TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

SEÝITNAZAR SEÝDI ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET
MUGALLYMÇYLYK INSTITUTY

M. Ýazkulyýew

O.A.Seýitkulyýewa

Matematiki fizikanyň usullary

Mugallymçylyk institutyň “Fizika”hünäriniň
talyplary üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlendi

AŞGABAT. 2010

Sözbaşy

Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň bilim edaralarynyň işini kämilleşdirmek dogrusyndaky kararynyň esasynda ýokary okuw mekdeplerinde okuwyň möhletiniň bäş ýyla geçirilmegi esasynda täzeden işlenen okuw meýilnamasyna birnäçe wajyp özgertmeler girizildi. Şeýle özgertmeleriň biri ol ýa-da beýleki hünärmeni taýýarlamakda täze hünär dersleriň girizilmegidir. Matematiki fizikanyň usullary dersi hem şeýle derslerden biridir. Bu ders fizika we matematika hünäriniň talyplary üçin niýetlenip girizildi.

Matematiki fizikanyň usullary dersinde fizika we matematika hünäriniň talyplary matematiki fizikanyň esasy deňlemeleri we bu deňlemeler bilen baglanyşykly goýulýan esasy meseleleriň çözüliş usullary barada başlangyç düşünjeler bilen tanyşdyrylýar. Şunlukda hususy önümli differensial deňlemeler, wektor analizi , matematiki fizikanyň esasy deňlemeleriniň getirilip çykarylyşy, bu deňlemeleriň umumy integralyny almaklygyň usullary öwretmeklik göz öňünde tutulýar.

I bap Skalýar, wektor we tenzor meýdanlary

§1 Skalýar meýdany

Häzirki zaman fizikasynyň köpsanly düşünjeleriniň esasynda meýdan düşünjesi durýar. Meýdanlary öwrenmekligiň esasy serişdesi bolup wektor analizi hyzmat edýär.

Goý Ω giňişlikde alynan oblast bolsun. Eger Ω oblastyň her bir M nokadyna haýsy hem bolsa bir kanun bilen kesgitli bir $u = u(M)$ san degişli edilýän bolsa,onda Ω oblastda u skalýar meýdan berlipdir diýilýär.Başga sözler bilen aýdylanda skalýar meýdany bermek diýmek munuň özi meýdanyň funksiýasy bolan $u = u(M)$ skalýar funksiýany beremkligi aňladýar. $u = u(M)$ ýazgy u ululyk nokadyň funksiýasy bolýanlygyny aňladýar. Ω oblast bolup tutuş giňişlik hyzmat edip bilýär.

Eger $u = u(M)$ ululyk t wagta bagly bolmasa,onda u skalýar meýdana stassionar meýdan diýilýär.Biz diňe stassionar skalýar meýdanlara serederis.

Gyzdyrlan jisimiň içindäki temperatura meýdany,massanyň dykyzlyk meýdany, elektrik meýdanyndaky potensialyň paýlanma meýdany skalýar meýdanyň mysallarydyr.

$u = u(M)$ ýazgy giňişlikde koordinat sistemany girizmekligi göz öňünde tutmaýar.Eger giňişlikde koordinatalar sistemasy girizilen bolsa,meselem gönibur çly koordinatalar sistemasy girizilen bolsa,onda M nokadyň berilmegi onuň x, y, z koordinatalarynyň beilmegine deňgüýçlidir.Şunlukda meýdanyň $u = u(M)$ funksiýasy x, y, z üç üýtgeýänli $u = u(x; y; z)$ funksiýa bolýar.Biz hemişe bu funksiýa üznüksiz hususy önümlere eýe diýip guman ederis.

Giňişlikde beýleki koordinatalar sistemasyny,meselem silindrik we sferik koordinatalaryny girizmek bolýar.

Üst derejeleri. Skalýar meýdany köplenç üst derejeleriniň kömegi bilen geomnetiki şekillendirýärler.

$u = u(M)$ skalýar meýdanyň üst derejeleri diýip $u = u(M)$ meýdan funksiýasynyň hemişelik bahalary alýan giňişligiň nokatlar köplügine aýdylýar.

Göniburçly koordinatalar sistemasynda üst derejeleri $u(x;y;z)=C$ görnüşde dir.Bu ýerde C -käbir erkin hemişelik.

Fizika kursunda potensial meýdanlar seredilende üst derejelerine adatça ekwipotensial üstler diýilýär.

C erkin hemişelige dürli bahalary bermek bilen üst derejeleriniň maşgalasyny alýarys.

Sklýar meýdany şekillendirmekligiň beýan edilen usuly tekiz skalýar meýdan barada aýdylanda amatly bolýar. Şeýle meýdanlaryň u funksiýasy üýtgeýän $x;y$ ululyklaryň funksiýasy bolýar. Şonuň üçin hem tekiz skalýar meýdanlary dereje çyzyklarynyň kömegi bilen geometriki şekillendirmek bolýar.

Tekizlikde temperature meýdany berlen ýagdaýda dereje çyzyklar izotermalar, basyş meýdany berlen ýagdaýda izobaralar diýilýär.

§ 2 Meýdanyň ugur boýunça önümi

Kesgitleme : $u=u(M)$ skalýar meýdanyň M nokatda $\vec{n}$ ugur boýunça önümi diýip $u=u(M)$ funksiýanyň Δu artdyrmasynyň M nokadyň $\vec{n}$ wektoryň ugry boýunça $d=MM_1$ orun üýtgetmesine bolan gatnaşygnyň $d\to 0$ predeline aýdylýar we

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\lim_{d\to 0}\frac{\Delta u}{d}=\lim_{d\to 0}\frac{u(M_1)-u(M)}{d}$$ (1)ýaly bellenýär.

Ugur boýunça önümi tapmaklygyň amatly formulasyny getirip çykaralyň. Goý x,y,z fiksirlenen M nokadyň koordinatalary we $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ ululyklar $\vec{n}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýän birlik wektoryň koordinatalary bolsun. ($\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - $\vec{n}$ ugryň koordinata oklar bilen emele getiren burçlarynyň kosinuslary)Bu ýagdaýda M_1 nokadyň koordinatalary

$x+d\cos\alpha, y+d\cos\beta, z+d\cos\gamma$ görnüşde bolýar.

x,y,z, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ ululyklar fiksirlenen ululyklar. Şonuň üçin $u=u(M_1)$ funksiýa diňe d orun üýtgetmäniň funksiýasy bolýar.

Bu funksiýany $\phi(d)=a(x+d\cos\alpha, y+d\cos\beta, z+d\cos\gamma)$ görnüşde ýazmak bolar.

$\phi(0)=u(x;y;z)$ bolýandygyny göz öňünde tutsak ,onda (1) predel

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\lim_{d\to 0}\frac{\phi(d)-\phi(0)}{d}=\phi'(0)$$ deň bolar.

Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapmaklygyň formulasyna görä

$$\phi'(d)=u'_x(M_1)\cos\alpha+u'_y(M_1)\cos\beta+u'_z(M_1)\cos\gamma,$$

Bu ýerden

$$\phi'(0)=u'_x(M)\cos\alpha+u'_y(M)\cos\beta+u'_z(M)\cos\gamma,$$

Ýa-da

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\partial u}{dx}\cos\alpha+\frac{\partial u}{dy}\cos\beta+\frac{\partial u}{dz}\cos\gamma \qquad (2)$$

(2) formuladan görnüşi ýaly $\vec{n}$ wektoryň ugry $0x$ okuň položitel ugry bilen gabat gelse,ýagny $\alpha=0, \beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$,onda $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}$. Edil şuňa meňzeşlikde $\vec{n}$ wektoryň ugry $0y, 0z$ oklaryň položitel ugry bilen gabat gelende degişli deňlikleri ýazmak bolýar.Belli bolşy ýaly $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ hususy önümleriň u funksiýanyň degişli koordinata oklaryň ugry boýunça üýtgeýiş tizligini häsiýetlendirişi ýaly ugur boýunça önüm hem $u=u(x;y;z)$ funksiýanyň M nokatda $\vec{n}$ wektoryň ugry boýunça üýtgeýiş tizligini häsiýetlendirýär.Ugur boýunça önümiň absolýut ululygy tizligiň ululygyny kesgitleýär, önümiň alamaty bolsa, $u=u(x;y;z)$ funksiýanyň üýtgeýşini häsiýetlendirýär. (artýanlygyny ýa-da kemelýänligini). Ugur boýunça önümiň fiziki manysy hem şundan ybaratdyr.

Eger u meýdan tekiz meýdan bolsa, onda $\vec{n}$ ugry onuň $0x$ oka ýapgytlanma α burçy bilen doly kesgitlenýär. Bu ýagdaýda ugur boýunça önümiň formulasyny (2) formulada $\lambda=\frac{\pi}{2}$ we $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ goýup alynyp biliner. Şunlukda eger $\alpha=0$ bolsa,onda $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}$.

Egerde $\alpha=\frac{\pi}{2}$ bolsa,onda $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=.\frac{\partial u}{\partial y}$

Skalýar meýdanyň gradiýenti .

Goý $u=u(M)=u(x;y;z)$ skalýar meýdan berlen bolsun.

Kesgitleme : $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial x}\vec{k}$ wektora $u=u(M)$ skalýar meýdanyň M nokatdaky gradiýenti diýilýär we $gradu$ ýaly bellenýär.

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial x}\vec{k} \qquad (3)$$

$\vec{n}_0(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ wektor bilen $\vec{n}$ ugruň birlik wektoryny belläliň Şonda

$$\frac{\partial u}{\partial n}=gradu\cdot\vec{n}_0=|gradu|\cos\varphi=pr_{\vec{n}}gradu.$$

Bu ýerde φ -burç $gradu$ we $\vec{n}$ wektorlaryň arasyndaky burç.Diýmek $u=u(M)$ skalýar meýdanyň M nokatdaky berlen ugur boýunça önümi M nokatdaky meýdanyň gradiýentiniň bu ugra bolan prýeksiýasyna deňdir. Bu ýerden hem $\frac{\partial u}{\partial n}$ önüm M nokatda gradiýentiň ugry boýunça iň uly baha eýedir. Bu ýagdaýda

$$\frac{\partial u}{\partial n}=|gradu|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Şeýlelikde $gradu$ $u=u(M)$ skalýar meýdanyň berlen nokatda iň uly artýan ugruny görkezýän wektor bolup onuň moduly onuň artma tizligine deňdir.

Tekiz skalýar meýdanda $u=u(M)=u(x;y)$ gradient aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär.

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}j.$$

§3.Nabla operatory.Gradiýentiň hasaplanylyşy

Anglýaly matematik Ulýam Gamilton tarapyndan wektor differensial operator:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k}$$

girizilýär. Bu operator nabla operatory diýilýär.(nabla –grek sözi bolmak bilen öwrülip goýlan üçburçlugy aňladýan saz guralyny aňladýar.) Nabla operatory aňlatmalardan çepde ýazylmalydygyny ýatdan çykarmaly däldiris.Sebäbi bu operator özünden sagda durýan aňlatmlara täsir edýär.

Şonuň üçin

$$\nabla u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} \text{ ýa-da } \nabla u = gradu$$

Köp üýtgeýänli funksiýalary differensirlemegiň belli düzgünlerinden aşakdaky ýönekeý düzgünler alynýar.

1. $\nabla(C_1 u + C_2 v) = C_1 \nabla u + C_2 \nabla v$

Bu ýerde C_1, C_2 hemişelikler, u, v üýtgeýän $x; y; z$ ululyklaryň funksiýasy.

Bu formulany başgaça

$$grad(C_1 u + C_2 v) = C_1 gradu + C_2 gradv$$

görnüşde ýazmak bolýar.

2. $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ ýagny $grad(uv) = vgradu + ugradv$.

3. $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$ ýa-da $gradf(u) = f'(u)gradu$.

4. $\nabla f(u;v) = f'_u \nabla u + f'_v \nabla v$ ýagny

$$gradf(u;v) = f'_u gradu + f'_v gradv.$$

§4.Wektor meýdany.Wektor çyzyklary

Goý Ω giňişlik oblasty bolsun.Eger Ω giňişligiň her bir M nokadyna $\vec{a}(M)$ kesgitli bir wektor degişli edilen bolsa,onda Ω oblastda $\vec{a}$ wektor meýdany berlipdir diýilýär.

Ω oblastyň tutuş giňişlik bolmaklygy hem mümkin.Biz geljekde diňe stassionar (wagta bagly üýtgemeýän) wektor giňişliklerine serederis.Ştassionar wektor giňişliginde $\vec{a}(M)$ wektor diňe M nokada bagly bolup wagta bagly däldir.

Wektor meýdanyna mysallar :agyrlyk güýjüniň meýdany,elektrik we magnit induksiýa meýdanlary,elektrik togunyň dykyzlyk meýdany we ş.m.

$Oxyz$ göniburçly koordinatalar sistemasynda $\vec{a}(M)$ wektory

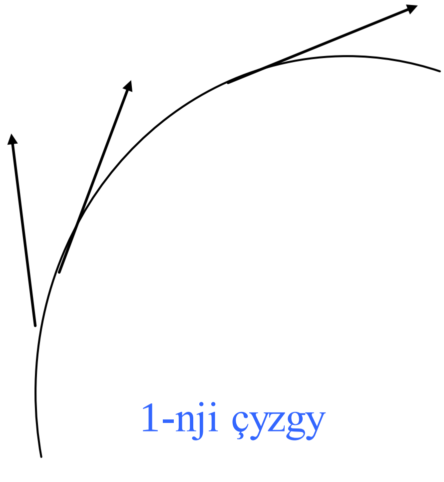
$$\vec{a}(M)=a_x(x;y;z)\vec{i}+a_y(x;y;z)\vec{j}+a_z(x;y;z)\vec{k}$$

ýaly ýazmak bolýar.Bu ýerde $a_x(x;y;z)$, $a_y(x;y;z)$, $a_z(x;y;z)$ M nokatda berlen wektoryň koordinat oklaryna bolan proýeksiýalary. $a_x(x;y;z)$, $a_y(x;y;z)$, $a_z(x;y;z)$ funksiýalar özleriniň hususy önümleri bilen birlikde üznüksiz diýip guman ederis.

Wektor meýdanlarynyň hususy ýagdaýlary.

Eger $\vec{a}(M)$ wektor hemişelik wektor bolsa, onda wektor meýdanyna birjynsly diýilýär. By ýagdaýda $a_{x,}a_y,a_z$ hemişelik ululyklar. Agyrlyk güýjüniň meýdany birjynsly wektor meýdanyna mysal bolup biler.

Eger $\vec{a}(M)$ wektor haýsy hem bolsa bir koordinata üýtgeýänine bagly bolmasa,onda wektor meýdanyna tekiz wektor meýdany diýilýär. Gidrodinamikada tekiz wektorlar has köp duş gelýär.



1-nji çyzgy

Wektor meýdanynuň wektor çyzyklary diýip her bir nokadynda geçirlen galtaşýan bu nokada degişli wektor bilen gabat gelýän çyzyga aýdylýar.(1-nji çyzgy)

Takyk meýdanlaryň wektor çyzyklarynyň aýdyň fiziki manysy bardyr. Meselem akýan suwuklygyň tizlikler meýdanyna seretsek, onda wektor çyzyklary bu suwuklykdaky akym çyzyklarydyr.
Elektrik meýdanynda wektor çyzyklary bu meýdanyň güýç çyzyklarydyr. Meselem hokatlanç zarýadyň meýdanynda zarýaddan çykýan şöhleler wektor çyzyklarydyr.

§5.Üst boýunça wektor akymy

Wagt birliginde σ üstden akyp geçýän suwuklygyň mukdary

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left(P(x;y;z)\cos\alpha + Q(x;y;z;)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma\right)ds \qquad (1)$$

ýa-da

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdy$$

integral bilen kesgitlenen Π ululyga σ üst boýunça suwuklyk akymy diýilýär.Suwuklygyň v wektor tizliginiň koordinatalary P,Q,R, σ üste geçirlen $\vec{n}$ normalyň $\vec{n}_0$ birlik wektorynyň koordinatalary $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ bolýanlygy we $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \bar{v}\,\overline{n_0}$ bolýanlygy üçin (1) formulany

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{v}\,\overline{n_0}\,ds \qquad \text{ýa-da} \qquad \Pi = \iint \overline{v_n}\,ds$$

görnüşde ýazmak bolýar. Bu ýerde $\overline{v_n}$ - $\bar{v}$ wektoryň $\bar{n}$ normal wektora proýeksiýasy.

Kesgitleme . $\vec{a}(M)$ wektoryň σ üst boýunça akymy diýip

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a}(M)\overline{n_0}ds \qquad (2)$$

üst integralyna aýdylýar. Bu ýerde $\vec{n}_0$ σ üste onuň M nokadynda geçirlen normalyň birlik wektory .Üst orientirlenen bolmalydyr.Munuň özi onuň her bir nokadynda $\bar{n}$ wektor σ üst boýunça üznüksiz üýtgär ýaly iki ugruň biriniň saýlanyp alynmalydygyny aňladýar. σ ýapyk üst bolan ýagdaýynda $\overline{n}(M)$ derek daşky normalyň wektory alynýar.

Goý $\vec{a}(M) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{n_0} = \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\cos\beta + \overline{k}\cos\gamma$ bolsun .Onda üstden wektoryň akymy

$$\Pi = \iint_\sigma (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)ds$$

integral bilen hasaplanylýar. Bu integraly aşakdaky gönüşde ýazmak bolar.

$$\Pi = \iint_\sigma a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy$$

Şeýleleikde, wektor akymyny hasplamaklyk üst boýunça integraly hasaplamaklyga getirilýär.Kesgitlemeden görnüşi ýaly Π wektor akymy skalýar ululykdyr.Eger norml wektoryň ugry üýtgedilse , onda Π akym alamatyny üýtgedýär. $\overline{a}(M)$ wektoryň $\overline{n}$ normal wektoryň birlik wektoryna skalýar köpeltmek hasyly bu wektoryň $\overline{n}$ ugra bolan $\overline{a_n}(M)$ proýekiýasyna deňdir,onda Π akymy

$$\Pi = \iint_\sigma a_n(M)ds \qquad (3)$$

görnüşde gysgaça ýazmak bolar.

Bu ýerden, hususy halda, eger käbir üstüň käbir böleginde $\overline{a}(M)$ wektoryň normala proýeksiýasy hemişelik bolsa,onda şeýle üstden akym $C \cdot Q$ köpeltmek hasyla deň bolar.Bu ýerde Q üst böleginiň meýdany.

σ üst ýapyk bolan ýagdaý köp meselelerde gabat gelýär .Eger-de daşky normal alynsa,onda biz σ üstüň içki akymy barada aýdarys.Ol akym

$$\Pi = \oiint_\sigma a_n(M)ds$$

ýaly bellenýär.

Haçanda $\overline{a}(M)$ wektor meýdan suwuklygyň tizlikler meýdany bolanda Π akym ululygy Ω oblstdan akyp çykýan suwuklyk bilen bu oblasta gelýän suwuklyklaryň mukdarlarynyň tapawudyna deňdir.

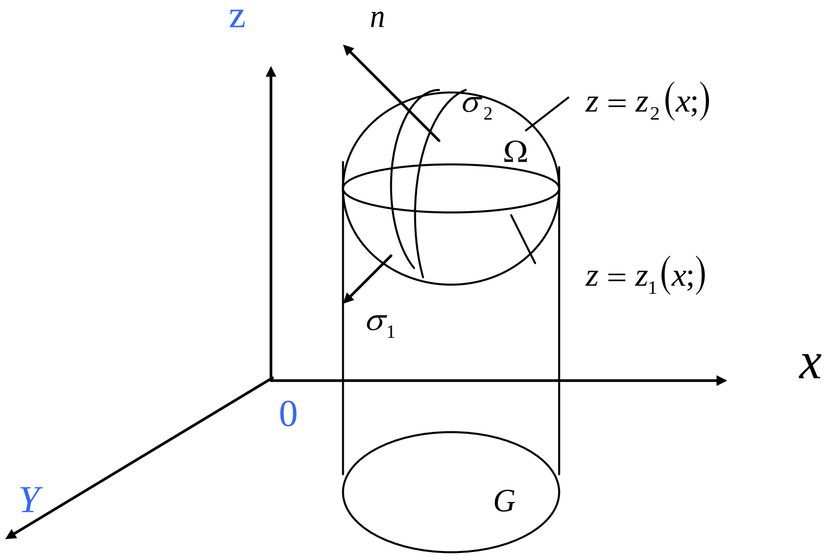
$\Pi = 0$ bolsa, onda Ω oblastan akyp çykýan suwuklyga deň bolan suwuklyk akýap giryänligini aňladýar.

Eger $\Pi > 0$ bolsa,onda Ω oblastdan akyp çykýan suwuklyk oňa gelýän suwuklykdan köpdür.Bu bolsa Ω oblastda suwuklyk akymyny iýmetlendirýän çeşmäniň barlygyny aňladýar.Eger $\Pi < 0$ bolsa,onda üstden suwuklygyň akdyrýan ýeriniň barlygyny aňladýar.

§6.Ostrogradskiý-Gaussyň formulasy

Ostrogradskiý-Gaussyň formulasy ýapyk üst boýunça üst integralyny bu üst bilen çäklenen giňişlik oblasty boýunça alynan üç gat integral bilen baglanyşdyrýar.Bu formula ýapyk kontur boýunça egriçyzykly integraly iki gat integral bilen baglanyşdyrýan Griniň formulasynyň giňişlikdäki görnüşidir.

Goý $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ funksiýalar özleriniň $P_x^/$, $Q_y^/$, $R_z^/$ hususy önümleri bilen bilelikde çägi koordinat oklaryna parallel bolan göni çyzyk bilen ikiden köp bolmadyk nokatda kesişýän Ω giňişlik oblastynda üznüksiz bolsun.Ýönekeýlik üçin, şeýle oblastlara ýönekeý oblast diýeris.Şunlukda σ üstüň daşky tarapyna serederis. σ üst vylmanak ýa-da bölekleýin vylmanak diýip guman edilýär. Goý G σ üstüň xOy tekizlige proýeksiýasy bolsun.(2-nji çyzgy)



2-nji çyzgy

$z = z_1(x;y)$ we $z = z_2(x;y)$ degişlilikde σ üstuň aşakky σ_1 we ýökarky σ_2 bölekleriniň deňlemeleri. $z = z_1(x;y); z = z_2(x;y)$

G oblastda üznüksiz bolan funksiýalar. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxd$ integraly aşakdaky ýaly özgerdeliň.

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial x} dxdydz \underset{I}{=} \iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$\underset{II}{=} \iint\limits_{G} \left(R(x;y;z_2(x;y)) - R(x;y;z_1(x;y))\right) dxdy =$$

$$\underset{III}{=} \iint\limits_{\sigma_2} R(x;y;z) dxdydz - \iint\limits_{\sigma_2} R(x;y;z) dxdydz$$

Bu özgertme I-üçgat integrallary hasaplamagyň düzgünine esaslanýar, II –Nýuton –Leýbnisiň formulasyna , III- bolsa iki gat integrallary hasaplamagyň düzgünine esaslanýar. Netijede , σ_1 we σ_2 üstleriň ýokarky tarapy boýunça inregrallar alynýar.

σ_1 üst boýunça integraly üýtgedip we ikinji jynsly üst integrallaryň häsiýetini göz öňünde tutup alarys.

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} R(x;y;z) dxdy \qquad (4)$$

Bu ýerde integral σ üstüň daşky tarapy boýunça alynýar.
Şuňa meňzeşlikde

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Pddydz \qquad (5)$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Qdzdx \qquad (6)$$

(4),(5),(6) deňlikleri agzama agza goşup

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{dz}\right) dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (7)$$

Ostrgradskiý -Gaussyň formulasy diýip atlandyrylýan formulany alarys

§7.Wektor meýdanynda köwlenme. Wektor meýdanynyň diwergensiýasy

1. $\bar{a}(M)$ wektor meýdanyň käbir M_0 nokadyna seredeliň.Bu nokady wektor meýdanynda tutuşlygyna saklanýan σ ýapyk üst bilen örteliň. σ üst boýunça wektor meýdanynyň akymyny hasaplalyň we bu akymyň Ω oblastyň σ üst bilen çäklenen böleginiň V görümine bolan gatnaşygyny tapalyň.

$$\frac{\oiint\limits_{\sigma} a_0(M)ds}{V} \qquad (8)$$

Suwuklygyň tizlikler meýdanynda bu gatnaşyk wagt birliginde Ω oblastda emele gelýän suwuklygyň mukdaryny kesgitleýär.Başgaça çeşmäniň ortaça göwrüm kuwwatyny berýär.
Indi (8) gatnaşygyň $V \to 0$ predelini tapalyň .

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma} a_0(M)ds}{V} \qquad (9)$$

Eger bu predel bar bolsa we ol položitel bolsa, onda M_0 nokada meýdanyň çeşmesi diýilýär.Eger otrisatel bolsa,onda meýdanyň toplanmasy(stok) diýilýär.Birinji ýagdaýda islendik tükeniksiz kiçi göwrümde suwuklyk döreýär,ikinji ýagdaýda bolsa suwuklyk ol nokada ýygnanýar.
(9) predele (eger bu predel bar bolsa) wektor meýdanynyň M_0 nokatda diwergensiýasy diýilýär,we $div\bar{a}(M_0)$ ýaly bellenýär.Şeýlelikde

$$div\bar{a}(M_0) = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma} a_0(M)ds}{V}.$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly wektor meýdanynyň diwergensiýasy skalýar ululykdyr.

Aşakdaky teorema (9) predeliň barlygy we diwergensiýany dekart koordinatlarda hasaplamagyň formulasyny almaklyga degişli sowala jogap berýär.

Teorema: $\bar{a}(M) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy aşakdaky formula bilen hasaplanylýar.

$$div\bar{a}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (10)$$

Bu ýerde a_x, a_y, a_z wektoryň düzüjileri M nokatda özleriniň birinji tertipli $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ hususy önümleri bilen bilelikde üznüksiz bolanfunksiýalar.

Subudy :Ýapyk σ üstden $\bar{a}(M)$ wektoryň akymy üçin Oatrogradskiý –Gaussyň formulasyny peydalanyp

$$\oiint_{\sigma} a_n(M)ds=\oiint_{\sigma} a_x dydz+a_y dzdx+a_z dxdy=$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz$$ deňligi alarys.Deňligiň sag tarapyna

orta baha hakyndaky teoremany ulanalyň.

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz=\left.\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\right|_{M_1}V$$

Eger Ω oblast M nokada dartylýan bolsa,onda M_1 nokat M nokada ymtylýar we

$$div\bar{a}(M)=\lim_{M_1\to M}\frac{\left.\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\right|_{M_1}V}{V}=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$ bolar.

Teorema subut edildi . Ostrogradskiý –Gaussyň formulasynyň wektor ýazgysyny alalyň.

Eger (7) formulada P, Q, R funksiýalara käbir $\bar{a}(M)$ wektoryň koordinata oklara proýeksiýalary hökmünde seretsek ,onda onuň sag bölegi $\bar{a}(M)$ wektoryň σ ýapyk üst boýunça akymyna deň

$$\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)=div\bar{a}(M)$$

Şonuň üçin Ostrogradskiý –Gaussyň formulasy aşakdaky görnüşde ýazylyp biliner.

$$\oiint_{\sigma} a_n(M)ds=\iiint_{\Omega} div\bar{a}(M)dv \qquad (11)$$

Bu formula aşakdaky netijäni berýär.Ýapyk üst boýunça wektor meýdanynyň akymy bu meýdanyň diüergensiýasyndan alynan üçgat integrala deňdir.

$\overline{v}$ tizligiň diwergensiýasy käbir M nokatda položitel diýip guman edeliň: $div\overline{v} > 0$.Hususy önümleriň üznüksizligine görä ol tükeniksiz kiçi M merkezli σ sfera bilen çäklenen Ω şarda hem položiteldir.Onda

$\iiint\limits_{\Omega} div\overline{a}(M)dxdydz > 0$. Diýmek, (11) formula esasynda

$\iint\limits_{\sigma} \overline{v_n} ds > 0$ ýagny , Ω oblastdan onuň σ çägi boýunça gelýän wektorlaryň mukdaryndan çykýan wektorlaryň mukdary köpdür.Şu sebäbe görä M nokada çeşme diýilýär.

Eger $div\overline{v} < 0$ bolsa ,onda M merkezli tükeniksiz kici sferadan cykýan wektorlaryň mukdaryndan gelýän wektorlaryň mukdary köpdür.şonuň üçin hem M nokada toplanma nokat diýilýär.

§8.Wektor meydanynyň sirkulýasiýasy

Goý ,wektor meýdany $\overline{a}(M)$ wektor bilen emele getirlen bolsun .

$$\vec{a}(M) = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$$

Bu meýdanda L çyzygy alalyň we onda kesgitli bir ugry saýlap alalyň. ds bilen ugry çyzyga geçirlen galtaşýanyň ugry bilen gabat gelýän we moduly boýunça duganyň differensialyna deň bolan wektory belläliň.Galtaşýanyň ugry saýlanyp alnan ugur bilen gabat gelýär diýlip hasap edilýär.Şonda

$$ds = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}.$$

L kontur boýunça $\overline{a}(M)$ wektoryň we ds wektoryň skalýar köpeltmek hasylyndan alynan egriçyzykly integrala seredeliň.

$$\int\limits_{L} \overline{a}(M)ds = \int a_x dx + a_y dy + a_z dz \qquad (12)$$

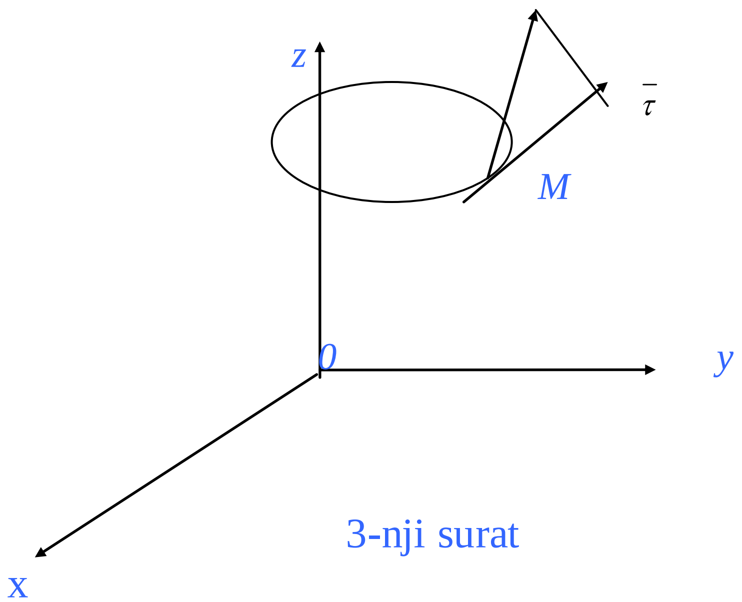
Guýç meýdanda (12) integral material nokadyň L çyzyk boýunça orun üýtgedende ýerine ýetirýän işini aňladýar.

Eger $\overline{a}(M)$ erkin wektor meýdany ,L ýapyk kontur bolsa,onda (12) integrala wektoryň sirkulýasiýasy diýilýär we ol

$$Ц_L = \oint_L a_t dt \qquad (13)$$ integrala deň bolar,

bu ýerde a_t - ululyk $\bar{a}(M)$ wektor meýdanyň L egrä M nokatda geçirlen galtaşýana bolan proýeksiýasy.Şunlukda, bu galtaşýanda kontury aýlanma ugruň ugry bilen gabat gelýän ugur položitel ugur deregine alinýar.(3-nji surat)

Kesgitleme : $\bar{a}(M)$ wektoryň L ýapyk kontur boýunca sirkulýasiýasy diýip, $\bar{a}(M)$ wektoryň $d\bar{s}$ wektora skalýar köpeltmek hasylyndan bu kontur boýunça alnan egriçyzykly integrala aýdylýar.



3-nji surat

§9.Wektor meýdanynyň rotory

Kesgitleme : $\bar{a}(M) = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$ **wektor meýdanynyň rotory diýip**

$$rot\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k} \qquad (14)$$

wektora aýdylýar.

Bu formulany ýatda saklamak amatly bolar ýaly ony kesgitleýji formada ýazalyň.

$$rot\,\overline{a}(M)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=[\nabla,\overline{a}]$$

Goý $\overline{n_0}=\overline{i}\cos\alpha+\overline{j}\cos\beta+\overline{k}\cos\gamma$ $\overline{n}$ ugruň birlik wektory bolsun.Bu ýagdaýda

$$\omega_n(M_0)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta+$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma \qquad (15)$$

$\omega_n(M_0)$ ululyga wektor meýdanyň köwlenmesi diýilýär.

