}$; $b=\frac{p}{g}=\frac{pn}{gn}$; ýagny $mg<pn \leftrightarrow a<b$ bolar.

Mysal üçin, $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{8}{9}$ bolsa, onda $5*9=45$; $6*8=48$ we $45<48$

bolany üçin $\frac{5}{6}<\frac{8}{9}$, ýagny $a<b$ bolar.

Položitel rasional sanlar köplüginde berlen "kiçidir" gatnaşygynyň tranzitiwlik we antisimmetriklik häsiýetleriniň bardygyny görkezmek bolar, ol bolsa položitel rasional sanlar köplüginiň tertipleşen köplükdigini aňladar.

Natural sanlar köplügi bilen položitel rasional sanlar köplüginiň käbir umumylyklarynyň bardygyna garamazdan olar dürli häsiýetlere eýedir. N natural sanlar köplüginiň kiçi elementi bardyr we ol 1-e deňdir. N natural sanlar köplügi diskretdir, ýagny iki goňşy natural sanlaryň arasynda başga [illegible] Q_+ položitel rasional sanlar köplüginde:

1) iň kiçi rasional san ýokdur;

2) iki dürli položitel rasional sanyň arasynda tükeniksiz köp položitel rasional san bardyr.

Subudy. Goý, Q_+ köplügiň $\frac{m}{n}$ iň kiçi sany bolsun diýeliň. $\frac{m}{n+1}$ sanyň $\frac{m}{n}$ sandan kiçi boljakdygyny görkezeliň. $m \cdot n < m(n+1)$ bolanlygy üçin $\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n}$ bolar. Diýmek, Q_+ köplügiň iň kiçi elementi ýok eken.

Q_+ köplügiň ikinji häsiýetini mysalyň üsti bilen düşündireliň. $\frac{1}{4}$ we $\frac{3}{4}$ sanlary alalyň. Bu sanlaryň arasynda $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ sanyň boljakdygy aýdyňdyr, sebäbi $\frac{1}{4} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ deňlik dogrudyr. Indi $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ we $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ deňlikleriň dogrudygy üçin $\frac{2}{8}$ we $\frac{4}{8}$ sanlaryň arasynda hem $\frac{3}{8}$ san bardyr. Şeýlelikde, $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$ bolar. Bu prosesi tükeniksiz dowam etdirmek bolar. Q_+ položitel rasional sanlaryň bu häsiýetine onuň dykyzlyk häsiýeti diýilýär.

Gönükmeler

1. Sanlary deňeşdiriň:

a) $\frac{6}{7}$ we $\frac{7}{8}$; b) $\frac{19}{34}$ we $\frac{28}{51}$; ç) $\frac{41}{88}$ we $\frac{4141}{8888}$;

d) $\frac{11}{12}$ we $\frac{12}{13}$; e) $\frac{39}{8513}$ we $\frac{26}{5675}$; ä) $\frac{5}{1000}$ we $\frac{1}{200}$.

2. Amallary ýerine ýetirmezden aňlatmalary deňeşdiriň:

a) $315 \cdot \frac{5}{7}$ we $317 \cdot \frac{3}{4}$; b) $\frac{17}{3} \cdot 12\frac{4}{7}$ we $\frac{4}{15} \cdot 12\frac{4}{7}$;

ç) $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4}\right)$ we $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}\right)$;

d) $82\frac{19}{17}\left(13\frac{51}{52} + 17\frac{1}{6}\right)$ we $\left(13\frac{51}{52} + 17\frac{1}{7}\right) \cdot 82\frac{19}{17}$.

3. $\frac{3}{15}$ we $\frac{6}{13}$ sanlaryň aralygynda ýerleşýän 3 sany san ýazmaly.

4. Eger a, b, c, d natural sanlar $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deňsizligi kanagatlandyrýan bolsa, onda olaryň $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ deňsizligi hem kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

§ 79. Položitel rasional sanlaryň onluk drob görnüşinde ýazylyşy

Drob düşünjesiniň ýüze çykmagynyň esasy sebäpleriniň biri ululyklary mümkin boldugyça takyk ölçemek meselesidir. Mysal üçin, uzynlyk ölçeginiň esasy birligi metrdir. Emma biz ähli ölçegleri diňe metri ulanmak arkaly alyp baryp bilmeýäris. Şonuň üçin santimetr (*sm*), desimetr (*dm*), kilometr (*km*) we ş.m. ululyk ölçegleri girizilendir.

Biz gündelik durmuşymyzda geçirýän ähli hasaplamalarymyzy onluk hasap ulgamynda geçirýäris. Gerek bolan täze ölçeg birliklerini bolsa esasy ölçeg birligini 10, 100, 1000 we ş.m. esse kiçeltmek ýa-da ulaltmak esasynda alarys. Hakykatdan hem,

. m=10 dm=100 sm=1000 mm

1 kg = 1000 gr we ş.m.

Kesgitleme. $\frac{m}{n}$ görnüşdäki droba ady drob diýilýär.

Kesgitleme. Maýdalawjysy 10-yň derejeleri bolan droblara onluk droblar diýilýär.

Mysal üçin, $\frac{7}{10}, \frac{64}{10^2}; \frac{25307}{10^3}$ we ş.m. Droblar onluk droblardyr. Onluk droblaryň aýratyn belgilenişi bardyr. Mysal üçin, $\frac{7}{10}=0,7;\ \frac{64}{10^2}=0,64;\ \frac{25307}{10^3}=25,307$ we ş.m. Soňky getirilen mysallaryň üsti bilen onluk drobuň ýazgysynyň manysyny aýdyňlaşdyralyň:

$$\frac{25307}{10^3}=\frac{2\cdot10^4+5\cdot10^3+3\cdot10^2+0\cdot10^0+7}{10^3}=2\cdot10+5+3\cdot\frac{1}{10}+\frac{7}{10^3}.$$

$2\cdot10+5=25$ – berlen sanyň bitin bölegi, $\frac{3}{10}+\frac{7}{10^3}$ bolsa berlen sanyň drob bölegi bolar. Sanyň drob bölegini maýdalawjysyz ýazmaklyk kabul edilendir, ýagny $\frac{25307}{10^3}=25,307$.

Onluk droblaryň üstünde amallary geçirmek we olary deňeşdirmek natural sanlar üstünde amallary geçirmeklige we deňeşdirmeklige syrykdyrylýar. Mysal üçin, 4,7386<4,7391; sebäbi 8<9 (müňden bir bölegindäki sanlar).

Onluk droblar üstünde amallara degişli mysallara seredeliň:

1) 2,13+0,485=2,615;

$$\begin{array}{r} +\ 2,13 \\ 0,485 \\ \hline 2,615 \end{array}$$

2) 2,13-0,485=1,645;

$$\begin{array}{r} -\ 2{,}130 \\ \underline{0{,}485} \\ 1{,}645 \end{array}$$

3) $3{,}4 \cdot 0{,}72 = 2{,}448$.

$$\begin{array}{r} 3{,}4 \\ \underline{0{,}72} \\ 68 \\ +\ \underline{238\ } \\ 2{,}448 \end{array}$$

Köpeltmek amaly ýerine ýetirilenden soňra köpeldijilerde oturdan soň näçe sifr bardygyny kesgitleýäris we köpeltmek hasylynda hem oturdan soňra şolaryň jemi deň bolan sifrleriň bolmagyny üpjün edýäris.

4) 2,448:0,72=3,4.

$$\begin{array}{r|l} -\ 2448 & \underline{0720} \\ \underline{2160} & \\ 288 & \\ \underline{288} & \\ 0 & \end{array}$$

Bölmek amalyny ýerine ýetirmek üçin bölünijiniň hem-de bölüjiniň oturdan soňky sifrleriniň sanyny deňlemeli we soňra bölmegi ýerine ýetirmeli.

Onluk droblary deňeşdirmeklik we olaryň üstünde amallary ýerine ýetirmekligiň ýönekeýligi islendik $\frac{m}{n}$ – ady droby onluk drob görnüşinde aňladyp bolmazmyka diýen soragy orta atýar.

Teorema. Gysgalmaýan $\frac{m}{n}, (m, n \in N)$ görnüşde berlen ady drobuň onluk droba deň bolmagy üçin, ol drobuň maýdalawjysynyň ýönekey köpeldijilere dagytmasynyň diňe 2 we 5 köpeldijileri özünde saklamagy zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremany subutsyz kabul edeliň we ony mysallar almak arkaly görkezeliň.

1) $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}=0{,}5;$ 2) $\frac{4}{25}=\frac{4\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{16}{100}=0{,}16;$

3) $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}25;$ 4) $\frac{13}{20}=\frac{13\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{65}{100}=0{,}65;$

5) $\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{625}{1000}=0{,}625$ we ş.m.

Emma $\frac{1}{3};\frac{4}{7};\frac{8}{15};\frac{5}{18}$ – droblary onluk drob görnüşinde ýazyp bolmaýar. Onuň sebäbi ol droblaryň maýdalawjylary 2 we 5-den tapawutly ýönekeý san köpeldijileri özünde saklaýar.

Gönükmeler

1. $\frac{11}{28};\frac{192}{375};\frac{15}{24};\frac{21}{40}$ droblaryň haýsylaryny onluk drob görnüşinde ýazmak bolar?

2. Berlen sanlaryň içinde deňleri barmy?

$0{,}40;\ \frac{500}{100};\ \frac{6}{3};\ 0{,}4;\ 5;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ 0{,}6;\ \frac{12}{20};\ \frac{4}{6};\ \frac{3}{10}.$

3. Amatly usulda hasaplamaly:

a) $8{,}3+3{,}85+9{,}7+5{,}15+2{,}25+0{,}125;$

b) $8{,}7\cdot 7+7\cdot 7{,}3;$

ç) $\frac{6{,}75^2+0{,}125\cdot 67{,}5}{5{,}9^2-(1{,}03+1{,}89726:0{,}618)^2};$

d) $\frac{3{,}05^2-2{,}55^2}{0{,}35\cdot 388-28{,}8\cdot(20{,}56-14{,}501:0{,}85)};$

e) $\dfrac{(81{,}624 : 4{,}8 - 4{,}505)^2 + 125 \cdot 0{,}75}{\left((0{,}44^2 : 0{,}88 + 3{,}53)^2 - 2{,}75^2\right) : 0{,}52}$.

4. Aňlatmalaryň bahasyny tapyň:

a) $(60{,}3 - 53{,}235 : 3{,}9) \cdot 1{,}4 + 10{,}2 \cdot 12$;

b) $15{,}85 - 3{,}4 \cdot (50 - (1{,}530 + 0{,}4)) + 3{,}57 : 1{,}7$;

5. Komponentler netije arasyndaky baglanyşykdan peýdalanyp deňlemeleri çözüň:

a) $(x \cdot 100 - 0{,}7357) : 0{,}01 - 15{,}88 = 0{,}55$;

b) $14 : ((0{,}4x + 0{,}16) : x) + 5 = 12$.

6. Amallary ýerine ýetiriň:

a) $17\frac{1}{2} - 8{,}25 \cdot \frac{10}{11}\left(11\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9} + 3{,}5\right)$;

b) $((1{,}72 : 0{,}8 + 0{,}7) \cdot 0{,}8) : \left(\left(7 - 3{,}5 \cdot 1\frac{5}{8}\right) : 3\frac{1}{2}\right) - 0{,}152$;

ç) $\left(6\frac{9}{35} - 5\frac{5}{25}\right) \cdot 7 - 12{,}505 : 4{,}1 + 1{,}25 \cdot 0{,}32(36{,}096 : 1{,}2 - 29{,}88) - 3{,}58$.

§ 80. Prosent we onuň bilen baglanyşykly käbir meseleler

Halk hojalygynda, ylymda we tehnikada sanlaryň prosent formasyndaky (görnüşindäki) ýazgysy giňden ulanylýar. Ýa-da bolmasa harytlaryň bahasy 10 % arzanlapdyr, aýlyk haklary 20 % köpeldilýär, dänäniň hasyllylygy 16 % ýokarlandy ýaly sözleri ýygy-ýygydan eşidýäris.

Gyzyklanylýan sanyň 100-den bir bölegine ol sanyň prosenti diýilýär. Bilşimiz ýaly, onluk droblary deňeşdirmek we olaryň üstünde amallary ýerine ýetirmek öz amatlylygy bilen ady droblardan tapawutlanýandyr. Onluk droblaryň arasynda hem 0,01 drob aýratyn tapawutlanýar. Ol droby *prosent* diýip atlandyrýarlar we ony 1 % görnüşde belgilemek kabul edilendir, ýagny 0,01 = 1%.

Käbir ýagdaýlarda sanlaryň prosent görnüşindäki ýazgysyny has-da takyklamak maksady bilen prosentiň bölegine hem seredilýär. Mysal üçin, 15,4%=0,154; 02 % = 0,002 we ş.m.

Sanlaryň prosent görnüşindäki ýazgysy bilen baglanyşykly üç dürli ýönekeý mesele bardyr we olar şu aşakdaky meselelerdir:

1. Berlen sanyň käbir prosentini tapmak;
2. Berlen prosentine görä sanyň özüni tapmak;
3. Iki berlen sanyň prosent gatnaşygyny tapmak.

Ol meseleleriň her bir görnüşine degişli mysallara seredeliň.

1. Kärendeçi 2010-njy ýylda özüne degişli ýerinden her gektaryndan 28 sentner bugdaý hasylyny ýygnady. Ol üstümizdäki ýylda dänäniň hasyllylygynyň öten ýyldakydan 23 % töweregi köp boljakdygyny umyt edýänligini aýdýar. Eger kärendeçiniň arzuwy hasyl bolsa, ol her gektardan öňküsinden näçe sentner köp bugdaý alar?

[illegible] Bu mesele 28 sanyň 23 % tapmak meselesidir. Ol $A\frac{N}{100}\cdot p$ formulanyň üsti bilen tapylýar. Bu ýerde N – berlen san, p – berlen prosent, A bolsa gözlenilýän sandyr.

Diýmek,

$$A=\frac{28}{100}\cdot 23=\frac{644}{100}=6,44 \text{ (sentner)}.$$

Her gektardan 6,44 sentner köp bugdaý alalyň, ýagny 28+6,44=34,44 sentner her gektardan almaly.

2. Topardaky okuwçylaryň 15-si ýa-da 75%-i gyzlardygy belli bolsa, toparda jemi näçe okuwçy bolar?

Çözülişi. Bu meseläni çözmeklik $N=\frac{100\cdot A}{p}$ formulanyň üsti bilen amala aşyrylýar:

$$N=\frac{{}^{4}100\cdot 15}{75_{3}}=\frac{4\cdot 15^{5}}{3_{1}}=\frac{4\cdot 5}{1}=20 \text{ (okuwçy)}.$$

3. Üç ýyl mundan öň kärhananyň ortaça aýlyk haky 400 manada deňdi. Şondan bäri ortaça aýlyk haky 240 manat artdy. Üç ýylyň içinde ortaça aýlyk haky näçe prosent artypdyr?

Çözülişi. Bu meselede $A = 240$, $N = 400$ p – näbelli ululykdyr. Onda

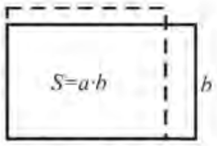
$$p = \frac{100 \cdot A}{N} = \frac{100 \cdot 240}{400} = \frac{240}{4} = 60\ (\%).$$

Jogaby: soňky üç ýylyň içinde ortaça aýlyk haky 60% artypdyr.

Indi prosent hasaplamalary bilen baglanyşykly birnäçe gyzykly meselelere seredeliň.

4. Gönüburçlugyň bir tarapyny 10% ulaltdylar, beýleki tarapyny bolsa 10% kiçeltdiler. Gönüburçlugyň meýdany üýtgedimi?

Çözülişi. Göräýmäge onuň meýdany üýtgewsiz galaýjak ýaly. Ýöne jogap bermäge howlukmalyň. Gerekli çyzgylary geçireliň we meseläni gutarnykly çözeliň.



Çyzgydan, soňky alan gönüburçlugymyzyň meýdanynyň $S_1 = (a + 0,1 \cdot a) \cdot (b - 0,1d)$ formula bilen hasaplanjakdygy görünýär.

$$S_1 = (a + 0,1 \cdot a) \cdot (b - 0,1d) = a \cdot (1 + 0,1) \cdot b \cdot (1 - 0,1) =$$

$$= a \cdot b \cdot 1,1 \cdot 0,9 = 0,99 \cdot a \cdot b = 0,99 \cdot S.$$

Ýagny $S_1 = 0,99\,S = S - 0,01S$.

