H. Ataýew, N. Kuliýew

NAZARY MEHANIKADAN MESELELER

II kitap

DINAMIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2019

UOK 378 : 531
A 87

Ataýew H., Kuliýew N.
A 87 **Nazary mehanikadan meseleler.** II kitap (Dinamika). Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2019.

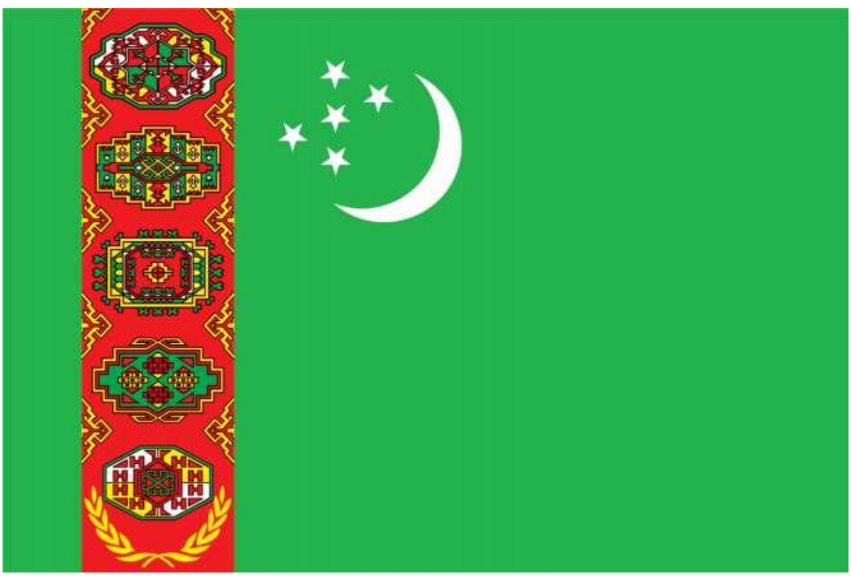
Okuw gollanmasy «Nazary mehanikadan meseleler. I kitap (Statistika. Kinematika)» atly kitabyň dowamy bolup, ol dinamikany öz içine alýar. Okuw gollanmasynda dinamika degişli temalar, gysgaça nazary maglumatlar we oňa degişli meseleleriň çözüliş usullary hem-de özbaşdak çözmek üçin meseleler berildi.

Okuw gollanmasynyň esasy maksady talyplara nazary mehanikanyň dinamika bölümine degişli meseleleri özbaşdak çözmegi öwretmekden ybarat bolup, hünärmenleri taýýarlamakda hil taýdan oňyn netijeleri gazanmaga mümkinçilik berer.

TDKP № 194, 2019 KBK 22.2 ýa 73

**TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW**

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

SÖZBAŞY

2018-nji ýylda çapdan çykan «Nazary mehanikadan meseleler ýygyndysy. I kitap» atly okuw gollanmamyzda belläp geçişimiz ýaly nazary mehanika fizika we matematika dersleri bilen bir hatarda tehniki ýokary okuw mekdeplerinde okadylýan dersleriň möhümleriniň biridir. Geljekki ýokary bilimli fizikler, matematikler, inženerler bilen birlikde bu dersi orta hünär mekdepleriniň talyplary hem öwrenýärler. Tehniki ýokary okuw mekdeplerinde okaýanlar üçin nazary mehanikanyň ähmiýeti has hem uludyr. Bu ylym materiallaryň garşylygy, maşynlaryň we mehanizmleriň nazaryýeti, maşyn bölekleri, gurluşyk mehanikasy, gidrawlika, maýyşgaklyk nazaryýeti, gidrodinamika, aerodinamika, yrgyldylar nazaryýeti ýaly dersleriň nazary esasyny düzýär. Galyberse-de nazary mehanika geljekki hünärmenleriň dünýägaraýşyny giňeldýär we çuňlaşdyrýar. Bu ders ýokary okuw mekdepleriniň birinji we ikinji ýyllarynda okadylyp, onuň daýanýan dersleri fizika we matematikadyr. Temalar ýokary okuw mekdepleri üçin tassyklanan maksatnama laýyklykda beýan edildi. Bu gollanma türkmen dilinde taýýarlanan ilkinji kitap bolmak bilen, hünärmenleri taýýarlamakda hil taýdan has gowy netijeleri gazanmaga mümkünçilik berer diýen tamamyz bar.

Okuw gollanmasy tehniki ugurly ýokary okuw mekdepleri üçin taýýarlanyp, ondan beýleki degişli ugurly ýokary hem-de orta hünär okuw mekdepleriniň talyplary hem peýdalanyp bilerler.

III bölüm

DINAMIKA

12. MADDY NOKADYŇ DINAMIKASY. NOKADYŇ DINAMIKASYNYŇ IKI ESASY MESELESI

12.1. Erkin maddy nokadyň hereketiniň differensial deňlemeleri

Eger üýtgemeýän m massaly maddy nokat $\overline{F}(F_x, F_y, F_z)$ güýjüň täsiri bilen hereketlenýän bolsa, onda bu nokadyň hereketiniň wektor görnüşindäki differensial deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\ddot{\bar{r}} = \overline{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t), \tag{12.1}$$

bu ýerde $\bar{r}$ – nokadyň radius-wektory, $\dot{\bar{r}}$ – nokadyň tizligi, $\ddot{\bar{r}}$ – nokadyň tizlenmesi.

(12.1) deňlemäni gönüburçly dekart koordinata oklaryna proýektirläp, degişli differensial deňlemeleri alarys:

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y, \qquad m\ddot{z} = F_z, \tag{12.2}$$

bu ýerde x, y, z – nokadyň koordinatalary, F_x, F_y, F_z – hereket edýän nokada täsir edýän güýçleriň deňtäsiredijisiniň degişli oklara proýeksiýalary.

Nokat gönüçyzykly hereket edende x oka gabat gelse, onda aşakdaky deňlemäni alarys:

$$m\ddot{x} = F_x. \tag{12.3}$$

(12.1) deňlemäni tebigy oklara proektirläp, degişli differensial deňlemeleri alarys:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau, \qquad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n, \qquad 0 = F_b, \tag{12.4}$$

bu ýerde υ – nokadyň tizligi, ρ – traýektoriýanyň egrilik radiusy, F_τ, F_n, F_b – täsir edýän güýjüň nokadyň traektoriýasyna galtaşýan çyzyga, baş normala we binormala proýeksiýalary.

(12.1) – (12.4) deňlemelerden peýdalanyp, nokadyň dinamikasynyň iki esasy meselesini çözmek bolýar.

12.2. Nokadyň dinamikasynyň birinji esasy meselesi. Nokadyň hereket kanuny berlende nokada täsir edýän güýji kesgitlemek. Mysaly meseleler

Bu meselede nokadyň m massasy we hereket deňlemeleri berlende, bu nokada täsir edýän güýji ýa-da nokada birnäçe güýç täsir edýän ýagdaýynda şol güýçleriň birini tapmak talap edilýär.

Nokadyň hereketiniň traýektoriýasyna baglylykda meseleleriň gönüçyzykly ýa-da egriçyzykly herekete degişli bolmagy mümkin.

12.1-nji mesele. Bug maşynynyň porşeni $x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$ kanun esasynda gorizont boýunça yrgyldyly hereket edýär. Bu ýerde r – kriwoşiniň uzynlygy, l – şatunyň uzynlygy, $\omega = \text{const}$ – walyň burç tizligi. Eger porşeniň massasy M bolsa, onda oňa täsir edýän güýjüň iň uly bahasyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Hereket gönüçyzykly, şonuň üçin diňe $m\ddot{x} = Fx$ deňleme bilen çäklenýäris. Berlen hereket kanunyny t wagta görä iki gezek differensirleýäris:

$$\dot{x} = -r\left(\omega\sin\omega t + \frac{r}{4l}2\omega\sin 2\omega t\right),$$

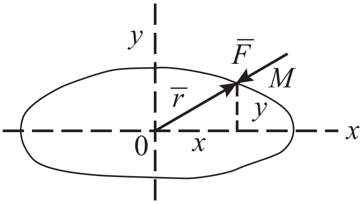
$$\ddot{x} = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right).$$

$\omega t = 0$ bolanda, ýaýlaryň içindäki aňlatmalar aşakdaky iň uly baha eýe bolýarlar:

$$|\ddot{x}_{\max}| = r\omega^2\left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

Täsir edýän güýjüň modulynyň iň uly bahasyny ýazalyň:

$$|F_x|_{\max} = Mr\omega^2\left(1 + \frac{r}{l}\right).$$



12.1-nji surat

12.2-nji mesele. m massaly M nokadyň hereket kanunlary berlen:

$x = a\cos(kt),\ y = b\sin(kt),$

bu ýerde a, b, k – üýtgemeýän položitel ululyklar, t – wagt.

Hereketi üpjün edýän güýji tapmaly (*12.1-nji surat*).

Çözülişi. Ilki bilen t wagty ýok edip, hereket deňlemelerinden nokadyň hereketiniň traýektoriýasynyň deňlemesini tapalyň:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(kt) + \sin^2(kt) = 1,$$

bu ýerden ellipsiň deňlemesi gelip çykýar:

$$\dot{x} = -ak\sin(kt); \quad \ddot{x} = -ak^2\cos(kt); \quad \ddot{y} = -ak^2\sin(kt).$$

$$F_x = -mk^2 a\cos kt = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y.$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r;$$

$$\cos(\bar{F},x) = \frac{F_x}{F} = \frac{-mk^2 x}{mk^2 r} = -\frac{x}{r}; \quad \cos(\bar{F},x) = -\frac{y}{r}.$$

Diýmek, $\bar{F} = -mk^2\bar{r}$.

12.3-nji mesele. Massasy m bolan nokat $x = (a - bt)^3$ kanun esasynda hereket edýär. Nokada täsir edýän güýji kesgitlemeli (bu ýerde a, b – berlen üýtgemeýän ululyklar).

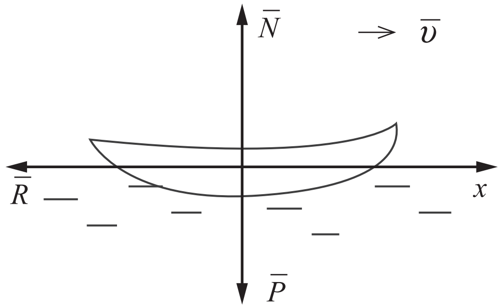
Çözülişi. (12.3) deňlemeden peýdalanmak üçin $\ddot{x}$ tapalyň:

$\dot{x} = -3b(a - bt)^2, \qquad \ddot{x} = 6b^2(a - bt).$

$F_x = 6mb^2(a - bt).$

12.4-nji mesele. P agramly gaýyk $x = \frac{P}{bg}\upsilon_0\left(1 - e^{-\frac{bg}{p}t}\right)$ kanun esasynda hereket edýär. Bu ýerde υ_0 – başlangyç tizlik, b – üýtgemeýän koeffisiýent.

Tizlige görä herekete garşylyk görkeziji güýji kesgitlemeli (*12.2-nji surat*).



12.2-nji surat

Çözülişi. Gaýyga täsir edýän güýçler: $\overline{P}$ – gaýygyň agramy, $\overline{R}$ – garşylyk güýji, $\overline{N}$ – reaksiýa güýji.

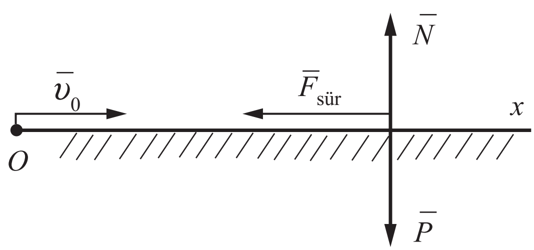
$$\upsilon_x = \dot{x} = \upsilon_0 e^{-\frac{bg}{P}t};$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{bg}{P}\upsilon_0 e^{\frac{-bg}{P}t}.$$

(12.3) deňlemäniň esasynda R_x güýji tapalyň:

$$R_x = \frac{P}{g}\ddot{x} \quad \text{ýa-da} \quad R_x = -b\upsilon_0 e^{\frac{-bg}{P}t} = -b\upsilon_x.$$

12.5-nji mesele. Tekiz däl ýylmanak däl gorizontal üstde $\upsilon_0 = 2\ m/s$ başlangyç tizlik bilen gönüçyzykly deň haýallaýan hereket edýän jisim $x = 4\,m$ aralygy geçip saklanýar. Jisimiň ýere görä typma sürtülmesiniň koeffisiýentini kesgitlemeli (*12.3-nji surat*).



12.3-nji surat

Çözülişi. Tizlenmäni a bilen belgiläp hem-de $\ddot{x} = a$ bolýanlygy üçin (12.3) deňligi aşakdaky gönüşde ýazalyň:

$$ma = F_{\text{sür}}. \qquad (1)$$

Indi a tizlenmäni tapmak üçin tizligiň we hereketiň deňlemesini ýazalyň:

$$\upsilon = \upsilon_0 - at, \quad x = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Jisim saklananda, $\upsilon = 0$ bolýanlygy üçin $a = \frac{\upsilon}{t}$. Muny hereket deňlemesinde goýup, t_1 saklanma wagty aşakdaky ýaly tapmak bolýar:

$$x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} \cdot \frac{\upsilon_0}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \upsilon_0 t.$$

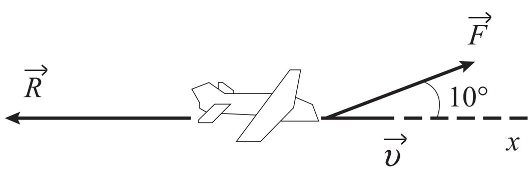
$$t_1 = \frac{2x}{\upsilon_0} = 4s.$$

Tizlenmäni tapalyň: $a = \frac{\upsilon_0}{t_1} = 0,5.$

Jisime täsir edýän güýjüň sürtülme güýji bolany üçin $F = fN$. Bu ýerde $N = P$ normal basyş jisimiň P agramyna deň. Indi (1) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\frac{P}{g} \cdot a = fP, \quad \text{bu ýerden} \quad f = \frac{a}{g} = \frac{0,5}{9,81} = 0,05.$$

12.6-njy mesele. $P = 2000$ *kg* agramly uçar gorizont boýunça $a = 5\ m/s^2$ tizlenme bilen uçup barýar. Şol pursatda onuň tizligi $\upsilon = 200\ m/s$. Howanyň R garşylyk güýji tizligiň kwadratyna proporsional bolup, tizlik $\upsilon = 1\ m/s$ bolanda $R = 0,05\ kg$. Eger wintiň $\overline{F}$ dartyş güýji hereket ugry bilen 10° burçy emele getirýän bolsa, onda onuň ululygyny kesgitlemeli (*12.4-nji surat*).



12.4-nji surat

Çözülişi. $\overline{R}$ güýç $\bar{\upsilon}$ tizlige garşy ugrukdyrylandyr: $R = k \cdot \upsilon^2$. k – proporsionallyk koeffisiýentini meseläniň şertinden tapalyň:

$$0,05 = k \cdot 1, \quad k = 0,05, \quad R = 0,05 \cdot \upsilon^2.$$

Uçaryň öňe (postupatel) hereket edýänligi üçin oňa bir nokat hökmünde garaýarys. (12.1) deňlemäni x oka proýektirläp ýazalyň:

$$ma = F\cos 10° - 0{,}05\,\upsilon^2.$$

F güýji tizligiň ululygy $\upsilon = 200$ m/s bolanda ($t = 0$ pursat üçin) kesgitlemek isleýäris. Munuň üçin kinematikanyň formulalaryndan peýdalanalyň:

$$\upsilon^2 = (\upsilon_0 + at)^2 = (200)^2,$$

$$F = \frac{ma + 0{,}05\upsilon^2}{\cos 10^0} = \frac{\frac{200}{9{,}8}\cdot 5 + 0{,}05\cdot(200)^2}{0{,}98} = 3080\ kg,$$

$$F = 3080\ kg.$$

12.7-nji mesele. m massaly nokat $s = bt$ kanun esasynda R radiusly töwerek boýunça hereket edýär. Şu hereketi emele getirýän güýji kesgitlemeli. s – tebigy (duga) koordinatasy.

Çözülişi. (12.4) formulalardan peýdalanýarys:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b,$$

$$F_\tau = m\ddot{s} = 0, \text{ sebäbi } \dot{s} = \upsilon_\tau = b, \quad \ddot{s} = 0.$$

$$F_n = m\frac{\upsilon^2}{\rho} = m\frac{b^2}{R}, \quad F_b = 0.$$

Şeýlelikde, gözleýän güýjümiz töweregiň merkezine tarap ugrukdyrylandyr.

Egriçyzykli herekete degişli meselelere garalyň.

Eger nokadyň hereket deňlemeleri dekart koordinatalarynda berlen bolsa, onda

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{12.5}$$

bu ýerde x, y, z – nokadyň koordinatalary, t – wagt.

(12.2) formulalardan peýdalanyp, güýjüň koordinata oklaryna proýeksiýalaryny tapmak bolýar:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}. \tag{12.6 }$$

Güýjüň ululygy we ugry aşakdaky formulalardan peýdalanyp tapylýar:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \qquad (12.7)$$

$$\cos(\overline{F}, x) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\overline{F}, y) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\overline{F}, z) = \frac{F_z}{F}. \qquad (12.8)$$

12.8-nji mesele. Material nokadyň agramy 2 *g* bolup, hereketi $x = 3\cos 2\pi t$, $y = 4\sin 2\pi t$ deňlemeler bilen aňladylýar (*x, y sm, t s* hasabynda). Nokada täsir edýän güýjüň proeksiýalaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. Berlen hereket deňlemelerini wagta görä iki gezek differensirläp, ony nokadyň massasyna köpeldip, meseläniň jogabyny tapmak bolýar:

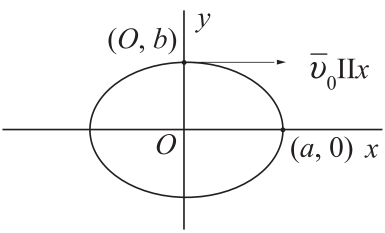
$$\ddot{x} = -12\pi^2 \cos 2\pi t, \quad \ddot{y} = -16\pi^2 \sin 2\pi t,$$

$$F_x = \frac{P}{g}\ddot{x} = -\frac{2}{981} \cdot 12\pi^2 \cos 2\pi t, \quad F_y = -\frac{2}{981} \cdot 16\pi^2 \sin 2\pi t y$$

ýa-da

$$F_x = -\frac{1}{981} \cdot 8\pi^2 x, \quad F_y = -\frac{1}{981} \cdot 8\pi^2 y.$$

12.9-njy mesele. *m* massaly nokat $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips boýunça hereket edýär. Nokadyň tizlenmesi *y* oka parallel. Başlangyç $t = 0$ pursatda $x = a$, $y = b$ bolanda başlangyç tizlik υ_0. Hereket edýän nokada traýektoriýanyň her bir nokadynda täsir edýän güýji kesgitlemeli *(12.5-nji surat)*.



12.5-nji surat

Çözülişi. Şerte görä nokadyň tizlenmesi *y* oka parallel ýa-da *x* oka perpendikulýar. Şonuň üçin $a_x = \ddot{x} = 0$. Başlangyç şertleri ulanyp, iki gezek integrirleýäris:

$\ddot{x} = C_2$; $t = 0$ pursat üçin:

$$\dot{x}_0 = \upsilon_0; \qquad \dot{x} = \upsilon_0;$$

$$x = \upsilon_0 t + C_2$$

$t = C$ pursat üçin $x = 0$,

$$C = 0, \quad x = \upsilon_0 t.$$

Traýektoriýanyň deňlemesinden y tapalyň: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$: ýönekeý matematiki özgertmelerden peýdalanalyň: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$; $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \upsilon_0$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a}\left|\frac{(a^2 - x^2) + x^2}{(a^2 - x^2)}\right| = -\frac{b^4}{a^2y^3};$$

$$F_y = m\ddot{y} = -\frac{\upsilon_0^2 b^4}{a^2 y^3} \cdot m.$$

12.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

12.10-njy mesele. Massasy 280 *kg* bolan lift şahta deň tizlenme bilen düşürilýär. Ol birinji 10 sekuntda 35 *m* ýol geçýär. Liftiň asylan tanapynyň dartylyş güýjüni tapmaly.

Jogaby: 2548 *N*.

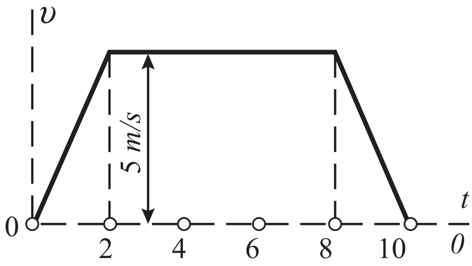
12.11-nji mesele. Üstünde 1,02 *kg* massaly ýük duran gorizontal platforma wertikal boýunça 4 m/s^2 tizlenme bilen aşak düşýär. Platformanyň ýük bilen bilelikde aşak düşýän wagtynda ýüküň platforma näçe basyş edýändigini tapmaly.

Jogaby: 5,92 *N*.

12.12-nji mesele. Stolda duran 3 *kg* massaly jisime ýüp baglanyp, ýüpüň ikinji ujy *A* nokada berkidilýär. Eger dartyş güýji $T = 42$ *N* bolanda ýüp üzülse, jisim wertikal bilen ýokary göterilende ýüpüň üzülmegi üçin *A* nokada nähili tizlenme bermeli?

Jogaby: 4,2 m/s^2.

12.13-nji mesele. Lift kletkasy göterilende tizlikleriň grafigi suratdaky görnüşde bolýar. Kletkanyň massasy 480 *kg*. Aşakdaky 1) $t = 0$-dan $t = 2$ s; 2) $t = 2$ *s*-den $t = 8$ *s* we 3) $t = 8$ *s*-den $t = 10$ *s* çenli wagt aralygynda kletkanyň asylan tanapyna düşýän T_1, T_2 we T_3 dartyş güýçleri kesgitlemeli (*12.6-njy surat*).



12.6-njy surat

Jogaby: $T_1 = 5904$ *N*, $T_2 = 4704$ *N*, $T_3 = 3504$ *N*.

12.14-nji mesele. Uzynlygy 1 *m* bolan ýüpden asylan 0,3 *kg* massaly daş wertikal tekizlikde töwerek çyzýar. Daşyň ýüpi üzýän iň kiçi ω burç tizligini kesgitlemeli; ýüpüň üzülmäge görkezýän garşylygy 9 *N*.

Jogaby: $\omega_{\min} = 4{,}494$ *rad/s*.

12.15-nji mesele. Demir ýoluň egriçyzykly böleginde otludan relslere düşýän basyşyň ýol düşegine perpendikulýar ýönelmegi üçin daşky rels içkä garanyňda belent goýulýar. Aşakdaky maglumatlara garap, daşky relsiň içkä garanyňda näçe belentligini kesgitlemeli. Ýoluň egrilik radiusy 400 *m*, otlynyň tizligi 10 *m/s*, relsleriň arasyndaky uzaklyk 1,6 *m*.

Jogaby: $h = 4{,}1$ *sm*.

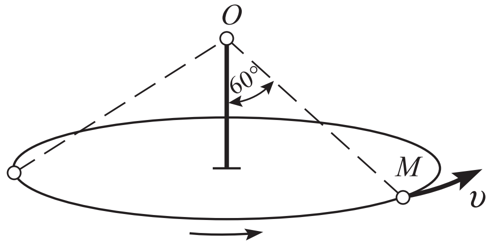
12.16-njy mesele. Ilki göni çyzykly, soňra egri ýolda 20 *m/s* tizlik bilen barýan otlynyň wagonynda bir ýük puržinly terezide çekilýär. Terezi birinji halda 50 *N*-ny, egri ýolda bolsa 51 *N*-y görkezýär. Yoluň egrilik radiusyny kesgitlemeli.

Jogaby: 203 *m*.

12.17-nji mesele. Massasy 0,2 *kg* bolan daş 1 *m* uzynlykdaky ýüpüň ujundan asylan. Daş iterilende 5 *m/s* deň gorizontal tizlik alýar. Daş iterilenden soň ýüpdäki dartylyş güýjüni kesgitlemeli.

Jogaby: 6,96 *N*.

12.18-nji mesele. Gozganmaýan O nokada baglanan, uzynlygy 30 *sm* bolan ýüpden asylan 0,102 *kg* massaly M ýük konus görnüşli maýatnigi emele getirip, gorizontal tekizlikde töwerek çyzýar, şeýle hem ýüp wertikal bilen 60 burç emele getirýär. Ýüküň υ tizligini we ýüpdäki T dartylyş güýji kesgitlemeli (*12.7-nji surat*).



12.7-nji surat

Jogaby: $\upsilon = 2{,}1\ m/s, \quad T = 2\ N.$

12.19-njy mesele. Massasy 1000 *kg* bolan awtomobil güberçek köprüde $\upsilon = 10\ m/s$ tizlik bilen hereket edýär; köprüniň ortasynyň egrilik radiusy $\rho = 50\ m$. Awtomobiliň köprüniň ortasyndan geçen pursaty köprä düşýän basyşy kesgitlemeli.

Jogaby: 7800 *N*.

12.20-nji mesele. Göteriji maşynyň göterilýän kabinasyndaky puržinly terezide jisim çekilýär. Kabinanyň deňölçegli hereketinde puržinly tereziniň görkezişi 50 *N*, tizlenýän hereketinde 51 *N* deň. Kabinanyň tizlenmesini tapmaly.

Jogaby: 0,196 m/s^2.

12.21-nji mesele. Tramwaý wagonynyň kuzowynyň massasy 10 000 *kg*. Teležkanyň tigirler bilen bilelikdäki massasy 1000 *kg*. Eger wagonyň kuzowy hereket wagtynda ressorlaryň üstünde $x = 0{,}02 \sin 10t\ m$ kanuna görä wertikal boýunça garmoniki yrgyldyly hereket etse, wagonyň gorizontal gönüçyzykly ýol böleginde relse görkezýän iň uly we iň kiçi basyşyny kesgitlemeli.

Jogaby: $N_{max} = 12{,}78 \cdot 10^4 N, \quad N_{min} = 8{,}78 \cdot 10^4 N.$

12.22-nji mesele. Magdany baýlaşdyrýan galbir $a = 5\ sm$ amplituda bilen wertikal boýunça garmoniki yrgyldyly hereket edýär.

Galbir yrgyldylarynyň galbirdäki magdan bölekleri ondan aýrylyp, ýokaryk zyňylar ýaly iň kiçi k ýygylygyny tapmaly.

Jogaby: $k = 14\ rad/s$.

12.23-nji mesele. Massasy 2,04 *kg* bolan jisim gorizontal göni çyzyk boýunça $x = 10 \sin \frac{\pi}{2} t\,m$ kanuna görä garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Jisime täsir edýän güýç bilen x koordinata arasyndaky baglanyşygy we bu güýjüň iň uly bahasyny tapmaly.

Jogaby: $F = -5{,}033x\ N$, $F = 50{,}33\ N$.

12.24-nji mesele. Massasy 100 g bolan şarjagaz agyrlyk güýjüniň täsirinde aşak gaçanda howanyň garşylygyna uçraýar. Şarjagazyň hereketi: $x = 4{,}9\,t - 2{,}45\,(1 - e^{-2t})$ deňleme bilen aňladylýar, bu ýerde x – metr, t – sekunt hasabynda. Ox ok wertikal boýunça aşak ugrugan. Howanyň R garşylyk güýjüni şarjagazyň υ tizligi arkaly aňlatmaly.

Jogaby: $R = 0{,}98\,(1 - e^{-2t})\ N = 0{,}2\,\upsilon\ N$.

12.25-nji mesele. Rendeleýji stanogyň stolunyň massasy 700 *kg*, işlenýän jisimiň massasy 300 *kg*. Stanok işe girizilende ilkinji 0,5 *s* wagt geçýänçä stol deňtizlenýän hereket edýär. Bu wagt aralygynda sürtilme koeffisiýenti $f_1 = 0{,}14$. Şondan soňky wagtda bolsa stol $\upsilon = 0{,}5\ m/s$ hemişelik tizlik bilen hereketlenýär. Bu ýagdaýda sürtülme koeffisiýenti $f_2 = 0{,}07$. Stoly deňtizlenýän herekete getirmek, soňra bolsa oňa deňölçegli hereket bermek üçin gerek bolan güýjüň mukdaryny tapmaly.

Jogaby: $F_1 = 2372\ N$, $F_2 = 686\ N$.

12.26-njy mesele. Üstündäki ýüki bilen massasy 700 *kg* bolan wagonetka $\alpha = 15°$ ýapgytlykdaky asma (kanatly) demir ýol boýunça $\upsilon = 0{,}5\ m/s$ tizlik bilen aşak düşýär. Wagonetka deňölçegli hereket bilen aşak düşeninde we ony saklamakda kanatda döreýän dartylyş güýji kesgitlemeli; tormozlama wagty $t = 4\ s$, herekete täsir ediji garşylygyň umumy koeffisiýenti $f = 0{,}015$. Tormozlama wagtynda wagonetka deňhaýallaýan hereket edýär.

Jogaby: $T_1 = 1676\ N$, $T_2 = 1956\ N$.

12.27-nji mesele. Massasy 1000 *kg* bolan ýük teležka bilen bilelikde köpri kranynyň gorizontal fermasy boýunça $\upsilon = 1\ m/s$ tizlik bilen hereket edýär. Ýüküň agyrlyk merkezinden ýük asylan nokada çenli aralyk $l = 5$ *m*. Teležka duýdansyz saklananda ýük hereketini dowam etdirýär we asylan nokadynyň daşynda yrgyldap başlaýar. Bu yrgyldyda tanapdaky dartylyş güýjüniň iň uly bahasyny tapmaly.

Jogaby: $T = 10\,000$ *N*.

12.28-nji mesele. Asma ýoluň wagony radiusy $R = 30$ *m* bolan aýlanma ýolda $\upsilon = 10$ *m/s* tizlik bilen hereket edende wagonyň wertikaldan α gyşaryşyny we asma ýoldaky relse düşýän N basyşy kesgitlemeli. Gorizontal asylan rels boýunça hereket edýän daýanç nokatlaryny birleşdirýän kesimiň ortasyndan wagonyň agyrlyk merkezine çenli aralyk $l = 1$ *m*, wagonyň massasy 1000 *kg*.

Jogaby: $\alpha = 18°47'$; $N = 15\,527$ *N*.

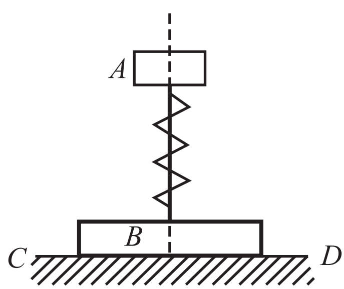
12.29-njy mesele. Lokomotiwsiz, otlynyň massasy $2 \cdot 10^5$ *kg*. Ol gorizontal ýolda deňtizlenýän hereket edip, hereket başlanandan 60 *s*-den soň 15 *m/s* tizlige eýe bolýar. Eger sürtülme güýji otlynyň agramynyň 0,005 bölegine deň bolsa, onda batlanyş döwründe lokomotiw bilen otlynyň arasyndaky dartgyçdaky dartylma güýji tapmaly.

Jogaby: 59 800 *N*.

12.30-njy mesele. Massasy 6000 *kg* bolan ýük awtomobili 6 *m/s* tizlik bilen paroma girýär. Paroma giren pursatynda tormozlanan awtomobil 10 *m* geçip saklanýar. Awtomobiliň hereketini deňhaýallaýan diýip hasaplap, paromy kenara baglap goýlan iki sany tanapyň her birindäki dartylyş güýji tapmaly. Mesele çözülende paromyň massasyny we tizlenmesini hasaba almaly däl.

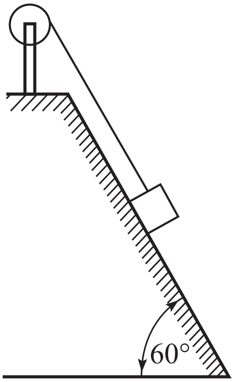
Jogaby: Her tanapdaky dartyş güýji 5 400 *N*.

12.31-nji mesele. Agramlary $P_A = 20 N$ we $P_B = 40$ *N* bolan *A* we *B* ýükler, suratdaky ýaly, puržin bilen bir-birine birleşdirilen. *A* ýük wertikal göni boýunça 1 *sm* amplituda we 0,25 *s* period bilen erkin yrgyldyly hereket edýär. *A* we *B* ýükleriň *CD* daýanç üste düşýän iň uly we iň kiçi basyşlaryny hasaplamaly (*12.8-nji surat*).



12.8-nji surat

Jogaby: $R_{max} = 72{,}8$ *N*, $R_{min} = 47{,}2$ *N*.



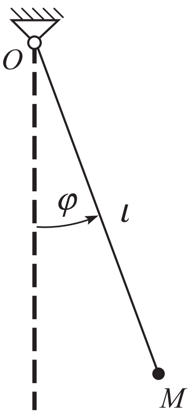
12.9-njy surat

12.32-nji mesele. Massasy $M = 600$ *kg* bolan ýük gorizont bilen 60° burç emele getirýän ýapgyt şurf boýunça, worotyň kömegi bilen göterilýär. Şurfuň üsti bilen sürtilme koeffisiýenti 0,14-e deň. Radiusy 0,2 *m* bolan worot $\varphi = 0{,}4\ t^3$ kanun esasynda aýlanýar. Trosyň dartylyşyny wagtyň funksiýasy ýaly kesgitlemeli. Şeýle hem, ýük göterilip başlananyndan 2 *s* geçenden soň dartylyş güýjüniň mukdaryny tapmaly (*12.9-njy surat*).

Jogaby: $T = (5{,}68 + 0{,}288\ t)$ *kN*, $t = 2s$ bolanda $T = 6{,}256$ *kN*.

12.33-nji mesele. Uçar dik aşak uçup, tizligini 300 *m/s* ýetirýär, şondan soň uçarman wertikal tekizlikde radiusy $R = 600$ *m* bolan töweregiň dugasyny çyzyp, uçary dartgynly nokatdan (pikeden) alyp çykýar. Uçarmanyň massasy 80 *kg*. Uçarmanyň kürsüsine täsir edýän iň uly güýç näçe?

Jogaby: 12 784 *N*.



12.10-njy surat

12.34-nji mesele. Agramy 10 *N* bolan *M* ýük $l = 2\,m$ uzynlykdaky trosdan asylyp, tros bilen birlikde $\varphi = \dfrac{\pi}{6}\sin 2\pi t$ deňlemä laýyklykda yrgyldaýar.

Bu ýerde φ – trosuň wertikaldan gyşarma burçy (radian hasabynda), t – sekunt hasabyndaky wagt.

Ýüküň ýokarky we aşaky ýagdaýlarynda trosuň T_1 we T_2 dartylyşlaryny kesgitlemeli (*12.10-njy surat).*

Jogaby: $T_1 = 32{,}1$ *N*, $T_2 = 8{,}65$ *N*.

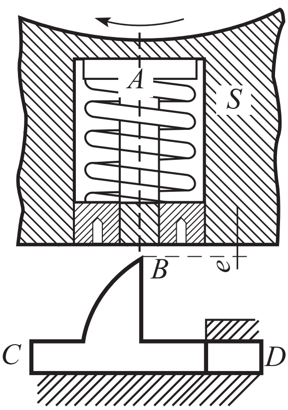
12.35-nji mesele. Welosipedçi 5 *m/s* tizlik bilen radiusy 10 *m* bolan töwerek çyzýar. Welosipediň orta tekizliginiň wertikaldan gyşarma burçuny hem-de welosipediň şinalary bilen ýol arasynda döreýän we welosipediň durnuklylygyny üpjin etmek üçin zerur bolan iň kiçi sürtülme koeffisiýenti tapmaly.

Jogaby: 14°20′; 0,255.

12.36-njy mesele. Welosiped trekiniň egri böleklerinde öwrümler (wiražlar) bar. Olaryň kese-kesegi ýapgyt göni çyzyk bolup, trekiň daşky çeti içkisinden belentde ýerleşen. Eger rezin şinasynyň trewgiň üstüne sürtülme koeffisiýenti f deň bolsa, gorizonta α burç bilen gyşaran R radiusly wiražda welosipedi haýsy iň uly we iň kiçi tizlik bilen sürmek mümkin?

Jogaby: $\upsilon_{\min} = \sqrt{gR\dfrac{\text{tg}\alpha - f}{1 + f\text{tg}\alpha}}, \quad \upsilon_{\max} = \sqrt{gR\dfrac{\text{tg}\alpha + f}{1 - f\text{tg}\alpha}}.$

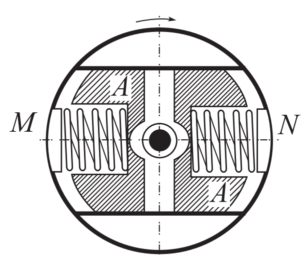
12.37-nji mesele. Mahowikler pytranda betbagtçylyk ýüze çykmaz ýaly mahowigiň gurşawyna A jisim ýerleşdirilýär. Bu jisimi mahowigiň içindäki S puržin saklap durýar. Mahowigiň tizligi ýetjek derejesine ýetenden soň A jisimiň ujy CD sürülmäniň B çykydyna degýär we sürilme maşynyny bugdan kesýär. A jisimiň massasy 1,5 *kg*, mahowikden B çykyda çenli e aralyk 2,5 *sm*, mahowigiň aýlanmasynyň burç tizliginiň çägi 120 *aýl/min*. A jisimiň massasy suratda görkezilen mahowigiň aýlanma okundan 147,5 *sm* aralykdaky nokatda toplanan diýip hasap edip, puržin üçin zerur bolan c berklik koeffisiýentini, ýagny puržiny 1 *sm* süýndürmek üçin gerek bolan güýjüň mukdaryny kesgitlemeli (*12.11-nji surat*).



12.11-nji surat

Jogaby: 145,6 *N/sm*.

12.38-nji mesele. Regulýatorda massasy 30 *kg* bolan A daşlar bar. Olar puržinlar arkaly M we N nokatlar bilen birikdirilip, MN gorizontal göni çyzyk boýunça typýarlar. Daşlaryň agyrlyk merkezleri puržinlaryň uçlaryna gabat gelýär. Her puržinyň ujundan *(12.12-nji surat)* tekizlige perpendikulýar O oka çenli aralyk puržinlar dartylmadyk ýagdaýynda 5 *sm* bolup, puržinlaryň uzynlygyny 1 *sm* üýtgetmek üçin 200 N güýç talap edilýär. Regulýator O okuň

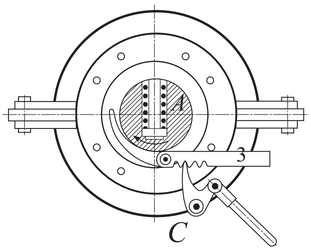


12.12-nji surat

daşynda deňölçegli aýlanyp, burç tizligi 120 *aýl/min* bolan pursatda daşlaryň agyrlyk merkezinden O oka çenli aralygy kesgitlemeli.

Jogaby: 6,55 *sm.*

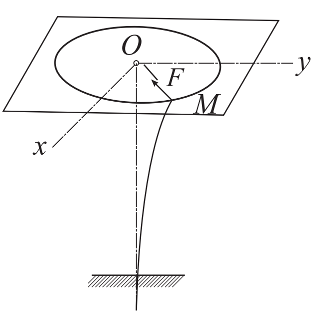
12.39-njy mesele. Bug turbinalarynyň gorag ýazdyrgyçlary massasy m = 0,225 *kg* bolan A barmakdan ybarat. Barmak turbinanyň walynyň öň böleginde walyň okuna perpendikulýar edilip oýulan deşikde ýerleşip, ony puržin içki tarapa itekläp durýar. Turbina adaty tizlik bilen aýlananda n = 1500 *aýl/min* bolup, barmagyň agyrlyk merkezi walyň aýlanma okundan l = 8,5 *mm* daşlykda durýar. Aýlanma sany 10% artanda barmak puržinyň reaksiýasyny ýeňýär we özüniň adaty ýagdaýyndan x = 4,5 *mm* süýşüp, B ryçagyň ujuna degýär hem-de C gaňyrçagy boşadýar. C gaňyrçak turbinadaky bug paýlaýjy mehanizmiň klapanyny berkidiji puržin ryçaglar ulgamy arkaly baglanyşdyrýar. Puržinyň reaksiýasyny onuň gysylyşyna proporsional diýip hasaplap, puržinyň gatylygyny, ýagny ony 1 *sm* gysmak üçin gerek bolan güýji kesgitlemeli (*12.13-nji surat*).



12.13-nji surat

Jogaby: c = 89,2 *N/sm*.

12.40-njy mesele. Massasy m bolan şarjagaz aşaky ujy gozganmaýan diregde gysylyp goýlan wertikal maýyşgak sterženiň ujuna berkidilen. Steržen özüniň deňagramlylykda duran wertikal ýagdaýyndan sähelçe süýşende şarjagazyň merkezi O gorizontal tekizlikde hereket edýär diýip hasaplamak mümkin. Oxy tekizlik şarjagazyň merkeziniň ýokarky deňagramlylyk ýagdaýyndan geçýär. Özüniň koordinata başlangyjy üçin kabul edilen deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarylan şarjagaz $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$ deňlemeler boýunça (bu ýerde a, b, k – hemişelik ulululyklar) hereket edýär diýip, egilen maýyşgak sterženiň şarjagaza täsir edýän güýjüniň üýtgeme kanunyny kesgitlemeli (*12.14-nji surat).*



12.14-nji surat

Jogaby: $F = mk^2r$, bu ýerde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

12.4. Nokadyň dinamikasynyň ikinji esasy meselesi. Nokada täsir edýän güýç berlende onuň hereket kanunyny tapmak. Mysaly meseleler

Hereket edýän nokadyň m massasy we oňa täsir edýän $\overline{F}(F_x, F_y, F_z)$ güýç berlende, nokadyň $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, hereket deňlemelerini kesgitlemeli. Bu mesele (12.2) differensial deňlemeleri integrirläp çözülýär. (12.2) sistema integrirlenende, nokadyň hereket deňlemelerini alarys:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, ..., C_6), \\ y = y(t, C_1, C_2, ..., C_6), \\ z = z(t, C_1, C_2, ..., C_6), \end{cases} \tag{12.9}$$

bu ýerde C_1, C_2,..., C_6 – integrirlemäniň üýtgemeýän ululyklary bolup, olar meseläniň başlangyç şertlerinden kesgitlenilýär. Başlangyç şertler bolup, $t = 0$ pursatda

$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$ (nokadyň orny),

$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0$ (nokadyň tizligi) hyzmat edýär.

Eger differensial deňlemeleriň integrirlenmesi kwadraturalara getirilýän bolsa, onda bu kwadraturalary degişli predelleri goýup, hasaplamak hem bolýar. Bu ýagdaýda kesgitli integrallary hasaplamaly bolýar. Bu integrallaryň aşaky predellerini meseläniň başlangyç şertlerinden almaly. Mesele şeýle çözülende, integrirlemäniň üýtgemeýän ululyklaryny (C_1, ..., C_6) hasaplamak gerek bolmaýar. Iş ýüzünde iki usuldan hem peýdalanylýar. I.W. Meşerskiniň meseleler ýygyndysyndaky şu tema degişli meseleleriň ählisi diýen ýaly iki görnüşli differensial deňlemelere, ýagny üýtgeýän ululyklary bölünýän deňlemelere ýa-da ikinji tertipli üýtgemeýän koeffisiýentli çyzykly deňlemelere getirilýändigini belläp geçmek zerurdyr.

Şu paragrafa degişli meseleleri esasy aşakdaky iki görnüşe bölmek bolýar:

1. Erkin nokadyň gönüçyzykly hereketine degişli meseleler.
2. Erkin nokadyň egriçyzykly hereketine degişli meseleler.

Olara aýry-aýrylykda seredeliň.

a) Gönüçyzykly hereket

Bu meselelerde nokadyň gönüçyzykly hereketine garalýar. $\overline{F}(F_x,F_y,F_z)$ güýjüň täsir çyzygyny x oky hökmünde kabul edip, nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$m\ddot{x} = F_x. \tag{12.10}$$

Umumy halda F_x güýç (t) wagta, (x) koordinata we $(\upsilon = \dot{x})$ tizlige baglydyr:

$$F_x = F_x(t,x,\dot{x}). \tag{12.11}$$

Deňlemäni $F_x = F_x(t,x,\dot{x})$ bolanda integrirlemek belli derejede matematiki kynçylyklary döredýär.

Eger F_x güýç üýtgemän $F_x = const$ ýa-da diňe wagta ($F_x = F_x(t)$, diňe koordinata ($F_x - F_x(x)$) ýa-da diňe tizlige ($F_x - F_x(\upsilon)$) baglylykda üýtgese, onda (12.2) deňlemeler kwadraturalara getirilýär.

Şu görnüşe degişli meseleler dört topara bölünýär.

Birinji topar

Berlen maddy nokada goýlan güýçleriň deňtäsiredijisi üýtgemeýär, ýagny $F_x = const$.

12.41-nji mesele. Agyr jisim gorizontal ugur bilen $a = 30°$ burç emele getirýän ýylmanak tekizlik boýunça aşak inýär. Eger onuň başlangyç tizligi $\upsilon_0 = 2$ *m/s* bolsa, onda jisimiň $s = 9{,}6$ *m* aralygy näçe (T) wagtda geçýändigini tapmaly *(12.15-nji surat)*.

Çözülişi. x oky suratdaky ýaly alyp, (12.2) differensial deňlemäni ýazalyň:

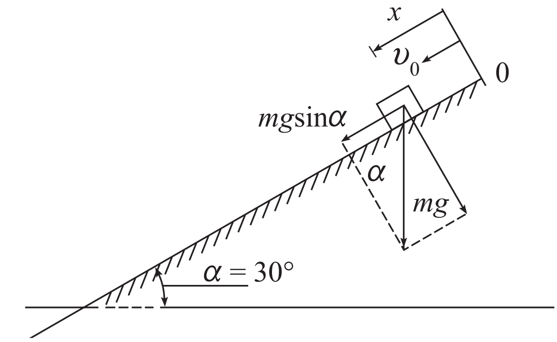
$$m\ddot{x} = mg\sin a \quad \text{ýa-da} \quad \ddot{x} = \frac{g}{2}.$$

Bu deňlemäni iki gezek integrirläp, alnan aňlatmanyň hemişekilerini tapmak üçin başlangyç

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = \dot{\upsilon}_0 = 2\ m/s$$

şertlerden peýdalanalyň:

$$\ddot{x} = \frac{d\upsilon}{dt} = 0{,}5g, \int d\upsilon = 0{,}5g\int dt, \quad \upsilon_0 = 0{,}5gt + C_1. \tag{1}$$



12.15-nji surat

Başlangyç şerte görä $\upsilon_0 = 0 + C_1$.

Bu bahany (12.12) deňlemede goýup, alarys: $\upsilon \dfrac{dx}{dt} = 0,5gt + \upsilon_0$.

Üýtgeýän (x,t) ululyklary deňligiň iki tarapyna paýlap, deňlemäni integrirleýäris:

$$Sdx = 0,5g\int tdt + \upsilon_0 \int dt, \quad x = \frac{0,5gt^2}{2} + \upsilon_0 t + C_2. \qquad (2)$$

Başlangyç şertlerden $C_2 = 0$ bolýandygyny anyklaýarys. (2) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys: $x = \dfrac{gt^2}{4} + \upsilon_0 t$.

Bu deňlemede x-iň ornuna s-i goýup, gözleýän T wagty tapýarys:

$$s = \frac{gt^2}{4} + \upsilon_0 T,$$

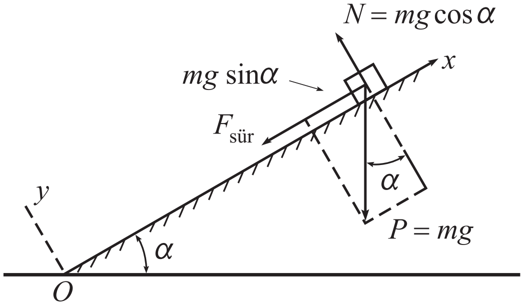
$$T^2 = \frac{4\upsilon_0^2}{g} \cdot T - \frac{4s}{g} = 0.$$

Deňlemäni çözýäris: $T_{1,2} = -\dfrac{2\upsilon_0}{g} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2\upsilon_0}{g}\right)^2 + \dfrac{4s}{g}}$.

Diňe položitel çözgüdi alýarys: $T = 1,61$ s.

12.42-nji mesele. P agramly jisim gorizont bilen $\alpha = 30°$ burç emele getirýän ýylmanak däl ýapgyt tekizlik bilen ýokary göterilýär. Nokadyň başlangyç tizligi $\upsilon_0 = 15$ m/s. Sürtülme koeffisiýenti $f = 0,1$.

Nokat togtaýança haýsy (s) aralygy geçer? Ol aralygy nokat näçe (T) wagtda geçer?



12.16-njy surat

Çözülişi. 12.16-njy suratda koordinatalaryň başlangyjy nokadyň herekete başlaýan ýerinde ýerleşdirilen. Başlangyç şertler: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \upsilon_0$. Nokada täsir edýän güýçleriň x oka proeksiýalaryny hasaba alyp, onuň differensial deňlemesini ýazýarys:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha,$$

bu ýerde $fmg\cos\alpha = F_{\text{sür}}$ – sürtülme güýji.

Üýtgeýän ululyklary deňligiň iki tarapyna bölüp, kesgitli integraly hasaplalyň:

$$\int_{\upsilon_0}^{0} d\upsilon = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\int_0^T dt;$$

$$T = \frac{\upsilon_0}{g(\sin a + f\cos a)} = 2{,}61\, s.$$

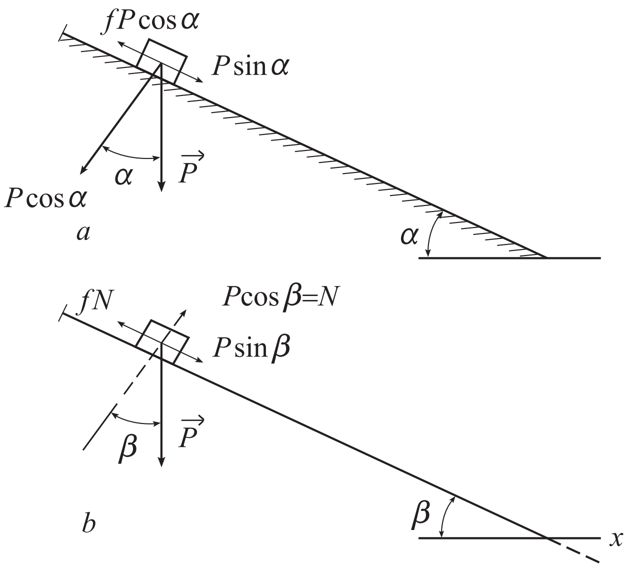
s aralygy tapmak üçin (1) deňligiň çep tarapyny özgerdeliň:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{\upsilon d\upsilon}{dx}, \quad \text{onda}$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = -g(\sin a + f\cos a)\int_0^s dx,$$

$$\upsilon_0^2 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)s; \quad s = \frac{\upsilon_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 19{,}55\, m.$$

12.43-nji mesele. Gorizont bilen $\alpha = 10°$ burç emele getirýän gönüçyzykly demir ýol arkaly wagon aşaklygyna tigirlenýär. Wagonyň tizligi (υ = const) üýtgemeýär *(12.17-nji a surat).* Şol wagon gorizont bilen $\beta = 15°$ burç emele getirýän demir ýol arkaly aşaklygyna tigirlenýär *(12.17-nji b surat)*. $T = 20$ *s* geçenden soň wagonyň tizlenmesini, tizligini we geçjek ýoluny kesgitlemeli. Wagon başlangyç tizliksiz hereket edýär.



12.17-nji a, b suratlar

Çözülişi. Her surat üçin aýratyn deňleme düzeliň.

1. 12.17-nji *a* surat üçin υ = const, $a = \ddot{x} = \dot{\upsilon} = 0$.

Differensial deňlemäni ýazalyň:

$$ma = P\sin a - fP\cos a,\ 0 = \sin a - f\cos a,$$

$$a = 0 \text{ bolany üçin}$$

$$f = \mathrm{tg}\alpha,$$

bu ýerde f – typma sürtülme koeffisiýenti, ölçegsiz san.

2. 12.17-nji *b* surat üçin ýokarka meňzeş deňleme düzeliň. Bu ýagdaýda nokadyň tizlenmesini a_1 bilen belläp, alarys:

$$ma_1 = P\sin\beta - fP\cos\beta.$$

$P = mg,\ f = \text{tg}\alpha$ bahalary deňlemede ýerinde goýup, a_1 tizlenmäni tapalyň:

$$a_1 = g(\sin\beta - f\cos\beta) = g(\sin\beta - \text{tg}\alpha \cdot \cos\beta) =$$

$$= g\frac{(\sin\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \sin\alpha)}{\cos\alpha} = g\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} = 0{,}87\ m/s^2.$$

Tizligi tapmak üçin bir gezek integrirleýäris:

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon - g\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\int_0^T dt,\ \ \upsilon = g\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}T = 1{,}74\ m/s;$$

$$\upsilon = 1{,}74\ m/s.$$

Ýokarka meňzeşlikde tizligi integrirläp, geçilen ýoly kesgitlemek bolar:

$$S = g\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{T^2}{2} = 17{,}4\ m.$$

Ikinji topar

Täsir edýän güýç diňe wagta (t) bagly, ýagny (12.10) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F(t). \tag{12.12}$$

Üýtgeýän ululyklary bölüp, alarys: $d\dot{x} = \frac{1}{m}F(t)dt$. Alnan deňlemäni integrirläliň: $x = \frac{1}{m}\int F(t)dt + C_1$,

bu ýerde $\int F(t)dt$ – asyl funksiýa.

Deňlemäni ýene bir gezek integrirläp, alalyň:

$$x = \frac{1}{m}\int\left[\int F(t)dt\right] + C_1 t + C_2. \tag{12.13}$$

12.44-nji mesele. e elektrik zarýadyny äkidýän m massaly bölejik $E = A \sin kt$ ($A,\ k$ – hemişelik ululyklar) üýtgeýän naprýaženiýeli birjynsly elektrik meýdanynda ýerleşendir. Elektrik meýdanynda bölejige täsir edýän güýç E naprýaženiýäniň ugruna ugrukdyrylan $F = eE$ güýç belli bolanda bölejigiň hereketini kesgitlemeli. Agyrlyk güýjüniň täsirini hasaba almaly däl. Bölejigiň başlangyç ornuny koordinatalaryň başlangyjy diýip almaly. Bölejigiň başlangyç tizligi nola deň.

Çözülişi. Başlangyç şertler $t=0, x_0=0, \dot{x}_0=0$. (1)

Differensial deňlemäni ýazalyň: $m\ddot{x}=eE, \quad m\ddot{x}=eA\sin kt$,

$$\int d\dot{x}=\frac{eA}{m}\int \sin ktdt, \quad \dot{x}=-\frac{eA}{mk}\cos kt+C_2. \tag{2}$$

Başlangyç şertlerden peýdalanalyň:

$$0=-\frac{eA}{mk}\cos 0+C_1; \quad C_1=\frac{eA}{mk}.$$

Bu bahany (2) deňlikde goýup, ýene bir gezek integrirläliň:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=-\frac{eA}{mk}\cos kt+\frac{eA}{mk},$$

$$\int dx=-\frac{eA}{mk}\int \cos ktdt+\frac{eA}{mk}\int dt,$$

$$x=-\frac{eA}{mk}\sin kt+\frac{eA}{mk}t+C_2.$$

Başlangyç şerte görä $C_2=0$.

Şeýlelikde nokadyň hereket deňlemesini alarys:

$$x=\frac{eA}{mk}\left(t-\frac{\sin xt}{k}\right).$$

12.45-nji mesele. Tramwaý sürüji kem-kemden reostady ýazdyryp, motoryň dartyş güýjüni noldan başlap, wagta görä her sekuntda 120 *kg* artdyrýar. Wagonyň agramy $P = 10$ *t*, sürtülme garşylygy üýtgemeýär we ol 0,2 *m* deň. Wagonyň başlangyç tizligi nola deň bolsa, onuň hereket deňlemesini kesgitlemeli.

Çözülişi. Wagona goýlan güýç $F=120\,t-200$ *kg*.

Bu deňlikden görnüşi ýaly, hereket $F = 0$ pursatda, ýagny $t_1=\frac{200}{120}=\frac{5}{3}$ sekuntda başlaýar. Şoňa çenli motoryň dartyş güýji garşylygy ýeňmäge sarp edilýär. Bu ýerden aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\frac{P}{g}\frac{d\dot{x}}{dt}=120t-200, \quad \int d\dot{x}=\frac{120g}{P}\int\left(t-\frac{5}{3}\right)dt,$$

$$\dot{x} = \frac{120g}{2p}\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + C_1, \tag{1}$$

Başlangyç şertler: $t_1 = \frac{5}{3} \upsilon = \dot{x} = 0, \quad x = 0.$ (2)

(2) şertden peýdalanylsa, $C_1 = 0$ bolýar. Diýmek,

$$\dot{x} = \frac{120g}{2P}\left(t - \frac{5}{3}\right)^3.$$

Alnan deňlemäni integrirläp, alarys: $x = \frac{120g}{2 \cdot P \cdot 3}\left(t - \frac{5}{3}\right)^3 + C_2.$

Başlangyç şerte görä $C_2 = 0$ bolsa, onda aşakdaky deňlemäni alarys:

$$x = 0{,}01962\left(t - \frac{5}{3}\right)^3 m.$$

12.46-njy mesele. m massaly nokat $F = F_0 \cos \omega t$ kanun esasynda üýtgeýän güýjüň täsiri astynda gönüçyzykly hereket edýär. Bu ýerde F_0 we ω – hemişelik ululyklar. $t = 0$ bolanda başlangyç şertler: $x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = \upsilon_0$. Nokadyň hereket deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. x oky nokadyň hereket edýän gönüsinde ýerleşdirip, (12.12) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_0 \cos \omega t \text{ ýa-da } \int d\dot{x} = \frac{F_0}{m}\int \cos \omega_0 t dt \text{ ýa-da}$$

$$\dot{x} = \frac{F_0}{mk}\sin \omega t + C_1.$$

Başlangyç şertden C_1-i tapalyň. $\upsilon_0 = C_1$. Onda

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{mk}\sin \omega t + \upsilon_0,$$

$$\int dx = \int\left(\frac{F_0}{mk}\sin \omega t + \upsilon_0\right)dt = -\frac{F_0}{mk^2}\cos \omega t + \upsilon_0 t + C_2.$$

Başlangyç şertden C_2-ni tapalyň: $0 = -\frac{F_0}{mk^2} + C_2, C_2 = \frac{F_0}{mk^2}.$

Şeýlelikde $x = \frac{F_0}{mk^2}(1 - \cos \omega t) + \upsilon_0 t.$

Üçünji topar

Güýç diňe nokadyň ornuna (koordinatasyna) bagly, $Fx = F(x)$. Onda (12.10) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{12.14}$$

$\ddot{x}$ tizlenmäni özgerdip, alarys: $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \upsilon\dfrac{d\upsilon}{dx}$,

Onda (12.10) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\upsilon d\upsilon = \frac{1}{m}F(x)dx.$$

Ýokarky deňlemäni integrirläliň: $\upsilon^2 = \dfrac{2}{m}\int(F(x)dx) + C_1$.

Tizligiň proýeksiýasy arkaly aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\upsilon\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1}.$$

(Köküň öňündäki alamat garalýan pursatda nokadyň hereket ugruna görä kesgitlenilýär. Mysal üçin, eger $x > 0$ bolsa «plýus» alamaty, $x < 0$ bolsa «minus» alamaty bilen alynýar.)

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1}}.$$

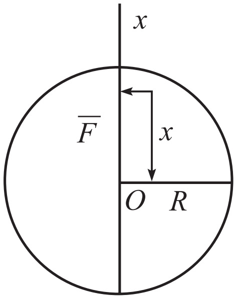
Integrirläp aşakdaky deňlemäni alarys:

$$t = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1}} + C_2 = \Phi(x, C_1, C_2).$$

Bu deňlemäni x görä çözüp, nokadyň hereket deňlemesini tapmak bolar:

$$x = \varphi\,(t, C_1, C_2). \tag{12.15}$$

12.47-nji mesele. Ýer togalagynyň içinde dartyş güýjüniň, hereket edýän nokadyň Ýeriň merkezinden aradaşlygyna proporsionaldygy hem-de onuň merkeze ugrukdyrylandygy belli bolanda, Ýeriň merkezinden geçýän guman edilýän gönüçyzykly kanalda hereket edýän agyr şaryň hereketini kesgitlemeli. Şar Ýeriň üstünden kanala başlangyç tizliksiz goýberlen. Şaryň Ýeriň merkezinden geçendäki tizligini we merkeze çenli hereketiniň wagtyny görkezmeli.



12.18-nji surat

Ýeriň radiusy $R=637\cdot10^6 sm$. Ýeriň üstünde agyrlyk güýjüniň tizlenmesini $g = 980\ sm/s^2$ diýip almaly.

Çözülişi. Mesele 12.18-nji suratdan peýdalanyp, çözülýär. Täsir edýän güýç x aralyga proporsional bolany üçin $|\overline{F}| = \mu|x|$.

μ – proporsionallyk koeffisiýentini $x = R$ bolanda $F = mg$ bolýan şert boýunça tapalyň.

$\mu = \frac{mg}{R}x$ tapýarys. Şonuň üçin $F_x = -\frac{mg}{R}x$.

$m\ddot{x} = -\frac{mg}{R}x$ ýa-da $k^2 = \frac{g}{R}$ diýip belläp $\ddot{x} + k^2x = 0$ (1)

deňlemäni alýarys.

Başlangyç şertler: $t = 0,\ x_0 = R,\ \dot{x}_0 = 0.$ (2)

Köküň öňündäki alamat garalýan pursatda nokadyň hereket ugruna görä kesgitlenilýär, ýagny eger $\dot{x} > 0$ bolsa «plus» alamaty, $\dot{x} < 0$ bolsa «minus» alamaty bilen alynýar. $C_1 = x_0 = R$, $C_2 = \frac{\upsilon_0}{k} = 0$ bolanda, onuň çözüwi aşakdaka deňdir. $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$. Bu ýerden alarys:

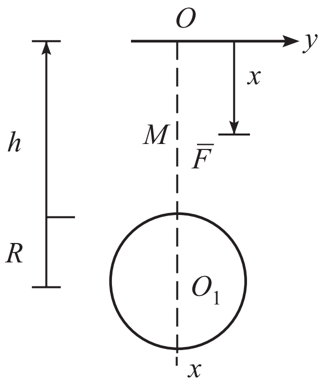
$$x = R\cos kt \tag{3}$$

Bu nokadyň hereket deňlemesidir.

$x=0$ bolanda, ýagny $\cos kt = 0$, $kt^* = \frac{\pi}{2}$ ýa-da $t^* = \frac{\pi}{2k}$ pursatda nokat Ýeriň merkezinde bolýar. Bu t^* pursady $\dot{x} = -Rk\sin kt$ tizligiň bahasyna goýup, 0 nokatdaky tizligi tapmak bolar:

$$|x_{t=t^*}| = Rk = R\sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{gR} = 7{,}9\ km/s.$$

12.48-nji mesele. Jisim ýere h belentlikden başlangyç tizliksiz gaçýar. Howanyň garşylygyny hasaba alman, Ýeriň dartyş güýjüni bolsa jisimiň Ýeriň merkezinden aradaşlygynyň kwadratyna ters proporsional diýip alýarys. Jisim ýeriň üstüne haýsy tizlik bilen gaçar? Ýeriň radiusy R-e, ýeriň üstünde agyrlyk güýjüniň tizlenmesi g deň.



12.19-njy surat

Çözülişi. Koordinatalar sistemasyny (x oky) 12.19-njy suratda görkezilişi ýaly alalyň. Meseläniň şertinden peýdalanyp, F güýjüň ululygyny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$F = \mu \frac{1}{|MO_1|^2} \quad \text{ýa-da} \quad F = \mu \frac{1}{(R+h-x)^2}.$$

Nokat ýeriň üstünde ýerleşdirilende ($x = h$ bolanda) F güýç nokadyň agramyna, ýagny mg deň bolýar. Şu şertden peýdalanyp μ – koeffisiýenti aşakdaky ýaly kesgitlemek bolýar:

$$mg = \mu \frac{1}{R^2}; \quad \mu = mgR^2; \quad F = \frac{mgR^2}{(R+h-x)^2}.$$

Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ýokardaky deňlemelerden peýdalanyp, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$m\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} = \frac{mgR^2}{(R+h-x)^2} \Rightarrow \int \upsilon d\upsilon = gR^2 \int \frac{dx}{(R+h-x)^2}.$$

Integrirläp alarys: $$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{gR^2}{R+h-x} + C_1. \quad (1)$$

Başlangyç şertden peýdalanyp, C_1 integrirlemäniň üýtgemeýän ululygyny tapalyň. $t = 0$ üçin $x = 0$, $\upsilon = 0$ bolanda

$$O = \frac{gR^2}{R+h} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{gR^2}{R+h}.$$

Bu bahany (1) deňlemede goýup, tizligi tapalyň:

$$\upsilon = R\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{R+h-x} - \frac{1}{R+h}}. \qquad (2)$$

Nokadyň ýeriň üstüne gaçan pursatyndaky tizligi tapalyň:

$$\upsilon_{(x=h)} = R\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}} \Rightarrow \upsilon_{(x=h)} =$$

$$= R\sqrt{2g}\sqrt{\frac{h}{R(R+h)}} \Rightarrow \upsilon_{(x=h)} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}. \qquad (3)$$

Çäksiz beýiklikden ýeriň üstüne düşýän nokadyň tizligini tapalyň. Bu halda $h = \infty$ diýip, kabul edip (3) formuladan predeli (çägi) tapýarys:

$$\upsilon_{(x=\infty)}\sqrt{\frac{2gR}{\frac{R}{\infty}+1}} = \sqrt{2gR} = const.$$

$R \approx 6370$ *km*, $g = 9{,}81$ m/s^2 bolany üçin $\upsilon_\infty = 11179\ m/s$.

Dördünji topar

Güýç diňe nokadyň υ tizligine bagly, ýagny $F_x = F(\upsilon)$. Şeýle meseleler, esasan, nokadyň herekedinde garşylyk güýçleri nazara alnanda duş gelýär. (12.3) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F(\upsilon) \text{ ýa-da } dt = m\frac{d\upsilon}{F(\upsilon)}. \qquad (12.16)$$

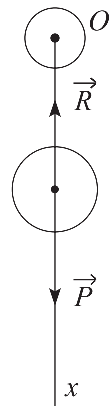
Degişli predelleri goýup, integrirläliň: $t - t_0 = m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{F(\upsilon)}$.

Differensial deňlemäni aşakdaky görnüşde hem ýazmak bolýar:

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = F(\upsilon) \text{ ýa-da } dx = m\upsilon\frac{dv}{F(\upsilon)}. \qquad (12.17)$$

Integrirläp alarys: $x - x_0 = \upsilon\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\upsilon\frac{d\upsilon}{F(\upsilon)}$.

12.49-njy mesele. Agramy $P = 10$ *kg*, radiusy $r = 8$ *sm* bolan şar ýokardan gaçanda, oňa $R = k\delta\upsilon^2$ görnüşde howanyň garşylygy täsir edýär. υ – ýokardan gaçyş tizligi, δ – jisimiň hereketiň ugruna perpendikulýar tekizlige düşýän proýeksiýasy, k – san görnüşdäki koeffisiýent (k san jisimiň formasyna bagly, şar üçin $k = 0{,}024\ kg \cdot s^2/m^4$).



12.20-nji surat

Şaryň iň uly tizligini kesgitlemeli. Başlangyç tizlik nola deň: $\upsilon_0 = 0$.

Çözülişi. x oky 12.20-njy suratdaky ýaly alalyň. Başlangyç şertler:

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = \upsilon_0 = 0. \tag{1}$$

Nokada $\bar{P}$ we $\bar{R}$ güýçler täsir edýär. Differensial deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = P - k\delta\upsilon^2 \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{k\delta}{m}\left(\frac{P}{k\delta} - \upsilon^2\right).$$

$$\frac{k\delta}{m} = b, \quad \frac{P}{k\delta} = C^2, \quad \frac{d\upsilon}{C^2 - \upsilon^2} - bdt$$

diýip belläp, deňlemäni integrirläliň:

Integrirlemäniň C_1– hemişeligini başlangyç ýokarky şertlerden tapmak bolar:

$$0 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0.$$

Şeýlelikde

$$\frac{1}{2c}\ln\frac{C+\upsilon}{C-\upsilon} = bt \Rightarrow \frac{C+\upsilon}{C-\upsilon} = e^{2cbt} \Rightarrow \upsilon = C\frac{e^{2cbt}-1}{e^{2cbt}+1}. \tag{2}$$

Bu aňlatmada $t \to \infty$ predele geçip, υ tizligiň ymtylýan ahyrky bahasyny tapmak bolýar. Bu tizlige **kritiki tizlik** diýilýär. Bu ýerden $\upsilon_\infty = C$ gelip çykýar. Gözleýän tizligi alarys:

$$\upsilon = C = \sqrt{\frac{P}{k\delta}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}024\pi\tau^2}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}024 \cdot 2{,}14 \cdot 0{,}0064}} = \sqrt{\frac{10^2}{48{,}4}} = 144\ m/s.$$

12.50-nji mesele. Jisim howada başlangyç tizliksiz gaçýar. Howanyň garşylygy $R = k^2p\upsilon^2$, υ – jisimiň tizligi, p – agramy. Jisimiň tizligini t wagta baglylykda tapmaly. Tizligiň predelini hasaplamaly.

Çözülişi. Bu meseläni hem deslapky mesele ýaly çözmek bolar. Şonuň üçin bu ýerde x oky hereketiň ugry boýunça gönükdirýäris:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} - P - k^2p\upsilon^2 \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} - mg(1 - k^2\upsilon^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^v \frac{d\upsilon}{1-k^2\upsilon^2} = g\int_0^t dt \Rightarrow gt = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k\upsilon}{1-k\upsilon}.$$

υ tizligi t wagtyň funksiýasy ýaly ýazmak bolar:

$$\upsilon = \frac{1}{2k}\cdot\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1} = \frac{1}{2k}\cdot\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}} = \frac{1}{2k}th(kgt).$$

$t \to \infty$ predele geçip, tizligiň predeldäki bahasyny tapalyň: $\upsilon_\infty = \dfrac{1}{k}$.

12.51-nji mesele. Gämi, suwuň gäminiň tizliginiň kwadratyna proporsional we 1 *m/s* tizlikde 1200 *N* bolan garşylygyny ýeňip, hereketlenýär. Perleriň iteriş güýji hereketiň tizligine ugurdaş bolup, $T = 12\cdot 10^5\left(1-\dfrac{\upsilon}{33}\right)N$ kanun bilen özgerýär, bu ýerde υ – gäminiň tizligi, *m/s*. Gäminiň iň uly tizligini tapmaly.

Çözülişi. Gämi öňe bolan hereket edýändigi üçin, ony material (maddy) nokat diýip kabul edýäris. Gämä täsir edýän güýçler: $m\bar{g}$ – agramy, $\bar{R}$ – suwuň garşylygy, $\overline{T}$ – perleriň iteriş güýji, hereketiň ugruna perpendikulýar bolan Arhimediň güýji. x oky hereketiň ugruna gönükdirip, differensial deňlemäni şu oka proektirläp, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = T - R.$$

Meseläniň şertinden peýdalanyp, alarys:

$$R = \mu\cdot\upsilon^2,\ \mu = 1200N\cdot s^2/m^2.$$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = 12\cdot 10^5\left(1-\frac{\upsilon}{33}\right) - 1200\,\upsilon^2.$$

Tizligiň iň ýokary (ekstremal) bahasyny $\dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$ şertden peýdalanyp tapmak bolar:

$$\upsilon_{\max}^2 + 30,3\upsilon_{\max} - 1000 = 0, \Rightarrow \upsilon_{\max} = -15,15 +$$

$$+\sqrt{229,57+1000} = 20\ m/s$$

12.52-nji mesele. Massasy m bolan nokat $x_0 = a$ bolanda başlangyç tizliksiz, koordinata başlangyjyna çenli bolan aralyga proporsional bolan $F_x = -c_1 mx$ dartyş güýji we aralygyň kubuna proporsional $Q_x = c_2mx^3$ iteriş güýjüniň täsirinde gönüçyzykly hereket edýär. c_1, c_2, a ululyklar haýsy gatnaşykda bolanlarynda nokat koordinata başlangyjyna ýetip togtar?

Çözülişi. Meseläniň şertine görä nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$m\ddot{x} = -c_1mx + c_2mx^3$; başlangyç şertler: $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ ýa-da

$\ddot{x} = -c_1x + c_2x^3$.

$x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$ şerti kanagatlandyrýan t_1 pursady tapmaly.

Deňlemäniň iki tarapyny hem $\dot{x}$ köpeldip, aşakdaky özgertmeleri geçireliň:

$$\ddot{x}\dot{x} = -c_1x\dot{x} + c_2x^3\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{c_1x^2}{2}\right) +$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{c_2x^4}{4}\right) \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{c_1x^2}{2} + \frac{c_2x^4}{4} + c_0,$$

bu ýerde $c_0 = cons$, integrirlemäniň hemişeligi.

$x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$ bolany üçin $c_0 = 0$.

Şeýlelikde: $\dot{x}^2 = -c_1x^2 + \frac{c_2x^4}{2}$.

Bu deňlemede $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ başlangyç şertleri goýup, alarys:

$$0 = -c_1a^2 + \frac{c_2a^4}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{c_2a^2}{2}.$$

b) Egri çyzykly hereket

1. m massaly erkin material nokadyň giňişlikdäki hereketiniň differensial deňlemeleri aşakdaky sistemalar görnüşinde ýazylýar:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}). \end{aligned} \tag{12.18}$$

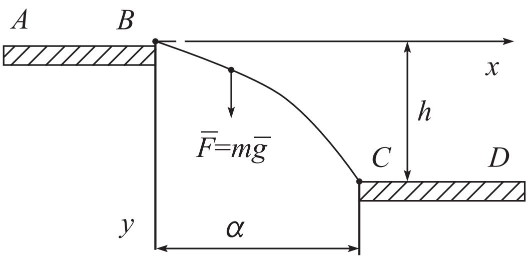
Bu ýerdäki F_x, F_y, F_z proýeksiýalar bize mälim diýlip hasaplanylýar. Umumy halda bu differensial deňlemeleriň integrallaryny tapmak matematiki nukdaýnazardan juda kyn meseledir. Eger bu deňlemeler biri-birine bagly bolmasalar we çyzykly deňlemelere getirilýän bolsalar, onda olaryň integrallaryny tapmak aňsatlaşýar.

2. Eger koordinatalar sistemasy hökmünde tebigy oklar alynsa, onda differensial deňlemeler Eýleriň formulasy görnüşinde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_n, \; 0 = F_b, \tag{12.4}$$

bu ýerde υ – nokadyň tizligi, ρ – garalýan pursat üçin traýektoriýanyň egrilik radiusy.

12.53-nji mesele. Material nokat AB gorizontal tekizlikde υ_0 tizlik bilen hereket edip, tekizligiň gyrasyna ýetende, erkin hereket bilen ol başga bir CD gorizontal tekizligiň gyrasyna düşýär (*12.21-nji surat*). Tekizlikleriň wertikal aralyklary h bolsa, başlangyç tizligiň ululygyny kesgitlemeli. Bu ýerde a – tekizlikleriň gorizont boýunça aralyklary.



12.21-nji surat

Çözülişi. Koordinata oklaryny 12.21-nji suratdaky ýaly ugrukdyryp, hereketiň differensial deňlemelerini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = mg. \tag{1}$$

Başlangyç şertler: $t = 0, x_0 = y_0 = 0, \; \dot{x}_0 = \upsilon_0, \; \dot{y}_0 = 0.$ (2)

Deňlemeleriň birinjisini integrirläliň: $\dot{x} = C_1, x = C_1 t + C_2$. Integrirlemäniň C_1, C_2 hemişeliklerini başlangyç şertlerden tapýarys: $\upsilon_0 = C_1, 0 = C_2$.

Şeýlelikde $x = \upsilon_0 t$.

Deňlemeleriň ikinjisini hem şoňa meňzeşlikde integrirläp tapýarys:

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Hereket deňlemelerinden t wagty aýryp, traýektoriýanyň deňlemesini tapýarys:

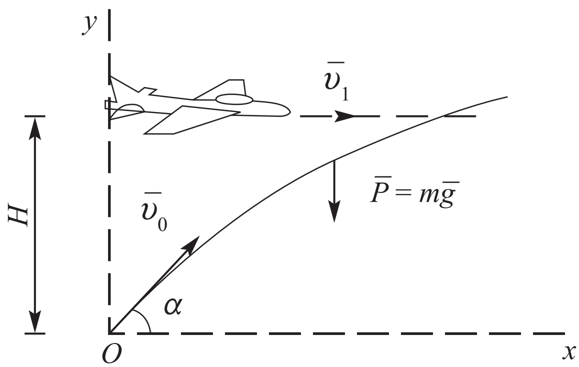
$$y = \frac{g}{2\upsilon_0^2} \cdot x^2.$$

Bu deňleme C nokadyň (a, h) koordinatalaryny kanagatlandyrmalydyr.

Şonuň üçin $h = \frac{g}{2\upsilon_0^2} \cdot a^2$.

Bu ýerden alarys: $\upsilon_0 = a\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

12.54-nji mesele. Uçar H beýiklikden üýtgemeýän tizlik bilen gorizont boýunça uçup barýar. Uçar edil depesine gelen pursatynda, top okuna tutulýar. Tapmaly: 1) snarýadyň uçara degmegi üçin onuň başlangyç tizligi nähili şerti kanagatlandyrmaly? 2) haýsy burç bilen atmaly? Howanyň garşylygyny nazara almaly däl (*12.22-nji surat*).



12.22-nji surat

Çözülişi. 12.22-nji suratdan görnüşi ýaly, uçaryň t wagtdaky koordinatalaryny aşakdaky ýaly ýazmak bolar: $x_{\text{uçar}} = \upsilon_1 t, \;\; y_{\text{uçar}} = H.$

Snarýad üçin başlangyç şertler: $t = 0,\ x_0 = y_0 = 0,\ \dot{x} = \dot{y}_0 = 0.$ Snarýadyň hereketiniň differensial deňlemeleri: $m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = -mg$.

12.53-nji meseledäki ýaly integrirläp, snarýadyň hereketiniň kinematiki deňlemelerini tapmak bolýar:

$$x_{sn} = (\upsilon_0 \cos\alpha)t, \quad y_{sn} = (\upsilon_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Snarýadyň uçara degmegi üçin aşakdaky şertler ýerine ýetmeli: $x_{\text{uçar}} = x_{sn}$, $y_{\text{uçar}} = y_{sn}$, ýagny $t\upsilon_0 \cos a = \upsilon_1 t$, $t\upsilon_0 \sin a - \frac{gt^2}{2} = H$ bolmaly.

Birinji şertden $\cos a = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0}$.

Ikinji deňlemeden t wagty tapýarys:

$$t = \frac{1}{g}\left[\upsilon_0 \sin\alpha \pm \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha - 2gH}\right].$$

t wagtyň hakyky bolmagy üçin kökün aşagyndaky aňlatma noldan uly ýa-da nola deň bolmaly: $\upsilon_0^2 \sin^2\alpha - 2gH \geq 0$.

Şeýle hem:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_0^2},$$

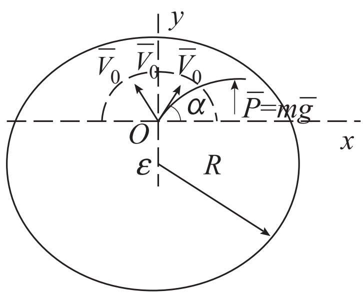
$$\upsilon_0^2\left(1 - \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_0^2}\right) \geq 2gH \Rightarrow \upsilon_0^2 - \upsilon_1^2 \geq 2gH.$$

Şeýlelikde $\upsilon_0^2 \geq \upsilon_1^2 + 2gH$.

12.55-nji mesele. Dik tekizlikde birmeňzeş başlangyç tizlik, emma üýtgeşik α burçlar bilen nokatlar zyňylýarlar. Zyňylan nokatlaryň t pursat üçin geometrik orunlarynyň köplügini tapmaly (*12.23-nji surat*).

Çözülişi. Material nokadyň differensial deňlemeleri 12.54-nji meseledäki snarýadyň deňlemeleri ýaly ýazylýar. Nokadyň kinematiki deňlemeleri hem üýtgemeýär:

$$x = (\upsilon_0 \cos\alpha)t; \; y = (\upsilon_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$



12.23-nji surat

Gözlenýän nokatlaryň geometrik ornuny tapmak üçin aşakdaky deňlemelerden α burçy hasaplamaly:

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{x}{\upsilon_0 t}\right)^2, \quad \sin^2\alpha = \left(\frac{y - \frac{gt^2}{2}}{\upsilon_0 t}\right)^2.$$

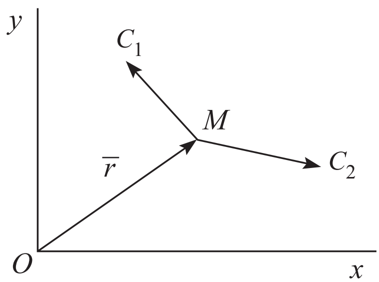
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ bolany üçin gözlenýän deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolar: $x^2 + \left(y + \frac{gt^2}{2}\right)^2 = (\upsilon_0 t)^2$.

Bu deňleme töweregiň deňlemesidir. Töweregiň radiusy $R = \upsilon t$. Töweregiň C merkezi O nokatdan $OC = \frac{gt^2}{4}$ aradaşlykda (aşaklygyna) ýerleşýär.

12.56-njy mesele. m massaly M nokat gozganmaýan iki sany $C_1(x_1,y_1)$, $C_2(x_2,y_2)$ merkezlere tarap dartylýar (*12.24-nji surat*). M nokadyň $C_i (i = 1,2)$ merkeze dartylyşy $k_i m \cdot \overline{MC_i}$ ýaly aňladylýar; C_i nokatlar şol bir xoy tekizlikde ýatýarlar. Agyrlyk güýjüni hasaba almaly däl.

Başlangyç şertler: $t = 0, x = x_0, y = y_0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = \upsilon_0$. (1)

M nokadyň traýektoriýasyny kesgitlemeli.



12.24-nji surat

Çözülişi. 12.24-nji suratdan ugur alyp, M nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ilki wektor görnüşde ýazalyň:

$$m \cdot \ddot{\overline{OM}} = mk_1 \cdot \ddot{\overline{MC_1}} + mk_2 \cdot \overline{MC_2}$$

$$\overline{MC_1}(x_1 - x, y_1 - y), \overline{MC_2}(x_2 - x, y_2 - y), \overline{OM}(x,y), \quad (2)$$

x, y – bu ýerde M nokadyň koordinatalary.

(2) deňlemäni gozganmaýan x, y oklara proektirläliň (ilki m-e gysgaldyp):

$$\ddot{x} = k_1(x_1 - x) + k_2(x_2 - x),\ \ddot{y} = k_1(y_1 - y) + k_2(y_2 - y) \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_1x_1 + k_2x_2,\ \ddot{y} + (k_1 + k_2)y = k_1y_1 + k_2y_2.$$

$k = \Sigma_{i=1}^{2} k_i$, $a = \frac{1}{k}\Sigma_{i=1}^{2} k_i x_1$, $b = \frac{1}{k}\Sigma_{i=1}^{2} k_i y_1$ belgileri girizip, deňlemeleri aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$\ddot{x} + kx = ak,\ \ \ddot{y} + ky = bk. \tag{3}$$

Bu deňlemeler çyzykly birjynsly däl deňlemeler sistemasydyr. Deňlemeleri aýratynlykda çözeliň. Birinji deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň: $x = A\cos\sqrt{k}\,t + B\sin\sqrt{k}\,t + a$.

A, B integrirlemäniň hemişelikleri bolup, olar (1) başlangyç şertlerden kesgitlenilýär. Ýagny $A = x_0 - a,\ B = 0$.

Şeýlelikde $x - a = (x_0 - a)\cos\sqrt{kt}$. (4)

(3) sistemanyň ikinji deňlemesini çözeliň:

$y = D\cos\sqrt{kt} + E\sin\sqrt{kt} + b$.

Ýokarka meňzeşlikde D, E integrirlemäniň hemişeliklerini başlangyç şertlerden kesgitleýäris: $D = y_0 - b,\ E = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{k}}$.

Şeýlelikde $y - b = (y_0 - b)\cos\sqrt{kt} + \frac{\upsilon_0}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{kt}$. (5)

(4), (5) hereket deňlemelerinden t wagty aýryp, nokadyň traýektoriýasy tapylýar.

(4)-den: $\cos\sqrt{kt} = \frac{x - a}{x_0 - a}$, $\sin\sqrt{kt} = \sqrt{1 - \frac{(x - a)^2}{(x_0 - a)^2}}$.

Bu bahalary (5)-de goýup, deňlemäni ýönekeýleşdireliň:

$$\frac{\sqrt{k}}{\upsilon_0}\left[(y - b) - (y_0 - b)\frac{(x - a)}{(x_0 - a)}\right] = \sqrt{1 - \frac{(x - a)^2}{(x_0 - a)^2}}.$$

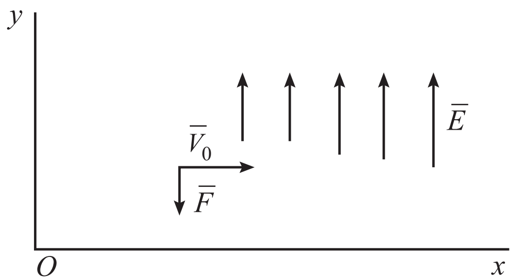
Deňligiň iki tarapyny hem kwadrata götereliň:

$$\left(\frac{(x-a)}{(x_0-a)}\right)^2+\frac{k}{\upsilon_0}\left[(y-b)+(b-y_0)\frac{(x-a)}{(x_0-a)}\right]^2=1.$$

Bu deňleme ellipsiň deňlemesidir.

12.57-nji mesele. $E = A\cos kt$ (A, k – berlen hemişelikler) kanun esasynda üýtgeýän naprýaženiýeli (güýjenmeli) birjynsly elektrik meýdany berlen. Şu meýdana naprýaženiýäniň ugruna perpendikulýar ugur boýunça υ_0 tizlik bilen elektrigiň e zarýadyny alyp barýan m massaly bölejik girýär; agyrlyk güýjüni hasaba almaly däl. Elektrik meýdanynda bölejige $\bar{F}=-e\cdot\bar{E}$ güýç täsir edýär. Bölejigiň hereketiniň traýektoriýasyny kesgitlemeli.

Çözülişi. 12.25-nji suratdan peýdalanyp, nokadyň differensial deňlemelerini düzmeli:



12.25-nji surat

$$m\ddot{x}=0,\quad m\ddot{y}=-F. \qquad (1)$$

Başlangyç şertler: $t=0, x_0=0, y_0=0, \dot{x}_0=\upsilon_0, \dot{y}_0=0.$ (2)

Deňlemäni integrirläliň:

$\dot{x}=C_1;\ C_1=\upsilon_0;\ \dot{x}=\upsilon_0;\ x=\upsilon_0 t+C_2;\ C_2=0.$

Şeýlelikde $$x=\upsilon_0 t. \qquad (3)$$

Ikinji deňlemäni integrirläliň. Integrirlemäniň hemişelikleri başlangyç şertlerden tapylýar: $m\ddot{y}=eA\cos kt \Rightarrow y=\frac{eA}{m}\cos kt,$

$$\dot{y}=\frac{eA}{mk}\sin kt+C_3,\ C_3=0,$$

$$y = -\frac{eA}{mk^2}\cos kt + C_4,\ C_4 = \frac{eA}{mk^2}.$$

Şeýlelikde $$y = \frac{eA}{mk^2}(1 - \cos kt). \tag{4}$$

Soňky deňlemelerden t wagty çykaryp, nokadyň traýektoriýasy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$y = \frac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos\frac{k}{\upsilon_0}t\right).$$

12.5. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

12.58-nji mesele. Massasy 1000 *kg* bolan awtomobil güberçek köpri boýunça $\upsilon = 10$ *m/s* tizlik bilen hereket edýär. Köpriniň ortasynyň egrilik radiusy $\rho = 50$ *m*. Awtomobiliň köpriniň ortasyndan geçýän pursaty köprä düşýän basyşy kesgitlemeli.

Jogaby: 7800 *N*.

12.59-njy mesele. Massasy 100 *g* bolan şarjagaz agyrlyk güýjüniň täsirinde aşak gaçşar we ol howanyň garşylygyna uçraýar. Şarjagazyň hereketi: $x = 4{,}9\,t - 2{,}45(1 - e^{-2t})$ deňleme bilen aňladylýar, bu ýerde x – metr, t – sekunt hasabynda, Ox ok wertikal boýunça aşak ugrukdyrylan. Howanyň R garşylyk güýjüni şarjagazyň υ tizligi arkaly aňlatmaly.

Jogaby: $R = 0{,}98(1 - e^{-2t})\ N = 0{,}2\upsilon N$.

12.60-njy mesele. Massasy 6000 *kg* bolan ýük awtomobili 6 *m/s* tizlik bilen paroma girýär. Paroma girýän pursatynda tormozlanan awtomobil 10 *m* geçip saklanypdyr. Awtomobiliň hereketini deňhaýallaýan diýip hasaplap, paromy kenara baglaýan iki tanapyň her birindäki dartylyş güýji tapmaly. Mesele çözülende paromyň massasyny we tizlenmesini hasaba almaly däl.

Jogaby: Her tanapdaky dartyş güýji 5 400 *N*.

12.61-nji mesele. Agramy p bolan jisim υ tizlik bilen wertikal ýokaryk atylan. Ol haýsy T wagtda H beletlige göteriler? Howanyň garşylygyny $k^2 p\upsilon^2$ formula bilen aňlatmak mümkin, bu ýerde υ – jisimiň tizliginiň mukdary.

Jogaby: $H = \dfrac{\ln(\upsilon_0^2 k^2 + 1)}{2gk^2}$, $T = \dfrac{\text{arctg} k\upsilon_0}{kg}$.

12.62-nji mesele. Başlangyç tizliksiz ýere düşüp barýan m massaly nokadyň hereket deňlemesini tapmaly. Howanyň garşylygy tizliginiň kwadratyna proporsional. Proporsionallyk koeffisiýenti k deň.

Jogaby: $x = \dfrac{m}{k} \ln ch \sqrt{\dfrac{gk}{m}}\, t$.

12.63-nji mesele. Wertikal tekizlikde birmeňzeş υ_0 başlangyç tizlik bilen, gorizonta görä islendik burç astynda bir nokatdan bir wagtda nokatlar zyňylýarlar. Şu nokatlaryň t wagtdaky geometrik ornuny tapmaly.

Jogaby: Radiusy $\upsilon_0 t$ deň, merkezi atylýan nokatdan wertikal boýunça $\dfrac{1}{2} gt^2$ aşakda ýerleşen töwerek.

12.64-nji mesele. Birmeňzeş υ_0 başlangyç tizlige we islendik atyş burçuna degişli parabola şekilindäki ähli traýektoriýalaryň fokuslarynyň geometrik ornuny tapmaly.

Jogaby: $x^2 + y^2 = \dfrac{\upsilon_0^4}{4g^2}$.

12.65-nji mesele. υ_0 başlangyç tizlik bilen gorizonta *a burç* astynda zyňlan jisim özüniň P agyrlyk güýji we howanyň R garşylyk güýjüniň täsirinde hereket edýär. Garşylygy tizligiň birinji derejesine proporsional, ýagny $R = kP\upsilon$ diýip hasaplap, jisimiň zyňlan derejesinden iň ýokary göteriliş h belentligini kesgitlemeli.

Jogaby: $h = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{gk} - \dfrac{1}{gk^2} \ln(1 + k\upsilon_0 \sin\alpha)$.

12.66-njy mesele. 12.65-nji meseläniň şertlerine görä nokadyň hereketiniň deňlemelerini tapmaly.

Jogaby:

$$x = \frac{\upsilon_0 \cos\alpha}{gk}(1 - e^{-kgt}),\ y = \frac{1}{kg}\left(\upsilon_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}.$$

12.67-nji mesele. 12.65-nji meseläniň şertlerine görä nokat gorizontaly boýunça haýsy s aralykda özüniň iň belent ýagdaýyna ýeter?

Jogaby: $s = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{2g(k\upsilon_0 \sin\alpha + 1)}$.

12.68-nji mesele. Tegelek howzuň ortasynda ornaşdyrylan wertikal turbadan gorizonta görä islendik $\varphi\left(\varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ burçlar bilen suw pürkülýär. Turbanyň ýokarsy ýapyk bolup, 1 m belentlikdäki ýerinden deşikler açylan. Suw çüwdüriminiň başlangyç tizligi $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{4g}{3\cos\varphi}}$ m/s, bu ýerde g – agyrlyk güýjüniň tizlenmesi. Howzuň diwarlary näçe pes hem bolsa turbadan çykýan suwuň dolulylygyna howza düşmegi üçin howzuň iň kiçi radiusyny kesgitlemeli.

Jogaby: $R = 2{,}83$ m.

12.69-njy mesele. Aralyga göni proporsional bolan güýç bilen gozganmaýan O merkeze dartylýan m massaly nokadyň hereketini kesgitlemeli. Nokat boşlukda hereket edýär: aralyk birligindäki dartyş güýji k^2m-e deň; $t = 0$-da : $x = a, \dot{x} = 0, y = 0, \dot{y} = 0;$ bu ýerde Oy ok wertikal bilen aşak ugrukdyrylan.

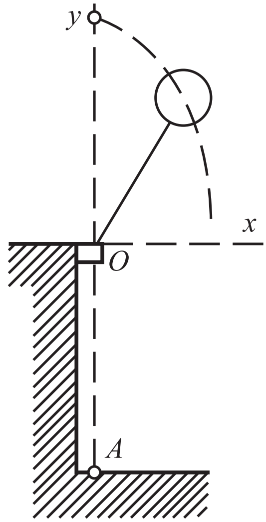
Jogaby: $y = \dfrac{g}{k^2} - \dfrac{g}{k^2 a}x, \ |x| \le a,$ göni çyzygyň kesimi boýunça garmoniki yrgyldyly hereket:

$$x = a\cos kt, \ y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt).$$

12.70-nji mesele. m massaly nokat gozganmaýan O merkezden iteriji we $\bar{F} = k^2 m\bar{r}$ kanun bilen üýtgeýän güýjüň täsirinde hereket edýär, bu ýerde $\bar{r}$ – nokadyň radius-wektory. Başlangyç pursatda nokat $M(a, 0)$-da duran we y oka parallel ugrukdyrylan tizlige eýe. Nokadyň traýektoriýasyny kesgitlemeli.

Jogaby: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{ky}{\upsilon_0}\right)^2 = 1$ (giperbola).

12.71-nji mesele. A nokada berkidilen çeýe ýüp gozganmaýan ýylmanak O halkadan geçýär. Onuň erkin ujuna massasy m bolan şarjagaz baglanan. Dartylmadyk ýüpüň uzynlygy $l = AO$. Ýüpi 1 m-e uzaltmak üçin $k^2 m$ güýç goýmaly. Ýüp, uzynlygy iki esse artýança AB göni çyzyk bilen dartyldy we şarjagaza AB göni çyzyga perpendikulýar bolan υ_0 tizlik berildi. Agyrlyk güýjüni hasaba alman we ýüpdäki dartylyş güýjüni onuň süýnüşine proporsional diýip hasaplap, şarjagazyň traýektoriýasyny kesgitlemeli (*12.26-njy surat*).



12.26-njy surat

Jogaby: Ellips: $\dfrac{k^2x^2}{\upsilon_0^2} + \dfrac{y^2}{l^2} = 1.$

12.72-nji mesele. m massaly M nokat aralyga proporsional güýçler bilen n sany C_1, C_2, ... C_n gozganmaýan merkezlere dartylýar. M nokady C (i =1, 2, 3, ... , n) merkeze dartyjy güýç $k_i m \cdot \overline{MC_1}$ N deň. M nokat we dartyjy merkezler Oy tekizlikde ýatýarlar. Eger $t = 0$ bolanda, $x = x_0, y = y_0, \dot{x} = 0, \dot{y}_0 = 0$, bolsa, onda M nokadyň traýektoriýasyny kesgitlemeli. Agyrlyk güýjüniň täsirini hasaba almaly däl.

Jogaby: Ellips:

$$\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2 + \left[(y-b) + \frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2 \frac{k}{\upsilon_0^2} = 1,$$

bu ýerde $\quad a = \dfrac{1}{k}\Sigma_{i=1}^{n} k_i x_i,\ b = \dfrac{1}{k}\Sigma_{i=1}^{n} k_i y_i,\ k = \dfrac{1}{k}\Sigma_{i=1}^{n} k_i.$

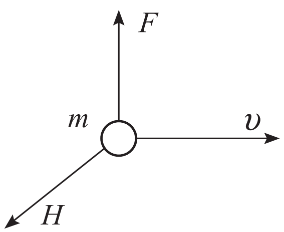
12.73-nji mesele. M nokat aralyga proporsional bolan $km \cdot \overrightarrow{MC_1}$ we $km \cdot \overrightarrow{MC_2}$ güýçler bilen 2 sany C_1 we C_2 merkezlere dartylýar. C_1 merkez gozganmaýar we koordinatalar başlangyjynda durýar. C_2 merkez Ox ok boýunça deňölçegli hereket edýär. Bu ýerde $x_2 = 2(a + bt)$. $t = 0$ bolan pursatda M nokat y tekizlikde bolýar, onyň koordinatalary $x = y = a$ we tizliginiň proeksiýalary $\dot{x} = \dot{z},\ \dot{y} = 0$ diýip hasaplap, M nokadyň traýektoriýasyny tapmaly.

Jogaby: Oky O we deňlemesi $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{2kz^2}{b^2} = 1$ bolan elliptik silindrdäki nurbat (wint) çyzygy; nurbatyň ädimi $\pi b\sqrt{\dfrac{2}{k}}$.

12.74-nji mesele. e elektrik zarýadly m massaly bölejik $\overline{E}$ güýjenmeli birjynsly elektrik meýdanyna tizlik bilen girýär. υ_0 tizlik meýdanyň güýjenmesiniň ugruna perpendikulýar ugrukdyrylan. Elektrik meýdanynda oňa $\overline{E}$ güýjenmä garşylykly ugrukdyrylan $\overline{F} = e\overline{E}$ güýç täsir edýär diýip hasaplap, bölejigiň meýdana gireninden soňky hereketiniň traýektoriýasyny kesgitlemeli, agyrlyk güýjüniň täsirini hasaba almaly däl.

Jogaby: Parametri $\dfrac{m\upsilon_0^2}{eE}$ bolan parabola.

12.75-nji mesele. e elektrik zarýadly m massaly bölejik $\overline{H}$ güýjenmeli birjynsly magnit meýdanyna υ_0 tizlik bilen girýär. υ_0 tizlik meýdanyň güýjenmesiniň ugruna perpendikulýar ugrukdyrylan. Bölejige $\overline{F} = -e(\bar{\upsilon} \times \bar{H})$ güýç täsir edýär diýip hasaplap, onuň soňky hereketiniň traýektoriýasyny kesgitlemeli. Mesele çözülende nokadyň hereket deňlemesiniň traýektoriýa geçirilen galtaşmadaky we baş normaldaky proýeksiýalaryndan peýdalanmak amatlydyr (*12.27-nji surat*).



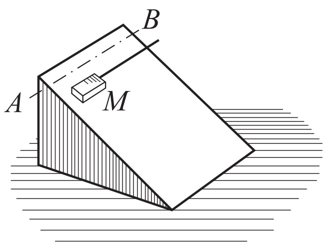
12.27-nji surat

Jogaby: Radiusy $\dfrac{m\upsilon_0}{eH}$ bolan töwerek.

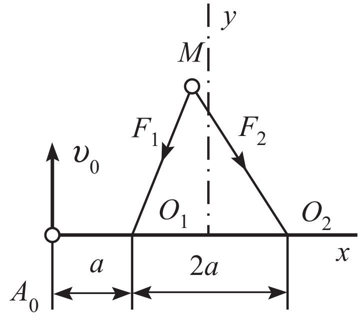
12.76-njy mesele. e elektrik zarýadly m massaly bölejik üýtgeýän $E = A\cos kt$ (A we k – berlen hemişelik ululyklar) güýjenmeli birjynsly elektrik meýdanyna υ_0 tizlik bilen girýär. υ_0 tizlik meýdanyň güýjenmesiniň ugruna perpendikulýar ugrukdyrylan. Bölejigiň traýektoriýasyny kesgitlemeli, agyrlyk güýjüniň täsirini hasaba almaly däl. Elektrik meýdanynda bölejige $F = -eE$ güýç täsir edýär.

Jogaby: $y = -\dfrac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos\dfrac{k}{\upsilon_0}x\right)$, bu ýerde y ok güýjenmäniň ugruna ugrukdyrylan, koordinatalar başlangyjy nokadyň meýdandaky başlangyjyna gabat gelýär.

12.77-nji mesele. Agyr M jisim büdür-südür ýapgyt tekizlik boýunça hereket edýär. Ony bir ýüp AB göni çyzyga parallel ýagdaýynda, gorizontal ugurda hemişe dartyp durýar. Birnäçe wagt-



12.28-njisurat



12.29-njy surat

dan soň jisimiň hereketi gönüçyzykly we deňölçegli bolýar. Bu ýagdaýda tizligiň iki sany özara perpendikulýar düzüjileriniň *AB* parallel ugrukdyrma mukdary 12 *sm/s* deň. Tizligiň ikinji υ_1 düzijisini, şeýle hem, ýüpüň *T* dartylyş güýjüni kesgitlemeli. Tekizligiň ýapgytlygy $tg\alpha = 1/30$, sürtülme koeffisiýenti $f = 0{,}1$, jisimiň massasy 30 *kg* (*12.28-nji surat*).

Jogaby: $\upsilon_1 = 4{,}24$ *sm/s*; $T = 27{,}7$ *N*.

12.78-nji mesele. *m* massaly *M* nokat O_1 we O_2 merkezlere ugrukdyrylan iki sany dartyş güýçleriniň täsirinde dur *(12.29-njy surat)*. Bu güýçleriň ululyklary O_1 we O_2 nokatlardan hasaplanan aralyklara proporsional. Proporsionallyk koeffisiýenti birmeňzeş bolup, ol *c* deň. Hereket A_0 nokatdan O_1O_2 çyzyga perpendikulýar bolan υ_0 tizlik bilen başlanýar. *M* nokadyň traýektoriýasyny kesgitlemeli. Onuň O_1O_2 çyzygy kesip geçýän wagtlaryny we nokadyň şu wagtlara gabat gelýän koordinatalaryny hasaplamaly. A_0 nokatdan *y* oka çenli aralyk 2*a* deň.

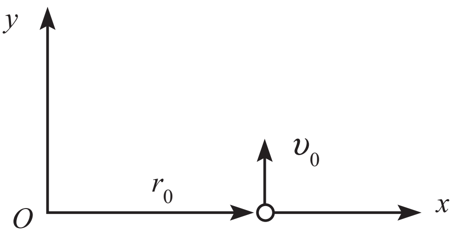
Jogaby: Ellips: $\dfrac{x^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{(\upsilon_0/k)^2} = 1$ bu ýerde $k = \sqrt{\dfrac{2c}{m}}$, $t = 0$,

$x_0 = -2a, y_0 = 0;\ t_1 = \pi/k,\ x_1 = 2a, y_1 = 0;\ t_2 = \pi/k,\ x_2 = -2a,\ y_2 = 0.$

Nokadyň ellips çyzýan wagty $T = 2\pi/k$.

12.79-njy mesele. *m* massaly *A* nokat *O* merkeze ugrukdyrylan we şu nokatdan merkeze çenli hasaplanan aralyga proporsional bolan dartylyş güýjüniň täsirinde $r = r_0$ (bu ýerde *r* – nokadyň radius-wektory) bolanda r_0-a perpendikulýar υ_0 tizlik bilen hereketlenip başlaýar.

Proporsionallyk koeffisiýenti mc_1-e deň. Mundan başga hem nokada mcr_0 hemişelik güýç täsir edýär. Nokadyň hereket deňlemesini we traýektoriýasyny tapmaly. Hereketiň traýektoriýasy O merkezden geçeni üçin c_1/c nähili bolmaly? O merkezden nokat nähili tizlik bilen geçýär (*12.30-njy surat*)?



12.30-njy surat

Jogaby: 1) $r = \frac{c}{c_1}r_0 + \frac{\upsilon_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t + r_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t;$

2) ellips $$\left[\frac{x - \frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\frac{y\sqrt{c_1}}{\upsilon_0}\right)^2 = 1;$$

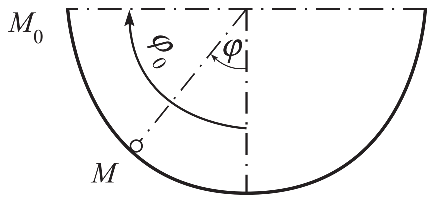
3) eger $c_1/c = 2$ bolsa, A nokat O merkezden geçýär;

4) A nokat O merkezden $\upsilon_0 = -\upsilon_0$ tizlik bilen geçende wagt $t = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}}$.

12.80-nji mesele. m massaly agyr nokat $t = 0$ bolanda, koordinatalary $x_0 = 0,\ y_0 = h$ bilen kesgitlenen orundan agyrlyk güýjüniň (y oka parallel) hem-de nokatdan oka çenli aralyga proporsional we y okdan iteriliji güýjüň (proporsionallyk koeffisiýenti c) täsirine düşýär. Nokadyň başlangyç tizliginiň oklardaky proýeksiýalary, $\upsilon_x = \upsilon_0$, $\upsilon_y = 0$. Nokadyň traýektoriýasyny, şeýle hem, onuň x oky kesip geçýän t_1 pursatyny kesgitlemeli.

Jogaby: Traýektoriýasy $x = \frac{\upsilon_0}{k}\operatorname{shk}\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)}$, bu ýerde $k = \sqrt{\frac{c}{m}};\ t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$

12.81-nji mesele. Massasy m bolan M nokat agyrlyk güýjüniň täsirinde r radiusly silindriň içki ýylmanak ýüzünde hereketlenýär. Başlangyç pursatda burç $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ we nokadyň tizligi nola deň. Burç $\varphi = 30°$ bolanda M nokadyň tizligini we silindriň üstüniň reaksiýasyny kesgitlemeli (*12.31-nji surat*).



12.31-nji surat

Jogaby: $\upsilon = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{gr}; T = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}mg.$

13. MADDY NOKADYŇ HEREKET MUKDARYNYŇ ÜÝTGEMEGI BARADA TEOREMA. MADDY NOKADYŇ HEREKET MUKDARYNYŇ MOMENTINIŇ ÜÝTGEMEGI BARADA TEOREMA

13.1. Maddy nokadyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakynda teorema

Maddy nokadyň m massasynyň $\bar{\upsilon}$ tizlik wektoryna köpeldilmegine, onuň $\bar{q}$ **hereket mukdarynyň wektory** ýa-da gysgaça, **hereket mukdary** diýilýär:

$$\bar{q} = m\bar{\upsilon}. \tag{13.1}$$

Hereket mukdarynyň ölçeg birligi aşakdaky ýaly tapylýar:

$$[\text{hereket mukdary}] = [\text{massa} \times \text{tizlik}] = \left[\frac{\text{güýç}}{\text{tizlenme}} \times \text{tizlik}\right] =$$

$$= \left[\frac{\text{güýç} \times \text{wagt}^2}{\text{uzynlyk}} \times \frac{\text{uzynlyk}}{\text{wagt}}\right] = [\text{güýç} \times \text{wagt}].$$

Ölçeg haýsy sistemada alynsa, şoňa baglylykda hereket mukdarynyň ölçegi döreýär.

Hereket mukdarynyň üýtgemegini tapmak üçin Nýutonyň esasy kanunyna ýüzleneliň:

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

$m = const$, $\bar{a} = \dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt}$ bolany üçin, esasy kanuny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \frac{d(m\bar{\upsilon})}{dt} = \bar{F}. \qquad (13.2)$$

Bu deňlik ***teorema*** görnüşinde aşakdaky ýaly aňladylýar:

Maddy nokadyň hereket mukdaryndan wagta görä alnan önüm nokada täsir edýän güýje deňdir.

(13.2) formula täzeçe ýazylyp, teoremany aşakdaky ýaly başgaça aňlatmak bolar:

$$d(m\bar{\upsilon}) = \bar{F} \cdot dt. \qquad (13.3)$$

$\bar{F} \cdot dt$ wektor ululyga **güýjüň elementar impulsy** diýilýär.

Teorema. ***Maddy nokadyň hereket mukdarynyň differensialy nokada goýlan güýjüň elementar impulsyna deňdir.***

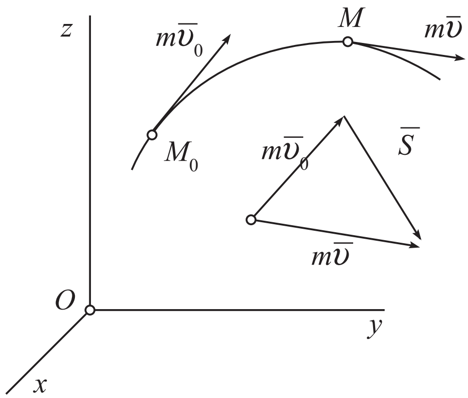
Indi teoremany integral görnüşde aňladalyň. Maddy nokadyň başlangyç tizligi $\bar{\upsilon}_0$ bolup, t sekuntdan soň $\bar{\upsilon}$ bolsun. Bu çäklerde (13.3) deňlemäni integrirläp, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$m\bar{\upsilon} - m\bar{\upsilon}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{F} \cdot dt = \bar{S}. \qquad (13.4)$$

$\overline{S}$ belgini tygşytlylyk üçin girizdik, ol $[t_0; t]$ wagtdaky **güýjüň doly impulsyny** aňladýar.

Teorema. ***Belli wagtda hereket mukdarynyň üýtgemegi maddy nokada täsir edýän güýjüň şol wagtdaky doly impulsyna deňdir.***

Maddy nokadyň t_0 we t wagtdaky hereket mukdarlaryň wektorlary $m\bar{\upsilon}_0$ we $m\bar{\upsilon}$ mälim bolsa, güýjüň doly $\overline{S}$ impulsyny geometrik usulda, 13.1-nji suratdaky ýaly edip tapmak bolýar.



13.1-nji surat

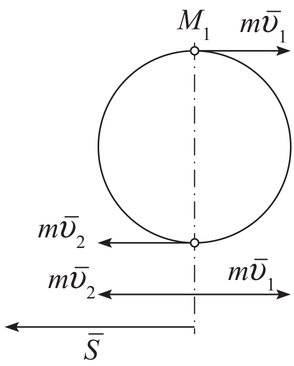
(13.1)–(13.4) formulalary Dekart sistemasynyň koordinata oklaryna proýektirläp, skalýar görnüşde hem ýazyp bolýar. Mysal üçin, (13.4) formula derek aşakdakylary ýazmak bolýar:

$$\left.\begin{aligned} m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} &= \int_{t_0}^{t} F_x dx = S_x, \\ m\upsilon_y - m\upsilon_{0y} &= \int_{t_0}^{t} F_y dx = S_y, \\ m\upsilon_z - m\upsilon_{0z} &= \int_{t_0}^{t} F_z dx = S_z. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

(13.5) formuladaky deňlemeleri öwrenip, az many berýän köp ýazgynyň bardygyny bilmek bolýar. Ikinji we üçünji deňlemeler birinji deňlemeden diňe indeksleri bilen tapawutlanýarlar (x-e derek y ýa-da x-e derek z ýazylan). Tygşytlylyk üçin (13.5) formuladaky deňlemelere derek, aşakdaky usul arkaly diňe bir deňleme bilen çäklenmegi şertleşeliň. Ýagny, (13.5) formuladaky üç sany deňlemä derek, olaryň üçüsiniň hem manysyny saklaýan aşakdaky bir deňlemäni ýazalyň:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0_x} = \int_{t_0}^{0} F_x dx = S_x, \qquad \overset{z}{x \circlearrowleft y} \; . \tag{13.6}$$

Bu ýerde x, y, z görkezilen tertipde gezekleşýärler.



13.2-nji surat

Hususy hallar

1) Eger $F_x = 0$ bolsa onda (13.5) formuladan $m\upsilon_x = m\upsilon_{0_x} = Const$ gelip çykýar.

2) Eger $\bar{F} = 0$ bolsa, onda (13.5) formuladan $m\bar{\upsilon} = m\bar{\upsilon}_0 = \overline{Const}$ gelip çykýar.

13.1-nji mesele. $m = 10$ g massaly nokat töwerek boýunça $\upsilon = 40$ sm/s tizlik bilen deňölçegli aýlanýar. Nokadyň ýarym töwerek geçen döwri üçin täsir edýän güýçleriň impulsyny tapmaly (*13.2-nji surat*).

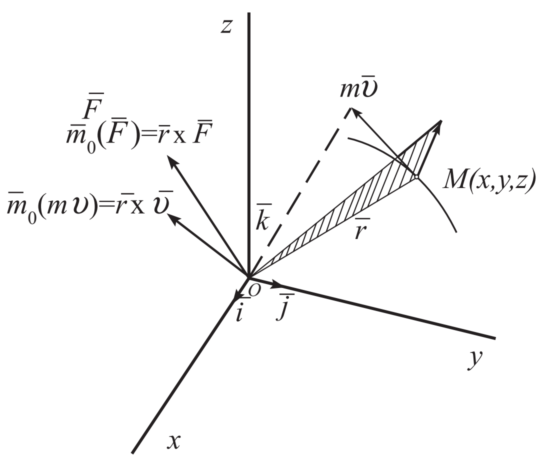
Çözülişi. (13.4) formuladan $\bar{S} = m\bar{\upsilon}_2 - m\bar{\upsilon}_1$, $m\bar{\upsilon}_1 = -m\bar{\upsilon}_2$ bolany üçin, $\bar{S} = 2m\bar{\upsilon}_2$. Impulsyň moduly şeýle tapylýar:

$$S = 2m\upsilon_2 = 2 \cdot 10 \cdot 40 = 80\frac{g \cdot sm}{s}.$$

13.2. Maddy nokadyň hereket mukdarynyň momentiniň üýtgemegi barada teorema. Meseleler

Teorema taýýar görnüşinde berlen:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{\upsilon}) = \bar{r} \times \bar{F}, \qquad (13.7)$$



13.3-nji surat

Bu ýerde $\bar{r} \times m\bar{\upsilon} = \bar{m}_0(m\bar{\upsilon})$ – maddy nokadyň O merkeze görä hereket mukdarynyň wektor momenti. $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{m}_0(\bar{F}) - \bar{F}$ güýjüň O nokada görä wektor momenti (*13.3-nji surat*).

(13.7) deňligi aşakdaky ýaly hem ýazmak bolýar:

$$\frac{d}{dt}\overline{m}_0(m\overline{\upsilon}) = \overline{m}_0(\overline{F}). \qquad (13.8)$$

(13.8) deňlik ***teoremany*** subut edýär: ***Maddy nokadyň haýsy hem bolsa bir nokada görä hereket mukdarynyň momentinden wagta görä alnan önüm, täsir edýän güýjüň şol nokada görä momentine deňdir.***

(13.8) formulany koordinata oklaryna proýeksiýalar arkaly ýazalyň:

$$\frac{d}{dt}m_x(m\overline{\upsilon}) = m_x(\overline{F}), \qquad \overset{z}{x \quad y}. \qquad (13.9)$$

Belli formulalary ulanyp, ahyrky deňligi aýdyňlaşdyralyň:

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y, \qquad \overset{z}{x \quad y}.$$

Muňa meňzeşlikde aşakdakyny alarys:

$$m_x(m\overline{\upsilon}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \qquad \overset{z}{x \quad y}.$$

Indi (13.9) formulany aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\frac{d}{dt}[m(y\dot{z} - z\dot{y})] = yF_z - zF_y, \qquad \overset{z}{x \quad y}. \qquad (13.10)$$

Eger güýjüň täsir çyzygy hemişe bir nokatdan geçýän bolsa, onda oňa **m e r k e z i g ü ý ç** diýilýär. Eger $\overline{F}$ merkezi güýç bolsa, onda $\bar{m}_0(F) = 0$.

Hususy hallar

1. Eger $\overline{F}$ merkezi güýç bolsa, onda (13.8)-den $\Rightarrow$

$$\overline{m}_0(m\overline{\upsilon}) = \bar{r} \times m\overline{\upsilon} = \overline{C}_1 = \overline{Const} \text{ gelip çykýar.}$$

Bu ýerden şeýle netije gelip çykýar: ***Merkezi güýjüň täsirindäki nokadyň traýektoriýasy hemişe bir tekizlikde ýatýar.***

2. Eger $m_x(\overline{F}) = 0$ bolsa, onda (13.9)-dan $\Rightarrow$

$\Rightarrow m_x(m\bar{\vartheta}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_2 = const$ gelip çykýar.

Bellik: Käbir belgileriň aňladýan ululyklary ýa-da formulalar, kitabyň «Statika», «Kinematika» bölümlerinde berlendir.

13.2-nji mesele. Her gerimi bir sekunt dowam edýän matematiki maýatnik sekunt maýatnigi diýip atlandyrylyp, wagty ölçemekde ulanylýar. Agyrlyk güýjüniň tizlenmesini 9,81 sm/s^2-a deň diýip, bu maýatnigiň l uzynlygyny tapmaly. Agyrlyk güýjüniň tizlenmesi Aýda Ýerdäkiden 6 esse az bolsa, bu maýatnik Aýda näçe wagty görkezer? Aýdaky sekunt maýatnigi haýsy l uzynlykda bolmaly?

Çözülişi. l uzynlykly matematiki maýatnigiň periody $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ formula bilen kesgitlenýär, bu ýerde $g = 981$ sm/s^2; l-sm-de ölçenýär, $T = 2$ s (sebäbi period iki gerime barabar). Şeýlelikde

$$l = \frac{gt^2}{4\pi^2} = 99,39\ sm.$$

g alty esse kiçelse, wagt $\sqrt{6} = 2,449$ esse ulalýar. Aýdaky sekunt maýatnigiň l_1 uzynlygy alty esse kiçelýär, ýagny $l_1 = l/g = 16,56$ sm.

13.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

13.3-nji mesele. Demir ýol otlusy ýoluň gorizontal we gönüçyzykly böleginde hereket edýär. Sägindirilende (tormozlananda) döreýän garşylyk güýji otlynyň agramynyň 0,1 bölegine deň. Tormozlama başlanan pursatda otlynyň tizligi 20 m/s deň. Tormozlanyş wagtyny we tormoz ýoluny tapmaly.

Jogaby: 20,4 s; 204 m.

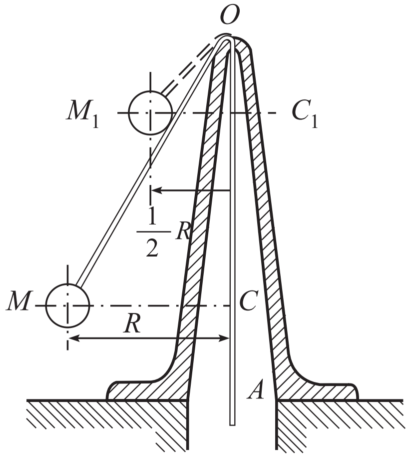
13.4-nji mesele. Agyr jisim gorizontal ugur bilen $\alpha = 30°$ burç emele getirýän büdür-südür ýapgyt tekizlikde başlangyç tizliksiz dur. Sürtülme koeffisiýenti $f = 0,2$ bolsa, jisim $l = 39,2$ m ýoly näçe T wagtda geçer?

Jogaby: $T = 5s$.

13.5-nji mesele. Massasy $4 \cdot 10^5$ *kg* bolan otly ýapgytlygy $i = \text{tg}\alpha = 0{,}006$ (bu ýerde α ýapgytlyk burçy) bolan ýol boýunça 15 *m/s* tizlik bilen hereketlenip başlaýar. Otly ýörän wagtyndaky sürtülme koeffisiýenti 0,005-e deň. Otly ýapgyt ýola çykyp başlanyndan 50 *s* geçenden soň onuň tizligi 12,5 *m/s* çenli kemelýär. Teplowozyň dartyş güýjüni tapmaly.

Jogaby: 23 120 *N*.

13.6-njy mesele. *M* daş dartylmaýan *MOA* ýüpüň ujuna baglanan. Bu ýüpüň *OA* bölegi wertikal trubka arkaly geçirilen. Daş trubkanyň okunyň daşynda radiusy $MC = R$ bolan töwerek boýunça 120 *aýl/min* burç tizlik bilen aýlanýar. Ýüpüň *OA* bölegini trubkanyň içine haýaljakdan dartyp, daşky bölegiň uzynlygy OM_1-e çenli gysgaldylýar. Bu ýagdaýda daş radiusy *R/*2 bolan töwerek çyzýar *(13.4-nji surat)*. Şol töwerek boýunça daş minutda näçe gezek aýlanýar?



13.4-nji surat

Jogaby: 480 *aýl/min*.

13.7-nji mesele. Ýükli demir ýol düzüminiň (sostawynyň) massasyny anyklamak üçin teplowoz bilen wagonlaryň arasyna dinamometr ornaşdyrylan. 2 minutyň dowamynda dinamometr ortaça 10^6 *N* görkezdi. Şu wagtda sostawyň tizligi 16 *m/s* ýetdi (başda sostaw dynçlykda durdy). Sürtülme koeffisiýenti $f = 0{,}2$. Sostawyň massasyny tapmaly.

Jogaby: 3036 *t*.

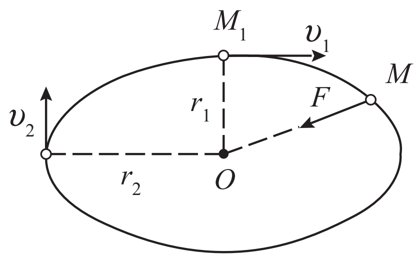
13.8-nji mesele. 20 *m/s* tizlik bilen barýan awtomobil tormoz berlenden 6 *s*-den soň saklanýan bolsa, awtomobil tigirleriniň ýola f sürtülme koeffisiýenti näçe?

Jogaby: $f = 0{,}34$.

13.9-njy mesele. Massasy 20 *g* bolan ok tüpeňiň nilini $t = 0{,}00095$ *s*-de geçip, nilden $\upsilon_2 = 650$ *m/s* tizlik bilen atylyp çykýar. Niliň kesiginiň meýdany $\sigma = 150$ mm^2. Oky atylmaga mejbur edýän gazyň basyşynyň ortaça mukdaryny kesgitlemeli.

Jogaby: Ortaça basyş: $9{,}12 \cdot 10^4$ N/mm^2.

13.10-njy mesele. M nokat gozganmaýan merkeziň daşynda merkeze dartyjy güýjüň täsirinde hereket edýär. Traektoriýanyň merkezden iň uzak bolan nokadyndaky υ_2 tizligi tapmaly. Bu ýagdaýda nokadyň merkeze iň ýakyn ýagdaýyndaky tizligi $\upsilon_1 = 30$ *sm/s*, r_2 bolsa r_1-den bäş esse uly (*13.5-nji surat*).



13.5-nji surat

Jogaby: $\upsilon_2 = 6$ *sm/s*.

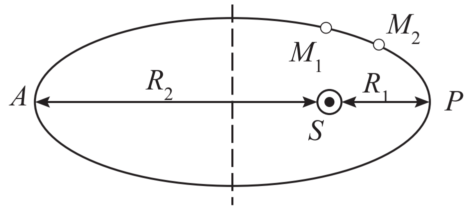
13.11-nji mesele. Snarýad başlangyç O haldan iň belent M hala geçende sarp edilen wagtda snarýada täsir edýän ähli güýçleriň deňtäsiredijisiniň impulsyny tapmaly. Berlen: $\upsilon_0 = 500$ *m/s*, $\alpha_0 = 60°$, $\upsilon_1 = 200$ *m/s*, snarýadyň massasy 100 *kg*.

Jogaby: Deňtäsiredijisiniň impulsynyň proeksiýalary:

$S_x = -5000\ N \cdot s, \quad S_y = -43\,300\ N \cdot s.$

13.12-nji mesele. M_1 we M_2 asteroidlar S fokusynda Gün duran şol bir ellipsi çyzýarlar. Asteroidlaryň arasyndaky uzaklyk has kiçi bolany üçin ellipsiň M_1M_2 dugasyny göni çyzygyň kesimi diýip hasaplamak mümkin, M_1M_2 duganyň P ortasy perigeliýda bolanynda

M_1M_2 aralyk a deň. Asteroidlar özara deň sektorial tizlik bilen hereket edýärler diýip, M_1M_2-niň ortasy A afeliýden geçende M_1M_2 aralygyň näçe bolýandygyny kesgitlemeli. $SP = R_1$ we $SA = R_2$ *(13.6-njy surat)*.



13.6-njy surat

Jogaby: $M_1M_2 = \dfrac{R_1}{R_2}a.$

13.13-nji mesele. Massasy 40 kg bolan çaga sport sanýasynyň aýaklarynda durup sanýany her sekuntda 20 $N \cdot s$ impuls bilen iterýär. Sanýanyň massasy 20 kg. Sürtülme koeffisiýenti $f = 0{,}01$. Sanýanyň tizliginiň 15 s-de näçä ýetýändigini tapmaly.

Jogaby: $\upsilon = 3{,}53\ m/s$.

13.14-nji mesele. Nokat $\upsilon = 0{,}2\ m/s$ tizlik bilen töwerek boýunça deňölçegli hereket edip, $T = 4\ s$ wagtda töweregi bir gezek doly aýlanyp çykýar. Ýarym periotda nokada täsir edýän güýçleriň S impulsyny tapmaly. Nokadyň massasy $m = 5\ kg$. F güýjüň ortaça bahasyny kesgitlemeli.

Jogaby: $S = 2\ N \cdot s$; $F = 1\ N$.

13.15-nji mesele. Uzynlygy l_1 we l_2 $(l_1 \geq l_2)$ bolan ýüplerden asylan iki sany matematik maýatnik bir meňzeş amplituda bilen yrgyldaýarlar. Iki maýatnik hem özüniň iň çetki ýagdaýyndan bir ugra bir wagtda hereket edip başlaýarlar. Maýatnikleriň birnäçe wagtdan soň deňagramlylyk ýagdaýyna gelmekleri üçin ýüpleriň l_1 we l_2 uzynlyklary nähili şerti kanagatlandyrmaly? Iň kiçi T wagt aralygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $\sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}} = \dfrac{k}{n}$, bu ýerde k, n – bitin sanlar we $\dfrac{k}{n}$ gysgalmaýan drob. $T = kT_2 = nT_1$.

13.16-njy mesele. Dartylmaýan ýüpe berkidilen m massaly şarjagaz ýylmanak gorizontal tekizlikde typýar. Ýüpüň ikinji ujy tekizlikden açylan deşige a hemişelik tizlik bilen dartylýar. Şarjagazyň hereket kanunyny we ýüpüň T dartylyş güýjüni kesgitlemeli. Başlangyç pursatda ýüp göni çyzyk emele getirýär. Şarjagaz bilen deşigiň arasy R-e deň; şarjagazyň başlangyç tizliginiň ýüpüň ugruna perpendikulýar ugra proeksiýasy υ_0-a deň.

Jogaby: Deşik koordinatalar başlangyjy, φ_0 burç nola deň diýip hasaplansa, polýar koordinatalarda:

$$r = R\text{-}at, \quad \varphi = \frac{\upsilon_0 t}{R - at}; \quad T = \frac{m\upsilon_0^2 R^2}{(R - at)^3}.$$

13.17-nji mesele. Ýeriň radiusy $R = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$, ortaça dykyzlygy $5{,}5\ t/m^3$, Ýer orbitasynyň uly ýarym oky $a = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ m$, Ýeriň Günüň daşyndan aýlanmak periody $T = 365{,}25$ gije-gündiz bolsa, Günüň M massasyny kesgitlemeli. 1 kg-a deň bolan, bir-birinden 1 m daşlykda duran iki sany massanyň arasyndaky bütindünýä dartylyş güýjüni $\frac{gR^2}{m}$ N-a deň diýip almaly, bu ýerde m – Ýeriň massasy; Kepleriň kanunlaryna görä, Günüň Ýeri dartyş güýji $\frac{4\pi^2 a^3 m}{R^2 r^2}$ deň, bu ýerde r – Ýer bilen Günüň arasyndaky uzaklyk.

Jogaby: $M = 1{,}966 \cdot 10^{30}\ kg$.

13.18-nji mesele. Massasy m bolan nokat F merkezi güýjüň täsirinde $r^2 = a\cos 2\varphi$ lemniskata çyzýar, bu ýerde a – hemişelik ululyk, r – güýç merkezinden nokada çenli aralyk; başlangyç pursatda $r = r_0$ we nokadyň tizligi υ_0 bolsa, bu nokady güýç merkezine birikdirýän göni çyzyk bilen α burçy emele getirýär. F güýç diňe r aralyga bagly diýip hasaplap, onuň ululygyny kesgitlemeli.

Bine formulasyna görä: $F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)$, bu ýerde c – nokadyň ikeldilen sektorial tizligi.

Jogaby: $F = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 \upsilon_0^2 \sin^2\alpha$.

13.19-njy mesele. Massasy m bolan M nokat gozganmaýan O merkeziň daşynda F güýjüň täsirinde hereketlenýär. Bu güýç O merkezden çykýar we diňe $OM = r$ aralyga baglydyr. Nokadyň tizligini $\upsilon = \frac{a}{r}$ (a – hemişelik san) diýip hasaplap, F güýjüň ululygyny we nokadyň traýektoriýasyny tapmaly.

Jogaby: Dartyş güýji $F = \frac{ma^2}{r^3}$; traýektoriýa – logarifmik spiral.

13.20-nji mesele. Massasy 1 kg bolan nokadyň merkeze dartyş güýjüniň täsirindäki hereketini kesgitlemeli. Güýç merkezden nokada çenli aralygyň kubuna ters proporsional. 1 m aralykda güýç 1 N-a deň, başlangyç pursatda nokatdan dartylyş merkezine çenli bolan aralyk 2 m, onyň tizliginiň mukdary $\upsilon_0 = 0{,}5$ m/s bolup, ugry merkezden nokada tarap geçirilen göni çyzyk bilen 45° burç emele getirýär.

Jogaby: $r^2 = 4 + t\sqrt{2}, \quad r = 2e^{\varphi}$.

13.21-nji mesele. Massasy 1 kg bolan M bölejik aralygyň bäşinji derejesine ters proporsional bolan güýjüň täsirinde gozganmaýan O merkeze dartylýar. Aralyk 1 m bolanda bu güýç 8 N deň. Başlangyç pursatda bölejik $OM = 2$ m aralykda ýerleşip, onuň tizligi OM perpendikulýar we $\upsilon_0 = 5$ m/s. Bölejigiň traýektoriýasyny kesgitlemeli.

Jogaby: Radiusy 1 m bolan töwerek, merkezi OM_0 çyzykda ýerleşen we dartylyş merkezinden 1 m daşlykda ýatyr.

13.22-nji mesele. Massasy 0,2 kg bolan we Nýutonyň dartylyş kanunyna laýyklykda gozganmaýan merkeze dartyjy güýjüň täsirinde hereket edýän nokat 50 s doly ellips çyzýar, ellipsiň ýarym oklary 0,1 m we 0,08 m. Şu hereketde F dartyjy güýjüň iň uly we iň kiçi bahalaryny kesgitlemeli.

Jogaby: $F_{max} = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$ N, $\quad F_{min} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$ N.

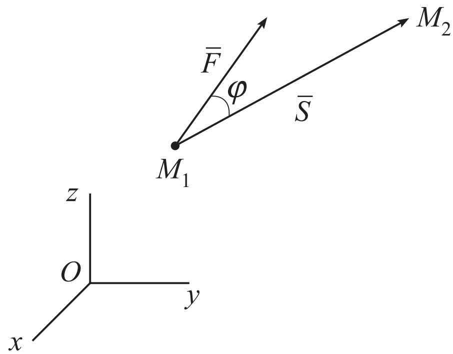
13.23-nji mesele. Ýeriň käbir nokadynda sekunt maýatnigi wagty dogry ölçeýär. Ol başga ýere geçirilende gije-gündizde T sekunt yza galýar. Sekunt maýatniginiň täze geçirilen ýeriniň agyrlyk güýjüniň tizlenmesini kesgitlemeli.

Jogaby: $g_1 = g_0\left(1 - \frac{T}{86400}\right)^2$, bu ýerde g_0 – maýatniginiň deslapky ýeriniň agyrlyk güýjüniň tizlenmesi.

14. IŞ WE KUWWAT

14.1. Nokat göni çyzyk boýunça hereket edende hemişelik güýjüň işi

Ilki bilen $\overline{F} = \overline{Const}$ hemişelik güýjüň goýlan nokadynyň $\overline{S}$ göçürmedäki iş hasaplanyşyny ýazalyň (*14.1-nji surat*). Mehaniki işi A harp bilen belgilesek, ol $\overline{F}$ we $\overline{S}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna deňdir:



14.1-nji surat

$$A = FS\cos\varphi = \overline{F}\ \overline{S} = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z. \qquad (14.1)$$

1-nji teorema. ***Islendik $\overline{S}$ göçürmede deňtäsirediji güýjüň edýän işi düzüji güýçleriň şol göçürmede edýän işleriniň algebraik jemine deňdir.***

Subudy. $\overline{F} = \overline{F}_1 + ... + \overline{F}_n$ deňligiň iki tarapyny hem $\overline{S}$ göçürmä skalýar köpeldip, subut edýäris:

$$\overline{S}\ \overline{F} = \overline{S}\ \overline{F}_1 + ... + \overline{S}\ \overline{F}_n \qquad \Rightarrow \qquad A = \sum A_k.$$

2-nji teorema: ***Güýjüň jemleýji göçürmedäki eden işi düzüji göçürmelerdäki edilen işleriň algebraik jemine deňdir.***

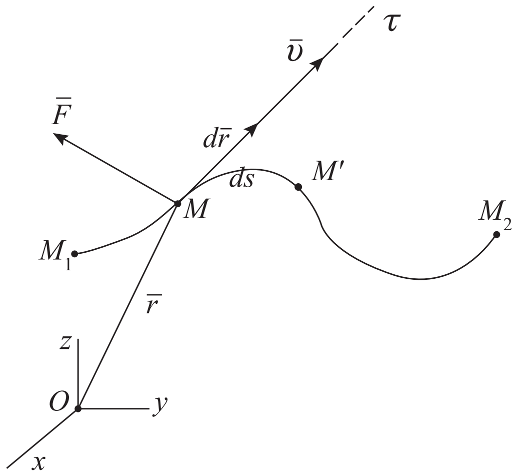
Subudy. $\overline{S} = \overline{S}_1 + ... + \overline{S}_n$ deňligiň iki tarapyny hem $\overline{F}$-e skalýarlaýyn köpeldip, subut edýäris:

$$\overline{F}\ \overline{S} = \overline{F}\ \overline{S}_1 + ... + FS_n \qquad \Rightarrow \qquad A = \sum A_k.$$

14.2. Üýtgeýän güýjüň islendik egri trýektoriýa bilen hereket edýän nokada goýlanda edýän işi. Elementar iş. Kuwwat. Mysaly meseleler

14.2-nji suratda görkezilişine görä, $\overline{F}$ üýtgeýän güýjüň täsirinde M nokat $\overset{\frown}{M_1M_2}$ aralygy geçýär. Güýjüň bu aralykda eden işini tapmaly. Bu ýerde

$$|d\bar{r}| = |ds|. \tag{14.2}$$



14.2-nji surat

Meseläni çözmek üçin $\overset{\frown}{M_1M_2}$ uzaklygy n ownuk böleklere bölýäris. $\overset{\frown}{MM'}$ – şolaryň biri. Gysga aralykda $\overline{F}$ güýji hemişelik hasap edip, onuň eden işine **elementar iş** diýilýär we δA görnüşde belgilenýär. Belli zatlary göz öňünde tutup, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\delta A = F\cos(\overline{F},\overline{\vartheta})\cdot ds = F_\tau \cdot ds = \overline{F}d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{14.3}$$

Ujypsyz işleriň jeminiň $n \to \infty$-däki predeli $\overline{F}$ güýjüň $\overset{\frown}{M_1M_2}$ aralykdaky doly işine deňdir:

$$A_{(M_1,M_2)} = \int\limits_{(M_1,M_2)} F_\tau ds = \int\limits_{(M_1,M_2)} \overline{F}d\bar{r} = \int\limits_{M_1,M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{14.4}$$

Integrallar egri çyzyklydyr we olary integrirlemek ýeňil däldir.