Rotoryň aşakdaky ýaly häsiýetleri bar.

$$rot(C_1\overline{a_1}+C_2\overline{a_2})=C_1 rot\overline{a_1}+C_2 rot\overline{a_2}$$

Hemişelik ugurly $\overline{a}=u\overline{c}$ meýdanyň rotory üçin ($\overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}$ hemişelik wektor, $u=u(M)$ skalýar meýdan) alarys:

$$rot(u\overline{c})=-[\overline{c}\,,grad u] \qquad (16)$$

(16) formula $\overline{c}=\overline{c}(M)$ üýtgeýän wektor bolan ýagdaýda $[\nabla\ ,u\overline{c}]=-[\overline{c}\,,\nabla u]+u[\nabla\ ,\overline{c}]$ has umumy formulanyň hususy ýagdaýydyr.

§10.Stoksyň formulasy

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\sigma\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\lambda+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right)ds$$

(17)

Bu formulanyň çep bölegindäki integral $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ wektoryň $\oint\limits_L \overline{a_\tau} dl$ sirkulýasiýasyna deň,sag bölegi bolsa $rot\overline{a}$ wektoryň L kontur bilen çäklenen σ üst boýunça akymyna deň.
Diýmek ,Stoksyň formulasyny wektor görnüşinde aşakdaky ýaly ýazmak bolar.

$$\oint\limits_L \overline{a_\tau} dl = \iint\limits_\sigma rot_n \overline{a} ds \qquad (18)$$

Şeýlelikde $\overline{a}$ wektoryň L ýapyk konturyň ugry boýunça sirkulýasiýasy bu wektoryň

$\overline{a}$ wektor meýdanda ýatýan we L kontur bilen çäklenen σ üst boýunça köwlenme akymyna deňdir.

$rot_n \overline{a}$ wektor M nokadyň $\overline{n}$ ugruň töweregindäki $\omega_n(M)$ köwlenmesi bolany üçin (18) deňlik aşakdaky görnüşde ýazlyp biliner.

$$\oint\limits_L \overline{a_\tau} dl = \iint\limits_\sigma \omega_n(M) ds$$

Bu deňlik meýdanyň köwlenmesiniň σ üst boýunça alynan integraly L kontur boýunça sirkulýasiýa deňligini aňladýar.
Stoksyň formulasyny üst integrallaryny egriçyzykly integral bilen baglanyşdyrýan formulanyň kömegi bilen aşakdaky ýaly ýazmak bolýar.

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

Hususy halda eger σ $x0y$ tekizligiň L kontur bilen çäklenen oblasty bolsa,onda $dxdz$ we $dydz$ boýunça alynan integrallar nula öwrülýär.Stoksyň formulasy Riman---Griniň formulasyna geçýär.
Stoksyň formulasyndan eger

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

bolsa,onda giňişligiň islendik L ýapyk kontur boýunça alynan egriçyzykly integraly nula deňdir.

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

Bu bolsa berlen ýagdaýda egriçyzykly integralyň integrirlemek ýoluna bagly däldigini aňladýar.

§11.Ikinji tertipli differensial operasiýalar

∇ operatory birinji tertipli differensial operator bolany üçin ∇ operatoryny skalýar we wektor meýdanlaryna ulanmaklyga birinji tertipli differensial opasiýa diýlip atlandyrylýar. ∇ operatory wektor operatory bolmak bilen skalýar meýdanda ýeke-täk görnüşde (wektory sana köpeltmek), wektor meýdanda bolsa iki görnüşde (skalýar we wektor köpeltmek hasyl) ulanylyp biliner.Munuň özi bize belli birinji tertipli üç sany differensial operasiýany berýär.:Skalýar meýdanyň gradiýenti,wektor meýdanyň diwergensiýasy we rotory.

∇ operatorynyň iki gezek ulanylmasy möhüm ähmiýete eýedir.Ol operatoryň iki gezek ulanylmasyna ikinji teripli differensial operasiýalar diýilýär.

Mümkin bolan ikinji tertipli differensial operasiýalara seredeliň.

$u = u(M)$ skalýar meýdandan başlalyň. $\nabla u = gradu$ wektor meýdan .Bu wektora ∇ operator skalýar ýa-da wektor köpeltmek hasyl görnüşde ulanylyp biliner.Şunlukda ikinji tertipli iki sany operasiýa alynýar.

$$(\nabla, \nabla u) = divgradu \qquad (1)$$

$$[\nabla, \nabla u] = rotgradu \qquad (2)$$

Goý indi $\overline{a}(M)$ wektor meýdan bolsun. $(\nabla, \overline{a}) = div\overline{a}$ skalýar meýdan .Diýmek , ∇ operator bu meýdana ýeke-täk görnüşde ulanylyp biliner.

$$\nabla(\nabla, \overline{a}) = graddiv\overline{a} \qquad (3)$$

Bu ikinji tertipli operasiýalaryň üçünjisidir.

$[\nabla, \overline{a}] = rot\overline{a}$ wektor meýdan,onda oňa nabla operatory iki görnüşde ulanmaklyga mümkinçilik bar.Skalýar we wekor köpeltmek hasyllaryny almak mümkinçilikleri bar.

$$(\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = divrot\overline{a} \qquad (4)$$

$$[\nabla,[\nabla,\bar{a}]] = rotrot\bar{a} \qquad (5)$$

Bu iki formula ikinji tertipli differensial operasiýalaryň dördünji we bäşinjisidir.

Şeýlelikde jemi büş sany ikinji tertipli differensial operasiýa bar.Bu operasiýalyň ikisi ýagny (2) we (4) toždestwolaýyn nula deňdir.Sebäbi $[\nabla,\nabla]u$ we $(\nabla,[\nabla,\bar{a}])$ köpeltmek hasyllaryň birinjisinde iki wektor deň,ikinjisinde wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylynyň häsiýetini peýdalansak,deň wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly alynýar.

Ýokarda agzalan ikinji tertipli differensial operasiýalaryň(1) operasiýasyna geçeliň .Bu operasiýa (3) formulany ulanyp alarys.

$$divgradu = div\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Aşakdaky ikiinji tertipli differensial operatory dizeliň;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Bu operatora Laplasyň operatory diýilýär.Şunlukda

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\Delta\bar{a} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial z^2} \qquad (6)$$

deňlikden ,eger $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ bolsa,onda ∇ operatoryň skalýar kwadratyny alyp,taparys:

$$\nabla\ \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

Şonuň üçin Laplasyň operatoryny başgaça ∇^2 bilen hem belleýärler.Şeýlelikde, skalýar funksiýanyň gradiýentiniň diwergensiýasy bu funksiýanyň laplasýanyna deňdir.

$$graddivu = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u \qquad (7)$$

Şeýle hem (5) we (3) operasiýalar özaralarynda aşakdaky ýaly baglanyşykda diýip aýtmak bolar.

$$rotrot\bar{a} = graddiv\bar{a} - \Delta\bar{a} \qquad (8)$$

§12.Wektor meýdanynyň differensial häsiýetlendirijilerini hasaplamaga degişli mysallar

$\bar{a}(M)=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ wektor meýdanynyň wektor çyzyklary diýip her bir nokadynda geçirlen galtaşýanyň ugry $\bar{a}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýän çyzyga aýdylýar.

$\bar{a}(M)=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ wektor meýdanyň wektor çyzyklary aşakdaky differensial deňlemeler sistemasyndan tapylýar.

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$$

Mysal 1. $\bar{a}=cy\bar{i}-cx\bar{j}$ wektor meýdanyň wektor çyzyklaryny tapyň .

Çözüwi: $\frac{dx}{cy}=\frac{dy}{-cx}=\frac{dz}{0}$ bu sistemany $\frac{\partial x}{y}=\frac{\partial y}{-x}$, $dz=0$.Birinji deňlemeden $x^2+y^2=c_1^{\,2}$,ikinji deňlikden $z=c_2$.

Mysal 2. Nokadyň radius wektorynyň diwergensiýasyny tapmaly.

Alarys: $r=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$,onda $div\bar{r}=1+1+1=3$ bolar.

Mysal 3. Nokadyň radius wektorynyň göni tegelek silindriň daşky üsti boýunça akymyny tapyň.

Meseläni çözmek üçin $\oiint r_n d\sigma=\iint\limits_{\substack{gapdal\\ uat}} r_n d\sigma+\iint\limits_{\substack{asaky\\ esasy}} r_n d\sigma+\iint\limits_{\substack{yokarky\\ esasy}} r_n d\sigma$ formuladan peýdalanalyň.Gapdal üstde daşky normal $x0y$ tekizlige parallel we oňa r_n proýeksiýasy R deň. Şonuň üçin $\iint\limits_{\substack{gapdal\\ ust}} r_n d\sigma=R\iint\limits_{\substack{gapd.\\ ust}} r_n d\sigma=2\pi R^2H$. $2\pi RH$ silindriň gapdal üstüniň meýdany. Aşaky esasda radius wektor normala perpendikulýar we $r_n=0$. Diýmek

$$\iint\limits_{\substack{asakky\\ esas}} r_n d\sigma=0.$$

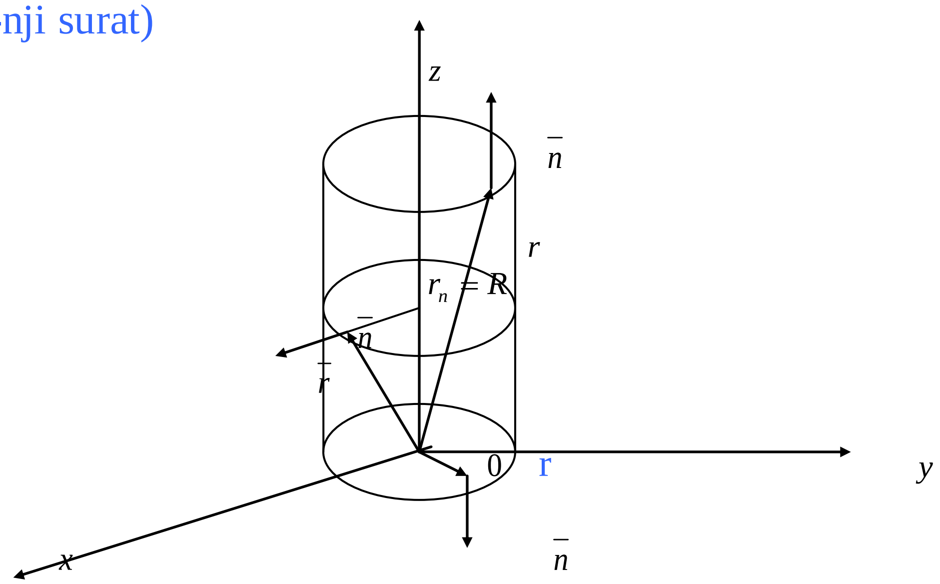
Ýokarky esasda normal $0z$ oka parallel gönükdirlen we $r_n=H$. Diýmek ,

$$\iint\limits_{\substack{yokarky\\esas}} r_n d\sigma = H \iint\limits_{\substack{yokarky\\esas}} d\sigma = H\pi R^2 .$$

Netijede wektoryň akymy

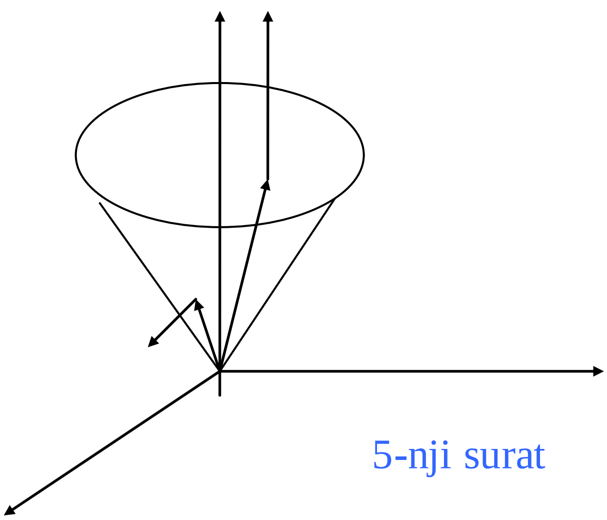
$$\oiint r_n d\sigma = \iint\limits_{\substack{gapdal\\uat}} r_n d\sigma + \iint\limits_{\substack{asaky\\esasy}} r_n d\sigma + \iint\limits_{\substack{yokarky\\esasy}} r_n d\sigma = 3\pi R^2 H .$$

(4-nji surat)



4-nji çyzgy

Mysal 4. Nokadyň radius wektorynyň depesi koordinatalar başlangyjy bilen gabat gelýän esasynyň radiusy R ,beýikligi H bolan göni konusyň daşky üsti boýunça wektor akymyny hasaplamaly.(5-nji surat)



5-nji surat

Alarys:

$$\oiint r_n d\sigma = \iint\limits_{\substack{gapdal\\uat}} r_n d\sigma + \iint\limits_{esasy} r_n d\sigma$$

Gapdal üstde radius wektor konusyň emele getirijisi bilen gabat gelýär,şonuň üçin konusa geçirlen normal bilen 90^0 burç emele getirýär.Diýmek

$$\iint\limits_{gapd.ust} r_n d\sigma = 0.$$

Konusyň esasynda r_n proýeksiýasy H deň we wektoryň akymy $\oiint r_n d\sigma = \pi R^2 H$ bolar.

Mysal 5: Elektrostatiki meýdanyň $D = \frac{e}{r^2} r^0$ induksiýa wektorynyň islendik ýapyk üst boýunça diwergensiýasyny we akymyny hasaplamaly.

Bu ýerde e- koordinatalar başlangyjynda ýerleşdirlen elektrik zarýad,r-meýdanyň nokadyndan zarýada çenli uzaklyk,r^0-radius wektoryň birlik wektory.

$$D = \frac{e}{r^2} r^0 = \frac{e}{r^3} \bar{r} = \frac{e}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}).$$

Şeýlelikde, D wektoryň proýeksiýalary $D_x = \frac{ex}{r^3}$, $D_y = \frac{ey}{r^3}$, $D_z = \frac{ez}{r^3}$ we $divD = 0$ bolýar.Sebäbi

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = e\frac{r^3 - 3xr^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - 3xr^2 \frac{x}{r}}{r^6} = e\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

Şuňa meňzeşlikde

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e\frac{r^3 - 3yr^2 \frac{\partial r}{\partial y}}{r^6} = \frac{r^3 - 3yr^2 \frac{y}{r}}{r^6} = e\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}.$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = e\frac{r^3 - 3zr^2 \frac{\partial r}{\partial z}}{r^6} = \frac{r^3 - 3zr^2 \frac{x}{r}}{r^6} = e\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Şeýlelikde D induksiýa wektorynyň diwergensiýasy zarýadyň ýerleşýän koordinatalar başlangyjyndan we D wektoryň tükeniksizlige öwrülýän ähli nokatlaryndan başga ähli ýerde nula deň.
Eger ýapyk S üst öz içinde zarýady saklamaýan bolsa,onda onuň içinde $divD = 0$.
S üst boýunça D wektoryň akymy hem nula deň bolýar.
Eger üst özünde zarýady saklaýan bolsa,onda D wektoryň üst boýunça akymy üstüň görnüşine bagly däldir.Şonuň üçin üst deregine merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan,R radiusly sferany alalyň.Sfera geçirlen daşky normal r^0 wektor boýunça gönükdirlendir we D wektor bilen birmeňzeş ugrukdyrlandyr.;bu ýagdaýda

$$D_n = |D| = \frac{e}{r^2}.$$

Sferanyň üstünde r radius wektor R deň bolan hemişelik bahasyny saklaýar.Bu ýerden

$$\oint_S D_n d\sigma = \oint_S \frac{e}{R^2} d\sigma = 4\pi e.$$

Şeýlelikde bir sany elektrik zarýady bilen döredilen , bu zarýady özünde saklaýan islendik ýapyk üst boýunça elektrostatik meýdanyň induksiýa wektorynyň akymy $4\pi e$ deň.

Mysal 6. $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j}$ wektoryň koordinat oklary we $\bar{r} = R\cos^3 t \cdot \bar{i} + R\sin^3 t\bar{j}$ astroidanyň birinji çärýegi bilen emele getirlen ýapyk egri boýunça sirkulýasiýasyny tapyň.

Çözüwi: L çyzuk iki sany BO we OA koordinat oklaryň kesiminden we astroidanyň AB dugasyndan ybaratdyr.L boýunça hereket sagat diliniň hereketiniň tersi boýunça amala aşyrylýar.Şonuň üçin wektoryň sirkulýasiýasy

$$\oint adr = \int_{AB} adr + \int_{Oa} adr$$

Bu deňligiň sag bölegindäki her bit integraly aýratynlykda hasaplalayň.

§ 13.Wektor düşünjesiniň analitiki kesgitlemesi

Ugrykdyrlan kesimler – wektorlar fiziki ululyklary geometriki şekillendirmekde giňden ulanylýar.Analitiki geometriýadan belli bolşy ýaly,wektorlary goşup,sana köpeldip we olary biri birine skalýar,wektor hem-de garyşyk köpelmek bolýar.Egerde wektorlaryň koordinatalary girizilse, ýokardakylar algebraik amallara getirilýär.Goý,tekizlikde berlen $\vec{a}$ wektoryň X we Y oklara proýeksiýalary degişlilikde a_x we a_y bolsun. Täze $X'OY'$ koordinatalar sistemasyna geçsek wektoryň koordinatalary üýtgeýär.Öňki a_x, a_y koordinatalar bilen täze $a_x^|, a_y^|$ koordinatalar arasynda baglanyşyk aşakdaky formulalar bilen berilýär

$$a_x^| = a_x \cos(x', x) + a_y \cos(x', y)$$

$$a'_y = a_x \cos(y', x) + a_y \cos(y', y) \qquad (1)$$

Her bir XOY koordinatalar sistemasyndan başga $X'OY'$ koordinatalar sistemasyna geçende (1) formulalaryň kömegi bilen $a_x^|, a_y^|$ skalýarlara geçýän iki sany a_x, a_y skalýarlar bilen häsiýetlendirilýän $\vec{a}$ ululyga wektor diýilýär.

Wektoryň bu kesgitlemesi geometriki kesgitlemeden çylşyrymly bolsa-da onuň wajyp üç artykmaçlygy bardyr.

Birinjiden ýokardaky kesgitleme esasynda wektor düşünjesini diňe üçölçegli giňişlikde däl,eýsem islendik ölçegli giňişlikde kesgitläp bolar.

Ikinjiden wektory analitiki kesgitläp,ony abstraklaşdyryp,islendik fiziki ululyklara ulanyp bolýar.Meselem,islendik reňki gyzyl,gök we ýaşyl reňkleriň kömegi bilen alyp bolýar.Eger her bir reňki $\vec{a}$ wektor diýsek,onda onuň düzüjileri $a_{gyzyl.}a_{g.}a_{y.}$ ululyklar bolar.

Üçünjiden , wektoryň analitiki kesgitlemesi wektor düşünjesini umumylaşdyryp,has çylşyrymly matematiki ululygy-ikinji we ýokary rangly tenzorlary girizmeklige mümkinçilik berýär.

Bu kesgitlemäniň ýetmezçilik taraplary hem bar; $\vec{a}$ wektoryň a_x, a_y düzüjiler diňe wektora bagly bolman, eýsem koordinatalar sistemasynyň saýlanyp alynyşyna bagly bolýar.

Wektoryň düzüjileri koordinatalar sistemasyna bagly bolsalarda olar geometriki obýekti-wektory kesgitlrýär.Onuň üçin bu obýekti häsiýetltndirýän baglanyşyklar bolmaly.Bu baglanyşyklara üýtgewsizler-inwariantlar diýilýär.Inwariantlara wektorlaryň uzynlyklary mysal bolup biler.Sebäbi bir koordinatalar sistemasyndan beýlekisine geçende wektorlaryň uzynlyklary üýtgemeýär.

§ 14.Tenzorlar we olaryň häsiýetleri

Kesgitleme: XOY **koordinatalar sistemasynda** $\overrightarrow{p_x} we \overrightarrow{p_y}$ **iki wektor bilen häsiýetlendirilýän** $X'OY'$ **koordinatalar sistemasyna geçende** $\vec{p}'_x we \, \vec{p}'_y$ **wektorlara**

$$\vec{p}'_x = \vec{p}_x \cos(x',x) + \vec{p}_y \cos(x',y)$$

$$\vec{p}'_y = \vec{p}_x \cos(y',x) + \vec{p}_y \cos(y',y)$$

formulalar özgerdilýän $\hat{I}$ **ululyga tenzor diýilýär.** $\overrightarrow{p_x} we \overrightarrow{p_y}$ wektorlara $\hat{I}$ tenzoryň degişlilikde X we Y oklar boýunça düzüjileri diýilýär. $\overrightarrow{p_x} we \overrightarrow{p_y}$ wektorlar tenzoryň bölekleri däl-de,olar tenzory häsiýetlendirýän ululyklardyr.Başga koordinatalar sistemasyna geçende olar täze düzüjilere geçýärler.

Wektorlaryň düzüjiler arkaly aňladylyşyna meňzeş tenzory hem aşakdaky ýaly

$$\hat{I} = \vec{p}_x \vec{i} + \vec{p}_y \vec{j}$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerde $\vec{p}_x \vec{i}$ -ýazgy wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly däl-de ,eýsem şertli ýazgy.

$\overrightarrow{p_x} we \overrightarrow{p_y}$ wektorlary düzüjileri arkaly

$$\vec{p}_x = p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j}$$

$$\vec{p}_y = p_{yx}\vec{i} + p_{yy}\vec{j}$$

aňlatsak,onda tenzory dört sany skalýar ululyk bilen kesgitläp bolar.Tenzoryň komponentalaryny jedwel (matrisa) gönüşde ýazalyň

$$\hat{I} = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{Vmatrix}$$

Amatlylyk üçin , x we y koordinatalary x_1 we x_2, $\vec{i}$ we $\vec{j}$ ortlary $\vec{i}_1$ we $\vec{i}_2$ diýip belläliň.Onda tenzory

$\hat{I} = \sum_k^2 \vec{i}_k \vec{p}_k$ görnüşde şertli ýazmak bolar.Onuň matrisa görnüşde ýazylyşy $\hat{I} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}$ görnüşe eýe bolar.

Bir koordinatalar sistemasyndan beýlekisine geçende tenzoryň täze we köne komponentalarynyň arasyndaky baglanyşyk

$$p'_{ki} = \sum_r \sum_s \alpha_{kr} \alpha_{is} p_{rs} \qquad (1)$$

bolar.Bu ýerde $\alpha_{ij} = \cos(x_i, x_j)$

Ýokardakylary hasaba alyp, tenzora täze kesgitleme berip bolar. Kesgitleme:Tenzor diýip XOY koordinatalar sistemasynda $\hat{I} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}$ matrisa görnüşde yazylan we $X'OY'$ koordinatalar sistemasyna geçende (1) formula bilen özgerdilýän p_{kl} sanlar bilen häsiýetlendirýän ululyga aýdylýar.

Tenzorlaryň käbir ýönekeý tiplerini sanalyň

1.Ähli komponentalary nula deň bolan tenzora nol tenzor diýilýär

$$\hat{O} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

2.Komponentalarynyň matrisasy

$$\hat{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

bolan tenzora birlik tenzor diýilýär.Nol we birlik tenzorlaryň komponentalary islendik koordinatalar sistemasynda üýtgewsiz galýar.

3.Eger tenzoryň komponentalary $p_{jk} = p_{kj}$ şerti kanagatlandyrýan bolsa,ýagny,matrisasy

$$\hat{S} = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix}$$

görnüşe eýe bolan tenzora simmetriki tenzor diýilýär.

4. Eger tenzoryň komponentalary $p_{jk} = -p_{kj}$ şerti kanagatlandyrýan bolsa we matrisasy

$$\hat{A} = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{Vmatrix}$$

görnüşe eýe bolan tenzora antisimmetriki tenzor diýilýär.

§15.Tenzor algebrasy

Tenzorlaryň üstünde käbir algebraik amallary geçirip bolýar:olary goşmak,sana köpeltmek, tenzory tenzora köpeltmek we ş.m. Diýmek,tenzorlaryň köplügi algebra emele getirýär

Tenzor islendik koordinatalar sistemasynda skalýar ululyklar bolan komponentalar bilen häsiýetlendirilýänligi üçin tenzorlar üstünde amallar skalýar ululyklar üstünde amallara syrykdyrylýar.

Tenzorlar üstünde algebraik operasiýalary belläp geçeliň.

1.Iki $\hat{\Pi}'$ we $\hat{\Pi}''$ tenzorlaryň jemi diýip komponentasy goşulýan tenzorlaryň degişli komponentalarynyň

$$p_{jk} = p'_{jk} + p''_{jk}$$

jemine deň bolan $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}' + \hat{\Pi}''$ tenzora aýdylýar.

2.Berlen $\hat{\Pi}$ tenzory λ sana köpeltmek diýip ähli komponentalary λ sana köpeldilen $\lambda\hat{\Pi}$ tenzora aýdylýar.

$$\lambda\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} \lambda p_{11} & \lambda p_{12} \\ \lambda p_{21} & \lambda p_{22} \end{Vmatrix}$$

3.Eger tenzoryň matrisasynyň setileri bilen sütünleriniň ornuny çalyşsak transponirlenen tenzor alynar.

Goý,tenzoryň matrisasy $\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}$ bolsun onda transpolirlenen tenzoryň mattisasy $\hat{\hat{\Pi}} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{Vmatrix}$ bolar.

Kesgitlemä görä $\hat{\hat{S}} = \hat{S}$ we $\hat{\hat{A}} = -\hat{A}$ bolýandygyny görmek bolar.

Islendik tenzory simmetriki we antisimmetriki tenzorlaryň jemi görnüşinde ýazmak bolýar.Hakykatdan-da,goý,

$$\hat{\Pi} = \hat{S} + \hat{A}$$

bolsun,onda

$$\hat{\hat{\Pi}} = \hat{S} - \hat{A}$$

bolar.Ýokardaky deňlikleri goşup we aýryp alarys

$$\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} + \hat{\hat{\Pi}})$$

$$A = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} - \hat{\hat{\Pi}})$$

Diýmek, $\hat{\Pi} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} + \hat{\hat{\Pi}}) + \frac{1}{2}(\hat{\Pi} - \hat{\hat{\Pi}})$.

Bu aňlatma ýeke-täkdir.

4. $\hat{\Pi} = \vec{p}_x\vec{i} + \vec{p}_y\vec{j}$ tenzory $\vec{a} = a_1\vec{i}_1 + a_2\vec{i}_2$ wektora sagdan köpeltmek diýip $\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a}) = \vec{i}_1(\vec{p}_1, \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2, \vec{a})$ wektora aýdylýar.Bu wektoryň düzüjileri

$$a'_1 = p_{11}a_1 + p_{12}a_2,$$
$$a'_2 = p_{21}a_1 + p_{22}a_2.$$

bolar.

5. $\hat{\Gamma} = \vec{p}_x\vec{i} + \vec{p}_y\vec{j}$ tenzory $\vec{a} = a_1\vec{i}_1 + a_2\vec{i}_2$ wektora çepden köpeltmek diýip $\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Gamma}) = (\vec{a}, \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a}, \vec{i}_2)\vec{p}_2$ wektora aýdylýar. $\vec{a}''$ wektoryň düzüjileri

$$a_1'' = a_1 p_{11} + a_2 p_{21},$$
$$a_2'' = a_1 p_{21} + a_2 p_{22}$$

deňlikler bilen tapylýar.

Tenzory wektora sagdan we çepden köpeltmegiň kesgitlemeleri esasynda aşakdaky deňlikler dogrydyr.

$$(\hat{\Gamma}, \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{\bar{\Gamma}}),$$
$$(\hat{S}, \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{S}),$$
$$(\hat{A}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \hat{A}).$$

Tenzory wektora sagdan we çepden köpeltmegi matrisalary köpeltmegi ulanyp ýazyp bolar.

$$\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a}) = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi}) = (a_1, a_2) \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}$$

6. $\hat{\Gamma}$ we $\hat{T}$ tenzorlaryň skalýar köpeltmek hasyly diýip matrisasynyň düzüjileri bu tenzorlaryň matrisalarynyň köpeltmek hasylynyň düzüjilerine deň bolan tenzora aýdylýar.

$$\hat{\Gamma}.\hat{T} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_{11}t_{11} + p_{12}t_{21} & p_{11}t_{12} + p_{12}t_{22} \\ p_{21}t_{11} + p_{22}t_{21} & p_{21}t_{12} + p_{22}t_{22} \end{Vmatrix}$$

Tenzoryň ýokarda sanalan häsiýetlerinden başgada tenzoryň üstünde has çylşyrymly operasiýalar hem geçirilýär.Biz olara seretjek däl.

§16.Tenzoryň baş ugurlary

Tenzory wektora skalýar köpeltmekde ilkibaşdaky wektor bilen diňe uzynlygy bilen däl ,eýsem ugry bilen tapawutlanýan wektor alynýar.

Tekizlikde käbir ugurlar bolup,bu ugur boýunça gönükdirlen $\vec{a}$ wektora tenzor bilen täsir etsek,ilkibaşdaky wektora kollinear $\vec{a}'$wektor alynýar.Bu ugurlara tenzoryň baş ugurlary diýilýär.

Goý ,$\vec{a}$ wektoryň ugry tenzoryň baş ugry bilen gabat gelýän bolsun,onda

$$(\hat{\Gamma},\vec{a}) = \lambda\vec{a}.$$

λ sana tenzoryň **baş** ýa-da **hususy bahasy** diýilýär.

Tekizlikde tenzoryň näçe baş ugrynyň barlygyny kesgitläliň. $(\hat{\Gamma},\vec{a}) = \lambda\vec{a}$.wektor deňligi koordinata oklaryna proýeksiýalarda ýazalyň.

$$p_{11}a_1 + p_{12}a_2 = \lambda a_1,$$
$$p_{21}a_1 + p_{22}a_2 = \lambda a_2.$$

Bu deňlemeler sistemasyny

$$(p_{11} - \lambda)a_1 + p_{12}a_2 = 0$$
$$p_{21}a_1 + (p_{22} - \lambda)a_2 = 0 \qquad (1)$$

görnüşde ýazmak bolar.

(1) deňlemeler sistemasy a_1 we a_2 ululyklara görä birlynsly çyzykly deňlemeler sistemasydyr.Onuň noldan tapawutly çözüwleri bolmaklygy üçin onuň kesgitleýjisi nola deň bolmaly:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Kesgitleýjini açsak

$$\lambda^2 - \lambda(p_{11} + p_{22}) + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

deňlemäni alarys. (3) deňlemä häsiýetlendiriji deňleme diýilýär. Bu deňlemeden λ hususy bahalary taparys.Eger (3) deňlemäniň λ_1 we λ_2 iki hakyky kökleri bar bolsa ,biz iki sany baş ugry alarys. λ_1 we λ_2 bahalary (1) deňliklerde yzygider goýup, $\vec{a}'$we$\vec{a}''$wektorlaryň düzüjilerini alarys. $\vec{a}'$we$\vec{a}''$ wektorlaryň X_1ok bilen emele getiren α_1 we α_2 burçlary baş ugry kesgitleýär:

$$tg\alpha_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1 = \frac{\lambda_1 - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_1 - p_{22}},$$
$$tg\alpha_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2 = \frac{\lambda_2 - p_{22}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_2 - p_{22}}.$$

(4)

Simmretriki tenzoryň baş ugurlary ýa-da oklary $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ýagdaýda özara perpendikulýar.Kratnyý kök bolanda ($\lambda_1 = \lambda_2$) ähli ugurlar baş ugur bolarlar.Bu ýagdaýda tenzoryň oklaryna derek islendik özara perpendikulýar iki ugry almak bolar.

§17. Tenzor ellipsi

Tenzora umuman kesgitli bir geometriki şekili degişli etmek mümkin däl .(Şunuň bilen tenzor hasaplamany özleşdirmekligiň kynçylygy düşündirilýär.) Ýöne fizikada adatça duş gelýän simmetrik tenzorlar bolan ýagdaýda tenzorlary geometriki düşündirmek mümkinçiligi bar. Ýagny her bir aýratyn däl simmetrik tenzora tekizlikde merkezi koniki egrini –ellipsi (köplenç) ýa-da giperbolany degişli etmek mümkin.

$$\hat{S} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix}$$

Simmetrik tenzora seredeliň ,bu ýerde $s_{12} = s_{22}$.

$$\left(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}\right) = 1, \qquad (1)$$

(bu ýerde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ derňelýän çyzygyň nokatlarynyň radius wektory)
wektor deňleme bilen kesgitlenýän geometriki orunlary kesgitlemeklige çalyşalyň ;

Eger $\hat{S}$ tenzor $\hat{I}$ birlik tenzora deň bolan bolsady ,onda (1) deňleme $\left(\vec{r}, \vec{r}\right) = 1$ aýdyň görnüşi alardy. Eger soňky deňligi koordinalarda ýazsak: $x^2 + y^2 = 1$ görnüşli töwerek alynar.

