TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

**B. Kömekow, O. Annaorazow, H. Geldiýew, A. Öwezow**

# ÇYZYKLY ALGEBRA WE GEOMETRIÝA

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi*

**Aşgabat – 2010**

**B. Kömekow, O. Annaorazow, H. Geldiýew, A. Öwezow**

**Çyzykly algebra we geometriýa.** – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda analitiki çyzykly algebra we geometriýa dersiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär.Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

# Giriş

Analitiki geometriýa we çyzykly algebra matematikada esasy orun tutýar. Bu okuw kitabynda ilkibaşda analitiki geometriýanyň esasy düşünjeleri beýan edilýär. Onda nazary maglumatlary berkitmek üçin anyk mysallar işlenip görkezilýär. Soňra çyzykly algebranyň esaslary getirilýär we köpsanly mysallar işlenip görkezilýär.Okuw kitaby matematik talyplara niýetlenendir.

## 1. n-ölçegli wektor giňişligi.

Çyzykly deňlemeleriň sistemalarynyň umumy nazarýetini gurmak üçin wektor giňişligi düşünjesi zerurdyr.

Analitiki geometriýadan bell i boluşyna görä tekižligiň her bir nokady (koordinatalar oklary belli bolanlarynda özüniň iki sany koordinatalary tekizligiň her bir wektory bolsa özüniň iki sany kompatentalary hakyky sanlaryň iki sanysynyň tertiplişdirilen sistemasy bilen kesgitlenýändir.Şuňa meňzeşlikde üç ölçegli giňişligiň her bir nokady özüniň üç sany koordinatalary bilen ,giňişligiň her bir wektory bolsa özüniň üç sany komponentalary bilen kesgitlenýär.

Ýöne geometriýada ,mehanikada we fizikada üç sany hakyky sanlaryň sistemasynyň berilmegi bilen doly kesgitlenmeýän obýektler hem öwrenilýändirler.Mysal üçin üç ölçegli giňişlikde şarlaryň toplumy öwrenilende şaryň doly kesgitlenen bolmagy üçin onuň merkeziniň koordinatalarynyň we radiusynyň,ýagny dört sany hakyky sanlaryň tertipleşdirilen sistemasynyň berilmegi zerurdyr.

Bu mysaldan görnüşi ýaly n sany hakyky sanlaryň ähli mümkin bolan tertipleşdirilen sistemalarynyňöwrenilmegi ähmiýeti eýedir.

N sany sanlaryň tertipleşdirilen

$$\alpha = ( a_1, a_2, \ldots\ a_n ) \quad (1)$$

sistemasyna n-ölçegli wektor diýilýärf.Bu ýagdaýda $a_i$,I=1,2,. . . , n sanlara $\alpha$ wektoryň kompanentalary diýilip aýdylýar.Eger-de $\alpha$ bilen n -ölçegli

$$\beta = ( b_1, b_2, \ldots b_2 ) \quad (2)$$

wektoryň degişli kompanentalary deň bolsalar bu iki wektorlaryň özleri hem deň hasap edilýärler.

(1) we (2) wektorlaryň jemi diýilip her bir kompanentasy olaryň degişli komponentalarynyň jemine deň bolan

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1 , a_2+b_2 , \dots a_n+b_n) \quad (3)$$

wektora aýdylýar. Wektorlary goşmak amalynyň oruncalşyrma we utgaşdyrma häsiýetlerine eýedigi bu kesgitlemeden görünýändir.

Nul wektor diýilýan

$$0 = (0 , 0 , \dots 0) \qquad (4)$$

wektorlar goşulanda nulyň ornyny tutýandyr.

Hakykydan hem

$$\alpha+0=( a_1 +0, a_2 +0 , \dots a_n+0)=( a_1, a_2, \dots a_n)=\alpha$$

Al wektorya garşylykly diýilip

$$-\alpha= (-a_1,- a_2, \dots - a_n ) \ (5)$$

wektora aýdylýar.$\alpha+(-\alpha)=0$ deňlik aýandyr. Şeýle hem goşmak amal;yna ters aýyrmak amalynyňbaradygy hem aňsatlyk bilen görkezilip biliner.Hakykyatdan hem (1) we (2) wektorlaryň tapawudy bolup

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{wektor ,ýagny}$$

$$\alpha-\beta=( a_1-b_1 \ a_2-b_2 \dots a_n -b_n) \ (6)$$

wektor hyzmat eder.

$\alpha$ wektoryň k sany köpeltmek hasyly diýilip

$$k\alpha=(k a_1, k a_2, \dots k a_n ) \ (7)$$

wektora aýdylýar.

Bu kesgitlemeden

$$k(\alpha \pm \beta)=k\alpha \pm k\beta \qquad (8)$$

$$(k \pm l)\alpha = k\alpha \pm l\alpha \quad (9)$$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha \quad (10)$$

$$1*\alpha = \alpha \quad (11)$$

$$0*\alpha = 0 \quad (12)$$

$$(-1)\alpha = -\alpha \quad (13)$$

$$k*0 = 0 \quad (14)$$

eger-de $k\alpha=0$ bolsa ýa $k=0$ ,ýa-da $\alpha=0$ .(15)

n-ölçegli wektoryň ählisisniň toplumy özünde kesgitlenen wektorlary goşmak we sana köpeltmek amallary bilen n-ölçegli wektorlaryň giňişligi diýilip aýdylýar.

## 2.Wektorlaryň çyzykly baglanşyklylygy.

Eger-de n-ölçegli wektorlar $\alpha$ we $\beta$ üçin käbir k san bar bolup $\beta=k\alpha$ deňlik ýetýän bolsa $\beta$ wektor $\alpha$ wektora proporsional diýilýär,Hasusan,0 wektor islendik $\alpha$ wektora proporsionaldyr.($0=0*\alpha$),Eger-de $\beta=k\alpha$ bolup $\beta\neq 0$ bolsa bu ýerden $k\neq 0$ bolup $\alpha=k^{-1}\beta$ deňlik alynar.Bu diýildigi proporsionallygyň nul däl wektorlar üçin simmetrik häsiýete eýedigini aňladýar.

Eger-de käbir $\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \ldots \boldsymbol{l_n}$ sanlar bar bolup

$$\beta = \boldsymbol{l_1\ \alpha_1, l_2\ \alpha_2, \ldots l_n\alpha_n}$$

Deňlik dogry bolsa $\beta$ wektora $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy diýilip aýdylýar.

***<u>Kesgitlem:</u>*** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}, \alpha_r \quad (r\geq 2) \quad (1)$

wektorlaryň hiç bolmanda biri golanlarynyň çyzykly kombinasiýasy bolsa ,olar çyzykly baglanşykly,tersine ýagdaýda bolsa ,çyzykly baglanşyksyz diýilip aýdylýar.Bu kesgitlemäni indiki görnüşde hem bermek mümkindir.

***Kesgitleme:***

Eger-de hiç bolmanda biri nuldan tapawutly bolan $k_1$, $k_2$ , …, $k_r$ sanlar bar bolup.

$$k_1\alpha_1+k_2\,\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r \quad (2)$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa (1) sistema baglanşykly diýilip aýdylýar.Bu iki kesgitlemeleriň ekwiwaletdiklerini subut etmek aňsatdyr.Şeýle hem ikinji kesgitlemäniň sistemadaky wektorlaryň sany bire deň bolanda hem ulanylyp bilnjekdigi aýdyňdyr:diňe bir $\alpha$ wektordan duraýan sistemanyň çyzykly baglanşykly bolmagynyň zerur hem eterlik şerti bu $\alpha$ wektoryň nul wektor bolmaklygydyr.Hakykatdan hem ,eger-de $\alpha=0$ bolsa ,onda islendik $k=0$ üçin hem $k\alpha=0$ boljakdygy düşnüklidir.Tersine ,ege-de $k\alpha=0$ we $k=0$ bolsa $\alpha=0$ alynar.

Teorema 1. (1) sistemanyň käbir bölek sistemasy baglanşykly bolsa,onda sistemanyň özi hem baglanşyklydyr.

Subuty. Hakykatdan hem göý (1) sistemada $s<r$ bolup

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ wektorlar hiç bolmandfa biri nuldan tapawutly $k_i$ bilen

$$k_1\,\alpha_1+k_2\,\alpha_2+,\ldots,k_s\,\alpha_s=0$$

deňligi kanagatlandyrýan bolsunlar.Bu ýagdaýda ýerine ýetýän

$$k_1\,\alpha_1+k_2\,\alpha_2+,\ldots,k_s\,\alpha_s+0*\alpha_{s+1}+\ldots+0*\alpha_r=0$$

deňlikden (1) sistemanyň çyzykly baglanşykdygy alynar.

Netije 1. Iki sany deň ýa-da umuman iki sany proporsional wektorlary bolan ,şeýle hem nul wektory saklaýan islendik sistema çyzykly baglanşyklydyr.

2.Eger-de (1) sistema çyzykly baglanşyksyz bolsa ,onda onuň islendik bölek sistemasy hem çyzykly baglanşyksyzdyr.

n-ölçegli wektor giňişliginiň

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = (1,0,0,...,0), \\ \varepsilon_2 = (0,1,0,...,0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = (0,0,0,...,1) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Wertorlary birlik wektorlar diýilip atlandyrylýarlar.

(3) sistema çyzykly baglanşyksyzdyr.Goý

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+ \dots + k_n\varepsilon_n=0$$

bolsun.Çep tarapynyň ($k_1$ , $k_2$ , …., $k_n$ ) wektora deňdigine görä soňky deňlikden

$$(k_1 , k_2 , \dots, k_n )=0$$

deňliok,ýagny her bir i=1,2, ... n nomer üçin k = 0 bolmalydygyna geleris.

Diýmek soňky belliklerden n-ölçegli wektor ginişliginde n sany wektordan durýan çyzykly baglanşyksyz wektorlaryň (3) sistemasyny bardygyny görýäris.

**Teorema 2** s>n bolanda n-ölçegli wektorlaryň islendik s sanysyndan durýan sistema çyzykly baglanşyklydyr.

Subuty.Goý bize

$$\alpha_1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

$$\alpha_2=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_s=(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn})$$

wektorlar sistemasy berilen bolsun.Hiç bolmanda biri nuldan tapabutly bolan we

$$k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \ldots, k_s\alpha_s = 0$$

deňligi kanagatdyrýan k , k , … k sanlaryň bardygyny görkezmelidiris (4) deňlikden alynýan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{s1}k_s = 0 \\ a_{21}k_2 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{s2}k_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \ldots + a_{sn}k_s = 0 \end{array}\right\} (5)$$

sistema $k_1, k_2, \ldots k_s$ näbellelerden n çyzykly deňlemeleriň sistemasy bolup belli boluşyna gärä nul däl çözüwe eýedir.Bu diýildigi (4) deňlemäni kanagatlandyrýan hemmesi nul bolmadyk

$k_1, k_2, \ldots k_s$ sanlaryň bardygyny aňladýar.Teorema subut edildi.

**Kesgitleme** n-ölçegli wektorlaryň

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \quad (6)$$

çyzykly baglanşyksyz sistemasyna islendik Be-n-ölçegli wektory goşulanda ol çyzykly baglanşykly sistema öwrülse oňa maksimal çyzykly baglanşyksyz sistema diýilýä.Bu ýagdaýda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ wektorlaryň çyzykly baglanşyklylygynyň islendik aňlatmasynda $\beta$-nyň koeffisiýenti nuldan tapawutly bolmalydyr.

Ýokarda aýdylanlardan n-ölçegli wektorlaryň n sanysyndan burýan islendik çyzykly baglanşyksyz sistemasynyň maksimaldygy hem-de bu giňişligiň islendik maksimal çyzykly baglanşyksyz sistemasynyň n-den köp bolmadyk wektorlary saklaýandygy gelip çykýar.Şeýle hem n-ölçegli islendik çyzykly baglanşyksyz sistemasynyň hiç bolmanda bir maksimal çyzykly baglanşyksyz sistemasynda saklanýandygy gelip çykýandyr.

Eger-de $\beta$ wektor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (7) wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy bolsa ,onda adatça $\beta$ (7) sistemanyň üsti bilen çyzykly aňladylýar diýilýär.Umuman

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s (8)$$

wektorlaryň her biri (7) sistemanyň üsti bilen çyzxykly aňladylýan bolsa (8) sistema (7)-niň üsti bilen çyzykly aňladylýar diýilýär.

Sistemanyň başga sistemanyň üsti bilen çyzykly aladylmagy düşunjesi tranzitiw häsiýete eýedir.

Eger-de wektorlaryň iki sany sistemalarynyň her biri beýlekisiniň üsti bilen çyzykly aňladylýan bolsa olara ekwiwalent sistemalar diýilýär.Çyzykly aňladylmanyň tranzitiwliginden käbir wektor ekwiwalent sistemalaryň biri bilen çyzykly aňladylýan bolsa ,onuň beýleki sistemalaryň üsti bilen hem çyzykly aňladylyp bilinjekdigini alarys.Indiki tassyklama bolsa teorema ady bilen bellidir.

**Teorema 3.** N-ölçegli wektor giňişliginiň wektorlarynyň ,iki

$$\text{(I)} \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

$$\text{(II)} \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$$

Sistemasynyň birinjisi çyzykly baglanşyksyz we ikinjiniň üsti bilen çyzykly aňladylýan bolsa,ondfa birinji sistemanyň wektorlarynyň sany ikinjisindäkiden köp däldir,ýagny $r \leq s$

***Subuty.*** R>s diýiliň .şerte görä

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1s}\beta_s \\ \alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2s}\beta_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \ldots + a_{rs}\beta_s \end{array}\right\} (9)$$

Deňlikler dagry bolyp olaryň koeffisentleri s-çegli wektorklaryň r sanysynyň

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1s}) \\ \gamma_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2s}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_r = (a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{rs}) \end{array}\right\}$$

Sistemasyny düzýärler.Şeýlelikde r>s bolanda olaryň çyzykly baglanşyklydyklary belli bolyp jiç bolmanda biri nuldan tapawutly $k_1$ , $k_2$ , . . ., $k_s$ sanlar tapylyp

$$\mathbf{k_1\, \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \ldots + k_r\, \alpha_r = 0}$$

Deňlik ýerine ýetýändir.Bu ýagdaýda (9)-dan

$$\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} = 0, \quad j=1,2,\ldots,s \quad (10)$$

deňlikler alynar.Onda

$$k_1 a_1 + \ldots + k_r a_r = \sum_{i=1}^{r} k_i a_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \beta_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij}\right)$$

deňlik alynyp (I) sistemanyň çyzykly baglanşyklylygy hakynda netijäni alaryş.Başdaky dumanymyza ters bolan bu netije tassyklamanyň subutyny berýär.

***Netije 1***

Çyzykly baglanşyksyz iki sany ekwiwalent sistemalardaky wektorlaryň sany birmeňzeşdir.

***Netije 2***

n-ölçegli wektor ginişliginiň islendik maksimal çyzykly baglanşyjksyz sistemasyndaky wektorlaryň sany n-e deňdir.

***Netije3***Eger-de wektorlaryň çyzykly baglanşykly sistemasynda iki sany maksimal çyzyklu baglanşyksyz bölek sistemalary alynan bolsa olarda saklanýan wektorlaryň sany deňdir.

Berilen wektorlar sistemasynyň islendik maksimal çyzykly baglanşyksyz bölek sistemasyna girýän wektorlaryň sanyna bu sistemanyň rangy diýilip aýdylýar.

**Teorema 4.** Goý çyzykly baglanşyksyz bolmaklary hökman bolmadyk n -ölçegli wektorlaryň iki sany

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \quad \textbf{(11)}$$

$$\textbf{we} \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \quad \textbf{(12)}$$

sistemalary berilen bolup (11) sistemanyň rabgy k sana (12) sistemanyňky bolsa l sana deň bolsun.Eger-de (11) sistema (12) -niň üsti bilen çyzykly aňladylýan bolsa ,onda $k \leq l$ eger-de ol sistemlar ekwiwalent bolsalar k=l gatnaşyk dogrydyr.

## 3.Matrisanyň rangy.

n-ölçegli wektorlaryň berilen sistemanynyň baglanşyklydygy ýa-da baglanşyksyzlygy hakyndaky sowalyň ýüze çykmagy tebigydyr.Bu sowalyň jogabyny tapmagyň bir usuly matrisanyň rangy düşünjesi bilen ýakyndan baglanşyklydyr.

Goý

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn} \end{pmatrix}$$

Matrisadaky ölçegleri görkesýän s we n sanlar özara hiç hili baglanlykda bolmasynlar.A matrisanyň çyzykly baglanşyksyz sütünleriniň maksimal sanyna ,başgaça aňda A matrisanyň sütünleriniň sistemasynyň rangyna bu matrisanyň rangy diýilip aýdylýar.

A matrisada erkin k setir we k sütün ($k \leq \min(s,n)$) saýlanan bolsun.Olaryň kesişmesinde duran elementlerden düşülen k-njy minory diýilip aýdylýar.Bizi A-nuyň nuldan tapawutly A-nyň ähli k-njy tertipli minorlary nula deň bolanlarynda onuň k-dan uly tertipli minorlarynyň hem ählisiniň nula deňdigi hakyndaky aýdyň tassyklama örän peýdalydyr.Hakykatdan hem bu tassyklamany subut etmek üçin $k<k+j \le \min(s,n)$ bolan (k+j)-nji tertipli minory onuň k sany sütüni boýünça Laplas teoremasyna görä dagytmak ýeterlikdir.

***<u>Teorema</u>*** *(matrisanyň rangy hakyndaky)* Matrisanuyň nuldan tapawutly minorlarynyň iň ýokary tertipli bu matrisanyň rangyna deňdir.

*<u>Subuty</u>* Goý A matrisanyň nuldan tapawutly minorlarynyň iň ýokary tertipli r-e deň bolsun.Umumylygy kemeltmekden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{1r}, a_{1,r+1} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}, a_{rr}, a_{r,r+1} \dots a_{2n} \\ a_{r+1,1} \dots a_{r+1,r} a_{r,r+1} \dots a_{r+1,n} \\ a_{s1} \dots a_{sr}, a_{s,r+1} \dots a_{sn} \end{pmatrix}$$

Matrisanyň çep ýokary burçyndaky r-nji tertipli D minory nuldan tapawutly bolsun diýeliň .Onda A-nji birinji r sany sütünleri özara çykykly baglanşyksyzdyrlar,tersiine ýagdaýda D=0 bolardy.

A matrisanyň $r<l \le n$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan her bir l-nji sütüniniň onuň birinji r sütünleriniň çyzykly kombinasiýasy bolýandygyny görkezeliň.Islendik $1 \le i \le s$ nomerde (r+1)nji tertipli (d minory i-nji setiriň we l-nji sütüniň gurşamagy bilen alynýan)

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} a_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} a_{1l} \\ a_{i1} \ldots a_{ir} a_{il} \end{vmatrix}$$

Komekçi kesgitleýjini düzeliň .i-nji islendik bahasynda $\Delta_i = 0$ .Hakykatdan hem,eger-de i>r bolsa $\Delta_i$ (r+1)nji tertipli minopr bolup ol nula deň bolar.Eger-de $i \leq r$ bolsa $\Delta_i$ iki sany deň setirleri bolan kesgitleýji hököminde nula deň bolar.$\Delta_i$ -niň saňky setiriniň elementleriniň algebraýik doldurgyçlaryna seredeliň. $a_{il}$ elementleriniň algebraik doldurgyçy D minor bolar.Eger-de $1 \leq j \leq r$ bolanda $\Delta_i$ kesgitleýjidäki $a_{il}$ elementiň algebraik doldurgyçy

$$A_j = (-1)^{r+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,j-1} a_{1,j+1} \ldots a_{1r} a_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{r,j-1} a_{r,j+1} \ldots a_{rr} a_{rl} \end{vmatrix}$$

Bolup ol i nomere bagly däldir.Şeýlelikde $\Delta_i$ -ni soňky setiri boýünça daytmak bilen alarys

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{i1}D = 0$$

Bu ýerden $D \neq 0$ bolanlygyna görä

$$a_{il} = -\frac{A_1}{D} a_{i1} - \frac{A_2}{D} a_{i2} - \ldots - \frac{A_r}{D} a_{ir}$$

Deňligi ähli i=1,2,…,s nomerler üçin taparys.Koeffisientleriň i-e bagly däldiklerinden A matrisanyň l-nji sütüniniň ilkinji r sütünleriniňdegişlilikde

$$-\frac{A_1}{D}, -\frac{A_2}{D}, \ldots, -\frac{A_r}{D}$$ koeffisientler bilen alynan çyzykly kombinasiýasydygyny alýarys.

Şeýlelikde A matrisanyň sütünleriniň sistemasynda r sany sütünlerden durýan maksimal çyzykly baglanşyksyz bölek sistemany tapdyk,başgaça aýdanyňda A matrisanyň rangynyň r-e deňdigini subut etdik.Teorema subut edildi.

Bu teorema matrisanyň rangyny hasaplamagyň usulyny berýändir.Şoňa görä-de ol berilen wektorlar sistemasynyň çyzykly baglanşyklydygyny ýa-da däldigini anyklamak üçin hem peýdalanylyp biliner.

Matrisanyň rangyny hasaplamagyň indiki düzgünini aldyk:

Matrisanyň rangy hasaplananda kiçi tertipli minorlardan ýokary tertipli minorlara geçmelidiris.Eger-de nuldan tapawutly käbir k-njy tertipli D minory gurşaýanlaryny hasaplap çykmak ýeterlikdir:olaryň ählisi nula deň bolsa matrisanyň rangy k sana deň bolar.

***Netije 1*** Her bir matrisanyň çyzykly baglanşyksyz setirleriniň maksimal sany onuň çyzykly baglanşyksyz sütünleriniň maksimal sanyna ,ýagny onuň rangyna deňdir.

***<u>Netije 2</u>*** n-nji tertipli kesgitleýjiniň nula deň bolmaklygynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup onuň setirleriniň arasyndaky çyzykly baglanşyklylygyň bar bolmaklygydyr.

## 4.Çyzykly deňlemelr sistemasynyň kökdeşliginiň kriterisi

Deňlemeleriniň sany näbellileriniň sany bilen dexň bolmazlygy hem mümkin çyzykly deňlemeleriň sistemasyny öwreneliň

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...................................... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\} (1)$$

Ilki bilen bu sistemanyň kökdeşligi hakyndaky meseläni öwrenjekdiris.Indiki

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} b_1 \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn} b_s \end{pmatrix}$$

Matrisalar degişlilikde (1) sistemanyň koeffisienlerinden düzülen hem-de n giňildilen matrisalary diýilip atlandyrylýarlar.

A matrisanyň rangynyň A-nyň rangyndan kiçi däldigi aýandyr.Hakykatdan hem A -nyň sütünleriniň islendik maksimal çyzykly baglanşyksyz bölek sistemasy A matrisanyň sütünleriniň käbir maksimal çyzykly baglanşyksyz sistemasynda saklanýandyr.

***Kroner-Kapelli teoremasy.***Çyzykly deňlemeler sistemasynyň kökdeşlygynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup giňeldilen matrisa bilen koeffisientlerden düzülen matrisanyň ranglarynyň deň bolmaklygy hyzmat edýändir.

***Subuty 1.***Göý (1) kökdeş we k , k , . . . , k onuň kökleriniň biri bolsun.Bu sanlary (1) sistemadaky näbellileriň ornuna goýsak s sany tojdestwoloryň sistemasyna eýe bolarys.Oňa görä A-nyň soňky sütüniniň beýbeki sütünleriniň çyzykly kombinasiýasyndan dyrýandygyny alarys.Başgaça aýdanyňda A-nyň her bir sütüni A-nyň sütünleriniň çyzykly kompinasiýasydyr.Tersine A-nyň her bir sütün hem A-nyň sütünleriniň çyzykly kompinasiýasydyr.Diýmek A we A matrisalaryň sütünlerinden durýan sistemalar özara ekwiwalentdirler,onda ýokarda getirlen tassyklamadan A we A matrisalaryň ranglarynyň deňdigini alarys.

2.Goý r(A)=r(A) bolsun.Bu ýagdaýda A-nyň islendik maksimalçyzykly baglanşyksyz sütünleriniň sistemasy A matrisada hem çyzykly baglanşyksyz sütünleriň maksimal sistemasy bolup hyzmat eder,onda A-nyň soňky sütüni hem bu maksimal sistemanyň sütünleriň çyzykly kombinasiýasydyr.Şeýlelikde käbir $k_1, k_2, \ldots k_n$ , sanlar bar bolup A-nyň soňky sütüni A –nyň sütünleriniň bu koeffisientler bilen alynan çyzykly kombinasiýasy görnüşinde aňladylar.Diýmek $k_1, k_2, \ldots k_n$ sanlar (1) sistemanyň käbir çözüwidir.Teorema subut edildi.

Bu tassyklama mysal işlemekde ulanylanda ilki A-nyň rangyny hasaplamaly ,munuň üçin A-nyň bu minory gurşap alýar ähli minorlary nula deň bolan nuldan tapawutly käbir M minaryny taparys.Soňra A matrisanyň A-da saklamaýan ýone M-minory gurşaýan ähli minorlarynyň hasaplaýarys.

Eger-de (1) sistemanyň häsiýetlendiriji kesgitleýjileri diýilýän bu minorlaryň ählisi nula deň bolsalar r(A)=r(A) bolup (1) sistema kökdeş bolar.Şoňa göräde aýdylan tassyklama indiki görnüşde hem aýdylyp biliner.

***<u>Teorema</u>***.Çyzykly deňlemeleriň sistemasynyň kökdeşliginiň zerur hem ýeterlik şerti bolup ähli häsiýetlendiriji kesgitleýjileriniň nula deň bolmaklygy hyzmat edýändir.

(1) sistema kökdeş bolan halatynda onuň bar bolan çözüwlerini tapmaklyk indiki usulda amala aşyrylýar.Goý r(A)=r bolsun .Onda A matrisanyň çyzykly baglanşyksyz setirleriniň maksimal sany hem r – e deňdir.Anyklyk üçin A-nyň ilkinji r setirleri çyzykly baglanşyksyz diýeliň .Bu ýagdaýda A-nyň ilkinji r setirler hem çyzykly baglanşyksyzdyrlar.A we A matrisalaryň ranglarynyň deňliginden (1) sistemanyň islendik deňlemesiniň käbir koeffisientler bilen alynan ilkinji r sany deňlemesiniň jemi görnüşinde aňladyljakdygy gelip

çykýandyr.Bu diýildigi (1) sistemanyň ilkinji r deňlemeleriniň sistemasynyň islendik umumy çözüwiniň ähli sistemanyň hem çözüwi boljagynyu aňladýar.Diýmek bizi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...................................... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\}(2)$$

sistemanyň çözüwlerini öwrenmek ýeterlikdir.(2) sistemanyň näbellilerniň koeffisientlerinden düzülen matrisanyň setirleriniň çyzykly baglanşyksyzdyklaryna ,başgaça aýdanyňda onuň koeffisientlerinden düzülen matrisanyň rangynyň r bolanlygyna görä r <= n bolmak bilen bu matrisanyň r-nji tertipl minorlarynyň hiç bolmakda biri nuldan tapawutlydyr.Eger-de r=n bolsa (2) kwadrat sistema bolup ýeke-täk çözüwe eýedir.

Eger-de r<n diýsek ,kesgitlilikuçin ilkinji r näbellileriň koeffisientlerinden düzülen r-nji tertipli minor nula deň däl diýsek (2) sistemanyň ähli deňlemelerinde $\mathbf{x_{r+1}, x_{r+2},\dots,x_n}$ näbellileri deňlikleriň sagyna geçirip we olara $c_{r+1},c_{r+2},\dots,c_n$ bahalary saýlap r sany $x_1,x_2, \dots, x_r$ näbellilerde

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n,$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n,$$

..................................

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n,$$

sistemany alarys.

Bu sistema Kramer düzgüni ulanarlykly bolup , ol ýeke-täk $c_1, c_2, \ldots, c_r$ çözüwe eýedir.Onda $c_1, c_2, \ldots, c_r., c_{r+1}, \ldots, c_n$ sanlar toplumynyň (2) sistemanyň çözüwidigi alynar.Ýöne $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ bahalaryň “azat näbelliler” diýilýän $\mathbf{x_{r+1}}, \mathbf{x_{r+2}, \ldots, x_n}$ üçin erkin saýlanylyp bilinýänliginden bu usul bilen (2) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwlerini taparys.Ilkinji bir tarapdan (2) sistemanyň islendik çözüwi görkezilen usul bilen tapylyp biliner.

***Teorema(kesgitlilik kriterisi)*** Kökdeş sistemanyň kesgitli bolmagynyň zerur hem ýeterli serti bolup onuň matrisasynyň rangynyň sistemanyň näbellileriniň sanyna deň bolmagy hyzmat edýändir.

## 5.Birjynysly çyzykly deňlemeleriň sistemasy.

Geçen temadaky alynan netijeleri birjynysly çyzykly deňlemeleriň

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\}(1)$$

sistemasy üçin ulanalyň .Kroneker-Kapelli teoremasyndan bu sistemanyň hemişe kökdeşdigini görmek kyn däldir.Munuň şeýledigine bu sistemanyň hiç bolmanda nul çözüwe eýedigi bilen hem göz ýetirmek mümkindir.

Eger-de r(a)=r bolup r=n bolsa onda nul çözüw (1) sistemanyň ýeke-täk özüwinden başga nul däl çözüwe hem eýedir we bu ýagdaýda bar bolan çözüwleri tapmak n sany näbellileri bolan n çyzykly birjynysly deňlemeleriň sistemasynyň nul däl çözüwe eýe bolmagynyň zerur hem ýetrlik şerti bolup bu sistemanyň kesgitleýjisiniň nula deň bolmaklygydygy düşnüklidir.Çüňki bu ýagdaýda r(A)<n bolar.

Birjynysly çyzykly deňlemeleriň sistemasynyň çözüwleriniň käbir häsiýetlerini belläp geçeliň.

1. Eger-de $\beta=(b_1,b_2, \ldots ,b_n)$ (1) sistemanyň çözüwi bolsa onda islendik k hemişelik san üçin $k\beta$ wektor hem (1) sistemanyň çözüwidir.
2. (1) ышыеуьфтнň шыдутвшл $\gamma = (c_1,c_2, \ldots ,c_n)$ we $\beta=(b_1,b_2, \ldots ,b_n)$ çözüwleri üçin $\beta+\mu$ jem hem bu sistemanyň çözüwidir.

Umuman aýdanyňda birjynysly çyzykly deňlemeleriň (1) sistemasynyň çözüwleriniň islendik çyzykly kombinasiýasy hem bu sistemanyň çözüwidir.

Şeýlelikde (1) sistemanyň n ölçegli wektorlar görnüşinde aňladylýar çozüwleriň toplumyndan çyzykly baglanşyksyzlarynyň maksimal sistemasyny bolup almak mümkindir.Birjynysly çyzykly deňlemeleriň sistemasynyň çözuwleriniň çyzykly baglanşyksyzlarynyň islendik maksimal sistemasyna ol sistemanyň çözüwleriniň fundamental sistemasy diýilip aýdylýar.

Fundamental sistemanyň diňe (1) sistemanyň koeffisientlerinden düzülen matrisanyň rangynyň näbellileriň sanyndan kiçi bolan ýagdaýynda bolup biljekdigi düşnüklidir.Şunlukda (1) sistemanyň bar bolan fundamental sistemalary ekwiwalent bolup birmeňzeş sandaky çözüwlerden durýarlar.

***Teorema.*** Eger-de çyzykly birjynysly deňlemeleriň (1) sistemasynyň koeffisientlerinden matrisanyň r rangy näbellileriň n sanyndan kiçi bolanda onuň çözüwleriniň islendik fundamental sistemasy n-r sany çözüwlerden durýar.

***Subuty.*** Üçin (n-r)-iň (1) sistemanyň azat näbellilerniň sanyny aňladýandygyny bellemelidiris.Goý,olar $x_{r+1}$, . . . ,$x_1$ bolsunlar.(n-r) -nji tertipli nuldan tapawutly indiki d kesgitleýjä garalyň

$$d=\begin{vmatrix} c_{1,r+1}, c_{1,r+2} \ldots c_{1n} \\ c_{2,r+1}, c_{2,r+2} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-r,r+1}, c_{n-r,r+2} \ldots c_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjiniň i-nji ($i \leq i \leq n-r$) setiriniň elementlerini erkin näbellilere baha deregine alsak , $x_1, x_2, \ldots, x_r$ näbelliler üçin ýeke-täk bahalary ,ýagny (1) sistemanyň kesgitli bir çözüwini taparys.Ol çözüi

$$\alpha_i=(c_{i\,1}, c_{i\,2}, \ldots, c_{i\,r}, c_{i,r+1}, \ldots, c_{i\,n})$$

Şeýle usul bilen tapylýan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ sistema (1)-iň çözüwleriniň fundamental sistemasydyr.Hakykatdan hem setirleri $\alpha_i$ wektorlaryň komponentalary bolan matrisanyň (n-r)-nji tertipli nuldan tapawutly d minorynyň bardygy aýandyr.Ikinji bir tarapdan

$$\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_r.b_{r+1}, \ldots, b_n)$$

(1) sistemanyň çözüwe diýsek onuň $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ wektorlaryň üsti bilen çyzykly aňladylýandygyny görmek kyn däldir.

$\alpha$ bilen ($i=1,2,\ldots,n-r$ ) n-r-ölçegli wektor hööküminde seredilýän d kesgitleýjiniň i-nji setirini belgiläliň .Onda

$$\beta=(b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n)$$

belgilesek (n-r) sany çyzykly baglanşyksyz $\alpha`_1, \ldots \alpha`_{n-r}$

wektorlar bilen β` wektory goşmak bilen bilelikde alynan

$$\alpha_1^1, \alpha^1_2, \ldots, \alpha^1_{n-r}, \beta^1$$

çyzykyly baglanşykly sistemadyr.Diýmek käbir $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$ sanlar bar bolup

$$\beta^1 = k_1\alpha^1_1 + k_2\alpha^1_2 + \ldots + k\,\alpha^1_{n-r} \qquad (*)$$

deňlik ýerine ýetýändir.

Şunlukda

$$\delta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_{n-r}\alpha_{n-r} - \beta$$

Görnüşde kesgitlenilýän n ölçegli wektor (1) sistemanyň çözüwleriniň çyzykly kombinasiýasy bolmak bilen bu sistemanyň çözüwidir.Ýöne (*) gatnaşykdan görnüşi ýaly δ çözüwdäki azat näbellileriň ählisiniň bahalary nula deňdirler.Onda (1) sistemanyň näbellileriň nula deň bahalarynda alynýan ýeke-täk çözüwi nul çözüwdir,ýagny $\delta=0$ bolýandyr.$\beta = k_1\alpha_1 + \ldots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$

***Bellik*** Teoremadan birjynysly çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözüwleriniň ähli fundamental sistemalaryna d kesgitleýji höküminde nuldan tapawutly ähli (n-r) tertipli kesgitleýjileri almak bilen eýe bolarys diýmäge esas berýär.

Indi birjynysly we birjynysly däl sistemalaryň çözüwleriniň arasyndaky baglanşygy öwreneliň.Goý

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .................................... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\} (2)$$

Sistema berilen bolsun.Çyzykly birjynysly deňlemeleriň ýagny(2)-den azat çlenleri nullar bilen çalşyrylyp alynan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .................................... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\} (3)$$

Sistema (2) üçin getirilen dililip aýdylýar.(2) we (3) sistemalaryň çözüwleri arasyndaky baglanşyklar hakynda indiki häsiýetlerden hem netije çykar mak mümkin.

1. (2) sistemanyň islendik çözüwi bilen getirlen (3) sistemanyň islendik çözüwiniň jemi ýene-de (2) sistemanyň çözüwidir.C=($c_1$,$c_2$, . . . ,$c_n$)-(2) sistemanyň ,d=($d_1$,$d_2$,. . .$d_n$)-(3) sistemanyň çözüwleri diýsek C+d=($c_1$+$d_1$,…,$c_n$+$d_n$) hem (2) –niň çözüwidir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}d_j = b_k + o = b$$

2. (2) sistemanyň islendik iki çözüwleriniň tapawudy getirlen (3) sistema üçiň çözüwdir.

Hakykatdan hem ,eger-de

$C=(c_1,c_2, \ldots, c_n)$ we $C^1=(c^1{}_1,c_2{}^1, \ldots, c_n{}^1)$ (2) –niň çözüwleri bolsalar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j - c_j^1) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j^1 = b_k - b_k$$

## 6.Çyzykly giňişlikler

Goý R(a,b,…) elementler köplüginde onuň her bir a we b elemenleriniň jübütine bu köplügiň käbir a+b (olaryň jemi diýilýän) elementini degişli edýän düzgün-goşmak amaly bilen birlikde R köplügiň her bir a elementine we $\alpha$ -hakyky sana R köplügiň a ementiniň $\alpha$ hakyky sana köpeltmek hasyly diýilýän $\alpha a$ ýeke-täk elemntini degişli edýän düzgün-elementiň hakyky sana köpeltmek diýilýän amal kesgitlenen bolsun.Bu köplügiň elementleri wektorlar, onuň özi bolsa hakyky çyzykly giňişlik diýilip atlandyrylýan eger-de bu amallar üçin indiki aksiomalar ýerine ýetýän bolsa

I. Goşmak amaly kommutatiw a+b=b+a

II. Goşmak assosiatiw (a+b)+ca+(b+c)

III. R köplügiň nul elementi diýän her bir aэR üçin

a+o=a deňligi kanagatlandyrýan ýeke-täk

element bardyr.

IV. R köplügiň her bir a elementi üçin oňa garşylykly diýilip atlandyrylýan we $a+(-a)=0$

deňligi kanagatlandyrýan a-nyň garşylyklysy

diýilýan $-a$ element bardyr.

V. islendik $a,b\ni R$ we $\alpha$ -hakyky san üçin $\alpha(a+b)a=\alpha a+\alpha a$

VI. islendik $a\ni R$ we $\alpha$ hem $\beta$ hakyky sanlar üçin $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$

VII. islendik $a\ni R$ we $\alpha$ hem $\beta$ hakyky sanlar üçin $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$

VIII. islendik $a\ni R$ üçin $1*a=a$

Bu aksiomalardan gelip çykýan käbir häsiýetleri belläliň.

1.$\alpha*a=0$ bolsa ýa $\alpha=0$ ýa-da $a=0$ Hakykatdan hem

$\alpha a=\alpha(a+0)=\alpha a+\alpha*0 \Rightarrow \alpha*0=\alpha a-\alpha a=0.$

$\alpha a=(\alpha+0)a=\alpha a+0*a \Rightarrow 0\alpha=\alpha a-\alpha a=0$ Umuman

$\alpha*a=0$ bolup $\alpha\neq 0$ bolsa $a=1*a=\alpha*\alpha^{-1}*\alpha=\alpha^{-1}*0=0.$

2.$\alpha(-a)=-\alpha a.$ Hakykatdan hem $\alpha a=+\alpha(-a)=\alpha[a+(-a)]=0$

3.$(-\alpha)a=-\alpha a.$Hakykatdan hem $\alpha a+(-\alpha)a=[\alpha+(-\alpha)]a=$

$=0*a=0$

4.$\alpha(a-b)=\alpha[a+(-b)]=\alpha a+\alpha(-b)=\alpha a+(-\alpha b)=\alpha a-\alpha b$

$5.(\alpha-\beta)a=[\alpha+(-\beta)]a=\alpha a+(-\beta)a=\alpha a-\beta a$

Eger-de hakyky çyzykly giňişligiň kesgitlemesindäki sanlar köplüginden bolmalydyklary hakyndaky talap olaryň islendik kompleks sanlar bolup bilmekleri bilen çalşyrylsa biz kompleks çyzykly giňişligiň kesgitlemesine alýarys.Hakyky çyzykly giňişligiň mysaly bolup n-ölçegli hakyky wektor giňişligi hyzmat edip biler.

## 7.Çyzykly giňişligin bazisi we ölçegi

Elementleri x,y,… bolan R-erkin hakyky çyzykly giňişligi öwreneliň.

R giňişligiň x,y,…,z elemntleriniň çyzykly kombinasiýasy diýilip olartyň käbir hakyky sanlar köpeltmek hasyllarynyň islendik jemine aýdylýa.

Kesgitleme 1. Eger-de R giňişligiň x,y,…z elementleri üçin hiç bolmanda biri nuldan tapawutly $\alpha,\beta,\ldots\mu$ hakyky sanlar bar bolup

$$\alpha x+\beta y+\ldots+\mu z=0 \quad (1)$$

deňlik ýerine ýetýan bolsa ol elementlere çyzykly baglanşykly diýilýär.

Çyzykly baglanşykly bolmadyk x,y, . . . ,z elementlere çyzykly baglanşyksyz diýilip aýdylşgara aýdanyňda (1) deňlik diňe $\alpha=\beta=\ldots=\mu=0$ bolanda ýerine ýetýan bolsa x,y,…,z elementlere çyzykly baglanşyksyz diýilýär.

Teorema 1. R giňişligiň x,y,…,z elementleriniň çyzykly baglanşykly bolmaklarynyň žerur hem ýetirlik şerti bolup olaryň biriniň galanlarynyň çyzykly kombinasiýasy bolmaklygy hyzmat edýär.

Subuty. 1.Zerurlygy.Göý x,y,…,z elementler çyzykly baglanşykly bolsun,onda (1= deňlık $\alpha,\beta,\ldots,\mu$ sanlaryň hiç bolmanda biri nuldan tapawutly bolanda ýerine ýetýändir.Kesgitlilik üçin $\alpha \neq 0$ diýeliň,onda $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha},\ldots,\psi = -\frac{\mu}{\alpha}$ belgiläp

$$x=\alpha y+\ldots\mu z \qquad (2)$$

bolýandygyna geleris.

2.Ýeterlikligi.Goý x,y,…,z elementleriň biri (mysal üçin x) galanlarynyň çyzykly kombinasiýasy bolsan .Bu ýda $\alpha,\ldots,\mu$ sanlar bar bolup (2) deňlik ýerine ýetýär;onda

$$(-1)x+\lambda y+\ldots+\mu z==0 \quad (3)$$

alynar.$-1,\lambda,\ldots,\mu$ sanlaryň biri nuldan tapawutly bolanlygyna görä x,y , . . . , z elementler çyzykly baglanşyklydyrlar.Teorema subut edildi.

Indiki tassyklamalaryň subutlary aňsatdyr.

1. Eger-de x,y, . . . ,z elementleriň arasynda nul element bar bolsa olar çyzykly baglanşyklydyrlar, x=0 bolanda (2) $\alpha=1$, $\beta=0,\ldots,\mu=0$ ýagdaýda ýerine ýetýär.
2. x,y, . . . , z elementleriň käbirleri çyzykly baglanşykly bolsalar olaryň ählisi hem çyzykly baglanşyklydyrlar.

Hakykatdan hem y,…,z çyzykly baglanşykly elementler bolsa hiç bolmanda biri nuldan tapawutly $\beta,\ldots,\mu$ sanlar5 bilen $\beta y+\ldots+\mu z=0$ deňlik kanagatlanar .Onda folar hem-de $\alpha=0$ san bilen (2) deňlik hem dogry bolar.

Kesgitleme. R giňişligiň $l_1,l_2,\ldots,l_n$ çyzykly baglanşyksyz elementlerine bu giňişligiň bazisi diýilip aýdylýar,eger-de R giňişligiň islendik x elementi üçin $x_1,x_2,\ldots,x_n$ hakyky sanlar bar bolup

$$x= x_1 l_1+x_2 l_2+\ldots+x_n l_n \quad (4)$$

Aňlatma ýerine ýetýän bolsa

Bu ýagdaýda (4) deňlige x elementiň $l_1, l_2, \ldots, l_n$ bazise görä ýeke-täk usul bilen dagytmak mümkindir.Goý x element üçin (4) deňlikde başga-da

$$x = x_1^1 l_1 + x_2^1 l_2 + \ldots + x_n^1 l_n \quad (5)$$

Dagytma bar bolsun.Onda (4)-den (5) i tarapma-tarap aýryp alarys.

$$(x_1 - x_1^1)l_1 + (x_2 - x_2^1)l_2 + \ldots + (x_n - x_n^1)l_n = 0 \quad (6)$$

Bazis elementleriň baglanşyksyzdyrlaryna görä (6)-dan

$$x_1 - x_1^1 = x_2 - x_2^1 = \ldots = x_n - x_n^1 = 0$$

Deňlikler gelip çykar.Bu ýerden $x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_2^1$, . . ., $x_n = x_n^1$

***Teorema.***R çyzykly giňişligiň islendik iki elementi goşulanda olaryň islendik bazise görä koordinatalary hem goşulýarlar ,islendik elementi islendik $\lambda$ sana köpeldilende bolsa bu elementiň ähli koordinatalary hem $\lambda$ sana köpeldilýärler.

***Subuty***. Goý $l_1, l_2, \ldots, l_n$ -R giňişligiň islendik bir bazisi bolsun

$$x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_n l_n \text{ we } y = y_1 l_1 + y_2 l_2 + \ldots + y_n l_n$$

giňişligiň erkin elementleri diýeliň,onda

$$x + y = (x_1 + y_1)l_1 + (x_2 + y_2)l_2 + \ldots + (x_n + y_n)l_n$$
$$\lambda x = (\lambda x_1)l_1 + (\lambda x_2)l_2 + \ldots + (\lambda x_n)l_n$$

deňlikler çyzykly giňişligiň kesgitlemesinden alynarlar.

***Kesgitleme.*** R çyzykly giňişlikde n çyzykly baglanşyksyz elementler bar bolup ,onuň islendik (n+1) sany elementleri çyzykly baglaşykly giňişlige n ölçegli diýilip ayar.Şunlukda n sana R giňişligiň ölçegi diýilýär.Adatça R giňişligiň ölçegi dim(R) görnüşde belgilenýär.

***Kesgitleme.*** R çyzykly giňişlikde islän sanyňdaky çyzykly baglanşyksyz elementler bar bolsa oňa tükeniksiz ölçegli diýilýär.

***Teorema .***Eger-de dim(R) = n bolsa,onda bu giňişligiň islendik n sany çyzykly baglanşyksyz elementleri onuň bazise düzýärler.

***Subuty.***Goý $l_1, l_2, \ldots, l_n$ -n sany baglanşyksyz elementleriň islendik sistemasy (şeýle sistemanyn barlygy kesgitlemeden gelip çykýar) bolsun.Onda R giňişligiň islendik x elementi bilen bileleikde alynan

$$x, l_1, l_2, \ldots, l_n$$

Sistema çyzykly baglanşyklydyr,ählisi nula deň däl $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2, . . . ,\alpha_n$ sanlar bilen

$$\alpha_0 x+\alpha_1 l_1+ . . . + \alpha_n l_n = 0 \quad (7)$$

$\alpha \neq 0$ bolanlygyndan (tersine ýagdaýda $l_1,l_2, . . .,l_n$ çyzykly baglanşykly bolardy)

$$x = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_0})l_1+(-\frac{\alpha_2}{\alpha_0})l_2....(-\frac{\alpha_n}{\alpha_0})l_n = x_1^1 l_1 + .... +$$

-erkin x elementiň $l_1,l_2, . . .,l_n$ elementleriň üsti bilen çyzykly aňladylýandygyna eýe bolarys.Teorema subut edildi.

***Teorema.***Eger R çyzykly giňişlik n elemntden durýan bazise eýe bolsa,onda dim(R)=n

Subuty.Goý $l_1,l_2, . . .,l_n$ n elemntleriň sistemasy R giňişligiň bazisi bolsun.Teoremanyň subuty üçin R-iň islendik (n+1) sany $l_1,l_2, .. .,l_n$ elementleriň çyzykly baglanşyklydyklaryny görkezmek ýeterlikdir.Bu elementlere bazse görä dagytmal bilen

$$X_i=a_{i1}l_1+ a_{i2}\, l_2+ . . .+ a_{in}\, l_n\ ,\ i=1,2,\dots,n+1$$

Deňlikleri alarys.Bu ýerde $a_{ik}$ -käbir hakyky sanlardyr.

$x_1,x_2, . . . .,x_{n+1}$ elementleriň çyzykly baglanşyklylydy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12},..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},..., a_{2n} \\ .................. \\ a_{n+1,1}, a_{n+1,2},..., a_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

Matrisanyň setiriniň çyzykly baglanşyklylygy bilen deňdir.Ýöne bu matrisa tertibi n-den ýokary bolan minora eýe bolup bilmez.Onda onuň setirleri çyzykly baglanşyklydyr.Teorema subut edildi.

## 8.Çyzykly giňişlikleriň izomorflygy.

Birmeňzeş ölçegli dürli çyzykly giňişlikleriň olarda kesgitlenilen amallara görä iş ýüzünde biri-birinden tapawutlanmaýandyklaryny göreliň.

***Kesgitleme.*** Eger-de erkin R we R` çyzykly giňişlikleriň elementleriň arasynda özara birbelgili degişlilik bar bolup ,oňa görä R ginişligiň x,y, elementlerine R` giňişligiň x`,y` elemente x`+y` islendik $\lambda$ hakyky san üçin $\lambda$x elemente $\lambda$x` element degişli bolsalar bu R we R` giňişliklere izomorf diýilýär.

Eger-de R we R` çyzykly giňislikler izomorf bolsalar R giňişligiň nul elementine R` giňişlikde hem nul element degişlidr.R we R` çyzykly giňişlikler izomorf bolup, R-iň x,y,…,z elementlerine R`-iň x`,y`,…,z` elementleri degişlilikde degişli bolsalar $\alpha x+\beta y+\ldots+\mu z$ çyzykly kombinasiýanyň R-iň nul elementi bolmagynyň zerur hem ýeterlik şerti $\alpha x`+\beta y`+\ldots+\mu z`$ çyzykly kombinasiýanyň nula deň bolmaklygydyr.Şeýlelikdeindiki tassyklamardagrudyrlar.

1.R we R` izomorf bolsalar olarydaky çyzykly baglanşykly däl elementleriň maksimal sany birmeňzeşdir;

2.Iki izomorf diňişlikler birmeňzeş ölçeglidirler.

***Teorema.*** Islendik iki sany n ölçegli R we R`çyzykly giňişlikler izomorfdyrlar.

***Subuty.*** R-de käbir $l_1,l_2, \ldots, l_n$ bazisi,R`bolsa $l_1,l_2, \ldots, l_n$ bazisi saýlalyň.R giňişligiň $x=x_1l_1+x_2l_2+ \ldots + x_nl_n$ elementine R`-de $x=x_1l_1+x_2l_2+ \ldots + x_nl_n$ elementi degişli edeliň Şeýle usul bilen kesgitlenen degişlilik özara birbelgilidir.

Şeýleleikde bize R-iň x,y elementlerine degişlilikde R`iň x`,y` elementleri degişli bolanlarynda R-iň x+y hem-de $\lambda$x ($\lambda$-hakyky san) elementlerine degişlilikde R`-iň x`+y` hem-de $\lambda$x elementleriň degişlidiklerini hasaba alaýmak galýar.Teorema subut edildi.

## 9.Çyzykly giňişlikleriň bölek giňişlikler.

R çyzykly giňişligiň käbir L bölek köplüge indiki talaplary kanagatlandyrsyn.

1. Eger-de x,y elementler L bölekköplüge degişli bolsalar ,x+y jem hem bu bölekköplüge degişlidir.
2. Eger-de x element L bölekköplüge degişlli bolsa,islendik λ-hakyky san bolanda λx element hem L bölek köplügiň elementidir.

Ýokarda getirlen 1 we 2 häsiýetlere eýe L bölek köplük üçinm çyzykly giňişlikleriň 8 sany aksiomalarynyň hem ýerine ýetýändiklerine göz ýetirmek kyn däldir.Hakykyatdan hem olaryň 3-nji we 4-njilerinden galanlary R çyzykly giňişligiň ähli elementleri üçin dogrudyrlar.3 we 4 aksiomalaryň dogrudyklary x϶L üçin λ=0 bolanda 0 λ=-1 bolanda x-iň garşylykly –x elemente öwrülýänliginden alynar.

Kesgitleme.R çyzykly giňişligiň 1 we 2 häsiýetlere eýe islendik L bölek köplügine bölek giňişlik diýilýär.

R çyzykly giňişligiň bölek giňişliginiň ýonekeý mysaly bolup diňe 0 elementden durýän bölek köplük hem-de R` giňişligiň özi hyzmat edip biler.Bu bölek giňişliklere hususy bolmadyk diýilýär.

Kesgitleme.R giňişligiň x,y,…,z elementleriniň α,β,…,μ hakyky sanlar bilen ýazylýan

$$\alpha x+\beta y+\ldots+\mu z$$

görnüşdäki ähli elementleriniň köplügine x,y,…,z elementleriň çyzykly gabygy diýilýär we ol L(x,y,…,z) ýaly belgilenýär.

Indiki bir tarapdan x,y,…,z elementleri özüde saklaýan bölekgiňişlikleriň her biri bu elementleriň islendik çyzykly kombinasiýasyny hem özünde saklaýandyr.Şeýlelikde bu bölekgiňişlikleriň her biri L(x,y,…,z) gabygy özünde dolulygyna saklaýandyr.

Bu kesgitlemelerden n ölçegli R çyzykly giňişligiň islendik bölek giňişliginiň ölçeginiň n-den uly däldigi gelip çykýandyr.

Ege-de R giňişlikde käbir $l_1,l_2,...,l_n$ bazis saýlanan bolsa onuň L bölek giňişliginiň bazis elementleriniň bu bazise düşmezlikleri hem mümkindir.Ýöne indiki tassyklama dagrudyr.

***Teorema1***.eger-de $l_1,l_2,...,l_k$ elementler n-ölçegli R çyzykly giňişligiň k-ölçegli bölekgiňişliginiň bazisini düzýän bolsalar ,onda ony R-iň $l_1,l_2,...,l_n$ elementleri bilen baziser bolar ýaly doldurmak mümkindir.

