I. Rozyýew, Ç.G. Halmyradow, M.M. Haýdarowa

PARAMETRLI DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Aşgabat-2010

UOK

R

I. Rozyýew, Ç.G. Halmyradow, M.M. Haýdarowa

R Parametrli deňlemeler we deňsizlikler. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. – Aşgabat. 2010ý.

Okuw gollanmasy uniwersitetleriň we mugallymçylyk institutynyň matematika hünärleriniň has kyn meseleleri çözmek boýunça ýörite derslerinde ulanmak üçin şeýle hem, orta we ýörite orta mekdepleriň matematika boýunça ýöriteleşýän okuwçylaryna, ýokary okuw mekdepleriň ykdysady, inžener- tehniki ugurlarda okaýan talyplaryna niýetlenendir.

Okuw gollanmasy parametrli deňlemeleri we deňsizlikleri çözmeklige bagyşlanandyr we esasy üns parametrleriň häsiýetlerini ýüze çykarmaklyga gönükdirilendir.

Giriş

Matematikany öwrenmekligiň dürli etaplarynda deňlemelere we deňsizliklere häli-şindi duş gelinýär. Amaly meslelerde bolsa, bir deňlemäniň ýa-da deňsizligiň çözüwleriniň üsti bilen şol bir görnüşli birnäçe deňlemeleriň ýa-da deňsizlikleriň bitewilikde çözüwlerinini almaklyk talap edilýär. Bu mesele bolsa parametrli deňlemeleriň we deňsizlikleriň kömegi bilen çözülýär.

Ilki bilen adaty deňlemeleriň we deňsizlikleriň häsiýetlerine seredip geçeliň.

I. Goý, $F_1(x, y, ..., z)$ *we* $F_2(x, y, ..., z)$ funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlalary berlen bolsunlar. Olaryň kesgitleniş ýaýlalarynyň umumy böleginde

$$F_1(x, y, ..., z) = F_2(x, y, ..., z) \qquad (1)$$

deňligiň üsti bilen deňleme düşünjesine gelinýär.

Goý, $x = a,\ y = b,\ z = c$ sanlar argumentleriň ýolbererlik bahalary bolsunlar. Bu bahalar üçin iki ýagdaý bolup biler: $1) F_1(a,b,...,c) = F_2(a,b,...,c)$; $2) F_1(a,b,...,c) \neq F_2(a,b,...,c)$

1) ýagdaýda argumentleriň ýolbererlikli bahalarynyň sistemasy (1) deňlemäni kanagatlandyrýar, 2) ýagdaýda – kanagatlandyrmaýar diýilýär.

1-nji kesgitleme: ***Eger*** $x = a,\ y = b,...,z = c$ ***sanlaryň sistemasy (1) deňlemäni kanagatlandyrýan bolsa, onda*** $x, y,..., z$ ***sanlaryň sistemasyna (1) deňlemäniň çözüwi diýilýär.***

Kesgitlemä görä çözüwiň F_1 *we* F_2 funksiýalaryň bilelikde seredilýän köplügine degişli boljakdygyny göreris. F_1 funksiýa (1) deňlemäniň çep bölegi, F_2 funksiýa bolsa sag bölegi diýilýär. $x, y,..., z$ argumentlere näbelli üýtgeýänler diýilýär. Deňlemäniň çözüwleri üçin aşakdaky üç ýagdaý emele gelýär:

1. (1) deňlemäniň iň bolmanda bir $x = a,\ y = b,...,z = c$ çözüwi bar bolup,

üýtgeýänleriň beýleki ýolbererlikli bahalarynda (1) deňleme kanagatlandyrylmaýar.

2. Üýtgeýänleriň ýolbererlikli bahalarynyň hiç bir sistemasy (1) deňlemäni kanagatlandyrmaýar.
3. Üýtgeýänleriň ýolbererlikli bahalarynyň islendik $x=a,\ y=b,...,z=c$ sistemasy (1) deňlemäni kanagatlandyrýar. Bu ýagdaýda (1) deňlemä toždestwo diýilýär.

Umuman, deňlemäni çözmek diýmek, onuň çözüwler köplügini kesgitlemek diýmekdir. Çözüwler köplügi bolsa tükenikli, tükeniksiz we boş köplük bolup biler.

Köplenç, deňlemeler haýsy sanlar meýdanynda seredilýändigine we deňlemäni düzýän funksiýalaryň üstünde haýsy amallaryň ýerine ýetirilýändigine görä görnüşlere bölünýärler. Mekdep matematikasynda deňlemeler hakyky sanlar meýdanynda seredilýär we olar (1) deňlemede F_1, F_2 funksiýalar köpagzalar bolsalar – ***algebraik***; bu funksiýalaryň iň bolmanda biri köpagza bolman drob-rasional ýa-da rasional funksiýa bolsa – ***drob-rasional***; deňlemedäki funksiýalaryň iň bolmanda biri üýtgeýänden kökli aňlatmany saklasa – ***irrasional***; deňleme özünde transendent amaly saklasa – ***transendent*** deňlemeleri emele getirýärler:

1) algebraik deňlemeler: $x^3+x^2+x+1=0, \quad x^3+2xy=2x^3+y^2$

2) drob-rasional deňlemeler: $\frac{x+2}{3-x}=2+3x; \quad \frac{x+y+z}{x^3+y^3}=\frac{z}{y}+x$

3) irrasional deňlemeler: $2x+\sqrt{x^2+1}=x; \quad \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}=x+\sqrt{x};$

4) transendent deňlemeler: $2^{\frac{x}{y}}-x=3x; \; tgx=x^2-1;$ we ş.m.

Eger bir üýtgeýänli

$$F_1(x)=F_2(x) \qquad (2)$$

deňlemä seredilse, onda onuň çözüwine deňlemäniň köki diýilýär. Şeýlelikde, (2) görnüşli deňlemäni çözmek diýmek, onuň ähli köklerini tapmak ýa-da hiç bir köküniň bolmazlygyny subut etmekdir.

2-nji kesgitleme: Goý, $f_1(x)=g_1(x)$ *we* $f_2(x)=g_2(x)$ **deňlemeler berlen bolsunlar. Eger** $f_1(x)=g_1(x)$ **deňlemäniň her bir köki** $f_2(x)=g_2(x)$ **deňlemäniň köki bolsa, onda ikinji deňlemä birinji deňlemäniň netijesi diýilýär.**

Berlen deňlemeden onuň netijesine geçilse, deňlemäniň kökleri üýtgemeýär, emma del kökleriň sanynyň köpelmegi mümkindir. Meselem: $x^2-1=0$ *we* $x^4-1=0$

Bellik: 1.Eger deňlemäniň kökleri ýok bolsa, onda islendik deňleme bu deňlemäniň netijesidir.2. Deňleme çözülende berlen deňlemäniň ýerine onuň netijesi ulanylsa, onda goşmaça kökler emele geler we olaryň barlagyny geçirmek zerurdyr.

Biri beýlekisiniň netijesi bolýan deňlemeleriň käbir mysallary:

1) Islendik n natural san üçin $f^n(x)=g^n(x)$ deňleme $f(x)=g(x)$ deňlemäniň netijesidir.

2) Islendik $a>0$ we $a\neq 1$ sanlar üçin $f(x)=g(x)$ deňleme $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ deňlemäniň netijesidir.

3) $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ deňleme $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)$ deňlemäniň netijesidir

4) $f(x)=g(x)$ deňleme $f(x)=g(x)+\varphi(x)+(-\varphi(x))$ deňlemäniň netijesidir

3-nji kesgitleme: Eger $f_1(x)=g_1(x)$ deňlemäniň her bir köki $f_2(x)=g_2(x)$ deňlemäniň köki bolsa we tersine ikinji deňlemäniň her bir köki birinji deňlemäniň kökleri bolsa, onda bu deňlemelere özara deňgüýçli deňlemeler diýilýär.

Çözüwleri bolmadyk islendik iki sany deňleme hem özara deňgüýçli deňlemelerdir.

$f(x)=g(x)$ deňlemä deňgüýçli bolan deňlemeleriň mysallary: 1) $f(x)-g(x)=0$ 2) $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$

3) islendik $\alpha \neq 0$ san üçin $\alpha f(x) = \alpha g(x)$;

4) islendik n-natural san üçin $f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x)$

5) islendik $a > 0, a \neq 1$ üçin $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

6) islendik x_0 san üçin $g(x_0) = \varphi(x_0)$ deňlik ýerine ýetende $f(x) = g(x)$ *we* $f(x) = \varphi(x)$ deňlemeler özara deňgüýçlidir.

Bellik: Deňlemeleriň çözüwlerinde diňe deňgüýçli özgertmeler ulanylsa, onda kökleriň goşmaça barlagyny geçirmek zerur däldir.

II. Goý $y = f(x)$ *we* $y = \varphi(x)$ funksiýalar berlen bolsunlar. Eger bu funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlalarynyň kesişmesinde $f(\alpha) > g(\alpha)$ deňsizligi kanagatlandyrýan käbir α sanlaryň köplügini tapmak talap edilse, onda $f(x) > g(x)$ deňsizligi çözmek meselesine – deňsizlik düşünjesine gelinýär.

Deňsizlikler üçin hem deňlemeler öwrenilendäki girizilen düşünjelere meňzeşlikde, üýtgeýänleri ýolbererlikli bahalary, çözüwleri, netijeleri, deňgüýçlilik ýaly düşünjeler girizilýär. Emma deňsizlikler çözülende netijelere geçmek amatly bolmaýar, sebäbi – tükeniksiz köp del çözüwler alynýar.

Deňsizlikleriň deňgüýçliliginiň aşakdaky mysallaryny getirip bolar:

$f(x) > g(x)$ deňsizlige: 1) islendik $f(x), g(x)$ funksiýalar üçin $f(x) - g(x) > 0$ 2) islendik α san üçin $f(x) + \alpha > g(x) + \alpha$ 3) islendik $a > 0$ san üçin $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ we islendik $a < 0$ san üçin $\alpha f(x) < \alpha g(x)$ 4) islendik $a \in (1, +\infty)$ san üçin $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ we islendik $a \in (0;1)$ san üçin $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ deňsizlikleriň her biri deňgüýçlidirler.

5) Eger $g(x) \equiv \varphi(x)$ bolsa, onda $f(x) > g(x)$ we $f(x) > \varphi(x)$ deňsizlikler özara deňgüýçlidirler.
6) Eger $f(x) > g(x)$ deňsizligi kanagatlandyrýan x üýtgeýäniň ýolbererlikli bahalarynyň käbir bölek M köplüginde $f(x), g(x)$ funksiýalar otrisatel däl bolsalar, onda islendik n natural san üçin $f(x) > g(x)$ we $(f(x))^n > (g(x))^n$ deňsizlikler

M köplükde özara deňgüýçlidirler. Eger $a>1$ $(0<a<1)$ bolan hakyky sanlar üçin $f(x)>g(x)$ deňsizlik $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $(\log_a f(x)<\log_a g(x)$ deňsizlige M köplükde deňgüýçli bolar.

7) Eger $f(x)>g(x)$ deňsizligi kanagatlandyrýan näbelliniň ýolbererlikli bahalarynyň bölek M köplüginde otrisatel däl ýa-da položitel däl $y=\varphi(x)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda $f(x)>g(x)$ we $f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x)$ deňsizlikler ýa-da $f(x)>g(x)$ we $f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x)$ deňsizlikler özara deňgüýçlidirler.

Käbir ajaýyp deňsizlikler:

1) özara ters sanlaryň jemi üçin $a+\dfrac{1}{a}\geq 2,\ a>0$
2) orta arifmetik we orta geometrik sanlar üçin $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},\ a\geq 0,\ b\geq 0$
3) üçburçlugyň deňsizligi $|a+b|\leq|a|+|b|$;
4) $|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$;

5) $a^2 + b^2 \geq 2ab$, a,b – islendik sanlar

Ýönekeý deňlemeleriň we deňsizlikleriň çözüwleri.

a) Ýönekeý deňlemeleriň çözüwleri.

Deňlemeleriň görnüşleri	***Goýulan şertler***	***Deňlemeleriň çözüwleri***
$ax = b,\ a \neq 0$	*b-islendik*	$x = b/a$
$ax^2 + bx + c = 0,$ $a \neq 0$	$D > 0$ $D = 0$ $D < 0$	$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ $x = -b/2a$ *kökleri ýok*
$\lvert x \rvert = b$	$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$	$x_1 = b,\ x_2 = -b$ $x = 0$ *kökleri ýok*
$\sqrt{x} = b$	$b > 0$ $b < 0$	$x = b^2$ *kökleri ýok*
$x^{2m} = b,\ m \in N$	$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$	$x_1 = \sqrt[2m]{b},\ x_2 = -\sqrt[2m]{b}$ $x = 0$ *kökleri ýok*

$x^{2m+1}=b,\ m\in N$	*b-* *islendik*	$x=\sqrt[2m+1]{b}$
$a^{x}=b, a>0,$ $a\neq 1$	$b>0$ $b\leq 0$	$x=\log_a b$ *kökleri ýok*
$\log_a x=b, a>0,$ $a\neq 1$	*b-* *islendik*	$x=a^{b}$
$\sin x=b$	$b\in[-1;1]$ $b\notin[-1;1]$	$x=(-1)^{n}\arcsin b+n\pi,\ n\in z$ *kökleri ýok*
$\cos x=b$	$b\in[-1;1]$ $b\notin[-1;1]$	$x=\pm\arccos b+2\pi n,\ n\in z$ *kökleri ýok*
$tgx=b$	*b-* *islendik*	$x=arctgb+\pi n,\ \ n\in z$
$ctgx=b$	*b-* *islendik*	$x=arctgb+n\pi,\ \ n\in z$
$\arcsin x=b$	$\lvert b\rvert\leq\pi/2$ $\lvert b\rvert>\pi/2$	$x=\sin b$ *kökleri ýok*
$\arccos x=b$	$b\in[0,\pi]$	$x=\cos b$

	$b \notin [0, \pi]$	*kökleri ýok*
$arctgx = b$	$\|b\| < \pi/2$ $\|b\| \geq \pi/2$	$x = tgb$ *kökleri ýok*
$arcctgx = b$	$b \in (0; \pi)$ $b \notin (0; \pi)$	$x = ctgb$ *kökleri ýok*

a) Ýönekeý deňsizlikleriň çözüwleri.