Umumy ýagdaýda $\hat{S} \neq \hat{I}$ bolan ýagdaýda (1) deňleme has umumy çylşyrymly egrini şekillendirer. Biziň bilşimiz ýaly $\left(\hat{S}, \vec{r}\right)$ käbir $\vec{r}^{\,/}$ wektory kesgitleýär, bu wektor

$$\vec{r}^{\,/} = \left(\hat{S}, \vec{r}\right) = \vec{i}\left(s_{11}x + s_{12}y\right) + \vec{j}\left(s_{21}x + s_{22}y\right)$$

deňlik bilen kesgitlenýär.(biz wagtlaýynça x_1,x_2 koordinatalara derek adaty x.y koordinatalara dolanýarys. Munuň özi biziň alýan gatnaşyklarymyzy analitik geometriýada ulanylýan adaty formulalar bilen deňeşdirmek amatly bolmagy üçin şeýle edýäris.). $\vec{r}$ wektory $\vec{r}\,'$ wektora skalýar köpeldip ikinji derejeli deňlemäni alarys :

$$s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}y^2 = 1 \qquad (2)$$

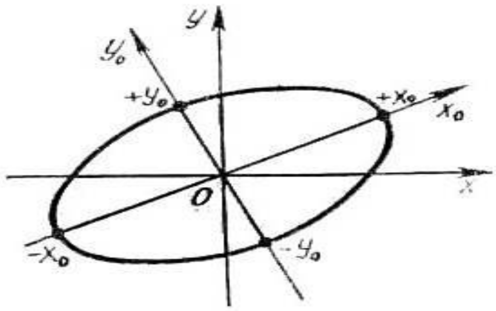
Bu deňlemäniň diskriminanty $\hat{S}$ tenzoryň kesgitleýjisi bilen gabat gelýär,özem guman etmä görä kesgitleýji nola deň däl , onda (2) deňleme ikinji derjeli merkezi egrini ellipsi ýa-da giperbolany berýär. $\hat{S}$ simmetrik tenzor bilen oňa degişli $\left(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}\right) = 1$ egriniň arasyndaky baglanyşyk aýratyn hem tenzoryň baş oklary bilen gabat gelýän koordinatalar sistemasy bilen aňladylanda has aýdyň duýulýar.Sebäbi bu ýagdaýda $\hat{S}$ tenzora degişli matrisa diagonal görnüşi alýar;

$\hat{S} = \begin{Vmatrix} s_{11}^0 & 0 \\ 0 & s_{22}^0 \end{Vmatrix}$ Bu ýerde $s_{11}^0 = \lambda_1, \quad s_{22}^0 = \lambda_{11}$, şeýlelikde egriniň $\left(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}\right) = 1$ deňlemesi hem ýönekeýleşýär:

$$\frac{x^2}{1/\lambda_1} + \frac{y^2}{1/\lambda_{11}} = 1 \qquad (3)$$

Bu ýerden hem haçanda $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{11} > 0$ bolanda ellips, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{11} < 0$ (ýa-da tersine) bolanda bolsa –giperbola alýarys . Eger iki λ_1 , λ_{11} baş bahalaryň ikisi hem otrisatel bolsa, onda (3) deňleme hyýaly ellipsi berýär.

Indi tenzor ellipsiniň koordinat oklary bilen kesişme nokatlaryny tapalyň. (3) deňlemeden görnüşi ýaly baş oklardan ellips $x_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_1}$, $y_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_{11}}$ kesimleri kesýär. Gezekli gezegine *y=0* we *x=0* diýip alyp koordinata oklarynyň ähli beýleki ugurlary üçin şuňa meňzeşlikde (3) deňlemeden ellipsiň absissalar okuny $x = \pm\frac{1}{\sqrt{s_{11}}}$ nokatlarda we ordinatalar okuny bolsa $y = \pm\frac{1}{\sqrt{s_{22}}}$ nokatlarda kesýänligini tapýary



6-njy çyzgy

Şeýlelikde tenzor ellipsini bilip bu tenzoryň islendik koordinatlar sistemasynda diagonal elementlerini $s_{11}=1/x^2$ $s_{22}=1/y^2$ gatnaşyklaryň kömegi bilen grafiki kesgitlemek mümkin. (6–njy çyzgy)

§18. n-ölçegli giňişlikde wektorlar we tenzorlar

Her bir koordinatalar sistemasynda $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ n sany skalýar düzüjiler bilen häsiýetlendirilýän we koordinata oklary aýlanda ol düzüjiler

$$a_i' = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} a_k \qquad (1)$$

kanun boýunça özgerdilýän $\vec{a}$ ululyga n-ölçegli wektor diýilýär.
Bu ýerde β_{ik} - n-ölçegli koordinata oklaryň aňlanma burçlaryny häsiňetlendirýär.

Islendik n-ölçegli wektory

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{i}_k a_k \qquad (2)$$

görnüşde ýazmak bolar.Bu ýerde $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$ - koordinata oklaryň ortlary.

Koordinata oklaryň saýlanyp alnyşyna bagly bolmaýan

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^2}$$

ululyga $\vec{a}$ wektoryň uzynlygy diýilýär.

Hususy ýagdaýda üçölçegli wektor

$$\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$$

ýa-da $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ görnüşde ýazylýar. Her bir koordinatalar sistemasynda n sany $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektor ululyklar ýa-da n^2 sany $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ skalýar komponentalar bilen häsiýetlendirilýän ululyga n-ölçegli $\hat{T}$ tenzor diýilýär.Düzüji wektorlar we skalýar komponentalar koordinata oklary aýlananda degişlilikde

$$\vec{p}'_j = \sum_k \beta_{lk} \vec{p}_k ,$$

$$p_{jk}{}' = \sum_i \sum_r \beta_{ji} \beta_{kr} p_{ir}$$

çyzykly kanun boýunça özgerdilýär.

Islendik n-ölçegli tenzory berlen koordinatalar sistemada düzüji wektorlaryň üsti bilen

$$\hat{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \vec{i}_k \vec{p}_k ,$$

görnüşde ýa-da skalýar komponentalaryň kömegi bilen

$$\hat{\Gamma} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}$$

matrisa görnüşinde aňladyp bolýar.

Üçölçegli giňişlikde tenzor üç wektor düzijiler arkaly

$$\hat{\Gamma} = (\vec{i}_1, \vec{p}_1) + (\vec{i}_2, \vec{p}_2) + (\vec{i}_3, \vec{p}_3)$$

görnüşde, skalýar komponentalaryň matrisasy bilen

$$\hat{\Gamma} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}$$

görnüşde ýazylýar.

Üçölçegli tenzoryň umuman üç sany özara perpendikulýar baş ugurlary we üçsany baş bahalary bardyr.

Aýratyn däl simmetriki tenzora üçölçegli giňişlikde baş ugurlar sistemada

$$\frac{x^2}{1/\lambda_1} + \frac{y^2}{1/\lambda_2} + \frac{z^2}{1/\lambda_3} = 1 \qquad (3)$$

ikinji tertipli üst degişli bolýar.Ol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ baş bahalaryň alamatlaryna görä aşakdaky üstleri berer:

1) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ bolanda ellipsoid,

2) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0$ bolanda birgowakly giperboloid,

3) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0$ bolanda ikigowakly giperboloid,

4) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0$ bolanda hyýaly ellipsoid.

Üçölçegli tenzoryň üýtgewsizleri (inwariantlary):

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33},$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu ululyklar islendik koordinatalar sistemasynda

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \qquad (5)$$
$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

bahalara deň bolar.

§19.Wektor meýdanynyň tenzor- önüminiň skalýar we wektor inwariantlary

Goý,üçölçegli giňişlikde $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ wektor meýdanynyň $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ radius wektor boýunça $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ önümi berlen bolsun.Bu önüm 9 skalýar komponentaly tenzory berer.

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

Tenzor-önümiň ilkinji inwarianty onuň diognal elementleriniň jemine deňdir.Birinji inwariant $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasyny berer.

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ tenzor-önüminiň beýleki inwariantlaryny derňemek üçin ony simmetriki we antisimmetriki tenzorlara dargadalyň.

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \hat{S} + \hat{A}$$

Bu ýerde

$$\hat{S}=\begin{Vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{1}{2(\ )}\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

$$\hat{A}=\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right) & 0 \end{Vmatrix}$$

Antisimmetriki tenzor üç sany komponenta bilen kesgitlenýär.Ol komponentalary $\omega_{\div}=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\omega_y=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\omega_z=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}$ diýip belläliň. Görnüşi ýaly,antisimmetriki tenzoryň komponentalary $\vec{a}$ wektor meýdanynyň rotorynyň koordinatalarydyr.

$$rot\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Diýmek,tenzor – önümiň antisimmetriki tenzory wektor meňdanynyň rotoryna ekwiwalentdir.Iki ululyk-skalýar div$\vec{a}$ we wektor rot$\vec{a}$, $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ tenzor-önüminiň inwariantlary, $\vec{a}$ wektor meýdanynyň differensial häsiýetlendiijileri bolyp hyzmat edýär.

II bap. Hususy önümli differensial deňlemeler

§1. Hususy önümli ikinli tertipli differensial deňlemeler barada düşünjeler

Hususy önümli differensial deňleme diýip köpüýtgeýänli näbelli funksiýany we onuň hususy önümlerini baglanyşdyrýan deňlige aýdylýar. Hususy önümli differensial deňlemäniň tertibi diýip bu deňlemä girýän hususy önümiň iň ýokary tertibine aýdylýar.

Meselem eger $u = u(x; y)$ bolsa, onda umumy ýagdaýda hususy önümli ikinji tertipli differensial deňlemäni

$$F(x; y;; u; u'_x; u'_y; u''_{xx}; u''_{xy}; u''_{yy}) = 0 \qquad (1)$$

görnüşde aňlatmak bolar. Bu ýerde F belli funksiýa.

Eger hususy önümli differensial deňleme näbelli funksiýa we onuň hususy önümlerine görä çyzykly funksiýa bolsa, onda oňa hususy önümli çyzykly differensial deňleme diýilýär.

Hususy önümli differensial deňlemeleriň fiziki meseleleri çözmekde ulanylyşynda ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemelere aýratyn orun degişlidir. Sebäbi köp sanly fiziki meseleler çözülende hususy önümli ikinji tertipli differensial deňlemeler alynýar.

Matematiki fizizkanyň esasy deňlemelerine seredeliň.

1. Tolkun deňlemesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

2. Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3)$$

3. Laplasyň deňlemesi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (4)

Bu deňlemeleri dürli şertlerde derňemek we çözmek üçin ýörite usullar, matematiki fizikanyň usullary diýlip atlandyrlan usullar döredilipdir.

(1) deňlemäni çyn deňlige öwürýän islendik $u = \varphi(x; y)$ funksiýa onuň çözüwi diýilýär.

Bilşimiz ýaly, adaty differensial deňlemeleriň umumy çözüwi erkin hemişelik sanlary saklaýar. Hususy önümli differensial deňlemeleriň umumy çözüwi erkin funksiýalary saklaýar. Şeýle hem her bir hususy önümli differensial deňlemäniň tükeniksiz köp hususy çözüwi bardyr. Takyk fiziki meseleler çözülende bolsa, bu çözüwlerden meseläniň fiziki manysyndan gelip çykýan käbir goşmaça şertleri kanagatlandyrýan çözüwleri tapmak talap edilýär. Şeýlelikde matematiki fizikanyň meseleleri hususy önümli differensial deňlemeleriň käbir goşmaça şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklykdan ybarat bolup durýar. Goşmaça şertler bolup seredilýän sredanyň çäklerinde berilýän şertler, ýagny gyra şertleri we wagtyň haýsy hem bolsa bir pursadyna degişli bolan başlangyç şertler hyzmat edýär.

Tebigy hadysalary suratlandyrýan islendik matematiki mesele aşakdaky üç şerti kanagatlandyrmalydyr.

1.Meseläniň çözüwi bar bolmaly;

2. çözüw ýeke-täk bolmaly;

3. çözüw durnukly bolmaly.

Çözüw durnukly bolmaly diýildigi meseläniň şertleriniň kiçi üýtgemesi çözüwiň hem kiçi üýtgemesine getirmeli diýildigidir.

Ýokardaky üç şerti kanagatlandyrýan meselä korrekt goýlan mesele diýilýär.

§2.Hususy önümli ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemeleriň toparlara bölünişi

Iki näbellili ikinji tertipli hususy önümli differensial deňleme diýip $x;y$ bagly däl üýtgeýänleri, $u(x;y)$ näbelli funksiýany we onuň birinji we ikinji tertipli hususy önümlerini özünde saklaýan deňlige aýdylýar.

$$F(x;y;u;u'_x,u'_y;u''_{xx};u''_{xy};u''_{yy})=0$$

Edil şuňa meňzeşlikde köpüýtgeýänli funksiýalar üçin degişli differensial deňlemeleri ýazmak bolýar.Eger deňleme ýokary tertipli önümlere görä çyzykly bolsa,onda deňlemä ýokary tertipli hususy önümlere görä çyzykly differensial deňleme diýilýär Ikinji tertipli hususy önümlere görä çyzykly differensial deňlemeleri umumy görnüşde

$$a_{11}u''_{xx}+2a_{12}u''_{xy}+a_{22}u''_{yy}+F(x;y;u;u'_x;u'_y)=0 \qquad (1)$$

ýaly ýazmak bolýar.

Eger $a_{11};a_{12};a_{22}$ koeffisientler diňe bir $x;y$ - üýtgeýjileriň funksiýasy dälde eýsem F funkiýa meňzeşlikde $x;y;u;u'_x;u'_y$ ululyklaryň funksiýasy bolsa, onda şeýle deňlemä kwaziçyzykly differensial deňlemeler diýilýär.

Egerde deňleme $u;u'_x;u'_y,u''_{xy};u''_{xx};u''_{yy}$ önümlere görä çyzykly bolsa,onda deňlemä çyzykly differensial deňleme diýilýär we

$$a_{11}u''_{xx}+2a_{12}u''_{xy}+a_{22}u'''_{yyy}+b_1u'_x+b_2u'_y+cu+f=0 \qquad (2)$$

ýaly bellenilýär.Bu ýerde a_{11}; a_{12}; a_{22}, b_1, b_2, f funksiýalar diňe $x;y$ bagly funksiýalar.Eger bu koefffisentler $x;y$ bagly bolmasa,onda deňlemä hemişelik koeffisientli çyzykly differensial deňleme diýilýär. Eger $f(x;y)=0$ bolsa,onda deňlemä birjynsly differensial deňleme diýilýär.

(1) deňlemede $\xi=\varphi(x;y),\quad \eta=\phi(x;y)$

üýtgeýänlere geçmek bilen biz başdaky deňlemä deňgüýçli bolan täze deňlemäni alýarys.Şunlukda ξ we η nähili saýlanyp alynanda berlen deňleme bu üýtgeýänlere görä has ýönekeý görnüşi alýar diýlen soragy goýmak bolar.

Şu bölümçede ýokardaky goýlan soraga ikinji tertipli önüme görä çyzykly bolan differensial deňlemeler üçin jogap bereris.

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x;y;u;u_x;u_y)=0$$

Hususy önümleri täze üýtgeýänlere görä özgerdip alarys:

$$\left.\begin{aligned}
u_x&=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x\\
u_y&=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\\
u_{xx}&=u_{\xi\xi}\xi_x{}^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x{}^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}\\
u_{xy}&=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}\\
u_{yy}&=u_{\xi\xi}\xi_y{}^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y{}^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) sistemadaky önümleriň bahalaryny (1) deňlemede ornuna goýup alarys:

$$\bar{a}_{11}u''_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u''_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u''_{\eta\mu} + \bar{F} = 0 \quad . \qquad (4)$$

Bu ýerde $\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$,

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

$\bar{F}$ ikinji tertipli önümlere bagly däl funksiýa.Eger-de berlen deňleme çyzykly deňleme bolsa ,ýagny

$$F(x;y;u,u_x,u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f$$

bolsa onda $\bar{F}$ aşakdaky görnüşde bolýar

$$\bar{F}(\xi;\eta;u;u_\xi;u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta$$

we deňleme ýene-de çyzyklylygyna galýar.

ξ we η üýtgeýänleri a_{11} nola deň bolar ýaly saýlap alalyň.Onuň üçin

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \qquad (5)$$

görnüşli birinji tertipli hususy önümli differensial deňlemä seredeliň.

Goý $z = \varphi(x;y)$ -bu deňlemäniň haýsy hem bolsa bir hususy çözüwi bolsun.Eger $\xi = \varphi(x;y)$ diýip alsak,onda a_{11} koeffisient nula deň bolar.Şeýlelikde ýokarda goýlan täze üýtgeýänleri saýlap almak meselämiz (5) görnüşli deňlemäni çözmek bilen baglanyşykly bolup galýar.Aşakdaky lemmalary subut edeliň .

1. Eger $z = \varphi(x;y)$ funksiýa

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$$

deňlemäniň hususy çözüwi bolsa,onda $\varphi(x;y) = C$ deňleme bilen berlen y=f(x) funksiýa

$$a_{11}dy_x^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (6)$$

adaty differensial deňlemäniň umumy integraly bolýar.

2.Eger $\varphi(x;y) = C$ funksiýa

$$a_{11}dy_x^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (6')$$

adaty differensial deňlemäniň umumy integraly bolsa,onda $z=\varphi(x;y)$ funksiýa (5) deňlemäni kanagatlandyrýar.

Ilki bilen birini lemmany subut edeliň. $z=\varphi(x;y)$ funksiýa (5) deňlemäni kanagatlandyrýanlygy üçin

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0$$

(7)

deňlik toždestwo bolýar,sebäbi funksiýa ähli $x;y$ üçin çözüwiň berilýän oblastynda ony kanagatlandyrýar. Eger $\varphi(x;y)=C$ anyk däl gatnaşykdan kesgitlenýän y funksiýa (6) deňlemäni kanagatlandyrýan bolsa, $\varphi(x;y)=C$ gatnaşyk (6) deňleme üçin umumy integral bolýar.

Goý

$$y = f(x;C)$$

bu funksiýa bolsun,onda

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x(x;y)}{\varphi_y(x;y)}\right]_{y=f(x;C)} \qquad (8)$$

Bu ýerde ýaýyň içi we $y=f(x;C)$ belgi (8) deňligiň sag böleginde y ululyga bagly däl we $f(x;C)$ deň bahany alýanlygyny aňladýar.Bu ýerden $y=f(x;C)$ funksiýanyň (6) deňlemäni kanagatlandyrýanlygy gelip çykýar.Hakykatdan-da

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=$$

$$=\left[\; a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\;\right]_{y=f(x;C)}=0$$

Bu deňligiň ýerlikliligi kwadrat ýaýyň üçindäki aňlatmanyň diňe bir $y=f(x;C)$ üçin däl-de eýsem ähli $x;y$ üçin nola deňdiginden alynýar.

Indi ikinji lemmany subut edeliň.

Goý $\varphi(x;y)=C$ (6) deňlemäniň umumy integraly bolsun. Islendik $x;y$ üçin

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0 \qquad (7)$$

bolýanlygyny subut edeliň. Goý (x_0,y_0) haýsy hem bolsa bir sany berlen nokat bolsun. Eger biz $(7^/)$ deňlemäniň bu nokatda ýerine ýetýänligini subut etsek ,onda (x_0,y_0) nokadyň erkinligine görä $(7^/)$ deňligiň toždestwo bolýanlygy gelip çykýar. Şunlukda $\varphi(x;y)$ funksiýa $(7^/)$ deňlemäniň çözüwi. $\varphi(x_0;y_0)=C_0$ diýip alyp we $y=f(x;C_0)$ egrä seredip (x_0,y_0) nokatdan (6) delemäniň integral egrinisini geçireliň . $y_0=f(x_0;C_0)$ deňligiň ýerlikilidigi aýdyňdyr.Bu egriniň ähli nokatlary üçin

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=\left[\ a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\ \right]_{y=f(x;C_0)}=0$$

Soňky deňlikde $x=x_0$ diýip ,alarys:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0;y_0)+2a_{12}\varphi_x(x_0;y_0)\varphi_y(x_0;y_0)+a_{22}\varphi_y^2(x_0;y_0)=0$$

Subut etmelimiz hem şudy.

(6) deňlemä (1) deňleme üçin harakteistik deňleme diýilýär. Bu deňlemäniň integrallaryna bolsa harakteristikalar diýilýär.

$\xi=\varphi(x;y)$,diýip alyp ,bu ýerde $\varphi(x;y)=const$ (6) deňlemäniň umumy integraly

biz $u_{\xi\xi}$ önümiň koeffisientini nula öwürýäris.Eger-de

$$\phi(x;y)=const \qquad (6)$$

deňlemäniň $\varphi(x;y)=const$ çözüwine garaşsyz başga bir umumy inbtegraly bolsa,onda $\eta=\phi(x;y)$ diýip alyp, $u_{\eta\eta}$ önümiň koefffisientini nola öwürýäris.

(6) deňleme iki sany deňlemä dargaýar:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (9)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (10)$$

Kök alamaty aşagyndaky ańlatmanyň alamaty

$$a_{11}u_{xx}^{//}+2a_{12}u_{xy}^{//}+a_{22}u_{yy}^{//}+F(x;y;u;u_x^{/};u_y^{/})=0$$

deňlemäniň görnüşini kesgitleýär.

M nokatda $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ deňsizlik dogry bolsa,onda (1) deňlemä giperbolik görnüşli deňleme diýilýär.

Eger bu nokatda $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ deňsizlik dogry bolsa,onda (1) deňlemä elliptik görnüşli deňleme diýilýär,

Eger bu nokatda $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ deňlik ýerlikli bolsa, onda (1) deňlemä parabolik görnüşli deňleme diýilýär,.

Her bir nokadynda şol bir gönüşli deňlemä degişli bolýan D oblasta seredeliň. Bu oblastyň her bir nokadyndan iki sany harakteristikaka geçýär. Özem giperbolik tipli deňleme üçin bu harakteristikalar hakyky we dürli, elliptik tipli deňleme üçin bu harakteristikalar kompleks we dürli, parabolik tipli deňleme üçin bolsa iki harakteristika hakyky we gabat gelýär.

Bu ýagdaýlaryň her birine aýratynlykda seredeliň.

1.Giperbolik tipli deňlemeler üçin $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ we (9) we (10) deňlemeleriň sag bölekleri hakyky we dürli. Olaryň umumy integrallary $\varphi(x;y)=C$ we $\phi(x;y)=C$

harakteristikalaryň hakyky maşgalasyny kesgitleýär.

$$\xi=\varphi(x;y),\quad \eta=\phi(x;y)$$

(11)

Diýip (4)deňlemäniň iki bölegini hem $u_{\xi\mu}$ agzanyň koeffisientine bölüp,ony aşakdaky görnüşe getirýäris.

$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi;\eta;u;u_\xi;u_\eta)$$

Bu ýerde $\Phi=-\dfrac{\overline{F}}{2a_{12}}$.

Soňky alnan deňleme giperbolik tipli deňlemeleriň kanonik görnüşidir.Köp ýagdaýlarda giperbolik deňlemeleriň beýleki kanonik görnüşini ulanýarlar. Eger

$$\xi=\alpha+\beta,\quad \eta=\alpha-\beta$$

diýsek,ýagny $\alpha=\dfrac{\xi+\eta}{2}$, $\beta=\dfrac{\xi-\eta}{2}$ goýup ,(bu ýerde α,β - täze üýtgeýänler).we aşakdakylary hasaba alsak

$$u_\xi=\frac{1}{2}(u_\alpha+u_\beta),\quad u_\eta=\frac{1}{2}(u_\alpha-u_\beta),\quad u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}). \tag{4}$$

deňleme $u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi_1$, ($\Phi_1=4\Phi$).görnüşe geler.

2.Parabolik tipli deňleme üçin $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$. Bu ýagdaýda (9) we (10) deňlemeler gabat gelýär. (6) deňleme üçin bir sany $\varphi(x;y)=const$ umumy integral alýarys.Onda täze üýtgeýänleri

$$\xi=\varphi(x;y),\quad \eta=\eta(x;y)$$

görnüşde saýlap alýarlar,bu ýerde $\eta(x;y)$ φ funksiýa bagly bolmadyk islendik funksiýa.Üýtgeýänler şeýle saýlanyp alnanda

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2=0,$$

sebäbi $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ .By ýerden

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x+\sqrt{a_{22}}\eta_y\right)=0$$

(4) Deňlemäniň iki bölegini hem $u_{\eta\eta}$ agzanyň koeffisientine bölüp parabolik tipli deňlemeler üçin kanonik görnüşi alarys:

$$u_{\eta\eta}=\Phi(\xi;\eta;u;u_\xi;u_\eta),\qquad \Phi=-\frac{\bar{F}}{a_{22}}.$$

Eger bu deňlemäniň sag bölegine u_ξ girmese, onda deňleme adaty differensial deňleme bolýar, ξ ululyk deňlemede parametr bolup gatnaşýar.

3.Elliptik tipli deňlemeler üçin $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$.(9) we (10) deňlemeleriň sag bölegi kompleks.Goý

$$\varphi(x;y)=C$$

(9) deňlemäniň kompleks integraly bolsun Şonda

$$\varphi^*(x;y)=C$$

Bu ýerde φ^* funksiýa φ funksiýa çatrymly bolan funksiýa we çatrymly (10) deňlemäniň umumy integraly.

$$\xi=\varphi(x;y),\quad \eta=\varphi^*(x;y)$$

diýip, alyp kompleks üýtgeýänlere geçeliň.
Şunlukda elliptik tipli deňleme edil giperbolik tipli deňlemäniňki ýaly görnüşe gelýär.
Kompleks üýtgeýänler bilen işlemezlik üçin täze α, β üýtgeýänleri girizeliň.

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}$$

Şunlukda $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$.
Bu ýagaýda

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2)$$
$$-(a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+2i\,(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0.$$

Ýagny $\overline{a_{11}} = a_{22}$ we $\overline{a_{12}} = 0$.
(4) deňlemäniň iki bölegi hem $u_{\alpha\alpha}$ agzanyň koeffisientine bölünenden soňra aşakdaky görnüşe gelýär.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha;\beta;u;u_\alpha;u_\beta), \quad \Phi = -\frac{\overline{F}}{a_{22}}.$$

Şeýlelikde $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ alamatyna baglylykda (1) deňlemäniň kanonik görüşi aşakdaky ýaly bolmagy mümkin.

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (giperbolik tip) $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ ýa-da $u_{xy} = \Phi$

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (elliptik tip) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (parabolic tip) $u_{xx} = \Phi$.

Ikinji tertipli hususy önümli çyzykly differensial deňlemeleri kanonik görnüşe getirilişiniň mysallaryna seredeliň.

Mysal 1. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$ deňlemäniň tipini kesgitläň we ony kanonik görnüşe getiriň.

Çözüwi:Bu ýerde $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -y$. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$.

Diýmek $y > 0$ bolan oblastda deňleme giperbolik. $y < 0$ bolan oblasda bolsa elliptik.

Ilki bilen deňlemä giperbolik bolan oblastda seredeliň. Bu ýagdaýda deňlemäniň harakteristik deňlemesi $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{y},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{y}$. $x-2\sqrt{y}=c_1$ we $x+2\sqrt{y}=c_2$ harakteristik deňlemeleriň umumy integrallary.üýtgeýänleri çalyşmak bilen kanonik görnüşe geleris.

$$\xi=x-2\sqrt{y},\quad \eta=x+2\sqrt{y}$$

$$u_x=u_\xi+u_\eta,\ u_y=-\frac{1}{\sqrt{y}}(u_\xi-u_\eta),\quad u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy}=\frac{1}{y}u_{\xi\xi}+\frac{1}{y}u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\sqrt{y^3}}u_\xi-2\cdot\frac{1}{y}u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\sqrt{y^3}}u_\eta$$

$$u_{xx}-yu_{yy}=2u_{\xi\eta}-\frac{1}{\sqrt{y}}(u_\xi-u_\eta)=0$$

$$u_{xx}-yu_{yy}=2u_{\xi\eta}-\frac{1}{\sqrt{y}}(u_\xi-u_\eta)=0.$$

Bu ýerden deňlemäniň kanonik gönüşini alarys.

$$u_{\xi\mu}+0{,}5\tfrac{1}{\xi-\eta}(u_\xi-u_\eta)=0.$$

b) elliptik oblastda (y<0) üýtgeýänleri aşakdaky ýaly çalyşma geçireliň.

$$\rho=0{,}5(\xi+\eta)=x,\quad \sigma=0{,}5(\xi-\eta)=2\sqrt{-y}.$$

Bu ýagdaýda deňlemäniň kanonik görnüşi

$$u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma}-\frac{1}{\sigma}u_\sigma=0.$$

Hakykatdanda

$$u_x=u_\rho,\quad u_y=u_\sigma\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{-y}}\right),\quad u_{xx}=u_{\rho\rho},$$

$$u_{yy}=u_{\sigma\sigma}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)+u_\sigma\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{(-y)^3}}\right).$$

$$u_{xx}-yu_{yy}=u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma}-\frac{1}{\sqrt{-y}}u_\sigma=0,.\quad u_{xx}-yu_{yy}=u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma}-\frac{1}{\sigma}u_\sigma=0$$

Mysal 2. $\qquad xu_{xx}-2\sqrt{xy}u_{xy}+yu_{yy}+0{,}5u_y=0$

Bu ýerde $a_{11} = x, \quad a_{12} = -\sqrt{xy}, \quad a_{22} = y$, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = yx - xy = 0$.
Diýmek bu deňleme parabolik tipli. . Deňlemäniň bir sany harakteristikalar maşgalasy bar bolup ol maşgala aşakdaky differensial deňleme bilen berilýär.

$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ ýa-da $\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Bu deňlemäniň umumy integraly $\sqrt{x} + \sqrt{y} = c$. Şonuň2 üçin $\xi = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, η derek bolsa a_{22} koeffisienti nula öwürmeýän islendik funksiýany almak bolar. Goý $\eta = \sqrt{x}$ bolsun.

Deňlemäniň kanonik görnüşi $u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\left(u_\xi + u_\eta\right) = 0$ ýaly bolar.

Özbaşdak işlemek üçin mysallar.
Aşakdaky deňlemeleriň tipini kesgitläň we olary kanonik görnüşe getiriň.

1. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$.
2. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$
3. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.
4. $u_{xx} + y\ u_{yy} + 0{,}5u_y = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$
6. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x + u_y + 4u = 0$
7. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$

Jogaplary: 1.Giperbolik deňleme . $u_{\xi\eta} - 0{,}5\frac{1}{\xi}u_\xi = 0$,

$\left(\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}\right)$.

Çözüwi:berlen deňlemede

$a_{11} = x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -y^2$. $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2$.

Deňlemäniň harakteristik deňlemeleri $\frac{dy}{dx}=xy, \frac{dy}{dx}=-xy$.

Bu deňlemeleriň umumy integrallary $\left(xy=c_1, \quad \frac{y}{x}=c_2\right)$. $\left(\xi=xy, \quad \eta=\frac{y}{x}\right)$.

Täze üýtgeýänlerde $u_x=u_\xi y+u_\eta\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $u_y=u_\xi x+u_\eta\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}y^2+u_{\eta\eta}\left(\frac{y}{x^2}\right)^2-\frac{2y}{x^3}u_\eta+\frac{2y^2}{x^2}u_{\xi\eta}, u_{yy}=u_{\xi\xi}x^2+u_{\eta\eta}\left(\frac{1}{x}\right)^2-2u_{\xi u}.$$

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=x^2y^2u_{\xi\xi}+\frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta}+\frac{2y}{x}u_\eta-x^2y^2u_{\xi\xi}-\frac{y^2}{x_2}u_{\eta\eta}+2y^2u_{\xi\eta}=$$

$$=4y^2u_{\xi\eta}-\frac{2y}{x}u_\eta=0.$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem y^2 bölüp we $\xi=xy$ bolýanlygyny göz öňünde tutup

$$u_{\xi\eta}-0{,}5\frac{1}{\xi}u_\xi=0$$

deňligi alarys.

2.Elliptik deňleme . $\Delta u-u_\xi-u_\eta=0$, $\left(\xi=y^2, \quad \eta=x^2\right)$.

Çözüwi: $u_x=u_\xi\cdot 0+u_\eta\cdot 2x$, $u_{xx}=u_{\xi\xi}\cdot 0+u_{\eta\eta}\cdot 4x^2+2u_\eta$,

$$u_y=2yu_\xi, u_{yy}=4y^2u_{\xi\xi}+2u_\xi.$$

$$x^2u_{xx}+y^2u_{yy}=4x^4u_{\eta\eta}+2x^2u_\eta+4y^4u_{\xi\xi}+2y^2u_\xi=0.$$

Bu ýerden $\Delta u-u_\xi-u_\eta=0$

3.Parabolik deňleme . $u_{\eta\eta}=0$, $\left(\xi=\frac{y}{x}, \quad \eta=y\right)$.

