TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Ö.G.Hudaýberenow, N.Nurullaýew

TEHNIKI WE YKDYSADY MESELELERDE MATEMATIKI MODELIRLEME USULY

Aşgabat 2010

Hudaýberenow Ö.G., Nurullaýew N. Tehniki we ykdysady meselelerde matematiki modelirleme usuly. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: 2010. – 140 sah.

Okuw kitaby Türkmen politehniki institutynda öwrenilýän hünärleriň okuw meýilnamalaryndaky matematiki modelirlemäge degişli dersleriň okuw maksatnamalaryna laýyklykda ýazyldy.

Okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň inžener-tehniki hünärleriniň talyplary üçin niýetlendi.

SÖZBAŞY

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW:

Biz häzir Türkmenistanda milli bilim ulgamynda düýpli özgertmeler geçirmäge girişdik. Şol özgertmeleriň baş maksady - türkmen ýaşlaryna dünýäniň iň ösen talaplaryna laýyk gelýän bilim ulgamyny elýeterli etmekden ybaratdyr.

Hormatly Prezidentimiziň bilim, ylym ulgamyna degişli kabul eden kararlaryna laýyklykda Türkmenistan ýurdumyzda milli bilim ulgamyny kämilleşdirmek boýunça düýpli özgertmeler geçirilýär.

Ýokary okuw mekdeplerinde dünýäniň iň ösen talaplaryna laýyk gelýän bilimli, kämil hünärmenleri taýýarlamak boýunça netijeli işler alnyp barylýar.

Geljekki inženerleriň hünär taýýarlygynda ýokary matematikanyň esasy düşünjeleriniň, esasan hem matematiki modelirlemäge degişli düşünjeleriniň ähmiýeti örän uludyr. Häzirki zaman önümçiligi ýokary tehniki taýýarlygy talap edýär. Önümçilikdäki işleri dogry guramak, olary kämilleşdirmek, amatly çözüwleri az çykdajylar bilen kesgitlemek, mümkin bolan heläkçilikleriň öz wagtynda öňüni almak we şuňa meňzeş köp meseleler matematiki modelirlemegiň üsti bilen çözülip bilner.

Okuw kitaby Türkmen politehniki institutynda öwrenilýän hünärleriň okuw meýilnamalaryndaky matematiki modelirlemäge degişli dersleriň okuw maksatnamalaryna laýyklykda ýazyldy.

Okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň inžener-tehniki hünärleriniň talyplary üçin niýetlendi.

1. GIRIŞ

Matematika, dörän gününden başlap, tebigaty öwrenmegiň hemmeler tarapyndan ykrar edilen guraly bolup hyzmat edýär. Matematikanyň ulanylmagy adaty bolup galan ýaýlalardan başga-da onuň ulanylýan ýaýlalarynyň sanyna täze-täze ýaýlalar goşulýarlar. Olar sanardan köp: ykdysadyýet, ekologiýa, sosialogiýa, statistika we ş. m. olara mysal bolup bilerler. ˝Matematiki model˝ häzirki zamanda durmuş meselelerini çözmekde diýseň pugta orun tutdy. Onuň ulanylýan ýaýlasy diýseň giň. Özi hem, geň galmaly ýagdaý, matematiki modelirleme öwrenilýän hadysa barada maglumatyň göni tejribe arkaly alyp bolmagynyň örän kyn ýa-da mümkin däl bolan ýagdaýynda hem giňden ulanylýar. Bu örän geň zat.

Eger öwrenilýän hadysa barada maglumat az bolsa, hadysa ýeterlik derejede öwrenilmedik bolsa, onda hiç bir matematiki formalizasiýa barada gürrüň edip bolmajak ýaly bolýar. Emma şeýle hallarda hem oňat düzülen matematiki modelleriň haýrynyň diýseň ähmiýetli bolýanyny görse bolýar. Mysal üçin, otnositellik nazaryýetiniň döremegi we onuň kanunlarynyň soňra eksperimental tassyklanmagy, täze planetanyň (Neptun, Pluton) barlygynyň nazary usul bilen aýdylmagy we onuň soňra gözleg bilen tapylmagy we ş. m. muňa mysal bolup bilerler.

Şu ýerde esasy iki zady bellemek zerur. Birinjiden, islendik tejribe haýsy hem bolsa bir teoretiki konsepsiýa esaslanyp geçirilýän bolanda amatly bolýar. Ikinjiden, islendik nazaryýet hemişe tejribelere esaslanýar. Mysal üçin, geliosentrik nazaryýetiniň ýüze çykmagy Güni we planetalary gönüden--göni gözegçilik etmegiň esasynda açyldy. Indi model barada gürrüň edeliň.

Model obýekti öwrenmegi ýeňilleşdirmek üçin, ol barada doly maglumatlary almak üçin, obýektiň tebigy berlişinden üýtgeşigräk görnüşde gurnalýan bir guraldyr. Ol dürli görnüşlerde bolup biler. Ol öwrenilýän obýektiň başga masştabdaky nusgasy (göçürmesi) bolup biler. Ol öwrenilýän obýektiň esasy häsiýetlerini abstrakt görnüşde häsiýetlendirip biler. Modeller köp hili bolýarlar. Olar, mysal üçin:

1. Tebigatda bolup geçýän hadysalara düşünmek üçin gurnalýar.

2. Öwrenilýän obýekte uýgunlaşmak üçin gurnalýar.

3. Prognoz üçin gurnalýar.

4. Tejribe geçirmek üçin gurnalýar.

5. Öwrenilýän obýektiň giňişlikde we wagt ölçeginde özüni alyp barşyny öwrenmek üçin gurnalýar.

6. Ykdysadyýetde we başga ýagdaýlarda amatly ýollary saýlap almak üçin gurnalýar we ş. m.

Mysal üçin, modeller aşakdaky görnüşlerde bolup bilerler:

1. Gurulýan desganyň üýtgedilen masştabdaky hereket edýän modeli (uçaryň modeli, zawodyň konweýeriniň modeli we ş. m.).

2. Analog modeller (medisinada ulanylýan dürli gurallar we ş. m.).

3. Abstrakt modeller.

Bu soňky model barada biz giňden gürrüň ederis. Umuman, modelirlemek diýmek modelleriň üsti bilen öwrenilýän obýekt barada täze düşünjeleri tapmak diýmekdir. Modeliň takyklygynyň pes bolmagy mümkin. Bu ýagdaýda modeli öwrenip alnan netijeleri tebigy tejribeleriň netijeleri bilen deňeşdirip, ony kämilleşdirýärler. Gerek bolsa bu deňeşdirme işini (prosedurany) köp gezek gaýtalamaly bolmagy hem mümkin. Adamzat taryhynda, onuň ösüşi üçin ähmiýetli bolan dürli-dürli modellere gabat gelse bolýar. Käbir hallarda düzülen modelleriň nätakyk ýa-da düýbünden nädogry bolýan wagtlary hem bolýar.

Alymlar Güne, Ýere, Aýa we planetalara gözegçilik etmek bilen olaryň hereketlerini öwrenipdirler. Şonuň esasynda köp ýyllar dogry hasap edilen planetalaryň we Günüň Ýeriň daşyndan aýlanýany baradaky geosentrik model ýüze çykypdyr. Bu modeliň ýalňyşlygy diňe köp ýüz ýyllyklar geçenden soň Kopernigiň geliosentrik modeliniň döremegi bilen subut edilýär. Ýene bir mysal. Tebigatda bolup geçýän hereketleriň sebäbi näme diýen örän möhüm sowal gadymy döwürde ýüze çykypdyr. Beýik grek alymy Aristotel onuň sebäbiniň güýç bolýanyny tassyklapdyr. Emma bu dogry netije bilen bilelikde ol jisime täsir edýän güýç, onuň tizligine proporsionaldyr diýen ýalňyş modeli öňe sürüpdir. Bu model hem diňe G. Galileý tarapyndan inkär edilýänçä köp ýüz ýyllyklarda dogry hasap edilipdir. Elbetde, beýle modelleriň adamzadyň ösüşini togtadýanlygy düşnükli, olaryň ägirt zyýan getirenligi hem düşnüklidir. Onuň tersine, dogry gurnalan modeliň ösüşe bolan položitel täsiriniň uly bolýanyny Nýutonyň Bütin dünýä dartyş kanunynyň açylmagy bilen delillemek bolar.

2. MODELIRLEMEDE ÝÜZE ÇYKÝAN MESELELER

Modelirleme örän jogapkärli mesele. Ýokarda getirilen mysallardan görnüşi ýaly, käbir ýalňyş düzülen modeliň zyýanynyň diňe bir adam üçin däl, diňe bir gural üçin däl, eýsem jemgyýet üçin getirjek zyýanynyň örän uly bolmagy mümkin. Şol sebäpli modelirleme meselesine, ylaýta-da ykdysadyýet, jemgyýet bilen bagly meselelerde örän jogapkärli çemeleşmeli; Umuman, islendik modele hem şeýle çemeleşmeli, sebäbi ýalňyş düzülen model düzüjini, ulanýany gelşiksiz ýagdaýlara salmagy mümkin. Iň erbedi hem düşünmeýän adamlarda matematika bolan amatsyz pikirleriň hem döremegi mümkin. Elbetde, bu ýolberilmesiz ýagdaýlardyr.

Model düzmäge synanyşýanlara käbir umumy görkezmeleri teklip etse bolar.

1. Seredilýän obýekt barada ýeterlik maglumatyň ýoklugy ony kän çäklendirmeli däldir. Muňa Nýutonyň Bütin dünýä dartyş kanuny mysal bolup biler.

2. Düzüji öwrenilýän obýekte meňzeş obýektler üçin düzülen modeller bilen tanyş bolmaly. Olary düýpli öwrenmeli.

3. Düzüji özi üçin haýsy model ″gowy″ diýen sowala jogap tapmaly bolar.

4. Düzüji öwrenilýän obýekte degişli meseläni matematikanyň diline geçirmegi başarmaly, sebäbi modelleriň işinde iň arzany we iň ähmiýetlisi matematiki modeldir.

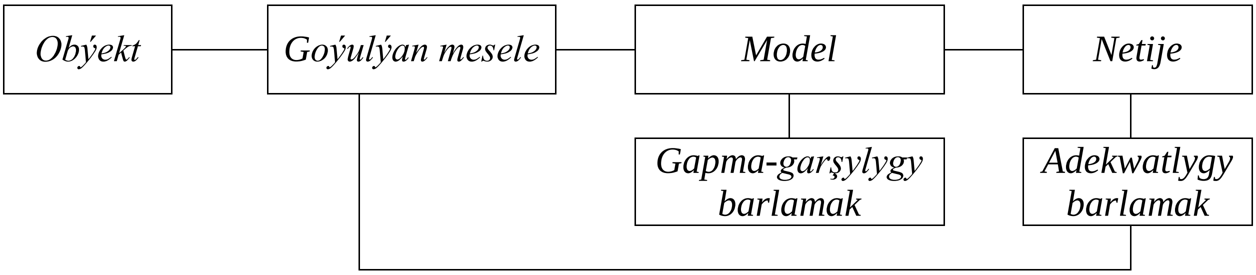
Model düzmezden ozal öwrenilýän obýekt düýpli öwrenilmelidir. Düzüji obýektiň haýsy kanunlara, prinsiplere laýyklykda öz işini dolandyrýanyny anyklamalydyr. Ol kanunlary we prinsipleri doly öwrenmelidir we olary ulanyp bilmelidir. Mysala ýüzleneliň. Bir uly massiwi suwarmak üçin ulanylýan kanalyň başlanýan ýerinde wagt birliginde Q m^3 suw goýberilýär diýeliň. Suwy massiwe paýlaýan gatlanyň ýanynda ölçelende wagt birliginde kanalyň kese kesiginden Q_1 m^3 suw geçýär diýeliň. $(Q–Q_1)$ m^3 suwuň gatla gelýänçä wagt birligindäki ýitgisi bolar. Şol mukdaryň näçesi bugarma bilen bagly, näçesi syzma bilen bagly diýen sowala jogap bermeli bolsun. Bu ýerde model düzüji köp kanunlary öwrenmeli bolýar. Suwuň kanaldan syzma kanuny nähili? Syzma kanuny kanalyň suwunyň düzümine baglymy? Syzma kanuny kanaly gurşaýan topragyň düzümine baglymy? Bu baglylyklary nähili ölçemeli? Kanaldaky suw nähili kanuna laýyklykda bugarýar, bugarma suwuň düzümine baglymy, kanalyň ýerleşýän ýerine (şirota) baglymy, bugarma günüň radiasiýasy bilen nähili baglanyşykda? Ine, şular ýaly we şulara meňzeş sowallaryň onlarçasyny anyklamaly bolýar.

Goý, model düzüldi diýeliň. Birinji ýüze çykýan sowal – düzülen model gapma-garşylykly bolaýmasyn diýen sowal, ýagny modeliň çözüwi ýok bolmagy mümkin. Bu iki halda mümkin: ýa-ha obýekt barada goýlan mesele ýalňyş mesele, ýa-da model ýalňyş düzülen bolmaly. Diýmek, bu iki ýagdaý başda barlanylmaly. Goý, model barlandy, onuň çözüwi bar diýeliň. Modelden alnan netijeler goýlan meseläniň jogabymy ýa-da dälmi diýen sowal gelip çykýar. Bu iň möhüm zatlaryň biri. Bu hökmany suratda barlanmalydyr, sebäbi modelden alnan netijäniň hakykatdan daş bolmagy mümkin. Bu meselä modeliň goýlan mesele deňgüýçliligi ýa-da adekwatlygy diýýärler. Diýmek, adekwatlyk hökmany barlanmaly mesele.

Goý, adekwatlyk barlandy diýeliň, ýöne öwrenilýän obýekt bilen geçirilen tejribeleriň esasynda alnan netijeler bilen modelden alnan netijeleriň gabat gelşi ýeterlik gowy däl boldy diýeliň. Bu ýagdaý düzülen modeliň ýeterlik derejede dogry düzülmändigini aňladýar. Diýmek, modeli täzelemeli, ýagny, obýekti düýpli öwrenmek bilen modele täzelikler girizmeli.

Indi ýokardaky barlaglar täzeden başlanýar: modeliň gapma-garşylykly däldigi barlanýar, adekwatlygy barlanýar, model täzelenýär we ş. m. Ahyrda kanagatlanarly model alynýança şu sikl dowam etdirilýär.

Aýdylanlary ýokarda getirilen kanaldan suw ýitgisi baradaky meselede düşündireliň. Goý, düzülen suw ýitgisini anyklaýan model gapma-garşylykly boldy diýeliň. Kanaldan suw ýitgisiniň barlygy, onuň bir böleginiň syzma bilen, beýleki böleginiň bugarma bilen baglylygy dogry. Diýmek, goýlan mesele dogdy. Onda bu ýerden modeliň ýalňyş düzülendigi gelip çykýar. Goý, model düzedildi diýeliň. Modeli çözeliň we netijeler alalyň. Mysal üçin, ýitgi diňe bugarma bagly diýen netije bolsun. Bu ýagdaý sübheli bolýar. Diýmek, adekwatlylyk ýok bolýar. Goý, bu ýagdaý hem düzedildi diýeliň (model düzedilýär). Soňky düzedilen modelden alnan netijeleri tejribe arkaly kesgitlenen bugarma baradaky netijeler bilen deňeşdirýärler. Eger gowy gabat gelse (bu ″gowy″ gabat gelme meselesi modelirleýji tarapyndan çözülen bolmaly), onda model gowy diýse bolýar. Eger ýene-de gabat gelşi kanagatlanarly bolmasa, onda modeli täzelemeli bolýar we ýokarky barlaglary ýene-de geçirmeli bolýar. Ýokarda aýdylanlary aşakdaky shema boýunça aňladýarlar.



Model düzmäge nähili çemeleşmeli?

3. MATEMATIKI MODEL

Model düzmek meseläni anyklamakdan başlanýar. Köp halatlarda obýektiň gurşap alýan obýektler bilen çylşyrymly aragatnaşygy meseläni anyk formulirlemäge päsgel berýär. Şol sebäpli meseläni anyk çäklendirmek köp wagt talap edýär we düzüjiden köp zatlardan başy çykmagyny talap edýär. Bularyň iň ýönekeýi öwrenilýän obýekt bilen ýa-da şoňa meňzeş ýagdaýlar bilen iş salyşýanlar bilen gürrüňdeş bolmak, obýekte degişli materiallary ýygnamak we öwrenmek bolýar. Ikinji bir mesele öwrenilýän obýektiň özboluşly häsiýetlerini kesgitlemekden, saýlap bilmekden, olary tertipleşdirmek we olaryň içinden esasylary hem-de esasy dälleri seljermekden we esasy häsiýetleriň özara baglanyşyklaryny anyklamakdan durýar. Ondan başga-da, gerek bolsa, käbir häsiýetleri ideallaşdyrmaly bolýar. Mysal üçin, köp hallarda ýapdan akýan suw öwrenilende akym laminar akym (bulanmaýan akym) hasap etse bolýar; jisimiň hereketi öwrenilende howanyň garşygyly ýok hasap etse bolýar; jisimiň üst boýunça hereketi öwrenilende üstüň sürtülmesi ýok hasap etse bolýar we ş. m.

Berlen obýekti doly kesgitleýän faktlaryň esasylaryny matematiki düşünjeler bilen çalşyrmak we olaryň arasyndaky baglanyşyklary tapmaklyga matematiki model düzmek diýilýär. Bu mesele köp wagty we örän takyk bolmagy talap edýär. Matematiki model köp görnüşlerde bolup biler. Fiziki ýagdaýlar öwrenilende model, esasan, differensial deňlemeler görnüşinde bolýar. Ykdysady meseleler öwrenilende model algebraik deňlemeler ýa-da deňsizlikler ulgamlary görnüşinde bolýar we ş. m. Nähili görnüşde bolsa-da, modeliň gapma-garşylyksyz bolmagy barlanmalydyr. Mysal üçin, model differensial deňlemeler görnüşinde bolsa, onda onuň üçin barlyk we birlik teoremalarynyň dogrudygy anyklanmalydyr, model algebraik deňlemeler ulgamy görnüşinde bolsa, onda onuň çözüwiniň barlygy, ýeke-täkdigi barlanmalydyr.

Kyn meseleleriň biri hem adekwatlygy barlamak bolýar. Şol bir modeliň bir ýagdaýda öwrenilýän obýekte adekwat, beýleki ýagdaýda beýle däl bolmagy mümkin. Mysal üçin, matematiki maýatnigiň modelinden alnan çözüw wagtyň dowamynda öçmeýän yrgyldyny berýär diýeliň. Emma tebigatda ol beýle däl. Wagtyň geçmegi bilen yrgyldy öçýär. Diýmek, şu model maýatnigiň uzak wagtdaky yrgyldysy öwrenilende adekwat bolmaýar. Eger-de biz maýatnigiň az wagtdaky yrgyldysyny öwrenýän bolsak, onda bu model öwrenilýän herekete adekwat bolýar. Şol sebäpli, adekwatlyk meselesi öwrenilende şertler doly kesgitlenmelidir, ýagny ýokarky meselede giňişligiň haýsy böleginde, wagt okunyň haýsy böleginde adekwatlyk barlanýandygy anyklanmalydyr.

Ondan başga-da, model düzülende öňden belli gatnaşyklar, kanunlar we obýekt bilen bagly ululyklar (mysal üçin, maýatnigiň ýüpüniň uzynlygy, massasy we ş. m.) ulanylýarlar. Eger şol gatnaşyklardyr ululyklaryň kesgitleniş takyklygy kiçi bolsa, elbetde, modeliň hem takyklygy uly bolup bilmez. Mysal üçin, ýokarda agzalan meselede maýatnigiň agramyny örän nätakyk kesgitläp, modeli çözüp alnan hereket kanunynyň örän takyk bolmagyny talap edip bolmaz.

Beýleki tarapdan, model düzülende köp hallarda çarhda sürtülme ýok, ýüpüň agramy ýok, uzalmaýan ýüp, ideal gaz, şeppeşiksiz suwuklyk ýaly düşünjeler ulanylýar. Elbette tebigatda ideal gaz hem ýok, şeppeşiksiz suwuklyk hem ýok, süýnmeýän ýüp hem ýok. Şeýle-de bolsa, köp halatda şu düşünjeleri ulanyp düzülen modeller köp ýagdaýy anyklamak üçin amatly bolýarlar. Garaz, model düzmek aňsat iş däl. Ol, esasan, düzýäniň tejribesine bagly bolýar. Mysal üçin, düzülen modelde tükeniksiz kiçi ululyklar gabat gelýän bolsa, tejribeli model düzüji ýokary tertipli tükeniksiz kiçileri taşlap, köp ýagdaýlarda örän amatly modelleri düzýär, ýa-da obýekte degişli käbir faktlaryň täsiriniň ujypsyzlygyny anyklap, olary göz öňünde tutman model düzmek bilen ony has ýönekeýleşdirip bilýär we ş. m. Indi matematiki modelirlemegiň giňden ulanylýan ugurlaryna seredeliň.

1. Matematiki model, köp ýagdaýda, hasaplama tejribelerini geçirip, ediljek hereketleriň täsirini öňünden aýtmak üçin ulanylýar. Bu hili tejribeler, umuman, obýektiň özi bilen geçirip boljak tejribeleriň mümkin däldigi ýa-da örän gymmat düşýän halynda geçirilýär. Mysal üçin, her bir adamyň endamyndaky ganyň mukdary näçe diýen mesele, zawodlarda gurulýan konweýerleriniň işleýşini barlamak baradaky mesele hem muňa mysal bolup biler.

2. Matematiki modeli täze sistemalaryň işini öwrenip, olary özgertmek ýa-da gowulaşdyrmak meselesinde hem ulanýarlar. Bu ýagdaý, köplenç, ykdysadyýet bilen baglanyşykly meselelerde ýüze çykýar. Mysal üçin, nähili edip goýberilýän desgalaryň hilini gowulandyrmaly; goýberilýän desgalaryň sanyny azaltmazdan we hilini peseltmezden zawodyň umumy çykdajysyny nähili edip azaldyp boljak.

3. Täze usulyň, täze ideýanyň, geljekde berjek artykmaçlyklaryny öňünden görkezmek üçin hem matematiki model ulanylýar. Bu hili mesele islendik

önümçilik edaralarynda, dolandyryş edaralarynda, ylmy institutlarda ýüze çykyp biler.

4. Matematiki model prognoz üçin we taslamalar düzmek üçin iň amatly gurallaryň biridir.

Ýyldan-ýyla matematiki modelirleme bilen çözülýän meseleleriň sany artýar. Bu matematikanyň ösmegi bilen, onuň usullarynyň güýçlenmegi bilen we täze şahalarynyň döremegi bilen baglydyr. Matematika näme, ol durşuna hyýaly ylymmy, hakykata bolan gatnaşygy nähili diýen filosofiki soraglar hakykatda matematiki model näme, onuň hakykat bilen baglanyşygy nähili we matematiki modeller nähili düzülýär diýen soraglara syrygýar.

EHM-iň döremegi matematiki modeliň ulanylýan ýaýlasyny has hem giňeltdi. Asla matematiki modelirleme ulanylmaýan ylym pudagy ýok diýse bolar. Matematikanyň ulanylýan ýerleri hiç bir pikiriňe gelmejek ýerlerde döreýär. Oňa matematiki lingwistika, matematiki geografiýa, oýunlar nazaryýetiniň matematiki esasy we başgalar mysal bolup bilerler. Matematiki statistika, ykdysady meseleleri çözmäge gönükdirilen çyzykly we çyzykly däl programmirleme, ygtybarlyk nazaryýeti, matematiki fizika ýaly ugurlara indi matematikanyň şahalary hökmünde garasaň bolar.

Adatça, matematiki modeliň düzülmeginiň başlangyjy bolup tejribeçiniň öňünden çykýan aýratyn bir ýagdaý bolýar. Mysal üçin, köpri gurýan injeneriň öňünde guruljak köpri ol köprüden geçiriljek agyrlyklary çekermikä, köprüniň ömri näçeräk boljak we ş. m. meseleler durýar. Desgalary bejerýän edaranyň başlygynyň öňünde nähili edip nobatda duran bejeriljek desgalaryň sanyny azaltmaly we ş. m. meseleler durýar. Model düzmek kyn mesele. Bu barada öň hem aýdylypdy. Umuman, model birnäçe häsiýetlere eýe bolmaly:

1. Ol modeli ulanýana düşnükli bolmaly.

2. Gerek we ulanyp boljak netijeleri bermeli.

3. Aňsat özgerdip, täzelikleri girizip bolýan bolmaly.

4. Gaty gymmat bolmaly däl.

5. Takyklygy ýeterlik derejede bolmaly.

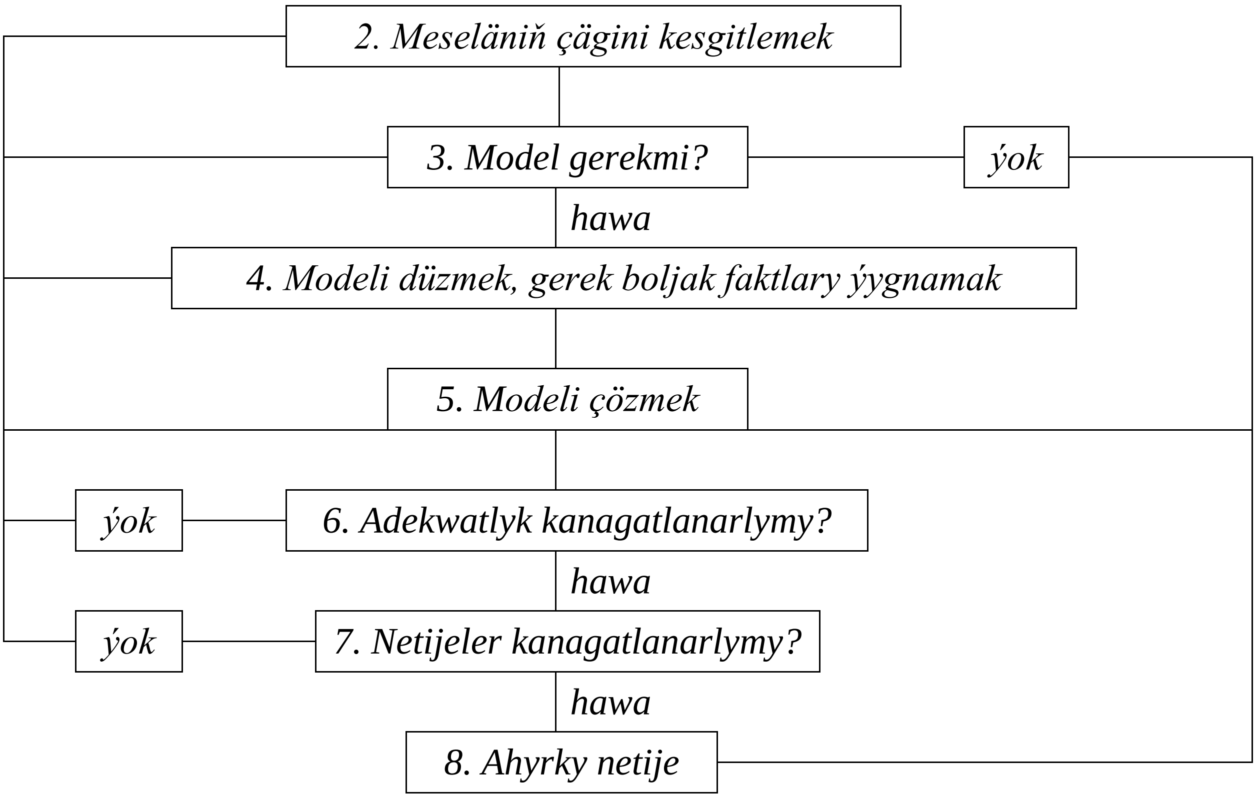
Şu talaplara laýyklykda modeli düzmegiň we ulanmagyň ýoluny 1-nji blok-shemada görse bolar.

Shemanyň ulanylyşyny bir mysalda görkezeliň.

Öwrenmeli obýekt – dükanda kassanyň öňünde alyjylaryň garaşma nobaty.

1. Obýekt bilen bagly çözmeli meseläniň kesgitlenilişi.

1. Obýekt bilen bagly çözülmeli meseläniň kesgitlenilişi



1-nji blok-shema

Gyzyklandyrýan mesele:

a) Alyjynyň nobatda garaşmaly wagtynyň we kassiriň oňa hyzmat edýän wagtynyň jeminiň ortaça bahasy;

b) Kassiriň boş durýan wagtynyň iş wagtyna bolan göterim gatnaşygy.

2. Meseläniň çägini kesgitlemek.

Berlen: alyjylaryň yzygiderli gelmeginiň wagty 1 we 10 minut arasynda deňölçegli paýlanan. Alyja kassiriň hyzmat edýän wagty 1 we 6 minut arasynda deňölçegli paýlanan.

3. Model düzmek gerekmi? – gerek.

4. Model düzmek. 10 sany tegek alyp olary 1-den 10-a çenli belgilemeli. Alty granynda 1-den 6-a çenli san ýazylan kubjagazy almaly. Birinji ädim. Tegekleri bir gaba salyp we gowy garyşdyryp içinden tötänden birini almaly. Tegegiň belgisi kassanyň ýanyna öňki alyjynyň gelen wagty bilen ondan soň gelen alyjynyň kassa baran wagtynyň tapawudyny görkezýär diýip kabul edeliň. Soňra kubjagazy oklalyň we onuň ýokarsyndaky sany belläliň. Ol sana kassa gelen soňky alyja kassiriň hyzmat edýän wagty hökmünde garalyň.

5. Modeli çözmek.

Bu tejribäni köp gezek gaýtalap wagtlar hatarlaryny alarys. Olaryň biri yzly-yzyna gelýän alyjylaryň arasyndaky wagt interwallaryny berse, ikinjisi degişli alyjynyň kassir tarapyndan hyzmat edilýän wagtlarynyň hatary bolar.

6. Adekwatlygy barlamak. Alnan san hatarlaryny derňemek we tejribäniň netijesi bilen deňeşdirmek. Mysal üçin, 20 sany alyjy geldi diýeliň. Olaryň ortaça garaşan wagtyny we ortaça hyzmat ediliş wagtyny hasaplalyň (bu biziň obýekt bilen geçiren tejribämiz bolar). Soňra tegekleri gapdan 19 gezek çykaryp (her gezek öňki çykarylan tegek gaba gaýtarylýar we gapdakylar gowja garyşdyrylýar) biz alyjylaryň yzly-yzyna gelýän wagt aralyklarynyň hataryny, kubjagazy 20 gezek taşlap bolsa olaryň kassir tarapdan hyzmat ediş wagtlarynyň hataryny alarys. Analiziň netijesinde alyjynyň kassanyň ýanynda geçiren wagtynyň ortaça bahasy 3-4 minut, kassiriň biperwaý geçirýän wagtynyň göterimi 47% bolup çykýar. Bu modelden alnan çözüw bolýar. Bu çözüw tejribede alnan çözüw bilen deňeşdirilip adekwatlyk barlanýar.

Barlag birnäçe görnüşde geçirilýär.

1. Modeliň birinji ýakynlaşmada dogrulygy barlanýar. Adatça, modele girýän parametrleriň çäk bahalary berlip, alnan netijäniň manysy barlygy barlanýar. Biziň modelimizde bu alyjylaryň sany örän az we örän köp diýen ýagdaýlar bolýar.

2. Adekwatlygy barlamagyň ikinji usuly modeliň başky çäklemeleri kanagatlandyrýanlygyny barlamakdan durýar. Biziň mysalymyzda ol iki barlaga syrygýar. Birinjiden – tegekleri gapdan yzygiderli çykaryp alnan sanlar [1, 10] kesimde deňölçegli paýlanan tötän ululygyň bahalaryny çalşyryp bilermi diýen sowal. Ikinjiden – sanly kubjagazy oklap alnan sanlar [1, 6] kesimde deňölçegli paýlanan tötän ululygyň bahalaryny çalşyryp bilermi diýen sowal. Model düzüji bu sowallara jogap bermegi başarmaly.

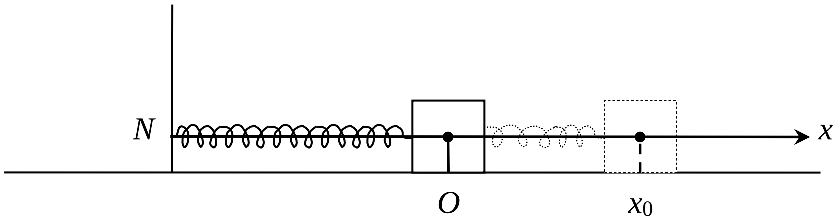
Indi biz okyjyny öňden belli modeller bilen we olardan gelip çykýan täsin netijeler bilen tanyşdyrmakçy. Bu modeller mehanikanyň, fizikanyň, ähtimallyklar nazaryýetiniň we beýleki ylymlaryň belli bolan kanunlaryna we prinsiplerine esaslanýarlar. Olar barada aýratyn durup geçmän, olaryň model düzülende ulanylýanlary bilen gabat gelýän ýerinde tanyşdyrarys.

4. JISIMIŇ TEKIZ ÜSTDÄKI YRGYLDYSY BARADA MESELE

Tekiz üstde kub görnüşinde massasy m_0 bolan jisim ýatyr. Onuň bir granynyň diagonallarynyň kesişme M nokadynda pružinanyň bir ujy berkidilen. Pružinanyň beýleki ujy şol tekizlikde dikilen sütüniň M nokat bilen deň beýiklikde bolan N nokadyna berkidilen (1-nji surat).

Suratda x oky M we N nokatlaryň üstünden geçirilen.

Başlangyç ýagdaýda jisim hereketsiz dur we onuň agyrlyk merkezi x=0 nokat bilen gabat gelýär diýeliň. t=0 pursatda jisimiň agyrlyk merkezi x_0 nokat bilen gabat geler ýaly edip, ony x oky boýunça dartýarlar we goýberýärler. **Mesele**



1-nji surat

jisimiň yrgyldama kanunyny tapmakdan durýar. Bu meseläni çözmek üçin bize köp maglumatlar gerek bolar. Olar: jisimiň massasy – m_0, pružinanyň maýyşgaklyk güýji F_1, jisimi gurşap alýan howanyň onuň hereketine etjek täsiri F_2, jisimiň tekiz üstdäki hereketi bilen bagly sürtülme güýji F_3 we başga-da birnäçe jisimiň hereketi bilen bagly ýagdaýlar. Mysal üçin, howanyň temperaturasynyň täsiri, pružinanyň maýyşgaklyk güýjüniň wagta baglylygy, ýeriň aýlanmasynyň täsiri we başgalar. Bu meseläni matematiki modelirleme usuly bilen çözjek bolalyň. Ilki bilen ýönekeýje modelden başlalyň. Çözmeli mesele ýokarda formulirlendi. Indi model düzmegiň kanuny boýunça meseläni çäklendirmeli:

Birinjiden, tekiz üst ýylmanak we şonuň esasynda jisimiň tekizlige bolan sürtülme güýji ýok hasap edilýär. Howanyň herekete täsiri ujypsyz diýip hasap edilýär we göz öňünde tutulmaýar. Pružinanyň maýyşgaklyk güýji wagta bagly däl, howanyň temperaturasy üýtgemän durýar hasap edilýär.

Ikinjiden, jisimiň hereketine diňe onuň massasy we pružinanyň maýyşgaklyk güýji täsir edýär hasap edilýär we beýleki ýagdaýlaryň täsiri göz öňünde tutulmaýar. Jisimiň $t=0$ pursatdaky tizligi nola deň hasap edilýär. Jisim massasy agyrlyk merkezinde ýygnanan nokat hasap edilýär. Biz meseläni çäklendirdik. Model düzmek üçin gerek kanunlar: olaryň birinjisi Nýutonyň ikinji kanuny – $ma=F$, m –jisimiň massasy, a –tizlenmesi, F –täsir edýän güýçleriň jemi; ikinjisi pružinanyň maýyşgaklyk güýji F_1. Gukyň kanunyna görä $F_1=-kx$, bu ýerde k – koeffisiýent, x – pružinanyň uzalmasy.

Modeli düzeliň. Hereket x oky boýunça bolsun. Onda $F=F_1$ bolýar. Bize gerek ululyk jisimiň agyrlyk merkeziniň t pursatda tutýan orny. Goý, ol ululyk $x=x(t)$ formula bilen berildi diýeliň. Çäklenmelere görä $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$ bolmaly. Onda jisimiň tizliginiň $\vartheta=\dot{x}(t)$ boljagy, tizlenmesiniň $a=\ddot{x}(t)$ boljagy düşnükli.

Indi biz modeli düzmäge taýýar. $ma=F_1$ deňlikde ululyklaryň bahalaryny ýerinde goýup, alarys:

$$m_0\ddot{x}(t)=-kx(t)\,, \tag{1}$$

$$\dot{x}(0)=0\,, \tag{2}$$

$$x(0)=x_0. \tag{3}$$

(1), (2), (3) matematiki meselä garalýan fiziki prosesiň goýlan çäklemelerdäki matematiki modeli diýilýär. (1), (2), (3) meseläni çözüp, alarys:

$$x(t)=x_0\cos\omega t,\quad \omega^2=\frac{k}{m_0}. \tag{4}$$

Diýmek, jisimiň agyrlyk merkezi (4) kanuna laýyklykda hereket etmeli bolar. Mesele birinji ýakynlaşmada sözüldi. Bu formulanyň x_0 kiçi bolanda, t çäkli bolanda, tekiz üst ýeterlik ýylmanak bolanda hakykata golaý hereketi berýänligini tejribe üsti bilen barlaýarlar. Diýmek, modeliň goýlan meselä adekwatlygy birinji ýakynlaşmada bar.

Biz uzak wagtyň geçmegi bilen hereketiň gitdigiçe peseljegini we ahyrda durjagyny tejribelerden bilýäris. Diýmek, bu model, wagt ýeterlik uly bolanda, goýlan fiziki meselä adekwat bolmaýar. Şol sebäpli, model uzak wagt dowamynda hem adekwat bolar ýaly oňa düzedişler girizmeli bolýar. Model düzülende edilen çäklemeleriň biri tekiz üstüň absolýut ýylmanaklygydyr. Bu çäkleme durmuşda hiç wagt dogry bolmaýar. Üsti näçe ýylmasaň-da, onda mikro çyzyjaklar galyp, sürtülme güýjüniň emele gelmegine sebäp bolýarlar. Şol sebäpli, bu çäklemäni, tejribelerden gelip çykyşy ýaly, hereket edýän jisime hereketiň tersine ugrukdyrylan we onuň tizligine proporsional bolan $-F_2=k_1\vartheta$ sürtülme güýji täsir edýär diýen çäkleme bilen çalşyralyň. Howanyň herekete täsiri ýok diýen çäklemäni howa jisime hereketiň tersine ugrukdyrylan we jisimiň tizligine proporsional bolan $-F_3=k_2\vartheta$ güýç bilen täsir edýär diýen çäkleme bilen çalşyralyň. Indi biziň täze modelimiz aşakdaky görnüşde bolar:

$$m_0\ddot{x}(t)=-kx(t)-k_1\dot{x}(t)-k_2\dot{x}(t), \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

$$\dot{x}(0)=0. \tag{3}$$

$\dfrac{k}{m_0}=\omega^2,\quad \dfrac{k_1+k_2}{m_0}=2\alpha$ belgilemeleri girizip, soňky meseläni

$$\ddot{x}(t)+2\alpha\,\dot{x}(t)+\omega^2\,x(t)=0, \tag{1′}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2′}$$

$$\dot{x}(0)=0 \tag{3′}$$

görnüşe getireliň.

Eger üst ýeterlik ýylmanak bolsa, onda, adatça, $\alpha^2-\omega^2=-s^2$ bolýar we $(1')$, $(2')$, $(3')$ meseläniň çözüwi

$$x(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(st+\varphi),\quad \cos\varphi=\frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}},\quad A=\frac{x_0\sqrt{s^2+\alpha^2}}{s}, \tag{A}$$

görnüşde bolýar. Bu wagta görä öçýän yrgyldydyr. Ol $\alpha>0$ san näçe uly bolsa şonça-da basym öçýär we t-niň ýeterlik uly bahasynda $x(t)\equiv 0$ ýa-da yrgyldy togtady hasap etse bolar. Eger howanyň garşylygy we sürtülme güýji ýeterlik uly bolsa, onda adatça $\alpha^2 - \omega^2 = s^2$ bolýar we $(1')$, $(2')$, $(3')$ meseläniň çözüwi

$$x(t) = \frac{x_0}{2s}\left[(s+\alpha)e^{-(\alpha-s)t} + (s-\alpha)e^{-(\alpha+s)t}\right] \qquad (B)$$

görnüşde bolar. α-s>0, α+s>0 bolýany sebäpli bu hem wagtyň geçmegi bilen öçýän yrgyldydyr. Eger-de tötänden $\alpha^2 - \omega^2 = 0$ deňlik ýerine ýetse, onda $(1')$, $(2')$, $(3')$ meseläniň çözüwi

$$x(t) = x_0(\alpha t + 1)e^{-\alpha t} \qquad (C)$$

görnüşde bolar. Bu ýagdaýa rezonans ýagdaýy diýýärler. (*A*), (*B*), (*C*) hallaryň üçüsi hem bolup bilýän ýagdaýlar we biz uly ygtybarlyk bilen $(1')$, $(2')$, $(3')$ model seredilýän fiziki meselä adekwatdyr diýip bileris. Elbetde, biz soňky modele absolýut takyk diýip bilmeris we gerek bolsa girizilen çäklenmeleri üýtgedip, täze model düzmeli bolarys.

Umuman, matematiki modeliň öwrenilýän obýekt barada netijeler çykarmak üçin we şonuň esasynda hereket etmek üçin düzülýänini biz öň aýdypdyk. Biziň guran $(1')$, $(2')$, $(3')$ modelimizi öwrenip, ýagny onuň (*A*), (*B*), (*C*) çözüwlerini öwrenip, biz garalýan yrgyldy barada, jisimiň islendik wagtdaky tizligi, tizlenmesi we başga elementleri barada maglumat alyp bileris we netijeler çykaryp bileris. Mysal üçin, yrgyldy nähili tizlik bilen öçýär, haýsy wagtdan başlap yrgyldy öçdi diýse bolar we başga sowallara jogap berip bileris.

5. KÄBIR GEREK DÜŞÜNJELER

Biz aşakda mehaniki we fiziki ulgamlarda gabat gelýän prosesleriň matematiki modelleri düzülende gerek bolýan käbir düşünjeler barada gürrüň ederis. Elbetde, okyjy mehaniki hereketleriň düýbünde duran Nýutonyň üç kanuny bilen tanyş hasap edilýär. Ýokarky bölümde material nokadyň yrgyldysy baradaky mesele çözülende Nýutonyň ikinji kanuny esasy daýanjymyz bolupdy. Ondan başga-da kiçi yrgyldylarda pružinanyň maýyşgaklyk güýjüniň onuň uzalmasyna proporsional bolýany barada Gukuň kanunyny we tekiz üstde ýüze çykýan garşylyk güýjüň we howanyň herekete bolan garşylygynyň jisimiň tizligine bagly bolýar diýen düzgüni ulanypdyk. Indi gerek boljak düşünjeleriň üstünde durup geçeliň.

Goý, R^3 giňişligiň $D \subset R^3$ ýaýlasynda *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* funksiýalar kesgitlenen diýeliň. Ol funksiýalar *D* ýaýlanyň her bir nokadynda $\vec{V} = \{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ wektory kesgitleýärler. Şeýle ýagdaýda *D* ýaýlada $\vec{V}$ wektor meýdany kesgitlenen diýýärler. Eger *D* ýaýlada kesgitlenen *U(x,y,z)* funksiýa tapylyp, *D* ýaýlanyň islendik nokadynda $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z)$,

$\dfrac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$ deňlikler ýerine ýetse, onda $\vec{V}$ meýdana potensial wektor meýdany, U funksiýa bolsa potensial funksiýa diýýärler.

$$div\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

formula bilen kesgitlenýän $div\vec{V}$ ululyga $\vec{V}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy diýýärler. $\vec{V}$ wektor meýdany potensial meýdan bolanda

$$div\vec{V} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

boljagy düşnüklidir. Adatça, Gamiltonyň operatory atly

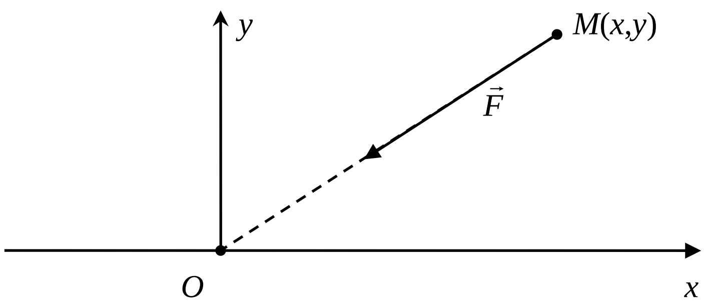
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

bu ýerde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ degişlilikde x, y, z oklarynyň ortlary, belgilemäni we Laplasyň operatory atly

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

belgilemäni girizip, $\vec{V}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy üçin getirilen aňlatmalary $d\,i\vec{W} = \nabla \cdot \vec{V}$ we $div\vec{V} = \Delta U$ görnüşde hem ýazýarlar. Mysallara ýüzleneliň.

Mysal 1. Goý, tekizlikde $O(0,0)$ koordinatalar başlangyjynda e^+ položitel zarýad, $M(x,y)$ nokatda e^- otrisatel zarýad ýerleşen bolsun. Kulonyň kanunyna görä, položitel zarýad otrisatel zarýady ululygy $\dfrac{k}{x^2+y^2}$ bolan, ugry $\overrightarrow{MO}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýän $\vec{F}$ güýç bilen özüne çekýär.



2-nji surat

$\sqrt{x^2+y^2}=r$ belgileme girizip, Kulonyň kanuny ady bilen belli $\vec{F}=-\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{MO}\right|}\cdot\dfrac{k}{r^2}$ formulany ýazyp bileris. $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ deňlikleri ulanyp, alarys:

$$\vec{F}=-\vec{r}\cdot\frac{k}{r^3}$$

ýa-da

$$\vec{F}=-(x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j})\cdot\frac{k}{r^3}=-\frac{xk}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\cdot\vec{i}-\frac{yk}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\cdot\vec{j}.$$

Soňky formula tekizligiň O nokatdan özge hemme nokatlarynda $\vec{F}$ wektor meýdanyny kesgitleýär. Oňa elektrik zarýadyň meýdany hem diýýärler. Eger indi $U=-k\ln r$ funksiýa girizsek, onda

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{xk}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3},\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{yk}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

boljagy düşnüklidir, ýagny elektrik zarýadyň meýdany potensial wektor meýdanydyr, $U=-k\ln r$ funksiýa onuň potensial funksiýasydyr.

