

B.A.Aşyrow

ÇYZUWLY GEOMETRIÝANYŇ ESASLARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlendi*

Türkmen döwlet neşirýat gullugy
Aşgabat – 2013

UOK 514+378

A 79

Aşyrow B.A.

A 79 **Çyzuwly geometriýanyň esaslary.** Ýokary okuw mekdepleri
üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2013.

TDKP № 97, 2013

KBK 22.15 ýa 73

© B.A.Aşyrow, 2013.



**TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW**



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň önünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

SÖZBAŞY

Garassyz, baky Bitarap Türkmenistan özüniň ösüşinde täze basgançaga-Berkarar döwletiň bagtyýarlyk döwrüne gadam basdy. Ol Türkmenistanyň hormatly Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň parasatly we öndengörüjilikli syýasatynyň netijesinde ösüşin ähli ugurlary boýunça düýpli özgertmeleri başdan geçirýär. Bu işler ýurdumyzy dünýäniň in ösen döwletleriniň hataryna goşmak, olar bilen deň gadam urmak, olaryň öndebaryjy tejribesini öwrenip, aýakdaş gitmek üçin edilýär. Bu düýpli özgertmeleriň özenini ylym, bilim tutýar.

Hormatly Prezidentimiz: «Güýçli döwletde ylym esasy omny eýeleýär, diýmek, biz ylmyň in täze gazananlary bilen aýakdaş gitmelidiris» diýen beýik şygary öňe sürmek bilen türkmen ylmyynyň, biliminiň ösmegine badalga berdi.

Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedow 2007-nji ýylyň 4-nji martynda «Bilim-terbiýeçilik edaralarynyň işini kämilleşdirmek hakynda» taryhy Karara gol çekdi. Bu taryhy resminamada Milli bilim ulgamyny özgertmegiň anyk çärelerini bellemek bilen bilim reformasyny yglan etdi.

Hormatly Prezidentimiz Bilim syýasatyny öňe sürmek bilen, şu köpugurly Maksatnamasynda ýaş neslimiziň giň dünýägaraýyşly, akyl we beden taýdan sagdyn, adamkärçilikli bolmaklygyny ündäp hem-de Bilim ulgamynyň esasy ugruny kesgitläp: «Bilim syýasatymyzyň baş maksady Türkmenistan döwletimizi dünýäniň ösen ýurtlarynyň derejesine ýetirmekdir» diýip belledi.

Hormatly Prezidentimiz bilim reformasyny yglan etmek bilen ýurdumyzyň bilim we ylym ulgamlaryny dünýä derejesine çykarmak, ýaşlarymyzyň sazlaşykly ösmegi, dünýägaraýşynyň, gözyetiminiň giňelmegi üçin ähli şertleri döredýär hem-de hemişe üns merkezinde saklaýar.

2013-nji ýylyň 4-nji maýynda «Bilim hakynda» Türkmenistanyň Kanunynyň kabul edilmegi ähli pudaklarda ýokary taýýarlykly hünärmenleriň taýýarlanmagyna uly badalga ber.

Häzirki wagtda Milli bilim ulgamyny mundan beýläk-de ösdürmek we dünýäniň ösen döwletleriniň derejesine çykarmak üçin ygtybarly binýat döredilýär. Şondan ugur alynyp ýokary mekdepleriň inžener-tehniki hünärleri üçin «Çyzuwly geometriýa» dersi boýunça okuw maksatnamasy täzeden işlenildi. Çünki ýokary okuw mekdepleriniň önünde ýokary düşüňjeli, hemmetaraplaýyn, esasanam tehniki tarapdan başaraň hünärmen, inžener – tehniki babatda ylymy-bilimli ýaşlary ýetişdirmek wezipesi durýar. Olar öz bilimlerini we başarnyklaryny durmuşa geçirmek bilen Türkmenistanyň ykdysadyýetini, halkyň agzybirliğini, Watanymyzyň Garaşsyzlygyny we baky Bitaraplygyny has hem berkitmelidirler.

Hakykatdan hem döwletimiz Hormatly Prezidentimiziň parasatly we öneden görüjilikli ýolbaşçylygy netijesinde ösen ýurtlaryň hataryna goşuldy. Mundan beýläk-de biziň ýurdumyzyň öňe gidishlikleri halkymyzyň aň-düşünjesine, ylym-bilim taýdan kämilligine, tehniki dünýägaraşsyznyň düýpli emele gelmegine gös-göni baglydyr. Şoňa görä-de biziň her bir ýaş hünärmenlerimiz talyp döwründen başlap, bilimleri çuňňur, tutanýerli ele almalydyr.

Çyzuwly geometriýa proýektirlemegiň dürli usullarynyň nazary esasydyr. «Çyzgy–tehnikanyň dilidir» diýip çyzuwly geometriýany esaslandyryjylaryň ilkinjileriniň biri fransuz inženeri, alymy, döwlet işgäri Gaspar Monž (1746–1818) aýdypdyr. Bu aýdylan sözlemiň asyl manysy **çyzgy dünýädäki ähli halklar üçin düşnükli dostlukly dil** diýiligidir. Bu aýdylan sözler dürli dillerde gepleýän halklar üçin deň düşnüklidir, şonuň üçinem Gaspar Monž ýaňy 22 ýaşyndaka matematikanyň proffesory adyna mynasyp bolýar.

Rus alymy proffesor W.Kurdýumow (1855–1904) bu ylymy kämilleşdirmekde öz goşandyny goşmak bilen: «Eger çyzgy teknikanyň dili bolýan bolsa, onda çyzuwly geometriýa ol diliň gramatikasydyr» diýip, gysgadan aýdyň we düşnükli tassyklaýar.

Çyzgy biziň bilşimiz ýaly giňişlikdäki islendik ýagdaýdaky geometrik figuralaryň şekilini dogry we takyk gurmak ýa-da şol figurany-predmeti dogry ýasamak hem-de gözegçilik etmek üçin zerur bolan başga-da gerekli maglumatlary özünde jemleýän esasy gural bolup hyzmat edýän resminamadyr.

Biziň Garaşsyz, Bitarap Diýarymyzda, Mähriban Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhammedowyň taýsyz tagallasy bilen gurulýan täze binalarda, gara ýollarda, zawod fabriklerde, asyryň uly desgalary bolan Türkmen kölünde, Türkmen – Hytaý gaz geçirijisinde ýene-de asyryň dürli gurluşyklaryny amala aşyrmakda «Çyzuwly geometriýa» dersiniň zerurlygy aýdyňdyr.

**Türkmenistanyň Prezidenti
Gurbanguly Berdimuhamedow:**

– Biz häzirki zaman bilimlerine we has çylşyrymly tehnika bilen iş alyp barmak başarnyklaryna eýe bolan, täze döwriň talaplaryna laýyk hünärli kadrlary, hünärmenleri taýýarlamak barada aýratyn alada edýäris.

AWTORDAN

Çyzuwly geometriýanyň özleşdirmesi kyn bolan birinji esasy bölümini (nokady, göni çyzygy we tekizligi) we ikinji esasy bölümini (proýeksiýalary özgertmegiň usullary – «aýlamak, proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak we utgaşdyrmak usullary») öz içine alýan elniňdäki şu okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň inžener-tehniki bölümünde okaýan talyplar üçin niýetlenip, türkmen dilinde, täze elipbiýde bilim syýasatyndaky özgertmeleri göz önünde tutmak bilen ilkinji gezek neşir edilýär.

Bu okuw kitabyňyň çap edilmegi diňe bir talyplar üçin ähmiýetli bolman, orta mekdepleriň surat-çyzuw mugallymlary üçin hem nazary we amaly taýdan peýdalý bolup biler.

Şonuň ýaly-da, bu kitapda talyplar özleriniň çyzuwly geometriýadan düşünmeýän köp sanly soraglaryna jogap tapyp bilerler.

Bu iş awtoryň köp ýyllaryň dowamynda ýokary okuw mekdebinde okan umumy okuwynyň esasynda ýazyldy.

Kitabyň her babynyň soňunda geçilen temalary çuňňur özleşdirmek, berkitmek maksady bilen öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler ýerleşdirildi.

Kitaby ýazmakda çyzuwly geometriýany ylmy tarapdan ösdürmek we kämilleşdirmek meselesini göz önünde tutman, bu hakda öň bar bolan işler düýpli öwrenilip, täzeçe döwrebap peýdalanyldy. Bu işi ýazmakda köp sanly okuw kitaplary we usuly gollanmalar peýdalanyldy.

Kitap çyzuwly geometriýanyň esasy kurslaryny okamak we özleşdirmek maksady bilen institutyň täzeçe döwrebap maksatnamasy esasynda täzeden işlenilip ýazylan okuw kitaby hökmünde hödürlenilýär.

Kitapda kabul edilen belgiler.

t/b	Atlary	Belgilenişi
1	Giňişlikde ýerleşen nokatlar – latyn elipbiýiniň setir harplary bilen ýa-da arap sanlar bilen:	A,B,C ... 1,2,3 ...
2	<p>Proýeksiýalar tekizlikleri:</p> <p>2.1 gorizonttal (kese) proýeksiýalar tekizligi,</p> <p>2.2 frontal (maňlaý) proýeksiýalar tekizligi,</p> <p>2.3 profil (gapdal) proýeksiýalar tekizligi,</p>	H V W
3	<p>Proýeksiýalar oky:</p> <p>3.1 obsissa oky.</p> <p>3.2 ordinata oky.</p> <p>3.3 aplikata oky.</p>	OX OY OZ
4	Kordinata oklarynyň başlangyjy.	O
5	Proýektirlemegiň merkezi.	S
6	<p>Proýeksiýalar tekizliklerinde nokatlaryň proýeksiýalary:</p> <p>6.1 nokadyň gorizonttal proýeksiýasy,</p> <p>6.2 nokadyň frontal proýeksiýasy,</p> <p>6.3 nokadyň profil proýeksiýasy,</p>	a,b,c, ... a',b',c', ... a",b",c", ...
7	<p>Naturada–giňişlikde tekizligiň ýagdaýyny näme kesgitleýär:</p> <p>7.1 Bir gönüde ýatmaýan üç nokat.</p> <p>7.2 Nokat we göni çyzyk.</p> <p>7.3 Iki sany özara parallel çyzyk.</p> <p>7.4 Iki sany özara kesişýän çyzyk.</p> <p>7.5 Ýazgyn figuralar.</p>	P(A,B,C) P(A, BC) P(ABIICD) P(AB ∩ CD) P(Δ ABC)
8	Tekizlikler .	P, Q, ...
9	<p>Çyzgyda tekizlikleriň proýeksiýalary:</p> <p>9.1 tekizligiň gorizonttal proýeksiýasy.</p> <p>9.2 tekizligiň frontal proýeksiýasy.</p> <p>9.3 tekizligiň profil proýeksiýasy.</p>	P(A,B,C) (a,b,c) (a',b',c') (a ^{II} .b ^{II} ,c ^{II})
10	<p>Tekizlikleriň yzlary:</p> <p>10.1 tekizligiň gorizonttal yzy.</p> <p>10.2 tekizligiň frontal yzy.</p> <p>10.3 tekizligiň profil yzy.</p>	P _H , Q _H P _v , Q _v P _w , Q _w
11	Tekizligiň yzlarynyň koordinatalar oklarynda duşuşýan nokatlary.	P _x , P _y , P _z

12	Göni çyzygyň yzlary: 12.1 göni çyzygyň gorizontaly zyz. 12.2 göni çyzygyň frontal zyz. 12.3 göni çyzygyň profil zyz.	$M(m, m^I, m^{II})$ $N(n, n^I, n^{II})$ $P(p, p^I, p^{II})$
13	Ýazgyn burçlar.	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$
14	Tekizligiň esasy çyzyklary: 14.1 tekizligiň gorizontaly. 14.2 tekizligiň frontaly. 14.3 tekizligiň profil çyzyklary. 14.4 tekizligiň in uly ýapgytlyk çyzyklary.	h f — —
15	Göni çyzygyň proyeksiýalar tekizligine ýapgytlygy. 15.1 gorizontaly proyeksiýalar tekizligine. 15.2 frontal proyeksiýalar tekizligine. 15.3 profil proyeksiýalar tekizligine.	α β γ
16	Geometriki figuralaryň aýlama oky.	I
17	Nokatlaryň aýlama merkezi.	O
18	Proyeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak.	$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V}{H_1};$ $\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}$
19	Nokatlaryň aýlanma radiusy.	R, r
20	Geometriki meseleler çözüleninde ulanylýan belgiler. 20.1 kesişýän çyzyklar. 20.2 geometriki operasiýanyň netijeleri. 20.3 parallel çyzyklar. 20.4 atanak çyzyklar. 20.5 perpendikulýar çyzyklar. 20. 6 degişlilik. 20. 7 gabat gelmek, gelip çykýar.	$AB \cap CD = K$ $AB = CD$ $AB \parallel CD$ $AB \perp CD$ $AB \perp CD$ $K \subset AB$ $A = B$

I bölüm

1. ÇYZUWLY GEOMETRIÝA YLMYNYŇ MAZMUNY, WEZIPESI

Çyzuwly geometriýa – geometriýanyň bir bölümi bolmak bilen daş-töweregimizdäki geometrik figuralaryň-jisimleriniň giňişlikdäki formalaryny hem-de olara degişli elementleri tekizlikde şekillendirmek usuly bilen meşgullanýar.

Çyzuwly geometriýa çyzuwyň nazary esasydyr, ýagny grammatikasydyr. Çyzuwly geometriýada çyzgy predmetleriň, geometrik figuralaryň – jisimleriniň gurluşlaryny öwredýän esasy gural bolup hyzmat edýär. Her bir çyzgy dürli şekillendirilmegiň usullarynyň kömegi bilen çyzylýar. Şonuň üçin-de çyzuwly geometriýanyň esasy meseleleri şu aşakdakylardan ybaratdyr:

Ozal bar bolan, şeýle hem täzeden döredilýän şaýlaryň – gurallaryň şekillerini dogry we takyk çyzmagyň usullaryny öwrenmek.

Çyzgynyň kömegi bilen predmetiň formalaryny hem-de ölçeglerini kesgitlemegiň usullaryny öwrenmek (çyzgyny okamak).

Giňişlikdäki geometrik formalara degişli meseleleri tekizlikde şekillendirip çözmegiň usullaryny öwrenmek.

Diňe bir tehnikada ulanylýandygyndan başga-da, giňişlikdäki jisimleriniň gurluşyny – formalaryny öwrenmekdäki iň bir gymmatly serişdeleriň biri hökmünde çyzuwly geometriýanyň ylmy hem-de umumy bilim ähmiýeti örän uludyr. Täzeligiň döredijilikli gözlenilýän ýerinde, täze tehniki çözgütler barada erjel pikir edilýän hem-de kabul edilýän mahalynda, konstruktirlenilýän hem-de proyeksion çyzgyny we onuň nazary esasyny – çyzuwly geometriýany oňat bilmeklik talyplar üçin örän zerurdyr.

2. ÇYZUWLY GEOMETRIÝA YLMYNYŇ ÖSÜŞ TARYHY

Çyzuwly geometriýanyň ýüze çykmagy kanunalaýyk – hökmanlyk bolmak bilen, ol adamzadyň asyrlar dowamynda gündeki amaly işiniň netijesinde emele gelendir.

Daş-töwerekdäki predmetleri şekillendirmeklige bolan islegiň adamzat taryhynyň irki döwürlerinde ýüze çykanlygy bellidir.

Predmetleri söz bilen suratlandyrmagy öwrenmezden ozal, adamlar olaryň suratlaryny – şekillerini çekipdirler.

Köşkleriň, ýaşaýyş jaýlarynyň, köprüleriň we beýlekileriň gurluşygy baryp gadymy Müsürde şekillendirmegiň elementar usullaryny döretmeklige getiripdir. Häzirkizaman ylmynyň nukdaý nazarynda seredeniňde olar örän ýönekeýje bolupdyrlar. Şeýle-de bolsa, geometriýanyň ýüze çykmagynyň ilkinji köklerini gadym eýýamyň ösen medeniýetli halklarynyň, şol sanda türkmen halkynyň taryhyndan gözlemek gerek.

Biziň döwrümize gelip ýeten rus ýadigärlikleriniň proyeksion çyzgylary XVII asyra degişlidir. Bular Pýotr I-niň görkezmesi boýunça Remizowyň çeken Nowgorod we Pskow şäherleriniň planydyr, Moskwanyň 1619 - njy ýyla degişli çyzgysydyr, Sibir şäherleriniň we ýerleriniň çyzgy kitabydyr. Ýokarda atlary tutulan çyzgylarda jaýyň plany hem-de fasady frontal we gorizontal proyeksiýalaryň geljekdäki nusgasy (proobrazy) bolup durýar.

XVIII asyrdä **proýektirlemek-şekillendirmek** sungaty we konstruktiw çyzgylary ýerine ýetirmegiň tehnikaýy örän kämilleşipdir. Heniz şol döwre çenli çyzuwly geometriýa ylm hökmünde kemala gelmändir.

Şeýle-de bolsa, öz-özünden öwrenen oýlap tapyjy N.I.Kulibiniň (1735-1818), I.I.Polzunowyň (1726), binagärler B.I.Baženowyň, M.F.Kazakowyň çyzgylary çyzuwly geometriýanyň nukdaý nazaryndan seredeniňde örän dogry we ussatlyk bilen takyk ýerine ýetirilipdir.

Şeýlelik bilen, çyzgylary çyzmakda XVIII asyryň aýagyna çenli uly tejribe toplanypdyr, şekillendirmegiň metodyna – usullaryna degişli aýry-aýry nazary işler edilipdir. Çyzuwly geometriýa özbaşdak ylmy ders hökmünde geometriýanyň has ýaş pudaklaryna degişlidir.

1798-nji ýylda fransuz alymy Gaspar Monž (1746–1818) «Çyzuwly geometriýa» kursyny ilkinji bolup çap etdiripdir. G. Monžyň

işiniň esasy çyzygynyň tekizligi bilen utgaşdyrlan iki sany özara perpendikulýar bolan şekiller tekizliklere gönüburçly şekillendirmekdir.

Russiýada çyzuwly geometriýanyň okuw dersi hökmünde Peterburgyň ýol inženerleri korpusy institutynda düýbi tutulyp, 1810-njy ýylda özbaşdak ders hökmünde okadylyp başlanypdyr.

1816-njy ýylda institutyň mugallymy Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanow (1796–1849) ilkinji çyzuwly geometriýa kursuny rus dilinde çap etdiripdir. Şunuň bilen ol şu ders boýunça watançylyk edebiýatyň başlangyjyny goýupdyr.

1821-nji ýylda ol «Çyzuwly geometriýanyň esasy» kursuny düzüpdir we çap etdiripdir. Munuň özi şu ugurdan çap edilen daşary ýurt kitaplaryndan özüniň möçberi, hili we mazmuny boýunça has giň bolupdyr.

1824-nji ýylda Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanowa Russiýada çyzuwly geometriýanyň ilkinji professori diýen at dakylpdyr. Çyzuwly geometriýada rus terminologiýalaryny işläp düzmeklik onuň bu ugurda bitiren uly hyzmatydyr.

XVIII asyryň otuzynjy ýyllarynyň başlarynda Russiýanyň tehnik okuw jaýlarynyň ählisinde diýen ýaly çyzuwly geometriýa okadylyp başlanypdyr. Muňa Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanow hem-de beýleki rus alymlarynyň çyzuwly geometriýadan çap edilen ilkinji işleri ýardam edipdir.

Akademik I.I.Somow, professorlar P.P.Durow, A.H.Redder we başgalar Russiýada çyzuwly geometriýanyň ösmeginde uly goşant goşan alymlardyr.

Russiýada çyzuwly geometriýany okatmak usulynyň ösmegine Peterburgly professorlar N.A.Makarow (1844–1904) bilen W.I.Kurdýumowyň (1858–1904) pedagogik we ylmy işleri uly täsir edipdir.

W.I.Kurdýumowyň işleri özüniň nazary çuňlygy, ylmy durnuklylygy we mazmunynyň dolulygy bilen aýratyn tapawutlanýar, bu bolsa şekillendirmek usuly oblastynda şol işleri klassiki işler hökmünde hasap etmäge doly esas döredýär. Onuň esasy hyzmaty aýry-aýry meseleleriň çözülişini derňemegiň, ozal kabul edilen usulyndan ýüz öwürüp, inžinerçilik tejribesinden mysallar getirmek bilen, nazary meseleleri giňden beýan edilenliginden ybaratdyr.

Öz işlerinde çyzuwly geometriýanyň ägirt uly amaly ähmiýetiniň bardygyny görkezen N.A.Rynin (1877–1942) mugallymy - professor W.I.Kurdýumowyň işlerini dowam etdirijidir.

Professorlar M.L.Deşewoý, D.G.Ananow, Ý.S.Fedorow, I.I.Kotow rewolýusiýadan önki hem-de soňky döwürlerde şekillendirmegiň usuly boýunça işlediler. Bu ugurda zähmetine sarpa goýmaly alymlaryň sany şol döwürde has-da artdy. Professorlar N.A.Glagolew (1888–1945) A.I.Dobryakow (1895–1948), D.I.Kargin (1880–1949), N.F.Çetweruhin (1891–1974), S.M.Kolotow (1880–1965), W.O.Gordon (1892–1970), N.Ý.Gromow (1884–1963) I. I. Kotow (1909–1976) we t.y.d. professor E. Annaberdyýew (1938–2009) ýaly birnäçe görnükli alymlaryň bitiren uly ylmy – usuly işlerini aýratyn belläp geçmek bolar.

3. TEKIZLIGE MERKEZI WE PARALLEL PROJÉKTIRLEMEK

Projéktirlemek – şekillendirmek usuly şekili çyzmagyň – çekmegiň esasy edilip goýulandyr.

Tekizlikde predmetleriň, ýagny geometriki figuralaryň şeklini gurmagyň düzgüni projéktirlemek usulyny ulanmaklyga esaslanandyr. Projéktirleýji göni çyzyklaryň (projéktirleýji şöhleleriň) kömegi bilen projeksiýa tekizliginde predmetleriň şeklini gurmaklyga **projéktirlemek – şekillendirmek** diýilýär. Merkezi hem-de parallel projéktirlemek bolmak bilen, olara degişlilikde merkezi we parallel projeksiýalar bardyr. Bu usullaryň her haýsysyna aýratynlykda seredeliň.

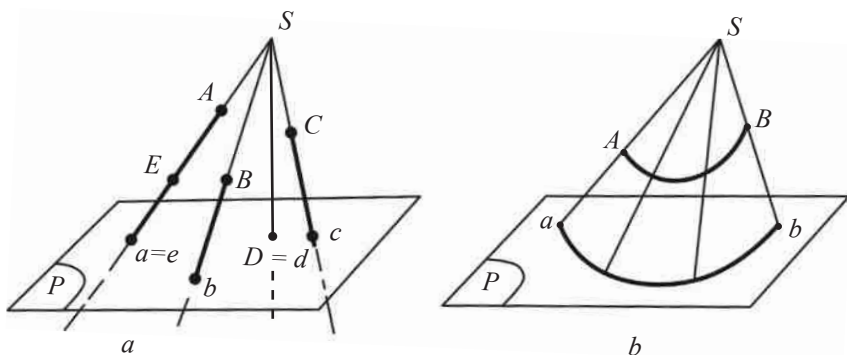
3.1. Merkezi projéktirlemek

Giňişlikde erkin ýerleşen projeksiýa – şekillendirme merkezi bolan S nokady (*1-nji a surat*) we P projeksiýalar - şekiller tekizligini alalyň. Giňişlikde berlen A, B, C, E we D nokatlary P şekiller tekizligine projéktirlemek üçin P projeksiýalar tekizligi bilen a, b, c, d we e nokatlarda kesişýänçä S projeksiýa merkeziniň üstünden SA, SB, SC we SD göni çyzyklary – şöhleleri geçirmek gerek. a, b, c, d we e nokatlar A, B, C, E hem-de D nokatlaryň merkezi projeksiýalarydyr. SA, SB, SC, SD we SE göni çyzyklar bolsa **projéktirleýji göni çyzyklar** ýa-da **projéktirleýji şöhleler**dirler.

AB egri çyzyga deňişli birnäçe nokady merkezi proyektirlemek bilen, onuň P tekizligindäki ab egri çyzygyň merkezi proyeksiýasyny almak bolar (1-nji b surat).

AB egri çyzygyň ähli nokatlarynyň proyektirleýji göni çyzyklary konus şekilli käbir üsti emele getirerler. Şonuň üçin merkezi proyektirlemelike kä ýagdaýlarda koniki ýa-da polýar proyektirlemek hem diýilýär.

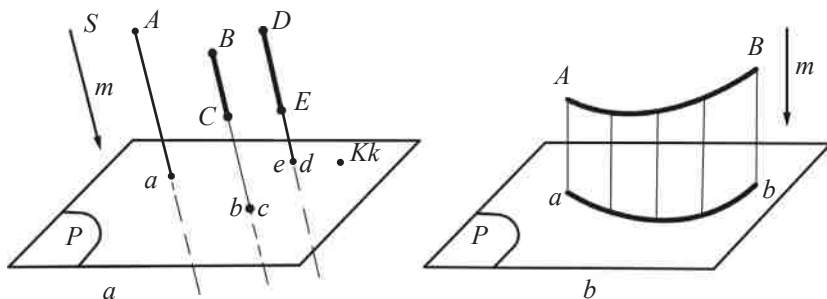
Merkezi proyeksiýalar has aýdyň – düşnükli bolýarlar, şonuň üçin nem bu usul, esasanam gurluşyk we binägarlik hunärlerinde giňden ulanylýar, emma olary gurmaklyk çylşyrymlydyr hem-de ölçeg geçirmeklikde çylşyrymly, oňaýsyz bolýarlar, şonuň üçin-de maşyn gurluşygy çyzuwynda bu usul seýrek ulanylýar.



1-nji surat

3.2. Parallel proyektirlemek

Eger S proyeksiýa merkezi P proyeksiýalar tekizliginden tükeniksiz uzakda ýerleşen bolsa, onda proyektirleýji şöhleleri özara parallel diýip kabul edýäris. Şeýle proyektirlemä parallel proyektirlemek diýilýär (2-nji a surat).



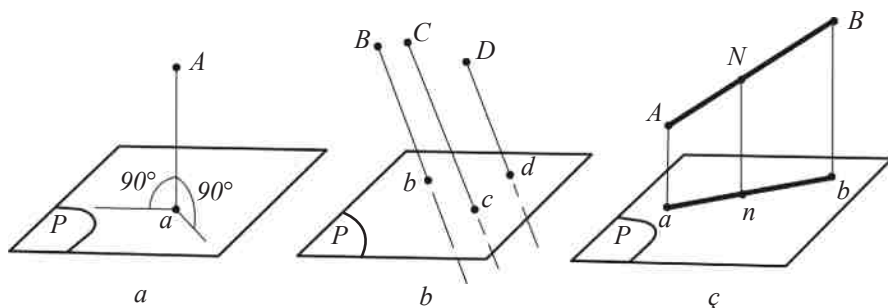
2-nji surat

Parallel proyektirlemekde tükeniksizlikde ýatan S nokatdan ugrukdyrylan proyektirlemegiň m ugry hökman görkezilmelidir.

AB egri çyzygyň (2-nji *b surat*) nokatlarynyň üstünden geçirilen proyektirleýji göni çyzyklar kä halatlarda **silindrik** üsti emele getirýärler. Şonuň üçin şeýle proyektirlemeklige silindrik proyektirlemek hem diýilýär.

Parallel proyeksiýalar gönuburçly (3-nji *a, ç surat*) we ýapgytburçly – ýitiburçly (3-nji *b surat*) proyeksiýalara bölünýärler.

Birinji ýagdaýda proyektirleýji şöhleler proyeksiýalar tekizligine perpendikulýardyrlar, *ikinji ýagdaýda* bolsa proyektirleýji şöhleleriň proyeksiýalar tekizligi bilen emele getirýän burçy göni burçdan tapawutlydyr.



3-nji surat

3.3. Parallel proyektirlemegiň esasy häsiýetleri

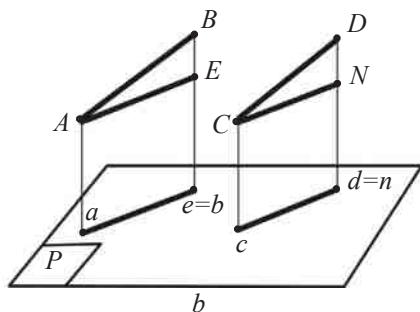
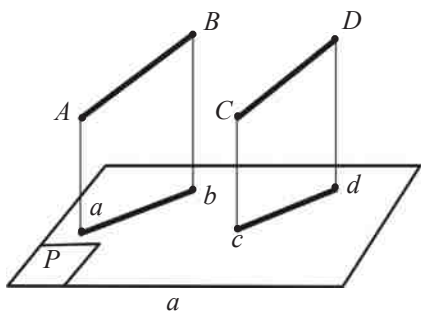
1. Giňişlikdäki her bir nokadyň we islendik çyzygyň, ýagny islendik geometriki figuranyň proyeksiýalar tekizliginiň üstünde diňe bir proyeksiýasy bardyr (1-nji we 2-nji *sur. ser.*).

2. Göni çyzygyň kesimleriniň gatnaşygy olaryň proyeksiýalarynyň gatnaşygyna deňdir, ýagny $\frac{AN}{NB} = \frac{an}{nb}$ (3-nji *ç sur. ser.*).

Munuň özi $Aa \parallel Nn \parallel Bb$ göni çyzyklaryň kesiminiň proporsional bölekler bölünýändiglerinden hem görünýär.

3. Parallel göni çyzyklaryň biratly proyeksiýalary özara parallel-dirler. Eger $AB \parallel CD$ bolsa, onda $ab \parallel cd$ (4-nji *a surat*).

Munuň özi $ABba$ we $CDdc$ iki parallel proyektirleýji tekizlikleriň üçünji tekizligi parallel göni çyzyklar boýunça kesýänliginden gelip çykar. Bu ýagdaý bize orta mekdebiň geometriýa dersinden bellidir.



4-nji surat

4. Iki parallel göni çyzygyň kesimleriniň gatnaşygy kesimleriniň proyeksiýalarynyň gatnaşygyna deňdir. Goý, $AB \parallel CD$ diýeliň. Bu ýerden $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$ bolýandygy aşakdaky ýaly subut edilýär (4-nji b surat).

A nokadyň üstünden $ab \parallel AE$ göni çyzygy we C nokadyň üstünden $cd \parallel CN$ göni çyzygy geçirilýär. ABE we CDN göniburçly üçburçlyklar meňzeşdirler. Üçburçlyklaryň meňzeşliginden

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CN}$$

ýa-da $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$ gelip çykýar. Subut etmelisi hem şundan ybaratdyr.

Parallel proyeksiýalaryň görkezilen şu häsiýetleri proyektirlemegiň ähli ugurlary boýunça hem saklanýar.

Iki ýa-da üç sany özara perpendikulýar bolan proyeksiýalar – şekiller tekizliklerine göniburçly proyektirlemeklige **ortogonal proyektirlemek** ýa-da **G.Monžýň usuly** diýilýär.

Ortogonal proyektirlemek predmetiň şekilini takyk gurmagy, oňaýly ölçegler geçirmekligi üpjün edýär we şonyň üçin ol tehniki çyzgylary çyzmagyň esasy usulydyr we durmuşda giňden ulanylýar.

Göniburçly sözüni, köplenç gadymy grek diliniň *göni* we *burç* diýen sözlerinden düzülen *ortogonal* çözi bilen hem çalşyryrlar we giňden ulanylýar.

I BAP. NOKADYŇ PROÝEKSİYALARY

Nokadyň proýeksialar tekizlikleriniň ikisine we üçüsine proýeksialary

4. NOKADYŇ PROÝEKSİYALAR TEKİZLİKLERİNİŇ ÜÇÜSINE PROÝEKSİYALARY

Ortogonal proýeksiýalar tekizlikleriniň biri, adatça gorizontallaryň biriniň bilen gorizontallaryň (kese) proýeksiýalar tekizligi diýip atlandyrylýar hem-de H bilen belgilenýär.

Ikijisi **wertikal (dik)** ýerleşdirilýär, oňa V – **frontal (maňlaý-öňümizdäki)** proýeksiýalar tekizligi diýilýär;

Üçünji hem dik (wertikal) ýerleşdirilýär, oňa W – **profil (gapdal)** proýeksiýalar tekizligi diýilýär.

Proýeksiýalar tekizlikleriniň kesişme çyzyklaryna OX , OY , OZ proýeksiýalar oklary diýilýär

Proýeksiýalar oklarynyň üçüsiniň hem kesişýän O nokadyna bolsa **koordinata oklarynyň başlangyjy** diýilýär (*5-nji a surat*).

Goý, giňişlikde A nokat berlen bolsun. A nokatdan proýeksiýalar tekizlikleriniň üçüsine hem perpendikulýar çyzyklary geçirip, olaryň proýeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän ýerinde A nokadyň ortogonal proýeksiýalaryny alarys, olary a , a' , a'' , (a – nokadyň gorizontallaryň bilen – plan, a' – frontal-fasad, a'' – profil proýeksiýalary) diýip belgilerler we atlandyryrlar. Şeýlelik bilen, nokadyň haýsy hem bolsa bir şekiller tekizligine proýektirmek, şol nokatdan proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar indermek we onuň şekiller tekizligi bilen kesişme nokadyny tapmak diýmekdir.

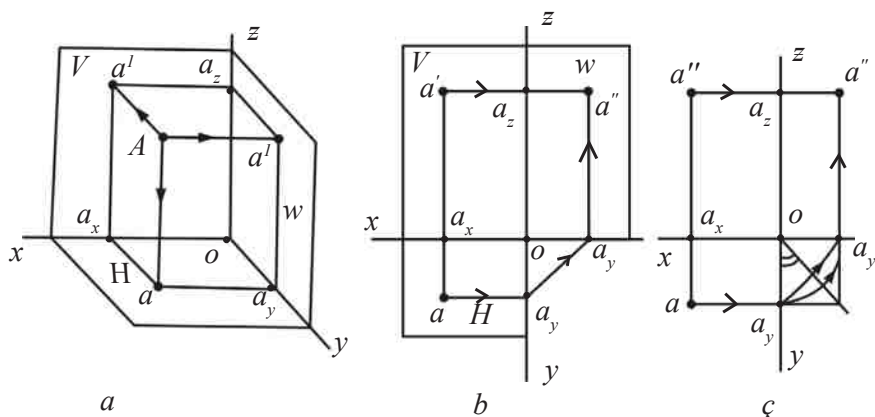
Gurlan parallelepipedde A nokadyň parallelepipediniň diýilýär.

Ýokarda görkezilen proýeksiýalaryň bir tekizlikdäki çyzygysyny almak üçin H we W tekizlikleri, degişlilikde OX we OZ oklarynyň daşynda görkezilen ugur boýunça V tekizlik bilen utgaşýança aýlaýrlar (*5-nji b surat*).

Proýeksiýalar tekizlikleriniň guralaryny çäklendirýän çyzyklar ortogonal çyzygyda adatça görkezilmeyär (*5-nji ç surat*).

Şekiller tekizliklikleri utgaşdyrlandan soň alynýan şekile **kompleks çyzygy, ortogonal çyzygy** ýada **epýur** diýilýär.

Projeksiýalar tekizlikleri şeýle utgaşdyrylanda, a -gorizotal we a' -frontal proeksiýalar OX okyna geçirilen şol bir perpendikulýaryň üstüne ýatýandygy düşnükli, şeýle hem aa_x aralyk A nokatdan V frontal projeksiýalar tekizligine çenli aralyga deň bolar, $a' a_x$ aralyk bolsa A nokatdan H gorizotal projeksiýalar tekizligine çenli aralyga deň bolar. Edil şunuň ýaly a' -frontal we a'' -profil projeksiýalar hem OZ okuna geçirilen şol bir perpendikulýaryň üstünde ýatarlar.



5-nji surat

Nokadyň projeksiýalaryny birleşdirýän aa' , $a'a''$ göni çyzyklara **projeksiýalaryň baglanşyk çyzyklary** diýilýär.

Nokadyň berlen epýury boýunça, ýagny **iki** ýa-da **üç** projeksiýasy boýunça nokadyň giňişlikdäki ýagdaýyny kesgitlemek kyn däl. Iki projeksiýa boýunça üçünji projeksiýany gurmak üçin töweregiň dugasyndan ýa-da OY okuna 45° burç bilen göçürilen ýapgyt göni çyzykdan peýdalanmak bolar (5-nji b surat).

Ortogonal projeksiýalaryň üsti bilen nokadyň giňişlikde berilmegi nokadyň gönüburçly koordinatalarynyň üsti bilen beriligidir.

1. A nokadyň ýagdaýyny kesgitlemek üçin (5-nji a surat) berlen A nokatdan XOY , XOZ we ZOY üç şekiller tekizliklerine çenli aralyklary ölçeyärler:

2. X berlen nokatdan ZOY şekiller tekizligine (W profil projeksiýalar tekizligine) çenli bolan Aa'' aralygy,

3. Y berlen nokatdan XOZ şekiller tekizligine (V frontal projeksiýalar tekizligine) çenli bolan Aa' aralygy,

4. Z berlen nokatdan XOY şekiller tekizligine (H gorizonta proyeksiýalar tekizligine) çenli bolan Aa aralygy aňladar.

Görşümüz ýaly koordinata tekizliginiň ornuna H , V we W proyeksiýalar tekizlikleri kabul edilendir, şonda olaryň kesişme çyzyklary koordinata oklary bilen gabat gelýär. Adatça, ýazgy şeýle ýazylyr? A (**15, 10, 25**). Koordinatalaryň şeýle ýazgylaryna **analitik usul** diýilýär. Şol, koordinatalar boýunça A nokadyň proyeksiýalaryny tapmak bolar

$$Aa = Z_A = 25 = a'_x = Oa_z = a'_y;$$

$$Aa' = Y_A = 10 = aa_x = Oa_y = a''_z;$$

$$Aa'' = X_A = 15 = aa_y = Oa_x = a'_z.$$

Nokadyň üç sany gönüburçly koordinatasy, koordinata oklarynyň san bahasy nokatlaryň giňişlikdäki ýagdaýyny mydama doly kesgitleýär.

Nokadyň her bir ortogonal proyeksiýasy koordinatalaryň ikisi bilen kesgitleýär, şeýlelikde, nokadyň ortogonal proyeksiýalarynyň ikisi bilelikde nokadyň koordinatalaryň üçüsini kesgitleýär.

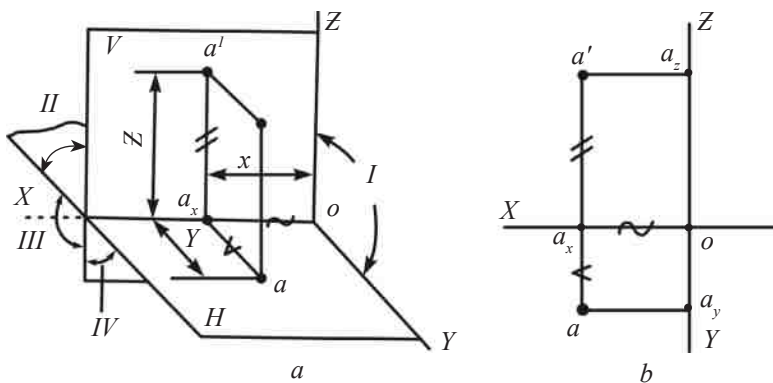
Ortogonal çyzygynyň tekizliginde nokadyň ortogonal proyeksiýalarynyň ikisi, degişlikde bu nokadyň giňişlikdäki ornuny-ýagdaýyny doly kesgitleýär. Şeýle proyeksiýalaryň ikisi 5-nji b , ϵ suratlardan görnüşi ýaly, proyeksiýalar okuna perpendikulýar göni çyzygyň (**proyeksion baglanşyk çyzygyň**) üsti bilen biri-birine baglydyr:

$$a a' \perp OX, \quad a' a'' \perp OZ;$$

5. NOKADYŇ PROYEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINIŇ IKISINE PROYEKSIÝASY

Köp meseleleri çözmek üçin predmetiň diňe gorizonta (H) we frontal (V) özara perpendikulýar proyeksiýalar tekizliklerindäki proyeksiýalara garap geçmeklik ýeterlikdir. Şonuň üçin proyeksiýalar tekizlikleriniň ikisiniň sistemasy çyzmaly geometriýa dersinde giňden ulanylýar. H we V şekiller tekizlikleri kesenlerinde giňişligi **dört** bölege /**çärýege**/ bölýärler (*6-njy a surat*).

6-njy a suratda H we V şekiller tekizlikleriniň ikisine A (**20, 15, 30**) nokadyň proyeksiýalarynyň şekilleri görkezilendir. Bu ýerde A nokadyň a gorizonta proyeksiýasy, frontal proyeksiýasy hem a' nokatdyr.



6-njy surat

Ortogonal çyzygyny almak üçin H tekizligi V tekizlik bilen utgaşýança OX okuň daşynda 90° aşaklygyna aýlaýarlar. Ortogonal çyzygynda (**6-nji b surat**) nokadyň a we a' proyeksiýalary OX oka geçirilen perpendikulýar, ýagny aa' proyeksion baglansyk çyzygynyň üstünde ýatýar.

6. IKI PROJESIÝALAR TEKIZLIKLERNE GARANYŇDA DÜRLI-DÜRLI ÝAGDAÝLARDA ÝERLEŞEN NOKATLARYŇ PROJESIÝALARY

H we V şekiller tekizlikleri özara perpendikulýar bolup kesişmek bilen giňişligi çäryekler diýilip atlandyrylýan dört sany iki granly burça bölýärler. Olar I, II, III, IV sifrler bilen belgilenendirler. Epýurda nokadyň proyeksiýalarynyň ýagdaýy nokadyň haýsy çäryekde ýerleşendigine baglydyr.

Giňişligiň dört çäryeginde ýerleşen A , B , C we D nokatlaryň proyektirlenişi 7-nji a suratda görkezilendir. A nokat I çäryekde, B nokat II çäryekde, C nokat III çäryekde, D nokat bolsa IV çäryekde ýerleşendir. 7-nji b suratda berlen nokatlaryň ortogonal proyeksiýalary gurulandy. Birinji çäryekde ýerleşen A nokadyň a -gorizontal proyeksiýasy şekiller tekizlikleri utgaşdyrylandan soň OX okdan aşakda, a' -frontal proyeksiýasy bolsa OX okdan ýokarda ýerleşendir.

Ikinci çäryekde ýerleşen B nokadyň proyeksiýasynyň ikisi hem b we b' şekiller tekizlikleri utgaşdyrylandan soň OX okdan ýokarda ýerleşendir.

Üçünji çäryekde ýerleşen C nokadyň c – gorizontal proyeksiýasy OX okdan ýokarda, frontal proyeksiýasy (c') bolsa OX okdan aşakda ýerleşýär.

Dördünji çäryekde ýerleşen D nokadyň proyeksiýasynyň ikisi hem d we d' şekiller tekizlikleri utgaşdyrylandan soň OX okdan aşakda ýerleşendir.

7-nji a, b suratdan görnüşi ýaly, nokatlar giňişlikde ýerleşende olaryň X, Y we Z koordinatalarynyň belli bir san bahasy bolmalydyr:

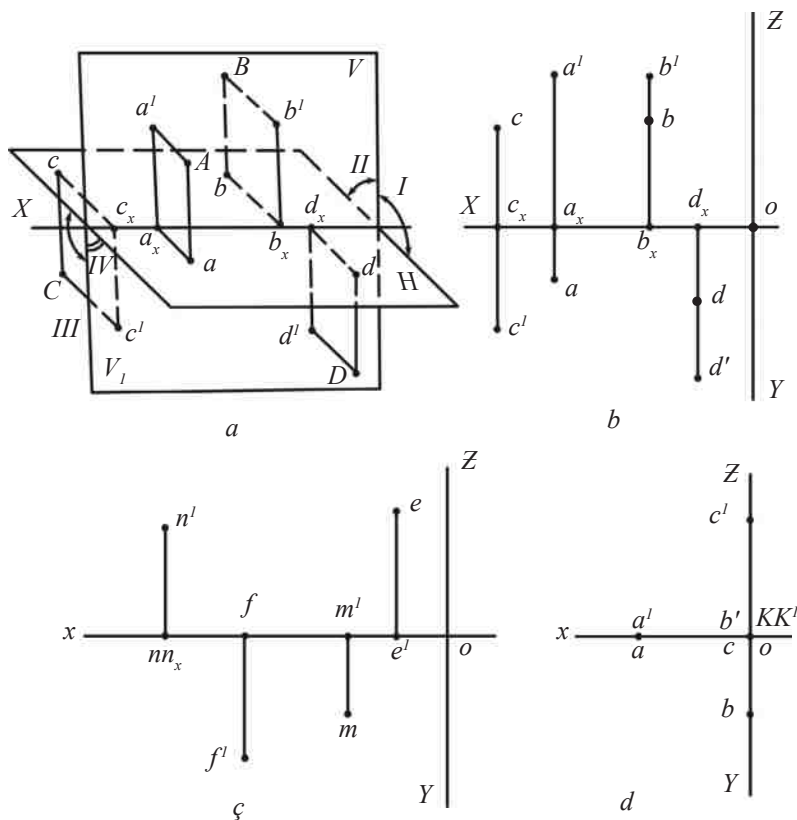
$A(40, 10, 30), B(20, 30, 20), C(50, 20, 20), D(10, 30, 15)$.

7-nji ζ suratda proyeksiýalar tekizliklerinde ýerleşen nokatlaryň epýuralary berlendir. Ýagny $N \subset V, F \subset V_1, M \subset H$ we $E \subset H_1$.

Eger nokatlar haýsy-da bolsa bir proyeksiýalar tekizliginde ýerleşen bolsalar, onda olaryň şol şekiller tekizligine çenli bolan aralygynyň haýsy-da bolsa bir koordinatasynyň san bahasy nola deňdir, ýagny ýokdur:

$N(55, 0, 20), F(40, 0, -25), M(20, 15, 0), E(10, -25, 0)$.

7-nji d suratda nokadyň iki koordinata oklarynyň san bahasy nola deň bolanda ol nokatlaryň koordinata oklarynyň biriniň üstünde ýerleşendikleri görkezilendir: $A(20, 0, 0), B(0, 20, 0), C(0, 0, 20)$.



7-nji surat

Šu suratdan görmüşi ýaly, haýsy hem bolsa bir nokadyň üç koordinatasynyň hem san bahasy ýok bolsa, ýagny nola deň bolsa, onda ol nokat koordinata oklarynyň başlangyjynda, 0 nokatda ýerleşýär. Meselem, $K(0, 0, 0)$ nokady.

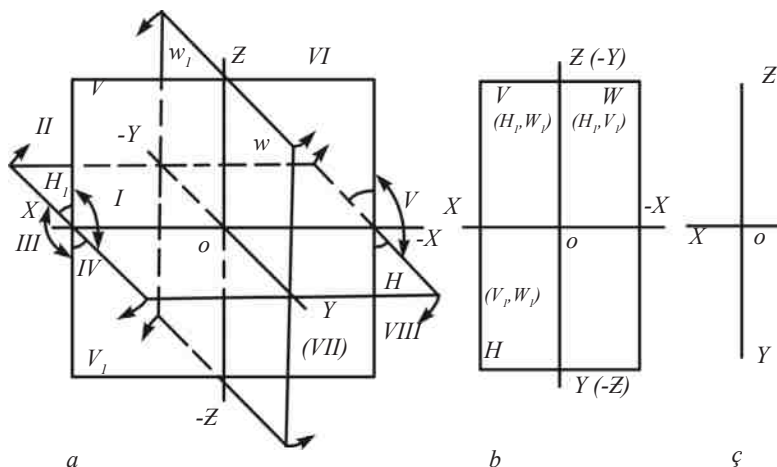
7. ÜÇ PROJĖKSIÝALAR TEKIZLIKLERINE GARANYŇDA DÜRLI-DÜRLI ÝAGDAÝLARDA ÝERLEŞEN NOKATLARYŇ PROJĖKSIÝALARY

Giňişlikde özara perpendikulýar bolan üç sany: H gorizontal, V frontal, we W profil proyeksiýalar tekizlikleride özara kesişmek bilen giňişligi **oktanlar** diýilip atlandyrylýan sekiz sany üç granly burça bölýärler (8-nji a surat). Oktanlar hem çäryekler ýaly nomerlenýär:

I, II, III, IV, V, VI, VII we VIII. Oktanlaryň tertibi 8-nji suratda görkezilendir.

1-nji tablisada dürli oktantalar üçin nokadyň koordinata oklarynyň alamatlary berlendir.

Nokadyň haýsy oktantada ýerleşendigi kesgitlenende, W profil proyeksiýalar tekizliginiň ozalky çäryeklere garanda giňişligi iki topara bölýändigini göz önünde tutmak gerek: birinji topar **OZ** okdan çepde I – IV oktantalar, sagda bolsa ikinji topar V – VIII oktantalar ýerleşýär. Nokadyň gorizontal we frontal proyeksiýalarynyň ýerleşişini boýunça onuň haýsy topardadygyny we oktantadadygyny kesgitleýärler. Mysal üçin, nokadyň gorizontal we frontal proyeksiýalary **OZ** oktan çepde ýerleşen diýeliň, bu ýagdaýda nokat oktanlaryň birinji toparyna degişlidir. Şol proyeksiýalaryň **OX** oka görä ýagdaýy boýunça bolsa nokadyň haýsy çäryekde, diýmek, haýsy oktantda ýerleşendigi kesgitlenýär.



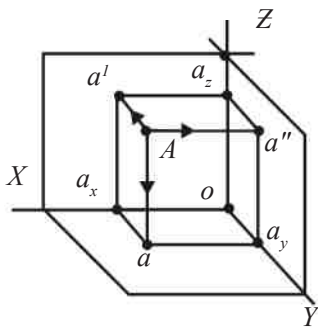
Nokadyň giňişlikdäki ýagdaýyny diňe onuň proyeksiýalary boýunça dälde, X, Y, Z üç koordinatalaryň alamatlary boýunça hem kesgitlemek bolar. Nokadyň koordinatalary belli bolsa, şol koordinatalar boýunça nokadyň proyeksiýalaryny gurmak bolar we tersine, kompleks çyzgysy boýunça nokadyň koordinatalaryny kesgitlemek bolar.

1-nji tablisa

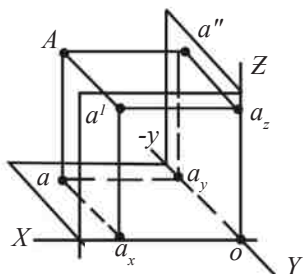
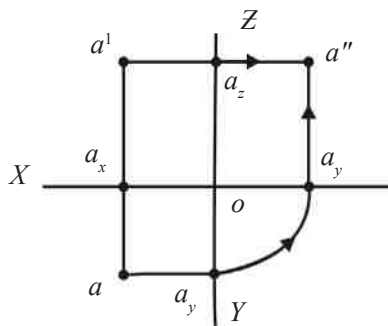
Oktantlar			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Koordinata oklary	X	Alamatlar	+	+	+	+	-	-	-	-
	Y		+	-	-	+	+	-	-	+
	Z		+	+	-	-	+	+	-	-

Ortogonal çyzga geçmek üçin gorizont H we profil W tekizlikleri 8-nji a suratda görkezilişi ýaly aýlap, V frontal şekiller tekizligi bilen utgaşdyrylýar. Şeýle utgaşdyrmaklygyň netijesinde ortogonal çyzgy, kompleks çyzgy (**epýur**)alynýar (8-nji $b, ç$ surat). Şol çyzgyda hem giňişligiň sekiz burçunyň (oktantlaryň) islendiginde ýerleşen nokadyň proyeksiýasyny görkezmäge doly mümkinçilik bardyr.