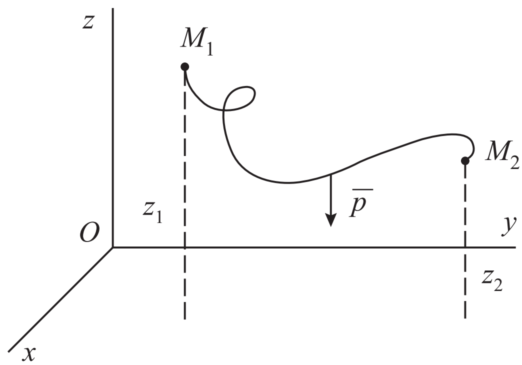
Wagt birliginde edilen işe *kuwwat* diýilýär. Kuwwaty N bilen belgilesek, onda

$$N=\frac{\delta A}{dt}=\frac{\overline{F}\,d\bar{r}}{dt}=\overline{F}\bar{\upsilon}=F_x\upsilon_x+F_y\upsilon_y+F_z\upsilon_z. \qquad (14.5)$$

Kuwwatyň ölçeg birligi $\frac{kg\cdot m}{s}$.

$N=75\frac{kg\cdot m}{s}$ bir *at güýjüni* aňladýar. Amalyýetde köp duş gelýän mysallara garalyň.

1) Agyrlyk güýjüniň işi



14.3-nji surat

14.3-nji surata görä: $\overline{P}\parallel z$, bu ýerde z-wertikal ok.

(14.4) formulada $F_x=F_y=0$, $F_z=-P$ bahalary goýup alarys:

$$A_{M_1M_2}=-\int_{z_1}^{z_2}Pdz=P(z_1-z_2). \qquad (14.6)$$

Agyrlyk güýjüniň işi traýektoriýa bagly bolman, diňe wertikal boýunça süýşüşine bagly.

2) Maýyşgaklyk güýjüniň işi

Maýyşgaklyk güýji $F_x=-cx$ formula bilen berilýän (14.3) formuladan tapylýar:

$$A_{M_1,M_2}=-c\int_0^h xdx=-\frac{ch^2}{2}. \qquad (14.7)$$

Mysaly meseleler

14.1-nji mesele. Uzynlygy $l = 150$ m bolan agyr zynjyryň uzynlyk birliginiň agyrlygy $q = 30^{kg}\!/_{m}$ bolup, çarhyň okuna saralyp göterilýär. Göterilýän zynjyryň agramynyň işini hasaplamaly.

Çözülişi. Zynjyryň x uzynlygy çarha saralan bolsa, asylyp duran $l - x$ böleginiň ujypsyz işi aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\delta A = q(l - x)dx.$$

Doly iş aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$A = \int_0^l q(l - x)dx = \frac{1}{2}ql^2 = \frac{30 \cdot 150^2}{2} = 337500\ kg \cdot m.$$

14.2-nji mesele. Radiusy r, agramy Q bolan tigir göni, gorizontal relsde tigirlenýär. Tigriň tormozlananda we tigirlenende döreýän sürtülme güýçleriniň işlerini aýratynlykda hasaplamaly we deňeşdirmeli. Typma sürtülmäniň koeffisiýenti f, tigirlenme sürtülmäniň koeffisiýenti δ.

Çözülişi. Tigir relsde s aralyga typsa, sürtülme güýjüniň işi aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$A_f = Q \cdot s \cdot f.$$

Tigir typman tigirlenende oňa $Q \cdot \delta$ sürtülme momenti goýulýar. Tigir s ýoly geçende $\frac{s}{r}$ burça aýlanýar. Şonuň üçin, tigirlenme sürtülmäniň işi aşakdaky ýaly tapylýar:

$$A_\delta = Q \cdot \delta \cdot \frac{s}{r}.$$

Gözlenýän gatnaşyk aşakdaky ýaly ýazylýar:

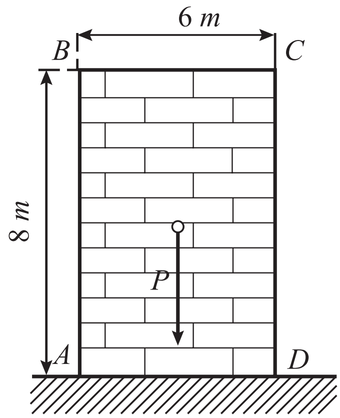
$$A_f : A_\delta = f : \frac{s}{r}.$$

Meselem, $f = 0{,}1$, $\delta = 0{,}005$ sm bolsa, $A_f = 100A_\delta$. Typma sürtülmäniň işi tigirlenme sürtülmäniň işinden $f : \frac{s}{r}$ esse uly bolýar.

14.3-nji mesele. Ýoly demrikdirýän katok $r = 50$ sm radiusly silindr bolup, agramy $Q = 10$ t. Tigirlenme sürtülmesi $\delta = 2$ sm bolsa, katoga $\vartheta = 2^{m}\!/_{s}$ tizlik bermek üçin hereketlendirijiniň kuwwaty näçe at güýji bolmaly?

Çözülişi. $N = \dfrac{\delta Q \omega}{75} = \dfrac{\delta Q \vartheta}{75r} = 3$ at güýji.

14.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler



14.4-nji surat

14.4-nji mesele. Ölçegleri suratda görkezilen birjynsly *ABCD* beton bloguň massasy 4000 *kg* (*14.4-nji surat*). Ony özüniň *D* gapyrgasynyň daşynda aýlap agdarmak üçin näçe iş etmeli?

Jogaby: 39,24 *kJ*.

14.5-nji mesele. Massasy 2 *t* bolan ýüki gorizont bilen 30 burç emele getirýän ýapgyt tekizlik bilen süýşürip, 5 *m* beýiklige götemek üçin iň az sarp edilmeli işi kesgitlemeli. Sürtülme koeffisiýenti 0,5.

Jogaby: 183 *kJ*.

14.6-njy mesele. 5000 m^3 suwy 3 *m* beýiklige götermek üçin hereketlendirijisi 2 at güýjüne deň bolan sorguç (nasos) oturdylan. Eger sorgujyň peýdaly täsir koeffisiýenti 0,8 bolsa, bu işi etmek üçin näçe wagt gerek?

Peýdaly işiň (bu meselede suwy götermek üçin sarp edilýän iş) hereketlendiriji güýjüň işine gatnaşgyna peýdaly täsir koeffisiýenti diýilýär. Zyýanly garşylyklar bolanda hereketlendiriji güýjüň işi köp bolýar.

Jogaby: 34 *sag* 43 *min* 20 *s*.

14.7-nji mesele. Massasy 200 *kg* bolan ýekedabany 0,75 *m* beýiklige bir minutda 84 gezek göterýän maşynyň kuwwaty näçe bolar? Maşynyň peýdaly täsir koeffisiýenti 0,87.

Jogaby: 2,94 *kWt.*

14.8-nji mesele. Bir derýada yzly-yzyna ýerleşen üç sany şarlawugyň umumy kuwwatyny hasaplamaly. Suw birinji şarlawukda 12 *m*, ikinji şarlawukda 12,8 *m*, üçünji şarlawukda 15 *m* beýiklikden düşýär. Derýanyň ortaça suw sarp edişi 75,4 m^3/s.

Jogaby: 29,4 *MWt*.

14.9-njy mesele. Tramwaý ýolundaky wagonlaryň sany 45, her bir wagonyň massasy 10 *t*, sürtülme garşylygy wagonyň agramynyň

0,02 bölegine, wagonyň ortaça tizligi 3,3 *m/s* we setdäki ýitgiler 5 bolanda tramwaý ulgamyndaky stansiýasyndaky turbogeneratorlaryň kuwwatyny hasaplamaly.

Jogaby: 309 *kWt*.

14.10-njy mesele. Massasy 20 *kg* bolan ýüki ýapgyt tekizlik boýunça 6 *m* aralyga çykarmak üçin sarp edilmeli işi hasaplamaly. Gorizont bilen tekizligiň arasyndaky burç 30°-a we sürtülme koeffisiýenti 0,01-e deň.

Jogaby: 598 *J*.

14.11-nji mesele. Turbohod 15 uzel tizlik bilen ýüzende onyň turbinasy 3800 *kWt* kuwwat berýär. Turbina we perleriň peýdaly täsir koeffisiýenti 0,41 we 1 uzel = 05144 *m/s* deň bolsa, suwuň turbohodyň hereketine bolan garşylyk güýjüni kesgitlemeli.

Jogaby: 201,9 *kN*.

14.12-nji mesele. Bütin ýoluň dowamynda porşeniň 1 sm^2 üstüne düşýän ortaça basyş 49 *N*, porşeniň ýoly 40 *sm*, porşeniň üsti 300 sm^2, bir minutdaky işçi ýörişleriň sany 120 we peýdaly täsir koeffisiýenti 0,9 bolsa, içinden ýandyrylýan hereketlendirijiniň kuwwatyny kesgitlemeli.

Jogaby: 10,6 *kWt*.

14.13-nji mesele. Ýylmaýjy daşyň diametri 0,6 *m* bolup, ol minutda 120 gezek aýlanýar. Ulanylýan kuwwat 1,2 *kWt*, ýylmaýjy daşyň detal bilen sürtülme koeffisiýenti 0,2 bolsa, daş ýylmanýan detaly nähili güýç bilen gysýar?

Jogaby: 1591,5 *N*.

14.14-nji mesele. Iş ýolunyň uzynlygy 2 *m*, bu ýoly geçmek üçin gerek bolan wagt 10 *s*, kesiji güýç 11,76 *kN*, stanogyň peýdaly täsir koeffisiýenti 0,8 bolsa, boýuna rendeleýji stanogyň motorynyň kuwwatyny kesgitlemeli. Hereket deňölçegli diýip hasaplanmaly.

Jogaby: 2,94 *kWt*.

14.15-nji mesele. Maýyşgak puržinyň ujundan massasy *M* bolan ýük asylan. Puržiny 1 *m* süýndürmek üçin *c N*-a deň güýç goýmaly.

Puržindaky ýüküň doly mehaniki energiýasyny anyklaýjy aňlatmany düzmeli. Hereketi ýüküň deňagramly halyndan aşak ugrukdyrylan x oka görä almaly.

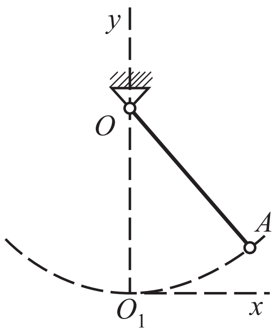
Jogaby: $E = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}cx^2 - Mgx.$

14.16-njy mesele. Lyžada 20 *km* ýol geçende, lyžaçynyň agyrlyk merkezi amplitudasy 8 *sm* we periody $T = 4$ *s* bolan garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Massasy 80 *kg*, gar bilen sürtülme koeffisiýenti $f = 0{,}05$ bolan lyžaçy ähli ýoly 1 sagat 30 minutda geçen bolsa, onuň hereketdäki işini we ortaça kuwwatyny kesgitlemeli.

Bellik. Lyžaçynyň agyrlyk merkeziniň aşak düşenindäki tormozlama işi agyrlyk merkezini şu belentlige götermekdäki işiniň 0,4 bölegine deň diýip hasap etmeli.

Jogaby: $A = 1021$ *kJ*, $N = 188{,}9$ *Wt*.

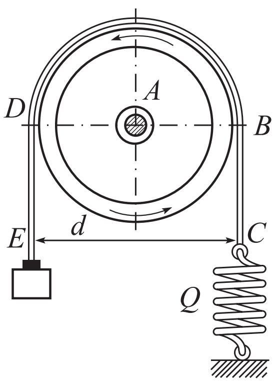
14.17-nji mesele. Agramy P, uzynlygy l bolan matematiki A maýatnik $\frac{P}{l}x$ gorizontal güýjüň täsirinde y belentlige göterilýär (*14.5-nji surat*). Matematiki maýatnigiň potensial energiýasyny iki usul bilen: 1) agyrlyk güýjüniň işi ýaly, 2) $\frac{P}{l}x$ güýjüň işi ýaly hasaplamaly we haýsy şertlerde bu iki usulyň bir hili netije berişini görkezmeli.



14.5-nji surat

Jogaby: 1) $P\,y$; 2) $\frac{1}{2}\frac{P}{l}x^2$. Eger y^2 hasaba alynmasa, iki jogap birmeňzeş bolýar.

14.18-nji mesele. Hereketlendirijiniň kuwwatyny ölçemek üçin onuň A şkiwine agaç berkidilen lenta geýdirilen. Lentanyň sag tarapyndaky BC bölegini puržinly Q terezi saklap dur, çep tarapdaky DE bölegini bolsa ýük dartyp dur. Puržinly terezi lentanyň sag tarapynda dartylyş güýjüniň 39,24 N-digini görkezende, ýüküň massasy



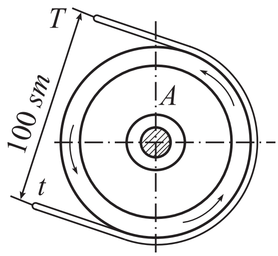
14.6-njy surat

1 *kg*; şkiwiň diametri $d = 63{,}6$ *sm* bolanda hereketlendiriji minutda 120 gezek deňölçegli aýlansa, hereketlendirijiniň kuwwatyny kesgitlemeli. Lentanyň *BC* we *DE* böleklerindäki dartylyş güýçleriniň tapawudy şkiwe tormoz berýän güýje deň. Şu güýjüň 1 *s*-de edýän işini kesgitlemeli (*14.6-njy surat*).

Jogaby: 117,5 *Wt*.

14.19-njy mesele. Çekiniň kömegi bilen 14,71 *kWt* kuwwat geçirilýär. Çekili şkiwiň radiusy 0,5 *m*, burç tizligi 150 *aýl/min* bolanda, çekiniň eýerdiji bölegindäki *T* dartylyş güýji eýeriji bölegindäki *t* dartylyş güýjünden iki esse uly diýip hasap edip, *T* we *t* dartylyş güýçlerini kesgitlemeli (*14.7-nji surat*).

Jogaby: $T = 3746$ *N*, $t = 1873$ *N*.



14.7-nji surat

15. MADDY NOKAT ÜÇIN KINETIK ENERGIÝANYŇ ÜÝTGEMEGI BARADAKY TEOREMA. MYSALY MESELELER

Massasy *m* bolan *M* nokat $\overline{F}$ güýjüň täsiri bilen hereket edýär. Bu nokat üçin Nýutonyň ikinji kanunyny ýazalyň:

$$m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \overline{F}\cdot$$

Deňligiň iki tarapyny hem skalýarlaýyn $d\bar{r}$-e köpeldeliň:

$$m\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot d\bar{\upsilon} = \overline{F}\cdot d\bar{r} \qquad \Rightarrow \qquad m\bar{\upsilon}\cdot d\bar{\upsilon} = \overline{F}\cdot d\bar{r}.$$

Çep tarapyny başgaça ýazalyň:

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m}{2}d(\upsilon^2) = \frac{m}{2}\cdot 2\bar{\upsilon}d\bar{\upsilon} = m\bar{\upsilon}\cdot d\bar{\upsilon}.$$

Sag tarap (11.3) formulanyň esasynda ujypsyz δA işi aňladýar. Şeýlelikde,

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \delta A. \qquad (15.1)$$

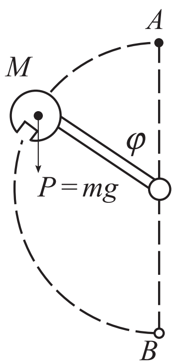
Teorema. ***Maddy nokadyň kinetik energiýasynyň differensialy maddy nokada täsir edýän güýjüň elementar işine deňdir.***

Maddy nokat M_1-den M_2 orna geçende teoremanyň netijesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\frac{m\vartheta_2^2}{2} - \frac{m\vartheta_1^2}{2} = \int\limits_{(M_1;M_2)} \overline{F}\,d\bar{r} = A. \qquad (15.2)$$

Teorema. ***Maddy nokadyň kinetik energiýasynyň geçilen belli aralykdaky üýtgemegi oňa goýlan güýjüň şol aralykda bitiren işine deňdir.***

Mysaly meseleler



15.1-nji surat

15.1-nji mesele. Maddalaryň urgy güýjüne garşylygyny synamak üçin hyzmat edýän esbabyň esasy bölegi polatdan guýlan M jisimden ybarat bolup, ol gozganmaýan okuň daşynda sürtülmesiz aýlanýan sterženiň ujuna berkidilen (*15.1-nji surat*). Sterženiň agramyny hasaba alman we M jisimi maddy nokat diýip, A-dan B nokada düşenindäki tizligini tapmaly. $OM = 0{,}981$ *m* bolup, A nokatdaky başlangyç tizligi ujypsyz bolany üçin, nol diýip kabul etmek mümkin.

Çözülişi. (15.2) formulanyň esasynda

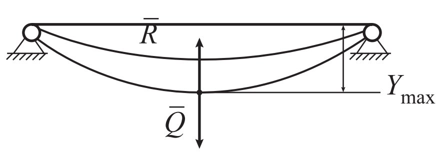
$$\frac{m\upsilon_B^2}{2} - \frac{m\upsilon_A^2}{2} = A(P), \quad \upsilon_A = 0, \quad A = mg\cdot AB = 2\cdot OM\cdot mg$$

bolany üçin $\frac{m\upsilon_B^2}{2} = 2\cdot OM\cdot mg \Rightarrow \upsilon_B = 6{,}2\,{}^{m}\!/\!_{s}$.

15.2-nji mesele. Ortasyna 2 *t* ýük goýlan pürsüň (balkanyň) statik egilişi 2 *mm*.

1) ýüki pürsüň ortasynda goýup, başlangyç tizliksiz goýberilende;

2) ýüki başlangyç tizliksiz pürsüň ortasyna 10 *m* beýiklikden taşlananda (*15.2-nji surat*), pürsüň agramyny hasap etmän, bu iki hal üçin onuň maksimal egilişini tapmaly.



15.2-nji surat

Çözülişi. Pürsüň R garşylygy onuň eglişine proporsional bolany üçin $R = ky$. Deňagramlylykda $2000 = k \cdot 2$. Bu ýagdaýda $k = 1000 ^{kg}\!/_{mm}$. Meseläni kinetik energiýanyň üýtgemegi hakyndaky teoremany ulanyp çözýäris.

Birinji hal üçin:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \int_0^{y_{\max}} (Q - ky)\,dy \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = 4mm.$$

Ikinji halda ýüküň pürse degen pursatyndaky tizligi pürs üçin başlangyç tizlik bolýar:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2} = \int_0^{y_{\max}} (Q - ky)\,dy, \quad \upsilon_0 = \sqrt{2gh}, \quad y_{\max} = 22{,}1\,mm.$$

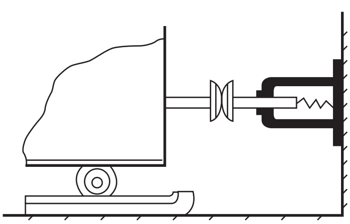
15.3-nji mesele. Agramy 16 t bolan wagon 2 $^{m}\!/_{s}$ tizlik bilen iki daýanç bufere baryp direlýär. Bufer puržinlary 5 t ýüküň täsiri arkaly 1 sm-e gysylsa, wagon direlende puržinlaryň haýsy maksimal derejede gysylýandygyny tapmaly (*15.3-nji surat*).

Çözülişi. Ýene-de ozalky meselä meňzeş çözýäris. Iki buferiň garşylygy $F = 10x$ bolany üçin:

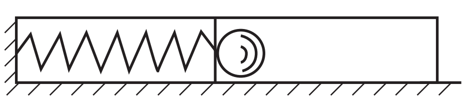
$$\frac{16 \cdot 200^2}{981 \cdot 2} = \int_0^{x_{\max}} 10x\,dx \quad \Rightarrow \quad x_{\max} = 8{,}08\ sm.$$

15.4-nji mesele. Deformirlenmedik puržinyň uzynlygy 20 sm. Onuň uzynlygyny 1 sm-e üýtgetmek üçin 0,2 kg güýç goýmaly. Puržin 10 sm gysylyp, 30 g agramly şary atsa, şaryň tizligini tapmaly (*15.4-nji surat*).

Çözülişi. Puržinyň gatylygy $c = \dfrac{0{,}2kg}{1sm} = 200\,\dfrac{g}{sm}$



15.3-nji surat



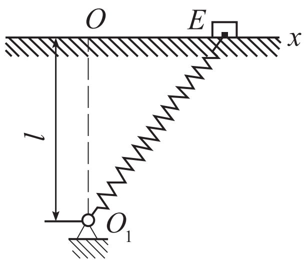
15.4-nji surat

$$\delta A = F_x dx \quad \Rightarrow \quad A = +\int_0^{10} cxdx = +\frac{cx^2}{2}\Big|_0^{10} = 100\ g \cdot m.$$

Kinetik energiýanyň teoremasyny ulanyp, alarys:

$$\frac{30}{9,2} \cdot \frac{\upsilon^2}{2} = 100 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{1960}{30}} = 8,1\,{}^m\!/_s. \quad \upsilon = 8,1\,{}^m\!/_s.$$

15.1. Özbaşdak çözmek üçin meseleler



15.5-nji surat

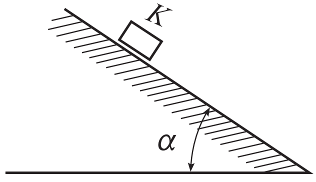
15.5-nji mesele. Massasy m bolan E jisim ýylmanak gorizontal tekizlikde dur. Gatylygy c bolan puržinyň bir ujy jisime, ikinji O_1 ujy şarnire birikdirilen. Deformirlenmedik puržinyň uzynlygy l_0 bolsa, $OO_1 = l$. Başlangyç pursatda E jisim deňagramlylyk ýagdaýyndan çäkli $OE = a$ aralyga geçirilip, başlangyç tizliksiz goýberilýär. Onuň deňagramlylyk ýagdaýyndan geçýän pursatyndaky tizligini kesgitlemeli (*15.5-nji surat*).

Jogaby: $\upsilon = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l - \sqrt{l^2 + a^2})\right]}$.

15.6-njy mesele. Deslapky meseläniň şertlerinde tekizligi büdür-südür we typma sürtülme koeffisiýentini f diýip, E jisimiň O deňagramlylyk ýagdaýyndan geçýän pursatyndaky tizligini kesgitlemeli.

Jogaby:

$$\upsilon^2 = \frac{2}{m}\left\{c\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l - \sqrt{l^2 + a^2})\right] - f\left[(mg + cl)a + cl_0 l \ln\frac{l}{a + \sqrt{l^2 + a^2}}\right]\right\}.$$



15.6-njy surat

15.7-nji mesele. K jisim büdür-südür ýapgyt tekizlikde dynçlykda dur. Tekizligiň gorizonta görä ýapgytlygy α we $f_0 > \text{tg}\alpha$, bu ýerde f_0 – dynçlykdaky sürtülme koeffisiýentini. Käbir pursatda jisime ýapgyt tekizligi boýunça pes ugra ugrukdyrylan başlangyç tizlik berlen. Hereket döwründäki sürtülme koeffisiýenti f bolsa, jisim durýança geçilen s ýoly kesgitlemeli (*15.6-njy surat*).

Jogaby: $s = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$.

15.8-nji mesele. Gorizont bilen 30° emele getirýän ýapgyt tekizlikde jisim başlangyç tizliksiz aşak hereketlenýär, bu ýagdaýda sürtülme koeffisiýenti 0,1. Jisim hereketlenip başlandan soň 2 *m* ýol geçende, ol nähili tizlige eýe bolar?

Jogaby: 4,02 *m/s*.

15.9-njy mesele. Massasy 24 *kg* bolan ok (snarýad) topuň nilinden 500 *m/s* tizlik bilen çykýar. Topuň niliniň uzynlygy 2 *m*. Gazlardan snarýada düşýän basyş güýjüniň ortaça mukdary näçe?

Jogaby: 1500 *kN*.

15.10-njy mesele. Massasy 3 *kg* bolan maddy nokat gorizontal göni çyzyk boýunça 5 *m/s* tizlik bilen çep tarapa hereket edýär. Oňa sag tarapa ugrukdyrylan hemişelik güýç täsir etdirilýär. Güýjüň täsiri 30 *s*-den soň togtadylýar, şonda nokadyň tizligi 55 *m/s* bolup, sag tarapa ugrukdyrylýar. Bu güýjüň mukdaryny we ýerine ýetiren işini tapmaly.

Jogaby: $F = 6$ *N*, $A = 4{,}5$ *kJ*.

15.11-nji mesele. Ýapgytlyk burçy $\alpha = 0{,}008$ radian bolan ýapaşak ýolda stansiýa golaýlaşýan otlynyň tizligi 10 *m/s* deň. Käbir wagtda maşinist otlyny tormozlap başlaýar. Sürtülmeden oklarda döreýän garşylyk otlynyň agramynyň 0,1 bölegine deň. Otly tormozlanyp başlanyndan durýança näçe ýol geçýär we bu ýoly näçe wagtda geçýär? $\sin\alpha = \alpha$ diýip almaly.

Jogaby: 55,3 *m*, 11,8 *s*.

15.12-nji mesele. Massasy 200 *t* bolan otly ýoluň gorizontal böleginde 0,2 m/s^2 tizlenme bilen barýar. Oklardaky sürtülmäniň garşylygy otlynyň agramynyň 0,01 bölegini düzýär we hereketiň tizligine bagly däl diýip hasaplanýar. Başlangyç pursatda otlynyň tizligi 18 *m/s* bolsa, $t = 10$ *s* bolan pursatda teplowozyň kuwwatyny kesgitlemeli.

Jogaby: 1192 *kWt*.

15.13-nji mesele. Büdür-südür gorizontal tekizlikde başlangyç υ_0 tizlik bilen hereketlenip başlaýar we doly togtaýança s aralygy geçýär. Sürtülme güýjüni normal basyşa proporsional hasaplap, typma sürtülme koeffisiýentini kesgitlemeli.

Jogaby: $f = \dfrac{\upsilon_0^2}{2gs}$.

15.14-nji mesele. Demir ýol platformasynyň massasy 6 t bolup, oklarynyň sürtülmesi netijesinde hereketdäki otly öz agramynyň 0,0025 bölegine deň garşylyga uçraýar. Işçi dynç duran platforma 250 N güýç bilen direnip, ony gönüçyzykly gorizontal ýolda tigirleýär. 20 m ýol geçilenden soň işçi platformany öz ugruna goýberýär. Howanyň garşylygyny we tigirleriň demir ýola sürtülme garşylygyny hasaba alman, platformanyň hereketli wagtyndaky iň uly tizligini we platforma durýança geçýän doly ýoluny hasaplamaly.

Jogaby: $\upsilon_{max} = 0{,}82\ m/s$, $s = 34\ m$.

15.15-nji mesele. Garşylygy 700 N bolan diwara çüý kakylýar. Çekijiň her urgusynda çüý l = 0,15 sm uzynlyga diwara çümýär. Çüýüň depesine degende çekijiň tizligi υ = 1,25 m/s bolsa, onuň massasy näçä deň?

Jogaby: 1,344 *kg*.

15.16-njy mesele. Ýere düşen 39 kg massaly meteorit topraga 1,875 m çümýär. Meteoritiň topraga çümen ýeriniň oňa $5 \cdot 10^5$ N garşylyk görkezýändigi anyklanan. Meteorit ýeriň üstüne nähili tizlik bilen gaçypdyr? Ol ýeriň üstünde görkezilen tizligi almak üçin nähili belentlikden başlangyç tizliksiz gaçmaly? Agyrlyk güýjüni hemişelik hasaplap, howanyň garşylygyny hasaba almaly däl.

Jogaby: $\upsilon = 219\ m/s$, $H = 2453\ m$.

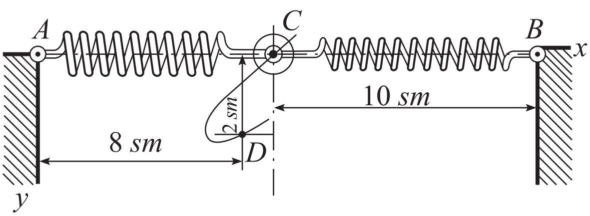
15.17-nji mesele. Massasy 500 t bolan tormozlanmadyk otly öçürilen hereketlendiriji bilen hereket edip, $R = (7650 + 500\ \upsilon)$ N garşylyga uçraýar, bu ýerde υ m/s-däki tizlik. Otlynyň başlangyç tizligi υ_0 =15 m/s bolsa, onuň durýança geçjek ýoluny kesgitlemeli.

Jogaby: 4,5 *km*.

15.18-nji mesele. 4 *kN* ýüküň täsirinde 1 *sm* egilýän maýyşgak ressoryň *x* egilişi ýüke göni proporsional diýip hasaplap, onuň potensial energiýasynyň aňlatmasyny ýazmaly.

Jogaby: Eger *x* *sm*-de hasaplansa, $\Pi = (20\,x^2 + C)$ *J*.

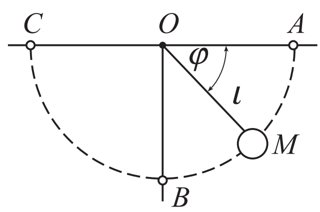
15.19-njy mesele. *Ax* gorizontal göni çyzykda ýerleşen. Süýndürilmedik iki sany *AC* we *CB* puržin gozganmaýan *A* we *B* nokatlara şarnirler bilen, *C* nokatda bolsa massasy 2 *kg* bolan daşa birikdirilen. *AC* puržiny 1 *sm* gysmak üçin 20 *N*, *CB* puržiny 1 *sm* süýndürmek üçin 40 *N* güýç goýmaly. Aralyk $AC = BC = 10$ *sm*. Daş hereketini dowam etdirip, koordinatalary $x_D = 8$ *sm*, $y_D = 2$ *sm* bolan *D* nokatdan geçende oňa $\upsilon_0 = 2$ *m/s* tizlik berlen, bu ýerde *A* nokat koordinatalar başlangyjy diýip kabul edilen we koordinata oklary suratda görkezilen ýaly ugrukdyrylan. Daşyň *xy* wertikal tekizlikdäki *D* nokatdan geçen pursatyndaky tizligini kesgitlemeli (*15.7-nji surat*).



15.7-nji surat

Jogaby: $\upsilon = 1{,}77$ *m/s*.

15.20-nji mesele. Agramy *P* bolan *M* ýük süýnmeýän *l* uzynlykly ýüp bilen *O* nokatdan asylan we ol wertikal tekizlikdäki *A* nokatdan başlap, başlangyç tizliksiz hereketlenip başlaýar. Garşylyk ýok ýagdaýynda *M* ýük *C* hala gelýär we bu ýerde onuň tizligi nola deň bolýar. *M* ýüküň agyrlyk güýjünden *B* nokatda peýda bolýan potensial energiýany nola deň diýip kabul edip, kinetik we potensial energiýalaryň, şeýle-de, olaryň jeminiň φ burça bagly özgerişiniň grafigini çyzmaly. Ýüpüň massasyny hasaba almaly däl *(15.8-nji surat)*.



15.8-nji surat

Jogaby: Deňlemeleri $T = Pl\sin\varphi$, $\upsilon = Pl\,(1-\sin\varphi)$ bolan iki sany sinusoida hem-de $T + \upsilon = Pl$ – göni çyzyk.

15.21-nji mesele. Massasy m bolan maddy nokat dikeldiji maýyşgak güýjüň täsirinde Ox göni çyzyk boýunça $x = a\sin(kt + \beta)$ kanunalaýyklykda garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Hereket edýän nokadyň T kinetik we V potensial energiýalarynyň x koordinata bagly görnüşde özgerişiniň grafigini çyzmaly; garşylyk hasaba almaly däl. Koordinatalar başlangyjynda $V = 0$.

Jogaby: Iki grafik hem parabola bolup, olar $T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2)$, $V = \frac{mk^2}{2}x^2$ deňlemeler bilen aňladylýarlar.

15.22-nji mesele. Maddy nokat mukdary we ugry hemişelik bolan wertikal güýjüň täsirinde Ýeriň radiusyna deň belentlikden Ýere düşýär. Nokat ýere düşende ol Ýeriň dartyş güýjüniň täsirinde eýe bolan tizligine deň tizlik almak üçin bu wertikal güýjüň mukdary näçe bolmaly? Ýeriň dartyş güýji nokatdan Ýeriň merkezine çenli aralygyň kwadratyna ters proporsional.

Jogaby: $P/2$, bu ýerde P – ýeriň üstündäki agramy.

15.23-nji mesele. Ujuna maddy nokat birikdirilen gorizontal puržin P güýç bilen gysylan we dynçlykda dur. P güýç birden ugruny garşylykly ugra üýtgedýär. Şundan soň ýüze çykan iň uly l_2 süýnmäniň deslapky l_1 gysylyşa garanyňda näçe esse uludygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $l_2/l_1 = 3$.

15.24-nji mesele. Jisim ýeriň üstünden ýokaryk wertikal boýunça başlangyç υ_0 tizlik bilen atylan. Agyrlyk güýji Ýeriň merkezine çenli aralygyň kwadratyna ters proporsional görnüşde üýtgeýär diýip hasap edip, jisimiň H göteriliş belentligini kesgitlemeli; bu ýagdaýda howanyň garşylygyny hasaba almaly däl. Ýeriň radiusy $R = 6370$ km, $\upsilon_0 = 1$ km/s.

Jogaby: $H = \frac{R\upsilon_0^2}{2gR - \upsilon_0^2} = 51{,}38$ km.

15.25-nji mesele. Iki bölejik položitel elektrik bilen zarýadlanan, birinji bölejigiň q_1 zarýady 100 Kl, ikinjisiniň zarýady $q_2 = 0{,}1q_1$. Birinji bölejik gozganmaýar, ikinji bölejik bolsa birinji bölejigiň iteriş güýjüniň täsirinde hereket edýär. Ikinji bölejigiň massasy 1 kg; birinji bölejikden hasaplanan başlangyç aralyk 5 *sm*, başlangyç tizlik bolsa nola deň.Iteriş güýjüniň täsirini $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (bu ýerde r – bölejikleriň arasyndaky uzaklyk) diýip alyp, hereketlenýän bölejigiň tizliginiň ýokarky çägini (predelini) kesgitlemeli.

Jogaby: 20 *m/s*.

15.26-njy mesele. Ýeriň üstünde duran jisimi Ýeriň radiusyna deň belentlige götermek üçin oňa wertikal bilen ýokarylygyna nähili tizlik berilmelidigini kesgitlemeli; bu ýerde Ýeriň dartyş güýjüni ulanmaly. Bu güýç Ýeriň merkezinden jisime çenli aralygyň kwadratyna ters proporsional görnüşde üýtgeýär. Ýeriň radiusy $6{,}37 \cdot 10^6$ *m*, ýeriň üstünde Ýeriň dartyş güýjüniň tizlenmesi 9,8 m/s^2 deň.

Jogaby: 7,9 *km/s*.

15.27-nji mesele. Ýeriň üstünden Aýa atylan snarýadyň Aý bilen Ýeriň dartyş güýçleriniň deň bolan nokadyna baryp, şol nokatda deňagramlylykda galmagy üçin snarýady haýsy υ_0 tizlik bilen zyňmalydygyny tapmaly. Ýeriň we Aýyň hereketi hem-de howanyň garşylygy hasaba alynmaly däl. Ýeriň üstünde Ýeriň dartyş güýjüniň tizlenmesi 9,8 m/s^2 deň. Aý bilen Ýeriň massalarynyň gatnaşygy $m : M = 1 : 80$; olaryň arasyndaky uzaklyk $d = 60R$, bu ýerde $R = 6000$ *km* (Ýeriň radiusy) diýip hasaplanýar.

Bütindünýä dartyş güýjüniň mukdarynyň formulasyna girýän f koeffisiýenti aşakdaky deňlemeden tapýarys:

$$mg = mf\left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

$$\textit{Jogaby:}\quad \upsilon_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d+R)+R} = \frac{59}{30}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}gR,$$

bu ýerde $\alpha = \frac{1}{59\sqrt{80}}$ ýa-da $\upsilon_0 = 10{,}75$ *km/s*.

15.28-nji mesele. Topragy massasy 60 *kg*, kese-kesigi 12 dm^2 bolan, 1 *m* belentlikden düşýän el tokmagy bilen depgileýärler. Ahyrky urguda tokmak topraga 1 *sm* gidýär, bu ýagdaýda topragyň tokmagyň hereketine garşylygyny hemişelik diýip hasaplamak mümkin. Toprak çökmezden haýsy mukdardaky iň uly ýüke çydap biler? Tokmak topraga haýsy garşylygy ýeňip çümýän bolsa, depgilenýän toprak hem şondan artmaýan ýüke çydap bilýär diýip güman edilýär.

Jogaby: 494,4 kPa.

15.29-njy mesele. Şahta lifti $\upsilon_0 = 12\ m/s$ tizlik bilen aşak hereket edýär. Liftiň massasy 6 t. Lifti saklap duran tanap üzülse, liftiň $s = 10$ m ýolda durmagy üçin, ätiýäçlyk paraşýuty şahtanyň diwary bilen liftiň arasynda haýsy sürtülme güýjüni döretmeli? Sürtülme güýjüni hemişelik diýip hasaplamaly.

Jogaby: $F = m\left(g + \dfrac{\upsilon_0^2}{2s}\right) = 102\ kN.$

15.30-njy mesele. Massasy 200 g bolan halka $y = x^2$ parabola şeklindäki duga boýunça aşaklygyna typýar. Halka $x = 3\ m$, $y = 9\ m$ nokatdan başlangyç tizliksiz hereketlenip başlaýar. Halka parabolanyň iň aşaky nokadyndan geçýän pursatynda halkanyň tizligini we oňa sim tarapyndan täsir edilýän güýji kesgitlemeli.

Jogaby: $\upsilon_1 = 13{,}3\ m/s$, $R = 72{,}5\ N$.

15.31-nji mesele. Uzynlygy l bolan matematiki maýatnige gorizontal ugurda υ_0 başlangyç tizlik berip, deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarylýar. Bir periodyň dowamynda maýatnigiň çyzýan dugasynyň uzynlygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $s = 4l \arccos\left(1 - \dfrac{\upsilon_0^2}{2gl}\right).$

16. MADDY NOKADYŇ GÖNÜÇYZYKLY YRGYLDYLARY

Maddy nokadyň hereketiniň umumy kanunlary bilen tanyşdyk. Indi tehnikada möhüm ähmiýete eýe bolan maddy nokadyň yrgyldyly hereketi bilen tanşalyň. Şeýle herekete tehnikanyň dürli şahalarynda duş gelmek bolýar. Umuman, durmuşda yrgyldyly herekete duşulmaýan ýeri gaty az. Islendik binanyň ýa-da maşynyň düzümine girýän bölekler bellibir derejede maýyşgak bolany üçin, yrgyldamaga ymtylýarlar.

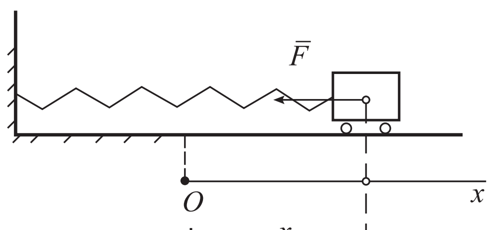
Bu yrgyldy bellibir çäge ýetende, maşynyň işine ýa-da binanyň durnuklylygyna howp abanýar. Alymlaryň öňünde duran mesele yrgyldylary bolmaz ýa-da bellibir ýol berilýän derejeden aşmaz ýaly derejede saklamaly.

Munuň özi umumy yrgyldylar teoriýasynyň hususy bölegidir.

Maşynyň, gurluşyk binalarynyň we olaryň bölekleriniň yrgyldylary maddy nokatlar sistemasyna degişli hem bolsa, hadysanyň esasy häsiýetleri bilen tanyşmak üçin, derňewi maddy nokadyň yrgyldysyndan başlamak amatlydyr. Şunuň bilen birlikde, amaly ähmiýete eýe bolan meseläni, köplenç, bir maddy nokadyň meselesine getirmek bolýar.

Şol sebäpli, bu bapda maddy nokadyň yrgyldyly hereketiniň üstünde ýeterlik derejede durup geçeliň.

Giriş düşünjeleri. Maddy nokada täsir edip biljek güýçleriň arasynda **gaýtaryjy güýçler** aýratyn ähmiýete eýedir. Bu güýçler nokady deňagramlylyk ýagdaýyna gaýtarmaga ymtylýarlar we hemişe deňagramlylyk nokadyna, ýagny O nokada tarap ugrukdyrylandyr (*16.1-nji surat*). O nokada **yrgyldylar merkezi** hem diýilýär.



16.1-nji surat

Gaýtaryjy güýjüň ululygy, nokadyň deňagramlylyk ýagdaýyndan x daşlygyna bagly. Bu güýç nokada yrgyldyly häsiýeti berýär.

Elbetde, maddy nokada gaýtaryjy güýç bilen birlikde (bilelikde) tizlige bagly bolan $R(\dot{x})$ **garşylyk güýji** hem täsir edýär. Bu güýçlerden başga, daşky güýjüň hem täsir etmegi mümkin, oňa **gozgaýjy** ýa-da **üýtgediji güýç** diýilýär. Gozgaýjy güýç wagta baglylykda öz ugruny we mukdaryny belli kanun boýunça üýtgedip durýar.

Derňemek aňsat bolar ýaly iň ýönekeý deňlemeleri almak üçin güýçleri $F_x = -cx$, $R_x = -\mu\dot{x}$ ýaly ýönekeý görnüşde almaly. Bu güýçlere degişli differensial deňlemeler çyzykly deňlemeler bolany üçin çözmek aňsatdyr.

Aşakdaky tablisada täsir edýän güýçler, degişli differensial deňlemeler we yrgyldylaryň görnüşleri berlendir.

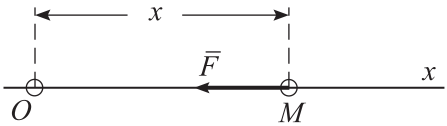
Täsir edýän güýçler	**Differensial deňlemeler**	**Yrgyldylaryň atlandyrylyşy**
1	**2**	**3**
$F(x)$ – gaýtaryjy güýç: $F_x = -cx$	$m\ddot{x} + cx = 0$	erkin yrgyldylar
$F(x)$ – gaýtaryjy güýç + $R(\dot{x})$ – garşylyk güýji: $F_x = -cx$, $R_x = -\mu\dot{x}$	$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$	şepbeşik sürtülmeli erkin yrgyldylar (togtaýan yrgyldylar)
$F(x)$ – gaýtaryjy güýç + $Q(t)$ – gozgaýjy güýç: $F_x = -cx$, $Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + cx = Q_x(t)$	mejbury yrgyldylar
$F(x)$ – gaýtaryjy güýç + $R(\dot{x})$ – garşylyk güýji + $Q(t)$ – gozgaýjy güýç: $F_x = -cx$, $R_x = -\mu\dot{x}$ $Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = Q_x(t)$	şepbeşik sürtülmeli mejbury yrgyldylar

16.1. Erkin yrgyldylar. Meseleler

Goýlan meseläni anyklaşdyrmak maksady bilen 16.1-nji suraty has dolurak alyp, giňişleýin düşündireliň (*16.2-nji surat*).

Ýokarda belläp geçişimiz ýaly O – nokat koordinatalar başlangyjy, yrgyldylar merkezi, deňagramlylyk nokadydyr.

Gaýtaryjy güýç: $\overline{F} = -c \cdot \overline{OM} \quad \Rightarrow \quad F_x = -cx.$ (16.1)



16.2-nji surat

bu ýerde c – proporsionallyk koeffisiýenti; x – nokadyň koordinatasy.

Massasy m bolan nokadyň differensial deňlemes:i $m\ddot{x} + cx = 0$.

Deňlemäniň iki tarapyny hem m-e bölüp, $\frac{c}{m} = k^2$ belgileme girizip, deňlemäni göçürýäris:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (16.2)$$

Bu birjynsly, üýtgemeýän koeffisiýentli ikinji tertipli differensial deňlemedir.

Deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (16.3)$$

Differensirläp, nokadyň tizligini tapalyň:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \qquad (16.4)$$

bu ýerde C_1, C_2 – integrirlemede döreýän üýtgemeýän ululyklar. Olar meseläniň başlangyç şertlerinden tapylýar.

Başlangyç şertleri ýazalyň:

$$t = 0;\ \ x = x_0,\ \dot{x} = \upsilon_0\ . \qquad (16.5)$$

(16.5)-i (16.3)-de we (16.4)-de goýýarys:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= C_1, \\ \upsilon_0 &= C_2 k \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} C_1 &= x_0, \\ C_2 &= \frac{\upsilon_0}{k} \end{aligned}\right\} \qquad (16.6)$$

Manysy has aýdyň bolar ýaly C_1, C_2 ululyklara derek a we α ululyklary aşakdaky ýaly girizeliň:

$$C_1 = a\sin\alpha,\ \ C_2 = a\cos\alpha. \qquad (16.7)$$

Onda (16.3) deňleme aşakdaky görnüşe geýe bolar:

$$x = a\sin\alpha \cos kt + a\cos\alpha \sin kt = a\sin(kt + \alpha)$$

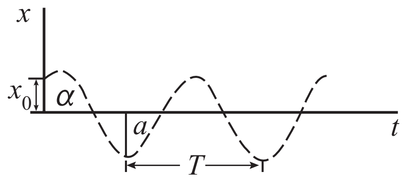
ýa-da $$x = a\sin(kt + \alpha), \tag{16.8}$$

bu ýerde a, α – täze üýtgemeýän ululyklar. Olary aşakdaky ýaly kesgitläliň:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k^2}}; \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 \cdot k}{\upsilon_0}. \tag{16.9}$$

(16.8) deňleme garmoniki yrgyldylary aňladýar (*16.3-nji surat*). Diýmek, gaýtaryjy güýjüň täsiri bilen maddy nokat garmoniki yrgyldyly herekete eýe bolýar. Bu ýerde a – yrgyldylaryň amplitudasy, α – başlangyç faza.

Bir yrgyldynyň T wagtyna **yrgyldynyň periody** diýilýär.



16.3-nji surat

(16.8) formuladan, sinusyň periody 2π bolany üçin, aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$[k(t+T)+\alpha] - (kt+\alpha) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

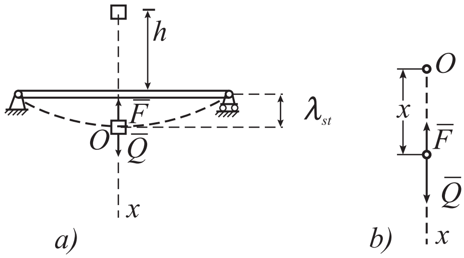
Periodyň ters bahasyna **yrgyldynyň ýygylygy** (wagt birligindäki yrgyldy sany) diýilýär. Ony «υ» bilen belgiläp, alarys:

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \tag{16.10}$$

$k = \dfrac{2\pi}{T}$ bolany üçin, bu ululyga yrgyldylaryň burç ýygylygy hem diýilýär (ol 2π sekuntdaky yrgyldylaryň sanyny aňladýar).

16.1-nji mesele. Q agramly ýük dynçlyk ýagdaýyndan h beýiklikden uçlary berkidilen maýyşgak pürsüň üstüne gaçanyndan soňky hereketiniň deňlemesini düzmeli.

Çözülişi. X oky dik aşak ugrukdyryp, O başlangyjyny ýüküň statiki deňagramlylygynda alalyň. Bu ýagdaýy almak üçin, ýüki pürsüň üstünde goýup, ýuwaşlyk bilen (tizlenmesiz) goýberýäris. Ýük λ_{st} aralyga süýşüp, «statiki deňagramlylygy» emele getirýär (*16.4-nji a surat*).



16.4-nji surat

16.4-nji *b* suratda meseläniň hasaplama nusgasy berlen.

Ýüküň yrgyldyly hereketiniň pürse degen pursatyndan başlanýanlygy üçin, onuň başlangyç koordinatasyny şeýle ýazylýar: $x_0 = -\lambda_{st} = -0{,}5$ *sm*. Şu pursatda ýüküň tizligi *h* beýiklikden erkin gaçmagyň tizligine deň:

$$\upsilon_0 = \dot{x}_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 100} = 443\, {}^{sm}\!/\!_{s}.$$

$\overline{Q}$ – agyrlyk güýji we $\overline{F}$ gaýtaryjy güýjüň *x* oka proýeksiýalaryny tapalyň:

$$Q_x = Q, \quad F_x = -c(x + \lambda_{st}).$$

Deňagramlylykda $Q = c\lambda_{st}$ bolýandygyny nazarda tutup, ýüküň hereketiniň differensial deňlemesini aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$m\ddot{x} = -c(x + \lambda_{st}) + Q \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -cx - c\lambda_{st} + Q.$$

$-c\lambda_{st} + Q = 0$ bolany üçin

$$m\ddot{x} = -cx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Bu ýerden *k* ýygylygy tapalyň:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{cg}{c\lambda_{st}}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}} = 44{,}3 s^{-1}.$$

Nokadyň hereket deňlemesini, ýagny gözlenýän deňlemäni (16.3) görnüşde ýazyp, C_1, C_2 integrirlemäniň erkin hemişeliklerini başlangyç şertlerden ($t = 0$; $x_0 = -\lambda_{st}$, $\upsilon_0 = x = 443\, {}^{sm}\!/\!_{s}$ tapmak bolýar:

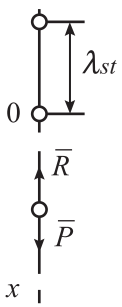
$$C_1 = -0{,}5; \quad C_2 = 10.$$

Gözlenýän deňleme aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$x = -0{,}5\cos 44{,}3t + 10\sin 44{,}3t \;\; sm.$$

16.2-nji mesele. Gäminiň asuda suwdaky erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Gäminiň agramy P t, gorizontal tekizlige proýeksiýasynyň meýdany S m^2. Suwuň dykyzlygy $\gamma = 1\, {}^{t}\!/_{m^3}$.

Çözülişi. Gämi öňe hereket edeni üçin, onuň islendik nokadynyň (mysal üçin, agyrlyk merkeziniň) hereketini öwrenmek ýeterlikdir.



16.5-nji surat

Gäminiň deňagramlylyk ýagdaýynda koordinatalar başlangyjyny alyp, x oky aşaklygyna ugrukdyralyň (*16.5-nji surat*). Gämä täsir edýän güýçler: $\overline{P}$ – agramy, $\overline{R}$ – suwuň galdyryjy güýji. Bu ýerde $P_x = P$, $R_x = -S\gamma(x + \lambda_{st})$.

Gäminiň islendik nokadynyň (mysal üçin, agyrlyk merkeziniň) hereketiniň differensial deňlemesi we ondaky ýönekeýleşdirmeler aşakdaky ýaly ýerine ýetirilýär:

$$m\ddot{x} = -\gamma S(\lambda_{st} + x) + P \;\;\Rightarrow\;\; m\ddot{x} = -\gamma Sx - \gamma S\lambda_{st} + P.$$

$-\gamma S\lambda_{st} + P = 0$ bolany üçin,

$$m\ddot{x} = -\gamma Sx \;\;\Rightarrow\;\; \ddot{x} + k^2x = 0, \;\; k = \sqrt{\frac{\gamma S}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma Sg}{P}}.$$

Periody tapalyň: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{P}{\gamma gS}}$.

16.3-nji mesele. Ýeriň berlen nokadynda agyrlyk güýjüniň tizlenmesini kesgitlemek üçin, iki sany tejribe geçirilýär. Puržinyň ujundan P_1 agramly ýük asyp, onuň l_1 statiki uzalyşyny tapmak bolýar. Soň şol puržinyň ujuna P_2 agramly ýük asyp, ýene onuň l_2 statiki uzalyşy ölçelýär. Ýükler erkin yrgyldy eder ýaly edip, tejribe täzeden gaýtalanýar we ýükleriň T_1, T_2 periodlary ölçenýär. Ikinji tejribe puržinyň massasyny hasaba almak üçin gaýtalanýar. Puržinyň massasyny m diýip belgiläp, onda hereket edýän ýüklere goşmaça m massa goşulýan ýaly hasaplanýar. Tejribeden alnan bahalaryň üsti bilen, agyrlyk güýjüniň g tizlenmesini kesgitleýän formulany tapmaly.

Çözülişi. Meseläni çözmek üçin aşakdaky formulalar: $P_1 = m_1 g = cl_1$, $P = m_2 g = cl_2$ we yrgyldylaryň aşakdaky periodlary peýdalanylýar:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m}{c}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 + m}{c}}.$$

Bu deňliklerden puržinyň m massasyny tapyp, özara deňlemeli:

$$\frac{T_1^2 c}{4\pi^2} - m_1 = \frac{T_2^2 c}{4\pi^2} - m_2 \Rightarrow m_1 - m_2 = \frac{(T_1^2 - T_2^2)c}{4\pi^2} = \frac{c(l_1 - l_2)}{g} \Rightarrow g =$$
$$= 4\pi^2 \frac{l_1 - l_2}{T_1^2 - T_2^2}.$$

16.2. Şepbeşik sürtülmeli erkin yrgyldylar (togtaýan yrgyldylar). Meseleler

Maddy nokada diňe gaýtaryjy güýç täsir etse, ýokarda görkezilişi ýaly, ol togtaman, garmoniki yrgyldaýar. Hakykatda garşylyk güýçleri bolany üçin yrgyldylaryň amplitudalary kem-kemden kiçelip, yrgyldylar togtap başlaýarlar. Tiz wagtdan yrgyldylar ýok bolýarlar. Muny gündelik tejribeden hem bilmek bolýar.

Şu paragrafda nokada onuň tizliginiň birinji derejesine proporsional garşylyk güýji täsir edendäki, ýagny $\overline{R} = -\mu\overline{\upsilon}$ bolandaky yrgyldylara garalyň. Bu ýerde μ – garşylygy aňladýan koeffisiýent.

Maddy nokada gaýtaryjy $F = -cx$ we garşylyk $R_x = -\mu\dot{x}$ güýçler goýlan.

Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň düzülişi, ýönekeýleşdirilişi, işlenilişi 6-njy paragrafy peýdalanmak bilen düşündirilýär.

Şeýlelikde,

$$m\ddot{x} = F_x + R_x \;\Rightarrow\; m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

$\frac{c}{m} = k^2, \frac{\mu}{m} = 2n$ bilen belgiläp, alarys:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{16.11}$$

Bu deňleme togtaýan yrgyldylaryň differensial deňlemesidir. Ol birjynsly, ikinji tertipli, üýtgemeýän koeffisiýentli, çyzykly deňlemedir.

Deňlemäni integrirlemek üçin, onuň häsiýetlendiriji (harakteristik) deňlemesini düzýäris:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$$

we çözýäris:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

(16.11) deňlemäniň umumy integraly häsiýetlendiriji deňlemäniň $D = n^2 - k^2$ diskriminantynyň alamatyna baglydyr.

Eger

1) $D > 0$ ($n > k$) bolsa, onda

$$x = C_1 e^{(-n+\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2 e^{(-n-\sqrt{n^2-k^2})t};$$

2) $D = 0$ ($n = k$) bolsa, onda

$$x = C_1 e^{-nt} + C_2 e^{nt};$$

3) $D < 0$ ($n < k$) kiçi garşylykly hal bolsa, onda

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\, t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\, t). \qquad (16.12)$$

Birinji iki haldaky funksiýalar periodik (gaýtalanýan) däldigi üçin, olara degişli hereketler hem gaýtalanýan hereket bolmaýarlar.

Üçünji halda häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2} = -n \pm ik_1, \quad i = \sqrt{-1}, k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$$

kompleks sanlar bolany üçin, maddy nokadyň hereketi gaýtalanýan (periodik) hereket bolýar.

(16.11) deňlemäniň umumy çözüwini aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \qquad (16.13)$$

ýa-da

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha), \qquad (16.14)$$

bu ýerde C_1, C_2 ýa-da a, α integrirlemäniň erkin hemişelikleri we olar özara aşakdaky ýaly baglanyşýarlar:

$$C_1 = a\sin\alpha, \quad C_2 = a\cos\alpha.$$

Başlangyç şertler:

$$t = 0; \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \upsilon_0. \tag{16.15}$$

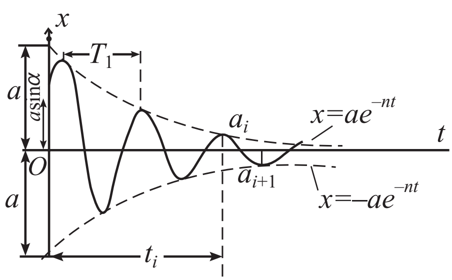
(16.14)-den nokadyň tizligini tapalyň:

$$\dot{x} = -ane^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + ak_1 e^{-nt}\cos(k_1 t + \alpha). \tag{16.16}$$

Başlangyç şertleri (16.14), (16.16) deňliklere goýup, a, α-ny tapýarys:

$$a = \pm\sqrt{x_0^2 + \frac{(nx_0 - \upsilon_0)^2}{k_1}}; \quad tg\alpha = \frac{x_0 \cdot k_1}{nx_0 + \upsilon_0}. \tag{16.17}$$

(16.14) deňlemäniň kesgitleýän yrgyldylaryna **togtaýan yrgyldylar** diýilýär, sebäbi e^{-nt} köpeldiji t wagt geçdigiçe x-i kiçeldip, nola ymtyldyrýar. Togtaýan yrgyldylaryň grafigi 16.6-njy suratda berlendir.



16.6-njy surat

Togtaýan yrgyldylaryň grafigi t wagta baglylykda absolýut bahalary kiçelýän $x = ae^{-nt}$ we $x = -ae^{-nt}$ egri çyzyklaryň arasynda ýerleşýär.

Togtaýan yrgyldylaryň ýygylygy $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ we periody $T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ görnüşde ýazylýar.

Garmoniki yrgyldylaryň we togtaýan yrgyldylaryň döwürlerini (periodlaryny) deňeşdirip, aşakdakyny alarys:

$$T = \frac{2\pi}{k} < \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = T_1.$$

Aňlatmadan togtaýan yrgyldylaryň döwrüniň garmoniki yrgyldylaryň döwründen uludygyna göz ýetirmek bolýar. Eger garşylyk kiçi bolsa, ýagny $n << k$ bolsa, onda $T \approx T$ diýip kabul etmek bolýar.

Yrgyldyly hereket edýän nokadyň amplitudalaryndan aşakdaky ýaly hatar düzmek bolýar:

$$a_1, a_2, ..., a_i, a_{i+1}, ...$$

a_i we a_{i+1} amplitudalara degişli pursatlar bolup t_1 we $t_{i+1} = t_i + \frac{T_1}{2}$ hyzmat edýärler.

Goňşy amplitudalaryň gatnaşygy aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\frac{a_{a+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n\left(t_i+\frac{T_1}{2}\right)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T_1}{2}}. \tag{16.18}$$

Bu aňlatmadan amplitudalaryň yzygiderliginiň $e^{-n\frac{T_1}{2}}$ maýdalawjyly kemelýän geometrik progressiýany emele getirýändigini görmek bolýar. $D = e^{-n\frac{T_1}{2}}$ ululyga togtaýan yrgyldylaryň **dekrementi** diýilýär.

$\ln D = -\frac{nT_1}{2} = -\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ ululyga **logarifmik dekrement** diýilýär.

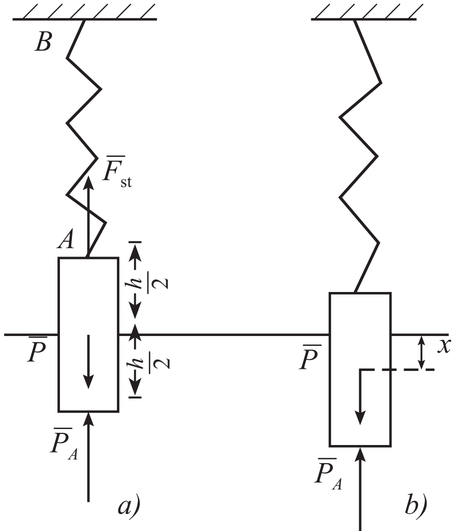
16.4-nji mesele. P agramly r radiusly we h beýiklikli silindr AB puržinyň ujuna berkidilen we suwa çümdürilen. Deňagramlylyk ýagdaýynda silindriň ýarysy suwa çümýär. Başlangyç pursatda silindriň $\frac{2}{3}h$ bölegi suwa çümdürilip, başlangyç tizliksiz goýberilende, ol dikligine hereket edýär. Puržinyň **gatylygyny** (maýyşgaklyk koeffisiýenti) c, suwuň udel agramyny γ diýip kabul etmeli.

Suwuň silindre täsiri Arhimediň goşmaça güýjüne getirilýär hasap edip, silindriň hereket deňlemesini tapmaly (*16.7-nji surat*).

Çözülişi. Statiki deňagramlylykda silindriň P agramy puržinyň $F_{st} = \lambda_{st} \cdot c$ gaýtaryjy güýji we ýokarlygyna ugrugan Arhimediň güýji bilen deňagramlaşýar. Bu ýerde λ_{st} puržinyň statiki dartylmagy *(16.7-nji a surat)*. Silindriň P agramy aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$P = 0{,}5 \cdot \pi r^2 \gamma + c\lambda_{st} . \tag{1}$$

Islendik t wagt üçin silindriň deňagramlylyk ýagdaýyndan süýşmegi x koordinata bilen kesgitlenýär *(16.7-nji b surat)*. P – agramy, $F_x = -c(\lambda_{st} + x)$ – puržinyň gaýtaryjy güýji, Arhimediň $P_{Ax} = -\pi r^2 \left(\frac{h}{2} + x\right)\gamma$ güýji silindre täsir edýär.



16.7-nji surat

Silindriň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = P - \pi r^2\left(\frac{h}{2} + x\right)\gamma - c(\lambda_{st} + x)$$

(1) deňlikden peýdalanyp, aşakdaky ýaly belgiläliň:

$$k^2 = \frac{(c + \pi\gamma r^2)g}{P}. \qquad (2)$$

Onda hereketiň differensial deňlemesini aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Şeýlelikde silindriň hereketiniň garmoniki yrgyldylary anyklanyldy. Onuň periody aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{g(c + \pi\gamma r^2)}}.$$

Başlangyç şertleri ýazalyň:

$$t = 0;\ x_0 = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6},\ \ \dot{x} = \upsilon_0 = 0.$$

6-njy paragrafyň (3) formulasy üçin C_1, C_2 ululyklary, başlangyç şertleri ulanyp tapýarys:

$$C_1 = \frac{h}{6},\quad C_2 = 0.$$

Netijede

$$x = \frac{1}{6} h \cos kt,$$

K ululyk (2) formuladan kesgitlenýär.

16.5-nji mesele. Eger suwuň garşylygy $R = \alpha \upsilon$ (α – proporsionallyk koeffisiýenti) bolsa, ýokardaky meseläni çözmeli. Yrgyldyly hereketiň döremek şertini kesgitlemeli.

Çözülişi. Silindriň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = -cx - \pi\gamma r^2 x - \alpha\dot{x}, \qquad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c + \pi\gamma r^2}{m} x = 0.$$

Belgiler girizýäris:

$$2n = \frac{\alpha}{m}, \qquad k^2 = \frac{c + \pi\gamma r^2}{m}.$$

Onda

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0.$$

Häsiýetlendiriji

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$$

deňlemäni çözýäris:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Silindriň yrgyldamagy üçin $n^2 - k^2 < 0$ ýa-da $\frac{c + \pi\gamma r^2}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > 0$ şert ýerine ýetmeli. Bu şert ýerine ýetende, başlangyç şertlerden peýdalanyp, differensial deňlemäni integrirlesek, aşakdaky netijäni alarys:

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \alpha), \text{ bu ýerde}$$

$$a = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - n^2}}; \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{k^2 - n^2}}{n}.$$

16.3. Nokadyň garşylyksyz gurşawdaky mejbury yrgyldylary. Meseleler

M massaly maddy nokat aşakdaky iki güýjüň täsiri bilen gönüçyzykly yrgyldyly hereket edýär diýeliň:

$F_x = -c \cdot x$ – gaýtaryjy güýç, $Q_x = H \cdot \sin pt$ – gozgaýjy güýç (*16.8-nji surat*).

16.8-nji surat

Gaýtaryjy güýç belli bolany üçin gozgaýjy güýji düşündireliň.

Maddy nokadyň deňagramlylygyny bozujy güýç täsirini saklamasa, nokat **mejbury** yrgyldamaly bolýar. Q_x güýç x okda ýatyp, özüniň ugruny we mukdaryny mälim kanun bilen özgerdip durýar. Bu ýerde iň ýönekeý haly öwrenmek bilen çäklenip, gozgaýjy güýç sinusyň kanuny bilen özgerýär diýeliň.

$H > 0$ – gozgaýjy güýjüň amplitudasy, p – onuň ýygylygy, $\tau = \dfrac{2\pi}{p}$ – gozgaýjy güýjüň periody.

Bize mälim usullardan peýdalanyp, nokadyň differensial deňlemesini düzüp, standart görnüşe getireliň:

$$m\ddot{x} = F_x + Q_x \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -cx + H\sin pt \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt. \tag{16.19}$$

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – erkin yrgyldylaryň ýygylygy, $h = \dfrac{H}{m}$.

Bu deňleme maddy nokadyň mejbury yrgyldylarynyň differensial deňlemesidir. Bu deňlemäniň integralyny tapalyň. Deňleme çyzykly we birjynsly däl bolany üçin, onuň integralyny (çözüwini) iki bölege dargadalyň. Olaryň birinjisi – deňlemäniň birjynsly böleginiň umumy integraly (çözüwi), ikinjisi şu deňlemäniň haýsydyr bir hususy integraly (çözüwi) bolsun.

(16.19) deňlemäniň birjynsly

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

bölegininň umumy integralynyň

$$x_1 = a\sin(kt + \alpha)$$

bolýanlygy mälim.

Goý, x_2 – bu ýerde (16.19) deňlemäniň hususy integraly bolsun. Iki haly tapawutlandyralyň.

1) $p \neq k$. Rezonanssyz ýagdaý, ýagny gozgaýjy güýjüň p ýygylygy, erkin yrgyldylaryň k ýygylygyna gabat gelmeýär.

(16.19) deňlemäniň hususy çözüwi aşakdaky ýaly tapylýar:

$$x_2 = A\sin pt + B\cos pt), \tag{16.20}$$

bu ýerde A, B – häzirlikçe nämälim, tapylmaly koeffisiýentler. Olary tapmak üçin (16.20)-niň (16.19) deňlemäni kanagatlandyrmaly şertini ulanýarys. x_2, $\ddot{x}_2$ bahalary (16.19) deňlemede goýup, sinusyň we kosinusyň koeffisiýentlerini deňläliň:

$$\left.\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= h, \\ B(k^2 - p^2) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad B = 0, \quad A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

bolany üçin

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt. \tag{16.21}$$

Şeýlelikde (16.19) deňlemäniň umumy integralyny (çözüwini) aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$x = \underbrace{a\sin(kt + \alpha)}_{\textit{erkin yrgyldylar}} + \underbrace{\frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt.}_{\textit{mejbury yrgyldylar}} \tag{16.22}$$

Erkin yrgyldylar ýeterlik öwrenilendigi üçin, mejbury yrgyldylar barada durup geçeliň. Mejbury yrgyldylaryň (16.21) deňlemesinde integrirlemäniň erkin hemişelikleri ýok, diýmek, bu yrgyldylar meseläniň başlangyç şertlerine bagly däldirler. Mejbury yrgyldylaryň ýygylygy gozgaýjy güýjüň ýygylygyna deň. Eger $k > p$ bolsa, mejbury yrgyldylaryň fazasy gozgaýjy güýjüň fazasy bilen gabat gelýär. Eger $k < p$ bolsa, fazalar π ululyga tapawutlanýarlar. Ol aşakdaky deňlemeden alynýar:

$$x_2 = -\frac{h}{p^2 - k^2}\sin pt = \frac{h}{p^2 - k^2}\sin(pt + \pi).$$

Mejbury yrgyldylaryň amplitudasyny A bilen belgiläp, ýönekeý özgertmeleri ulanalyň:

$$x_2 = -\frac{h}{|k^2 - p^2|} = \frac{\frac{h}{k^2}}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} = \frac{\frac{H}{m} \cdot \frac{m}{c}}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} = \frac{x_{st}}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}.$$

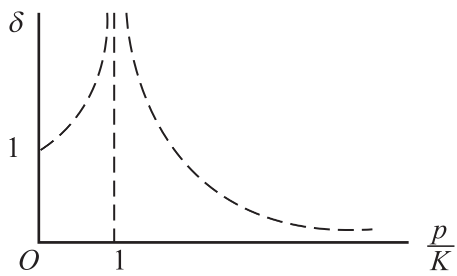
$x_{st} = \dfrac{H}{c}$ – gozgaýjy güýjüň iň uly bahasy (H) goýlanda, nokadyň deňagramlylyk ýagdaýyndan süýşmesiniň ululygy (**statiki gyşarma**).

Aşakdaky belgini girizeliň:

$$\delta = \frac{A}{x_{st}} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}.$$

δ ululyk mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň statiki gyşarmadan näçe esse uludygyny görkezýär. Oňa **dinamikligiň koeffisiýenti** diýilýär.

16.9-njy suratda δ bilen $\dfrac{p}{k}$ arasyndaky baglanyşyk görkezilen, ýagny $\dfrac{p}{k} \to 1$ bolanda $\delta \to \infty$.



16.9-njy surat

(16.22) umumy çözüwi başgarak görnüşde ýazalyň:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \qquad (16.23)$$

Başlangyç şertlerden ($t = 0$; $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = \upsilon_0$) integrirlemäniň erkin üýtgemeýän C_1, C_2 ululyklaryny tapýarys:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \cdot \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Bu bahalary (16.23)-de goýup, alarys:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{1}{k}\left(\dot{x}_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}\right)\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt. \quad (16.24)$$

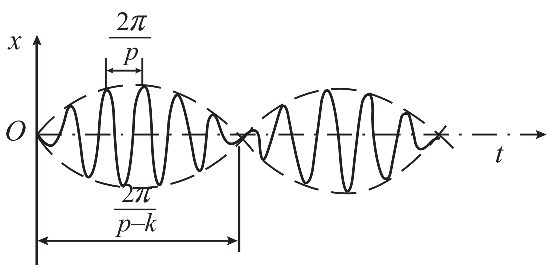
Eger p ýygylyk k ýygylyga golaý bolsa (ýagny, $p \approx k$), onda iki sany golaý ýygylykly, deň amplitudaly we garşylykly fazaly yrgyldylaryň goşulmasyndan özboluşly hadysa döreýär. Bu hadysa **gürsüldeme** ýa-da **urma hadysasy** diýilýär.

Goý, $\frac{p}{k} \approx 1$ bolsun. Onda (16.24) deňleme aşakdaky görnüşi alýar ($\frac{p}{k} \approx 1$, emma $k^2 - p^2 \neq 0$ diýip, kabul edýäris):

$$x \cong \frac{h}{k^2 - p^2}(\sin pt - \sin kt) \Rightarrow$$

$$x \cong \frac{2h}{k^2 - p^2}\sin\frac{p-k}{2}t \cdot \cos pt. \quad (16.25)$$

Bu hereketiň grafigi 16.10-njy suratda görkezilen.



16.10-njy surat

2) $p = k$. Rezonansly ýagdaý.

(16.19) deňlemäniň hususy çözüwini aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$x_2 = At\sin kt + Bt\cos kt,$$

bu ýerde A, B – häzirlikçe näbelli koeffisiýentler. Olaryň tapylyş usuly öňden bellidir. x_2, $\ddot{x}_2$-iň bahalaryny (16.19)-da goýup, sinusyň we kosinusyň koeffisiýentlerini deňleşdirip alýarys:

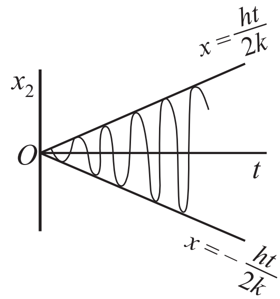
$$A = 0, \quad B = -\frac{h}{2k}.$$

Netijede:

$$x_2 = -\frac{ht}{2k}\cos kt = \frac{ht}{2k}\sin\left(ky + \frac{3\pi}{2}\right).$$

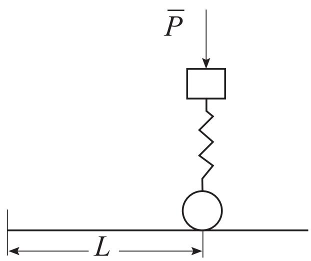
Mejbury yrgyldylaryň fazasy bilen gozgaýjy güýjüň fazasy $\frac{3\pi}{2}$ ululyk tapawutlanýar.

16.11-nji suratda x funksiýanyň grafigi berlen. Ol iki göni çyzygyň arasynda ýerleşen. Wagt geçmegi bilen mejbury yrgyldylaryň amplitudasy çäksiz ulalýar. Bu hadysa **rezonans** diýilýär.



16.11-nji surat

16.6-njy mesele. Ýüklenen ýüküň täsiri bilen wagonyň ressorlarynyň statiki egrelmegi λ_{st} = 5 *sm*. Hereket döwründe relsleriň birikýän ýerinde wagona urgular täsir edip, ressoryň üstünde mejbury yrgyldylar döreýär. Wagony «öňürdikledip» biljek howply tizligi kesgitlemeli. Relsleriň uzynlygy L = 12 *m* (*16.12-nji surat*).



16.12-nji surat

Çözülişi. Ressorlaryň statiki egrelmegi aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\lambda_{st} = \frac{p}{c}. \tag{1}$$

Wagon aýlawsyz, ýagny öňe bolan hereket edýändigi üçin, onuň islendik bir nokadynyň hereketini öwrenmek ýeterlikdir.

Nokada täsir edýän güýçler:

1) P – agram;

2) $F_x = -c(\lambda_{st} + x)$ – gaýtaryjy güýç;

3) Periodik täsir edýän daşky güýç – $Q_x = A\sin pt$. Bu ýerde $p = \frac{2\pi}{T}$, T – bir yrgylda sarp edilýän wagt: $T = \frac{L}{\upsilon}$.

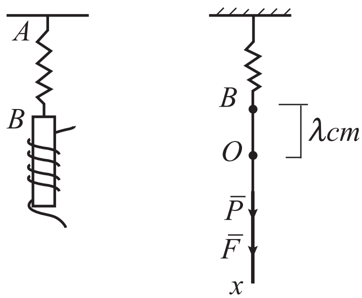
Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = P - c(\lambda_{\text{cm}} + x) + Q_x, \qquad P = c\lambda_{\text{cm}}$$
$$m\ddot{x} = P - c\lambda_{\text{cm}} - cx + Q_x \qquad \Rightarrow$$
$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{A}{m}\sin(pt),$$
$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{p} = \frac{cg}{c\lambda_{\text{cm}}} = \frac{g}{\lambda_{\text{cm}}},$$

$k = p$ bolanda rezonans döreýär. Ýagny $p = k = \sqrt{\dfrac{g}{\lambda_{\text{cm}}}}$,

$$\upsilon = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{cm}}}} = 96^{km}/_{sag}, \quad \upsilon = 96^{km}/_{sag}.$$

16.7-nji mesele. Gatylygy $c = 20^{g}/_{sm}$ bolan puržinden $P = 100\ g$ agramly magnit sterženi asylan. Sterženiň aşaky ujy $i = 20\sin 8\pi t$ üýtgeýän tok geçýän tegegiň içinde ýerleşen. Tok $t = 0$ pursatdan başlap täsir edýär we sterženi solenoide dartýar. Şu pursata çenli steržen puržindan aslyşyp, dynçlyk ýagdaýyny saklaýar (*16.13-nji surat*). Magnit bilen tegegiň özara täsiri $F = 16\,i$ din deňlik bilen kesgitlenen. Magnitiň mejbury yrgyldylaryny kesgitlemeli.



16.13-nji surat

Çözülişi: Koordinatalar başlangyjyny sterženiň deňagramlylyk ýagdaýynda O nokatda alyp, x oky aşaklygyna ugrukdyrýarys (*16.13-nji sur. ser.*). Tok goýberilende steržene $\overline{P}, \overline{F}, \overline{S}$ güýçler täsir edýärler. Bu güýçleriň proýeksiýalary aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$P_x = P,\ F_x = -c(\lambda_{\text{cm}} + x),\ Sx = 16\pi \text{i} = 320\pi \sin 8\pi \text{t} \text{din} = \frac{320}{980}\sin 8\pi t\ g$$

Nokadyň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = P - c(\lambda_{cm} + x) + \frac{320}{980}\sin 8\pi t, \qquad P = c\lambda_{cm}$$

bolany üçin

$$m\ddot{x} = -cx + \frac{320\pi}{980}\sin 8\pi t$$

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin 8\pi t \tag{1}$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{P} = \frac{20 \cdot 980}{100} = 196^{-2}, \quad h = \frac{320\pi 980}{100 \cdot 980} = 3,2\pi .$$

Meseläniň soragyna görä mejbury yrgyldylary (16.22) formula esasynda aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin t; \tag{2}$$

$$p^2 = (8\pi)^2 = 630^{-2}.$$

Mejbury yrgyldylaryň amplitudasyny (16.23) formuladan kesgitläliň:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{3,2\pi}{196 - 630} = -0,023sm.$$

(2) formula bahalary goýup, gözlenýän deňlemäni alýarys:

$$x_2 = -0,023\sin 8\pi t \; sm.$$

16.4. Tizligiň birinji derejesine proporsional bolan garşylygyň (şepbeşik sürtülmäniň) täsirindäki mejbury yrgyldylar. Meseleler

Goý, gönüçyzykly hereket edýän nokada gaýtaryjy güýç $F_x = -cx$, gozgaýjy güýç $Q_x = H\sin(pt)$ we tizligiň birinji derejesine proporsional bolan $R_x = -\mu\dot{x}$ garşylyk güýji täsir edýän bolsun. Nokadyň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H\sin(pt) \text{ ýa-da } k^2 = \frac{c}{m},\; 2n = \frac{\mu}{m},\; h = \frac{H}{m}$$

belgileri girizip, deňlemäni standart (nusga) görnüşde ýazalyň:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt). \tag{16.26}$$

Bu deňlemäniň ($n < k$) umumy çözüwi şeýle ýazylýar:

$$x = x_1 + x_2. \tag{16.27}$$

$x_1 = ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2 t + \alpha})$ belli bolyşy ýaly $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ deňlemäniň umumy çözüwi; x_2 (16.26)-nyň haýsy hem bolsa bir hususy çözüwi bolup, mejbury yrgyldylary aňladýar we aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$x_2 = b\sin(pt + \iota). \tag{16.28}$$

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + (2np)^2}}, \quad \mathrm{tg}\iota = -\frac{2np}{k^2 - n^2}, \tag{16.29}$$

bu ýerde b – mejbury yrgyldylaryň amplitudasy,

ι – mejbury yrgyldylaryň başlangyç fazasy.

Şeýlelikde (16.26)-nyň umumy çözüwi aşakdaky ýaly ýazylýar:

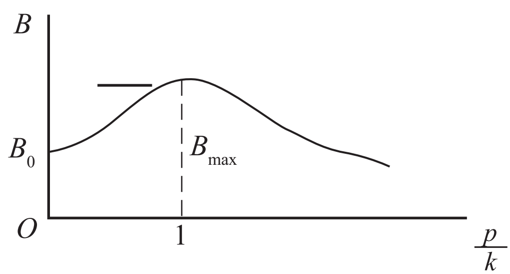
$$x = ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2 t + \alpha}) + b\sin(pt + \iota), \tag{16.30}$$

bu ýerde a, α – integrirlemäniň erkin hemişelikleri bolup, meseläniň başlangyç şertlerinden kesgitlenýär. e^{-nt}-köpeldiji erkin hususy yrgyldylaryň basym togtaýandygyny görkezýär. Bu sebäbe görä köp halatlarda diňe mejbury yrgyldylara köp üns bermeli bolýar.

Mejbury yrgyldylaryň b amplitudasynyň iň uly bahasy, ýagny $b_{\max}$ aşakdaky formuladan kesgitlenilýär:

$$b_{\max} = \frac{\frac{h}{k^2}}{2\frac{n}{k}\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}}. \tag{16.31}$$

$b_{\max}$ baha gozgaýjy güýjüň ýygylygy $p_{\text{rez}} = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ bolanda alynýar. B amplitudanyň grafiki 16.14-nji suratda berlendir.



16.14-nji surat

16.8-nji mesele. $Q = 2\,kg$ agramly ýük maýyşgaklygy $c = 4\ kg/sm$ bolan puržindan asylan. Ýüke $S = 12\sin(pt + \delta)\ kg$ gozgaýjy güýç we $R = 0,5\sqrt{mc\dot{x}}\ kg$ garşylyk güýji täsir edýär.

Mejbury yrgyldylaryň iň uly b_{max} amplitudasy nämä deň?

Gozgaýjy güýjüň haýsy p ýygylygyna mejbury yrgyldylaryň amplitudasy iň uly baha eýe bolýar?

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny nokadyň statiki deňagramlylyk ýagdaýynda ýerleşdirip, x oky wertikal aşaklygyna ugrukdyrsak, deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolýar (ýokarky meselelere seret):

$$m\ddot{x} = Q - c(\lambda_{cm} + x) - 0,5\sqrt{mc\dot{x}} + 12\sin(pt + \delta), \quad Q = c\lambda_{cm}$$

ýa-da

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta), \tag{1}$$

bu ýerde $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $2n = \dfrac{0,5\sqrt{mc}}{m} = 0,5k$, $h = \dfrac{12}{m}$.

Durnukly hereketde nokat deňagramlylygyň golaýynda diňe mejbury yrgyldylary edýär. Bu yrgyldylaryň iň uly b_{max} bahasy (16.31) formuladan kesgitlenýär. Bu formula girýän ululyklar aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 980}{2}} = 44,3, \quad k^2 = 1960;$$

$$2n = 0,5k = 22,5; \quad h = \frac{12 \cdot 980}{2} 5886; \quad \frac{h}{k^2} = \frac{5886}{1960} = 3;$$

$$b_{max} = \frac{3}{\dfrac{22,15}{44,3} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{(11,07)^2}{1960}}} = 6,21\ sm.$$

(16.32) formuladan gözlenýän ýygylygymyzy kesgitläliň:

$$P = \sqrt{(44,3)^2 - 2 \cdot (11,075)^2} = 41,5^{-1}.$$

16.9-njy mesele. $Q = 3g$ agramly maddy nokat maýyşgaklyk koeffisiýenti $c = 12\ g/sm$ bolan puržindan asylan. Nokada $F = H\sin(62,2\,t + \beta)\,g$ gozgaýjy güýç we $R_x = \alpha\dot{x}\ g$ garşylyk güýji täsir edýär.

Eger garşylyk güýji üç esse artsa, mejbury yrgyldylaryň amplitudasy näçe esse kemeler?

Çözülişi. Nokadyň differensial deňlemesi (*16.8-nji meselä seret*) aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\dot{x} + \mu\dot{x} + cx = H\sin(62,6t + \beta)$$

ýa-da

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin(62,6t + \beta), \qquad (1)$$

bu ýerde $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 980}{3}} = 62,2^{-1} \quad 2n = \frac{\mu}{m}; \quad h = \frac{H}{m}.$

Bu meselede $p = k = 62.2$ bolanlygy üçin (16.31) formula aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$b = \frac{h}{2np} = \frac{hm}{\mu p}. \qquad (2)$$

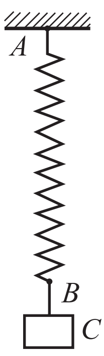
Eger R garşylyk güýji üç esse ulalsa, onda $2n = \frac{3p}{m}$ bolar. Bu garşylyk üçin mejbury yrgyldylaryň b' amplitudasyny ýazalyň: $b' = \frac{hm}{3\mu p}$.

Şeýlelikde $\frac{b}{b^1} = 3.$

Diýmek, garşylyk güýji üç esse artsa, mejbury yrgyldylaryň amplitudasy üç esse kemelýär.

16.5. Maddy nokadyň yrgyldyly hereketine degişli özbaşdak çözmek üçin meseleler

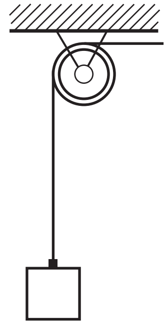
a) Erkin yrgyldylar



16.15-nji surat

16.10-njy mesele. *AB* puržinyň bir ujy *A* nokada berkidilen. Ony 1 *m* süýndürmek üçin *B* nokada 19,6 *N* güýji statiki görnüşde goýmak gerek. Puržin deformirlenmedik pursatynda onyň aşaky *B* ujundan 0,1 *kg* massaly *C* daş asylyp, başlangyç tizliksiz goýberilýär. Puržinyň massasyny hasaba alman, daşyň soňky hereketiniň deňlemesini düzmeli we onyň amplitudasyny hem-de periodyny görkezmeli. Daşyň hereketini onyň statik deňagramly halyndan başlap, wertikal aşak ýönelen oka görä almaly (*16.15-nji surat*).

Jogaby: $x = –0{,}05 \cos 14\,t$, *m*, $a = 5$ *sm*,
$T = 0{,}45$ *s*.



16.16-njy surat

16.11-nji mesele. Massasy $M = 2$ *t* bolan ýüki $\upsilon = 5\,m/s$ hemişelik tizlik bilen aşak düşirýän tanap (tros), bloguň daragyna (oboýmasyna) gapjalyp, duýdansyz togtaýar. Trosuň massasyny hasaba alman, ýüküň soňky yrgyldysynda trosuň iň uly dartylyş güýjüni kesgitlemeli. Trosuň gatylyk koeffisiýenti $4 \cdot 10^6$ *N/m* (*16.16-njy surat*).

Jogaby: 466,8 *kN*.

16.12-nji mesele. Deslapky meselede ýük bilen trosuň arasyna gatylyk koeffisiýenti $c_1 = 4 \cdot 10^5 N/m$ bolan maýyşgak puržin ýerleşdirilen bolsa, trosuň iň uly dartylyş güýjüni kesgitlemeli.

Jogaby: 154,4 *kN*.

16.13-nji mesele. Q ýük $h = 1$ *m* belentlikden başlangyç tizliksiz düşüp başlap, maýyşgak gorizontal pürsüň (balkanyň) ortasyna urulýar. Balkanyň uçlary berkidilen. Ýüküň balkanyň üstündekä edýän soňky hereketiniň deňlemesini düzmeli. Ýüküň hereketiniň deňlemesini, ýük balkanyň üstünde statiki deňagramly halyndan başlap, wertikal aşak ýönelen oka görä almaly. Şol ýüküň täsirinde balkanyň statik egilişi onuň ortasynda 0,5 *sm*-e deň. Bu ýagdaýda balkanyň massasyny hasaba almaly däl.

Jogaby: $x = (–0{,}5 \cos 44{,}3t + 10 \sin 44{,}3t)$ *sm*.

16.14-nji mesele. Wagonyň her bir ressoryna P *N* agyrlyk güýji dogry gelýär. Bu agyrlyk güýjüniň täsirinde deňagramly halyndan ressor 5 *sm* egilýär. Wagonyň ressoralarda edýän hususy yrgyldylarynyň T periodyny kesgitlemeli. Ressoryň maýyşgaklyk garşylygy onuň egiliş peýkamyna proporsional.

Jogaby: $T = 0{,}45$ *s*.

16.15-nji mesele. Maýyşgak ýere goýlan maşynyň binýadynyň (fundamentiniň) erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Fundamentiň maşyn bilen bilelikdäki massasy $M = 90$ *t*, fundamentiň ýere degip duran üsti $S = 15$ m^2, ýeriň gatylyk koeffisiýenti $c = \lambda S$, bu ýerde $\lambda = 30$ N/sm^3 – topragyň udel gatylygy.

Jogaby: $T = 0{,}089$ *s*.

16.16-njy mesele. Dynçlykda duran suwdaky gäminiň wertikal boýunça edýän erkin yrgyldylarynyň periodyny tapmaly. Gäminiň massasy M t, gorizontal proeksiýasynyň üsti S m^2. Suwuň dykyzlygy $\rho = 1$ t/m^3. Suwuň şepbeşikliginden döreýän güýçleri hasaba almaly däl.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{\rho g S}}$.

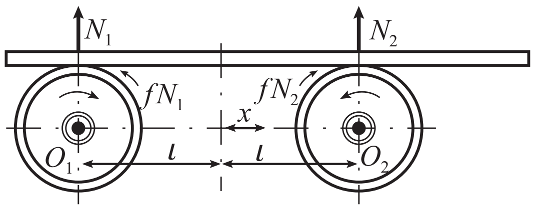
16.17-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp, gämi nola deň wertikal tizlik bilen suwa goýberilen bolsa, hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $y = -\dfrac{M}{\rho S}\cos\sqrt{\dfrac{\rho g S}{M}}t$ m.

16.18-nji mesele. Agramy P N bolan ýük maýyşgak ýüp bilen gozganmaýan nokatdan asylan. Ýük deňagramly halyndan çykarylanda yrgyldap başlaýar. Ýüpüň x uzynlygyny wagtyň funksiýasy görnüşde aňlatmaly hem-de ýük hereket edýärkä ýüpüň dartylyp durmagy üçin onuň x_0 başlangyç uzynlygy haýsy şerti kanagatlandyrmaly? Ýüpüň dartylyş güýji süýnüşine proporsional, ýüpüň süýnmäkä uzynlygy l-e deň; q N-a deň ýüküň statiki täsirinden ýüp 1 sm-e süýnýär. Ýüküň baýlangyç tizligi nola deň.

Jogaby: $x = l + \dfrac{P}{q} + \left(x_0 - l - \dfrac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\dfrac{qg}{M}}\right),\ l \le x_0 \le l + \dfrac{2P}{q}$.

16.19-njy mesele. Suratdaky ýaly, garşylykly tarapa aýlanýan deň radiusly iki sany silindrik şkiwe birjynsly steržen erkin goýlan. Şkiwleriň O_1 we O_2 merkezleri O_1O_2 göni çyzykda durlar; aralyk $O_1O_2 = 2l$. Steržen bilen şkiwleriň galtaşan nokatlarynda döreýän sürtülme güýçleri sterženi herekete getirýär. Bu güýçler sterženiň



16.17-nji surat

şkiwlere edýän basyşyna proporsional, proporsionallyk koeffisiýenti (sürtülme koeffisiýenti) bolsa f deň (*16.17-nji surat).*

1) Steržen simmetriýa halyndan x_0 süýşürileninden soň onuň edýän hereketini kesgitlemeli, bu ýagdaýda $\upsilon_0 = 0$.

2) l=25 *sm* bolanda sterženiň periody T = 2 *s* bolsa f sürtülme koeffisiýentini tapmaly.

Jogaby: 1) $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t\right)$; 2) $f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0,25.$

16.20-nji mesele. Şol bir puržinden ilki agramy p bolan ýük, ikinji gezek bolsa agramy $3p$ bolan ýük asylýar. Yrgyldylaryň periodynyň näçe esse üýtgeýändigini kesgitlemeli. Puržinyň gatylyk koeffisiýenti c, şeýle hem başlangyç şertler berlen (ýükler süýnmedik puržinyň ujundan asylyp, başlangyç tizliksiz goýberilen) diýip, ýükleriň hereket deňlemelerini tapmaly.

Jogaby: $\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{3},\ x_1 = -\frac{p}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{p}}\,t\right),$

$$x_2 = -\frac{3p}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{3p}}\,t\right).$$

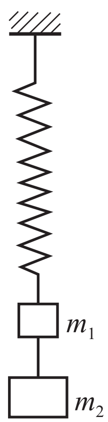
16.21-nji mesele. Gatylygy $c = 2$ *kN/m* bolan puržinden ilki 6 *kg* massaly ýük asyldy, soňra ol massasy iki esse köp bolan ýük bilen çalşyryldy. Ýükleriň yrgyldylarynyň ýygylyklaryny we periodlaryny kesgitlemeli.

Jogaby: k_1 = 18,26 *rad/s*, k_2 = 12,9 *rad/s*, T_1 = 0,344 *s*, T_2 = 0,49 *s*.

16.22-nji mesele. Gatylygy c = 19,6 *N/m* bolan puržinden massalary m_1 = 0,5 *kg* we m_2 = 0,8 *kg* bolan ýükler asylan. Ulgamdan m_2 ýük aýrylanda, ol statiki deňagramlykda durýar. Galan ýüküň hereket deňlemesini, ýygylygyny, sikliki ýygylygyny we periodyny kesgitlemeli *(16.18-nji surat)*.

Jogaby: x = 0,4 cos 6,26 t *m*; f = 1 *Gs*,

$k = 2\,\pi$ *rad/s*, T = 1 *s*.



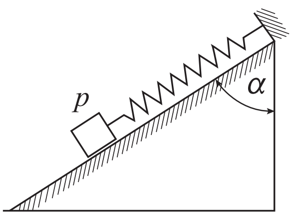
16.18-nji surat

16.23-nji mesele. m_1 = 2 *kg* massaly ýük gatylyk koeffisiýenti c = 98 *N/m* bolan puržindan asylyp deňagramlykda dur. Bir pursatda m_1 ýüke $m_2 = 0{,}8\,kg$ massaly ýük goşulýar. Ýükleriň bilelikdäki hereket deňlemesini we yrgyldylaryň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $x = -0{,}08 \cos 5{,}916\ m$; $T = 1{,}062\ s$.

16.24-nji mesele. Massasy 4 *kg* bolan ýüki ilki gatylygy $c_1 = 2\ kN/m$, soňra gatylygy $c_2 = 4\ kN/m$ bolan puržinden asýarlar. Şu iki hal üçin ýükleriň yrgyldylarylarynda ýygylyklarynyň we periodlarynyň gatnaşygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $k_1/k_2 = \sqrt{2} = 0{,}7071, \quad T_1/T_2 = \sqrt{2} = 1{,}4142.$

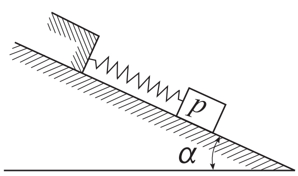


16.19-njy surat

16.25-nji mesele. *m* massaly jisim wertikal bilen burç emele getirýän ýapgyt tekizlikde dur. Jisime gatylygy *c* bolan puržin berkidilen. Puržin ýapgyt tekizlige parallel. Başlangyç pursatda jisim süýnmedik puržinyň ujuna berkidilip, oňa ýapgyt tekizligi boýunça aşaklygyna ugrukdyrylan tizlik berlen bolsa, jisimiň hereket deňlemelerini tapmaly. Koordinatalar υ_0 başlangyjyny ýüküň statiki deňgramlylyk ýagdaýynda almaly (*16.19-njy surat*).

$$\textit{Jogaby: } x = \frac{\upsilon_0}{k}\sin kt - \frac{mg\cos\alpha}{c}\cos kt, \ k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

16.26-njy mesele. Gorizontal ugra burç bilen ýaplanan ýapgyt tekizligiň üstünde puržina berkidilen *P* agramly ýük dur. Puržinyň statiki süýnmesi *f*-e deň. Eger başlangyç pursatda süýnmedik puržiny 3*f* uzynlyga süýndürip, ýük başlangyç tizliksiz goýberilen bolsa, ýüküň yrgyldylarylaryny kesgitlemeli (*16.20-nji surat*).



16.20-nji surat

$$\textit{Jogaby: } x = 2f\cos\left(\sqrt{\frac{g}{f}\sin\alpha}\cdot t\right).$$

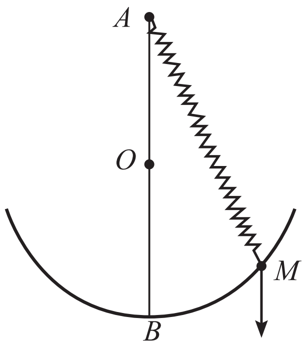
16.27-nji mesele. Puržinyň ujundan asylan $M = 12\ kg$ massaly ýük garmoniki yrgyldaýar. Sekundomer bilen jisimiň 45 *s* dowamynda 100 gezek doly yrgyldysy anyklanyldy. Şundan soň puržinyň ujuna goşmaça massasy $M_1 = 6\ kg$ bolan ýük asyldy. Puržindaky iki ýüküň yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T_1 = T\sqrt{\dfrac{M + M_1}{M}} = 0{,}55 s.$

16.28-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp, bir M ýük we iki $M + M_1$ ýükleriň hereket deňlemelerini tapmaly, iki halda hem ýükler puržinyň ujundan asylan.

Jogaby: 1) $x = -5{,}02 \cos 14t\ sm$, 2) $x_1 = -7{,}53 \cos 11{,}4\ t\ sm$, bu ýerde x we degişlilikde iki halyň her birinde statiki deňagramlylyk ýagdaýyndan alynýarlar.

16.29-njy mesele. Gozganmaýan A nokatda puržindan asylan M ýük töweregiň dugasynda sürtülmän taýyp wertikal tekizlikde kiçi garmoniki yrgyldylar edýär. Töweregiň AB diametri l-e, puržinyň süýnmedik halyndaky uzynlygy a deň. Puržina M ýüküň agramyna deň güýç täsir edende ol b uzynlyga süýnýär. $l = a+b$ bolanda yrgyldylaryň T periodyny kesgitlemeli, bu ýagdaýda puržinyň massasy hasaba alynmaly däl, yrgyldy wagtynda ol süýnen halynda diýip hasaplanýar (*16.21-nji surat*).



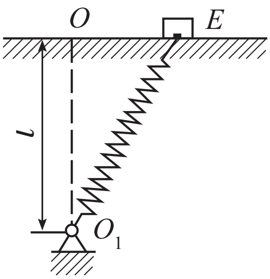
16.21-nji surat

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{g}}.$

16.30-njy mesele. Deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp, başlangyç pursatda $\angle BAM = \varphi_0$ bolanda M nokada galtaşma bilen aşak ýönelen υ_0 tizlik berlen bolsa, M ýüküň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}t - \dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{lg}}\sin\sqrt{\dfrac{g}{l}}t.$

16.31-nji mesele. Massasy m bolan E jisim ýylmanak gorizontal tekizligiň üstünde dur. Jisim gatylygy bolan puržina birikdirilip, onuň ikinji ujy O_1 şarnire berkidilen. Deformirlenmedik puržinyň uzynlygy l_0. Jisim deňagramlylykda duranda çäkli $F_0= (l - l_0)$ dartylyşa eýe,



16.22-nji surat

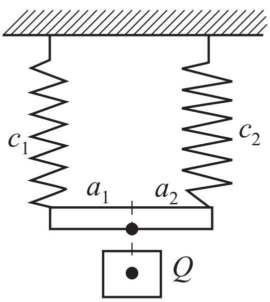
bu ýerde $l = OO_1$. Puržindaky maýyşgaklyk güýjüniň gorizontal düzüjisinde jisimiň deňagramlylyk ýagdaýyndan süýşmesiniň diňe birinji derejesine bagly bolan agzalaryny hasaba alyp, jisimiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*16.22-nji surat*).

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{F_0}}$.

16.32-nji mesele. Massasy m bolan maddy nokat gatylygy c bolan we süýnmedik puržinyň ujundan asylyp aşak ugrukdyrylan υ_0 başlangyç tizlik bilen goýberilen. Nokadyň hereket deňlemesini tapmaly. Nokat iň aşakky ýagdaýa baran pursatynda oňa aşak ugrukdyrylan Q = const güýç goýlan.

Koordinattalar başlangyjyny statiki deňgramlylyk ýagdaýynda, ýagny süýnmedik puržinyň ujundan hasaplananda P/c aralykda almaly.

Jogaby: $x = \dfrac{Q}{c} + \left[\sqrt{\left(\dfrac{\upsilon_0}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{mg}{c}\right)^2} - \dfrac{Q}{c}\right]\cos\sqrt{\dfrac{c}{m}}t$, bu ýerde t wagt Q güýjüň täsir edip başlan pursatyndan başlap hasaplanýar; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.



16.23-nji surat

16.33-nji mesele. Bir-birine parallel goşulan iki sany puržindan asylan m massaly ýüküň erkin yrgyldylarynyň periodyny we bu iki puržina ekwiwalent bolan puržinyň gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli. Gatylyk koeffisiýentleri c_1 we c_2 bolan iki puržin hem birmeňzeş uzynlyga süýner ýaly edip, ýük ýerleşdirilen (*16.23-nji surat*).

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}$;

$$c = c_1 + c_2;\ a_1/a_2 = c_2/c_1.$$

16.34-nji mesele. Ýokarky meseläniň şertlerine esaslanyp, ýüki süýnmedik puržinlaryň ujuna berkidip, oňa ýokaryk ugrukdyrylan υ_0 başlangyç tizlik berildi diýip, nokadyň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby:

$$x = -\frac{mg}{c_1 + c_2}\cos\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}\,t - \upsilon_0\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}\sin\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{n}}\,t}.$$

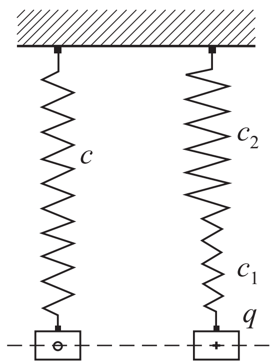
16.35-nji mesele. Gatylyk koeffisiýentleri c_1 we c_2 bolan iki puržinyň arasynda gysylan m massaly ýüküň erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}.$

16.36-njy mesele. Ýokarky meseläniň şertleri boýunça, deňagramlylykda duran ýüke aşak ugrukdyrylan υ_0 başlangyç tizlik berildi diýip, nokadyň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}\sin\sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}\,t.$

16.37-nji mesele. Yzly-yzyna birikdirilen c_1 we c_2 gatylyk koeffisiýentleri dürli bolan iki sany puržina ekwiwalent puržinyň c gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli we goşa puržindan asylan m massaly ýüküň periodyny tapmaly (*16.24-nji surat*).



16.24-nji surat

Jogaby:

$$c = \frac{c_{1c2}}{c_{1+c2}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)m}}\,t.$$

16.38-nji mesele. Ýokarky meseläniň şertleri boýunça, ýük başlangyç pursatda deňagramly ýagdaýyndan x_0 aralykdan aşakda bolup, ýokaryk ugrukdyrylan υ_0 başlangyç tizlik berlen bolsa, nokadyň hereket deňlemesini tapmaly.

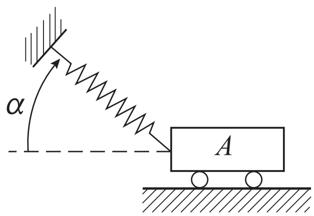
Jogaby:

$$x = x_0\cos\sqrt{\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)m}}\,t - \upsilon_0\sqrt{\frac{(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}}\sin\sqrt{\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)m}}\,t.$$

16.39-njy mesele. Iki sany yzly-yzyna birikdirilen $c_1 =$ $= 9{,}8$ *N/sm* we $c_2 = 9{,}8$ *N/sm* gatylyk koeffisiýentleri dürli bolan iki sany puržinyň gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli. Goşa puržinyň ujundan massasy 5 *kg* bolan ýük asylyp, başlangyç pursatda ol statiki deňagramly ýagdaýyndan 5 *sm* aşak süýşürilen hem-de aşak ugrukdyrylan 49 *sm/s* başlangyç tizlik berlen bolsa, ýüküň periodyny, amplitudasyny we hereket deňlemesini tapmaly.

$$Jogaby:\ c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 7{,}35\ N/sm,\ T = 0{,}517\ s,\ a = 6{,}43\ dm.$$

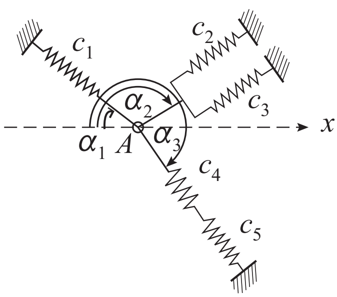
$$x = 5\cos 12{,}13\,t + 4{,}04\sin 12{,}13\,t\ dm.$$



16.25-nji surat

16.40-njy mesele. Massasy m bolan A jisim gorizontal göni çyzyk boýunça süýşüp bilýär. Jisime gatylyk koeffisiýenti c bolan puržin berkidilen. Puržinyň ikinji ujy gozganmaýan B nokada berkidilen. Burç $\alpha = \alpha_0$ bolanda puržin deformirlenmedik. Jisimiň kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny we periodyny kesgitlemeli (*16.25-nji surat*).

$$Jogaby:\ k = \sqrt{\frac{c\cos^2\alpha_0}{m}},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c\cos^2\alpha_0}}.$$



16.26-njy surat

16.41-nji mesele. Massasy m bolan A nokat suratdaky ýaly puržinlar bilen berkidilen. Ýokarky halda nokat deňagramly haldaka puržinlar süýnmedik (deformirlenmedik). Nokadyň x okdaky absolýut ýylmanak ugrukdyryjysy boýunça kiçi yrgyldylarynda ekwiwalent puržinyň gatylyk koeffisiýentini we nokadyň erkin yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*16.26-njy surat*).

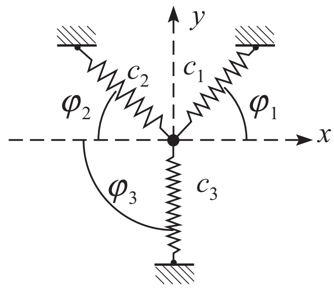
$$Jogaby:\ c = c_1\cos^2\alpha_1 + (c_2 + c_3)\cos^2\alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}\cos^2\alpha_3,\ k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

16.42-nji mesele. Suratdaky ýaly, M nokadyň x okdaky absolýut ýylmanak ugrukdyryjy boýunça erkin yrgyldylarynda üç sany puržina ekwiwalent bolan puržinyň gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli. Şu meseläni ugrukdyryjy y ok boýunça ýerleşende hem çözmeli we yrgyldylarynyň ýygylyklaryny kesgitlemeli (*16.27-nji surat*).

Jogaby: $c_x = c_1\cos^2\varphi_1 + c_2\cos^2\varphi_2$;
$c_y = c_1\sin^2\varphi_1 + c_2\sin^2\varphi_2 + c_3$;

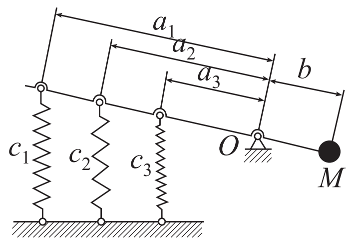
$$k_x = \sqrt{\frac{c_x}{m}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{c_y}{m}}.$$

Başlangyç pursatda puržinler süýnmedik M nokat deňagramlyk ýagdaýynda.



16.27-nji surat

16.43-nji mesele. Massasy m bolan M ýük massasy hasaba alynmaýan sterženiň ujuna berkidilen bolsa, deň derjeli (ekwiwalent bolan) puržinyň gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli. Steržen O nokada şarnir arkaly, binýada (fundamente) bolsa üç sany wertikal puržin bilen berkidilen. Puržinleriň gatylyk koeffisiýentleri c_1, c_2, c_3. Puržinler steržene şarnirden a_1, a_2, a_3 a aralyklarda birikdirilen. M ýük steržene b aralyklarda birikdirilen. Deňagramly ýagdaýynda steržen gorizontal ýagdaýynda dur. Ekwiwalent puržine steržene şarnirden b aralyklarda birikdirilen. Ýüküň kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny tapmaly (*16.28-nji surat*).



16.28-nji surat

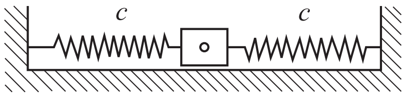
$$Jogaby:\ c = \frac{c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2}{b^2},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

16.44-nji mesele. Wint şekilindäki puržin n bölekden ybarat, olaryň gatylyk koeffisiýentleri c_1, c_2, ... c_n. Bu puržina ekwiwalent bolan birjynsly puržinyň c gatylyk koeffisiýentini we massasy m bolan nokadyň erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

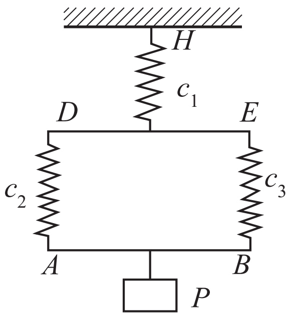
$$Jogaby:\ c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}}, \quad T = \frac{2\pi}{k}, \text{ bu ýerde } k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

16.45-nji mesele. Absolýut ýylmanak gorizontal üstde ýatan 10 kg massaly ýük birmeňzeş c = 19,6 N/sm gatylyk koeffisiýentli iki sany puržinyň arasynda gysylan. Käbir pursata ýük deňagramlyk ýagdaýyndan 4 *sm* saga süýşürilip, başlangyç tizliksiz goýberilen. Ýüküň hereket deňlemesini, periodyny we maksimal tizligini tapmaly (*16.29-njy surat*).



16.29-njy surat

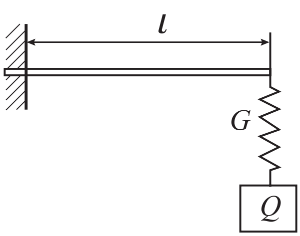
Jogaby: $x = 4\cos 19{,}8\, t$, $T = 0{,}317\ s$, $x_{\max} = 79{,}2\ sm/s$.



16.30-njy surat

16.46-njy mesele. Massasy m bolan P ýük AB sterženden asylan, AB steržen bolsa gatylyk koeffisiýentleri c_2, c_3, bolan puržinlar bilen DE steržene berkidilen. DE steržen gatylyk koeffisiýenti c_1 puržin bilen potologyň H nokadyna berkidilen. AB we DE sterženler yrgyldanlarynda gorizontal halda galýarlar. P ýüküň yrgyldylarynyň ýyglygyna deň ýyglykly ekwiwalent puržinyň gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli (*16.30-njy surat*). Sterženleriň massalary hasaba alynmaly däl.

Jogaby: $c = \dfrac{c_1(c_2+c_2)}{c_{1+c_2}+c_2}$, $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(c_1+c_2+c_3)}{c_1(c_2+c_3)}}$.



16.31-nji surat

16.47-nji mesele. Uzynlygy l bolan maýyşgak konsolyň ujundan asylan m massaly Q ýüküň hususy yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Ýüki saklap duran puržinyň gatylygy c. Konsolyň ujundaky gatylyk koeffisiýenti $c_1 = 3EI/l^3$ (E – maýyşgaklyk moduly, I – inersiýa momenti) formula bilen kesgitlenýär (*16.31-nji surat*). Konsolyň massasyny hasaba almaly däl.

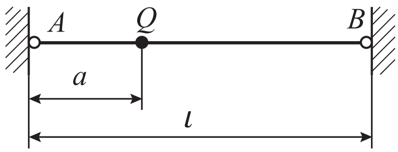
Jogaby: $k = \sqrt{\dfrac{3EIc}{m(3EI + cl^3)}}$.

16.48-nji mesele. Gatylygy $c = 20\ N/sm$ pürsüň (balkanyň) ortasynda ýatan $M = 10\ kg$ massaly ýüküň yrgyldylarynyň amplitudasy

2 *sm* deň. Eger $t = 0$ pursatda ýük özüniň deňagramly halynda duran bolsa, başlangyç tizligiň mukdaryny kesgitlemeli.

Jogaby: $\upsilon_0 = 28{,}3$ *sm/s*.

16.49-njy mesele. Massasy *m* bolan *Q* ýük $AB = l$ dartylan gorizontal tros bilen berkidilen. Ýüküň kiçi wertikal yrgyldylarynda tanapyň (trosuň) *S* süýnmesini hemişelik diýip hasaplamak mümkin. Trosuň ýükden *A* ujuna çenli aralygy *a* bolsa, ýüküň erkin yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*16.32-nji surat*).

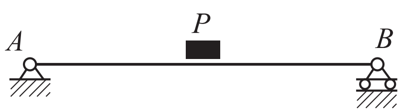


16.32-nji surat

Jogaby: $k = \sqrt{\dfrac{Sl}{ma(l-a)}}\, rad/s.$

16.50-nji mesele. Agramy 490,5 *N* bolan ýük *AB pürsüň* (balkanyň) ortasynda goýlan. Balkanyň kese-kesiginiň inersiýa momenti $J = 80$ sm^4. Balkadaky ýüküň erkin yrgyldylarynyň periody $T = 1$ *s* bolsa balkanyň *l* uzynlygyny kesgitlemeli (*16.33-nji surat*).

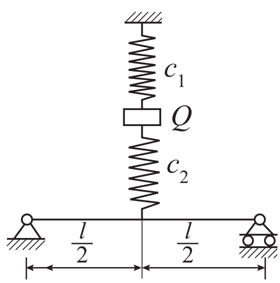
Bellik. Balkanyň statiki egilişi $f = \dfrac{Pl^3}{48EI}$ formuladan tapylýar, bu ýerde $E = 2{,}5 \cdot 10^{11}$ N/m^2.



16.33-nji surat

Jogaby: $l = 15{,}9$ *m*.

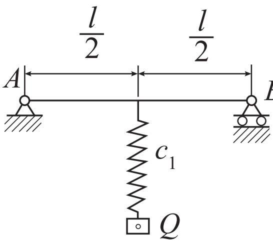
16.51-nji mesele. Massasy *m* bolan *Q* ýük gatylyk koeffisiýentleri c_1 we c_2 bolan iki sany wertikal puržinlaryň arsynda gysylan. Birinji puržinyň ýokarky ujy gozganmaz ýaly berkidilen, ikinji puržinyň aşaky ujy bolsa balkanyň ortasynda berkidilen.



16.34-nji surat

Ýüküň yrgyldylarynyň periody T deň bolanda balkanyň l uzynlygyny kesgitlemeli. Balkanyň kese-kesiginiň inersiýa momenti J, maýyşgaklyk moduly E (*16.34-nji surat*).

Jogaby: $$l = \sqrt[3]{\frac{48EJ\left(c_1 + c_2 + \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1\right)}}.$$



16.35-nji surat

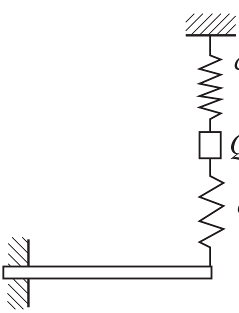
16.52-nji mesele. l uzynlykdaky pürsüň (balkanyň) ortasyna gatylyk koeffisiýenti c_1 bolan puržin berkidilip, onuň ujundan asylan m massaly Q ýüküň hereket deňlemesini we yrgyldylaryň periodyny tapmaly. Balkanyň egilişe gatylygy EJ-e deň. Başlangyç pursatda ýük statiki deňagramlykda bolup, oňa aşak ugrukdyrylan υ_0 tizlik berlen (*16.35-nji surat*).

Jogaby:

$$x = \upsilon_0 \sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EJ)}{48EJc_1}} \sin \sqrt{\frac{48EJc_1}{m(c_1 l^3 + 48EJ)}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EJ)}{48EJc_1}}.$$

16.53-nji mesele. Gatylyk koeffisiýentleri c_1 we c_2 bolan iki sany wertikal puržinlaryň arsynda Q agramly ýük gysylyp dur. Birinji puržinyň ýokarky ujy gozganmaz ýaly berkidilen. Ikinji puržinyň aşaky ujy bir ujy bilen diwara ornaşdyrylan pürsüň (balkanyň) erkin ujuna berkidilen. Ornaşdyrylan balkanyň erkin ujuna goýlan P güýjüň täsirinden balka $f = \dfrac{Pl^2}{3EJ}$ aňlatma görä egilýär, bu ýerde EJ berlen ululyk bolup, ol balkanyň egilişindäki gatylygy aňladýar. Ýüki berlen T period bilen



16.36-njy surat

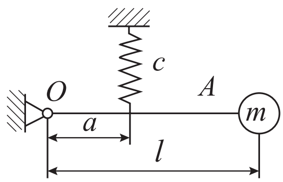
yrgyldadýan balkanyň l uzynlygyny kesgitlemeli. Eger ýük başlangyç pursatda süýnmedik puržinlaryň uçlaryna dakylyp, başlangyç tizliksiz goýberilen bolsa, Q ýüküň hereket deňlemesini tapmaly (*16.36-njy surat*).

Jogaby:

$$l = \sqrt[3]{\frac{3EJ\left(c_1 + c_2 - \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g} - c_1\right)}}.$$

$$x = -Q\frac{c_2 l^3 + 3EJ}{c_1 c_2 l^3 + (c_1 + c_2)3EJ}\cdot\cos\sqrt{\frac{[c_1 c_2 l^3 + (c_1 + c_2)3EJ]g}{(c_2 l^3 + 3EJ)Q}}\,t.$$

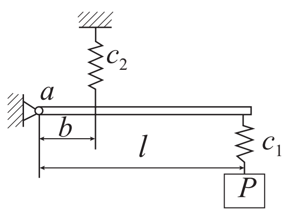
16.54-nji mesele. Ujuna m massaly ýük berkidilen l uzynlykdaky OA steržen O okuň daşynda aýlanýar. O okdan a daşlykda steržene gatylyk koeffisiýenti c bolan puržin birikdirilen. Eger OA steržen deňagramlylyk ýagdaýynda gorizontal ýagdaýda dursa, ýüküň hususy yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*16.37-nji surat*). Sterženiň massasyny hasaba almaly däl.



16.37-nji surat

Jogaby: $k = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$ *rad/s.*

16.55-nji mesele. m massaly P ýük, O okuň daşynda aýlanyp bilýän l uzynlykdaky ujundaky puržinden asylan. Puržinyň gatylyk koeffisiýenti c_1. Sterženi saklaýan, gatylyk koeffisiýenti c_2 bolan puržin O nokatdan b aralykda ornaşdyrylan. P ýüküň hususy yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*16.38-nji surat*). Sterženiň massasyny hasaba almaly däl.

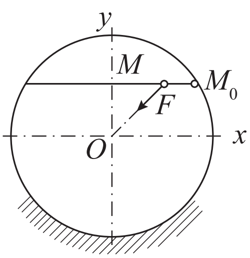


16.38-nji surat

Jogaby: $k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m\left[c_2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 c_1\right]}}$ *rad/s.*

16.56-njy mesele. Ýer togalagynyň berlen nokadyndaky agyrlyk güýjüniň tizlenmesini kesgitlemek üçin iki sany tejribe geçirýärler. Puržinyň ujundan P_1 ýük asyp, onuň l_1 statiki süýnüşini ölçeýärler. Soňra P_2 ýük asyp, onuň l_2 statiki süýnüşini ölçeýärler. Şundan soň iki tejribäni hem gaýtalap, iki gezek ýükleri nobatma-nobat erkin yrgyldadyp, yrgyldylaryň T_1 we T_2 periodlary ölçenilýär. Ikinji tejribäni, puržinyň massasynyň täsirini, ýüküň hereketinde jisime haýsydyr bir goşmaça massa goşulandaky täsire ekwiwalent diýip hasaplamak üçin geçirilýär. Tejribäniň netijelerine esaslanyp, agyrlyk güýjüniň tizlenmesini kesgitleýän formulany tapmaly.

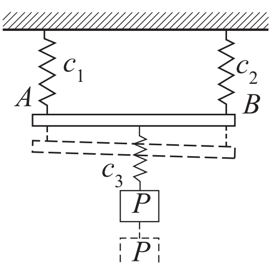
Jogaby: $g = \dfrac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}$.



16.39-njy surat

16.57-nji mesele. Wertikal ýerleşen tegelegiň gorizontal hordasynda 2 *kg* massaly *M* nokat, mukdar tarapyndan *O* merkeze çenli bolan aralyga proporsional özgerýän *F* dartylyş güýjüniň täsirinde sürtülmesiz hereketlenýär. Bu ýagdaýda proporsionallyk koeffisiýenti 98 *N/m*. Tegelegiň merkezinden horda çenli arralyk 20 *sm*, tegelegiň radiusy 40 *sm*. Eger başlangyç pursatda nokat hordanyň sag çetki M_0 ýagdaýynda bolup, başlangyç tizliksiz goýberilen bolsa, hereketiň kanunyny kesgitlemeli (*16.39-njy surat*). Nokat hordanyň ortasyndan haýsy tizlik bilen geçer?

Jogaby: $x = 34{,}6 \cos 7t$ *sm*, $\dot{x} = \pm 242$ *sm/s*.

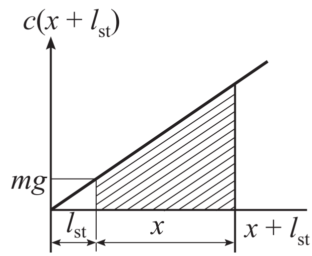


16.40-njy surat

16.58-nji mesele. Massasy hasaba alynmaýan *AB* steržene üç sany puržin birikdirilen. Gatylyklary c_1 we c_2 bolan iki sany puržin *AB* sterženiň uçlaryna birikdirilen we şu sterženi saklap durlar. c_3 gatylykly üçünji puržin sterženiň ortasyna birikdirilen we ujundan *m* massaly *P* ýük asylan. Ýüküň hususy yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*16.40-njy surat*).

Jogaby: $k = \sqrt{\dfrac{4c_1 \cdot c_2 \cdot c_3}{m[4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3]}}$ *rad/s*.

16.59-njy mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 1{,}96$ *kN/m* bolan puržin berkidilen 10 *kg* massaly ýük yrgyldaýar. Puržinyň massasyny hasaba alman, ýüküň we puržinyň doly mehaniki energiýasyny kesgitlemeli hem-de maýyşgaklyk güýjüniň süýşmä baglylykda özgeriş grafigini çyzyp, onda puržinyň potensial energiýasyny görkezmeli. Statiki deňagramlylyk ýagdaýyny potensial energiýa üçin hasap başlangyjy diýip almaly (*16.41-nji surat*).



16.41-nji surat

Jogaby: Eger x koordinata m-de, $\dot{x}$ bolsa m/s-de ölçenilse, $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 = (5\dot{x}^2 + 980x^2)J.$ Suratdaky ştrihlenen üst puržinyň potensial energiýasyna deň.

16.60-njy mesele. m massaly maddy nokada, potensialy $\Pi = \frac{1}{2}k(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$ bolan güýç meýdany täsir edýär. Nokat islendik (nol bolmadyk) başlangyç ýagdaýda herekete getirilende birnäçe wagtdan soň nokadyň ýene-de başdaky ýagdaýyna gaýdyp gelşini subut etmeli. Gaýdyş wagtyny kesgitlemeli. Gaýdyp geliş tizligi başlangyç tizlige deň bolarmy?

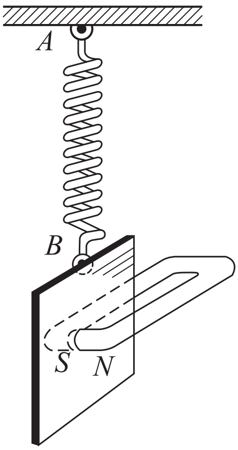
Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Nokadyň tizligi T wagtdan soň özüniň başlangyç tizligine deň bolýar.

16.61-nji mesele. m massaly maddy nokada, potensialy $\Pi = \frac{1}{2}k(+2y^2 + 5z^2)$ bolan güýç meýdany täsir edýär. Bu ýagdaýdan birnäçe wagt geçenden soň nokat özüniň deslapky ýagdaýyna dolanyp gelermi?

Jogaby: Üç kooordinata hem bir wagtda başlangyç pursatdaky bahalaryny alýan wagty görkezmek mümkin däl. Üç sany yrgyldyly hereketiň goşulyş prossesinde nokat deslapky ýagdaýyna gelmeýär.

b) Garşylygyň erkin yrgyldylara täsiri

16.62-nji mesele. Massasy 100 *g* bolan *D* plastinka *AB* puržindan asylyp, magnit polýuslarynyň arasynda hereketlenýär. Tüweleý toklarynyň täsirinde hereket tizlige proporsional güýç bilen saklanýar



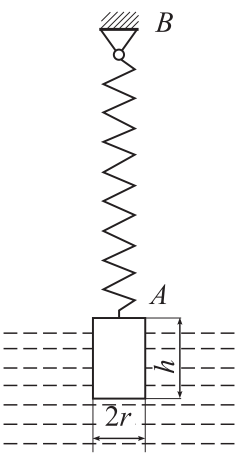
16.42-nji surat

(tormozlanýar). Herekete garşylyk görkezýän güýç $k\upsilon\Phi^2N$, bu ýerde k = 0,001, υ *m/s* hasabyndaky tizlik, Φ bolsa *N* we *S* polýuslaryň arasyndaky magnit akymy. Başlangyç pursatda plastinkanyň tizligi nola deň we puržin süýnmedik. Ol statiki täsiri 19,6 *N* bolan güýç *B* nokatda goýlanda 1 *m*-e süýnýär. $\Phi = 10\sqrt{5}$ *Wb* (weber – HU ulgamyndaky magnit akymynyň birligi) bolanda plastinkanyň hereketini kesgitlemeli (*16.42-nji surat*).

Jogaby: $x = -e^{-2,5t}(0,05\cos 13,77t + 0,00907\sin 13,77t)m$, bu ýerde *x* ok plastinkanyň agyrlyk merkeziniň statiki deňagramlylyk ýagdaýyndan aşak ugrukdyrylan.

16.63-nji mesele. Deslapky meseläniň şertleriniň esasynda, magnit akymy Φ = 100 *Wb* bolanda *D* plastinkanyň hereketini kesgitlemeli.

Jogaby: $x = -0,051e^{-2t} + 0,001e^{-98t}$.



16.43-nji surat

16.64-nji mesele. Agramy *P*, radiusy *r* we beýikligi *h* bolan silindr ýokarky *B* ujy berkidilen *AB* puržindan asylyp, suwa batyrylan. Deňagramlylyk ýagdaýynda silindr öz beýikliginiň ýarsyna çenli suwa batýar. Başlangyç pursatda silindr öz beýikliginiň 2/3 bölegine çenli suwa batyrylyp, başlangyç tizliksiz wertikal göni çyzygy boýunça hereket edip başlaýar. Puržinyň gatylygyny *c* diýip hasaplap we suwuň silindre täsiri goşmaça Arhimediň güýjüne getirilýär diýip kabul edip, silindriň hereketini özüniň deňagramlylyk ýagdaýyna görä kesgitlemeli. Suwuň udel agramy γ diýip kabul etmeli (*16.43-nji surat*).

Jogaby: $x = \frac{1}{6}h\cos kt$, bu ýerde

$$k^2 = \frac{g}{P}(c + \pi\gamma r^2).$$

16.65-nji mesele. Deslapky meselede suwuň garşylygy tizligiň birinji derejesine proporsional we $\alpha\upsilon$ bolsa, silindriň yrgyldyly hereketini kesgitlemeli.

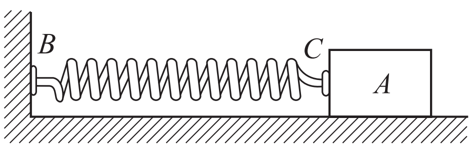
Jogaby: Eger $\left(\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma\right)-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2>0$ bolsa, silindriň hereketi yrgyldyly hereket bolýar.

Bu ýagdaýda $x=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}e^{-nt}\sin(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta)$.

Bu ýerden

$$k^2=\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma,\ n=\frac{\alpha}{2m},\ \mathrm{tg}\beta=\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n},\ m=\frac{P}{g}.$$

16.66-njy mesele. Massasy 0,5 *kg* bolan *A* jisim büdür-südür gorizontal tekizlikde dur. Bu jisim *BC* oky gorizontal bolan *B* nokady gozganmaýan puržinyň ujuna berkidilen *(16.44-nji surat)*. Jisimiň tekizlik bilen sürtülme koeffisiýenti 0,2. Puržiny 1 *sm* süýndürmek üçin 2,45 *N* güýç talap edilýär. *A* jisim *B* nokatdan şeýle süýşürilipdir, ýagny puržin 3 *sm* süýnüpdir, soňra ol başlangyç tizliksiz goýberilipdir. 1) *A* jisimiň näçe gezek yrgyldajakdygyny; 2) her yrgyldyda gerimiň ululygyny we 3) her yrgylda sarp edilýän *T* wagty tapmaly. Jisimiň tizligi nola deň bolan ýagdaýda puržinyň maýyşgaklyk güýji sürtülme güýjüne deň ýa-da ondan kiçi bolsa, jisim togtaýar.



16.44-nji surat

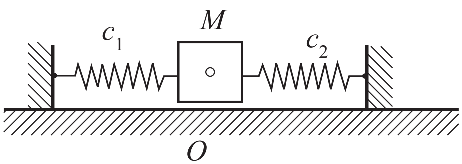
Jogaby: 1) 4 yrgyldy; 2) 5,2 *sm*, 3,6 *sm*, 2 *sm*, 0,4 *sm*; 3) $T=0{,}14$ *s*.

16.67-nji mesele. Büdür-südür ýapgyt tekizlikde ýatan, massasy $M=20$ *kg* bolan ýüki süýnmedik puržina berkidip, pes tarapa ugrukdyrylan υ_0 = 0,5 *m/s* tizlik berlen. Typma sürtülme koeffisiýenti $f=$ 0,08, puržinyň gatylyk koeffisiýenti c = 20 *N/sm*. Ýapgyt tekizligiň gorizont bilen emele getirýän burçy α = 45°.

1) Yrgyldylaryň periodyny; 2) ýüküň deňagramlylyk ýagdaýyndan maksimal çetlenişleriniň sanyny; 3) bu çetlenişleriň ululyklaryny kesgitlemeli.

Jogaby: 1) $T = 0{,}628\ s$; 2) 7 sany çetleniş; 3) 7,55 *sm*; 6,45 *sm*; 5,35 *sm*; 4,25 *sm*; 3,15 *sm*; 2,05 *sm*; 0,95 *sm*.

16.68-nji mesele. Massasy $M = 0{,}5\ kg$ bolan jisim iki sany birmeňzeş puržinyň täsirinde gorizontal tekizlikde yrgyldaýar. Puržinlaryň uçlary bir tarapdan jisime, ikinji tarapdan gozganmaýan sütünlere berkidilen we olaryň oklary bir gorizontal göni çyzykda ýatýarlar. Puržinlaryň gatylyk koeffisiýentleri $c_1 = c_2 = 1{,}225\ N/sm$, jisimiň sürtülme koeffisiýentleri jisim hereketde bolsa, $f = 0{,}2$, dynç halatynda bolsa $f_0 = 0{,}25$. Başlangyç pursatda jisim özüniň *O* orta halatyndan sag tarapa $x_0 = 3\ sm$ süýşürilen we başlangyç tizliksiz goýberilen (*16.45-nji surat*). 1) Jisimiň mümkin bolan deňagramlylyk halatlarynyň çägini – ≪durgunlyk oblastyny≫; 2) jisimiň gerimleriniň ululyklaryny, 3) yrgyldylaryň sanyny; 4) her bir yrgylda sarp edilýän wagty; 5) jisimiň yrgyldylardan soňky ornuny tapmaly.



16.45-nji surat

Jogaby: 1) $-0{,}5\ sm < x < 0{,}5\ sm$; 2) 5,2 *sm*, 3,6 *sm*, 2 *sm*, 0,4 *sm*; 3) 4 sany yrgyldy; 4) $T = 0{,}141\ s$; 5) $x = -0{,}2\ sm$.

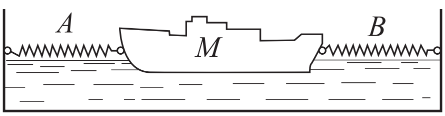
16.69-njy mesele. Gatylyk koeffisiýentleri *c* bolan puržindan asylan *m* massaly jisim, tizligiň birinji derejesine proporsional ($R = \alpha v$) *R* garşylyk güýjüniň täsirinde togtaýan yrgyldyly hereket edýär. Eger $n/k = 0{,}1$ ($k^2 = c/m,\ n = \alpha/(2m)$) gatnaşyk berlen bolsa, togtaýan yrgyldylaryň *T* periodynyň togtamaýan yrgyldylaryň *T* periodyndan näçe esse uly bolýandygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T \approx 1{,}005\ T_0$.

16.70-nji mesele. Deslapky meseläniň şertleri boýunça näçe doly yrgyldydan soň yrgyldynyň amplitudasynyň ýüz esse kemeljekdigini kesgitlemeli.

Jogaby: 7,5 doly yrgyldydan soň.

16.71-nji mesele. Gäminiň modeliniň hereketine suwuň görkezýän garşylygyny anyklamak üçin *M* gämi modeliniň burun we yz taraplaryny iki sany birmeňzeş *A* we *B* puržinlar berkidip, örän kiçi tizlik bilen gapdaky suwda ýüzdürilýär. Puržinlaryň dartylyş güýçleri süýnmegine proporsionaldyr. Model her bir yrgyldanynda onuň deňagramlylyk ýagdaýdan daşlygynyň maýdalawjysy 0,9 bolan geometrik progressiýanyň kanuny bilen kemelýändigini, her yrgyldynyň T = 0,5 *s* dowam edýändigini gözegçilik görkezýär. Suwuň garşylygyny tizligiň birinji derejesine proporsional diýip kabul edip, modeliň tizligi 1 *m/s* bolanda modeliň massasynyň her kilogramyna dogry gelýän *R* suwuň garşylygyny kesgitlemeli (*16.46-njy surat*).



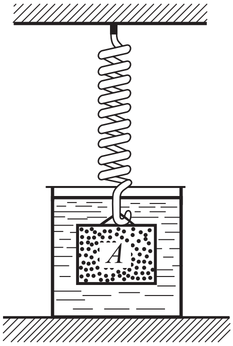
16.46-ny surat

Jogaby: R = 0,42 *N*.

16.72-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp, başlangyç pursatda Δl = 4 *sm* mukdara *A* puržin süýnen we *B* puržin gysylan diýip hasaplap, model başlangyç tizliksiz goýberilende modeliň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = e^{-0,21t}$ (4cos 6,28 t + 0,134 sin 6,28 t) *sm*.

16.73-nji mesele. Suwuklygyň şepbeşikligini anyklamak üçin Kulon puržindan asylan ýuka *A* plastinkany ilki howada, soňra şepbeşikligi anyklanmaly suwuklykda yrgyldamaga mejbur edip, bir yrgylda sarp bolýan T_1 we suwuklykda sarp bolýan T_2 wagt aralyklaryny kesgitlemek usulyndan peýdalanypdyr. Plastinka bilen suwuklygyň arasyndaky sürtülme güýji $2Sk\upsilon$ formula bilen aňladylmagy mümkin, bu ýerde $2S$ -plastinkanyň üsti, υ – onuň tizligi, k – şepbeşiklik koef-



16.47-nji surat

fisiýenti. Plastinkanyň massasy m bolsa, plastinka bilen howanyň arasyndaky sürtülmäni hasaba alman, tejribede tapylan T_1 we T_2 mukdarlardan peýdalanyp k koeffisiýenti kesgitlemeli (*16.47--nji surat*).

$$\textit{Jogaby: } k = \frac{\pi m}{ST_1 T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}\,.$$

16.74-nji mesele. Massasy 5 kg bolan jisim gatylyk koeffisiýenti 2 kN/m bolan puržindan asylan. Gurşawyň garşylygy tizlige proporsional. Dört yrgyldydan soň amplituda 12 esse kiçelýär. Yrgyldylaryň periodyny we logarifmik dekrementini kesgitlemeli.

Jogaby: $T = 0{,}316\ s,\ \lambda = nT/2 = 0{,}3106.$

16.75-nji mesele. Deslapky meseläniň şertleri boýunça, ýüki süýnmedik puržinyň ujuna berkidip, başlangyç tizliksiz goýberilende jisimiň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = e^{-1{,}97\,t}(-2{,}45 \cos 19{,}9t - 0{,}242 \sin 19{,}9\,t)\ sm.$

16.76-njy mesele. Puržinden asylan massasy 6 kg bolan jisim garşylyk bolmasa $T = 0{,}4\,\pi\ s$ period, tizligiň birinji derejesine proporsional garşylyk bolanda bolsa $T = 0{,}5\,\pi\ s$ period bilen yrgyldaýar. Başlangyç pursatda puržin deňagramlylyk ýagdaýyndan 4 sm süýndürilen we soňra öz ugruna goýberilen bolsa, $R = -\alpha\upsilon$ garşylygyň formulasyndaky proporsionallyk koeffisiýentini tapmaly we jisimiň hereketiniň deňlemesini kesgitlemeli.

