

G. Orazow, G. Annamammedow

# KWANT MEHANIKASY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi  
tarapyndan hödürlenildi*

Aşgabat  
Türkmen döwlet neşirýat gullugy  
2015

UOK 531 + 378

O 64

**Orazow G., Annamuhammedow G.**

O 64      **Kwant mehanikasy.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2015.

TDKP № 409, 2014

KBK 22.314 ýa 73

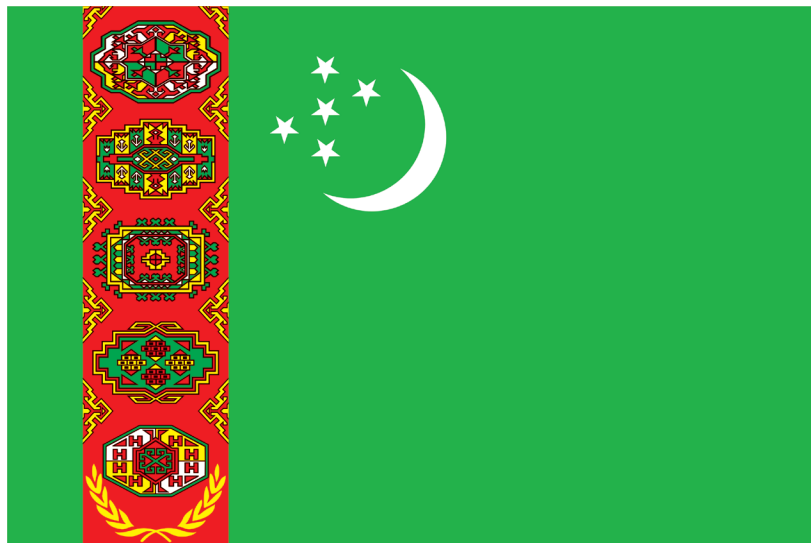
© G. Orazow, G. Annamuhammedow, 2015.

**TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI**  
**GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW**





**TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY**



**TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY**

## **TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY**

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,  
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.  
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,  
Baýdagyň belentdir dünýäň önünde.

*Gaýtalama:*

Halkyň guran Baky beýik binasy,  
Berkarar döwletim, jigerim-janym.  
Başlaryň täji sen, diller senasy,  
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,  
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.  
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,  
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

*Gaýtalama:*

Halkyň guran Baky beýik binasy,  
Berkarar döwletim, jigerim-janym.  
Başlaryň täji sen, diller senasy,  
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

---

## SÖZBAŞY

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedow ýurt başyna geçen ilkinji günlerinden başlap, ylmy we bilimi düýbünden özgertmek, onuň dünýä ülnülerine laýyk bolmagyny gazanmak baradaky başlangyçlary öňe sürmek bilen türkmen döwletiniň ösüş ýoluny kesgitledi. Hormatly Prezidentimiziň belleýşi ýaly, «Güýçli döwletde ylm esasy orny eýeleýär, diýmek, biz ylmyň iň täze gazananlary bilen aýakdaş gitmelidiris».

Bu ýerde Watanymyzda her ýyl iýun aýynyň 12-sinde «Ylymlar günü» baýramçylygynyň uly dabara bilen bellenilýändiginiň tötänden dældigini bellemelidiris. Bu jähtden ugur alynsa, onda ýokary okuw mekdepler üçin taýýarlanylýan kitaplar ylmyň häzirkizaman soraglaryny we üstünliklerini öz içine almalydyr. Bu talaba laýyklykda, Kwant mehanikasy dersi boýunça bu okuw kitaby taýýarlanylady.

Okuw kitabynda beýan edilen soraglar, esasan, şertli sekiz bölüme bölünýär.

Birinji bölümde, fizika «kwant» düşünjäniň girizilişi, M. Plankyň formulasy, ýagtylygyň we elektronyň dualizm häsiýeti, kwant mehanikasynyň esasy düşüňjeleri we Şrýodingeriň deňlemesi beýan edilýär.

Ikinji bölümde, kwant mehanikasyndan nusgawy mehanika geçilişi seredilýär. Kwant mehanikasynyň nusgawy mehanikany düýpgöter inkär etmeýänligini we ony özüniň hususy ýagdaýy ýaly garaýandygy aýdyň görkezilýär.