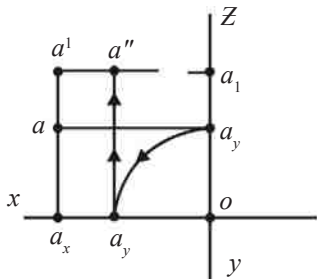
Dürli oktanlarda ýerleşen nokadyň projektirlenişiniň aýdyň gömüşi hem-de ortogonal çyzgyda berlişi 9-njy suratda görkezilendir. Öňki belleýşimiz ýaly, şunda hem oktantlaryň nomerleri rim sifrlar bilen belленendir.

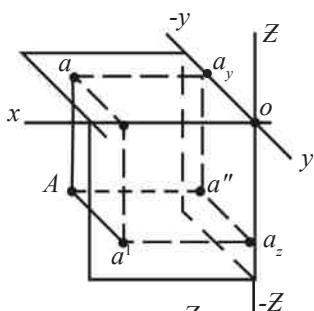


I-okm

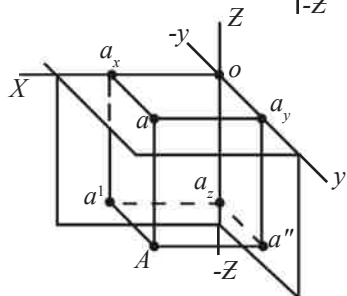
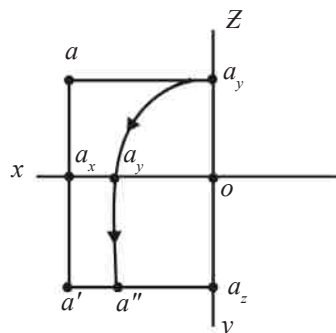


II-okm

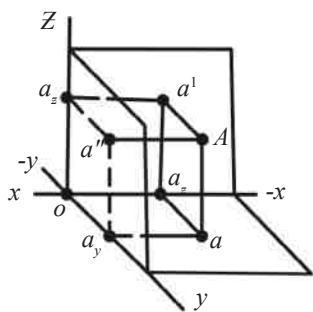
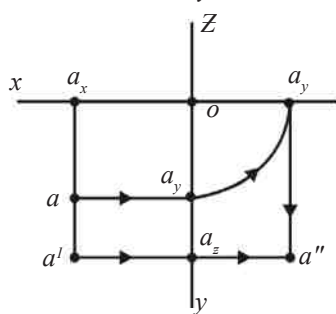




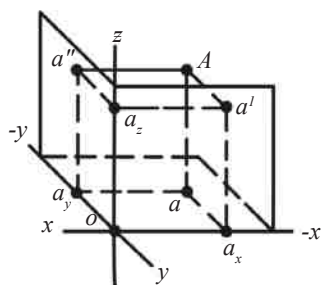
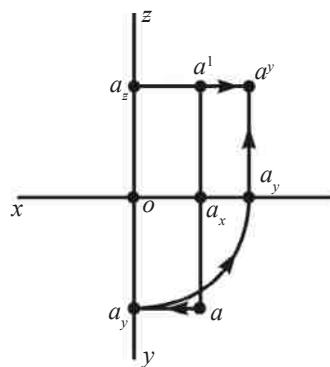
III-okm



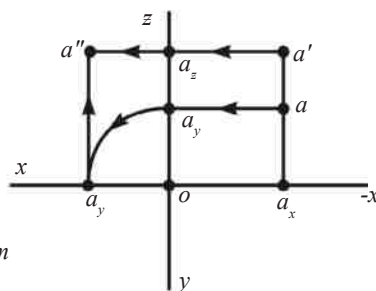
IV-okm

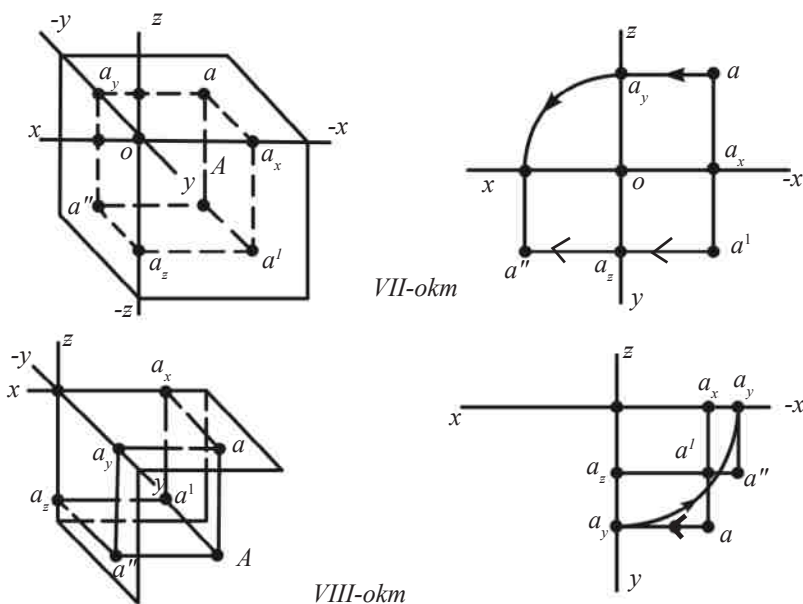


V-okm



VI-okm



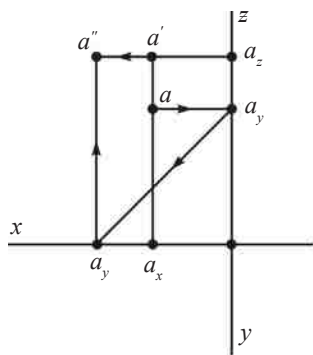


9-njy surat

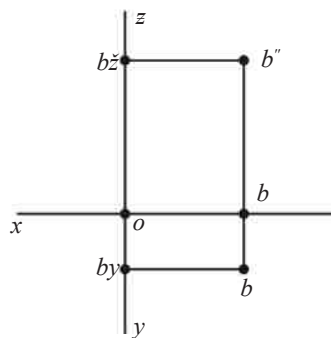
1-nji mesele. Berlen koordinatalary boýunça $A(15, -25, 35)$ nokadyň (10-njy surat) proyeksiýalaryny gurmaly.

$$X_A = 15, \quad Y_A = -25, \quad Z_A = 35.$$

2-nji mesele. B nokat b gorizont we b' frontal proyeksiýalary bilen berlen. Bu nokadyň üç koordinata oklarynyň san bahasyny kesgitlemeli (11-nji surat). $B(\quad, \quad, \quad)$ we b'' profil proyeksiýasyny gurmaly.



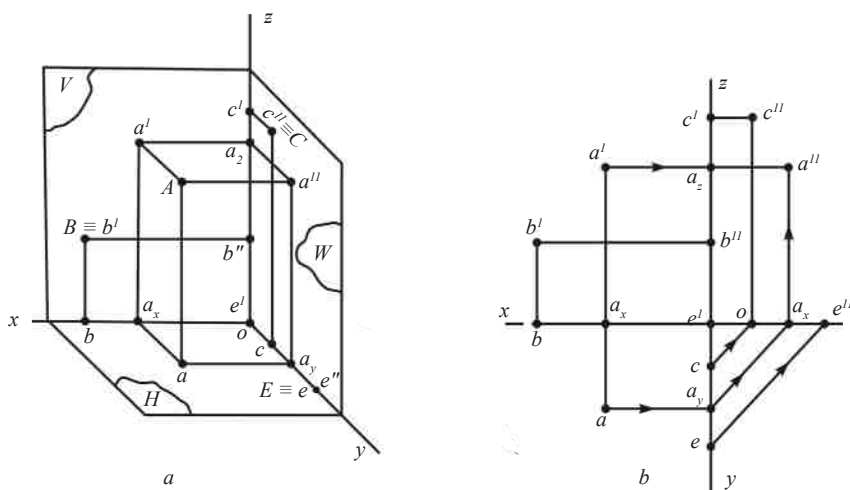
10-njy surat



11-nji surat

Öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler

1. Çyzmaly geometriýada proyektirlemegiň nähili usullary kabul edildi we her bir usulyň manysy nämeden ybarat?
2. Nokadyň gönüburçly koordinata oklary diýip nämä aýdylýar?
3. Nokadyň giňişlikdäki ornuny gönüburçly koordinatalaryň näçesi kesgitleýär?
4. Nokadyň gorizontal, frontal hem-de profil proyeksiýalarynyň ýagdaýyny aýratynlykda haýsy koordinatalar kesgitleýär?
5. Nokadyň giňişlikdäki ornuny ortogonal proyeksiýalarynyň näçesi kesgitleýär we nämä üçin?
6. Nokadyň ortogonal proyeksiýalary epýurda özara nähili baglanyşýar?
7. Aşakdaky nokatlaryň giňişlikdäki ornuny kesgitlemeli we ortogonal proyeksiýalaryny gurmaly: A /20, 30, - 40/.
B (- 30, -40, 50), C (- 30, 50, 0), D (0, - 40, 0), E (0, 0, 0).
8. Proyeksiýalaryň koordinata oklary diýilip nämä aýdylýar?
9. Baglanyşyk çyzygy diýip nähili çyzyga aýdylýar?
10. Çärýekler hem-de oktantalar nähili emele gelýär?
11. Epýura geçilende proyeksiýalar tekizlikleri nähili aýlandyrylýar we epýur nämä?
12. Berlen çyzgyny derňň (12-nji surat).



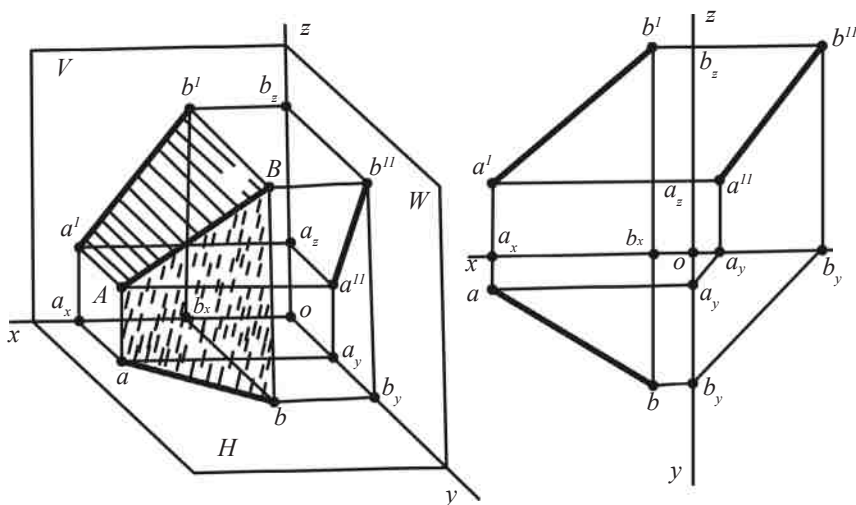
12-nji surat

II BAP. GÖNI ÇYZYGYŇ PROÝEKSIÝASY

8. GÖNI ÇYZYGYŇ KESIMINI PROÝEKTIRLEMEK

Göni çyzygyň giňişlikdäki ýagdaýy onuň iki nokady bilen kesgitlenýär. Şonuň üçin hem şol iki nokady H , V we W şekiller tekizliklerne proyektirläp we nokatlaryň biratly proyeksiýalaryny göni çyzyk bilen birleşdirip, AB kesimiň ab gorizont, $a' b'$ frontal we $a'' b''$ profil proyeksiýalary alynýar (13-nji surat).

Göni çyzygyň proyeksiýasy şol göni çyzygyň üstünden geçýän proyektirleýji tekizlikleriň proyeksiýalar tekizlikleri bilen kesişme çyzygy hökümde hem kesgitlenilip bilner. Göni çyzygyň şekiller tekizligindäki proyeksiýasy göni çyzykdyr. Proyeksiýalar tekizliklerine garanda göni çyzyk özüniň giňişlikdäki ýagdaýyna görä iki hili, ýagny **umumy** we **hususy** halda bolup biler. 13-nji suratdaky AB göni çyzyk umumy ýagdaýdaky çyzykdyr.



13-nji surat

1. UMUMY HALDAKY GÖNI ÇYZYK

Proýeksiýalar tekizlikleriniň hiç birine parallel bolmadyk göni çyzyga umumy haldaky göni çyzık diýilýär. Şeýle göni çyzygyň şekiliniň kesiminiň uzynlygynyň her bir proýeksiýasy kesimiň özünden kiçidir we onuň proýeksiýalar tekizliklerine bolan ýapgytlyk burçy näçe uly bolsa, proýeksiýasy şonça-da kiçidir. AB göni çyzık bilen H , V we W şekiller tekizlikleriniň arasyndaky burçlary, degişlilikde α , β we λ bilen belläp, şeýle ýazyp bileris:

$$ab = AB \cdot \cos \alpha ; a' b' = AB \cdot \cos \beta ; a'' b'' = AB \cdot \cos \lambda .$$

Umumy haldaky AB göni çyzygyň proýeksiýalary ortogonal çyzgyda proýeksiýalar okunyň ählisine ýapgyt bolup ýerleşýär (*13-nji we 26-njy surat*).

Umumy haldaky göni çyzygyň proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasy mydama göni çyzıkdyr we mydama öz uzynlygyndan kiçidir:

$$ab < AB, \quad a' b' < AB, \quad a'' b'' < AB$$

2. HUSUSY HALDAKY GÖNI ÇYZYK

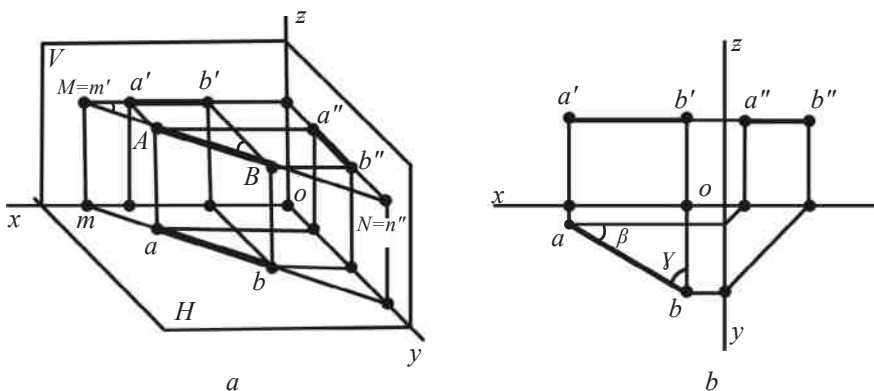
Giňişlikde berlen göni çyzygyň proýeksiýalar tekizliklerine görä şu aşakdaky ýagdaýlary mümkin:

1. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel göni çyzık.
2. Proýeksiýalar tekizliginiň birine perpendikulýar ýa-da ikisine parallel göni çyzık.
3. Proýeksiýalar tekizligine degişli göni çyzık.
4. Proýeksiýalar tekizlikleriniň ikisine, ýagny koordinata okuna gabat gelýän göni çyzık.

2.1. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel göni çyzık

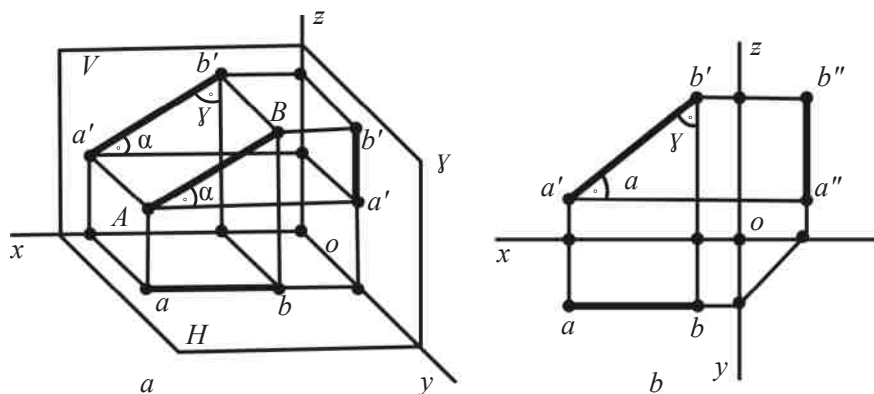
Gorizont al proýeksiýalar tekizligine (H) parallel bolan göni çyzyga gorizont alar göni çyzık diýilýär. AB göni çyzygyň $a' b'$ -frontal proýeksiýasy OX oka parallel bolar. Emma ab -gorizont al proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we H gorizont al şekiller tekizlige AB -deň bolan hakyky uzynlygynda proýektirlenýär ($ab = AB$) (*14-nji surat*). Gorizon-

tal ab proyeksiýa bilen OX okunyň arasyndaky β burçy AB göni çyzygyň V frontal şekiller tekizligine, λ burçy bolsa W profil şekiller tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deňdir.



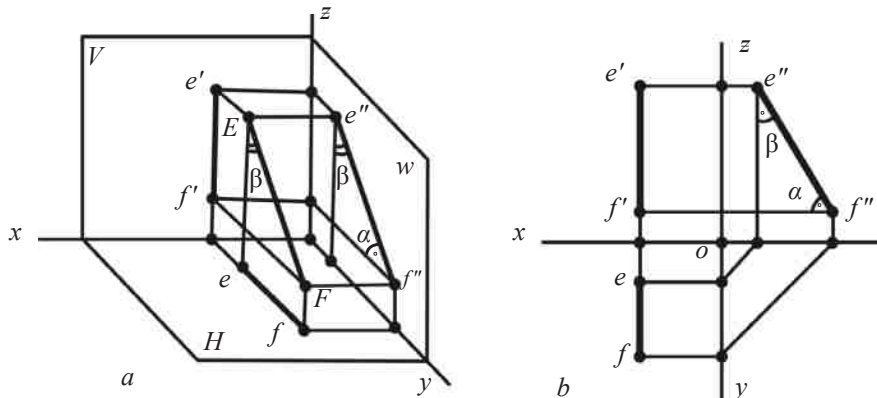
14-nji surat

Frontal proyeksiýalar tekizligine V-parallel bolan göni çyzyga frontal göni çyzyk diýilýär. AB göni çyzygyň ab gorizontaal proyeksiýasy OX oka paralleldir, $a' b'$ frontal proyeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we V frontal şekiller tekizligine hakyky uzynlygynda proyektirlenýär ($a' b' = AB$) (15-nji surat). $a' b'$ -frontal proyeksiýa bilen OX okuň arasyndaky α burçy AB göni çyzygyň H gorizontaal şekiller tekizligine, λ burçy bolsa W profil şekiller tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deňdir.



15-nji surat

Profil proyeksiýalar tekizligine (W) parallel bolan göni çyzyga profil göni çyzyk diýilýär (16-njy surat). EF göni çyzygyň ef -gorizontal we $e'f'$ -frontal proyeksiýalary OX oka perpendikulýardyr. Profil $e''f''$ proyeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we W profil şekiller tekizligine hakyky uzynlygynda $|e''f''| = EF$ proyektirlenýär. Profil proyeksiýa bilen OY okunyň arasyndaky α burçy EF göni çyzygyň H gorizontal şekiller tekizligine, β burçy bolsa V frontal şekiller tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deňdir.



16-njy surat

2.2. Proyeksiýalar tekizliginiň birine perpendikulýar ýa-da ikisine parallel göni çyzyk

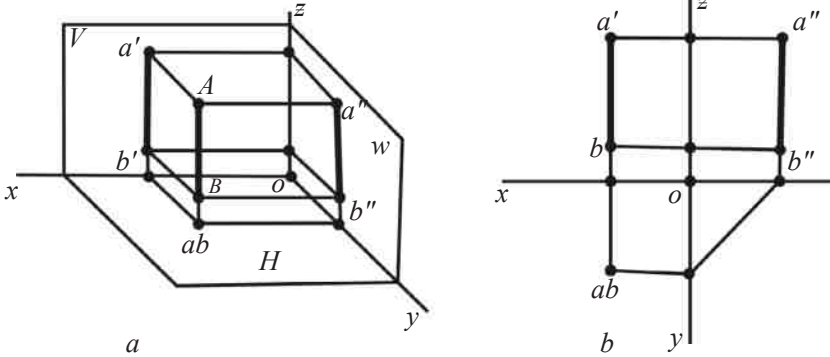
Proyeksiýalar tekizlikleriniň ikisine parallel bolan göni çyzyk üçünji tekizlige perpendikulýardyr.

Proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar göni çyzyklar proyektirleýji göni çyzyklardyr we deňşililikde gorizontal proyektirleýji, frontal proyektirleýji we profil proyektirleýji göni çyzyklar diýilýär.

Olaryň her biriniň perpendikulýar bolan proyeksiýalar tekizligindäki proyeksiýasy nokatdyr. Beýleki iki proyeksiýasy bolsa bu proyeksiýalar tekizligini çäklendirýän oklara perpendikulýardyr we hakyky uzynlygyna deňdirler.

1. AB göni çyzyk H gorizontal şekiller şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny $AB \perp H$, $AB \parallel V$, $AB \parallel W$ şonuň üçin hem AB kesime gorizontal proyektirleýji göni çyzyk diýilýär. (17-nji surat). ab – nokatdyr,

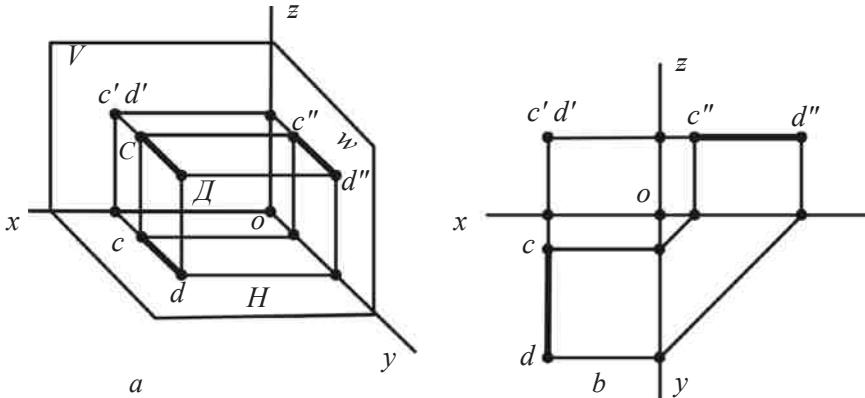
$$a'b' = a''b'' = AB, \quad a'b' \perp OX, \quad a''b'' \perp OY, \\ a'b' \parallel OZ, \quad a''b'' \parallel OZ.$$



17-nji surat

2. CD göni çyzyk V frontal şekiller şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny $CD \perp V$, $CD \parallel H$, $CD \parallel W$ (18-nji surat). CD kesime **frontal proyektirleýji** göni çyzyk diýilýär. $c'd'$ – nokatdyr,

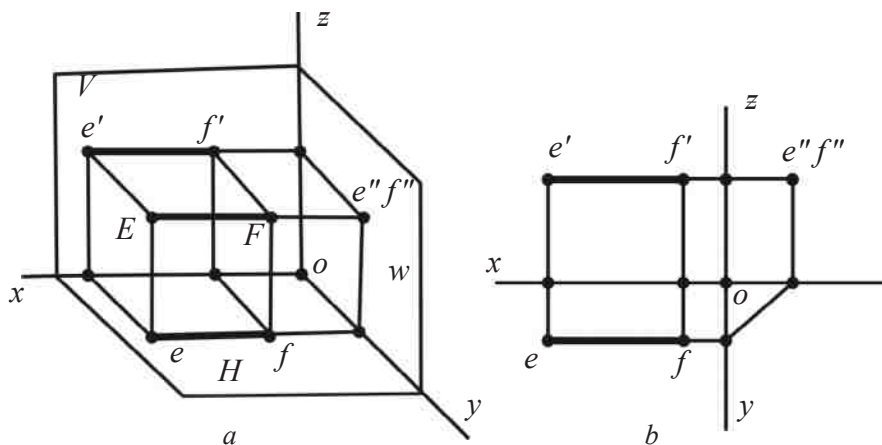
$$cd = c''d'' = CD, \quad cd \perp OX, \quad c''d'' \perp OZ, \quad cd \parallel OY, \\ c''d'' \parallel OY.$$



18-nji surat

3. EF göni çyzyk W profil şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny $EF \perp W$, $EF \parallel H$, $EF \parallel V$ (19-njy surat). EF – profil proyektirleýji göni çyzykdyr $e''f''$ – nokatdyr,

$$ef = e'f' = EF, \quad ef \parallel OX, \quad e'f' \parallel OX.$$

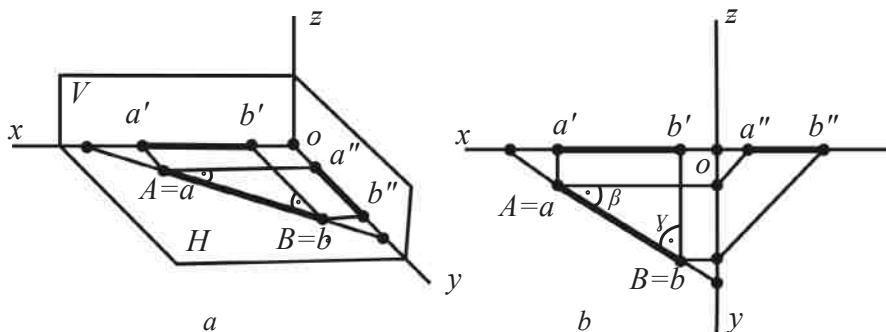


19-njy surat

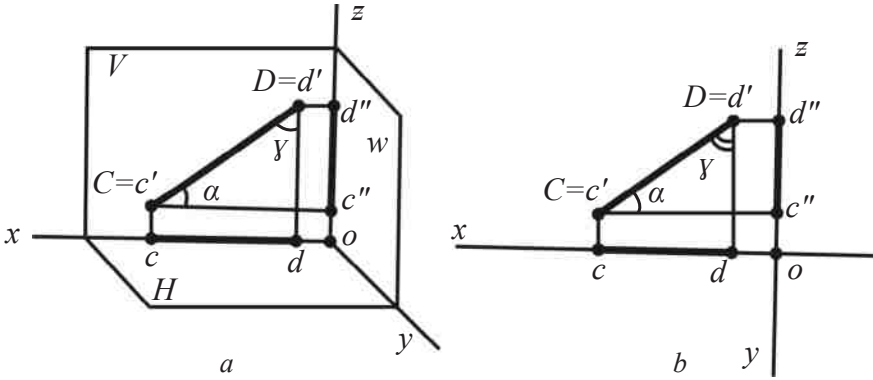
2.3. Projeksiýalar tekizligine deňli göni çyzyk

Eger göni çyzyk projeksiýalar tekizliginde ýatan bolsa, onda onuň projeksiýalarynyň biri berlen göni çyzyk bilen gabat gelýändir we oňa deňdir, beýleki iki projeksiýasy bolsa şol tekizligi çäklendirýän koordinata oklarynyň üstünde ýatýandyr.

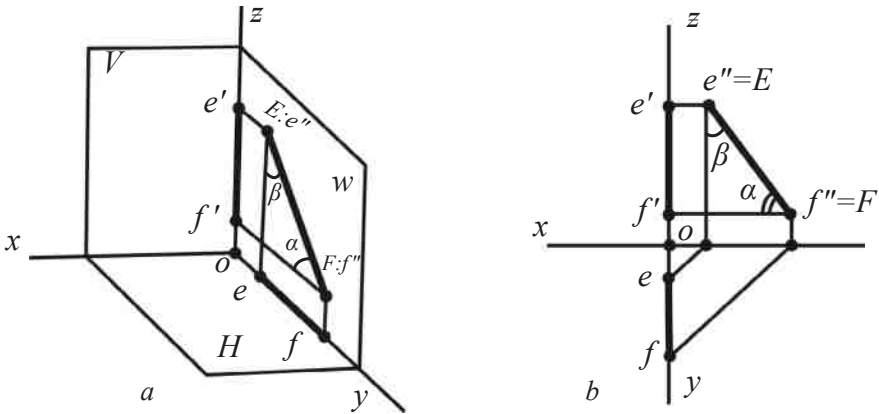
1. **AB** göni çyzyk **H** gorizental şekiller tekizliginde ýatyr (20-nji surat). **AB = ab**
2. **CD** göni çyzyk **V** frontal şekiller tekizliginde ýatyr (21-nji surat). **CD = c'd'**
3. **EF** göni çyzyk **W** profil şekiller tekizliginde ýatyr (22-nji surat). **EF = e''f''**



20-nji surat



21-nji surat



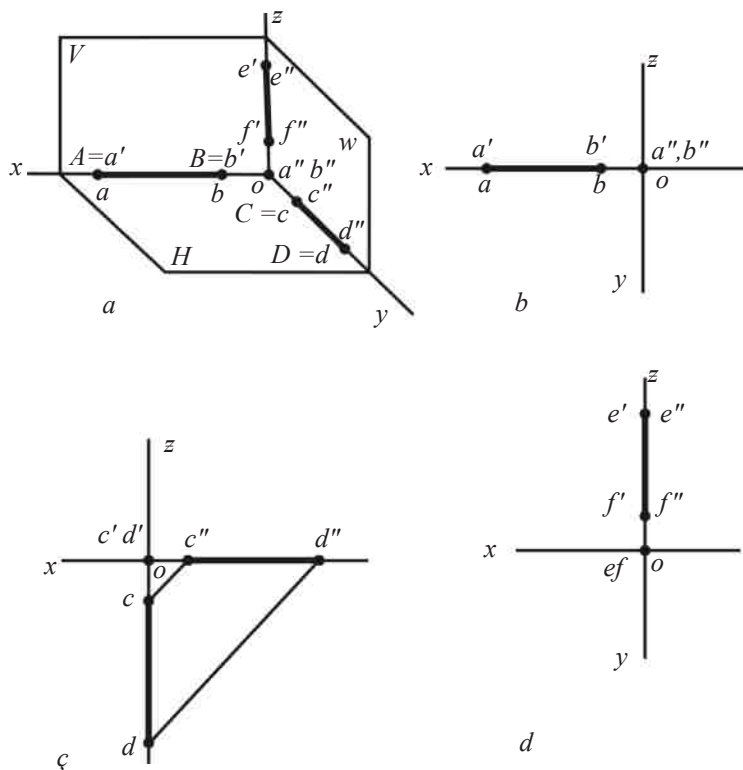
22-nji surat

2.4. Projeksiýalar okuna gabat gelýän göni çyzyk

1. Eger berlen AB göni çyzyk OX koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol frontal we gorizontalar tekizliklerine deňişlidir. Onuň giňişlikdäki aýdyň görnüşi we ortogonal projeksiýasy 23-nji a, b suratda görkezilendir: $AB = ab = a'b'$, $a''b''$ – nokatdyr.

2. CD göni çyzyk OY koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol gorizontalar we profil projeksiýalar tekizliklerine-de deňişlidir. Onuň giňişlikdäki aýdyň görnüşi we ortogonal projeksiýasy 23-nji $a, ç$ suratda görkezilendir: $CD = cd = c'd''$, $c'd'$ - nokatdyr

3. EF göni çyzyk OZ koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol frontal we profil proyeksiýalar tekizliklerine-de deňişlidir. Onuň giňişlikdäki aýdyň görnüşi we ortogonal proyeksiýasy 23-nji a, d suratda görkezilendir: $EF = e'f' = e''f''$, ef – nokatdyr.

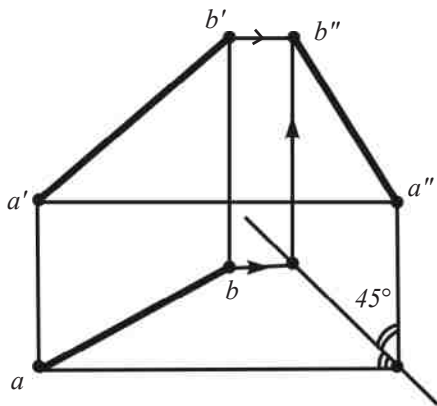


23-nji surat

9. OKSUZ PROJÉKTIRLEMEK

Köp halatlarda nokatlaryň giňişlikdäki ýagdaýyny proyeksiýalar tekizliklerine görä däl-de proyektirlenýän figuranyň nokatlaryna görä, olaryň özara ýagdaýlary bilen kesgitleýärler. Şonuň üçin tehnik çyzgylarda kä halatlarda proyeksiýalar oklaryny geçirmeýärler. Proyeksiýalaryň arasyndaky aralyklary bolsa erkin alýarlar. Şol bir ýagdaýda H gorizontall we V frontal proyeksiýalar tekizlikleri üçin hem-de V frontal we W profil proyeksiýalar tekizlikleri üçin baglansyk çyzyklarynyň **wertikallygy** (dikligi) we **gorizontallygy** (keseligi) saklanylýar.

24-nji suratda oksuz proyektirlemekde umumy halda AB göni çyzyk gurlan. Bu ýagdaýda nokatlaryň şekiller tekizliklerine çenli aralygy kesgitlenilmeýär.



24-nji surat

Göni çyzygyň profil proyeksiýasyny gurmak üçin baglanyşyk çyzyklaryň ugry bilen 45° burçy emele getirýän kömekçi ýapgyt göni çyzygy geçirmek ýeterlidir. Şondan soňky gurluş ýokarky suratda ugur görkeziji strelkalar bilen görkezilendir.

10. KESİMİ BERLEN GATNAŞYKDA BÖLMEK

Mesele. AB kesimi $n/m = 2/3$ bolan gatnaşykda bölmeli. Berlen meseläni çözmek üçin parallel proyektirlemegin esasy häsiýetlerini ulanarys.

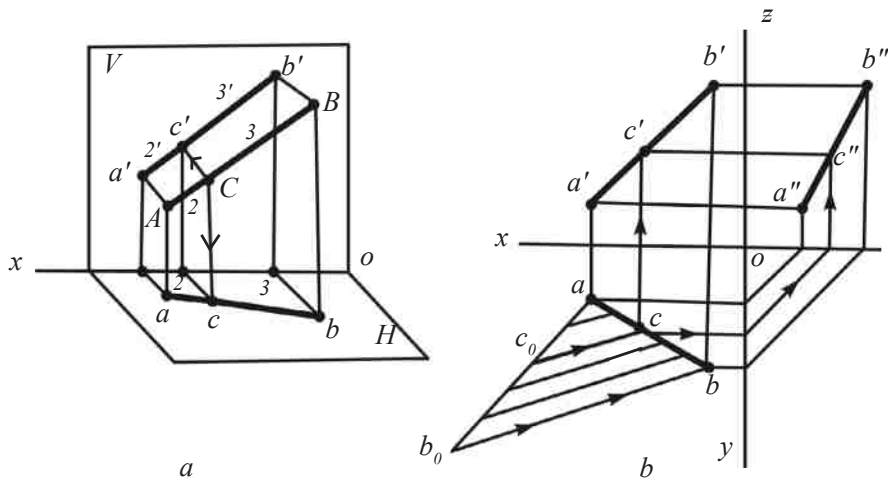
Nokat göni çyzyga degişli bolsa, onda ol nokadyň biratly proyeksiýalary-da şol gönüniň bir atly proyeksiýalaryna degişlidir.

Eger C nokat AB göni çyzygy berlen gatnaşykda bölýän bolsa, onda bu nokadyň c , c' we c'' proyeksiýalary-da (25-nji suratda) berlen göni çyzygyň bir atly proeksiýalaryny şol gatnaşykda bölýär:

$$AC/BC = ac/bc = a' c'/b' c' = a'' c''/b'' c'' = n/m = 2/3$$

Şoňa görä-de ortogonal çyzgyda kesimi berlen gatnaşykda bölmegi ýerine ýetirmek üçin proyeksiýalaryň haýsy hem bolsa birini şol gatnaşykda bölmek ýeterlikdir. Şonuň üçin kesimiň **ab** gorizonta

şekiliniň a nokadyndan islendik göni çyzygy geçirip, şol çyzyga baş deň aralygy goýup b_0 nokady alýarys we b nokat bilen birleşdirip, c_0c II b_0b geçirip c_0c nokady gurarys, soňra adaty usul bilen c' we c'' -ni taparys. C nokat AB kesimi berlen gatnaşykda bölýär. Bilşimiz ýaly gözlenýan nokadyň galan proyeksiýalary, şol nokadyň AB göni çyzyga degişlidiginden gelip çykyar.



25-nji surat

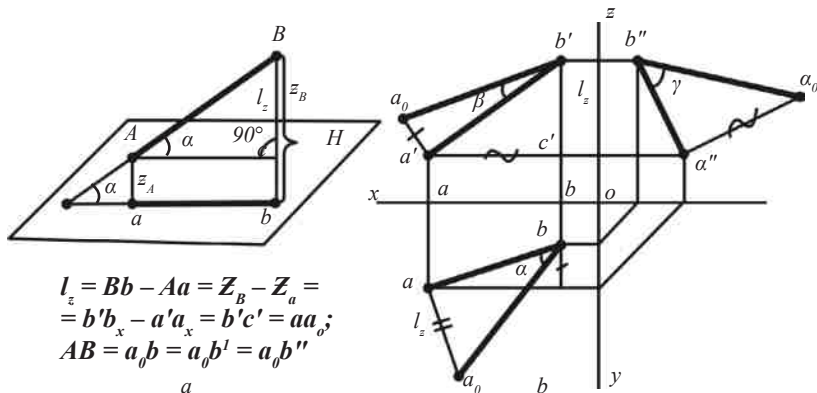
11. UMUMY ÝAGDAÝDAKY GÖNI ÇYZYGYŇ KESIMINIŇ NATURAL UZYNLYGYNY WE ONUŇ PROJÉKSIÝALAR TEKIZLIKLERINE ÝAPGYTLYK BURÇLARYNÝ KESGITLEMEK

Belli bolşy ýaly, umumy haldaky göni çyzygyň proyeksiýalary şol kesimiň hakyky uzynlygyndan mydama kiçidir.

Ortogonal çyzygyda şol kesimiň hakyky uzynlygyny kesgitlemek üçin dürli-dürli usullar ulanylýar. Häzirligçe metriki meseleleri çözmek üçin gönüburçly üçburçluk usulyna garap geçeliň.

Umumy haldaky göni çyzygyň AB kesiminiň hakyky uzynlygy, dogrudan hem 26-njy a , b suratdan görnüşi ýaly, gönüburçly üçburçlugyň gipetenuzasyna ($a_0b = AB$) deňdir, şol gönüburçly üçburçlugyň bir kateti kesimiň ($ab = AC$) gorizantal proyeksiýasydyr, beýleki kateti bolsa ($BC = Zb - Za = Lz$) kesimiň uçlaryndan H gorizon-

tal şekiller tekizligine çenli aralyklaryň algebraik tapawudydyr. Göni çyzygyň H tekizligine α ýapgyt burçy şol gönüburçly üçburçlukdan kesgitlenýär, ýagny ol burç ba_0 gipetenuza bilen berlen göni çyzygyň ab gorizonta proýeksiýasynyň arasyndaky burçudyr.



$$l_z = Bb - Aa = Z_B - Z_a = b'b_x - a'a_x = b'c' = aa_o; \\ AB = a_0b = a_0b' = a_0b''$$

26-njy surat

α – gorizonta H – şekiller tekizlegine ýapgatlyk burçy,

β – franta V – şekiller tekizlegine ýapgatlyk burçy,

γ – profila W – şekiller tekizlegine ýapgatlyk burçy.

Gönüburçly üçburçluk gurmak usuly bilen ortogonal çyzygy-da umumy ýagdaýdaky kesimiň hakyky uzynlygynyň we H, V, W proýeksiýalar tekizliklerine bolan ýapgytlyk burçlaryň kesgitlenilişi 26-njy suratda görkezilendir. Bu suratda gönüburçly üçburçluk ab -gorizonta, $a'b'$ -fronta we $a''b''$ -profil proýeksiýalarynda gurlandyr.

12. GÖNI ÇYZYGYŇ YZLARY

Göni çyzygyň proýeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän nokatlaryna göni çyzygyň yzlary diýilýär. Göni çyzygyň yzlary hem proýeksiýalar tekizlikleri ýaly gorizonta, franta we profila yzy diýilip atlandyrylýar.

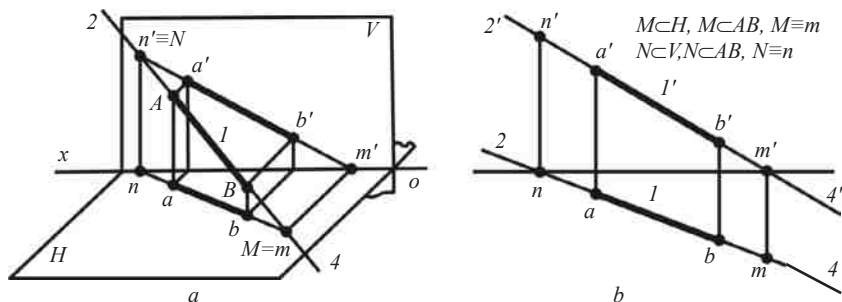
Proýeksiýalar tekizlikleriniň üçüsiniň sistemasynda berlen umumy haldaky göni çyzygyň üç sany yzy bardyr. Göni çyzygyň her bir yzy, şol göni çyzyga we proýeksiýalar tekizlikleriniň birine degişlidir.

Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolan göni çyzygyň iki sany yzy bardyr, olar hem oňa parallel bolmadyk beýleki iki şekiller tekizliginde ýerleşýärler.

Proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan göni çyzygyň diňe bir yzy bardyr, ol onuň perpendikulýar bolan şekiller tekizliginde ýerleşýär.

Göni çyzygyň yzlarynyň her biri proýeksiýalar tekizliginiň birine degişli bolandygy üçin, onuň proýeksiýalarynyň biri mydama şonuň bilen gabat gelýär, beýleki ikisi bolsa, degişlilikde gürrüňi edilýän tekizligi çäklendirýän oklaryň üstünde ýatýar.

Giňişlikdäki aýdyň çyzygydan (27-nji a surat) görnüşi ýaly umumy ýagdaýda berlen AB göni çyzygyň M gorizental yzyny tapmak üçin AB göni çyzygyň $a'b'$ -frontal proýeksiyasyny OX oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, m' -gorizental yzyň frontal proýeksiyasyny taparys we bu nokadyň üstünden göni çyzygyň ab -gorizental proýeksiyasynyň dowamy bilen kesişýänçä OX oka perpendikulýar, ýagny birleşdiriji çyzyk geçirip, m nokady taparys. Bu tapylan m nokat gorizental yzyň gorizental proýeksiasydyr (27-nji surat): $m = M$.



27-nji surat

$M \subset H, M \subset AB, M = m. N \subset V, N \subset AB, N = n'$

$M(m, m')$ nokat AB göni çyzygyň gorizental yzydyr.

AB göni çyzygyň N frontal yzyny tapmak üçin berlen göni çyzygyň ab gorizental proýeksiyasyny OX oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, n – nokadyň frontal yzyň gorizental proýeksiyasyny taparys we n nokadyň üstünden AB göni çyzygyň $a'b'$ frontal proýeksiyasynyň dowamy bilen kesişýänçä OX oka perpendikulýar, ýagny birleşdiriji çyzyk geçirip, n' frontal yzyň frontal proýeksiyasyny taparys. $N(n, n')$ nokat AB göni çyzygyň frontal yzydyr: $n' = N$.

Göni çyzygyň yzlarynyň ýagdaýy boýunça göni çyzygyň haýsy çäryékleriň üstünden geçýändigini göz önünde tutup, onuň görünüň (görünmeýän) ýerlerini kesgitlemek aňsatdyr. AB göni çyzyk IV, I we II çäryékleriň üstünden geçýär. Berlen göni çyzygyň MN bölegi

tutuşlygyna görünýär, şol sebäpli onuň **AB** kesimi hem görünýär, sebäbi ol kesim **M** we **N** nokatlaryň arasynda ýatýar.

Ýokarky suratdan görşümüz ýaly, göni çyzyklar özleriniň proyeksiýalary bilen aňladylan bolsa, olaryň yzlaryny tapyp bolşy ýaly, göni çyzyklar yzlary bilen berlen wagtynda-da olaryň proyeksiýalaryny we haýsy çäryeklerden geçýändigini kesgitlemek bolar.

AB göni çyzygyň haýsy çäryeklerdedigi 1,2 we 4 sanlarda görkezilendir.

13. IKI GÖNI ÇYZYGYŇ ÖZARA ÝAGDAÝLARY

Iki göni çyzyk giňişlikde biri-birine görä dürli ýagdaýlary eýeläp bilerler.

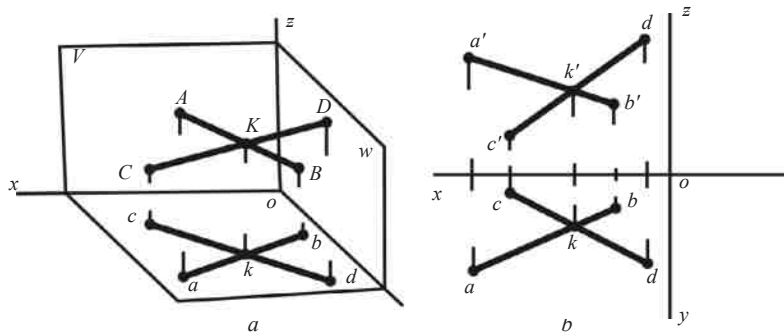
1. Göni çyzyklar giňişlikde **kesişip** bilerler, ýagny bir tekizlikde ýatýarlar we olaryň bir umumy nokady bolýar.

2. Göni çyzyklar giňişlikde **parallel** bolup bilerler we bir tekizlikde ýatýarlar we olaryň bir atly proyeksiýalary özara paralleldir.

3. Göni çyzyklar giňişlikde **atanak** ýatyp bilerler. Kesişýän hem-de parallel göni çyzyklardan tapawutlykda üýtgeşiklikde **atanak ýatan göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýarlar**. Bu ýagdaýda olaryň bir umumy nokady bolmaýar.

13.1. Kesişýän göni çyzyklar

Eger giňişlikde iki göni çyzyk özara kesişýän bolsa, onda epýurda olaryň biratly proyeksiýalary umumy ýagdaýda kesişýärler we bu proyeksiýalaryň kesişme nokatlary şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatýarlar. Hakykatdan-da, eger **K** nokat **AB** we **CD** iki çyzyga hem degişli bolsa, onda bu göni çyzyklaryň biratly proyeksiýalarynyň kesişme nokatlary bolan **K** we **K'** hökman şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatýarlar (28-nji surat).

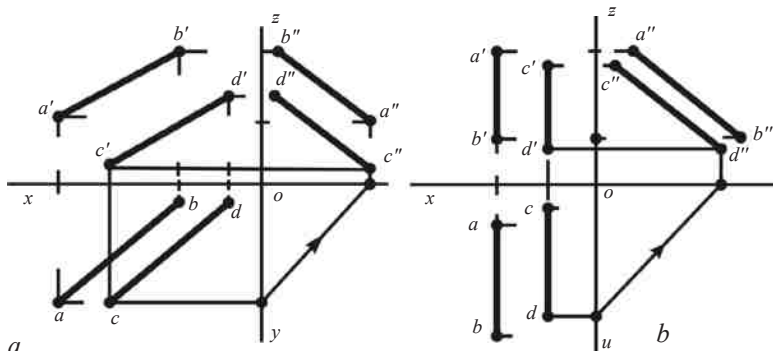


28-nji surat

$$AB \cap CD = K, \quad ab \cap cd = k, \quad a'b' \cap c'd' = k', \quad kk' \perp OX$$

13.2. Parallel göni çyzyklar

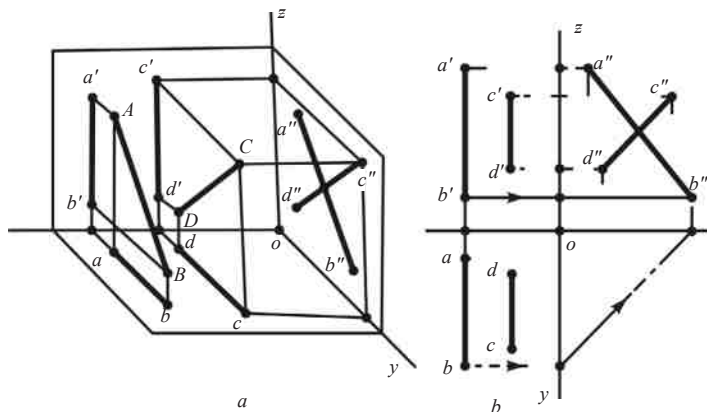
Parallel proyektirlemegiň häsiýetlerine görä, iki göni çyzyk giňişlikde özara parallel bolsalar ($AB \parallel CD$), onda olaryň biratly proyeksiýalary hem deňişlikde proyeksiýalar tekizliginde özara paralleldirler, ýagny gorizont tal proyeksiýalary $ab \parallel cd$, frontal proyeksiýalary $a'b' \parallel c'd'$ we profil proyeksiýalary $a''b'' \parallel c'd''$ özara paralleldirler (29-njy a, b surat).



29-njy surat

Umumy ýagdaýda bu aýdylanlary tersine tassyklamak hem bolar. Eger epýurda göni çyzyklaryň bir atly proyeksiýalary parallel bolsalar, onda bu göni çyzyklar giňişlikde-de özara paralleldirler.

Göni çyzyklaryň iki proyeksiýasy göni çyzyklaryň paralleldiklerini kesgitlemek üçin ýeterlik bolmadyk halatda bu düzgün ulanarlyk dälär. Profil proyeksiýalar tekizligine parallel bolan AB we CD göni çyzyklar muňa mysal bolar (30-njy a, b surat).



30-njy surat

13.3. Atanak ýatan göni çyzyklar

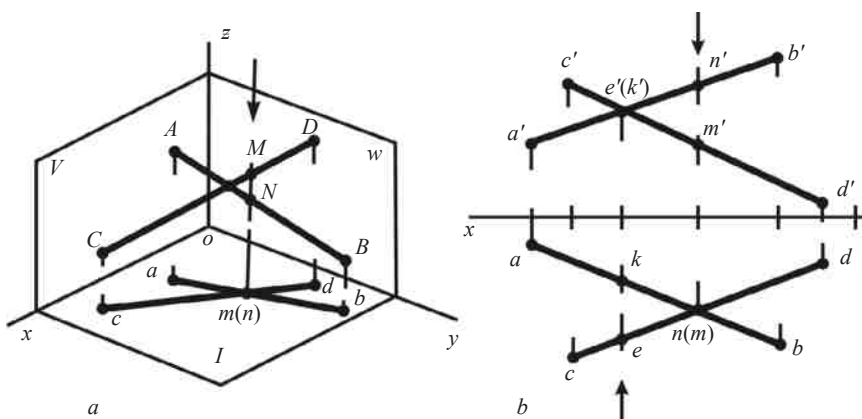
Projeksiýalaryň ortogonal çyzgysynda **atanak ýatan** çyzyklar dürli ýagdaýlarda şekillendirip bilner. Aýratyn ýagdaýlarda tekizlikleriň birinde bu çyzyklaryň projeksiýalary parallel ýa-da kesişýan görnüşde bolup bilerler.

Eger göni çyzyklar özara kesişmeýän we parallel bolmasalar, onda olaryň biratly projeksiýalarynyň kesişme nokatlary şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatmazlar.