Mysal 2. Goý, $O(0,0,0)$ koordinatalar başlangyjynda massasy m_1 bolan material nokat ýerleşsin. $M(x,y,z)$ nokatda massasy m_2 bolan material nokat ýerleşsin. Belli bolşy ýaly, birinji material nokat ikinji material nokady ululygy $\gamma\dfrac{m_1\cdot m_2}{x^2+y^2+z^2}$ bolan, ugry koordinatalar başlangyjyna ugrukdyrylan $\vec{F}$ güýç bilen özüne çekýär, bu ýerde γ – san koeffisiýenti. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, $\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ deňlikleri ulanyp,

$$\vec{F}=-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$$

formulany ýazyp bileris. Bu formula Nýutonyň bütindünýä dartyş kanuny ady bilen bellidir. $\vec{r}=r$ bolýanyny göz öňünde tutup we $\gamma\cdot m_1\cdot m_2=k$ belgileme girizip, alarys:

$$\vec{F}=-\frac{k\vec{r}}{r^3}.$$

Bu deňlik koordinatalar görnüşinde

$$\vec{F}=\left\{-\frac{kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3};\quad -\frac{ky}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3};\quad -\frac{kz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\right\}$$

bolar. $\vec{F}$ wektor R^3 giňişligiň O nokatdan özge hemme nokatlarynda wektor meýdanyny kesgitleýär. Oňa O nokadyň dartyş meýdany ýa-da grawitasiýa meýdany hem diýýärler.

Eger indi $U = \frac{k}{r}$ funksiýa girizsek, onda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{ky}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{kz}{r^3}$$

boljagy düşnüklidir; ýagny grawitasiýa meýdany potensial wektor meýdanydyr, $U = \frac{k}{r}$ funksiýa bolsa onuň potensial funksiýasydyr.

Goý, $D \subset R^3$ ýaýlada $U(x, y, z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. Onda D ýaýlada $U(x, y, z)$ skalýar wektor meýdany kesgitlenen diýýärler we

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

wektora gradiýent wektor diýýärler. Diýmek, islendik $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ wektoryň D ýaýlada potensial wektor meýdanyny emele getirmegi üçin potensial funksiýa atlandyrylýan $U(x, y, z)$ funksiýa tapylyp, D ýaýlanyň islendik nokadynda

$$\vec{F} = \nabla U$$

deňligiň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. Ýokardaky mysallardaky elektrik zarýadyň meýdanyny $\vec{F} = -\nabla k \ln r$ görnüşde, material nokadyň dartyş meýdanyny $\vec{F} = \nabla \frac{k}{r}$ görnüşde ýazyp bileris. Wektor meýdany bilen bagly ýene bir düşünje girizeliň. Eger $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektor meýdany $D \subset R^3$ ýaýlada berlen bolsa we P, Q, R funksiýalaryň şol ýaýlada birinji tertipli önümleri bar bolsa, onda

$$\left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$

wektora $\vec{V}$ wektor meýdanynyň towlama wektory diýýärler we ony $rot\vec{V}$ bilen belgileýärler, ýagny kesgitlemä görä,

$$rot\vec{V} = \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}.$$

Mysal üçin, zarýadyň elektrik meýdanynyň we material nokadyň dartyş meýdanynyň towlama wektorlaryny tapalyň. Başda has umumy ýagdaýa seredeliň. Goý, $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ potensial wektor meýdany bolsun, $U(x, y, z)$ – birinji we ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar potensial funksiýa bolsun. Alarys:

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\quad R=\frac{\partial U}{\partial z},\quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\equiv 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\equiv 0.$$

Diýmek, potensial funksiýasy ýokarky şertleri kanagatlandyrýan islendik potensial meýdanyň towlama wektory $\vec{0}$ wektor bolýar. Şuňa esaslanyp, zarýadyň elektrik meýdanynyň we material nokadyň dartyş meýdanynyň hem towlama wektorlarynyň $\vec{0}$ wektor boljagyny tassyklap bileris. Ahyrda, $rot\vec{V}$ wektoryň başgaça tapylyş formulalaryny getireliň:

$$rot\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

we

$$rot\vec{V}=\left[\nabla\times\vec{V}\right].$$

Bu formulalaryň dogrulygy üçünji tertipli kesgitleýjileriň hasaplanyşyndan we wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň tapylyşyndan gelip çykýar.

6. EGRI BOÝUNÇA HEREKET EDÝÄN MATERIAL NOKADA TÄSIR EDÝÄN GÜÝJÜŇ BITIRÝÄN IŞI

Goý, $\vec{F}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ wektor meýdany Z egrini öz içinde saklaýan $D\subset R^3$ ýaýlada kesgitlenen bolsun. $M(u,v,w)$ nokatlary Z egriniň nokatlary hasap edip, Z egriniň nokatlarynda kesgitlenen $\vec{F}_Z=\{P(u,v,w),\ Q(u,v,w),\ R(u,v,w)\}$ wektory alarys. $\vec{F}_Z$ wektory güýç hasap edeliň. Material nokat $\vec{F}_Z=\{P(u,v,w),\ Q(u,v,w),\ R(u,v,w)\}$ güýjüň täsiri astynda Z egri boýunça hereket edip, egriniň A nokadyndan başlap B nokadyna ýetdi diýeliň. $\vec{F}_Z$ güýjüň şu geçişdäki bitiren işini Q bilen belgiläliň. Bu işe $\vec{F}$ wektor meýdanynyň şu geçişdäki bitiren işi diýýärler. **Şeýlelik bilen, mesele islendik $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda bolan geçişde ol güýjüň bitiren Q işini tapmakdan durýar.** Biz bu meseläniň matematiki modelini düzmeli we onuň adekwatlygyny derňemeli. Meseläni çäklendireliň.

Birinjiden, Z egriniň uzynlygy çäkli, bölekleýin endigan egri bolmagyny talap edeliň.

Ikinjiden, $\vec{F}$ güýjüň koordinatalarynyň Z egrini (A, B nokatlar bilen bilelikde) öz içinde saklaýan bir açyk ýaýlada üznüksiz bolmagyny talap edeliň. Bu iki talabyň köp hallarda ýerine ýetýändigini biz tejribelerden bilýäris. Şonuň üçin bu çäklenmeleri ýerlikli hasap etse bolar.

Z egrini $M_k(u_k,\ v_k,\ w_k)$, $k=\overline{0,n}$, $M_0=A$, $M_n=B$ nokatlar bilen bölejiklere böleliň. Depeleri M_k, $k=\overline{0,n}$, nokatlarda bolan döwük çyzygy Z_n bilen belgiläliň. $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ duganyň uzynlygyny h_k bilen belgiläliň. Goý, $h=\max\limits_k h_k$ bolsun.

Üçünjiden, h ýeterlik kiçi bolanda güýjüň $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ duga boýunça bitiren işini $M_{k-1}M_k$ horda boýunça bitiren işi bilen çalşyrjakdyrys.

Bu çäkleme-de ýerliklidir. Sebäbi, Z döwük çyzyk bolsa bu çaklama dogry bolýar. Eger Z endigan bolsa h-yň ýeterlik kiçi bahalarynda $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ duga bilen $M_{k-1}M_k$ hordanyň örän jebis boljagy tejribelerden aýdyňdyr.

Şeýlelikde, modeliň çäklemeleri düzüldi we olaryň ýerlikli bolýandyklary aýdyňlaşdyryldy hasap etse bolar. Indi model düzmäge geçýäris.

Z ergini $M_k(x_k,y_k,z_k)$, $k=\overline{1,n}$, nokatlar bilen bölejiklere böleliň. Üçünji çaklama laýyklykda material nokadyň M_{k-1} nokatdan M_k nokada çenli $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ duga boýunça geçendäki $\vec{F}$ güýjüň bitiren A_k işini güýjüň şol nokat M_{k-1} nokatdan M_k nokada çenli $M_{k-1}M_k$ horda boýunça geçendäki bitiren $\widetilde{A}_k$ işi bilen çalşyralyň. Eger Q $\vec{F}$ güýjüň material nokat A nokatdan B nokada geçendäki bitiren işi bolsa, onda $Q=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$ bolar. $A_n\approx\widetilde{A}_k$ bolýany sebäpli, alarys:

$$Q\approx\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}_k. \tag{1}$$

(1) biziň takmyn modelimizdir. Onuň h näçe kiçi bolsa şonça-da takyk boljagy intuitiw düşnüklidir. Modeli anyklaşdyralyň. $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ duganyň üstünde $N_k(u_k,v_k,w_k)$ nokat alalyň we $\widetilde{A}_k$ işi $\vec{F}_k=\{P(u_k,v_k,w_k),Q(u_k,v_k,w_k),R(u_k,v_k,w_k)\}$ hemişelik güýjüň $M_{k-1}M_k$ horda boýunça bitiren işi bilen çalşyralyň. Belli bolşy ýaly, $\vec{F}_k$ hemişelik güýjüň $M_{k-1}M_k$ kesim boýunça bitiren $\widetilde{A}_k$ işi

$$\widetilde{A}_k=(\overrightarrow{M_{k-1}M_k}\cdot\vec{F}_k)$$

formula bilen kesgitlenýär. Diýmek,

$$Q\approx\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{M_{k-1}M_k}\cdot\vec{F}_k) \tag{2}$$

formulany alarys. Eger Z göni çyzygyň kesimi bolsa, $\vec{F} = \vec{F}_0$ hemişelik bolsa, onda $\vec{F}_k = \vec{F}_0$, $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \overrightarrow{M_0 M_n}$ bolar we

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \overrightarrow{F_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \overrightarrow{F_0} \right) = \left(\overrightarrow{M_0 M_n} \cdot \overrightarrow{F_0} \right)$$

takyk formulany alarys. Şol sebäpli birinji ýakynlaşmada biziň modelimiz goýlan meselä adekwat diýip bileris. (2) modeli anyklaşdyralyň. $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, $k = \overline{1,n}$ belgilemeleri girizip,

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \{\Delta x_k,\ \Delta y_k,\ \Delta z_k\}$$

we

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \vec{F}_k = P(u_k, v_k, w_k)\Delta x_k + Q(u_k, v_k, w_k)\Delta y_k + R(u_k, v_k, w_k)\Delta z_k$$

bahalary (2) formulada ýerine goýup, alarys:

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} \left(P(u_k, v_k, w_k)\Delta x_k + Q(u_k, v_k, w_k)\Delta y_k + R(u_k, v_k, w_k)\Delta z_k \right).$$

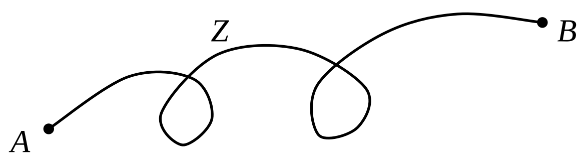
h nola ymtylanda bu deňligiň gitdigiçe takyklaşýanyny göz öňünde tutup, soňky deňligiň sag böleginiň Z egri boýunça 2-nji görnüşli integral jem bolýanyny göz öňünde tutup, biziň ýokarda agzan çäklemelerimizde takyk bolan

$$Q = \int_Z Pdx + Qdy + Rdz \tag{3}$$

formulany alarys. Bu garalýan meseläniň matematiki modelidir. Onuň birinji ýakynlaşmada goýlan meselä adekwatlygy barada ýokarda aýdylypdy. Indi biz (3) model goýlan meselä doly adekwat diýip bileris. $\vec{V} = \{P;\ Q;\ R\}$, $\overrightarrow{ds} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ belgilemeleri ulanyp, (3) formulany

$$Q = \int_Z \left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{ds} \right) \tag{4}$$

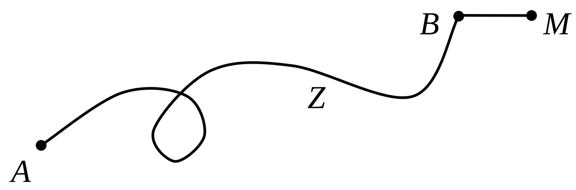
görnüşde hem ýazmak bolar. Indi bir hususy ýagdaýa seredeliň. Goý, $\vec{V} = \nabla U(x, y, z)$ bolsun, ýagny $\vec{V}$ potensial wektor meýdany bolsun. Onda, alarys:



3-nji surat

$$Q=\int_Z\left(\vec{V}\cdot\overrightarrow{ds}\right)=\int_A^B\left(\vec{V}\cdot\overrightarrow{ds}\right)=\int_A^B\left(\nabla U\cdot\overrightarrow{ds}\right)=\int_A^B P'_x dx+Q'_x dy+R'_x dz=\int_A^B dU=U(B)-U(A).$$

Görşümiz ýaly, potensial wektor meýdanynyň, material nokadyň A nokatdan B nokada geçendäki bitiren işi ol nokadyň A nokatdan B nokada nähili ýol bilen geçenine bagly bolman, diňe potensial funksiýanyň ahyrky nokatdaky bahasyndan onuň başlangyç nokatdaky bahasyny aýranyňa deň bolýar. Bu häsiýet potensial wektor meýdanynyň düýp häsiýetidir. Ýagny, eger-de $\vec{V}$ wektor meýdanynyň D ýaýladaky islendik egri boýunça bitiren işi diňe ol egriniň başlangyç we ahyrky nokatlary bilen kesgitlense, onda ol D ýaýlada potensial wektor meýdany bolar. Bu tassyklamanyň subudyny getireliň. $\vec{V}=\{P;\ Q;\ R\}$ $D\subset R^3$ ýaýlada kesgitlenen islendik wektor meýdany bolsun. $P,\ Q,\ R\in C(\overline{D})$ hasap edeliň. $A(x_0,y_0,z_0)\in D$ fiksirlenen nokat, $B(x,y,z)\in D$ islendik nokat, $M(x+\Delta x,y,z)\in D$ nokat, Δx ýeterlik kiçi.



4-nji surat

Şerte görä

$$\int_Z Pdx+Qdy+Rdz=F(x,y,z),$$

$$\int_{Z\cup BM} Pdx+Qdy+Rdz=F(x+\Delta x,y,z),$$

$$\Delta_x F=F(x+\Delta x,y,z)-F(x,y,z)=\int_B^M Pdx+Qdy+Rdz\ .$$

BM çyzygyň üstünde dy=0, dz=0 bolany sebäpli $\Delta_x F=\int_x^{x+\Delta x} P(x,y,z)dx$ bolar. Orta baha baradaky teoremany ulanyp, alarys:

$$\Delta_x F=P(x_c,y,z)\Delta x,\quad x_c\in(x,\ x+\Delta x),$$

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x}=P(x_c,y,z),\qquad F'_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x_c,y,z)=P(x,y,z).$$

Edil şuňa meňzeşlikde alarys: $F'_y=Q,\ F'_z=R$, ýagny F funksiýa $\vec{V}$ wektor meýdany üçin potensial funksiýa bolýar we

$$\vec{V} = \nabla F(x, y, z)$$

deňlik ýerlikli bolýar. Şuny hem görkezmek gerekdi. Wektor meýdanynyň potensial wektor meýdany bolmaklygynyň başga-da ýeterlik şertleri bar. Biz olar barada geljekki bölümlerde gürrüň ederis. Şu ýerde $U(x,y,z)$ potensial funksiýaly meýdanda $U(A)$–$U(B)$ tapawuda material nokadyň potensial energiýasy diýilýänini hem ýatlap geçeliň. Adatça, B-niň ýerine $M(x,y,z)$ nokady, A-nyň ýerine $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokady goýup, potensial energiýany Π harpy bilen belgileýärler, ýagny $\Pi=U(M_0)-U(M)$. $\frac{mv^2}{2} = K$ ululyga material nokadyň kinetik energiýasy diýilýär. Kinetik we potensial energiýalaryň jemini E bilen belgileýärler we oňa nokadyň doly energiýasy diýýärler, ýagny $E = K + \Pi$. Potensial meýdandaky hereket edýän nokadyň doly energiýasy

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(M_0) - U(M)$$

formula bilen tapylýar. Adatça $U(M_0) = 0$ bolar ýaly M_0 nokady saýlap alýarlar we doly energiýa üçin

$$E = \frac{mv^2}{2} - U(M)$$

formulany ulanýarlar. Mysal üçin, O nokatda ýerleşen material nokadyň dartyş meýdanynyň $U(x, y, z) = \frac{K}{r}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, potensial funksiýaly meýdan bolany sebäpli, şol meýdanda hereket edýän M material nokadyň potensial energiýasy $\Pi = \frac{K}{r_0} - \frac{K}{r}$ bolar. $r_0 = \infty$ hasap edip $\Pi = -\frac{K}{r}$ deňligi we E üçin

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{K}{r}$$

deňligi alarys. Ikinji mysal hökmünda öňdäki bölümleriň birinde seredilen jisimiň tekiz üstdäki yrgyldy hereketiniň doly energiýasyny tapalyň. Ýönekeýlik üçin jisime diňe onuň agramy bilen pružinanyň maýyşgaklyk güýji $F=-kx$ täsir edýär diýeliň. F güýç potensial güýç. Onuň potensial funksiýasy $U = -\frac{kx^2}{2}$. Şol sebäpli jisimiň potensial energiýasy $\Pi = \frac{kx^2}{2}$, kinetik energiýasy $K = \frac{mv^2}{2}$, doly energiýasy $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ bolar. Jisimiň hereketiniň matematiki modeliniň $m\ddot{x}(t) = -kx$ bolýanyny biz öň görüpdik. Soňky deňligiň iki tarapyny hem $\dot{x}$-a köpeldeliň we özgerdeliň, alarys:

$$\dot{x}m\ddot{x} = -kx\dot{x}$$

ýa-da

$$\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right)' = -\left(\frac{kx^2}{2}\right)'$$

ýa-da integrirläp

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} + C_0$$

deňlige geleris. Indi $\dot{x} = v$ bolýanyny göz öňünde tutup, soňky deňligi

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = C_0$$

ýa-da

$$E = C_0$$

görnüşde ýazyp bileris. Ýagny garalýan hereketde jisimiň doly energiýasy hemişelik san bolýar, ol üýtgemeýär. Potensial funksiýalary bolan güýçlere gysgalyk üçin potensial güýçler diýýärler. Soňky häsiýet potensial güýçleriň täsiri astynda hereket edýän material nokatlaryň islendik ulgamy üçin hem dogrudyr.

7. MEHANIKANYŇ WE FIZIKANYŇ BELLI PRINSIPLERINE ESASLANÝAN MODELLER

Eýýäm XVII asyrda açylan, fransuz alymy Fermanyň adyny göterýän ýönekeý bir prinsipe esaslanýan meselä garalyň. Fermanyň prinsipi şundan durýar.

Goý, ýagtylyk haýsy hem bolsa bir gurşawda *A* nokatdan *B* nokada *Z* egri boýunça ýaýraýan bolsun. Özi hem gurşawyň birjynsly däl bolmagy, hatda onuň döwülme koeffisiýenti *n*-iň nokatdan nokada üýtgeýän bolmagy hem mümkin diýeliň. Goý, Z_1 *A* we *B* nokatlary birleşdirýän başga bir ýol bolsun.

Fermanyň prinsipi aşakdaky tassyklamadan durýar:

$$\int_{Z_1} n\,ds - \int_{Z} n\,ds$$

tapawut islendik Z_1 üçin alamatyny saklaýar.

Ýokarky tapawudy başgaça ýazalyň. Goý, $s=s(t)$ ýagtylygyň t wagtda *Z* egri boýunça geçen aralygy bolsun, $s=s_1(t)$ bolsa Z_1 egri boýunça geçen aralygy bolsun. Onda ýagtylygyň tizligi *Z* egri boýunça $v = \frac{ds}{dt}$, Z_1 egri boýunça $v_1 = \frac{ds_1}{dt}$ bolar. Bu ýerden tapylan $ds = vdt,$ $ds_1 = v_1 dt$ bahalary ýokarky aňlatmada ýerine goýup, alarys:

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds = \int_{Z_1} nv_1 dt - \int_{Z} nvdt.$$

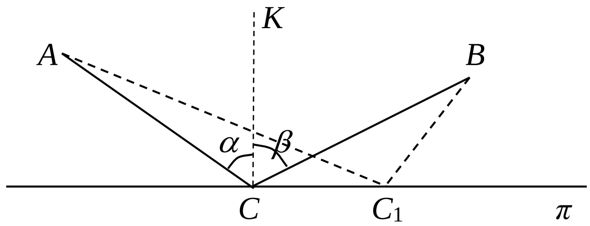
Indi $nv = nv_1 = c$ bolýanyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds = \int_{0}^{T_1} nv_1 dt - \int_{0}^{T} nvdt = c(T_1 - T).$$

Bu ýerde T_1 ýagtylygyň Z_1 egri boýunça ýaýran wagty, T ýagtylygyň Z egri boýunça ýaýran wagty. Indi biz Fermanyň prinsipini şeýle formulirläp bileris:

Ýagtylygyň Z boýunça ýaýran wagty beýleki islendik Z_1 ýol boýunça ýaýran wagtyndan kiçidir.

Fermanyň prinsipini ulanyp, optika degişli bir meseläni çözeliň. Şöhle A nokatdan çykyp π gorizontal gönüden C nokatda serpigip, B nokada düşdi diýeliň (5.1-nji surat).



5.1-nji surat

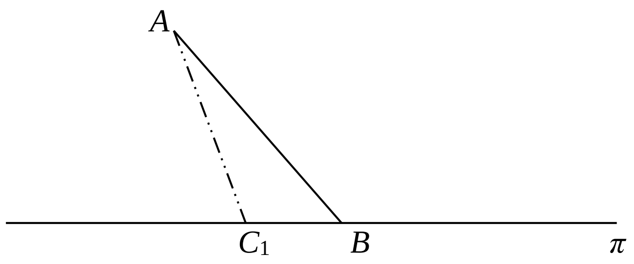
C nokatdan π gönä CK perpendikulýar geçireliň, emele gelen burçlary α we β bilen belgiläliň: $\angle ACK = \alpha$, $\angle KCB = \beta$. α burça şöhläniň düşme burçy, β burça şöhläniň gaýtma burçy diýýärler. Mesele α we β burçlaryň arasyndaky baglanyşygy tapmakdan durýar. Meseläniň matematiki modelini düzeliň. Meseläni çäklendireliň. Çäklendirme ýekeje – şöhle şol bir hemişelik n_0 döwülme koeffisiýentli gurşawda ýaýraýar hasap ederis. Modeli düzeliň. ACB ýoly Z bilen, AC_1B ýoly Z_1 bilen belgiläliň. Onda Fermanyň prinsipine görä,

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds \geq 0 \tag{1}$$

bolmaly bolar. n hemişelik bolany üçin, soňky deňsizligi $n\left(\int_{Z_1} ds - \int_{Z} ds\right) \geq 0$ ýa-da

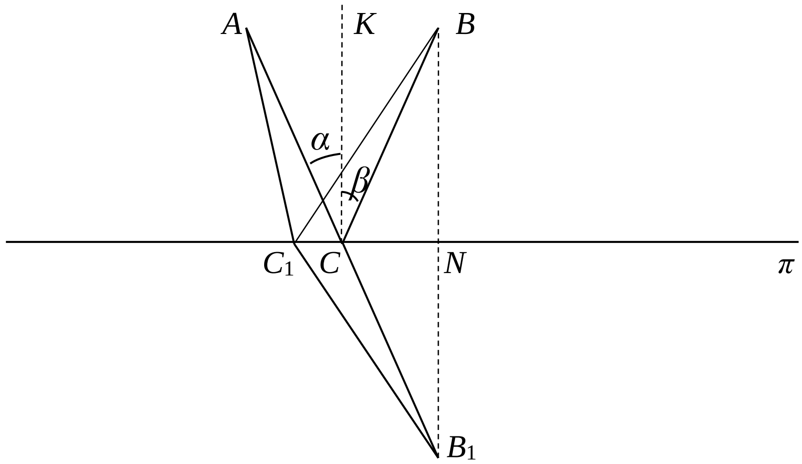
$$AC_1 + C_1B \geq AC + CB$$

görnüşde ýazyp bileris. Ýagny ACB döwük çyzygyň uzynlygy islendik C_1 nokat üçin AC_1B döwük çyzygyň uzynlygyndan kiçi bolmaly. Şeýlelikde, matematiki modele gelýäris: ***π* göni çyzygyň üstünde *AC* + *CB* iň kiçi bolar ýaly edip *C* nokady tapmaly.** B nokat π göni çyzygyň üstünde ýatsa, onda A nokatdan çykan şöhle göni B nokada düşýär we Z ýol AB kesim bilen gabat gelýär (5.2-nji surat).



5.2-nji surat

Eger indi π göni çyzygyň üstünde islendik C_1 nokat alsak, $AC_1 + C_1B \geq AC$ boljagy ABC üçburçlugyň häsiýetinden gelip çykýar, onda matematiki model birinji ýakynlaşmada fiziki meselä adekwat diýmek bolar. Matematiki modeli çözeliň (5.3-nji surat).



5.3-nji surat

π gönä görä B nokada simmetrik B_1 nokady guralyň. A we B_1 nokady AC_1B_1 döwük çyzyk bilen birleşdireliň. Suratdan görnüşi ýaly, $AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1$. Indi A we B_1 nokatlary AB_1 kesim bilen birleşdireliň. Ol kesim π göni çyzygy C nokatda keser. Onda $AC + CB = AC + CB_1 = AB_1$. ΔACB_1 üçburçlukdan görnüşi ýaly $AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1 > AB_1 = AC + CB$. Diýmek, **$C$ nokat gözlenýän nokat** bolýar. Matematiki model çözüldi. Indi ondan netije çykaralyň. $\angle ACK = \alpha$ düşme burçy, $\angle KCB = \beta$ gaýtma burçy, ΔCBB_1 deňýanly (CB = CB_1). Şol sebäpli $\angle BCN = \angle NCB_1$. Ýene-de $\angle ACC_1 = \angle NCB_1$. Bu ýerden

$$\angle BCN = \angle ACC_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ - \angle ACC_1 = 90^\circ - \angle BCN = \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

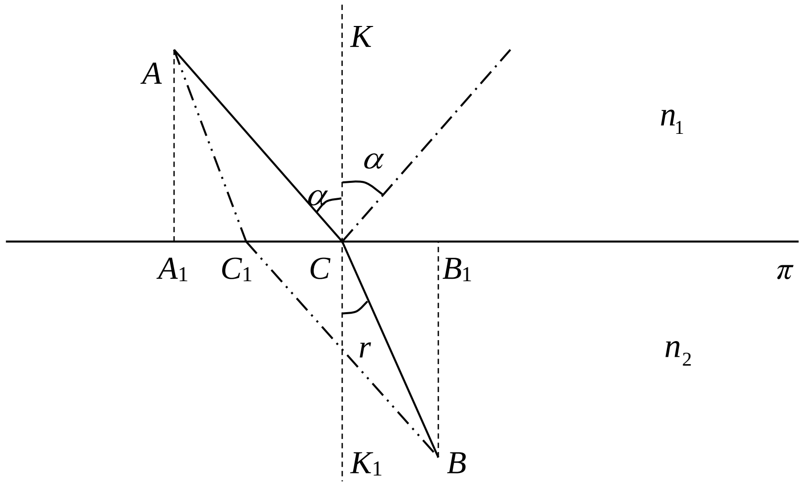
Ýagny, **düşme burç** $\boldsymbol{\alpha}$ **gaýtma burç** $\boldsymbol{\beta}$ **deňdir**. Bu optikanyň iň belli kanunlarynyň biridir.

Ýene bir mesele.

π göni döwülme koeffisiýentleri, degişlilikde, n_1 we n_2 bolan iki gurşawyň çägi bolsun. Goý, birinji gurşawdaky A nokatdan çykan şöhle π göni çyzygyň C nokadyna düşsin. Ol şöhläniň bir bölegi C nokatdan, ýokarda getirilen kanun boýunça, yzyna serpiger, ikinji bölegi C nokatda döwlüp, ikinji gurşawdaky B nokada düşer (6-njy surat).

$\angle K_1CB = r$ burça döwülme burçy diýýärler. α we r burçlaryň arasyndaky baglanyşygy tapmaly.

Meseläniň çäklemeleri ýokarda getirildi. Matematiki modeli düzeliň. π göni çyzygyň üstünde C_1 nokat alalyň. ACB döwük çyzygy Z bilen, AC_1B döwük



6-njy surat

çyzygy Z_1 bilen belgiläliň. Fermanyň prinsipine görä

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds \geq 0$$

bolmaly. Integrallary özgerdip, alarys:

$$\int_A^{C_1} n_1 ds + \int_{C_1}^{B} n_2 ds - \int_A^{C} n_1 ds - \int_C^{B} n_2 ds \geq 0$$

ýa-da

$$n_1 AC_1 + n_2 C_1 B \geq n_1 AC + n_2 CB. \qquad (1)$$

Diýmek, matematiki model – (1) deňsizlik, islendik C_1 üçin dogry bolar ýaly edip, π göni çyzygyň üstünde C nokady tapmakdan durýar. Başgaça, $f = n_1 AC_1 + n_2 C_1 B$ funksiýanyň C_1 nokada görä minimum nokadyny tapmaly. C nokat bar hasap edip matematiki modeli çözeliň. π göni çyzyga A nokatdan AA_1 we B nokatdan BB_1 perpendikulýarlary geçireliň. 6-njy suratdan alarys:

$$AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1C_1^2} = \sqrt{AA_1^2 + (A_1C - C_1C)^2},$$

$$C_1B = \sqrt{BB_1^2 + C_1B_1^2} = \sqrt{BB_1^2 + (B_1C + C_1C)^2}.$$

C_1C üýtgeýän ululygy x bilen belgiläp, f funksiýanyň bahasyny tapalyň:

$$f = n_1\sqrt{AA_1^2 + (A_1C - x)^2} + n_2\sqrt{BB_1^2 + (B_1C + x)^2}.$$

Indi bir üýtgeýänli $f(x)$ funksiýanyň minimum nokadyny tapmak galdy.

Onuň üçin $f(x)$ funksiýanyň önümini tapyp, nola deňläliň:

$$f'(x) = \frac{-(A_1C - x)n_1}{\sqrt{AA_1^2 + (A_1C - x)^2}} + \frac{(B_1C + x)n_2}{\sqrt{BB_1^2 + (B_1C + x)^2}}$$

ýa-da

$$\frac{(A_1C - x)n_1}{\sqrt{AA_1^2 + (A_1C - x)^2}} = \frac{(B_1C + x)n_2}{\sqrt{BB_1^2 + (B_1C + x)^2}}.$$

Fermanyň prinsipine görä x=0 çözüw bolýar, ýagny

$$\frac{A_1C \cdot n_1}{\sqrt{AA_1^2 + A_1C^2}} = \frac{B_1C \cdot n_2}{\sqrt{BB_1^2 + B_1C^2}}$$

ýa-da

$$\sin\alpha \cdot n_1 = \sin r \cdot n_2,$$

ýa-da

$$\frac{\sin\alpha}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Bu bolsa optikada belli bolan ýagtylygyň döwülme kanunydyr. Mesele çözüldi. Ýokarda getirilen iki kanun Fermanyň prinsipi esasynda alyndy. Bu prinsipe başgaça tygşytlylyk prinsipi diýse hem bolardy. Sebäbi, ýagtylyk A nokatdan B nokada iň gysga aralyk boýunça ýaýraýar, ýagny tebigat öz energiýasyny örän tygşytly harç edýär diýse bolar.

8. GAMILTONYŇ PRINSIPI WE ONUŇ BILEN BAGLY MESELELER

Material nokatlaryň ulgamy potensial güýçler meýdanynda wagt t_1-den t_2 çenli üýtgände hereket edýän bolsun. K – ulgamyň kinetik energiýasy, Π – onuň potensial energiýasy. K–Π=L tapawuda Lagranžyň funksiýasy diýýärler, $\int_{t_1}^{t} L dt$ integrala täsir diýýärler. Goý, ulgamyň i-nji nokady, wagt $[t_1; t_2]$ aralykda üýtgände, A_i nokatdan B_i nokada çenli Z_i egri boýunça hereket eden bolsun.

Gamiltonyň prinsipi. Z_i egrileri, degişlilikde, A_i we B_i nokatlary birikdirýän islendik endigan Z_i* egriler bilen çalşyrylyp alnan $\int_{t_1}^{t} Ldt$ integralyň wariasiýasy nola deň bolmalydyr:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0.$$

Käbir gerek düşünjeleri girizeliň. Goý, ulgam $M(x_k, y_k, z_k)$, $k=\overline{1,N}$, nokatlardan dursun we ulgama

$$g_i(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N) = 0, \quad i=\overline{1,K}, \tag{2}$$

görnüşdäki baglylyk goýlan bolsun. Onda nokatlaryň $3N$ koordinatalarynyň K sanysyny (2) deňlemelerden beýleki $3N–K$ sanysynyň üsti bilen aňladyp bileris. (elbetde, (2) ulgamy çözüp bolýan halynda). Diýmek, koordinatalaryň $3N–K$ sanysy azat koordinatalar, K sanysy bagly koordinatalar bolarlar. Köp halda $3N–K$ azat koordinatalaryň deregine

$$q_i = q_i(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N), \quad i=\overline{1,3N-K}, \tag{3}$$

görnüşdäki, ulgamyň ýagdaýyny doly kesgitleýän, täze parametrler girizýärler. Olara, adatça, umumylaşdyrylan koordinatalar diýýärler. Goý, umumylaşdyrylan koordinatalarda Z_i egrileriň deňlemeleri wagt t_1-den t_2-ä çenli üýtgände

$$q_s = q_s(t), \quad s=\overline{1,3N-K},$$

görnüşde bolsunlar. Goý, $\delta_s(t)$, $s=\overline{1,3N-K}$, funksiýalar $[t_1; t_2]$ kesimde üznüksiz we üznüksiz differensirlenýän bolsunlar we $\delta_s(t_1)=\delta_s(t_2)=0$ bolsun, onda

$$q_s = q_s(t) + \alpha_s\delta_s(t)$$

deňlemeler A_i we B_i nokatlary birikdirýän Z_i* egrileriň deňlemeleri bolarlar. Bu teklibe şeýle düşünmeli. Eger K sany baglylyklar deňlemelerini we $3N–K$ sany (3) deňlemeleri bilelikde çözüp, x_i, y_i, z_i, $i=\overline{1,N}$, koordinatalar q_i, $i=\overline{1,3N-K}$, umumylaşdyrylan koordinatalaryň üsti bilen aňladylýar, ýagny

$$x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_{3N-K}),$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, ..., q_{3N-K}),$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, ..., q_{3N-K}),$$
$$i=\overline{1,N}.$$

Eger-de şu ýerde $q_s = q_s(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, $s=\overline{1,3N-K}$, goýsak Z_i egriniň deňlemesini, $q_0 = q(t) + \alpha_i\delta_i$ goýsak bolsa Z_i* egriniň deňlemesini alarys. $I = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$

täsir integralynyň aşagyndaky L funksiýa $q_1, q_2, ..., q_{3N-K}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{3N-K}$ ululyklaryň funksiýasy bolýar, ýagny $L = L(q_1, q_2, ..., q_{3N-K}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{3N-K})$. Şol sebäpli

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 + \alpha_1\delta_1,\ q_2 + \alpha_2\delta_2,\ ...,\ q_{3N-K} + \alpha_{3N-K}\delta_{3N-K})dt,$$

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{3N-K}$ parametrleriň funksiýasy bolýar.

$$\sum_{s=1}^{3N-K} \frac{\partial I}{\partial \alpha_s}$$

ululyga $I = \int_{t_1}^{t} Ldt$ täsir integralyň wariýasiýasy diýýärler we ony $\delta\int_{t_1}^{t} Ldt$ bilen belgileýärler. Eger L funksiýanyň öz argumentlerine görä üznüksiz önümleri bar bolsa, onda

$$\delta\int_{t_1}^{t} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{3N-K} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\delta}_s \right) dt$$

deňligi alarys. Indi biz Gamiltonyň prinsipini ýonekeý görnüşde formulirläp bileris.

Gamiltonyň prinsipi. Eger L öz argumentlerine görä differensirlenýän funksiýa bolsa, $\delta_s(t),\ s = \overline{1, 3N-K},$ funksiýalar [t_1; t_2] kesimde üznüksiz differensirlenýän bolsalar we $q_s(t_1) = q_s(t_2) = 0$, $s = \overline{1, 3N-K},$ bolsa, onda hökmany halda

$$\delta\int_{t_1}^{t} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{3N-K} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\delta}_s \right) dt = 0 \tag{4}$$

bolmaly bolar.

Indi bu prinsipi ulanyp käbir meseleleri çözmäge çemeleşeliň.

8.1. Lagranžyň deňlemesiniň çykarylyşy

Massasy m_i bolan $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $i = \overline{1, N}$, nokatlar ulgamy potensial güýçler meýdanynda [t_1; t_2] wagt aralygynda hereket etdi diýeliň. Z_i, Z_i*, $\delta_i(t)$ belgilemeler ýokarda getirilen manyda bolsunlar. Onda (4) deňlik – Gamiltonyň prinsipi dogry bolar. Alarys:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{3N-K} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\delta}_s \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{3N-K} \frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{3N-K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} d\delta_s(t) =$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s dt+\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta_s(t)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\right)\delta_s(t)dt$$

Ýa-da $q_s(t_1)=q_s(t_2)=0$, $s=\overline{1,3N-K},$ bolýanyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\right)\right]\delta_s(t)dt=0.$$

Indi $\delta_s(t)$ funksiýalaryň islendik bolýanyny ýatlap,

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\right)=0,\quad s=\overline{1,3N-K}, \tag{5}$$

deňlemeleri alarys. Olara Lagranžyň deňlemeleri diýýärler. Bu deňlemeler mehanikanyň esasy deňlemeleriniň biridir. Ol deňlemeleri başgaça hem ýazyp bolýar.

Düşnüklilik üçin, (2) baglylyklar ýok hasap edeliň. Onda $M(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,N}$, nokatlaryň koordinatalary baglanyşyksyz ululyklar bolarlar we biz

$$x_i=q_{3i-2},\quad y_i=q_{3i-1},\quad z_i=q_{3i},\quad i=\overline{1,N},$$

belgilemeleri girizmäge haklydyrys. Şu belgilemelerde (5) deňlemeler aşakdaky görnüşe gelerler:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y_i}\right)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z_i}\right)=0,\quad i=\overline{1,N}.$$

Eger indi $U(x,y,z)$ funksiýa potensial güýçler meýdanynyň potensial funksiýasy bolsa,

$$\vec F=\nabla U,$$

$$\Pi=-\sum_{i=1}^{N}U(x_i,y_i,z_i),$$

$$K=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(\dot x_i)^2}{2},$$

$$L=K-\Pi=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m_i(\dot x_i)^2}{2}+U(x_i,y_i,z_i)\right]$$

bolýanyny göz öňünde tutup, (6) deňlemeleri özgerdip, ýazyp bileris:

$$\frac{\partial U(x_i, y_i, z_i)}{\partial x_i} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{x}_i) = 0,$$

$$\frac{\partial U(x_i, y_i, z_i)}{\partial y_i} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{y}_i) = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial U(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{z}_i) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

$M_i(x_i, y_i, z_i)$ nokadyň $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ radius wektoryny girizip we (7) deňlemeleri degişlilikde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik wektorlara köpeldip we goşup, alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\vec{k} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\vec{i} + \dot{y}_i\vec{j} + \dot{z}_i\vec{k}) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

ýa-da

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \nabla U(x_i, y_i, z_i) = \vec{F}(x_i, y_i, z_i)..$$

Bu ýerde *i* indeksi taşlap, ulgamyň islendik nokady üçin dogry bolan

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = F(x, y, z) \qquad (8)$$

formulany alarys. Bu bolsa material nokat üçin Nýutonyň ikinji kanunynyň ýazgysydyr.

8.2. Energiýanyň saklanyş kanuny

Goý, $K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2}$ ulgamyň kinetik energiýasy, $\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_N)$ onuň potensial energiýasy bolsun. Onda $E = K + \Pi$ onuň doly energiýasy bolar. Ulgam potensial güýçler meýdanynda hereket edýär hasap edilýär. Doly energiýanyň wagta görä önümini tapalyň:

$$(E)' = \frac{dK}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = \frac{d(\Pi - K)}{dt} + 2\frac{dK}{dt} = -\frac{dL}{dt} + 2\frac{dK}{dt} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + 2\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{q}_i \ddot{q}_i = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - 2m_i \dot{q}_i \ddot{q}_i\right).$$

Lagranžyň deňlemesinden taparys:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Bu bahany ýokardaky aňlatmada ýerine goýup, alarys:

$$\frac{dE}{dt}=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i-2m_i\dot q_i\ddot q_i\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i-2m_i\dot q_i\ddot q_i\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\cdot\dot q_i\right)-2m_i\dot q_i\ddot q_i\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\left(m_i\dot q_i\cdot\dot q_i\right)}{dt}-2m_i\dot q_i\ddot q_i\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(2m_i\dot q_i\ddot q_i-2m_i\dot q_i\ddot q_i\right)\equiv 0,$$

ýagny $\frac{dE}{dt}\equiv 0$ ýa-da $E=K+\Pi=const.$

10. IKI MATERIAL NOKADYŇ ÖZARA TÄSIRI ASTYNDAKY HEREKETLERINIŇ MATEMATIKI MODELI

Biz iki nokatdan durýan ulgama diňe içki güýçler täsir edýärler diýip hasap etjekdiris.

Bize gerek boljak düşünjeler:

1) Energiýanyň saklanma kanuny;

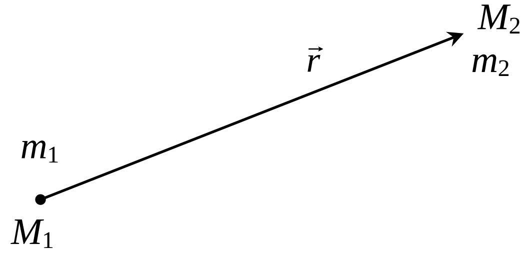
2) Günüň daşyndan aýlanýan planetalar barada Kepleriň kanuny;

3) Nýutonyň bütindünýä dardyş kanuny.

Garalýan iki nokatdan durýan ulgam konserwatiw bolany sebäpli, energiýanyň saklanma kanuny $K+\Pi=E_0$ – hemişelik, görnüşde ýazylar. Bu ýerde K – kinetiki, Π – potensial energiýa. Goý, m_1 birinji M_1 nokadyň, m_2 – ikinji M_2 nokadyň massasy bolsun. v_1 we v_2, degişlilikde, birinji we ikinji nokatlaryň tizlikleriniň absolýut ululyklary bolsun. Iki nokadyň biri-birine täsir edýän güýjüni kesgitläliň:

$$\vec F=-\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r},\qquad r=|\vec r|,$$

bu ýerde $\vec r=\overrightarrow{M_1M_2}.$



7-nji surat

Ulgamyň kinetik energiýasy

$$K=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2},$$

ulgamyň potensial energiýasy

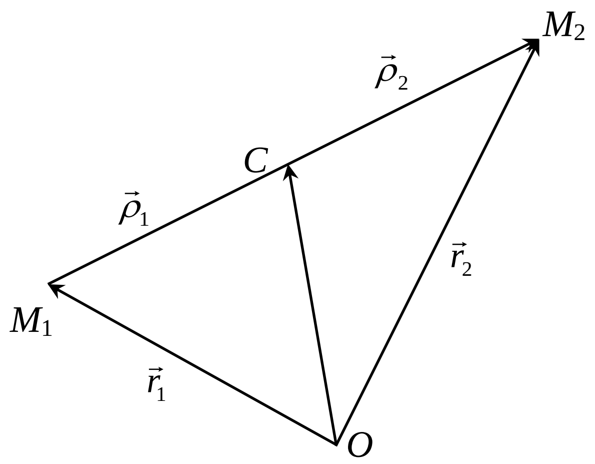
$$\Pi=\int_{M_2}^{M_0}\vec{F}d\vec{r}$$

bolar, bu ýerde M_0 fiksirlenen nokat. K-nyň we Π-niň bahalaryny $K+\Pi=E_0$ deňlikde ýerine goýup, alarys:

$$\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}+\int_{M_2}^{M_0}\vec{F}d\vec{r}=E_0. \qquad (1)$$

(1) formula garalýan hereketiň matematiki modelidir. Onuň öwrenilýän herekete adekwat bolmagy belli kanunlaryň esasynda düzülendiginden gelip çykýar. (1) modeli ulanmak üçin amatly görnüşe getireliň.

Fiksirlenen O nokat alalyň (8-nji surat).



8-nji surat

C – nokatlaryň agyrlyk merkezi.

$$\overrightarrow{OM_1}=\vec{r}_1,\quad \overrightarrow{OM_2}=\vec{r}_2,\quad \overrightarrow{OC}=\rho,\quad \overrightarrow{CM_1}=\vec{\rho}_1,\quad \overrightarrow{CM_2}=\vec{\rho}_2$$

belgilemeleri girizeliň. Alarys:

$$\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1,\quad \vec{r}_1=\vec{\rho}+\vec{\rho}_1,\quad \vec{r}_2=\vec{\rho}+\vec{\rho}_2,\quad \frac{d\vec{r}_1}{dt}=\vec{v}_1,\quad \frac{d\vec{r}_2}{dt}=\vec{v}_2.$$

Şu belgilemeleri ulanyp, (1) deňligi täzeden ýazalyň:

$$\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}+\gamma\int_{M_2}^{M_0}\frac{m_1m_2}{\vec{r}^{\,2}}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}d\vec{r}=E_0$$

ýa-da

$$\frac{m_1\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}-\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}\right)^2}{2}+\frac{m_2\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}-\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}\right)^2}{2}-\gamma m_1 m_2\int_{M_2}^{M_0}\frac{dr^2}{2r^3}=E_0$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}m_1\left(\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}\right)^2+m_1\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}+$$

$$+\frac{1}{2}m_1\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)^2-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}=E_0 \tag{2}$$

C nokat agyrlyk merkezi bolany sebäpli,

$$m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2=0,\quad \frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{C}_0 \text{ – hemişelik,} \tag{3}$$

bolmaly bolar. Birinji deňlik agyrlyk merkeziniň M_1M_2 kesimi massalara ters proporsional bölmeginden gelip çykýar. Agyrlyk merkeziniň hereketi baradaky teorema görä, bu ulgama daşyndan güýç täsir etmeýänligi sebäpli,

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}=0$$

bolar. Bu ýerden ýokarky deňlikleriň ikinjisi gelip çykýar.