Üçünji bölümde, kwant mehanikasy bilen bir döwürde matrisaly mehanikanyň dördilmeginiň zerurlygy we kwant mehanikasynyň esasy düşüňjeleriniň matrisaly mehanikada aňladylyşy berilýär.

Dördünji bölümde, Şrýodingeriň deňlemesiniň käbir ýönekeý sistemalarda ulanylyşy aýdyň görnüşde beýan edilýär. Bölejigiň käbir daşky meýdanda hereketi derňelýär we onuň stasionar ýagdaýlary tapylýar.

Bäşinji bölümde, elektronyň spini bilen bagly soraglar barlanylýar we Pauliniň deňlemesine garalýar.

Altynjy bölümde, kwant nazaryýetiniň ýakynlaşma usuly, tolgunmalar nazaryýetiniň esaslary berilýär we onuň ýönekeý ulanylyşyna mysal edip angarmoniki ossillýatoryň hususy energiýasy hasaplanylýar.

Ýedinji bölümde, köp bölejikleriň nazaryýetiniň esaslary, fermionlar we bozonlar baradaky käbir maglumatlar, Pauliniň prinsipiniň kwant mehanikasynda aňladylyşy we Mendeleýewiň elementler üçin periodiki kanunynyň fiziki taýdan esaslandyrylyşy berilýär.

Sekizinji bölümde, relýatiwistik däl kwant mehanikasynyň ulanylyşynyň çäkleri we onuň mundan beýläk ösdürilmeginiň zerurlygy esaslandyrylýar. Elektronyň spin we relýatiwistik effektlerini hasaba alýan Diragyň deňlemesi getirilip çykarylýar we ol deňlemeden položitel žarýadly elektronyň – pozitronyň barlygy baradaky gipotezanyň ýüze çykyşy görkezilýär.

Kitaba Magtymguly adyndaky Türkmen döwlet uniwersitetiniň fizika fakultetiniň «fizika», «radiofizika» we «elektronika»; matematika fakultetiniň «matematika», «amaly matematika we informatika» hünärlerine köp ýyllaryň dowamynda alnyp barlan umumy we amaly okuwlarynda okadylýan materiallary girizildi.

Okuw kitaby diňe ýokary okuw mekdepleriniň talyplaryna däl-de, kwant mehanikasy bilen gyzyklanýanlara hem peýdalydyr.



---

## GIRIŞ

**Kwant nazaryýeti** has umumy we köp zady öz içine alýan häzirkizaman fiziki nazaryýetdir. Ol fizikada matematiki usulyň giňden ulanylmagynyň netijesinde döredi. Şeýlelikde, nazary fizika özüniň usuly boýunça matematiki, mazmuny boýunça bolsa fiziki ylymdyr. Kwant nazaryýeti kwant mehanikasyny, kwant statistikasy we meýdanyň kwant nazaryýetlerini (şol sanda kwant elektrodinamikasyny) birleşdirýär.

**Kwant statistikasy** köp sanly bölejiklerden duran kwant ulgamlarynyň statistiki fizikasydyr. Ol bitin spinli bölejikler üçin Bozen-Eýnşteýniň statistikasy, ýarym bitin spinli bölejikler üçin bolsa Fermin-Diragyň statistikasy bolup durýar.

**Meýdanyň kwant nazaryýeti** kwant prinsiplerine esaslanyp, fiziki meýdanlaryň özaratäsirleşmesini we özaraöwürülmeklerini suratlandyrýan we derňeýän fiziki nazaryýetiň umumy adydyr. Şu nazaryýet ilki bilen ýokary energiýadaky hadysalary suratlandyrmaga niýetlenendir we şonuň üçin ol otnositelligiň nazaryýet talaplary bilen ylalaşmalydyr. Kwant nazaryýetiniň bölümleriniň arasynda kwant mehanikasy has ýerlikli orny eýeleýär.

**Kwant mehanikasy** (tolkun mehanikasy) mikrobölejikleri (elementar bölejikleri, atomlary, molekulalary, atom ýadrolary) we olaryň ulgamlaryny (mysal üçin, kristallary) beýan etmek usulyny kadalaşdyrýan, olaryň hereketleriniň kanunlaryny hem-de bölejikleri we ulgamlary häsiýetlendirýän fiziki ululyklar bilen tejribede gös-göni ölçenilýän fiziki ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy suratlandyrýan nazaryýetdir.