Eger atanak ýatyan iki göni çyzygyň biratly projeksiýalary kesişýan bolsa, onda bu projeksiýalaryň kesişme nokatlary proyeksiýa baglanyşygyň bir gönüsünde, ýagny projeksiýalar okuna inderilen bir perpendikulýaryň üstünde ýatmaýarlar (31-nji surat).

Atanak ýatan iki göni çyzygyň üstünde hem-de projeksiýalar tekizligine geçirilen bir perpendikulýarlaryň üstünde yatan iki nokada şol projeksiýalar tekizligine görä **konkurirleýji (bäsleşän)** nokatlar diýilýär. Konkurirleýji nokatlaryň özara ýerleşişini kesgitlemeklik şekillendirilýän obýektiň elementleriniň ol ya-da beýleki projeksiýalar tekizligine görä haýsy biriniň görünýändigini takykklamak üçin giňden ulanylýar.

31-nji suratda atanak ýatan AB we CD iki göni çyzygyň projeksiýalary hem-de olaryň kesişme nokatlary görkezilendir. Bu ýerde K we M nokatlaryň üstünden şol bir baglanyşyk çyzygyny geçirmek mümkin däl, sebäbi bu göni çyzyklar giňişlikde kesişmeýärler.



31-nji surat

Göni çyzyklaryň frontal proyeksiýalarynyň kesişme nokady haýsy hem bolsa K we E iki nokadyň frontal proyeksiýalarydyr. Bu ýerde K nokat AB göni çyzyga deňşlidir, E nokat bolsa CD göni çyzyga deňşlidir.

Edil şunuň ýaly, göni çyzyklaryň gorizontaal proyeksiýalarynyň kesişme nokady hem M we N iki göni çyzygyň gorizontaal proyeksiýalarydyr. N nokat AB çyzyga, M nokat bolsa CD göni çyzyga deňşlidir.

31-nji b suratyň kömegi bilen atanak ýatan iki göni çyzygyň proyeksiýalarynyň kesişme nokadyndaky nokatlaryň haýsy biriniň görünip beýlekisiniň bolsa görünmeýändigini kesgitlemek aňsatdyr. Munuň özi aşakdaky ýagdaýlardan bellidir, ýagny gorizontaal proyeksiýalar tekizliginden has uzakda ýatan N nokat gözegçi üçin has ýakyn, şonuň üçin AB göni çyzygyň N nokady görünýär. Frontal proyeksiýalaryň kesişme nokadynda hem CD göni çyzygyň görünýändir sebäbi K nokada garanynda E nokat frontal proyeksiýalar tekizlikden uzakda ýerleşendir.

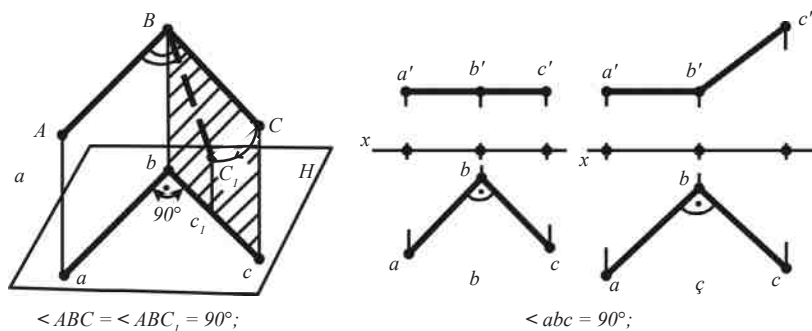
Oksuz proyektirlemekde görnüp-görünmezlik ee' we kk'' aralyklar boýunça kesgitleýär, eger $ee' > kk'$ bolsa, onda E nokat görünýändir: Eger $nn' > mm'$ bolsa, onda AB göni çyzygyň N nokady görünýän nokady bolar.

14. TEKIZ BURÇLARY PROYEKTIRLEMEK

Islendik tekiz burçuň proyeksiýasy proyeksiýalar tekizligi bilen özara ýerleşişine görä islendik (ýiti, göni ýa-da kütäk) burç bolup şekillendirilip biliner. Eger tekiz burçuň taraplary ($AB \parallel H$ we $BC \parallel H$) proyeksiýalar tekizligine parallel bolsa, onda ol burç şol tekizlige üýtgedilmezden proyektirlenýär (32-nji a, b suratlar).

Eger göni burçuň haýsy hem bolsa bir tarapy ($AB \parallel H$) gorizontaal şekiller tekizligine parallel bolsa, onda ol göni burç ($\angle ABC = 90^\circ = \angle abc$) şol gorizontaal şekiller tekizligine özüniň hakyky ululygynda proyektirlenýär (32-nji a, c suratlar).

Goý, ABC burç 90° deň bolsun we onuň AB tarapy gorizontaal proyeksiýalar tekizligine paralleldir diýeliň. Burçuň abc , gorizontaal proyeksiýasynyň 90° -a deňligini subut etmek gerek bolsun (32-nji a, b suratlar).



32-nji surat

AB göni çyzyk **BC**, **c₁b** tekizlige perpendikulýardyr, sebäbi **AB** \perp **BC** we **AB** \perp **Bb**, **AB** \parallel **ab**. Bu ýerden **ab** \perp **BCcb** tekizlige perpendikulýardyr. Diýmek, **ab** \perp **bc**, ýagny $\angle abc = 90^\circ$.

Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler

1. Nähili göni çyzyga umumy haldaky göni çyzyk diýilýär? Ortogonal çyzgyda onuň proyeksiýasy proyeksiýalar oklaryna görä nähili ýerleşýär?

2. Iki proyeksiýasy boýunça umumy haldaky göni çyzygyň kesiminiň hakyky uzynlygy nähili gurluşlaryň üsti bilen kesgitlenýär?

3. Gorizental, frontal we profil göni çyzyklar diýilip nähili göni çyzyklara aýdylýar? Olaryň proyeksiýalary ortogonal çyzgyda proyeksiýalar oklaryna görä nähili ýerleşýärler?

4. Degişlilikde **OX**, **OY**, **OZ** koordinata oklaryna parallel göni çyzyklaryň proyeksiýalary ortogonal çyzgyda nähili ýerleşýärler?

5. Göni çyzygyň yzy diýilip näme aýdylýar? Ortogonal çyzgyda göni çyzygyň her bir yzynyň her bir proyeksiýasynyň ýagdaýyny häsiýetlendirin.

6. Göni çyzyklaryň proyeksiýalary boýunça olaryň özara ýerleşişini nähili kesgitlemeli?

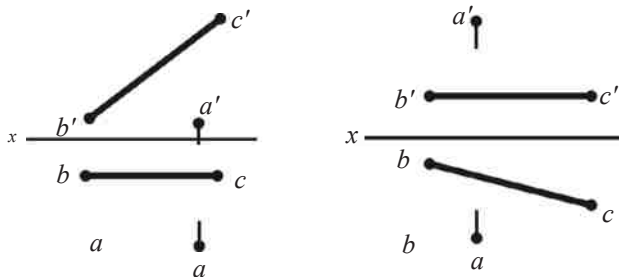
7. Konkurirleýji - bäsleşýan nokatlar diýilip nähili ýerleşen nokatlara aýdylýar?

8. Umumy ýagdaýda ýerleşen üç granly piramidanyň berlen şekilleri boýunça görünýän we görünmeýän gapyrgalaryny kesgitläň.

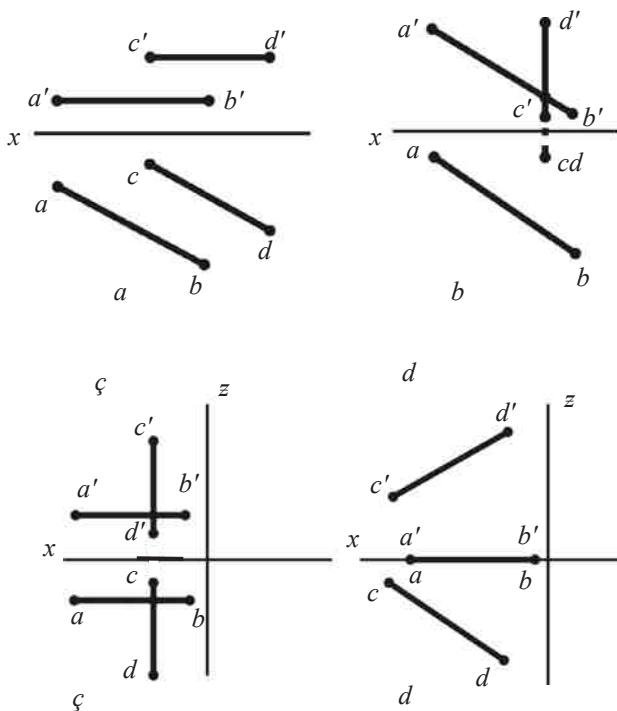
9. **A** nokatdan **BC** göni çyzyga çenli bolan in ýakyn aralygy kesgitläň (33-nji surat).

10. **AB** we **CD** göni çyzyklaryň in ýakyn aralyklaryny kesgitläň (34-nji surat).

11. Göni çyzygyň kesiminiň proyeksiýasyny nähili gurmaly?
12. Göni çyzyk hem-de nokat özara nähili ýerleşip biler?
13. Haýsy ýagdaýlarda göni çyzygyň bir, iki we üç yzlary bolýar?
14. Göni burçuň proyeksiýasy hakyndaky teoremany düşündiriň.



33-nji surat



34-nji surat

III BAP. TEKİZLİK

15. GİŇİŞLİKDE TEKİZLİĞİŇ

KESGITLENİLİŞİ /Umumy maglumat/

Bize elementar geometriýadan mälim bolşy ýaly, giňişlikde tekizligiň ýagdaýy şu aşakdakylar ýaly kesgitlenilýär:

1. Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokat bilen (35-nji a surat):

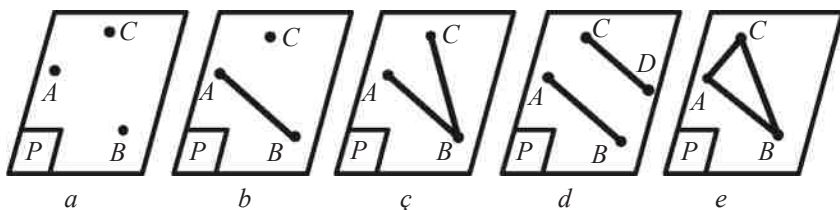
$P(A, B, C)$

2. Nokat we şol nokadyň üstünden geçmeýän göni çyzyk bilen (35-nji b surat): $P(AB, C)$

3. Iki kesişýän göni çyzyk bilen (35-nji ç surat): $P(AB \cap BC)$

4. Iki parallel göni çyzyk bilen (35-nji d surat): $P(AB \parallel CD)$

5. Ýazgyn şekiller bilen /töwerek, üçburçluk, dörtburçluk we ş.m. (35-nji e surat): $P(ABC)$



35-nji surat

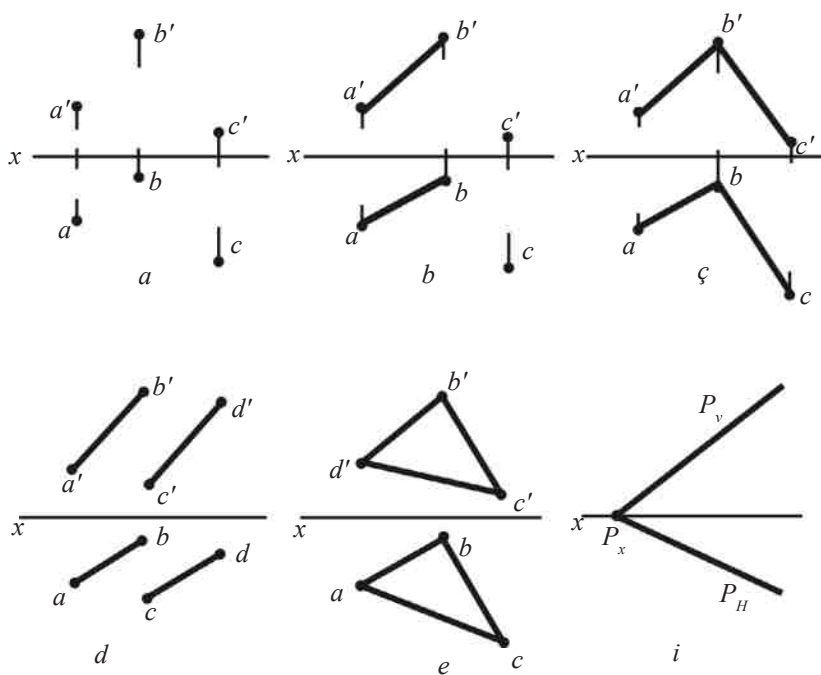
16. ORTOGONAL ÇYZGYDA

TEKİZLİĞİ ŞEKILLENDİRMEK

Ortogonal çyzygyda tekizligi şekillendirmek üçin, esasan, bir gönüde ýatmaýan üç nokadyň proyeksiýalaryny gurmak ýeterlidir. Mysal üçin, $P(A, B, C)$, onda, şu nokatlaryň üçüsiniň hem şekillerini gurmaly:

$A/a, a'', B/b, b''$ we $C/c, c''$ (36-njy a surat).

Eger islendik iki nokady, mysal üçin, $A/a, a''$ we $B/b, b''$ nokatlaryň biratly şekillerini göni çyzyk bilen birleşdirsek, şonda $AB/ab, a'b'$ göni çyzyk we şu göni çyzygyň üstünde ýatmaýan $C/c, c''$ nokat tekizligi kesgitleýär (36-njy b surat): $P(AB, C)$



36-njy surat

Eger $C(c, c')$ we $B(b, b')$ ýa-da $C(c, c')$ we $A(a, a')$ nokatlaryň bi-ratly şekillerini göni çyzyk bilen birleşdirseň, onda $B(b, b')$ nokatda kesişýär AB we BC (ýa-da AC) göni çyzyklar hem şol tekizligi kes-gitlär (36-njy ζ surat): $P(AB \cap BC)$

Eger $A(a, a')$ we $B(b, b')$ iki nokat $AB(ab, a'b')$ göni çyzyklar birleşdirilse we C nokadyň üstünden AB göni çyzyga parallel CD göni çyzygy geçirseň, onda ol iki parallel AB we CD göni çyzyklar hem şol tekizligi kesgitlär: $P(AB \parallel CD)$ (36-njy d surat).

Eger $A(a, a')$, $B(b, b')$ we $C(c, c')$ üç nokady göni çyzyk bilen birleşdirsek, onda emele gelen ýazgyn şekil (üçburçluk) tekizligi kesgitlär:

$P(ABC)$ (36-njy i surat).

Şeýlelikde, ortogonal çyzykda tekizlik aşadakylyr ýaly şekil-lendirilip bilner:

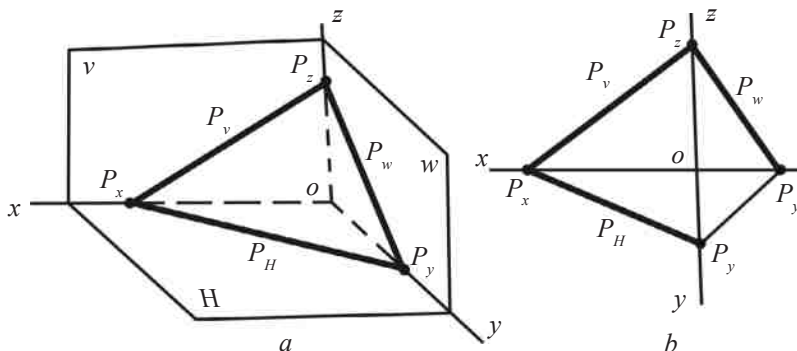
1. Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokadyň proyeksiýasy bilen:

$P(A, B, C)$

2. Nokat we şol nokadyň üstünden geçmeýän göni çyzygyň proyeksiýasy bilen: $P(AB, C)$

3. Kesişýän iki göni çyzygyň proyeksiýasy bilen: $P(AB \cap BC)$
4. Iki parallel göni çyzygyň proyeksiýasy bilen: $P(AB \parallel CD)$
5. Ýazgyn şekilleriň proyeksiýasy bilen (töwerek, üçburçlyk, we ş.m.).

6. Yzlary bilen: $P(P_H, P_v, P_w)$ (36-njy i surat we 37-nji a, b surat)



37-nji surat

Çyzmaly geometriýada tekizligiň proyeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän göni çyzyklaryna **tekizligiň yzlary** diýilýär. Ortogonal çyzgyda berlen tekizligi yzlary bilen şekillendirmek giňden ulanylýar.

Tekizligiň, degişlilikde iki sany kesişýän yzlaryna iki sany kesişýän göni çyzyklar hökmünde garamak hem mümkindir.

Berlen P tekizligiň H gorizontaň şekiller (kese) tekizligini kesýän göni çyzygyna **tekizligiň gorizontaň yzy** diýilýär we P_H diýilip bellenilýär (37-njy a surat): $P_H = P \cap H$

P tekizligiň V frontal şekiller (maňlaý – dik) tekizligini kesýän göni çyzygyna **tekizligiň frontal yzy** diýilýär we P_v diýilip bellenilýär:

$$P_v = P \cap V$$

P tekizligiň W profil şekiller (gapdal – dik) tekizligini kesýän göni çyzygyna bolsa **tekizligiň profil yzy** diýilýär we P_w diýilip bellenilýär: $P_w = P \cap W$

Tekizligiň yzlarynyň üç proyeksiýasy bardyr. Mysal üçin, P_H yz özüniň gorizontaň proyeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyň beýleki iki proyeksiýasy bolsa OX we OY proyeksiýa oklary bilen gabat gelýärler, ýöne ol şekiller çyzgyda görkezilmeyär we bellenilmeyär.

Şonuň ýaly hem P_v yz özüniň frontal proyeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyň beýleki iki proyeksiýasy bolsa OX we OZ proyeksiýa oklary bilen gabat gelýärler we çyzgyda görkezilmeyärler we bellenilmeyär.

P_w yz bolsa özüniň profil proyeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyň beýleki iki proyeksiýasy bolsa OZ we OY proyeksiýa oklary bilen gabat gelýärler we çyzgyda görkezilmeýärler, bellenilmeýärler.

Eger tekizlige proyeksiýa tekizlikleriniň üçüsiniň sistemasynda garasak, onda umumy haldaky tekizlik proyeksiýa oklarynyň her birini keser. Iki yzyň OX , OY we OZ proyeksiýa oklarynyň üstündäki kesişme nokatlaryna tekizligiň yzlarynyň **duşuşýan /birleşme/** nokatlary diýilýär we deňşililikde P_x , P_y , P_z diýilip bellenilýär. Yzlarynyň duşuşyk nokatlaryndan koordinatalaryň başlangyjyna çenli bolan aralygyna OP_x , OP_y we OP_z tekizligiň **parametri** diýilýär. Giňişlikde tekizligiň ýagdaýy onuň üç parametri bilen kesgitlenilýär.

Tekizligiň epýuryny gurmak üçin OP_x , OP_y we OP_z kesimleriň - tekizligiň parametrleriniň berlen bolmagy ýeterlikdir (37-nji b surat).

Tekizligiň her bir yzynyň ýagdaýy iki parametr bilen kesgitlenilýär, şeýlelikde, tekizligiň iki yzy P_H we P_V bilelikde onuň üç parametrini, ýagny onuň giňişlikdäki ornuny doly kesgitleýär. Şeýle hem tekizligiň iki yzy iki sany kesişýän göni çyzyk bolup, tekizligi kesgitleýär.

17. PROYEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINE GÖRÄ GIŇIŞLIKDÄKI TEKIZLIGIŇ DÜRLI ÝAGDAÝLARY

Tekizlik giňişlikde proyeksiýalar tekizliklerine garanynda şu aşakdaky ýagdaýlarda bolýar:

1. Umumy ýagdaýdaky tekizlik.
2. Hususy ýagdaýdaky tekizlik.

1. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine-de perpendikulýar bolmadyk tekizlige umumy ýagdaýdaky (haldaky) tekizlik diýilýär.

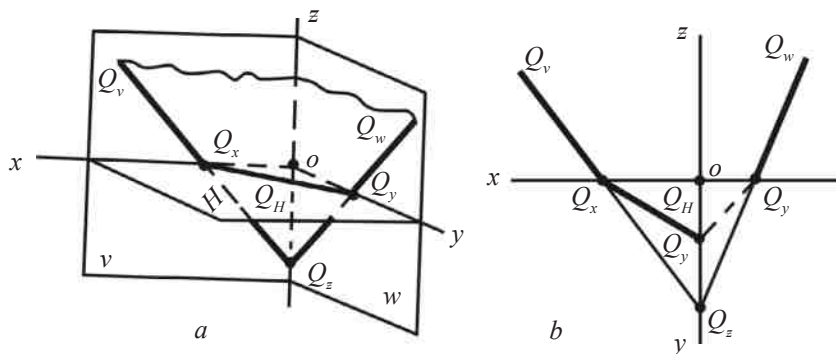
Umumy haldaky tekizlikleriň ýazgyn şekilde we dürli ýagdaýlardaky berlişi 36-njy suratda görkezilendir. Şeýle tekizlikler proyeksiýalar tekizlikleriniň üçüsine-de islendik ýapgytlykda bolup biler. Eger umumy haldaky tekizlik ýazgyn şekilde (üçburçluk) berlen bolsa, onda şol ýazgyn şekilleriň (üçburçlugyň) gorizonta (Δabc), frontal ($\Delta a' b' c'$), we profil ($\Delta a'' b'' c''$) proyeksiýalary ýazgyn şekildir (üçburçlukdyr), ýöne hakyky ululygyndan mydama kiçidir: (36-njy e sur. ser.).

$(\Delta abc < \Delta ABC)$, $(\Delta a' b' c' < \Delta ABC)$ we $(\Delta a'' b'' c'' < \Delta ABC)$

Umumy haldaky P tekizligiň üç yzy bardyr: gorizontaly P_H , frontal P_V , profil P_W . Şeýle tekizligiň yzlary proyeksiýalar oklaryna parallel dälidirler we olary kesýändirler.

37-nji suratdan görnüşi ýaly, yzlaryň üçüsi bir oktantyň çäginde (1-nji oktant) ýapyk kontury – yzlaryň üçburçlugyny emele getirýärler.

38-nji suratda Q_H we Q_V yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky tekizligiň giňişlikde aýdyň şekildäki we epýurdaky Q_W profil yzyň gurluşy görkezilendir.



38-nji surat

Q_z nokat O nokatdan aşakda ýatandyr, Q_y nokady tapýarys, şondan soň Q_y we Q_z nokatlary birleşdirip, Q_W profil yzyň ugruny anyklaýarys hem-de gurýarys.

2. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine (A topar) ýa-da ikisine (B topar) perpendikulýar ýerleşdirilen tekizlige **hususy ýagdaýdaky (haldaky) tekizlik diýilýär.**

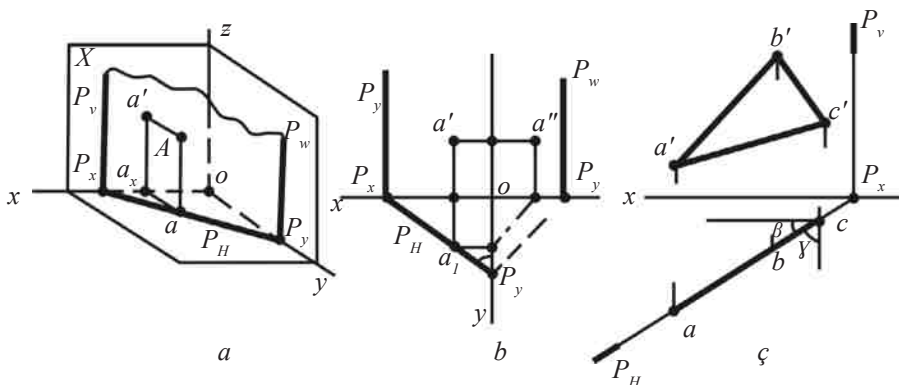
A. PROYEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINIŇ BIRINE PERPENDIKULÝAR TEKIZLIK

1. Gorizontaly proyektirleýji tekizlik

Gorizontaly proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan P ($\triangle ABC$) tekizlige **gorizontaly proyektirleýji tekizlik diýilýär** (39-njy surat).

Proyektirleýji tekizlikler öz üstlerinde ýatan nokatlaryň özboşlylygy bilen baglanyşykly meseleleri çözmekde häli-şindi ulanylýar. Mysal üçin, gorizontaly proyektirleýji tekizlikde ýatan her bir nokat

şol nokady H tekizlige proyektirlenýän göni çyzyk gorizontaal proyektirleýji tekizlikde ýatandyr. H tekizligi tekizligiň gorizontaal yzynyň üstünde ýatan nokatda kesýar. Şeýlelikde, gorizontaal proyektirleýji tekizlikde ýatan ähli nokatlaryň, göni çyzyklaryň, tekiz egri çyzyklaryň we geometrik ýazgyn figuralaryň gorizontaal proyeksiýalary mydama P_H gorizontaal yz bilen gabat gelýär, ýagny utgaşýar.



39-njy surat

Görnüşü ýaly gorizontaal yzyň OX we OY oklary bilen kesişende emele getirýän β we λ burçlary P tekizligiň V hem-de W tekizlikleri bilen emele getirýän ikigranly burçlaryň çyzyk burçlarydyr. Mundan başga-da $P_v \perp OX$, sebäbi iki V hem P tekizlik üçünji H tekizlige perpendikulýar bolsa, onda şol tekizlikleriň kesişme P_v çyzygyna hem-de H tekizligene perpendikulýardyr.

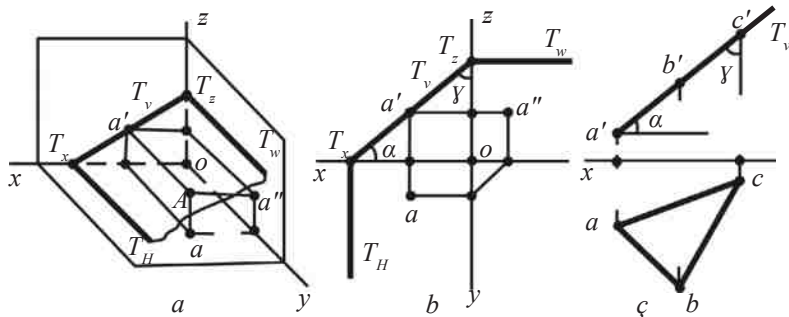
Şeýle hem P_v göni çyzyk şol tekizlikdäki ýatan her bir göni çyzyga, ýagny OX okuna-da perpendikulýardyr.

P_w -niň OY okuna perpendikulýarlygy hem şu ýokardaky ýaly düşündirilýär.

2. Frontal poýektirleýji tekizlik

Frontal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan T ($\triangle ABC$) tekizlige **frontal proyektirleýji** tekizlik diýilýär (40-njy surat).

T_H gorizontaal yz OX okuna, T_w bolsa OZ okuna perpendikulýardyr. Bu tekizlikde ýatan nokatlaryň, göni çyzyklaryň, tekiz egri çyzyklaryň we geometrik ýazgyn figuralaryň frontal proyeksiýalary mydama T_v frontal yz bilen gabat gelýär. α we λ burçlar T tekizligiň H we W tekizlikleri bilen emele gelen çyzyk burçlarydyr.



40-njy surat

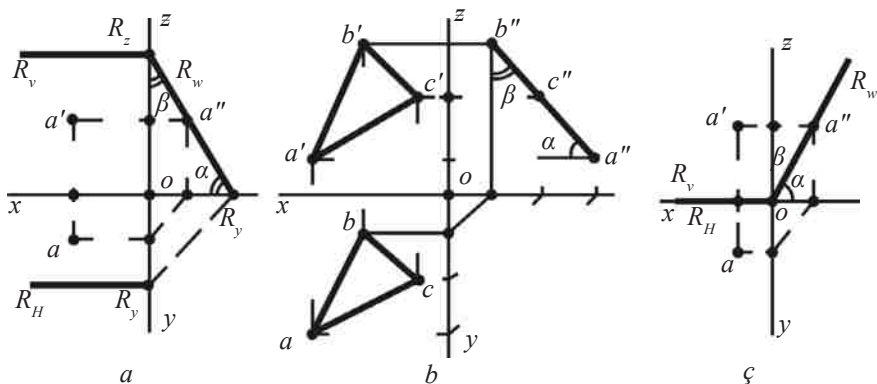
3 . Profil proyektirleýji tekizlik

Profil proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan $R (\triangle ABC)$ tekizlige **profil proyektirleýji** tekizlik diýilýär (41-nji surat).

α we λ burçlar özleriniň hakyky ululyklarynda proyektirlenýär. Beýlekilerde bolşy ýaly, P_w yzyň hem ýygnaýjy häsiýeti bardyr.

OX okuň üstünden geçýän P tekizlige **ok tekizligi** (profil proyektirleýji) diýilýär (41-nji ç surat).

Eger-de $\alpha < \beta$ bolsalar, bu P tekizlige **bissektrik ok tekizligi** diýilýär.



41-nji surat

B. PROJÉKSIÝALAR TEKIZLIKLERINIŇ IKISINE PERPENDIKULÝAR TEKIZLIK

Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel, ýagny şol bir wagtyň özünde-de proyeksiýalar tekizlikleriniň beýleki ikisine perpendikul-

ýar bolan tekizlikler hem h u s u y haldaky tekizliklerdir. Olara-da proyektirleýji tekizlikleriň häsiýetleri mahsusdyr. Bu ýagdaýdaky tekizliklere kä halatlarda **dereje** tekizligi hem diýilýär.

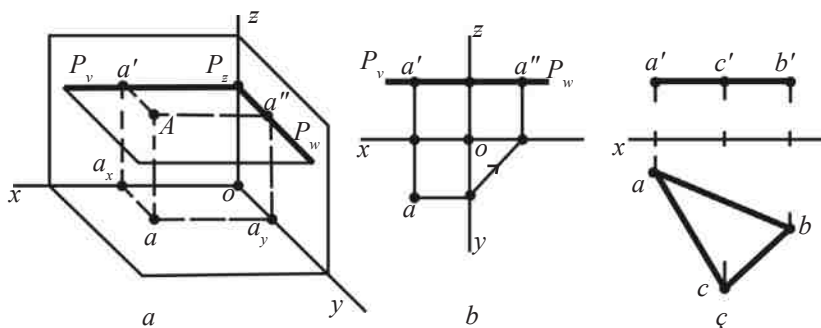
1. Gorizontal tekizlik

Gorizonta! proyeksiýalar tekizligine parallel ($P \parallel H$), frontal we profil proyeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar ($P \perp V$, $P \perp W$) bolan tekizlige **gorizonta! tekizlik** diýilýär.

Eger gorizonta! tekizlik epýurda yzlary bilen berlen bolsa, onda ol tekizligiň P_H – gorizonta! yzy ýokdur. Emma P_V – frontal we P_W – profil yzlary (bir gönüde) OX proyeksiýalar okuna paralleldirler (42-nji a, b surat). Iki parallel tekizlikleriň üçünji tekizlik bilen kesişmegi/.

Gorizonta! tekizlik ýazgyn figuralar bilen aňladylanda, ýagny ABC üçburçluk bilen aňladylanda, ol üçburçlugyň gorizonta! proyeksiýasy onuň hakyky ululygyna deňdir. $\Delta abc = \Delta ABC$, onda beýleki iki şekilleri :

$\Delta a'b'c'$ frontal we $\Delta a''b''c''$ profil proyeksiýalary bolsa OX proyeksiýalar okuna paralleldirler we göni çyzyk bolup proyektirlenýändirler. $P(\Delta ABC) \parallel H$; $P \perp V$; $P \perp W$; onda $\Delta abc = \Delta ABC$.



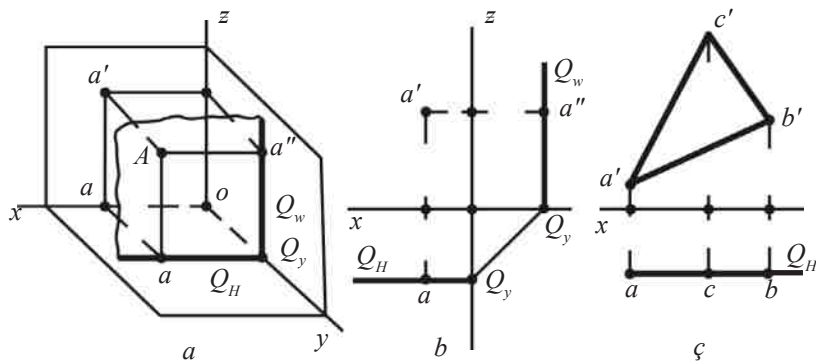
42-nji surat

2. Frontal tekizlik

Frontal proyeksiýalar tekizligine parallel ($Q(\Delta ABC) \parallel V$) ýa-da H we W tekizliklere perpendikulýar tekizlige **frontal tekizlik** diýilýär (43-nji surat).

$$Q_H \parallel OX; Q_W \parallel OZ; Q(\Delta ABC) \parallel V;$$

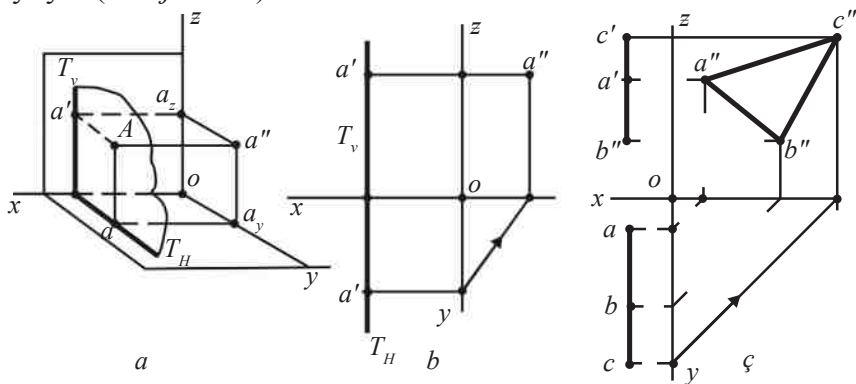
$$Q_H = \Delta abc; \Delta a'b'c' = \Delta ABC.$$



43-nji surat

3 . Profil tekizlik

Profil proyeksiýalar tekizligine parallel ($T(\Delta ABC) \parallel W$), H we W proyeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar tekizlige **profil tekizlik** diýilýär (44-nji surat).



44-nji surat

$T_v \perp OX$, $T_H \perp OX$ ýa-da $T_v \parallel OZ$,
 $T_H \parallel OY$, onda $\Delta a''b''c'' = \Delta ABC$.

Gesilenleri berkitmek üçin meseleler

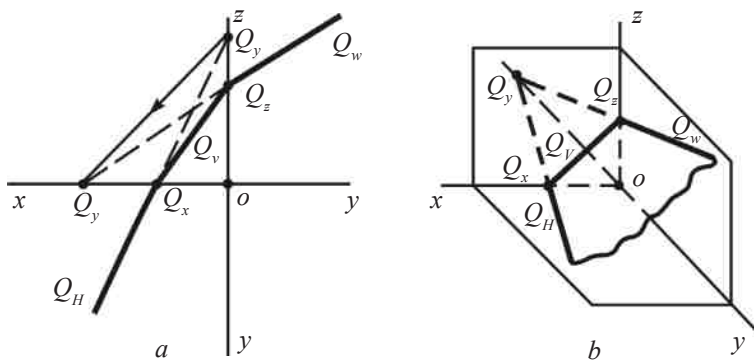
Mesele. Berlen Q (3, - 6, 4) tekizligiň parametrleri boýunça tekizligiň yzlaryny gurmaly (45-nji a, b surat). Kompleks çyzygy – —epýury we aýdyň şekili çyzylandyr.

1. Degişlilikde OX we OY oklaryň üstünde ölçäp goýlan $OQ_x = 3$ we $OQ_y = -6$ parametrler boýunça Q_x we Q_y – iň duşuşyk nokatlaryny kesgitleýäris we Q_H gorizontaly zyz guryarys.

2. OZ okuň üstünde ölçäp goýlan $OQ_z = 4$ parametrler boýunça Q_z -iň duşuşyk nokatlaryny kesgitleýäris, ol hem Q_x duşuşyk nokady bilen bilelikde Q_v frontal zyz kesgitleýär.

3. OY -iň otirisatel böleginde ölçenip goýlan $OQ_y = -6$ parametri boýunça OQ_{y_1} radius bilen duga geçirip, OX , okuň üstünde Q_{y_1} nokady tapýarys, ol hem Q_z nokat bilen bilelikde Q_w profil zyz kesgitleýär.

Şuňa meňzeşlikde parametrleri boýunça Q tekizligiň aýdyň şekilini guryarys (45-nji b surat).



45-nji surat

Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler.

1. Ortogonal çyzgyda giňişlikdäki tekizlik nähili şekillendirilip bilner?

2. Tekizligiň zyz diýilip näme aýdylýar? Tekizligiň parametrleri diýilip näme aýdylýar?

3. Tekizligiň giňişlikdäki ýagdaýyny parametrleriň näçesi kesgitleýär?

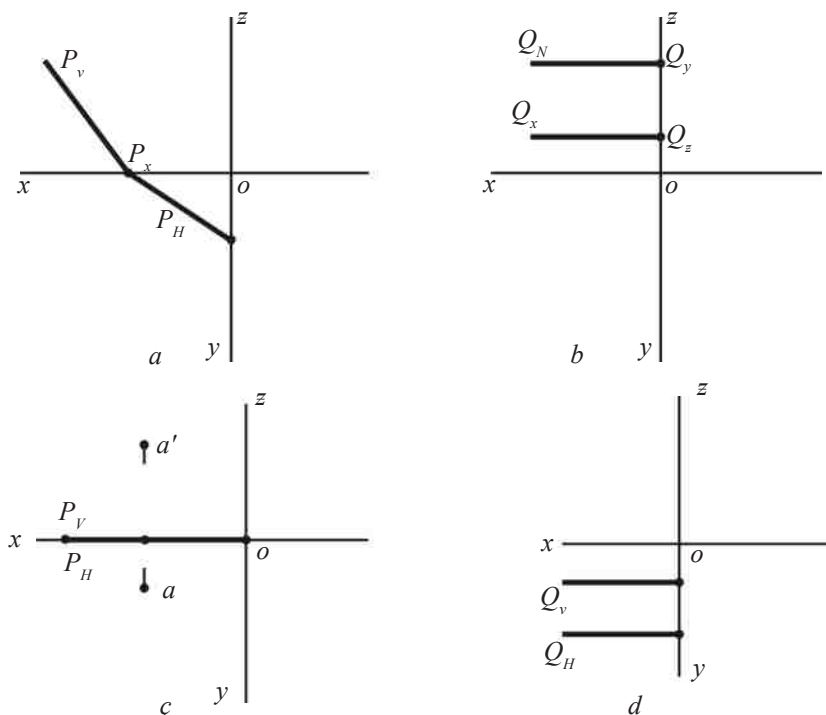
4. Tekizligiň giňişlikdäki ýagdaýyny yzlaryň näçesi kesgitleýär?

5. Umumy haldaky tekizlik diýip nähili tekizlige aýdylýar, şeýle tekizligiň yzlary proyeksiýalar oklaryna görä nähili ýerleşýärler?

6. Gorizontaly proyektirleýji (frontal proyektirleýji) tekizlik näme, şeýle tekizlikde ýatan nokatlaryň proyeksiýalarynyň ýerleşişleriniň özboluşlylygy nämeden ybarat?

7. Parametrləri bilən berlən $P(-3, 4, 5)$ və $Q(3, 2, -4)$ tekizliklərin yzlaryny gurmaly.

8. P tekizliğin və Q tekizliğin profil yzlaryny gurmaly (46-njy surat)



46-njy surat

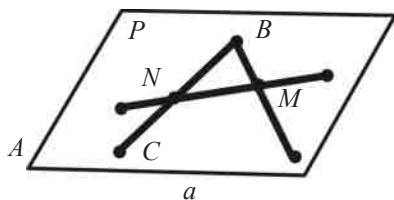
18. GİŇİŞLİKDÄKİ TEKİZLİĞİŇ WE GÖNİ ÇYZYGYŇ ÖZARA ÝAGDAÝLARY

Geometriýadan belli bolşy ýaly, giňişlikde göni çyzyk şekiller tekizligine görä aşakdaky ýagdaýlarda bolup biler :

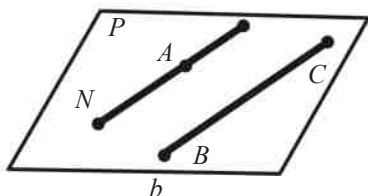
- 18,1. Tekizlikde ýatan göni çyzyk.
- 18,2. Tekizlige parallel göni çyzyk.
- 18,3. Tekizligi kesýän göni çyzyk.
- 18,4. Tekizlige perpendikulýar göni çyzyk.

19. TEKİZLİKDE ÝATAN GÖNİ ÇYZYK WE NOKAT

Eger göni çyzygyň tekizlik bilen iki sany umumy nokady bar bolsa ýa-da bir umumy nokady bolup hem-de şol tekizligiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir göni çyzyga parallel bolsa, onda şol göni çyzygyň tekizlige degişli bolýandygy geometriýadan bize bellidir (47-nji surat).



$N \subset AB$, onda
 $M \subset BC$ $NM \subset P$

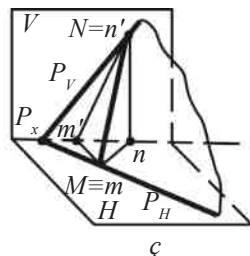
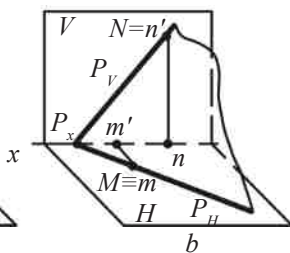
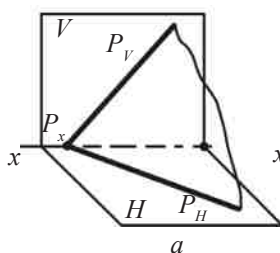


$A \subset P$ $NA \parallel BC$, $BC \subset P$,
onda $NA \subset P$

47-nji surat

Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P** tekizlige degişli göni çyzyk geçirmeklige garap geçeliň (48-nji surat).

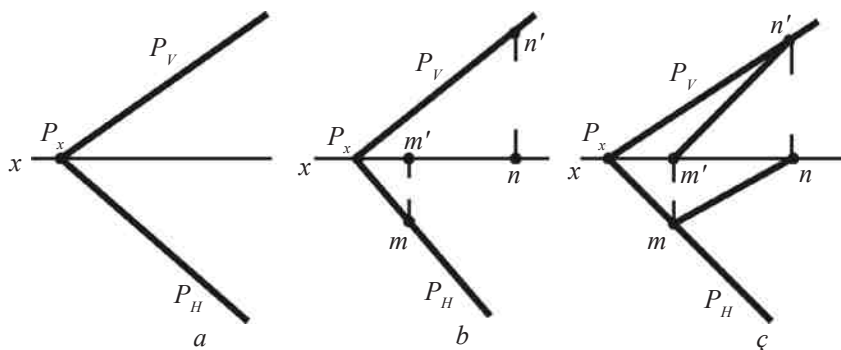
Eger nokat tekizlige degişli göni çyzygyň üstünde ýatan bolsa, onda nokadyň tekizligiň üstünde ýatanlygy hem geometriýadan mälimdir. Şonuň üçin **P** tekizlikde käbir göni çyzygy gurmak üçin bu göni çyzygyň islendik **M** we **N** nokatlaryny alýarys, ýagny **M** nokady tekizligiň **P_H** gorizontal yzynyň, **N** nokady bolsa tekizligiň **P_V** frontal yzynyň üstünde alýarys.



48-nji surat

Ortogonal çyzgyda **M** we **N** nokatlaryň proyeksiýalaryny (**m**, **m'** we **n**, **n'**) gurýarys (49-njy surat): **M = m**, **N = n'**

M we N noktalary, şeýle hem olaryň biratly m we n hem-de m' we n' proyeksiýalaryny göni çyzyklar bilen birleşdirip, P tekizligiň üstünde ýatan MN ($mn, m'n'$) göni çyzygy we onuň deňişli mn gorizontal hem-de $m'n'$ frontal proyeksiýalaryny alarys (48 – 49- nji suratlar).



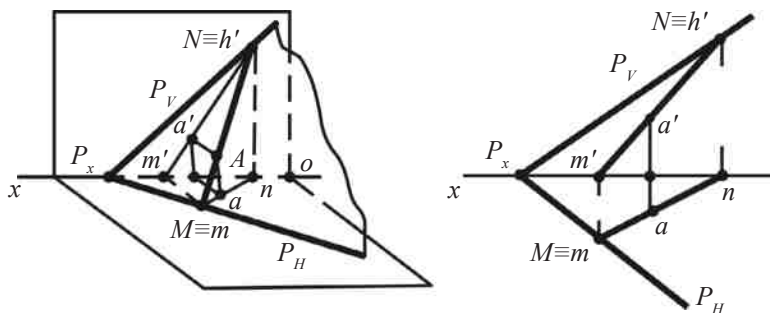
49-njy surat

$M(m, m')$ nokat gurlan göni çyzygyň gorizontal yzydyr. $N(n, n')$ nokat bolsa onuň frontal yzydyr, şeýle hem M nokadyň gorizontal yzy tekizligiň P_H gorizontal yzyynyň üstünde, göni çyzygyň N frontal yzy bolsa tekizligiň P_V frontal yzyynyň üstünde ýatýandyr: $M \in P_H, N \in P_V$

Şeýlelikde, eger umumy haldaky MN göni çyzyk tekizlikde ýatan bolsa, onda onuň bir atly yzlary bu tekizligiň biratly yzlarynyň üstünde ýatýandyr.

P tekizliginde haýsy hem bolsa bir islendik $A(a, a')$ nokady gurmak üçin bu tekizligiň üstünden MN göni çyzygy gurmaly we bu göni çyzygyň ($a \in mn, a' \in m'n', A \in P$) biratly şekilleriniň üstünde hem islendik A nokady gurmaly (50-nji surat).

$A \in MN, MN \in P$, onda $A \in P$ deňişlidir, ýagny A nokot umumy ýagdaýdaky P tekizlikde ýatýar.

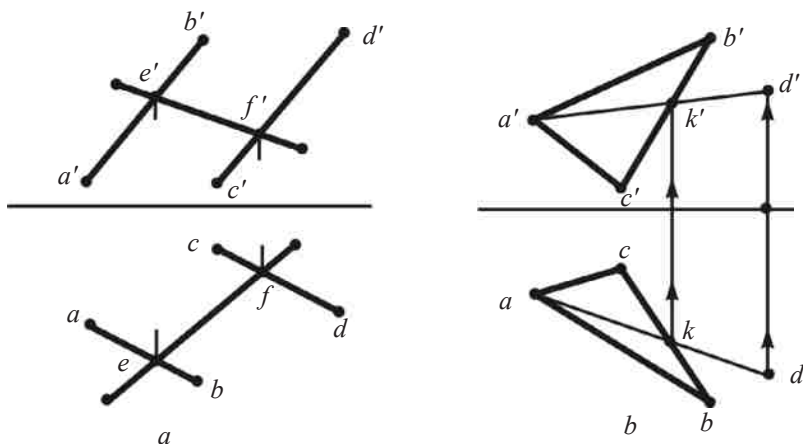


50-nji surat

Käbir meseleleri çözelin:

1. AB we CD parallel iki göni çyzyklaryň şekilleri bilen berlen P tekizlige deňişli göni çyzygy geçirmeli (51-nji a surat). AB we CD göni çyzyklaryň üstünde islendik $E(e, e')$ we $F(f, f')$ nokatlary alýarys we olaryň üstünden EF göni çyzygy geçirýäris. $E \in AB$, $F \in CD$ Eger nokat göni çyzyga deňişli bolsa, onda ol nokatlaryň biratly şekilleri göni çyzygyň biratly şekillikerinde ýatýar: $e \in ab$, $e' \in a'b'$, $f \in cd$, $f' \in c'd'$,

Bu EF göni çyzyk P tekizligiň üstünde ýatandyr, sebäbi onuň bilen umumy iki E we F nokady bardyr.



51-nji surat

2. Umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçlugyň tekizliginde ýatan D nokadyň berlen d gorizental proyeksiýasy boýunça d' frontal proyeksiýasyny tapmaly (51-nji b surat).

D nokadyň d gorizental proyeksiýanyň we a nokadyň üstünden ABC üçburçlugyň tekizliginiň üstünde ýatan göni çyzygyň ad gorizental proyeksiýasyny geçirýäris. K nokat AD we BC göni çyzyklaryň hakyky kesişme nokadydyr. a we k nokatlary boýunça $a'k'$ -frontal proyeksiýasyny gurýarys. $a'k'$ -proyeksiýany d nokatdan çykýan baglanyşyk çyzygy bilen kesişýänçä dowam etdip, D nokadyň gözlenýän d' -frontal proyeksiýasyny taparys.

20. TEKIZLIGIŇ ESASY ÇYZYKLARY

Tekizligiň esasy çyzyklaryna şu aşakdaky çyzyklar degişlidir :

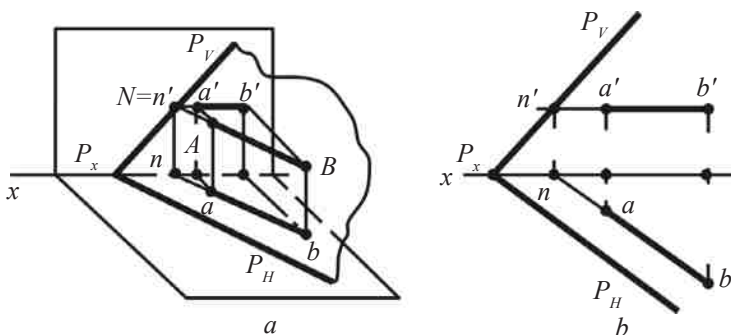
1. Tekizligiň gorizontallary.
2. Tekizligiň frontallary.
3. Tekizligiň profil göni çyzyklary.
4. Tekizligiň proeksiýalar tekizliklerine bolan iň uly ýapgytlyk çyzyklary.

20.1. Tekizligiň gorizontallary

Berlen tekizlikde ýatan we H gorizental şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **tekizligiň gorizontallary** diýilýär.

Tekizlik yzlary bilen berlen ýagdaýynda, tekizligiň gorizontallyny gurmaklyk şol tekizligiň üstünden gorizental yza parallel bolan göni çyzygy göçürmeklige syrygýar (52-nij *a, b* surat).

Tekizligiň P_H gorizental yzy gorizontalyň H tekizliginde ýatan hususy halydyr (onuň gorizontallarynyň biridir).



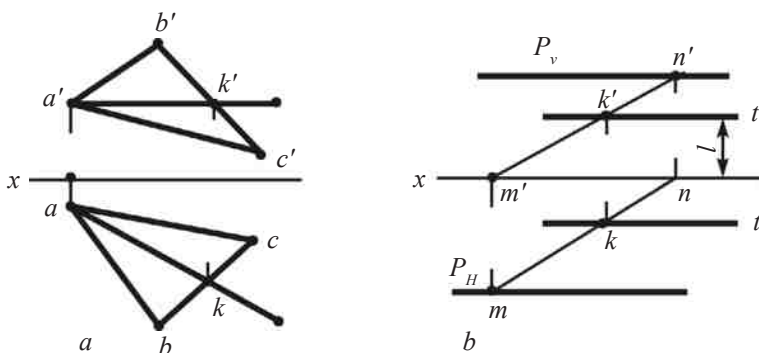
52-nji surat

Goý, P tekizligiň üstünde onuň haýsy hem bolsa bir yzyna, mysal üçin, P_H yza parallel AB göni çyzyk geçirmeli bolsun. Şeýle AB göni çyzyk frontal proeksiýalar tekizligi bilen P_v frontal yzyň üstünde ýatan $N / n, n' /$ nokatda duşuşýar. AB göni çyzygyň gorizental yzy ýokdyr, sebäbi ol P_H yza paralleldir, şeýlelikde, ol H tekizligine-de paralleldir. AB we P_H parallel göni çyzyklaryň epýurda biratly parallel proeksiýalary bardyr, ýagny gorizontalyň ab gorizental proýeksiýasy tekizligiň P_H yzyna paralleldir ($ab \parallel P_H$); $a'b'$ frontal proýeksiýasy bolsa OX oka paralleldir. Ýagny $a'b' \parallel OX$.