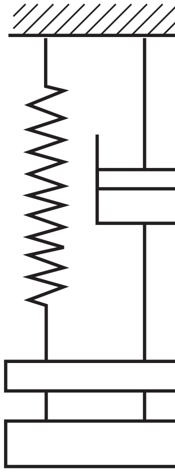
$$\textit{Jogaby: } \alpha = 36\frac{N \cdot s}{m}, \quad x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + arctg\frac{4}{3}\right) sm.$$

16.77-nji mesele. 4,9 N güýç bilen 10 sm süýnýän puržindan asylan we massasy 1,96 kg bolan jisim hereket wagtynda tizligiň birinji derejesine proporsional bolan garşylyga uçraýar we bu garşylyk 1 m/s tizlikde 1,96 N deň. Başlangyç pursatda puržin deňagramlylyk ýagdaýyndan 5 sm süýndürilen we başlangyç tizliksiz herekete getirilen. Jisimiň hereketiniň kanunyny kesgitlemeli.

Jogaby: $x = 5\,e^{-5\,t}(5\,t + 1)\ sm.$

16.78-nji mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 392\ N/m$ bolan puržindan asylan $m_1 = 2\ kg$ we $m_2 = 3\ kg$ massaly ýükler statiki deňagramlylykda dur. Ýag dempferi tizligiň birinji derejesine proporsional bolan, $R = -\alpha v$ deň garşylyk güýjüni döredýär, bu ýerde $\alpha = 98\dfrac{N \cdot s}{m}$. m_2 ýük aýrylanda m_1 ýüküň şondan soňky hereketiniň deňlemesini tapmaly (*16.48-nji surat*).

Jogaby: $x = 8{,}32\ e^{-4{,}4\,t} - 0{,}82\ e^{-44{,}6\,t}\ sm.$



16.48-nji surat

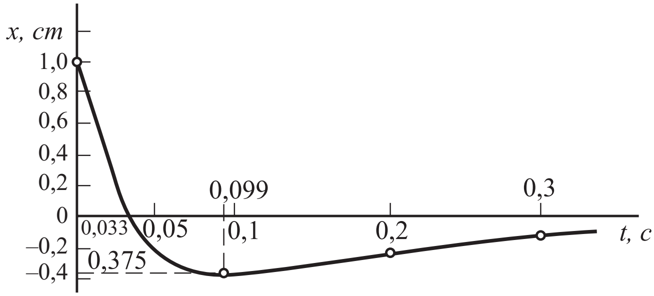
16.79-njy mesele. Puržinyň P agramly ýüküň täsirinde statiki süýnmesi f-e deň. Yrgyldaýan jisime tizlige proporsional bolan gurşawyň garşylyk güýji täsir edýär. Garşylyk koeffisiýenti α-nyň hereket prosesi aperiodik bolýan iň kiçi bahasyny kesgitlemeli. Eger garşylyk koeffisiýenti tapylan bahadan kiçi bolsa, togtaýan yrgyldylaryň periodyny tapmaly.

Jogaby: $\alpha = \dfrac{2P}{\sqrt{gf}}$; $\alpha < \dfrac{2P}{\sqrt{gf}}$ ýagdaýda herekediň periody $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{f} - \dfrac{\alpha^2}{4m^2}}}$ bolan yrgyldylardan ybarat.

16.80-nji mesele. Massasy 100 g bolan puržinyň ujuna asylan ýük suwuklykda hereketlenýär. Puržinyň gatylyk koeffisiýenti $c = 19{,}6\ N/m$. Herekete bolan garşylyk güýji ýüküň tizliginiň birinji derejesine proporsional: $R = \alpha v$ bu ýerden $\alpha = 3{,}5\ \dfrac{N \cdot s}{m} \cdot$ Eger başlangyç pursatda ýük deňagramlylyk ýagdaýyndan $x_0 = 1\,sm$ süýşürilip, başlangyç tizliksiz goýberilende ýüküň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = 1{,}32\ e^{-7\,t} - 0{,}33\ e^{-28\,t}\ sm.$

16.81-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerinden peýdalanyp, başlangyç pursatda ýük statiki deňagramlylyk ýagdaýyndan $x_0 = 1\,sm$ süýşürilen we oňa bu süýşmä garşy ugra 50 sm/s başlangyç tizlik berlen bolsa, ýüküň hereketiniň deňlemesini tapmaly we süýşmäniň

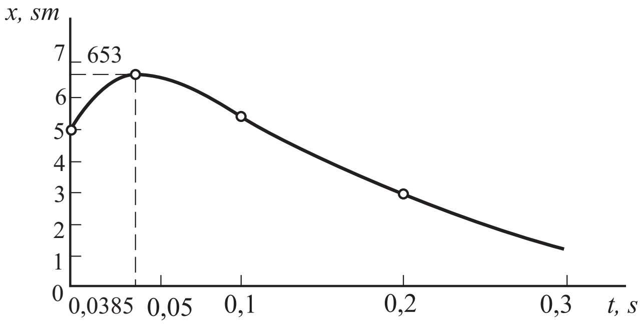


16.49-njy surat

wagta bagly görnüşde özgerişiniň grafigini gurmaly (*16.49-njy surat*).

Jogaby: $x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}$ *sm*.

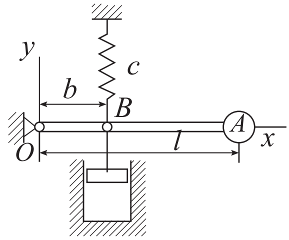
16.82-nji mesele. 32.71-nji meseläniň şertlerinden peýdalanyp, ýük başlangyç pursatda deňagramlylyk ýagdaýyndan $x_0 = 5$ *sm* süýşürilip, oňa süýşmäniň ugruna $\upsilon_0 = 100$ *sm/s* başlangyç tizlik berlen. Ýüküň hereketiniň deňlemesini tapmaly we süýşmäniň wagta bagly görnüşde özgerişiniň grafigini gurmaly (*16.50-nji surat*).



16.50-nji surat

Jogaby: $x = 11{,}4\, e^{-7t} - 6{,}4\, e^{-28t}$ *sm*.

16.83-nji mesele. Şarnir bilen *O* nokada birikdirilen sterženiň ujundaky *A* nokadyň kiçi yrgyldylarynyň differesial deňlemesini düzmeli we togtaýan yrgyldylarynyň ýygylygyny tapmaly. Gurşawyň garşylyk güýji tizligiň birinji derejesine proporsional, proporsionallyk koeffisiýenti α deň diýip hasaplamaly. *A* nokadyň agramy *P,* puržinyň gatylyk koeffisiýenti *c*, sterženiň uzynlygy *l,* aralyk *OB* = *b*. Sterženiň massasy hasaba alynmaly däl (*16.51-nji surat*). Deňagramlylyk ýagdaýynda steržen gorizontal ýerleşen. α koeffisiýentiň haýsy bahasynda hereket aperiodik bolar?



16.51-nji surat

$$Jogaby: \ \frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y} + c\frac{b^2}{l^2}y = 0,$$

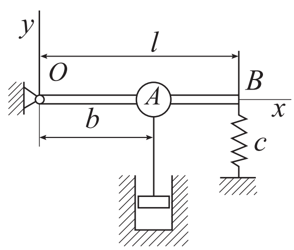
$$k = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2} \ rad/s,$$

$$\alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

16.84-nji mesele. Puržina berkidilen 20 *kg* massaly ýüküň yrgyldylarynda 10 doly yrgyldydan soň deňagramlylyk ýagdaýyndan iň uly daşlaşmalaryň iki esse kemelendigi anyklandy. Ýük 9 *s*-iň içinde 10 gezek doly yrgyldaýar. Proporsionallyk koeffisiýenti α (tizligiň birinji derejesine proporsional bolan gurşawyň garşylygy) haýsy ululyga we c gatylyk koeffisiýenti haýsy baha eýe?

$$Jogaby: = 3{,}08\ \frac{N \cdot s}{m},\ c = 974{,}8\ N/m.$$

16.85-nji mesele. A nokadyň kiçi yrgyldylarynyň differensial deňlemesini düzmeli, şeýle hem togtaýan yrgyldylarynyň ýygylygyny tapmaly. A nokadyň agramy P, puržinyň gatylyk koeffisiýenti c, aralyklar $OA = b$, $OB = l$. Gurşawyň garşylyk güýji tizligiň birinji derejesine proporsional, proporsionallyk koeffisiýenti α deň. O nokada şarnir bilen birikdirilen OB sterženiň massasy hasaba alynmaly däl (*16.52-nji surat*). Deňagramlylyk ýagdaýynda steržen gorizontal ýerleşen. α koeffisiýentiň haýsy bahasynda hereket aperiodik bolar?



16.52-nji surat

$$Jogaby: \ \frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\dot{y} + c\frac{b^2}{l^2}y = 0,\ k = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2 g^2}{4p^2}}\ rad/s,$$

$$\alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

16.86-njy mesele. Massasy 5 *kg* bolan jisim gatylygy 20 *N/m* puržindan asylan we şepbeşik gurşawda ýerleşdirilen. Bu ýagdaýda onuň yrgyldylarynyň periody 10 *s*. Dempfirlemäniň hemişeligini, yrgyldylarynyň logarifmik dekrementini we erkin yrgyldylaryň periodyny tapmaly.

Jogaby: $\alpha = 19\frac{N \cdot s}{19}$, $\lambda = nT/2 = 9{,}5$; $T = 3{,}14\ s$.

ç) Garşylyksyz gurşawdaky mejbury yrgyldylar

16.87-nji mesele. Massasy m bolan nokadyň $Q = -cx$ gaýtaryjy güýç we F_0 hemişelik güýjüň täsirindäki gönüçyzykly hereketiniň deňlemesini tapmaly. Başlangyç pursatda $t = 0$, $x_0 = 0$ we $\dot{x}_0 = 0$. Şeýle hem yrgyldylarynyň periodyny hem tapmaly.

Jogaby: $x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt)$, bu ýerde $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $T = 2\,\pi/k$.

16.88-nji mesele. Massasy m bolan nokadyň $Q = -cx$ gaýtaryjy güýç we $F = \alpha t$ güýjüň täsirindäki m massaly nokadyň gönüçyzykly hereketiniň deňlemesini tapmaly. Başlangyç pursatda nokat statiki deňagramlylyk ýagdaýynda we tizligi nola deň.

Jogaby: $x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt)$, bu ýerde $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

16.89-njy mesele. $Q = -cx$ gaýtaryjy güýç we $F = F_0 e^{-\alpha t}$ güýjüň täsirindäki m massaly, başlangyç pursatda nokat özüniň deňagramlylyk ýagdaýynda dynçlykda dur diýip hasaplap, onuň gönüçyzykly hereketini tapmaly.

Jogaby:

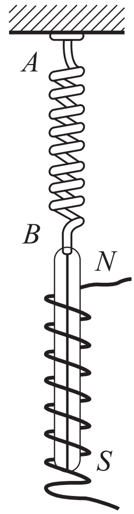
$$x = \frac{F_0}{m(k^2 + a^2)}\left(e^{-at} - \cos kt + \frac{\alpha}{k}\sin kt\right);$$

bu ýerde $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

16.90-njy mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 19{,}6\ N/m$ bolan puržindan 100 *g* massaly magnit sterženi asylan. Magnitiň aşaky ujy $i = 20 \sin 8\pi t\ A$ üýtgeýän tok geçip duran tegekden geçýär. Tok $t = 0$ pursatdan başlap täsir edip, sterženi solenoida dartýar. Bu pursata çenli magnit sterženi gozganman asylyp dur. Magnit bilen tegegiň arasyndaky özara täsir güýji $F = 0{,}016\,\pi i\ N$ deňlik bilen kesgitlenýär.

Magnitiň mejbury yrgyldylaryny kesgitlemeli (*16.53-nji surat).*

Jogaby: $x = -2{,}3 \sin 8\pi t$ *sm*.



16.53-nji surat

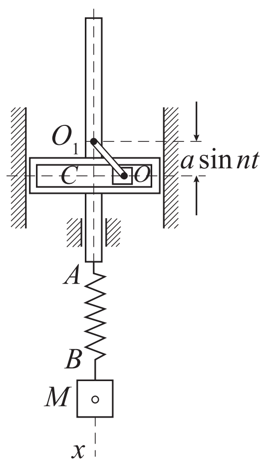
16.91-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerinden peýdalanyp, magnit sterženi süýnmedik puržinyň ujuna berkidilip, başlangyç tizliksiz goýberilen diýlip, onyň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = -5\cos 14t + 4{,}13 \sin 14t -$
$- 2{,}3 \sin 8\pi t$ *sm*.

16.92-nji mesele. 32.81-nji meseläniň şertleriniň esasynda, statiki deňagramlylyk ýagdaýynda duran magnit sterženine 5 *sm/s* başlangyç tizlik berilse, onuň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = 4{,}486 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t$ *sm*.

16.93-nji mesele. *M* daş *AB* puržindan asylanda puržinyň ýokarky ujy *a* amplituda we *n* ýygylyk bilen wertikal göni çyzyk boýunça gamoniki yrgyldyly hereket edýär: $O_1C = a \sin nt$ *sm*. Daşyň massasy 400 *g*, puržina 32,2 *N* güýç täsir edende 1 *m* süýnýär, *a* = 2 *sm*, *n* = 7 *rad/s*. *M* daşyň mejbury yrgyldylaryny kesgitlemeli (*16.54-nji surat*).



16.54-nji surat

Jogaby: $x = 4 \sin 7t$ *sm*.

16.94-nji mesele. *AB* puržindan asylan *M* daşyň (*16.93-nji meselä seret*) hereketini kesgitlemeli. Puržinyň ýokarky *A* ujy *a* amplituda we *n* öwräm ýygylygy bilen wertikal boýunça garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Puržinyň daşyň agramynyň täsirinden statiki säýnmesi δ deň. Başlangyç pursatda *A* nokat özüniň orta ýagdaýynda, *M* daş bolsa dynçlykda dur; daşyň başlangyç ýagdaýyny koordianatalar başlangyjy diýip alyp, *Ox* ok aşak ugrukdyrylan.

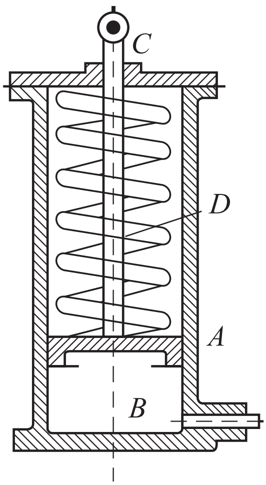
Jogaby: $k \gtrless \sqrt{\dfrac{g}{\delta}}$ bolanda:

$$x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[k\sqrt{\frac{g}{\delta}}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \sin kt\right];$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \text{ bolanda: } x = \frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos kt\right].$$

16.95-nji mesele. Ýükli wagonyň ressorlarynyň statiki egilişi $\Delta l_{st} = 5$ *sm*. Relsleriň çatylan ýerlerinden tigir geçende döreýän urgular wagonda mejbury yrgyldylar döredýär; relsleriň uzynlygy $L = 12$ *m* bolanda wagonyň «öňürdikläp» başlaýan hereketiniň kritiki tizligini kesgitlemeli;.

Jogaby: $\upsilon = 96$ *km/sag*.



16.55-nji surat

16.96-njy mesele. Maşinyň indikatory *A* silindr we onuň içinde *D* puržina direnip ýöreýän *B* porşenden ybarat. Porşene *BC* sterženi ulanyp, oňa ýazgyç *C* ştift birikdirilen. Paskallarda aňladylan buguň basyşy $p = 10^5(4+3\ \sin\ \frac{2\pi}{T}t)$ formula (bu ýerde T – çarhyň (walyň) bir gezek aýlanma wagty) bilen özgerýär we wal minutda 180 gezek aýlanýar diýip alyp, *C* ştiftiň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasyny aşakdaky berlenlere esaslanyp kesgitlemeli. Bu ýagdaýda indikatoryň porşeniniň üsti $\sigma = 4$ *sm*^{2}, indikatoryň hereketleniji böleginiň massasy 1 *kg*, puržin 29,4 *N* güýç bilen 1 *sm* gysylýar (*16.55-nji surat*).

Jogaby: $a = 4{,}64$ *sm*.

16.97-nji mesele. Eger ulgam başlangyç pursatda statiki deňagramlylyk ýagdaýda dynçlykda duran bolsa, deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp, *C* ştiftiň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = -1{,}61 \sin 54{,}22\,t + 4{,}64 \sin 6\pi t$ *sm*.

16.98-nji mesele. Massasy $m = 200$ *g* bolan ýük gatylyk koeffisiýenti 9,8 *N/sm* bolan puržindan asylyp, $S = H \sin pt$ güýjüň täsirinde durýar. Bu ýagdaýda $H = 20$ *N*, $p = 50$ *rad/s*. Başlangyç pursatda $x_0 = 2$*sm*, $\upsilon_0 = 10$ *sm/s*. Koordinatalar başlangyjy ýüküň statiki deňagramlylyk ýagdaýynda alnan. Ýüküň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = \cos 70t - 2{,}83 \sin 70\,t + 4{,}17 \sin 50\,t$ *sm*.

16.99-njy mesele. Deslapky meseläniň şertlerinden gozgaýjy güýjüň ýygylygy $p = 70$ *rad/s* ululyga üýtgedi diýip, ýüküň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = 2\cos 70t + 1{,}16 \sin 70t - 71{,}4t \cos 70t$ *sm*.

16.100-nji mesele. Massasy $M = 24{,}5$ *kg* bolan ýük gatylyk koeffisiýenti 392 *N/m* bolan puržindan asylan. Ýüke $F(t) = 156{,}8 \sin 4t$ *N* güýç täsir edip başlaýar. Ýüküň hereketiniň kanunyny kesgitlemeli.

Jogaby: $x = 0{,}2 \sin 4t - 0{,}8t \cos 4t$ *m*.

16.101-nji mesele. Massasy 24,5 *kg* bolan ýük gatylyk koeffisiýenti 392 *N/m* bolan puržindan asylan. Eger ýüke $F = 39{,}2 \cos 6t$ *N* güýç täsir edip başlan bolsa, ýüküň hereketiniň deňlemesini kesgitlemeli.

Jogaby: $x = 16 \sin t \sin 5t$ *sm*. Yrgyldylar «urma» häsiýetine eýedirler.

16.102-nji mesele. Puržindaky ýük hereketiniň differensial deňlemesi

$$m\ddot{x} + cx = 5\cos \omega t + 2 \cos 3\omega t$$

görnüşde bolanda yrgyldaýar. Başlangyç pursatda ýüküň süýşüşi we tizligi nola deň bolsa, ýüküň hereketiniň kanunyny tapmaly, şeýle hem, ω-nyň haýsy bahalarynda rezonansyň başlanýandygyny kesgitlemeli.

Jogaby:

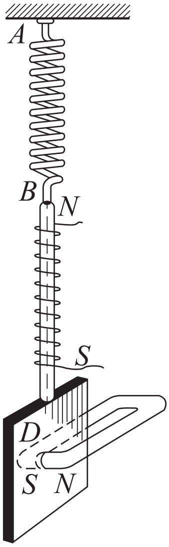
$$x = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)} \cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \frac{5}{c - m\omega^2} \cos \omega t +$$

$$+ \frac{2}{c - 9m\omega^2} \cos 3\omega t.$$

Rezonans aşakdaky iki ýagdaýda başlanýar: $\omega_{1kg} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}}$ we $\omega_{2kg} = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

d) Garşylygyň mejbury yrgyldylara täsiri

16.103-nji mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 19{,}6$ *N/m* bolan puržindan solenoid arkaly geçýän 50 *g* massaly magnit sterženi we magnit polýuslarynyň arasyndan geçýän 50 *g* massaly mis plastinka asylan. Solenoiddan $i = 20 \sin 8\pi t$ *A* tok geçýär we magnit sterženi



16.56-njy surat

bilen 0,016 πi N mukdardaky özara täsir güýje eýe bolýar. Tüweleý toklarynyň netijesinde mis plastinkada ýüze çykýan tormozlaýjy güýç $k\upsilon\Phi^2$-a deň. Bu ýerden $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ *Wb* we υ- plastinkanyň *m/s*-de aňladylan tizligi. Plastinkanyň mejbury yrgyldylaryny kesgitlemeli (*16.56-njy surat*).

Jogaby: $x = 0{,}022\sin(8\pi t - 0{,}91\pi)\ m$.

16.104-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerinden peýdalanyp, süýnmedik puržindan magnit sterženi we mis plastinkany asyp, olara aşak ugrukdyrylan n $\upsilon_0 = 5$ *sm/s* tizlik berlen bolsa, mis plastinkanyň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x = e^{-2{,}5t}(-4{,}39\cos 13{,}77t +$
$+ 3{,}42\sin 13{,}77\,t) + 2{,}2\sin(8\pi t - 0{,}91\pi)\ sm$.

16.105-nji mesele. Massasy $m = 2$ *kg* bolan maddy nokat gatylyk koeffisiýenti 4 *kN/m* bolan puržindan asylan. Nokada $S = 120\,(pt + \delta)\ N$ gozgaýjy güýç we tizligiň birinji derejesine proporsional bolan, $R = 0{,}5\sqrt{mc}\ \upsilon\ N$-a deň bolan herekete garşylyk güýji täsir edýär. Mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň iň uly A_{max} bahasy nämä deň? Haýsy p ýygylykda mejbury yrgyldylaryň amplitudasy iň uly bahasyny alýar?

Jogaby: $A_{max} = 6{,}2$ *sm*, $p = 41{,}83$ *rad/s*.

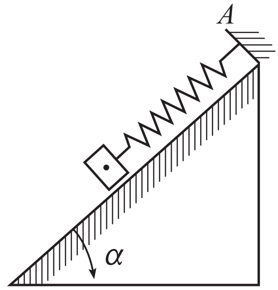
16.106-njy mesele. Deslapky meseläniň şertlerinden peýdalanyp, başlangyç pursatda nokadyň orny we tizligi $x_0=2$ *sm*, $\pi_0=3$ *sm/s* bolsa, hereket deňlemesini tapmaly. Gozgaýjy güýjüň ýygylygy $p = 30$ *rad/s*, başlangyç fazasy $\delta = 0$. Koordinatalar başlangyjy ýüküň statiki deňagramlylyk ýagdaýynda alnan.

Jogaby: $x = e^{-11{,}18t}(4{,}422\,t\cos 43{,}3 - 1{,}547\sin 43{,}3t) + 4{,}66\sin(30t - 0{,}174\pi)\ sm$.

16.107-nji mesele. Massasy 3 *kg* bolan maddy nokat gatylyk koeffisiýenti $c = 117{,}6$ *N/m* bolan puržindan asylan. Nokada $F = H\sin(6{,}26t + \beta)\ N$ gozgaýjy güýç we şepbeşikli garşylyk güýji $R = -\alpha\upsilon$ ($R - N$ hasabynda) täsir edýär. Temperaturanyň üýtgemegi bilen gurşawyň şepbeşikligi (α koeffisiýent) üç esse köpelse, nokadyň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasy nähili üýtgär?

Jogaby: Mejbury yrgyldylarynyň amplitudasy üç esse kemelýär.

16.108-nji mesele. A nokatda berkidilen puržinyň beýleki ujuna massasy 2 kg bolan ýük gorizont bilen burçy emele getirýän ýylmanak ýapgyt tekizligiň üstünde $S = 180\ N$ gozgaýjy güýjüň we tizlige proporsional $R = -29{,}4\ \upsilon$ (R – N hasabynda) garşylyk güýjüň täsirinde hereket edýär. Puržinyň gatylyk koeffisiýenti c = 5 kN/m. Başlangyç pursatda jisim statiki deňagramlylyk ýagdaýynda dynçlykda dur. Jisimiň hereket deňlemesini, erkin we mejbury yrgyldylaryň T we T_1 periodlaryny, mejbury yrgyldylaryň we gozgaýjy güýjüň fazasynyň süýşmegini tapmaly (*16.57-nji surat*).



16.57-nji surat

Jogaby: $x = e^{-7{,}35t}(0{,}228\cos 49{,}46t - 0{,}72\sin 49{,}46t) +$
$+ 3{,}74\sin(10t - 3°30')$ sm,
$T = 0{,}127\ s$, $T_1 = 0{,}628\ s$, $\varepsilon = 3°30'$.

16.109-njy mesele. Gatylyk koeffisiýenti c = 4 kN/m bolan puržina berkidilen 0,4 kg massaly jisime $S = 40\sin 50t\ N$ güýç we tizlige proporsional $R = -\alpha\upsilon$ – gurşawyň garşylyk güýji täsir edýär. Bu ýerde α = 25 $N \cdot c/m$, υ – jisimiň tizligi (υ – m/s hasabynda). Başlangyç pursatda jisim statiki deňagramlylyk ýagdaýynda dynçlykda dur. Jisimiň hereket kanunyny tapmaly hem-de gozgaýjy güýjüň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasynyň maksimal ýygylygyny kesgitlemeli.

Jogaby: 1) $x = 0{,}647e^{-31{,}25t}\sin(95t - 46°55') +$
$+ 1{,}23\sin(50t - 22°36')$ sm;

2) mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň maksimal bahasy p = 89,7 rad/s bolanda alynýar we 1,684 sm-e deň.

16.110-njy mesele. Massasy $M\ kg$, gatylyk koeffisiýenti $c\ N/m$ bolan puržina berkidilen jisime $S = H\sin pt\ N$ gozgaýjy güýç we $R = -\alpha\upsilon$ (R – N hasabynda) garşylyk güýji täsir edýär, bu ýerde υ – jisimiň tizligi. Başlangyç pursatda jisim statiki deňagramlylyk ýagdaýynda dynçlykda dur. Eger $c > \alpha^2$ ($4M$) bolsa, jisimiň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby:

$$x = \frac{hpe^{-nt}}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left(2n\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \frac{2x^2+x^2-x^2}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right)+$$
$$+\frac{h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}[(k^2-p^2)\sin pt - 2np\cos pt],$$

bu ýerde $h = \dfrac{H}{M}$, $k^2 = c/M$, $n = \alpha/(2M)$.

16.111-nji mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 17{,}64$ *kN/m* bolan puržindan asylan 6 *kg* massaly ýüke $P_0 \sin pt$ gozgaýjy güýç täsir edýär. Suwuklygyň garşylygy tizlige proporsional. Mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň maksimal bahasy statiki süýnmäniň üç essesine deň bolmagy üçin şepbeşik suwuklygyň α garşylygy nähili bolmaly? Näsazlyk koeffisiýenti (mejbury yrgyldylaryň aýlaw ýygylygynyň erkin yrgyldylaryň aýlaw ýygylygyna gatnaşygy) nämä deň? Mejbury yrgyldylaryň we gozgaýjy güýjüň faza süýşmegini tapmaly.

Jogaby: $\alpha = 110\ N\cdot s/m$, $z = 0{,}97$, $\varepsilon = 80°7'$.

16.112-nji mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 5$ *kN/m* bolan puržina berkidilen 0,1 *kg* massaly jisime $S = H\sin pt\ N$ güýç we $R = \beta\upsilon$ garşylyk güýji täsir edýär. Bu ýerde $H = 100N$, $p = 100$ *rad/s*, $\beta = 50\,N\cdot s/m$. Mejbury yrgyldylaryň deňlemesini ýazmaly we mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň maksimal bahasyna eýe bolýan p ýygylygyň mukdaryny kesgitlemeli.

Jogaby: $x_2 = 0{,}98\sin 100t - 1{,}22t\cos 100t$ *sm*; $n > k\sqrt{2}$ bolany üçin amplitudanyň maksimal bahasy bolmaýar.

16.113-nji mesele. Deslapky meseläniň şertleri boýunça mejbury yrgyldylaryň we gozgaýjy güýüň faza süýşmegini kesgitlemeli.

Jogaby: $\varepsilon = \mathrm{arctg}\,1{,}25 = 51°20'$.

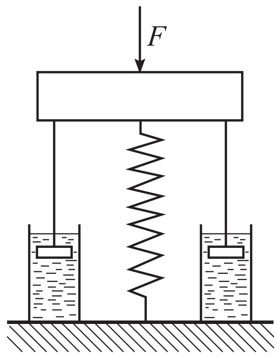
16.114-nji mesele. Gatylyk koeffisiýenti $c = 19{,}6$ *N/m* bolan puržindan 0,2 *kg* massaly ýük asylan. Ýüke $S = 0{,}20\sin 14t\ N$ gozgaýjy güýç we $R = 49\upsilon\ N$ garşylyk güýji täsir edýär. Mejbury yrgyldylaryň we gozgaýjy güýüň fazalarynyň süýşmegini kesgitlemeli.

Jogaby: $\varepsilon = 91°38'$.

16.115-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp, mejbury yrgyldylaryň we gozgaýjy güýüň fazalarynyň süýşmeginiň $\pi/2$ bolmagy üçin berlen puržiny çalyşýan täze puržinyň c_1 gatylyk koeffisiýentini kesgitlemeli.

Jogaby: $c_1 = 39{,}2$ *N/m.*

16.116-njy mesele. m massaly jisime $F = F_0 \sin(pt + \delta)$ gozgaýjy güýjüň täsirini kemeltmek üçin suwuklyk dempferli puržinly amortizator ornaşdyrylan. Puržinyň gatylyk koeffisiýenti c deň. Garşylyk güýjüni tizligiň birinji derejesine proporsional ($F_{\text{garş}} = \alpha v$) diýip hasaplap, endigan yrgyldylarda ähli ulgamyň binýada (fundamente) bolan maksimal dinamiki basyşyny tapmaly (*16.58-nji surat*).



16.58-nji surat

$$\textit{Jogaby:}\ N = F_0 \sqrt{\frac{k^4 + 4n^2p^2}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}},$$

bu ýerde $k^2 = c/m$, $n = \alpha/(2m)$.

17. MADDY NOKAT ÜÇIN DALAMBERIŇ PRINSIPI

17.1. Maddy nokat üçin Dalamberiň prinsipi. Mysaly meseleler

Goý, m massaly M erkin däl nokat $\overline{F}$ aktiw güýjüň täsiri bilen hereketlenýän bolsun. Nokady baglanyşykdan boşadyp, onuň täsirini $\overline{N}$ reaksiýa güýji bilen çalşyrsak, dinamikanyň esasy kanuny aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\bar{a} = \overline{F} + \overline{N}. \tag{17.1}$$

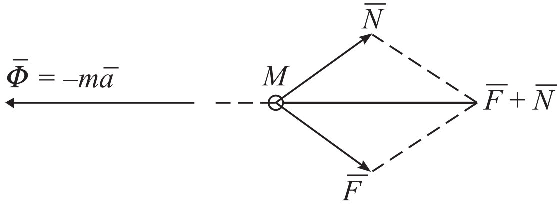
Deňligi başgaça aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\overline{F} + \overline{N} + (-m\bar{a}) = 0. \tag{17.2}$$

$-m\bar{a} = \overline{\Phi}$ belgi girizip, deňlemäni ýene-de göçüreliň:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0. \tag{17.3}$$

$\overline{\varPhi}$ güýje Dalamberiň inersiýa güýji diýilýär. Bu güýç $\overline{N}$ we $\overline{F}$ güýçlerden tapawutlylykda M nokada goýulmaýar. Onuň goýluşy 17.1-nji suratda görkezilendir.



17.1-nji surat

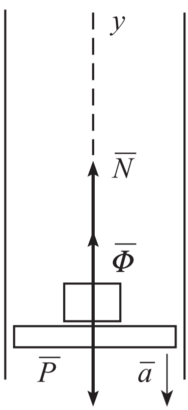
(17.3) deňleme Dalamberiň prinsipini aşakdaky ýaly kesgitleýär: ***maddy nokat aktiw güýjüň, reaksiýa güýjüniň we ýalandan goýlan inersiýa güýjüniň täsirinde deňagramlylykda ýaly bolýar.***

Elbetde, bu deňagramlylyk hakyky deňagramlylyk däldir.

(17.2) deňlikden inersiýa güýjüniň Dekart koordinatalar sistemasynyň oklaryna we tebigy oklara proýeksiýalary aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\varPhi_x = -m\ddot{x}, \quad \varPhi_y = -m\ddot{y}, \quad \varPhi_z = -m\ddot{z}. \tag{17.4}$$

$$\varPhi_\tau = -ma_\tau = -m\frac{d\upsilon_\tau}{dt} = -m\ddot{s}, \quad \varPhi_n = -m\frac{\upsilon^2}{\rho}, \quad \varPhi_b = 0. \tag{17.5}$$



17.2-nji surat

17.1-nji mesele. Üstünde P kg ýük ýatan platforma a tizlenme bilen hereket edýär (*17.2-nji surat*). Aşakdaky şertlerde ýüküň platforma basyşyny kesgitlemeli:

1) platformanyň tizlenmesi aşak ugrukdyrylan;

2) platformanyň tizlenmesi ýokaryk ugrukdyrylan.

Çözülişi. Platforma aşak barýar diýsek, $\overline{\varPhi}$ inersiýa güýji ýokarlygyna ugrukdyrýarys. Onuň ululygy $\varPhi = ma = \frac{P}{g} \cdot a$. M nokada $\overline{P}$ agyrlyk güýji we $\overline{N}$ reaksiýa güýji goýlan. Eger $\overline{\varPhi}$ inersiýa güýji hem M nokada goýlan ýaly hasap etsek, Dalamberiň prinsipiniň kömegi bilen aşakdaky üç güýjüň deňagramlylygyny ýazmak bolýar:

$$\overline{\varPhi} + \overline{N} + \overline{P} = 0$$

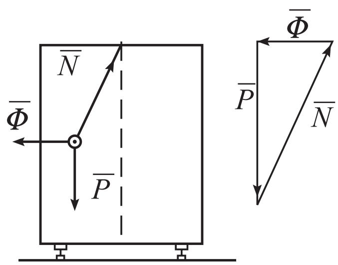
ýa-da y oka proýektirlesek, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\Phi + N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P - \Phi = P - \frac{P}{g} \cdot a \quad \Rightarrow \quad N = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Gözleýän basyş güýjümiz tapylan $\overline{N}$ reaksiýa güýje deň bolup, onuň garşysyna ugrukdyrylandyr.

Şeýlelikde, ýüküň platforma basyşy onuň agramyndan kiçi bolýar (eger platforma ýokaryk gitse, onda basyş ýüküň agramyndan uly bolýar). Hususy halda, $a = g$ bolanda, ýüküň basyşy nola öwrülýär.

17.2-nji mesele. $\upsilon = 72\ {}^{km}/_{sag}$ tizlik bilen barýan otlynyň wagonynda dinamometr bilen (puržinli terezide) bir ýüki çekýärler. Ýüküň agramy $P = 5\ kg$, tereziniň görkezýäni $N = 5{,}1\ kg$ (*17.3-nji surat*). Tereziniň massasyny hasaba alman, ýoluň egriliginiň ρ radiusyny kesgitlemeli.



17.3-nji surat

Çözülişi. Ýüki material nokat diýip kabul edýäris. Oňa $\overline{P}$ – ýüküň agramy, $\overline{N}$ – baglanyşygyň reaksiýa güýji täsir edýär. Bu güýçlerden başga şu nokada $\overline{\Phi}$ Dalamberiň güýjüni hem goýýarys. Onda $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{\Phi}$ ýygnanýan güýçleriň deňagramlylygyny alarys (*17.3-nji sur. ser.*). $\overline{P} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0$, ýagny güýç köpburçlugy ýapyk bolmaly. Emele gelen üçburçluk gönüburçly bolany üçin, Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyp, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

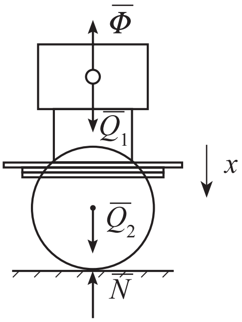
$$\Phi = \sqrt{N^2 - P^2} = \sqrt{5{,}1^2 - 5^2} = 1kg.$$

Otlynyň hereketi deňölçegli bolany üçin, inersiýa güýji diňe normal inersiýa güýjünden ybaratdyr:

$$\Phi = \Phi_n = \frac{P}{g} \cdot \frac{\upsilon^2}{\rho}.$$

Bu deňlikde $\upsilon = 72\ {}^{km}/_{sag} = 20\ {}^{m}/_{s}$-ni goýup, ρ – egriligiň radiusyny aşakdaky ýaly tapmak bolar:

$$\rho = \frac{P}{\Phi} \cdot \frac{\upsilon^2}{g} = \frac{5 \cdot 20^2}{1 \cdot 9{,}81} = 202m.$$



17.4-nji surat

17.3-nji mesele. Üstündäki ýüki bilen birlikde tramwaý wagonynyň kuzowynyň agramy $Q_1 = 10\,t$, tigirleri bilen birlikde arabasynyň agramy $Q_2 = 1\,t$. Wagon gorizontal göni ýol bilen hereket edýär. Eger kuzow hereket döwründe $x = 2\sin 10\,t$ *sm* kanun bilen wertikal boýunça yrgyldaýan bolsa, wagonyň ýola iň uly we iň kiçi basyşyny kesgitlemeli (*17.4-nji surat*).

Çözülişi. Wagony bir nokat diýip hasap edip, Dalamberiň prinsipinden peýdalanalyň. Täsir edýän güýçler: Q_1, Q_2 – aktiw güýçler, $\overline{N}$ – reaksiýa güýji (bu güýç gözleýän basyş güýjümize deňdir), $\overline{\Phi}$ – inersiýa güýji $\left(|\overline{\Phi}| = |m\ddot{x}| = \left|-\frac{Q_1}{g} \cdot 200 \sin 10t\right|\right)$. Suratdaky güýçleri x oka proýektirläp, Dalamberiň prinsipi esasynda aşakdaky deňagramlylygy ýazmak bolar:

$$-N + Q_1 + Q_2 - \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Q_1 + Q_2 + \frac{Q_1}{g} \cdot 200 \sin 10t.$$

Sinusyň iň uly bahasy (+1), iň kiçi bahasy (–1) bolany üçin,

$$N_{\max} = 10 + 1 + \frac{10}{981} \cdot 200 = 13{,}04\,t,$$

$$N_{\min} = 10 + 1 - \frac{10}{981} \cdot 200 = 8{,}96\,t.$$

Basyş güýçleri relslere tarap ugrukdyrylan.

18. ERKIN DÄL MADDY NOKADYŇ HEREKETI

Maddy nokat giňişlikde islendik ýere baryp bilmese, beýle nokada **erkin däl** ýa-da **bagly nokat** diýilýär. Nokadyň hereketini çäkleýji sebäbe **baglanyşyk** diýilýär. Baglanyşykdan boşatmak aksiomasynyň esasynda, bagly jisimi erkin jisime öwürmek bolýar. Munuň üçin jisimi baglanyşykdan boşadýarlar, olaryň täsirini reaksiýa güýçleri bilen çalşyrýarlar.

Baglanyşygy ýylmanak, hereketdäki nokat bolsa hemme wagt baglanyşykdan sypmaýar diýip hasap edýäris.

18.1. Nokadyň gozganmaýan ýylmanak üstdäki hereketi

Goý, nokat $\overline{F}$ güýjüň täsiri bilen ýylmanak üstde hereketlenýän bolsun. Üst ýylmanak bolany üçin, baglanyşyk reaksiýasy diňe $\overline{N}$ normal reaksiýadan ybarat bolýar. Bu ýagdaýda nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F} + \overline{N}. \tag{18.1}$$

Bu deňlenmäni Dekartyň oklaryna proektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N\cos\alpha, \\ m\ddot{y} &= F_y + N\cos\beta, \\ m\ddot{z} &= F_z + N\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{18.2}$$

bu ýerde F_x, F_y, F_z – nokada goýlan güýçleriň koordinata oklardaky proeksiýalary, α, β, γ – normal $\overline{N}$ reaksiýanyň koordinata oklary bilen düzen burçlary.

Bu ýerde 3 deňleme we 4 näbelli (x, y, z, N) bar bolup, ýene-de bir deňleme nokadyň hereket edýän üstüniň deňlemesi bolup hyzmat edýär:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Matematikadan belli bolşy ýaly:

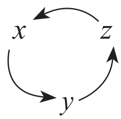
$$\cos\alpha = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Üstüň normaly bilen normal reaksiýa ugurdaş bolsa, köküň öňünde položitel, ters bolsa otrisatel bahalary alynýar. Kosinuslaryň bahalaryny goýup, (18.2)-ni aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right\}$$

Tygşytlylyk üçin, şu üç deňlemä derek bir deňleme ýazmagy şertleşeliň. x üçin, ýagny birinji deňlemäni ýazyp, ondan soň x-e derek y we z goýup, ýene-de iki deňleme alynýar. Yzly-yzyna x, y, z tegelek boýunça orunlaryny çalyşýandyklary aşakdaky alamat bilen düşündirilýän bolsun:



Ahyrky deňlemeler täze düzgün bilen aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\ddot{x} = F_x + \frac{N}{\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (18.3)$$

Bu deňlemeler üstde hereketlenýän erkin däl nokadyň differensial deňlemeleridir.

Üstdäki material nokat deňagramlylykda bolsa, ahyrky deňlemeler aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$F_x + \frac{N}{\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad (18.4)$$

Üst ýylmanak bolmasa, baglanyşyk reaksiýasy normal we galtaşma düzüjilere dargaýar. Galtaşma düzüjisi sürtülme güýji bolup, ol nokadyň tizligine garşy ugrukdyrylandyr. Bu ýagdaý üçin hereketiň differensial deňlemeleri aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\ddot{x} = F_x + \frac{N}{\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - F^{\text{sür}} \cdot \frac{\dot{x}}{\upsilon}, \qquad (18.5)$$

bu ýerde $F^{\text{sür}}$ – sürtülme güýji.

18.2. Nokadyň gozganmaýan ýylmanak egri çyzyk boýunça hereketi

Çyzyk, umuman, iki üstüň kesişmeginden emele geleni üçin, onuň deňlemesini aşakdaky ýaly ýazalyň:

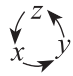
$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0, \\ f_2(x,y,z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.6)$$

Hereketdäki nokat birbada iki üste daýanany üçin, iki sany reaksiýa güýçleri döreýärler. Ýylmanak çyzyk üçin nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m\ddot{\bar{r}} = \overline{F} + \overline{N}_1 + \overline{N}_2. \tag{18.7}$$

Dekart oklaryna proýeksiýalar arkaly ýazsak, aşakdaky deňlemeleri alarys:

$$m\ddot{x} = F_x + \frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{N_2}{\Delta_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}, \tag{18.8}$$



bu ýerde

$$\Delta_1 = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2},\ \Delta_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}.$$

Bu deňlemelere (18.6) baglanyşyk deňlemelerini goşup çözülse, nokadyň koordinatalary (x, y, z) hem-de reaksiýalary (N_1, N_2) tapylýar.

Indi (18.7) deňlemäni tebigy koordinata oklaryna proýektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\upsilon}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{\upsilon^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b, \end{aligned}\right\} \tag{18.9}$$

bu ýerde $\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$ – çyzygyň normal reaksiýasy.

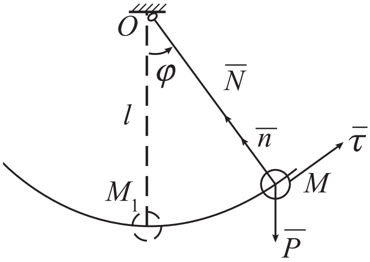
(18.9) deňlemeleriň birinjisi nokadyň hereket kanunyny berýär, ikinjisi we üçünjisi bolsa, normal reaksiýalary tapmaga mümkinçilik berýär.

Ikinji deňlemeden görnüşi ýaly, reaksiýa güýji nokadyň tizligine-de bagly bolýar. Beýle reaksiýa **dinamiki reaksiýa** diýilýär.

18.3. Tekiz matematiki maýatnik

Süýnmeýän agramsyz ýüpüň ujuna berkidilen we öz agramynyň täsiri astynda dik (wertikal) tekizlikde hereket edýän material nokada **tekiz matematiki maýatnik** diýilýär. m massaly M matematiki maýatnigiň hereketine garap geçeliň. M nokada iki güýç: nokadyň $\overline{P}$ agramy we ýüpüň $\overline{N}$ çekiş reaksiýasy täsir edýär (*18.1-nji surat*).

Şeýlelikde, $$m\bar{a} = \overline{P} + \overline{N}. \tag{18.10}$$



18.1-nji surat

Bu deňlemäni $\overline{\tau}$ galtaşma çyzygyna we $\overline{n}$ normal oklaryna proektirläp, alarys:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\upsilon}{dt} &= -P\sin\varphi, \\ \frac{m\upsilon^2}{l} &= N - P\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{18.11}$$

Nokadyň aýlanmak hereketinde çyzyk tizligi $\upsilon = \omega l$. Munuň esasynda (18.11) deňlemeleri aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\left.\begin{aligned} ml\frac{d\omega}{dt} &= -P\sin\varphi, \\ ml\omega^2 &= N - P\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{18.12}$$

Ýüpüň çekiş reaksiýasyny kesgitläliň. (18.12) sistemanyň birinji deňlemesini aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$ml\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -mg\sin\varphi.$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ bolany üçin,

$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ ýa-da $\omega d\omega = -\frac{g}{l}\sin\varphi d\varphi.$

Integrirläp aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi + C. \tag{18.13}$$

Wagt $t = 0$ bolanda $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$. Bu bahalary ýokardaky deňlemä goýup, C-niň bahasyny kesgitläp bolar:

$$\frac{\omega_0^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi_0 + C, \text{ bu ýerden } C = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0.$$

C-niň bahasyny (18.13) deňlemä goýup, ω^2-y tapalyň:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi + \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0 \quad \text{ýa-da}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

ω^2-yň bahasyny (18.12) sistemanyň ikinji deňlemesinde goýup, N-i tapýarys:

$$N = P\cos\varphi + ml\omega^2 =$$
$$= P\cos\varphi + ml\omega_0^2 + 2mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0) =$$
$$= (3P\cos\varphi - 2P\cos\varphi_0) + \frac{P}{g}l\omega_0^2.$$

Indi maýatnigiň kiçi hereketine, ýagny φ kiçi bolandaky ýagdaýlaryna seredeliň. Kiçi hereket üçin $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. (18.12) sistemanyň birinji deňlemesinden alarys:

$$l\frac{d\omega}{dt} = -g\varphi \quad \text{ýa-da} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ bolany üçin } \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Muňa **maýatnigiň differensial deňlemesi** diýilýär. Munuň umumy çözüwi aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\varphi = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t, \tag{18.14}$$

bu ýerde C_1, C_2 – integrirlemäniň erkin hemişelikleri bolup, bularyň bahalary başlangyç şertlerden kesgitlenýär.

(18.14) deňlemeden wagt boýunça önüm alyp, burç tizligini tapalyň:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}} + C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{18.15}$$

Wagt $t = 0$ bolanda $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$. Bu başlangyç şertleri (18.14) we (18.15) deňlemelere goýup, C_1, C_2 bahalaryny kesgitläris:

$$\varphi_0 = C_1;\ \omega_0 = C_2\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

C_1, C_2-niň bahalaryny (18.14) deňlemede goýup, matematiki maýatnigiň (φ kiçi bolandaky) hereket deňlemesini alarys:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + \sqrt{\frac{l}{g}}\omega_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \quad \text{ýa-da} \quad \varphi_0 = a\sin\alpha.$$

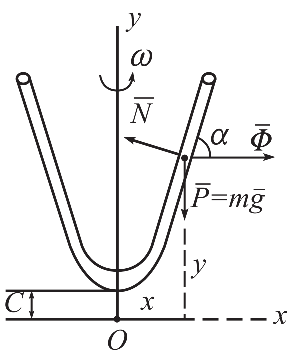
$\sqrt{\frac{l}{g}}\omega_0 = a\sin\alpha$ bilen belgiläp, alarys:

$$\varphi = a\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right).$$

a-nyň we α-nyň bahalary aşakdaky formulalardan tapylýar:

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{l}{g}\omega_0^2}; \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\varphi_0}{\omega_0\sqrt{l/g}}.$$

18.4. Mysaly meseleler



18.2-nji surat

18.1-nji mesele. Egreldilen truba üýtgemeýän ω = const burç tizlik bilen y okuň daşynda aýlanýar (*18.2-nji surat*). Islendik ýerinde ýerleşen şarjagazyň truba görä deňagramlylykda bolmagy üçin trubany nähili tekiz çyzyk boýunça egreltmeli? Şeýle hem şarjagazyň trubkanyň diwaryna basyşyny kesgitlemeli.

Çözülişi: Şarjagaz trubanyň islendik $M(x, y)$ nokadynda ýerleşen bolsun. Şerte görä şarjagaz truba görä hereket etmeli däl. Şeýle bolsa diňe truba bilen bilelikdäki hereketi galýar, ýagny M şarjagaz $r = x$ radiusly, merkezi y okunda ýatan töwerek boýunça $\upsilon = r \cdot \omega = x \cdot \omega$ = const tizlik bilen hereket edýär.

Dalamberiň prinsipinden peýdalanalyň: $\overline{P}$ – aktiw güýç. $\overline{N}$ – baglanyşyk reaksiýasy nokada goýlan. Bulardan başga-da $\overline{\Phi}_n$ – inersiýa güýji hem nokada goýarys, $\Phi_n = \frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{mx^2\omega^2}{x} = mx\omega^2$ (galtaşma inersiýa güýji nola deň, sebäbi ω = const, $\omega = \varepsilon = 0$).

M şarjagazyň deňagramlylyk deňlemesini düzeliň: $\overline{P}+\overline{N}+\overline{\Phi}=0.$ Bu deňligi koordinata oklaryna proýektirläliň:

$$\Phi_n - N\sin\alpha = 0, \quad -P + N\cos\alpha = 0. \tag{1}$$

Deňlikden N-i aýryp, alarys: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\Phi_n}{P} = \dfrac{mx\omega^2}{mg} = \dfrac{\omega^2}{g}\cdot x.$

Burç koeffisiýenti aşakdaky ýaly hasaplanýar: $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx}$. Şonuň üçin $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\omega^2}{g}\cdot x.$ Başlangyç şerti peýdalanyp alarys: ($x=0$, $y=0$) integrirleýäris:

$$\int_c^y dy = \frac{\omega^2}{g}\int_0^x xdx \Rightarrow y - c = \frac{\omega^2}{g}\cdot\frac{x^2}{2} \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g}\cdot x^2 + c.$$

Şeýlelikde gözleýän egrimiz parabola ekeni.

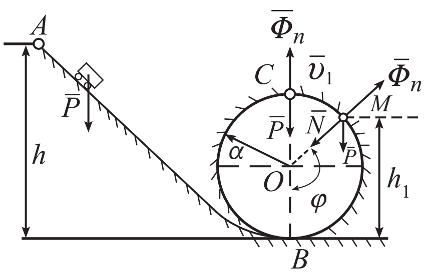
1) deňlemelerden N reaksiýanyň ululygyny kesgitlemek bolýar:

$$N^2 = \Phi_n^2 + P^2 => \; N = P\sqrt{1+\frac{\omega^4}{g^2}x^2}.$$

Şarjagazyň diwara basyş güýji N-e deň we garşylykly ugrukdyrylan.

18.2-nji mesele. a radiusly halka şekilindäki ýola rels oturdylan. Relsde $\overline{P}$ agramly wagonjyk tigirlenýär (*18.3-nji surat*). Wagonjygyň halkadan sypman aýlanmagy üçin ony başlangyç tizliksiz nähili h beýiklikden goýbermeli? $\angle MOB = \varphi$ burç bilen kesgitlenen M nokatda wagonjygyň halka basyş güýjüni hem kesgitlemeli.

Çözülişi: Wagonjyk halka aýlawy bilen hereket edende, oňa özüniň $\overline{P}$ agramyndan başga $\overline{N}$ reaksiýa güýji täsir edýär. Dalamberiň prinsipi esasynda bu nokada galtaşma $\overline{\Phi}_\tau$ we normal $\overline{\Phi}_n$ iner-



18.3-nji surat

siýa güýçleri goýulýar. Meseläniň şertinden ugur alyp we suraty çylşyrymlaşdyrmazlyk şerti bilen diňe $\overline{\Phi}_n$ güýç görkezilýär.

Wagonjyk üçin iň howply nokat halka aýlawyndaky C nokatdyr. Wagonjygyň aýlawdan sypmazlygy üçin, C nokatda $\overline{\Phi}$ güýç wagonjygyň P agramyndan uly bolmalydyr, ýagny

$$\Phi_n \geq P \Rightarrow \frac{P}{g} \cdot \frac{\upsilon^2}{a} \geq P \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 \geq ag \cdot \tag{1}$$

C nokatdaky υ tizligi tapmak üçin kinetik energiýanyň üýtgemegi hakyndaky teoremadan peýdalanalyň. $\upsilon_0 = 0$ bolany üçin

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{\upsilon^2}{2} = P(h-2a) \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 2g(h-2a),$$

bu bahany (1) goýup ýönekeýleşdirýäris

$$2g(h-2a) \geq ag \Rightarrow h \geq 2{,}5a,$$

M nokat üçin Dalamberiň prinsipi esasynda deňagramlylyk deňlemesini ýazalyň:

$$N = \Phi_n - P\cos(180° - \varphi), \tag{2}$$

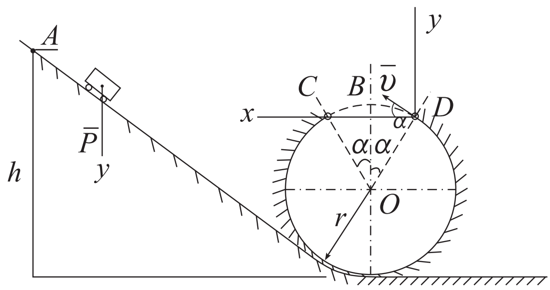
bu ýerde $\Phi_n = \dfrac{m\upsilon_1^2}{a}$. $\quad \upsilon_1^2 = 2gh_1 = 2g[h - a(1-\cos\varphi)]$.

Bu bahalary (2) formulada ulanyp, $\overline{N}$ reaksiýa güýji kesgitleýäris (tapmaly basyş güýjümiz N güýje ululygy boýunja deň, ugry boýunça garşylykly):

$$N = P\Big(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\Big).$$

18.3-nji mesele. Wagonjyk A nokatdan tigirlenip gaýdýar we r radiusly halkanyň içi bilen hereket edýär. Halkanyň CD bölegi açyk. 18.4-nji suratdan görnüşi ýaly $<BOC = BOD = \alpha$. Wagonjygyň bütin halka aýlawyny geçmegi üçin, ony başlangyç tizliksiz haýsy h belentlikden goýbermeli? α burçuň haýsy bahasynda h iň kiçi baha eýe boýar?

Çözülişi: Wagonjyk D nokada çenli aýlaw bilen hereket edip, bu nokatda aýlawdan sypýar. Wagonjyk aýlawdan sypandan soň, D nokatdaky tizlik (başlangyç tizlik) bilen zyňylan jisim ýaly parabola traýektoriýasy bilen hereketlenýär. Wagonjyk ýykylman C nokada



18.4-nji surat

barjak bolsa, C nokadyň koordinatalary traýektoriýanyň deňlemesini kanagatlandyrmaly. Şunuň bilen birlikde, C nokatdaky tizlik D nokatdaky tizlige deň bolmaly. Koordinatalar sistemasyny 18.4-nji suratdaky ýaly alsak, traýektoriýanyň deňlemesini aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon^2\cos^2\alpha}.$$

Bu ýerde C nokadyň koordinatalary: $y = 0$, $x = 2a\sin\alpha$. Bu bahalary traýektoriýanyň deňlemesine goýup alarys:

$$0 = \mathrm{tg}\alpha - \frac{ag2\sin\alpha}{2\upsilon^2\cos^2\alpha} \quad => \quad \upsilon^2 = \frac{ag}{\cos\alpha}.$$

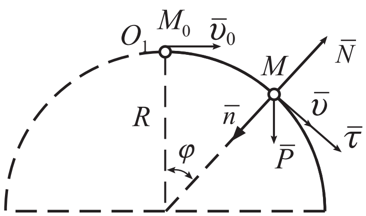
D nokat üçin kinetik energiýanyň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg[h - a(1 + \cos\alpha)].$$

Tizligiň bahasyny goýup, h beýikligi tapýarys:
$h = a\left(1 + \cos\alpha + \dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)$. h beýikligiň iň kiçi bahasyny $\dfrac{\partial h}{\partial\alpha} = 0$ şertden aşakdaky ýaly tapmak bolýar:

$$\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha} = 0 \quad => \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad => \quad \alpha = 45°.$$

18.4-nji mesele. Ýylmanak, R radiusly ýarymsferanyň depesinde ýerleşen şarjagaz gorizontal υ_0 tizlige eýe bolýar. Haýsy ýerde şarjagaz sferadan sypar? υ-niň haýsy bahalarynda şarjagaz başlangyç



18.5-nji surat

pursatda sferadan sypar? Garşylyk güýçleri hasap etmeli däl (*18.5-nji surat*).

Çözülişi. Erkin däl jisim üçin dinamikanyň esasy deňlemesini ýazalyň: $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N}$. Bu deňlemäni $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ ugurlara proýektirläp (18.9) deňlemeleri aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$m\ddot{S} = P\sin\varphi, \quad \frac{mV^2}{R} = P\cos\varphi - N. \tag{1}$$

Şarjagaz sferanyň çäginden çykan pursatynda $N = 0$ bolýar.

Diýmek, $N = \dfrac{mV^2}{R} - mg\cos\varphi = 0 \quad => \quad \cos\varphi = \dfrac{V^2}{gR}$. (2)

V^2-ni tapmak üçin (1) sistemanyň birinji deňlemesini peýdalanalyň. Duga koordinatasy $S = \breve{O_1 M} = R\varphi$. Hasap başlangyjy O_1 nokat üçin aşakdaky bahany goýýarys:

$$\ddot{S} = R\ddot{\varphi} = R\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = R\frac{d\omega}{d\varphi}\omega.$$

$$mR\frac{d\omega}{d\varphi}\omega = mg\sin\varphi \quad => \quad R\omega d\omega = g\sin\varphi d\varphi$$

Integrirlenenden soň $R\dfrac{\omega^2}{2} = -g\cos\varphi + C$, $\omega = \dfrac{V}{R}$ bolany üçin

$$\frac{v^2}{2R} = -g\cos\varphi + C. \tag{3}$$

Başlangyç şertleri ulanyp integrirlemäniň erkin hemişeligini kesgitläliň: $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $V = V_0$ (başlangyç şertler)

(3) deňlemeden alarys: $\dfrac{v_0^2}{2R} = g + C \quad => \quad C = \dfrac{v_0^2}{2R} + g.$

Bu bahany (3) deňlemede goýup, alarys:

$$\frac{v^2}{2R} = -g\cos\varphi + \frac{v_0^2}{2R} + g \quad => \quad v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi).$$

Bu bahany (2) deňlemede goýup, alarys:

$$\cos\varphi = \frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} + 2(1-\cos\varphi) \quad => \quad \cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}.$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{\upsilon_0^2}{3gR}\right).$$

Şarjagaz başlangyç pursatda sferanyň çäginden çykanda, $\varphi = 0$ bolýar, ýagny

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{\upsilon_0^2}{3gR} \quad => \quad \upsilon_0^2 = gR.$$

Şeýlelikde $\upsilon_0 \geq \sqrt{gR}$ bolanda şarjagaz başlangyç pursatda sferadan sypýar.

18.5. Özbaşdak çözmek üçin garyşyk meseleler

18.5-nji mesele. Massasy 1 *kg* bolan ýük gozganmaýan *O* nokatdan uzynlygy 0,5 *m* bolan ýüp bilen asylan. Başlangyç pursatda ýük wertikaldan 60° burça gyşaran we oňa wertikal tekizlikde ýüpe perpendikulýar bolup aşak ugrukdyrylan, 2,1 *m/s* deň bolan υ_0 tizlik berlen. Ýüküň iň aşakdaky ýagdaýy üçin ýüpüň dartylyş güýjüni hem-de şu ýagdaýdan wertikal boýunça ýokaryk hasaplananda göteriliş belentligini kesgitlemeli.

Jogaby: 28,4 *N*, 47,5 *sm*.

18.6-njy mesele. Deslapky meselede υ_0 tizligiň mukdaryndan beýleki ähli şertleri saklap, şu υ_0 tizligiň mukdary näçe bolanda ýük tutuş töweregi aýlanar?

Jogaby: $\upsilon_0 > 4{,}43$ *m/s*.

18.7-nji mesele. Massasy $M = 20$ *kg* bolan agyr polat guýma gozganmaýan gorizontal *O* okuň daşynda sürtülmesiz diýen ýaly aýlanýan sterženiň ujuna berkidilen. Guýma iň ýokarky *A* ýagdaýdan örän kiçi başlangyç tizlik bilen gaýdýar. Sterženiň massasyny hasaba alman, oka düşýän iň uly basyşy kesgitlemeli.

Jogaby: 980 *N*.

18.8-nji mesele. Deslapky meselede oka düşýän basyş nola deň bolanda aýlanýan steržen wertikal bilen haýsy burçy emele getirýär?

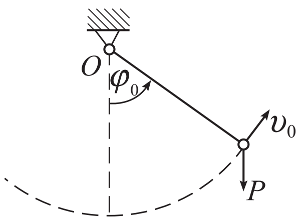
Jogaby: $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

18.9-njy mesele. Massasy 70 *kg* bolan paraşýutçy uçardan böküp, 100 *m* aralygy geçenden soň paraşýuty açdy. Herekete täsir edýän garşylyk güýji hemişelik bolanda paraşýutçynyň tizligi paraşýut açylanyndan başlap, birinji bäş sekundyň içinde 4,3 *m/s* çenli kemelen bolsa, paraşýutyň adamy dartyp duran ýüplerdäki dartyş güýji tapmaly. Howanyň adama görkezýän garşylygyny hasaba almaly däl.

Jogaby: 1246 *N*.

18.10-njy mesele. Belentligi 2 *m* bolan depedäki stansiýa 500 *m* galanda 12 *m/s* tizlik bilen gelýän otlynyň maşinisti bugy ýapyp, tormoz berip başlaýar. Eger otlynyň massasy 1000 *t*, sürtülmedäki garşylyk 20 *kN* bolsa, otlynyň stansiýa gelip togtomagy üçin tormozlamadan döreýän we hemişelik diýip garalýan garşylgyň ululygy näçe bolmaly?

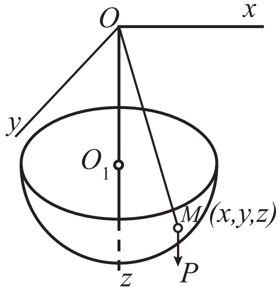
Jogaby: 84,8 *kN*.



18.6-njy surat

18.11-nji mesele. Massasy *m* bolan agyr guýma *O* okuň daşynda sürtülmesiz aýlanýar we wertikaldan φ burça gyşaran steržene berkidilen. Şu başlangyç ýagdaýda guýma υ_0 başlangyç tizlik berlen (*18.6-njy surat*). Sterženiň massasyny hasaba alman, ondaky süýnmäni sterženiň wertikaldan gyşarma burçunyň funksiýasy görnüşde kesgitlemeli.

Jogaby: $N = 3mg\cos\varphi\text{-}2mg\cos\varphi_0 + m\dfrac{\upsilon_0^2}{l}$. Eger $N > 0$ bolsa, steržen dartylan; eger $N < 0$ bolsa, steržen gysylan.



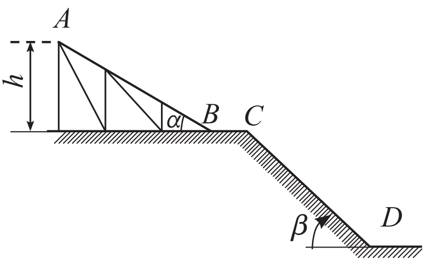
18.7-nji surat

18.12-nji mesele. Sferik maýatnik uzynlygy *l* bolan we bir ujy gozganmaýan *O* nokada berkidilen *MO* ýüp hem-de ýüpüň ikinji ujuna baglanan *P* agramly *M* nokatdan ybarat. *M* nokadyň koordinatalary $t = 0$-da $x = x_0, y = 0$ bolup, oňa $\dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = \upsilon_0,\ \dot{z}_0 = 0$ başlangyç tizlik berlende deňagramlyk ýagdaýyndan süýşýär (*18.7-nji surat*). Başlangyç şertleriň arasynda haýsy gatnaşyk bolanda M nokat gorizontal tekizlikde töwerek çyzar we şu töweregi ol näçe wagtda bir gezek aýlanyp çykar?

Jogaby: $\upsilon_0 = x_0\sqrt{\dfrac{g}{z_0}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{z_0}{g}}.$

18.13-nji mesele. Lyžaçy tramplinden gorizonta $\alpha = 30°$ burç bilen ýaplanan AB estakadadan aşak düşýär. Tramplinden üzülmänkä ol kiçi gorizontal BC meýdançany geçýär. Bu meýdançanyň uzynlygyny hasaba almaly däl. Lyžaçy tramplinden üzülen pursatynda zarp bilen özüne wertikal düzüjisi $\upsilon_y = 1$ *m/s* bolan tizlik berýär. Estakadanyň belentligi $h = 9$ *m*, lyžanyň gara sürtülme koeffisiýenti $f = 0{,}08$, ýere düşüş çyzygy (CD) gorizont bilen $\beta = 45°$ burç emele getirýär (*18.8-nji surat*). Howanyň garşylygyny hasaba alman, lyžaçynyň uçyp barýan l uzaklygyny kesgitlemeli.

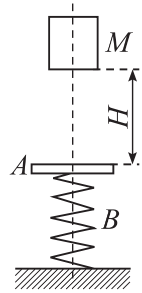
Bellik. C üzüliş nokadyndan lyžaçynyň ýere düşen CD çyzygyndaky nokada çenli aralyga lyžaçynyň uçuş uzaklygy diýilýär.



18.8-nji surat

Jogaby: $l = 47{,}4$ *m*.

18.14-nji mesele. Agramy P bolan M ýük spiral puržinde duran A plita H belentlikden taşlanýar. Ýüküň başlangyç tizligi nola deň. Düşen M ýüküň täsirinde puržin h ululyga gysylýar. A plitanyň agramyny we garşylygyny hasaba alman, puržin h ululyga gysylýança geçen T wagty we puržinyň şol wagt içindäki maýyşgak güýjüniň S impulsyny hasaplamaly (*18.9-njy surat*).



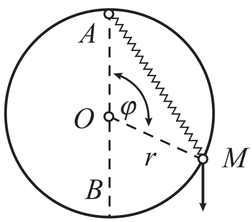
18.9-njy surat

Jogaby: $T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\quad S=P\left(T+\sqrt{\frac{2H}{g}}\right),$

bu ýerde $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}},\quad k=\frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}.$

18.15-nji mesele. Mahowik ýarylyp iň uzak s = 280 *m* aralyga onuň bölejigi düşüpdir. Mahowik ýarylan pursatynda iň kiçi burç tizligini hasaplamaly. Agzalan bölek özüniň başlangyç ýagdaýyndaky gorizontal tekizlikden baryp ýeten tekizligindäki ýatan soňky ýagdaýyna gelende oňa howanyň görkezýän garşylygyny hasaba almaly däl. Mahowigiň radiusy R = 1,75 *m*.

Jogaby: n = 286 *aýl/min* ýa-da ω = 30 *rad/s.*



18.10-njy surat

18.16-njy mesele. Wertikal tekizlikde ýerleşen tegelek halkanyň ýokardaky A nokadyna puržin arkaly asylan M ýük sürtülmesiz halka boýunça aşak düşýär (*18.10-njy surat*). Halkanyň aşakdaky B nokadyna düşýän basyşyň nola deň bolmagy üçin puržinyň gatylygy nähili bolmaly? Aşakdakylar berlen: halkanyň radiusy 20 *sm*, ýüküň massasy 5 *kg*, ýüküň başlangyç pursatdaky MA aralygy 20 *sm*, puržin adaty uzynlykda; ýüküň başlangyç tizligi nola deň; puržinyň massasyny hasaba almaly däl.

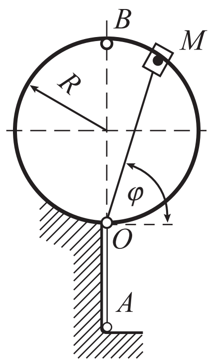
Jogaby: 4,9 *N* güýç täsir edende puržin 1 *sm* süýnmeli.

18.17-nji mesele. M ýüküň halkanyň aşagyndaky B nokadyna (deslapky meseläniň suratyna seret) düşýän basyşy kesgitlemeli. Bu ýagdaýda halkanyň radiusy 20 *sm*, ýüküň massasy 7 *kg*, ýüküň başlangyç pursatdaky MA aralygy 20 *sm*, puržin süýnen we onyň uzynlygy adaty uzynlygyndan iki esse uly; puržinyň adaty uzynlygy 10 *sm*, puržina 4,9 *N* güýç täsir edende ol 1 *sm* süýnýär; ýüküň başlangyç tizligi nola deň; puržinyň massasyny hasaba almaly däl.

Jogaby: Basyş 68,6 *N* bolup, ýokaryk ugrukdyrylan.

18.18-nji mesele. Agramy Q bolan ýylmanak M halka wertikal tekizlikde ýatan R *sm* radiusly töweregiň dugasynda sürtülmesiz typýar. Halka MOA maýyşgak ýüp bilen baglanan. MOA ýüp A

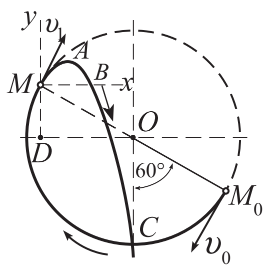
nokada berkidilip, gozganmaýan we ýylmanak O halkadan geçýär. M halka O nokatda bolan pursatynda ýüpüň dartylyş güýji nola deň, ýüpi 1 *sm* süýndirmek üçin c güýç goýmaly diýip hasaplamaly. Başlangyç pursatda halka B nokatda durnuksyz deňagramlylyk ýagdaýynda durýar we ujypsyz täsirden töwerek boýunça typýar (*18.11-nji surat*). Halkanyň töwerege N basyşyny kesgitlemeli.



18.11-nji surat

Jogaby: $N = 2\ Q + cR + 3(Q+cR)\cos 2\varphi$; $N > 0$ bolsa, basyş daşyna, $N < 0$ bolsa içine ugrukdyrylan.

18.19-njy mesele. Ýük gozganmaýan O nokatdan 0,5 *m* uzynlykdaky ýüp bilen asylan. M_0 başlangyç ýagdaýda ýük wertikaldan 60° burça gyşaran we wertikal tekizlikde oňa perpendikulýar aşak ugrukdyrylan 3,5 *m/s* deň bolan υ_0 tizlik berlen (*18.12-nji surat*).



18.12-nji surat

1) M ýük haýsy ýagdaýda bolanda ýüpdäki dartylyş güýjüniň nola deň bolmagyny we bu ýagdaýdaky υ_1 tizligi tapmaly.

2) Ýüküň ýüp täzeden dartylýança eden hereketiniň traýektoriýasyny we bu traýektoriýany näçe wagtda geçişini kesgitlemeli.

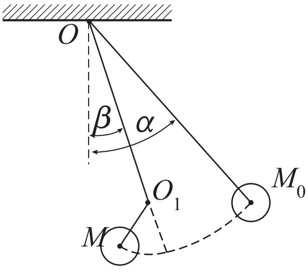
Jogaby: 1) M-iň orny O nokatdan geçýän gorizontaldan $MD = 25$ *sm* aralykda; $\upsilon_1 = 156{,}5$ *sm/s*.

2) Mx we My oklara görä $y = x\sqrt{3} - 0{,}08\,x^2$ deňleme bilen aňladylan $MABC$ parabola; ýük bu parabolany 0,55 *s*-de çyzýar.

18.20-nji mesele. 10 *km* belentlige göterilýän uçarda matematiki maýatnik ornaşdyrylan. Şu belentlikde maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periody üýtgemez ýaly maýatnigiň ýüpüniň uzynlygyny bu uzynlygyň haýsy bölegine gysgaltmak gerek? Agyrlyk güýji merkezine çenli bolan aralygyň kwadratyna ters proporsional diýip hasaplamaly.

Jogaby: 0,00313 l; bu ýerde l – ýüpüň Ýeriň üstündäki uzynlygy.

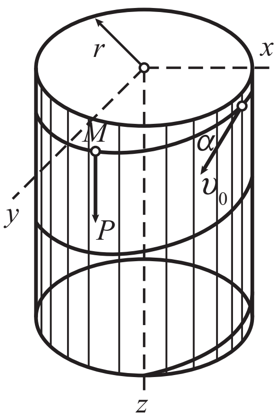
18.21-nji mesele. Massasy m bolan M ýük uzynlygy l bolan MO ýüp bilen gozganmaýan O nokatdan asylan. Başlangyç pursatda MO ýüp wertikal bilen burçy emele getirýär we M ýüküň tizligi nola deň. Ýüp özüniň soňky hereketinde inçe O_1 sime gabat gelýär. Simiň ugry ýüküň hereketiniň tekizligine perpendikulýar, onuň orny bolsa $h = OO_1$ we β polýar koordinatalary bilen kesgitlenýär. MO ýüp sime gabat gelende oňa oralan ýagdaýynda α burçuň iň kiçi bahasyny kesgitlemeli, şeýle hem, ýüp sime gabat gelende ýüpdäki dartylyş güýjüniň özgermesini kesgitlemeli. Simiň ýogynlygyny hasaba almaly däl (*18.13-nji surat*).



18.13-nji surat

Jogaby: $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right]$; ýüpüň dartylyş güýji $2mg\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right)$ mukdarda köpelýär.

18.22-nji mesele. Massasy m bolan M nokat radiusy r bolan tegelek silindriň içki üsti bilen hereket edýär. Silindriň üsti absolýut ýylmanak, silindriň okuny wertikal diýip hasaplap, nokadyň silindre basyşyny kesgitlemeli. Nokadyň başlangyç tizliginiň mukdary bolup, gorizont bilen α burç emele getirýär (*18.14-nji surat*).



18.14-nji surat

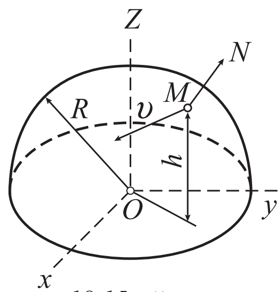
$$Jogaby:\ N = \frac{m\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}{r}.$$

18.23-nji mesele. Başlangyç pursatda nokat x okda bolanda deslapky meselede nokadyň hereket deňlemelerini düzmeli.

Jogaby: $x = r\cos\left[\frac{\upsilon_0 \cos\alpha}{r} t\right], \quad y = r\sin\left[\frac{\upsilon_0 \cos\alpha}{r}\right],$

$$z = \upsilon_0 t + \sin\alpha + \frac{gt^2}{2}.$$

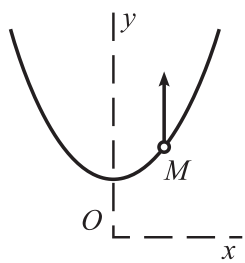
18.24-nji mesele. Massasy m bolan nokat R radiusly ýarymsfera görnüşli ýylmanak gümmeziň üstünde hereket edýär. Nokada z oka parallel bolan agyrlyk güýji täsir edýär we başlangyç pursatda nokat gümmeziň esasyndan h belenlikde dur hem-de tizligi υ_0 diýip kabul edip, nokat gümmeziň esasyndan h belenlikde bolanda onuň gümmeze edýän basyşyny kesgitlemeli (*18.15-nji surat*).



18.15-nji surat

Jogaby: $N = \dfrac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \dfrac{\upsilon_0^2}{g}\right).$

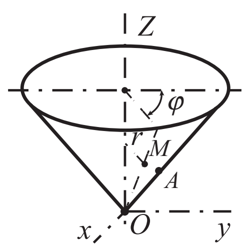
18.25-nji mesele. Massasy m bolan nokat $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ bilen Oy oka parallel bolan iteriji güýjüň täsirinde hereket edýär. Bu güýç $O\,x$ ok boýunça ugrugyp, kmy deň. $t=0$ pursatda $x-1m$, $\dot{x}=1$ m/s, $k=1$ rad/s^2 we $a=1$ m bolanda nokadyň hereketini hem-de onyň egri çyzyga edýän N basyşyny kesgitlemeli (agyrlyk güýji hasaba alynmaýar). Zynjyr çyzygynyň egrilik radiusy y^2/a deň (*18.16-njy surat*).



18.16-njy surat

Jogaby: $N = 0$; $x = (1 + t)\ m$.

18.26-njy mesele. Depesindäki burçy $2\alpha = 90°$ bolan tegelek konusyň ýylmanak üstünde $m = 1$ kg massaly M nokat, O depeden iterýän we OM aralyga proporsional güýjüň täsirinde hereketlenýär: $F = c \cdot OM$ N, bu ýerden $c = 1$ N/m. Başlangyç pursatda M nokat A ýagdaýda, OA aralyk $a=2$ m, başlangyç tizligi bolsa $\upsilon_0 = 2$ m/s diýip kabul edip, konusyň esasyna parallel görnüşde ugrukdyrylan (*18.17-nji surat*). M nokadyň hereketini kesgitlemeli (agyrlyk güýji hasaba alynmaýar).



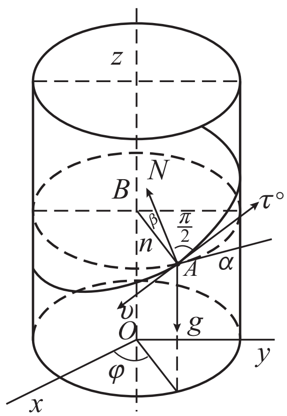
18.17-nji surat

M nokadyň orny Oz koordinata oka perpendikulýar tekizlikdäki r we φ polýar koordinatalar bilen kesgitlenýär; konusyň üstüniň deňlemesi $r^2 - z^2 = 0$.

Jogaby: $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$, $\quad \mathrm{tg}\left(\dfrac{\varphi}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4}\right) = e^{2t}$.

18.27-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerinde konusyň oky wertikal ýokary ugrukdyrylan diýip hasaplap we agyrlyk güýjüni hasaba alyp, nokadyň konusyň üstüne basyşyny kesgitlemeli.

Jogaby: $N = m \sin\alpha \left[g + \dfrac{x^2 \upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{2r^3} \right]$.



18.18-nji surat

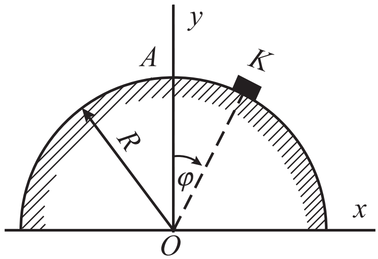
18.28-nji mesele. A maddy nokat Oz oky wertikal bolan büdür-südür wint üstünde agyrlyk güýjüniň täsiri bilen hereket edýär. Üst $z = a\varphi + f(r)$ deňleme arkaly kesgitlenýär. Nokadyň üste sürtülme koeffisiýenti k deň. Haýsy şertde nokat okdan $AB = r_0$ hemişelik aralykda, ýagny wint çyzygy boýunça hereket eder? Şol ýagdaýda nokadyň tizligi näçe bolar? A = const diýip hasaplamaly (*18.18-nji surat*).

Görkezme: Meseläni çözmek üçin tebigy oklar ulgamyndan peýdalanmak amatly. Bu ýagdaýda hereket deňlemesi wint çyzygynyň A nokadyndaky galtaşma, baş normala we binormala proessirlenýär. Suratda wint üstüniň reaksiýasynyň N normal düzüjisi bilen baş normalyň birlik wektory n^0-yň arasyndaky burç β bilen belgilenen.

Jogaby: $\mathrm{tg}\alpha - k\sqrt{1 + f^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0$ bolanda wint çyzygy boýunça hereket bolmagy mümkin; bu ýagdaýda $\mathrm{tg}\alpha = a/r_0$; hereketiň tizligi $\upsilon = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}$.

18.29-njy mesele. Ölçegleri hasaba alynmasa-da bolýan K jisim R radiusly büdür-südür üstli gozganmaýan ýarym silindriň ýokarky A nokadynda goýlan (*18.19-njy surat*). Eger dynçlyk we hereketdäki ýagdaýlaryndaky sürtülme koeffisiýentleri birmeňzeş f bolsa,

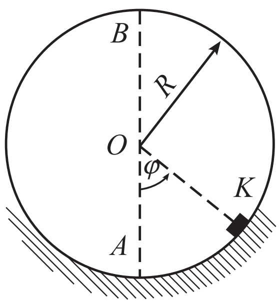
K jisime silindriň üstünde galtaşma boýunça gorizontal ugrukdyrylan haýsy υ_0 başlangyç tizlik berlende, jisim hereketlenip başlap, silindriň üstünde togtar?



18.19-njy surat

Jogaby: $\upsilon_0 \leq \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}[\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)]}$, bu ýerde $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\, f$.

18.30-njy mesele. Ölçegleri hasaba alynmasa-da bolýan K jisim R radiusly büdür-südür üstli gozganmaýan silindriň içki böleginiň aşaky A nokadynda goýlan. K jisimiň silindriň ýokarky B nokadyna ýetmegi üçin oňa silindriň üstünde galtaşma boýunça gorizontal ugrukdyrylan haýsy υ_0 başlangyç tizlik bermeli? Typma sürtülme koeffisiýenti f deň (*18.20-nji surat).*



18.20-nji surat

Jogaby: $\upsilon_0 \geq \sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}[2(1-2f^2) + e^{e\pi f}]}$.

18.31-nji mesele. Ýüpe baglanan şarjagaz, konus maýatnigini emele getirip, gorizontal tekizlikde töwerek çyzýar. Eger şarjagaz minutda 20 gezek aýlanýan bolsa, konusyň beýikligini tapmaly.

Jogaby: $h = 2{,}25\ m$.

18.32-nji mesele. Birlik massaly maddy nokat potensialy $\Pi = x^2 + xy + y^2$ bolan güýç meýdanynyň täsirinde, gorizontal tekizlikde hereketlenýär. Başlangyç pursatda nokat $x = 3\ sm$, $y = 4\ sm$

koordinatalara we x okuň položitel ugruna parallel ugrukdyrylan 10 *sm/s* tizlige eýe. Nokadyň hereketini kesgitlemeli.

Jogaby: $x = 3{,}5\cos\sqrt{3}\,t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}\,t - 0{,}5\cos t + 5\sin t,$

$$y = 3{,}5\cos\sqrt{3}\,t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}\,t + 0{,}5\cos t - 5\sin t.$$

18.33-nji mesele. Radiusy a bolan töwerek şeklindäki gorizontal sime geýdirilen kiçijik halka υ_0 başlangyç tizlik berlen. Halkanyň sime sürtülme koeffisiýenti f -e deň. Halkanyň näçe wagtdan soň togtaýşyny kesgitlemeli.

Jogaby: $t = \frac{a}{f}\int_0^{\upsilon_0} \frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon^4 + a^2 g^2}}.$

18.34-nji mesele. Massasy 2 *kg* bolan maddy nokat käbir merkeze $F = (-8i - 8j - 2zk)$ N güýç bilen dartylýar. Maddy nokadyň başlangyç orny $x = 4$ *sm*, $y = 2$ *sm*, $z = 4$ *sm* koordinatalar bilen kesgitlenýär. Başlangyç tizlik nola deň. Nokadyň hereket deňlemelerini we onuň traýektoriýasyny kesgitlemeli.

Jogaby: $x = 4\cos 2t,\ \ y = 2\cos 2t,\ \ z = 4\cos t.$

Traýektoriýa – $x = \frac{z^2}{2} - 4$ we $y = \frac{z^2}{4} - 2$ iki sany parabolik silindrleriň kesişme çyzygy. Bu $x = 2y$ tekizlikde ýatan parabola. Nokat traýektoriýa boýunça koordinatalary $x = 4$ *sm*, $y = 2$ *sm*, $z = 4$ *sm* bolan nokatdan $x = 4$ *sm*, $y = 2$ *sm*, $z = -4$ *sm* nokada çenli bolan aralykda hereketlenýär.

18.35-nji mesele. Konus maýatnigi l uzynlyk boýunça gorizontal tekizlikde a radiusly töwerek çyzýar. Konus maýatniginiň aýlanma periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T = 2\pi\frac{\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}.$

19. MADDY NOKADYŇ GÖRÄLI HEREKETINIŇ DINAMIKASY

19.1. Maddy nokadyň göräli hereketiniň dinamikasy. Meseleler

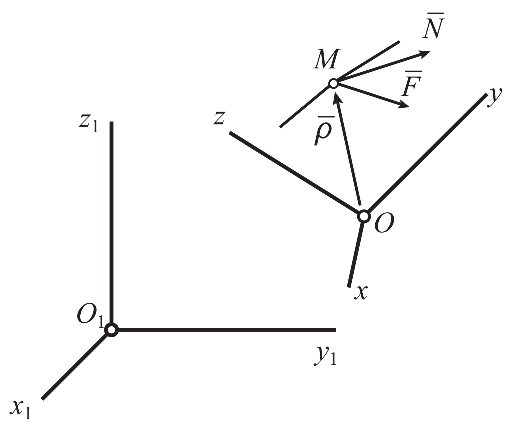
Ýokarda material nokat gozganmaýan koordinatalar sistemasyna görä (beýle sistema üçin Nýutonyň kanunlary ulanylýar) hereketlenýär diýýär.

Emma käbir ýagdaýlarda nokadyň hereketini özi hereket edýän koordinatalar sistemasyna görä (bu sistemalarda Nýutonyň kanunlary adalatsyz) garamak zerurlygy döreýär.

Görä hereketiniň dinamikasynyň **esasy** meselesi aşakdakylardan ybarat:

Gozganýan koordinatalar sistemasynyň gozganmaýan sistema görä hereketi anyk bolanda, nokadyň gozganýan sistema görä hereketiniň dinamikasynyň nazaryýetini gurmaly.

m massaly *M* nokat *Oxyz* koordinatalar sistemasyna görä hereket edýär. *Oxyz* koordinatalar sistemasy *M* nokat bilen bilelikde gozganmaýan $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä anyk hereket edýär *(19.1-nji surat)*.



19.1-nji surat

M nokadyň gozganýan koordinatalar sistemasyna görä hereketine onuň **g ö r ä l i   h e r e k e t i** diýilýär.

Garalýan pursatda gozganýan sistemanyň M nokat bilen gabat gelýän nokadynyň gozganmaýan sistema görä hereketine onuň **göçürme hereketi** diýilýär.

M nokadyň gozganmaýan koordinatalar sistemasyna görä hereketine onuň **düzme ýa-da absolýut hereketi** diýilýär.

Belgileri girizeliň.

$\overline{F}$ – nokada täsir edýän aktiw güýç; $\overline{N}$ – reaksiýa güýji; $\overline{\rho}$ – göräli radius-wektor; $\overline{\omega}_{\text{göç}}$, $\overline{\varepsilon}_{\text{göç}}$ – göçürme herekete degişli burç tizlik we burç tizlenme ($Oxyz$-e degişli); $\overline{\upsilon}_{\text{otn}}$, $\overline{a}_{\text{otn}}$ – M nokat üçin göräli tizlik we tizlenme; $\overline{\upsilon}_{\text{göç}}$, $\overline{a}_{\text{göç}}$ – M nokat üçin göçürme tizlik we tizlenme; $\overline{\upsilon}_{abs}$, $\overline{a}_{\text{abs}}$ – M nokat üçin göräli tizlik we tizlenme; $\overline{a}_{\text{Kor}}$ – M nokat üçin Koriolisiň tizlenmesi.

Gozganmaýan sistema görä M nokat üçin Nýutonyň ikinji kanunyny ýazalyň:

$$m\bar{a}_{\text{abs}} = \overline{F} + \overline{N}. \tag{19.1}$$

Kinematika görä ýazalyň:

$$\bar{a}_{\text{abs}} = \bar{a}_{\text{gör}} + \bar{a}_{\text{göç}} + \bar{a}_{\text{Kor}}.$$

Bu bahany (19.1)-e goýup, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$m\bar{a}_{\text{gör}} = \overline{F} + \overline{N} + (-m\bar{a}_{\text{göç}}) + (-m\bar{a}_{\text{Kor}}).$$

$\overline{\Phi}_{\text{göç}} = -m\bar{a}$ – göçürme inersiýa güýji; $\overline{\Phi}_{\text{Kor}} = -m\bar{a}_{\text{Kor}}$ – Koriolisiň inersiýa güýji diýip belläliň.

Ahyrky görnüşde ýokarky deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$m\bar{a}_{\text{gör}} = \overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{\text{göç}} + \overline{\Phi}_{\text{Kor}}. \tag{19.2}$$

Bu deňlemä **nokadyň göräli hereketiniň esasy deňlemesi** diýilýär.

Bu deňleme üçin kinematikadan belli formulalary göz öňünde tutmaly:

$$\overline{a}_{\text{Kor}} = 2\overline{\omega}_{\text{göç}} \times \overline{\upsilon}_{\text{gör}}, \tag{19.3}$$

$$\bar{a}_{\text{göç}} = \bar{a}_0 + \overline{\omega}_{\text{göç}} \times (\overline{\omega}_{\text{göç}} \times \overline{\rho}) + \overline{\varepsilon}_{\text{göç}} \times \overline{\rho}. \tag{19.4}$$

Diýmek, *göräli hereketdäki nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini düzmek üçin, nokada täsir edýän* $\overline{F}$, $\overline{N}$ güýçlere göçürme we Koriolis inersiýa güýçlerini goşmaly.

Hususy hallara garalyň.

1. Gozganýan koordinatalar sistemasy öňe hereket etse, $\overline{\omega}_{\text{göç}} = 0$ bolýar. Onda (19.3)-e görä,

$$\overline{a}_{\text{Kor}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\Phi}_{\text{Kor}} = 0.$$

(19.2) deňleme aşakdaky görnüşe gelýär:

$$m\overline{a}_{\text{gör}} = \overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{\text{göç}}. \tag{19.5}$$

2. Göräli (otnositel) deňagramlylykda (19.2) formulada $\overline{a}_{\text{gör}} = 0$ we $\overline{\upsilon}_{\text{gör}} = 0$ goýsak, aşakdakyny alarys:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{\text{göç}} = 0. \tag{19.6}$$

Bu deňleme göräli (otnositel) deňagramlylygy aňladýar.

3. Gozganýan koordinatalar sistemasy gönüçyzykly, deňölçegli, öňe hereket etse, $\overline{\upsilon}_{\text{gör}} = \text{const}$, $\overline{a}_{\text{gör}} = 0$, $\overline{\omega}_{\text{göç}} = 0$ we $\overline{\varepsilon}_{\text{göç}} = 0$ bolýar. Onda (19.3) we (19.4) formulalarda $\overline{a}_{\text{Kor}} = 0$, $\overline{a}_{\text{göç}} = 0$ bolýar we $\overline{\Phi}_{\text{Kor}} = 0$, $\overline{\Phi}_{\text{göç}} = 0$ gelip çykýar.

(19.2) formula aşakdaky görnüşe gelýär:

$$m\overline{a}_{\text{gör}} = \overline{F} + \overline{N}. \tag{19.7}$$

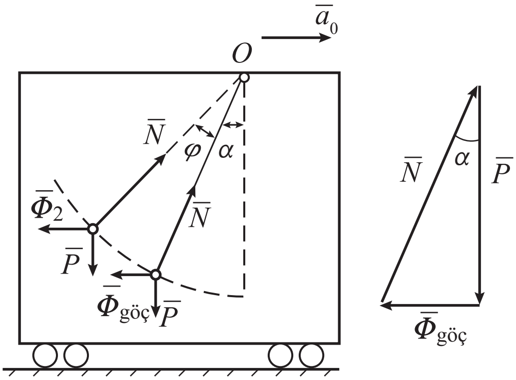
Bu deňlemäni (19.1) bilen deňeşdirsek, $\overline{a}_{\text{gör}} = \overline{a}_{\text{abs}}$ gelip çykýar. Beýle diýildigi gozganýan koordinatalar sistemasy hem **inersiýal sistema** bolýar diýildigidir.

Bu usul bilen ýene-de köp inersial sistemalary almak bolar; olaryň ählisi hem «deňhukuklydyr». Bu klassyky mehanikanyň görälilik (otnositellik) prinsipini aňladýar.

19.1-nji mesele. Wagon gorizontal gönüçyzykly ýolda üýtgemeýän a_0 = const tizlenme bilen hereket edýär. Wagonda asylan matematiki maýatnik garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Maýatnigiň orta ýagdaýy (*OM* – otnositel deňagramlylyk ýagdaýy) wertikaldan $\alpha = 6°$ gyşaran (*19.2-nji surat*).

1) Wagonyň *a* tizlenmesini kesgitlemeli.

2) Wagonyn hereketsiz ýagdaýyndaky we häzirki ýagdaýdaky yrgyldylarynyň periodlarynyň tapawudyny kesgitlemeli.



19.2-nji surat

Çözülişi. Nokadyň göräli hereketini öwrenmek üçin $\overline{P}$ – agyrlyk güýjüne, $\overline{N}$ – reaksiýa güýjüne $\overline{\Phi}_{göç} = -m\overline{a}_0$ göçürme inersiýa güýjüni birikdirmeli. $\overline{\Phi}_{göç}$ güýç $\overline{a}_0$ tizlenmäniň garşysyna ugrukdyrylandyr.

Maýatnik $\alpha = 6^\circ$ gyşardylanda ol otnositel deňagramlylyk ýagdaýynda bolýar, ýagny $\overline{P} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{göç} = 0$. Suratdaky üçburçlukdan tapýarys:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Phi_{göç}}{P} = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g} \quad \Rightarrow \quad a_0 = g\,\mathrm{tg}\alpha = 981 \cdot 0,1051 = 103 \,{}^{sm}\!/_{s^2}.$$

Maýatnigiň uzynlygy l bolsa O asylma nokady hereketsiz bolandaky periody belli formuladan aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Maýatnigiň asylan nokady hereketde bolanda, onuň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň (güýçleri galtaşýan çyzygyň ugruna proýektirläp alýarys; φ – maýatnigiň otnositel deňagramlylykdan gyşarmagy):

$$\frac{P}{g}\frac{d\upsilon}{dt} = -P\sin(\alpha + \varphi) + \frac{P}{g} \cdot a_0 \cos(\alpha + \varphi). \qquad (1)$$

φ burçy kiçi, $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ diýip hasap edip, alarys:

$$\upsilon = l \cdot \varphi;$$

$$\sin(\alpha+\varphi)=\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi\approx\sin\alpha+\varphi\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha+\varphi)=\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi\approx\cos\alpha - \varphi\sin\alpha.$$

(1) deňlemäni ýönekeýleşdireliň:

$$\frac{l}{g}\cdot\overline{\varphi}=-\sin\alpha-\varphi\cos\varphi+\frac{a_0}{g}\cdot\varphi\sin\alpha.$$

$tg\alpha=\dfrac{a_0}{g}$ bahadan peýdalanyp, alarys:

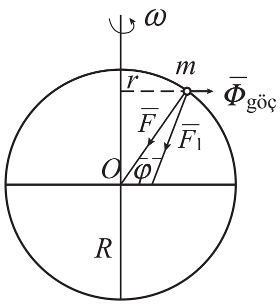
$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l\cos 6^\circ}\cdot\varphi=0.$$

Bu hereket üçin yrgyldylaryň T_1 periody aşakdaky ýaly tapylýar:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l\cos 6^\circ}{g}};\qquad T_1=T\sqrt{\cos\alpha}.$$

$$T_1-T=T(1-\sqrt{\cos 6^\circ})\;\Rightarrow\;T_1-T=0{,}0028\cdot T.$$

19.2-nji mesele. Ýeriň aýlanmagy sebäpli aýry-aýry ýerlerde agyrlyk güýjüniň g_1 tizlenmesi dürli bolýar. Nokadyň ýerleşen ýeri φ burç bilen kesgitlenilýär (*19.3-nji surat*). Ýeriň radiusy R = 6370 *km*, polýusda agyrlyk güýjüň tizlenmesi $g=9{,}80\,{}^m\!/\!_{s^2}$ bolsa, g_1 tizlenmäni φ burça baglylykda kesgitlemeli.



19.3-nji surat

Çözülişi. m massaly nokadyň suratdaky ornunda täsir edýän güýçleri düşündireliň: $\overline{F}$ – Ýeriň dartyş güýji, ol Ýeriň O merkezine tarap ugrukdyrylan; $\overline{\Phi}_{\text{göç}}$ – merkezden gaçýan inersiýa güýji (bu güýç Ýeriň aýlanmagyndan emele gelýär. Ýeriň aýlanmagy göçürme hereket). Koriolisiň inersiýa güýji nola deň, sebäbi nokat otnositel (ýere görä) hereket etmeýär. $\upsilon_{\text{otn}}=0$.

Nokadyň suratdaky orny üçin $\overline{F}_1$ agyrlyk güýji diýip $\overline{F}$ bilen $\overline{\Phi}_{\text{göç}}$ güýjüň wektor jemine aýdylýar:

$$\overline{F}_1=\overline{F}+\overline{\Phi}_{\text{göç}}. \tag{1}$$

Güýç üçburçlugyndan kosinuslar teoremasy esasynda aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$F_1^2 = F^2 + \Phi_{\text{göç}}^2 - 2F\Phi_{\text{göç}} \cos\varphi. \qquad (2)$$

Güýçleri anyklalyň: $F = \dfrac{k}{R^2}$, bu ýerde k – proporsionallyk koeffisiýenti. Polýusda $F = mg$ bolýanlygy üçin $k = mgR^2$. Diýmek, $F = mg$, $F_1 = mg_1$, $\Phi_{\text{göç}} = mr\omega^2$, $r = R\cos\varphi$;

$\omega = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 60^2} = 727 \cdot 10^{-7}\ s^{-1}$ – Ýeriň burç tizligi. Bu bahalary (2) deňlemede goýup, alarys:

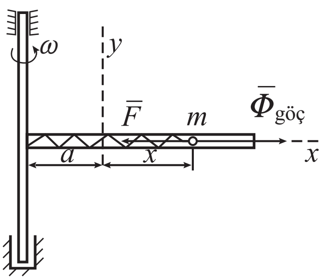
$$g_1^2 = g^2 + R^2\omega^4 \cos^2\varphi - 2gR\omega^2 \cos^2\varphi.$$

Görşümiz ýaly, ω kiçi san bolany üçin, ω^4 has kiçi bolýar. Soňky aňlatmadan ω^4 saklaýan agzany taşlap ýazalyň:

$$g_1 = g\sqrt{1 - \frac{2R\omega^2}{g}\cos^2\varphi}.$$

Köki hatara dargadýarys we ω^2-iň tertibi bilen ölçenýän ululyklary aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$g_1 = g\left(1 - \frac{R\omega^2}{g}\cos^2\varphi\right) = g\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right).$$



19.4-nji surat

19.3-nji mesele. Gorizontal turbajygyň içinde maýyşgaklyk koeffisiýenti c bolan puržinyň ujuna berkidilen m massaly şarjagaz aýlanma okdan a aralykda deňagramlylykda durýar. Eger turbajagaz wertikal aýalanma okuň daşynda üýtgemeýän ω = const burç tizligi bilen aýlanyp başlasa, şarjagazyň görä hereketini kesgitlemeli (*19.4-nji surat*).

Çözülişi. $\overline{F}$ – puržinyň deňagramlylyk ýagdaýyna gaýtaryjy güýç, $\overline{\Phi}_{\text{göç}}$ – göçürme inersiýa güýji täsir edýär. Şarjagazyň agramy reaksiýa güýji bilen deňagramlaşýar diýip hasap edýäris. Güýçleriň proýeksiýalary $F_x = -cx$, $\Phi_{göç,x} = m(a + x)\omega^2$. Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{x} = F_x + \Phi_{göç,x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -cx + m(a + x)\omega^2.$$

Ýönekeýleşdireliň:

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)x = a\omega^2.$$

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ belgi girizeliň:

$$\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = a\omega^2. \quad (1)$$

Başlangyç şertler:

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (2)$$

(19.21) deňlemäni çözmek üçin iki ýagdaýa garalyň:

1) $k > \omega$. Bu ýagdaýda nokadyň hereketi garmoniki hereket bolýar (degişli tema seret).

(19.22) deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň:

$$x = A\cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + B\sin\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}. \quad (3)$$

Integrirlemäniň erkin A, B hemişeliklerini (19.23) başlangyç şertlerden belli formulalar esasynda tapýarys:

$$0 = A + \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}, \; 0 = B\sqrt{k^2 - \omega^2} \;\Rightarrow\; A = -\frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}, \; B = 0\,.$$

Şeýlelikde, (19.24) umumy çözüwi gutarnykly görnüşde aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$x = \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}\left(1 - \cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t\right)$$

ýa-da

$$x = \frac{2a\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{2}t\right).$$

2) $k < \omega$. (19.22) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$\ddot{x} - (\omega^2 - k^2)x = a\omega^2. \quad (4)$$

Bu deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t} - \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}, \tag{5}$$

bu ýerde λ_1, λ_2 – (4) deňlemä degişli birjynsly deňlemäniň harakteristik deňlemesiniň kökleri, ýagny

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\omega^2 - k^2}.$$

Bu bahalary (19.25) deňlemede goýup, alarys:

$$x = A_1 e^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} + B_1 e^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} - \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}. \tag{6}$$

t wagt boýunça differensirleýäris:

$$\dot{x} = \sqrt{\omega^2 - k^2}\left(A_1 e^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} - B_1 e^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t}\right). \tag{7}$$

(19.26), (19.27) deňlemelere (2) başlangyç şertleri goýýarys:

$$0 = A_1 + B_1 - \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}, \qquad 0 = A_1 - B_1.$$

Sistemany çözüp, A_1, B_1 ululyklary tapýarys:

$$A_1 = B_1 = \frac{a\omega^2}{2(\omega^2 - k^2)}.$$

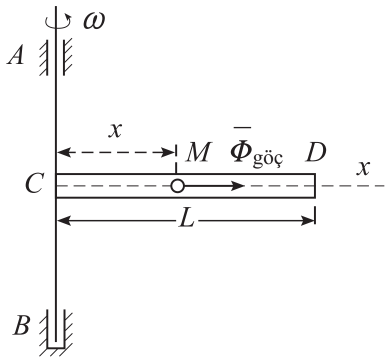
Bu bahalary (19.26) deňlemede goýup, gözlenýän deňlemäni taparys:

$$x = \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}\left(\frac{e^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} - e^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t}}{2} - 1\right)$$

ýa-da $$x = \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}[\mathrm{ch}\sqrt{(\omega^2 - k^2)} \cdot t - 1].$$

19.4-nji mesele. Gorizontal *CD* turba wertikal *AB* okuň daşynda üýtgemeýän ω=*const* burç tizligi bilen aýlanýar. Turbanyň içinde *M* jisim ýatyr. Jisimiň turbadan çykan pursatyndaky tizligini tapmaly. Turbanyň uzynlygy *L* (*19.5-nji surat*). Başlangyç şertler:

$$t = 0, \; x = x_0, \; \dot{x} = \upsilon_0 = 0. \tag{1}$$



19.5-nji surat

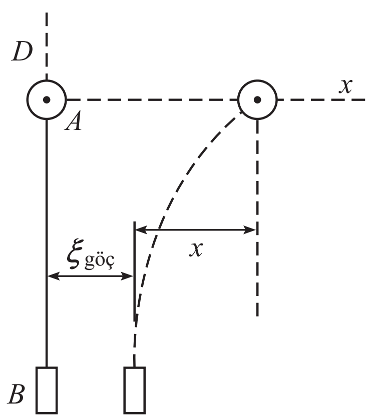
Çözülişi. 19.2-nji meseläniň çözülişi ýaly çözýäris. M nokada $\bar{\Phi}_{\text{göç}}$ göçürme inersiýa güýjüni goýup, alarys:

$$\Phi_{\text{göç},x} = \omega^2 xm.$$

$$m\ddot{x} = \Phi_{\text{göç},x} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = m\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = \omega^2 x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon_1} \upsilon d\upsilon = \omega^2 \int_{x_0}^{L} xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(L^2 - x_0^2) \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}.$$

19.5-nji mesele. Dik AB maýyşgak sterženiň ujuna $Q = 2.5$ kg agramly D ýük berkidilen. Ýük deňagramlylykdan çykarylanda gaýtaryjy güýjüň täsiri astynda garmoniki kanun bilen yrgyldaýar. Sterženiň maýyşgaklyk koeffisiýenti $c = 0,1\dfrac{kg}{sm}$. Eger sterženiň berkidilen B nokady gorizont boýunça $a = 1$ mm amplitudaly we $T = 1,1s$ periodly yrgyldasa D ýüküň (absolýut hereketde) mejbury yrgyldylarynyň amplitudasyny kesgitlemeli (*19.6-njy surat*).



19.6-njy surat

Çözülişi. D ýüküň gorizont boýunça B nokada görä süýşmegini x bilen belgiläliň (otnositel koordinata).

B nokadyň Ýere görä süýşmegini $\xi_{\text{göç}}$ bilen belgiläliň (göçürme hereket). Şerte görä

$$\xi = a\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = a\sin pt, \qquad p = \frac{2\pi}{T}.$$

D ýüküň Ýere görä absolýut süýşmesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\xi = \xi_{\text{göç}} + x. \tag{1}$$

Absolýut tizlenmäniň gorizontal proýeksiýasyny kesgitläliň:

$$\ddot{\xi} = \ddot{\xi}_e + \ddot{x} = \ddot{x} - ap^2\sin pt.$$

D ýüke sterženiň gaýtaryjy güýji täsir edýär. Bu güýjüň gorizontal oka proýeksiýasy $F_x = -cx$. Nazaryýetden ugur alyp nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\ddot{\xi} = F_x \Rightarrow m\ddot{x} = -cx + map^2\sin pt \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + k^2x = h\sin pt, \; k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad h = ap^2.$$

Mejbury yrgyldylary bu deňlemäniň hususy çözüwi aňladýar:

$$x_{mej} = \frac{ap^2}{k^2 - p^2}\sin pt.$$

(19.29) aňlatmanyň esasynda ýüküň Ýere görä absolýut hereketi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\xi = \left(\frac{ap^2}{k^2 - p^2} + a\right)\sin pt.$$

Absolýut hereket üçin amplituda aşakdaky ýaly tapylýar:

$$A = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} + a. \tag{2}$$

Şertdäki bahalardan peýdalananyp alarys:

$$a = 0{,}1sm, \quad T = 1{,}1, \quad c = 0{,}1\frac{kg}{sm}, \quad Q = 2{,}5kg$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{0{,}1\cdot 980}{2{,}5} = 39{,}2, \;\; p = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}1} = 5{,}71, \;\; p^2 = 32{,}6.$$

(19.30) aňlatmany aşakdaky ýaly hasaplamak bolýar:

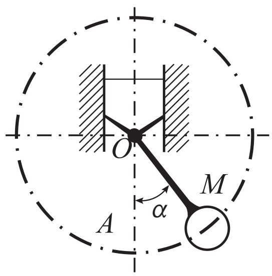
$$A = \frac{0{,}1\cdot 32{,}6}{39{,}2 - 32{,}6} + 0{,}1 = 0{,}59\;sm, \quad A = 5{,}9\;mm.$$

19.2. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

19.6-njy mesele. Uzynlygy l bolan matematiki maýatnigiň asylan nokady wertikaly boýunça deňtizlenýän hereket edýär. Aşakdaky iki ýagdaýda maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň T periodyny kesgitlemeli: 1) asylan nokadyň tizlenmesi ýokaryk ugrukdyrylan we p mukdara deň; 2) bu tizlenme aşak ugrukdyrylan we onyň mukdary $p < g$.

Jogaby: 1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{p-g}}$.

19.7-nji mesele. Uzynlygy l bolan matematiki maýatnik başlangyç pursatda OA deňagramlylyk ýagdaýyndan α burça gyşaryp, tizligi nola deň bolsun. Maýatnigiň asylan nokadynyň hem şu pursatdaky tizligi nola deň. Käbir pursatda bu nokat $p \geq g$ hemişelik tizlenme bilen aşak düşýär. M nokadyň O nokadyň daşynda hereket edip çyzýan töwereginiň dugasynyň s uzynlygyny kesgitlemeli (*19.7-nji surat*).



19.7-nji surat

Jogaby: 1) $p = g$ ýagdaýda $s = 0$;
2) $p > g$ ýagdaýda $s = 2l\,(\pi - \alpha)$.

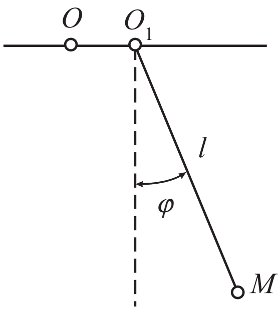
19.8-nji mesele. Meridiana boýunça geçirilen relsde otly günortadan demirgazyga garap 15 m/s tizlik bilen barýar. Otlynyň massasy 2000 t.

1) otly şu pursatda 60° demirgazyk giňligi kesip geçýän bolsa, onuň relse gapdal tarapdan edýän basyş güýjüni kesgitlemeli; 2) eger otly hut şu ýerde demirgazykdan günorta garap gidýän bolsa, onuň relse gapdal tarapdan edýän basyş güýjüni kesgitlemeli.

Jogaby: 1) sag tarapdaky gündogar relse 3778,7 N;
2) sag tarapdaky günbatar relse 3778,7 N.

19.9-njy mesele. Demirgazyk ýarym şarda maddy nokat 500 m belentlikden Ýere erkin düşýär. Ýeriň öz okunyň daşyndan aýlanmagyny hasaba alyp we howanyň garşylygyny hasaba alman, nokadyň düşüş wagtynda gündogara näçe süýşýändigini kesgitlemeli. Bu ýeriň geografik giňligi 60°-a deň.

Jogaby: 12 sm.



19.8-nji surat

19.10-njy mesele. Uzynlygy l bolan maýatnigiň asylan O_1 nokady gozganmaýan O nokadyň çäginde gönüçyzykly gorizontal garmoniki yrgyldyly hereket edende $OO_1 =$ $= a\sin pt$. Wagt nola deň bolan pursatynda $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ diýip hasaplap, nokadyň kiçi yrgyldyly hereketini kesgitlemeli (*19.8-nji surat*).

Jogaby:

$$\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right), \quad k = \sqrt{g/l}\,.$$

19.11-nji mesele. λ giňlikde duran nokat, günbatara tarap gorizonta görä α burç bilen υ_0 başlangyç tizlik bilen zyňylan. Nokadyň uçuş wagtyny we uçuş uzaklygyny kesgitlemeli.

Jogaby:

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g + 2\omega\upsilon_0 \cos\lambda\cos\alpha} \approx \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega\upsilon_0\cos\lambda\cos\alpha}{g}\right),$$

$$L = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{\upsilon_0^3 \omega\cos\lambda\sin\alpha(16\sin^2\alpha - 12)}{3g^2},$$ bu ýerde ω – Ýeriň aýlanyşynyň burç tizligi.

19.12-nji mesele. Deslapky meseläniň şertleri boýunça jisimiň turbanyň içindäki hereketlenme wagtyny kesgitlemeli.

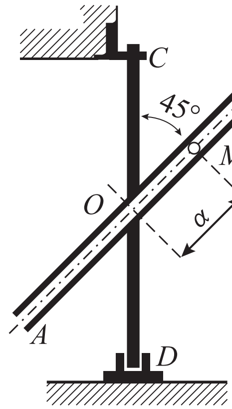
Jogaby: $T = \dfrac{1}{\omega}\ln\dfrac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}.$

19.13-nji mesele. Turba bilen jisimiň arasyndaky typma sürtülme koeffisiýenti f diýip alyp, 33.10-njy meseläniň şertlerine esaslanyp, jisimiň turbanyň içindäki hereketiniň differensial deňlemesini düzmeli.

Jogaby: $\ddot{x} = \omega^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}^2}$; ýokarky alamat $\dot{x} < 0$, aşaky alamat $\dot{x} > 0$-a gabat gelýär.

19.14-nji mesele. Halka ýylmanak AB steržen boýunça hereketlenýär. Steržen gorizontal tekizlikde, A ujundan geçýän wertikal okuň daşynda sekuntda bir gezek aýlanyp, deňölçegli aýlanma hereket edýär. Sterženiň uzynlygy $1m$; $t = 0$ pursatda halka A uçdan 60 sm daşlykda we tizligi nola deň. Halkanyň sterženden sypyp gidýän t_1 pursatyny kesgitlemeli.

Jogaby: $t_1 = \dfrac{1}{2\pi}\ln 3 = 0{,}175\ s.$



19.9-njy surat

19.15-nji mesele. *AB* turba wertikal *CD* ok bilen hemişelik 45° burç emele getirip, onuň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Turbanyň içinde *M* şarjagaz dur. Eger şarjagazyň başlangyç tizligi nola we onuň bilen *O* nokadyň başlangyç aralygy a deň bolsa, şarjagazyň hereketini kesgitlemeli *(19.9-njy surat)*. Sürtülmäni hasaba almaly däl.

Jogaby:

$$OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2g}{\omega^2}\right)\left(e^{0,5\omega t\sqrt{2}} + e^{-0,5\omega t\sqrt{2}}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

19.16-njy mesele. Ekwatorda Ýeriň üstündäki nokadyň agramy bolmazlygy üçin, Ýeriň öz okunyň daşynda aýlanma burç tizligini näçe esse köpeltmeli? Ýeriň radiusy $R = 6370$ *km*.

Jogaby: 17 esse.

19.17-nji mesele. Artilleriýa snarýady ýatyk traýektoriýa (ýagny, takmynan gorizontal göni çyzyk diýip hasaplap boljak traýektoriýa) boýunça hereket edýär. Hereket wagtynda snarýadyň gorizontal tizligi $\upsilon_0 = 900$ *m/s*. Snarýad atylan ýerinden 18 *km* daşlykdaky nyşana degmeli. Howanyň garşylygyny hasaba alman, Ýeriň aýlanmagy netijesinde snarýadyň nyşanadan näçe gyşarjakdygyny kesgitlemeli (Snarýad $\lambda = 60°$ demirgazyk geňlikde atylan).

Jogaby: Snarýad sag tarapa (eger oňa ýokardan tizlige perpendikulýar ýagdaýda seredilse) $s = \omega\upsilon_0 t^2 \sin\lambda = 22{,}7\ m$ aralyga gyşarýar.

19.18-nji mesele. Uzyn ýüpden asylan maýatnik demirgazyk-günorta tekizlikde kiçi başlangyç tizlik alýar. Maýatnigiň gyşarmasy ýüpüň uzynlygyna görä kiçi diýip hasaplap, Ýeriň öz okunyň daşynda aýlanmagyny hasaba alyp, maýatnigiň yranma tekizliginiň günbatar-gündogar tekizligine gabat gelmegi üçin näçe wagt geçmelidigini tapmaly. Maýatnik 60° demirgazyk giňlikde ýerleşen.

Jogaby: $T = 13{,}86(0{,}5 + k)$ sagat, bu ýerde $k = 0, 1, 2, ...$

19.19-njy mesele. Agyr nokat wertikal sim halka boýunça sürtülmesiz hereketlenýär, halka bolsa özüniň wertikal diametriniň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Halkanyň radiusy R–e deň. Nokadyň deňagramlyk ýagdaýyny tapmaly. Oňa deňagramlyk ýagdaýynda galtaşma bilen ýokaryk ýönelen kiçi υ_0 tizlik berlende hereketlenişini kesgitlemeli.

Jogaby: Deňagramly ýagdaýy nokadyň töwerekdäki aşaky ornundan hasaplananda $\varphi_0 = \arccos\dfrac{g}{\omega^2 R}$ burça gabat gelýär. Kiçi υ_0 tizlik alan nokat $\varphi = \dfrac{\upsilon_0}{Rk}\sin kt$ deňlemä laýyk deňagramlyk ýagdaýynyň daşynda kiçi yrgyldylar edýär, bu ýerde $k = \dfrac{\sqrt{\omega^4 R^2 - g^2}}{\omega R}$.

19.20-nji mesele. Wertikal yrgyldylarynyň aýlaw ýygylygy 10 *rad/s* bolan puržinly wibrodatçik, otlynyň wertikal tizlenmesini ölçemek üçin ulanylýar. Esbabyň daýanjy otlynyň wagonlarynyň biri bolup, wagonyň korpusy bilen tutuş hasaplanýar. Esbabyň bazasyna $c = 17{,}64$ *kN/m* gatylyk koeffisiýentli puržin berkidilýär. Puržina $m = 1{,}75$ *kg* massaly ýük birikdirilýär. Wibrodatçigiň ýüküniň göräli hereketiniň amplitudasy, esbabyň ýazyşyna görä, 0,125 *sm*-e deň. Otlynyň wertikal boýunça maksimal tizlenmesini tapmaly. Otlynyň wibrasiýasynyň amplitudasyny kesgitlemeli.

Jogaby: Otlynyň wertikal boýunça maksimal tizlenmesi $\omega_{\max} = 1237$ *sm/s*. Otlynyň wertikal yrgyldylarynyň amplitudasy $a = 12{,}37$ *sm*.

19.21-nji mesele. Maşynyň bölekleriniň biriniň wertikal yrgyldylaryny anyklamak üçin wibrometr ulanylýar. Esbabyň hereketleniji ulgamynda dempfer ýok. Wibrometriň datçiginiň (massiw ýüküň) göräli süýşmesi 0,005 *sm*-e deň. Wibrometriň hususy yrgyldylarynyň ýygylygy 6 *Gs*, maşynyň wibrirleýän böleginiň ýygylygy 2 *Gs*. Maşynyň wibrirleýän böleginiň yrgyldylarynyň amplitudasy, maksimal tizligi we maksimal tizlenmesi näçä deň?

Jogaby: Yrgyldylarynyň amplitudasy $a = 0{,}04$ *sm*, maksimal tizligi $\upsilon_{\max} = 0{,}5$ *sm/s* we maksimal tizlenmesi $\omega_{\max} = 6{,}316$ *sm/s*^{2} .

19.22-nji mesele. Massasy $m = 1{,}75$ *kg* bolan ýük gutynyň içindäki gatylyk koeffisiýenti $c = 0{,}88$ *kN/m* bolan wertikal puržindan asylan. Guty wertikal boýunça wibrirleýän stola berkidilen. Stolyň yrgyldylarynyň deňlemesi $x = 0{,}225 \sin 3t$ *sm*. Ýüküň yrgyldylarynyň absolýut amplitudasyny tapmaly.

Jogaby: $x = 0{,}2254$ *sm.*

20. MADDY NOKATLAR SISTEMASYNA GIRIŞ

20.1. Maddy nokatlar sistemasynyň dinamikasynyň ösüşine degişli gysgaça taryhy maglumat

Ýokarda belläp geçilişi ýaly, Nýuton özüniň «Natural filosofiýanyň matematiki başlangyçlary» diýen meşhur eserinde nusgawy mehanikanyň esasy kanunlaryny 1687-nji ýylda doly esaslandyrdy. Nýutonyň işinde **massa** düşünjesi **agyrlyk** düşünjesi bilen çalşyrylan.

Nýuton özüniň mehanikasyny maddy nokat dinamikasyna bagyşlan bolsa-da, onda erkin maddy sistemalara degişli birnäçe meseleleri çözüpdir. Baglanyşykdaky maddy nokatlar sistemasynyň dinamikasy XVIII asyryň ikinji ýarymyndan sistematik görnüşde rowaçlanyp başlady. Ilki bilen maddy nokatlar sistemasyna degişli bolan, fiziki maýatnigiň hereketini Gýugens öwrenip, **yrgyldylar merkezi** diýen düşünjäni girizýär. L.Eýler erkin bolmadyk gaty jisimleriň hereketini öwrenip, özüniň bu ugra degişli meşhur eserini 1746-njy ýylda Peterburg Ylymlar akademiýasynda işleýän döwründe neşir etdirýär.

Maddy nokatlar sistemasynyň dinamikasy Dalamberiň (1717–1783) we Lagranžyň (1736–1813) eserlerinde giňden beýan edilýär. XVIII asyryň ahyrynda – XIX asyryň başlarynda, bir tarapdan, analitiki mehanikanyň usullary döredilýär, ikinji tarapdan, mehanikanyň esasy deňlemeleri dürli takyk meseleler üçin ulanylýar. Aşakda maddy nokatlar sistemasyna degişli möhüm meselelere degişli baplarda garap geçeris.

20.2. Maddy nokatlar sistemasy we baglanyşyklar

Maddy nokatlar sistemasynyň dinamikasyna girişmezden ozal beýan edilmänkä, esasy düşünjeler we kadalar bilen tanşyp geçeliň. Bu ýerde, esasan, maddy nokadyň dinamikasyndaky düşünjeleri maddy nokatlar sistemasynyň dinamikasy üçin umumylaşdyrmaga çalşalyň.

Material nokatlar toplumyny alalyň. Bu toplumdaky nokatlaryň her biriniň hereketi başgalarynyň hereketine bagly bolsa, onda material nokatlaryň şeýle toplumyna **material nokatlar sistemasy** ýa-da **mehaniki sistema** diýilýär. Bu adalgalaryň ikisi hem ulanylýar, ýöne tygşytlylyk üçin, kähalatlarda *material* sözi taşlap ulanylýar. Mehaniki sistemanyň nokatlarynyň özara täsir güýçleri mehaniki sistemanyň möhüm alamatydyr. Bu özara täsir güýçleri Nýutonyň üçünji kanuny bilen kesgitlenýär, ýagny ***nokatlaryň özara täsirleri bir gönüde ýatýarlar, deňdirler we garşylykly ugrukdyrylandyrlar***.

Mehaniki sistema erkin ýa-da erkin däl, ýagny baglanyşykly bolmagy mümkin. Mehaniki sistema girýän nokatlaryň erkin hereketde bolup bilmeýändikleri, sistemanyň kesgitlenişinden görünýär.

Erkin mehaniki sistema mysal edip, Gün sistemasynyň hereketini alýarlar. Kriwoşip-şatun mehanizmi erkin däl mehaniki sistema aýdyň mysaldyr. Onda şatunyň hereketi bütinleý kriwoşipiň hereketi bilen anyklanýar, kriwoşip bolsa ähli wagt bir ujy gozganmaýan nokada, beýleki ujy şatuna şarnirler arkaly berkidilen.

Indi «Mehaniki sistemanyň düzümi nähili bolmaly, ol näçe nokatdan durmaly?» diýen soraga seredip geçeliň.

Jogaby: Mehaniki sistemany almak üçin hiç hili çäklendirme ýok. Meseläni çözmek üçin nokatlaryň haýsy toplumy amatly bolsa, şol görnüşde mehaniki sistemany alýarlar.

Mysala ýüzleneliň. Gün sistemasynda 9 sany planeta bar (asman mehanikasynda olara material nokatlar görnüşinde garaýarlar). Goýlan meselä görä mehaniki sistemany islendik görnüşde alyp bolýar: iki nokatdan durýan mehaniki sistema *«Ýer; Aý»*. Üç nokatdan durýan mehaniki sistema *«Gün; Ýer; Aý»*, we ş.m. Seredilýän mysalda mehaniki sistemany 9 nokada çenli giňeldip bolýar.

Material nokatlar sistemasynyň hereketini çäkleýji sebäbe **baglanyşyk** diýilýär. Baglanyşyk sistemanyň nokatlarynyň koordinatlaryna çäk goýsa, onda beýle baglanyşyklara **golonomly baglanyşyklar** diýilýär. Berk (gysylmaýan, dartylmaýan) steržen golonomly baglanyşyk bolýar.

Mehaniki sistema n sany nokatdan ybarat bolup, baglanyşyk golonomly bolsa, baglanyş şertiniň analitik aňladylyşy aşakdaky ýaly bolýar:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0. \tag{20.1}$$

Çäk material nokatlar sistemasynyň nokatlarynyň ýeke bir orunlaryna däl, belki olaryň tizliklerine hem goýlan bolsa, beýle baglanyşyga **differensial** ýa-da **bigolonom baglanyşyk** diýilýär we aşakdaky ýaly yazylýar:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0. \tag{20.2}$$

Baglanyşyk birtaraply ýa-da ikitaraply bolmagy mümkin. Steržänli mysal ikitaraply baglanyşykdyr. Matematiki maýatnik birtaraply baglanyşykdyr, sebäbi yrgyldaýan nokat yrgyldy merkezine golaýlaşyp bilýär (bu ýagdaýda baglanyşyk şerti bozulýar), emma daşlaşyp bilmeýär.

Baglanyşyk wagtyň funksiýasy bolmagy mümkin:

$$\varphi\,(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n; t) = 0. \tag{20.3}$$

Wagta bagly bolmadyk (20.1), (20.2) baglanyşyklara **stasionar baglanyşyklar** diýilýär. (20.3) baglanyşyk stasionar däldir.

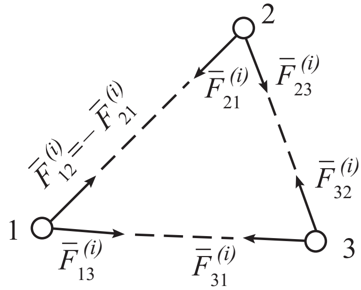
20.3. Güýçleri toparlaşdyrmak: daşky we içki güýçler; içki güýçleriň häsiýetleri

Mehaniki sistemanyň nokatlaryna täsir edýän güýçleri **daşky** we **içki güýçlere** bölmek amatly. Daşky güýji *d,* içki güýji *i* harp bilen belgiläp, tapawutlandyralyň. Mysal üçin: $\overline{F}_1^{(d)}, \overline{F}_1^{(i)}$.

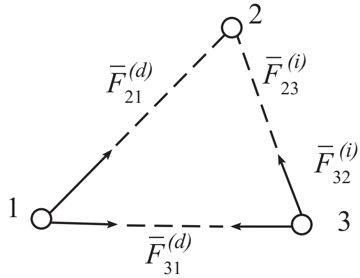
Ilki bilen derňeljek mehaniki sistemanyň haýsy nokatlardan ybaratdygyny anyklamaly (ol mesele çözüjiniň islegine görä ýaýrap hem daralyp hem bilýär). Mehaniki sistema ýaýrasa daşky güýçler içki güýçlere öwrülýärler we tersine, sistema daralsa içki güýçler daşky güýçlere öwrülýärler. Şu güýçleriň *daşky* ýa-da *içki* bolmaklary diňe meseläniň goýluşyna baglydyr.

Mehaniki sistemanyň nokatlarynyň arasyndaky özara güýçlerine **içki güýçler** diýilýär. Mehaniki sistema degişli bolmadyk material nokatlar tarapyndan şu sistemanyň nokatlaryna täsir edýän güýçlere **daşky güýçler** diýilýär. Aýdylanlary mysal arkaly düşündireliň. Goý, sistema üç nokatdan dursun: Gün, Ýer, Aý. Gysgalyk üçin bu jisimleri, degişlilikde 1-Gün; 2-Ýer; 3-Aý nokatlar bilen çalşyralyň (*20.1-nji surat*).

Suratdaky ähli güýçler içki güýçlerdir. Indi mehaniki sistemany daraldyp, iki nokatdan «2», «3» nokatlardan ybarat, ýagny «Ýer+Aý» sistemany düzüp, «Gün» sistemadan çykaryldy *(20.2-nji surat)* diýeliň. Täze sistemadaky güýçler suratda görkezilen.



20.1-nji surat



20.2-nji surat

Köne sistemadaky içki $\overline{F}_{21}^{(i)}, \overline{F}_{31}^{(i)}$ güýçler üýtgäp, täze sistemada $\overline{F}_{21}^{(d)}, \overline{F}_{31}^{(d)}$ daşky güýçlere öwrülendigine üns bermeli.

Sistema täsir edýän güýçleri başga usul bilen hem toparlamak bolýar, ýagny olary $\overline{F}_k$ aktiw güýçlere we $\overline{R}_k$ reaksiýa güýçlerine dargatmak mümkin *(«Statika» bölümine seret*).

Indi mehaniki sistemany ulanyp, matematiki usulda aňlatmak nusgasyna garalyň. Muny geljekki temalarda taýýar görnüşde ulanmak amatly bolýar.

Massalary m_1, m_2, ..., m_n bolan n sany nokatdan ybarat mehaniki sistema berlen. Nokatlaryň radius-wektorlaryny $\overline{r}, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_n$ diýip belgiläliň. Sistemanyň nokatlaryna goýlan daşky we içki güýçleri $\overline{F}_1^{(d)}, \overline{F}_2^{(d)}, \ldots, \overline{F}_n^{(d)}$; $\overline{F}_1^{(i)}, \overline{F}_2^{(i)}, \ldots, \overline{F}_n^{(i)}$ diýip belgiläliň.

Ýokarkylary ykjam, ýerleşikli ýazmak üçin mehaniki sistemanyň k nomerli nokadyny häsiýetlendirýän ululyklary şeýle atlandyrýarys: m_k – massasy, $\overline{r}_k$ – radius-wektory, $\overline{F}_k^{(d)}$ $\overline{F}_k^{(i)}$ – daşky we içki güýçleriň deňtäsiredijileri, k – indeks (k = 1,2, ..., n bahalary kabul edýär).

Şeýlelikde, ahyrky ýazylanlary **mehaniki sistemanyň asyl nusgasy** ýa-da gysgaça, **asyl nusga** diýip atlandyrmagy şertleşeliň. ***Ähli işde mehaniki sistema asyl nusagada berilýär diýip hasap ederis.***

Içki güýçleriň häsiýetleri subutsyz berilýär.

1) Içki güýçleriň baş wektory nola deňdir:

$$\overline{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(i)} = 0. \tag{20.4}$$

Ahyrky formuladaky jemi aňladýan $\sum$ harpyň aşagyndaky we ýokarsyndaky k = 1 we n ýazgylary taşlap manylaryny saklalyň. Bu şertnama diňe ýazgylaryň tygşytlylygy we amatlylygy üçin edilýär. Eger many üýtgemese şeýle gysgaltma hemişe ulanylýar. Şerte görä ahyrky formulany aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\overline{R}^{(i)} = \sum \overline{F}_k^{(i)} = 0. \tag{20.5}$$

2) Sistemanyň içki güýçleriniň islendik nokada görä alnan momentleriniň geometrik jemi (O nokada görä içki güýçleriň baş momenti) nola deňdir:

$$\overline{M}_0^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{(i)}\right) = 0. \tag{20.6}$$

Ahyrky formulalardan içki güýçler öz-özünden ýok bolup, sistemanyň hereketine olaryň täsiri bolmaýar diýen netije çykarmak, nädogrudyr.

21. MASSALAR GEOMETRIÝASY: MEHANIKI ULGAMYŇ MASSALAR MERKEZI. MEHANIKI ULGAMYŇ WE GATY JISIMLERIŇ INERSIÝA MOMENTLERI

21.1. Mehaniki ulgamyň massalar merkezi

Mehaniki sistema asyl nusgada berlen. Sistemanyň düzümi M_1, M_2, ..., M_n nokatlar bolup, degişlilikde olaryň massalary m_1, m_2, ..., m_n. $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ – şu nokatlaryň radius-wektorlary. $M = \sum m_k$ – mehaniki sistemanyň massasy.

Mehaniki sistemanyň **massalar merkezi** diýip, radius-wektory

$$\bar{r}_c(x_c, y_c, z_c) = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \tag{21.1}$$

bilen hasaplanylýan **geometrik nokada** aýdylýar.

Skalýar görnüşde, ýagny $\bar{r}_c$ wektoryň Dekart koordinata oklaryna proýeksiýalary aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$x_c = \frac{1}{M} \cdot \sum m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M} \cdot \sum m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M} \cdot \sum m_k z_k. \tag{21.2}$$

Mehaniki sistemanyň massalar merkezi möhüm bir nokat bolup, sistemanyň massasynyň dagynyklygyny aňladýar.

Massalar merkezi diýen düşünjä derek **inersiýa merkezi** hem diýilýär.

21.2. Mehaniki ulgamyň we gaty jisimleriň inersiýa momentleri. Inersiýa momentleri

Asyl nusgada mehaniki sistema berlen. O merkeze, L oka we Π tekizlige görä mehaniki sistemanyň inersiýa momentleri diýip aşakdaky skalýar ululyklara aýdylýar:

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \sum m_k r_k^2, \\ I_L &= \sum m_k h_k^2, \\ I_\Pi &= \sum m_k d_k^2, \end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

bu ýerde m_k – k-njy nokadyň massasy. Bu nokatdan O merkeze çenli uzaklyk – r_k, L oka çenli uzaklyk – h_k, Π tekizlige çenli uzaklyk – d_k bilen belgilenen.

Eger birjynsly jisimiň formasy dogry bolmasa, onda ony n sany uly bolmadyk böleklere bölüp, $n \to \infty$ talap edip, predeli tapylsa, onda (21.3) formulalara derek aşakdakylary alarys:

$$I_0 = \int_{(V)} r^2 dm, \quad I_L = \int_{(V)} h^2 dm, \quad I_\Pi = \int_{(V)} d^2 dm. \tag{21.4}$$

Integrallar jisimiň ähli (V) göwrümine ýaýraýar.

Amatly formulalary almak üçin, (21.3) formulalary aşakdaky ýaly başgaça görnüşde ýazmak bolar:

$$I_0 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \tag{21.5}$$

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ I_y &= \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \\ I_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned}\right\} \tag{21.6}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xOy} &= \sum m_k z_k^2, \\ I_{xOz} &= \sum m_k y_k^2, \\ I_{yOz} &= \sum m_k x_k^2. \end{aligned}\right\} \tag{21.7}$$

Bu formulalary integral görnüşinde hem ýazmak bolýandygyny ýatladýarys.

(21.5)–(21.7) formulalaryň bahalaryny deňeşdirip, aşakdaky baglanyşyklary alarys:

$$I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz}. \tag{21.8}$$

$$I_x + I_y + I_z = 2 I_O. \tag{21.9}$$

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_{xOy} + I_{xOz}, \\ I_y &= I_{xOy} + I_{yOz}, \\ I_z &= I_{xOz} + I_{yOz}. \end{aligned}\right\} \tag{21.10}$$

Gaty jisimiň parallel oklara görä inersiýa momentleri baradaky teorema:

Gaty jisimiň haýsy-da bolsa bir oka görä inersiýa momenti ol jisimiň şol oka parallel bolup, onuň massalar merkezinden geçýän oka görä inersiýa momentiniň üstüne jisimiň massasynyň bu oklaryň arasyndaky uzaklygyň kwadratyna köpeltmek hasylynyň goşulmagyna deňdir:

$$I_{z'} = I_z + Ma^2. \tag{21.11}$$

Bu formulada: $z' \parallel z$.

z ok jisimiň agyrlyk merkeziniň üstünden geçýär. Bu teorema Gýugensiň-Şteýneriň teoremasy hem diýilýär.

Jisimiň z oka görä inersiýa momentini başgaça aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$I_z = M\rho_z^2, \tag{21.12}$$

bu ýerde ρ_z ululyga jisimiň z oka görä inersiýa radiusy diýilýär we aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}. \tag{21.13}$$

Koordinatalar başlangyjyndan geçýän l ok koordinata oklary bilen α, β, γ burçlary emele getirýän bolsa, I_l – jisimiň l oka görä inersiýa momenti aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma. \tag{21.14}$$

Merkezden gaçýan inersiýa momentleri aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{yz} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \tag{21.15}$$

bu ýerde m_k – nokatlaryň massalary; x_k, y_k, z_k, – olaryň koordinatalary. Merkezden gaçýan inersiýa momentleri položitel we otrisatel bahalary kabul edip bilýärler. $I_{xy} = I_{yx}$ we ş.m.