4.Bu deňleme y<0 bolanda giperolik,y>0 bolanda elliptik.

y<0 bolanda $\xi=x+2\sqrt{-y}, \quad \eta=x-2\sqrt{-y}$

bolup deňleme

$$u_{\xi\eta}+\frac{0{,}5}{\xi+\eta}\left(u_\xi-u_\eta\right)=0.$$

y>0 bolanda $\xi = x, \quad \eta = 2\sqrt{y}$ täze üýtgeýänleri girizip deňleme $\Delta u = 0$ gönüşe getirilýär.

5. Bu deňleme parabolik tipli deňleme bolup $u = ve^{\mu\xi+\gamma\eta}, \quad \mu = 1{,}1875, \gamma = 0{,}25.$

$(\xi = y - x, \quad \eta = y + x)$, deňleme $v_{\eta\eta} - 2v_{\xi} = 0$ kanonik görnüşe getirilýär.

6. Deňleme giperbolik. $u = v \cdot e^{\mu\xi+\gamma\eta}, \quad \mu = -0{,}25, \quad \gamma = \frac{-7}{8}$.

$(\xi = y - 3x, \quad \eta = y - x)$

täze üýtgeýänlerde $v_{\xi\eta} + \frac{1}{32}v = 0$.

7. Elliptik deňleme . $(\xi = 2y - x, \quad \eta = x)$, $u = ve^{-\xi-\eta}$.

Täze üýtgeýänlerde deňleme $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 1{,}5v = 0$ görnüşe getirilýär.

III bap.Matematiki fizikanyň esasy deňlemeleriniň getirilip çykarlyşy

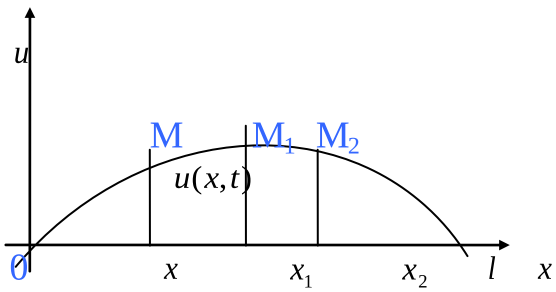
§1.Taryň kese yrgyldysynyň deňlemesi

Tar diýip iki nokatda berkidilen çeýe ,inçejik dartylan ýüpe aýdylýar.Şunlukda eplenmä garşylyk ýok.Eplenmä garşylygyň ýoklugy matematiki nukdaý nazardan tarda döreýän güýjenme hemişe galtaşýan boýunça gönükdirlenligi aňladýar.

Eger tar deňagramlyk ýagdaýyndan gyşardylsa,onda ol kese yrgyldy emele getirer.Taryň nokatlarynyň ýagdaýyny üýtgetmesini u bilen belläliň. u öz gezeginde x koordinatanyň we t wagtyň funksiýasydyr.

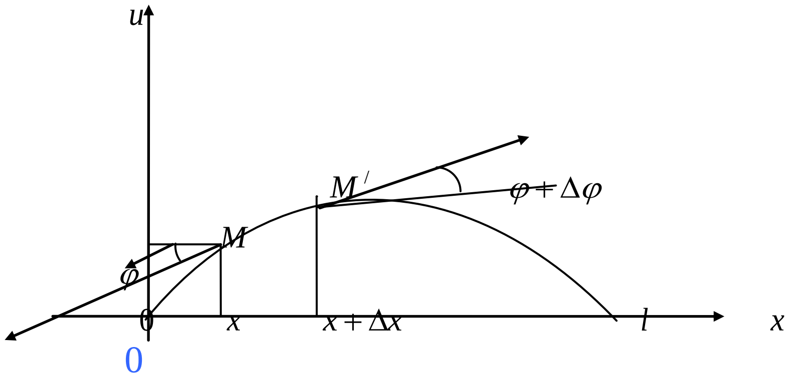
$$u = u(x;t) \qquad (1)$$

Goý, l uzynlykly we başlangyç pursatda Ox okuň $[0;l]$ kesimi bilen ugrukdyrylan tar berlen bolsun.Taryň uçlary $x=0$ we $x=l$ nokatlarda berkidilen bolsun.Eger tary başlangyç ýagdaýyndan gozgalsa,onda taryň nokatlary hereketlenip başlar. Ýagny tar yrgyldap başlar.Taryň nokatlarynyň başlangyç ýagdaýdan kiçi gyşarmalaryna seredeliň.Bu ýagdaýda taryň nokatlarynyň hereketi Ox oka perpendikulýar we bir tekizlikde diýip almak bolar.şunlukda taryň yrgyldysy bir sany $u(x;t)$ funksiýa bilen berilýär.Bu funksiýa wagtyň t pursadynda taryň x absissaly nokadynyň orun üýtgetmesini kesgitleýär.(7-nji surat)



7-nji surat

Biz taryň $x0u$ tekizlikde kiçi gyşarmasyna seredýäris,diýmek taryň $l_{\cup M_1M_2}$ dugasynyň uzynlygy onuň $0x$ oka bolan proýeksiýasyna deňdir,ýagny $\cup M_1M_2$ duganyň uzynlygy $x_2 - x_1$ deňdir diýip bolar.Şeýle hem taryň ähli nokatlarynda taryň dartylmasy birmeňzeş diýip ony T bilen belläliň.Taryň $MM^{/}$ bölegine seredeliň.(8-nji surat)



8-nji surat

Taryň dugasynyň uçky nokatlarynda galtaşýan boýunça tara T güýç täsir edýär. Goý galtaşýanlar $0x$ oky bilen φ we $\varphi+\Delta\varphi$ burç emele getirýän bolsun.Şonda $MM^{/}$bölege täsir edýän güýçleriň $0u$ oka proýeksiýasy $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi$.deň bolar. φ burç kiçi burç bolany üçin $tg\varphi\approx\sin\varphi$ diýip almak bolýar we biz

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi.\approx Ttg(\varphi+\Delta\varphi)-Ttg\varphi=T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x;t}{\partial x}-\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right)=$$

$$=T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x;t)}{\partial x^2}\Delta x\approx T\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

Bu ýerde $0<\theta<1$.

Hereketiň deňlemesini almak üçin $MM^{/}$ bölege goýlan daşky güýçleri inersiýa güýjüne deňlemeli.Goý ρ taryň çyzykly dykyzlygy bolsun.Şeýlelikde taryň bu böleginiň massasy $\rho\Delta x$,tizlenmesi bolsa $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.Diýmek Nýutonyň ikinji kanunyna laýyklykda

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Bu ýerden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Bu deňlemä taryň erkin yrgyldysynyň deňlemesi ýa-da birölçegli birjynsly tolkun deňlemesi diýilýär

§2Taryň deňlemesi üçin esasy meseleler..

Bilşimiz ýaly mehanikada diňe bir hereketiň deňlemesiniň berilmegi bilen wagtyň islendik pursadynda taryň görnüşini kesgitlemek mümkin däl.

Fiziki ýa-da beýleki pudaklaryň meselelerini matematiki usul bilen çözülende meseläniň matematiki goýulyşyny bermek zerurdyr.

a) derňelýän wakany suratlandyrýan gözlenýän funksiýanyň kanagatlandyrýan deňlemesini ýa-da deňlemeler sistemasyny ýazmaly;

b) gözlenýän funksiýanyň onuň kesgitlenýän oblastynda kanagatlandyrmaly goşmaça şertlerini ýazmaly.

Matematiki usul bilen çözülýän her bir takyk fiziki meselä seredilende diňe bir oňa degişli deňlemäni çözmek bilen çäklenmän eýsem meseläniň matematiki goýuluşynyň çözüwini tapmak baradaky meselä seretmeli.Adatça biziň seredýän hadysamyz birbahaly häsiýetde bolýar,şol bir wagtda oňa degişli deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwiniň bolmagy mümkin.Şonuň üçin meseläniň matematiki goýluşynda gözlenýän funksiýanyň kanagatlandyrýan deňlemesini ýa-da deňlemeler sistemasyny ýazmak bilen çäklenmek ýeterlik däldir.çözüwleriň arasyndan bizi gyzyklandyrýan çözüwi saýlap almaklyga mümkinçilik berýän goşmaça şertleri bermeli .Alnan deňlemäni kanagatlandyrýan goşmaça şertler hem “şeýle bir köp bolmaly däldir.”şeýlelikde goşmaça şertler çözüwiň barlygyny we ýeke-täkligini üpjün etmelidir.

Goşmaça şertleriň häsiýetini taryň yrgyldysynyň mysalynda seredeliň.

Tolkun deňlemesine we ýylylyk geçiijiligiň deňlemesine getirýän meselelerde goşmaça şertler başlangyç we gyra şertler diýlen şertlere bölünýär.

Başlangyç şertler wagtyň haýsy hem bolsa bir başlangyç pursadynda gözlenýän funksiýanyň bahasyny we onuň önüminiň bahasyny bermekden ybaratdyr.

Bu deňlemeler üçin gyra meseleleri näbelli funksiýanyň bahasyny seredilýän aralygyň uçky nokatlarynda berilmegi bilen berilýär.

Eger öwrenilýän waka tükeniksiz interwalda bolup geçýän bolsa onda gyra meselesi dälde diňe başlangyç şertler goşulýar.Başlangyç şertlere başgaça Koşi meselesi hem diýilýär.

Eger mesele tükenikli aralykda goýulýan bolsa,onda hem başlangyç, hem gyra meseleleri goýulmalydyr.Bu ýagdaýda garyşyk mesele barada aýdylýar.

Meselem taryň kese yrgyldysy baradaky ýönekeýje meselä seredeliň.Bu meselede

$u(x;t)$ funksiýa taryň $0x$ okdan gyşarmasyny berýär.Eger taryň uçlary berkidilen bolsa,onda

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0 \qquad (1)$$

Gyra şertleri goýulýar.Sag bölegi nula deň bolan gyra şertlerine birjynsly gyra meseleleri diýilýär.

Ýöne bu gyra meseleleriniň berilmegi yrgyldy kanunlaryny birbahaly kesgitlemeýär.Sebäbi mesele taryň başlangyç pursatdaky görnüşine we taryň başlangyç tizligine hem bagly bolup galýar.Diýmek gyra şertlerden daşary aşakdaky başlangyç şertler berilmeli: $u(x;0)=f(x), \quad u_t^{/}(x;0)=F(x).$ Bu ýerde $f(x), F(x)$ funksiýalar öňünden berilen belli funksiýalar.Olaryň birinjisi wagtyň başlangyç pursadynda çyzgy hökmünde taryň görnüşini berýär,ikinji funksiýa bolsa, wagtyň başlangyç pursadynda taryň her bir nokadyndaky tizligini aňladýar

.Tekizlikde we giňişlikde yrgyldylaryň deňlemelerine seredeliň.

Eger kese tolkunlary çeýe dartylan membrana amala aşyrýan bolsa,onda oňa degişli tolkun deňlemesi ikiölçegli bolýar.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

Şunlukda membrananyň nokatlarynyň ýagdaýyny we tizligini kesgitleýän başlangyç şertler

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x;y),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\phi(x;y). \qquad (3).$$

Gyra şetler barada aýdylanda bolsa membrananyň L kontur boýunça berkidilen bolýanlygyna görä

$$u\Big|_{L}=0 \qquad (4)$$

görnüşi alýar.

Eger yrgyldyny tutuş sredanyň bölejikleri amala aşyrýan bolsa,onda biz has umumy ýagdaýy alýarys.Bu ýagdaý akustik yrgyldylardyr.Şeýle görnüşli yrgyldylaryň differensial deňlemeleri üç ölçegli tolkun deňlemesidir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (5)$$

Başlangyç şertler $u\Big|_{t=0}=\varphi(x;y;z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\phi(x;y;z).$ görnüşi alýar.

Gyra şertler S çäklerinde bölejikleriň tizlikleriniň normal düzüjisiniň nula deňligini aňladýar.

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S}=0$$

Elektromagnit tolkunlary. Üç ölçegli tolkun deňlemesi diňe bir akustik tolkunlary dälde,wakumda ýaýraýan eýsem elektromagnit tolkunlaryny hem aňladýar.Elektik we magnit meýdanlarynyň güýjenmesi üçin aşakdaky deňlemeler ýerliklidir.

$$\Delta\overline{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}=0;\quad \Delta\overline{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2}=0.$$

Bu ýerde c ýagtylygyň wakumdaky tizligi

.§3.Ýylylyk geçirijilik deňlemesi

Goý $0x$ okda daşky sredadan izolirlenen we deňölçegli gyzdyrylmadyk ok berilen bolsun .Okuň özünde has gyzgyn bölegi bilen çalagyzgyn böleginiň arasynda ýylylyk çalyşygy bolup geçýär diýip guman edeliň.Eger wagtyň başlangyç pursadynda x argumentiň artmagy bilen okuň nokatlarynyň temperaturasy kemelýän bolsa, onda wagtyň geçmegi bilen ýylylyk akymy $0x$ okuň položitel ugry bilen bolup geçýär. $u(x;t)$ bilen okuň x absissaly kesikde t pursatdaky temperaturasyny belläliň.

Eger jisimiň dürli nokatlarynda temperatura birmeňzeş bolmasa,onda jisimde Furýeniň empiriki kanunyna laýyklykda ýylylygyň täzeden paýlanmasy bolýar.Bu kanuna görä kiçi ds meýdanly meýdançadan gysga wagt pursadynda akyp geçýän ýylylygyň dQ mukdary dS meýdana , dt wagt aralygyna we temperaturadan meýdana geçirlen normal boýunça alynan önüme göni proporsionaldyr:

$$dQ = -k\frac{\partial T}{\partial n}dSdt \qquad (1)$$

Bu ýere k maddanyň ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti.

$\bar{q}$ ýylylyk akymynyň dykyzlyk wektory düşünjesini girizeliň.Bu wektoryň ugry temperaturanyň gradiýentiniň ugry bilen gabat gelýär.Moduly boýunça bu wektor temperaturanyň gradiýentine perpendikulýar bolan birlik meýdançadan bir sekuntda akyp geçýän ýylylyk mukdaryna deňdir.Şunlukda ýylyylyk geçirijilik kanuny wektor görnüşinde aşadaky görnüşi alýar.

$$\bar{q} = -kgradT \qquad (2)$$

(1) we (2) formulaladaky minus alamaty gradiýent temperaturanyň artýan ugruna , ýylylyk bolsa, jisimiň has sowuk nokatlaryna tarap akýandygyny aňladýar.

Indi bolsa ýylylygyň ýaýramaklygynyň differensial deňlemesini getirip çykaralyň.Goý, içindäki temperatura x, y, z koordinatalaryň we t wagtyň funksiýasy bolan birjynsly jisim bolsun:

$$T = T(x, y, z, t)$$

Umumylyk üçin, jisimiň içinde kuwwaty $Q(x, y, z, t)$ bolan ýylylyk çeşmesi bar diýeliň.Jisimde käbir kiçi ΔV göwrümi alalaýň we ýylylyk balansyň deňlemesini düzeliň.dt wagt pursadynda ondan

$$\Delta Q = dt\int_{\Delta V} Q(x; y; z; t)dV$$

(3)

Bu ýylylygyň bir bölegi ΔV elementiň temperaturasyny ýokarladyrmaklyga ,galan $\Delta Q^{//}$ bölegi bolsa ýylylyk geçirijiligiň hasabyna daşky sreda gidýär.

Ilki bilen dV tükeniksiz kiçi elementiň temperaturasyny $T(t)$-den $T(t+dt)$ çenli ýokarlandyrmak üçin zerur bolan $\Delta Q^{/}$ ýylylyk mukdaryny kesgitläliň. $\Delta Q^{/}$ ýylylyk mukdary

$$dQ^{/} = c\rho dV\left[T(t+dt)-T(t)\right] = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV$$

Bu ýerde c jisimiň udel ýylylyk sygymy, ρ -dykyzlygy,

Soňky deňligi ΔV göwrüm boýunça integrirläp alarys:

$$\Delta Q^{/} = dt\int c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV \qquad (4)$$

$\Delta Q^{//}$ kesgitlemek üçin bir sekuntda ΔV göwrümi çäkleýän ΔS üstden

$$\oint\limits_{\Delta S} q_n dS$$

ýylylyk mukdarynyň akyp geçýänligini hasaba alalyň.Şonuň üçin

$$\Delta Q^{//} = dt\oint\limits_{\Delta S} q_n dS \qquad (5)$$

ΔQ-ny $\Delta Q^{/}$ we $\Delta Q^{//}$ ululyklaryň jemine deňläp ,alarys:

$$\int\limits_{\Delta V} QdV = \int\limits_{\Delta V} c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV + \oint\limits_{\Delta S} q_n dS \qquad (6)$$

Bu deňlikde dürli üýtgeýänler boýunca integrallar dur.Onuň ücin (6) deňligiň iň soňky agzasyna Ostrogradskiý -Gaussyň teoremasyny ulanalyň:

$$\oint\limits_{\Delta S} q_n dS = \int\limits_{\Delta V} div\bar{q}dV\ .$$

Şunlukda (6) deňlik

$$\int\limits_{\Delta V} QdV = \int\limits_{\Delta V} c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV + \int\limits_{\Delta V} div\bar{q}dV$$

ýa-da

$$\int\limits_{\Delta V} [\ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + div\bar{q} - Q\ ]dV = 0\ .$$

görnüşi alar.

Soňky deňlik erkin ΔV göwrüm üçin ýerlikli .Onuň üçin integral alamaty aşagyndaky aňlatma nula deň bolmaly.

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + div\bar{q} - Q = 0$$

Bu ýere q-nyň (2) deňlikdäki bahasyny goýup aşakdaky deňligi alarys

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - div(kgradT) = Q \qquad (7)$$

Guman etmä görä jisim birjynsly ,onda ýylylyk geçirijiligiň koeffisiýenti k hemişelik ululyk .Şonuň üçin

$$div(kgradT) = kdiv(gradT) = k\Delta T.$$

Bu deňligi hasaba almak bilen aşakdaky differensial deňlemä gelýäris.

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T + Q(x; y; z; t) \qquad (7^{/})$$

Bu alnan deňlemäniň käbir hususy ýagdaýlaryna seredeliň.

Ýylylyk bölünip çykmazdan ýylylygyň ýaýramagy. Eger seredilýän oblastyň içinde ýylylk çeşmesi bolmasa,onda ($7^{/}$) deňleme ýönekeý görnüşi alýar.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$$

Bu ýede $\alpha = \dfrac{k}{c\rho}$ temperatura geçirijilik koeffisiýenti.

Durnuklaşan ýylylyk akymy. Stassionar ýylylyk çalyşma üçin ,ýagny wagtyň geçmegi bilen jisimiň her bir nokadynda temperatura üýtgemeýär.Bu ýagdaýda ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi Puassonyň deňlemesine geçýär:

$$\Delta T = -\rho$$

Bu ýerde $\rho = \dfrac{Q}{k}$.

Ýylylyk bölünip çykmazdan durnuklaşan ýylylyk akymy. Bu ýagdaýda $Q=0$ we $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, şonuň üçin jisimiň içinde temperaturanyň paýlanyşy Laplasyň deňlemesine boýun egýär.

$$\Delta T = 0 \qquad (7^{//})$$

Stassionar däl ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$$

x, y, z koordinatalara görä ikinji tertipli önümleri , t wagta görä bolsa, birinji tetipli önümi saklaýar.Şonuň üçin hem bu deňlemäniň bir bahaly çözüwini almak üçin bir sany başlangyç we iki sany gyra şertleri berilmelidir.

Puassonyň we Laplasyň stassionar deňlemeleri t wagta bagly däl ,şonuň üçin hem bu ýagdaýda diňe gyra şertler berilmelidir.

Başlangyç şert adatça wagtyň t=0 pursadynda jisimiň ähli nokatlarynda temperaturanyň x, y, z koordinatalaryň kesgitli funksiýasy bolýanlygyny aňladýar.

$$T\Big|_{t=0} = f(x, y, z). \qquad (8)$$

Gyra meseleler barada aýdylanda fiziki meseleler çözülende bu şertler üç görnüşde bolýar.

Birinji jynsly gyra şertler berilende S üstde wagtyň islendik pursadynda temperatura berilýär.

$$T\Big|_{S} = \varphi(x, y, z) \qquad (9)$$

(bu ýagdaýda φ funksiýanyň t wagta bagly bolmagy hem mümkin, ýöne adatça üstde temperatura hemişelik bolýar.)

Ikinji jynsly gyra şertlerde üstde temperatura belli bolmaýar,ýöne üstüň nokatlarynyň koordinatalarynyň funksiýasy bolýan üste gelýän ýa-da çykýan q ýylylyk akymy görkezilýär.

$$q_n = \phi(x, y, z)$$

Bu ýerde $\bar{n}$ üste geçirlen normalyň birlik wektory.

(2) deňlige görä $q_n = -k\dfrac{dT}{dt}$.şonuň üçin hem gyra şertler differensial häsiýetde bolýar.

$$\frac{dT}{dn} = \phi(x, y, z) \qquad (9^{/})$$

Üçünji jynsly gyra şertlerde birinji we ikinji jynsly gyra şertler umumylaşdyrylýar.

$$\left.\frac{dT}{dn} - hT\right|_S = F(x, y, z) \qquad (9^{//})$$

h hemişelige daşky ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti diýilýär.$(9^{//})$ deňlik sowamak prosesinde ulanylýar.Nýutonyň empiriki kanunyna laýyklykda üstüň T_1 temperaturaly böleginden dt wagt pursadynda berilýän ýylylyk mukdary $T_1 - T_0$ temperaturalaryň tapawudyna dS we dt ululyklara göni proporsionaldyr.:

$$dQ = \alpha(T_1 - T_0)dSdt$$

α köpeldijä ýylylyk berijilik koeffisiýenti diýilýär.

Şeýlelikde jisimden daşa akýan q ýylylyk akymy :

$$q = \alpha(T_1 - T_0)$$

(10)

Ikinji bir tarapdan edil şeýle ýylylyk akym ýylylyk geçirijiligiň hasabyna içden gelmelidir.Şonuň üçin hem (2) deňlige görä

$$q = -k\frac{dT}{dt}$$

$(10^{/})$

(10) we $(10^{/})$ deňlikleriň sag bölekleri deňläp

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha}{k}(T_1 - T_0).$$

$h = \dfrac{\alpha}{k}$ belläp we $T_1 = T\big|_S$ bolýanlygyny hasaba almak bilen soňky deňligi

$$\frac{dT}{dn} - hT\Big|_S = hT_0$$

görnüşe getirmek bolýar.

§4.Elektrostatikanyň esasy deňlemeleri

Elektrostatiki meýdanyň esasy fiziki kanuny Gaussyň teoremasydyr.

Erkin ýapyk üst boýunça $\overline{E}$ güýjenme akymy bu üstüň içinde saklanýan zarýadlaryň jemini 4π köpeltmek hasyla deňdir.

$$\oint_S \overline{E} ds = 4\pi \sum_i e_i \qquad (1)$$

Umumy ýagdaýda elektrik zarýadlar käbir $\rho = \rho(x, y, z)$ dykyzlykly göwrüm boýunça paýlanylandyr.Şonuň üçin (1) deňligiň sag bölegindäki jeme derek aşakdaky integral ýüze çykýar.

$$\oint_S \overline{E} ds = 4\pi \int_V \rho dV \qquad (2)$$

Alnan integralyň iki böleginde hem integrirlemek dürli üýtgeýänler boýunça amala aşyrylýar.Şonuň üçin (2) integrala Ostrogradskiý – Gaussyň teoremasyny ulanyp :

$$\oint_S \overline{E} ds = 4\pi \int_V div \overline{E} \cdot dV$$

deňligi alarys:

$$\int_V \left(div \vec{E} - 4\pi\rho \right) dV = 0 \qquad (3)$$

(3) deňlikdäki V göwrümerkin göwrüm bolany üçin integral alamaty aşagyndaky aňlatmanyň özi nula deň we biz Gaussyň teoremasynyň differensial görnüşine geleris:

$$div \vec{E} = 4\pi\rho \qquad (4)$$

Bu deňleme elektrik teoriýasynda Makswelliň üçünji deňlemesidir.Elektrodinamikadan belli bolşy ýaly elektrostatik meýdan potensial meýdandyr.:

$$\vec{E} = grad\varphi \qquad (5)$$

Bu ýerde φ elektrik potensialy .Bu deňligi hasaba almak bilen (5) deňligi aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$div grad\varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Bu deňleme Puassonyň deňlemesi .Puassonyň deňlemesi elektrostatikanyň esasy differensial deňlemesi hasaplanýar.Birlikleriň SI sistemasynda bu deňleme

$$\Delta\varphi = -\rho$$

ýönekeý görnüşde ýazylýar.Bu deňlemäniň kömegi bilen φ potensialyň giňişlikde zarýadlaryň $\rho(x,y,z)$ paýlanmasy belli bolanda skalýar meýdanyň görnüşini kesgirlemeklige kömek berýär.

Eger käbir oblastda zarýadlar ýok bolsa,onda $\varphi(x,y,z)$ potensial Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýar.

$$\Delta\varphi = 0.$$

§5. Üýtgeýän elektromagnit meýdanynyň potensiallardaky deňlemesi

Elektrodinamika teoriýasyndan belli bolşy ýaly zarýadlar we toklar giňişlikde $\vec{E}$ elektrik we $\vec{H}$ magnit meýdanlaryny emele getirýär.Bu meýdanlaryň arasynda çylşyrymly funksional baglanyşyklar bardyr. Elektrodinamikanyň esasy wezipesi hereketlenýän we hereketlenmeýän zarýadlaryň berlen paýlaşdyrmasy boýunça $\vec{E}(x,y,z)$ we $\vec{H}(x,y,z)$ funksiýalaryň görnüşini kesgitlemekden ybaratdyr.

Elektromagnit meýdanlarynyň häsiýetlerini suratlandyrýan esasy tejribe kanunlarynyň differensial häsiýetde bolýanlygyny Makswell ilkinji bolup görkezýär, ýagny $\vec{E}$ we $\vec{H}$ wektor meýdanlaryň diňe önümleriniň görnüşini göniden göni kesgitlemeklige mümkinçilik berýär. Ýöne her bir wektor meýdan iki sany giňişlik önüme (skalýar-*diwergensiýa* we wektor-*rotor*)eýedir.Şonuň üçin elektromagnit meýdanyny doly şekillendirmek üçin dört sany differensial deňleme berilmelidir.Bu deňlemelere Makswelliň deňlemeleri diýilýär.

Wakumda bu deňlemeler aşakdaky ýaly görnüşde berilýär.(Birlikleriň absolýut sistemasynda).

a) $div\vec{E}=4\pi\rho$, b) $div\vec{H}=0$, ç) $rot\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$,

g) $rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

Bu ýerde ρ zarýadlaryň dykyzlygy , j -toguň dykyzlygy ,c -ýagtylygyň tizligi .

Bu deňlemeleriň her biriniň fiziki manysyny gygaça beýan edeliň.

a) deňleme elektrik meýdanyň çeşmesiniň zarýadlar bolýanlygyny aňladýar,özem çeşmüniň kuwwaty $4\pi\rho$ deň.

b) Deňleme magnit meýdanyň çeşmesiniň ýoklugyny aňladýar,ýagny magnit meýdanyköwlenmeli wektor meýdan bolýar.

c) deňleme elektromagnit induksiýa kanunynyň differensial görnüşidir.

d) deňleme Bio-Sawaryň kanunyny umumylaşdyrýar,ol kanundan diňe $\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, agzasy bilen tapawutlanýar.Bu goşulyja tok utgaşmasy hem diýilýär.

Soňky iki deňleme elektromagnit meýdanynynyň döremeginiň we üýtgemeginiň sebäbiniň diňe bir elektrik zarýadlarynyň bolmagy däl-de eýsem bu zarýadlaryň hereketi,şeýle hem wagtyň geçmegi bilen meýdanyň üýtgemegi bolýanlygyny görkezýär.Şu sebäbe görä magnit zarýadlarynyň ýoklugyna seretmezden magnit meýdanynyň bolmagy,şeýle hem zarýadlary we togy bolmadyk giňişlikde erkin elektromagnit meýdanlarynyň bolmagy mümkin.Makswelliň deňlemesini integrirläp $\vec{E}(\vec{r},t)$ we $\vec{H}(\vec{r},t)$ elektrik we magnit meýdanlaryny kesgitlemek mümkin.Ýöne ony nädip amala aşyrmak bolarka? Sebäbi munuň özi hususy önümli özara wektor differensial deňlemeler bilen baglanyşykly çylşyrymly sistema.

Aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenýän iki sany kömekçi –skalýar elektrik φ potensialyň we $\vec{A}$ wektor magnit potensialynyň girizilmegi bilen mesele ýeterlikçe ýönekeýleşýär.

$$\vec{H}=rot\vec{A} \tag{6}$$

$$\vec{E} = -grad\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(7)

Lorensiň goşmaça

$$div\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

şertini goýmak bilen we (6),(7),(8) bahalary Makswelliň deňlemesinde ornuna goýmak bilen her bir potensial üçin degişli differensial deňlemeleri alýarys:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \qquad (9)$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

(10)

(9) deňlemäni başgaça aşakdaky ýaly ýazmak bolýar.

$$\Box\varphi = -4\pi\rho$$

(11)

$\Box$-Dalamberiň operatory .(11) deňlemä Dalamberiň deňlemesi diýilýär.Hususy halda,haçanda stassionar meýdan bolan ýagdaýda (wagta görä üýtgemeýän) Dalamberian adaty laplasýana öwrülýär.Dalamberiň deňlemesi bize belli bolan Puassonyň deňlemesine öwrülýär.

$$\Delta\,\varphi = -4\pi\rho\,.$$

Beýleki bir hususy halda üýtgeýän elektrik meýdanda zarýadlar bolmadyk halda $\rho = 0$,Dalamberiň deňlemesi üçölçegli tolkun deňlemesine getirilýär.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,.$$

Eger meýdan wagta görä üýtgemese we onda zarýadlar bolmasa Dalamberiň deňlemesi Laplasyň deňlemesine getirilýär.

$$\Delta\varphi = 0\,.$$

§6 Şredengeriň deňlemesi

Molekulalaryň,atomlaryň we olaryň bölekleriniň fiziki häsiýetlerini öwrenmeklik X X asyryň başynda ylmy barlagçylary mikrodünýäniň özüne mahsus bolan , makrodünýäniň kanunlaryndan düýpli tapawutlanýan kanunlary bar diýlen netijä getirýär.Kem-kemden bu kanunalaýyklyklar öwrenilip X X asyryň ahyrynda atom fizikasynda kwant mehanikasy döredilýär.

Kwant mehanikasynyň esasy tassyklamasy ,islendik mikro bölejigiň özüni alyp baryşy koordinatalaryň we wagtyň funksiýasy bolan käbir $\phi(x,y,z,t)$ funksiýa bilen suratlandyrylýar.Bu funksiýanyň $|\phi|^2$ -modulynyň kwadraty ähtimallyk dykyzlygyny häsiýetlendirýär.

Stassionar ýagdaýlarda ϕ funksiýa tolkun funksiýasy diýilýär.Bu funksiýa Şredengeriň deňlemesi diýip atlandyrylýan aşakdaky deňlemäni kanagatlandyrýar.

$$\Delta\phi + \frac{2m}{h^2}(E-U)\phi = 0$$

Bu ýerde m bölegiň massasy,h-Plankyň hemişeligi,U potensial energiýa,bu energiýa meseläniň şertine görä berilmeli,E-parametriň wezipesini ýerine ýetirýän bölejigiň doly energiýasy.

Ýokarda getirlen tassyklamanyň manysyny düşündireliň . Tolkun funksiýanyň $|\phi|^2$ kwadraty dykyzlyk ähtimallgygy manysy bolýanlygyna görä ϕ funksiýa adaty fiziki şertleri hem kanagatlandyrmalydyr:Bu funkiýa üznüksiz,birbahaly we tükenikli bolmaly,tutuş tükeniksiz giňişlik boýunça $|\phi|^2$ funksiýadan alynan integral özüniň manysy boýunça hökmany wakanyň ähtimallygyna deň bolan ululykdyr,ýagny $\int|\phi|^2 dv = 1$.

Şunlukda köp ýagdaýlarda doly energiýanyň islendik bahasynda Şredingeriň deňlemesiniň çözüwleri görkezilen fiziki häsiýetleri kanagatlandyrýar diýip aýdyp bolmaýar.Deňlemäni çözüp we ϕ funksiýa standart şetleri goýup ,biz berlen şertlerde mikrobölejigiň alyp biläýjek E energiýasynyň ähli bahalaryny kesgitleýäris.