Diýmek, gönüburçlugyň meýdany 1% kiçelipdir. Näme üçin?

5. Käbir harydyň bahasyny ilki 20% arzanlatdylar, soňra bolsa 20% gymmatlatdyrlar. Ahyrky netijede şol harydyň bahasy üýtgedimi?

Çözülişi.

Goý, harydyň bahasy a – manat bolsun. 20% arzanladylandan soňra onuň bahasy $a - 0,2a = 0,8a$ (manat) bolar. Täze nyrhy 20% artdyranlaryndan soňra ol $0,8 \cdot a + 0,8a \cdot 0,2$ bolar. Ýagny, $0,8 \cdot a + 0,8a \cdot 0,2 = 0,8a + 0,16a = 0,96a$. Bu bolsa şol operasiýalardan soňra harydyň bahasynyň 4% arzanlandygyny görkezýär.

Gönükmeler

1. a) 25 sanyň 18% - ni tapmaly;
b) 4,8 iň 4% - ni tapmaly;
ç) 4 iň 4,8%-ni tapmaly.

2. a) 16% - i 4,5-e; b) 2,5 % - i 5-e;
ç) 5 % - i 2,5-a deň bolan sanlary tapyň.

3. Bir aýda 24 okuw güni we her günde 4-okuw sagady bar. Okuwçylar geçen aýda 44 sagat sapak goýberdiler. Eger synpda 22 okuwçy bar bolsa, geçen aýdaky gatnaşyk näçe prosente deň?

4. Pagtanyň 70%-i çigit 30%-i bolsa pamykdyr. Pagta çigidiniň 16% ýag bolýar. Eger kärendeçi pagta harmanyna 27 tonna hasyl tabşyran bolsa, onuň tabşyran pagtasyndan näçe ýag öndüriler?

5. Daýhan şeker zawodyna 425 tonna gant şugundyryny tabşyrdy. Eger gant şugundyrynyň 12% şeker bolsa, onuň tabşyran şugundyryndan näçe mukdarda gant öndüriler?

6. Ambardaky önümleri birinji gezek saýlanlarda ýitgi 5%, ikinji gezek saýlanlarynda bolsa 2% boldy. Şondan soňra ambarda 186,2 tonna önüm galdy. Ambarda ilkibaşda näçe önüm bardyr?

§ 81. Tükeniksiz periodik onluk droblar

Onluk droblaryň üstünde arifmetiki amallaryň ýerine ýetirilişiniň ady droblardan aňsatdygyna biz eýýäm göz ýetirdik. Şeýle bolsa, ady droblary onluk droblar bilen çalşyryp bolmazmyka?

$\frac{4}{7}$ droby alalyň. Bu drobuň maýdalawjysynda 7-lik bar, şonuň üçin ol droby tükenikli onluk drob görnüşinde aňladyp bolmaýar. Diýmek, 4-i 7-ä bölmek prosesi tükeniksiz dowam eder we şonuň üçin $\frac{4}{7}$ drob tükeniksiz onluk droba deň diýip hasap edilýär. Bölmegi ýerine ýetirip,

$\frac{4}{7} = 0,571428571428571428...$

sany alarys. Bu ýazga üns berip seretsek, sifrleriň käbir toplumynyň yzygider gaýtalanýandygyna göz ýetirýäris.

Kesgitleme. Onluk drobuň ýazgysyndaky sifrleriň toplumynyň yzygider gaýtalanýan bölegine onuň **periody** diýilýär, drobuň özüne bolsa **periodik onluk drob** diýilýär.

Drobuň periodyna bir gezek ýaýyň içine alyp ýazmaklyk kabul edilendir:

$$\frac{4}{7}=0,(571428).$$

Aşakdaky mysallara seredeliň:

$$\frac{2}{3}=0,666...=0,(6)$$

$$\frac{5}{6}=0,8333...=0,8(3).$$

Bu droblaryň birinjisine **arassa periodik drob**, ikinjisine bolsa **garyşyk periodik drob** diýilýär.

Teorema. Gysgalmaýan $\frac{m}{n}$ drobuň maýdalawjysynyň ýönekeý köpeldijilere dagytmasy 2 we 5-den tapawutly ýönekeý köpeldijini özünde saklaýan bolsa, onda ol droby tükeniksiz periodik drob görnüşinde aňladyp bolar.

Subudy. Maýdalawjynyň ýönekeý köpeldijilere dagytmasyna 2 we [illegible] m-i n-e bölmek prosesi tükeniksizdir. Ondan başga hem m-i n-e bölenimizde alynjak galyndylar 1, 2, 3,..., n–1 bolup biler. Diýmek, birnäçe gezek bölmegi ýerine ýetirenimizden soňra ýene-de öň gabat gelen galyndy emele geler we paýda öňki sifrler gaýtalanar. Bu bolsa, $\frac{m}{n}$ – drobuň periodik onluk drob görnüşinde aňladyljakdygynyň alamatydyr.

Subut edilen teorema şeýle netije çykarmaga mümkinçilik berýär: **islendik položitel rasional sany ýa-ha tükenikli onluk drob, ýa-da tükeniksiz periodik onluk drob görnüşinde aňlatmak bolar.**

Ady droby onluk droba geçirmek üçin bölmek prosesini yzygider ýerine ýetirmeli. Geliň, indi periodik onluk droblary ady droblara geçirmeklige degişli mysallara seredeliň.

1-nji mysal. $a=0,(63)$ (arassa periodik drob), ýagny $a=0,636363...$.

Deňligiň iki tarapyny hem 100-e köpeldip alarys:

$100a = 63,636363...$ ýa-da $100a = 63 + 0,636363... = 63 + a$

ýa-da $99a = 63 \Rightarrow a = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ alarys.

Diýmek, $0,(63) = \frac{7}{11}$.

2-nji mysal. $a = 0,3(51)$ (garyşyk periodik drob), ýagny $a = 0,3515151...$.

Deňligiň iki tarapyny hem 10-a köpeldip alarys: $10a = 3,515151... = 3 + 0,515151...$.

Onda, ýokardaky mysalyň esasynda $0,515151... = \frac{51}{99}$ bolýandygyny görýäris. Şeýlelikde,

$10a = 3 + \frac{51}{99} = 3 + \frac{17}{33}$ ýa-da $a = \frac{99+17}{33 \cdot 10} = \frac{58}{33 \cdot 10} = \frac{58}{165}$ ýagny, $a = \frac{58}{165}$.

Gönükmeler

1. Ýokarda getirilen mysallaryň jogabynyň dogrulygyny bölmegi ýerine ýetirmek arkaly barlamaly.

2. Näme üçin $\frac{17}{19}$ we $\frac{8}{33}$ droblary tükenikli onluk drob görnüşinde aňladyp bolmaýar?

3. $\frac{10}{11}, \frac{17}{19}$ we $\frac{8}{33}$ sanlary tükeniksiz periodik drob görnüşinde aňladyň.

4. Ady drob görnüşinde ýazyň:

a) 0,(43);

b) 0,(301);

ç) 5,(72);

d) 6,31(8);

e) 15,43(29).

5. Deňligi subut etmeli:

0,27(9)=0,28(0).

6. Aşakdaky deňlikleriň haýsylary dogry:

a) $\frac{66}{33} = 2,(6)$; b) $\frac{56}{11} = 5,(09)$; ç) $20,8 + \frac{7}{11} = 20,8(63)$.

7. Sanlary artýan tertipde ýerleşdiriň:

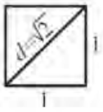
a) 0,125; 2,(7); 0,1(25); 2,78;

b) 1,(5); 0,(12); 2,778; 2,(778).

§ 82. Položitel irrasional san düşünjesi

Q_+- položitel rasional san köplüginiň islendik iki dürli sanyň arasynda tükeniksiz köp položitel rasional san bardygyny biz geçen temalarymyzdan bilýäris. Q_+- köplüginiň bu häsiýetine **dykyzlyk häsiýeti** diýilýär. Şu ýerde şeýle sorag ýüze çykýar, ýagny islendik kesimiň uzynlygyny rasional sanyň üsti bilen aňladyp bolarmy? Bu soragyň jogaby otrisateldir: rasional sanyň üsti bilen aňladyp bolmaýan kesimler bardyr.

Teorema. Taraplary 1-e deň bolan kwadratyň diagonalyny položitel rasional sanyň üsti bilen aňladyp bolmaýar.



Subudy. Pifagoryň teoremasy esasynda $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ýa-da $d = \sqrt{2}$ alarys. Teoremanyň tassyklamasyny inkär edeliň we goý $\sqrt{2}$ -ä deň bolan käbir gysgalmaýan $\frac{m}{n}$ görnüşli rasional san bar diýeliň. Onda $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ ýa-da $m^2 = 2n^2$ alarys.

Bu ýerden m sanyň jübüt bolmalydygy görünýär (jübüt sanyň kwadraty jübüt san bolýar, täk sanyň kwafraty bolsa täk san bolýar). Goý, $m = 2k$ bolsun, onda $(2k)^2 = 2n^2$ ýa-da $n^2 = 2k^2$ alarys. Bu ýerden n sanyň jübütligi gelip çykýar. Eger m jübüt bolsa, n hem jübüt bolsa, onda biziň gysgalman $\frac{m}{n}$ drobumyz gysgalar. Biz gapma-garşylyga geldik, bu bolsa teoremanyň dogrulygyny subut edýär.

Şeýlelik bilen, biz uzynlygyny rasional sanyň üsti bilen aňladyp bolmaýan kesimiň bardygyna göz ýetirdik. Şolar ýaly kesimleriň uzynlygyny aňladýan sanlara **irrasional sanlar** diýilýär.

Bilişimiz ýaly, islendik rasional sany tükenikli onluk drob ýa-da tükeniksiz periodik onluk drob görnüşinde aňladyp bolýar. $\sqrt{2}$ sanyň rasional san däldigini göz öňünde tutsak, onda biz ony diňe **tükeniksiz periodik däl drob** görnüşinde aňladyp bileris.

$\sqrt{2} = 1,4142...$

Biz irrasional san düşünjesine kesimiň uzynlygyny ölçemek prosesiniň esasynda geldik. Ýöne irrasional sanlary käbir 2-den başga rasional sanlardan kök almak arkaly hem alyp bolar. Meselem: $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{12}$ sanlar irrasional sanlardyr. Bulardan başga hem logarifmleriň, trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň köpüsi irrasional sanlardyr. Matematikada köp ulanylýan $\pi = 3,1415...$ we $e = 2.7828...$ sanlar hem irrasional sanlardyr.

Položitel irrasional sanlar köplügi I_+ - simwol bilen belgilenýär.

Gönükmeler

1. Kwadraty 3-den bolan rasional sanyň ýokdugyny subut etmeli.

2. Aňlatmalaryň bahalaryny deňeşdiriň:

a) $6\sqrt{2}$ we $0,5\sqrt{162}$;

b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ we $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

3. Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

a) $10\sqrt{3}-\sqrt{48}-\sqrt{75}$; ç) $\left(3-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{32}$;

b) $\left(5\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$; d) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\sqrt{27}$.

4. "e" – uzynlyk birligiň ýediden bir bölegi AB kesimde laýyk 13 gezek ýerleşdi. "e" – uzynlyk birliginde AB kesimiň uzynlygyny aňladyň.

5. q – rasional sanyň α – irrasional san bilen jemiň hemişe irrasional san boljakdygyny subut ediň.

§ 83. Položitel hakyky sanlar üstünde amallar

Kesgitleme. Položitel rasional sanlar köplügi bilen položitel irrasional sanlar köplüginiň birleşmesine položitel hakyky sanlar köplügi diýilýär we ol R bilen belgilenýär, ýagny

$$R_+ = Q_+ \cup I_+$$

Islendik položitel hakyky sany tükeniksiz onluk drob görnüşinde aňladyp bolýar. Položitel rasional sanlaryň üstündäki amallar edil natural sanlaryň üstündäki amallar ýaly ýerine ýetirilýär. Tükeniksiz onluk droblar bilen aňladylýan sanlaryň üstündäki amallary nähili ýerine ýetirmek bolar? Olaryň üstündäki amallary rasional sanlaryň üstündäki amallara getirip bolmazmyka? Bu soraglara položitel jogap bermek üçin hakyky sanyň ýakynlaşan bahasy düşünjesini girizýäris.

Goý, bize $a = n,n_1n_2...n_k$ – käbir hakyky san berlen bolsun, onda:

Kesgitleme. $a_k = n,n_1n_2...n_k$ - sana, a - sanyň $\frac{1}{10^k}$ - takyklykda **kemi** bilen alnan ýakynlaşan bahasy diýilýär.

Kesgitleme. $a_k = n,n_1n_2...n_k + \frac{1}{10^k}$ - sana a-sanyň $\frac{1}{10^k}$ - takyklykda **artykmajy** bilen alnan ýakynlaşan bahasy diýilýär.

Islendik hakyky san üçin $a_k \le a < a_k^1$ deňsizlik dogrudyr.

Mysal üçin, $\sqrt{3} = 1,73205...$ sanyň $\frac{1}{10^3}$ takyklykdaky ýakynlaşan bahalary kemi bilen 1,732, artykmajy bilen bolsa 1,733 sanlardyr. Onda biz $1,732 \le \sqrt{3} < 1,733$ deňsizligi ýazyp bileris.

Kesgitleme. a we b položitel hakyky sanlaryň jemi diýip aşakdaky deňsizligi kanagatlandyrýan $a+b$ sana aýdylýar, ýagny

$$a_k + b_k \le a + b < a_k^1 + b_k^1$$

Mysal üçin, $\sqrt{2}$ *we* $\sqrt{3}$ sanlaryň jemini 0,001 takyklykda hasaplalyň:

$1,4142 \le \sqrt{2} < 1,4143$ (0,0001 takyklykda)

$1,7320 \le \sqrt{3} < 1,7321$ (0,0001 takyklykda)

Bu ýerden

$3,1462 \le \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,1464$ deňsizligi alarys.

Diýmek, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jemiň 0,001 takyklykdaky bahasy 3,146-deň bolar.

Kesgitleme. a we b položytel hakyky sanlaryň köpeltmek hasyly diýip aşakdaky deňsizligi kanagatlandyrýan sana aýdylýar, ýagny:

$$a_k \cdot b_k \le a \cdot b < a_k^1 \cdot b_k^1.$$

Mysal üçin, $\sqrt{2}$ we $\sqrt{3}$ sanlaryň 0,1 takyklykda köpeltmek hasylyny tapalyň:

$1,41 \le \sqrt{2} < 1,42$

$1,73 \le \sqrt{3} < 1,74$

Bu ýerden $2,4393 \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 2,4708$ deňsizligi alarys.

Diýmek, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ – sanyň ýakynlaşan bahasy 2,4-e deň bolar. Islendik položitel hakyky sanlar üçin aşakdaky deňlikler ýerine ýetýändir:

1) $a+b=b+a$ (orunçalşyrma kanuny);

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (utgaşdyrma kanuny);

3) $a \cdot b = b \cdot a$ (köpeltmegiň orunçalşyrma kanuny);

4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (köpeltmegiň utgaşdyrma kanuny);

5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (paýlaşdyrma kanuny).

Gönükmeler

1. 3,4 we 3,5 sanlaryň $\sqrt{12}$ sanyň 0,1 takyklykda kemi we artykmaçlygy bilen alnan bahalarydygyny görkezmeli.

2. Deňsizlikler dogrumy:

a) $3{,}6 \le 3\frac{5}{7} \le 3{,}7$; b) $7{,}26 \le 7\frac{3}{11} \le 7{,}27$.

3. $\sqrt{21}$ – sanyň tablisadan alnan 0,001 takyklykdaky bahasy 4,583. Bu baha kemi bilen alnanmy ýa-da artykmajy bilen?

4. Töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine bolan gatnaşygynyň $3\frac{10}{71}$ we $3\frac{1}{7}$ sanlar arasynda ýerleşendigini Arhimed kesgitläpdir. Bu droblaryň 0,01 we 0,001 takyklykdaky bahalaryny tapyň.

5. a=3,6272... we b=5,2814... bolsa, $a+b$ - jemi 0,001 takyklykda hasaplaň.

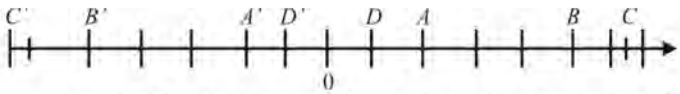
6. x=0,25... we y=0,73... bolsa $a \cdot b$ – sany 0,1 takyklykda hasaplamaly.