Deňsizlikleriň görnüşleri	***Goýlan şertler***	***Deňsizlikleriň çözüwleri***
$ax > b,\ a > 0$ $a < 0$	*b- islendik* *b- islendik*	$x \in (b/a, \infty)$ $x \in (-\infty, b/a)$
$ax^2 + bx + c > 0,$ $a > 0$	$D > 0$ $D = 0$ $D < 0$	$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ $x \neq -b/2a$ $x \in (-\infty; +\infty)$

$a<0$	$D>0$ $D\le 0$	$x\in(x_1,x_2)$ *çözüwleri ýok*
$\lvert x\rvert>b$	$b\ge 0$ $b<0$	$x\in(-\infty;-b)\cup(b;+\infty)$ $x\in(-\infty,\infty)$
$\lvert x\rvert<b$	$b>0$ $b\le 0$	$x\in(-b;b)$ *çözüwleri ýok*
$\sqrt{x}>b$	$b\ge 0$ $b<0$	$x\in(b^2;+\infty)$ $x\in[o;\infty]$
$\sqrt{x}<b$	$b>0$ $b\le 0$	$x\in\left[0;b^2\right]$ *çözüwleri ýok*
$x^{2m}>b,\ m\in N$	$b\ge 0$ $b<0$	$x\in(-\infty;-\sqrt[2m]{b})\cup(\sqrt[2m]{b},\infty)$
$x^{2m}<b,\ m\in N$	$b>0$ $b\le 0$	$x\in(-\sqrt[2m]{b},\sqrt[2m]{b},)$ *çözüwleri ýok*
$x^{2m+1}>b,$ $m\in N$	*b-islendik*	$x\in(\sqrt[2m+1]{b};\infty)$

$x^{2m+1} < b,$ $m \in N$	*b-islendik*	$x \in (-\infty; \sqrt[2m+1]{b})$
$a^x > b, \quad a > 1$ $0 < a < 1$	$b > 0$ $b \le 0$ $b > 0$ $b \le 0$	$x \in (\log_a b; \infty)$ $x \in (-\infty; \infty)$ $x \in (\log_a b; \infty)$ *çözüwleri ýok*
$\log_a x > b,$ $a > 1$ $0 < a < 1$	*b-islendik* *b-islendik*	$x \in (a^b; \infty)$ $x \in (0; a^b)$
$\log_a x < b,$ $a > 1$ $0 < a < 1$	*b-islendik* *b-islendi*	$x \in (0; a^b)$ $x \in (a^b; \infty)$

	k	
$\sin x > b$	$b \geq 1$ $-1 \leq b < 1$ $b < -1$	*çözüwleri ýok* $x \in (\arcsin b + 2\pi n; -\arcsin b + \pi(2n+1))$ $x \in (-\infty; \infty)$
$\sin x < b$	$b > 1$ $-1 < b \leq 1$ $b \leq -1$	$x \in (-\infty; \infty)$ $x \in (\arcsin b + \pi(2n+1); \arcsin b + 2\pi n)$ *çözüwleri ýok*
$\cos x > b$	$b \geq 1$ $-1 \leq b < 1$ $b < -1$	*çözüwleri ýok* $x \in (-\arccos b + 2\pi n; \arccos b + 2\pi n)$ $x \in (-\infty; \infty)$
$\cos x < b$	$b > 1$ $-1 < b \leq 1$ $b \leq -1$	$x \in (-\infty; \infty)$ $x \in (\arccos b + 2\pi n; -\arccos b + 2\pi n)$ *çözüwleri ýok*
$tgx > b$	*b-islendik*	$x \in (arctgb + \pi n; \pi / 2 + \pi n)$

$tgx < b$	*b-islendik*	$x \in (-\pi/2 + \pi n;\ arcctgb + \pi n)$
$ctgx > b$	*b-islendik*	$x \in (\pi n; arcctgb + \pi n)$
$ctgx < b$	*b-islendik*	$x \in (arcctgb + \pi n; \pi(n+1))$

§1. Çyzykly deňlemeler we olara getirilýän deňlemeler

Goý ,

$$f(a, b, c, \ldots, k, x) = \varphi(a, b, c, \ldots, k, x) \qquad (1)$$

deňleme berlen bolsun, nirede *a, b, c, ..., k, x* – üýtgeýän ululyklar. Üýtgeýän ululyklaryň

$$a=a_0,\ b=b_0,\ c=c_0,\ \ldots,\ k=k_0,\ x=x_0$$

bahalary üçň (1) deňlemäniň iki bölegi-de hakyky bahalary alýan bolsa, onda bu bahalara *a, b, c, ..., k, x* ululyklaryň ýolbererlik bahalarynyň ulgamy diýilýär. Goý, $a \in A, b \in B, c \in C, ..., k \in K, x \in X$ bolsun. Eger-de $a_0, b_0, c_0, ,..., k_0$ sanlary berkidip (1) deňleme-de ornuna goýsak, onda *x* ululyga görä bir üýtgeýänli deňleme alarys. Bu deňlemäniň çözüwi şol berkidilen sanlara bagly bolar, ýagny çözüw

$$x=F(a, b, c, ... ,k)$$

görnüşli funksiýa bolar. *a, b, c, ..., k* - ululyklara parametrler diýilýär, (1) deňlemä bolsa parametrli deňleme diýilýär. Mysal üçin,

$$\frac{2nx-5}{(m-3)nx}-\frac{3nx+5}{n+1}=\frac{n-1}{nx}$$

deňleme-de *m, n* – parametrler, *x* – üýtgeýän ululyk.

Goý, indi

$$kx-p=0$$

görnüşli deňleme berlen bolsun. Bu ýerde *k, p* - parametrler, *x* - üýtgeýän ululyk.

Eger-de $k \neq 0$ bolsa, ýokarky deňleme $x=\frac{p}{k}$ görnüşli çözüwe eýedir, ýöne *k, p* - parametrlere bagly bolar. Eger-de $k=0$ we $p=0$ bolsa, onda *x*-islendik san. Eger-de $p \neq 0$ we $k=0$ bolsa deňlemäniň çözüwi ýökdur.

Mysal üçin, $(a^2-1)x=2a^2+ a -3$ deňlemäniň a parametriň islendik hakyky bahasy üçin manysy bardyr. Emma ony $(a-1)(a+1)x=(2a+3)(a-1)$ görnüşde ýazsak, onda $a=1$ bolanda islendik hakyky san deňlemäniň çözüwidir, $a=-1$ bolanda bolsa, berlen deňleme $ox=-2$ görnüşde bolup, onuň çözüwi ýokdur.

Haçanda $a\neq-1$ bolanda deňleme

$$x=\frac{2a+3}{a+1}$$

görnüşli çözüwe eýedir.

Indi, çyzykly deňlemelere getrilýän deňlemeleriň mysallaryna seredeliň:

1 –nji mysal. $$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\frac{3m-11}{m-1}=\frac{2x+7}{x+3}$$

deňlemäni x ululyga görä çözmeli.

Çözülişi: Deňlemäniň berlişine görä $(m-1)(x+3)\neq0$, deňsizlik ýerine ýetmeli, ýagny $m\neq1$, $x\neq-3$. Berlen deňlemäniň iki bölegini-de $(m-1)(x+3)$ aňlatma köpeldip alarys:

$$3mx-5+(3m-11)(x+3)=(2x+7)(m-1).$$

Bu deňleme x ululyga görä çyzykly deňlemedir, onuň çözüwi $m\neq2{,}25$ bolanda

$x=\dfrac{31-2m}{4m-9}$ görnüşde bolar. Indi bolsa, m parametriň $x = -3$ deňligi üpjün edýän bahalarynyň barlygyny derňemek zerurdyr: Goý,

$$x=\frac{31-2m}{4m-9}=-3$$

bolsun, onda $m=-0,4$. Diýmek berlen deňleme $m\neq 1;\ m\neq 2,25;\ m\neq -0,4$ bolanda

$$x=\frac{31-2m}{4m-9}$$

ýaly ýeke-täk çözüwe eýedir. Haçan-da $m=2,25$ we $m=-0,4$ bolanda çözüw ýokdur, $m=1$ bolanda deňlemäniň manysy ýokdur.

Bellik: Eger-de $m=m_0$ bolanda berlen deňlemäniň manysy ýok bolsa, onda $m=m_0$ bolanda deňlemäniň çözüwi ýokdur.

Tersine nädogrydyr. Sebäbi ýokarda sereden mysalymyzda $m=-0,4$ goýsak kesgitli deňleme alarys:

$$\frac{6x+25}{7(x+3)}+\frac{61}{7}=\frac{2x+7}{x+3}$$

Şeýlelikde, berlen deňleme mana eýedir, emma bu deňleme çözüwe eýe däldir. ($x=-3$ del kökdür).

2 –nji mysal. . $\dfrac{a^2+x}{b^2-x}-\dfrac{a^2-x}{b^2+x}=\dfrac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Meseläniň şertine görä $x\neq\pm b^2$. Deňligiň iki bölegini-de $b^4-x^2\neq 0$ aňlatma köpeldip

$$(a-b)^2\,x = a^2-b^2$$

deňlige geleris.

Eger-de $a=b$ bolsa, onda $o\,x=o$ deňlemäni alarys, x – islendik ululyk ($x\neq\pm b^2$).

Eger-de $a\neq b$ bolsa, onda $x=\dfrac{a+b}{a-b}$.

Indi, a we b parametrleriň bahalaryny $\frac{a+b}{a-b} = \pm b^2$ bolanda keagitläris:

1) $\frac{a+b}{a-b} = b^2$ bolanda $a = \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$; 2) $\frac{a+b}{a-b} = -b^2$ bolanda $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$.

Onda deňlemäniň çözüwi:

a) $a \neq b$, $a \neq \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$, $a \neq \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$ bolanda

$x = \frac{a+b}{a-b}$;

b) $a=b$ bolanda $x = \pm b^2$ sanlardan başga islendik san;

ç) $a = \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$, $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$ bolanda deňlemäniň çözüwi ýokdur.

§2. Kwadrat deňlemeler we olara getrilýän deňlemeler

k, p, q aňlatmalar diňe parametre bagly aňlatmalar we x – näbelli ululyk bolanda

$$kx^2 + px + q = 0$$

görnüşli deňlemä x ululyga görä kwadrat deňleme diýilýär. Parametrleriň k, p, q –ululyklary manyly edýän bahalarynda berlen deňlemäniň çözüwlerini gözleýäris.

1 – nji mysal.

$mx^2 + 3mx - (m+2) = 0$

Çözülişi: Bu deňleme $m=0$ bolanda

$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2 = 0$ görnüşi alar, onuň köki ýokdur; $m \neq 0$ bolanda bolsa, ol kwadrat deňlemedir. Onda berlen deňlemäniň $D = m(13m+8) \geq 0$ bolanda iki sany hakyky kökleri

$$x = \frac{1}{2m}\left[-3m \pm \sqrt{m(13m+8)}\right]$$

bardyr.

2 – nji mysal. $\sqrt{c-2}\,x^2 - (c-1)x + \sqrt{c-2} = 0$

deňleme üçin c parametr $c \geq 2$ şerti kanagatlandyrmaly. $c = 2$ bolanda geňlemäniň $x=0$ köki bardyr.

c >2 bolanda ol kwadrat deňlemedir we onuň iki sany

$$x_1 = \sqrt{c-2}; \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{c-2}}$$

görnüşli kökleri bardyr.

Indi, kwadrat deňlemelere getrilýän deňlemelere seredeliň.

3 –nji mysal.

$$\frac{x}{m(x+1)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}$$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Bu deňleme m=0 bolanda mana eýe däldir we x ululyk $x\neq-1,\ x\neq-2$ şertleri ýerine ýetirmelidir. Bu deňlemäniň iki bölegini-de $m(x+1)\ (x+2)\neq0$ aňlatma köpeldip, berlen deňlemä deňgüỳçli bolan

$$x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$$

deňlemäni alarys. Onda $D=4(m-1)^2-4(m^2-2m-3)=16\geq0$ bolýandygy üçin

$$x_{1,2}=\frac{2(m-1)\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2(m-1)\pm4}{2}; \qquad x_1=m+1; \qquad x_2=m-3$$

kökleri alarys.

Şeỳlelikde, tapylan kökleriň içinde del kökleriň, ỳagny $(x+1)\ (x+2)=0$ bolar ỳaly kökleriň bolmagy mümkin. Olary bilmek üçin kökleriň $x=-2$, ỳa-da $x=-1$ deňlikleri kanagatlandyrỳan m parametriň bahalaryny kesgitlemeli:

Goỳ, $x_1=m+1=-2$, onda $m=-3$, bu ỳerden $x_2=m-3=-6$;

$x_1=m+1=-1$, onda $m=-2$, bu ỳerden $x_2=m-3=-5$;

$x_2=m-3=-2$, onda $m=1$, bu ỳerden $x_1=m+1=2$;

$x_2=m$-3=-1, onda m=2, bu ỳerden
$x_1=m$+1=3.

Şeỳlelikde, haçanda $m\neq 0,\ m\neq -3;\ m\neq \pm 2,\ m\neq 1$ bolanda $x_1=m+1,\ x_2=m-3;$ Haçanda $m=-3,\ x_2=-6;\ m=-2,\ x_2=-5;$ haçanda $m=1,\ x_1=2;\ m=2;\ x_1=3;$ hakyky köklerdir. Haçanda $m=0$ bolanda çözüw ỳokdur.

4 – nji mysal.

$$\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)}-\frac{2kx}{(k-1)(x-2)}=\frac{5}{k^2-1}+\frac{12-k^2-k}{(k^2-1)(x-2)}$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: $k\neq\pm 1,\ x\neq 2$ bolanda berlen deňleme

$$(k+2)\,(x-1)x^2-(2k^2+2k+5)x+k^2+k-2=0$$

deňlemä deňgỳçilidir. $k=-2$ bolanda deňleme $x=0$ köke eỳedir. $k\neq -2;\ k\neq\pm 1$ bolanda alarys:

$D=(2k^2+2k+5)^2-4(k+2)(x-1)\,(k^2+k-2)\geq 0$

$$x_1=\frac{k+2}{k-1};\qquad x_2=\frac{k-1}{k+2}$$

k parametriň bahalarynyň içinden $x=2$ bolỳan bahalaryny saỳlaỳarys:

$$x_1=\frac{k+2}{k-1}=2;\quad k=4 \text{ bolanda}$$

$x_2=0,5;$

$$x_2=\frac{k-1}{k+2}=2;\quad k=-5 \text{ bolanda}$$

$x_1=0,5.$

Jogaby: Haçanda *k≠-2, k≠±1, k≠4, k≠-5* bolanda $x_1 = \frac{k+2}{k-1}$, $x_2 = \frac{k-1}{k+2}$; haçanda *k=-2* bolanda deňleme ỳeke-täk *x=0* köke, *k=4* we *k=-5* bolanda deňleme *x=0,5* köke eỳedir, *k=±1* bolanda deňlemäniň köki ỳokdur.

Bellik: Ỳokarda seredilen deňlemeleriň kökleri parametre görä rasional aňlatmalardyr.Eger-de olar irrasional bolsalar, onda hasaplamalar örän uly bolardylar.

5 – nji mysal. $\frac{x}{b+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3b-4}{(b+1)(x-2)}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Berlen deňlemäni *(b+1)(x-2)≠0* şerti kanagatlandyrỳan aňlatma köpeltsek, onda berlen deňlemä deňgüỳçli bolan

$$x^2+2bx-3b+4=0$$

deňlemäni alarys.

Onuň kökleri

$x_1 = -b - \sqrt{b^2+3b-4}$; $x_2 = -b + \sqrt{b^2+3b-4}$

bolarlar. Indi, kökleriň içinde biri 2-ä deň bolar ỳaly b parametriň bahalaryny tapalyň. Soňky deňleme-de *x=2* goỳup *b=-8* bahany alarys.

Onda *b=-8* bolanda *x=14*.

Şeỳlelikde, *b=-8* bolanda deňleme *x=14* köke, haçanda *b≠-8, b≠-1* bolanda iki sany

$x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}$ köklere eỳedir. Bu kökler *-4<b<1* bolanda mana eýe däldirler.

§3. Irrasional deňlemeler

Eger-de

$$f(a, b, c, \dots, k, x)=g(a, b, c, \dots, k, x)$$

deňlemäniň iki bölegi-de ỳa-da haỳsy hem bolsa bir bölegi x ululyga görä irrasional aňlatmany saklaỳan bolsa, onda bu deňlemä bir üỳtgeỳänli irrasional deňleme diỳilỳär.
Mysal üçin:

$$2x - \sqrt{3x-4} = \sqrt{a+1}; \quad \sqrt{2x-a} + 5x = 0;$$

$$\sqrt[3]{x-b} - x = \sqrt[3]{2x+a} + 1$$

deňlemeler irrasional deňlemelerdirler, *a,b* – hemişelikler bolsa parametrlerdirler.

Bu görnüşli deňlemeler berlen deňlemäniň ikibölegini-de derejä götermek bilen kem-kemden irrasional deňlemeden rasional deňlemä getirmek bilen çözülỳär. Bu ỳagdaỳda del kökleriň emele gelmegi mümkindir. Şonuň üçin her bir çözüw barlagdan geçmelidir. Irrasional deňlemeleri çözmekligiň umumy usuly ỳokdur, her bir deňlemä aỳratyn çemeleşmelidir.