Kwant mehanikasynyň kanunlary jisimleriň düzümini öwrenmekligiň esasyny düzýär. Olar atomlaryň düzümlerini aýdyň-

laşdyrmaklyga, himiki baglanyşyklaryň tebigatyny kesgitlemeklige, himiki elementleriň periodiki ulgamyny fiziki taýdan esaslandyrmaklyga, atom ýadrolarynyň düzümlerine düşünmeklige we elementar bölejikleriň häsiýetlerini öwrenmeklige ýol açdy. Makroskopik jisimleriň häsiýetleri öz düzümini emele getirýän bölejikleriň hereketleri we özaratäsirleşmeleri bilen kesgitlenýändigleri sebäpli, kwant mehanikasynyň kanunlary makroskopik hadysalaryň köpüsine düşünmekligiň esasynda ýerleşýärler. Şeýlelikde, kwant mehanikasy mikrodünýäde bölejikleriň hereketlerini öwrenýär. Muňa atomda, molekulada, gaty jisimde, elektromagnit meýdanda elektronyň hereketi mysal bolup biler. Şol bir babatda ol şol hereketleri tejribe arkaly we nazary usul bilen öwrenýär.

Özüniň manysy boýunça kwant mehanikasy, nusgawy mehanikanyň, elektrodinamikanyň, materiýanyň kinetiki nazaryýetiniň we nazary fizikanyň başga-da bölümleriniň mundan beýläk ösdürilmegidir.

XIX asyryň ikinji ýarymynda nusgawy düşüňjeleriň üsti bilen esaslandyryp we düşündirip bolmaýan birnäçe tejribeler esasynda alnan maglumatlar açyldy. Meselem, deňagramly şöhlenenmäniň nazaryýetini dikeltmeklik, fotoeffekt hadysasyny we Komptonyň effektini düşündirmek üçin ýagtylygyň tolkun häsiýeti bilen bir hatarda, onuň korpuskula (bölejik) häsiýetiniň hem bardygyny girizmeklik zerurlygy ýüze çykdy. Şu tassyklama ilki bilen Plank-Eýnşteýniň kwant nazaryýetinde ulanyldy. Ýagtylygyň diskret strukturasy Plankyň « $\hbar$ » hemişeligiň üsti bilen aňladylýar. Mehaniki hereket üçin absolýut ölçeg bolup hyzmat edýän « $\hbar$ » hemişeligi (täsiň kwanty) uly oblastdan kiçi oblasta kanunalaýyklyklaryň mehaniki geçirilip bolmaýanlygy baradaky birinji çynlakaý öňünden duýduryşdyr. Kwant gipotezasy atomyň birinji kwant nazaryýetini döretmeklikde N. Bor tarapyndan üstünlikli ulanyldy.

Beýleki tarapdan, köp sanly tejribe maglumatlary (meselem, elektron densesiniň difraksiýasy we interferensiýasy) elektronyň korpuskula häsiýeti bilen bir hatarda, onuň tolkun häsiýetiniň hem bardygyny baradaky çaklamanyň ýüze çykmagyna getirdi. Lui de Broýl

tarapyndan girizilen elektronyň tolkun uzynlygynyň formulasy hem « $\hbar$ » ululygy saklaýar.

Belli bolşy ýaly, difraksiýa hadysasy traýektoriýa düşünjesi bilen ylalaşmaýar. Diýmek, kwant nazaryýetinde traýektoriýa diýen düşünje ýok.

Ýagtylygyň kwant tebigatyny we elektronyň tolkun häsiýetini tassyklaýan ähli tejribe maglumatlary we birnäçe aýry-aýry nazaryýetleri (Plankyň, Eýnşteýniň, Boruň, Lui de Broýluň) dykgatly barlamagyň birinji jemleýji netijesi Şrýodingeriň deňlemesidir (1926 ý.).