Bu ýerden şeýle düzgün gelip çykýar: eger göni çyzyk tekizligiň bir yzyna parallel, beýleki ýzy bilen bolsa umumy bir nokady bar bolsa, onda ol göni çyzyk tekizlige degişlidir (47-nji surat we 52-nji surat).

Goý, tekizlik umumy ýagdaýda ABC üçburçlyk bilen berlen bolsun. Üçburçlugyň A depesinden tekizligiň gorizontalyny geçireliň (53-nji a surat).

Tekizlik yzlar bilen berilmedik halda tekizligiň esasy çyzyklaryny gurmakda bu çyzyklaryň proyeksiýalarynyň proyeksiýalar oklaryna görä ýerleşişleriniň aýratynlyklaryndan peýdalanýarys. Gorizontalyň H gorizental şekiller tekizlige parallel bolany üçin, onuň frontal proyeksiýasyny gurmakda ilki OX oka parallel bolan göni çyzygy geçirýäris, soňra baglanyşyk çyzygy boýunça onuň gorizental proyeksiýasynyň ýagdaýyny kesgitleýäris.



53-nji surat

Gorizontalyň frontal proyeksiýasy baglanyşyk çyzygyna perpendikulýar bolmalydyr $a'k' \perp aa'$, şonuň üçin a' nokadyň üstünden $b'c'$ bilen k' nokada kesişýänçä gorizontalyň frontal proyeksiýasyny $a'k' // OX$ oka parallel edip geçirýäris. Nokadyň k gorizental proyeksiýasyny gurup, AK gorizontalyň ak gorizental proyeksiýasyny taparys.

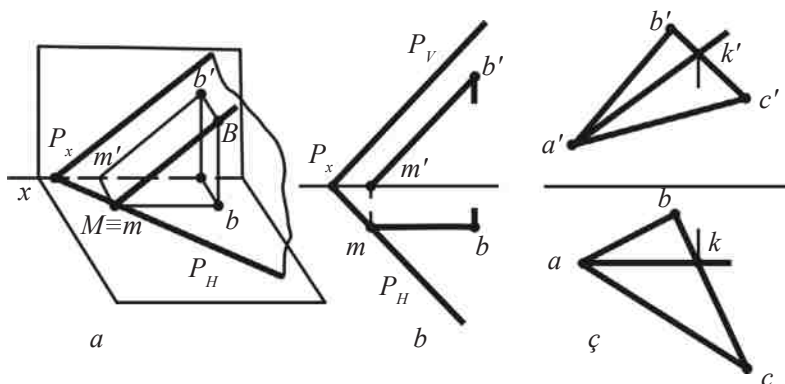
AK göni çyzyk ABC üçburçlugyň tekizligine degişlidir, sebäbi ol tekizlige degişli iki (A we K) nokadyň üstünden geçýär we H gorizental şekiller tekizlige paralleldir, diýimek ol berlen ABC üçburçlugyň gorizontalydyr.

53-nji b suratda H tekizlikden berlen L uzaklykda ýerleşen P profil projektirleýji tekizligiň gorizontalyny, çünki $t'k' \parallel ox$ gurlyşy görkezilendir: $KT \subset P$, $MN \subset P$, $K \subset MN$, $K \subset P$, $Kt' \parallel Kt \parallel OX$

20.2. Tekizligiň frontaly

Berlen tekizlikde ýatan we V şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **tekizligiň frontallary** diýilýär .

Tekizligiň frontaly MB we onuň $m'b'$ frontal proyeksiyasy P_v frontal yza paralleldir. Frontalyň gorizonttal proyeksiýasy mb bolsa, OX oka paralleldir (54-nji surat)



54-nji surat

Frontalyň frontal proyeksiýasyny gurmak üçin ilki onuň OX oka parallel bolan gorizonttal proyeksiýasyny geçirýäris, şol esasyda hem onuň frontal proyeksiýasynyň ýagdaýyny kesgitleýäris:

$MB \subset P, mb \parallel OX, m'b' \parallel P_v$

Tekizlik ABC üçburçluk bilen şekillendirilende tekizligiň frontalyňyň gurluşy 54-nji b suratda ýerine ýetirilendir. $AK \subset ABC$, $AK \parallel V$, $ak \parallel OX$, ak -frontalyň gorizonttal proyeksiýasy,

$a'k'$ – frontalyň frontal proyeksiýasydyr.

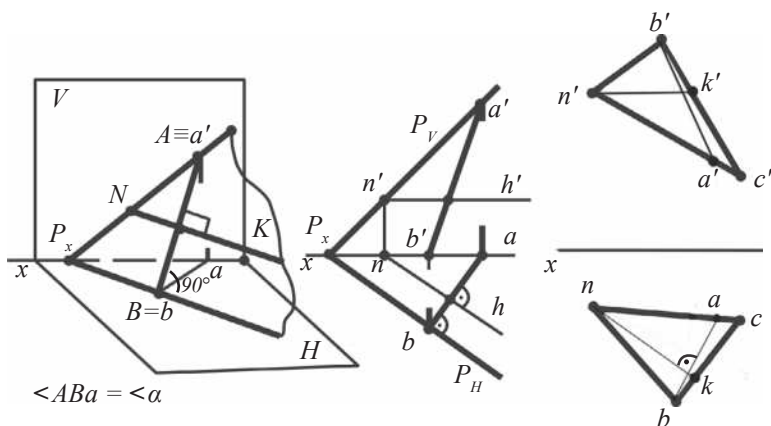
20.3. Tekizligiň profil göni çyzygy

Berlen tekizlikde ýatan we W profil şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **tekizligiň profil göni çyzyklary** diýilýär.

Tekizligiň profil göni çyzygy we onuň profil proyeksiýasy profil yza paralleldirler, gorizonttal we frontal proyeksiýalary bolsa, deňşililikde OY we OZ oklara paralleldirler, ýa-da OX proyeksiýalar okuna perpendikulýardyrlar. Çyzgyny çyzmaklyk talyplaryň özüne tabşyrylýar.

20.4. Tekizligiň proyeksiýalar tekizliklerine bolan iň uly ýapgyt çyzygy

Berlen tekizlikde ýatan we tekizligiň islendik gorizontallaryna (şol sanda tekizligiň gorizontalyzyna hem) perpendikulýar bolan AB göni çyzyga tekizligiň H şekiller tekizligine bolan iň uly ýapgyt çyzygy diýilýär (55-nji surat).



55-nji surat

$AB \perp P_H$. AB göni çyzyk P tekizligiň H gorizontaly şekiller tekizligine bolan iň uly ýapgyt çyzyklarynyň biridir.

$AB \perp P_H$, $AB \perp NK$, $Nh \subset P$, $NK \parallel H$,

$NK - P$ tekizligiň gorizontalydyr.

Tekizligiň iň uly ýapgyt çyzygy bilen tekizligiň islendik gorizontaly aralygyndaky göni burç H tekizligine üýtgedilmezden proyektirlenýär (göni burçy proyektirmek hakyndaky teorema esasynda). Şeýlelikde, tekizligiň iň uly ýapgyt çyzygynyň berlen ab gorizontaly proyeksiýasy islendik gorizontalyň gorizontaly proyeksiýasynyň we tekizligiň gorizontalyzyna perpendikulýardyr.

$AB \perp P_H$, $ab \perp P_H$ ýa-da $AB \perp NK$, $ab \perp nk$.

«Iň uly ýapgyt çyzyk» diýen sözüň fiziki manysy şar, suw damjasy, suw akymjygy we ş.m. tekizligiň üstünden şol çyzyk boýunça hereket edýärler diýmekdir.

«Iň uly ýapgyt çyzyk» diýen sözüň geometrik manysy bolsa giňişlikde tekizlikdäki bu çyzyk her haýsyna aýratynlykda H , V , W

projeksiýalar tekizlikleri bilen iň uly ýapgyt burçy emele getirýär diýmekdir. Tekizligiň projeksiýalar tekizligine ýapgytlygy hem şol burç bilen kesgitlenýär we ölçelýär.

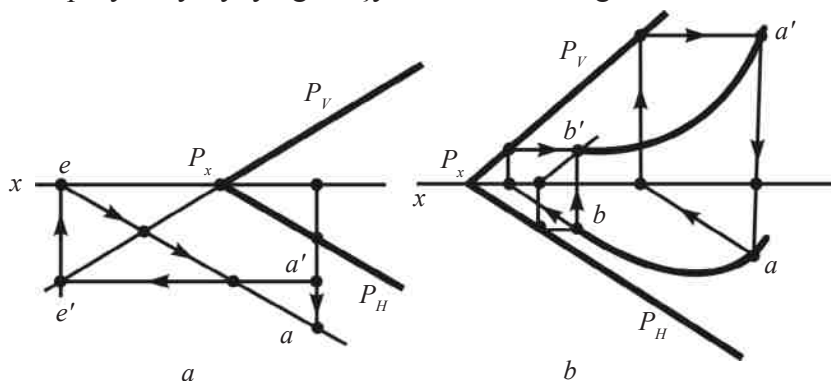
Yzlary bilen berilmedik tekizlikler üçin iň uly ýapgyt çyzygyň projeksiýasyny gurmaklyk tekizligiň gorizontallarynyň birini önünden gurmaklyga syrygýar. Iň uly ýapgyt çyzygyň gorizonta projeksiýasy bolsa adaty usul bilen tapylýar.

Tekizlikde aýratyn ýagdaýlarda ýerleşen göni çyzyklaryň, ýagny esasy çyzyklaryň kömegi bilen tekizligiň we nokadyň ýa-da göni çyzygyň özara ýerleşişine degişli meseleleri çözmeklik has hem amatlydyr.

Mysal üçin, P tekizlige degişli A nokadyň berlen a' frontal projeksiýasy boýunça onuň a gorizonta projeksiýasynyň tapylşy

56-njy a suratda görkezilendir, gurluşy bolsa berlen P tekizligiň AE gorizonta larynyň kömegi bilen ýerine ýetirilendir.

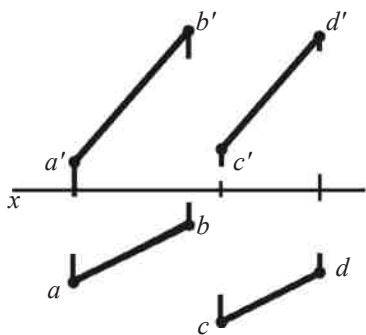
56-njy b suratda bolsa P tekizlik ýerleşen AB tekiz egri çyzygyň ab gorizonta projeksiýasy boýunça, $a'b'$ frontal projeksiýasynyň gurluşy görkezilendir. Şonuň üçin tekiz egri çyzygyň üstünde birnäçe nokatlar alynyp we şol nokatlaryň üstünden geçýän gorizontallaryň ýa-da frontallaryň kömegi bilen tekiz egri çyzygyň frontal projeksiýasy gurlandyr. Tekiz egri çyzygyň gorizonta projeksiýasy boýunça frontal projeksiýasynyň gurluşy strelkalar bilen görkezilendir.



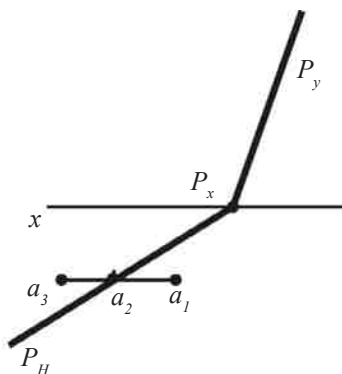
56-njy surat

Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler

1. Göni çyzygyň we nokadyň tekizligiň üstünde ýatmagy üçin nähili şertler berjaý edilmeli?



57-nji surat



58-nji surat

2. Tekizlikdäki nähili çyzyklara tekizligiň gorizontaly, frontal, profil göni çyzygy we tekizligiň iň uly ýapgyt çyzygy diýilýär? Ortogonal çyzygyda şeýle göni çyzyklaryň proyeksiýalary nähili ýerleşendirler ?

3. Iki parallel göni çyzyk **AB** ($ab, a'b'$) we **CD** ($cd, c'd'$) bilen berlen **P** tekizligiň gorizontalyňy, frontalyny we iň uly ýapgyt göni çyzygyny guruň (57-nji surat).

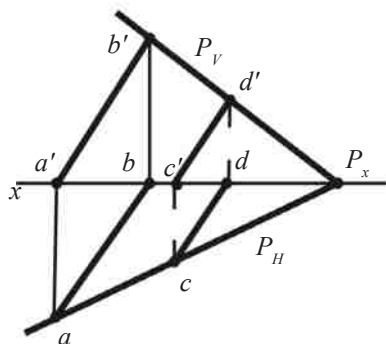
4. Eger **A** nokadyň gorizontaal proyeksiýasy berlen bolsa, onda **P** (P_H, P_V) tekizligiň üstünde ýatan bu nokadyň **a'** frontal proyeksiýalaryny guruň. Meseläni çözmek üçin **P** tekizligiň gorizontalyndan, frontalýndan hem-de umumy haldaky göni çyzygyndan yzly-ýzyna peýdalanyň (58-nji surat). **A** nokadyň dürli ýagdaýda berlen gorizontaal şekillerine üns beriň, ýagny :

a_1, a_2, a_3 nokatlaryň frontal a_1', a_2', a_3' şekillerini tapmaly.

21. TEKIZLIGIŇ YZLARYNY GURMAK

Tekizligiň yzlaryny gurmaklyk berlen tekizlige deňişli göni çyzyklaryň yzlaryny gurmaklyga we tapylan nokatlaryň üstünde tekizligiň deňişli yzlaryny geçirmeklige syrygýar. Aşakda birnäçe meselelere garap geçeliň.

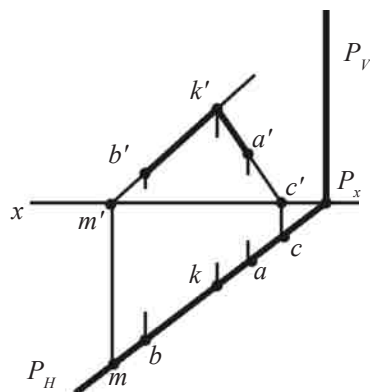
1-nji mesele. AB we CD iki parallel göni çyzyklaryň şekilleri bilen berlen P tekizligiň yzlaryny gurmaly (59-njy surat): $P(AB \parallel CD)$. Bu ýagdaýda AB we CD göni çyzyklaryň frontal yzlary bolan b' we d' nokatlary frontal proyeksiýalary we şol göni çyzyklaryň gorizont yzlary bolan a we c nokatlaryň gorizont tal proyeksiýalar berlen tekizligiň P_H we P_V yzlaryny kesgitleýärler. Gurluş dogry ýerine ýetirilende, yzlar OX okuň üstündäki P_x birleşme nokatda kesişmelidirler. Bu gurlan P tekizlik umumy ýagdaýdaky tekizlikdir.



59-njy surat

2-nji mesele. Kesişýän AK we BK göni çyzyklar bilen berlen P tekizligiň yzlaryny gurmaly (60-njy surat): $P(AK \cap BK)$.

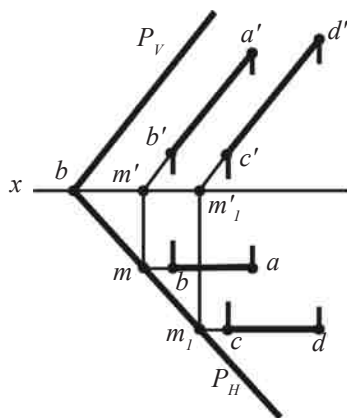
Göni çyzyklaryň gorizont tal proyeksiýalarynyň bir göni çyzyga proyektirlenýänligi üçin tekizligiň gorizont yzy şol proyeksiýalaryň üstünden geçer. P gorizont tal proyektirleýji tekizlikdir.



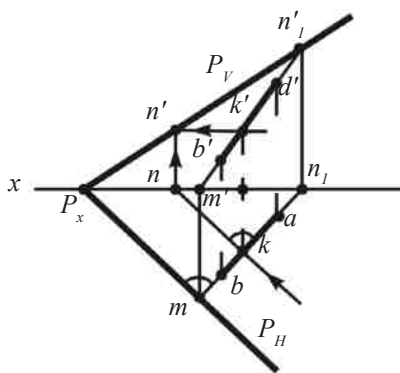
60-njy surat

3-nji mesele. BA we CD parallel göni çyzyklar bilen berlen P tekizligiň yzlaryny gurmaly (61-nji surat): $P(BA \parallel CD)$.

BA we CD göni çyzyklar V şekiller tekizligine paralleldirler. Diýmek, bu göni çyzyklar P tekizligiň frontallary bolarlar. Göni çyzyklaryň M we M_1 gorizont yzlaryny tapyp we m hem m_1 nokadyň üstünden göni çyzyk geçirip, tekizligiň P_H



61-nji surat



62-nji surat

gorizontal yzyny taparys. Tekizligiň P_v frontal yzy P_x birleşme nokadyň üstünden $a'b'$ frontal proyeksiýa parallel geçer. Sebäbi tekizligiň frontal yzy tekizligiň BA frontalynyň frontal proyeksiýasyna paralleldir. Diýmek, biz P_x bir nokadyň üsti bilen P_v frontal yzy ugry belli bolanlygy üçin ($P_v \parallel BA$) P_v -ni $a'b'$ parallel edip geçirýäris.

4-nji mesele. Iň uly ýapgyt AB çyzygy bilen berlen P tekizligiň yzlaryny gurmaly (62-nji surat).

AB göni çyzygyň üstünde erkin alnan K nokadyň üstünden KN gorizontal geçireliň, onuň kn gorizontal proyeksiýasy ab perpendikulýar, $k'n'$ frontal proyeksiýasyny bolsa OX oka parallel geçireliň.

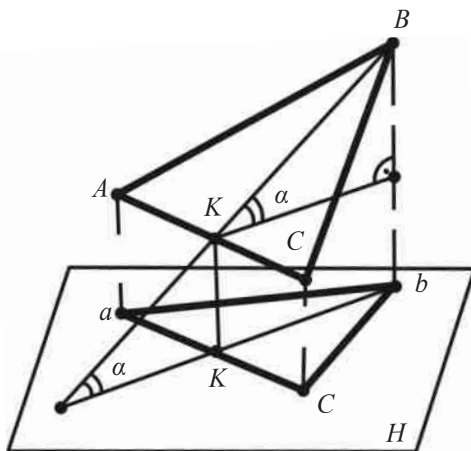
M gorizontal yzyň m gorizontal proyeksiýasynyň üstünden iň uly ýapgytlyk AB çyzygyň ab gorizontal proyeksiýasyna perpendikulýar ($P_H \perp ab$) ýa-da gorizontalyň gorizontal proyeksiýasyna ($P_H \parallel nk$) parallel edilip P tekizligiň P_H gorizontal yzyny geçireliň.

Tekizligiň P_v frontal yzy P_x , we $n' n'_1$ nokatlaryň biriniň üstünden geçmegi ýeterlikdir. Guran tekizligimiz umumy ýagdaýdaky tekizlikdir. Bu P tekizligiň frontal yzyny geçirmek üçin n' ýa-da n'_1 nokatlaryň biri ýeterlikdir. Sebäbi P_x bellidir.

22. TEKIZ FIGURALARY PROÝEKTIRLEMEK

Ähli nokatlary bir tekizlikde ýatan we figuranyň gyralaryny emele getirýän çyzyklar bilen çäklendirilen şekile **tekiz figura** diýilýär.

Tekiz figuralary proyektirlemek üçin şol figura degişli degerli nokatlary, göni we egri çyzyklary proyektirlemek ýeterlikdir. Nokatlaryň göni we egri çyzyklaryň proyeksiýalar tekizligindäki emele gelen proyeksiýalaryny giňişlikdäki ýerleşen tertibinde birleşdirip, tekiz figuralaryň proyeksiýalary alynýar. Garalyp geçilen mysallaryň birnäçesinde üçburçlugyň proyeksiýasynyň gurluşyna ozal düşülypdy.



63-nji surat

63-nji suratda tekiz figuralaryň proyeksiýalarynyň meýdany (S_{abc}) bilen onuň giňişlikdäki meýdanynyň (S_{ABC}) nähili baglanyşykdaýygy görkezilendir. Bu suratda ABC üçburçlugyň AC tarapy H gorizonta şekiller tekizligine parallel edilip alnandyr.

($AC \# ac$). $BK \perp AC$ geçirip, $S_{ABC} = 1/2 AC \perp BK$ alýarys

Göniňburçuň proyeksiýasynyň häsiýetine görä $bk \perp ac$. Onda

$$S_{ABC} = 1/2 ac \perp bk.$$

Eger ABC üçburçlugyň H gorizonta şekiller tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny α bilen bellesek, onda $bk = BK \cdot \cos \alpha$.

Şeýlelikde, $S_{ABC} = 1/2 AC \cdot BK \cdot \cos \alpha = S_{ABC} \cdot \cos \alpha$.

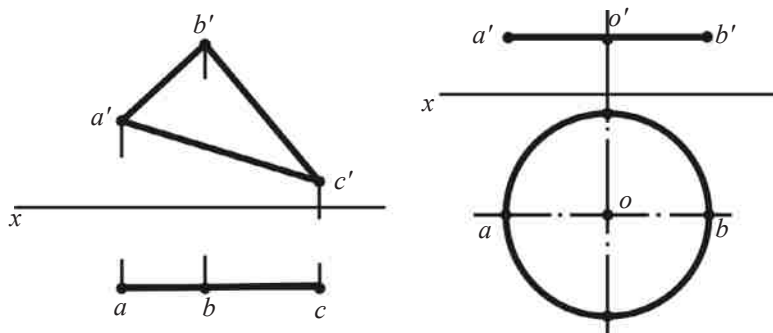
Şonuň ýaly hem $S_{a'b'c'} = S_{ABC} \cdot \cos \beta$, $S_{a''b''c''} = S_{ABC} \cdot \cos \gamma$,

bu ýerde β, γ tekizligiň (ΔABC) V hem W şekiller tekizliklerine, deňişlilikde ýapgytlyk burçlarydyr. Alnan baglanyşyklar figuranyň taraplarynyň proyeksiýalar tekizliklerine görä ýerleşişlerine bagly dälendir. Eger tekiz figuranyň taraplary proyeksiýalar tekizliklerine parallel bolmasalar, onda tekizlikde şol tekizligi ikä bölýän we H, V ýa-da W tekizligine parallel bolan göni çyzyk geçirip, şol gönüniň

her bir tarapynda emele gelen tekiz figuralar üçin ýokardaky aýdylanlary ulanýarys. Figuranyň meýdany şol emele gelen bölekleriň meýdanlarynyň jemine deň bolar.

Eger tekiz figura proyeksiýalar tekizligine parallel bolsa, onda onuň hakyky ululygy şol parallel bolan tekizligine üýtgedilmezden proyektirlenýär.

64-nji a, b suratda ABC üçburçlugyň tekizligi V frontal şekiller tekizlige paralleldir. Şonuň üçin hem ABC üçburçlugy frontal proyeksiýalar tekizligine özüniň hakyky ululygynda ($\beta = 0$) $S_{a'b'c'} = S_{ABC}$ töweregiň tekizligi bolsa H tekizligine hakyky ululygynda proyektirlenendir. ($\alpha = 0, S_{\text{teg.}} = S_{\text{teg.pr.}}$).



64-nji surat

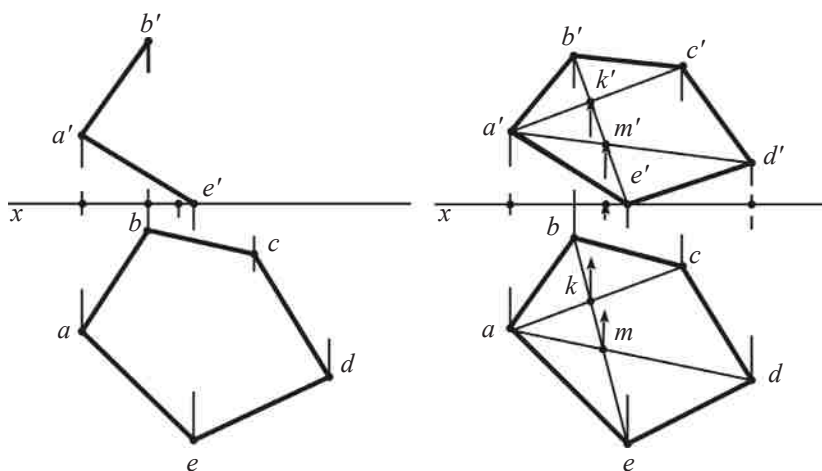
Eger tekiz figura H, V ýa-da W profil şekiller tekizliklerine perpendikulýar bolsa onda onuň proyeksiýasy şol tekizlikde göni çykyz bolar (64-nji a surat).

$$\alpha = 90^\circ; \cos 90^\circ = 0; S_{\text{abc}} = 0; \beta = 90^\circ; \cos 90^\circ = 0; S_{\text{teg.pr.}} = 0.$$

Eger tekiz figuranyň iki proyeksiýasy hususy ýagdaýy eýelemeýän bolsa, onda onuň tekizligi umumy haldaky tekizlik bolar.

Eger töweregiň tekizligi giňişlikde umumy ýagdaýda ýerleşen bolsa, onda ol tekizligiň gorizont, frontal we profil proyeksiýalary **ellips** görnüşde proyektirlener. Bu ellipsiň uly diametri töweregiň diametrne deňdir, kiçi diametri bolsa şol töweregiň proyeksiýalar tekizliginiň ýapgytlyk burçuna baglydyr.

65-nji suratda $ABCDE$ başburçlugyň gorizont, frontal we profil proyeksiýasy we onuň uç depesiniň a', b' we e' frontal proyeksiýalary berilipdir. Beýleki iki depäni gurmak üçin BE, AC we AD diagonallardan peýdalanylýar.



65-nji surat

Tekizligiň frontal proyeksiýasynda diňe diagonalyň $b'e'$ proyeksiýasyny gurmak bolar. Diagonallaryň köpburçlugyň tekizlikde ýatanlygy üçin diagonallaryň kesişme nokatlary bolan K we M , AC we AD göni çyzyklaryň BE göni çyzyk bilen hakyky kesişme nokatlary bolarlar. K we M gorizontaly proyeksiýalar boýunça K' we m' frontal proyeksiýalary tapylýar. a' nokady k' we m' nokatlary bilen birleşdirip, diagonallaryň $a'k'$ we $a'm'$ frontal proyeksiýalarynyň ugurlaryny anyklaýarys. C we D nokatlary diagonallaryň frontal proyeksiýalarynyň üstüne proyektirläp c' we d' nokatlary alarys. Nokatlary yzygyzlykly birleşdirip köpburçlugyň frontal proyeksiýasyny gurarys.

23. TEKIZLIGE PARALLEL GÖNI ÇYZYK

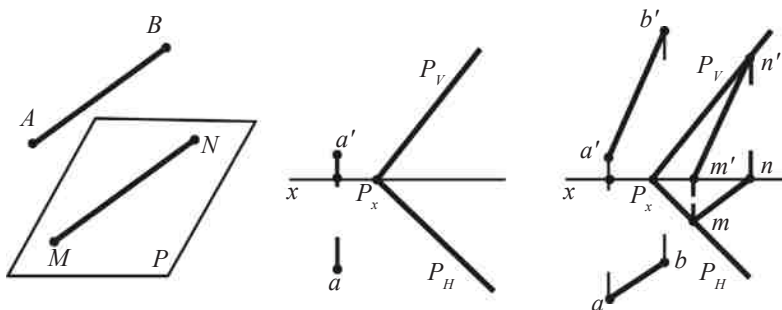
Göni çyzygyň tekizlige parallellik nyşany. Elementar geometriýadan bize belli bolşy ýaly, eger AB göni çyzyk P tekizligiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir MN göni çyzyga parallel bolsa, onda ol göni çyzyk şol tekizlige-de paralleldir (66-njy a surat).

1-nji mesele. $A(a, a')$ nokadyň üstünden umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen $P(P_H, P_V)$ tekizlige parallel AB göni çyzyk geçirmeli (66-njy b, ç surat).

$P(P_H, P_V)$ tekizligiň üstünde ýerleşen islendik $MN(mn, m'n')$ göni çyzygyny alýarys, onuň $M(m, m')$ we $N(n, n')$ yzlaryny P

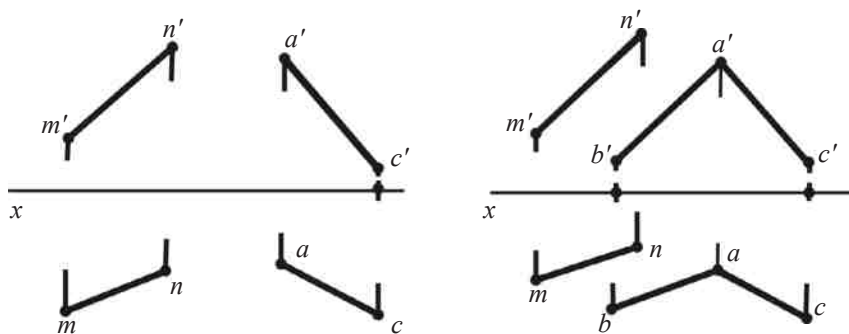
tekizligiň biratly yzlarynyň üstünde ýerleşdirýäris. Nokatlaryň biratly $m n$ we $m' - n'$ proyeksiýalaryny birleşdirip, göni çyzygyň mn gorizontal we $m'n'$ frontal proyeksiýalaryny gurýarys.

Berlen $A(a, a')$ nokadyň üstünden P tekizlikde alnan MN göni çyzygyň $mn, m'n'$ proyeksiýalaryna deňişlilikde parallel $ab, a'b'$ proyeksiýalary geçirýäris. Alnan AB göni çyzyk P tekizlige paralleldir. $MN \subset P, AB \parallel MN$ onda $AB \parallel P$.



66-njy surat

2-nji mesele. AC göni çyzygyň üstünden MN göni çyzyga parallel bolan P tekizligi geçirmeli (67-nji surat).

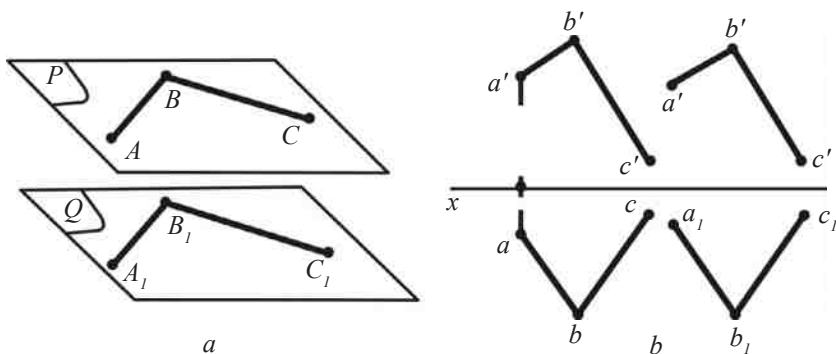


67-nji surat

Gözlenýän tekizligi AC göni çyzygyň üstünden geçirip, berlen MN göni çyzyga-da parallel bolmaly bolsa, onda A nokadyň üstünden berlen MN göni çyzyga parallel bolan AB göni çyzygy ($AB \parallel MN$) geçireliň. Gözlenýän tekizlik kesişýän AB we AC göni çyzyklar bilen kesgitlenýär, $P (AB \cap AC)$. $MN \parallel AB$, $mn \parallel ab$, $m' n' \parallel a' b'$, $AB \subset P$, onda $MN \parallel P$.

24. PARALLEL TEKİZLİKLER

İki tekizligiň parallelik nyşany. P tekizligiň üstünde ýatan AB we CD kesişýän iki göni çyzyk beýleki Q tekizligiň üstündäki A_1B_1 we C_1D_1 kesişýän iki göni çyzyga deňşililikde parallel bolsalar, onda iki P we Q tekizlikler giňişlikde-de özara paralleldirler (68-nji a surat)

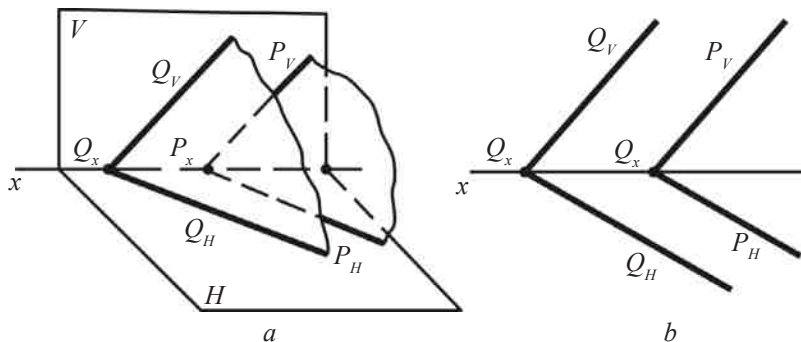


68-nji surat

Şonuň üçin-de olara deňşli iki sany $(AB \cap BC)$ we $(A_1B_1 \cap B_1C_1)$ kesişýän göni çyzyklaryň biratly proyeksiýalary-da özara parallel bolmalydyrlar (68-nji b surat).

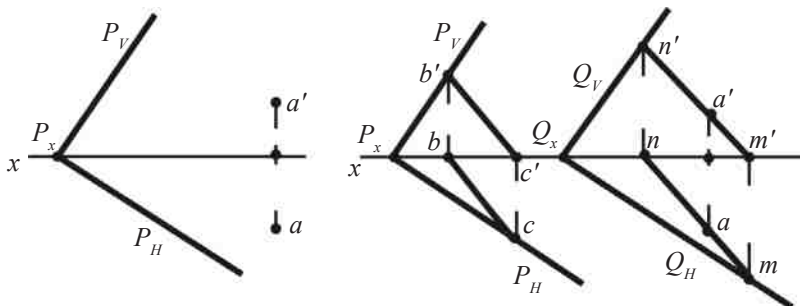
Tekizlikde ýatan we kesişýän çyzyklar edilip, tekizligiň esasy çyzyklaryny (gorizontallary we frontallary) almak çyzmaly geometriýada mesele çözülen-de giňden ulanylýar, çünki örän amatly bolýar.

Eger parallel iki (P we Q) tekizligi üçünji (H ýa-da V) tekizlik bilen kesseň, onda olaryň kesişme çyzyklary (P_H, Q_H we P_V, Q_V) biratly yzlary özara parallel bolarlar (69-njy surat).



69-njy surat

Mesele. A nokadyň üstünden, yzlary bilen berlen P tekizlige parallel bolan Q tekizligi yzlary bilen geçirmeli (70-nji surat).



70-nji surat

A nokadyň üstünden P tekizligiň üstünde islendik alnan BC göni çyzyga parallel MN göni çyzygy geçirýäris we onuň frontal $N(n, n')$, gorizontal $M(m, m')$ yzlaryny tapýarys. Şu MN göni çyzygyň biratly yzlarynyň üstünden gözleýän Q tekizligiň biratly yzlaryny geçirýäris, ýagny m nokadyň üstünden $Q_H \parallel P_H$ we n' nokadyň üstünden bolsa $Q_V \parallel P_V$ edip geçirýäris. Olar Q_x birleşme nokadynda kesişmelidirler. Alnan tekizlikleriň biratly yzlary-da özara paralleldirler. Diýmek bu P we Q tekizlikler giňişlikde paralleldirler (69-njy a sur. ser.)

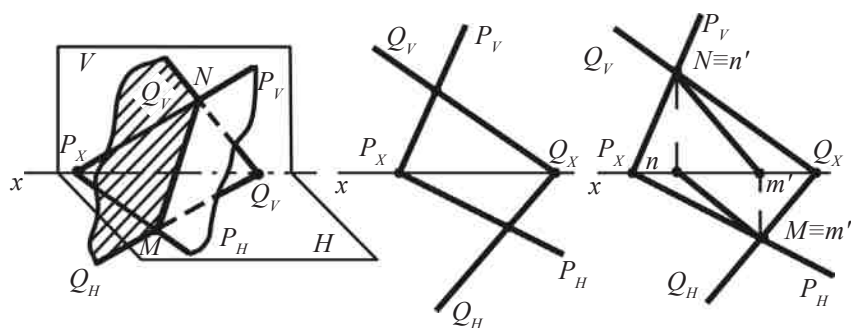
25. KESIŞÝÄN TEKIZLIKLER

Giňişlikde iki tekizlik özara parallel bolmasa, onda olar giňişlikde kesişýändirler. Iki kesişýän tekizligiň kesişme çyzygy göni çyzykdyr. Ony gurmak üçin iki kesişýän tekizlik üçin-de umumy bolan iki sany nokady ýa-da iki kesişýän tekizlik üçin hem umumy bolan bir nokady we tekizlikleriň kesişme çyzygynyň ugryny kesgitlemek ýeterlidir.

Umumy halda, kesişme çyzygy gurmak üçin her biri şol bir wagtyň özünde iki kesişýän tekizlige-de degişli bolan umumy iki nokady tapmak gerek.

Proýeksiýalar tekizliklerine görä ýerleşişleri bilen baglanyşyklykda tekizlikleriň kesişmeleriniň mümkin bolan birnäçe hallaryna garap geçeliň.

Birinji hal. Biratly yzlarynyň kesişýän iki tekizlikleriniň umumy kesişme çyzygyny gurmak (71-nji surat).

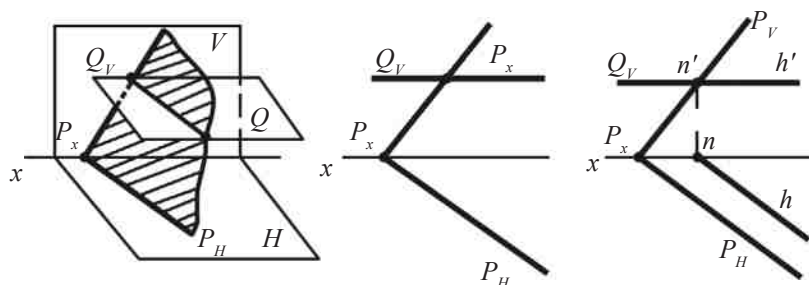


71-nji surat

Tekizlikleriň biratly yzlary çyzygynyň çäginde kesişýärler.

Mesele. P we Q tekizliklere degişli bolan umumy M we N iki nokat boýunça MN kesişme çyzygyny tapmaly. Biratly yzlaryň kesişme nokatlary kesişme çyzygyň gözlenýän umumy nokatlarydyrlar. 71-nji suratda giňişlikdäki aýdyň çyzgyda we epýurda tekizlikleriň kesişme çyzygynyň M we N iki umumy nokady tapylypdyr. MN (mn , $m'n'$) göni çyzyk $P(P_H, P_V)$ we $Q(Q_H, Q_V)$ tekizlikleriň kesişme çyzygydyr, ýagny M we N nokatlar P we Q tekizlikleriň ikisi üçin hem umumy nokatdyr. Başgaça aýdylanda, M we N nokatlar kesişme çyzygyň yzlarydyr: $MN = P \cap Q$.

Ikinci hal. Biri proyeksiýalar tekizligine parallel bolan Q dereje tekizligi, ikinjisi P umumy halda yzlary bilen berlen iki tekizligiň kesişme çyzygyny gurmak (72-nji surat).

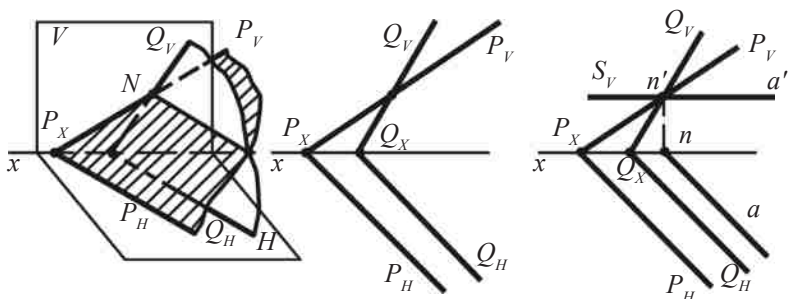


72-nji surat

Umumy haldaky P tekizlik, gorizental Q tekizligi bilen kesişende olaryň kesişme çyzygy iki tekizlik üçin hem umumy gorizontaldyr, ýagny Q we H parallel iki tekizlik üçünji P tekizlik bilen parallel göni çyzyklar arkaly kesişýärler (72-nji surat). Ýagny, $nh \parallel P_H$.

Bu ýagdaýda iki tekizlik üçin bir umumy N nokat bellidir. Kesişme çyzygyň ugry-da belli, ol çyzyk P_H yza parallel bolan Nh umumy gorizontaldyr: $Nh \parallel P_H$.

Üçünji hal. Projeksiýalar tekizlikleriniň birinde (mysal üçin, H gorizental şekiller tekizliginde) yzlary parallel bolan umumy ýagdaýdaky tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmak (73-nji surat).



73-nji surat

Eger tekizlikleriň yzlarynyň bir jübti parallel göni çyzyklar bolsa, onda tekizlikleriň kesişme çyzygy şol yzlara parallel bolar. Diýmek, tekizlikler özleriniň esasy çyzyklary (gorizontaly ýa-da frontaly) boýunça kesişýärler.

Bu ýagdaýda tekizlikleriň kesişme çyzygy umumy gorizontaldyr, ýagny bu tekizlikleriň gorizental yzlarynyň umumy nokady ýokdur.

Munuň özi aşakdakydan bellidir. Frontal yzlaryň kesişme nokadynyň üstünden kömekçi S gorizental tekizlik geçirilen, ol P we Q tekizlikleri olaryň umumy AN gorizontaly boýunça keser. AN göni çyzyk üç tekizlik üçin hem umumy göni çyzyk bolar. $AN \subset P, AN \subset Q, \bar{O}AN \subset S$ we $AN \parallel H$ üç tekizlik üçin hem umumy gorizontaldyr.

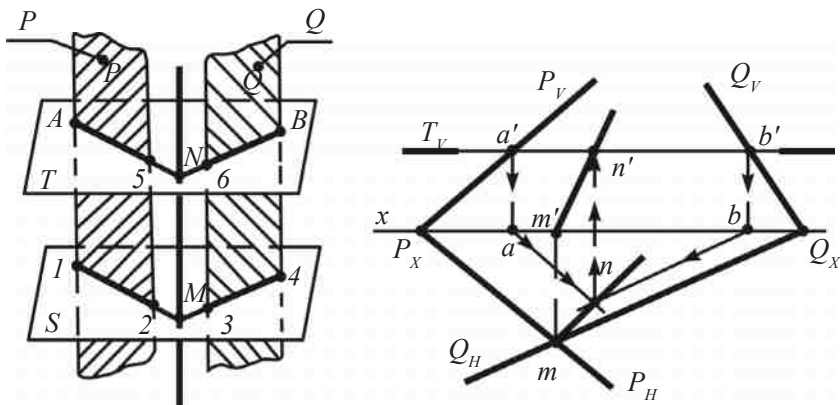
$$AN \parallel P_H, \quad an \parallel P_H, \quad AN \parallel Q_H, \quad an \parallel Q_H.$$

Eger frontal yzlary parallel bolan umumy ýagdaýdaky tekizlikler kesişýän bolsalar, onda **umumy frontal** olaryň kesişme çyzygy bolar.

Dördünji hal. Projeksiýalar tekizlikleriniň birinde (çyzygynyň mümkinçiliginde) bir jübüt yzlary kesişmeýän umumy ýagdaýdaky berlen iki tekizligiň umumy kesişme çyzygyny gurmak (74-nji surat).

Diňe gorizental yzlary kesişýän umumy haldaky P we Q tekizlikler üçin düzülen meseläni şeýle çözmek bolar. Gorizental yzlaryň

kesişýänligi netijesinde gözlenýän göni çyzygyň nokatlarynyň biri bolan M nokat bellidir. Kesişme çyzygyň ikinji N umumy nokadyny tapmak üçin P we Q berlen tekizlikleri gorizontallar boýunça kesýän kömekçi T gorizantal tekizlik geçirilýär (ikinci hala seret).



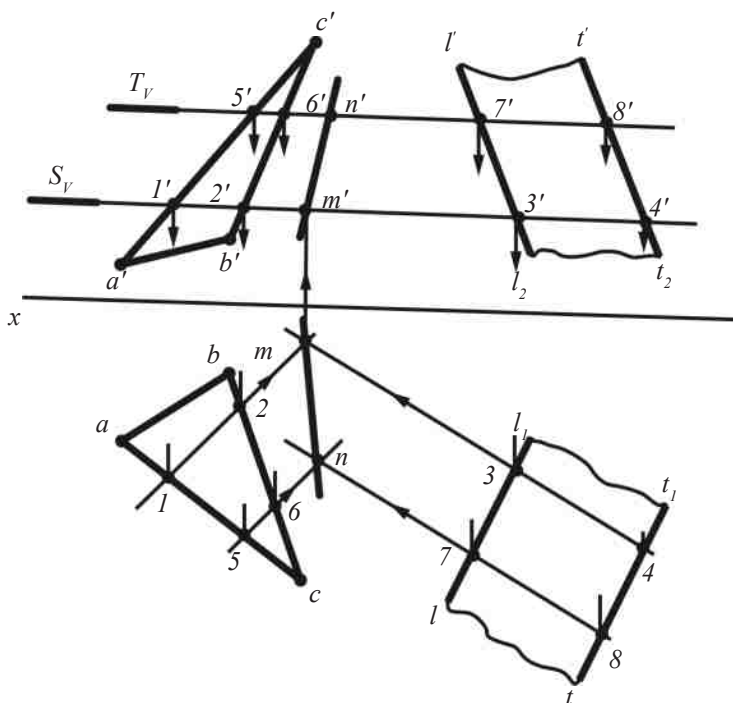
74-nji surat

Kömekçi T gorizantal tekizlik bilen P we Q tekizlikleriň aýratynlykda kesişme çyzyklaryny AN we BN göni çyzyklary kesgitleýäris (ýagny $P_x M \parallel AN$, $Q_x M \parallel BN$) we olaryň kesişýän N nokadyny tapýarys. Bu N nokat P , Q we T tekizlikleriň üçüsi üçin hen umumydyr. $N(n, n')$ nokat berlen tekizlikler üçin umumy bolan ikinji nokatdyr. Bu N nokat M nokat bilen bilelikde berlen iki tekizligiň MN ($mn, m'n'$) kesişme çyzygyny kesgitleýär. $N \subset P$, $N \subset Q$, $N \subset T$, $M \subset P$, $M \subset Q$.

Eger yzlaryň ikinji jübti hem çyzygynyň çäginde kesişmeýän bolsa, onda ýene-de bir kömekçi (S) tekizligiň üsti bilen ikinji umumy nokady tapmak bolar.

Bäşinji hal. Yzlary bilen berilmedik P ($\triangle ABC$) we Q ($l \parallel t$) umumy haldaky iki tekizligiň umumy kesişme çyzygyny gurmagyň ýagdaýyna garap geçeliň.

$$P(ABC) \cap Q(l \parallel t) = MN.$$



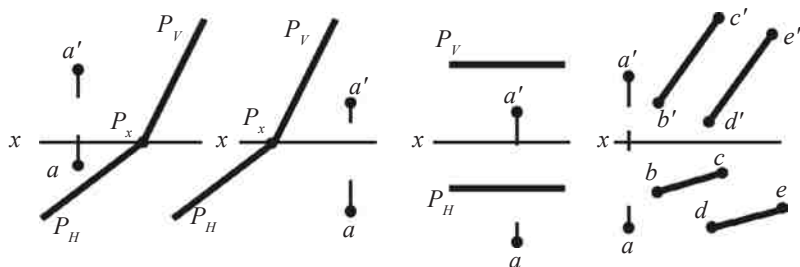
75-nji surat

Goý, tekizlikleriň biri P umumy ýagdaýdaky $\triangle ABC$ bilen, beýlekisi $Q (l \parallel t)$ parallel iki göni çyzyk bilen berlipdir diýeliň (75-nji surat). Iki tekizligiň kesişme çyzygyny gurmak üçin kömekçi gorizont alýa-da frontal, gorizontalyň proyektirleýji ýa-da frontal proyektirleýji tekizliklerden peýdalanmak bolar. Bu mysalda kömekçi tekizlikler hökmünde gorizont S we T iki tekizlik alnan. S tekizlik P tekizligi $1-2, 1'-2'$ göni çyzyklar boyunca, Q tekizligi bolsa $3-4, 3'-4'$ göni çyzyklar boyunca keser. Bu göni çyzyklaryň frontal proyeksiýalary S_v frontal yz bilen gabat gelerler, gorizontalyň proyeksiýalaryny bolsa bu çyzyklary gorizontalyň proyeksiýalar tekizligine proyektirläp taparys. $1-2$ we $3-4$ gorizontalyň proyeksiýalaryň özara kesişmeleri netijesinde umumy nokatlaryň biri bolan M nokady alarys. Edil şu usul bilen ikinji N nokady-da taparys. Iki tekizligiň umumy nokatlarynyň biratly proyeksiýalaryny birleşdirip, olaryň kesişme çyzygy bolan $MN (mn, m'n')$ göni çyzygy alarys: $Q \cap P = MN$.

$$P(\triangle ABC) \cap Q(l \parallel t) = MN.$$

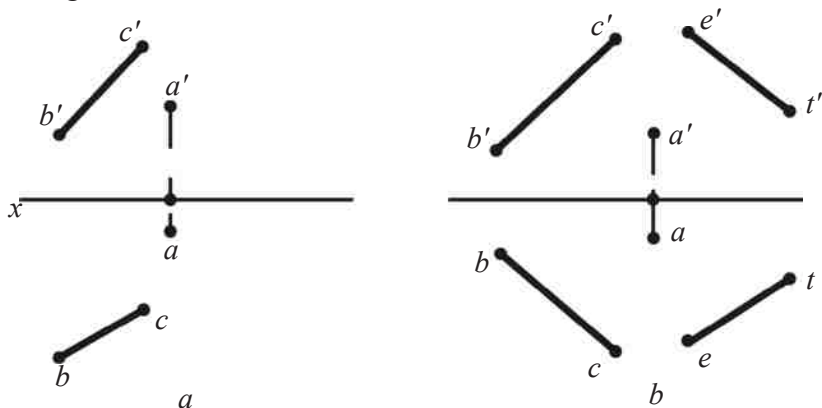
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler

1. Göni çyzygyň tekizlige parallellik nyşanyny aýdyň.
2. $A(a, a')$ nokadyň üstünden berlen P tekizlige parallel göni çyzyk geçiriň (76-njy surat).