7. Hasaplamalary barlaň:

a) $20{,}8 + \frac{7}{11} = 21{,}4(36)$; b) $220 - \frac{7}{11} = 219{,}(36)$.

§ 84. Otrisatel sanlar we san oky

Göni çyzyk alalyň we onuň ugruny kesgitläliň. Ol gönüniň üstünde käbir “0” – nokady saýlap alalyň. Ähli položitel hakyky sanlary şol “0” nokatdan sag tarapda ýerleşdireliň.



Alnan A,B,C nokatlarymyza simmetrik A', B', C' nokatlary "0" nokatdan çep tarapda ýerleşdireliň. Çyzgydan görnüşi ýaly A nokatda 2 san, B nokatda 5 san, C nokatda 6,5, D nokatda $\sqrt{2}$ san degişli. Ol nokatlara simmetrik ýerleşdirilen A', B', C', D' nokatlara degişli sanlary (-2), (-5), (-6,5), (-) bilen belgileýäris. Bu sanlara položitel hakyky sanlara **garşylykly** sanlar diýilýär. "0" nokatdan çep tarapda ýerleşýän sanlara **otrisatel** hakyky sanlar diýilýär we ol $\boldsymbol{R}_-$ görnüşinde belgilenýär. "0" san položitel hem, otrisatel hem däldir.

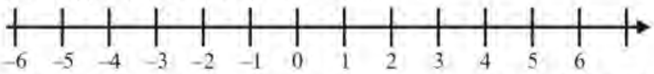
Kesgitleme. Položitel hakyky sanlar köplügi bilen otrisatel hakyky sanlar köplüginiň we nol sanyň birleşmesine, **hakyky sanlar köplügi** diýilýär we ony $\boldsymbol{R}$ harpy bilen belgileýärler.

Diýmek, $R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$.

$\boldsymbol{R}$ – hakyky sanlar köplügi bilen göni çyzygyň nokatlarynyň arasynda ýokarda görkezilişi ýaly edip özara birbelgili degişlilik gurýarys, ýagny her bir hakyky sana belli bir nokady degişli edýäris we tersine her bir nokada belli bir hakyky sany degişli edýäris.

Kesgitleme. Hakyky sanalr köplügi bilen özara birbelgili degişlilik gurlan göni çyzyga **koordinata göni çyzygy** ýa-da **san oky** diýilýär.

Koordinata göni çyzygyny ýa-da san okuny almak üçin bir göni çyzygy alýarys hem-de onuň üstünde hasap başlangyjy bolan "0" nokady we saýlanyp alnan masştaba görä beýleki nokatlary belgileýäris. Nokatlar çepden-saga artýan tertipde ýerleşdirilýär.



Hasap başlangyjyndan x sana çenli aralyga ol **sanyň moduly** diýilýär we ol $|x|$ görnüşinde belgilenýär, ýagny

$$|x| = \begin{cases} x, \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa;} \\ -x, \text{eger } x < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

Mysal üçin, $|-5| = 5; |8,3| = 8,3; |0| = 0$.

Hakyky sanlary "uludyr" we "kiçidir" gatnaşyklaryň kömegi bilen şeýle deňeşdirýärler: a san b sandan kiçidir (a b), eger-de ol san okunda çepde ýerleşen bolsa a san b sandan uludyr (a b) eger-de ol san okunda b sandan sagda ýerleşen bolsa. Bu kesgitlemäniň esasynda şeýle netijä gelmek bolar: islendik položitel san noldan uludyr, islendik otrisatel san bolsa noldan kiçidir.

Hakyky sanlaryň üstünde amallar aşakdaky düzgünler esasynda ýerine ýetirilýär.

Kesgitleme. Iki hakyky sanyň **jemi** diýip aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan sana aýdylýar:

1) iki položitel sanyň jemi položitel sandyr;

2) iki otrisatel sanyň jemi otrisatel sandyr;

3) dürli alamatly sanlaryň jemi, alamaty boýunça şol sanlaryň ulusy bilen gabat gelýän sandyr we ol sany tapmak üçin uly modully sandan kiçi modully sany aýyrmaly.

Kesgitleme. Iki hakyky sanyň köpeltmek hasyly diýip aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan sana aýdylýar:

1) iki položitel sanyň köpeltmek hasyly položitel sandyr;

2) iki otrisatel sanlaryň köpeltmek hasyly položitel sandyr;

3) Dürli alamatly sanlaryň köpeltmek hasyly otrisatel sandyr.

Hakyky sanlary **aýyrmak we bölmek** amallary goşmak we köpeltmek amallaryna ters amal hökmünde kesgitlenilýär. Hakyky sanlar köplüginde aýyrmak amalyny mydama ýerine ýetirip bolýar. Hakyky sanlar köplüginde diňe **nola bölmek bolmaýar.**

Gönükmeler

1. San okunda -3; -1; 2; 2,5; 4 nokatlary guruň.

2. Pikiraýtmalaryň çyndygyny ýa-da ýalandygyny görkeziň.

a) 23-den uly her bir san položiteldir.

b) Islendik 12-den kiçi san položiteldir.

ç) 12-den kiçi položitel san bardyr.

d) Islendik položitel sandan kiçi bolan bitin položitel san bardyr.

e) Käbir otrisatel sandan kiçi bolan sanlaryň ählisi otrisatel sandyr.

a) Noldan uly bolmadyk sanlaryň ählisi otrisatel sandyr.

3. Koordinata göni çyzygynda x koordinataly nokatlary guruň ýa-da ýerleşýän ýerini görkeziň:

a) $x=2$;

b) $|x-1|=2$;

ç) $|x|\leq 5$;

d) $|x|>2$;

e) $|x-1|<3$?

4. Modulyň geometrik manysyndan peýdalanyp çözmeli:

a) $|x-3|=2$; b) $|x-2|<3$; ç) $|x-1|>3$.

§ 85. San aňlatmalary we üýtgeýän ululykly aňlatmalar

Kesgitleme. Sanlary, amallary we ýaýlary ulanyp geçirilen manysy bar bolan ýazga san aňlatmalary diýilýär.

5+7; 9–6.

Mysal üçin, we ş.m. san aňlatmalarydyr.

– bu ýazgynyň manysy ýokdur, diýmek, olar san aňlatmalary däldirler, ýagny:

– hakyky sanlar köplüginde manysy ýok;

– otrisatel sanlar üçin logarifm kesgitlenen däl;

5:(3-3)=5:0 – nola bölmek bolmaýar.

Kesgitleme. San aňlatmalarynyň ýazgysyndaky amallary yzygider ýerine ýetirmek netijesinde alnan sana **san aňlatmasynyň bahasy** diýilýär.

Mysal üçin, 1) 5+7=12; 2) lg100=2;

3) ; 4) .

Kesgitleme. Sanlary, harplary, ýaýlary we amallary ulanyp geçirilen manysy bar bolan ýazga **üýtgeýän ululykly aňlatmalar** diýilýär.

Mysal uçin,

1) $a+b+2$; 2) x^2+2x+1; 3) ; 4) ; 5) $\lg(x^2-3)$.

Bu aňlatmalardaky harplar üýtgeýän ululyklardyr. Başlangyç klaslarda üýtgeýän ululygy belgilemek üçin harpladan başga belgi hem ulanylýar.

Kesgitleme. Üýtgeýän ululygyň alyp biljek ýolbererlik bahalarynyň köplügine **şol aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasy** (oblasty) diýilýär. Mysal üçin, ýokarda getirilen aňlatmalaryň degişlilikde kesgitleniş ýaýlasyny ýazalyň:

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) $(x^2-3)>0$.

Bu mysallardan görnüşi ýaly üýtgeýän ululyga derek san bahalaryny goýanymyzda alnan san aňlatmasynyň manysynyň bar bolmagy hökmandyr.

Gönükmeler

1. Aşakdaky ýazgylaryň haýsylary san aňlatmasy?

a) $7-4$; ç) ; e) 47; f) ;

b) ; d) ; ä) $37-5=27+5$; g) $14-6<7$.

2. Aşakdaky ýazgylaryň haýsylary üýtgeýän ululykly aňlatmalar:

a) ; ç) ; e) ;

b) $0,49+2^3$; d) $x+2y<7$; ä) $32:y+3$?

3. San aňlatmalarynyň bahasyny hasaplaň:

a)

b) ;

ç) ;

d) ;

e) ;

ä) .

4. Aşakdaky aňlatmalaryň kesgitleniş ýaýlasyny görkeziň:

a) ; b) ; ç) ; d) .

5. Aňlatmanyň bahasyny amatly usulda hasaplaň:

, eger bolsa.

§ 86. San deňlikleri we deňsizlikleri

Goý, bize a we b iki san aňlatmasy berlen bolsun. Ol aňlatmalary deňlik gatnaşygy bilen birleşdireliň (birikdireliň, baglanyşdyralyň). Biz $a=b$ sözlem alarys. Bu sözleme **san deňligi** diýilýär. Mysal üçin, 3+2 we 6–1 san aňlatmalaryny alalyň hem-de olary deňlik gatnaşygy bilen birikdireliň. 3+2=6–1 san deňligini alarys. Bu deňlik dogrudyr. Eger-de 3+2 we 7–3 san aňlatmalaryny deňlik gatnaşygynyň kömegi bilen birikdirsek, 3+2=7–3 san deňligini alarys. Bu deňlik nädogrudyr. Şeýlelikde, logiki nukdaýnazardan seredeniňde san deňligi – bu çyn ýa-da ýalan pikir aýtmadyr. Deňligiň iki tarapyndaky hem san aňlatmalarynyň bahalary gabat gelse, onda ol san deňliklerine hakyky (çyn) deňlik diýilýär. Hakyky san deňlikleri şu aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) eger $a=b$ hakyky san deňliginiň iki tarapyna hem şol bir c san aňlatmasyny goşsak, ýene-de $a+c=b+c$ hakyky san deňligini alarys, ýagny

2) eger $a=b$ hakyky san deňliginiň iki tarapyny hem manysy bar bolan şol bir c sana köpeltsek, $ac=bc$ hakyky san deňligini alarys, ýagny .

Goý, a we b san aňlatmalary bolsun. Ol aňlatmalary “>“ (ýa-da <) gatnaşygy bilen baglanyşdyralyň. a b (ýa-da a b) sözlem alarys. a b (ýa-da a b) sözleme **san deňsizligi** diýilýär. Mysal üçin, 5+3 we 14–9 añlatmalary “>” gatnaşygy bilen baglanyşdyralyň. 5+3>14–9 san deňsizligini alarys. Bu sözlem çyndyr. Edil şol añlatmalary “<“ gatnaşygy bilen baglanyşdyrsak, ýagny 5+3<14–9 diýsek, onda biz ýalan (nädogry) san deňsizligini alarys. Şeýlelikde, logiki nukdaýnazardan seredeniňde san deňsizligi bu çyn ýa-da ýalan pikiraýtmadyr.

Hakyky san deňsizlikleriniň käbir häsiýetlerini ýatlap geçeliň:

1) eger a b hakyky san deňsizliginiň iki tarapyna hem şol bir c san añlatmasyny goşsak, $a+c=b+c$ hakyky san deňsizligini alarys, ýagny

2) eger a b hakyky san deňsizliginiň iki tarapyny hem c 0 bolan san añlatmasyna köpeltsek, ac bc hakyky san deňsizligi alnar, ýagny

eger-de $c>0$ bolsa;

3) eger a b hakyky san deňsizliginiň iki tarapy hem c 0 bolan san añlatmasyna köpeltsek, ac bc hakyky san deňsizligini alarys, ýagny

, eger-de c 0 bolsa.

Gönükmeler

1. Aşakdaky san deňlikleriniň we deňsizlikleriniň haýsylary dogry?

a) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$;

b) $3^3+4^3+5^3=6^3$;

ç) ;

d)

2. 5>3 deňsizlik berlen. Bu deňsizligiň iki tarapyny hem 7; 0,1; 2,6; sanlara köpeldiň. Alnan netijeleriň esasynda islendik a 0 san üçin $5a>3a$ deňsizlik çyndyr diýip tassyklamak bolarmy?

3. Eger x y deňsizlik dogry bolsa, onda aşakdaky deňsizlikler dogry bolarmy?

a) $2x>2y$; ç) $2x-7$ $2y-7$;

b) ; d) $-2x-7$ $-2y-7$;

4. Aşakdaky aňlatmalardan peýdalanyp, iki sany dogry deňlik we deňsizlik ýazyň:

5. Deňlikler dogry bolar ýaly ýaýlary goýuň:

a) ;

b) ;

ç)

6. Dogry deňlikler alnar ýaly amallary goýuň:

a) 3*6*2=9;

b) 9*3*6=18.

7. Eger $a<b$ deňsizlik dogry bolsa, onda ýyldyzjyklaryň ornuna ">" ýa-da "<" gatnaşygyny goýup, hakyky (dogry) deňsizlikleri alyň:

a) $-3,7a*-3,7b$; d) ;

b) $0,12a*0,12b$; e) ;

ç) ; ä) .

§ 87. Aňlatmalary toždestwolaýyn özgertmek

Üýtgeýän ululykly iki sany aňlatma alalyň: Bu aňlatmalaryň kesgitleniş oblastlary (ýaýlalary) ***R*** hakyky sanlar köplügidir. X – üýtgeýän ululyga ***R*** köplükden birnäçe san bahalaryny berip, ol aňlatmalaryň san bahalaryny deňeşdireliň.

Tablisadan görnüşi ýaly, üýtgeýän ululygyň birnäçe bahasynda berlen aňlatmalaryň san bahalarynyň gabat gelýändigini görýäris.

Umuman, bu aňlatmalaryň islendik bahalary üçin olaryň san bahalarynyň deň bolýandygyny görkezmek kyn däldir. Hakykatdan hem aňlatmany 3 (x–2) aňlatmada ýaýy açmak arkaly almak bolar. Bu ýerde ýaýy açmaklyk köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanunyna esaslanýar. Şeýlelikde, ***R*** hakyky sanlar köplüginde 3 (x–2) we aňlatmalara toždestwolaýyn deň diýilýär.

Kesgitleme. Eger üýtgeýän ululykly aňlatmalaryň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan islendik bahasy üçin, berlen iki aňlatmanyň bahalary gabat gelse, onda ol iki aňlatmalara toždestwolaýyn deň diýilýär.

Kesgitleme. Üýtgeýän ululygyň islendik ýolbererlik bahasy üçin deňlik mydama üýtgewsiz galýan bolsa, ýagny deňlik dogry bolsa, onda ol deňliklere **toždestwo** diýilýär.

Kesgitlemelerden görnüşi ýaly, çyn san deňlikleri, goşmak kanunlary, hakyky sanlary köpeltmek düzgünleri, jemden sany aýyrmak, sandan jemi aýyrmak, jeme jemi goşmak, jemden jemi aýyrmak düzgünleri we ş.m. toždestwolardyr.

Kesgitleme. Ýokarda agzalan umumy düzgünlere we kanunlara esaslanyp berlen aňlatmany özüne toždestwolaýyn deň bolan başga bir aňlatma bilen çalşyrmaklyga aňlatmany toždestwolaýyn özgertmek diýilýär.

Toždestwolaýyn özgertmeleriň geçirilişine degişli birnäçe mysala seredeliň:

I. aňlatmany köpeldijilere dagydalyň.

1) utgaşdyrmalary amala aşyrýarys.

2) Meňzeş köpeldijileri ýaýyň daşyna çykarýarys

Diýmek, bolar.

II. aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

1) Droblaryň maýdalawjylarynyň birmeňzeş bolmagy üçin ikinji drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny "–1" köpeldýäris. Onda

alarys.

2) Maydalawjylary meňzeş bolan droblary aýyrmak düzgünini ulanyp alarys:

.

3) Sanawjyda meňzeş agzalary toplamak operasiýasyny geçirip alarys:

.

Diýmek, bolar.

Matematikanyň başlangyç kursunda, ýagny başlangyç klaslaryň matematikasynda toždestwolaýyn özgertmeler diňe san aňlatmalarynyň üstünde ýerine ýetirilýär. Ol özgertmeleriň esasynda goşmagyň we köpeltmegiň orunçalşyrma kanuny we beýleki düzgünler ýatýandyr. Mysal üçin, tablisadan daşary köpeltmegi öwretmeklik aşakdaky ýaly toždestwolaýyn özgertmegiň üsti bilen düşündirilýär:

.