Subuty.Eger-de k<n bolsa,Э $l_{k+1}$ER bolup $l_1,l_2,...,l_k,l_{k+1}$ çyzykly baglanşyksyz bolar (tersine ýagdaýda dim(R)=k bolar).Soňra ,eger-de k+1<n bolsa Э bolup çyzykly baglanşyksyz bolar (tersine ýagdaýda dim=(R)=k+1 bolar).Bu pikir ýöretmeleri dowam edip teoremanyň subudyny alarys.

Teorema 2. dim(L(x,y,…,z)) x,y,…,z elementleriň arasyndaky çyzykly baglanşyksyzlarynyň maksimal sanyna deňdir.Husysy x,y,…,z elementleriň sanyna deňdir.(bu elementleriň özleri bolsa L(x,y,…,z) gabygyň bazisini düzýärler).

Subuty. x,y,…,z elementleriň arasynda r sany çyzykly baglanşyksyzlary bar bolup ,islendik (r+1) sany bolsa çyzykly baglanşykly bolsun.Onda x,y,…,z elementleriň her biriniň elementleriň çyzykly kombinasiýasy bolanlygyna görä L(x,y,…,z) gabygyň her bir elementiniň hem elementleriň çyzykly kombinasiýasy bolanlygyna düşnüklidir.Bu bolsa çyzykly baglanşyksyz elementleriň L(x,y,…,z) gabygyň bazisini düzýändigini aňladýar.Teorema subut edildi.

## 10.Bölek giňişlikleriň jemi we kesişmesi.

Goý $L_1$ we $L_2$ – R çyzykly giňişligiň bölekgiňişlikleri bolsun.R giňişligiň $L_1$ we $L_2$ bölekgiňişlikleriň ikisinde degişli bolan ähli elementleriniň toplumyna (ol R-iň bölekgiňişligidigi düşnüklidir) $L_1$ we $L_2$ bölekgiňişlikleriň kesişmesi diýilýär.

R giňişligiň ähli y+z ,yэ$L_1$ we yэ$L_2$ görnüşde aňladylýan elementleriniň köplügi hem $L_1$ we $L_2$ bölekgiňişlikleriň jemi diýilip atlandyrylýan bölekgiňişligi emele getirýändirler.

Teorema.Tükenikli ölçegli R çyzykly giňişligiň $L_1$ we $L_2$ bölek giňişlikleriniň ölçeglerini jemi olaryň jeminiň we kesişmesiniň ölçegleriniň jemini deňdir.

Subuty.$L_0$ bilen $L_1$ we $L_2$ –leriň kesişmesine L bilen bolsa olaryň jemini belgiläliň .dim($L_0$)=k hasap edip ,onda

$$l_1,l_2, \ldots,l_n \quad (1)$$

Bazisi saýlalyň.

Bilişimize görä (1) bazisi $L_1$ bölekgiňişligiň

$$l_1,l_2, \ldots,l_n ,g_1, \ldots , g_l \quad (2)$$

Bazisine çenli we $L_2$ –niň

$$l_1,l_2, \ldots,l_n ,f_1, \ldots , f_m \quad (3)$$

Bazisine çenli dolduralyň

.

Maksada ýetmek üçin

$$g_1, \ldots , g_l ,l_1,l_2, \ldots,l_n ,f_1, \ldots , f_m \quad (4)$$

Elementleriň L-niň bazisini düzýändiklerini görkezmek ýeterlikdir.Munuň üçin olaryň çyzykly baglanşyksyzdyklaryny hem-de her bir x϶L elementiň (4) sistemanyň üsti bilen çyzykly aňladylýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

Ilki bilen

$$\alpha_1 g_1+\ldots+\alpha_l g_l +\beta_1 l_1+\ldots +\beta_k l_k+\mu f_1+\ldots \mu_m f_m=0 \quad (5)$$

Ýa-da

$$\alpha_1 g_1+\ldots+\alpha_l g_l +\beta_1 l_1+\ldots +\beta_k l_k = - \mu f_1+\ldots \mu_m f_m \quad (6)$$

Bolsun diýeliň(6) –nyň çep tarapynyň $L_1$-iň ,sag tarapyna bolsa $L_2$-niň elementi bolýandygyna görä olar $L_0$ bölek giňişligiň elementleridir.Onda (6)-nyň sag tarapy (1) elementleriň käbir çyzykly kombinasiýasydyr

$$- \mu_1 f_1-\ldots- \mu_m f_m =\lambda_1 l_1+\ldots + \lambda_k l_k \quad (7)$$

(3)-iň bazisdigine görä (7) deňlik diňe bolanlarynda mümkindir.bu ýagdaýda (5) deňlikde

alynar,ýöne ol diňe bolanlarynda mümkindir.Diýmek (5) diňe koeffisisentleriň ählisi nula deň bolanlarynda mümkindir.Başgaça aýdanyňda (4) çyzykly baglanşyksyzdyrlar.L jemiň her bir x elementi (2) we (3) sistemalaryň çyzykly kombinasiýalary bolan elementleriniň jemi bolanlygyna görä (4) sistemanyň elementleriniň çyzykly kombinasiýasydyr.Bu diýildigi (4) sistema L jemiň bazisidir.Teorema subut edildi.

## 11.Hakyky Ewklid giňişlikleri.

***Kesgitleme.*** Indiki iki sany talaplary kanagatlandyrýan çyzykly giňişlide hakyky Ewklid giňişligi diýilip aýdylýar.

I. R giňişliginiň islendik x we y elementleri üçin olaryň skalýar köpeltmek hasyly diýilýän we (x,y) görnüşde belgilenýän käbir hakyky sany degişli edýän düzgün kesgitlenen bolsun.

II. Bu düzgün aşakdaky dört aksiomalary kanagatlandyrýar.

1).(x,y)=(y,x) (kommutatiwlik);

2).($x_1$ +$x_2$y)=(x,y)+($x_2$,y) (assasiatiwlik);

3).($\lambda$x,y)=$\lambda$(x,y), islendik $\lambda$ hakyky san üçin (birjynysly)

4).(x,x)>0 ,eger-de $x\neq 0$ bolsa ;(x,x)=0,eger-de x=0 bolsa.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly öwrenilýan elementler bilen birlikde elementleri goşmak,sana köpeltmek we skalýar köpeltmek hasyly hem abstraklaşdyrylyp kesgitlenendirler.

Ewklid giňişlikleriniň käbir ýonekeý häsiýetlerini belläliň.

***Teorema.*** Her bir Ewklid gişliginde islendik iki sany x,y elementleri üçin Koşi –Bunýankowskiý deýilýän

$$(x,y)^2<=(x,x)(y,y) \quad (1)$$

deňsizlik dogrudyr.

Subuty.her bir $\lambda$ hakyky san üçin skalýar köpeltmäniň dördünji aksiomasyna görä

$$(\lambda x-y,\lambda x-y)=>0$$

bolup ,beýleki aksiomalardan gelip çykýar.Ýöne ol deňsizligiň zerur hem ýeterlik şerti çep tarapyndaky kwadrat üç çleniň diekriminantynyň polozitel däldigi hyzmat edýändir.

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)<=0 \quad (2)$$

Diýmek tassyklama adalatlydyr.teorema subut edildi.

Indi çyzykly normirlenen giňişligiň kesgitlemesini Bereliň.

Kesgitleme.Eger-de çyzykly R giňişligi üçin

I.Onuň her bir x elementi üçin bu elementiň normasy (ýa-da uzynlygy)diýilýän we ||x|| görnüşde belgilenýän käbir hakyky sany degişli edýän düzgün kesgitlenen bolsa,

II.Bu düzgün indiki üç sany aksioma tabyn bolsa

1) $||x||>0$ ,eger-de $x\neq 0$ we $||x||=0$ eger-de $x=0$ bolsa;
2) $||\lambda x||=|\lambda|\ ||x||$ deňlik islendik x element we $\lambda$-hakyky san üçin ýerine ýetýän bolsa;
3) Islendik iki sany x we y elementler çüin üçburçluk (ýa-da Minkowskiý) deňsizligi diýilýän

$$||x+y||<=||x||+||y|| \quad (3)$$

densizlik dogrudyr.

Tapallar ýerine ýetýän bolsa,oňa normirlenen diýilýär.

Teorema.Her bir Ewklid giňişliginiň x elementiniň normasyny

$$||x||=\sqrt{(x,x)} \quad (4)$$

deňlik bilen kesgitläp ony normirlenen etmek mümkindir.

Subuty.Kesgitlemäniň ikinji talabynyň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.Normanyň 1-nji aksiomasy skalýar köpeltmäniň 4-nji häsiýetinden ,2-nji aksiomasy bolsa skalýar köpletmäniň 1-nji we 3-nji aksiomalarynda dogrudygyny barlamak ýeterlikdir.Koşi-Bunýokowskiý deňsizligini

$$|(x,y)|<=\sqrt{(x,x)*}\ \sqrt{(y,y)}$$

görnüşde ýazyp ,bu ýazgydan hem-de skalýar köpeltmäniň aksiomalaryndan we normanyň kesgitlemesinden peýdalanmak ýeterlikdir.

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,(x+y)} = \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)}$$

$$<= \sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)\sqrt{(y,y)}}(y,y)} =$$

$$= \sqrt{\left[\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right]^2} = \|x\|+\|y\|$$

Teorema subut edildi.

Netije.Elementiň normasy (4) deňlik bilen kesgitlenýän Ewklid giňişliginiň islendiginde Minkowskiý deňsizligi adalatlydyr. Islendik hakyky Ewklid giňişliginiň islendik iki x we y elementleriniň arasyndaky burç diýilip kosinusy.

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| * \|y\|} = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}$$

formula bilen kesgitlenýän 0-dan Π-e çenli üýtgeýän φ burça aýdylýar.Koşi-Bunýakowskiý deňsizliginden soňky deňligiň sag tarapynyň 1-den uly däldigini görýaris.

Ewklid giňişliginiň iki x we y elementiniň skalýar köpletmek hasyly nula deň bolsa ,olara ortagonal diýilýär.Bu ýagdaýda olaryň arasyndaky φ burçyň kosinusy nula deňdir.Wektor algebrasyna salgylanmak bilen x we y ortogonal wektorlaryň üstünde gurulan üçburçlygyň gipotenuzasy diýip x+y jemi atlandyrmak bilen islendik Ewklid giňişliginde Pifagoryň teoremasynyň adalatlydygyna ynanarys.Hakykyatdan hem x we y ortogonal bolanlarynda (x,y)=0 deňligi nozara almak bilen

$||x+y||^2$=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,)=(x,x)+(y,y)=
=$||x||^2$+$||y||^2$

Soňky häsiýet n sany jübüt-jübitden ortogonal elementleriň jemi üçin hem dogrudyr.

$z=x_1+x_2+\ldots+x_n$- iki bir ortogonal elementleriň jemi diýsek

$\|z\|^2=(x_1+x_2+\ldots x_n,x_1+x_2+\ldots x_n,)=(x_1,x_1)+(x_2,x_2)+\ldots+(x_n,x_n)=$
$=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\ldots+\|x_n\|^2.$

## 12.Ortonormirlenen bazis.

Ewklid giňişliginde ortonormirlenen diýilip atlandyrylýan has oňaýly bazisler bardyr.(Çyzykly giňişlikde ähli basiz;er deňdüýçlidirler)

Kesgitleme.Eger- de n-ölçegli Ewklid giňişliginiň $l_1,l_2,\ldots,l_n$ elementleri üçin

$$(l_i,l_k)=\begin{cases}1, i=k bolanda,\\ 0, i\neq k bolanda\end{cases} (1)$$

deňlikler dogry bolsalar ,onda bu elementler ortonormirlenen bozisi emele getirýärler diýilip aýdylýar.
Kesgitlemäniň korrektligini görkezmek üçin (1) şerti kanagatlandyrýan $l_1,l_2,\ldots,l_n$ elementleriň baglanşyksyzdygyny görkezmek ýeterlikdir.Eger-de

$$\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\ldots+\alpha_n l_n = 0 \quad (2)$$

doýsak ,islendik $1<=k<=n$ nomer üçin bu deňligi $l_k$ elemente skalýar köpletdip taparys:$\alpha_k=0$ onda (2) diňe $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ bolanlarynda mümkindir.

Teorema Islendik n –ölçegli ewklid giňişliginiň ortonoormirlenen bazise bardyr.
Subutyny getirmän berilen n sany baglanşyksyz $f_1,f_2\ldots,f_n$ sany elementleriň sistemasyndan normalary bize deň özara (ikibir) ortogonal $l_1,l_2,\ldots,l_n$ elementleriň sistemasyny almaklygyň algoritmini görkezeliň:
Bu algoritim adatça $f_1,f_2\ldots,f_n$ -çyzykly baglanşyksyz elementleri ortogonallaşdyrmak prosessi diýilip atlandyrylýar.
Bellik .Her bir n-ölçegli Ewklid giňişliginde dürli ortonormirlenen bazisler bardyr.Hakykatdan hem çyzykly baglanşyksyz $f_1,f_2\ldots,f_n$ elementlerden ortogolaşdyrmak prosessi bilen ortonormirlenen bazis

gyrylanda dürli $f_k$ elementlerden başlamak bilen dürli ortonormirlenen bazisleri almak mümkindir.

Eger-de $l_1,l_2, \ . \ . \ .,l_n$ -n ölçegli Ewklid giňişliginiň ortonormirlenen bazise ,x, we y bu giňişligiň erkin elementleri bolsalar onda $x=x_1l_1+x_2l_2+ \ . \ . \ . +x_nl_n$ ,$y=y_1l_1+y_2l_2+ \ . \ . \ . +y_nl_n$ diýsek

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+ \ . \ . \ . +x_ny_n$$

Görnüşi ýaly islendik iki elementleriň ortonormirlenen bazisde skalýar köpeltmek hasyly bu eleemntleriň degişli koordinatalarynyň köpletmek hasyllarynyň jemine deňdir.

Indi n-ölçegli Ewklid giňişliginiň ortonormirlenen bolmagy hökman bolmadyk erkin bazisi $f_1,f_2\ldots,f_n$ berilipdir.

Şeýlelikde berilen $f_1,f_2\ldots,f_n$ bazisde islendik iki elementleriň skalýar köpeltmek hasylynyň degişli koordinatalaryň köpeltmek hasyllarynyň jemine deň bolmagynyň zerur hem ýeterlik şerti bu $f_1,f_2\ldots,f_n$ bazisiň ortonormirlen bolmagydyr.

Eger-de $f_1,f_2\ldots,f_n$ n-ölçegli Ewklid giňişliginiň käbir ortonormirlenen bazisi bolsa we $f_1,f_2\ldots,f_n$ diýsek,islendik 1<=k<=n nomer üçin

$$(x,l_k \_) = (\sum_{i=1}^{n} x_i l_i, l_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i (l_i, l_k) = x_k$$

Bu diýildigi ortonormirlenen bozise görä islendik elementiň koordinatalary bu elementiň degişli bazis elementlere skalýar köpletmek hasyllaryna dňdiginio aňladýandyr.

Kesgitleme.E giňişliginiň G bölekgiňişligiň her bir x elementine ortogonal y elementleriniň ählisiniň F köplügine G-niň ortogonal doldurgyjy diýilip aýdylýar.

F köplügiň özüniň hem bölek giňişligi emele getirýändigini görmek kyn däldir.

Indiki tassyklamany belläliň.

Teorema.Her bir n-ölçegli Ewklid E giňişligi özüniň islendik G bölek giňişliginiň hem-de onuň ortogonal F doldurgyjynyň göni jemidir.

## 13.Ewklid giňişlikleriniň izomorflygy

Kesgitleme.Eger-de E we E` Ewklid giňişlikleriniň elementleriniň arasynda öz-ara bir belgili degişlilik bar bolup oňa görä E-niň x,y elementlerine E` de degişlilikde x`,y` elementler degişli bolanlarynda x+y elemente x`+y` element,islendik λ –hakyky san bilen λx elemente λx` element degişli bolup (x,y)=(x`,y`) deňlik ýerine ýetýän bolsa bu giňişliklere izomorf diýilýär.

Diýmek Ewklid E we E` giňişlikleriniň izomorf bolmaklary üçin olar çyzykly giňişlikleriň izomorflyk talaplaryny kanagatlandyrmak bilen birlikde bu izomorflyk skalýar köpeltmäniň ululygyny hem saklamagy gerek eken.

Teorema.Ähli n ölçegli Ewklid giňişliklri öz-ara izomorfdyrlar.

Subuty.Hakykatdan hem n-ölçegli E we E` Ewklid giňişliklerinde degişlilikde

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ (l) hem-de $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (l`) bazisleri alyp E-niň her bir

$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$ elementine E`-de $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$ elementi

degişli etsek, bu egişligiň çyzykly giňişlikleriň izomorflyk şertini kanagatlandyrýandygyny,şeyly hem

$$b = \sum_{i=1}^{n} b_i l_i, \quad b` = \sum_{i=1}^{n} b_i l`_i$$

bolanlarynda

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = (a`,b`)$$

deňlikleriň kanagatlanýandyklaryny alarys.

Teorema subut edildi.

KesgitlemeKompleks çyzukly R giňişligi indiki talaplary .

I. Bu giňişligiň islendik iki x,y elementlerine olaryň skalýar köpeltmek hasyly diýilýän we (x,y) görnüsde belgilenýän kömpleks sany degişli edýän düžgün bar bolsun;

II Bu düzgün aşakdaky dört aksıomalara tabyn bolsun.

1) (x,y)=(y,x)
2) (x+x,y)=(x,y)+(x,y)
3) (λx,y)==λ(x,y)
4) (x,x)-käbir otrisatel bolmadyk hakyky san bolup diňe x=0 bolanda nula deňdir. Kanagatlandyrýan bolsa,oňa kompleks Ewklid giňişligi diýilip aýdylýar.

Kesgitlemeden (x,λy)=λ(x,y) we $(x,y_1+y_2)+(x,y_2)$ gatnaşyklar aňsat alynýar.

## 14.Çyzykly deńlemeler sistemasyny çözmegiń Gauss (näbellileri yzygiderli ýok etmek) usuly

Algebranyń mekdep kursunyń esasy öwrenýän meselesi bolup, deńlemäni çöz-mek meselesi durýardy. Bu meseläni öwrenmeklik ax=b , a$\neq$ 0 san görnüşdäki

bir näbellili çyzykly deńleme diýilip atlandyrylýan deńlemäni öwrenmekden ba-şlanypdy. Sońra bu meseläni öwrenmeklik aşakda görkezlen 2-ugur boýunça do-wam etdirilipdi.

1) 2 näbellili 2 sany ýa-da 3 näbellili 3 sany çyzykly deńlemeleriń sistemasyny çözmek.
2) Bir näbelliden kwadrat deńlemäni ($ax^2+bx+c=0$) hem-de bir näbelliden ýokary, derejeli deńlemeleriń käbir hususy ýagdaýlaryny öwrenmeklik.

Algebranyń häzirki öwreniljek kursunda bu görkezlen ugurlaryń ikisi hem özle-riniń has umumy ýagdaýda öwrenilmeklerine mynasyp bolýarlar. Ýagny biz isl-endik sanda näbellileri bolan islendik sandaky çyzykly deńlemeleriń sistemasy-ny şeýle hem bir näbelliden islendik derejeli deńlemeleriń käbir görnüşlerini öw-renmek göz öńünde tutulýandyr. Goý bize N sany näbellileri bolan S sany çy-zykly deńlemeleriń sistemasy berlen bolsun. Bu sistemany ýazmak üçin indiki belgilemeleri girizeliń:

Näbellileri indekslenen X harpy bilen ($x_1, x_2, \ldots, x_n$); sistemanyń deńlemeleri tertipleşdirilen hasap edip, onuń i-nji deńlemesinde saklanýan xj näbelliniń kofisientini aij bilen Mysal üçin: ($a_{23}$ sistemanyń 2-nji deńlemesindäki $x_3$ näbelliniń kofisienti) we Bi bilen i-nji deńlemäniń azat çlenini belgiläris.

Onda öwreniljek sistema indiki ýaly ýazylar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = b_i,\ i = 1,2,\ldots,S \tag{1}$$

Bu sistemanyń koeffisientlerinden indiki tablisany düzmek mümkindir.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{S1}a_{S2}\ldots a_{Sn} \end{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bu S sany setirleri hem-de n sany sütünleri bolan tablisany (s X n) ölçegli gö-niburçly matrisa diýip atlandyrýarlar. Bu tablisany düzýän $a_{ij}$ sanlara,onuń ele-mentleri diýilýär. S=n bolan ýagdaýynda bu matrisa n-nji tertipli kwadrat matr-isa diýilip aýdylýar. Onuń çep ýokarky burçundan aşaky sag burçuna gidýän de-ýagonalyna ýagny $a_{11}, a_{22}, a_{nn}$ elementlerden düzülen deýagonala matrisanyń baş

deýagonaly, beýleki deýagonalyna bolsa onuń gapdal deýagonaly diýilip aýdyl-ýar.

**Kesgitleme:** Eger-de (1)-nji sistemanyń haýsy hem bolsa 2 sany deńlemelerin-den galanlaryny üýtgetmän ol 2 deńlemeleriniń bolsa, özara orunlaryny çalşyr-ylyp, täze bir sistema alynan bolsa ońa (1) sistemadan 2 görnüşli elementar özgertmäniń üsti bilen alnypdyr diýilýär. Eger-de käbir çyzykly deńlemeler sis-temasy (1) sistemadan käbir deñlemesinden galanlaryny üýtgetmän onuñ bu 1

deñlemesiniñ ornuna bolsa onuñ käbir hemişelik sana köpeldilen başga bir deñ-lemesi bilen jemi alynan bolsa, bu täze sistema (1) sistemadan 2 görnüşli el-ementar özgertmäniñ üsti bilen alnypdyr diýilýär.

**Kesgitleme:** Eger-de (1) sistemadaky näbellileriñ ornuna degişlilikde

$K_1, K_2, \ldots, K_n$ sanlary goýanmyzda onuñ her bir deñlemesi toždestwo öwrülýän

bolsa (kanagatlanýan bolsa) onda $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sanlaryñ toplumuna bu sistema-nyñ çözüwi diýilýär.Ol çözüw $X_1=K_1$, $X_2=K_2, \ldots, X_n=K_n$, ýa-da $(K_1, K_2 \ldots K_n)$

görnüşünde belgilenýä.

Çyzykly deñlemeler sistemasynyñ çözüwe eýe bolmazlygy hem mümkindir. Bu ýagdaýda oña kökdeş däl (ylalaşmaýan ýa-da sygyşmaýan) sistema diýilýär. Mysal üçin:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$ sistema kökdeş däldir. Çünki onuñ

deñlemeleriniñ çep taraplary deñ bolsun, sag taraplary bolsa dürlidirler. Şoña feeräde, bu deñlemeleriñ

ikisi hem bir bada näbellileriñ hiç bir bahasynda hem kanagatlanyp bilmez.

**Kesgitleme:** Eger-de çyzykly deñlemeler sistemasynyñ çözüwi bar bolsa, oña kökdeş (ylalaşýan ýa-da sygyşýan) sistema diýilýä. Kökdeş sistemanyñ çözüwi ýek-täk bolsa, oña kesgitlenen tersine ýagdaýda (çözüwlerniñ sany 1-den

köp bolsa), oña kesgitlenmedik sistema diýilýär.

**Kesgitleme:** Şol bir ölçeglerdäki (deñ sandaky näbellileri bolan şol bir mukdardaky deñlemeleriñ sistemalary) 2 sany çyzykly deñlemeleriñ sistemalarynyñ ikisi hem bir bada ýa kökdeş bolmasalar ýa-da kökdeş halatlarynda ikisi hem şol bir çözüwlere eýe bolsalar bu sistemalara ekwiwalent (ýa-da deñgüýçli)

sistemalar diýilýär.

Eger-de berlen çyzykly deñlemeler sistemasynda tükenikli sanda 1we 2 görnüşli elementar özgertmeleri ýerine ýetirmek bilen alynýan täze sistemanyñ

başdaky sistema bilen ekwiwalent bolandygyny görmek kyn däldir. Indi (1) sistemany çözmek üçin ulanylýan Gauss usulyny öwrenmeklige girişeliñ. (1`) çyzykly deñlemeler sistemasynyñ birinji deñlemesinden galanlaryndan

$X_1$ näbellini ýok eder ýaly, elementar özgertmeleri geçireliñ şunlukda biz umu-

mylyga hiç bir şikes, ýetirmeýän $a_{11} \neq 0$ şert kanagatlanýar diýip hasap etçkdi-ris. Bu ýagdaýda (1) sistemanyñ 1-nji deñlemesini $\frac{a_{21}}{a_{11}} - e$ köpeldip, 2-nji deñ-

lemesinden aýralyñ soñra bu 1-nji deñlemäni $\frac{a_{31}}{a_{11}} - e$ köpeldip sistemanyñ 3-nji

deñlemesinden we şuña meñzeşlikde dowam etmek bilen sistemanyñ soñky deñlemesinden onuñ 1-nji deñlemesini $\frac{a_{S1}}{a_{11}}-e$ köpeldip aýrarys.

Şeýlelikde indiki sistemany alarys:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ a'_{S2}x_2 + \ldots + a'_{Sn}x_n &= b'_S \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Bu alnan sistemada onuñ 1-nji $\overline{2}$ deñlemelerinden galanlaryndan $X_2$ näbellini

ýok edýän elementar özgertmeleri geçireliñ şunlukda biz umumylyga hiç hili şi-kes ýetirmeýän $a'_{22} \neq 0$ talap ýerine ýetýär diýip hasap etjekdiris. Mundan baş-gada bu alnan sistemada çep tarapyndaky koffisentleriniñ ählisi 0-la deñ bolan deñleme ýok diýip hasap etçekdiris. Eger-de şeýle deñleme bar bolaýsa, onda

onuñ azat çleniniñ 0-la deñdigine ýa-da deñ däldigine baglylykda alnan sistem-ada bu deñlemäni alyp taşlap, onuñ galan deñlemelerniñ sistemasynda ýokarda

aýdylan özgertmeleri geçirmek hakynda ýa-da bu alnan sistemanyñ şeýle hem oña ekwiwalent bolan başga berlen deñlemeler sistemasynyñ kökdeş däldigi ha-kynda netijä geleris. Onda bu alnan sistemanyñ ilkinji 2 deñlemesini boluşlary

ýaly ýazyp onuñ 3-nji , 4-nji we şuña meñzeşlikde iñ soñky deñlemesinden bu sistemanyñ 2-nji deñlemesini degişlilikde $\frac{a_{32}^{/}}{a_{22}^{/}}$,

$\frac{a_{42}^{/}}{a_{22}^{/}}$ we şuña meñzeşlikde $\frac{a_{S2}^{/}}{a_{22}^{/}}$

sanlara köpeldip, aýryp alarys:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{/}x_2 + ... + a_{2n}^{/}x_n = b^{/}{}_2, \\ a^{//}{}_{33}x_3 + ... + a^{//}{}_{3n}x_n = b^{//}{}_3 \\ a_{t3}^{//}x_3 + ... + a_{tn}^{//}x_n = b_t^{//} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Bu ýerde t≤S çünki geçirilýän özgertmeler netijesinde sistemadaky deñle- meleriñ sanynyñ azalmagy mümkindir. Bu alnan sistemada ýokarda aýdylan

näbellilerniñ koffisentleriniñ ählisi 0-a deñ bolan azat çleni 0-dan apawutly

bolan deñleme bar bolaýsa alnan sistemanyñ şeýle hem oña ekwiwalent bolan 1-

nji sistemanyñ kökdeş däldigi hakyndaky netijä geleris. Eger-de şeýle deñleme ýok bolaýsa onda ýokarda görkezilşi ýaly näbellileri yzygiderli ýok etmekligi

dowam etdirmek bilen indeks görnüşdäki kökdeş bolan.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{/}x_2 + \ldots + a_{2n}^{/}x_n &= b_2 \\ a_{33}^{//}x_3 + \ldots + a_{3n}^{//}x_n &= b_3^{//} \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned}\right\}$$

(4)

Bu ýerde $k \le t, \quad k \le n$ bolup,

$$a_{11} \neq 0,$$

$$a^{/}{}_{22} \neq 0, \qquad a_{33}^{//} \neq 0, \qquad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0.$$

Eger-de bu alnan sistemada k=n bplaýsa onda ol üçburçlyk gönüşündäki ýagdaýa eýe bolar.

$$\left.\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{22}^{/}x_2 + \ldots + a^{/}{}_{2n}x_n = b_2^{/}, \\
a_{33}^{//}x_3 + \ldots + a_{3n}^{//}x_n = b_3^{//}, \\
a_{n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)}, \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}.
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Bu ýerde:

$$a_{11} \neq 0, \qquad a_{22}^{/} \neq 0, \qquad a_{n-1}^{(n-2)},_{n-1} \neq 0, \quad a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$$

alnan sistemanyñ ýeketäk bolan çözüwi aşakdaky ýol bilen tapylýandyr. Onuñ

soñky deñlemesinden $x_n$ näbelli üçin $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$ ýeketäk bolan bahasyny tap-

ýarys. Soñra bu tapylan bahany iñ soñkynyñ öñ ýanyndaky deñlemede ornuna goýmak bilen $x_{n-1}$ näbelli üçin ýeketäk kesgitlenýän bahany taparys. Şu usulda

(5)-nji sistemanyñ deñlemelerinde aşakdan ýokarlygyna hereket etmek bilen be-

ýleki $x_{n-2}$, $x_{n-3}$, $x_2$, $x_1$ näbellileriñ hem ýeketäk bolan bahalaryny taparys.

Şeýlelikde (1) sistema elementar özgertmeleriñ üsti bilen (5) görnüşli üçbur-

çluk ýagdaýyna getirlen ýagdaýynda ol kesgitlenendir. Eger-de indi (4) sistema

k‹ n diýsek, onda bu sistema trapesiýa görnüşe eýe bolupm, (onuñ soñky deñ-

lemesindäki näbellileriñ sany birden köpdir) ol şeýle hem oña ekwiwalent bolan

birinji sistema tükeniksiz çözüwe eýedirler, başgaça aýdanyñda ol sistemalar

kesgitlenen däldirler. Bu çözüwleri tapmak üçin (4) sistemanyñ soñky deñlemesindäki näbellileriñ birden galanlaryny Mysal üçin $x_k$-dan beýlekilerini

“beýlekilerini” “azat näbelliler” diýip atlandyryp, hem-de olara erkin bahalary

berip, bu $x_k$ näbelliniñşol bahalara bagly ýeketäk bolanbahasyny taparys. Soñra

bu tapylan bahany (4) sistemanyñ deñlemeleriniñ soñkysynyñ öñ ýanyndaky or-

nuna goýmak bilen $x_{k-1}$ näbelli üçin ýeketäk bahany taparys. Soñra şu prosesi

sistemanyñ deñlemelerine aşakdan ýokarlygyna dowam etdirmek bilen galan

$x_{k-2},\ldots,x_2,x_1$ näbellileri üçin hem azat näbellilere bagly bolan ýeketäk bahalary

taparys. Şu usul üçin (4) sistemañ azat näbellilere berlen erkin bahalaryna bagly çözüwi tapylar. Ýöne azat näbellileriñ bahalaryny tükeniksiz köp dürli usullar

bilen saýlamak mükinçiliginiñ bardygyny nazara alsak k‹ n bolan halatynda (4)

sistemanyñ tükeniksiz köp çözüwine eýe bolarys. Şeýlelik bilen indiki netijä eýe bolarys. Gauss usuly bilen islendik çyzykly deñlemeler sistemasyny çözmek mümkin bolup, eger-de sistemada elementar özgertmeleri geçirenmizde çep

tarapyndaky kofisentleriñ ählisi 0-a deñ bolan azat çleni bolsa, 0-dan tapawutly bolan deñleme alynaýsa, onda alynan sistemamyz şeýle hem oña ekwiwalent

bolan başda berlen sistemamyz kşökdeş däl bolar, tersine ýagdaýda ýagny

agzalan görnüşdäki deñlemä gabat gelinmese onda sistema kökdeşdir. Ol elem-entar özgertmeler netijesinde ýa k‹ n-den bolan trapesiýa görnüşli diýilýän (4)
ýagdaýa üçburçluk görnüşli diýilýän (5) ýagdaýa getiriler. Şunlukda eger-de ol

(4) görnüşe eýe bolan bolsa, berlen sistema kesgitlenmedikdir. Eger-de (5)

görnüşe eýe bolan bolsa ol kesgitlenendir.

**Bellikler:**

1)Gauss usuly uniwersal bolup ol çyzykly deñlemeleriñ islendik sistemasyn

çözmäge ulanylyp bilinýär.

2)Bu usul örän ýönekeý bolup, birmeñzeş hasaplamalara esaslanandyr. (Özgertmeler geçirenimizde her gezek deñlemeleriñ birinden başga birini käbir sana köpeldilip aýrylýar) Şonuñ üçinde sistemany çözmekde EHM-den peýda-lanylan halatlarynda bu usul has oňaýlydyr (+) artykmaçlyk (-) kemçil.

3)Sistemany Gauss usulyndan peýdalanyp çözenimizde bu usul berlen sistemañ kofisentleriniñ hem-de azat çlenleriniñ üsti bilen onuñ kökdeşdigi ýa-da däldigi, kesgitlenendigi ýa-da däldigi hakynda netijä gelmäge mümkinçilik

bermeýär netijä girmek üçin biz sistemany doly çözmeli bolýarys.

Indi (1) çyzykly deñlemeler sistemasynyñ deñlemelerniñ ählisiniñ azat

çlenleriniñ 0-a deñ bolan hususy ýagdaýyna ýagny birçynysly çyzykly deñ-lemeleriñ sistemasyna seredeliñ.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Bu sistema elmydama kökdeşdir. Çünki onuñ (0,0,…,0) çözüwiniñ bardygy

düşnüklidir.

Eger-de şeýle sistemada deñlemeleriñ sany S, näbellileriñ n sanyndan

az bolaýsa (s<n bolsa ) onda bu sistema elementar özgertmeleriñ üsti bilen diñe

trapesiýa görnüşine getiriler. Bu diýildigi şeýle sistemanyñ çözüwleriniñ sany tükeniksiz köp bolup, onuñ 0-däl çözüwe (näbellileriniñ käbiriniñ bahalarynyñ

0-dan tapawutly bolan çözüwi) eýedigini alarys.

## 15.2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjiler olaryñ çyzykly deñlemeleriñ kwadiratik sistemasyny çözmäge ulanylşy (kramer düzgüni).

Goý bize 2 sany näbellileri bolan 2 sany çyzykly deñlemeleriñ sistemasy

berlen bolsun.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bu sistemanyñ matrisasy diýlip, onuñ näbellileriniñ kofisentlerinden düzlen

2-nji tertipli kwadratik matrisa aýdylýar.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Bu matrisanyñ $a_{11}$ we $a_{22}$ elementlerinden düzülen deagonalyna onuñ baş

deagonaly beýlekisine bolsa gapdal ýa-da 2-nji deagonaly diýilýär. (1) sistema-nyñ 1-nji deñlemesini $a_{22}$-2, 2-nji deñlemesini bolsa ($-a_{12}$) köpeldilip alnan de-

ñlemeleri goşalyñ.

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^{\cdot}\, x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \qquad (3)$$

Edil şuña meñzeşlikde (1) sistemanyñ 1-nji deñlemesini ($-a_{21}$)-e , 2 deñlem-esini bolsa $a_{11}$-e köpeldip , alnan deñlemeleri goşmak bilen taparys.

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \qquad (4)$$

3 we 4 deñlemelerniñ näbellileriniñ kofisentleri meñzeşdirler . Şol kofsenti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2-nji matrisa degişli bolan 2-nji tertipli kesgitleýji ýa-da ýöne (1)-nji sistemanyñ kesgitleýjisi (determinanty) diýip atlandyralyñ. Görnüşi ýaly 2-nji tertipli

kesgitleýji degişli matrisanyñ baş deagonalynyñ elementlerniñ köpeltmek hasy-lyndan onuñ , beýleki diagonalynyñ köpeltmek hasylynyñ aýrylmagyndan aly-nan san bolýan eken. (3) we (4) deñlemeleriñ sag taraplaryndaky añlatmalar hem 2-nji tertipli kesgitleýji görnüşinde ýazylyp bilerler. Hakykatdan hem ola-ryñ 1-nji sütünini (1) sistemanyñ azat çlenleriniñ sütüni bilen çalşyrylyp alynan

b-azat çlen.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

Ikinjisi bolsa, $\Delta$-kesgitleýjiniñ 2-nji sütünini bu azat çlenlar sütüni bilen çal-

şyrylyp alynan

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

kesgitleýjilerdir.

Şeýlelikde (1) sistemanyñ $\Delta \neq 0$ şerti kanagatlandyran halatynda ýeketäk

çözüwi bar bolup, ol (3) we (4) deñliklerden tapylýan deñlikler bilen kesgitle-nilýän çözüwdir.

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (5)$$

$$\Delta x_1 = \Delta_1 \qquad (3) \qquad\qquad \Delta x_2 = \Delta_2 \qquad (4)$$

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad\qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

(1) sistemanyñ $\Delta \neq 0$ bolan ýagdaýynda bar bolan ýeketäk çözüwiniñ görke-zilen görnüşde tapylyş usulyna Kramer düzgüni onuñ tapylyş (5) formulalaryna bolsa, Kramer formulalary diýilýär.

Indi bolsa, 3 sany näbellileri bar bolan, 3 sany çyzykly deñlemeleriñ sistemasyna seredeliñ.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Onuñ matrisasynyñ $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$ (7) görnüşde ýazylçakdygy düşnüklidir.

(6) sistemanyñ 1-nji deñlemesini $a_{22}a_{33}$-$a_{23}a_{32}$ sana 2-nji deñlemesini

$a_{13}a_{32}$-$a_{12}a_{33}$ sana 3-nji deñlemesini bolsa $a_{12}a_{23}$-$a_{13}a_{22}$ sana köpeldip alynan

deñlemeleri tarapma-tarap goşup, meñzeş näbellili çlenleri toplanymyzdan soñra

$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\cdot X_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}ab_3+$

$+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}$ (8)

Bu deñlikde çep tarapyndaky skobkanyñ içindäki añlatmany (7)-nji matrisanyñ kesgitleýjisi diýip atlandyryp, hem-de ony görnüşünde belgiläp,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ \end{vmatrix}$$

Onda $\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})$

(6) sistemanyñ $\Delta \neq 0$ bolan ýagdaýynda,

$X_1$ näbellisine baha tapmak üçin (8) deñligiñ onuñ iki tarapyny hem $\Delta \neq 0$

sana bölmelidigi düşnüklidir. Şunlukda 3-nji tertipli $\Delta$ - kesgitleýjiniñ kesgit-lemesinden onuñ hasaplanyş formulasynyñ çylşyrymlydygyna garamazdan onuñ hasaplanyş düzgüniñ añsatlyk bilen ýatda saklanyp bilinjekdigini belläliñ

hakykatdan hem $\Delta$-kesgitleýji degişli (7) matrisanyñ elementlerniñ 3-3-den

alynýan köpeltmek hasyllarnyñ algabraýik çemi bolup, bu köpeltmek hasyllar-nyñ alamatlary indiki aşakda getiriljek iki sany düzgüne görä kesgitlenýändirler,

I (+) $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$ II (-) $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$

Diýmek bu kesgitlemeden peýdalansak (8) deñligiñ sag tarapa hem 3-nji tertip-

li kesgitleýji bolup onuñ $\Delta$-kesgitleýjiden birinji sütüniñ ornuna (6) sistemanyñ azat çilenleriniñ sütüni ýazylan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$ kesgitleýji bolýandygyny

görmek kyndäldir.

Edil şuňa meňzeşlikde $X_2$ we $X_3$ näbelliler üçin hem adalatly bolan

$$\{\Delta \cdot X_2 = \Delta_2 \quad \text{we} \quad \Delta \cdot X_3 = \Delta_3\} \qquad (9)$$

Bu ýerde deňliklere eýe bolarys.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{23} b_3 a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

Şeýlelikde (6) sistemanyň $\Delta$-kesgitleýjisiniň 0-dan tapawutly bolan ýagdaýynda $(\Delta \neq 0)$ ýeketäk çözüwi bar bolup, ol çözüw (8) we (9) deňlikler

den olaryň 2 taraplaryny hem bu $\Delta$-sana bölmek bilen tapylýandyrlar. Ýagny

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad (10)$$

(6) sistemanyň $\Delta \neq 0$ bolanda bar bolan ýeketäk çözüwniň tapylmagynyň (10)

formulalaryna Kramer formulalary bu düzgüniň özüne bolsa Kramer düzgüni diýlip aýdylýar. Ýokarda aýdylanlardan Kramer düzgüniniñ 2 sany we 3 sany nä-

bellileri bolan çyzykly deñlemeleriñ kwadyratik sistemalaryny çözmäge diñe ol-

ryñ degişli kesgitleýjileri 0-dan tapawutly bolan halatlarynda ulanylyp bilinýän-

diginden görýäris. Ýöne mysal işleneninde çözülmegi talap edilýän şeýle sistem-anyñ kesgitleýjisiniñ 0-a deñ bolup çykmagy bu sistemanyñ kökdeşdäldigini añ-

ladýan däldir. Ol diñe bu sistemanyñ kesgitlenen däldigini (bu diýildigi sistema

ýa kökdeş däldir ýa-da kökdeş halatynda kesgitlenmedikdir) añladýandyr.

## 16.Çalşyrmalar we ornuna goýmalar.

Geljekgi temalar öwrenilende tükenikli sandaky elementleri bolan köplük-leriñ häsýetlerine degişli käbir düşünjeleri hem-de tassyklamalary öwreneliñ.

Goý bize erkin n sany elementleriñ $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ köplügi berlen bolsun.biz-iñ meselelermizde bu köplügüñ elementleriniñ tebigatynyñ hiç kimi rol oýnama-ýandygy üçin biz seredilýän M köplük 1-nji n sany natural sanlaryñ köplügi

diýip kabul etjekdiris: Ýagny

$M = \{1,2,...,n\}$ bolsun. Bu köplügiñ elementlerni dürli usullar bilen ýerleşdirip ýazmak müñkindir. Mysal üçin :

n=3 bolanda M ={1,2,3} bolup , onuñ elementlerni

1,2,3; 1,3,2; 2,1,3;

2,3,1; 3,1,2; 3,2,1;

Ýaly dürli usullar bilen ýerleşdirip ýazmak müñkindir:

**Kesgitleme:** Berlen 1,2,…,n sanlaryñ islendik tertipde ýerleşdirip, ýazylmagyna bu sanlardan çalşyrma diýlip aýdylýar, ýokarda getirlen mysaldaky 1,2,3 sanlaryñ 6 sany dürli görnüşdäki ýazgylarnyñ her biri bu sanlardan çalşyrmadyr. Indiki tasyklama birinji n sany natural sanlardan dürli çalşyrmalaryñ mümkin bolanlarynyñ sanyny bilmäge mümkinçilik berýändir:

**Teorema:** Birinji n sany 1,2,…,n natural sanlardan mümkin bolan dürli çalşyrmalaryñ sany n! (n-faktarial) $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots n$ köpöltmek hasylyna

deñdir. Subudy:

1-nji n sany natural sanlardan çaşyrmany umumy ýagdaýda $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (1) Bu ýerde $i_s$-leriñ her biri 1,2,…,n sanlaryñ haýsy hem bolsa birni kabul edip olaryñ iki sany dürlisi birmeñzeş baha kabul edip bilýändäldir. Ýagny

$k \neq l$ bolanda $i_k \neq i_l$ ( l-el) görnüşde ýazylýandyr. Bu ýazgydaky $i_1$ – ele-

ment n sany dürli usullar bilen saýlanyp biliner çünki ol 1,2,…,n sanlaryñ is-

lendik birini kabul edip bilýändir. Eger-de $i_1$ - elementiñ bahasy belli bolsa,

Onda $i_2$ elemente derek 1,2,…,n sanlaryñ arasynda $i_1$ tarapyndan baha der-egne kabul edilmedikleriniñ (olaryñ sany n-1 ) islendik biri alnyp biliner .

Bu diýdigi $i_2$ elementiñ ( n-1 ) sany dürli usullar bilen saýlanylmak müñkin-çiliginiñ bardygyny añladýar:

Şeýlelikde $i_1$ we $i_2$ elementler bilelikde $n \cdot (n-1)$ sany dürli usulda saýlan-mak müñkinçiligine eýedirler.

3.2 Şu prossesi dowam etdirmek üçin ahyr soñunda (1) ýazgydaky soñky

$i_n$ elementiñ diñe ýeketäk usul bilen saýlanylyp bilinýändigine eýe bolarys.

Bu diýildigi (1) ýazgynyñ $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ sany dürli görnüşe eýe boljakdy-gyna alarys: ***Teorema subut edildi.***

**Kesgitleme:** Çalşyrmada i we j elementler, i>j kanagatlandyryp, i el-ement j – den öñürti gelse olar inwerssiýa (tertipsizlik) emele getirýärler

diýilip aýdylýar.

Eger-de çalşyrmadaky inwersiýalaryñ sany (ol i-harpy bilen belgilenýär)

jübüt bolsa, çalşyrmanyñ özüne hem jübüt tersine ýagdaýda täk çalşyrma diý-

ilýär. **Mysal üçin:** 4,1,2,3,5 çalşyrmadaky inwerssiýalaryñ sanyny:

i=3+1+0+0=4 jübüt bolanlygyna görä, bu çalşyrma hem jübütdir. Eger-de

berlen çalşyrmada käbir iki sany elementlerinden galanlarny öñki orunlarynda

saklap bu 2 elemenleriñ bolsa özara orunlarynlaryny çalşyrsak täze bir çalşyrm-ny alarys. Soñky çaşyrma başdaky çalşyrmadan şol iki sany elementleriñ trans-

pozissiýalary (sy) netijesinde alnypdyr diýlip aýdylýar. Şol 2 elementlere bol-

sa , transponirlenýän elementler diýilýär: **Mysal üçin ;** 5,3,1,4,2 çalşyrmadan

2 we 3 elementleriñ transpozissiýasy netijesinde alynandyr. Indiki häsýetleri

belläp geçeliñ.

**Teorema:** $n \leq 2$ bolanda n elementden düzmek mümkin bolan ähli jübüt çalşyrmalaryñ sany täk çalşyrmalaryñ sanyna ýagny n!/2 deñdir.

**Teorema:** Çalşyrmadaky geçirilýän islendik iki sany elementleriñ transpozissiýasy onuñ jübütligini üýtgedýändir. Indi 1-nji 4 sany natural sanlardan iki sany çalşyrmanyñ birini beýlekisiniñ aşagynda ýazyp, olary ýaý

skobkalar bilen gurşalyñ:

$\begin{pmatrix} 4123 \\ 2134 \end{pmatrix}$ bu 4-nji derejeli ornuna goýmanyñ belgisi bolup, ol 4 $\rightarrow$ 2 2 -geç-

ýär 1 $\rightarrow$ 1 geçýär. Ýa-da 1 öz ornunda saklanýar. 2 $\rightarrow$ 3 – e geçýär, 3 $\rightarrow$ 4 geçýär

diýlip okalýar. Kesgitlemeden görnüşi ýaly 4-nji derejeli ornuna goýma 1-nji

4 sany natural sandan çalşyrmadan edil şol sanlardan başga bir çalşyrma geç-mekligi añladýandyr. Başgaça aýdanyñda ol {1,2,3,4} sanlaryñ köplüginiñ öz-özüne özara bu belgili şekillendirmesidir. Edil şuña meñzeşlikde n-nji

derejeli ornuna goýmada kesgitlenýändir. Kesgitlemeden görnüşi ýaly ýok-

arda berlen 4-nji derejeli ornuna goýma birnäçe usullar bilen ýazylyp berilm-

ekleri mümkindir. Olaryñ biri beýlekisinden sütünleriniñ transpozissiýalary

arkaly alnyp bilinýärler. **Mysal üçin:** Ýokarda getirlen 4-nji derejeli ornuna

goýmany indiki görnüşde ýazmak mümkindir.

$\begin{pmatrix} 3124 \\ 4132 \end{pmatrix}$ bu ýazgy ýokorda berileninden 1-nji we 4-nji sütünleriñ transpozissiýa-

lary arkaly alynýandyr. $E = \begin{pmatrix} 12...\eta \\ 12...n \end{pmatrix}$ Berlen n derejeli ornuna goýma n-nji

derejeli tožedestwen ornuna goýma diýilip aýdylýar. Eger-de iki sany birmeñ-zeş derejeli A we B ornuna goýmalaryñ A B köpeltmek hasylnyñ olaryñ yz-
ygiderli ýerne ýetirmeklerinden hasyl bolýan şol derejedäki ornuna goýma bol-

ýandygyny. **<u>Mysal üçin:</u>**

$$A=\begin{pmatrix} 4132 \\ 2143 \end{pmatrix} \qquad we \qquad B=\begin{pmatrix} 1243 \\ 2134 \end{pmatrix}$$

bolanlarynda netije:

$AB = \begin{pmatrix} 4132 \\ 1234 \end{pmatrix}$ bolýandygyny hasaba alsak bu E-toždestwen ornuna goým-anyñ islendik A şonuñ derejesi üçin deñ derejeli ornuna goýma bilen,

$E^{\cdot} A=A^{\cdot} E=A$ deñlikleri kanagatlandyrýandygyny añsatlyk bilen göreris.

Bu deñlikleriñ adalatlydyklaryny ornuna goýmanyñ kesgitlemesinden almak

mümkindir. Sebäbi kesgitlemä görä, toždestwen ornuna goýmada ähli eleme-ntler öz orunlarynda ütgemän galýandyrlar. Şonuñ üçinde A we E ornuna goýmalar yzygiderli ýerne ýetirlenlerinde olaryñ tertibi hiç hili rol oýnamazdan

netiçede alynýan şekillendirme A ornuna goýmanyñ añladýan şekilendirmesi

bilen gabat gelýändir.

**Kesgitleme:** A ornuna goýmanyñ ters ornuna goýmasy $A^{-1}$ diýilip

A. $A^{-1}=A^{-1.}$ A=E deñlikleri kanagatlandyrýan ornuna goýma aýdylýar. Onda

ornuna goýmalaryñ köpeltmesiniñ birmeñzeş derejedäki ornuna goýmalary üçin kesgitlenýändigini nazara alsak $A^{-1}$ derejedäki ornuna goýmanyñ dereje-

siniñ A-nyñ derejesi bilen gabat gelmelidigini alarys:

**Mysal:** $A=\begin{pmatrix}4132\\2143\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}2143\\4132\end{pmatrix}$ ornuna goýmanyñ tersi $A^{-1}$; ornuna

goýmadyr. Hakykatdan hem muny subut etmek üçin bize: $AA^{-1}=A^{-1.}$ A=E

deñlikleriñ ýerne ýetýändiklerini görkezmek ýeterlikdir.

Diýmek islendik ornuna goýmanyñ aşaky hem-de ýokarky setirlerniñ özara

orunlaryny çalşyrmak üçin oña ters ornuna goýmany almak mümkin eken

$$A\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2143\\2143\end{pmatrix}=E$$

**Kesgitleme:** Eger-de ornuna goýmanyñ aşaky hem-de ýokarky setirlerinde bar bolan inwersiýalaryñ umumy sany jübüt bolsa, oña jübüt täk bolaýsa onuñ

özüne-de täk ornuna goýma diýilýär. Ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ umu-my sanyny I harpy bilen belgiläp, ony kesgitlemä göaä ýokarky setirindäki

inwerisiýalaryñ $i_1$ we aşaky setirindäki inwerisiýalaryñ $i_2$ sanlarynyñ jemi

görnüşünde: Ýagny $I=i_1+i_2$ ýaly kesgitleýärler. **Mysal üçin:**

A ornuna goýma $A=\begin{pmatrix} 4132 \\ 2143 \end{pmatrix}$- $I = i_1+i_2=(3+1)+(1+0+1)=6$

bolanlygy üçin

jübüt ornuna goýmadyr.

Ornuna goýmanyñ n derejesiniñ 2-den kiçi bolmadyk halatynda

AB=BA deñligiñ ýerne ýetmezligi mümkindir.

## 17.Islendik tertipli kesgitleýjiler olaryñ ýönekeý häsýetleri.

Islendik n-natural san üçin n-nji tertipli kesgitlenjini kesgitlemek üçin 2-nji

we 3-nji tertipli kesgitleýjileriñ añlatmalaryny jemiñ alamatynyñ üsti bilen ýaz-

alyñ.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum(-1)^s a_1\alpha_1, a_2\alpha_2,$$

Bu ýerde $\alpha_1\alpha_2$ $\overline{1,2}$ sanlardan käbir çalşyrma, $S - \begin{pmatrix} 1,2 \\ \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}$ ornuna goý- madaky inwersiýalaryñ umumy sany bolup, jem alamaty ähli mümkin bolan, $\alpha_1, \alpha_2$ çalşyrmalar boýunça alynýandyr.

Edil şuña meñzeşlikde

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \sum(-1)^s a_1\alpha$$

Bu ýerde $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 1,2,3$ sanlardan çalşyrmadyr;
$S - \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix}$ ornuna

goýmadaky inwersiýalaryñ sany bolup, hem ähli mümkin bolan $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

çalşyrmalar boýunça alynýandyr. (2) we (3)-nji tertipli kesgitleýjileriñ añlat-

malarynyñ ýokarda berlen jem alamatynyñ üsti bilen ýazgylaryndan alynýan

umumy kanuna laýyklary n-nji tertipli kesgitleýjileriñ kesgitlemesi üçin ulanalyñ şol ýazgylara görä, (2) we (3)-nji tertipli kesgitleýjiler olaryñ degişli mat-

risalarynyñ dürli setirlerinden hem-de dürli sütünlerinden bir-birden element

alynyp, düzülen iki sany ýa-da üç sany (degişlilikde) elementleriñ köpeltmek

hasyllarynyñ ähli mümkin bolanlarynyñ algabraik jemidir. Bu jemiñ goşulysy-

nyñ alamaty bolsa, onuñ indekslerinden düzülen ornuna goýmanyñ jübütdigine

ýa-da täkdigine baglylykda (+) ýa-da (-) bolýandyr.