(3) deňlikleriň birinjisinden

$$m_1\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}=0$$

deňlik we onuň esasynda

$$m_1\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}=\frac{d\vec{\rho}}{dt}\left(m_1\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}\right)=0$$

deňlik gelip çykýar we (2) deňlik

$$\frac{1}{2}m_1\left(\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}\right)^2-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{C}_0^2 \tag{4}$$

görnüşe geler. Indi $\vec{r}=\vec{\rho}_2-\vec{\rho}_1$ bolýanyny ýatlap,

$$\begin{cases} m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2=0, \\ \vec{\rho}_2-\vec{\rho}_1=\vec{r} \end{cases}$$

ulgamdan taparys:

$$\vec{\rho}_1=\frac{m_2\vec{r}}{m_1+m_2},\qquad \vec{\rho}_2=\frac{m_1\vec{r}}{m_1+m_2}.$$

Soňky deňlikleri ulanyp, (4) deňligi täzeden ýazalyň:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}+\frac{m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right]\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2-\frac{\gamma\, m_1 m_2}{r}=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec C_0^{\,2}$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2-\frac{\gamma\, m_1 m_2}{r}=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec C_0^{\,2}. \qquad (5)$$

Indi M_1 nokat üýtgemeýär hasap edip, M_2 nokadyň hereketiniň deňlemesini

$$m_2\frac{d\vec v}{dt}=-\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r, \qquad \vec v=\frac{d\vec r}{dt}, \qquad (6)$$

ýazyp bileris. Bu deňligiň iki tarapyny hem $\vec r$ wektora wektor köpeldip, alarys:

$$m_2\left[\vec r\times\frac{d\vec v}{dt}\right]=-\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}[\vec r\times\vec r].$$

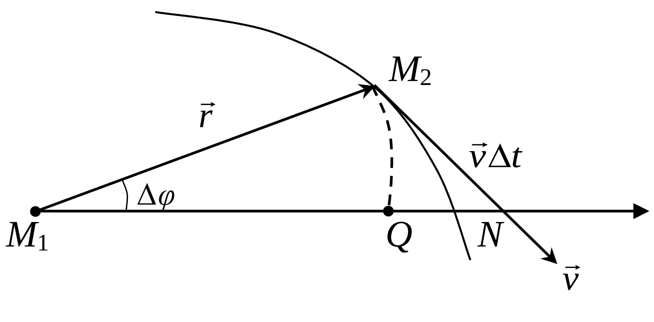
Emma $[\vec r\times\vec r]=0$ bolany sebäpli,

$$\left[\vec r\times\frac{d\vec v}{dt}\right]=0$$

alarys. Beýleki tarapdan,

$$\frac{d}{dt}[\vec r\times\vec v]=\left[\frac{d\vec r}{dt}\times\vec v\right]+\left[\vec r\times\frac{d\vec v}{dt}\right]=[\vec v\times\vec v]+\left[\vec r\times\frac{d\vec v}{dt}\right]=0,,$$

ýagny $[\vec r\times\vec v]=\vec C_1$ – hemişelik wektor bolar. Bu bolsa $\vec r$ we $\vec v$ wektorlar islendik wagtda bir tekizlikde ýatýar diýmekdir, ýagny hereket bir tekizlikde geçýär. Surata ýüzleneliň.



9-njy surat

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec r, \quad \angle NM_1M_2=\Delta\varphi, \quad \overrightarrow{M_2N}=\vec v\Delta t.$$

Bu ýerden M_1M_2Q sektoryň $S_{M_1M_2Q}$ meýdany üçin

$$S_{M_1M_2Q}=\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi\cong\frac{1}{2}|\vec r\times\vec v\Delta t|$$

takmyn formulany alarys. Δt nola ymtylanda takyk

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

formulany alarys. Ýokarda görkezilene görä $|\vec{r}\times\vec{v}|=|\vec{C}_1|$ = hemişelik san bolýar we aşakdaky

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=M,\qquad M=|\vec{C}_1|, \tag{7}$$

Kepleriň belli kanunyna geleris. Bu kanun M_2 nokadyň M_1 nokada görä radius wektorynyň wagt birliginde çyzýan sektorynyň meýdany şol bir M hemişelik sana deňdir diýip okalýar. Şeýlelik bilen, biziň matematiki modelimizden alan birinji netijämiz Kepleriň kanuny boldy. Onuň dogrulygy biziň modelimiziň başda goýan meselämize adekwatlygyndan gelip çykýar.

Indi modeli ýönekeýleşdirmegi dowam etdireliň. Ýokarky çyzgydan görnüşi ýaly,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2=\vec{v}^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

(6) we (7) deňlikleri ulanyp, (5) deňligi göçürip ýazalyň:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]-\frac{\gamma m_1m_2}{r}=T_0,\quad T_0=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{C}_0^2$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]-\frac{\gamma m_1m_2}{r}=T_0,$$

ýa-da Kepleriň kanunyny (6) ulanyp,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]\left(\frac{M}{r^2}\right)^2-\frac{\gamma m_1m_2}{r}=T_0$$

ýazyp bileris. Soňky deňlemede

$$\frac{2\gamma(m_1+m_2)}{M^2}=\alpha,\qquad\frac{2T_0(m_1+m_2)}{M^2m_1m_2}=\beta,\qquad r=\frac{1}{\rho}$$

belgilemeleri girizip, ony

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\alpha\rho+\beta-\rho^2$$

ýa-da

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = w^2 - \left(\rho - \frac{\alpha}{2}\right)^2, \quad w^2 = \beta^2 - \frac{\alpha^2}{4},$$

görnüşde ýazyp bolar. Soňky deňlemäni integrirläliň:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \sqrt{w^2 - (\rho - 0{,}5\alpha)^2}, \qquad \frac{d\rho}{\sqrt{w^2 - (\rho - 0{,}5\alpha)^2}} = d\varphi,$$

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{w^2 - (\rho - 0{,}5\alpha)^2}} = \varphi + \varphi_0 + 270^\circ, \qquad \arcsin\frac{\rho - 0{,}5\alpha}{w} = \varphi + \varphi_0 + 270^\circ,$$

$$\rho - 0{,}5\alpha = w \cdot \sin(\varphi + \varphi_0 + 270^\circ), \qquad \rho = 0{,}5\alpha - w\cos(\varphi + \varphi_0).$$

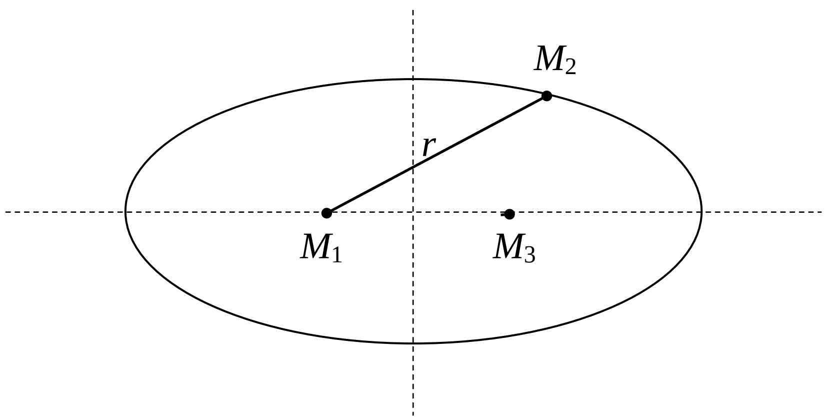
$r = \dfrac{1}{\rho}$ formulany ulanyp, alarys:

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - w\cos(\varphi + \varphi_0)} = \frac{\frac{2}{\alpha}}{1 - \frac{2w}{\alpha}\cos(\varphi + \varphi_0)}.$$

$$\frac{2w}{\alpha} = \varepsilon, \quad \frac{2}{\alpha} = \rho$$

belgilemelerleri girizip,

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon\cos(\varphi + \varphi_0)}$$



10-njy surat

ellipsiň deňlemesini alarys. Onuň bir fokusy M_1 nokatda bolar (10-njy surat). Diýmek, M_1 gün, M_2 planeta hasap etsek, onda planetalar Günüň daşyndan, bir fokusy gün bolan ellipsler boýunça hereket ederler.

10. ÝERIŇ TÖWEREGINDE HEREKET EDÝÄN MATERIAL NOKATLAR BARADA MESELE

Planetalaryň hereketi bilen birmeňzeş ýene bir meselä seredeliň.

Mesele örän daşdan ($r \approx \infty$) ýeriň üstüne uçup gelen material nokadyň tizligini anyklamakdan durýar. Indi M_1 nokady ýer, M_2 nokady uçup gelýän material nokat hasap edip, M_2 nokadyň hereketiniň deňlemesini ýazalyň. Ol ýokarda getirilen (6) deňleme bilen gabat geler. Ony ýene bir gezek ýazalyň:

$$m_2 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad r = |\vec{r}|,$$

bu ýerde m_1 – ýeriň, m_2 – material nokadyň massasy, $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, $-\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$ – ýeriň dartyş güýji. r ýeriň radiusyna deň ($r = R$) bolanda $\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} r = m_2 g$ bolýanyny göz öňünde tutup, $\gamma m_1 = gR^2$ deňligi alarys we ýokarky deňlemäni

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{gR^2}{r^3}\vec{r}$$

görnüşde ýazyp bileris. Soňky deňligiň iki tarapyny hem $\frac{d\vec{r}}{dt}$ köpeldip, alarys:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{gR^2}{r^3} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r}$$

ýa-da

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{gR^2}{r^3} \cdot \frac{dr^2}{dt},$$

ýa-da

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{gR^2}{r}\right),$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{r} + C.$$

Goý, material nokat tükeniksizlikden (başlangyç tizligi $v_0 = 0$) M_2 nokada gelipdir diýeliň. Onda $\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{r} + C$ deňlikde $r = \infty$, $v = 0$ goýup, $C = 0$ alarys we deňleme

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{r}$$

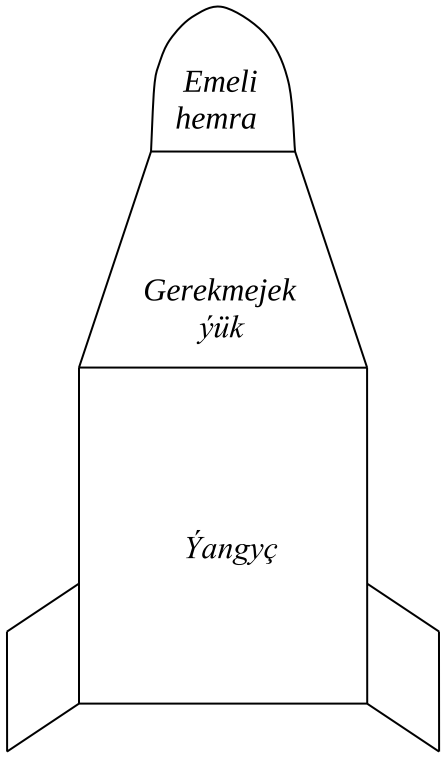
görnüşe geler. Soňky deňlemede $r = R$ goýup, material nokadyň

$$v^2 = 2gR, \quad v = \sqrt{2gR}$$

ýeriň üstüne düşendäki tizligini taparys. Bu ýerden $g = 9{,}8 m/sek^2$, $R = 6370km$ goýup, taparys:

$$v^2 = 9{,}8 \cdot 6370.000 \frac{m^2}{sek^2}, \qquad v = 11{,}3 \frac{m}{sek}.$$

Tersine, ýeriň üstündäki material nokady örän daş ýerlere ugratmak üçin oňa çen bilen $v_0 = 11{,}3 \frac{m}{sek}$ tizlik bermeli bolýar. Bu tizlige üçünji kosmiki tizlik diýýärler.



11-nji surat

Indi kosmiki raketalaryň uçuşlarynyň matematiki modelini düzeliň. Adatça, raketalar köpbasgançakly bolýarlar. Ýönekeý dil bilen aýdanyňda, birnäçe raketany üsti-üstüne goýup, bir raketa ýasaýarlar we oňa köpbasgançakly raketa diýýärler. Geliň, ″näme üçin raketa hökmany halda köpbasgançakly bolmaly?″ ″Bir ulurak raketa ýasap, emeli hemrany orbitasyna çykaryp bolanokmy?″ diýen sowallara jogap berjek bolalyň. Birbasgançakly, ýagny bir kosmiki raketanyň gurluşy 11-nji suratda shematiki görkezilen.

m_0 –raketanyň başlangyç massasy;

$m(t)$ – raketanyň t pursatdaky massasy,

$$m(t) = m_1 + m_2 + m_3(t),$$

m_1 – gerekmejek ýüküň massasy (üýtgemeýär);

m_2 – emeli hemranyň massasy (üýtgemeýär);

$m_3(t)$ – t pursatdaky ýangyjyň massasy;

$v(t)$ – t pursatdaky raketanyň tizligi;

u_0 – raketadan ýanyp çykýan gazlaryň tizligi; adatça, $u_0 \le 3\dfrac{km}{sek}$;

$\vec{F}$ – raketa täsir edýän daşky güýç. biziň ýagdaýymyzda $F = mg$;

$m_1 \ge 0{,}1m_0$ – häzirki zaman tehnikasynyň mümkinçiligi;

T – raketanyň uçuş wagty.

Şeýlelik bilen, model düzmek üçin çäklemeler kesgitlendi.

Berlenlere görä, $m_3(T) = 0$, ýagny uçuş wagtynyň ahyrynda ýangyç doly ýanyp gutarýar. $Q(t)$ bilen raketanyň t pursatdaky hereket mukdaryny belgiläliň. Kesgitlemä görä, $Q(t) = m(t)v(t)$. Mehanikanyň kanunyna görä, hereket mukdarynyň t pursatdaky artdyrmasy raketa täsir edýän güýçleriň impulsyna deň, ýagny

$$\Delta Q(t) = F\Delta t.$$

Δt wagt aralygynda raketanyň massasy $m+\Delta m$ bolar, tizligi $v(t+\Delta t)$ bolar. Massanyň Δm bölegi $v(t) - u_0$ tizlik alar. Bu bölegiň hereket mukdary

$$\Delta m[v(t+\Delta t) - u_0]$$

bolar. Alarys:

$$\Delta Q(t) = (m(t) + \Delta m)v(t + \Delta t) - m(t)v(t) - \Delta m[v(t + \Delta t) - u_0]$$

ýa-da

$$m(t)\Delta v + u_0 \Delta m = F\Delta t,$$

ýa-da

$$m(t)\frac{dv}{dt} + u_0\frac{dm}{dt} = F. \qquad (1)$$

(1) formula raketanyň hereketiniň matematiki modelidir. Onuň raketanyň hakyky hereketine adekwatlygy ulanylan kanunlaryň dogrulygyndan gelip çykýar. Indi modeliň derňewine geçeliň we ondan netijeler çykaralyň. Biziň başda goýan soraglarymyza jogap bermek üçin, (1) deňlemäni çözüp, $v(t)$ tizligi tapmak ýeterlik; emma meselä başgaça çemeleşmek hem mümkin.

$F=-mg$ bolany üçin, bu güýjüň täsiri diňe tizligi kiçeltmäge ugrukdyrylan bolýar. Eger deňlemede F=0 goýsak, onda ýokarky bellemä görä, täze deňlemeden tapylan $\tilde{v}(t)$ raketanyň hakyky tizliginden islendik pursatda uly bolar. $\tilde{v}(t)$ üçin deňleme ýazalyň:

$$m(t)\frac{d\tilde{v}}{dt}=-u_0\frac{dm}{dt}$$

ýa-da

$$\frac{d\tilde{v}}{dt}=-u_0\frac{\frac{dm}{dt}}{m(t)}.$$

Bu deňligiň iki tarapyndan 0-dan T çenli integral alalyň:

$$\tilde{v}(T)-\tilde{v}(0)=-u_0[\ln(m(T)-\ln m_0].$$

$\tilde{v}(0)=0$ bolýany sebäpli

$$\tilde{v}(T)=u_0\ln\frac{m_0}{m(T)}=u_0\ln\frac{m_0}{m_1(T)-m_2(T)}$$

deňlige geleris. Bu ýerden $m_2(T)>0$ ululygy taşlap,

$$\tilde{v}(T)<u_0\ln\frac{m_0}{m_1}$$

deňsizlige geleris. Berlenlere görä, $\frac{m_1}{m_0}\geq 0{,}1,\ \ u_0\leq 3\frac{km}{sek}$. Şoňa görä, $m_1=0{,}1m_0$ goýup, alarys:

$$\tilde{v}(T)<3\ln\frac{m_0}{0{,}1m_0}=3\ln 10.$$

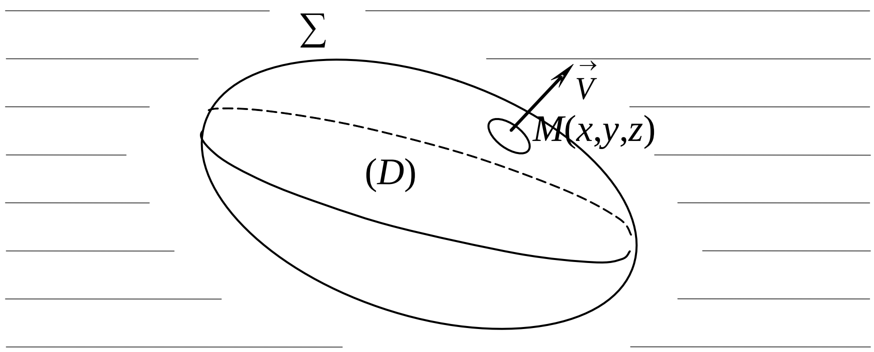
$\ln 10<2{,}3$ bolany üçin,

$$v(T)\leq\tilde{v}(T)<3\cdot 2{,}3\frac{km}{sek}=6{,}9\frac{km}{sek}.$$

Bu tizlik birinji kosmiki tizlikden kän kiçi bolany üçin, emeli hemra ýeriň üstüne gaçar. Diýmek, emeli hemra üçin niýetlenen jisimiň hakykatdan-da emeli hemra bolmagy üçin, raketa iň azyndan iki basgançakly bolmaly bolýar.

11. IDEAL SUWUKLYK AKYMY BILEN BAGLANYŞYKLY MATEMATIKI MODEL

Islendik suwuklyk akymy öwrenilende esasy gyzyklandyrýan ululyklar suwuklygyň bölejikleriniň tizlikleri, suwuklygyň islendik nokadyndaky basyşy we suwuklygyň dykyzlygy bolýar. Eger seredilýän ululyklaryň bahalaryny az sanly nokatlarda tapmak gerek bolsa, onda olary tejribäniň üsti bilen tapsa hem bolar. Emma nokatlaryň sany tükeniksiz köp, gyzyklandyrýan wagt aralygy uly bolan ýagdaýynda tejribeler üsti bilen ululyklary tapmagyň uly kynçylyklara getirmegi mümkin. Ondan başga-da, ululyklaryň sanly nokatlardaky we sanly wagt pursatlaryndaky bahalary suwuklygyň akymy barada umumy netijelere gelmegi kynlaşdyrýar. Şol sebäpli suwuklygyň akymynyň matematiki modeline ýüzlenmeli bolýar. Belgilemeler girizeliň. $p(x, y, z, t)$ – suwuklygyň $M(x, y, z)$ nokadyndaky t wagtdaky basyşy, $\rho(x, y, z, t)$ – $M(x, y, z)$ nokatdaky t wagtdaky dykyzlyk, $u(x, y, z, t), \vartheta(x, y, z, t), \omega(x, y, z, t)$ M nokatdaky t wagtdaky $\vec{V}$ tizligiň koordinatalary, γ – suwuklygyň şeppeşikligi nola deň hasap edilýär, $\vec{F}(x, y, z, t)$ – daşky güýçleriň massa birligine täsir edýän dykyzlygy. Suwuklygyň akymynyň içinde ýerleşýän göz öňüne getirilýän Σ üst bilen çäklenen D ýaýlany dolduryán suwuklygyň bölegine täsir edýän güýçleri tapalyň (12-nji surat).



12-nji surat

$p(x, y, z, t)$ basyşyň täsiriniň jemleýji güýji - $\vec{R}_1$

$$\vec{R}_1 = -\iint_{\Sigma} p\,\vec{n}\,d\sigma = -\iiint_{D} grad\,p\,dx\,dy\,dz$$

integrala deňdir. Bu ýerde $p = p(x, y, z, t)$, $\vec{n}$ – Σ üste geçirilen daşky normal. $\vec{\sigma}_n = -p(x, y, z, t)\cdot\vec{n}$ ululyga $M(x, y, z)$ nokatdaky normal dartgynlyk diýýärler.

Görşümiz ýaly, normal dartgynlylygyň ululygy Σ üstüň $M(x,y,z)$ nokatdaky normal wektorynyň ugruna bagly däldir, ýagny $\left|\vec{\sigma}_n\right| = |p(x,\ y,\ z,\ t)|$. Daşky güýçleriň D ýaýladaky suwuklyk bölegine täsiriniň jemleýjisi

$$\vec{R}_2 = \iiint\limits_D \rho \vec{F}\, dx dy dz$$

integrala deňdir. Seredilýän suwuklyk bölegine täsir edýän başga güýç ýok. Şonuň üçin, seredilýän suwuklyk böleginiň hereket deňlemesi, Nýutonuň kanunyna laýyklykda,

$$\iiint\limits_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dx\,dy\,dz = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = -\iiint\limits_D grad\, p\, dx\,dy\,dz + \iiint\limits_D \rho \vec{F}\, dx\,dy\,dz$$

ýa-da

$$\iiint\limits_D [\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + grad\, p - \rho \vec{F}]\, dx\,dy\,dz = 0$$

görnüşde bolar. D ýaýlanyň islendik möçberde bolup bilýänligi sebäpli, bu ýerden L. Eýleriň adyny göterýän suwuklygyň hereket deňlemesini alarys:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + grad\ p - \rho \vec{F} = 0\,.$$

Deňlemä girýän $\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ – t boýunça doly önüm şeýle hasaplanýar:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{pmatrix} u'_x\, u + u'_y\, \vartheta + u'_z\, \omega + \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \vartheta'_x\, u + \vartheta'_y\, \vartheta + \vartheta'_z\, \omega + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} \\ \omega'_x\, u + \omega'_y\, \vartheta + \omega'_z\, \omega + \dfrac{\partial \omega}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Bu deňligi göz öňünde tutup, hereket deňlemesini aşakdaky ýaly ýaýbaň görnüşde ýazyp bolar:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} u + \dfrac{\partial u}{\partial y} \vartheta + \dfrac{\partial u}{\partial z} \omega + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} - F_x = 0, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} u + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \vartheta + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial z} \omega + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial y} - F_y = 0, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{\partial \omega}{\partial x} u + \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \vartheta + \dfrac{\partial \omega}{\partial z} \omega + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z} - F_z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Bu ýerde $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ belgileme ulanyldy.

Alnan hereket deňlemesi üç deňlemeden durýar, emma deňleme bäş sany $u, \vartheta, \omega, p, \rho$ näbelli funksiýany saklaýar. Şol sebäpli, hereketiň deňlemesiniň ýanyna ýene iki deňleme goşýarlar. Olaryň birinjisi üznüksizlik deňlemesi diýip atlandyrylýan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \vec{V}) = 0$$

deňlemedir. Ikinjisi bolsa, ýagdaý deňlemesi diýlip atlandyrylýan, dykyzlyk bilen basyşy baglanyşdyrýan $\rho = f(p)$ görnüşli deňlemedir. Şeýlelik bilen,

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\; p - \rho \vec{F} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \vec{V}) = 0, \\ \rho = f(p) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy seredilýän suwukluk akymy baradaky gidromehanika degişli meseläniň matematiki modeli bolýar. Bu modeli çözüp, $u, \vartheta, \omega, p, \rho$ funksiýalary tapmak bilen suwuklyk akymy baradaky mesele takmyn çözülýär. Sebäbi modeliň özi takmyndyr. Elbetde, akyma täsir edýän beýleki hadysalary göz öňünde tutup, modeli takyklaşdyrsa bolar.

Üznüksizlik deňlemesiniň örän ýönekeý manysy bar. Akýan suwuklygyň içinde göz öňüne getirilýän Σ üst bilen çäklenen Q göwrümini alalyň. Ol göwrümiň içindäki suwuklygyň t wagtdaky massasy

$$m(t) = \iiint\limits_{Q} \rho(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz$$

deň bolar. $m(t+dt) - m(t)$ tapawut dt wagtda Q göwrümdäki suwuklygyň artany bolar. Bu artdyrmany başgaça hem hasaplap bolýar. Eger $\vec{n}$ Σ üstüň nokatlarynda gurlan daşky normal wektor bolsa, onda

$$\iint\limits_{\Sigma} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\,ds \cdot dt$$

ululyk dt wagtda Σ üstden geçen suwuklygyň mukdaryny berer. $\vec{n}$ daşky normal bolany sebäpli

$$m(t+dt) - m(t) = -\iint\limits_{\Sigma} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\,ds \cdot dt$$

ýa-da

$$\frac{dm}{dt} = -\iint\limits_{\Sigma} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\,ds \qquad (9)$$

deňligi alarys. Kesgitlemä görä,

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_Q \rho dxdydz=\iiint_Q \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz,$$

Stoksyň formulasyna görä,

$$\iint_\Sigma (\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds=\iiint_Q div(\vec{V}\rho)dxdydz.$$

Alnan bahalary (9) deňlikde goýup, alarys:

$$\iiint_Q \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz=\iiint_Q div(\vec{V}\rho)dxdydz$$

ýa-da

$$\iiint_Q \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\vec{V}\,\rho)\right)dxdydz=0.$$

Q göwrümiň islendik bolany sebäpli, bu ýerden

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\vec{V}\,\rho)=0$$

deňligi alarys. Diýmek, bu deňlik massanyň saklanmak kanunyň matematiki ýazgysydyr.

(5) deňlemeler ulgamyny ýönekeýleşdireliň. Basyş funksiýasy atlandyrylýan

$$P(p)=\int\frac{dp}{\rho(p)}$$

funksiýany girizip,

$$\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}=grad\,P(p)$$

ýazyp bileris. Ýönekeýlik üçin, $\vec{F}$ güýji potensial güýç diýip hasap edeliň; ýagny $U(x, y, z, t)$ funksiýa bar bolup, $\vec{F}=grad\,U$ bolsun. Indi (5) ulgamy özgerdip ýazalyň:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\omega\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)-\vartheta\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\vec{V}^2}{2}\right)=-\dfrac{\partial P(p)}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}+u\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-\omega\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial y}-\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\vec{V}^2}{2}\right)=-\dfrac{\partial P(p)}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{\partial\omega}{\partial t}+\vartheta\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial y}-\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)-u\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\vec{V}^2}{2}\right)=-\dfrac{\partial P(p)}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial z}.\end{cases}\tag{6}$$

Soňra $rot\vec{V}$ towlanma wektorynyň

$$rot\vec{V} = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x},\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$$

formulalar bilen kesgitlenýänini ýatlap, (6) ulgamy

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \left[\vec{V} \times rot\vec{V} \right] = -grad\, B$$

wektor görnüşinde ýazyp bileris. Bu ýerde

$$B = \frac{\vec{V}^2}{2} + P(p) - U$$

Bernulliniň üçagzalygy atly funksiýa. Eger akymyň towlanma wektory $rot\vec{V} \equiv 0$ bolsa, onda deňleme has ýönekeý

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -grad\, B \tag{7}$$

görnüşe geler. Analizden belli bolşy ýaly, $rot\vec{V} \equiv 0$ halynda $\vec{V}$ wektor meýdany potensial wektor meýdany bolýar. Bu bolsa, $\varphi(x, y, z, t)$ funksiýa tapylyp,

$$\vec{V} = grad\ \varphi$$

deňlik ýerlikli bolýar diýmekdir. Bu halda (7) deňlemäni

$$\frac{\partial}{\partial t}(grad\ \varphi) = -grad\, B$$

ýa-da

$$grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B \right) = 0$$

görnüşde ýazyp bolar. Soňky deňlikden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B = \Phi(t)$$

deňlemä geleris, bu ýerde $\Phi(t)$ diňe t bagly erkin funksiýa. $B = \dfrac{\vec{V}^2}{2} + P(p) - U$ we $\vec{V} = grad\ \varphi$ bolýanyny göz öňünde tutup, soňky deňlemäni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left| grad\ \varphi \right|^2 + P(p) - U = \Phi(t) \tag{8}$$

Koşi-Lagranžyň integraly diýlip atlandyrylýan integral görnüşinde ýazyp bileris.

Eger $\varphi(x, y, z, t)$ potensial funksiýa wagta bagly bolmasa, ýagny $\vec{V}$ wektor meýdany stasionar meýdan bolsa, onda $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0$ bolar we deňleme

$$\frac{1}{2}|\, grad\ \varphi|^2 + P(p) - U = C \qquad (C \text{ - hemişelik})$$

görnüşi alar. Bu deňlige Bernulliniň integraly diýýärler. Ol $\varphi(x, y, z, t)$ we U belli halynda suwuklygyň islendik nokadyndaky basyşyny tapmak üçin giňden ulanylýar. $|\, grad\, \varphi|^2 = \left|\vec{V}\right|^2 = V^2$ bolany sebäpli, Bernulliniň integralyny

$$\frac{1}{2}V^2 + P(p) - U = C$$

görnüşde hem ýazsa bolar.

12. SUWUKLYGYŇ TEKIZ AKYMYNYŇ MATEMATIKI MODELI

Biz geçen bölümde suwuklygyň akymynyň deňlemesi barada gürrüň etdik. Bu bölümde meseläni has hem ýeňilleşdireliň, ýagny suwuklygyň bölejikleriniň belli bir α tekizlige parallel tekizlikde hereket edýän ýagdaýyna seredeliň. Köp hallarda α tekizligine parallel tekizlikleriň hemmesinde hereket birmeňzeş bolýar we suwuklygyň hereketini öwrenmek üçin diňe bir tekizlikdäki hereketi öwrenmek ýeterlik bolýar. Aşakda edil şeýle hereket barada gürrüň edilýär.

Bu halda xOy koordinatalar ulgamyny α tekizlikde ýerleşdirsek we z oky oňa perpendikulýar geçirsek

$$\vec{V} = \{u(x, y, 0, t),\ \vartheta(x, y, 0, t)\}, \qquad rot\vec{V} = \left\{0,\ 0,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

boljagy we suwuklygyň hereketiniň deňlemesiniň

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \vartheta\left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial B}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

görnüşde boljagy düşnüklidir.

Indi akym towlanmasyz, stasionar we suwuklyk gysylmaýan hasap etsek, onda towlanmasyzlyk şerti

$$rot\vec{V} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

we gysylmazlyk şerti

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\equiv 0$$

ýerine ýetmeli bolar. Basyş funksiýany $P(p)=\dfrac{p}{\rho}$ hasap etsek, Bernulliniň integraly

$$\frac{u^2+\vartheta^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U=C \qquad \text{(C - hemişelik)}$$

görnüşe geler. Soňky üç deňleme bilelikde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y}=0, \\ \dfrac{u^2+\vartheta^2}{2}+\dfrac{p}{\rho}-U=C \end{cases} \tag{10}$$

suwuklygyň akymyny kesgitleýän deňlemeler ulgamyny berýärler. Olardan $u,\ \vartheta,\ p$ näbelli funksiýalary tapýarlar. Anyklyk üçin tükeniksizlikde tizlik $\vec{V}$ we basyş p hemişelik hasap edýärler, ýagny $\vec{V}\Big|_{r=\infty}=\vec{V}_\infty$ - hemişelik wektor, $p|_{r=\infty}=p_\infty$ - hemişelik san bolýar, $\vec{F}$ - massalar güýji nola deň hasap edilýär. Ýene-de L şol akymyň işinde ýerleşen ýapyk žordan egrisi bar bolup, $\vec{n}=\{n_x,\ n_y\}$ L egriniň $M(x,y)$ nokadyndaky normal wektory bolsa, onda L egriniň nokatlarynda

$$un_x+\vartheta n_y=0$$

şert ýerine ýetýär hasap edilýär.

Soňky şerte suwuklygyň L egriden syzmazlyk şerti diýýärler. Ahyrda, ýokarky bellemelerden soň, suwuklyk akymynyň matematiki modeli şeýle görnüşe geler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y}=0, \\ \dfrac{u^2+\vartheta^2}{2}+\dfrac{p}{\rho}=\dfrac{p_\infty}{\rho_\infty}+\dfrac{u_\infty^2+\vartheta_\infty^2}{2}, \\ un_x+\vartheta n_y=0, \qquad L \textit{ egriniň nokatlarynda.} \end{cases} \tag{11}$$

L egriniň çözmeli meselä görä saýlanyp alynýanyny ýatlap geçeliň. Üç deňlemeden we bir gyra şertinden durýan (11) ulgama gyra meselesi diýýärler. Elbetde, birinji gyzyklandyrýan mesele (11) gyra meselesiniň çözüwi barmy, ýeketäkmi ýa-da köpmi diýen sowal bolmaly. Belli bolşy ýaly, (11) ulgamyň birinji deňlemesi $\vec{V} = \{u, \vartheta\}$ wektor meýdanynyň potensial meýdan bolýanyny aňladýar. Beýle diýmek, $\varphi(x, y)$ potensial funksiýa tapylyp, $u \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\vartheta \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ deňlikler ýerine ýetýär diýmekdir. u we ϑ funksiýalaryň tapylan bahalaryny (11) ulgamyň ikinji deňlemesinde ýerine goýsak

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

deňlemä geleris. Bu deňlemä Laplasyň deňlemesi diýýärler, ony kanagatlandyrýan islendik funksiýa garmoniki funksiýa diýýärler. Diýmek, $\varphi(x, y)$ - garmoniki funksiýadyr. Goý, $\psi(x, y)$ $\varphi(x, y)$ bilen çatyrymly islendik garmoniki funksiýa bolsun. Ol $\varphi(x, y)$ funksiýanyň üsti bilen hemişelik takyklykda tapylýar. Çatyrymly diýmek

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{12}$$

toždestwolar ýerine ýetýär diýmekdir.
Kompleks üýtgeýänli funksiýalar nazaryýetinden belli bolşy ýaly, soňky deňlikler

$$f(z) \equiv \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) \tag{13}$$

funksiýa $z = x + iy$ kompleks argumentiň önümi bar funksiýasy bolýar diýmekdir. Biz $\varphi(x, y)$ funksiýa potensial funksiýa diýipdik. Gidrodinamikada $f(z) \equiv \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ funksiýa **kompleks potensial** diýýärler. Ýokarda kesgitlenişine görä, $\varphi(x, y)$ we $\psi(x, y)$ özara çatyrymly garmoniki funksiýalar. Şol sebäpli $\varphi(x, y)$ funksiýa hem $\psi(x, y)$ funksiýanyň üsti bilen hemişelik takyklykda kesgitlener. (11) ulgamyň dördünji şertini,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

deňlikleri ulanyp,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} n_y = 0$$

görnüşde ýazalyň. Şeýlelikde, (11) gyra meselesi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} n_x - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} n_y = 0 \end{cases} \tag{14}$$

(14) gyra meselesine syrygýar. Sebäbi, (11) ulgamyň üçünji deňlemesi u we ϑ belli ýagdaýynda p basyşy tapmak üçin ulanylýar.

Hususy önümli deňlemeler nazaryýetinden belli bolşy ýaly, (14) gyra meselesiniň çözüwi bar, özi hem hemişelik takyklykda kesgitlenýär.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \vartheta = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

bolany sebäpli, u we ϑ funksiýalar birbelgili kesgitlenýärler.

Goý, $\psi(x, y)$ (14) meseläniň çözüwi bolsun. (12) deňliklere göra,

$$0 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv u\frac{\partial \psi}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv \vec{V} \cdot grad\, \psi$$

bolýany üçin, $grad\, \psi$ wektor $\vec{V}$ wektora perpendikulýar bolar. $\vec{V} = \{u, \vartheta\}$ wektor meýdany, şerte görä, stasionar wektor meýdany. Eger l egriniň islendik nokadyndaky wektor meýdanyna degişli wektor l egrä şol nokatda galtaşýan bilen gabat gelse, onda l egrä ugur egrisi (liniýa toka) diýýärler.

$$\psi(x, y) = C \quad \text{(C - hemişelik)}$$

egrilere seredeliň. Olara $\psi(x, y)$ funksiýanyň dereje egrileri diýýärler.

Goý, $\psi(x, y) = C$ egriniň parametrik deňlemesi $x = x(t),\ y = y(t)$ bolsun. Onda $\psi(x(t), y(t)) \equiv C$ deňlik ýerine ýeter. Soňky deňligiň iki tarapyndan differensial alsak

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial y}y'(t) \equiv 0$$

deňlige geleris. $\vec{\tau} = \{x'(t),\ y'(t)\}$ wektoryň $\psi(x, y) = C$ egrä galtaşýan bolýanyny ýatlasak we galtaşýanyň $\vec{V}$ wektor meýdanynyň şol nokatdaky agzasy bilen kollinear bolýanyny ýatlasak, onda $\psi(x, y) = C$ egriniň nokatlarynda

$$grad\, \psi \cdot \vec{V} = \frac{\partial \psi}{\partial x}u + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vartheta = 0$$

deňligiň ýerine ýetýänini göreris. Diýmek, islendik $\psi(x, y) = C$ dereje egrisi $\vec{V}$ wektor meýdanynyň (suwuklyk akymynyň) ugur egrisi bolýanyny göreris. Şoňa görä-de, $\psi(x, y)$ funksiýa **ugur funksiýasy** diýilýär.

Şeýlelik bilen, (14) meseläniň çözüwi bolan $\psi(x, y)$ funksiýa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \vartheta$$

deňliklere görä, $\vec{V}$ wektor meýdanyny kesgitleýär. Ondan başga-da, $\psi(x, y) = C$ dereje egrileri $\vec{V}$ wektor meýdanynyň ugur egrilerini, ýa-da başgaça aýdanyňda, suwuklygyň bölejikleriniň traýektoriýalaryny kesgitleýärler. Diýmek, $\psi(x, y)$ funksiýa ýa-da onuň üsti bilen kesgitlenýän

$$f(z) \equiv \varphi(x,\ y) + i \cdot \psi(x,\ y)$$

kompleks potensial akymy doly kesgitleýär. Belli bolşy ýaly, $f'(z)$ bar we

$$f'(z) = \varphi'_x + i \cdot \psi'_y = u - i\vartheta$$

deňlik ýerlikli bolýar. Gidrodinamikada $u + i\vartheta$ ulylyga kompleks tizlik, $f'(z) = u - i\vartheta$ ulylyga çatyrymly tizlik diýmek kabul edilen. Görnüşi ýaly, kompleks tizligi bilmek ýa-da çatyrymly tizligi bilmek $\vec{V}$ wektor meýdanyny doly kesgitleýär. Şeýlelik bilen, suwuklyk akymyny $f(z)$ we $f'(z)$ funksiýalar doly kesgitleýärler. Ýönekeý suwuklyk akymlarynyň üçüsine seredeliň.

12.1. Birjynsly tekiz akym

Bu akym

$$f(z) = z_0 \cdot z$$

kompleks potensial bilen kesgitlenýär.
$z_0 = x_0 + iy_0, \quad z = x + iy$ bolýanyna görä alarys:

$$f(z) = (x_0 + iy_0)(x + iy) = x_0 x - y_0 y + i(x_0 y + y_0 x).$$

Diýmek, $\varphi(x,\ y) = x_0 x - y_0 y$ - akymyň potensial funksiýasy, $\psi(x,\ y) = x_0 y + y_0 x$ - akymyň ugur funksiýasy bolar. $f'(z) = z_0$. Diýmek, $u = x_0,\ \vartheta = -y_0$ ýa-da $\vec{V} = \{x_0, -y_0\}$ tizlikler meýdanyny berer. $x_0 y + y_0 x = C$ gönüler bolsa akymyň ugur egrileri bolarlar. Şeýlelikde, birjynsly tekiz akym hemişelik tizlik bilen göni çyzyklar boýunça hereket edýän bölejikleriň akymydyr. z_0 sany $z_0 = V_\infty e^{-i\theta_\infty}$ trigonometrik görnüşde ýazsak, onda akymyň kompleks potensialyny

$$f(z) = V_\infty e^{-i\theta_\infty} \cdot z$$

görnüşde ýazyp bolar.

12.2. Gözbaşyly akym

Gözbaşy koordinatalar başlangyjy bilen gabat gelýär diýip hasap edeliň. Bu ýerde iki hili akyma seredeliň. Birinji akymda suwuklygyň bölejikleri radius boýunça gözbaşydan daşlaşýarlar (göni akym). Ikinji akymda suwuklygyň bölejikleri radius boýunça gözbaşa golaýlaşýarlar (ters akym). Bu akymlaryň kompleks potensial funksiýasyny

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

görnüşde alsa bolar. Bu ýerde Q - hakyky san. z üýtgeýäni $z = re^{i\theta}$ trigonometrik görnüşde ýazsak, onda kompleks potensial

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln r + i\frac{Q}{2\pi}\theta$$

ýa-da

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(x^2 + y^2) + i\frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

görnüşe geler. Diýmek,

$$\varphi(x,\ y) = \frac{Q}{2\pi}\ln(x^2 + y^2), \quad \psi(x,\ y) = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

akymyň ugur egrileri

$$\psi(x,\ y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_1$$

ýa-da

$$\frac{y}{x} = C$$

göni çyzyklar bolar. $\vec{V}$ tizlik bolsa

$$\vec{V} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\} = \left\{\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right\} = \frac{Q}{2\pi r}\vec{r}, \quad \vec{r} = \{x,\ y\}$$

görnüşde bolar. Bu ýerden $Q > 0$ bolanda göni akymy, $Q < 0$ bolanda ters akymy alarys.

12.3. Nokatdaky towlanmanyň akymy

Onuň kompleks potensial funksiýasyny

$$f(z) = \frac{A}{2\pi i}\ln z, \quad A \text{ - hakyky san,}$$

görnüşde alýarlar. Onuň çatyrymly tizligi

$$u - i\vartheta = f'(z) = \frac{A}{2\pi i z}$$

görnüşde bolar. z üýtgeýäni $z = re^{i\theta}$ trigonometrik görnüşde ýazsak, onda kompleks potensial

$$f(z) = \frac{A}{2\pi i}(\ln r - i\theta)$$

ýa-da

$$f(z)=\frac{A}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-i\frac{A}{2\pi}\ln(x^2+y^2)$$

görnüşe geler. Bu ýerden alarys:

$$\varphi(x,\ y)=\frac{A}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ \text{- potensial funksiýa,}$$

$$\psi(x,\ y)=-\frac{A}{2\pi}\ln(x^2+y^2)\ \text{- ugur funksiýa.}$$

Akymyň ugur egrileri

$$\psi(x,\ y)=-\frac{A}{2\pi}\ln(x^2+y^2)=C$$

ýa-da

$$x^2+y^2=C$$

töwerekler bolarlar. Ýagny suwuklygyň bölejikleri $x^2+y^2=C$ töwerekler boýunça hereket ederler, olaryň çatyrymly tizligi bolsa

$$u-i\vartheta=f'(z)=-\frac{A}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{A}{2\pi}i\frac{x}{x^2+y^2}$$

ýa-da

$$u-i\vartheta=-\frac{A}{2\pi(x^2+y^2)}(y+ix)$$

deňlikden tapylar. $f(z)=\frac{A}{2\pi i}\ln z$ formuladaky A sany anyklalyň. xOy tekizlikde islendik l ýapyk žordan egrisini alalyň we

$$\int_l(u-i\vartheta)dz=\int_l f'(z)dz$$

integraly hasaplalyň. Alarys:

$$\int_l(u-i\vartheta)dz=\int_l(u-i\vartheta)(dx+idy)=\int_l udx+\vartheta dy+i\int_l udy-\vartheta dx.$$

Indi

$$\int_l udx+\vartheta dy=\Gamma,\qquad \int_l udy-\vartheta dx=Q$$

bellemeleri girizip,

$$\int_l(u-i\vartheta)dz=\Gamma+iQ$$

deňligi alarys. Γ integrala $\vec{V}=\{u,\ \vartheta\}$ wektor meýdanynyň l egri boýunça aýlanmasy diýýärler. Q integral bolsa, şol wektor meýdanynyň kesgitleýän suwuklyk akymynyň wagt birliginde l egriden geçýän mukdary bolýar. Beýleki tarapdan

$$\int_l (u - i\vartheta)dz = \int_l f'(z)dz = \int_l \frac{A}{2\pi i z}dz\,.$$

Koordinatalar başlangyjy l egriniň içinde hasap etsek, belli bolşy ýaly, $\int_l \frac{1}{z}dz = 2\pi i$ bolar. Şoňa görä, alarys:

$$\int_l (u - i\vartheta)dz = A$$

ýa-da

$$\Gamma + iQ = A$$

ýa-da

$$A = \Gamma, \quad Q = 0.$$

Bu ýerden nokatdaky towlanma akymynyň kompleks potensial funksiýasy üçin

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

formulany alarys.

Şu ýerde gelejek üçin ähmiýetli bir bellik etmek zerur. Biz gözbaşyly akymlary kesgitlämizde gözbaşy koordinatalar başlangyjynda diýip hasap etdik, nokatdaky towlanmanyň akymyny kesgitlämizde towlamanyň nokady koordinatalar başlangyjynda diýip hasap etdik. Emma akymyň gözbaşysy hem, towlamanyň nokady hem islendik z_0 nokatda bolup bilerler. Olary kesgitlemek üçin öňki tapylan kompleks potensiallarda z-iň ýerine $z - z_0$ goýmak ýeterlikdir. Elbetde, täze alnan potensiallar dürli akymlary kesgitleýärler. Ondan başga-da, dürli akymlaryň kompleks potensial funksiýalaryny goşsak ýene-de bir öňkülere görä çylşyrymly akymyň kompleks potensial funksiýasyny alarys. Ine, şu pikire mysal hökmünde ýene-de bir akyma seredeliň.