1 – nji mysal: $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$
deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Bu deňlemäni kwadrata göterip alarys:

$$x^2+ax-2a=x^2+2x+1$$

ỳa-da

$$(a-2)x=2a+1$$

Haçanda $a=2$ bolanda $0\ x=5$ görnüşli deňlemäni alarys, şonuň üçin berlen deňlemäniň çözüwi ỳokdur. Haçanda $a\neq 2$ bolanda $x=\dfrac{2a+1}{a-2}$ çözüwi alarys. Bu çözüwiň barlagyny geçireliň, onuň üçin ony berlen deňlemede ornuna goỳmaly:

$$\sqrt{\left(\frac{2a+1}{a-2}\right)^2+\frac{a(2a+1)}{a-2}-2a}=\frac{2a+1}{a-2}+1 \quad \text{ỳa-da}$$

$$\left|\frac{3a-1}{a-2}\right|=\frac{3a-1}{a-2}.$$

Bu ỳerden $\left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right|=\begin{cases}\dfrac{3a-1}{a-2}, & \text{haçanda } a>2,\ a\le\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{1-3a}{a-2}, & \text{haçanda } \dfrac{1}{3}\le a<2.\end{cases}$

Şeỳlelikde, $x=\dfrac{2a+1}{a-2}$ aňlatma $a>2$ we $a\le 1/3$ bolanda berlen deňlemäniň çözüwidir. Haçanda $1/3\le a<2$ bolanda deňlemäniň köki ýokdur.

Berlen deňlemäni çözmekligiň ýene bir usulyna seredip geçeliň. Deňlemäniň berlişine görä onuň kökleri

$$x^2+ax-2a\geq 0 \text{ we } x+1\geq 0$$

deňsizlikleri kanagatlandyrmaly. Deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip alarys:

$$x^2+ax-2a=(x+1)^2$$

$(x+1)^2\geq 0$ bolýandygy üçin deňlemäniň islendik köki $x^2+ax-2a\geq 0$ deňsizligi kanagatlandyrmaly. Onda berlen deňleme deňlemeleriň aşakdaky garyşyk sistemasyna

$$\begin{cases} x^2+ax-2a=(x+1)^2 \\ x\geq -1 \end{cases}$$

deňgüýçlidir. Bu ýerden

$$\begin{cases} (a-2)x=2a+1 \\ x\geq -1. \end{cases}$$

Haçanda $a=2$ bolanda sistemanyň çözüwi ýokdur. Goý, $a\neq 2$ bolsun, onda

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a+1}{a-2} \\ x\geq -1 \end{cases}$$

Bu sistemany çözmek üçin a parametriň $\dfrac{2a+1}{a-2}\geq -1$ deňsizligi kanagatlandyrjak bahalaryny tapmaly. Bu deňsizlik aşakdaky iki sistema deňgüýçlidir:

a) $\begin{cases} a > 2 \\ 2a+1 \geq -a+2, \end{cases}$ bu ýerden $a>2$. b) $\begin{cases} a < 2 \\ 2a+1 \leq -a+2, \end{cases}$ bu ýerden $a \leq \frac{1}{3}$.

Görşimiz ýaly ýene-de öňki çözüwleri aldyk.

Köplenç, irrasional deňlemeler çözülende kömekçi ululygy girizmek amatly bolýar.

1 – nji mysal: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Şerte görä $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0, \end{cases}$ bu ýerden $x \geq \frac{2}{3}$, diýmek deňlemäniň kökleri $x \geq \frac{2}{3}$, $a \geq 0$ deňsizlikleri kanagatlandyrmaly bolarlar.

Goý $\sqrt{x+2}=y \geq 0$ bolsun. Onda $x+2=y^2$ we $3x-2=3y^2-8$, şeýlelikde berlen deňleme

$$\sqrt{3y^2-8}=a-y$$

görnüşi alar. y ululyk

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq a \\ 3y^2-8 \geq 0 \end{cases}$$

sistemany kanagatlandyrmaly. $\sqrt{3y^2-8}=a-y$ deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip alarys:

$$3y^2-8=a^2-2ay+y^2 \geq 0$$

Bu deňlemäniň köki $3y^2-8\geq 0$ deňsizligi kanagatlandyrmaly, şeýle hem $0\leq y\leq a$.

Soňky deňlemeden ýönekeýleşdirip, $2y^2+2ay-(a^2+8)=0$ deňlemä gelip, ony çözüp alarys: $y_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{3a^2+16}\right)$

Bu ýerde $y_1<0$, şonuň üçin ol deňlemäniň köki däldir. y_2 kök üçin $0\leq y_2\leq a$ deňsizligi ulansak

$$\begin{cases}\sqrt{3a^2+16}\leq 3a\\ \sqrt{3a^2+16}\geq a\end{cases}$$ ýa-da

$$\begin{cases}6a^2\geq 16\\ 2a^2+16\geq 0\end{cases}$$

sistema geleris. Onda $a\geq 0,\ 2a^2+16\geq 0$ deňsislikleri ulanyp, soňky sistemanyň çözüwiniň $a\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$ şerti kanagatlandyrmalydygyny göreris.

Şeýlelikde, bu deňsizlik ýerine ýetende berlen deňleme

$$y_2=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right)$$

köke eýedir. Bu ýerde $\sqrt{x+2}=y\geq 0$ belgilemäni hasaba alsak berlen deňlemäniň çözüwi

$$x=y_2^2-2=\frac{1}{2}\left(2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}\right)$$

bolar.

Haçanda $a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ bolanda deňlemäniň köki ýokdur.

Özbaşdak iş: $\sqrt{x-a} = x^2 + a \; \left(\sqrt{x-a} = y\right)$

deňlemäni çözmeli.

Bellik:1) Köp ỳagdaỳda irrasional deňlemeleriň çözüwlerini tapmaklyk berlen deňlemä deňgüỳçli bolmadyk kwadrat deňlemeleriň çözüwlerini tapmaklyga syrykdyrylỳar. Şonuň üçin kökleri barlamaly bolýar.

2) Çözüwleri grafikleri gurmak bilen hem barlamak bolar.

§4. Görkezijili deňlemeler

a>0, b>0 hemişelikler üçin

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \qquad (1)$$

görnüşdäki deňlemä görkeziili deňleme diỳilỳär. f(x) we g(x) funksiỳalaryň kesgitleniş ỳaỳlalarynyň kesişmesi bu deňlemäniň kesgitleniş ỳaỳlalasy bolar.

a=b=1 bolanda (1) deňlemäniň çözüwi ähli sanlar bolar. *a=1, b≠1* bolanda (1) deňleme $\begin{cases} g(x)=0 \\ x \in R \end{cases}$ sistema , *a≠1, b=1* bolanda bolsa $\begin{cases} f(x)=0 \\ x \in R \end{cases}$ sistema deňgüỳçli bolar. Haçanda $a=b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$ bolanda (1) deňlemä deňgüỳçli bolan $f(x)=g(x)$ deňlemäni alarys.

(1) deňlemäni $a\neq b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$ bolanda oňa deňgüỳçli bolan

$$\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)} \quad (c>0,$$

$c\neq 1)$ (2)

deňleme bilen çalşyrỳarys.

Eger-de $c=a$ diỳsek, onda $f(x)=g(x)\cdot \log_a b$ deňlemä geleris.

Umuman, islendik görkezijili deňlemäniň çözüwi käbir ỳönekeỳ görkezijili deňlemäniň çözüwini tapmaklyga getirilỳär.

Mysallara seredeliň

1 – nji mysal. $$\sqrt[x+1]{a^3}\cdot\sqrt[x+1]{a^2}=\frac{1}{a^5}\sqrt[4]{\left(a^x\right)^{10}}$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Deňlemäniň berlişine görä: $a>0,\ x\neq -1$. Bu şertlerde berlen deňleme

$$a^{\frac{5}{x+1}}=a^{\frac{5x-10}{2}}$$

deňlemä deňgüỳçlidir.

$a=1$ bolanda $x=-1$ bahadan beỳleki ähli sanlar deňlemäniň çözüwi bolar. Haçanda $a>0$ $(a\neq 1)$ bolanda soňky deňlemeden alarys:

$\frac{5}{x+1}=\frac{5x-10}{2}$ ỳa-da $x^2-x-4=0$. Bu ỳerden

$$x=0{,}5\left(1\pm\sqrt{17}\right).$$

<u>2 – nji myal</u>. $a^{x+1}=b^{3-x}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Şerte görä $a>0, b>0$. Eger-de $a=b=1$ bolsa onda x – islendik san. Eger-de $a=1, b\neq 1$ bolsa, onda $x=3$; $b=1; a\neq 1$ bolsa, onda $x=-1$. Goỳ, indi $a\neq 1, b\neq 1$ bolsun, onda a esasa görä logarifmlere geçsek:

$$x+1=(3-x)\log_a b \text{ ỳa-da } (1+\log_a b)x=3\log_a b-1$$

deňlemä geleris. Bu ỳerde $1+\log_a b=0$ $\left(b=\frac{1}{a}\right)$ bolsa, onda deňlemäniň çözüwi ỳok. Eger-de $b\neq\frac{1}{a}$ bolsa, onda deňlemäniň çözüwi $x=\frac{\log_a b^3-1}{1+\log_a b}$ bolar.

<u>3 – nji mysal.</u> $a^{2x-3}-a^{2x-2}+a^{2x}=b, a>0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Eger-de $a=b=1$ bolsa, onda islendik x deňlemäniň çözüwi bolar, eger-de $a=1, b\neq 1$ bolsa deňlemäniň çözüwi ỳokdur.

Berlen deňlemäni özgerdip, $a^{2x-3}(a^3-a+1)=b$ görnüşe getirýäris we ony çözmek üçin onuň iki bölegini-de

(a^3-a+1) aňlatma bölmeli, şonuň üçin hem $a>0,\ a\neq 1$ bolanda $a^3-a+1=0$ deňligi kanagatlandyrjak a parametriň bahalaryny tapmaly. Onuň üçin $a^3=a-1$ deňligi ulanyp, $y=a^3$, $y=a-1$ funksiỳalaryň grafiklerini gurup, berlen deňlemäniň çözüwiniň III çärỳege düşjekdigine göz ỳetireris. Şonuň üçin hem $a>0$ bolanda $a^3>a-1$ ỳa-da $a^3-a+1>0$ deňsizligi alarys.Şeỳlelikde, $a^{2x-3}>0$ deňsizligi hasaba alyp $b>0$ boljakdygyny göreris. Diỳmek, $a>0(a\neq 1),\ b>0$ bolanda $a^{2x-3}=\dfrac{b}{a^3-a+1}$ deňlige geleris. Bu ỳerden

$$2x-3=\log_a\frac{b}{a^3-a+1} \quad \text{ỳa-da}$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\log_a\frac{b}{a^3-a+1}+3\right)$$

Deňlemäniň çözüwi: 1) $a>0,\ (a\neq 1),\ b>0$ bolanda

$$x=\frac{1}{2}\left(\log_a\frac{b}{a^3-a+1}+3\right)$$

2) $a=b=1$ bolanda x-islendik san

3) $a=1,\ b\neq 1$ we $b<0$ bolanda deňlemäniň çözüwi ỳokdur.

Özbaşdak iş: 1) $a^{2x}(a^{2x}+1)=a(a^{3x}+a^x)$; 2) $a^{4x}+a^{2x}=a^{6x}$

Jogaplary: 1) $a=1$, bolanda x- islendik san; $a>0\ (a\neq 1)$ bolanda $x=1$.

2) *a>0 (a≠1)* bolanda $x = \log_a \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, *a=1* bolanda deňlemäniň köki ỳokdur.

§5. Logarifmik deňlemeler

Goý,

$$\log_a f(x) = \log_b F(x), \qquad (1)$$

nirede *a>0, a≠1, b>0, b≠1,* deňleme berlen bolsun. Bu deňlemä **logarifmik deňleme** diýilýär. Bu deňlemäniñ kesgitleniş ýaýlasyny

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ F(x) > 0 \end{cases}$$

sistema kesgitleýär.

Haçanda, *a=b* bolsa, onda (1) deňlemä deñgüýçli bolan *f(x)=F(x) d*eňlemäni alarys. Eger-de *a≠b* bolsa, logarifmleriň bir esasdan başga esasa geçmek düzgünine görä (1) deňleme

$$\log_a f(x) = \frac{1}{\log_a b} \log_a F(x)$$

görnüşli deňlemä, ol bolsa öz gezeginde

$$\left[f(x)\right]^{\log_a b} = F(x)$$

deňlemä deňgüýçli bolar.

Bellik: (1) görnüşli deňlemeleri çözmeklik köp ýagdaýda, logarifimik deňlemeleriň köklerini tapmaklyga syrykdyrylýar.

Mysal üçin, $3\lg^2(x-a)-10\lg(x-a)+3=0$ deňleme lg(x-a) aňlatma görä kwadrat deňlemedir we onuň özi aşakdaky iki deňlemä deňgüýçli bolar:
a) lg(x – a)=3, bu ýerden x=a+1000; b) $\lg(x-a)=\frac{1}{3}$, bu ýerden $x=a+\sqrt[3]{10}.$

Mysallara seredeliň.

1 – nji mysal: $\log_a x^2+2\log_a(x+2)=1$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Bu deňleme üçin *a>0, a≠1* ýerine ýetmeli we onuň kesgitleniş ýaýlasy

$$R=\{-2<x<0;\ 0<x<\infty\}$$

bolar. Bu şertlerde, berlen deňleme

$$2\log_a|x|+2\log_a(x+2)=1 \text{ deňlemä ýa-da}$$

$$\log_a|x|\cdot(x+2)=\frac{1}{2} \quad (3)$$

deňlemä deňgüýçli bolar. Logarifmiň kesgitlemesinin ulansak, alarys:

$$|x|\cdot(x+2)=\sqrt{a} \qquad (4)$$

Iki ýagdaýyň bolmagy mümkindir: a) Goý, -2<x<0 bolsun, onda (4) deňlemeden

$$-x(x+2)=\sqrt{a} \quad \text{deňlemä ýa-da}$$

$$x^2+2x+\sqrt{a}=0$$

deňlemä geleris. Soňky deňlemäni çözüp alarys:

$$x_1=-1-\sqrt{1-\sqrt{a}}, \qquad x_2=-1+\sqrt{1-\sqrt{a}},$$

haçanda $1-\sqrt{a}>0\ (0<a<1)$.

Şeýlelikde x_1, x_2 kökleriň $-2 < x < 0$ aralyga degişli boljakdygyny göreris.

b) Goý, indi $x > 0$ bolsun, onda (4) deňlemeden

$$x(x+2)=\sqrt{a} \quad \text{ýa-da} \quad x^2+2x-\sqrt{a}=0$$

deňlemä geleris. Bu ýerden

$$x_3=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}, \qquad x_4=-1-\sqrt{1+\sqrt{a}}$$

$x_4<0$, ýagny $x>0$ şert ýerine ýetmez. Emma $a>0$ bolanda $x_3>0$ bolar.

Şeýlelikde bu mysalyň jogaby aşakdaky ýaly bolar: Haçanda $0<a<1$ bolanda

$$x_1=-1-\sqrt{1-\sqrt{a}}\,,\ x_2=-1+\sqrt{1-\sqrt{a}}$$

köklere, haçanda $a>1$ bolanda bolsa $x_3=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}$ köke eýedir.

2 – nji mysal: $\lg(x-a)-\lg 2=\frac{1}{2}\lg(x-b)$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Bu deňleme üçin kesgitleniş ýaýlasy bolup

$$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$$

sistema hyzmat eder. Bu ýagdaýda berlen deňleme

$\lg\frac{x-a}{2}=\lg\sqrt{x-b}$ deňlemä, ýa-da $x-a=2\sqrt{x-b}$

deňlemä deňgüýçli bolar.