Bu ýerde köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanunyndan peýdalandyk.

Gönükmeler

1. – aňlatmalar a) we b) köplüklerde toždestwolaýyn deňmi?

2. $3(4y+2)=6+12y$ – deňlik (aňlatmalar) a) b) R – köplüklerde toždestwen deňmi?

3. Aşakdaky deňlikleriň haýsylary R hakyky sanlar köplüginde toždestwo bolýar:

a) ; ç) ;

b) ; d) ?

4. Ýaýlary açyň we geçirilen her bir özgertmäni esaslandyryň:

a) b) .

5. Toždestwen özgertmeler arkaly aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

a)

b)

ç)

d)

e)

6. Amatly usulda hasaplaň:

a) ; ç) ;

b) ; d) .

7. aňlatmanyň islendik üçin položitel bahalary alýandygyny subut etmeli.

8. Islendik san üçin aňlatmanyň 7-ä galyndysyz bölünýändigini subut etmeli.

9. $n=78$ bolanda $n^2-77n+122$ aňlatmanyň bahasyny amatly usulda hasaplamaly.

IV bap
DEŇLEMELER, DEŇSIZLIKLER, FUNKSIÝALAR

§ 88. Bir üýtgeýän ululykly deňlemeler

Kesgitleme. Goý, [redacted] – kesgitleniş ýaýlalary X köplük bolan üýtgeýän ululykly aňlatmalar bolsun. Bu aňlatmalary "=" gatnaşygynyň üsti bilen baglanyşdyrýarys. Alnan pikiraýdylyş görnüşine, ýagny [redacted] ýazga bir üýtgeýän ululykly deňleme diýilýär.

Kesgitleme. [redacted] deňlemäni hakyky san deňligine öwürýän [redacted] üýtgeýän ululygyň bahalarynyň köplügine deňlemäniň **çözüwi** ýa-da **köki** diýilýär.

Deňlemäni çözmek – bu onuň çözüwleriniň köplügini tapmak diýmekdir.

Üýtgeýän bir ululykly deňlemelere we olaryň çözüwlerine seredeliň:

1) [redacted]. Bu deňlik diňe x=5 bolanda dogrudyr, ýagny ol deňlik çyn san deňligine öwrülýändir.

2) [redacted]. Deňlemäni çözeliň. Köpeltmek hasyly, köpeldijileriň iň bolmanda biri nola deň bolanda nola deň bolýar. Ol köpeldijileriň her haýsyny nola deňläp alarys.

[redacted]

Jogaby: [redacted]

3) [redacted]. Deňlemäniň çep tarapynda ýaýy açyp, [redacted] toždestwony alarys. Ol deňlik [redacted] üýtgeýän ululygyň ähli bahalary üçin dogrudyr.

4) . Bu deňlemäniň x üýtgeýän ululygynyň hiç bir bahasynda dogry deňlige öwrülmeýändigini görmek kyn däldir. Deňligiň çep tarapynda $6x+3$, sag tarapynda bolsa $6x+5$ aňlatmalar bolar. Diýmek, deňlemäniň çözüwi ýok.

Başlangyç klaslaryň matematikasynda $x+a=b$, $a-x=b$, $x-a=b$, $x\cdot a=b$, $x:a=b$ we ş.m. ýönekeýje deňlemelere seredilýär. Bu ýerde a, b bitin otrisatel däl sanlardyr, x bolsa üýtgeýän ululykdyr. Deňleme düşünjesi kontekstiň üsti bilen berilýär we birnäçe mysallara seredilenden soňra, çagalarda "Deňleme bu özünde näbelli ululygy saklaýan deňlik" diýen pikir döreýär.

Ýokarda getirilen mysallardan görnüşi ýaly deňlemäniň berlişine görä onuň dürli çözüwler köplüginiň bardygyna göz ýetirdik, ýagny bir çözüwi bar, iki çözüwi bar, tükeniksiz köp çözüwi bar we çözüwi ýok ýagdaýlardyr.

Gönükmeler

1. Položitel hakyky sanlar köplüginde deňlemäniň köki barmy?

2. Ýokarda görkezilen deňlemäni çözmeli we ol çözüwiň haýsy san köplügine degişlidigini kesgitlemeli.

3. deňlemä N natural sanlar köplüginde seretmeli. Näme üçin $x=1$ deňlemäniň köki bolýar, $x=2$ we sanlar bolsa deňlemäniň köki bolmaýandygyny düşündiriň.

4. Aşakdaky pikiraýtmalar çyn bolar ýaly köpnokatlaryň ornuna "zerur", "ýeterlik" ýa-da "zerur we ýeterlik" diýen sözleri goýmaly:

a) a sanyň deňlemäniň köki bolmagy üçin, onuň deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolmagy...;

b) a sanyň deňlemäniň köki bolmagy üçin, x derek a san goýlanda deňlemäniň hakyky san deňligine öwrülmegi...;

ç) a sanyň deňlemäniň köki bolmagy üçin, ol sanyň kesgitleniş ýaýla degişli bolmagy hem-de x derek goýlanda deňlemäniň hakyky san deňligine öwrülmegi...

5. Aşakdaky pikiraýtmalar çynmy:

a) köpeltmek hasylynyň nol bolmagy üçin bolmagy zerurdyr.

b) köpeltmek hasylynyň nol bolmagy üçin bolmagy ýeterlik.

6. Başlangyç klaslaryň matematikasynda gabat gelýän deňlemelere mysallar getiriň.

§ 89. Deňlemeleriň deňgüýçlüligi

Berlen deňlemäni çözmek üçin ol deňlemäni toždestwolaýyn yzygider özgerdýärler we ýönekeýleşdirýärler. Ýönekeýleşdirmek prosesini tä öňden belli bolan usul arkaly çözüp bolýan deňleme alynýança dowam etdirýärler. Bilşimiz ýaly, toždestwolaýyn özgetrmek üýtgeýän ululykly aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan bahalarynda aňlatmalaryň san bahalaryny üýtgewsiz galdyrýar. Diýmek, ol özgertmeler deňlemäniň köküni üýtgetmeýär.

Kesgitleme. Eger iki deňlemäniň çözüwleriniň köplükleri gabat gelýän bolsa, onda ol deňlemelere deňgüýçli deňlemeler diýilýär.

Deňgüýçli deňleme düşünjesine aşakdaky ýaly kesgitleme hem bermek bolar.

Kesgitleme. Toždestwolaýyn özgertmeler esasynda alynýan deňlemelere deňgüýçli deňlemeler diýilýär. Mysal üçin, deňlemeler hakyky sanlar köplüginde deňgüýçlüdirler. Sebäbi bu deňlemeleriň çözüwleriniň köplükleri gabat gelýär, ýagny , iki deňlemäni hem kanagatlandyrýar.

Indi haýsy özgertmeleriň başda berlen deňlemä deňgüýçli bolan deňleme almaklyga ýardam edýändigini anyklalyň.

Teorema. Goý, X köplükde deňleme berlen bolsun we goý, $h(x)$ aňlatma hem şol X köplükde kesgitlenen bolsun. Onda (1) we (2) deňlemeler X köplükde deňgüýçlüdirler.

Subudy. (1) deňlemäniň çözüwiniň köplügini T_1, (2) deňlemäniň çözüwiniň köplügini bolsa T_2 bilen belgiläliň. Eger-de biz $T_1=T_2$ bolýandygyny görkezsek, onda teoremany subut etdigimiz bolar.

Goý, – (1) deňlemäniň köki bolsun. Onda bolar we (1) deňleme $x=a$ bolanda hakyky san deňligine öwrüler, ýagny bolar, – aňlatma bolsa $h(a)$ – san aňlatmasyna öwrüler. hakyky (çyn) san deňliginiň iki tarapyna hem aňlatmasyny goşup

çyn san deňligini alarys. Bu deňlik a sanyň (2) deňlemäniň köki bolýandygyny aňladýar. Şeýlelikde, biz bolýandygyny, ýagny (1) deňlemäniň köküniň (2) deňlemäniň hem köki bolýandygyny görkezdik.

Goý, indi – (2) deňlemäniň köki bolsun. Onda bolar we (2) deňleme $x=b$ bolanda görnüşde hakyky san deňligine öwrüler. Bu san deňliginiň iki taapyna hem – san aňlatmasyny goşup, çyn san deňligini alarys.

Şeýlelikde, b sanyň (1) deňlemäni hem kanagatlandyrýandygy gelip çykdy we gatnaşyk alyndy.

Köplükleriň arasyndaky deňlik gatnaşygynyň kesgitlemesine görä we bolany üçin alarys, bu bolsa X köplükde (1) we (2) deňlemeleriň deňgüýçlüdigini aňladýar.

Köplenç, deňlemeler çözülende bu teoremanyň özi däl-de, ondan gelip çykýan netijeler has köp ulanylýar:

1. Deňlemäniň iki tarapyna hem şol bir sany goşsak deňgüýçli deňleme alnar.

2. Eger-de haýsy-da bolsa bir goşulyjyny (san aňlatmasyny ýa-da üýtgeýän ululykly aňlatmany) deňligiň bir tarapyndan beýleki tarapyna alamatyny üýtgedip geçirsek, berlen deňlemä deňgüýçli deňleme alnar.

Teorema. X köplükde berlen we aňlatmalardan düzülen we deňlemeler deňgüýçlüdirler.

Bu teoremanyň subudy edil ýokarda getirilen teoremanyň subudy ýaly geçirilýär we ony özbaşdak subut etmeklige synanyşyň.

Netije. Eger deňlemäniň iki tarapyny hem noldan tapawutly şol bir sana (aňlatma) köpeltsek ýa-da bölsek, onda biz başda berlen deňlemä deňgüýçli deňleme alarys.

Indi [illegible] köplükde berlen [illegible] deňlemäni çözüp görkezeliň.

1) Drobdan boşatmak üçin deňlemäniň iki tarapyny hem 4-e köpeldýäris we deňligiň çep tarapyndaky ýaýy açýarys:

[illegible].

2) Näbelli ululyklary deňligiň çep tarapyna belli sanlary sag tarapyna geçireliň:

[illegible].

3) Deňligiň çep we sag taraplarynda toparlamak operasiýasyny geçireliň: $3x=30$.

4) Deňligiň iki tarapyny hem 3-e bölüp alarys: $x=10$.

Şeýlelik bilen, berlen deňlemäniň çözüwler köplüginde diňe [illegible], ýekeje elementiň bardygyna göz ýetirýäris.

Ýene-de bir deňlemäniň çözüwine seredeliň. Berlen [illegible] köplükde [illegible] deňlemäni çözmeli.

Käbir okuwçy bu deňlemäni şeýle çözýär: deňligiň iki tarapyny hem x-a bölýär we $x-1=2$ deňleme alýar, bu ýerden bolsa $x=3$ çözüwi alýar.

Okuwçynyň tapan bu çözüwiniň dogrudygyna, ýöne ol çözüwiň doly däldigine göz ýetirmek üçin deňlemäni toždestwolaýyn özgertmeleri geçirmek esasynda çözeliň.

1. $2x$ aňlatmany deňligiň sag tarapyndan çep taapyna geçireliň.

[illegible].

2. Umumy köpeldijini ýaýyň daşyna çykaralyň.

[illegible] ýa-da [illegible]

3. Köpeltmek hasylynyň nola deň bolmaklyk şertini ulanyp,

$x=0$, $x-3=0$ ýa-da $x=0$ we $x=3$ çözüwleri alarys.

Diýmek, berlen deňlemäniň çözüwler köplügi 0 we 3 sanlardan ybarat eken, ýagny .

Bellik. Ýokarda getirilen teoremalaryň şertlerini bozmak diňe bir kökleriň ýitirilmegine getirmän, eýsem-de bolsa del kökleriň ýüze çykmagyna hem getirmegi mümkin. Şonuň üçin, adatça, deňleme çözülip bolandan soňra ol çözüwi berlen deňlemede ornuna goýup barlap görmeli.

Gönükmeler

1. Aşakdaky deňlemeler jübütiniň haýsylary hakyky sanlar köplüginde deňgüýçli.

a) we ;

b) we ;

ç) we .

2. Komponentler we netije arasyndaky baglanyşykdan peýdalanyp deňlemeleri çözüň:

a) ; ç) ;

b) ; d) .

3. Deňlemeleri dürli usullarda çözmeli:

a) ;

b) .

4. x üýtgeýän ululygyň haýsy bahalarynda we aňlatmalaryň birmeňzeş bahalary bolar?

5. Deňlemeleri çözüň:

a) ;

b) ;

ç) .

6. Aşakdaky meseleleri algebraik ýa-da arifmetik usullarda çozmeli:

a) Birinji tekjede ikinjidäkiden 16 kitap köp. Eger her tekjeden 3 kitap aýyrsaň, onda birinji tekjedäki kitaplaryň sany ikinjidäkiden bir ýarym esse köp bolar. Her tekjede näçe kitap bar?

b) Iki topda jemi 30 depder bar. Eger 1-nji topdan ikinjä 2 depder geçirseň, onda 1-nji topdaky depderleriň sany 2-njidäkiden 2 esse köp bolar. Her topda näçe depder bar?

ç) Welosipedçi 16 *km* aralygy 1sag 10 *min* geçdi. Ol ilkinji 40 *min* dowamynda bir tizlik bilen ýöredi, galan wagtda bolsa ol tizligini 3*km/sag* azaltdy. Welosipedçiniň ilkinji 40 *min* hereket eden tizligini tapmaly.

§ 90. Bir üýtgeýän ululykly deňsizlikler. Deňsizlikleriň deňgüýçlüligi

Kesgitleme. Goý, kesgitleniş ýaýlasy X köplük bolan bir üýtgeýän ululykly aňlatmalar berlen bolsun. Onda ýa-da görnüşdäki gatnaşyklara bir üýtgeýän ululykly deňsizlik diýilýär.

Kesgitleme. ýa-da deňsizligi çyn san deňsizligine öwürýän bolan bahalar köplügine deňsizligiň **çözüwi** diýilýär.

Bu kesgitlemeden şeýle netije çykarmak bolar, ýagny deňsizligi çözmek diýmek – bu deňsizligiň çözüwler köplügini tapmak diýmekdir.

Matematikanyň mekdep kursunda bir üýtgeýän ululykly deňsizlikleriň dürli görnüşlerine seredilýär. Biz häzir diňe birinji derejeli deňsizlikler bilen iş salyşmakçy. Bu deňsizlikleriň çözüwiniň esasynda, edil deňlemeleriň çözüwindäki ýaly **deňgüýçlülik düşünjesi** we **deňsizlikleriň deňgüýçlüligi hakyndaky teoremalar** ýatýar.

Kesgitleme. Çözüwleriň köplükleri gabat gelýän deňsizliklere **deňgüýçli deňsizlikler** diýilýär.

Mysal üçin, deňsizlikler deňgüýçlüdirler. Bu deňsizlikleriň ikisiniň hem çözüwi köplükdir.

Deňsizlikleriň deňgüýçlüligi hakyndaky teoremalar we olardan gelip çykýan netijeler umuman alanyňda (durky bilen) deňlemeleriň deňgüýçlüligi hakyndaky teoremalara meňzeşdir, olary subut etmek hem deňlemeleriň deňgüýçlüliginiň subut edilişi ýaly geçirilýär.

Teorema. Goý, X köplükde deňsizlik we aňlatma berlen bolsun. Onda we deňsizlikler deňgüýçlüdirler.

Teorema. Goý, X köplükde deňsizlik we aňlatma berlen bolsun. Onda we deňsizlikler deňgüýçlüdirler.

Bu iki teoremanyň subut edilişi we olardan gelip çykýan netijeler edil deňlikleriň deňgüýçlüligindäki ýalydyr.

Teorema. Goý, X köplükde deňsizlik we aňlatma berlen bolsun. Onda we deňsizlikler deňgüýçlüdirler.

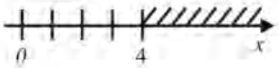
Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar: eger deňsizligiň iki tarapyny hem şol bir otrisatel d – sana köpeltsek, onda deňsizligi özüne ters bolan deňsizlik alnar we deňsizlige deňgüýçli bolan deňsizligi alarys. Mysal üçin, köplükde $4x+3>x+15$ deňsizligi çözüp görkezeliň.

1) x näbelli deňsizligiň çep tarapyna 3 sany bolsa deňsizligiň sag tarapyna geçirip alarys: .

2) Deňsizligiň çep we sag taraplarynda meňzeş agzalary toparlap alarys.