Goý, $f_1(z) = \frac{A}{2\pi}\ln(z+a),\quad A > 0$, gözbaşysy $z_0 = -a$ nokatda bolan göni akymyň kompleks potensial funksiýasy, $f_2(z) = -\frac{A}{2\pi}\ln(z-a)$ - gözbaşysy $z_0 = a$ nokatda bolan ters akymyň kompleks potensial funksiýasy bolsun. Kompleks potensial funksiýasy

$$f_a(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

bolan akyma seredeliň. $f(z)$ funksiýany anyklalyň, alarys:

$$f_a(z) = \frac{A}{2\pi}\left[\ln(z+a) - \ln(z-a)\right] = \frac{A}{2\pi}\ln\frac{z+a}{z-a}.$$

$f_a(z)$ a-nyň we A-nyň islendik bahalarynda haýsy hem bolsa bir akymyň kompleks funksiýasy bolýar. $A=\dfrac{m}{2a}$, m - fiksirlenen san, goýalyň we $f_a(z)=\dfrac{m}{4a\pi}\ln\dfrac{z+a}{z-a}$ funksiýanyň a nola ymtylýandaky predelini tapalyň. Alarys:

$$f(z)=\lim_{a\to 0} f_a(z)=\lim_{a\to 0}\frac{m}{4a\pi}\ln\left(1+\frac{2a}{z-a}\right)=\frac{m}{2\pi z}.$$

Kompleks potensial funksiýasy

$$f(z)=\frac{m}{2\pi z}$$

bolan akyma goşa gözbaşyly akym diýýärler. Bu akym üçin

$$\varphi(x,\ y)=\frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \psi(x,\ y)=-\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

boljagy düşnüklidir. Onuň ugur egrileriniň deňlemeleri

$$\psi(x,\ y)=C_0$$

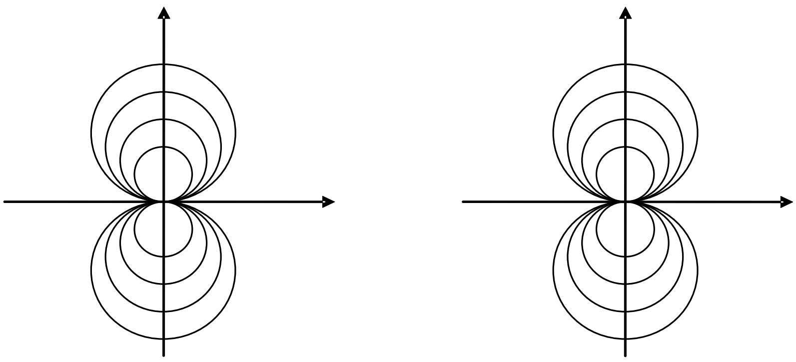
ýa-da

$$-\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=C_0$$

görnüşde ýazylýar. Eger $-\dfrac{2\pi C_0}{m}=\dfrac{1}{2\alpha}$ belgileme girizsek, soňky deňleme

$$x^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$$

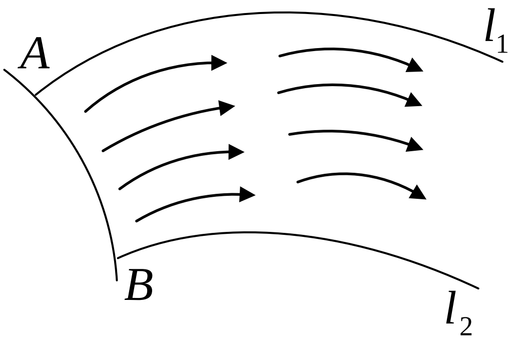
görnüşe geler. Bu merkezi $(0,\ \alpha)$ nokatda bolan, radiusy $|\alpha|$ bolan töwerekleriň maşgalasydyr (13-nji surat).



13-nji surat

Suratlardan görnüşi ýaly $m>0$ bolanda suwuklygyň bölejikleri töwerek boýunça hereket edip, y okundan sagda gözbaşa ýygnanýarlar, çepde ondan daşlaşýarlar, $m<0$ bolanda hereket tersine bolýar.

Goý, l_1 we l_2 iki ugur egrisi bolsunlar (14-nji surat). l olaryň ikisini hem suratdaky ýaly kesip geçýän egri. l egriniň A we B nokatlarynyň arasyndaky nokatlaryndan geçýän suwuklygyň bölejikleriniň hemişe l_1 we l_2 egrileriň arasynda hereket etjegi düşnüklidir. Ýagny l_1 we l_2 ýabyň kenary wezipesini ýerine ýetirýärler.



14-nji surat

Indi l egriniň AB dugasyndan wagt birliginde geçýän suwuklygyň mukdaryny kesgitläliň. Goý, $\vec{n} = \{n_x,\ n_y\}$ AB duganyň nokatlaryndaky normal wektor bolsun, onda AB dugadan wagt birliginde geçen suwuklygyň göwrümi Q

$$Q = \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = \int_A^B (un_x + \vartheta n_y) ds = \int_A^B u dy - \vartheta dx$$

deňlikden tapylar. $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \vartheta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ bolýanyny göz öňünde tutup,

$$Q = \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \psi(B) - \psi(A)$$

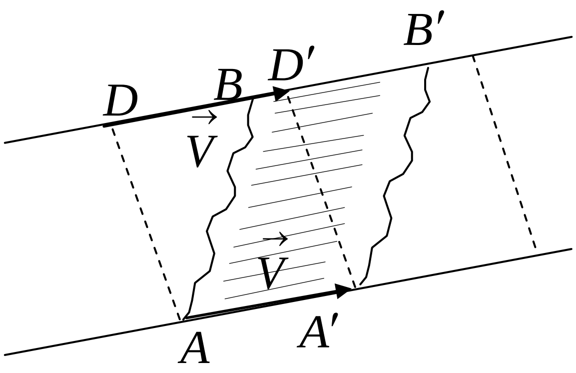
formulany alarys. Ýagny l_1 we l_2 ugur egrilerini birleşdirýän AB dugadan wagt birliginde geçýän suwuklygyň göwrümi AB duga bagly däldir we $\psi(B) - \psi(A)$ tapawut bilen kesgitlenýändir. Mysala ýüzleneliň.

Suwuklyk akymynyň tizligi islendik nokadynda $\vec{V} = \{a,\ b\}$ hemişelik tizlik bolsun. Onda $\psi = ay - bx$ funksiýanyň ugur funksiýasy boljagy düşnüklidir.

$$l_1: \quad ay - bx = c_1,$$
$$l_2: \quad ay - bx = c_2$$

iki ugur egrisini alalyň. Olar parallel göni çyzyklardyr (15-nji surat).

Olary AB egri bilen birleşdireliň. $A(x_0,\ y_0),\quad B(x_1,\ y_1)$. Kesgitlemä görä, $\vec{V}$ wektor



15-nji surat

l_1 we l_2 gönülere parallel, $\vec{V}$ tizlik hemişelik bolany sebäpli $A^/B^/$ egri AB egrini $\vec{V}$ wektoryň ugruna $\left|\vec{V}\right| = AA'$ aralyga parallel göçürme bilen alynýar. Şol sebäpli AB egriden wagt birliginde geçýän suwuklygyň mukdary $ABB^/A^/$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna deň bolar. Şu ýerde suwuklygyň dykyzlygynyň 1-e deňligini we egriden geçýän suwuklygyň mukdary hökmünde ugrukdyryjysy AB egri bolan, emele getirijileri AB egriniň ýatýan tekizligine perpendikulýar we uzynlyklary bire deň kesimler bolan silindrik üstden şol tizlikli suwuklygyň geçýän mukdary düşünilýänligini bellemek gerek. Suratdan görnüşi ýaly, $ABB^/A^/$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdany $ADD^/A^/$ gönüburçlugyň meýdanyna deň, ýagny $AD \cdot AA' = AD \cdot \left|\vec{V}\right|$ bolar. Diýmek, AB egriden wagt birliginde geçýän suwuklygyň möçberi AB egrä bagly däl bolýar. Aşakda suwuklyk akymy bilen baglanyşykly ýene bir meselä garalýar.

13. UÇARYŇ UÇMAGYNA GETIRÝÄN GÖTERME GÜÝÇLERIŇ DÖREÝŞI BARADA MESELE

Goý, bize akym berlen bolsun. Akymyň öz ugrunda ýerleşdirilen jisime bolan täsirini öwreneliň. Elbetde, akym çylşyrymly bolsa, ýerleşdirilen jisimiň görnüşi çylşyrymly bolsa bu meseläni çözmek örän kyn. Şonuň üçin ulanylyşda ähmiýeti uly bolan akyma we ýönekeý görnüşli jisime seredeliň. Aşakda beýik rus alymy N.E.Žukowskiniň öwrenen akymy barada gürrüň edilýär.

Goý akym x okunyň položitel ugry tarapa akýan birjynsly akymyň, koordinatalar başlangyjynda ýerleşdirilen towly akymyň we goşa gözbaşly akymyň birleşmesinden dursun. Ýokarda görkezilişi ýaly, şeýle akymyň kompleks potensialy

$$f(z) = V_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + \frac{m}{2\pi z}$$

görnüşde, onuň çatyrymly tizligi bolsa

$$\overline{w}(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} - \frac{m}{2\pi z^2}$$

görnüşde bolar. Bu akymyň $\psi(x,\ y)$ ugur funksiýasyny we $\psi(x,\ y) = C$ deňlik bilen kesgitlenýän ugur egrilerini öwreneliň. Ugur egrileriniň suwuklygyň bölejikleriniň hereket traýektoriýalary bolýanyny okuja ýatladalyň. Başda ýönekeýlik üçin $\Gamma = 0$ **ýagdaýa seredeliň**. Bu halda

$$f(z) = V_\infty z + \frac{m}{2\pi z} = V_\infty (x + iy) + \frac{m}{2\pi}\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = V_\infty x + \frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(V_\infty y - \frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

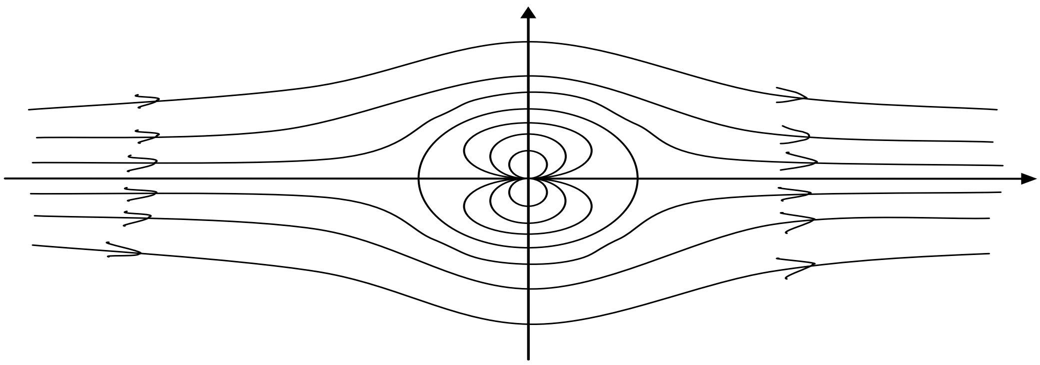
bolýany sebäpli, ugur funksiýasy

$$\psi(x,\ y) = V_\infty y - \frac{my}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)}$$

deňlik bilen kesgitlener, ugur egrileri bolsa

$$y\left(V_\infty - \frac{m}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)}\right) = C$$

deňliklerden tapylarlar. Ugur egrileriniň maşgalasy x we y oklaryna görä simmetrik bolýar. Sebäbi ýokarky deňleme x ululygy $-x$ bilen çalşyraňda üýtgemeýär. y ululygy $-y$ bilen we şol wagtda C sany $-C$ sana çalşyrsaň ýene-de üýtgemeýär. Ugur egrileriniň maşgalasynyň ýerleşişi 16-njy suratda görkezilendir.



16-njy surat

$K_{r_0}:\ x^2 + y^2 = r_0^2,\quad r_0^2 = \dfrac{m}{2\pi V_\infty},$ töwerek bu maşgalanyň agzasydyr. Ol $C = 0$ baha degişlidir. Goý, $\vec{V} = \{u(x,\ y),\ \vartheta(x,\ y)\}$ tekiz akym berlen bolsun. L şol tekizlikde ýatan egri, $\vec{n} = \{n_x(x,\ y),\ n_y(x,\ y)\}$ şol egrä onuň $M(x, y)$ nokadynda geçirilen normal wektor bolsun. Egerde L egriniň nokatlarynda

$$u(x,\ y)\cdot n_x(x,\ y) + \vartheta(x,\ y)\cdot n_y(x,\ y) = 0 \tag{10}$$

deňlik ýerine ýetse, onda L egriniň üstünde (10) syzmazlyk şerti ýerine ýetýär.

$x^2+y^2=r_0^2$ töweregiň üstünde (10) syzmazlyk şerti ýerine ýetýäni aýdyňdyr (sebäbi ol ugur egrileriniň maşgalasynyň biri bolany üçin $\vec{V}$ tizlik wektory ol töweregiň nokatlarynda galtaşýan wektor bolýar).

Goý, indi akym tekiz parallel diýeliň. Şeýle diýmek xOy tekizligine parallel islendik tekizlikde akym edil xOy tekizligindäki ýaly diýmekdir. $Oxyz$ koordinatalar ulgamyna seredeliň. Akymyň ugrunda ugrykdyryjysy K_{r_0} töwerek bolan, emele getirijileri z okuna parallel silindr görnüşdäki gaty jisim ýerleşdirilen bolsun (akymyň tizligi nola deň ýagdaýda jisim goýlan ýerinde deňagramlylykda durýar hasap edilýär). Onda akym silindriň daşynda islendik gorizontal tekizlikde öz durkuny saklar. Elbetde, akym jisime täsir eder we ony herekete getirmäge çalyşar. Akym silindre görä simmetrik bolany üçin, täsir ediji güýjüň y okuna bolan proýeksiýasy nola deň bolar.

$\Gamma \neq 0$ **ýagdaýa seredeliň.**

$$f(z)=V_\infty z+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+\frac{m}{2\pi z};\qquad z=re^{i\varphi},\qquad z=x+iy$$

bahalary ulanyp, alarys:

$$f(z)=V_\infty(x+iy)+\frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r+i\varphi)+\frac{m(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)}=$$

$$=V_\infty x+\frac{\Gamma\varphi}{2\pi}+\frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(V_\infty y-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r-\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right);$$

$$\overline{w}(z)=V_\infty+\frac{\Gamma}{2\pi iz}-\frac{m}{2\pi z^2}=V_\infty+\frac{\Gamma(x-iy)}{2\pi i(x^2+y^2)}-\frac{m(x^2-y^2-2xyi)}{2\pi(x^2+y^2)^2}=$$

$$=V_\infty-\frac{\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)}-\frac{m(x^2-y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2}+i\left[\frac{mxy}{\pi(x^2+y^2)^2}-\frac{\Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)}\right].$$

Bu ýerden, ugur funksiýasy üçin

$$\psi(x,\ y)=V_\infty y-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r-\frac{my}{2\pi(x^2+y^2)}$$

deňligi, tizlik üçin bolsa

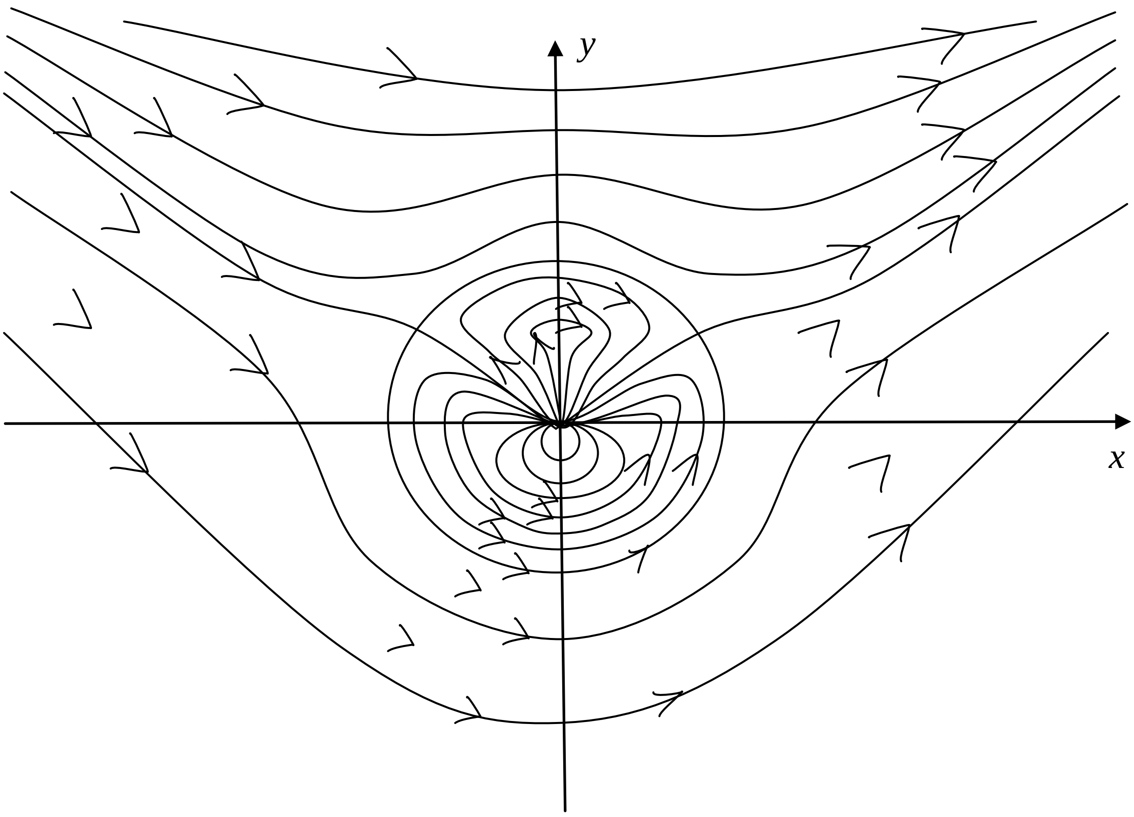
$$\vec{V}=\left\{V_\infty-\frac{\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)}-\frac{m(x^2-y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2};\quad -\frac{mxy}{\pi(x^2+y^2)^2}+\frac{\Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)}\right\}$$

formulany alarys. Ugur egrileriň

$$\psi(x,\ y)=C$$

maşgalasynyň ýerleşişini öwreneliň. $\psi(x,\ y)$ funksiýanyň x ululygy $-x$ ululyga çalşyranymyzda üýtgemeýänligi sebäpli, ugur egrileriniň her biri y oka görä simmetrik ýerleşer. Emma indi olar x oka görä simmetrik däldirler. $\psi(x,\ y)=C$ deňlikde $C=\frac{-\Gamma}{2\pi}\ln r_0$ goýsak, onda K_{r_0} töweregiň ýene-de ugur egrisi bolýanyny we öňki sebäplere görä syzmaýan egri boljagyny göreris.

Kompýuteri ulanyp, bu akymyň ugur egrilerini çyzmaga mümkünçilik bar. Olar 17-nji suratdaky ýaly ýerleşýärler.



17-nji surat

Ýene-de edil ýokardaky ýaly emele getirijileri gorizontal z okyna parallel silindr görnüşdäki gaty jisimi akymda ýerleşdireliň. Onda silindriň daşynda akym edil ýokarky suratda K_{r_0} töweregiň daşynda alyp barýşy ýaly bolar. Elbetde, indi suwuklygyň jisime täsir edýän güýçleriniň jemleýjisi x oky boýunça ugrykdyrylan bolmaz.

Ol güýç nähili täsir edýärkä? Ol $\vec{F}$ güýji $\vec{i}$ we $\vec{j}$ ortlar boýunça dargadalyň:

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$. Akymyň y oka görä simmetrik bolýandygy sebäpli $F_x = 0$ boljagy görnüp dur. Diýmek, $\vec{F}$ güýç y oky boýunça F_y-iň alamatyna baglylykda ýa ýokarlygyna, ýa-da aşaklygyna täsir eder. Ol güýje göteriji güýç diýýärler. Ony hasaplajak bolalyň. Goý, $p = p(x, y)$ suwuklykdaky basyş bolsun. Onda silindre täsir edýän jemleýji güýç

$$\vec{F} = -\oint p\vec{n}ds$$

integrala deň bolar. Bu ýerde $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ K_{r_0} töwerege geçirilen daşky normal, integral bolsa K_{r_0} boýunça alynýar.

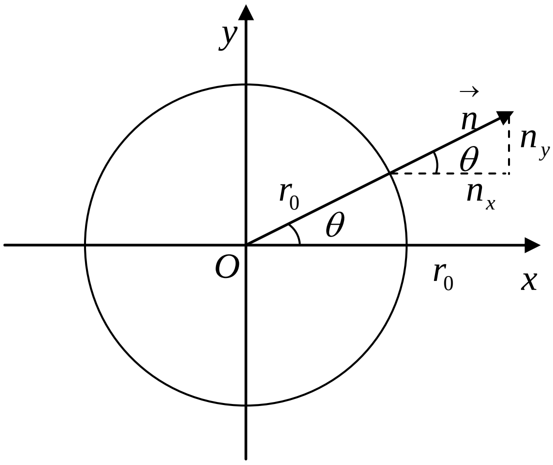
Alarys:

$$\vec{F} = -\vec{i} \cdot \oint p n_x \, ds - \vec{j} \cdot \oint p n_y \, ds.$$

Ýokarda aýdylana görä, $\oint p n_x \, ds = 0$. Şoňa görä

$$\vec{F} = -\oint p n_y \, ds \cdot \vec{j}$$

bolar. Integraly ýönekeýleşdireliň.



18-nji surat

18-nji suratdan görnüşi ýaly $n_y = \sin\theta$; $ds = r_0 d\theta$ bolýar we $\vec{F}$ üçin aşakdaky deňligi alarys:

$$\vec{F} = -r_0 \int_0^{2\pi} p \sin\theta \, d\theta \cdot \vec{j}.$$

Ýene bir zady ýatlalyň. Biziň akymymyzy kesgitleýän $\vec{V} = \{u, \vartheta\}$ tizligiň potensial funksiýasy bar we ol wagta bagly däl, şol sebäpli biziň akymymyz üçin Bernulliniň

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} - U = C$$

integraly ýerliklidir. Beýleki tarapdan K_{r_0} töweregiň nokatlarynda $z = r_0 e^{i\theta}$ bolany üçin

$$\overline{w} = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} - \frac{m}{2\pi z^2}$$

çatyrymly tizligi

$$\overline{w} = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i r_0} e^{-i\theta} - \frac{m}{2\pi r_0^2} e^{-2i\theta}$$

görnüşde we $\frac{m}{2\pi r_0^2} = V_\infty$ bolýanyny ýatlap,

$$\overline{w} = V_\infty\left(1 - e^{-2i\theta}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r_0} ie^{-i\theta} = ie^{-i\theta}\left(\frac{V_\infty}{i}\frac{1 - e^{-2i\theta}}{e^{-i\theta}} - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right) =$$

$$= ie^{-i\theta}\left(2V_\infty \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right) = ie^{-i\theta}\left(2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)$$

görnüşde ýazyp bolar. Bu ýerden

$$|\overline{w}|^2 = V^2 = \left(2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)^2$$

deňligi alarys. Bernulliniň integralynda $U = 0$ bolýanyny göz öňünde tutup, beýleki güýçlere görä ujypsyz bolany üçin $x = -\infty$ goýup, alarys:

$$\frac{1}{2}V_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = C.$$

C-niň tapylan bahasyny integralda ýerine goýup,

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V_\infty^2 - \frac{p_\infty}{\rho} = 0$$

deňlige geleris.
Soňky deňlikde V^2-yň ýerine onuň tapylan bahasyny goýalyň. Alarys:

$$\frac{1}{2}\left(2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)^2 + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V_\infty^2 - \frac{p_\infty}{\rho} = 0.$$

Bu deňlikden p basyşy tapýarys:

$$p = -\frac{\rho}{2}V_\infty^2\left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2 + p_\infty + \frac{1}{2}V_\infty^2\rho.$$

Basyşyň tapylan bahasyny

$$\vec{F} = -r_0\int_0^{2\pi} p\sin\theta\, d\theta \cdot \vec{j}$$

formulada ýerine goýup, alarys:

$$F_y = -r_0\int_0^{2\pi}\left[p_\infty + \frac{1}{2}V_\infty^2\rho - \frac{\rho}{2}V_\infty^2\left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2\right]\sin\theta\, d\theta =$$

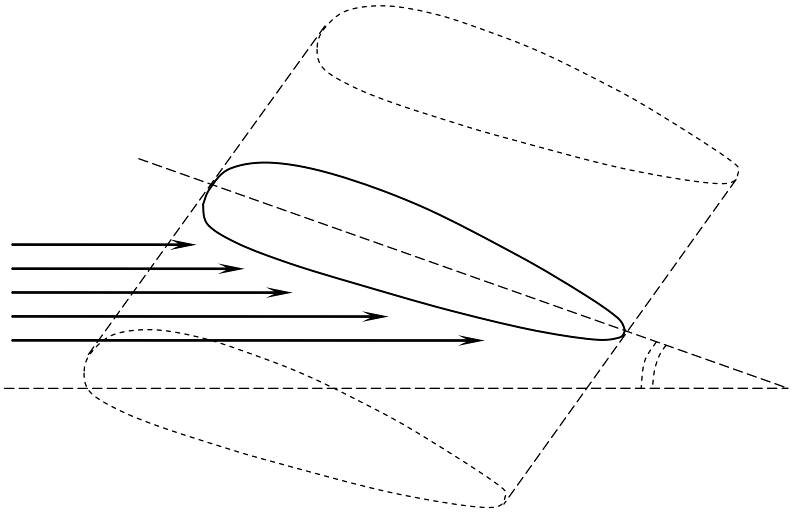
$$= \frac{r_0}{2}\rho V_0^\infty \int_0^{2\pi}\left[4\sin^2\theta - 2\sin\theta \cdot \frac{\Gamma}{\pi r_0 V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2\right]\sin\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{r_0}{2}\rho V_0^\infty \int_0^{2\pi} 2\sin^2\theta \cdot \frac{\Gamma}{\pi r_0 V_\infty} d\theta = -r_0 \rho V_\infty \frac{\Gamma}{\pi r_0} \cdot \pi = -\rho V_\infty \Gamma.$$

Şeýlelikde, F_y üçin

$$F_y = -\rho V_\infty \Gamma$$

formulany alarys. Goý, indi akymda kese-kesigi töwerek däl-de, uçaryň ganatynyň kese-kesigine meňzeş bolan (19-njy surat) silindrik jisim ýerleşdirilen bolsun.



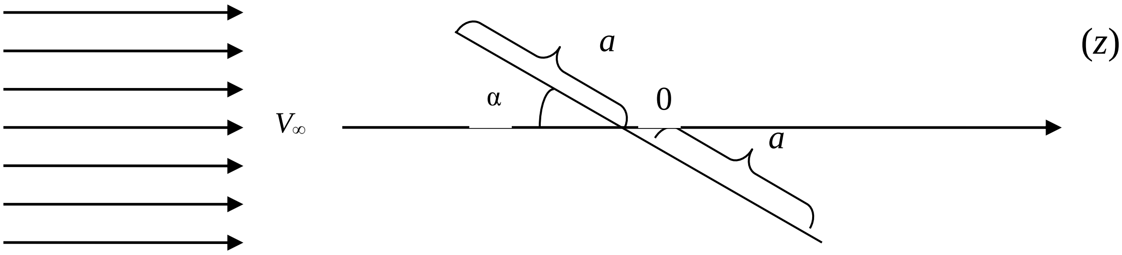
19-njy surat

N.E.Žukowskiniň teoremasyna laýyklykda, şeýle silindre hem edil ýokardaky ýaly göteriji güýç täsir edýär. Mysal üçin, ganat S meýdanly dörtburç plastina bolsa we ol plastina akymyň tükeniksizlikdäki tizligine α burç bilen ýapgytlanan bolsa, onda uçaryň bütin ganatyna täsir edýän göteriji güýç üçin

$$F = \pi \rho S V_\infty^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

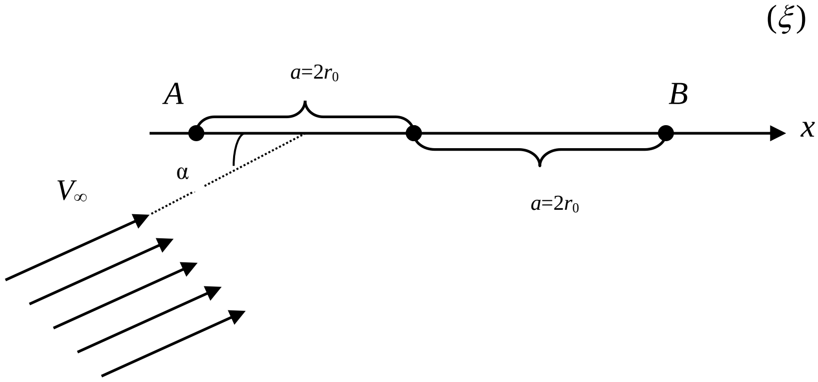
formula dogry bolýar.

Dogrudan hem $f(z) = V_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + \frac{m}{z}$; $m = 2\pi V_\infty r_a^2$, kompleks potensial funksiýa bilen kesgitlenýän akymyň ugrunda silindr däl-de, uzynlygy l, ini $2a = 4r_0$ bolan tekiz plastina ýerleşdirilen diýeliň (20-nji surat).



20-nji surat

Akymyň plastina täsirinden döreýän F göteriji güýji tapalyň. Ýokarda aýdylanlara görä, oňa $F=-\rho V_\infty \Gamma$ göteriji güýç täsir edýär. Ýokarda görkezilenine görä ρ – howanyň dykyzlygy, V_∞ akymyň tükeniksizlikdäki tizligi. Akym tükeniksizlikde x okuna parallel hasap edilýär. 20-nji suratdaky plastinany O nokadyň töwereginde α burça aýlap, plastinanyň kese-kesigini x oky bilen gabat getireliň (21-nji surat).



21-nji surat

Indi şu akymyň potensial funksiýasyny tapalyň. Eger-de z tekizliginde (akymyň öwrenilýän tekizligi) $\xi = z + \frac{r_0^2}{z}$ N.E.Žukowskiniň adyny göterýän özgertme girizsek, onda $|z| = r_0$ töwerek AB kesime geçer. Özi hem A nokat $z=-r_0$, B nokat $z=r_0$ bolanda alnar. z örän uly bolanda $\xi = z + \frac{r_0^2}{z} \approx z$ bolýany sebäpli, örän daşda akym üýtgemez, ýagny 21-nji suratdaky ýaly bolar. Diýmek, 21-nji suratdaky akymyň $f_1(\xi)$ kompleks potensial funksiýasyny almak üçin z tekizliginde ilki bilen $z_1 e^{i\alpha} = z$ özgertme geçirmeli, ýagny 20-nji suratdaky plastinany sagat diliniň tersine α burça öwürmeli. Bu özgertmede $|z| = r_0$ töwerek ýene-de özüne geçýär. Soňra $\xi = z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}$ özgertme geçirip, töweregi AB kesime geçirmeli bolarys. Şeýlelikde, $f_1(\xi)$ kompleks potensial almak üçin, $f(z)$ kompleks potensialda yzly-yzyna $z = z_1 e^{-i\alpha}$, $\xi = z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}$ özgertmeleri geçirip, aşakdaky deňligi alarys:

$$f\left(e^{-i\alpha} z_1\right) = V_\infty e^{-\alpha i} z_1 + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(e^{-\alpha i} z_1\right) + \frac{m}{2\pi z_1 e^{-\alpha i}}, \quad \xi = z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}.$$

Bu ýerden

$$z_1 = \frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - r_0^2}$$

bolýanyny görüp, $f_1(\xi)$ üçin alarys:

$$f_1(\xi)=V_\infty e^{-i\alpha}\left(\frac{\xi}{2}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2-r_0^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[e^{i\alpha}\left(\frac{\xi}{2}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2-r_0^2}\right)\right]+\frac{m}{2\pi\left(\frac{\zeta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2-r_0^2}\right)\cdot e^{-i\alpha}}.$$

Žukowskiniň teoremasyna görä $f'(\xi)$ önüm $\xi=a$ nokatda çäkli bolýar. Bu ýerden, tersine

$$f_1\left(z_1+\frac{r_0^2}{z_1}\right)=V_\infty e^{-i\alpha}z_1+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(e^{-i\alpha}z_1\right)+\frac{m}{2\pi\, z_1 e^{-i\alpha}}=f\left(e^{-i\alpha}z_1\right) \qquad (*)$$

boljagy düşnüklidir.

$$\left(f_1(\xi)\right)'_{z_1}=f'(\xi)\cdot\frac{d\xi}{dz_1}=f_1'(\xi)\cdot\left(1-\frac{r_0^2}{z_1^2}\right)$$

deňlikde $\xi=a$ goýsak $(z_1=r_0)$, $f_1'(a)$ – çäkli bolany sebäpli $\left(f_1(\xi)\right)'_{z_1}\Big|_{z_1=r_0}=0$ bolar. Beýleki tarapdan

$$\left(f_1(\xi)\right)'_{z_1}=\left[V_\infty e^{-i\alpha}z_1+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(e^{-i\varepsilon}z_1\right)+\frac{m}{2\pi z_1 e^{-i\alpha}}\right]'_{z_1}=$$

$$=V_\infty e^{-i\alpha}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z_1}-\frac{m}{2\pi z_1^2 e^{-i\alpha}}..$$

Diýmek,

$$V_\infty e^{-i\alpha}+\frac{\Gamma}{2\pi i r_0}-\frac{m}{2\pi r_0^2 e^{-i\alpha}}=0$$

bolmaly bolýar. $m=r_0^2\, 2\pi V_\infty$ bolýanyny göz öňünde tutup, alarys:

$$V_\infty e^{-i\alpha}+\frac{\Gamma}{2\pi i r_0}-\frac{r_0^2\, 2\pi V_\infty}{2\pi r_0^2 e^{-i\alpha}}=0$$

ýa-da

$$V_\infty\left(e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}=0,$$

ýa-da

$$-iV_\infty 2\sin\alpha+\frac{\Gamma}{2\pi i r_0}=0.$$

Bu ýerden Γ towlanma üçin $(2r_0=a)$

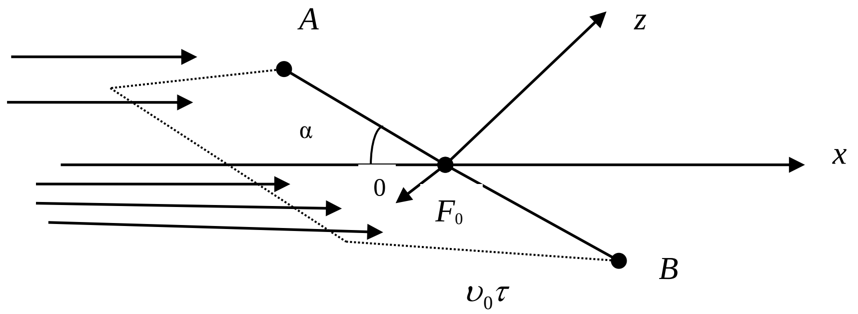
$$\Gamma=-2\pi a\sin\alpha V_\infty$$

formulany alarys. Γ-niň bahasyny Žukowskiniň $F_y=-\rho V_\infty \Gamma$ formulasynda ýerinde goýup we $|F|=F_y\cos\alpha$, plastinanyň uzynlygynyň l bolýanyny, $2al=S$ – plastinanyň meýdany bolýanyny göz öňünde tutup, göteriji güýç üçin

$$F=\pi\rho S\sin\alpha\cos\alpha V_\infty^2$$

formulany alarys. α kici bolan halynda $\sin\alpha\approx\alpha,\ \cos\alpha\approx 1$ takmyn deňlikleri ulanyp, F üçin alnan formulany $F=\pi\rho S\alpha V_\infty^2$ görnüşde hem ýazsa bolar.

Göteriji güýji ýönekeý halda başgaça-da hasaplap bolýar. Goý, giňişlikde islendik nokatda tizligi gorizontal oka parallel we hemişelik V_0 bolan akymyň ugrunda x oka α burç bilen ýapgyt ýerleşdirilen meýdany S bolan plastina täsir edýän göteriji güýji tapmaly bolsun. 22-nji suratda plastinanyň kese-kesiginiň ýerleşişi görkezilen.



22-nji surat

Ugrukdyryjysy plastinanyň çägi bolan, emele getirijileri V_0 wektora parallel bolan silindrde plastinadan çepde *x* oky boňunça $\upsilon_0\tau$ aralykda plastina parallel kese-kesigini geçireliň. τ – kiçi wagt aralygy. Netijede, esasy plastina bolan, beýikligi $\upsilon_0\tau\sin\alpha$ bolan silindr alarys. Şol silindriň içinde *t* pursatda ýatan massasy m_i bolan howanyň bölejigi τ wagtda plastina ýeter we soňra plastina parallel hereket eder. υ' onuň *t* pursatdaky tizligi bolsun, υ_1^2 bolsa $t+\tau$ pursatdaky tizligi bolsun. *O* nokatda *AB* kesime perpendikulýar *z* okuny geçireliň. υ_z^1, υ_z^2 bilen tizlikleriň *z* oka bolan proýeksiýalaryny belgiläliň. Görşümiz ýaly, $\upsilon_z^2=0$, $\upsilon_z^1=V_0\sin\alpha$ bolar. Indi silindriň içindäki howanyň hemme bolejikleriniň *t* pursatdan başlap τ wagtda hereket mukdarynyň üýtgemesiniň *z* oka bolan proýeksiýasyny ýazalyň.

$$\sum m_i\upsilon_z^2-\sum m_i\upsilon_z^1$$

ýa-da $\upsilon_z^2=0$, $\upsilon_z^1=\upsilon_0\sin\alpha$ bolýanyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\sum m_i\upsilon_z^2-\sum m_i\upsilon_z^1=-\upsilon_0\sin\alpha\sum m_i=-M\upsilon_0\sin\alpha.$$

Bu ýerde *M* – howanyň silindriň içindäki böleginiň massasy. Howanyň dykyzlygyny ρ bilen belgiläp, silindriň göwrüminiň $\upsilon_0\tau\sin\alpha\cdot S$ bolýanyny ýatlap,

$$\sum m_i\upsilon_z^2-\sum m_i\upsilon_z^1=-\upsilon_0\tau\sin\alpha S\cdot\rho\upsilon_0\sin\alpha$$

deňligi alarys. Beýleki tarapdan, hereket mukdary baradaky kanunyna laýyklykda,

$$\sum m_i\upsilon_z^2-\sum m_i\upsilon_z^1$$

tapawut gazyň silindriň içindäki bölejiklerine täsir edýän güýçleriň impulslarynyň *z* oka bolan proýeksiýalarynyň jemine deňdir. Ol güýçleriň esasysy plastinanyň howanyň basyşyna bolan $\vec{F_1}$ reaksiýasydyr. Ol güýç ululygy boýunça howanyň basyş güýjüne deň, ugry bolsa *z* okunyň tersine ugrukdyrylandyr. Galan güýçleri ujypsyz hasap edip, alarys:

$$\sum m_i\upsilon_z^2-\sum m_i\upsilon_z^1=-F_1\tau$$

ýa-da

$$-\upsilon_0^2\tau\sin^2\alpha S\rho=-F_1\tau\,.$$

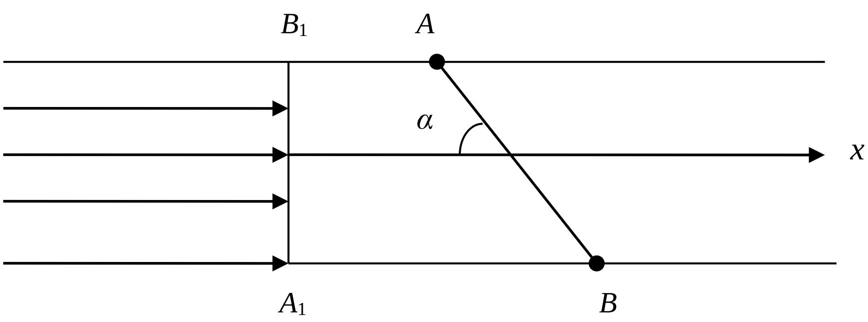
Bu ýerden F_1 üçin

$$F_1 = \rho S \sin^2 \alpha \cdot \upsilon_0^2$$

deňligi alarys. $\vec{F_1}$ reaksiýanyň *y* oky boýunça düzüjisi

$$F = \rho S \sin^2 \alpha \cdot \upsilon_0^2 \cdot \cos\alpha$$

bolar. *F* güýç göteriji güýçdir. Bu güýç tapylanda akymda towlanma ýok hasap edildi. Şoňa görä we tejribeleriň görkezişine görä bu formulanyň örän nätakyk bolýany görünýär. Mysala geçmezden ozal Stoksyň adyny göterýän ýene bir ajaýyp kanun barada gürrüň edeliň. Goý, gorizontal akymyň ugrunda taraplary *a* deň bolan tekiz kwadrat ýerleşdirilsin. (23-nji surat). *AB*=*a* kwadratyň frontal kesigi.



23-nji surat

Biz akym kese-kesigi taraplary *a* we $A_1B_1 = a\sin\alpha$ bolan dörtburç turba boýunça geçýär diýip hasap edip bileris. Onda bu akym üçin Reýnoldsyň *Re* sany

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho a \sin\alpha \cdot \vartheta}{\mu(1+\sin\alpha)} \tag{10}$$

formula bilen kesgitlener. Bu ýerde υ – akymyň tizligi, ρ – howanyň dykyzlygy, μ – şeppeşiklik. $\mathrm{Re} << 1$ bolanda bu akym üçin Stoksyň aşakdaky kanuny dogrudyr, ýagny kwadrat plastinanyň akyma täsir edýän F_g garşylyk güýji

$$F_g = ka\sin\alpha\mu\upsilon \tag{11}$$

formula bilen kesgitlener. Bu ýerde *k* – koeffisiýent. Şeppeşikligiň (10) formuladan tapylan bahasyny (11) formulada ýerine goýup,

$$F_g = \frac{k}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{a^2 \rho \sin^2 \alpha \upsilon^2}{1+\sin\alpha}$$

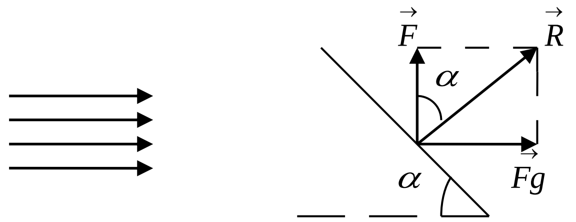
formula geleris. Indi meýdany *S* deň bolan, akyma α burç bilen ýapgytlanan plastina (kiçijik kwadratlardan durýar hasap edip) üçin

$$F_g = \frac{k}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{S\rho \sin^2 \alpha \upsilon^2}{1+\sin\alpha}$$

formula alarys. N.F.Žukowskiniň teoremasyna laýyklykda, plastina täsir edýän göteriji güýç

$$F = \pi\rho S \sin\alpha\cos\alpha \cdot \upsilon^2$$

formula bilen tapylýar. 24-nji suratdan görnüşi ýaly $\left|\vec{F_g}\right| = \left|\vec{F}\right| tg\alpha$ bolar. Bu



24-nji surat

ýagdaýda

$$\frac{k}{\mathrm{Re}} S\rho \sin^2 \alpha \upsilon^2 = \pi\rho\, S \sin\alpha \cos\alpha \cdot \upsilon^2 tg\alpha$$

ýa-da

$$\frac{k}{\mathrm{Re}} = \pi$$

deňligi alarys. Bu deňlikden *k*-ny tapyp, Stoksyň (11) formulasyny plastina üçin

$$F_g = \frac{\pi\rho\, S \sin^2 \alpha \upsilon^2}{1 + \sin\alpha}$$

görnüşde ýazyp bileris. Indi göteriji güýç üçin alnan

$$F = \pi\rho\, S\upsilon^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

formulanyň ulanylyşyna bir mysal getireliň.

Uçary meýdany $10m^2$ deň bolan plastina hasap edip, $\alpha = 6^o$, $\vartheta = 100 km/sag$, $\rho = 3kg/m^3$ bolanda uçaryň *P* agramyny kesgitläliň.

Eger uçaryň agramy P bolsa, onuň ýerden göterilmegi üçin

$$P = \pi\rho S V^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

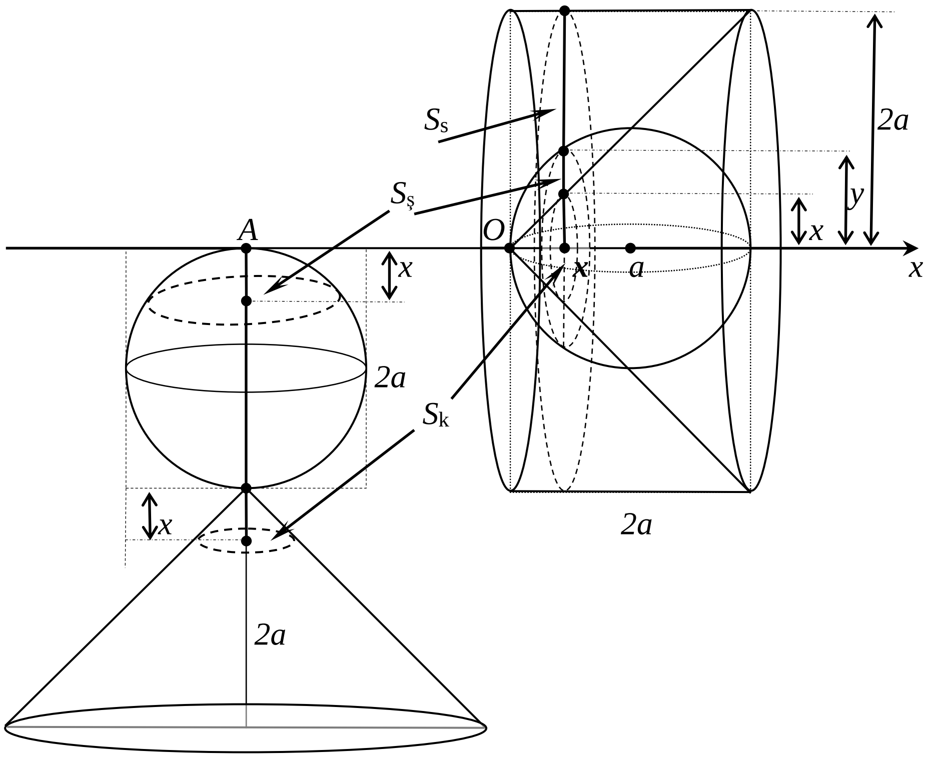
deňligiň ýerine ýetmegi zerurdyr. Berlenleri formulada ýerine goýup,

$$P = \pi \cdot 3 \cdot 10m^2 (100km/sag)^2 \frac{\pi}{180} \cdot 6 \approx 3550 \frac{kg \cdot m}{sek^2}$$

ýa-da $P \approx 360kG$ alarys. Şeýlelikde, uçaryň ýüki bilen bilelikdäki *P* agramy $360kG$ töwereginde bolar. Diýmek, ýük näçe köp bolsa, uçaryň agramy şonça az bolmaly bolýar. Bu mesele uçar ýasaýjy konstruktorlaryň iň bir kelleagyrdyjy meselelerininiň biridir.

