T. Annaýew

ÄHTIMALLYKLAR TEORIÝASY WE MATEMATIKI STATISTIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2013

UOK 519.2 + 378
A 66

Annaýew T.
A 66 **Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.:Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2013.

Ýokary okuw mekdepleriniň maliýe we ykdysadyýet hünärleri üçin niýetlenýän bu okuw kitaby ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika dersi boýunça öwrenilýän esasy düşünjeleri öz içine alýar.

TDKP № 86, 2013 KBK 22.17 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

SÖZBAŞY

Berkarar döwletiň bagtyýarlyk döwrüniň batly gadamlary bilen barha täze belentliklere galýan Garaşsyz, hemişelik Bitarap Türkmenistanda kämil bilim-terbiýeli nesil ýetişdirmek üçin alnyp barylýan işleriň gerimi barha giňelýär. Talyplaryň ukyp-başarnyklaryny ýokarlandyrmak, olary ylmy-döredijilik işine ugrukdyrmak maksady bilen bilim ulgamyndaky düýpli özgertmeler güýçli depginler bilen dowam etdirilýär. Bu özgertmeleriň baş maksady ýaşlara dünýäniň iň ösen talaplaryna laýyk gelýän bilim ulgamyny elýeterli etmekden ybaratdyr.

Türkmenistanyň Prezidenti hormatly Gurbanguly Berdimuhamedow: «Döwletimizi mundan beýläk-de ösdürmek we özgertmek ýolundaky maksatnamalarymyzy durmuşa geçirmekde bilim ulgamynda zähmet çekýän mugallymlaryň uly paýy bardyr» diýip belleýär. Hormatly Prezidentimiziň öňde goýan bu meselelerini durmuşa geçirmekde talyplaryň döwrebap okuw kitaplary bilen üpjün bolmagy wajypdyr.

Ýokary okuw mekdepleriniň ykdysadyýet hünärinde okaýan talyplaryň matematiki sowatlylygyny kämilleşdirmekde «Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika» dersiniň ähmiýeti örän uludyr. Onuň sebäbi jemgyýetde, ylymda we tehnikada, önümçilikde, halk hojalygyny dolandyrmakda matematiki modelirlemegiň, çaklamalary we statistiki seljermeleri geçirmegiň wajyp bolup durýandygyndan ybaratdyr. Ondan başga-da, şahsyýeti kemala getirmekde, onda ylmy dünýägaraýşy terbiýelemekde, olaryň umumy ylmy, logiki we algoritmiki pikirlerini ösdürmekde ýörite amaly meseleleri, talyplaryň gelejekdäki hünärleri bilen bagly meseleleri çözmekde bu dersiň aýratyn orny bardyr.

Bu okuw kitaby birnäçe ýyllaryň dowamynda Türkmen oba hojalyk uniwersitetiniň ykdysadyýet fakultetiniň talyplaryna okadylyp gelinýän «Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika» dersiniň esasynda döredi. Ol ýokary okuw mekdepleriniň ykdysadyýet hünäriniň talyplary üçin niýetlenendir. Bu kitap iki bölümden ybaratdyr. Birinji bölüm ähtimallyklar teoriýasynyň esaslaryny öz içine alýar. Bu bölüm iki bapdan ybarat bolup, birinji bapda tötän wakalar we olaryň üstündäki amallar hem-de wakalaryň arasyndaky gatnaşyklara garalyp geçilýär.

Ikinji bapda bolsa tötän ululyklar düşünjesine seredilýär. Tötän ululyk düşünjesi ähtimallyklar teoriýasynyň fundamental düşünjesi bolup, amaly meseleler çözülende uly ähmiýete eýedir. Diskret we üznüksiz tötän ululyklaryň paýlanyş kanunlary, olaryň san häsiýetlendirijileri giňişleýin beýan edilýär. Uly sanlar kanunyna degişli deňsizlikler we teoremalar subut edilýär.

Kitabyň ikinji bölümi matematiki statistika bagyşlanan. Bu bölüm hem iki bapdan ybaratdyr. Birinji bapda saýlama usulynyň esaslary, statistiki paýlanyş we onuň san häsiýetlendirijileri: ortaça ululyklar, dispersiýa, asimmetriýa we eksses, merkezi we teoretiki momentler hem-de paýlanyşyň parametrlerine statistiki baha bermek öwrenilýär.

Ikinji bapda korrelýasion teoriýanyň elementlerine seredilýär. Korrelýasion baglanyşygyň meseleleri getirilip görkezilýär, çyzykly korrelýasiýanyň deňlemeleri getirilip çykarylýar. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentiniň häsiýetleri, korrelýasion gatnaşyk, egriçyzykly korrelýasiýa barada maglumatlar berilýär.

Kitapda teoretiki materiallar meseleler bilen berkidilýär. Her bölümde öziňi barlamak üçin soraglar ýerleşdirilen.

Ondan başga-da, her bölüme degişli ýeterlik sanda meseleler we gönükmeler ýerleşdirilip, olar degişli jogaplar bilen üpjün edilendir. Bu bolsa ýörite meseleler kitabyna bolan zerurlygy aradan aýyrýar we teoretiki materialyň özleşdirilmegine ýardam edýär.