3) Deňsizligiň iki tarapyny hem 3-e bölüp alarys .

Bu deňsizligiň çözüwi köplükdir.



Gönükmeler

1. 2 – san deňsizligiň çözüwimi?

2. Aşakdaky deňsizlikleriň jübütleri ***R*** hakyky sanlar köplüginde deňgüýçlümi:

a) ; ç) .

b)

3. Berlen pikiraýtmalaryň haýsylary çyn:

a) ç)

b) ; d)

4. Deňsizlikleri düşündirip çözüň:

a)

b)

ç)

5. Haýsy uly:

a) $2x$ ýa-da $7x$;

b) $0,3y$ ýa-da $10y$?

6. Üçburçlugyň bir tarapy 18 *sm*, beýleki tarapy 23 *sm* bolsa, onuň üçünji tarapynyň haýsy aralykda bolmalydygyny kesgitläň.

7. Üçburçlugyň bir tarapy 5 *sm*, beýleki tarapy 8 *sm* deň. Eger onuň perimetri 22 *sm*-den geçmeýän bolsa, üçünji tarapyň uzynlygy haýsy natural san bahalary alyp biler?

§ 91. Funksiýa düşünjesi

Biziň gündelik durmuşymyzda birnäçe hadysalar bolup geçýär. Ol hadysalar özara baglanyşyklydyr. Mysal üçin: howanyň temperaturasy günüň dowamynda üýtgäp durýar, dükandan haryt alanyňda ol harytlar üçin edilmeli töleg näçe mukdarda alanyňa görä üýtgäp durýar; hereket edýän jisimiň geçen ýoly onuň tizligine we wagta baglylykda üýtgeýär we ş.m.

Hadysalar arasyndaky baglanyşyklary açyp görkezýän matematiki düşünjeleriň biri funksiýa düşünjesidir. Matematika ylmynda san funksiýasyna esasy üns berilýär. Munuň sebäbi bu ylym tebigy ylymlar bilen, hususan hem, fizika ylmy bilen aýrylmaz baglanyşykdadyr. Tebigatda bolup geçýän fiziki hadysalara we olaryň häsiýetlerine mukdar taýdan baha bermek hem-de olaryň arasyndaky baglanyşyklary açyp görkezmek matematikanyň üsti bilen, hususan, funksiýa düşünjesiniň üsti bilen amala aşyrylýar.

Kesgitleme. Eger x üýtgeýän ululygyň her bir bahasyna y üýtgeýän ululygyň ýeke-täk bahasy degişli bolsa, onda y üýtgeýän ululyga x üýtgeýän ululyga bagly funksiýa diýilýär.

Bu ýerde x üýtgeýän ululyga argument ýa-da erkin üýtgeýän ululyk diýilýär, y üýtgeýän ululyga bolsa baglanyşykly üýtgeýän ululyk diýilýär. x üýtgeýän ululygyň berlen bahasyna degişli y - iň bahasyna funksiýanyň bahasy diýilýär.

Funksiýany bermek üçin özbaşdak üýtgeýän x ululygyň san bahalarynyň X köplügini bermeli. Bu köplüge funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy (oblasty) diýilýär. Mundan hem başga her bir bahasy üçin y üýtgeýän ululygyň (funksiýanyň) degişli bahasyny tapmaklygyň usulyny (düzgünini) bermeli.

Funksiýany f, g, h we ş.m. harplar bilen bellemeklik kabul edilendir. Mysal üçin: we ş.m.

Funksiýanyň berlişiniň üç sany usuly bardyr we olar şu aşakdakylardan ybaratdyr:

1. Funksiýany bermegiň analitik usuly.

Bu usulda funksiýa formulalaryň üsti bilen berilýär. Mysal üçin:

we ş.m.

Funksiýany analitik usulda bermek köp ulanylýan usullaryň biridir. Bu usulda funksiýa berlende, köplenç, onuň kesgitleniş ýaýlasy görkezilmeýär we bu halda onuň kesgitleniş ýaýlasyny tapmaklygy özümiz amala aşyrýarys.

Mysal üçin: funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy (oblasty) deňsizligi kanagatlandyrýan sanlaryň köplügidir, ýagny ýa-da .

2. Funksiýany bermegiň tablisa usuly.

Funksiýa bu usulda berlende x we y ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk tablisanyň üsti bilen berilýär.

Mysal üçin:

Bu ýerde san köplügi funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasydyr, bolsa funksiýanyň bahalarynyň köplügidir. Başlangyç klaslaryň matematikasynda ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy funksiýa düşünjesini girizmekden bermeklik köp ulanylýar. Mysal üçin: a=0,6,15,31,46,52,64 bolanda, 15+a aňlatmanyň bahasyny tapmaly. Bu soraga jogap bermek üçin tablisa düzýäris.

3. Funksiýany bermekligiň grafiki usuly.

Bu usulda ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy bermeklik gönüburçly koordinatalar ulgamynda çyzgynyň üsti bilen amala aşyrylýar. Ol hakda aýratyn durup geçeris.

Gönükmeler

1. Töweregiň uzynlygy formulanyň üsti bilen hasaplanýar. Bu formula haýsy ululyklaryň arasyndaky funksional baglanyşygy aňladýar?

2. Kwadratyň meýdanyny onuň diagonalynyň üsti bilen aňladyp bolarmy?

3. Aşakdaky formulalaryň üsti bilen berlen funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapmaly:

a) ; b) ; ç) ; d) .

4. – aralykdan alnan her bir n natural sana, şol sany 4-e bölениňde galýan galyndy degişli edilen. Bu degişliligiň tablisasyny düzüň we kesgitleniş ýaýlasyny hem-de bahalar köplügini görkeziň.

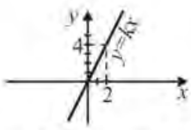
5. Başlangyç klaslaryň matematika kitabyndan funksiýa düşünjesi bilen baglanyşykly ýumuşlara mysallar getirmeli.

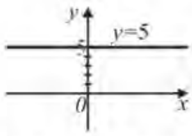
§ 92. Funksiýanyň grafigi

Funksiýanyň grafigi diňe bir funksional baglanyşygy syn etmeklige kömek etmän, onuň häsiýetlerini öwrenmekligi hem aňsatlaşdyrýar. Şonuň üçin hem biz, köplenç, funksiýanyň koordinatalar tekizligindäki grafiginden peýdalanýarys.

Kesgitleme. X köplükde berlen f funksiýanyň grafigi diýip, koordinatalar tekizligiň iň $(x, f(x))$ koordinataly nokatlaryň köplügine aýdylýar. Käbir funksiýalaryň grafiklerini ýada salalyň.

1.Kesgitleniş oblasty hakyky sanlaryň köplügi bolan y=2x funksiýanyň grafigini guralyň. x üýtgeýän ululygyň islendik bahasynda ordinatanyň bahasy onuň 2 essesi, ýagny 2x bolar. Onuň ýaly funksiýanyň grafigi koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzykdyr. Grafigini gurmak üçin bir nokat almak ýeterlikdir, koordinatlar başlangyjy bilen şol nokadyň üstünden geçýän göni çyzyk y=2x funksiýanyň grafigi bolar. Goý, x=2 bolsun, onda y=4 bolar.





2. Hakyky sanlar köplüginde kesgitlenen y=5 funksiýanyň grafigini guralyň. x-iň her bir bahasynda y-iň bahasy 5-e deň bolany üçin ol funksiýanyň grafigi koordinatalar tekizliginde absissasy x hakyky sanlar, ordinatasy 5 hakyky san boljak nokatlaryň köplügi bolar. Ol nokatlaryň köplügi abssissa okuna parallel göni çyzykdyr.

Kesgitleniş oblastyny hakyky sanlar köplügi hasap edip, $y=x^2$ funksiýanyň grafigini guralyň. Onuň üçin x we y ululyklaryň degişli bahalarynyň tablisasyny düzeliň.

Her jübütiň bahalaryny koordinatalar tekizliginde şekillendirsek we ol nokatlary birikdirsek, $y=x^2$ funksiýanyň grafigini alarys.

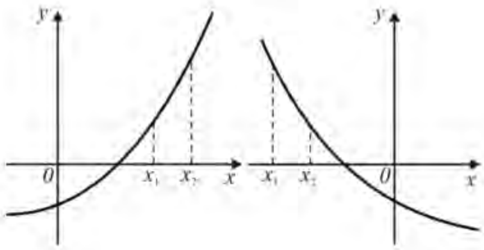
Grafikde alnan çyzyga parabola diýilýär.

Üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklar derňelende funksiýanyň artýandygyny, kemelýändigini bilmek möhümdir.

Kesgitleme. Eger X köplükde islendik x_1 we x_2 sanlar üçin $x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$ gelip çyksa onda f funksiýa X köplükde artýan funksiýa diýilýär.

Grafikde x aralykda artýan funksiýa abssissa okunyň ugruna görä çepden saga süýşürilende ordinata artmalydyr.

Kesgitleme. Eger X köplükde islendik x_1 we x_2 sanlar üçin $x_1<x_2$ $f(x_1)>f(x_2)$ gelip çyksa, onda f funksiýa X köplükde kemelýän funksiýa diýilýär.



Grafikde abssissa okunyň ugruna görä çepden saga süýşürilende ordinata kemelmelidir.

Gönükmeler

1. $y=x$ funksiýanyň grafigini guruň.

2. Sutkanyň dowamynda howanyň temperaturasyny ölçäp, şeýle tablisany aldylar.

Berlen baglanyşygyň grafigini guruň. Ol baglanyşyk funksiýamy?

3. Kesgitleniş oblasty a) $[-2;3]$; b) $[2;4]$ bolsa $y=2x^2$ funksiýanyň grafigini guruň.

4. $y=3x^2-4$ funksiýanyň grafiginiň $A(-1;-1)$ nokatdan geçýänligi belli. Ol grafigiň $B(1;-5)$ nokatdan geçmeýänligini subut ediň.

5. $y=37x$ funksiýanyň grafigine degişli nokatlaryň hemmesi birinji we üçünji koordinata çärýeklerinde ýerleşýändigini subut ediň.

6. Mekdebiň töwereginde 67 derek we x sany arça agaçlary bar. $67+x$, $67-x$, $x-67$ aňlatmalar nämäni aňladýar?

§ 93. Çyzykly funksiýa

Okuwçy her biriniň bahasy 4 teňňeden x sany galam we bahasy 15 teňňe bolan depder satyn alan bolsa, onuň jemi tölemeli puly $y=4x+15$ formulanyň üsti bilen hasaplanar. Bu formuladan alnan haryt bilen edilmeli tölegiň arasyndaky baglanyşyk görünýär. Ol formula çyzykly funksiýa diýilýär.

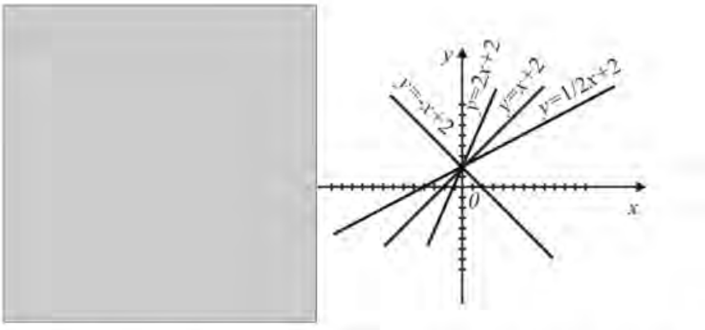
Kesgitleme. $y=kx+b$ formulanyň kömegi bilen berlen funksiýa çyzykly funksiýa diýilýär. Bu ýerde x bagly däl üýtgeýän ululyk, k we b käbir hakyky sanlardyr.

Hususan, eger $k=0$ bolsa, onda $y=b$ görnüşli funksiýa alynýar we oňa hemişelik funksiýa diýilýär.

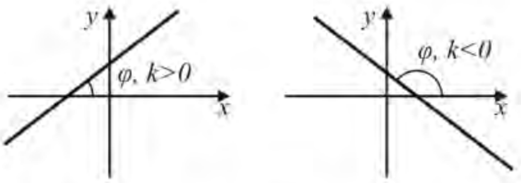
Çyzykly funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy hakyky sanlar köplügidir. $y=kx+b$ funksiýanyň grafigi göni çyzykdyr. Ol göni çyzygyň tekizlikde ýerleşişini k we b koeffisiýentler kesgitleýär.

Şol bir koordinatalar tekizliginde $y=x+2$, $y=2x+2$, $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=-x+2$ funksiýalaryň grafiklerini guralyň.

Göni çyzygyň grafigini gurmak üçin iki nokat ýeterlikdir. Berlen funksiýalara degişlilikde tablisalary düzeliň hem-de şolaryň esasynda grafik guralyň.

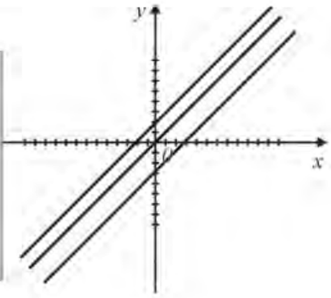


Göni çyzygyň deňlemesindäki k – koeffisiýent üýtgeýär, b – koeffisiýent bolsa hemişelik. Diýmek, çyzgydan görnüşi ýaly, k – koeffisiýent göni çyzygyň OX – okuna görä ýapgytlygyny kesgitleýär. Ýapgytlyk burçuny – bilen bellesek, $k > 0$ bolanda – ýiti burç bolýar, $k \;\; 0$ bolsa – kütek burç bolýar.



Başgaça k – koeffisiýente burç koeffisiýenti diýilýär.

Ýene-de ýokardaky çyzga gaýdyp gelmek bilen şeýle netije çykarmak bolar: eger bolsa gönüniň grafigi I we III çärýeklerden geçýär, eger-de bolsa, ol gönüniň grafigi II we IV çärýeklerden geçýär. Geliň, indi formulalaryň üsti bilen berlen funksiýalaryň grafigini guralyň (bu ýerde k – hemişelik, b – üýtgeýär). Ýene-de berlen funksiýalara degişli tablisalar düzeliň we olaryň esasynda grafik guralyň.



Çyzgydan görnüşi ýaly, eger k-hemişelik bolsa, onda göni çyzyklar biri-birine parallel bolýar, b – koeffisiýent bolsa göni çyzygyň y okuny kesip geçýän nokadyny görkezýär.

Çyzgylara seredip ýene-de bir netije çykarmak bolar, ýagny $k > 0$ bolsa $y = kx + b$ funksiýa artýar, $k < 0$ bolsa funksiýa kemelýändir.

Gönükmeler

1. Şol bir koordinatalar sistemasynda funksiýalaryň grafigini gurmaly.

2. Şol bir koordinatalar sistemasynda funksiýanyň grafigini gurmaly.

3. Eger funksiýa y=0,3x+1,5 formulanyň üsti bilen berlen bolsa tablisany doldurmaly we ol funksiýanyň grafigini gurmaly.

§ 94. Göni proporsionallyk

Meselä seredeliň:

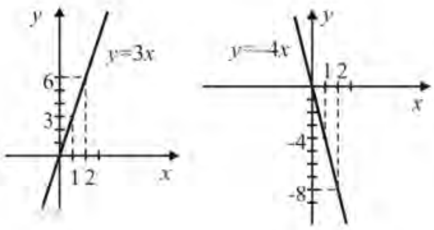
Bir kitabyň bahasy 4 manat. 2, 3, 7 kitabyň bahasy näçe bolar?

Bu meseläni çözmek üçin aňlatmalaryň bahalaryny [illegible] x sany kitabyň bahasyny y bilen belgilesek, $y=4x$ deňligi alyp bileris. $y=4x$ formula funksiýadyr, çünki x-iň her bir bahasyna y-iň ýeke-täk bahasy degişlidir. Eger awtomobiliň hereket eden wagtyny t bilen belgilesek we awtomobil 60 *km/sag* tizlik bilen deňölçegli hereket eden bolsa, onda onuň geçen S ýoluny $S=60t$ formula bilen görkezmek bolar. $S=60t$ formula hem funksiýadyr, sebäbi t wagtyň her bahasyna S geçilen ýoluň ýeke-täk bahasy degişlidir. Getirilen mysallarda biz göni proporsionallyk diýip atlandyrylýan funksiýa bilen iş salyşdyk.