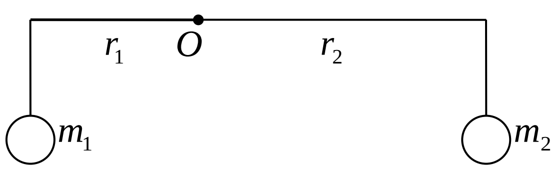
14. MATEMATIKI MESELÄNI ÇÖZMEKDE ARHIMEDIŇ MEHANIKI MODELI ULANYŞY

Arhimediň bu işi matematikanyň taryhynda bir ajaýyp işleriň biridir. Ol bu işinde şaryň we başga-da jisimleriň göwrümini tapmakda özüniň döreden ryçaglar nazaryýetini örän bir täsin usul bilen ulanýar. Arhimed bu meseläni çözende konusyň we silindriň göwrümleri oňa belli eken. Arhimediň şaryň göwrümini tapyşyny getireliň. Goý, radiusy *a* deň bolan şaryň göwrümini tapmaly bolsun. Giňişlikde *x* okuň üstünde *O* başlangyçdan çepde 2*a* uzaklykda *A* nokat alalyň we şol nokatdan aşaklygyna, 25-nji suratdan görnüşi ýaly, radiusy a deň şary we beýikligi $2a$, esasy



25-nji surat

radiusy $2a$ deň tegelek bolan konusy asalyň. O nokatdan sagda oky x oky bilen gabat gelýän, beýikligi $2a$, esasy radiusy $2a$ deň tegelek bolan silindri ýerleşdireliň. Garalýan jisimleriň üçüsiniň hem dykyzlygy 1-e deň hasap edilýär, ýagny olaryň massasy olaryň göwrümlerine deň. O nokady ryçagyň daýanç nokady hasap edip, şu jisimleriň deňagramlylykda boljakdygyny Arhimediň pikir ýöredişine eýerip görkezeliň. Şu ýerde Arhimediň açan ryçaglar düzgünini ýatlalyň. Daýanç nokady O bolan ryçagyň çep gerdeniniň uzynlygy r_1, sag gerdeniniň uzynlygy r_2 bolsun we gerdenleriň gutarýan ýerinde (26-njy surat) massalary, degişlilikde, m_1 we m_2 bolan jisimler asylan bolsunlar. Düzgüne laýyklykda, jisimleriň deňagramlylykda bolmaklary üçin, $m_1r_1 = m_2r_2$ deňlik ýerine ýetmelidir.



26-njy surat

Ýene-de 25-nji surata gaýdyp geleliň. *O* nokatdan başlap *Ox* okuna perpendikulýar tekizlikler geçirip, silindri beýiklikleri *h* bolan ýasyja silindrlere böleliň. *h* örän kiçi hasap edilýär. Edil şuňa meňzeşlikde, *A* nokatdan başlap, gorizontal tekizlikler geçirip, şary we konusy hem beýiklikleri *h* bolan ýasyja bölejiklere böleliň. Ol bölejikleriň islendiginiň esasynyň meýdany *S* bolsa, *h* örän kiçi bolany üçin, onuň göwrümi (massasy) $S{\cdot}h$ bolar. Şaryň diametri $2a$, konusyň beýikligi $2a$, silindriň beýikligi hem $2a$ bolany sebäpli, olar deň mukdardaky bölejiklere bölünerler. Indi şary we konusy, 25-nji suratdaky ýaly edip, silindriň içinde ýerleşdireliň we esaslary şol bir α tekizlikde ýatýan bölejiklere seredeliň. Goý, α tekizlik *Ox* okunyň *x* nokadyndan geçýän bolsun. Onda şaryň α tekizlikde ýatýan bölejiginiň esasynyň $S_ş$ meýdany, şaryň α tekizlik bilen kesilende alnan kese kesigiň meýdanyna, konusyň bölejiginiň esasynyň meýdany konusyň α tekizlikdäki kese kesiginiň S_k meýdanyna, silindriň bölejiginiň esasynyň meýdany onuň α tekizlikdäki kese kesiginiň S_s meýdanyna deň bolar. Başgaça aýdanyňda, esasy α tekizlikde ýatýan şaryň bölejiginiň massasy $S_ş{\cdot}h$, konusyň bölejiginiň massasy $S_k{\cdot}h$, silindriň bölejiginiň massasy $S_s{\cdot}h$ bolar. Indi şu üç bölejigiň deňagramlylykda boljagyny görkezeliň. 25-nji suratdan görnüşi ýaly, $S_k = \pi\, x^2$, $S_ş = \pi\, y^2$, $S_s = \pi(2a)^2$ bolýarlar. Şeýle hem,

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

ýa-da

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $2a\pi$ köpeldip, alarys:

$$2a\pi\, x^2 + 2a\pi\, y^2 = \pi(2a)^2 x$$

ýa-da

$$2aS_k + 2aS_ş = xS_s,$$

ýa-da

$$2a(S_k{\cdot}h) + 2a(S_ş{\cdot}h) = x(S_s{\cdot}h),$$

ýa-da

$$2a[(S_k{\cdot}h) + (S_ş{\cdot}h)] = x(S_s{\cdot}h).$$

Diýmek, *A* nokatdan asylan şaryň we konusyň bölejikleri silindriň α tekizlikdäki bölejigi bilen beňagramlylykda bolýarlar. Arhimed şu ýerde örän täsin bir pikir ýöredýär. Ol «eger üç jisimiň degişli bölejikleri üç-üçden deňagramlylykda bolsalar, onda olaryň özleri hem deňagramlylykda bolarlar» diýýär. Bu pikir onuň şu usulynyň özenidir. Muňa laýyklykda, eger $V_ş$, V_k, V_s, degişlilikde, şaryň, konusyň we silindriň göwrümleri (massalary) bolsalar, onda

$$2aV_ş + 2aV_k = aV_s$$

deňlik ýerine ýetmeli bolar. Arhimed silindriň we konusyň göwrümleriniň öň belli bolan

$$V_s = \pi(2a)^2 \cdot 2a, \qquad V_k = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a$$

formulalaryny ulanýar. Olaryň bahalaryny ýokarky deňlikde ýerine goýup, alarys:

$$2aV_ş + 2a \cdot \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a = a\pi(2a)^2 \cdot 2a.$$

Deňligi 2*a* gysgaldyp, alarys:

$$V_ş = \pi \cdot 4a^3 - \frac{8}{3}\pi a^3$$

ýa-da

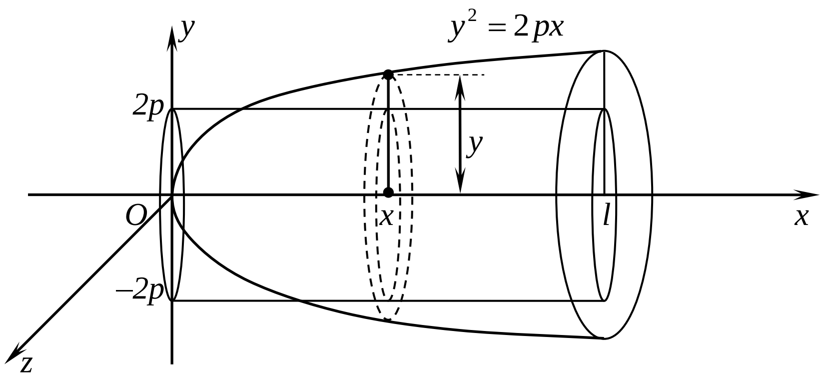
$$V_ş = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Bu hemmämize belli bolan şaryň göwrümi tapylýan formuladyr. Arhimed bu işinde şeýle manyly sözleri getirýär (öz sözümiz bilen aýdanymyzda): «bu alnan netijäniň dogrulygy şübgesizdir, ýöne biziň bu netijäni almakda ulanan usulymyzy matematiki takyk diýip bilmerin» diýýär we dowam edip, «geljekde ýiti alymlar döräp, olaryň bu netijäni matematiki takyk ýollar bilen subut etjeklerine ynanýaryn» diýýär.

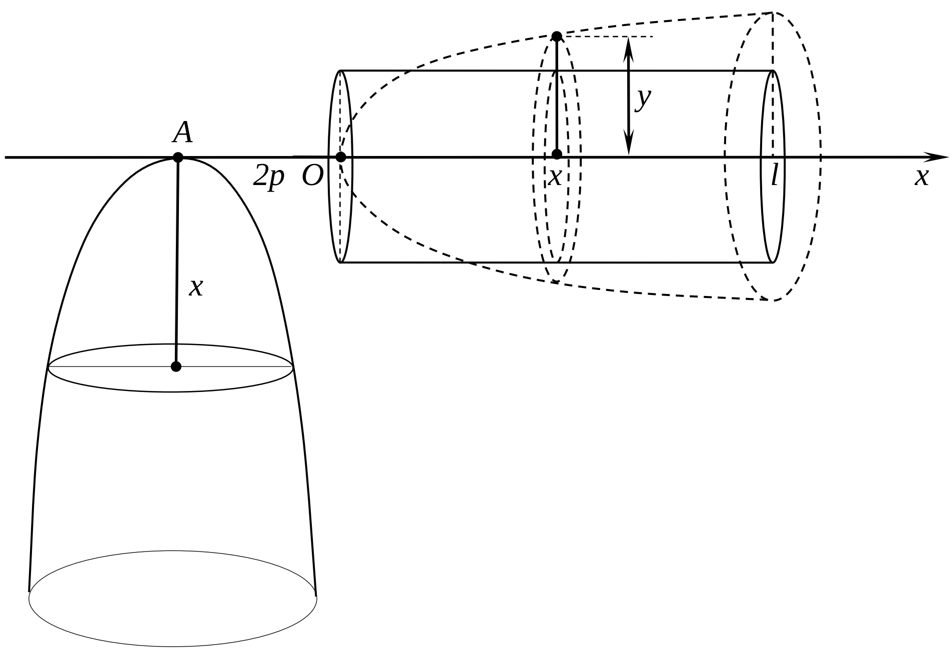
Aşakda bu beýik alymyň şu usuly bilen çözüp bolýan ýene bir meselä garalyň. $2px = y^2 + z^2$ paraboloid $y^2 = 2px$ parabolany x okunyň töwereginde aýlamak bilen alynýar. Şu paraboloidiň $x = l$ tekizlik bilen kesilip alnan böleginiň göwrümini tapalyň.

Koordinatalar ulgamynda paraboloidi we esasy radiusy $2p$ deň tegelek, beýikligi l bolan silindri guralyň (27-nji surat). Biz ýene-de bu jisimleriň dykyzlygy bire deň hasap ederis. Ox okunyň x nokadyndan geçýän we Ox okuna perpendikulýar tekizlik geçireliň. Ol tekizlik paraboloidi meýdany $S_p = \pi y^2$ bolan tegelek boýunça, silindri meýdany $S_s = \pi(2p)^2$ bolan tegelek boýunça keser. Bu tegeleklere degişli tegelekler diýeliň.

Paraboloid we konus tükensiz köp degişli tegeleklerden durýar diýseň bolar. Indi paraboloidi x okunyň A nokadyndan asylan hasap edeliň. Silindri, okuny Ox oky bilen gabat getirip, O nokatdan başlap, ýerleşdireliň.



27-nji surat



28-nji surat

O nokat ryçagyň daýanç nokady bolsun. $y^2 = 2px$ deňligiň iki tarapyny hem $2p\pi$ sana köpeldeliň:

$$2p\pi \cdot y^2 = 2p\pi \cdot 2px$$

ýa-da

$$2pS_p = S_s x.$$

Bu deňlik paraboloidiň we silindriň degişli bölejikleriniň deňagramlylykda bolýanyny görkezýär. Seredilýän paraboloidiň we silindriň deňagramlylykda bolan tükensiz köp degişli bölejiklerden durýanlygy sebäpli, Arhimediň ýöredýän pikirine laýyklykda, olaryň özleri hem deňagramlylykda bolarlar, ýagny

$$2pV_p = \frac{l}{2}V_s.$$

Bu ýerde V_p paraboloidiň göwrümi (massasy), V_s silindriň göwrümi (massasy).
$V_s = \pi(2p)^2 \cdot l$ bolany sebäpli,

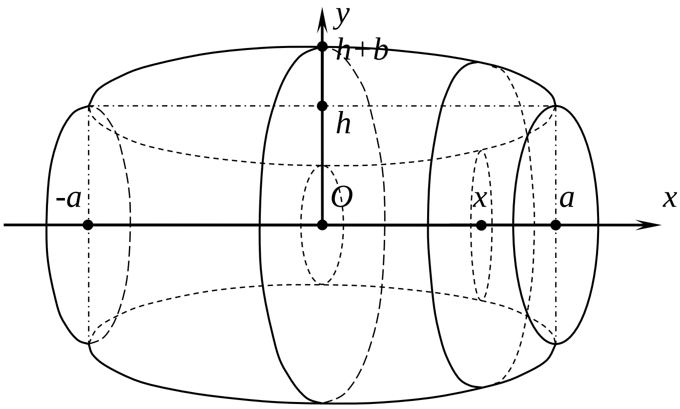
$$2pV_p = \frac{l}{2}\pi(2p)^2 \cdot l.$$

Bu ýerden, gysgaltmalardan soň,

$$V_p = \pi p \cdot l^2$$

formula geleris.

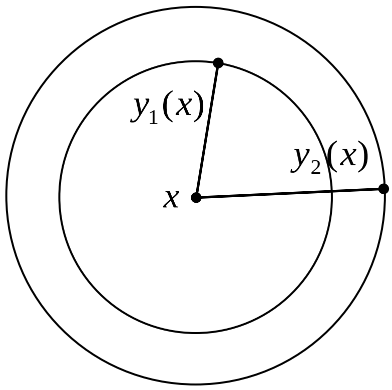
Arhimediň usuly bilen ýene bir meseläni çözeliň. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$ ellipsiň x okunyň daşyndan aýlanyp emele getiren figurasynyň (torunyň) göwrümini tapalyň. Biz ýene-de garalýan figura dykyzlygy bire deň bolan jisim hökmünde gararys (29-njy surat).



29-njy surat

Ox okuň x nokadynda Ox oka perpendikulýar tekizlik geçireliň. Ol tekizlik figurany 30-njy suratda görkezilen halka boýunça keser. Şeýlelikde, $\forall x \in (-a;a)$ üçin figuranyň kese kesigi 30-njy suratdaky ýaly halka bolar. Biz Arhimede meňzedip, figura massalary meýdanyna, ýagny $\pi y_2^2(x) - \pi y_1^2(x)$ deň bolan halkalardan durýar hasap edip bileris. Jisimiň $x \geq 0$ ýarym giňişlikdäki böleginiň göwrümini tapalyň. Onuň üçin ellipsiň deňlemesini özgerdip ýazalyň:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + 2h\frac{y}{b^2} - \frac{h^2}{b^2}.$$



$$y_1(x) = h - b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y_2(x) = h + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

30-njy surat

Görnüşi ýaly, $y_1(x)$ we $y_2(x)$ şu deňlemäni kanagatlandyrýarlar:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 + 2h\frac{y_2}{b^2} - \frac{h^2}{b^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 + 2h\frac{y_1}{b^2} - \frac{h^2}{b^2}.$$

Birinji deňlikden ikinji deňligi agzaba-agza aýryp, alarys:

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = \frac{2h}{b^2}(y_2 - y_1)$$

ýa-da

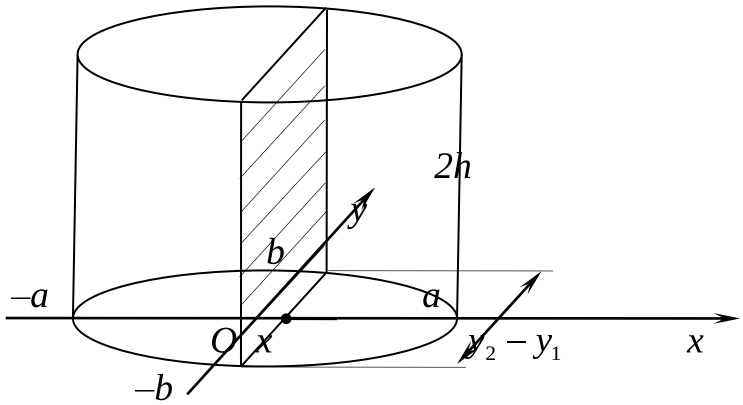
$$y_2^2 - y_1^2 = 2h(y_2 - y_1).$$

Bu deňligiň iki tarapyny π köpeldeliň:

$$\pi y_2^2 - \pi y_1^2 = 2h(y_2 - y_1)\pi. \qquad (1)$$

Çep tarapda 30-njy suratdaky halkanyň meýdany ýerleşýär. $2h(y_2 - y_1)$ bolsa esasy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips, beýikligi $2h$ bolan silindriň x nokatdaky kese kesiginiň meýdanyna deň bolýar (31-nji surat).

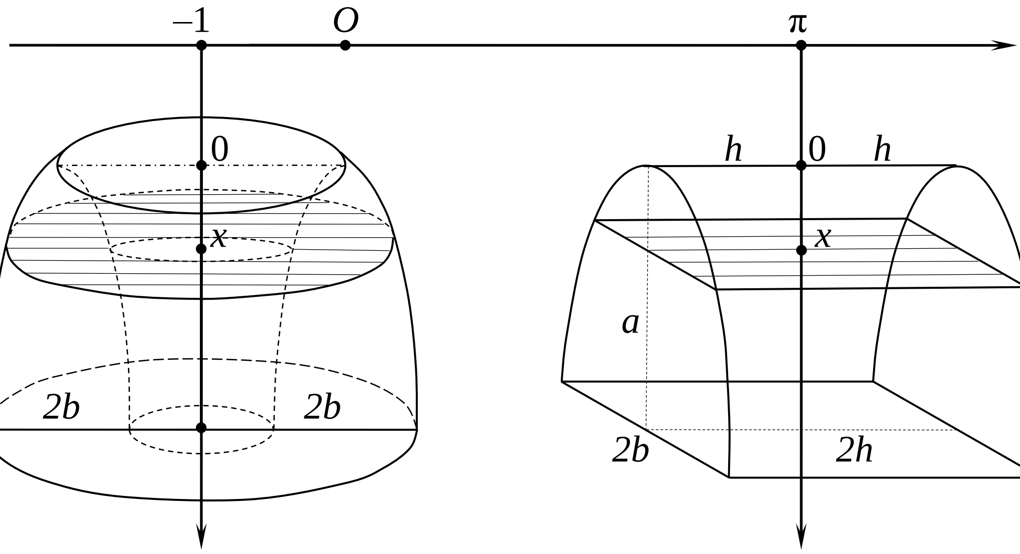
Indi Arhimediň usulyna geçeliň. *Ox* okunyň -1 nokadyndan aşaklygyna jisimiň seredilýän ýarysyny asalyň. π nokadyndan bolsa 31-nji suratdaky silindriň $x \geq 0$ ýarym giňişlikdäki bölegini asalyň (32-nji surat).



31-nji surat

y okunyň $y = x$ nokadyndan gorizontal tekizlik geçirsek ol jisimi we silindri, degişlilikde, 30-njy, 31-nji we 32-nji suratlardaky kese kesikler boýunça keser. Ol kesikleriň massalary, degişlilikde, $\pi y_2^2 - \pi y_1^2$ we $2h(y_2 - y_1)$ ululyklara deň bolarlar. (1) deňlige görä,

$$(\pi y_2^2 - \pi y_1^2) \cdot 1 = [2h(y_2 - y_1)] \cdot \pi ,$$



32-nji surat

ýagny *O* nokady ryçagyň daýanç nokady hasap etsek, onda seredilýän kese kesikler (32-nji surat) deňagramlylykda bolýarlar. Arhimediň usulyna laýyklykda, jisimleriň özleri hem deňagramlylykda bolarlar, ýagny V_1 jisimiň garalýan ýarysynyň göwrümi (massasy) bolsa, onda

$$V_1 \cdot 1 = \left(\frac{\pi ab}{2} \cdot 2h \right) \cdot \pi$$

deňlik ýerine ýeter. Bu ýerden jisimiň (toruň) doly $V = 2V_1$ göwrümi üçin

$$V = 2h\pi^2 ab$$

formulany alarys. Eger $a = b$ bolsa, ellips töwerege öwrülýär, jisim bolsa radiusy a deň bolan töweregiň x okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen tor bolar. Bu halda toruň göwrümi

$$V = 2h\pi^2 a^2$$

formula bilen tapylýar. Alnan formulalaryň dogrulygyny integral hasaplaýyşyň üsti bilen derňemek kyn däldir.

15. ERKIN ÜSTLI ÝERASTY SUWLARYŇ SYZYŞYNYŇ MATEMATIKI MODELI

Model düzülende ediljek talaplary anyklalyň. Erkin üstli ýerasty suwlaryň akymy birjynsly gatlakda geçýän bolsun. Onuň daýanç esasy gorizontal hasap edeliň. Akymyň syzyş tizligi daýanç esasyna perpendikulýar ugur boýunça üýtgemeýär hasap edilýär, ýagny x, y oklary daýanç esasda ýatsalar, z oky ol esasa perpendikulýar geçirilse, onda syzyşyň w tizligi diňe x, y koordinatalara bagly bolar. Eger syzyşyň tizligi $\vec{w} = \{w_x, w_y\}$, suwuň üstüniň deňlemesi $h = h(x, y, t)$ bolsa, onda Darsiniň kanunyna laýyklykda

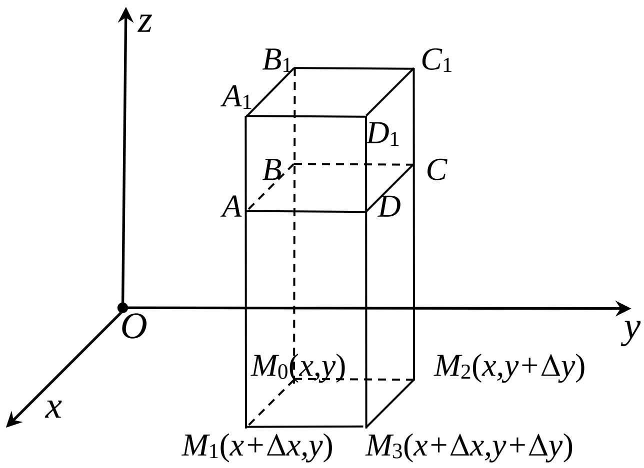
$$w_x = -c\frac{\partial h}{\partial x}, \quad w_y = -c\frac{\partial h}{\partial y}$$

bolar. Bu ýerde c syzyş koeffisiýenti. Indi akymyň ugrunda esasy bolup taraplary Δx we Δy bolan, daýanç esasda ýatýan gönüburçluk hyzmat edýän, ýokarsyndan $h = h(x, y, t)$ üst bilen çäklenen silindrik birinji jisimi we şol esasly, ýokarsyndan $h = h(x, y, t + \Delta t)$ üst bilen çäklenen ikinji silindrik jisimi alalyň (33-nji surat) .

Düşnüklilik üçin üstleri, degişlilikde, $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ göniburçluklar görnüşinde çyzdyk. Indi Δt wagtda birinji silindrik jisimiň içindäki suwuň näçe köpeljekdigini hasaplalyň. Belli bolşy ýaly, ol Q mukdar

$$Q = \Delta t \iint\limits_{\Sigma} \vec{w} \cdot \vec{n} ds$$

formula arkaly tapylýar. Bu ýerde Σ şol jisimiň gapdal üsti, $\vec{n}$ şol üstüň nokatlarynda gurlan içki normal.



33-nji surat

Σ üst $\Sigma_1(M_0BCM_2)$, $\Sigma_2(M_2CDM_3)$, $\Sigma_3(M_3DAM_1)$, $\Sigma_4(M_1ABM_0)$ dört üstden durýar. Şoňa görä,

$$Q=\iint_{\Sigma}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{\Sigma_1}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds+\iint_{\Sigma_2}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds+\iint_{\Sigma_3}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds+\iint_{\Sigma_4}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds.$$

Sag tarapdaky integrallary hasaplalyň:

$$\iint_{\Sigma_1}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{\Sigma_1}\vec{w}\cdot\{1;0\}ds=\iint_{\Sigma_1}w_x ds=-c\iint_{\Sigma_1}h'_x(x,y,t)ds,$$

$$\iint_{\Sigma_2}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{\Sigma_2}\vec{w}\cdot\{0;-1\}ds=-\iint_{\Sigma_2}w_y ds=c\iint_{\Sigma_2}h'_y(x,y,t)ds,$$

$$\iint_{\Sigma_3}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{\Sigma_3}\vec{w}\cdot\{-1;0\}ds=-\iint_{\Sigma_3}w_x ds=c\iint_{\Sigma_3}h'_x(x,y,t)ds,$$

$$\iint_{\Sigma_4}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{\Sigma_4}\vec{w}\cdot\{0;1\}ds=\iint_{\Sigma_4}w_y ds=-c\iint_{\Sigma_4}h'_y(x,y,t)ds.$$

Hasaplamany dowam etdirýäris:

$$-c\iint_{\Sigma_1}h'_x(x,y,t)ds=-c\iint_{\Sigma_1}h'_x(x_0,y,t)ds=-c\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}h'_x(x_0,y,t)h(x_0,y,t)dy,$$

$$c\iint_{\Sigma_2}h'_y(x,y,t)ds=c\iint_{\Sigma_2}h'_y(x,y_0+\Delta y,t)ds=c\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}h'_y(x,y_0+\Delta y,t)h(x,y_0+\Delta y,t)dx,$$

$$c\iint_{\Sigma_3}h'_x(x,y,t)ds=c\iint_{\Sigma_3}h'_x(x_0+\Delta x,y,t)ds=c\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}h'_x(x_0+\Delta x,y,t)\cdot h(x_0+\Delta x,y,t)dy,$$

$$-c\iint_{\Sigma_4} h'_y(x,y,t)ds = -c\iint_{\Sigma_4} h'_y(x,y_0,t)ds = c\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} h'_y(x,y_0,t)h(x,y_0,t)dx.$$

Integrallaryň bahalaryny Q üçin formulada ýerine goýup, alarys:

$$Q = c\Delta t\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left[h(x_0+\Delta x,y,t)\cdot h'_x(x_0+\Delta x,y,t) - h(x_0,y,t)\cdot h'_x(x_0,y,t)\right]dy +$$

$$+c\Delta t\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[h(x,y_0+\Delta y,t)\cdot h'_y(x,y_0+\Delta y,t) - h(x,y_0,t)\cdot h'_y(x,y_0,t)\right]dx =$$

$$= c\Delta t\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial y}\Big|_{y=y_0+\Delta y} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial y}\Big|_{y=y_0}\right]dx +$$

$$+c\Delta t\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0+\Delta x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}\right]dy$$

ýa-da

$$Q = \frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^2 h^2(x,y,t)}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}\Delta x\Delta y\Delta t + \frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^2 h^2(x,y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{\substack{x=\xi_1\\ y=\eta_1}}\Delta x\Delta y\Delta t. \qquad (1)$$

Bu ýerde $x_0 \le \xi,\xi_1 \le x_0+\Delta x,\quad y_0 \le \eta,\eta_1 \le y_0+\Delta y$. Artan suw mukdary birinji silindrik jisimi ýokarsyndan çäklendirýän $h = h(x,y,t)$ üstüň $h = h(x,y,t+\Delta t)$ derejä galmagyna getirýär, ýagny artan suw mukdary $ABCDA_1B_1C_1D_1$ silindrik jisimiň göwrümindäki suw mukdaryna deňdir:

$$Q = m\iint_D\left[h(x,y,t+\Delta t) - h(x,y,t)\right]dxdy$$

ýa-da

$$Q = mh'_t(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x\Delta y\Delta t. \qquad (2)$$

Bu ýerde $x_0 \le \alpha \le x_0+\Delta x,\quad y_0 \le \beta \le y_0+\Delta y,\quad t \le \gamma \le t+\Delta t,\quad m$ - öýjüklilik koeffisiýenti. Q ululygyň tapylan (1) we (2) bahalaryny deňläp, alarys:

$$\frac{c}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}\Bigg|_{\substack{x=\xi_1\\ y=\eta_1}}\right)\Delta x\Delta y\Delta t = mh'_t(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x\Delta y\Delta t$$

ýa-da

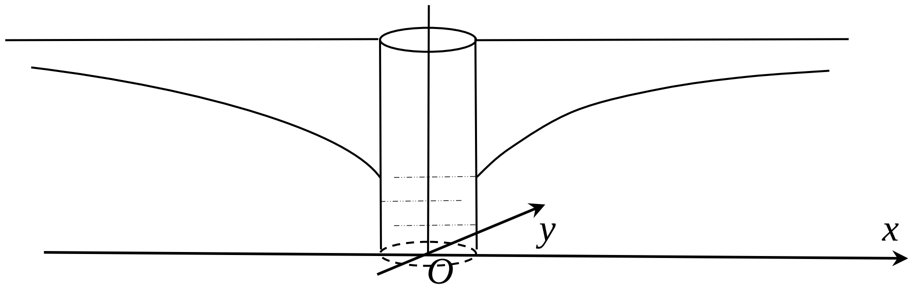
$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}\Bigg|_{\substack{x=\xi_1\\ y=\eta_1}} = \frac{2m}{c}h'_t(\alpha,\beta,\gamma).$$

Bu ýerden Δx, Δy we Δt nola ymtylanlarynda predele geçip, alarys:

$$\frac{2m}{c}h_t' = \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}.$$

Bu deňlemä Bussineskanyň (italýan alymy) deňlemesi diýilýär. Oňa biz syzyş prosesiniň matematiki modeli hökmünde garap bileris. Deňleme çykarylanda köp çäklendirmeleri etmeli boldy. Şol sebäpli, alnan model takmyn model bolýar. Syzyş prosesiniň hemme taraplaryny göz öňünde tutýan model düzmek, umuman, mümkin hem däl, eger mümkin bolaýanda-da örän çylşyrymly deňlemelere getirerdi. Biziň ulanan Darsiniň kanuny-da, şonuň esasynda çykarylan Bussineskanyň deňlemesi-de köp-köp barlaglary geçendir. Şol sebäpli, olary ulanmak boljakdygyna şübhelenmese bolar.

Indi şu modeliň ulanylyşyna bir mysal getireliň, ýagny gazylan guýa toprakdan gelýän suwuň mukdaryny ýokarky şertlerde hasaplajak bolalyň. Ýokarky şertleriň ýerine ýetýänligi sebäpli, akyma Bussineskanyň deňlemesini ulanmaga haklydyrys.



34-nji surat

Guýynyň okunyň daýanç esasy bilen kesişýän ýerinde xOy koordinatalar ulgamynyň başlangyç nokadyny ýerleşdirsek (34-nji surat) we polýar koordinatalaryna $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ formulalar arkaly geçsek, onda Bussineskanyň deňlemesi

$$m\frac{dh}{dt} = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial \varphi^2}\right) \tag{3}$$

görnüşe geler. Eger akym guýynyň töwereginde simmetrik geçýän bolsa, onda $h(x,y,t)$ φ burça bagly bolmaz we (3) deňleme

$$m\frac{dh}{dt} = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h^2}{\partial r}\right) \tag{4}$$

görnüşi alar. Has ýönekeý ýagdaýa seredeliň. Goý, akym wagta bagly bolmasyn, ýagny akym durnuklaşan bolsun. Onda $h(x,y,t)$ bu halda wagta bagly bolmaz we (4) deňleme

$$\frac{d^2h^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh^2}{dr}=0 \tag{5}$$

görnüşe geler. Bu deňlemäniň umumy çözüwini tapmak kyn däldir. Deňlemäni ýönekeýleşdireliň:

$$\frac{\frac{d^2h^2}{dr^2}}{\frac{dh^2}{dr}}+\frac{1}{r}=0, \qquad \frac{d}{dr}\left(\ln\frac{dh^2}{dr}\right)+\frac{1}{r}=0, \qquad \ln\frac{dh^2}{dr}+\ln r=\ln C_1,$$

ýa-da

$$\frac{dh^2}{dr}=\frac{C_1}{r}, \tag{6}$$

ýa-da

$$h^2=C_1\ln r+C_2. \tag{7}$$

Guýynyň radiusy r_0, akymyň çäginiň radiusy R_0 hasap edeliň. (6) deňligiň iki tarapyndan hem r_0-dan R_0-a çenli integral alalyň. Onda

$$\int_{r_0}^{R_0}\frac{dh^2}{dr}dr=C_1\int_{r_0}^{R_0}\frac{1}{r}dr$$

ýa-da

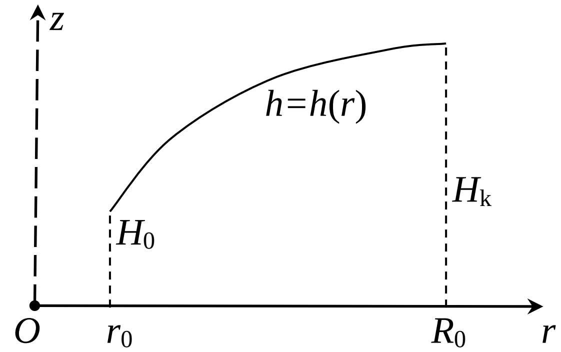
$$h^2(R_0)-h^2(r_0)=C_1(\ln R_0-\ln r_0),$$

ýa-da $h(R_0)=H_k$, $h(r_0)=H_0$ belgilemeleri girizip,

$$H_k^2-H_0^2=C_1\ln\frac{R_0}{r_0}$$

ýa-da

$$C_1=\frac{H_k^2-H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}}$$



35-nji surat

deňligi alarys. (7) deňlikde $r = r_0$ goýup,

$$h^2(r_0) = C_1 \ln r_0 + C_2$$

deňligi ýa-da

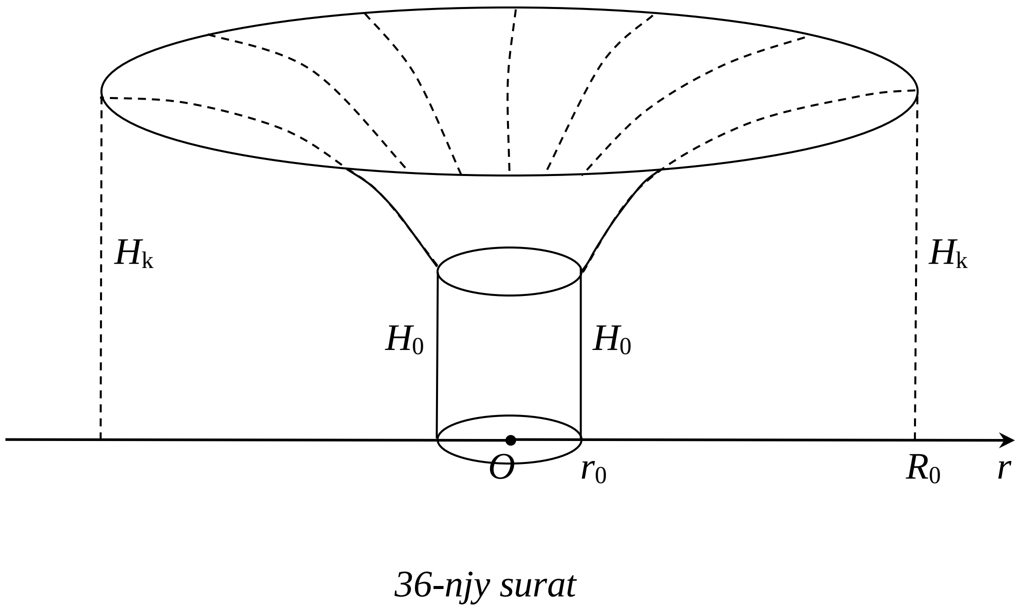
$$C_2 = H_0{}^2 - \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \dfrac{R_0}{r_0}} \cdot \ln r_0$$

deňligi alarys. Netijede, suw üstüniň $h=h(r)$ deňlemesini

$$h(r) = \sqrt{\frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \dfrac{R_0}{r_0}} \cdot \ln r + H_0^2 - \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \dfrac{R_0}{r_0}} \cdot \ln r_0}$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu funksiýanyň grafiginiň shematiki görnüşi 35-nji suratda getirilendir.

Eger bu grafigi z okunyň töwereginde 2π burça aýlasak, onda ol guýguja meňzeş aýlanma üstüni emele getirer (36-njy surat).



36-njy surat

36-njy suratdan görnüşi ýaly, guýynyň suw syzyp girýän gapdal üstüniň meýdany $2\pi r_0 H_0$-a deň. Onda, Darsiniň kanunyna laýyklykda, oňa wagt birliginde syzyp girýän suwuň mukdary

$$Q = 2\pi r_0 H_0 c \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{r=r_0}$$

formula bilen kesgitlener. (6) deňlikden alarys:

$$2h\frac{dh}{dr}=\frac{C_1}{r}.$$

Bu ýerden $r=r_0$ bolanda C_1-iň bahasyny ýerine goýup, alarys:

$$2H_0\left.\frac{dh}{dr}\right|_{r=r_0}=\frac{C_1}{r_0}=\frac{H_k^2-H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}}\cdot\frac{1}{r_0}.$$

$2H_0 r_0\left.\frac{dh}{dr}\right|_{r=r_0}=\frac{H_k^2-H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}}$ bolany üçin

$$Q=\pi c\cdot\frac{H_k^2-H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}} \tag{8}$$

formulany alarys. (8) deňlik giňden ulanylýan formulalaryň biridir. Indi umumy ýagdaýa seredeliň. $Q(t)$ bilen guýa onuň gapdal üstünden wagt birliginde girýän suwuň mukdaryny belgiläliň we ony durnuklaşmadyk akym üçin tapjak bolalyň. (2) deňlemäni

$$c\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+c\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)=m\frac{\partial h}{\partial t}$$

görnüşe getirip, ýaýlaryň içindäki birinji köpeldiji h-y onuň orta bahasy h^* bilen çalşyryp, has takmyn

$$ch^*\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]=m\frac{\partial h}{\partial t} \tag{9}$$

deňlemä gelýärler. (9) deňlemede polýar koordinatalaryna geçip, alarys:

$$h^*c\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h}{\partial r}\right)=m\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{10}$$

Bu deňlemäniň çözüwini $h(r,t)=u(\xi),\ \xi=\frac{r}{\sqrt{t}}$ görnüşde gözläliň.

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}},\quad \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}=\frac{d^2u}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{t},\quad \frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{r}{\left(\sqrt{t}\right)^3}$$

deňlikleri ulanyp, (10) deňlemäni

$$h^*c\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=-\frac{m}{2}\cdot\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{r}{\left(\sqrt{t}\right)^3}$$

görnüşe getireliň. Soňra özgerdip,

$$h^*c\left(u''\xi^2+u'\xi\right)=-\frac{m}{2}u'\xi^3$$

ýa-da

$$h^* c(u''\xi + u') = -\frac{m}{2} u' \xi^2,$$

ýa-da

$$u''\xi + u'\left(1 + \frac{m}{2h^* c}\xi^2\right) = 0$$

görnüşe getirse bolar. Soňky deňlemäni bir gezek integrirläp, alarys:

$$\ln u' + \ln \xi + \frac{m}{4h^* c}\xi^2 = \ln C_1$$

ýa-da

$$u' = \frac{C_1}{\xi} e^{-\frac{m}{4h^* c}\cdot \xi^2}.$$

Indi $\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$ deňligi $r\frac{\partial h}{\partial r} = \xi\frac{du}{d\xi}$ görnüşde ýazalyň. Goý, guýynyň radiusy r_0 we $h(r_0, t) = H_0(t)$ bolsun. Onda, Darsiniň kanuny boýunça debitiň $Q(t) = 2\pi r_0 H_0(t)\cdot \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ bolýanyny göz öňünde tutup, $Q(t)$ üçin

$$Q(t) = 2\pi H_0(t)\xi u'(\xi)\big|_{r=r_0}$$

ýa-da

$$Q(t) = 2\pi H_0(t) C_1 e^{-\frac{m}{4h^* c}\cdot\frac{r_0^2}{t}}$$

deňligi alarys. $u' = C_1 \xi^{-1}\exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right]$ deňlemäni integrirläp,

$$u(\xi) = C_0 - C_1 \int_{\xi}^{\infty} \xi^{-1}\exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi$$

ýa-da

$$h(r,t) = C_0 - C_1 \int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1}\exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi$$

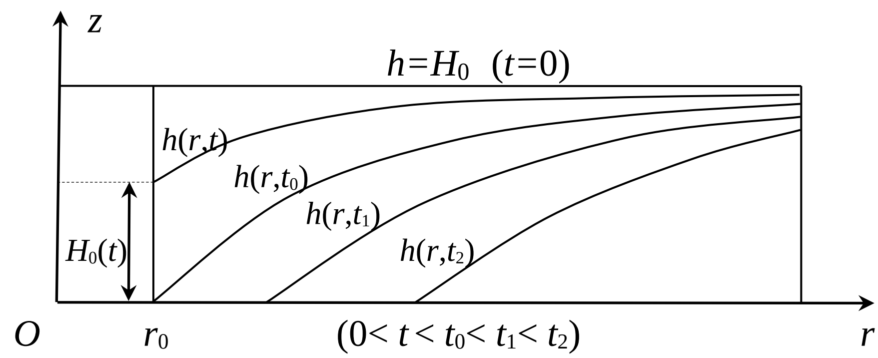
deňlemä geleris. Bu ýerde $t \to 0$ ymtyldyryp, $h(r,0) \equiv C_0$ alarys. $C_0 = H_0$ –suwuň üstüniň başlangyç ýagdaýy bolýanyny belläp, soňky deňligi

$$h(r,t) = H_0 - C_1 \int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1}\exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi \tag{11}$$

görnüşde ýazyp bileris. Islendik fiksirlenen t wagtda $h(r,t)$ funksiýanyň grafigi 37-nji suratdaky ýaly bolýar.

$h(r_0,t)$ funksiýanyň bahasyny (11) deňlikden tapyp, $H_0(t)=h(r_0,t)$ deňlikden alarys:

$$H_0(t)=H_0-C_1\int\limits_{r_0/\sqrt{t}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left[-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right]d\xi.$$



37-nji surat

Deňligiň sag bölegindäki integralyň t boýunça artýan funksiýa bolany üçin, käbir t_0 san üçin $t=t_0$ bolanda $H_0(t_0)=0$ bolar, ýagny

$$H_0-C_1\int\limits_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi=0.$$

Bu deňlikden C_1 hemişeligi tapýarys:

$$C_1=H_0\left(\int\limits_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi\right)^{-1}.$$

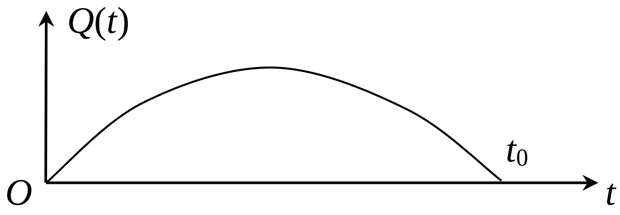
C_1-iň tapylan bahasyny $H_0(t)$ üçin formulada ýerine goýup, alarys:

$$H_0(t)=H_0\left(1-\frac{\int\limits_{r_0/\sqrt{t}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi}{\int\limits_{r_0/\sqrt{t_0}}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi}\right),\quad 0<t\le t_0.$$

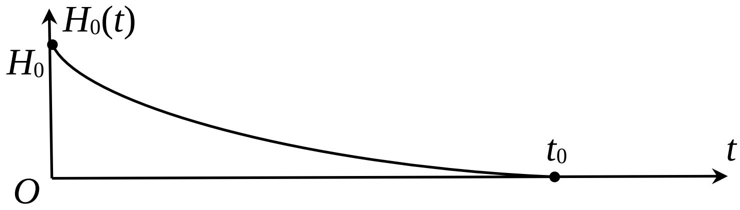
$H_0(t)$-niň tapylan bahasyny $Q(t)$ üçin formulada ýerine goýup,

$$Q(t)=2\pi H_0\left(1-\frac{\int\limits_{r_0/\sqrt{t}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi}{\int\limits_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi}\right)\cdot\frac{H_0}{\int\limits_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty}\xi^{-1}\exp\left(-\frac{m}{4h^*c}\xi^2\right)d\xi}\cdot e^{-\frac{m}{4h^*c}\cdot\frac{r_0^2}{t}},$$

formula geleris, bu ýerde $0 < t \le t_0$. Aşakda $Q(t)$ we $H_0(t)$ funksiýalaryň shematiki grafikleri getirilen (38-nji surat, 39-njy surat).



38-nji surat



39-njy surat

Şeýlelikde, $t = t_0$ bolanda $H_0(t_0) = 0$ bolýar we guýa suw gelmesi kesilýär.

Ýokarda getirilen hasaplamalar diňe erkin üstli, gorizontal daýanç üstli akymlar üçin geçirildi. Eger-de suw saklaýan gatlaga daşyndan goşmaça suw mukdary goşulýan bolsa, onda akym Bussineskanyň deňlemesine däl-de,

$$m\frac{dh}{dt} = c\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + c\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \omega \qquad (12)$$

görnüşdäki deňlemä tabyn bolýar. Bu ýerde ω akyma daşyndan wagt birliginde meýdan birliginden goşulýan suwuň mukdaryny aňladýar. Ideal halda, daşyndan gelýän suw mukdary guýa girýän suw mukdarynyň öwezini dolýan halynda we suwuň $h = h(r,t)$ derejesini üýtgetmän saklamaga ýardam edýän halynda, akym stasionar hala geler, ýagny belli bir $t = t_0$ wagtdan başlap $h(r,t) \equiv h_0(r,\varphi)$ bolar, wagta bagly bolmaz. Diýmek, $t \ge t_0$ başlap, D suwuň bütin tutýan meýdany bolsa,

$$Q(t) = \iint_D \omega dxdy$$

bolar. $h_0(r,\varphi)$ funksiýa bolsa

$$c\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + c\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \omega = 0$$

deňlemäni kanagatlandyrar. Deňlemede polýar koordinatalaryna geçip, alarys:

$$\frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 h^2}{\partial \varphi^2}\right)+\omega=0 .$$

Akymy guýynyň töwereginde simmetrik hasap etsek we ω funksiýa φ argumente bagly däl hasap etsek, onda $h_0(r,\varphi)$ funksiýa hem φ argumente bagly bolmaz we deňleme

$$\frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial r}\right)+\omega(r)=0 \tag{13}$$

görnüşe geler. (13) deňlemäniň iki tarapyny r-e köpeldip we r_0-dan r-e çenli integral alyp, taparys:

$$\frac{c}{2}\left[r\left(h^2\right)'-r_0\left(h^2\right)'\Big|_{r=r_0}\right]+\int_{r_0}^{r} r\omega(r)dr=0$$

ýa-da

$$chr\frac{dh}{dr}-chr\frac{dh}{dr}\Big|_{r=r_0}+\int_{r_0}^{r} r\omega dr=0,$$

ýa-da

$$2\pi chr\frac{dh}{dr}-2\pi ch(r_0)r_0 h'(r_0)+2\pi\int_{r_0}^{r} r\omega dr=0.$$

Indi Darsiniň kanuny boýunça $2\pi ch(r_0)h'(r_0)r_0=Q$ bolýanyny we beýleki tarapdan $Q=\iint_D \omega dxdy=2\pi\int_{r_0}^{\infty} r\omega dr$ bolýanyny göz öňünde tutup, alarys:

$$2\pi chr\frac{dh}{dr}=2\pi\int_{r}^{\infty} r\omega dr.$$

Ýene bir gezek integrirlesek,

$$h^2(r)-h^2(r_0)=\frac{2}{c}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{r}\int_{r}^{\infty} r\omega dr\right)dr \tag{14}$$

deňligi alarys. $h(\infty)=H_0$ – suwuň başlangyç derejesi bolýanyny göz öňünde tutup, soňky deňlikden taparys:

$$h^2(r_0)=H_0^2-\frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\int_{r}^{\infty}\rho\omega(\rho)d\rho\right)dr$$

ýa-da

$$h^2(r_0)=H_0^2-\frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr$$

formulany alarys. Indi $h^2(r_0)$ üçin tapylan bahany (14) deňlikde ýerine goýsak, $h(r)$ üçin

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr + \frac{2}{c}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\left(\int_{r}^{\infty} r\omega dr\right)dr$$

formulany alarys. Ikinji integraly özgerdip, alarys:

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr + \frac{2}{c}\left[\int_{r_0}^{r} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr + \int_{r}^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\frac{r}{r_0}d\rho\right]$$

ýa-da

$$h^2(r) = H_0^2 + \frac{2}{c}\int_{r}^{\infty}\rho\omega(\rho)\left[\ln\frac{r}{r_0} - \ln\frac{\rho}{r_0}\right]d\rho.$$

Ahyrda,

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r}^{\infty}\rho\omega(\rho)\cdot\ln\frac{\rho}{r}d\rho$$

formulany alarys. Soňky deňlikden

$$\int_{r_0}^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\rho\cdot d\rho$$

integralyň ýygnanmagynyň we

$$\frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\frac{\rho}{r_0}d\rho \le H_0^2$$

deňsizligiň zerurlygy gelip çykýar. Şu zerurlyk şertleriň ýerine ýeten halynda stasionar akymda $h(r)$ üçin we $Q(r_0)$ debit üçin

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r}^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\frac{\rho}{r}d\rho \equiv h^2(H_0, \omega),$$

$$Q(r_0) = 2\pi\int_{r_0}^{\infty}\rho\omega(\rho)d\rho \equiv Q(r_0, \omega)$$

formulalary alarys. Bu ýerde bir täsin ýagdaý ýüze çykýar. Eger $\omega_1(\rho) < \omega_2(\rho)$ bolsa, onda

$$h^2(H_0, \omega_1) > h^2(H_0, \omega_2),$$
$$Q(r_0, \omega_1) < Q(r_0, \omega_2)$$

deňsizlikler ýerlikli bolýarlar, ýagny debit köpelýär, $h_0(r_0, \omega)$ bolsa kiçelýär. Darsiniň formulasyna görä,

$$Q(r_0, \omega) = 2\pi c h_0(r_0, \omega)\frac{\partial h(r_0, \omega)}{\partial r}\cdot r_0.$$

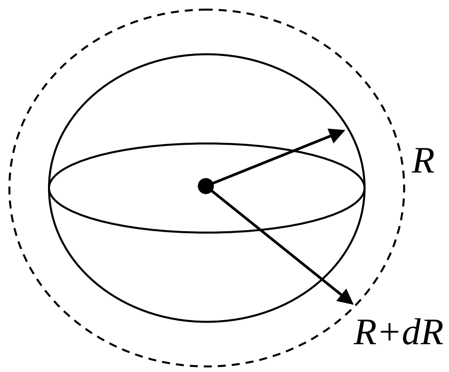
Diýmek, $Q(r_0, \omega)$ funksiýanyň ω boýunça artýan funksiýa bolmagy üçin $\frac{\partial h}{\partial r}(r_0, \omega)$ funksiýa, ýagny naporyň gradiýenti ösmeli bolýar.