Goý bize n-nji tertipli kwadrat matrisa berlen bolsun.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

**Kesgitleme:** (1) matrisa degişli bolan . (ýada 1-nji matrisanyñ kesgitleýlisi

diýilip) n-nji tertipli kesgitleýji diýilip, her bir goşulyjysy bu matrisanyñ dürli setirlerinden hem-de dürli sütünlerinden bir-birden element alynyp düzülen n-sany elementleriñ köpeltmek hasyly bolan algabraik jeme aýdylýar.

Bu jemiñ goşulyjylarynyñ sany n! bolup, onuñ her bir çleniniñ alamaty köoeltmek hasylyny düzýän elementleriñ indekslerinden düzülen ornuna goýmanyñ jübütdigine ýa-da täkdigine baglylykda (+) ýa-da (-) bolýandyr.

Şeýle hem ýokarda aýdylan görnüşdäki köpeltmek hasyllarnyñ ähli mümkin bolanlaryny bu jemde goşulyjy bolup, hyzmat edýändirler. Şeýlelikde (1) matrisa degişli kesgitleýjini hem (2)-nji we (3)-nji tertipli kesgitleýjilere meñzeşlikde.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}$$ görnüşinde belgilesek, ol ýokarda berlen kesgitlemeden indiki görnüşde matematiki añladylyp biliner.

$$\Delta = \sum (-1)^s a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 a_n\alpha_n;$$

Bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $\overline{1,2,\ldots,n}$ sanlardan çalşyrma.

$S - \begin{pmatrix} 1,2,...,n \\ \alpha_1\alpha_{2...}\alpha_n \end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ sany.

$\sum$ - ähli mümkin bolan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ çalşyrmalary boýunça alynýandyr.

Indi n-nji tertipli kesgitleýjilere degişli ýönekeý häsýetleri öwreneliñ.

**Kesgitleme:** $\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}a_{n1} \\ a_{12}a_{22}a_{n2} \\ a_{1n}a_{2n}a_{nn} \end{pmatrix}$ $\overline{\phantom{xx}}$ (1) matrisanyñ setirlerini degişli sütünler edilip alnan matrisa (1) marisadan transponirlenip alnandyr diýilýär. (Soñky matrisa (1) matrisanyñ transponirleneni hem diýilýär). Edil şuña meñzeşlikde degişli düşünje kesgitleýji üçin hem berilýändir.

**Häsiýet:1**

Trasnsponirleme kesgitleýjini üýtgetmeýär bu diýildigi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \overline{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21}a_{n1} \\ a_{12}a_{22}a_{n2} \\ a_{1n}a_{2n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hakykatdan hem n-nji tertipli kesgitleýjiniñ kesgitlemesine görä, $\Delta$-nyñ her bir

$a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 ... a_n\alpha_n$ (2) (görnüşdäki her ) çleni $\Delta$-kesgitleýjide hem çlen bolup hyzmat edýändir. Şünki onuñ her bir köpeljisi bu kesgitleýjide hem dürli setirlerde hem-de dürli sütünlerde ýerleşendirler. Bu diýildigi $\Delta$-nyñ her bir çileniniñ $\overline{\Delta}$-da hem, hem-de tersine çilen bolýandygny añladýar.Onda bu çileniñ

$\Delta$ *we* $\overline{\Delta}$ kesgitleýjilerdäki alamatlarnyñ hem gabat gelýändiklerini görkezmek galýar 2-nji çileniñ $\Delta$-daky alamaty ornuna goýmadaky $\overline{\Delta}$-ky alamaty bolsa,

$\begin{pmatrix} 1,2...n \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2...\alpha_n \\ 1,2...n \end{pmatrix}$ (4) ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ sanlary bilen kesgitlenýändirler. Ýöne (3) we (4) ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ sanlary birmeñzeşdirler. Şünki olar biri-birinden

setirlerniñ ýerleşiş tertipli bilen tapawutlanýarlar.

Bu diýildigi $\Delta$ *we* $\overline{\Delta}$ kesgitleýjileriñ birmeñzeş goşulçulara eýe bolan algabraik jemleridiginden başgada olaryñ bir meñzeş goşulyjylarynyñ alamatlarnyñ hem gabat gelýändiklerini añladýandyr. Diýmek $\Delta$ *we* $\overline{\Delta}$

kesgitleýjiler biri-birine deñdirler.

**Bellik:** Bu subut edilen häsýetden kesgitleýjiniñ setirlerniñ hem-de sütünlerniñ

deñgüşlidikleri (deñ hukuklydyklary ) gelip çykýandyr. Şoña gäde, kesgitleýjiniñ setirlerne mahsus bolan häsýetleriñ ählisi onuñ sütünleri üçin hem-de dogrydyr. Şeýlelikde glejekde öwreniljek kesgitleýjiniñ ýönekeý häsýetleri onuñ setirleri üçin aýdylsada şol häsýetleriñ sütünler üçin hem adalatlydyklarny hasaba almalydyrys.

Häsiýet:2
diñe nul elementlerden durýan (ähli elementleri o-la deñ ) setiri özünde saklaýan

kesgitleýji o-la deñdir. Hakykatdan hem $\Delta$-nyñ her bir (2) çleniniñ dürli setirlerden hem-de dürli sütünlerden bir-birden element alnyp düzülen köpeltmek hasylydygna görä, ol diñe 0-l elementleri özünde saklaýan setirden hem bir elementi köpeliji görnüşünde saklaýandyr. Bu diýildigi (2)-nji köpeltmek hasylynyñ 0-la deñ boljakdygyny añladýar. Onda seredilýän ýagdaýda $\Delta$-ta kesgitleýji diñe 0-dan durýan goşuljylaryñ. Bu bolsa onuñ 0-la deñdigini añladýar. Eger-de i-setiriñ ähli elementleri 0-la deñ bolsalar ýagny:

$a_{i1} = a_{i2} = ... = a_{in} = 0$ bolsa onda kesgitleýjä görä,

$$\Delta = \sum(-1)^s a_1\alpha_1 a_1\alpha_2 a_n\alpha_n = \sum(-1)^s 0 = 0.$$ häýetiñ subuduny añladar.

**Häsiýet:3** Kesgitleýjini islendik iki setirniñ transpozisiýasy onuñ diñe alamatyny ütgetýär. Hakykatdanda hem $\Delta$-ta kesgitleýjiniñ i we j setirlerniñ özara orunlarny çalşyryp galan setirlerini bolsa öñki orunlarynda goýyp, alnan

kesgitleýji $\Delta_0$- görnüşinde belgilenen bolsun . (hakykatdan hem) kesgitleýjiniñ kesgitlemesinden $\Delta$-nyñ her bir $a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, a_n\alpha_n$ (2) çleni $\Delta_0$-da-da çlen bolup

hyzmat edýändir. (çünki onuñ köpelijileri $\Delta$-da-da dürli setirlerde hem-de dürli

sütünlerde ýerleşendirler). Diýmek $\Delta$ *we* $\Delta_0$ kesgitleýjiler meñzeş goşulyjylaryñ algabraik jemleridir. Ýöne şol bir (2)-nji çleniñ alamaty bu kesgitleýjilerde dürlüdir . Sebäbi i>j bolan halatynda (2)-nji $\Delta$-da

$\begin{pmatrix} 1,2...j...i...n \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_j...\alpha_i...\alpha_n \end{pmatrix}$ (3) ornuna goýmanyñ jübütligi bilen kesgitlenilýän

alamata $\Delta_0$-da bolsa,

$\begin{pmatrix} 1,2,...i...j...n \\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_j,\alpha_i...\alpha_n \end{pmatrix}$ (4) ornuna goýmanyñ jübütligi bilenkesgitlenilýän alamata eýedir. Ýöne (3) we (4) ornuna goýmalar garşylykly jübütliklere eýedirler. ( (3) we (4) ornuna goýmalarda aşaky setirleriñ birmeñzeşdikleri i we j elementleriñ transpozisiýalarynyñ elementleriñ ýerleşýän sütünlerine täsir

etmeýänligindendir.) Diýmek $\Delta$ *we* $\Delta_0$ birmeñzeş goşuljylaryñ algabraýik jemleri bolup, meñzeş goşuljylar bu jemlerde garşylykly alamatlara eýedirler.

**<u>Häsiýet:</u>** 2 sany meñzeş setirleri bolan kesgitleýji 0-a deñdir. Hakykatdan hem

goý $\Delta$-da i we j-nji setirler birmeñzeş bolsunlar ýagny islendik k=1,2,…,n

$a_{ik}=a_{jk}$ bolsun. Eger-de bu kesgitleýjide i-nji we j-nji setirleriñ transpozisiýalaryny gejirsek onda (3) –häsiete görä, täze alnan $\Delta_0$-berlen $\Delta$-a

garşylykly alamat bilen deñdir. Ýagny $\Delta_0 = -\Delta$ 2-nji bir tarapdan meñzeş setirleriñ transpozisiýalary netijesinde alnan täze kesgitleýji berlen $\Delta$-kesgitleýjiniñ özüne deñ bolar. Ýagny $\Delta_0 = \Delta$ onda soñky 2 deñlikleri deñeşdirmek bilen $\Delta = -\Delta$ bolmalydygyny taparys. Bu ýerden $2\Delta = 0$ $\Delta = 0$ deñlige eýe bolar.

**Häsiýet:5** Eger-de kesgitleýjiniñ bir setiriniñ ähli elementlerini şol bir k

hemişelik sana köpeltsek, onda $\Delta$-kesgitleýjiniñ özi hem bu k sana köpeldiler.

Ýagny $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ a_{i1}...a_{in} \\ a_{n1}...a_{nn} \end{vmatrix}$ *bolanda* $\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ka_{i1}...ka_{in} \\ a_{n1}...a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \Delta$

hakykatdan hem kesgitleýjiniñ kesgitlemesine görä.

$$\overline{\Delta} = \sum (-1)^s a_1\alpha_1 ... (ka_i\alpha_i) ... a_n\alpha_n = k \cdot \sum (-1)^s \cdot a_1\alpha_1 ... a_i\alpha_i ... a_n\alpha_n = k \cdot \Delta$$

**Bellik:** Subut edilen häsýetden kesgitleýjiniñ setiriniñ ýa-da sütüniniñ (ähli elementleriniñ umumy köpeljisi kesgitlemäniñ alamatynyñ önüme çykarylyp alynýandygy gelip çykýandyr.)

**Kesgitleme:** Eger-de kesgitleýjiniñ käbir setirleriniñ ähli elementleri onuñ başga bir setirlerniñ degişli elementlerinden şol bir hemişelik sana köpeldilip alynýan bolsalar onda bu setirlere proporsional setirler diýilýär.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 12 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ kesgitleýjide 1-nji we 3 setirler

proporsiýonaldyrlar. Çünki

3 setiriñ elementlerini 1-nji setiriñ degişli elementlerinden 3 –e köpeldip, alyp bolýar.

**Häsiýet:6** Proporsional setirleri bolan kesgitleýji 0-la deñdir. Hakykatdan hem eger-de $\Delta$-nyñ (her bir elementi) j-nji setrleriñ her bir elementini onuñ i-nji setiriniñ degişli elementinden k sana köpeldip alynýan bolsa, ýagny $a_{jm}=k \cdot a_{im}$

deñlik her bir m nomer üçin dogry bolsa, onda ýokarda edilen bellige görä j setiriñ ähli elementleriniñ k hemişelik köpeljisini kesgitleýjiniñ alamatlarynyñ öñüne çykarsak, onda bu kesgitleýjiniñ özünde i-nji we j-nji setirler meñzeş bolarlar. Şoña göräde bu kesgitleýji 0-la deñdir.

**Häsiýet:7** Eger-de n-ji tertipli $\Delta$-kesgitleýjiniñ käbir mysal üçin i-nji setirniñ ähli elementleri iki sany goşulyjylaryñ jemleri ýagny $a_{ij}=b_j+c_j$, j=1,2,…,n (5)

görnüşde añladylyp, bilinýän bolsalar, onda $\Delta$-nyñ özi hem iki sany $\Delta^{/}$ *we* $\Delta^{//}$ n-nji tertipli kesgitleýjileriñ jemi görnüşinde añladylyp alynýandyr. Bu kesgitleýjileriñ şol i-nji setirlerinden galanlary $\Delta$-nyñ degişli setirleri bilen gabat gelýändirler. Olaryñ i-nji setirleri bolsa, birinde diñe $b_j$ 1-nji goşulyjylardan beýlekisinde bolsa, 2-nji $c_j$ goşylyjylaryndan durýandyr.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{11}\ldots & a_{1n} \\ b_1+c_1\ldots b_n+c_n & \\ a_{n1}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{11}\ldots & a_{1n} \\ b_1\ldots & b_n \\ a_{n1}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{11}\ldots & a_{1n} \\ c_1\ldots & c_n \\ a_{n1}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{/} + \Delta^{//}$$

hakykatdan hem n-nji tertipli kesgitleýjiniñ kesgitlemesine görä ,

$$\Delta=\sum(-1)^s a_1\alpha_1 ... a_2\alpha_2 ... a_i\alpha_i + a_n\alpha_n = \sum(-1)^s a_1\alpha_1 ... a_2\alpha_2 ... (b_{\alpha i}+c_{\alpha i}) ... a_n\alpha_n = \sum(-1)^s a_1\alpha_1 ... a_2\alpha_2 ... b_{\alpha_i ...} ... a_n$$

$$... a_2\alpha_2 ... c_{\alpha i} ... a_n\alpha_n = \Delta^{/} + \Delta^{//}$$

**Bellik:** Bu häsiýet 2 sany goşuljylar üçin subut edilen hem bolsa, ol islendik tükenikli sandaky goşuljylar üçin hem orunlydyr.

**Kesgitleme:** Eger-de kesgitleýjiniñ käbir setirniñ Mysal üçin i-nji setirniñ her bir $a_{im}$ elementini galan setiriñ degişli elementlerniñ şol bir hemişelik sanlara köpeltmek hasyllarynyñ jemi güşünde añlatmak mümkin bolsa, ýagny şeýle bir

$k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_n$ hemişelik sanlar bor bolup, $a_{im}=k_1a_{1m}+k_2a_{2m}+k_{i-1}a_{i-1m}++k_{i+1}a_{i+1m}+\ldots+k_na_{nm}$ deñlik her bir m nomer üçin ýerine ýetýän bolsa, kesgitleýjiniñ i-nji setiri onuñ galan setirleriniñ çyzykly kombinasiýasyndan durýar diýilip aýdylýar. Ýokardaky añlatmamyzda käbir k sanlaryñ 0-la deñ bolmaklary hem mümkindir. (Hususan ählisiniñ hem ).

**Häsiýet:8** kesgitleýjiniñ käbir setiri onuñ galan setirleriniñ çyzykly kombinasiýasy bolsa, şeýle kesgitleýji 0-la deñdir. Bu häsiýetiñ subudy (7) (6) (4) häsiýetlerden gelip çykýandyr.

**Häsiýet:9** Eger-de kesgitleýjiniñ 1 setirniñ elementlerine onuñ başga bir setirniñ degişli elementlerini şol bir hemişelik k sana köpeldilip , goşulsa kesgitleýji üýtgemeýär. Ýagny

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ldots & a_{1n} \\ a_{i1}\ldots & a_{in} \\ a_{j1}\ldots & a_{jn} \\ a_{n1}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots & a_{1n} \\ a_{i1}+ka_{j1}\ldots a_{in} & +ka_{jn} \\ a_{j1}\ldots & a_{jn} \\ a_{n1}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ deñlik dogrydyr.

Bu häsiýeti subut etmek üçin ýazylan deñligiñ sag tarapyndaky kesgitleýjiniñ 2 sany onuñ özüniñ tertibindäki kesgitleýjileriñ jemine deñdiginden olaryñ i-nji setirlerinden galanlarynyñ bu kesgitleýjiniñ degişli setirleri bilen gabat gelýändiklerinden hem-de bu goşuljylaryñ biriniñ i-nji we j-nji setirleriniñ proporsionaldyklaryna görä , onuñ 0-la deñdiginden peýdalanmak ýeterlikdir.

Ýagny :

..........................................

...................... ......................... .................

.......................................... ...................... ......................... .................

.......................................... ...................... ......................... ......................

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ldots & a_{1n} \\ a_{i1}ka_{ji}\ldots a_{in}k & a_{jn} \\ a_{j1}\ldots & a_{jn} \\ a_{n1}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ a_{i1}\ldots a_{in} \\ a_{j1}\ldots a_{jn} \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ ka_{j1}\ldots ka_{jn} \\ a_{j1}\ldots a_{jn} \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ a_{i1}\ldots a_{in} \\ a_{j1}\ldots a_{jn} \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

**<u>Bellik:</u>** Bu häsýetde aýdylan k sanyñ otrisatel bolmagynyñ hem mümkindigine

görä, bu häsiýeti kesgitlenýjiniñ käbir setiriniñ ýa-da sütniniñ bir elementinden

galanlarynyñ, ählisiniñ o-la öwrülmekleri üçin geçirlýän özgertmäni ýerine ýetirmäge ulanylmakda amatlydyr. Mysal üçin:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 34 \\ 0 & 1 & 25 \\ 6 & 7 & 14 \\ 7 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -13 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

## 18.Dürli tertipdäki minorlar. Algebraýik doldurgyçlar.

Goý bize n-nji tertipli $\Delta$-kesgitleýji we k $1 \le k \le n-1$ san berlen bolsun.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n} \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjide erkin k sany setirleri hemde k sany sunleri saýlap alyp olaryñ kesişmesinde duran elementlerden matrissa düzsek onuñ k-njy tertipli kwadrat matrissa boljakdygy düşnüklidir. Şeýle usul bilen alynan islendik k-njy tertipli kwadrat matrissanyñ kesgitleýjisine berilen $\Delta$-kesgitleýjiniñ k-njy tertipli minory diýilýär. Mysal üçin: $\Delta$-da ilkinji 2 sany setiri hem-de ilkinji 2 sany sütüni saýlap alsak , onda olaryñ kesişmelerinde duran elementlerden.

2-nji tertipli kwadrat matrissany düzeris. $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ Onuñ

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

kesgitleýjisi $\Delta$-nyñ 2-nji tertipli minorlarynyñ biridir kesgitlemeden görnüşi ýaly $\Delta$-nyñ islendik $a_{ij}$ elementi onuñ birinji tertipli minory hasap edilip alynýar. (Bu kesgitleýjide 1 setir hem 1 sütün saýlanylyp alynandygyny añladýar.

Berlen k-njy tertipli minoryñ elementleriniñ duran (ýerleşen )setirlerini hem-de sütünlerini çyzanymyzdan soñ $\Delta$-nyñ bir gezek hem çyzylmadyk elementlerinden (n-k)-njy tertipli kwadrat matrissany düzmek mümkindir onuñ kesgitleýjisine bu k-njy tertipli M minoryñ goşmaça (ýa-da dolduryjy ) minory diýilýär we ol $M^{/}$(n-k) görnüşinde belgilenýär. Aslynda k-njy tertipli minoryñ belgilemesi üçin $M_k$ bilen belgiläp ulanylýandyr. Ýokarda mysal görnüşinde getirlen,

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$ 2-nji tertipli minoryñ goşmaça minory,

$$M'_{(n-2)} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ a_{33} a_{3n} \\ a_{n3} a_{nn} \end{vmatrix} - (n-2)$$-nji tertipli kesgitleýjidir.

Hususan birinji tertipli $M_{ij}=a_{ij}$ minoryñ ($\Delta$-nyñ $a_{ij}$ elementiniñ ) goşmaça minory $M^{/}_{ij}$ $\Delta$-da i-nji setir hem-de j-nji sütün çyzanymyzdan soñçyzylman galan elementlerden düzülen (n-1) -nji tertipli kesgitleýjidir. Mysal üçin:

$$M'_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} a_{2n} \\ a_{32} a_{3n} \\ a_{n2} a_{nn} \end{vmatrix}$$ kesgitleýjidir kesgitleýjiniñ elementleriniñ algebraik

doldurgyjy

diýilip ($A_{ij}$ ) onuñ $(-1)^{i+j}$ alamat bilen alynan goşmaça $M^{/}_{ij}$ minoryna aýdylýar. Ýagny $A_{ij}=(-1)^{i=j}M^{/}_{ij}$ .

Eger-de $\Delta$-nyñ k-njy tertipli minory onuñ $i_1,i_2,\ldots,i_k$ nomerli setirlerinde hem-de $j_1,j_2,\ldots,j_k$ nomeri sütünlerinde ýerleşen bolsa, onda onuñ algebraik doldurgyjy diýlip onuñ $(-1)^{sm}$ (bu ýerde $S_n=(i_1+i_2+\ldots+i_k)+(j_1+j_2+\ldots+j_k)$ ), Şol

alamat bilen alynan goşmaça minoryna aýdylýar.

**Teorema:** $\Delta$-kesgitleýjiniñ islendik k-njy tertipli minorynyñ onuñ algebraýik doldurgyjyna köpeltmek hasyly bu kesgitleýjiniñ käbir çilenlerinde duryan algebraýik çemdir. Bu çemiñ goşuljylarynyñ alamatlary hem olaryñ kesgitleýjidäki alamatlary bilen gabat gelýändirler.

**Subudy:** Ilki bilen teoremany k-njy tertipli **M** –minoryñ $\Delta$-nyñ çep ýokarky burçunda ýagny onuñ birinji k setirlerinde hem-de birinji k sütünlerinden ýerleşen ýagdaýy üçin subut edeliñ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1k}...a_{1,k+1}...a_{1n} \\ a_{k1}...a_{kk}...a_{k,k+1}...a_{kn} \\ a_{k+1,1}a_{k+1,k}a_{k+1,k+1}a_{k+1,n} \\ a_{n1}...a_{nk}...a_{n,k+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

**M** k-njy tertipli minoryñ islendik çilenini ýazsak, ol:

$a_{1_{\alpha_1}}$ $a_{2_{\alpha_2}}$ $a_{k_{\alpha_k}}$ (1)

görnüşde ýazylýar. Bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_k - 1,2...k$ sanlardan çalşyrmadyr. Bu

çileniñ alamaty (-1)$^{l}$, $L - \begin{pmatrix} 1,2...k \\ \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_k \end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ umumy sany, bolar.Edil şuña meñzeşlikde **M**$^{/}$ goşmaça minoryñ erkin $a_{k+1}, b_{k+1}\cdot$

$\cdot\, a_{k+2}, b_{k+2}\cdot a_n b_n$ (2) çlenina alsak, (bu ýerde $\begin{pmatrix} b_{k+1}, b_{k+2}...b_n \\ k+1, k+2, n \end{pmatrix}$ sanlardan çalşyrmadyr. Onuñ alamaty (-1)$^{l^{/}}$, bu ýerde

$l^{/} - \begin{pmatrix} k+1k+2...n \\ b_{k+1}b_{k+2}...b_n \end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ sany, bolar.

Biziñ bu seredýän ýagdaýmyzda $S_M$ :

$$S_M=(1+2+\ldots k)+(1+2\ldots k)=2(1+2\ldots k)=k(k+1)$$

Islendik biri jübüt bolsa, şol köpeltmek hasyl hem jübüt bolýar.

$S_M$ jübüt bolanlygyna görä , M minoryñ algebraýik doldurgyjy . Onuñ $M^/$ goşmaça bolen gabat geler . Şeýlelikde bizi $M \cdot M^/$ köpeltmek hasyly we bu algebraýik goşuljylarynyñ alamatlary gyzyklandyrýar. $M \cdot M^/$ köpeltmek hasylynyñ

$a_1\alpha_1 \quad a_k\alpha_k \quad a_{k+1}B_{k+1} \qquad a_nB_n$ (3) erkin çilenini

alsak, onuñ alamaty $(-1)^l \cdot (-1)^{l^/} = (-1)^{l+l^/}$ bolar. Çünki

$$\begin{pmatrix} 12\ldots k\ldots k+1\ldots n \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots B_{k+1}\ldots B_n \end{pmatrix}$$

ornuna goýmadaky inwersiýalaryñ umumy sany hem $\alpha_k$-laryñ $\beta_k$-lar bilen hiçhili inwersiýa emele getirmeýändiklerine görä , ($\alpha$-laryñ hiç biri, $\beta$-laryñ hiç birnden uly däldir ) $\alpha_i \le k$ $\beta_i \ge k+1$ ikinji bir tarapdan (3) köpeltmek hasylynyñ köpeljileri $\Delta$-ta kesgitleýjide dürli setirlerde hem-de dürli sütünlerde ýerleşendirler. Onda bu köpeltmek hasyly $\Delta$-ta kesgitleýjiniñ käbir çilenidir. Bu diýildigi $M \cdot M^/$ köpeltmek hasyly käbir algebraýik jem bolup , onuñ her bir goşuljysy $\Delta$-nyñ hem goşuljysydyr. Ýöne ýokarda edilen bellige görä, bu goşuljynyñ $\Delta$-ky alamatynyñ hem $(-1)^{l+l^/}-e$, deñdigi gelip çykýar.

Şeýlekikde $M \cdot M$ köpeltmek hasyly $\Delta$-ta kesgitleýjiniñ käbir çilenlerinden durýan algebraýik jem bolup bu goşuljylaryñ alamatlary olaryñ $\Delta$-ky alamatlary bilen gabat gelýändirler . Bu bolsa, teoremanyñ tasyklamasynyñ özidir.

Indi $\Delta$-nyñ M minory onuñ islendik $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ nomerli setirlerinde hem-de

$j_1 < j_2 < ... < j_k$ nomerli sütünlerinde ýerleşen bolsun . Setirleriniñ hem-de sütünleri transpozissiýalarynyñ ýardamynda bu minory kesgitleýjiniñ çep ýokarky burçuna süşüreliñ. Munuñ üçin ilki bilen $i_1$ setiriñ ($i_1$=1) –nji setir bilen transpozissiýasyny soñra ($i_1$-1-nji setiriñ ornundaky ) $i_1$-2-nji setir bilen we şuña meñzeşlikde ol tä $\Delta$-nyñ 1-nji setirniñ ornuny eýeleýänçä özünden ýokardaky ähli goñşy setirler bilen transpozissiýalaryny geçireliñ. Munuñ üçin umumy ( $i_1$-1) sany goñşy setirleriñ transpozissiýalarny geçirmek bolar . Soñra berlen kesgitleýjiniñ $i_2$ setirniñ özünden ýokardaky goñşy setirler bilen yzly yzyna ($i_2$-2) sany transpozissiýalaryny geçirip, onuñ kesgitleýjiniñ 2-nji setirniñ ornuny eýelemegini gazanarys . Şu prosessi dowam etdirmek bilen ahyr soñunda ($i_k$-k) sany goñşy setirleriñ transpozissiýalarynyñ ýardamynda $i_k$-njy setiriñ kesgitleýjiniñ k-njy setirniñ ornuny eýelemegini gazanarys. Şu gejirlen

$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + ... + (i_k - k) = i_1 + i_2 + ... + i_k - (1 + 2 + ... + k)$ sany goñşy setirleriñ transpozissiýalary **M** minory 1-nji k sany setirlere süşürer edil şuña meñzeşlikde $j_1$+$j_2$+…+$j_k$-(1+ 2+…+k) sany goñşy sününleriñ geçiren transpozissiýalary M minory kesgitleýjiniñ 1-nji k sany sütünlerne süşürer şeýlelikde $\Delta$ kesgitleýjide gejirlen $i_1 + i_2 + ... + i_k + j_1 + j_2 + ... + j_k - 2(1 + 2 + ... + k)$ goñşy setirleriñ hem-de goñşy sütünleriñ transpozissiýalary täze alnan $\Delta^/$-kesgitleýjide M-k-njy tertipli minoryñ ilkinji k setirlerde hem-de ilkinji k sütünlerde ýerleşmegni üpjün eder . Şu özgertmeler netijesinde M minoryñ goşmaça $M^/$ minorynyñ ütgemeýändigi düşnüklidir. Çünki onuñ onuñ elementleri transpozisiýalarda goltaşmaýarlar , hem-de goñşy sütünleriniñ transpozissiýalarynyñ ýerne ýetirýändiklerine görä onuñ setirleriniñ hem-de sütünleriniñ başdaky tertipleri hem saklaýandyr , teoremanyñ subut edilen bölegne görä , $M^{\cdot}\ M^/$ köpeltmek hasyly $\Delta^/$-kesgitleýjiniñ käbir çilenleriniñ algebraýik jemi bolup , bu jemiñ her bir goşuljysynyñ alamaty onuñ $\Delta^/$-däki alamaty bilen gabat gelýändir ýöne kesgitleýjiniñ ýönekeý häsýetlerinden onuñ islendik iki setirniñ transpozissiýasy diñe kesgitleýjiniñ alamatyny ütgedýändigine görä, täze alnan $\Delta^{/}$-kesgitleýjiniñ öñki $\Delta$-dan $(-1)^{S_M} - 2(1+2+...+k) = (-1)^{S_M}$ sana köpeltmek bilen alnyp bilinjekdigi bellidir.

Şeýlelikde $(-1)^{S_M} \cdot M \cdot M^{/}$ köpeltmek hasyly (bu bolsa , $\Delta$-nyñ M minorynyñ

özüniñ algabraýik doldurgyjyna köpeltmek hasylydyr) $\Delta$-ta kesgitleýjiniñ käbir

çilenleriniñ algabraýik jemidir. onuñ her bir goşuljysynyñ alamaty bu goşuljynyñ $\Delta$-ta kesgitleýjiniñ düzümidäki alamaty bilen gabat gelýändir.

$$\Delta^{/} = (-1)^{S_M}\Delta$$

## 19.Kesgitleýjileri hasaplamak (kesgitleýjini setiri boýunça dagytmak; Laplas teoremasy)

Islendik n natural san üçin n-nji tertipli $\Delta$-ta kesgitleýjini añladýan 2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjileriñkä meñzeş añlatmalary ýazmaklygyñ anyk düzgüni ýokdyr.

Emma ýokary tertipli kesgitleýjileriñ hasaplanmagy üçin olaryñ kesgitlemesinden ugur alyp, onuñ añlatmasyny ýazyp,şol añlatma göräde, bu kesgitleýjiniñ bahasyny hasaplamak mümkinjiligi bar bolsada , ol oñaýsyz usuldyr. Şonuñ üçinde ýokary tertipli ksgitlýjileri hasaplamaklygyñ düzgüni öwrenmek ähmiýete eýedir . Goý bize n-nji tertipli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{i1}a_{i2}...a_{in} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}$$ kesgitleýji berlen bolsun we i $1 \le i \le n$ (1 bilen n arasyndaky erkin bir nomer bolsun) .

Bu i-nji setiriñ ähli elementleriniñ olaryñ algebraýik doldurgyçlarna köpeltmek hasyllarna seredeliñ .

$$a_{i1} \cdot A_{i1}, \qquad a_{i2} \cdot A_{i2}, \qquad a_{in} \cdot A_{in} \qquad (1)$$

geçen temada subut edilen teoremadan bu köpeltmek hasyllarynyñ her biri $\Delta$-

kesgitleýjiniñ käbir çlenleriniñ algebraýik jemi bolup , ol goşuljylaryñ alamatlary hem olaryñ $\Delta$-daky alamatlary bilen gabat gelýändir. (Biz bu ýerde her bir $a_{im}$, $1 \le m \le n$ elementiñ $\Delta$-nyñ 1-nji tertipli minorylygyndan ugur alýarys). Eger-de 1-nji ( 1 ) sistemadaky köpeltmek hasyllarynda bar bolan, algebraýik doldurgyçlary degişli goşmaça minorlar bilen çalşyrsak hem-de her bir goşmaça minoryñ (n-1)-nji tertipli kesgitleýjini nazara alsak bu köpeltmek hasyllarynyñ her biri degişli alamatlary bilen alnan elementiñ goşmaça minoryna köpeltmek hasylyna öwrilen we ol köpeltmek hasyllaryñ her biri $\Delta$-nyñ (n-1) ! çilenleriniñ algebraýik jemi bolar.

$$a_{ik} A_{ik} = a_{ik}\left(-1\right)^{i+k} \cdot M_{ik}^{/} = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}^{/}$$

2-nji bir tarapdan (1) sistemanyñ 2-sany dürli köpeltmek hasyllary birmeñzeş çilenleri saklaýan algebraýik jemler däldir.

Hakykatdan hem Mysal üçin : $a_{i1}A_{i1}$ *we* $a_{i2}A_{i2}$ köpeltmek hasyllaryna seretsek olaryñ i-nji setirinden biriniñ $a_{i1}$ elementi özünde saklaýan $\Delta$-nyñ käbir

çilenleriniñ algebraýik jemidigne beýlekisiniñ bolsa, bu setirden $a_{i2}$ elementi özünde saklaýan $\Delta$-nyñ käbir çilenleriniñ algebraýik jemdigini alarys kesgitlemä görä , kesgitleýjiniñ her bir jileniñ her setirden hem-de her sütünden

bir-birden element alnyp düzülen n sany elementleriñ köpeltmek hasylydygy görä , bu 2 sany köpeltmek hasyly meñzeş çilenleri özünde saklap bilmezler .

Diýmek (1) sistemanyñ her bir köpeltmek hasylnyñ $\Delta$-nyñ (n-1)! sany goşulyjylarynyñ algebraýik jemdigine hem-de ol köpeltmek hasyllarynyñ sanynyñ n – e deñdigini we ýokarda bellenilen bellige görä, bu köpeltmek hasyllarynyñ 2 sany dürlisiniñ $\Delta$-nyñ şol bir çileni saklap bilmeýänligine

görä n-nji tertipli $\Delta$-kesgitleýjiniñ n! sany goşuljylarynyñ her biri bu köpeltmek hasyllarynyñ birine we diñe birine girip bilýändigini alarys (şunlukda

$\Delta$-nyñ ähli n! sany goşulyjylary bu köpeltmek hasyllarynyñ goşuljylar bolup girýändirler) diýmek indiki deñligi alarys

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in},$$

$$\forall_i (1 \le i \le n) \qquad (2)$$

2-nji formula kesgitleýjini i-nji setiri boýunça dagatmagyñ formulasy diýip aýdylýar . Şeýlelikde subut edilen gatnaşykdan (teoremany setiri boýunça )

kesgitleýjini subudy boýunça dagytmagyñ teoremasy diýilýän indiki tasyklamany alarys.

**<u>Teorema:</u>** Kesgitleýjiniñ islendik setirniñ ähli elementleriniñ özleriniñ algebraýik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyñ jemi bu kesgitleýjiniñ özüne deñdir : Ýagny islendik i nomer üçin

$$\forall 1 \le i \le n \qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$ k 1-den n-e çenli .

Edil şuña meñzeş tassyklama kesgitleýjiniñ sütünleri üçin hem dogrydyr. Bu ýagdaýda alynýan fomulany ýagny $\forall 1 \le m, \le n$

nomer üçin $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{im}A_{im}$

i  1-den  n-e çenli deñligi kesgitleýjini sütüni boýunça dagytmagyñ formulasy diýip atlandyrýarlar. Bu alynan furmulalardan görnüşi ýaly n-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamaklyk birnäçe (n-1)-nji tertipli kasgitleýjileri hasaplamaklyk bilen çalşyrylýandygyny görýäris.Şunlukda saýlanyp alynan setirde ýa-da sütünde (saýlanan) 0-la deñ elementleriñ sany näçe köp bolsa, şonçada bu formulany ulanmak oñaýlydyr. Sebäbi 0-la deñ bolan elementleriñ algebraýik doldurgyçlaryny hasaplamaklygyñ zerurlygy ýokdur. Şunuñ üçinde bu teoremany ulanyp kesgitleýjini hasaplamaga başlamazdan öñürti kesgitleýjiniñ ýönekeý häsiýetlerini ulanmak bilen onuñ käbir setiriniñ ýa-da sütüniniñ mümkin boldugyça köp elementlerini 0-la öwürmäge çalyşýarlar.

Kesgitleýjini setiri boýunça dagytmagyñ teoremasyny özünde hususy hal görnüşinde saklaýan Laplas teoremasy ady bilen belli indiki tassyklamany subutsyz getireliñ.

**Teorema: (Laplas teoremasy)** Goý n-nji tertipli $\Delta$ kesgitleýjide erkin k

$\left(1 \le k \le n-1\right)$ setir (ýa-da k sany sütün) saýlanyp alynan bolsun.Onda bu saýlanyp alynan setirlerde (ýa-da sütünlerde) düzmek mümkin bolan ähli k-njy tertipli minorlaryñ özleri algebraýik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyñ jemi bu kesgitleýjiniñ özüne deñdir.

7.Käbir hususy görnüşdäki kesgitleýjileri hasaplamaklygyñ düzgünleri.

**1.**Eger-de kesgitleýjiniñ baş diagonalyndan bir tarapda ýatan elementleriñ ählisi 0-a deñ bolsa, OA kesgitleýji baş diagonalyñ elementleriñ köpeltmek hasylyna
deñdir.
Ýagyny.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ 0 & a_{22}...a_{2n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$$

Bu düzgüni matematiki induksiýanyñ usulundan peýdalanyp, añsatlyk bilen subut edip bileris. Hakykatdan hem aýdylan tasyklama 2-nji tertipli kesgitleýji üçin dogrydyr.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}0 = a_{11}a_{22}$$

Bu tasyklama tertibi n-1-e çenli bolan ähli kesgitleýjiler üçin dogry hasap edip,
( ýerne ýetýär hasap edip ) , onuñ n-nji tertipli kesgitleýji üçin hem adalatlydygyny gö rkezeliñ . (Induktiw talap diýilýär ) hakykatdan hem berlen kesgitleýjiniñ onuñ 1-nji sütüni boýunça dagytmak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ 0 & a_{22}...a_{2n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & ...a_{2n} \\ 0 & a_{33}...a_{3n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix}$$ deñlik alynar.

Induktiw talaby deñligiñ sag tarapyndaky ( n-1) –nji tertipli kesgitleýji üçin ulansak

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}...a_{2n} \\ 0 & a_{33}...a_{3n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}...a_{nn}$$

deñlik alynar we ol öñ ýanyndaky deñlik bilen tasyklamany subudyny berer.

## 20.Wandermond kesgitleýjisi.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ a_1 & a_2 \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_n^2 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j \le i \le n} (a_i - a_j)$$

Ähli mümkin bolan tapawutlaryñ köpeltmek hasylyna deñdir . Hakykatdan hem tassyklama 2-nji tertipli kesgitleýji üçin ýerne ýetýändigini görmek añsatdyr .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Onda bu tassyklama tertibi (n-1)-e çenli bolan ähli Wandermond kesgitleýjileri
üçin adalatly diýip hasap edip , (induktiw talap) onuñ n-nji tertipli Wandermond
kesgitleýjisi üçin hem dogrudugny görkezeliñ . Bu ýagdaýda aýdylan tassyklamanyñ matematiki induksiýa usulunyñ ýardamynda subudy ýerne ýetirildigi bolardy onda berlen n-nji tertipli Wandermond kesgitleýjisiniñ 2-nji
setirinden onuñ 1-nji setirini $a_1$ –e köpeldip aýyryp, 3-nji setirden bolsa, 2-nji
setirnini $a_1$-e köpeldip aýyryp, we şuña meñzeşlikde ahyr soñunda iñ soñky setirinde onuñ öñ ýanyndaky setirini $a_1$-e köpeldip aýyrmak bilen alarys.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & a_2 \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_n^2 \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} \dots a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & a_2 - a_1 a_n - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 \cdot a_2 a_n^2 - a_1 \cdot a_n \\ 0 & a_2 - a_1 \cdot a_2^2 a_n^3 - a_1 \cdot a_n^2 \\ 0 & a_2^{n-1} a_1 a_2^{n-2} a_n^{n-1} a_1 a^{n-2} \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}^{/} = M_1$$

$$
= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 \ldots a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) \ldots a_n(a_n - a_1) \\ a_2^2(a_2 - a_1) \ldots a_n^2(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \ldots a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ a_2 & a_3 \ldots a_n \\ a_2^2 & a_3^2 \ldots a_n^2 \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} \ldots \end{vmatrix}
$$

$$
= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \cdot \prod (a_i - a_j) = \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_j) \cdot \prod (a_i - a_j) = \prod (a
$$

$$
2 \le j < i \le n \qquad 2 \le j < i \le n \quad 1 \le j < i \le n
$$

kesgitleýjiniñ ýönekeý häsiýetlerinden hem-de subut edilen tassyklamadan

$$
\begin{vmatrix} a_1^{n-1} a_2^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \\ a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 \\ a_1 a_2 \ldots a_n \\ 11 \ldots 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_j - a_i)
$$

deñligiñ ýerne ýetýändigini almak kyn däldir.

Eger-de n-nji tertipli $\Delta$ kesgitleýji $\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_1^{/} \end{vmatrix}$, Bu ýerde $M_1$-k-njy tertipli kwadrat matrisalar $M_2$ –(k$\times$n-k) ölçegli göniburçly matrisa.

0-(n-k$\times$k) ölçegli 0 elementden durýan o-l matrisa görnüşdäki kesgitleýji bolsun. Onda $\Delta = |M_1| \cdot |M_1^{/}|$ deñlik dogrydyr .

8.Islendik sandaky näbellileri bolan çyzykly deñlemeleriñ kwadrat sistemasyny çözmäge Kramer düzgüni.

Goý bize n sany näbellileri bolan çyzykly deñlemeleriñ kwadrat sistemasy.

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

berlen bolsun onuñ näbellileriniñ kafisentlerinden düzülen kesgitleýji

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2)$$

şerti kanagatlandyrýan bolsun . (0-a deñ däl bolsun ) j-nomer $1 \leq j \leq n$ deñsizlikleri kanagatlandyrýan islendik nomer bolsun . 1-nji sistemanyñ 1-nji deñlemesini $A_{1j}$-e 2-nji deñlemesini $A_{2j}$-e we şuña meñzeşlere iñ soñky n-nji deñlemesini bolsa , $A_{nj}$-e köpeldip alynan añlatmalary goşup soñra birmeñzeş

näbelli çilenleri toplaşdyranymyzdan soñ alarys:

$$A_{1j}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + A_{2j}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) + ... + A_{nj}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2$$

$$= b_1A_{1J} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj} \qquad (3)$$

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + ... + a_{n1}A_{nj})x_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + ... + a_{n2}A_{nj}) \cdot x_2 = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} +$$

$$(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}x_nA_{2j} + ... + a_{nn}A_{nj}) \cdot x_n$$

Bize öñden belli bolşuna görä, $\Delta - ny\ \Delta\ \Delta$ n-nji sütüni boýunça dagytsak.

$$\begin{vmatrix} a_{11}...a_{1j}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2j}...a_{2n} \\ a_{n1}...a_{nj}...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

Eger-de bu deñligiñ sag tarapyndaky añlatmada $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$ sanlary $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sanlar bilen çalşyrsak onda alynýan $b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$ añlatma

$\triangle$ -kesgitleýjide onuñ j-nji sütünleriniñ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sanlaryñ sütüni bilen çalşyrlyp kesgitleýjä deñ bolar .

$$\begin{vmatrix} a_{11}...b_1...a_{1n} \\ a_{21}...b_2...a_{2n} \\ a_{n1}...b_n...a_{nn} \end{vmatrix}$$

(çünki bu elementleriñ algebraik doldurgyçlary olaryñ özlerine bagly däldirler ) onda bu kesgitleýjini $\Delta_j$ diýip belgilesek

$\Delta_j$ =$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$ bolar .

Bu diýildigi (4) deñligiñ sag tarapynyñ $\Delta_j$ kesgitleýjä ( $\Delta$ -dan onuñ j-nji sütüni

(1) sistemany azat çilenleriniñ sütüni bilen çalşyrlyp alnan kesgitleýjä ) deñdigini añladýar. 2-nji bir tarapdan bize belli bolan kesgitleýjini sütüni boýunça dagytmagyñ formulasyna görä , islendik k nomer üçin $1 \le k \le n$

$a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\ldots+a_{nk}A_{nk}=\Delta$ bolýandygy bellidir ýöne ýokarda ýazylan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots b_2\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j+}b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj} \quad (5)$$

deñlikde $b_1,b_2,\ldots,b_n$ sanlary $\Delta$ -nyñ başga bir t-nji sütüniñ ( m$\neq j$ )elementleri

bilen çalşyrsak alynýan

$$a_{1m}A_{1j} + a_{2m}A_{2j} + \ldots + a_{nm}A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1m}\ldots a_{1m}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2m}\ldots a_{2m}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots a_{nm}\ldots a_{nm}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

bolýandygyna eýe bolarys .Bu diýildigi ( deñligiñ çep tarapyny okasak) kesgitleýjiniñ 1(m-nji ) sütüniniñ ähli elementleriniñ onuñ başga bir (j-nji ) sütüniniñ degişli elementleriniñ algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyñ jeminiñ 0-la deñdigini añladýar . Şeýlelikde bu alynan gatnaşygy ýokarda getirlen kesgitleýjini sütüni boýunça dagytmagyñ formulasy bilen birleşdirip , indiki görnüşde ýazmak mümkindir .

$$a_{1m}A_{1j}+a_{2m}A_{2j}+...+a_{nm}A_{nj}=\begin{cases}\Delta,\ j=m & bolanda\\ 0,\ j\neq m & bolanda\end{cases} \qquad (6)$$

Şeýlelikde (4) deñlik (6)-njy gatnaşyklary peýdalanmak bilen indiki görnüşde ýazylar.

$$\Delta\cdot x_j=\Delta_j \qquad (7)$$

$$\Delta-\left(a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+...+a_{nj}\cdot A_{nj}\right)$$

Onda $\Delta\neq 0$ diýlip edilen şerte görä, bu deñlikden $X_j$ –näbelli üçin ýeketäk bolan $X_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ bahany taparys. $j(1\leq j\leq n)$ nomeriñ erkindigine görä,

$$X_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad X_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},...,X_n=\frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (8)$$

deñlikler bilen näbellilere ýeketäk bolan bahalar kesgitlenilýär.
(8) deñliklere <u>Kramer formulalary</u> diýilip aýdylýar.Hem-de $\Delta$ kesgitleýjisi 0-a

deñ bolmadyk n-sany näbellileri bolan çyzykly deñlemeleriñ kwadrat sistemasyny çözmekligiñ bu usulyna <u>Kramer düzgüni</u> diýilýär. (8) formulalar bilen tapylýan näbellileriñ bahalarynyñ (1) sistemanyñ çözüwi bolýanolygyny görmek añsatdyr. Hakykatdan hem (1)sistemanyñ islendik i-nji $(1\leq i\leq n)$ deñlemesiniñ çep tarapynda näbellileriñ (8)deñlikler bilen tapylýan bahalaryny

orunlaryna goýsak.

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta}+...+a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta}=a_{i1}\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_nA}{\Delta}$$

$$\cdot\frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+...+b_nA_{n2}}{\Delta}+...+a_{in}\frac{b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+...+b_nA_{nn}}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\{b_1(a_iA_{11}+a_{i2}A_{12}$$

$$+b_2(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+...+a_{in}A_{2n})+...+b_i(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in})+...+b_n(a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A$$

$$=\frac{1}{\Delta}b_i\Delta=b_i.$$

Soñky deñlik näbellileriñ Kramer formulalary boýunça tapylan bahalarynyñ sistemasynyñ i-nji deñlemesini kanagatlandyrýandygyny görkezýär. I-nomeriñ

erkindigine görä, bolsa ol bahalaryñ sistemasynyñ deñlemeleriniñ ählisini kanagatlandyrýandyklaryny görýäris. Indi çyzykly deñlemeler sistemasynyñ hususy ýagdaýyna ýagny n-sany näbellileri bolan bir jynysly çyzykly deñlemeleriñ kwadrat sistemasyna

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0, i=1,2,...,n \qquad (9)$$

seredeliñ. Bu sistemanyñ kofisentlerinden düzülen

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}...a_{1n}\\ a_{21}a_{22}...a_{2n}\\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

bolan halatynda onuñ çözüwini tapmak üçin Kramer formulasyndan peýdalananmyzda olaryñ sanowjylaryndaky $\Delta_i$ kesgitleýjileriniñ i-nji sütünleriniñ diñe 0-lardan durýandyklaryna görä, olaryñ ählisi hem 0-la deñ bolup, näbelliler üçin $x_1=0$, $x_2=0,\ldots,x_n=0$ bolan bahalary taparys. Diýmek n näbellili birjynysly çyzykly deñlemeleriniñ kwadrat sistemasynyñ $\Delta$ kesgitleýjisi 0-la deñ bolmasa, onda ol sistema ýeketäk 0 çozüwe eýedir.

**Bellik:**çyzykly deñlemeleriñ kwadrat sistemasynyñ kesgitleýjisi $\Delta \neq 0$ bolsa onda bu sistema ýeketäk çözüwe eýedir. We ony tapmak üçin Kramer formulalaryndan peýdalanmak mümkin. Kramer düzgünininiñ ähmiýetli talapy diñe $\Delta$-ni hasaplamak arkaly sistemanyñ çözüwiniñ ýeketäkdigi ýa-da däldigi hakynda netije çykaryp bolýar. (Birden $\Delta = 0$ bolaýsa, onda sistemanyñ ýa çözüwiniñ ýokdygy ýa-da onuñ çözüwiniñ ýeketäk däldigi hakynda netijä gelmeli bolarys ) Kramer düzgünininiñ näbellileriñ n sany uly bolan ýagdaýynda n+1 sany n-nji tertipli kesgitleýjileri hasaplamaklygy talap edýändigine görä, onuñ zähmeti köp talap edýän oñaýsyz usulygydygy gelip çikýandyr. (Şu manyda Gauss usuly has oñaýly hasap edilýär ). Ol usul bilen sistemany çözmek n uly bolanda (näbellileriñ sany köp bolanda ) diñe ýekeje n-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamak bilen deñgüýşlidir.

9.Bölüjilik häsietleri.

Sanlar nazarýeti bitin sanlaryñ (diñe bir bitin (+) bolman, bitin (-) sanlaryñ hem-de 0-1 sanlaryñ ) häsiýetlerini öwrenmek bilen meşgulanýan matematikanyñ bölümidir. Eger-de a san başga bir b sana $(b \neq 0)$ galyndysyz bölünýän bolsa , oña b sana kratny diýilip aýdylýar we bu fakyt a/b (b/a ýa-da a:b) görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde a san b sana kratny bolan halatynda käbir q san bar bolup, a=b·q deñlik ýerne ýetýändir. Bu ýagdaýda q sana a-ny b sana bölenmizde ýetýän paý diýlip aýdylýar.Indi subut etmesi kyn bolmadyk indiki tasyklamalary getireliñ.

1 .a b sana kratnyý bolanda , b san bolsa, s sana kratnyý bolanda , a san s sana
kratnydyr .
2. a +b +…+s=0 p+q+…+t deñlikde haýsy hem bolsa, bir goşulyjydan başgasy k sana bölünýän bolsa , onda şol goşulyjy hem bu k sana bölünýändir.
Hakykatdan hem bu tassyklamalaryñ 1-njisiniñ subudy a=bq we b=s·r

gatnaşyklardan $a=bq=s(r \cdot q)=st$ deñligiñ gelip çykýanlygyndan 2-njisiniñ subudy bolsa, eger-de bu deñlikde p goşulyjydan galanlary k sana kratnyý bolan halatlarynda $a=a_1 \cdot k$, $b=b_1 \cdot k,\ldots$, $s=s_1 \cdot k$, $q=q_1 \cdot k$, …, $t=t_1 \cdot k$. deñliklerden $p=a+b+\ldots+s-q-\ldots-t=a_1 \cdot k+b_1 \cdot k+\ldots+s_1 \cdot k-q_1 \cdot k-\ldots-t_1 \cdot k=k(a_1+b_1+$
$+\ldots+s_1-q_1-\ldots-t_1)=k \cdot m$ . Bolýandygyndan gelip çykýandyr.
Galyndyly bölmegiñ algaritimi (algorifmi ) diýilip atlandyrylýan indiki tassyklama dogrudyr.

**Teorema:** Islendik a sany polažitel b sanyñ üsti bilen ýeketäk usulda $a=b \cdot q+r$
$0 \le r < b$ (1) görnüşde añladylýandyr. Hakykatdan hem şeýle görnüşdäki ýazgynyñ biriniñ $b \cdot q$ köpeltmek hasyly a-dan uly bolmadyk b sanyñ kratnylarynyñ ulusyna deñ diýip alsak , alynjakdygy düşnüklidir . Bu ýazgynyñ
ýeketäkdigini subut etmek üçin bolsa , tersinden guman ederis.

Goý 1-nji ýazgydan başgada $a=b \cdot q_1+r_1$ $0 \le r_1 < b$ (2) 2-nji ýazgy bardyr diýip guman edeliñ . Onda olaryñ 1-njisinden 2-njisini tarapma-tarap ,
aýyryp , $0=b(q-q_1)+(r-r_1)$ (3) 3-nji deñligi alarys . Bu deñligiñ çep tarapynyñ
(0-lyñ) hem-de sag tarapynyñ 1-nji goşulyjysynyñ b sana kratnydyklaryna görä,
ýokarda subut edilen tasyklamadan sag tarapynyñ 2-nji goşulyjysynyñ hem b sana kratny bolmalydygyny alarys. Ýöne talaba görä, $r-r_1$ tapawut diñe 0-a deñ bolan halatynda b sana kratny bolar . Diýmek $r-r_1=0$ bolmalydyr . Onda (3)-nji
deñlikden $b(q-q_1)=0$ deñlik alynyp , $q-q_1=0$ bolmalydygy alynar. Şeýlelikde (1)
we (2) ýazgylardaky $q=q_1$ $r=r_1$ gatnaşyklary kanagatlandyrýan sanlardyr. Bu diýildigi (1) we (2) deñlikleriñ birmeñzeşdiklerini añladýar. Teorema subut edildi.