Goý, $a=b$ bolsun, onda berlen deňleme

$$x-a=2\sqrt{x-a} \quad \text{ýa-da} \quad \sqrt{x-a}\left(\sqrt{x-a}-2\right)=0$$

deňlemä geler. Kesgitleniş ýaýla görä $\sqrt{x-a} \neq 0 \quad (x-a>0)$ bolar, onda soňky deňleme $\sqrt{x-a}=2$ deňlemä deňgüýçli bolar, onuň çözüwi bolsa $x=a+4$.

Goý, indi $a \neq b$. Onda $x-a=2\sqrt{x-b}$ deňlemäni kwadrata göterip alarys:

$$x^2-2ax+a^2=4(x-b)$$

ýa-da

$$x^2-2(a+2)x+a^2+4b=0.$$

Soňky deňlemäni çözeliň:

$$D=\left(-\frac{b}{2}\right)^2-ac=\left(-(a+2)\right)^2-\left(a^2+4b\right)=a^2+4a+4-a^2-4b=4(a$$

.

Goý $D=0$ ýagny $a=b-1$ bolsun, onda deňlemäniň kökleri $x_1=x_2=a+2.$

Goỳ $D>0$ $(a>b-1)$ bolsun , onda deňlemäniň iki dürli

$$x_1=a+2-2\sqrt{a-b+1} \quad \text{we}$$

$$x_2=a+2+2\sqrt{a-b+1}$$

kökeri bolar. Bu kökleriň

$$(x-a)^2=4(x-b)$$

deňlemäniň kökleridigi üçin $x>b$ deňsizlik ýerine ýetýär. Indi, a we b parametrlerň x_1, x_2 kökler üçin $x>a$ şerti ýerine ýetirýän bahalaryny kesgitläliň.

Onuň üçin $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4b$ funksiýany girizip, *f(a)*-ny hasaplarys: $f(a) = 4(b-a)$.

Bu ýerde $b-1<a<b$ bolsa, onda x_1, x_2 kökler üçin $a<b<x_1<x_2$ deňsizlikler ýerine ýeter, şonuň üçin x_1, x_2 - kökler berlen deňlemäniň kökleri bolarlar.

Eger-de $a>b$ bolsa, onda $f(a)<0$ bolar, şunlukda $b<x_1<a<x_2$ deňsizlik,ýagny $x>a$ şerti diňe x_2-kök ýerine ýetirer.

Jogaby: Eger-de $a=b$ bolsa, onda $x=a+4;$ eger-de $b-1\leq a<b$ bolsa, onda $x = a + 2 \pm 2\sqrt{a-b+1}$; eger-de $a>b$ bolsa, onda $x = a + 2 + 2\sqrt{a-b+1}$; eger-de $a<b-1$ bolsa, onda çözüw ýokdur.

Özbaşdak iş: 1) $\sqrt[x^2-1]{a^9} \cdot \sqrt[x+1]{\frac{1}{a^3}} = \sqrt[x-1]{a^2}$; Jogaby: Eger-de $a=1$ bolsa, onda $x\neq\pm1$; eger-de $a>0$ $(a\neq1)$ bolsa, onda $x=2$.

2) $2\log_x a+\log_{ax} a+3\log^2_{a x} a=0$; Jogaby: Eger-de $a=1$ bolsa, onda $x>0$ $(x\neq1)$; Eger- de $a>0$ $(a\neq1)$ bolsa, onda $x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}$; $x_2 = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}$.

§6. Trigonometrik deňlemeler

Eger-de deňlemede gözlenilýän ululyk trigonometrik funksiýanyň argumenti hököminde gelýän bolsa, onda **trigonometrik deňleme** düşünjesine gelinýär. Bu görnüşli deňlemeler ýönekeý trigonometrik deňlemeleriň birine getrilip çözülýär. Hakykatdan, hem

1. $\sin\left[f(x)\right]=a,\ \left(|a|\le 1\right)$ görnüşli deňleme

$$f(x)=\arcsin a+2\pi n$$

we $f(x)=\pi-\arcsin a+2\pi n$

deňlemeleriň toplumyna, ýa-da $f(x)=(-1)^k\arcsin a+\pi k$ deňlemä deňgüýçli bolup,

2. $\cos\left[f(x)\right]=a,\ \left(|a|\le 1\right)$ görnüşli deňleme

$$f(x)=\pm\arccos a+2\pi n$$

deňlemeleriň toplumyna deňgüýçli bolup,

3. $tg\left[f(x)\right]=a$ we $ctg\left[f(x)\right]=a$ görnüşli deňlemeler degişlilikde

$$f(x)=\operatorname{arctg} a+\pi n \quad \text{we } f(x)=arcctga+\pi n$$

deňlemelere deňgüýçli bolup, olaryň çözüwleri hökmünde soňky alnan deňlemeleriň çözüwleri alynýär.

Mysal üçin, *sin(2x+3)=b+1*görnüşli deňleme parametriň $-1\le b+1\le 1$ $(-2\le b\le 0)$ aralyga düşýän bahalary üçin $2x+3 = (-1)^k \arcsin (b+1)+k\Pi$görnüşli deňlemäni çözmeklige syrykdyrylýar.

Ýönekeý bolmadyk trigonometrik deňlemeleriň käbir mysallaryna seredip geçeliň.

1 – nji mysal: $tg^2 2x-(2a+1)tg2x+a(a+1)=0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Bu deňleme *tg2x* ululyga görä kwadrat deňlemedir, şonuň üçin hem bu deňleme

$$tg2x=a+1 \quad \text{we} \quad tg2x=a$$

deňlemeleriň toplumuna deňgüýçlidir. Bu deňlemeleri çözsek, berlen deňlemäniň çözüwleri

$$x=\frac{1}{2}\arg tg(a+1)+\frac{1}{2}\pi n \quad \text{we} \quad x=\frac{1}{2}\arg tga+\frac{1}{2}\pi n$$

bolarlar.

2 – nji mysal. $$(a-1)\cos x+(a+1)=2a$$ (1)

Çözülişi: Bu deňlemäni belli formulalaryň kömegi bilen

$$(3a-1)\sin^2\frac{x}{2}-2(a+1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(a+1)\cos^2\frac{x}{2}=0 \quad (2)$$

görnüşli deňlemä getirýäris.

Bu deňlemede $a=\frac{1}{3}$ goýsak, onda

$$-\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2}=0 \quad \text{ýa-da}$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

deňlemelere geleris. Soňky deňleme

$$\cos\frac{x}{2}=0 \quad \text{we} \quad tg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0\right)$$

deňlemelere deňgüýçlidir. Bu deňlemeleriň birinjisiniň $x=\pi(2n+1)$,

ikinjisiniň $x=2arctg(1/2)+2\pi k$ çözüwleri bardyr.

Eger-de $a\neq\frac{1}{3}$ *-1≤a≤1* bolsa, onda (2) deňleme

$$(3a-1)tg^2\frac{x}{2}-2(a+1)tg\frac{x}{2}+a+1=0$$

görnüşli deňlemä deňgüýçli bolup,

$$tg\frac{x}{2}=\frac{a+1-\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1} \quad \text{we} \quad tg\frac{x}{2}=\frac{a+1+\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}$$

köklere eýedir.

Şeýlelikde bu deňlemäniň çözüwleri

1) $a=\frac{1}{3}$ bolanda $x=\pi(2n+1)$ we $x=2arctg(1/2)+2\pi k$;

2) $a\neq\frac{1}{3}$ *(-1≤a≤1)* bolanda

$$x=2arctg\frac{a+1\pm\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}+2\pi n$$

görnüşde bolarlar.

3) $|a|>1$ bolanda deňlemäniň çözüwi ýokdur.

3 –nji mysal. $$a\sin^2 x + \cos x = 0 \qquad (3)$$

Çözülüşi: Bu deňlemeden $\cos x = z$, $(|z| \le 1)$ ornuna goýmany ulanyp

$$az^2 - z - a = 0 \qquad (4)$$

deňlemä geleris.

Goý, $a=0$ bolsun, onda $z=0$ ýagny $\cos x = 0$ bolar we onuň çözüwi $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Goý, indi $a \neq 0$ bolsun. Onda (4) deňlemäni çözüp,

$$z_1 = \frac{1}{2a}\left(1 - \sqrt{1+4a^2}\right), \quad z_2 = \frac{1}{2a}\left(1 + \sqrt{1+4a^2}\right)$$

kökleri alarys. Indi, bu kökleriň $|z| \le 1$ şerti kanagatlandyrmagyny üpjün deýän ***a*** parametriň bahalaryny kesgitlemäge girişeliň. Onuň üçin

$$f(z) = az^2 - z - a$$

funksiýa seredeliň we bu funksiýadan alarys:

$a \cdot f(-1) = a$ we $a \cdot f(+1) = -a$

Eger-de $a>0$ bolsa, onda $a \cdot f(-1) > 0$, $a \cdot f(+1) < 0$.

bu ýagdaýda $-1 < \frac{1}{2a}$ ($\frac{1}{2a} - f(z)$ kökleriň ýarymjemidir), onda $-1 < z_1 < 1 < z_2$, şeýlelikde (4) deňleme diňe bir $z_1 = \frac{1}{2a}\left(1 - \sqrt{1+4a^2}\right)$ çözüwe eýedir.

Eger-de $a<0$ bolsa, onda $a \cdot f(-1) < 0,\ a \cdot f(+1) > 0.$, bu ýagdaýda

$z_2<-1<z_1<1$ bolýandygy üçin z_1 (4) deňlemäniň çözüwidir.

Şunlukda seredilýän deňlemäniň çözüwi:

1) $a=0$ bolanda $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$;

2) $a \neq 0$ bolanda $\cos x = \frac{1}{2a}\left(1 - \sqrt{1+4a^2}\right)$

deňlemäniň çözüwi bolan

$x = \pm \arccos \frac{1}{2a}\left(1 - \sqrt{1+4a^2}\right) + 2\pi k$ görnüşde bolar.

Özbaşdak iş: $a \sin x - b \cos x = b.$ deňlemäni çözmeli.

§7. Parametrli çyzykly deňsizlikler

Goý,

$$f(a,b,c,\ldots,k,x) > \varphi(a,b,c,..,k,x) \qquad (1)$$

görnüşli deňsizlik berlen bolsun. Bu deňsizlige $a,b,c,\ldots,k$ parametrlere bagly x-üýtgeýäne görä deňsizlik diýilýär. Hakyky sanlaryň köplüginde seredilýän parametrleriň f we φ funksiýalary manyly edýän bahalarynyň toplumy parametrleriň ýolbererlik bahalarynyň ulgamyny emele getirýär. Parametrleriň ýolbererlik bahalarynda x üýtgeýän ululygyň $x=x_o$ bahasynda f we φ funksiýalar hakyky bahalary kabul etseler, bu $x=x_o$ baha üýtgeýän ululugyň ýolbererlik bahasy diýliýär. X üýtgeýän ululygyň ýolbererlik bahalarynyň toplumy (1) deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasyny emele getirýär.

Bu ýaýla girýän we (1) deňsizligi parametirleriň ýolbererlik bahalarynyň toplumy üçin kanagatlandyrýan her bir $x=x_o$ baha (1) deňsizligiň hususy çözüwidir. Şol hususy çözüwleriň toplumy (1) deňsizligiň umumy çözüwini berer. Şeýlelikde, deňsizligi çözmek diýmek, onuň umumy çözüwini tapmakdyr.

Kesgitleme: $a,b,c,\ldots,k$ paremetrleriň ýolbererlik bahalarynyň şol bir toplumy üçin

$$f(a,b,c\ldots,k,x)>\varphi(a,b,c,\ldots,k,x) \qquad (1)$$

we

$$F(a,b,c,\ldots,k,x)>\Phi(a,b,c,\ldots,k,x) \qquad (2)$$

deňsizlikler umumy çözüwe eýe bolsalar, onda bu deňsizliklere deňgüýçli deňsizlikler diýilýär.

Käbir mysallara seredeliň:

1–nji mysal. $a^{2x-3}<a^{x+5}$ we $a^x<a^8$ $(a>0)$ deňsizlikler deňgüýçlidirler. Sebäbi $a=1$ bolanda bu deňsizlikler çözüwe eýe däldir; $a>1$ bolanda bu deňsizlikler $x<8$ umumy çözüwe; $0<a<1$ bolanda $x>8$ çözüwe eýedirler.

2–nji mysal. $3x-m<0$ we $2x+1>m$ deňsizlikler deňgüýçli däldirler, sebäbi olaryň çözüwleri m parametiriň ähli ýolbererlik bahalary üçin gabat gelmeýärler. (birinji deňsizligiň çözüwi $x<\frac{m}{3}$, ikinjiniňki $x>\frac{m-1}{2}$).

3–nji mysal.

$$\left[(a-b)^2+\frac{1}{(a-b)^2}\right]^x>\left[(a-b)^2+\frac{1}{(a-b)^2}\right]^{a-b}$$

we

$$\left(2+\sqrt{a-b}\right)^x>\left(2+\sqrt{a-b}\right)^{a-b}$$

deňsizlikler deňgüýçli däldir, sebäbi bu deňsizlikler *x>a-b* ýaly umumy çözüwe eýe bolsalar hem, bularyň birinjisi $a\neq b$ şertde, ikinjisi diňe $a\geq b$ şertde mana eýedirler.

Deňsizlikleriň deňgüýçliligi hakyndaky teoremalary getirýäris. Goý, bize (1) deňsizlik berlen bolsun. Bu deňsizligiň kesgitleniş ýäýlasy kesgitleniş ýäýlasy bolan, parametirleriň ýolbererlik bahalary parametirleriniň ýolbererlik bahalary bilen gabat gelýän *y=F (a,b,c,…,k,x)* funksiýa berlen bolsun.

1–nji teorema. $f(a,b,c,...,k,x)>\varphi(a,b,c,...,k,x)$ we $f(a,b,c,...,k,x)+F(a,b,c,...,k,x)>$ deňsizlikler $\varphi(a,b,c,...,k,x)+F(a,b,c,...,k,x)$ özara deňgüýçlidirler.

2–nji teorema. a) Eger-de $F(a,b,c,...,k,x)>0$ bolsa, onda

$f(a,b,c,...,k,x)>\varphi(a,b,c,...,k,x)$ we

$$f(a,b,c,...,k,x)F(a,b,c,...,k,x)>$$
$$\varphi(a,b,c,...,k,x)F(a,b,c,...,k,x)$$

deňsizlikler; b) Eger-de $F(a,b,c,...,k,x)<0$ bolsa, onda

$f(a,b,c,...,k,x)>\varphi(a,b,c,...,k,x)$ we

$$f(a,b,c,...,k,x)F(a,b,c,...,k,x)<$$
$$<\varphi(a,b,c,...,k,x)F(a,b,c,...,k,x)$$

deňsizlikler özara deňgüýçlidirler.

3–nji teorema. Eger-de $f(a,b,c,...,k,x)>0$ we $\varphi(a,b,c,...,k,x)>0$ bolsalar, onda

$f(a,b,c,...,k,x)>\varphi(a,b,c,...,k,x)$ we

$f^n(a,b,c,...,k,x)>\varphi^n(a,b,c,...,k,x)$(*n*-natural san)

deňsizlikler özara deňgüýçlidirler.
Bellik: Bu teoremalaryň subutlary san deňsizlikleriň häsiýetlerini ulanmak bilen alynýar.