16. GAPDAN ÇYKÝAN GAZYŇ MUKDARYNY WE TIZLIGINI HASAPLAMAGYŇ MATEMATIKI MODELI

Goý, gapda udel göwrümi V_1, basyşy p_1 bolan gaz belli bir pursatdan başlap gabyň deşiginden çykyp başlaýar diýeliň. Gazyň çykyş tizligini ω bilen, onuň çykalganyň ýanyndaky udel göwrümini V_2, basyşyny p_2 bilen belgiläliň. Adatça, p_2 gabyň daşyndaky gurşawyň (sredanyň) basyşyna deň diýip we akym sürtülmesiz geçýär hasap edip, islendik pursatda

$$p_1 V_1^k = p_2 V_2^k = \text{const} \tag{1}$$

kanun dogry kabul edilýär, ýagny proses adiabat proses bolýar hasap edýärler. Belli bir pursatda V udel göwrümi we p basyşy bolan gaz bölegi wagtyň artmagy bilen deşige tarap hereket edip başlaýar. Ikinji bir pursatda onuň göwrümi $V+dV$, basyşy bolsa $p+dp$ bolar. Şu geçişde sarp edilen işiň mukdaryny kesgitläliň. Ol işe giňelme işi diýýärler, ony dA bilen belgiläliň. Goý, gaz bölejigi radiusy R -e deň bolan şar görnüşinde bolsun (40-nji surat) we



40-njy surat

ikinji pursatda bolsa giňelip, radiusy $R+dR$ bolan şary doldursyn. Onda artan göwrüm $dV = 4\pi R^2 dR$ bolar. Göwrümi beýle artdyrmak üçin sarp edilen dA iş, birinji şaryň üstüniň her bir nokadyny dR aralyga süýşürmek işine deňdir. Herekete päsgel berýän şaryň daşyndaky basyş p deň. Diýmek, şaryň hemme nokatlaryna täsir edýän güýç pS bolar. Bu ýerde S şaryň üstüniň meýdany, ýagny $S = 4\pi R^2$. Diýmek, tutuş üsti dR aralyga süýşürmäge sarp edilen iş $pSdR$ deň bolar, ýagny

$$dA=pSdR=pdV$$

deňligi alarys. Eger indi V_1 udel göwrümiň başlangyç haly, V_2 onuň soňky haly bolsa, onda sarp edilen A iş üçin

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

formulany alarys. $pV^k = \text{const}$ kanuny ulanyp, alarys:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V^k} dV = \frac{c}{-k+1} \cdot \frac{1}{V_2^{k-1}} - \frac{c}{-k+1} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{-k+1} \cdot \left(\frac{cV_2}{V_2^k} - \frac{cV_1}{V_1^k} \right) = \frac{1}{-k+1} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right)$$

ýa-da

$$A = \frac{1}{k-1} \left(p_1 V_1 - p_2 V_2 \right).$$

Beýleki tarapdan, termodinamikanyň birinji kanuny akym üçin

$$q_{dasky} = h_2 - h_1 + l_{teh} + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \tag{2}$$

görnüşde bolýar. Bu ýerde, l_{teh} - tehniki iş, h_1 we h_2- entalpiýa. Entalpiýa $h=U+pV$ formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde U - sistemanyň içki energiýasy, p - basyş, V - udel göwrüm. Biziň sistemamyz üçin $l_{teh} = 0$ bolýar. Proses adiabatik bolany sebäpli, daşyndan gelýän q_{dasky} daşky energiýa hem nola deň bolýar. Şeýlelikde, (2) deňleme

$$h_2 - h_1 + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0$$

görnüşi alýar. $h_1 = U_1 + p_1 V_1, \quad h_2 = U_2 + p_2 V_2$ bolany üçin

$$h_2 - h_1 = U_1 - U_2 + p_1 V_1 - p_2 V_2$$

deňligi alarys. $U_1 - U_2$ tapawut gaz bölejiginiň içki energiýasynyň artmasy. Ol artma diňe edilen A işiň hasabyna bolýar, ýagny

$$U_1 - U_2 = A.$$

Soňky üç deňlikleri birleşdirip, alarys:

$$U_1 - U_2 + p_1 V_1 - p_2 V_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0$$

ýa-da $U_1 - U_2 = A$ bolýany üçin,

$$A + p_1V_1 - p_2V_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0.$$

Indi A-nyň ýokarda tapylan bahasyny ýerine goýup, alarys:

$$\frac{1}{k-1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right) + p_1V_1 - p_2V_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0,$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{2k}{k-1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right).$$

Adatça, ω_1 kiçi hasap edilip taşlanýar we ω_2 tizlik üçin aşakdaky formulany alýarlar:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)}.$$

$p_1V_1 - p_2V_2$ tapawudy özgerdeliň:

$$p_1V_1 - p_2V_2 = p_1V_1\left(1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right).$$

$p_1V_1^k = p_2V_2^k$ bolany sebäpli,

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k = \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Indi $p_1V_1 - p_2V_2$ tapawudyň

$$p_1V_1 - p_2V_2 = p_1V_1\left[1 - \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}\right] = p_1V_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

bahasyny ω_2 üçin formulada ýerine goýup,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}p_1V_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

formulany alarys. Indi biz deşikden wagt birliginde çykýan gazyň massasyny kesgitläp bileris. Eger deşigiň meýdany F bolsa, onda wagt birliginde $F \cdot \omega_2$ göwrümdäki gaz çykar, eger bu göwrümi deşigiň ýakynynda hasaplanan V_2 udel göwrüme bölsek, onda $m = \frac{F\omega_2}{V_2}$ - wagt birliginde deşikden çykan gazyň massasyny alarys. Bu ýerde ω_2-niň ýokarda tapylan bahasyny goýsak,

$$m=\frac{F}{V_2}\sqrt{\frac{2k}{k-1}p_1V_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

deňligi alarys. Indi V_1 we V_2 udel göwrümleri üçin belli bolan $p_1V_1^k=p_2V_2^k$ formulany $V_2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}V_1$ görnüşde ýazyp, m üçin formulany

$$m=\frac{F}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}V_1}\sqrt{\frac{2k}{k-1}p_1V_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

ýa-da biraz özgerdip,

$$m=F\sqrt{\frac{2k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{V_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}$$

görnüşe getirse bolar. Gazyň deşikden akmagy bilen baglanyşykly meseleleriň käbirinde deşigiň tutýan F meýdany hemişelik ýagdaýynda $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň haýsy bahasynda deşikden wagt birliginde çykýan gazyň massasy maksimuma ýetýär diýen sowal ýüze çykýar. Bu sowaly başgaça-da aýtmak bolýar, ýagny deşikden wagt birliginde akyp çykýan gazyň massasy hemişelik halynda $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň haýsy bahasynda deşigiň tutýan meýdany iň kiçi baha eýe bolar diýip bolar. Bu iki sowalyň jogaby bolup kökün aşagyndaky aňlatmanyň maksimum bahasyny berýän $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşyk bolýar. Ony tapmak üçin ol aňlatmanyň $\frac{p_2}{p_1}$ -e görä önümini tapmaly we ol önümi nola deňlemeli. Alarys:

$$\frac{2}{k}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}-1}-\frac{k+1}{k}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}-1}=0$$

ýa-da $\quad \frac{2}{k+1}-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}-\frac{2}{k}}=0, \qquad$ ýa-da $\quad \frac{2}{k+1}-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}=0.$

Bu ýerden taparys:

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Garalýan funksiýa $\frac{p_2}{p_1}=0,\quad \frac{p_2}{p_1}=1$ bahalarda nola deň. Ekstremum diňe bir $\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ nokatda bar, diýmek, onuň maksimum nokady bolmagy üçin funksiýanyň şol nokatdaky bahasynyň položitel bolmagy ýeterlikdir. Funksiýanyň $\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ nokatdaky bahasyny tapalyň.

$$\left.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right|_{\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k\cdot 2}{(k-1)k}}-\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}-\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}=$$

$$=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\left[1-\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-1}{k-1}-\frac{2}{k-1}}\right]=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\cdot\frac{k+1-2}{k+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}.$$

$k-1\geq 0$ bolany sebäpli, bu baha položitel san. Diýmek, ol funksiýanyň maksimal bahasydyr. $\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\beta_{kr}$ belgileýärler we oňa $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň kritiki bahasy diýýärler.

$$m_{kr}=F\sqrt{\frac{2k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{V_1}\cdot\frac{k-1}{k+1}\cdot\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}}$$

baha massanyň kritiki bahasy diýýärler. Çykýan massanyň m bahasynyň fiksirlenen halynda

$$F_{kr}=m\frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{k+1}\cdot\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\cdot\frac{p_1}{V_1}}}$$

- deşigiň meýdanynyň iň kiçi bahasyny alarys.

$p_{kr}=\beta_{kr}\cdot p_1$ baha basyşyň kritiki bahasy diýýärler. Gazyň deşikden çykýan ω_2 tizliginiň $\frac{p_2}{p_1}=\beta_{kr}$ bolandaky

$$\omega_{kr}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}\cdot p_1V_1\left(1-\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k}}\right)}$$

ýa-da

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot p_1 V_1} \qquad (3)$$

bahasyna tizligiň kritiki bahasy diýýärler. Klaýperonyň $p_1 V_1 = RT_1$ deňligini ulanyp, soňky formulany

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot RT_1}$$

görnüşde hem ýazmak bolar. $p_1 V_1^k = p_{kr} V_{kr}^k$ ýa-da $V_1 = \left(\frac{p_{kr}}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} V_{kr}$ bolýany sebäpli, $p_1 = \frac{p_{kr}}{\beta_{kr}}$ bolany sebäpli, (3) deňlikden alarys:

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \left(p_{kr} : \frac{p_{kr}}{\beta_{kr}}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot V_{kr} \cdot \frac{p_{kr}}{\beta_{kr}}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \beta_{kr}^{\frac{1}{k}-1} \cdot p_{kr} \cdot V_{kr}} \; .$$

Bellemä görä $\beta_{kr} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$. Diýmek, $\beta_{kr}^{\frac{1}{k}-1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-1} = \frac{k+1}{2}$. Onda ω_{kr} üçin

$$\omega_{kr} = \sqrt{k p_{kr} V_{kr}}$$

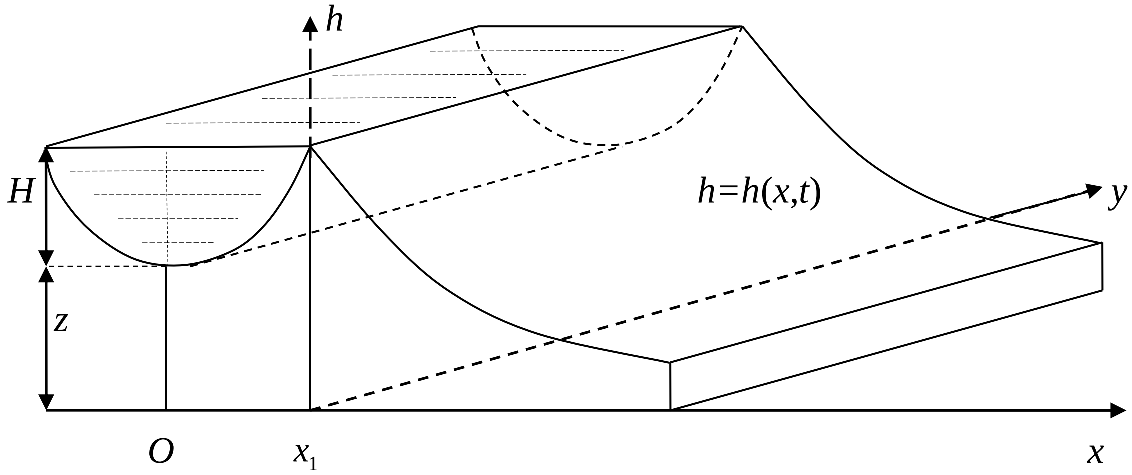
deňligi alarys. Fizikanyň kursundan belli bolşy ýaly $\sqrt{k p_{kr} V_{kr}}$ ululyk, parametrleri p_{kr} we V_{kr} bolan giňişlikde (sredada) sesiň tizligine deňdir. Diýmek, gazyň deşikden çykyş kritiki tizligi sesiň deşigiň golaýyndaky tizligine deňdir.

17. AÇYK HANALARDAN SYZYŞ MESELESI BARADA

Kanalyň açyk hanasyndan syzýan suwuň mukdaryny hasaplamaklyk diýseň çylşyrymly bolup, şu wagta çenli bu meseläni çözmeklikde ýeke-täk çemeleşiş ýok. Çözgüt köp faktorlara bagly bolýar we meselä syzyşa täsir edýän hemme faktorlary göz öňünde tutmak arkaly çemeleşmek uly kynçylyklar bilen utgaşýandyr, şol sebäpli-de ähli faktorlara bagly bolan doly çözüwi tapmak başartmaýar. Şu işde meseläni kanalyň hanasyndaky suwuň derejesini, kanalyň astyndaky suw direginiň derejesini, kanalyň kese kesiginiň görnüşini nazarda tutup we beýleki faktorlardan diýseň «erkin» peýdalanyp çözmek hödürlenýär. Ýerasty suwlaryň üsti t pursatda $h = h(x,t)$ deňleme bilen berilýär (ýagny tekiz meselä seredilýär) we h

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{m} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \tag{1}$$

syzyş deňlemesini kanagatlandyrýar diýip çak edilýär, şu ýerde m – kanalyň hanasyny gurşaýan sredanyň öýlükliligi, k – syzyş koeffisiýenti (m we k hemişelik ululyk diýip hasaplanýar).



41-nji surat. Syzyşyň hasaplaýyş shemasy.

$h=0,\ \ h=h(x,t),\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ x=x_1$ üstler bilen çäklendirilen V jisimiň göwrümini hasaplalyň. Alarys:

$$V = \int_{x_1}^{\infty} h(x,t)dx .$$

Diýmek, öýjüklerdäki suwuklygyň Q_1 göwrümi aşakdaky formula boýunça tapylar:

$$Q_1 = m\int_{x_1}^{\infty} h(x,t)dx$$

Bu ýerden Q_1-iň üýtgeýiş tizligi, ýagny $\frac{dQ_1}{dt}$ wagt birliginde kanalyň uzynlygy uzynlyk birligine deň bolan böleginden syzýan suwuň mukdaryna deň bolar, ýagny

$$Q = m\int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} dx .$$

(1) deňlemäni m-e köpeldip, onuň iki bölegini hem x boýunça x_1-den ∞-e çenli integrirläliň:

$$m\int_{x_1}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial t}dx = m\int_{x_1}^{\infty}\frac{k}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(h\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx$$

ýa-da

$$m\int_{x_1}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial t}dx = k\cdot\left[h\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=\infty} - h\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right].$$

$\lim\limits_{x\to\infty} h = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ bolany sebäpli, alarys:

$$Q = -kh(x_1,t)\cdot h'_x(x_1,t). \tag{2}$$

$h(x_1,t) = H + z$ bolany üçin, ähli kynçylyk $h'_x(x_1,t)$ ululygyň san bahasyny kesgitlemeklige syrygýar.

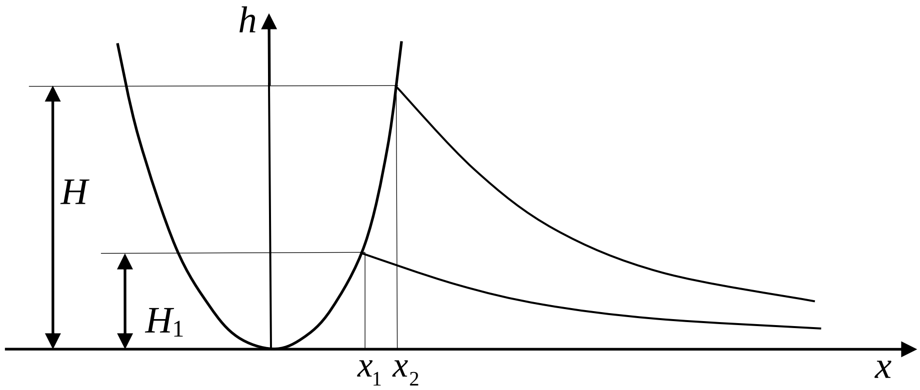
$z = 0$ ýagdaý.

Kanalyň kese kesigi $h = px^2$ parabola diýip çak edeliň. Onda $H = px_1^2$ bolar we

$$u = (x_2/x_1)^2 h\left[(x_1/x_2)x,\, t\right],\quad 0 < x_2 < x_1,$$

funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi bolar, özem

$$u(x_2,t) = (x_2/x_1)^2 h(x_1,t) = (x_2/x_1)^2 H = px_2^2 = H_1.$$



42-nji surat. $z = 0$ bolanda syzyşyň hasaplaýyş shemasy

Indi

$$Q_1 = -ku(x_2,t)u'_x(x_2,t)$$

ululygy, ýagny suwuň beýikligi kanalda H_1-e deň bolanda kanaldan wagt birliginde syzan suwuň mukdaryny hasaplalyň. Alarys:

$$Q_1 = -ku(x_2,t)u'_x(x_2,t) = -k(x_2/x_1)^2 h(x_1,t)(x_2/x_1)h'_x(x_1,t) =$$

$$=(x_2/x_1)^3\left[-kh(x_1,t)h_x^{/}(x_1,t)\right]=(x_2/x_1)^3 Q,$$

bu ýerde $Q=-kh(x_1,t)h_x^{/}(x_1,t)$.

Q_1-i başgaça-da ýazyp bolar:

$$Q_1=\left(\sqrt{H_1}/\sqrt{H}\right)^3 Q=H_1\sqrt{H_1}/(H\sqrt{H})Q$$

ýa-da $Q_1/(H_1\sqrt{H_1})=w(t)$ belgilemäni girizip, alarys:

$$Q=w(t)H\sqrt{H}\,. \qquad (3)$$

Indi w-niň t-e baglylyk häsiýetini kesgitlemek üçin öwürmeleri geçireliň. x-ler okunda koordinatalar başlangyjy $x=x_1$ nokatda hasap edip,

$$h(x,t)=Hu(\eta),\quad \alpha=2\sqrt{kH/m},\quad \eta=x/(\alpha\sqrt{t})$$

çalşyrma girizip, $u(\eta)$ üçin adaty differensial deňlemäni alarys:

$$\frac{d^2u^2}{d\eta^2}+4\eta\frac{du}{d\eta}=0\,. \qquad (4)$$

$h(0,t)=H,\quad H(\infty,t)=0$ bolýanyny göz öňünde tutup, $u(\eta)$ üçin başlangyç şertleri alarys:

$$u(0)=1,\qquad u(\infty)=0\,. \qquad (5)$$

(4-5) meseläniň çözüwini

$$u(\eta)=1+\lambda u_1+\lambda^2u_2+...$$

λ parametriň derejesi boýunça hatar görnüşinde we

$$u_i(0)=0,\quad \forall i\geq 1,\qquad u_i(\infty)=0,\quad \forall i\geq 2,$$

$$u_1(\infty)=R,\quad R>>1,\quad u(\infty)=1+\lambda u_1(\infty)=0$$

şertlerde gözläris. Bu ýerden λ kiçi parametr üçin $\lambda=-1/R$ alarys. $u(\eta)$-nyň bahasyny (4) deňlemede ýerine goýup, ýene-de λ-nyň derejesi boýunça hatar alarys. Şol hataryň koeffisiýentlerini nola deňläp, $u_i(\eta)$ funksiýalar üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$u_1''+2\eta u_1'=0,$$

$$u_2''+2\eta u_2'=-(u_1^2)''/2,$$

$$u_3''+2\eta u_3'=-(u_1u_2)''...$$

we ş.m.. Birinji deňlemäni $u_1(0)=0,\ u_1(\infty)=R$ şertlerde çözüp, alarys:

$$u_1(\eta)=\frac{2R}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta.$$

Ikinji deňlemäni $u_2(0)=0,\ u_2(\infty)=0$ şertlerde çözüp, alarys:

$$u_2(\eta)=\frac{R^2}{\pi}\left(1-e^{-2\eta^2}\right)-\frac{R}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}u_1-\frac{1}{2}u_1^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)Ru_1,$$

we ş.m.. u üçin aňlatmada u_1-iň, u_2 -niň we ş.m. bahalaryny goýup, alarys:

$$u = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{R^2} u_2(\eta) + ...$$

Indi $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$ tapalyň:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)R^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} + ...$$

ýa-da

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) + ...$$

R -i ýeterlik derejede uly hasap edip,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \approx -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

ýazyp bolar.

Şuny göz öňünde tutup, alarys:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0} = H\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = H\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \cdot \frac{1}{\alpha\sqrt{t}} = -\frac{2H}{\alpha\sqrt{\pi t}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

ýa-da

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sqrt{\frac{m}{k\pi t}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{H} .$$

$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}$ üçin tapylan bahany

$$Q = -kh(0,t)h'_x(0,t)$$

deňlikde ýerine goýup, taparys:

$$Q = \sqrt{\frac{mk}{\pi t}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)H\sqrt{H} . \qquad (6)$$

(3) we (6) deňlemeleri deňeşdirip, alarys:

$$w(t) = \sqrt{\frac{mk}{\pi t}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right).$$

Şeýlelikde, (3) we (6) formulalar alnandaky ortalaşdyrmalary we ýönekeýleşdirmeleri göz öňünde tutup, syzyşyň z=0 ýagdaýdaky ahyrky hasaplaýyş formulasyny

$$Q = w_0\sqrt{\frac{mk}{\pi t}}H\sqrt{H} \qquad (7)$$

görnüşde gözlemek zerur.

Tejribe arkaly kesgitlenýän w_0 koeffisiýenti ortalaşdyryş koeffisiýenti diýip atlandyrmak bolar.

Aşakdaky delilleri hem (6) formulanyň esaslandyrylyşyna degişli diýmek bolar. (4) deňlemäniň çözgüdi

$$u = 1 + \beta(\eta\sqrt{2}) - \beta^2(\eta\sqrt{2})^2/2 + ...$$

görnüşde gözlenýär.

η-nyň uly bahalarynda $u(\eta)$ funksiýanyň nula ymtylmagy üçin, san usuly bilen $\beta = -0{,}628$ deňligiň zerurlygy anyklanýar. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$ tapalyň:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{\alpha\sqrt{t}}\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{m}{2tk}}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{H}}.$$

Diýmek,

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0} = H\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sqrt{\frac{m}{2tk}}\sqrt{H}\cdot 0{,}628$$

ýa-da (2) formula goýup,

$$Q = \sqrt{\frac{mk}{2t}}H\sqrt{H}\cdot 0{,}628$$

alarys.

$z \neq 0$ ýagdaý.

(1) deňlemäniň sag bölegini $\frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right)$ aňlatma bilen çalşyralyň, $\tilde{h}$ - haýsam bolsa bir hemişelik ululyk – *h(x,t)*-niň ortalaşdyrylan bahasy.

$\frac{k}{m}\cdot\tilde{h} = a^2$ belgiläp, syzyş üçin

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{8}$$

täze deňlemäni alarys.

Goý, *h(x,t)* $x \geq x_1$ (41-nji surat) bolanda (8) deňlemäniň gözlenýän çözüwi bolsun.

Goý, $h(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq x_1$ bolsun, $\varphi(x)$-i analitik ýagdaýda (0,*x*)-a dowam etdireliň. Alnan funksiýany ýene-de $\varphi(x)$ bilen belgiläliň we -∞<*x*<∞ kesgitlenen $\tilde{h}(x,0) = \varphi(x)\ \ x \geq 0$ üçin, $\tilde{h}(x,0) = \varphi(-x)\ \ x < 0$ üçin deňlikleri kanagatlandyrýan (8) deňlemäniň $\tilde{h}(x,t)$ çözüwini tapalyň. Bu çözüw, belli bolşy ýaly,

$$\widetilde{h}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

formula bilen berilýär, bu ýerde

$$\psi(x)=\varphi(x)\ \ \forall x\geq 0,\qquad \psi(x)=\varphi(-x)\ \ \forall x\leq 0\ .$$

$\widetilde{h}'_x(x,t)\approx h'_x(x,t)$ çaklama tebigydyr $\widetilde{h}'_x(x_1,t)$ -ni hasaplalyň.

$$\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]_x^{/}d\xi=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]_\xi^{/}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

$\psi'(x)$ funksiýanyň täkligi sebäpli

$$\left.\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x}\right|_{x=0}=0.$$

Şuny we Lagranžyň teoremasyny ulanyp, alarys:

$$\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x}-\left.\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2\widetilde{h}}{\partial x^2}\right|_{x=c}\cdot x;\qquad 0<c<x.$$

Indi $\dfrac{\partial^2\widetilde{h}}{\partial x^2}$ hasaplalyň; alarys:

$$\frac{\partial^2\widetilde{h}}{\partial x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{a^2t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]_x^{/}d\xi=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{a^2t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]_\xi^{/}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi''(\xi)}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=-K(x,t)\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

$\exists\, b$ položitel ululyk we $\forall x$ üçin $0\leq K(x,t)\leq b$ bolar.

Şeýlelikde,

$$\left.\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x}\right|_{x=x_1}=K(c,t)\cdot x_1\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

alarys we

$$Q=-k\cdot h(x_1,t)\cdot h'_x(x_1,t)=\frac{K(c,t)\cdot k}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot(H+z)x_1$$

bolar. Çak edilişine görä, kanalyň kesigi $h=px^2$ parabola görnüşindedir. Diýmek, $H=px_1^2$, $x_1=\sqrt{H/p}$ bolar. Şuny nazara alyp, alarys:

$$Q=\frac{k\cdot K(c,t)}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot(H+z)\cdot\sqrt{H/p}.$$

Indi

$$\frac{k \cdot K(c,t)}{2a\sqrt{\pi tp}} = w(t)$$

belgiläp, ahyrynda

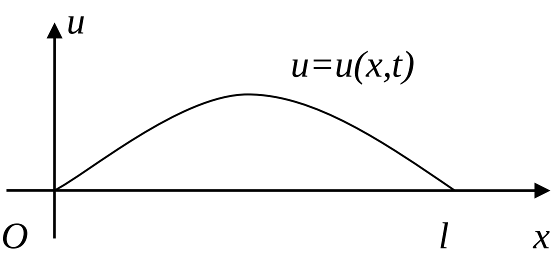
$$Q = w(t) \cdot (H + z) \cdot \sqrt{H} \tag{9}$$

alarys.

Alnan (7) we (9) formulalar daş görnüşi boýunça meňzeşdirler we (7) formula z=0 bolanda (9) formuladan gelip çykýar. Ýöne olar diýseň tapawutlanýarlar. (7) formula boýunça Q $H^{3/2}$ derejä proporsional peselýär, (9) formula boýunça Q $H^{1/2}$ derejä proporsional peselýär. Elbetde, bu aýratynlyklar, (7) we (9) formulalaryň özleri we $w(t)$ funksiýanyň häsiýetleri synag edilip tassyklanmalydyr.

18. TARYŇ YRGYLDYSY BARADAKY MESELÄNIŇ MATEMATIKI MODELI

Tekizlikde Ox okuň O we l nokatlarynyň arasynda tar ýerleşdirilen. Tar çekdirilip, O we l nokatlarda berkidilen. Ol käbir täsir astynda deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarylýar we yrgyldap başlaýar. Mesele taryň islendik wagtda tutjak ýagdaýyny kesgitlemekden durýar. Meseläni anyklalyň we matematiki dile geçireliň. Tekizlikde xOu koordinatalar ulgamyny guralyň (43-nji surat).



43-nji surat

Başda tar $[0, l]$ kesim bilen gabat gelýär. t=0 wagtda tara täsir edip, $u=\varphi(x)$ funksiýanyň grafigi bilen gabat geler ýaly edýärler we soňra taryň nokatlarynyň başlangyç tizlikleri $\psi(x)$ funksiýa bilen kesgitlener ýaly edip goýberýärler. Tar yrgyldap başlaýar. Onuň islendik t wagtdaky ýagdaýy $u=u(x,t)$ funksiýanyň grafigi bilen gabat gelýär diýeliň. Tar 0 we l nokatlarda berkidilen bolany üçin $u(0,t)\equiv u(l,t)\equiv 0$ bolmaly bolar. Tara daşyndan täsir edýän güýç ýok halynda taryň yrgyldysyna azat yrgyldy diýilýär. Mesele taryň azat yrgyldysyny anyklamakdan durýar. Matematiki dilde $u(0,t)\equiv u(l,t)\equiv 0$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t'(x,0)=\psi(x)$ şertleri kanatlandyrýan we islendik t wagtda taryň ýagdaýyny kesgitleýän $u(x,t)$ funksiýany kesgitlemekden durýar. Meseläniň matematiki modelini düzeliň. Model aşakdaky çaklamalarda düzülýär.

1. Biz taryň kiçi yrgyldylary bilen gyzyklanýarys, ýagny $u(x,t)$ funksiýanyň özi we onuň $u_x(x,t)$ önümi islendik $0\le x\le l$ we islendik t üçin kiçi funksiýalar.

2. Hasaplamalarda $u^2(x,t)$, $u_x^2(x,t)$ ululyklary $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ ululyklara görä örän kiçi hasap etjekdiris.

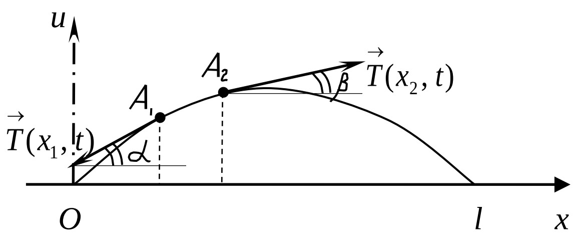
3. $u(x,t)$ funksiýanyň garalýan $\{0\le x\le l,\ 0\le t<\infty\}$ ýaýlada üznüksiz birinji we ikinji tertipli önümleri bar hasap etjekdiris.

4. Gukuň kanunyna laýyklykda, taryň islendik nokadynda uzalma proporsional we tara şol nokatda galtaşýan göni boýunça täsir edýän dartylma güýji bar.

5. Yrgyldylar kiçi bolany sebäpli taryň başlangyç haldaky islendik nokady diňe x okuna perpendikulýar göni boýunça hereket edýär hasap edilýär.

6. Tara täsir edýän daşky güýçler we inersiýa güýji u okuna parallel täsir edýär hasap edilýär.

Ýokarda edilen çaklamalardan birnäçe netijeler alalyň. $\vec{T}(x,t)$ bilen tara t pursatda onuň $A(x,u(x,t))$ nokadynda täsir edýän dartylma güýjüni belgiläliň. Taryň başlangyç $(t=0)$ halda x okunyň x_1 we x_2 nokatlarynyň aralygyndaky böleginiň t_0 pursatdaky ýagdaýy $u=u(x,t_0)$, $x_1\le x<x_2$, deňlik bilen kesgitlener (44-nji surat).



44-nji surat

Ol bölejige A_1, A_2 nokatlarda, suratda görkezilişi ýaly, dartylma güýçleri täsir edýärler. Tara täsir edýän dartylmadan özge beýleki güýçler, çaklama görä, u okuna parallel täsir edýärler. Mehanikanyň kanunyna laýyklykda, A_1A_2 duga täsir edýän hemme güýçler deňagramlylykda bolmaly, ýagny olaryň x okuna bolan proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmaly. Şol sebäpli, $\vec{T}(x_1,t)$ we $\vec{T}(x_2,t)$

dartylma güýçleriniň x okuna bolan proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmaly bolýar, ýagny $-\left|\vec{T}(x_1,\, t)\right|\cdot\cos\beta+\left|\vec{T}(x_2,\, t)\right|\cdot\cos\alpha=0$.

44-nji suratdan görnüşi ýaly, $tg\beta=u'_x(x_1,t_0),\quad tg\alpha=u'_x(x_2,t_0)$. Onda, ikinji çaklamany ulanyp, alarys:

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+[u'_x(x_1,t_0)]^2}}=1,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+[u'_x(x_2,t_0)]^2}}=1.$$

Bu ýerden

$$\left|\vec{T}(x_1,t_0)\right|=\left|\vec{T}(x_2,t_0)\right|$$

deňlik gelip çykýar. $x_1,\ x_2$ nokatlaryň islendik bolandyklary sebäpli, t_0 pursatda taryň islendik $(x,u(x,t_0))$ nokadyndaky dartylmanyň moduly hemişelik bahasyny saklaýar. Indi A_1A_2 duganyň $|A_1A_2|$ uzynlygyny tapalyň. Alarys:

$$|A_1A_2|=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(u'_x(x,t_0))^2}\,dx..$$

Ikinji çaklamany ulansak,

$$|A_1A_2|=|x_2-x_1|$$

deňligi alarys. Bu bolsa taryň başlangyç halda x okunyň $[x_1,x_2]$ kesimi bilen gabat gelýän böleginiň islendik t_0 wagtdaky uzynlygynyň şol kesimiň uzynlygyna deňdigini, ýagny, onuň uzynlygynyň wagta bagly däldigini aňladýar. Bu bolsa öz gezeginde, Gukuň kanunyna laýyklykda, taryň islendik nokadyndaky dartylmanyň wagta bagly däldigini aňladýar. Şeýlelikde, dartylma güýjüniň moduly $\left|\vec{T}(x,\, t)\right|$ x–e we t bagly däl bolýar, ýagny $\left|\vec{T}(x,\, t)\right|\equiv T_0$. Bu ýerde T_0 taryň nokatlaryndaky başlangyç ($t=0$) haldaky dartylmadyr. Ine, şu çaklamalarda we alnan netijeleri ulanyp, biz taryň yrgyldysyny kesgitleýän $u(x,t)$ funksiýanyň kanagatlandyrýan deňlemesini getirip çykaralyň. Başda taryň azat yrgyldysynyň, ýagny, tara inersiýa güýjünden we dartylma güýjünden başga daşky güýçler täsir etmeýän halyndaky yrgyldysynyň deňlemesini çykaralyň. Ilki bilen taryň yrgyldysynyň kinetiki we potensial energiýalaryny tapalyň. Hereketde taryň bölejikleriniň uzynlyklarynyň üýtgemeýänligi üçin onuň K kinetiki energiýasy

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2 dx$$

formula arkaly tapylar. Bu ýerde $\rho(x)$ taryň dykyzlygy. Tara täsir edýän dartylma güýçleriniň $t=0$ pursatdan t_0 pursata çenli bitiren işlerini hasaplalyň. Taryň nokatlarynyň u oka parallel hereket eýdändikleri sebäpli dartylma güýçleriň u oka bolan proýeksiýalarynyň bitiren işini hasaplamak ýeterlikdir. Taryň A_1A_2 dugasyny alalyň. Şol duga täsir edýän $\vec{T_1}(x_1,t_0)$, $\vec{T}(x_2,t_0)$ dartylma güýçleriň u oka bolan T_{1u}, T_{2u} proýeksiýalaryny, çaklamalary ulanyp, tapalyň:

$$T_{1u} = -T_0 \sin\beta = -T_0 \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = -T_0 \frac{u'_x(x_1,t_0)}{\sqrt{1+(u'_x(x_1,t_0))^2}} \approx -T_0 u'_x(x_1,t_0);$$

$$T_{2u} = T_0 \sin\alpha = T_0 \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = T_0 \frac{u'_x(x_2,t_0)}{\sqrt{1+(u'_x(x_2,t_0))^2}} \approx T_0 u'_x(x_2,t_0).$$

Olaryň jemini hasaplalyň:

$$T_{1u} + T_{2u} = T_0 u'_x(x_2,t_0) - T_0 u'_x(x_1,t_0) = T_0 u''_{xx}(x_0,t_0)(x_2 - x_1).$$

A_1A_2 dugany ýeterlik kiçi hasap edeliň. Onda onuň t_1-den t_2-ä çenli geçen aralygy, takmynan, $u'_x(x_0,t^*)(t_2-t_1)$-e deň bolar $(t_1 \le t^* \le t_2)$. Dartylma güýçleriniň A_1A_2 duga t_1 pursatdan t_2 pursata çenli hereket edendäki bitiren A_{12} işi bolsa

$$A_{12} = T_0 u''_{xx}(x_0,t^*)\cdot u'_t(x_0,t^*)(x_2-x_1)(t_2-t_1)$$

ýa-da $x_2 - x_1 = dx,\ \ t_2 - t_1 = dt,\ \ x_0 = x,\ \ t^* = t$ belgilemeleri girizip,

$$A_{12} = T_0 u''_{xx}(x,t)\cdot u'_t(x,t)dxdt$$

deňligi alarys. Bu ýerden tutuş taryň $t=0$ pursatdan t_0 pursata çenli eden hereketinde dartylma güýçleriniň bitiren A işi üçin

$$A = \int_0^{t_0}\int_0^l T_0 u''_{xx}(x,t)\cdot u'_t(x,t)dxdt$$

formulany alarys. Bu formulany özgerdeliň:

$$A = \int_0^{t_0}\left(\int_0^l T_0 u'_t(x,t)du'_x(x,t)\right)dt = \int_0^{t_0}\left[T_0 u'_t(x,t)\cdot u'_x(x,t)\right]_{x=0}^{x=l} dt - \int_0^{t_0}\int_0^l T_0 u'_x(x,t)\cdot u''_{xt}(x,t)dxdt$$

Taryň 0 we l nokatlarda berkidilendigi sebäpli $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$. Şunuň esasynda $u'_t(0,t) = u'_t(l,t) \equiv 0$ bolar we ýokarky formuladaky birinji integral nola deň bolup, formula

$$A = -\int_0^{t_0}\int_0^l T_0 u'_x(x,t)\cdot u''_{xt}(x,t)dxdt$$

görnüşe geler. Indi

$$\int_0^l u'_x(x,t)\cdot u''_{xt}(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^l \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

deňligi göz öňünde tutup, A üçin alarys:

$$A=-\int_0^l \frac{T_0}{2}\left[\left(u'_x(x,t_0)\right)^2-\left(u'_x(x,0)\right)^2\right]dx.$$

Başlangyç halda $t=0$ bolanda tar $[0,\ l]$ kesim bilen gabat gelýär diýilipdi. Şoňa görä, $u(0,t)\equiv 0$ we $u'_x(x,0)\equiv 0$ boljagyny göz öňünde tutup, alarys:

$$A=-\frac{T_0}{2}\int_0^l \left[u'_x(x,t_0)\right]^2 dx.$$

Görnüşi ýaly, dartylma güýçleriniň bitiren işi diňe taryň başlangyç ýagdaýy we ahyrky ($t=t_0$) ýagdaýy bilen kesgitlenýär. Ýagny –A taryň $t=t_0$ pursatdaky potensial energiýasy bolar.

$$L=K+A=\frac{1}{2}\int_0^l \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx-\frac{T_0}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Lagranžyň funksiýasyny düzeliň we Gamiltonyň prinsipini ulanalyň, ýagny islendik t_0 üçin

$$J(u)=\int_0^{t_0} Ldt=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left[\int_0^l \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]dt$$

integralyň wariasiýasy nola deň bolmaly bolar. Başgaça aýdanymyzda, islendik $\upsilon(x,t)\big|_{t=0}=\upsilon(x,t)\big|_{t=t_0}\equiv 0$, $\upsilon(x,t)\big|_{x=0}=\upsilon(x,t)\big|_{x=l}$ şertleri kanagatlandyrýan we birinji tertipli hususy önümli $\upsilon(x,t)$ funksiýa üçin

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(u+\alpha\upsilon)\Big|_{\alpha=0}=0$$

ýa-da

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left\{\int_0^l \rho_0\left[\frac{(u+\alpha\upsilon)}{\partial t}\right]^2-T_0\left[\frac{-\partial(u+\alpha\upsilon)}{\partial x}\right]^2\right\}_{\alpha=0} dxdt=0$$

bolmaly bolar. Alarys:

$$\int_0^{t_0}\int_0^l\left\{\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}-T_0\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right\}dxdt=0\,,$$

$$\int_0^{t_0}\int_0^l \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right)dxdt=\int_0^l \rho_0\left(\int_0^{t_0}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dt\right)dx=\int_0^l \rho_0\left[u'_t(x,t)\cdot\upsilon(x,t)\Big|_0^{t_0}-\int_0^{t_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\upsilon\,dt\right]dx\,,$$

$$\int_0^{t_0}\int_0^{l} T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} dxdt = T_0\int_0^{t}\left(\int_0^{l} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} dx\right)dt = T_0\int_0^{t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\upsilon(x,t)\Big|_0^{l} - \int_0^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\upsilon(x,t)dx\right]dt$$

deňliklerde $\upsilon(x,t)\Big|_0^{l} \equiv 0,\ \upsilon(x,t)\Big|_0^{t_0} \equiv 0$ bolýanyny göz öňünde tutup,

$$\int_0^{t_0}\int_0^{l} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} dxdt = -\int_0^{t_0}\int_0^{l} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\upsilon(x,t)dxdt,$$

$$\int_0^{t_0}\int_0^{l} T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} dxdt = -T_0\int_0^{t_0}\int_0^{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\upsilon(x,t)dxdt$$

deňlikleri alarys we olary ulanyp, (1) deňligi

$$\int_0^{t_0}\int_0^{l}\left(\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdt = 0$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden, $\upsilon(x,t)$ funksiýanyň islendik bolany üçin,

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

ýa-da $\frac{T_0}{\rho_0} = a^2$ belgileme girizip, taryň azat yrgyldysynyň aşakdaky deňlemesini alarys:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Indi biz ýokarda goýlan meseläni matematiki dilde ýazmaga taýýar. Ol şundan ybarat. (2) deňlemäniň

$$u(0,t) = u(l,t) \equiv 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{4}$$

$$u_t'(x,0) = \psi(x) \tag{5}$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly. (3) şertlere çäk şertleri, (4), (5) şertlere başlangyç şertler diýilýär. Olara bilelikde (2) deňleme üçin gyra meselesi diýilýär. (2) deňleme üçin gyra meselesiniň sanly çözüwleri islendik takyklykda kompýuterde çözülip bilner. Beýle takmyn çözüwi tapmak üçin häzirki zaman kompýuterlerinde ýörite programmalar bardyr. Emma käbir hallarda çözüwi analitiki görnüşde hem gerek bolýar. Mysal üçin, saz gurallarynyň tarlarynyň emele getirýän owazlary öwrenilende, ol taryň çykarýan esasy owazyny saýgarmak gerek bolanda şeýle çözüwiň gerek bolmagy mümkin. Analitiki çözüwi tapmagyň bir usulyna Furýeniň üýtgeýänleri bölme usuly diýilýär. Ol şundan ybarat. (2) deňlemäniň $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ görnüşdäki noldan üýtgeşik $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapýarlar. $X(x),\ T(t)$ iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar hasap edip, $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ funksiýany (2) deňlemede ýerine goýýarlar:

$$\frac{\partial^2[X(x)\cdot T(t)]}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2[X(x)\cdot T(t)]}{\partial x^2}$$

ýa-da

$$X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}=a^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ funksiýa bölüp, alarys:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2}=a^2\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}.$$

Üýtgeýänler bölündiler. Bu ýagdaý diňe käbir λ hemişelik san üçin

$$\frac{1}{a^2T}\frac{d^2T}{dt^2}\equiv\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}\equiv\lambda$$

bolanda bolup biler. Soňky deňlikleri iki deňlik edip ýazalyň:

$$\frac{1}{a^2T}\frac{d^2T}{dt^2}=\lambda \tag{6}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\lambda \tag{7}$$

Şerte görä, $u(0,t)=X(0)\cdot T(t)\equiv 0$, $u(l,t)=X(l)\cdot T(t)\equiv 0$ deňlikler ýerine ýetmeli bolarlar. Bu bolsa diňe $X(0)=X(l)=0$ ýagdaýda bolup biler. Eger, mysal üçin, $X(l)\neq 0$ bolsa, onda $T(t)\equiv 0$ we $u(x,t)\equiv 0$ çözüw bolardy. Şeýlelikde, (7) deňlemäniň $X(0)=X(l)=0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly bolýar. Bu ýerde üç halyň bolmagy mümkin: $\lambda<0$, $\lambda>0$, $\lambda=0$. $\lambda<0$ bolanda (7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

görnüşde, $\lambda>0$ bolanda

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

görnüşde, $\lambda=0$ bolanda

$$X(x)=C_1+C_2x$$

görnüşde bolar. *X(x)* funksiýanyň soňky iki görnüşi $X(0)=X(l)=0$ şertleri diňe $C_1=C_2=0$ bolanda kanagatlandyrýar. Ýagny $X(x)\equiv 0$ we $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\equiv 0$ bolar. Diýmek, $\lambda<0$ ýagdaý galýar. *X(x)* funksiýanyň $X(0)=X(l)=0$ şertleri kanagatlandyrmagyny talap edip, alarys:

$$C_1=0,$$

$$C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

Soňky deňlikde $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ bolmaly. Başga halda $C_2 = 0$ we ýene-de $u(x,t) \equiv 0$ bolardy. $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ deňlemäni çözüp, alarys:

$$\sqrt{\lambda}l = k\pi$$

ýa-da

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

Diýmek, (7) deňlemäniň $X(0) = X(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan

$$X(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

görnüşdäki tükeniksiz köp çözüwleri, (2) deňlemäniň bolsa $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ şertleri kanagatlandyrýan

$$u(x,t) = \sin\frac{k\pi}{l}x \cdot T(t)$$

görnüşdäki tükeniksiz köp çözüwleri bolar. $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ bahany (6) deňlemä goýup, *T(t)* üçin

$$T''(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

deňlemä geleris. Onuň umumy çözüwini

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t, \quad k = 1, 2, ...$$

görnüşde ýazyp bileris. Ahyrda, $u_k(x,t)$ üçin

$$u_k(x,t) = \sin\frac{k\pi}{l}\left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right)$$

formula geleris. (2) deňleme çyzykly bolany sebäpli, formal taýdan

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \tag{8}$$

funksiýa hem (2) deňlemäniň çözüwi bolar. Onuň hakyky çözüw bolmaklygy üçin (8) hatary iki gezek *x* boýunça, iki gezek *t* boýunça agzaba-agza differensirläp bolmagy gerekdir. Bu şertiň ýerine ýetmegi üçin (8) hatary differensirläp alnan hatarlaryň hemmesiniň *x*-iň we *t*-niň hemme bahalarynda deňölçegli ýygnanmagy ýeterlikdir. Görnüşi ýaly, Weýerştrassyň teoremasyna laýyklykda, ol hatarlaryň deňölçegli ýygnanmagy üçin

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2|A_k| + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2|B_k| \tag{9}$$

san hatarynyň ýygnanmagy ýeterlikdir. (8) deňlik bilen kesgitlenýän $u(x,t)$ funksiýa $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ şertleri kanagatlandyrýar (bu şertleri $u_k(x,t)$ funksiýalaryň her biriniň kanagatlandyrýanlygy sebäpli). Indi ol funksiýadan $u(x,0)=\varphi(x)$, $u'_t(x,0)=\psi(x)$ şertleri kanagatlandyrmagyny talap edeliň:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0)=\varphi(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_{k\,t}(x,0)=\psi(x)$$

ýa-da ýaýbaň görnüşde

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x), \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{l} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x=\psi(x). \tag{11}$$

Çäk şertlere laýyklykda, $\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0$ şertler ýerine ýeter. Indi $\varphi(x)=-\varphi(-x)$, $\psi(x)=-\psi(-x)$ formulalar arkaly $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalary $[-l,\,0]$ kesimde täk funksiýa hökmünde dowam etdireliň. Onda (10), (11) hatarlara, degişlilikde, $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň furýe hatary diýse bolar. Onda A_k we B_k koeffisiýentler

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}dx, \qquad \frac{ak\pi}{l}B_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}dx$$

formulalar arkaly tapylar. Furýe hatarlarynyň nazaryýetinden belli bolşy ýaly, (9) hataryň ýygnanmagy üçin $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň iki gezek üznüksiz differensirlenýän bolmaklary ýeterlikdir. Şeýlelikde, eger

1) $\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0$;

2) $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ iki gezek endigan differensirlenýän funksiýalar bolsalar, onda

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{l}x\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\cdot\cos\frac{k\pi}{l}t+\frac{2}{ak\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\kappa\pi}{l}xdx\cdot\sin\frac{\kappa\pi}{l}t\right) \tag{12}$$

formula bilen kesgitlenýän $u(x,t)$ funksiýa (2) deňlemäniň (3), (4), (5) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolýar, diýmek, $u=u(x,t)$ funksiýa taryň islendik t pursatdaky ýagdaýyny kesgitleýär. Şu meseläni hem çözmek gerekdi.