(1) formuladaky q sana a-ny b sana bölenimizdäki doly däl paý , r sana bolsa
bu bölünmekdäki galýan galyndy diýilip , aýdylýar. Mysal işlenende a sana (+)

bolanda q sany tapmak üçin ýetmezi bilen , a san (-) bolan halatynda -a sany
b sana artykmajy bilen q we r sanlary tapýarlar.

**Iñ uly umumy bölüji.**

Biz geljekde sanlaryñ diñe (+) bölüjilerine seretjekdiris. Eger-de a san b sana kratny bolsa, biziñ bilşimize görä b san onuñ bölüjisidir. Eger-de käbir s san a we b sanlaryñ ikisiniñ hem bölüjisi bolsa , onda oña bu sanlaryñ umumy bölüjisi diýip aýdylýar. a we b sanlaryñ umumy bölüjileriniñ iñ ulysyna ol sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisi diýlip aýdylýar,we ol (a,b) görnüşde belgilenýär.

Eger-de iki a we b sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisi 1-e deñ bolsa , onda olara özara ýönekeý sanlar diýilýär. Mysal üçin: (9,8)=1 bolanlygyna görä 9 we 8 sanlar özara ýönekeýdirler .

$a_1$, $a_2$, …,$a_n$ sanlara jübüt-jübütden (ýa-da ikibir) ýönekeý diýilýär. Eger-de olaryñ islendik iki sanysy özara ýönekeý sanlar bolsalar. Başgaça aýdanyñda $\forall 1 \leq i \neq j \leq n$ nomer üçin ($a_i$ ,$a_j$)=1 sanlaryñ iñ uly bölüjisi 1-e deñ bolsa ) sanlaryñ berlen toplumuna , jübüt-jübütden ýönekeý sanlar diýilýär . Mysal üçin : 8,12,15 sanlar jübüt-jübütden ýönekeý däldirler sebäbi (12,15) =3 (8,12)=4 bolýandyrlar.

Ýokardaka meñzeşlikde özara ýönekeýlik düşünjesi 2-den köp sandaky sanlar üçin hem kesgitlenändir. Ýagny ($a_1$,$a_2$,…,$a_k$)=1 (sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisi 1-e deñ bolsa) onda bu sanlara özara ýönekeý diýip aýdylýar. Mysal üçin: Ýokarda berlen 8,12,15 sanlar özara ýönekeýdirler. Hakykatdan hem ol sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisi 1-e deñdir .

Kesgitlemelerden görnüşi ýaly berlen sanlar . Jübüt-jübütden ýönekeý bolsalar , onda olaryñ özara ýönekeý bolçakdyklary düşnüklidir . Ýöne iki sany san üçin özara ýönekeýlik hem-de jübüt-jübütden ýönekeýlik düşünjeleri gabat gelýändirler.

Indi 2 sany sanyñ umumy bölüjileri üçin dogry bolan käbir häsiýetleri belläp

geçeliñ .
1) Eger-de a san b sana kratnyý bolsa , onda a we b sanlaryñ umumy bölüjileriniñ toplumy b sanyñ bölüjileriniñ toplumy bilen gabat gelýändir we hususan (a,b)=b deñlik dogrudyr. Hakykatdan hem a sanyñ b sana kratnydygyna görä , (a b-he galyndysyz bölünýän bolsa,) b-niñ her bir bölüjisi
a sany hem bölýändir. Onda b sanyñ her bir bölüjisi a we b sanlar üçin umumy
bölüjidir hem-de tersine a we b sanlaryñ her bir umumy bölüjisi b sanyñ bölüjisidir. Diýmek a we b sanlaryñ umumy bölüjileriniñ toplumy bilen b sanyñ bölüjileriniñ toplumy gabat gelýändirler. Hususan bu toplumlaryñ iñ uly elementleri bolan (a,b) we b sanlar özara deñdirler. (a we b sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisi).
2)Eger-de a=bq+s bolsa , onda a we b sanlaryñ umumy bölüjileriniñ toplumy
bilen b we s sanlaryñ umumy bölüjileriniñ toplumy gabat gelýär. Hususan
( a,b)=(b,s) (a bilen b-niñ iñ uly umumy bölüjisi b bilen s-iñ iñ uly umumy bölüjisi deñdir.) Hakykatdan hem bölüjiligiñ ýokarda öwrenilen häsiýetlerinden
a bilen b-niñ umumy bölüjisine s san hem bölünýändir. 2-nji bir tarapdan b-niñ
hem-de s-niñ umumy bölüjisine şol häsiýete görä , a san hem bölünýändir .
Diýmek , a we b sanlaryñ umumy bölüjileriniñ toplumy bilen b we s sanlaryñ
umumy bölüjileriniñ toplumy gabat geländirler. Şeýlelikde bu toplumlaryñ iñ uly elementleri bolan (a,b) we (b,s) sanlar özara deñdirler.
a we b sanlaryñ iñ uly umumy B-sini tapmak üçin Ýewklid algaritmi ady bilen belli indiki düzgünden peýdalanmak mümkindir.
Goý a we b (+) sanlar bolsun (0-a deñ däl , 0-dan uly , 0-la deñ bolsada (-)
sanlar bolmasyn ) onda galyndyly bölmegiñ algaritiminden peýdalanyp olaryñ

birini beýlekisine , Mysal üçin : a sany b sana bölüp alarys. $a=bq_1+r_1$ soñra

$0 \le r_1 < b$ $r_1 \ne 0$ hasap etmek bilen b-ni $r_1$-iñ üsti bilen ýokardaka meñzeşlikde añladalyñ . $b= r_1 q_2+r_2$ $0 \le r_2 < r_1$ .

Eger-de $r_2 \ne 0$ bolsa, $r_1$-i galyndyly bölmegiñ algaritiminden peýdalanyp $r_2$-niñ üsti bilen añladarys. $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ $0 \le r_3 < r_2$ $r_3 \ne 0$ bolanda şu prosesi dowam etmek bilen ahyr soñunda bölünmäniñ galyndysyz ýerine ýetýän ýagdaýyna eýe bolarys.(çünki bu yzygiderli bölünmelerdäki $r_1,r_2,r_3,\dots$ galyndylar birsyhly kiçelýärler . Şeýlelikde olaryñ (-) bolup bilmeýändiklerine
görä , tükenikli gezek bölünmelerden soñ , galyndysyz bölünmä eýe bolunar).

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$$
$$0 \le r_k < r_{k-1.} \quad r_{k-1} = r_k q_{k+1}$$

galyndysyz bölünýär.

Şeýle usul bilen tapylan, iñ soñky 0-dan tapawutly $r_k$ galyndy a we b sanlaryñ
iñ uly umumy bölüjisidir . Muny subut etmek üçin ilki bilen $r_k$ –nyñ a we b sanlaryñ umumy bölüjisi bolýandygyny soñra onuñ bu a we b sanlaryñ islendik umumy bölüjisine galyndysyz bölünýändigini (kratnydygyny ) görkezmelidir.

Hakykatdan hem soñky deñlikden $r_{k-1}$ sanyñ $r_k$-a kratnydygyna görä, öñ ýanyndaky deñlikden $r_{k-2}$ we $r_{k-1}$ sanlaryñ hem $r_{k-a}$ sana bölünýändiklerini ,
başgaça aýdanyñda $r_k$-nyñ $r_{k-1}$ we $r_{k-2}$ sanlaryñ umumy bölüjisidigini taparys. Onda şu pikir ýöretmeleri dowam etmek bilen alynan deñliklerde ýokarlygyna
hereket edip , $r_1$ we $r_2$ sanlaryñ hem , şeýle hem b we $r_1$ sanlaryñ , ahyr soñunda
a we b sanlaryñ umumy bölüjisi bolup, $r_k$ sanyñ hyzmat edýändigini göreris.

Indi käbir d san a we b sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisi bolsa , onda ol b we $r_1$

sanlaryñ hem iñ uly umumy bölüjisidir . 3-nji deñlikden onuñ $r_1$ we $r_2$ sanlaryñ hem iñ uly umumy bölüjisidigini şu pikir ýöretmeleri alnan deñliklerde ýokardan aşaklygyna dowam etmek bilen d sanyñ $r_{k-2}$ we $r_{k-1}$ $r_{k-1}$-iñ $r_k$ galynda kratnydygyna görä bolsa , şol umumy bölüjiniñ $r_k$-nyñ özi bilen gabat
gelýändigini taparys.

Indi netijeler añsatlyk bilen alynýandyrlar.

1) a we b sanlaryñ umumy bölüjileriniñ toplumy a we b sanlaryñ iñ uly umumy bölüjisiniñ bölüjileriniñ toplumy bilen gabat gelýändir.

2) Bu iñ UUB-i Ýewklidiñ algaritimindäki iñ soñky 0-dan tapawutly $r_n$ galynda deñdir.

Indiki tassyklamalar añsatlyk bilen subut edilýändirler.

**Teorema:**

1) Islendik m(+) san üçin (a·m,b·m)=m(a,b)
2) Eger-de b=(a,b) (delta a bilen b sanlaryñ UUB-sine deñ bolsa) onda

$\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a,b)}{\delta}$ deñlik dogrudyr. Hususan

$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=\frac{(a,b)}{(a,b)}=1$ iñ UUB-si.

**Subudy:** Ýewklid algaritimindäki yzygiderli bölünmelerde ähli deñlikleri m sana köpeltsek şol gatnaşyklar a·m, b·m, $r_1$·m, $r_2$·m, $r_n$·m köpeltmek hasyllary üçin alynarlar . Bu diýildigi täze alnan gatnaşyklardaky iñ soñky 0-a deñ bolmadyk galyndynyñ m·$r_n$ köpeltmek hasylyna deñdigini añladýar. Bu diýildigi
a·m we b·m köpeltmek hasyllarynyñ iñ UUB-siniñ m·$r_n$ sana deñdigini ,Ýagny

$(a\cdot m,b\cdot m)=r_n\cdot m=m(a,b)$ deñligiñ dogrudygyny añladýandyr.

Teoremanyñ tassyklamasynyñ 2-nji böleginiñ subudyny almak üçin indiki gatnaşyklaryñ dogrudyklaryny görmek ýeterlikdir.

$$(a,b)=\left(\delta\cdot\frac{a}{\delta},\delta\frac{b}{\delta}\right)=\delta\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right) \qquad \left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a,b)}{\delta}.$$

Iñ UUB-jiniñ indiki häsiýetleri sanlar nazarýetiniñ meseleleri öwrenilende ähmiýetli ulanyşlary eýedirler.

**Teorema:** Eger-de $(a,b)-1$ $\quad onda \quad (as,b)=(s,b)$ iñ UUB-sine deñdir.

Hakykatdan hem (as,b) kesgitlemä görä as we b sanlaryñ UB-leriniñ iñ ulysydyr. Onda as we b sanlaryñ UB-siniñ as we b˙s sanlaryñ hem UB-si bolýandygyna görä,onda bu köpeltmek hasyllarynyñ iñ UUB-si (as,bs)=s(a,b)=s
bolýandygyna görä s san hem as we b sanlaryñ her bir UB-sine bölünýändir .
Diýmek bu UB –ji s we b sanlar üçin hem UB-i bolup hyzmat edýändir. Şeýlelikde as we b sanlaryñ UB-leriniñ toplumy, s we b sanlaryñ UB-leriniñ
toplumyny berýändir . 2-nji bir tarapdan s we b sanlaryñ her bir UB-si a˙s-ni hem bölýändir. Onda ol as we b sanlar üçin UB-dir . Şeýlelikde as we b sanlaryñ
UB-leriniñ toplumy s we b sanlaryñ UB-leriniñ toplumy bilen gabat gelýändir.
Onda bu toplumlaryñ iñ uly elementleri özara deñdirler.

**Teorema:** Eger-de (a,b)=1 bolsa, hem-de as we b sana bölünýän bolsa , onda s san b sana bölünýändir.

**Subudy:** as köpeltmek hasylynyñ b sana kratnylygyndan hem-de s b köpeltmek
hasylynyñ hem b sanakratnylygyndan b sanyñ as we bs köpeltmek hasyllary üçin UB-ji bolup hyzmat edýänligini has dogrusy ol köpeltmek hasyllarynyñ
UB-sidigini görýäris . Onda ýokarda getirlen tassyklamadan (as,bs)=s (a,b)=s
sanyñ b sana bölünýändigine eýe bolarys .

**Teorema:** $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sanlaryñ her biri $b_1,b_2,\ldots,b_m$ sanlaryñ her biri bilen özara
ýönekeý bolsa , onda $(a_1a_2\ldots a_n,b_1b_2\ldots b_n)=1$ olaryñ köpeltmek hasyllary hem ýönekeýdir.

**Subudy:** Hakykatdan hem ýokarda subut edilen tassyklamalardan indiki deñlikleriñ añsatlyk bilen alynýandygyny görmek kyn däldir. $\forall k \quad nomer$

üçin $(a_1a_2...a_n, b_k) = (a_2a_3...a_n, b_k) = (a_3...a_n, b_k) = ... = (a_n, b_k) = 1$
2-nji bir tarapdan $A = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ belgiläp $(b_1b_2...b_m, A) = (b_2b_3...b_m, A) = (b_3...b_m, A) = ... = (b_m, A) = 1.$

Eger-de 2-den köp sandaky sanlaryñ iñ UUB-sini tapmaklyk talap edilýän bolsa, onda ol 2 sany sanyñ iñ uly UUB-sini tapmaklyga syrykdyrylyp , hasaplanýar. Hakykatdan hem eger-de $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sanlaryñ iñ UUB-sini tapmaly bolsa ilki bilen $(a_1,a_2)=d_2$ (olaryñ ilkinji 2-siniñ iñ UUB-sini tapýarys) $d_2$-ni tapýarys, soñra $(d_2,a_3)=d_3$ we şuña meñzeşlikde dowam etmek bilen ahyr soñunda $(d_{n-2},a_{n-1})=d_{n-1}$ tapyp, $(d_{n-1},a_n)=d_n$ $d_n$-san tapylar . Bu $d_n$ san berlen sanlaryñ IUUB-sidir. Ýagny $d_n=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

**Iñ kiçi umumy kratny.**

a we b sanlaryñ 2-sinede bölünýän sana bu sanlaryñ umumy kratnysy diýilip
aýdylýar. Umumy kratnylaryñ iñ kiçi (+) –ne berlen sanlaryñ iñ kiçi umumy kratnysy diýilýär. a we b sanlaryñ iñ kiçi umumy kratnysy köpleniç [a,b]
görnüşinde belgilenýär . Mysal üçin: 5 we 6 sanlaryñ iñ KUK-sy 30 [5,6]=30 .

Biz geljekde diñe (+) sanlaryñ umumy kratnylaryna seretjekdiris. Ilki bilen a bilen b sanlaryñ UK-laryny tapalyñ.

## 21.Bazisleriň arabaglanşygy. Wektorlaryň kordinatalarynyň özgertmesi.

Goý n ölçegli R giñişlikde iki sany $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (1) $e'_1, e_2', .. e_n'$ (2) bazisler berlen bolsun. Onda bazisyň kesgitlemesinden (2) sistemanyň her elementi (1) sistemanyň elementiniň üsti bilen çyzykly aňladylmalydyr. Ýagny islendik $1 \le i \le n$ nomer üçin $e_i' = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j} e_j$ (3)

ýerine ýetýändir. Eger-de bu çyzykly aňlatmalaryň koeffisientlerinden

$$T=\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12}\ldots\tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22}\ldots\tau_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2}\ldots\tau_{nn} \end{pmatrix}$$ matrissany ol (1) bazisden (2) geçiş

matrissasy diýip aýdylýar. Şeýlelikde $e=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_n \end{pmatrix}$, $e''=\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_n' \end{pmatrix}$

belgilemeleri girizmek bilen

(1) , (2) bazisleriň hem-de T geçiş matrissanyň arasyndaky baglanşyklary (3) deňliklere görä

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \ldots \\ e_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12}\ldots\tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22}\ldots\tau_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2}\ldots\tau_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}$$ (4) görnüşinde aňladylmak mümkindir. Ýa-da belgileme

ler esasynda (4) deňligi $e'=Te$ ýaly ýazyp bileris. Eger-de (2)bazisden (1) bazise geçiş matrissasyny T' bilen belgilesek onda ýokardaka meňzeşlikde $e=T'e'$ deňligi hem almak mümkindir. Onda bu deňligiň (1)-den alynýan aňlatmany beýlekide goýmak bilen $e'=Te=TT'e'=(TT').e'$ (5) hem-de $e=T'e'=T'Te=(T'T)e$ (6) deňliklere eýe bolarys. Bu ýerden basis elementleriň baglanşyksyzlyk häsiýetini göz öňünde tutmak bilen T T'=T' T=E (7) deňliklerden $T'=T^{-1}$ (8)

(2)-den (1)-e geçiş T' matrissanyň (1)-den (2)-ä geçiş T matrissasynyň tersi bolýanlygyny alarys.

Goý R giňişligiň islendik $a$ wektory üçin (1) we (2) bazislere görä $a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' e_i'$ dagytmalar ýerine ýetýän bolsun. Bu ýerden

hem-de ýokarda kesgitlenen geçiş matrissadan peýdalanmak bilen alarys.

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' e_i'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\sum_{j=1}^{n}\tau_{i_j} e_j=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\tau_{i_j})e_j$$

Şeýlelikde ýokarda ýazylan deňlikleri (1) bilen deňeşdirip taparys.

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\tau_{i_j}\ ,\qquad j=1,2,\dots,n$$

Şeýlelikde dogry bolan indiki deňliklere eýe bolarys

$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1',\alpha_2',\dots,\alpha_n')T$ ýa-da bu ýerden deňligiň iki tarapyny hem $T=T^{-1}$ tersine geçiş matrissasyna köpeltmek bilen taparys.

$$(\alpha_1',\alpha_2',\dots,\alpha_n')=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)T^{-1}$$

## 22.Çyzykly özgertmeler

Eger-de $n$ ölçegli hakyky $R$ çyzykly giňişliginiň islendik $a$ elementine

onuň käbir $a'$ elementini degişli edýän düzgün berlen bolsa bu düzgüne $R_n$ giňişligiň özgertmesi duýlip aýdylýar.

Bu ýagdaýda $a'$ elemente $a$-nyň berlen özgertmä görä şekili (obrazy) diýilýär. $a$ elemente $a'$-yň asly (proobrazy) diýilýär.

Eger-de özgertmäni $\varphi$ bilen belgilesek asyl $a$ element bilen onuň $a'$ şekilini $a' = a\varphi$ görnüşinde baglanýarlar. Eger-de $R_n$ çyzykly giňişligiň $\varphi$ özgertmesi üçin

1. islendik $a, b \in R_n$ bolanda $(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi$
2. islendik $a \in R_n$ *we* $\alpha$-hakyky san $(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi)$ bolsa talaplar ýerine ýeten halatynda oňa çyzykly özgertme diýilýär. Kesgitlemeden çyzykly giňişligiň çyzykly özgertmesi üçin bu giňişligiň islendik tükenikli sandaky elementiniň çyzykly kombinasiýasynyň obrazynyň şol elementleriň bu özgertmä görä şekilleriniň şol koeffisientler bilen alynan çyzykly kombinasiýasyna deň bolýandygyny görmek kyn däldir. Ýagny islendik $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R_n$ *we* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ hakyky sanlar üçin $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k)\varphi = \alpha_1(a_1\varphi) + \alpha_2(a_2\varphi) + \ldots + \alpha_k(a_k\varphi)$
   bu deňligiň subudyny almak üçin ilki bada kesgitlemäniň 1-nji talapyndan soňra 2-jiden peýdalanmak ýeterlikdir. $R_n$ çyzykly giňişligiň çyzykly özgertmesine mysal bolup bu giňişligiň her bir $a$ elementini onuň özüne şekillenýän, ýagny $a\varepsilon = a$ deňligi kanagatlandyrýan $\varepsilon$ tojdestwen özgertmä hem-de bu giňişligiň islendik $a$ elementini onuň 0 elementine şekillenýän ýagny $a\omega = 0$ deňligi kanagatlandyrýan $\omega$ 0- özgertme diýip atlandyrylýan özgertmä mysal bolup bilerler .Hakykatdan hem bularyň ilkinjisiniň çyzyklydygyny barlalyň. Tojdestwen özgertmäniň kesgitlemesinden islendik $a_1, a_2 \in R_n$

1. $(a_1 + a_2)\varepsilon = a_1 + a_2 = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon$
2. islendik $a \in R_n$ üçin $\alpha$ hakyky san bolanda $(\alpha . a)\varepsilon = \alpha . a = \alpha(a\varepsilon)$

şeýle hem $R_n$ giňişliginiň islendik $\varphi$ çyzykly özgertmesi üçin $0\varphi = 0$

hem-de her bir a element üçin $(-a)\varphi = -(a\varphi)$ deňdir.

Hakykatdan hem bu tassyklamalaryň subudyny almak üçin çyzykly özgertmäniň 2-nji talabynda ilki bilen $\alpha = 0$ soňra bolsa $\alpha = -1$ saýlap almak ýeterlikdir. Ýokarda aýdylanlardan eger-de $e_1, e_2, \dots, e_k$ $R_n$ çyzykly giňişligiň käbir bazisy bolsa, onda bu giňişligiň her bir a elementiň $\varphi$ çyzykly özgertmä görä obrazy bu bazis elementleriň $\varphi$ özgertmä görä $e_i.\varphi$ obrazlarynyň a elementiň bu bazise görä kordinatalar bilen alynan çyzykly kombinasiýasy gornüşinde aňladylar. Başgaça aýdanyňda çyzykly giňişligiň çyzykly özgertmesi $\varphi$ $e_i\varphi$ $i = 1,2,\dots,n$ bazis obrazlarynyň üsti bilen ýeke-täk kesgitlenýär.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$a\varphi = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi)$$

Indiki tassyklamany subutly getireliň.

**Teorema.** Çyzykly giňişligiň $\forall n$ wektorynyň sistemasy üçin ýeke-täk çyzykly özgertme bar bolup, bu wektor käbir bazisyň wektorynyň bu özgertmä görä obrazlarydyr.

**Subudy.**

Eger-de $c_1, c_2, \dots, c_n$ $n$ ölçegli çyzykly giňişligiň elementleri diýsek olary käbir $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazise görä dagytmak bilen alarys.

$C_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} e_j \quad i = 1,2,\dots,n$ bu deňlikleriň $\alpha_{i_j}$ koeffisientlerinden $A = (\alpha_{i_j}) \quad 1 \le i, j \le n$ $n-$nji tertipli kwadrat matrissany mümkindir.

Diýmek $n$ ölçegli çyzykly giňişligiň ähli çyzykly özgertmelei bilen ähli $n-$nji tertipli kwadrat matrissalaryň köplügi arasynda özara bir belgili

Degişlilik bardyr. Ýöne bu degişlilik saýlanan bazise baglydyr. Bu ýagdaýda A matrissa çyzykly $\varphi$ özgertmäniň $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisde kesgitlenýär diýlip aýdylýar. Eger-de

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_n \end{pmatrix}, \quad e\varphi = \begin{pmatrix} e_1\varphi \\ e_2\varphi \\ e_n\varphi \end{pmatrix}$$ belgilemeleri girizsek $e\varphi = Ae$ eýe bolarys.

Giňişligiň a elementi üçin $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ , $a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi)$ bolýandygyndan $a\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(e\varphi)$ bolýandygyny alarys. Onda ýokarda ýazylan deňliklerden $a\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)Ae = [(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)A]e$

Deňligiň dogrudygyny alarys. Şol bir bazisde $a\varphi$ wektorlaryň kordinatalarynyň $a$ kordinatalarynyň setiriniň sagyndan $\varphi$ çyzykly özgertmäniň A matrissasyna köpeldilmegine deňdir.

Mysal. Goý üç ölçegli giňişlikde $\varphi$ çyzykly özgertmesi

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrissa bilen berilýän bolsun. Eger-de $a=5e_1+e_2-2e_3$ bolsa

$$(5\ 1\ -2).\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}=(-9\ 16\ 0) \quad \text{bolup} \quad a\varphi=-9e_1+16e_2$$

bolýandygyny alarys .Ýokarda aýdylanlardan eger-de $(e),\ \vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n,\ (e'),\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n'$ $R_n-n$ őlçegli çyzykly giňişligiň bazisleri bolanda

$$e=\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \quad ,e'=\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix}$$ belgilemelerden peýdalansak hem-de

$$e'=Te$$

hem-de $e\varphi=Ae\ ,\ e'\varphi=A'e'$ bolanlarynda

$$A'=TAT^{-1}\quad ,\quad A=T^{-1}A'T \quad (*)$$

deňlikler aňsatlyk bilen alynýar.

Kesgitleme: Eger-de käbir aýratyn däl Q matrissa bilen

$$C=Q^{-1}BQ$$

Deňligi kanagatlandyrýan B we C matrissalar bar bolsalar olara meňzeş matrissa diýlip aýdylýar. Şunlukda C matrissasyna B-den Q

Matrissanyň ýardamynda transfonirlenip alynýandyr.

Diýmek ýokarda alnan (*) gatnaşyklardan $\varphi$ özgetmäniň dürli bazislerdäki matrissasynyň özara meňzeşdiklerini alarys, has dogrusy $\varphi$

çyzykly özgertmäniň $e'$ bazisyny $A'$ matrissasy bu özgertmäniň e bazisini A matrissasyndan e' bazisden e bazise geçiş matrissasy arkaly transformirlenip alynýandyr.

## 23.Çyzykly özgertmeleriň üstüde amallar

Eger-de $\varphi we \psi$ $R_n -$çyzykly giňişligiň käbir çyzykly őzgertmesi diýsek olaryň $\varphi+\psi$ jemi diýilip bu giňişligiň islendik a elementi üçin $a(\varphi+\psi)=\vec{a}\varphi+\vec{a}\psi$ deňlik bilen kesgitlenýän $\varphi+\psi$ őzgetmä aýdylýar . Şeýle usul bilen kesgitlenýän $\varphi+\psi$ őzgertmäniň çyzykly bolýandygyny gőrmek kyn däldir .Hakykatdan hem giňişligiň islendik a,b elementleri hem-de her bir $\alpha$ hakyky san üçin indiki deňlikler aňsatlyk bilen alynýandyr .

$$(\vec{a}+\vec{b})(\varphi+\psi)(\vec{a}+\vec{b})\varphi+(\vec{a}+\vec{b})\psi=\vec{a}\varphi+\vec{b}\varphi+\vec{a}\psi+\vec{b}\psi=\vec{a}(\varphi+\psi$$

$$+\vec{b}(\varphi+\psi)$$

$$(\alpha\vec{a})(\varphi+\psi)=(\alpha a)\varphi+(\alpha a)\psi=\alpha(a\varphi)+\alpha(a\psi)=\alpha[a\varphi+a\psi]=\alpha$$

$$+\psi)]$$

K.$\varphi$ çyzykly őzgertmäniň k hemişelik sana kőpeltmek hasyly diýilip islendik a elementi üçin $a(k\varphi)=k(a\varphi)$ deňligi kanagatlandyrýan $k\varphi$ őzgertmä aýdylýar .Bu $k\varphi$ őzgertmäniň hem çyzyklydygyny aňsatlyk bilen alarys.Hakykatdan hem bu tassyklama indiki deňlikden aňsatlyk bilen gelip çykýandyr

1. islendik a,b elementler üçin $(a+b)(k\varphi)=[k(a+b)\varphi]=k[a\varphi+b\varphi]=k(a\varphi)+k(b\varphi)=a(k\varphi)$ çyzykly őzgertme
2. islendik $\alpha$ hakyky hemişelik san üçin $(\alpha a)(k\varphi)=k[(\alpha a)\varphi]=k[\alpha(a\varphi)]=\alpha[k(a\varphi)]=\alpha[a(k\varphi)]$ çyzykly őzgertme .

Indi $\varphi\, we\, \psi$ çyzykly őzgertmeleri käbir $e_1,e_2,\ldots,e_n$ bazisde degişlilikde $A=(a_{i_j})$ $we$ $B=(b_{i_j})$ matrisalar bilen berlen bolsun diýeliň .Onda bize belli bolşuna gőrä $e\varphi=Ae\; we\; e\psi=Be$ deňlikler ýerine ýetýändirler hem-de olardan islendik i nomer üçin

$$e_i=(\varphi+\psi)=e_i\varphi+e_i\psi=\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}e_j+\sum_{k=1}^{n}b_{i_k}e_k=\sum_{j=1}^{n}(a_{i_j}+b_{i_j})e_j$$

gelip çykar.

Ýagny islendik i nomer üçin $e_j(\varphi+\psi)=\sum_{j=1}^{n}(a_{i_j}+b_{i_j})e_j$ deňlikden $e(\varphi+\psi)=(A+B)e$ deňligiň ýerine ýetýändigini alarys .Şeýlelikde iki sany çyzykly őzgertmeleriň jeminiň matrisasy bu őzgertmeleriň şol bazisdäki matrisalaryň jemine deňdir .Edil şuňa meňzeşlikde bu çyzykly őzgertmeleriň $\varphi\psi$ kőpeltmek hasyly üçin tapylyp islendik i $e_i\cdot(\varphi\cdot\psi)=(e_i\cdot\varphi)\psi$ bolar .Onda bu őzgertmeleriň berlen bazisdäki A we B matrisalarynyň üsti bilen indiki deňligiň ýerine ýetýändigini alarys.

$$e_i(\varphi\cdot\psi)=(e_i\cdot\varphi)\psi=(\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}e_j)\psi=\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}(e_j\psi)=\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}(\sum_{k=1}^{n}b_{j_k}e_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}b_{j_k})e_k$$

ýagny $e_i(\varphi \cdot \psi) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j} b_{j_k})e_k$ deňlige eýe bolarys. Bu ýerden başgaça $e(\varphi \cdot .\psi) = (A \cdot B)e$. Diýmek iki sany çyzykly özgertmeleriň köpeltmek hasylynyň matrissasy bu köpelijileriň şol bazisdäki matrissalarynyň köpeltmek hasylyna deňeşdirerliklidir. Edil ýokardakylara meňzeşlikde çyzykly özgertmänň hakyky sana köpeltmek hasylynyň matrissasynyň hem bu özgertmäniň şol bazisdäki matrissasynyň bu hemişelik sana köpeltmek hasylyna deňdigini alarys.

Ýagny $|e(k\varphi) = (kA)e|$

## 24.Çyzykly özgertmäniň ýadrosy we bahalar köplügi

Goý n ölçegli $R_n$ çyzykly giňişlikde $\varphi$ çyzykly özgertme berlen bolsun. Eger-de L bu giňişligiň erkin bir bölek giňişligi diýsek bu bölek giňişlikden alynan ähli wektorlaryň bu $\varphi$ özgertmä görä obrazlarynyň $L_\varphi$ köplügi hem $R_n$-niň käbir bölek giňşligini berýändir. Hususan $R_n\varphi - R_n$ giňişligiň ähli elementleriniň $\varphi$ özgertmä görä obrazlarynyň köplügi hem bölek giňişlik bolup ol $\varphi$ özgertmäniň bahalarynyň köplügi diýip atlandýrylýar. $(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi$ bellibolşuna görä $\varphi$ çyzykly özgertmäniň dürli bazislerini matrissalary meňzeşler we olaryň ählisi birmeňzeş ranga eýedir. Bu sana $\varphi$ çyzykly özgertmäniň rangy diýlip aýdylýar. Indiki teoremany subutsyz getireliň.

**Teorema.** $\varphi$ çyzykly özgertmäniň bahalar köplüginiň ölçegi bu özgertmäniň rangyna deňdir. $(\dim(R_n\varphi) = r(\varphi))$

Şeýle hem $\varphi$ çyzykly özgertmä görä O wektoryň şekiliniň ýene-de O wektor bolýandygyny bilýäris. Diýmek $R_n$ giňişligiň bu $\varphi$ çyzykly özgertmede O ranga şekillendirýän ähli wektorlaryň $N\varphi$ köplüginiň baş däldigini kesgitlemä görä bolsa onuň bolek giňişligini berýändigini alarys. Bubölek giňişlikde $\varphi$ şzgertmäniň ýadrosy diýip aýdylýar. Onuň ölçegine bolsa bu özgertmäniň defekti diýip aýdylýar. Indiki tassyklamany subutsyz getireliň.

**Teorema.** $R_n$ giňişligiň islendik $\varphi$ çyzykly özgertmäniň rangy bilen

defektiniň jemini giňişligiň n ölçegine deňdir.

**Kesgitleme.** $R_n$ giňişligiň $\varphi$ çyzykly özgertmesi özara deňgüýçli indiki

şertleriň islendigini hem kanagatlandyrsa oňa aýratyn däl diýilýär.

1) $r(\varphi) = n$ bolsa
2) $\varphi -$niň bahalar köplügi bolup $R_n$ giňişligiň özi hyzmat edýän bolsa
3) $\varphi$-niň defekti 0-a deň bolsa aýratyn däl çyzykly özgertmäniň kesgitlemesinden onuň kesgitleýjisi görnüşinde çyzykly özgertmeden edilýän talaplary gīrmek mümkindir. Mysal üçin $\varphi$ çyzykly özgertmäniň aşakda getirjek 4,5,6 talaplaryň islendik birini kanagatlandyran halatynda ayratyn däl özgertme bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir.
4) $R_n$ çyzykly giňişliginiň dürli wektorlarynyň $\varphi$ özgertmedäki şertleri hem dürlidirler. Hakykatdan hem bu ýagdaýda $\varphi$ özgertmäniň ýadrosy $N\varphi$ diňe 0-dan durýandyr. Bu diýildigi

aýratyn däl özgertmäniň ýokarda talaplarynyň 3) ýerine ýetýändigini görýäris.

5) Ikinji bir tarapdan eger-de a we b $R_n$ çyzykly giňişligiň dürli $(a \neq b)$ elementleri bolsalar hem-de $a\varphi = b\varphi$ deňlik ýerine ýetse $a - b \neq 0$ bolmak bilen bir tarapda $(a-b)\varphi = 0$ bolýandygyna eýe bolarys. Bu ýagdaýda 3) ýerine ýetmez. Diýmek $R_n$ giňişligiň $\varphi$ çyzykly özgertmedäki şekilleri gabat gelýän 2 sany dürli elementleri bar bolsa , onda $\varphi$ aýratyn däl özgertme bolup bilmez. $\varphi$ özgertme $R_n$ giňişligi öz-özüne özara birbelgili şekillendirýär/ Bu talapdan aýratyn däl $\varphi$ özgertme üçin oňa ters bolan $\varphi^{-1}$ özgertme bar bolup onuň $a\varphi$-ry a-ra öekillendirýändigine ýagny $(a\varphi)\varphi^{-1} = a$ eýe bolarys. Şeýle $\varphi^{-1}$ özgertmäniň hem çyzyklydygyny görmek kyn däldir. Hakykatdan hem $(a\varphi + b\varphi)\varphi^{-1} = [(a+b)\varphi]\varphi^{-1} = a + b = (a\varphi)\varphi^{-1} + (b\varphi)\varphi^{-1}$. Ikinji talap şeýle hem islendik $a \in R_n$ we islendik $\alpha$ hakyky san üçin

$$[\alpha(a\varphi)]\varphi^{-1} = [(\alpha a)\varphi]\varphi^{-1} = \alpha(a) = \alpha\left[(a\varphi)\varphi^{-1}\right]$$

$\varphi^{-1}$ özgertmäniň kesgitlemesinden $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ tozdestwalaýyn özgertme bolýandygyny alarys.

6) $\varphi$ özgerme üçin ters $\varphi^{-1}$ özgertme bardyr. Hakykatdan hem her bir $\varphi$ çyzykly özgertmäniň islendik basisdäki matrissasynyň rangynyň şol bir sana deň bolan ranga eýedigini bilýäris. Aýratyn däl özgertmäniň 1) talabyndan $(r(\varphi) = n)$ bu özgertmäniň dürli bazisdäki matrissalarynyň özara meňzeş bolýandyklary bilen birlikde olaryň ranklarynyň hem deňdigine eýe bolarys we bu rangyň n-e deňdigi alynar. Ol matrissalaryň ählisiniň n-nji tertiplidigine görä olaryň aýratyn däldikleri gelip

gykýandyr. Şeýlelikde her bir aýratyn däl $\varphi$ çyzykly özgertme üçin $A^{-1}$ aýratyn däl matrissa eýe bolan $\varphi^{-1}$ özgertmäniň bardygy gelip çykýar.

## 25.Häsiýetlendiriji kökler we hususy bahalar

Goý $A=(\alpha_{i_j})$ hakyky elementlerden düzülen n-nji tertipli kwadrat matrissa $\lambda$ bolsa käbir näbelli bolsun. Onda $E=\begin{pmatrix}1 & 0 \ldots 0\\ 0 & 1 \ldots 0\\ 0 & 0 \ldots 1\end{pmatrix}$ $n-$nji tertipli birlik matrissany belgiläp $A-\lambda E$ gärnüşde alynýan n-nji tertipli

kwadrat matrissa A -nyň häsiýetlendiriji matrissasy diýlip aýdylýar.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12}..\alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda..\alpha_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}..\alpha_{nn-}-\lambda\end{pmatrix}$$ matrissanyň kesgitleýjisi

$\lambda-$dan n-nji derejeli köpçlendir. Hakykatdan hem köpçleniň iň ýokary dereje saklaýan çleni onuň baş diognalyny elementleriniň köpeltmek hasylyndan alynýandyr. Ýagny $(-1)^n\lambda^n$ görnüşde bolan baş çlen alynar.

Bu kesgitleýjiniň galan çlenleriniň her birine baş diognaldan azyndan iki element köpeliji hökmünde gatnaşmaz. Şeýlelikde baş diognalyň elementleriniň köpeltmek hasylyndan galan ähli çlenleriň derejesi $\lambda^{n-2}$ $n-2$ bolan käbir $\lambda$ görä köpçleni berýändigi düşnüklidir. Bu köpçleniň ähli koeffisientlerini kesgitlemek mümkindir. Mysal üçin $\left|A-\lambda E\right|$ köpçleniň $\lambda^{n-1}$-niň öňündäki koeffisienti $(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn}$ bolar onuň azat çleni bolsa A matrissanyň

Kesgitleýjisine deň bolar. n-nji derejeli $|A-\lambda E|$ köpçlene A matrissanyň häsiýetlendiriji köplügini onuň köklerine bolsa bu matrissanyň häsiýetlendiriji kökleri diýlip aýdylýar. Meňzeş matrissalaryň deň häsiýetlendiriji köpçlenlere şoňa göräde birmeňzeş

häsiýetlendiriji köklere eýediklerini görmek kyn däldir. Hakykatdan hem B we A n-nji tertipli kwadrat matrissalar meňzeş bolsalar ,ýagny kesgitlemä görä käbir n-nji tertipli aýratyn däl Q matrissa bar bolup

$B=Q^{-1}AQ$ deňlik ýerine ýetýän bolsa onda

$$|B-\lambda E|=|Q^{-1}AQ-\lambda E|=|Q^{-1}AQ-Q^{-1}(\lambda E)Q|=|Q^{-1}(A-\lambda E)Q|=$$
$$=|Q^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|Q|$$

bu ýerden $|Q^{-1}|\cdot|Q|=1$ $(Q^{-1}Q=Q\cdot Q^{-1}=E$ deňliklerde kesgitleýjileri köpeltmegiň teoremasyndan peýdalansak $\left|Q^{-1}\right|\cdot\left|Q\right|=\left|Q\right|\cdot\left|Q^{-1}\right|=\left|E\right|=1$ bolar.)

$\left|B-\lambda E\right|=\left|A-\lambda E\right|$ bolan deňlige eýe bolarys. Bu tassyklamadan $\varphi$ çyzykly özgertmäniň dürli bazislerde meňzeş bolan dürli matrissalar bilen berilýändigine garamazdan ol matrissalaryň ählisiniň şol bir häsiýetlendiriji köklere eýediklerine eýe bolarys. Şol kökler hem bu $\varphi$

çyzykly özgertmäniň kökleri diýlip atlandyrylýar. Bu kňkleriň ählisiniň gaýtalanyşlaryny hem saklaýan toplumyna $\varphi$ çyzykly özgertmäniň spekrti diýlip aýdylýar.

Goý , $R_n$ hakyky çyzykly giňişlikde $\varphi$ çyzykly özgertme berlen bolsun. Eger-de $\overline{b} \neq \vec{0}$ wektor $\varphi$ çyzykly özgertme bilen özüne proporsional bolan käbir wektora şekilleńýän bolsa , ýagny käbir $\lambda_0$ hakyky san bar bolup $\vec{b}\varphi = \lambda_0 \vec{b}$ (1) deňlik ýerine ýetýän bolsa b wektora $\varphi$ özgertmäniň hususy wektory $\lambda_0$ sana bolsa onuň hususy bahasy diýilýär. Şunlukda hususy b wektor nususy $\lambda_0$ baha diýlip aýdylýar. $b \neq 0$ bolanlygyna görä (1) deňligi kanagatlandyrýan $\lambda_0$ san b wektor üçin ýeke-täk kesgitlenýändir. 0 wektor üçin (1) deňlik islendik $\lambda_0$ san bilen ýerine ýetýän hem bolsa ol wektor hususy wektor hasap . edilýän däldir. Indiki tassyklamalary subutsyz getireliň.

Teorema. $\varphi$ çyzykly özgertmäniň hakyky häsiýetlendiriji kökleri bar bolan ýagdaýynda diňe şolar bu özgertmäniň hususy bahalary bolup hyzmat edýärler.

**Teorema.** $\varphi$ çyzykly özgertmäniň dürli hususy bahalaryna degişli bolan hususy $b_1, b_2, \ldots, b_k$ wektorlaryň çyzykly baglanşyksyz sistemasyny düzýändirler.

## 26.Simmetrik özgertmeler

N ölçegli Ewklid giňişliginiň $\varphi$ özgertmesi üçin $\forall \vec{a}, \vec{b}$ wektorlar bilen

$(a\varphi, b) = (a, b\varphi)$ (1) deňlik ýerine ýetýän bolsa oňa simmetrik özgerme diýilýär. Ýagny $\varphi$ simmetrik özgertme bolan ýagdaýynda bu özgertmäniň belgisi skalýar köpeltmekdäki köoelijileriň birinde beýlekisine geçilip bilinýär. Simmetrik mysal bolup $\varepsilon$ tojdestwen hem-de $\omega$ 0 özgertmäniň hyzmat edip biljekdigi aýandyr. Has umumy mysal bolup giňişligiň her bir a elementini oňa proporsional bolan käbir $\alpha$ sana köpeldilen bu wektoryň özüne şekillenýän ýagny $\forall a \in E_n$ üçn $a\varphi = \alpha a$ $\alpha$- san deňligi kanagatlandyrýan $\varphi$ özgertme hem hyzmat edip biler $(\alpha a, b) = (a, \alpha b)$ $\alpha(ab) = \alpha(ab)$

**Teorema.** Ewklid giňişliginiň simmetrik özgertmesi islendik ortanormirlenen bazisde simmetrik matrissa eýedir. Tersine eger-de Ewklid giňişliginiň käbir çyzykly özgertmesi hiç bolmanda bir ortanormirlenen bazisde simmetrik matrissa bilen berilýän bolsa ol simmetrik özgertmedir.

**Subudy.**

Goý $\varphi$ simmetrik özgertme $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortanormirlenen bazisde $A = (\alpha_{i_j})$ matrissa bilen berilýän bolsun. Onda ortanormirlenen bazisde

Berlen iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň bu wektoryň degişli kordinatasyna köpeltmek hasyllarynyň jemi bardygyny nazara almak bilen taparys.

$$(e_i\varphi, e_j) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k} e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k} (e_k, e_j) = \alpha_{i_j}$$

$$(e_i, e_j\varphi) = (e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{j_k} e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{j_k} (e_i, e_k) = \alpha_{j_i}$$

Şeýlelilde $\varphi -$niň simmetrik bolýandygyndan $\forall i \, we \, j$ nomerlar üçin $(e_i\varphi, e_j) = (e_i, e_j\varphi)$ bolup $\alpha_{i_j} = \alpha_{j_i}$ boýandygyny alarys. Soňky deňlikler

A matrissanyň elementleriniň baş diognala görä simmetrik ýerleşenleriniň biri-birine deňdiklerini alarys. Bu bolsa kesgitlemä görä

A-nyň simmaetrik matrissadygyny aňladýar. Tersine goý $\varphi$ çyzykly özgertme $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortanormirlenen bazisde $A = (\alpha_{i_j})$ $\alpha_{i_j} = \alpha_{j_i}$ bolan

Simmetrik matrissa bilen berilýän bolsun. Onda giňişligiň islendik $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot e_i$ $c = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$ wektorlary üçin

$$b_\varphi = (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot e_i) \cdot \varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (e_i\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i_j} e_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{i_j}) e_j$$

$$c\varphi = (\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i)\varphi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (e_i, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} e_i) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_{i_j}) e_j$$

Deňlikler alynar. Onda $(b\varphi, c) = (\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{i_j}) e_j, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_i \alpha_{i_k} \gamma_k$

deňlik alynar. Edil şuňa meňzeşlikde $(b, c\varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_i \alpha_{k_i} \cdot \gamma_k$ bu deňliklerde $\alpha_{i_k} = \alpha_{k_i}$ bolýandygyna görä alynan islendik $b, c -$lar üçin

$(b\varphi, c) = (b, c\varphi)$ deňligiň ýerine betýändigine eýe bolarys. Kesgitlemä görä spňky deňlikden $\varphi -$niň simmetrikdigi alynar. Bu tassyklamadan simetrik özgertmeleriň jeminiň hem-de simmetrik özgertmäniň sana köpeltmek hasylynyň simmetrik özgertmelerdigi gelip çykýandyr. Indiki tassyklama hem adalatlydyr.

**Teorema**: Simmetrik özgertmäniň ähli häsiýetlendiriji kökleri hakykydyrlar. Bu teoremanyň subudy üçin islendik çyzykly özgertmäniň kökleriniň bu özgertmäniň islendik bazisde berlen matrissanyň häsiýetlendiriji kökleri bilen gabat gelýändiklerini hem-de simmetrik özgertmäniň ortanormirlenen bazisde simmetrik matrissalar bilen biledikleri hasaba alsaň indiki tassyklamadan gelip çykýandyr.

**Teorema :** (subutsyz.) Simmetrik matrissanyň ähli häsiýetlendiriji kökleri hakykydyrlar.

funksiýasynyň kesgitlemesinden

$$\theta_1(p_i) = -\theta(p_i) = \mu(p_i)\cdot\theta(p_i) \qquad hem - de \qquad \theta_1(p_i^s) = \mu(p_i^s)$$
$$\cdot\,\theta(p_i^s) = o, \qquad s > 1$$

gatnaşyklara eýe bolýandygymyzy nazara alsak taparys.

$$\sum_{d\backslash a}\mu(d)\cdot\theta(d) = \left\{1 + \theta_1(p_1) + \ldots + \theta\left(p_1^{\alpha_1}\right)\right\}\cdot\left\{1 + \theta_1(p_2) + \ldots + \theta\left(p_2^{\alpha_2}\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{1 + \theta(p_k) + \ldots + \theta\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right\} = (1 - \theta(p_1))\cdot(1 - \theta(p_2))\cdot\ldots\cdot(1 - \theta(p_k))$$

**H.1** $$\sum_{d\backslash a}\mu(d) = \begin{cases} 1, & a = 1 \quad bolanda \\ 0, & a > 1 \quad bolanda \end{cases}$$

Bu netijäniň subudyny almak

ü $\sum_{d\backslash a}\mu(d)=\begin{cases}1, & a=1 \quad bolanda\\ 0, & a>1 \quad bolanda\end{cases}$ çin subut edilen

teoremada $\theta(a)=1$ diỳip,hasap etmak ỳeterlikdir.

**H.2** $$\sum_{d\backslash a}\frac{\mu(d)}{d}=\left\{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right\}; \qquad a>1$$

Bu tassyklamanyň subudyny almak üçin subut edilen teoremada $\theta(a)\frac{1}{a}$ diỳip saỳlap, almak ỳeterlikdir.

**T.1** Goỳ bitin (+) $\delta=\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ sanlara hakyky ỳa-da kompleks bolan, $f=f_1,f_2,\ldots,f_n$ sanlar degişli bolsun, onda S’ bilen $\delta$-nyň 1-e deň, $\delta$-nyň d sana kratnylaryna degişli bolan f-leriň jemini belgilesek bahalaryna degişli bolan f-leriň bahalarynyň jemini $S_d$ bolan bolsa,

$S'=\sum\mu(d)\cdot S_d$ deňlik dogrudyr. Bu ỳerde jem $\delta$ -laryň hiç bolmanda birini bölỳän ähli d natural bölüjiler boỳunça alynỳadyr.

**S.**Belgilemelere görä

$$S' = f_1 \sum_{d \backslash \delta_n} \mu(d) + f_2 \sum_{d \backslash \delta_2} \mu(d) + \ldots + f_n \sum_{d \backslash \delta_n} \mu(d)$$

bolup, şol bir $\alpha$ natural bölüjä , eỳe bolan çlenleriň ählisi bir

deňlik dogry ỳere toplap , hem-de olarda bar bolan umumy $\mu(d)$ köpelijini skopkanyň daşyna çykarsak , skopkanyň içinde galỳan aňlatma ỳokarda belgilenen, $S_d$ - d natural bölüjä eỳe bolan ähli $\delta -$ lara degişli f-leriň jemine deňdir. Bu diỳildigi teoremanyň tassyklamasyny aňladỳar.

## 27.**Eỳler funksiỳasy.**

**K.1** Eỳler funksiỳasy $\varphi(a)$ ähli bitin (+) a sanlar üçin kesgitlenen bolup, 0,1,2,….,a-1 (1) sanlaryň arasynda a san bilen özara ỳönekeỳleriň sanyny aňladỳar.

**Mysal:**

$\varphi(1)=1$ $\varphi(2)=1$ $\varphi(3)=2$ $\varphi(4)=2$ $\varphi(5)=4$

Indiki teorema adalatlydyr.

Goỳ, $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a sanyň ỳönekeỳ köpelijilere dagytmasynyň kanonik görnüşi bolsun. Onda

$$\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \qquad (2) \qquad ya-da$$

$$\varphi(a)=\left(p_1^{\alpha_i}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\left(p_2^{\alpha_1}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right) \qquad (3)$$

$husus an \quad \varphi\left(p^{\alpha}\right) \quad bolanda,$

$$\varphi\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}=p^{\alpha-1}(p-1), \qquad \varphi(p)=p-1, \qquad p$$

Islendik p ỳönekeỳ $\alpha>1$ ($\alpha$ birden uly natural sanlar üçin )dogrudyr . ***Subudy.*** Mỳobus funksiỳasy üçin ỳokarda subut edilen belli teoremada $\delta$ *we* $f$ sanlary şeỳle saỳlap alalyň .Goỳ x (1) –nji sanlar sistemasyndan ähli elementleri özüne baha deregine kabul edỳän bolsun , hem-de bu ỳagdaỳda $\delta=(x,a)$ we f=1 oňa degişli edeliň . Onda şol teoremadaky S’ ululuk $\delta=(x,a)$ sanlaryň bire deňleriniň sanyny aňladardy. $S_d$ -d sana kratny bolan $\delta=(x,a)$ -laryň sany .

Şeỳlelikde ỳokarda aỳdylanna görä ,(x,a) sanyň d sana kratny bolmaklarynyň zerur şertiniň bu sanlaryň her biriniň d sana kratny bolmalydyklaryna görä a san d sana galyndysyz bölünmelidigini nazara alsak bu ỳagdaỳda $s_d$ ululyk x -leriň d sana kratnylarynyň sanyny aňladardy. Ỳa-da başgaça aỳdanyňda $\frac{a}{d}$ sana deň bolar.

$$\varphi(a) = \sum_{d \backslash a} \mu(d) \frac{a}{d}$$

Şeỳlelikde

$$\sum_{d \backslash a} \frac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

dogry bolan deňligi nazara alsak, teoremanyň subudyny alarys. Subut edilen teoremadan $\varphi(a)$ Eỳler funksiỳasynyň multiplikatiw funksiỳa bolỳandygyny görmek kyn däldir.

Hakykatdan hem . Eger-de $(a_1, a_2) = 1$bolsalar, onda alnan formula görä , $\varphi(a_1, a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)$

täze alynýan aňlatma öňki bilen m modula görä deňedirerlikli bolýandyr.Hususan eger-de

$$a_0 \equiv b_0 (\text{mod} \quad m), a_1 \equiv b_1 (\text{mod} \quad m), \ldots, a_n \equiv b_n (\text{mod} \quad m)$$
$$x \equiv y (\text{mod} \quad m)$$

bolsalar onda

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv b_0 y^n + b_1 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y + $$
$$+ b_n (\text{mod} \quad m)$$

deňeşdirme dogrudyr.

Teoremany subut etmek üçin ýokarda aýdylan häsiýetlerden peýdalanmak ýeterlikdir.