Kesgitleme. Göni proporsionallyk diýip $y=kx$ formula bilen berip bolýan funksiýa aýdylýar, bu ýerde x bagly däl üýtgeýän ululyk, k noldan tapawutly hakyky sandyr. $y=kx$ formuladaky k sana proporsionallyk koeffisiýenti diýilýär, y üýtgeýän ululyga bolsa x üýtgeýän ululyga proporsional diýilýär. $y=kx$ funksiýanyň kesgitleniş oblasty hakyky sanlar köplügidir. Biz $y=kx+b$ çyzykly funksiýa bilen geçen temamyzda tanyş bolupdyk. Eger $b=0$ bolsa, onda $y=kx+b$ formulamyz $y=kx$ görnüşi alýar. Diýmek, göni proporsionallyk $y=kx+b$ çyzykly funksiýanyň $b=0$ bolandaky hususy halydyr. Şonuň üçin hem çyzykly funksiýa üçin mahsus bolan häsiýetler göni proporsionallyk üçin hem dogrudyr.

1) göni proporsionallygyň grafigi koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzykdyr.

2) $k \geq 0$ bolanda $y=kx$ funksiýa artýar, $k \leq 0$ bolanda funksiýa kemelýär. Mysal üçin: $y=3x$ göni proporsionallyk hakyky sanlar köplüginde artýan funksiýadyr, sebäbi x-iň bahalaryny artdyrsak, oňa degişli bolan y-iň bahalary hem artar.



$y=-4x$ funksiýa hakyky sanlar köplüginde kemelýän funksiýadyr, sebäbi x-iň bahalaryny artdyrsak, oňa degişli bolan y-iň bahalary kemeler.

Göni proporsionallyk çyzykly funksiýadan tapawutlylykda başga häsiýete hem eýedir.

Eger f funksiýa göni proporsionallyk (x_1, y_1) we (x_2, y_2) onuň degişli jübütleri bolsa, onda , ýagny eger $y=kx$ göni proporsionallyk bolsa, onda x üýtgeýän ululygyň iki bahasynyň gatnaşygy y üýtgeýän ululygyň degişli bahalarynyň gatnaşygyna deňdir. Onuň şeýle bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir. Goý, f funksiýa göni proporsionallyk bolup, ol $y=kx$ formula bilen berlen bolsun. x üýtgeýän ululygyň x_1 we x_2 dürli bahalarynda $y_1=kx_1$ we $y_2=kx_2$ bahalary alarys. we bolany üçin. Bu ýerden .

x we y üýtgeýän ululygyň položitel bahalary üçin göni proporsionallygyň ýokarky görkezilen häsiýetini şeýle formulirlemek bolar:

Göni proporsionallykda x üýtgeýän ululygyň bahalarynyň birnäçe esse artmagy (kemelmegi) bilen y üýtgeýän ululygyň bahalary hem şonça esse artar (kemeler). Başlangyç synplarda (klaslarda) göni proporsionallyk meselelerde, ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklarda köp duş gelýär. Mysal üçin: 18 *m* matadan 6 sany çaga köýnegini tikdiler. Şonuň ýaly 10 sany çaga köýnegi üçin näçe metr mata gerek bolar?

Meselede matanyň sarp edilişiniň, tikilen köýnekleriň sany bilen baglanyşygy görkezilýär. Ol baglanyşyk $y=3x$ formula bilen berlip biler, bu ýerde 3 bir köýnege sarp edilen mata, x köýnekleriň sanydyr. Meseläni çözmek üçin proporsionallyk koeffisiýentini tapmak üçin x we y üýtgeýän ululyklaryň degişli bahalarynyň gatnaşygy alynýar: 18:6=3 (*m*).

Gönükmeler

1. $y=7x$ we $y=-3x$ funksiýalaryň grafiklerini guruň. Ol funksiýalaryň hakyky sanlaryň köplüginde birinjisiniň artýan funksiýadygyny, ikinjisiniň kemelýän funksiýadygyny görkeziň.

2. Gönüburçlugyň taraplary 8 *sm* we *x sm*. Ol gönüburçlugyň meýdany $y\ sm^2$. Ol gönüburçlugyň meýdanynyň onuň tarapyna baglanyşygyny formula bilen görkeziň. Ol funksiýanyň grafigini bolan şertde guruň.

3. Aşakdaky meselede ululyklaryň arasynda nähili baglanyşyk bardygyny görkeziň: 48 *kg* süýtden 6 *kg* gaýmak alynýar, 40 *kg* gaýmakdan 8 *kg* mesge alynýar, 24 *kg* mesgeden bolsa 18 *kg* saryýag alynýar. 2400 *kg* süýtden näçe kilogram saryýag alyp bolar?

4. Bir galamyň massasy 2 *g* deň *x* sany galamyň massasyny *y* bilen belgiläp, alnan baglanyşygy formula bilen görkeziň. bolan şertde grafigini guruň.

§ 95. Ters proporsionallyk we onuň grafigi

Ters proporsional baglanyşyk baradaky ilkinji düşünjeler hereket bilen baglanyşykly meselelere seredilende ýüze çykýar. Mysal üçin, *S* geçilen ýol, *V* hereketiň tizligi bolsa, onda şol ýoly geçmek üçin sarp edilen wagt *S* ýola göni proporsional, *V* tizlige bolsa ters proporsionaldyr, ýagny . Eger geçmeli ýol *S* hemişelik diýsek, onda şol ýoly geçmek üçin sarp edilýän wagt tizlige ters proporsional bolar. Hakykatdan hem, tizlik näçe uly bolsa, bellenen aralygy geçmek üçin sarp edilýän wagt şonça-da az bolýar.

Kesgitleme. formulanyň üsti bilen berilýän funksiýa ters proporsionallyk diýilýär. Bu ýerde *x* bagly däl üýtgeýän ululyk, käbir berlen san.

y – üýtgeýän ululyga başgaça, *x* – üýtgeýän ululyga ters proporsional hem diýilýär.

Nola bölmek bolmaýandygy üçin funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy bolan hakyky sanlar köplügidir.

Kesgitleme. Eger y(x) – funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan islendik bahasy üçin $y(-x)=y(x)$ deňlik dogry bolsa onda ol funksiýa jübüt funksiýa diýilýär. Jübüt funksiýanyň grafigi y-okuna görä simmetrikdir.

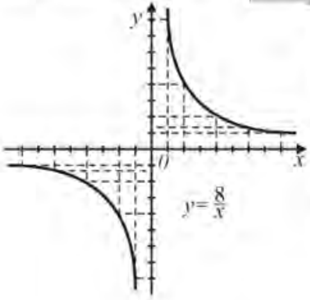
Kesgitleme. Eger $y(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan islendik bahasy üçin $y(-x)=y(-x)$ deňlik dogry bolsa, onda ol funksiýa täk funksiýa diýilýär.

Täk funksiýanyň grafigi koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik bolýar.

Mysal üçin: funksiýa täk funksiýadyr. Hakykatdan hem

, ýagny $y(-x)=y(-x)$.

Geliň indi erkin özbaşdak ululyga dürli bahalary berip we täk funksiýa düşünjesinden peýdalanyp funksiýanyň grafigini guralyň:



$y=\frac{k}{x}$ – ters proporsionallyga degişli x we y ululyklaryň (x_1, y_1) hem-de (x_2, y_2) bahalar jübütine seredeliň:

$$y_1=\frac{k}{x_1};\quad y_2=\frac{k}{x_2},$$

Funksiýanyň bahalaryny biri-birine gatnaşdyryp alarys:

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{k}{x_2}:\frac{k}{x_1}=\frac{k}{x_2}\cdot\frac{x_1}{k}=\frac{x_1}{x_2}\text{ ýagny }\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1}{x_2}.$$

x özbaşdak (erkin) üýtgeýän ululygyň položitel bahalary üçin ters proporsionallygyň bu häsiýetini aşakdaky ýaly formulirlemek bolar:

Erkin üýtgeýän x ululygyň bahasyny birnaçe esse artdyrsak (kemeltsek), onda y funksiýanyň bahasy şonça esse kemeler (artar).

Ters proporsional baglanyşyk başlangyç synplarda ýörite öwrenilmeýär. Ol baglanyşyk diňe käbir meseleler çözülende gabat gelýär. Mysal üçin:

24 *kg* uny paketlere (gapjagazlara) salyşdyryp goýmaly. Eger ol uny 3 gaba, 4 gaba, 6 gaba, 8 gaba deňje paýlap gaplamaly bolsa, her paketde näçe *kg* un bolar?

Bu meselede gabyň sany üýtgäp durýar. Meseläniň çözüwini $y=\frac{24}{x}$ formulanyň üsti bilen almak bolar, ýagny x gap sanyny aňladýar, y bolsa her gapdaky unuň agramyny görkezýär. Diýmek, 24:3=8 (*kg*); 24:4=6 (*kg*); 24:6=4 (*kg*); 24:8=3 (*kg*) meseläniň çözüwi bolar.

Gönükmeler

1. Aşakdaky tablisa görnüşinde berlen funksiýalaryň haýsylary ters proporsionallyga degişli:

a) 

b) 

ç) 

d) 

2. $y=\frac{12}{x}$ funksiýanyň grafigini aşakdaky görkezilen köplüklerde gurmaly:

a) R – hakyky sanlaryň köplüginde;

b) $(0;\infty)$ – köplükde;

ç) $[1;6]$ – köplükde;

d) $\{1,2,3,4,6,12\}$ – köplükde.

3. Bir joýadan 24 *kg* pomidor ýygdylar. Eger ony 1 *kg*, 2 *kg*, 3 *kg*, 4 *kg*, 6 *kg*, 8 *kg* paketlere gaplamak zerur bolsa, ol pomidorlary gaplamak üçin dürli paketleriň hersinden näçesi gerek bolar?

4. Welosipedçi 12 *km/sag* tizlik bilen 2 sagat hereket etdi. Tizligi 4 *km/sag* deň bolan pyýada ýolagçy welosipedçiniň şol geçen ýoluny näçe wagtda geçer?

5. Iki sany agaç ussasynyň her biri birmeňzeş mukdarda oturgyç remont etdiler. Eger olaryň biri her günde 10 oturgyçdan remont edip, 6 gün işlän bolsa, ikinji sol işi 5 günde ýerine ýetirdi. Ikinji ussa her günde näçe oturgyç remont etdi?

V BAP
ULULYKLAR WE OLARY ÖLÇEMEK

§ 96. Ululyk düşünjesi we olaryň ölçelişi

Uzynlyk, meýdan, wagt, massa, tizlik we ş.m. ululyklardyr. Biziň daş-töweregimizi gurşap alan tebigatda bolup, geçýän özgerişlikler dürli-dürli bolup olar yzygider üýtgäp durandyr. Şol üýtgemelere ylmy esasda baha bermek üçin biz ululyk düşünjelerini, olaryň ölçelişini we häsiýetlerini düýpli öwrenmelidiris. Ululyklar baradaky ilkinji käbir düşünjeler başlangyç matematikada öwrenilip başlanýar.

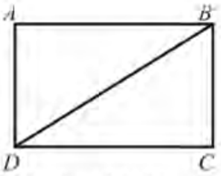
Ululyklar bu obýektleriň ýa-da hadysalaryň aýratyn häsiýetleridir. Mysal üçin, haýsy-da bolsa bir predmetiň belli bir massasy bardyr, her bir tekiz predmetiň tutýan meýdany bardyr we ş.m.

Dürli-dürli predmetlere mahsus bolan şol bir häsiýetlere birjynsly ululyklar diýilýär. Olardan tapawutlylykda dürli häsiýetleri görkezýän ululyklar birjynsly däldir (mysal üçin, meýdan hem-de wagt birjynsly ululyklar däldir).

Birjynsly ululyklar aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. Birjynsly iki ululygy deňeşdirmek bolýar; olar ýa deňdirler ýa-da olaryň biri beýlekisinden kiçidir. Başgaça aýdylanda islendik a we b ululyklar üçin, $a<b$ $a=b$; $a>b$ gatnaşyklaryň biri we diňe biri dogrudyr. Mysal üçin, göniburçlugyň diogonaly onuň islendik tarapyndan uludyr, astronomik sagat akademik sagatdan uludyr we ş.m.

2. Birjynsly ululyklary goşmak bolýar we onuň netijesinde ýene şol jynsdan bolan ululyk alynýar. Başgaça aýdylan islendik a we b ululyklar üçin olaryň jemi diýip atlandyrylýan we birbelgili kesgitlenýän a+b ululyk bardyr. Mysal ücin, $ABCD$ göniburçlugyň meýdany ABC we ACD üçburcluklaryň meýdanlarynyň jemine deňdir, ýagny $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}$.



3. Ululygy hakyky sana köpeltmek bolýar we onuň netijesinde ýene-de şol jynsdaky ululyk alynýar. Mysal üçin, haýsy-da bolsa bir harydyň 5 sanysynyň bahasyny tapmak üçin olaryň biriniň bahasyny 5-e köpeldýäris.

4. Birjynysly ululyklary biri-birinden aýyrmak bolýar we onuň netijesinde ýene-de şol jynsdan bolan ululyk alynýar. Mysal üçin, astronomik bilen akademik sagadyň tapawudy 15 minuda deňdir.

5. Şol bir jynsdan bolan iki ululygy bir-birine bölmek bolar we onuň netijesinde otrisatel däl hakyky san alnar. Mysal üçin, 12 *sm* uzynlykdaky kesimi her biri 4 *sm*-e deň bolan kesimleriň näçesiniň üsti bilen aňladyp bolar? (3 sanysy).

Şol bir jynsly ululyklary deňeşdirip bolýanlygy bize mälimdir. Býr ululygyň başga bir ululykdan nähili tapawutlanýandygyny takyk bilmek üçin olary ölçemeklik zerurlygy ýüze çykýar. Umumun ölçemeklik bu ölçeg birligini saýlap almak bilen, şol birligiň berlen obýektde näçesiniň bardygyny kesgitlemekdir. Mysal üçin, satyn alan garpyzymyzyň massasyny (agramyny) bilmek üçin tereziniň bir tarapyna garpyzy, beýleki tarapyna bolsa çeküw daşlaryny goýýarys. Şeýlelikde, eger a ululyk berlip, *e* ölçeg birligi saýlanyp alnan bolsa, onda *a* ululygy ölçemekligiň netijesinde deňligi kanagatlandyrýan *x* hakyky sany tapýarys. Şol *x* sana *a* ululygyň *e* ölçeg birligindäki san bahasy diýilýär.

Mysal üçin:

1 *m*=10 *dm*=100 *sm*;

3 *sut*= *sag* we ş.m.

Diňe özüniň san bahasy bilen kes-gitlenýän ululyklara skalýar ululyklar diýilýär. Muňa mysal edip, uzynlygy, meýdany, göwrümi, massany almak bolar.

Skalýar ululyklardan başga matematikada wektor ululyklara hem se-redilýär. Bu ýerde wektor ululygy bermek üçin onuň san bahasyny hem-de ugruny görkezmeli bolýar. Oňa mysal edip, güýç, tizlenme we ş.m. ululyklary görkezmek bolýar.

Ululyklary ölçemek we deňeşdirmek sanlar üstünde yerine yetirmeklik bilen amala aşyrylýar.

Gönükmeler

1. Iki sany ýüp böleginiň uzynlyklaryny ölçemezden nädip deňeşdirip bolar?

2. Dürli iki gaba suw guýlupdyr. Gaplaryň göwrümlerini ölçemezden olaryň haýsysynda suwuň köpdügini nädip bilmeli?

3. 8 sany altyndan ýüzügiň biri galp we beýlekilerden ýeňil. Ony 2 çeküwdan soň tapyp bolarmy?

4. Suratda gönüburçluklar berlen. Eger olaryň meýdanlary a we b bolsa, onda meýdanlary: a) $2a+b$; b) $b-a$; ç) $3a+2b$ deň bolan gönüburçluklary guruň.

5. Ululyklary deňeşdiriň:

a)  ç) 

b)  we 45 *min*; d) 1 *ga* we 10000 m^2.

6. Meseleleri çözüň we ululyklar üstünde haýsy amallary yerine ýetirendigiňizi düşündiriň.

a) Işçi 3 sany gapyny  sagatda reňkledi. Birinji gapyny reňklemek üçin 0,25 *sag*, ikinji gapy üçin bolsa  sag sarp etdi. Ol üçünji gapyny näçe wagtda reňkläpdir?

b) Nebit bazasynda 12680 *t* benzin bardy. Birinji gün 834 *t*, ikinji günde oňa garaňda 2 esse az, üçünji gün bolsa ikinji gündäkä garanyňda 229 *t* köp benzin goýberilipdir. Şondan soňra nebit bazasynda näçe benzin galypdyr?