Deňsizlikler hakyndaky bu umumy düzgünleriň ilki bilen çyzykly deňsizliklerde ulanylyşyna seredeliň. Goý, A,B ululyklar hakyky sanlar ýa-da parametrlere bagly funksiýalar bolsunlar. Bu ýagdaýda, her bir

$$Ax > B, \quad Ax < B, \quad Ax \le B, \quad Ax \ge B$$

görnüşli deňsizliklere x üýtgeýänlere görä **çyzykly deňsizlikler** diýilýär.
4–nji mysal. $(m-1)x < 5m$ çyzykly deňsizligi m parametre görä çözmeli.
Çözülişi. Eger-de $m=1$ bolsa, onda $0x<5$ deňsizligi alarys, ol bolsa x-ululygyň islendik bahasy üçin dogrudyr.
Eger-de $m>1$ bolsa, onda $x < \frac{5m}{m-1}$, $m<1$ bolsa, onda $x > \frac{5m}{m-1}$.
5–nji mysal. x ululyga görä çyzykly deňsizlige getirilýän

$$\frac{2x-5}{m-1} - \frac{x+7}{3} \le \frac{3x-2m}{2(m-1)}$$

deňsizligi çözmeli.
Çözülişi. Eger-de $m=1$ bolsa, bu deňsizligiň manysy ýokdur.
Eger-de $m-1>0$ bolsa, onda bu deňsizlik

$$6(2x-5)-2(m-1)(x+7)\le 3(3x-2m)$$

deňsizlige deňgüýçlidir. Bu deňsizligi çözüp alarys:

$x \ge \dfrac{-8(m+2)}{2m-5}\ (m>2{,}5)$, $\quad x \le \dfrac{-8(m+2)}{2m-5}\ (1<m<2{,}5)$ we .

$x -$ islendik san$(m=2.5)$

Eger-de *m-1<0* bolsa, berlen deňsizligi *(m-1)* aňlatma köpeldip, käbir ýönekeýleşdirmelerden soňra, berlen deňsizlige deňgüýçli bolan

$$(2m-5)x \le -8(m+2)$$

deňsizlige geleris. Bu deňsizligi çözüp $x \ge \dfrac{-8(m+2)}{2m-5}$ çözüwi alarys. Sebäbi $2m-5<0$.

Jogaby: *m=1* bolanda deňsizligiň manysy ýokdur; *m=2,5* bolanda *x* – islendik san; *m<1* we *m>2,5* bolanda $x \ge \dfrac{-8(m+2)}{2m-5}$; *1<m<2,5* bolanda $x \le \dfrac{-8(m+2)}{2m-5}$.

Käbir ýagdaýlarda berlen deňsizligi çyzykly deňsizlikleriň ulgamyna getirip çözmeli bolýar. Şeýle mysallaryň birine seredeliň we çözeliň:

6–njy mysal. $\dfrac{2x-m}{(m-2)(x+3)}-\dfrac{m}{m-2}<\dfrac{3}{x+3}$

deňsizligi çözmeli.

Çözülişi. Deňsizligiň berlişine görä $m\ne 2$, $x\ne -3$.

Bu deňsizlik $\dfrac{x-\dfrac{6-7m}{m-2}}{x+3}>0$

deňsizlige, soňky deňsizlik bolsa, öz gezeginde iki sany aşakdaky sistemalara

$$\begin{cases} x > \dfrac{6-7m}{m-2} \\ x > -3 \end{cases} \quad \text{we} \quad \begin{cases} x < \dfrac{6-7m}{m-2} \\ x < -3 \end{cases} \quad \text{deňgüýçlidr.}$$

Çözüwi gözlemek üçin $\dfrac{6-7m}{m-2}$ we -3 ululyklary deňeşdirmeli bolýar. Onuň üçin bularyň tapawudyny kesgitleýäris: $\dfrac{6-7m}{m-2}-(-3)=\dfrac{-4m}{m-2}$.

Bu aňlatma üçin alarys:

$$-\frac{4m}{m-2}<0 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{4m}{m-2}>0 \quad (m<0 \;\; \text{we} \;\; m>2);$$

$$-\frac{4m}{m-2}=0 \quad (m=0)$$

$$-\frac{4m}{m-2}>0 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{4m}{m-2}<0 \quad (0<m<2)$$

Şunlukda,

$$\frac{6-7m}{m-2}<-3 \quad (m<0 \quad \text{we} \quad m>2)$$

$$\text{we} \;\; \frac{6-7m}{m-2}\geq -3 \quad (0\leq m<2) \qquad .$$

Jogaby:

$$R = \left\{ -\infty < x < \frac{6-7m}{m-2}; \quad -3 < x < \infty \right\}$$

$$(m < 0 \quad \text{we} \quad m > 2)$$

$$R = \left\{ -\infty < x < -3; \quad \frac{6-7m}{m-2} < x < \infty \right\}$$

$$(0 \le m < 2).$$

Indi başlangyç şertli çyzykly deňsizligiň bir mysalynyň çözülişine seredeliň.

7–nji mysal. $|x| \le 3$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli x – lar üçin

$$(k-1)x + 2k + 1 > 0$$

deňsizlik ***k*** ululygyň haýsy bahalary üçin dogry bolar?

Çözülişi. Goý, $f(x) = (k-1)x + 2k + 1$ bolsun. *f(x)* – çyzykly funksiýa bolup grafigi göni çyzyk bolar. [-3,3] aralykda berlen deňsizligiň ýerine ýetmegi üçin

$$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} 4-k > 0 \\ 5k-2 > 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ýerine ýetmeli, bu ýerden bolsa meseläniň jogaby $0{,}4 < k < 4$ bolar.

§8. Kwadrat deňsizlikler

$$Ax^2+Bx+C>0 \quad (\geq,<,\leq \text{ we } \mathrm{A}\neq 0)$$

görnüşli deňsizlige *x*-ululyga görä kwadrat deňsizlik diýilýär.

Bu ýerde A,B,C hakyky sanlar ýa-da parametrlere bagly funksiýalardyr. Parametrleriň A,B,C – ululyklary mana eýe edýän bahalary olaryň ýolbererlik bahalarynyň toplumyny emele getirýär.

Mysala ýüzleneliň: Goý,

$$mx^2-2(m-1)x+(m+2)<0$$

görnüşli deňsizligi çözmek gerek bolsun.

Çözülişi: Eger-de *m=0* bolsa, onda *2x+2<0* deňsizlige geleris, bu ýerde *x<-1* bolar. Goý, indi $m\neq 0$ bolsun. Kömekçi

$$f(x)=mx^2-2(m-1)x+(m+2)$$

funksiýany girizýäris. *x*-ululyga görä kwadrat deňsizlik üçin $f(x)<0$.

Kwadrat üçagzanyň diskriminantyny kesgitläliň: $\frac{1}{4}D=(m-1)^2-m(m+2)=1-4m$

Eger-de $D<0\left(m>\frac{1}{4}\right)$ bolsa, onda argumentiň islendik bahasy üçin $f(x)>0$ bolar we berlen deüsizligiň cözüwi ýokdur.

Eger-de $D=0\left(m=\frac{1}{4}\right)$ bolsa, onda $f(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 \geq 0(-\infty<x<\infty)$ bu ýagdaý üçin hem berlen deüsizligiň cözüwi ýokdur.

Goý, indi $D>0\left(m<\frac{1}{4}\right)$ bolsun. Onda $f(x)=0$ bolanda $x=\frac{1}{m}\left(m-1\pm\sqrt{1-4m}\right)$. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin: 1) $m<0$. $f(x)<0$ deňsizligi cözmek diýmek $f(x)$ funksiýa bilen $m-$ululygyň alamtlaryny gabat getirjek *x*- ululygyň bahalaryny tapmak diýmekdir.

Bu soragy çözmek üçin $m-1-\sqrt{1-4m}<m-1+\sqrt{1-4m}$ deňsizlige seredýäris. Elbet-de, $m<0$ bolanda

$$\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m})>\frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})$$

Şonuň üçin hem berlen deüsizligiň cözüwi

$$R=\left\{\begin{array}{l} -\infty<x<\frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m}); \\ \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m})<\mathrm{x}<\infty \end{array}\right\}$$ bolar.

2) $0<m<\frac{1}{4}$. Bu ýagdaýda $f(x)<0$ deňsizligi cözmek diýmek $f(x)$ funksiýa bilen $m-$ululygyň

alamtlarynyň gapma – garşy bolmagyny üpjün edýän x- ululygyň bahalaryny tapmak diýmekdir. Şerte görä $\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) < \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})$ deňsizlik ýerine ýetip, berlen deüsizligiň cözüwi

$$R = \left\{\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) < x < \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})\right\}$$

bolar.

Jogaby: $m=0$ bolanda $R = \{-\infty < x < -1\}$;

$m<0$ bolanda $R = \left\{\begin{matrix} -\infty < x < \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m}); \\ \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) < \mathrm{x} < \infty \end{matrix}\right\}$;

$0 < m < \frac{1}{4}$ bolanda

$$R = \left\{\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) < x < \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})\right\};$$

$m \geq \frac{1}{4}$ bolanda deüsizligiň cözüwi ýokdur.

Köplenç, deňsizlikler käbir goşmaça şertler bilen berilýär. Şu ýagdaýa aşakdaky mesele boýunça seredeliň.

Mesele: $|x| \leq 1$ deňsizligi kanagatlandyrjak ähli x- lar üçin

$$x^2-(a+1)x+a+1>0$$

deňsizligi kanagatlandyrýan a parametriň hakyky bahalarynyň köplügini kesgitlemeli.

Çözülişi: Goý, $f(x)=x^2-(a+1)x+a+1$ bolsun. Uçagzanyň diskriminanty $D=(a+1)(a-3)$. Onda $-1<a<3$ bolanda $D<0$ we a parametriň bu bahalary üçin $f(x)$ funksiýanyň alamaty x-ululygyň islendik hakyky bahalarynda x^2- agzanyň koeffisiýentiniň alamaty bilen gabat geler. Diýmek, ähli $-1<x<1$ üçin $f(x)>0$.

Goý, indi $a=-1,\ a=3$ bolsun, onda $D=0$ bolar. Eger-de $a=-1$ bolsa, onda $f(x)=x^2$ we $x\neq 0$ üçin $f(x)>0$(ýagny $x=0$ üçin $f(0)=0$). Eger-de $a=3$ bolsa, onda $f(x)=(x-2)^2>0(x\neq 2),$ diýmek ähli $|x|\leq 1$ üçin $f(x)>0$. Şeýlelikde, $f(x)>0(|x|\leq 1, -1<a<3)$.

Indi $a<-1,\ a>3$ üçin $D>0$ bolýan ýagdaýa seredýäris. Goý, $f(x)=0$ deňlemäniň x_1 we x_2 üçin $x_1<x_2$ deňsizlik ýerine ýetsin. Meseläniň şertine görä $f(x)>0$ deňsizligiň ýerine ýetmegi üçin $[-1,1]$ aralygyň $[x_1,x_2]$aralygyň daşynda bolmagy zerurdyr, ýagny

a) $x_1 < x_2 < 1$ we b) -1< $x_1 < x_2$

deňsizlikler ýerine ýetmeli. Eger-de indi $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a+1}{2}$ deňligi hasaba alsak, onda a) şert a- parametriň $\begin{cases} D>0 \\ f(-1)>0 \\ \frac{a+1}{2}<-1 \end{cases}$ ulgamy kanagatlandyrjak ähli bahalary üçin ýerine ýeter. Bu ulgamda degişli hasaplamalary geçirip, $\begin{cases} (a+1)(a-3)>0 \\ 1+(a+1)+(a+1)>0 \\ \frac{a+1}{2}<-1 \end{cases}$ ulgama geleris we onuň çözüwiniň ýokdugyny göreris;

b) şert bolsa a- parametriň $\begin{cases} D>0 \\ f(1)>0 \\ 1<\frac{a+1}{2} \end{cases}$ ulgamy kanagatlandyrjak ähli bahalary üçin ýerine ýeter. Bu ulgamyň çözüwi $a>3$ bolar.

Jogaby: $|x|\le 1$ deňsizligi kanagatlahdyrjak ähli $x-$lar üçin $f(x)>0$ deňsizlik a- parametriň

$-1 < a < 3$ we $a > 3$ ýa-da $-1 < a < \infty$ aralyga düşýän bahalary üçin ýerliklidir.

§9. Irrasional densizlikler

Eger-de deňsizligiň bir ýa-da iki bölegi hem *x* ulylyga görä irrasional aňlatmalary saklaýan bolsa , onda beýle deňsizliklere bir üýtgeýänli **irrasional deňsizlikler** diýilýär.

1 – nji mysal. $\sqrt{x-a}+\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4}$ (1)
deňsizlik *x* ulylyga görä *a* parametrli irrasional deňsizlikdir.

Çözülişi. Bu deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasy $\begin{cases} x \geq a \\ x \geq \dfrac{4}{3} \end{cases}$

sistemanyň çözüwi bolar. Onda (1) deňsizlik

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2-(2a-1)x-a} > a-5, \\ x \geq a \\ x \geq \dfrac{4}{3} \end{cases} \qquad (2)$$

sistema deňgüýçlidir. Eger-de $a \leq \dfrac{4}{3}$ bolsa, onda

a-5<0 , şunlukda

$$2\sqrt{2x^2-(2a-1)x-a} \geq 0,$$

şonuň üçin hem (2) sistemanyň çözüwi $x \geq \frac{4}{3}$ bolar.

Edil ş.m. a parametr üçin $\frac{4}{3} < a < 5$ deňsizlik ýerine ýetirilse , onda (2) sistemanyň çözüwi $x \geq a$ bolar.

Goý, indi $5 \leq a$ bolsun . Onda (2) sistemanyň birinji deňsizligini kwadrata göterip (2) sistema deňgüýçli bolan sistemany alarys.

$$\begin{cases} 8x^2 - 4(2a-1)x - a^2 + 6a - 25 > 0 \\ x \geq a \end{cases} \qquad (2a)$$

Goý, $f(x) = 8x^2 - 4(2a-1)x - a^2 + 6a - 25$ bolsun.Onda, *f(x)*-iň diskirminanty

$$\frac{1}{4}D = 4(2a-1)^2 + 8a^2 - 48a + 200 = 4(6a^2 - 16a + 51).$$

Emma bu üçagzanyň diskriminanty a parametriň islendik bahasynda otrisateldir, şonuň üçin hem $D>0$. Bu ýagdaýda $f(x)=0$ deňleme iki sany

$$x_1 = \frac{1}{4}(2a - 1 - \sqrt{6a^2 - 16 + 51}),$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(2a - 1 + \sqrt{6a^2 - 16a + 51})$$

köklere eýedir we $x_1 < x_2$. Kwadrat üçagzanyň häsiýetine görä $x < x_1$ we $x_2 < x$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan *x*-lar üçin *f(x)>0* bolar. Şeýlelikde, $a \geq 5$ bolanda (2a) ýada (1) sistemalar aşakdaky a) $\begin{cases} x < x_1 \\ x \geq a \end{cases}$ we b) $\begin{cases} x > x_2 \\ x \geq a \end{cases}$

sistemalara deňgüýçlidir. Bu sistemany çözmek üçin *a* parametriň $[x_1, x_2]$ kesimde ýerleşýändigini barlamaly:

$$f(a) = -(a-5)^2 \leq 0$$

şonuň üçin hem $x_1 \leq a \leq x_{2.}$ Bu ýerden a) sistemanyň çöziwiniň ýoklygy , b) sistemanyň çözüwniň bolsa $x > x_2$ bolýandygy gelip çykýar.

Jogaby: Eger-de $a \leq \frac{4}{3}$ bolsa , onda

$R = \left\{ \frac{4}{3} \leq x < \infty \right\};$

Eger-de $\frac{4}{3} < a < 5$ bolsa , onda $R = \{a \leq x < \infty\};$

Eger-de $a \geq 5$ bolsa, onda

$R = \left\{ \frac{1}{4}(2a - 1 + \sqrt{6a^2 - 16 + 51}) < x < \infty \right\}.$

Käbir irrasional deňsizlikleri çözmekde grafiki usul netijeli bolýar.