76-njy surat

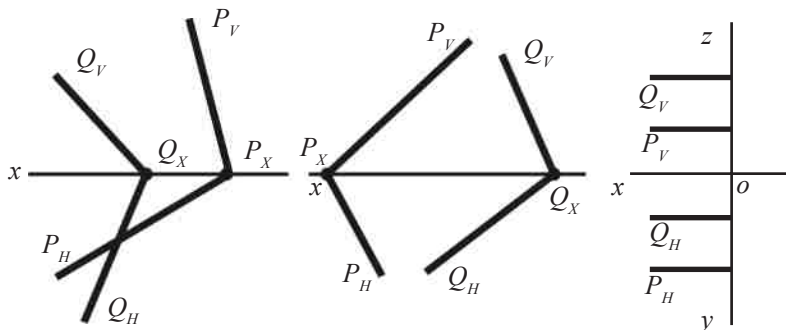
3. A nokadyň üstünden BC göni çyzyga parallel bolan tekizligi yzlary bilen geçiriň (77-nji a surat).
4. A nokadyň üstünden şol bir wagtda BC we ET göni çyzyklara parallel bolan tekizligi guruň (77-nji b surat).
5. Iki tekizligiň özara parallellik nyşanyny aýdyň. Parallel tekizlikleriň biratly yzlary özara nähili ýerleşýärler?
6. Berlen $P(BC \parallel DE)$ tekizlige $A(a, a')$ nokadyň üstünden parallel Q tekizlik geçiriň (76-njy surat).
7. Umumy haldaky kesişýän tekizlikleriň kesişme çyzygyny nähili kesgitlemeli?



77-nji surat

8. Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen P we Q tekizlikleriň kesişme çyzygyny guruň (78-nji surat).

9. İki tekizliğin umumi kesişme çyzygyny tapmak üçin, nähili ýagdaýlarda haýsy kömekçi tekizlikler ulanylýar.



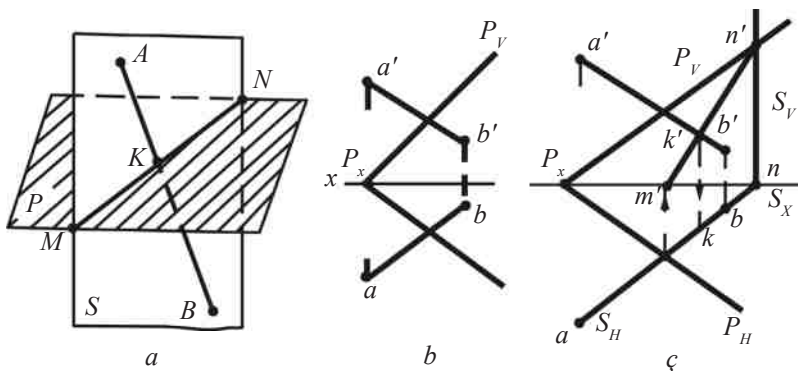
78-nji surat

26. UMUMY HALDAKY GÖNI ÇYZYGYŇ UMUMY WE HUSUSY HALDAKY TEKIZLIK BILEN KESIŞMEGI

Eger göni çyzyk tekizliğin üstünde ýatmaýan bolsa ýa-da oňa parallel bolmasa, onda ol göni çyzyk tekizligi nirede bolsa-da bir ýerde kesýändir.

Göni çyzyk tekizlik bilen kesişende onuň bilen umumy bir nokady bolýar, oňa hem göni çyzygyň tekizlik bilen **kesişme nokady** diýilýär.

Mesele. Umumy ýagdaýda berlen AB göni çyzygyň P umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmaly. Göni çyzygyň umumy haldaky tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmak üçin şu aşakdaky yzygiderligi ýerine ýetirmeli (79-njy surat).



79-njy surat

1. Berlen AB göni çyzygyň üstünden kömekçi S gorizontal proyektirleýji tekizligi geçirmeli.

2. P we S tekizlikleriň umumy kesişýän MN göni çyzygyny gurmaly: $MN = P \cap S$.

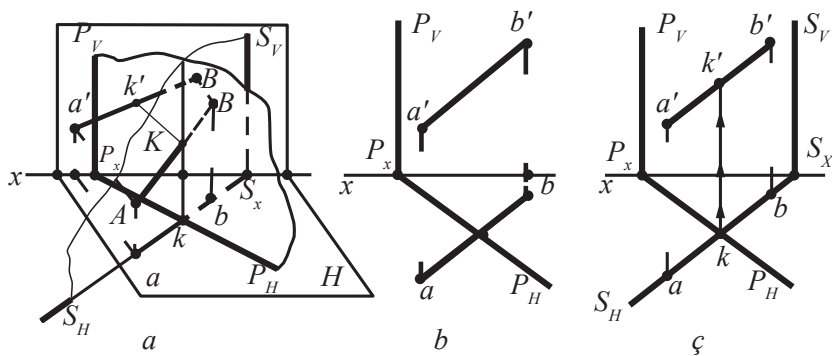
Berlen AB we gurlan MN göni çyzyklaryň kesişme nokady bolan K nokadyň ýagdaýyny anyklamaly: $AB \cap MN = K$.

Tapylan K nokat AB göni çyzyk bilen P tekizligiň gözlenýän ýek-täk kesişme nokady bolar. AB göni çyzygyň üstünden geçýän kömekçi tekizlik hökmünde islendik tekizligi almak bolar. Çözülişi ýönekeýleşdirmek üçin proyektirleýji tekizligi almak amatlydyr. Sebäbi şeýle tekizligiň bir yzy göni çyzygyň bir proyeksiýasynyň üstünden geçip, beýleki yzy bolsa OX okuna perpendikulýardyr.

79-njy b , ζ suratda yzlary bilen şekillendirilen umumy haldaky P tekizlik bilen, AB göni çyzygyň kesişme nokadynyň tapylyşyna degişli mesele berlipdir. Şu ýagdaýda göni çyzygyň üstünden gorizontal proyektirleýji S tekizlik geçirilipdir. Şu geçirilen kömekçi S tekizligiň S_H gorizontal yzy berlen göni çyzygyň ab gorizontal proyeksiýasynyň üstünden geçýär. Şondan soňky çözülişi ýokarda görkezilen shema boýunça alnyp barylýar.

Göni çyzyk bilen umumy haldaky tekizligiň kesişme nokadyny tapmagyň görkezilen şu usuly tekizlikleriň berlişiniň beýleki usullary üçin hem peýdalanylýp bilner.

Gorizontal proyektirleýji P tekizlik umumy haldaky AB göni çyzygyň kesişýän halyna seredeliň (80-nji surat).



80-nji surat

İlki bilen göni çyzygyň ab gorizental proyeksiýasynyň tekizligiň P_H -gorizental yzy bilen kesişýän nokadynyň k gorizental proyeksiýasy tapylýar we şol esasyda baglanyşyk çyzygynyň kömegi bilen gözlenýän nokadyň k' -frontal proyeksiýasy gurular.

27. GÖNI ÇYZYGYŇ TEKIZ FIGURA BILEN KESIŞMEGI

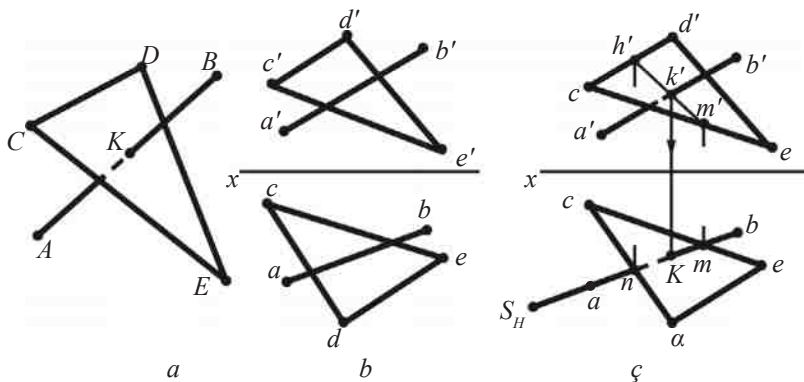
Göni çyzygyň tekiz figura – tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmaga degişli meseläniň çözüliş usuly göni çyzygyň yzlary bilen berlen tekizlik bilen kesişýän nokady tapmaga degişli meseläniň çözüliş usulyndan tapawutlanmaýar. Munuň özi diňe daş görnüşi boýunça tapawutlydyr.

Mesele. Umumy ýagdaýda berlen CDE üçburçlugyň tekizligi bilen umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygyň kesişme nokadyny tapmaly (81-nji surat): $AB \cap \Delta CDE = K$.

Meseläni çözmek üçin berlen AB göni çyzygyň üstünden kömekçi S gorizental projektirleýji tekizlik geçirilendir. CDE üçburçlugyň tekizligi bilen kömekçi S tekizligiň kesişme çyzygy üçburçlugyň DC we EC tarapларыnyň şol tekizlik bilen kesişýän N we M iki nokadynyň üsti bilen tapylýar: $n'm' \cap a'b' = k'$

İlki bilen AB göni çyzygyň üçburçlugyň tekizligi bilen kesişme nokadynyň K' frontal proyeksiýasyny, soňra bolsa K gorizental proyeksiýasyny birleşdiriji çyzygyň kömegi bilen tapýarys.

$k'k \perp OX$, $AB \cap CDE = K$.



81-nji surat

28. EPÝURDA GÖRNÜP – GÖRÜNMEZLIGI ANYKLAMAK

Çyzgynyň aňsat okalmagy we düşnükli bolmagy üçin geometriki figuralaryň proyeksiýalarynyň görünýän ýerlerini bitewi çyzyklar bilen, görünmeýän ýerlerini bolsa aralary kesilen – üzük çyzyklar (ştrihli çyzyk) bilen şekillendirmeklik kabul edilendir. Kâbir halatlarda bolsa görünmeýän çyzyklary asla çyzgyda görkezilmeýär.

Proyeksiýalar tekizligine geçirilen şol bir perpendikulýaryň üstünde ýatan iki nokadyň haýsysy gözegçilik edýäniň gözüne ýakyn bolsa, şol hem görünýän nokat bolar. Gorizontal proyeksiýalar tekizligine görünýän nokady anyklamak üçin gözegçilik edýäniň gözi şol iki nokadyň üstünde proyeksiýalar tekizligine geçirilen perpendikulýaryň üstünde diýilip hasap edilýär.

Şonuň üçin, bu tekizlikden has uzakda ýerleşen nokat görünýän nokat bolar. Göni çyzygyň kesimleriniň görnüp – görünmezligine proyeksiýalarynyň her biri üçin aýratynlykda kesgitlenýär.

Elementleriň ol ýa-da beýlekisiniň görnüp – görünmezligi degişli meseläni figuranyň diňe bir proyeksiýasyna garap göçmek bilen çözüp bolmaýandygyna, hökmany suratda proyeksiýalaryň ikisini hem göz önünde tutmalydygyny ýatda saklamak gerek.

Göni çyzygyň görnüp – görünmezligine degişli mesele mydama nokatlaryň görnüp – görünmezligine syrygýar.

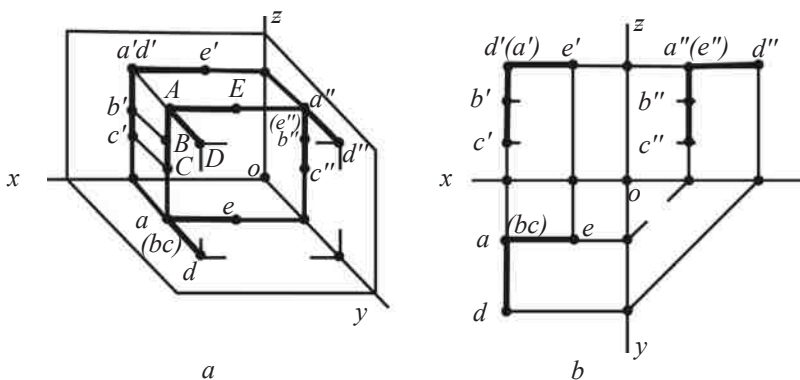
Eger nokatlaryň birnäçesi edil şol bir projektirleýji çyzygyň üstünde ýatan bolsa, onda olaryň diňe biri görünýändir:

1. **H** gorizontal şekiller tekizligine görä (82-nji *a, b* surat), görünýän **A** nokatdyr, **B** we **C** nokatlar görünmeýärler, ýagny **A** nokat olaryň ýokarsynda durandyr.

2. **V** frontal şekiller tekizligine görä, **D** nokat görünýändir, **A** nokat bolsa görünmeýär, sebäbi **D** nokat onuň önünde durandyr.

3. **W** gapdal – profil şekiller tekizligine görä bolsa, **A** nokat görünýär, **E** nokat bolsa görünmeýär.

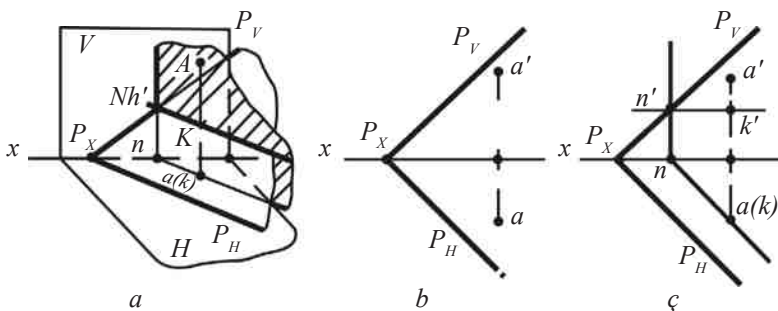
Nokatlaryň görnüp – görünmeýänligini anyklamak üçin iki atanak ýatan göni çyzyklaryň mysalyndaky bäsleşýän nokatlardan peýdalanmak amatly bolar.



82-nji surat

1-nji mesele. Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen P tekizlige görä, A nokat görünýärmä, ýa-da bu tekizlik onuň önüni ýapýarmy (83-nji surat)?

A nokatdyň üstünden geçýän H tekizlige perpendikulýar proyektirleýji göni çyzyk P tekizligi $K(k, k')$ nokatda kesýär, onuň gorizonta proyeksiýasy a proyeksiýanyň üstüne düşýär. a' nokat k' nokada garanynda OX okdan daşda (ýökarda) ýerleşendir. Şonuň üçin H gorizonta şekiller tekizligine görä A nokadyň öňi P tekizlik bilen ýapylan däl, şonuň üçin A nokat görünýär.



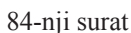
83-nji surat

2-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky Dury däl ABC we DEF üçburçluklar bilen berlen tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmaly we bu üçburçluklaryň görünýän hem-de görünmeýän ýerlerini kesgitlemeli (84-nji surat).

1. ABC üçburçlugyň AC tarapynyň DEF üçburçluk bilen kesişýän M nokadyny tapýarys. Munuň üçin şu aşakdaky yzygiderligi ýerine ýetirmeli:

b) Kömekçi P tekizligiñ DEF üçburçluk bilen kesişýän $(1-2, 1'-2')$ çyzygyny tapmaly.

2. ABC üçburçlugyň BC tarapynyň DEF üçburçluk bilen kesişyän N nokadyny tapýarys, munuň üçin AC tarap üçin ýerine ýetirilen gurluşlary yzygiderli gaýtalamaýly.



3. M we N noktalary birleşdirip, iki üçburçlugyň umumy MN kesişme çyzygyny alarys: $R(ABC) \cap Q(DEF) = MN$.

Çyzygyda üçburçlugyň görünýän hem-de görünmeýän elementlerini anyklalyň.

Munuň üçin iki atanak ýatýan göni çyzykdan peýdalanmak gerek. Atanak ýatýan göni çyzyklar hökmünde üçburçluklaryň BC we EF taraplaryny alalyň. Gorizontaly proyeksiýadaky **5**, **6** nokatlarda görünýän **5** nokat bolar, sebäbi **5** nokatdan H tekizlige çenli aralyk **6** nokada garanyňda uzakdyr. Diýmek, **5** nokatda EF tarap BC tarapyň üstünü ýapar.

29. TEKIZLIGE PERPENDIKULÝAR GÖNI ÇYZYK

Giňişlikde göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk nyşany:

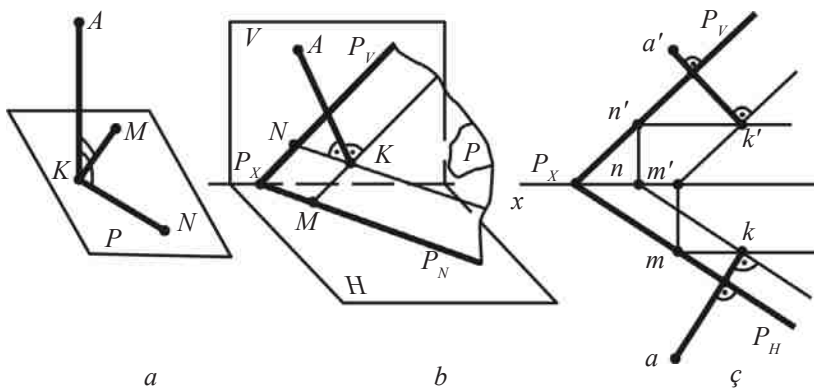
Eger (AK) göni çyzyk tekizlikde ýatan we kesişýän iki (MK) we (NK) göni çyzyklara perpendikulýar bolsa, onda ol AK göni çyzyk P tekizligiň özüne - de perpendikulýardyr (85-nji a surat).

Epýurda tekizlikdäki kesişýän iki göni çyzygyň deregine berlen tekizligiň yzlaryny ýa-da şol tekizligiň gorizontallaryny we frontalaryny almak amatlydyr.

85-nji b surat P tekizlige perpendikulýar bolan AK göni çyzyk görkezilendir. Goý, bu göni çyzyk tekizligi K nokatda kesýän bolsun.

K nokadyň üstünden NK gorizontaly we MK frontal geçireliň.

Şonda göni burçy proyektirlemek baradaky teoremanyň esasynda $nk \perp ak$. $P_H \parallel nk$ bolany üçin $ak \perp P_H$ (85-nji ç surat).



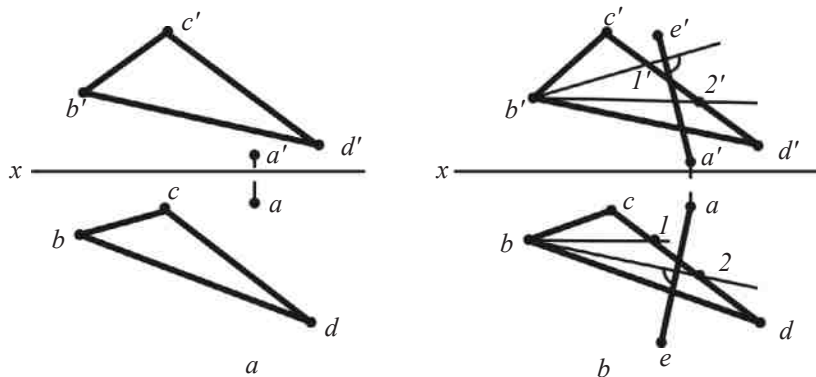
85-nji surat

Edil şonuň ýaly $a'k' \perp m'k'$ we $a'k' \perp P_V$.

Tersine, ýagny eger göni çyzygyň proyeksiýalary tekizligiň biratly yzlaryna perpendikulýar bolsalar, onda göni çyzyk hem tekizlige perpendikulýardyr.

Tekizlik epýurda yzlary bilen berilmedik ýagdaýda, olaryň yzlaryny gymak hökmanam dälär, sebäbi 85-nji *b*, *ç* suratdan görnüşi ýaly, tekizlige perpendikulýar AK göni çyzygyň gorizontaly proyeksiýasy tekizligiň gorizontaly yzyna ýa-da islendik gorizontalyna perpendikulýardyr. ($ak \perp P_H$ ýa-da $ak \perp nk$), hem-de frontal proyeksiýasy $a'k' \perp P_V$ ýa-da $a'k' \perp m'k'$. Bu çyzygyň görnüşi ýaly, tekizligiň nähili berlendigine garamazdan, berlen tekizligiň esasy çyzyklarynyň gorizontaly ýa-da frontaly belli bolsa, onda şol tekizlige perpendikulýar geçirmek bolar.

Eger tekizlik yzlary bilen berilmedik bolsa, onda perpendikulýaryň proyeksiýalary, deňişlikde perpendikulýaryň gorizontaly proyeksiýasy tekizligiň gorizontalynyň gorizontaly proyeksiýasyna, perpendikulýaryň frontal proyeksiýasy bolsa tekizligiň frontalynyň frontal proyeksiýasyna perpendikulýardyr (86-njy surat).



86-njy surat

Mesele. *A* nokadyň üstünden umumy ýagdaýda BCD üçburçluk bilen berlen tekizlige perpendikulýar çyzyk geçirmeli (86-njy surat).

BCD üçburçlugyň tekizliginde $B2$ gorizontaly we $B1$ frontaly geçirip, *A* nokadyň üstünden AE ($ae \perp b2$, $a'e' \perp b'1'$) perpendikulýaryň gorizontaly we frontal proyeksiýalaryny geçirmek ýeterlikdir.

Mesele. *A* (*a*, *a'*) nokatdan umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen $P(P_H, P_V)$ tekizlige çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli (87-nji surat).

Nokattan tekizlige çenli in ýakyn aralyk berlen nokattan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň tekizlik bilen kesişýän nokadyna çenli aralyga deňdir.

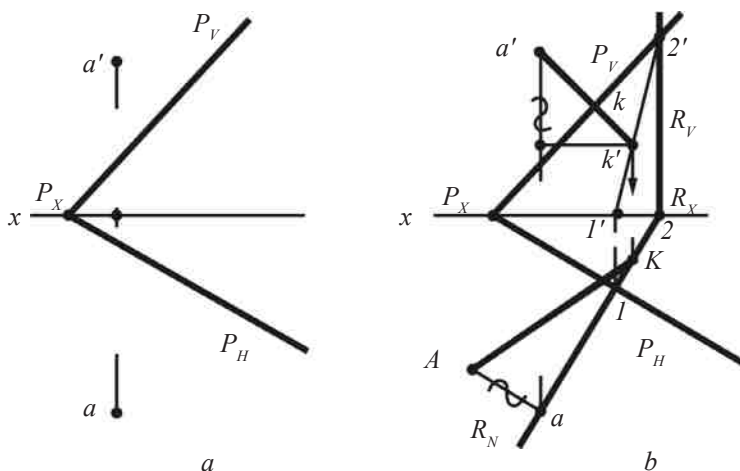
Meseläni çözmegiň yzygiderligi:

1. Berlen A nokattan P tekizlige AB perpendikulýar geçirýäris:

$$ab \perp P_H, \quad a'b' \perp P_V.$$

2. AB perpendikulýaryň P tekizlik bilen kesişýän

$K(k, k')$ nokadyny taparys.



87-nji surat

3. KA_0 gözlenýän aralygyň hakyky uzynlygy üçburçluklar usuly bilen kesgitlenýär. Gurluşy çyzgydan düşnükliidir.

Bellik. Perpendikulýar AB çyzygyň P tekizlik bilen kesişme çyzygy 79-njy suratda tapylyşy ýaly, yzygyderlikde ýerine ýetirilýär. Gurluşy çyzgydan düşnükliidir. AK -nyň tapylyşyna 80, 81 we 84-nji suratlarda seredilipdi.

30. UMUMY ÝAGDAÝDAKY GÖNI ÇYZYGA PERPENDIKULÝAR GÖNI ÇYZYK GURMAK (Umumy hal)

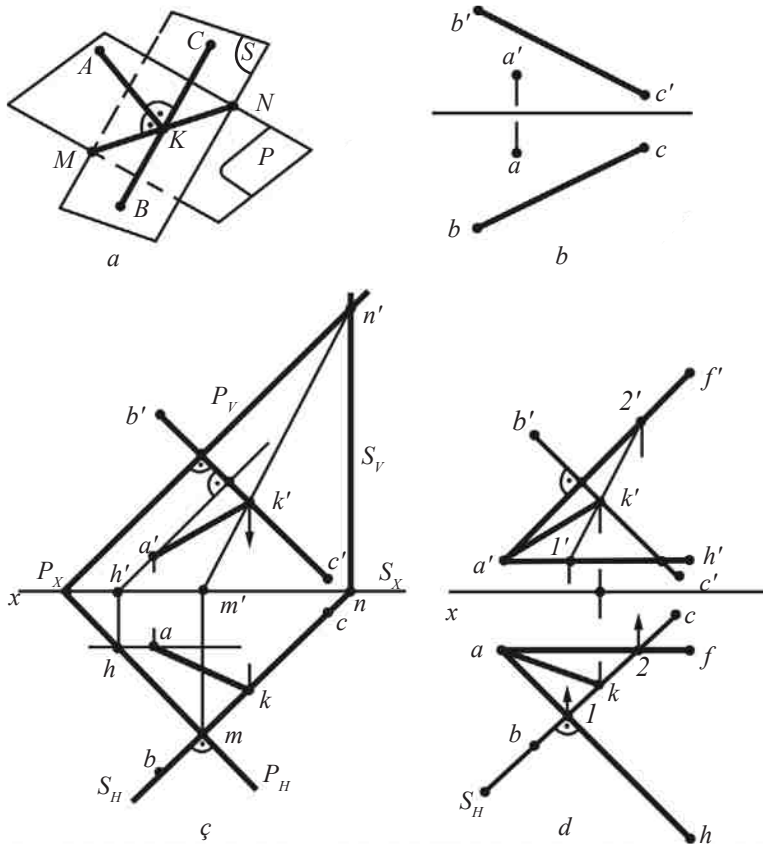
Mesele. A nokattan umumy ýagdaýdaky BC göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk geçirmeli (88-nji $a, b, ç$ surat).

Meseläniň çözülişiniň yzygiderligi aşakdaky ýaly bolup biler:

1. A nokadyň üstünden BC göni çyzyga perpendikulýar bolan P tekizligi geçireliň. Şonuň üçin proyeksiýasy $b'c'$ göni çyzyga perpendikulýar ($h'a' b'c'$) bolan frontaly ulanýarys. P_H gorizontaly yz h nokadyň üstünden bc gorizontaly proyeksiýa perpendikulýar edilip, P_V frontal yz bolsa Px nokadyň üstünden $b'c'$ proyeksiýa perpendikulýar edilip geçirilendir.

2. BC göni çyzygyň P tekizlik bilen kesişme K nokadyny tapýarys. Şonuň üçin BC göni çyzygyň üstünden kömekçi S tekizligi H tekizlige perpendikulýar geçirilýäris, ýagny gorizontaly proyektirligi S tekizligi geçirilýäris. Berlen P tekizlik bilen geçiren kömekçi S tekizligiň umumy kesişme çyzygyny $MN(mn, m'n')$ gurýarys. Gurlan MN kesişme çyzygyň $m'n'$ bilen $b'c'$ proyeksiýanyň kesişmeginde k' nokady alarys.

k' nokadyň k gorizontaly şekili adaty usul bilen tapylýar.



88-nji surat

3. A we K nokatlary göni çyzyk arkaly birleşdirýäris. A we K nokatlar P tekizlikde ýatýarlar, şonuň üçin AK göni çyzyk P tekizlikde ýatýar. BC göni çyzyk P tekizlige perpendikulýardyr, diýmek, AK we BC göni çyzyklar özara perpendikulýardyrlar: $AK \perp BC$.

4. $AK \perp BC$. 88-nji d suratda P tekizligi yzlary bilen gurman, esasy çyzyklary bilen gurup, bu iki çyzgynyň netijesiniň birligine göz ýetirýäris: $P(Af \cap Ah)$.

31. PERPENDIKULÝAR TEKIZLIKLER

Giňişlikdäki tekizlikleriň perpendikulýarlyk nyşany:

Eger iki tekizligiň biri beýleki tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyň üstünden geçýän bolsa, onda ol tekizlikler giňişlikde özara perpendikulýardyrlar (89-njy a surat).

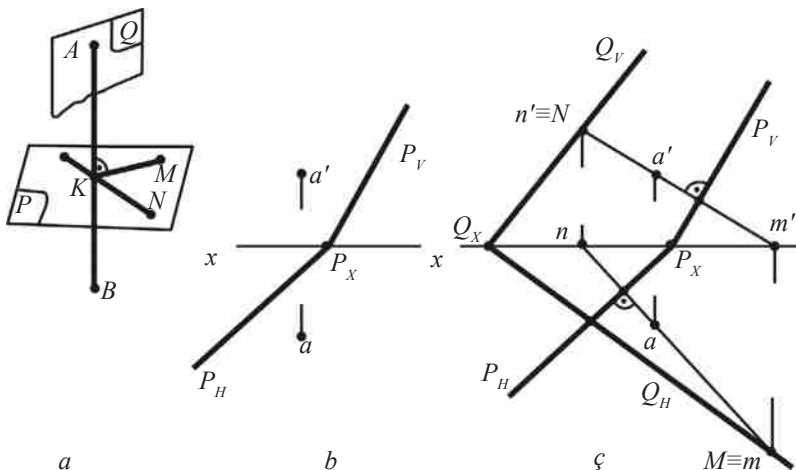
Berlen P tekizlige bu tekizlikde degişli bolmadyk A nokotdan perpendikulýar bolan Q tekizligi gurmaklyk iki ýol bilen amala aşyrylyp bilner:

1. Q tekizlik P tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyň üstünden geçirilýär.

2. Q tekizlik P tekizligiň üstünde ýatan göni çyzyga perpendikulýar edilip geçirilýär.

Perpendikulýar tekizliklere degişli meseleleriň çözülişi

1-nji mesele. Berlen A (a, a') nokadyň üstünden umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen P (P_H, P_V) tekizlige perpendikulýar bolan Q (Q_H, Q_V) tekizligi yzlary bilen geçirmeli (89-njy a, b surat).



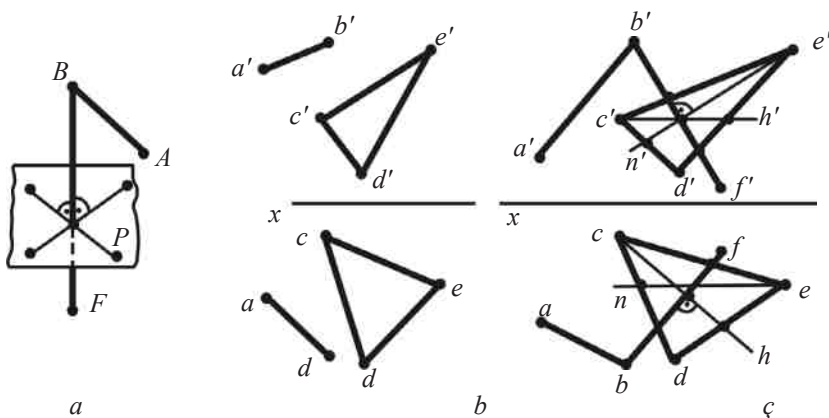
89-njy surat

Epýurda (89-njy ζ surat) özara perpendikulýar tekizlikleriň yzygiderli gurluşy görkezilendir. Berlen A nokadyň üstünden P tekizlige perpendikulýaryň proyeksiýalary geçirilen. Bu perpendikulýaryň gorizonta M we frontal N yzlaryny taparys.

M gorizonta yzyň we erkin alnan Q_x nokadyň üstünden tekizligiň Q_H gorizonta yzyny geçirýäris, tekizligiň frontal yzlary N we Q_x nokatlar bilen kesgitlenýär.

2-nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen AB göni çyzygyň üstünden umumy ýagdaýda berlen CDE üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar tekizlik geçirmeli (90-njy a surat).

Bu meseläni çözmek üçin AB göni çyzyga degişli B nokadyň üstünden CDE üçburşluga perpendikulýar geçirmeli. Perpendikulýaryň $b'f$ frontal proyeksiýasy frontalyň $n'e'$ frontal proyeksiýasyna perpendikulýar, perpendikulýaryň bf gorizonta proyeksiýasyny bolsa, gorizontalyň gorizonta ch proyeksiýasyna perpendikulýar edip geçirmeli.

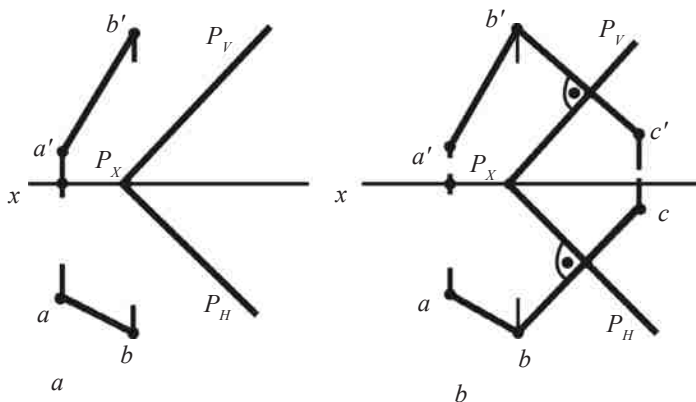


90-njy surat

AB we BF kesişýän göni çyzyklar CDE üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar Q tekizligi kesgitleýärler: $Q (AB \cap BF)$,

$Q \perp \triangle CDE$, $BF \perp \triangle CDE$, $BF \subset Q$.

3-nji mesele. 91-nji a , b suratda berlen umumy ýagdaýda AB (ab , $a'b'$) göni çyzygyň üstünden yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky P (P_H , P_V) tekizlige perpendikulýar bolan Q tekizligiň geçirilişi görkezilendir.



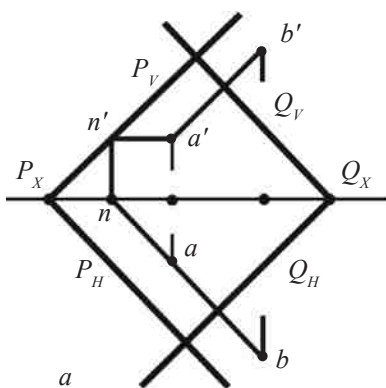
91-nji surat

$$BC \perp P, \quad Q(AB \cap BC), \quad BC \subset Q, \quad Q \perp P.$$

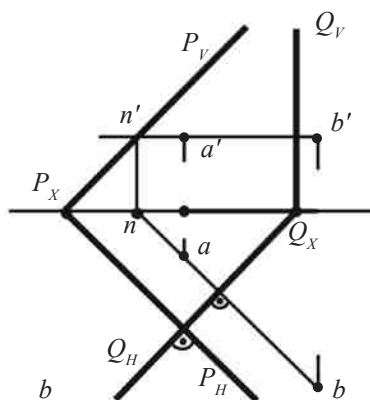
Umumy haldaky iki tekizligiň biratly yzlarynyň özara perpendikulýar ýerleşşi 89-njy suratda berlendir. Bu tekizlikleriň göni burç bilen kesişmeýändikleriniň nyşanydygyny belläp geçmek gerek, ýagny bu tekizlikler özara perpendikulýar dälirler.

4-nji mesele. Goý, P we Q tekizlikler berlen bolsun ($P_H \perp Q_H$ we $P_V \perp Q_V$). Tekizlikleriň perpendikulýar dældiklerine göz ýetireliň (92-nji surat).

Umumy haldaky iki tekizligiň biratly yzlarynyň özara perpendikulýar ýerleşmekleri bu tekizlikleriň özara perpendikulýar dældigini, ýagny göni burç bilen kesişmeýändikleriniň nyşanydygyny belläp geçmek gerek.



92-nji surat



93-nji surat

P tekizlikde ýerleşen A nokatdan Q tekizlige AB perpendikulýar geçirýäris. P we Q tekizlikleriň özara perpendikulýar bolan ýagdaýlarynda AB göni çyzyk P tekizlige deňişli bolmalydyr. Emma hakykatda bu beýle däldir. AB göni çyzyk P tekizlikde ýatmaýar. Diýmek, P tekizlik Q tekizlige perpendikulýar däldir.

5-njy mesele. Eger tekizlikleriň biri (P) umumy haldaky, beýlekisi bolsa (Q) gorizontaýl proyektirleýji bolsa, şeýle hem gorizontaýl yzlar özara perpendikulýar bolanlarynda şol tekizlikleriň perpendikulýardyklaryna göz ýetireliň (93-nji surat).

Şunuň oň ýanyndaky ýagdaýda görşümiz ýaly, P tekizlige deňişli A nokatdan Q tekizlige perpendikulýar geçirýäris. AB göni çyzyk P tekizlige deňişlidir we Q tekizlige perpendikulýardyr ($Q \perp AB$), diýmek, $P \perp Q$, sebäbi $ab \perp Q_H$, $a'b' \perp Q_V$.

Öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler

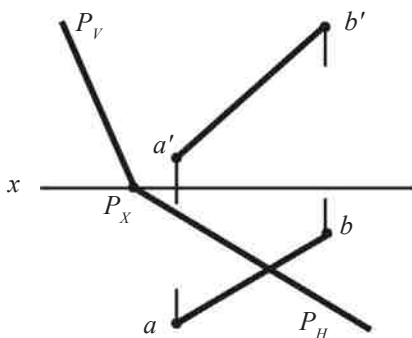
1. Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmaga deňişli meseleleriň çözülişiniň yzygiderliligi nähili? Näme üçin göni çyzygyň üstünden kömekçi tekizlik geçirilýär?

2. Tekiz figura diýilip näme aýdylýar?

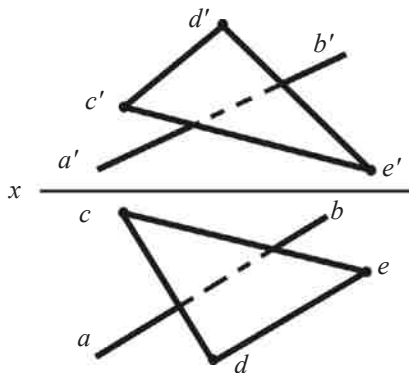
3. Üçburçlyk, dörtburçlyk, parallelogram, trapesiýa, islendik köpburçlyk ýaly tekiz figuralary proyektirlemegiň aýratynlyklary nämeden ybarat?

4. Nähili nokatlara konkurirleşýän (bäsleşýän) nokatlar diýilýär? Ortogonaýl çyzygyda geometrik elementleriň haýsynyň görünýändigini kesgitlemekde bu nokatlar nähili peýdalanylýar?

5. AB (ab , $a'b'$) göni çyzygyň P (P_H , P_V) tekizlik bilen (94-nji surat) we CDE üçburçlugyň tekizligi bilen (95-nji surat) kesişme nokadyny guruň. Tekizlige görä göni çyzygyň görünýän hem-de görünmeýän böleklerini anyklaň.



94-nji surat

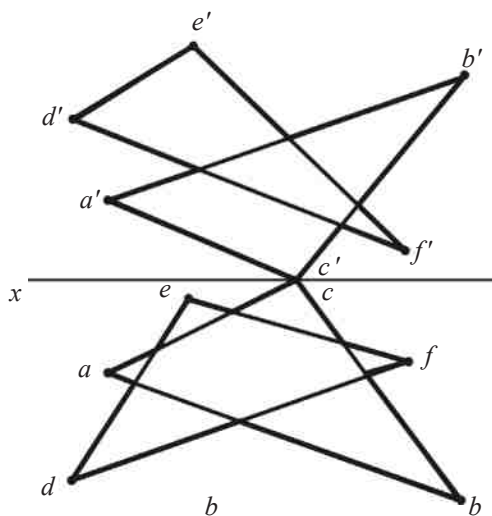
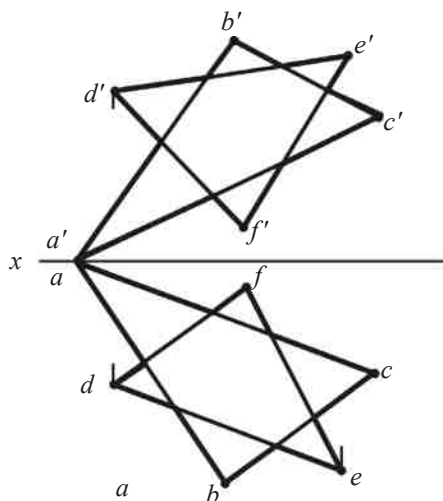


95-nji surat

6. Umumy ýagdaýda berlen iki tekiz figuranyň, ýagny ABC we DEF üçburçluklaryň kesişme çyzygyny guruň (96-njy a we b surat). Olaryň özara görnüp-görünmezligini anyklaň.

7. Ortogonal çyzgyda berlen tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk nähili görkezilýär - çyzylýar?

8. Giňişlikde we epýurada – kompleks çyzgyda iki tekizligiň özara perpendikulýarlyk nyşanyny-şertini düşündiriň we çyzgysyny ýerine ýetiriň.



II bölüm

32. PROJĖKSIÝALARY ÖZGERTMEGIŇ USULLARY

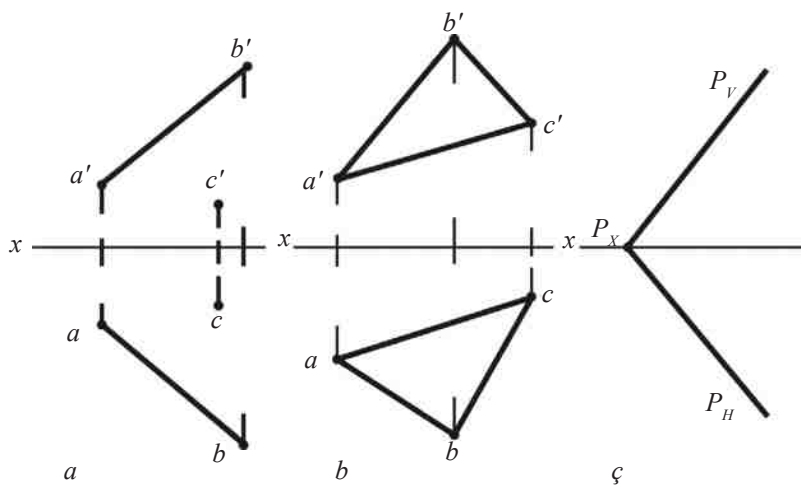
32.1. Umumy maglumatlar

Çyzmaly geometriýanyň çözüýän ähli meselelerini, esasan, iki topara bölmek bolar:

Birinji topara girýänlere **pozision** meseleler diýilýär. Olaryň çözüdü geometrik elementleriň özara ýerleşişlerini kesgitlemekden ybaratdyr.

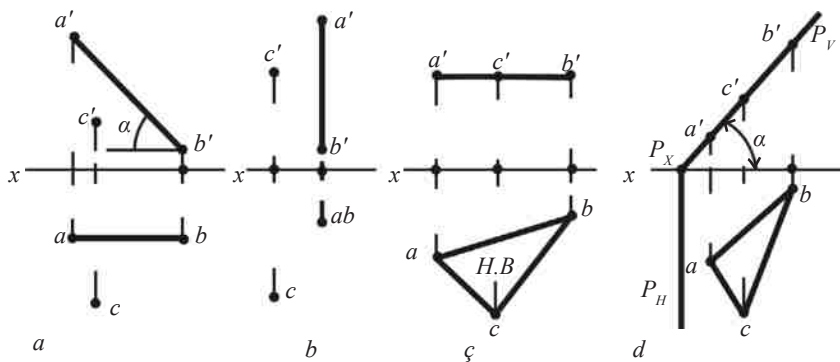
Ikinji topara girýänler **metrik (ölçeg)** meseleleri bolmak bilen olaryň çözüdiniň netijesinde ululyk, aralyk (uzaklyk), burç hem-de meýdan ölçenilýär we alynýar.

Projeksiýalar tekizliklerine görä erkin-umumy ýagdaýda ýerleşen göni çyzyklaryň, tekizlikleriň we figuralaryň projeksiýalary anyk (takyk) meseleler çözmek üçin amatly bolmaýar (97-nji surat).



97-nji surat

Göni çyzyklaryň we figuralaryň proyeksiýalar tekizlikleri-ne görä **hususy** halda ýerleşmegi meseleleriň çözümlerini ep-es-li ýeňilleşdirýär, kä halatlarda bolsa gös-göni çyzgynyň özünden meseläniň jogabyňy almaga mümkinçilik berýär (98-nji surat).



98-nji surat

Mysal üçin, frontal proyeksiýalar tekizligine parallel **AB** kesimiň hakyky uzynlygyny kesgitlemek kyn däldir, sebäbi kesimiň frontal proyeksiýasy bize mälüm bolşy ýaly, onuň hakyky uzynlygydyr (98-nji a surat): $a'b' = AB$.

Umumy haldaky tekizligiň (97-nji b, ç surat) gorizont al proyeksiýalar tekizligine ýapgytlyk burçuny ýörite gurluş geçirmezden kesgitlep bolmaýar. Eger şol tekizlik hususy haldaky proyektirleýji tekizlik bolsa, onda onuň yzlaryndan haýsy hem bolsa biriniň **OX** oka ýapgytlygy gös-göni şol berlen hususy haldaky proyektirleýji tekizligiň proyeksiýalar tekizliginiň birine bolan gözlenýän ýapgytlyk burçuny berýär (98-nji b, d surat).

Şeýleiklde, eger geometrik elementleri proyeksiýalar tekizliklerine görä umumy ýagdaýdan **hususy** ýagdaýa geçriseň, **metrik** meseleleri ýönekeý hem-de çalt we takyk çözmek aňsatlaşýar. Muny, esasan iki usul bilen amala aşyryp bolýar:

1. Giňişlikde proyeksiýalar tekizlikleriniň ýagdaýyny üýtgeşsiz diýip hasap etmek bolar. Şeýle ýagdaýda geometrik elementiň proyeksiýasyny üýtgetmeklik ol ýa-da beýleki orun üýtgetmegiň netijesinde, adatça ony bir ýa-da birnäçe okuň töwereginde yzygiderli aýlamagyň

netijesinde onuň giňişlikdäki ornuny üýtgetmegiň hasabyna amala aşyrylýar.

2. Giňişlikde geometrik elementleriň orny üýtgeşsiz diýlip hasap edilýär. Şeýle ýagdaýda bu elementleriň proyeksiýasyny üýtgetmeklik proyeksiýalar tekizlikleriniň biriniň, ikisiniň ýa-da birnäçesiniň giňişlikdäki ornuny gerekli ýagdaýda yzygiderli üýtgetmegiň hasabyna amala aşyrylýar.

Geometrik elementleriň figuralaryň proyeksiýalaryny üýtgetmegiň ýa-da proyeksiýalar tekizlikleriniň ornuny (ýerini) üýtgetmegiň ýokarda görkezilen iki ýoly esasynda çyzmaly geometriýada proyeksiýalary özgertmegiň, esasan, şu aşakdaky usullaryna garalyp geçilýär:

1. **Aýlamak** usuly.

2. **Proyeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak** usuly.

3. **Utgaşdyrmak** usuly.

Proyeksiýalary özgertmegiň ýokardaky görkezilen esasy usullary bilen bilelikde, kä halatlarda **goşmaça gyşyk burçly proyektirlemek** usuly hem ulanylýar. Munda proyeksiýalar tekizlikleriniň birine geometrik elementler şol tekizlige perpendikulýar bolmadyk ugur boýunça proyektirlenýär. Bu usul şu kitapda görkezilen däldir.

32.2. Aýlamak usuly

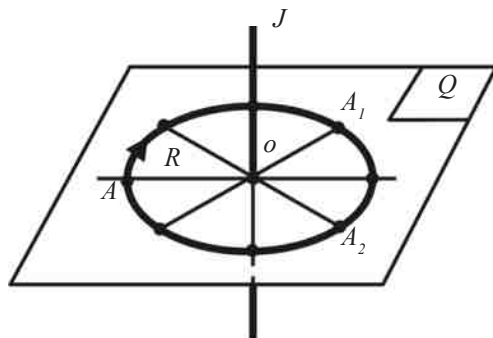
Okuň daşynda aýlanýan dürli jisimiň, mysal üçin, welosipediň, awtomobiliň, parawozyň tigirleriniň gorizonta aýlama okuň daşynda ýa-da başga bir jisimiň wertikal-dik aýlama okuň daşynda aýlanýandygy her birimize durmuşdan bellidir.

Eger şular ýaly geometrik jisimiň üstünde islendik bir nokat alsak, onda bu alnan nokat giňişlikde aýlama okuň daşynda aýlanyp töwerek emele getirýär. Şol emele gelen töweregiň tekizligi mydama aýlama oka perpendikulýardyr.

Aýlamak usuly gozganmaýan tekizliklere görä giňişlikde geometrik predmetiň ýagdaýyny bir ýa-da birnäçe aýlama okuň töwereginde islendik burça aýlamagyň netijesinde, bu elementleriň proyeksiýalaryny bize islän ýagdaýymyza çenli üýtgetmäge mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde, aýlamak usulyňyň şu aşakdaky esasy ýagdaýlaryny göz önünde tutmak gerek (99-njy surat).

1. Nokatlaryň islendik toplumy (giňişlikdäki A nokat) heýsy hem bolsa bir aýlama okuň daşynda aýlananda şol toplumyň her bir nokady (A nokat) aýlama I okuna perpendikulýar Q tekizlikde öz ornuny üýtgedýär. Bu Q tekizlige nokadyň **aýlama tekizligi** diýilýär.



$$\begin{aligned} A &\rightarrow Q \perp J, \\ A &\subset Q, \quad Q \cap J = O, \\ OA &= R, \quad O \subset Q; \\ O &\subset J; \end{aligned}$$

99-njy surat

2. Aýlanýan nokatlaryň islendik toplumynyň her bir nokady aýlanma Q tekizliginde töweregiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgedýär. Şol töweregiň merkezi O nokat aýlama I okunyň aýlanma Q tekizligi bilen kesişýän ýerindedir. Bu alnan O nokada aýlama nokadyň **merkezi** diýilýär. Şol töweregiň R radiusy bolsa A nokatdan aýlama okuna inderilen perpendikulýardyr. Oňa **aýlama radiusy** diýilýär:

$$OA = R = OA_1 = OA_2.$$

3. Aýlama okunyň üstünde ýatan hemme nokatlar giňişlikde aýlanma wagtynda öz orunlaryny üýtgetmeýärler.

Çyzmaly geometriýada meseleler çözülende aýlama usulyňyň şu aşakdaky görnüşleri durmuşda köp gabat gelýär:

1. Proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak.

2. Anyklanmadyk okuň daşynda aýlamak – tekiz parallel orun üýtgetmek usuly.

3. Proyeksiýalar tekizligine parallel okuň daşynda aýlamak – esasy çyzyklaryň (gorizontalyň ýa-da frontalyň), ýagny dereje çyzyklaryň daşynda aýlamak.

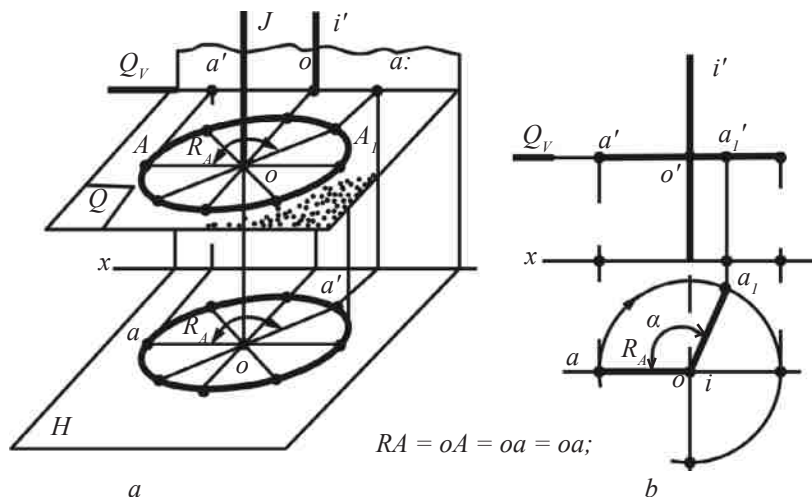
4. Proyeksiýalar tekizliginiň üstünde ýatan okuň, ýagny tekizligiň yzlarynyň daşynda aýlamak – utgaşdyrmak.