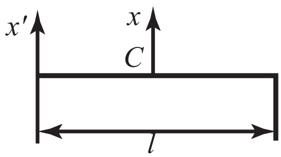
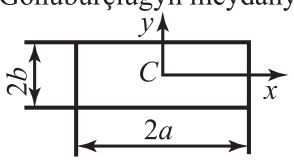
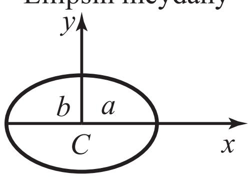
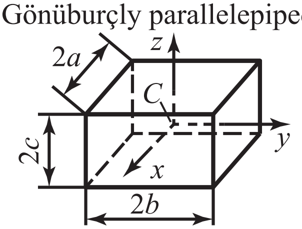
Simmetriýa oky bolan birjynsly jisime garalyň. z ok jisimiň simmetriýa oky bilen gabat geler ýaly edip, $Oxyz$ koordinatalar sistemasyny alalyň. Onda indeksinde z oky saklaýan merkezden gaçýan inersiýa momentleri nola öwrülýärler:

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0.$$

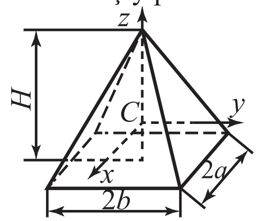
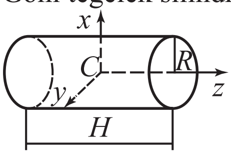
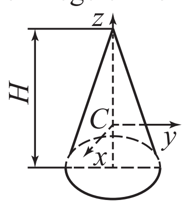
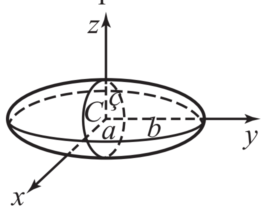
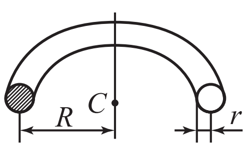
Şeýle häsiýetli z oka *jisimiň O nokadynyň inersiýasynyň baş oky* diýilýär. Jisimiň simmetriýa oky bar bolsa, ol okuň islendik nokady üçin *inersiýasynyň baş oky* bolýar.

Eger $I_{xy} = 0$, $I_{yz} = 0$, $I_{zx} = 0$, bolsa, $Oxyz$ koordinatalar sistemasynyň her bir oky *O nokadyň* (koordinatalar başlangyjynyň) *inersiýasynyň baş oky* bolýar. Jisimiň inrsiýanyň baş oklaryna görä inersiýa momentlerine *jisimiň baş inersiýa momentleri* diýilýär. Jisimiň massalar merkezi üçin gurlan inersiýanyň baş oklaryna *jisimiň baş merkezi inersiýa oklary* diýilýär.

Köp ulanylýan birjynsly gaty jisimleriň inersiýa momentleri

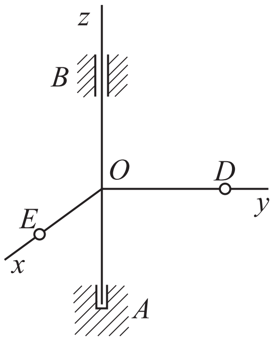
Jisim	Inersiýa momenti
Göni çyzygyň kesimi 	$I_x = \frac{1}{12}Ml^2, \quad I_{x'} = \frac{1}{3}Ml^2$
Gönüburçlugyň meýdany 	$I_x = \frac{1}{3}Mb^2, \quad I_y = \frac{1}{3}Ma^2,$ $I_{Cz} = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
Ellipsiň meýdany 	$I_x = \frac{1}{4}Mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4}Ma^2,$ $I_{Cz} = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2)$
Gönüburçly parallelepiped 	$I_x = \frac{1}{3}M(b^2 + c^2),$ $I_y = \frac{1}{3}M(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$

12. Sargyt № 1275.

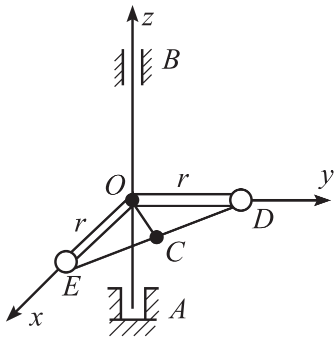
Gönüburçly piramida 	$I_x \frac{M}{20}\left(\frac{3}{4}H^2 + 4b^2\right),$ $I_y = \frac{M}{20}\left(\frac{3}{4}H^2 + 4a^2\right),$ $I_z = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$
Göni tegelek silindr 	$I_x = I_y = \frac{1}{4}M\left(\frac{1}{3}H^2 + R^2\right),$ $I_z = \frac{1}{2}MR^2$
Göni tegelek konus 	$I_x = I_y = \frac{3}{20}M\left(\frac{1}{4}H^2 + R^2\right),$ $I_z = \frac{3}{10}MR^2$
Ellipsoid 	$I_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2),$ $I_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$
Tor 	$I_r = M\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$

21.3. Mysaly meseleler

21.1-nji mesele. Iki sany birmeňzeş D we E ýükler AB wertikal oka (wala) perpendikulýar, şeýle hem özara perpendikulýar bolan $OE = OD = r$ sterženler arkaly birikdirilen. Walyň we sterženleriň massalary hasaba alynmaly däl. Ýükleri m massaly maddy nokatlar diýip hasaplamaly. Ulgamyň C massalar merkeziniň ornuny we merkezden gaçma I_{xz} inersiýa momentleri tapmaly (*21.1-nji surat*).



21.1-nji surat



21.2-nji surat

Çözülişi. Meseläniň hasap shemasyny alalyň (*21.2-nji surat*). C massalar merkeziniň ornuny simmetiklikden peýdalanyp tapalyň. Ýükleriň massalary deň bolany üçin olaryň massalar merkezi ED kesimiň ortasynda ýerleşýär. Şol nokat C massalar merkezi bilen gabat gelýär. Şeýlelikde,

$$x_C = y_C = \frac{r}{2}; \quad z_C = 0.$$

(21.15) formulalardan peýdalanýarys: $I_{xy} = \sum m_k x_k y_k$;

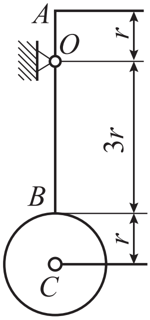
$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{zx} = \sum m_k z_k x_k$.

$Z_D = Z_E = 0$ bolany üçin geljekde amatly bolar diýip simwol üsti bilen ýazýarys:

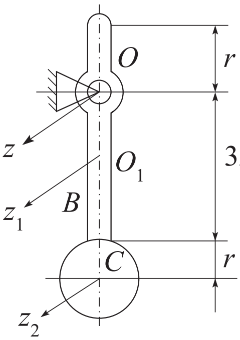
$Z_D = Z_E = 0 \Rightarrow I_{yz} = 0, I_{zx} = 0.\ I_{xy} = \sum m_k x_k y_k = m_D x_D y_D + m_E x_E y_E = 0,$ sebäbi, $x_D = y_E = 0$.

Jogaby: $C\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, 0\right); \quad I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$

21.2-nji mesele. Maýatnik M_1 massaly inçe birjynsly AB sterženiň ujuna birikdirilen massasy M_2 bolan birjynsly C diskden ybarat. Sterženiň uzynlygy $4r$, bu ýerde r – diskiň radiusy. Sterženiniň ujundan r aralykda, maýatnigiň tekizligine perpendikulýar bolan O asylyş okuna görä maýatnigiň inersiýa momentini hasaplamaly (*21.3-nji surat*).



21.3-nji surat



21.4-nji surat

Çözülişi. $I_z = I_z^{st} + I_z^d$ formulada I_z – gözlenýän ululyk, I_z^{st} we I_z^d, degişlilikde sterženiň we diskiň inersiýa momentleri. Olar aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$I_z^{st} == \frac{1}{12} M_1 (AB)^2 = \frac{1}{12} M_1 (4r)^2 = \frac{16}{12} M_1 r^2 = \frac{4}{3} M_1 r^2 .$$

Ony Gýugens-Şteýneriň teoremasyndan peýdalanyp, şeýle kesgitlemek bolar:

$$I_z^{st} = I_{z_1}^{st} + M_1 (OO_1)^2 = \frac{4}{3} M_1 r^2 + M_1 r^2 = \frac{7}{3} M_1 r^2 .$$

Diskiň inersiýa momentini izygiderlikde tapalyň: $I_{z_2}^d = \frac{1}{2} M_2 r^2$. Gýugens-Şteýneriň teoremasyndan peýdalanýarys:

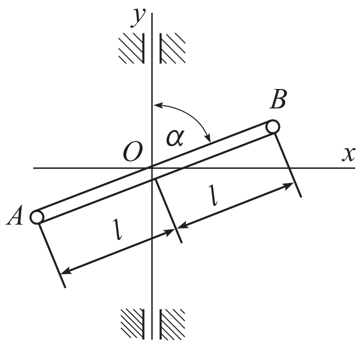
$$I_z^d = I_{z_2}^d + M_2 (CO)^2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 + M_2 (4r)^2 = \frac{33}{2} M_2 r^2 .$$

Başdaky formula boýunça jemläp, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

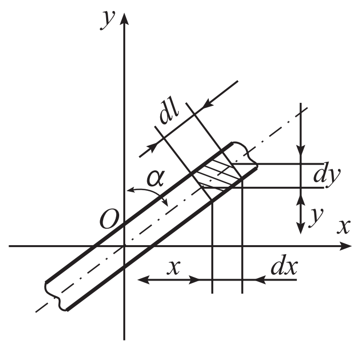
$$I_z = I_z^{st} + I_z^d = \frac{7}{3} M_1 r^2 + \frac{33}{2} M_2 r^2 = \frac{r^2}{6} (14M_1 + 99M_2).$$

Jogaby: $\dfrac{14M_1 + 99M_2}{6} r^2 .$

21.3-nji mesele. Massasy M bolan, $2l$ uzynlykdaky inçe birjynsly AB steržen O merkezi bilen wertikal oka berkidilen. Steržen wertikal ok bilen α burç emele getirýär. Sterženiň I_x, I_y inersiýa momentlerini hem-de I_{xy} merkezden gaçma inersiýa momentini hasaplamaly. Koordinata oklary 21.5-nji surat görkezilendir.



21.5-nji surat



21.6-njy surat

Çözülişi. Meseläniň talabyna laýyk inersiýa momentlerini tapalyň:

$$I_x = \int_M h_x^2 dm, \quad I_y = \int_M h_y^2 dm,$$

bu ýerde dm -sterženiň elementiniň massasy; $h_x = y$, $h_y = x$. Sterženiň çyzyk dykyzlygy $\gamma = \dfrac{M}{2l}$. $dm = \gamma dl = \dfrac{M}{2l}\ dl = \dfrac{M}{2l}\dfrac{dy}{\cos\alpha} = $ $= \dfrac{M}{2l}\dfrac{dx}{\sin\alpha}$. Sterženiň ýarsynyň oka görä inersiýa momentini ikeltsek, sterženiň oka görä inersiýa momentini tapmak bolar:

$$I_x = \int_M y^2 dm = 2\int_0^{l\cos\alpha} y^2 \frac{M}{2l}\frac{dy}{\cos\alpha} = \frac{M}{l\cos\alpha}\frac{y^3}{3}\Big|_0^{l\cos\alpha} = \frac{Ml^2}{3}\cos^2\alpha;$$

$$I_y = \int_M x^2 dm = 2\int_0^{l\sin\alpha} x^2 \frac{M}{2l}\frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{M}{l\sin\alpha}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{l\sin\alpha} = \frac{Ml^2}{3}\sin^2\alpha.$$

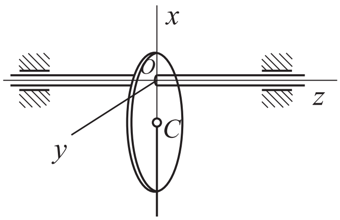
$I_{xy} = \int_M xydm$ merkezden gaçma inersiýa momentini hasaplamak üçin integrirlemäniň üýtgeýän ululygy hökmünde x abssissany alyp, dm-iň, $y = x\,\mathrm{ctg}\alpha$ bahalary goýup hem-de simmetrikligi göz öňünde tutup, alarys:

$$I_{xy} = \int_M xydm = 2\int_0^{l\sin\alpha} xx\ \mathrm{ctg}\alpha \frac{M}{2l}\frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{M\cos\alpha}{l\sin^2\alpha}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{l\sin\alpha} =$$

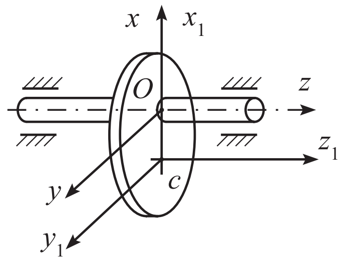
$$= \frac{Ml^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{Ml^2}{6}\sin 2\alpha.$$

Jogaby: $I_x = \dfrac{Ml^2}{3}\cos^2\alpha,\quad I_y = \dfrac{Ml^2}{3}\sin^2\alpha,\quad I_{xy} = \dfrac{Ml^2}{6}\sin 2\alpha.$

21.4-nji mesele. Birjynsly tegelek M massaly disk onuň tekizligine perpendikulýar bolan z oka ekssentrik ýagdaýda ornaşdyrylan. Diskiň radiusy r, ekssentrisiseti $OC = a$, bu ýerde C – diskiň massalar merkezi. Diskiň oklara görä I_x, I_y, I_z we merkezden gaçma I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, inersiýa momentlerini hasaplamaly. Koordinata oklary 21.7-nji suratda görkezilen.



21.7-nji surat



21.8-nji surat

Çözülişi. 21.8-njy suratda meseläniň hasap shemasy berlen. $Cx_1y_1z_1$ – başlangyjy diskiň massalar merkezinde bolan baş merkezi inersiýa oklarydyr. Belli formulalardan peýdalanyp, alarys:

$$I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{Mr^2}{4}; \quad I_{z_1} = \frac{Mr^2}{2}; \quad I_{x_1y_1} = I_{x_1z_1} = I_{y_1z_1} = 0.$$

$Oxyz$ sistemanyň oklary, degişlilikde $Cx_1y_1z_1$ sistemanyň oklaryna paralleldirler. I_y, I_z-ni tapmak üçin Gýugens-Şteýneriň teoremasyndan peýdalanýarys:

$$I_y = I_{y_1} + Ma^2 = \frac{Mr^2}{4} + Ma^2 = M\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right);$$

$$I_z = I_{z_1} + Ma^2 = M\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right).$$

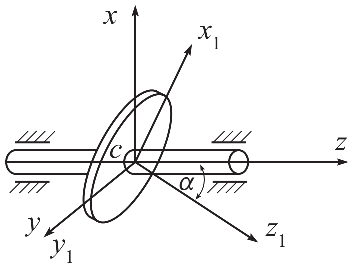
x bilen x_1 oklaryň gabat gelýändikleri üçin $I_x = I_{x_1} = \frac{Mr^2}{4}$.

x massalar merkezinden geçeni üçin maddy simmetriýa okudyr, y, z oňa perpendikulýar bolanlary üçin $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Jogaby: $I_x = \frac{1}{4}Mr^2$, $I_y = M\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)$, $I_z = M\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)$,

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

21.5-nji mesele. Massasy M bolan birjynsly tegelek disk onuň C massalar merkezinden geçýän z oka ornaşdyrylan. Diskiň z simmetriýa oky xz wertikal simmetriýa tekizliginde ýatyp, z ok bilen α burçy emele getirýär. Diskiň radiusy r-e deň. Diskiň merkezden gaçma I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} inersiýa momentlerini hasaplamaly. Koordinata oklary *21.9-njy surat* görkezilen.



21.9-njy surat

Çözülişi. $Cx_1y_1z_1$ – başlangyjy diskiň massalar merkezinde bolan baş merkezi inersiýa oklarydyr. Belli formulalardan peýdalanyp, alarys:

$$I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{Mr^2}{4}; \quad I_{z_1} = \frac{Mr^2}{2}; \quad I_{x_1y_1} = I_{x_1z_1} = I_{y_1z_1} = 0.$$

x_1, y_1, z_1 oklary y_1 okuň daşynda sagat diliniň tersine α burça aýlasak x, y, z oklary alarys. x, y, z oklar bilen x_1, y_1, z_1 baş oklaryň arasyndaky burçlary tablisada görkezeliň we ulanalyň:

	x_1	y_1	z_1
x	$\alpha_1 = \alpha$	$\beta_1 = \frac{\pi}{2}$	$\gamma_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha$
y	$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$	$\beta_2 = 0$	$\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$
z	$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha$	$\beta_3 = \frac{\pi}{2}$	$\gamma_3 = \alpha$

Nazary edebiýatda berlen belli formulalardan peýdalanýarys:

$$I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1})\cos\alpha_3\cos\alpha_1 + (I_{z_1} - I_{y_1})\cos\beta_3\cos\beta_1 =$$

$$= \left(\frac{Mr^2}{2} - \frac{Mr^2}{4}\right)\sin\alpha\cos\alpha + \left(\frac{Mr^2}{2} - \frac{Mr^2}{4}\right)\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{Mr^2}{8}\sin 2\alpha.$$

$$I_{xy} = (I_{z_1} - I_{x_1})\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + (I_{z_1} - I_{y_1})\cos\beta_1\cos\beta_2 = 0,$$

$$I_{yz} = (I_{z_1} - I_{x_1})\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + (I_{z_1} - I_{y_1})\cos\beta_2\cos\beta_3 = 0.$$

Jogaby: $I_{xy} = I_{yz} = 0.$ $I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1})\dfrac{\sin 2\alpha}{2} = \dfrac{1}{8}Mr^2\sin 2\alpha.$

21.6-njy mesele. Radiusy 5 *sm* we massasy 100 *kg* bolan polat okuň (walyň) emele getirijisine görä inersiýa momentini hasaplamaly. Waly birjynsly silindr diýip kabul etmeli.

Çözülişi. Walyň boý okuna görä inersiya momentiniň hasaplaýyş formulasy:

$$I_{C_z} = \frac{Mr^2}{2}.$$

Walyň emele getirijisine görä inersiýa momentini Gýugens-Şteýneriň teoremasyndan peýdalanyp tapýarys:

$$I = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3Mr^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot 5^2 = 3750\ kg \cdot sm^2.$$

Jogaby: 3750 $kg \cdot sm^2$.

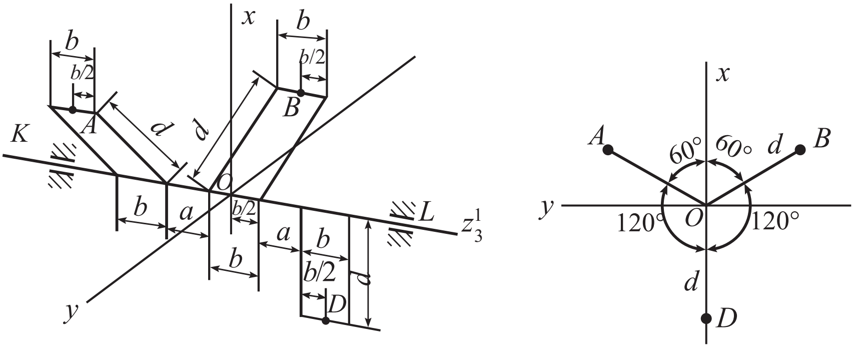
21.7-nji mesele. Birjynsly M massaly we r radiusly ýarym diskiň diametri boýunça çäklendirip geçýän diametre görä inersiýa momentini hasaplamaly.

Çözülişi. Ýuka birjynsly m massaly diskiň diametr boýunça geçýän x oka görä inersiýa momenti $I_x = \frac{1}{4}mr^2$. Ýarym diskiň inersiýa momenti simmetriýa bolany üçin tutuş diskiňkiden iki esse az, emma $M = m/2$ bolany üçin $I_x = \frac{1}{4}Mr^2$.

Jogaby: $Mr^2/4$.

21.4. Özbaşdak çözmek üçin meseleler. Massalar geometriýasy: maddy ulgamyň massalar merkezi, gaty jisimleriň inersiýa momentleri

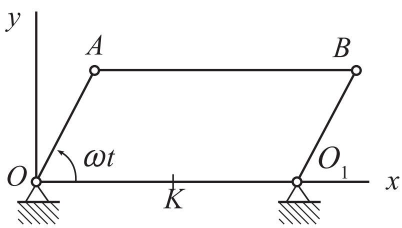
21.8-nji mesele. Üç silindrli hereketlendirijiniň suratda görkezilen tirsekli waly bir-birine görä 120° bilen ýerleşen üç sany tirsekden ybarat. Tirsekleriň massalaryny A, B we D nokatlarda toplanan hasaplap hem-de $m_A = m_B = m_D = m$ diýip, walyň başga bölekleriniň massalaryny hasaba alman, tirsekli walyň massalar merkeziniň ornuny kesgitlemeli. Aralyklar 21.10-njy surat görkezilen.



21.10-njy surat

Jogaby: Massalar merkezi O koordinatalar başlangyjy bilen gabat gelýär.

21.9-njy mesele. $OABO_1$ şarnirli parallellogramyň massalar merkeziniň hereket deňlemesini, şeýle hem, OA kriwoşip ω hemişelik burç tizlik bilen aýlananda parallellogramyň massalar merkeziniň traýektoriýasyny tapmaly. Parallellogramyň zwenolary birjynsly sterženler bolup, $OA = O_1B = AB/2 = a$ (*21.11-nji surat*).



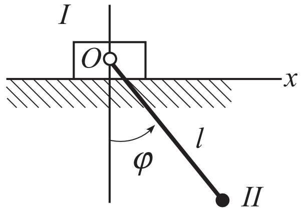
21.11-nji surat

Jogaby: $x_C = a + \frac{3}{4}a\cos\omega t,\ y_C = \frac{3}{4}a\sin\omega t$; traýektoriýanyň deňlemesi: $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$-radiusy $\frac{3}{4}a$, merkezi $(a, 0)$ koordinataly K nokatda bolan töwerek.

21.10-njy mesele. Massasy M_1 bolan I polzuna inçe ýeňil ýüp bilen M_2 massaly II ýük baglanan. Ýüküň $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$ kanun bilen yrgyldylarynda polzun gozganmaýan ýylmanak gorizontal üstde typýar. Başlangyç pursatda (t=0) polzun x okuň başy O nokatda diýip, polzunyň $x_1 = f(t)$ hereket deňlemesini tapmaly. Ýüpüň uzynlygy l-e deň (*21.12-nji surat*).

Jogaby:

$$x_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} l \sin(\varphi_0 \sin \omega t).$$

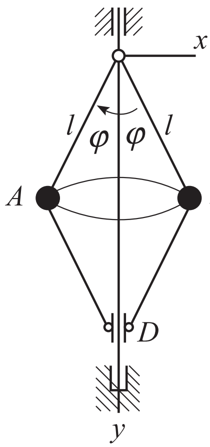


21.12-nji surat

21.11-nji mesele. Suratda görkezilen merkezden gaçyjy sazlaýjy (regulýator), her biri M massaly A we B şarlar, massasy M_2 bolan D muftadan ybarat bolsa, regulýatoryň massalar merkeziniň ornuny kesgitlemeli. A we B şarlary nokatlanç massalar diýip hasaplanmaly. Steržçenleriň massalary hasaba alynmaly däl (*21.13-nji surat*).

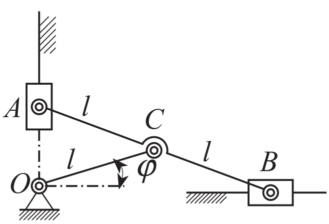
Jogaby:

$$x_C = 0, \;\; y_C = 2\frac{M_1 + M_2}{2M_1 + M_2} l \cos\varphi.$$



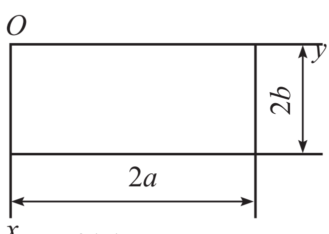
21.13-nji surat

21.12-nji mesele. Her biriniň massasy M_1 bolan A we B muftalar, M_2 massaly OC kriwoşip hem-de massasy $2M_2$ bolan AB çyzgyçdan ybarat ellipsograf mehanizminiň massalar merkeziniň traýektoriýasyny kesgitlemeli. Bu ýerde $OC = AC = CB = l$, çyzgyjy we kriwoşipi birjynsly steržçenler, muftalary bolsa maddy nokatlar diýip hasaplamaly (*21.14-nji surat*).



21.14-nji surat

Jogaby: Merkezi O nokatda we radiusy $\frac{4M_1 + 5M_2}{2M_1 + 3M_2} \cdot \frac{l}{2}$-ä deň töwerek.



21.15-nji surat

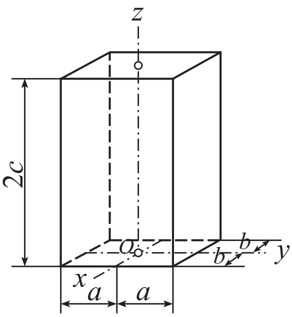
21.13-nji mesele. Suratda görkezilen birjynsly, gönüburçly M massaly plastinkanyň we y oklara görä I_x we I_y inersiýa momentini hasaplamaly (*21.15-nji surat*).

Jogaby: $I_x = \frac{4}{3}Ma^2$, $I_y = \frac{4}{3}mB^2$.

21.14-nji mesele. Suratda görkezilen birjynsly, gönüburçly M massaly parallelepipediň x, y we z oklara görä inersiýa momentini hasaplamaly (*21.16-njy surat*).

Jogaby: $I_x = \frac{M}{3}(a^2 + 4c^2)$,

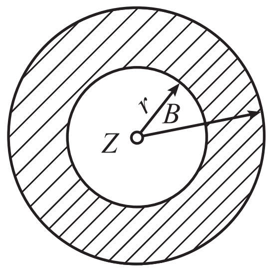
$$I_y = \frac{M}{3}(b^2 + 4c^2), \quad I_z = \frac{M}{3}(a^2 + 4b^2).$$



21.16-njy surat

21.15-nji mesele. R radiusly ýuka birjynsly diskde burawlap, r radiusly konsentrik deşik deşilen. Bu M massaly diskiň inersiýa merkezinden onuň tekizligine perpendikulýar geçýän z oka görä inersiýa momentini hasaplamaly (*21.17-nji surat*).

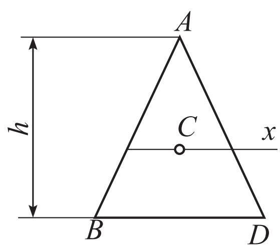
Jogaby: $I_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2)$.



21.17-nji surat

21.16-njy mesele. Deňýanly üçburçluk şekilindäki beýikligi h bolan, birjynsly M massaly plastinkanyň C inersiýa merkezinden esasyna parallel görnüşde geçýän göräli inersiýa momentini hasaplamaly (*21.18-nji surat*).

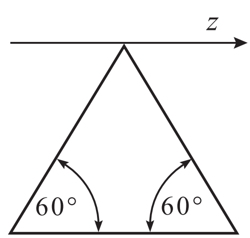
Jogaby: $I_z = \frac{1}{18}Mh^2$.



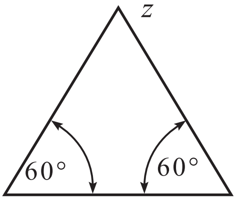
21.18-nji surat

21.17-nji mesele. Birjynsly metal plastinka deňtaraply üçburçluk şekilinde ýasalan. Plastinkanyň massasy – M, tarapynyň uzynlygy – l. Plastinkanyň bir depesinden onuň esasyna parallel geçýän z oka görä inersiýa momentini hasaplamaly (*21.19-njy surat*).

Jogaby: $I_z = \frac{3}{8}Ml^2$.



21.19-njy surat

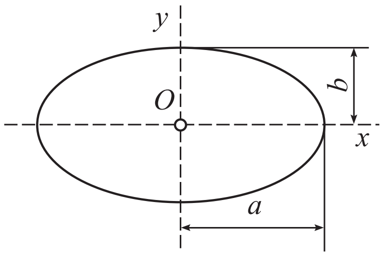


21.20-nji surat

21.18-nji mesele. Birjynsly deňtaraply üçburçluk şekilindäki plastinanyň massasy – M, tarapynyň uzynlygy – l. Plastinanyň bir depesinden onuň tekizligine perpendikulýar geçýän z oka görä inersiýa momentini hasaplamaly (*21.20-nji surat*).

Jogaby: $I_z = \frac{4}{12}Ml^2$.

21.19-njy mesele. Ýuka birjynsly M massaly elliptik plastinka $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kontur bilen çäklenen. Bu plastinkanyň üç sany özara perpendikulýar x, y we z oklara görä inersiýa momentini hasaplamaly (*21.21-nji surat*).

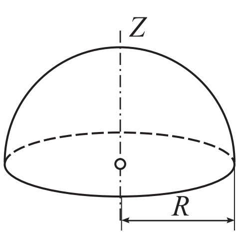


21.21-nji surat

Jogaby: $I_x = \frac{M}{4}b^2, \quad I_y = \frac{M}{4}a^2, \quad I_z = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$.

21.20-nji mesele. Massasy M bolan birjynsly içi boş şaryň agyrlyk merkezinden geçýän oka görä inersiýa momentini hasaplamaly. Daşky we içki radiuslar, degişlilikde R we r deň.

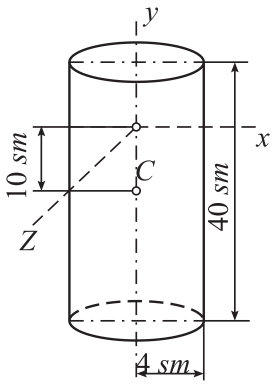
Jogaby: $\frac{2}{5}M\frac{R^2 - r^5}{R^3 - r^3}$.



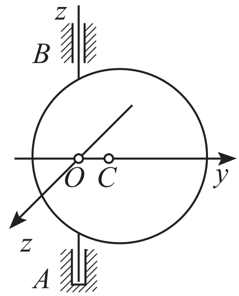
21.22-nji surat

21.21-nji mesele. Radiusy R bolan ýarym sfera şekilinde ýasalan ýuka birjynsly gabyk ony çäklendirýän tekizlige perpendikulýar bolup, ýarym sferanyň merkezinden geçýän oka görä inersiýa momentini hasaplamaly. Gabygyň M massasy ýarym sferanyň üsti boýunça deňölçegli ýaýran (*21.22-nji surat*).

Jogaby: $\frac{2}{3}MR^2$.



21.23-nji surat



21.24-nji surat

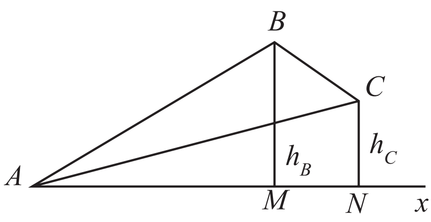
21.22-nji mesele. Birjynsly tutuş silindriň radiusy 4 *sm*, beýikligi 40 *sm*. Bu silindriň okuna perpendikulýar bolup, onuň *C* massalar merkezinden 10 *sm* aralykda duran *z* oka görä inersiýa radiusyny hasaplamaly (*21.23-nji surat*).

Jogaby: 15,4 *sm.*

21.23-nji mesele. Massasy *M* radiusy *r* bolan birjynsly tegelek disk *C* massalar merkezinden $OC = \frac{r}{2}$ aralykda duran *AB* oka berkidilen. Diskiň oklara görä we merkezden gaçma inersiýa momentini hasaplamaly (*21.24-nji surat*).

Jogaby: $I_x = \frac{3}{4}Mr^2,\ I_y = \frac{Mr^2}{4},\ I_z = \frac{Mr^2}{2},\ I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0.$

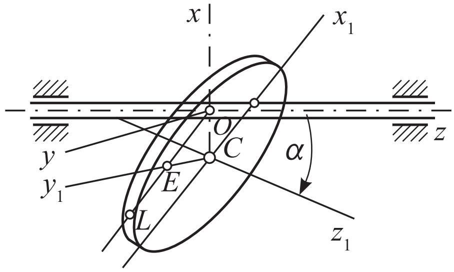
21.24-nji mesele. Massasy *M*-e deň birjynsly *ABC* üçburçluk plastinkanyň, onuň *A* depesinden geçip, plastinkanyň tekizliginde ýatan *x* oka görä inersiýa momentini hasaplamaly. *B* we *C* nokatlardan oka çenli aralyklar berlen: $BM = h_B$, $CN = h_C$ (*21.25-nji surat*).



21.25-nji surat

Jogaby: $I_x = \frac{M}{6}(h_B^2 + h_B \cdot h_C + h_C^2 ...).$

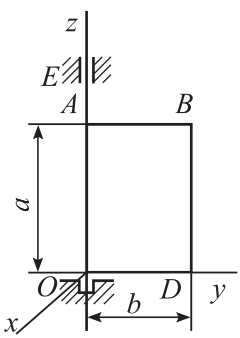
21.25-nji mesele. R radiusy birjynsly tegelek disk O nokatdan geçip, diskiň C_{z1} simmetriýa oky bilen α burç emele getirýän z aýlanma okuna ornaşdyrylan. Diskiň massasy M-e deň. Diskiň z aýlanma okuna görä I_z inersiýa momentini we I_{xz}, I_{yz} merkezden gaçma inersiýa momentlerini kesgitlemeli. Bu ýerde z okuň diskiň tekizligindäki proeksiýasy OL, bu ýerde $OE=a$, $OK=b$ (*21.26-njy surat*).



21.26-njy surat

$$\textit{Jogaby: } I_z = M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin^2\alpha + b^2\right],$$

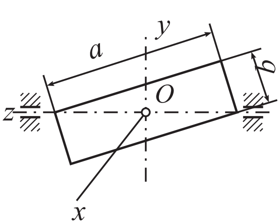
$$I_z = M\left(\frac{1}{4}R^2 + a\right)\sin\alpha\cos\alpha, \quad I_{yz} = Mab\sin\alpha.$$



21.27-nji surat

21.26-njy mesele. Massasy M, taraplary a we b bolan birjynsly gönüburçly $OABD$ plastinka OA tarapy arkaly OE oka berkidilen. Plastinkanyň I_{xz}, I_{yz} we I_{xy} merkezden gaçma inersiýa momentlerini hasaplamaly (*21.27-nji surat*).

$$\textit{Jogaby: } I_{xz} = I_{xy} = 0. \; I_{yz} = \frac{Mab}{4}.$$

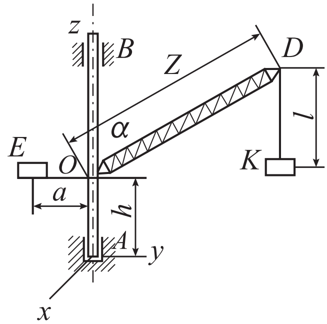


21.28-nji surat

21.27-nji mesele. Massasy M, taraplary a we b bolan birjynsly gönüburçly $OABD$ plastinka, özüniň diagonallarynyň biri arkaly geçýän z oka berkidilen. Plastinkanyň I_{yz} merkezden gaçma inersiýa momentini hasaplamaly. Bu ýerde y we z oklar plastinka bilen birlikde suratyň tekizliginde ýatýan oklardyr. Koordinatalar başlangyjy plastinkanyň massalar merkezi bilen gabat gelýär (*21.28-nji surat*).

Jogaby: $I_{yz} = \frac{M}{12}\frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$.

21.28-nji mesele. Göteriji kranyň aýlanýan bölegi L uzynlykly M_1 massaly CD strela, M_2 massaly E agramlyk we M_3 massaly K ýükden ybarat. Strelany inçe birjynsly pürs (balka), E agramlygy we K ýüki maddy nokatlar diýip hasaplap, kranyň wertikal aýlanma oky z-e görä I_z inersiýa momentini we kran bilen baglanyşykly x, y, z koordinatalar ulgamyna görä merkezden gaçma inersiýa momentlerini kesgitlemeli (*21.29-njy surat*).



21.29-njy surat

Jogaby: $I_z = M_2 a^2 + \left(M_3 + \frac{1}{3}M_1\right)L^2 \sin^2\alpha,$

$$I_{yz} = \frac{M_3 + \frac{1}{3}M_1}{2}L^2 \sin 2\alpha - M_3 Ll \sin\alpha, \quad I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

22. MEHANIKI ULGAMYŇ MASSALAR MERKEZINIŇ HEREKETI HAKYNDAKY TEOREMA

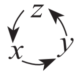
22.1. Mehaniki ulgamyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teorema. Mysaly meseleler

Teorema: ***Massalar merkezinde sistemanyň ähli massasy ýerleşen diýip hasap edip, bu merkeze sistema goýlan daşky güýçleriň baş wektoryň täsirinden hereketlenýän maddy nokat hökmünde garamak bolýar.***

$$M\ddot{\bar{r}}_C = \overline{R}^{(d)}. \tag{22.1}$$

(22.1) formulany proýeksiýalarda ýazalyň:

$$M\ddot{x}_C = R_x^{(d)}, \tag{22.2}$$



Massalar merkeziniň hereketiniň saklanma kanunlary

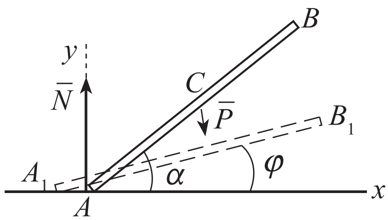
1. Eger $\overline{R}^{(d)} = 0$ bolsa, onda (22.1) formuladan $\Rightarrow$ $\ddot{\bar{r}}_C = 0$ $\Rightarrow$ $\dot{\bar{r}}_C = \overline{const} = \overline{C}_1$.

Eger $\overline{C}_1 = 0$ bolsa, onda $\bar{r}_C = \overline{const} = \overline{C}_2$.

2. Eger $R_x^{(d)} = 0$ bolsa, onda (22.2) formuladan $\Rightarrow \dot{x}_C = C_3 = const$.

Eger $C_3 = 0$ bolsa, onda $x_C = C_4 = const$.

22.1-nji mesele. Uzynlygy $2l$ bolan birjynsly steržen dynçlyk ýagdaýynda bir ujy ýylmanak gorizontal tekizlige α burçy bilen ýapgytlanan. Bu steržen özüniň dynçlyk ýagdaýyndan aşak gaýdanda onuň B ujunyň çyzýan traýektoriýasyny kesgitlemeli (*22.1-nji surat)*.



22.1-nji surat

Çözülişi. Başlangyjy A nokat edip, gönüburçly koordinata oklaryny guralyň. Steržene $\overline{P}$ – sterženiň öz agramy we $\overline{N}$ – reaksiýa güýji täsir edýär. Bularyň Ox oka proýeksiýalary nola deň. Şonuň üçin $m\dfrac{d\upsilon_{Cx}}{dt} = 0$, bu ýerden υ_{Cx} = const. Steržen başlangyç tizliksiz ýykylany üçin $\dfrac{dx_C}{dt} = 0$, $x_C = l\cos\alpha$ =const. Sterženiň hemme ýagdaýy üçin $x_C = l\cos\alpha$. Indi B nokadyň koordinatalaryny kesgitläliň:

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cos\alpha + l\cos\varphi, \\ y &= 2l\sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Bu B nokadyň hereket deňlemeleridir.

B nokadyň traýektoriýasyny kesgitlemek üçin, onuň hereket deňlemelerinden parametri aýyrmaly:

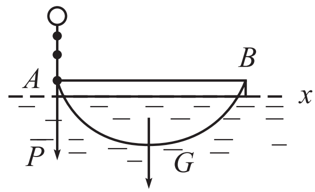
$$\sin\varphi = \frac{y}{2l}, \qquad \cos\varphi = \frac{x - l\cos\alpha}{l}.$$

Bu deňlemeleriň iki bölegini-de kwadrata göterip we soňra goşup, alarys:

$$\frac{y^2}{4l^2}+\frac{(x-l\cos\alpha)^2}{l^2}=1.$$

Bu ellepsdir.

22.2-nji mesele. Uzynlygy $AB = l$ bolup, dynçlyk ýagdaýda duran G agramly gaýygyň bir ujunda P agramly adam dur. Bu adam gaýygyň beýleki ujuna ýöräp geçende, suwuň garşylygyny göz öňünde tutmasak, gaýyk näçe s aralyga süýşer (*22.2-nji surat*).



22.2-nji surat

Çözülişi. Adamyň ilki duran ýerini başlangyç nokat hasap edip, koordinata oklaryny guralyň. Onda

$$m\frac{d\upsilon_{C_x}}{dt}=0,\quad \upsilon_{Cx}=const.$$

Gaýygyň we adamyň başlangyç tizlikleri nol bolany üçin

$$\frac{dx_C}{dt}=0,\ \text{bu ýerden } x_C=const.$$

Sistemanyň başlangyç ýagdaýdaky massalar merkeziniň abssissasyny kesgitläliň:

$$x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{Px_1+Gx_2}{P+G}. \qquad (1)$$

$x_1 = 0$, sebäbi adam koordinata başlangyjynda durýar, $x_2=\frac{l}{2}$. (1) deňlemeden alarys:

$$x_C=\frac{G\frac{l}{2}}{P+G}. \qquad (2)$$

Goý, adam A-dan B tarapa ýörände gaýyk hem saga süýşýän bolsun. Onda adam l ýol geçende gaýyk s aralyga süýşer. Şeýlelikde, koordinata başlangyjyndan adam $x_1 = l + s$ daşlaşar. Gaýygyň agyrlyk merkezi bolsa $x_2 = \frac{l}{2} + s$ daşlaşar. Bu bahalary (1) deňlemede goýup, alarys:

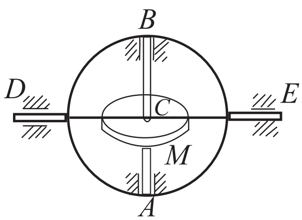
$$x_c = \frac{P(l+s) + G\left(\frac{l}{2} + s\right)}{P+G}. \tag{3}$$

(2) we (3) deňlikleriň çep bölekleri deň bolany üçin, olaryň sag böleklerini deňläp, alarys:

$$\frac{G\frac{l}{2}}{P+G} = \frac{P(l+s) + G\left(\frac{l}{2} + s\right)}{P+G}. \tag{4}$$

Bu ýerden $s = -\frac{Pl}{P+G}$.

Bu deňlikden görnüşi ýaly, adam saga l aralyga ýöránde gaýyk çepe s aralyga süýşýär.



22.3-nji surat

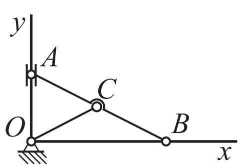
22.3-nji mesele. AB okuň daşynda aýlanýan M mahowige täsir edýän daşky güýçleriň baş wektoryny kesgitlemeli. Tegelek rama berkidilen AB ok öz nobatynda DE okuň daşynda aýlanýar. Mahowigiň C massalar merkezi AB we DE oklaryň kesişme nokadyna gabat gelýär (*22.3-nji surat*).

Çözülişi. $M\ddot{\vec{r}}_C = \overline{R}^{(d)} = 0.$

Şert boýunça C nokat gozganmaýar, diýmek, $\ddot{\vec{r}}_C = 0, \Rightarrow \overline{R}^{(d)} = 0.$

Jogaby: Daşky güýçleriň baş wektory nola deň.

22.2. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

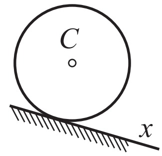


22.4-nji surat

22.4-nji mesele. Suratda görkezilen ellipsografyň AB çyzgyjyna goýlan baş wektoryny kesgitlemeli. OC kriwoşip ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar; AB çyzgyjyň massasy M -e deň; $OC=AC=BC=l$ (*22.4-nji surat*).

Jogaby: Daşky güýçleriň baş wektory CO parallel we mukdary $Ml\omega^2$-a deň.

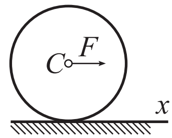
22.5-nji mesele. Ýapgyt tekizlik bilen ýokardan aşak tigirlenýän *M* massaly tigiriň *C* massalar merkezi $x_C = at^2/2$ kanun boýunça hereketlense, tigire täsir edýän daşky güýçleriň baş wektoryny kesgitlemeli (*22.5-nji surat*).



22.5-nji surat

Jogaby: Daşky güýçleriň baş wektory *x* oka parallel bolup, hereket boýunça ýönelen we mukdary *Ma* deň.

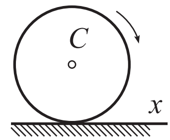
22.6-njy mesele. Tigir suratda görkezilen *F* güýjüň täsirinde gorizontal göni çyzyk bilen typyp hereketlenýär. Tigiriň *C* massalar merkeziniň hereketiniň kanunyny tapmaly, typma sürtülme koeffisiýenti *f*-e deň; $F = 5\ P$, bu ýerde *P* tigiriň agramyny aňladýar. Başlangyç pursatda tigir dynçlykda duran (*22.6-njy surat*).



22.6-njy surat

Jogaby: $x_C = 2fgt^2$.

22.7-nji mesele. Tigir oňa goýlan aýlandyryjy momendiň täsirinde gorizontal göni çyzyk bilen typyp hereketlenýär. Eger typma sürtülme koeffisiýenti *f* bolsa, tigiriň *C* massalar merkeziniň hereketiniň kanunyny tapmaly. Başlangyç pursatda tigir dynçlykda duran (*22.7-nji surat*).



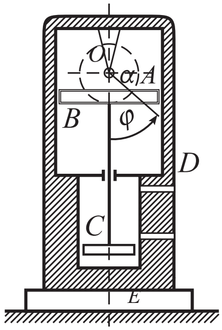
22.7-nji surat

Jogaby: $x_C = fgt^2/2$.

22.8-nji mesele. Tramwaýyň wagony ressorlarda amplitudasy 2,5 *sm* we periody $T = 0{,}5\ s$ bolan wertikal garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Ýükli kuzowyň massasy 10 *t*, težka bilen tigirleriň massasy 1 *t*. Wagonyň relse basyşyny kesgitlemeli.

Jogaby: 68,0-dan 147,6 *kN*-a çenli.

22.9-njy mesele. Suw çykarýan nasosyň boş işleýän wagtynda ýere edýän basyşyny kesgitlemeli. *D* korpusdaky gozganmaýan bölekleriň we *E* binýadyň (fundamentiň) massasy M_1, $OA=a$ kriwoşipiň massasy M_2, *B* kulisa we *C* porşeniň bilelikdäki



22.8-nji surat

massasy M_3, ω burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýan OA kriwoşipi birjynsly steržen diýip hasaplamaly (*22.8-nji surat)*.

Jogaby:

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{a\omega^2}{2}(M_2 + 2M_3)\cos\omega t.$$

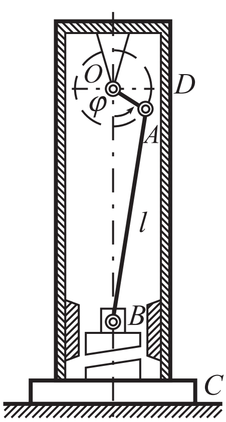
22.10-njy mesele. Deslapky meseläniň şertinden peýdalanyp, nasosy maýyşgaklyk koeffisiýenti c bolan maýyşgak esasda ornaşdyrylan diýip almaly we OA kriwoşipiň O okunyň wertikal ugurdaky hereket kanunyny tapmaly. O ok başlangyç pursatda statik deňagramlylyk ýagdaýda we oňa wertikal boýunça aşak ugrukdyrylan υ_0 başlangyç tizlik berlen. Wertikal aşak ugrukdyrylan x okuň hasap başlangyjy edilip O okuň statik deňagramlylyk ýagdaýyny almaly. Garşylyk güýçleri hasaba almaly däl.

Jogaby: 1) $\dfrac{c}{M_1 + M_2 + M_3} \neq \omega^2$ bolanda,

$$x_O = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos kt + \frac{\upsilon_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos\omega t, \text{ bu ýerde}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2 + M_3}}, \quad h = \frac{M_2 + 2M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \cdot \frac{a\omega^2}{2}.$$

2) $\dfrac{c}{M_1 + M_2 + M_3} = \omega^2$ bolanda, $x_O = \dfrac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t + \dfrac{h}{2\omega}\sin\omega t.$



22.9-njy surat

22.11-nji mesele. Metal kesýän gaýçynyň B polzunyna gozganýan pyçak berkidilen OAB kriwoşip-polzunly mehanizmden ybarat. Gozganmaýan pyçak C binýada (fundamente) berkidilen. Fundamentiň ýere edýän basyşyny kesgitlemeli. Kriwoşipiň uzynlygy r, massasy M_1, şatunyň uzynlygy l, B polzun bilen gozganýan pyçagyň massasy M_2, C fundament bilen D korpusyň massasy M_3. Şatunyň massasyny hasaba almaly däl. ω burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýan OA kriwoşipi birjynsly steržen diýip hasaplamaly (*22.9-njy surat*).

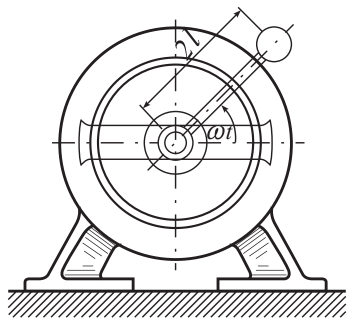
Görkezme. $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t}$ aňlatmany hatara dargatmaly we hatardaky $\frac{r}{l}$-e görä agzalaryň ikinji derejeden ýokary bolan hemme agzalaryny taşlamaly.

Jogaby:

$$N=(M_1+M_2+M_3)g+\frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1+2M_2)\cos\omega t+2M_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right].$$

22.12-nji mesele. Massasy M_1 bolan elektromotor ýylmanak gorizontal binýada (fundamente) berkitmän goýlan. Uzynlygy $2l$ we massasy M_2 bolan steržen bir ujy bilen motoryň okuna(walyna) göni burç bilen, sterženiň ikinji ujuna nokatlanç M_3 massaly ýük berkidilen; walyň burç tizligi ω-a deň.

1) motoryň gorizontal hereketini; 2) eger elektromotoryň korpusy fundamente hyrlar (boltlar) bilen berkidilen bolsa, olara täsir edýän iň uly gorizontal R süýnmäni kesgitlemeli (*22.10-njy surat*).



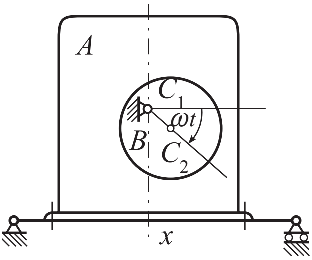
22.10-njy surat

Jogaby: 1) amplitudasy $\frac{l(M_2+2M_3)}{M_1+M_2+M_3}$ we periody $\frac{2\pi}{\omega}$ bolan garmoniki yrgyldyly hereket; 2) $R=(M_2+2M_3)l\omega^2$.

22.13-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine görä elektromotoryň okunyň (walynyň) korpusy binýada (fundamente) berkidilmedik elektromotor böküp duran ýagdaýynda burç tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: $\omega>\sqrt{\frac{(M_1+M_2+M_3)g}{(M_2+2M_3)l}}$.

22.14-nji mesele. Elektromotor ýygnalanda onuň B rotory C_1 aýlanyş okuna $C_1C_2=a$ aralykda ekssentrik ornadyrylan, bu ýerde C_1 – A statoryň massalar merkezi, C_2 bolsa - B rotoryň massalar merkezi. Rotor ω burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýar. Elektromotor statiki egilişi Δ bolan maýyşgak pürsüň (balkanyň) ortasynda ornaşdyrylan; M_1– statoryň massasy, M_2 – rotoryň massasy. C_1 nokat başlangyç pursatda statiki deňagramlylyk ýagdaýynda dynçlykda



22.11-nji surat

duran diýip hasaplap, onuň wertikal boýunça hereketini kesgitlemeli. Garşylyk güýçleri hasaba almaly däl. x_1 okuň başlangyjy diýip C_1 nokadyň statiki deňagramlylyk ýagdaýyny almaly (*22.11-nji surat*).

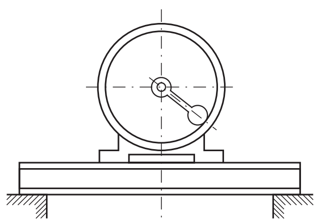
Jogaby: 1) $\sqrt{\dfrac{g}{\Delta}} \neq \omega$ bolanda,

$$x_1 = -\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin kt + \frac{h}{k^2-\omega^2}\sin \omega t$$

bu ýerden $k = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta}}$, $h = \dfrac{M_2}{M_1+M_2}a\omega^2$;

2) $\sqrt{\dfrac{g}{\Delta}} = \omega$ bolanda, $x_1 = \dfrac{h}{2\omega^2}\sin \omega t - \dfrac{h}{2\omega}t\cos \omega t.$

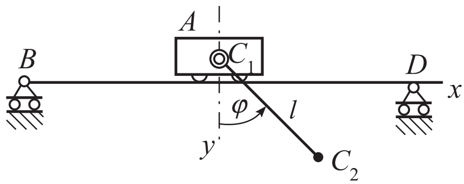
22.15-nji mesele. Massasy M_1 bolan elektromotor gatylygy c bolan pürse ornaşdyrylan. Motoryň çarhyna (walyna) onuň okundan l aralykda M_2 – massaly ýük ornaşdyrylan. Motoryň burç tizligi ω = const. Pürsüň massasyny we hereketde döreýän garşylygy hasaba alman, motoryň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasyny we onyň minutda aýlanyşlarynyň kritiki sanyny kesgitlemeli (*22.12-nji surat*).


22.12-nji surat

Jogaby: $a = \dfrac{M_2 l\omega^2}{c-(M_1+M_2)\omega^2}$, $\quad m_{kr} = \dfrac{30}{\pi}\sqrt{\dfrac{c}{M_1+M_2}}$.

22.16-njy mesele. Suratda BD pürsüň ortasynda sägindirilen (tormozlanan) M_1 massaly A kranyň teležkasy görkezilen. Teležkanyň C_1 massalar merkezinden C_2 ýük berkidilen l uzynlykdaky tanap (tros) asylan. Tros ýüki bilen wertikal tekizlikde garmoniki yrgyldaýar. 1) BD pürsi absolýut gaty hasaplap, wertikal reaksiýa güýçleriniň jemini; 2) maýyşgak diýip hasap edilýän pürsüň maýyşgak koeffisiýenti c deň bolsa, C_1 nokadyň wertikal boýunça hereket kanunyny kesgitlemeli.

Başlangyç pursatda deformirlenmedik pürs gorizontal ýagdaýda dynçlykda dur. Trosuň yrgyldylaryny kiçi hasaplap, $\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ diýip kabul etmeli. y_1 okuň başlangyjy diýip C_1 nokadyň statiki deňagramlylyk ýagdaýyny almaly. Trosyň massasy we pürsüň uzynlygyna görä teležkanyň ölçegleri kiçi bolany sebäpli teležkanyň ölçeglerini hasaba almaly däl (*22.13-nji surat*).



22.13-nji surat

Jogaby: 1) $R_y = (M_1 + M_2)\, g$;

2) C_1 nokat $y_1 = -\dfrac{(M_1 + M_2)g}{c} \cos \sqrt{\dfrac{c}{M_1 + M_2}}\, t$ kanun bilen erkin yrgyldaýar.

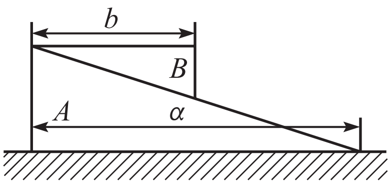
22.17-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerini peýdalanyp we BD pürsi absolýut gaty hasaplap: 1) relsleriň gorizontal reaksiýa güýçleriniň jemini tapmaly; 2) teležkany tormozlanmadyk hasap edip, A teležkanyň C_1 massalar merkeziniň x oky boýunça hereket kanunyny kesgitlemeli. Başlangyç pursatda C_1 nokat x okuň başlangyjynda dynçlykda dur. Tros $\varphi = \varphi_0 \cos\omega t$ kanun bilen yrgyldaýar.

Jogaby: 1) $R_x = -M_2 l \varphi_0 \omega^2 \cos\omega t$; 2) C_1 nokadyň amplitudasy $\dfrac{M_2}{M_1 + M_2} l\varphi_0$ we aýlaw ýygylygy ω bolan $x_1 = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} l\varphi_0 (1 - \cos\omega t)$ kanun bilen yrgyldyly hereket edýär.

22.18-nji mesele. Dynçlykda duran gaýygyň ortadaky hatarynda iki adam otyr. Olardan biri – massasy $M_1 = 50\ kg$ bolany saga – gaýygyň burnyna geçýär. Gaýygyň gozganman durmagy üçin $M_2 = 70\ kg$ massaly ikinji adam haýsy ugra we näçe aralyga süýşmeli? Gaýygyň uzynlygy 4 *m*. Suwuň gaýygyň hereketine görkezýän garşylygyny hasaba almaly däl.

Jogaby: Çepe, gaýygyň iz tarapyna 1,43 *m*.

22.19-njy mesele. Gorizontal tekizlikde ýatan birjynsly A prizmanyň üstüne birjynsly B prizma goýlan. Prizmaryň kese-kesigi gönüburçly üçburçluklardan ybarat bolup, A prizmanyň massasy B prizmanyň massasyndan üç esse köp. Prizmalar bilen gorizontal tekizligi ýylmanak hasap edip, B prizma A prizmanyň üstünden aşak düşüp, gorizontal tekizlige ýetende A prizmanyň haýsy aralyga süýşjegini kesgitlemeli (*22.14-nji surat*).



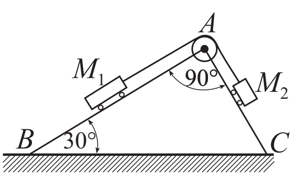
22.14-nji surat

Jogaby: $l = \dfrac{a - b}{4}$.

22.20-nji mesele. Deslap dynçlykda duran, uzynlygy 6m, massasy 2700 kg bolan gorizontal wagon-platforma boýunça iki işçi agyr guýmany platformanyň çep ujundan sag ujuna tarap tigirleýärler. Eger ýük we işçileriň umumy massasy 1800 kg bolsa, platforma haýsy tarapa we näçe aralyga süýşer? Platformanyň hereketine görkezilýän garşylyk güýçleri hasaba almaly däl.

Jogaby: Çep tarapa, 2,4 m aralyga süýşýär.

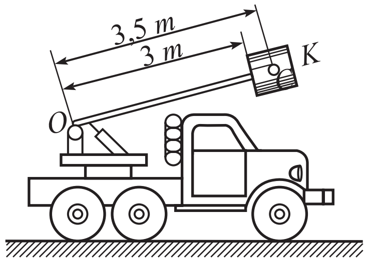
22.21-nji mesele. A blokdan geçýän, süýnmeýän ýüp bilen baglaşdyrylan M_1 we M_2 massaly iki sany M we M ýükler gönüburçly pahnanyň ýylmanak gapdal taraplary boýunça süýşýärler; pahna BC esasy bilen gorizontal ýylmanak tekizlige daýanyp dur. M_1 ýük $h = 10$ sm aşak düşende pahnanyň gorizontal tekizligi boýunça näçe süýşjegini tapmaly. Pahnanyň massasy $M = 4M_1 = 16M_2$; ýüpüň we blogyň massasyny hasaba almaly däl (*22.15-nji surat*).



22.15-nji surat

Jogaby: Pahna sag tarapa 3,77 sm süýşýär.

22.22-nji mesele. Köçedäki elektrik çyralaryny bejermede ulanylýan gozganýan aýlanma kran massasy 1 t bolan awtomobile ornaşdyrylan. L steržene berkidilen K kejebe suratyň tekizligine perpendikulýar bolan O gorizontal okuň daşynda aýlanyp bilýär. Başlangyç pursatda gorizontal ýagdaýda bolan kran we awtomobil dynçlykda dur. Kran 60° aýlanan bolsa, tormozsyz goýlan awtomobiliň süýşüsini kesgitlemeli. Birjynsly 3 *m* uzynlykdaky L sterženiň massasy 100 *kg*, K kejebäniňki bolsa 200 *kg*. K kejebäniň C massalar merkezi O okdan OC=3,5 *m* aralykda dur. Herekete görkezilýän garşylyklary hasaba almaly däl (*22.16-njy surat).*



22.16-njy surat

Jogaby: Sag tarapa 32,7 *sm*.

23. MADDY ULGAMYŇ HEREKET MUKDARLARYNYŇ BAŞ WEKTORYNYŇ ÜÝTGEMEGI BARADA TEOREMA

23.1. Maddy ulgamyň hereket mukdarlarynyň baş wektorynyň üýtgemegi barada teorema. Mysaly meseleler

Mehaniki sistema asyl nusgada berlen. Bütin sistemanyň hereket mukdarynyň baş wektoryny $\overline{Q}$ bilen belgiläp, oňa hereket mukdarynyň baş wektory diýilýär we aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$\overline{Q} = \sum m_k \bar{\upsilon}_k . \qquad (23.1)$$

(23.1) formulany mehaniki sistemanyň k nokady üçin ýazyp, k indeksi ähli nokatlar üçin ýaýradýarys we deňlemeleri jemläp aşakdakyny alarys:

$$\frac{d(\sum m_k \bar{\upsilon}_k)}{dt} = \sum \overline{F}_k^{(d)} + \sum \overline{F}_k^{(i)} .$$

$\sum \overline{F}_k^{(i)} = 0.$ $\sum \overline{F}_k^{(d)} = \overline{R}^{(d)}$ – daşky güýçleriň baş wektorydygyny belläp, ahyrky deňligi aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^{(d)} \qquad (23.2)$$

Şu deňlik, mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň baş wektorynyň üýtgemesini aňladýan teoremadyr.

Teorema: ***Mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň baş wektoryndan wagta görä alnan önüm daşky güýçleriň baş wektoryna deňdir.***

Teoremany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$d\overline{Q} = \overline{R}^{(d)}dt = d\overline{S}\,. \tag{23.3}$$

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \overline{R}^{(d)}dt = \overline{S}\,. \tag{23.4}$$

$[t_0; t]$ wagt aralygyndaky daşky güýçleriň baş wektorynyň doly impulsyny $\overline{S}$ bilen belgiledik.

Diýmek, *mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň baş wektorynyň belli wagt aralygyndaky üýtgemegi daşky güýçleriň baş wektorynyň şol wagt aralygyndaky doly impulsyna deňdir.*

(23.4) formulany skalýar görnüşde ýazalyň:

$$Q_x - Q_{0x} = S_x, \qquad x \to y \to z \tag{23.5}$$

Hereket mukdarynyň saklanma kanunlary:

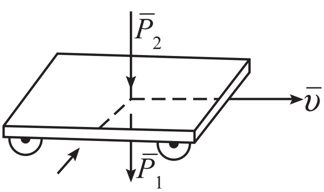
1. Eger $\overline{R}^{(d)} = 0$ bolsa, onda (23.4)-den $\Rightarrow$

$$\overline{Q} = \overline{Q}_0 = \overline{const}. \tag{23.6}$$

2. Eger $R_x^{(d)} = 0$ bolsa, onda (23.5)-den $\Rightarrow$

$$Q_x = Q_{0x} = const. \tag{23.7}$$

Mysaly meseleler



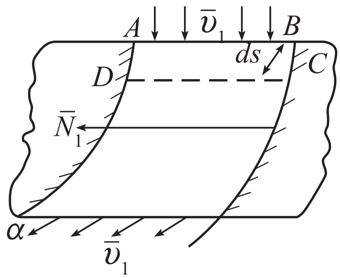
23.1-nji surat

23.1-nji mesele. Agramy 240 *kg* araba υ = 3,6 *km/sag* tizlik bilen gönüçyzykly hereket edýär (*23.1-nji surat*). 50 *kg* agramly adam arabanyň hereket edýän ugruna perpendikulýar ugur boýunça onuň üstüne bökýär. Arabanyň adam bilen bilelikdäki tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi. Araba 240 *kg* öz agramy we adam bökenden soň onuň 50 *kg* agramy täsir edýär. Bu güýçler hereket okuna perpendikulýar. Şonuň üçin $Q = Q_0 = const$ ýa-da

$$\frac{P_1}{g}\upsilon = \frac{P_1 + P_2}{g}\upsilon_1, \qquad \upsilon_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2}\upsilon = 2{,}98\ {}^{km}\!/_{sag}.$$

23.2-nji mesele. Tizligi $\upsilon = 200\ sm/s$ bolan suw gorizont bilen 90° burç emele getirip, üýtgeýän kesikli, wertikal tekizlige görä simmetrik kanala akýar. Suwuň girýän ýerinde kanalyň kesiginiň meýdany 200 sm^2. Suwuň çykýan ýerindäki tizligi $\upsilon_1 = 400\ sm/s$ bolup, gorizont bilen $\alpha_1 = 30°$ burç emele getirýär. Suwuň diwara täsir etmeginden döreýän reaksiýanyň gorizontal düzüjisini tapmaly (*23.2-nji surat*).



23.2-nji surat

Çözülişi. *dt* wagtda kanala girýän suwuň massasyny, ýagny *ABCD* göwrümdäki suwuň massasyny *dm* bilen belgiläliň. Onda $dm = \frac{\gamma}{g}\sigma ds$. Bu ýerde γ – suwuň udel agramy ($\gamma = 1$); σ – kesigiň meýdany ($\sigma = 200\ sm^2$); $ds = BC = \upsilon_0 dt$.

Kanala *dt* wagtda girýän suw çykýan suwa deňdir. Şonuň üçin, çykýan suwuň massasy $dm_1 = dm$. Seredýän suwumyzyň göwrümine, hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany ulanalyň.

dt wagtda kanaldan akýan suwuň hereket mukdarynyň üýtgemeginiň gorizontal oka bolan proýeksiýasy

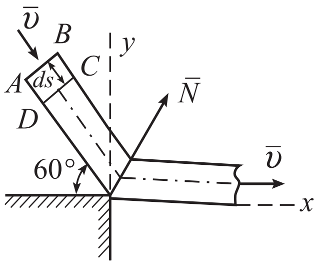
$$d\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kx} = \upsilon_1 \cos 30° dm = \upsilon_1 \cos 30° \frac{\gamma}{g}\sigma \upsilon_0 dt.$$

Bu ýerden

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kx}\right) = \upsilon_1 \cos 30° \frac{\gamma}{g}\sigma \upsilon_0.$$

Bu kanala täsir edýan güýjüň gorizontal oka bolan proýeksiýalarynyň jemine deňdir. Şonuň üçin,

$$N_x = \upsilon_1 \cos 30° \frac{\gamma}{g}\sigma \upsilon_0 = 14{,}1 kg.$$



23.3-nji surat

23.3-nji mesele. Diametri 20 *sm* bolan turbanyň oky gorizontal tekizlikde ýatyr (*23.3-nji suratda ýokarsyndan görnüşi berlen*). Turbadan 400 *sm/s* tizlik bilen suw akýar. Turba girýän suwuň tizligi çykýan suwuň tizligi bilen 60° burç emele getirýär. Turbanyň egrelýän ýerindäki direge bolan goşmaça basyşy tapmaly.

Çözülişi. *dt* wagtda turba girýän suwuň göwrümini *ABCD* bilen belgiläliň. Onda girýän suwuň massasy $dm = \frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon dt$,

bu ýerde γ – suwuň udel agramy; σ – turbanyň kesiginiň meýdany, $\sigma = \pi \cdot 10^2$; $ds = \upsilon dt$.

Turbadan çykýan suwuň massasy oňa girýän suwuň massasyna deňdir. Turbadan akýan suwuň hereket mukdarynyň üýtgemeginiň *x* we *y* oklara bolan proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$d\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kx} = \upsilon dm - \upsilon\cos 60^\circ dm = \frac{1}{2}\upsilon dm = \frac{1}{2}\upsilon\frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon dt;$$

$$d\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kx} = -\upsilon\sin 60^\circ dm = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon\frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon dt.$$

Hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany ulanyp, alarys:

$$N_x = \frac{d\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kx}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon^2; \quad N_y = \frac{d\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{ky}}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon^2.$$

Onda

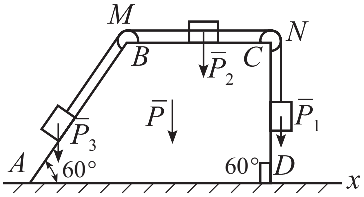
$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon^2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\gamma}{g}\sigma\upsilon^2$$

ýa-da

$$N = \frac{\pi}{980}\cdot 100 \cdot 160000g = \frac{314\cdot 8}{49}kg = 51{,}2kg.$$

23.4-nji mesele. $P_1 = 20$ *kg*, $P_2 = 15$ *kg*, $P_3 = 10$ *kg* agramly ýükler *M* we *N* bloklardan geçirilip, agramsyz we süýnmeýän ýüpe daňlan.

P_1 agramly ýük 1 *m* aşak süýşende P_2 agramly ýük $P = 400$ *kg* agramly kesik dörtburçly *ABCD* piramidanyň *BC* üsti boýunça çepden saga süýşýär. P_3 agramly ýük bolsa, piramidanyň *AB* gapdal üsti boýunça ýokaryk süýşýär. *ABCD* piramidanyň gorizontal tekizlik boýunça süýşüşini kesgitlemeli (*23.4-nji surat*).



23.4-nji surat

Çözülişi. Meseläniň şertine görä

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{(d)} = 0.$$

Başlangyç momentde sistema hereketsiz ýagdaýda bolany üçin $(\upsilon_{kx})_0$. Onda hereket mukdarynyň saklanma kanuny esasynda

$$\frac{P_1}{g}\frac{dx_1}{dt} + \frac{P_2}{g}\frac{dx_2}{dt} + \frac{P_3}{g}\frac{dx_3}{dt} + \frac{P}{g}\frac{dx}{dt} = 0$$

ýa-da

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 + P dx = 0.$$

Bu deňligi integrirläp, *x*-i kesgitläris:

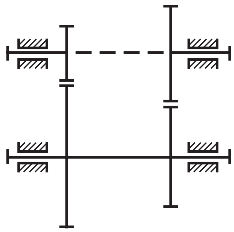
$$P_1 \int_0^x dx_1 + P_2 \int_0^{1+x} dx_2 + P_3 \int_0^{\cos 60^\circ + x} dx_3 + P \int_0^x dx = 0;$$

$$P_1 x + P_2 (1 + x) + P_3 \left(\frac{1}{2} + x\right) + Px = 0,$$

$$x = -\frac{P_2 + \dfrac{P_3}{2}}{P_1 + P_2 + P_3 + P} = -0,14 \; sm.$$

23.2. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

23.5-nji mesele. Suratda görkezilen işleýän tizlikleriň reduktorynyň dört sany aýlanýan dişli tigirleriniň her biriniň agyrlyk merkezi aýlanma okunda ýatsa, reduktoryň hereket mukdarlarynyň baş wektoryny kesgitlemeli (*23.5-nji surat*).

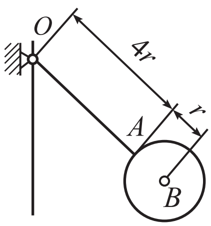


23.5-nji surat

Jogaby: Hereket mukdarlarynyň baş wektory nola deň.

23.6-njy mesele. Deslapky meselede reduktora goýlan daşky güýçleriň islendik çäkli wagt aralygynda döreýän impulslarynyň jemini kesgitlemeli.

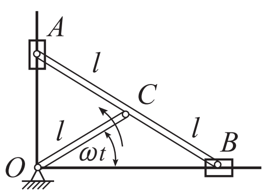
Jogaby: Daşky güýçleriň impulslarynyň jemi nola deň.



23.6-njy surat

23.7-nji mesele. Massasy M, uzynlygy $4r$ bolan birjynsly OA sterženden we M massaly, r radiusly birjynsly B diskden düzülen maýatnigiň hereket mukdarlarynyň baş wektoryny tapmaly. Maýatnigiň berlen pursatdaky burç tizligi ω-a deň (*23.6-njy surat*).

Jogaby: Hereket mukdarlarynyň baş wektory OA steržene perpendikulýar ugrukdyrylan we mukdary aşakdaka deň: $(2M_1 + 5M_2)r\omega$.

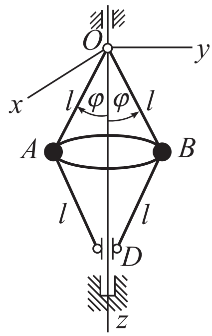


23.7-nji surat

23.8-nji mesele. Ellipsograf mehanizminiň hereket mukdarlarynyň baş wektorynyň bahasyny we ugruny kesgitlemeli. Bu ýagdaýda kriwoşipiň massasy M_1, ellipsografyň AB çyzgyjynyň massasy M_1, A we B muftalaryň her biriniň massasy M_2. $OC=AC=CB=l$ ölçegler berlen. Kriwoşipiň we çyzgyjyň massalar merkezleri olaryň ortasynda ýerleşen. Kriwoşip tizlik bilen aýlanýar (*23.7-nji surat*).

Jogaby: Baş wektoryň bahasy $Q = \dfrac{\omega l}{2}(5M_1 + 4M_1)$; baş wektoryň ugry kriwoşipe perpendikulýar.

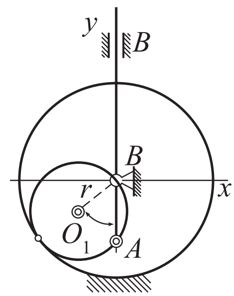
23.9-njy mesele. Wertikal okuň daşynda tizlenip aýlanýan merkezden gaçma regulýatoryň hereket mukdarynyň baş wektoryny kesgitlemeli. Munda φ burçlar $\varphi=\varphi(t)$ kanun boýunça üýtgeýär we ýokarky sterženler aýlanyp *A* we *B* şarlary göterýärler. Sterženleriň uzynlyklary: $OA=OB=AD=BD=l$. M_2 massaly *D* muftanyň massalar merkezleri *z* okda ýatyr. *A* we *B* şarlaryň her birini massasy M_1 bolan maddy nokatlar diýip hasaplamaly. Sterženleriň massasyny hasaba almaly däl (*23.8-nji surat*).



23.8-nji surat

Jogaby: $Q_x=Q_y=0, Q_z=-2(M_1+M_2)l\dot{\varphi}\sin\varphi$, bu ýerde *Q*- hereket mukdarynyň baş wektory; *yz* tekizlik regulýatoryň tekizligi bilen gabat gelýär.

23.10-njy mesele. Suratda görkezilen mehanizmdäki hereketlenýän tigiriň radiusy *r,* massasy *M* we massalar merkezi *O* nokatda. Gönüçyzykly *AB* sterženiň massasy *kM* bolup, onuň massalar merkezi sterženiň ortasynda ýerleşýär. OO_1 kriwoşip *O* okuň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Kriwoşipiň massasyny hasaba alman, ulgamyň hereket mukdarynyň baş wektoryny kesgitlemeli (*23.9-njy surat*).



23.9-njy surat

Jogaby: Ulgamyň hereket mukdarynyň baş wektorynyň koordinata oklardaky proeksiýalary: 1) *Ox* oka: $-Mr\omega\cos\omega t$; 2) *Oy* oka: $Mr\omega(1+2k)\sin\omega t$.

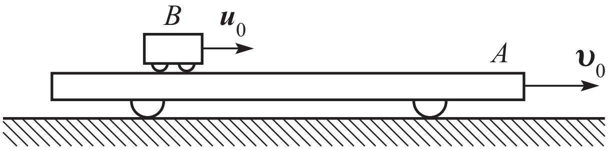
23.11-nji mesele. Topuň nilininiň massasy 11 *t*. Snarýadyň massasy 54 *kg*. Snarýadyň niliň agzyndan atylyp çykyş tizligi υ_0= 900 *m/s*. Snarýadyň niliň agzyndan atylyp çykyş pursatynda top nilininiň erkin suratda yza depiş tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: Top nilininiň yza depiş tizligi 4,42 *m/s* bolup, snarýadyň hereketine garşy tarapa ýönelýär.

23.12-nji mesele. 15 *m/s* tizlik bilen uçup barýan 12 *kg* massaly granat howada ikä bölünýär. Massasy 8 *kg* bolan bölegiň tizligi hereketiň ugruna 25 *m/s* çenli artýar. Ikinji bölegiň tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: 5 *m/s* bolup, ugry snarýadyň hereketine garşy bolýar.

23.13-nji mesele. Inersiýasy boýunça υ_0 tizlik bilen hereketlenýän A gorizontal platforma boýunça B arabajyk u_0 hemişelik tizlik bilen süýşýär. Bir pursatda arabajyk tormozlanýar. Platformanyň massasy M, arabajygyň massasy m bolsa, arabajyk togtanyndan soň platformanyň arabajyk bilen umumy υ tizligini kesgitlemeli (*23.10-njy surat*).



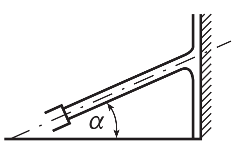
23.10-njy surat

Jogaby: $\upsilon = \upsilon_0 + \dfrac{m}{M+m} u_0 .$

23.14-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerini saklap, B arabajyk tormozlanan pursatyndan başlap, A platforma boýunça togtaýança haýsy s aralygy geçer we näçe τ wagt sarp eder? Tormozlama wagtynda mukdary hemişelik F garşylyk güýji döreýär diýip hasap etmeli.

Görkezme. Arabajygyň hereketiniň differensial deňlemesinde $M\upsilon + m(u+\upsilon) = \text{const}$ aňlatmadan peýdalanmaly, bu ýerde u we υ – üýtgeýän tizlikler.

Jogaby: $s = \dfrac{1}{2} \dfrac{mM}{m+M} \cdot \dfrac{u_0^2}{F}, \quad \tau = \dfrac{mM}{m+M} \cdot \dfrac{u_0}{F}.$

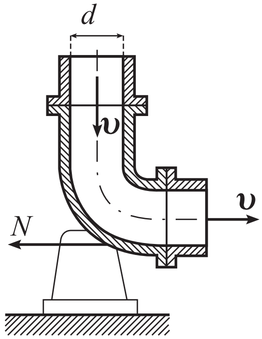


23.11-nji surat

23.15-nji mesele. Ot söňdüriji şlanganyň kese-kesigi 16 sm^2 bolan ujundan suw 8 m/s tizlik bilen gorizonta $\alpha = 30°$ burç astynda çüwdürilýär. Suw akymynyň şekiline agyrlyk güýjüniň görkezýän täsirini hasaba alman, suw akymynyň wertikal diwara edýän basyşyny kesgitlemeli. Suw bölejikleri diwara degenlerinde diwar boýunça n tizlik alýar diýip hasaplamaly (*23.11-nji surat*).

Jogaby: 88,8 N.

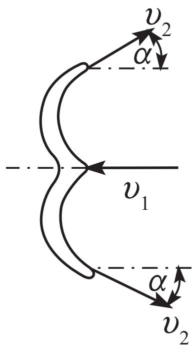
23.16-njy mesele. Diametri d = 300 mm bolan tirsekli turbada suw υ = 2 m/s tizlik bilen akanda, suwuň hereketiniň turbanyň tirsegindäki direge edýän basyşynyň N gorizontal düzüjisini kesgitlemeli (*23.12-nji surat*).



23.12-nji surat

Jogaby: $N = 284$ *N*.

23.17-nji mesele. Turbinanyň tigiriniň gozganmaýan küregine suw akymynyň döredýän basyşynyň gorizontal düzüjisini kesgitlemeli. Harçlanan suwuň göwrümi Q, dykyzlygy γ, suwuň kürege geliş tizligi υ_1 gorizontal ugrugan, suwuň çykyş tizligi υ_2 gorizont bilen α burçy emele getirýär (*23.13-nji surat*).



23.13-nji surat

Jogaby: $N = \gamma Q(\upsilon_1 + \upsilon_2 \cos\alpha)$.

24. MADDY ULGAMYŇ HEREKET MUKDARLARYNYŇ BAŞ MOMENTINIŇ (KINETIK MOMENTINIŇ) ÜÝTGEMEGI BARADA TEOREMA. GATY JISIMIŇ AÝLANMA OKUNA GÖRÄ KINETIK MOMENTI WE OKUŇ DAŞYNDA AÝLANMA HEREKETINIŇ DIFFERENSIAL DEŇLEMESI

24.1. Maddy ulgamyň hereket mukdarlarynyň baş momentiniň (kinetik momentiniň) üýtgemegi barada teorema. Mysaly meseleler

Mehaniki sistema asyl nusgada berlen. Ulgamyň k nokady üçin dinamikanyň esasy deňlemesini ýazyp, k indeksi ähli nokatlar üçin ýaýradýarys we deňlemeleri jemläp alýarys:

$$\frac{d}{dt}\sum \bar{r}_k \times m_k \overline{\upsilon}_k = \sum \bar{r}_k \times \overline{F}_k^{(d)} + \sum \bar{r}_k \times \overline{F}_k^{(i)}. \tag{24.1}$$

Belgileri girizeliň we käbir mälim maglumatlardan peýdalanalyň:

$\overline{K}_0 = \sum \bar{r}_k \times m_k \overline{\upsilon}_k$ – mehaniki sistemanyň gozganmaýan O merkeze görä hereke mukdarlarynyň baş wektor momenti. Kähalatda bu ululyga sistemanyň **kinetiki momenti** hem diýilýär.

$\overline{M}_0^{(d)} = \sum \bar{r}_k \times \overline{F}_k^{(d)}$ – O merkeze görä daşky güýçleriň baş momenti.

$\overline{M}_0^{(i)} = \sum \bar{r}_k \times \overline{F}_k^{(i)} = 0$ – O merkeze görä içki güýçleriň baş momenti nola deň.

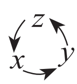
(24.1) formulany täzeçe aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0^{(d)}. \tag{24.2}$$

Teorema: ***Mehaniki sistemanyň haýsy-da bolsa gozganmaýan merkeze görä kinetik momentinden wagta görä alnan önüm bu sistema täsir edýän daşky güýçleriň şol merkeze görä alnan baş momentine deňdir.***

(24.2) formulany koordinata oklaryna proýektirläliň:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_{Ox}^{(d)}, \tag{24.3}$$



Mehaniki sistemanyň oka görä kinetik momentinden wagta görä alnan önüm daşky güýçleriň şol oka görä baş momentine deňdir.

Hususy hallar

1. Eger $\overline{M}_0^{(d)} = 0$ bolsa, onda (24.2) formuladan

$$\overline{K}_0 = \overline{const}. \tag{24.4}$$

2. Eger $M_{0x}^{(d)} = 0$ bolsa, onda (24.3)-den alarys:

$$K_x = const. \tag{24.5}$$

(24.2) formulanyň başgaça düşündirilýän ýagdaýlary hem gabat gelýär. Kinematikadan belli bolşy ýaly $\frac{d\overline{K}_0}{dt}$ wektor $\overline{K}_0$ wektoryň ujunyň $\overline{\upsilon}$ tizligini aňladýar. Diýmek, $\overline{\upsilon} = \overline{M}_0^{(d)}$, ýagny ***sistemanyň***

kinetik momentiniň ujunyň tizligi daşky güýçleriň baş wektoryna deňdir.

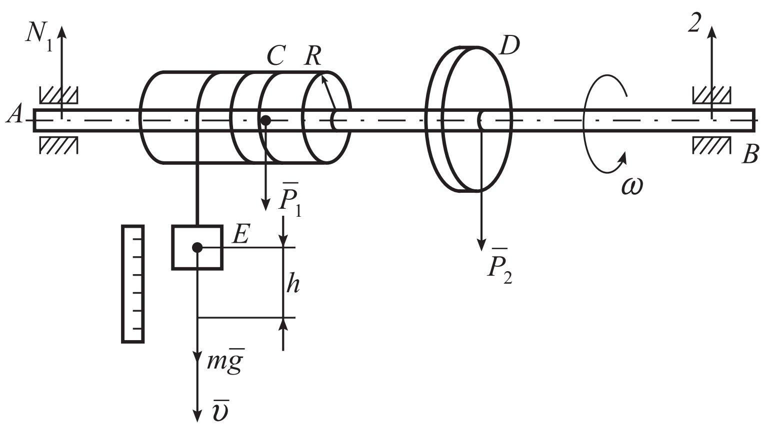
Bu netijä **Rezalyň teoremasy** diýilýär.

Subut etmezden ýene-de bir netijäni getireliň. Biz *Oxyz* sistemany gozganmaýan koordinatlar sistemasy diýip aldyk. Indi öňe hereket edýän $C_{x_1y_1z_1}$ sistemany alalyň. Bu ýerde *C* nokat sistemanyň massalar merkezi. *C* nokada görä (24.2) formula aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\frac{d\overline{K_C}}{dt} = \overline{M}_C^{(d)} \qquad (24.6)$$

Mysaly meseleler

24.1-nji mesele. *C*, *x*, *AB* çarha (wala) *R* radiusly *C* baraban berkidilen desganyň walynyň inersiýa momenti kesgitlenmeli *D* detal hem berkidilen (*24.1-nji surat*). Barabana saralan ýüpüň ujuna *m* massaly *E* ýük berkidilen. Barabanly walyň inersiýa momenti I_O, synag edilýän *D* detalyň agyrlyk merkezi walyň okunda ýerleşen. Başlangyç tizliksiz goýberilen ýük *t* wagtda *h* aralygy geçýär. Sürtülmäni hem-de howanyň garşylygyny hasaba alman detalyň *I* inersiýa momentini kesgitlemeli.



24.1-nji surat

Çözülişi. (24.3) formulalardan $AB = z$ ok üçin peýdalanýarys:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^{(d)}. \qquad (1)$$

Momenti diňe $m\bar{g}$ güýç berýär (beýleki güýçleriň momentleri nola deň): $M_z^{(d)} = mgR$.

K_z ulgamyň hereket mukdarlarynyň momentleriniň jemini aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$K_z = (I + I_0)\omega_z + m\upsilon R = (I + I_0 + mR^2)\frac{\upsilon}{R},$$

bu ýerde $\upsilon = \omega R = \omega_z R$ – ýüküň tizligi; ω_z – walyň burç tizligi. Bahalary (1) deňlemede goýalyň:

$$\frac{1}{R}(I + I_0 + mR^2)\frac{d\upsilon}{dt} = mgR,$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = a \text{ bolany üçin } \frac{a}{R}(I + I_0 + mR^2) = mgR,$$

$$\Rightarrow \; a = \frac{mgR^2}{I + I_0 + mR^2} = const. \tag{2}$$

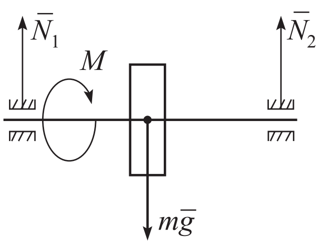
Ýük başlangyç tizliksiz deňölçegli hereket edeni üçin onuň geçen ýoly

$$h = \frac{at^2}{2}. \tag{3}$$

$$\textbf{(2)} \quad \Rightarrow \frac{2h}{t^2} = \frac{mgR^2}{I + I_0 + mR^2} \Rightarrow I = \frac{mgR^2 t^2}{2h} - I_0 - mR^2 =$$

$$= mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) - I_0.$$

Jogaby: $I = mR^2\left(\dfrac{gt^2}{2h} - 1\right) - I_0.$



24.2-nji surat

24.2-nji mesele. ω_0 başlangyç burç tizlik bilen aýlanýan I inersiýa momentli mahowik (agyr tigir), oka görä $M=k\omega^2$ (bu ýerde k-üýtgemeýän koeffisiýent) garşylyk momenti bilen tormozlanýar (*24.2-nji surat*). Haýsy wagtda mahowigiň burç tizligi iki esse kiçeler hem-de haýsy burça aýlanar?

Çözülişi. Mehaniki ulgamy mahowikli wal düzýär. Oňa mahowigiň agyrlyk güýji, diregleriň reaksiýa güýçleri we garşylyk güýçleriniň momenti täsir edýärler. z oka görä hereket mukdarlarynyň momentiniň üýtgemegi baradaky teoremadan peýdalanyp, alarys:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^{(d)}. \tag{1}$$

Bu ýerden $K_z = I\omega_z;\ M_z^{(d)} = -k\omega_z^2. \Rightarrow I\frac{d\omega_z}{dt} = -k\omega_z^2, \Rightarrow$

$$\frac{d\omega_z}{\omega_z^2} = -\frac{k}{l}dt. \tag{2}$$

Integrirläp we başlangyç şertlerden ($t_0=0$, $(\omega_z)_0 = \omega_0$) peýdalanyp, alarys:

$$\frac{1}{\omega_z} = \frac{k}{I}t + C_1 \ \Rightarrow \ C_1 = \frac{1}{\omega_0}. \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{k}{I}t. \tag{3}$$

Meseläniň şertinden peýdalanalyň: t_1 pursatda $(\omega_z)_1 = \dfrac{\omega_0}{2} \Rightarrow$ (3):

$$t_1 = \frac{I}{k\omega_0}. \tag{4}$$

$t_1 \rightarrow$ (3): $\Rightarrow \omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{\dfrac{k}{I}t + \dfrac{1}{\omega_0}} \ \Rightarrow \ d\varphi = \dfrac{dt}{\dfrac{k}{I}t + \dfrac{1}{\omega_0}}.$

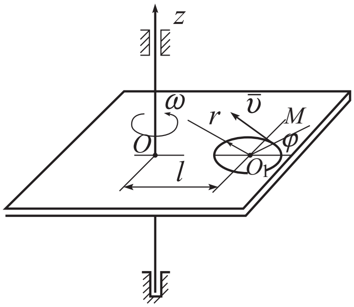
Integrirläp alýarys:

$$\varphi = \frac{I}{k}\ln\left(\frac{k}{I}t + \frac{1}{\omega_0}\right)\Big|_0^{t_1} = \frac{I}{k}\ln\frac{\dfrac{k}{I}t_1 + \dfrac{1}{\omega_0}}{\dfrac{1}{\omega_0}} = \frac{I}{k}\ln\left(\frac{kt_1\omega_0}{I} + 1\right).$$

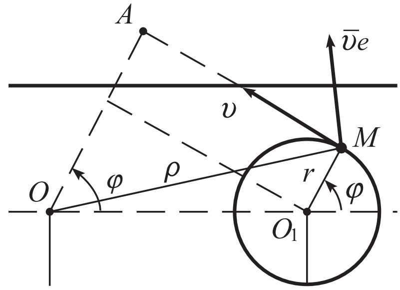
(24.12)-den t_1-iň bahasyny ahyrky deňlige goýup, mahowigiň aýlanma burçuny kesgitleýäris:

$$\varphi = \frac{I}{k}\ln\left(\frac{k\omega_0}{I}\frac{I}{k\omega_0} + 1\right) = \frac{I}{k}\ln 2.$$

24.3-nji mesele. Wertikal z okuň daşynda aýlanýan gorizontal plastinada r radiusly töwerek boýunça υ = const tizlik bilen m massaly M nokat hereket edýär. Töweregiň O_1 merkezi aýlanma okundan $O_1O = l$ aralykda ýerleşen. M nokadyň orny φ burç bilen kesgitlenýär. Plastinanyň oka görä inersiýa momenti I (*24.3-nji surat*). $\varphi_0=0$



24.3-nji surat



24.4-nji surat

plastinanyň burç tizligi $\varphi_0 = 0$. Plastinanyň burç tizligini φ burça baglylykda kesgitlemeli.

Çözülişi. Mehaniki ulgamy plastina we *M* nokat düzýär. Daşky güýçler bolan nokadyň agramy hem-de *O* nokatdaky reaksiýa güýji aýlanma *z* okuna görä moment bermeýärler. Diýmek, $M_z^{(z)} = 0, \Rightarrow$

$$K_z = K_{z0} \tag{1}$$

$\varphi = 0$ bahada $\omega_0 = 0$. $K_{z0} = m\upsilon(r + l)$;

$$K_{zP} = I\omega_z;$$

M nokadyň hereket mukdarynyň momentiniň $\overline{\upsilon}$ tizlikli hereket, $\overline{\upsilon}_{gç}$ tizlikli göçürme hereket diýen iki düzüjisi bar *(24.4-nji surat)*.

$$K_{zM} = m(\upsilon_{gç}\rho + \upsilon \cdot OA).$$

Bu ýerde $\upsilon_{gç} = \omega_z\rho$; $\rho = \sqrt{l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi}$; $OA = l\cos\varphi + r$.

Şeýlelikde: $K_{zM} = m[\omega_z(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi) + \upsilon(l\cos\varphi + r)]$

Ulgam üçin: $K_z = K_{zP} + K_{zM} = I\omega_z + m\,[\omega_z(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi)] +$ $+ \upsilon \cdot (l\cos\varphi\ +)] = I\omega_z + m\omega_z(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi) + m\upsilon\,(l\cos\varphi + r)$

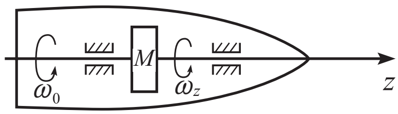
K_z we K_{z0} bahalary (1)-de goýup alarys:

$m\upsilon(r + l) = \omega_z[I + m(l^2 + r^2 + 2\,lr\cos\varphi] + m\upsilon(l\cos\varphi + r)$

ýa-da

$$\omega_2 = \frac{m\upsilon l(1 - \cos\varphi)}{I + m(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi)}.$$

24.4-nji mesele. Orbital kosmos stansiýasy baş merkezi inersiýa oky bolan z okuň daşyndan ω_0 burç tizligi bilan aýlanýar. z oka görä stansiýanyň inersiýa momenti I (*24.5-nji surat*). Stansiýanyň içinde başlangyç pursatda aýlanmaýan M mahowik ýerleşen. Aýlanma oka görä inersiýa momenti $I_M = 0{,}01\, I$ bolan mahowigiň aýlanma oky z ok bilen gabat gelýär. Stansiýanyň burç tizligini $\omega_1 = 0{,}5\omega_0$ baha çenli kiçeltmek üçin mahowige haýsy ω_{gr} görä burç tizligi bermeli?



24.5-nji surat

Çözülişi. Mehaniki ulgam stansiýa bilen mahowikden düzülýär. Daşky güýçler bolmalygy üçin aşakdaky deňligi ýazýarys:

$$K_{z_0} = K_z.$$

Mahowigiň göräli dynçlyk ýagdaýy üçin

$$K_{z0} = I_z\, \omega_0 = (I + I_M)\omega_0.$$

Mahowik aýlananda

$$K_z = I\,\omega_1 + I_M\ (\omega_1 + \omega_{gr}).$$

$\omega_1 = 0{,}5\omega_0$ şerti göz öňünde tutup, bahalary başdaky deňlikde goýup meseläniň jogabyny alarys:

$$\omega_{gr} = \frac{(I + I_M)\omega_0}{2I_M} = \frac{(I + 0{,}01I)}{2 \cdot 0{,}01I} = 50{,}5\omega_0.$$

$$\omega_{gr} = 50{,}5\ \omega_0.$$

24.2. Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketiniň differensial deňlemesi. Mysaly meseleler

Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketiniň differensial deňlemesi aşakdaky görnüşe eýedir:

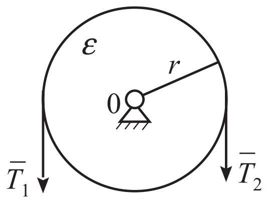
$$I_z\ddot{\varphi} = M_z. \tag{24.7}$$

Bu deňlemede $I_z = const$ – jisimiň oka görä inersiýa momenti; $\dot{\varphi} = \omega$ – jisimiň burç tizligi; $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ jisimiň burç tizlenmesi; $\sum m_z(\overline{F}_k) = M_z^{(d)}$=$Mz$ – daşky güýçleriň oka görä baş momenti.

***Hususy hallarara seredeliň*:** (24.7) formuladan:

1. Eger $M_z = 0$ bolsa, onda $\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ – jisim deňölçegli aýlanýar.

2. Eger $M_z = const$ bolsa, onda $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \text{const}$ – deňüýtgeýän burç tizligi bilen aýlanýar.



24.6-njy surat

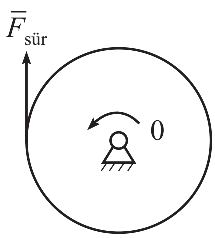
24.5-nji mesele. r radiusly we P=3,27 *kg* agramly birjynsly aýlanýan A şkiwi dartýan we dartylýan gaýyşlaryň dartylyşlary T_1 = 10,1 *kg* we T_2 = 5,05 *kg* deň. Şkiwiň ε = 1,5 s^{-2} burç tizlenmesi bilen aýlanmagy üçin garşylyk güýçleriniň momenti nämä deň bolmaly? Şkiw birjynsly disk (*24.6-njy surat*).

Çözülişi. $I_z\ddot{\varphi} = M_z$ deňlemäniň esasynda ýazalyň:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = T_1 r - T_2 r - m_0(\overline{R}), \quad m_0(\overline{R}) = T_1 r - T_2 r - I\varepsilon.$$

$$I = \frac{P}{2g} r^2 \text{ – diskiň inersiýa momenti.}$$

$$m_0(\overline{R}) = -\frac{P}{2g} r^2 \varepsilon + (T_1 - T_1) r = 1kgm.$$



24.7-nji surat

24.6-njy mesele. Diametri 10 *sm* we agramy 1 *kg* bolan birjynsly tegelek disk 1 minutda 100 aýlaw edýär. Diskiň töwerek gyrasyna goýlan üýtgemeýän sürtülme güýji diskiň aýlanmasyny 1 minutyň dowamynda durzup bilýär. Sürtülme güýjüniň ululygyny kesgitlemeli (*24.7-nji surat*).

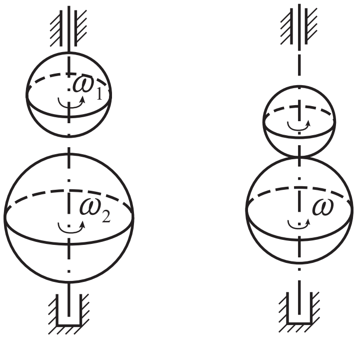
Çözülişi. Diskiň burç tizligini ω bilen belgilesek, onda $\omega = \frac{100 \cdot 2\pi}{60} = \frac{10 \cdot \pi}{3} s^{-1}$. Burç tizlenmesi $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{10\pi}{180} s^{-2}$. Aýlanýan gaty jisimiň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$I\frac{d\omega}{dt} = F_{\text{sür}}r.$$

Diskiň inersiýa momenti: $I = \dfrac{25000}{980 \cdot 2} = \dfrac{2500}{196} Gsm^2$;

$$F_{s\ddot{u}r} = \frac{I\varepsilon}{r} = \frac{25000 \cdot 31,4}{196 \cdot 180 \cdot 5} = \frac{785}{1764} = 0,44G.$$

24.7-nji mesele. Iki sany gaty jisim biri-birine bagly bolman, bir okuň daşynda ω_1 we ω_2 burç tizlikleri bilen aýlanýarlar. Gaty jisimleriň oka görä inersiýa momentleri I_1 we I_2 deň. Eger bu jisimler aýlanýan wagtlary birikseler, nähili burç tizligi bilen aýlanarlar (*24.8-nji we 24.9-njy suratlar).*



24.8-nji surat *24.9-njy surat*

Çözülişi. 24.8-nji surat jisimleriň birinji ýagdaýy, 24.9-njy surat bolsa jisimleriň birleşýän ýagdaýy üçindir. Bu meseläni çözmek üçin ulgamyň kinetik momentiniň saklanmak kanunyny ulanmaly.

Birinji ýagdaý üçin sistemanyň kinetik momenti: $K_{z0}=I_1\omega_1+I_2\omega_2$.

Ikinji ýagdaý üçin: $K_z= (I_1 + I_2)\omega$,

$K_z= K_{z0}=$ const bolany üçin alarys: $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$.

Bu ýerden $\omega = \dfrac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$.

24.8-nji mesele. Dynçlyk ýagdaýynda duran jisim $\overline{M}$ aýlaýjy momentiň täsiri bilen gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýar. Jisim aýlananda onuň burç tizliginiň kwadratyna proporsional bolan $M_1 = \alpha\omega^2$ garşylyk güýç momenti ýüze çykýar. Eger jisimiň aýlanma oka görä inersiýa momenti I deň bolsa, onuň burç tizliginiň wagta görä üýtgeýşini kesgitlemeli.

Çözülişi. Kinetik momentiň üýtgeýşi hakyndaky teoremanyň esasynda şeýle ýazyp bileris:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega^2 \quad \text{ýa-da} \quad I\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = dt.$$

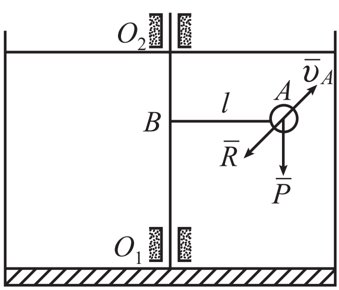
Deňlemäni integrirläp, alarys:

$$t = I\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = \frac{I}{\alpha}\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\frac{M}{\alpha} - \omega^2} = \frac{I}{2\alpha}\ln\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \omega};$$

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \omega} = e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{I}t}.$$

Bu deňlemeden ω taparys: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\,\frac{e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{I}t}}{1 + e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{I}t}}$.

24.9-njy mesele. Suwuklykdan doly gabyň içinde $AB = l$ uzynlygy bolan steržene berkidilen m massaly şarjagaz O_1O_2 okuň töwereginde $\overline{\omega}_0$ başlangyç burç tizlikli aýlanyp başlaýar. Suwuklygyň $R = \alpha m\omega$ garşylyk güýji sterženiň burç tizliginiň birinji derejesine proporsional bolsa, näçe wagt geçenden soň aýlanma burç tizligi başdakysyndan iki esse kiçi bolar? $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ bolanda steržen näçe öwrüm eder? Sterženiň massasyny hasaba almaly däl. Şarjagazyň massasy onuň merkezine ýygnanan diýip göz öňünde tutmaly (*24.10-njy surat*).



24.10-njy surat

Çözülişi. Gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýan jisimiň differensial deňlemesini düzeliň:

$$ml\frac{d\omega}{dt} = -Rl = -\alpha ml\omega \qquad \text{ýa-da} \qquad \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l}dt$$

Integrirläp alarys: $\ln\omega - \ln\omega_0 = -\frac{\alpha}{l}t$

Bu deňlemeden $\omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}$. (1)

Eger $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ bolsa, onda $\ln\frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{l}t;$ $\quad t = \frac{l}{\alpha}\ln 2.$

Indi (1) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň: $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}$.

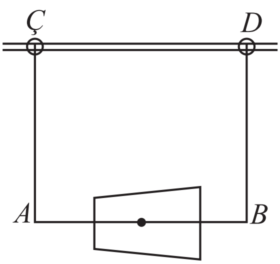
Bu ýerden $d\varphi = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}dt$. Integrirläp alarys:

$$\varphi = \omega_0 \int_0^{\frac{l}{\alpha}\ln 2} e^{-\frac{\alpha}{l}t}dt = -\omega_0 \frac{l}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{l}t}dt\Big|_0^{\frac{l}{\alpha}\ln 2} = -\frac{\omega_0 l}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{l}\cdot\frac{l}{\alpha}\ln 2} + \omega_0\frac{l}{\alpha} =$$

$$= -\frac{\omega_0 l}{2\alpha} + \frac{\omega_0 l}{\alpha} = \frac{\omega_0 l}{2\alpha}$$

Onda $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 l}{4\pi\alpha}$ (aýlaw).

24.10-njy mesele. Agramy P *kg* bolan jisimiň agyrlyk merkezinden geçýän AB oka görä inersiýa momentini anyklamak üçin, bu ýük AC we BD ýüpler bilen gozganmaýan gorizontal CD pürsden asylan (*24.11-nji surat*). Jisim yrgylladylanda yrgyldynyň bir geriminiň wagty T bolup, $AC=BD=h$ bolsa, I inersiýa momenti nämä deň bolar?



24.11-nji surat

Çözülişi. Bir yrgyldynyň periodyna iki gerim degişli bolany üçin, $T_f = 2T$ bahany

$I_z = M\rho^2 = Mga\left(\frac{T_f^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g}\right) = Pa\left(\frac{T_f^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g}\right)$ formulda goýup, I inersiýa momentini tapýarys: $I = hP\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$.

24.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

24.11-nji mesele. Massasy 50 *kg* we radiusy R= 30 *sm* bolan birjysly tegelek disk öz okunyň daşynda minutda 60 gezek aýlanyp, gorizontal tekizlikde typman tigirlenýär. Diskiň hereket mukdarynyň:

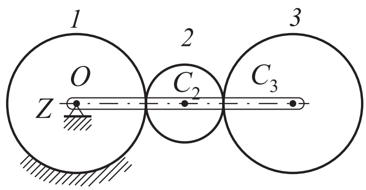
1) hereket tekizligine perpendikulýar bolan diskiň merkezinden geçýän oka, 2) pursat okuna görä baş momentini hasaplamaly.

Jogaby: 1) 14,1 $kg \cdot m^2/s$; 2) 42,3 $kg \cdot m^2/s$.

24.12-nji mesele. Ellipsografyň AB çyzgyjynyň absolýut hereketindäki hereket mukdarynyň OC kriwoşipiň aýlanma oky bilen gabat gelýän z oka görä baş momentini, şeýle hem, çyzgyjynyň C etrabyndaky göräli hereketiniň hereket mukdarynyň onuň C massalar merkezinden z oka parallel geçýän oka görä baş momentini hasaplamaly. Kriwoşip, z okdaky proeksiýasy ω_z deň bolan burç tizlik bilen aýlanýar; çyzgyjyň massasy m; $OC = AC = CB = l$.

Jogaby: $L_{O_z} = -\frac{2}{3} m l^2 \omega_z$, $L_{C_z} = -\frac{ml^2}{3}\omega_z$.

24.13-nji mesele. Planetar geçirijiniň, OC kriwoşipiň aýlanma oky bilen gabat gelýän gozganmaýan z oka görä hereket mukdarynyň baş momentini hasaplamaly. Gozganmaýan 1 we gozganýan 3 tigirleriň radiuslary birmeňzeş bolup, r-e deň. Tigiriň 3 massasy m-e deň. m_2 massaly 2 tigiriň radiusy r_2. Kriwoşip, z okdaky proeksiýasy ω_z deň bolan burç tizlik bilen aýlanýar. Kriwoşipiň massasy hasaba alynmaly däl. Tigirleri birjynsly diskler diýip hasaplamaly (*24.12-nji surat*).



24.12-nji surat

Jogaby: $$L_{O_z} = \frac{m_2(2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)}{2}(r + r_2)\omega_z.$$

24.14-nji mesele. Radiusy $r = 20$ sm, massasy $M = 3{,}27$ kg bolan A şkiwi aýlandyrýan çekiniň eýerdiji we eýeriji böleklerindäki dartylyş güýçleri, degişlilikde $T_1 = 100N$, $T_2 = 50N$. Şkiwiň ε 1,5 rad/s^2 burç tizlenme bilen aýlanmagy üçin garşylyk güýçleriniň momenti näçe bolmaly? Şkiwi birjynsly disk diýip hasaplamaly.

Jogaby: 9,8 $N \cdot m$.

24.15-nji mesele. Sapfalardaky sürtülme koeffisiýentini kesgitlemek üçin wala massasy 500 kg bolan mahowik oturdylýar; mahowigiň inersiýa radiusy $\rho = 1{,}5\ m$. Mahowige $n_0 = 240$ *aýl/min* burç tizlik berlip, erkin hereketlenýär. Ol şonda 10 minutdan soň togtaýar. Hemişelik diýip garalýan sürtülme momenti kesgitlemeli.

Jogaby: $47{,}1\ N \cdot m$.

24.16-njy mesele. Uly mahowikleri togtatmak üçin elektrotormoz ulanylýar. Bu tormoz diametral görnüşde ýerleşen iki sany polýusdan ybarat bolup, olarda hemişelik tok bilen üpjün edilen sarym bar. Mahowik polýuslaryň golaýynda aýlananda, onda induksiýalanýan toklar, mahowigiň gurşawyndaky υ tizlige proporsional bolan tormozlaýjy M_1 momente eýe bolýar: $M_1 = k\upsilon$, bu ýerde k – magnit akymyna we mahowigiň ölçegine bagly bolan koeffisiýent. Podşipnikdäki sürtülme momentini M_2 hemişelik diýip hasaplamak mümkin. Diametri D bolan mahowigiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti I-e deň. ω_0 burç tizlik bilen aýlanýan mahowigiň näçe wagtdan soň togtaýşyny tapmaly.

Jogaby: $T = \dfrac{2I}{kD} \ln\left(1 + \dfrac{kD\omega_0}{2M_2}\right)$.

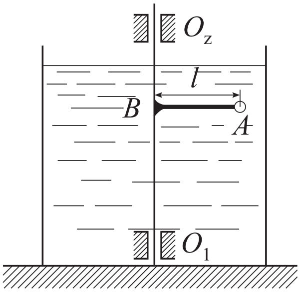
24.17-nji mesele. Dynçlykda duran gaty jisim hemişelik M moment gozganmaýan wertikal okuň daşynda aýlaýar. Şonda garşylyk güýçleriniň gaty jisimiň aýlanmasynyň burç tizliginiň kwadratyna proporsional bolan M_1 momenti döredýär: $M_1 = \alpha\omega^2$. Burç tizliginiň üýtgeýiş kanunyny tapmaly. Gaty jisimiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J deň.

Jogaby: $\omega = \sqrt{\dfrac{M}{\alpha}} \dfrac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$, bu ýerden $\beta = \dfrac{2}{J}\sqrt{\alpha M}$.

24.18-nji mesele. Deslapky meseläniň şertine görä garşylyk güýçleriniň M momenti gaty jisimiň aýlanmasynyň burç tizligine proporsional ($M_1 = \alpha\omega$) diýip çözmeli.

Jogaby: $\omega = \dfrac{M}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t/J})$.

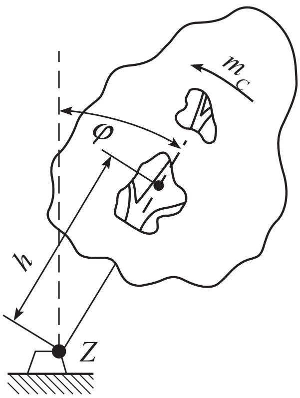
24.19-njy mesele. Suwuklyk guýlan gabyň içindäki uzynlygy l bolan AB sterženiň ujuna berkidilen A şarjagaz başlangyç ω_0 burç



24.13-nji surat

tizlik bilen wertikal O_1O_2 okuň daşynda aýlandyrylýar. Suwuklygyň garşylyk güýji aýlanmanyň burç tizligine proporsional: $R = \alpha m\omega$, bu ýerde m – şarjagazyň massasy, α – proporsionallyk koeffisiýenti. Näçe wagtdan soň aýlanma burç tizliginiň başlangyç burç tizliginden iki esse kemelejekdigini we şarjagazly sterženiň şu wagtyň içinde näçe gezek aýlanjakdygyny kesgitlemeli. Şarjagazyň massasy onuň merkezinde ýerleşen diýip hasaplamaly, sterženiň massasyny hasaba almaly däl (*24.13-nji surat*).

Jogaby: $T = \dfrac{l}{\alpha}\ln 2, \quad n = \dfrac{l\omega_0}{4\pi\alpha}.$



24.14-nji surat

24.20-nji mesele. Massasy M bolan byçgylap agdarylýan agajyň massalar merkezi agajyň düýbünden h belentlikde ýerleşen. Eger bu ýagdaýda howanyň garşylyk güýji m_g garşylyk momentini döretse, agajyň ýere haýsy burç tizlik bilen düşýändigini kesgitlemeli, bu ýagdaýda $m_{cz} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, α = const. Agaç ýykylanda haýsy okuň daşynda aýlanýan bolsa, agajyň şu ok bilen gabat gelýän z oka görä inersiýa momenti J deň (*24.14-nji surat*).

Jogaby:

$$\omega = \sqrt{\frac{2MghJ}{J^2 + 4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}} + 2\frac{\alpha}{J}\right)}.$$

24.21-nji mesele. Radiusy r bolan wal tanapa daňylan daşyň kömegi bilen gorizontal okuň daşynda aýlanma herekete getirilýär. Hereket başlananyndan az wagt geçeninden soň walyň burç tizligi hemişelik mukdara golaý bolmagy üçin, wala n sany birmeňzeş plastinalar berkidilen. Bu ýagdaýda plastina täsir edýän howanyň garşylygy walyň burç tizliginiň kwadratyna proporsional bolýar we aýlanma okundan R aralykda plastina normal boýunça goýlan güýje getirilýär. Bu ýerde k – proporsionallyk koeffisiýenti. Daşyň massasy m; ähli aýlanýan bölekleriň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J deň; tanapyň massasyny we daýançlardaky sürtülme hasaba alynmaly däl. Walyň başlangyç pursatdaky burç tizligini nola deň diýip hasaplap, t wagtdaky burç tizligini kesgitlemeli.

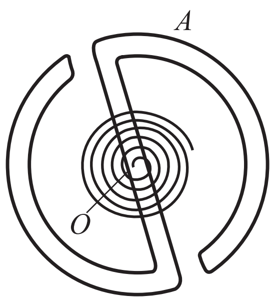
Jogaby: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}\dfrac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, bu ýerden $\alpha = \dfrac{2}{J+mr^2}\sqrt{mgnkrR}$;

t -niň bahasy uly bolanda ω burç tizlik $\sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}$ hemişelik mukdara golaý bolýar.

24.22-nji mesele. Radiusy r we massasy m bolan birjynsly şar asylan maýyşgak sim φ_0 burça burlup, soňra öz ugruna goýberilen. Simi bir radiana burmak üçin gerek bolan jübütiň momenti c-e deň. Howanyň garşylygyny hasaba alman we burlan simiň maýyşgaklyk güýjüniň momenti burluş burçy φ proporsional diýip hasaplap, hereketi kesgitlemeli.

Jogaby: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{5c}{2mr^2}}\,t.$

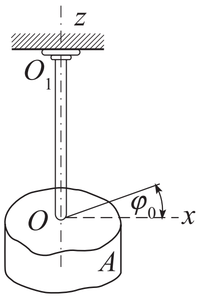
24.23-nji mesele. Sagadyň ýöreýşini tertibe salmak üçin sagat balansirini ulanýarlar. A balansir agyrlyk merkezi O-dan öz tekizligine perpendikulýar geçýän okuň daşynda aýlanyp bilýär. Bu ýagdaýda onuň şu oka görä inersiýa momenti J deň. Balansir spiral puržin bilen herekete getirilýär. Puržinyň bir ujy balansire birikdirilen, ikinji ujy bolsa sagadyň gozganmaýan korpusyna berkidilen. Balansir aýlananda puržinyň maýyşgaklyk güýjüniň aýlanma burçuna proporsional bolan moment döreýär. Puržiny bir radiana burmak üçin gerek bolan moment c deň. Eger başlangyç pursatda maýyşgaklyk güýçleriniň momenti bolmasa, balansire ω_0 başlangyç tizlik berlen bolsa, balansiriň hereket kanunyny kesgitlemeli (*24.15-nji surat*).



24.15-nji surat

Jogaby: $\varphi = \omega_0\sqrt{\dfrac{J}{c}}\sin\sqrt{\dfrac{c}{J}}\,t.$

24.24-nji mesele. A jisimiň Oz oka görä J_1 inersiýa momentini kesgitlemek üçin ol OO_1 maýyşgak wertikal steržene berkidilen. A jisimi Oz okuň daşynda kiçi burça burup, steržen aýlandyrylan we goýberilen; dörän yrgyldylaryň periody T_1-e deň; maýyşgaklyk güýçleriniň Oz oka görä momenti $m_z = -c\varphi$ deň, c koeffisiýenti kesgitlemek üçin ikinji tejribe geçirilen, sterženiň O nokadyna massasy M we radiusy r bolan birjynsly disk geýdirilendäki dörän yrgyldylaryň periody T_2 -ä deň. Jisimiň J_z inersiýa momentini kesgitlemeli (*24.16-njy surat).*

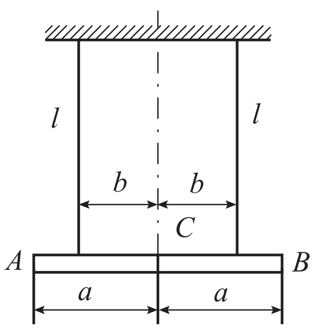


24.16-njy surat

$$\textit{Jogaby:}\ \ J_z = \frac{Mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_1}\right)^2.$$

24.25-nji mesele. Deslapky meselede c koeffisiýenti kesgitlemek üçin geçirilen ikinji tejribe bu meselede başgaça geçirilýär. Munuň üçin massasy M we radiusy r bolan birjynsly tegelek disk inersiýa momentini kesgitlemek talap edilýän jisime birikdirilýär. Eger jisimiň yrgyldylarynyň periody τ_1, oňa disk birikdirilenden soňky yrgyldylaryň periody τ_2 bolsa, jisimiň J_z – inersiýa momentini kesgitlemeli.

$$\textit{Jogaby:}\ J_z = \frac{Mr^2}{2}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}.$$



24.17-nji surat

24.26-njy mesele. Bifilýar – asma, bir-birinden $2b$ aralykda duran, uzynlygy l bolan iki sany wertikal ýüp bilen gorizontal edilip asylan $2a$ uzynlykdaky birjynsly AB sterženden ybarat. Hereket wagtynda steržen hemişe gorizontal ýagdaýda durýar we ýüpleriň her biriniň dartylyş güýji sterženiň agramynyň ýarsyna deň diýip hasaplap, sterženiň burulma yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*24.17-nji surat*).

Görkezme. Ýüpleriň her biriniň dartylyş güýji gorizontal düzüjisini anyklananda, bifilýaryň yrgyldylaryny kiçi diýip hasaplap, ýüpüň ugry bilen wertikalyň arasyndaky burçuň sinusyny burçuň özi bilen çalşyrmaly.

$$\textit{Jogaby:}\ \ T = \frac{2\pi\alpha}{b}\sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

24.27-nji mesele. Maýyşgak simden asylan disk suwuklygyň içinde aýlanma yrgyldylaryny edýär. Diskiň simiň okuna görä inersiýa momenti J deň. Simi bir radiana burmak üçin gerek bolan jübütiň momenti c deň. Herekete görkezilýän garşylyk momenti $\alpha S\omega$ deň, bu ýerde α – suwuklygyň şepbeşiklik koeffisiýenti, S-diskiň ýokarky we aşaky esaslarynyň jemi, ω-diskiň burç tizligi. Suwuklykdaky diskiň yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T = \dfrac{4\pi l}{\sqrt{4cl - \alpha^2 S^2}}$.

24.28-nji mesele. Maýyşgak simden asylan gaty jisim m_d momentiň täsirinde aýlanma yrgyldylaryny edýär. Bu ýagdaýda $m_{dz} = m_1 \sin\omega t + m_3 \sin\omega t$ bolup, m_1, m_3 we ω hemişelik sanlar, z bolsa sim boýunça ugrukdyrylan ok. Simiň maýyşgaklyk momenti $m_{mş}$-a deň bolup, $m_{mşz} = -c\varphi$, bu ýerde c – maýyşgaklyk koeffisiýenti, φ – burulma burçy. Gaty jisimiň z oka görä kesgitlenýän inersiýa momenti J deň bolsa, mejbury aýlanma yrgyldylarynyň kanunyny kesgitlemeli. Herekete görkezilýän garşylyk güýçleri hasaba alynmaly däl. $\sqrt{c/J_z} \neq \omega$ we $\sqrt{c/J_z} \neq 3\omega$ diýip hasaplamaly.

Jogaby: $\varphi = \dfrac{h_1}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t + \dfrac{h_3}{k^2 + 9\omega^2}\sin 3\omega t,$ bu ýerden

$k^2 = c/J_z$, $h_3 = m_3/Jz$.

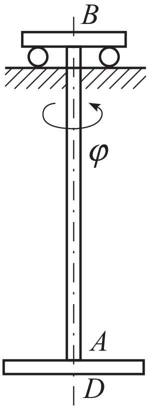
24.29-njy mesele. Deslapky meseläni cm_g garşylyk momentini hem hasaba alyp çözmeli. Bu ýagdaýda m_g gaty jisimiň burç tizligine proporsional: $m_{gz} = -\beta\dot{\varphi}$, β – hemişelik koeffisiýent.

Jogaby: $\varphi = A_1 \sin(\omega t - \varepsilon_1) + A_3 \sin(3\omega t - \varepsilon_3)$, bu ýerden

$$A_1 = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}},\quad A_3 = \frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}},$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg}\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2},\quad \varepsilon_3 = \operatorname{arctg}\frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2},\quad h = \frac{\beta}{2J_z}.$$

24.30-njy mesele. Massasy M_1, radiusy R disk burulma gatylygy c bolan AB maýyşgak sterženden asylyp goýlan. Sterženiň B



24.18-nji surat

ujy $\varphi_B = \omega_0 t + \Phi \sin pt$ kanun bilen aýlanýar, bu ýerde ω_0, Φ, p – hemişelik ululyklar. Garşylyk güýçlerini hasaba alman, D diskiň hereketini: 1) rezonans bolmadyk ýagdaýda, 2) rezonans bolan ýagdaýda kesgitlemeli (*24.18-nji surat*).

Jogaby:

$$1)\ \varphi_A(t) = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right),$$

bu ýerde $k = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$, $h = \dfrac{2c\Phi}{MR^2}$;

$$2)\ \varphi_A(t) = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt\right).$$

24.31-nji mesele. Maýyşgak simden asylan gaty jisim suwuklygyň içinde aýlanma yrgyldylaryny edýär. Jisimiň simiň z okuna görä inersiýa momenti J_z deň. Simiň maýyşgaklyk güýjüniň momenti $m_{\text{mşz}} = -c\varphi$, bu ýerde c – maýyşgaklyk koeffisiýenti, φ – burulma burçy. Herekete görkezilýän garşylyk güýjüniň momenti $m_{gz} = -\beta\dot{\varphi}$, bu ýerde $\dot{\varphi}$ – gaty jisimiň burç tizligi, β – hemişelik položitel san. Başlangyç pursatda gaty jisim φ_0 burça burlan we başlangyç tizliksiz goýberilen. Eger $\beta/(2J_z) < \sqrt{c/J_z}$ bolsa, gaty jisimiň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $\varphi = \varphi_0 e^{-nt}\left(\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \dfrac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right)$ –

kanuny togtaýan aýlaw yrgyldylar, bu ýerde $k_2 = c/J_z$, $n = \beta/(2J_z)$.

24.32-nji mesele. Maýyşgak simden asylan M massaly, R radiusly birjynsly tegelek disk suwuklygyň içinde aýlanma yrgyldylaryny edýär. Simiň maýyşgaklyk güýjüniň momenti $m_{\text{mşz}} = -c\varphi$, bu ýerde z ok sim boýunça geçirilen c – maýyşgaklyk koeffisiýenti, φ bolsa burulma burçy. Bu ýagdaýda hereketdäki garşylyk güýjüniň momenti $m_{gz} = -\beta\dot{\varphi}$, bu ýerde $\dot{\varphi}$ – diskiň burç tizligi, β bolsa hemişelik položitel san. Başlangyç pursatda disk φ_0 burça burlan we başlangyç tizliksiz goýberlen. 1) $\dfrac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$,

2) $\dfrac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$ ýagdaýlarda diskiň hereket deňlemesini tapmaly.

Jogaby: Aşakdaky kanunlar bilen bolýan aperiodik hereket:

1) $\dfrac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$, $\varphi = \varphi_0 e^{-nt}(1+nt)$, bu ýerde $n = \dfrac{\beta}{MR^2}$;

2) $\dfrac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$,

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{n^2-k^2}} e^{-nt}[(\sqrt{n^2-k^2}-n)e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t} + (\sqrt{n^2-k^2}+n)e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t}],$$

bu ýerde $k^2 = \dfrac{2c}{MR^2}$, $n = \dfrac{\beta}{MR^2}$.

24.33-nji mesele. Maýyşgak simden asylan gaty jisim $m_{Tz} = m_0 \cos pt$ daşky momentiň täsirinde aýlanma yrgyldylaryny edýär, bu ýerde m we p_0– položitel hemişelik mukdarlar, z sim boýunça ugrukdyrylan ok. Simiň maýyşgaklyk güýjüniň momenti $m_{\text{mşz}} = -c\varphi$ bu ýerde c – maýyşgaklyk koeffisiýenti, φ bolsa burulma burçy. Gaty jisimiň z oka görä inersiýa momenti J_z deň. Hereketde görkezilýän garşylyk güýçlerini hasaba almaly däl. Simiň süýnmedik başlangyç pursatynda gaty jisime ω_0 burç tizlik berlen. Gaty jisimiň hereketini aşakdaky ýagdaýlar üçin kesgitlemeli:

1) $\sqrt{c/J_z} \neq p$, 2) $\sqrt{c/J_z} = p$.

Jogaby: 1) $\sqrt{c/J_z} \neq p, \varphi = \dfrac{\omega_0}{k}\sin kt + \dfrac{h}{k^2-p^2}(\cos pt - \cos kt)$,
bu ýerde $k = \sqrt{c/J_z}, h = m_0/J_z$;

2) $\sqrt{c/J_z} = p, \varphi = \dfrac{\omega_0}{k}\sin kt + \dfrac{h}{2k} t \sin kt$,

bu ýerde $k = \sqrt{c/J_z} = p$, $h = m_0/J_z$.

24.34-nji mesele. Maýyşgak simden asylan M massaly, R radiusly birjynsly tegelek disk suwuklygyň içinde $m_{Tz} = m_0 \sin pt$ daşky momentiň täsirinde rezonansly aýlanma yrgyldylaryny edýär; bu ýerde m_0 we p – položitel hemişelik mukdarlar, z sim boýunça ugrukdyrylan ok; simiň maýyşgaklyk güýjüniň momenti $m_{\text{mşz}} = -c\varphi$, c – maýyşgaklyk koeffisiýenti, φ – burulma burçy. Hereketde görkezilýän garşylyk güýjüniň momenti $m_{mz} = -\beta\dot{\varphi}$, bu $\dot{\varphi}$ – diskiň burç tizligi, β – hemişelik položitel san. Diskiň rezonansly mejbury yrgyldylarynyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $p = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$ bolanda $\varphi = -\dfrac{h}{2np}\cos pt$, bu ýerde

$$h = \frac{2m_0}{MR^2},\ n = \frac{\beta}{MR^2}.$$

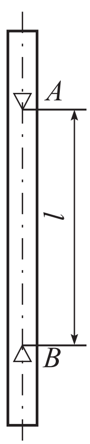
24.35-nji mesele. Suwuklygyň şepbeşiklik koeffisiýentini kesgitlemek üçin, suwuklykdaky maýyşgak simden asylan diskiň yrgyldylaryna garaýarlar. Diskde $M_0 \sin pt$ ($M_0 = const$) deň bolsa daşky momentiň täsirinde rezonans hadysasy ýüze çykýar. Suwuklykdaky diskiň hereketinde herekete görkezilýän garşylyk güýjüniň momenti $\alpha S\omega$ deň, bu ýerde α- suwuklygyň şepbeşiklik koeffisiýenti, S-diskiň ýokarky we aşaky esaslarynyň jemi, ω – diskiň burç tizligi. Suwuklygyň şepbeşiklik koeffisiýenti α-ny kesgitlemeli. Rezonans wagtynda diskiň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasy φ_0 deň.

Jogaby: $\alpha = \dfrac{M_0}{\varphi_0 S_p}$.

24.36-njy mesele. Snarýad uçup barýarka, özüniň simmetriýa okunyň daşyndaky aýlanyşy howanyň garşylyk güýjüniň $k\omega$ deň bolan momentiniň täsirinden haýallaýar, bu ýerde ω – snarýadyň aýlanyşynyň burç tizligi, k – hemişelik proporsionallyk koeffisiýenti. Burç tizliginiň kemeliş kanunyny kesgitlemeli. Başlangyç burç tizligi ω_0, snarýadyň simmetriýa okuna görä inersiýa momenti J.

Jogaby: $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$.

24.37-nji mesele. Agyrlyk güýjüniň tizlenmesini kesgitlemek üçin iki sany üçgranly A we B pyçaklar bilen üpjün edilen steržende ybarat öwrülme maýatnikden peýdalanýarlar. Pyçaklaryň biri gozganmaýar, ikinjisi bolsa steržen boýunça süýşüp bilýär. Sterženi pyçaklaryň ilki birinden, soň ikinjisinden asyp we pyçaklaryň arasyndaky AB aralygy üýtgedip, maýatnigiň her bir pyçagyň



24.19-njy surat

daşyndaky yrgyldylarynyň periodyny deňläp bolýar. Eger maýatnigiň yrgyldylarynyň periodlary birmeňzeş bolup, T deň, $AB = l$ bolsa, agyrlyk güýjüniň tizlenmesi näçä deň bolar *(24.19-njy surat)*?

Jogaby: $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$.

24.38-nji mesele. Iki jisimiň bir gorizontal okuň daşynda her biri aýratynlykda we tutuş bir jisim ýaly yrgyldamagy mümkin. Düzme maýatnigiň uzynlygyny kesgitlemeli; gaty jisimleriň massalary M_1 we M_2, olaryň agyrlyk merkezlerinden umumy aýlanma okuna çenli bolan aralyklar a_1 we a_2, her jisim aýratynlykda yrgyldanda olaryň uzynlyklary l_1 we l_2 –ä deň.

Jogaby: $l_g = \dfrac{M_1 a_1 l_1 + M_2 a_2 l_2}{M_1 a_1 + M_2 a_2}$.

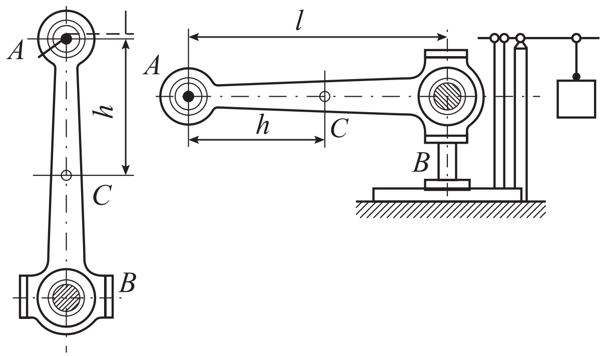
24.39-njy mesele. Esbabyň bir bölegi birjynsly L uzynlykdaky steržen şekilinde bolup, bir ujy bilen gorizontal O okdan erkin asylan. Sterženiň yrgyldylaryny hasaba almak üçin onuň aşak çetine m massaly uly bolmadyk ýüz görülýän aýna berkidilýär. Şonuň bilen birlikde sterženiň yrgyldylarynyň ýygylygynyň üýtgemezligi üçin onuň başga ýerine A ýük berkidilýär. Aýna bilen ýüki maddy nokatlar ýaly hasaplap, A ýüküň haýsy iň az massa eýe bolmalydygyny tapmaly. Ony O okdan haýsy aralykda ýerleşdirmeli?

Jogaby: $m_A = 3m$, $OA = 1/3L$.

24.40-njy mesele. Sagadyň işleýşini tertibe salmak üçin massasy M_1, agyrlyk merkezinden asylyş okuna çenli bolan aralygy a, getirilen uzynlygy l bolan maýatnige onuň asylyş okyndan x aralykda massasy M_2 bolan goşmaça ýük berkidilen. Goşmaça ýüki maddy nokat ýaly hasaplap, berlen M_2 we x bahalarda maýatnigiň getirilen uzynlygynyň Δl özgerişini kesgitlemeli hem-de maýatnigiň getirilen uzynlygy iň kiçi massaly goşmaça ýük bilen berlen mukdarda özgerer ýaly $x = x_1$ bahany tapmaly.

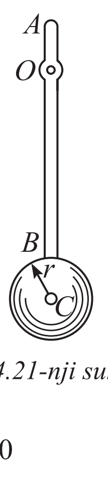
Jogaby: Maýatnigiň getirilen uzynlygyny $\Delta l = \dfrac{M_2 x(x-1)}{M_1 a + M_2 x}$ ululyga kemeltmeli; $x_1 = \dfrac{1}{2}(l + \Delta l)$.

24.41-nji mesele. Şatunyň inersiýa momentini kesgitlemek üçin kreýtskopf sapfasynyň wtulkasyndan inçe silindrik steržen geçirilip, şatun bu gorizontal okuň daşynda yrgylladylýar. Yrgyldy ýüz period ($100T = 100\ s$) dowam edýär, bu ýerde T -ýarym period. Soňra A deşigiň merkezinden C massalar merkezine çenli bolan $AC = h$ aralygy kesgitlemek üçin, şatunyň A nokadyndan tallar asylyp, B nokady bilen bolsa onluk tereziniň platformasyna direlip, gorizontal ýagdaýda goýulýar. Bu ýagdaýda terezä düşýän basyş P deň. Şatunyň suratyň tekizligine perpendikulýar bolan oka görä J inersiýa momentini kesgitlemeli. Şatunyň massasy A we B nokatlardan geçirlen wertikallaryň (*24.20-nji surat* sagdaky surata seret) arasyndaky uzaklygyň l we kreýtskopf sapfasynyň radiusynyň r (kömegi bilen kesgitlenýär).



24.20-nji surat

Jogaby: $J = \dfrac{Pl + Mgr}{g}\left(\dfrac{g}{\pi^2}T^2 - \dfrac{P}{Mg}l - r\right).$



24.21-nji surat

24.42-nji mesele. Maýatnik AB sterženden we onuň ujuna berkidilen şardan ybarat. Şaryň massasy $m,$ radiusy r bolup, C merkezi AB sterženiň dowamynda ýatýar. Sterženiň massasyny hasaba alman, kiçi yrgyldylar edende bu maýatnigiň bir geriminiň wagtynyň berlen T ululyga deň gelmegi üçin asylyş okuny sterženiň haýsy O nokadyndan geçirmelidigini kesgitlemeli (*24.21-nji surat*).

Jogaby: $OC = \dfrac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4 r^2}\right).$

$OC \geq r$ bolmaly, munuň üçin $T^2 \geq 1{,}4\dfrac{\pi^2}{g}r$ bolanda meseläni çözmek mümkin, kököň öňündäki alamat minus bolanda ony çözmek mümkin däl.

24.43-nji mesele. Fiziki maýatnigiň yrgyldylarynyň periodynyň iň kiçi bolmagy üçin ony massalar merkezinden haýsy aralykda asmaly?

Jogaby: Maýatnigiň massalar merkezinden yrgyldylarynyň tekizligine perpendikulýar geçýän oka görä inersiýa radiusyna deň gelýän aralykda.

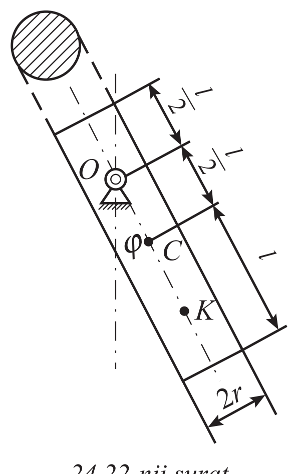
24.44-nji mesele. Maýatnik iki sany ýük berkidilen sterženden ybarat. Ýükleriň arasyndaky uzaklyk l; ýokardaky ýüküň massasy m_1, aşakdaky ýüküň massasy m_2. Maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodynyň iň kiçi bolmagy üçin, asylyş okuny aşaky ýükden haýsy x aralykda ornaşdyrmalydygyny kesgitlemeli. Sterženiň massasyny hasaba almaly däl we ýükleri maddy nokatlar diýip hasaplamaly.

Jogaby: $x = l\sqrt{m_1} \cdot \dfrac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}$.

24.45-nji mesele. Fiziki maýatnigiň yrgyldylarynyň periodynyň özgermezligi üçin goşmaça ýüki asylyş okundan haýsy aralykda ýerleşdirmeli?

Jogaby: Fiziki maýatnigiň getirilen uzynlygyna deň bolan aralykda.

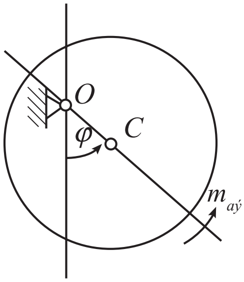
24.46-njy mesele. Massasy M, uzynlygy $2l$ we radiusy $r = \dfrac{l}{6}$ bolan tegelek silindr suratyň tekizligine perpendikulýar bolan okuň daşynda yrgyldaýar. Eger oňa $OK = \dfrac{85}{72}l$ aralykda nokatlanç m massa birikdirilse, silindriň yrgyldylarynyň periody nähili özgerer (*24.22-nji surat*)?



24.22-nji surat

Jogaby: Yrgyldylaryň periody özgermeýär, çünki nokatlanç massa silindriň yrgyldylaryň merkezinde goşulan.