2 – nji mysal. $x - a > \sqrt{x - b}$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi: Şerte görä $x \geq b$. Ilki bilen $y = \varphi(x) = x - a$ funksiýanyň grafiginiň $y = f(x) = \sqrt{x - b}$ funksiýanyň grafigine galtaşma şertini kesgitläliň. Onuň üçin berlen deňsizligi kwadrata göterip, emele gelen

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + b = 0$$

kwadrat deňlemäni çözüp,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2a + 1 - \sqrt{4a - 4b + 1}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(2a + 1 + \sqrt{4a - 4b + 1}\right)$$

kökleri alarys. Eger-de $4a - 4b + 1 = 0$ $\left(a = b - \frac{1}{4}\right)$ bolsa, onda $x_1 = x_2 = a + 0{,}5$. Diýmek, bu nokat grafikleriň galtaşma nokatlarynyň abssissasydyr.

Bize $\varphi(x)$-funksiýanyň grafiginiň $f(x)$ – funksiýanyň grafiginden ýokarda bolmagyny üpjün etjek $x(x \geq b)$-lary tapmak gerek. Çyzgydan görnüşi ýaly $a < b - \frac{1}{4}$ bolanda grafikler kesişmeýär. $a = b - \frac{1}{4}$ bolanda bir umumy nokatda galtaşýar. $b - \frac{1}{4} < a \leq b$ bolanda olar x_1 we x_2 nokatlarda kesişýär. $a > b$ bolanda x_2 nokatda kesişýärler.

Jogaby : $\text{Eger} - \text{de}\ \ a < b - \frac{1}{4}$ bolsa, onda $R = \{b \leq x < \infty\}$;

Eger-de $a = b - \frac{1}{4}$ bolsa, onda

$R = \{b \le x < a + 0{,}5; a + 0{,}5 < x < \infty\}$; Eger-de

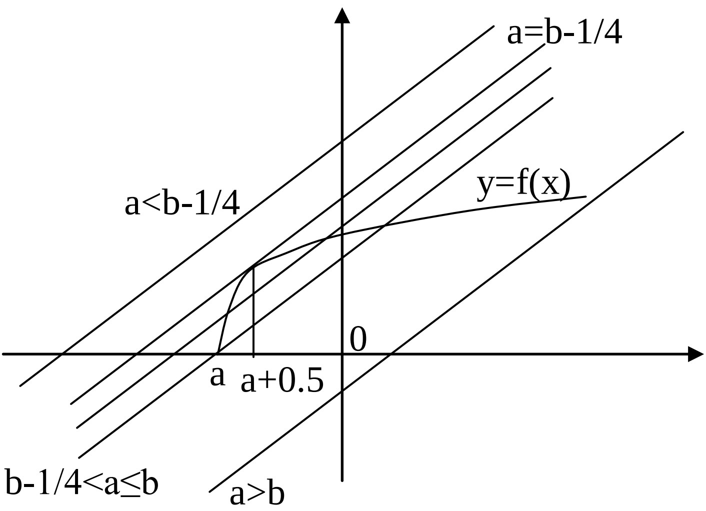
$b - \frac{1}{4} < a \le b$ bolsa , onda

$$R = \left\{ \begin{matrix} b \le x < \frac{1}{2}(2a + 1 - \sqrt{4a - 4b + 1}); \\ \frac{1}{2}(2a + 1 + \sqrt{4a - 4b + 1} < x < \infty \end{matrix} \right\};$$ Eger-de

$a > b$ bolsa, onda

$$R = \left\{ \frac{1}{2}(2a + 1 + \sqrt{4a - 4b + 1}) < x < \infty \right\}.$$

Alnan netijeler grafikde aşakdaky ýaly bolar:



§10. Görkezijili deňsizlikler

$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ we $a^{f(x)} \geq a^{\varphi(x)}$, $a^{f(x)} \leq a^{\varphi(x)}$ deňsizliklere elementar görkezijili deňsizlikler diýilýär.

Tassyklama. Eger-de $a>1$ bolsa, onda $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ we $f(x) > \varphi(x)$ deňsizlikler, eger-de $0<a<1$ bolsa, onda $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ we $f(x) < \varphi(x)$ deňsizlikler özara deňgüýçlidirler.

Subudy. Hakykatdan hem, goý $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ deňsizligiň çözüwi x_1 bolsun. Onda $a^{f(x_1)} > a^{\varphi(x_1)}$. Bu ýerden, görkezijili funksiýanyň häsiýetlerine görä $a>1$ bolsa $f(x_1)>\varphi(x_1)$ deňsizlige, $0<a<1$ bolanda $f(x_1)<\varphi(x_1)$ deňsizlige geleris, ýagny x_1-san soňky deňsizlikleriň hususy çözüwleridir. Tersine, x_1-üçin $a>1$ bolanda $f(x_1)>\varphi(x_1)$; $0<a<1$ bolanda $f(x_1)<\varphi(x_1)$ ýerine ýetseler, onda

$$a^{f(x_1)} > a^{\varphi(x_1)}$$

deňsizlik ýerine ýeter. Edil ş.m. beýleki deňsizlikleri hem subut edip bolar.

Görkeziji deňsizlikler çözülende, esasan hem, onuň häsiýetleri we onuň görkezijisiniň häsiýetleri giň peýdalanylýar. Mysallara seredeliň.

1- nji mysal. $\sqrt[x-1]{a^{3x+2}} \leq \sqrt[x+1]{a^{x-3}}$ (1)

Çözülişi: Deňsizligiň berlişine görä $a>0$ we $x\neq\pm 1$: $a=1$ bolanda (1) deňsizligiň çözüwi $R=\{-\infty < x < -1;\ \ -1 < x < 1;\ \ 1 < x < \infty\}$ bolar.

(1) deňsizligi $$a^{\frac{3x+2}{x-1}} \leq a^{\frac{x-3}{x+1}} \qquad (2)$$

görnüşe getirip iki ýagdaýa seredeliň.

a) $0<a<1$. Onda ýokarda bellenşi ýaly (2) deňsizlik $\frac{3x+2}{x-1} \geq \frac{x-3}{x+1}$ deňsizlige ýa-da

$\frac{(3x+2)(x+1)-(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ deňsizlige geler, ony özgerdip

$$\frac{2\left(x-\frac{\sqrt{89}-9}{4}\right)\left(x-\frac{-\sqrt{89}-9}{4}\right)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

görnüşe getirip, onuň üçin interwallar usuluny peýdalansak

$$R=\left\{-\infty < x \leq \frac{-\sqrt{89}-9}{4};\ -1 \leq x \leq \frac{\sqrt{89}-9}{4};\ 1 < x < \infty\right\}$$

çözüwi alarys.

b) Goý, indi *a>1* bolsun. Bu ýagdaýda (1) deňsizlik $\frac{3x+2}{x-1} \le \frac{x-3}{x+1}$ deňsizlige, bu deňsizligi hem öz gezeginde oňa deňgüýçli bolan

$$\frac{2\left(x-\frac{\sqrt{89}-9}{4}\right)\left(x-\frac{-\sqrt{89}-9}{4}\right)}{(x-1)(x+1)} \le 0$$

deňsizlige getireris. Interwallar usuly bilen bu deňsizligiň çözüwini

$$R=\left\{-\frac{9+\sqrt{89}}{4} \le x < -1; \quad \frac{\sqrt{89}-9}{4} \le x < 1\right\}$$

görnüşde alarys.

2-nji mysal. $$\frac{m^{2x}-10}{m^x+1} < 3-\frac{15}{m^x(m^x+1)}$$ (3)

Çözülişi: (3) deňsizligi özgerdip

$$\frac{m^{2x}-10}{m^x+1}+\frac{15}{m^x(m^x+1)}-3<0 \qquad (4)$$

deňsizligi alarys we goý, *m=1* bolsun. Onda bu deňsizlik

$$\frac{1^{2x}-10}{1^x+1}+\frac{15}{1^x(1^x+1)}-3<0$$

görnüşe geler we ol x – ululygyň islendik hakyky bahasy üçin dogry bolar.
Goý indi $m>0$ $(m\neq 1)$ bolsun. Onda $m^x>0$, $m^x+1>0$.
(4) deňsizlikden alarys:

$$\left(m^{2x}-10\right)m^x+15-3m^x\left(m^x+1\right)<0 \qquad (5)$$

Goý $m^x=z>0$ belgilemäni girizeliň. Soňky (5) deňsizlikden
$(z^2-10)\ z+15-3z\ (z+1)<0$ deňsizlige ýa-da $z^3-3z^2-13z+15<0$ deňsizlige geleris. Soňky deňsizlikden köpeldijilere dagydyp alarys:

$$\left(z-1\right)\left(z+3\right)\left(z-5\right)<0 \qquad (6)$$

(6) deńsizlikde $z+3>0$ deńsizligi ulanyp, $(z-1)(z-5)>0$deńsizligi alarys, onuń jogaby $1<z<5$.
Belgilemäni göz öńünde tutsak, onda $1<m^x<5$.

Bu ýerden $m>1$ bolanda $0<x<\log_m 5$; $0<m<1$ bolanda $\log_m 5<x<0$ deňsizlige geleris.

Jogaby: Eger-de $m=1$ bolanda x – islendik san; eger-de $m>1$ bolanda $R=\{o<x<\log_m 5\}$; eger-de $0<m<1$ bolanda $R=\{\log_m 5<x<0\}$.

Mysallar: 1) $a^{x^2-x}<a^2$;

Jogaby: $a>1$ bolanda, R={-1 < x < 2};

$0 < a < 1$ bolanda, $R = \{-\infty < x < -1;\ 2 < x < \infty\}$;
a = 1 bolanda, çözüwi ýok.

2) $\dfrac{1 + a^{-x}}{1 - 2a^{-x}} - \dfrac{a^x}{a^x - 1} < 0;$

Jogaby:

$a > 1,\ R = \{-\infty < x < \log_a 0{,}5;\ 0 < x < \log_a 2\}$

$0 < a < 1,\ R = \{\log_a 2 < x < 0;\ \log_a 0{,}5 < x < \infty;\}$

3) $\sqrt{2 - m^{x-3}} < m^{x-3};$

Jogaby:

$0 < m < 1,\ R = \{3 + \log_m 2 \le x < 3\}$

$m > 1,\ R = \{3 < x \le 3 + \log_m 2\}.$

4) $\dfrac{2ma^{2x} - 1}{m - 1} - \dfrac{a^{2x} + 3}{2} < \dfrac{1}{m - 1};$

Jogaby: $\begin{cases} m<1 \quad we \;\; 0<a<1, \\ m<-\dfrac{1}{3} \quad we \;\; 0<a<1 \qquad R=\{0<x<\infty\} \\ -\dfrac{1}{3}<m<1 \;\; we \;\; a<1 \end{cases}$

$$\begin{cases} m>1 \quad we \quad a>1 \\ m<-\dfrac{1}{3} \quad we \quad a>1 \qquad\qquad R=\{-\infty<x<0\}. \\ -\dfrac{1}{3}<m<1 \;\; we \;\; 0<a<1 \end{cases}$$

5) $a^{2x}-b^{\frac{2x+1}{2}}<\mathbf{b}^{\frac{2x+7}{2}}-a^{2x-1}$

Görkezme:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \;\; we \;\; 0<b<1 \\ a=1 \;\; we \;\; b>1 \\ b=1 \;\; we \;\; 0<a<1 \\ b=1 \;\; we \;\; a>1 \\ 0<a<\sqrt{b} \\ a>\sqrt{b} \\ a=\sqrt{b} \end{array}\right\}$$ ýagdaýlara aýratyn seretmeli.

§11. Logarifmik deňsizlikler

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x),\ \log_a f(x) < \log_a \varphi(x),$$
$$\log_a f(x) \geq \log_a \varphi(x) \text{ we } \log_a f(x) \leq \log_a \varphi(x)$$

görnüşli deňsizliklere elementar **logarifmik deňsizlikler** diýilýär. Bu ýerde $a>0$ we $a\neq 1$. Bu görnüşli deňsizlikler çözülende logarifmik funksiýanyň we san deňsizlikleriniň häsiýetleri giňden ulanylýar.

Tassyklama. Eger-de $a>1$ bolsa, onda

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \qquad (1)$$

deňsizlik

$$f(x) > \varphi(x) > 0 \qquad (2)$$

deňsizlige deňgüýçli bolar. Eger-de $0<a<1$ bolsa, onda (1) deňsizlik

$$0 < f(x) < \varphi(x) \qquad (3)$$

deňsizlige deňgüýçli bolar.

Subudy. Hakykatdan hem, goý (1) deňsizlik $a>1$ bolanda ýerine ýetsin we x_1-onuň hususy çözüwi bolsun: $\log_a f(x_1) > \log_a \varphi(x_1)$.

Bu ýerde $f(x_1)>0$ we $\varphi(x_1)>0$ (logarifmiň kesgitlemesine görä). Şeýle hem

$$a^{\log_a f(x_1)} > a^{\log_a \varphi(x_1)}$$

bu ýerde bolsa görkezijili funksiýanyň häsiýetlerine görä $f(x_1) > \varphi(x_1) > 0$

deňsizlik ýerine ýeter. Şunlukda x_1-san (2) deňsizligiň hususy çözüwi bolar.
Tersine,goý, x_1-san (2) deňsizligiň hususy çözüwi bolsun. Eger-de

$$f(x_1) > \varphi(x_1) > 0$$

bolsalar, onda $\log_a f(x_1)$ we $\log_a \varphi(x_1)$ logarifmler bardyrlar. Bu sanlar üçin $f(x_1) = a^{\log_a f(x_1)}$ we $\varphi(x_1) = a^{\log_a \varphi(x_1)}$ deňlikler bardyr; olar üçin bolsa

$$a^{\log_a f(x_1)} > a^{\log_a \varphi(x_1)}$$

deňsizlikler ýerine ýeter we görkezijili funksiýanyň häsiýetlerine görä

$$\log_a f(x_1) > \log_a \varphi(x_1)$$

deňsizlige geleris. Edil şuňa meňzeşlikde $0<a<1$ ýagdaý üçin degişli deňsizlikler subut edilýär.

Şu usul bilen $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$ deňsizligiň $0<f(x)<\varphi(x)$ $(a>1)$
deňsizlige ýa-da $f(x)>\varphi(x)>0$ $(0<a<1)$deňsizlige deňgüýçlidigi subut edilýär. Logarifmik deňsizlikleriň mysallaryna seredeliň.

1-nji mysal. $\log_{a^2}\left(x^2+2x\right)<1.$ (4)

Çözülişi: Deňsizligiň berilişi boýunça $a>0$, $a\neq\pm1$; we $x^2+2x>0$ soňky deňsizlik bolsa a) $x>0$ we b) $x<-2$ deňsizlikler ýerine ýetende dogrudyr. (4) deňsizligi özgerdip $\log_{a^2}\left(x^2+2x\right)<\log_{a^2} a^2$ deňsizligi alarys we

$|a|>1$ bolanda soňky deňsizlige deňgüýçli bolan

$$\begin{cases} x^2+2x-a^2<0 \\ x(x+2)>0 \end{cases}$$

sistemany alarys. Bu sistemanyň birinji deňsizligini çözüp, onuň

$$R=\left\{-1-\sqrt{1+a^2}=x_1<x<x_2=-1+\sqrt{1+a^2}\right\}$$

çözüwini alarys. Bu ýerden bolsa $|a|>1$ bolanda (4) deňsizlik aşakdaky sistemalara deňgüýçli bolar:

$$a)\quad \begin{cases} -1-\sqrt{1+a^2}<x<-1+\sqrt{1+a^2} \\ x>0 \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} -1-\sqrt{1+a^2}<x<-1+\sqrt{1+a^2} \\ x<-2 \end{cases}$$

Bularyň birinjisiniň çözüwi $R=\left\{0<x<-1+\sqrt{1+a^2}\right\}$ we ikinjisiniňki

$R=\left\{-1-\sqrt{1+a^2}<x<-2\right\}$ bolar.