## 28.**Aýyrmalaryň doly sistemasy.**

**m** modula görä deňedirerlikli sanlar bu modul boýunça sanlaryň klasyny emele getirýändirler. Şolbir klasa degişli bolan sanlaryň ählisiniň bu modula bölünende deň galynda eýedikleri bellidir. Eger-de $mq+r$ ýazgyda q ähli mümkin bolan bitin sanlardan bahalar alsa onda bu klasyň (m-e bölünende r galynda eýe bolan sanlaryň klasynyň) ähli sanlaryny almak mümkindir.

$$-4=5(-1)+1 \qquad\qquad -9=5\cdot(-2)+1$$

Şeýlelikde her bir klasyň sanlarynyň m modula bölünende bir meňzeş galynda eýediklerini nazara alsak hem-de $mq+r$ ýazgyda r galyndynyň $0,1,2,\ldots,m-1$ bahalara eýe bolmak mümkinçiligini (çünki galyndyly bölmegiň algoritminden $0\le r<m$ bolandygyna görä) nazara alsak m modula görä sanlaryň ähli mümkin bolan klaslarynyň sanynyň m-e deňdigini alarys sanlaryň m modula görä klasynyň her

bir sanyna onyň bu klasyň galan sanlaryna görä aýyrmasy diýip aýdylýar. Her klasyň sanlarynyň $mq+r$ görnüşdäki ýazgysyna $q=0$ bolan halatynda alynýan r sana (bu klasyň sanlaryny m modula bölenimizde galýan r galynda) bu klasyň iň kiçi (-) bolmadyk aýyrmasy diýip aýdylýar.

M modula göra sanlaryň klaslaryndan bir- birden san (aýyrma) alynyp düzülen m sany sanlaryň sistemasyna bu m modula görä aýyrmalaryň doly sistemasy diýip aýdylýar.

Adatça m modula görä aýyrmalaryň doly sistemasyna derek $0,1,2,\ldots,m-1$ sanlaryň sistemasy alynyp, lo iň kiçi (-) bolmadyk aýyrmalarň doly sistemasy diýip atlandyrylýar.

Absalýut iň kiçi aýyrma diýip- klasyň absalýut ululygy boýunça iň kiçi $\rho$ aýyrmasyna aýdylýar.

Eger-de sanlar klasynyň ähli sanlary $mq + r$ görnüşinde aňladylýan bolup, $r < \frac{m}{2}$ bolsa $\rho = r$ bolýnadyr. Eger-de $r > \frac{m}{2}$ bolsa onda

$\rho = r - m$ görnüşinde kesgitlenýändir. Şeýle hem $r = \frac{m}{2}$ bolanda $\rho$ deregine ýa $\frac{m}{2}$ ýa-da $\frac{m}{2} - m = -\frac{m}{2}$ san alynýandyr. Şeýlelikde absolýut iň kiçi aýyrmalaryň doly sistemasy deregine m täk bolanda $-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2}$ hatar

Eger-de m jübüt bolanda ,

$$-\frac{m}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} \quad ya-da \quad -\frac{m}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2}-1$$

hatar

alynýandyr.

**Mysal üçin:** 9 modula görä , iň kiçi (-)bolmady ayrmalaryň doly sistemasy 0,1,2,…,8 hatar bu modula görä , absalýut iň kiçi aýymalaryň dol sistemasy bolup,

-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4 hatar hyzmat edýändir.

Edil şuňa meňzeşlikde

0,1,2,3,4,5,6,7 hatar 8 modula görä , iň kiçi (-) bolmadyk aýyrmalaryň doly sistemasy

-3,-2,-1,0,1,2,3,4 ýa-da -4,-3,-2,-1,0,1,2,3, atarlaryň islendik birini 8 modula görä bsalýut iň kiçi aýyrmalaryň doly sistemasy deregine almak mömkindir.

Subut edilmesi kyn bolmadyk indiki tassyklamalary belläp geçeliň .

**T.1** **m** modul boýunça ikibir-ikibir deňeşdirerlikli bolmadyk islendik m sany sanlaryň toplumy m modula görä aýyrmalaryň doly sistemasyny emele getirýändirler.

**T.2** Eger-de (a,m)=1 hem-de x m modula görä aýyrmalaryň doly sistemasyndan bahalar alýan bolsa, onda ax+b ýazgydan (bu ýerde b islendik bitin san ) alynýan bahalar hem m modula görä aýyrmalaryň doly sistemasyny emele getirýändirler.

## 29.Deňeşdirmeleriň käbir aýratyn häsiýetleri .

1).deňeşdirmeleriň iki tarapynyň umumy bölüjisi modul bilen özara ýönekeý bolsa onda deňeşdirmeleriň iki tarapyny hem bu umumy bölüjä bölmek mümkindir.

Hakykatdan hem goý, $a \equiv b(mod \quad m)$ bilen $a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \qquad we \qquad (d,m) = 1$ bolsun.

Onda şerte görä $a - b = d(a_1 - b_1)$ tapawut m-e galyndysyz bölünýändir. Bize öňden belli bolşuna görä , bu ýagdaýda $a_1 - b_1$ $m$ modula galyndysyz bölünmelidir . Bu diýildigi belli bolan teoremadan $a_1 \equiv b_1(mod \ m)$ deňeşdirmä eýe bolarys.

2). Deňşdirmäniň ki arapyny hem onuň modulyny hem şol bir sana köpeltmek mümkindir. Ÿagny eger-de $a \equiv b(mod \ m)$ bolsa onda islendik k san üçin $a \cdot k \equiv b \cdot k(mod \quad mk)$ ýerine ýetýändir.

Hakykatdan hem $a \equiv b(mod \quad m)$ gatnaşykdan a=b+mt t-bitin san gatnaşygy alarys. bu deňligiň iki tarapyny hem k sana köpeltmek bilen $a \cdot k = b \cdot k + mk \cdot t$ deňlige eýe bolarys.

Bu ýerden belli teoremadan peýdalanyp
$a \cdot k \equiv b \cdot k(mod \quad mk)$ deňeşdirmäni taparys.

3). Deňeşdirmäniň iki tarapyny hem , hem-de onuň modulnyň hem olaryň islendik umumy bölüjisine bölmek mümkindir . Hakykatdan hem eger-de $a \equiv b(mod \quad m)$ bilen
$a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad m = m_1 d$ bolsalar onda bize belli bolan tassyklamadan alynýan (a=b+mt) $a_1 d = b_1 d + m_1 d \cdot t$ deňligiň iki tarapyny hem d sana bölmek bilen $a_1 = b_1 + m_1 t$ bolmalydygyny ýa-da başgaça aýdanyňda $a_1 \equiv b_1(mod \quad m_1)$ bolýandyklaryny alarys.

4). Ege-de a we b sanlar birnäçe modullara görä deňeşdirerlikli bolsalar, onda olar b modullaryň iň kiçi umumy kratnysyna görä hem

deňeşdirerliklidirler.

Hakykatdan hem eger-de

$$a \equiv b(mod \quad m_1), a \equiv b(mod \quad m_2), \ldots, a \equiv b(mod \quad m_k)$$

bolsa, bize belli bolan teoremadan a-b tapawudyň
$m_1, m_2, \ldots, m_k$ modullara galyndysyz bölünmelidigi gelip çykýandyr. Onda bu tapawut modullaryň iň kiçi umumy kratnysyna hem bölüner . Bu diýildigi a we b sanlar modullaryň iň kiçi umumy
$m_1, m_2, \ldots, m_k$

kratnysyna görä

**30.Kwadrat formalar.**

$x_{1,}x_{2,....,}x_n$ näbellilerden kwadrat forma diýlip her bir çleni (goşulyjysy) bu näbellileriň haýsy hem bolsa biriniň kwadratdygny ýa-da bolmasa olaryň 2 sany dürlisiniň her haysyny we diňe şolary saklayan algebraik jeme aýdylýar.

$x_{1,}x_{2,....,}x_n$ näbellilerden kwadrat forma f($x_{1,}x_{2,....,}x_n$) görnüşinde bellenip ony umumy ýagdaýda ýazmak üçin aşakdaky belgilemeleri girizeliň.

$x_i^{\alpha}$-niň koefisientlerin $a_{ii}$ $x_i.x_j$ köpeltmek hasylynyň ( $i \neq j$ bolanda koefisientleri boýunça $a_{i_j}$ bilen belgileýäris. Ýöne $x_i.x_j = x_j.x_i$ bolýandygyna görä biziň belgilemelerimiz islendik $i$ we $j$ nomerlerimiz üçin $a_{i_j} = a_{j_i}$ bolýandyklaryny talap edýändir. Şoňa göräde $a_{i_j}x_i.x_j + a_{j_i}.x_jx_i = 2a_{i_j}.x_ix_j$ bolýandygyny nazara almak bilen $x_i -$niň $x_j -$e köpeltmek hasylynyň koeffisientlerini $2a_{i_j}$ görnüşinde alarys. (meňzeş çlenler toplaşdyrlandan soň)

Şeýlelikde $x_{1,}x_{2,...,}x_n$ $n$ sany näbellilerden kwadrat formanyň umumy ýazgysy

$f(x_{1,}x_{2,...,}x_n) = \sum_{i,j-1}^{n} a_{i_j}x_i.x_j$ (1) görnüşinde berlip bilner. Bu

aňlatmanyň koefisientlerinden $A = (a_{i_j})$ $n$-nji tertipli kwadrat matrissany $(a_{i_j} = a_{j_i}$ deňlige görä ol simmetrikdir ) düzmek mümkindir. Şeylelikde berlen $n$ sany näbellilerden kwadrat forma käbir $n -$nji tertipli simmetrik matrissany ýeke-täk kesgitleýändir. Şeýle hem eger-de $n -$nji tertipli simmetrik matrissa berlen bolsa,onda koefisientleri bu matrissanyň elementleri bolan ýeke-täk kwadrat formany ýazmak mümkindir. Bu aýdylanlardan $n$

näbellilerden ähli kwadrat formalaryň toplumy bilen ähli $n$-nji tertipli simmetrik matrissalaryň toplumy arasynda özara bir belgili degişliligiň bardygyna eýe bolarys. Ýokarda kesgitlenen A matrissasyna $f(x_{1,}x_{2,...,}x_n)$ kwadrat formanyň matrissasy diýlip aýdylýar.

Bu matrissanyň elementleriniň diňe hakyky sanlar bolýan ýagdaýynda degişli kwadrat forma hem hakyky ol elementleriniň kompleks hem bolýandyklarynyň mümkinçilikleri bar ýagdaýynda bolsa degişli forma kompleks forma diýlip aýdylýar.

$f$ kwadrat formanyň $A=(a_{i_j})$ matrissanyň rangyna bu formanyň rangy diýilýär. Eger-de A aýratyn däl bolsa $(r(A)=n$ bolsa ) onda $f$ formanyň özüne hem aýratyn däl diýlip aýdylýar. Bize geljekde gerek bolan bir tassyklamany getirmezden öň islendik $B'$ bilen onuň transponirlenenini brlgiläris. $AB$ köpeltmek hasyly kesgitlenen islendik A we B matrissalar üçin $(AB)'=B'A'$ ýagny bu 2 matrissanyň köpeltmek hasylyndan transponirlenip alynan matrissa bu köpelijileriň transponirlenen matrissalarynyň ( ýöne köpelijiler ters tertipde alynyandyrlar ) köpeltmek hasylyna deňdir. Indiki belgilemeleri girizeliň.

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$ , X'=( $x_{1,}x_{2,...,}x_n$ onda

$f=f(x_{1,}x_{2,...,}x_n)=\sum_{i,j-1}^{n} a_{i_j}.x_i.x_j$ (1) $f$ kwadrat formany

$f=X'AX$ (2) g]rnüşde hem ýazmak mümkindir. Hakykatdan hem AX köpeltmek hasylynyň kesgitlenendigine görä onuň

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1_j}.x_j \\ \sum_{j-1}^{n} a_{2_j}.x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n_j} x_j \end{pmatrix}$$

sütün matrissasy bolyandygyndan bu matrissany çepinden X' -e köpeltmek bilen

bir setirden hem-de bir sütünden duryan, yagny

$$X'AX = (\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_j) = (\sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}.x_i.x_j) = (\sum_{i,j=1}^{n} a_{i_j}.x_i.x_j)$$

bolýandygyny alarys. Indi $f$ kwadrat forma girýän $n$ sany $x_{1,}x_{2,...,}x_n$ näbelliler üstünde käbir $Q = (q_{i_j})$ matrissa eýe bolan näbellileriň çyzykly özgertmesi ýerine ýetyän bolsun diýeliň. Ýagny bu näbellileriň üstünde $x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{i_k} y_k \quad i = 1,\ldots,n$ (3) çyzykly

özgertme amala aşyrýan bolsun. Eger-de $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$ diýsek

soňky özgertmäniň matrissalar üsti bilen $X = QY$ görnüşinde aňladylyandygy düşnüklidir. Onda ýokarda edilen bellige görä soňky

ýazgydan $X' = (QX)' = Y'Q'$ bolýandyr. Şeýlelikde (2)ýazgydan

$f = X'AX = Y'(Q'AQ)Y = Y'BY$ (4) bu ýerde $B = Q'AQ$ B matrissanyň simmetrikdigni görmek kyn däldir.

Hakykatdan hem munuň üçin kwadrat matrissanyň simmetrik bolýandygynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup onuň özüniň transponirlenen matrissasy bilen gabat gelmekliginiň hyzmat edýändiginden peýdalanmak ýeterlikdir.
$B' = (Q'AQ)' = Q'A'(Q')' = Q'AQ = B$. Soňky deňlik B-niň simmetrikdigini aňladýar. Eger-de ýokarda seredilen (3) özgertmäniň Q matrissasy aýratyn däl diýsek onda bize öňden belli bolan kesgitlemä görä B matrissa A bilen meňzeş bolar. Şeýlelikde indiki tassyklama adalatlydyr.

Teorema: $n$ sany näbellilerden A matrissaly kwadrat formada Q matrissaly

Näbellileriň çyzykly özgertmesi ýerine ýetirlen bolsa, täze näbellilerden $Q'AQ$ matrissaly kwadrat forma alynyar. (kwadrat forma öwrülýän täze forma) Şeýle hem (3) çyzykly özgertmäniň Q matrissasy avratyn däl bolsa täze

Näbellilerden $f = Y'BY, \quad B = Q'AQ$ kwadrat formanyň matrissasy bilen köne

Näbellilerden $f = X'AX$ formanyň A matrissasy meňzeşdirler. Öňden belli

Bolşuna görä meňzeş matrissalaryň ranklary biri-birine deňdirler. Diymek aýratyn däl çyzykly özgertme kwadrat formanyň rangyny üýtgedýän däldir. Indi

Kwadrat formanyň rangynyn üýtgedýän däldir. Indi kwadrat formany käbir aýratyn däl çyzykly özgertme ýardamynda täze näbellilerden kwadrat formany alanymyzda ondaky dürli näbellileriň köpeltmek hasyllarynyň ählisiniň koeffisientleriniň 0-a öwrülmegi (bu görnüşe kwadrat formanyň kononik görnüşi

diýilýär.) bilen baglanyşykly meseläni öwreneliň ilki bilen $n$ sany $x_1, x_2, \ldots, x_n$

näbellilerden $f$ kwadrat forma aýratyn däl çyzykly özgertmäniň ýardamynda

$f = b_1 y^2{}_1 + .. b_n y^2{}_n$ (5) bu ýerde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ täze näbelliler kononik görnüşe getirlen bolsun diýeliň. Bu ýazgyda $b_1, b_2, \ldots, b_n$ koeffisientleriniň käbiriniň 0-a

deň bolmaklary hem mümkindir. (5) ýazgydaky o-dan tapawutly $b_i$ koeffisientleriň sanynyň $f$ formanyň rangy bilen gabat gelmelidigi aňsatlyk bilen subut edilýär. Dogrudanda (5) ýazgy $f$ kwadrat formadan aýratyn däl çyzykly özgertmäniň ýardamynda alynypdy. Şoňa göräde onuň rangy başda berlen köne näbellilerden $f$ formanyň rangyna deňdir. Ýöne (5) formulanyň matrissasynyň
$b_1 0 \ldots 0$
$0 b_2 \ldots 0$ gňrnüşini diognal matrissasyna görä başda berlen $f$
$00..b_n$
formanyň rangy $r-$e deň diýsek bu matrissanyň hem rangynyň $r-$e deň bolmalydygynyň bu matrissanyň o-dan tapawutly diognal elementleriniň sanynyň $r-$e deň bolmagy bilen deňgüýçlidigine eýe bolarys. Diýmek $r(f) = r$

bolanda (5) ýazgydaky 0-dan tapawutly koeffisientleriň sanynyň $r-$e deňdigini görýäris. Indi kwadrat formalar hakyndaky esasy teorema diýlip atlandyrylýan

indiki tassyklamany getireliň .

Esasy teorema: Islendik kwadrat forma aýratyn bolmadyk käbir çyzykly özgertme ýardamynda kononik görnüşe getirlip bilner. Şunlukda seredilýän kwadrat forma hakyky bolsa aýdylan çyzykly özgertmäni ähli koeffissientlerini hem hakyky sanlar hasap etmek mümkindir.

Subudy

Bu tassyklamanyň bir näbellilerden kwadrat forma üçin dogrudygy aýandyr. Çünki şeýle kwadrat formanyň ähl isi $ax^2$ $a \neq 0$ san görnüşde ýazylyp bu ýazgynyň özi bir näbellilerden kwadrat formanyň kanonik görnüşini aňladýar.

Şoňa göräde teoremanyň subudyny kwadrat forma girýän näbellileriň sanyna görä matematiki induksiýa usulyny peýdalanmak bilen amala aşyryp bileris. Munuň üçin girýän näbellileriň sany $n-$den kiçi bolsa ähli kwadrat formalar üçin teorema adalatly hasap edip onuň tasyklamasynyň $n$ sany näbellilerden kwadrat forma üçin hem ýerine ýetýändigini görkezmelidiris. Goý $n$ näbellilerden

$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i_j}.x_i.x_j$ kwadrat forma berlen bolsun. Bu formada näbellileriň haýsy hem bolsa biriniň kwadratdygyny saýlajak, ýagny $f$ formanyň şol näbelliniň kwadraty bilen galan näbellileriň käbir kwadrat formasynyň jemi görnüşine getirjek aýratyn bolmadyk çyzykly özgertmäni tapjak bolalyň. Bu maksada $f$ formada haýsy hem bolsa bir näbelliniň kwadratynyň koeffisientiň 0-dan tapawutly bolanda ýagny $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ sanlaryň hiç bolmanda biri 0-dan tapawutly bolan ýagdaýynda aňsatlyk ýetip bileris. $f$ formada haýsy hem bolsa bir näbelliniň kwadratynyň koeffisienti

Mysal üçin: $a_{11}\neq 0$ $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,$ $y_i=x_i$ $i=2,\ldots,n$ (6) çyzykly özgertmäni has dogrusy bu özgertmä ters bolan özgertmäni ýerine ýetireris. Şunlukda biz $a^{-1}{}_{11}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2$ aňlatmanyň kwadrat forma bolmak bilen $f$ formada $x_1$ –i saklaýan we diňe şolary $x_1$ näbellili bilen saklaýan kwadrat formany aňsatlyk bilen alarys. Şeýlelikde $f = a^{-1}{}_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = g$ (7) tapawut diňe $x_2, x_3, \ldots, x_n$ näbellilerden käbir kwadrat formany berýändir. Ýöne ol $(g)$ $x_1$ näbellini özünde saklaýan däldir. Şeýlelikde ( 6) belgilemeler başgaça aýdylanda şol belgilemeler netijesinde alynýan çyzykly özgertmä ters bolan çyzykly özgertme $f$ formada $y_1$ näbelliniň kwadratyny saýlamaga mümkinçilik berdi. Bu ulanylan özgertmäniň aýratyn däldigi oňa ters bolan (6) deňlemeler bilen kesgitlenilýän çyzykly özgertmäniň aýratyn dälliginden gelip çykýandyr. Sebäbi

(6)deňlemeleriň kesgitleýän çyzykly özgertmesiniň matrissasy

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ o \ \ 1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix}$$

bolup onuň kesgitleýjisi $a_{11}$ –e deňdir. Iki matrissanyň köpeltmek hasyly birlik matrissany bermeli. Indi berlen formada näbellileriň hiç biriniň hem kwadratyny

0-dan tapawutly koeffisiente eýe däl diýeliň. Ýagny $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$ bolsun bu ýagdaýda kwadrat formada haýsy hem bolsa iki sany dürli näbellileriň

köpeltmek hasyly mysal üçin $x_1.x_2$ köpelymek hasyly 0-dan tapawutly koeffisientleriň bilen gatnaşmalydyr. Çünki tersine ýagdaýda kwadrat forma hakynda gürrüň etmekligiň manysy bolmazdy.Şeýlelikde biziň talabymyza görä

$2a_{12} \neq 0$ bolup biz bu ýagdaýda $f$ formada haýsy hem bolsa bir näbelliniň kwadratynyň emele gelmegine mümkinçilik berýän kömekçi aýratyn däl çyzykly özgertmäni ulanarys. Şeýle çyzykly

özgertme $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_i = y_i \quad ,i = 3..n \end{cases}$ (8)

deňlikleriň ýardamynda kesgitlener. Bu özgertme aýratyn däldir.

Çünki onuň kesgitleýjisi $\begin{matrix} 1 & -1 & 0\ldots0 \\ 1 & 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & 1\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{matrix}$ $=2 \neq 0$ bolýandyr

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0\ldots0 \\ 0 & 2 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & 1\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{matrix}$$

Şeýlelikde (8) özgertme netijesinde $f$ formanyň $2a_{12}x_1x_2$ çleni

$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2a_{12}y^2{}_1 - 2a_{12}y^2{}_2$ bu diýildigi $f$ formada birbada iki sany näbellileriň kwadratrarynyň emele gelendigini aňladýandyr. Ol

çlenleriň hiç biri hem formanyň galan çlenleri bilen gysgalyp bilmezler. Sebäbi galan çlenleriň her birinde $y_3, y_4, \ldots, y_n$ näbellileriň hiç bolmanda biri saklanýandyr we şoňa göräde olaryň hiç biri hem näbellileriň kwadratlaryny saklaýan çlenler bilen gysgalyp bilmezler. Şunlukda biz (8) çyzykly özgertme ýardamynda öwrenilen ýagdaýdaky şerte eýe bolarys. Indi tassyklamanyň subudyny doly amala aşyrmak üçin bu ýagdaýda hem $f$ formany $f = a_{11}^{-1} y_1^2 + g$ (9) bu ýerde $g - y_2, y_3, \ldots, y_n$ näbellilerden käbir kwadrat forma görnüşe aýratyn bolmadyk çyzykly özgertmäniň ýardamynda getirip biljekdigmizi hem-de $g$ forma üçin induktiw talapdan peýdalanyp bilýändigimizi nazara almak ýeterlikdir. Şeýlelikde $g$ kwadrat forma üçin ulanylýan özgertmede $y_1$ näbellili üýtgemeýän $n$ sany näbellileriň çyzykly özgertmesidir diýip hasap etmek mümkindir. Şeýle usul bilen (9) ýazgy kanonik

görnüşe getirlen $f$ kwadrat forma 2ýa-da 3sany aýratyn däl çyzykly özgermeler ýardamynda käbir koeffisientler bilen näbellileriň kwadratlarynyň jemi görnüşinde getirlip bilner. Bu kwadratlaryň sany bolsa formanyň $r$ rangyna deňdir. Mundan başgada $f$ kwadrat forma hakyky bolsa onuň kanonik görnüşini şeýle hem bu formany kanonik görnüşe getirip çyzykly özgertmedäki

koeffisientleriň ählisi hakyky sanlar bolýarlar. Sebäbi (6) hem-de (8) çyzykly özgertmelerdäki koeffisientler şeýle hem $f - a_{11}^{-1} y_1^2 = g$ tapawutdaky

koeffisientleriň ählisi hakyky sanlardyr.

Mysal $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_4$ kwadrat formany kononik görnüşe getirmeli.

Çözüwi.

Bu formada näbellileriň hiç biriniň hem kwadratynyň saklanmaýandygyna görä

Ilki bilen bu formada näbellileriň kwadratynyň emele gelmegini

üpjün edip aýratyn däl $\begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{array}$ ýagny $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

kömekçi çyzykly özgertme ýerine ýeter.

Netijede $f = 2y_1^2 - 22y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3$ ýazga geleris.

Bu ýazgyda $y_1^2$ koeffisienti 0-dan tapawutly bolýanlygy üçin bir näbelliniň kwadratyny saýlamak aňsatdyr. $z_1 = 2y_1 - 2y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$ diýsek başgaça aýdanyňda tersi $(y_1 = 1\backslash 2z_1 + z_3,\quad y_2 = z_2,\quad y_3 = z_3)$

$B = \begin{pmatrix} 1\backslash 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrissa eýe bolan çyzykly özgertmäni ýerine

ýetirip $f$ formany $f = 1\backslash 2_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_2z_3$ görnüşe getireris. Buýazgyda $z_1^2$ −nyň

kwadratyny saýlanandyr. Şoňa göräde $z_2^2$-nyň koeffisientleriniň 0-dan tapawutlandyryp peýdalanyp ýokardaka meňzeşlikde çuzykly özgertmäni ýerine ýetireris. Ýagny

$t_1 = z_1,\quad t_2 = -2z_2 - 4z_3 \quad t_3 = z_3$ belgilemeleri ýerine ýetirip

oňa ters özgertme $((z_1 = t_1, z_2 = -1\backslash 2t_2 - 2t_3,\quad z_3 = t_3)$ deňlikler bilen aňladylyp

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\backslash 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrissa eýedir )alnan $f$ formanyň

$$f = 1\backslash 2t_1^2 - 1\backslash 2t_2^2 + 6t_3^2$$

(9) ýazgysyna eýe bolarys. Soňky ýazgy kesgitlemä görä $f^2$ formanyň kanonik

görnüşidir. Bu getirlen çyzykly özgertmeleri matrissasy

$$ABC = \begin{pmatrix} 1\backslash 2 & 1\backslash 2 & 3 \\ 1\backslash 2 & -1\backslash 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ bolan çyzykly özgertme bilen

çalşyrlyp bilinýänligi,

şeýle hem bu özgertmäniň ilki başda berlen $f$ formany kanonik görnüşine getirjekdigi düşnüklidir. Başgaça aýdanyňda berlen kwadrat formada

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + 1\backslash 2t_2 + 3t_3, \\ x_2 = t_1 - 1\backslash 2t_2 - t_3, \\ x_3 = \qquad\qquad t_3 \end{cases}$$ belgilemeleri girizmek bilen (9) kanonik

görnüşiň alynýandygyny barlamak aňsatdyr. Ýöne berlen $f$ formanyň (9) kononik görnüşi ýeke-täkdir.

## 31. Inersiýa kanuny.

Öňden belli bolşy ýaly kwadrat formanyň kanonik görnüşi ýeke-täk kesgitlenýän däldir. Sebäbi her bir kwadrat forma kanonik görnüşe dürli usullar bilen getirlip bilner. Şol bir $f$ kwadrat formanyň getirlip bilinýän därli kanonik

Görnüşlerinde umumylyk barmy ol umumylyk bar bolan ýagdaýynda, ony nähili

Aňlatmak mümkin diýlen soraglaryň ýüze çykmagy tebigydyr. Bu soraga jogap

Bilen $f$ formanyň hakykydygyna ýa-da kompleksdygna baglydyr. Ilki bilen seredilýän kwadrat forma kompleks ýerine ýetirilýän aýratyn däl özgertmeler hem kompleks koeffisientli bolsun diýeliň. Belli bolşy ýaly $n$ näbelliden $r$ rangly islendik $f$ kwadrat forma aýraty däl çyzykly özgertme ýardamynda

$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_r y_r^2$ kanonik görnüşe getirilýär. Bu ýerde $c_i \neq 0$ kompleks sanlardyr. Ýöne islendik sandaky kwadrat kök alyp bahasyny nazara alsak $\begin{cases} z_i = \sqrt{c_i}\, y_i & ,i = 1,\ldots,r \\ z_i = y_i & i = r+1, n \end{cases}$ belgilemeleri

ýerine ýetirmek bilen alnan ýazgydan $f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2$ (1) komoleks kwadrat formanyň normal görnüşi diýip atlandyrylýan görnüşini alarys. Kesgitlemeden görlüşi ýaly rangy $r -$e deň bolan kompleks kwadrat formanyň narmal görnüşi koeffisientleri 1-e deň bolan $r$ sany täze näbellileriň kwadratlarynyň jemidir. Diýmek kompleks kwadrat formalar üçin normal görnüş diňe bu formalaryň rangyna baglydyr. Şeýlelikde rangy $r-$e deň bolan ähli kompleks kwadrat formalar (1) normal görnüşe eýedirler. Başgaça aýdylanda 2 sany $f$ we $g$ $n$ näbellilerden kwadrat formalar

şol bir $r$ ranga eýe bolsalar olar aýratyn däl çyzykly özgertme ýardamynda (1) görnüşe getirilýändirler. Bu diýildigi $f$ we $g$ formalaryň birinden beýlekisine käbir aýratyn bolmadyk çyzykly özgertme ýardamynda geçilip bilinjekdigini aňladýandyr. Şunlukda biz ýerine ýetirilýän aýratyn däl çyzykly özgertmäniň kwadrat formasynyň rangyny üýtgetmeýändigini nazara almalydyrys. Indiki

tassyklamanyň dogrudygyny subut edeli.

Teorema: $n$ sany näbellilerden 2sany kompleks kwadrat formalaryň kompleks koeffisientli aýratyn däl çyzykly özgertmeleriň ýardamynda birinden beýlekisiniň alynyp bilinmegi üçin zerur hem ýeterlik şert bolup olaryň birmeňzeş ranga eýe bolmaklary hyzmat edýändirler. Bu teoremadan $r$ rangly

Kompleks kwadrat formadan kanonik görnüşi bolup 0-dan tapawutly islendik kompleks koeffisientli $r$ sany näbellileriň kwadratlarynyň jeminiň hyzmat edip biljekdigi gelip çykýandyr. Indi ýokarda berlen soraga jogap bermek üçin seredilýän formalaryň hakyky bolan ýagdaýyna seredeliň. Bu ýagdaýda jogap çylşyrymlyrakdyr. Has beteride amala aşyrylýan çyzykly özgertmeler diňe hakyky koeffisiently bolmalydyrlar diýlen talap meseläniň öwrenilmegini çylşyrymlaşdyrýar. Bu yagdaýda islendik $f$ kwadrat forma aýratyn däl çyzykly özgertmäniň ýardamynda (1) görnüşe getirlip bilner. Çünki onuň minus sandan kwadrat köküň alynmagyny talap etmegi mümkin. Eger-de biz kwadrat formanyň narmal görnüşi diýip +1 ýa-da -1 koeffisientler bilen alynan birnäçe näbellileriň kwadratlarynyň aýtsak onda islendik koeffisientli kwadrat formany

Hakyky koeffisientli aýratyn däl çyzykly özgertmäniň ýardamynda bu normal görnüşe getirmegmiz mümkindir. Hakykatdan hem $n$ näbellilerden $r$ rangly $f$

Kwadrat formanyň

$$f = c_1 y_1^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_k y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2, \qquad c_i \neq 0 \text{ käbir } (+)$$

Sanlar kanonik görnüşe getirilýändigini nazara alsak

$$z_i = \sqrt{c_i}\, y_i \qquad , i = 1..r$$

$$z_j = y_j \qquad r < j \leq n$$

Belgilemeler netijesinde (ýada oňa ters bolan aýratyn däl çyzykly özgertme ýardamynda ) $f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^r$ hakyky $f$ kwadrat formanyň normal görnüşi diýilýän ýagdaýyna eýe bolarys. Ýazgydangörlüşi ýaly hakyky kwadrat forma normal görnüşdäki kwadratlaryň umumy sany onuň $r$ rangyna deňdir. Hakyky kwadrat forma dürli hakyky özgertmer bilen biri-birinden diňe goşulyjylaryň orny bilen tapawutlanýan normal görnüşe getirilýär. Inersiýa kanuny diýilän aýdylan belligimiz hakynda indiki tassyklama görnüşinde berilýärler.

Teorema (Esasy): Hakyky kwadrat forma hakyky koeffisientlere aýratyn däl çyzykly özgertmäniň üsti bilen getirilýän normal görnüşdäki (+) hem-de (-) kwadratlaryň sany bu özgertmä bagly dälfir.

Subudy.

Goý $n$ sany $x_1,\ldots,x_k$ näbellilerden $r$ rangly kwadrat forma 2 sany dürli usul bilen (2sany hakyky koeffisientlere eýe bolan aýratyn däl çyzykly özgertmeler ýardamynda) Indiki normal görnüşlere getirilýän bolsun.

$$f = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2 \quad (3)$$

ýöne $x_1,\ldots,x_k$ näbellilerden $y_1,\ldots,y_k$ näbellilere aýratyn däl çyzykly özgertme bilen geçilenligi sebäpli tersine geçiji hem 0 däl kesgitleýjini düzýän koeffisientler hökmünde saklaýan täze näbellileriň köne näbellileriň üsti bilen çyzykly aňladylyp

bilinjekdiklerini aňladýar. Yagny $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_j$ (4) edil şunuň ýaly

$z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i_j} x_j$ (5) aňlatmalar $a_{i_j}$ we $b_{i_j}$ hakyky sanlar bolsun.

$\left|(a_{i_j})\right| \neq 0$ we

$\left|(b_{i_j})\right| \neq 0$ talaplar bilen birlikde ýerine ýetirilýändir.

(3) gatnaşyklardaý (teoremanyň subudy üçin $k = l$ deňligi subut etmeli diýeris)

$k < l$ tersine guman edeliň.

Bu ýagdaýda indiki deňliklere seredeliň.
$y_1 = 0, \ldots, y_k = 0, \qquad z_{l+1} = 0, \ldots, z_k = 0$ (6)

Bu deňlikden çep taraplaryny olaryň (4) we (5) deňlikler bilen berlen aňlatmalar

Bilen çalsysak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{i_j} x_j = 0, \quad i = l+1, n - x_1, \ldots, x_m$$

Näbellilerden $n - l$ islendik $k$ $((n - l + k < n)$ talaba görä $k > l)$ sany alarys. Biziň bilşimiz ýaly bir jynsly deňlemeler sistemada näbellilerden az bolanda ol 0 däl çözüwe eýedir. Şoňa gňöräde alnan sistemanyň käbir $\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ hakyky 0 däl çözüwi bar hasap edip , hem-de bu çözüwi (3) deňlemede ornuna goýup

$-y_{k+1}^2(\alpha)-\ldots-y_2^2(\alpha)=z_1^2(\alpha)+\ldots+z_l^2(\alpha)$ (7) deňlige eýe bolarys. Biz mümkin däl deňlige geldik. (Çünki (4) we (5) deňligiň koeffisientleriň ählisi hakyky sanlar boldy. Soň deňlemede $\alpha$ çözüwdäki kwadratlaň ählisi (+) sanlardyr.) şonuň üçin bu deňlemäniň diňe $z_1(\alpha)=0,\ z_2(\alpha)=0,\ldots,z_l(\alpha)=0$ bolan ýagdaýda ýerine ýetmegi mümkindir. (6) deňlikleri göz öňüne tutmak bilen onda $z_1=0, z_2=0,\ldots,z_l=0, z_{l+1}=0,\ldots,z_n=0$ sistemanyň $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 0 däl çözüwe eýedigini alarys. Başgaça $x_1,\ldots,x_n$ $n$ sany näbellilerden

$$z_i=\sum_{j=1}^{n} b_{i_j}x_j=0 \qquad i=1,\ldots,n,\ n$$ sany bir jynsly çyzykly

deňlemeleriň 0 däl çözüwiniň bardygyna eýe bolarys. Ýöne bize belli bolşy ýaly $n$ sany näbellilerden $n$ sany bir jynsly çyzykly deňlemeler sistemasynyň 0 däl çözüwe

eýe bolýandygynyň zerur hem ýeterlik şerti bu sis temanyň kesgitleýjisi bolmalydyr. Şeýlelikde $\left|(b_{i_j})\right|=0$ bolýandygyny aňladýar. Ýöne bu alan netijämiz (5) çyzykly özgertmäniň aýratyn däldigi hakyky talaba gapma garşydyr. Diýmek $k>l$ diýen gumanymyz nädogrydyr. Edil şuňa meňzeşlikde $k<l$ hem nädogrydyr. Onda $k=l$ bolmalydyr. Bu diýildigi $f$ kwadrat formanyň hakyky koeffisientli aýratyn däl çyzykly özgertme ýardamynda getirlen normal görnüşdäki (+) hem-de (-) kwadratlarynyň sanynyň bu özgertmä bagly däldir. Hakyky koeffisientli kwadrat formanyň normal görnüşdäki nul (+) kwadratlaryň sanyna inersiýanyň (has dogrusy bu kwadrat formaň inersiýasy)

(+) indeksy (-)kwadratlartň sanyna bolsa (-) indeks (+) we (-) indeksleň tapawudyna bolsa $f$ formanyň signaturasy diýilýär. Bu aýdylan tassyklamadan hem-de kesgitlemelerden hakyky kwadrat formanyň rangy bilen 3 sany kesgitleýjileriň biri belli bilan halatynda galanlaryny kesgitläp biljegimiz düşnüklidir.

Teorema: Hakyky koeffisiently $n$ sany näbellilerden 2 sany kwadrat formanyň birinden beýlekisini aýratyn däl çyzykly özgertmeleň kömegi bilen

Geçilmegi üçin olaryň birmeňzeş ranklara we birmeňzeş signaturalara eýe bolmaklary zerur hem ýeterlikdir.

Teoremanyň subudy edil subut edilen teoremadan aýdylan belgilemelerden

Aňsatlyk bilen alynýandyr.

## Dargaýan kwadrat formalar.

Eger-de bize 2sany şol bir $n$ sany $x_1,\ldots,x_n$ näbellilerden

$\varphi = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ we $\psi = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$ çyzykly formalar berlen bolsalar , olaryň köpeltmek hasylynyň şol näbellilerden käbir kwadrat formany

berjekdigi düşnüklidir. Ýöne islendik kwadrat formany 2 sany çyzykly formanyň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolýan däldir. Häzir bizi haýsy şertlerde kwadrat formany çyzykly formalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladylyp bolýandygy hakyndaky mesele gyzyklandyrýar.

Teorema: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kompleks kwadrat formanyň 2sany çyzykly formalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladylyp bilmeginiň zerur hem ýeterlik şerti onuň rangynyň 2-den uly bolmazlygydyr. $f(x_1, \ldots, x_n)$ hakyky kwadrat formanyň çyzykly formalaryň köpeltmek hasylyna dargamagynyň

Zerur hem ýeterlik şerti onuň $r$ rangynyň 1-den uly bolmazlygy ýa-da onuň rangy 2-ä deň bolaýsa signaturasynyň 0-a deň bolmaklygydyr.

Subudy.

Ilki bilen 2sany çyzykly $\varphi$ we $\psi$ formulalaryň köpeltmek hasylyna seredeliň.

Eger-de formulalaryň hiç bolmanda biri 0-a deň bolsa ,onda olaryň köpeltmek

Hasylynyň hem 0 koeffisientli kwadrat forma boljakdygy düönüklidir. Ýagny

bu kwadrat formanyň rangy o-a deňdir. Eger-de $\varphi$ we $\psi$ çyzykly formalar proporsional bolsalar ýagny $\psi = c\varphi, \quad c \neq 0$ san hem-de $\varphi$ 0-a deň däl forma bolsa (bu diýildigi ol formanyň hiç bolmanda 1 koeffisientiniň mysal üçin $a_1$

koeffisientiň 0-a deň däl bolmalydygyny aňladýandyr. Buý agdaýda

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$
$$y_i = x_i, \qquad i = 2, \ldots, n$$

çyzykly özgertme ol aýratyn däldir)

$\varphi\ \psi$ kwadrat formany $\varphi\ \psi = cy_1^2$ görnüşe getirer soňky deňligiň sag tarapyndaky kwadrat formanyň rangynyň 1-e deňdigi düşnüklidir. Şoňa göräde $\varphi\ \ \psi$ kwadrat forma 1-e deň ranga eýedir. Indi $\varphi$ we $\psi$ çyzykly formalar proporsional däl bolsunlar.

Mysal üçin $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bolsun diýeliň, onda

$y_1 = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$

$y_2 = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$ çyzykly özgertme aýratyn däldir we $\varphi\ \psi$

$y_i = x_i, \quad i = 3,\ldots,n$

köpeltmek hasylyny $\varphi\ \psi = y_1.y_2$ görnüşe getirer. Bu deňligiň sag tarapynyň 2-ä deň bolan kwadrat formadygy düşýüklidir

Hem-de onuň hakyky bolan ýagdaýynda signaturasynyň 0-a deňdigi aýandyr. Bu ýagdaý $\varphi\ \psi$ kwadrat formanyň hakyky bolan ýagdaýynda signaturasynyň

0-a deňdigi gelip çykýandyr.

Indi ters tassyklamany subut edeliň.

Eger-de kwadrat formanyň rangy 0-a deň bolsa ,onda ony hiç bolmanda biri 0-a deň bolan 2sany çyzykly formanyň köpeltmek hasyly görnüşinde aňlatmak mümkindir. Eger-de berlen kwadrat formanyň rangy 1-e deň bolaýsa onda ol aýratyn däl çyzykly özgertmäniň ýardamynda $f = cy_1^2 \quad , c \neq 0$ san görnüşe getirler. Ýöne bu ýagdaýda deňligiň sag tarapy $cy_1^2 = y_1.(cy_1)$ görnüşde ýazylyp bilner. Bu diýildigi $y_1$ nabellili $x_1,\ldots,x_n$ näbelliniň üsti bilen çyzykly aňladylyp alnan formanyň 2 sany çyzykly formalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde seredilip bilinjekdigini aňladýandyr. Şeýle hem rangy 2-ä deň bolan signaturasy bolsa 0-a deň bolan hakyky kwadrat formanyň aýratyn däl çyzykly özgertmäniň ýardamynda $f = y_1^2 - y_2^2$ görnüşe getirlip bilinýändigi bellidir. Bu görnüşe rangy 2-ä deň bolan islendik kompleks kwadrat formanyň getirip bolýandyr. Ýöne $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$ bolýandygyna görä $y_1$ we $y_2$ näbellileri

$x_1,\dots,x_n$ näbellileriň üsti bilen çyzykly aňladyp soňky deňligiň sag tarapyndaky her bir skobkada şol $x_1,\dots,x_n$ näbellileriň käbir çyzykly formalaryny alarys. Bu

diýildigi rangy 2-ä deň bolan islendik kompleks kwadrat formanyň şeýle hem rangy 2-ä deň signaturasy bolsa 0-a deň hakkyky kwadrat formanyň 2 sany çyzykly formalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde seredilip bilinjekdigini aňladýandyr.

## 32.Polojitel kesgitlenen kwadrat formalar.

$n$ sany $x_1,\dots,x_n$ näbellilerden hakyky kwadrat formanyň aýratyn däl hakyky çyzykly özgertme ýardamynda getirlen normal görnüşde formanyň plýus indeksi

$n$ onuň rangy bu formanyň näbellileriniň $n$ sanyna deň bolan halatynda kwadrat forma plus kesgitlenen diýip aýdylýar. Indiki tassyklama kwadrat formany normal görnüşe getirmezden ony häwsiýetlendirmäge esas berýär.

Teorema: Hakyky koeffisientli $n$ sany $x_1,\dots,x_n$ näbellilerden kwadrat formanyň plus kesgitlenen bolmadgy üçin onuň näbellilerniň hiç bolmanda biriniň 0-a deň bolmadyk baha alan islendik bahalarynda formanyň plýus bahalary kabul etmekligi zerur we ýeterlik şert bolup hyzmat edýändir.

Subudy.

Goý $f$ plýus kesgitlenen kwadrat forma bolsun ,ýagny onuň normal görnüşi

$n$ sany plýus kwadratlardan $f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ (1) durýan bolsun. Bize belli bolşyna görä bu normal görnüşe getirýän

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_j \qquad ,i = 1,\ldots,n \quad (2)$$

çyzykly özgertme hakyky koeffisientli ($a_{i_j}$ hakyky sanlar ) hem-de aýratyn däldir. $(\left|(a_{i_j})\right| \neq 0)$ $f$ formanyň hiç bolmanda 1-i 0-dan tapawuly bolan $x_i$ näbellileriň roplumyndaky bahasyny hasaplamak üçin ilki bilen bu bahalary (2) deňlemelerde olaryň ornuna goýup $y_i$-leriň bahalaryny taparys. Soňra bu tapylan bahalary (1) deňlikde ornuna goýup $f$ formany $x_i$ näbellileriň berlen bahalaryndaky bahasyny kesgitleýäris. Ýöne şeýle usul bilen (2) deňlemeler esasynda tapylan $y_i -$leriň bahalarynyň arasynda 0-dan tapawutlysynyň bardygyny görmek kyn däldir sebäbi tersine ýagdaýda biz $\left|(a_{i_j})\right| \neq 0$ kesgitleýjisi 0-dan tapawutly çyzykly bir jynsly $\sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_j = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$

kwadrat sistemanyň 0-dan tapawutly çözüwiniň bardygyna eýe bolarys.

Bu bolsa nädogrydyr. (Çünki şeýle sistemanyň ýeke täk çözüwi bolup 0 çözüw

hyzmat edýändir.) Şeýlelikde bu bahalaryň kwadratratlarynyň jemi gňrnüşinde (1) deňlige görä hasaplanylýan $f$ formanyň bahasynyň plýus san boljakdygy alynar. Bu diýildigi (1) tassyklamadan (2) tassyklamanyň gelip çykýandygyny aňladýar.

Subudy.

Tersine goý $f$ forma plýus kesgitlenmedikbolsun. Bu ýagdaýda $f$ formanyň

ýa rangy ýa-da plýus indeksi näbellileriň $n$ sanyndan kiçidir. Mundan $f-$iň

getirlen (aýratyn bolmadyk çyzykly özgertmäniň ýardamynda) normal görnüşde

hiç bolmanda bir näbelliniň mysal üçin $y_n$-iň kwadraty ýa-ha aslynda ýokdur

ýa-da ol minus alamata eýedir. Bu ýagdaýda hiç biri 0-dan tapawutlybolan

$x_1,\ldots,x_n$ näbellileripň bahalarynyň tapylyp $f-$iň degişli bahasynyň ýa 0-a deňdigini ýa-da minusa deňdigini görkezeliň. Şeýle bahalar bolup (2) sistemadan $y_1=0, y_2=0,\ldots,y_n=1$ ýardamynda alynýan sistemanyň $x_1,\ldots,x_n$

näbelliler üçin tapylan bahalary hyzmat ederler
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1_j} x_j = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n-1_j} x_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n_j} x_j = 1 \end{cases}$$

$x_1, x_2,\ldots, x_n$ näbellileriň şeýle usul bilen kesgitlenen hiç bolmanda biri 0-dan tapawutly bolan $f$ formanyň degişli bahasy ya 0 bolar, ya-da

( $y_n^2$ normal görnüşde yok bolanda) ya-da (- 1)-e deň bolar. ( $y_n^2$ minus alamaty bilen gatnaşsa ) $f = \begin{cases} 0 \\ -1 \qquad\qquad y_n^2 \end{cases}$

$f$ $-$iň normal görnüşinde yok bolsa $y_n^2$ $-$ $f$ $-$iň normal görnüşde minus alamaty bilen gatnaşsa.

Subut edilen teorema hakyky kwadrat formanyň plyus kesgitlenen bolmagyny häsiyetlendiryän hem bolsa ony mysal işlenilende peydalanyp bilmeris. Çünki bu tassyklama berlen formanyň koeffisentleriniň üsti bilen plyus kesgitlenmegi hakynda netije çykarylanda mümkinçilik bermeyär. Şonuň bilen bir wagtda teoremada aydylan hiç bolmanda biri 0-dan tapawutly bolan näbellileriň bahalarynyň ähli mümkin nokatlaryndaky $f$ formanyň bahalaryny hasaplap çykmak mümkin däldir. Subut edilen teoremanyň bu kemçiligini düzleýän indiki tassyklamany getirmezden öňürti bize zerur bolan indiki düşünjäni getireliň.

Kesgitleme: $n$ sany $x_1, x_2, \ldots, x_n$ .näbellilerden $A = (a_{ij})$ matrisaly $f$ kwadrat formanyň matrisasynyň çep yokarky burçunda ýerleşen $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ , $a$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$ minorlaryna baş minorlary

diýlip aydylýar.

Teorema: Hakyky koeffisentli $x_1 \ldots x_n$ $n$ sany näbellilerden $f$ kwadrat formanyň plyus kesgitlenen bolmagynyň zerur hem yeterlik şerti bolup, onuň ähli baş minorlarynyň 0-dan uly bolmaklary hyzmat edýändir.

Subudy.

$n$=1 bolanda $f$ kwadrat forma $ax^2$ görnüşde bolup onuş plyus kesgitlenen bolmaklygy üçin $a > 0$ şert zerur yeterlikdir. Şeylelikde bu hususy yagdayda teoremanyň tassyklamasy adalatlydyr. Onda bu tassyklama näbellileriniň sany $n-1$-den uly bolmadyk ähli hakyky kwadrat formalar üçin yerine yetyündir diylen induktiw talapda onuň dogrudygyny $n$ sany näbellilerden $f$ kwadrat forma üçin hem görkezeliň. Goy bize $f(x_{1,\ldots}\ x_n$ $\quad A = (a_{ij})$ matrisaly kwadrat forma berlen bolsun. Onuň

$$f(x_1 x_{2\ldots} x_n) = \varphi(x_{1,} x_{2,\ldots} x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j + a_{nn} x_n^2$$ bu ýerde

$\varphi(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_{n-1})$ $\quad f$ kwadrat formanyň $x_n - i$ saklaýan

çlenlerinden düzülen $x_{1,\ldots} x_n$ näbellilerden kwadrat formadyr. $\varphi$ -iň baş minorlary $f$ -iň iň soňkysyndan galan baö minorlary bilen gabat gelyändir. Goy $f$ plyus kesgitlenen bolsun. Onda $\varphi$ hem plyus kesgitlenendir. Tersine ýagdaýda hiç bolmanda biri 0-dan tapawutly bolan $x_{1,...,}x_{n-1} - lere\ x_n = 0$ bahany goşmak bilen $f$ formanyň hem hiç bolmanda biri 0-dan tapawutly bolan bu $x_{1,...}x_{n-1,}x_n = 0$ bahalarynda eýe bolarys. Bu bolsa biziň yokarda aydanymyzyň garşylyklysydyr. Diýmek $f$ kwadrat forma plyus kesgitlenen halatynda $\varphi$ hem plýus kesgitlene n bolmalydyr. Onda induktiwlik talabyndan $\varphi$-niň ähli baş minorlary 0-dan uludyr. Indi $f$-iň iň soňky baş minorynyň hem 0-dan uludygyna indiki sebäplere görä eye bolarys. Talaba görä $f$ plýus kesgitlenen bu diý-gi onuň normal görnüşi $n$ sany plýus kwadratlardan durýan diýildigidir. Ýagny $f = y_1^2 + \ldots + y_n^2$.Bu soňky ýazgynyň matrisasynyň kesgitleýjisi 1-e deňdir. Ýöne $f$ forma bu normal görnüşe käbir aýratyn bolmadyk hakyky koeffisiýentli $x = Q.Y$ bu ýerde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad Q = (q_{ij}) \text{ çyzykly özgertme}$$

ýardamynda getirilýändigini hem-de bu özgertmäniň $f = X^{'} AX$ $A = (a_{ij})$ kwadratlarynyň $|A|$ kesgitleýjisiniň alamatyna täsir edýändigini $(f = Y^{'}(Q^{'} AQ)Y$ ýazgyda $|Q^{'} AQ| = |Q^{'}|.|Q|$ täze näbellilerden $f$ formanyň kesgitleýjisi $|Q^{'} AQ| = |Q^{'}|.|A^{'}|.|Q| = |Q|^2.|A|$-nyň alamaty bilen deň alamatly bolýanlygyndan peýdalansak başda berlen $f -$iň $A$ matrisanyň kesgitleyjisiniň hem 0-dan uly sandygy alynýandyr. Diýmek $f$-iň plýus kesgitlemesinden bu formanyň ähli baş minorlarynyň 0-dan uly sanlardyklary gelip çykýar. Indi tersine $f$-iň ähli baş minorlary 0-dan uly bolsunlar. Onda $\varphi$-niň hem ähli baş minorlaryny 0-dan uludyr. Budiýildigi induktiw talaba görä $\varphi$-niň plýus kesgitlenendigini aňladýar. Ýagny $\varphi$-niň normal görnüşi (aýratyn bolmadyk $n-1$ sany näbellilerden hakyky koeffisentli çyzykly özgertme ýardamynda alynýan ) $n-1$ sany piýus kwadratlardan durýandyr. Bu özgertmäni ähli $x_{1,\ldots}x_{n-1,}x_n$ nnäbellileriň aýratyn däl çyzykly özgertmesine $x_n = y_n$ deňlige goşmak bilen dolduryp ýokarda $f$ forma üçin ýazan deňligimizden indiki aňlatmany alarys.

$$f = \varphi + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{j-1}^{n-1} b_{in}y_i y_n + b_{nn}y_n^2 \quad \text{ýöne}$$

$$y_i^2 + 2b_{in}y_i y_n = (y_i + b_{in}y_n^2)^2 - b_{in}{}^2 y_n^2$$

$$y_i^2 + 2b_{in}y_n y_i y_n + b_{in}^2 y_n^2 \quad \text{bolany üçin}$$

$$y_i + b_{in} = z_i \qquad {}_{,}\, i = 1,2,..n-1 \qquad y_n = z_n$$

belgilemeleri geçirip onuň matrisasy $\begin{pmatrix} 1\ldots0 \;\; b_{in} \\ 0\;1\;0..b_{2n} \\ 0\;0\;0..b_{n-1},n \\ 0\;0\;0\ldots0\;\;1 \end{pmatrix}$ aýratyn däldir. $f$-iň indiki ýazgysyna eýe bolarys.