Bu deňleme ýagtylygyň kwant tebigatyny hasaba alyp, elektronlaryň we başga atom bölejikleriniň hereketleriniň kanunlaryny açmaklyga we şöhlelenmäniň deňeşdirilen yzygiderli nazaryýetini gurmaklyga mümkinçilik dörettdi. Ýöne soňky döwürde, belli bolşy ýaly, Şrýodingeriň nazaryýeti atomlaryň ähli häsiýetlerini beýan edip bilmeýär. Mysal üçin, onuň kömegi bilen atomyň we magnit meýdanyň arasyndaky täsir (meselem, Zeýemanyň anomal effekti) dogry düşündirilmeyär. Mundan başga-da çylşyrymly atomlaryň hem nazaryýeti gurlup bilinmeýär. Bu kynçylyklar Şrýodingeriň nazaryýetinde elektronyň spin bilen bagly häsiýetiniň hasaba alynmaýanlygynyň netijesidir. Şrýodingeriň relýatiwistik däl nazaryýetiniň ösdürilmegi Diragyň relýatiwistik nazaryýetidir. Nazaryýetde elektronlaryň relýatiwistik we spin efektleri hasaba alynýar. Elektronyň spin bilen bagly bolan häsiýetleri kabul edilenden soň, atomlarda elektron gabyklarynyň doldurylyş düzgünine düşünmeklik we Mendeleýewiň periodik kanunyna dogry fiziki interpretasiýa bermeklik başartdy.

Häzirki döwürde ylymda köp sanly tejribeler esasynda alnan maglumatlar toplandy we elementar bölejikleriň umumy nazaryýetini gurmaklykda käbir üstünlikler gazanyldy. Bu nazaryýetiň öz-boluşly birinji tapgyry kwant mehanikasynyň mundan beýläk umumlaşdyrylmagydyr. Oňa meýdanyň kwant nazaryýeti diýilýär we ol elementar bölejikleriň özara öwrülmeleklerini suratlandyrýar. Diragyň nazaryýetinden  $\gamma$  – kwantlaryň « $e^- - e^+$ » jübütine we tersine öwrülüp biljekdikleri gelip çykýar.

$$\gamma \Leftrightarrow e^- - e^+.$$

Bu çaklama soňra tejribe arkaly doly tassyklanyldy.

Nusgawy nazaryýetde ýagtylyk bilen elektronyň arasynda iki tapawut bar: birinjiden, ýagtylyk – tolkun, elektron-bölejik; ikinjiden, ýagtylyk goýberilip we siňdirilip bilinýär, elektronlaryň sany bolsa üýtgemeyär. Korpuskula – tolkun dualizme mahsus bolan kwant mehanikasynda ýagtylyk bilen elektronyň arasyndaky birinji tapawut aýrylýar, ýöne onda Lorensiň nazaryýetindäki ýaly elektronlaryň sany üýtgemän galýar. Diňe meýdanyň kwant nazaryýeti dikeldilenden soňra ikinji tapawut hem aýrylýar.

Umuman, nazary fizikanyň aýratyn hem kwant nazaryýetiniň ösmegi matematika bilen ysnyşykly baglydyr. Bu kwant mehanikasynyň meseleleri, soraglary we düzgünnamalary has aýdyň derňelende ýüze çykýar. Şol sebäpli kwant mehanikany atom hadysalarynyň fiziki taýdan ölçenilip bilinjek mümkinçiligi bolan häsiýetlerini hasaplamağa ýol berýän matematiki shema diýip tassyklap bolar. Has takygy, kwant mehanikasy kwant hadysalarynyň häzirkizaman matematiki nazaryýetidir.

Nazary fizikanyň meselesi hakyky (real) dünýäni öwrenmekden ybaratdyr. Mysal üçin, onuň kanunlary mikrodünýä akyl ýetirmek bilen gös-göni baglydyr. Kwant mehanikasy mikrobölejikleriň hereketlerini we ýagdaýlaryny statistiki usul bilen öwrenýär, ýagny onuň nazaryýeti statistiki nazaryýetdir. Şoňa görä, onuň esasyny ähtimallyk nazaryýeti düzýär. Meselem, kwant mehanikasynyň kömegi bilen kristaldan serpikdirilen elektronlaryň fotoplastinkada ortaça nähili paýlanjakdyklaryny öňünden aýdyp bolýan bolsa, olaryň her biriniň ýerleşip biljek ýerleri barada diňe ähtimally pikiri aýdyp bolýar, ýagny «Şeýle ähtimallyk haýsy hem bolsa bir ýerde bolup biler».

Jemläp aýdylanda, kwant mehanikasy XX asyrda atom fizikasynyň ösmeginde ägirt uly ädimdir.