24.47-nji mesele. Massasy M bolan birjynsly, r radiusly diskiň massalar merkezinden $OC=r/2$ aralykda duran, diskiň tekizligine perpendikulýar bolup geçýän gorizontal Oz okuň daşynda edýän kiçi yrgyldylaryň deňlemesini tapmaly. Diske M aýlandyryjy moment goýlup, $m_{aý} = m_0 \sin pt$, bu ýerde m_0 we p – hemişelik mukdarlar. Başlangyç pursatda aşakdaky ýagdaýda duran diske ω_0 burç tizlik berlen. Garşylyk güýçleri hasaba almaly däl. Yrgyldylary kiçi hasaplap, $\sin\varphi \approx \varphi$ diýip almaly (*24.23-nji surat*).



24.23-nji surat

Jogaby: 1) $p \neq \sqrt{\dfrac{2g}{3r}}$ bolanda

$$\varphi = \frac{1}{k}\left(\omega_0 - \frac{hp}{k^2-p^2}\right)\sin kt + \frac{h}{k^2+p^2}\sin pt,$$

bu ýerde $k = \sqrt{\dfrac{2g}{3r}},\ h = \dfrac{4m_0}{3Mr^2}.$

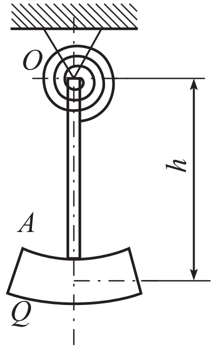
2) $p \neq \sqrt{\dfrac{2g}{3r}}$ bolanda $\varphi = \dfrac{1}{p}\left(\omega_0 + \dfrac{h}{2p}\right)\sin pt - \dfrac{h}{2p}\cos pt,$

bu ýerde $h = \dfrac{4m_0}{3Mr^2}.$

24.48-nji mesele. Seýsmograflarda, ýagny ýertitremesini hasaba alýan enjamlarda fiziki maýatnik ulanylýar; maýatnigiň asylyş oky wertikal bilen α burç emele getirýär. Asylyş okundan maýatnigiň massalar merkezine çenli bolan aralyk a deň, asylyş okuna parallel ýagdaýda massalar merkezinden geçýän oka görä maýatnigiň inersiýa momenti J_C. Maýatnigiň massasy M. Maýatnigiň yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_C + Ma^2}{Mag\sin\alpha}}.$

24.49-njy mesele. Maşynlaryň binýatlarynyň (fundamentleriniň) gorizontal yrgyldylaryny ýazýan wibrografda ujunda ýüki bolan ryçagdan ybarat OA maýatnik özüniň gorizontal O okunyň daşynda yrgyldap bilýär. OA maýatnigi öz massasy we spiral puržin wertikal ýagdaýda durnukly deňagramlylykda saklaýar. Gyşarma burçlary kiçi bolanda maýatnigiň hususy yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli; maýatnigiň agramynyň onuň aýlanma okuna görä maksimal statiki momenti Mgh, bu oka görä inersiýa momenti J_z, garşylykly aýlanma burçuna proporsional bolan puržinyň gatylyk koeffisiýenti c; maýatnik deňagramlylykda duranda puržin süýnmän dur. Garşylyklar hasaba alynmaly däl (*24.24-nji surat*).



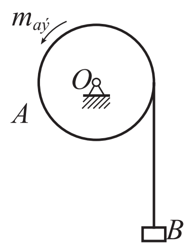
24.24-nji surat

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_z}{c + Mgh}}$.

24.50-nji mesele. Wibrograf (deslapky meselä seret) $x = a\sin\omega t$ kanunalaýyk gorizontal garmoniki yrgyldyly hereket edýän binýada (fundamente) berkidilen. Eger wibrografyň maýatniginiň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasy φ_0 bolsa, fundamentiň yrgyldylarynyň amplitudasyny a kesgitlemeli.

Jogaby: $a = \dfrac{\varphi_0(c + Mgh - J_z\omega^2)}{Mg\omega^2}$.

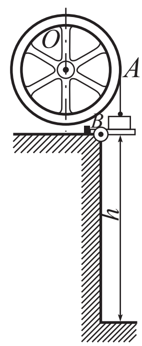
24.51-nji mesele. Elektrik lebýodka işe girizilende A barabana wagta proporsional bolan m aýlandyryjy moment goýlan: $m_{aý} = at$, bu ýerde a – hemişelik. M massaly B ýük massasy M_2 bolan r radiusly barabana oralan tanapyň kömegi bilen göterilýär. Barabany tutuş silindr hasaplap, onuň burç tizligini kesgitlemeli. Başlangyç pursatda lebýodka dynç duran diýip hasaplamaly (*24.25-nji surat*).



24.25-nji surat

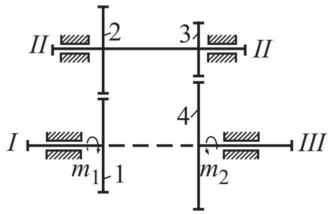
Jogaby: $\omega = \dfrac{(at - 2M_1gr)t}{r^2(2M_1 + M_2)}$.

24.52-nji mesele. Radiusy R bolan aýlanýan tigriň massalar merkezinden geçýän oka görä J inersiýa momentini tapmak üçin tigre inçe sim oralyp, onuň ujuna massasy M bolan B daşy daňyp, daşyň h beýiklikden düşüş wagtynyň T_1-digi hasaba alynýar. Podşipniklerdäki sürtülme täsirini aýyrmak üçin massasy M_2 bolan ikinji daş bilen hem tejribe geçirilip ýüküň şol beýiklikden T_2-digini hasaba alýarlar. Sürtülme güýjüniň momentini daşlaryň massasyna bagly bolmadyk hemişelik ululyk diýip J inersiýa momentini hasaplamaly (*24.26-njy surat*).



24.26-njy surat

$$\text{Jogaby: } J = R^2 \frac{\frac{g}{2h}(M_1 - M_2) - \left(\frac{M_1}{T_1^2} - \frac{M_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}.$$

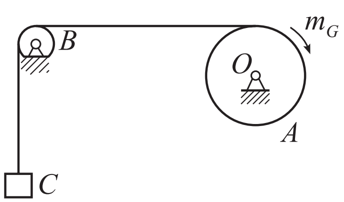


24.27-nji surat

24.53-nji mesele. *I* çarha (wala) aýlandyryjy momenti *m* bolan elektromotor birikdirilen. Dört sany 1,2,3 we 4 dişli tigirlerden düzülen tizlikleriň reduktory arkaly bu aýlandyryjy moment tokar stanogynyň *III* şpindeline geçirilýär. Oňa garşylyk momenti *m* goýlan (bu moment ýonulýan jisimiň üsti gyrylanynda ýüze çykýar). Eger *I, II* we *III* wallara ornaşdyrylan aýlanýan şaýlariň inersiýa momentleri, degişlilikde J_I, J_{II}, J_{III} bolsa, onda *III* şpindeliň burç tizlenmesini kesgitlemeli. Tigirleriň radiuslary r_1, r_2, r_3 we r_4-e deň (*24.27-nji surat*).

$$\text{Jogaby: } \varepsilon_{III} = \frac{m_1 k_{1,2} \cdot k_{3,4} - m_2}{(J_I k_{1,2}^2 + J_{II})}, \text{ bu ýerde } k_{1,2} = r_2/r_1, k_{3,4} = r_4/r_3.$$

24.54-nji mesele. Massasy M_1 we radiusy *r* bolan *A* baraban süýnmeýän trosuň ujuna baglanan M_2 massaly *C* ýüküň kömegi arkaly aýlandyrylýar. Tros *B* blok arkaly geçirilip, *A* barabana oralan. *A* barabana onuň aýlanyş burç tizligine proporsional bolan garşylyk momenti *m* goýulan, bu ýagdaýda proporsionallyk koeffisiýenti α. Eger başlangyç pursatda ulgam dynçlykda duran bolsa, barabanyň burç tizligini kesgitlemeli. *B* blok bilen trosuň massasy hasaba alynmaly däl, barabany birjynsly tutyş silindr diýip hasaplamaly (*24.28-nji surat).*



24.28-nji surat

$$\text{Jogaby: } \omega = \frac{M_2 gr}{\alpha}(1 - e^{-\beta t}), \text{ bu ýerde } \beta = \frac{2\alpha}{r^2(M_1 + 2M_2)};$$

$$\lim_{t\to\infty}\omega = \frac{M_2 gr}{\alpha} = \text{const}.$$

24.55-nji mesele. Awtomaşinanyň massasy M we radiusy r bolan eýerdiji tigirine m aýlandyryjy moment goýulan bolsa, onuň burç tizlenmesini kesgitlemeli. Tigriň C massalar merkezi arkaly maddy ulgamyň simmetriýa tekizligine perpendikulýar bolup geçýän oka görä inersiýa momenti J_C; f_t – tigirlenme sürtülme koeffisiýenti, F_s -sürtülme güýji. Şeýle hem, tigriň hemişelik burç tizlik bilen tigirlenmegi üçin aýlandyryjy momentiň ululygyny hasaplamaly.

Jogaby: $\varepsilon = \dfrac{m_{\text{aý}} - Mgf_t - F_s r}{J_C}$, $m_{\text{aý}} = Mgf_t + F_s r.$

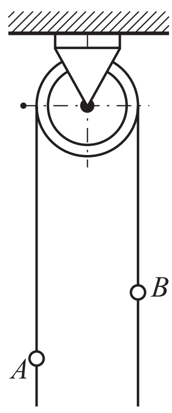
24.56-njy mesele. Awtomobiliň massasy M we radiusy r bolan eýeriji tigriniň burç tizligini kesgitlemeli. Gorizontal ýolda typyp tigirlenýän tigir onuň C massalar merkezine goýlan gorizontal ugrukdyrylan güýjüň täsirinde hereket edýär. Tigriň C massalar merkezi arkaly onuň maddy ulgamyň simmetriýa tekizligine perpendikulýar bolup geçýän oka görä inersiýa momenti J_C, f_t - tigirlenme sürtülme koeffisiýenti, f -typyp tigirlenmedäki sürtülme koeffisiýenti. Başlangyç pursatda tigir dynçlyk ýagdaýynda dur.

Jogaby: $\omega = \dfrac{Mg}{J_C}(fr - f_t)t.$

24.57-nji mesele. Deslapky meselede garalan tigriň C massalar merkezine goýlan güýjüň mukdary iki esse artdyrylsa, onuň burç tizligi üýtgärmi?

Jogaby: Üýtgemez.

24.58-nji mesele. Massasy hasaba alynmaýan blokdan tanap geçirilen. Tanapy bloguň A nokadynda bir adam saklap dur. Tanapyň B nokadyna bolsa massasy şol adamynyňky ýaly ýük asylan. Adam tanapa görä υ tizlik bilen tanap boýunça ýokary göterilip başlasa, ýüküň ýagdaýy nähili üýtgär? (*24.29-njy surat*).



24.29-njy surat

Jogaby: Ýük $\upsilon/2$ tizlikde tanap bilen bilelikde ýokary göteriler.

24.59-njy mesele. Deslapky meseläni bloguň massasyny hasaba alyp çözmeli. Bloguň massasy adamyň massasyndan dört esse kiçi.

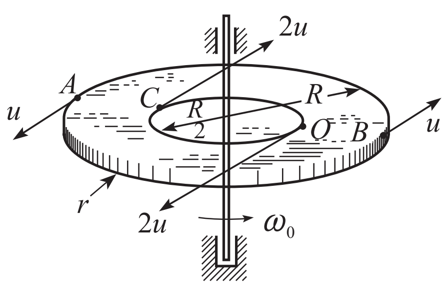
Bloguň inersiýa momenti kesgitlenende onuň massasy gurşaw boýunça deň paýlanan diýip hasap etmeli.

Jogaby: Ýük $\frac{4}{9}\upsilon$ tizlik bilen göterilýär.

24.60-njy mesele. Tegelek gorizontal platforma özüniň O merkezinden geçýän Oz okuň daşynda sürtülmän aýlanýar. Platformanyň üstünde Oz okdan hemişelik r aralykda massasy M_1 bolan adam hemişelik u tizlik bilen ýöreýär. Bu ýagdaýda platforma öz okunyň daşynda haýsy burç tizligi bilen aýlanar? Platformanyň massasy M_2-ni R radiusly tegelegiň üsti blen deň paýlanan diýip hasaplamaly. Başlangyç pursatda platforma bilen adamyň tizligi nola deň.

Jogaby: $\omega = \dfrac{2M_1 r}{M_2 R^2 + 2M_1 r^2} u.$

24.61-nji mesele. Tegelek gorizontal platforma özüniň massalar merkezinden geçýän wertikal okuň daşynda sürtülmän ω_0 burç tizlik bilen aýlanýar. Şol wagtda platformada massasy birmeňzeş bolan dört adam bolup, olardan ikisi platformanyň çetinde, ikisi bolsa aýlanma okyndan platformanyň ýarym radiusyna deň bolan aralykda dur. Platformanyň çetinde duran adamlar töwerek boýunça aýlanyş ugry bilen u çyzyga görä tizlik bilen ýöreseler we aýlanma okundan platformanyň ýarym radiusyna deň bolan aralykda duran adamlar töwerek boýunça garşylykly tarapa $2u$ çyzyga görä tizlik bilen ýöreseler, platformanyň burç tizligi nähili özgerer? Adamlary maddy nokatlar, platformany birjynsly tegelek disk diýip hasaplamaly (*24.30-njy surat*).



24.30-njy surat

Jogaby: Platforma şolar ýaly burç tizlik bilen aýlanýar.

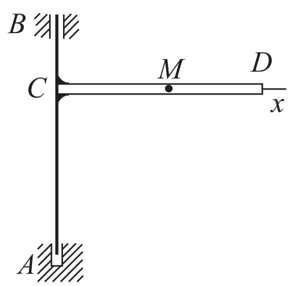
24.62-nji mesele. Deslapky meseläni ähli adamlar platformanyň aýlanyş ugry bilen ýöreýärler diýip kabul edip çözmeli. Platformanyň radiusy *R,* onuň massasy her adamyň massasyndan dört esse uly bolup, öz meýdany bilen deňölçeli ýaýran. Şeýle hem, *u* çyzyga görä tizligiň haýsy bahasynda platforma hereket etmez?

Jogaby: $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}, \quad u = \frac{9}{8}R\omega_0.$

24.63-nji mesele. Žukowskiniň oturgyjynda (skameýkasynda) oturan adam ellerini gapdala uzadan wagtynda oňa 15 *aýl/min* başlangyç burç tizlik berilýär. Bu ýagdaýda adam bilen skameýkanyň aýlanma okuna görä inersiýa momenti 0,8 $kg \cdot m^2$. Eger adam ellerini göwresine golaýlaşdyryp, ulgamyň inersiýa momentini 0,12 $kg \cdot m^2$ -e çenli kemeltse, skameýka bilen adam haýsy burç tizlik bilen aýlanar?

Jogaby: 100 *aýl/min*.

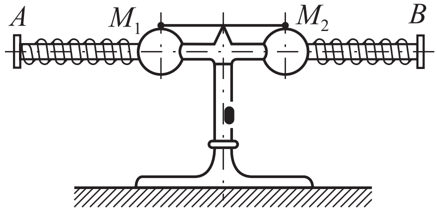
24.64-nji mesele. Gorizontal *CD* turbajyk (trubka) wertikal *AB* okuň daşynda erkin aýlanýar. Trubkanyň içinde okdan $MC = a$ daşlykda *M* şarjagaz bar. Käbir pursatda trubka ω_0 başlangyç burç tizlik berilýär. Şarjagazyň trubkanyň içinden zyňlyp çykan pursadynda trubkanyň ω burç tizligini kesgitlemeli. Trubkanyň aýlanma okuna görä inersiýa momenti *J, L* – onuň uzynlygy; şarjagaza *m* (massaly maddy nokat diýip, sürtülmäni hasaba almaly däl (*24.31-nji surat).*



24.31-nji surat

Jogaby: $\omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0.$

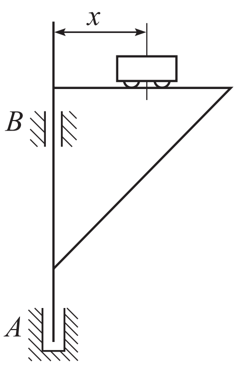
24.65-nji mesele. Uzynlygy $2L = 180$ *sm* we massasy $M_1 = 2$ *kg* bolan birjynsly *AB* steržen durnukly gorizontal bolar ýaly edip ýiti uçda ornaşdyrylan. Birmeňzeş iki sany pružinyň ujuna birikdirilen we her biriniň massasy $M_2 = 5$ *kg* bolan iki şaryň steržen boýunça süýşmekleri mümkin. Steržen $n_1 = 64$ *aýl/min* burç tizlik bilen wertikal okuň daşynda aýlanma hereketine getirilýär. Bu ýagdaýda şarlar aýlanma okuna görä simmetrik ýerleşip, olaryň merkezleri ýüp bilen bir-birinden $2l_1 = 72$ *sm* aralykda saklanyp durlar. Soňra ýüpi ýakýarlar, şondan soň şarlar birnäçe gezek yrgyldap, puržinyň we sürtülme güýjüniň täsirinde bir-birinden $2l_2 = 108$ *sm* aralykda deňagramlylyk ýagdaýynda bolýarlar. Şarlary maddy nokat diýip hasaplap we puržinlaryň massasyny hasaba alman, sterženiň minutda aýlanyş n_2 sanyny kesgitlemeli (*24.32-nji surat*).



24.32-nji surat

Jogaby: $n_2 = \dfrac{6M_2 l_1^2 + M_1 L^2}{6M_2 l_2^2 + M_1 L^2} n_1 = 34$ *aýl/min*.

24.66-njy mesele. Aýlanýan göteriji kranyň arabajygy strela görä υ tizlik bilen hereketlenýär. Krany aýlandyrýan motor batlandyrma döwründe m_0-a deň hemişelik moment döredýär. Arabajygyň ýüki bilen bilelikdäki massasy M -e deň, J – kranyň (arabasyz) aýlanma okuna görä inersiýa momenti bolsa, kranyň aýlanma ω burç tizligini arabajykdan AB aýlanma okuna çenli bolan x aralyga bagly görnüşde kesgitlemeli. Bu ýagdaýda kranyň aýlanyşy arabajygyň AB aýlanma okundan x_0 aralykda bolan pursatynda başlanýar (*24.33-nji surat*).



24.33-nji surat

Jogaby: $\omega = \dfrac{m_0}{J + mx^2} \cdot \dfrac{x - x_0}{\upsilon}$.

24.67-nji mesele. Deslapky meseläniň şerti saklanan ýagdaýynda, eger motor $m_0 - \alpha\omega$ -a deň aýlandyryjy moment döretse, kranyň aýlanma ω burç tizligini kesgitlemeli, bu ýerde m_0 we α - položitel hemişelik ululyklar.

Jogaby: $\omega = \dfrac{m_0}{\upsilon(J + mx^2)} e^{-\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} \int_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} dx,$

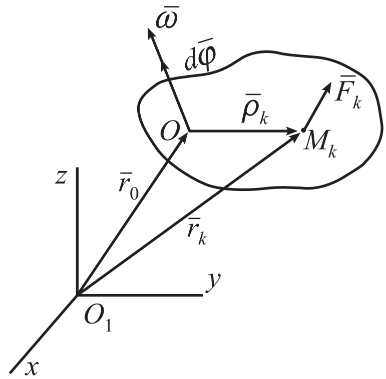
bu ýerde $k = \sqrt{\dfrac{J}{M}}$, $\mu = \dfrac{\alpha}{\upsilon_x}\sqrt{\dfrac{1}{JM}}$ (x ok strela boýunça sag tarapa ugrukdyrylan).

25. MADDY ULGAMYŇ KINETIK ENERGIÝASYNYŇ ÜÝTGEMEGI BARADA TEOREMA

Bu teoremanyň maddy nokat üçin subudyna şu kitabyň 15-nji bölüminde garalypdy. Şonuň üçin ulgam üçin teoremany özleşdirmäge geçmezden ozal 14, 15-nji bölümleri öwrenmek maslahat berilýär.

25.1. Gaty jisime täsir edýän güýçleriň işi

Jisimiň k nokadyna goýlan $\overline{F}_k$ güýjüň işini tapmagy öwrenip, ol usuly jisime täsir edýän ähli $\overline{F}_1, ...\overline{F}_n$ güýçleriň işlerini tapmak üçin ulanmak bolar. Goý, $\overline{R}$ – ähli güýçleriň baş wektory (O nokada goýlan diýip hasap ederis), $\overline{M}_0$ – şol güýçleriň O nokada görä baş momenti bolsun. O nokat güýçleriň ýygnanma merkezi ýa polýus diýip atlandyrylýar. $d\bar{r}_0$ – polýusyň elementar (ujypsyz) göçmegi, $d\overline{\varphi} = \overline{\omega} \cdot dt$ – jisimiň O nokadyň daşynda öwrüm wektory, $\overline{\omega}$ – jisimiň O nokadyň daşynda öwrülmesiniň pursatdaky burç tizligi (*25.1-nji surat*).



25.1-nji surat

M_k nokadyň tizligini ýazalyň:

$$\overline{\upsilon}_k = \overline{\upsilon}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_k.$$

M_k nokadyň $d\bar{r}_k$ elementar (ujypsyz) göçmesini tapalyň:

$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_k \Rightarrow d\bar{r}_k = d\bar{r}_0 + \overline{\omega} dt \times \overline{\rho}_k \Rightarrow d\bar{r}_k = d\bar{r}_0 + d\overline{\varphi} \times \overline{\rho}_k.$$

Jisime goýlan ähli güýçleriň elementar (ujypsyz) işini tapalyň:

$$\delta A = \sum \overline{F}_k d\bar{r}_k = (\sum \overline{F}_k) d\bar{r}_0 + \sum \overline{F}_k \cdot d\overline{\varphi} \times \overline{\rho}_k =$$
$$= \overline{R} \cdot d\bar{r}_0 + d\overline{\varphi} \cdot \sum \overline{\rho}_k \times \overline{F}_k \qquad \Rightarrow$$

$$\delta A = \overline{R} \cdot d\bar{r}_0 + \overline{M}_0 d\overline{\varphi}. \tag{25.1}$$

$\overline{R} = \sum \overline{F}_k$ – ähli güýçleriň baş wektory, $\overline{M}_0$ – şol güýçleriň O nokada görä baş momenti.

Bellik: Gaty jisim üçin içki güýçleriň baş wektory we baş momenti nol bolany üçin, (25.1) förmula görä olaryň işleri nola deňdir.

O nokat hökmünde jisimiň massalar merkezini almak amatlydyr.

(25.1) formuladan peýdalanyp, hususy hallar üçin gaty jisime goýlan daşky güýçleriň işlerini tapalyň.

1. Öňe hereket

$d\overline{\varphi} = 0$ bolany üçin, (25.1) formuladan alarys:

$$\delta A = \overline{R} \cdot d\bar{r}_0. \tag{25.2}$$

2. Gozganmaýan okuň töwereginde aýlanma hereketi

O polýusy *Oz* aýlanma okunyň üstünde alsak, $d\bar{r}_0 = 0$, $\overline{M}_0 d\overline{\varphi} = M_z d\varphi$ bolany üçin:

$$\delta A = M_z d\varphi, \tag{25.3}$$

Bu ýerde M_z – daşky güýçleriň aýlanma okuna görä baş momenti.

3. Jisimiň tekiz-parallel hereketi

Polýus hökmünde jisimiň *C* massalar merkezini alsak, (25.1) formula aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\delta A = \overline{R} \cdot d\bar{r}_C + \overline{M}_{Cz} d\overline{\varphi}, \tag{25.4}$$

bu ýerde $d\bar{r}_0$ – massalar merkeziniň elementar göçmegi;

$\overline{M}_{Cz}$ – hereketiň tekizligine perpendikulýar bolup, massalar merkeziniň üstünden geçýän oka görä daşky güýçleriň baş momenti;

$d\varphi$ – jisimiň öwrümi.

25.2. Maddy ulgamyň kinetik energiýasynyň hasaplanylyşy. Kýonigiň teoremasy

m_k massaly we $\overline{\upsilon}_k$ tizlikli material nokadyň kinetik energiýasy diýip aşakdaky skalýar ululyga aýdylýar:

$$\frac{m_k \vartheta_k^2}{2}.$$

Mehaniki sistema asyl nusgada berlen. Onuň kinetik energiýasy ähli nokatlaryň kinetik energiýalarynyň jemine deňdir. Bu ululygy T bilen belgiläp, bahasyny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$T = \sum \frac{m_k \vartheta_k^2}{2}. \tag{25.5}$$

25.2-nji suratdaky belgilemeleriň düşündirişleri:

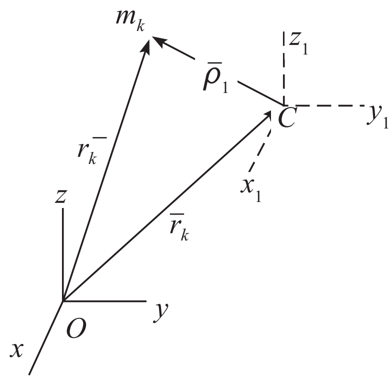
$\bar{r}_k$ – absolýut radius-wektor;

$\bar{r}_C$ – göçürme radius-wektor;

$\bar{\rho}_k$ – göräli radius-wektor;

C – sistemanyň massalar merkezi;

$Cx_1y_1z_1$ – öňe hereket edip, başlangyjy C nokat bilen gabat gelýär (*25.2-nji sur. ser.*):



25.2-nji surat

$$\dot{\bar{r}}_k = \dot{\bar{r}}_C + \dot{\bar{\rho}}_k \quad \Rightarrow \quad \bar{\vartheta}_k = \bar{\vartheta}_C + \bar{u}_k,$$

bu ýerde $\bar{\vartheta}_k$ – absolýut tizlik; $\bar{\vartheta}_C$– massalar merkeziniň tizligi; $\bar{u}_k$ – göräli tizlik.

Skalýar köpeltmegiň häsiýetini ulanyp, ϑ_k^2-ny tapalyň:

$$\vartheta_k^2 = \bar{\vartheta}_k^2 = (\bar{\vartheta}_C + \bar{u}_k)^2 = \bar{\vartheta}_C^2 + 2\bar{\vartheta}_C\bar{u}_k + \bar{u}_k^2 = \vartheta_C^2 + 2\bar{\vartheta}_C\bar{u}_k + u_k^2.$$

Bahany (25.5) formulada goýýarys:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k(\upsilon_C^2 + 2\bar{\upsilon}_C\bar{u}_k + u_k^2) = \frac{1}{2}\upsilon_C^2 \cdot \left(\sum m_k\right) +$$

$$+\bar{\upsilon}_C \sum m_k\bar{u}_k + \sum \frac{m_k u_k^2}{2}.$$

$$\sum m_k\bar{u}_k = 0, \text{ çünki } \dot{\bar{\rho}}_C = \frac{\sum m_k \dot{\bar{\rho}}_k}{M} = 0 \Rightarrow \sum m_k\bar{u}_k = 0.$$

Belgileri girizeliň: $\sum m_k = M$ – sistemanyň massasy,

$T' = \sum \frac{m_k u_k^2}{2}$ – sistemanyň C massalar merkezine görä hereketindäki kinetik energiýa.

Şeýlelikde,

$$T = \frac{M\vartheta_C^2}{2} + T'. \tag{25.6}$$

Bu formula **Kýonigiň teoremasyny** kesgitleýär:

Material nokatlar sistemasynyň kinetik energiýasy onuň massalar merkeziniň (sistemanyň ähli nokatlarynyň massasy şu nokatda jemlenen hasap edilýär) kinetik energiýasy bilen sistemanyň massalar merkezine görä alnan kinetik energiýanyň jemine deň.

Hususy hallar

1. Öňe hereketdäki gaty jisimiň kinetik energiýasy

m massaly jisim aýlawsyz hereket etse, onuň ähli nokatlarynyň tizlikleri birmeňzeş, ýagny olar $\upsilon_k = \upsilon_C$, bu ýerde υ_C – massalar merkeziniň tizligidir, şonuň üçin:

$$T = \frac{M\upsilon_C^2}{2}. \tag{25.7}$$

2. Gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýan gaty jisimiň kinetik energiýasy

Goý, ω – jisimiň burç tizligi, h_k – bu m_k massaly nokatdan aýlanma okuna çenli aralyk bolsun. $\upsilon_k = h_k \cdot \omega$ formulany göz öňünde tutup, hasaplalyň:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k\upsilon_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k h_k^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m_k h_k^2 = \frac{I\cdot\omega^2}{2}.$$

$$T = \frac{I\cdot\omega^2}{2}, \tag{25.8}$$

bu ýerde I – jisimiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti.

3. Tekiz-parallel hereket edýän gaty jisimiň kinetik energiýasy

Eger jisimiň pursatdaky aýlanma okuny p bilen belgilesek, onda:

$$T = \frac{1}{2}I_p\omega^2, \tag{25.9}$$

bu ýerde I_p – jisimiň pursatdaky aýlanma okuna görä inersiýa momenti.

Eger jisimiň massalar merkezini C bilen belgilesek, onda:

$$T = \frac{1}{2}M\upsilon_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2. \tag{25.10}$$

I_C – jisimiň hereket tekizligine perpendikulýar bolup, C massalar merkezinden geçýän oka görä inersiýa momentidir.

25.3. Maddy ulgamyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema. Mysaly meseleler

Mehaniki sistema asyl nusgada berlen, k nokat üçin (15.1) formulany, teoremany ýazyp, k indeksi ähli n nokatlara ýaýradyp, deňlemeleri agzalaryna görä jemläp, alarys:

$$d\left(\sum \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}\right) = \sum \delta A_k^{(d)} + \sum \delta A_k^{(i)}$$

ýa-da

$$dT = \delta A^{(d)} + \delta A^{(i)}. \tag{25.11}$$

Teorema: ***Mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň differensialy sistema täsir edýän daşky we içki güýçleriň elementar işleriniň jemine deňdir.***

Kesgitleme: *Eger mehaniki sistemanyň aýratyn nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk üýtgemese, oňa üýtgemeýän sistema diýilýär.*

Eger sistema üýtgemeýän bolsa, onda (25.11) formulada $\delta A^{(i)} = 0$ bolýar we aşakdaky görnüşe gelýär:

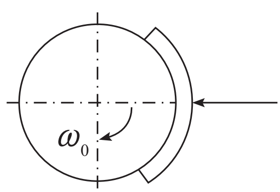
$$dT = \delta A^{(d)}. \tag{25.12}$$

(25.11) formulany belli çäklerde integrirlesek, teoremany gutarnykly, integral görnüşde alýarys:

$$T_2 - T_1 = A^{(d)} + A^{(i)}. \tag{25.13}$$

Üýtgemeýän sistema üçin $\quad T_2 - T_1 = A^{(d)}. \qquad (25.14)$

25.1-nji mesele. Radiusy R, agramy Q bolan disk öz okunyň daşynda ω_0 = *const* burç tizligi bilen aýlanýar. Tormoza haýsy P güýç bilen basylanda, disk bir aýlanyp saklanar? Sürtülme koeffisiýenti f-e deň *(25.3-nji surat)*.



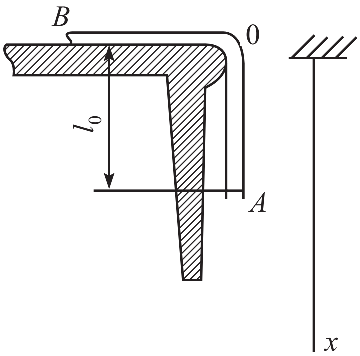
25.3-nji surat

Çözülişi. Diskiň kinetik energiýasy tormozyň sürtülmesini ýeňmäge edilýär:

$$T = I\frac{\omega_0^2}{2} = \frac{QR^2}{2g}\cdot\frac{\omega_0^2}{2}.$$

$A = 2\pi RPf$ – diskiň bir aýlawynda sürtülme güýjüniň işi. Kinetik energiýa teoremasyndan:

$$\frac{QR^2\omega_0^2}{4g} = 2\pi Pf \quad \Rightarrow \quad P = \frac{QR\omega_0^2}{8\pi fg}.$$



25.4-nji surat

25.2-nji mesele. Uzynlygy l bolan agyr zynjyryň bir bölegi stolda bolup, l_0 uzynlykly bölegi sallanyp dur. Sallanýan bölegi başlangyç tizliksiz hereketlenip ugrasa, zynjyr näçe wagtdan stoldan gaçar *(25.4-nji surat)*?

Çözülişi. Goý, t wagtdan soň zynjyryň asylyp duran böleginiň uzynlygy x, tizligi υ bolsun. Zynjyryň asylan böleginiň bitiren işi:

$$A = \int_{l_0}^{x} g\gamma x dx.$$

Zynjyryň kinetik energiýasy:

$$T = \frac{1}{2}\gamma l \upsilon^2,$$

bu ýerde γ – zynjyryň dykyzlygy. Kinetik energiýanyň teoremasyny ýazalyň:

$$\frac{1}{2}\gamma l \upsilon^2 = \gamma g \int_{l_0}^{x} x dx.$$

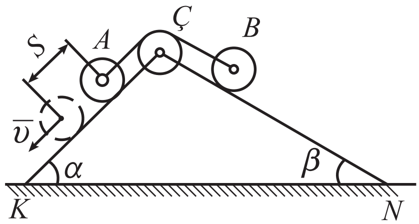
$\upsilon = \frac{dx}{dt}$ bolany üçin: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{x^2 - l_0^2} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - l_0^2}}.$$

Bu deňlemäni $(0, T)$ we (l_0, l) çäklerde integrirleýäris:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \ln\left\{\frac{l + \sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0}\right\}.$$

25.3-nji mesele. A tigir ýapgyt CK tekizlik bilen tigirlenip, C bloguň üstünden geçýän süýnmeýän trosuň kömegi bilen B tigiri çekýär. Bu tigirleriň tizlikleri hereket tekizliklerine paralleldirler (*25.5-nji surat*). A tigir s aralygy geçende onuň okunyň tizligini tapmaly. Iki tigri we blogy birmeňzeş, birjynsly disk görnüşinde kabul etmeli. Başlangyç pursatda sistema hereketsiz. Trosuň agramyny hasaba almaly däl.



25.5-nji surat

Çözülişi. Şerte görä $P_A = P_B = P_C = P$. Her tigriň agramy ikä dargap, olaryň biri hereketiň ugruna, beýlekisi oňa perpendikulýar bolýar. Kinetik energiýa teoremasyndan peýdalanalyň. Gözlenýän tizligi $\bar{\upsilon}$ bilen belgilesek, sistemanyň kinetik energiýasyny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$T = T_A + T_B + T_C\,.$$

$$T_A = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad T_C = \frac{I\omega^2}{2}, \quad T_B = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2}, \quad \omega = \frac{\upsilon}{r},$$

$I = \dfrac{mr^2}{2}$ bolany üçin, ýönekeý özgertmelerden soň tapýarys:

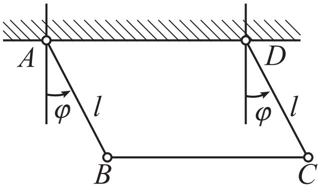
$$T = \frac{IP\upsilon^2}{4g}.$$

Kinetik energiýanyň teoremasynyň esasynda alarys:

$$Ps(\sin\alpha - \sin\beta) = \frac{7P\upsilon^2}{4g} \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs(\sin\alpha - \sin\beta)}\,.$$

25.4. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

25.4-nji mesele. AB, BC we CD sterženler A we D silindrik şarnirler arkaly potologa birikdirilip, özara B we C şarnirler bilen baglanan bolsa, döredilen tekiz mehanizmiň kinetik energiýasyny

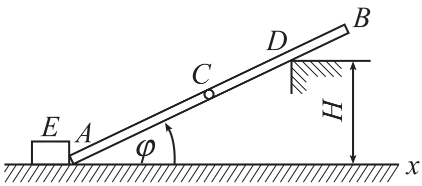


25.6-njy surat

hasaplamaly. l uzynlykdaky AB we CD sterženleriň her biriniň massasy M_1, BC sterženiň massasy M_2 bolup, $BC = AD$; AB we DC sterženler ω burç tizligi bilen aýlanýarlar (*25.6-njy surat*).

Jogaby: $T = \dfrac{2M_1 + 3M_2}{6} l^2 \omega^2$.

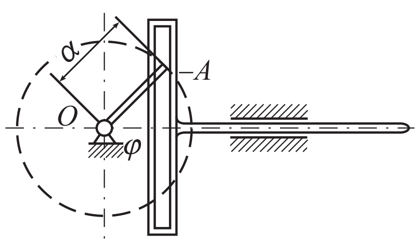
25.5-nji mesele. Massasy M bolan birjynsly inçe AB steržen D burça daýanyp, A ujy bilen gorizontal ugrukdyryjy boýunça typýar. E daýanç sag tarapa υ hemişelik tizlik bilen süýşýär. Sterženiň uzynlygy $2l$. D burç gorizontal ugrukdyryja görä H beýiklikde goýlan bolsa, sterženiň kinetik energiýasyny φ burça baglylykda kesgitlemeli (*25.7-nji surat*).



25.7-nji surat

Jogaby: $T = \dfrac{M\upsilon^2}{2}\left(1 - 2\dfrac{l}{H}\sin^3\varphi + \dfrac{4}{3}\dfrac{l^2}{H^2}\sin^4\varphi\right)$.

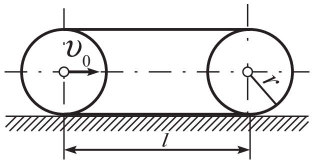
25.6-njy mesele. Kulisaly mehanizmiň kinetik energiýasyny hasaplamaly. OA kriwoşipiň suratyň tekizligine perpendikulýar bolan oka görä inersiýa moment J_0, ktiwoşipiň uzynlygy a, kulisanyň massasy m. A daşyň massasyny hasaba almaly däl. OA kriwoşip ω burç tizligi bilen aýlanýar. Mehanizmiň haýsy ýagdaýlarynda kinetik energiýa iň uly we iň kiçi bahalara eýe bolýar (*25.8-nji surat*)?



25.8-nji surat

Jogaby: $T = \frac{1}{2}(J_0 + ma^2 \sin^2\varphi)\omega^2$. Kulisanyň çetki ýagdaýlarynda energiýa iň kiçi, kulisa orta ýagdaýdan geçende iň uly baha eýe bolýar.

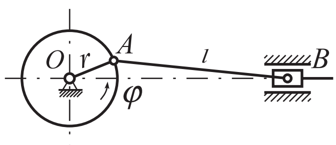
25.7-nji mesele. υ_0 tizlik bilen hereket edýän traktoryň zynjyrynyň kinetik energiýasyny hasaplamaly. Tigirleriň oklarynyň arasyndaky aralyk l, tigirleriň radiuslary r, zynjyryň her metriniň massasy γ-a deň (*25.9-njy surat*).



25.9-njy surat

Jogaby: $T = 2\gamma(l + \pi r)\upsilon_0^2$.

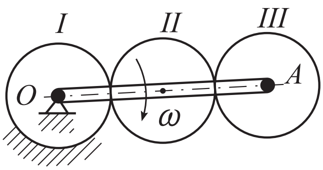
25.8-nji mesele. Kriwoşip-polzunly mehanizmiň kinetik energiýasyny hasaplamaly. Kriwoşipiň massasy m_1, uzynlygy r, polzunyň massasy m_2, şatunyň uzynlygy l-e deň. Şatunyň massasyny hasaba almaly däl. Kriwoşipi birjynsly steržen diýip hasaplamaly. Kriwoşipiň burç tizligi ω -a deň (*25.10-njy surat*).



25.10-njy surat

Jogaby: $T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}}\right]\right\} r^2\omega^2$.

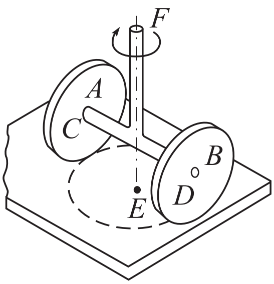
25.9-njy mesele. Gorizontal tekizlikde ýerleşen planetar mehanizmi birmeňzeş üç sany *I, II, III* tigirleriň oklaryny birleşdirýän *OA* kriwoşip herekete getirýär. *I* tigir gozganmaýar. Kriwoşip burç tizligi bilen aýlanýar. Her bir tigriň massasy M_1, radiusy r, kriwoşipiň massasy M_2-ä deň. Tigirleri birjynsly disk we kriwoşipi birjynsly



25.11-nji surat

sterženi diýip hasaplap, mehanizmiň kinetik energiýasyny hasaplamaly. *III* tigre goýlan jübüt güýjüň işi nämä deň (*25.11-nji surat*)?

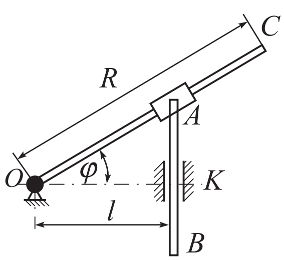
Jogaby: $T = \frac{r^2\omega^2}{3}(33M_1 + 8M_2)$; jübüt güýjüň işi nola deň.



25.12-nji surat

25.10-njy mesele. Degirmeniň *A* we *B* daşlary wertikal *EF* okuň daşynda aýlanýan gorizontal *CD* oka geýdirilen. Her daşyň massasy 200 *kg*, daşlaryň diametrleri birmeňzeş bolup, her haýsysy 1 *m*-e deň. *CD* ok minutda 20 gezek aýlansa, daşlaryň kinetik energiýasyny tapmaly. Inersiýa momentleri hasaplananda daşy birjynsly ýuka disk diýip hasaplamak mümkin. Daşlar daýanç tekizligi boýunça typman tigirlenýärler (*25.12-nji surat*).

Jogaby: 383 $N \cdot m$.

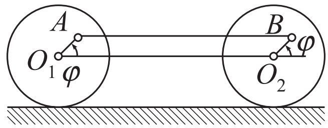


25.13-nji surat

25.11-nji mesele. Kulisa mehanizminde *OC* ryçag suratyň tekizligine perpendikulýar bolan *O* okuň daşynda yrananda, *A* polzun *OC* ryçag boýunça süýşüp, *AB* sterženi herekete getirýär. *AB* steržen wertikal *K* ugrukdyryjyda hereket edýär. Uzynlygy *R* bolan *OC* ryçagy massasy m_1 bolan steržen diýip hasaplamaly. Polzunyň massasy m_2-ä, *AB* sterženiň massasy m_3-e deň, $OK = l$. Mehanizmiň kinetik energiýasyny *OC* ryçagyň burç tizligi we aýlanma burçunyň funksiýasy görnüşde aňlatmaly. Polzuny nokatlanç massa diýip hasaplamaly (*25.13-nji surat*).

$$Jogaby:\ T = \frac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}[m_1R^2\cos^4\varphi + 3l^2(m_2 + m_3)].$$

25.12-nji mesele. Parowozyň sparnigi *AB* we O_1O_2 steržen bilen birleşdirilen iki sany tigirden ybarat ulgamyň kinetik energiýasyny hasaplamaly. Bu ýagdaýda tigirleriň oklary υ_0 tizlik bilen hereketlenýär. Her tigiriň massasy M_1-e deň, AB sparnigiň we birleşdiriji O_1O_2 sterženiň massalary meňzeş bolup, M_2-ä deň. Tigirleriň massalary gurşaw boýunça deňölçegli ýaýran; $O_1A = O_2B = r/2$, bu ýerde r – tigirleriň radiusy. Tigirler gönüçyzykly relsler bilen typman tigirlenýärler (*25.14-nji surat*).



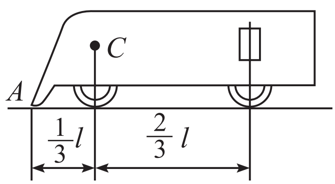
25.14-nji surat

Jogaby: $T = \frac{\upsilon_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4\sin\varphi)].$

25.13-nji mesele. M massaly awtomobil gorizontal ýolda υ tizlik bilen gönüçyzykly hereket edýär. Awtomobiliň tigri bilen ýoluň arasyndaky tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f_t, tigiriň radiusy r deň, howanyň aerodinamik garşylyk güýji R_g tizligiň kwadratyna proporsional: $R_g = \mu gM\upsilon^2$, bu ýerde μ – awtomobiliň şekiline bagly koeffisiýent. Berk režimde eýerdiji tigirleriň okuna geçirilýän hereketlendirijiniň kuwwatyny N kesgitlemeli.

Jogaby: $N = Mg\left(\frac{f_t}{r} + \mu\upsilon^2\right)\upsilon.$

25.14-nji mesele. Buzy ýylmaýjy M massaly maşyn buz meýdançasynda gorizontal tekizlikde υ tizlik bilen gönüçyzykly deňölçegli hereket edýär. C massalar merkeziniň orny suratda görkezilen. Buz we awtomobiliň tigirleriniň arasyndaky tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f_t, buz bilen ýylmaýjy A gyranyň arasyndaky typma sürtülme koeffisiýenti f bolsa, hereketlendirijiniň r radiusly tigirleriň okuna geçirilýän N kuwwatyny hasaplamaly. Tigirler typman tigirlenýärler (*25.15-nji surat*).



25.15-nji surat

Jogaby: $N = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_t}{r}\right)\upsilon.$

25.15-nji mesele. Diametri 60 *mm* bolan çarha (wala) minutda 180 gezek aýlanýan mahowik oturdylan, mahowigiň diametri 50 *sm*. Eger priwod öçürilenden soň mahowik togtaýança 90 gezek aýlanan bolsa, wal bilen podşipnigiň arasyndaky typma sürtülme koeffisiýentiniň f näçä deň bolýandygyny kesgitlemeli. Mahowigiň massasy onuň gurşawy boýunça deňölçegli paýlanan diýip hasap etmeli. Walyň massasy hasaba alynmaly däl.

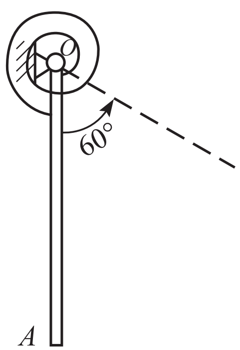
Jogaby: $f = 0{,}07$.

25.16-njy mesele. Diametri 2 *m* we massasy 3 *t* bolan aýlanýan tigir oturdylan silindrik ok(wal) bir pursatda 60 *aýl/min* burç tizlik bilen aýlanýar we şundan soň öz ugruna goýberilýär. Bu ýagdaýda walaýň diametri 10 *sm* we massasy 0,5 *t*. Eger podşipniklerdäki sürtülme koeffisiýenti 0,05 bolsa, wal togtaýança ýene näçe gezek aýlanar? Mesele çözülende mahowigiň massasy onuň gurşawy boýunça deňölçegli paýlanan diýip hasap etmeli.

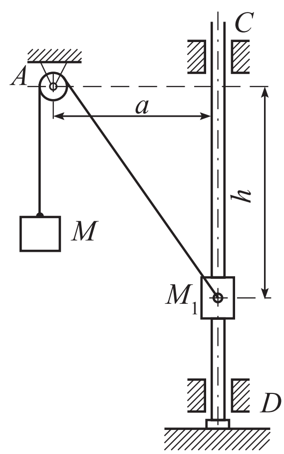
Jogaby: 109,8 aýlaw.

25.17-nji mesele. Massasy M, uzynlygy l bolan birjysly OA steržen bir ujunda suratyň tekizligine perpendikulýar bolup geçýän gozganmaýan gorizontal okuň daşynda aýlanýar. Çeýelik koeffisiýenti c deň bolan spiral puržinyň bir ujy gozganmaýan O oka we ikinji ujy steržene berkidilen. Steržen wertikal ýagdaýda dynçlykda dur. Bu ýagdaýda puržin deformirlenmedik. Sterženiň wertikala görä 60° burça gyşarmagy üçin onuň A ujuna nähilli tizlik bermeli (*25.16-njy surat*)?

Jogaby: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{9Mgl + 2\pi^2 c}{6M}}$.



25.16-njy surat



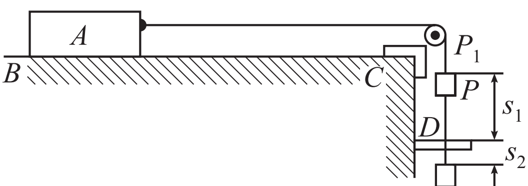
25.17-nji surat

25.18-nji mesele. Juda kiçi A blok arkaly geçirilen çeýe dartylmaýan ýüpüň uçlaryndan iki sany ýük asylan. M_1 ýük bloguň okundan a aralykda bolan ýylmanak wertikal CD steržen boýunça typýar. M_1 ýüküň agyrlyk merkezi başlangyç pursatda bloguň oky bilen bir derejede durýar, bu ýük agyrlyk güýjüniň täsirinde başlangyç tizliksiz aşak düşüp başlaýar. M_1 ýüküň tizligi bilen onuň aşak düşüş belentligi h –yň arasyyndaky baglanyşygy tapmaly. Ikinji ýüküň massasy M-e deň (*25.17-nji surat*).

Jogaby: $\upsilon^2 = 2g(a^2 + h^2)\dfrac{M_1 h - M(\sqrt{a^2+h^2} - a)}{M_1(a^2+h^2) + Mh^2}$.

25.19-njy mesele. M massaly P ýük bilen onuň üstünde goýlan M_1 massaly ýük, büdür-südür gorizontal BC tekizlikde dynçlykda duran M_2 massaly A ýüki, blokdan geçirilen ýüpüň kömegi bilen herekete getirýär. M ýük s_1 aralyk pese düşüp D halkadan geçende, halka ýüki tutup galýar; şondan soň M ýük s_2 aralyk pese düşüp togataýar. Ýüp bilen bloguň massalaryny we blokdaky sürtülmäni hasaba alman, A jisim bilen tekizligiň arasyndaky f sürtülme koeffisiýentini kesgitlemeli.

Berlen: $M_2 = 0{,}8$ *kg*, $M = M_1 = 0{,}1$ *kg*, $s_1 = 50$ *sm*, $s_2 = 30$ *sm* (*25.18-nji surat*).



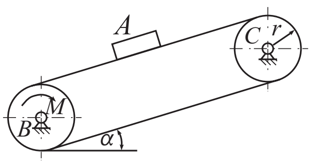
25.18-nji surat

Jogaby: $f = \dfrac{s_1(M_1 + M)(M + M_2)(M + M_1 + M_2)}{M_2[s_1(M + M_2) + s_2(M + M_1 + M_2)]} = 0{,}2.$

25.20-nji mesele. Ýylmanak ştiftde dynçlykda asylyp duran we uzynlygy $2a$ bolan birjynsly ýüp υ_0 başlangyç tizlik bilen hereketlenip başlaýar. Ýüpüň ştiftden sypan wagtyndaky tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: $\upsilon = \sqrt{ag + \upsilon_0^2}$.

25.21-nji mesele. Transportýor aşaky B şkiwe birleşdirilen geçirijiniň kömegi bilen M aýlandyryjy moment berýär. Eger göterilýän A ýüküň massasy M_1-e deň, B we C şkiwler birjynsly tegelek silindr



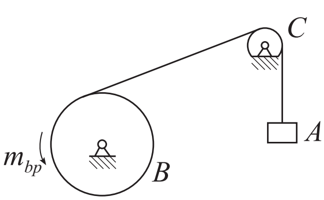
25.19-njy surat

şekilinde bolsa, transportýoryň lentasynyň υ tizligini onuň s süýşmesine görä kesgitlemeli. B we C şkiwleriň radius r-e, her biriniň massasy M_2-ä deň. Transportýoryň lentasy gorizontal ugur bilen α burçy emele getirýär, onuň massasyny hasaba almaly däl. Lenta şkiwde typmaýar (*25.19-njy surat*).

Jogaby: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2(M - M_1 gr \sin\alpha)}{r(M_1 + M_2)}s}.$

25.22-nji mesele. Lebýodkanyň elektromotorynyň kömegi bilen r radiusly we M_1 massaly A barabanyň walyna barabanyň aýlanma burçuna φ proporsional bolan m aýlandyryjy moment goýlan. Bu ýerde proporsionallyk koeffisiýenti a (*25.19-njy meseläniň suratyna seret*). Göterilýän M_2 massaly B ýüküň tizligini onuň h göteriliş beýikligine bagly görnüşde kesgitlemeli. A barabany tutuş silindr diýip hasaplamaly. Trosuň massasyny hasaba almaly däl. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur.

Jogaby: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2h(ah - 2M_2 gr^2)}{r^2(M_1 + 2M_1)}}.$



25.20-nji surat

25.23-nji mesele. Suratda göteriji mehanizmiň lebýodkasy görkezilen. M_1 massaly A ýük C blok arkaly geçirilen r radiusly, M_2 massaly B barabana oralan trosuň kömegi bilen göterilýär. Barabana, işe başlan badyna barabanyň φ aýlanma burçunyň kwadratyna proporsional bolan $m = a\varphi^2$ aýlandyryjy moment goýlan, bu ýerde a – hemişelik koeffisiýent. A ýük L beýiklige göterilende onuň tizligini kesgitlemeli. B barabanyň massasyny onuň gurşawy boýunça deňölçegli ýaýran, C blogy bolsa M_3 massaly tutuş disk diýip hasaplanmaly. Trosuň massasyny hasaba almaly däl. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur (*25.20-nji surat*).

Jogaby: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{4h(ah^2 - 3M_1 gr^3)}{3r^2(2M_1 + 2M_2 + M_3)}}.$

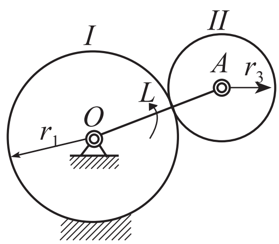
25.24-nji mesele. Gorizont bilen burçy emele getirýän ýapgyt tekizlik boýunça typman tigirlenýän r radiusly tigriň bu ýapgyt tekizligi boýunça h beýiklige göterilmegi üçin tigriň okuna ýapgyt tekizlige parallel ugrukdyrylan haýsy başlangyç tizligi bermeli? Tigirlenmäniň sürtülme koeffisiýenti f_t. Tigri birjynsly disk diýip hasaplamaly.

Jogaby: $\upsilon = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1+\frac{f_t}{r}\text{ctg}\alpha\right)}$.

25.25-nji mesele. Birmeňzeş massaly we radiusly iki sany silindr ýapgyt tekizlikde typman tigirlenip aşak düşýärler. Birinjisini tutuş silindr, ikinji silindriň massasyny onuň gurşawy boýunça deňölçegli ýaýran diýip hasaplamaly. Silindrler birmeňzeş aralyga aşak düşenlerinde olaryň massalar merkezleriniň arasyndaky baglanyşygy tapmaly. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur.

Jogaby: $\upsilon_2/\upsilon_1 = \sqrt{3/2}$.

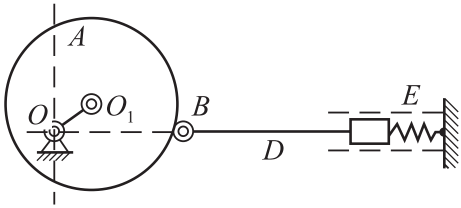
25.26-njy mesele. Gorizontal tekizlikde ýerleşen episiklik mehanizm OA kriwoşipe goýlan hemişelik L aýlandyryjy moment bilen dynçlyk ýagdaýynda herekete getirilýär. Eger gozganmaýan I tigriň radiusy r_1, gozganýan II tigriň radiusy r_2 we massasy M_1, kriwoşipiň massasy M_2 bolsa, kriwoşipiň burç tizligini onuň aýlanma burçunyň funksiýasy görnüşinde kesgitlemeli. II tigri birjynsly disk, kriwoşipi bolsa birjynsly steržen diýip hasaplamaly (*25.21-nji surat*).



25.21-nji surat

Jogaby: $\omega = \frac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\frac{3L\varphi}{9M_1+2M_2}}$.

25.27-nji mesele. Gorizontal tekizlikde ýerleşen kulakly mehanizmde A ekssentrik D ştangaly B roligi ileri-gaýra hereketlendirýärler. Ştanga birikdirilen E puržin roligi hemişe ekssentrige degip durmaga mejbur edýär. Ekssentrigiň massasy M, e ekssentrisitet onuň radiusynyň ýarysyna deň; puržinyň gatylyk koeffisiýenti c deň. Ştanga iň çepdäki ýagdaýda bolanda puržin süýnmedik ýagdaýynda bolýar. Ekssentrik D ştangany iň çepdäki ýagdaýdan iň sagdaky ýagdaýa geçirmek üçin oňa haýsy burç tizligi bermeli? Roligiň, ştanganyň we puržinyň massalaryny hasaba almaly däl. Ekssentrigi birjynsly tegelek disk diýip hasaplamaly (*25.22-nji surat*).

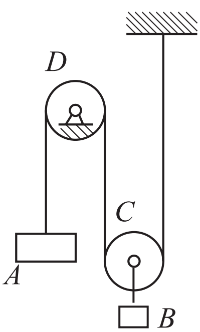


25.22-nji surat

Jogaby: $\omega = 2\sqrt{c/(3M)}$.

25.28-nji mesele. Eger welosipeddäki adam başlangyç pursatda 9 *km/sag* tizlik bilen hereket edip, soňra pedallaryny aýlamagyny goýan bolsa, welosiped togtaýança näçe ýol geçer? Welosiped bilen adamyň umumy massasy 80 *kg*, her bir tigiriň massasy 5 *kg*, her bir tigriň massasy 50 *sm* radiusly töwerek bilen deňölçegli ýaýran diýip hasaplamaly. Tigirleriň ýerdäki tigirlenmesiniň sürtülme koeffisiýenti 0,5 *sm* deň.

Jogaby: 35,6 *m*.

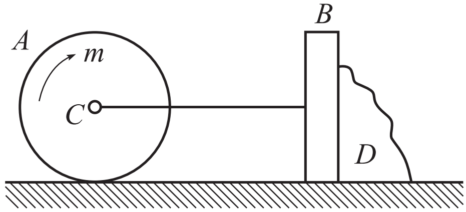


25.23-nji surat

25.29-njy mesele. M_1 massaly A ýük aşak düşende, gozganmaýan D blok arkaly geçirilen trosuň kömegi bilen gozganýan C bloguň okuna berkidilen M_2 massaly B ýüki ýokaryk göterýär. C we D bloklaryň her birini M_3 massaly birjynsly tutuş disk diýip hasaplanmaly. A ýüküň h beýiklikden düşen pursatyndaky tizligini kesgitlemeli. Trosuň massasy, bloklaryň gurşawyndaky typmalar we garşylyk güýçleri hasaba alynmaly däl. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur (*25.23-nji surat*).

$$Jogaby:\ \upsilon = 2\sqrt{2gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}.$$

25.30-njy mesele. Gar arassalaýjynyň eýerdiji tigrine – A barabanyna hemişelik m aýlandyryjy moment goýlan. A barabanynyň massasyny onuň gurşawy boýunça deňölçegli ýaýran diýip kabul etmeli. D garyň, B şitiň we beýleki öňe hereket edýän bölekleriň jemi hemişelik we M_2-ä deň. Garyň we şitiň ýere sürtülme koeffisiýenti f, barabanynyň ýerde tigirlenendäki sürtülme koeffisiýenti f_t, barabanynyň massasy M_1, radiusy r. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda duran bolsa, gar arassalaýjynyň B şitiniň geçen s ýoly bilen onuň υ tizliginiň bahasynyň arasyndaky gatnaşygy kesgitlemeli (*25.24-nji surat*).



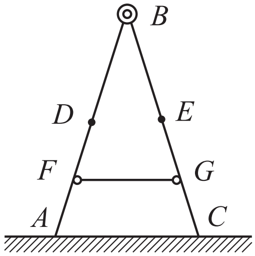
25.24-nji surat

Jogaby: $s = \dfrac{r}{2}\dfrac{2M_1 + M_2}{m - (M_1 f_t + f M_2 r)g}\upsilon^2.$

25.31-nji mesele. Gorizontal göni ýolda hereketlenýän awtoulagyň tizligi υ_1-den υ_2-ä çenli hereketlendirijiniň kuwwatynyň artmagynyň hasabyna köpeldi. Eger dört sany tigiriň her biriniň massasy M_1, kuzowyň massasy M_2 tigiriň radiusy r, tigiriň gara ýolda tigirlenmesiniň sürtülme koeffisiýenti f bolsa, awtoulagyň hereketlendirijisiniň bu aralykdaky bitiren işini hasaplamaly. Typman tigirlenýän tigirleri birjynsly tutuş diskler diýip hasap etmeli. Tigirler we kuzowdan beýleki hemme şaýlaryň kinetik energiýalaryny hasaba alynmaly däl.

Jogaby: $A = \dfrac{6M_1 + M_2}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) + \dfrac{f_t}{r}(4M_1 + M_2)gs.$

25.32-nji mesele. B şarnirli ABC merdiwan ýylmanak gorizontal polda dur, uzynlygy $AB = BC = 2l$, massalar merkezleri sterženleriň ortasyndaky D we E nokatlarda, her merdiwanyň massalar merkezlerinden geçýän oka görä inersiýa radiusy ρ deň. B şarnirden pola çenli aralyk h. Bir pursatda merdiwan FG dartgyjyň üzülmegi netijesinde gerilip başlaýar. Şarnirdäki sürtülmäni hasaba alman: 1) B nokadyň ýere degen pursatyndaky tizligini; 2) B nokat bilen poluň arasy

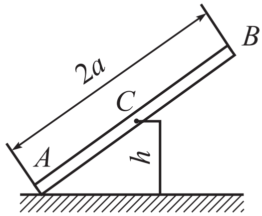


25.25-nji surat

$\frac{1}{2}h$ bolan pursatdaky B nokadyň tizligini kesgitlemeli (*25.25-nji surat*).

Jogaby:

$$\upsilon = 2l\sqrt{\frac{gh}{l^2+\rho^2}}; \quad \upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{16l^2-h^2}{2(l^2+\rho^2)}}.$$

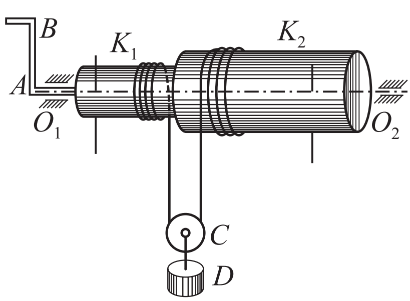


25.26-njy surat

25.33-nji mesele. Uzynlygy $2a$ bolan AB sterženiň A ujy ýylmanak gorizontal polda typanda steržen ýykylýar. Başlangyç pursatda steržen wertikal ýagdaýy eýeläp, dynçlyk ýagdaýynda dur. Sterženiň massalar merkeziniň tizligini onuň poldan h beýikliginiň funksiýasy görnüşinde kesgitlemeli (*25.26-njy surat*).

Jogaby: $\upsilon = (a-h)\sqrt{\dfrac{6g(a+h)}{4a^2-3h^2}}$.

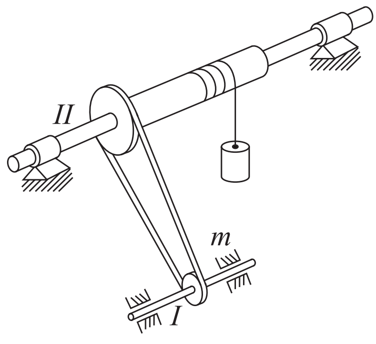
25.34-nji mesele. Differensial worotda bir-birine mäkäm birikdirilen iki sany K_1 we K_2 oklar (wallar) AB sap bilen aýlandyrylýar; K_1 we K_2 wallaryň radiuslary r_1 we r_2, olaryň O_1O_2 oka görä inersiýa momentleri, degişlilikde J_1 we J_2. Gozganýan C blok süýnmeýän we agramsyz ýüpden asylan; ýüpüň çep tarapyndaky ujy K_1 wala, sag tarapyndaky ujy K_2 wala berkidilen. AB sap aýlananda ýüpüň çep tarapyndaky ujy K_1 waldan çözülýär, sag tarapyndaky ujy bolsa K_2 wala saralýar. AB sapa m hemişelik aýlandyryjy moment goýlan. C blokdan M massaly D ýük asylan. D ýüküň s beýiklige göterilmeginiň ahyrynda sapyň burç tizligini tapmaly. Başlangyç pursatda ulgam dynçlyk ýagdaýynda dur. Sap bilen bloguň massalary hasaba alynmaly däl (*25.27-nji surat*).



25.27-nji surat

$$Jogaby: \quad \omega = \sqrt{2s\frac{2m-Mg(r_2-r_1)}{(r_2-r_1)[M(r_2-r_1)^2+4(J_1+J_2)]}}.$$

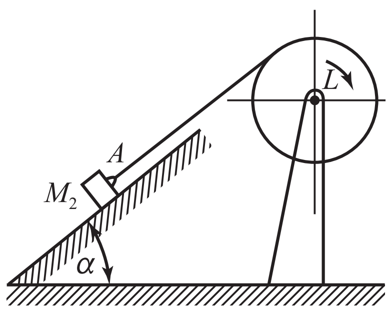
25.35-nji mesele. Worot çekili geçirijiniň kömegi bilen herekete getirilýär. Bu geçiriji worotyň walyna berkidilen *II* şkiw bilen motoryň walyndaky *I* şkiwi birleşdirýär. Massasy M_1 we radiusy r bolan *I* şkiwe hemişelik aýlandyryjy moment m goýlan. *II* şkiwiň massasy M_2 we radiusy R. Worotyň barabanynyň massasy M_3, radiusy r, göterilýän ýüküň massasy M_4. Worot dynçlykdan herekete getirilýär. Ýüküň h beýiklige göterilenindäki tizligini tapmaly. Çeki bilen ýüpüň massasyny hem-de podşipniklerdäki sürtülmäni hasaba almaly däl. Barabany we şkiwleri birjynsly tegelek silindrler diýip hasaplamaly (*25.28-nji surat*).



25.28-nji surat

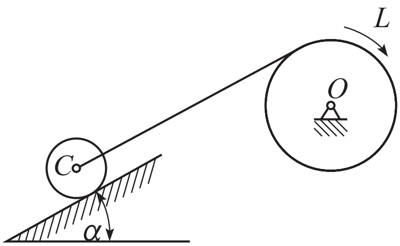
$$\textit{Jogaby:}\ \ \upsilon = 2\sqrt{\frac{h\left(\dfrac{mR}{r^2} - M_4 g\right)}{M_1\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + M_2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + M_3 + 2M_4}}.$$

25.36-njy mesele. L hemişelik aýlandyryjy moment worotyň radiusy r we massasy M_1 bolan barabanyna goýlan. Barabana oralan trosuň A ujuna gorizont bilen α burç emele getirýän ýapgyt tekizlik boýunça göterilýän M_2 massaly ýük berkidilen. Worotyň barabany φ burça aýlananda onuň burç tizligi näçe? Ýük bilen ýapgyt tekizligiň arasyndaky typma sürtülme koeffisiýenti f deň. Trosyň massasyny hasaba almaly däl, barabany birjynsly tegelek silindr diýip hasaplamaly. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur (*25.29-njy surat*).



25.29-njy surat

$$\textit{Jogaby:}\ \upsilon = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L - M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1 + 2M_2}\varphi}.$$

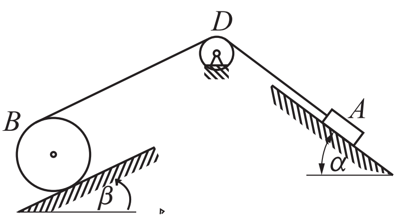


25.30-njy surat

25.37-nji mesele. Worotyň massasy M_1, radiusy r_1 bolan barabanyna L hemişelik aýlandyryjy moment goýlan. Barabana oralan trosuň ujuna M_2 massaly tigriň C oky berkidilen. Tigir gorizonta görä α burça gyşaran ýapgyt tekizlik boýunça ýokaryk typman tigirlenýär. Baraban n gezek aýlananda haýsy burç tizligi alar? Barabany we tigri birjynsly tegelek silindr diýip hasaplamaly. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur. Trosuň massasy we sürtülme koeffisiýenti hasaba alynmaly däl (*25.30-njy surat*).

Jogaby: $\omega = \dfrac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n \dfrac{L - M_2 g r_1 \sin\alpha}{M_1 + 3M_2}}$.

25.38-nji mesele. M_1 massaly ýüke ýüp daňylan we bu ýüp M_2 massaly D blok arkaly geçirilip, massasy M_3 bolan B silindrik katogyň gapdal üstüne oralan. Gorizont bilen α burçy emele getirýän ýapgyt tekizlik boýunça A ýük aşak hereketlenende D blok aýlanýar. B katok bolsa gorizont bilen β burçy emele getirýän ýapgyt tekizlik boýunça ýokaryk typman tigirlenýär. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda duran bolsa, A ýüküň tizligini onuň geçen s ýoluna bagly görnüşde kesgitlemeli. D blogy we B katogy birjynsly tegelek silindr diýip hasaplamaly. Sürtülme güýçlerini we ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*25.31-nji surat*).



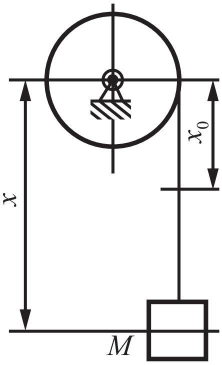
25.31-nji surat

Jogaby: $\upsilon = 2\sqrt{2gs\dfrac{2M_1\sin\alpha - M_3\sin\beta}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}$.

25.39-njy mesele. Aýlanma oky gorizontal bolan silindrik barabana oralan birjynsly süýnmeýän trosdan massasy M bolan ýük asylan. Trosuň uzynlygy l. Barabanyň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J, barabanyň radiusy R, trosuň uzynlyk birliginiň massasy m. Trosuň asylyp duran böleginiň uzynlygy x bolan pursatda ýüküň tizligini kesgitlemeli. Başlangyç pursatda ýüküň tizligi $\upsilon_0 = 0$, trosuň asylyp duran böleginiň uzynlygy bolsa x_0. Barabanyň okundaky sürtülme, trosuň ýogynlygy we trosuň barabana oralan böleginiň potensial energiýasynyň özgerişini hasaba almaly däl (*25.32-nji surat*).

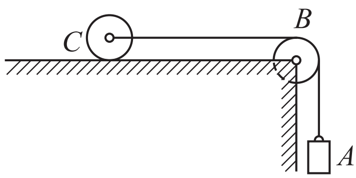
Jogaby:

$$\upsilon = R\sqrt{g\frac{[2M + m(x + x_0)](x - x_0)}{J + (M + ml)R^2}}.$$



25.32-nji surat

25.40-njy mesele. Massasy M_1 bolan A ýük uzynlygy L we massasy M_2 bolan birjynsly süýnmeýän ýüpden asylan. Ýüp suratyň tekizligine perpendikulýar bolan O okuň daşynda aýlanýan B blokdan geçirilen. Ýüpüň ikinji ujy gozganmaýan gorizontal tekizlik boýunça typman tigirlenýän C tigriň okuna berkidilen. B blok we C tigir her biriniň radiusy r we massasy M_2 bolan birjynsly tegelek diskden ybarat. Tigriň gorizontal tekizlikde typman tigirlenendäki sürtülme koeffisiýenti f_t. Ulgamyň dynçlykda duran başlangyç pursatynda B blokdan ýüpüň l uzynlykdaky bölegi sallanyp dur. A ýüküň tizligini onuň h wertikal süýşmesiniň funksiýasy görnüşinde kesgitlemeli (*25.33-nji surat*).



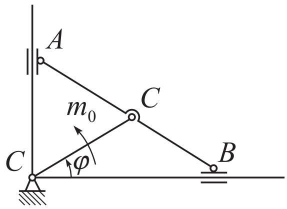
25.33-nji surat

Jogaby:

$$\upsilon = \sqrt{2gh\frac{\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2l + 2r + h) - \frac{f_t}{r}\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{4L} - \frac{h}{4L}\right)\right]\right\}}{M_1 + M_2 + 2M_3}}.$$

25.41-nji mesele. Gorizontal tekizlikde ýerleşen ellipsograf mehanizmi OC kriwoşipe goýlan m hemişelik aýlandyryjy momentiň täsirinde herekete getirilýär. $\varphi = 0$ bolan başlangyç pursatda mehanizm dynçlykda dur. OC kriwoşip çärýek öwrüm edende onyň burç tizligini tapmaly.

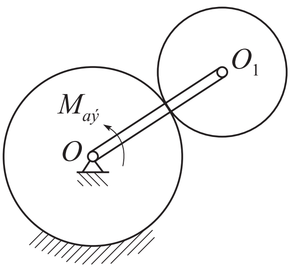
Berlen: M – AB sterženiň massasy, $m_A = m_B = m$ – A we B polzunlaryň massalary, $OC = AC = BC = l$; OC kriwoşipiň massasyny we garşylyk güýçlerini hasaba almaly däl (*25.34-nji surat*).



25.34-nji surat

$$\textit{Jogaby: } \omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M+3m}}.$$

25.42-nji mesele. Gorizontal tekizlikde ýerleşen episiklik mehanizmiň OO_1 kriwoşipine $M_a = M_0 - \alpha\omega$ aýlandyryjy moment goýlan, bu ýerde M_0 we α položitel hemişelik ululyklar, ω bolsa kriwoşipiň burç tizligi. Kriwoşipiň massasy m, satellittiň (hereketleniji tigriň) massasy M. Kriwoşipi inçe birjynsly steržen, satellitti bolsa r radiusly birjynsly tegelek disk hasaplap, kriwoşipiň ω burç tizligini wagtyň funksiýasy görnüşinde kesgitlemeli. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur. Gozganmaýan şesterniýanyň radiusy R-e deň, garşylyk güýçleri hasaba almaly däl (*25.35-nji surat*).



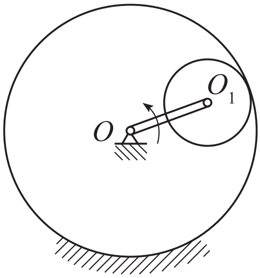
25.35-nji surat

Görkezme. Kinetik energiýanyň üýtgemegi baradaky teoremanyň differensial görnüşinden peýdalanmaly.

$$\textit{Jogaby: } \omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{gt}}t}\right), \text{ bu ýerde}$$

$$J_{gt} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3}{2}M\right)(R+r)^2.$$

25.43-nji mesele. Gorizontal tekizlikde ýerleşen giposiklik mehanizmiň OO_1 kriwoşipi ω_0 hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Bir pursatda hereketlendiriji öçürilen we satellittiň (hereketleniji tigriň) okuna goýlan sürtülme güýjüniň $M_{\text{sür}}$ hemişelik sürtülme momentiniň täsirinde mehanizm saklanýar. Kriwoşipiň massasy M_1, satellittiň (hereketleniji tigriň) massasy M_2, R we r,



25.36-njy surat

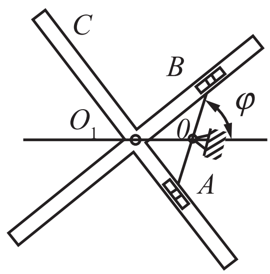
degişlilikde uly we kiçi tigirleriň radiuslary bolsa, τ saklanyş wagtyny kriwoşipiň bu wagt aralygyndaky aýlanan burçuny kesgitlemeli (*25.36-njy surat*).

Görkezme. Kinetik energiýanyň üýtgemegi baradaky teoremanyň differensial görnüşinden peýdalanmaly.

Jogaby: $\tau = \dfrac{rJ_{gt}}{RM_{\text{sür}}}\omega_0, \quad \varphi = \dfrac{1}{2}\dfrac{rJ_{gt}}{RM_{\text{sür}}}\omega_0^2,$

bu ýerde $J_{\text{gt}} = \left(\dfrac{M_1}{3} + \dfrac{3}{2}M_2\right)(R-r)^2.$

25.44-nji mesele. Gozganmaýan O okuň daşynda aýlanýan AB birjynsly sterženiň kömegi bilen C krestowina gozganmaýan O_1 okuň daşynda aýlanma herketine getirilýär (O we O_1 suratyň tekizligine perpendikulýar). Bu ýagdaýda A we B polzunlar AB steržen bilen şarnir arkaly birikdirilip, C krestowinanyň özara perpendikulýar kesigi boýunça süýşýärler. Sterženiň aýlanyşy $m_{\text{aý}}$ hemişelik aýlandyryjy momentiň täsirinde bolýar. AB steržen çärýek aýlanan pursatynda onuň burç tizligini tapmaly. Başlangyç pursatda $\varphi = 0$, sterženiň burç tizligi ω_0. A we B polzunlaryň şarnirleriň her birinde dörедýän garşylyk momentleriniň mukdary $m_{\text{aý}}$-dan iki esse kiçi. Başga garşylyk güýçleri hasaba alynmaly däl. Sterženiň massasy m; C krestowinanyň O oka görä inersiýa momenti J; $OO_1 = OA = OB = l$ (*25.37-nji surat*).



25.37-nji surat

Jogaby: $\omega = \sqrt{\dfrac{6\pi m_{\text{aý}}}{4ml^2 + 3J} + \omega_0^2}.$

26. POTENSIALLY GÜÝÇ MEÝDANY

26.1. Güýç meýdany

Ýokarda belläp geçişimiz ýaly nokada täsir edýän güýçler wagta, nokadyň koordinatlaryna (ýagny, ornuna), tizligine baglydyrlar. Emma diňe nokadyň koordinatlaryna bagly güýçler hem bolýar. Olara **ornabagly** (pozision) güýçler diýilýär.

Maddy nokat giňişligiň niresindedigine garamazdan, oňa täsir edýän güýç bu nokadyň koordinatlarynyň üznüksiz funksiýalary bolsa, onda şeýle giňişlige güýç **meýdany** diýilýär.

Güýç meýdanyndaky güýjüň işi islendik göçüşde maddy nokadyň traýektoriýasy boýunça hereket kanunyna bagly bolman, diňe traýektoriýanyň şekiline bagly bolýar. Bu aýdylanlar güýç meýdanyny häsiýetlendiriji alamatdyr.

Nokadyň güýç meýdanynyň düşünjesini mehaniki ulgam üçin hem peýdalanmak bolýar.

26.2. Güýç potensialy

F meýdan güýji maddy nokada täsir edýän bolsa, bu güýjüň bitiren elementar işi aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

F_x, F_y, F_z proýeksiýalar haýsy şerti kanagatlandyrsa δA elementar iş bir funksiýanyň doly differensialyna deň bolar:

$dU(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

Bu şerti tapalyň.

U funksiýa güýç **funksiýasy** ýa-da **potensial** funksiýa diýilýär. Eger $dU = \delta A$ bolsa, onda

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

dx, dy, dz erkin bolanlary üçin, olaryň koeffisiýentlerini deňläp almak bolýar:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\;\; F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\;\; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{26.1}$$

Diýmek, *güýjüň* F_x, F_y, F_z proeksiýalary güýç funksiýasynyň nokat koordinatalary boýunça alnan hususy önümlerine deň bolsa, ol ýagdaýda güýjüň elementar işi bu potensial funksiýanyň doly differensialyna deň bolýar:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU. \tag{26.2}$$

26.3. Potensial güýjüň konserwatiwligi

Potensial güýç aşakdaky konserwatiw häsiýete eýe. Teoremany subutsyz getirýäris.

Teorema. Güýç meýdanynda hereketdäki maddy nokadyň hereketinde potensial güýjüň bitirýän işi nokadyň geçen ýoluna bagly bolman, diňe başlangyç hem ahyrky ornuna bagly bolýar:

$$A_{M_0M} = U - U_0 \,. \tag{26.3}$$

26.4. Potensially güýçler üçin maddy nokadyň kinetik energiýa baradaky teoremasy. Potensial energiýa, energiýanyň saklanma kanuny

Maddy nokat üçin kinetik energiýanyň üýtgemegi baradaky teoremany alalyň (*15-nji bölüm* ser.):

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = A.$$

Potensial güýç üçin (26.3) formuladan peýdalanýarys:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = A = U - U_0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = U - U_0. \tag{26.4}$$

Güýjüň konserwatiwlik häsiýetiniň esasynda, onuň bitiren işiniň nokadyň traýektoriýasyna we hereket kanunyna bagly bolman, potensial funksiýanyň çetki bahalarynyň tapawudyna deňligi anyklanyldy.

Ahyrky formulany şeýle ýazalyň:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + (-U) = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + (-U_0). \tag{26.5}$$

Potensial funksiýanyň ters belgisi bilen alnan bahasyna **potensial energiýa** diýilýär. Potensial energiýany Π harpy bilen belgiläliň. Bu mukdar ýaşyryn energiýa bolup, nokadyň hereketinde ýaşyrynlykdan **janly güýje** (irki kitaplarda janly güýç diýip kinetik energiýany göz öňünde tutýarlar) öwrülýär. M nokatdaky potensial energiýa: $\Pi =- U_0$. M_0 nokatdaky potensial energiýa: $\Pi_0 = - U_0$. (26.5) $\Rightarrow$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + \Pi = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \Pi_0 = const.$$

Diýmek, ***koserwatiw güýç meýdanynda hereketlenýän nokat üçin hemme wagt kinetik energiýa bilen potensial energiýanyň jemi üýtgemeýän mukdardadyr.***

Doly energiýany E harpy bilen belgiläp alarys:

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + \Pi = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \Pi_0 = const. \tag{26.6}$$

Bu formula mehaniki energiýanyň saklanma kanunyny aňladýar.

26.5. Deň potensially üst (ekwipotensial üst)

Islendik nokady üçin potensial funksiýanyň bahasy üýtgemeýän üste **deň potensially üst** diýilýär. Onuň deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$U(x, y, z) = C = const \tag{26.7}$$

C ululyga dürli bahalary berip, şeýle üstleriň biri-biri bilen kesişmeýän gatma-gat köplügini alarys. $\overline{F}$ güýç funksiýasynyň ösýän tarapyna normal boýunça ugrukdyrylandyr.

26.6. Güýç funksiýalaryny tapmaga degişli mysallar

1. Agyrlyk güýjüniň meýdanynyň güýç funksiýasy

Eger z oky wertikal boýunça ugrukdyrsak, agyrlyk güýjüni $\overline{P} = m\bar{g}$ bilen belgilesek, onda (26.2) formuladan alarys: $\Rightarrow$

$$\delta A = F_z dz = -mgdz = d(-mgz) = dU \quad \Rightarrow$$
$$U = -mgz + const. \tag{26.8}$$

Deň potensially üstüň deňlemesi $U = const \Leftrightarrow z = const$. Bu bolsa gorizontal tekizlikleriň köplügini aňladýar.

2. Maýyşgak güýç meýdanynyň güýç funksiýasy

$\overline{F} = -c\bar{r}$, bu ýerde c – koeffisiýent, $\bar{r}$ – radius-wektor. Äşgär bir häsiýeti görkezeliň:

$(d\bar{r})^2 = (dr)^2 \Rightarrow \bar{r} \cdot d\bar{r} = r \cdot dr.$ $\quad \delta A = \overline{F} d\bar{r} = -c\bar{r}d\bar{r} = dU.$ Integrirleýäris:

$$U = -\frac{cr^2}{2} + const = -\frac{c}{x}(x^2 + y^2 + z^2) + const. \tag{26.9}$$

Deň potensially üstler bolup sferalaryň $r = const$ köplügi hyzmat edýär.

3. Nýutonyň dartyş güýjüniň meýdanynyň güýç funksiýasy

$F = \frac{k}{r^2}$, bu ýerde k – koeffisiýent. Birlik radius wektory $\bar{r}^0 = \frac{\bar{r}}{r}$ bilen belgilesek, $\overline{F}$ güýji aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\overline{F} = -\bar{r}^0 \cdot \frac{k}{x^2} = -\frac{k}{x^3}\bar{r} \Rightarrow \delta A = -k\frac{\bar{r}d\bar{r}}{r^3} = -k\frac{r \cdot dr}{r^3} = -k\frac{dr}{r^2} = dU.$$

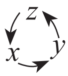
$$U = \frac{k}{r} + const. \tag{26.10}$$

Deň potensially üstler bolup sferalaryň r = const köplügi hyzmat edýär.

26.7. Potensially güýç meýdanyndaky mehaniki ulgam üçin energiýanyň saklanma kanuny. Mysaly meseleler

Ýokarda maddy nokat üçin alnan netijeleri mehaniki ulgam üçin ýaýbaňlandyryp bolýar. Mehaniki ulgam asyl nusgada berlen. Eger içki güýçler potensial bolsalar, onda:

$$F_{kx}^{(i)} = -\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$



bu ýerde $\Pi^{(i)} = \Pi^{(i)}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ – içki güýçleriň meýdanynyň potensial energiýasy.

Içki güýçleriň işi aşakdaky ýaly tapylýar:

$$A^{(i)} = \int_{(1)}^{(2)} \delta A^{(i)} = \int_{(1)}^{(2)} \sum \left(F_{kx}^{(i)} dx_k + F_{ky}^{(i)} dy_k + F_{kz}^{(i)} dz_k\right) =$$

$$= -\int_{(1)}^{(2)} \sum \left(\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial y_k} \partial y_k + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial z_k} \upsilon z_k\right)$$

ýa-da
$$A^{(i)} = -\int_{(1)}^{(2)} d\Pi^{(i)} = \Pi_1^{(i)} - \Pi_2^{(i)},$$

bu ýerde $\Pi_1^{(i)}$ we $\Pi_2^{(i)}$ – içki güýçleriň meýdanynda mehaniki ulgamyň başlangyç we ahyrky orunlardaky potensial energiýalar.

Eger daşky güýçler hem potensial bolsalar, onda ýokardaka meňzeş netije almak bolar:

$$A^{(d)} = -\int_{(1)}^{(2)} d\Pi^{(d)} = \Pi_1^{(d)} - \Pi_2^{(d)},$$

bu ýerde $\Pi_1^{(d)}$ we $\Pi_2^{(d)}$ – daşky güýçleriň meýdanynda mehaniki ulgamyň başlangyç we ahyrky orunlaryndaky potensial energiýalar.

(25.13) formula aşakdaky görnüşe gelýär:

$$T_2 - T_1 = \Pi_1^{(i)} - \Pi_2^{(i)} + \Pi_1^{(d)} - \Pi_2^{(d)} \quad \text{ýa-da}$$

$$T_2 + \Pi_2^{(d)} + \Pi_2^{(i)} = T_1 + \Pi_1^{(d)} + \Pi_1^{(i)}. \tag{26.11}$$

Ahyrky deňlik ulgam üçin **mehaniki energiýanyň saklanma** kanunyny aňladýar: **eger ulgamda täsir edýän daşky we içki güýçler potensial bolsalar,onda ulgamyň doly energiýasy hemişelikdir.**

Mysaly meseleler

26.1-nji mesele. $M(x, y, z)$ nokada täsir edýän dört sany

$$\overline{F_1} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \overline{F_2} = y^2\bar{i} + x\bar{j} + z^2\bar{k},$$
$$\overline{F_3} = x\bar{i} + yz^2\bar{j} + y^2 z\bar{k}, \quad \overline{F_4} = x\bar{i} - yz\bar{j} + z^2\bar{k}.$$

güýçleriň haýsysynyň potensiallydygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Tablisada ýerleşdirilen hususy önümler meseläni çözmegi aýdyňlaşdyrýar:

	$\frac{\partial F_x}{\partial y}$	$\frac{\partial F_y}{\partial x}$	$\frac{\partial F_x}{\partial z}$	$\frac{\partial F_z}{\partial x}$	$\frac{\partial F_z}{\partial y}$	$\frac{\partial F_z}{\partial z}$
$\overline{F_1}$	0	0	0	0	0	0
$\overline{F_2}$	$2y$	1	0	0	0	0
$\overline{F_3}$	0	0	0	0	$2yz$	$2yz$
$\overline{F_4}$	0	0	0	0	0	$-y$

$U = \frac{k}{r} +$ hemişelik şertleri kanagatlandyrany üçin, $\overline{F_1}$ we $\overline{F_3}$ güýçler potensiallydyrlar.

26.2-nji mesele. Potensially meýdandaky nokadyň potensial energiýasy aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$\Pi = 6x^3 - 3y^2 - 2z.$$

A(0,0,1) nokada goýlan güýç nähili ugrukdyrylan?

Çözülişi. $u = -\Pi = -6x^3 + 3y^2 + 2z.$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -18x^2, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 6y, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 2.$$

A(0,0,1) nokat üçin: $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 2$. Diýmek, $\overline{F}_1$ güýç z okda ýatyr.

27. GATY JISIMIŇ DINAMIKASY

Gaty jisim mehaniki sistemanyň hususy halydyr. Şu bölümde jisimiň öňe (aýlawsyz) hereketine, tekiz parallel hereketine, gozganmaýan nokadyň daşyndaky hereketine hem-de erkin jisimiň hereketine gararys.

Gaty jisime içki güýçleriň täsiri bolmany üçin, diňe daşky güýçlere seredilýär we d indeksi gerek bolmanlygy üçin ýazylmaýar.

27.1. Gaty jisimiň öňe hereketi

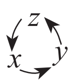
Öňe hereketdäki jisimiň ähli nokatlary birmeňzeş hereketde bolýarlar. Şol sebäpli, jisimiň diňe C massalar merkeziniň hereketini öwrenmeklik ýeterlik bolýar. Jisim üçin sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teoremany ulanyp, (22.1) formulany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$M\ddot{\overline{r}}_C = \overline{R}, \tag{27.1}$$

bu ýerde M – jisimiň massasy, $\ddot{\overline{r}}_C$ – massalar merkeziniň tizlenmesi, $\overline{R} = \overline{R}^{(d)}$ – daşky güýçleriň baş wektory.

Bu deňlemäni skalýar görnüşde hem ýazmak bolýar:

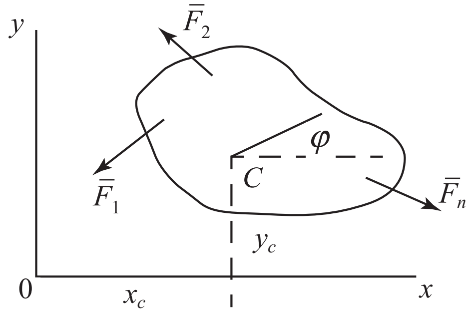
$$M\ddot{x}_C = R_x, \tag{27.2}$$



Deňlemeleri integrirläp C nokadyň koordinatlaryny wagta baglylykda tapmak bolar. Bu bolsa jisimiň öňe hereketini häsiýetlendirýär. Integrirlemäniň erkin hemişelikleri başlangyç şertlerden tapylýar.

27.2. Gaty jisimiň tekiz parallel hereketi. Mysaly meseleler

Islendik wagt üçin tekiz parallel hereket edýän jisimiň orny, polýusyň orny we aýlaw burçy bilen kesgitlenilýär (*27.1-nji surat*).



27.1-nji surat

Polýusa derek C massalar merkezini almaklyk amatly. Jisimiň orny x_C, y_C, φ koordinatlar bilen kesgitlenilýär. Suratda C nokadyň üstünden geçýän hereket tekizligine parallel kesik görkezilen. Jisime täsir edýän $\overline{F_1}, \ldots \overline{F_n}$ güýçler şu kesikde ýatýan bolsun. C nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini sistemanyň massalar merkeziniň hereketi ýaly alyp bolýar, (27.1) formula:

$$M\ddot{\bar{r}}_c = \overline{R}. \tag{27.3}$$

Jisimiň C nokadyň daşyndan aýlanma hereketi (24.7) formula bilen kesgitlenilýär:

$$I_C\ddot{\varphi} = M_C. \tag{27.4}$$

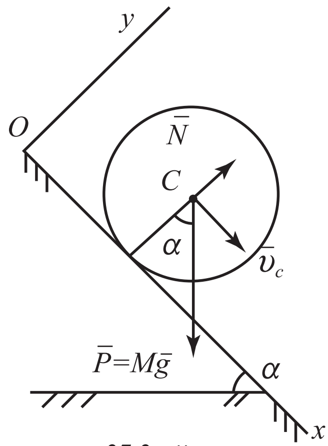
Şeýlelikde ahyrky formulalary birleşdirip, tekiz parallel hereket edýän jisimiň hereketiniň differensial deňlemelerini aşakdaky görnüşde ýazyp bolýar:

$$M\ddot{x}_C = R_x, \quad M\ddot{y}_C = R_y, \quad I_C\ddot{\varphi} = M_C, \tag{27.5}$$

bu ýerde I_C – tekizlige perpendikulýar bolup C nokadyň üstünden geçýän oka görä jisimiň inersiýa momenti. M_C – bu C nokada görä güýçleriň momentleriniň algebraik jemi. R_x, R_y – güýçleriň oklara proýeksialarynyň jemi.

(27.5) deňlemeleriň kömegi bilen dinamikanyň iki esasy meselelerini çözmek bolýar. Ýagny güýçler berlen bolsa, jisimiň hereketiniň kinematiki deňlemelerini ýa-da jisimiň hereket kanunlary belli bolsa, güýçleriň baş wektoryny we baş momentini tapyp bolýar.

27.1-nji mesele. Birjynsly R radiusly göni tegelek silindr α burç bilen gorizontal ýapgytlanan ýylmanak tekizlik boýunça tigirlenýär. Başlangyç $t = 0$ pursatda silindriň oky hereketsiz, gorizontal ýerleşen (*27.2-nji surat*). Silindriň hereket deňlemelerini we tekizlige basyşyny kesgitlemeli. Başlangyç şertler: $t = 0$; $x_C = 0$; $\dot{x}_C = 0$.



27.2-nji surat

Çözülişi. Silindri baglanyşykdan boşadyp, $\overline{N}$ reaksiýa güýjüni goýýarys. (27.5) deňlemeleri ýazalyň

$$M\ddot{x}_C = Mg\sin\alpha, \quad M\ddot{y}_C = -Mg\cos\alpha + N,$$
$$I_C\dot{\omega} = 0.$$

$y_C = R\varphi$ bolany üçin, ikinji deňlemeden:

$$N = Mg\cos\alpha.$$

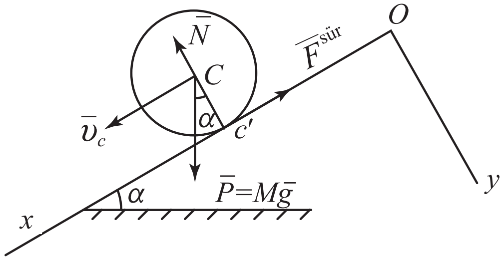
Meseläniň talabyna görä, silindriň tekizlige basyşy N reaksiýa deň we garşy tarapa ugrukdyrylan.

Üçünji deňlemedeň: $\omega = \text{const}$. Eger $\omega = \omega(0) = 0$ bolsa, onda ähli hereket döwründe $\omega = 0$ bolýar, ýagny başlangyç pursatda berlen burç tizlik bilen hereket edýär.

Birinji deňlemeden $\upsilon_C = \dot{x}_C = gt\sin\alpha + C_1$. Ýene bir gezek integrirläp, alarys $x_C = \dfrac{gt^2}{2}\sin\alpha + C_1 t + C_2$.

Başlangyç şertleri ulanyp alarys: $x_C = \dfrac{gt^2}{2}\sin\alpha$.

27.2-nji mesele. Meseläniň şerti deslapky meseläniňki ýaly, ýöne ýylmanak tekizlige derek sürtülmeli tekizlik almaly (*27.3-nji surat*). Typma sürtülme koeffisiýenti f deň.



27.3-nji surat

Çözülişi. $\overline{F}^{\text{sür}}$ güýji hem nazara alyp, ýokarky meseläniň çözülişini ulanýarys:

$$M\ddot{x}_C = Mg\sin\alpha - F^{\text{sür}},\ \ M\ddot{y}_C = Mg\cos\alpha - N,\ \ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} = F^{\text{sür}}\cdot R. \quad (1)$$

$y_c \equiv -R$ bolany üçin, ikinji deňlemeden $N = Mg\cos\alpha$.

Iki ýagdaýa garalyň:

a) Goý, silindr typman tigirlensin. Bu ýagdaýda silindr bilen tekizligiň galtaşma C' nokady tizlikleriň pursatdaky merkezi bolany üçin:

$$x_C = R\varphi, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}. \quad (2)$$

(1) deňlemeleriň birinjisi we üçünjisi aşakdaky ýaly ýazylýarlar:

$$MR\ddot{\varphi} = Mg\sin\alpha - F^{\text{sür}}, \qquad MR\ddot{\varphi} = 2F^{\text{sür}}.$$

Bu deňlemeleriň çep taraplary deň bolany üçin sag taraplaryny deňeşdirip, aşakdakyny alýarys:

$$F^{\text{sür}} = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha. \quad (3)$$

Typma bolmadyk ýagdaýda $F^{\text{sür}} \le fN$ bolany üçin:

$$\frac{1}{3}Mg\sin\alpha \le fMg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha \le 3f.$$

Ahyrky deňsizlik silindriň sürtülmeli tekizlikde typman tigirlenmek şertini aňladýar.

(3)-i (1)-nji sistemanyň birinji deňlemesine goýalyň:

$$\ddot{x}_C = \frac{1}{3} g t^2 \sin\alpha.$$

Başlangyç şertlere laýyklykda iki gezek integrirläp alarys:

$$x_C = \frac{1}{3} g t^2 \sin\alpha.$$

Ýokarky mesele bilen deňeşdirip, şeýle netijä gelýäris: *şol bir wagt dowamynda silindr tigirlenende taýyp geçýän ýolunyň 2/3 bölegini geçýän ekeni.*

b) Goý, tg$\alpha > 3f$ bolsun. Bu ýagdaýda silindr tigirlenip barýarka typýaram, şonuň üçin (2) şert adalatsyz bolýar. Emma, indi

$$F^{\text{sür}} = fN = fMg\cos\alpha$$

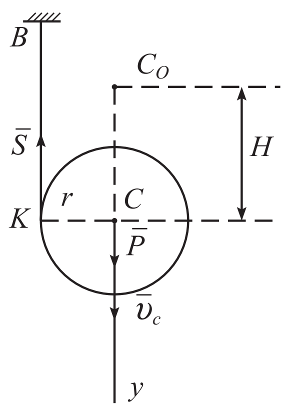
bolany üçin, (1)-nji sistemanyň birinji we üçünji deňlemelerine goýup, alarys:

$$\ddot{x}_c = g(\sin\alpha - f\cos\alpha), \qquad \frac{1}{2} R\ddot{\varphi} = fg\cos\alpha.$$

Başlangyç şertlere laýyklykda integrirläp, silindriň hereketiniň kinematiki deňlemelerini alýarys:

$$x_c = \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2, \qquad \varphi = \frac{fg}{R} t^2 \cos\alpha.$$

27.3-nji mesele. $\overline{P}$ agramly, r radiusly göni tegelek silindriň ortasyndan saralan ýüpüň ujy B nokada berkidilen. Silindr başlangyç tizliksiz gaçyp, ýüpi çözýär. Silindr H aralyga düşende onuň okunyň $\overline{\upsilon}_c$ tizligini we ýüpüň $\overline{S}$ dartylyş güýjüni kesgitlemeli (*27.4-nji surat*).



27.4-nji surat

Çözülişi. Silindriň kinetik energiýasyny Kýonginiň teoremasyny ulanyp tapýarys:

$$T = \frac{P}{g} \cdot \frac{\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$

$\upsilon_c = \omega r$, $I_c = \frac{P}{g} \cdot \frac{r^2}{2}$ bolany üçin,

$$T = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot \upsilon_c^2.$$

Kinetik energianyň teoremasyny ulanýarys:

$$T - T_0 = A(\overline{P}) + A(\overline{S}).$$

$A(\overline{P}) + PH,\ A(\overline{S}) = 0,$ sebäbi: $\upsilon_k = 0$, $T_0 = 0$.

Bahalary ulanýarys:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{P}{g}\cdot\upsilon_c^2 = PH \quad\Rightarrow\quad \upsilon_c^2 = \frac{4}{3}gH \quad\Rightarrow\quad \upsilon_c = \frac{2}{3}\sqrt{3gH}\,.$$

C nokadyň tizlenmesini tapalyň:

$$2\upsilon_c\frac{d\upsilon_c}{dt} = \frac{4}{3}g\frac{dH}{dt}.$$

$\frac{dH}{dt} = \upsilon_c$ bolany üçin:

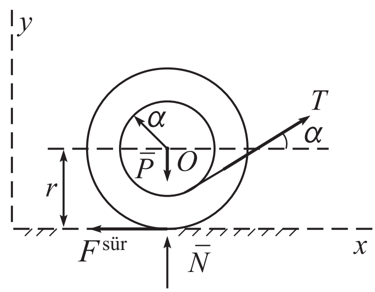
$$a_c = \upsilon_c = \frac{2}{3}g.$$

(27.5) sistemanyň birinji deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{P}{g}a_c = P - S \;\Rightarrow\; S = P - \frac{P}{g}\cdot\frac{2g}{3} = \frac{P}{3}, \quad S = \frac{P}{3},$$

ýagny ýüpüň dartylyş güýji üýtgemeýän ekeni.

27.4-nji mesele. Sürtülmeli tekizlikde ýatan P agramly, r radiusly we inersiýa radiusy ρ bolan tigriň a radiusly barabanyna saralan ýüpüň ujuna gorizont bilen α burç emele getirýän T güýç goýlan (*27.5-nji surat*).Tigriň O merkeziniň hereket deňlemesini kesgitlemeli. Başlangyç şertler: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.



27.5-nji surat

Çözülişi. Ýokardaky meseleleriň çözülişine meňzeş bolany üçin, aýratyn düşündiriş berilmeýär:

$$M\ddot{x} = T\cos\alpha - F^{\text{sür}}, \quad I\ddot{\varphi} = F^{\text{sür}} \cdot r - Ta.$$

$$x = r \cdot \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\ddot{x}, \quad I = \frac{P}{g}\rho^2.$$

Ikinji deňlemäni $\ddot{x}$ arkaly aşakdaky ýaly ýazmaly:

$$\frac{P}{g}\rho^2 \frac{1}{r}\ddot{x} = F^{\text{sür}} \cdot r - Ta.$$

Birinji we ahyrky deňlemelerden $F^{\text{sür}}$ güýji ýok edip, alýarys:

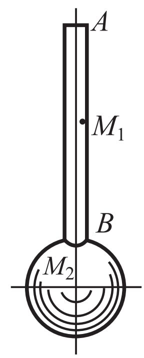
$$\frac{P}{g}\left(\frac{\rho^2}{r} + r\right)\ddot{x} = T(r\cos\alpha - a) \ \Rightarrow \ \ddot{x} = \frac{T}{P} \cdot \frac{rg(r\cos\alpha - a)}{(\rho^2 + r^2)} \cdot t^2.$$

Başlangyç şertlere laýyklykda integrirlesek, gözleýän deňlemämizi alarys:

$$x = \frac{T}{P} \cdot \frac{rg(r\cos\alpha - a)}{2(\rho^2 + r^2)} \cdot t^2.$$

27.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

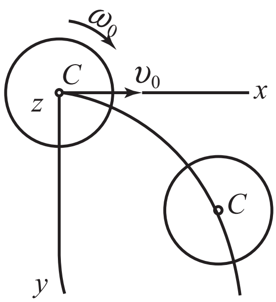
27.5-nji mesele. Agyr jisim uzynlygy 80 *sm* we massasy 1 *kg* bolan sterženden we oňa berkidilen diskden ybarat. Diskiň radiusy 20 *sm*, massasy 2 *kg*. Sterženiň wertikal ýagdaýda duran başlangyç pursatynda jisime sterženiň massalar merkeziniň M_1 tizligi nola, diskiň massalar merkeziniň M_2 tizligi bolsa 360 *sm/s* bolan we gorizontal boýunça sag tarapa ugrukdyrylan tizlik berlen. Diňe agyrlyk güýjüniň täsirini hasaba alyp, jisimiň soňky hereketini tapmaly (*27.6-njy surat*).



27.6-njy surat

Jogaby: Jisim $y^2 = 117{,}5x$ deňlemä görä parabola çyzýan massalar merkeziniň daşynda 6 *rad/s* burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýar (koordinatalar başlangyjy B nokatda, y ok gorizontal boýunça saga, x ok aşak ugrukdyrylan).

27.6-njy mesele. Disk agyrlyk güýjüniň täsirinde wertikal tekizlik boýunça düşýär. Başlangyç pursatynda diske burç tizlik berlen we onuň C massalar merkezi koordinatalar başlangyjyna gabat gelip,



27.7-nji surat

gorizontal ugrukdyrylan υ_0 tizlige eýe bolan. Diskiň hereket deňlemelerini tapmaly, *x, y* oklar suratda görkezilen. Garşylyk güýçlerini hasaba almaly däl (*27.7-nji surat*).

Jogaby: $x_c = \upsilon_0 t, \;\; y_c = \dfrac{gt^2}{2}, \;\; \varphi = \omega_0 t,$ bu ýerde φ diskiň aýlanma burçy bolup, *x* ok bilen başlangyç pursatda diskiň gorizontal ýagdaýdaky diametriniň emele getiren burçuny aňladýar.

27.7-nji mesele. Deslapky meseläni, diskiň hereket tekizligine perpendikulýar görnüşde onuň *C* massalar merkezinden geçýän gozganýan gorizontal oka görä garşylyk momenti m_g diskiň burç tizligi $\dot{\varphi}$ -niň birinji derejesine proporsional diýip çözmeli. Bu ýagdaýda proporsionallyk koeffisiýenti β deň. Diskiň agzalan oka görä inersiýa momenti J_c.

Jogaby: $x_c = \upsilon_0 t, \;\; y_c = \dfrac{gt^2}{2}, \;\; \varphi = \dfrac{J_c \omega_0}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{J_c}t}),$ bu ýerde φ diskiň aýlanma burçy bolup, *x* ok bilen başlangyç pursatda diskiň gorizontal ýagdaýdaky diametriniň emele getiren burçuny aňladýar.

27.8-nji mesele. Awtomobiliň radiusy *R* we massasy *M* bolan eýerdiji tigri gorizontal we gönüçyzykly ýolda hereket edýär. Tigre *m* aýlandyryjy moment goýlan. Tigriň massalar merkezinden onuň tekizligine perpendikulýar geçýän oka görä inersiýa radiusy ρ deň. Tigriň ýere typma sürtülme koeffisiýenti *f* deň. Tigriň typman tigirlenmegi üçin aýlandyryjy moment haýsy şerti kanagatlandyrmaly? Tigirlenmä garşylyk hasaba alynmaly däl.

Jogaby: $m \le fMg\dfrac{r^2 + \rho^2}{r}.$

27.9-njy mesele. Deslapky meseläni tigirlenmedäki sürtülmäni hasaba alyp çözmeli, bu ýagdaýda tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f_t deň.

Jogaby: $m \le fMg\dfrac{r^2 + \rho^2}{r} + Mgf_t.$

27.10-njy mesele. Awtomobiliň eýeriji tigriniň oky gorizontal gönüçyzykly hereket edýär. Tigriň okuna gorizontal ugrukdyrylan

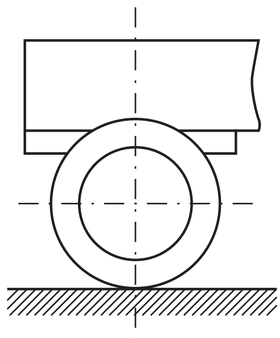
F hereketlendiriji güýç goýlan. Tigriň massalar merkezinden onuň tekizligine perpendikulýar geçýän oka görä inersiýa radiusy deň. Tigriň ýere typma sürtülme koeffisiýenti f deň. Tigriň radiusy r-e, massasy M deň. Tigriň typman tigirlenmegi üçin F güýç haýsy şerti kanagatlandyrmaly? Tigirlenmä garşylyk hasaba alynmaly däl.

Jogaby: $F \le fMg\dfrac{r^2+\rho^2}{\rho^2}.$

27.11-nji mesele. Tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f_t bolanda, deslapky meseläni tigirlenmedäki sürtülmäni hasaba alyp çözmeli.

Jogaby: $F \le \dfrac{fMg(r^2+\rho^2)-Mgf_t r}{\rho^2}.$

27.12-nji mesele. Awtomobil tirkegi togtaýança tizlenme bilen haýallaýan hereket edýär. Şonda onuň tigirleriniň birindäki tormoz işlemeýär. Tigriň ýola basyşy N deň. Tigriň ýola sürtülme koeffisiýenti f – deň. **Berlen**: r – tigriň radiusy, m – onyň massasy, ρ – inersiýa radiusy. Tigriň öz okuna görkezýän S gorizontal basyşyny kesgitlemeli (*27.8-nji surat).*



27.8-nji surat

Jogaby:

1) $\omega_0 \le \dfrac{fN}{m}\dfrac{r^2}{\rho^2}, \quad S = m\omega_0\left(1+\dfrac{\rho^2}{r^2}\right),$

2) $\omega_0 > \dfrac{fN}{m}\dfrac{r^2}{\rho^2}, \quad S = m\omega_0 + fN.$

27.13-nji mesele. Radiusy r bolan tigir oňa goýlan $m_{aý} = \dfrac{5}{2}fMgr$ aýlandyryjy momentiň täsirinde gorizontal gönüçyzykly rels boýunça tigirlenýär, bu ýerde f – typma sürtülme koeffisiýenti, M – tigiriň massasy. Tigriň relse degip duran nokadynyň tizligini (typma tizligini) kesgitlemeli. Tigriň massasy onuň gurşawy boýunça deňölçegi ýaýraýar. Tigirlenme sürtülmesini hasaba almaly däl. Başlangyç pursatda tigir dynçlykda dur.

Jogaby: $\dfrac{fg}{2}t.$

27.14-nji mesele. Deslapky meseläni tigirlenme sürtülmesiniň $f_t = \frac{1}{4} fr$ koeffisiýentini hasaba alyp çözmeli.

Jogaby: $\frac{1}{4} fgt.$

27.15-nji mesele. Gorizontal okly birjynsly silindr öz agramynyň täsirinde sürtülme koeffisiýenti f bolan büdür-südür ýapgyt tekizlikden tigirlenip düşýär. Silindr typman hereketlenýär diýip, tekizligiň gorizontdan gyşarma burçuny we silindriň okunyň tizlenmesini kesgitlemeli. Tigirlenme garşylygyny hasaba almaly däl.

Jogaby: $\alpha \leq \text{arctg}3f;\ w = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$

27.16-njy mesele. Birjynsly tutuş tegelek disk gorizonta görä α burç hasyl edýän ýapgyt tekizlik boýunça tigirlenýär. Diskiň oky iň uly ýapgytlyk çyzygy bilen β burçy emele getirýär. Disk bir wertikal tekizlikde tigirlenýär diýip hasaplap, onuň massalar merkeziniň tizlenmesini kesgitlemeli.

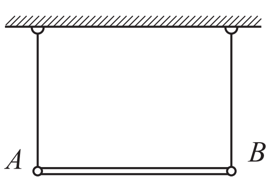
Jogaby: $w_c = \frac{2}{3} g \sin\alpha \sin\beta.$

27.17-nji mesele. Gorizontal okly birjynsly silindr öz agramynyň täsirinde sürtülme koeffisiýenti f bolan büdür-südür ýapgyt tekizlikden aşak tigirlenýär. Tekizligiň gorizontdan gyşarma burçuny we silindriň okunyň tizlenmesini kesgitlemeli.

Jogaby: $\alpha > \text{arctg}3f;\ w = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$

27.18-nji mesele. Radiusy r bolan birjynsly tigir gorizont bilen α burçy emele getirip, ýapgyt tekizlikde typman aşak tigirlenýär. Tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f_t nähili baha eýe bolanda tigriň massalar merkezi hemişelik tizlik bilen herekeket edýär, tigir bolsa massalar merkezinden onuň tekizligine perpendikulýar geçýän okuň daşynda deňölçegli aýlanar?

Jogaby: $f_t = r\text{tg}\alpha.$

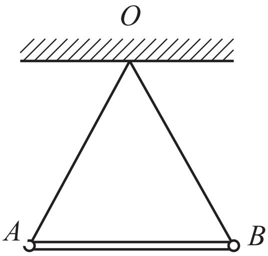


27.9-njy surat

27.19-njy mesele. Massasy M bolan birjynsly AB steržen özüniň uçlaryna baglanan iki sany wertikal ýüp bilen potologa gorizontal edilip asylan. Bir ýüp üzülen pursatda ikinjisinde döreýän dartylyş güýji tapmaly (*27.9-njy surat*).

Görkezme. Ýüp üzülen pursatdan soň geçen örän kiçi wagt üçin sterženiň hereketiniň differensial deňlemesi düzülende sterženiň ugrunyň özgermesi bilen sterženiň massalar merkezinden beýleki ýüpe çenli bolan aralygyň özgermesini hasaba almaly däl.

Jogaby: $T = Mg/4$.

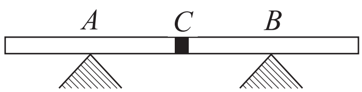


27.10-njy surat

27.20-nji mesele. Massasy M bolan birjynsly steržen uzynlygy bu sterženiň uzynlygyna deň bolan özüniň uçlaryna baglanan iki sany ýüp bilen O nokatda asylan. Bir ýüp üzülende ikinji ýüpde döreýän dartylyş güýji tapmaly *(27.19-njy meselä berlen gorkezmä seret) (27.10-njy surat).*

Jogaby: $T = 0{,}266\ Mg$.

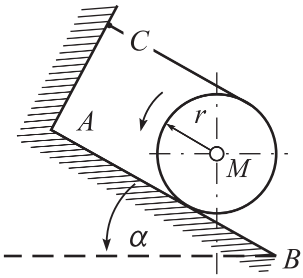
27.21-nji mesele. Uzynlygy $2l$ we massasy M bolan birjynsly steržen iki sany A we B daýançda, sterženiň C massalar merkezi daýançlardan birmeňzeş aralykda ýatyr. Bu ýagdaýda $CA= CB=a$; her bir daýanja düşýän basyş $Mg/2$ deň. B daýanç duýdansyz aýrylsa A daýançdaky basyş nähili özgerer (*27.19-njy meselä berlen görkezmä seret.) (27.11-nji surat*)?



27.11-nji surat

Jogaby: A daýança düşýän basyşyň artdyrmasy $\dfrac{l^2-3a^2}{2(l^2-3a^2)}Mg$ mukdara deň bolýar.

27.22-nji mesele. Iki sany çeýe ýüp massasy M we radiusy r bolan birjynsly tegelek silindre sarymlary esaslara parallel bolan orta tekizlige görä simmetrik görnüşde ýerleşen. Silindr AB ýapgyt tekizlige emele getirijileri iň uly ýapgytlyk çyzygyna perpendikulýar, ýüpüň C uçlary bolsa ýokarda görkezilen orta tekizlige simmetrik görnüşde AB tekizlikden $2r$ aralykda baglanan görnüşde goýlan. Silindr ýapgyt tekizlikde döreýän we koeffisiýenti f deň bolan sürtülmäni ýeňip, agyrlyk güýjüniň täsirinde başlangyç tizliksiz hereket edip başlaýar. t wagt içinde silindriň massalar merkeziniň s geçen ýoluny we ýüpleriň T dartylyş güýçlerini kesgitlemeli. Bu ýagdaýda ýüpleriň

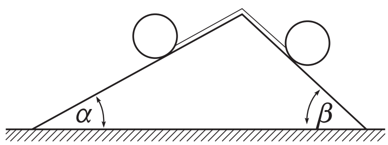


27.12-nji surat

hiç biri ahyryna çenli çözlenmeýär diýip hasap etmeli *(27.12-nji surat)*.

Jogaby: $s = \dfrac{1}{3} g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2$, $T = \dfrac{1}{6} Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$. Eger tg < 2*f* bolsa, silindr dynçlykda durýar.

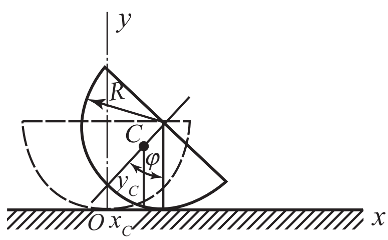
27.23-nji mesele. Massalary M_1 we M_2 bolan silindrik wallar gorizont bilen, degişlilikde α we β burçlary emele getirýän iki sany ýapgyt tekizliklerde tigirlenip düşýärler. Wallar biri-birine süýnmeýän ýüp bilen birleşdirilen. Ýüp wallara oralyp, uçlary olara berkidilen. Ýüpüň dartylyş güýjüni we ýüpüň ýapgyt tekizliklerde edýän hereketiniň tizlenmesini kesgitlemeli. Wallary birjynsly tegelek silindrler diýip hasaplamaly. Ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*27.13-nji surat*).



27.13-nji surat

Jogaby: $T = g\dfrac{M_1 M_2(\sin\alpha + \sin\beta)}{3(M_1 + M_2)}$, $w = g\dfrac{M_1 \sin\alpha - M_2 \sin\beta}{M_1 + M_2}$.

27.24-nji mesele. Büdür-südir gorizontal tekizlikde duran we bu tekizlikde typman tigirlenýän radiusy *r* bolan birjynsly ýarym tegelek şekildäki diskiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*27.14-nji surat*).



27.14-nji surat

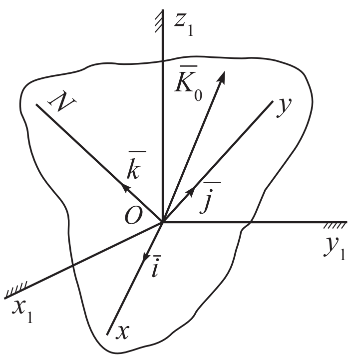
Jogaby: $T = \dfrac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi - 16)R}$.

28. GATY JISIMIŇ GOZGANMAÝAN NOKADYŇ TÖWEREGINDÄKI HEREKETI. EÝLERIŇ DINAMIKI DEŇLEMELERI

Bu bolümde Eýleriň burçlary bilen jisime goýlan güýçleriň arasyndaky baglanyşyklary tapmaly. Şol baglanyşyklaryň üsti bilen dinamikanyň esasy meselelerini çözmek bolýar. Şol baglanyşyklary almak üçin kinetik momentiň üýtgemegi hakyndaky (24.2) teoremany ulanalyň:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0^{(d)}, \tag{28.1}$$

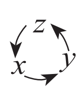
bu ýerde $\overline{K}_0$ – jisimiň O nokada görä kinetik momenti; $\overline{M}_0^{(d)} = \overline{M}_0$ – jisime goýlan daşky güýçleriň O nokada görä baş momenti. Güýçleriň ählisi diňe daşky bolany üçin d indeks taşlanyp ýazylýar. $Ox_1y_1z_1$ – gozganmaýan koordinatalar sistemasy. $Oxyz$ – jisime berkidilip, onuň bilen birlikde hereketlenýän koordinatalar sistemasy (*28.1-nji surat*).



28.1-nji surat

Jisim hereketdekä onuň inersiýa momentleri we merkezden gaçýan inersiýa momentleri gozganmaýan koordinatalar sistemasyna görä *üýtgeýän* ululyklar, gozganýan koordinatalar sistemasyna görä *üýtgemeýän* ululyklardyr. Şonuň üçin $\overline{K}_0$ wektor gozganýan koordinatalar sistemasynda kesgitlenen hasap edeliň. Eger x, y, z oklar O nokatda inersiýanyň baş oklary bilen gabatlaşdyryp alynsa, onda merkezden gaçýan inersiýa momentleriniň ählisi nola öwrülip, **Eýleriň dinamiki deňlemeleri** aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x, \tag{28.2}$$



bu ýerde ω_x, ω_y, ω_z – jisimiň burç tizliginiň gozganýan sistemanyň oklaryna proýeksialary, M_x, M_y, M_z – daşky güýçleriň şol oklara görä baş momentleri.

Bu deňlemelere Eýleriň

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi,\\
\omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,\\
\omega_x &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}
\end{aligned}\right\} \qquad (28.3)
$$

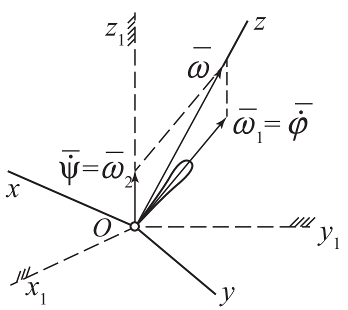
kinematiki deňlemelerini birleşdirip, bir nokady gozganmaýan jisimiň dinamiki meseleleri çözmek üçin deňlemeleriniň doly sistemasyny alarys.

Eger jisimiň hereket deňlemeleri berlen bolsa, onda (28.2), (28.3) deňlemeleriň kömegi bilen M_x, M_y, M_z ululyklary tapyp bolýar.

Eger M_x, M_y, M_z berlen bolsa, onda (28.2), (28.3) – alty sany differensial deňlemeleriň kömegi bilen Eýleriň burçlaryny, ýagny jisimiň hereket deňlemelerini tapyp bolýar. (28.2) deňlemeleri integrirlemegiň örän kyndygyny ýatladýarys. Hususy ýagdaýlar üçin deňlemeleriň çözgütleri bardyr.

28.1. Giroskopyň ýönekeýleşdirilen nazaryýeti. Giroskop täsiri (effekti)

Giroskopa mysal bolup **wolçok** hyzmat edýär. Fiziki adalgalaryň rusça-türkmençe sözlüginde wolçogy **«pyrlangyç»** diýip terjime edipdirler. Biz «wolçok» diýip almakçy. Wolçok direg nokadynyň daşynda islendik tizlik bilen aýlanyp bilýär. Onuň simmetriýa okuny z bilen belgiläp, inersiýa momentini I diýip alalyň. Jisimiň simmetrikligi üçin $I_x = I_y$. Jisimiň z okuň daşynda aýlanyşyna **hususy aýlanyş** diýilýär. $Oxyz$ – jisime berkidilen we onuň bilen bile hereket edýän koordinatalar sistemasy; $Ox_1y_1z_1$ – gozganmaýan koordinatalar sistemasy (*28.2-nji surat*).



28.2-nji surat

Jisimiň t wagtdaky ornuny Eýleriň ψ, θ, φ burçlary bilen kesgitläp bolýar. Bizi jisimiň pursatdaky $\overline{\omega}$ burç tizligi gyzyklandyrýar. Kinematikadan belli formulany alalyň:

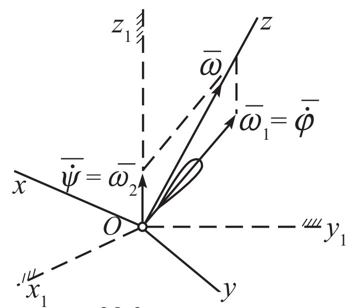
$$\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3}\,, \qquad (28.4)$$

bu ýerde $\overline{\omega}_1 = \overline{\dot{\varphi}}$ – hususy aýlanyşyň burç tizligi, ol örän uludyr; $\overline{\omega}_2 = \overline{\dot{\psi}}$ – presessiýanyň burç tizligi; $\overline{\omega}_3 = \overline{\dot{\theta}}$ – nutasiýanyň burç tizligi.

Giroskopyň dinamikasyny takyk öwrenmek matematiki kynçylyklary döredýär. Şol sebäpli, birnäçe ýönekeýleşdirmeler girizilýär we giroskopyň aşakdaky ýönekeýleşdirilen teoriýasy alynýar:

$$\theta = const, \ \overline{\dot{\theta}} = \overline{\omega}_3 = 0, \ \omega_1 \gg \omega_2 = \dot{\psi}.$$

Ýagny, hususy aýlanyşyň $\dot{\varphi}$ burç tizligi, presessiýanyň burç tizliginden has uly bolany üçin, ahyrky ululyk taşlanýar. Onda (28.4) formula $\overline{\omega} \approx \overline{\omega}_1$ görnüşe gelýär.



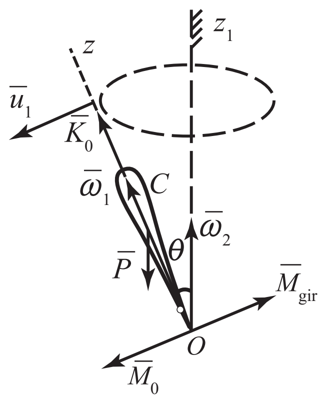
28.3-nji surat

$\overline{\omega}_2 = \overline{const}$ hasap edilip, $\overline{\omega}$ wektor z simmetriýa oky bilen ugrukdyrylýar (*28.3-nji surat).*

Eger $\overline{\omega}_1$ gaty uly bolsa, onda jisimiň $\overline{K}_0$ – O nokada görä kinetik momenti hem uly bolýar we z okuň üstünde ýerleşdirilýär (*28.4-nji surat*):

$$\overline{K}_0 = I_z \overline{\omega}_1. \qquad (28.5)$$

Bu netije giroskopyň dinamikanyň ýönekeý düşündirilişiniň esasy häsiýetnamasydyr.



28.4-nji surat

28.4-nji suratdan görnüşi ýaly, z ok z_1 okuň daşyndan deňölçegli aýlanyp, dogry konus çyzýar. Giroskopyň şeýle hereketine onuň **düzgünli (regulýar) presessiasy** diýilýär.

$\overline{K}_0$ wektoryň ujunyň tizligini $\overline{u}$ diýip belgilesek, Rezalyň teoremasynyň esasynda alarys:

$$\overline{u} = \overline{M}_0,$$

bu ýerde $\overline{M}_0$ – O nokada görä daşky güýçleriň baş momenti.

Kinematikadan belli formula esasynda alarys:

$$\overline{u} = \overline{\omega}_2 \times \overline{K}_0 = \overline{\omega}_2 \times I_z \overline{\omega}_1.$$

Şeýlelikde

$$\overline{M}_0 = \overline{\omega}_2 \times I_z \overline{\omega}_1. \tag{28.6}$$

Bu deňlik **giroskopyň ýönekeý nazaryýetiniň esasy deňligidir.** Moduly boýunça baş moment şeýle tapylýar:

$$M_0 = I_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta. \tag{28.7}$$

Goý, giroskopa onuň C massalar merkezinde $\overline{P}$ agyrlyk güýji goýlan bolsun. Onda $\overline{P}$ güýjüň O nokada görä momenti

$$M_0 = P \cdot OC \cdot \sin\theta.$$

Bu bahany (28.7) formulada goýup alarys:

$$P \cdot OC \cdot \sin\theta = I_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta.$$

Bu formuladan

$$\omega_2 = \frac{P \cdot OC}{I_z \omega_1}.$$

ω_1 uly boldugyça, ω_2 kiçi bolýar. Başgaça aýtsak, goroskop gaty aýlandygyça onuň z okunyň ýerinden süýşmesi kynlaşýar.

Giroskopik (dikeldiji) momenti. Goý, jisimiň C agyrlyk merkeziniň radius wektory $\overline{OC} = \overline{a}$ bolsun. Onda $\overline{M}_0 = \overline{a} \times \overline{P}$ bolany üçin, (13.16) formulany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\overline{\omega}_2 \times I_z \overline{\omega}_1 = \overline{a} \times \overline{P} \Rightarrow I_z \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 + \overline{a} \times \overline{P} = 0 \Rightarrow \overline{M}^{\text{gir}} + \overline{M}_0 = 0 \Rightarrow$$

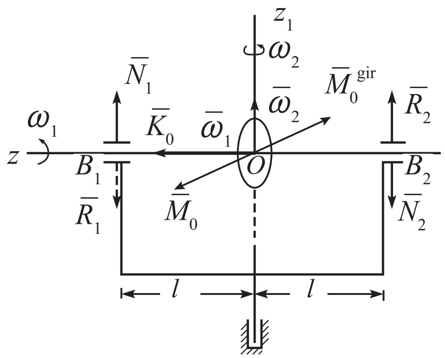
$$\overline{M}^{\text{gir}} = -\overline{M}_0 = I_z \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \tag{28.8}$$

bu ýerde $\overline{M}^{\text{gir}}$ – goroskopik moment, zOz_1 tekizlige perpendikulýar bolup, ol şoňa degişli güýçleriň jübti $\overline{\omega}_1$– hususy aýlanmanyň burç tizligini $\overline{\omega}_2$ – pressesiýanyň burç tizliginiň üstüne eltmäge ymtylýar.

Giroskop täsirli (effekti)

Giroskopik momentiň giroskopa täsirinden emele gelýän hadysa **giroskopik täsirli (effekt)** diýilýär.

28.5-nji suratda giroskopyň hususy aýlawy z okuň daşynda bolup, $\overline{\omega}_1$ – onuň hususy burç tizligidir. z_1 dik okuň daşynda $\overline{\omega}_2$ – pressesiýa burç tizligi bilen aýlanýan çarçuwa (rama) berlen. z ok çarçuwa bilen B_1, B_2 podşipnikler arkaly berkidilen. O nokat gozganmaýar. Goý, $\overline{\omega}_1 >> \overline{\omega}_2$ bolsun. Eger şeýle bolsa, giroskopyň ýönekeý teoriýasyny ulanmak bolar. Giroskopyň $\overline{K}_0 = \overline{OA}$ kinetik momenti z_1 okuň daşyndan aýlanýar. A nokadyň $\overline{\upsilon}_A$ tizligi suratyň tekizligine perpendikulýar bolup, bärik ugrukdyrylan (Rezalyň teoremasy) we (28.6) formula bilen kesgitlenýär:



28.5-nji surat.

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{M}_0 = I_z \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1. \tag{28.9}$$

$\overline{M}_0$ momente degişli güýçleri $\overline{R}_1 = \overline{R}$ we $\overline{R}_2 = -\overline{R}$ bilen belgilesek, B_1, B_2 podşipnikleriň giroskopyň okuna basyşy $(\overline{R}, -\overline{R})$ güýçleriň jübti bilen kesgitlenýär. Öz gezeginde, giroskopyň oky B_1, B_2 podşipniklere $\overline{N}_1 = -\overline{R}_1$, $\overline{N}_2 = -\overline{R}_2$ güýçler bilen basýarlar.

$(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ güýçleriň jübtüne **giroskopik jübüt**, onuň $\overline{M}_0^{\text{gir}} = -\overline{M}_0$ momentine bolsa, **giroskopik moment** diýilýär. Şunlukda, $(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ jübtüň giroskopyň okunyň berkidilen podşipniklerine täsirine **giroskopik effekt** diýilýär.

$$\overline{M}_0^{\text{gir}} = I_z \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2. \tag{28.10}$$

Ululygy boýunça

$$\overline{M}_0^{\text{gir}} = I_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta.$$

$\theta = 90°$, $\sin\theta = 1$ bolany üçin:

$$\overline{M}_0^{\text{gir}} = I_z \omega_1 \omega_2. \tag{28.11}$$

$\overline{M}_0^{\text{gir}}$ wektor gorizontal tekizlikde ýatyp, suratyň tekizligine perpendikulýar bolup, aňrylyga ugrukdyrylýar.

A.E.Žukowskiniň kadasy: ***Eger giroskopa mejbury pressesiýa hereketi berilse, onda giroskopyň hususy aýlanyş okunyň***

daýanç nokatlarynda momenti $\overline{M}_0^{gir}$ bolan güýçleriň jübti ýüze çykýar we bu jübüt ýakyn ýol bilen hususy aýlanyş okuny pressesiýa oky bilen gabatlaşdyrmaga çalyşýar.

Indi podşipniklere düşýän $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ basyş güýçlerini kesgitläliň.

Bir tarapdan (28.11):

$$M_0^{gir} = I_z \omega_1 \omega_2,$$

ikinji tarapdan:

$$M_0^{gir} = N_1 l = N_2 l.$$

Bu formulalary deňleşdirip, alýarys:

$$N_1 = N_2 = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{l}.$$

Eger giroskopyň oky birden örän çalt aýlansa (ω_2 uly bolsa), onda N_1, N_2 giroskopik basyşlar uly baha alyp, podşipnikleri döwmegi ähtimal. Podşipnikler hasaplananda ýokarkyny nazara almaly.

Giroskop effekti onuň okunyň daýanç nokatlaryna basýar, şol podşipnikleriň üsti arkaly özüniň berkidilen jisimine hem täsir edýär. Eger baglanyşyklar mümkinçilik berse, giroskopik effekti arkaly jisim herekete gelmegi mümkin.

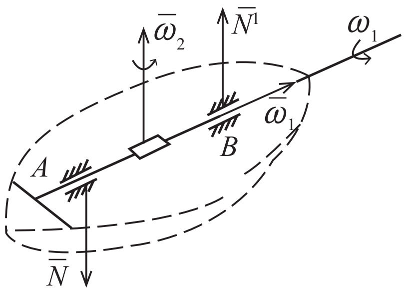
Mysal üçin, gäminiň turbinasynyň rotory $\overline{\omega}_1$ burç tizligi bilen aýlanyp ($\overline{\omega}_1$ – hereket ugry bilen ýönelen), gämi $\overline{\omega}_2$ burç tizligi bilen öwrülse, $\overline{M}_0^{gir}$ momentli güýçleriň jübti döreýär. Bu jübüt gäminiň burun tarapyny galdyryp yz tarapyny çümdürýär.

Deňizde tolkun bolanda gäminiň çaýkanmasyny köşeşdirmekde hem giroskop ulanylýar. Giroskop uçarlarda, raketalarda, torpedalarda, bir ýolly otlularda we başga şuňa meňzeşlerde ulanylýar.

28.2. Giroskopyň tehnikada ulanylyşyna degişli mysallar

1. Gämi turbinasynyň podşipniginde döreýän giroskopik basyş

Gämi turbinasynyň rotory $\overline{\omega}_1$ burç tizligi bilen gäminiň boýy boýunça ugrukdyrylan z okuň daşynda aýlanýar (*28.6-njy surat*). A we B podşipniklere rotor berkidilen. Goý, $AB = l$ bolsun. Rotoryň aýlanma z oka görä inersiýa momenti I_z bolsun. Gämi $\overline{\omega}_2$ burç tizligi bilen öwrülse, podşipniklerde $\overline{N}$, $\overline{N}'$ giroskopik basyşlar ýüze çykýar.



28.6-njy surat

(28.11) formulany ulansak:

$$M_{\text{gir}} = Nl = I_z\omega_1\omega_2 \;\Rightarrow\; N = \frac{I_z\omega_1\omega_2}{l}.$$

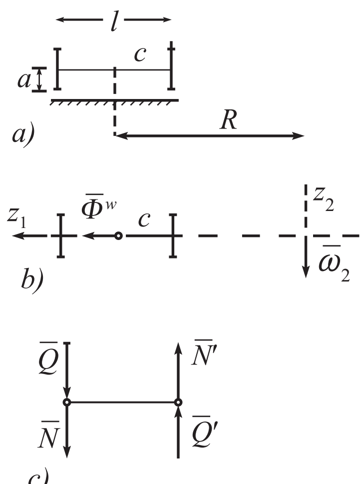
Ýeňil gämilere giroskopik basyşlaryň täsiri has hem täsirli bolup, olary agdarmagy hem ähtimal. Suratdaky ($\overline{N}$, $\overline{N}'$) güýçleriň jübti gäminiň yz tarapyny suwa çümdürip, burnuny ýokaryk galdyrýar.

Eger wintli uçarlar gorizontal tekizlikde aýlansalar ýokardaka meňzeş hadysalar ýüze çykýar.

2. Egri çyzyk bilen hereketlenýän demir ýol wagonynyň ýa-da awtomobiliň tigirlenendäki döreýän giroskopik moment

Wagonyň goşa tigirleriniň oky bilen bilelikdäki agramy P, olaryň oka görä inersiýa radiusy ρ, tigriň radiusy a bolsun. Tigirleriň C massalar merkeziniň çyzýan egri çyzygynyň radiusy R, onuň deňölçegli hereketiniň tizligi υ bolsa, tigirleriň relslere basyşlaryny kesgitlemeli (*28.7-nji surat).*

Çözülişi. Iki tigri we oky bir jisim diýip kabul edip, bu jisimiň absolýut hereketini iki herekete, ýagny $\overline{\omega}_{\text{gör}} = \overline{\omega}_1$ tizlik bilen öz okunyň daşyndan aýlanmaga we $\overline{\omega}_{\text{göç}} = \overline{\omega}_2$ tizlik bilen R radiusly töwerek bilen aýlanmaga mejbur edeliň (*28.7-nji a surat).* Onda $\omega_1 = \dfrac{\upsilon}{a}$; $\omega_2 = \dfrac{\upsilon}{R}$ bolýar. (28.11) formulany ulanýarys:



28.7-nji surat

$$M_{gir} = Nl = I_{z_1}\omega_1\omega_2 \;\Rightarrow\; N = \frac{I_{z_1}\omega_1\omega_2}{l} = \frac{P\rho^2\upsilon^2}{glaR}.$$

$(\overline{N}, \overline{N}^1)$ güýçleriň jübti daşky tigriň basyşyny artdyrýar, içki tigriň basyşyny bolsa kemeldýär.