Şredengeriň deňlemesi kwant mehanikasynyň esasy deňlemesi bolmak , hususy önümli differensial deňlemeleriň giň ýaýran görnüşleriniň biridir.

Biz matematiki fizikanyň birnäçe differensial deňlemeleri bien tanyşdyk .Bu deňlemeleriň çözülişine geçmezden ozal bu deňlelemeleriň ersasy görnüşleriniň tablisasyny getirýäris.

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \Delta U$ -tolkun deňlemesi,

$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$ - ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi,

$\Delta\varphi = 0$ -Laplasyň deňlemesi,

$\Delta\varphi = -\rho$ -Puassonyň deňlemesi,

$\Box\varphi = -\rho$ -Dalamberiň deňlemesi,

$\Delta\phi + (E - U)\phi = 0$ Şredingeriň deňlemesi.

IV bap. Matematiki fizikanyň meselelerini çözmekligiň käbir usullary

§1.Tükeniksiz taryň yrgyldysy.Dalamberiň usuly

Tükeniksiz tar üçin Koşi meselesi. Goý yrgyldy edýän tar ýeterlikçe uzyn bolsun, şunlukda ony tükeniksiz uzyn diýip bolar. .Wagtyň islendik pursadynda taryň nokatlarynyň ýagdaýyny tapmak talap edilýän bolsun.Şunlukda, taryň başlangyç ýagdaýy we onuň nokatlarynyň tizligi berlen bolsun.

Onda bu mesele aşakdaky görnüşde formulirlenýär:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

deňlemäniň

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad (2)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan $u = u(x,t)$ çözüwini tapmaly.

Tar tükeniksiz bolany üçin çäk şertlere zerurlyk ýok.Bu mesele Koşi meselesidir.

(1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmakdan başlalyň.Bu deňlemäni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \upsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (1')$$

görnüşde ýazalyň.(1′) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň diskriminanty D=$b^2 - ac = \frac{1}{\upsilon^2}$>0 bolýanlygy üçin deňleme giperbolik deňlemedir. Deňlemede täze

$\xi = x + \upsilon t, \qquad \eta = x - \upsilon t,$ üýtgeýänlere geçip, deňlemäni kanonik görnüşe getireris.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Soňky deňlemäniň umumy çözüwi

$$U = \Phi(x + \upsilon t) + F(x - \upsilon t). \qquad (3)$$

görnüşdedir.Bu çözüw ilkinji gezek Dalamber tarapyndan alynanlygyna görä bu çözüwe Dalamberiň çözüwi hem diýilýär.

Bu umumy çözüwden berlen başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwleri saýlap alalyň.Onuň üçin (2) başlangyç şertleri (3) çözüwde goýyp ,

$$\Phi(x)+F(x)=\varphi(x) \qquad (4)$$

$$\Phi'(x)-F'(x)=\frac{1}{\upsilon}\phi(x) \qquad (5)$$

deňlemeler sistemasyny alarys.Olary $\hat{O}(\tilde{o}), F(x)$ näbelli funksiýalara görä çözmek üçin (4) deňligiň iki tarapyny hem differensirläliň we ony (5) deňlik bilen çözeliň:

$$\Phi'(x)+F'(x)=\varphi'(x) \qquad (4')$$

$$\Phi'(x)-F'(x)=\frac{1}{\upsilon}\phi(x) \qquad (5')$$

Bu ýerden

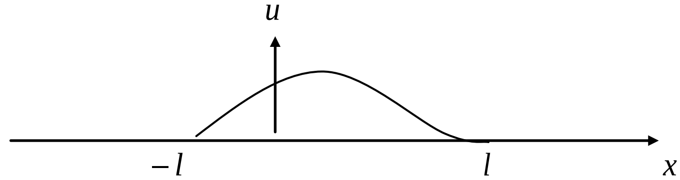
$$\Phi'(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi'+\frac{1}{\upsilon}\phi\right], \quad F'(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi'-\frac{1}{\upsilon}\phi\right] \qquad (6)$$

(6) deňlikleri integrirläp $\Phi(x)$ we $F(x)$ funksiýalaryň anyk görnüşlerini alarys.Şeýlelikde tükeniksiz tar üçin Dalamberiň çözüwi aşakdaky görnüşde bolar.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{[\varphi(x+\upsilon t)+\varphi(x-\upsilon t)]\}+\frac{1}{\upsilon}\int_{x-\upsilon t}^{x+\upsilon t}\phi(x)dx \qquad (7)$$

Tükeniksiz tar üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň hususy ýagdaýlaryna seredeliň:

1.Goý taryň nokatlarynyň başlangyç tizligi nula deň ($\psi=0$) we ($-l;l$) aralykdaky nokatlar başlangyç üýtgemä eýe bolsun, (9-njy çyzgy) ýagny



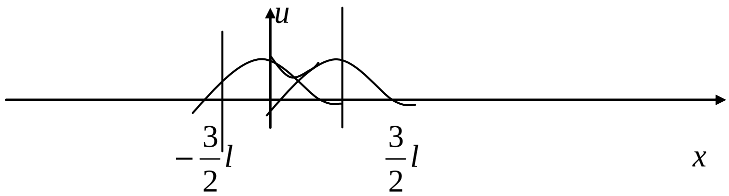
9-njy çyzgy

$\varphi(x)=0$ eger $|x|>l.$

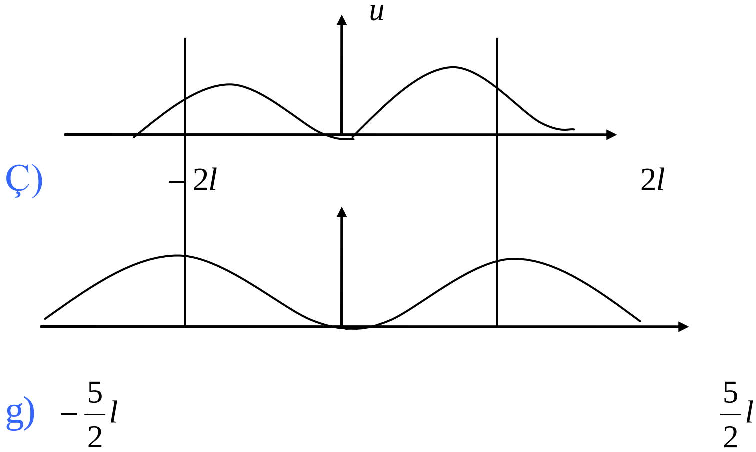
Onda (6) çözüw aşakdaky görnüşi alýar:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{[\varphi(x+\upsilon t)+\varphi(x-\upsilon t)]\} \qquad (8)$$

Bu alnan çözüw iki sany çepe we saga ýaýraýan tolkunlaryň jemi bolup amplituda başdaky üýtgemäniň ýarysyna deň.Şonuň üçin wagtyň haýsy hem bolsa bir pursadynda taryň görnüşini gurmak üçin grafigiň ýarym üýtgemesini saga we çepe vt kesimlere simmetrik üýtgedip soňra bu egrileri grafiki goşmaly 10-njy çyzgy b.



10-njy çyzgy b



10-njy çyzgy ç,g.

$t=\frac{l}{v}$ pursatdan soň garşylykly tarapa ýaýraýan tolkunlar indi biri-biriniň üstüne düşmeýärde, eýsem dürli tarapa dargap başlaýar.(10-njy çyzgyç,g.)

Indi bolsa (koordinatasy $x>l$ ýa-da $x<-l$ bolan) başlangyç üýtgemäni almadyk taryň nokatlarynyň özüni alyp barysyny derňäliň.Haçanda entek $t < \frac{x-l}{v}$ bolanda $\varphi(x-vt)$ funksiýanyň argumenti l- den uly bolýar.üýptgeme nula deň ($u=0$) we nokatda dynçlykda bolýar.Munuň özi $t_1 = \frac{x-l}{v}$ wagt pursadyna çenli dowam edip tolkunyň öň fronty x nokada barýança dowam edýär.Soňra wagtyň $t_2 = \frac{x+l}{v}$ pursadynda yzky front x nokada baranda bu nokat ýenede dynçlyk ýagdaýyna dolanýar we ähli wagtda dynçlyk ýagdaýynda galýar.t_1 *we* t_2 wagt aralygynda bolsa tolkun x nokatdan geçmek bilen ony başlangyç ýagdaýdan gyşarmaga mejbur edýär.

2.Goý $(-l;l)$ aralykda başlangyç üýtgeme $\varphi = 0$, $\phi(x) \neq 0$ bolsun.Bu ýagdaýy $2l$ uzynlykly çekiç bilen tara urmak netijesinde ýüze çykaryp bolar.

Ikinji ýagdaýda meseläniň çözüwi

$$u(x;t) = \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \phi(z)dz \qquad (9)$$

görnüşde bolar.

$$\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \phi(z)dz = \lambda(x)$$

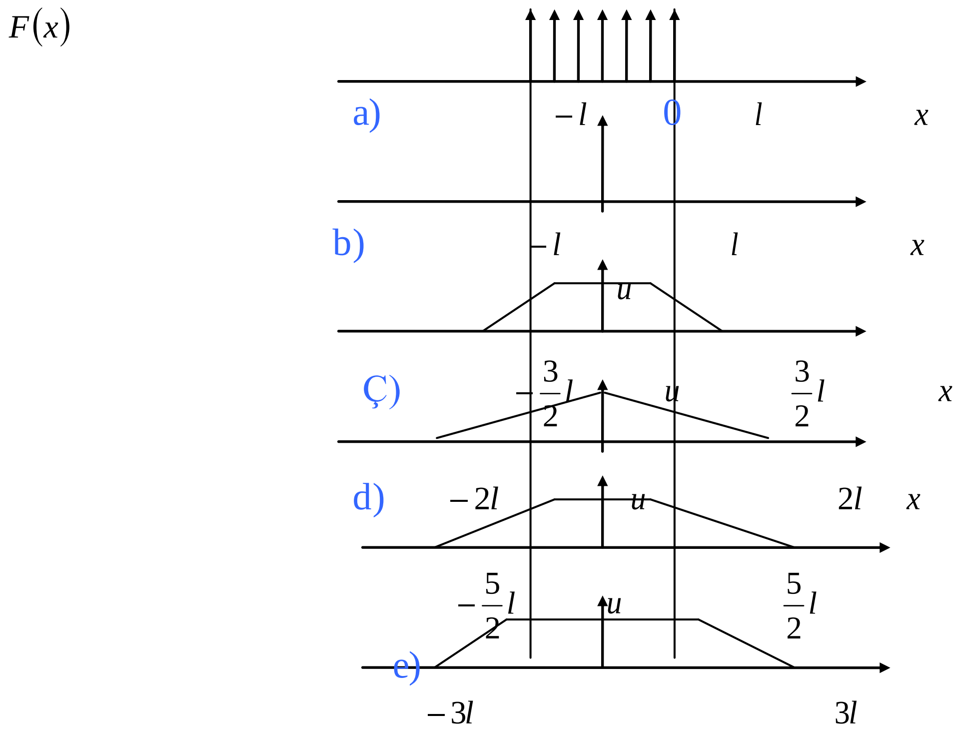
diýip belläliň.Şonda

$$U(x;t) = \lambda(x+vt) - \lambda(x-vt).$$

(10)

çözüw alynar Şunlukda, taryň ugry boýunça iki tolkun :göni we ters tolkunlar gidýär. $t=0$ wagt pursadynda integrirlemegiň aşaky we ýokarky çäkleri gabat gelýär.Şonuň üçin $u=0$.(10-njy çyzgy b)

t-niň artmagy bilen integrirlemek interwaly we $\int_{x-vt}^{x+vt}\phi(z)dz$ integralyň bahasy ulalýar.Haçanda $t=\frac{l}{v}$ bolanda $x=0$ nokat iň uly gyşarma sezewar bolýar. Wagtyň artmagy bilen by gyşarma üýtgemeýär.



11-nji çyzgy a b,ç,g d e.

. Taryň beýleki ähli nokatlary bolsa maksimal üýtgemä wagtyň $t\frac{|x|+l}{v}$ pursadynda ýetýär.Şondan soň bolsa durnuklaşýar.(11-nji çyzgy d,e).

§2.Tükenikli uzynlykly sterženiň sowadylyşy baradaky meseläniň üýtgeýänleri bölmek usuly bilen çözülişi

Goý ýylylk geçirýän inçejik l uzynlykly sterženiň uçlary ereýän doňda ýerleşdirilen bolsun we onuň temperaturasy wagtyň başlangyç t=0 pursadynda sterženiň koordinatalaryna käbir $T = f(x)$ kanun boýunça bagly bolsun.agtyň islendik pursadynda okuň islendik nokadynyň temperaturasyny tapalyň.

Meseläni aşakdaky görnüşde täzeden formulirläliň.

Okda ýylylyk bölünmäniň ýoklugy zerarly ýylylyk diňe okuň ugry boýunça ýaýraýar.Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi şuinlukda aşakdaky görnüşi alýar.

$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Başlangyç şert bolsa aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$T\Big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (2)$$

Gyra şertler iki sany bolmaly ,sebäbi deňleme x görä ikinji tertipli önümi saklaýar.Ol gyra şertler

$$T\Big|_{x=0} = 0 \text{ we } T\Big|_{x=l} = 0 \qquad (3)$$

Şeýlelikde, (1) deňlemäniň (2) we (3) şertleri kanagatlandyrýan çözüwlerini tapmak gerek.

Bu meseläni çözmeklige girişmezden ozal deňlemäni ýönekeýleşdireliň.Onuň üçin

$$\frac{c\rho}{k} = \tau \qquad (4)$$

ornuna goýmany alayň.Şonda ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1^*)$$

görnüşe geler we (2) şert

$$T\Big|_{\tau=0} = \varphi(x) \qquad (2^*)$$

yaly bolar,(3) gyra şertler bolsa ýtgewsiz galýar.
(1*) deňlemäniň çözüwini

$$T(x;\tau) = X(x)\cdot Y(\tau) \qquad (5)$$

görnüşde gözläliň Onda hususy önümleri

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = X(x)\cdot Y^{/}(\tau) \quad \text{we} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X^{//}(x)\cdot Y(\tau)$$

tapyp,olary (1*) deňlemede goýup alarys:

$$X(x)\cdot Y^{/}(\tau) = X^{//}(x)\cdot Y(\tau)$$

Bu ýerden

$$\frac{Y^{/}(\tau)}{Y(\tau)} = \frac{X^{//}(x)}{X(x)} \qquad (6)$$

(6) deňligiň çep böleginde τ wagtyň ,sag böleginde bolsa x argumentiň funksiýasy saklanýar.Şeýle deňlik deňlemäniň iki bölegi hem şol bir hemişelige deň bolanda mümkindir.Ol hemişeligi $-\lambda^2$ bilen belläliň.Şunlukda (6) deňlik iki sany adaty differensial eňlemä dargaýar.

$$X^{//}(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (7)$$

$$Y^{/}(\tau) + \lambda^2 Y(\tau) = 0 \qquad (8)$$

Alnan deňlemeleri integrirlemeklik hiç hili kynçylyk döretmeýär.(7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad (9)$$

görnüşde bolmak bilen A we B erkin näbelli hemişelik ululyklardyr.
(8) deňlemäniň çözüwiniň

$$Y(\tau) = Ce^{-\lambda^2\tau} \qquad (10)$$

görnüşdedigine göz ýetirmek kyn däldir.

$X(x)\cdot Y(\tau)$ köpeltmek hasyl (1*) deňlemäni kanagatlandyrýar.Ýöne yene-de (2*) we (3) şertleriň ýerine ýetmekligi zerurdyr.Okuň uçlarynda $T\big|_{x=0} = 0$, $T\big|_{x=l} = 0$ bolýanlygna görä bu nokatlarda $X(x)$ funksiýa hem nula öwrülmelidir.

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \qquad (3^*)$$

Bu deňlikleriň kanagatlandyrylmagy üçin A,B, we λ hemişelikleri degişli görnüşde saýlap almak gerek.
Ilki bilen (3*) deňlikleriň birinjisinden başlalyň.(9) deňlige $x=0$ goýup alarys.

$$X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \qquad (11)$$

Bu ýerden A=0 alynýar.Şeýlelikde $X(x)$ funksiýa aşakdaky görnüşi alýar.

$$X(x) = B\sin\lambda x \qquad (9^*)$$

Indi bolsa bu funksiýanyň (3*) şertleriň ikinisini hem kanagatlandyrmagyny talap edeliň.

$$X(l) = B\sin\lambda l = 0.$$

Bu ýerde iki mümkinçilik bar:Ýa-ha B=0 ýa-da $\sin\lambda l = 0$.
Ýöne B=0 çözüwi almak bolmaýar, sebäbi B=0 ýagdaýda meseläniň triwial çözüwi alynýar.Ol çözüwiň bolsa fiziki manysy ýokdur.Şonuň üçin hem $\sin\lambda l = 0$ bolar ýaly λ parametri almaly.Bu ýerden $\lambda l = n\pi$ (bu ýerde n=1,2,3,4,...).Şeýlelikde λ hemişelik diskret bahalaryň hataryny alyp biler.

$$\lambda_n = n\frac{\pi}{l} \qquad (12)$$

(9*) deňlikde λ hemişeligi degişli bahasy bilen çalyşmak bilen

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (13)$$

Funksiýalaryň köplügini alarys.Bu ýerde B_n her biri (3*) gyra şertleri kanagatlandyrýan erkin hemişelikler. Şuňa meňzeşlikde λ sanyň (12) bahalaryny (10) deňlige goýup $Y(\tau)$ funksiýalaryň köplügini alarys.

$$Y_n(\tau) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}} \qquad (14)$$

Bu ýerde C_n-erkin hemişelikler. $X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ we $Y_n(\tau) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}$ funksiýalaryň köpetmek hasyly

$$T_n(x;\tau) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cdot C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}} = M_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}} \qquad (15)$$

$(M_n = B_n C_n)$ üýtgeýän iki ululygyň funksiýasydyr.Islendik $T_n(x;\tau)$ fuksiýa (1*) deňlemäni we (3) gyra şertleri kanagatlandyrýar.

Meseläniň çözüwini tapmak üçin M_n koeffisiýentleri (2*) başlangyç şertleri kanagatlandyrar ýaly saýlap almak galýar.Bu sowalyň seljermesi wagtyň başlangyç $\tau = 0$ pursadynda $T_n(x;\tau)$ funksiýanyň

$$T_n(x;0) = M_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

funksiýa geçýänligini görkezýär.Umuman alnanda

$$T_n\Big|_{\tau=0} = \varphi(x)$$

Başlangyç şertleri kangatlandyrýan M_n koeffisiýentleri saýlap almak mümkin däl.Ýöne başga bir mümkinçilik bar.Hususy çözüwleriň islendik çyzykly kombinasiýasynyň berlen deňlemäni kanagatlandyrýanlygyny göz öňünde tutsak ,onda Furýeniň usulyna laýyklykda (15) çözüwlerden jemi

$$T(x;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 \tau} \qquad (16)$$

alarys.

Egerde (16) hatar ýygnalýan bolsa,onda ony differensirlemek mümkin. Şunluklda alnan netije hem (1*) deňlemäniň (3) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolýar.

Indi M_n koeffisiýentleriň bahalaryny (16) hatar $\tau = 0$ bolanda (2*) başlangyç şertleri kanagatlandyrar ýaly saýlap alalyň,ýagny

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \qquad (17)$$

Furýe hatarynyň teoriýasyndan belli bolşy ýaly $(0;l)$ interwalda berlen islendik üznüksiz $\varphi(x)$ funksiýa sinuslar boýunça Furýe hataryna dargadylyp bilinýär:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (18)$$

Bu ýerde φ_n –Furýe koeffisiýentleri we olary

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (19)$$

formula bilen tapyp bolýar. (17) we (18) deňlikleri deňeşdirip biz eger M_n hemişeliklere derek furýe koeffisiýentleri φ_n alynsa ,onda (17) şert ýerine ýetýär we

$$T(x;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(\frac{n\pi}{l})^2\tau} \qquad (20)$$

hatar diňe bir (2*) başlangyç şertleri däl eýsem (3*) gyra şertleri hem kanagatlandyrýar.Şeýlelikde, (20) funksional hatar biziň meselämiziň çözüwi bolýar.

§3.Tükenikli uzynlykly taryň yrgyldysy

Furýe usulyny iki tarapy berkidilen , berlen başlangyç şertler esasynda yrgyldaýan taryň nokatlarynyň hereketi baradaky meseläni çözmek üçin ulanalyň.Başga sözler bilen aýdylanda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (21)$$

deňlemäniň aşakdaky başlangyç we gyra şertleri kanagatlandyrýan

$$U\Big|_{x=0} = 0, \qquad U\Big|_{x=l} = 0 \qquad (22)$$

$$U\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \phi(x) \qquad (23)$$

çözüwlerini tapmaly.

Edil öňki bölümdäki ýaly bu ýerde hem çözüwi iki sany funksiýanyň köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň:

$$U(x;t) = X(x)T(t) \qquad (24)$$

U funksiýanyň x we t boýunça ikinji tertipli hususy önümlerini tapyp we bu önümler (21) deňlemede ornuna goýup ,aşakdaky deňligi alarys:

$$XT^{//} = v^2X^{//}T$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem v^2XT köpeltmek hasyla bölüp ,deňlemäniň üýtgeýänlerini bölüp alarys:

$$\frac{1}{v^2}\frac{T^{//}}{T(t)}=\frac{X^{//}}{X(x)} \qquad (25)$$

(25) deňlik diňe deňligiň iki bölegi hem şol bir hemişelik ululyga deň bolanda mümkindir.Bu hemişeligi $-\lambda^2$ bilen belläp iki sany ikinji tertipli adaty differensial deňlemä gelýäris:

$$X^{//}+\lambda^2 X(x)=0 \qquad (26)$$

$$T^{//}+\lambda^2 v^2 T(t)=0 \qquad (27)$$

Bu deňlemeleriň umumy cözüwleri:

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \qquad (28)$$

$$T=C\cos v\lambda x+D\sin v\lambda x \qquad (29)$$

Bu ýerde A,B,C,D erkin hemişelikler.Bu hemişelikleri (22) we (23) şertler ýerine ýeter ýaly saýlap almaly.Gyra şertlerden başlalyň. Eger $x=0$ we $x=l$ bolanda $X(x)$ funksiýa nola öwrülse,onda gözlenýän çözüw hem bu şertleri kanagatlandyrýar.

$$X(0)=A\cos\lambda 0+B\sin\lambda 0=0.$$

Bu ýerden $A=0$ alynýar.Şonuň üçin hem (28) deňlik ýönekeýleşip

$$X=B\sin\lambda x \qquad (28^{/})$$

görnüşi alýar.

Indi $X(l)=0$ şertiň ýerine ýetmegini talap edeliň.Ýagny.bu ýerde b=0 triwial çözüwi taşlamak bilen $\sin\lambda l=0$ deňlige geleris.Bu deňlemäni çözüp

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l}. \qquad (30).$$

(30) deňligi (28$^{/}$) deňlikde goýup x bagly bolan funksiýalar köplügini alýarys.

$$X_n=B_n\sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (31)$$

Bu funksiýalaryň köplügi $(0,l)$ interwalyň uçky nokatlarynda nula öwrülýär. We (26) deňlemäni kanagatlandyrýar.

Şuňa meňzeşlikde (29) çözüwde λ bahasyny goýup l bagly ,(27) deňligi kanagatlandytýan funksiýalaryň maşgalasyny alýarys:

$$T_n=C_n\cos\frac{\pi n v t}{l}+D_n\sin\frac{\pi n v t}{l} \qquad (32)$$

(31) we (32) deňlikleri köpeldip we ol köpeltmek hasyly (24) deňlikde goýup

$$U_n(x;t) = (M_n \cos\frac{\pi n v t}{l} + N_n \sin\frac{\pi n v t}{l}) \sin\frac{\pi n x}{l}$$

(bu ýerde $M_n = C_n B_n, N_n = D_n B_n$) funksiýalaryň köplügi alynýar. Bu funksialaryň her biri (21) deňlemäni we (22) gyra şertleri kanagatlandyrýar. Şeýle häsiýete U_n hususy çözüwleriň islendik çyzykly kombinasiýasy eýedir.Başlangyç şertleriň ýerine ýetmekligi üçin U_n funksiýalaryň hataryny düzeliň, bu hataryň jemi

$$U(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_n \cos\frac{\pi n v t}{l} + N_n \sin\frac{\pi n v t}{l}) \sin\frac{\pi n x}{l} \quad (34)$$

görnüşde ýazylýar. Eger bu hatar ýygnalsa ,onda ony iki gezek x we t boýunça diufferensirlemek bolýar, hataryň jemi hem (21) deňlemäni we (22) şertleri kanagatlandyrýar.Öňki seredilen mysaldan görnüşi ýaly Furýeniň usulynyň ideýasy M_n we N_n koeffisiýentleri degişlilikde saýlap almak bilen başlangyç şertleriň hem ýerine ýetmegini gazanmakdan ybaratdyr. Diýmek (33) deňlikde $t = 0$ goýup,

$$U\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \quad (35)$$

deňligiň ýerine ýetmegini talap etmeli. Şuňa meňzeşlikde wagta görä agzama –agza differensirlemekden alnan aňlatmada $t = 0$ goýsak

$$\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\lambda}{l} N_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \phi(x) \quad (36)$$

deňlik ýerine ýeter.

(35) we (36) şertleriň ýerine ýetmekligi üçin M_n we $N_n \frac{n\pi v}{l}$ hemişelikler degişlilikde Furýeniň φ_n we ϕ_n koieffisientlerine deň bolmaly.Başga sözler bilen aýdylanda

$$M_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \quad (35')$$

$$N_n = \frac{1}{n\pi v}\phi_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^l \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \quad (36')$$

M_n we N_n koeffisiýentleriň alnan bahalaryny (34) hatarda ornuna goýup, hataryň jemi bolýan aşakdaky funksiýany alýarys:

$$U(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \cos\frac{\pi n v t}{l} + \phi_n \sin\frac{\pi n v t}{l}) \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (37)$$

Bu hatary ýygnalýar we differensirlenýär diýip guman edip, (37) funksiýanyň meseläniň çözüwi bolýanlygyna göz ýetireris.
Alnan çözüwiň fiziki manysynya seredeliň.

Hataryň her bir agzasyny

$$U_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi v}{l}t + \beta_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

görnüşde aňlatmak bolýar. Şeýle görnüşde ol hususy yrgyldyny uratlandyrýar:taryň ähli nokatlary hususy ýygylyklary $\varpi_n = \frac{n\pi v}{l}$, amplitudasy $A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ bolan birmeňzeş β_n başlangyç fazaly garmoniki yrgyldy edýar.

Iň kiçi hususy ýygylyga $\varpi_1 = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ esasy tonuň ýygylygy diýilýär.Kratny ýygylyklaryň tonlaryna garmonikler ýa-da obertonlar diýilýär. Tar näçe gysga we ýeňil, T dartylma näçe uly bolsa . ω_1 ýygylyk şonçada uly bolar.
Bilşimiz ýaly, sesler notalara we galmagala bölünýär..Notalar, periodiki ,galmagal bolsa periodiki däl yrgyldy bilen emele gelýär. Notanyň kömegi bilen işleýän saz gurallarynda binäçe tonlar – esasy we obertonlar bolýar..Adatça garmonikleriň amplitudasy olaryň tertibiniň artmagy bilen çalt kemelýär.Şonuň üçin nota esasy täsiri esasy tonlar berýär.Obertonlar ol ýa-da başga tembrli sesleri berýär.Diýmek biziň alan çözüwimizi aşakdaky görnüşde ýazyp

$$U = \sum A_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (37^{/})$$

bolýar.Bu alnan çözüw taryň ýygylygy $\frac{\omega_1}{2\pi}$ bolan saz notalaryny iberýär.Başlangyç şertler bilen kesgitlenýän $A_1, A_2, A_3, \ldots$

amplitudalaryň toplumy bu notalaryň spektrini (tembrini) häsiýetlendirýär.

§4. Yuka plastinanyň sowadylyşy.

Goý, boşlangyç pursatda galyňlygy ininden we uzynlygyndan ýeterlikçe kiçi bolan plastinada temperatura $T\Big|_{t=0} = F(x)$ kanun boýunça paýlaşdyrylan bolsun.Plastinanyň sowamagy Nýutonyň kanunyna görä bolup geçýär,ýagny $x = \pm a$ bolanda

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T$$

Wagtyň islendik indiki pursadynda erkin nokadyň temperaturasyny kesgitläliň.

Meseläni analitiki görnüşde formulirläliň: Ýylylyk geçirijiligiň

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (14)$$

birjynsly deňlemesini we

$$T\Big|_{t=0} = F(x) \qquad (15)$$

başlangyç şerti , şeýle hem

$$\frac{\partial T}{\partial x} + kT\Big|_{x=\pm a} = 0 \qquad (16)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi tapmaly.

Ilki bilen $\tau = \frac{k}{c\rho}t$ täze üýtgeýäni girizeliň .Onda (14) deňleme ýönekeýleşýär:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad . \qquad (14')$$

Bu deňlemäniň çözüwini

$$T(x;\tau) = X(x)Y(\tau) \qquad (17)$$

görnüşde gözläliň.(15) deňlikden degişli önümleri tapyp, alnan bahalary (14') ornuna goýup

$$\frac{X^{//}}{X}=\frac{Y^{/}}{Y}$$

deňlemä geleris.Bu deňlik deňlemäniň iki tarapy hem şol bir hemişelik $-\lambda^2$ ululyga deň bolanda ýerliklidir.Şeýlelikde iki sany

$$X^{//}+\lambda^2 X=0$$

$$Y^{/}+\lambda^2 Y=0$$

adaty differensial deňleme alynýar. Bu deňlemeleriň umumy çözüwleri

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \qquad (18)$$

$$Y=Ce^{-\lambda^2 t} \qquad (19)$$

görnüşde bolar.

Seredilýän meselede gyra şertler nuldan tapawutly bolany üçin täze ýagdaý döreýär.(16) şertler $x=0$ tekizlikden çepden we sagdan deň daşlaşan aralyklarda berlen..Şonuň üçin wagtyň başlangyç pursadynda temperatura simmetrik paýlaşdyrlandyr.

$$F(-x)=F(x)$$

Diýmek, temperaturanyň indiki paýlaşdyrmalary hem simmetrik bolmagyna galmalydyr.Şunlukda $X(x)$ funksiýa jübüt funksiýa bolmaly, ýagny

$$X(-x)=X(x).$$

Bu ýerden (18) deňlikde B koeffiientiň nula deň bolmalydygy gelip çykýar we $X(x)$ funksiýanyň görnüşi ýönekeýleşýär.

$$X=A\cos\lambda x.$$

(18$^{/}$)

(16) gyra şertlerde diňe x boýunça önüm saklanýar we $T(x;\tau)=X(x)Y(\tau)$, onda $X(x)$ funksiýa

$$X^{/}(a)+hX(a)=0$$

(16$^{//}$)

şerti kanagatlandyrmaly.

(16$^{//}$) deňlikde $X(x)$ funksiýanyň (18$^{/}$) bahasyny goýyp alarys:

$$-A\lambda\sin\lambda a+hA\cos\lambda x=0.$$

Bu ýerden

$$tg\lambda a = \frac{h}{\lambda}\ . \qquad (20)$$

(20) deňleme transsendent deňleme .Deňlemäniň çözüwini grafiki usul bilen gözläliň.Onuň üçin ilki bilen deňligiň sag böleginde sanawjyny we maýdalawjyny a sana köpeldeliň.

$$tg\lambda a = \frac{ha}{\lambda a}. \qquad (20^{/})$$

Wagtlaýynça $\lambda a = z$ belgilenişigi girizeliň we $(z;u)$ koordinatalar sistemasynda $u_1 = tgz$ we $u_2 = \frac{ha}{z}$ grafiklerini guralyň .Giperbolanyň tangensoidalaryň maşgalasy bilen tükeniksiz köp nokatlarda kesişjekligi düşüniklidir.Diýmek , $(20^{/})$ deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.Şunlukda $z = \lambda n$ ululygyň artmagy bilen kesişme z_n nokatlar $z_n a = n\pi$ nokatlara ýakynlaşýar.(Bu ýerde $n = 1,2,3,4,...$). $tgz_n \to 0$. λ_n $(20^{/})$ deňlemäniň kökleridir. Bu ýerden $X(x)$ funksiýalyň $(16^{//})$ şertleri kanagatlandyrýan köplügi alynýar.

$$X_n(x) = A_n \cos\lambda_n x \qquad (16^{///})$$

$(16^{///})$ we (19) funksiýalary (17) deňlikde ornuna goýup alarys.

$$T_n = M_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos\lambda_n x\ .$$

Bu alnan deňlik (14) deňlemäni we (16) gyra şertleri kanagatlandyrýar. Başlangyç şertleri kanagtlandyrýan çözüwi tapmak üçin bize belli bolan usul bilen tükeniksiz jemi düzeliň.

$$T(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos\lambda_n x \qquad (21).$$

Öňki meselelerde funksiýany kratnyý argumentiň sinuslary we kosinuslary boýunça Furýe hataryna dargadypdyk.Seredýän meselämizde bolsa, λ_n sanlar bitin däl.