$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i{}^2 + cz_n{}^2$ teoremany subut etmek üçin $c$ koeffisentiň 0-

dan ulusyny görkezmelidiris. Bu alnan deňligiň sag tarapynyň kesgitleýjisiniň $c$ sana deňdigi düşniklidir. Onda soňky ýazgynyň ähli baş minorlarynyň hakyky çyzykly özgertme ýardamynda alnandygyny nazara alsak $c$-niň alamatynyň hem (+)-digine eýe bolarys.

Bellik. (+) kesgitlenen kwadrat forma düşünjesine minus kesgitlenen formalary ýagny normal görnüşi diňe minuskwatratlary saklaýan aýratyn bolmadyk hakyky koeffisentli $n$ sany näbellilerden kwadrat formalar hem öwrenjekdiris. Normal görnüşi şol bir alamatly kwatratlary saklaýan aýratyn kwatrat formalara ýarym kesgitlenen diýlip aýdylýar. Normal görnüşi 2alamatly $(-,+)$ kwadratlary saklavan kwadrat forma bolsa kesgitsiz kwadrat forma divlip aýdylýar.

## 33. Ortaganal özgertmeler.

Goý matrissasy $Q=(q_{i_j})$ bolan $x_i=\sum_{j=1}^{n} q_{i_j} y_j \quad ,i=1,\ldots,n$ (1)

näbellileriň çyzykly özgertmesi $n$ näbellilerden plýus kesgitlenen kwadrat formanyň $x_1^2+\ldots+x_n^2$ normal görnüşini täze näbellilerden plýus kwadratlaryň $y_1^2+\ldots+y_n^2$

Jemine geçirýän bolsa bu çyzykly özgertmä ortaganal özgertme ,onuň $Q$ matrissasyna bolsa ortaganal matrissa diýilýär. Bize öňden belli bolşy ýaly bu ortaganal özgertmäniň Q matrissasy $Q'EQ=E$ deňligi kanagatlandyrýar. $(f=X'AX \quad X=QX \quad f=Y'Q'AQY)$ Bu ýerden deňligiň iki tarapyny hem

$Q^{-1}$ (bu matrissalaryň barlygy (1) özgertmäniň aýratyn däldiginden gelip çykýandyr.) Sagyndan $Q^{-1}$ matrissa köpeltmek bilen alarys. $Q'EQQ^{-1} = EQ^{-1} = Q^{-1}$ ýa-da $Q' = Q^{-1}$ bolan gatnaşyga eýe bolarys. Ortaganal matrissany kesgitlemegiň başgaça görnüşini almak mümkindir. Traponirlenen matrissasy bu matrissanyň özüniň tersine deň bolan aýratyn bolmadyk kwadrat matrissa ortaganal matrissa diýlip aýdylýar. Ortaganal matrissalaryň tersi hem ortaganaldyr. Hakykatdan hem eger-de Q ortaganal matrissa bolsa $(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}$ Diýmek $(Q^{-1})' = (Q^{-1})^{-1}$ bu bolsa soňky kesgitlemä görä $Q^{-1}$ ters matrissalaryň ornuny aňladýar.

Kesgitleme : $n$ ölçegli $E_n$ Ewklid giňişliginiň $\varphi$ çyzykly özgertmesi bu giňişligiň islendik $a$ elementi üçin $(a\varphi, a\varphi) = (a, a)$ (2) gatnaşygy kanagatlandyrýan bolsa , oňa Ewklid giňişliginiň ortogonal özgertmesi diýilýär.

Başgaça aýdanyňda Ewklid giňişliginiň ortogonal özgertmesiniň skalýar köpeltmesini üýtgetmeýändigini ýagny islendik $a$ $we$ $b$ elementler üçin $(a\varphi, b\varphi) = (ab)$ (3) aňladýar. Hakykatdan hem egerde $\phi$ $E_n$ giňişligiň otogonal özgertmesi bolsa , onda islendik $ab$ elementleri üçin $((a+b)\varphi, (a+b)\varphi) = (a+b, (a+b)$ ýada bu ýerden $\varphi$ özgertmäniň çyzyklydygyny nazara alsak

((a+b)

$\varphi, (a+b)\varphi) = (a\varphi + b\varphi,, a\varphi + b\varphi) = (a\varphi, a\varphi) + (a\varphi, b\varphi) + (b\varphi, a\varphi$

bolar. ikinji bir tarapdan $(a+b)(a+b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b)$ gatnaşyk ýerine ýetip öwrenilýän giňişligiň hakyky Ewklid giňişligi nazara

alynsa $2(a\varphi,b\varphi)=2(a,b)$ alynar. Bu ýerde ýokarda aýdylan
$(a\varphi,b\varphi)=(a,b)$

dogrudygy hakyndaky tassyklama eýe bolarys.

Teorema. Ortogonal özgertmede Ewklid giňişliginiň islendik ortanormirlenen bazisiniň wektorlarynyň obrazlary hem ortanormirlenen bazisi emele getirýändirler. Tersine egerde Ewklid giňişliginiň çyzykly özgertmesi hiç bolmanda bir ortanormirlenen bazisi ýenede ortanormirlenen bazise geçirýän bolsa , onda ol ortogonaldyr.

Subudy.

Goý $\varphi - E_n$ Ewklid giňişligiň ortogonal özgertmrsi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bolsa bu giňişligiň erkin bir ortonormirlenen bazisy bolsun. Onda kesgitlemä görä $(e_i, e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ bolup

$e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi \quad - E_n$ giňişligiň ortanormirlenen bazisy alynýar. Çünki $\varphi$ ortaganal özgertme bolan halatynda

$(e_i\varphi\ , e_j\varphi=(e_ie_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ tersine $E_n$ – yň çyzykly $\varphi$

özgertmesi käbir $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortanormirlenen bazise başga bir $e_1\varphi\ , e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ bazise geçirýän bolsa onda bu giňişligiň islendik

$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_j$ elementi üçin onuň obrazy $a\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i\varphi)$ bolup

$(a\varphi\ , a\varphi)=(a,a)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ bu diýildigi Ewklid giňişliginiň

$\varphi$ çyzykly özgertmesiniň ortaganal bolmalydygynyň şertidir.

Teorema: Ewklid giňişliginiň ortaganal özgertmesi islendik ortanormirlenen bazisde ortanormirlenen matrissa eýedir. Tersine, eger-de Ewklid giňişliginiň

Çyzykly özgertmesi hiç bolmanda bir ortanormirlenen bazisda ortanormirlenen matrissaeýe bolsa onda bu özgertme hem ortanormirlenendir.

## Toparlar.

Goý G elementleriň sany tükenikli ýada tükeniksiz bolan käbir köplik bolsun. Buköplikleriň elementleri bolyp sanlar, matrisalar, özgertmeler we şuňa meňzeşler hyzmat edip bilerler. Şeýle hem bu köplükleriň elementleri üçin käbir * görnüşinde bellenen amal kesgitlenen bolsun.

Kesgitleme. Egerde Gköplükde kesgitlenen $*$ amal

1) G-niň islendik a we b elementleriň $a*b$ hem bu köpligiň elementidir. Islendik $a,b\in G, \quad a*b\in G$
2) Islendik $a,bc\in G$ elementler üçin $(a*b)*c=a*(b*c)$ deňlikler adalatlydyr.
3) G köplükde käbir ýeke-täk kesgitlenilýän 1 element bar bolup bu köplügiň islendik a elementleri üçin $l*a=a*l$ bolýandyr.
4) G köplügiň islendik a elementi üçin bu köplükde $\widetilde{a}$ elementler bar bolup $a*\widetilde{a}=\widetilde{a}*a=l$ deňlik ýerine ýetýändir . şertleri kanagatlandyrýen bolsa onda g köplükde $*$ amala görä topar emele getirýär diýip aýdylýar. Egerde Gköplügiň elementleri hemde onda kesgitlenen $*$ amal üçin ýokardaky şertler ýerine

ýetmek bilen 1 hatarda G köplügiň islendik a , b elementleri üçin $a * b = b * a$ gatnaşyk ýerine ýetyän bolsa bu topara kommutatiw ýada abel topary diýip aýdylýar. Egerde toparleryň elementleriniň sany tükenikli bolsa oňa tükenikli , elementleriniň sany tükeniksiz bolsa topar diýlip aýdylýar. Tükenikli toparlaryň elementleriniň sanyna toparyň tertibi diýilýär we ol $|G|$ görnüşinde belgilenýär. Egerdf toparda kesgitlenen amal (+)amaly bolsa toparda aditiw , egerde ol amal (-) amaly bolsa multiplikatiw topar diýlip aýdylýar.

5). Eger-de deňeşdirme m modula görä ýerne ýetýän bolsa , onda ol bu modulyň islendik bölüjisine görä hem ýerine ýetýändir.

Hakykatdan hem eger-de $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ bolsa onda a-b tapawut m modula görä galyndysyz bölünýändir. Onda ol tapawut m sanyň islendik d bölüjisine hem galyndysyz bölünýändir. Bu diýildigi $a \equiv b(\mathrm{mod}\ d)$ deňeşdirme dogrudyr.

6). Eger-de deňeşdirmäniň haýsy hem bolsa bir tarapy hem-de modul käbir sana bölünýän , bolsalar, onda ol sana deňeşdirmäniň beýleki tarapy hem bölünýändir.

Bu häsiýeti subut etmek üçin $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ deňeşdirmeden gelip çykýan $a = b + mt$ t-bitn san deňligiň çep tarapy a we onuň 2-nji goşulyjysy mt köpeltmek hasylynyň käbir c sana bölünýändiginden , sag tarapynda 1-nji goşulyjysy b-niň hem bu sana bölünmelidigini hasaba almak ýeterlikdir.

7). Eger-de $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ bolsa, $(a,m) = (b,m)$ bolýandyr.

Bu häsiýetiň dubudy üçin şerte görä , a=b+mt t-bitin san bolýandygyny , hem-denlemäni bu ýagdaýda a we m sanlaryň UB-jileriniň toplumy bilen b we m sanlaryň UB-jileriniň toplumynyň gabat gelýänliginden hem-denlemäni bu ýagdaýda husus an $(a,m) = (b,m)$ bolýanlygyndan peýdalanmak ýeterlikdir.

## 34.Aýyrmalaryň getirlen sistemasy .

Bize belli bolşuna görä , şol bir klasa degişli sanlaryň m modul bilen IUUB-leri gabat gelýändir. Bizi modul bilen özara ýönekeý sanlaryň klaslary gyzyklandyrjakdyr. Şeyle klaslaryň hersinden bir san alnyp ,düzülen sanlaryň sistemasyna berlen modula görä aýyrmalaryň doly sistemasy diýlip aýdylýar.

Adatça aýyrmalaryň m modula görä , getirlen sistemasyny bu modula görä , iň kiçi (-) bolmadyk aýyrmalaryň 0,1,2,…,m-1 doly sistemasyndan bölüp alýarlar. Başgaça aýdanyňda bu sanlar hataryndaky sanlaryň m modul bilen özara ýönekeýlerini saýlap alýarlar. Kesgitlemeden görnüşi ýaly m modula görä aýyrmalaryň getirlen sistemasyndaky sanlaryň sanynyň $\varphi(m)-e$ deň blakdygy düşniklidir.

**T.1 m** modul boýunça , deňeşdirerlikli bolmadyk m modul bilen özara ýöneleý blan islendik $\varphi(m)$ sany sanlar bu modula görä , aýyrmalaryň getirlen sistemasyny düzýändirler.

## 35.Wektorlar algebrasynyň elementleri.
## Wektorlar.
### Wektorlaryň kesgitlemesi.

Göni çyzygyň kesimi iki sany deňhukukly nokatlaryň – uçlaryň kömegi bilen berilýär. Emma nokatlaryň tertipleşdirilen jübüti arkaly kesgitlenen ugrukdyrylan kesime-de garamak bolardy. Ýokarda agzalan nokatlaryň haýsysynyň ilkinji /başlangyç/, haýsysynyň ikinji /ahyrky / bize belli bolmaly.

**KESGITLEME:**Ugrukdyrylan kesime /şeýle hem nokatlaryň tertipleşdirilen jübütine/ **wektor** diýip at berilýär. Wektorlaryň toparyna başlangyjy we ahyry gabat gelýän we nul wektor diýip atlandyrylýan wektory hem goşjakdyrys.

Kesimiň ugry strelkanyň kömegi bilen bellenýär.Wektoryň harply belgisiniň ýokarsynda strelka goýulýar.Meselem:$\overrightarrow{AB}$ /şu ýazgyda wektoryň başlangyjyny görkezýän harp ilki ýazylýar/. Kitaplarda wektoryň belgisini strelkadan başga garamtyk harp bilen hem aňladylýar. Nul wektory $\vec{0}$ ýa-da 0 bilen belgiläris.

Wektoryň başlangyjy bilen ahyrynyň arasyndaky uzaklyga onuň uzynlygy / şeýle hem onuň moduly , obsolýut ululygy / diýilýär. Wektoryň uzynlygy $\left|\vec{a}\right|$ ýa-da$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ görnüşde belgiläris.

Eger wektor bir göni çyzykda ýerleşen bolsa ýa-da parallel göni çyzyklarda ýerleşen bolsa, ýagny gysgaça aýdanymyzda, şu wektorlaryň hemmesine parallel bolan göni çyzyk bar bolsa, onda şu wektorlara "**kollinear** wektorlar diýilýär.

Eger wektorlar bir tekizlikde ýerleşen bolsa ýa-da parallel tekizliklerde ýerleşen bolsa, gysgaça aýdylanda, eger şu wektorlaryň hemmesine parallel bolan tekizlik bar bolsa, onda bu wektorlara **komplanar** wektorlar diýilýär.

Nul wektoryň belli bir kesgitlenen ugry ýok, şonuň üçinem ony islendik wektora kollinear diýip hasaplaýarlar. Onuň uzynlygy, elbetde, nula deňdir.

**KESGITLEME:**Eger iki wektor kollinear bolsa, olar bir tarapa ugrukdyrylan bolsa we olaryň uzynlyklary deň bolsa, onda bu iki wektora **deň wektorlar** diýilýär.

Bu kesgitlemeden aşakdaky gelip çykýar:biz islendik $A'$ nokady alyp, käbir berlen AB wektora deň bolan $\overrightarrow{A'B'}$ wektory gurup bolýar / özünem diňe bir wektor/ ýa-da käwagt aýdylyşy ýaly $A'B'$ wektory $A'$ nokada göçürip bolýar.

**Wektoryň üstünde çyzykly amallar.**

Wektorlaryň üstündäki çyzykly operasiýalara wektorlary goşmak we wektory sana köpeltmek girýär.Olaryň kesgitlemelerini ýatlalyň.

**KESGITLEME:**Goý, bize $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsun. Olara deň bolan $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{BÇ}$ wektorlary guralyň / ýagny $\vec{a}$ wektoryň ahyryny we $\vec{b}$ wektoryň başlangyjyny erkin B nokada geçireliň. Şonda $\overrightarrow{AÇ}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň jemi diýilýär we $\vec{a}+\vec{b}$ bilen belgilenýär.

**BELLIK:**B nokadyň deregine başga bir $B'$- nokady alan bolsak, onda biz jem hökmünde başga $\overrightarrow{AÇ}$ wektora deň bolan $\overrightarrow{AÇ'}$ wektory alardyk.

Iki wektoryň jemini olara degişli edýän amala **wektorlary goşmak** diýilýär.

**KESGITLEME:**Eger $\vec{B}$ wektor aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan, ýagny:

**I.** $\overrightarrow{|b|} = |\alpha| * \overrightarrow{|a|}$

**II.** $\vec{b}$ wektor $\vec{b}$ wektora kollinear.

**III.**Eger α>0 bolanda $\vec{b}$ we $\vec{a}$ wektorlar bir tarapa ugrukdyrylan, eger- de α > 0 bolanda, olar garşylykly taraplara ugrukdyrylan bolsa, onda $\vec{b}$ wektora $\vec{a}$ wektoryň **α sana köpeltmek**

**hasyly** diýilýär.Elbetde $\alpha$=0 bolsa,onda $\vec{b}=\vec{0}$ bolýandygy I-nji şertden gelip çykýar.

$\vec{a}$ wektoryň $\alpha$ sana köpeltmek hasyly $\alpha*\vec{b}$ bilen belgilenilýär. Wektorlaryň üstündäki çyzykly operasiýalaryň esasy häsiýetlerini sanap geçeliň.

**I.** Wektorlary goşmak kommutatiwdir, ýagny islendik iki $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar üçin $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ deňlik ýerine ýetýär.

**2.** Wektorlary goşmak ossosiatiwdir, ýagny $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar üçin $/\vec{a}+\vec{b}/+\vec{c}=\vec{a}+/\vec{b}+\vec{c}/$ deňlik ýerine ýetýär.

**3.** Islendik $\vec{a}$ wektoryň üstüne $\vec{0}$ wektor goşulanda $\vec{b}$ wektor üýtgemeýär: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Şu ýerde bir kesgitlemäni ýatlalyň:**Eger iki wektoryň jemi nul wektora deň bolsa, onda ol wektorlara garşylykly wektorlar diýilýär.**

**4.** Islendik $\vec{a}$ wektor üçin /-1/ $\vec{a}$ wektor garşylyklydyr, ýagny $\vec{a}$/-1/$\vec{a}=\vec{0}$

**5.** Wektory sana köpeltmek assosiatiwdir, ýagny islendik $\vec{a}$ wektor üçin $/\alpha\ \beta/\vec{a}=\alpha/\beta\ \vec{a}/$ deňlik ýerine ýetýär.

**6.** Wektory sana köpeltmek sanlary goşmaga görä distributiwdir, ýagny islendik α we $\beta$ sanlar üçin we islendik $\vec{a}$ wektor üçin /α + β/$\vec{a}$=$\vec{a}$+β*$\vec{a}$ deňlik ýerine ýetýär.

**7.** Wektory sana köpeltmek wektorlary goşmaga görä distributiwdir, ýagny islendik α sana we islendik $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar üçinα ./$\vec{a}$+$\vec{b}$/=α $\vec{a}$+ $\alpha$ $\vec{b}$ deňlik ýerine ýetýär.

**8.** Wektory birlik sana köpeltmek ony üýtgetmeýär, ýagny I.$\vec{a}$=$\vec{a}$;

$\vec{a}$ wektora garşylykly bolan wektor $\overrightarrow{-a}$ bilen belgilenýär. $\vec{a}$ wektora we $\vec{b}$ wektora garşylykly bo;an $\overrightarrow{-b}$ wektoryň jemine, ýagny $\vec{a}$+ /$\overrightarrow{-b}$/ ýa-da gysgaça $\vec{a}$-$\vec{b}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ **wektorlaryň tapawudy** diýilýär.

Goşmak amalyna ters bolan we iki wektora olaryň tapawudyny degişli edýän amala **wektorlary aýyrmak** diýilýär:iki wektoryň $\vec{b}$ + $\vec{x}$=$\vec{a}$ jemi boýunça we goşulyjylaryň biri bolan $\vec{b}$ wektor boýunça biz ikinji goşulyjyny tapyp bilýäris, ýagny

$$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$$

Aýyrmak amaly goşmagyň üsti bilen kesgitlenenligi sebäpli, ony mundan beýläk aýratyn amal hasp etjek däldiris. Şeýle hem wektory α≠0 sana bölmegi aýratyn kesgitläp durmarys, çünki ony $\alpha^{-1}$sana köpeltmek bilen çalşyryp bolýar.

Çyzykly operasiýalary ulanyp, sana köpeldeliň wektorlardan jem düzüp bilýäris:$\alpha_1 \vec{b_1}+\alpha_2 \vec{b_2}+\cdots\cdots+\alpha_k \vec{b_k}$ şu görnüşdäki aňlatmalara **wektorlaryň çyzykly kombinasiýalary** diýilýär.Çyzykly kombinasiýa girýän sanlara ol kombinasiýanyň **koeffisientleri** diýilýär.

Çyzykly operasiýalaryň ýokarda sanalyp geçilen häsiýetleriň kömegi bilen çyzykly kombinasiýalardan düzülen aňlatmalary algebranyň adaty düzgünleri arkaly özgerdip bolýar, ýagny skobkalary açmak, meňzeşçlenleri toparlamak, käbir çleni garşylykly alamaty bilen deňligiň beýleki bölegine geçirmek we şuňa meňzeş operasiýalary ýerine ýetirip bolýar.

Wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy aşakdaky öz-özünden düşnükli häsiýetlere eýedir,eger $\vec{a_1}$ ,$\vec{a_2}$,.......,$\vec{a_n}$ wektorlar kollinear bolsa, onda olaryň islendik çyzykly kombinasiýasy şol wektorlara kollineardyr,eger $\vec{a_1}$,$\vec{a_2}$,.......,$\vec{a_k}$ wektorlar komplanar bolsa, onda olaryň islendik çyzykly kombinasiýasy olar bilen komplanardyr. Bu häsiýet $\alpha\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora kollinearlygyndan we wektorlaryň jeminiň şol wektorlaryň tekizliginde ýerleşýändiginden , hatda goşulyjylar kollinear bolanda, olar bilen bir göni çyzykda ýerleşýändiginden gelip çykýar.

**KESGITLEME:**Göni çyzykda islendik nul däl wektora **bazis** diýip bolýar.

Tekizlikde belli bir tertipde alnan iki sany özara kollinear däl wektora **bazis** diýilýär.Giňişlikde belli bir tertipde alnan üç sany komplalar däl wektora **bazis** diýilýär.

**BELLIK:**Tekizlikdäki bazisiň wektorlary nul wektor bolup bilmeýär, çünki olaryň biri nul-wektor bolaýsa, olar kollinear bolardy.Şeýle hem giňişligiň bazisiniň ikisi kollinear bolup bilmez, çünki şeýle bolanlygyna olaryň üçüsi hem komplanar bolardy.

Eger wektor birnäçe wektoryň çyzykly kombinasiýasy görnüşinde aňladylan bolsa, onda ol wektor berlen wektorlar boýunça dagydylan diýilýär.Köplenç wektoryň bazis wektorlary boýunça dagytmasyna garalýar.

**KESGITLEME:**Eger $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ wektorlar giňişlikde bazis wektorlary bolsa we $\vec{a}=\alpha_1\vec{b_1}+\alpha_2\vec{b_2}+\alpha_3\vec{b_3}$ bolsa, onda $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sanlara $\vec{a}$ wektoryň berlen bazisdäki **kompanentalary** / ýa-da kosdunatalary /diýilýär. Wektoryň tekizlikdäki we göni çyzykdaky kompanentalary edil ýokardaky ýaly kesgitlenilýär. Wektoryň komponentalaryny harply belgilenmäniň yzyndan skobkalarda ýazýarlar. **MESELEM:**$\vec{a}$/1,0,1,/ ýazgy $\vec{a}$ wektoryň giňişlikde berlen käbir bazisde kompanentalarynyň degişlilikde I-e, 0-a we I-e deňdigini aňladýar.

**1-nji Teorema** : Käbir göni çyzyga parallel bolan her bir wektor şol göni çyzykdaky bazis boýunça dagadylyp bilner.

**Subudy**: Bu tassyklama aşakdakyny aňladýar . Nul däl $\vec{e}$( göni çyzykdaky bazis) wektora kolleniýar bolan her bir $\vec{e}$ wektor üçin $\alpha$ san tapylyp, $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{e}$ deňlik ýerine ýeter. Şeýle san $\vec{a}$ we $\vec{e}$ wektorlaryň birmeňzeş ugrukdyrylandygyny ýa-da olaryň garşylykly ugrukdyrylandygyna baglylykda ýa $\vec{a}/\vec{e}$ sana ýa-da $\vec{a}:\vec{e}$ sana deň bolar.

**2-nji teorema:** Haýsydyr bir tekizlige parallel bolan wektory şol tekizlikde alnan bazis boýunça çyzykly kombinasiýa dagydyp bolar.

**SUBUDY:**Bu tassyklamanyň manysy aşakdakydan ybarat. Özara kollinear däl iki sany $\vec{a_1}$ we $\vec{a_2}$ wektorlar bilen komplanar $\vec{a}$ wektor üçin /$\vec{a_1}$ we $\vec{a_2}$ wektorlar şol iki tekizlikde bazis mele getirýärler / $\vec{\alpha_1}$ we $\vec{a_2}$ sanlar tapylyp, $\vec{\alpha}=\alpha_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ deňlik ýerine ýeter. Bu sanlary görkezmek üçin berlen wektorlaryň / $\vec{a}$,$\vec{a_1}$ ,*we* $\vec{a_2}$ / üçüsiniň hem başlangyçlaryny bir 0 nobatda ýerleşdireris we $\vec{a}$ wektoryň A ahyryndan $\vec{a_2}$ wektora parallel bolan AP göni çyzygy geçireris.

Onda wektorlary goşmagyň kesigtlemesinden alarys: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}$, özünem $\overrightarrow{OP}$ wektor bolsa $\vec{a_1}$ wektora kollinear,$\overrightarrow{PA}$ wektor bolsa, $\vec{a_2}$ wektora kollinear./Hususy halda $\overrightarrow{OP}$ we $\overrightarrow{PA}$ wektorlaryň islendiginiň nul wektor bolmagy mümkin/.Indi $\overrightarrow{OP}$we $\overrightarrow{PA}$ wektorlar üçin 1-nji teoremanyň tassyklamasyndan peýdalanýarys:

$$\overrightarrow{OP}=\propto_1\vec{a_1} \quad \text{we} \quad \overrightarrow{PA}=\propto_2\vec{a_2} \quad \text{bu ýerden} \quad \overrightarrow{OA}=\propto_1\vec{e_1}+\propto_2\vec{e_2}$$

ýa-da

$$\vec{a}=\propto\vec{e_1}+\propto_2\vec{e_2}$$

**3-NJI TEOREMA:** Her bir wektory giňişlikde alnan bazis boýunça dagydyp bolar.

**SUBUDY:**Bu teoremanyň tassyklamasy aşakdaky ýalydyr.Her bir $\vec{a}$ we komplanar däl $\vec{a_1}$,$\vec{a_2}$,we $\vec{a_3}$ wektorlar üçin $\alpha_1$,$\alpha_2$ we $\alpha_3$ sanlar tapylyp:

$\vec{a}=\alpha_1\vec{\propto_1}+a_2\vec{\propto_2}+a_3\vec{\propto_3}$ deňlik ýerine ýetýär.

Teoremany subut etmek üçin dört wektoryň hemmesiniň başlangyçlaryny bir 0 nokatda ýerleşdireliň. Soňra $\vec{a}$ wektoryň A ahyryndan $\vec{a_3}$ wektora parallel bolan AP göni çyzygy geçirýäris.Onda $\vec{OA}=\vec{OP}+\vec{PA}$ bolar, özünem $\vec{PA}$ wektor $\vec{a_3}$ wektora kollinear.$\vec{OP}$ wektor bolsa,$\vec{a_1}$ we $\vec{a_2}$ wektorlar bilen komplanardyr.Ýokarda subut edilen 1-nji we 2-nji teoremalaryň esasynda alarys:$\vec{PA}=\alpha_3\vec{e_3}$ we $\vec{OP}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}$, onda $\vec{OA}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ ýa-da $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$

**4-NJI TEOREMA:**Ýokarda getirelen üç teoremanyň üçüsinde hem kompanentalar birbahaly kesgitlenýärler.

Bu tassyklamany garşylykly guman etmek usuly bilen subut edeliň,ýagny käbir $\vec{a}$ wektor giňişlikde alnan bazis boýunça dürli iki görnüşde dagydylypdyr diýip guman edeliň: $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ we $\vec{a}=\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\beta_3\vec{e_3}$ .

Birinji aňlatmadan ikinji aňlatmany çlenme –çlen aýryp alarys:

$$(\alpha_1-\beta_1)\vec{e_1}+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e_2}+(\alpha_3-\beta_3)\vec{e_3}=0$$

Eger şu tapawutlaryň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolsa, onda biz bazis wektorlarynyň birini beýleki ikisi boýunça dagydyp bileris.Mysal üçin: eger $\alpha_1-\beta_{1\neq0}$ bolsa, onda alarys:$\vec{e_1}=\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}\vec{e_2}$ - $\frac{\alpha_3-\beta_3}{\alpha_1-\beta_1}\vec{e_3}$.

Bu bolsa,bazis wektorlarynyň komplanar däldigine garşy gelýär.Alnan gapma-garşylyk bolsaher bir wektoryň şol bir bazis /giňişlikde/ boýunça dagytmasynyň ýeke-täkdigini subut edýär.Göni çyzygyň bazisi, tekizligiň bazisi boýunça-da, dagytmagyň ýeke-täkdigi edil giňişlikdäki ýaly subut edilýär.

Ahyrky teoremanyň subutyna göz aýlasak,biz onuň aşakdaky sözlemiň hem subutydygyny seljereris.

**TEOREMA:**Deň wektorlaryň bir meňzeş kompanentalary bardyr.

Analitik geometriýada wektorlar baradaky geometrik tassyklamalar şu wektorlaryň kompanentalarynyň üstünde geçirilýän hasaplamalara getirilýär.Aşakdaky iki sözlem öz kompanentalary bilen berlen wektorlaryň üstünde çyzykly operasiýalary nähilli ýerine ýetirilýändigi görkezýär.

**SÖZLEM:**Wektory sana köpeltmek üçin onuňkompanentalarynyň her birini sana köpeltmek gerek.Hakykatdan-da, eger $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ bolsa, onda

$\lambda\vec{a}=\lambda(\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3})=(\lambda\alpha_1)\vec{e_1}+(\lambda\alpha_2)\vec{e_2}+(\lambda\alpha_3)\vec{e_3}$.

**SÖZLEM:**Iki wektor goşulanda olaryň degişli kompanentalary goşulýarlar.Hakykatdan hem, eger $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ we $\vec{b}=\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\beta_3\vec{e_3}$ bolsa, onda

$\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+$
$a_3\vec{e_3})+(\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\beta_3\vec{e_3})=(\alpha_1+\beta_1)\vec{e_1}+(\alpha_2+\beta_2)\vec{e_2}+(\alpha_3+\beta_3)$
$\vec{e_3}$.

## 36.WEKTORLARYŇ ÇYZYKLY BAGLYLYGY.

Eger birnäçe wektoryň çyzykly kombinasiýasynyň ähli koeffisientleri nula deň bolsa,onda oňa **triwial çyzykly kombinasiýa** diýilýär.Elbetde, islendik wektorlardan düzülen triwial göni çyzykly kombinasiýa nul wektora deňdir. Çyzykly kombinasiýanyň iň bolmanda bir koeffisirnti nuldan tapawutly bolsa, onda oňa **triwial däl** çyzykly kombinasiýa diýilýär.

**KESGITLEME:**Eger $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_n}$ wektorlaryň nula deň bolan dik triwial däl çyzykly kombinasiýasy bar bolsa, onda olara **çyzykly bagly wektorlar** diýilýär.Başgaça aýdylanda eger $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2},.........\vec{\alpha_n}$ sanlar bolup, $\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+.........\alpha_k\vec{a_k}=0$ we $\alpha_1^2+\alpha_2^2+......\alpha_k^2\neq0$ bolsa, on$da$ $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_k}$ wektorlara çyzykly bagly gektarlar diýilýär.

Garşylykly halda, ýagny $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_k}$ wektorlaryň diňe triwial çyzykly kombinasiýasy nula deň bolsa, onda ol wektorlara **çyzykly bagly däl wektorlar** diýilýär.Eger wektorlar çyzykly bagly däl bolsa, onda , $\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+.........\alpha_k\vec{a_k}=0$ deňlikden $\alpha_1=\alpha_2=........=\alpha_n$ gelip çykýar.

Çyzykly baglylyk düşünjesiniň aşakdaky häsiýetlerini belläp geçeliň.

Eger $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_k}$ wektorlaryň arasynda nul wektor bar bolsa, onda olar çyzykly baglydyrlar.Hakykatdan-da,olaryň çyzykly kombinasiýasynda nul wektorlaryň koeffisientinil-e deň diýip, beýleki wektorlaryň koeffisientlerinihula deň diýip kabul etsek, onda bu çyzykly kombinasiýa triwial däl, emma nula deň bolar.

Eger $\underset{a_1}{\rightarrow}, \underset{a_2}{\rightarrow}, \ldots\ldots\ldots \underset{a_k}{\rightarrow}$ wektorlaryň çyzykly bagly ulgamyna bir ýa-da birnäçe $b_1, b_2, \ldots\ldots b_j$, wektorlar goşulsa, onda täze alnan $\underset{a_1}{\rightarrow}, \underset{a_2}{\rightarrow}, \ldots\ldots\ldots \underset{a_k}{\rightarrow}, b_1, b_2, \ldots\ldots b_j$ ulgama hemçyzykly bagly bolar.Hakykatdan-da, $\underset{a_1}{\rightarrow}, \underset{a_2}{\rightarrow}, \ldots\ldots\ldots \underset{a_k}{\rightarrow}$, wektorlaryň nula deň bolan triwial däl çyzykly kombinasiýasy$na$ $b_1, b_2, \ldots\ldots b_j$ wektorlaryň her birini nula köpeldip goşsak, ýene-de nula deň bolan triwial däl çyzykly kombinasiýanyalarys.

**TEOREMA:**Berlen wektorlaryň ulgamynyň çyzykly bagly bolmagy üçin olaryň biriniň beýleki wektorlaryň çyzykly kombinasiýasyna dagydylmagy zerur hem ýeterlikdir.

**SUBUDY:**Goý, $\underset{a_1}{\rightarrow}, \underset{a_2}{\rightarrow}, \ldots\ldots\ldots \underset{a_k}{\rightarrow}$, wektorlar çyzykly bagly bolsun,ýagny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_n$ koeffisientler tapylyp, $\alpha_1 \underset{a_1}{\rightarrow} + \alpha_2 \underset{a_2}{\rightarrow} + \ldots\ldots\ldots \alpha_k \underset{a_k}{\rightarrow}$ bolsun we iň bolmanda olaryň biri, meselem, $\alpha_1$ nuldan tapawutly bolsun. Bu halda , $\underset{a_1}{\rightarrow}$ wektor $\alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_n$ wektorlaryň çyzykly kombinasiýasydyr. Hakykatdan-da,biz ony $\underset{a_1}{\rightarrow} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \underset{a_1}{\rightarrow} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \underset{a_3}{\rightarrow} - \ldots\ldots\ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \underset{a_k}{\rightarrow}$ görnüşde aňladyp bileris.

Tersine, goý indi berlen wektorlaryň biri, mysal üçin $\underset{a_1}{\rightarrow}$ wektor beýleki wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy görnüşinde aňladyp bolsun,ýagny $\underset{a_1}{\rightarrow} = \boldsymbol{\beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + \beta_k \alpha_k}$ bolsun.

Bu ýerden $\underset{a_1}{\rightarrow}, \underset{a_2}{\rightarrow}, \ldots\ldots\ldots \underset{a_k}{\rightarrow}$ wektorlaryň $-1, \boldsymbol{\beta_2, \beta_3, \ldots\ldots, \beta_k}$ koeffisientli çyzykly kombinasiýanyň nula deňdigi görnüp dur. Bu çyzykly kombinasiýanyň triwial deňligi sebäpli, $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots\ldots\ldots \vec{a_k}$ ewktorlar çyzykly baglydyr.

Çyzykly baglylyk düşünjesine degişli ýene-de birnäçe tassyklama garalyň.

**Teorema:**Özara kollinear iki wektor çyzykly baglydyr.Tersine,çyzykly bagly iki wektor hemişe kollineardyr.

Hakykatdan-da, goý bize iki sany kollinear bolan wektor berlen bolsun.Olaryň nul wektor bolmagy hem mümkin, onda tassyklamanyň dogrudygy görnüp dur, olaryň biri nul däl wektor bolmagy mümkin, onda ikinji wektor onuň üsti bilen aňladylýar. Iki halda hem wektorlar çyzykly baglydyrlar.

Tersine,ýokarda subut edilen tassyklama görä çyzykly bagly iki wektoryň biri beýlekisiniň üsti bilen çyzykly aňladylýar,diýmek olar kollineardyrlar.

**TEOREMA:**Islendik komplanar üç wektor çyzykly baglydyr we tersine, çyzykly bagly üç wektor komplanardyr.

**SUBUDY:**Goý, üç sany komplanar wektor berlen bolsun.Olaryň haýsydyr ikisine garalyň.Eger olar kolinear bolsalar, onda olar özara çyzykly baglydyr, şeýle hem olar üçünji wektor bilen çyzykly bagly bolarlar.Eger-de alnan iki wektor kollinear däl bolsa, onda üçünji wektoryolaryň üsti bilen aňladyp bolar we şoňa görä-de çyzykly bagly bolarlar.

Tersine, çyzykly bagly üç wektoryň biri beýleki ikisiniňüsti bilen aňladylýar, diýmek, ol beýleki iki wektor bilen komplanardyr / eger beýleki iki wektor kollinear bolsa, onda ol üçünji wektor hem olara kolinear bolar./

**TEOREMA:**Her bir dört wektor çyzykly baglydyr.

Hakykatdan-da,berlen dört wektoryň islendik üçüsine garalyň.Eger olar komplanarlar bolaýsa, onda olar özara çyzykly baglydyr we dördünji wektor bilen hem çyzykly bagly ulgamy düzerler. Eger-de olar komplanar däl bolsa, onda dördünji wektor olaryň çyzykly kombinasiýasyna dagydylýar, bu bolsa olaryň çyzykly baglydygyny görkezýär.

## 37.KORDINATALAR ULGAMLARY. KORDINATOLARYŇ DEKART ULGAMY.

Giňişlikde 0-nokady fiksirläp, M nokada garalyň. $\overrightarrow{OM}$ wektora 0 nokada görä M nokadyň **radius-wektory** diýilýär. Eger giňişlikde, 0 nokatdan başga, käbir bazis hem saýlanyp alnan bolsa, onda M nokada sanlaryň tertipleşdirilen üçlügini – M nokadyň radius-wektorynyň kompanentalaryny – degişli edip bolar.

**KESGITLEME:**Nokadyň we bazisiň toplumyna **koordinatalaryň** giňişlikdäki **dekart ulgamy** diýilýär.Bu nokada **kordinatalar başlangyjy** diýip at berilýär, koordinatalar başlangyjyndan bazis wektorlarynyň ugry boýunça geçýän göni çyzyklara koordinata oklary diýilýär.Olaryň birinjisinie **obsissalar oky**, ikinjisine **ordinatalar oky** diýilýär, üçünjisine bolsa **oplikatalar oky** diýilýär. Koordinatalar oklarynyň üstünden geçýän tekizliklere koordinatalar tekizlikleri diýilýär.

**KESGITLEME:**M nokadyň kordinatalar başlangyjyna görä radius-wektorynyň kompanentalaryna M nokadyň garalýan koordinatalar ulgamyndaky **koordinatalary** diýilýär.Şonda birinji koordinata **obsissa,** ikinjisine **ordinata,** üçünjisine bolsa **aplikata** diýilýär.

## 38.KOORDINATALARYŇ GÖNÜBURÇLY DEKART ULGAMY.

Koordinatalaryň dekart ulgamlary käbir ýörüte alnan ulgamlaryna - gönüburçly dekart ulgamlaryna – görä seýrek ulanylýar.

**<u>KESGITLEME.</u>** Eger bazisiň wektorlary jübüt – jübütden ortogonal bolup , olaryň uzynlyklary birlige deň bolsa , onda bu bazise <u>ortonormirlenen bazis</u> diýilýär. Bazisi ortonormirlenen koordinatalaryň dekart ulgamyna <u>koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamy</u> diýilýär. Geljekde biz koordinatalaryň diňe gönüburçly dekart ulgamyndan peýdalanjakdyrys. Bu ulgamda bazis wektorlaryny **i , j** we **k** harplar bilen belgilejekdiris. Olara ortlar diýip at berilýär. Giňişlikde her bir radius-wektoryň $\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$ dagytmasy bardyr.

Tekizlikde koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamyna görä nokadyň koordinatalary hem edil ýokardaky ýaly tapylýar.

Giňişlikde koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamyna $/o, i, j, k/$ garalyň we şol ulgamda A hem B iki nokady alalyň , goý, olaryň koordinatalary degişlilikde $x_1, y_1, z_1,$ we $x_2, y_2, z_2$ bolsun.

Goý öňümizde $\overrightarrow{AB}$ wektoryň dagytmasyny tapmak meselesini goýalyň.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ bolýandygy çyzgydan görüner.

$\overrightarrow{OB}$ we $\overrightarrow{OA}$ radius-wektorlaryň dagytmasyny ýazalyň: $\overrightarrow{OB} = x_2$ i + $y_2$ j +$x_3$ k

$\overrightarrow{OA} = x_2$ i + $y_1$ j +$z_1$ k. Bazis boýunça dagydylan wektorlary aýyrmak /goýmak/ düzgüni boýunça ýazarys:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\, i + (y_2 - y_1)\, j + (z_2 - z_1)\, k$$

Şeýlelikde, aşakdaky tassyklama subut edildi.

Wektoryň komponentalaryny /koordinatalaryny/ tapmak üçin onuň ahyrynyň koordinatalaryndan başlangyjynyň degişli koordinatalaryny aýyrmak gerek.

## 39. KESIMI BERLEN GATNAŞYKDA BÖLMEK.

AB kesimde ony $\lambda > O$ gatnaşykda bölýän, ýagny $\frac{|AM}{|MB}=\lambda$ şerti kanagatlandyrýan, M nokadyň koordinatalaryny tapalyň. Ýokardaky şerti wektor görnüşde şeýle ýazyp bolar:

$$\overrightarrow{AM}=\lambda * \overrightarrow{MB}$$

A we B nokatlaryň koordinatalaryny degişlilikde $/x_1, y_1, z_1/$ we $/x_2, y_2, z_2/$ bilen, M nokadyň koordinatalaryny bolsa $/x_0, y_0, z_0/$ bilen belgiläp, biz / i / deňligiň iki bölegini-de bazis boýunça dagydarys, özünem $\overrightarrow{AM}$ we $\overrightarrow{MB}$ wektorlaryň komponentalaryny ýokarda subut edilen tassyklama esasynda taparys:

$$\overrightarrow{AM}=/x_0-x_1/\,i + /y_0-y_1/\,j + /z_0-z_1/\,k \quad \text{we}$$

$$\overrightarrow{MB}=/x_2-x_0/\,i + /y_2-y_0/\,j + /z_2-z_0/\,k$$

Onda / i / deňlik aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$(x_0-x_1)\,I + (y_0-y_1)\,j + (z_0-z_1)\,k=\lambda\,((x_2-x_0)\,i + (y_2-y_0)\,j + (z_2-z_0)\,k)$$

Bu ýerden iki wektoryň deňligi esasynda alarys:

$$x_0-x_1=\lambda\,(x_2-x_0)\,,$$

$$y_0-y_1=\lambda\,(y_2-y_0)\,,$$

$$z_0 - z_1 = \lambda (z_2 - z_0) .$$

Bu ulgamy çözüp tapýarys:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad / 2 /$$

Bu formulalara kesimi berlen gatnaşykda bölmegiň formulalary diýilýär. Eger biz / 2 / formulalarda λ sany otirsatel etsek, onda / 1 / deňlikden görnüşi ýaly M /$x_0, y_0, z_0$ / nokat bary bir şol AB göni çyzykda ýatýar, emma M nokat AB kesimden daşarda ýerleşýär, M nokat AB kesimi / λ / gatnaşykda bolar. Şonuň üçin hem / 2 / formulalar has umumyrak meseläniň çözülişini berýärler. Has takygy, şol formulalaryň kömegi bilen kesimi berlen gatnaşykda içki nokat bolup hem, daşky nokat bolup hem bolýan hallarynda ol nokadyň koordinatalaryny tapmak bolýar.

Tekizlikde kesimi berlen gatnaşykda bolmak meselesi edil giňişlikdäki ýaly çözülýär, ýöne bu halda bazis iki wektordan ybarat we şonuň üçinem / 2 / formulalardan diňe iki sanysy alynýar.

Eger M nokat AB kesimiň ortasy bolsa, onda λ=i bolýar we / 2 / formulalar aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Bu formulalara kesimi deň ýarpa bölmegiň formulalary diýilýär.

## 40.KOORDINATALARYŇ POLÝAR ULGAMY.

Koordinatalaryň dekart ulgamy nokadyň käbir geometrik obraza görä ýagdaýyny kesgitlemegiň ýeke-täk usuly däldir.

Munuň üçin koordinatalar sistemalarynyň dürli-dürli görnüşleri ulanylyp bilner. Şu ýerde biz olaryň birnäçesini beýan edýäris.

Tekizlikde koordinatalaryň polýar ulgamy ýygy-ýygydan ulanylýar. Ol ulgamy bermek üçin polýus diýip atlandyrylýan O nokatdan çykýan P şöhle alýarlar. M nokadyň ýagdaýy iki san bilen fiksirlenýär: olaryň biri $r = \overrightarrow{|OM|}$ radius, beýlekisi bolsa polýar ok bilen $\overrightarrow{OM}$ wektoryň

arasyndaky $\varphi$ burçdyr. $\varphi$ burça **polýar burç** diýilýär. Biz ony radianlarda ölçäris we polýar okdan sagat strelkasynyň tersine bolan ugur boýunça hasaplarys.

Polýusda $r = 0$, emma $\varphi$ kesgitsiz galýar. Başga nokatlar üçin $r > 0$ we burç $2\pi$ sana kratny bolan goşulyjynyň takyklygy bilen kesgitlenýär.

Bu aýdylanlara şeýle düşünmeli. Mysal üçin, sanlaryň (r ; $\varphi$) , (r ; $\varphi$+2$\pi$) we umuman

(r ;$\varphi + 2kl$), bu ýerde k- islendik bitin san, jübütleri şol bir M nokadyň polýar koordinatalaryny aňladýarlar.

Käbir halatlarda polýar burçuň üýtgeýiş oblastyny belli bir şertler bilen çäklendirýärler, meselem, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ýa-da $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Goý, bize koordinatalaryň polýar ulgamy we sanlaryň / r; $\varphi$ / jübüti berlen bolsun, bu ýerde r - otrisatel däl san. Biz bu jübüte polýar koordinatalary M Y sanlar bolan M nokady degişli edip bileris. Hakykatdan-da, eger r>0 bolsa, onda ol jübüte uzynlygy r bolan we polýar ok bilen $\varphi$ burçy düzýän radius-wektorly M nokady degişli edýäris. Şunlukda, eger

$r$-$r_1$ we $\varphi$-$\varphi_1$=$2\pi k$, bu ýerde k- bitin san bolsa, onda / r; $\varphi$ / we /$r_1$; $\varphi_1$/ jübütlere şol bir nokat degişli bolýar.

Tekizlikde koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamyny alalyň, özünem koordinatalar başlangyjyny polýusda ýerleşdirýäris we uzynlyklary 1-e deň bolan wektorlaryň/ / $\vec{i_1}$=i,$\vec{i_2}$=j/ birini polýar okuň ugry boýunça ugrukdyrýarys, beýlekisini bolsa ol oka $\frac{\pi}{2}$ burç boýunça ugrukdyrýarys. Suratdan görnüşi ýaly, nokadyň dekart koordinatalary şol nokadyň polýar koordinatalary arkaly aşakdaky formulalar bilen aňladylýar: $x = r\cos\varphi$ , $y = r\sin\varphi$.

## 41.SILINDRIK KOORDINATALAR.

Giňişlikde silindrik koordinatalar aşakdaky ýaly girizilýär.Fiksirlenen $\varphi$ tekizlikde käbir O nokady we çykýan $OX$ şöhläni alýarys. Mundan başga-da O nokadyň üstünden $\varphi$ tekizligine perpendikulýar bolan $oz$ oka garalyň. Goý M giňişligiň islendik nokady bolsun, onuň $\varphi$ tekizlige proeksiýasyny $N$ bilen belgiläliň , M nokadyň $oz$ oka proeksiýasy $M_2$ bolsun. Sanlaryň $r, \varphi$ *we* $z$ üçligine M nokadyň <u>silindrik koordinatalary</u> diýilýär, bu sanlaryň ilkinji ikisi /$r$ *we* $\varphi$/

O polýusa we OX polýar oka görä N nokadyň $\alpha$ tekizlikdäki polýar koordinatalarydyr. $r$, $\varphi$ *we* $z$ silindrik koordinatalary bolan M nokady $M$/r ; $\varphi$; $z$ / bilen belgileýärler.

“Silindrik koordinatalar” diýen at $r = const$ koordinataly üstüň silindr bolýandygy sebäpli ýüze çykypdyr, ýagny şol bir r koordinataly üstüň silindr bolýandygy sebäpli ýüze çykypdyr, ýagny şol bir r koordinataly nokatlaryň köplügi gönüçyzykly emelegetirijileri oz oka parallel bolan silindrik üsti emele getirýär. Eger gönüburçly dekart ulgamynyň oklaryny suratda

görkezilişi ýaly edip alsak, onda M nokadyň $x, y, z$ dekart koordinatalary şol nokadyň $r, \varphi, z$ silindrik koordinatalary bilen aşakdaky formulalar arkaly aňladylýar:
$x = r\cos\varphi$ , $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

## 42. SFERIK KOORDINATALAR.

Sferik koordinatalary girizmek üçin giňişlikde umumy O başlangyjy bolan, özara perpendikulýar $ox$, $oy$, we $oz$ üç oka garalyň. O nokatdan alalyň, N nokat M nokadyň oxy tekizlige proeksiýasy bolsun, r san M nokadyň O nokatdan uzaklygy bolsun. Mundan başga-da $\theta$ burç ugrukdyrylan $\overrightarrow{OM}$ kesimiň $oz$ ok bilen emele getirýän burçy, $\varphi$ $x$ burç bolsa ox oky $oN$ şöhle bilen gabat gelýänçä sagat strelkasynyň tersine aýlamaly burç diýeliň. $\theta$ we $\varphi$ burçlara degişlilikde giňlik / şirota/ we uzynlyk /dogota/ diýýärler.

$r$, $\theta$ we $\varphi$ sanlara M nokadyň sferik koordinatalary diýilýär. $r = const$ üste/ sferik üst diýilýär.

Giňişligiň nokatlarynyň we sferik koordinatalaryň /r; $\theta$; $\varphi$/ üçlükleriň arasyndaky degişliligiň özara birbahaly bolmagy üçin adatça r we $\varphi$ ululyklary aşakdaky çäklerde üýtgeýär diýip hasap edýärler:

$$0 \le r \le +\infty \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

O koordinata bolsa kesgitlenişine laýyklykda O we X sanlaryň arasynda ýerleşýär.

Eger koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamynyň oklaryny suratda görkezilişi ýaly alsak, onda M nokadyň $x, y, z$ dekart koordinatalary onuň $r, \varphi, \theta$ sferik koordinatalary bilen aşakdaky formulalar arkaly aňladylýar:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$ , $y = r\sin\theta\sin\varphi$ , $z = r\cos\theta$.

## 43.IKI WEKTORYŇ SKALÝAR KÖPELTMEK HASYLY.

Iki wektoryň arasyndaky burç deregine umumy başlangyjy bolan we berlen wektorlara deň wektorlaryň arasyndaky burçy kabul edýärler. Käbir hallarda burç ölçenende haýsy wektordan we haýsy ugra ölçeg geçirilýändigini görkezýärler. Eger şeýle görkezme bolmasa, onda iki wektoryň arasyndaky burç $\pi$ –den uly bolmazlyk şert bilen alynýar. Eger iki wektoryň arasyndaky burç göni bolsa, onda ol wektorlara **ortogonal wektorlarlar** diýilýär.

**KESGITLEME.** Iki wektoryň uzynlyklarynyň olaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeltmek hasylyna deň bolan sana şol wektorlaryň **skalýar köpeltmek hasyly** diýilýär. Eger köpeldijileriň iň bolmanda biri nula deň bolaýsa, onda olaryň arasyndaky burç kesgitsiz galýar, bu halda skalýar köpeltmek hasyly kesgitleme boýunça nula deň hasap edilýär.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly $(\vec{a}, \vec{b})$ bilen belgilenýär, şeýlelik bilen, biz ony şeýle ýazyp bileris:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi,$$

Bu ýerde $\varphi$ burç $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçdyr. Skalýar köpeltmek hasylyň aşakdaky häsiýetleri aýdyň görnüp dur:

I Skalýar köpeltme kommutatindir, ýagny islendik $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlar üçin

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

Deňlik adalatlydyr.

2. Islendik $\vec{a}$ wektor üçin $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

3. Eger köpeldijiler ortogonal bolsa ýa-da iň bolmanda olaryň biri nul wektor bolsa, onda şu halda we diňe şu halda olaryň skalýar köpeltmek hasyly nula deňdir.

4. Ortanormirlenen bazisiň wektorlary aşakdaky deňlikleri kanagatlandyrýar:
$(i, i)=(j, j) = (k, k) = 1,$
$(i, j) = (j, k) = (k, i) = 0.$

**TEOREMA.** Eger bazis ortonormirlenen bolsa, onda islendik $\vec{a}$ wektoryň komponentalary
$\alpha_1=(\vec{a}, i)$ , $\alpha_2=(\vec{a}, j)$ , $\alpha_3=(\vec{a}, k)$
Formulalar arkaly tapylýarlar.
Bu deňlemede a,b, $R^2$ hemişelikler degişlilikde töweregiň merekezinde kordinatlary we onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulyklar bolsa töweregiň erkin M nokadyň kordinatlary hususy halda eger kordinatalr başlangyjy töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we ׀2׀ deňleme has ýönekeý görnüşi alar: $x^2+y^2=R^2$

Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler) merkezi c/a;b/ nokat radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede oklary açyp alarys.

$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/

ýa-da

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$

bu ýerde D=2a,E=-2b, $F=a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edildi. /3/

deňleme ikinji derejeli deňlemedir.

Şeýlelikde töwregiň üýtgeýän kordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyr emma her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlenmeýänligi bellemek gerek. Hakykatdanda /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris, töweregiň deňlemesinde kordinatalaryň kwadyratlanyň koefissenyleri özara deň bu deňlemeleriň kordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär. Tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /$x^2$ we $y^2$ çleneleriň koeffisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňleme töweregi kesgitleýär sebäbi ony $x^2$-yň koeffisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolar.