Bu giroskopik momentden daşary, C massalar merkezine goýlan $\overline{\Phi}^{(i)}$ inersiýa güýji hem bardyr. Bu güýç merkezden gaçýan güýç bolup (*28.7-nji b surat)*, ululygy boýunça aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\overline{\Phi}^{(i)} = \frac{P}{g}\cdot\frac{\upsilon^2}{R}.$$

Bu güýç hem daşky tigriň basyşyny köpeldip, içki tigriňkini kemeldýär. Bu güýjüň täsiri bilen $\overline{N}$, $\overline{N}'$ güýçlere meňzeş, $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ güýçler döreýärler (*28.7-nji ç surat).* Bu güýçleriň san bahasy aşakdaky ýaly tapylýar:

$$Q = \frac{\Phi^{(i)}a}{l} = \frac{P}{g}\frac{\upsilon^2 a}{Rl}.$$

Tigirleri agdarjak bolýan güýçleri aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$N + Q = \frac{Pa\upsilon^2}{gRl}\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right).$$

Her tigriň relse statiki basyşy $\frac{P}{2}$ bolany üçin, gözleýän ululyklarymyzy, ýagny tigirleriň dinamiki basyşlaryny aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$G = \frac{P}{2} + [N + Q].$$

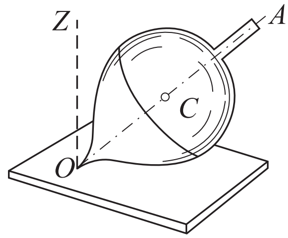
Meselem, $P = 1400$ *kg*, $a = 0{,}75$ *m*, $\rho = \sqrt{0{,}55}\,a$, $R = 200$ *m*, $l = 1{,}5$ *m*, $\upsilon = 20\ {}^{m}/_{s}$ bolsa, $G = 700 \pm 221$ *kg* bolýar.

28.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

28.1-nji mesele. Wolçok özüniň *OA* okunyň daşynda sagat diliniň hereketiniň ugry bilen $\omega = 600$ *rad/s* hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. *OA* ok wertikaldan gyşaran; okuň aşaky *O* ujy gozganmaýar; wolçogyň *C* massalar merkezi *OA* okda bolup, *O* nokatdan *OC*=30 *sm* aralykda ýerleşen; wolçogyň aýlanma okuna görä inersiýa radiusy 10 *sm* deň (*28.8-nji surat*). Wolçogyň hereket mukdarynyň

OA aýlanma okuna görä baş momenti $J\omega$ deň diýip, OA okyň hereketini kesgitlemeli.

Jogaby: OA ok *Oz* wertikalyň daşynda $\omega_1 = 80$ *rad/s* hemişelik burç tizlik bilen tegelek konus çyzyp, sagat diliniň hereketiniň ugry bilen aýlanýar.



28.8-nji surat

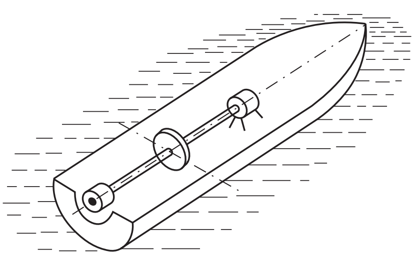
28.2-nji mesele. Diametri 30 *sm* bolan disk görnüşli wolçok özüniň simmetriýa okunyň daşynda 0,49 *rad/s* burç tizlik bilen aýlanýar. Disk wolçogyň (*y)* simmetriýa oky boýunça ugrukdyrylan, uzynlygy 20 *sm* bolan oka ornaşdyrylan. Hereket mukdarynyň baş momenti simmetriýa oky boýunça ugrukdyrylan we $J\omega$ deň diýip kabul edip, wolçogyň düzgünli pressesiýasynyň burç tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: 2,18 *rad/s.*

28.3-nji mesele. Çarhy (waly) gäminiň boý okuna parallel bolan turbinanyň burç tizligi 1500 *aýl/min* deň. Aýlanýan bölekleriň massasy 6 *t*, inersiýa radiusy $\rho = 0{,}7$ *m*. Eger gämi wertikal okuň daşynda sekuntda 10° aýlanyp sirkulýasiýa çyzsa, podşipniklere düşýän giroskopiki basyşy kesgitlemeli. Podşipnikleriň aradaşlygy $l = 2{,}7$ *m*.

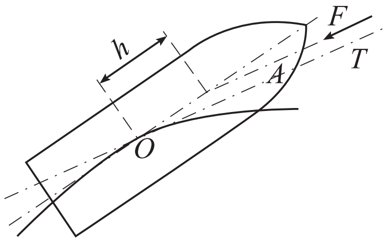
Jogaby: 30,4 *kN*.

28.4-nji mesele. Gämä ornaşdyrylan tizýörär turbinanyň podşipniklere düşýän maksimal giroskopiki basyşlaryny kesgitlemeli. Gäminiň kili rotoryň okuna perpendikulýar bolan okuň daşynda çaýkanýar. Çaýkanyşyň amplitutasy 9° we periody 15 *s*. Massasy 3500 *kg*, inersiýa radiusy 0,6 *m* bolan rotoryň burç tizligi 3000 *aýl/min* deň. Podşipnikleriň aradaşlygy $l = 2$ *m* (*28.9-njy surat*).



28.9-njy surat

Jogaby: 13,0 *kN*.



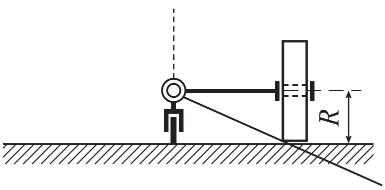
28.10-njy surat

28.5-nji mesele. Artilleriýa okunyň (snarýadynyň) simmetriýa okunyň massalar merkeziniň traýektoriýasyna geçirilen galtaşmanyň daşynda doly aýlanma wagtyny T kesgitlemeli. Bu hereket snarýadyň okuna agyrlyk merkezinden h = 0,2 m aralykda goýlan F = 6,72 kN mukdardaky howanyň garşylyk güýjüniň täsirinden ýüze çykýar. Bu güýç, takmynan galtaşma parallel ugrukdyrylan. Snarýadyň hereket mukdarynyň onuň simmetriýa okuna görä momenti 1850 $kg \cdot m^2/s$ deň (*28.10-njy surat*).

Jogaby: 8,66 s.

28.6-njy mesele. Gazoturbowozyň oky tigriň okuna parallel we tigriň aýlanýan tarapyna turbinanyň 1500 *aýl/min* burç tizlik bilen aýlanýan turbinanyň kömegi bilen herekete getirilýär. Turbinanyň aýlanýan bölekleriniň aýlanma okuna görä momenti J = 200 $kg \cdot m^2$. Eger gazoturbowoz radiusy 250 m bolan egri ýolda 15 m/s tizlik bilen hereketlense, relslere düşýän goşmaça basyş näçe bolar? Relsleriň aradaşlygy 1,5 m.

Jogaby: Bir relse 1256 N – aşak, ikinji relse 1256 N – ýokaryk basyş edilýär.



28.11-nji surat

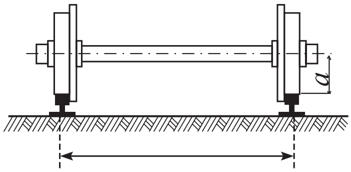
28.7-nji mesele. Owradyjy maşynyň her daşynyň massasy M = = 1200 kg, onuň okuna görä inersiýa radiusy $\rho = 0{,}4$ m, daşyň radiusy R = 0,5 m, daşyň pursat aýlanma oky madda salynýan gabyň düýbi bilen daşyň galtaşma çyzygynyň ortasyndan geçýär. Gabyň gorizontal düýbüne düşýän basyşy kesgitlemeli. Daşyň wertikal okuň daşynda aýlanmagynyň göçürme burç tizligi n = 60 *aýl/min (28.11-nji surat)*.

Jogaby: 26,9 N.

28.8-nji mesele. Massasy M= 1400 kg, radiusy a = 75 sm we öz okuna görä inersiýa radiusy $\rho = \sqrt{0{,}55}\,a$ bolan tigir skaty gorizontal tekizlikde radiusy $R = 200$ m bolan öwrümli ýolda $\upsilon = 20$ m/s

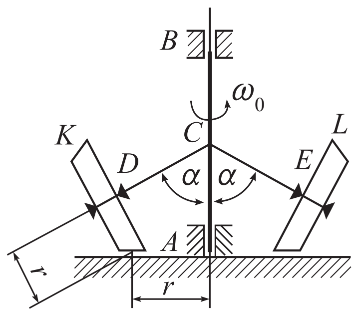
hemişelik tizlik bilen hereketlenýär (*28.12-nji surat*). Eger relsleriň aradaşlygy l = 1,5 *m* bolsa, skatdan relslere düşýän basyşy kesgitlemeli.

Jogaby: $N = (6{,}87 \pm 0{,}77)$ *kN*.



28.12-nji surat

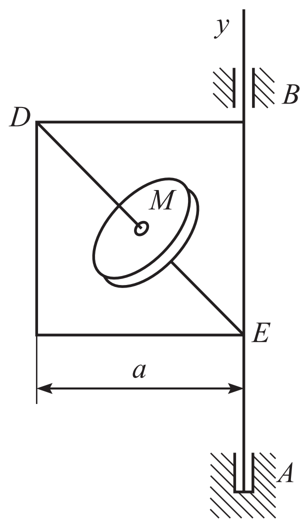
28.9-njy mesele. Suratda köpriniň aýlanýan bölegi görkezilen. *AB ok (*wal) oňa α burç astynda şarnirli birikdirilen *CD* we *CE* sterženleri bilen birlikde ω_0 burç tizlik bilen aýlanýar. Bu ýagdaýda *CD* we *CE* sterženlere erkin ornaşdyrylan konus görnüşli *K* we *L* dişli tigirler gozgamaýan tekiz gorizontal dişli tigirleriň üstünde typman tigirlenýärler. Ähli dişli tigirleriň radiuslary *r* bolsa, her biriniň massasy *M* bolan *K* we *L* dişli tigirler tarapyndan gozgamaýan gorizontal dişli tigire görkezilýän goşmaça dinamiki basyş güýjüni kesgitlemeli. Hereketli dişli tigirleri birjynsly tutuş diskler diýip hasaplamaly (*28.13-nji surat*).



28.13-nji surat

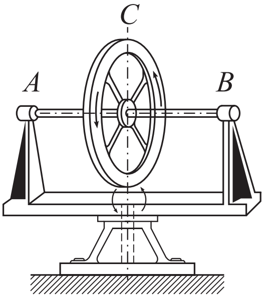
Jogaby: $\dfrac{Mr\omega_0^2 \sin\alpha}{2}$.

28.10-njy mesele. Tarapy a = 20 *sm* bolan kwadrat çarçuwa *AB* wertikal okuň daşynda ω_1 = 2 *rad/s* burç tizlik bilen aýlanýar. Çarçuwanyň *DE* diagonaly boýunça ýerleşen okuň daşynda r = 10 *sm* radiusly *M* disk ω = 00 *rad/s* burç tizlik bilen aýlanýar. *A* we *B* daýançlara edilýän goşmaça gapdal basyş güýçleri, degişlilikde statiki basyşlara görä kesgitlemeli. Çarçuwanyň massasy hasaba alynmaly däl. Diskiň massasyny onuň gurşawy boýunça deňölçegli paýlanan diýip hasaplamaly (*28.14-nji surat).*



28.14-nji surat

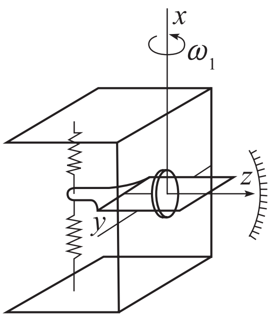
Jogaby: 4,32.



28.15-nji surat

28.11-nji mesele. Radiusy a we massasy $2M$ tigir gorizontal AB okuň daşynda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. AB ok tigriň merkezinden geçýän wertikal CD okuň daşynda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Aýlanyş ugurlary peýkamjyklar (strelkalar) bilen görkezilen. $AO = OB = h$ diýip alyp, A we B podşipniklere düşýän N_A we N_B basyşlary tapmaly. Tigriň massasyny onuň gurşawy boýunça deňölçegli paýlanan diýip hasaplamaly (*28.15-nji surat*).

Jogaby: $N_A = Mg\left(1 + \dfrac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right), \quad N_B = Mg\left(1 - \dfrac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right).$



28.16-njy surat

28.12-nji mesele. Iň sada girotahometriň çarçuwasy iki sany puržin bilen esbabyň korpusyna birikdirilen giroskopdan ybarat. Giroskopyň hususy aýlanma okuna görä inersiýa momenti J, burç tizligi ω deň. Esbap çarçuwanyň y aýlanma okuna perpendikulýar bolan x okuň daşynda ω_1 burç tizlik bilen aýlanýan platforma ornaşdyrylan bolsa, giroskopyň okunyň çarçuwasy bilen bilelikde öwrülýän α burçuny kesgitlemeli. Puržinlaryň gatylyk koeffisiýentleri c; α burçy kiçi diýip hasaplap, çarçuwanyň aýlanma okundan puržinlara çenli bolan aralyk a deň (*28.16-njy surat*).

Jogaby: $\alpha = \dfrac{J\omega}{2ca}\omega_1.$

29. MEHANIKI ULGAM ÜÇIN DALAMBERIŇ PRINSIPI

29.1. Dalamberiň prinsipi

Dalamberiň adyny göterýän bu prinsip hereketdäki material nokada ýa-da material nokatlaryň sistemasyna gös-göni goýlan güýçlerden daşary, hyýaly inersiýa güýçlerini goýmak bilen dinamikanyň meselelerini statikanyň meselelerine öwürmäge mümkünçilik berýän usuldyr. Mesele çözmegiň kinetostatika usuly şondan gelip çykypdyr.

Mehaniki sistema asyl nusgada berlen *(20.3-nji bölüm).*

m_k massaly nokat üçin, aktiw güýji $\overline{F}_k$, reaksiýa güýjüni $\overline{N}_k$, inersiýa güýji $\overline{\Phi}_k$ bilen belgiläp, mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipini aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, ..., n, \tag{29.1}$$

bu ýerde $\overline{\Phi}_k = m_k \overline{a}_k - k$ nokadyň inersiýa güýji.

Ahyrky deňlemeler mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipini aňladýar:

Mehaniki sistemanyň her bir nokady oňa goýlan aktiw güýjüň, reaksiýa güýjüniň we şertleýin (hyýaly) goýlan inersiýa güýjüniň täsirinde deňagramlylykda ýaly bolýar.

Indi (29.1) deňlemeler başgaça ýazalyň. k nokada täsir edýän güýçleri aktiw we reaksiýa güýji görnüşinde alman, daşky we içki güýçler ýaly edip alalyň, onda

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k = \overline{F}_k^{(d)} + \overline{F}_k^{(i)}.$$

Onda (29.1) deňlemeler aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\overline{F}_k^{(d)} + \overline{F}_k^{(i)} + \overline{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, ..., n. \tag{29.2}$$

Bu deňlemelerden statikadaky ýaly güýçleriň deňagramlylyk deňlemelerini almak bolýar.

Sistemanyň ähli nokatlary üçin (29.2) sistemany jemleýäris:

$$\sum \overline{F}_k^{(d)} + \sum \overline{F}_k^{(i)} + \sum \overline{\Phi}_k = 0. \tag{29.3}$$

(29.2) deňliklerde her bir güýji çepinden wektorlaýyn $\overline{r}_k$ radius wektora köpeldip we ýene-de jemläp alarys:

$$\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(d)} + \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(i)} + \sum \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0,$$

ýa-da

$$\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(d)}) + \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(i)}) + \sum \overline{m}_0(\overline{\Phi}_k) = 0. \tag{29.4}$$

Belgiläliň we içki güýçleriň häsiýetini ulanalyň:

$\sum \overline{F}_k^{(d)} = \overline{R}^d$ – daşky güýçleriň baş wektory.

$\sum \overline{F}_k^{(i)} = \overline{R}^{(i)} = 0$ – içki güýçleriň baş wektory nola deň.

$\sum \overline{\Phi}_k = \overline{\Phi}$ – inersiýa güýçleriniň baş wektory.

$\sum \overline{m}_0 (\overline{F}_k^{(d)}) = \overline{M}_0^{(d)}$ – O nokada görä daşky güýçleriň baş momenti.

$\sum \overline{m}_0 (\overline{F}_k^{(i)}) = \overline{M}_0^{(i)} = 0$ – içki güýçleriň baş momenti nola deň.

$\sum \overline{m}_0 (\overline{\Phi}_k) = \overline{M}_0^{(in)}$ – O nokada görä inersiýa güýçleriniň baş momenti.

Şeýlelikde mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipini aňladýan (29.3) we (29.4) deňlikleri şeýle ýazmak bolýar:

$$\overline{R}^{(d)} + \overline{\Phi} = 0 \tag{29.5}$$

$$\overline{M}_0^{(d)} + \overline{M}_0^{(in)} = 0. \tag{29.6}$$

Eger zerurlyk dörese, bu deňlemelere derek 6 sany Dekart oklaryna proeksiýalary hem ýazmak bolýar. (29.5), (29.6) deňliklerde içki güýçleriň bolmazlygy mesele çözülende köp amatlylyk döredýärler.

Hakykatda (29.5) şert sistemanyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany, (29.6) bolsa sistemanyň kinetik momentiniň üýtgemegi hakyndaky teoremany aňladýar, sebäbi (23.2) we (24.2) formulalaryň esasynda (29.5) we (29.6) formulalardan aşakdakylar alynýar:

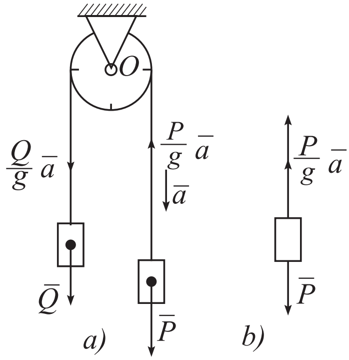
$$\overline{\Phi} = -\frac{d\overline{Q}}{dt}. \tag{29.7}$$

$$\overline{M}_0^{(in)} = -\frac{d\overline{K}_0}{dt}. \tag{29.8}$$

Elbetde, dinamiki mesele statiki meseleden tapawutlanýar. Dinamiki hadysany hiç haçan statiki hadysa getirip bolmaýar. Bu prinsipiň kömegi bilen dinamikanyň deňlemelerini statikanyňka meňzeş edip ýazyp bolýar.

29.2. Mysaly meseleler

29.1-nji mesele. Blokdan geçirilen süýnmeýän ýüpüň uçlaryndan $\overline{P}$ we $\overline{Q}$ agramly güýçler asylan (*29.1-nji surat*). Blogyň agramyny hasaba alman, sistemanyň $\overline{a}$ tizlenmesini we ýüpüň dartyş $\overline{S}$ güýjüni kesgitlemeli: $P > Q$.



29.1-nji surat

Çözülişi. $\bar{P}$ ýük aşaklygyna $\bar{a}$ tizlenme bilen hereketlenýär diýip hasap edip, ýüklere inersiýa güýçlerini goýýarys we O nokada görä güýçleriň momentleriniň deňlemesini ýazýarys (*29.1-nji a surat*):

$$P - \frac{P}{g}a - Q - \frac{Q}{g}a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{P - Q}{Q + P} \cdot g.$$

Ýüpüň dartylyş güýjüni tapmak üçin haýsy hem bolsa bir ýüküň aýratynlykda deňagramlylygyna garaýarys (*29.1-nji b surat*):

$$P - \frac{P}{g}a - S = 0 \;\Rightarrow\; S = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) \;\Rightarrow\; S = \frac{2PQ}{P + Q}.$$

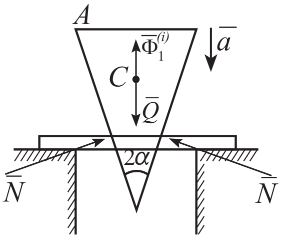
29.2-nji mesele. Q agramly we depesindäki burçy 2α bolan pahna, hersiniň agramy P bolan iki sany plastinany gorizontal ýylmanak tekizlikde süýşürýär.

Başlangyç pursatda mehaniki sistema dynçlylykda bolsa, pahnanyň we plastinanyň hereket deňlemelerini hem-de pahnanyň plastinalara basyş güýjüni kesgitlemeli. Sürtülmäni hasaba almaly däl (*29.2-nji surat*).

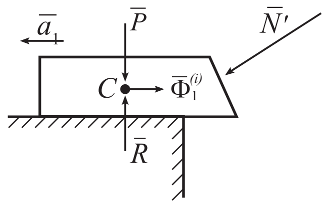
Çözülişi. A pahnanyň $\bar{a}$ tizlenme bilen aşaklygyna hereketine garaýarys (*29.2-nji sur. ser.)* Pahna täsir edýän güýçler: $\bar{Q}$ – agram, $\bar{N}$ – plastinalaryň normal reaksiýalary, C agyrlyk merkezine goýlan $\bar{\Phi}^{(i)}$ – pahnanyň inersiýa güýji.

Ähli güýçleri wertikal oka proeksirleýäris:

$$Q - \Phi^{(i)} - 2N\sin\alpha = 0.$$



29.2-nji surat



29.3-nji surat

$$\Phi^{(i)} = \frac{Q}{g}a \text{ bolany üçin}$$

$$Q\left(1 - \frac{a}{g}\right) = 2N\sin\alpha \tag{1}$$

Indi plastinalaryň biriniň, mysal üçin, çepdäkisiniň, hereketini öwreneliň. Oňa täsir edýän güýçler: $\overline{P}$ – agram, $\overline{R}$ – stoluň normal reaksiýasy, $\overline{N}'$ – pahnanyň basyşy (*29.3-nji surat*). $N' = N$ deňligi göz önünde tutup, ähli güýçleri gorizontal oka proýektirleýäris:

$$-\Phi_1^{(i)} + N\cos\alpha = 0, \qquad \Phi_1^{(i)} = \frac{P}{g}a_1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{P}{g}a_1 = N\cos\alpha. \tag{2}$$

(1) we (2) deňlemelerden N güýji ýok etsek, alarys:

$$Q\left(1 - \frac{a}{g}\right) = \frac{p}{g}a_1 \cdot 2\mathrm{tg}\alpha. \tag{3}$$

Pahnanyň z aralyga süýşmegi plastinany x aralyga süýşürýär diýsek, olaryň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$x = z\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Onda $a_1 = \ddot{x}, a = \ddot{z}, a_1 = a\mathrm{tg}\alpha.$

Bulary nazara alyp, (3)-den tapýarys:

$$a = g \cdot \frac{Q}{Q + 2P\mathrm{tg}^2\alpha}. \tag{4}$$

Diýmek, pahna hemişelik tizlenme bilen hereket edýär. Pahnanyň hereket deňlemesi:

$$z = \frac{at^2}{2}.$$

Plastinanyň hereket deňlemesi:

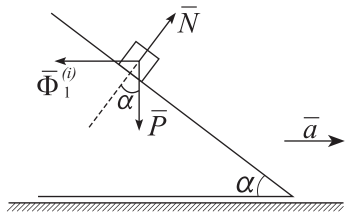
$$x = \frac{a_1 t^2}{2},$$

bu ýerden $$a_1 = g\frac{Q}{Q\text{ctg}\alpha + 2P\text{tg}\alpha}.$$

N özara täsir güýç aşakdaky ýaly tapylýar:

$$N = \frac{p}{g}\cdot\frac{a_1}{\cos\alpha} = \frac{PQ}{(Q\text{ctg}\alpha + 2P\text{tg}a)\cos\alpha}.$$

29.3-nji mesele. Gorizont bilen α burç emele getirýän prizmanyň gapdal granynda ýük ýatyr. Ýüküň prizma görä hereket etmezligi üçin, prizma haýsy tizlenme bilen hereket etmeli (*29.4-nji surat*).



29.4-nji surat

Çözülişi. Prizma $\overline{a}$ tizlenme bilen sag tarapa hereket edýär diýip, ýüke $\overline{P} = m\overline{g}$ – aktiw güýji, $\overline{N}$ – reaksiýa güýji we $\overline{\Phi}^{(i)} = -m\overline{a}$ inersiýa güýji goýup, deňagramlylyk deňlemelerini ýazýarys:

$$\left.\begin{aligned} -\Phi^{(i)} + N\sin\alpha = 0,\\ -P + N\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ tg\alpha = \frac{\Phi^{(i)}}{P} = \frac{P}{g}\cdot\frac{a}{P} = \frac{a}{g},\quad tg\alpha = \frac{a}{g}.$$

29.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

29.4-nji mesele. Okuň daşynda $\varphi = 3t^2$ kanun bilen aýlanýan we radiusy 20 *sm* bolan birjynsly tegelek diskiň agyrlyk güýjüni kesgitlemeli. Ok diskiň tekizligine perpendikulýar bolup, onyň merkezinden geçýär; aýlanma okuna görä diskiň inersiýa güýçleriniň baş momenti $4\,N\cdot sm$ deň.

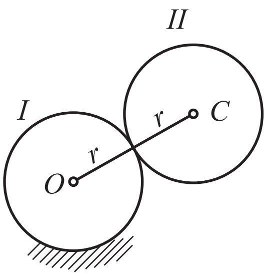
Jogaby: 3,27 *N*.

29.5-nji mesele. Uzynlygy l we massasy M bolan inçe birjynsly gönüçyzykly steržen $\varphi = at^2$ kanun bilen steržene perpendikulýar we onuň ujundan geçýän okuň daşynda aýlanýar. Sterženiň bölejikleriniň merkezden gaçýan J_n we aýlanma J_τ inersiýa güýçleriniň deňtäsiredijileriniň mukdaryny, ugruny we goýlan nokatlaryny tapmaly.

Jogaby: Aýlanma J_τ inersiýa güýçleriniň deňtäsiredijisi $J_\tau = Mal$ bolup, steržene perpendikulýar ugrukdyrylan we aýlanma okundan $\frac{2}{3}l$ uzaklykdaky nokada goýlan, merkezden gaçýan inersiýa güýçleriniň deňtäsiredijisi $J_n = 2Ma^2lt^2$ aýlanma okundan steržen boýunça ugrukdyrylan.

29.6-njy mesele. Massasy M bolan r radiusly tigir gorizontal gönüçyzykly rels boýunça typman tigirlenýär. Inersiýa güýçleriniň baş wektory hem-de tigriň massalar merkezinden hereket tekizligine perpendikulýar görnüşde ugrukdyrylan oka görä baş momentini kesgitlemeli. Tigre birjynsly tutuş disk diýip garamaly. C massalar merkezi $x_c = \frac{at^2}{2}$ kanun bilen hereketlenýär, bu ýerde a položitel hemişelik mukdar, x ok relsi boýunça ugrukdyrylan.

Jogaby: Inersiýa güýçleriniň baş wektorynyň moduly Ma deň bolup, oka parallel görnüşde otrisatel tarapa ugrukdyrylan; inersiýa güýçleriniň baş momentiniň absolýut bahasy $\frac{1}{2}Mar$ deň.

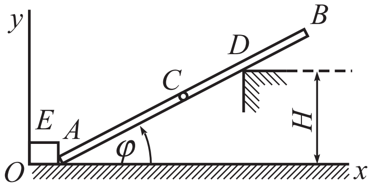


29.5-nji surat

29.7-nji mesele. Planetar mehanizminiň hereketleniji II tigriniň inersiýa güýçleriniň baş wektory we onuň C massalar merkezinden hereket tekizligine perpendikulýar görnüşde ugrukdyrylan oka görä baş momentini kesgitlemeli. OC kriwoşip ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. II tigriň massasy M, tigirleriň radiuslary r (*29.5-nji surat*).

Jogaby: Inersiýa güýçleriniň baş wektory OC kriwoşipe parallel we $2Mr\omega^2$ deň; inersiýa güýçleriniň baş momenti nola deň.

29.8-nji mesele. Uzynlygy $2l$ we massasy M bolan inçe birjynsly AB sterženiň A ujy gorizontal ugrukdyryjy boýunça E diregiň kömegi arkaly υ hemişelik tizlik bilen süýşýär we şol bir wagtda D burça daýanýar. Sterženiň inersiýa güýçleriniň baş wektoryny hem-de onuň C massalar merkezinden hereket tekizligine perpendikulýar görnüşde ugrukdyrylan oka görä baş momentini φ burça bagly diýip kesgitlemeli (*29.6-njy surat*).

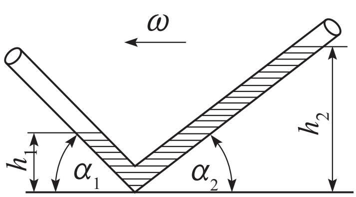


29.6-njy surat

$$Jogaby:\ V_x^{(J)} = 3M\frac{\upsilon^2}{H^2}l\sin^4\varphi\cos\varphi,$$

$$V_y^{(J)} = M\frac{\upsilon^2}{H^2}l(1-3\cos^2\varphi)\sin^3\varphi,\quad m_{Cz}^{(J)} = -\frac{2}{3}Ml^2\frac{\upsilon^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

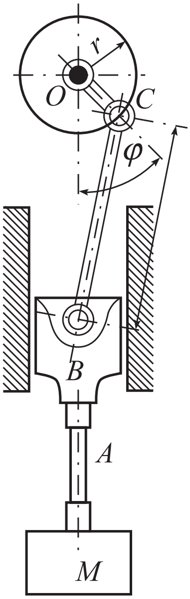
29.9-njy mesele. Trolleýbusyň hereketiniň haýallaşyny tejribe usuly bilen kesgitlemek üçin ýag bilen doldurylan, wertikal tekizlikde ýerleşdirilen we bükilen turbadan ybarat suwuklyk akselometrinden peýdalanýarlar. Trolleýbusa tormoz berlende suwuklyk turbanyň hereketiň ugrukdyrylan ujunda h_2 beýiklige göterilse, beýlekisi h_1 beýiklige çenli peselse, trolleýbusyň hereketiniň haýallaşyny kesgitlemeli. Akselometriň ýagdaýy suratda görkezilen: $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$ *mm*, $h_1 = 25$ *mm*, $h_2 = 75$ *mm* (*29.7-nji surat*).



29.7-nji surat

$$Jogaby:\ \omega = g\frac{(h_2 - h_1)\mathrm{tg}\alpha_1\,\mathrm{tg}\alpha_2}{h_1\,\mathrm{tg}\alpha_1 + h_2\,\mathrm{tg}\alpha_2} = 0{,}5\ g.$$

29.10-njy mesele. Tiz çalşyp duran süýndüriji we gysyjy güýçleriň metal pürse görkezýän täsirini (metallaryň ýadawlygyny) derňemek üçin, synalýan *A* pürsüň ýokarky *BCO* ujy kriwoşipli mehanizmiň *B* polzunyna birikdirilen, onuň aşaky ujundan bolsa *M* massaly ýük asylan. *OC* kriwoşip *O* okuň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýan ýagdaýynda pürsi süýndüriji güýji tapmaly (*29.8-nji surat*).

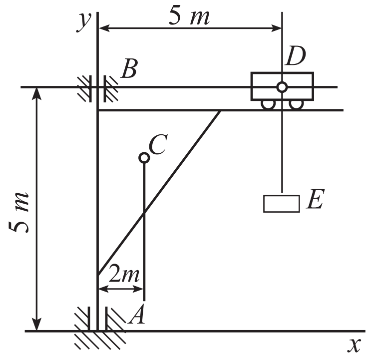


29.8-nji surat

Görkezme. $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}$ aňlatmany hatara dargatmaly we hatardaky $\frac{r}{l}$-e görä ikinji derejeden ýokary bolan hemme agzalaryny taşlamaly.

Jogaby: $Mg + mr\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

29.11-nji mesele. Massasy 3 *t* bolan *E* ýük $\frac{1}{3}g$ tizlenme bilen göterilende aýlanýan kranyň *A* podpýatniginde we *B* podşipnigindäki daýanç reaksiýalaryny kesgitlemeli. Kranyň massasy 2 *t* we onuň massalar merkezi *C* nokatda. *D* arabajygyň massasy 0,5 *t*. Kran we arabajyk gozganmaýar. Ölçegler 29.9-njy suratda görkezilen.



29.9-njy surat

Jogaby: $X_A = -\ X_B = 52{,}1\ kN,\quad Y_A = 63{,}9\ kN$.

29.12-nji mesele. Deslapky meselede aýlanýan kranyň *A* podpýatniginde we *B* podşipnigindäki daýanç reaksiýalaryny *E* ýüksüz, arabajyk 0,5 *g* tizlenme bilen çep ugra hereketlenende kesgitlemeli. Arabajygyň massalar merkezi *B* daýanjyň beýikliginde durýar.

Jogaby: $X_A = 12{,}8\ kN,\quad X_B = -15{,}2\ kN,\quad Y_A = -\ 24{,}5\ kN$.

29.13-nji mesele. Kenara iki sany parallel tanap bilen baglanan paroma masasy 7 *t* bolan ýük maşyny 12 *km/s* tizlik bilen girýär. Bu ýagdaýda tormozlar ýük maşynyny 3 *m* aralykda saklaýarlar.

Tigirleriň paromyň poluna sürtülme güýjüni hemişelik hasap edip, tanaplaryň T dartylyş güýjüni kesgitlemeli. Paromyň massasy bilen tizlenmesini hasaba almaly däl.

Jogaby: $T = 6{,}48\ kN.$

29.14-nji mesele. Massasy M bolan awtomobil ω tizlenme bilen gönüçyzykly hereket edýär. Awtomobiliň öňki we yzky tigirlerinden düşýän wertikal basyşy kesgitlemeli. Awtomobiliň C massalar merkezi ýerden h beýiklikde durýar. Awtomobiliň massalar merkezinden geçýän wertikaldan onuň öňki we yzky tigirleriniň oklaryna çenli bolan aralyklar, degişlilikde a we b deň. Tigirleriň masalaryny hasaba almaly däl. Öňki we yzky tigirleriň ýere basyşynyň birmeňzeş bolmagy üçin awtomobil nähili hereket etmeli?

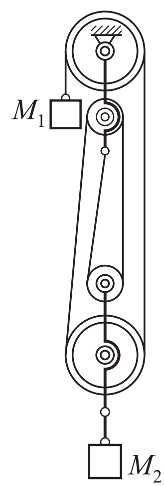
Jogaby: $N_1 = \dfrac{M(gb - wh)}{a+b}$, $N_2 = \dfrac{M(ga + wh)}{a+b}$; awtomobil

$\omega = g\dfrac{a-b}{2h}$ haýallama bilen tormozlananda.

29.15-nji mesele. 29.10-njy suratda görkezilen polispastyň kömegi bilen massasy M_2 bolan ýüki göteriji M_1 massaly ýüki aşak haýsy ω tizlenme bilen düşürýär? M_1 ýüküň deňölçegli hereket etmegi üçin haýsy şert berjaý bolmaly? Bloklaryň we trosyň massalaryny hasaba alynmaly däl.

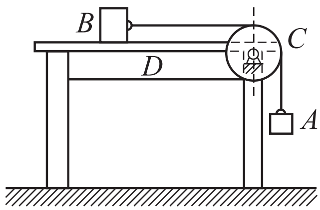
Görkezme. M_2 ýüküň tizlenmesi M_1 ýüküň tizlenmesinden dört esse kiçi.

Jogaby: $\omega = 4g\dfrac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}$, $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{1}{4}$.



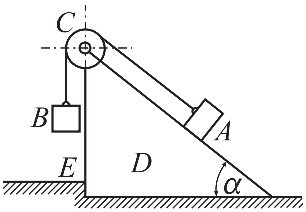
29.10-njy surat

29.16-njy mesele. Massasy M_1 bolan A ýük aşak düşüp, massasy hasaba alynmaýan ýüpüň kömegi bilen M_2 massaly B ýüki herekete getirýär. Ýüp gozganmaýan C blokdan geçirilen. D stoluň pola edýän basyşyny kesgitlemeli. Stoluň massasy M_3-e deň (*29.11-nji surat*).



29.11-nji surat

Jogaby: $N = \left(M_1 + M_2 + M_3 - \dfrac{M_1^2}{M_1 + M_2}\right)g.$



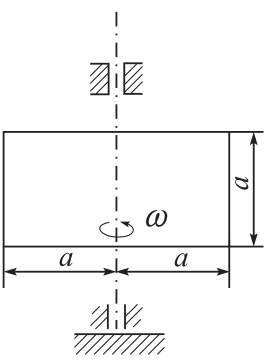
29.12-nji surat

29.17-nji mesele. Massasy M_1 bolan A ýük gorizont bilen α burç emele getirýän ýapgyt tekizlikde aşak düşüp, massasy hasaba alynmaýan we süýnmeýän ýüpüň kömegi bilen M_2 massaly B ýüki herekete getirýär. Ýüp gozganmaýan C blokdan geçirilen. Ýapgyt D tekizligiň poluň E çykgytyna edýän basyşynyň gorizontal düzüjisini kesgitlemeli (*29.12-nji surat*).

Jogaby: $N = M_1 g \dfrac{M_1 \sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2}\cos\alpha.$

29.18-nji mesele. Massasy M, uzynlygy l bolan birjynsly steržen gozganmaýan wertikal okuň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Wertikal ok steržene perpendikulýar bolup, sterženiň ujundan geçýär. Sterženiň aýlanma okundan a aralykdaky kese-kesiginde döreýän dartýan güýji kesgitlemeli.

Jogaby: $F = M(l^2 - a^2)\omega^2/(2l)$.

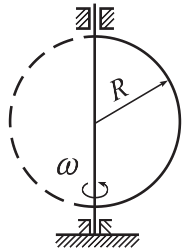


29.13-nji surat

29.19-njy mesele. Massasy M bolan birjynsly gönüburçly plastinka wertikal okuň daşynda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Aýlanma okundan geçýän kesikde plastinkany aýlanma okuna perpendikulýar ugrukdyrylanda dartyjy güýji kesgitlemeli (*29.13-nji surat*).

Jogaby: $F = Ma\omega^2/4$.

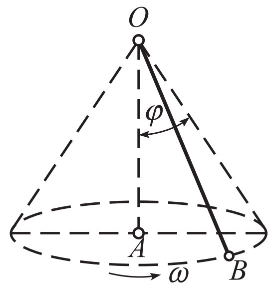
29.20-nji mesele. Massasy *M,* radiusy *R* bolan birjynsly tegelek diskiň wertikal diametriniň daşynda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Diski diametri boýunça dartyjy güýji kesgitlemeli (*29.14-nji surat*).



29.14-nji surat

Jogaby: $2\,MR\omega^2/(3\pi)$.

29.21-nji mesele. Uzynlygy *l*, massasy *M* bolan gönüçyzykly inçe birjynsly steržen gozganmaýan *O* nokadyň (şarly şarnir) daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanyp, oky *OA* we depesi *O* nokatda bolan konus üstüni çyzýar. Sterženiň wertikal ugurdan gyşarma burçuny, şeýle hem, sterženiň *O* şarnire edýän *N* basyşynyň mukdaryny hasaplamaly (*29.15-nji surat).*

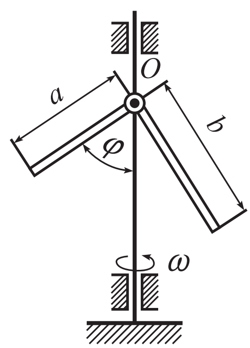


29.15-nji surat

Jogaby: $\varphi = \arccos\dfrac{3g}{2l\omega^2}$,

$$N = \frac{1}{2}Ml\omega^2\sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^3\omega^4}}.$$

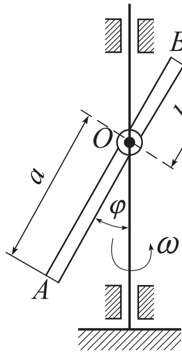
29.22-nji mesele. Uzynlygy *a* we *b* bolan gönüçyzykly inçe birjynsly steržen biri-biri bilen göni burç astynda mäkäm birikdirilen. Bu göni burçuň *O* depesi ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýan wertikal wala şarnir bilen birikdirilen. Uzynlygy *a* bolan sterženiň ugrunyň wertikaldan gyşarmak burçy φ bilen ω arasyndaky gatnaşygy tapmaly *(29.16-njy surat).*



29.16-njy surat

Jogaby: $\omega^2 = 3g\dfrac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}$.

29.23-nji mesele. Gönüçyzykly we birjynsly inçe *AB* steržen *O* nokatda wertikal wala şarnir bilen birikdirilen. Wal hemişelik ω burç tizlik bilen aýlanýar. Eger $OA = a$ we $OB = b$ bolsa, sterženiň wertikaldan φ gyşarma burçuny kesgitlemeli (*29.17-nji surat*).



29.17-nji surat

Jogaby: $\cos\varphi = \frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2}\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}.$

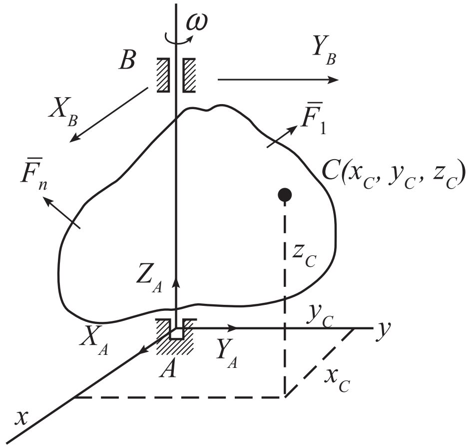
30. AÝLANÝAN JISIMIŇ OKUNA TÄSIR EDÝÄN DINAMIKI REAKSIÝA GÜÝÇLER. AÝLANÝAN JISIMLERI DINAMIKI SAZLAMAK

30.1. Nazary maglumatlar. Usuly görkezmeler

A we *B* podşipnikler arkaly berkidilen *m* massaly gaty jisim $\omega = \text{const}$ burç tizligi bilen *z* okuň daşynda deňölçegli aýlanýar (*30.1-nji surat*).

Bu çäklendirmäni diňe düşündirişi sadalaşdyrmak üçin edilýär. Alynjak netijeler jisim deňölçegli hereket etmäninde hem dogrudyr. Jisime *Axyz* koordinatalar sistemasyny berkitsek, ol jisim bilen birlikde aýlanýar. Beýle sistemanyň amatlylygy oňa görä jisimiň massalar merkeziniň koordinatalarynyň we inersiýa momentleriniň üýtgemeýändiginde ybaratdyr. Bu ýagdaý deňlemeler ýazylanda we çözülende uly utuş berýär. Goý, jisime $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ güýçler täsir edýän bolsun. Bu güýçleriň baş wektory $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$ bolsa, onuň koordinata oklaryna proýeksiýalary bolar.

Şol güýçleriň koordinata oklaryna görä baş momentlerini M_x, M_y, M_z, $[M_x = \sum m_x(\overline{F}_k)$ we ş.m.$]$ bilen belgiläliň. Bu ýerde $\omega = \text{const}$ bo-



30.1-nji surat

lany sebäpli $M_z = I_z\dot{\omega} = 0$. Elbetde jisimiň aýlanmagy podşipniklerde döreýän reaksiýa güýçlerine täsir edýär. Şol X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli. Bu reaksiýalara **dinamiki reaksiýalar** diýilýär. Jisimiň $C(x_C, y_C, z_C)$ agyrlyk merkezi aýlanma okunda ýatmaýar, ýagny $x_c \neq 0$, $y_c \neq 0$ diýip hasap edilýär.

Haýsy usul ulanylsa-da, gerek deňlemeleri almak üçin matematiki, mehaniki özgertmeleri ulanmaly bolýandygyny bellemek gerek. Şol deňlemeler taýýar görnüşinde ulanylsa-da peýdalydyr, ýöne meseläni düýpli öwrenmek üçin nazary mehanikadan giňişleýin ýazylan edebiýatlardan peýdalanmaly.

Şeýlelikde z okuň daşynda deňölçegli (ω = const) aýlanýan jisimiň podşipnikleriniň dinamiki reaksiýalaryny kesgitleýän deňlemeler aşakdaky ýaly ýazylýar ($AB = b$):

$$\left.\begin{aligned} X_A + X_B &= -R_x - mx_c\omega^2; \\ Y_A + Y_B &= -R_y - my_c\omega^2; \\ Z_A \cdot b &= -M_y - I_{xz}\omega^2; \\ Y_B \cdot b &= M_x - I_{yz}\omega^2. \end{aligned}\right] \qquad (30.1)$$

Bu ýerde $I_{xz} = \sum m_k x_k z_k$, $I_{yz} = \sum m_k y_k z_k$ – jisimiň merkezden gaçma inersiýa momentleri.

(30.1) deňlemelerde $\omega = 0$ diýip hasap edilende, ýagny jisim hereketsizkä döreýän reaksiýalara **statiki reaksiýalar** diýilýär. (30.1) deňlemelerden görnüşi ýaly, dinamiki reaksiýalar statiki reaksiýalardan tapawutlanýarlar, şeýle hem bu tapawut diňe bir ω tarapdan bolman, eýsem $x_c\, y_c$, I_{xz}, I_{yz} ululyklara-da baglydyr. Eger (30.1) deňlemelerde

$$x_c = 0;\ y_c = 0, \tag{30.2}$$

$$I_{xz} = 0;\ y_{yz} = 0 \tag{30.3}$$

şertler ýerine ýetýän bolsa, onda aýlanma hereketiniň podşipniklerde döreýän reaksiýalara täsiri bolmaýar. (30.2) we (30.3) şertler dinamiki we statiki reaksiýalaryň deňleşmegine getirýär. Bu şertlere z okuň daşynda aýlanýan jisimiň **dinamiki sazlaşyk şertleri** diýilýär. (30.2) şert jisimiň massalar merkeziniň aýlanma okunyň üstünde ýatmagyny talap edýär.

(30.2) we (30.3) şertler birbada ýerine ýetseler, onda Az ok jisimiň **inersiýasynyň baş merkezi oky** bolýar. Şeýlelikde, dinamiki we statiki reaksiýa güýçleriniň deňleşmegi üçin, aýlanma oky jisimiň inersiýasynyň haýsy hem bolsa bir *baş merkezi oky* bilen gabat gelmeli.

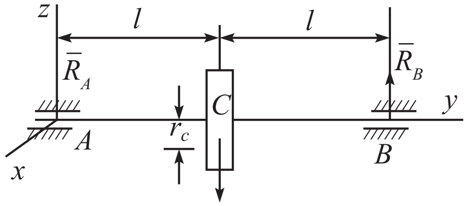
$I_{xz}\, I_{yz}$ we merkezden gaçma inersiýa momentleri z okuň daşynda aýlanýan jisimiň näsazlygynyň derejesini häsiýetlendirýär.

Aýlanýan jisimiň dinamiki sazlaşdyrylyşy örän wajyp tehniki mesele bolup durýar. Mysal üçin, ýörite stendlerde awtomobilleriň tigirlerini sazlaşdyrýandyklaryny (balansirowka) häli-şindi görýäris.

30.2. Mysaly meseleler

30.1-nji mesele. Tigir okuň (walyň) ortasyna berkidilip, onuň C agyrlyk merkezi aýlanma okundan $r_c = 1\ mm$ aralykda ýerleşen. Eger tigriň agramy $P = 3000\ kg$, burç tizligi $n = 1200\ {}^{\text{owr}}/_{\text{min}}$ bolsa podşipniklerdäki basyşlary kesgitlemeli. Walyň agramyny nazara almaly däl (*30.2-nji surat*).

Çözülişi. *Ayz* tekizlik hemişe C agyrlyk merkeziniň üstünden geçýär. Şerte görä $\omega = \dfrac{n\pi}{30}s^{-1} = \dfrac{1200 \cdot \pi}{30}s^{-1} = 40\pi s^{-1}$. Ilki bilen statiki deňagramlylykda $\omega = 0$ bolandaky güýçleri tapalyň:

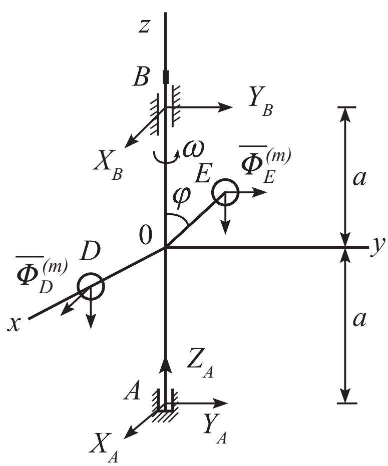


30.2-nji surat

$$R_A^{cm} = R_B^{cm} = \frac{P}{2} = 1500\ kg.$$

Bu güýçler hemişe wertikal bilen ugrukdyrylandyrlar. Bu güýç-leriň üstüne tigirleriň aýlanmasyndan dörän $\frac{1}{2}\omega^2 \frac{P}{g} r_c = 2400\ kg$ inersiýa güýjüni goşmaly. Bu güýç hemişe Ayz tekizlikde ýatyp, C nokada goýulýar we merkezden gaçýan güýji aňladýar.

30.2-nji mesele. ω burç tizligi bilen deňölçegli aýlanýan AB wertikal wala iki sany steržen berkidilen. OE steržen wal bilen φ burçy emele getirýär. OD steržen: $OD \perp AB$, $OD \perp OE$. $OD = OE = l$, $AB = 2a$. Sterženleriň uçlaryna hersiniň massasy m bolan E hem-de D şarlar berkidilen. A we B daýançlardaky goşmaça dinamiki basyşlary kesgitlemeli. D we E şarlary maddy nokat diýip almaly, sterženleriň massalaryny hasaba almaly däl (*30.3-nji surat*).



30.3-nji surat

Çözülişi. 30.3-nji suratda ähli güýçler görkezilen. Inersiýa güýçleriniň ululyklary $\Phi_E^{(m)} = m\omega^2 l \sin\varphi$, yOz tekizlikde ýatyr, $\Phi_D^{(m)} = m\omega^2 l$ bolsa xOz tekizlikde ýatyr.

Deňagramlylyk deňlemelerini ýazalyň:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_x = X_A + X_B + \Phi_D^{(in)} = 0,\\
&\sum F_y = Y_A + Y_B + \Phi_E^{(in)} = 0,\\
&\sum F_z = Z_A - 2P = 0,\\
&\sum m_x = (Y_A - Y_B)a - Pl_{\sin}\varphi - \Phi_E^{(in)} \cdot l\cos\varphi = 0,\\
&\sum m_y = (X_B - X_A)a + Pl = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bu deňlemelere girýän daýanç reaksiýalary statiki reaksiýalar bilen goşmaça reaksiýalaryň jeminden durýarlar. z ok boýunça reaksiýa üýtgemeýär, $Z_A = 2P$.

$\omega = 0$ hasap edip, statiki reaksiýalar üçin deňlemeleri ýazalyň:

$$X_A^{cm} + X_B^{cm} = 0;$$
$$Y_A^{cm} + Y_B^{cm} = 0;$$
$$Y_A^{cm} - Y_B^{cm} = \frac{l}{a} P\sin\varphi;$$
$$X_B^{cm} - X_A^{cm} = -\frac{l}{a} P.$$

Bu deňlemeleri işläp, statiki reaksiýalary tapýarys:

$$X_B^{cm} = -X_A^{cm} = -\frac{lP}{2a}, Y_A^{cm} = -Y_B^{cm} = \frac{l}{a} P\sin\varphi.$$

(1) sistemany çözüp, doly reaksiýalary tapýarys:

$$X_B = -\frac{1}{2} ml\omega^2 - \frac{Pl}{2a}, \;\; X_A = -\frac{ml\omega^2}{2} + \frac{Pl}{2a}.$$

$x_B = x_B^{st} + x_B^{\text{goş}}, x_A = x_A^{st} + x_A^{\text{goş}}$ bolany üçin, statiki bahalary göz öňünde tutup, goşmaça dinamiki reaksiýalary ýazýarys:

$$X_A^{\text{goş}} = -\frac{1}{2} ml\omega^2, \quad X_B^{\text{goş}} = -\frac{1}{2} ml\omega^2.$$

Ýokarka meňzeşlikde $Y_A^{goş}$, $Y_B^{goş}$ reaksiýalary tapyp bolýar:

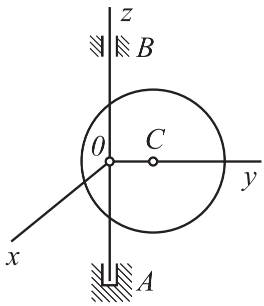
$$Y_A^{\text{goş}} = -\frac{ml\omega^2 (a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a},$$

$$Y_A^{\text{goş}} = -\frac{ml\omega^2(a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}.$$

Tapylan ululyklar podşipniklerde döreýän reaksiýa güýçleridir. Meseläniň talap edýän dinamiki basyşlaryny almak üçin reaksiýalaryň alamatlaryny tersine öwürmeli.

30.3. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

30.3-nji mesele. Massasy M bolan birjynsly tegelek disk öz tekizliginde ýerleşen C massalar merkezinden $OC = a$ aralykda ýerleşen gozganmaýan wertikal okuň daşynda ω burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýar. $OB = OA$ bolanda okuň A podpýatnige we B podşipnige görkezýän dinamiki basyş güýçlerini kesgitlemeli (*30.4-nji surat*).

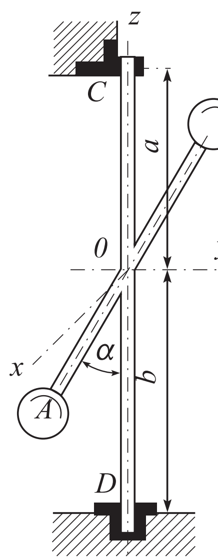


30.4-nji surat

Jogaby:

$X_A = X_B = 0, \quad Y_A = Y_B = Ma\omega^2/2.$

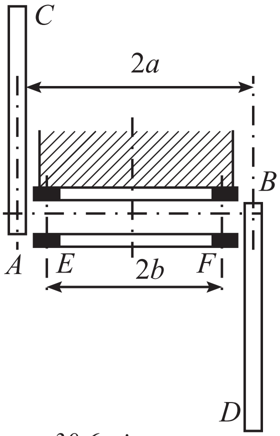
30.4-nji mesele. Uçlarynda birmeňzeş M massaly ýükler bolan $2l$ uzynlykdaky AB steržen wertikal Oz okuň daşynda ω burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýar. Oz ok AB sterženiň ortasyndaky O nokatdan geçýär, O nokatdan C podşipnige çenli aralyk a, D podpýatnige çenli aralyga b deň. AB steržen bilen Oz okuň arasyndaky α burç üýtgemeýär. Sterženleriň massasyny we ýükleriň ölçeglerini hasaba alman, steržen Oyz tekizlikde bolan pursatynda C podşipnige we D podpýatnige düşýän basyş proeksiýalaryny kesgitlemeli (*30.5-nji surat*).



30.5-nji surat

Jogaby: $X_C = X_D = 0, \quad Y_C = -\dfrac{Ml^2\omega^2\sin 2\alpha}{a+b},$

$Z_D = -2Mg.$

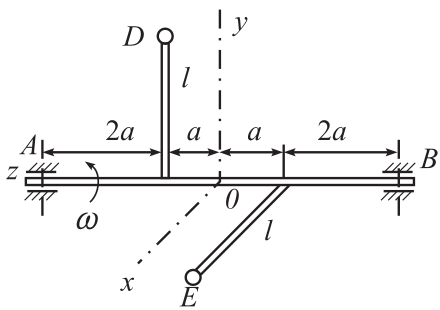


30.6-njy surat

30.5-nji mesele. AB okuň uçlaryna uzynlygy l, her biriniň massasy M_1 bolan we bir-birine görä 180° burç bilen berkidilen iki sany AC we BD kriwoşipler geýdirilen. Uzynlygy $2a$ we massasy M_2 bolan AB ok simmetrik görnüşde bir-birinden $2b$ aralykda ýerleşen iki sany podşipnikde ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. AC kriwoşipler ýokaryk wertikal bilen ugrukdyrylanda podşipniklere düşýän N_E we N_F basyşlary kesgitlemeli. Her kriwoşipiň massasyny onuň oky boýunça deňölçegli ýaýran diýip hasaplap bolýar (*30.6-njy surat*).

Jogaby: Basyş güýji $N_E = \frac{1}{2}M_2 g + M_1 g - \frac{M_1 a l \omega^2}{2b}$, $N_E > 0$ bolanda wertikal boýunça aşak, $N_E < 0$ bolanda ýokaryk ugrugan. Basyş güýji $N_F = \frac{1}{2}M_2 g + M_1 g + \frac{M_1 a l \omega^2}{2b}$ bolanda wertikal boýunça aşak ugrugan.

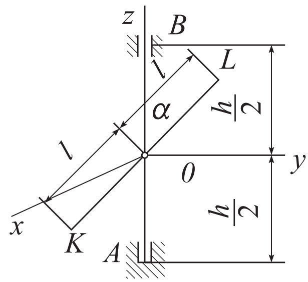
30.6-njy mesele. Hemişelik ω burç tizlik bilen aýlanýan gorizontal AB wala özara perpendikulýar tekizliklerde ýatan l uzynlykdaky iki sany steržen perpendikulýar edip birikdirilen *(30.7-nji surat)*. Sterženleriň uçlarynda her biriniň massasy m bolan D we E şarlar bar. Walyň A we B daýançlara edýän dinamiki basyşlaryny kesgitlemeli. Şarlary maddy nokat diýip hasaplamaly, sterženleriň massalaryny hasaba almaly däl.



30.7-nji surat

Jogaby: $N_A = N_A = \frac{\sqrt{5}}{3} m l \omega^2$.

30.7-nji mesele. Wertikal AB oka α burç astynda merkezde berkidilen birjynsly KL steržen ε burç tizlenme bilen deňtizlenip aýlanýar. Sterženiň massasy M, uzynlygy $2l$. $OA = OB = h/2$, $OK = OL = l$ bolsa AB okuň A we B podşipniklere edýän basyş güýçlerini kesgitlemeli. Başlangyç pursatda ulgam dynçlykda dur (*30.8-nji surat*).

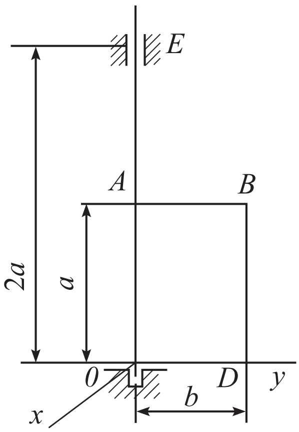


30.8-nji surat

$$Jogaby:\ X_B = -X_A = \frac{Ml^2}{6h}\varepsilon \sin 2\alpha,$$

$$Y_B = -Y_A = \frac{Ml^2}{6h}\varepsilon^2 t^2 \sin 2\alpha.$$

30.8-nji mesele. OA tarapy bilen OE wala berkidilen M massaly birjynsly, taraplary a we b bolan $OABD$ gönüburçly plastinka ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Daýançlaryň aralygy $OE = 2a$. Walyň O we E daýançlaryna gapdal tarapdan edilýän dinamiki basyş güýçlerini hasaplamaly (*30.9-njy surat*).

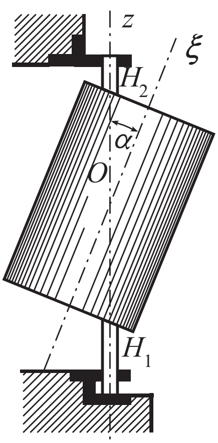


30.9-njy surat

$$Jogaby:\ N_{o_x} = N_{E_x} = 0,\ N_{O_y} = \frac{3}{8}Mb\omega^2,$$

$$N_{E_y} = \frac{1}{8}Mb\omega^2.$$

30.9-njy mesele. Massasy M, uzynlygy $2l$ we radiusy r bolan birjynsly tegelek dogry silindr özüniň O massalar merkezinden geçýän wertikal Oz okuň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Bu ýagdaýda silindriň $O\xi$ oky bilen Oz ok arasyndaky α burç üýtgemeýär. Podşipnik bilen podpýatnigiň arasyndaky H_1H_2 uzaklyk h-a deň. Gapdal tarapdan podpýatnige edilýän N_1 basyş bilen podşipnige edilýän N_2 basyşy kesgitlemeli (*30.10-njy surat*).

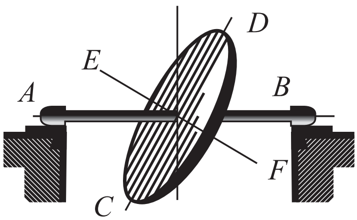


30.10-njy surat

Jogaby: N_1 we N_2 basyşlaryň mukdary birmeňzeş:

$M\frac{\omega^2 \sin 2\varphi}{2h}\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right)$ bolup, ugurlary gapma- garşy.

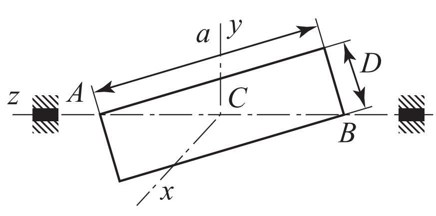
30.10-njy mesele. Bug turbinasynyň birjynsly ýuka tegelek *CD* diski *AB* okuň daşynda aýlananda *A* we *B* podşipniklere düşýän basyşlary hasaplamaly. *AB* ok diskiň *O* merkezinden geçýär, emma wtulkanyň nädogry deşilenligi sebäpli diskiň tekizligine geçirilen perpendikulýar bilen $\angle AOE = \alpha = 0{,}02$ radian burç emele getirýär. Diskiň massasy 3,27 *kg*, radiusy 20 *sm*, burç tizligi 30 000 *aýl/min*; aralyklar: $AO = 50$ *sm*, $OB = 30$ *sm*; *AB* ok absolýut gaty diýip hasaplanýar we $\sin 2\alpha = 2\alpha$ diýip kabul edilýär (*30.11-nji surat*).



30.11-nji surat

Jogaby: Diskiň agramy netijesinde *A* podşipnige 12,1 *N* we *B* podşipnige 20,0 *N* basyş täsir edýär. Diskiň aýlanmasyndan podşipniklere düşýän basyş birmeňzeş we 8,06 *kN* deň bolup, garşylykly ugra ugrugan.

30.11-nji mesele. Massasy *M* bolan birjynsly gönüburçly plastinka özüniň *AB* diagonalynyň daşynda burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýar. Eger taraplarynyň uzynlygy *a* we *b* bolsa, plastinkadan *A* we *B* daýançlara düşýän diamiki basyşy kesgitlemeli (*30.12-nji surat)*.



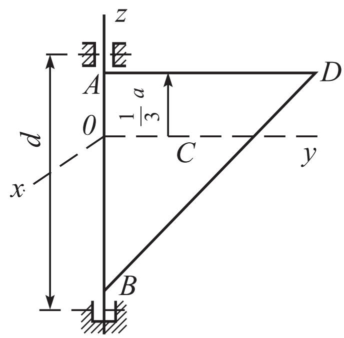
30.12-nji surat

$$\textit{Jogaby: } X_A = 0,\ Y_A = \frac{-Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}},$$

$$Y_B = 0,\ \ Y_B = \frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

30.12-nji mesele. Aşakdaky B daýanja gapdal tarapdan düşýän basyşyň nola deň bolmagy üçin, deňýanly gönüburçly ABD üçburçluk şekilindäki birjynsly plastinka özüniň $AB = a$ katetiniň daşynda haýsy burç tizlik bilen aýlanmaly? Daýançlaryň arasyndaky uzaklyk AB katetiň uzynlygyna deň diýip hasaplamaly (*30.13-nji surat*).

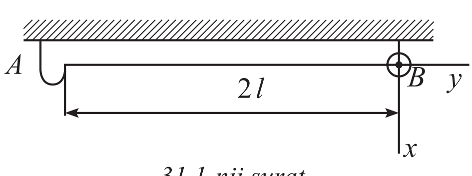
Jogaby: $\omega = 2\sqrt{g/a}$.



30.13-nji surat

31. Özbaşdak çözmek üçin garyşyk meseleler

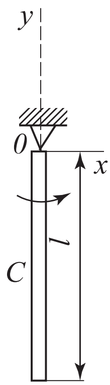
31.1-nji mesele. Uçlary berkidilen, uzynlygy $2l$ bolan birjynsly agyr AB pürs (balka) gorizontal ýagdaýda dur. Bir pursatda onuň A ujy boşadylýar we B ujundan geçýän gorizontal okuň daşynda aýlanyp, aşak düşüp başlaýar. Pürs wertikal ýagdaýy eýelände onuň B ujy hem boşadylýar. Pürsüň mundan soňky eýe bolýan hereketinde onuň massalar merkeziniň traýektoriýasyny we burç tizligini kesgitlemeli (*31.1-nji surat*).



31.1-nji surat

Jogaby: 1) $y^2 = 3l\,x - 3\,l^2$ – parabola; 2) $\omega = \sqrt{3g(2l)}$.

31.2-nji mesele. Uzynlygy l bolan agyr birjynsly steržen özüniň ýokarky ujundan gorizontal O oka asylan. Wertikal ýagdaýdaky steržene $\omega_0 = \sqrt{3g/l}$ burç tizlik berlen. Ol ýarym töwerek çyzyp, O okdan



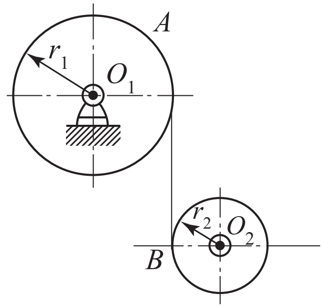
31.2-nji surat

aýrylýar. Sterženiň mundan soňky hereketinde onuň massalar nerkeziniň traýektoriýasyny we ω burç tizligini kesgitlemeli (*31.2-nji surat*).

Jogaby: 1) $y_C = \dfrac{l}{2} - \dfrac{2}{3l}x_C^2$ – parabola;

2) $\omega = \sqrt{3g/l}$.

31.3-nji mesele. Massalary, degişlilikde, M_1 we M_2 esaslarynyň radiuslary r_1 we r_2 bolan birjynsly tegelek A we B silindrlere iki sany maýyşgak ýüp oralan. Ýüpüň sarymlary silindriň esaslaryna parallel bolan orta tekizliklere simmetrik görnüşde ýerleşen.Silindrleriň oklary gorizontal bolup, emele getirijileri iň uly ýapgyt çyzyklara perpendikulýar. A silindriň oky gozganmaýar; B silindr dynçlykdan öz agramynyň täsirinde aşak düşýär. Hereket başlanandan soň t pursatda ýüpler entek silindre oralgy diýip hasaplap: 1) silindrleriň ω_1 we ω_2 burç tizliklerini; 2) B silindriň massalar merkeziniň geçen s ýoluny we 3) ýüpleriň T dartylyş güýjüni kesgitlemeli (*31.3-nji surat*).

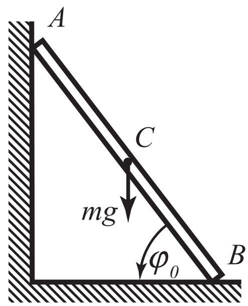


31.3-nji surat

Jogaby: 1) $\omega_1 = \dfrac{2gM_2}{r_1(3M_1 + 2M_2)}t;$ $\omega_2 = \dfrac{2gM_1}{r_1(3M_1 + 2M_2)}t;$

2) $s = \dfrac{g(M_1 + M_2)}{3M_1 + 2M_2}t^2;$ 3) $T = \dfrac{M_1 M_2 g}{3M_1 + 2M_2}.$

31.4-nji mesele. Uzynlygy a bolan birjynsly AB steržen wertikal tekizlikde gorizonta φ_0 burç astynda goýlup, onuň A ujy ýylmanak wertikal diwara, B ujy bolsa ýylmanak gorizontal pola direnip dur. Şondan soň sterženi başlangyç tizliksiz öz ugruna goýberýärler. 1) Sterženiň burç tizligini we burç tizlenmesini kesgitlemeli. 2) Steržen diwardan aýrylan pursatynda gorizont bilen haýsy φ_1 burçy emele getirýändigini tapmaly (*31.4-nji surat*).



31.4-nji surat

Jogaby: 1) $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$,

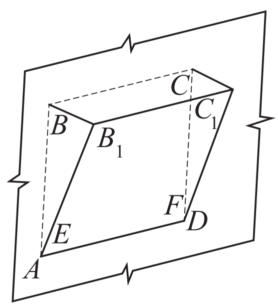
$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2a}\cos\varphi;\ 2)\ \sin\varphi_1 = \frac{2}{3}\sin\varphi_0.$$

31.5-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerinden peýdalanyp sterženiň pola ýykylan pursatyndaky burç tizligini we aşaky ujunyň tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}$.

$$\upsilon_B = -\frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}.$$

31.6-njy mesele. Gönüburçluk şekilindäki ýuka birjynsly AB tagta wertikal diwara söýäp goýlan. Tagta iki sany depesiz E we F çüýlere daýanyp durýar. AD aralyk EF-e deň. Bir pursatda tagta AD göni çyzygyň daşynda aýlanyp, örän kiçi başlangyç burç tizlik bilen aşak düşüp başlaýar. Tagta çüýlerde typmaýar diýip hasap edip, reaksiýa güýçleriniň gorizontal düzüjisiniň ugrunyň üýtgemesiniň $\alpha_1 = \angle BA_1$ burçuny we tagtanyň çüýden aýrylan pursatyndaky α_2 burçy kesgitlemeli (*31.5-nji surat*).



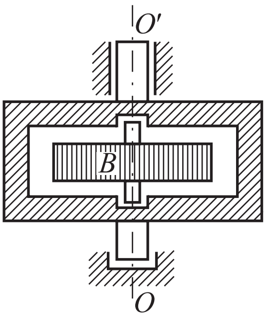
31.5-nji surat

Jogaby: $\alpha_1 = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'$, $\alpha_2 = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'$.

31.7-nji mesele. Iki disk bir okuň daşynda ω_1 we ω_2 burç tizlikler bilen aýlanýarlar. Diskleriň bu oka görä inersiýa momentleri J_1 we

J_2. Diskler biri-birine duýdansyz friksion mufta bilen birikdirilende, kinetik energiýanyň ýitgisini kesgitlemeli.

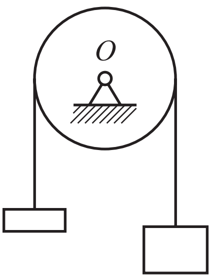
$$Jogaby:\ \ \Delta T = \frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$



31.6-njy surat

31.8-nji mesele. *A* jisim *OO′* oka görä ω_A burç tizlik bilen sürtülmesiz aýlanýar. *A* jisimiň içinde *OO′* okuň daşynda şol ugra ω_B görä burç tizlik bilen aýlanýan *B* rotor ýerleşdirilen. *OO′* we O_1O_1' oklar bir göni çyzykda ýerleşen. *A* jisimiň we *B* rotoryň bu göni çyzyga görä inersiýa momentleri J_A we J_B deň. Ýitgini hasaba alman, *B* rotora *A* jisimi togtadyp biljek burç tizligi bermek üçin *A* jisime ornaşdyrylan motoryň etmeli işini kesgitlemeli (*31.6-njy surat*).

$$Jogaby:\ \ A = \frac{1}{2}J_A\left[\omega_A^2\left(1 + \frac{J_A}{J_B}\right) + 2\omega_A\omega_B\right].$$



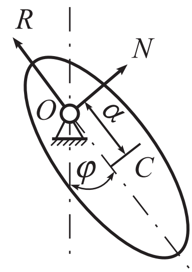
31.7-nji surat

31.9-njy mesele. *O* gorizontal okuň daşynda ω_0 burç tizlik bilen garşylyksyz aýlanýan şkiwiň üstüne uçlaryna iki sany ýük berkidilen çekini atdylar. Şkiw massasy *m* bolan, *r* radiusly birjynsly diskden ybarat. Ýükleriň her biriniň massasy $M = 2\ m$. Ýükleriň başlangyç tizliklerini nola deň hasaplap, çekiniň şkiwiň üstünde typmasy togtadylandan soň olaryň haýsy tizlik bilen hereketlenýändigini kesgitlemeli. Şeýle hem, çeki bilen şkiwiň arasyndaky sürtülme güýjüniň işini tapmaly (*31.7-nji surat*).

$$Jogaby:\ \ \upsilon = \frac{1}{9}\omega_0 r,\quad A_{s\ddot{u}r} = \frac{2}{9}m\omega_0^2 r^2.$$

31.10-njy mesele. Massasy *M* bolan gaty jisim suratyň tekizligine perpendikulýar bolan *O* okuň daşynda yranýar. Asylyş okundan *C* massalar merkezine çenli bolan aralyk *a* deň. Jisimiň massalar merkezinden suratyň tekizligine perpendikulýar bolan oka görä inersiýa radiusy ρ deň. Başlangyç pursatda jisim deňagramlylyk ýagdaýyndan

φ_0 burça gyşardylyp, başlangyç tizliksiz goýberilen. Okdaky reaksiýa güýjüniň jisimiň asylan nokady we jisimiň massalar merkezinden geçýän ugur bilen we oňa perpendikulýar bolan ugurdaky düzüjileri R hem-de N kesgitlemeli. Bu reaksiýa güýçlerini jisimiň wertikaldan φ gyşarma burçy arkaly aňlatmaly (*31.8-nji surat*).

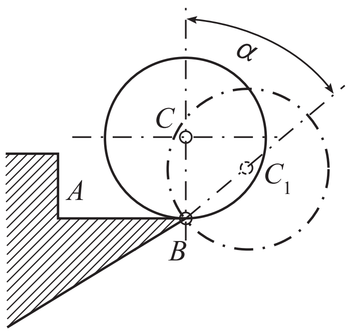


31.8-nji surat

Jogaby: $R = Mg\cos\varphi + \dfrac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$

$$N = Mg\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\cdot\sin\varphi.$$

31.11-nji mesele. Agyr birjynsly silindr örän kiçi başlangyç tizlik alyp, gorizontal AB meýdançadan typman tigirlenip düşýär. AB meýdançanyň B gyrasy ýiti we silindriň emele getirijilerine parallel, silindriň esasynyň radiusy r deň. Silindr meýdançadan aýrylan pursatynda silindriň okundan we meýdançanyň B gyrasyndan geçýän tekizlik wertikal ýagdaýdan $\angle CBC_1 = \alpha$ burça gyşaran. Silindr meýdançadan aýrylan pursatynda burç tizliginiň ululygyny, şeýle hem, α burçy kesgitlemeli. Tigirlenmedäki sürtülmäni we howpuň garşylygyny hasaba almaly däl (*31.9-njy surat*).



31.9-njy surat

Jogaby: $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{7r}},\quad \alpha = \arccos\dfrac{4}{7} = 55{,}1°.$

31.12-nji mesele. Wertikal okly tegelek silindriň gapdal üstünde galyş burçy α bolan ýylmanak wint şekilindäki ýapjagaz oýlan. Silindr wertikal okuň daşynda sürtülmesiz aýlanýar. Başlangyç pursatda silindr dynçlykda dur. Ýapjagazdan agyr şarjagazy goýberýärler; ol ýapjagazy boýunça başlangyç tizliksiz aşak düşýär we silindri aýlaýar. Silindriň massasy M, radiusy R, şarjagazyň massasy m, şarjagazdan oka çenli bolan aralyk R we silindriň inersiýa momentini $\frac{1}{2}MR^2$ diýip hasaplap, şarjagaz h aralyga düşen pursatynda silindriň ω burç tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: $\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$.

32. Üýtgeýän massaly nokadyň we jisimiň dinamikasy. Umumy düşünjeler

Nazary mehanikada, adatça, jisimiň massasy üýtgemeýär diýilýär. Emma hereket döwründe massasy üýtgeýän jisimler hem bolýar. Meselem, reaktiw uçaryň ýa-da raketanyň hereket döwründe hereketlendirijisiniň howany içine dartmagy netijesinde olaryň massasy artýar, ýakylanynyň harçlanyşy netijesinde bolsa massasy kiçelýär. Şeýle hem köçe suwlaýan awtomobilde, üstünden ýük taşlaýan aerostatda, suwda ýüzüp ýören buz erände şeýle ýagdaý ýüze çykýar.

Şeýle meseleler üçin «üýtgemeýän massaly» nazary mehanikanyň düzgünlerini ulanyp bolmaýar. Munuň üçin üýtgeýän massaly jisimiň düşünjesi girizilýär. Jisime material nokatlaryň goşulmagyndan ýa-da aýrylmagyndan «üýtgeýän massaly» jisim döreýär. Jisimiň massasyny üýtgedýän material nokatlar şol jisimde täzeden döremeýär we ýok bolup hem gitmeýär. Şeýle nokatlaryň massasyny hasaba almaly (jisime goşulýan bolsalar) ýa-da hasapdan çykarmaly (aýrylyp gidýän bolsalar). Üýtgeýän massaly jisimiň şeýle kesgitlenişi onuň üçin nazary mehanikanyň düzgünlerini ulanmaga mümkinçilik döredýär.

Gelejekde jisime goşulýan (aýrylýan) nokadyň massasy örän kiçi; birleşýän (aýrylýan) nokatlaryň yzygiderligindäki wagt aralyklary örän kiçi diýen çaklamalary göz öňünde tutmaly. Şeýle çaklamalaryň esasynda jisimiň massasynyň üýtgemegini wagtyň üznüksiz we differensirlenýän funksiýasy görnüşinde kabul etmek bolýar. Bu pikiri ýaýbaňlaşdyrsak, jisimiň tizliginiň üýtgemegi hem wagta görä üznüksiz we differensirlenýän funksiýadyr diýen netijä gelýäris. Üýtgeýän massaly jisimleriň mehanikasynyň esasyny rus alymy I.W. Meşerskiý (1859-1935) goýýar, K.E. Siolkowskiý (1857-1935) ony amaly meselelerde ulanýar.

32.1. Üýtgeýän massaly nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi (Meşşerskiniň deňlemesi)

Jisimiň ýönekeý hereketini öwrenmegi maksat edinip, ol öňe hereket edýär diýeliň. Beýle hereket edýän jisime material nokat hökminde garamak bolýar.

m = m(t) – jisimiň massasynyň üýtgemegini aňladýan üznüksiz, differensirlenýän funksiýa.

Bu nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazmak üçin (23.2) formuladan peýdalanalyň:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{F}, \tag{32.1}$$

bu ýerde $\overline{Q}$ – sistemanyň hereket mukdarynyň baş wektory, $\overline{F}$ – sistema täsir edýän daşky güýçleriň baş wektory.

t pursatda jisimiň absolýut tizligi $\overline{\upsilon}$ bolsa, onuň hereket mukdary $m(t)\cdot\overline{\upsilon}$ bolýar. dm massaly bölejik esasy jisime t pursatda goşulyp başlap, $t + dt$ pursatda doly goşulýar diýip hasap edeliň. dm massaly nokadyň t pursatdaky absolýut tizligi $\overline{u}$ bolsun. (32.1) formulanyň çep tarapyny hasaplalyň:

$$\overline{Q}_t = m\overline{\upsilon} + \overline{u}dm, \quad \overline{Q}_{t+dt} = (m+dm)(\overline{\upsilon} + d\overline{\upsilon}),$$

$$d\overline{Q} = \overline{Q}_{t+dt} - \overline{Q}_t = md\overline{\upsilon} + (\overline{\upsilon} - \overline{u})dm + dm\cdot d\overline{\upsilon}.$$

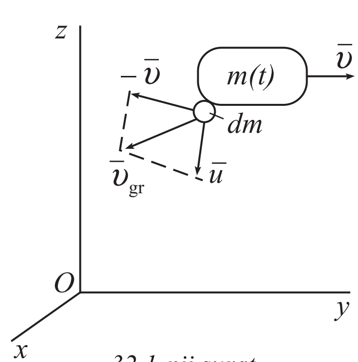
$dm\cdot d\overline{\upsilon}$ ululyk beýleki agzalardan has kiçi bolany üçin, ony taşlaýarys we $d\overline{Q}$ bahany (32.1) formula goýýarys:

$$m\frac{d\overline{\upsilon}}{dt} = (\overline{u} - \overline{\upsilon})\cdot\frac{dm}{dt} + \overline{F}, \tag{32.2}$$

bu ýerde – jisime goşulýan massanyň görä tizligi (*32.1-nji surat*), $\overline{\Phi} = \upsilon_{gr}\frac{dm}{dt}$ ululyga reaktiw güýç diýilýär. $\frac{dm}{dt}$ – sekuntda harçlanýan massa.

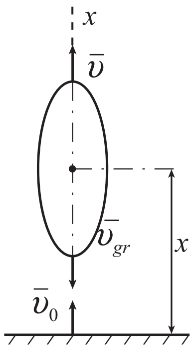
Şeýlelikde $$m\frac{d\overline{\upsilon}}{dt} = \overline{F} + \overline{\Phi} \tag{32.3}$$

Bu deňlemä **Meşşerskiniň deňlemesi** diýilýär.



32.1-nji surat

32.2. Siolkowskiniň formulasy



32.2-nji surat

Goý, massasy üýtgeýän maddy nokat ýa-da raketa erkin giňişlikde ýeke reaktiw güýjüň täsir etmegi bilen gönüçyzykly hereket etsin. Raketadan bölünip aýrylýan bölejikleriň tizlikleri hemişelik ululyk bolup, olar massasy üýtgeýän nokadyň hereket tizliginiň tersine ugrukdyrylan diýeliň (*32.2-nji surat*).

Onda (32.2) deňlemäni x oka proektirläp, alarys:

$$m\frac{d\upsilon}{gr} = -\frac{dm}{dt}\upsilon_{\text{gr}}, \text{ bu ýerden } \frac{d\upsilon}{\upsilon_{\text{gr}}} = -\frac{dm}{m}$$

Bu deňligiň iki bölegini hem integrirläp, alarys:

$$\frac{1}{\upsilon_{\text{gr}}}(\upsilon - \upsilon_0) = -\ln m\Big|_{m}^{m_0} = \ln\frac{m_0}{m}. \tag{32.4}$$

Eger m_k raketanyň korpusynyň massasy, $m_ý$ ýangyjyň massasy bolsa, onda $m_0 = m_k + m_ý$. Raketadaky hemme ýangyç ýanyp gutaranda $m = m_k$ bolýar. Indi raketanyň hemme ýangyjy ýanyp gutarandan soňky tizligini kesgitläliň. (32.4) deňlemeden alarys:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_{\text{gr}}\ln\frac{m_k + m_ý}{m_k} = \upsilon_0 + \upsilon_{\text{gr}}\ln\left(1 + \frac{m_ý}{m_k}\right). \tag{32.5}$$

Bu formula ***Siolkowskiniň formulasy*** diýilýär. Siolkowskiniň formulasyndan görnüşi ýaly, raketadaky ýangyç gutarandan soň, onuň tizligi aşakdaky görkezilen ululyklara bagly bolýar:

1) raketanyň $\bar{\upsilon}_0$ başlangyç tizligine;

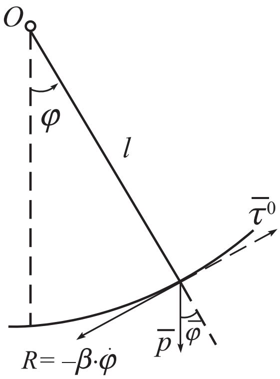
2) raketadan bölünip aýrylýan bölejikleriň υ_{gr} görä tizligine;

3) raketadaky ýangyjyň massasynyň onuň korpusynyň massasyna bolýan gatnaşygyna, ýagny $\frac{m_ý}{m_k}$.

$\bar{\upsilon}$ tizlik raketadaky ýangyçlaryň tiz ýa-da haýal ýanyp gutarmagyna bagly bolmaýar. Şonuň üçin raketanyň $\bar{\upsilon}$ tizligini artdyrmak üçin υ_0, υ_{gr}, $\frac{m_ý}{m_k}$ ululyklary artdyrmaly bolýar. $\frac{m_ý}{m_k}$ ululyk artdyrylandan $\bar{\upsilon}_0$ we $\bar{\upsilon}_{gr}$ tizlikleriň ululyklaryny artdyrmak has amatlydyr.

32.3. Mysaly meseleler

32.1-nji mesele. Garşylyk täsirli gurşawda massasy $m = m(t)$ kanun bilen üýtgeýän maýatnigiň deňlemesini ýazmaly. Maýatnikden aýrylýan bölejikleriň görä tizlikleri nola deň: $\upsilon_{gr} = 0$. l – maýatnigiň uzynlygy. $R = -\beta\dot{\varphi}$ gurşawyň garşylygy (*32.3-nji surat*).



32.3-nji surat

Çözülişi. (32.3) formulada υ_{gr} bahany ulanyp, $\overline{\tau}^0$ galtaşma okuna proektirläliň:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg\sin\varphi - \beta\dot{\varphi}.$$

$\upsilon = \omega l = \dot{\varphi} l$ bolany üçin,

$$ml\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi + \beta\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{\beta}{ml}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$ gelip çykýar.

32.4. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

32.2-nji mesele. Raketa agyrlyk güýjüniň birjynsly meýdanynda ýokaryk hemişelik tizlenme bilen hereketlenýär. Atmosferanyň garşylygyny hasaba alman, gazlaryň akyp çykyş effektiw tizligi υ_e-ni hemişelik diýip hasaplap, raketanyň massasynyň iki esse kemelýän T wagtyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T = \upsilon_e \ln 2/(w + g)$.

32.3-nji mesele. Raketadan gazlaryň akyp çykyş effektiw tizligi $\upsilon_e = 2{,}4$ *km/s*. Raketanyň dartylyş meýdanyndan daşarda hem, atmosferadan daşarda hem hereketlenende 9 *km/s* tizlige eýe bolmagy üçin raketanyň ýangyjy raketanyň startyň öňündäki massasynyň haýsy göterimini düzmeli?

Jogaby: Takmyn, 98 %.

32.4-nji mesele. Raketa dartylyş meýdany we garşylygy bolmadyk gurşawda öňe hereket edýär. Gazlaryň akyp çykyş effektiw tizligi $\upsilon_e = 2{,}4$ *km/s*. Ýangyç ýanyp bolan pursatynda raketanyň tizligi 4300 *m/s* bolsa, Siolkowskiniň sanyny kesgitlemeli.

Jogaby: $z \approx 6$.

32.5-nji mesele. Üýtgeýän massaly jisim nola deň başlangyç tizlige eýe bolup, hemişelik w tizlenme bilen gorizontal ugrukdyryjy boýunça hereketlenýär. Gazlaryň akyp çykyş effektiw tizligi υ_e hemişelik. Garşylygy hasaba alman, jisimiň massasy k esse kemelýänçä geçen wagt içinde onuň geçen ýoluny kesgitlemeli.

Jogaby: $s = \upsilon_e^2 (\ln k)^2/(2w)$.

32.6-njy mesele. Üýtgeýän massaly jisim ekwator boýunça ornaşdyrylan ýörite ugrukdyryjyda hereketlenýär. Galtaşma tizlenme $\omega_\tau = a$ – hemişelik. Eger gazlaryň akyp çykyş effektiw tizligi υ_e = const bolsa, herekete bolan garşylygy hasaba alman, jisim Ýeriň daşynda bir gezek aýlanyp çykanda massasynyň näçe esse kemeljegini kesgitlemeli. Jisimiň Ýeriň daşynda bir gezek aýlanyp çykanda birinji kosmos tizlige eýe bolmagy üçin a tizlenmäniň ululygy näçe bolmaly? Ýeriň radiusy R.

Jogaby: $\exp(2\sqrt{\pi R a}/\upsilon_e)$ esse; $a = g/(4\pi)$.

32.7-nji mesele. Jisim gorizontal relsler boýunça typýar. Gaz wertikal pese tarap hemişelik akýar. Jisimiň baýlangyç tizligi υ_0. Massa $m = m_0 - at$ kanun boýunça üýtgeýän bolsa, jismiň tizliginiň üýtgeýiş kanunyny we jismiň hereketiniň kanunyny tapmaly. Typma sürtülme koeffisiýenti f.

$$Jogaby: \upsilon = \upsilon_0 - f\left[gt - \upsilon_e \ln\frac{m_0}{m_0 - at}\right],$$

$$s = \upsilon_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - \upsilon_e\left[t\ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\Big((m_0 - at) - 1 - \frac{m_0}{a}(\ln m_0 - 1)\Big)\right]\right\}.$$

32.8-nji mesele. Başlangyç m_0 we ahyrky m_1 massalaryň haýsy z gatnaşygynda boşlukda we dartyş güýji bolmadyk ýagdaýynda gönüçyzykly hereket ediji raketa, ýangyjy ýanyp gutaranyndan soňky kinetik energiýasynyň harçanan energiýa gatnaşygy ýaly kesgitlenen mehaniki *PTK*-sy haýsy iň uly baha eýe bolar?

Jogaby: $\ln z = \dfrac{2(z-1)}{1+z}$ deňlemäniň köki z.

32.9-njy mesele. Massasy m_0 bolan uçar υ_0 tizlik bilen polýar aerodromyna gonýar. Uçaryň üstüniň buzlanmasy netijesinde onuň massasy gonandan soňky hereketinde $m = m_0 + at$ formula bilen artýar. Bu ýagdaýda a = const. Uçaryň aerodrom boýunça hereketine garşylyk onuň agramyna proporsional (proporsionallyk koeffisiýenti f). Massanyň üýtgeýşi hasaba alnan (T) we alynmadyk (T_1) ýagdaýlarda uçar durýança geçýän wagt aralyklaryny kesgitlemeli. Wagtyň geçişi bilen tizligiň özgeriş kanunyny tapmaly.

Jogaby: $T = \dfrac{m_0}{a}\left(\sqrt{1+\dfrac{2a\upsilon_0}{fgm_0}}-1\right), \quad T_1 = \dfrac{\upsilon_0}{fg},$

$$\upsilon = \frac{2m_0\upsilon_0 - fg(2m_0+at)t}{2(m_0+at)}.$$

32.10-njy mesele. Aýa ýakynlaşýan kosmos gämi onuň üstünden H aralykda bolup, Aýyň merkezine ugrugan υ_0 tizlige eýe bolan pursatda tormozlaýyş hereketlendirijisi işe girişýär. Dartyş güýji gämiden Aýyň merkezine çenli bolan aralygyň kwadratyna ters proporsional bolsa we gäminiň massasy $m = m_0 e^{-\alpha t}$ kanun boýunça üýtgese (m_0 – raketanyň tormoz hereketlendirijisiniň işläp başlan pursatyndaky massasy, α – hemişelik san), α-nyň haýsy bahasynda gämi Aýa ýuwaşja gonar (ýagny Aýa gonuş tizligi nola deň bolar)? Gazlaryň akyp çykyşynyň effektiw tizligi υ_e – hemişelik, Aýyň radiusy R, agyrlyk güýjüniň Aýdaky tizlenmesi g_A.

Jogaby: $\alpha = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\upsilon_e H} + \dfrac{g_0 R}{\upsilon_e(R+H)}.$

32.11-nji mesele. Hereketini nola deň başlangyç tizlik bilen wertikal ýokary ugra hemişelik ω tizlenmede başlan raketanyň massasynyň özgerme kanunyny tapmaly. Bu ýagdaýda gurşawyň tizliginiň kwadratyna proporsional (b – proporsionallyk koeffisiýenti), agyrlyk güýjüniň meýdanyny birjynsly diýip hasaplamaly. Gazlaryň akyp çykyşynyň effektiw tizligi υ_e – hemişelik.

Jogaby:

$$m = \left(m_0 + \frac{2b\upsilon_e^2 w^2}{(w+g)^3}\right)e^{-\frac{w+g}{\upsilon_e}t} - \frac{bw^2}{w+g}t^2 + \frac{2\upsilon_e bw^2}{(w+g)^2}t - \frac{2\upsilon_e^2 bw^2}{(w+g)^3}.$$

32.12-nji mesele. Massasy üýtgeýän jisim ýokarlygyna hemişelik ω tizlenmeli gorizont bilen α burçy emele getirýän gönüçyzykly büdür-südür ugrykdyryjy boýunça hereketlenýär. Agyrlyk güýjüniň meýdany birjynsly, atmosferanyň herekete bolan garşylygy tizliginiň birinji derejesine proporsional (b – garşylyk koeffisiýenti) diýip hasaplap, jisimiň massasynyň özgerme kanunyny tapmaly. Gazlaryň akyp çykyşynyň effektiw tizligi υ_e – hemişelik, jisim bilen ugrukdyryjynyň arasyndaky typma sürtülme koeffisiýenti f deň.

Jogaby:

$$m = \left(m_0 - \frac{bw\upsilon_e}{w_1^2}\right)e^{-\frac{w_1}{\upsilon_e}t} - \frac{bw}{w_1}\left(t - \frac{\upsilon_e}{w_1}\right),$$

bu ýerde $\omega_1 = \omega + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$,

bu ýerde m_0 – jisimiň başlangyç massasy.

32.13-nji mesele. Ýumak ýaly saralan birjynsly agyr zynjyr gorizontal stoluň çetinde goýlan. Bu ýagdaýda zynjyryň bir bölegi gozganmaýan ýagdaýda stoldan aslyp durýar. x ok wertikal boýunça aşak ugrukdyrylyp we başlangyç pursatda $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ diýip hasaplap, zynjyryň hereketini kesgitlemeli.

Jogaby: $x = gt^2/6$.

32.14-nji mesele. Zynjyr ýerde ýatyr, onuň bir ujy gorizont bilen burç emele getirýän ýapgyt ýol böleginde duran wagonjyga daňlan. Zynjyryň ýere sürtülme koeffisiýenti f. Zynjyryň uzynlyk birliginiň agramy γ, wagonjygyň agramy P, wagonjygyň başlangyç pursatdaky tizligi υ_0. Wagonjygyň islendik pursatdaky tizligini kesgitlemeli we onuň saklanyp galmagy üçin haýsy zerur şert bolmalydygyny tapmaly.

Jogaby:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{P^2\upsilon_0^2}{2(P+\gamma x)^2} + \frac{Pg}{3\gamma}\sin\alpha\left[1 - \frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right] + \frac{1}{3}gx\sin\alpha +$$

$$+ \frac{fPg}{6\gamma}\left[1 - \frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha - \frac{1}{3}fgx\cos\alpha.$$

$f > \mathrm{tg}\alpha$ şert ýerine ýetse wagonjygyň saklanmagy mümkin.

33. Analitik statika. Giriş maglumatlary

Gaty jisimiň deňagramlylygy öwrenilende onuň alty sany deňagramlylyk deňlemelerini düzüp we işläp, meseläniň jogabyny tapmak kyn bolmaýar. Emma birnäçe jisimlerden düzülen sistemanyň deňagramlylygy öwrenilende, bu alty deňagramlylyk deňlemelerini düzüş usuly ulanarlykly bolmaýar. Meselem, birnäçe böleklerden düzülen maşyny ýa-da mehanizmi alalyň. Bu sistema girýän n jisim üçin $6n$ deňlemeler sistemasyny düzmeli bolýar. Elbetde, bu hili deňlemeler sistemasyny çözmek amatsyzdyr. Şunuň bilen birlikde, ondan çykarylan netijeleriň hemmesini anyklamak hemme wagt zerur bolmaýar. Şonuň üçin hem ýönekeý statika metody amatsyz bolup, oňa görä amatlyrak we köptaraply (uniwersal) bolan başga usuly gözlemäge zerurlyk döreýär.

Şu maksat bilen Stewin (1548-1620), Galileý (1564-1642), Toriçelli (1608-1647) we Iogan Bernulli (1667-1748) meşgullanan bolsalar-da, meseläni doly görnüşde ilkinji gezek Lagranž (1736--1813) özüniň analitiki mehanikasynda çözýär.

Bu usula **mümkin bolan göçüşler prinsipi** diýilýär. Bu usuly ulanmak üçin sistemanyň islendik mümkin bolan göçüşinde oňa goýlan güýçleriň ujypsyz işlerini kesgitlemeli. Sistema erkin bolsa, düzümindäki nokatlaryň (jisimleriň) göçüşi islendik bolmagy mümkin. Baglanyşykly sistemalar üçin onuň düzümindäki nokatlaryň (jisimleriň) göçüşi çäklenen bolýar.

20.2-nji bölümde baglanyşyklaryň görnüşleri bilen gysgaça tanşan bolsagam, temany ýene-de dowam etdireliň.

33.1. Mehaniki ulgamyň nokatlarynyň göçüşlerine baglanyşyklaryň goýýan çäkleri. Mümkin bolan göçüşler

Hereketlenýän sistemanyň kinematik elementlerine baglanyşyklaryň goýýan çäklerini anyklamak üçin çäksiz kiçi göçüşleri düşündireliň.

Goý, baglanyşyklar golonomly we stasionar bolsunlar. Beýle baglanyşyklaryň deňlemeleri aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$f_i(x_1, y_1. z_1, ..., x_n, y_n. z_n) = 0, \quad i = 1, 2, ... , s, \tag{33.1}$$

bu ýerde baglanyşyklar s sany, şonuň üçin baglanyşyk deňlemeleriniň sany hem s-e deň.

Mehaniki sistemanyň M_k nokadyny alalyň. Onuň orny $\bar{r}_k$ radius-wektor bilen anyklansyn.

Bu nokadyň çäksiz kiçi göçüşini $\delta\bar{r}_k$ bilen, onuň koordinata oklaryndaky proýeksiýalaryny bolsa δx_k, δy_k, δz_k bilen belgiläliň.

Sistema n sany nokatdan ybarat bolup, özi hem erkin bolsa, onda $3n$ sany: δx_k, δy_k, δz_k ululyklar erkin bolýarlar. Baglanyşyklar bu ululyklara çäk goýýarlar. Bu çägi aýan etmek üçin M_k nokadyň çäksiz kiçi göçenindäki koordinatalary, ýagny $x_k + \delta x_k$, $y_k + \delta y_k$, $z_k + \delta z_k$-ny alýarys.

Ahyrky koordinatalar (33.1) baglanyşyk deňlemelerini kanagatlandyrmaly, ýagny:

$$f_i(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, ..., x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n, z_n + \delta z_n) = 0.$$

(33.1)-i nazara alyp, bu aňlatmalary Teýloryň hataryna dargadýarys. Hataryň birinji tertipdäki agzalary bilen çäklensek, aşakdaky gatnaşyklary alarys:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0. \tag{33.2}$$

Sistemanyň n sany nokadynyň $3n$ sany çäksiz göçüşi, ýagny δx_k, δy_k, δz_k erkin bolman, ýokardaky s sany şert bilen baglanyşykly. Şonuň üçin ($3n$-s) sany göçüş erkin bolup, galan s sanysy şol erkin ululyklaryň funksiýasy bolýar. Baglanyşyklar tarapyndan goýlan beýleki çäkleri kanagatlandyrýan çäksiz kiçi göçüşlere mümkin bolan göçüş ýa-da **wirtual göçüş** diýilýär.

Baglanyşykly sistemanyň orny $p = 3n$-s koordinatalar bilen doly anyklanany üçin, p san sistemanyň **erkinlik derejesidir.** Sistemanyň mümkin bolan göçüşleri onuň ornuny anyklaýan sap geometrik şekil bolup, wagta bagly däldir.

Sistema özüniň **hakyky hereketinde** mümkin bolan göçüşleriň biri bilen gabat gelýär (golonamly, stasionar baglanyşykda). Hakyky göçüş diňe bir goýlan baglanyşyklaryň häsiýetine bagly bolman, oňa goýlan güýje-de baglydyr.

Goý, material nokat

$$f(x, y, z) = 0 \tag{33.3}$$

üstde hereket etsin. Nokadyň şu üstde mümkin bolan göçüşi (33.2) şerti kanagatlandyrmaly, ýagny:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0. \tag{33.4}$$

Bu şerti iki wektoryň skalýar köpeldilmegi ýaly ýazyp bolýar:

$$(\Delta\overline{f}, \delta\overline{r}) = 0. \qquad (33.5)$$

Bu ýerde $\Delta\overline{f} = \overline{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k}$ bolup, üstüň daşky normaly bilen ugrugandyr. (33.5) deňlik $\delta\overline{r}$ wektoryň, ýagny mümkin bolan göçüşiň üste galtaşma tekizlikde ýatýandygyny görkezýär.

33.2. Mümkin bolan göçüşde güýjüň elementar işi. Ideal baglanyşyklar

Güýjüň goýlan nokadynyň mümkin bolan göçüşde bitiren elementar işi adaty formulalar bilen hasaplanylýar *(14.2-nji bölüm)*.

Mysal üçin:

$$\delta A = \overline{F}\delta\overline{r} \qquad (33.6)$$

we başgalar.

Nokatlaryna güýçler goýlan, n sany nokatdan ybarat mehaniki sistemanyň haýsy hem bolsa bir mümkin bolan göçüşinde bitiren elementar işi aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\delta A = \sum \overline{F_k}\, \delta\overline{r_k}\,. \qquad (33.7)$$

Sistemanyň k nokadyna goýlan baglanyşyk reaksiýalaryň deňtäsiredijisini $\overline{N_k}$ bilen belgiläliň.

Eger islendik mümkin bolan göçüş üçin

$$\sum \overline{N_k}\, \delta\overline{r_k} = 0 \qquad (33.8)$$

şert ýerine ýetse, şeýle baglanyşyklara **ideal baglanyşyklar** diýilýär.

Ideal baglanyşyklara degişli mysallar

1. **Absolýut gaty jisimiň** nokatlary ideal baglanyşykda bolýarlar. Içki güýçler baglanyşyklaryň reaksiýa güýçleri bolmaýarlar. Islendik elementar göçümde içki güýçleriň bitirýän işleriniň jeminiň nola deňdigi subut edilipdi.
2. **Absolýut ýylmanak üst** ýa-da **absolýut ýylmanak çyzyk.** Şeýle baglanyşykdaky nokatlaryň mümkin bolan göçüşleri üste ýa-da çyzyga galtaşma boýunça ugrukýarlar.

Reaksiýa güýçleri olara perpendikulýardyrlar. Şonuň üçin (33.8) şert ýerine ýetýär. Hereketdäki ýa-da hereketsiz şarnirler muňa mysal bolup biler.

3. Mehaniki sistemanyň nokatlaryny birleşdirýän, dartylmaýan baglanyşyklar: ýüp, tanap, tros we ş.m.
4. Sistemanyň **berkidilen nokatlary** aýratynlykda ideal baglanyşyk bolýarlar, sebäbi mümkin bolan göçmesi nola deň.
5. Eger tigirlenme sürtülmesi bolmasa katok büdür-südür üstden typman tigirlenýär (şeýle bolsa jisim üste hereketsiz bir nokatda ýa-da bir çyzyk boýunça galtaşýar).

33.3. Mümkin bolan göçüş prinsipi

Mälim güýçler täsirindäki mehaniki sistemanyň deňagramlaşmagynyň zerur we ýeterlik şerti mümkin bolan göçüş prinsipi arkaly kesgitlenýär. Deňagramlylyk şerti mümkin bolan göçüş prinsipi bilen çykarylsa, ol iş deňlemesi bilen kesgitlenilýär. Baglanyşyk ideal bolsa, deňlemä daşardan gös-göni goýlan güýçler girip, reaksiýa güýçleri girmeýärler. Bu prinsipiň manysy hem, amatlylygy hem şondadyr.

Mümkin bolan göçüş prinsipiniň kesgitlenilişi:

Ideal stasionar baglanyşykly material nokatlar sistemasy oňa goýlan güýçleriň täsirinden deňagramlylykda bolsa, sistemanyň mälim ornundan islendik mümkin bolan göçüşde goýlan güýçleriň bitiren elementar işleriniň jemi nola deň bolmaly.

Bu talap mehaniki sistemanyň deňagramlylygynyň zerur we ýeterlik şertidir. Ol subutsyz kabul edilýär.

$$\sum \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k = 0. \tag{33.9}$$

Bu formulany analitik görnüşde aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\sum (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k) = 0 \tag{33.10}$$

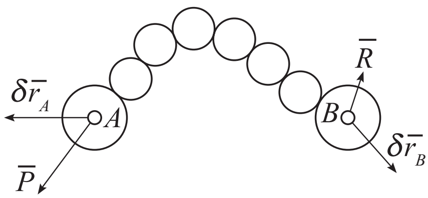
ýa-da

$$\sum F_k \cdot \delta S_k \cdot \cos\alpha_k = 0. \tag{33.11}$$

Bu ýerde $|\delta s_k| = |\delta \overline{r}_k|$, α_k bolsa $\overline{F}_k$ bilen $\delta \overline{r}_k$ arasyndaky burç.

33.4. Mümkin bolan göçüş prinsipiniň ýönekeý maşynlar nazaryýetinde ulanylyşy. Mehanikanyň altyn kadasy. Mysaly meseler

Islendik maşyn kabul ediji mehanizmden, geçiriji mehanizmden hem-de maşynyň wezipesini ýerine ýetiriji guraldan ybarat. Maşynyň kabul ediji A bölegine $\overline{P}$ güýç goýlan bolsa, B gurala bu güýjüň täsiri haýsydyr bir $\overline{R}$ güýç bolýar (*33.1-nji surat*). Bu güýç peýdaly iş bitirýär. A bilen B aralykdaky geçiriji mehanizmler her hili jisimlerden ybarat bolmagy mümkin.



33.1-nji surat

Maşyny deňagramlylykda diýip, garşylyklary hasaba alman, (33.9) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\overline{P}\cdot\delta\overline{r}_A - \overline{R}\cdot\delta\overline{r}_B = 0,$$

bu ýerde $\delta\overline{r}_A$ we $\delta\overline{r}_B$ - kabul ediji mehanizmiň we guralyň mümkin bolan göçüşi. $\overline{R}$ güýç garşylyk güýji bolany üçin eden işiniň öňünde otrisatel alamat goýulýar. Diýmek,

$$\overline{P}\cdot\delta\overline{r}_A = \overline{R}\cdot\delta\overline{r}_B, \tag{33.12}$$

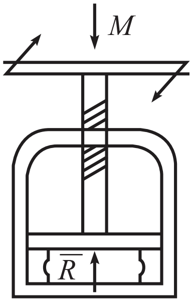
ýagny kabul edijä goýlan güýjüň elementar işi guralyň elementar işine deň bolýar. Göçleri δt wagta görä alynsa, deňlik aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\overline{P}\cdot\overline{V}_A = \overline{R}\cdot\overline{V}_B. \tag{33.13}$$

Bu deňlik mehanikanyň **altyn kadasyny** aňladýar:

Güýçde näçe utsaň, tizlikde şonça utdurýarsyň.

Muňa galdyryjy (domkrat) mysal bolýar. Agyr awtomobili el güýji bilen göteriş mehanikanyň altyn kadasynyň netijesidir. Bu kadadan peýdalanyp, ideal maşynlar üçin herekete getiriji güýç bilen



33.2-nji surat

peýdaly garşylygyň gatnaşygyny hasaplamak mümkin. Mysal üçin, hyrly gysgyjy (pressi) alalyň (*33.2-nji surat*).

Bu ýerde $\overline{M}$ – gysgyjyň aýlandyryjy momenti, $\overline{R}$ – gysylýan jisimiň reaksiýasy.

Gysgyjyň sapyna $\delta\varphi$ mümkin bolan göçüş berlende, platforma δz mümkin bolan göçüş alýar:

$$\delta z = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi,$$

bu ýerde h – hyr ädimi bolup, ol $2\pi r\mathrm{tg}\alpha$ deň; r – hyryň radiusy; α – wint kesiminiň ýapgytlyk burçy.

Deňagramlylyk deňlemesi şeýle ýazylýar:

$$M\delta\varphi - R\delta z = 0. \tag{33.14}$$

Deňlemede δz-iň bahasyny goýsak:

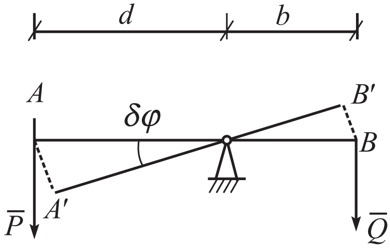
$$M = Rr\mathrm{tg}\alpha.$$

Bu goýlan jübüt momenti bilen R peýdaly garşylyk arasyndaky baglanyşykdyr. Ol çykarylanda, zyýanly garşylyklary hasaba alman, gysgyjyň baglanyşyklary ideal diýip alynýar (wintiň kesimindäki sürtülme güýçleri hasaba alynmadyk). Mümkin bolan göçüş prinsipini ulanyp, goýlan güýç bilen peýdaly garşylygyň arasyndaky baglanyşygy aňsat tapyp bolýandygyna üns bermeli.

Eger geometrik statikanyň ýönekeý deňagramlylyk deňlemesini düzüş ýoly bilen şu netije alynmakçy bolsa, gysajyň her zwenosy üçin deňagramlylyk deňlemelerini düzmeli bolardy. Bu deňlemelere bar zwenolaryň reaksiýalary girip, olary deňlemeler sistemasyndan çykaryp, maksada ýetilerdi ýa-da gerekmejek reaksiýalary kesgitlemeli bolardy.

(33.14) netijeden görnüşi ýaly, hyr ädimi näçe kiçi bolsa, aýlandyryjy momentde şonça köp utuş gazanylýar. Wint kesiminde sürtülme bolmadyk bolsa, bu ýagdaýda utuk juda köp bolýar. Hyr köp aýlandyrylanda zyýanly sürtülmäni ýeňmek üçin köp iş edilip, hyryň peýdaly iş koeffisiýenti kemelýär.

33.1-nji mesele. Arhimediň ryçagynyň deňagramlylyk şertini tapmaly. Ryçaga täsir ediji $\overline{P}$ we $\overline{Q}$ güýçleriň eginleri, degişlilikde a we b bolsun (*33.3-nji surat*).



33.3-nji surat

Çözülişi. Sistema $\delta\varphi$ mümkin bolan göçüşi berip,

$$\delta S_A = AA' = a \cdot \delta\varphi, \quad \delta S_B = BB' = b \cdot \delta\varphi$$

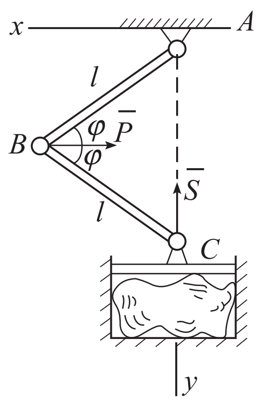
tapmaly we (33.11) deňlemäni düzmeli: $P \cdot \delta S_A - Q \cdot \delta S_B = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \; (Pa - Qb)\delta\varphi = 0.$

Bu ýerde $\delta\varphi \neq 0$ bolany üçin, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{b}{a}$.

33.2-nji mesele. Tirsekli ABC gysgyjyň B şarnirine $\overline{P}$ güýç goýlan (*33.4-nji surat*). Gysylýan (preslenýän) jisimi gysyjy güýji kesgitlemeli. $AB = BC = l$, φ burç berlen.

Çözülişi. Gysylýan jisimiň reaksiýasyny $\overline{S}$ bilen belgiläp, ony hem aktiw güýçleriň hataryna goşýarys. Aşakdaky tablisadan peýdalanmak amatlydyr.



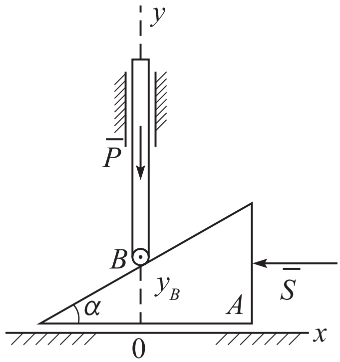
33.4-nji surat

Aktiw güýçleriň goýlan nokatlary	**B**		**C**	
Aktiw güýçleriň koordinata oklaryna proýeksiýalary	$-P$	0	0	$-S$
Güýç goýlan nokadyň koordinatalary	x_B	y_B	x_C	y_C

(33.10) deňlemäni ýazýarys:

$-P\delta x_B - S\delta y_c = 0 \quad x_B = l\cos\varphi; \quad y_c = 2l\sin\varphi.$

Bu ýerden $\delta x_B = -l(\sin\varphi)\delta\varphi, \quad \delta y_c = 2l(\cos\varphi)\delta\varphi$.



33.5-nji surat

Bahalary deňlemä goýup alarys:

$(Pl\sin\varphi - S2l\cos\varphi)\delta\varphi = 0, \quad \delta\varphi \neq 0$

bolany üçin: $S = \dfrac{P}{2}\mathrm{tg}\varphi.$

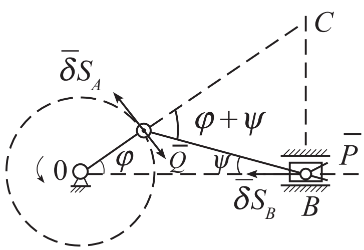
33.3-nji mesele. Ýylmanak ýerde duran pahnanyň α burçy belli. Pahnanyň deňagramlylygy üçin $\overline{P}$ we $\overline{S}$ güýçler haýsy gatnaşykda bolmaly (*33.5-nji surat*)?

Çözülişi. Edil ýokardaky mesele ýaly çözýäris:

A		B	
$-S$	0	0	$-P$
x_A	y_A	x_B	y_B

$-S\delta x_A - P\delta y_B = 0$, suratdan $CO = CA - x_A$, $y_B = CO\mathrm{tg}\alpha$,

$\delta y_B = -\delta x_A \mathrm{tg}\alpha, \quad (-S + Pt\alpha)\,\delta x_B = 0, \quad S = P\mathrm{tg}\alpha.$



33.6-njy surat

33.4-nji mesele. *B* süýşüjä goýlan $\overline{P}$ gorizontal güýç bilen kriwoşipiň barmagyna goýlan we $\overline{OA}$ perpendikulýar ugrukdyrylan $\overline{Q}$ garşylyk güýjüniň täsirindäki kriwoşip-şatun mehanizminiň deňagramlylyk şertini tapmaly (*33.6-njy surat*).

Çözülişi. Lagranžyň deňlemesini düzeliň:

$$P\delta S_B - Q\delta S_A = 0, \quad \frac{P}{Q} = \frac{\delta S_A}{\delta S_B}.$$

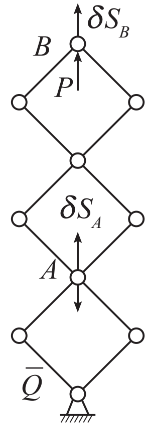
C nokat *AB* kriwoşipiň pursatdaky aýlanma merkezi bolany üçin:

$$\frac{\delta S_B}{\delta S_A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}.$$

Diýmek,

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}.$$

33.5-nji mesele. 33.7-nji suratda görkezilen mehanizmiň deňagramlylygynda $\overline{P}$ we $\overline{Q}$ güýçleriň baglanyşygyny tapmaly.

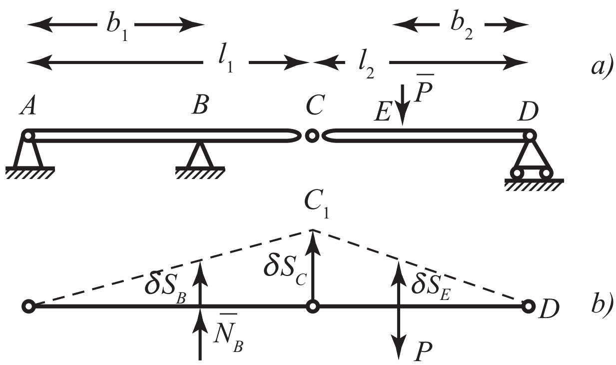


33.7-nji surat

Çözülişi. Sistemanyň erkinlik derejesi bire deň. Eger sistema $\delta S_A = \delta S$ mümkin bolan göçüş goýulsa, sterženlerden düzülen parallellogramlaryň her biriniň diagonaly δS ululyga uzalýar. Onda $\delta S_B = 3\delta S$.

(33.9) deňlemäni düzýäris: $P\delta S_B - Q\delta S_A = 0$ ýa-da $(3P - Q)\delta S = 0 \Rightarrow Q = 3P$.

33.6-njy mesele. *AC* we *CD* pürslerden düzme gurluş alnan (*33.8-nji surat*). Güýçler we ölçegler suratda berlen.



33.8-nji surat

Çözülişi. *B* diregi aýryp, N_B reaksiýasy bilen çalşyrýarys (*33.8-nji b surat*). Sistema mümkin bolan göçüş berip, Lagranžyň deňlemesini düzýäris:

$$N_B \cdot \delta S_B - P \cdot \delta S_E = 0.$$

δS_B bilen δS_E arasyndaky baglanyşygy proýeksiýalardan tapýarys:

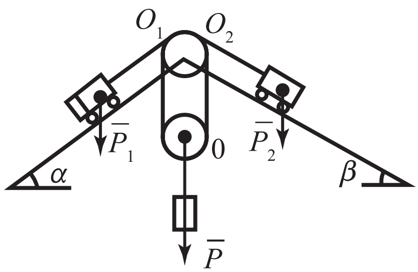
$$\frac{\delta S_B}{b_1} = \frac{\delta S_C}{l_1}, \quad \frac{\delta S_E}{b_2} = \frac{\delta S_E}{l_2} \Rightarrow \delta S_E = \frac{b_2 l_1}{b_1 l_2}\delta S_B.$$

Netijede, $$N_B = \frac{b_2 l_1}{b_1 l_2} P.$$

Geometrik statikanyň kadalary bilen meseläni çözmek has uzak bolar (ýagny, pürsleriň deňagramlylygyna aýratynlykda seredip, goşmaça reaksiýa güýçlerini almaly, soňra talap edilmeýän reaksiýalary ýok etmeli bolýar).

33.7-nji mesele. P ýüküň agramy bilen deňagramlylykda saklanýan, gorizonta α, β burçlar bilen ýapgytlanan tekizliklerde ýerleşen P_1, P_2 ýükleriň agramlaryny tapmaly (*33.9-njy surat*). Q_1, Q_2 bloklar bir oka ornaşdyrylan. Uçlaryna P_1, P_2 ýükler berkidilen tanapyň (trosuň) gidişi:

P_1 ýük → Q_1 blok → O blok →
→ Q_2 blok → P_2 ýük.



33.9-njy surat

Çözülişi. Sistemanyň erkinlik derejesi ikä deňligi üçin, oňa iki sany özbaşdak mümkin bolan göçüş berip bolýar.

P_2 ýüki saklap, P_1 ýüki tekizlik bilen δz_1 aralyga süýşürsek, P ýük $\frac{1}{2}\delta z_1$ aralyga galar. Mümkin bolan göçüş prinsipini ýazalyň we çözeliň:

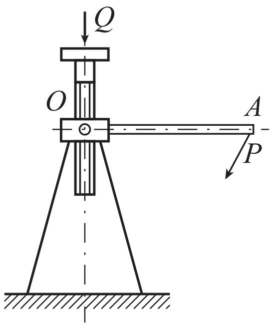
$$P_1 \sin\alpha \cdot \delta z_1 - P\frac{1}{2} \cdot \delta z_1 = 0 \;\; => \;\; P_1 = \frac{P}{2\sin\alpha}.$$

Şoňa meňzeşlikde: $P_2 = \dfrac{P}{2\sin\beta}$.

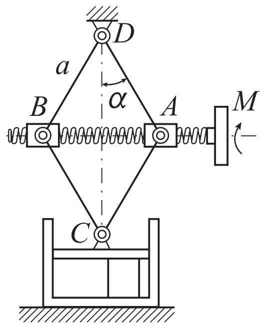
33.5. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

33.8-nji mesele. Q ýük OA 0,6 m uzynlykdaky sap bilen herekete getirilýän galdyryjynyň (domkratyň) kömegi bilen göterilýär. Sapyň ujuna oňa perpendikulýar bolan $P = 160\,N$ güýç goýlan. Domkratyň nurbatynyň ädimi h = 12 mm bolsa, Q ýüküň agramynyň mukdaryny kesgitlemeli (*33.10-njy surat*).

Jogaby: Q = 52,2 kN.



33.10-njy surat

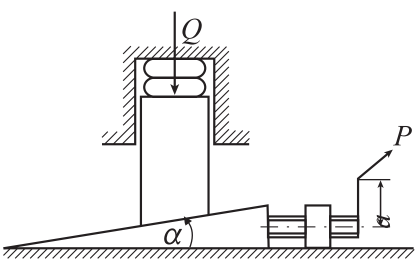


33.11-nji surat

33.9-njy mesele. Tirsekli gysyjynyň (pressiň) mahowikjigine M aýlandyryjy moment täsir edýär. Mahowikjigiň okunyň uçlarynda garşylykly ugra ugrukdyrylan h ädimli nurbatynyň hyrlary bar. Bu ok iki sany nurbatdan geçýär; gaýkalar taraplary a bolan sterženli rombuň iki ujuna şarnir bilen birikdirilen we rombuň ýokarky ujy gozanmaz ýaly berkidilen, aşaky ujy bolsa pressiň gorizontal plitasyna birikdirilen. Rombuň depesindäki burç 2α deň bolanda, pressiň gysylýan jisime görkezýän P basyş güýjüni kesgitlemeli *(33.11-nji surat*).

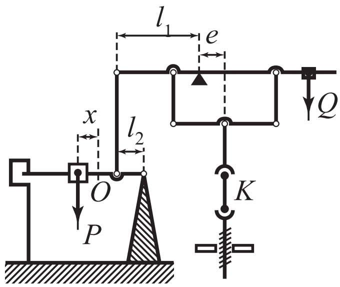
Jogaby: $P = \pi \dfrac{M}{h} \text{ctg}\alpha.$

33.10-njy mesele. Pahnaly gysgyja (presse) goýlan P we Q güýçleriň arasyndaky gatnaşygy kesgitlemeli. P güýç sapyň ujuna goýlup, nurbadyň we sapyň okuna perpendikulýar ugrukdyrylan. Sapyň uzynlygy a, nurbatynyň ädimi h, pahnanyň depesindäki burç α deň (*33.12-nji surat*).

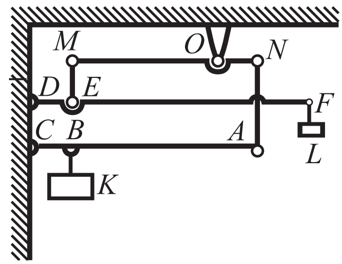


33.12-nji surat

Jogaby: $Q = P\dfrac{2\pi a}{h\,\text{tg}\alpha}.$



33.13-nji surat



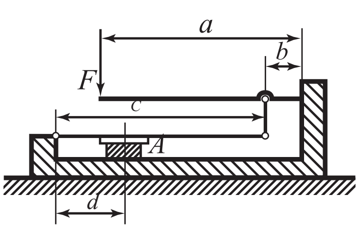
33.14-nji surat

33.11-nji mesele. Suratda nusgalaryň süýnüşini synalýan maşyn görkezilen. Eger ýüküň kömegi bilen maşyn deňagramlaşdyrylan, ýagny K nusgada süýndürilmedik ähli ryçaglar gorizontal durýan bolsa, K nusgadaky X süýndürme bilen M massaly P ýük nol bolan ýagdaýynda O nokada çenli x daşlyk arasyndaky gatnaşygy kesgitlemeli. l_1, l_2 we e aralyklar berlen (*33.13-nji surat*).

Jogaby: $X = Mg\dfrac{xl_1}{xl_2}$.

33.12-nji mesele. Suratda görkezilen ryçaglar ulgamy bilen birikdirilen K we L ýükler deňagramlylykda dur. Eger $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{10}$, $\dfrac{ON}{OM} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{1}{10}$ berlen bolsa, ýükleriň massalarynyň arasyndaky gatnaşygy kesgitlemeli (*33.14-nji surat*).

Jogaby: $M_L = \dfrac{BC}{AC}\cdot\dfrac{ON}{OM}\cdot\dfrac{DE}{DF}M_K = \dfrac{1}{300}M_K$.

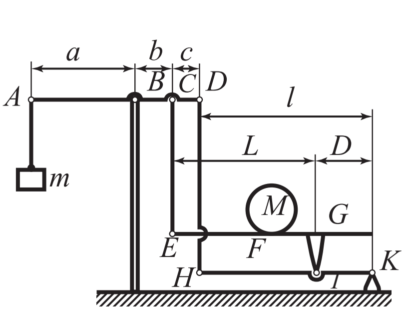


33.15-nji surat

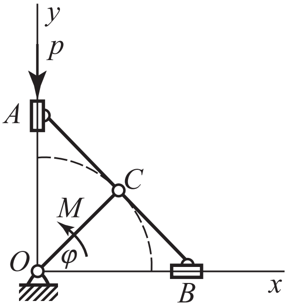
33.13-nji mesele. Suratda görkezilen ryçagly gysgyçda (pressde) A nusgany gysyjy güýjüň mukdaryny kesgitlemeli. Berlen: $F = 100\,N$, $a = 60$ *sm*, $b = 10$ *sm*, $c = 60$ *sm*, $d = 20$ *sm* *(33.15-nji surat)*.

Jogaby: $Q = 1800\ N$.

33.14-nji mesele. Tereziniň platformasynyň F nokadynda massasy M bolan ýük dur. Uzynlyklar: $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $IK = d$; platformanyň uzynlygy $EG = L$. b, c, d we l uzynlyklaryň arasyndaky



33.16-njy surat



33.17-nji surat

gatnaşyklary, ýagny *M* ýüküň platformanyň haýsy nokadynda dur-ýandygyna garamazdan, daşyň *m* massasy bilen deňagramlaşýan ýag-daýynda daşyň *m* massasyny tapmaly *(33.16-njy surat)*.

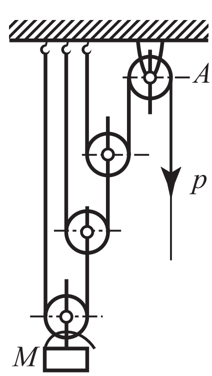
Jogap: $\dfrac{b+c}{b} = \dfrac{l}{d}$, $m = \dfrac{b}{a}M$.

33.15-nji mesele. Ellipsograf mehanizminiň *A* polzunyna *P* güýç goýlan. Bu güýç polzunyň ugrukdyryjysy boýunça *OC* kriwoşipiň *O* aýlanma okunyň ugruna ugrukdyrylan. *OC* kriwoşip *B* polzunyň ugrukdyryjysy bilen φ buç emele getirende, mehanizmiň deňagramlylykda bolmagy üçin *OC* kriwoşipe nähili aýlandyryjy moment goýmaly? Mehanizm gorizontal tekizlikde ýerleşen we $OC = AC = CB = l$ (*33.17-nji surat*).

Jogaby: $M = 2Pl\cos\varphi$.

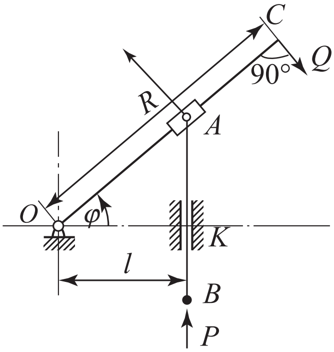
33.16-njy mesele. Polispast gozganmaýan *A* blok we *n* sany gozganýan bloklardan ybarat. Deňagramlylyk ýagdaýynda göterýän *M* massaly ýüküň gozganmaýan *A* blokdan çykan tanapyň ujuna goýlan *P* güýje görä nähili bolmalydygyny kesgitlemeli (*33.18-nji surat)*.

Jogaby: $Mg/P = 2^n$.



33.18-nji surat

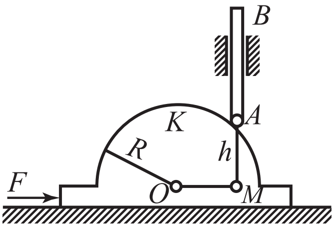
33.17-nji mesele. Kulisa mehanizminde *OC* kriwoşip gorizontal *O* okuň daşynda ýrananynda *A* polzun ryçag boýunça *AB* sterženi herekete getirýär. *AB* steržen wertikal *K* ugrukdyryjyda hereket edýär. $OC = R$, $OK = l$ berlen. *AB* steržen boýunça ýokaryk ugrukdyrylan *P* güýji deňagramlaşdyrmak üçin, C nokatda OC kriwoşipe perpendikulýar edip haýsy Q güýji goýmak gerek (*33.19-njy surat*)?



33.19-njy surat

Jogaby: $Q = \dfrac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

33.18-nji mesele. Massasy M_1, radiusy R bolan tegelek kulak büdür-südür gorizontal tekizlikde dur. Ol wertikal ugrukdyryjyda ýerleşen M_2 massaly AB sterženiň A ujuna galtaşýar. Kulaga goýlan, gorizontal ugrukdyrylan sag tarapa goýlan F güýjüň täsirinde ulgam deňagramlylykda durýar. Bu ýagdaýda $MA = h$. Eger gorizontal tekizlik büdür-südür bolup, K kulagyň esasy bilen tekizligiň arasyndaky sürtülme koeffisiýenti f deň bolsa, F güýjüň alyp bilmegi mümkin bolan bahalaryny kesgitlemeli. Eger kulagyň gorizontal tekizlikde typma sürtülme koeffisiýenti f deň bolsa, F güýjüň alyp bilmegi mümkin bolan bahalaryny kesgitlemeli (*33.20-nji surat*).

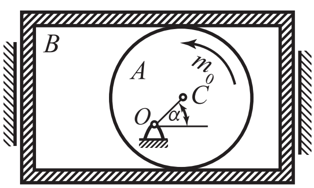


33.20-nji surat

Jogaby:

$$\frac{\sqrt{R^2-h^2}}{h}M_2g - f(M_1+M_2)g \le F \le \frac{\sqrt{R^2-h^2}}{h}M_2g +$$
$$+f(M_1+M_2)g.$$

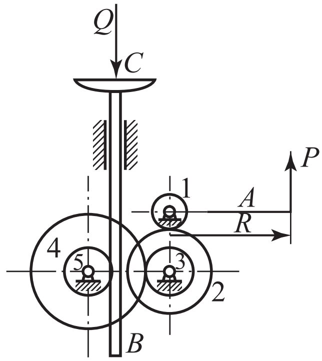
33.19-njy mesele. Suratyň tekizligine perpendikulýar bolan gozganmaýan O gorizontal oka M_1 massaly A tegelek ekssentrik geýdirilen. Ekssentrik wertikal ugrukdyryjysy bolan M_2 massaly B çarçuwany saklap durýar. Sürtülme hasaba alynmaly däl. Ekssentrisitet $OC = a$. Maddy ulgamyň deňagramlylyk ýagdaýynda OC ekssentrisitet gorizont bilen α burçy emele getirýän bolsa, ekssentrige goýlan m_0 momentiň ululygyny tapmaly (*33.21-nji surat*).



33.21-nji surat

Jogaby: $m_0 = (M_1 + M_2)\,ga\cos\alpha$.

33.20-nji mesele. Göteriji (domkrat) mehanizminde uzynlygy R bolan A sap aýlandyrylanda 1, 2, 3, 4 we 5 dişli tigirler hem aýlanyp başlaýarlar. Bu tigirler domkradyň dişli B reýkasyny herekete getirýär. Domkrat deňagramlylyk ýagdaýynda bolanda C gaba 4,8 kN basyş etmek üçin, sapyň ujuna oňa perpendikulýar edip haýsy $\boldsymbol{P}$ güýji goýmaly? Dişli tigirleriň radiuslary, degişlilikde $r_1 = 3$ sm, $r_2 = 12$ sm, $r_3 = 4$ sm, $r_4 = 16$ sm, $r_5 = 3$ sm bolsa, sapyň radiusy $R = 18$ sm deň (*33.22-nji surat*).

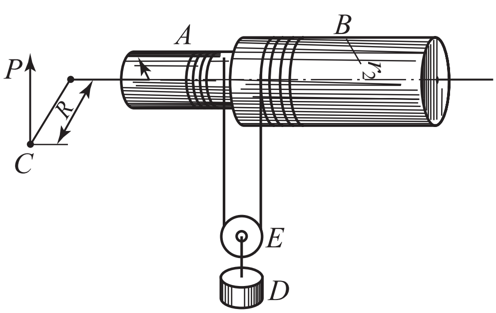


33.22-nji surat

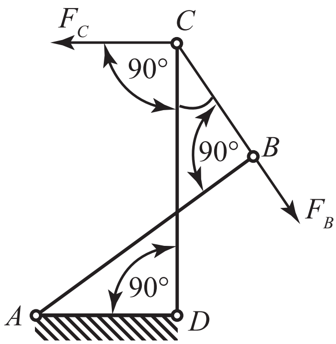
Jogaby: $P = Q\dfrac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 50\ N.$

33.21-nji mesele. Differensial worot R uzynlykly sap bilen aýlandyrylýan mäkäm edip biri-birine berkidilen iki sany A we B wallardan ybarat. Massasy M bolan göterilýän D ýük tanap oralan gozganýan E bloga berkidilen. C sap aýlananda tanapyň çep ujy r_1 radiusly A waldan çözlenýär, sag ujy bolsa r_2 radiusly B wala oralýar ($r_2 > r_1$). Eger $M = 720$ kg, $r_1 = 10$ sm, $r_2 = 12$ sm we $R = 60$ sm bolsa, D ýüki deňagramlaşdyrmak üçin oňa perpendikulýar edip haýsy P güýji goýmaly (*33.23-nji surat*)?

Jogaby: $P = Mg\dfrac{r_2 - r_1}{2R} = 118\ N.$



33.23-nji surat

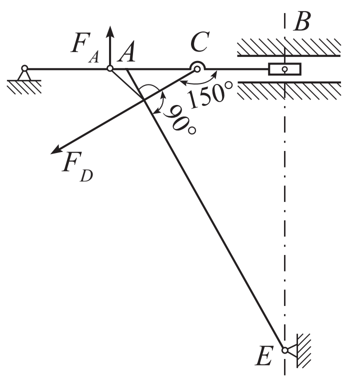


33.24-nji surat

33.22-nji mesele. *ABCD* antiparallellogram mehanizminde *AB, CD* we *BC* zwenolar *B* hem-de silindrik şarnirler bilen birikdirilen, *A* silindrik şarnirler bilen bolsa *AD* gozganmaýan steržene berkidilen. *D* zwenonyň şarnirine gorizontal F_C güýç goýlan. Mehanizm suratda görkezilen ýagdaýda deňagramlylykda duran bolsa, zwenonyň *B* şarnirine perpendikulýar edip goýlan F_B güýjüň mukdaryny kesgitlemeli. Berlen: $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle DCB = 30°$ (*33.24-nji surat*).

Jogaby: $F_B = 2\ F_C$.

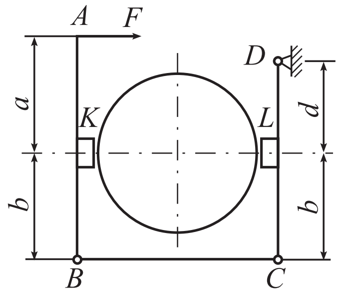
33.23-nji mesele. *OAB* kriwoşip-polzun mehanizmi *AB* şatunyň ortasyndaky nokatda silindrik şarnir bilen *CD* steržene birikdirilen. *CD* we *DE* steržенler özara *D* birikdirilen silindrik şarnir bilen birikdirilen. Mehanizmiň suratda görkezilen deňagramlylyk ýagdaýy üçin *OA* we *DE* steržеnlere, degişlilikde perpendikulýar edilip goýlan F_A we F_B güýçleriň mukdarlarynyň arasyndaky gatnaşygy kesgitlemeli. Berlen: $\angle DCB = 150°$, $\angle CDE = 90°$ (*33.25-nji surat*).



33.25-nji surat

Jogaby: $F_D = 4\ F_A$.

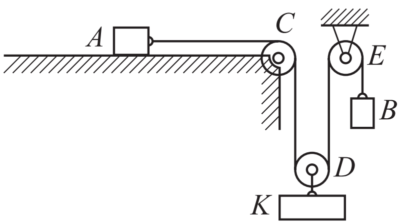
33.24-nji mesele. Tramwaý wagonynyň kolodka-bandažly tormozy *B* we *C* şarnirleriň kömegi arkaly birikdirilen üç sany *AB, BC* we *CD* dartgyçlardan ybarat. Gorizontal *F* güýjüň täsirinde *AB* we *CD* dartgyçlara birikdirilen K we L tormoz kolodkalary tigirlere gysylýarlar. Kolodkalaryň tigirlere görkezýän N_K we N_L basyş güýçlerini kesgitlemeli. Ölçegler suratda görkezilen. Wagon dynçlykda dur (*33.26-njy surat*).



33.26-njy surat

Jogaby: $N_K = F\dfrac{a+b}{b}$, $\quad N_L = F\dfrac{a}{b}\dfrac{b+d}{d}$.

33.25-nji mesele. Süýnmeýän ýüpüň uçlaryna massalary birmeňzeş bolan A we B ýükler berkidilen. Ýüp A ýükden gorizontal tekizlige parallel ýagdaýda gozganmaýan blokdan aýlanyp, gozganýan D bloga oralyp, soňra gozganmaýan E bloga oralyp geçýär. Bu ýerde ýüpüň ikinji ujuna B ýük berkidilen. Gozganýan D blogyň okundan massasy M bolan K ýük asylan. A we B ýükleriň her biriniň M_1 massasyny we A ýük bilen gorizontal tekizligiň arasyndaky f typma sürtülme koeffisiýenti kesgitlemeli. Ýükler ulgamy deňagramlylykda durlar. Ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*33.27-nji surat*).