§ 97. Kesimiň uzynlygy we onuň ölçelişi

Kesgitleme. Kesimiň uzynlygy diýip her bir kesim üçin aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan položitel ululyga aýdylýar.

1. Deň kesimleriň deň uzynlyklary bardyr;

2. Eger kesim tükenikli sany kesimlerden durýan bolsa, onda onuň uzynlygy ony düzýän kesimleriň uzynlyklarynyň jemine deňdir.

Kesimleriň uzynlyklarynyň ölçelişine seredeliň. Ölçemek üçin haýsyda bolsa bir e kesimi saýlap alýarys we a kesimiň başlanýan ýerinden e kesimi ugurdaş alyp goýmak bilen a kesimiň näçe sany e kesimden durýandygyny kesgitleýäris. Goý, e kesim a kesimde n gezek ýerleşýän bolsun. Bu halda a kesimiň uzynlygy n natural sana deň diýilýär we ony $a=ne$ ýazylýar. Eger e kesimi a kesimde n gezek goýanymyzda ýene e kesimden kiçi kesim galýan bolsa, ony ölçemek üçin bolan täze e_1 birlik kesimi alarys. Eger ol kesimde hem a kesimiň ahyrky nokady gabat gelmese, täze bolan e_2 birlik kesime geçeris. Bu prosesi tükeniksiz dowam edip, a kesimiň uzynlygyny tükeniksiz onluk drob bilen aňladarys. Saýlanyp alnan birlik kesimde islendik kesimiň uzynlygyny položitel hakyky san bilen aňladyp bolýandygyna göz ýetirdik.

Kesimiň uzynlygy aşakdaky esasy häsiýetlere eýedir.

1. Saýlanyp alnan uzynlyk birliginde islendik kesimiň uzynlygy položitel hakyky san bilen aňladylýar we tersine her bir položitel hakyky san üçin uzynlygy şol san bilen aňladylýan kesim bardyr.

2. Eger iki kesim deň bolsa, onda olaryň uzynlyklaryny aňladýan san bahalary hem deňdirler, tersine, eger iki kesimiň uzynlyklaryny aňladýan san bahalary deň bolsa, onda ol kesimleriň özleri hem deňdirler.

3. Eger berlen kesim birnäçe kesimleriň jeminden durýan bolsa, onda onuň uzynlygyny aňladýan san bahasy ol kesimi düzýän kesimleriň uzynlyklaryny aňladýan san bahalarynyň jemine deňdir.

4. Eger a we b kesimler üçin e birlik kesimde $b=xa$, (x-položitel hakyky san) bolsa, onda b kesimiň uzynlygyny e birlik kesimde tapmak üçin a kesimiň uzynlygyny x sana köpeltmek ýeterlikdir.

5. Birlik kesim üýtgese ol kesimiň uzynlygynyň san bahasy hem üýtgeýär: eger birlik kesim birnäçe esse ulaldylsa, onda kesimiň uzynlygynyň san bahasy şonça esse kiçeler.

6. Eger *a* kesim *b* kesimden uly bolsa, onda şol bir birlik kesimde *a* kesimiň uzynlygynyň san bahasy *b* kesimiň uzynlygynyň san bahasyndan uludyr.

7. Eger *a* we *b* kesimleriň tapawudy käbir *c* kesim bolsa, onda şol bir birlik kesimde *c* kesimiň uzynlygynyň san bahasy *a* we *b* kesimleriň uzynlyklarynyň san bahalarynyň tapawudyna deňdir.

8. Eger *a* kesim *x* sany birmeňzeş *b* kesimlerden durýan bolsa, onda şol bir birlik kesimde *a* kesimiň uzynlygynyň san bahasynyň *b* kesimiň uzynlygynyň san bahasyna bolan gatnaşygy *x* sana deňdir.

Bu häsiýetler kesimleriň uzynlyklaryny deňeşdirmäge, olaryň uzynlyklarynyň san bahalarynyň üstünde amallary ýerine ýetirmäge mümkinçilik berýär.

Başlangyç matematika kursunda kesimleriň uzynlyklaryny ölçeýär, olaryň uzynlyklary deňeşdirilýär, berlen uzynlykdaky kesimleri gurulýar, olaryň üstünde amallary ýerine ýetirilýär.

Gönükmeler

1. *A* şäherden *B* şähere çenli uzaklyk 210 *km*, *B* şäherden *C* şähere çenli uzaklyk bolsa 360 *km* bolsa, *A* şäherden *C* şähere çenli uzaklyk näçe *km* bolup biler?

2. Öýden mekdebe çenli aralyk 300 *m*, mekdepden söwda merkezine çenli aralyk 0,6 *km* deň. Mekdepden söwda merkezine çenli aralyk öýden mekdebe çenli aralykdan näçe esse köpdür.

3. Göni çyzykda *M*, *N*, *K*, *L* nokatlar *M* nokatdan *N* nokada çenli aralyk 2,5 *sm*, *N* nokatdan *K* nokada çenli aralyk 2 *sm*, *K* nokatdan *L* nokada çenli aralyk 1,5 *sm* bolsa, *MN*, *MK*, *NL*, *ML* kesimleriň uzynlyklaryny tapyň.

4. *A*, *B* we *C* nokatlar aşakdaky deňlikler dogry bolar ýaly berlip bilermi?

a) *AC*=12 *sm*, *AB*=7 *sm*, *BC*=5 *sm*;

b) *AC*=8 *sm*, *AB*=25 *sm*, *BC*=40 *sm*;

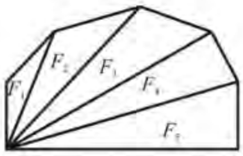
ç) *AC*= 24 *sm*, *AB*=30 *sm*, *BC*=40 *sm*.

§ 98. Figuranyň (şekiliniň) meýdany we onuň ölçelişi

Biz durmuşda "meýdan" sözüni köp ulanýarys; mysal üçin, ekin meýdany, otagyň meýdany, sport zalynyň meýdany, halynyň tutýan meýdany we ş.m.

Meýdanlaryň käbirleriniň deňdigine, käbirleriniň deň däldigine, käbirleriniň böleklerden durýandygyna düşünýäris. Ol düşünjeleri geometriýada meýdan ölçemekde peýdalanýarys. Geometrik figuralaryň gurluşlary dürli bolany üçin olaryň meýdanlary hakda gürrüň gidende olary aýratyn klaslara bölýärler: mysal üçin, güberçek köpburçluklaryň meýdanlary, tegelegiň meýdany, aýlanma jisimleriň üstleriniň meýdanlary we *ş.m.*

Goý käbir F figura F_1, F_2, F_3, F_4 we F_5 figuralardan düzülen bolsun.



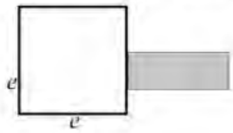
F figuranyň F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 figuralardan düzülendigi we hiç bir iki figuranyň içki umumy nokadynyň ýoklugy çyzgydan görünýär.

Kesgitleme. Figuranyň meýdany diýip aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan položitel ulylyga aýdylýar:

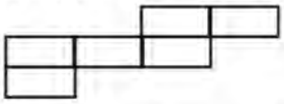
1) deň figuralaryň deň meýdanlary bolmak;

2) eger figura tükenikli böleklerden durýan bolsa, onda onuň meýdany hem şol bölekleriň meýdanlarynyň jemine deňdir.

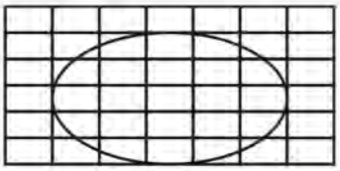
F figuranyň meýdanyny $S(F)$ belgilemekligi şertleşeliň. Meýdany ölçemek üçin hem uzynlyk ölçegimizdäki ýaly meýdan ölçeginiň birligi bolmalydyr we ol birlik tarapy e birlik kesime deň bolan kwadratyň meýdanydyr. Tarapy e deň bolan kwadratyň meýdany e^2 deňdir.



Eger käbir figuranyň meýdany bolsa, onda x sana e^2 ölçeg birliginde figuranyň meýdanynyň san bahasy diýilýär.



Mysal üçin: eger meydan ölçeginiň birligini sm^2 alsak, çyzgyda görkezilen figuranyň meýdany 6 sm^2 bolar. Meýdan ölçemekligiň bir usuly paletkadan ýüzi kwadratlara bölünen, dury (aňyrsy görünýän) meterialdan taýýarlanan esbapdan peýdalanyp ölçemekdir.



Goý, käbir F figuranyň – tegelegiň meýdanyny paletkanyň kömegi bilen ölçemeli bolsun. Onuň üçin tegelegiň üstüne paletkany goýýarys we ilki F figuranyň içinde ýerleşýän bitin kwadratlary sanaýarys, soň F figuranyň içinde ýöne bitin bolmadyk kwadratlary sanaýarys. Goý, m sany bitin we n sany bitin däl kwadrat bar diýeliň. Onda berlen figuranyň meýdany $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ deňsizligi kanagatlandyrýan ululykdyr. Bu ýerde gözlenýän meýdanyň m – kemi bilen alnan, $m+n$ artygy bilen alnan san bahalarydyr.

Getirilen mysalymyzda meýdan ölçemekligiň birligi sm^2 bolup, $m=9$; $n=26$ we 9 $sm^2 < S(F) < 35$ sm^2.

Görşümiz ýaly, meýdan käbir takyklykda ölçenendir. Eger paletkadaky kwadratlary has kiçi kwadratlara bölsek, ölçemekligiň takyklygy artardy.

Mysal üçin, tarapy bolan kwadratlara geçip bolar we şondan soň alnan meýdan, öňkä garanda has takyk bolar. Şonuň ýaly täze birliklere geçmeklige dowam edip has takyk san bahasyny alarys.

Matematikada saýlanyp alnan birlik kesimde her bir meýdan üçin san bahasy böljak bir sanyň bardygy we onuň ýeke-täkligi subut edilendir.

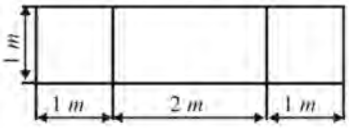
Paletkadan meýdan ölçemekde seýrek peýdalanylýar, ol usul köp işi talap edýär. Şonuň üçin hem matematikada figuralaryň meýdanlaryny tapmak üçin olaryň taraplarynyň, beýikliginiň, radiuslarynyň we ş.m. ölçeglerinden peýdalanylyp tapmaklyga seredilýär. Mysal üçin kwadratyň meýdanyny tapmak üçin onuň tarapynyň uzynlygyny kwadrat götermek bilen tapylýar.

Figuranyň meýdanynyň kesgitlemesinden şeýle düzgünler gelip çykýar.

1. Eger figuralar deň bolsalar, onda olaryň meýdanlary hem deňdirler (şol bir meýdan birliginde).

Meýdanlary deň bolan figuralara deňululykly figuralar diýilýär.

2. Eger F figura $F_1, F_2, ..., F_4$ figuralardan durýan bolsa, onda onuň meýdany ony düzýän $F_1, F_2, ..., F_4$ figuralaryň meýdanlarynyň jemine deňdir. Mysal üçin, klas tagtasy üç bölekden ybarat bolup, ol bölekleriň meýdanlary F_1, F_2 we F_3 bolsa, onda onuň meýdany $S(F)=S(F_1)+S(F_2)+S(F_3)$ bolar.



$$S(F)=S(F_1)+S(F_2)+S(F_3)=1m\cdot 1m+2m\cdot 1m+1m\cdot 1m=1m^2+$$

$$+2m^2+1m^2=4m^2.$$

3. Meýdan ölçeginiň birligi üýtgände meýdanyň ölçegini aňladýan san bahasy hem üýtgeýär: eger meýdanyň ölçeginiň birligi birnäçe esse ulaldylsa, meýdanyň san bahasy şonça esse kiçeler. (we tersine). Mysal üçin, albom listiniň kwadrat santimetrde meýdany 638 sm^2 bolsa, täze kwadrat desimetre geçilse, $638sm^2=638\cdot 0{,}01dm^2=6{,}38dm^2$ bolar.

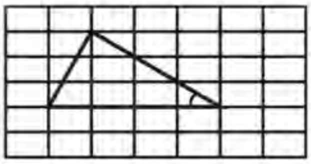
Başlangyç matematikada meýdan düşünjesi bilen ilkinji tanyşlyk geçirilýär.

Dürli figuralaryň meýdanlary deňeşdirilýär.

Okuwçylar paletkadan tarapy 1 kwadrat santimetrlere bölünen gözenekden peýdalanyp meýdan ölçeýärler. Onuň üçin ilki figuranyň içindäki doly kwadratlary sanaýarlar. Soň doly däl kwadratlary sanap, olaryň sanynyň ýarysyny alýarlar we alnan netijeleri goşýarlar. Mysal üçin, çyzykdaky üçburçlugyň meýdanyny tapalyň.

Doly kwadratlar – 5 sany;

Doly däl kwadratlar – 7 sany.



$$5+7:2=5+3\frac{1}{2}=8\frac{1}{2}(sm^2)$$

$$s(k)=8\frac{1}{2}sm^2.$$

Gönükmeler

1. Iki sany gönüburçlugyň meýdanlary deň. Bu ýerde gönüburçluklar deňdirler diýip netije çykarmak bolarmy?

2. F_1 figuranyň meýdany we F_2 figuranyň meýdanyndan kiçi. Bu ýerdan F_1 figura durşuna F_2 figurada ýerleşýär diýip netije çykarmak bolarmy?

3. F figuranyň meýdany F_1 we F_2 figuralaryň meýdanlarynyň jemine deň. Bu ýerden F figura F_1 we F_2 figuralardan durýar diýip netije çykarmak bolarmy?

4. Gönüburçlugyň meýdany 18 sm^2 bolup, onuň uzynlygy we ini natural sanlar bilen aňladylýandyr. Näçe dürli usul bilen ol gönüburçlugy gurup bolar.

5. Aşhananyň meýdany 12 m^2. Aşhananyň poluny tarapy 3 dm bolan inedördül linoliumlar bilen örtmek üçin olardan näçesi gerek bolar?

§ 99. Jisimiň massasy we onuň ölçenilişi

Massa düşünjesi iň esasy fiziki düşünjeleriň biridir. Ol düşünje agyrlyk düşünjesi bilen ysnyşykly baglanyşyklydyr. Jisimi Ýeriň dartýan güýjüne agyrlyk güýji diýilýänligi fizikanyň mekdep kursundan mälimdir. Umuman Ýeriň üstünde jisimiň massasy we agramy deň diýip kabul edilendir. Emma Aýyň üstünde agram massadan takmynan 6 esse kiçidir. Munuň sebäbi massa düşünjesi agyrlyk güýjüniň üsti bilen girizilýär, ol bolsa jisimi Ýeriň özüne dartyş güýjüdir.

Ryçagly填 tereziniň bir tarapyndaky okarasyna a jisimi, beýleki okarasyna bolsa b jisimi goýupdyrlar diýeliň. Şonda şu aşakdaky ýagdaýlaryň bolmagy mümkin:

1. Tereziniň iki tarapky okarasy hem şol bir derejede saklandy, ýagny terezi deňagramlaşdy. Bu ýagdaýda a we b jisimleriň deň massalary bar diýilýär.

2. Tereziniň a jisim goýlan tarapy aşak düşdi. B jisim goýlan tarapy bolsa ýokary galdy. Bu ýagdaýda a jisimiň massasy b jisiniň massasyndan uly diýilýär.

3. Tereziniň a jisim goýlan tarapy ýokary galdy, b jisim goýlan tarapy bolsa aşak düşdi. Bu ýagdaýda a jisimiň massasy b jisimiň massasyndan kiçi diýilýär.

Matematiki nukdaýnazardan seredeninde demassa düşünjesine şu aşakdaky ýaly kesgitlemäni bermek bolar:

Kesgitleme. Massa bu aşakdaky häsiýetlere eýe bolan käbir ululykdyr:

1) terezide deňagramlaşýan jisimleriň massalary birmeňzeşdir;

2) birnäçe jisimleriň bilelikdäki massasy, ol jisimleriň massalarynyň jemine deňdir.

Massa düşünjesini uzynlyk we meýdan düşünjeleri bilen deňeşdirsek, onda onuň uzynlyk we meýdan düşünjeleriniňki ýaly häsiýetlere eýedigini göreris. Uzynlyk we meýdan düşünjeleri geometrik şekillere mahsus bolsa, massa düşünjesi fiziki jisimlere mahsusdyr.