Ýöne, $\cos\lambda_n x, (n = 1,2,...)$ funksiýalaryň ortogonaldygyny,ýagny

$$\int_{-a}^{a} \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x \, dx = 0, n \neq m,$$

$$\int_{-a}^{a} \cos \lambda_n^2 x \, dx \neq 0.$$

şertiň ýerine ýetýändigini barlap bolar.Emma olar normirlenen däldir,ýagny ikinji integral 1-e deň däl.Furýeniň hatary teoriýasyndan belli bolşy ýaly, $f(x)$ funksiýany $X_1(x), X_2(x), X_3(x),\ldots$ normirlenmedik ortogonal funksiýalar boýunça

$$f(x) = \sum_n f_n X_n(x)$$

hatara dargadyp bolýar. f_n Furýeniň umumylaşdyrlan koeffisiýentleri

$$f_n = \left[\int_{-a}^{a} X_n^2 dx\right]^{-1} \int_{-a}^{a} f(x) X_n(x) dx$$

formula bilen tapylýar. Furýeniň umumylaşdyrlan hatary barada aýdylanlary göz öňünde tutsak,(21) deňlikdäki M_n koeffisiýentler Furýeniň umumylaşdyrlan koeffisiýentlerine deň bolar.

$$M_n = \frac{\int_{-a}^{a} F(x) \cos \lambda_n x \, dx}{\int_{-a}^{a} \cos^2 \lambda_n x \, dx} \qquad (22)$$

Diýmek,meseläniň çözüwi (21) deňlik bilen tapylýar we ondaky M_n koeffsiýentler (22) formula bilen hasaplanylňar.

§5.Furýeniň özgertmesiniň matematiki fizikanyň meselelerini çözmekde ulanylyşy

Furýeniň özgertmesi barada käbir maglumatlar. Matematiki analiziň kursyndan belli bolşy ýaly,eger $f(x)$ funksiýa san okunyň ähli nokatlarynda Dirihläniň şertini kanagatlandyrýan we $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ integral ýygnanýan bolsa,onda

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x) dt$$

(1)

integrala Furýeniň integraly diýilýär. (1) integralyň kompleks görnüşde ýazylyşy

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)d\lambda \qquad (2)$$

Eger

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt \qquad (3)$$

diýsek,onda (2) integral

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \qquad (4)$$

görnüşe geler. (3) funksiýa $f(x)$ funksiýa üçin Furýeniň özgertmesi diýilýär.(4) integrala Furýeniň ters özgertmesi diýilýär.Furýeniň özgertmesiniň käbir häsiýetlerine seredip geçeliň:

1. Hemişelik köpeldijini özgertme belgisiniň öňüne çykaryp bolýar $\widetilde{\alpha f}=\alpha\tilde{f}$.

2.Iki funksiýanyň jeminiň özgertmesi ol funksiýalaryň özgertmeleriniň jemine deňdir

Bu tassyklamalar integralyň häsiýetlerinden gelip çykýar.

3. Eger $f(x)$ funksiýanyň Furýe özgertmesi $\tilde{f}(\lambda)$ bolsa ,onda $f(x-\beta)$ funksiýanyň Furýe özgertmesi $e^{-i\beta}\tilde{f}(\lambda)$ bolar.Ýagny funksiýany ok boýunça β hemişelik sana süýşirsek özgertme $e^{-i\beta}$ ululyga köpeldiler.Hakykatdan-da $f(x-\beta)$ funksiýanyň Furýe özgertmesi $\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\beta)e^{-i\lambda t}dt$ bolar.Integralda $t-\beta=s$ diýsek,onda

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\beta)e^{-i\lambda t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\beta}e^{s}ds=e^{-i\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-is}ds$$

bolar.

4. Eger $f(x)$ funksiýanyň Furýe özgertmesi $\tilde{f}(\lambda)$ bolsa,onda $f(ax)$ funksiýanyň Furýe özgertmesi $\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ bolar .Bu ýerde a položitel san.

Bu tassyklamany subut etmek üçin $at=s$ diýsek,onda

$$\tilde{f}_1(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{i\lambda t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{i\frac{\lambda}{a}s}\frac{1}{a}ds=\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

bolar.

5 $f(x)$ funksiýanyň $f'(x)$ önüminiň Furýe özgertmesini hasaplalyň

$$\tilde{f}'(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{i\lambda t}dt$$

Bu integraly bölekler boýunça integrirläliň

$$\tilde{f}'(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt=f(t)e^{-i\lambda t}I_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)i\lambda e^{-i\lambda t}dt=$$

$$=i\lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

Diýmek,funksiýanyň $f'(x)$ önüminiň Furýe özgertmesi funksiýanyň Furýe özgertmesini $i\lambda$ biragza köpeldilmegine deňdir.

6.Eger $f(x)$ funksiýa üýtgeýän x ululykdan başga käbir t parametre bagly bolsa,ýagny $f(x,t)$ boisa,onda

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}.$$

Ýokardaky tassyklamanyň subudy hususy önümiň kesgitlemesinden gelip çykýar.

Furýeniň özgertmesiniň matematiki fizikanyň meselesini çözmekde ulanylyşyna tükenuksiz steržen üçin Koşi meselesinde seredeliň.

2. Tükeniksiz steržende ýylylyk geçirijilik. Bu mesele $x\in(-\infty,+\infty)$, $t\geq o$ bahalarda

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

deňlrmäniň

$$T(x,0)=f(x) \qquad (2)$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga getirilýär.

Ýylylyk geçirijiligiň (1) deňlemesiniň iki tarapynda $\tilde{o}$ üýtgeýän boýunça Furýeniň özgertmesini geçireliň.

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}=a^2(i\lambda)^2\tilde{T}=-a^2\lambda^2\tilde{T}. \qquad (3)$$

Bu ýerde (1) deňlemäniň çep tarapyna täsir edende 6-njy häsiýeti , sag tarapyna täsir edende boisa 5-nji häsiýeti iki gezek ulandyk.Islendik fiksirlenen λ üçin t üýtgeýäne görä hemişelik koeffisiýentli adaty çyzykly we birjynsly differensial deňlemäni alarys.Ol (3) deňlemäniň çözümi

$$\tilde{T} = C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} \qquad (4)$$

funksiňany berer.Bu ýerde $Ñ(\lambda)$ näbelli ululyk.Ol λ ululyga bagly bolup biler.

Näbelli $Ñ(\lambda)$ ululygy tapmak üçin (2) başlangyç şertiň iki tarapynda hem Furýeniň özgertmesini geçireliň.

$$\tilde{T}(\lambda,0) = \tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx\ .$$

(4) deňlikde $t=0$ diýsek $\tilde{T}(\lambda,0) = C(\lambda)$ alarys we ony ýokardaky deňlik bilen deňeşdirip ýazarys

$$C(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Tapylan $Ñ(\lambda)$ bahany (4) deňlikde goýup we üýtgeýänleriň belgisini üýtgedip

$$\tilde{T}(\lambda,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+} f(s)e^{-i\lambda s}ds\right)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

deňligi alarys.Soňky deňligiň iki tarapyna hem Furýeniň ters özgertmesini ulansak

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\lambda s-a^2\lambda^2 t}ds$$

görnüşde meseläniň çözüwini alarys.

Jogaby ýönekeýleşdireliň.Onuň üçin $e^{i\lambda x}$ aňlatmany içki integrala girizip,integrirlemek tertibini çalyşalyň.

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-s)-a^2\lambda^2 t}d\lambda$$

Bu ýerdäki içki integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-s)-a^2\lambda^2 t}\,d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}$$

aňlatma deňdir.Netijede,biz meseläniň çözüwini alarys.

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{\frac{-(x-s)^2}{4a^{2t}}}\,ds$$

Soňky formulany Puasson 1823 ýylda aldy.

V bap.Egriçyzykly koordinatalar sistemasy

§1 Silindrik koordinatalar sistemasy

Ilki bilen üçölçegli giňişlikde ortogonal koordinatalar sistemasy barada düşünje bereliň

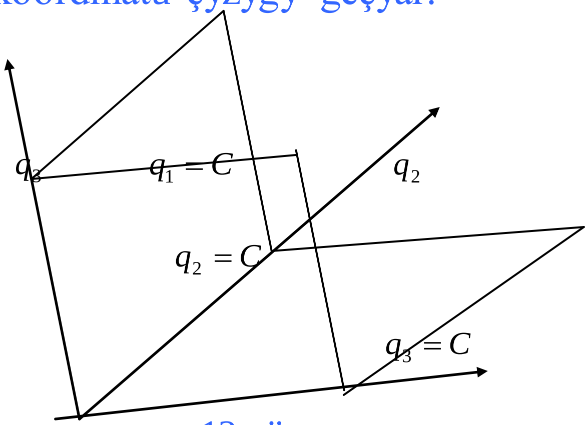
Eger x, y, z dekart koordinatalary öz gezeginde üç sany q_1, q_2, q_3 üýtgeýäniň birbahaly funksiýasy bolsa,

$$x = x(q_1, q_2, q_3),\ y = y(q_1, q_2, q_3),\ z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (1)$$

onda q_1, q_2, q_3 üýtgeýänlere egriçyzykly koordinatalar diýilýär.

Eger q_i ululyklaryň biriniň bahasyny hemişelik diýip ,galan iki koordinatalara mümkin bolan bahalary bersek,onda koordinata üsti diýlip atlandyrylýan üsti alarys.Belli bolşy ýaly giňişlikde her koordinata sistemasy üçin koordinata üstleriň üç maşgalasy degişlidir. Iki sany koordinata üstleriň kesişmesinde alynýan çyzyga koordinata çyzygy diýilýär.

Giňişligiň her bir nokadyndan özara kesişýän üç sany koordinata üsti we üç sany koordinata çyzygy geçýär.



12-nji çyzgy

Eger gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň x, y, z üýtgeýänleri bilen egriçyzykly koordinatalar sistemasynyň q_1, q_2, q_3 üýtgeýänleriniň arasynda

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} = 0 \qquad (2)$$

baglanyşyk bolsa, onda egriçyzykly koordinatalar sistemasy ortogonaldyr. Sebäbi, analitik geometriýa kursundan belli bolşy ýaly koordinata oklary bilen α, β, γ we α', β', γ' burçlary emele getirýän iki göniniň perpendikulýarlyk şerti

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

Şeýlede q_i koordinatalar oklara galtaşýanlaryň gönibyrçly koordinatalar oklar bilen emele getiren burçlarynyň kosinuslary degişlilikde $\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$ hususy önümlere proporsional. Onda biz q_i we q_j koordinata egrileriniň özara perpendikulýarlygynyň (2) şertini alarys.

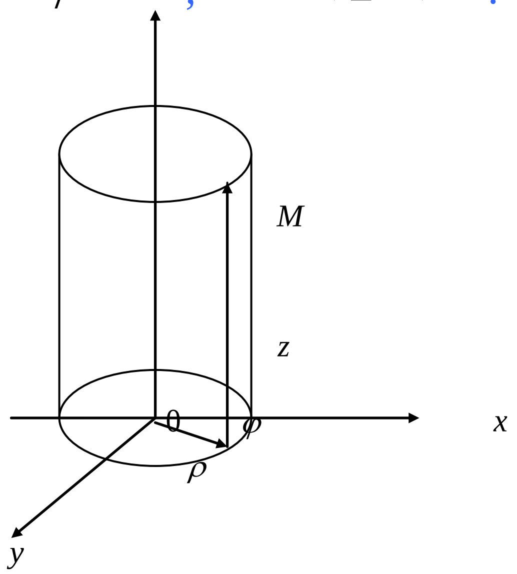
Indi silindrik kordinatalaryna seredeliň.

ρ, φ, z egriçyzykly koordinatalar dekart koordinatalary bilen aşakdaky gatnaşyklar bilen baglanyşyklydyr (13-nji çyzgy).

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \qquad (2)$$

Silindrik koordinatalary aşakdaky ýaly çäklerde üýtgeýärler.

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty.$$



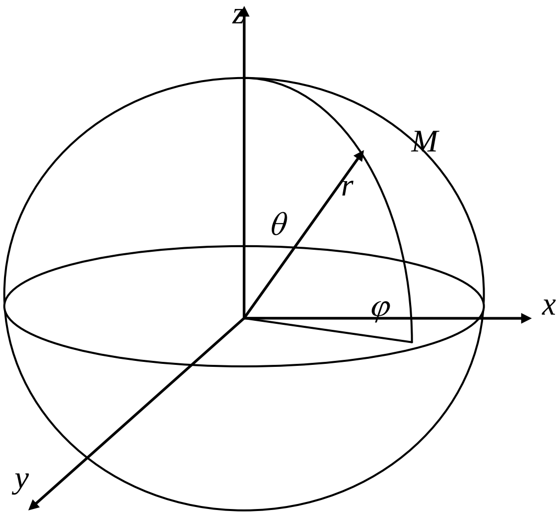
13-nji çyzgy

Silindrik koordinatalar sistemasynyň ρ, φ, z egriçyzykly koordinatalar çyzyklaryna M nokatda galtaşýan wektorlar ;φ oka galtaşýan –töwerege galtaşýan we φ burçuň artýan ugruna gönükdirlen wektor ,beýlekileri bolsa degişlilikde ρ we z oklara kollinear wektorlar.Bu wektorlar ortogonaldyrlar.Sebäbi galtaşma nokadyna geçirlen radius galtaşma çyzyga perpendikulýar.Öz

gezeginde töweregiň ýatan tekizligi z oka perpendikulýar we ρ ok töweregiň radiusynyň üstünden geçýär.
((2) deňligiň ýerine ýetýändigini barlap bolar.)

§2.Sferik koordinatalar sistemasy

Şar bilen barlanyşykly meseleleri çözende sferik koordinatalara geçmeklik köp amaly meseleleriň çözüwini tapmaklygy ýeňilleşdirýär.



14-nji çyzgy

r,θ,φ sferik koordinatalary dekart koordinatalar bilen aşakdaky formulalar bilen baglanyşyklydyr (14-nji çyzgy).

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \qquad (3)$$

Sferik kordinatalary aşakdaky ýaly çäklerde üýtgeýär.

$$0 \le r < \infty\ ,\ 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\ .$$

Sferik koordinatalar sistemasy ortogonal koordinatalar sistemasydyr. q_1, q_2, q_3 egriçyzykly koordinatalar sistemasynyň ortogonal bolmagy üçin onuň koordinata çyzyklarynyň özara perpendikulkýar bolan egriler bolmagy gerekdir. Diýmek $x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3)$ funksiýalar (2) görnüşli üç şerti kanagatalandyrmaly. Bu tassyklamany sferiki koordinatalar üçin geometriki hem subut edip bolar: sferiki koordinatalaryň biri ρ sferanyň radiusynyň üstünden geçýär we beýlekileriň ortlary bolsa sfera galtaşýan tekizlikde ýatýar.Ol ortlar

özara perpendikulýardyr ,sebäbi olar özara perpendikulýar tekiliklerde ýatan töwereklere galtaşýarlar.
Matematiki fizikada köplenç ortogonal koordinata sistemalaryndan peýdalanylýar.Şonuň üçin geljekde egriçyzykly koordinatalar sistemasy barada aýtmak bilen biz olary ortogonal diýip hasap ederis.

§3.Lýame koeffisiýentleri

Göniburçly koordinatalar sistemasynda duganyň ds elementi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

deňlik bilen aňladylýar.
(§1.1) deňlikleri differensirläp alarys:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \end{aligned} \tag{1'}$$

($1^{/}$) deňlikleri (5) ornuna goýup we (2) ortogonallyk şerti hasaba alyp alarys:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \tag{6}$$

Bu ýerde (6) deňlikdäki H_1, H_2, H_3 ululyklar

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \tag{7}$$

formula bilen tapylýar. H_1, H_2, H_3 ululyklara Lýame koeffisientleri diýilýär we olar göniburçly koordinatalar sistemasy bilen egriçyzykly koordinatalaryň arasyndaky arabaglanyşygy berýär.
(6) formulada $dq_j = 0, i \neq j$ diňsek onda koordinata çyzygyň dugasynyň ds elementi

$$ds = H_i dq_i \tag{8}$$

deň bolar.
Bu ýerde Lýame koeffisienti üçin

$$H_i = \frac{ds_i}{dq_i} \tag{9}$$

aňlatma alynýar we ol Lýame koeffisientleriniň koordinatalar üýtgände koordinatalar çyzyklaryň dugasynyň uzynlygynyň üýtgeýiş tizligini häsiýetlendirýändigini görkezýär. . Egriçyzykly kwadratyň meýdany we kubuň göwrümi ikinji tertipli tükeniksiz kiçilere çenli takyklykda aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenýär.

$$d\sigma = H_i H_j dq_i dq_j \qquad (10)$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \qquad (11)$$

Käbir koordinatalar sistemasy üçin Lýame koeffisientlerini ýazalyň.

1.Göniburçly koordinatalar sistemasy üçin Lýame koeffisientleri $H_x = H_y = H_z = 1$,

2.Silindrik koordinatalar sistemasy üçin

$$\begin{aligned} H_\rho &= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \\ H_\varphi &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \rho \\ H_z &= 1 \end{aligned} \qquad (12)$$

3.Sferik koordinatalar üçin

$$H_r = 1,\ H_\theta = r,\ H_\varphi = r\sin\theta \qquad (13)$$

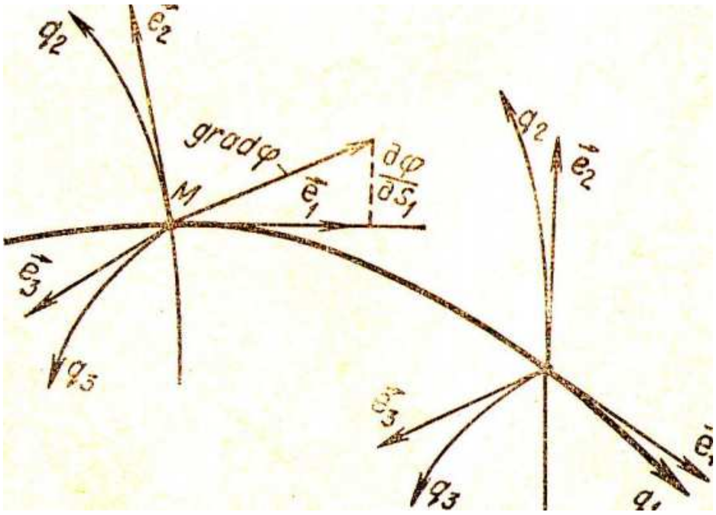
§4.Egriçyzykly koordinatalarda esasy differensial operasiýalar.

1.Skalýar funksiýanyň gradiýenti.

Giňişligiň M nokadynda $grad\varphi$ wektor berlen bolsun.Bu nokatdan özara perpendikulýar q_1, q_2, q_3 egriler geçýän bolsun.M nokatdan egrilere galtaşýanlaryň üstünde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birlik ortlary geçireliň (15-nji çyzgy). Ortogonal ortlaryň üçligi – bazisler (ýa-da reperler) lokal gönübyrçly koordinatalar sistemasyny emele getirýär.Giňişlikde koordinata çyzyklara galtaşýanlara proýeksiýasy nokadyň üýtgemegi bilen reperler hem üýtgeýär. $grad\varphi$ wektoryň $(grad\varphi)_{q_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial s_j}$ bolar.Bu ýerde ds_j - q_j koordinata egrisiniň dugasynyň uzynlygy.

(8) deňlige görä $ds_j = H_j dq_j$.Onuň üçin

$$(grad\varphi)_{q_j} = \frac{1}{H_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j} \qquad (14)$$



15-nji çyzgy

Netijede egriçyzykly koordinatalar sistemasynda skalýar funksiýanyň gradiýentini tapmak formulasyny alarys.

$$grad\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3 \qquad (15)$$

Gönüburçly koordinatalar sistemasyndan tapawutly egriçyzykly koordinatalar sistemasynda nokat üýtgände gradiýentiň düzüjileri öz bahasyny üýtgedýär.Sebäbi nokat üýtgände diňe ortlar däl,eýsem Lýame koeffisiýentleri hem bahasyny üýtgedýär.

2. Wektor funksiýanyň diwergensiýasy. Berlen $\vec{a}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy $div\vec{a} = \frac{dN}{dV}$ deň.Bu ýerde egriçyzykly koordinatalar sistemasynda $dV = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$ kiçi $\Delta\sigma$ ýapyk üst bilen çäklenen göwrüm, dN - bu üstden wektoryň akymy $dN = \oiint\limits_{\Delta\sigma} a_n d\sigma$. Elementar dV göwrüm deregine granlary koordinata üstleriň bölekleri bolan kiçi egriçyzykly kuby alalyň (16-njy çyzgy).

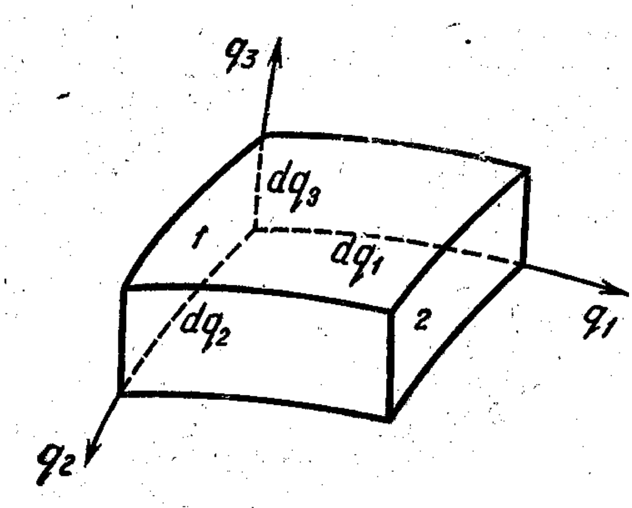
q_1 oka perpendikylýar bolan granlaryň çep tarapdakysyny 1, sag tarapdakysyny 2 diýip belläliň.1 granyň meýdany

$$d\sigma_1 = H_2(q_1)H_3(q_1)dq_2dq_3$$

deň, 2 granyň meýdany

$$d\sigma_2 = H_2(q_1 + dq_1)H_3(q_1 + dq_1)dq_2dq_3$$

deň bolar.



16-nji surat

Goý, $\vec{a}$ wektor 1 granyň nokatlarynda $\vec{a}(q_1)$ we 2 granyň nokatlarynda $\vec{a}(q_1+dq_1)$ bahalary alar. q_1 koordinata okuň 1we 2 granlara perpendikulýar bolýanlygyna görä $\vec{a}(q_1)$ we $\vec{a}(q_1+dq_1)$ wektorlaryň normala proýeksiýasy $-a_{q_1}(q_1)$ we $a_{q_1}(q_1+dq_1)$ bahalary alar.Bu ýerde 1 granyň normalynyň q_1 oka garşylykly ugrykdyrlany üçin minus alamaty alynýar 1 we 2 granlardan q_1 koordinata okuň ugry boýunça wektor akymy

$$dN_{q_1} = -a_{q_1} H_2(q_1) H_3(q_1) dq_2 dq_3 + a_{q_1}(q_1+dq_1) H_2(q_1+dq_1) H_3(q_1+dq_1) dq_2 dq_3$$

deň bolar.Deňligiň sag tarapyna Teýloryň formulasyny ýokary tertipli kiçi ululyklary taşlap ulansak

$$dN_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2 H_3 a_{q_1}\right) dq_1 dq_2 dq_3$$

deňlik alynýar.

Beýleki granlarda hem ýokardaky amallary ýerine ýetirsek ,kiçijik kubuň ähli granlaryndan wektor akymyny alarys.

$$dN = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2 H_3 a_{q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1 H_2 a_{q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 H_2 a_{q_3}\right) \right\} dq_1 dq_2 dq_3$$

(15)

Wektor akymynyň (15) we dV göwrümiň bahalaryny $div\vec{a} = \frac{dN}{dV}$ formulada goýup,egriçyzykly koordinatalar sistemasynda wektor meýdanynyň diwergensiýasyny hasaplamak formulasyny alarys.

$$div\vec{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2H_3a_{q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1H_3a_{q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1H_2a_{q_3}\right)\right\}$$

(16)

3.Laplasyň operatory.Egriçyzykly kordinatalar sistemasynda Laplasyň operatoryny ýazmak üçin

$$\Delta\varphi = div\ grad\varphi$$

formuladan peýdanalyň.

$grad=\vec{a}$ diýsek, $a_{q_i}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i},\quad i=1,2,3.$ bolar.Onda egriçyzykly koordinatalar sistemasymda Laplasyň operatory

$$\Delta\varphi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right\}$$

(17)

görnüşde ýazylýar.

4.Wektor funksiýanyň rotory.

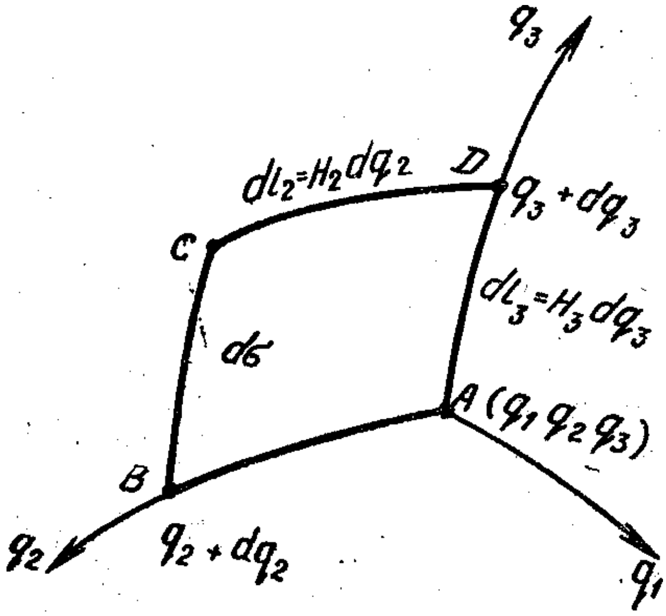
Egriçyzykly koordinatalar sistemasynda rotoryň aňladylyşyny almak üçin $rot_n\vec{a}=\frac{d\tilde{A}}{d\sigma}$ inwariant gatnaşykdan peýdalanalyň.Bu ýerde $d\tilde{A}$ - kiçi $d\sigma$ üsti çäkleýän ýapyk kontur boýunça wektoryň sirkulýasiýasy.Kiçi $d\sigma$ üst deregine taraplary q_2 we q_3 oklaryň bölekleri bolan ABCD egriçyzykly dörtburçlygy alalyň (17-nji çyzgy). Üste geçirlen normal q_1 okuň ugry bilen gabat gelýär. ABCD egriçyzykly dörtburçlygyň meýdany

$$d\sigma=H_2H_3dq_2d_3$$

deň bolar.

Egriçyzykly dörtburçlugyň perimetri boýunça $\vec{a}$ wektoryň $d\tilde{A}=\oint\limits_{\Delta L}a_n dl$ sirkulýasiýasyny hasaplamak üçin dörtburçlugyň dört tarapy boýunça integrallary hasaplamaly

$$\oint\limits_{\Delta l}=\int\limits_A^B+\int\limits_B^C+\int\limits_C^D+\int\limits_D^A$$



17-nji çyzgy

Ýokardaky integrallary hasaplanda dörtburçlygyň taraplarynyň uzynlyklarynyň $dl_i = H_i dq_i$ bolýanlygyny hem-de $\vec{a}$ wektoryň ikiölçegli wektor bolýanlygyny hasaba almaly. $(q_1 = const, \quad \vec{a}(q_2, q_3))$.

Ilki bilen AB we DA taraplar boýunça integrallary hasaplalyň.

$$\int_A^B a_l dl = a_2(q_3)H_2(q_3)dq_2. \qquad (17)$$

Geljekde $\vec{a}$ wektoryň q_1, q_2, q_3 oklara proýeksiýasyny degişlilikde a_1, a_2, a_3 diýip belläliň.Onda

$$\int_D^A a_l dl = -a_3(q_2)H_3dq_3. \qquad (18)$$

Ýokardakylara meňzeşlikde beýleki taraplar üçin integrallary ýazarys.

$$\int_B^C a_l dl = a_3(q_2 + dq_2)H_3(q_2 + dq_2)dq_3 \qquad (19)$$

$$\int_C^D a_l dl = -a_2(q_3 + dq_3)H_2(q_3 + dq_3)dq_2 \qquad (20)$$

(18) integral bilen (19) integraly we (17) integral bilen (20) integraly goşup,soňra bolsa Teýloryň formulasyny ulanyp alarys.(Teňloryň formulasynda diňe birinji tertipli önymler alynýar)

$$d\tilde{A} = \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]dq_2dq_3 \qquad (21)$$

ds we $d\tilde{A}$ ululyklaryň bahalaryny $rot_n\vec{a} = \frac{d\tilde{A}}{d\sigma}$ formulada goýup we ony sadalaşdyryp alarys

$$rot_{q_1}\vec{a} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right]$$

Ýokardaky ýaly amallary ýerine ýetirip rotoryň q_2 we q_3 oklara proýeksiýalaryny taparys.Netijede, egriçyzykly koordinatalar sistemasynda köwlenmäniň lokal ortlara proýeksiýalarynyň üsti bilen aňladylyşy alnar.

$$rot_1\vec{a} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right]\vec{e}_1 + \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_1}\right]\vec{e}_2 + \\ + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_2}\right]\vec{e}_3 \qquad (22)$$

Silindrik we sferik koordinatalarda skalýar we wektor meýdalarynyň esasy differensial operasiýalaryny ýazalyň

1. Silindrik koordinatalarda

a)Lýame koeffisiýentleri

$$H_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,\ H_\varphi = \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \rho,\quad H_z = 1.$$

b) Skalýar funksiýanyň gradiýenti: $gradu = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$

ç) $\vec{a}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy:

$div\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial ÿ}(\rho a_ÿ)\right\}$,rotory:

$$rot_1\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(a_3)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(a_2\rho)}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial(a_1)}{\partial z} - \frac{\partial(a_3)}{\partial\rho}\right]\vec{e}_\varphi + \\ + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(a_2\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial(a_1)}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_3$$

e) Laplasyň deňlemesi :

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\} = 0$$

görnüşe eýe bolar.

2.Sferik koordinatalar sistemasynda:

a) Lýame koeffisiýentleri: $H_\rho = 1$, $H_\theta = \rho$, $H_\varphi = \rho \sin\theta$,

b) skalýar funksiýanyň gradiýenti: $gradu = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

ç) $\vec{a}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy:

$$div\vec{a} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 a_\rho\right) + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(a_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

rotory

$$rot\vec{a} = \frac{1}{\rho \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(a_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial\left(\rho a_\varphi\right)}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho a_\theta\right) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi$$

d) Laplasyň deňlemesi:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

görnüşde ýazylýar.

VI bap. Egriçyzykly koordinatalar sistemasynda Laplasyň deňlemesi üçin meseleleri çözmekde Furýeniň usulynyň ulanylyşy

§ 1.Tegelek üçin Dirihläniň meselesi.

Köp sanly fiziki prosesler matematiki nukdaý nazardan meňzeş bolýar.Şonuň üçin matematiki fizikada meňzeş meseleleriň çözüwini tapmaklygyň umumy usulyny tapmaklyga synanyşýarlar.

Dirihle meselesi:Tegelek plastinkanyň nokatlary üçin ,eger ony çäkleýän G töwerekde töweregiň nokatlaryna bagly bolan hemişelik temperatura saklanýan bolsa,onda $T(x;y)$ temperaturanyň paýlanmasyny tapyň.Başga sözler bilen aýdylanda töweregiň nokatlarynda $\Delta T=0$ deňlemäni we $T\big|_G = f(x;y)$ gyra şerti kanagatlandyrýan $T(x;y)$ regulýar funksiýany tapmaly.

Bu meseläni silindrik koorinatalar sistemasynda çözmek amatlydyr.Laplasyň

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

deňlemesinde $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, z=z$ deňlikleriň kömegi bilen silindrik koorinatalar sistemasyna geçsek,onda ol

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (1)$$

görnüşe geler.