Ellips kesgitleme. Fokuslar diýip atlandyrylýan bärden iki nokada çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik san bolup takyklygyň nokatlar köpligine ellips diýilýär bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmaly.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen $F_1$ we $F_2$ nokatlary birleşdirýän göjni çyzygy absissalar oky hökmünde Kabul ederis ol okda $F_1$-den $F_2$ –ä tarap ugry polažitel diýip Kabul ederis $F_1$ $F_2$ nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny kordinatalar başlangyjy deregine Kabul edeliň fokuslaryň arasyndaky $F_1F_2$ uzynlygy 2c bilen belgiläliň. Onda $F_1$ we $F_2$ nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Ellipsiň erkin N nokadynyň kordinatalary. X we y bilen belgiläliň. $F_1M$ we $F_2M$ kesimleriň uzynlyklarynyň formulasy boýunça aňladalyň:

$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ , $F_2M=$

Ellipsiň kesgitlemesine görä kordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir. Ellipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /1/ deňlemede radikallary ýok etmek gerek. Radikallaryň birini sag bölege geçirýäri .

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Indi d=$\sqrt{(v-x_0)^2+(v-y_0)^2}$ formula buýunça M we N nokatlaryň arasyndaky uzynlygy tapmak galýar, ýagny

$$d=\sqrt{\left(x_0-A\cdot\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(y_0-B\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=\sqrt{A^2\left(\frac{Ax_0}{\phantom{x}}\right.}$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+c)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Göni çyzygyň polýar kordinatalardaky deňlemesi.

Göni çyzygyň normal deňlemesini alalyň x cos$\alpha$ +ysin$\alpha$ -p=0 tekizlikde kordinatalaryň göni burçly dekart sistemasy bilen polýar kordinatalaryň sistemasy arasyndaky baglanşygy berýän formylalary ýazylan.

X=r cos$\alpha$ y=rsin$\alpha$

Üýteýän x we y ulylyklaryň bu bahalaryny göni çyzygyň normal deňlemesinde goýýarys:

r cos$\varphi$ cos$\alpha$ +rsin$\varphi$ sin$\alpha$ -p=0

ýa-da

r·( cos $\varphi$ cos$\alpha$ + sin$\varphi$ sin$\alpha$ )-p=0

bu ýerden r·cos( $\varphi$ - $\alpha$ )-p=0

bu bolsa göni çyzgyň polýar koordinatalardaky deňlemesidir.

## 44.Ikinji tertipli egri çyzyklaryň elementar teoriýasy

Üýtgeýän x we y ulylyklara görä ikinji derejeli umumy deňleme özünde ikinji çlenleri /$x^2$,xy we $y^2$/ birinji derejeli çleni /azat çleni/ saklaýar. Şuňa laýyklykda ikinji derejeli umumy deňlemäni aşakdaky ýalyýazyp bolar.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Bu ýerde A,B,C koffisentleriň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolmaly. A,B,C,D,E,F koefissentleriň dürli bahalarynda bu deňlemeäniň haýsy çyzyklary kesgitlenýändigi baradaky sowada indiki bölümde garaljak.

Şu bölümde ikinji derejeli deňlemeleriň käbir ýörite görnüşlerine garap geçeliň.

Töwerek. Kesgitleme. Merkez diýip atlandyrylýan nokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän kesime şeýle-de şol kesimiň uzynlygyna töweregiň radiusy diýilýär.

R radiusyň töweregiň deňlemesini düzeliň.

Kordinatalar oklaryny erkin saýlap alalyň onda töweregiň c merkeziniň koordinatalary a we b bolar. Töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x.y bilen belgiläliň töweregiň ähli nokatlaryna mahsus bolan häsiýeti analitiki aňladalyň. Töweregiň kesgitlemesinden onuü islendik M nokadynyň C merkezinden uzakdygynyň hemişelik ululygy we onuň töweregiň R radiusyna deňdigi ýagny

CM=R

Bolýandygy gelip çykýar.

Cm ululygy C we M nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde kesgitläp biz /I/ deňligi M nokadyň öýtgeýän koordinatalarynyň üsti bilen aňladarys:

$$\sqrt{(x-y)^2+(y-b)^2}=R \quad /I/$$

Ahyrky deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip biz töweregiň deňlemesini ýady ýazarys:

$$(y-b)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad /2/$$

Bu deňlemede a,b, R hemişelikler degişlilikde töweregiň merkeziniň kordinatalary w onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulylyklar bolan töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalary. Hususy halda eger kordinatalar başlangyç töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we /2/deňleme has ýünekeý görnişi alýar.

$X^2+y^2=R^2$

Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler merkezi C/a;b/ nokatda radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede nokatlary açyp alarys:

$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/

Ýa-da

$x^2+y^2+Dx+ey+F=o$ /3/

bu ýerde D=2a, E=-2b, F= $a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edlildi. Deňleme ikinji derejeli deňlemedir

şeýlelikde töweregiň üýtgeýän koordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyrň emme her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlemeýändigi bellemek gerek. Hakykatdan-da /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris. Töweregiň deňlemesinde koordinatalryň kwadratlarynyň koeffisenleri özara deň bu deňlemä koordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /$x^2$ we $y^2$ çlenleriniň koefisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňlem töweregi kesgitleýär sebäbi ony $x^2$ iň koefisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolýar.

Ellips kesgitlemefokuslar diýip atalandyrylýan birden iki nokada çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik san bolan tekizligiňnokatlar köplügine eddipo diýilýär /bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmady/.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen $F_1$ we $F_2$ nokatlary birleşdirýän göni çyzygy absissalar oky hökmünde kabul ederis ol okda $F_1$ we $F_2$ nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny koordinatalar başlangyjy deregine kabul edeliň. Fokuslaryň arasyndaky $F_1$, $F_2$ uzaklygy 2c bilen belgiläliň. Onda $F_1$ we $F_2$ nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Elipsiň erkin N nokadynyň kordinatalaryny x we y bilen bagalalyň. $F_1M$ we $F_2M$ kesimleriň uzynlyklaryny iki nokadyň arasyndaky uzynlygyň formulasy boýunça aňladalyň.

$$F_1M = \sqrt{(x-y)^2 + y^2} \qquad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elellipsiň kesgitlemesine görä $F_1M+ F_2M$ jem hemişelik ulylyk ony 2b bilen belgiläp alarys $F_1M+ F_2M=2a$

Ýa-da

$$\sqrt{(x-y)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Bu deňleme alnan koordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir.

Elipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /I/ deňlemede redikallary birini sag bölege geçirýäris:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Iki bölegide kwadrata göterip alar

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

ýa-da

$$-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2}+y^2,$$

Yagny

$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2}+y^2$

Ýene-de deňlemäniň iki böleginide kwadrata göterip alarys:

$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$

ýa-da

$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$,

ýagny

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Bu deňlemäniň iki böleginide $a^2(a^2-c^2)$ bölup alarys:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (2)$$

$0<a$ bolany sebäpli $a^2-c^2>0$. Ony $b^2$ bilen belgilemek kabul edilen. Onda ellipsiň deňlemesi aşakdaky görnüşi alar:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3)$$

Bu ýerde

$$b^2=a^2-c^2. \qquad (4)$$

/3/ deňlemä ellipsiň kanonik deňlemesi diýilýär.

Indi ellipsiň formasynyň derňewine girişeliň. Bu derňewi ýerine ýetirmek,/3/ deňlemeden ugur alynsa, aňsatdyr.

1/ Ellipsiň Simmetriasy. Ellipsiň /3/ deňlemesinde uýtgeýän xwe y koordinatalar diňe kwadratlarda görýärler, şonuň uçin eger käbir /x,y/

nokat ellipse degişli bolsa,onda /-x,y/, /x,-y/ we /-x,-y/ nokatlar hem ellipse degişli bolar.Diýmek, koordinatalar oklary ellipsiň simmetriýa oklary bolup hyzmat edýärler.*********

Özünde fokuslar saklaýan ellipsiň okuna Fokal ok diýip at berilýär.

Simmetrik oklarynyň kesişme nokadyna,ýagny simmetrik merkezine, ellipsiň merkezi diýilýär./3/ deňleme bilen berlen ellips uçin fokal ok Ox oky bilen gabat gelýär,koordinatalar başlangyjy bolsa ellipsiň merkezi bolup hyzmat edýär.

2/Ellipsiň simmetrik oklary bilen kesişme nokatlary. Ellipsiň simmetrik oklary bilen kesişme nokatlaryna onuň depeleri diýilýär../3/ deňleme bilen berlen ellipsiň depeleri onuň koordinatalar oklary bilen kesişýän nokatlardadyr,çünki bu halda koordinatalar oklary onuň simmetrik oklary bolup hyzmat edýär. /3/ deňlemede y=0 diýip alsak, ellipsiň Ox oky bilen kesişme nokatlarynyň abssissalary taparys:

$\frac{x^2}{a^2}=1$,                bu ýerde $x^2=a^2$ we $x=\pm a$.

X=0 gumän edip, biz ellipsiň ordinatalar oky bilen kesişme nokatlarynyň taparys:$\frac{y^2}{b^2}=1$, bu ýerde $y^2=b^2$ we $y=\pm b$, Diýmek aşakdaky nokatlar ellipsiň depeleridir: $A_1$(a;0) $A_2$(-a;0), $B_1$(0;b) $B_2$=(0;-b), $b^2=a^2-c^2$ (c>0) bolany sebäpli b<a şoňa görä-de $A_1, A_2$ kesime, şeýle hem onuň 2b uzynlygyna ellipsiň uly oky diýilýär,$B_1, B_2$ kesime /we onuň 2b uzynlygyna/ bolsa ellipsiň kiçi oky diýilýär.

a we b uzynlyklara degişlilikde ellipsiň uly we kiçi ýarym oklary diýilýär.

3/ Ellipsiň Formasy. Ellipsiň formasyny aýdyňlaşdyrmak uçin $x\geq 0$ we $y\geq 0$ hallara garamak ýeterlikdir, sebäbi biz ýokarda ellipsiň koordinatalar oklaryna görä simmetrik ýerleşendigine göz ýetiripdik. /3/ deňlemeden $\frac{x^2}{a^2}\leq 1$ ýa-da $x\leq a$ bolandygy görünýär,ýagny x ululyk 0-dan a-b çenli üýtgäp bilýär. **************

Ýene-de şol deňlemeden x ululyk 0-dan a çenli artanda ululygyň b-dan 0-a çenli kemelýändigi görünýär.

Şeýlelik bilen, ellips aşakdaky

suratda görkezilen ýaly for-

madadyr.

Ellipsiň Mehaniki Gurlyşy /çyzylyşy/

Ellipsiň $F_1 we F_2$ fokuslaryny

hem-de 2b uly okuny bilip, ony mehaniki

gurmak gayt aňsatdyr. Uzynlygy

2b deň bolan ,onuň uçlaryna $F_1$ we $F_2$ nokatlarda berkitmegi, soňra oňa $F_1$ M $F_2$ görnüşi berip, M nokady hereketlendirmek arkaly ellips gurular /M nokatda galamyň ujy ýerleşdirilýär/.

a=b/c=0 bolanda /3/ deňleme $x^2+y^2=a^2$ görnüşi alar we ol merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan b radiusly töweregi kesgitleýär. Şoňa görä-de töwerege deň ýarym okly ellips ýaly garamak bolar.

Giperbola. Kesgitleme. Fokuslar diýip atlandyrylýan berlen iki nokatdan uzaklyklarynyň, tapawudy hemişelik san bolup tekizligiň nokatlar köplügine Giperbola diýilýär. /Bu hemişelik san polojitel hem-de fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan kiçi bolmaly/.

Bu hemişelik ululygy 2b, fokuslaryň arasyndaky uzaklygy bolsa 2c bilen belgiläliň.Koordinatalar sistemasyny /oklary/ edil ellipsdäki ýaly edip saýlap.Goý, M(x;y) nokat giperbolanyň erkin nokady bolsun.

Giperbolanyň kesgitlemesine görä ýazarys:

$F_2$M-$F_1$M=$\pm$2a /1/*****************

-68-

Bu deňligiň sag böleginde, $F_2$M> $F_1$M bolsa,goýmak alamatyny almaly.Eger-de $F_2$M=$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ we $F_1$M=$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ bolany sebäpli,/1/aňlatmany aşakdaky ýaly ýazarys.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \qquad /2/$$

Bu deňleme giperbolanyň saýlanyp alnan koordinatalar sistemasyndaky deňlemesidir. /2/ deňlemäni radikallardan boşadyp, onuň ýönekeý görnüşe getirip bolýar. Radikallaryň ikinjisini sag bölege göçürýäris:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

Indi deňligiň iki böleginide kwadrata göterýäris:

$x^2$+2cx+$c^2$+$y^2$=$x^2$-2cx+$c^2$+$y^2$$\pm$4a$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$+4$a^2$

ýa-da

cx-$a^2$=$\pm$a$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Bu alnan deňligiň iki böleginide ýene kwadrata göterýäris:

$c^2x^2$-2$a^2$cx+a□=$a^2$($x^2$-2cx+$c^2$+$y^2$)

ýa-da

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

$2b<2c$ bolany sebäpli $c^2-b^2>c$ bolýar,ony $b^2$ bilen belgilemek adat bolupdur, şoňa görä-de alýarys:

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

Bu deňligiň ähli çlenlerni $a^2b^2$ bölýäris:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}=1, \qquad /3/$$

bu ýerde $b^2=c^2-a^2$ /4/

/3/ deňlemä <u>giperbolanyň kanonik deňlemesi</u> diýilýär.

Indi giperbolanyň formasyny derňemäge geçeliň.

1/ <u>Giperbolanyň Simmetriýasy.</u> Giperbolanyň /3/ deňlemesi üýtgeýän ululyklary diňe kwadratda saklaýar, şoňa görä-de koordinatalar oklary giperbolanyň simmetriýa oklary bolup hyzmat edýär.

Giperbolanyň özünde fokuslary saklaýan simmetriýa okuna onuň <u>fokal oky</u> diýilýär. Giperbolanyň simmetriýa oklarynyň kesişme nokadyna simmetriýa merkezine – <u>Giperbolanyň merkezi</u> diýilýär. /3/ deňleme bilen berlen giperbola uçin fokal ok bolup Ox oky, merkezi bolup koordinatalar başlangyjy hyzmat edýär.

2/ <u>Giperbolanyň simmetriýa oklary bilen kesişme nokatlary.</u> Giperbolanyň simmetriýa oklary bilen kesişme nokatlaryny, ýagny onuň depelerini tapalyň.

3/ deňlemede $y=0$ diýip kabul edip, giperbolanyň absissalar oky bilen kesişme nokatlarynyň absissalaryny taparys:

$\frac{x^2}{a^2}=1,$ bu ýerden $x^2=a^2$ we $x=\pm a$.

Diýmek, $A_1$/a;0/ we $A_2$/-a;0/ nokatlar giperbolanyň depeleridir, olaryň arasyndaky uzaklyk 2a deň. Giperbolanyň Oy oky bilen kesişme nokatlaryny tapmak uçin /3/ deňlemede x=0 diýip gümän edeliň, onda $-\frac{y^2}{b^2}$=1 ýa-da $y^2=-b^2$,

bu ýerden y=$\pm\sqrt{-b^2}$=$\pm$b$\sqrt{-1}$;

biz Oy oky bilen kesişme nokatlarynyň ordinatalary üçin hyýaly bahalar aldyk, bu bolsa Oy oky giperbolany kesmeýär diýildigidir. Ýokarda aýdylanlara laýyklykda giperbolany kesýän simmetrik okyna onuň hakyky fokal oky diýilýär, ony kesmeýän simmetrik okyna bolsa giperbolanyň hyýaly oky diýilýär. /3/ deňleme bilen berlen giperbola üçin hakyky ok bolup Ox ok, hyýaly ok bolup ordinatalar oky hyzmat edýär.

Giperbolanyň $A_1$ we $A_2$ depelerini birleşdirilýän $A_1 A_2$ kesime we onuň 2b uzynlygyna giperbolanyň hakyky oky diýilýär. Eger giperbolanyň hyýaly simmetrik okunda onuň 0 merkezinde iki tarapa $OB_1$ we $OB_2$ kesimleri alyp goýsak, onda $B_1B_2$ kesime we onuň 2b uzynlygyna giperbolanyň hakyky we hyýaly ýarymoklary diýilýär.

3/ Giperbolanyň Formasy. Giperbolanyň formasy derňelende üýtgeýän koordinatalaryň otrisatel däl bahalaryna garamak ýeterlikdir, sebäbi bu egri çyzyk koordinatalar oklaryna görä simmetrik ýerleşendir. /3/ deňlemeden $\frac{x^2}{a^2}\geq$1 gelip çykýar, şoňa görä-de x ululyk a-dan $\infty$ çenli üýtgeýär. x ululyk a-dan $\infty$ çenli artanda y ululyk 0-dan $\infty$ çenli artýar. Egri çyzygyň formasy suratda şekillendirlişi ýaly bolýar. Ol x=$\pm$a göni çyzyklar bilen çäklenen zolakdan daşarda ýerýeşýär we iki bölekden-şahadan ybarat. Bu şahalaryň biri üçin $F_2$M> $F_1$M we $F_2$M-$F_1$M=2a /sag şaha/ bolýar, beýleki şaha uçin $F_1$M> $F_2$M we $F_1$M-$F_2$M=2a /çep şaha/ bolýar.

4/<u>Giperbolanyň Asimptotalary.</u> Giperbolanyň görnuşini has aýdyň göz öňune getirmek uçin onuň bilen jebis baglanyşykly bolan iki sany göni çyzyga, ýagny <u>asimptotalar diýlip atlandyrylýan</u> göni çyzyklara garalyň.

x we y ululyklary polojitel diýip hasaplap, giperbolanyň /3/ deňlemesini y ululyga görä çözeliň: $\frac{y^2}{b^2}$ - $\frac{x^2}{a^2}$-1,

bu ýerden y=$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ /3/

/3/ deňlemäni y= $\frac{b}{a}$ x göni çyzygyň deňlemesi bilen degşirip göreliň. Şonuň uçin bu göni çyzykdaky N(x;y) we giperboladaky M (x;y) nokatlary alarys. Bu nokatlaryň abssisalary şol bir x sandyr, bu <u>nokatlary özara</u> <u>degişli nokatlar</u> diýýärler.

Y$>$ $y$ bolýandygy görnüp dur, Y-y tapawut M we N nokatlaryň arasyndaky uzaklygy aňladýar, ýagny MN=Y-y.

Dangyjynda ahyry bolsa ol göni çyzygyň kordinatalar oky bilen kesişme nokadynda bolmaly.

Göni çyzygyň Ox oka ýapgytlyk burçyny $\varphi$ bilen ol göni çyzygyň Oy okdan kesip alýan OB kesiminiň ululygny bolsa b bilen belgiläliň. Goý M/x;y/ ol göni çyzygyň erkin nokady bolsyn M nokat göni çyzyk boýunça hereket edende onuň x we y kordinatalary üýtgäp özara käbir şert arkaly a baglanşykda bolýarlar. Ol şert nämeden ybartka.

Şony anyklalyň.

Üýtgeýän x we y ulylyklar bilen hemişelik b we k=tg$\varphi$ ulylyklaryň arasyndaky baglanşyk suratda şekillendirlen hal üçin ýagny göni çyzygyň koordinatalar oklaryna görä ýerleşişi ýörite saýlanyp alnanda çyzgydan geo-göni alynýar.

Hakykatdan-da PM=PO$_1$+OM. Emma PM=y PQ=OB=B Qm bolsa BOM göni burçly üçburçlykdan aňsat tapylýar: OM=BQ·tg$\varphi$ =x·tg$\varphi$=kx. Bu tapylan bahalary /I/ deňlikde goýup alarys.

Y=kx+b

Bu deňlemäni diňe şol göni çyzygyň nokatlarynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Eger nokat göni çyzygyň degişli bolmasa onda ol deňlik ýerine ýetmez Şeýlelik bilen alnan /2/ deňleme göni çyzygyň deňlemesidir.

Göni çyzyň /2/ görnüşli deňlmäni göni çyzygyň kofisentli deňlemesi diýilýär.bu berlen göni çyzyk Oy oka parallel däl diýlen şerte /2/ deňlemäni aldyk. Eger göni çyzyk Oy oka parallel balaýsa onuň deňlemesi nähili boalrka?

Goý bu göni çyzygyň Ox oky bilen kesişme nokadynyň absisasy a bolsun elbetde bu göni çyzygyň islendik nokadynyň absisasy a deň bolar. Eger nokat göni çyzyga degişli bolmasa onuň absisasy a-deň bolar. Diýmek bu göni çyzygyň deňlemesi x=a bolar.

Şeýlelikde eger göni çyzygyň Oy oka paralel bolmasa onuň deňlemesi /2/ görnüşde ýazylyp bilner. Egerde ol ordinatalar ordinatalar okuna parallel bolsa onda onuň deňlemesi /3/ görnüşde bolar. /2/ we /3/ deňlemeleriň üýtgeýän x we y ulylyklara görä birinji derejeleri deňleme bolýandygy sebäpli biz aşakdaky tasyklamany subut etdik: kordinatalaryň dekart sistemasynda her bir göni çyzygyň birinji derejeli deňlem bilen aňladylýar hususan eger göni çyzyk kordinatalar başlangyjyndan geçse onda b=0 we şu hili göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşi alar.

Y=kx

Eger çyzyk Ox oka parallel bolsa onda onuň k burç koefisenti nula deň bolar. Ýagny k=o we göni çyzygyň deňlemesi

Y=b /5/

Görnüşde bolar.

## 45.GIPERBOLANYŇ DIAMETRLERI. ÇATYRYK DIAMETRLER.

Simmetriýa oklary koordinatalar oklary bilen gabat gelýän giperbolanyň

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

deňlemesine we $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli parallel hordalaryň sistemasyna garalyň. Şu ýerde geçirilmeli hasaplamalar we tassyklamalar ellipse garanyňdaky hasaplamalar we tassyklamalar bilen doly gabat gelýär, şeýle netijä gelinýär: giperbolanyň parallel hordalarynyň ortalary bir göni çyzykda ýatýarlar, ol göni çyzygyň deňlemesi

$$y = \frac{b^2}{a^2\, k_1} x \qquad (2)$$

görnüşde alynýar we ol ellipse garalan mahalda alnan

$$y = -\frac{b^2}{a^2\, k_1} x$$

göni çyzygyň deňlemesinden minus alamaty plýus alamaty bilen çalşyrmak arkaly alynýar (giperbolanyň deňlemesi ellipsiň deňlemesinden we $\mathbf{b^2}$ ýanyndaky alamat bilen tapawutlanýar). Edil ellipse garalan wgtdaky ýaly, giperbolanyň ordinatalar okuna parallel hordalaryň ortalary absissalar okunda ýatýarlar (giperbola $\mathbf{O_x}$ oka görä simmetrik figuradyr).

Şeýlelikde, giperbolanyň ähli diametrleri merkezden geçýän göni çyzykalrdyr. Giperbolanyň diametriniň burç koeffisientini $\mathbf{k_2}$ bilen belgiläp alarys:

$$k_2 = \frac{b^2}{a^2 k_1} \qquad (3)$$

Ýa-da

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (3')$$

Parallel hordalaryň ortalarynyň üstünden geçýän diametre şol hordalara çatryk diametr diýip atlandyrmagy şertleşeliň. **(3)** ýa-da **(3')** şert parallel hordalaryň $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientini we olara çatyryk diametriň $\mathbf{k_2}$ burç koeffisienti bilen baglanyşdyrýan formuladyr. **(3')** şertiň $\mathbf{k_1}$ we $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientlere görä simmetrik bolany sebäpli, aşakdaky netijä gelýäris: eger $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientli diametr $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli parallel hordalara çatryk bolsa, onda $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli diametr $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientli parallel hordalara çatrykdyr. Şeýlelik bilen, biz biri beýlekisine parallel hordalary iki ýarpa bölýän diametrler jübütini alýarys. Olara çatryk diametrler ýa-da **(3')** formula arkaly aňladylýan baglanyşykda bolýarlar.

Şeýlelikde giperbolanyň çatryk diametrleriniň tükeniksiz köp jübüti bar. Her bir diametre oňa çatryk bolan diametr degişlidir.

Koordinatalar oklary (simmetrik oklar) çatryk diametrleriň jübütini berýärler, olar özara perpendikulýardyrlar. Şu hili iki diametre giperbolanyň esasy diametrleri diýilýär.

**(3)** şertden görnüşi ýaly, çatryk iki diametriň $\mathbf{k_1}$ we $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientleriniň birmeňzeş alamatlary bolýar, ýagny diametrler şol bir çärýeklerde bolýarlar we assimptotadan dürli taraplarda ýerleşýärler. Eger $(\mathbf{k_1}) < \frac{b}{a}$ bolsa, onda $(\mathbf{k_2}) > \frac{b}{a}$ bularyň biri giperbolany iki nokatda kesýär, beýlekisi bolsa giperbolany kesmeýär.

**(3)** şertden görnüşi ýaly, $\mathbf{k_1}$ **($k_1$>0)** ulalanda $\mathbf{k_2}$ koeffisient položitelliginde galyp, kiçelýär. Bu bolsa giperblanyň diametri sagat diliniň tersine aýlananda, onuň bilen çatryk bolanda diametriň garşylykly ugry boýunça (sagat diliniň ugruna) aýlanýandygyny görkezýär.

Şonda bir diametriň burç koeffisienti $\frac{b}{a}$ sana ymtylsa, onda oňa çatryk_diametriň burç koeffisienti hem şol $\frac{b}{a}$ sana ymtylýar.

## 46.ELLIPS, GIPERBOLA WE PARABOLA GATLAGYNYŇ ÇYZYKLARYŇ GATLAGYNYŇ DEŇLEMELERI.

Matematiki analiziň kursundan belli bolşy ýaly, $y=f|x|$ ýa-da **F(x, y)=0** deňleme bilen berlen egri çyzygyň $\mathbf{M}|x_0 - y_0|$ nokadyna geçirilen galtaşýan çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolýar:

$$y-y_0=k|x - x_0|$$

“Tekizlikde göni çyzyk” atly bölümden belli bolşy ýaly, bu deňleme berlen ugur boýunça berlen nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesidir.

Differensial hasaplamanyň kursunda funksiýanyň proizwodnysynyň geometrik manysy aýdyňlaşdyrylanda, $\mathbf{y=f|x|}$ ýa-da **F(x,** $\boldsymbol{y}$**)=0** formula bilen berlen funksiýanyň $\mathbf{M}|x_0 - y_0|$nokatda hasaplanylan proizwodnysy $\mathbf{y=f|x|}$ ýa-da **F(x,** $\boldsymbol{y}$**)=0** deňleme bilen berlen egri çyzygy **M** nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentidigi görkezilýär, ýagny ;

$$k = y_0^{\text{I}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} .$$

Indi agzalan egri çyzyklaryň her birine galtaşýan çyzygyň deňlemesini düzmesini getirip çykarmak bilen meşgullanalyň.

**1.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipse $|x_0 - y_0|$ nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini düzmeli. Ellipsiň berlen deňlemesini differensirläliň:

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy = 0,$$

Bu ýerden. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Diýmek,

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Indi **k** ululygyň tapylan bahasyny ýokardaky deňlemede goýarys:

$$y\text{-}y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Bu alnan deňligiň iki bölegini-de $\frac{y_0}{b^2}$ sana köpeldýäris:

$$\frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = -\frac{x_0}{a^2}(x - x_0)$$

Ýa-da

$$\frac{y_0 y}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$|x_0; y_0|$ nokadyň ellipse degişli bolany sebäpli ahyrky deňlemäniň sag bölegi 1-e deň we şoňa görä-de galtaşma çyzygyň deňlemesi gutarnykly görnüşde aşakdaky ýaly bolar:

$$\frac{x_0\, x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

**2.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ deňleme bilen giperbola $|x_0; y_0|$ nokatda geçirilen galtaşma çyzygyň deňlemesini düzmeli.

Gözlenýän deňlemäni getirip çykarmak üçin ellips bolan haldaky hasaplamalary doly gaýtalaýarys, ýagny ilki bilen giperbolanyň deňlmesini differensirleýäris:

$$\frac{2x}{a^2}dx - \frac{2y}{b^2}dy = 0,$$

Bu ýerden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Soňra galtaşma çyzygyň **k** burç koeffisientini taparys:

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Indiki **k**-nyň bahasyny galtaşmanyň deňlemesinde goýýarys:

$$y\text{-}y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Ýa-da

$$\frac{y_0y - y_0^2}{b^2} = \frac{x_0x - x_0^2}{a^2}$$

Bu ýerden

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{y_0}|$ nokat giperbolada ýatany sebäpli, ahyrky deňlemäniň sag bölegi 1-e deň, ýagny;

$$\frac{x_0\,x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

**3.** $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ deňleme bilen berlen parabola $|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{y_0}|$ nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini düzmeli.

Parabolanyň berlen deňlemesini differensirläliň: $2ydy = 2pdx,$

Bu ýerden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Indi galtaşma çyzygyň **k** burç koeffisientini tapýarys: $k = \frac{P}{y_0}$.

K koeffisiýentiň tapylan bahasynyň galtaşmanyň deňlemesinde ornuna goýýarys:

$$y - y_0 = \frac{P}{y_0}|x - x_0|$$

Ýa-da

$$y_0 y - y_0^2 = Px - Px_0. \, emma \; y_0^2 = 2Px_0,$$

Şoňa görä

$$y_0 y - 2Px_0 = Px - Px_0.$$

Bu ýerden parabola galtaşmanyň deňlemesini gutarnykly görnüşde alýarys:

$$y_0 y = P(a + x_0).$$

## 47.ELLIPS - TÖWEREGIŇ PROÝEKSIÝASY HÖKMÜNDE.

Goý, bize ellips öz kanonik deňlemesi bilen berlen bolsun:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b).$$

Indi şu ellipsiň daşyndan çyzylan töweregiň $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ deňlemesine garalyň.

Eger ellipsiň $M_1$ nokadynyň we töweregiň $M_2$ nokadynyň şol bir absissasy bar bolsa we olar $\mathbf{O_x}$ okdan bir tarapda ýatýan bolsalar, onda olara <u>ellipsiň we töweregiň nokatlary </u>diýip at bereris. Olaryň umumy absissasyny $x$ bilen, ordinatalaryny bolsa $y$ we $Y$ bilen belgilesek, ellipsiň we töweregiň deňlemelerinden aşakdaky deňlemeleri alarys:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Bu deňlikleri özara deňeşdirip alarys:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{Y^2}{a^2}$$

Ýa-da bu deňlemäni $y^2$ görä çözüp alarys: $y^2=\frac{b^2}{a^2}Y^2,$

Bu ýerden $y=\frac{b}{a}Y.$

$\frac{b}{a}<1$ bolany sebäpli, biz $\frac{b}{a}=\cos\varphi$ diýip kabul edip bileris, onda degişli nokatlaryň ordinatalaryny baglanyşdyrýan formulany aşakdaky ýaly ýazyp bileris:

$$y=Y\cos\varphi$$

Ahyrky formuladan görnüşi ýaly ugrukdyrylan $\mathbf{PM_1}$ kesimiň proýeksiýasy hökmünde garamak bolardy, eger $\mathbf{PM_1}$ we $\mathbf{PM_2}$ kesimleriň arasyndaky burçy $\varphi$ diýip kabul edilse, munuň üçin bolsa töwerek bilen ellipsi biri-biri bilen $\varphi$ burç astynda kesişýän tekizliklerde ýerleşen diýip kabul etmek ýeterlik.

Şeýlelik bilen, ellipsiň her bir nokadyna töweregiň degişli nokadynyň ortonogonal proýeksiýasy hökmünde garamak bolar.

## 48.ELLLIPSIŇ PARAMETRIK DEŇLEMELERI.

Goý, bize merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan $a$ radiusly töwerek berlen bolsun:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Eger töweregiň erkin M nokadyny şu suratda görkezilişi ýaly alsak, onda onuň koordinatalaryny $t$ parametr arkaly aşakdaky görnüşde aňladyp bolar.

$$X = a\cos t, \;\; Y = a\sin t.$$

Bu deňlemelere töweregiň parametrik deňlemeleri diýýärler.

Geçen punktdaky belgilemeleri sakalasak, onda ellipsiň $M_1(x; y)$ we töweregiň $M(X; Y)$ degişli nokatlaryň arasyndaky baglylygy şeýle ýazyp bolar:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Indi töweregiň parametrik deňlemelerinden X we Y bahalaryny ýokardaky deňlemelerde goýsak , alarys:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,. \end{cases}$$

Bu deňlemelere ellipsiň parametrik deňlemeleri diýilýär.

------------=========================-----------

## Göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesi

Geçen punkutlaryň birinde merkezi berlen A / $x_1$ ; $y_1$ /nokatda bolan göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesine garalypdy. Kä mahallarda çogdumyň merkezi göniden – göni berilmeỳär, şonda ol çogduma girỳän göni çyzyklaryň iki sanaysy bilen kesgitlenỳär, ỳagny bu halda çogdumyň merkezini berlen göni çyzyklaryň deňlemelerini bilelikde çözüp tapỳarlar. Emma göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesiniň başga görnişinden peỳdalanalyň, onda berlen göni çyzyklaryň çogdumynyňmerkeziniň koordinatalaryny tapmak hem bolỳar. Goỳ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \; we \; A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

göni çyzyklar käbir ($x_1$ ; $y_1$) nokatda kesişỳän bolsun. Aşakdaky deňlemäni düzỳäris:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad /1/$$

bu ỳerde $\lambda$ - erkin parameter. $\lambda$ parametriň islendik bahasynda /1/ deňleme göni çyzygy kesgitleỳär, sebäbi ol üỳtgeỳän x we y ululyklara görä birinji derejeli deňlemedir. Bu göni çyzygyň ($x_1$ ; $y_1$) nokadyň üstünden geçỳändigini görkezmek kyn däl.Hakykatdan-da, / $x_1$ ; $y_1$ / nokadyň göni çyzyklaryň ikisine-de degişlidigi sebäpli

$$A_1x + B_1y_1 + C_1 \equiv 0 \; we \; A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \equiv 0$$

bolar, bu ỳerden

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + \lambda\,(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) \equiv 0$$

gelip çykar. Diỳmek, iki göni çyzygyň kesişme nokadynyň koordinatalary /1/ deňlemäni kanagatlandyrỳar.

Şeỳlelik bilen, /1/ deňleme merkezi / $x_1$ ; $y_1$ / nokatda bolan çogdumyň göni çyzyklaryny kesgitleỳär.

Indi /1/ deňlemeden $\lambda$ parametriň degerli bahasynda göni çyzyklaryňçogdumynyň islendigininiňdeňlemesini alyp bolỳandygyny ỳa-da bolmaỳandygynyaỳdyňlaşdyrmak galỳar.

Goỳ, /α ; β / tekizligiň / $x_1$ ; $y_1$ / nokatdan tapawutly erkin nokady bolcun. /1/ deňleme bilen kesgitlenỳän göni çyzyk kordinatalary /1/ deňlemäni kanagatlandyrỳan nokadyň ỳstỳnden geçer, ỳagny $A_1\alpha + B_1\beta + C_1 + \lambda\,(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0$ şert ỳerine ỳetse, onda /1/ deňleme bilen kesgitlenỳän göni çyzyk /α ; β / nokadyň üstünden geçer. Bu ỳerden

$$\lambda = -\frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}$$

gelip çykỳar. Biz /1/ deňlemeden tekizligiň saỳlanyp alnan erkin nokadynyň ỳstỳnden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini alỳarys.

$\lambda$ parametri haçanda /α ; β / nokat $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Göni çyzyga degişli bolanda saỳlap almak mümkin däl. /bu halda parametric kesgitleỳän formulanyň manysy ỳokdur/. Diỳmek, /1/ deňleme çogdumyň bir göni çyzygyndan /berlen göni çyzyklaryň ikinjisinden/ özgesini $\lambda$ - niň dürli bahalarynda kesgitleỳär. Bu agzalan göni çyzygyň deňlemesini

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1) + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

deňlemeden $\mu = 0$ bolanda alarys.

/1/ görnüşli deňlemä göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesi diỳilỳär.

Berlen iki nokadyň üstünden geçỳän göni

çyzygyň deňlemesi.

Goỳ, bize A/ $x_1$ ; $y_1$ / we B/ $x_2$ ; $y_2$ / nokatlar berlen bolsun. Bu nokatlaryň üsyünden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini düzeliň.

A/ $x_1$ ; $y_1$ / nokadyň üstünden geçỳän göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesini aşakdaky ỳaly ỳazalyň

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad , \qquad /1/$$

Bu Yerde k – erkin parametrdir. Indi şu çogdumyň göni çyzyklaryň içinden

B/ $x_2$ ; $y_2$ / nokadyň üstünden geçỳänini saỳlap almak üçin k parametri B/ $x_2$ ; $y_2$ / nokadyň koordinatalary /1/ deňlemäni kanagatlandyrar ỳaly edip, saỳlap alalyň, ỳagny $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ (2) bolsun.

/2/ deňlikden k parametriň bahasyny kesgitläp, ony /1/ deňlemede ornuna goỳmak gerek. Başgaça aỳdylanda, /1/ deňlemeden we /2/ deňlikden k parameteri ỳok etmek gerek. Munuň üçin /1/ deňlemäni /2/ deňlige çlenme-çlen bölmek ỳeterlikdir. Şeỳlelik bilen, biz A/ $x_1$ ; $y_1$ / we B/ $x_2$ ; $y_2$ / nokatlaryň ỳstỳnden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini aşakdaky görnüşde alarys:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad /3/$$

Eger berlen A we B nokatlar OX oka parallel göni çyzykda ỳatsa $/y_2 - y_1 = 0/$ ỳa-da OY oka parallel göni çyzyga degişli bolsa $/x_2 - x_1 = 0/$, onda göni çyzygyň deňlemesi degişlilikde $y = y_1$ ỳa-da $x = x_1$ görnüşde bolỳar.

<u>BELLIK.</u> /3/ deňlemeden göni çyzygyň burç koeffisientini onuň iki nokadynyň koordinatalary arkaly aňladỳan formulany alarys:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Üç nokadyň bir göni çyzyga degişlilik şerti

Goỳ, bize üç sany A/ $x_1$ ; $y_1$ /, B/ $x_2$ ; $y_2$ / we C/ $x_3$ ; $y_3$ / nokat berlen bolsun. A we B nokatlaryň üstünden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini /3/ görnüşde ỳazỳarys:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ,$$

C nokat haçanda onuň koordinatalary göni çyzygyň deňlemesini kanagatlandyaranda we diňe şonda ol göni çyzyga degişli bolar. Şeỳlelik bilen, gözlenilỳän şert aşakdaky ỳaly ỳazylỳar

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} .$$

Indi $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ formula boỳunça M we N nokatlaryň arasyndaky uzaklygytapmak galỳar, ỳagny

$$d = \sqrt{\left(x_0 - A * \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(x_0 - B * \frac{Ax_0 + By_0 +}{A^2 + B^2}\right.}$$

$$= \sqrt{A^2 \left(\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + B^2 \left(\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

## Göni çyzygyň polỳar koordinatalardaky deňlemesi.

Göni çyzygyň normal deňlemesini alalyň $x \cos \propto + y \sin \propto - \rho = 0$ tekizlikde koordinatalaryň göniburçly dekart sistemasy bilen polỳar koordinatalaryň sistemasy arasyndaky baglanşygy berỳän formulalary ỳazalyň:

$$x = r\cos\propto\ ,\quad y = r\sin\propto$$

Üỳtgeỳän x we y ululyklaryň bu bahalaryny göni çyzygyň normal deňlemesinde goỳarys:

$$r\cos\varphi\cos\propto + r\sin\varphi\sin\propto - \rho = 0$$

ỳa-da

$$r(\cos\varphi\cos\propto + \sin\varphi\sin\propto) - \rho = 0,$$

bu ỳerden $$r * \cos(\varphi - \propto) - \rho = 0.$$

Bu bolsa göni çyzygyň polỳar koordinatalaryndaky deňlemesidir.

Ikinji tertipli egri çyzyklaryň elementar teoriỳasy.

Üỳtgeỳän x we y ululyklara görä ikinji derejeli umumy deňleme özünde ikinli derejeli çlenleri /$x^2$, xy we $y^2$/, birinji derejeli çlenleri /x we y/ we nul derejeli çleni /azat çleni/saklaỳar. Şuňa laỳyklykda ikinji derejeli umumy deňlemäni aşakdaky ỳaly ỳazyp bolỳar:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Bu ỳerde A, B, C koeffisientleriň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolmaly. A, B, C, D, E, F koeffisientleriň dürli bahalarynda bu deňlemäniň haỳsy çyzyklary kesgitleỳändigi baradaky sowala indiki bölümde garaljak.

Şu bölümde ikinji derejeli deňlemeleriň käbir ỳörite görnişlerine garalyp geçiljek.

Töwerek. Kesgitleme. Merkez diỳip atlandyrylỳannokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine <u>töwerek</u> diỳilỳär. Töweregiň islendik nokadyny ohuň merkezi bilen birleşdirỳän kesime, şeỳle-de şol kesimiň uzynlygyna, töweregiň <u>radiusy</u> diỳilỳär.

R radiusly töweregiň deňlemesini düzeliň.

Koordinatalar oklaryny erkin saỳlap alalyň. Onda töweregiň C merkeziniň koordinatalary a we b bolar. Töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x,y bilen belgiläliň. Töweregiň ähli nokatlaryna mahsus bolan umumy häsiỳeti analitik aňladalyň. Töweregiň kesgitlemesinden

onuň islendik M nokadynyň C merkezden

uzaklygynyň hemişelik ululykdygy we onuň

töweregiň R radiusyna deňligi, ỳagny

$$CM = R \quad /1/$$

bolỳandygy gelip çykỳar.

CM ululygy C we M nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde kesgitläp, biz /1/ deňligi M nokadyň üỳtgeỳän koordinatalarynyň üsti bilen aňladarys:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \qquad /1'/$$

Ahyrky deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip, biz töweregiň deňlemesini aşakdaky ỳaly ỳazarys:

**Şeýlelikde, ellipsiň özara parallel hordalarynyň ortalarynyň koordinatalary özara çyzykly baglanyşykdadyrlar. Diýmek,**

**parallel hordalarynyň ellipsiniň ortalary** $y = -\frac{b^2}{a^2 k_1} x$

**(7)**

**Göni çyzykda ýatýarlar.**

Bu ýokarda göçüren tassyklamamyzda garalýan hordalaryň $k_1$ burç koeffisienti bar diýip çaklapdyk, ýagny olar $O_y$ oka parallel däldirler. $O_y$ oka parallel hordalaryň hem ortalary bir göni çyzykda – abossissalar okunda (ellipsiň $O_x$ oka görä simmetrik ýerleşýändigi sebäpli) ýatýarlar.

Şeýlelikde, ellipsiň parallel hordalarynyň ortalary göni çyzykda ýatýarlar. Ellipsiň parallel hordalarynyň üstünden geçýän göni çyzyga onuň diametri diýilýär. Ellipsiň ähli diametrleri merkezden geçýär. Diametriň burç koeffisientini $k_2$ bilen belgiläp alarys.

$$k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1} \quad (8)$$

Ýa-da

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad (8')$$

Ellipsiň parallel hordalarynyň ortalaryndan geçýän diametrine şol hordalara çatyryk diametr diýip at bermegi şertleşeliň. (8) we (8’) şertler parallel hordalaryň we olara çatyryk bolan diametriniň burç koeffisientlerini baglanyşyrýar. (8’) şertiň $k_1$ we $k_2$ ululyklara görä simmetrik bolany sebäpli, ýagny $k_1$ bilen $k_2$ -niň orny çalşylanda, onuň üýtgemeýändigi sebäpli, bu ýerden aşakdaky netijäni alarys: eger $k_2$ burç koeffisientli diametr $k_1$ burç koeffisientli hordalary çatyryk bolsa, onda $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli diametr $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientli hordalara çatyryk bolar.

Şeýlelik bilen, her biri beýlekisine parallel bolan hordalary iki ýarpa bölýän diametrleriň jübütini alýarys. Ellipsiň bu hili iki diametrine onuň <u>çatyryk diametrleri diýilýär.</u>

Olaryň $k_1$ we $k_2$ burç koeffisientleri **(8)** we **(8')** şertler bilen baglanyşyklydyr.

Şeýlelikde, ellipsiň özara çatyryk diametriniň tükeniksiz köp jübti bardyr, her bir diametre oňa çatyryk bolan diametr degişlidir. Hususy halda, koordinatalar oklary (simmetriýa oklary) ellipsiň çatyryk diametrleriniň jübütini berýärler. Ellipsiň bu iki çatyryk diametrleri özara perpendikulýar bolýarlar. Şu hili diametrlere ellipsiň esasy diametrleri diýýärler.

**(8)** şertden ellipsiň çatyryk diametrleriniň arasyndaky burçuň göni burçdan tapawutlydygy gelip çykýa $(b \neq a)$. Eger-de $b = a$ bolaýsa, onda ellips töwerege öwrülýär we **(8')** şert iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk şertine öwrülýär: $k_1k_2=-1$. Şeýlelikde, töweregiň islendik çatyryk diametri özara perpendikulýardyr, ýagny töweregiň islendik diametri esasy diametrdir (simmetrik okudyr).

**(8)** şertden ellipsiň çatyryk iki diametriniň $k_1$ we $k_2$ burç koeffisentleri dürli alamatly bolýarlar, ýagny çatyryk diametrler çatyk çärýeklerde geçýärler. $k_1(k_1>0)$ ulalanda $k_2$ burç koeffisient absolýut ululygy boýunça kemelýär, ýagny ol hem algebraik ulalýar. Bu bolsa ellipsiň bir diametri sagat diliniň tersine aýlananda oňa çatyryk bolan diametriň hem şol tarapa aýlanýandygyny görkezýär.

## 49.PARABOLANYŇ DIAMETRLERI.

$y^2=2PX$ kanonik deňleme bilen berlen parabola garalyň. **K** burç koeffisientli parallel hordalaryň sisteamsyny alýarys. Bu hordalaryň ortalarynyň nähili ýerleşendigini anyklalyň. Bu hordalaryň islendiginiň uçlaryny $M_1$ $(x_1; y_1)$ we $M_2$ $(x_2; y_2)$ bilen, onuň ortasyny bolsa $M$ $(X; Y)$ bilen belgiläliň. $M_1$ we $M_2$ nokatlaryň parabola degişli bolany sebäpli, olaryň koordinatalary parabolanyň deňlemesini kanagatlandyrmaly, ýagny;

$$y_1^2 = 2px_1 \qquad (1)$$

$$y_1^2 = 2px_2 \qquad (2)$$

Başga tarapdan, $M_1$ $M_2$ göni çyzygyň burç koeffisienti **K** bolany sebäpli, aşakdaky deňligi ýazyp bileris:

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (3)$$

Ahyrda, M nokat $M_1$ $M_2$ kesimiň ortasy bolany sebäpli aşakdakylary ýazarys:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (4)$$

Bu (1-4) bäş gatnaşykdan 4 sany kömekçi $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$ ululyklary ýok edeliň. Şu maksat bilen (2) deňlikden (1) deňligi çlenme-çlen aýryp taparys:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1)$$

Ýa-da

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1) \qquad (5)$$

Indi **(3)** deňlikden $\mathbf{y_2}$-$\mathbf{y_1}$ tapawudyň $\mathbf{k(x_2-x_1)}$ bahasyny **(4)** deňlikleriň ikinjisinden bolsa $\mathbf{y_1+y_2}$ jemiň **2y** bahasyny tapyp, olary **(5)** deňlikde ornuna goýýarys:

$$k(x_2-x_1)2y = 2p(x_2 - x_1)$$

ahyrky deňlemäni $\mathbf{2(x_2-x_1)}$ ululyga ($\mathbf{x_2-x_1 \neq 0}$, çünki garalýan hordalaryň **k** burç koeffisienti bar, diýmek, olaryň ordinatalar okuna parallel däl**)** gysgaldyp alarys:

KY=P ýa-da $Y=\frac{p}{k}\ (k\neq 0)\quad (6)$

Şeýlelik bilen parabolanyň parallel hordalarynyň ortalary $Y=\frac{p}{k}$ göni çyzykda ýatýarlar.

Biz garalýan hordalar ordinatalar okuna parallel däl diýip guman edipdik. Ordinatalar okuna parallel bolan hordalaryň ordinatalary hem bir göni çyzykda absissalar okunda ýatýarlar (çünki **OX** ok parabolanyň simmetriýa oky bolup hyzmat edýär). Şeýlelikde, parabolanyň özara parallel hordalaryň ortalary bir göni çyzykda ýatýarlar. Bu göni çyzyga parabolanyň diametri diýilýär. Berlen ugur boýunça ugrukdyrylan özara parallel hordalaryň ortasyndan geçýän diametri şol hordalara çatryk diametr diýip atlandyrmagy şertleşeliň. $y=\frac{p}{k}$ deňlemeden görnüşi ýaly, parabolanyň ähli diametrleri absissalar okuna (parabolanyň simmetrik okuna) paralleldirler.

<u>Üýtgeýän iki ululykly birinji derejeli</u>
<u>Deňlemäniň geometrik manysy.</u>

Geçen punktlarda kordinatalaryň dekart sitemasynda her bir göni çyzygy birinji derejeli deňlem bilen aňladyp bolýandygna göz ýetiripdik. Indi tersin soraga garamak tebigydyr ýagny üýtgeýän x we y ulylyklara görä birinji derejejeli islendik deňleme göni çyzygy kesgitleýärmikä? Bu sowala jogap bermek üçin birinji derejeli deňlemäniň umumy görnüşine garalyň we /x,y/ kordinatalary şu deňlemäni kanagatlandyrýan tekizligiň nokatlar köpligine göniçyzygyny görkezeris.

X we y görä birinji derejeli umumy deňlemä aşakdaky görnüşde bolar.

Ax+By+c=0 /6/

Bu ýerde A,B,C – erkin sanlar. ýöne üýtgeýän x we y ululyklaryň a e b kofisentleri bir wagtda nula deň bolup bilmez, çünki A=B=0 bolaýsa onda /6/ deňleme özünde üýtgeýän ululyk saklamaz we ol deňleme bolup bilmez.

B≠0 güman edip /6/ deňlemäni y ulylyga çözeliň. Alarys:

Y=$-\frac{A}{B}$x$-\frac{C}{B}$ ýa-da $-\frac{A}{B}=k$ we $-\frac{C}{B}=B$

Belgileri girizip alarys:

Y=kx+b /2/ deňlemäniň k burç koefisentli e ordinatalar okunda b ulylykly kesimi kesip alýan göni çyzygyň deňlemesidigini görüpdik biz ýokarda geçirilen tasyklamalarda B koffisent nuldan tapawutly diýipguman edipdik . eger B=0bolaýsa onda /6/ deňlem aşakdaky görnüş alarys:

Ax+C=0.

Bu halda şu deňlemäni x ulylga görä çözüp alarys :

$x=-\frac{C}{A}$ ýa-da $\frac{C}{A}=a$

Belgilemäni girzip alarys:

x=a /3/

Emma biz şu deňleäniň Oy oka parallel bolup göni çyzygyň deňlemesidigini görüpdik.

Şeýllik bilen punktyň başynda goýlan sowal çözüldi : üýtgeýän x we y ulylklara görä islendik birinji derejeli deňlemäniň göni çyzygy kesgitlenýänigne göz ýetirdik. Şu alnan netijä görä /6/ deňleme göni çyzygyň umumy deňlemesi iýilýär.

<u>Ax+By+C=0 görnüşli göni çyzygyň umumy</u>

<u>Deňlemesini derňemek.</u>

Biz

Ax+By+C=0 /6/

Görnüşli birinji derejeli umumy deňlemäniň göniçyzygy kesgitleýändigini gördük. Indi şu deňlemäniň gönü çyzygy kesgitleýändigini gördük. Indi şu deňlemäniň bir ýa-da iki kofisenti nula deň bolanda göni çyzyň kordinata oklaryna görä nähili ýagdaýa eýe boljakdygyna göz ýetireliň:

I. C=0 bu halda /6/ deňlem aşakdaky görnüşi alar:
Ax=By=0

we ol kordinatalar başlangyjyndan gelýän göni çyzygy kesgitleýär, çünki X=0 we Y=o bolanda bu deňleme kanagatlandyrylýar.

2. A=0 /6/ deňlem aşakdaky görnüşi alar:

By+C=0 ýa-da Y=B bu ýerde $B = -\frac{C}{B}$.

Bu göni çyzygyň ähli nokady üçin ordinata hemişelik baha eýedir ýagny güni çyzyk ox oka parallel bolar we ondan b uzaklykda ýerleşer eger b polažitel bolsa onda ol ox okdan aşakda ýerleşer

3. B=o /6/ deňleme

Ax+C=0

Ýa-da $B = \frac{C}{A}$ belgileme girizilse x=a görnüşi alar we oy oka parallel bolan göni çyzygy kesgitlär.

4. C=0, B=0 /6/ deňleme

Ax=0 ýa-da X=0 görnüşi alar we ol oy oky bilen gabat gelýän göni çyzygy kesgitleýär.

5. C=0, A=0 bu halda /6/ deňleme y=o görnüşi alýar. Göni çyzyk Ox oky bilen gabat gelýär.

<u>Göni çyzygyň kesimlerdäki deňlemesi.</u>

Biz eýýäm kordinata oklaryna görä göni çyzygyň ýagdaýyny dürli usullar bilen kesgitläp bolýandygyny aýdypdyk. Göni çyzygyň beriliş usullar bilen kesgitläp bolýandygyny aýdypdyk. Güni çyzygyň beriliş usullaryna baglylykda biz onuň deňlemesiniň dürli görnüşlerini alarys.