Jisimiň massasyny ölçemek tereziniň üsti bilen amala aşyrylýar. Ilki bilen e massa birligi hökmünde kabul edilen jisimi saýlap alýarys. Gerek bolsa ol massa birliginiň ülüşlerini hem alyp goýýarys. Mysal üçin massa birligi hökmünde kilogram alnan bolsa, onda onuň 1gram ülüşini alýarlar:

Tereziniň bir okarasyna massasyny ölçejek jisimimizi goýýarys, beýleki okarasyna bolsa massa birligi hökmünde kabul edilen çeküw daşlary goýýarys. Çeküw daşlaryny tä terezi deňagramlaşýança goýýarys. Şeýlelikde, biz berlen jisimiň massasynyň saýlanyp alnan birlikdäki san bahasyny tapýarys.

Uzynlyk düşünjesi üçin formulirlenen ähli tassyklamalar massasynyň san bahalary üçin hem dogrudyr. Massalary deňeşdirmek we olaryň üstünde amallary geçirmeklik massanyň san bahalaryny deňeşdirmek hem-de olaryň üstünde amallary ýerine ýetirmeklige syrykdyrylýar.

Gönükmeler

1. a) 4 *kg* 370 *g*; b) 12 *kg* 50 *g* massalary kilogramda aňladyň.

2. a) 5 *kg* 750 *g*; b) 16 *kg* 25 *g* massalary gramda aňladyň.

3. Ýeriň massasy 5,976·1024 *kg* Bu massany tonnada aňladyň.

4. Massalary deňeşdiriň:

a) b)

5. Massalary goşuň:

a) ; b) .

6. Eger diňe 200 *gr* we 50 *gr* çeküw daşy bar bolsa, nädip 3 çeküwde 9 *kg* tüwüden 2 *kg* tüwi alyp bolar?

7. 3 günde 1400 *kg* kartoşka satdylar. Birinji gün ikinji gündäkä garanyňda 100 *kg* az satdylar, üçünji gün bolsa birinji gündäkiniň bölegiçe kartoşka satdylar.

Her günde näçe kartoşka satyldy?

§ 100. Wagt aralyklary we olaryň ölçelişi

Wagt düşünjesi uzynlyk we massa düşünjesine garanyňda çylşyrymlydyr. Biziň gündelik durmuşymyzda wagt bir waka bilen beýleki wakanyň aralygydyr. Mysal üçin, günüň dogmagy birinji waka, günüň ýaşmagy ikinji waka. Ol wakalaryň arasynda bolsa wagt ýatandyr.

Matematikada we fizikada wagta skalýar ululyk hökmünde garalýar. Onuň sebäbi wagt düşünjesi edil uzynlyk, meýdan, massa düşünjesiniňki ýaly häsiýetlere eýedir.

Wagt aralyklaryny deňeşdirmek mümkindir. Mysal üçin, şol bir ýoly geçmek üçin pyýada ýolagçy welosipedçä garanyňda köp wagt sarp etmeli bolýar.

Wagt aralyklary goşmak bolar.

Wagt aralyklary aýyrmak bolar.

Wagt aralyklary položitel hakyky sana köpeltmek bolar.

Tebigatyň özgermegi, onuň üýtgäp durmagy, ýagny gije-gündiziň we pasyllaryň yzygider periodik gaýtalanyp durmagy wagt aralygyny ölçemek zerurlygyny ýüze çykarýar. Gadymy wagtlarda, bir-gije gündizi, ýagny bir sutkany 24 bölege bölüpdirler hem-de her bölegini 1 sagat diýip atlandyrypdyrlar. 1 ýyly 12 bölege bölüpdirler we her bölegine belli bir at dakypdyrlar.

Bir sagady 60 bölege bölüp, her bölegini 1 minut diýip we bir minudy 60 bölege bölüp, her bölegini 1 sekunt diýip atlandyrýarlar.

Bir ýyl Ýeriň Günüň daşyndan doly bir aýlaw edýän wagtydyr. Ol wagt aralygy 365 sutka, 5 sagat, 48 minut, 46 sekunda deňdir. Biziň eramyzdan öň 46-njy ýylda rim imperatory Ýuliý Sezar tarapyndan bir ýylyň kalendary girizilýär. Şol kalendaryň esasynda 1 ýyl 365 sutka 6 sagada deň diýip hasap edipdirler we her 4 ýylyň birini 366 sutka deňläpdirler.

Asyrlaryň geçmegi bilen adamlar wagtyň kalendar hasaby bilen Günüň asmandaky ýerleşişiniň arasynda tapawudyň bardygyna göz ýetiripdirler. Mysal üçin: XVI asyrda 21-nji mart gije-gündiziň ýaz aýyndaky deňleşmesi Güne seredip hasaplanyňda 11-nji marta gabat gelipdir. Bu 10 gün tapawut nireden emele gelipdir? Ol Ýulian kalendarynyň gün kalendary bilen tapawudynyň barlygyndan emele gelýär. Ýulian kalendary gün kalendaryndan 11min 14 sekunt uzakdyr. Şoňa görä her 400 ýylda ol kalendarlaryň aratapawudy 3 sutka gowrak bolýar. Biziň häzirki ulanýan grigorian kalendarymyz 1582-nji ýylda şol wagtdaky katolik buthanasynyň başlygy Grigori XIII tarapyndan girizilýär we şol kalendara görä 366 güne deň bolan ýyllaryň sany azaldylýar. Ýulian kalendarynyň esasynda her 4 ýylyň biri uzaldylýan bolsa, grigorian kalendarynyň esasynda 400-e bölünmeýän ýyllary uzaltmaýarlar, mysal üçin, 1600-nji we 2000-nji ýyl uzaldylan günli ýyllar bolsa, 1700, 1800, 1900-nji ýyllarda 365 gün bolandyr.

Ýulian kalendary gün kalendaryndan 1minut uzyn bolsa, grigorian kalendary bary-ýogy 26 *s* uzyndyr. Artykmaç 1 sutka 50-nji asyrda toplanýar. Biziň häzirki ýöredýän ýyl hasabymyz Isa pygamberiň doglan ýylyndan başlanýar we bu döwre biziň eramyz diýilýär.

Gönükmeler

1. Aý Ýeriň daşyna 29 *sut* 24 *sag* 44 *min* 3 *sek* doly aýlawyedýär. Bu wagt aralygyny sekuntlarda aňladyň.

2. Meşhur grek matematigi Arhimed biziň eramyzdan öňki 212-nji ýylda ýogalypdyr. Şondan bäri näçe asyr we näçe ýyl geçipdir?

3. Käbir döwletlerde täze ýyl baýramçylygyny iki gezek, ýagny 1-nji ýanwarda we 14-nji ýanwarda belleýärler. Munuň sebäbini düşündiriň.

4. Amallary ýerine ýetiriň.

a) 5 ýyl 7 aý 8 gün we 3 ýyl 2 aý 4 gün – wagt aralyklaryny goşmaly;

b) 5 *sm* 36 *sek* –wagtdan 45 *min* 40 *sek* – wagt aralygyny aýyrmaly;

ç) 7 sag 48 *min* 56 *sek* wagt aralygyny 16-a köpeltmeli;

d) 9 hepde 21 *sag* 52 *min* wagt aralygyny, 1 hepde 2 *sag* 44 *min*-wagt aralygyna bölmeli.

5. Meseleleri arifmetik we algebraik usulda çözmeli.

a) Golýazmany 8 günde täzeden çap etmelidi. Emma ony her günde 6 sahypa artykmaç çap etmek bilen 6 günde tamamladylar. Golýazma näçe sahypa?

b) Welosepidçi obadan etrap merkezine çenli aralygy 12*km/sag* tizlik bilen geçdi. Ol gaýdyşyn 15*km/sag* tizlik bilen hereket etdi we şol aralygy öňküsinden 18 *min* az wagtda geçdi. Obadan etrap merkezine çenli aralyk näçe?

§ 101. Ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklar

Daş-töweregimizi gurşap alýan tebigatda bolup geçýän özgerişlikler, wakalar, hadysalar, biri-biri bilen baglanyşyklydyr. Olaryň arasyndaky baglanşyklary matematika ylmynda ululyklaryň arasyndaky baglanşyklary öwrenmeklik bilen amala aşyrylýar.

Ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklar dürli-dürlüdir. Haýsy-da bola bir prosesi öwrenmekçi bolsak, biz onuň modelini gurýarys. Şol modelde prosese öz düýpli täsirini ýetirip biljek ähli ululyklary göz öňünde tutýarys. Alynjak jogabyň takyklygy modelleşdirmäniň takyklygyna baglydyr.

Wagt, tizlik, aralyk bu ululyklar deňölçegli göniçyzykly hereket bilen baglanyşykly ululyklardyr. Jisimiň deňölçegli gönüçyzykly hereketini formulanyň üsti bilen bermek bolar we bu ýerde S – geçilen ýoly, v – tizligi, t – bolsa wagty aňladýandyr.

Eger-de hereketiň tizligi hemişelik bolsa, onda geçilen ýol wagta göni proporsional bolar, ýagny $S=y$, $V=k$, $t=x$ diýsek $y=kx$ göni proporsionallygyň formulasyny alarys.

Deňölçegli gönüçyzykly hereketde geçilen ýoluň wagta baglylygy (tizlik hemişelik bolanda) $y=kx+b$ çyzykly funksiýanyň üsti bilen hem aňladyp bilner. Muňa mysal edip şeýle meselä seredeliň: syýahatçylar bir günde pyýadalap 18 *km* ýol geçdiler. Olar ýoluň galan bölegini awtobusly 45 *km/sag* tizlik bilen geçdiler. Eger syýahatçylar awtobusda 2 sag hereket eden bolsalar, onda olaryň umumy geçen ýoly näçe?

bolar.

Eger 3sagat hereket eden bolsa, onda

bolar.

Eger 4 sagat hereket eden bolsa, onda

bolar.

Bu ýerden S geçilen ýol bilen t wagtyň arasyndaky baglanyşygyň formulanyň üsti bilen aňladylýandygyna göz ýetirýäris.

Geliň, indi geçilen ýol hemişelik bolanda wagt bilen tizligiň arasyndaky baglanyşygy kesgitläliň. Ol baglanyşyk görnüşde bolar. Bu ýerde y wagt x tizlik, k ýoly (hemişelik) aňladýar. Tizlik bilen wagtyň arasyndaky ters proporsional baglanyşygyň birnäçe häsiýeti bardyr. Eger tizlik birnäçe esse ulalsa, onda wagt şonça esse kiçelýär we tersine, eger tizlik birnäçe esse kiçelse, onda wagt şonça esse ulalýar.

Teswirli meseleleri çözmek üçin ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklary bilmegimiz hökmandyr. Mysal üçin, aşakdaky meselä seredeliň: "Awtomaşynyň tizligi 60 *km/sag*. Welosipedçiniň tizligi bolsa ondan 5 esse az. Eger welosipedçi obadan demir ýol stansiýasyna çenli aralygy 2 sagatda geçen bolsa, onda awtomaşyn şol aralygy näçe minutda geçer?"

Bu meseläni iki usulda çözüp görkezeliň.

I usul.

Ilki bilen welosipedçiniň tizligini tapalyň.

Onda obadan demir ýol stansiýasyna çenli aralyk deň bolar. Indi awtomaşynyň ol aralygy näçe wagtda geçjekdigini tapalyň:

Bu jogaby awtomaşynyň tizliginiň ölçeg birligini üýtgetmek arkaly hem alyp bolar:

Onda $24km : 1km\ min = 24\ km$.

II usul.

Meseläni çözmek üçin ters proporssionallykdan peýdalanýarys:

Awtomaşynyň tizligi welosipedçiniň tizliginden 5 esse uly bolsa, onda onuň sarp eden wagty welosipedçiniňkiden 5 esse kiçidir, ýagny ol $2sag{:}5=120min{:}5=24min$ bolar.

Başlangyç klaslaryň matematikasynda ululyklaryň arasyndaky göni we ters proporsionallyga degişli aşakdaky ýaly meselelere seredilýär, ýagny:

a) harydyň jemi bahasy, mukdary, biriniň bahasy;

b) işiň möçberi, sarp edilen wagty, iş öndürijiligi;

c) matanyň möçberi, tikilen önümiň sany, bir önüm üçin sarp edilen mata ýaly ululyklar bilen baglanyşykly meselelere seredilýär.

Gönükmeler

1. Aşakdaky meseleleri arifmetik we analitik usulda çözmeli.

a) A şäherden B şähere tarap ýük maşyny çykyp ugrady. Şondan 2 sagat geçenden soňra B şäherden A şähere tarap ýeňil maşyn çykyp ugrady. Ýük maşynynyň tizligi 42 *km/sag*, ýeňil maşynyň tizligi bolsa 65 *km/sag* deň. Eger A we B şäherleriň arasy 619 *km* bolsa, olar B şäherden näçe uzaklykda duşuşarlar?

b) Kitap, ruçka we çyzgyç üçin 1 manat 55 teňňe tölediler. Eger kitabyň ruçkadan 65 teňňe, ruçkanyň bolsa çyzgyçdan 30 teňňe gymmatdygy belli bolsa, olaryň her haýsysynyň bahasyny aýdyň.

2. Aşakdaky meseleleri deňleme düzüp çözmeli:

a) işçiler topary 360 detal ýasamalydy. Olar her günde göz öňünde tutulandan 4 detaly artykmaç ýasamak bilen tabşyrygy bellenilen wagtdan 1 gün öň berjaý etdiler. Işçiler tabşyrygy näçe günde berjaý etdiler?

b) Iki işçi toparynyň hersi 780 detal ýasamalydy. Olaryň birinjisi her günde ikinjä garanyňda 9 detaly artykmaç ýasamak bilen tabşyrygy ikinji topardan 6 gün öň ýerine ýetirdi. Tabşyrygy her işçi topary näçe günde ýerine ýetirdi.

ç) 240 *km* aralygy otly göz öňünde tutulandan 10 *km/sag* pes tizlik bilen hereket etdi we barmaly wagtyndan 20 *min* gijä galdy. Otlynyň tizligini tapyň.

Welosipedçi obadan 30 *km* daşlykda ýerleşen şähere tarap ugrady. Ol gaýdyşyn tizligini 20 *km/sag* peseltdi we öňküsinden 30 *min* köp wagt sarp etdi. Welosipedçi obadan şähere näçe wagtda barar?

EDEBIÝAT

1. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М.* Основы начального курса математики. Москва, "Просвещение", 1988.

2. *Бантова М.А., Бельтюкова Г.Б., Полевщикова А.М.* Методика преподавания математики в начальных классах. Москва, "Просвещение", 1976.

3. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М., Лаврова Н.Н., Ирошников Н.П.* Сборник задач по математике. Москва, "Просвещение", 1979.

4. *Игнатьев В.А., Шор Я.А.* Сборник арифметических задач повышенной трудности. Москва, "Просвещение", 1968.

5. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М., Зельцер Д.Н., Ирошников Н.П.* Теоретические основы начального курса математики. Москва, "Просвещение", 1974.

6. *Ahmedow A.* Diskret matematika. Aşgabat, "Turan-1", 1992.

MAZMUNY

II BAP
NATURAL WE NOL SANLAR

III BAP
SAN DÜŞÜNJESI

IV BAP
DEŇLEMELER, DEŇSIZLIKLER, FUNKSIÝALAR

V BAP
ULULYKLAR WE OLARY ÖLÇEMEK

Hojamguly Saryýew, Gündogdy Şadurdyýew, Polat Gurbanow, Şeker Arazberdiýewa, Şamyrat Nurmyradow, Wellat Akmyradow, Süleýman Hudaýberdiýew, Arazgeldi Ýegenow, Gaýypnazar Nurnazarow, Hojageldi Babajykow

MATEMATIKANYŇ BAŞLANGYÇ KURSY

Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby

Ýörite redaktory	*G. Şadurdyýew*
Neşirýatyň redaktory	*N. Kakalyýewa*
Surat redaktory	*T. Aslanowa*
Teh. redaktory	*T. Aslanowa*
Suratçy	*G. Klýuýewa*

Ýygnamaga berildi 06.05.2010 ý. Çap etmäge rugsat edildi 31.08.2010 ý.
Ölçegi 60×90 $^1/_{16}$. Çap listi 19,0. Hasap-neşir listi 15,07.
Neşir №30. Sargyt № 08. Sany 2000.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň "Ylym" neşirýaty.
744000. Aşgabat. Türkmenbaşy şaýoly, 18.