Gyra şertler degişlilikde aşakdaky görnüşi alýar.

$$T\big|_{\rho=a}=f(\varphi) \qquad (2)$$

Furýeniň usulyna laýyklykda çözüwi

$$T(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi) \qquad (3)$$

görnüşde gözläliň. $\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2},\frac{\partial T}{\partial \rho},\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$ önümleri tapyp we bu bahalary (1) deňlikde ornuna goýup alarys:

$$\left(R''+\frac{1}{\rho}R'\right)\Phi(\varphi)+\frac{R}{\rho^2}\Phi''(\varphi)=0$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem $\frac{\rho^2}{R\Phi}$ köpeldip alarys:

$$-\frac{1}{R}\left(\rho^2 R'' + \rho R'\right) = \frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Soňky deňlik deňligiň iki bölegi hem şol bir hemişelige deň bolanda ýerliklidir.Bu hemişeligi $-\lambda^2$ diýip alalyň. Ol deňligiň çep we sag taraplaryny $-\lambda^2$ sana deňläp, iki sany adaty differensial deňlemä geleris:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0 \qquad (4)$$

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \qquad (5)$$

(5)deňligiň umumy integraly

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi \qquad (6)$$

görnüşdedir. Egriçyzykly koordinatalar üçin mahsus bolan sikllilik şertden peýdalanlyň.Bu şert $f(\varphi)$ gyra funksiýanyň we gözlenýän $U(\rho;\varphi)$ çözüwiň φ üýtgeýäne görä periodik bolmaklygyndan ybaratdyr.Ýagny

$$f(\varphi+2\pi) = f(\varphi), U(\rho;\varphi+2\pi) = U(\rho;\varphi).$$

Bu ýerden $\Phi(\varphi)$ funksiýanyň hem

$$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \qquad (7)$$

şerti kanagatlandyrmalydygy gelip çykýar.

Ýöne $\Phi(\varphi)$ funksiýa $\sin\lambda\varphi$ we $\cos\lambda\varphi$ funksiýalaryň çyzykly kombinasiýasy bolýanlygyna görä (7) şertiň ýerine ýetmegi üçin

$$\sin(\lambda\varphi + \lambda\cdot 2\pi) = \sin\lambda\varphi$$

$$\cos(\lambda\kappa + \lambda\cdot 2\pi) = \cos\lambda\varphi$$

deňlikler ýerine ýetmelidir.Şunlukda λ bitin san bolmaly.Bu ýagdaýy hasaba almak bilen (6) deňligi göz öňünde tutup alarys.

$$\Phi_n = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi \qquad (6')$$

Indi (4) deňlemede λ^2 derek n^2 goýup ,alarys:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0 \qquad (4')$$

Bu differensial deňleme Eýleriň deňlemesiniň görnüşindendir.Şeýle görnüşli deňlemeleriň ähli agzalarynda önümlere köpeldilýän bagly däl üýtgeýäniň derejeleri önümiň tertibine deňdir.

Eýleriň deňlemesiniň hususy çözüwi $R=\rho^{s}$ görnüşde gözlenýär.Bu ýerde s häzirlikçe näbelli erkin hemişelik. $R^{/}=s\rho^{s-1}$, $R^{//}=s(s-1)\ \rho^{s-2}$ önümleriň bahasyny($4^{/}$) deňlemede ornuna goýup, $s(s-1)+s-n^{2}=0$ ýa-da $s^{2}=n^{2}$ deňlige geleris.Bu ýerden $s=\pm n$.

Şeýlelikde, her bir n üçin deňlemäniň oňa degişli umumy çözüwi bardyr.

$$R_n(\rho)=C_n\rho^{n}+D_n\rho^{-n}$$

Bizi diňe regulýar çözüwler gyzyklandyrýanlygy üçin $D_n=0$.garşylykly ýagdaýda $\rho=0$ nokatda R_n tükeniksizlige ymtylýar.

Diýmek, fiziki şertleri kanagatalandyrýän çözüw

$$R_n(\rho)=C_n\rho^{n} \qquad (i=1,2,3,\ldots) \tag{8}$$

bolar.

$R_n(\rho)$ we $\Phi_n(\varphi)$ funksiýalary köpeldip (3) deňlige laýyklykda çözüwleriň toplumyny alarys.

$$T_n(\rho;\varphi)=(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi)\rho^{n} \tag{9}$$

Bu ýerde $M_n=A_nC_n$, $N_n=A_nC_n$.Bu funksiýalar başdaky (1) deňlemäni we tebigi fiziki şetleri kanagatlandyrýar.(2) gyra şertleriň ýerine ýetmekligi üçin tükeniksiz jem düzeliň.

$$T(\rho;\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi)\rho^{n}$$

(10)

M_n, N_n-koeffisientleri $\rho=a$ bolanda bu hatar $f(\varphi)$ funksiýa ýygnalar ýaly saýlap alalyň.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi)a^{n}=f(\varphi)$$

(11)

Furýe hatarynyň teoriýasyndan belli bolşy ýaly,Dirihläniň şertini kanagatlandyrýan islendik $f(\varphi)$ funksiýany sinuslar we çosinuslar boýunça hatara dargatmak mümkin.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n^{(c)}\cos n\varphi+f_n^{s}\sin n\varphi)=f(\varphi)$$

(12)

Bu ýerde $f_n^{(c)}$ we f_n^{s} kosinusa we sinusa degişli furýe hatarynyň koeffisientleri özem:

$$f_n^{(c)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi$$

$$f_n^{s}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi$$

$f_0^{(c)}$ we f_0^{s} koeffisientler $f_0^{(c)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\,d\varphi$, $f_0^{s}=0$ formulalar bilen kesgitlenýär.

(11) we (12) deňlikleri deňeşdirip, gyra şertleriň ýerine ýetmekligi üçin $M_n a^n=f_n^{(c)}$, $f_0^{s}=N_n a^n$ diýip almaly.Şeýlelikde tegelek üçin Dirihle meselesiniň çözüwi

$$T=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\{\cos n\varphi\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt+$$

$$+\sin n\varphi\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt\}$$

(13).

görnüşde tapylar.(13) deňlemäni üýtgedip ýazalyň

$$T=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right)dt$$

Integral aşagyndaky ýaýyň içindäki aňlatmany özgerdeliň

$$\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left(e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}\right)=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{a}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}=\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(t-\varphi)+\rho^2}.$$

Netijede,(13) çözüw

$$T(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(t-\varphi)+\rho^2}dt \qquad (14)$$

görnüşe geler.

Eger $f(\varphi)$ funksiýa üznüksiz bolsa onda (14) integralyň tegelek üçin Dirihläniň meselesiniň çözüwi bolýandygyny barlap bolar.(14) integrala Puassonyň integraly diýilýär.Integral aşagyndaky droba Puassonyň ýadrosy diýilýär.

-

§2.Laplasyň deňlemesiniň silindrik koordinatalarda çözülişi

Laplasyň deňlemesi silindrik koordinatalarda aşakdaky görnüşdedir.

$$\Delta U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

Bu deňlemäniň çözüwini Furýeniň usuly bilen gözläliň. Şunlukda gözlenýän funksiýanyň $U(\rho,\varphi\ ,z)$ üç sany üýtgeýäne baglydygyny hasaba alamaly.

$U(\rho,\varphi\ ,z)= V(\rho;z)\Phi(z)$ (2)

Bu köpeltmek hasyly (1) deňlikde ornuna goýup alarys:

$$\frac{\Phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}V\Phi^{//}+\Phi\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Eger alynan deňligiň iki bölegini hem $\frac{\rho^2}{V\Phi}$ köpeltsek we φ bagly agzany deňligiň sag bölegine geçirsek ,onda

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\rho^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\Phi^{//}}{\Phi(\varphi)}$$

deňlige geleris.

Dürli iki argumentiň funksiýalarynyň deňligi diňe deňligiň iki bölegi hem şol bir hemişelige deň bolanda mümkin bolýanlygy üçin ,bu hemişeligi ν^2 belläp iki sny deňleme alarys.

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\rho^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\nu^2 \qquad (3)$$

$$\Phi^{//}+\nu^2\Phi(\varphi)=0 \qquad (4)$$

(3) deňleme hususy önümli deňleme bolýanlygy üçin üýtgeýjileri bölmek maksady bilen oňa Furýe usulyny ulanalyň.(3) deňlemäniň çözüwini

$$V(\rho,z)=R(\rho)Z(z) \qquad (5)$$

görnüşde gözläliň.

(3) deňligiň iki bölegini hem ρ^2 bölüp we oňa (5) deňligi goýup ýenede

$$\frac{Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R^{/})-\frac{\nu^2}{\rho^2}RZ+RZ^{//}=0$$

deňlemä geleris.Bu deňligiň iki bölegini hem RZ böleliň we deňligiň sag bölegine z bagly agzany geçireliň.

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}(\rho R^{/})-\frac{\nu^2}{\rho^2}=-\frac{Z^{//}}{Z(z)}$$

Dürli argumentleriň funksiýasy bolan iki sany funksiýanyň deňligine geldik .Bu deňlikleriň iki bölegini hem şol bir λ^2 hemişelige deňläp iki sany adaty differensial deňlemä geleris.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R^{/})+\left[\lambda^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right]R=0 \qquad (6)$$

$$Z^{//}-\lambda^2 Z=0 \qquad (7)$$

(4),(6)we (7) deňlemeler toplumy Laplasyň deňlemesine ekwiwalentdir we $\Phi(\varphi), R(\rho), Z(z)$ funksiýalary kesgitlemeklige mümükinçilik berýär.Şunlukda gözlenýän funksiýa hem tapylýar.Ol funksiýa (2) we (5) deňliklere görä

$$U(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \qquad (8)$$

(4) we (7) deňlemeler bize belli bolan ikinji tertipli çyzykly we birjynsly adaty differensial deňlelmelerdir. Olaryň umumy çözüwleri

$$\Phi(\varphi) = A\cos\nu\varphi + B\sin\nu\varphi \tag{9}$$

$$Z(z) = Ch\lambda z + Dsh\lambda z \tag{10}$$

Şeýlelikde mesele (6) görnüşli differensial deňlemäni çözmeklige syrykdyrylýar. Ol deňlemäni

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0 \tag{6'}$$

Görnüşde aňlatmak bolýar. Egerde $x = \lambda\rho$ täze üýtgeýän girizilse ,onda ($6'$) deňleme biraz ýönekeýleşýär we Besseliň deňlemesi diýip atlndyrylýan deňlemä getirilýär.

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{11}$$

Bu deňlemäniň çözüwlerine silindrik ýa-da Bessel funksiýalary diýilýär.

§.3 Besseliň deňlemesiniň çözüwi

Indi (11) deňlemäniň çözüwini tapmaklygyň usulyna seredeliň.

Besseliň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{12}$$

Bu deňlemäniň çözüwini aşakdaky görnüşli hatar görnüşinde gözläliň.

$$y = x^s\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0} a_k x^{k+s} \tag{13}$$

Bu hataryň birinji we ikini önümleri aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$y' = \sum_{k=0} a_k (k+s)x^{k+s-1} \tag{13'}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s)(k+s-1)x^{k+s-2} \tag{13''}$$

(13) deňligi $\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)$ we ($13'$) deňligi $\frac{1}{x}$ köpeldeliň we alnan aňlatmalary ($13''$) bilen bilelikde (12) deňlige goýalyň.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s-2}\left[(k+s)(k+s-1)+(k+s)-\nu^2\right]=0$$

Bu deňligi x^{s-2} gysgaldyp, kwadrat ýaýyň içindäki aňlatmany ýönekeýleşdirip deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k}\left[(k+s)^2-\nu^2\right]$$

Deňligiň çep bölegindäki hatar x^2 ululygy saklaýan agza bilen sag bölegindäki hatar bolsa x^0 -dan başlanýar. Bu ýerden x^0 we x^1 ululyklary saklaýan agzalaryň koeffisientleriniň nula deňligi gelip çykýar.

$$a_0\left(s^2-\nu^2\right)=0 \qquad (14)$$

$$a_1\left[(1+s)^2-\nu^2\right]=0 \qquad (14')$$

x -iň ýokary tertipli derejelerini saklaýan agzalaryň koeffisientlerini tapmak üçin hatarlaryň deň derejeli üýtgeýänleri saklaýan agzalaryny deňeždirip

$$a_{k-2} = -a_k\left[(k+s)^2-\nu^2\right] \qquad (15)$$

rekurrent gatnaşygy alarys.Bu ýerde $k=2,3,4,...$.

(14) deňlikden $s=\pm\nu$ we $a_1=0$ bolýanlygy gelip çykýar.Ilki bilen $s=+\nu$ goýalyň,onda (15) deňlige laýyklykda

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)} \qquad (15')$$

Bu ýerde $k=2,3,4,...$. $a_1=0$ bolýanlygyna görä indiki täk koefffisientler $a_3, a_5, a_7,...$ hem nula deň bolar.Jübüt koeffisientler barada aýdylanda ol koeffisientleri (15′) deňliukden peýdalanyp a_0 koeffisiýentiň üsti bilen aňlatmak bolýar.

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4 2\cdot(1+\nu)(2+\nu)},$$

. . . .

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!\cdot(1+\nu)(2+\nu)\ldots(k+\nu)}, \qquad (16)$$

(16) deňliklerdäki koeffisiýentleri (13) hatarda goýup, Besseliň (12) deňlemesiniň hususy çözüwlerini alarys.

$$y_1(x)=I_\nu(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k}k!(1+\nu)\ldots(k+\nu)} \qquad (17)$$

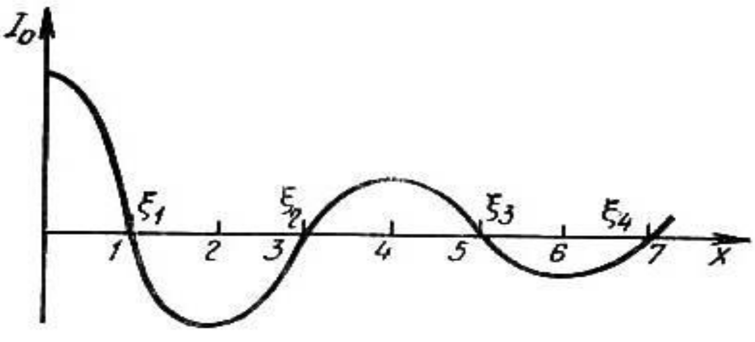
Položitel agzaly san hatarlarynyň ýygnalmagynyň Dalamber nyşanyna görä (17) hataryň x islendik bahasynda ýygnalýanlygyny görkezmek bolýar. (17) hatar görnüşde kesgitlenen funksiýalara ν tertipli birinji jynsly $I_\nu(x)$ Bessel funksiýalary diýilýär.

Birinji jynsly Bessel funksiýalary gowy öwrenilendir we onuň üçin tablisalar düzülendir.

$x \gg 1$ (x 1 den has uly) bolanda Bessel funksiýasyny onuň asimptotik formulasy bilen çalyşmak bolýar.

$$I_\nu(x)=\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (18)$$

Bu funksiýanyň grafigi x-iň uly bahalarynda takmyny sönýän kosinusoidany ýada salýar. (18-nji çyzgy)



18-nji çyzgy

Bessel funksiýanyň tükeniksiz köp ξ_k^ν (bu ýerde k=1,2,3,...) kökleriniň koplügi bar bolup olar üçin , $I_\nu(\xi_k^\nu)=0$.

Şeýlelikde $I_\nu(x)$ birinji jynsly besslel funksiýasy (12) deňlemäniň hususy çözüwleriniň biridir. Umumy çözüwi ýazmak üçin ikinji çyzykly baglanyşksyz $y_2(x)$ hususy çözüwi bilmek gerek .Bessel funksiýasynň teoriýasynda ν parametr bitin san bolmadyk ýagdaýynda ikinji hususy çözüwi $s=-\nu$ goýup almak bolýar.

$$y_2(x)=I_{-\nu}(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k}k!(1-\nu)\ldots(k-\nu)} \qquad (17')$$

Bu funksiýa otrisatel tertipli bessel funksiýa ν bitin bolmadyk ýagdaýda Bessel deňlemesiniň umumy integraly

$$y(x)=C_1 I_\nu(x)+C_2 I_{-\nu}(x) \qquad (19)$$

görnüşdedir.

Haçanda ν bitin san bolanda $I_{-n}(x)$ funksiýa $I_n(x)$ funksiýadan diňe hemişelik $(-1)^n$ köpeldiji bilen tapawutlanýar.Başga sözler bilen aýdylanda bu funksiýalar çyzykly baglanyşykly we olaryň kömegi bilen umumy çözüwi ýazmak mümkin däl .

Bu ýagdaýda ikinji çyzykly baglanyşyksyz hususy çözüw deregine ikinji jynsly Bessel funksiýany $Y_n(x)$ alýarlar .Bu funksiýa başgaça Neýman funksiýasy hem diýilýär. $Y_n(x)$ üçin aňlatmany getirip çykarmakdan saklanyp diňe onuň üçin asimptotik formulany ýazmak bilen çäklenýäris.

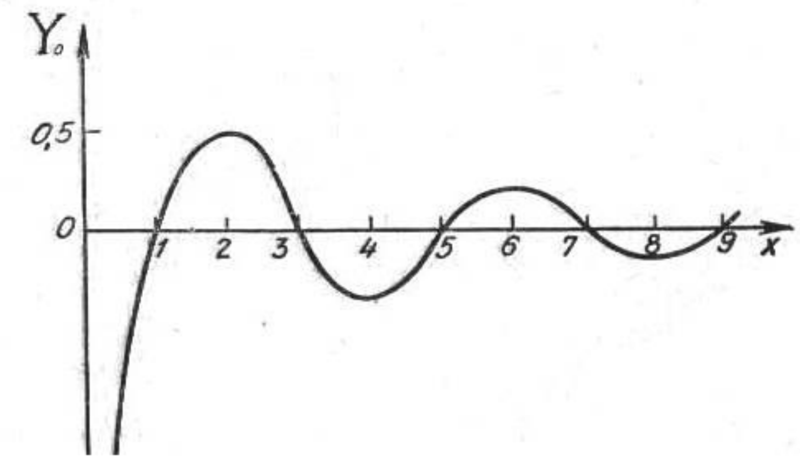
$$Y_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (20)$$

$Y_n(x)$ funksiýanyň esasy häsiýeti $x\to 0$ bolanda Islendik tertipli Neýman funksiýasy tükeniksizlige ymtylýar.

$$Y_n(0)\to-\infty \qquad (20')$$

19-njy çyzgyda nolunjy tertipli Neýman funksiýanyň grafigi getirlendir. Şeýleleikde $\nu=n$ bolanda Bessel deňlemesiniň umumy çözüwi aşakdaky formula bilen aňladylýar.

$$y(x)=C_1 I_n(x)+C_2 Y_n(x) \qquad (21).$$



19-njy çyzgy

§4.Laplasyň deýlemesiniň sferik koordinatalarda çözüwi. Ležandryň deňlemesi

Laplasyň deňlemesi sferik koordinatalarda aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$\Delta U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (1)$$

Furýeniň usulyndan ugur almak bilen bu deňlemäniň çözüwini

$$U(r,\theta,\varphi)=R(r)V(\theta,\varphi) \qquad (2)$$

köpeltmek hasyl gönüşinde gözläliň.

Gözlenýän (2) funksiýany (1) deňlemede goýup alarys:

$$\frac{V}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2R'\right)+\frac{R}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right\}=0$$

Bu deňligiň iki bölegini hem $\frac{r^2}{RV}$ aňlatma köpeldip ony

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2R'\right)=\frac{1}{Y}\Lambda Y \qquad (3)$$

görnüşe getireliň. Bu ýerde Λ Ležandryň operatory

$$\Lambda=-\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}=0 \qquad (4)$$

(3) deqligiň iki bölegini hem λ hemişelige deňläp iki sany deňleme alarys:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2R^/\right)-\lambda R=0 \qquad (5)$$

$$\Lambda Y-\lambda=0 \qquad (6)$$

(6) deňleme ýazgyn görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \qquad (6^/)$$

Bu deňleme hususy önümli dufferensial deňlemedir.Şonuň üçin bu deňlemä ýene-da Furýeniň usulyny ulanalyň.

$Y(\theta;\varphi)$ funksiýany iki sany funksiýanyň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladalyň.

$$Y=V(\theta)\Phi(\varphi)$$

(7)

we bu aňlatmany $(6^/)$ deňlemede goýalyň .Onda

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dY}{d\theta}\right)+\frac{V}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda V\Phi=0$$

Soňky deňlemäniň iki bölegini hem $\dfrac{\sin^2\theta}{\Phi V}$ köpeldeliň we üýtgeýjileri bölüp aşakdaky deňlige geleris.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta V^/\right)+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)V(\theta)=0$$

Deňligiň iki bölegini hem $-\nu^2$ hemişelige deňläp, iki sany adaty differensial deňlemä geleris.

$$\Phi^{//}+\nu^2\Phi=0 \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta V^/\right)+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)V(\theta)=0 \qquad (9)$$

(8) deňlemäniň çözüwini görkezijili görnüşde aňlatmak amatly:

$$\Phi(\varphi)=Ae^{i\nu\varphi}+Be^{-i\nu\varphi} \qquad (10)$$

Adatça $\Phi(\varphi)$ funksiýa $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ şerti kanagatlandyrýar.Diýmek ν erkin bolup bilmez,ol hökman bitin san bolmaly.

$$\nu = m = 1,2,3,4,5,......$$

Diýmek $\Phi(\varphi)$ funksiýa

$$\Phi = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi} \qquad (10')$$

görnüşr geler.

(9) deňleme bolsa aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)V = 0 \qquad (9')$$

(9′) deňlemä Ležandryň umumylaşdyrlan deňlemesi diýilýär. Eger $x = \cos\theta$ täze üýtgeýäni girizsek (şunlukda $-1 \le x \le 1$) we $V(\theta) = y(x))$ diýýiip bellesek ,onda Ležandryň umumylaşdyrlan deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda y - \frac{m^2}{1 - x^2}y = 0 \qquad (11)$$

$m = 0$ bolanda bu deňleme Ležandryň deňlemesiniň has ýönekeý görnüşini alýar.

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad (12)$$

Şeýlelikde, mesele Ležandryň (9′) deňlemesiniň we (5) deňlemäniň çözüwini tapmaklyga getirildi. Bu deňlemeliň çözüwlerini degişlilikde $V(\theta)$we $R(r)$ diýip gözlenýän çözüwi aşakdaky ýaly köpeltmek hasyl görnüşinde aňlatmaklyga mümkinçilik alýarys.

$$U(r,\theta,\varphi) = R(r)V(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (13)$$

Bu ýerde $\Phi(\varphi)$ (10′) görnüşdedir.

§5.Ležandryň deňlemesiniň çözüwi

Indi bolsa (9′) we (5) görnüşli deňlemeleriň çözüwleriniň tapylyş usullaryna seredeliň.

Ležandryň (12) deňlemesiniň integralyny üýtgeýän koeffisientli hatar görnüşinde gözläliň.

$$y(x) = \sum a_k x^k \qquad (14)$$

(14) hatary differensirläp, alarys.

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \qquad (14')$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \qquad (14'')$$

y'' -i $(1-x^2)$-a we y' -i $2x$ köpeldip we alynan aňlatmalary (12) deňlikde goýup aşakdaky deňlige geleris.

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=0$$

x^k derejesini saklaýan ähli agzalary deňligiň sag bölegine geçireliň:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)k-\lambda]a_k x^k \qquad (15)$$

(15) deňlige laýyklykda hatarlaryň deň derejeli üýtgeýänleriniň koeffisientleri deň bolmaly,onda

$$(k+2)(k+1)a_k=[k(k+1)-\lambda]a_k$$

Bu ýerden gözlenýän hataryň koeffisiýentleri üçin aşakdaky rekurrent formulany alarys:

$$a_{k+2}=\frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad (16)$$

Bu formula hataryň jübüt nomerdäki koeffisientlerini a_0 -yň üsti bilen aňlatmaklyga we ähli täk koeffisientleri bolsa a_1 -iň üsti bilen aňlatmaklyga mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde, koeffisientleri (16) deňlik bilen kesgitlenýän we a_0, a_1 erkin bahaly (14) hatar Ležandryň deňlemesiniň umumy çözüwi bolýar.

$a_1=0$ bolanda (14) hataryň ähli tak koeffisientleri (16) deňlige laýyklykda nula öwrülýär. Şunlukda "jübüt" hatar alynýar.

$$y_0(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\ldots \qquad (17)$$

Bu hatar (12) deňlemäniň hususy çözüwleriniň biridir.Şuňa meňzeşlikde $a_0 = 0$ goýup “täk” hatar alýarys:

$$y_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + ... \qquad (18)$$

Bu hatar (12)deňlemäniň ikinji hususy çözüwleriniň biridir. Şunlukda (17) we (18) hataryň koeffisientleri (16) foirmula bilen tapylýar.

Şeýlelikde başdaky berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y(x) = Ay_0(x) + By_1(x) \qquad (19)$$

görnüşde ýazylýar.

Ýöne muňa seretmezden mesele çözüldi diýip hasaplamak bolmaz. Sebäbi matematiki fizikada bizi islendik çözüw dälde eýsem birbahaly, üznüksiz tükenikli çözüw gyzyklandyrýar. (17) we (18) hatarlaryň seljermesi soňky şertleriň ýerine ýetmeýänligini görkezýär. Bu hatarlaryň haýsy hem bolsa biri käbir agza bilen çüklendirilip tükenikli agzlary saklanda olar bilen berilýän funksiýalar $-1 \le x \le 1$kesimde çäklenenlik şerti kanagatlandyrýar.(16) formula laýyklykda haýsy hem bolsa bir koeffisient nula öwrülende galan beýleki koeffisientleriň ählisi nula öwrülýär.

$a_i \neq 0$ bolanda a_{i+2} koeffisientler λ hemişelik iki sany yzygider bitin sanlaryň köpeltmek hasylyna deň bolanda, ýagny

$$\lambda = l\,(l+1) \qquad (20)$$

bolanda a_{l+2} koeffisiýentden başlap yzky koeffisiýentler nula öwrülýär.

Diňe (20) deňlik ýerine ýetende tükenikli çözüwi almak bolýar. Eger l jübüt bolsa,onda tükenikli agzaly $y_0(x)$ hususy çözüw alnar. .

Egerde l täk bolsa, onda l derejeli köpagza $y_1(x)$ bilen kesgitlener.

Şeýlelikde Ležandryň (20) şertleri knagatlandyrýan tükenikli çözüwi l derejeli köpagzadyr. l jübüt bolanda bu çözüw:

$$y_0(x) = a_0 + a_2 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + ... a_i x^i \qquad (17')$$

l täk bolanda

$$y_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + ... a_i x^i \qquad (18')$$

görnüşdedir.

Iki ýagdaýda hem a_k koeffisient a_0 we a_1 erkin bahalaryň üsti bilen

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-i(i+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \qquad (16')$$

formula bilen kesgitlenýär.

$x=1$ nokatda bahasy 1 bolar ýaly a_0 we a_1 koeffisientleri saýlanyp alynan (17′),(18′) köpagzalara Ležandryň köpagzalary diýilýär we $P_l(x)$ bilen bellenýär.

Ležandryň (12) deňlemesiniň çözüwi diňe $\lambda = l(l+1)$ bolanda $-1 \le x \le 1$ kesimde çäklenen we hemişelik köpeldijä çenli takyklykda alynan Ležandryň $P_l(x)$ köpagzalary bolýar.

§6.Ležandryň köpagzalary

Ležandryň köpagzalarynyň häsiýetleri bilen ýakyndan tanyşalyň.

Ilki bilen $l = 0,1,2,3.$ derejeli köpagzalary tapalyň. $l=0$ bolanda nulunjy derejeli köpagza alarys.Bu köp agza a_0 koeffisiente deňdir. Ýöne $P_0(1)=1$ bolar ýaly $a_0=1$ diýip almaly.

$l=1$ bolanda birinji derejeli köpagza alynýar. Bu köpagza a_1x görnüşdedir. $x=1$ nokatda bahasy 1 bolar ýaly $a_1=1$ diýip almaly.Diýmek

$$P_1(x) = x$$

$l=2$ bolanda $a_0 + a_2x^2$ bolan ikinji derejeli köpagza alynýar. a_2 koeffisient (16′) formula laýyklykda $-3a_0$ deň bolmaly.Şonuň üçin

$$P_2(x) = a_0 - 3a_0x^2$$

$P_2(1)=1$ bolmaklygy üçin a_0 koeffisienti $-\frac{1}{2}$ diýip almaly,şonda

$$P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2.$$

$l=3$ bolanda $a_1x + a_3x^3$ köpagzanyň a_3 koeffisienti a_1 koeffisientiň üsti bilen (16′) formula bilen aşakdaky ýaly aňladylýar.

$$a_3 = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 4}{3 \cdot 2} a_1 = -\frac{5}{3} a_1 .$$

Şeýlelikde

$$P_3(x) = a_1 \left(x - \frac{5}{3} x^3 \right).$$

$x = 1$ nokatda

$$P_3(1) = -\frac{2}{3} a_1 .$$

$P_3(1) = 1$ bolmagy üçin $a_1 = -\frac{3}{2}$ diýip almaly. Diýmek

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^2 - 3x\right).$$

Ležandryň ýokary tertipli köpagzalaryny hasaplamak üçin bu usuly ulanmak amatly däl.Ležandryň ýokary tertipli köpagzalaryny hasaplamak üçin Rodrigonyň formulalary diýip atlandyrlýan formulalary ulanmak amatly.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \qquad (21).$$

Ležandryň köpagzalary möhüm häsiýetleriň biri bolan ortogonallyk häsýete eýedir. Bu häsiýeti analitik görnüşde

, eger $l \neq l'$ bolsa,onda $\int P_l(x) P_{l'}(x) dx = 0$.

diýip vazmak bolar.

Biz şu wagta çenli Ležanryň (11) umumy deňlemesiniň hususy ýagdaýy bolan (12) deňlemäniň çözüwi barada aýtdyk. (11) deňlemäniň tükenikli çözüwleri Ležandryň birleşdirilen köpagzalary bolmak bilen ol köpagzalary Rodrigonyň aşakdaky formulasy bilen bermek bolýar:

$$P_l^{(m)}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \qquad (22)$$

$m > l$ bolanda $P_l^{(m)}(x) = 0$ bolýanlygyna ünsüňizi çekýäris.Şonuň üçin l -iň her bir bahasyna $l+1$ sany birleşdirilen $P_l^{(m)}(x)$ (bu ýerde $m = 0,1,2,3,...,l$)Ležandryň köpagzalary degişlidir.

Mysal hökmünde $l=2$ degişli bolan ähli birleşdirilen köpagzalary tapalyň.
Bu ýagdaýda m parametr $m=0,1,2$ bahalary alyp bilýär.Diýmek bu ýagdaýda mümkin bolan köpagzalar $P_2^{(0)}=P_2(x), P_2^{(1)}(x)$ we $P_2^{(2)}(x)$.Bu köpagzalaryň her birini tapalyň.

$$P_2^{(0)}=P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

Beýleki köpagzalary tapmak üçin (22) formuladan peýdalanalyň

$$P_2^{(1)}(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[\ \frac{1}{2}(3x^2-1)\ \right]=3x\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^{(2)}(x)=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[\ \frac{1}{2}(3x^2-1)\ \right]=3(1-x^2).$$

§7.Sferik we şar funksiýalary

Laplasyň deňlemesiniň sferik koordinalarda aňladylyş formulasyna dolanalyň. (11) deňleme $(9^{/})$ deňlemeden bagly däl $\cos\theta=x$ üýtgeýäni çalyşmakdan alyndy, onda $(9^{/})$ deňleme diňe $\lambda=l(l+1)$ bolan ýagdaýda tükenikli çözüwlere eýedir.Bu deňleme şunlukda

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta}+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)V=0 \qquad (9^{//})$$

görnüşi alýar. $(9^{//})$ deňlemäniň integraly

$$V(0)=P_l^{(m)}(\cos\theta) \qquad (23)$$

Şeýlelikde $U(r,\theta,\varphi)=R(r)V(\theta)\Phi(\varphi)$ funksiýany tapmak üçin $R(r)$ funksiýany tapmak galdy.Bu funksiýa $\frac{d}{dr}\left(r^2R^{/}\right)-\lambda R=0$ deňlemäniň çözüwidir.Soňky(5) deňlemede ýaýlary açalyň we $\lambda=l(l+1)$ ornuna goýalyň .

$$r^2R^{//}+2rR^{/}-l(l+1)R=0 \qquad (5^{/})$$

Bu deňleme Eýleriň differensial deňlemesiniň bir görnüşidir. Onuň üçin bu deňlemäniň çözüwini

$$R=r^s \qquad (24)$$

görnüşde gözläliň. $(5^{/})$ deňlemede R we onuň önümleriniň bahalaryn goýup alarys:

$$s(s-l)r^s+2sr^s-l(l+1)r^s=0.$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem r^s gysgaldyp we meňzeş agzalaryny jemläp, aşakdaky deňlige geleris.

$$s(s+1)=l(l+1)$$

Bu ýerden

$$s_1=l\ ,\quad s_2=-(l+1)$$

s Diýmek ($5^/$) deňlemäniň umumy çözüwi:

$$R=C_1r^l+C_2r^{-(l+1)}$$

görnüşdedir.