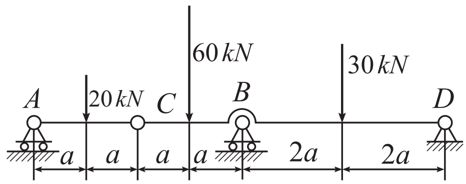


33.27-nji surat

Jogaby: $M_1 = M/2$; $\quad f = 1$.

33.26-njy mesele. Üç daýançda duran AD düzme pürs nokatda şarnir bilen birikdirilen iki sany pürsden ybarat. Pürse 20 kN, 60 kN

we 30 *kN* deň bolan wertikal güýçler täsir edýär. Ölçegler suratda görkezilen. *A, B* we *D* daýançlardaky reaksiýa güýleri kesgitlemeli (*33.28-nji surat*).



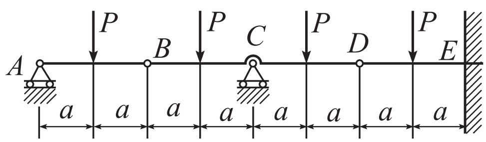
33.28-nji surat

Jogaby: $R_A = 10\ kN$, $R_B = 105\ kN$, $R_D = -5\ kN$.

33.27-nji mesele. *D* daýançlardaky reaksiýanyň nola deň bolmagy üçin deslapky meselede *AD* pürsüň *BD* bölegine goýulmaly aýlandyryjy momendiň mukdaryny kesgitlemeli.

Jogaby: $M = 20\ a\ kN \cdot m$.

33.28-nji mesele. Iki sany *A* we *C* daýançlarda ýatan *AE* düzme pürs *B* we *D* nokatlarda şarnirler bilen birikdirilen üç sany *AB, BD* we *DE* pürslerden ybarat. *DE* pürs *E* kesikde diwara berkidilen. *E* kesikdäki reaksiýa güýjüniň wertikal düzüjisini kesgitlemeli. Pürslere dört sany özara deň wertikal *P* güýçler goýlan. Ölçegler suratda görkezilen (*33.29-njy surat)*.



33.29-njy surat

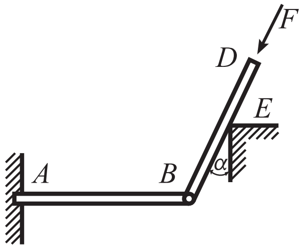
Jogaby: $R = 0{,}5\ P$.

33.29-njy mesele. Deslapky meselede *DE* pürsüň diwara berkidilen ujunda döreýän jübütiň *m* momentini kesgitlemeli.

Jogaby: $m_E = 0$.

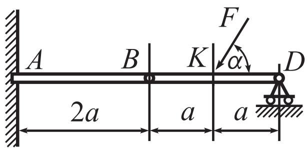
33.30-njy mesele. *AB* we *BD* pürsler özara *B* silindrik şarnir bilen birikdirilen. *AB* gorizontal pürs *A* kesikde wertikal diwara berkidilen. *E* ýylmanak çykyta daýanyp duran *BD* pürs wertikal bilen burç emele gertirýär. *BD* pürs boýunça *F* güýç täsir edýär. *A* kesikdäki reaksiýa güýjüniň gorizontal düzüjisini kesgitlemeli. Pürsleriň massasyny hasaba almaly däl (*33.30-njy surat*).

Jogaby: $R_{A_x} = F\sin\alpha.$



33.30-njy surat

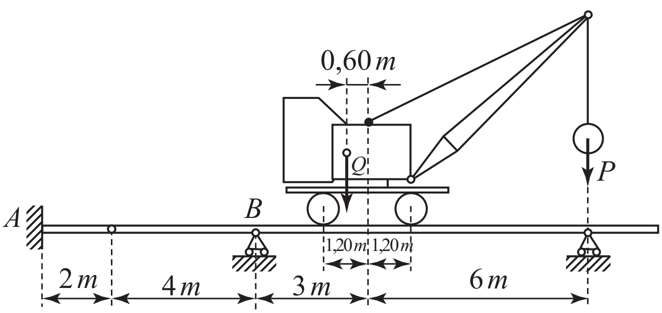
33.31-nji mesele. Iki sany *AB* we *BD* pürsleri özara *B* silindrik şarnir bilen birikdirilen. *D* daýanç katokda dur. *A* kesikde bolsa pürs diwara berkidilen. *BD* pürsüň *K* nokadyna gorizont bilen α burç emele gertirýän *F* toplanan güýç goýlan. Ölçegler suratda görkezilen. *A* kesikdäki reaksiýa güýjüniň düzüjilerini we bu kesikdäki döreýän m_p – reaktiw momenti kesgitlemeli. Pürsleriň massasyny hasaba almaly däl (*33.31-nji surat*).



33.31-nji surat

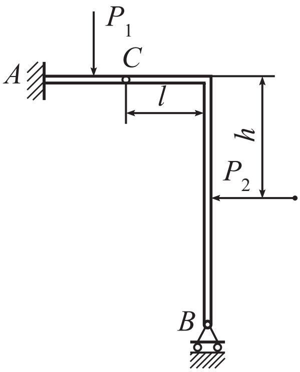
Jogaby: $R_{A_x} = F\cos\alpha,\ R_{A_y} = \frac{1}{2}\sin\alpha,\ m_p = Fa\sin\alpha.$

33.32-nji mesele. Demir ýol krany bir-birinden belli aralykda ýerleşen gorizontal iki sany pürsde ornaşdyrylan relsleriň üstünde dur. Her biri özara şarnir bilen birkdirilen üç sany pürs bar. Kran $P = 30\ kN$ ýüki göterýär, kranyň agramy $Q = 160\ kN$. Kranyň suratda görkezilen ýagdaýynda *A* ornatma baglanyşygynyň reaktiw jübütiniň momentini kesgitlemeli (*33.32-nji surat).*



33.32-nji surat

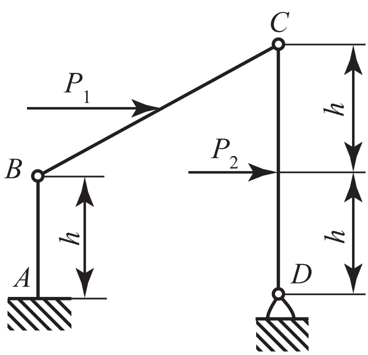
Jogaby: $M_A = -\frac{1}{2}(1{,}95Q + 3{,}60P) = -\,210 kN\cdot m.$



33.33-nji surat

33.33-nji mesele. Platformanyň karkasy Γ şekilindäki ramalardan düzülen. Ramanyň bölekleri C şarnir bilen birikdirilen. Ramalaryň ýokarky ujy beton diwara ornaşdyrylyp berkidilen, aşaky ujy gozganýan silindrik şarnire daýanýar. P_1 we P_2 güýçleriň täsirinden ramanyň ornaşdyrylan A nokadyndaky reaksiýa güýjüniň wertikal düzijüsini kesgitlemeli (*33.33-nji surat*).

$$\textit{Jogaby:}\ \ Y_A = P_1 - P_2 \cdot \frac{h}{l}.$$



33.34-nji surat

33.34-nji mesele. Iki sany BC we CD pürsler C nokatda şarnir bilen birikdirilen, A kesikde pola kakylan AB wertikal sütüne B silindrik şarnir bilen birikdirilip, D silindrik şarniriň kömegi bilen pola berkidilen. Pürslere gorizontal P_1 we P_2 güýçler goýlan. A kesikdäki güýjüň gorizontal düzüjisini kesgitlemeli. Ölçegler suratda görkezilen (*33.34-nji surat*).

$$\textit{Jogaby:}\ \ R = P_1 + \frac{1}{2}P_2.$$

33.35-nji mesele. Deslapky meselede AB sütüniň kakylan A kesigindäki reaktiw jübütiniň m_A momentini kesgitlemeli.

$$\textit{Jogaby:}\ \ m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2}P_2\right)h.$$

34. Analitiki dinamika. Dinamikanyň umumy deňlemesi ýa-da Dalamber-Lagranžyň deňlemesi. Mysaly meseleler

Dalamberiň prinsipiniň dinamiki meseläniň statiki meselä getiriliş usulydygyny 29-njy bölümde aýdyp geçipdik. Mehaniki sistema gös-göni goýlan aktiw güýçler, reaksiýa güýçleri we hyýaly goýlan inersiýa güýçleriniň täsirinden hyýaly deňagramlylykda bolýar. Goýlan güýçleriň täsirinde sistemanyň nokatlarynyň mümkin bolan göçüşlerindäki bitiren elementar işleriniň jemi nol bolmaly.

Bu şerti hereketdäki sistema üçin ulanalyň. M_k nokat üçin Dalamberiň prinsipini aňladýan (29.1) deňlemäni ýazalyň:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + (-m_k \overline{a}_k) = 0.$$

Sistemanyň ähli nokatlaryna mümkin bolan $\delta\bar{r}_k$ göçüşi berýäris. Deňligi skalýar görnüşde $\delta\bar{r}_k$ köpeldýäris we sistemanyň ähli nokatlary üçin aşakdaky ýaly deňlikleri ýazyp, jemleýäris:

$$\sum[\overline{F}_k \delta\bar{r}_k + N_k \delta\bar{r}_k + (-m_k \overline{a}_k)\delta\bar{r}_k] = 0$$

ýa-da $$\sum(\overline{F}_k - m_k \overline{a}_k)\delta\bar{r}_k + \sum \overline{N}_k \delta\bar{r}_k = 0.$$

Ideal baglanyşyk üçin deňlikdäki ikinji jem nola deň. Munuň netijesinde aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\sum(\overline{F}_k - m_k \overline{a}_k)\delta\bar{r}_k = 0. \qquad (34.1)$$

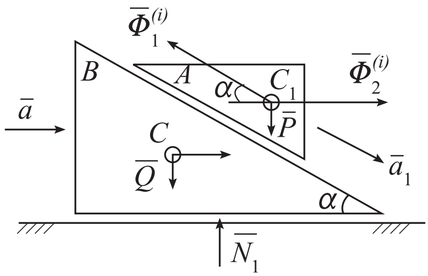
Bu deňleme Dalamber prinsipi bilen Lagranžyň prinsipiniň goşulmasyndan gelip çykýar. Şonuň üçin bu deňlemä *Dalamberiň-Lagranžyň deňlemesi* ýa-da *dinamikanyň umumy deňlemesi* diýilýär.

Deňlemäni Dekartyň koordinata oklaryndaky proeksiýalary arkaly ýazalyň:

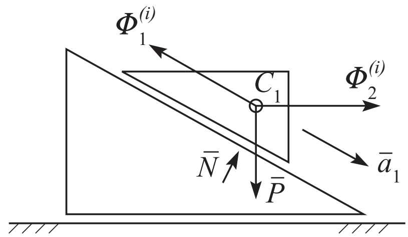
$$\sum[(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{kx} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kx} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k] = 0. \qquad (34.2)$$

Bu deňlemeden islendik mehaniki sistemanyň hereket we deňagramlylyk deňlemesini, dinamikanyň umumy teoremalaryny alyp bolýandygy üçin, oňa **dinamikanyň umumy deňlemesi** ýa-da **Dalamberiň-Lagranžyň deňlemesi** diýilýär.

34.1-nji mesele. P agramly A pahna ýylmanak gorizontal tekizlikde taýýan Q agramly B pahnanyň ýylmanak gapdal üsti bilen typýar. Eger pahnalar öz ugruna goýberilen bolsalar, B pahnanyň tizlenmesini, şeýle hem A pahnanyň B pahnany basyşyny kesgitlemeli (*34.1-nji surat*). Başlangyç pursatda pahnalar dynçlykda dur.



34.1-nji surat



34.2-nji surat

Çözülişi. Sistemanyň erkinlik derejesi B pahnanyň gorizontal ugra göçüşine (x) we A pahnanyň B pahnanyň ýüzi bilen göçüşine (s) deň. Pahnalaryň tizlenmelerini $\bar{a}$ we $\bar{a}_1$ bilen belgilesek, sistema goýlan inersiýa güýçleri aşakdakylardan ybaratdyr:

$$\Phi^{(i)} = \frac{Q}{g} \cdot a, \quad \Phi_2^{(i)} = \frac{P}{g} \cdot a, \quad \Phi_1^{(i)} = \frac{P}{g} \cdot a_1.$$

B pahna δx mümkin bolan göçüş berip, güýçleriň işleriniň deňlemesini ýazýarys:

$$\frac{Q}{g} a \cdot \delta x + \frac{P}{g} a \cdot \delta x - \frac{P}{g} a_1 \cos\alpha \cdot \delta x = 0. \tag{1}$$

A pahna B pahnanyň ýüzi boýunça δS göçüşi berip, işleriň deňlemesini ýazalyň:

$$P \sin\alpha \delta S + \frac{P}{g} a \cos\alpha \cdot \delta S - \frac{P}{g} a_1 \cdot \delta S = 0. \tag{2}$$

$\delta x \neq 0$, $\delta S \neq 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup, (1) we (2) deňlemelerden a tizlenmäni tapalyň:

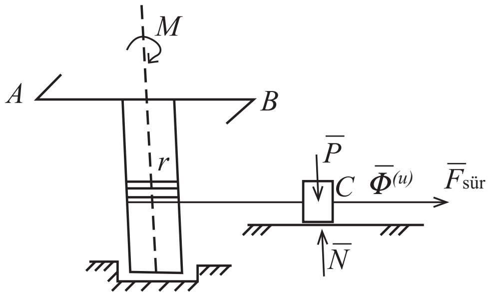
$$g \sin\alpha + a \cos\alpha = \frac{a(P+Q)}{P\cos\alpha} => a = \frac{Pg \sin 2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)}.$$

N reaksiýany göz öňünde tutup, A pahnahyň deňagramlylyk deňlemesini ýazalyň (*34.2-nji surat)*.

$$N - P\cos\alpha + \Phi_2^{(i)}\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; N = P\cos\alpha - \frac{P}{g}a\sin\alpha = \frac{PQ\cos\alpha}{Q + P\sin^2\alpha}.$$

34.2-nji mesele. *M* momentiň täsiri bilen *r* radiusly ok (wal) ýüp bilen *P* agramly ýüki çekýär, bu ýerde ýüküň typma sürtülme koeffisiýenti *f*. Walyň hem-de ýüpüň agramyny hasaba alman, ýüküň tizlenmesini tapmaly (*34.3-nji surat*).



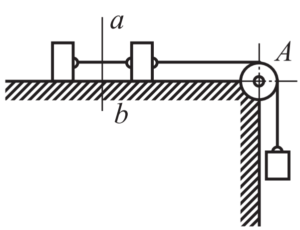
34.3-nji surat

Çözülişi. Sistema täsir edýän güýçler: $\overline{P}$, $\overline{N}$, $F_{\text{sür}} = fN = fP$, $\overline{\Phi}^{(i)} = -\frac{P}{g}\cdot\overline{a}$ we *M* moment. Wala $\delta\varphi$ aýlanyş bersek, ýük $\delta s = r \cdot \delta\varphi$ aralyga göçer. Dalamberiň-Lagranžyň deňlemesini ýazalyň:

$$M\cdot\delta\varphi - fPr\,\delta\varphi - \frac{P}{g}ar\,\delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(M - fPr)g}{Pr}.$$

34.1. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

34.3-nji mesele. Her biriniň massasy *M* bolan üç sany ýük gozganmaýan *A* blok arkaly geçirilen süýnmeýän ýüp bilen daňlan. Iki sany ýük ýylmanak gorizontal tekizlikde ýatyr, üçünji ýük bolsa wertikal edilip asylan. Ulgamyň tizlenmesini we ýüpüň *ab* kesigindäki dartylyş güýji kesgitlemeli (*34.4-nji surat*).

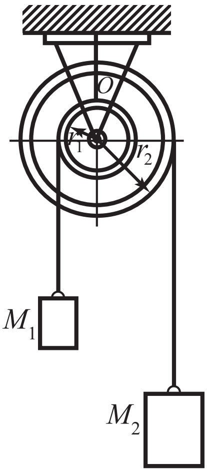


34.4-nji surat

Jogaby: $w = \frac{1}{3}g, \quad T = \frac{1}{3}Mg.$

34.4-nji mesele. Deslapky meseläni bloguň massasyny hasaba alyp çözmeli. Bu ýagdaýda ýükler hereketlenende *A* blok gozganmaýan okuň daşynda aýlanýar diýip hasaplamaly. Bloguň – tutuş diskiň massasy 2*M* deň.

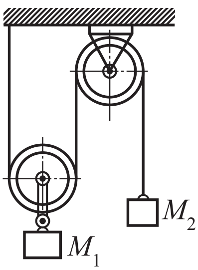
$$Jogaby:\ w = \frac{1}{4}g, \quad T = \frac{1}{4}Mg.$$



34.5-nji surat

34.5-nji mesele. Massalary M_1 we M_2 bolan ýükler süýnmeýän iki sany çeýe ýüpden asylan. Ýüpler suratda görkezilişi ýaly, umumy oka ornaşdyrylan hem-de radiuslary r_1 we r_2 bolan barabanlara oralan. Ýükler agyrlyk güýçleriniň täsirinde hereketlenýärler. Barabanlaryň we ýüpleriň massalaryny hasaba alman, barabanlaryň ε burç tizlenmesini kesgitlemeli (*34.5-nji surat*).

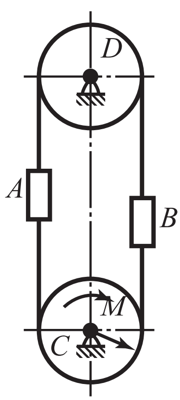
$$Jogaby:\ \varepsilon = g\frac{M_2r_2 - M_1r_1}{M_1r_1^2 + M_2r_2^2}.$$



34.6-njy surat

34.6-njy mesele. Deslapky meseläniň şertlerine garap burç tizlenmäni hem-de T_1 we T_2 dartylyş güýçlerini kesgitlemeli. Berlen: $M_1 = 20$ *kg*, $M_2 = 34$ *kg*, $r_1 = 5$ *sm*, $r_2 = 10$ *sm*; kiçi barabanyň massasy 4 *kg* we uly barabanyň massasy 8 *kg*. Barabanlaryň massalaryny olaryň daşky üstleri bilen deňölçegli ýaýran diýip hasaplamaly.

$$Jogaby:\ \varepsilon = 49\ rad/s^2,\ T_1 = 246\ N,\ T_2 = 262\ N.$$



34.7-nji surat

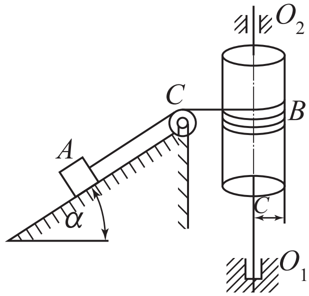
34.7-nji mesele. Suratda görkezilen bloklar ulgamyndan massasy 10 *kg* bolan M_1 we massasy 8 *kg* bolan M_2 ýük asylan. Bloklaryň massasyny hasaba alman, M_2 ýüküň ω_2 tizlenmesini we ýüpüň *T* dartylyşyny kesgitlemeli (*34.6-njy surat*).

$$Jogaby:\ \omega_2 = 2{,}8\ m/s^2, \quad T = 56{,}1\ N.$$

34.8-nji mesele. Götergijiniň (podýomnigiň) aşaky *C* şkiwine *M* aýlandyryjy moment goýlan. Massasy M_1 bolan, ýokaryk göterilýän *A* ýüküň tizlenmesini kesgitlemeli. *B* agramlygyň massasy

M_2 deň, C we D şkiwler bolsa radiusy r we her biriniň massasy M_3 bolan birjynsly silindrlerden ybarat. Çekiniň massasy hasaba alynmaly däl (*34.7-nji surat*).

34.9-njy mesele. Massasy M_1 bolan A ýük gorizonta α burç bilen ýaplanan ýylmanak tekizlikde aşak düşüp, süýnmeýän ýüpüň kömegi bilen M_2 massaly, r radiusly B barabany aýlaýar. Barabany birjynsly tegelek silindr diýip hasaplap, burç tizlenmesini kesgitlemeli. C bloguň we ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*34.8-nji surat*).



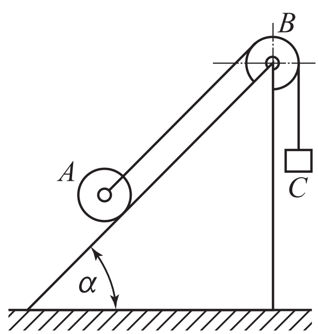
34.8-nji surat

Jogaby: $\varepsilon = \dfrac{2M_1 g \sin\alpha}{r(2M_1 + M_2)}$.

34.10-njy mesele. Adam arabajyga gorizontal F güýji goýup, ony itip barýar. Kuzowyň massasy M_1 bolsa, arabajygyň kuzowynyň tizlenmesini kesgitlemeli; M_2 – dört tigiriň her biriniň massasy, r – tigirleriň radiusy, f_t – tigirlenme sürtülme koeffisiýenti. Tigirleri relsler boýunça typman tigirlenýän tutuş birjynsly diskler diýip hasaplamaly.

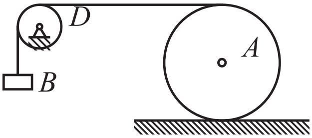
Jogaby: $\omega = \dfrac{F \dfrac{f_t}{r}(M_1 + 4M_2)g}{M_1 + 6M_2}$.

34.11-nji mesele. Massasy M_1 bolan A katok ýapgyt tekizlikde typman tigirlenip aşak düşüp, B blokdan geçirilen süýnmeýän ýüpüň kömegi bilen M_2 massaly ýüki göterýär. Bu ýagdaýda B blok öz tekizligine perpendikulýar bolan gozganmaýan O okuň daşynda aýlanýar. A katok bilen B blok massasy we radiusy birmeňzeş bolan birjynsly tegelek disklerdir. Ýapgyt tekizlik gorizont bilen α burçy emele getirýär. Katogyň okunyň tizlenmesini kesgitlemeli. Ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*34.9-njy surat*).



34.9-njy surat

Jogaby: $\omega = g\dfrac{M_1 \sin a - M_2}{2M_1 + M_2}$.

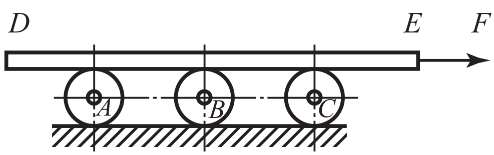


34.10-njy surat

34.12-nji mesele. M_1 massaly B ýük, massasy M_2 bolan r radiusly silindrik A katogy oňa oralan ýüpüň kömegi bilen herekete getirýär. Katok typman tigirlense we tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f_t bolsa, B ýüküň tizlenmesini kesgitlemeli. D bloguň massasyny hasaba almaly däl (*34.10-njy surat*).

$$Jogaby:\ \omega = 8g\frac{M_1 - \frac{ft}{2r}\cdot M_2}{8M_1 + 5M_2}$$

34.13-nji mesele. Massasy M_1 bolan DE sterženiň her biriniň massasy M_2 bolan üç sany A, B we C katoklaryň ütünde ýatyr. Steržene gorizontal boýunça saga ugrukdyrylan, sterženi we katoklary herekete getiriji F_t *güýç* goýlan. Steržen bilen katoklaryň arasynda, şeýle hem, katoklar bilen gorizontal tekizligiň arasynda typma ýok. DE sterženiň tizlenmesini tapmaly. Katoklary birjynsly tegelek silindrler diýip hasaplamaly (*34.11-nji surat*).



34.11-nji surat

$$Jogaby:\ \omega = \frac{8F}{8M_1 + 9M_2}.$$

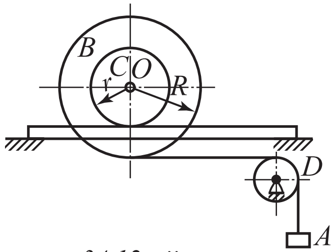
34.14-nji mesele. 34.7-nji meselede garalan bloklary her biriniň massasy 4 *kg* bolan birjynsly tutuş diskler hasaplap, M_2 ýüküň tizlenmesini kesgitlemeli.

Jogaby: $\omega_2 = 0{,}7\ m/s^2$.

34.15-nji mesele. Massasy M_1 bolan A ýük aşak hereketlenip, gozganmaýan D blokdan geçen, B şkiwe oralan, süýnmeýän ýüpüň kömegi bilen C oky(waly) gorizontal rels boýunça typdyrman tigirleýär. R radiusly B şkiw r radiusly C wala mäkäm geýdirilen. Olaryň umumy massasy M_2, suratyň tekizligine perpendikulýar bolan O oka görä inersiýa radiusy bolsa ρ deň. A ýüküň tizlenmesini tapmaly. Ýüpüň we bloguň massasyny hasaba almaly däl (*34.12-nji surat*).

Jogaby:

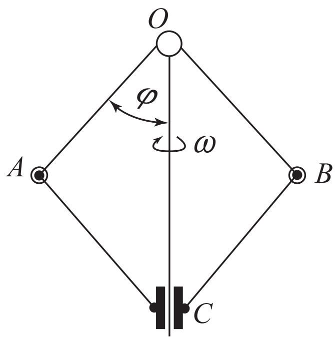
$$\omega = g\frac{M_1(R-r)^2}{M_1(R-r)^2 + M_2(\rho^2+r^2)}.$$



34.12-nji surat

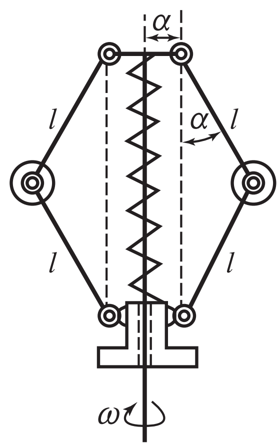
34.16-njy mesele. Merkezden gaçma regulýator wertikal okuň daşynda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Diňe her bir şaryň M_1 massasyny we C muftanyň M massasyny hasaba alyp, OA we OB-niň wertikaldan gyşarma burçuny kesgitlemeli. Ähli sterženleriň l uzynlyklary birmeňzeş *(34.13-nji surat)*.

Jogaby: $\cos\varphi = \dfrac{(M+M_1)g}{Ml\omega^2}$.



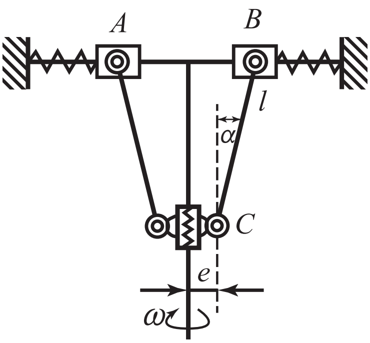
34.13-nji surat

34.17-nji mesele. Merkezden gaçma regulýator ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Regulýatoryň burç tizligi bilen onuň sterženleriniň wertikalda gyşarma α burçunyň arasyndaky gatnaşygy tapmaly. Massasy M_1 bolan muftany gatylygy c bolan puržin aşak gysyp durýar, $\alpha = 0$ bolanda puržin deformirlenmedik, onuň ýokarky ujy regulýatoryň okuna berkidilen. Şarlaryň massasy M_2, sterženleriň uzynlygy l, asylyş oky regulýatoryň okundan a aralykda durýar. Sterženleriň we puržinyň massalaryny hasaba almaly däl (*34.14-nji surat*).



34.14-nji surat

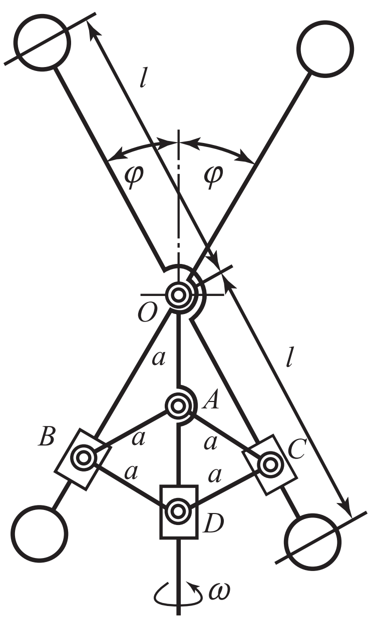
Jogaby: $\omega^2 = \dfrac{(M_1+M_2)g + 2lc(1-\cos\alpha)}{M_2(a+l\cos\alpha)}tg\alpha.$



34.15-nji surat

34.18-nji mesele. Merkezden gaçma puržinly regulýator her biriniň massasy M bolan, regulýatoryň şpindeline berkidilen ýylmanak gorizontal steržene geýdirilen A we B ýük, massasy M_1 bolan C mufta, l uzynlykdaky dartgyç we ýükleri aýlanma okuna gysyp duran puržinlardan ybarat. Dartgyjyň şarnirlerinden şpindeliň okuna çenli bolan aralyk l deň; c – puržinyň gatylyk koeffisiýenti. Regulýatoryň açylyş burçy α gabat gelýän burç tizligini kesgitlemeli. α_0 burçda puržin süýnmedik ýagdaýda dur, bu ýerde $\alpha_0 < \alpha$; dartgyjyň massasyny we sürtülmesini hasaba almaly däl (*34.15-nji surat*).

$$\textit{Jogaby:}\ \omega = \sqrt{\frac{M_1 g\,\mathrm{tg}\alpha + 2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}{2M(e + l\sin\alpha)}}.$$



34.16-njy surat

34.19-njy mesele. Regulýatorda birmeňzeş M_1 massalara eýe bolan dört sany ýük, uzynlygy $2l$ bolan iki sany deň eginli ryçagyň ujunda dur. Ryçaglara regulýatoryň tekizliginde şpindeliň O ujunyň daşynda aýlanmaga mümkinçiligi bolup, şpindeliň oky bilen burçy emele getirýär. Şpindeliň O ujundan $OA=a$ aralykda duran A nokatda uzynlygy a bolan AB we AC ryçaglar şarnirler bilen birikdirilen. Olar öz nobatynda B we C nokatlarda uzynlygy a bolan we D mufta ornaşdyrylan BD we CD sterženler bilen birleşdirilen. B we C nokatlarda ýük berkidilen ryçaglar boýunça süýşýän polzunlar bar. Muftanyň massasy M deň. Regulýator

ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Regulýator deňagramlylyk ýagdaýyna gelende φ burç bilen ω burç tizligiň arasynda nähili baglanyşyk bolmalydygyny tapmaly *(34.16-njy surat)*.

Jogaby: $\omega = \sqrt{\frac{2gM_2 a}{M_1 l^2}}$ bolanda regulýator deňagramlylyk ýagdaýyna gelmegi mümkin; bu ýagdaýda ω burç tizligi φ burça bagly däl.

35. UMUMYLAŞDYRYLAN KOORDINATALAR. UMUMYLAŞDYRYLAN GÜÝÇLER. MYSALY MESELELER. MÜMKIN BOLAN GÖÇÜŞ PRINSIPINIŇ UMUMYLAŞDYRYLAN KOORDINATALARDA AŇLADYLYŞY. POTENSIALLY GÜÝJÜŇ TÄSIRINDÄKI ULGAMYŇ DEŇAGRAMLAŞMAK ŞERTI. DEŇAGRAMLYLYGYŇ DURNUKLYLYGY BARADA DÜŞÜNJE. KONSERWATIW GÜÝÇ MEÝDANYNDAKY DEŇAGRAMLYLYGYŇ DURNUKLYLYGY. LAGRANŽYŇ–DIRIHLENIŇ TEOREMASY

Umumylaşdyrylan koordinatalar

Material sistemanyň hereketini anyklaýjy erkin parametrlere **umumylaşdyrylan koordinatalar** diýilýär. Bu kesgitlemeden sistemanyň hereketi haýsy koordinatalarda ýazylan bolsa, şol koordinatalaryň umumylaşdyrylan koordinatalaryň funksiýasy boljakdygy görünýär.

Sistema n sany nokatdan ybarat bolup, onuň erkinlik derejesiniň sany p bolsa, golonomly sistema üçin umumylaşdyrylan koordinatalar hem p sany bolýar. Umumylaşdyrylan koordinatalary q harpy bilen belgilesek, erkinlik derejesi p sany bolan sistemanyň umumylaşdyrylan koordinatalary q_1, q_2 ... q_p bolar. Golonom baglanyşyk bistasionar bolsa, sistemanyň n sany nokatlarynyň koordinatalary aşakdaky gatnaşyk bilen anyklanýar:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(t, q_1, q_2, \ldots q_p), \\ y_k &= y_k(t, q_1, q_2, \ldots q_p), \\ z_k &= z_k(t, q_1, q_2, \ldots q_p), \end{aligned}\right\} \tag{35.1}$$
$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Bu sistemadan umumylaşdyrylan koordinatany (q_i) çykarsak, baglanyşyk deňlemeleriniň Dekart koordinatalary arkaly aňladylan görnüşini alýarys.

(35.1) deňliklerden mümkin bolan göçüşiň (δx_k, δy_k, δz_k) proýeksiýalaryny umumylaşdyrylan koordinatalaryň göçüşleri arkaly tapmak bolýar.

Onuň üçin (35.1)-den wariasiýa alýarys. Funksiýany warirlemek düzgüni, differensirlemek düzgüni bilen gabat gelýär, ýöne t wagtyň bahasyny üýtgetmän saklamaly:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_k &= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_k}{\partial q_j}\delta q_j, \\ \delta y_k &= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y_k}{\partial q_j}\delta q_j, \\ \delta z_k &= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial z_k}{\partial q_j}\delta q_j, \end{aligned}\right\} \qquad (35.2)$$

$$k = 1,2,...n.$$

Käbir ýagdaýlarda, tygşytlylyk üçin (35.1), (35.2) formulalary wektor görnüşde aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ...q_p) = \bar{r}_k(q_j) \qquad (35.3)$$

$$k = 1,2,\ldots n; \quad j = 1,2,\ldots p.$$

$$\delta\bar{r}_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j; \qquad (35.4)$$

$$k = 1,2,\ldots n.$$

Umumylaşdyrylan güýçler

Umumylaşdyrylan koordinatalar we umumylaşdyrylan güýçler düşünjesini mehanika ilkinji bolup Lagranž girizýär. Umumylaşdyrylan güýçler düşünjesi hem umumylaşdyrylan koordinatalar ýaly möhüm ähmiýete eýedir. Her bir umumylaşdyrylan koordinata belli mukdardaky umumylaşdyrylan güýç gabat gelýär. Bu güýji hasaplamak üçin, sistemanyň M_k nokadyna goýlan erkin $\overline{F_k}$ güýjüň sistemanyň nokatlarynyň mümkin bolan göçüşindäki bitiren elementar işiniň jemini tapmaly. Ony δA bilen belgiläliň:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n}(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k) = \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\,\delta\bar{r}_k. \qquad (35.5)$$

δx_k, δy_k, δz_k ululyklaryň bahalaryny (35.5)-de goýup, alarys:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\cdot\delta q_j + F_{ky}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial y_k}{\partial q_j}\delta q_j + F_{kz}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\partial q_j\right).$$

Bu deňlikdäki jemleriň tertibini üýtgedip ýazalyň:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{p}\ \sum_{k=1}^{p}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,.$$

Içki jemi aşakdaky ýaly belgiläliň:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) = Q_j. \qquad (35.6)$$

Ýokardaky deňlik aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{p} Q_j\,\delta q_j = \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\,\delta\bar{r}_k, \qquad (35.7)$$

bu ýerde Q_j – ululyga **umumylaşdyrylan güýç** diýilýär.

Bu formuladan aşakdaky netije gelip çykýar. Umumylaşdyrylan güýjüň degişli umumylaşdyrylan koordinatanyň wariasiýasyna köpeldilmegi (35.7) sistema goýlan güýçleriň sistemanyň nokatlarynyň mümkin bolan göçüşlerinde bitiren elementar işleriniň jemine deňdir (35.5).

Bu kesgitlemeden, elbetde, umumylaşdyrylan güýç kilogramda ölçelýär diýen netijäni çykarmak nädogrudyr, çünki umumylaşdyrylan koordinata uzynlyk ölçeginde alnan bolsa, degişli umumylaşdyrylan güýç kilogramda ölçelýär. Umumylaşdyrylan koordinata üçin burç alnan bolsa, oňa degişli umumylaşdyrylan güýç $kg \cdot m$ ýa-da $kg \cdot sm$-de ölçelýär.

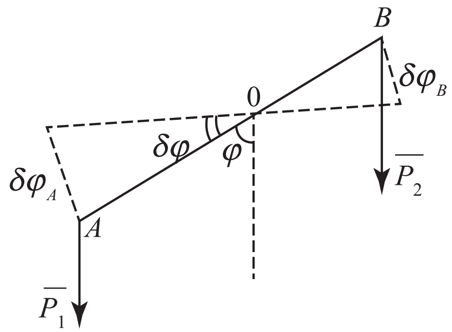
Umumylaşdyrylan güýji gysgaça aşakdaky ýaly hem ýazmak bolýar:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\,\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}. \qquad (35.8)$$

Umumylaşdyrylan güýjüň hasaplanylyşyna degişli meselelere seredeliň.

Mysaly meseleler

35.1-nji mesele. *AB* ryçagyň uçlaryna P_1 we P_2 wertikal güýçler goýlan. *OA=a, OB=b.* Ryçagyň wertikal bilen emele getirýän φ burçuny umumylaşdyrylan koordinata üçin kabul edip, oňa degişli umumylaşdyrylan güýji tapmaly *(35.1-nji surat)*.



35.1-nji surat

Çözülişi. Sistemanyň erkinlik derejesi 1 bolany üçin, φ burçy umumylaşdyrylan koordinata hökmünde alyp bolýar. Bu koordinata degişli Q umumylaşdyrylan güýji tapmak üçin φ burça $\delta\varphi$ artdyrma berýäris. Munuň netijesinde ryçag $\delta\varphi$ burça aýlanýar, P_1 we P_2 güýçleriň goýlan nokatlary, degişlilikde *AB* ryçaga perpendikulýar ugurda çäksiz kiçi $\delta s_A = a\delta\varphi$ we $\delta s_B = b\delta\varphi$ aralyga göçýär.

P_1 we P_2 güýçleriň δs_A we δs_B göçüşde bitiren elementar işleriniň jemini tapyp, umumylaşdyrylan Q güýjüň işine deňleşdirilýär:

$$P_1\delta s_A \sin\varphi - P_2\delta s_B \sin\varphi = Q\delta\varphi.$$

δs_A we δs_B-nyň bahalaryny goýup, alarys:

$(P_1a - P_2b)\sin\varphi \cdot \delta\varphi = Q\delta\varphi.$ $\delta\varphi \neq 0$ bolany üçin,

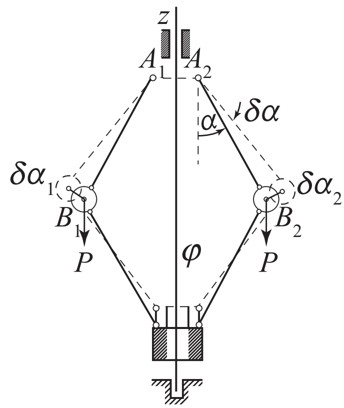
$Q = (P_1a - P_2b)\sin\varphi.$

Bu ýagdaýda umumylaşdyrylan Q güýç ryçagyň O nokadyna görä alnan güýç momentleriniň jemine deň.

35.2-nji mesele. Merkezden gaçma sazlaýjynyň şarlarynyň agramy P, sterženleriň uzynlygy l. sazlaýjynyň aýlanma burçy φ; sterženleriň wertikal bilen emele getirýän burçy α. φ we α-ny umumylaşdyrylan koordinatalar hökmünde kabul edip, degişli umumylaşdyrylan Q_φ we Q_α güýçleri tapmaly (*35.2-nji surat*).

Çözülişi. φ burçy üýtgetmän, α burça $\delta\alpha$ artdyrma berýäris, B_1, B_2 nokatlar, degişlilikde A_1B_1 we A_2B_2 kesimlere perpendikulýar ugra δs aralyga göçýärler: $\delta s = l\delta\alpha$. P güýçleriň δs göçüşlerde bitiren elementar işleriniň jemi degişli umumylaşdyrylan Q_α güýjüň elementar işine deň bolýar:

$$-P\delta s\sin\varphi - P\delta s\sin\varphi = Q_\alpha\delta\alpha;$$
$$\delta s = l\delta\alpha.$$



35.2-nji surat

Bu ýerden $\quad Q_\alpha = -\,2Pl\sin\alpha.$

Ikinji umumylaşdyrylan koordinata (φ) üýtgände, sistema goýlan güýçler iş etmeýärler. Şonuň üçin $Q_\varphi = 0$.

Mümkin bolan göçüş prinsipiniň umumylaşdyrylan koordinatalarda aňladylyşy. Potensially güýjüň täsirindäki sistemanyň deňagramlaşmak şerti

Mümkin bolan göçüş prinsipini umumylaşdyrylan koordinatalar arkaly aňladalyň. Munuň üçin geçen paragrafdaky (35.7) formuladan peýdalanýarlar. Eger mehaniki sistema deňagramlylykda bolsa, oňa goýlan güýçleriň mümkin bolan göçüşdäki bitiren elementar işleriniň jemi nola deň bolmaly, ýagny $\delta A = 0$ ýa-da (35.7)-niň esasynda

$$\sum_{j=1}^{p} Q_j\delta q_j = 0. \tag{35.9}$$

Golonomly sistema üçin $\delta q_j\,(j = \overline{1,\,p})$ erkin wariasiýalar özbaşdak bolandyklary sebäpli, (35.9) deňlemäni kanagatlandyrmak üçin, umumylaşdyrylan güýçler nola deň bolmaly:

$$Q_j = 0,\ \ (j = 1,\ \dots\ p). \tag{35.10}$$

Tersine, eger (35.10) ýerine ýetse, onda mehaniki sistema deňagramlylykda bolýar we (35.9) deňlemäni alýarys.

Diýmek, ideal we golonom baglanyşykdaky sistemanyň deňagramlylykda bolmagy üçin onuň umumylaşdyrylan güýçleriniň ählisi nola deň bolmaly.

Bu şert golonom baglanyşykdaky mehaniki sistemanyň deňagramlylygynyň zerur we ýeterlik şertidir.

Mehaniki sistema goýlan güýçleriň ***konserwatiw*** bolanyndaky ýagdaýa-da seredeliň. Bu ýagdaýda güýç funksiýasyny

$$U(x_k, y_k, z_k), \ (k = \overline{1,n})$$

(35.1) gatnaşyklaryň esasynda, umumylaşdyrylan koordinatalarda aňladyp bolýar:

$$U(t, q_j), \ (j = \overline{1,p}).$$

Stasionar däl (bistasionar) baglanyşyklar üçin güýç funksiýasynyň wagta baglydygy aňlatmadan görünýär. (35.6) formuladan we konserwatiw güýçleriň *(26-njy bölüm)* häsiýetinden peýdalanyp, taparys:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Bu ýerden $$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \ (j = \overline{1,p}). \qquad (35.11)$$

Konserwatiw güýçler üçin, umumylaşdyrylan güýçler güýç funksiýasyndan ýa-da minus alamaty bilen alnan potensial energiýadan degişli umumylaşdyrylan koordinatalar boýunça alnan hususy önümlere deňdir. (35.11) formuladan peýdalanyp, konserwatiw güýçler üçin, ideal baglanyşykly golonom sistemanyň deňlemelerini aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad (j = \overline{1,p}). \qquad (35.12)$$

Şeýle hem, bu deňlemeler umumylaşdyrylan koordinatalarda potensial energiýanyň ekstremumynyň zerurlyk şertini aňladýarlar. Şeýlelikde, ***golonom mehaniki sistemanyň deňagramlylyk ýagdaýy, potensial energiýanyň ekstremal bahalaryna gabat gelýär.***

Deňagramlylygyň durnuklylygy barada düşünje. Konserwatiw güýç meýdanyndaky deňagramlylygyň durnuklylygy. Lagranžyň–Dirihleniň teoremasy

Mümkin bolan göçüş prinsipi esasynda alnan deňagramlylyk deňlemeleri, sistemanyň deňagramlylygynyň zerur we ýeterlik şertini aňlatsa-da, bu onuň durnukly ýa-da durnuksyz deňagramlylykdadygyny anyklamaýar. Deňagramlylygyň durnuklydygyny anyklamak uly ähmiýete eýedir.

Sistema özüniň deňagramlylyk ýagdaýyndan sähelçe çyksa, ýöne ol bu ýagdaýda uzak eglenmän, ýene-de öňki ýagdaýyna gelse, sistemanyň deňagramlylygy **durnukly** bolýar.

Eger şu aýdylanlar ýerine ýetmän, sistema başdaky ýagdaýyndan daşlaşsa, onda deňagramlylyk **durnuksyz** bolýar. Mysal üçin, fiziki maýatnigiň aşaky ýagdaýy durnukly, ýokarky ýagdaýy durnuksyz bolýar.

Lagranžyň–Dirihleniň teoremasyny subutsyz getireliň:

Konserwatiw sistemanyň bir deňagramlylyk ýagdaýynda onuň potensial energiýasy minimal baha eýe bolsa, sistema bu ýagdaýda durnukly deňagramlylykda bolýar.

36. Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri. Gysgaça maglumat

Erkin bolmadyk sistemanyň meseleleri Lagranžyň deňlemeleriniň üsti bilen amatly hem-de aňsat çözülýär. Lagranž durnuksyz sistemanyň hereketini bir-birinden üzňe umumylaşdyrylan koordinatalar arkaly aňladanynda, koordinatalaryň sany sistemanyň erkinlik derejesiniň sanyna deň bolýar, şunuň bilen birlikde deňlemeleriň sany hem sistemanyň erkinlik derejesine deň bolýar. Durmuşda gabat gelýän sistemalaryň erkinlik derejesiniň uly san bolmaýanlygy üçin, erkin däl sistemanyň hereketi birnäçe differensial deňlemeler bilen anyklanýar.

36.1. Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri

Dinamikanyň (34.1) görnüşdäki umumy deňlemesini täze görnüşde, ýagny umumylaşdyrylan koordinatalarda ýazsak, Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemelerini alarys. Bu deňlemeler taýýar görnüşde aşakdaky görnüşde peýdalanylýar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,2, \dots, p. \tag{36.1}$$

Bu deňlemelere **Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri** diýilýär. Bu deňlemeler umumylaşdyrylan koordinatalara görä ýazylan ikinji tertipli, çyzykly adaty differensial deňlemelerdir. Bu ýerde T sistemanyň kinetik energiýasy.

36.2. Potensial güýçler üçin Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri

Eger sistema potensially güýçler meýdanynda hereketde bolsa, onda (35.11) formulanyň esasynda, Lagranžyň deňlemeleri aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \tag{36.2}$$

Π potensial energiýanyň umumylaşdyrylan tizliklere bagly däldigini nazara alyp we $L=T-\Pi$ Lagranžyň funksiýasyny girizip, ahyrky deňlemäni alarys:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1,2, \dots, p. \tag{36.3}$$

36.3. Mesele çözmekde Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemelerini ulanmagyň usuly. Mysaly meseler

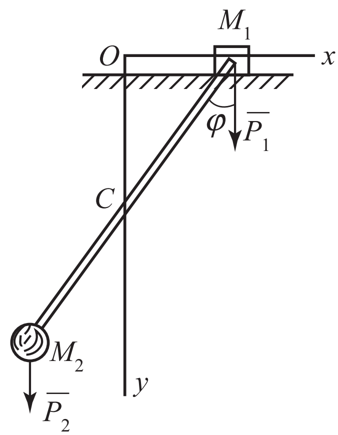
Lagranžyň deňlemelerini ulanyp, meseleler çözülende aşakdaky yzygiderliligi saklamaly.

1. Sistemanyň hereketini çäklendirýän baglanyşyklaryň häsiýetlerini anyklamaly. Baglanyşyklar ideal hem golonom bolanda, Lagranžyň deňlemelerini ulanyp bolýar.
2. Sistemanyň erkinlik derejesiniň sanyny (umumylaşdyrylan koordinatalaryň sanyny) kesgitlemeli we umumylaşdyrylan koordinatalary takyklamaly.
3. Umumylaşdyrylan güýçleri hasaplamaly.
4. Sistemanyň kinetik energiýasyny kesgitlemeli.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial q_j}$ we $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ – hususy önümleri tapmaly.

6. Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemelerini düzmeli we meseläniň talaplaryna laýyklykda çözmeli.

36.3-nji mesele. Elliptik maýatnik. Sistema iki jisimden ybarat bolup, biri – M_1 (massasy m_1), ýylmanak gorizontal tekizlikde sürtülmesiz taýýar, ikinjisi – M_2 (massasy m_2), birinji jisime uzynlygy $M_1M_2 = l$ bolan juda ýeňil steržen bilen şarnirli birikdirilip, wertikal tekizlikde yrgyldaýar (*36.1-nji surat*). Bu sistemanyň hereketini öwrenmeli.



36.1-nji surat

Çözülişi. Jisimiň agyrlyk merkezlerini (x_1,y_1); (x_2,y_2) bilen belgiläliň. Koordinatalar bilen φ burçuň arasyndaky baglanyşyklary tapalyň:

$$x_2 = x_1 - l\sin\varphi,\ \ y_2 = l\cos\varphi.$$

Sistemanyň erkinlik derejesi ikä deň bolup, umumylaşdyrylan koordinatalar hökmünde φ bilen x_1-i kabul edeliň. Jisimleriň kinetik energiýalaryny hasaplalyň:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - 2l\dot{x}_1\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi) =$$
$$= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2).$$

Sistemanyň kinetik energiýasy:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}^2 - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Birinji jisimiň agramynyň işi nola deň. Ikinji jisimiň potensial energiýasy ýokarky meseledäki ýaly tapylýar:

$$\Pi = -P_2 l\cos\varphi.$$

Lagranžyň funksiýasyny ýazyp, degişli önümleri alarys:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos\varphi + P_2 l \cos\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi - P_2 l \sin\varphi.$$

Lagranžyň deňlemelerini ýazalyň:

$$\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi] = 0;$$

$$\frac{d}{dt}[m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi] - m_2 l \dot{x}_1 \sin\varphi + P_2 l \sin\varphi = 0.$$

Sistema gorizontal güýç täsir etmeýändigi üçin, onuň massalar merkezi wertikal boýunça hereket edýär. Şol ok y oka derek kabul edilse, sistemanyň C massalar merkeziniň koordinatasy aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 x_1 + m_2 (x_1 - l \sin\varphi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin\varphi.$$

Bu baha birinji differensial deňlemäni kanagatlandyrýar. Ikinji deňlemeden j-ni tapalyň. Kiçi yrgyldylar üçin: sin$\varphi \approx \varphi$; cos$\varphi \approx 1$; $\varphi \cdot \dot{\varphi}$ köpeltmek hasyly ikinji tertipli kiçi san bolany üçin, ony taşlap, ikinji deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0.$$

Bu garmoniki yrgyldylaryň deňlemesi bolup, onuň yrgyldy döwri:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Eger $m_1 >> m_2$ bolsa, onda

$$T = \lim_{m_1 \to \infty} 2\pi \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

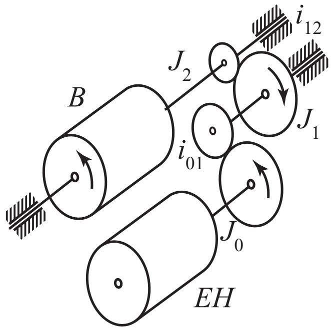
Diýmek, m_1 san m_2-den has uly bolsa, elliptik maýatnigiň yrgyldy döwri adaty maýatnigiň yrgyldy döwrüne golaýlaşýar. Elliptik maýatnigiň gowy ýeri, onuň uzynlygyna degmän, massalaryny üýtgedip, yrgyldy döwrüne täsir edip bolýar. M_1 nokat x oky bilen, C nokat y oky bilen hereket edende, M_2 nokat ellips boýunça hereket edeni üçin, maýatnigiň adyna «**elliptik**» diýilýär.

36.4. Özbaşdak çözmek üçin meseleler

36.4-nji mesele. Iki sany okuň (walyň) arasyndaky aýlanma hereketi geçirme dişleri, degişlilikde z_1 we z_2 bolan dişli tigirler arkaly amala aşyrylýar. Wallaryň olara ornaşdyrylan tigirleri bilen birlikdäki inersiýa momentleri, degişlilikde J_1 we J_2 deň. Birinji wala M_1 aýlandyryjy moment täsir etse, onuň hereket deňlemesini düzmeli, beýleki wala bolsa M_2 garşylyk moment täsir edýär. Podşipniklerdäki sürtülme hasaba alynmaly däl.

Jogaby: $(J_1 + i^2 J_2)\ddot{\varphi} = M_1 - iM_2$, bu ýerde $i = z_1/z_2$.

36.5-nji mesele. Sentrifuganyň B barabany EH elektrohereketlendiriji bilen iki basgançakly reduktor arkaly aýlanma hereketine getirilýär. Elektrohereketlendirijiniň J_0 inersiýa momenti, barabanyň J_2 inersiýa momenti, reduktoryň aralyk walynyň J_1 inersiýa momenti, reduktoryň basgançaklarynyň geçirme sanlary i_{0_1} we i_{1_2} berlen. Elektrohereketlendirijiniň rotoryna M_0 aýlandyryjy moment we garşylyk güýçleriniň M_0' momenti, reduktoryň walyna we barabana, degişlilikde M_1' we M_2' garşylyk güýçleriniň momentleri goýlan. Sentrifuganyň barabanynyň aýlanmasynyň differensial deňlemesini düzmeli (*36.2-nji surat*).

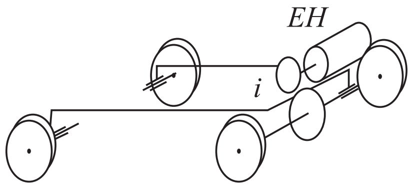


36.2-nji surat

Jogaby: $(J_0 i_{0_1}^2 + J_1 i_{1_2}^2 + J_2)\ddot{\varphi} = (M_0 - M_0')i_{1_0} i_{1_2} - M_1' i_{1_2} - M_2'$.

36.6-njy mesele. Elektromobiliň geçirijisi EH elektrohereketlendiriji we geçirme sany i bolan bir basgançakly reduktordan ybarat. J_0 – elektrohereketlendirijiniň rotorynyň inersiýa momenti, J_1 – radiusy r

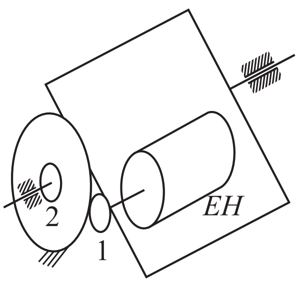
bolan dört sany tigriň her biriniň inersiýa momenti, m – elektromobiliň jemi massasy, M – elektrohereketlendirijiniň aýlandyryjy momenti, M' – elektrohereketlendirijiniň walyna düşýän garşylyk güýçleriniň momenti, F – elektromobiliň hereketine bolan garşylyk güýçleriniň jemi bolsa, elektromobiliň hereketiniň differensial deňlemesini düzmeli (*36.3-nji surat*).



36.3-nji surat

Jogaby: $\left(m + 4\dfrac{J_1}{r^2} + \dfrac{J_0}{i^2 r^2}\right)\ddot{x} = \dfrac{M - M'}{ir} - F.$

36.7-nji mesele. Durnuklandyryjy stabilleşdiriji, geçirijiniň EH elektrohereketlendirijisi, orny φ burç bilen kesgitlenýän aýlanyjy rama oturdylan. Elektrohereketlendirijiniň walyndaky 1 – şesternýa gozganmaýan esasa berkidilen 2 – şesternýanyň daşynda tigirlenýär. J_1 – ramanyň elektrohereketlendiriji bilen bilelikdäki inersiýa momenti, J_0 – elektrohereketlendirijiniň rotorynyň inersiýa momenti, i_{12} – jübüt şesternýalaryň geçirme sany, M_0 – elektrohereketlendirijiniň aýlandyryjy momenti, M_0' – elektrohereketlendirijiniň walyna düşýän garşylyk güýçleriniň momenti, M_1' – rama goýlan güýçleriň ramanyň okuna görä momenti bolsa, ramanyň hereketiniň differensial deňlemesini düzmeli (*36.4-nji surat*).

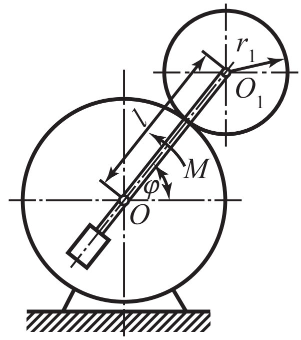


36.4-nji surat

Jogaby:

$$\left[J_0\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)^2 + J_1\right]\ddot{\varphi} = (M_0 - M_0')\,i_{10}\,i_{12} - M_1'\,i_{12} - M_2'\,.$$

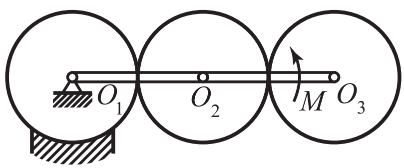
36.8-nji mesele. Episiklik mehanizmde r_1 radiusly aýlanýan şesterýonka M momentiň täsirinde gozganmaýan şesterýonkanyň okunyň daşynda aýlanýan agramlykly kriwoşipe ornaşdyrylan. Kriwoşipiň aýlanmasynyň burç tizlenmesini we şesterýonkalaryň biri-birine degip duran nokadyndaky S aýlanma süýnmesini kesgitlemeli. Şesterýonkalaryň oklarynyň arasyndaky uzaklyk l, agramlykly kriwoşipe öz aýlanma okuna görä inersiýa momenti J_0, aýlanýan şesterýonkanyň massasy m, şesterýonkanyň öz okuna görä inersiýa momenti J_1. Sürtülme hasaba alynmaly däl; şesterýonkanyň we agramlykly kriwoşipiň massalar merkezi kriwoşipiň aýlanma okunda ýatyr (*36.5-nji surat*).



36.5-nji surat

Jogaby: $\varepsilon = \dfrac{M}{J_0 + m_1 l^2 + J_1 \dfrac{l^2}{r_1^2}}$; $\quad S = \dfrac{J_1 l}{r_1^2}\varepsilon.$

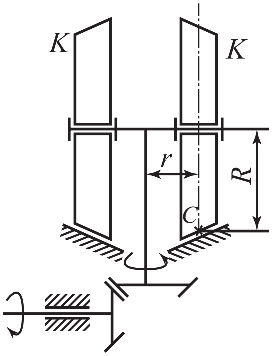
36.9-njy mesele. Planetar mehanizmde O_1 okly tigir gozganmaýar; O_1O_3 sapa aýlandyryjy M moment goýlan we mehanizm gorizontal tekizlikde ýerleşen. Tigirleri massalary m we radiuslary r bolan birmeňzeş birjynsly diskler diýip hasaplap hem-de sapyň massasyny hasaba alman, sapyň burç tizlenmesini kesgitlemeli (*36.6-njy surat*).



36.6-njy surat

Jogaby: $\varepsilon = \dfrac{M}{22mr^2}.$

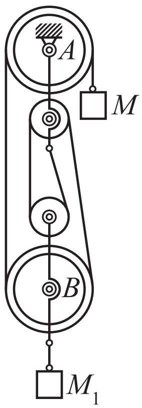
36.10-njy mesele. K, K begunlar shemasy suratda görkezilen geçirijiniň kömegi bilen hereketlendirijiniň walyndan herekete getirilýär. Bir begunyň massasy 3 t, ortaça radiusy $R = 1$ m, aýlanma radiusy $r = 0{,}5$ m. Begunyň pursatlaryň aýlanma oky gurşawyň ortasyndaky C nokatdan geçýär diýip hasaplamaly. Hereketlendirijiden wertikal wala hereketi geçiriji konus görnüşli geçirme tigirleriniň



36.7-nji surat

radiuslarynyň gatnaşygy 2/3-e deň. Beguny R radiusly birjynsly disk diýip hasaplamaly we hereketlenijiniň ähli bölekleriniň massalaryny begunyň massasy bilen deňeşdirilende hasaba almaly däl. Hereketlendiriji işläp başlanyndan 10 s geçeninden soň, wertikal okuň burç tizliginiň 120 *aýl/min* bolmagy üçin hereketlendirijiniň walyna haýsy hemişelik aýlandyryjy momenti goýmalydygyny hasaplamaly. Garşylyk güýçlerini hasaba almaly däl (*36.7-nji surat*).

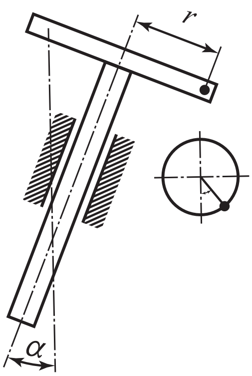
Jogaby: 3140 $N \cdot m$.



36.8-nji surat

36.11-nji mesele. Massasy 101 kg bolan M ýük gozganýan halka bilen birlikde alnan massasy 320 kg bolan M_1 ýüki polispastyň kömegi bilen ýokaryk göterýär. Bloklar dört sany bolup, uly bloklaryň massalary 16 kg, kiçileriniňki 8 kg, uly bloklaryň radiuslary r, kiçileriniňki r_1 deň. M ýüküň tizlenmesini kesgitlemeli. Bloklaryň energiýasy kesgitlenende olaryň massalaryny töweregi boýunça deňölçegli ýaýran diýip hasaplamaly (*36.8-nji surat*).

Jogaby: 0,1 g.

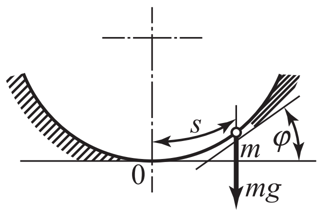


36.9-njy surat

36.12-nji mesele. Rotorlary statiki deňagramlaşdyrmak üçin işledilýän maşynda podşipnikler wertikaldan α burça gyşaran. Podşipnige ýerleşdirilen rotor (öz okuna görä) J inersiýa momentine eýe we okdan r aralykda deňagramlaşmadyk m massany eltýär. Rotoryň hereketiniň differensial deňlemesini ýazmaly we rotoryň deňagramlylyk ýagdaýynyň golaýyndaky kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*36.9-njy surat*).

Jogaby: $(mr^2 + J)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = 0,\ k = \sqrt{\dfrac{mgr\sin\alpha}{mr^2 + J}},$
bu ýerde φ – rotoryň aýlanma burçy.

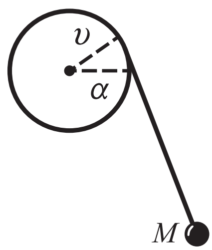
36.13-nji mesele. m massaly maddy nokat $s = 4a\sin\varphi$ deňleme bilen aňladylýan sikloidial ugrukdyryjy boýunça agyrlyk güýjüniň täsirinde hereket edýär, bu ýerde s – O nokatdan başlap hasaplanýan duga, φ – sikloida geçirilen galtaşma bilen gorizontal okuň arasyndaky burç. Nokadyň hereketini kesgitlemeli (*36.10-njy surat*).



36.10-njy surat

Jogaby: $s = A\left(\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{a}}t + \varphi_0\right)$, bu ýerde A we φ_0 – integrirlemäniň hemişelikleri.

36.14-nji mesele. Radiusy a bolan gozganmaýan silindre saralan ýüpden asylan m massaly M maddy nokatdan ybarat maýatnigiň hereketiniň deňlemesini düzmeli. Deňagramlylyk ýagdaýynda ýüpüň asylyp duran böleginiň uzynlygy l. Ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*36.11-nji surat*).



36.11-nji surat

Jogaby: $(l + a\upsilon)\ddot{\upsilon} + a\dot{\upsilon}^2 + g\sin\upsilon = 0,$
bu ýerde υ – ýüpüň wertikaldan gyşarma burçy.

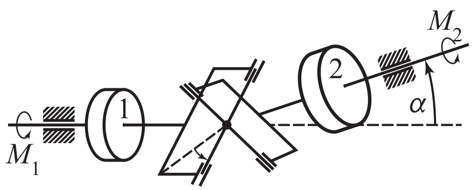
36.15-nji mesele. Uzynlygy $l = l(t)$ kanun bilen özgerýän m massaly maddy nokatdan ybarat maýatnigiň hereketiniň deňlemesini düzmeli.

Jogaby: $\ddot{\varphi} + 2\dfrac{i}{l}\dot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0,$ bu ýerde φ – ýüpüň wertikaldan gyşarma burçy.

36.16-njy mesele. Uzynlygy l bolan süýnmeýän ýüpden asylan m massaly maddy nokatdan ybarat maýatnigiň asylan nokady gorizont bilen α burçy emele getirýän ýapgyt göni çyzyk boýunça berlen $\xi = \xi_0(t)$ kanun bilen hereket edýär. Maýatnigiň hereketiniň deňlemesini düzmeli.

$$\textit{Jogaby: } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{\xi}{l}\cos(\varphi - \alpha) = 0.$$

36.17-nji mesele. Bir tekizlikde ýatan we bir-biri bilen α burçy emele getirýän iki wal kardanyň şarniri bilen birleşdirilen. Wallaryň inersiýa momentleri J_1 we J_2 deň. Birinji wala M_1 aýlandyryjy we ikinjisine M_2 garşylyk momenti goýlan bolsa, birinji walyň hereketiniň deňlemesini düzmeli. Podşipnikleriň sürtülmesini hasaba almaly däl (*36.12-nji surat).*

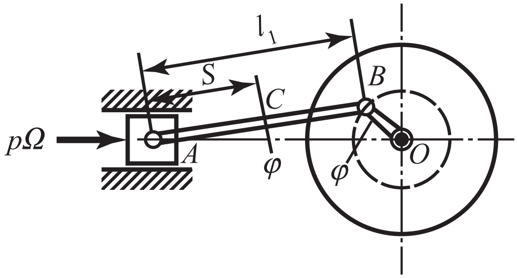


36.12-nji surat

Jogaby: Birinji walyň aýlanma burçuny α bilen belgiläp, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi} - \frac{J_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\dot{\varphi}^2 =$$
$$= M_1 - M_2\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

36.18-nji mesele. Kriwoşip mehanizmi m_1 massaly porşenden, m_2 massaly *AB* şatundan, *OB* kriwoşipden, wal we aýlanma tigirlerden ybarat. Şatunyň *C* massalar merkezine görä inersiýa momenti J_2; *OB* kriwoşip, wal we aýlanma tigirleriň oka görä inersiýa momenti J_3; porşeniň meýdany – Ω; porşene täsir edýän basyş – p; şatunyň uzynlygy -l; şatunyň massalar merkezi bilen *A* nokadyň arasyndaky uzaklyk -s; *OB* kriwoşipiň uzynlygy -r; wala täsir edýän garşylyk momenti -M. Şatunyň aýlanma burçy ψ-ni kiçi diýip hasaplap, ýagny $\sin\psi = \psi$ we $\cos\psi = 1$ diýip kabul edip, mehanizmiň hereket deňlemesini düzmeli; kriwoşipiň φ aýlanma burçuny umumylaşdyrylan koordinata diýip kabul etmeli (*36.13-nji surat).*

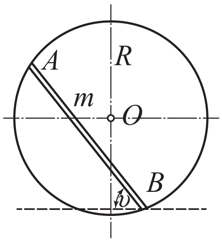


36.13-nji surat

Jogaby: $\left[(m_1+m_2)r^2\sin^2\varphi+(J_2+m_1s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos^2\varphi+J_3\right]\ddot{\varphi}+$

$$+\left[(m_1+m_2)r^2-(J_2+m_1s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi}^2=-M+p\Omega r\sin\varphi.$$

36.19-njy mesele. Uçlary R radiusly ýylmanak gorizontal töwerek boýunça typýan, uzynlygy $2a$ we massasy M bolan birjynsly steržende m massaly maddy nokat υ hemişelik tizlik bilen hereket edýär. Sterženiň hereketini kesgitlemeli. Başlangyç pursatda maddy nokat sreženiň massalar merkezinde durýar (*36.14-nji surat*).



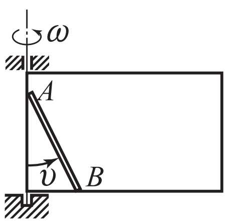
36.14-nji surat

Jogaby:

$$\upsilon-\upsilon_0=C\operatorname{arctg}\frac{\upsilon t}{\sqrt{R^2-a^2+\dfrac{M}{m}\left(R^2-2\dfrac{a^2}{3}\right)}},$$

bu ýerde υ_0 we C – erkin hemişelikler.

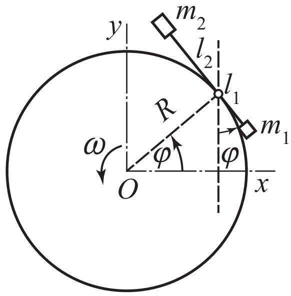
36.20-nji mesele. Uzynlygy $2a$ we massasy M bolan birjynsly agyr AB sterženiň uçlary çarçuwanyň (ramkanyň) gorizontal we wertikal oklary boýunça sürtülmän typýar. Ol ramka wertikal tarapynyň daşynda ω hemişelik burç tizligi bilen aýlanýar. Sterženiň hereket deňlemesini düzmeli we göräli deňagramlylyk yagdaýyny kesgitlemeli (*36.15-nji surat*).



36.15-nji surat

Jogaby: $\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\upsilon}-\frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\upsilon\cos\upsilon-M\,ga\sin\upsilon=0,$

bu ýerde υ – steržen bilen wertikalyň arasyndaky burç. Deňagramlylyk ýagdaýynda $\upsilon=0$ (durnuksyz deňagramlylyk).



36.16-njy surat

36.21-nji mesele. Uçlarynda toplanan m_1 we m_2 massalary bolan ryçag R radusly birjynsly diskiň töweregine şarniriň kömegi bilen birikdirilen. Massalardan şarnire çenli bolan aralyklar, degişlilikde l_1 we l_2. Disk öz tekizligine perpendikulýar bolan wertikal okuň daşynda ω burç tizlik bilen aýlanýar. Ryçagyň hereket deňlemesini düzmeli we göräli deňagramlylyk yagdaýyny kesgitlemeli. Ryçagyň massasyny hasaba almaly däl. Ryçagyň aýlanma oky diskiň aýlanma okuna parallel. Şeýle hem, meseläni disk wertikal tekizlikde aýlanýar diýip hasap edip (agyrlyk güýjüniň işini hasaba alyp) hem çözmeli (*36.16-njy surat*).

Jogaby: Wertikal okuň daşynda aýlanmak üçin:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0;$$

$m_1 l_1 = m_2 l_2$ bolanda ryçag tapawutsyz göräli deňagramlylykda bolýar. $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ bolanda iki sany göräli deňagramlylyk bar: $\psi = \omega t \pm \dfrac{\pi}{2}$, ýagny ryçag radius boýunça ugrukdyrylan. Gorizontal okuň daşynda aýlanmak üçin

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) +$$
$$+(m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin\psi = 0;$$

$m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ bolanda göräli deňagramlylygyň bolmagy mümkin däl.

36.22-nji mesele. M massaly ýuka disk öz tekizligi bilen gorizontal tekizlik boýunça sürtülmän taýýar. Diskiň büdür-südür üstki ýüzünde m massaly maddy nokat hereket edýär. Nokadyň göräli hereketiniň disk bilen baglanan we başlangyjy diskiň massalar merkezinde bolan x we y dekart koordinatalaryndaky deňlemeleri $x = x(t)$ we $y = y(t)$ görnüşde berlen. Diskiň öz massalar merkezine görä inersiýa momenti J deň. Diskiň burç tizliginiň özgeriş kanunyny tapmaly Başlangyç pursatda disk gozganman dur.

Jogaby:

$$\left[J + \frac{mM}{m+M}(x^2 + y^2)\right]\dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{mM}{m+M}(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0),$$

bu ýerde $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ – nokadyň koordinatalarynyň we tizliginiň başlangyç pursatdaky proeksiýalarynyň bahalary, $\dot{\varphi}$ – diskiň burç tizligi.

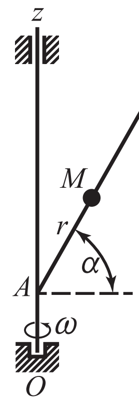
36.23-nji mesele. Deslapky meselede berlen diskde R radiusly töwerek boýunça maddy nokat $\upsilon = \alpha t$ göräli tizlik bilen hereket edýär. Diskiň hereket kanunyny tapmaly.

Jogaby: $$\varphi = -\frac{mM}{2(m+M)} \cdot \frac{Ra}{J + \frac{mM}{m+M}R^2} = \frac{\beta}{2R}t^2.$$

$$\xi = -\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2, \quad \eta = -\frac{mR}{m+M}\sin\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2,$$

bu ýerde φ – diskiň aýlanma burçy, ξ we η – başlangyjy ulgamyň massalar merkezinde bolan gozganmaýan dekart ulgamyna görä diskiň massalar merkeziniň koordinatalary.

36.24-nji mesele. Gozganmaýan wertikal okuň daşynda ω hemişelik burç tizligi bilen aýlanýan AB göni çyzykda M maddy nokat agyrlyk güýjüniň täsirinde hereket edýär. AB göni çyzyk gorizontal bilen α burç emele getirýär. Nokadyň hereket kanunyny tapmaly (*36.17-nji surat*).



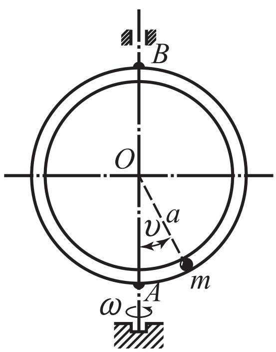
36.17-nji surat

Jogaby: Hereket edýän nokatdan göni çyzygyň wertikal bilen kesişýän nokadyna çenli bolan aralyk

$$r_1 = C_1 e^{\omega t\cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t\cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

bu ýerde C_1 we C_2 integrirlemäniň hemişelikleri.

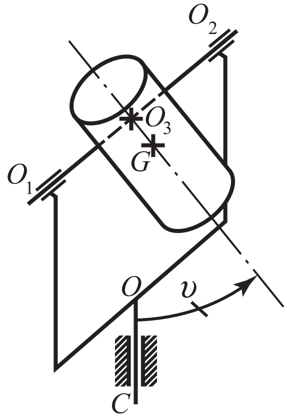
36.25-nji mesele. m massaly maddy nokat wertikal AB diametriň daşynda ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýan halka boýunça hereketlenýär. Halkanyň radiusy a deň. Nokadyň hereketiniň deňlemesini düzmeli we burç tizligini özgertmän saklamak üçin gerek bolan M momenti kesgitlemeli (*36.18-nji surat*).



36.18-nji surat

Jogaby:

$$\ddot{\upsilon}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\upsilon\right)\sin\upsilon=0,\quad M=2ma^2\sin\upsilon\cos\upsilon\cdot\omega\dot{\upsilon}.$$



36.19-njy surat

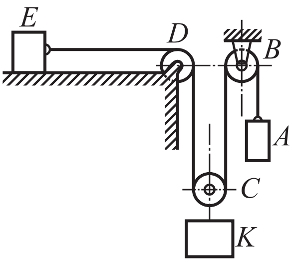
36.26-njy mesele. Massasy m bolan jisim gorizontal O_1O_2 okuň daşynda aýlanýar. O_1O_2 ok bolsa öz nobatynda wertikal OC okuň daşynda ω hemişelik burç tizlik aýlanýar. Jisimiň G massalar merkezi O_1O_2 göni çyzyga perpendikulýar göni çyzykdaky O_3 nokatdan l aralykda ýatyr. O_1O_2 we O_3G oklary jisimiň O_3 nokadyndaky inersiýanyň baş oklary diýip hasaplap, hereket deňlemesini düzmeli. Jisimiň baş oklara görä inersiýa momentleri A, B we C deň (*36.19-njy surat*).

Jogaby:

$$A\ddot{\upsilon}+\omega^2(C-B)\sin\upsilon\cos\upsilon=-mgl\sin\upsilon,$$

bu ýerde $\upsilon - O_1O_2$ okuň daşyndaky aýlanma burçy.

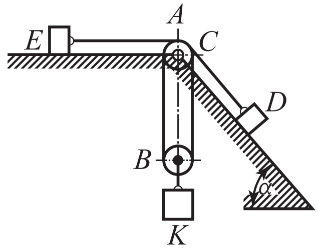
36.27-nji mesele. Ujuna m massaly A ýük berkidilen süýnmeýän ýüp gozganmaýan B blok arkaly geçýär, gozganýan C bloga oralyp ýokaryk, gozganmaýan D bloga göterilýär we gorizontal tekizlige parallel ýönelýär. Onuň bu ýerdäki ujuna massasy m bolan E ýük daňlan. C bloguň okuna massasy m_1 bolan K ýük berkidilen. E ýüküň gorizontal tekizlige typma sürtülme koeffisiýenti f deň. Ähli ýükleriň başlangyç tizlikleri nola deň bolsa, K ýüküň aşak düşmegi üçin haýsy şert ýerine ýetmeli? K ýüküň tizlenmesini tapmaly. Bloklaryň we ýüpüň massalaryny hasaba almaly däl (*36.20-nji surat*).



36.20-nji surat

Jogaby: $m_1 > m(1+f),\quad w=g\dfrac{m_1-m(1+f)}{m_1+2m}.$

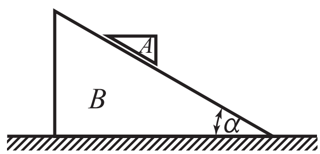
36.28-nji mesele Her biriniň massasy m bolan iki sany D we E ýükler süýnmeýän ýüpüň ujuna berkidilen. Bu ýüp E ýükden çykyp, A blok arkaly geçýär, soňra gozganýan B bloga oralyp geçip, ýokaryk, A blok bilen bir okda duran gozganmaýan C bloga gaýdyp gelýär we ýylmanak ýapgyt tekizlige parallel bolup geçýär. Şu ýerde onuň ujuna D ýük berkidilýär. Ýapgyt tekizlik gorizont bilen α burçy emele getirýär. Gozganýan B bloga massasy m_1 bolan K ýük berkidilen. E ýüküň gorizontal tekizlige typma sürtülme koeffisiýenti f deň. Bloklaryň we ýüpüň massalaryny hasaba almaly däl. K ýüküň aşak düşmegi üçin haýsy şert ýerine ýetmeli? Bu ýüküň tizlenmesini tapmaly. Başlangyç pursatda ähli ýükleriň tizlikleri nola deň (*36.21-nji surat*).



36.21-nji surat

Jogaby: $m_1 > m(f + \sin\alpha)$, $\omega = g\dfrac{m_1 - m(f + \sin\alpha)}{m_1 + 2m}$.

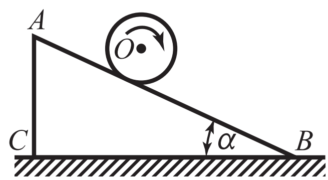
36.29-njy mesele. Massasy m bolan A prizma gorizont bilen α burçy emele getirýän m_1 massaly B prizmanyň ýylmanak gapdal üstünde taýýar. B prizmanyň tizlenmesini kesgitlemeli. Gorizontal tekizlik bilen B prizmanyň arasyndaky sürtülmäni hasaba almaly däl (*36.22-nji surat*).



36.22-nji surat

Jogaby: $\omega = g\dfrac{m\sin 2\alpha}{2(m_1 + m\sin^2\alpha)}$.

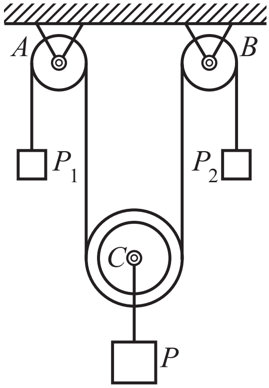
36.30-njy mesele. Ýylmanak gorizontal tekizlige goýlan m massaly üçburçly AB prizma bu tekizlikde sürtülmesiz typýar. Prizmanyň AB granynda massasy m_1 bolan birjynsly tegelek silindr typman tigirlenýär. Prizmanyň tizlenmesini kesgitlemeli (*36.23-nji surat*).



36.23-nji surat

Jogaby: Tizlenme çep tarapa ugrukdyrylan we $g\dfrac{m_1\sin 2\alpha}{2(m_1 + m\sin^2\alpha)}$ deň.

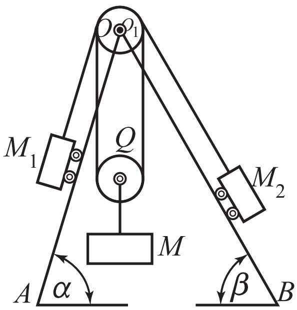
36.31-nji mesele. Gozganýan C blogy saklap duran ýüp gozganmaýan okly A we B bloklar arkaly geçýär. Ýüpüň bloklaryň



36.24-nji surat

üstünde bolmadyk bölekleri wertikal we blokdan massasy m = 4 *kg* bolan daş asylan. Ýüpüň uçlaryna massalary m_1 = 2 *kg* we m_2 = 3 *kg* bolan ýükler berkidilen. Bloklar bilen ýüpüň massasyny we oklardaky sürtülmäni hasaba alman, ýükleriň üçüsiniň hem tizlenmelerini kesgitlemeli (*36.24-nji surat*).

Jogaby: $\omega = \frac{1}{11}g$ (ýokaryk), $\omega_1 = \frac{1}{11}g$ (ýokaryk), $\omega_2 = \frac{3}{11}g$ (aşak).



36.25-nji surat

36.32-nji mesele. Birmeňzeş m massaly M_1 we M_2 ýükler wertikal tekizlikde gorizont bilen α we β burç emele getirýän iki sany ýapgyt *OA* we *OB* ugrukdyryjylarda hereket edýärler. Bu ýükleri birleşdirýän ýüp *M* ýükden çykyp, gorizontal okuň daşynda aýlanýan *O* blok we *m* massaly *M* ýüki äkidiji gozganýan *Q* şkiw arkaly geçýär. Soňra *O* bloguň okuna ornaşdyrylan O_1 blok arakaly geçip, M_2 ýüke barýar. O_1 we *O* bloklar bir okda diýip, sürtülmäni, şeýle hem, bloklaryň, şkiwiň ýüpüň massasyny hasaba alman, *M* ýüküň ω tizlenmesini kesgitlemeli (*36.25-nji surat*).

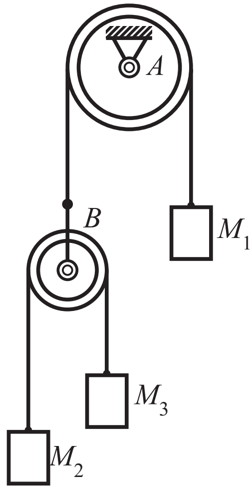
$$\textit{Jogaby: } \omega = g\frac{m_1 - m[\sin\alpha + \sin\beta]}{m_1 + 2m}.$$

36.33-nji mesele. Deslapky meseledäki M_1 we M_2 ýükleri her biriniň massasy m we radiusy r bolan katoklar bilen çalşyryp çözmeli. Katoklary tutuş birjynsly tegelek diskler diýip hasaplamaly. Katoklaryň ýapgyt tekizlikleriň üstündäki tigirlenme sürtülme koeffisiýenti f deň. Ýüpler katoklaryň oklaryna berkidilen.

$$\textit{Jogaby: } \quad \omega = g\frac{m_1 - m\left[\sin\alpha + \sin\beta + \frac{f_t}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}{m_1 + 2m}.$$

36.34-nji mesele. Gozganmaýan *A* we gozganýan *B* bloklar hem-de süýnmeýän ýüpler bilen suratda görkezilişi ýaly asylan M_1

we M_2, we M_3 ýükler ulgamy berlen. Ýükleriň massasy, degişlilikde m_1, m_2 we m_3 deň, bu ýerde $m_1 < m_2 + m_3$ we $m_2 \neq m_3$. Bloklaryň massalaryny hasaba almaly däl. Ýükleriň başlangyç tizlikleri nol bolanda m_1, m_2 we m_3 massalaryň haýsy gatnaşygynda M_1 ýük aşak düşer (*36.26-njy surat)?*



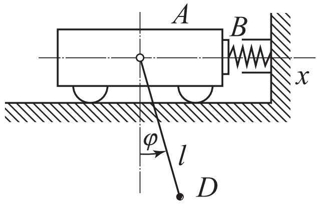
36.26-njy surat

Jogaby: $m_1 > \dfrac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}$ bolanda.

36.35-nji mesele. Arabajygyň platformasynda tegelek silindr typman tigirlenýär. Eger arabajygyň tigirleri gorizonta α burç bilen ýapgytlanan we platforma parallel bolan tekizlik boýunça typman tigirlenip düşse, arabajygyň tizlenmesini tapmaly. Silindriň emele getirijileri platformanyň iň uly ýapgyt çyzyklaryna perpendikulýar. Arabajygyň tigirsiz massasy M, ähli tigirleriň massasy m, silindriň massasy M_1. Tigirleri tutuş birjynsly tegelek diskler diýip hasaplamaly.

$$\textit{Jogaby:}\ \ \omega = \frac{6M + 6m + 2M_1}{6M + 9m + 2M_1} g \sin\alpha.$$

36.36-njy mesele. A arabajyk maýyşgak B daýanja urlanda sterženden asylan D ýük yrgyldap başlaýar. Eger m_1 – arabajygyň massasy, m_2 – ýüküň massasy, l – sterženiň uzynlygy, c bolsa B daýanç puržinynyň gatylyk koeffisiýenti bolsa, maddy ulgamyň hereketiniň differensial deňlemelerini düzmeli. Tigirleriň massasyny we ähli garşylyk güýçleri hasaba almaly däl. x okuň hasap başlangyjyny deformirlenmedik puržinyň çep ujynda almaly. B daýanç bolmadyk ýagdaýynda ýüküň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Sterženiň massasyny hasaba almaly däl (*36.27-nji surat*).



36.27-nji surat

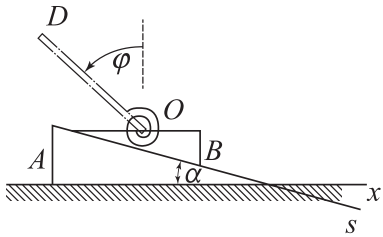
Görkezme. $\dot{\varphi}^2$ köpeldijini saklaýan agzalary hasaba almaly däl, $c = 0$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ diýip hasaplamaly.

Jogaby: $(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -cx,$

$$\ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

36.37-nji mesele. Gozganmaýan A prizmanyň gorizonta α burç bilen ýapgytlanan granynda m_2 – massaly B prizma taýýar. B prizma O silindrik şarnir we gatylyk koeffisiýenti c bolan spiral puržinyň kömegi bilen l uzynlykdaky, m_1 – massaly inçe birjynsly OD steržen birikdirilen. Steržen O nokat arkaly suratyň tekizligine perpendikulýar geçýän okuň daşynda yrgyldaýar. B prizmanyň we OD sterženiň orny s we φ koordinatalar arkaly anyklanýar. Sürtülme güýçlerini hasaba alman, B prizma we sterženden düzülen maddy ulgamyň hereketiniň differensial deňlemelerini ýazmaly. Eger $m_1 gl\cos^2\alpha < 2c$ bolsa, OD sterženiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*36.28-nji surat*).

Görkezme. $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(\varphi + \alpha) \approx \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$ diýip hasaplamaly, soňra $\dot{\varphi}^2$ we $\varphi\cdot\ddot{\varphi}$ köpeldijini saklaýan agzalary hasaba almaly däl.



36.28-nji surat

Jogaby:

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} + \frac{1}{2}m_1 lg\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha) - \frac{1}{2}m_1 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha) =$$

$$= (m_1 + m_2)g\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_1 l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha) = \frac{1}{2}m_1 gl\sin\varphi - c\varphi,$$

$$T = 2\pi l\sqrt{\frac{m_1[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2]}{6(m_1+m_2)(2c - m_1 gl\cos^2\alpha)}}.$$

36.38-nji mesele. Deslapky, 36.35-nji meseläni m_3 – massaly A prizma ýylmanak gorizontal tekizlikde hereketlenýär diýip çözmeli. Onyň orny x koordinata bilen kesgitlenýär.

Jogaby: $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha+$

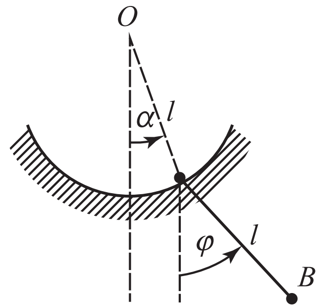
$$+m_1\frac{1}{2}\sin\varphi-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos=0,$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}\cos\alpha(m_1+m_2)\ddot{s}+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha)-$$

$$-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)=(m_1+m_2)g\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1l\ddot{x}\cos\varphi-\frac{1}{2}m_1l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}m_1gl\sin\varphi-c\varphi.$$

36.39-njy mesele. Massasy m_1 bolan A maddy nokat wertikal tekizlikde gozganmaýan l radiusly silindriň içki üstünde hereketlenýär. m_2 massaly, l uzynlykdaky AB sterženiň kömegi bilen A nokada birikdirilen B maddy nokat suratyň tekizligine perpendikulýar A okuň daşynda yrgyldaýar. A we B nokatlaryň orunlary wertikala görä hasaplanýan α we φ burçlaryň kömegi bilen kesgitlenýär. Ulgamyň hereketiniň differensial deňlemelerini düzmeli. Ulgamyň kiçi yrgyldylarynyň differensial deňlemelerini ýazmaly. AB sterženiň massasyny hasaba almaly däl (*36.29-njy surat*).



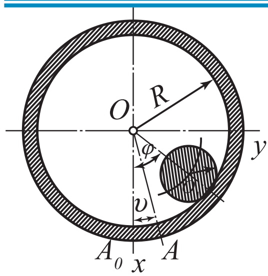
36.29-njy surat

Görkezme. $\dot{\varphi}^2$ we $\dot{\alpha}^2$ köpeldijileri bolan agzalary hasaba almaly däl, şeýle hem, $\sin(\varphi-\alpha)=\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx 1$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\varphi\approx\varphi$ diýip hasaplamaly.

Jogaby:

$$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)=$$
$$=-(m_1+m_2)g\sin\alpha,$$

$$l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha)=-g\sin\varphi,$$
$$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}=-(m_1+m_2)g\alpha,\quad l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}=-g\varphi.$$



36.30-njy surat

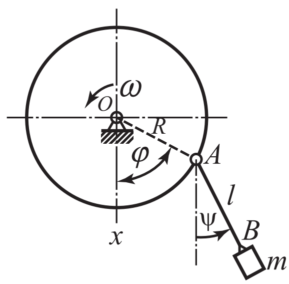
36.40-njy mesele. Massasy m we radiusy r bolan büdür-südür silindr M massaly we R radiusly içi boş silindriň içki üsti boýunça typman tigirlenýär. Içi boş silindr özüniň gorizontal ýerleşen O okunyň daşynda aýlanma herekete eýe bolýar. Silindrleriň öz oklaryna görä inersiýa momentleri MR^2 we $\frac{1}{2}mr^2$ deň. Ulgamyň hereketiniň deňlemelerini düzmeli we olaryň birinji integrallaryny tapmaly (*36.30-njy surat*).

Jogaby: $MR^2\dot{\upsilon} - \frac{1}{2}mR[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\upsilon}] = C_1$,

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\upsilon}^2 + \frac{1}{4}m[R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\upsilon}]^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2 - mg(R-r)\cos\varphi = C_2,$$

bu ýerde φ – silindrleriň oklaryny birleşdirýän kesimiň aýlanma burçy, υ – daşky silindriň aýlanma burçy, C_1 we C_2 – integrirlemäniň hemişelikleri.

36.41-nji mesele. Massasy M bolan R radiusly birjynsly disk özüniň gorizontal O okunyň daşynda aýlanma herekete eýe bolýar. Diske uzynlygy l bolan AB ýüpden m massaly maddy nokat asylan. Ulgamyň hereketiniň deňlemelerini düzmeli (*36.31-nji surat)*.



36.31-nji surat

Jogaby:

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi} + mRl\cos(\varphi - \psi)\ddot{\psi} + mRl\sin(\varphi - \psi)\dot{\psi}^2 +$$

$$+mgR\sin\varphi = 0,$$

$$R\cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} + l\ddot{\psi} - R\sin(\varphi - \psi)\dot{\varphi}^2 + g\sin\psi = 0,$$

bu ýerde φ – diskiň aýlanma burçy, ψ – ýüpüň wertikaldan gyşarma burçy.

36.42-nji mesele. Deslapky meseledäki gürrüňi edilen ulgamdaky disk ω hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Maddy nokadyň hereket deňlemesini düzmeli.

Jogaby: $\ddot{\psi} - \omega^2 \frac{R}{l}\sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l}\sin\psi = 0.$

36.43-nji mesele. Maýyşgak ýüpden asylan m massaly matematiki maýatnigiň hereket deňlemesini düzmeli. Deňagramlylyk ýagdaýynda ýüpüň uzynlygy l, onuň gatylygy c. Kiçi yrgyldylaryň ýagdaýy üçin maýatnigiň hereketini tapmaly. Umumylaşdyrylan oordinatalar görnüşinde maýatnigiň wertikaldan gyşarma φ burçuny we ýüpüň z görä uzalyşyny almaly.

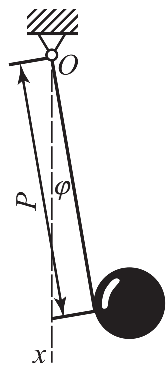
Jogaby: $(1+z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \quad \ddot{z} - (1+z)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}z +$

$$+\frac{g}{l}(1-\cos\varphi) = 0,$$

$$z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \alpha\right), \;\; \varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{t}}t + \beta\right),$$

bu ýerde A, α, B, β – islendik hemişelikler.

36.44-nji mesele. Inçe süýnmeýän ýüpüň bir ujy R radiusly birjynsly tegelek silindriň daşyna oralan, ikinji ujy gozganmaýan O nokada berkidilen. Silindr ýüpi çözläp aşak düşýär we bir wagtda ýüp asylan nokatdan geçýän gorizontal okuň daşynda yrgyldaýar. Ýüpüň massasyny we silindriň ölçeglerini hasaba alman, silindriň hereketiniň differensial deňlemesini düzmeli (*36.32-nji surat*).



36.32-nji surat

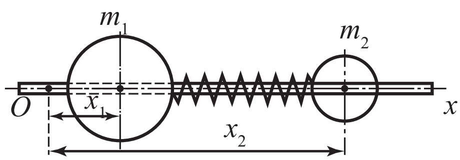
Jogaby: $\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi,$

$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho\sin\varphi,$ bu ýerde ρ – ýüpüň silindrden çözlenen böleginiň uzynlygy, φ – ýüp bilen wertikalyň arasyndaky burç.

36.45-nji mesele. Deslapky meseläniň çözüwiniň netijelerinden peýdalanyp hereketiň deňagramly ýagdaýyndan başlanan we $t = 0$ pursatda $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ bolsa, silindriň kiçi yrgyldylarynyň differensial deňlemesini düzmeli.

Jogaby: $\frac{d}{dt}[F^2(t)] + gF(t) = 0$, bu ýerde $F(t)\frac{gt^2}{3} + \rho_0 - R\varphi_0$.

36.46-njy mesele. Ýylmanak gorizontal steržene (Ox ok) geýdirilen iki sany m_1 we m_2 massadan ybarat bolan ulgamyň hereketini kesgitlemeli. Massalar gatylygy c bolan puržin bilen baglanan we steržen boýunça öňe hereket edýär. Puržin süýnmedik ýagdaýynda massalar merkeziniň arasyndaky uzaklyk l deň. Ulgamyň $t = 0$ bolanyndaky başlangyç orny massalar merkezleriniň we tizlikleriniň aşakdaky bahalary bilen kesgitlenýär: $x_1 = 0$, $\dot{x}_1 = u_0$, $x_2 = l$, $\dot{x}_2 = 0$. (*36.33-nji surat*)

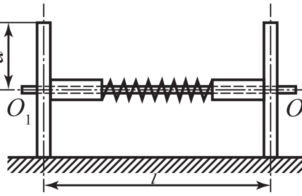


36.33-nji surat

$$\textit{Jogaby:}\quad x_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left\{m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k}\sin kt\right\},$$

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1 + m_2}\left\{m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k}\sin kt\right\}, \quad k = \sqrt{c}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

36.47-nji mesele. Her biriniň radiusy a bolan iki sany birmeňzeş tigirlerden ybarat ulgam gorizontal tekizlik bilen tigirlenýär. Tigirler özlerine perpendikulýar bolan l uzynlykdaky umumy O_1O_2 okuň daşynda bir-birinden aýratynlykda, özbaşdak aýlanýarlar. Tigirler burulmaga işleýän, gatylygy c bolan puržin bilen baglanan. Her tigriň massasy M-e deň.Tigriň aýlanma okuna görä inersiýa momenti C, tigriň öz diametrine görä inersiýa momenti A deň. Ulgamyň hereket deňlemelerini düzmeli we $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$, (φ_1, φ_2 – tigirleriň aýlanma burçlary) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hereketi kesgitlemeli. Okuň massasyny hasaba almaly däl (*36.34-nji surat*).

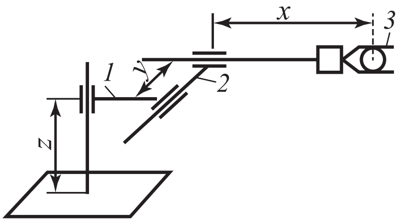


36.34-nji surat

Jogaby: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right), \quad \varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right),$

$$k = \sqrt{\frac{2c}{Ma^2 + C + 4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}.$$

36.48-nji mesele. Robot-manipulýatoryň mehanizmi wertikal süýşürme sütüninden (kolonnasyndan), *1* – we *2* – zwenolardan düzülen gorizontal süýşürme gurnawyndan we gorizontal öňe saýlanyp duran *3* – tutguçly goldan düzülen. Mehanizmiň zwenolarynyň massalary m_1, m_2 we m_3 deň. Öňe hereketleniji jübütlere goýlan geçirijileriň döredýän hereketlendiriji güýçleri, degişlilikde F_{01}, F_{12} we F_{23} deň. Mehanizmiň hereketiniň differensial deňlemelerini düzmeli. Sürtülmäni hasaba almaly däl (*36.35-nji surat*).

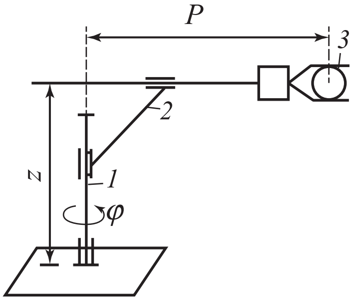


36.35-nji surat

Jogaby: $m_3\ddot{x} = F_{23}, \ (m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12},$

$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$

36.49-njy mesele. Robot-manipulýatoryň mehanizmi *1* – aýlanyjy kolonna, wertikal süýşme gurnawy we öňe saýlanyp duran *3* – tutgyçly goldan ybarat. *1* – zwenonyň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J_1; *2* – zwenonyň massasy m_2, aýlanma okuna görä inersiýa momenti J_2; hereketlenýän *3* – goluň tutgujy bilen bilelikdäki massasy



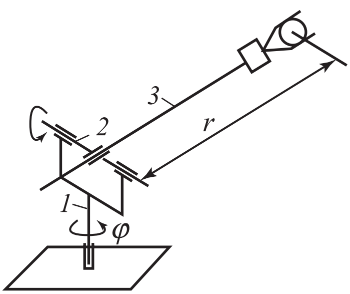
36.36-njy surat

m_3, massalar merkezinden aýlanma okuna çenli aralyk ρ, merkezi oka görä inersiýa momenti J_3. Aýlanma okuna M moment goýlan. Öňe hereketlenýän jübüt zwenolarda geçirijileriň ýerine ýetirýän güýçleri, degişlilikde F_{13} we F_{23} deň. Mehanizmiň hereketiniň differensial deňlemelerini düzmeli. Sürtülmäni hasaba almaly däl (*36.36-njy surat*).

Jogaby: $\frac{d}{dt}[(J_1 + J_2 + J_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}] = M,$

$$(m_2 + m_3)\,\ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g,\ m_3(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_{23}.$$

36.50-nji mesele. Robot-manipulýatoryň goluny alyp ýöreýän *1* – wertikal kolonnanyň φ burça aýlanmagy mümkin. Gol, tutgyjy bilen υ burça aýlanýar we r aralyga süýşýär. Wertikal kolonnanyň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J_1 deň; *2* – we *3* – zwenolary massalary m_2 we m_3 bolan l_2 we l_3 uzynlykly inçe birjynsly steržener diýip hasaplamaly, göçirilýän ýüküň massasy m. Wertikal aýlanma okuna M_υ moment, ikiji zwenonyň aýlanma okuna M_φ moment goýlan, geçirijiniň öňe hereketleniji jübüt zweosynda ýerine ýetirilýän hereketlendiriji güýç F_{23} deň. Mehanizmiň hereketiniň differensial deňlemelerini düzmeli. Sürtülmäni hasaba almaly däl (*36.37-nji surat*).



36.37-nji surat

Jogaby: $\frac{d}{dt}\left[\left(J_1 + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 + J(r)\sin^2\upsilon\right)\dot{\varphi}\right] = M_\varphi,$

$$\frac{d}{dt}(J(r)\dot{\upsilon}) - J(r)\dot{\varphi}^2\sin\upsilon\cos\upsilon = M_\upsilon\left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right]g\sin\upsilon,$$

$$(m_3 + m)\ddot{r}\left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right](\dot{\upsilon}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\upsilon) = F_{23} - (m_3 + m)g\cos\upsilon,$$

bu ýerde $J(r) = m_3\left(r^2 - rl_3 + \frac{l_3^2}{3}\right) + mr^2.$

36.51-nji mesele. Tigir gorizontal tekizlikde typman tigirlenýär. Tigriň radiusy *a,* massasy *M* deň. Tigriň tigir merkezinden onuň tekizligine perpendikulýar geçýän oka görä inersiýa momenti *C*, tigriň öz diametrine görä inersiýa momenti bolsa *A* deň. Tigriň hereketiniň deňlemelerini düzmeli.

Görkezme. Bigolonom ulgamlar üçin Lagranžyň köpeldilijili deňlemelerinden peýdalanmaly.

Jogaby: $\frac{d}{dt}(A\dot{\psi}\sin^2\upsilon) - C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\upsilon)\dot{\upsilon}\sin\upsilon = 0,$

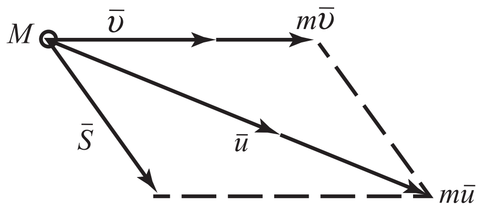
$$(C + ma^2)\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos) - ma^2\dot{\upsilon}\dot{\psi}\sin\upsilon = 0,$$

$$(A + ma^2)\ddot{\upsilon} - A\dot{\psi}^2\sin\upsilon\cos\upsilon + (C + ma^2)(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\upsilon)\dot{\psi}\sin\upsilon =$$
$$= - mga\cos\upsilon,$$

bu ýerde φ – tigriň öz tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlanma burçy; υ – tigriň tekizliginiň gorizonta gyşarma burçy; ψ – tigriň galtaşma nokady we tigriň diametri arkaly geçýän wertikal tekizligiň azimuty.

37. Urgy nazaryýeti. Umumy düşünjeler

Hereket edýän jisimiň başga bir hereketdäki ýa-da dynçlykdaky jisim bilen çakyşmagyna **urgy** diýilýär. Çekijiň çüý kakmagy, jisimiň ýere gaçmagy, teplowoz siltäninde wagonlaryň bir-birine urulmagy we şuňa meňzeşler muňa mysal bolup biler. Urguda tizligiň üýtgemegi örän gysga wagtda (sekundyň müňden ýa-da on müňden bir böleginde) bolup geçýänligi üçin, tizlenme (ýa-da haýallanma) örän uly bolýar. Şoňa görä-de urguda döreýän güýçler hem örän uly bolýar. Başga güýçlerden tapawutlylykda, urguda döräp, çaknyşýan jisimlere örän gysga wagtda täsir edýän we juda uly baha alýan güýçlere **urgy güýçleri** ýa-da **pursat güýçleri** diýilýär. Çaknyşýan jisimlere goýulýan «adaty» diýilýän güýçler (agyrlyk güýji, sürtülme güýji we ş.m) urgy güýçlerden has kiçi bolup, örän gysga urgy wagtynda jisimlere täsirleriniň sähelçeligi üçin, olary hasaba almaýarlar. Urgy wagtynyň kiçiligi sebäpli, urgy güýjüni ölçemek üçin statiki usul hem (dinamometr bilen), dinamiki usul hem (döreýän tizlenmesi bilen) örän oňaýsyzdyr. Şol sebäpli urgy güýçlerini häsiýetlendirmek üçin, güýjüň ululygyny we ugruny alman, urgy wagtynda şol güýjüň impulsynyň ululygyny we ugruny alýarlar. Urgy wagtynda urgy güýjüniň $\overline{S}$ impulsyna **urgy impulsy** ýa-da gysgaça **urgy** dilýär.



37.1-nji surat

Goý, $\overline{\upsilon}$ tizik bilen barýan *m* massaly *M* nokada $\overline{P}$ pursat güýji täsir etsin. Örän gysga $\overline{P}$ pursatdaky τ urgy wagtyndaky täsirden soň, nokat $\overline{u}$ tizligi alýar (*37.1-nji surat*).

Maddy nokadyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky *(13.1-nji bölüm)* teoremany ulanyp, alarys:

$$m\overline{u} - m\overline{\upsilon} = \overline{S},$$

bu ýerde $m\overline{u}$ – nokadyň urgudan soňky hereket mukdary, $m\overline{\upsilon}$ – nokadyň urgudan öňki hereket mukdary, $\overline{S}$ – urgy impulsy (urgy).

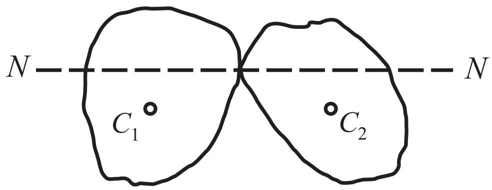
Şeýlelikde, ***material nokada goýlan urgy impulsynyň (urgynyň) wektory, nokadyň urga çenli we urgudan soňky hereket mukdarlarynyň wektorlarynyň geometrik tapawutlary bilen kesgitlenilýär.***

$\overline{P}$ güýjüň τ urgy wagtyndaky impulsy (13.4) formula bilen kesgitlenilýär:

$$\overline{S} = \int_0^\tau \overline{P}dt.$$

Ähli jisimleriň urgy wagtynda deformirlenip, urgudan soň belli bir derejede başky şekillerini dikeldýändikleri tejribeden bellidir.

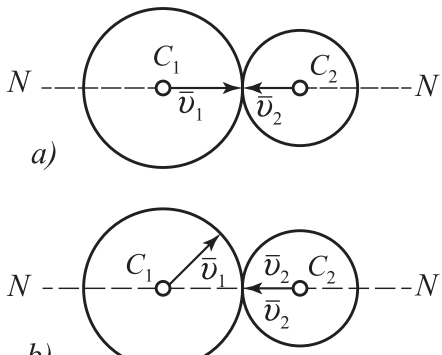
Deformirleýji güýjüň täsiri aýrylanda, jisimiň başdaky formasyny dikeldijilik ukybyna onuň **maýyşgaklygy** diýilýär. Maýyşgak däl, maýyşgak we örän maýyşgak jisimleri tapawutlandyrýarlar. Maýyşgak däl jisimler urguda alan sypatlaryny üýtgetmeýärler. Plastilin muňa mysal bolup biler. Hakykatda, doly manysynda, maýyşgak däl we örän maýyşgak jisimler tebigatda bolmaýarlar. Ähli jisimlerde maýyşgaklyk bar bolup, käbirinde ulurak, başgasynda kiçiräk maýyşgaklyk derejesi duýulýar. Ýokardaky bölünişik urgyny öwrenmek üçin we alnan netijeleri durmuşda ulanmak üçin edilýär. Urgy hadysasy urulýan jisimleriň maýyşgaklygyndan daşary urgynyň görnüşlerine-de bagly bolýar.



37.2-nji surat

Çaknyşýan jisimleriň ilki bilen duşuşan nokadynyň üstünden geçip, jisimleriň ikisiniň hem üstüniň normaly boýunça ugrukdyrylan NN göni çyzyga *(37.2-nji surat)* **urgynyň çyzygy ýa-da urgynyň normaly diýilýär.**

Eger urgy pursadynda iki jisimiň hem C_1 we C_2 agyrlyk merkezleri urgy çyzygynda ýatan bolsalar *(37.3-nji a we b suratlar)*, beýle urga **merkezi urgy** diýilýär. Şeýle şert ýerine ýetmeýän urga **merkezi däl urgy** diýilýär.

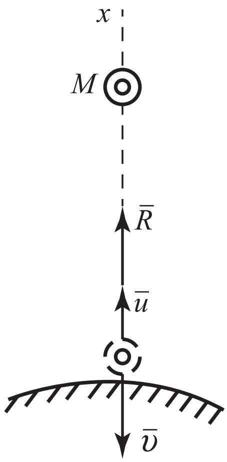


37.3-nji surat

Eger urgynyň öň ýanynda agyrlyk merkezleriniň $\overline{\upsilon}_1$ we $\overline{\upsilon}_2$ tizlikleri urgy çyzygynda ýatan bolsalar *(37.3-nji a surat)*, onda beýle urga **göni urgy**, şert ýerine ýetmedik ýagdaýyndaky urga *(37.3-nji b surat)* **gyşyk urgy** diýilýär.

Biz geljekde göni we merkezi urgulara garajakdyrys. Bir gönüden barýan birjynsly iki şaryň urgusy muňa mysal bolup biler.

37.1. Şaryň gozganmaýan üste urgusy. Dikeldiji koeffisiýent



37.4-nji surat

Goý, m massaly M şarjagaz gozganmaýan tekiz üste normal boýunça gaçsyn (*37.4-nji surat*). Şarjagaz $\overline{\upsilon}$ tizlik bilen üste galtaşan pursatynda urgy döreýär.

Urgy pursatynda şarjagazdaky $T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ kinetik energiýanyň hasabyna iki jisimde-de, ýagny şarjagazda-da, üstde-de deformasiýa döreýär. Netijede üstüň normal bilen gönügen $\overline{R}$ reaksiýasy döreýär. Şu reaksiýalaryň moduly deformasiýanyň başlan pursadyndan, tä şarjagazyň tizligi nola öwrülýänçä we soňraky deformasiýa togtaýança, noldan başlap iň uly (maksimal) bahasyna çenli örän çalt ösýär.

Eger şarjagaz we üst örän maýyşgak däl materialdan ýasalan bolsalar (mysal üçin, plastilinden), onda şarjagaz üste degip deformirlenýär we hereketden galýar. Şunuň bilenem urgy hadysasy gutarýar. Eger şarjagaz we üst maýyşgak materialdan bolsalar, onda urgy hadysasynyň ikinji döwrüne girişýär. Deformasiýa kesilenden soň maýyşgak şarjagaz we üst özleriniň urga çenli şekillerini dikeltmäge başlaýarlar. Reaksiýa güýji üznüksiz kemelýän hem bolsa, şarjagaza täsiri dowam edýär. Şarjagaz üstden aýrylýar, tizliginiň ugry tersine öwrülýär we noldan $\overline{u}$ ululyga çenli ösýär. Şunuň bilen hem urgy hadysasy tamamlanýar.

Tizligiň ululygynyň urgudan soňky u bahasynyň, urgudan öňki υ bahasyndan hemişe kiçidigini tejribe görkezýär.

Jisimiň urgudan soňky we urgudan öňki tizlikleriniň absolýut bahalarynyň urgy çyzygyna proýeksiýalarynyň gatnaşygyna **dikeldiji koeffisiýent** *diýilýär.* Nýutonyň çaklamasyna görä, dikeldiji koeffisiýent berlen uruşýan jisimler üçin üýtgemeýän ululyk bolup, ol diňe jisimleriň maýyşgaklyk häsiýetine bagly bolýar.

Seredýän ýagdaýymyzda ikinji jisimiň tizligi urgudan öňem, soňam nola deň (üst hereketsiz bolany üçin). Dikeldiji koeffisiýenti k bilen belgilesek, ýokarky kesgitlemä görä:

$$k = \frac{u}{\upsilon}. \qquad (37.1)$$

Indi urguda şarjagaza täsir edýän üstüň reaksiýa güýjüniň ululygynyň $\overline{R}^*$ orta bahasyny tapalyň.

x ok üstüň daşky normaly bilen gönükdirilip (*37.4-nji surat*), şarjagazy maddy nokat diýip kabul edip, urgynyň her döwri üçin material nokadyň hereket mukdarynyň üýtgemegi baradaky (13.6) teoremany x oka proeksiýalary görnüşinde ýazalyň:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0_x} = S_x = \int_0^t F_x dt.$$

Urgynyň birinji döwrüniň başlangyjynda şarjagazyň tizliginiň x oka proýeksiýasy $\upsilon_{0_x} = -\upsilon_0$ döwrüň ahyrynda $\upsilon_x = 0$, şol döwürde üstüň reaksiýa güýji $F_x = R$ bolýar. Urgynyň birinji döwrüniň dowamlylygyny τ, urgy impulsynyň birinji döwür üçin x oka proýeksiýasyny S bilen belgiläp, aşakdakylary alarys:

$$m \cdot 0 - (-m\upsilon) = S_1 = \int_0^{\tau_1} Rdt \quad \text{ýa-da} \quad S_1 = m\upsilon.$$

Urgynyň ikinji döwrüniň başlangyjy üçin $\upsilon_{0x} = 0$, ahyry üçin $\upsilon_x = u$. Urgynyň ähli dowamlylygyny τ, ikinji döwür üçin urgy impulsynyň x oka proýeksiýasyny S_2 bilen belgiläp, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$mu - m \cdot 0 = S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau} Rdt \quad \text{ýa-da} \quad S_2 = mu.$$

Şeýlelikde, urgy döwründe üstüň reaksiýasynyň doly urgy impulsynyň ululygyny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

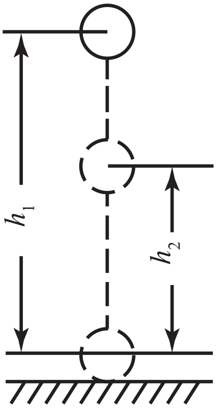
$$S = S_1 + S_2 = m\upsilon + mu = m\upsilon + mk\upsilon = m\upsilon\,(1 + k),$$

bu ýerde k – dikeldiji koeffisiýent. Eger τ urgy döwri üçin üstüň reaksiýasynyň üýtgeýän ortaça bahasyny $R^* = \text{const}$ bilen belgilesek, onda şol reaksiýanyň impulsy şeýle ýazylýar:

$$S = R^* \cdot \tau.$$

Iki ahyrky bahalary deňeşdirip, alarys:

$$R^* = \frac{m\upsilon(1+k)}{\tau}. \qquad (37.2)$$



37.5-nji surat

k dikeldiji koeffisiýenti kesgitlemek üçin 37.5-nji suratdaky ýaly tejribeden peýdalanýarlar.

Şary h beýiklikden, şaryň materialyndan edilen plitanyň üstüne erkin goýberýärler. Şar urgudan soň, h beýiklige galýar. Kinematikadan belli formulanyň esasynda

$$\upsilon = \sqrt{2gh_1}, \quad u = \sqrt{2gh_2}$$

bolany üçin:

$$k = \frac{u}{\upsilon} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \qquad (37.3)$$

Käbir materiallar üçin *k*-nyň bahalary aşakdaky tablisada berlen

Çaknyşýan materiallar	*k*
Alýuminiý şarlar özara çaknyşanda	0,230
Agaç şarlar özara çaknyşanda	0,500
Polat şarlar özara çaknyşanda	0,555
Pil dişinden ýasalan şarlar özara çaknyşanda	0,890
Çüýşe şarlar özara çaknyşanda	0,940

37.1-nji mesele. $P = 200\ g$ agramly polat şar polat plitanyň üstüne $h = 5\ m$ beýiklikden gaçyp, $h_2 = 154\ sm$ beýiklige bökýär. Eger urgynyň dowamlylygy $\tau = 0{,}0002\ s$ bolsa, dikeldiji koeffisiýenti, şeýle hem plitanyň urgy reaksiýasynyň ortaça bahasyny kesgitlemeli.

Çözülişi. (18.3) formuladan dikeldiji koeffisiýentini tapýarys:

$$K = k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{154}{500}} \backsimeq 0{,}55.$$

Şaryň ugrynyň başyndaky tizligini tapalyň:

$$\upsilon = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5} \approx 9{,}9\,{}^{m}\!/_{s}.$$

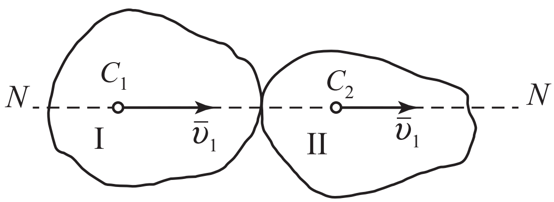
Plitanyň urgy reaksiýasynyň ortaça bahasyny (18.2) formuladan tapýarys:

$$R^{*} = \frac{0,2 \cdot 9,9 \cdot (1 + 0,55)}{9,81 \cdot 0,0002} \approx 1560\ kg.$$

Şeýlelikde, plitanyň urgy reaksiýasynyň ortaça bahasy şaryň agramyndan 8000 esse uly bolýar.

37.2. Öňe hereketdäki iki maýyşgak däl jisimleriň göni merkezi urgusy

Goý, m_1 we m_2 massaly iki sany I we II öňe hereket edýän jisimleriň urgy pursatynda C_1, C_2 agyrlyk merkezleriniň $\overline{\upsilon}_1$ we $\overline{\upsilon}_2$ tizlikleri jisimleriň galtaşma nokadyndaky umumy normalynda ýatsynlar (*37.6-njy surat).* Jisimleriň galtaşýan pursatynda urgy bolýar. I we II jisimleriň arasynda bir-birine deň we garşylykly reaksiýa güýçleri döreýär. Öwrenýän jisimlerimiziň maýyşgak däldigi sebäpli, urgudan soň deformirlenýärler, emma ozalky görnüşine dolanyp gelmän, $\overline{u}$ tizlik bilen hereket edýän bir jisime öwrülýärler.



37.6-njy surat

Berlen iki jisimi mehaniki sistema hasap etsek, olaryň arasynda döreýän güýçler içki güýçler bolýarlar. Sistema goýlan daşky güýçler bolsa, pursat güýçlerinden has kiçi bolandyklary üçin, olary hasaba almaýarlar. Hereket mukdarynyň oka proýeksiýasynyň saklanmak kanunyndan peýdalanýarys:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u = const \Rightarrow$$

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (37.4)$$

Eger II jisim urga çenli I jisime garşy hereketde bolsa, onda bu formulada $(-m_2\upsilon_2)$ almaly.

Hususy ýagdaýlar

1. Eger $m_1 = m_2 = m$ bolsa, onda

$$u = \frac{m(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{2m} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}.$$

2. Eger urga çenli bir jisim, mysal üçin, ikinji jisim hereketsiz bolsa, onda $\upsilon_2 = 0$ bolany üçin:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

3. Eger herketsiz jisimiň massasy urulýan jisimiňkiden has uly bolsa, $m_2 >> m_1$, onda u umumy tizlik nola deň bolýar:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m_1}{m_2}\cdot\upsilon_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Çalarak maýyşgak jisimler urgudan öňki görnüşlerine doly gelmeýärler. Netijede, jisimiň urgudan öňki kinetik energiýasynyň bir bölegi galyndy deformasiýa sarp bolýar. Elbetde, jisimler asla maýyşgak bolmasalar (maýyşgak däl urgy), onda kinetik energiýa doly ýitýär. Geliň, bu ýitgini kesgitläliň.

Urga çenli, çaknyşýan jisimleriň kinetik energiýasy aşakdaka deň:

$$T_0 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}.$$

Maýyşgak däl jisimler urgudan soň bir jisim ýaly bolup, (18.4) formuladan kesgitlenilýän $\bar{u}$ umumy tizlik bilen hereket edýär. Jisimleriň urgudan soňky kinetik energiýasyny ýazalyň:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\cdot u^2 = \frac{m_1 + m_2}{2}\cdot\frac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$
$$= \frac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Urguda ýiten kinetik energiýa aşakdaka deňdir:

$$T_0 - T = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Muny ýönekeýleşdireliň:

$$T_0 - T = \frac{m_1^2 \upsilon_1^2 + m_2 \upsilon_2^2 m_1 + m_1 m_2 \upsilon_1^2 + m_2^2 \upsilon_2^2 - m_1^2 \upsilon_1^2 - m_2^2 \upsilon_2^2 - 2 m_1 m_2 \upsilon_1 \upsilon_2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 (\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1 \upsilon_2)}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Şeýlelikde,

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (37.5)$$

Hususy ýagdaý. Eger urga çenli II jisimiň tizligi $\upsilon_2 = 0$ bolsa, ýagny hereketsiz bolsa, onda (37.5) formula şeýle üýtgeýär:

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Urga çenli sistemanyň kinetik energiýasy aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$T_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Diýmek, biri gozganmaýan iki maýyşgak däl jisimler çaknyşanda ýiten kinetik energiýa aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot T_0, \qquad (37.6)$$

bu ýerde T_0 we T – sistemanyň urga çenli we urgudan soňky kinetik energiýalary. Bu formulanyň sag tarapyny özgerdeliň:

$$T_0 - T = \frac{1}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} \cdot T_0.$$

Bu aňlatmadan, urguda ýitýän $T_0 - T$ kinetik energiýanyň urulýan jisimiň energiýasynyň bellibir bölegini düzýändigini we $\frac{m_1}{m_2}$ gatnaşyga baglydygyny görýäris. $\frac{m_1}{m_2}$ gatnaşyk kiçi boldugyça, urulýan jisimiň başdaky T kinetik energiýasynyň uly bölegi ýitýär. Mysal üçin, köprüni saklaýan betondan gazygy ýere kakmaga, urgudan soň saklanyp galan kinetiki energiýa peýdaly iş edýär. Bu peýdaly iş topragyň garşylygyny ýeňip, içine gazygy çümdürmekden ybaratdyr. Bu mysalymyzda kinetik energiýanyň urgynyň özünde ýitmegi (gazygy deformirlemek üçin) gerek däldigi we mümkin boldugyça kiçeldilmelidigi görünýär. Şol sebäpli, agzalan gazyklar ýere kakylanda urýan jisimiň m_1 massasy urulýan jisimiň m_2 massasyndan mümkin boldugyça uly bolmaly.

Metal süýndürileninde peýdaly iş üçin, ýagny metaly defomirlemek üçin, hut urguda ýitýän kinetik energiýa sarp bolýar. Şonuň üçin, metal süýndürileninde hereketsiz jisimiň m_2 massasy (ýagny, jisim bilen sandalyň bilelikdäki massasy) mümkin boldugyça urýan jisimiň (ýekedabanyň) massasyndan uly bolmaly.

37.2-nji mesele. Beton gazygy kakýan maşynyň tokmagynyň agramy $P_1 = 1500\ kg$ bolup, $h = 2\ m$ beýiklikden $P_2 = 400\ kg$ agramly gazygy kakýar. Urgyny maýyşgak däl hasap edip, tokmagyň peýdaly işini hem-de onuň peýdaly täsir koeffisiýentini hasaplamaly. Eger her urguda gazyk $l = 4\ sm$ çuňluga gidýän bolsa, topragyň garşylygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Urgynyň başynda tokmagyň kinetik energiýasy:

$$T_0 = P_1 h = 1500 \cdot 2 = 3000\ kg \cdot m.$$

Urguda ýitýän, ýagny gazygy deformirlemäge sarp bolan kinetik energiýany (gazygyň ýere gitmegi üçin peýdasyz energiýany) (18.6) formuladan kesgitleýäris:

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot T_0 = \frac{P_0}{P_1 + P_2} \cdot T_0 = \frac{400}{1500 + 400} \cdot 3000 \approx 632\ kg \cdot m.$$

Urgudan soň tokmak bilen gazygyň (olar bile hereket edýärler) kinetik energiýasy gazygy topraga çümdürmäge sarp bolýar. Diýmek, tokmagyň peýdaly işi şeýle tapylýar:

$$T = T_0 - (T_0 - T) = 3000 - 632 = 2368\ kg \cdot m.$$

Tokmagyň peýdaly täsir koeffisiýenti:

$$\eta = \frac{T}{T_0} = \frac{2368}{3000} \approx 0{,}79.$$

Topragyň $\overline{R}$ garşylyk güýjüni, material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi baradaky teoremany aňladýan formuladan tapalyň:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = A = -R \cdot l.$$

Bu deňlemede, gazygyň kinetik energiýasy hereketiň ahyrynda $\frac{m\upsilon^2}{2} = 0$, hereketiň başynda $T = \frac{m\upsilon_0^2}{2}$ bolýar. Onda

$$R = \frac{T}{l} = \frac{2368}{0,04} = 59200\ kg.$$

37.3. Maýyşgak jisimleriň göni merkezi urgusy

Ýokarda belläp geçişimiz ýaly, maýyşgak urgyny iki döwre bölmek bolýar. Birinji döwürde çaknyşýan jisimler edil maýyşgak däl urgudaky ýaly deformirlenýärler hem-de olaryň tizlikleri deňleşýär.

Ikinji döwürde (bu maýyşgak däl urguda bolmaýar) jisimler öz şekillerini bölekleýin ýa-da doly dikeldýärler. Şonuň üçin, biri-birine basyş dowam edip jisimleriň tizlikleri özgermesini dowam etdirýär. Ikinji döwrüň ahyrynda jisimler itekleşýärler we hersi öz tizligi bilen hereketlenýär. Bu tizlikleri $\overline{\upsilon}_1$ we $\overline{\upsilon}_2$ bilen belgiläliň.

Iki çakyşýan jisimi bir sistema hasap etsek, olaryň içki güýçlerine özara pursat güýçleri diýilýär. Daşky güýçler, urgy döwründe kiçi bolýandyklary üçin, hasaba alynmaýar. Bu ýerde sistemanyň hereket mukdarynyň saklanmasy hakyndaky formulany ulanýarys:

$$\sum m\upsilon_x = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 = const.$$

u_1, u_2 näbellileri tapmak üçin diňe bir deňleme ýeterlik däl. Ýetmeýän deňlemäni jisimleriň maýyşgaklyk häsiýetlerinden, ýagny dikeldiji koeffisiýentden almaly. Eger maýyşgak urgy göni merkezi urgy bolsa we iki jisim hem urga çenli, degişlilikde $\overline{\upsilon}_1$, $\overline{\upsilon}_2$ tizlik bilen ugurdaş barýan bolsalar, onda I jisimiň II jisime görä tizliginiň x oka proýeksiýasy $\upsilon_1 - \upsilon_2$ bolar. Şol jisimiň urgudan soňky göräli tizliginiň şol oka proýeksiýasy $u_2 - u_1$ bolýar. Dikeldiji koeffisiýent:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2}.$$

Ahyrky iki deňlemeden u_1 we u_2 tapýarys:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(m_1 - km_2)\cdot\upsilon_1 + m_2(1+k)\cdot\upsilon_2}{m_1 + m_2} \\ u_2 &= \frac{m_1(1+k)\cdot\upsilon_1 + (m_2 - km_1)\cdot\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (37.7)$$

Eger urga çenli jisimler garşylykly hereketde bolsalar, ahyrky formulada υ_2 tizligi göräli hasap etmeli.

Çaknyşýan jisimleriň urgudan soňky u_1 we u_2 tizlikleri belli bolsa, kinetik energiýanyň ýitgisini tapmak bolýar:

$$T_0 - T = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} - \frac{m_1 u_1^2}{2} - \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Bu formulada u_1 we u_2-niň bahalaryny goýup, özgertmeleri görkezmän, gutarnykly formulany taýýar görnüşde alýarys:

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot (1 - k^2) \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2. \qquad (37.8)$$

Eger urgy maýyşgak däl bolsa, onda $k = 0$ we (37.8) formula (37.5) formula öwrülýär. Eger urgy doly maýyşgak bolsa, onda $k = 1$ bolýar we (37.8) formula aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$T_0 - T = 0.$$

Örän maýyşgak jisimler üçin urgynyň birinji döwründe ýiten kinetik energiýa (jisimler deformirlendiler) urgynyň ikinji döwründe doly dikelýär (jisimler öňki kaddyna gelýärler).

37.3-nji mesele. $\upsilon_1 = 4 \frac{m}{s}$ tizlikli, $P = 40$ t agramly wagon, $P = 60$ t agramly duran wagony urýar. Iki ýagdaý üçin wagonlaryň tizliklerini kesgitlemeli:

1) urguda wagonlar bir-birine çatylyp, bile hereketlenýärler;

2) tirkeg enjamy bolmany üçin, urgyny buferiň puržinlary kabul edýärler. Puržinlary doly maýyşgak hasaplanmaly.

Çözülişi. Birinji ýagdaýda, wagonlar çaknyşandan soň, u umumy tizlikli bilelikdäki hereket berilýär. $\upsilon_2 = 0$ we urgyny maýyşgak däl hasap edip, (37.4) formuladan tapýarys:

$$u = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{P_1 \upsilon_1}{P_1 + P_2} = \frac{40 \cdot 4}{40 + 60} = 1{,}6 \; m/s.$$

Ikinji ýagdaýda urgy doly maýyşgak hasap edilýär. (37.7) formulada $k = 1$ we $\upsilon_2 = 0$ urgudan soňky tizliklerini tapýarys:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{(P_1 - P_2)\upsilon_1}{P_1 + P_2} = \frac{(40 - 60) \cdot 4}{40 + 60} = -\,0{,}2 \; m/s.$$

Minus alamat birinji wagonyň ters ugra gidýändigini görkezýär.

Ikinji wagonyň tizligi:

$$u_2 = \frac{2P_1 \upsilon_1}{P_1 + P_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 4}{40 + 60} = 3{,}2\ m/s.$$

37.4-nji mesele. Sandalyň ony saklaýan enjamlar bilen bilelikdäki agramy $P = 10\ t$. Süýülmeli metala $P = 2\ t$ agramly ýekedabanyň degen pursatyndaky tizligi $\upsilon_1 = 6\ m/s$.

1) Ýekedabanyň gyzgyn metala urgusyny doly maýyşgak däl hasap edip, onuň peýdaly işini, binýady (fundamenti) titretmäge sarp edýän işini we peýdaly täsir koeffisiýentini kesgitlemeli.
2) Süýülmeli metalyň dikeldiji koeffisiýenti $k = 0{,}6$ bolsa, ýekedabanyň peýdaly täsir koeffisiýentini kesgitlemeli.

Çözülişi.

1) Urgynyň başlan pursatynda ýekedabanyň kinetik energiýasy:

$$T_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} = \frac{P_1 \upsilon_1^2}{2g} = \frac{2000 \cdot 6^2}{2 \cdot 9{,}81} \approx 3670\ kg \cdot m.$$

Urguda ýitýän kinetik energiýa peýdaly işi kesgitleýär we metaly deformirlemäge sarp bolýar. Bu ýitgi maýyşgak däl urgy üçin (37.6) formula bilen kesgitlenýär:

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot T_0 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \cdot T_0 = \frac{10}{2 + 10} \cdot 3670 \approx 3058\ kg \cdot m.$$

Fundamenti titretmäge sarp edilýän iş ýekedabanyň we sandalyň urgudan soňky kinetik energiýasyna deň:

$$T = T_0 - (T_0 - T) = 3670 - 3058 = 612\ kg \cdot m.$$

Ýekedabanyň peýdaly täsir koeffisiýenti:

$$\eta = \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{3058}{3670} \approx 0{,}83.$$

2) $\upsilon_2 = 0$ diýip, (37.8) formuladan alýarys:

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot (1 - k^2) \cdot \upsilon_1^2.$$

Urgynyň başynda ýekedabanyň kinetik energiýasy:

$$T_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Bu ýagdaýda ýekedabanyň peýdaly täsir koeffisiýenti aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\eta = \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{m_2(1-k^2)}{m_1 + m_2} = \frac{P_2(1-k^2)}{P_1 + P_2} = \frac{10 \cdot (1 - 0,6^2)}{2 + 10} \approx 0,53.$$

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot (1 - k^2) \cdot \upsilon_1^2.$$

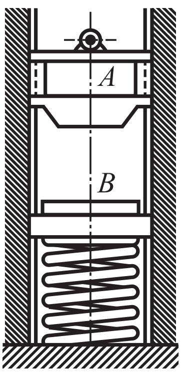
Urgynyň başynda ýekedabanyň kinetik energiýasy:

$$T_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Bu ýagdaýda ýekedabanyň peýdaly täsir koeffisiýenti aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\eta = \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{m_2(1-k^2)}{m_1 + m_2} = \frac{P_2(1-k^2)}{P_1 + P_2} = \frac{10 \cdot (1 - 0,6^2)}{2 + 10} \approx 0,53.$$

37.4. Özbaşdak çözmek üçin meseleler



37.7-nji surat

37.5-nji mesele. *A* kopýor tokmagy 4,905 *m* beýiklikden gaçyp, puržina berkidilen *B* sandaly urýar. Tokmagyň massasy 10 *kg*, sandalyň massasy 5 *kg* (*37.7-nji surat*). Tokmak sandala urlandan soň onuň bilen birlikde hereket etse, urgudan soň sandal hereketini haýsy tizlik bilen başlar?

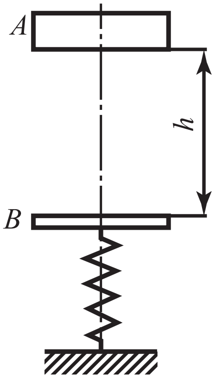
Jogaby: 6,54 *m/s.*

37.6-njy mesele. Massasy M_1 bolan *A* ýük başlangyç tizliksiz *h* beýiklikden M_2 massaly *B* plitanyň üstüne düşýär. Plita gatylyk koeffisiýenti *c* bolan puržina berkidilen. Dikeldiş koeffisiýentini nola deň diýip hasaplap, urgudan soň puržinyň gysylyşynyň *s* mukdaryny tapmaly (*37.8-nji surat*).

Jogaby:

$$s = \frac{M_1 g}{c} + \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + 2gh\frac{M_1^2}{c(M_1 + M_2)}}.$$

37.7-nji mesele. Dikeldiş koeffisiýentini tejribe ýoly bilen kesgitlemek üçin işledilýän esbapda derňelýän materialdan ýasalan şarjagaz wertikal dury trubkanyň içinde gozganmaz ýaly ornaşdyrylan we degişli materialdan ýasalan gorizontal plita h_1 = 50 *sm* beýiklikden başlangyç tizliksiz gaçýar. Eger urulyşdan soň şarjagaz h_2 = 45 *sm* beýiklige göterilse, dikeldiş koeffisiýentini tapmaly.



37.8-nji surat

Jogaby: $k = \frac{h_2}{h_1} = 0,95.$

37.8-nji mesele. Maýyşgak şarjagaz *h* beýiklikden gorizontal plita wertikal gaçýar we urlup serpikýär, täzeden gaçýar we ýene serpikýär we ş.m. hereket dowam edýär. Eger urgudaky dikeldiş koeffisiýenti *R* bolsa şarjagazyň durýança geçen ýoluny tapmaly.

Jogaby: $s = \frac{1+k^2}{1-k^2}h.$

37.9-njy mesele. Dikeldiş koeffisiýenti *k* bolan iki sany m_1 we m_2 massaly jisimler birmeňzeş ugrukdyrylanda öňe hereket edýärler. Kowalap barýan m_1 jisimiň çaknyşandan soň togtap galmagy we m_2 jisimiň berlen u_2 tizligi almagy üçin, olaryň υ_1 we υ_2 tizlikleri nähili bolmaly?

Jogaby: $\upsilon_1 = \frac{1+k}{k} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2}u_2; \quad \upsilon_2 = \frac{m_1 - km_2}{k(m_1+m_2)}u_2.$

37.10-njy mesele. Massasy 12 *t* bolan bug ýekedabany 5 *m/s* tizlik bilen sandala gaçýar. Sandal bilen onuň üstünde taplanýan şaýyň massasy 250 *t*. Taplanýan şaýa sarp edilýän A_1 işi we binýadyň (fundamentiň) titremegine sarp edilýän A_2 işi tapmaly, şeýle hem, ýekedabanyň η peýdaly täsir koeffisiýentini hasaplamaly, urgy maýyşgak däl.