Eger $\psi(x)\equiv 0$ bolsa, $u(x,t)$ üçin

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\kappa\pi}{l}xdx\cdot\sin\frac{\kappa\pi}{l}x\cdot\cos\frac{a\kappa\pi}{l}t$$

formulany alarys. Eger şu formulada $\varphi(x)=\sin\frac{\pi}{l}x$ goýsak, onda alarys:

$$u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{a\pi}{l}t\,.$$

Taryň şeýle yrgyldysynyň berýän owazyna taryň esasy owazy diýilýär. Ýokarky hataryň galan agzalarynyň her biriniň berýän owazyna taryň belent owazy diýýärler.

Goý, tara inersiýa we dartylma güýçlerinden başga paýlanyş dykyzlygy $F(x,t)$ bolan u oka parallel güýç täsir etsin. Taryň daşky güýçleriň täsir etmegindäki hereketine taryň mejbury yrgyldysy diýilýär. Taryň mejbury yrgyldysynyň deňlemesini, mehanikanyň esasy deňlemesini ulanyp, çykaralyň. Mehanikanyň kanunyna laýyklykda, jisime täsir edýän guýçleriň dt wagtda bitiren işleriniň jemi nola deň bolmalydyr. Taryň yrgyldysy barada ýokarda edilen çaklamalar öz güýjüni saklaýan halynda taryň $x,\, x+dx$ nokatlaryň arasyndaky bölejigine täsir edýän güýçleri belläliň: $-\rho_0 dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ - inersiýa güýji, u oka parallel, $T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$ - dartylma güýçleriniň u oka bolan proýeksiýalarynyň jemi, $F(x,t)dx$ - daşky güýç. Diýmek, dt wagtda taryň garalýan bölejigi du aralyga süýşen bolsa, onda ýokardaky kanuna laýyklykda

$$-\rho_0 dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}du+T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdu+F(x,t)dxdu=0$$

deňlik ýerine ýeter. Bu ýerden $dxdu$ köpeldijä gysgaldyp,

$$-\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)=0$$

deňlemäni ýa-da $\frac{T_0}{\rho_0}=a^2$, $\frac{F(x,t)}{\rho_0}=f(x,t)$ belgilemeleri girizip,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (2')$$

taryň mejbury yrgyldysynyň deňlemesini alarys. Ýene-de, daşky güýçler täsir edýän ýagdaýynda, taryň islendik t pursatda tutýan ornuny kesgitlemeli bolsun. Matematiki dilde bu mesele (2') deňleme üçin (3), (4), (5) gyra meselesini çözmeli diýmekdir. $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ baradaky çaklamalary göz öňünde tutup,

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-t\psi(x)-\varphi(x)$$

funksiýa girizeliň. $\upsilon(x,t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + f(x,t) + t\psi''(x) + \varphi''(x) \tag{14}$$

deňlemäni kanagatlandyrar we

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(l,t) = 0, \tag{3'}$$

$$\upsilon(x,0) = 0, \tag{4'}$$

$$\upsilon_t'(x,0) = 0 \tag{5'}$$

şertleri kanagatlandyrar. Şeýlelikde, (2) deňleme üçin (3), (4), (5) gyra meselesi (2') deňleme üçin (3'), (4'), (5') gyra meselesine getirilýär. Soňky meseläni çözmek üçin $f(x,t) + t\psi''(x) + \varphi''(x)$ funksiýa islendik t üçin $[0, l]$ kesimde

$$f(x,t) + t\psi''(x) + \varphi''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\kappa\pi}{l} x$$

furýe hataryna dargaýar diýen ýene bir çaklama girizilýär we $\upsilon(x,t)$ çözüw

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin \frac{\kappa\pi}{l} x$$

görnüşde gözlenýär. $\upsilon(x,t)$ çözüwi kesgitleýän hatary iki gezek x boýunça we iki gezek t boýunça agzaba-agza differensirläp bolýar hasap edip, $\upsilon(x,t)$ funksiýanyň υ_{xx}'', υ_{tt}'' önümlerini tapýarlar we (14) deňlemede ýerine goýup, aşakdaky deňligi alýarlar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k''(t) \sin \frac{\kappa\pi}{l} x \equiv -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 a_k(t) \sin \frac{\kappa\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\kappa\pi}{l} x..$$

Bu ýerden, meňzeş agzalary toparlap, alarys:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k''(t) + \left(a\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 a_k(t) - f_k(t) \right] \sin \frac{\kappa\pi}{l} x \equiv 0.$$

Bu deňligiň ýerine ýetmegi üçin, ýagny $\upsilon(x,t)$ funksiýanyň (2') deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin

$$a_k''(t) + \left(a\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 a_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, ...$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. $\upsilon(x,t)$ funksiýa, gurluşyna görä, çäk şertleri kanagatlandyrýar. Onuň $\upsilon(x,0) = 0,\ \upsilon_t'(x,0) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrmagy üçin $a_k(t)$ funksiýalar

$$a_k(0) = 0, \quad a_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, ...$$

şertleri kanagatlandyrmalydyrlar, başgaça, $a_k(t)$ funksiýalar, degişlilikde,

$$a_k''(t) + \left(a\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 a_k(t) = f_k(t),$$

$$a_k(0) = a_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

meseläniň çözüwi bolmalydyrlar. Belli bolşy ýaly, soňky meseläniň çözüwi

$$a_k(t) = \frac{1}{a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{a\kappa\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

formula arkaly tapylýar. Şeýlelikde, (2') deňleme üçin (3'), (4'), (5') gyra meselesiniň çözüwi

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{a\kappa\pi}{l}(t-\tau)d\tau \cdot \sin\frac{\kappa\pi}{l}x$$

hatar görnüşinde tapylýar. Elbetde, $f_k(\tau)$ funksiýalardan $\upsilon(x,t)$ funksiýanyň çözüw bolmagyny ýerlikli etmegini talap edýärler. Onuň üçin $\upsilon(x,t)$ funksiýany kesgitleýän hataryň iki gezek t boýunça we iki gezek x boýunça (gerek ýaýlada) agzaba-agza differensirläp bolmagy ýeterlikdir. Şu çaklamalarda (2) deňleme üçin (3), (4), (5) gyra meselesiniň çözüwi

$$u(x,t) = t\psi(x) + \varphi(x) + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{a\kappa\pi}{l}(t-\tau)d\tau \cdot \sin\frac{\kappa\pi}{l}x$$

görnüşde bolar. Taryň mejbury yrgyldysynda onuň t pursatdaky ýagdaýy ýokardaky formuladan tapylýar.

19. JISIMDE TEMPERATURANYŇ PAÝLANYŞYNYŇ MATEMATIKI MODELI

Giňişlikdäki jisimiň erkin nokadyny $M(x,y,z)$ bilen belgiläliň, (x,y,z) onuň haýsy hem bolsa bir koordinatalar ulgamyndaky koordinatalary. Jisimiň islendik $M(x,y,z)$ nokadynyň temperaturasyny $T(x,y,z,t)$ bilen belgiläliň, bu ýerde t wagt. Fizikadan belli bolşy ýaly, jisimiň nokatlarynda temperatura dürli bahalara eýe bolsa, onda ol jisimde temperaturanyň ýokary ýerlerinden onuň pes bolan ýerlerine tarap ýylylyk akymy bolýar. Bu akym mukdar taýdan Furýeniň prinsipine laýyklykda şeýle kesgitlenýär. Meýdany Δs bolan tekiz üstüň bölejigi jisimde ýerleşdirilen diýeliň, $\vec{n}$ ol bölejige geçirilen normal wektor bolsun. Onda Furýeniň kanunyna laýyklykda şol bölejikden wagt birliginde normal wektoryň ugry boýunça akyp geçýän ΔQ ýylylyk mukdary

$$\Delta Q = -\lambda\Delta s(gradT \cdot \vec{n}) \qquad (1)$$

formula bilen kesitlenýär we bu deňlik Δs näçe kiçi bolsa, şonça hem takyk hasap edilýär. λ koeffisiýente ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti diýilýär. Formulanyň öňündäki minus alamaty ýylylyk akymynyň temperatyranyň peselýän tarapyna ugrukdyrylandygyny aňladýar. Jisimiň içinde onuň σ endigan üst bilen çäklenen bölejigini göz öňüne getireliň we şol bölejik üçin ýylylyk balans deňlemesini ýazalyň. Goý, $\vec{n}(x, y, z)$ σ üstüň $M(x, y, z)$ nokadynda gurlan daşky normal wektor bolsun. σ üsti $\sigma_i,\ i = \overline{1, m},$ bölejiklere böleliň, Δs_i i-nji bölejigiň meýdany. Eger σ_i bölejikler ýeterlik kiçi bolsalar, biz olara tekiz üst hökmünde garap bileris. Goý, $\vec{n}_i$ şol bölejigiň $M(x_i, y_i, z_i)$ nokadyndaky daşky normal wektory bolsun. Onda σ_i bölejikden Δt wagtda geçýän ΔQ_i ýylylyk mukdary (1) formula laýyklykda

$$\Delta Q_i = -\lambda \Delta s_i (gradT \cdot \vec{n}_i)\Delta t$$

formula bilen kesgitlener. Bu ýerde $gradT$ wektor $M(x_i, y_i, z_i)$ nokatda t pursatda kesgitlenen. Bütin σ üstden Δt wagtda akyp geçýän ýylylyk mukdary

$$\Delta Q \approx -\sum_{i=1}^{m} \lambda \Delta s_i (gradT \cdot \vec{n}_i)\Delta t$$

takmyn formula bilen kesgitlener. Δs_i meýdanlar nola ymtylanda soňky deňlikden

$$\Delta Q = -\lambda \iint_{\sigma} (gradT \cdot \vec{n}) ds \cdot \Delta t$$

takyk formulany alarys. Hakykatda $-\Delta Q$ jisimiň σ üst bilen çäklenen bölegine Δt wagtda girýän ýylylyk mukdaryny aňladýar. Biz bu mukdary başgaça-da hasaplap bileris.

Garalýan bölejigiň göwrümini V_σ, onuň giňişlikde tutýan ýaýlasyny D bilen belgiläliň. Onda onuň t pursatdaky orta temperaturasy

$$\frac{1}{V_\sigma} \iiint_D T(x, y, z, t) dxdydz$$

bolar. Onda orta temperaturanyň Δt wagtda ΔT üýtgemesi

$$\frac{1}{V_\sigma} \iiint_D \left[T(x, y, z, t + \Delta t) - T(x, y, z, t)\right] dxdydz$$

integrala deň bolar.

Goý, jisimiň içinde, ýylylyk akymynyň dykyzlygy $f(x, y, z, t)$ bolan ýylylyk çeşmesi bar bolsun. Ol çeşmeden garalýan bölejige Δt wagtda

$$\Delta Q_1 = \iiint_D f(x, y, z, t) dxdydz \cdot \Delta t$$

ýylylyk mukdary siňer. Jisime Δt wagtda siňen $-\Delta Q + \Delta Q_1$ ýylylyk mukdary onuň temperaturasyny ΔT ululyga üýtgeder. Onda G.Gelmgolsyň prinsipine laýyklykda

$$-\Delta Q+\Delta Q_1=c\iiint\limits_D \rho(x,y,z)dxdydz\cdot\Delta T$$

deňlik ýerine ýeter. Bu deňlikde $-\Delta Q,\ \Delta Q_1,\ \Delta T$ ululyklaryň bahalaryny goýup, alarys:

$$\lambda\iint\limits_\sigma (grad\,T\cdot\vec{n})ds\cdot\Delta t+\iiint\limits_D f(x,y,z,t)dxdydz\cdot\Delta t=$$

$$=c\iiint\limits_D \rho(x,y,z,t)dxdydz\cdot\frac{1}{V_\sigma}\iiint\limits_D [T(x,y,z,t+\Delta t)-T(x,y,z,t)]dxdydz$$

Soňky deňligiň iki tarapyny Δt bölüp we Δt nola ymtylanda predele geçip, aşakdaky deňlige geleris:

$$\lambda\iint\limits_\sigma (grad\,T\cdot\vec{n})ds+\iiint\limits_D f(x,y,z,t)dxdydz=$$

$$=c\iiint\limits_D \rho(x,y,z,t)dxdydz\cdot\frac{1}{V_\sigma}\iiint\limits_D \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz$$

Bu deňligiň birinji integralyna Ostrogradskiniň formulasyny ulanyp, alarys:

$$\lambda\iiint\limits_D div(grad\,T)dxdydz+\iiint\limits_D f(x,y,z,t)dxdydz=$$

$$=c\iiint\limits_D \rho(x,y,z,t)dxdydz\cdot\frac{1}{V_\sigma}\iiint\limits_D \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz.$$

Bu deňlikdäki integrallara orta baha baradaky teoremany ulanyp we σ üst gysylyp D ýaýla $M(x,y,z)$ nokada ýygnananda predele geçip, aşakdaky deňlemä geleris:

$$\lambda\cdot div(grad\,T)+f(x,y,z)=c\rho\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

$\frac{f(x,y,z,t)}{c\rho}=F,\quad \frac{\lambda}{c\rho}=a^2$ belgilemeleri girizip we $div(grad\,T)=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ bolýanyny göz öňünde tutup, soňky deňligi

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \tag{2}$$

görnüşde ýazyp bileris. (2) deňlemä ýylylyk geçirijilik deňlemesi diýilýär. Biziň başda goýan meselämiziň çözüwi bolan $T(x,y,z,t)$ temperatura (2) deňlemäniň çözüwi bolýar. (2) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bar. Olaryň içinden gereklisini saýlap almak üçin käbir şertler gerek. Olaryň birinjisi hökmünde temperaturanyň başlangyç bahasy, ýagny $T(x,y,z,t)$ funksiýanyň jisime degişli nokatlarda $t=0$ bolandaky bahasyny, ikinjisi hökmünde bolsa temperaturanyň jisimiň üst nokatlaryndaky islendik t pursatdaky bahasyny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde, deňleme üçin şeýle gyra meselesine gelýäris.

Deňlemäniň

$$T(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in D, \quad (3)$$

$$T(x,y,z,t)=\phi(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in \Sigma, \quad (4)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu yerde D jisimiň tutýan ýaýlasy, Σ onuň üsti (ýa-da D ýaýlanyň çägi). Bu mesele biziň başda goýan temperaturany kesgitlemeli diýen meselämiziň matematiki modelidir. Differensial deňlemeler nazaryýetinden belli bolşy ýaly meseläniň ýeke-täk çözüwi bardyr. Ol çözüwi kompýuterde islendik takyklykda tapyp bolýar. Diýmek, biz temperaturany jisimiň islendik nokadynda, islendik wagtda, islendik takyklyk bilen tapyp bileris. Şeýlelikde, goýlan mesele doly çözüldi diýmek bolar.

Örän ýuka plastinkada temperaturany kesgitlemek baradaky meseläniň

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \quad (5)$$

$$T(x,y,0)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in D, \quad (6)$$

$$T(x,y,t)=\psi(x,y,t),\ (x,y)\in L, \quad (7)$$

meselä syrygjagy düşnüklidir.

(2), (3), (4) meseläniň analitiki çözüwiniň D ýaýla (ýa-da jisim) $\{0\le x\le l,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c\}$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän gönüburçly parallelepiped bolandaky halynda tapylyşyny görkezeliň.

(2), (3), (4) meselä girýän $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z,t)$ funksiýalar barada şeýle çaklamalary girizeliň: D ýaýlada $\varphi(x,y,z)$, $\psi(0,y,z,t)$, $\psi(l,y,z,t)$, $\psi(x,0,z,t)$, $\psi(x,b,z,t)$, $\psi(x,y,0,t)$, $\psi(x,y,c,t)$ funksiýalaryň olara girýän üýtgeýänler boýunça birinji we ikinji tertipli hususy önümleri bardyr, $\varphi(x,y,z)\in C(\overline{D})$, $\psi(x,y,z,t)\in C(\Sigma)$.

$$R(x,y,z,t)=\frac{1}{z(c-z)x(l-x)+z(c-z)y(b-y)+x(l-x)y(b-y)}\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{x\psi(l,y,z,t)}{l}+\frac{(l-x)\psi(0,y,z,t)}{l}\right)y(b-y)z(c-z)+\right.$$
$$+\left(\frac{y\psi(x,b,z,t)}{b}+\frac{(b-y)\psi(x,0,z,t)}{b}\right)x(l-x)z(c-z)+$$
$$\left.+\left(\frac{z\psi(x,y,c,t)}{c}+\frac{(c-z)\psi(x,y,0,t)}{c}\right)x(l-x)y(b-y)\right],$$

funksiýa seredeliň. $R(x,y,z,t)$ funksiýa prizmanyň gapyrgalarynda ýatmaýan nokatlarynda kesgitlenen. Gapyrgalara degişli $M(x,y,z)$ nokatlarda funksiýany $R(x,y,z,t)=\psi(x,y,z,t)$ deňlik bilen kesgitläliň. Gurluşyndan görnüşi ýaly,

$R(x,y,z,t)$ D ýaýlanyň içki nokatlarynda iki gezek differensirlenýän, $\overline{D}$ ýaýlada bolsa üznüksiz funksiýa bolar.

Dogrudan hem, $R(x,y,z,t)$ funksiýany kesgitleýän drobyň sanawjysy we maýdalawjysy prizmanyň gapyrgalarynda ýatmaýan nokatlarynda iki gezek differensirlenýän funksiýalar we onuň maýdalawjysy şol nokatlarda nola deň däl. Diýmek, $R(x,y,z,t)$ prizmanyň gapyrgalarynyň nokatlaryndan özge nokatlarynda iki gezek differensirlenýän üznüksiz funksiýa bolar. Bu funksiýanyň prizmanyň gapyrgalarynda ýatýan nokatlarda hem üznüksiz boljagyny görkezeliň. Teklibi bir, mysal üçin, $x=0,\ y=0$ gapyrga üçin subut edeliň.

Goý, $M_0(0,0,z_0),\ 0\le z_0\le c$ şol gapyrganyň nokady bolsun. $\lim\limits_{M\to M_0} R(x,y,z,t)$ predeli tapalyň. Kesgitlemä görä, $R(x,y,z,t)$ Σ üstüň nokatlarynda üznüksiz. Şol sebäpli $M(x,y,z,t)$ nokat $M(0,0,z_0)$ nokada Σ üstde ýatmaýan nokatlar boýunça ymtylýan ýagdaýyna seretmek ýeterlik. Bu ýagdaýda $R(x,y,z,t)$ funksiýany kesgitleýän drobuň maýdalawjysy noldan üýtgeşik bolýar.

$$\frac{x\psi(l,y,z,t)}{l}+\frac{(l-x)\psi(0,y,z,t)}{l}=\psi(0,0,z_0,t)+\varepsilon_1,$$

$$\frac{y\psi(x,b,z,t)}{b}+\frac{(b-y)\psi(x,0,z,t)}{b}=\psi(0,0,z_0,t)+\varepsilon_2,$$

$$\frac{z\psi(x,y,c,t)}{c}+\frac{(c-z)\psi(x,y,0,t)}{c}=\frac{z_0\psi(0,0,c,t)}{c}+\frac{(c-z_0)\psi(0,0,0,t)}{c}+\varepsilon_3$$

bolýanyny (bu ýerde $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ ululyklar M nokat M_0 nokada ymtylanda tükeniksiz kiçi funksiýalar) göz öňünde tutup, alarys:

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\varepsilon_1 y(b-y)z(c-z)+\varepsilon_2 x(l-x)z(c-z)+\varepsilon_3 y(b-y)x(l-x)}{y(b-y)z(c-z)+x(l-x)z(c-z)+y(b-y)(x(l-x))}=0,$$

$$\lim_{M\to M_0}\left|\frac{\left[\dfrac{z_0\psi(0,0,c,t)}{c}+\dfrac{(c-z_0)\psi(0,0,0,t)}{c}-\psi(0,0,z_0,t)\right]x(l-x)y(b-y)}{y(b-y)z(c-z)+x(l-x)z(c-z)+x(l-x)y(b-y)}\right|\le$$

$$\le\lim_{M\to M_0}\frac{\left|\dfrac{z_0\psi(0,0,c,t)}{c}+\dfrac{(c-z_0)\psi(0,0,0,t)}{c}-\psi(0,0,z_0,t)\right|x(l-x)y(b-y)}{x(l-x)z(c-z)}=0.$$

Bu ýerden $\lim\limits_{M\to M_0} R(x,y,z,t)=\psi(0,0,z_0,t)$ boljagy gelip çykýar. $z_0=0$ ýagdaý hem edil şeýle subut edilýär. Diýmek, $R(x,y,z,t)$ funksiýa bütin $\overline{D}$ ýaýlada üznüksizdir. Ondan başga-da $M(x,y,z)\in\Sigma$ üçin $R(x,y,z,t)=\psi(x,y,z,t)$ deňlik ýerine ýeter. Goý, $T(x,y,z,t)$ (2), (3), (4) meseläniň çözüwi bolsun. $V(x,y,z,t)=T(x,y,z,t)-R(x,y,z,t)$) funksiýa garalyň. Ol D ýaýlada

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\Delta V+f_1(x,y,z,t), \tag{11}$$

$$f_1(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)+a^2\Delta R-\frac{\partial R}{\partial t}$$

deňlemäni kanagatlandyrar we

$$V(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)-R(x,y,z,0)\equiv\varphi_1, \tag{12}$$

$$V(x,y,z,t)_{M(x,y,z)}=0 \tag{13}$$

şertleri kanagatlandyrar.

(11), (12), (13) meselä girýän φ_1, f_1 funksiýalar barada şeýle çaklamalar girizeliň: D ýaýlada

$$\varphi_1(x,y,z)=\sum_{m,n,k=1}^{s}A_{m,n,k}\sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{k\pi}{c}z$$

görnüşde bolmaly. $A_{m,n,k}$ – sanlar, D ýaýlada

$$f_1(x,y,z,t)=\sum_{m,n,k=1}^{s}B_{m,n,k}(t)\cdot\sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{k\pi}{c}z$$

görnüşde bolmaly, $B_{m,n,k}(t)-$ t argumentiň funksiýalary. Bu çaklamalar φ_1, f_1 funksiýalar üçin şeýle bir gysyk çäklemeler däldirler. Sebäbi, kratnyý furýe hatarlarynyň nazaryýetinden belli bolşy ýaly, funksiýalaryň uly toplumy islendik takyklykda ýokarky görnüşde aňladylyp bilner [12].

(2) deňlemäniň nazaryýetinden belli bolşy ýaly, (2), (3), (4) mesele korrekt goýlan meseledir, ýagny bu meseläniň çözüwi başlangyç şerte, çäk şerte we $F(x,y,z,t)$ funksiýa üznüksiz baglydyr. Şol sebäpli biziň φ_1, f_1 funksiýalar barada eden çaklamalarymyz ýerliklidir diýmek bolar. φ_1, f_1 funksiýalar ýokarda berlen görnüşlerde hasap edip, (11), (12), (13) meseläniň çözüwini

$$V=\sum_{m,n,k}^{s}V_{m,n,k}(t)\cdot\sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{k\pi}{c}z \tag{14}$$

görnüşde gözläliň. Çözüwiň (14) deňlik bilen berlen bahasyny (10) deňlemede ýerine goýup, alarys:

$$\sum_{m,n,k=1}^{s}\left\{V'_{m,n,k}(t)+a^2\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{c}\right)^2\right]\cdot V_{m,n,k}(t)-B_{m,n,k}(t)\right\}\sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{k\pi}{c}z\equiv 0.$$

Bu ýerden ýaýyň içindäki koeffisiýentlerini nola deňläp,

$$V'_{m,n,k}(t)+a^2\pi^2\left[\left(\frac{m}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\cdot V_{m,n,k}(t)-B_{m,n,k}(t)=0,\qquad m=\overline{1,s},\ n=\overline{1,s},\ k=\overline{1,s},$$

deňlemeler ulgamyna geleris. (14) deňlik bilen gözlenýän $V(x,y,z,t)$ funksiýa (13) şerti kanagatlandyrýar. Onuň (12) şerti kanagatlandyrmagy üçin

$$V_{m,n,k}(0)=A_{m,n,k},\qquad m=\overline{1,s},\ n=\overline{1,s},\ k=\overline{1,s},$$

şertleriň ýerine ýetmegi ýeterlikdir.

Diýmek, (11), (12), (13) meseläni doly çözmek üçin

$$V'_{m,n,k}(t)+a^2\pi^2\left[\left(\frac{m}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\cdot V_{m,n,k}(t)-B_{m,n,k}(t)=0,$$

$$V_{m,n,k}(0)=A_{m,n,k},\qquad m=\overline{1,s},\ n=\overline{1,s},\ k=\overline{1,s},$$

meseleleri çözmek ýeterlikdir. Bu deňlemeleriň çözüwleri, belli bolşy ýaly,

$$V_{m,n,k}(t)=e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\left[A_{m,n,k}+\int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right],$$

$$m=\overline{1,s},\ n=\overline{1,s},\ k=\overline{1,s},$$

görnüşde bolar. Şeýlelikde, (11), (12), (13) meseläniň çözüwi

$$V(x,y,z,t)=\sum_{m,n,k=1}^{s}e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\left[A_{m,n,k}+\int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right]\cdot \sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{k\pi}{c}z \tag{15}$$

formula arkaly kesgitlener (2), (3), (4) meseläniň çözüwi bolsa, ýokarda aýdylyşyna görä,

$$T(x,y,z,t)=V(x,y,z,t)+R(x,y,z,t) \tag{16}$$

formula bilen kesgitlener. Biziň şertlerimizde alnan çözüwiň takyklygy s-e baglydyr. Ol näçe uly bolsa çözüw şonça-da takykdyr diýse bolar. Matematiki model çözüldi. Indi (16) çözüw boýunça s sany saýlap almak bilen jisimiň temperaturasyny onuň islendik nokadynda gerek takyklykda, islendik wagtda tapyp bileris. Goýlan fiziki mesele doly çözüldi diýse bolar.

(15) formuladan biz birnäçe netijeler çykaryp bileris. Formulany

$$T(x,y,z,t)=\sum_{m,n,k=1}^{s} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} A_{m,n,k}+R(x,y,z,t)+ \\ +\sum_{m,n,k=1}^{s} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt \tag{16.1}$$

görnüşde ýazalyň. $R(x,y,z,t)$ funksiýa temperaturanyň ýaýlanyň çägindäki bahalary bilen kesgitlenýär, $B_{m,n,k}(t)$ koeffisiýentler jisimiň içindäki ýylylyk akymynyň çeşmesiniň paýlanyş dykyzlygy we temperaturanyň çäkdäki bahalary bilen ($R(x,y,z,t)$ finksiýa bilen) kesgitlenýär, $A_{m,n,k}$ koeffisiýentler bolsa temperaturanyň başlangyçda berlen bahalary bilen kesgitlenýärler. Formuladan görnüşi ýaly onuň sag tarapyndaky birinji agza wagtyň geçmegi bilen nola ymtylýar, ýagny wagtyň geçmegi bilen temperaturanyň paýlanyşyna başlangyç şertiň täsiri azalýar. Diňe ýylylyk çeşmesiniň hem-de gyra şertiň täsiri saklanýar.

Ikinjiden, $\int_0^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt$ integrallar ýygnanýan bolsalar, onda $M>0$ san tapylyp, m, n, k sanlaryň s-den uly bolmadyk bahalary üçin $\int_0^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt \le M$ deňsizlikler ýerine ýeterler we $\forall\varepsilon>0$ san üçin t_0 san tapylyp, m, n, k sanlaryň s-deň uly bolmadyk bahalary üçin $\int_{t_0}^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt \le \varepsilon$ deňsizlikler ýerlikli bolarlar.

Bu ýerden $t>t_0$ üçin

$$\left|e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right| \le \left|e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\int_0^{t_0} B_{m,n,k}(t)e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right|+ \\ +\left|e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\int_{t_0}^t B_{m,n,k}(t)e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right| \le M\cdot e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t_0}+\varepsilon$$

deňsizlik ýerlikli bolar. Diýmek, (16.1) formulada $t\to\infty$ bolanda üçünji agza hem nola ymtylar. Bu bolsa ýokardaky çäklemelerde t-niň uly bahalarynda temperaturanyň paýlanyşyna ýylylyk çeşmesiniň hem täsiriniň azaljagyny görkezýär. Ýagny, $\int_0^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt$ integrallar ýygnanýan bolanlarynda wagtyň uly bahalarynda temperaturanyň paýlanyşyna diňe temperaturanyň çäk nokatlardaky bahalary täsir eder.

Aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin ýönekeýje mysala seredeliň. Goý, (8), (9), (10) meseläni $\varphi_1(t) \equiv C_1$, $\psi(t) \equiv C_2$, $0 \le t < \infty$, C_1, C_2 – hemişelik sanlar, $\varphi(x) \equiv C_3$, $0 \le x \le l$, C_3 – hemişelik san, $f(x,t) = \dfrac{x(l-x)}{e^t}$, $0 \le x \le l$, $0 \le t < \infty$, bahalarda çözmeli bolsun. Bu mesele üçin

$$R(x,t) + \frac{xC_2}{l} + \frac{(l-x)C_1}{l}, \qquad f_1(x,t) = f(x,t), \qquad V(x,t) = T(x,t) - R(x,t)$$

bolar we (11), (12), (13) mesele

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{17}$$

$$V(0,t) = V(l,t) = 0, \tag{18}$$

$$V(x,0) = C_3 - \frac{xC_2 + (l-x)C_1}{l}, \tag{19}$$

görnüşe geler. Bu meseläniň çözüwi

$$V(x,t) = \sum_{m=1}^{s} V_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x \tag{20}$$

görnüşde gözlener. $V(x,t)$ funksiýanyň (17), (18), (19) meseläniň çözüwi bolmagy üçin $V_k(t)$ funksiýa

$$\frac{dV_m}{dt} = -\frac{a^2 m^2 \pi^2}{l^2} V_k + B_m(t) \tag{21}$$

$$V_k(0) = A_m, \qquad m = \overline{1,s},$$

meseläniň çözüwi bolmaly bolar. Bu meseläniň çözüwi

$$V_k(t) = e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t} \left(A_k + \int_0^t B_m(t) \cdot e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t} dt \right)$$

görnüşde bolýar. $V_k(t)$ funksiýalaryň bahalaryny (20)-de ýerine goýup, alarys:

$$V(x,t)=\sum_{m=1}^{s} e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}\left(A_m+\int_0^t B_m(t)\cdot e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}dt\right)\cdot\sin\frac{m\pi}{l}x.$$

$V(x,t)$ funksiýanyň bu bahasyny $T(x,t)=V(x,t)+R(x,t)$ formulada goýup, $T(x,t)$ temperaturanyň paýlanyş kanunyny taparys:

$$T(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}\left(A_m+\int_0^t B_m(t)e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}dt\right)\cdot\sin\frac{m\pi}{l}+\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}.$$

Bu formulada $B_m(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{x(l-x)}{e^t}\cdot\sin\frac{m\pi}{l}xdx$. Bu integraly hasaplap, alarys:

$$B_m(t)=\frac{2b_m}{l\cdot e^t},\quad m=\overline{1,s},\quad b_m-\text{san}.$$

Görnüşi ýaly, $\int_0^\infty |B_k(t)|dt$ integrallar ýygnanýan integrallar. Diýmek, $T(x,t)$ temperaturanyň paýlanyşyna t-niň uly bahalarynda diňe C_1, C_2 sanlar täsir ederler. Dogrudan hem, $T(x,t)$ üçin alnan formulada $B_m(t)$ funksiýalaryň bahalaryny goýup we integrallary hasaplap, alarys:

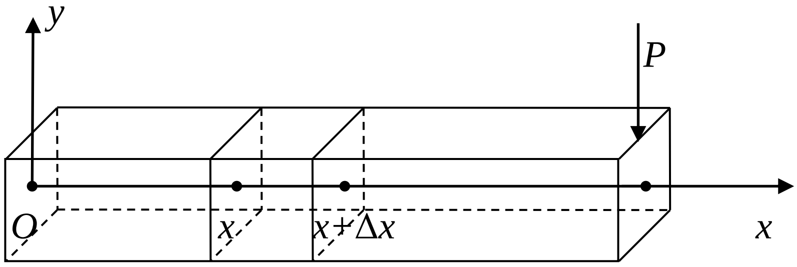
$$T(x,t)=\sum_{m=1}^{s} e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}+\left(A_m+\frac{2b_m}{l}\cdot\frac{1}{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2-1}\cdot e^{\left[\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2-1\right]t}-\frac{2b_m}{l}\cdot\frac{1}{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{am\pi}{l}x+\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}$$

ýa-da

$$T(x,t)=\left[\sum_{m=1}^{s} e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}\left(A_m-\frac{2b_m}{l}\cdot\frac{l^2}{(am\pi)^2-l^2}\right)+\sum_{m=1}^{s}\frac{2b_m l^2}{(am\pi)^2-l^2}e^{-t}\right]\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{am\pi}{l}x+\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}.$$

$\lim\limits_{t\to\infty}T(x,t)=\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}$ bolany sebäpli, bu ýerden ýokarky tassyklama gös-göni gelip çykar.

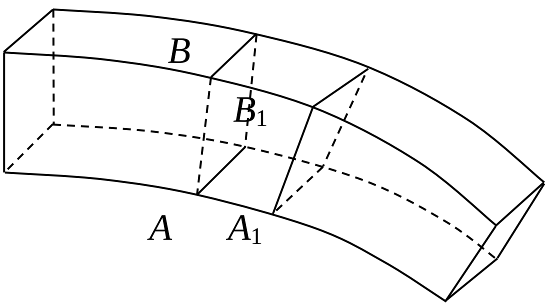
20. BALKANYŇ OKUNYŇ EGILMESINIŇ DEŇLEMESI



45-nji surat

Dörtburçly prizma görnüşindäki balkanyň bir çeti diwara pugta berkidilen, beýleki erkin çetine bolsa ýokardan aşak ugrukdyrylan P güýç täsir edýär diýeliň. P güýjüň täsir edýän M nokady balkanyň okunyň ýokarsynda ýerleşen diýeliň. Balka şol güýjüň täsiri astynda egilýär we belli bir halda deňagramlykda bolýar. Şonuň bilen birlikde balkanyň oky hem egilýär. Okuň egilendäki deňlemesini meseläniň matematiki modelini gurmak bilen tapalyň.

Goý, x oky balkanyň oky bilen gabat gelsin, y oky bolsa balkanyň ýokarky granyna perpendikulýar geçsin. P güýjüň täsiri astynda balka 46-njy suratdaky ýagdaýa geldi diýeliň.

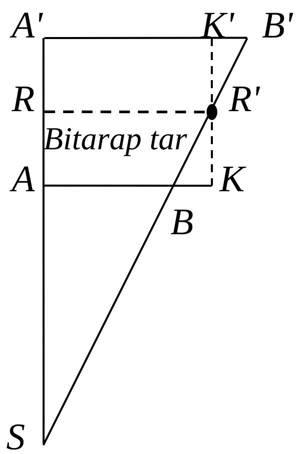


46-njy surat

Başlangyç halda balkanyň x okunyň x nokadyndan we $x+\Delta x$ nokadyndan geçýän kese kesikleriniň arasynda ýerleşen bölegi soňky halda täze ýagdaýa geçer. Bernulliniň gipotezasyna görä, kese kesikler soňky halda hem tekiz görnüşde bolýarlar. Egilme örän kiçi bolany üçin kese kesikleriň başlangyç haldaky taraplarynyň uzynlyklarynyň otnositel ulalmagy ýa-da kiçelmegi örän kiçi bolýar diýip kabul edeliň. Balkanyň egilmesi (45-nji surat) xOy tekizlige görä simmetrik bolany üçin balkanyň şol tekizlik bilen kesişmesiniň egilmesini öwrenmek ýeterlikdir.

Bu kesik başda dörtburçluk emele getirýär. Düşnüklilik üçin, ol x okuna parallel tarlardan durýar hasap edeliň. P güýjüň täsiri astynda bu kesik täze ýagdaýa geler. Onuň bitarap (neýtral) taryndan ýokarda ýerleşen tarlary süýnerler, aşakda ýerleşen tarlary gysgalarlar. Bitarap taryň uzynlygy bolsa üýtgemän galar (Дарпов А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. 1969г. Москва).

Egilmegiň kiçi bolýanlygy sebäpli biz 46-njy suratda BB' we AA' dugalar parallel göni çyzyklar hasap edip bileris. Onda balkanyň başda xOy tekizlik bilen gabat gelýän kesiginiň x we $x+\Delta x$ nokatlardan geçýän kese-kesikleriniň arasyndaky böleginiň soňky ýagdaýyny 47-nji suratdaky ýaly edip çyzyp bileris.



47-nji surat

47-nji suratda AA' we BB' gönüleriň kesişme nokady $A'B'$ duganyň epilme merkezi (центр кривизны) bolar. 47-nji suratda ol S nokat bilen gabat gelýär. Onda SA' bolsa şol duganyň epilme radiusy bolar. Tarlar AB we $A'B'$ aralykda meňzeş ýerleşýärler hasap edip, S nokat RR' bitarap duganyň hem epilme merkezi, SR bolsa onuň epilme radiusy diýse bolar. $\Delta R'K'B'$ we $\Delta SRR'$ üçburçluklar meňzeş. Şol sebäpden aşakdaky deňlik dogry bolar:

$$\frac{K'B'}{RR'} = \frac{K'R'}{SR}.$$

$SR = \rho$ bitarap taryň epilme radiusy. $K'R' = u,\quad RR' = \Delta x$ belgilemeleri ulanyp, soňky deňligi başgaça-da ýazyp bolar:

$$\frac{K'B'}{\Delta x} = \frac{u}{\rho}.$$

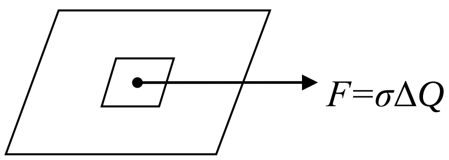
Δx - taryň bölejiginiň başdaky uzynlygy, $K'B'$ bolsa onuň egilmeden soňky uzalmasy. $\varepsilon = \frac{K'B'}{\Delta x}$ gatnaşyga taryň otnositel uzalmasy diýýärler. Gukuň kanunyna görä σ - normal dartgynlyk, ε - otnositel uzalma we E özara

$$\sigma = E\varepsilon$$

baglylykda bolýarlar. P güýjüň täsiri astynda balkanyň islendik kese kesiginde tarlary süýndürýän (ýa-da gysýan) kese-kesige normal içki güýçler emele gelýärler. Kese-kesigiň ΔQ meýdanyna täsir edýän içki F güýç, kesgitlemä görä,

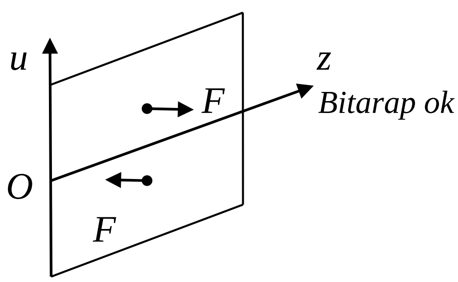
$$F = \sigma \cdot dQ$$

formula bilen kesgitlenýär (48-nji surat).



48-nji surat

Kese kesikdäki bitarap tarlaryň nokatlary ok emele getirýärler. Oňa bitarap ok diýýärler. Şol okdan ýokardaky tarlar P güýjüň täsiri astynda süýnýärler, aşakdakylar bolsa ýygrylýarlar. Şol sebäpli, bitarap okdan ýokarda täsir edýän içki güýçler bir tarapa, aşakda täsir esýän içki güýçler bolsa ters tarapa ugrukdyrylandyrlar (49-njy surat).



49-njy surat

F içki güýçleriň bitarap oka görä momentleriniň jemini M_z bilen belgileýärler we oňa egilme momenti diýip at berýärler. Eger kese kesikde *zOu* koordinata oklaryny ýerleşdirsek (49-njy surat), onda M_z üçin

$$M_z = \iint_Q u\sigma \, dQ$$

formulany alarys. Bu ýerde Q - kese kesik. $\sigma = E\varepsilon$, $\varepsilon = \dfrac{u}{\rho}$ deňlikleri ulanyp, M_z üçin

$$M_z = \iint_Q u^2 \frac{E}{\rho} dQ = \frac{E}{\rho} \iint_Q u^2 \, dQ = \frac{EI_z}{\rho}$$

deňligi alarys. Bu ýerde $I_z = \iint_Q u^2 \, dQ$ Q kese kesigiň bitarap ok boýunça inersiýa momenti. Indi M_z egilme momentini başgaça tapalyň.

Goý, balka *P* güýjüň täsiri astynda deňagramlylyk ýagdaýda bolsun (46-njy surat). Onuň islendik kese kesigine garalyň. Balkanyň kese kesikden sag böleginiň onuň çep bölegine bolan täsirini şol kese kesikde dörän içki güýçler bilen çalşyralyň. Ol içki güýçleriň şol kesigiň bitarap okuna görä momentleriniň jemi, ýokarda aýdylanyna görä, M_z deň. Balkanyň kese kesiginden çepdäki bölegi hem oňa täsir edýän daşky güýçleriň (reaksiýa, agyrlyk we ş.m.) we kesikde dörän içki güýçleriň täsiri astynda deňagramlylykda bolýar.

Beýleki tarapdan tutuş balka hem oňa täsir edýän daşky güýçleriň täsiri astynda deňagramlylykda bolýar. Diýmek, balkanyň kese kesikden çep bölegine täsir edýän daşky güýçler, onuň kese kesikden sag bölegine täsir edýän daşky güýçler bilen bilelikde deňagramlylykda bolýarlar. Şol sebäpli, kese kesigiň bitarap okuna görä **içki güýçleriň M_z momenti şol oka görä balkanyň kese kesikden sagda ýatýan bölegine täsir edýän daşky güýçleriň momentine deň bolýar.** Indi biz balkanyň okunyň deňlemesini ýazmaga taýýar.