Bizi diňe şaryň ähli içki nokatlary (şol sanda $r=0$ bolan merkez) üçin tükenikli çözüwler gyzyklandyrýar. Onda $C_2=0$ diýip almaly.Onda

$$R=C_1r^l \tag{25}$$

Diýmek (7) deňlige baglylykda (6) deňlemäniň tükenikli çözüwleri

$$Y_l^{(m)}(\theta;\varphi)=V(\theta)\Phi(\varphi)=P_l^{(m)}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi} \tag{26}$$

sferik funksiýalary bolýar.

Her bir l üçin $2l+1$ sany $m=0,1,2,3,...,l$ degişli sferik funksiýalar bar.

$R=r^l$ funksiýanyň islendik $Y_l^{(m)}(\theta;\varphi)$ funksiýa köpeltmek hasyly (2) deňlige laýyklykda Lapasyň deňlemesiniň çäklenen hususy çözüwi bolýar:

$$U_l^{(m)}(r,\theta,\varphi)=r^l\,Y_l^{(m)}(\theta;\varphi)=r^l\,P_l^{(m)}(\cos\theta)\cdot e^{\pm im\varphi} \tag{27}$$

$U_l^{(m)}(r,\theta,\varphi)$ funksiýalara şar funksiýalary diýilýär. (1)
deňlemäniň umumy çözüwi

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}C_{lm}r^l\,P_l^{(m)}(\cos\theta)\left(Ae^{im\varphi}+Be^{-im\varphi}\right) \tag{28}$$

görnüşde bolar.

VII bap.Grin funksiýasy usuly

Biz şu ýere çenli husuy önümli differensial deňlemeleri üýtgeýänleri bölmek usuly bilen çözmeklige seretdik.

Şeýle deňlemeleri çözmekligiň matematiki fizikada ulanylýan ýene bir ýörgünli usullarynyň biri Griniň funksiýasy usulydyr. Bu usulyň manysy ilki bilen edil berlen görnüşli meseläniň ýörite çözüini tapýarlar, soňra bu çözüwiň üsti bilen kwadraturalarda berlen meseläniň çözüwini aňladýarlar.

§1.Griniň formulalary

Goý, $u = u(x, y, z)$ we $v = v(x, y, z)$ funksiýalar V göwrümde we onuň üstünde birinji tertipli hususy önümleri bilen üznüksiz bolsun.Olaryň ikinji tertipli önümleri V göwrümiň içinde üznüksiz diýeliň.

Ostrogradskiý-Gaussyň

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{dz}\right) dxdydz = \iint_\sigma \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\} d\sigma$$

formulasynda $P = u\dfrac{\partial v}{\partial x}, Q = u\dfrac{\partial v}{\partial y}, R = u\dfrac{\partial v}{\partial z}$ diýsek

$$\iiint_V u\Delta v dxdydz = \iint_\sigma u\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dz\, dy\, dz \qquad (1)$$

formulany alarys.Bu ýerde $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - Laplasyň operatory, $\dfrac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\dfrac{\partial}{\partial z}$ - V göwrümi çäkleýän σ üste geçirlen daşky normal, α, β, γ -degişlilikde daşky normalyň koordinata oklar bilen emele getiren burçlary.

Eger $grad u\ grad v = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z}$ diýsek onda (1) formula

$$\iiint_V u\Delta v dxdydz = \iint_\sigma u\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_V (grad u\ grad v) dz\, dy\, dz$$

(2)

görnüşe geler.Bu formula Griniň birinji formulasy diýilýär.

(2) formulada u we v funksiýalaryň orunlaryny çalşyryp

$$\iiint_V v\Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - \iiint_V (grad u\; grad v)dz\,dy\,dz \qquad (3)$$

formulany alarys.(2) formuladan (3) formulany aýryp

$$\iiint_V (u\Delta v - v\Delta u)dx\,dy\,dz = \iint_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \qquad (4)$$

Griniň ikinji formulasyny alarys.

Integraldaky V oblast birnäçe üst bilen çäklenip biler.Bu ýagdaýda üst integraly oblasty çäkleýän ähli üstler boýunça hasaplamaly.

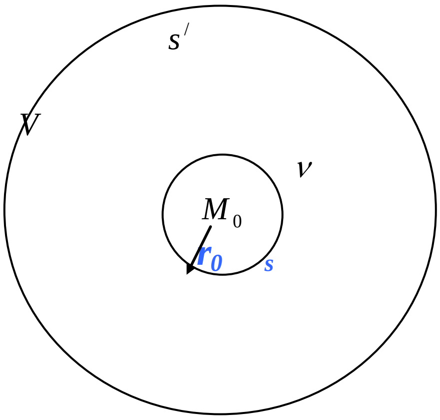
Tekizlikde Griniň ikinji formulasy

$$\iint_S (u\Delta v - v\Delta u)dx\,dy = \int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl \qquad (5)$$

ýaly ýazylýar.Bu ýerde S-ýapyk C egri bilen çaklenen oblast, $\vec{n}$ - egrä geçirlen daşky normal.

V oblastdan haýsy hem bolsa bir M_0 nokady alalyň we bu nokady V göwrümli we r_0 radiusly kiçijik sfera bilen gurşalyň.(15-nji çyzgy) Bu şary v bilen belläliň. . Berlen oblastyň islendik $M(x,y,z)$ nokadyndan M_0 nokadyna çenli aralyk $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ formula bilen tapylýar. $U_0(M) = \frac{1}{R}$ garmoniki (Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýan) funksiýadyr. Seredilýän $U_0(M) = \frac{1}{R}$ funksiýa M_0 nokatdan başga ähli nokatlarda özüniň birinji önümi bilen üznüksiz we oblastyň içki nokatlarynda ikinji önüme eýe.Bu funksiýa oblastyň içki M_0 nokadynda üzülýänligine görä Griniň ikinji formulasyny gönüden-göni ulanyp bolmaýar.

$V - v$ oblastda $U_0(M) = \frac{1}{R}$ funksiýa özüniň birinji önümi bilen üznüksiz we ol oblastyň içki nokatlarynda funksiýanyň ikinji tertipli hususy önümleri bar.Kiçi şar taşlanan oblastda u we $v = \frac{1}{R}$ funksiýalar üçin Griniň ikinji formulasyny ulanyp



20-nji **çyzgy**

$$\iiint\limits_{V-v}\left(u\,\Delta\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\Delta u\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S'}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma+$$
$$+\iint\limits_{s}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)d\sigma-\iint\limits_{s}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma \qquad (6)$$

deňligi alarys. Bu ýerde s' - V göwrümiň daşky üsti, s bolsa v şaryň üsti. (20-nji çyzgy)

$V-v$ oblastyň s' üstüne geçirlen daşky normal boýunça önümi tapalyň:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)_s=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)_{r=r_0}=\frac{1}{r_0^2}$$

(daşky normal $\vec{r}_0$ wektora garşylykly ugra gönükdirlen)

Normal boýunça önümiň bahasyny göz öňünde tutup we (6) integralyň sag tarapynyň ikinji goşulyjysynda orta baha hakyndaky teoremany ulansak

$$\iint\limits_{s}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)d\sigma=\frac{1}{r_0^2}\iint\limits_{s}u\,d\sigma=\frac{1}{r_0^2}4\pi r_0^2u^*=4\pi\,u^* \qquad (7)$$

san alynar.Bu ýerde u^* -berlen u funksiýanyň v şaryň s üstündäki orta bahasy.

Üçinji integraly ýönekeýleşdireliň

$$\iint\limits_{s}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{r_0}\iint\limits_{s}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{r_0}4\pi r_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*=4\pi r_0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \qquad (8)$$

bu ýerde $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*}$-normal boýunça önümiň s sferadaky orta bahasy. Tapylan (7) we (8) bahalary (6) deňlikde goýup alarys

$$\iiint\limits_{V-v}\left(u\Delta\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\Delta u\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S'}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma+4\pi u^{*}-4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*}r_0$$

Soňky deňlikde sferanyň radiusyny nola ymtyldyp predele geçeliň. u^{*} orta baha funksiýanyň $u(M_0)$ bahasyna,iň soňky agza bolsa nola ymtylýar.

$$4\pi u(M_0)=-\iiint\limits_{V}\left(\frac{1}{R_1}\Delta u(P)\right)dx\,dy\,dz-\iint\limits_{S'}\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\frac{1}{R_1}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)d\sigma \qquad (9)$$

Bu ýerde P-oblasty çäkleýän S' üstüň nokady, R_1-üstüň P nokadyndan içki M_0 nokada çenli uzaklyk. (9) formula Griniň esasy integral formulasy diýilýär. Griniň esasy integral formulasy M_0 nokat oblstyň daşynda bolsa nola deňdir; M_0 nokat oblstyň S' üstünde bolsa $2\pi u(M_0)$ baha deňdir.Hakykatdan-da, M_0 nokat oblstyň daşynda bolsa, onda $\frac{1}{R_1}$ funksiýa üznüksiz we garmoniki. Bu ýerden (9) integral formulanyň nola deňligi gelip çykar. Eger M_0 nokat oblstyň S' üstünde bolsa (7) formulada v şaryň s üstüniň ýarym sferasynyň meýdanyny $2\pi r_0^2$ goýsak , onda (9) formulanyň çep tarapy $2\pi u(M_0)$ baha deň bolar.

§2.Garmoniki funksiýalaryň käbir häsiýetleri

Garmoniki (Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýan) funksiňaryň Griniň formulalary esasynda alynýan käbir häsiýetlerine seredeliň.

1.Eger $v(M)$ funksiýa S' üst bilen çäklenen V oblastda garmomiki bolsa,onda tutuşlygyna bu oblastda ýatan σ islendik ýapyk üstde

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0 \qquad (1)$$

Subudy:Eger Griniň birinji formulasynda $v(M)$ garmoniki funksiýany we $u=1$ goýsak (1) tassyklama gelip çykar.
Bu häsiýeti fiziki taýdan jisimiň içinde çeşmäniň ýoklugyny görkezýär diýmek bolar.

2.Eger $u(M)$ funksiýa käbir V oblastda garmoniki bolsa onda tutuşlaýyn bu oblastda ýatan a radiusly merkezi M_0 nokatda bolan şary çäkleýän σ sfera üçin

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\sigma} u\, d\sigma \qquad (2)$$

deňlik dogrydyr.

Subudy:Griniň esasy integral formulasynda $u(M)$ garmoniki funksiýany goýsak,onda

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{1}{R_1} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_1} \right) \right] d\sigma \qquad (3)$$

formulany alarys. σ sferada $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}$ we

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 \,, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_1} \right) = -\frac{1}{a^2}$$

bolýandygyny göz öňünde tutsak we olary (3) goýsak (2) formula alnar.

Bu häsiýet eger-de $u(M)$ funksiýa käbir V oblastda garmoniki bolsa,onda funksiýanyň M_0 nokatdaky bahasy merkezi M_0 nokatda bolan tutuşlaýyn bu oblastda ýatan islendik sferadaky orta bahasyna deňligini aňladýar.

3.Eger $u(M)$ funksiýa käbir V oblastda garmoniki we $V+\sigma$ ýapyk oblastda üznüksiz bolsa,onda ol funksiýa maksimal we minimal bahalarynyna σ üstde ýetýär.

Subudy;Goý , $u(M)$ funksiýa maksimum bahasyna M_0 nokatda ýetýän bolsun.Ýagny $u(M_0) \geq u(M)$ bolsun.Ikinji häsiýete salgylanyp alarys

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\sigma_0} u(M)d\sigma \le \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\sigma_0} u(M_0)d\sigma = u(M_0) \quad (4)$$

Bu ýerde σ_0 -tutuşlaýyn V oblastda ýatan merkezi M_0 nokatda bolan sfera.Eger haýsy hem bolsa bir nokatda $u(M_0)>u(M)$ diýsek ,onda (4) aňlatmada garşylyga geleris.Diýmek, σ_0 üstüň ähli nokatlarynda diňe deňlik ýerine ýetmeli.Goý, M_0 nokatdan σ üste çenli iň ýakyn aralyk ρ diýeliň.Merkezi M_0 nokatda radiusy ρ bolan sfera çyzalyň. Bu sfera bilen σ üstüň kesişme nokadynda $u(M^*)=u(M_0)$ bolar.Ýagny M^* nokatda funksiýa maksimal bahany alar.
Garmoniki funksiýalaryň ýokarda seredilen häsiýetleri Laplasyň deňlemesi üçin gyra meselelerini çözmekde giňden ulanylýar.

§3.Birinji gyra meselesiniň ýeke-täkligi we durnuklylygy

Goý, σ üst bilen çäklenen V oblast berlen bolsun we σ üstüň nokatlarynda üznüksiz f funksiýa berlen diýeliň.

Laplasyň deňlemesi üçin birinji gyra mesele (Dirihläniň içki meselesi) aşakdaky ýaly goýulýar:

a) ýapyk $V+\sigma$ oblastda we onuň araçäk nokatlarynda kesgitlenen hem üznüksiz;

b) Oblastyň içki nokatlarynda $\Delta u=0$ deňlemani kanagatladyrýan;

c) oblastyň araçäk nokatlarynda berlen f funksiýa deň bolan $u(M)$ funksiýany tapmaly.

Goýlan meseläniň ýeke-täkligini subut edeliň.Goý,dürli iki sany u_1 we u_2 çözüwler bar diýeliň.Olaryň tapawudyndan düzülen $u=u_1-u_2$ funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýedir:

a) V oblastyň içki nokatlatynda $\Delta u=0$;

b) ýapyk $V+\sigma$ oblastda üznüksiz;

ç) $u\,|_\sigma = f$.

$u(M)$ funksiýa V oblastda garmoniki,üznüksiz we araçäginde nola deň. Onda seredilýän garmoniki funksiýa oblastyň araçäginde maksimal bahany alar. $u\equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň.

Goý $u>0$ bolsun,onda funksiýa oblastyň içinde položitel maksimyma eýe bolar.Garmoniki funksiýalaryň häsiýetine görä bu tassyklama mümkin däl.Eger $u(M)$ funksiýa oblastyň içki nokadynda otrisatel bahany alýar diýsek ýene-de garşylyga geleris.Diýmek, $u\equiv 0$.ýagny u_1 we u_2 çözüwler bir birine deň bolýar.

Birinji gyra meselesiniň çözüwiniň gyra şertleri bilen üznyksiz baglanyşyklydygyny görkezeliň.Ýagny gyra şertlerde tükeniksiz kiçi ýalňyşlyk goýberilende çözüwde hem tükeniksiz kiçi alynýandygyny görkezeliň.

Goý, u_1 we u_2 ýapyk $V+\sigma$ oblastda üznüksiz ,oblastyň içki nokatlarynda garmoniki funksiýalar bolsun.Bu funksiýalar üçin oblastyň araçäginde $|u_1-u_2|\le\varepsilon$ deňsizlik dogry bolsun

Garmoniki funksiýalaryň maksimal we minimal bahalary baradaky häsiýrti esasynda bu deňsizlik oblastyň içki nokatlarynda hem dogrydyr.Ýagny seredýän meselämiz goýlan şertlerde durnuklydyr.

§4. **Gyra meselelerini çözmekligiň Grin usuly**

Goý V oblastda Laplasyň

$$\Delta\varphi=0 \tag{1}$$

deňlemesini we bu oblastyň çäginde

$$\varphi\big|_S=f(x',y',z') \tag{2}$$

Gyra şertleri kanagatlandyrýan $\varphi(x,y,z)$ funksiýany tapmaklyk gerek bolsun.

V oblastdan haýsy hem bolsa bir M_0 nokady alalyň we bu nokady s göwrümli we r_0 radiusly kiçijik sfera bilen gurşalyň.15-nji çyzgy.

$V'=V-v$ oblast üçin Griniň formulasyny ulanalyň.Bu oblast S we s iki sany üst bilen çäklenendir.

$$\int_{V'}(\phi\Delta\varphi-\varphi\Delta\phi)dV=\oint_S\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS+\oint_s\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds \qquad (3)$$

Bu formula erkin φ,ϕ funksiýalar üçin ýerlikli ,onda φ funksiýa derek $\varphi(x,y,z)$ funksiýany alalyň.Bu funksiýa (1) we (2) şertleri kanagatlandyrýar. ϕ funksiýa derek Griniň funksiýasy diýip atlandyrylýan funksiýany alalyň. Griniň funksiýasy

$$G(x,y,z)=\frac{1}{r}+H(x,y,z) \qquad (4)$$

deňlik bilen kesgitlenýär.Bu ýerde r erkin nokatdan M_0 nokada çenli uzaklyk. $H(x,y,z)$ funksiýa V oblastda Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$\Delta H=0 \qquad (5)$$

We $S=S(x',y',z')$ üstde

$$H(x',y',z')=H\left(\vec{r'}\right)=-\frac{1}{r'} \qquad (6)$$

Bu ýerde r' - M_0 nokatdan S üstüň nokatlaryna çenli uzaklyk.

$\frac{1}{r}$ M_0 nokatdan tapawutly ähli nokatlarda Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýar, onda (4) we (5) deňlikleri laýyklykda $\phi=G(x,y,z)$ funksiýa V' oblastda Laplasyň deňlemesiniň çözüwi bolýar, özem (4) we (6) deňliklere laýyklykda S üstde

$$\phi\Big|_S=G(x',y',z')=0 \qquad (7)$$

Şonuň üçin (3) gatnaşyk

$$-\oint_S\varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS+\oint_s\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds=0$$

görnüşi alýar. (2) deňlige laýyklykda $\varphi(x',y',z')\Big|_S=f(x',y',z')$, onda bu deňligi

$$\oint_s\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds=\oint_S f(r')\frac{\partial G}{\partial n}dS \qquad (8)$$

görnüşde ýazmak bolýar. Indi (8) deňligiň çep bölegini hasaplalyň. Gysgalyk üçin ony I bilen belläliň.

$$I = \oint_s \left(G\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \tag{9}$$

Bu ýere (4)formuladan peýdalanyp Griniň funksiýasynyň bahasyny goýup we kiçi sferanyň radiusynyň r_0 ýada salyp I integraly I_1 we I_2 integrallara dargadalyň.

$$I = I_1 + I_2 = \oint_s \left\{ \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0} + H \right) \right\} ds \tag{10}$$

Bu ýerde

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \oint_s \left\{ \frac{1}{r_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) \right\} ds \\ I_2 &= \oint_s \left(H\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial H}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \right\} \tag{10$'$}$$

Ikinji integrala Griniň formulasyny ulanalyň:

$$I_2 = \int_v (H\Delta\varphi - \varphi\Delta H) dv$$

(1) we (5) deňliklere laýyklykda φ we H funksiýalar Laplasyň deňlemesini tutuş V oblastda kanagatlandyrýar, şol sanda v oblastda hem bu deňlemeleri kanagatlandyrýar. Şonuň üçin hem $I_2 = 0$ we (10) deňlikde diňe bir goşulyjy galýar;

$$I = I_1 = \oint_s \left\{ \frac{1}{r_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) \right\} ds \tag{11}$$

r_0- s sferanyň radiusy,ýagny hemişelik ululyk, onda

$$I = \frac{1}{r_0}\oint_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds - \oint_s \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) ds \tag{12}$$

(12) deňlikdäki birinji goşulyja aýratynlykda seredeliň.

$$\frac{1}{r_0}\oint_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds \tag{13}$$

Orta baha hakyndaky teorema görä

$$\oint_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = 4\pi r_0^2 \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\rangle =$$

Bu ýerde $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle$- $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ önümiň s sferanyň käbir nokadyndaky bahasy.Şonuň üçin hem (13) kiçi ululyk bolmak bilen S sferanyň nokatlary M_0 nokada dartylanda r_0 nola ymtylýar:

$$\lim_{r_0 \to 0} 4\pi r_0 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle = 0$$

Indi (12) deňlikdäki ikinji goşulyja üns bereliň:

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) ds \tag{14}$$

$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) = -\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{r_0^2}$ bolýanlygyny hasaba alyp (14) integrala orta baha hakyndaky teoremany ulanyp alarys:

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) ds = \frac{1}{r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 \langle \varphi \rangle = 4\pi \langle \varphi \rangle$$

Bu ýerde $\langle \varphi \rangle$ φ-funksiýanyň S sferanyň käbir nokadyndaky bahasy. $r_0 \to 0$ predelde $\langle \varphi \rangle$ ululyk φ funksiýanyň M_0 nokatdaky bahasyna ymtylýar. Diýmek

$$\lim_{r_0 \to 0} \oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) ds = 4\pi \varphi(M_0) \tag{15}$$

Indi başdaky (8) deňlige dolanalyň. Deňligiň sag bölegindäki integral S üst boýunça alynýanlygy üçin ,bu integral kiçi s sferanyň radiusyna bagly bolup bilmez. Diýmek deňligiň çep bölegi hem r_0 radiusa bagly däldir. (15) deňlik bilen alynýan bahany (8) deňlikde ornuna goýup alarys:

$$4\pi \varphi(M_0) = -\oint_S f\left(\vec{r}^{\,/}\right) \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

ýa-da

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S f\left(\vec{r}^{\,/}\right) \frac{\partial G}{\partial n} dS, \tag{16}$$

M_0 nokat V oblastyň erkin nokady, şonuň üçin hem bu formula Griniň G funksiýasy belli bolanda seredilýän meseläniň çözüwini berýär.

Başga sözler bilen aýdylanda mesele (5), (6) şertleri kanagatlandyrýan $H\,(x,y,z)$ funksiýany kesgitlemeklige syrykdyryldy.

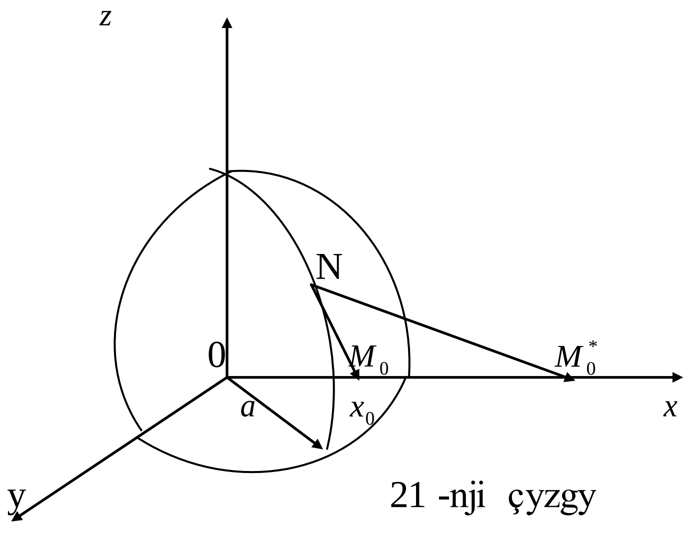
$$\Delta H = 0 \text{ we } H\Big|_S = -\frac{1}{r_0}.$$

Umuman alynanda, soňky alynan mesele başdaky meselä seredende ýönekeý mesele diýmek bolmaz.Ýöne käbir görnüşli V oblastlar we olary çäkleýän S üstler üçin Griniň funksiýasyny aňsatlyk bilen gurmak bolýar. Şunlukda şeýle ýagdaýda meseläni çözmeklik (16) deňligiň sag bölegindäki integraly hasaplamaga getirilýär.

Aşakda biz Dirihle meselesi üçin Griniň funksiýasyny kesgitlemek başartýan iki mysala serederis.

§5.Şar üçin Grin funksiýasy

Goý V oblast a radiusly şar bolsun,M_0 nokat şaryň içinde Ox üstünde ýatýan bolsun. Bu nokadyň koordinatalary $(x_0,0,0)$. Şary çäkleýän sfera görä çatrymly bolan $M_0^*\left(\frac{a^2}{x_0},0,0\right)$ nokady guralyň. 21 -nji çyzgy .



21 -nji çyzgy

Her bir sferanyň üstünde ýatýan N nokat üçin $\frac{|NM_0^*|}{|NM_0|}$ gatnaşygyň hemişelik ululykdygyna göz ýetirmek kyn däl. Hakykatdanda, OM_0N we ONM_0 üçburçluklar meňzeş, sebäbi bu üçburçluklar üçin

$\frac{|OM_0|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM_o^*|} = \frac{x_0}{a}$. Şonuň üçin üçnji $|NM_0|$ tarapyň $|NM_0^*|$ tarapa bolan gatnaşygy hem $\frac{x_0}{a}$ deň, ýagny bu gatnaşyk N nokadyň sferadaky ýagdaýyna bagly däl.

Indi şaryň içinde alynan erkin M nokat üçin

$$G(M) = \frac{1}{r} - \frac{a}{x_0}\frac{1}{r^2} \tag{17}$$

Funksiýa (bu ýerde $r = |MM_0|$, $r^* = |MM_0^*|$ Griniň funksiýasydyr.

Onuň şeýledigini barlamak üçin $H(M) = -\frac{a}{x_0}\frac{1}{r^*}$ funksiýanyň V şaryň içinde $\Delta H = 0$ deňlemäni , şaryň üstnde bolsa $H\Big|_S = -\frac{1}{r}$ şerti kanagatlandyrýanlygyny görkezmek ýeterlikdir.

$r^* = |MM_0^*|$ şaryň içinde nuldan tapawutly ululyk , onda tutuş V oblastda

$$\Delta\left(\frac{1}{r^*}\right) = 0.$$

Ikinji şert barada aýdylanda $\frac{|NM_0^*|}{|NM_0|} = \frac{a}{x_0}$, ýa-da $\frac{1}{|NM_0^*|} = \frac{x_0}{a}\frac{1}{|NM_0|} = \frac{x_0}{a}\frac{1}{r}$.

Diýmek $H\Big|_S = -\frac{1}{r}$.

Şeýlelikde (17) funksiýa seredilýän mesele üçin Griniň funksiýasy. (16) umumy formuladan peýdalanmak üçin sferada $\frac{\partial G}{\partial n}$ önümi hasaplalyň;

$$\frac{\partial G}{\partial R}\Big|_{R=a} = \frac{\partial}{\partial R}\left[\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{a}{x_0}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right]_{R=a}$$

Bu ýerde $\vec{R}$ şaryň islendik M nokadynň radius wektory. Suratdan görnüşi ýaly $r^2 = R^2 + x_0^2 - 2Rx_0\cos\gamma$.Şonuň üçin

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 + x_0^2 - 2Rx_0\cos\gamma\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{R - x_0\cos\gamma}{r^3}.$$

$R = a$ diýip alarys:

$$\left.\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{R=a} = -\frac{a - x_0 \cos\gamma}{\left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0\cos\gamma\right)^{3/2}}. \tag{18}$$

Eger x_0 derek $\frac{a^2}{x_0}$ goýsak, onda biz $\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r*}\right)_{R=a}$ önümiň bahasyny tapýarys.

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r*}\right)_{R=a} = \frac{ax_0 - a^2\cos\gamma}{x_0\left(a^2 + \frac{a^4}{x_0^2} - 2\frac{a^2}{x_0}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}},$$

Alynan aňlatmany ýönekeýleşdirip aşakdaky aňlatmany alarys:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r*}\right)_{R=a} = -\frac{x_0^2}{a^2}\frac{x_0 - a\cos\gamma}{x_0\left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{19}$$

(18) we (19) deňlikleri birleşdirip (16) deňlikde saklanýan önümi kesgitleýäris:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{a^2 - x_0^2}{a}\left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0\cos\gamma\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{20}$$

Bu aňlatmany (16) deňlikde ornuna goýup şar üçin Dirihle meselesiniň kwadraturalarda çözüwini alýarys (Gözlenýän funksiýany φ bilen bileleikde U diýip belläliň.).

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi a}\oint \frac{a^2 - r_0^2}{\left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} f\left(R'\right)dS \tag{21}$$

Umumy ýagdaýda haçanda M nokat r_0, θ_0, φ_0 erkin sferik koordinatalarda berlende bu çözüwi sferik koordinatalarda aňlatmak amatly ($dS = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$):

$$U(M_0) = \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{\left(a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos(\theta_0 - \varphi)\right)^{3/2}} f(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{22}$$

Bu ýerde

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)\cos(\varphi - \varphi_0) \tag{23}$$

(22) integrala şar üçin Puassonyň integraly diýilýär.

Haçanda Dirihle meselesi tekiz we U funksiýanyň kesgitleniş oblasty a radiusly tegelek bolanda Puassonyň integraly ýönekeý görnüşi alýar:

$$U(M_0)=U(r_0\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta_0-\varphi)}f(\varphi)d\varphi. \qquad (24)$$

Şu ýerde birzady belläp geçmek artykmaçlyk etmeýär.Ýokarda biz şuňa meňzeş meseläni Furýe usulyny ulanyp tegelek üçin hatar görnüşinde çözüw alypdyk.Bu iki çözüwiň ekwiwalentligini görkezmek kyn däl.

§6. Ýarymgiňişlik üçin Griniň funksiýasy

Ýokarky ýarymgiňişlikde ($z>0$) Laplasyň $\Delta U=0$ deňlemesini kanagatlandyrýan we XOY tekizlikde berlen

$$U\big|_{z=0}=f(x,y) \qquad (1)$$

bahany alýan $U(x,y,z)$ funksiýany tapmaly.

Ýokarky ýarymgiňişligin ($z>0$) islendik nokadynda Griniň funksiýasyny iki funksiýanyň jemi görnüşinde aňladalyň:

$$G(M)=\frac{1}{r}+H(M), \qquad (2)$$

bu ýerde $r=|MM_0|$ - ýokarky ýarymgiňişligin erkin $M(x,y,z)$ nokadyndan käbir fiksirlenen $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokadyna çenli uzaklyk. $H(M)$ funksiýa bäşinji bölümçedeki ýaly $\Delta H(M)=0,\ H\big|_{z=0}=-\frac{1}{r'}$ iki şerti kanagatlandyrýar.Bu ýerde $r'=|NM_0|$ - ýarymgiňişligin $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokadyndan $z=0$ tetizligiň islendik $N(x',y')$ nokadyna çenli uzaklyk. $z=0$ tetizlikde $G(N)=0$.Onuň üçin meseläniň çözüwi

$$U(M_0)=U(x_0,y_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_s f(x,y)\frac{\partial G}{\partial n}dxdy \qquad (3)$$

funksiýa bolar.

$z=0$ tetizlige ýarymgiňişlige görä daşky normal OZ oka garşylykly ugra gönükdirlenligine görä

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_s = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

bolar.Normal boýunça önümi (3) funksiýada goýup

$$U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} dxdy$$

$(3')$

funksivany alarys.

(2) formyladaky $H(M)$ funksiýa derek

$$H(x,y,z) = -\frac{1}{r^*} \qquad (4)$$

ululygy alalyň.Bu ýerde $r^* = |MM^*|$ $M(x,y,z)$ nokatdan $M_0(x_0, y_0, z_0)$

nokada çatyrymly bolan $M^*{}_0(x_0, y_0, -z_0)$ nokada çenli uzaklyk.

$H(M)$ funksiýanyň Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl we $r'^* = |M_0^* N| = |M_0 N| = r'$ deňligi göz öňünde tutsak funksiýanyň

$$N|_s = H(N) = H(x,y,0) = -\frac{1}{r'^*} = -\frac{1}{r'}$$

gyra şerti kanagatlandyrýandygyny barlap bolar.

$G(x,y,z)$ funksiýany giňişleýin ýazalyň:

$$G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \qquad (5)$$

Bu funksiýany z üýtgeýän ululyk boýunça differensirläliň we z=0 goýalyň.

Onda

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{2z_0}{\sqrt{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right]^3}} \qquad (6)$$

Alan (6) önümimizi $(3')$ funksiýada goýup

$$U(M_0)=U(x_0,y_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{-3/2}dxdy$$

görnüşde meseläniň çözüwini alarys.

Edebiýatlar.

1. Gurbanguly Berdimuhamedow. “Garaşsyzlyga guwanmak ,Watany,halky söýmek bagtdyr.”Aşgabat:TDNG ,2007.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow.Eserler ýygyndysy . Aşgabat:TDNG ,2007.
3. “Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty” Aşgabat:TDNG ,2007.
4. Meredow,G.Gurbangulyýew,N.Durdyýew Matematiki fizikanyň deňlemeleri.Türkmen Döwlet uniwersitetiniň çaphanasy.
5. Е.И. Несис .Методы математической физики М.Просвещение 1977
6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский .Уравнение математической физики. М.Наука .1966 г
7. И.И.Баврин. Курс высшей математики. М.Просвещение 1992

8 .Г.Джеффрис, Б.Свирлс. Методы математической физики том I,II,III . М. «Мир» 1970.

9.В.Я.Арсенин, Методы математической физики и специальные функции. . М.Наука .1974г

10.П.И.Чинаев, Н.А.Минин, А.Ю.Перевезников,А.А.Черенков Высшая математика.Киев.»Вища школа» 1981

Mazmuny