Goý, indi $|a|<1$ $(a\neq0)$. Bu ýagdaýda (4) deňsizlik $\begin{cases} x^2+2x-a^2>0 \\ x(x+2)>0 \end{cases}$ deňsizlige deňgüýçli bolar. Sistemanyň birinji deňsizliginiň çözüwi

$R=\{-\infty<x<x_1;\ x_2<x<\infty\}$, nirede

$x_1=-1-\sqrt{1+a^2},\ x_2=-1+\sqrt{1+a^2}.$

Şunlukda, $|a|<1 (a\neq 0)$ bolanda (4) deňsizlik aşakdaky sistemalara

$$a)\begin{cases} x<-1-\sqrt{1+a^2} \\ x<-2 \end{cases}, \qquad R=\left\{-\infty<x<-1-\sqrt{1+a^2}\right\},$$

$$b)\begin{cases} x>-1+\sqrt{1+a^2} \\ x>0 \end{cases}, \qquad R=\left\{-1+\sqrt{1+a^2}<x<\infty\right\}$$

deňgüýçli bolar.

Jogaby: Eger-de $|a|>1$ bolsa, onda

$$R=\left\{-1-\sqrt{1+a^2}<x<-2;\ 0<x<\sqrt{1+a^2}-1\right\},$$

eger-de $|a|<1$ $(a\neq 0)$ bolsa, onda

$$R=\left\{-\infty<x<-1-\sqrt{1+a^2};\ \ \sqrt{1+a^2}-1<x<\infty\right\}.$$

2-nji mysal. $\log_{2x+3}(a-2)<1$ (5).

Çözülişi: Logarfmleriň kesgitlemesine görä $a>2$, $2x+3>0$, $2x+3\neq 1$.

(5) deňsizligi $\log_{2x+3}(a-2)<\log_{2x+3}(2x+3)$ görnüşde ýazyp $2x+3>1$

$(x>-1)$ bolanda soňky deňsizlikdn $a-2<2x+3$ ýa-da

$$x>\frac{a-5}{2}$$

deňsizligi alýarys.

Çözüwi saýlap almak üçin *(a-5)/2* we *–1* sanlary deňeşdirmeli. Olaryň tapawudyny $\frac{a-5}{2}-(-1)=\frac{a-3}{2}$ taparys. Bu tapawut üçin

$$\frac{a-3}{2}>0\ (a>3)\ \text{ we }\ \frac{a-3}{2}\le 0\ (a\le 3).$$

Bu ýerde $2<a\le 3$ bolanda $\frac{a-5}{2}\le -1$ we $\begin{cases} x>\frac{a-5}{2} \\ x>-1 \end{cases}$ sistemanyň çözüwi $x>-1$ bolar; $a>3$ bolanda $\frac{a-5}{2}>-1$ we $\begin{cases} x>\frac{a-5}{2} \\ x>-1 \end{cases}$ sistemanyň çözüwi $x>\frac{a-5}{2}$ bolar.

Indi (5) deňsizligiň $0<2x+3<1$ $(-1,5<x<-1)$ şerti kanagatlandyrýan çözüwlerini tapýars. Bu şertde (5) deňsizlik $a-2>2x+3$ deňsizlige ýa-da $x<\frac{a-5}{2}$ deňsizlige deňgüýçlidir. Şunlukda $2<a\le 3$, $\frac{a-5}{2}\le -1$ şertler ýerine ýetende $\begin{cases} x<\frac{a-5}{2} \\ -1,5<x<-1 \end{cases}$ sistemanyň çözüwi $-1,5<x<\frac{a-5}{2}$ bolar.

Eger-de *a>3* bolsa $\frac{a-5}{2}>-1$ deňsizligi alarys, onda

$$\begin{cases} x<\frac{a-5}{2} \\ -1{,}5<x<-1 \end{cases}$$

sistemanyň çözüwi *–1,5<x<-1* bolar.

Jogaby: Eger-de *2<a≤3* bolanda

$$R=\left\{-1{,}5<x<\frac{a-5}{2};\ -1<x<\infty\right\},$$

eger-de *a>3* bolanda

$$R=\left\{-1{,}5<x<\frac{a-5}{2};\ -1<x<\infty\right\}.$$

Mysallar:

1) $\log_{o,7}\left(x^2+2x\right)<\log_{0,7}(a+1)$

2) $1-\frac{1}{2}\lg(2x-a)>\frac{1}{2}\lg(3a-x)$

3) $\log_a x+1>2\log_x a$

4) $\log_{\frac{x}{a}}>\log_{a^2x}a^2$

5) $\log_a x+\log_2 x>1.$

Jogaplary:

1) $a>-1$ bolanda

$$R=\left\{-\infty<x<-1-\sqrt{a+2};\ -1-\sqrt{a+2}<x<\infty\ \right\}$$

.

2) $0<a<4\sqrt{2}$ bolanda $R=\left\{\frac{a}{2}<x<3a\right\};$

3) $a>4\sqrt{2}$ bolanda

$$R=\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{2}<x<\frac{1}{4}\left(7a-5\sqrt{a^2-32}\right);\\ \frac{1}{4}\left(7a+5\sqrt{a^2-32}<x<3a\right)\end{array}\right\};$$

$a=4\sqrt{2}$ bolanda

$$R=\left\{2\sqrt{2}<x<7\sqrt{2};\quad 7\sqrt{2}<x<12\sqrt{2}\right\};$$

$a\leq 0$ bolanda çözüwi ýok.

3) $a>1$ bolanda

$$R=\left\{\frac{1}{a^2}<x<1;\quad a<x<\infty\right\};$$

$0<a<1$ bolanda

$$R=\left\{0<x<a;\quad 1<x<\frac{1}{a^2}\right\}.$$

4) $a>1$ bolanda

$$R=\left\{0<x<\frac{1}{a^2};\ a<x<a^4\right\};$$

$0<a<1$ bolanda

$$R=\left\{a^4<x<a;\ \frac{1}{a^2}<x<\infty\right\}$$

5) $0 < a < 0{,}5$ we $a > 1$ bolanda

$$R = \left\{ a^{\frac{1}{\log_2 2a}} < x < \infty \right\};$$

$0{,}5 < a < 1$ bolanda

$$R = \left\{ 0 < x < a^{\frac{1}{\log_2 2a}} \right\}.$$

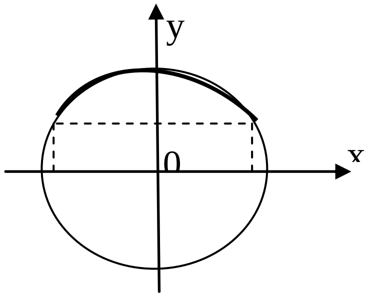
§12. Trigonometrik deňsizlikler

Eger-de üýtgeýän ululyk ýa-da ony özünde saklaýan aňlatma trigonometrik funksiýalaryň argumenti hökmünde gelýän deňsizliklere **trigonometrik deňsizlikler** diýilýär. Bu görnüşli deňsizlikleri çözmek üçin ýönekeý trigonometrik deňlemeleriň we deňsizlikleriň çözüwlerinde ulalynýan häsiýetler, deňgüýçlilik hakyndaky tassyklamalar hem-de san deňsizlikleriniň häsiýetleri giňden ulanylýar.

Mysallara geçeliň.

1-nji mysal. $\sin ax \geq 0{,}5$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi. Bu deňsizligi çözmek üçin birlik töweregi alyp,onuň üstünde ordinatasy 0,5 bolan iki nokady belleýäris.



Ol nokatlaryň biri $\arcsin 0{,}5 + 2\pi n = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$

köplükden bolan duganyň ahyry bolar.

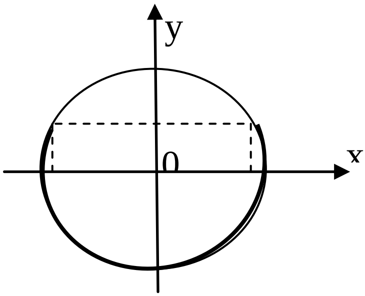
Çyzgydan görňüşi ýaly berlen deňsizlik

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le ax \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

deňsizlige deňgüýçli bolar.

Jogaby: Eger-de $a > 0$ bolsa, onda $\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \le x \le \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$;eger-de $a < 0$ bolsa, onda $\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{5}{6}\pi + 2\pi n\right) \le x \le \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$; eger-de $a = 0$ bolsa, onda deňsizligiň çözüwi ýokdur.

2-nji mysal. $\sin ax < b, \ (0 < b < 1)$
deňsizligi çözmeli.



Çözülişi. 1-nji mysalda görkezilişi ýaly, birlik töwerekde ordinatasy b bolan nokatlary göz öňünde tutsak, onda berlen $\sin ax < b, \ (0 < b < 1)$ deňsizlige deňgüýçli bolan aşakdaky deňsizligi alarys:

$$\pi - \arcsin b + 2\pi n < ax < 2\pi + \arcsin b + 2\pi n$$

Jogaby: Eger-de $a = 0$ bolsa, onda x - islendik san;
eger-de $a > 0$ bolsa, onda

$$\frac{1}{a}\left[\pi(2n+1) - \arcsin b\right] < x < \frac{1}{a}\left[2\pi(n+1) + \arcsin b\right];$$

eger-de $a < 0$ bolsa, onda

$$\frac{1}{a}\left[2\pi(n+1) + \arcsin b\right] < x < \frac{1}{a}\left[\pi(2n+1) - \arcsin b\right].$$

3-nji mysal. $cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geq b,\ (-1<b<0)$

deňsizligi çözmeli.

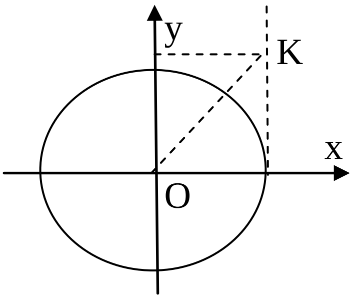
Çözülişi. Çyzgydan görnüşi ýaly, berlen deňsizlik aşakdaky deňsizlige deňgüýçli bolar:

$$-\arcsin b+2\pi n\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq \arccos b+2\pi n$$

Jogaby:

R=$\left\{\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos b+\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos b+\pi n\right\}$

4-nji mysal. $tg(ax+2)\geq b$ deňsizligi çözmeli.



Çözülişi. Tangensler okunda ordinatasy b deň bolan K nokady alyp ony O bilen birleşdirsek, onda OK kesim töweregiň dugasyny soňy $arctgb$ bolan nokatda keser. Tangensiň periodynyň

π bolýandygyny hasaba alsak, berlen deňsizlik aşakdaky deňsizlige deňgüýçli bolar:

$$arctgb + \pi n \le ax + 2 < \pi/2 + \pi n$$

Jogaby: Eger-de $a > 0$ bolsa, onda

$$R = \left\{ \frac{1}{a}\left(arctgb - 2 + \pi n\right) \le x < \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \pi n\right) \right\};$$

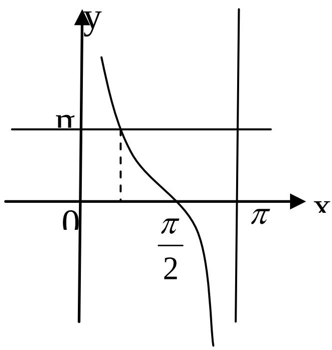
eger-de $a < 0$ bolsa, onda

$R = \left\{ \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \pi n\right) < x \le \frac{1}{a}\left(arctgb - 2 + \pi n\right) \right\}$; eger-de $a = 0$ bolsa, onda berlen deňsizlik $\mathrm{tg}2 \ge \mathrm{b}$ deňsizlige geler,şeýlelikde

$R = \{-\infty < x < \infty\}$ bolar.

5-nji mysal. $ctg\left|2x - 3\right| \le m, \quad (m > 0)$

deňsizligi çözmeli.



Çözülişi. Çyzgydan görnüşi ýaly, $k = 0,1,2,...$ bahalar üçin berlen deňsizlik

$$arcctgm + \pi k \le |2x - 3| < \pi + k\pi$$ deňsizlige

deňgüýçli bolar. Bu deňsizlikden

$2x - 3 > 0$ bolanda

$$arcctgm + \pi k \le 2x - 3 < \pi + k\pi$$

ýa-da

$$1{,}5 + 0{,}5arcctgm + 0{,}5\pi k \le x < 1{,}5 + 0{,}5\pi + 0{,}5\pi k$$

deňsizlige; $2x - 3 < 0$ bolanda bolsa,
onda $-\pi - \pi k < 2x - 3 \le -arcctgm - \pi k$ ýa-da

$$1{,}5 - 0{,}5\pi - 0{,}5\pi k < x \le 1{,}5 - 0{,}5arcctgm - 0{,}5\pi k$$

deňsizlige gelinýär.

6-njy mysal.
$3^{(2\cos 2x - a)(3\cos 2x + b)} < 1,\ (0 < a < 1;\ 0 < b < 1)$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi. Bu deňsizlik $-\dfrac{b}{3} < \cos 2x < \dfrac{a}{2}$ deňsizlige deňgüýçlidir.Birlik töweregi ulanyp, deňsizligiň çözüwlerini alarys:

a) $0{,}5\left(\arccos\dfrac{a}{2} + 2\pi n\right) < x < 0{,}5\left(\arccos\left(-\dfrac{b}{3}\right) + 2\pi n\right)$ we

b) $-0,5\left(\arccos\left(-\frac{b}{3}\right)+2\pi k\right)<x<-0,5\left(\arccos\frac{a}{2}+2\pi k\right)$

7-nji mysal. $\sin 3x-2a\sin^2\frac{3x}{2}>0 \quad (a>0)$

deňsizligi çözmeli.

Çözülişi. Bu deňsizligi çözmek üçin interwallar usulyny peýdalanýarys. Berlen deňsizligi özgerdip

$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}-2a\sin^2\frac{3x}{2}>0$ ýa-da

$$2\sin\frac{3x}{2}(\cos\frac{3x}{2}-a\sin\frac{3x}{2})>0 \qquad (1)$$

Ýaýyň içindäki aňlatmany $\sqrt{1+\mathrm{a}^2}$ köpeldip we bölüp, onuň özgertmesini alalyň.Onuň üçin

$0<\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<1$ bolýandygyny hasaba alyp,

$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ we $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ bolar ýaly

$\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ sanyň boljakdygyny göreris:

$\varphi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{a}^2}}$

Onda (1) deňsizlik

$$\sin\frac{3x}{2}\cdot\sqrt{1+a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos\frac{3x}{2}-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sin\frac{3x}{2}\right)>0$$

deňsizlige ýa-da $\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\left(\varphi-\frac{3x}{2}\right)>0$

(2)

deňsizlige geler. $y=\frac{3x}{2}$ belgilemäni girizeliň: Onda (2) deňsizlik

$$\sin y\cdot\sin(\varphi-y)>0 \text{ ýa-da } \sin y\cdot\sin(y-\varphi)<0 \quad (3)$$

deňsizlige geleris.

Kömekçi $f(y)=\sin y\cdot\sin(y-\varphi)$ funksiýany girizeliň we elementar fuksiýanyň kökleriniň özüni manyly edýän interwalynda alamatyny saklaýandygyny hasaba alarys. Eger-de $y=\pi n$ we $y=k+\varphi$ bahalar üçin $f(y)=0$ we $f(y)$ funksiýanyň periody π sana deňdir. Hakykatdan hem, $f(y)$ funksiýany

$f(y)=\frac{\cos\varphi-\cos(2y-\varphi)}{2}$ görnüşde ýazyp oňa göz ýetireris.