Koordinata oklarynyň ikisini-de kesýän we kordinatalar başlangyjyndan geçmeýän göni çyzyga garalyň. Göni çyzyk ox we oy oklarda kesip alýan kesimleriniň degişlilikde a we b ulylyklaryny görkezip onuň ýagdaýyny kesgitläp bolar. Bu göni çyzygyň deňlemesini tapalyň. Şu hili göni çyzygyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

Ax+By+C=0 /I/

Bu ýerde A,B,C koefisentleriň her biri nula deň däldir. Indi bu deňlemäniň koefisentlerini tapalyň. /ýagny olary a we b parametrler arkaly aňladalyň/.

M /a;c/ nokadyň berlen göni çyzyga degişlilii sebäpli onuň kordinatalary /I/ deňlemäni kanagatlandyrýar:

Ab+C=0

Bu ýerde

$A = -\frac{c}{a}$ /2/

N/C;B/ nokadyň kordinatalary hem /I/ deňlemäni kanagatlandyrmaly ýagny $B_B$+C=0, bu ýerden

$B = -\frac{c}{b}$ /3/

/2/we/3/deňliklerden a we b bahalaryny /I/ deňlemede ornuna goýup alarys

$$\frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y + c = 0$$

Bu deňlemäniňähli çlenlerini C sana bölüp /şerte görä c≠0/ alarys.

## 50.Göni çyzygy onuň deňlemesi boýunça gurmak.

Göni çyzygy gurmak üçin çyzgyda onuň iki sany nokadyny görkezmek ýeterlik. Göni çyzygyň haýsydyr bir nokadynyň kordinata

X ululyk çäksiz. artanda m N uzaklygyň köpelip, nula ymtylýan-

dygy görkezeliň. Hakykatdan hem, $Y\text{-}y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ bu

ýerden MN=$\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b}{a}\,\frac{(x-\sqrt{x-a})(x+\sqrt{x-a})}{x+\sqrt{x-a}}=\frac{b}{a}\,\frac{x-x+a}{x+\sqrt{x-a}}$

$=\frac{ab}{x+\sqrt{x-a}}$.

Bu formuladan görnüşi ýaly, x ululyk artanda MN uzaklyk kemel-

ýär we x tükeniksizlige ymtylanda MN uzaklyk nula ymtylýar. Bu

ýerden M nokat giperbola boýunça birinji çärýekde hereket edip, tüke-

niksizlige daşlaşanda onuň $y=\frac{b}{a}x$ göni çyzykdan uzaklygy nula ymtylýar

diýen netije gelip çykýar. Edil şunuň ýaly ýagdaý nokat üçünji çär-

ýekde bolup, tükeniksizlige daşlaşanda-da bolup geçýär(bu giperbolanyň

nokatlarynyň koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik ýerleşendiginden

gelip çykýar).

Ahyrda, giperbolanyň Oy oka görä simmetrikliginden $y=\frac{b}{a}$

x ikinji göni çyzykdan giperbola çenli M N yzaklyk M nokatdan ikinji we dördünji çärýeklerde bolup, hereket edende we ol tükeniksizlige daşlaşanda kemelip, nula ymtylýar diýen netijäni alýarys.

Bu iki göni, çyzyga giperbolanyň asimptotalary diýýärler. Ýokarda gprşümiz ýaly, olaryň seňlemeleri aşakdakylardyr:

$$y=\frac{b}{a}x \qquad \text{we} \qquad y = -\frac{b}{a}x \qquad /S/$$

Ýokarda aýdylanlardan aşakdaky netije gelip çykýar. Asimptotalar bir tarapy ox oka parallel we 2a deň, beýleki tarapy oy oka parallel we 2b deň bolan gönüburçlugyň dioganallarynda ýerleşýärler, ýokardaky agzalan gönüburçlugyň merkezi, elbetde, koordinatalar başlangyjynda bolar.

Giperbolany çyzmak üçin ilki onuň asimptotalaryny çyzmak maslahat berilýär.

DEŇTARAPLY GIPERBOLA. b=a bolan halda giperbola deňtaraply giperbola diýýärler. Onuň deňlemesi/3/ deňlemeden alynýar. Ol aşakdaky ýaly bolar:

$$x^2 - y^2 = a^2 .$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, deňtaraply giperbolanyň asimptotalaryň burç koefisientleri $\pm$ 1=0 deň bolar . Diýmek, deňtaraply giperbolanyň asimptotalary özara perpendikulýardyr we olar giperbolanyň simmetriýa oklarynyň arasyndaky burçlary ýarpa bölýärler.

PARABOLA KESGITLEME. Fokus diýip atlandyrylan, berlen nokatdan we direktrisa diýlip atlandyrylýan berlen göni çyzykdan deň deňlikden

duryan tekizligiň nokatlar köplügine parabola diýýärler. (Elbet-de berlen nokat berlen göni çyzyga degişli däl diýlip çak edilýär).

Parabolanyň deňlemesini düzmek üçin Ox oka derek fokusyň üstünden geçýän we direktrisa perpendikulýar bolan göni çyzygy kabul edýäris. F fokusdan direktrisa geçirilen perpendikulýar kesimiň O ortasyny koordinatalar başlangyjyny deregine alýarys, bu kesimiň uzynlygyny P bilen belgiläliň. Şonda F fokusyň koordinatalary $(\frac{p}{2};o)$ bolar.

Parabolanyň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x we y bilen belgiläliň. Şonda M nokatdan direktrisa geçirilen perpendikulýaryň N esasynyň koordinatalary $(-\frac{p}{2};y)$ bolar. Kesgitleme boýunça FM=NM bolany sebäpli, iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyny ulanyp, saýlanyp alnan koordinatalar sistemasynda parabolanyň deňlemesini alýarys:

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$$

Bu deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmek üçin, bu deňligiň iki bölegini-de kwadrata göterýäris. Şonda alarys:

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$$

ýa-da

$$x^2-px+\frac{p}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p}{4}$$

bu ýerden

$$y^2=2px \qquad \text{(I)}$$

Bu alnan deňlemä parabolanyň şanonik deňlemesi diýilýär.

Parabolanyň formasyny derňemek üçin, şu (I) deňlemede x ululygyň otrisatel bahalary alyp bilmeýändigini, ýagny parabolanyň ähli nokatlarynyň ordinatalar okundan sagda ýerleşýändigini bellemek gerek. X ululygyň her bir bahasyny y ululygyň iki bahasy degişlidir, şonda olar ululygy boýunça özara deň we alamatlary boýunça garşylyklydyr; ýagny bu egri çyzyk absissalar okuna görä simmetrik ýerleşendir. X ulullygyň bahasynyň artmagy bilen y ordinata absolýut ululygy boýunça artýar, öziňem x ululyk çäksiz artanda, (y) hem çäksiz artýar.

Parabolanyň bir sany simmetriýa oky bolýar, parabolanyň simmetriýa okuna onuň oky diýilýär. Parabolanyň simmetriýa oky bilen kesişme nokadyna parabolanyň depesi diýilýär. (I) deňleme bilen berilen parabolanyň depesi bolup, koordinatalar başlangyjy hyzmat edýär.

BELLIK. Garalan egri çyzyklaryň üçüsi hem / ellipo, giperbola we parabola / koordinatalaryň dekart sistemasynda ikinji derejeli deňleme bilen aňladylyp biliner.

## 51.ELLIPSIŇ EKSSENTRISITLERI WE DIREKTRISALARY

Biziň bilişimiz ýaly, fokuslar diýip atlandyrylýan, berlen iki nokada çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik bolan tekizligiň nokatlar köplügine ellips diýilýär. Ellipsiň erkin M nokadyndan onuň çep $F_2$ we sag $F_1$ fokuslaryna çenli belgiläp, ýokarda ýap-ýaňyja ýatlan kesgitlemämize görä, aşakdaky deňligi ýazyp bileris :

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad / I /$$

Başga tarapdan, iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyndan peýdalanyp alarys :

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bu ýerde x we y ululyklar ellipsiň erkin M nokadynyň koordinatlarydyr, c ululyk bolsa $F_1$ $F_2$ fokus uzaklygyň ýarysydyr. Ahyrky iki deňligi kwadrata getirip we birini beýlekisinden aýyryp alýarys:

$$r^2 - r^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2$$

skobkalary açyp we meňzeş çlenleri toparlap alýarys:

$$r^2 - r^2 = 4\,cx. \quad /2/$$

/1/ we /2/ deňlemelerden $r_1$ we $r_2$ ululyklary gözlenilýän hasap edip, ahyrkylary tapýarys. Şu maksat bilen /2/ deňligi

$$(r^2 - r^2)(r^2 + r^2) = 4cx$$

Görnüşde ýazyp, /1/ deňlikden peýdalanýarys, şonda alarys:

$$r^2 - r^2 = 2\frac{c}{a}x$$

Alnan deňlemäni /I/ deňleme bilen bilelikde çözüp, $r_1$ we $r_2$ tapýarys;

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x$$

Ahyrky formulalara girýän $\frac{c}{a}$ ululyga ellepsiň ekspentrisigiti diýilýär, biz ony E bilen belgileýäris. $E = \frac{c}{a}$ ululyk 2c fokus uzaklygynyň 2a uly oka gatnaşygydyr, özüňem $o < E < 1$ sebäbi $o < c < a$ /töwerek üçin c=o we E=o/.

Şeýlelik bilen, biz $r_1$ we $r_2$ fokal radiuslar üçin aşakdaky formulalary aldyk:

$$r_1 = a - Ex, \qquad r_2 = a + Ex$$

Ordinatalar okuna parallel bolan $x=l(l>a)$ göni çyzyga garalyň we birinjiden, ellipsiň erkin M /x;y/ nokadyndan onuň $F_1$ sag fokusuna çenli $a_1$ uzaklygy tapalyň. Soňra şu uzaklyklaryň gatnaşygyny hasaplaýarys.

d=l-x bolany sebäpli $\frac{r}{d}=\frac{a-Ex}{l-x}=E\frac{\frac{a}{E}-x}{l-x}$

Eger $l=\frac{a}{E}$ bolsa, onda ýazylan $\frac{r1}{d1}$ gatnaşyk E sana deň bolan hemişelik baha eýe bolar.

Ellipsiň simmetrik figuralygy esasynda şeýle netijäni çep fokus we $x=-\frac{a}{E}$ göni çyzyk üçin alyp bolýar.

Ellipsiň fokal okuna perpendikulýar bolan we onuň merkezinden $\frac{a}{E}$ uzaklykdan geçýän bu iki göni çyzyga ellipsiň direktrisalary diýilýär. Biziň ýokarda aýdyňlaşdyryşymyz ýaly, olar aşakdaky ajaýyp häsiýete eýedirler: ellipsiň islendik nokadyndan fokusy we degişli direktrisa çenli uzaklyklarynyň gatnaşygy E sana deň bolan hemişelik ululykdyr.

## 52.PARABOLANYŇ EKSSENTRISITLERI WE DIREKTRISALARY

Geçen punktdaky belgilemeleri saklap, giperbolanyň kesgitlemesi esasynda alýarys:

$$r_2-r_1=\pm 2a, \qquad /I/$$

bu ýerde plýus alamaty giperbolanyň sag şahasyna, minus alamaty bolsa onuň çep şahasyna degişli. Başga tarapdan, edil geçen punktdaky ýaly, tapýarys:

$$r_2^2-r_1^2=4cx, \qquad /2/$$

/1/ we /2/ deňlemelerden $r_1$ we $r_2$ ululyklary taparys. Munuň üçin /2/ deňligi aşakdaky ýaly göçüreris:

$$(r_2-r_1)(r_2+r_1)=4cx.$$

Ahyrda, bu deňlemäni /1/ deňleme bilen çözüp, $r_1$ we $r_2$ ululyklar üçin aňlatmalary alarys:

$r_1=-a+\frac{c}{a}x,$ /sag şaha/ $r_1=a-\frac{c}{a}x,$ /çep şaha/

$r_2=a+\frac{c}{a}x.$ $r_2=-a-\frac{c}{a}x$

Ahyrky formulalara girýän $\frac{c}{a}$ ululyga <u>giperbolanyň akssentrisiteti</u> diýilýär, ony E bilen belgilemegi şertleşeliň. Elbetde, $E=\frac{c}{a}$ ululygyň 2c fokus uzaklygynyň 2a hakyky oka gatnaşygydygy görnüp dur, özüňem indi $E>1$, sebäbi $c>a$.

Bu ýerden ortonormirlenen bazisde wektorleriň komponentlarynyň wektoryň uzynlygynyň şol wektoryň bazis wektorlar /koordinata oklary/ bilen emele getirýän burçlarynyň kosinuslaryna köpeltmek hasylyna deňligi gelip çykýar. Aşakdaky häsiýet skalýar köpeltmek hasylyň çyzykdadygy diýen ada eýedir.

Islendik $\vec{a},\vec{b},$ we $\vec{c}$ hem-de $\alpha,\beta$ sanlar üçin

$$\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b},\vec{c}\right)$$ deňlik ýerine ýetýär.

Hususy halda $\left(\alpha\vec{a},\vec{c}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ we $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$...

Skalýar köpeltmäniň kommutatiwlik häsiýetinden peýdalanyp, biz bu ýerden aşakdaky toždestwony alýarys:

$$\left(\vec{a},\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right)=\beta\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\gamma\left(\vec{a},\vec{c}\right).$$

## Skalýar köpeltmek hasyly köpeldijileriň koordinatalarynyň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize $\vec{a} = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ we $\vec{b} = \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$ wektorlar berlen bolsun. Skalýar köpeltmek hasylyň birinji köpeldiji boýunça çyzyklylygyndan peýdalanyp alýarys:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \vec{b}\right) = \alpha_1\left(i,\vec{b}\right) + \alpha_2\left(j,\vec{b}\right) + \alpha_3\left(k,\vec{b}\right).$$

(2)

Skalýar köpeltmek hasylyň ikinji köpeldiji boýunça çyzyklylygyndan peýdalanýarys:

$$\left(i,\vec{b}\right) = \left(i, \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k\right) = \beta_1(i,i) + \beta_2(i,j) + \beta_3(i,k) = \beta_1; \ /3/$$

$$\left(j,\vec{b}\right) = \left(j, \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k\right) = \beta_2, /4/; \ \left(k,\vec{b}\right) = \left(k, \beta_1 i + \beta j + \beta_1 k\right) = \beta_1; /5/$$

/3/, /4/ we /5/ deňlikleri göz öňünde tutup, /2/ deňligi aşakdaky ýaly ýazarys

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \qquad /6/$$

Biz aşakdaky teoremany subut etdik,

TEOREMA. Eger bazis ortonarmirlenen bolsa, onda öz koordinatalary bilen berlen iki wektoryň okalýar köpeltmek hasyly şol wektoryň bir atly /degişli/ koordinatalarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.

Eger /6/ formulada $\vec{b} = \vec{a}$ diýip guman etsek, onda aňlarys:

$/\vec{a},\vec{a}/ = \alpha_1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 \cdot \alpha_3$ ýa-da

$$/\vec{a}/^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

ýagny ortonormirlenen bazisde $\vec{a}$ wektoryň uzynlygy

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

formula boýunça kesitlenýär.

Ortonormirlenen bazisde $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektoryň arasyndaky burçuň kosinusy şol wektorlaryň komponentalaryň üsti bilen aşakdaky formula boýunça aňladylýar:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

<u>Iki nokadyň arasyndaky uzynlyk</u>

Eger iki nokadyň göni burçly dekart sistemasyndaky koordinatalary berlen bolsa, onda olaryň arasyndaky uzaklygy aňsat hasaplap bolar. Hakykytdan hem, goý, A we B nokatlaryň göni burçly koordinatalary, degişlilikde, $/x_{19}y_{18}z/$ we $/x_2, y_2, z_2/$ bolsun, onda $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j(z_2 + z_1)K,$ bu ýerde /7/ formula esasynda alarys:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_2)^2}.$$

**53.Wektorlar üçlüginiň orietasiýasy.**

Goý, iki sany orta normirlenen $i, j, k$ we $i', j', k'$ bazis berlen bolsun. Hereketiň kömegi bilen bu iki bazisi bir-biri bilen gabat getirip bolarmyka? Elbetde, göçürme we aýlama esasynda $i'$ wektory $i$ wektory bilen gabat getirip bolar. Şonda $i'$ wektory perpendikulýar bolan $j'$ we $k'$ wektorlaryň tekisligi $i$ wektora pependikulýar bolan $j$ we $k$ wektorlaryň tekizligi bilen gabat geler. Soňra şu tekizlikde aňlamak arkaly $j'$ we $j$ wektorlary gabat geler edip bolar. Şondan soňra $k'$ we $k$ wektorlary kollinýar bolýarlar. Olar ýa-ha gabat gelerler, bu halda bazisler gabat gelýärler, ýa-da olar /wektorlar/ garşylykly ugrukdyrylýarlar. Bu halda bazisleri gabat getirmek mümkin däl.

Bu tassyklamadan görnüşi ýaly, eger iki bazis gabat gelýän bolsa, onda her bir üçünji bazis ýa birinji bazis bilen, ýa-da ikinji bazis bilen gabat gelýär.

Şeýlelik bilen, ähli ortonormirlenen bazisler iki klasa bölünýärler. Şol bir klasa degişli bazisler özara gabat gelýärler, dürli klasyň bazisleri bolsa özara gabat gelmeýärler. Haçanda $j$ wektor bilen, $k$ wektor ýakaryk ugrukdyrylan ýagdaýda $i$ wektoryň saga ýa-da çepe ugrukdyrylandygyna baglylykda bazis <u>sag bazis</u> ýa-da <u>çep bazis</u> diýilýär.

Bir klas diňe sag bazislerden, beýleki klas bolsa diňe çep bazislerden ybarat. Şu kesgitleme islendik bazis üçin aşakdaky gärnüşde berilýär.

Kesgitleme. Eger üçünji wektoryň ahyryndan birinji wektordan ikinji wektora iň kiçi burça aýlanma sagat strelkasynyň tersine görünýän bolsa, onda komplanar däl wektorlaryň tertipleşdirilen üçlügine saga orientirlenen üçlük ýa-da ýöne sag üçlük diýilýär.

Garşylykly halda üçlüge çepe orientirlenen üçlük ýa-da çep üçlük diýilýär. /üçlügiň wektorlarynyň hemmesiniň başlangyjynyň gabat gelýän haly göz öňünde tutlýar/.

<u>Iki wektoryň wektor köpleltmek hasyly.</u>

Kesgitleme. Goý, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsun. Şu wektorlaryň kömegi bilen aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan $\vec{c}$ wektory guralyň:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi,$ bu ýerde $\varphi$ burç $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç;

2. $\vec{c}$ wektor $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň her birine ortagonal bolmaly;

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlar sag üçlügi emele getirmeli.

Şu usul bilen gurlan $\vec{c}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly diýeris we $[\vec{a}, \vec{b}]$ bilen belgiläris.

Eger köpeldijileriň iň bolmanda biri nul wektor bolaýsa, onda olaryň wektor köpeltmek hasyly kesgitlemä görä nul wektor diýip kabul edilýär.

Kollinear däl iki wektoryň wektor köpeltme hasylynyň modulynyň şol wektorda gurlan parallelogramyň meýdanyna san taýdan deňligi kesgitlemeden gelip çykýar /elbetde, wektoryň umumy başlangyjy bar diýip çak edilýär/.

Köpeldijiler kollinear bolanda we diňe şonda wektor köpeltmek hasyl nula deň bolýar.

Wektor köpeltmek hasyly antikommutatiwdir, ýagny $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

Ortanormirlene bazisiň wektory üçin aşakdaky deňlikller ýerine ýetýär:

$$[i, j] = k, [j, k] = i, [k, i] = j, [j, i] = -k,$$

$$[i, k] = -j, [k, j] = -i, [i, i] = [j, j] = [k, k] = 0.$$

Wektor köpeltmek hasylyň ýene bir häsiýetini ýatlap geçeliň. Islendik $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$, islendik $\lambda$ we $\mu$ sanlar üçin

$$\left[\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \mu\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$$

deňlik ýerine ýetýär.

<u>Wektor köpeltmek hasyly köpeldijileriň koordinatalarynyň</u>

<u>üsti bilen aňlatmak.</u>

Goý, bize ortonormirlenen bazisiň wektory boýunça dagydylan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berilen bolsun:

$$\overrightarrow{a_1} = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \quad \vec{b} = \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k.$$

Onda alarys:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \vec{b}\right] = \alpha_1\left[i, \vec{b}\right] + \alpha_2\left[j, \vec{b}\right] + \alpha\left[k, \vec{b}\right].$$

(1)

$$\left[i, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, i\right] = -\left[\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k, i\right] = -\beta_1[i, i] - \beta_2[j, i] - \beta_3[k, i] = \beta_2 k - \beta$$

(2)

$$\left[j, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, j\right] = -\left[\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k, j\right] = -\beta_1[i, j] - \beta_2[j, j] - \beta_3[k, j] = -\beta_1 k$$

(3)

$$\left[k, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, k\right] = -\left[\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k, k\right] = -\beta_1[i, k] - \beta_2[j, k] - \beta_3[k, k] = \beta_1 j$$

(4)

/2/, /3/ we /4/ deňlikleri göz öňünde tutup /2/ deňligi aşakdaky ýaly ýazarys:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha_1\left(\beta_2 k - \beta_3 j\right) + \alpha_2\left(-\beta_1 k + \beta_3 i\right) + \alpha_3\left(\beta_1 j - \beta_1 i\right).$$

Sag bölekde skobkalary açyp, $i, j$ we $k$ wektorlary boýunça toparlamany ýerine ýetirýäris:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)i-\left(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1\right)j+\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right).$$

Skobkalardaky aňlatmalary ikinji tertipli kesgitleýjiler gönüşinde ýäzarys:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}k \qquad /5$$

Bu aňlatmany birinji setiriň elementleri boýunça dagadylan üçünji tertipli kesgitleýji hökmünde edip bolar:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix} \qquad /5$$

## 54.Üçburçlugyň /parallelogramyň/ meýdanyny onuň depeleriniň koordinatalaryň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize giňişlikde üç sany $A_1/x_1, y_1, z_1/,\ A_2/x_2, y_2, z_2/,\ we\ A_3/x_3, y_3, z_3/$ nokat berlen bolsun.

Onda

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\left(x_2-x_1\right)i+\left(y_2-y_1\right)j+\left(z_2-z_1\right)k,$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=\left(x_3-x_1\right)i+\left(y_3-y_1\right)j+\left(z_3-z_1\right)k.$$

$\overrightarrow{A_1A_2}$ we $\overrightarrow{A_1A_3}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny /5/ formula boýunça aňladalyň:

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Indi bu wektoryň yzynlygyny tapýarys:

$$\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Üçburçlugyň meýdanyny

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|.$$

Formula boýunça tapýarys. Eger $A_1$, $A_2$, $A_3$ nokatlar bar tekizlige degişli bolan, onda

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

## 55.Gatyşyk köpeltmek hasyl.

$\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$ sana gatyşyk köpeltmek hasyl diýilýär we ol $/\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}/$ bilen belgilenýär.

TEOREMA. $\vec{a}, \vec{b}$ *we* $\vec{c}$ komplenar däl wektorlaryň gatyşyk köpeltmek hasylynyň moduly şol wektorlarda gurlan parallelepipediň göwrümine deňdir. Eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üçlük sag üçlük bolsa, onda ol köpeltmek hasyl položiteldir, eger üçlük çep üçlük bolsa ol otrisateldir.

Hakykatdan-da, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlarda gurlan parallelopipediň göwrümi parallelopipediň esasynyň $\left|\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right|$ meýdanynyň $/\vec{a}/\cdot/\cos\theta/$ beýikligine köpeltmek hasylyna deňdir. Bu ýerde $c$ burç $\vec{a}$ we $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektorlaryň arasyndaky burçdyr. Şoňa görä-de biz aşakdaky gatnaşygy ýazyp bileris:

$$\upsilon = /\left[\vec{b},\vec{c}\right]/\cdot/\vec{a}//\cos\theta/ = /\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)/ = \left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

Şeýlelikde, teoremanyň birinji tassyklamasy subut edildi, gatyşyk köpeltmek hasylynyň alamaty $\cos\theta$ ululygyň alamaty bilen gabat gelýär, şonuň üçinem gatyşyk köpeltmek hasyl, eger $\vec{a}$ wektor bilen $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektoryň ugry $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň tekizliginden bir tarapa ugukdyrylan bolsa, položiteldir, ýagny $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar sag üçlügi düzýän bolsa, onda gatyşyk köpeltmek hasyl položiteldir. Edil şunuň ýaly, eger $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar çep orýentirlenen üçlük bolsa, gatyşyk köpeltmek hasylyň otrisateldigi görkezilýär.

Eger $i, j, k$ ortonormirlenen sag bazis, onda $(i, j, k) = L$

TEOREMA. Köpeldijiler kopleanar bolanda we diňe şonda gatyşyk köpeltmek hasyl nula deňdir.

Hakykatdanda, $/\vec{a},\vec{b},\vec{c}/ = /\vec{a}/\ \ /\left[\vec{b},\vec{c}\right]/\cos\theta$ , bu ýerde burç $\vec{a}$ we $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektorlaryň arasyndaky burç.

$/\vec{a}/\cdot/\left[\vec{b},\vec{c}\right]/\cdot/\cos\theta/ = 0$ deňlik haçanda aşakdaky şertleriň iň bolmanda biri ýerine ýetende mümkindir:

$a)\ /\vec{a}/ = 0$. Bu halda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlaryň komplanardygy görnüp dur.

$b) /\left[\vec{b},\vec{c}\right]/ = 0$. Bu halda $\vec{b}$ we $\vec{c}$ kollenear, şoňa görä-de $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar komplanardyr.

$w)$ $\cos\theta = 0$. Bu halda $\vec{a}$ wektor $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektora ortagonal, ýagny $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar bilen komplenardyr.

Tersine tassyklama edil ýokardaky ýaly subut edilýär: eger $\vec{a},\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar komplenar bolup, $a)$ we $b)$ hallar ýerine ýetmese, onda $w)$ hal amala aşar.

## 56.Gatyşyk köpeltmek hasyly köpeldijileriň komponentalarynyň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize üç sany wektor berlen bolsun: $\vec{a} = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k,$

$\vec{b} = \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k, \qquad \vec{c} = \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k.$

$\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny ýazalyň:

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} k$$

Wektorlary okalýar köpeltmek düzgüni boýunça alarys:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right) = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \alpha_1 - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \alpha_2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \alpha_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

<u>Parallelepipediň /piramidanyň / göwrümini onuň depelerineň koordinatalary arkaly aňlatmak</u>.

Goý, bize bir tekizlikde ýatmaýan dört sany nokat berlen bolsun:

$$A_1 / x_1, y_1, z_1 /,$$

$$A_2 / x_2, y_2, z_2 /,$$

$$A_3 / x_3, y_3, z_3 /,$$

$$A_4 / x_4, y_4, z_4 / .$$

*A₁* depeden çykýan $A_1A_2$, $A_1A_3$ we $A_1A_4$ wektorlary ýazalyň:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k,$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1)i + (y_3 - y_1)j + (z_3 - z_1)k,$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1)i + (y_4 - y_1)j + (z_4 - z_1)k.$$

Indi bu üç wektoryň gatyşyk köpeltmek hasylyny ýazýarys:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Bilişimiz ýaly bu sanyň moduly parallelepipediň göwrümine aňladýar. Şu parallelepipedi /prizmanyň/ deň ululykly alty sany piramida bölüp bolýar, şoňa görä-de $A_1A_2A_3A_4$ , piramidanyň göwrümini aşakdaky formula bilen berip bolar:

$$V_{lip} = \pm\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

## 57. Tekizlikde göni burçly dekart koordinatalary özgertmek.

Goý, bize tekizlikde koordinatalaryň iki sany göni burçly dekart sistemasy berlen bolsun, olaryň biri 0 başlangyç we $i,j$ bazis wektorlar, beýlekisi bolsa $0'$ başlangyç we $i', j'$ bazis wektorlar arkaly kesgitlenýär diýeliň.

Öňümizde şeýle meseläni goýýarys: tekizligiň erkin M nokadynyň koordinatalary koordinatalaryň birinji sistemasyna görä $x$ we $y$ koordinatalaryny nul nokadyň koordinatalaryň ikinji sistemasyna görä koordinatalary arkaly aňlatmaly. $x$ we $y$ koordinatalaryň $\overrightarrow{OM}$ wektoryň $i,j$ bazis boýunça dagytmsynyň koordinatalary bilen gabat gelýändigini şeýle hem $x'$ we $y'$ koordinatalaryň $\overrightarrow{OM}$ wektoryň $i', j'$ bazis boýunça dagytmasynyň koordinatalary bilen gabat gelýändigini belläliň, ýagny biz aşakdakylary ýazyp bileris:

$$\overrightarrow{OM} = xi + yj, \qquad /1/$$

$$\overrightarrow{OM} = x'i' + y'j'. \qquad /2/$$

Eger ikinji sistemanyň $0'$ başlangyjynyň birinji sistema görä koordinatalaryny $a$ we $b$ bilen belgilesek, onda

$$\overrightarrow{OO} = ai + bj. \qquad /3/$$

Tekizligiň islendik wektoryny $i,j$ bazis boýunça dagydyp bolýandygy sebäpli, $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ sanlar tapylyp, aşakdaky gatnaşyklary ýazyp bolar:

$$\left.\begin{aligned} i' &= \alpha_{11} i + \alpha_{12} j, \\ j' &= \alpha_{21} i + \alpha_{22} j. \end{aligned}\right\} \qquad /4/$$

Wektorlary goşmagyň düzgüni boýunça alarys:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad /5/$$

/2/ deňligiň sag böleginde $i', j'$ wektorlaryň bahalaryny /4/ deňliklerden alyp goýýarys, soňra /5/ deňlige /1/, /2/ we /3/ deňliklerden $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OO'}$ we $\overrightarrow{O'M}$ wektorlaryň bahalaryny goýýarys, ahyrda-da goşulyjylary $i$ we $j$ wektorlary boýunça toparlara bölýäris:

$$xi + yj = \left(a + \alpha_{11} x' + \alpha_{21} y'\right) i + \left(b + \alpha_{12} x' + \alpha_{22} y'\right) j.$$

Wektory bazis boýunça dagytmagyň ýeke-täkdigi sebäpli /6/ deňlikden koordinatalary özgertmegiň fomulalatyny alýarys:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \alpha_{11} x' + \alpha_{21} y', \\ y &= b + \alpha_{12} x' + \alpha_{22} y'. \end{aligned}\right\}$$

Biz aşakdaky ajaýyp netijä geldik: eger tekizlikde iki sany erkin dekart sistemasy alnan bolsa, onda tekizligiň islendik $n$ nokadynyň birinji sistema görä koordinatalary nul nokadyň beýleki sistema görä koodinatalarynyň çyzykly funksiýalarydyr.

Indi alanan /?/ formulalaryň geometrik interpretasiýasyna geçeliň. Munuň üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçyň kosinusyny $\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ bilen belgilemegi şertleşeliň. /4/ deňlikleriň her birini ilki $i$ wektora, soňra $j$ wektora skolýar köpeldip we $/i,i/=/j,j/=1,\ /i,j/=0$ göz öňünde tutup alarys:

$$\alpha_{11}=\cos(i',\wedge i),\ \alpha_{12}=\cos(i',\wedge j),$$

$$\alpha_{21}=\cos(j',\wedge i),\ \alpha_{22}=\cos(j',\wedge j)$$

Ýokardaky surat şekillerinden hala garalyň. Onda

$$\alpha_{11}=\cos\varphi,\ \alpha_{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,\ \alpha_{21}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi,\ \alpha_{22}=\cos\varphi.$$

Şeýlelik bilen, tekizlikde koordinatalary özgetrmegiň formulalary aşakdaky görnüşi alýar:

$$\left.\begin{aligned} x&=a+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\\ y&=b+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad /$$

$/7'/$ sistemany $x'$ we $y'$ görä çözüp, biz islendik M nokadyň ikinji sistema görä $x'$ we $y'$ koordinatalaryny nul nokadyň birinji sistema görä $x$ we $y$ koordinatalary arkaly aňladýan ters formulalaryny alarys:

$$\left.\begin{aligned} x'&=(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi,\\ y'&=-(x-a)\sin\varphi+(y-b)\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad /8$$

Koordinatalary özgertmegiň umumy /7/ formulalary iki sany özgertmä dagaýar. Bularyň biri sistemany diňe parallel göçürmä degişlidir, beýlekisi bolsa sistemany diňe 0 başlangyjyň daşynda $\varphi$ burça aýlamaga laýyk gelýär.

Hakykatdan hem, $/7'/$ formulalarda bolsa aýlanma burçy nula deň diýip hasap etsek,

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

deňlemede a,b, $R^2$ hemişelikler degişlilikde töweregiň merekezinde kordinatlary we onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulyklar bolsa töweregiň erkin M nokadyň kordinatlary hususy halda eger kordinatalr başlangyjy töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we ı2ı deňleme has ýönekeý görnüşi alar: $x^2+y^2=R^2$

Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler) merkezi c/a;b/ nokat radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede oklary açyp alarys.

$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/

ýa-da

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

bu ýerde D=2a,E=-2b, $F=a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edildi. /3/

deňleme ikinji derejeli deňlemedir.

Şeýlelikde töwregiň üýtgeýän kordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyr emma her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlenmeýänligi bellemek gerek. Hakykatdanda /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris, töweregiň deňlemesinde kordinatalaryň kwadyratlanyň koefissenyleri özara deň bu deňlemeleriň kordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär. Tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /$x^2$ we $y^2$ çleneleriň koeffisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňleme töweregi kesgitleýär sebäbi ony $x^2$-yň koeffisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolar.

Ellips kesgitleme. Fokuslar diýip atlandyrylýan bärden iki nokada çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik san bolup takyklygyň nokatlar köpligine ellips diýilýär bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmaly.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen $F_1$ we $F_2$ nokatlary birleşdirýän göjni çyzygy absissalar oky hökmünde Kabul ederis ol okda $F_1$-den $F_2$ –ä tarap ugry polažitel diýip Kabul ederis $F_1$ $F_2$ nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny kordinatalar başlangyjy deregine Kabul edeliň fokuslaryň arasyndaky $F_1 F_2$ uzynlygy 2c bilen belgiläliň. Onda $F_1$ we $F_2$ nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Ellipsiň erkin N nokadynyň kordinatalary. X we y bilen belgiläliň. $F_1M$ we $F_2M$ kesimleriň uzynlyklarynyň formulasy boýunça aňladalyň:

$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $F_2M=$

Ellipsiň kesgitlemesine görä kordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir. Ellipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /1/ deňlemede radikallary ýok etmek gerek. Radikallaryň birini sag bölege geçirýäri .

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Indi d=$\sqrt{(v-x_0)^2+(v-y_0)^2}$ formula buýunça M we N nokatlaryň arasyndaky uzynlygy tapmak galýar,
ýagny

$$d=\sqrt{\left(x_0-A\cdot\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(y_0-B\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{A^2\left(\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}\right)^2+B^2\left(\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+c)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Göni çyzygyň polýar kordinatalardaky deňlemesi.

Göni çyzygyň normal deňlemesini alalyň $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ tekizlikde kordinatalaryň göni burçly dekart sistemasy bilen polýar kordinatalaryň sistemasy arasyndaky baglanşygy berýän formylalary ýazylan.

$X=r\cos\alpha \qquad y=r\sin\alpha$

Üýteýän x we y ulylyklaryň bu bahalaryny göni çyzygyň normal deňlemesinde goýýarys:

$r\cos\varphi\cos\alpha+r\sin\varphi\sin\alpha-p=0$

ýa-da

$r\cdot(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha)-p=0$

bu ýerden $r\cdot\cos(\varphi-\alpha)-p=0$

bu bolsa göni çyzgyň polýar koordinatalardaky deňlemesidir.

## Ikinji tertipli egri çyzyklaryň elementar teoriýasy

Üýtgeýän x we y ulylyklara görä ikinji derejeli umumy deňleme özünde ikinji çlenleri /$x^2$,xy we $y^2$/ birinji derejeli çleni /azat çleni/ saklaýar. Şuňa laýyklykda ikinji derejeli umumy deňlemäni aşakdaky ýalyýazyp bolar.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Bu ýerde A,B,C koffisentleriň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolmaly. A,B,C,D,E,F koefissentleriň dürli bahalarynda bu deňlemeäniň haýsy çyzyklary kesgitlenýändigi baradaky sowada indiki bölümde garaljak.

Şu bölümde ikinji derejeli deňlemeleriň käbir ýörite görnüşlerine garap geçeliň.

Töwerek. Kesgitleme. Merkez diýip atlandyrylýan nokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän kesime şeýle-de şol kesimiň uzynlygyna töweregiň radiusy diýilýär.

R radiusyň töweregiň deňlemesini düzeliň.

Kordinatalar oklaryny erkin saýlap alalyň onda töweregiň c merkeziniň koordinatalary a we b bolar. Töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x.y bilen belgiläliň töweregiň ähli nokatlaryna mahsus bolan häsiýeti analitiki aňladalyň. Töweregiň kesgitlemesinden onuü islendik M nokadynyň C merkezinden uzakdygynyň hemişelik ululygy we onuň töweregiň R radiusyna deňdigi ýagny

CM=R

Bolýandygy gelip çykýar.

Cm ululygy C we M nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde kesgitläp biz /I/ deňligi M nokadyň öýtgeýän koordinatalarynyň üsti bilen aňladarys:

$$\sqrt{(x-y)^2+(y-b)^2}=R \quad /I/$$

Ahyrky deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip biz töweregiň deňlemesini ýady ýazarys:

$$(y-b)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad /2/$$

Bu deňlemede a,b, R hemişelikler degişlilikde töweregiň merkeziniň kordinatalary w onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulylyklar bolan töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalary. Hususy halda eger kordinatalar başlangyç töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we /2/deňleme has ýünekeý görnişi alýar.

$X^2+y^2=R^2$

Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler merkezi C/a;b/ nokatda radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede nokatlary açyp alarys:

$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/

Ýa-da

$x^2+y^2+Dx+ey+F=o$ /3/

bu ýerde D=2a, E=-2b, F= $a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edlildi. Deňleme ikinji derejeli deňlemedir

şeýlelikde töweregiň üýtgeýän koordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyrň emme her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlemeýändigi bellemek gerek. Hakykatdan-da /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris. Töweregiň deňlemesinde koordinatalryň kwadratlarynyň koeffisenleri özara deň bu deňlemä koordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /$x^2$ we $y^2$ çlenleriniň koefisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňlem töweregi kesgitleýär sebäbi ony $x^2$ iň koefisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolýar.

Ellips kesgitlemefokuslar diýip atalandyrylýan birden iki nokada çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik san bolan tekizligiňnokatlar köplügine eddipo diýilýär /bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmady/.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen $F_1$ we $F_2$ nokatlary birleşdirýän göni çyzygy absissalar oky hökmünde kabul ederis ol okda $F_1$ we $F_2$ nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny koordinatalar başlangyjy deregine kabul edeliň. Fokuslaryň arasyndaky $F_1$, $F_2$ uzaklygy 2c bilen belgiläliň. Onda $F_1$ we $F_2$ nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Elipsiň erkin N nokadynyň kordinatalaryny x we y bilen bagalalyň. $F_1M$ we $F_2M$ kesimleriň uzynlyklaryny iki nokadyň arasyndaky uzynlygyň formulasy boýunça aňladalyň.

$$F_1M = \sqrt{(x-y)^2 + y^2} \qquad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elellipsiň kesgitlemesine görä $F_1M+ F_2M$ jem hemişelik ulylyk ony 2b bilen belgiläp alarys $F_1M+ F_2M=2a$

Ýa-da

$$\sqrt{(x-y)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Bu deňleme alnan koordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir.

Elipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /I/ deňlemede redikallary birini sag bölege geçirýäris:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

## 58.Ikinji teripli egrileriň umumy deňlemesi we olaryň kanonik görnişe getirlişi.

Indi ikinji tertipli algebraik deňlemä

$Ax^2+bxy+Cy2+Dx+Ey+F=0$

Seredeliň.

Bu algebraik deňlemä ikinji tertipli egrileriň umumy deňlemesi hem diýilýär. Ikinji tertipli egrilik deňlemesiniň köpüsinde B,d we E koefisentlerinde ikä bölinen bolup girýärler. Şonuň üçin ikinji tertipli umumy algebraik deňlemäni

$Ax^2+2Bxy+Cy^2 2Dx+2Ey+F=0$ /2.1/

Görnüşde ýazmak amaýly. Bu ýerde B,D we E koeffisenler degişli koeffisenleriň ýarysyny aňladýandyr, ondan başgada A,B,C koeffisenler bir wagtyň özünde nola deň däldir $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ meselem eger

$$X^2+3xy+2y^2+5x+4y+1=0$$

Deňleme berlen bolsa onda $A=1, B=\frac{3}{2}, C=2, D=\frac{5}{2}, E=2, F=1$ bolar

Eger $Ac\text{-}b^2\neq 0$ bolsa /2.1/ deňlemäni paralel göcürmäniň we yzygiderli öwürmäniň kömegi bilen

$$A'x''^2+Cy''^2+F'=0 \qquad /2.2/$$

Görnişe getirip bolar.

Subudy. Ilki $Oxy$ kordinatalar sistemasynyň başlangyjy $O,(x_0, y_0)$nokada ýetireliň. Täze sistemany $Oxy$ bilen belgiläp

$$\left.\begin{aligned} x &= x + x_0 \\ y &= y + y_0 \end{aligned}\right\} \qquad /2.3/ \text{ alarys.}$$

Ondan /2.1/ deňlemämiz

$$A(x'+x_0)^2+2B(x'+x_0)(y'+y_0)+C(y'+y_0)^2+2D(x'+x_0)+2E(y'+y_0)+F=0$$

Görnüşde bolar. Ýönekeý özgertmelerden soňra bolsa /2.1/ deňlemämizi

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \qquad /2.4/$$

Görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde.

$D' = Ax_0 + By_0 + D,$

$E' = Bx_0 + Cy_0 + E,$

$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy^2 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$

Bu ýerde $x_0$ we $y_0$ häzirlikçe näbelli sanlardyr.

Täze sistemanyň $/x_0;y_0/$ kordinat başlangyjyny tapmak üçin $D'$ we $E'$-leri nola deňläliň

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{aligned}\right\} \qquad /2.5/$$

Sistema alnar. Lemmanyň şertine görä $AC + B^2 \neq 0$ diýmek /2.5/

Sistemanyň $x_0;y_0$ sanlara görä-ýeketäk çözüwi bardyr. Soňra /2.5/ şerti göz öňünde tutyp /2.5/-den

$Ax'^2 + 2Bx'y + \mathrm{C}y'^2 + F = 0$ /2.6/ deňligi alarys.

Indi bolsa $O'x'y'$ kordinatlar sistemasyny käbir $\propto$-a burça öwrip görä krodinatalar $\mathrm{O}'x''y''$ sistema alallyň.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\propto - y''\sin\propto \\ y'' &= x''\sin\propto - \cos\propto \end{aligned}\right\} \qquad /2.7/$$

$x'$ we $y'$ bahalaryny */2.7/* deňlikde goýalyň

A($x$''cos∝-y''sin∝)$^2$+2B (x''cos∝-$y$''sin∝)
($x$''sin∝+y''cos∝)+c($x$''*sin*∝+$y$''cos∝)$^2$+F=0

Onda birnäçe özgertmelerden soň

$x''^2$(Acos$^2$∝+*2Bcos*∝*sin*∝+*Csin*$^2$∝)$^2$+$y''^2$*(Asin*$^2$∝-*2Bsin*∝*cos*∝*cos*$^2$∝*)*+$x$''y''(Asin∝*cos*∝+ +*B(cos*$^2$∝-*sin*∝)+Csin∝*cos*∝*)+F=0*

*bu ýerden*

$\lambda$=Acos$^2$∝+*2Bcos*∝+*Csin*$^2$∝

$C'$=Asin$^2$∝-*Bsin*∝*cos*∝+*Ccos*'∝

$B'$=-Asin∝*cos*∝+*B(cos*$^2$∝-*sin*$^2$∝*)*+*Csin*∝*cos*∝

Göz öňinde tutyp soňky deňlikden alarys

A'x''$^2$+2B'x''y''+c'y''$^2$F'=c */2.8/*

Indi */2.8/*

Deňlemedäki x'' y''-iň koffisenti nol bolar ýaly ∝ burçy saýlalyň.

Diýmek B'=0 bu ýerden

2B cos$\propto$ =*(Ac)sin*$\propto$ */2.9/*

Egerde A=C bolsa onda cos$\propto$ =*0* ýa-da $\propto$ = eger-de A≠C bolsa onda /2.8/ sag we çep tarapyny cos2$\propto$ bölmek bilen alarys

$2B=(A-C)tg^2\propto$

Bu ýerden $\propto$-ni tapalyň

$$\propto = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2B}{A-C}$$

$\propto$-ni bu bahalarynda */2.9/* deňlik

$A'x'^2+c'y''^2+F'=0$ görnüşinde bolar

Tema susbut edildi.

1. Tertipli egrileriň klafikasiýasy

*/2.1/* deňlemäniň uly çilenelriniň A,B,C koefisentleri kordinat okyny parallel göçürmede öýtgemän diňe kordinata öwrümde öýtgeýändigini subut edilen temadan gelip çykýar.

Ýöne $AC-B^2$aňlatma hiç bir ýagdaý-da öýtgemän öňkiligine galýar. Beýle ýagdaý bolsa onuň kordinatalaryň üýtgemekligine bagly däldigini görkezýär. Hakykatdan-da şeýledigini barlalyň. Onuň üçin bolsa-da ýene-de öňden belli deňliklerinden

$A=A\cos^2\propto +2B\cos\propto +C\sin^2\propto$

$C'=A\sin^2\propto -B\sin\propto \cos\propto +C\cos'\propto$

$B'=-A\sin\propto \cos\propto +B(\cos^2\propto -\sin^2\propto)+C\sin\propto \cos\propto$

*Onda*

$A'C'\text{-}l^2=(A\cos^2\propto+2B\sin^2\cos\propto+C\sin^2\propto)\cdot=(A\cos^2\propto-2B\sin^2\propto+C\sin^2\propto)-[(C-A)\ \mathrm{Sin}\propto dx+\ B\cos\text{-}\sin^2]^2$

Skopkalarymyzy açyp ýönekeýleşdirenmizden soňra

$A'C'\text{-}B'^2\text{-}AC(\cos^2\propto+\sin^2\propto)^2-B^2(\cos^2\propto+\sin^2\propto)^2AC-B^2$ alarys

Bu $AC-B^2$ ululyga ikinji tertipli egriniň

$AC-B^2$ ululygyň alamatyna baglylykda tertipli egriler üç görnüşde bölünýär.

Eger

1. $AC-B^2>0$
2. $AC-B^2<0$
3. $AC-B^2=0$

Bolsa onda */2.1/* deňlemä ikinji tertipli egrileriň degişli optik giporbolik we parabilik deňlemesi diýilýär.

Indi bolsa egrileriň dürli görnüşlerine garap geçeliň. Munuň üçin bolsa biz ýene-de bize öňden belli bolan aňlamadan peýdalanarys.

Ýagny

$A'=A\cos^2\propto+2B\cos\propto\sin\propto+C\sin^2\propto$

$C'=A\sin^2\propto-2B\sin\propto\cos\propto+C\cos^2\propto$

*Ýa-da*

A=Acos$^2 \propto (A+2Btg\propto+ctg\propto)$

$C$'=sin$^2 \propto (A\text{-}Bctg^2+Cctg\propto)$

I.Eliptik görnüş

Eger AC-B$^2$>0 bolsa A' we C' –iň alamaty meňzeş bolar bia A'>B we c'>0diýip alalyň.

a/ A'>0, c'0 we F'>0 onda

$$\frac{x'}{\mathrm{A}^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ alarys bu bolsa elipsiň kanonik deňlemesidir

b/ eger A'>0, B'>0 we F'=0 bolsa onda

$a^2x^2+b^2y^2=0$ bolar

bu deňlemäni diňe x=o, y=o kordinat başlangyjynyň kordinatalary kanagatlandyrýar.

Bu ýagdaýda ol deňlemä doreýän elipsiň deňlemesi diýilýär.

2. gönüş

Eger AC-B$^2$<0 bolsa onda A'>0we C dürli alamatly bolar onda biz

A'<0 we c'<0 bolsun onda $\frac{a^2}{a^2}-\frac{y}{8^1}=1$ bolar bu bolsa

Giperbolanyň deňlemesidir.

c / A'>0, C'<0 we F'<0 bolsun onda

$a^2x^2$-$b^2y^2$=0 deňlemäni alarys

ýa-da (ax-by)(ax+by)=0 almak bolar.

Bu deňleme bolsa özara kesişýän iki gönini kesgitleýär. Bu ýagdaýda deňlemä giperbolanyň deňlemesi hem diýilýär.

## 59.PARABOLIK GÖRNÜŞ.

Eger AC-$B^2$=0 diýsek onda A'=0 ýa-da C'=0 bolsa onda subut edilen temanyň esasynda ikinji tertipli egriniň umumy deňlemesini aşakdaky görnüşde.

$A'x''^2+Cy''^2+2E'y''^2+2D'x''+F'=0$ ýazmak bolar.

Goý, A≠0 bolsun onda onda ýokardaky deňlemäni şeýle görnüşde

A[$y^2+\frac{2E}{C}y+\left(\frac{E}{C}\right)^2$]+2Dx+F-$\frac{F^2}{C}=0$ bu ýerden

$F''=-\frac{F^2}{C}$ ýazmak bolar.

Kordinatalar başlangyjyny (0;-$\frac{E}{C}$) nokatlar boýunça Oy okuň parallel göçürip täze x'=x, y'=y+$\frac{E}{C}$ kordinatalara geçip

$Cy'^2+2Dx'+F''=0$

Indi bölek aşakdaky ýagdaýlara seredeliň;

Goý D$\neq$0 bolsun onda

Cy'$^2$+2D(x'+ $\frac{F''}{2D}$ )=0 deňlemäni alarys

Eger kordinat başlangyjyny (- $\frac{F''}{2D}$ ,0) nokadyna geçirip x''=x'+ $\frac{F''}{2D}$

y''+y diýsek onda soňky deňlemeden

Cy''+2Dx''=0

Y+2px''=

Deňlemäni alarys ýa-da y''=2-px'' alarys

Deňleme parobalanyň kanonik deňlemesidir goý D=0 bolsun onda

Cy'$^2$+F''=0 deňlemäni alarys.

Eger-de C-iň we F''' alamatlary dürli bolsa onda $\frac{F''}{C} = 0^2$ belläp

soňky deňlemeden

(y'-a)(y'+a)=0 alarys

Alanan deňleme bolsa özara iki parallel göni deňlemesidir. Eger-de C-iň we F'' alamatlary meňzeş bolsa onda

y'$^2$+a$^2$=0 deňlemäni alarys.

Bu deňlemäni hiç san nokady kordinatalary kanagatlandyrýar

Şonuň üçin bu deňlemä iki hyýaly parallel gönüniň deňlemesi diýilýär.

Şeýlelikde ikinji tertipli egriniň umumy

$Ax^2+2Bxy+Cy^2 2Dx+2Ey+F=0$ kordinat sistemany özgertme bilen aşakdaky sekiz görnüşe getririler.

1. $\frac{2^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
3. $a^2x^2+b^2y^2=0$
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
5. $a^2x^2-b^2y^2=0$
6. $y^2-2px$
7. $y^2=2px$
8. $y^2+a^2=0$

U( $\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}$) we (-2; $\frac{\sqrt{15}}{5}$) nokatlary belli boln ellipsiň kanonik deňlemesini ýazmaly.

Çözülşi elipsiň merekeziniň kordinatala başlangyjynda fokuslaryň bolsa absissa ýatanlygy üçin gözlenýän elipsiň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$$

$\mu\left(\frac{5}{2}:\frac{6}{4}\right)$ we N(-2; $\frac{\sqrt{5}}{5}$) nokatlaryň kordinatalarny ellipsiň deňlemesinde goýup aweb sanlary kesgitleýäris.

$$\begin{cases} \frac{25}{4a^2}+\frac{6}{16b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1 \end{cases}$$

Bu ýerden $a^2$=10, $b^2$=1

$a^2$ we $b^2$ tapylan bahany ellipsiň deňlemesine goýup alarys.

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1$$

2-nji mesele $25x^2+16y^2=4225$ elipsiň deňleesi berlipdir onuň oklarynyň uzynlyklaryny e fokuslarynyň kordinatalarny tapmaly.

Çüzülşi: ilki ellipsiň umumuy deňlemesini kanonik görnüşde ýazalyň.

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$$

Bu ýerden $a^2$=169. a=13, $b^2$=25, b=5

Indi 2a-ni we 2b-bi tapmaly

2a=26 we 2b=10 bolar.

Indi bolsa kordinatalaryň fokuslaryny kordinatalarny tapmalyň onuň üçin c-ni tapalyň.

$C^2=a^2-l^2$=169-25=144

$C^2$=144 ýa-da c=±12.

## EDEBIÝAT

1.Aleksandrow P.S. Leksii po analatiçeskoý geometrii. M.Nauka. 1968.
2.Ilin W.A, Poýenak E.G. Analatiçeskaýa geometriýa. M.Nauka. 1981.
3.Beklemişew D.B. Žure analatiçeskoý geometrii i lineýnoý algebri. M.Nauka. 1980.
4.Priwalow I.I. Analatiçeskaýa geometriýa. M. Fizmattiz. M.Nauka. 1958.

# Mazmuny