## KWANT MEHANIKAŞYNYŇ EKSPERIMENTAL WE NAZARYÝET ESASLARY

### Umumy bellikler

Nýutonyň mehanikasy, maýyşgaklyk nazaryýeti, elektrodinamika, termodinamika we aerodinamika «nusgawy fizikanyň» mazmunyny düzýärler. Ol makroskopik ölçegli köp mukdardaky atomlary saklaýan jisimler bilen bolup geçýän hadysalary öwrenýär.

Bu fizika bilen tejribede alnan maglumatlaryň arasyndaky ilkinji gapma-garşylyklar 1900-nji ýylda elektromagnit meýdany bilen bagly bolan deňagramly şöhlenenme üçin M. Plank özüniň belli formulasyny hödüränden soň ýüze çykyp başlady.

Jisimiň goýberýän we içki energiýanyň hasabyna döreýän elektromagnit şöhlenenmesine ýylylyk ýa-da temperaturaly şöhlenenme diýilýär. Diňe ýylylyk şöhlenenmesi jisim bilen termodinamiki deňagramlylykda bolup bilýär. Deňagramlylykda ýylylyk şöhlenenmesine jisimiň sarp edýän energiýasy, oňa düşýän şöhlenenmäniň edil şonuň ýaly mukdaryny siňdirilmeginiň netijesinde dolýar. Deňagramly şöhlenenme adiabatik ýapyk sistemada alynýar. Şeýle sistema bolup absolýut gara jisim (AGJ) mysal bolup biler. *Absolýut gara jisim* diýip käbir hemişelik  $T$  temperatura gyzdyrylan we ähli tarapdan kiçijik ýylylyk syzdyрмаýan diwar bilen gurşalan boşluga aýdylýar. Şeýle jisimi tehniki taýdan ilkinji gezek Win we Lummer 1895-nji ýylda amala aşyrypdyrlar. Deňagramly şöhlenenmesi AGJ-niň şöhlenenmesi ýaly seretmeli (oňa gara şöhlenenme hem diýilýär).

Kwant nazaryýetiniň döremeginde deňagramly şöhlenenmäniň derňewi diýseň wajyp rol oýnapdyr.

### §1. Deňagramly şöhlenenmäniň nusgawy nazaryýeti

Absolýut gara jisimiň deňagramly şöhlenenmesiniň nusgawy düşüňjeleriniň esasynda tejribä garşy bolmadyk nazaryýetini döretmek üçin edilen köp sanly synanyşyklar üstünlige getirmediler. Diňe

Plankyň kwantynyň täze düşüňjesi girizilenden soň, gara şöhlelenmäniň yzygiderli nazaryýeti gurulýar. Bu atomyň ilkinji kwant nazaryýetini, soňra bolsa kwant mehanikasyny döretmeklige getirdi.

Ilki bilen deňagramly şöhlelenmäniň nazaryýetini nusgawy fizikanyň esasy prinsipiniň esasynda seredeliň. Şol prinsipe görä, ähli hadysalar üznüksiz halda bolup geçýär. Şöhlelenmäni  $\rho_\omega$  spektral dykzlyk bilen häsiýetlendiriris. Oňa  $T$  temperaturada jisim bilen deňagramlykda bolan şöhlelenmäniň dykzlygy, ýagny gara şöhlelenmäniň dykzlygy hem diýilýär. Ol ululyk elektromagnit energiýanyň adaty dykzlygy

$$u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \quad (1.1)$$

bilen

$$\rho_\omega = \frac{du}{d\omega} \quad (1.2)$$

gatnaşyk arkaly baglanyşykdadyr. (1.1) we (1.2) gatnaşyklarda  $\vec{E}$  we  $\vec{H}$  – deňşililikde elektrik we magnit meýdanlaryň güýjenmeleri,  $du - \omega$ -dan  $\omega + d\omega$  çenli ýygyllyklar interwalynda şöhlelenmäniň energiýasynyň dykzlygy. (1.2)-den

$$u = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega \quad (1.3)$$

boljakdygy düşnüklidir.