Balkanyň okunyň deňlemesi $y = y(x)$ bolsun. Ýokarda görşümiz ýaly, okuň islendik nokadynda geçirilen kese kesik üçin

$$M_z = \frac{EI_z}{\rho}$$

deňlik dogry. Bu ýerde ρ okuň şol nokatdaky epin radiusy. Analizden belli bolşy ýaly,

$$\rho^{-1} = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

formula bar. Egilme kiçi bolany sebäpli, y'^2 örän kiçi ululyk bolýar we ony taşlap, uly takyklykda

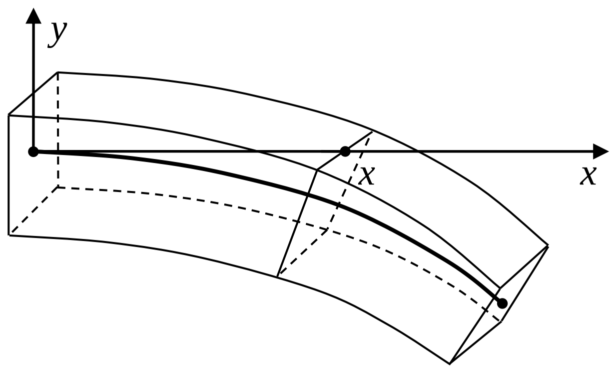
$$\rho^{-1} = |y''|$$

formulany alarys.

Şeýlelikde, ok üçin $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$ we $\rho^{-1} = |y''|$ deňlikleriň esasynda, $y(x)$ egriniň güberçek bolýanyny göz öňünde tutup,

$$-y'' = \frac{M_z}{EI_z}$$

deňlemäni alarys.



50-nji surat

Bu deňleme balkanyň okunyň ýagdaýyny kesgitleýän $y = y(x)$ funksiýa üçin differensial deňlemedir. Balkanyň okunyň $(x,\ y(x))$ nokadyndan geçýän kese kesigi üçin M_z epilme momentini, balka agramsyz hasap edip, balkanyň kese kesikden sag bölegine täsir edýän P güýjüň kesigiň bitarap okuna görä momenti bilen çalşyryp bolýar. Alarys:

$$M_z = P(l - x).$$

Ok üçin bolsa

$$y'' + \frac{P(l - x)}{EI_z} = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäni çözüp, alarys:

$$y = -\frac{P(l - x)^3}{6EI_z} + C_1 x + C_2;$$

$y(x)$ üçin $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$ bolanlygy sebäpli,

$$0=-\frac{P\cdot l^3}{6EI_z}+C_2,\qquad 0=-\frac{P\cdot l^2}{2EI_z}+C_1.$$

Bu ýerden,

$$C_1=-\frac{\rho\cdot l^2}{2EI_z},\qquad C_2=-\frac{\rho\cdot l^3}{6EI_z}.$$

Ahyrda balkanyň okunyň deňlemesini

$$y=-\frac{P(l-x)^3}{6EI_z}-\frac{P\cdot l^2}{2EI_z}x+\frac{P\cdot l^3}{6EI_z}$$

görnüşde ýa-da

$$y=\frac{P}{2EI_z}\left[-\frac{(l-x)^3}{3}-l^2x+\frac{l^3}{3}\right],$$

$$y=\frac{P}{2EI_z}\left[\frac{x}{3}\left(l^2+l(l-x)+(l-x)^2\right)-l^2x\right],$$

$$y=\frac{Px}{6EI_z}\left[l(l-x)+(l-x)^2-2l^2\right],$$

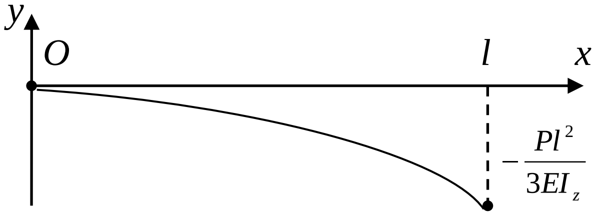
$$y=\frac{Px}{6EI_z}\left[x^2-3lx\right],\qquad y=\frac{Px^2}{6EI_z}\left(x-3l\right)\quad -\frac{Pl^2}{3EI_z}$$

ýönekeý görnüşde ýazyp bileris.

$$y'=\frac{P(l-x)^2}{2EI_z}-\frac{P\cdot l^2}{2EI_z}=\frac{P}{2EI_z}\left[(l-x)^2-l^2\right]$$

önümiň we y'' önümiň $(0,l)$ aralykda otrisatel bolany üçin, $y(x)$ $(0,l)$ aralykda otrisatel, monoton kemelýän we onuň grafigi güberçek bolýar.

$y(x)$ funksiýanyň takmyn grafigi 51-nji suratda getirilen.



51-nji surat

Goý, indi balka dykyzlygy $\rho = \rho(x)$ görnüşde, kese kesigi Q bolan dörtburçly prizma bolsun. Onda balkanyň seredilýän kese kesikden sagda ýerleşen bölegine P güýçden başga balkanyň sag böleginiň agramy hem täsir eder. Balkanyň sag böleginiň agyrlyk merkezini tapalyň. Balka öz okuna görä simmetrik bolany üçin, ol merkez ol okuň, ýagny x okunyň üstünde ýatar. Ýagny, xOy tekizlikde onuň koordinatalary $x = x_c,\ \ y = 0$ bolarlar. x_c bolsa, belli bolşy ýaly,

$$x_c = \frac{1}{\int_x^l Q\rho dx}\int_x^l xQ\rho dx = \frac{\int_x^l x\rho dx}{\int_x^l \rho dx}$$

formula boýunça tapylar. Indi biz balkanyň sag bölegine täsir edýän güýçleriň biri hökmünde P güýje parallel, $(x_c, 0)$ nokatda täsir edýän $P_1 = gQ\int_x^l \rho dx$ güýji alyp bileris. Bu halda kese kesikdäki egiji M_z moment P we P_1 güýçleriň kesigiň bitarap okuna görä momentleriniň jemine deň bolar. Ýagny M_z üçin

$$M_z = P(l - x) + P_1(x_c - x)$$

formulany alarys.

Balkanyň oky üçin deňleme

$$y'' + \frac{P(l-x) + P_1(x_c - x)}{EI_z} = 0 \qquad (\alpha)$$

görnüşde bolar. $\rho = \rho_0$ ýagdaýda

$$P_1 = gQ\rho_0(l - x), \qquad x_c = \frac{l + x}{2}$$

deňlikleri alarys we (α) deňlemäni

$$y'' + \frac{P(l-x) + \frac{1}{2}gQ\rho_0(l-x)^2}{EI_z} = 0 \qquad (\beta)$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu deňlemäni çözüp, balkanyň oky üçin

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EI_z} - \frac{gQ\rho_0}{EI_z}\cdot\frac{(l-x)^4}{24} + C_1x + C_2$$

formulany alarys. Indi $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$ bolýanyny göz öňünde tutup, $y(x)$ üçin

$$y=-\frac{P(l-x)^3}{6EI_z}-\frac{gQ\rho_0(l-x)^4}{24EI_z}-x\left(\frac{Pl^2}{2EI_z}+\frac{gQ\rho_0}{EI_z}\cdot\frac{l^3}{6}\right)+\frac{Pl^3}{6EI_z}+\frac{gQ\rho_0}{EI_z}\cdot\frac{l^4}{24}$$

ýa-da

$$y=-\frac{(l-x)^3}{6EI_z}\left(P+\frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right)-\frac{l^3}{6EI_z}\left(P+\frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right)-$$
$$-x\left(\frac{Pl^2}{2EI_z}-\frac{gQ\rho_0 l^3}{24EI_z}+\frac{gQ\rho_0 l^3}{6EI_z}\right),$$

ýa-da

$$y=\left[-\frac{(l-x)^3}{6EI_z}+\frac{l^3}{6EI_z}\right]\left(P+\frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right)-x\left(\frac{Pl^2}{2EI_z}+\frac{gQ\rho_0 l^3}{8EI_z}\right),$$

ýa-da

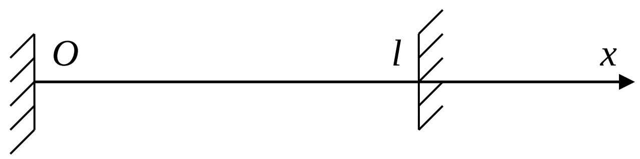
$$y=\left[\frac{l^3}{6EI_z}-\frac{(l-x)^3}{6EI_z}\right]\left(P+\frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right)-\frac{xl^2}{2EI_z}\left(P+\frac{gQ\rho_0}{4}l\right),$$

ýa-da

$$y=\left[\frac{l^3}{6EI_z}-\frac{(l-x)^3}{6EI_z}-\frac{xl^2}{2EI_z}\right]\left(P+\frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right)-\frac{x^2l^2}{8EI_z}gQ\rho_0$$

formulany alarys. Bu ýerde hem $y'(x)\le 0$, $y''(x)\le 0$ bolany sebäpli $y(x)$ funksiýanyň grafigi 51-nji suratdaky ýaly bolar.

Indi iki çeti berkidilen (52-nji surat) balkanyň okunyň deňlemesini tapalyň.



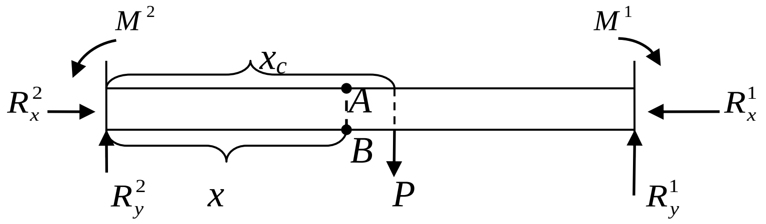
52-nji surat

Ýene-de balka gönüburçly prizma hasap edeliň we onuň islendik kese kesigi üçin M_z egilme momentini kesgitläliň. Balkanyň dykyzlygy $\rho(x)$, kese kesiginiň meýdany Q, uzynlygy l we x okunyň $[0,l]$ kesiminde ýerleşen diýeliň. Goý, oňa diňe onuň agramy täsir edýär diýeliň. Onda oňa täsir edýän güýçler we momentler 53-nji suratdaky ýaly bolarlar.

Balka deňagramlylykda hasap edip, statikanyň deňlemelerini ýazalyň:

$R_y^2+R_y^1-P=0$,

$$R_x^2 - R_x^1 = 0,$$
$$-M^2 + Px_c - lR_y^1 + M^1 = 0.$$



$$x_c = \frac{1}{m}\int_0^l x\rho\, Qdx, \qquad P = \int_0^l \rho(x) g\, Qdx, \qquad m = \int_0^l \rho(x)\, Qdx.$$

53-nji surat

Mesele statistiki kesgitlenmedik bolýar. Balkanyň x nokatda geçirilen (9-njy surat) AB kese kesigindäki egiji M_z momenti kesgitläliň:

$$M_z = R_y^2 x - M^2 - P_1(x - x_{c_1}),$$

bu ýerde

$$P_1 = \int_0^x Q\rho g dx, \qquad m_1 = \int_0^x Q\rho\, dx, \qquad x_{c_1} = \frac{1}{m_1}\int_0^x x\rho\, Qdx.$$

Balkanyň orta çyzygy üçin deňlemede M_z-iň bahasyny goýup we iki gezek integrirläp, alarys:

$$y = \int_0^x \left(\int_0^x M_z \cdot \frac{1}{EI_z} dx \right) dx + C_1 x + C_2 .$$

$y(x)$, şerte görä, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\quad y(l) = 0,\ y'(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrmaly bolar. Bu şertleriň birinji ikisinden $C_1 = 0,\ C_2 = 0$ gelip çykýar we $y(x)$

$$y = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{1}{EI_z} \left(R_y^2 x - M^2 - P_1(x - x_{c_1}) \right) dx \right) dx$$

görnüşi alar. Üçünji we dördünji şertleri ulanyp, alarys:

$$\frac{R_y^2}{6EI_z} l^3 - \frac{M^2}{2EI_z} l^2 - \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1}) dx \right) dx = 0,$$

$$\frac{R_y^2}{2EI_z}l^2 - \frac{M^2 l}{EI_z} - \frac{1}{EI_z}\int_0^l P_1(x - x_{c_1})dx = 0.$$

Bu ýerden näbelli M^2 moment we R_y^2 reaktiw güýç tapylýar –

$$M^2 = \frac{2}{l}\int_0^l P_1(x - x_{c_1})dx - \frac{6}{l^2}\int_0^l\left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1})\,dx\right)dx,$$

$$R_y^2 = \frac{6}{l^2}\int_0^l P_1(x - x_{c_1})dx - \frac{12}{l^3}\int_0^l\left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1})dx\right)dx$$

we $y(x)$ aşakdaky görnüşe geler:

$$y(x) = \left[\frac{6}{l^2}\int_0^l P_1(x - x_{c_1})dx - \frac{12}{l^3}\int_0^l\left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1})dx\right)dx\right]\frac{x^3}{6EI_z} -$$

$$-\left[\frac{2}{l}\int_0^l P_1(x - x_{c_1})dx - \frac{6}{l^2}\int_0^l\left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1})dx\right)dx\right]\frac{x^2}{2EI_z} - \frac{1}{EI_z}\int_0^x\left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1})dx\right)dx.$$

Balka birjynsly bolan halynda, ýagny $\rho(x) = \rho_0$ - hemişelik bolanda, $y(x)$ has ýönekeý görnüşe gelýär. Bu ýagdaýda $P_1 = Q\rho_0 gx,\ m_1 = Q\rho_0 x,\ x_c = \frac{x}{2}$ bolar we

$$M^2 = \frac{2}{l}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^3}{6} - \frac{6}{l^2}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^4}{24} = \frac{1}{12}Q\rho_0 gl^2,$$

$$R_y^2 = \frac{6}{l^2}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^3}{6} - \frac{12}{l^3}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^4}{24} = \frac{1}{2}Q\rho_0 gl,$$

$$\int_0^x\left(\int_0^x P_1(x - x_c)dx\right)dx = Q\rho_0 g\cdot\frac{x^4}{24}$$

bahalary alarys. Bu bahalary ulanyp, $y(x)$ üçin

$$y(x) = \frac{1}{2}Q\rho_0 gl\cdot\frac{x^3}{6EI_z} - \frac{1}{12}Q\rho_0 gl^2\cdot\frac{x^2}{2EI_z} - \frac{1}{EI_z}\cdot Q\rho_0 g\cdot\frac{x^4}{24}$$

ýa-da

$$y(x) = -\frac{Q\rho_0 g}{24EI_z}x^2(l - x)^2$$

formulany alarys.

21. YKDYSADY MATEMATIKI MODELLER WE OLARYŇ ÇÖZÜLIŞ ÝOLLARY

Biz şu bölümi ykdysadyýet bilen baglanyşdyrsak hem durmuşyň şu hili modellere getirilip çözülýän, ykdysadyýet bilen gös-göni bagly däl meseleleri az däldir. Bu hili meseleleriň biri barada soňra gürrüň ederis. Häzir bolsa ykdysadyýetiň matematiki modele getirilýän klassyky bolup giden meselesine seredeliň.

Kärhana önüm öndürmek üçin köp dürli mümkinçilikler gerek bolýar. Mysal üçin, çigmal, tehniki hünärli ukyply işgärler, önümçilik jaýlary, stanoklar we ş.m. serişdeleri getirse bolar. Elbetde, önümçilik kärhana üçin amatly bolmalydyr. Bu esasy mesele. Ondan başga-da, şol bir serişdeleri harç edeňde dürli tehnologiýalary ulanmak bilen girdeýjini ýokarlandyrmak meselesi esasy meseläniň özeni bolup durýar. Ine, şu meselä matematikanyň usullaryny ulanmak mümkinçiligi bar.

Goý, kärhana şol bir önümi n dürli tehnologiýalaryň kömegi we m dürli serişdäni ulanmak bilen öndürilýän bolsun. a_{ij} bilen i-nji tehnologiýany ulanaňda wagt birliginde j-nji serişdäniň harç edilen mukdaryny belgiläliň, b_j – j-nji serişdäniň umumy mukdary, x_i – i-nji tehnologiýanyň umumy ulanylýan wagty bolsun. Onda $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j,\ j=\overline{1,m}$ deňsizlikler ýerine ýetmeli bolarlar. Bu ýerde, manysyna görä, x_i, $i=\overline{1,n}$ otrisatel däl sanlar. Eger indi c_j bilen j-nji tehnologiýany ulananyňda wagt birliginde öndürilýän önümiň mukdaryny belgilesek, onda

$$I = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1}$$

funksiýa kärhanada bir tapgyrda öndürilen önümiň mukdaryny aňladar. Elbetde, ol mukdar näçe uly bolsa, şonça-da kärhana üçin amatlydyr. Bu amatlylygy matematiki dilde aňladyp bolýar.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j, \quad 1 \le j \le m, \tag{2}$$

ulgamyň $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwine plan diýýärler. Bu plan n ölçegli R_n giňişligiň nokady diýip hasap etsek, onda hemme planlaryň köplügi ol giňişlikde D köplügi emele getirýär. Indi ýokarda agzalan amatlylygy şeýle formulirlese bolar:

***I* funksiýanyň *D* köplükdäki iň uly bahasyny kabul edýän nokadyny tapmaly.** Başgaça aýdanyňda, mümkin bolan planlaryň içinden I funksiýanyň iň uly baha eýe bolýanyny saýlap almaly. I funksiýa maksat funksiýasy diýýärler. Maksat funksiýasynyň iň uly baha eýe bolýan planyna optimal plan diýýärler. (2) ulgam çyzykly we I funksiýa hem çyzykly bolany sebäpli optimal plany tapmak meselesine çyzykly programmirleme meselesi diýilýär. $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ R_n giňişligiň iki nokady bolsun. $Q(x_1\alpha + (1-\alpha)y_1,\ x_2\alpha + (1-\alpha)y_2,\ ...,\ x_n\alpha + (1-\alpha)y_n),\ \ 0 \le \alpha \le 1$, nokatlaryň köplügine M we N nokatlary birikdirýän kesim diýýärler. Eger käbir köplük özüniň islendik iki nokady bilen bilelikde olary birikdirýän kesimi hem öz içinde saklaýan bolsa, onda oňa güberçek köplük diýýärler. *D* köplük güberçek köplükdir. Dogrydan hem, goý, $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ nokatlar $(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $(y_1, y_2, ..., y_n)$ planlara degişli *D* köplügiň nokatlary bolsunlar. Bize islendik $0 \le \alpha \le 1$ üçin *Q* nokadyň koordinatalarynyň plan emele getirýänini görkezmek gerek. $x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n},$ $y_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}$ bolany üçin $x_i\alpha + (1-\alpha)y_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}$ boljagy düşnükli. Indi *Q* nokadyň koordinatalarynyň (2) ulgamy kanagatlandyrýanyny görkezeliň:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x_i\alpha + (1-\alpha)y_i) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i \le \alpha b_j + (1-\alpha)b_j = b_j.$$

Diýmek, islendik α üçin *Q* nokadyň koordinatalarynyň plan emele getirýäni dogry bolýar. Eger *D* köplüge degişli $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ nokat, şol köplüge degişli islendik başga iki nokady birikdirýän kesimde ýatmasa, onda *S* nokada *D* köplügiň depesi diýýärler. *D* köplük tükenikli sandaky depesi bolan köpburçlukdyr. *D* köplük çäkli bolanda *D* köplügiň depeleriniň iň bolmanda biriniň optimal plan bolýanyny görkezeliň. *D* çäkli bolany sebäpli, ol käbir $R > 0$ san üçin merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan, radiusy *R*-e deň bolan sferanyň içinde ýatar. $I=h_0$ tekizlik h_0 ýeterlik uly položitel san bolanda sferanyň daşynda ýatar. Diýmek, *D* köplügiň nokatlary $I < h_0$ deňsizligi kanagatlandyrarlar. Şol sebäpli $h = h_{\max}$, $0 < h_{\max} < h_0$ san tapylyp $I = h_{\max}$ tekizlik *D* köplügi käbir *K* köplük boýunça keser. Islendik $h > h_{\max}$ üçin $I = h$ tekizlik bolsa *D* ýaýlany kesmek. Diýmek, *I* funksiýanyň *D* ýaýladaky iň uly bahasy $h = h_{\max}$ bolar. *I* maksat funksiýasy ol baha *K* köplügiň islendik nokadynda eýe bolar. Indi bize *K* köplügiň nokatlarynyň içinde *D* köplügiň depeleriniň iň bolmanda biriniň ýerleşýänini görkezmek ýeterlikdir.

K çäkli we güberçek köplük. Bu ýagdaý *D* köplügiň çäklidiginden we güberçek bolýanyndan gelip çykýar. *K* köplügiň depesi bar bolsa, onda ol nokat *D* köplügiň hem depesi bolar. *K* köplügiň depesiniň barlygyny induksiýa boýunça subut etse bolar. *K* köplük (*n*–1) ölçegli $I = h_{\max}$ tekizlikde ýerleşýär. Şol tekizlikde ýatýan *n*–2 ölçegli tekizlik alyp we ony parallel süýşürmek bilen, edil ýokarda edilişi ýaly, *K* üçin K_1 köplük gurulýar. Eger K_1 bir nokatdan durmasa, onda K_1 üçin hem şu usuly gaýtalap K_2 köplük alýarlar we ş.m. Bu operasiýa bir näçe gezek gaýtalanandan soň biz bir M_0 nokatdan durýan K_0 köplüge geleris. Elbetde, M_0 nokat K_0 köplügiň depesi bolýar. Onda, ýokarda aýdylanlara laýyklykda, M_0 nokat *K* köplügiň hem depesi bolar. Şeýlelikde, aşakdaky lemma dogry bolýar.

Lemma 1. Eger *D* çäkli bolsa, onda *I* funksiýa *D* köplügiň depeleriniň birinde maksimal baha eýe bolar.

Goý, *I*(*x*) funksiýa *D* köplükde ýokardan çäkli bolsun. Eger *D* köplük çäkli bolsa, onda Lemma 1-e görä, *I*(*x*) maksimal baha *D* köplügiň depeleriniň birinde eýe bolýar. Goý, *D* köplük çäksiz bolsun. Onda käbir $I_0 > 0$ san üçin $I(x) \ge I_0$ köplük *D* köplük bilen kesişmez. Lemma 1-iň subut edilişini gaýtalap, aşakdaky lemma geleris.

Lemma 2. Eger *D* köplükde *I*(*x*) funksiýa ýokarsyndan çäkli bolsa, onda *I*(*x*) özüniň *D* köplükdäki iň uly bahasyna *D* köplügiň depeleriň birinde eýe bolar.

Şol depäni $M_0(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$ bilen belgiläliň. Onda, kesgitlemä görä, $x_1^0, x_2^0,..., x_n^0$ plan optimal plan bolar. Esasy mesele şu plany tapmakdan durýar. Optimal plany tapmaklygyň dürli ýollary bar. Olaryň esasysyna simpleks usul diýilýär. Bu usul *D* ýaýla çäkli bolanda ulanylýandyr. Diýmek, maksat funksiýasynyň *D* ýaýlada çäkli bolýanyny anyklamak möhüm meseleleriň biridir. Bu meseläni çözmäge girişeliň. Amatlylyk üçin *D* köplügiň $M(x_1, x_2,..., x_n)$ nokadyny $\vec{x} = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ wektor görnüşde ýazmagy kabul edeliň. $\vec{x} \geq 0$ belgi bilen koordinatalary otrisatel däl wektory belgiläliň.

(2) ulgamda islendik *n–m* näbellini nola deňläp, kelteldilen ulgamlaryň C_n^{n-m} sanysyny alarys. Olaryň içinden diňe bir otrisatel däl çözüwi bar, başga hiç hili çözüwi bolmadyk ulgamlaryň çözüwleriniň toplumyny Q_0 bilen belgiläliň. Umuman, (2) ulgamda islendik *n–m+i*, $0 \leq i \leq m-1$ näbellini nola deňläp, kelteldilen ulgamlaryň C_n^{n-m+i} sanysyny alarys. Olaryň içinden diňe bir otrisatel däl çözüw bar bolan we başga hiç hili çözüwi bolmadyklarynyň çözüwlerinden Q_i köplük düzeliň. Maksat funksiýasynyň $Q = \sum_{i=0}^{m-1} Q_i$ köplügiň nokatlarynyň birinde maksimal baha eýe bolýanyny görkezeliň. Bir zady bellemek zerur. Mysal üçin, kelteldilen ulgam $x_1, x_2,.., x_s$ näbellileri nola deňläp alnan bolsa, onda biz onuň çözüwi diýip $\vec{x}(0,0,0..,0, x_{s+1}^0,..., x_n^0)$ wektora aýtjakdyrys. Bu ýerde $(x_s^0, x_{s+1}^0,..., x_n^0)$ kelteldilen ulgamyň çözüwi.

Goý, $I(\vec{x})$ maksat funksiýasy *D* ýaýlanyň $\vec{x}_0 \geq 0$ nokadynda maksimal baha eýe bolsun we $\vec{x}_0$ wektoryň hemme koordinatalary položitel sanlar bolsunlar. Goý, $\vec{x}_1 \in D$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_0$ bolsun. Onda islendik kiçi *t* üçin $\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)$ nokat hem *D* ýaýla degişli bolar we

$$I(\vec{x}) = I(\vec{x}_0) + t \cdot (I(\vec{x}_0) - I(\vec{x}_1))$$

deňlik ýerine ýeter. Eger $I(\vec{x}_0) \neq I(\vec{x}_1)$ bolsa, onda $sign t = sign[I(\vec{x}_0) - I(\vec{x}_1)]$ bolar ýaly edip *t*-ni saýlap alsak, $I(\vec{x}) > I(\vec{x}_0)$ alarys. Bu bolsa $I(\vec{x})$ $\vec{x}_0$ nokatda maksimuma eýe bolýar diýen teklibe garşy gelýär. Diýmek, ýa $\vec{x}_0$ wektoryň käbir koordinatalary nola deň bolmaly ýa-da *D* ýaýlanyň hemme nokatlarynda $I(\vec{x}) = I(\vec{x}_0)$ deňlik ýerlikli bolar.

Ikinji halda S.N.Çernyşowyň [11] 78-nji sahypadaky 1.10 teoremasyna görä, *Q* köplük boş bolmaz. $Q \subset D$ bolany sebäpli $I(\vec{x})$ *Q* köplügiň nokadynda hem maksimuma eýe bolar. Birinji halda $\vec{x}_0$ çözüwiň nola deň näbellilerini saklamaýan (2) ulgamyň kelteldilen ulgamyna seredeliň. Bu täze ulgamyň položitel $\vec{x}_0$ çözüwi bar, özi hem şol çözüwde $I(\vec{x})$ maksimal baha eýe bolýar. Eger $\vec{x}_0$ çözüw kelteldilen ulgamyň ýeke-täk çözüwi bolsa, onda $\vec{x}_0 \in Q$ bolar. Eger-de bu ulgamyň başga-da çözüwleri bar bolsa, onda şol çözüwleriň köplüginde $I(\vec{x}) = I(\vec{x}_0)$ bolar. Bu halda $I(\vec{x})$ hökmany halda *Q* köplügiň nokatlaryň birinde $I(\vec{x}_0)$ baha eýe bolar. Şeýlelikde, aşakdaky lemma subut edildi.

Lemma 3. Eger Q köplük boş bolsa, onda D ýaýla hem boş bolýar. Eger Q köplük boş bolmasa, onda $I(\vec{x})$ funksiýa maksimum baha Q köplügiň nokatlarynyň birinde eýe bolýar.

Lemma 4. Goý, (2) ulgamyň $\{\vec{x}_k\}_1^{\infty}$, $|\vec{x}_k| \to \infty$, $\vec{x}_k \geq 0$ çözüwleriniň yzygiderligi bar bolsun. Eger $\vec{x}_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\}$, $\forall k, \forall s$ üçin $x_k^s \geq \alpha > 0$ bolsa we käbir $1 < s \leq n$ üçin $\{x_k^s\}_{k=1}$ yzygiderlik monoton, çäkli we $\lim\limits_{k \to \infty} x_k^s = a$ bolsa, onda

$$\sum_{i=1, i \neq s}^{n} a_{ij} x_i = b_j - a_{is} \cdot a, \quad j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

ulgamyň hem $|\vec{x}'_k| \to \infty$, $\vec{x}_k \geq 0$, $\forall k, s$ üçin $\vec{x}'^s_k \geq \dfrac{a}{2}$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwleriniň $\{\vec{x}'_k\}_1^{\infty}$ yzygiderligi bardyr.

Subudy. (2) ulgamyň $A = \{a_{ij}\}_m^n$ matrisasynyň s-nji sütünini saklamaýan m tertipli minorlarynyň hemmesi nola deň diýeliň. Onda (2) ulgamyň deňlemelerini kombinirlemek bilen onuň bir deňlemesini $\tilde{a}_{ik}^s x^s = \tilde{b}_k$ görnüşe getirip bolar. Eger-de $\tilde{a}_{ik}^s x^s = 0$, $\tilde{b}_k = 0$ bolsa, onda (2) ulgamyň deňlemeleri çyzykly baglanyşykly bolardy. Bu bolsa başdaky (2) ulgam baradaky çaklama garşy gelerdi. Eger-de $\tilde{a}_{ik}^s \neq 0$ bolsa, onda (2) ulgamyň islendik çözüwiniň s-nji koordinatasy $x^s = \dfrac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_{ik}^s} = a$ hemişelik bolardy. Diýmek $\{\vec{x}_k\}$, $\vec{x}_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\}$ (2) ulgamyň çözüwleri bolsalar, onda $\{\vec{x}'_k\}$, $\vec{x}'_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^{s-1}, x_k^{s+1}, ..., x_k^n\}$ wektorlar (5) ulgamyň çözüwleri bolardylar we lemmanyň tassyklamasynyň dogrulygy gelip çykardy.

Goý, A matrisanyň s-nji sütinini saklamaýan, m tertipli minorlarynyň biri nola deň däl diýeliň. Diýmek, (5) ulgamyň A' matrisanyň m tertipli minorlarynyň biri nola deň däl. Indi (5) ulgamda şu minora girmeýän sütünlerine degişli näbellileriniň ýerine $\vec{x}_k$ çözüwiň şol nomerli koordinatalaryny goýsak we ony şol minora degişli sütünleriň näbellilerine görä çözsek, onda $\vec{x}'_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^{s-1}, x_k^{s+1}, ..., x_k^n\}$ wektor bilen (5) ulgamyň alnan çözüwiniň arasyndaky tapawudyň normasyny k-ny ýeterlik uly almak bilen islendik sandan, mysal üçin $\dfrac{a}{2}$-den, kiçi edip boljagy düşnüklidir. Bu bolsa lemmanyň tassyklamasynyň subudy bolýar.

Teorema. Eger $D \neq \varnothing$ bolsa, onda $I(\vec{x})$ maksat funksiýasynyň D ýaýlanyň nokatlarynda çäksiz bolmagy üçin

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0, \ 1 \leq j \leq m, , \tag{3}$$

$$I(\vec{x}) = 1 \tag{4}$$

(3)-(4) ulgamyň $\vec{x} \geq 0$ çözüwiniň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Ýeterliginiň subudy. Goý, $\vec{x}_1 \in D$ bolsun. Onda islendik $t \geq 0$ üçin $\vec{x}_1 + t \cdot \vec{x}_0 \in D$ we $I(\vec{x}_1 + t \cdot \vec{x}_0) = I(\vec{x}_1) + t \cdot I(\vec{x}_0) = I(\vec{x}_1) + t$ bolar. Teoremanyň ýeterligi subut edildi.

Zerurlygynyň subudy. Teoremany induksiýa usuly boýunça subut edeliň. Goý, näbellileriň sany iki bolsun. Onda (2) ulgam

$$ax + by = c$$

görnüşde, $I(\vec{x})$ funksiýa bolsa $I(\vec{x})=\alpha x+\beta y$ görnüşde bolar. (3)-(4) ulgam bolsa

$$\begin{cases} ax+by=0, \\ \alpha x+\beta y=1 \end{cases}$$

görnüşde bolar.

Şerte görä soňky ulgamyň otrisatel däl çözüwi ýok. Alarys, $x=-\frac{b}{a}y$, $I(\vec{x})=\alpha x+\beta y=\left(-\alpha\frac{b}{a}+\beta\right)y$. Diýmek, ýa $-\alpha\frac{b}{a}+\beta<0$, ýa-da $-\alpha\frac{b}{a}+\beta>0,\ -\frac{b}{a}<0$ bolmaly. (2) ulgamy, ýagny $ax+by=c$ deňlemäni çözüp, taparys: $x=-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}$ we $I(\vec{x})=\alpha x+\beta y=\left(-\alpha\frac{b}{a}+\beta\right)y+\alpha\cdot\frac{c}{a}$. Çözüw otrisatel däl bolsa, onda $x\geq 0,\ y\geq 0$ bolýar we ýa $I(x)\leq\alpha\cdot\frac{c}{a}$, ýa-da $I(x)\leq\beta\cdot\frac{c}{a}$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny $I(\vec{x})$ çäkli bolýar.

Goý, teorema näbelliniň sany (n-1) bolanda dogry bolsun. Tersinden subut edeliň. Goý, (2) ulgamyň $\vec{x}_k\geq 0$, $|\vec{x}_k|\to\infty$ we $I(\vec{x}_k)\to\infty$ şertleri kanagatlandyrýan $\{\vec{x}_k\}_1^\infty$ çözüwleriniň yzygiderligi bar bolsun. $\vec{x}_k=\{x_k^1,x_k^2,...,x_k^n\}$ çözüwleriň hemme koordinatalary k-nyň ösmegi bilen tükeniksizlige ymtylýan bolsunlar. Onda k ýeterlik uly bolanda $\frac{\vec{x}_k-\vec{x}_1}{I(\vec{x}_k-\vec{x}_1)}=\vec{z}_k$ wektor (3) ulgamyň $\vec{z}_k\geq 0$, $I(\vec{z}_k)=1$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Diýmek, käbir $1\leq s\leq n$ üçin $\forall k$ üçin $0\leq x_k^s\leq M$ şert ýerine ýetýär. $\{\vec{x}_k\}_1^\infty$ yzygiderligiň $\{\vec{x}_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ bölek yzygiderligini $x_{k_i}^s$ sanlar monoton yzygiderlik bolar ýaly saýlap alyp bolýar. Goý, $\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}^s=a\geq 0$ bolsun. $A\geq 0$ san alalyň we $y_i=A+x_i$ özgertme girizeliň. Onda (2) ulgam

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i=b_j-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right)A,\quad j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

görnüşe, $I(\vec{x})$ bolsa

$$I(\vec{y})=\sum_{i=1}^n c_iy_i-\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)A$$

görnüşe geler. Elbetde, $\vec{y}_k=\{x_k^1+A,\ x_k^2+A,\ ...,\ x_k^n+A\}$ wektorlar (6) ulgamyň otrisatel däl çözüwleri bolarlar, özi hem, islendik s we k üçin $x_k^s\geq A$ deňsizlikler ýerlikli bolarlar. Bu çözüwleriň $\vec{y}_k\geq 0$, $|\vec{y}_k|\to\infty$ we $I(\vec{y}_k)\to\infty$ şertleri kanagatlandyrjagy we

$$\left.\begin{aligned} Ay&=0, \\ I(\vec{y})&=1 \end{aligned}\right\}$$

ulgamyň çözüwiniň bolmajagy düşnüklidir. Lemma 4-e görä y_s näbellisiniň ýerine 0 goýulyp alnan

$$\sum_{i=1,i\neq s}^n a_{ij}y_i=b_j-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right)A-a_{sj}\cdot a \tag{7}$$

ulgamyň hem $\vec{y}_k \geq 0$, $|\vec{y}_k| \to \infty$ we $I(\vec{y}_k) \to \infty$ çözüwleri bolmaly. Emma bu ulgamda näbellileriň sany n-1 we A matrisadan s-nji sütüni taşlanyp alynan A' matrisa üçin hem

$$A'y = 0$$

ulgamyň $I(y)$ maksat funksiýasynda y_s=0 goýulyp alnan $\tilde{I}(\vec{y}) = 1$ deňligi kanagatlandyrýan otrisatel däl çözüwi ýok. Onda, induksiýa görä, (7) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň köplüginde $\tilde{I}(\vec{y})$ çäkli bolmaly bolar. Bu bolsa ýokarda alnan netijä garşy gelýär. Bu garşylyk teoremanyň dogrulygyny tassyklaýar.

Şeýlelikde, (3)-(4) ulgamyň otrisatel däl çözüwiniň bolmazlygy (2) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň köplüginde maksat funksiýasynyň çäkli bolmagynyň zerur we ýeterlik şerti bolýar. Belli bolşy ýaly, simpleks usulyň ulanylmagy üçin maksat funksiýasynyň çäkli bolmagy zerurdyr.

Şol sebäpli, ilki bilen maksat funksiýasynyň çäkliligi anyklanýar we soňra simpleks usuly ulanylýar. Bu meseläni çözmeklige şeýle çemeleşmek hödürlenýär. (3)-(4) ulgamyň çözüwiniň barlygyny, ýoklugyny derňemek üçin şeýle algoritm hödürlenýär. Onuň düzüliş manysy şeýle: (3)-(4) ulgamda m+1 näbelliden başga näbellileri nola deňläp, C_n^{m+1} sany, $m+1$ näbellili, $m+1$ deňlemeden durýan ulgamlar alynýar we olaryň otrisatel däl çözüwiniň barlygy anyklanýar. Eger bir ulgamyň şeýle çözüwi bar bolsa, onda derňew tamamlanýar. Eger-de şol ulgamlaryň hiç biriniň otrisatel däl çözüwi bolmasa, onda S.N.Çernyşowyň teoremasyna laýyklykda (3)-(4) ulgamyň otrisatel däl çözüwi ýok bolýar. Bu bolsa (2) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň D köplüginde maksat funksiýasy çäkli diýmekdir.

Maksat funksiýasy çäkli bolany sebäpli, ol ekstremuma D köplügiň depelerinde ýetip bilýär. Eger şol depeleri ýeke-ýekeden tapsak we maksat funksiýasynyň şol nokatlardaky bahalaryny kesgitlesek, soňra maksat funksiýasynyň tapylan bahalarynyň içinden iň ulusyny saýlap alsak, şol hem gözlenýän maksimal baha bolar.

Bu usul simpleks usuldan kän tapawutlanmaýar, ýöne bu ýerde geçirilýän operasiýalaryň sany simpleks usuldakydan has köp bolýar. Şeýle-de bolsa usulyň ýönekeý düşündirilişini we häzirki zaman kompýuterleriniň hasaplaýyş mümkinçiliginiň örän ýokarydygyny göz öňünde tutup, şeýle usuly az sanly deňlemelerden we näbellilerden durýan meseleler üçin hödürlemek bolar.

Ýokarda $A = \{a_{ij}\}_m^n$ matrisa we $\vec{c} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ wektorlar bilen kesgitlenýän çyzykly programmirlemegiň

$$A\vec{x} = \vec{b}' \tag{8}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{x} = I - \max \tag{9}$$

meselesiniň çözüliş usuly hödürlendi. Ol (8) ulgamyň $x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwleriniň D köplüginiň depelerini tapmakdan we I funksiýanyň şol depelerdäki bahalarynyň iň ulusyny saýlap almakdan durýar. Emma hödürlenýän usul boýunça gös-göni D köplügiň depeleriniň koordinatalaryny kesgitlemek elektron hasaplaýjy maşynlar üçin hem gaty köp bolan operasiýalaryň geçirilmegini talap edýär. Şol sebäpli bu usul kän ulanylmaýar. Bu usula ýönekeýlik üçin saýlama usuly diýeliň. Biz aşakda saýlama usulynyň örän ýeňil geçirilýän we düşürme usuly atlandyrylýan usul bilen birikdirilmegiň çyzykly programmirlemegiň täsin we ýeňil çözüliş ýoluna getirýänini görkezeris. (8)-(9) ulgamy

$$A\vec{x} = \vec{b}' \qquad (8^I)$$

$$\vec{c}\,\vec{x} = I \qquad (9^I)$$

görnüşde ýazalyň. (9^I) deňlemeden x_1 näbellini tapalyň we (8^I) ulgamda ýerine goýalyň

$$\begin{aligned} &\frac{a_{11}}{c_1}\left(I - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n\right) + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\frac{a_{21}}{c_1}\left(I - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n\right) + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{a_{m1}}{c_1}\left(I - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n\right) + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_n. \end{aligned} \qquad (8^{II})$$

Şeýlelikde, mesele (8^{II}) ulgamyň $x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1}$ çözüwleriniň içinde *I*-niň iň uly bahasyny saýlap almaklyga getirýär. $a_{i1},\ i = \overline{1,m},$ sanlaryň nola deň bolmadyk birini alýarys. Goý, ol a_{11} bolsun. a_{11} koeffisiýenti saklaýan deňlemäni degişlilikde $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ sanlara köpeldip we *i*-nji deňlemä goşup, täze sistema geçeliň:

$$\begin{aligned} &\frac{a_{11}}{c}\left(I - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n\right) + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = b_m'. \end{aligned} \qquad (8^{III})$$

Birinji deňlemeden *I*-ni tapalyň. Ulgamy aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\begin{aligned} &b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = b_m'; \end{aligned} \qquad (8^{IV})$$

$$I = c_2'x_2 + c_3'x_3 + \ldots + c_n'x_n + c_{n+1}'. \qquad (9^{IV})$$

Şeýlelikde, biz düşürme usulyny ulanyp, (8^I)-(9^I) meseläni

$$\begin{aligned} &b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = b_m'; \end{aligned} \qquad (8^{IV})$$

$$I = c_2'x_2 + c_3'x_3 + \ldots + c_m'x_n + c_{n+1}' - \max \qquad (9^{IV})$$

(8^{IV})-(9^{IV}) meselä getirdik. Deňlemeleriň sany we näbellileriň sany bir san kemeldi. Indi (8^{IV})-(9^{IV}) ulgama düşürme usulyny ulanyp, iterasiýany dowam etdireliň.

Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin. Käbir iterasiýadan soň ulgam

$$c_{kk}x_k+...+c_{kn}x_n=b_k^k$$
$$c_{km}x_k+...+c_{mn}x_n=b_m^k$$
$$I=c_k^kx_k+...+c_n^kx_n+c_{n+1}^k-\max$$

görnüşde gelse we $c_1^k=...=c_m^k=0$ bolsa, onda iterasiýa şu ädimde gutarýar. $I=c_{m+1}^k$ san şu ädimdäki maksat funksiýasynyň iň uly bahasy bolýar.

Eger-de her ädimde c_1^k sanlaryň iň bolmanda biri noldan üýtgeşik bolsa, onda iterasiýany dowam etdirip, m-1 ädimden soň

$$d_{nm}x_m+...+d_{mn}x_n=b_1^{(m-1)} \qquad (\alpha)$$
$$I=c_m^{m-1}x_m+...+c_n^{m-1}x_n+c_{n+1}^{m-1}-\max$$

meselä geleris. Eger (α) deňlemäniň otrisatel däl çözüwleriniň D_1 köplüginde I çäkli bolsa, onda onuň maksimal bahasy şeýle tapylýar.

Biz birinji ädimde başdaky ulgamyň bir deňlemesini taşladyk. Ikinji ädimde ýene bir deňlemesini taşlaýarys we ş.m. Soňky ädimde başdaky ulgamyň m-1 deňlemesini taşlaýarys. Şol deňlemelerde iň soňky (α) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň D_1 köplüginiň depeleriniň her biriniň koordinatalaryny taşlanan deňlemeler sistemasyna goýup, (α) sistema girmeýän näbellileri tapýarys. Eger olaryň bahalary käbir depeler üçin otrisatel däl bolsalar, onda I-niň maksimal bahasy I-niň şol soňky alnan depelerdäki bahalarynyň ulusyna deň bolar. I-niň bahalarynyň (α) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň D_1 köpliginde çäkli bolmagy üçin

$$\begin{aligned}&a_{mm}x_m+...+a_{mn}x_n=0,\\&c_m^{m-1}x_m+c_{m+1}^{m-1}x_{m+1}+...+c_n^{m-1}x_n=1\end{aligned} \qquad (\beta)$$

ulgamyň otrisatel däl çözüwiniň bomazlygynyň zerur hem ýeterlikdigini biz ýokarda görkezipdik. S.N.Çernyşowyň teoremasyna [11] laýyklykda onuň üçin (β) ulgamyň matrisasyndan düzülen islendik ikinji tertipli

$$\begin{vmatrix}a_{j1} & a_{j2}\\ c_{j1} & c_{j2}\end{vmatrix}$$

kesgitleýji nola deň däl bolanda, onuň elementleriniň

$$a_{j_1}\left(a_{j_1}c_{j_2}-a_{j_2}c_{j_1}\right)\geq 0,$$
$$a_{j_2}\left(a_{j_1}c_{j_2}-a_{j_2}c_{j_1}\right)\leq 0$$

deňsizlikleri kanagatlandyrmazlyklary zerur we ýeterlikdir.

EDEBIÝATLAR

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.
10. Hudaýberenow Ö.G. Ýokary matematika. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.
11. Дарпов А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1969.
12. Гилберт Ж., Курант Р. Математическая физика. Т.1. М.: Наука, 1983.
13. Гинзбург И.П. Аэродинамика. М.: Высшая школа, 1988.
14. Краснов Н.Ф. Аэродинамика в вопросах и задачах. М.: Высшая школа, 1985.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 2003.
16. Николаи Е.Л. Теоретическая механика. М.: Наука, 1956.
17. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. М.: Наука, 1977.
18. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1967.

MAZMUNY

1. Giriş 7
2. Modelirlemede ýüze çykýan meseleler 9
3. Matematiki model 11
4. Jisimiň tekiz üstdäki yrgyldysy barada mesele 15
5. Käbir gerek düşünjeler 18
6. Egri boýunça hereket edýän material nokada täsir edýän güýjüň bitirýän işi . .22
7. Mehanikanyň we fizikanyň belli prinsiplerine esaslanýan modeller 27
8. Gamiltonyň prinsipi we onuň bilen bagly meseleler 31
8.1. Lagranžyň deňlemesiniň çykarylyşy 33
8.2. Energiýanyň saklanyş kanuny 35
9. Iki material nokadyň özara täsiri astyndaky hereketleriniň matematiki
modeli 36
10. Ýeriň töwereginde hereket edýän material nokatlar barada mesele 42
11. Ideal suwuklyk akymy bilen baglanyşykly matematiki model 46
12. Suwuklygyň tekiz akymynyň matematiki modeli 51
12.1. Birjynsly tekiz akym 55
12.2. Gözbaşyly akym 55
12.3. Nokatdaky towlanmanyň akymy 56
13. Uçaryň uçmagyna getirýän göterme güýçleriň döreýşi barada mesele 61
14. Matematiki meseläni çözmekde Arhimediň mehaniki modeli ulanyşy 72
15. Erkin üstli ýerasty suwlaryň syzyşynyň matematiki modeli 80
16. Gapdan çykýan gazyň mukdaryny we tizligini hasaplamagyň
matematiki modeli 92
17. Açyk hanalardan syzyş meselesi barada 97
18. Taryň yrgyldysy baradaky meseläniň matematiki modeli. 104
19. Jisimde temperaturanyň paýlanyşynyň matematiki modeli 115
20. Balkanyň okunyň egilmesiniň deňlemesi 125
21. Ykdysady matematiki modeller we olaryň çözüliş ýollary 135
22. Edebiýatlar 143