5. Projeksiýalar tekizligine garanyňda erkin ýerleşen okuň daşynda aýlamak. Bu aýlamak usuly şu kitapda görkezilen däl-dir. Umumy ýagdaýdaky okuň daşynda aýlamak usuly birnäçe hususy meseleleri çözmek üçin, esasanam, nazary mehanikada hem-de mehanizmleriň we maşynlaryň nazareti kursunda giňden ulanylýar.

33. PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIGINE PERPENDIKULÝAR OKUŇ DASYNDAAÝLAMAK

33.1. Nokady aýlamak

1-nji mesele. A nokady gorizonta proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan I aýlama okuň daşynda α burça sagadyň aýlanýan ugry boýunça aýlamaly (100-nji surat).



100-nji surat

Bize belli bolşy ýaly, nokat aýlandyrylýan wagtynda aýlama okuna perpendikulýar \mathbf{Q} tekizligiň üstünde ýatan töwerek boýunça öz ornuny üýtgedýär, şol töweregiň radiusy aýlama radiusyna deňdir.

Nokadyň aýlama radiusyny tapmaklyk aýlandyrylýan nokatdan aýlama okuna inderilen perpendikulýaryň kömegi bilen amala aşyrylýar.

Aýlama okunyň gorizontál proyeksiýalar tekizligine perpendikulýardygyny göz önünde tutsak, onda A nokat aýlanýan wagtynda H tekizligine parallel Q tekizligiň üstündäki töweregiň dugasy boýunça öz ornuny yzygiderli üýtgedýär, şol töweregiň radiusy hem H tekizlige paralleldir. Şeýlelikde, aýlanma radiusy H tekizlige üýtgedilmezden hakyky uzynlygynda proyektirlenýär, ýagny epýurda biz A nokadyň gorizontál proyeksiýasyny aýlama okuň gorizontál proyeksiýasy bilen birleşdirip, R_A aýlama radiusyny taparys.

A nokadyň I aýlama okuň daşynda aýlanandaky emele getiren töweregi V şekiller tekizligine şol töweregiň diametrine deň bolan göni çyzyk görnüşinde proyektirlener we OX oka parallel ýa-da aýlanma okuň L' frontal proyeksiýasyna perpendikulýar bolar. W şekiller tekizligine şol töwerek OX oka parallel göni çyzyk bolup proyektirlener.

Epýurda A nokady gorizontál proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan I aýlama okuň daşynda a burça aýlamak üçin:

1. Berlen a burça deň bolan we görkezilen ugur boýunça nokatdan (aýlama okunyň gorizontál proyeksiýasyndan) radiusy $La = R_a$ deň bolan aa_1 duga geçirýäris.

2. Berlen A nokadyň a' frontal proyeksiýasynyň üstünden OX proyeksiýalar okuna parallel geçirýäris, ýagny nokadyň frontal proyeksiýasynyň hereket edip geçmeli ýoluny (ugruny) kesgitleýäris.

3. Alnan täze a_1 gorizontál proyeksiýanyň üstünden OX oka perpendikulýar birleşdiriji çyzyk geçirip, a' frontal proyeksiýanyň hereket ediş ugry bilen kesişýän täze ýagdaýdaky a_1' nokady alarys.

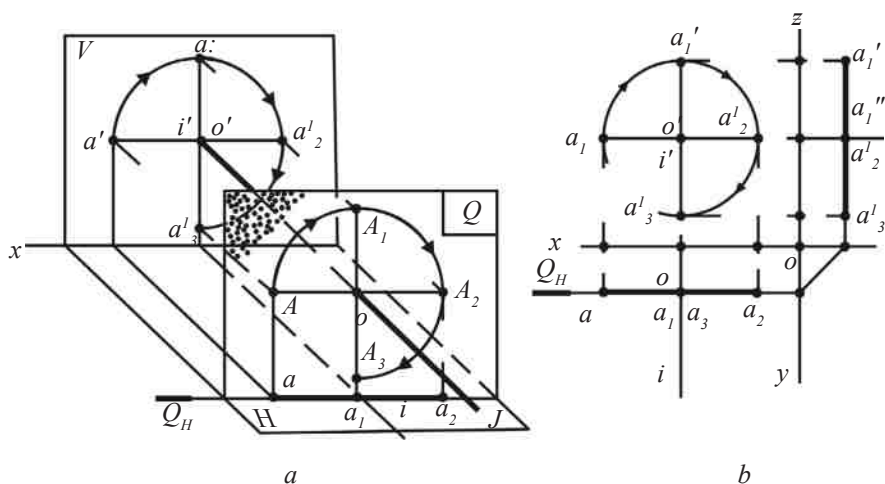
2-nji mesele. A nokady frontal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan I aýlama okuň daşynda $a = 180^\circ$ burça sagadyň aýlanýan ugry boýunça aýlamaly (*101-nji surat*).

Bu ýagdaýda:

1. A nokadyň aýlanandaky emele getiren töweregi V tekizlige üýtgedilmezden proyektirlenýär.

2. H tekizlige töwerek OX oka parallel göni çyzyk bolup proyektirlenýär.

3. W tekizlige töwerek OZ oka parallel göni çyzyk görnüşinde proyektirlenýär.



101-nji surat

Diýmek, nokat proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda, bu tekizlikde nokadyň proyeksiýasy aýlanma radiusynyň töwreginiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgedýär, beýleki tekizlikde bolsa nokadyň proyeksiýasy proyeksiýalar okuna parallel göni çyzyk boýunça, ýagny aýlanma okuna perpendikulýar çyzyk boýunça öz ornuny üýtgedýär.

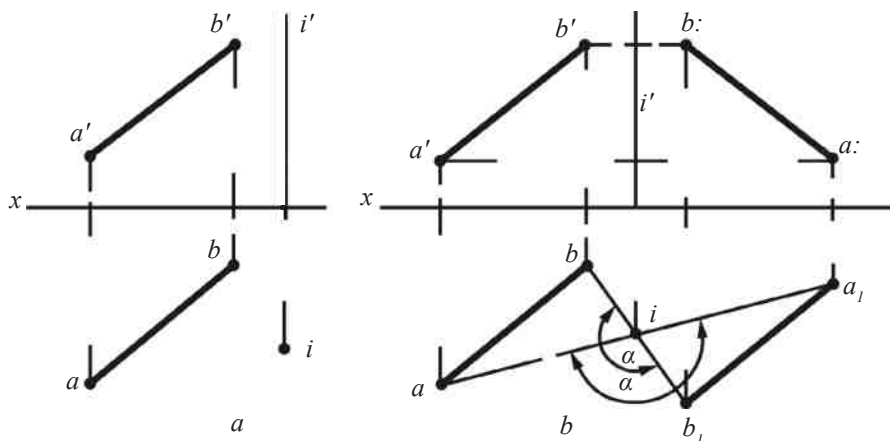
Nokady proyeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak gorizont (frontal) proyektirleýji göni çyzygyň daşynda aýlamaklyk diýmekdir.

Oksuz proyektirlenýän wagtda epýurda proyeksiýalar okuny görkezmeğiň zerurlygy ýok we aýlama okuny hem mydama görkezip durmak hökman dälir.

33.2. Göni çyzygy aýlamak

Giňişlikde göni çyzygy berlen okuň daşynda käbir α burça aýlamak üçin onuň hemme nokatlaryny ýa-da islendik iki nokadyny şol burça aýlamak ýeterlidir.

1-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygy gorizonta proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan I okuň daşynda sagadyň aýlanýan ugrunyň tersine $\alpha = 180^\circ$ burça aýlamaly. H tekzili-ge ýokardan seredilýär diýip düşünmeli (102-nji surat).



102-nji surat

AB göni çyzygyň gorizental **a** we **b** nokatlaryny degişli radiusly dugalar boýunça şol bir **a** burça aýlap, nokatlaryň täze **a₁** we **b₁** gorizental proyeksiýasynyň ýagdaýlaryny taparys.

Göni çyzygyň frontal **a'** we **b'** proyeksiýalary bolsa **OX** okuna parallel ýa-da aýlama **I** okunyň frontal proyeksiýasyna perpendikulýar göni çyzyk boýunça öz orunlaryny üýtgederler. Nokadyň täze alnan gorizental **a₁** we **b₁** proyeksiýalaryndan birleşdiriji çyzyklar geçirip, nokadyň frontal **a'₁** we **b'₁** proyeksiýalaryny alarys.

Nokatlaryň biratly proyeksiýalaryny birleşdirip, berlen **AB** göni çyzygyň täze ýagdaýyny **A₁B₁** göni çyzygyň **a₁ b₁** gorizental we **a'₁ b'₁** frontal proyeksiýalaryny alarys.

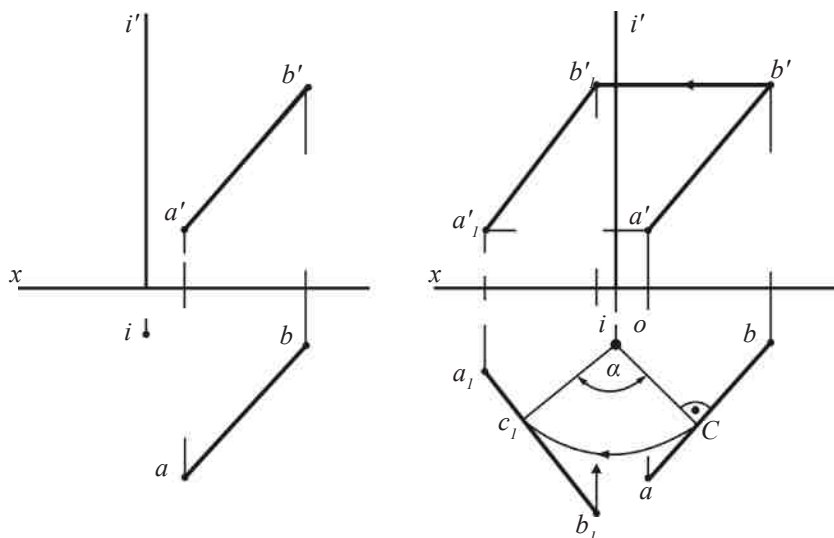
Ýokardaky çyzydan görnüşi ýaly, $\Delta iab = \Delta ia_1b_1$, ýagny $ia_1 = ia$, $ib_1 = ib$, $\angle a_1ib_1 = \angle aib$.

Üçburçluklaryň deňliginden: $a_1b_1 = ab$.

Diýmek, göni çyzyk proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda, göni çyzygyň islendik kesiminiň şol proyeksiýalar tekizligine proyeksiýasynyň uzynlygy üýtgemeyär, ýagny göni çyzygyň şol proyeksiýalar tekizligine ýapgyt burçy üýtgewsiz galýar. Eger şu aýlamak usuly bilen **AB** göni çyzygyň **ab** gorizental proyeksiýasyny frontal proyeksiýalar tekizligine parallel ýagdaýa çenli aýlap frontal proyeksiýasyny tapsak, onda iki meseläni çözeris (103-nji surat).

Birnjiden, **AB** göni çyzygyň täze **a'₁ b'** frontal proyeksiýasy hakyky uzynlygy bolar, ýagny $a'_1b' = AB$.

**İkinjiden, AB göni çyzygyň täze a'_1b' frontal proyeksiýasy bilen OX okuň arasyndaky emele gelen burç AB göni çyzygyň gorizontnal proyeksiýalar tekizligine ýapgytlyk burçy bolardy. Bu ýagdaýlary ge-
lejekde göz önünde tutarys.**



$$\alpha = 90^\circ$$

103-nji surat

2-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky AB göni çyzyk we gorizont-
tal şekiller tekizligine perpendikulýar bolan aýlama I oky berlen. AB
göni çyzygy sagadyň aýlanýan ugruna $\alpha = 90^\circ$ burça aýlamak talap
edilýär (103-nji surat).

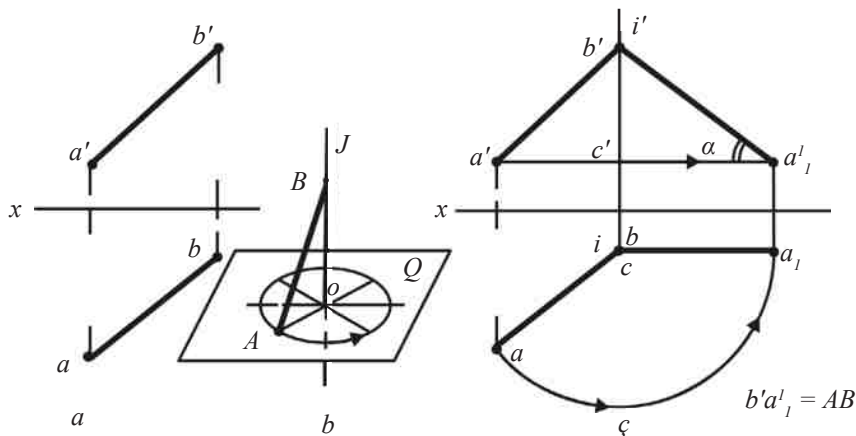
Suratdan görnüşi ýaly, umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygy a
burça aýlap, täze A_1B_1 ýagdaýyny tapmak üçin şol göni çyzygyň iki
nokadyny aýlaman, bir nokadyny aýlamak hem ýeterlikdir.

Aýlanma merkezi hökmünde O nokatdan AB göni çyzygyň ab
gorizontnal proyeksiýasyna oc perpendikulýar inderýäris we alnan c
nokady $\alpha = 90^\circ$ burça görkezilen ugra aýlaýarys, şonda göni çyzygyň
 ab gorizontnal proyeksiýasy hem şol burça aýlanar we ol täze a_1b_1 ýag-
daýy eýelär (Yagny, $oc_1 \perp a_1b_1$, $c_1a_1 = ca$, $c_1b_1 = cb$).

$a'_1b'_1$ frontal proyeksiýasynyň tapylyş usuly bize öňden belli bo-
lany üçin çyzgydan düşnüklidir.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygyň bir nokadyny
aýlap, şol çyzygyň hakyky uzynlygyny we gorizontnal proyeksiýalar te-
kizligine bolan ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli (104-nji surat).

Eger aýlama oky göni çyzygyň haýsy hem bolsa bir ujundaky nokadynyň üstünden geçýän bolsa, onda aýlamaklyk has-da ýönekeýleşýär. Aýlama wagtynda bu nokat aýlama okda ýatýanlygy üçin giňişlikde öz ornuny üýtgetmeýär. Şeýlelikde, göni çyzygy haýsy hem bolsa bir burça aýlamak üçin onuň diňe bir nokadyny şol burça aýlamak ýeterlikdir. Aýlanan A nokat hem-de aýlanma okuň üstünde ýatan B nokat AB göni çyzygyň täze A_1B ($ba_1, b'a_1$) ýagdaýyny doly kesgitleýär. Ýokardaky meseläniň gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

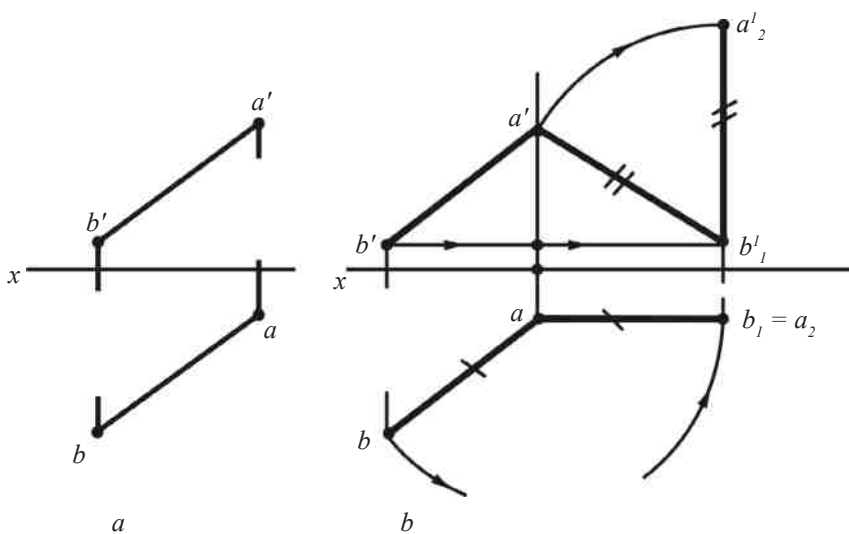


104-nji surat

Täze $b'a'_1 = AB$, $BA_1 \parallel V$. Umumy ýagdaýda berlen AB göni çyzyk, frontal şekiller tekizligine parallel ýagdaýy eýeleýär. Şonuň üçin hem goýlan meseläniň ikisi hem çözüldir.

4-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygy proyeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar bolan okuň daşynda yzygiderli aýlamak bilen ony H gorizonttal şekiller tekizligine perpendikulýar bolan ýagdaýyna getirmeli (105-nji surat).

Çözülişi: Şeýle ýagdaýa getirmek üçin diňe bir okuň daşynda aýlamaklyk ýeterlik däl, şonuň üçin ilki bilen AB göni çyzygy A nokadyň üstünden geçýän we H gorizonttal şekiller tekizlige perpendikulýar bolan aýlama okunyň daşynda aýlaýarys. Birinji aýlamadan soň göni çyzyk frontal proyeksiýalar tekizligine parallel bolan täze ýagdaýy eýelär. Şonuň üçin onuň gorizonttal proyeksiýasy $ab_1 \perp b'_1b_1$ bolar, frontal proyeksiýasy bolsa hakyky uzynlygynda proyektirlener, ýagny $AB_1 \parallel V$, $ab_1 \parallel ox$, onda $a'b'_1 = AB$.



105-nji surat

Ikinji gezek aýlamak üçin B nokadyň üstünden geçýän V frontal şekiler tekizlige perpendikulýar bolan aýlanma okuny alýarys. $a'b'_1$ frontal proyeksiýany wertikal ýagdaýa çenli aýlaýarys. Şeýle aýlamaklygyň netijesinde göni çyzyk H tekizlige perpendikulýar ýagdaýy ($A_2B_1 \perp H$) eýelär, şonuň üçin göni çyzygyň gorizontaal proyeksiýasy $a_2b'_1$ nokat bolup proyektirlener. Bu alnan $A_2B_1 \perp H$ gorizontaal proyektirleýji göni çyzyk bolar. Bu çyzygyň gorizontaal şekili $a_2b'_1$ nokatdyr, emma frontal şekili hakyky uzynlygyna deňdir: $a_2'b'_1 = AB$.

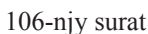
33.3. Tekizligi aýlamak

Tekizligi proyeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar okuň daşynda käbir burça aýlamak üçin tekizligi kesgitleýän elementleri (bir göniniň üstünde ýatmaýan üç nokady) şol burça aýlamak ýeterlikdir.

1-nji mesele. Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen P tekizligi gorizontaal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan I okuň daşynda a burça aýlamaly /106-njy surat/.

P tekizlige degişli we I aýlama okuň üstünden geçýän AB gorizontaal geçireliň. Aýlanma okuň gorizontaal proyeksiýasyndan (üstünde alnan θ nokatdan) P_H yza oc perpendikulýary indereliň we c

Frontal $\mathbf{P}_{\nu l}$ yzyny tapmak üçin $\mathbf{P}_{x l}$ -den başga-da, ikinji bir nokady tapmak gerek. Munuň üçin \mathbf{AB} gorizontalyň aýlanan täze $\mathbf{A}_l \mathbf{B}_l$ ýagdaýyny tapýarys. Aýlamadan oň hem, soň hem gorizontalyň gorizonta proyeksiýasy gorizonta yza paralleldigi üçin onuň $\mathbf{a}_l \mathbf{b}_l$ täze proyeksiýasy tekizligiň täze $\mathbf{P}_{H l}$ gorizonta yzyna parallel bolar. Gorizontalyň frontal proyeksiýasynyň ähli nokatlary \mathbf{OX} oka parallel bolan $\mathbf{a'b'}$ göni çyzyk boýunça öz orunlaryny üýtgetmelidirler.

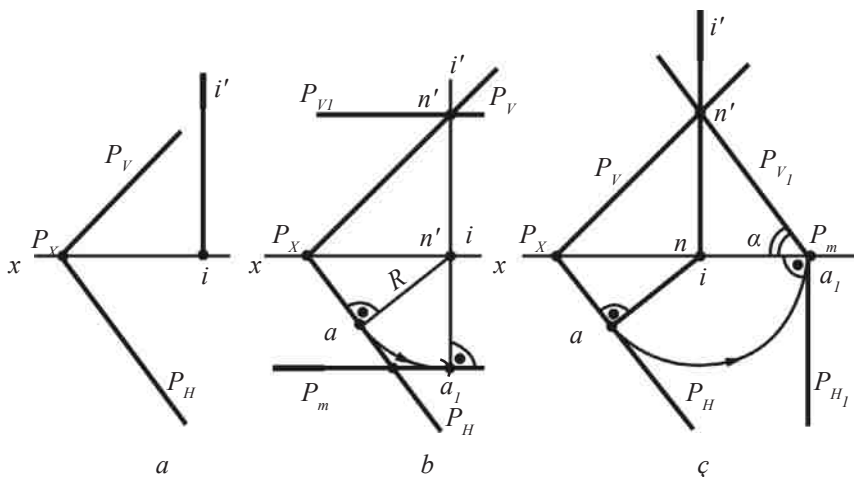


Täze \mathbf{P}_{i1} frontal yz yzlaryň birleşme nokady bolan \mathbf{P}_{x1} nokadyň we gorizontalyň frontal yzynyň (\mathbf{b}_I) frontal proyeksiýasynyň üstünden geçmelidir.

1. Profil proyektirleýji tekizlikilse (107-nji b surat),
2. Frontal proyektirleýji tekizlik bolýança aýlamaly (107-nji ç surat).

107-nji *b*, *ç* suratda frontal proyeksiýalar tekizliginde ýerleşen, $J \subset V$, H -gorizontal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan I okuň daşynda aýlanandan soň P tekizligiň iki sany täze ýagdaýy görkezilendir. P tekizlik aýlanmazýndan öň umumy haldaky tekizlikdir.

Birinji aýlanmadan soň P tekizlik P_1 tekizlige öwrülýär we profil proyektirleýji tekizlik emele gelýär: $P_{H1} \parallel OX$, $P_{V1} \parallel OX$. Aýlamaklyk dowam etdirilse P_1 tekizlik frontal-proyektirleýji P_2 tekizlige öwrüler: $P_{H2} \perp OX$. Aýlanma okuna perpendikulýar bolan gorizontal proyeksiýalar tekizligine berlen P tekizligiň ýapgyt burçy üýtgemän galar. P tekizligi P_2 (frontal-proyektirleýji) tekizlige öwürüp, P tekizligiň H tekizligine ýapgytlyk bolan α burçuny kesgitleýäris. Ýokardaky görkezilen P tekizligiň täze iki ýagdaýynda-da tekizligiň frontal yzlary aýlanma wagtynda üýtgemeyän N nokadyň üstünden geçerler.



107-nji surat

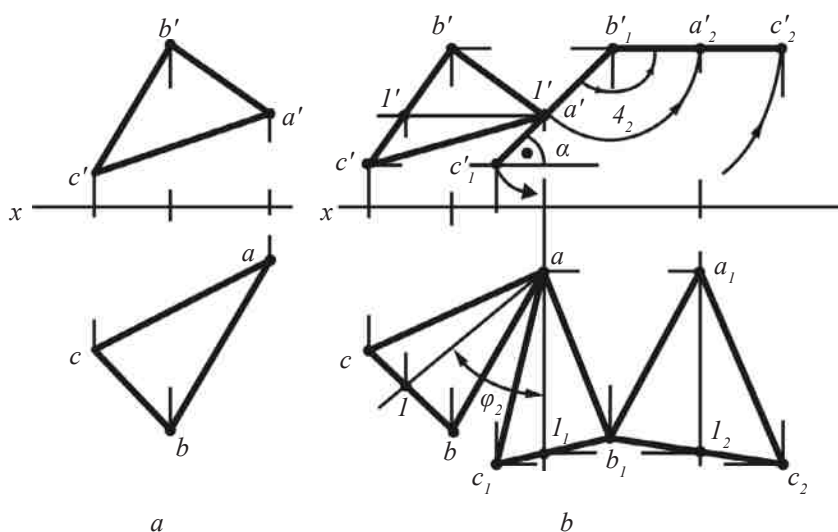
Şonuň ýaly-da P tekizligiň V tekizlige ýapgyt burçuny kesgitlemek üçin berlen tekizligi frontal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan okuň daşynda aýlamak gerek.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçlygyň hakyky ululygyny – meýdanyny tapmaly (108-nji surat).

Bu mesele proyeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar bolan iki okuň daşynda yzly-yzyna aýlamak bilen çözülýär. Aýlama oklar çyzgyda görkezilen dälär.

Üçburçlugy V frontal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar ýagdaýyna getirmek üçin ABC üçburçlygyň tekizligini H gorizonta şeriller tekizligine perpendikulýar we A depeden geçýän aýlama I okuň daşynda ilkinji gezek φ_1 burça aýlalyň. Şonda A nokat aýlama okuň üstünde ýatanlygy sebäpli giňişlikde öz ornuny üýtgetmez. Diýmek B we C iki depäni şol bir φ_1 burça aýlamak ýeterlidir.

Berlen ABC üçburçlyk I aýlanma okunyň daşynda aýlananda, onuň gorizonta proyeksiýasy öz ululygyny üýtgetmän, diňe ornuny üýtgedýär, sebäbi üçburçlugyň tekizliginiň H gorizonta şakiler tekizligine ýapgytlyk a burçy üýtgemän galýar.



108-nji surat

Eger bu tekizligiň üstünde beýleki tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk bar bolsa, onda ol tekizlikleriň özara perpendikulýar bolýandyklaryny biz geometriýadan bilýäris. Şonuň üçin üçburçlugyň tekizliginde AI gorizontaly guralyň we ony V frontal şakiler tekizligine perpendikulýar bolan AI_1 , ýagdaýyna çenli aýlalyň, şonda onuň gorizonta aI_1 proyeksiýasy OX okuna perpendikulýar bolýar.

Üçburçlugyň aýlanan ýagdaýda gorizonta proyeksiýasynyň öz ululygyny üýtgetmeýändigini üçin ony gorizontalyň aI proyeksiýasynyň üstünde gurmak bolar (sirkulyň kömegi bilen).

Aýlama wagtynda nokadyň b' we c' frontal proyeksiýalary OX okuna parallel bolan göni çyzyk boýunça orunlaryny üýtgederler we täze ýagdaýdaky b_1 we c_1 proyeksiýalardan geçirlen baglanyşyk çyzyklary bilen kesişýän nokatlarda ýatarlar.

Birinji gezek gorizontall proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlanandan soň berlen umumy ýagdaýdaky ABC üçburçlugyň täze ýagdaýy – **frontal proyektirleýji** AB_1C_1 bolan üçburçluk alyndy we bu üçburçlugyň gorizontall proyeksiýalar tekizligine ýapgytlyk α burçy tapyldy.

Ikinji gezek üçburçlugyň B depesinden geçýän frontal proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ikinji bir okuň daşynda aýlap, AB_1C_1 üçburçlugy H gorizontall şekiller tekizligine parallel $A_1B_1C_2$ ýagdaýyna getirýäris. Şol ýagdaýynda üçburçlugyň $a_1'b_1'c_2'$ frontal proyeksiýasy OX okuna parallel bolar. Üçburçlugyň $a_1b_1c_2$ gorizontall proyeksiýasy ABC üçburçlugyň hakyky ululygy bolar:

$$\Delta a_1b_1c_2 = \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_2.$$

Aýlama oklary soňabaka çyzgyda, köplenç halatlarda görkezilmeýär.

33.4. Tekiz – parallel orun üýtgetme usuly (Aýlama oky görkezmezden aýlamak)

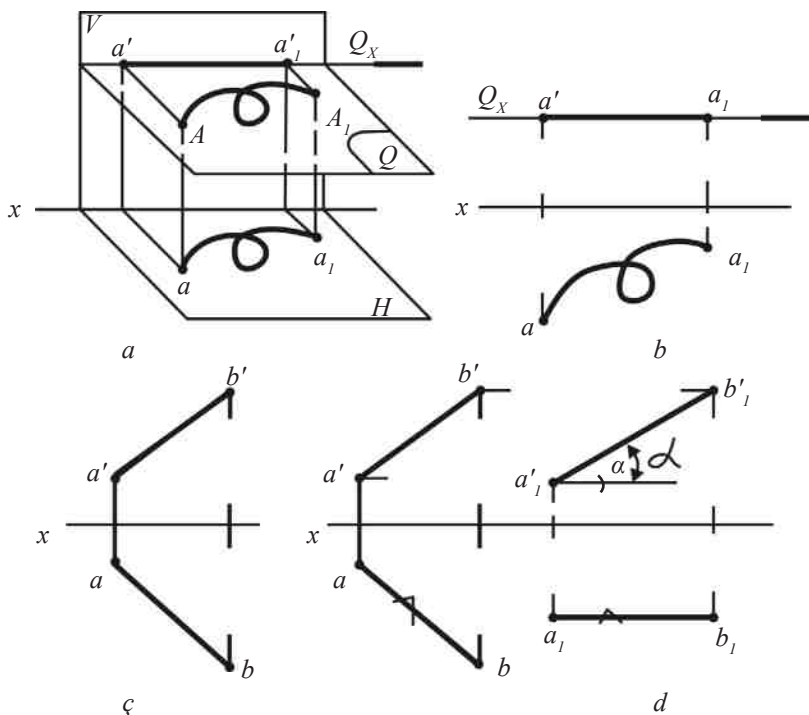
Tekiz – parallel orun üýtgetmeklik usulynda giňişlikde öz orunlaryny üýtgedýän geometrik figuralaryň ähli nokatlary proyeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolan tekizliklerde hereket edýärler. Şeýlelikde, bu orun üýtgetmegiň netijesinde **figuranyň** nokatlaryndan şol tekizlige çenli bolan aralyklar elmydama üýtgemeyärler. Hakykatdan-da figuranyň ornuny üýtgetmek üçin onuň haýsy hem bolsa bir göni çyzykly elementiniň ornuny üýtgetmek ýeterlikdir. Soňra orun üýtgedilen elementi boýunça figuranyň beýleki elementleriniň täze ornuny kesgitlemek bolar.

Göni çyzygyň kesiminiň ornuny islendik bir ýagdaýdan başga bir ýagdaýa, ýagny proyeksiýalar tekizligine tekiz – parallel orun üýtgetmek **anyklanmadyk okuň daşynda aýlamakdyr**.

Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlamaklyk tekiz-parallel orun üýtgetmekligiň hususy haly bolup biler.

Şu ýagdaýda proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamaklyga mahsus bolan usul peýdalanylýar, has takygy, bu ýerde gönüburçly proyektirlemekde ölçegleriň üýtgemeyänligi we proyeksiýalaryň beýleki proyeksiýalar tekizliginde proyeksiýalar okuna parallel göni çyzyklar (şol bir wagtyň özünde olar aýlama tekizlikleriniň yzlarydyr) boýunça öz orunlaryny üýtgedýändigleri göz önünde tutulýar.

Eger nokadyň we göni çyzygyň her bir nokadynyň (109-njy surat) ýa-da tekiz figuranyň (110-113-nji suratlar) proyeksiýalar tekizligine parallel bolan tekizligiň üstünde ornuny üýtgetsek ýa-da proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlasak, onda okuň şol tekizligiň üstündäki proyeksiýasy görnüşi boýunça-da, ululygy boýunça-da üýtmeýär, diňe proyeksiýalar okuna görä ýagdaýy üýtgeýär. Ikinji proyeksiýasy OX oka parallel göni çyzyk boýunça ornuny üýtgedýär.



109-njy surat

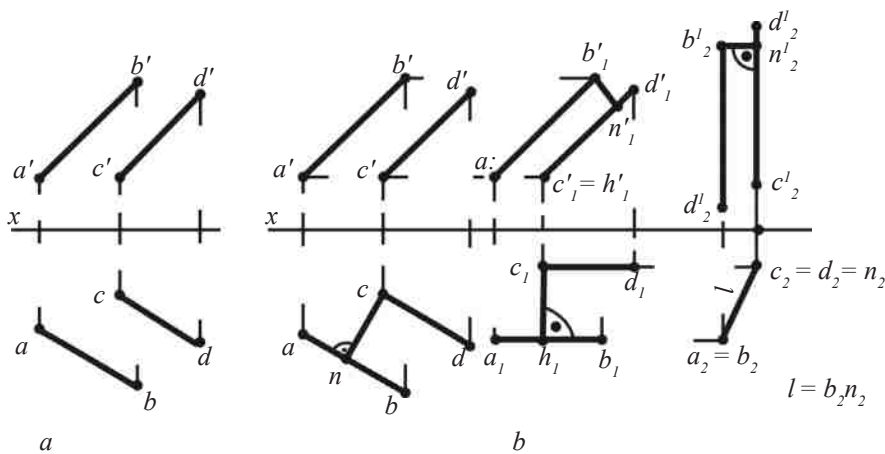
109-njy φ , d suratda tekiz parallel orun üýtgetmeklik bilen berlen AB göni çyzygyň hakyky uzynlygyny we gorizontaýl proyeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk α burçunyň kesgitlenişi görkezilendir. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

Aýlama okuna üns bermezden we aýlama radiusynyň ululygyny-uzynlygyny kesgitlemezden, aýlama usulyny ulanmak bolar. Figuranýň proyeksiýasyny üýtgetmezden, ony proyeksiýalar okuna görä gerekli ýagdaýyna öwürmek, soňra bolsa şu boýunça beýleki proyeksiýany gurmak ýeterlikdir.

Ýokardaky görkezilen (tekiz parallel orun üýtgetme) usulyny ulanyp, birnäçe meseleleri çözelin:

1-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky iki sany parallel AB we CD göni çyzyklaryň arasyndaky hakyky aralygy kesgitlemek talap edilýär (110-njy surat).

Eger parallel göni çyzyklar haýsy-da bolsa bir proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolsalar, onda olaryň arasyndaky iň ýakyn aralyk şol proyeksiýalar tekizligine hakyky ululygyn-da proyektirlenýär.



110-njy surat

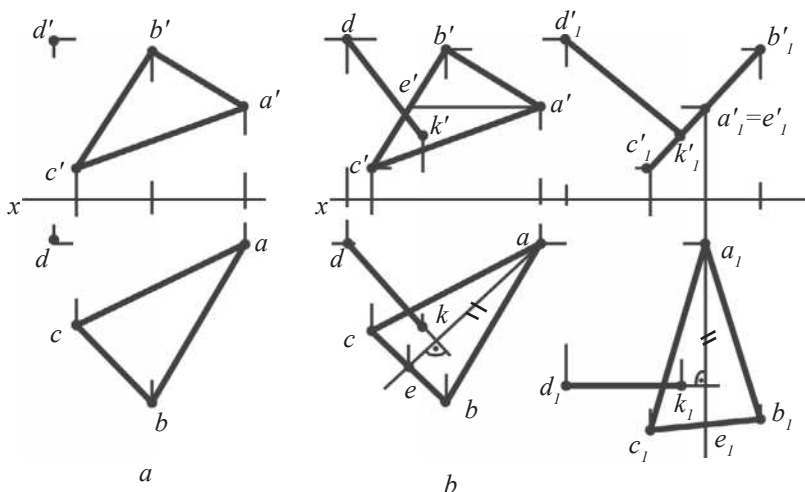
H gorizontaýl şekiller tekizlige perpendikulýar okuň daşynda birinji gezek aýlap, bu berlen umumy ýagdaýdaky AB we CD göni çyzyklary V frontal şekiller tekizlige **parallel** ýagdaýa çenli aýlanylýar, ýagny $A_1B_1 \parallel V$, $C_1D_1 \parallel V$ alynýar. Olary V frontal şekiller tekizlige

perpendikulyar okuň daşynda ikinji gezek aýlap, H gorizontaly şekiller tekizligine perpendikulyar ýagdaýa çenli aýlanylýar, ýagny $A_2B_2 \perp H$, $C_2D_2 \perp H$. Şonda A_2B_2 we C_2D_2 alan göni çyzyklaryň arasyndaky l aralygyň H gorizontaly şekiller tekizligine hakyky ululygynda proyektirlenýänligi çyzgydan görüňýär, ýagny

$$B_2N_2 \parallel H, D_2C_2 \perp H, l = b_2n_2; b_1^1n_1^1 \parallel OX.$$

2-nji mesele. D nokatdan umumy ýagdaýdaky ABC üçburçluga çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli (111-nji a, b surat).

Berlen D nokatdan umumy ýagdaýdaky ABC üçburçlugyň iň ýakyn aralygyny tapmak üçin ýokardaky görkezilen usuldan peýdalanalyň.



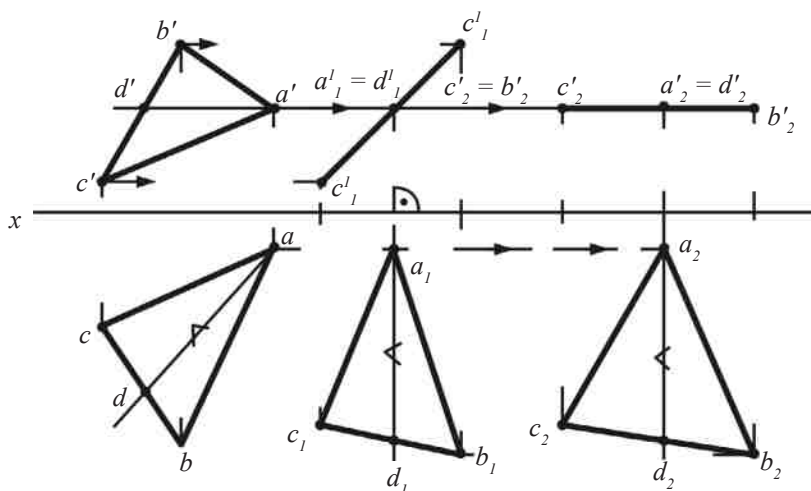
111-nji surat

ABC üçburçlugyň üstünde ýatan AE gorizontaly geçirip, D nokady we ABC üçburçlugy şol bir burça aýlap, $A_1B_1C_1$ frontal proyektirlýýi üçburçlugy we D_1 nokady gurýarys. Gözlenýän aralyk D_1 nokatdan $A_1B_1C_1$ üçburçluga inderilen D_1K_1 gözlenilýän iň ýakyn aralygyň hakyky uzynlygy bolýan bolsa, onda onuň gorizontaly proyeksiýasy OX oka paralleldir: $d_1k_1 \parallel OX$, ýa-da $D_1K_1 \parallel V$; $d_1k_1 \perp a_1e_1$.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçlugyň hakyky meýdanyny kesgitlemeli (112-nji surat).

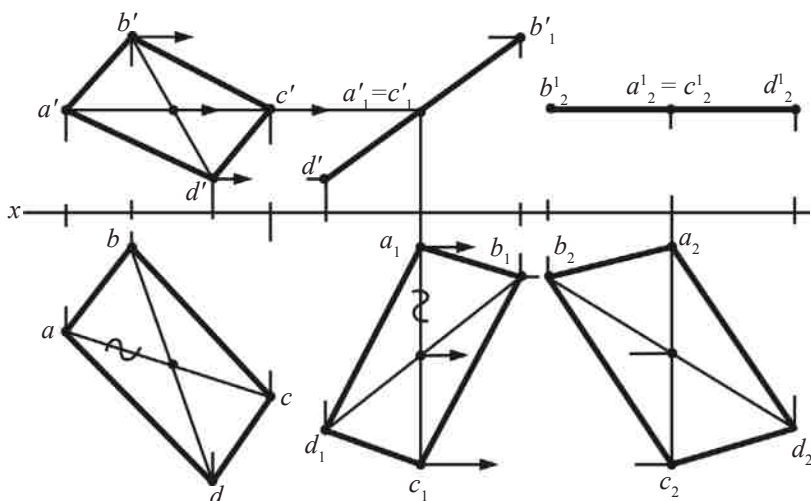
Bu meseläniň çözmek üçin ilki bilen umumy ýagdaýdaky ABC üçburçlugyň tekizligini proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulyar ($A_1B_1C_1 \perp V$) ýagdaýa çenli, soňra bolsa täze alnan $A_1B_1C_1$ üçburçlugy proyeksiýalar tekizlikleriniň beýlekisine parallel ($A_2B_2C_2 \parallel H$)

ýagdaýa çenli aýlap getirýäris, ýagny proyeksiýalar tekizliklerine, deňişlilikde perpendikulyar bolan aýlanma oklary görkezmezden – tekiz parallel orun üýtgetmek usuly boýunça aýlanma oklarynyň daşynda iki gezek yzygiderli aýlaýarys. Meseläniň doly yzygiderli çözülişi çyzgydan düşnüklidir: $\Delta ABC = \Delta A_2 B_2 C_2 = \Delta a_2 b_2 c_2$.



112-nji surat

4-nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen $ABCD$ dörtburçlugyň hakyky ululygyny – meýdanyny kesgitlemeli (113-nji surat).

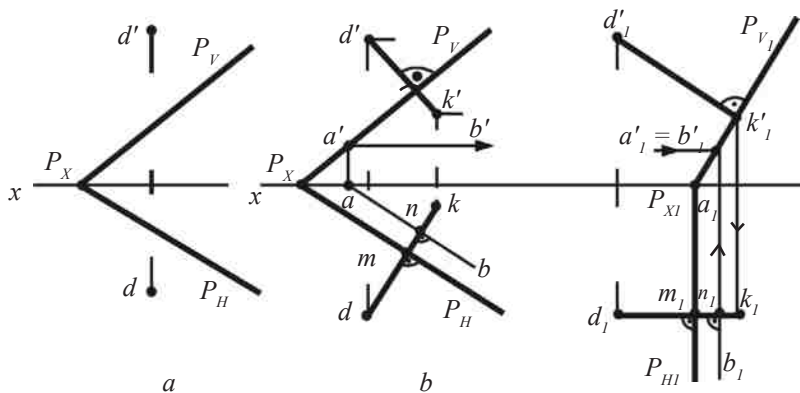


113-nji surat

Dörtburçlugyň $abcd$ gorizontaly projeksiýasyny AC gorizontaly (frontal) projeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolar ýaly edip, $A_1C_1 \perp V$, $a_1b_1c_1d_1$ täze ýagdaýa çenli ululygyny üýtgetmezden ornuny üýtgedýäris. Şonuň netijesinde tekizligiň täze $a'_1c'_1d'_1$ frontal projeksiýasy göni çyzyga öwürüler we $a'_1c'_1$ nokat bolar. Täze orny üýtgedip guran dörtburçlygymyz $A_1B_1C_1D_1 \perp V$ ýagdaýda şekillendiriler, ýagny frontal projektirleýji tekizlik bolar, şonuň üçin onuň $a'_1b'_1c'_1d'_1$ şekilleri göni çyzyk bolar.

Ikinji gezek orun üýtgedilende dörtburçlugyň $a'_1b'_1c'_1d'_1$ frontal projeksiýasy H gorizontaly şekiller tekizlige parallel bolan $a'_2b'_2c'_2d'_2$ täze ýagdaýy eýeleýär. Dörtburçlugyň täze guralan $a_2b_2c_2d_2$ gorizontaly projeksiýasy $ABCD$ dörtburçlugyň gözlenýän hakyky ululygy bolar: $a_2b_2c_2d_2 = ABCD$

5-nji mesele. D nokatdan yzlary bilen berlen umumy haldaky P tekizlige çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli (114-nji surat).



114-nji surat

Bu gözlenýän aralygy kesgitlemek üçin berlen umumy ýagdaýdaky P tekizligi hususy ýagdaýa – frontal (ýa-da gorizontaly) projektirleýji tekizligiň ýagdaýyna getirmeli. Şonda gözlenýän aralyk D nokadyň frontal projeksiýasyndan tekizligiň frontal yzyna inderilen perpendikulýar bilen kesgittelener:

$$l = d'_1k'_1 = DK; \quad d'_1k'_1 \perp P_{v1}; \quad d_1k_1 \parallel OX; \quad d_1k_1 \parallel V.$$

Meseläniň çözgüdi şu aşakdaky yzygiderlilige syrygýar:

1. P tekizligiň AB gorizontalyny geçirýäris.

2. D nokadyň gorizental d proyeksiýasyndan P tekizligiň gorizental P_H yzyna we gorizontalyň ab gorizental proyeksiýasyna perpendikulýar inderýäris.

3. H tekizlige perpendikulýar okuň daşynda aýlanandan soň tekizligiň P_H gorizental yzy OX oka perpendikulýar bolar, d_1 nokat we a_1b_1 proyeksiýa $d_1m_1=dm$; $m_1n_1=mn$ aralykda ýerleşer.

4. Gorizontalyň $a_1'b_1'$ frontal proyeksiýasyny we nokadyň d_1' frontal proyeksiýasyny adaty usul bilen tapýars.

5. D nokatdan P tekizlige çenli gözlenýän aralyk $d_1'k_1'$ bolar, ýagny

$$D_1K_1=d_1'k_1'=DK; \quad d_1k_1 \parallel OX, \quad d_1k_1 \perp P_{HH}; \quad dk \perp P_H;$$

$$d_1'k_1' \perp P_{V1}; \quad d_1'k' \perp P_V; \quad d_1k_1 \parallel V;$$

Öz-özüni barlamak üçin soraglar we meseleler

1. Proyeksiýalary özgertmegiň usullary nähili maksatlar üçin ulanylýar?

2. Geometrik elementleriň proyeksiýalaryny üýtgetmeklik haýsy ýollar bilen amala aşyrylyp bilner?

3. Aýlamak usulynyň esaslanýan esasy ýagdaýlaryny kesgitläň.

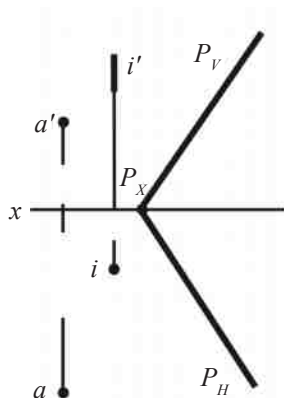
4. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda nokadyň proyeksiýalarynyň üýtgeýşiniň kanunalaýyklygy nähili?

5. Berlen A nokady I okuň daşynda aýlap, umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen P tekizligiň üstüne düşürmeli (115-nji surat).

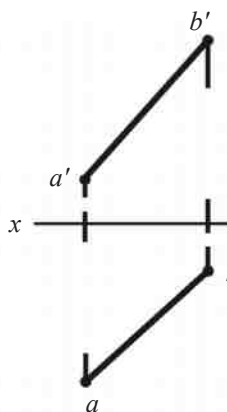
Meseläni çözmek üçin görkezme. Aýlamakdan soň A nokat özüniň aýlanma tekizligi bilen berlen P tekizligiň kesişme çyzygynyň üstünde ýatmalydyr.

6. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda göni çyzygyň proyeksiýalarynyň üýtgeýşiniň kanunalaýyklygy nähili?

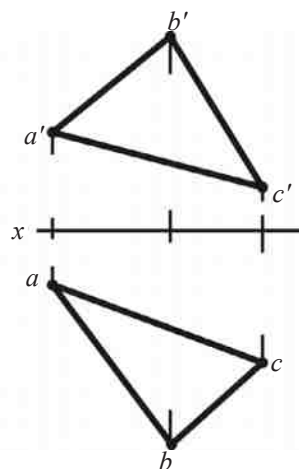
7. V *frontal şekiller* tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak bilen AB kesimiň uzynlygyny kesgitlemeli.



115-nji surat



116-njy surat



117-nji surat

Meseläni çözmek üçin görkezme. Aýlama okuny kesimiň haýsy hem bolsa bir ujundan geçýän edip almaly we kesimi **H** gorizontál şekiler tekizligine parallel ýagdaýa çenli aýlamaly (116-njy surat).

8. ABC üçburçlugyň tekizliginiň **V frontal şekiller** tekizlige ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli (117-nji surat) we bu üçburçlugyň meýdanyny kesgitlemeli.

9. Aýlanyş oky görkezilmedik ýagdaýda (tekiz parallel ornuny üýtgetmek usuly) aýlamak usuly nämä esaslandyrylýar?

34. PROJÉKSIÝALAR TEKIZLIGINE PARALLEL OKUŇ DAŞYŇDA AÝLAMAK

34.1. Nokady gorizontál göni çyzygyň daşynda aýlamak

Bize belli bolşy ýaly, nokat okuň daşynda aýlananda, şol nokat aýlama okuna perpendikulýar tekizligiň üstünde töweregiň dugasy boýunça aýlanýar.

1-nji mesele. A nokady berlen **NB** gorizontál-aýlama okuň daşynda aýlap, nokat bilen okuň iň ýakyn aralygyny kesgitlemeli (118-nji surat).

gabat gelyän ao perpendikulýaryň üstünde 0 nokatdan başlap, islendik tarapa ölçäp goýmak bolar. Şeýlelik bilen biz A nokady T aýlama tekizliginde NB okunyň daşynda aýlap, R_A aýlama radiusynyň H gorizental şekiller tekizligine parallel ýagdaýyny tapdyk. Başgaça aýdanyňda, A nokatdan H gorizental şekiller tekizligine çenli bolan aralyk NB gorizontalyň H gorizental şekiller tekizligine çenli bolan aralygyna deňdir, ýagny a_1o aralyk A nokatda aýlama NB okuna çenli aralyga deňdir.

a_1 berlen A nokadyň aýlanan ýagdaýdaky täze alnan gorizental proyeksiýasydyr. Nokadyň a_1' frontal proyeksiýasy a_1 nokadyň üstünden geçýän proyeksion – baglanyşyk çyzygynyň kömegi bilen kesgitlenýär we ol gorizental göni çyzygyň $n'b'$ frontal proyeksiýasynyň üstünde ýatandyr. Aýlamany a_1 nokatda durman a_2 nokada çenli aýlamak bolar. Bu ýagdaýda oa_2 aralyk gözlenýän aralyk bolar, ýagny

$$oa_1 = oa_2, \quad a_2 \text{ nokadyň tapylyşy çyzgydan düşnüklidir.}$$

34.2. Tekiz figurany gorizentalynyň daşynda aýlamak

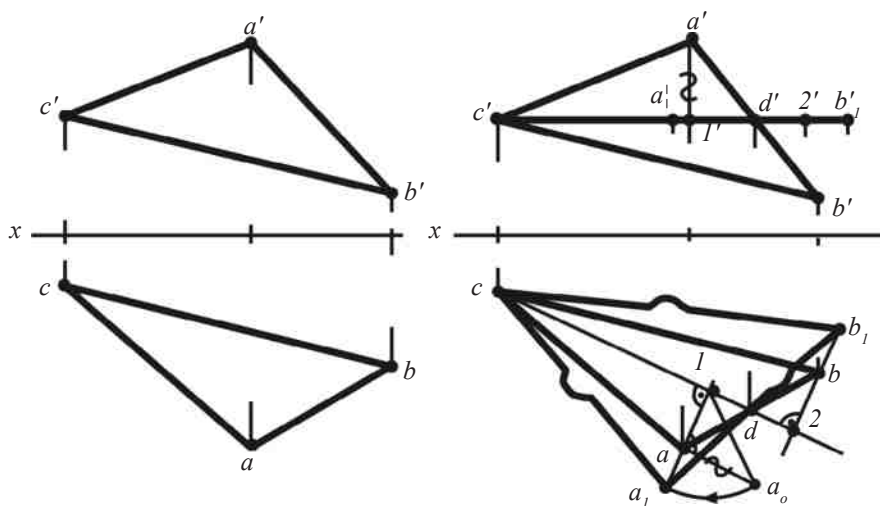
Tekiz figuranyň hakyky ululygyny – meýdanyny aňsat we gysga ýol bilen, ýagny diňe bir okuň gorizentalynyň ýa-da frontalynyň daşynda aýlamak bilen hem tapyp bolar.