$f(y)$ funksiýa çözüwleriň iki köplügine eýedir. Şunlukda $[0,\pi]$ aralyga $0,\varphi,\pi$ kökler degişlidir,

$0 < y < \varphi$ bolanda $f(y) < 0$ we $\varphi < y < \pi$ bolanda $f(y) > 0$ bolar. Şeýlelikde, $f(y)$ funksiýanyň periodikligini hasaba alyp $f(y) < 0$ deňsizligiň çözüwini $R = \{\pi n < y < \varphi + \pi n\}$ görnüşde ýazarys.

Onda $y = \frac{3x}{2}$ belgilemäni hasaba alsak, berlen deňsizligiň çözüwini alarys:

$$R = \left\{ \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{2}{3}\varphi + \frac{2}{3}\pi n \right\}.$$

Mysallar: 1) $\sin(mx - 3) < m, (-1 < m < 0);$

Jogaby:

$$\frac{1}{m}(3 + \arcsin m + 2k\pi) < x < \frac{1}{m}[3 - (\pi + \arcsin m) + 2\pi k];$$

$k = 0; \pm 1, \pm 2; \ldots$

2) $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq b, \ (0 < b < 1);$

Jogaby:

$$\frac{\pi}{8} + 0{,}5\arcsin\sqrt{b} + \pi n \leq x \leq \frac{5}{8}\pi - 0{,}5\arcsin\sqrt{b} + \pi n;$$

$$\frac{5}{8}\pi + 0{,}5\arcsin\sqrt{b} + \pi k \leq x \leq \frac{9}{8}\pi - 0{,}5\arcsin\sqrt{b} + \pi k.$$

3) $\cos^2(x+1) < a, (0 < a < 1)$;

Jogaby:

$$\arccos\sqrt{a} - 1 + 2\pi < x < -1 + \arccos\left(-\sqrt{a}\right) + 2\pi n;$$

$$-1 - \arccos\left(-\sqrt{a}\right) + 2\pi k < x < -1 - \arccos\sqrt{a} + 2\pi k;$$

4) $2tg(ax-4) \le b;$

Jogaby: $a = 0, b \ge -2tg4$ bolanda $x-$ islendik san;

$a > 0$ bolanda

$$\frac{1}{a}\left(4 - \frac{\pi}{2} + \pi k\right) < x \le \frac{1}{a}\left(4 + arctg\frac{b}{2} + \pi k\right);$$

$a < 0$ bolanda

$$\frac{1}{a}\left(4 + arctg\frac{b}{2} + \pi k\right) \le x < \frac{1}{a}\left(4 - \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

5) $3ctg(x-m) \ge a;$ Jogaby:

$$m + \pi k < x \le m + arcctg\frac{a}{3} + \pi k.$$

6) $\left|\sin(2x-4)\right| \le b, (0 < b < 1);$

Jogaby:

$$2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin b + \pi k \le x \le 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin b + \pi k;$$

$$2 - \frac{1}{2}\arcsin b + \pi k \le x \le 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin b + \pi k.$$

§13. Parametri girizmek bilen çözülýän meseleler

Belli bolşy ýaly, parametrli deňlemeler ýa-da deňsizlikler çözülende ilki bilen olaryň kesgitleniş ýaýlasyny we parametriň ýolbererlik bahalarynyň köplügini kesgitlemek gerek bolýar. Bulardan başga hem funksiýalaryň dürli häsiýetlerine, esasan hem aňlatmalary deňgüýçli özgertmeklige üns bermeli bolduk. Ýöne bularyň hemmesiniň hem ýetmezçilik etmegi mümkindir. Sebäbi geometriki, fiziki meseleler çözülende olaryň geometriki we fiziki manylaryny göz öňünde tutmaly bolýar.

Şeýle görnüşli meselelere seredeliň.

1-nji mesele. Meýdany S, içinden çyzylan töweregiň radiusy r bolan we içki α, β, γ burçlary $ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}=2$ deňligi kanagatlandyrar ýaly üçburçlygyň bardygyny görkezmeli.

Çözülişi. Bu üçburçlugyň taraplary a, b, c bolsun. Onda

$$a=r\left(ctg\frac{\gamma}{2}+ctg\frac{\beta}{2}\right),\quad b=r\left(ctg\frac{\gamma}{2}+ctg\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$c=r\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}\right),$$

$$p=r\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}\right),\quad p=\frac{a+b+c}{2}$$

Belli bolşy ýaly $S = pr,$ onda

$$S = r^2\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}\right).$$

lki bilen $\alpha + \beta + \gamma = \pi + 2\pi k$ bolanda

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} \tag{1}$$

deňligi subut edeliň.

Hakykatdan hem, goý $k = 2n$ bolsun, onda

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + 4\pi n \quad \text{ýa-da}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\,.$$

$$N = ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

başgaça

$$N=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}},$$

bu ýerde

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}+2\pi n\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}+2\pi n\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Şunlukda,

$$N=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}=ctg\,\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\,\frac{\beta}{2}\cdot ctg\,\frac{\gamma}{2}$$

Bu deňlik $k=2n+1$ bolanda hem ş. m. subut edilýär.

Goý, indi

$$ctg\,\frac{\alpha}{2}+ctg\,\frac{\beta}{2}+ctg\,\frac{\gamma}{2}=ctg\,\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\,\frac{\beta}{2}\cdot ctg\,\frac{\gamma}{2}$$

deňlik ýerine ýetsin. Beýle diýmek $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$ aňlatma $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$ ululyklaryň kömegi bilen ýeke-täk aňladylynyp bilner diýildigidir.

Beýleki tarapdan

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+2\pi k \quad \text{ýa-da} \quad \frac{\pi-\alpha-\gamma}{2}=\frac{\beta}{2}+\pi k$$

deňlik ýerine ýetende $\quad ctg\,\frac{\beta}{2}=ctg\,\frac{\pi-\alpha-\gamma}{2}$

aşakdaky deňligi alarys:

$$ctg\,\frac{\alpha}{2}+ctg\,\frac{\pi-\alpha-\gamma}{2}+ctg\,\frac{\gamma}{2}=$$

$$=ctg\,\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\,\frac{\pi-\alpha-\gamma}{2}\cdot ctg\,\frac{\gamma}{2}.$$

Onda, bu deňligiň deňgüýçliligi subut edilenden soňra $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ bolanda we $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}=2$ deňlik ýerine ýetende

$$S=2r^2\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2} \quad \text{ýa-da} \quad \mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}=\frac{S}{2r^2} \qquad (2)$$

boljakdygy düşüniklidir. Şeýle hem,

$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}=\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}$ deňligi hasaba alyp we

$$\begin{cases}\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}=\frac{S}{2r^2}\\[2mm] \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}=2\end{cases}$$

sistemany çözüp alarys:

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4r^2}\left(S + \sqrt{S^2 - 32r^4}\right) \qquad (3)$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4r^2}\left(S - \sqrt{S^2 - 32r^4}\right) \qquad (4)$$

$$\left(S \geq 4\sqrt{2}\, r^2\right)$$

Kotangensleriň (2), (3), (4) bahalary (1) deňligi kanagatlandyrýar.

Beýleki tarapdan (2), (3), (4) deňlikler ýerine ýetende

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} > 0, \quad \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} > 0, \quad \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} > 0,$$

we $0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi,\ 0 < \gamma < \pi$ başgaça

$0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$

Emma $\alpha + \beta + \gamma = \pi + 2\pi k$, onuň üçin

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Şeýlelikde, $S \geq 4\sqrt{2}\, r^2$ deňsizligi kanagatlandyrjak üçburçlyk bar we

$$\alpha = 2arcctg\frac{1}{4r^2}\left(S + \sqrt{S^2 - 32r^2}\right), \quad \beta = 2arcctg\frac{S}{2r^2},$$

$$\gamma = 2arcctg\frac{1}{4r^2}\left(S - \sqrt{S^2 - 32r^2}\right).$$

2-nji mesele. Iki material nokatlar şol bir wagtda göniburçyň depesinden taraplary boýunça hereket edýärler. Olaryň biriniň tizligi 2 metr sekund beýlekisininňkiden uly. Hereket başlandan t sekuntdan soňra olaryň arasyndaky uzaklyk 10 metrden az bolmaz ýaly olar haýsy tizlik bilen hereket etmeli?

Çözülişi: Goý $x\ \frac{m}{s}$ - birinji nokadyň tizligi bolsun. Onda ikinjininňki $(x+2)\ \frac{m}{s}$ bolar. Olar t sekuntda degişlilikde *xt* we *t(x+2)* metr geçerler. Olaryň arasyndaky uzaklyk $\sqrt{t^2x^2+t^2(x+2)^2}$ bolar. Meseläniň şertine görä

$$\sqrt{t^2x^2+t^2(x+2)^2} \geq 10$$

ýa-da oňa deňgüýçli bolan

$$2t^2x^2+4t^2x+4t^2-100 \geq 0 \qquad (5)$$

deňsizligi çözmeli bolýarys. ***x***-ululyga görä üç agzanyň diskriminanty

$$\frac{1}{4}D = t^2(50-t^2) \qquad \text{bolar.}$$

Meseläniň şertine görä $t>0$ we $x>0$. Eger-de $50-t^2<0$ bolsa, onda $D<0$, bu ýagdaýda (5) deňsizlik islendik $x>0$ üçin dogry bolar. $\left(t>5\sqrt{2}\right)$.

Eger-de $50-t^2=0$ $\left(\mathrm{t}=5\sqrt{2}\right)$ bolanda $D=0$ bolar we (5) deňsizlik ýerine ýeter hem-de $100(x+1)^2 \geq 0$ görnüşe geler.

Eger-de $50-t^2>0$ $(0<t<5\sqrt{2})$ bolanda $D>0$ bolar. Onda $f(x)=2t^2x^2+4t^2x+4t^2-100$ iki köke eýedir:

$$x_1=\frac{1}{t}\left(-t-\sqrt{50-t^2}\right),\qquad x_2=\frac{1}{t}\left(-t+\sqrt{50-t^2}\right)$$

we $x_1<0$ bolar, onda

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq x_1 \end{cases}$$

sistema çözüwe eýe däldir. Onda mesele

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq \frac{1}{t}\left(-t+\sqrt{50-t^2}\right) \end{cases} \qquad (6)$$

sistemany çözmäge syrykdyrylýar.

Görnüşi ýaly, $f(x)=0$ deňlemäniň x_1 köki otrisateldir. Eger-de $0<t\leq 5$ bolsa, onda $x_2\geq 0$ we (6) ulgamyň çözüwi

$$x\geq \frac{1}{t}\left(-t+\sqrt{50-t^2}\right)$$

bolar.

Eger-de $5<t<5\sqrt{2}$ bolsa, onda $x_2\leq 0$ we (6) ulgamyň çözüwi $x\geq 0$ bolar.

Jogaby: $x \geq 0$ haçanda $5 < t < 5\sqrt{2}$ we $x \geq \frac{1}{t}\left(-t + \sqrt{50 - t^2}\right)$ haçanda $0 < t \leq 5$.

3-nji mesele. A nokatdan B nokada şol bir wagtda üç sany ulag ugradylar. Olaryň ikinjisiniň tizligi $a\frac{km}{sag}$, üçünjisiniňki $2a\frac{km}{sag}$ birinjisiniňkiden ýokary. Üçünji ulag B nokada baryp yzyna A tarap ugrady we birinji ulaga seredeniňden ikinji ulagy $\frac{3a}{70}$ sagat öň gördi. Eger-de üçünji ulagyň A-dan B-aralyga çenli sarp eden wagty san taýdan birinji ulagyň tizliginiň $0{,}1$ bölegine deň bolsa, onda birinji ulagyň tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi: Goý, 1-nji ulagyň tizligi $v\frac{km}{sag}$ bolsun. Onda 2-nji ulagyň tizligi $(v+a)\frac{km}{sag}$, 3-nji ulagyň tizligi $(v+2a)\frac{km}{sag}$ bolar. A we B aralygy 3-nji ulag ulag $0{,}1 \cdot v$ sagatda geçýär, onda bu aralyk $(v+2a)\cdot 0{,}1 \cdot v$ km deň bolar. $0{,}1 \cdot v$

sagatda 2-nji ulag $(v+a)\cdot 0{,}1\cdot v$ km ýol geçer we ondan B nokada çenli aralyk $0{,}1\cdot a\cdot v$ bolar. Onda 2-nji we 3-nji ulaglar $0{,}1va/\left[\left(v+a\right)+\left(v+2a\right)\right]=av/10(2v+3a)$ sagatdan soň duşuşarlar. 1-nji ulag $0{,}1\cdot v$ sagatda $0{,}1\cdot v^2$ km ýol geçer. Onuň B nokatdan daşlygy $(v+2a)\cdot 0{,}1\cdot v - 0{,}1\cdot v^2 = 0{,}2\cdot a\cdot v$ km bolar, $0{,}2\cdot a\cdot v/2(v+a)$ sagatdan 1-nji we 3-nji ulaglar duşuşarlar. Meseläniň şertine görä

$$\frac{av}{10\left(v+a\right)}-\frac{av}{10(2v+3a)}=\frac{3a}{70}.$$

Meseläniň şertine görä $a>0,\ v>0$. Onda alnan deňleme $v^2-av-9a^2=0$ deňlemä deňgüýçli bolar. Soňky deňleme iki köke eýedir, olaryň kiçisi otrisateldir.

Jogaby: 1-nji ulagyň tizligi $v=0{,}5a\left(1+\sqrt{37}\right)$ km/sag.($a>0$).

4-nji mesele. Tōwerek boýunça gapma-garşylykly ugur boýunça iki jisim hereket edýärler. 1-nji jisim deňölçegli çyzykly $v\ sm/s$ tizlik bilen, 2-nji jisim deňölçegli tizlendirlen $a\ sm/s^2$ tizlenme bilen hereket edýärler. Olaryň ikisi hem E nokatdan ugraýar we bu nokatda 2-nji jisimiň tizligi nola deňdir.

Eger-de olaryň hereketinde ikinji duşuşyk A nokatda bolsa, onda olaryň birinji duşuşygy haýsy wagtda bolupdyr?

Çözülişi: Eger-de hereket başlanandan ikinji duşuşyk t sekuntda bolan bolsa, onda $v \cdot t = a \cdot t^2 / 2$ we $t > 0$ bolmagy üçin $t = 2v / a$ (sek).

Goý, birinji duşuşyk t_1 sekuntda bolsun. Onda 1-nji jisim $v \cdot t_1$ sm, 2-nji jisim $\frac{at_1^2}{2} + vt_1 = vt = v \cdot \frac{2v}{a} = \frac{2v^2}{a}$ bolar.Bu deňlemäni ýönekeýleşdirip,

$$a^2 t_1^2 + 2avt_1 - 4v^2 = 0$$

kwadrat deňlemä geleris. Onuň iki hakyky kökleri bardyr.

Jogaby: $a > 0,\ v > 0$ bolanda $t_1 = \frac{v}{a}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ (sek.).

Edebiýat

1. Л. И. Шарова.Уравнения и неравенства. Киев. "Высщая школа", 1981г.
2. Г. А. Ястребинецский. Уравнения и неравенства содержащие параметры. Москва. Просвещение, 1972г.
3. Г. А. Ястребинецский. Задачи с параметрами. Москва. Просвещение, 1972г.
4. Г. Р. Олехник и другие. Нестандартные решения неравенств и уравнений. Москва. МГУ, 1991г.
5. Türkmenistanyň orta mekdepleriniň algebra we geometriýa boýunça okuw kitaplary.

Mazmuny

Işanguly Rozyýew, Çary Halmyradow,

Muhabbat Haýdarowa

PARAMETRLI DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Redaktor