Jogaby: $A_1 = 143\ kN \cdot m, \quad A_2 = 6,87\ kN \cdot m, \quad \eta = 0,95.$

37.11-nji mesele. Massasy m_1 = 10 *kg* bolan ýekedaban bilen bejerilýän jisim 70 urguda gerekli ölçeglere gabat getirip, ýasylaýar. Massasy m_2 = 100 *kg* bolan ýekedabana hereketi geçiriji mehanizm birinji ýekedabanyň tizligine gabat gelýän tizligi berse, bu iş näçe urguda ýerine ýeter? Sandalyň massasy *M* = 200 *kg*. Urgyny absolýut maýyşgak däl diýip hasaplamaly.

Jogaby: 10 urgy.

37.12-nji mesele. υ_1 we υ_2 tizlik bilen bir-birine tarap hereket edýän birmeňzeş iki şaryň absolýut maýyşgak urgulardan soňky tizliklerini tapmaly.

Jogaby: Urgulardan soň şarlar tizliklerini çalyşýarlar.

37.13-nji mesele. Birmeňzeş iki sany A we B maýyşgak şarlar bir-birine tarap hereket edýärler. Urgudan öňki tizliklere görä näçe bolanda A şar urgudan soň togtar? Urgy wagtyndaky dikeldiş koeffisiýenti k deň.

Jogaby: $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{1+k}{1-k}$.

37.14-nji mesele. A jisim B jisime garanda üç esse uly tizlige eýe bolup, ony kowup ýetýär. A jisimiň urgudan soň togtamagy üçin bu jisimleriň massalarynyň arasynda nähili gatnaşyk bolmaly? Çaknyşygy göni merkezi urgy diýip hasap etmeli. Dikeldiş koeffisiýenti $k = 0{,}8$.

Jogaby: $m_B / m_A = 5$.

37.15-nji mesele. Aşakdaky ýagdaýlarda iki sany şaryň m_1 we m_2 massalarynyň arasyndaky gatnaşygy kesgitlemeli: 1) birinji şar dynçlykda duranda merkezi urgy bolýar; şondan soň ikinji şar dynçlykda bolýar; 2) şarlar garşylykly bolan birmeňzeş tizlikler bilen çakyşýarlar, merkezi urgudan soň ikinji şar dynçlykda bolýar. Dikeldiş koeffisiýenti k deň.

Jogaby: 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$; 2) $\frac{m_2}{m_1} = 1 + 2k$.

37.16-njy mesele. Massalary m_1, m_2 we m_3 bolan üç sany absolýyt maýyşgak şar ýylmanak ternawda bir-birinden esli daşlykda ýatyrlar. Käbir başlangyç tizlik bilen goýberilen birinji şar dynçlykda duran ikinji şary urýar, ikinji şar bolsa dynçlykda duran üçünji şary urýar. Ikinji şaryň massasy m_2 näçe bolanda, üçünji şar iň uly tizligi alar?

Jogaby: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

37.17-nji mesele. υ_1 tizlik bilen hereket edýän m_1 massaly şar dynçlykda duran m_2 massaly şara duş gelýär. Urgy wagtynda onuň tizligi şarlaryň merkezlerini birleşdirýän çyzyk bilen burçy emele getirýär. 1) Urgyny absolýut maýyşgak däl hasaplap, birinji şaryň urgudan soňky tizligini; 2) urgyny dikeldiş koeffisiýenti k bolan maýyşgak urgy diýip hasap edip, her bir şaryň urgudan soňki tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: 1) $u_1 = \upsilon_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

2) $u_1 = \upsilon_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$; $\quad u_2 = \upsilon_1 \frac{m_1(1+k)\cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

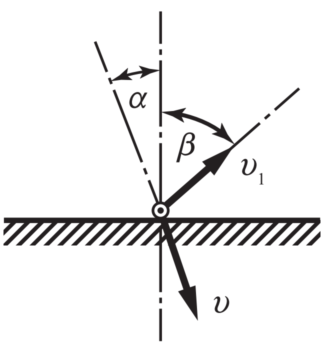
37.18-nji mesele. Merkezi υ tizlik bilen gorizontal göni çyzyk boýunça absolýut maýyşgak şar ýylmanak wertikal tekizlige α burç bilen düşýär. Şaryň urgudan soňky tizligini kesgitlemeli.

Jogaby: Serpikme burçy düşme burçuna deň, tizlikleriň urgudan öňki we soňky mukdarlary deň.

37.19-njy mesele. Polat şarjagaz 45° burç astynda gorizontal polat plita düşýär we wertikala 60° burç astynda ondan serpikýär. Urgudaky dikeldiş koeffisiýenti kesgitlemeli.

Jogaby: $k = 0{,}58$.

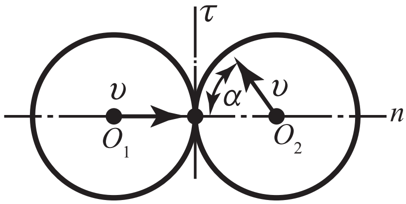
37.20-nji mesele. Şarjagaz υ tizlik bilen ýapgyt hereket edip gozganmaýan gorizontal tekizlige düşýär we $\upsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon$ tekizlikden serpikýär. Eger urgudaky dikeldiş koeffisiýenti $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ bolsa, düşüş α burçuny we gaýdyş β burçuny kesgitlemeli (*37.9-njy surat).*



37.9-njy surat

Jogaby: $\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}$.

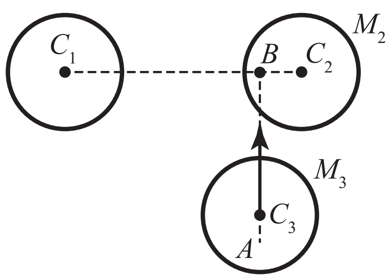
37.21-nji mesele. Birmeňzeş iki sany absolýut maýyşgak şarlar modullary deň bolan υ tizlikler bilen bir-birine urulýarlar. Urgudan öň çepdäki şaryň tizligi merkezler arkaly geçýän çyzyk boýunça saga ugrugan, sagdaky şaryň tizligi bolsa bu çyzyk bilen α burçy emele getirýär. Şarlaryň urgudan soňki tizligini tapmaly (*37.10-njy surat*).



37.10-njy surat

Jogaby: $u_{1n} = -\upsilon\cos\alpha$; $u_{1\tau} = 0$; $u_{2n} = \upsilon$; $u_{2\tau} = \upsilon\sin\alpha$. n ok merkezler arkaly geçýän çyzyk boýunça saga, τ ok bolsa ýokaryk ugrugan.

37.22-nji mesele. Birmeňzeş M_1, M_2, M_3 şarlaryň radiuslary R; C_1C_2 merkezleriniň arasy $C_1C_2 = a$. M_3 şar C_1C_2 çyzyga perpendikulýar bolan AB göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan käbir tizlik bilen M_2 şara urlup, soňra M_1 şara merkezi urgy bermek üçin üçünji şaryň C_3 merkezi haýsy ýagdaýdaky AB göni çyzykda bolmaly? Şarlar absolýut maýyşgak we öňe hereket edýärler diýip hasap etmeli (*37.11-nji surat*).



37.11-nji surat

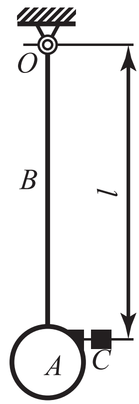
Jogaby: C_2 merkezden AB göni çyzyga çenli bolan aralyk: $BC_2 = 4R^2/a$.

37.23-nji mesele. Binanyň binýadynyň (fundamentiniň) aşagyndaky ýeri berkitmek üçin massasy M = 50 *kg* gazygy kopýor bilen kakýarlar. Kopýoryň urgujynyň massasy $M = 450$ *kg* bolup, ol $h = 2$ *m* beýiklikden başlangyç tizliksiz gaçýar. Dikeldiş koeffisiýenti nola deň. On gezek urgudan soň gazyk ýere $\delta = 5$ *sm* çümýär. Gazyk kakylanda ýeriň görkezýän ortaça garşylygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $S = 159$ *kN*.

37.24-nji mesele. Massalary m_1 we m_2 bolan iki sany şar uzynlyklary l_1 we l_2 bolan parallel ýüplerden merkezleri birmeňzeş beýiklikde durar ýaly edip asylan. Birinji şar wertikaldan α_1 burça gyşardylan we başlangyç tizliksiz goýberlen. Ikinji şaryň iň uly α_2 gyşarma burçuny kesgitlemeli. Dikeldiş koeffisiýenti k deň.

Jogaby: $\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\alpha_1}{2}$.

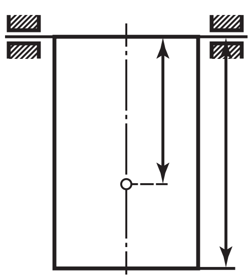


37.12-nji surat

37.25-nji mesele. Urgy maşynynyň maýatnigi radiusy 10 *sm* we galyňlygy 5 *sm* bolan *A* polat dik hem-de diametri 2 *sm* we uzynlygy 90 *sm* bolan tegelek *B* polat sterženden ybarat. *O* oka urgy degmezligi üçin, urulýan *C* pürsi *O* aýlanma oky ýatan gorizontal tekizlikden haýsy *l* aralykda ýerleşdirmeli? Berilýän urgynyň ugrukdyrylyşy gorizontal diýip hasaplanmaly (*37.12-nji surat*).

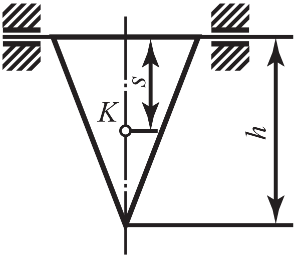
Jogaby: $l = 97{,}5$ *sm*.

37.26-njy mesele. Atylýan gönüburçluk şekilindäki nyşananyň urgy merkezini kesgitlemeli. Nyşananyň beýikligi *h* (*37.13-nji surat*).



37.13-nji surat

Jogaby: $s = 2h/3$.



37.14-nji surat

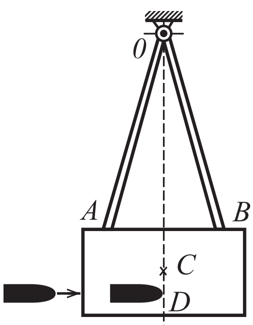
37.27-nji mesele. Atylýan üçburçluk nyşananyň urgy merkezini kesgitlemeli. Nyşananyň beýikligi h (*37.14-nji surat*).

Jogaby: $s = h/2$.

37.28-nji mesele. Iki sany şkiw bir tekizlikde öz oklarynyň daşynda ω_{10} we ω_{20} burç tizlikler bilen aýlanýarlar. Şkiwleri dykyzlygy birmeňzeş we radiuslary R_1 we R_2 bolan tegelek disk diýip hasaplap, şkiwlwere çeki geýdirileninden soň, şkiwleriň burç tizlikleri ω_1 we ω_2-niň näçe bolýandygyny kesgitlemeli. Çekiniň massasyny we sürtülmesini hasaba almaly däl.

$$\textit{Jogaby:}\ \omega_1 = \frac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}, \quad \omega_2 = \frac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

37.29-njy mesele. Okuň (snarýadyň) tizligini kesgitlemek üçin peýdalanylýan ballistik maýatnik gorizontal O okdan asylan AB silindrden ybarat. Silindr gumdan doldurylan we onuň A tarapy açyk. Silindre giren snarýad maýatnigi O okuň daşynda käbir burça öwürýär. Maýatnigiň massasy M deň, onuň C massalar merkezinden O oka çenli bolan aralyk $OC = h$; O oka görä inersiýa radiusy – ρ; snarýadyň massasy m deň; urgy impulsynyň täsir çyzygyndan oka çenli bolan aralyk $OD = a$; maýatnigiň gyşarma burçy – α. Maýatnigiň O okuna urgy täsir etmeýär diýip hasap edip, snarýadyň υ tizligini kesgitlemeli. $ah = \rho^2$ diýip almaly (*37.15-nji surat*).

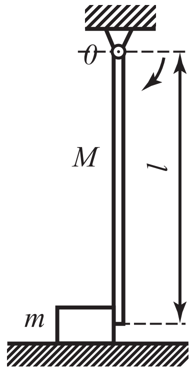


37.15-nji surat

$$\textit{Jogaby:}\ \upsilon = \frac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

37.30-njy mesele. Ýokardaky ujy O silindrik şarnire birikdirilen we massasy M, uzynlygy l bolan birjynsly steržen gorizontal ýagdaýdan başlangyç tizliksiz gaçýar. Ol wertikal ýagdaýda m massaly ýüki urup, ony gorizontal büdür-südür tekizlikde herekete getirýär. Typma sürtülme koeffisiýenti f. Urgyny maýyşgak däl diýip hasaplap, ýüküň geçen ýoluny kesgitlemeli (*37.16-njy surat*).

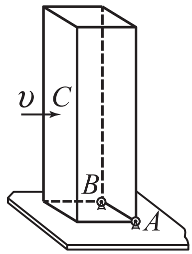
Jogaby: $s = \frac{3l}{2f} \frac{M^2}{(M+3m)^2}$.



37.16-njy surat

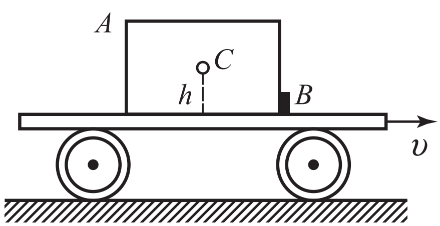
37.31-nji mesele. Esasy kwadrat bolan birjynsly göni prizma gorizontal tekizlikde dur we bu tekizlikdäki AB gapyrganyň daşynda aýlanýar. Prizmanyň esasynyň gapyrgasy a, prizmanyň beýikligi $3a$, massasy $3m$. AB gapyrganyň garşysyndaky C granyň ortasyna m massaly şar υ tizlik bilen urulýar. Urgyny maýyşgak däl we şaryň massasy onuň merkezinde ýerleşen hem-de urluşdan soň şar C nokatda diýip hasaplap, prizmany agdarjak iň kiçi υ tizligi kesgitlemeli (*37.17-nji surat*).

Jogaby: $\upsilon = \frac{1}{3}\sqrt{53ga}$.



37.17-nji surat

37.32-nji mesele. Prizma şekilindäki AB ýük ýerleşen platforma gorizontal rels boýunça υ tizlik bilen barýar. Platformadaky ýüküň B gapyrgasynyň öňündäki çykyt ýüki öňe süýşürmeýär, emma ýüküň B gapyrgasynyň daşynda aýlanmaga garşylyk görkezmeýär. Platformadan ýüküň massalar merkezine O çenli bolan beýiklik h, ýüküň B gapyrga görä inersiýa radiusy – ρ. Platforma birden saklansa, ýüküň B gapyrganyň daşynda haýsy ω burç tizlik bilen aýlanjagyny kesgitlemeli (*37.18-nji surat*).



37.18-nji surat

Jogaby: $\omega = h\,\upsilon/\rho^2$.

37.33-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine görä, ýüküň platforma boýunça ugrugan gapyrgasynyň uzynlygy $4\,m$, beýikligi $3\,m$ bolan gönüburçly birjynsly parallelepipedden ybarat diýip kabul etmeli we υ tizlik nähili bolanda onuň agdarylmagy mümkin?

Jogaby: $\upsilon = 30{,}7$ *km/sag*.

38. MADDY NOKATLAR ULGAMYNYŇ KIÇI YRGYLDYLARYNYŇ NAZARYÝETINE DEGIŞLI ILKINJI DÜŞÜNJELER.

UMUMY MAGLUMATLAR

Mehaniki sistemalaryň yrgyldylar nazaryýeti nazary mehanikanyň iň giň ösen hem-de amalyýetde giňden ulanylýan bölümleriniň biridir. Tehnikada yrgyldylaryň duşmaýan ýerini tapmak kyndyr.

Yrgyldylar nirede duşsa-da (mehaniki sistemada, elektrik sistemasynda, optikada we başgalarda), käbir hususy aýratynlyklaryna garamazdan, birmeňzeş differensial deňlemeler bilen ýazylýarlar.

Şonuň üçin, şeýle hereketleri derňemek usullary, fiziki sistemalaryň aýratynlyklaryna garamazdan, birmeňzeş bolýar. Mehaniki yrgyldylara seredilende pürsüň, maşynyň, binýadyň, uçaryň ganatlarynyň we başgalaryň yrgyldysy mehaniki yrgyldylara mysal bolup bilerler. Häzirki döwürde yrgyldylar nazaryýeti örän giň we köpgranly çägi öz içine alýar. Şeýle-de bolsa, yrgyldylar nazaryýetini **çyzykly** we **çyzykly däl yrgyldylar** diýen esasy iki bölege bölýärler.

Eger sistemanyň hereketi çyzykly differensial deňlemeler bilen ýazylan bolsa, oňa **çyzykly yrgyldylar** ýa-da **çyzykly sistema** diýilýär. Çyzykly sistemanyň matematiki enjamy gowy öwrenilendigi we onuň netijeleri çyzykly däl sistemalarda ulanylýandygy üçin, olara ilki seredilýär.

Eger sistemanyň hereketi ýokary tertipli differensial deňlemeler bilen ýazylýan bolsa, onda olara **çyzykly däl sistema** diýilýär. Beýle sistemany öwrenmek çyzykly sistemany öwrenenden has kyn bolany üçin, diňe çyzykly sistemalara degişli käbir maglumatlary bermek bilen çäkleneliň.

Lagranžyň deňlemelerinden peýdalanyp, erkinlik derejesi bir ýa-da iki bolan çyzykly sistemanyň kiçi yrgyldylarynyň esasy häsiýetlerine seredeliň. Sistemanyň kiçi yrgyldylary diňe deňagramlylygyň durnukly ýagdaýynyň golaýynda bolup bilýär.

Deňagramlylygyň durnukly ýagdaýynda umumylaşdyrylan koordinatalar nola deň bolar ýaly edip alýarlar (ýagny, başlangyç ýagdaýy sistemanyň deňagramlylyk ýagdaýyndan hasaplap başlanylýar). Yrgyldylary öwrenmek üçin sistemanyň deňagramlylyk ýagdaýynyň durnuklylygyny we deňagramlylygyny hem-de deňagramlylygyň haýsy şertlerde durnukly bolýandygyny kesgitlemeli.

38.1. Konserwatiw mehaniki ulgamyň durnukly deňagramlylygynyň golaýyndaky kiçi hereketinde kinetik we potensial energiýalaryň aňladylyşy

Lagranžyň deňlemelerini ulanmak maksady bilen T kinetik energiýanyň we Π potensial energiýanyň umumylaşdyrylan koordinatalarda aňladylyşyna seredeliň.

Goý, sistemanyň erkinlik derejesi s bolup, $q_1, q_2, ...q_s$ umumylaşdyrylan koordinatalar bilen aňladylsyn. Eger sistema stasionar, golonom baglanyşyklara boýun egýän bolsa, onda

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, ..., q_s) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, ..., q_s) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, ..., q_s) \end{aligned}\right\} \tag{38.1}$$

ýa-da wektor görnüşde

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s), \tag{38.2}$$

bu ýerde i = 1,2, …, n – sistemanyň nokatlarynyň sany, $\bar{r}_i$ bolsa, i nokadyň radius wektory. (38.2) deňlikden wagta görä önüm alyp, tizligi tapalyň:

$$\bar{\upsilon}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_z}\dot{q}_s = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k.$$

Bu bahany $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{\upsilon}_i^2$ formulada goýup, kinetik energiýanyň bahasyny alýarys:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_1\left[\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}\right)^2 \dot{q}_1^2+\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}\right)^2 \dot{q}_2^2+\ldots+\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}\right)^2 \dot{q}_z^2+2\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+2\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{z-1}}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_z}\dot{q}_{z-1}\dot{q}_z\right].$$

Aşakdaky belgilemäni girizip:

$$A_{jk}=\sum_{i=1}^{n} m_1\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\right), \tag{38.3}$$

kinetik energiýany şeýle ýazyp bilýäris:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{j_k}\dot{q}_j\dot{q}_k. \tag{38.4}$$

$A_{jk}=A_{kj}$; A_{jk} koeffisiýentler umumylaşdyrylan koordinatalaryň funksiýalarydyr:

$$A_{jk}=A_{jk}(q_1, q_2, \ldots q_s).$$

Deňagramlylyk ýagdaýynda umumylaşdyrylan koordinatalary nol hasap edeliň (koordinatalar başlangyjyny islendik ýerde almak bolýar):

$$q_1(0)=q_2(0)=\ldots=q_s(0)=0.$$

Sistemanyň hereketinde umumylaşdyrylan koordinatalar we umumylaşdyrylan tizlikler kiçi bahalary kabul edýär diýeliň. **Kiçi baha** diýlende nämä düşünmelidigini gijräk anyklarys. A_{jk} koeffisiýentleri deňagramlylyk ýagdaýynyň (koordinatalar başlangyjynyň) töwereginde q-lar boýunça Makloreniň hataryna dargadýarys:

$$A_{jk}(q_1,q_2,\ldots,q_s)=(A_{jk})_0+\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_1}\right)q_1+\ldots+\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_s}\right)_0 q_z+\ldots$$

Ýaýlaryň daşyndaky 0 indeks A_{jk}-nyň we onuň önümleriniň $q_1=q_2=\ldots=q_s=0$ bahalarda hasaplanylmalydygyny aňladýar. Kinetik energiýanyň bahasynda umumylaşdyrylan tizlikleriň diňe ikinji derejesi bilen çäklenip we $a_{jk}=(A_{jk})_0$ belgilemäni girizip, alýarys:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \tag{38.5}$$

Hemişelik $a_{jk} = a_{kj}$ koeffisiýentlere **kwaziinersion koeffisiýentler** diýilýär.

Seredilýän sistemanyň potensial energiýasy umumylaşdyrylan koordinatalaryň funksiýasydyr:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s).$$

Deňagramlylykda hemişe Π nola deň bolar ýaly edip alyp bolýar:

$$\Pi = \Pi(0, 0, \ldots, 0) = 0. \tag{38.6}$$

Ondan başga-da, Lagranžyň-Dirihleniň teoremasy esasynda, deňagramlylykda sistemanyň potensial energiýasy iň kiçi baha eýedir. Başgaça aýdanymyzda, $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 0$ bolanda

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \tag{38.7}$$

Potensial energiýany $q_1, q_2, \ldots\ q_s$ koordinatalaryň derejeleri boýunça deňagramlylygyň töwereginde Makloreniň hataryna dargadyp, (38.6) we (38.7) deňlikleri nazara alyp, şeýle ýazmak bolýar:

$$\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j\, \partial q_k}\right) q_j\, q_k + \ldots$$

Bu aňlatmada köpeldiji koordinatalaryň ikinji derejesinden ýokarysyny taşlap we $c_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \cdot \partial q_k}\right)$ belgilemäni girizip, potensial energiýany aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_j\, q_k. \tag{38.8}$$

Hemişelik $c_{jk} = c_{kj}$ koeffisiýentlere **kwazimaýyşgaklyk koeffisiýentleri** diýilýär.

38.2. Erkinlik derejesi bire deň bolan konserwatiw sistemanyň durnukly deňagramlylygynyň golaýyndaky kiçi yrgyldylary. Mysaly meseleler

Erkinlik derejesi bire deň bolan ideal, golonom, stasionar baglanyşyklara boýun egýän sistema bir umumylaşdyrylan koordinata

($q_1 = q$) bilen kesgitlenýär. Onda kinetik energiýa aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \tag{38.9}$$

bu ýerde a – jisimiň hereketine bagly bolmadyk üýtgemeýän koeffisiýent. Mysal üçin, eger material nokadyň gönüçyzykly hereketi öwrenilse, onda a san nokadyň massasyna deňdir. Ýagny $a = m$. Gaty jisimiň gozganmaýan okuň töweregindäki hereketi öwrenilende, a san jisimiň şol oka görä inersiýa momentine deňdir: $a = I$. Eger sistema konserwatiw güýç meýdanynda bolsa, onda potensial energiýa aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2, \tag{38.10}$$

bu ýerde c – üýtgemeýän koeffisiýent. Bu koeffisiýent dürli sistemalar üçin aýratyn manylara eýedir. Mysal üçin, puržinyň ujuna berkidilen nokada gaýtaryjy güýç täsir edýän bolsa, onda c san puržinyň maýyşgaklyk koeffisiýentini aňladýar. Konserwatiw sistema üçin Lagranžyň deňlemesinden peýdalanalyň:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

T, Π-niň bahalaryndan peýdalanyp, alarys:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq.$$

Lagranžyň deňlemesini şeýle ýazmak bolýar:

$$a\ddot{q} = -cq$$

ýa-da

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \tag{38.11}$$

bu ýerde

$$k^2 = \frac{c}{a}.$$

(38.11)-e durnukly deňagramlylygyň golaýyndaky kiçi yrgyldylaryň differensial deňlemesi diýilýär (bu deňlemä öň hem duş gelipdik). (38.11)-iň umumy çözüwi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{38.12}$$

ýa-da

$$q = A \sin(kt + \alpha). \tag{38.13}$$

C_1, C_2 ýa-da A, α – integrirlemäniň erkin hemişelik ululyklary bolup, bahalary başlangyç şertlerden kesgitlenilýär $(q_0, \dot{q}_0; t = 0)$:

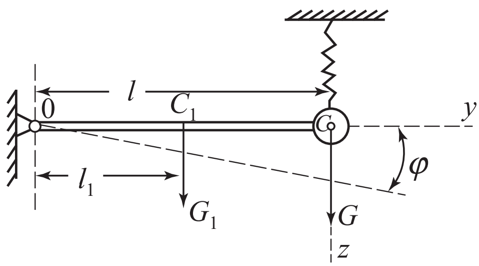
$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}. \tag{38.14}$$

Yrgyldylaryň periodyny T bilen belgilesek, ol

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \tag{38.15}$$

formula bilen kesgitlenilýär (k – aýlaw ýygylygy).

38.1-nji mesele. Ujuna G agramly ýük berkidilen, G_1 agramly steržen şarniriň we puržiniň täsiri astynda gorizontal ýagdaýda saklanýar. l_0, l uzynlyklar I sterženiň x oka görä inersiýa momenti bolanda, sistemanyň kwaziinersiýa we kwazimaýyşgaklyk koeffisiýentlerini tapmaly. Ondan başga-da, umumylaşdyrylan koordinatalar hökmünde z ýa-da φ kabul edip, yrgyldylaryň ýygylygyny we periodyny tapmaly (φ – sterženiň aýlaw burçy, z – ýüküň wertikal koordinatasy, x ok suratyň tekizligine $\perp$. Deňagramlyk ýagdaýdan hasaplamaly) (*38.1-nji surat*).



38.1-nji surat

Çözülişi. Umumylaşdyrylan koordinata hökmünde z alalyň. Onda

$$T = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g} + \frac{I}{l^2}\right)\dot{z}^2 = \frac{1}{2} m_r \dot{z}^2,$$

$$\Pi = -G_1 z \frac{l}{l_0} - Gz + \frac{c(f+z)^2}{2} - \frac{cf^2}{2} = -\left(G_1 \frac{l_1}{2} + G\right)z + cfz + \frac{cz^2}{2},$$

bu ýerde m_r – getirilen massa, f – sistema deňagramlylykdaka puržinyň statiki ulalmagy, $\frac{cf^2}{2}$ – deňagramlylyk ýagdaýda puržiniň potensial energiýasy.

Deňagramlylykda

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(G_1 \frac{l_1}{l} + G\right) + cf = 0; \quad cf = G_1 \frac{l_1}{l} + G$$

bolany üçin $$\Pi = \frac{1}{2} cz^2.$$

Umumylaşdyrylan koordinata z bolanda T we Π-niň bahalaryndan, degişlilikde, kwaziinersion we kwazimaýyşgak koeffisiýentleri kesgitleýäris:

$$a_z = m_r = \frac{G}{g} + \frac{I}{l^2}, \quad cz = c.$$

Eger umumylaşdyrylan koordinata hökmünde φ alsak, onda

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g} l^2 + I\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_r \dot{\varphi}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2} cz^2 = \frac{1}{2} cl^2 \varphi^2,$$

bu ýerde

$$a_\varphi = I_r = \frac{Gl^2}{g} + I; \; c_\varphi = cl^2.$$

Netijeleri deňeşdirip, inersion we maýyşgaklyk koeffisiýentleriniň umumylaşdyrylan koordinatalaryna bagly üýtgeýändigini görýäris. Emma bu üýtgemeler ýygylyga we perioda täsir etmeýärler:

$$k = \sqrt{\frac{c_z}{a_z}} = \sqrt{\frac{c_\varphi}{a_\varphi}} = \sqrt{\frac{c}{\frac{G}{g} + \frac{I}{l^2}}}, \qquad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{Gl^2 + Ig}{cgl^2}}.$$

38.3. Erkinlik derejesi ikä deň konserwatiw sistemanyň durnukly deňagramlylygyň golaýyndaky kiçi yrgyldylary. Mysaly meseleler

Erkinlik derejesi ikä deň ideal, golonom, stasionar baglanyşyklara boýun egýän sistema iki (q_1, q_2) umumylaşdyrylan koordinatalar bilen kesgitlenýär. Kinetik we potensial energiýalar (38.5), (38.7) formulalar bilen kesgitlenilýär:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2).$$

Durnukly deňagramlylygyň golaýyndaky herekete seredeliň. T, Π-niň koeffisiýentleri deňagramlylygyň durnukly bolmaly şertlerini kanagatlandyrýarlar diýip hasap edeliň:

$$\begin{aligned} &a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ &c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \end{aligned} \tag{38.16}$$

Lagranžyň: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$

deňlemelerine T, Π-niň bahalaryny goýup ($a_{12}= a_{21}$, $c_{12}=c_{21}$), gözlenýän deňlemeleri alalyň:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.17}$$

Diýmek, erkinlik derejesi ikä deň bolan sistemanyň kiçi yrgyldylary iki sany birjynsly, üýtgemeýän koeffisiýentli, ikinji tertipli differensial deňlemeler sistemasy bilen ýazylýar. q_1, q_2 koordinatalar garmoniki kanun boýunça üýtgeýär diýip, sistemanyň çözüwini aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$q_1 = A\sin(kt + \varepsilon), \ q_2 = B\sin(kt + \varepsilon)\,. \tag{38.18}$$

Bu ýerde A, B, k, ε – häzirlikçe näbelli, üýtgemeýän ululyklar. q_1, q_2, $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$ -niň bahalaryny (38.17)-de goýalyň. Emele gelen toždestwolar diňe sinusyň koeffisiýentleri nola deň bolanda kanagatlanýar:

$$\left.\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0, \\ (c_{21} - a_{21}k^3)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{38.19}$$

Bu sistemanyň noldan üýtgeşik kökleriniň bolmagy üçin, kesgitleýjisi nol bolmaly:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & c_{12}-a_{12}k^2 \\ c_{21}-a_{21}k^2 & c_{22}-a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Eger kesgitleýji nol bolmasa, onda $A = B = 0$, $q_1 \equiv q_2 \equiv 0$, ýagny sistema dynçlyk ýagdaýynda bolýar. Ahyrky deňligi şeýle ýazalyň:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2) = 0 \qquad (38.20)$$

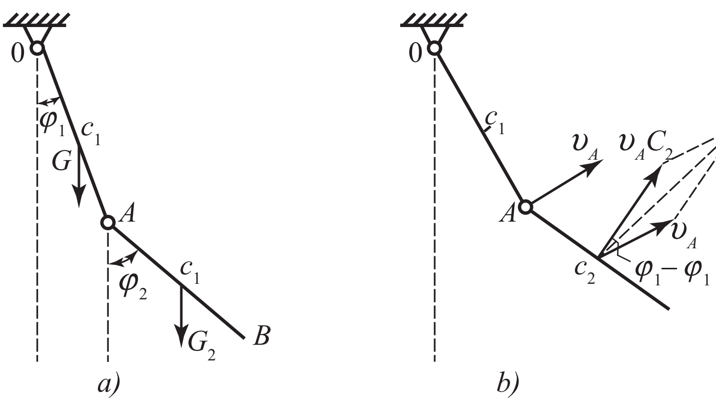
ýa-da

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})k^2 + \\ +(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \qquad (38.21)$$

Bu deňlemä **ýygylyklar deňlemesi** diýilýär. Kiçi yrgyldylar barada giňişleýin we çuň maglumatlar almak üçin ýörite nazary edebiýata ýüzlenmeklik maslahat berilýär.

Bellik. Ýokarda getirilen usullary, erkinlik derejesi ikiden köp bolan ulgamlarda hem ulanmak bolýar.

38.2-nji mesele. Ikigat maýatnik (*38.2-nji a surat*) iki sany l uzynlykly we $G_1 = G_2 = G$ agramly birjynsly, şarnirli birikdirilen OA we AB sterženlerden durýar. OA steržen O okuň töwereginde, AB bolsa A şarniriň töwereginde aýlanýar (bir tekizlikde). Baş yrgyldylaryň ýygylyklaryny we formalaryny kesgitlemeli.



38.2-nji surat

Çözülişi. Durnukly deňagramlylykda iki steržen hem wertikal boýunça aşaklygyna ugrukdyrylandyr. Umumylaşdyrylan koordinatalar diýip φ_1, φ_2 burçlary alalyň. Sistemanyň kinetik energiýasyny hasaplalyň (*38.2-nji b surat*):

$$T = T_1 + T_2,\ \ T_1 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{G_2}{g}\upsilon_{C_2}^2 + I_{C_2}\dot{\varphi}_2^2\right),$$

bu ýerde

$$\upsilon_{C_2}^2 = \upsilon_A^2 + \upsilon_{AC_2}^2 + 2\upsilon_A \upsilon_{AC_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = l^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 +$$

$$+2\frac{l^2}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Kiçi yrgyldylar üçin $\cos(\varphi_1, \varphi_2) = 1$ diýip kabul etsek,

$$\upsilon_{C_2}^2 = l^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + 2\frac{l^2}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2,$$

onda

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(I_0 + \frac{G^2}{g}\right)\dot{\varphi}_1^2 + 2\frac{G_2}{2}\frac{l^2}{g}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \left(I_{C_2}\frac{G^2}{g}\frac{l^2}{4}\right)\dot{\varphi}_2^2\right].$$

Potensial energiýany tapalyň:

$$\Pi = G_1 h_1 + G_2(h_1 + h_2),$$

bu ýerde

$$h_1 = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi_1), \quad h = l(1 - \cos\varphi_1), \quad h_2 = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi_2).$$

Kiçi yrgyldylar üçin

$$\cos\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \quad \cos\varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}$$

diýip kabul edip, alarys:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{G_1 l}{2} + G_2 l\right)\varphi_1^2 + \frac{G_2}{2} l\varphi_2^2\right].$$

T we Π-niň bahalaryndan degişli koeffisiýentleri tapalyň:

$$a_{11} = I_0 + \frac{G^2}{g}l^2, \quad a_{12} = \frac{G_2 l^2}{2g}, \quad a_{22} = I_{C_0} + \frac{G_2 l^2}{4g},$$

$$c_{11} = \frac{G_1}{2}l + G_2 l, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = \frac{G_2 l}{2}.$$

Ýygylyklar deňlemesini ýazalyň:

$$\left[\frac{C_1 l}{2}+G_2 l-\left(I_0+\frac{G_2 l^2}{2}\right)k^2\right]\left[\frac{G_2 l}{2}-\left(I_{C_2}+\frac{G_2 l^2}{4g}\right)k^2\right]-\frac{G^2 l^4}{4g^2}=0$$

ýa-da

$$G_1=G_2=G, \quad I_0=\frac{Gl^2}{3g}, \quad I_{C_2}=\frac{Gl^2}{12g}$$

bolýandygyny nazara alyp, deňlemäni göçüreliň:

$$\left(\frac{3}{2}Gl-\frac{4}{3}\frac{Gl^2}{g}k^2\right)\left(\frac{Gl}{2}-\frac{Gl^2}{3g}k^2\right)-\frac{G^2 l^4}{4g^2}k^4=0.$$

$C^2 l^2$-ä bölýäris:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\frac{l}{g}k^2\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{lk^2}{3g}\right)-\frac{l^2 k^4}{4g^2}=0.$$

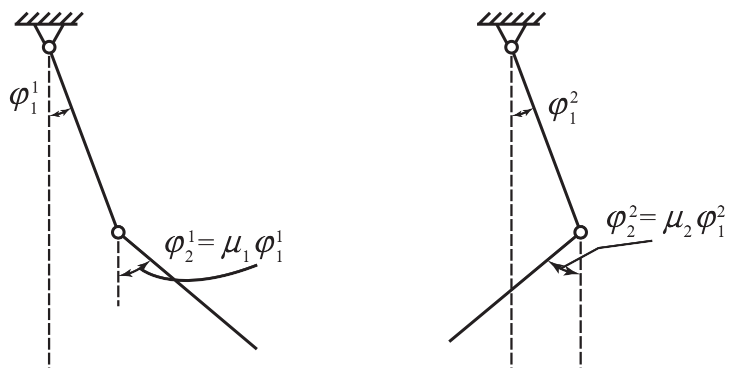
Bu ýerden

$$k^4-6\frac{g}{l}k^2+\frac{27}{7}\frac{g^2}{l^2}=0,$$

$$k_{1,2}=\sqrt{3\frac{g}{l}\pm\sqrt{9\frac{g^2}{l^2}-\frac{27}{7}\frac{g^2}{l^2}}},$$

$$k_1^2=0,732\frac{g}{l}, \quad k_2^2=5,268\frac{g}{l},$$

$$k_1=0,86\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad k_2=2,29\sqrt{\frac{g}{l}}.$$



38.3-nji surat

μ_1, μ_2-ni tapalyň:

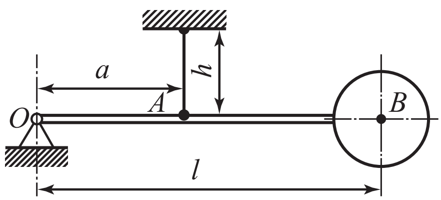
$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{\frac{3}{2}Gl - \frac{4}{3}\frac{Gl^2}{g}0,732\frac{g}{l}}{-\frac{Gl}{2g}0,732\frac{g}{l}} = 1,43,$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{3,2\,Gl - \frac{4}{3}\frac{Gl^2}{g}5,268\frac{g}{l}}{-\frac{Gl}{2g}5,268\frac{g}{l}} = -\,2,09.$$

Baş yrgyldylaryň formalary 38.3-nji suratda görkezilendir.

38.4. Özbaşdak çözmek üçin meseleler. Erkinlik derejesi bire deň bolan ulgamyň kiçi yrgyldylary

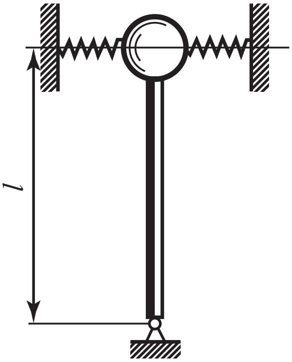
38.3-nji mesele. Uzynlygy L bolan gaty OB steržen O ujundaky şarly şarnirde erkin yrgyldylary alýar we beýleki ujunda Q agramly şarjagazy göterýär. Süýnmeýän h uzynlykdaky wertikal ýüpüň kömegi bilen steržen gorizontal ýagdaýda durýar. Aralyk $OA=a$. Eger şarjagaz suratyň tekizligine perpendikulýar dartyp, soňra goýberilse, ulgam yrgyldap başlaýar. Sterženiň massasyny hasaba alman, ulgamyň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.4-nji surat*).



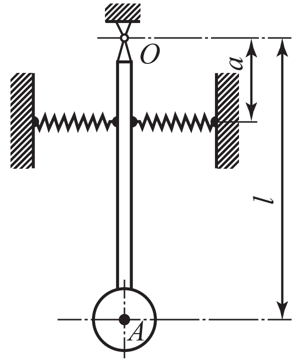
38.4-nji surat

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\frac{hl}{ag}}$.

38.4-nji mesele. Toprak yrgyldylaryny ýazýan seýsmograflaryň käbirlerinde ulanylýan astatik maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Maýatnik bir ujunda m massa bolan l uzynlykdaky gaty sterženden ybarat; uçlary berkidilen, her biriniň gatylygy c bolan gorizontal puržinlar bu massany gysyp durýarlar.



38.5-nji surat



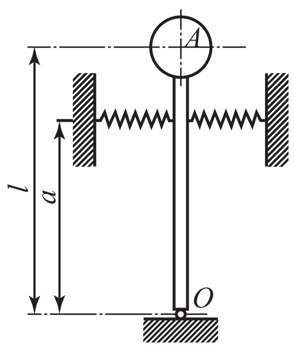
38.6-njy surat

Sterženiň massasyny hasaba almaly däl we deňagramlylyk ýagdaýynda puržinlar süýnmedik diýip hasap etmeli (*38.5-nji surat*).

Jogaby: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\dfrac{c}{m} - \dfrac{g}{l}}}$.

38.5-nji mesele. Maýatnik bir ujunda m massa bolan l uzynlykdaky gaty sterženden ybarat. Sterženiň ýokardaky ujundan a aralykda oňa gatylygy c bolan iki sany puržin birikdirilen. Puržinlaryň garşylykly uçlary berkidilen. Sterženiň massasyny hasaba alman, maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly (*38.6-njy surat*).

Jogaby: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} + \dfrac{g}{l}}}$.

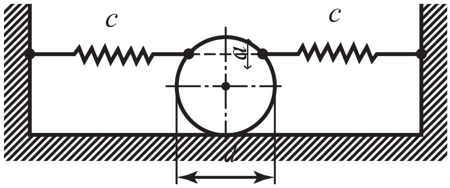


38.7-nji surat

38.6-njy mesele. Deslapky meselede teswirlenen m massa asylan nokadyndan ýokaryk ornaşdyrylan diýip hasaplap, maýatnigiň wertikal deňagramlylyk ýagdaýynyň durnukly bolmak şertini kesgitlemeli we maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly (*38.7-nji surat*).

Jogaby:

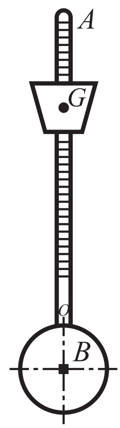
$a^2 > \dfrac{mgl}{2c}, \qquad T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} - \dfrac{g}{t}}}$.



38.8-nji surat

38.7-nji mesele. Diametri d we massasy m bolan silindr gorizontal tekizlik boýunça typman tigirlenip bilýär. Onuň okundan a aralykda gatylygy c bolan iki sany birmeňzeş uzynlykdaky puržinlar birikdirilen. Puržinlaryň garşylykly uçlary wertikal diwara berkidilen. Silindriň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.8-nji surat*).

$$Jogaby:\ T = \frac{\pi\sqrt{3}}{1+\frac{2a}{d}}\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

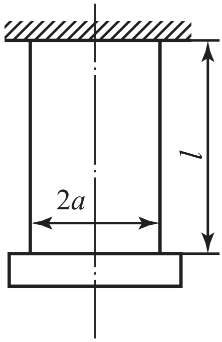


38.9-njy surat

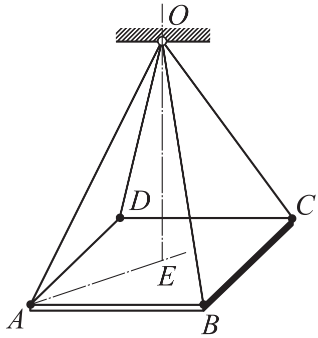
38.8-nji mesele. Maýatnikden we m massaly gozganýan G goşmaça ýükden düzülen metronomyň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Bütin ulgamyň gorizontal aýlanma okuna görä inersiýa momenti gozganýan G ýüki süýşürmek bilen özgerdilýär. Maýatnigiň massasy M; O aýlanma okundan maýatnigiň massalar merkezine çenli aralyk s_0 deň; aralyk $OG = s$; maýatnigiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti $- J_0$ (*38.9-njy surat*).

$$Jogaby:\ T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + Mx^2}{(Ms_0 - ms)g}}.$$

38.9-njy mesele. Her biriniň uzynlygy l bolan iki sany wertikal ýüpden asylan jisim ýüpleriň tekizliginde we olardan birmeňzeş uzaklykda ýatan wertikal okuň daşynda burulýar (asma bifilýar). Ýüpleriň arasyndaky uzaklyk $2a$ deň. Jismiň aýlanma okuna görä



38.10-njy surat



38.11-nji surat

inersiýa radiusy – ρ. Kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.10-njy surat*).

Jogaby: $T = 2\pi \dfrac{\rho}{a}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

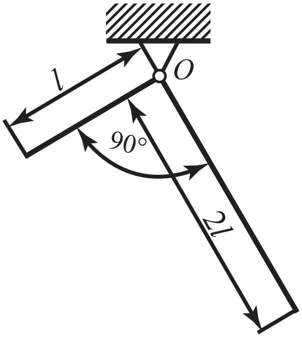
38.10-njy mesele. Tegelek halka üç sany birmeňzeş süýnmeýän ýüp bilen üç sany gozganmaýan nokada, halkanyň tekizligi gorizontal bolar ýaly edilip asylan. Her ýüpüň uzynlygy l. Halka deňagramlylykda duranda ýüpler wertikal bolup, halkanyň töweregini deň üç bölege bölýärler. Halkanyň öz merkezinden geçýän wertikal okuň daşynda edýän kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

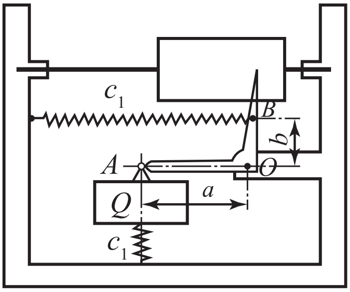
38.11-nji mesele. M massaly agyr $ABCD$ kwadrat platforma gozganmaýan O nokatda dört sany çeýe tanap bilen asylan. Ulgam deňagramlylykda bolanda O nokat platformanyň E merkezinden wertikaly boýunça l aralykda durýar. Her tanapyň gatylygy c deň. Platformanyň diagonalynyň uzynlygy a deň. Ulgamyň wertikal yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.11-nji surat*).

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{c}\cdot\dfrac{(a^2+4l^2)}{16l^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{Mga^2}{16cl^3}}}$.

38.12-nji mesele. Uzynlygy l we $2l$ bolan birjynsly inçe sterženlerden düzülen burçluk O nokadyň daşynda aýlanyp bilýär. Sterženleriň arasyndaky burç 90°. Burçlugyň deňagramlylyk ýag-



38.12-nji surat



38.13-nji surat

daýynyň golaýyndaky kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.12-nji surat)*.

Jogaby: $T = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}}\sqrt{\frac{l}{g}} = 7{,}53\sqrt{\frac{l}{g}}$.

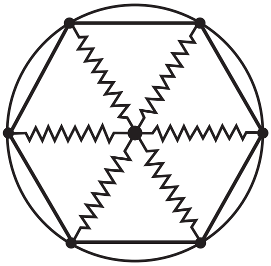
38.13-nji mesele. Aýlanma oky gorizontal tekizlik bilen emele getirýän M massaly maýatnigiň kiçi erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Maýatnigiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J deň, massalar merkezinden aýlanma okuna çenli bolan aralyk s deň.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgs\cos\beta}}$.

38.14-nji mesele. Maşynlaryň binýadynyň (fundamentleriniň) wertikal yrgyldylaryny hasaba alýan esbapda gatylyk koeffisiýenti c_1 bolan wertikal puržina berkidilen m massaly Q ýük statiki deňagramlaşan peýkama (strelka) şarnir bilen birleşdirilen. Bu peýkam O aýlanma okuna görä inersiýa momenti J bolan döwük ryçag şekilinde bolup, ony gatylyk koeffisiýenti c_2 bolan gorizontal puržin iterip deňagramlylyk ýagdaýynda saklaýar. Onuň wertikal deňagramlylyk ýagdaýynyň golaýyndaky erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. $OA = a$, $OB = b$. Ýüküň ölçeglerini we puržinlardaky başlangyç dartylyş hasaba alynmaly däl (*38.13-nji surat*).

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J + ma^2}{c_1 a^2 + c_2 b^2}}$.

38.15-nji mesele. Amortizirleýji mehanizmi dogry köpburçlugyň depelerine gatylygy c bolan n sany puržin bilen birikdirilen



38.14-nji surat

m massaly maddy nokat şekilinde shemalaşdyrmak mümkin. Her bir puržinyň süýnmedik ýagdaýyndaky uzynlygy a, köpburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy b deň. Gorizontal tekizlikde ýerleşen ulgamyň erkin gorizontal yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*38.14-nji surat*).

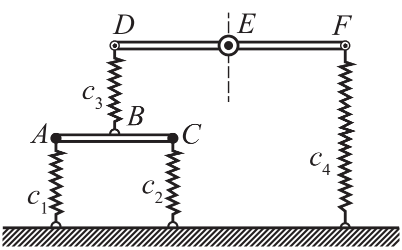
Görkezme. Potensial energiýany ikinji tertipli çäksiz kiçi mukdarlara barabar anyklyk bilen hasaplamak üçin puržinlaryň süýnüşini hem şeýle anyklyk bilen tapmak gerek.

Jogaby: $k = \sqrt{\frac{nc}{2m} \cdot \frac{2b-a}{b}}$.

38.16-njy mesele. Deslapky meselede ulgamyň köpburçlugyň tekizligine perpendikulýar bolan yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Puržinlaryň massalaryny hasaba almaly däl.

Jogaby: $k = \sqrt{\frac{nc(b-a)}{mb}}$.

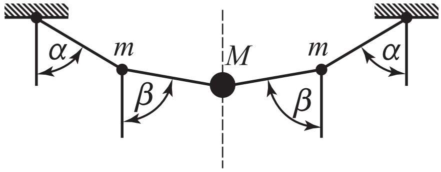
38.17-nji mesele. Suratda görkezilen ulgamyň düzümine girýän E maddy nokadyň kiçi wertikal yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Maddy nokadyň massasy m. Aralyklar $AB = BC$ we $DE = EF$; puržinlaryň gatylyklary c_1, c_2, c_3, c_4. AC we DF taýajyklary gaty we massasyz diýip hasaplamaly (*38.15-nji surat*).



38.15-nji surat

Jogaby: $k = \sqrt{\frac{4}{m\left(\frac{1}{4c_1} + \frac{1}{4c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}\right)}}$.

38.18-nji mesele. Uzynlygy $4a$ bolan süýnmeýän ýüpden massalary, degişlilikde m, M, m bolan üç sany ýük asylan. Ýüpüň başlangyç we ahyrky bölekleri wertikal bilen α burçlary, ortadaky bölekleri β buçlary emele getirer ýaly simmetrik asylan. M ýük wertikal boýunça kiçi yrgyldyly hereket edýär. M ýüküň erkin wertikal yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*38.16-njy surat*).



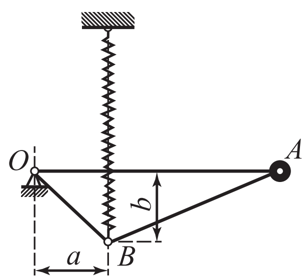
38.16-njy surat

Jogaby:

$$k = \sqrt{\frac{g(\cos^2\beta\sin\beta + \cos^2\alpha\sin\alpha)}{a\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}},\ \text{munda}$$

$$2m = \frac{M\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

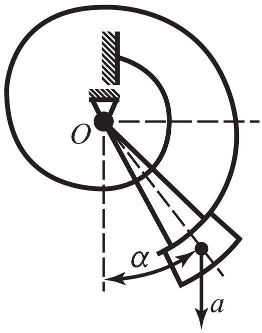
38.19-njy mesele. B.B. Golisinyň wertikal seýsmografynyň agramy Q ululyga deň bolup, ýük birikdirilen AOB çarçuwadan (ramkadan) ybarat. Ramka gorizontal O okuň daşynda aýlanyp bilýär. Ramkanyň B nokadyna, O-dan a aralykda duran, gatylygy c bolan, süýnýän puržin birikdirilen. Deňagramlylykda OA steržen gorizontal ýerleşen. Ramka bilen ýüküň O oka görä inersiýa momenti J, ramkanyň beýikligi b. Puržinyň massasyny hasaba alman we ýük bilen ramkanyň massalar merkezi O nokatdan l aralykda duran A nokatda ýerleşen diýip hasap edip, maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*38.17-nji surat).*



38.17-nji surat

Jogaby: $k = \sqrt{\dfrac{ca^2 - F_0 b(1 - b/L)}{l}}$,

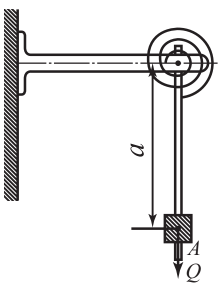
bu ýerde $F_0 = Q\dfrac{l}{a}$ – puržinyň deňagramlylyk ýagdaýdaky uzynlygy, L – deňagramlykdaky puržinyň uzynlygy.



38.18-nji surat

38.20-nji mesele. Binýatlaryň (fundamentleriň), maşyn bölekleriniň we şoňa meňzeşleriň yrgyldylaryny ýazmakda ulanylýan wibrografda, agramy Q bolan maýatnigi gatylygy c bolan spiral puržin wertikala görä α burç astynda saklap durýar. Maýatnigiň O aýlanma okuna görä inersiýa momenti J, maýatnigiň massalar merkezinden aýlanma okuna çenli bolan aralyk s deň. Wibrografyň erkin yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.18-nji surat)*.

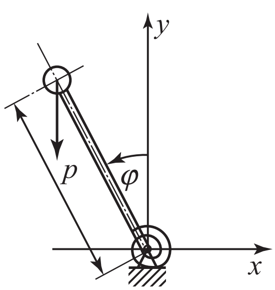
Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\alpha + c}}$.



38.19-njy surat

38.21-nji mesele. Gorizontal yrgyldylary ýazýan wibrografda ryçag we ýükden ybarat bolan OA maýatnik O gorizontal okda wertikal durnukly deňagramlylyk ýagdaýynyň golaýynda yrgyldamagy mümkin. Maýatnigiň öz agramy we spiral puržin ony wertikal durnukly deňagramlylyk ýagdaýynda saklap durýar. Eger maýatnigiň agramynyň maksimal statiki momenti $Qa = 45\ N \cdot sm$, O oka görä inersiýa momenti $J = 0{,}3\ kg \cdot sm^2$ we puržinyň burulyşa gatylygy $c = 45\ N \cdot sm$ bolsa, gyşarma burçy kiçi bolanda maýatnigiň hususy yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli (*38.19-njy surat*).

Jogaby: $T = 0{,}364\ s$.



38.20-nji surat

38.22-nji mesele. Maýatnigiň erkin aýlanyşyna onuň wertikal ýagdaýynda süýnmän durar ýaly edilip ornaşdyrylan, gatylygy c bolan spiral puržin garşylyk görkezse, haýsy şert ýerine ýetende maýatnigiň deňagramlylygynyň durnukly bolmagyny tapmaly. Maýatnigiň agramy P, onuň massalar merkezinden asylyş nokadyna çenli bolan aralyk a deň, şeýle hem, maýatnigiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J_0 bolsa, maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly (*38.20-nji surat*).

Jogaby: $c > Pa,\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_0}{c - Pa}}.$

38.23-nji mesele. Deslapky meselede garalan maýatnigiň $c < Pa$ bolanda üçden az bolmadyk deňagramlylyk ýagdaýlarynyň bardygyny görkezmeli. Şeýle hem, kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly.

Jogaby: $\varphi = 0$ bolanda durnuksyz deňagramlylyk ýagdaýy.

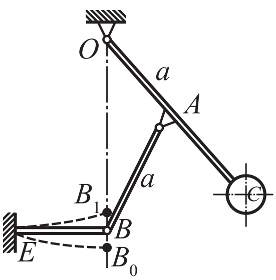
Durnukly deňagramlylyk $\varphi = \varphi_0 > 0$, $\varphi = \varphi_0 < 0$ ýagdaýlarda bolýarlar. Bu ýerde φ_0 bilen $\varphi = \dfrac{c}{Pa}\varphi$ deňlemäniň köki belgilenen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0\varphi_0}{Pa\cos\varphi_0(\mathrm{tg}\varphi_0 - \varphi_0)}}.$$

38.24-nji mesele. Maýatnigiň OA sterženi AB şatunyň kömegi bilen gatylygy c bolan kiçi EB polat ressora birikdirilen. Ressor süýnmedik ýagdaýynda EB_1 orna eýe bolýar. Ressory maýatnigiň deňagramlylygyna gabat gelýän EB_0 orna getirmek üçin, oňa OB boýunça ugrugan F_0 güýç goýmak gerek; $OA=AB=a$. Sterženleriň massalaryny hasaba almaly däl; maýatnigiň massalar merkezinden aýlanma okyna çenli bolan aralyk $OC = l$; maýatnigiň agramy Q deň. Iň gowy izohoryk (yrgyldy periodynyň başlangyç gyşarma burçuna bagly bolmazlygy) hadysanyň bolmagy üçin ulgamda maýatnigiň

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\beta\varphi + \ldots$$

hereket deňlemesinde taşlanan agzalaryň birinjisiniň tertibi φ^5 bolýar. Munuň üçin Q, F_0, c, a, l hemişelik sanlaryň arasynda nähili baglanyşyk bolmalydygyny tapmaly we maýatnigiň, kiçi yrgyldylarynyň periodyny hasaplamaly (*38.21-nji surat*).



38.21-nji surat

Jogaby: $Ql - 2aF_0 = 12a^2c$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - 2aF_0/(Ql)}}.$$

38.25-nji mesele. Deslapky meseledäki maýatnigiň deňagramlylyk ornundan $\varphi_0 = 45°$ burça gyşaranda, onuň yrgyldylarynyň periody 0,4%-den köp artmajagyny görkezmeli. Bu şertlerde maýatnigiň periody nähili özgerer?

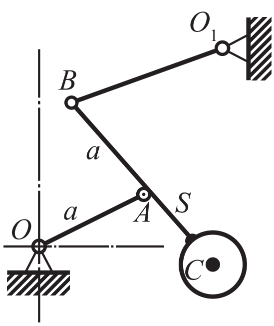
Jogaby: Maýatnigiň hereket deňlemesinde φ^5 agzany saklap galyp, aşakdakyny alýarys:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{1-2aF_0/(Ql)}\left(1+\frac{\varphi_0^4}{96}\right);$$

ýönekeý maýatnik 45° burça gyşaranda maýatnigiň periody 4% özgerer.

38.26-njy mesele. 38.24-nji meseläniň şertleri boýunça maýatnik $Ql = 2aF_0$ deňlik ýerine ýeter ýaly sazlansyn. Maýatnik deňagramlylyk ýagdaýyndan φ_0 burça gyşaranda onuň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly.

$$\textit{Jogaby: } T = \frac{4l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 5{,}24\frac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}.$$



38.22-nji surat

38.27-nji mesele. Sterženleriň massalaryny hasaba alman, suratda görkezilen maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly. Ýüküň massalar merkezi $OABO_1$ şarnirli dörtzwenoly mehanizmiň şatunynyň dowamynda C nokatda ýatyr. Deňagramlylyk ýagdaýynda OA we BC sterženler wertikal, O_1B stežen gorizontal ýerleşen. $OA = AB = a$; $AC = s$. (*38.22-nji surat*).

$$\textit{Jogaby: } T = 2\pi\frac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}.$$

38.28-nji mesele. Ýokarky ujy berkidilen puržindan asylan m massaly P ýüküň yrgyldylarynyň periodyny puržinyň gatylyk koeffisiýenti c we massasy m_0 deň diýip kesgitlemeli. Puržinyň iki nokadynyň deňagramlylyk ýagdaýyndan süýşmeleriniň gatnaşygy bu nokatlardan puržinyň berkidilen ujuna çenli hasaplanan degişli aralyklarynyň gatnaşygyna deň diýip kabul etmeli.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m + \frac{1}{3}m_0}{c}}$.

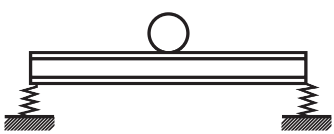
38.29-njy mesele. Ýokarky ujy berkidilen silindr görnüşli wertikal maýyşgak sterženiň aşaky ujuna gorizontal disk öz merkezinde berkidilen. Diskiň merkezden geçýän wertikal oka görä inersiýa momenti J, sterženiň öz okuna görä inersiýa momenti J_0 deň; burlandaky gatylyk koeffisiýenti, ýagny aşaky ujuny bir radiana burmak üçin zerur bolan moment c deň. Ulgamyň yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J + J_0/3}{c}}$.

38.30-njy mesele. Agramy Q bolan ýük uçlary erkin daýanyp duran pürsüň ortasyna berkidilen. Pürsüň uzynlygy l, kese-kesiginiň inersiýa momenti J, materialyň maýyşgaklyk moduly E. Pürsüň massasyny hasaba alman, ýüküň bir minutda edýän yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Jogaby: $n = 2080\sqrt{\dfrac{EJ}{Ql^3}}$, bu ýerde uzynlyk birligi görnüşinde santimetr kabul edilen.

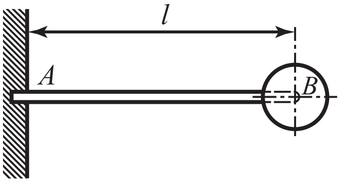
38.31-nji mesele. Kesiginiň inersiýa momenti $J = 180\,sm^4$, uzynlygy $l = 4\ m$ bolan iki tawr taýak birmeňzeş iki sany maýyşgak puržinlarda ýatyp, onuň ortasynda goýlan $Q = 2\ kN$ ýüki göterýär, puržinlaryň gatyly $c = 1{,}5\ kN/sm$. Taýagyň agramyny hasaba alman, ulgamyň yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli. Taýagyň materialynyň maýyşgaklyk moduly $E = 2 \cdot 10^4\ kN/sm^2$ (*38.23-nji surat*).



38.23-nji surat

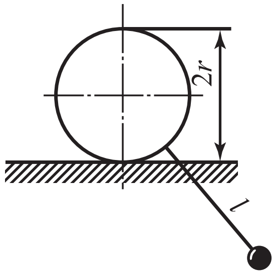
Jogaby: $T = 0{,}238\ s$.

38.32-nji mesele. Gorizontal l uzynlykdaky AB sterženiň B ujunda T period bilen yrgyldaýan Q agramly ýük bar. Sterženiň beýleki ujy diwara ornaşdyrylan. Sterženiň kesiginiň yrgyldylar tekizligine perpendikulýar merkeziniň oka görä inersiýa momenti J deň. Sterženiň materialynyň maýyşgaklyk modulyny tapmaly *(38.24-nji surat)*.



38.24-nji surat

Jogaby: $E = \dfrac{4\pi^2 Ql^3}{3JgT^2}$.

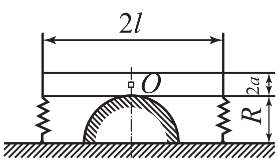


38.25-nji surat

38.33-nji mesele. Gorizontal göni çyzyk boýunça r radiusly we M massaly disk typman tigirlenip bilýär. Diske bir ujunda nokatlanç m massaly l uzynlykdaky steržen mäkäm berkidilen. Ulgamyň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly. Sterženiň massasyny hasaba almaly däl (*38.25-nji surat*).

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3Mr^2 + 2ml^2}{2mg(r+l)}}$.

38.34-nji mesele. Büdür-südür üstli, R radiusly tegelek ýarymsilindriň üstüne dogry dörtburçluk kesikli M massaly prizma şekilindäki pürs goýlan. Pürsüň boý oky silindriň okuna perpendikulýar. Pürsüň uçlary birmeňzeş c gatylykdaky puržinlar bilen pola birleşdirilen. Pürs silindriň üstünde typmaýar diýip, onuň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly. Pürsüň massalar merkezi arkaly geçýän kese gorizontal oka görä inersiýa momenti J_0 deň *(38.26-njy surat)*.



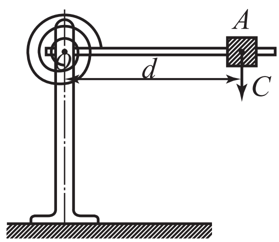
38.26-njy surat

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Ma^2 + J_0}{Mg(R-a)2ct^2}}$.

38.35-nji mesele. Erkinlik derejesi bire deň bolan ulgamyň amplituda – ýygylyk häsiýetnamasynyň ýitiligi tizlige proporsional sürtülme güýji täsir edende amplituda – ýygylyk häsiýetnamasynyň <<ýarym giňligi>> bilen häsiýetlendirilýär. Amplituda – ýygylyk häsiýetnamasynyň <<ýarym giňligi>> iki sany ýygylygyň arasyndaky tapawut bilen ölçenilýär, ýagny bu ýygylyklara degişli yrgyldy amplitudalary rezonansa gabat gelýän amplitudanyň ýarysyna deň bolýar. Amplituda – ýygylyk häsiýetnamasynyň <<ýarym giňligi>> Δ <<ýygylyklary sazlaýyş koeffisiýenti >> $z = \dfrac{\omega}{k}$ we getirilen togtoma koeffisiýenti $\delta = \dfrac{n}{k}$ arkaly aňladylýar. $\delta << 1$ bolan ýagdaý üçin takmyny formulany kesgitlemeli (ω – mejbur ediji güýjüň ýygylygy, k – hususy yrgyldylaryň ýygylygy; rezonans ýagdaýynda $z = 1$).

Jogaby: Amplituda – ýygylyk häsiýetnamasynyň «ýarym giňligi» $\Delta = z_2 - z_1 = \sqrt{1 - 2\delta^2 + 2\delta\sqrt{3 + \delta^2}} - \sqrt{1 - 2\delta^2 - 2\delta\sqrt{3 + \delta^2}}$ ýa-da $\delta << 1$ bolsa, $\Delta \approx 2\delta\sqrt{3}$.

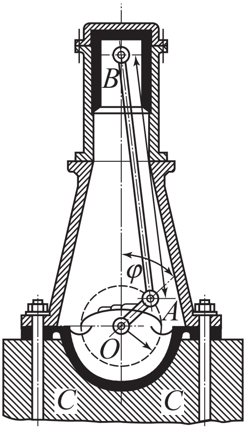
38.36-njy mesele. Wertikal yrgyldylary ýazmak üçin ulanylýan wibrografda esbabaýň ýazýan perosy bilen birikdirilen OA steržen O gorizontal okuň daşynda aýlanyp bilýär. OA sterženiň A ujuna Q ýük goýlup, steržen gorizontal ýagdaýda deňagramlylykda saklanylýar. Eger wibrograf $z = 0{,}2 \sin 25\,t$ *sm* kanun bilen wertikal yrgyldyly hereket edýän binýada (fundamente) berkidilen bolsa, OA sterženiň göräli hereketini kesgitlemeli. Puržinyň burulyşa gatylyk koeffisiýenti $c = 1\ N \cdot sm$, OA sterženiň Q ýük bilen bilelikde O görä inersiýa momenti $J = 4\ kg \cdot sm^2$, $Qa = 100\ N \cdot sm$. Sterženiň hususy yrgyldylaryny hasaba almaly däl (*38.27-nji surat*).



38.27-nji surat

Jogaby: $\varphi = 0{,}0051 \sin 25\,t$.

38.37-nji mesele. Massasy M_1 bolan wertikal hereketlendiriji esasynyň meýdany S bolan binýada (fundamente) berkidilen. Topragyň udel gatylygy λ deň. Hereketlendirijiniň kriwoşipiniň uzynlygy r, şatunynyň uzynlygy l, okunyň (walynyň) burç tizligi ω, porşeniň we aşak-ýokary hereket edýän deňagramlaşmaýan



38.28-nji surat

bölekleriň massasy M_2, binýadyň massasy M_3 kriwoşip agramlygyň kömegi bilen deňagramlaşýar diýip hasap etmeli. Şatunyň massasy hasaba alynmaly däl. Binýadyň mejbury yrgyldylaryny kesgitlemeli (*38.28-nji surat*).

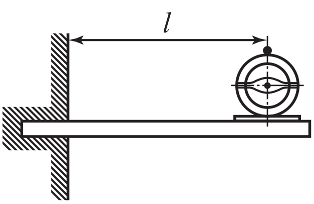
Görkezme. Hasaplarda $\frac{r}{l}$ kiçi gatnaşygyň birden ýokary derejeli ähli agzalaryny hasaba almaly däl.

Jogaby: Binýadyň deňagramlylyk ýagdaýyndan süýşüşi

$$\xi = \frac{M_2 r\omega^2}{(M_1 + M_3)(k^2 - \omega^2)}\cos\omega t + \frac{r}{l}\frac{M_2 r\omega^2}{(M_1 + M_3)(k^2 - 4\omega^2)}\cos 2\omega t$$

bu ýerden $k = \sqrt{\frac{\lambda S}{M_1 + M_3}}$.

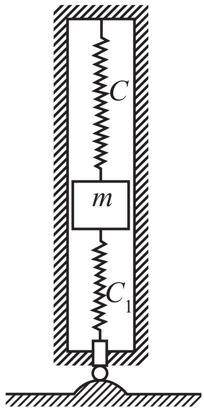
38.38-nji mesele. Massasy $M = 1200$ *kg* bolan elektromotor bir ujy bilen diwara ornaşdyrylan iki sany gorizontal we özara parallel pürsleriň erkin ujuna oturdylan. Elektromotoryň okundan diwara çenli bolan aralyk $l = 1{,}5$ *m*. Elektromotoryň ýakory $n = rad/s$ tizlik bilen aýlanýar, ýakoryň massasy $m = 200$ *kg*, onuň massalar merkezi walyň okundan $r = 0{,}05$ *mm* aralykda durýar. Pürsleriň ýasalan ýumşak poladynyň moduly $E = 19{,}6 \cdot 10^7$ *N/sm*^{2}. Kese-kesigiň meýdanyny mejbury yrgyldylaryň amplitudasy 0,5 *mm*-den uly bolmadyk ýagdaýynda kesgitlemeli. Pürsüň agramy hasaba alynmaly däl (*38.29-njy surat*).



38.29-njy surat

Jogaby: $E = 8740$ *sm*^{4} ýa-da 8480 *sm*^{4}.

38.39-njy mesele. Klapany herekete getiriji kulaçokly mehanizm, shematik görnüşde, bir tarapdan c gatylykly puržin bilen gozganmaýan nokada berkidilen, ikinji tarapdan öňe hereket edýän kulaçokdan geçirilen, c_1 gatylykly puržin arkaly hereketlenýän m



38.30-njy surat

massa şekilinde aňladylmagy mümkin. Kulaçogyň işleýşi wertikal süýşmeler: $0 \le t \le \dfrac{2\pi}{\omega}$ bolanda $x_1 = a[1 - \cos\omega t]$, $t > \dfrac{2\pi}{\omega}$ bolanda $x_2 = 0$ formulalar bilen kesgitlenýär. m massaly jisimiň hereketini kesgitlemeli (*38.30-njy surat*).

Jogaby: $0 \le t \le \dfrac{2\pi}{\omega}$ bolanda

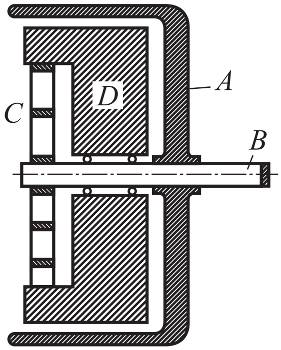
$$x = \frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)}[\cos kt - \cos\omega t] + \frac{c_1 a}{mk^2}[1 - \cos\omega t],$$

bu ýerde $k = \sqrt{\dfrac{c + c_1}{m}}$.

$t > \dfrac{2\pi}{\omega}$ bolanda ýük erkin yrgyldaýar:

$$x = \left[\frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)} - \frac{c_1 a}{mk^2}\right]\left[\cos kt - \cos k\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

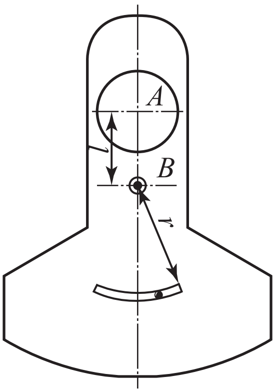
38.40-njy mesele. Burulma yrgyldylary ýazmak üçin torsiograf işledilýär. Ol B wala mäkäm ornaşdyrylan ýeňil alýuminiý A şkiwden we B wala görä erkin aýlanyp bilýän agyr D mahowikden ybarat. Wal D mahowige gatylygy c bolan spiral puržinyň kömegi bilen berkidilen. B wal $\varphi = \omega t + \varphi_0 \sin\omega t$ kanun bilen hereketlenýär (garmoniki yrgyldylar bilen goşulan deňölçegli aýlanma). Mahowigiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti J deň. Torsiografyň mahowiginiň mej-



38.31-nji surat

bury yrgyldylaryny derňemeli (*38.31-nji surat*).

Jogaby: Mahowigiň görä aýlanma burçy: $\psi = \dfrac{\varphi_0 \omega^2}{\frac{c}{J} - \omega^2} \sin \omega t.$



38.32-nji surat

38.41-nji mesele. Awiasiýa motorynyň tirsekli walynyň yrgyldylaryny söndürmek üçin, bu walyň agramlygynda merkezi aýlanma okundan $AB = l$ aralykda r radiusly töweregiň dugasy şekilinde ternaw görnüşli joýa açylýar. Joýa boýunça maddy nokat görnüşde shemalaşdyrylan goşmaça agramlyk erkin hereketlenmegi mümkin. Walyň aýlanma burç tizligi ω deň. Agyrlyk güýjüniň täsirini hasaba alman, goşmaça agramlygyň kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli (*38.32-nji surat*).

Jogaby: $k = \omega \sqrt{\dfrac{l}{r}}.$

38.42-nji mesele. Gatylygy c bolan puržindan asylgy P agramly ýüke başlangyç pursatda hemişelik F güýç goýlan. τ wagtdan soň güýç täsir etmeýär. Ýüküň hereketini kesgitlemeli.

Jogaby: $0 \le t \le \tau$ bolanda $x = \dfrac{F}{c}\left[1 - \cos\sqrt{\dfrac{cg}{P}}\, t\right];$

$\tau < t$ bolanda $x = \dfrac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\dfrac{cg}{P}}(t - \tau) - \cos\sqrt{\dfrac{cg}{P}}\, t\right].$

38.43-nji mesele. Deslapky meselede beýan edilen ulgama güýç dürli wagtda täsir edende ulgamyň deňagramlylyk ýagdaýyndan maksimal süýşmegini kesgitlemeli.

1) $\tau = 0$, $\lim_{\tau \to 0} F\tau = S$ (urgy); 2) $\tau = \dfrac{T}{4}$; 3) $\tau = \dfrac{T}{2}$, bu ýerde T – ulgamyň erkin yrgyldylarynyň periody.

Jogaby: 1) $x_{\max} = \sqrt{\dfrac{g}{cP}}S$; 2) $x_{\max} = \sqrt{2}\dfrac{F}{c} = \sqrt{2}\,x_{st}$;

3) $x_{\max} = 2\dfrac{F}{c} = 2x_{st}$.

38.44-nji mesele. Süýnmeýän l uzynlykdaky ýüpden asylan maddy nokatdan ybarat maýatnigiň hereket kanunyny tapmaly. Maýatnigiň asylan nokady $\xi = \xi\ (t)$ kanun boýunça gorizontal göni çyzyk boýunça hereketlenýär.

Jogaby: Maýatnigiň wertikala görä φ gyşarma burçy

$\varphi = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt - \dfrac{\xi(t)}{l} + \dfrac{k}{l}\int_0^t \xi(t)\sin k(t-\pi)d\tau$ kanun boýunça özgerýär, bu ýerde $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

38.45-nji mesele. Gatylygy c bolan pužindan asylgy m massaly maddy nokada aşakdaky

$t < 0$ bolanda, $F = 0$, $0 \le t$-da, $F = \dfrac{t}{\tau}\cdot F_0$, $t > \tau$ -da, $F = F_0$

şertler bilen berlen üýtgeýän güýç täsir edýär. Nokadyň hereketini we $t > \tau$ bolanda yrgyldylaryň amplitudasyny kesgitlemeli.

Jogaby: $x = \dfrac{F_0}{c}\left[1 - \dfrac{2}{k\tau}\cos k\left(t - \dfrac{\tau}{2}\right)\sin\dfrac{k\tau}{2}\right]$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

$A = \dfrac{2F_0}{kc\tau}\sin\dfrac{kt}{2}$.

38.46-njy mesele. Gatylygy c bolan puržindan asylgy m massaly ýüke $Q = F\left|\sin\omega t\right|$ kanun bilen özgerýän üýtgeýji güýç täsir edýär. Ýygylygy üýtgeýji güýjüň ýygylygyna deň ulgamyň yrgyldysyny kesgitlemeli.

Jogaby: $0 \le t \le \dfrac{\pi}{\omega}$ bolanda

$$x = \frac{F\omega}{mk(\omega^2 - k^2)}\left[\sin kt + ctg\frac{k\pi}{2\omega}\cos kt\right] - \frac{F}{m(\omega^2 - k^2)}\sin\omega t;$$

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

38.47-nji mesele. Ortasynda P agramly disk bolan ýeňil walyň (kese yrgyldylaryna görä) kritik burç tizligini kesgitlemeli. 1) Walyň iki ujy bilen uzyn podşipniklere daýanyp duran (uçlary ornaşdyrylan diýip garamak mümkin); 2) walyň bir ujy uzyn podşipnige (ujy ornaşdyrylan), beýleki ujy bolsa gysga podşipnige (ujy direlen) daýanyp duran ýagdaýlara seretmeli. Walyň uzynlygy l-e, egilmä gatylygy bolsa EI-e deň.

Jogaby: 1) $\omega_{\text{kr}} = \sqrt{\dfrac{192EJg}{Pl^3}}$; 2) $\omega_{\text{kr}} = \sqrt{\dfrac{768EJg}{7Pl^3}}$.

38.48-nji mesele. Uzynlygy l bolan ýeňil walyň aýlanyşynyň kritik tizligini wal iki sany gysga podşipniklerde duranda kesgitlemeli. Walyň podşipnikden çykan a uzynlykdaky ujunda P agramly disk bar. Walyň egilmä gatylygyny EI diýip almaly.

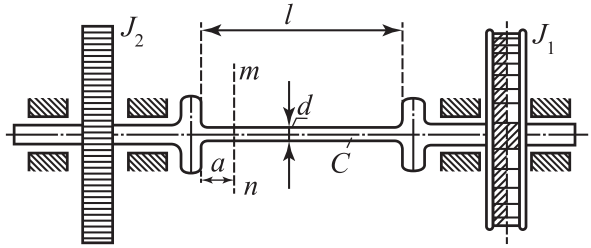
Jogaby: $\omega_{\text{kr}} = \sqrt{\dfrac{2EJg}{Pla^2}}$.

38.49-njy mesele. Bir ujy gysga we ikinji ujy uzyn podşipniklerde ýatan agyr walyň aýlanyşynyň kritik tizligini kesgitlemeli. Bu ýagdaýda walyň uzynlygy l, egilmä gatylygy EI, walyň uzynlyk birliginiň agramy q deň.

Jogaby: $\omega_{\text{kr}} = 15{,}4\sqrt{\dfrac{EJg}{ql^4}}$.

38.5. Özbaşdak çözmek üçin meseleler. Erkinlik derejesi birnäçe bolan ulgamyň kiçi yrgyldylary

38.50-nji mesele. Gidrawlik turbinalari düzgünleşdirmek prosesini eksperimental ýol bilen derňemek üçin, rotoryň aýlanma okuna görä inersiýa momeni $J_1 = 50\ kg \cdot sm^2$ bolan turbina, inersiýa momenti $J_2 = 1500\ kg \cdot sm^2$ bolan mahowikden we turbinanyň rotoryny mahowik bilen birleşdiriji maýyşgak C waldan düzülen enjam ýasalan. Wal $l = 1552\ mm$ uzynlyga, $d = 25{,}4\ mm$ eýe, walyň materalynyň süýşme moduly $G = 8800\ kN/sm^2$. Walyň massasyny we ýogyn ýerleriniň burluşyny hasaba alman, berlen ulgamyň erkin yrgyldylarynda gozganman galýan mn kesigi (düwün kesigi) tapmaly, şeýle hem, ulgamyň erkin yrgyldylaryň T periodyny hasaplamaly (*38.33-nji surat*).



38.33-nji surat

Jogaby: $a = 50\ mm$, $T = 0{,}09\ s$.

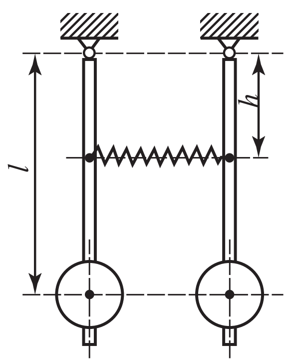
38.51-nji mesele. Bir ujy berkidilen, ortasynda we ikinji ujunda birjynsly diskler ornaşdyrylan waldan düzülen ulgamyň erkin burulma yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Her bir diskiň walyň okuna görä inersiýa momenti J deň; walyň bölekleriniň burulma gatylyklary $c_1 = c_2 = c$. Walyň massasyny hasaba almaly däl.

Jogaby: $k_1 = 0{,}62\sqrt{\dfrac{c}{J}},\quad k_2 = 1{,}62\sqrt{\dfrac{c}{J}}.$

38.52-nji mesele. Wal we oňa oturdylan üç sany birmeňzeş disklerden ybarat ulgamyň baş burulma yrgyldylarynyň ýygylyklaryny kesgitlemeli. Iki sany disk walyň uçlarynda, üçünjisi bolsa onuň ortasynda berkidilen. Her bir diskiň walyň okuna görä inersiýa momenti –J; – $c_1 = c_2 = c$. Walyň massasyny hasaba almaly däl.

Jogaby: $k_1 = \sqrt{\dfrac{c}{J}},\ k_2 = \sqrt{\dfrac{3c}{J}}.$

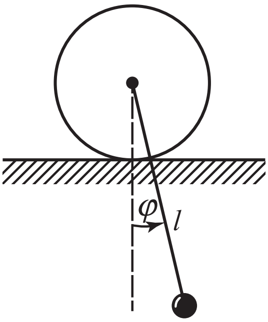
38.53-nji mesele. Her biriniň uzynlygy l we massasy m bolan iki sany birmeňzeş maýatnigiň sterženleri asylyş oklaryndan h aralykda gatylygy c bolan maýyşgak puržinyň uçlary bilen birikdirilen. Maýatnikleriň biri deňagramlylyk ýagdaýyndan α burça gyşardylanyndan soň, ulgamyň maýatnikleriň tekizliginde edýän yrgyldyly hereketini kesgitlemeli. Maýatnikleriň başlangyç tizlikleri nola deň. Maýatnikleriň sterženleriniň massalaryny we puržinyň massasyny hasaba almaly däl (*38.34-nji surat*).



38.34-nji surat

Jogaby: $\varphi_1 = \alpha\cos\frac{k_1+k_2}{2}t\cos\frac{k_2-k_1}{2}t,$

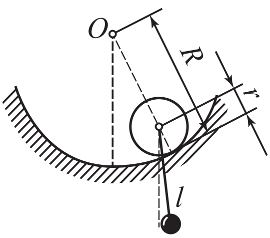
$\varphi_2 = \alpha\cos\frac{k_1+k_2}{2}t\cos\frac{k_2-k_1}{2}t,$ bu ýerde φ_1 we φ_2 maýatnikleriň werrtikala görä gyşarma burçlary we $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}},\ k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}.$



38.35-nji surat

38.54-nji mesele. Massasy M bolan disk gönüçyzykly demir ýolda typman tigirlenip bilýär. Bir ujunda m massaly nokatlanç ýüki bar bolan l uzynlykdaky sterženiň diskiň merkezine şarniriň kömegi bilen birikdirilen. Maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny tapmaly. Sterženiň massasyny hasaba almaly däl (*38.35-nji surat*).

Jogaby: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{3M+2m}\cdot\frac{l}{g}}.$



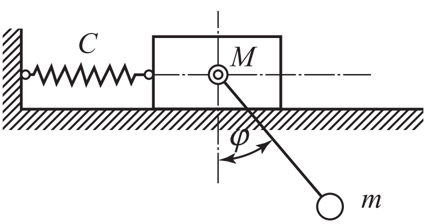
38.36-njy surat

38.55-nji mesele. Deslapky meselede gönüçyzykly demir ýoly R radiusly töweregiň dugasy bilen çalşyryp, garalýan ulgamyň kiçi yrgyldylarynyň ýygylyklaryny tapmaly (*38.36-njy surat*).

Jogaby: Baş ýygylyklar

$$\frac{3M}{3M+2m}k^4 - \left[\frac{2(M+m)g}{(3M+2m)(R-r)} + \frac{g}{l}\right]k^2 + \frac{2(M+m)g^2}{(3M+2m)(R-r)l} = 0$$

deňlemäniň çözüwleridir.



38.37-nji surat

38.56-njy mesele. Maýatnik gorizontal tekizlikde sürtülmän typýan M polzundan we polzun bilen bagly okuň daşynda aýlanyp biýän l uzynlykdaky sterženiň ýardamynda polzun bilen birikdirilen m massaly şarjagazdan ybarat. Polzuna gatylygy c bolan puržin birikdirilen. Puržinyň beýleki ujy gozganmaz ýaly berkidilen. Ulgamyň kiçi yrgyldylarynyň ýygylyklaryny tapmaly (*38.37-nji surat*).

Jogaby: Gözlenýän ýygylyklar

$$k^4 - \left[\frac{c}{M} + \frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\right]k^2 + \frac{c}{M}\cdot\frac{g}{l} = 0$$

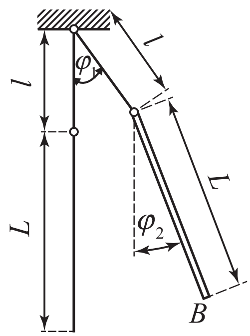
deňlemäniň çözüwleridir.

38.57-nji mesele. Iki sany birmeňzeş fiziki maýatnikler bir gorizontal tekizlikde ýerleşen, özara parallel gorizontal oklardan asylan we süýnmän duran ýagdaýyndaky uzynlygy maýatnigiň oklarynyň arasyndaky uzaklyga deň bolan maýyşgak puržin bilen berkidilen. Hereketе görkezilýän garşylygy we puržinyň massasyny hasaba alman, deňagramlylyk ýagdaýyna görä kiçi gyşarma burçlarynda ulgamyň baş ýygylyklaryny we amplitudalarynyň gatnaşyklaryny kesgitlemeli. Her maýatnigiň agramy P, onuň massalar merkezi arkaly asylyş okuna parallel geçýän oka görä inersiýa radiusy ρ, puržinyň gatylygy c, maýatnigiň massalar merkezinden we puržinyň maýatnige birikdirilen nokadyndan asylyş okuna çenli bolan uzaklyklar, degişlilikde l we h deň (*55.4-nji meselä degişli surata seret*).

Jogaby:

$$k_1^2 = \frac{gl}{\rho^2 + l^2},\ k_2^2 = \frac{(Pl + 2ch^2)g}{P(\rho^2 + l^2)},\ \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = 1,\ \frac{A_1^{(2)}}{A_{(2)}^{(2)}} = -1.$$

38.58-nji mesele. Birjynsly, L uzynlykly AB steržen $l = 0{,}5\,L$ uzynlykdaky ýüpüň kömegi bilen gozganmaýan nokatdan asylan. Ýüpüň massasyny hasaba alman, ulgamyň baş yrgyldylarynyň ýygylyklaryny we birinji hem-de ikinji baş yrgyldylarynda steržen bilen ýüpüň wertikala görä gyşarmalarynyň gatnaşygyny kesgitlemeli (*38.38-nji surat*).



38.38-nji surat

Jogaby:

$$k_1 = 0{,}677\sqrt{\frac{g}{l}},\quad k_2 = 2{,}558\sqrt{\frac{g}{l}};$$

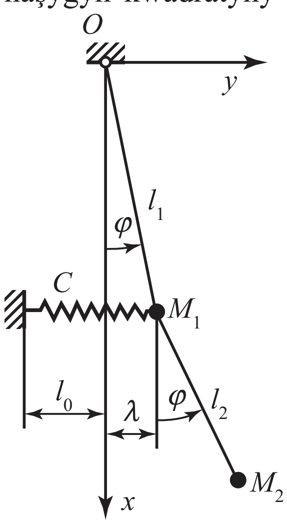
birinji baş yrgyldyda $\varphi_1 = 0{,}847\varphi_2$, ikinjisinde $\varphi_1 = -1{,}180\ \varphi_2$, bu ýerde φ_1 we φ_2 – ýüpüň we sterženiň wertikal bilen emele getiren burçlarynyň amplitudalary.

38.59-njy mesele. Deslapky meselede ýüpüň uzynlygyny sterženiň uzynlygyna garanyňda juda uly diýip hasaplap we $\frac{L}{l}$ gatnaşygyň kwadratyny hasaba alman, ulgamyň erkin yrgyldylarynyň iň kiçi ýygylygynyň l uzynlykdaky matematiki maýatnigiň yrgyldylarynyň ýygylygyna bolan gatnaşygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $1 - \frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

38.60-njy mesele. 38.58-nji meselede ýüpüň uzynlygyny sterženiň uzynlygyna garanyňda juda kiçi diýip hasaplap we $\frac{L}{l}$ gatnaşygyň kwadratyny hasaba alman, ulgamyň erkin yrgyldylarynyň iň kiçi ýygylygynyň aýlanma oky sterženiň ujunda ýerleşen diýip garalýan fiziki maýatnigiň yrgyldylarynyň ýygylygyna bolan gatnaşygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $1 - \frac{9}{16}\frac{l}{L}$.



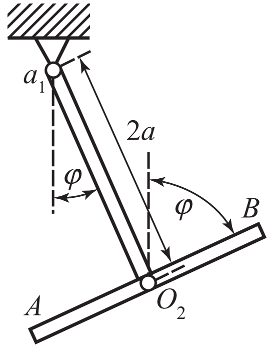
38.39-njy surat

38.61-nji mesele. M_1 we M_2 ýükleriň massalary, degişlilikde m_1 we m_2-ä deň, $OM_1 = l_1$, $M_1M_2 = l_2$ şertler bilen berlen, M_1 ýüke massasyny hasaba almasaň hem bolýan puržin birikdirilen goşa matematiki maýatnigiň baş yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Puržinyň süýnmedik ýagdaýyndaky uzynlygy l_0, gatylygy c *(38.39-njy surat)*.

Jogaby: $k_{1,2}^2 = \dfrac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)}$,

bu ýerde $n_1^2 = \dfrac{(m_1+m_2)g + cl_1}{(m_1+m_2)l_1}$, $n_2^2 = \dfrac{g}{l_2}$, $\gamma_{12}^2 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$.

38.62-nji mesele. Goşa fiziki maýatnik gozganmaýan gorizontal O_1 okuň daşynda aýlanýan $2a$ uzynlyk we P_1 agramly birjynsly gönüçyzykly O_1O_2 sterženden we özüniň massalar merkezinde birinji sterženiň O_2 ujuna şarnirli birikdirilen birjynsly P_2 agramly gönüçyzykly *AB* sterženden ybarat. Eger başlangyç pursatda $O_1\,O_2$ steržen wertikaldan φ_0 burça gyşaran, *AB* steržen bolsa wertikal ýagdaýynda duran we başlangyç ω_0 burç tizlige eýe bolsa, ulgamyň hereketini kesgitlemeli (*38.40-njy surat*).

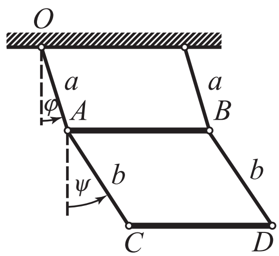


38.40-njy surat

Jogaby: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{3}{4}\dfrac{P_1+2P_2}{P_1+3P_2}\dfrac{g}{a}}\,t;$

$\psi = \omega_0 t$, bu ýerde ψ – bu *AB* sterženiň wertikal ugur bilen emele getirýän burçy.

38.63-nji mesele. Agramy *P* bolan *AB* steržen *A* we *B* uçlaryndan iki sany birmeňzeş *a* uzynlykdaky süýnmeýän ýüpler bilen potolokdan asylan. *AB* sterženden iki sany birmeňzeş *b* uzynlykdaky süýnmeýän ýüpler bilen *Q* agramly *CD* pürs asylan. Yrgyldylar wertikal tekizlikde bolýar diýip hasap edip, baş yrgyldylarynyň ýygylygyny tapmaly. Ýüpleriň massalaryny hasaba almaly däl (*38.41--nji surat*).

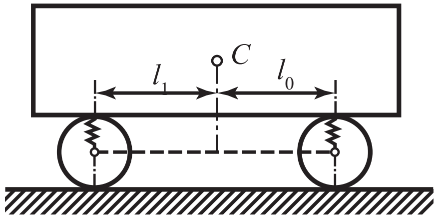


38.41-nji surat

Jogaby: $k_{1,2}^2 = \dfrac{n_1^2 + n_2^2 \mp \sqrt{(n_2^1 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)},$

bu ýerden $n_1^2 = \dfrac{g}{a},\ n_2^2 = \dfrac{g}{b},\ \gamma_{12}^2 = \dfrac{Q}{P+Q}.$

38.64-nji mesele. Demir ýol wagonynyň orta wertikal tekizlikdäki yrgyldylaryny derňemeli. Wagonyň ressorasty böleginiň agramy *Q*, massalar merkezinden oklar arkaly geçirilen wertikal tekizliklere çenli bolan aralyklar $l_1 = l_2 = l$, wagonyň oklaryna parallel bolan merkezi oka görä inersiýa radiusy ρ; iki okuň ressoralarynyň gatylygy birmeňzeş: $c_1 = c_2 = c$ (*38.42-nji surat*).

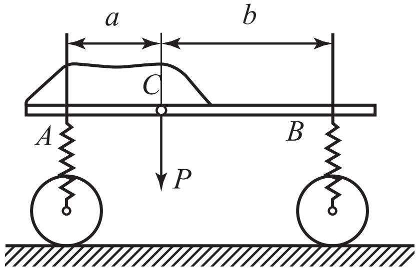


38.42-nji surat

Jogaby: $x = A\sin(k_1 t + \alpha)$, $\psi = B\sin(k_2 t + \beta)$, bu ýerde x – wagonyň massalar merkeziniň wertikal süýsmesi, ψ – wagonyň polunyň gorizontal tekizlik bilen emele getirýän burçy, A, B, α, β – integrirlemäniň hemişelikleri,

$$k_1 = \sqrt{\frac{2cg}{Q}},\ k_2 = \sqrt{\frac{2cgl^2}{Q\rho^2}}.$$

38.65-nji mesele. A we B nokatlarda birmeňzeş c gatylykly iki sany ressoralara daýanyp duran P agramly platformanyň kiçi erkin yrgyldylaryny derňemeli. Platformanyň ýüki bilen birlikdäki C massalar merkezi AB göni çyzykda bolup, $AB = a$ we $CB = b$. Platforma, özüniň massalar merkezine wertikal aşak tarapa ugrukdyrylan υ_0 başlangyç tizlik beriş ýoly bilen deňagramlylykdan çykarylan. Ressoralaryň massalaryny we sürtülme güýçlerini hasaba almaly däl. Platformanyň massalar merkezinden geçýän gorizontal kese oka görä inersiýa momenti $J_C = 0,1(a^2 + b^2)\frac{P}{g}$. Yrgyldylar wertikal tekizlikde bolýarlar. Umumylaşdyrylan koordinatalar görnüşinde massalar merkeziniň deňagramlylyk ýagdaýyndan aşak tarapa süýşmegini y, platformanyň massalar merkeziniň daşyndaky aýlanma burçyny ψ diýip kabul etmeli (*38.43-nji surat*).



38.43-nji surat

Jogaby: $y = \dfrac{\upsilon_0}{1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\dfrac{1}{k_1}\sin k_1 t - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 k_2}\sin k_2 t\right)$,

$$\varphi = \frac{\upsilon_0 \alpha_1}{1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\dfrac{1}{k_1}k_1 t - \dfrac{1}{k_2}\sin k_2 t\right)},$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{6cg}{p}\left(1 \mp \sqrt{1 - 0{,}278\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}\right), \quad \alpha_1 = \frac{2c - \dfrac{p}{g}k_1^2}{c(b-a)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2c - \dfrac{p}{g}k_2^2}{c(b-a)}.$$

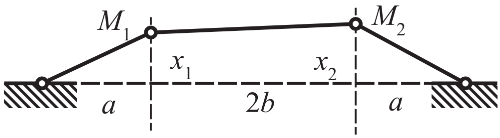
38.66-njy mesele. Teležkanyň platformasy A we B nokatlarda birmeňzeş c gatylykly iki sany ressoralara daýanýar. Ressoralaryň oklarynyň arasyndaky uzaklyk $AB = l$. Platformanyň C massalar merkezi platformanyň simmetriýa oky bolan AB göni çyzykda A nokatdan $AC = a = \dfrac{l}{3}$ aralykda ýerleşen *(55.16-njy meselä degişli surata seret)*. Platformanyň massalar merkezinden AB göni çyzyga perpendikulýar bolup geçýän we platformanyň tekizliginde ýatan oka görä inersiýa radiusy $0{,}2 \cdot l$-ä deň diýip kabul etmeli. Platformanyň agramy Q deň. Platformanyň öz massalar merkezine, onuň tekizligine perpendikulýar edilip goýlan urgynyň täsirinde döreýän kiçi yrgyldylary tapmaly. Urgynyň impulsy S-e deň.

Jogaby: Platformanyň massalar merkeziniň wertikal süýşüşi z, meseläniň şertinde görkezilen okuň daşynda aýlanma burçy φ bolsa (bu we beýleki koordinatalar platformanyň massalar merkeziniň deňagramlylyk ýagdaýyndan başlap hasaplanýar) aşakdakylary tapmaly:

$$z = \sqrt{\frac{g}{cQ}}S\left(0{,}738\sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}t + 0{,}00496\sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}t\right),$$

$$l\varphi = \sqrt{\frac{g}{cQ}}S\left(0{,}509\sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}t - 0{,}180\sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}t\right).$$

38.67-nji mesele. Her biriniň massasy m bolan iki sany M_1 we M_2 maddy nokatlar, $2(a+b)$ uzynlykda dartylan ýüpüň uçlaryndan birmeňzeş aralyklarda oňa simmetrik görnüşde berkidilen. Ýüpüň dartylyş güýji p deň.Baş yrgyldylaryň ýygylygyny we baş koordinatalary tapmaly (*38.44-nji surat*).



38.44-nji surat

Jogaby: $k_1 = \sqrt{\dfrac{p}{ma}},\ k_2 = \sqrt{\dfrac{p}{m}\left[\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right]}.$

Baş koordinatalar $\theta_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2),\quad \theta_2 = \dfrac{1}{2}(x_2 + x_1).$

38.68-nji mesele. Oýuk tarapy ýokaryk garaýan ýylmanak üstde deňagramlylyk ýagdaýynyň golaýynda yrgyldaýan agyr maddy nokadyň kiçi baş yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Üstüň deňagramlylyk ýagdaýa gabat gelýän nokadynyň egriliginiň baş radiuslary ρ_1 we ρ_2-ä deň.

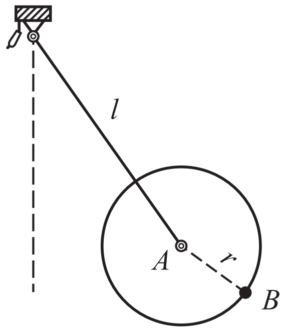
Jogaby: $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\rho_1}},\quad k_2 = \sqrt{\dfrac{g}{\rho_2}}.$

38.69-njy mesele. Agyr maddy nokadyň deňagramlylyk ýagdaýynyň golaýyndaky kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Bu maddy nokadyň deňagramlylyk ýagdaýy şu nokatdan geçýän wertikal okuň daşynda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýan üstüň iň aşaky nokadyna gabat gelýär. Üstüň iň aşaky nokadyndaky egriliginiň baş radiuslary ρ_1 we ρ_2 -ä deň.

Jogaby: $k^1 - \left[2\omega^2 + \dfrac{g}{\rho_1} + \dfrac{g}{\rho_2}\right]k^2 + \left(\omega^2 - \dfrac{g}{\rho_1}\right)\left(\omega^2 - \dfrac{g}{\rho_2}\right) = 0$

deňlemäniň kökleridir.

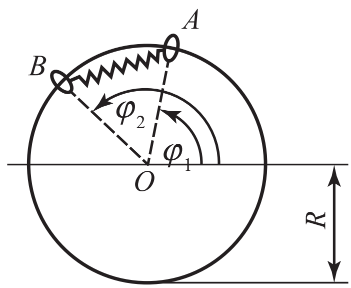
38.70-nji mesele. Radiusy r we massasy M bolan birjynsly tegelek disk gozganmaýan gorizontal okuň daşynda aýlanyp bilýän l uzynlykdaky OA steržene şarnir bilen berkidilen. Diskiň töweregine m massaly B nokat berkidilen. Ulgamyň erkin yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli. Sterženiň massasy hasaba alynmaly däl. Disk, *OA* sterženiň aýyş tekizliginde aýlanyp bilýär (*38.45-nji surat)*.



38.45-nji surat

Jogaby: $k^4 - \frac{M+m}{M+3m}\left[1 + 2\frac{m}{M}\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}k^2 + \frac{2m(M+m)}{M(M+3m)}\frac{g^2}{lr} = 0$

deňlemäniň kökleridir.



38.46-njy surat

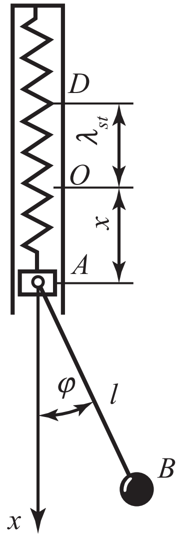
38.71-nji mesele. Tekizligi gorizontal bolan R radiusly sim töwerege gatylygy c we süýnmedik ýagdaýyndaky uzynlygy l_0 bolan puržin bilen birikdirilen iki sany birmeňzeş halkajyk ildirilen. Halkajyklary m massaly maddy nokatlar görnüşinde kabul edip, olaryň hereketini kesgitlemeli. Başlangyç pursatda $\varphi_1 = 0$. B halkajyk bolsa özüniň deňagramlylyk ýagdaýyndan $2R$ duganyň uzynlygy ýaly süýşen diýip kabul etmeli. Halkajyklaryň başlangyç tizlikleri nola deň (*38.46-njy surat*).

Jogaby:

$$\varphi_1 = \beta(1 - \cos kt), \;\; \varphi_2 = 2\alpha + \beta(1 + \cos kt),$$

$$\alpha = \arcsin\frac{l_0}{2R}; \quad k = \sqrt{\frac{2c}{m}}\cos\alpha.$$

38.72-nji mesele. Agramy P_1 bolan wertikal hereketlenýän A polzuna c gatylykdaky puržinyň ujy berkidilen. Polzundan asylyp goýlan uzynlygy l, agramy P_2 bolan matematiki maýatnigiň kiçi



38.47-nji surat

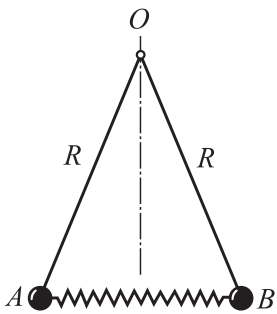
yrgyldylaryny kesgitlemeli. Polzun özüniň hereketinde tizlige proporsional bolan garşylyga duşýar (b – proporsionallyk koeffisiýenti). b = 0 bolanda berlen ulgamda baş ýygylyklary özara deň bolan şertleri tapmaly (*38.47-nji surat*).

Jogaby: 1) $x = A_1 e^{-ht} \sin(\sqrt{k_1^2 - h^2}\, t + \varepsilon_1)$,

$\varphi = A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2)$, bu ýerde A_1, A_2, ε_1, ε_2 – integrirlemäniň hemişelikleri, $h = \dfrac{bg}{2(P_1 + P_2)}$,

$k_1 = \sqrt{\dfrac{cg}{P_1 + P_2}}$, $k_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

2) Eger ($b = 0$ ýagdaýda) $c = \dfrac{P_1 + P_2}{l}$ bolsa, baş ýygylyklar birmeňzeş bolýarlar.



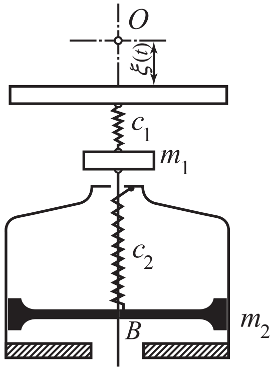
38.48-nji surat

38.73-nji mesele. Iki sany birmeňzeş R uzynlykdaky gaty sterženler umumy O asylyş nokadyna eýe. Sterženler biri-birinden aýratyn, wertikal tekizlikde asylyş nokadynyň daşynda aýlanmagy mümkin. Sterženleriň uçlaryna her biriniň massasy m deň, c gatylykdaky puržin bilen birleşdirilen iki sany birmeňzeş A we B ýükler birikdirilen. Ulgamyň durnukly deňagramlylyk ýagdaýynda puržinyň uzynlygy l-e deň. Sterženleriň massalaryny hasaba alman, ýükleriň durnukly deňagramlylyk ýagdaýynyň golaýyndaky baş yrgyldylarynyň ýygylygyny tapmaly (*38.48-nji surat*).

Jogaby: $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{R}\cos\alpha}$, $k_2 = \sqrt{\dfrac{2c}{m}\cos^2\alpha + \dfrac{g}{R}\cos\alpha}$,

bu ýerden $\alpha = \arcsin\dfrac{l}{2R}$.

38.74-nji mesele. Berlen $\xi = \xi(t)$ kanuna laýyklykda hereketleniji platforma m_1 massadan we oňa B nokatda mäkäm birikdirilen dempfer porşeninden düzülen mehaniki ulgam, c_1 gatylykly puržin bilen asylan. Massasy m_2 bolan dempfer kamerasy gatylygy c_2 bolan puržina daýanýar, puržinyň ikinji ujy porşene birikdirilen. Dempferdäki şepbeşiklik porşeniň we kameranyň göräli tizligine proporsional; β – garşylyk koeffisiýenti. Ulgamyň hereket deňlemelerini düzmeli (*38.49-njy surat*).



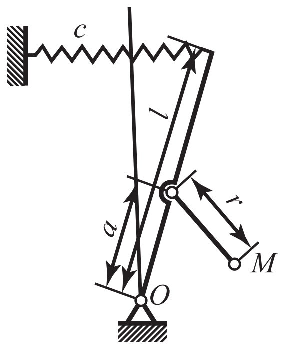
38.49-njy surat

Jogaby:

$$m_1\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 - \beta\dot{x}_2 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = c_1\,\xi(t),$$

$$m_2\ddot{x}_2 - \beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = 0.$$

38.75-nji mesele. Massasy m_1, uzynlygy l bolan birjynsly agyr sterženiň aşaky ujy şarnire daýanýan ýagdaýda, c gatylykly puržin bilen wertikal ýagdaýda saklanýar. Sterženiň şarnirli ujundan a aralykda duran nokadyna r uzynlykdaky ýüpüň kömegi bilen m_2 massaly M ýük asylan. Sterženiň wertikal ýagdaýynda puržin süýnmedik gorizontal ýagdaýda durýar. Puržinyň haýsy gatylygynda steržen we ýük wertikal ýagdaýyň golaýynda kiçi yrgyldylary etmegi mümkin? Bu yrgyldylarynyň ýygylyklarynyň deňlemesini tapmaly. Ýüpüň massasyny hasaba almaly däl (*38.50-nji surat*).



38.50-nji surat

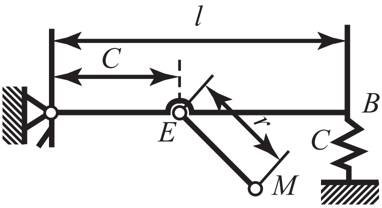
Jogaby: $c > \dfrac{(m_1 l + 2m_2 a)g}{2l^2}$,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})k^2 + c_{11}c_{22} = 0, \text{ bu ýerde}$$

$$a_{11} = \frac{m_1 l^2 + 3m_2 a^2}{3},\ a_{12} = m_2 ar,\ a_{22} = m_2 r^2,\ c_{11} = cl^2 - \frac{(m_1 l + 2m_2 a)g}{2},$$

$c_{22} = m_2 gr.$

38.76-njy mesele. Uzynlygy l, massasy m_1 bolan birjynsly AB pürs B nokatda c gatylykly puržina, A nokatda bolsa silindrik şarnire

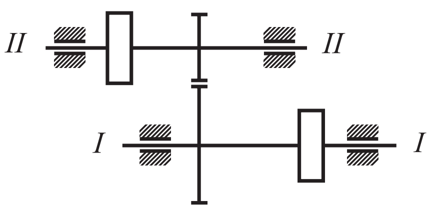


38.51-nji surat

daýanýar. Pürsüň A şarnirden a aralykdaky E nokadyna şarniriň kömegi bilen r uzynlykdaky steržen birikdirilen. Bu sterženden m_2 massaly M ýük asylan. Deňagramlylyk ýagdaýynda AB pürse gorizontal ýerleşen. Pürsüň we ýüküň kiçi yrgyldylarynyň deňlemelerini tapmaly. Sterženiň massasyny hasaba almaly däl (*38.51 -nji surat*).

Jogaby: $\varphi = a_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1)$, $\psi = a_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2)$, bu ýerden $k_1 = \sqrt{\dfrac{3cl^2}{m_1 l^2 + 3m_2 a^2}}$, $k_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, $a_1, a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ integrirlemäniň hemişelikleri.

38.77-nji mesele. Dişli geçirme arkaly berkidilen iki sany waldan düzülen ulgamyň erkin burulma yrgyldylarynyň ýygylyklaryny kesgitlemeli. Wallara ornaşdyrylan massalaryň we dişli tigirleriň wal okuna görä inersiýa momentleri $J_1 = 875 \cdot 10^3$ $kg \cdot sm^2$, $J_2 = 560 \cdot 10^3$ $kg \cdot sm^2$, $i_1 = 3020$ $kg \cdot sm^2$, $i_2 = 105$ $kg \cdot sm^2$ deň; wallaryň burulmadaky gatylyklary $c_1 = 316 \cdot 10^7$ $N \cdot sm$, $c_2 = 115 \cdot 10^7$ $N \cdot sm$; geçirme sany $z_1/z_2 = 5$. Wallaryň massalaryny hasaba almaly däl (*38.52-nji surat*).



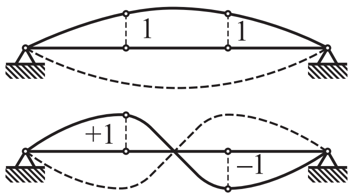
38.52-nji surat

Jogaby: $k_1 = 54{,}8$ s^{-1}, $k_1 = 2{,}38$ s^{-1}.

38.78-nji mesele. Deslapky meselede beýan edilen ulgamyň dişli tigirleriniň massalaryny hasaba alman, burulma erkin yrgyldylarynyň ýygylygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $k = 58{,}7$ s^{-1}.

38.79-njy mesele. Iki daýançda erkin ýatan l uzynlykdaky pürse $x = \frac{1}{3}l$ we $x = \frac{2}{3}l$ nokatlarda Q agramly iki sany deň ýükler goýulan; balkanyň baş kese yrgyldylarynyň ýygylyklaryny we şekillerini tapmaly. Pürsüň kese-kesiginiň inersiýa momenti J, maýyşgaklyk moduly E. Pürsüň massasyny hasaba almaly däl (*38.53-nji surat*).



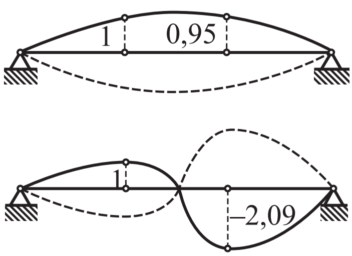
38.53-nji surat

Jogaby: $k_1 = 5{,}69\sqrt{\dfrac{E\lg}{Ql^3}},\ k_2 = 22{,}04\sqrt{\dfrac{EIg}{Ql^3}},$

$\dfrac{A_{(1)}^{(1)}}{A_{(2)}^{(1)}} = 1,\quad \dfrac{A_{(2)}^{(2)}}{A_{(1)}^{(2)}} =-1;$

baş yrgyldylaryň şekilleri suratda görkezilen.

38.80-nji mesele. Uçlary direlen l uzynlykdaky pürsüň baş kese yrgyldylarynyň şekillerini we ýygylyklaryny tapmaly. Pürs daýançlaryndan birmeňzeş $\frac{l}{3}$ aralyklary $Q_1 = Q$ we $Q_2 = 0{,}5\ Q$ ýükleri göterýär. Pürsüň kese-kesiginiň inersiýa momenti J, maýyşgaklyk moduly E. Pürsüň massasyny hasaba almaly däl (*38.54-nji surat*).



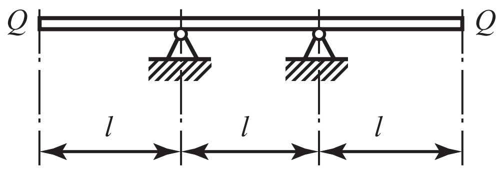
38.54-nji surat

Jogaby: $k_1 = 6{,}55\sqrt{\dfrac{EIg}{Ql^3}},\ k_2 = 27{,}2\sqrt{\dfrac{EIg}{Ql^3}},$

$$\frac{A_{(2)}^{(1)}}{A_{(1)}^{(1)}} = 0{,}95, \quad \frac{A_{(2)}^{(2)}}{A_{(1)}^{(2)}} = -2{,}09;$$

baş yrgyldylaryň şekilleri suratda görkezilen.

38.81-nji mesele. Iki ujy daýançlardan deň aralykdaky l uzynlyga çykyp duran, gorizontal konsol pürsüň uçlaryna birikdirilen birmeňzeş ýükleriň baş yrgyldylarynyň ýygylyklaryny tapmaly. Pürsüň uzynlygy $3l$ bolup, bir-birinden l aralykda duran iki sany daýançlaryň üstünde erkin ýatyr. Pürsüň kese-kesiginiň inersiýa momenti J; maýyşgaklyk moduly E. Pürsüň massasyny hasaba almaly däl (*38.55-nji surat*).



38.55-nji surat

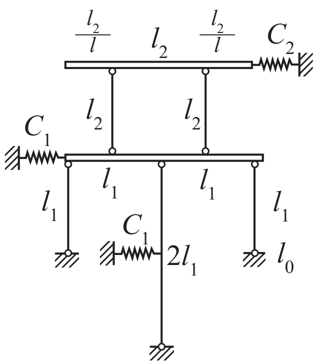
Jogaby: $k_1 = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{EIg}{Ql^3}}, \quad k_2 = \sqrt{2\frac{EIg}{Ql^3}}.$

38.82-nji mesele. Başlangyç pursatda dynç duran, gatylygy c bolan maýyşgak wal bilen birleşdirilen disklerden birinjisine duýdansyz M aýlandyryjy moment goýlan. Diskleriň inersiýa momentleri J. Walyň massasyny hasaba alman, ulgamyň soňky hereketini kesgitlemeli.

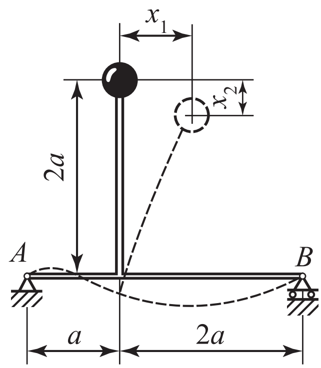
Jogaby: $\varphi_1 = \frac{M}{4J}t^2 + \frac{M}{4c}\left(1 - \cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right),$

$$\varphi_2 = \frac{M}{4J}t^2 - \frac{M}{4c}\left(1 - \cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right).$$

38.83-nji mesele. Iki hatarly (ýarusly) şarnir – sterženler ulgamy, suratda görkezilen ýaly üç sany puržin bilen wertikal ýagdaýda saklanýar. Sterženler absolýut gaty, birjynsly, l uzynlygynyň agramy| G deň. Puržinlaryň gatylyk koeffisiýentlerini $c_1 = c_2 = 10\,G/l$ deň diýip hasaplap, ulgamyň deňagramlylyk ýagdaýynyň durnuklylygyny, şeýle hem, ulagamyň baş yrgyldylarynyň f_1 we f_2 şekillerini



38.56-njy surat



38.57-nji surat

hem-de ýygylyklaryny kesgitlemeli. Puržinlaryň massalaryny hasaba almaly däl (*38.56-njy surat*).

Jogaby: Durnukly deňagramlylyk.

$k_1 = 0,412\sqrt{g/l}$, $k_2 = 1,673\sqrt{g/l}$,

$f_1 = -1,455$, $f_2 = 3,495$.

38.84-nji mesele. Massasy M bolan ýük iki daýanjyň üstünde erkin ýatan AB pürse mäkäm baglanan sütüniň ujuna berkidilen. Kese-kesiginiň inersiýa momenti J, pürs we sütüniň E maýyşgaklyk modulyny birmeňzeş hasaplap, ulgamyň baş egilme yrgyldylarynyň ýygylyklaryny kesgitlemeli. Pürsüň we sütüniň massalaryny hasaba almaly däl (*38.57-nji surat*).

Jogaby: $k_1 = 0,497\sqrt{EJ/Ma^3}$, $k_2 = 1,602\sqrt{EJ/Ma^3}$.

38.85-nji mesele. Maýyşgak ýerde oturdylan $m_1 = 102 \cdot 10^3$ *kg* massaly maşyn binýady (fundamenti) $F = 98 \sin \omega t$ kanun bilen özgerýän wertikal üýtgeýji güýjüň täsirinde wertikal boýunça mejbury yrgyldaýar. Maşynyň waly $\omega = 100$ *rad/s* burç tizlik bilen aýlananda döreýän rezonans yrgyldylaryny ýok etmek üçin fundamente maýyşgak puržinlarda duran agyr çarçuwa (rama) şekilindäki söndürgiç oturdylan. Walyň ýokarda görkezilen burç tizliginde mejbury yrgyldylaryň amplitudasy nola öwrülende, söndürgüjiň yrgyldylaryň amplitudasy bolsa $A = 2$ *mm*-den uly bolmadyk ýagdaýynda ramanyň m massasyny we söndürgijiniň c_2 ekwiwalent gatylygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $m = 4{,}9 \cdot 10^3\ kg,\ \ c_2 = 49 \cdot 10^3\ kN/m.$

38.86-njy mesele. 38.51-nji meselede beýan edilen diskler ulgamynyň ortasyndaky diskine $M = M_0 \sin pt$ üýtgediji moment täsir edende ulgamyň mejbury yrgyldylarynynyň deňlemelerini kesgitlemeli.

Jogaby:
$$\varphi_1 = \frac{M_0(c - Jp^2)}{J^2(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt,$$
$$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{J^2(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt,$$

bu ýerde k_1 we k_2 – ulgamyň baş yrgyldylarynyň ýygylyklary.

38.87-nji mesele. Agramy Q_1 bolan elektromotor, gaty ýerde ornaşdyrylan (tutuş parallelepiped şekilinde) maýyşgak beton fundamente berkidilen. Fundamentiň agramy Q_2, gatylyk koeffisiýenti c_2-ä deň. Egilme gatylyk koeffisiýenti c_1 bolan maýyşgak gorizontal wala P agramly rotor oturdylan. Rotoryň wala görä ekssentrisiteti r; walyň burç tizligi ω. Elektromotoryň statorynyň wertikal mejbury yrgyldylaryny kesgitlemeli.

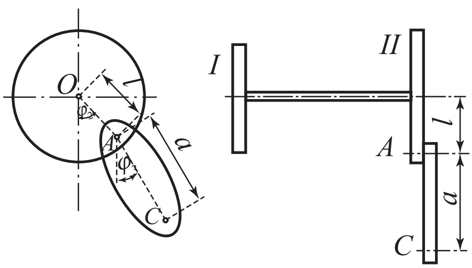
Jogaby:
$$y = \frac{c_1 Pgr\omega^2 \sin \omega t}{c_1 c_2 g^2 - \left[(c_1 + c_2)P + c_1\left(Q_1 + \frac{1}{3}Q_2\right)\right]g\omega^2 + P\left(Q_1 + \frac{1}{3}Q_2\right)\omega^4},$$

bu ýerde y – statoryň deňagramlylyk ýagdaýdan süýşmegi.

38.88-nji mesele. AB pürsüň A nokadyna (*38.63-nji meselä seret*) pürsüň hereket tekizliginde ýerleşen, OA ýüp bilen hemişe göni burç arkaly alynýan $F = F_0 \sin pt$ (F_0, p – hemişelik mukdarlar) güýç goýlan. AB pürsüň mejbury yrgyldylarynyň amplitudasynyň nola deň bolmagy üçin oňa berkidilen CD pürsden asylan ýüpleriň b uzynlyklary näçe bolmaly?

Jogaby: $b = g/p^2$.

38.89-njy mesele. Burulma yrgyldylary söndürmek üçin ulgamyň käbir yrgyldaýan massasyna maýatnik birikdirilýär. Suratda hemişelik burç tizlik bilen aýlanýan iki sany I we II massalardan düzülen ulgam görkezilen. Ikinji massa maýatnik birikdirilen. Massalaryň aýlanma okuna görä inersiýa momentleri J_1, J_2. Maýatnigiň ulgamyň aýlanma okuna görä parallel bolup, onuň massalar merkezi arkaly geçýän okuna görä inersiýa momenti J_3. Ulgamyň aýlanma oky bilen maýatnigiň asylan okunyň arasyndaky uzaklyk $OA = l$. Asylma oky bilen maýatnigiň massalar merkezinden oňa parallel geçýän okuň arasyndaky uzaklyk $AC = a$. Maýatnigiň massasy m. Massalaryň arasyndaky wal böleginiň maýyşgaklyk koeffisiýenti c_1 (burulmadaky gatylyk). Ikinji massa $M = M_0 \sin \omega t$ moment goýlan. Ulgamyň iki massalarynyň we maýatnigiň hereketiniň differensial deňlemelerini ýazmaly. Ulgamyň potensial energiýasy ýazylanda maýatnigiň agyrlyk güýç meýdanyndaky potensial energiýasyny hasaba almaly däl (*38.58-nji surat*).



38.58-nji surat

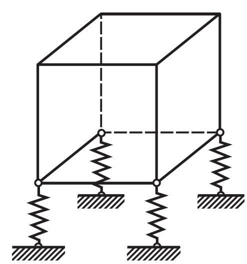
Jogaby: $J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$

$$(J_2 + ml^2)\ddot{\varphi}_2 + mal\cos(\varphi_2 - \varphi_3) +$$

$$(J_3 + ma^2)\ddot{\varphi}_3 + mal\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_3) +$$

$$mal\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

38.90-njy mesele. Kub şekilindäki bak özüniň dört sany aşaky depeleri bilen dört sany birmeňzeş puržina daýanýar. Kubyň taraplarynyň uzynlyklary $2a$, puržinlaryň kubuň taraplaryna parallel ugrukdyrylan oklar boýunça gatylyklary c_x, x_y, x_z deň. Kubuň baş merkezi oklara görä inersiýa momenti J. Kiçi yrgyldylaryň deňlemelerini düzmeli we $c_x = x_y$ bolanda yrgyldylaryň ýygylyklaryny kesgitlemeli. Bakyň massasy M-e deň (*38.59-njy surat*).



38.59-njy surat

Jogaby:

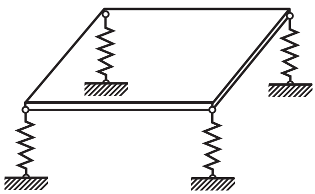
$$M\ddot{x} + c_x x - c_x a\varphi_2 = 0, \ \ M\ddot{y} + c_y y - c_y a\varphi_1 = 0, \ \ M\ddot{z} + c_z z = 0,$$

$$J\ddot{\varphi}_1 + c_y ay + c_y a^2\varphi_1 + c_z a^2\varphi_1 = 0,$$

$$J\ddot{\varphi}_3 + c_x a^2\varphi_3 + c_y a^2\varphi_3 = 0,$$

bu ýerde x, y, z kubuň merkeziniň koordinatalary, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – koordinata oklaryna görä kubuň öwrülme burçlary. Eger $c_x = c_y$ bolsa, $k_z = \sqrt{c_z/M}$, $k_{\varphi_3} = \sqrt{2c_x a^2/J}$,

$$k^4 - \frac{M(c_x + c_z)a^2 + c_z J}{MJ}k^2 + c_x c_z \frac{a^2}{MJ} = 0.$$

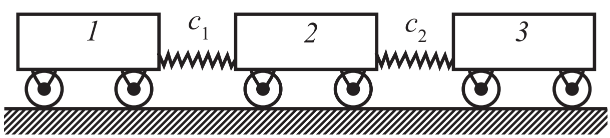


38.60-njy surat

38.91-nji mesele. Taraplary a we b bolan birjynsly gönüburçly gorizontal plastina özüniň dört depesi bilen gatylygy c bolan dört sany birmeňzeş puržina daýanýar. Plastinanyň massasy M-e deň. Erkin yrgyldylaryň ýygylyklaryny kesgitlemeli (*38.60-njy surat).*

Jogaby: $k_1 = \sqrt{4c/M}$, $k_2 = k_3 = \sqrt{12c/M}$.

38.92-nji mesele. Q_1, Q_2 we Q_3 agramly üç sany ýükli demir ýol wagonlary bir-birine tirkelen. Tirkeg enjamlarynyň gatylygy c_1 we c_2. Ulgamyň baş yrgyldylarynyň ýygylyklaryny tapmaly (*38.61-nji surat*).



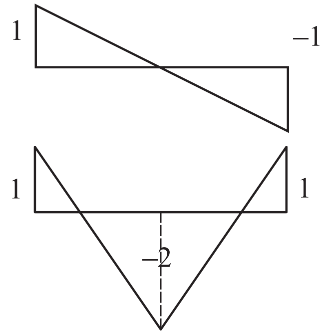
38.61-nji surat

Jogaby: $k_1 = 0$, k_2 bilen k_3 bolsa

$$k^4 - g\left[\frac{c_1}{Q_1} + \frac{c_1 + c_2}{Q_2} + \frac{c_2}{Q_3}\right]k^2 + g^2\left[\frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_2} + \frac{c_2 c_1}{Q_2 Q_3} + \frac{c_1 c_2}{Q_3 Q_1}\right] = 0$$

deňlemäniň çözüwleridir.

38.93-nji mesele. Deslapky meseläniň şertlerine esaslanyp wagonlaryň hereket deňlemelerini tapmaly we birmeňzeş gatylykly $c_1 = c_2 = c$ tirkeg enjamlary bilen birleşdirilen $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ deň agramly wagonlar bolan ýagdaý üçin baş yrgyldylarynyň şekillerini çyzmaly. Başlangyç pursatda iki wagon deňagramlylyk ýagdaýynda, sag çetdäki wagon deňagramlylyk ýagdaýyndan x_0 ululyga süýşen (*38.62-nji surat*).



38.62-nji surat

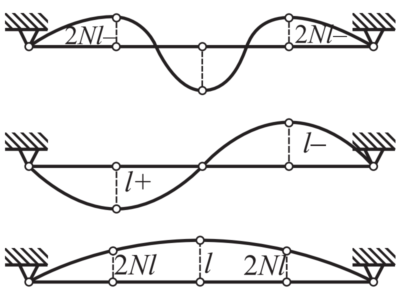
Jogaby:

$$x_1 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{2}\cos k_2 t + \frac{x_0}{6}\cos k_3 t,\;\; x_2 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{3}\cos k_3 t,$$

$$x_3 = \frac{x_0}{3} + \frac{x_0}{2}\cos k_2 t + \frac{x_0}{6}\cos k_3 t;\;\; k_2 = \sqrt{\frac{cg}{Q}},\;\; k_3 = \sqrt{3\frac{cg}{Q}}.$$

Baş ugradylaryň şekilleri suratda görkezilen.

38.94-nji mesele. Üç sany birmeňzeş massany biri-birinden we daýançlardan birmeňzeş uzaklyklarda pürse birleşdirmekden dörän ulgamyň ýygylyklaryny we baş yrgyldylarynyň şekillerini tapmaly. Pürs daýançlara erkin goýlan diýip hasap etmeli. Pürsüň uzynlygy l, kese-kesiginiň inersiýa momenti J, maýyşgaklyk moduly E (*38.63-nji surat*).



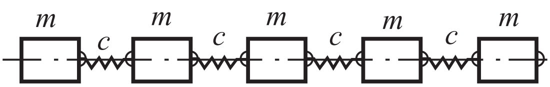
38.63-nji surat

Jogaby:

$$k_1 = 4{,}93\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}},\quad k_2 = 19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}},\quad k_3 = 41{,}8\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$$

Baş ugradylaryň şekilleri suratda görkezilen.

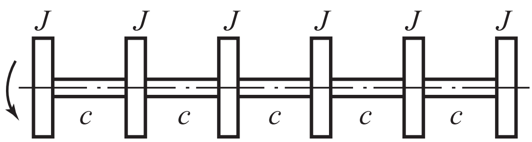
38.95-nji mesele. Gatylygy c puržinlar bilen birikdirilen n sany birmeňzeş m massadan ybarat ulgam boý yrgyldylar üçin mehaniki filtri ýerine ýetirýär. Çepde duran massanyň öňe hereketiniň kanuny $x = x_0 \sin \omega t$ berlen diýip hasaplap, ulgamyň ω käbir anyk çäkden geçeninden soň aýratyn massalaryň mejbury yrgyldylarynyň amplitudalarynyň eksponensial kanun boýunça massanyň nomerine bagly görnüşde özgerişini, çäkden geçýänçe bolsa garmoniki kanun boýunça özgerişini görkezmeli (*38.64-nji surat*).



38.64-nji surat

Jogaby: Filtr $0 < \omega < 2\sqrt{c/m}$ ýygylykdaky yrgyldylary geçirýär.

38.96-njy mesele. Burulma yrgyldylarynyň filtri diskler ornaşdyrylan uzyn wal görnüşinde shemalaşdyrylýar. Çepdäki diskiň hereket kanuny $\upsilon = \upsilon_0 \sin \omega t$ berlen diýip hasaplap, ulgamyň mejbury yrgyldylaryny we her bir diskiň yrgyldylarynyň amplitudalaryny hasaplamaly. Diskleriň inersiýa momentleri J, walyň diskleriň arasyndaky bölekleriniň gatylygy birmeňzeş we c deň. Alnan çözüwi derňemeli we ulgamyň pes ýygylyklaryň filtridigini görkezmeli (*38.65-nji surat*).

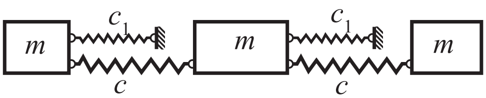


38.65-nji surat

Jogaby: $\upsilon_k = (\upsilon_0 \cos \mu k + C_1 \sin \mu k) \sin \omega t$, $\sin \mu/2 = (\omega/2)\sqrt{J/c}$, bu ýerde υ_k – diskiň burulma burçy, C_1 – walyň ikinji ujundaky çäk şertlerinden kesgitlenýän üýtgemeýän san; birinji diskiň nomeri – nol; ω ygylyk $0 < \omega < 2\sqrt{c/J}$ aralykda bolmaly.

38.97-nji mesele. Boý yrgydylar üçin ýol-ýol filtri ýerine ýetirýän mehaniki ulgam, her biri m massadan düzülen we yzyndaky massa gatylygy c bolan puržin bilen birleşdirilen zwenolardan düzülen.

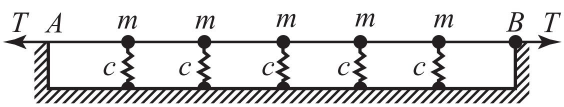
Massalara bu puržinlar bilen parallel edilip, olary gozganmaýan nokatlar bilen baglaýan c_1 gatylykdaky puržinlar hem birikdirilen. Çepdäki massanyň boý kanuny $x = x_0 \sin \omega k$ berlen. Anyk çäkde ýatan ω-niň bahalary üçin her bir massanyň yrgyldy amplitudalarynyň aralyklara bagly görnüşde garmoniki kanun bilen özgerişini görkezmeli we degişli çäkdäki ýygylyklary tapmaly (*38.66 -njy surat*).



38.66-njy surat

Jogaby: Geçiriş zolagy $\sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c_1 + 4c}{m}}$ aralyk bilen kesgitlenýär.

38.98-nji mesele. Köp mukdardaky m massalar, T sünme bilen dartylan AB tarap bir-birine görä a aralykda durar ýaly ornaşdyrylyp, c gatylykdaky puržinlar bilen saklanýarlar. Bu ulgam kese yrgyldylarynyň zolak filtri bolup hyzmat edýärler. Zolak filtriň geçiriş çägine gabat gelýän ýygylyklary kesgitlemeli (*38.67-nji surat*).



38.67-nji surat

Jogaby: Geçiriş zolagy

$\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{4T}{ma}}$ aralyk bilen kesgitlenýär.

38.99-njy mesele. Uzynlygy nl bolan ýüp wertikal ýagdaýda bir ujy bilen asylyp goýlan we bir-birinden a daşlykda durar ýaly edip n sany m massaly maddy nokatlar bilen ýüklenen. Hereket deňlemesini düzmeli. n=3 bolan ýagdaý üçin ýüpüň kese yrgyldylarynyň ýygylyklaryny tapmaly.

Jogaby: Hereket deňlemeleri

$$\ddot{x}_k = \frac{g}{l}[(n-k)x_{k-1} - (2n-2k+1)x_k + (n-k+1)x_{k+1}]$$

görnüşe eýe, bu ýerde bilen x_k nomerli bölejigiň kese süýşişi (nomerler ýokardan başlanýar);

$$k_1 = 0,646\sqrt{g/l}, \quad k_2 = 1,515\sqrt{g/l}, \quad k_3 = 2,505\sqrt{g/l}\,.$$

38.100-nji mesele. Dartylan, iki ujy berkidilen ýüpe bir-birinden l aralykda ýerleşen m massanyň erkin kese yrgyldylarynyň ýygylyklaryny tapmaly. Ýüpüň dartuwy P.

Jogaby: $k = 2\sqrt{\dfrac{P}{ml}}\sin\dfrac{\pi s}{2n}, \ 1 \le s \le n-1.$

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2009.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. III tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. IV tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2011.

5. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. V tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

6. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. VI tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2013.

7. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. VII tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2014.

8. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. VIII tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2015.

9. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. IX tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2016.

10. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. X tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2017.

11. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. XI tom. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.

12. Ataýew H. we başg. Nazary mehanika dersiniň nusgalyk maksatnamasy. Aşagabat. Ylym. 2001.

13. Гылыжов Д. Теоретики механика (Динамика). Гайтадан ишленилен ве үсти етирилен. Икинжи нешир. «Магарыф» неширяты. Ашгабат 1978.

14. Атаев Х. Теоретики механикадан меселелери чөзмек методикасы. Материал нокадың динамикасы. Ашгабат – 1980.

15. Gylyjow D., Akmuhammedow A. A., Ataýew H. Nazary mehanika – Aşgabat, 2003.

16. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986.

17. Бутенин Н.В., Лунс Й.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики.– М., 1985. Т.1-2.

18. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М., 1990.

19. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986.

20. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть I – М., 1963.

21. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть II – М., 1963.

22. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Учебное пособие – М., 1982. Т. I.

23. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Учебное пособие – М.,1983.Т. II.

24. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Келзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1967. Т. I.

25. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Келзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1964. Т. II.

MAZMUNY

III bölüm

DINAMIKA

Hydyrguly Ataýew, Nurnepes Kuliýew

NAZARY MEHANIKADAN MESELELER

II kitap
DINAMIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Redaktor	*E. Berdiýewa*
Surat redaktory	*O. Çerkezowa*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Suratçy	*P. Pürmyradow*
Kompýuter bezegi	*S. Ýarmakowa*
Neşir üçin jogapkär	*T. Berdiýew*

Çap etmäge rugsat edildi 02.10.2019. Ölçegi 60x90$^{1}/_{16}$.
Times New Roman garniturasy. Şertli çap listi 29,0.
Şertli reňkli ottiski 116,25. Çap listi 29,0. Hasap-neşir listi 26,16.
Sargyt № 1275. Sany 1 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat, 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.