Berlen tekizligiň gorizentalynyň daşynda aýlamaklyga garap geçeliň.

1-nji mesele. Erkin berlen ABC üçburçlugyň hakyky ululygyny – meýdanyny gorizentalynyň daşynda aýlap kesgitlemeli (*119-njy surat*).

Eger tekiz figurany diňe bir gezek aýlap, H gorizental şekiller tekizlige parallel ýagdaýda goýmaly bolsa, onda aýlama okuny figuranyň tekizliginiň üstünde almaly, özüňem ol alnan göni çyzyk-aýlama ok H gorizental şekiller tekizlige parallel bolmaly, ýagny berlen tekiz figuranyň islendik gorizontallarynyň biri bolmaly.

Üçburçlugyň tekizligi H gorizental şekiller tekizlige parallel bolan halatda, üçburçlugyň her bir depesiniň proyeksiýasy aýlama okundan şol nokadyň aýlama radiusyna deň aralyga süýşer.



119-njy surat

Meseläniň çözülişi şeýle yzygiderlilikde ýerine ýetirilýär:

1. Berlen umumy haldaky ABC üçburçlugyň tekizliginde $C(c, c')$ depesiniň üstünden geçýän aýlama oky hökmünde $SD(sd, sd')$ gorizontaly geçirýäris, şonda $C(c, c')$ we $D(d, d')$ nokatlar aýlama okuň (gorizontalyň) üstünde ýatanlygy sebäpli öz orunlaryny üýtgetmezler.

2. Üçburçlugyň $A(a, a')$ we $B(b, b')$ depesinden aýlama oky bolan SD -ä perpendikulýar göni çyzyklaryň poýeksiýasyny geçirýäris ($a_1 \perp cd$, $b_2 \perp cd$), şol göni çyzyklar boýunça hem aýlanýan nokatlaryň gorizontaly poýeksiýalary orunlaryny üýtgedýärler. Sebäbi, gorizontalyň daşynda aýlananda her bir nokat giňişlikde göni burçuň poýeksiýasy hakynda teorema esasynda töweregiň dugasyny çyzýar. Ol bolsa H gorizontalyň tekizlige parallel aýlama oky bolan CD gorizontalyň cd gorizontaly poýeksiýasyna perpendikulýar göni çyzyk bolup poýektirlenýär, ýagny $a_1 \perp cd$, $b_2 \perp cd$.

3. Üçburçlugyň A depesiniň aýlama radiusynyň poýeksiýasyny gurýarys. $1a, 1'a'$ – iki poýeksiýa boýunça R_A aýlama radiusyň hakyky uzynlygyny kesgitleýäris, $R_A = 1a_0$

Aýlama radiusy H gorizontalyň tekizligine parallel bolýança $A(a, a')$ nokady şol gorizontalyň daşynda aýlaýarys: $1a$ – A nokadyň aýlanma radiusynyň gorizontaly poýeksiýasydyr. $1'a'$ – aýlanma radiusynyň frontal poýeksiýasydyr, bu aralyk çyzgyda bi-

rikdirilen dälidir. $a_0 1$ – şol aýlama **radiusyň hakyky uzynlygydyr**, ol gönüburçly üçburçluk gurmak ýoly bilen kesgitlenendir.

4. $R_A = a_0 1$ ululygy perpendikulýaryň üstünde merkezi **1** – nokatdan başlap islendik tarapa ölçäp **1a** çyzygyň dowamynda **1a₀** goýmak bilen, **1a₁** alarys, ýagny **ABC** üçburçluk gorizonta, proyeksiýalar tekizligine parallel bolan ýagdaýda **A** depäniň in soňky ýagdaýdaky **a₁** täze proyeksiýasyny taparys.

5. Täze alnan **a₁** we üýtgemän duran **d** nokadyň üstünden göni çyzyk geçirýäris. Ony **B** depäniň **b** gorizonta proyeksiýasynyň ornuny üýtgedýän **b2** göni çyzygy bilen kesişýänçä dowam etdirýäris, we **b₁** nokady, ýagny **B** nokadyň aýlanandan soňky täze **b₁** proyeksiýasyny tapýarys (anyklaýarys).

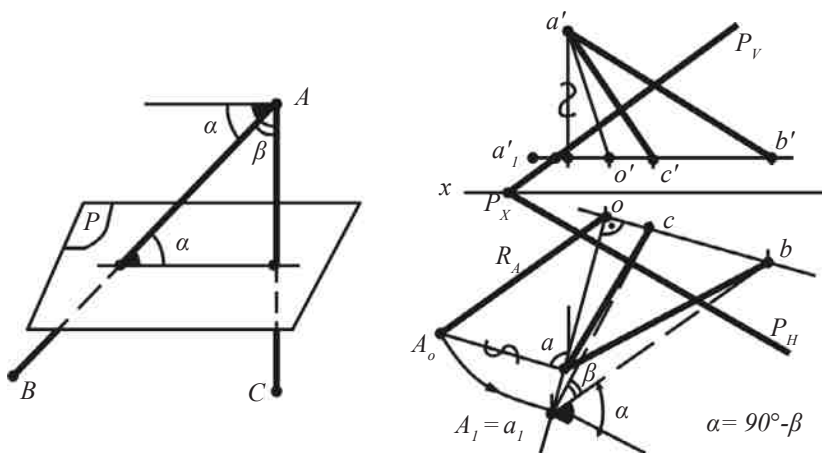
6. Tapylan **b₁** we **a₁** nokatlary **C** nokat bilen birleşdirip, aýlanandan soňky ýagdaýda üçburçlugyň **a₁ b₁ c** gorizonta proyeksiýasyny alarys, ol hem gözlenilýän üçburçlugyň hakyky ululygyna meýdanyna deňdir $\Delta a_1 b_1 c = \Delta A_1 B_1 C = \Delta ABC$. Aýlanandan soň üçburçlugyň **a₁' b₁' c'** frontal proyeksiýasy gorizontalyň frontal proyeksiýasy bilen gabat gelýär we **OX** oka paralleldir. Diýmek, umumy ýagdaýda berlen **ABC** üçburçluk aýlandyrylandan soň **H** gorizonta proyeksiýalar tekizligine parallel $\Delta ABC \parallel H$ ýagdaýy eýeleýär, şonuň üçin-de $\Delta A_1 B_1 C = \Delta ABC$.

2-nji mesele. Giňişlikde erkin ýerleşen **AB** göni çyzyk we yzlary bilen berlen umumy haldaky **P** tekizligiň arasyndaky ýapgytlyk burçy tapmaly (*120-nji surat*). Bize geometriýadan belli bolşy ýaly tekizlik bilen göni çyzygyň arasyndaky ýapgytlyk burç göni çyzygyň şol tekizligiň üstündäki öz proyeksiýasy bilen emele getirýän burçuna deňdir.

Eger diňe burçuň ululygyny kesgitlemek talap edilýän bolsa, onda bu burçuň proyeksiýasyny gurmak hökman dälidir. Ilki berlen **AB** göni çyzyk bilen **P** tekizlige şol göni çyzygyň **A** nokadyndan inderilen perpendikulýaryň arasyndaky dolduryjy **β** burçy kesgitläliň.

Berlen **AB** göni çyzygyň **A** nokadyndan **P** tekizlige **AC** perpendikulýar inderýäris we **AB** göni çyzygyň **P** tekizlik bilen emele getirýän **α** burçuny dolduryjy **β** burçy gurýarys.

AB göni çyzygyň erkin **B** nokadynyň üstünden **<BAC** burçuň tekizliginde **BC** gorizontaly geçirýäris. **BC** gorizontalyň daşynda aýlamak bilen alnan **CAB** üçburçlugyň tekizligini **H** gorizonta şekiller tekizlige parallel ýerleşdirýäris. Aýlama wagtynda aýlama okunyň üstündäki **C**



120-nji surat

we B nokatlar orunlaryny üýtgetmeýärler, emma A nokat gorizontel proyeksiýalar tekizliginde aýlama okuna perpendikulýar bolan tekizlige degişli oa perpendikulýar boýunça ornuny üýtgedýär.

R_A —aýlanma radiusyň hakyky ululygyny – uzynlygyny kesgitläp, cA_1b burçy gurýarys, ýagny $\Delta A_1bc = \Delta ABC$; $\Delta A_1bc \parallel H$, $\Delta A_1b'c' \equiv b'c'a'$. Täze cA_1b burçuň gorizontel proyeksiýasy \widehat{CAB} burça, ýagny β burça deň diýip ýazmak bolar: $\angle cA_1b = \angle CAB = \beta$. Gözlenýän burç $a = 90^\circ - \beta$ deňdir.

35. PROJĖKSIÝALAR TEKIZLIGINIŇ ÜSTÜNDE ÝATAN OKUŇ DAŞYNDAAÝLAMAK

35.1. Utgaşdyrmak usuly

Utgaşdyrma usuly proyeksiýalar tekizliginiň üstünde ýatan okuň daşynda aýlamakdyr, ýagny berlen tekizligiň yzynyň daşynda aýlamakdyr. Aýlama okunyň deregine tekizligiň yzyny alyp, yzlary bilen berlen tekizligi proyeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrmak aýlamaklygynyň hususy halydyr.

Figuranyň hakyky ululygyny kesgitlemek ýa-da figuranyň geometrik ölçegleri boýunça onuň proyeksiýasyny kesgitlemek talap edilende, şol figuranyň yzlaryny tapyp, şondan soň utgaşdyrma usuly peýdalanylýar.

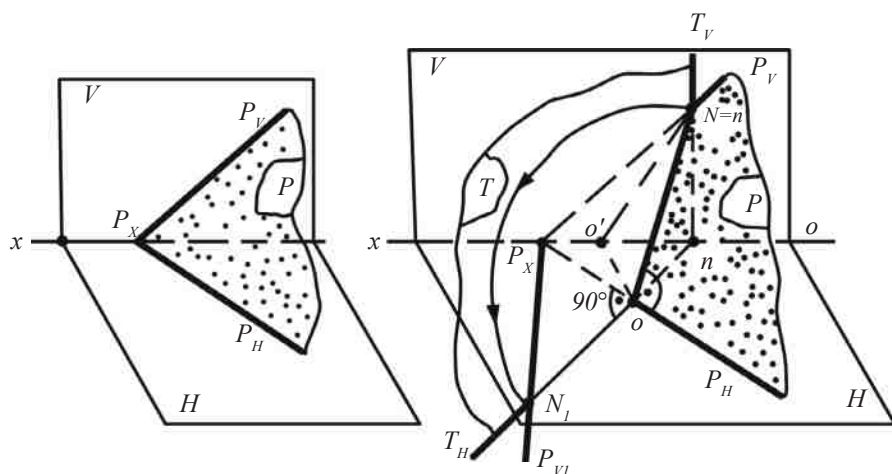
Utgaşdyrma usuly şundan ybaratdyr: ýagny berlen P tekizligi, degişlilikde H gorizental ýa-da V frontal şekiller tekizlik bilen utgaşýança onuň P_H gorizental ýa-da P_V frontal yzynyň daşynda aýlaýarlar. P tekizlikde ýatan ähli geometrik elementler utgaşdyrylan ýagdaýda H gorizental ýa-da V frontal şekiller tekizliginde üýtgedilmezden natural ýagdaýynda şekillendirilýär.

Utgaşdyrma usuly diňe **metrik (ölçeg)** meselelerini çözmek üçin ulanylýar.

1-nji mesele. Giňişlikde umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen P tekizligi gorizental proyeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrmaly (121-nji we 122-nji suratlar).

121-nji suratda utgaşdyrma usulynyň manysy çyzygyda düşündirilendir we görkezilendir. Berlen P tekizligi P_H yzyň daşynda H gorizental şekiller tekizlik bilen utgaşýança aýlaýarys. Şonda P tekizlikde ýatan figuranyň ähli nokatlary H gorizental şekiller tekizliginiň üstüne düşer we figuranyň hakyky **ululygyna – meýdanyna** deň bolan şekilini alarys.

Utgaşdyrmagy ýerine ýetirmek üçin aýlanyş oky hökmünde tekizligiň kabul edilen P_H yzynyň gozganmaýandygyny göz önüne tutmak gerek.



121-nji surat

P tekizligi H gorizental şekiller tekizligi bilen utgaşdyrmak üçin P tekizligiň diňe islendik nokadyny şu tekizlik bilen utgaşdyrmak ýeterlidir. Şonuň üçin P tekizligiň P_V frontal yzyň üstünde ýatan islendik

N nokady almak has maksadalaýyk bolar. Alnan N nokadyň üstünden aýlanma oky bolan P_H yza perpendikulýar bolan kömekçi **gorizontal proyektirleýji** T tekizligi geçirýäris. Bu geçirilen tekizlik berlen P tekizlige perpendikulýardyr. T tekizlik N nokadyň aýlama tekizligidir. T tekizlik aýlama oky bilen O nokatda kesişýär. Alnan O nokat aýlama merkezi bolar. ON bolsa aýlama radiusydyr. N nokadyň täze n^1 ýagdaýynyň alnyşy çyzgydan düşnüklidir. N nokat T aýlama tekizliginiň üstünde ornuny üýtgedip T_H yza çenli aýlanyp, H gorizontal şekiller tekizlik bilen utgaşan N_I ýagdaýy eýeleýär.

Utgaşdyrylan P_{v1} frontal yzy kesgitlemek üçin P_v frontal yzyň üstünde alnan N nokadyň täze N_I ornuny tapmaly we ony birleşme nokady bolan P_X bilen göni çyzyk arkaly birleşdirmeli, şonda

$$P_X n^1 = P_X N_1 = P_X N = ON; \quad O_I N(on, o^1 n^1) = R_N = ON_o$$

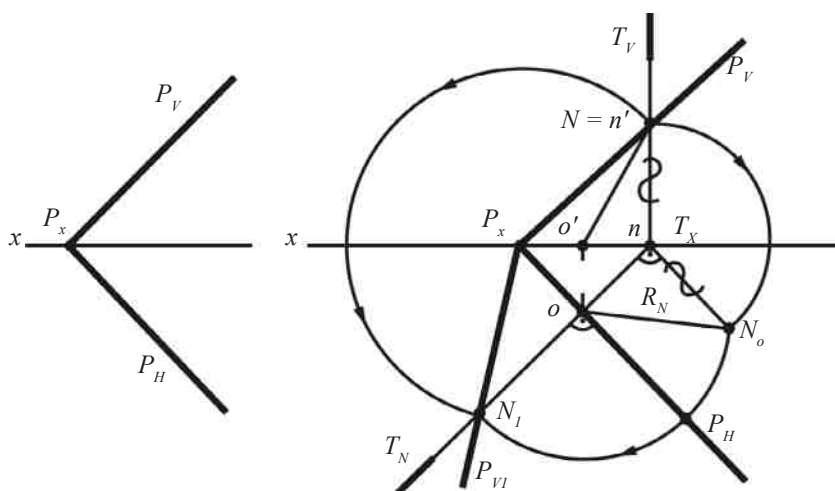
deňligi göz önünde tutmaly.

121-nji suratda P_H yzyň daşynda aýlananda P tekizligiň giňişlikdäki ornunyň üýtgeýşi we H gorizontal şekiller tekizlik bilen utgaşan ýagdaýy görkezilendir.

Ortogonal çyzgyda (122-njy surat) N nokadyň utgaşdyrylan ýagdaýyny gurmak üçin berlen P tekizligiň P_v yzyynyň üstünde ýatan islendik $N(n, n')$ nokady alýarys. $ON_o = R_N$. R aýlama radiusyň hakyky ululygyny ON_o gönüburçly üçburçlukdan kesgitleýäris. ON_o alnan ululygy n nokatdan P_H yza inderilen perpendikulýaryň üstünde O nokatdan başlap ölçäp goýýarys we $N(n_1 n^1)$ nokadyň H tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýyndaky N_1 nokady alýarys ýa-da çyzgydan görnüşi ýaly. N_1 nokady ON_o radius bilen çyzylan duganyň aýlama radiusyň On proyeksiýasynyň dowamy bilen kesişdirip gurmak bolar.

Ortogonal çyzgyda N_I nokadyň ýagdaýyny ýene-de aşakdaky ýaly kesgitlemek bolar.

P tekizligiň P_v frontal yzyynyň üstünde islendik n^1 nokady saýlap alýarys, ol nokatdan OX oka perpendikulýar inderýäris we N nokadyň gorizontal n proyeksiýasyny tapýarys.



122-njy surat

Alnan n nokatdan P_H yza perpenikulýar inderýäris we $P_x n^1$ radius bilen duga çyzýars. Bu duganyň P_H yza inderilen nO perpendikulýar bilen kesişme nokady hem N_I nokady kesgitleýär.

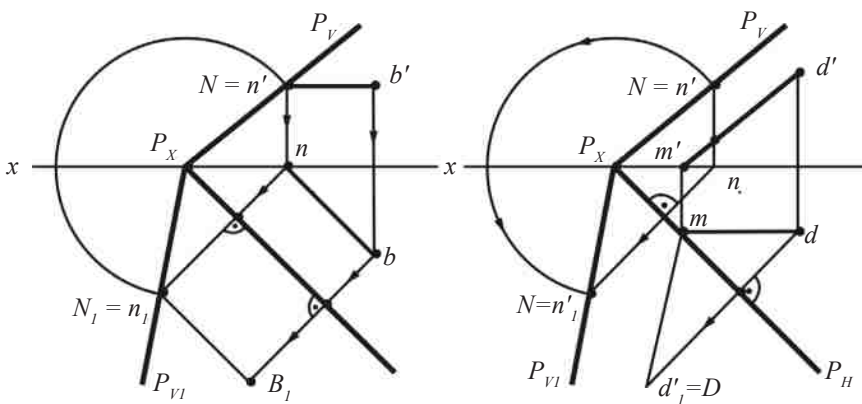
Yzlaryň birleşýän P_x nokadyny N_I nokat bilen birleşdirip, P_{VI} frontal yzyň utgaşdyrylan täze ýagdaýyny alarys. $P_x n^1$ we $P_x N_I$ kesimleriniň proyeksiýalar tekizliklerine özläriniň hakyky ululyklarynda proyektirlenýändigini üçin munuň özi mümkindir.

P tekizlik P_V yzyň daşynda aýlananda hem edil ýokardakı meňzeş gurluş emele geler, ýagny P_H gorizontaly yz V frontal proyeksiýa tekizligi bilen utgaşar.

35.2. Tekizligiň esasy çyzyklaryny utgaşdyrmak

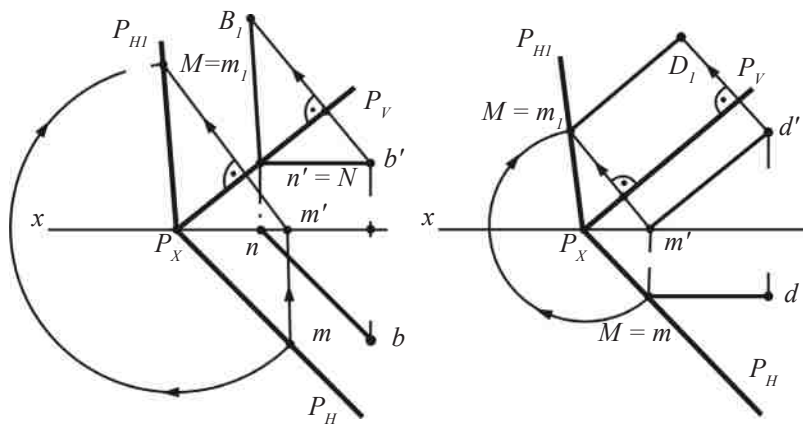
1-nji mesele. P tekizligiň NB gorizontalyny we MD frontalyny H gorizontalyň tekizligi bilen utgaşdyrmaly (123-nji surat).

NB gorizontalyň P_H gorizontaly yza paralleldigi üçin H gorizontalyň tekizligi bilen utgaşdyrylanda, ol utgaşdyrylan $N_I B_I$ gorizontaly P_H yza parallel bolar, ýagny $N_I B_I \parallel P_H$. Tekizligiň MD frontaly H gorizontalyň tekizligi bilen utgaşdyrylan ýagdaýda P_{VI} yza paralleldir: $MD_I \parallel P_{VI}$.



123-nji surat

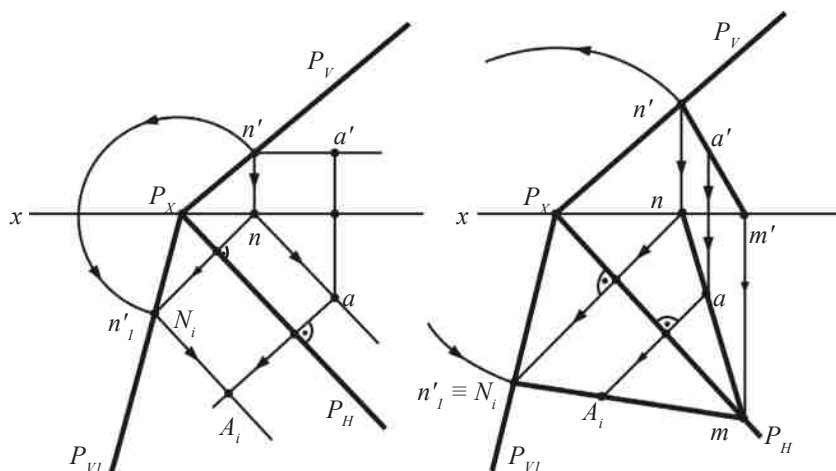
2-nji mesele. P tekizligiň NB gorizontálny we MD frontalyny V frontal şekiller tekizligi bilen utgaşdyrmaly. Eger P tekizlik frontal proyeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrylan bolsa, onda utgaşdyrylan ýagdaýdaky gorizont $NB_I \parallel P_{HI}$ frontal $M_I D_I \parallel P_V$ bolar (124-nji surat).



124-nji surat

Giňişlikde berlen P tekizlik H gorizont şekiller tekizligi bilen utgaşdyrylanda, tekizligiň islendik nokadynyň utgaşdyrylan ýagdaýy tekizligiň esasy çyzyklary bilen nokadyň gorizont proyeksiýasyndan aýlanma oky bolan P_H gorizont yzyna inderilen perpendikulýaryň kesişmeginde alynýar (124-nji surat).

3-nji mesele. P tekizlikde ýatan A nokadyň a' frontal proyeksiýasy boýunça gorizontalk bilen utgaşdyrylan ýagdaýyny tapmaly (125-nji surat).



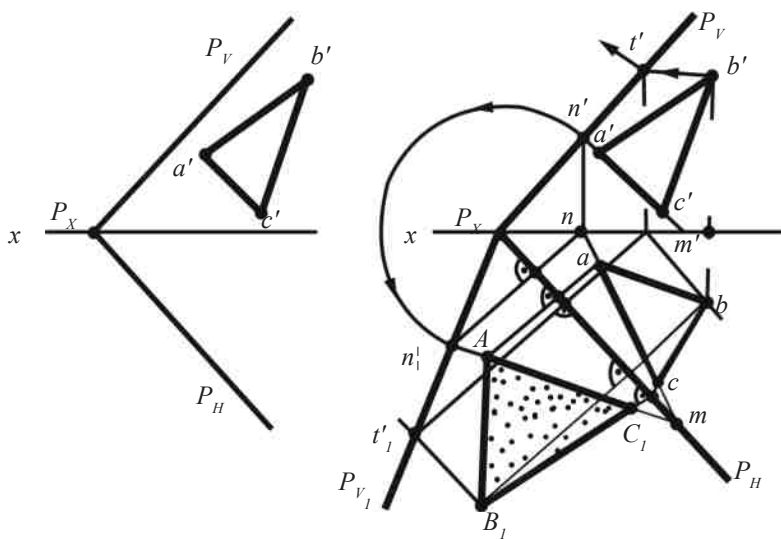
125-nji surat

Bu ýagdaýda A nokadyň üstünden geçýän we P tekizlikde ýatan AN gorizontalyň 125-nji a suratda we umumy ýagdaýdaky MN göni çyzygyň kömegi bilen 125-nji b suratda nokadyň utgaşdyrylan A_i ýagdaýynyň tapylyşy görkezilendir. Gurluşy çyzygydan düşnüklidir. Tapylyş usullaryna, haýsy usulyň amatlydygyna üns beriň, derňäň.

35.3. Yzlary bilen berlen umumy haldaky tekizligiň üstünde ýatan tekiz figuranyň hakyky ululygyny kesgitlemek

1-nji mesele. Umumy haldaky P tekizligiň üstünde ýerleşen ABC üçburçlugyň frontal proyeksiýasy boýunça hakyky ululygyny tapmaly (126-njy surat).

Bu meseläni çözmek üçin umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçlugyň $a'b'c'$ üçburçlugyň frontal şekili boýunça onuň gorizontalk şekili abc tapylyar.



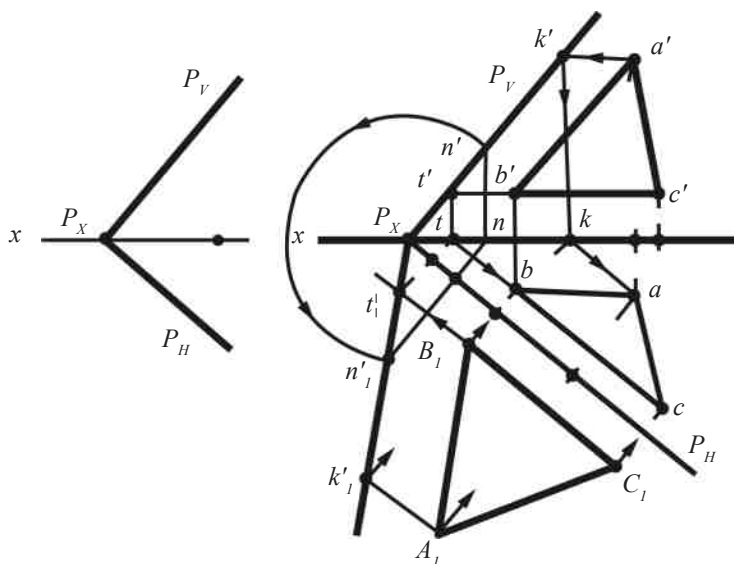
126-njy surat

Umumy haldaky P tekizligiň üstünde ýerleşen ABC üçburçlugyň hakyky ululygyny tapmak üçin P_H yzyň daşynda aýlamak bilen P tekizlik şonuň bilen birlikde üstünde ýatan ABC üçburçluk hem H gorizontaň şekilleri tekizlik bilen utgaşdyrylýar. Üçburçlugyň A_1, B_1, C_1 depeleriniň utgaşdyrylan ýagdaýy kesgitlenýär. Munuň üçin tekiz figuranyň, ýagny üçburçlugyň AC tarapynyň üstünden geçýän umumy ýagdaýdaky MN göni çyzygy hem-de B depesinde geçýän BT_1 gorizonta peýdalanylýar. Täze utgaşdyrylyp tapylan A_1, B_1, C_1 berlen ABC üçburçlugyň hakyky ululygydyr:

$$\Delta A_1 B_1 C_1 = \Delta ABC; \quad \Delta A_1 B_1 C_1 \subset H.$$

2-nji mesele. Giňişlikde erkin ýerleşen P tekizligiň üstünde deňtaraply üçburçluk gurmaly (127-nji surat)

Meseläni çözmek üçin görkezme. P tekizligi proyeksiýalar tekizliginiň haýsy hem bolsa biri bilen utgaşdyrmaly we utgaşdyrylan ýagdaýda tekizligiň üstünde deňtaraply üçburçluk gurmaly. Soňra P tekizligi üçburçluk bilen bilelikde ilki başdaky berlen ýagdaýyna aýlap getirmeli, ýagny üçburçlugyň gorizonta we frontal proyeksiýalaryny gurmaly.



127-nji surat

Meseläni çözmek üçin P tekizligiň üstünde alnan islendik $N(n, n')$ nokadyň kömegi bilen P tekizligi H gorizontaly şekiller tekizlik bilen utgaşdyrýarys we utgaşdyrylan ýagdaýda tekizligiň üstünde ýatan deňtaraply $A_1B_1C_1$ üçburçlugy gurýarys.

Gurluşy ýönekeýleşdirmek üçin üçburçlugyň B_1C_1 tarapy tekizligiň P_H yzyna parallel ýerleşdirildi we üçburçlugyň A üçünji depesi guruldy.

A_1 nokadyň proyeksiýalaryny gurmak üçin bu nokadyň üstünden P tekizligiň gorizontaly utgaşdyrylan ýagdaýda P_H yza parallel edilip geçirilýär we utgaşdyrylan P_V yz bilen kesişme nokat bolan k' alynýär.

K_1 nokatdan P_H yza perpendikulýar geçirilýär we ony OX oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, K nokat tapylýär. K nokatdan OX oka perpendikulýar galdyrylýär we ol P_V yz bilen kesişýänçä dowam etdirilip, k' nokat kesgitlenýär. k hem-de k' nokatlaryň üstünden P tekizligiň üstünde ýatan A nokatdan gorizontalyň gorizontaly we frontal proyeksiýalary geçirilýär.

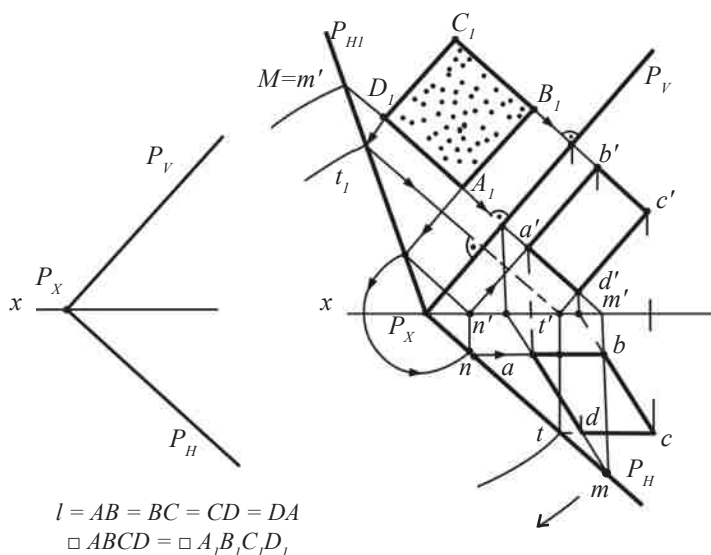
Gorizontalyň gorizontaly proyeksiýasy bilen A_1 nokatdan P_H yza inderilen perpendikulýaryň kesişýän ýerinde nokadyň a gorizontaly proyeksiýasy bilen a gorizontaly proyeksiýanyň üstünden geçirilen

projeksion-baglanyşyk çyzygynyň kesişme nokady bolsa a^1 nokadyň gözlenýän frontal proyeksiýasydyr. Gurluş çyzygydan düşnükliidir.

$B(b, b')$ we $C(c, c')$ nokatlaryň proyeksiýalary hem ýokardaky görkezilen usul bilen tapylýar.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky P tekizlik yzlary bilen berlipdir. Onuň üstünde ýerleşen tarapy L – deň bolan **kwadrat** gurmaly (128-nji surat).

Çözülişi. P tekizligi frontal proyeksiýalar tekizlik bilen utgaşdyralyň. Tekizlik P_v okuň daşynda aýlananda, bu ýerde hem tekizlige degişli her bir nokat töweregiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgeder, proyeksiýasy bolsa P_v perpendikulýar bolan göni çyzyk bolar. Utgaşdyrylan ýagdaýda $A_1B_1C_1D_1$ kwadraty gurýarys we tekizligiň üstündäki kwadraty yzyna aýlap, öňki ýagdaýyna getirýäris, ýagny kwadratyň gorizonta we frontal proyeksiýalaryny gurýarys.



128-nji surat

Gurluş P tekizligiň kwadratynyň depeleriniň üstünden geçirilen frontallaryň kömegi bilen ýerine ýetirilýär.

Tekizlik başdaky ýagdaýa getirilende, kwadratyň, degişli $A_1B_1C_1$ we D_1 depeleriniň ýatmaly frontallarynyň proyeksiýalaryny tapýarys.

A_1, B_1, C_1, D_1 , nokatlaryň üstünden P_v perpendikulýar geçirýäris we olary frontalyň frontal proyeksiýalary bilen kesişýänçä dowam etdirip, a', b', c' we d' nokatlary tapýarys. $A_1B_1C_1$ we D_1 nokatlary frontallaryň deňişli gorizonta proyeksiýalaryna proyektirläp, a, b, c we d gorizonta proyeksiýalaryny tapýarys.

4-nji mesele. Umumy haldaky P tekizligiň üstünde merkezi O nokatda bolan töwerek gurmaly (*129-njy surat*).

Bu umumy ýagdaýdaky tekizligiň üstünde ýerleşen töwerek proyeksiýalar tekizliklerine **ellips** görnüşinde proyektirlenýär.

Berlen oklary boýunça ellipsi gurmaklygy ellipsiň uly we kiçi oklarynyň ululygy-uzynlygy hem-de ugry kesgitlenenden soň amala aşyrmak bolar.

Umumy haldaky tekizligiň üstünde ýatan töweregiň diametrleriniň biri O nokadyň üstünden geçýän gorizonta bilen gabat gelýär, diýmek H gorizonta şekiller tekizlige gözlenýän töweregiň diametri hakyky ululygynda proyektirlenýär, beýlekisi frontal bilen gabat gelýär, şonuň üçin V frontal şekiller tekizligine hem töweregiň bir diametri hakyky ululygyndan proyektirlenýär.

Töweregiň tekizliginiň gorizonta bilen gabat gelýän diametri ellipsiň gorizonta proyeksiýalar tekizligindäki uly oky bolar.

Töweregiň proyeksiýasyny gurmak üçin P tekizligi H tekizlik bilen utgaşdyrmak gerek, soňra merkezi O nokatda bolan islendik radiusly töwerek gurmaly we proyeksiýalary deňişlilikde ellipsiň oklaryna deň bolan diametrlerini geçirmeli.

P_H yza parallel bolan $I_1 - 2_1$ diametr ellipsiň H tekizligindäki uly okuny kesgitleýär. $I_1 - 2_1$ perpendikulýar bolan $3_1 - 4_1$ diametr bolsa sol ellipsiň kiçi okuny kesgitleýär.

P_v yza parallel bolan $5_1 - 6_1$ diametr ellipsiň V tekizligindäki uly okuny, $7_1 - 8_1$ diametr bolsa kiçi okuny kesgitleýär.

P tekizligi başdaky ornuna getirmek bilen, 1_1 we 2_1 nokatlaryny $1 - 2$ gorizontalyň gorizonta proyeksiýasyna proyektirleýäris.

Ellipsiň kiçi oky $1 - 2$ göni çyzyga perpendikulýardyr, 3 nokat $3 - K$ gorizonta göni çyzygyň kömegi bilen tapylýar, 4 nokat $0-3$ we $0-4$ kesimleriň deňligi esasynda tapylýar.

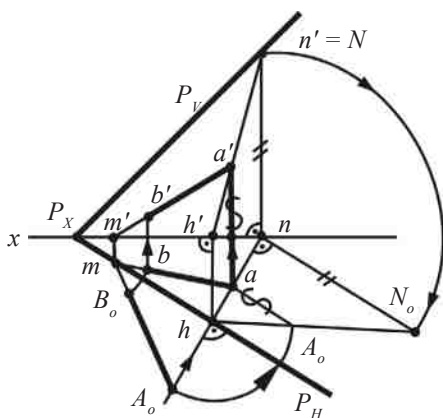
2. Gorizontalyň ýa-da frontalyň töwereginde aýlananda nokadyň aýlama merkezini we aýlama radiusyny nähili kesgitlemeli?

3. Gorizontalyň (frontalyň) töwereginde aýlananda nokadyň gorizont (frontal) proyeksiýasy ornuny haýsy tekizlikde we nähili üýtgedýär?

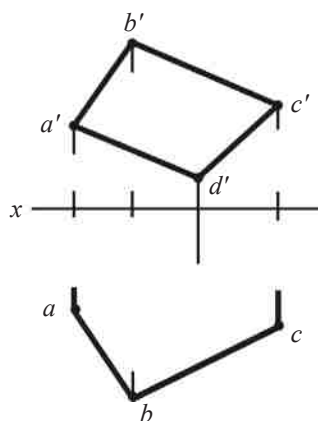
4. Gorizontalyň (frontalyň) daşynda aýlamak bilen

ABCD (abcd, a'b'c'd') dörtdürlüglügiň hakyky ululygyny-meýdanyny kesgitlemeli (*131-nji surat*).

Meseläni çözmek üçin görkezme. Ilki bilen A, B, C üç depäniň tekizliginde ýatan nokadyň proyeksiýasy hökmünde dörtburçlugyň dördünji depesiniň d gorizantal proyeksiýasyny gurmak hökmandyr.



130-njy surat



131-nji surat

5. Utgaşdyrma usulynyň manysy nämeden ybarat?

6. Yzlary bilen berlen $P(P_H, P_V)$ tekizlik proyeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrylanda, aýlama oky bolup näme hyzmat edýär?

7. Tekizligiň utgaşdyrylan yzyny nähili kesgitlemeli?

8. Utgaşdyrma usuly bilen haýsy meseleler (göni we ters meseleler) çözülýär?

9. Utgaşdyrylan nokadyň aýlanma merkezini we aýlama radiusyny epýurda nähili kesgitlemeli?

10. Tekizligiň yzyny utgaşdryman ýa-da utgaşdyryp, berlen nokat H gorizontaň şekiller tekizligi bilen nähili utgaşdyrylýar?

36. PROJÉKSIÝALAR TEKIZLIKLERINI ÇALŞYRMAK USULY

36.1. Umumy maglumat

Aýlama we utgaşdyrma usullarynda proyektirlenýän obýektleriň orunlaryny üýtgedýärler, proyeksiýalar tekizlikleri bolsa öz ýerlerinde üýtgemän galýar. Proyeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak usulynda bolsa tersine, proyektirleýji obýektler şol durşuna galdyrylyp, proyeksiýalar tekizlikleri öz ýagdaýlaryny geregiçe yzygiderli üýtgedýärler, ýagny proyeksiýar tekizlekleri yzygyderli çalşyrylýar.

Proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usuly geometrik elementleriň proyeksiýalaryny üýtgetmeklige mümkinçilik berýär. Ýöne munuň özi olaryň giňişlikdäki orunlaryny üýtgetmegiň hasabyna däl-de, bu geometrik elementleriň proyektirlenilýän tekizlikleriniň ýagdaýyny üýtgetmegiň hasabyna amala aşyrylýar. Garalyp geçilýän bu usul proyeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyryp, öz ýerlerini üýtgetmäge mümkinçilik berýär, şeýlelikde her gezek bu tekizlikleriň biri üýtgedilende geometrik elementler iki sany özara perpendikulýar tekizliklere proyektirlener ýaly edilýär.

Nokatlaryň täze proyeksiýalarynyň häsiýetlerine we olary epýurda gurmagyň usulyna birnäçe meseleler arkaly garap geçeliň.

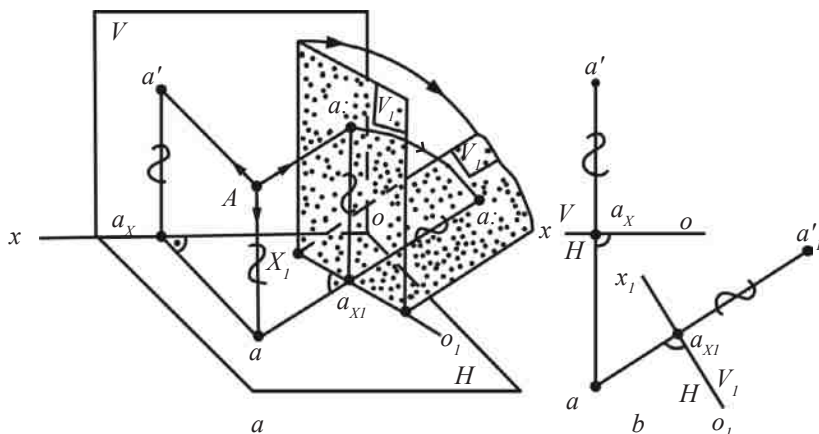
1-nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proyeksiýalaryny täze $\frac{V_1}{H}$ sistemada gurmaly (*132-nji surat*).

V proyeksiýalar tekizligi täze $V_1 \perp H$ proyeksiýalar tekizligi bilen çalşyrylanda, ýagny $\frac{V}{H}$ sistemadan X_1 okly täze $\frac{V_1}{H}$ proyeksiýalar tekizlikleriniň sistemasyna geçilende, **A** (**a**, **a'**) nokadyň **a₁'** täze proyeksiýasynyň gurluşyna seredeliň.

H gorizontal şekiller tekizliginiň «köne» we «täze» sistemalaryň ikisi üçin hem umumy bolýanlygy üçin **A** nokadyň **Z** koordinatasy, ýagny **A** nokatdan **H** gorizontal şekiller tekizligine çenli aralyk (**A a** – kesim bilen aňladylan) üýtgemän galýar.

Şeýlelikde, täze frontal proyeksiýadan täze **OX** oka çenli aralyk çalşyrylan köne proyeksiýadan **OX** oka çenli aralyga deňdir, ýagny

$a'a_x = a'_l a_{xl} = Aa = Z$. Gorizontál a proyeksiýa öňkölige galar, nokadyň koordinatalary bolsa X okuň täze ýagdaýyna baglylykda başga bolar.



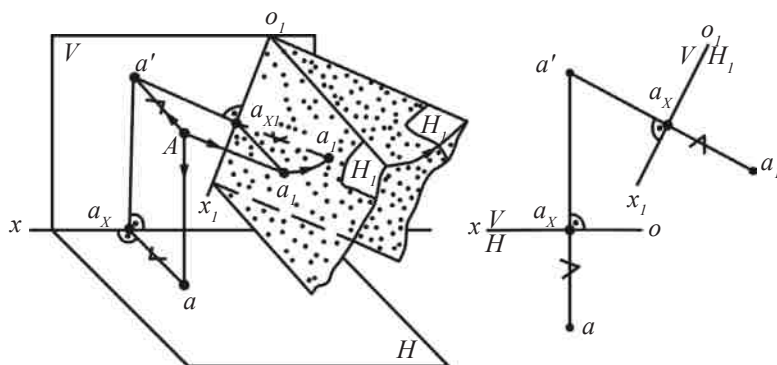
132-nji surat

Epýury almak üçin V_l tekizligi X_l okuň daşynda aýlap, H gorizontál şekiller tekizligi bilen utgaşdyrýars. Täze a'_l frontal proyeksiýa hem H gorizontál şekiller tekizligi bilen utgaşar we ol a gorizontál proyeksiýa bilen birlikde X_l oka geçirilen perpendikulýaryň üstünde ýerleşer.

Ortogonal çyzgyda nokadyň a'_l täze proyeksiýasy gurmak üçin nokadyň a gorizontál proyeksiýasyndan islendik uzaklykda çalşyrylan täze X_l oka perpendikulýar bolan birleşdiriji çyzyk indermek we şol perpendikulýaryň üstünde a_{xl} nokatdan başlap, öňki köne sistemadaky $a'a_x$ kesime deň bolan $a_x a'_l$ kesimi ölçäp goýmak ýeterlikdir (132-nji b surat).

2-nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen A nokadyň proyeksiýalaryny täze $\frac{V}{H_l}$ sistemada gurmaly (133-nji surat).

H gorizontál şekiller tekizligi V frontal şekiller tekizligine perpendikulýar bolan H_l täze tekizlik bilen çalşyrylanda, ýagny $\frac{V}{H}$ tekizlikler sistemasyndan X_l täze okly $\frac{V}{H_l}$ tekizlikler sistemasyna geçilende, $A (a, a')$ nokadyň a_l täze gorizontál proyeksiýasynyň gurluşyna garap geçeliň.



133-nji surat

Ortogonal çyzgyda nokadyň täze proyeksiýasyny gurmak üçin a' frontal proyeksiýadan islendik uzaklykda geçirilen täze X_I oka perpendikulýar bolan birleşdiriji çyzyk geçirmek we öňki sistemadaky aa_x kesime deň bolan $a_{xI} a_I$ kesimi şol perpendikulýaryň üstünde a_{xI} nokatdan başlap ýerleşdirmek ýeterlikdir.

Iki sany özara perpendikulýar bolan proyeksiýalar tekizlikleriniň biri galan beýleki tekizlige perpendikulýar bolan täze tekizlik bilen çalşyrylanda, nokadyň täze proyeksiýalar tekizligindäki proyeksiýasyndan täze oka çenli bolan aralyk nokadyň köne tekizlikdäki proyeksiýasyndan köne oka çenli aralyga deňdir.

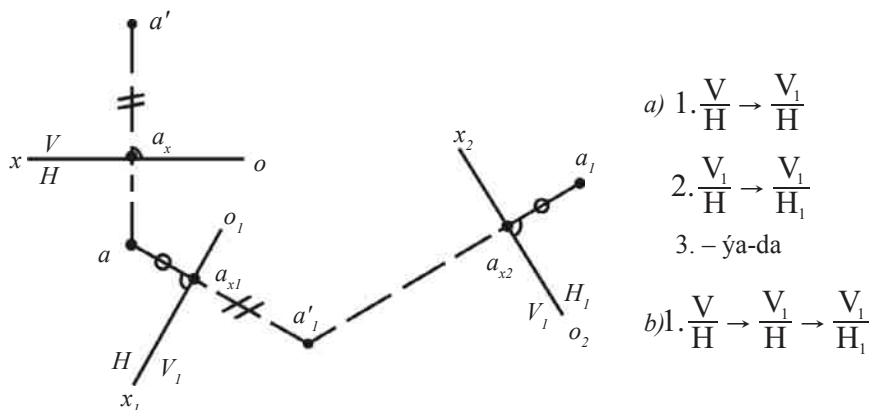
Meseleler çözülende proyeksiýalar tekizligini yzygiderlilikde iki, üç we ondan-da köp gezek yzygiderli çalşyrmaly bolýan halatlar duş gelýär. Her gezek proyeksiýalar tekizlikleriniň bar bolan sistemasyndan täze sistema geçmeklik beýan edilen kanunalaýyklyk esasynda amala aşyrylýar.

3-nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen A nokadyň proyeksiýalaryny täze $\frac{V_I}{H}$ hem-de $\frac{V_I}{H}$ sistemada yzygiderli çalşyryp gurmaly (134-nji surat).

V frontal şekiller we H gorizonta şekiller tekizlikleri yzygiderli çalşyrylanda A nokadyň täze proyeksiýalaryny guralyň. Eger V frontal şekiller tekizligi täze V_I tekizlik bilen, H gorizonta şekiller tekizligi bolsa täze H_I tekizlik bilen yzygiderli çalşyrsak, onda ilki proyek-

siýalar tekizlikleriniň $\frac{V}{H}$ sistemasyndan $\frac{V_1}{H}$ sistemasyna soňra bolsa proyeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V_1}{H}$ sistemasyndan $\frac{V_1}{H_1}$ sistemasyna geçýäris (134-nji surat).

Ortogonal çyzygyda a'_1 we a_1 täze proyeksiýalary gurmak üçin $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ sistema geçilende $a_{x1} a'_1 = a_x a'$ deňlikden peýdalanýarys.



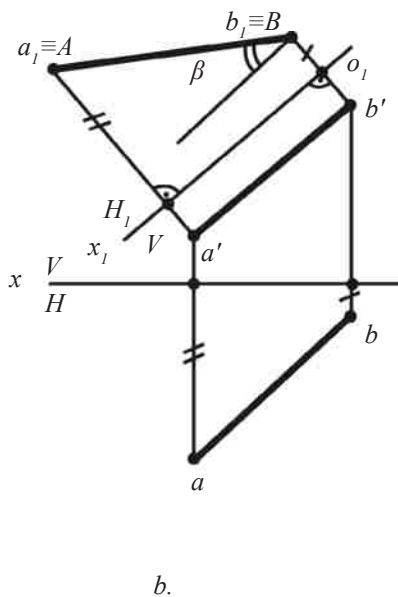
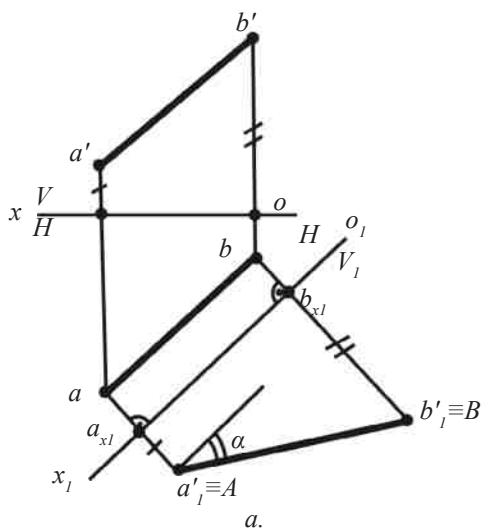
134-nji surat

$\frac{V_1}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H_1}$ sistema geçilen bolsa $a_1 a_{x2} = a a_{x1}$ deňlikden peýdalanýarys. Proyeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmagyň guralyşy we ýazylyşy çyzygydan düşnüklidir. Şonuň üçüniň çyzygy çyzylanda täze sistemada haýsy aralyklar alynýanygynda (belgeleline) üns beriň, bu düzgün bu usul bilen mesele çözülide mydama saklanýandyr.

36.2. Proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usulyny ulanyp ölçeg meselelerini çözmek

Ölçeg meselelerini çözmek üçin birnäçe meseläniň çözülişine garap geçeliň.

1-nji mesele. Umumy haldaky AB göni çyzygyň hakyky uzynlygyny we onuň proyeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli (135-nji a, b surat).



135-nji surat

Çyzgydan görnüşi ýaly, umumy ýagdaýda berlen AB kesim proyeksiýalar tekizlikleriniň sistemasynda olaryň birine-de parallel däl, diýmek, onuň proyeksiýalarynyň hiç biri hem kesimiň hakyky uzynlygyny şekillendirmeýär.

Kesimiň hakyky uzynlygyny tapmak üçin täze proyeksiýalar tekizligi berlen AB göni çyzyga parallel edilip ýerleşdirilýär. Munuň üçin $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ sistema geçmeli.

Meseläni çözmek üçin berlen AB kesime parallel bolan V_1 täze proyeksiýalar tekizligini saýlamaly. AB kesimiň V_1 täze proyeksiýalar tekizligindäki $a'_1b'_1$ proyeksiýasynyň uzynlygy AB kesimiň hakyky uzynlygyna deň bolar: $a'_1b'_1 = AB$.