Kirhgof termodinamikanyň ikinji başlangyjynyň (gutarnykly tizlik bilen bolup geçýän makroskopik prosesleriň tersine özgermeýänligini kesgitleýän prinsip) esasynda  $\rho_\omega$  dykzlygyň diňe ýapyk boşlugyň diwarlarynyň temperaturasy bilen kesgitlenilýändigini we diwarlaryň materialyna düýbünden bagly däldigini görkezipdir.

$$\rho_\omega = f(\omega, T).$$

Boşlugyň diwaryna käbir ossilýatorlaryň toplумы ýaly seredip bolar, olaryň ortaça energiýasy deňagramly şöhlelenmäniň spektral dykzlygy bilen doly berlip bilner. Kinetik energiýanyň orta bahasy (ossilýatoryň orta energiýasy) şeýle formula bilen kesgitlenýär:

$$\overline{E} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{n_0 c^3}{\omega^3} |E_{xn_0}|^2. \quad (1.4)$$

Bu ýerde  $n_0 = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $E_{xn_0}$  bolsa  $\omega_n = n\omega_0$  ýygyllykly meýdanyň yrgyldysynyň aýratyn amplitudasy.

Beýleki tarapdan energiýanyň «u» dykzlygy hem  $|E_{xn_0}|^2$  ululyk arkaly aňladylyp bilner. Dogrudanam, şöhlenmäniň izotropdygyny (ýagny ol polýarlanmadyk we onuň ähli ugurlary deňähtimally) göz önünde tutup, (1.1)-iň esasynda alýarys:

$$u = \frac{1}{8\pi} (\overline{E^2} + \overline{H^2}) = \frac{1}{4\pi} (\overline{E_x^2} + \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}) \quad (1.5)$$

we gara şöhlenmäniň elektrik meýdanynyň  $x$  – düzüjisiniň Furýeniň hatary görnüşde

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{xn} e^{in\omega_0 t}$$

alynýandygyny göz önünde tutup alarys:

$$u = \frac{3}{4\pi} \overline{E_x^2} = \frac{3}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |E_{xn}|^2 = \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{xn}|^2 dn = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} |E_{xn}|^2 dn. \quad (1.6)$$

(1.3)-i we

$$dn = \frac{d\omega_n}{\omega_0} = n_0 \frac{d\omega_n}{\omega}$$

gatnaşygy hasaba alyp,  $\omega_n = \omega(n = n_0)$  bolanda taparys:

$$\int_0^{\infty} \rho_{\omega} d\omega = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} |E_{xn_0}|^2 \cdot n_0 \frac{d\omega}{\omega}$$

ýa-da

$$\int_0^{\infty} \left\{ \rho_{\omega} - \frac{3n_0}{2\pi} \cdot \frac{|E_{xn_0}|^2}{\omega} \right\} d\omega = 0,$$

ýa-da

$$\rho_{\omega} - \frac{3n_0}{2\pi} \frac{|E_{xn_0}|^2}{\omega} = 0.$$

Şeýlelikde,

$$\rho_{\omega} = \frac{3n_0}{2\pi} \cdot \frac{|E_{x_{n_0}}|^2}{\omega}. \quad (1.7)$$

(1.4) we (1.7) formulalary deňşdirip tapýarys:

$$\rho_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \overline{E}. \quad (1.8)$$

Bu formula deňagramly şöhlelenmäniň nazaryýetiniň esasy diýip alynýar.

Nusgawy statistiki fizikasynda bölejikleriň energiýa boýunça paýlanmagy aşakdaky funksiýa bilen berilýär:

$$N(E) = Ae^{-\alpha E}, \quad (1.9)$$

bu ýerde  $\alpha = \frac{1}{kT}$ ;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/grad}$ -Bolsmanyň hemişeligi,  $T$ —sredanyň temperaturasy.

Şonuň üçin ortaça energiýa:

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{A \int_0^{\infty} E e^{-\alpha E} dE}{A \int_0^{\infty} e^{-\alpha E} dE} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int_0^{\infty} e^{-\alpha E} dE = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left( -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha E} \right) \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \frac{1}{\alpha} = -\frac{\left( \frac{1}{\alpha} \right)'}{\frac{1}{\alpha}} = -\alpha \left( -\frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{1}{\alpha} = kT. \end{aligned}$$

Şu bahany (1.8)-nji gatnaşyga goýup, Releý-Jinsiň formulasyny alýarys:

$$\rho_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (1.10)$$

Bu formulanyň Winiň şöhlelenme kanunyny, ýagny Winiň termodinamiki kanunyny kanagatlandyryandygyny bellemelidiris. Şu kanuna laýyklykda, şöhlelenmäniň energiýasy  $\omega$  ýygylýga we  $T$  absolýut temperatura baglydyr.