Eger göni çyzyk proyeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolsa, onda beýleki proyeksiýalar tekizliginde ol proyeksiýalar okuna parallel göni çyzyk bolup şakillenýändigini bellidir. Şeýlelik bilen, eger AB kesime parallel bolan täze V_1 proyeksiýalar tekizligi saýlanyp alynýan bolsa, tekizligi şeýle saýlap almaklyga ortogonal çyzgyda kesimiň ab gorizontel proyeksiýasyna parallel bolan X_1 täze oky saýlap almaklyk gabat gelýär.

$$X_1 \parallel ab, \quad V_1 \parallel ab, \quad AB \parallel V_1, \quad a^1 \equiv A^1, \quad b^1 \equiv B, \quad a^1 b^1 = AB.$$

a we b nokatlardan X_1 oka inderilen birleşdiriji çyzyklaryň, ýagny perpendikulýarlaryň üstünde $a_{X_1} a'_1 = a_x a'$, $b_{X_1} b'_1 = b_x b'$ kesimleri ölçäp goýmak bilen alnan $a'_1 b'_1$ göni çyzygyň frontal proyeksiýasyny alarys, ol AB kesimiň hakyky uzynlygyna deň bolar, ýagny

$$a'_1 b'_1 = AB, \quad \text{sebäbi} \quad AB \parallel V_1.$$

Şunuň bilen birlikde çyzgydan görnüşi ýaly, AB göni çyzygyň H gorizental proyeksiýalar tekizligine ýapgytlyk burçy bolan α burçuny hem kesgitländiris. Sebäbi, proyeksiýalar tekizligi çalşyrylandan soň umumy haldaky AB kesim frontal göni çyzyk ýagdaýyny eýeleýär. Şonuň üçin hem AB göni çyzygyň täze $a'_1 b'_1$ frontal proyeksiýasy bilen täze X_1 proyeksiýalar okunyň arasyndaky α burçy AB göni çyzygyň H gorizental şekiller tekizligine bolan in uly ýapgytlyk burçuna deňdir.

Eger-de AB göni çyzygyň (kesimiň) V frontal şekiller tekizligine ýapgytlyk β burçuny ölçemeli bolsa, onda $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V}{H_1}$ sistema geçirmeli hem-de X_1 täze oky $a'b'$ proyeksiýa parallel edip geçirmeli. Gurluş çyzgydan düşnüklidir.

135-nji a suratdan görnüşi ýaly, umumy halda berlen AB göni çyzyk hususy (frontal) ýagdaýa geçendir, ýagny

$$AB \parallel V_1; \quad ab \parallel V_1; \quad ab \parallel X_1; \quad a'_1 b'_1 = AB$$

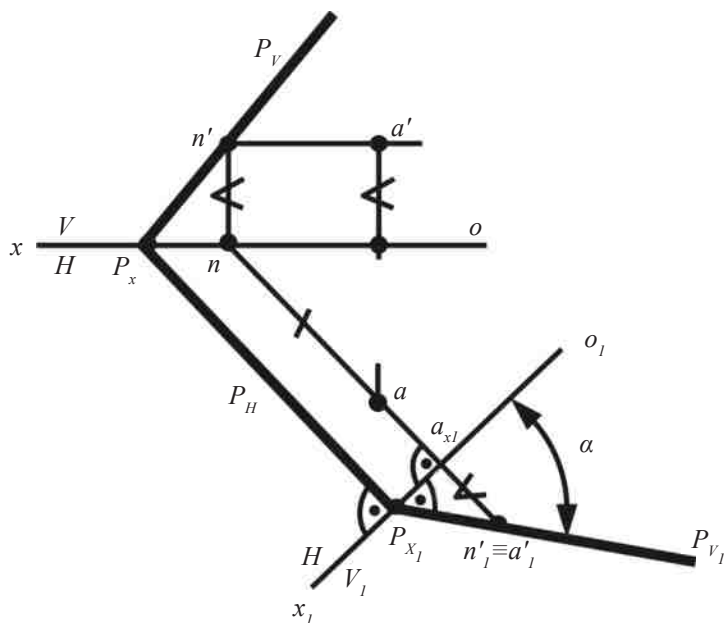
frontal göni çyzyga öwrülendir.

135-nji b suratda bolsa AB göni çyzyk gorizental göni çyzykdyr. $AB \parallel H_1$, $a'b' \parallel H_1$, $a'b' \parallel X_1$, $a_1 b_1 = AB$. Şonuň üçin hem AB göni çyzygyň täze $a_1 b_1$ gorizental proyeksiýasy bilen täze X_1 proyeksiýalar okunyň arasyndaky β burçy göni çyzygyň V frontal şekiller tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deňdir.

Eger berlen umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygy proyektirleýji göni çyzyga öwürmeli bolsa, onda proyeksiýalar tekizligini yzly-yzyna iki gezek çalşyrmaly bolardy.

$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H_1}; \quad V_1 \parallel AB; \quad H_1 \perp AB$ çyzgysyny özbaşdak gurmaly.

2-nji mesele. P tekizlik yzlary bilen $\frac{V}{H}$ sistemada berlipdir. $\frac{V_I}{H}$ sistemada bu tekizligiň täze P_{V_I} yzyny we H tekizligine ýapgytlyk α burçuny gurmaly (136-njy surat).



136-njy surat

Berlen umumy haldaky P tekizlik $\frac{V}{H}$ sistemada berlipdir. Çalşyrmak usulyny peýdalanyp, $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_I}{H}$ sistemada bu tekizligiň täze P_{V_I} yzyny gurmaly, ýagny frontal proyektirleýji ýagdaýyna geçirmeli. ($P \perp V_I$).

Täze X_I oky P_H gorizonta l yza perpendikulýar edip geçirýäris.

$X_I \perp P_H$.

P_H gorizonta l yzyň X_I täze ok bilen kesişýän nokady tekizligiň P_{x_I} birleşme nokadyny kesgitleýär. Täze frontal yzy gurmak üçin ikinji nokadyň bolmagy zerur. Munuň üçin P tekizlige deňişli erkin A nokady alýarys we onuň täze a_I' proyeksiýasyny gurýarys. Muny şeýle ýerine ýetirýäris: A nokadyň gorizonta l proyeksiasy bolan a nokatdan täze X_I oka perpendikulýar birleşdiriji çyzyk inderýäris, soňra

a_{x_i} nokatdan şol perpendikulýaryň ugrunda $nn' = a_x a'$ deň bolan kesimi ölçäp goýýarys. Şondan soň n_i' ýagdaýyny tapýarys. Şol nokatda a_i' bolýar. $n_i' = a_i'$;

Soňra $\frac{V}{H}$ sistemada A nokadyň $a_i' = n_i'$ täze frontal proyeksiýasynyň üstünden we P tekizligiň P_{x_i} birleşme nokadynyň üstünden P_{V_i} täze frontal yzy geçirýäris.

Berlen umumy haldaky P tekizligiň H gorizental proyeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçy täze frontal P_{V_i} yz bilen OX_1 ok aralygyndaky α burça deňdir.

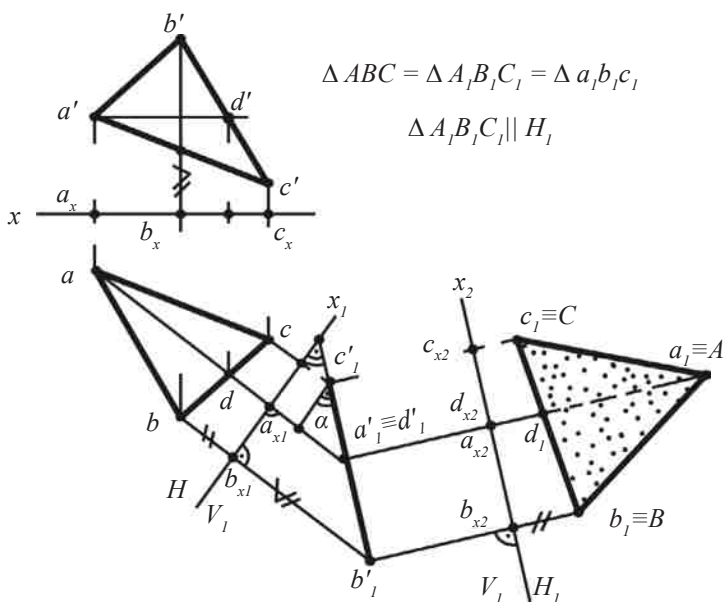
3-nji mesele. Giňişlikde erkin ýagdaýda ýerleşen ABC üçburçlугyň proyeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny we bu üçburçlугyň hakyky meýdanyny kesgitlemeli (137-nji surat).

Berlen üçburçlугyň tekizligine parallel tekizlige üçburçluk üýtgewsiz hakyky ululygynda proyektirlener. Şonuň üçin hem meseläni çözmek üçin şeýle proyeksiýalar tekizligini saýlap almak gerek. Berlen üçburçlугyň tekizligi proyeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V}{H}$ sistemasynda umumy haldaky tekizlikdir, şeýlelikde, oňa parallel bolan tekizlik V frontal şekiller we H gorizental şekiller tekizlikleriniň hiç birine-de perpendikulýar bolmaz we proyeksiýalar tekizligi hökmünde kabul edilip bilinmez. Şeýlelik bilen proyeksiýalar tekizlikleriniň diňe birini çalşyrmak bilen meseläni çözmek mümkin däl. Şonuň üçin hem proyeksiýalar tekizlikleriniň ikisini hem yzygiderli çalşyrmak ýeterlikdir.

Täze proyeksiýalar tekizliginiň birinjisini – V_1 -i ABC üçburçlугyň tekizligine perpendikulýar edip alýarys. Şeýle ýagdaýda V_1 tekizlik bu üçburçlугyň tekizliginiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir göni çyzyga perpendikulýar bolmalydyr. Şeýle göni çyzyk hökmünde üçburçlугyň tekizliginiň AD gorizontalyny saýlap alýarys. Proyeksiýalar tekizligini bu saýlap almaklyga ortogonal çyzygyda gorizontalyň ad gorizental proyeksiýasyna perpendikulýar bolan täze X_1 proyeksiýalar oky saýlap almaklyk gabat gelýär. ad täze sistemada ol $a_i' d_i'$ nokat bolup proyektirlener.

ABC üçburçlугyň täze V_1 tekizlige täze frontal proyeksiýasy $c_i' a_i' b_i'$ göni çyzyk bolup proyektirlener, sebäbi

$$ad \perp V_1; \quad ad \subset \Delta ABC, \quad \text{onda} \quad \Delta ABC \perp V_1.$$



137-nji surat

Projeksiýalar tekizligini birnji gezek çalşyranymyzdan soň, umumy ýagdaýdaky ABC üçburçluk täze sistemada, ýagny $\frac{V_1}{H}$ sistemada frontal proyektirleýji ($\Delta A_1B_1C_1 \perp V_1$) tekizlik boldy. Diýmek, ABC üçburçlugynyň gorizont al projeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçy üçburçlugyň täze $a'_1b'_1c'_1$ projeksiýasy bilen täze X_1 projeksiýalar okunyň arasyndaky emele gelen burça, ýagny α burça deňdir.

H gorizont al şekiller tekizligi üçburçlugyň tekizligine parallel bolan täze H_1 gorizont al projeksiýalar tekizlik bilen çalşyryars, munuň üçin ortogonal çyzygyda projeksiýalaryň täze X_2 okuny üçburçlugyň täze frontal projeksiýasyna, ýagny c'_1, a'_1 we b'_1 göni çyzygy parallel edip geçirýäris.

Depeleriň gorizont al a, b we c projeksiýalaryndan X_1 oka çenli aralygy ölçäp, soňra olary c'_1, a'_1 we b'_1 nokatlardan geçirilen perpendikulýaryň üstünde c^{x_2}, a^{x_2} we b^{x_2} -den $a^{x_1}a = a^{x_2}a_1$;

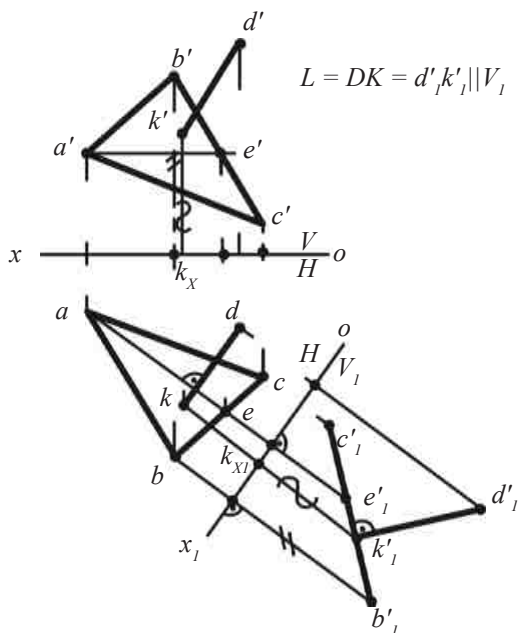
$c_{x_1}c = c_{x_2}c_1$ we $b_{x_1}b = b_{x_2}b_1$ kesimleri goýýars, hem-de a_1, c_1 we b_1 nokatlary alyp, olary özara birleşdirýäris. Şeýlelikde üçburçlugyň

hakyky ululygyna deň bolan täze $a_1b_1c_1$ proyeksiýany alarys, ýagny $\Delta a_1b_1c_1 = \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Proyeksiýalar tekizligini iki gezek çalşyranymyzdan soň, umumy ýagdaýdaky berlen P (ΔABC) tekizlik birinji gezek proyektirleýji tekizlik ($a_1'b_1'c_1' \perp V$) bolupdy, häzir bolsa H_1 tekizligine parallel boldy, ýagny gorizontal tekizlik boldy. Onda $A_1B_1C_1 \parallel H_1$ şonuň üçin hem üçburçlugyň gorizontal proyeksiýasy $a_1b_1c_1$ berlen üçburçlugyň hakyky ululygydyr:

4-nji mesele. D nokatdan umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçlugyň tekizligine çenli bolan iň ýakyn l aralygy tapmaly (138-nji surat).

Üçburçlugyň tekizligi $a_1'b_1'c_1'$ göni çyzyga proyektirlener ýaly, ony frontal proyektirleýji tekizlik bilen çalşyryarys. Bu ýerde hem gurluş edil geçen mysallardaky ýalydyr. Mundan başga-da proyeksiýalar tekizlikleriniň täze sistemasynda D nokadyň proyeksiýasyny tapmak gerek. Bu bolsa adaty usul bilen amala aşyrylýar.



138-nji surat

Soňra d'_1 nokatdan ABC üçburçlugyň tekizliginiň täze $a_1'b_1'c_1'$ frontal proyeksiýasyna perpendikulýar inderýäris we perpendikulýaryň esasy bolan k'_1 nokady alýarys.

$d_1'k_1'$, bu D nokatdan ABC üçburçlugyň tekizligine çenli gözlenýän ýakyn aralyk bolar: $d_1'k_1' = DK = l$

DK perpendikulýaryň H we V tekizliklerde proyeksiýalary tapylanda, dk gorizontaly proyeksiýanyň AE gorizontalyň ae gorizontaly proyeksiýasyna perpendikulýardygyny göz önüne tutmak gerek: $dk \perp ae$

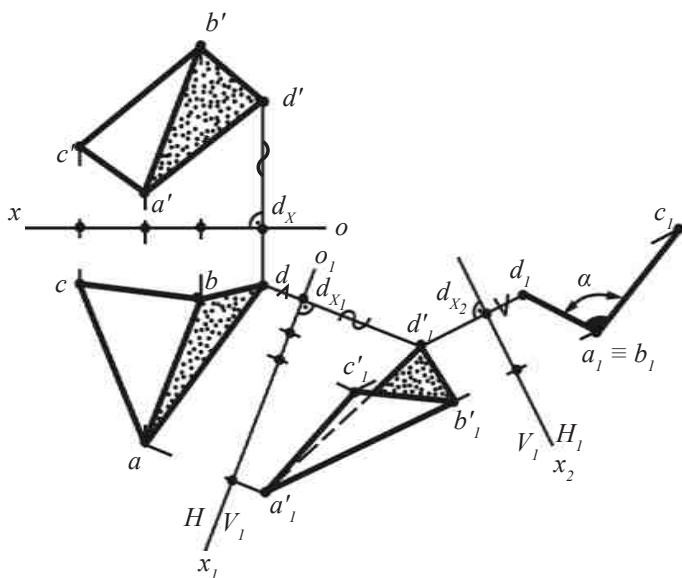
K' – frontal proyeksiýany K nokatdan X oka perpendikulýar edilip geçirilen baglanyşyk çyzgynyň üstünde tapýarys. K' nokat X okundan K_1' nokatdan X_1 oka çenli aralyga deňdir, ýagny $K_X K_1' = K_X K'$.

ABC üçburçlugyň frontalynyň frontal proyeksiýasyna $d'k'$ perpendikulýar bolsa gurluş dogry ýerine ýetirilipdir, diýmek $DK \perp \Delta ABC$.

5-nji mesele. AB göni çyzyk boýunça kesişýän CAB we DAB umumy ýagdaýdaky üçburçluklaryň proyeksiýalary berlipdir. Tekizlikleriň umumy AB gapyrgasyndaky iki granly burçunyň ululygyny kesgitlemeli (139-njy surat).

Iki tekizligiň arasyndaky burç bu tekizlikleriň kesişme çyzygyna perpendikulýar bolan tekizligiň üstündäki çyzyk burçy bilen ölçelýär.

Ikigranly burç onuň gapyrgasyna perpendikulýar bolan proyeksiýalar tekizligine hakyky ululygynda projektirlenýär.



139-njy surat

Meseläni çözmek üçin proyeksiýalar tekizlikleriniň ikisini-de yzygiderli çalşyryars, ilki AB gapyrga täze V_1 proyeksiýalar tekizligini parallel bolar ýaly edýäris, soňra bolsa ikinji gezek täze H_1 proyeksiýalar tekizligini oňa perpendikulýar ýerleşdirýäris.

Berlen bu meselede ilki V frontal şekiller tekizligi AB gapyrga parallel bolan V_1 tekizlik bilen, soňra bolsa H gorizental şekiller tekizligi AB gapyrga perpendikulýar bolan H_1 tekizlik bilen çalşyrylandyr (139-njy surat).

V_1 tekizlik alnanda, X_1 ok AB gapyrganyň ab gorizental proyeksiýasyna parallel edilip ýerleşdirilýär we ikigranly burçuň täze c'_1, a'_1, b'_1 we d'_1 frontal proyeksiýasy tapylýar. H tekizlik H_1 tekizlik bilen çalşyrylanda X_2 ok AB gapyrganyň täze a'_1, b'_1 frontal proyeksiýasyna perpendikulýar edilip alynýar we ikigranly burçuň ululygyny kesgitleýän çyzyk burçuň täze gorizental proyeksiýasy gurulýar.

Gurluş adaty usul bilen gurlandygy üçin çyzgydan düşnüklidir.

Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler

1. Proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usulynyň manysy nämeden ybarat?

2. Proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usulunyň aýlama usulyndan nähili tapawudy bar?

3. Köne şekiller tekizligine garanyňda täze çalşyrylýan şekiller tekizlik nähili ýagdaýy eýelemeli?

4. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birini ýa-da ikisini çalşyrylanda täze tekizligi nähili gurmaly?

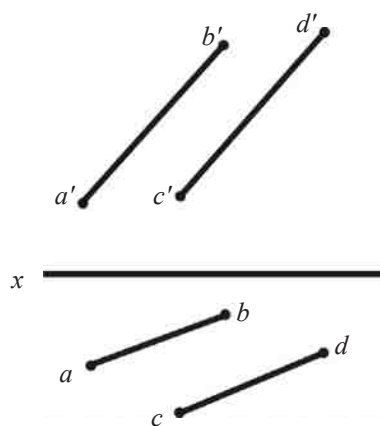
5. Umumy haldaky göni çyzygyň kesimi tekizlige nokat bolup proyektirlener ýaly, proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmagy nähili ýerine ýetirmeli?

6. Umumy ýagdaýda berlen AB we CD parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklyga iň ýakyn aralygy kesgitlemeli (140-njy surat).

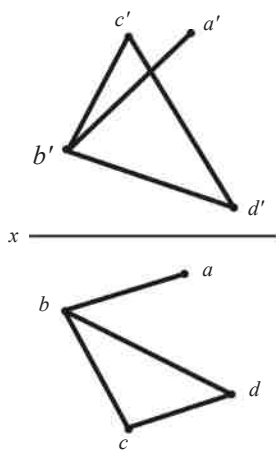
Meseläni çözmek üçin görkezme. Berlen göni çyzyklara perpendikulýar bolan tekizlige gözlenýän aralyk üýtgeşsiz proyektirlener.

7. Umumy haldaky üçburçluk hakyky ululygynda proyektirlener ýaly, proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmagy nähili ýerine ýetirmeli?

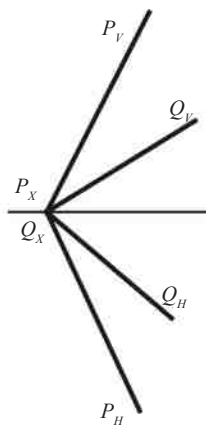
8. Proyeksiýalar tekizlikleriniň biri çalşyrylanda, iki granly burçuň hakyky ululygy haýsy ýagdaýlarda üýtgeşsiz kesgitlenilýär?



140-njy surat



141-nji surat



142-njy surat

9. AB göni çyzygyň BCD üçburçlugyň tekizligi bilen emele getirýän ýapgytlyk burçunyň ululygyny kesgitlemeli (141-nji surat).

10. Yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky P we Q tekizlikleriň özara kesişip emele getiren iki granly burçunyň ululygyny kesgitlemeli (142-nji surat).

Usuly görkezme

Baky Bitarap, Garaşsyz Türkmenistan ýurdumyzda täze özge-rişlikleriň döwri başlandy. Bagtyýarlyk döwrüniň belent meýilna-masy bilen baglylykda konstruktorlar we projektirleýjiler çylşyrymly desgalaryň, konstruksiýalaryň we mehanizmleriň taslamalaryny işläp düzýärler. Bu işleri ýerine ýetirijilerden projeksion şekillendirmegiň na-zaryýetinden, ýagny grafiki aňlatmak boýunça çuňňur bilimi talap edýär.

Diýmek, çyzuwly geometriýany, çyzuwy, surat çekmegi öwren-meklik inženeriň hünär taýdan kemala gelmeginde esasy orny eýeleýär. Bu dersler-bilimler inžener-mehanige maşynlary we mehanizmleri konstruirlemekde, binagäre hem-de inžener gurluşykça jaýlary we des-galary projektirmekde we gurmakda, topografa ýeriň üstüni öwren-mekde, hudožnige surat çekmekde zerur gerekdir. Inženeriň gündelik işinde çyzuwly geometriýanyň ähmiýeti has-da möhümdir, sebäbi onuň döredijilik işi ýa-da desgalaryň taslamasyny döretmeklige, ýa-da taýýar taslamalar boýunça desgalary bina etmeklige gönükdirilendir.

Çyzuwly geometriýa giňişlikdäki jisimleriň tekizligiň üstün-däki şekillerini – projeksiýalaryny gurmagyň usullaryny öwre-dýän, metrik – ölçeg we pozision meseleleri işlemegiň ýollaryny öwredýän dersdir.

Çyzuwly geometriýada garalyp geçilýän meseleleriň iki ugry bardyr:

Birinjisi, şekillendirişdir. Munda giňişlik formaly jisimleriň projeksion şekillerini almagyň düzgünleri we tärleri öwrenilýär.

Ikinjisi, nazary ugurdyr. Munuň maksady şekillendirişniň köme-gi bilen giňişlikli meseleleri çözmek we derňemek üçin esaslary ber-mekden ybaratdyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny yzygiderli we çuňňur öwrenmek-lik giňişleýin pikirlenmegiň ösmegine, giňişlikleýin görnüşli pred-metleri olaryň çyzgylary boýunça göz önüne getirmegi başarmaga we täzeden projektirlenýän predmetleri şekillendirmegi başarmaga ýardam edýär.

Talyplara çyzuwly geometriýany oňat bilmeklik zerurdyr. Sebäbi, olara ýyllyk we diplom taslamalaryny ýerine ýetirmek, öz hünärleri boýunça ýörite edebiýatlary çuňňur özleşdirmek üçin bu ders esasy gural bolup hyzmat edýär.

Talyplar çyzuwly geometriýany ilki okap başlan döwürlerinde kä halatlarda uly kynçylyk bilen özleşdirýärler. Bu kynçylyklar, öňi bilen çyzuwly geometriýanyň talyplar üçin täze ders bolýanlygy, berlen geometrik formalary giňişlikde aýdyň göz önüne getirmekligi talap edýänligi bilen baglanyşyklydyr. Çyzuwly geometriýany örän düşünelilik bilen öwrenmek üçin ony öwrenmegiň ilkinji döwründe aýdyň şekilli çyzgylarda – suratlarda özüňi barlamak gerekdir.

Galyberse-de, ýönekeý modelleri taýýarlamaklyk ýa-da maketlerden peýdalanmaklyk peýdalydyr. Çyzuwly geometriýany has çuňňur öwrendigiňçe, proyeksiýalary okamaga endigiň kemala gelmegi bilen baglanyşylykda, aýdyň şekilli çyzgylara bolan isleg kemden azalmalydyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny öwrenmekde talyp kursuň esasy temalaryna aýratyn uly üns berilmelidir. Çyzuwly geometriýany öwrenmekde proyeksiýalaryň häsiýetlerini özleşdirmek aýratyn ähmiýete eýedir, metrik, şeýle hem pozision meseleleri çözmek üçin bolsa proyeksiýalaryň häsiýetleri esas bolup durýar.

Çyzuwly geometriýany beýan etmegiň gidişinde ýönekeýden çylşyrymlylyga geçilýär, umumy okuw dersinde kem - kemden materiallaryň çylşyrymlylygy artýar, beýan edilýän meseleler giňelýär we çuňlaşýar. Şonuň üçin başdaky temalary kemter özleşdirmek soňky materiallary özleşdirmekde uly päsgelçilik döredýär. Her bir umumy okuwu onuň diňlenen gününde täzedan işläp geçmek möhümdir.

Umumy okuw materiallary diňe umumy okuw üçin niýetlenen depderine konspektirlenen ýazgylardan okap öwrenmek bilen çäklenmän, eýsem olaryň üstüni okuw kitabynda giňden berlen materiallar bilen doldurmak hökmandyr. Umumy okuw ýazgylaryndaky ähli formulirowkalaryň dogrulygyny anyklamak, umumy okuw depderdäki ähli suratlary we çyzgylary has takyk hem-de dogry ýerine ýetirmek zerurdyr. Umumy okuw materiallaryň özleşdirilendigine göz ýetirmek üçin şol tema degişli meseleleriň ençemesini özbaşdak çözmek gerek. Her bir geçilen täze tema oňat düşünmek üçin şondan ozalky geçilen temanyň materiallaryna täzedan göz gezdirmek we şol boýunça okalanlary ýada salmak möhümdir. Islendik özbaşdak ýerine ýetirilen – çyzylan meseleler mydama çyzgy gurallaryny dogry ulanylyp talaba laýyklykda çyzgyklar, belgiler san bilen ýa-da harp bilen

bellenende standarta gabat gelmelidir, bu talap mydama talyba sapak bolmalydyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny çuňňur öwrenmeklik her bir talybyň yzygiderli okamaklygyny, onuň özbaşdak meseleleri çözmekligini talap edýär.

Nazaryýetiň esasy düzgünlerini özleşdirmekde mesele çözmegiň uly ähmiýeti bardyr. Amaly okuwyň öň ýanynda nobatdaky amaly okuwyň mazmuny bilen tanyşmak, meseläniň soraglaryna jogaplar taýýarlamak, öýe berlen meseleleri özbaşdak çözmek gerek. Meseleleri dogry çözmek üçin onuň şertini üns berip okamaly, berlen geometrik elementleri giňişlikde aýdyň göz önüne getirmeli, meseleleri çözmegiň plan-shemasyny düzmeli, soňra öwredilen usullardan, düzgünlerden we kadalardan peýdalanyň, mesele çözmäge girişmeli. Usulyýetiň düzgüni boýunça talap edilişi ýaly, amaly okuwlarda meseleleri talyplar özbaşdak işleýärler.

Mugallym, meseleleri takyk işlemek üçin olara meýilnama düzmekde ugrukdyryjy görkezme berýär. Diýmek, her bir amaly okuwa yzygiderli taýýarlanmak bilen, talyp işçi depderinde bar bolan ähli meseleleri dershanalarda çözmäge ukyply bolup biler.

Umumy okuw wagtyndaky material gaýtadan işlenenden soň, her kim özüne berlen barlag işleri özbaşdak ýerine ýetirmäge girişip biler. Barlag işleriniň maksady bolsa nazary materialy berkitmekdir, alnan bilimi amaly okuwda, tejribede ulanmagy başarmakdyr, Grafiki işleri takyk ýerine ýetirmekdir we esasan-da talybyň giňişlikde göz önüne getirmegini ösdürmekdir.

Her bir meseläniň çözüdi iki bölümden ybarat bolmalydyr:

1. Meseläniň giňişlikdäki çözüdi şonda gözlenýän geometrik elementi kesgitlemek üçin giňişlikde nähili çyzyklaryň, tekizlikleriň ýa-da üstleriň yzygiderli geçirilmelidigi anyklanylýar.

2. Meseläniň proyeksiýalardaky çözüdi munuň özi çyzuwly geometriýanyň nukdaý nazaryndan garanynda esasy zatdyr.

Meseleleri üstünlikli çözmek üçin talypdan, ozaly bilen, elementar geometriýanyň, planimetriýanyň we stereometriýanyň esasy teoremlaryny oňat bilmeklik hem-de epýurdan – çyzgydan baş çykarmagy başarmaklyk talap edilýär. Epýura oňat düşünmeklik talyba has kyndyr, şonuň üçin hem bu işde mydama mugallymyň yzygiderli, ýadawsyz amaly we usuly kömegi gerekdir.

GOŞMAÇALAR

1-nji epýur

Maksady: Talyplaryň gönüburçly parallel şekillendirmekde nokadyň, göni çyzygyň we tekizligiň özara ýagdaýlaryna deňişli pozision (özara gatnaşyklaryna deňişli) – metriki (ölçeg) meseleleri yzygiderli çözüp, bilimlerini berkitmeklerindedir.

Mazmuny: Umumy ýagdaýda ABC üçburçlygyň tekizligi we D nokat berlen. Şu aşakda görkezilen meseleleri çözmeli.

1. D nokatdan ABC üçburçlugyň tekizligine çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli.

2. Berlen ABC üçburçlygyň tekizliginden $40mm$ daşlykda oňa parallel bolan tekizligi gurmaly.

3. Berlen ABC üçburçlugyň B depesinden AC tarapyna perpendikulýar tekizlik geçirmeli, tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmaly. Tekizlikleriň görünýän we görünmeýän ýerlerini anyklamaly.

Usuly görkezme: Bu epýury $A3(297*420mm)$ ululykdaky format çyzgy tagtasynda, galam bilen çyzmaly. Nokatlaryň koordinata oklarynyň san bahasyny her talyp öz şahsy warianty boýunça almaly. 1-nji we 2-nji meseläni 1:1 masştabda, 3-nji meseläni 2:1 masştabda ýerine ýetirmeli.

Meseleleri çözüp başlamazdan önürti, meseläniň yzygiderli işlenişini giňişlikde göz önüne getirmegi öwrenmeli, mümkin bolsa başlangyç döwürde meseläniň suratyny çyzmagy endik edip, soňa baka kem-kemden surat çekmekden el çekmeli.

Islendik meseläni çyzyp başlamazdan, ilki bilen çyzgynyň ölçeglerine, nähili çyzgy tagtasynda ýerine ýetiriljegine, haýsy masştabda çyzyljagyna üns berilmelidir.

Şu görkezmelerden ugur tutup, çyzgy tagtasynyň pesinden 70% meýdanyny peýdalanmaly, çyzgylary tagtada amatly ýerleşdirmeli we çyzgynyň çyzyklaryny TDS 2.303-81-niň talaplaryny doly berjaý etmeklik bilen ýerine ýetirmeli.

Epýurlar ýerine ýetirilende çyzgy tagtasynyň ýokarky çep tarapynda talybyň öz şahsy wariantyna deňişli nokatlaryň koor-

dinatalarynyň san bahalary ýerleşdirilip, aşaky sag tarapynda TDS 2.304-68-iň talaplaryny doly berjaý etmeklik bilen esasy ýazgy ýazylýar.

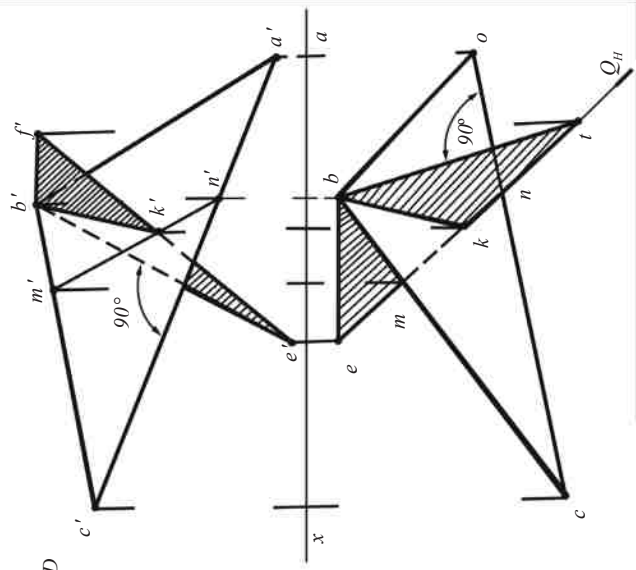
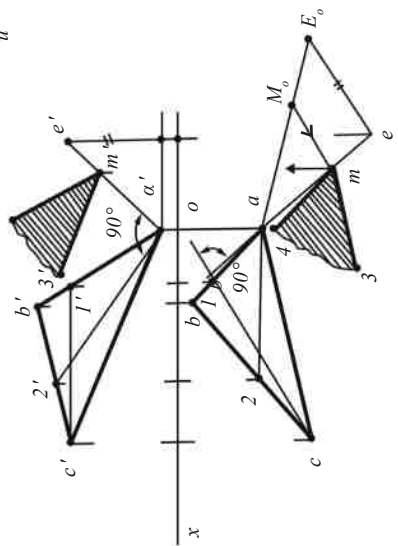
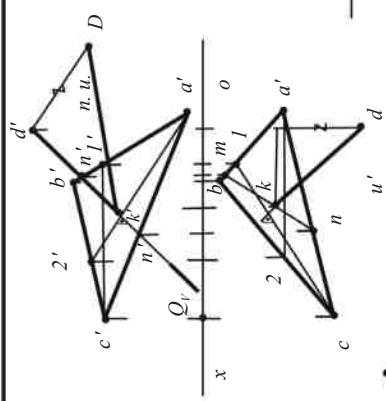
Çyzgylarda *harp - san* belgiler bilen ýazylýan baglanyşyklar dogry goýulmalydyr we nokatlary birleşdiriji çyzyklaryň doly geçirilmegi hökmanam dälidir.

1-nji epýuryň ýumuşlarynyň wariantlary

War. №	Nokatlar	Koordinatalar			War. №	Nokatlar	Koordinatalar		
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>			<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
1	A	65	10	20	15	A	66	20	10
	B	10	20	0		B	10	0	20
	C	0	60	60		C	0	60	60
	D	35	70	5		D	35	5	70
2	A	70	0	60	16	A	70	60	0
	B	45	50	10		B	45	10	50
	C	0	20	10		C	0	10	20
	D	20	50	55		D	20	55	50
3	A	70	60	45	17	A	70	45	60
	B	40	0	55		B	40	55	0
	C	0	45	10		C	0	10	45
	D	65	15	0		D	65	0	15
4	A	65	20	0	18	A	65	0	20
	B	40	5	55		B	40	55	5
	C	0	50	5		C	0	5	50
	D	70	65	55		D	70	55	65
5	A	60	60	10	19	A	60	10	60
	B	45	15	55		B	45	55	15
	C	0	5	25		C	0	25	5
	D	10	45	55		D	10	55	45
6	A	60	65	20	20	A	60	20	65
	B	45	20	50		B	45	50	20
	C	5	10	10		C	5	10	10
	D	70	20	10		D	70	10	20

7	A	65	15	0	21	A	65	0	15
	B	40	0	55		B	40	55	0
	C	0	40	20		C	0	20	40
	D	55	60	50		D	55	50	60
8	A	60	65	30	22	A	60	30	65
	B	45	10	60		B	45	60	10
	C	5	10	20		C	5	20	10
	D	75	15	10		D	75	10	15
9	A	75	25	0	23	A	75	0	25
	B	30	5	50		B	30	50	5
	C	10	60	20		C	10	20	60
	D	60	55	55		D	60	55	55
10	A	80	20	10	24	A	80	10	20
	B	45	0	70		B	45	70	0
	C	0	45	40		C	0	40	45
	D	10	0	15		D	10	15	0
11	A	65	20	55	25	A	65	55	20
	B	20	5	5		B	25	5	5
	C	0	50	25		C	0	25	50
	D	60	55	10		D	60	10	55
12	A	75	5	25	26	A	75	25	5
	B	35	55	65		B	35	65	55
	C	0	25	0		C	0	0	25
	D	65	55	0		D	65	0	55
13	A	80	0	40	27	A	80	40	0
	B	0	20	70		B	0	70	20
	C	30	45	0		C	30	0	45
	D	70	55	65		D	70	65	55
14	A	70	10	20	28	A			
	B	50	45	50		B			
	C	0	25	10		C			
	D	60	55	0		D			

Noktarlar	Koordinatlar		
	X	Y	Z
A	5	25	5
B	25	5	45
C	65	45	35
D	10	55	60



ESASY ÝAZGY

2-nji epýur

Maksady: Talyplaryň gönüburçly parallel şekillendirmekde nokadyň, göni çyzygyň we tekizligiň özara ýagdaýlaryna degişli pozision (özara gatnaşyklaryna degişli) – metriki (ölçeg) meseleleri yzygiderli çözüp, umumy we amaly sapaklarda alan bilimlerini, endiklerini, başarnyklaryny, göz önüne getirijiliklerini ösdürip berkitmeklerindedir.

Mazmuny: *SABC* piramida depeleriniň koordinatalary bilen berlen. Şu aşakda görkezilen meseleleri işlemeli.

1. Piramidanyň *ABC* esasynyň natural ululygyny kesgitlemeli.
2. Piramidanyň *S*-depesinden *ABC* esasyňa çenli bolan iň ýakyn aralygy tapmaly.
3. Piramidanyň *SA* we *BC* gapyrgalarynyň iň ýakyn aralygyny tapmaly.
4. Piramidanyň *AB* gapyrgasyndaky iki granly burçuň ululygyny kesgitlemeli.

Usuly görkezme: Bu epýury $A3(297 \times 420)$ ululykdaky format çyzgy tagtasynda, galam bilen çyzmaly. Nokatlaryň koordinata oklarynyň san bahasyny her talyp öz şahsy warianty boýunça almaly. Meseläni 1:1 masştabda ýerine ýetirmeli. Meseleleri çözende 1-nji epýuryň usuly görkezmesinde aýdylan talaplary berjaý etmek bilen:

1-nji mesele işlenende tekizligiň esasy çyzyklarynyň (gorizontalyň we frontalyň) daşynda aýlamak bilen

2-nji meselede şekiller tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlap we ýerini üýtgetmek bilen

3-nji we 4-nji meseleler işlenende şekiller tekizligini yzygiderli çalşyrmak usuly bilen ýerine ýetirilýär.

Epýuryň 1-2 meselelerini bir çyzgyda, 3-4 meselelerini bir çyzgyda ýerleşdirmek bolýar.

2-nji epýuryň ýumuşlarynyň wariantlary

War. №	Nokatlar	Koordinatalar			War. №	Nokatlar	Koordinatalar		
		x	y	z			x	y	z
1.	S	65	65	50	15.	S	65	50	65
	A	45	5	55		A	45	55	5
	B	5	45	10		B	5	10	45
	C	70	15	0		C	70	0	15

2.	S A B C	35 65 0 10	60 0 50 10	5 20 60 0	16.	S A B C	35 65 0 10	5 20 60 0	60 0 50 10
3.	S A B C	55 35 5 60	10 60 25 30	50 35 10 5	17.	S A B C	55 35 5 60	50 35 10 5	10 60 25 30
4.	S A B C	10 80 45 0	0 20 0 45	15 10 70 40	18.	S A B C	10 80 45 0	15 10 70 40	0 20 0 45
5.	S A B C	70 40 0 65	65 5 50 20	35 55 10 0	19.	S A B C	70 40 0 65	55 55 10 0	65 5 50 20
6.	S A B C	70 75 35 10	50 15 0 45	5 50 0 20	20.	S A B C	70 75 35 10	5 50 0 20	50 15 0 45
7.	S A B C	60 75 30 10	45 25 15 50	55 0 50 20	21.	S A B C	60 75 30 10	55 0 50 20	45 25 15 50
8.	S A B C	75 45 0 60	25 20 10 65	10 60 20 20	22.	S A B C	75 45 0 60	25 60 20 30	20 20 10 65
9.	S A B C	75 60 45 5	25 65 10 10	20 20 60 20	23.	S A B C	75 60 45 5	10 20 60 20	25 65 10 10
10.	S A B C	60 45 0 60	10 15 5 60	20 55 25 10	24.	S A B C	60 45 0 60	20 55 25 10	10 15 5 60
11.	S A B C	20 10 55 80	50 20 50 0	45 10 10 60	25.	S A B C	20 10 55 80	45 10 10 60	50 20 50 0
12.	S A B C	65 75 5 55	0 20 10 50	40 0 15 30	26.	S A B C	65 75 5 55	45 0 15 30	0 20 10 50
13.	S A B C	75 45 5 70	55 55 10 0	65 5 50 20	27.	S A B C	75 45 5 70	65 5 50 20	55 55 10 0
14.	S A B C	70 80 10 60	45 0 15 30	0 30 10 50	28.	S A B C			

Peýdalanylan edebiýatlar

1. *Gurbanguly Berdimuhammedow*. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat. 2007.
2. *Gurbanguly Berdimuhammedow*. Eserler ýygyndysy. I tom. Aşgabat. 2007.
3. *Gurbanguly Berdimuhammedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat. 2008.
4. «Türkmenistanyň Prezidentiniň obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşayyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Milli maksatnamasy». Aşgabat. 2007.
5. Х. А. Арустамов. Сборник задач по начертательной геометрии, Москва, Машгиз, 1965.
6. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для вузов./ В. О. Гордон, М. А. Семенцев – Огиевский; под ред. В. О. Гордона. - М: Высшая школа, 2007-272с.
7. Гордон В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии: учебное пособие для вузов / В. О. Гордон , Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева; под ред Ю. Б. Иванова. -М. Высшая школа. 2002.
8. Бударин А. М. Проецирование геометрических тел. Учеб. пособие -Ульяновск , УлГТУ, 2000.-98 с.
9. В.О.Гордон, М. А. Семенцев – Огиевский. Курс начертательной геометрии, Москва, Наука, 1971.
10. В.О. Гордон, Ю. Б.Иванов, Т.Е.Солнцева. Сборник задач по начертательной геометрии, Москва, Наука, 1969.
11. В.Д.Засов, А.Р.Крылов. Задачник по начертательной геометрии, Москва, Высшая школа, 1968.
12. А.М.Иерусалимский. Начертательная геометрия, Росвузиздат, Москва, 1963.
13. Н.Н.Иванов, И. С. Храмова. Начертательная геометрия, методические указания, Высшая школа, 1965.
14. Н. Н. Крылов, П. И. Лобандиевский, С. А. Мэн. Начертательная геометрия, Высшая школа, Москва, 1965.

15. Н.С.Кузнецов. Начертательная геометрия, Высшая школа, Москва 1969.
16. С.М.Колотов и др. Курс начертательной геометрии, Госстройиздат УССР, Киев, 1961.
17. Н.Л.Рускевич. Начертательная геометрия, Харьковский государственный университет, 1961.
18. А. К.Рудаев. Сборник задач по начертательной геометрии, физико – математическая литература, Москва, 1962.
19. С.А.Фралов. Методы преобразования ортогональных проекций, Машгиз, 1963.
20. Р.Хорунов. Чизма геометрия курси, Учитель, Ташкент, 1964.
21. Н.Ф.Четверухин и др. Начертательная геометрия, Высшая школа, Москва, 1963.
22. А.Г.Чалый. Курс начертательной геометрии, Машгиз, 1962.
23. А.А.Чекмарёв Начертательная геометрия и черчение. Москва. 2002.
24. Г.М. Горшков. Д. А. Коршунов. Развёртка многогранников. Ульяновск: УлГТУ. 2008.
25. Г.М. Горшков. Д. А. Коршунов Пересечение многогранников плоскостью. Ульяновск: УлГТУ – 2008.
26. Э. Аннабердиев. Начертател геометрия. Ашгабат. Магарыф. 1988.
27. E. Annaberdiyew. İnženerçilk çyzgy. Aşgabat 2002.
28. Аширов Б. А. Рабочая тетрадь по начертательной геометрии, Ашхабат. 1973.
29. Б. А. Ашыров. Чызыклы геометрия (Нокат, гөни чызык ве текизлик). Биринжи нешир, Ашгабат, 1976.
30. Б. А. Ашыров. Чызыклы геометрия (Айламак, проекциялар текизликлерини чалшырмак). Ашгабат, 1980.
31. Б. А. Аширов. Ўстлериң кесишмеги. Ашгабат, 1982.
32. Л. Г. Нартова, А. М. Тевлин, В. С. Полозов, В. И. Якунин. Современный курс начертательной геометрии. Москва. Издательство МАИ. 1996.
33. С.К.Боголюбов Индивидуальные задания по курсу черчения Альянс. Москва. 2009.
34. М. Я. Выгодский Справочник по Высшей математике. Наука. Москва. 1966.

MAZMUNY

Sözbasy	7
Awtordan	9
I bölüm	
1. Çyzuwly geometriýa ylmynyň mazmuny, wezipesi.	12
2. Çyzuwly geometriýa ylmynyň ösüş taryhy.	13
3. Tekizlige merkezi we parallel proyektirmek.	15
3.1. Merkezi proyektirmek.	15
3.2. Parallel proyektirmek.	16
3.3. Parallel proyektirmegiň esasy häsiýetleri:	17
I bap	
Nokadyň proyeksiýalary	19
Nokadyň proyeksialar tekizlikleriniň ikisine we üçüsine proyeksialary	19
4. Nokadyň proyeksiýalar tekizlikleriniň üçüsine proyeksiýalary.	19
5. Nokadyň proyeksiýalar tekizlikleriniň ikisine proyeksiýasy.	21
6. Iki proyeksiýalar tekizliklerine garanynda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryň proyeksiýalary.	22
7. Üç proyeksiýalar tekizliklerine garanynda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryň proyeksiýalary.	24
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler.	28
II bap	
Göni çyzygyň proyeksiýasy.	29
8. Göni çyzygyň kesimini proyektirmek.	29
1. Umumy haldaky göni çyzyk.	30
2. Hususy haldaky göni çyzyk.	30
2.1. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel göni çyzyk.	30
2.2. Proyeksiýalar tekizliginiň birine perpendikulýar ya-da ikisine parallel göni çyzyk.	32
2.3. Proyeksiýalar tekizligine deňişli göni çyzyk.	34
2.4. Proyeksiýalar okuna gabat gelýän göni çyzyk.	35
9. Oksuz proyektirmek.	36
10. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek.	37
11. Umumy ýagdaýdaky göni çyzygyň kesiminiň natural uzynlygyny we onuň proyeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçlaryny kesgitlemek.	38
12. Göni çyzygyň yzlary.	39
13. Iki göni çyzyklaryň özara ýagdaýlary.	41
13.1. Kesişýän göni çyzyklar.	41
13.2. Parallel göni çyzyklar.	42
13.3. Atanak ýatan göni çyzyklar.	43
14. Tekiz burçlary proyektirmek.	44
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler.	45
III bap	
Tekizlik	47
15. Giňişlikde tekizligiň kesgitlenişi/umumy maglumat/	47
16. Ortogonal çyzgyda tekizligi şekillendirmek	47
17. Proyeksiýalar tekizliklerine görä giňişlikdäki tekizligiň dürli ýagdaýlary.	50
A. Proyeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar tekizlik.	
1. Gorizontall proyektirleýji tekizlik.	51
2. Frontall proyektirleýji tekizlik.	52
3. Profil proyektirleýji tekizlik.	53
B. Proyeksiýalar tekizlikleriniň ikisine perpendikulýar tekizlik.	53
1. Gorizontall tekizlik.	54
2. Frontall tekizlik.	54
3. Profilekizlik.	55
Geçilenleri berkitmek üçin meseleler	55

Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler.	56
18. Giňişlikdäki tekizligiň we göni çyzygyň özara ýagdaýlary.	57
19. Tekizlikde ýatan göni çyzyk we nokat.	58
20. Tekizligiň esasy çyzyklary.	61
20.1. Tekizligiň gorizontallary	61
20.2. Tekizligiň frontaly.	63
20.3. Tekizligiň profil göni çyzygy.	63
20.4. Tekizligiň proyeksiýalar tekizliklerine bolan iň uly ýapgyt çyzygy.	64
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler	66
21. Tekizligiň yzlaryny gurmak.	66
22. Tekiz figuralary proyektirmek.	68
23. Tekizlige parallel göni çyzyk.	71
24. Parallel tekizlikler.	73
25. Kesişýän tekizlikler.	74
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler.	79
26. Umumy haldaky göni çyzygyň umumy we hususy haldaky tekizlik bilen kesişmegi.	80
27. Göni çyzygyň tekiz figura bilen kesişmegi.	82
28. Epýurda görnüp – görünmezligi anyklamak.	83
29. Tekizlige perpendikulýar göni çyzyk.	86
30. Umumy ýagdaýdaky göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk gurmak (Umumy hal).	88
31. Perpendikulýar tekizlikler.	90
Perpendikulýar tekizliklere degişli meseleleriň sözülişi.	90
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler.	93
II bölüm	
32. Proyeksiýalary özgertmegiň usullary.	95
32.1. Umumy maglumatlar	95
32.2. Aýlamak usuly	97
33. Proyeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak.	99
33.1. Nokady aýlamak	99
33.2. Göni çyzygy aýlamak	101
33.3. Tekizligi aýlamak	105
33.4. Tekiz – parallel orun üýtgetme usuly (Aýlama oky görkezmezden aýlamak)	109
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler	115
34. Proyeksiýalar tekizligine parallel okuň daşynda aýlamak.	116
34.1. Nokady gorizonta göni çyzygyň daşynda aýlamak	116
34.2. Tekiz figurany gorizonta lynyň daşynda aýlamak	118
35. Proyeksiýalar tekizliginiň üstünde ýatan okuň daşynda aýlamak.	121
35.1. Utgaşdyrmak usuly	121
35.2. Tekizligiň esasy çyzyklaryny utgaşdyrmak	124
35.3. Yzlary bilen berlen umumy haldaky tekizligiň üstünde ýatan tekiz figuranyň hakyky ululygyny kesgitlemek	126
Öz - özüni barlamak üçin soraglar we meseleler:	126
36. Proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usuly.	133
36.1. Umumy maglumat	133
36.2. Proyeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usulyny ulanyp ölçeg meselelerini çözmek.	136
Öz-özünü barlamak üçin soraglar we meseleler:	144
Usuly görkezme	146
Goşmaçalar	149
1-nji epýur	149
2-nji epýur	153
Peýdalanylýan edebiýatlar	156

Baýmämmet Aşyrow

ÇYZUWLY GEOMETRIÝANYŇ ESASLARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	<i>E. Berdiýewa</i>
Surat redaktory	<i>G. Orazmyradow</i>
Teh. redaktory	<i>O. Nurýagdyýewa</i>
Neşir üçin jogapkärler	<i>A. Süleýmangulyýew</i> <i>R. Hutdyýewa</i>

Çap etmäge rugsat edildi
Möçberi 60 x 90 1/16. Edebi garniturasy. Şertli çap listi.
Şertli-reňkli ottiski. Hasap-neşir listi.
Çap listi 10. Sany 500. Sargyt №

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.