GIRIŞ

Biziň gündelik durmuşymyzda we önümçilikde, tebigaty öwrenmekde, ykdysadyýetde, oba hojalygynda hem-de ylmyň beýleki pudaklarynda duş gelýän hadysalaryň, wakalaryň köpüsi tötänleýin häsiýete eýedir. Eger tötän hadysa diňe bir gezek duş gelinýän bolsa, onuň gelejegi barada takyk bir pikir ýöredip bolmaýar. Ýöne hadysalar (wakalar) üýtgemeýän şertlerde köp gezek gaýtalanýan bolsa, onda bu hadysany sanlaryň kömegi bilen, ýagny mukdar taýdan öwrenmek bolar.

Matematiki ylymlaryň uly maşgalasynda tötänleýin bolup geçýän real hadysalaryň matematiki modellerini peýdalanyp, köpçülikleýin tötän wakalardaky kanunalaýyklyklary öwrenýän ylym ähtimallyklar teoriýasydyr. Modeli gurmaga girişilende öwrenilýän hadysalaryň (wakalaryň) iň wajyp aýratynlyklaryny göz öňünde tutup, ikinji derejelilerini hasaba alman galdyrmaly bolýar. Eger biz hemme şertleri we aýratynlyklary hasaba alsak, şeýle model örän çylşyrymly bolup, ony peýdalanmak kyn bolardy. Diýmek, matematiki model düzülende öwrenilýän proses barada maglumatlaryň doly bolmazlygyny hem-de modeliň ýönekeý bolmagyny we öwrenmek üçin amatly bolmagyny göz öňünde tutmak zerurdyr.

Aýratyn hem oba hojalyk hadysalary öwrenilende bu ýagdaýy hasaba almaly bolýar, sebäbi bu ýerde köp sanly özara baglanyşykly we gönümel gözegçilik edip bolmaýan faktorlara köp duş gelinýär. Meselem, agaç nahallary oturdylanda, tohum sepilende, nahallar we tohumlar birmeňzeş şertlerde ekilýär diýlip hasap edilýär. Olaryň hil aýratynlygy, ekiliş şertleri we başgalar göz öňünde tutulmaýar. Hakykatda bolsa, nahallaryň we tohumlaryň hili, olaryň ekiliş şertleri birmeňzeş bolmaýar.

Teňňe oklananda iki sany waka – sanyň ýa-da şekiliň düşmegi göz öňünde tutulýar, onuň dik durmagy ýa-da synagyň netijesinde ýitip gitmegi göz öňünde tutulmaýar.

Şonuň üçin ähtimallyklar teoriýasy aýratynlykda alnan bir wakanyň ýüze çykjagyny ýa-da çykmajagyny öňünden aýdyp bilmeýär. Ýöne şol bir şertlerde köp gezek gaýtalanýan tötän wakalardaky kanunalaýyklyklary öwrenmek bilen meşgullanýar.

Ähtimallyklar teoriýasy tebigy bilimleriň we tehnikanyň dürli pudaklarynda, köpçülige hyzmat ediş teoriýasynda, teoretiki fizikada, geodeziýada, awtomatiki dolandyryş teoriýasynda we ylmyň beýleki dürli pudaklarynda giňden ulanylýar.

Ondan başga-da, bu teoriýanyň ulanylýan iň wajyp ugurlarynyň biri ykdysadyýetdir. Jemgyýetiň ösmegi bilen halk hojalygy has çylşyrymlaşýar, diýmek, durmuş-ykdysady ýagdaýlary häsiýetlendirýän statistiki görkezijiler hem çylşyrymlaşýar.

Bu bolsa statistiki analiziň we çaklamalaryň guraly hökmünde ähtimallyklar teoriýasynyň we matematiki statistikanyň usullaryny ulanmaklyga getirýär.

Matematiki statistika häzirki wagtda senagatda, oba hojalygynda, fizikada, himiýada, biologiýada, lukmançylykda, meteorologiýada, gidrotehnikada, meliorasiýada, lingwistikada we başga ylymlarda giňden ulanylýar.

Ähtimallyklar teoriýasyna degişli ilkinji düşünjeleriň döremegi humar oýunlarynyň teoriýasyny döretmek boýunça ilkinji synanyşyklar bilen baglydyr (Kardano, Gýugens, Paskal, Ferma we başgalar XVI-XVII asyrlar).

Ähtimallyklar teoriýasynyň ösüşiniň taryhy Ýakow Bernulliniň (1654–1705) ady bilen baglydyr. Onuň subut eden teoremasy soňra «Uly sanlar kanuny» adyny almak bilen, öňki toplanan faktlaryň teoretiki taýdan esaslandyrmasy boldy.

Ähtimallyklar teoriýasynyň soňky ösüşleri Muawryň, Laplasyň, Gaussyň, Puassonyň we beýlekileriň işleri bilen baglydyr.

Ähtimallyklar teoriýasynyň matematiki ylym bolup, durnukly ösüş ýolyna düşmeginde P.L. Çebyşewiň (1821–1894) we onuň okuwçylary A.A. Markowyň (1856–1922) we A.M. Lýapunowyň (1857–

–1918) işleri uly ähmiýete eýedir. P.L. Çebyşew uly sanlar kanunyny giňeltdi we umumylaşdyrdy, ondan başga-da ol, ähtimallyklar teoriýasyna ilkinji bolup momentler usulyny girizdi.

A.A. Markow ähtimallyklar teoriýasynyň täze şahasynyň – Markow zynjyrlary teoriýasynyň düýbüni tutujydyr. Bu teoriýa häzirki döwürde ähtimallyk teoriýasynyň pajarlap ösýän ugrudyr. Ähtimallyklar teoriýasynyň merkezi predel teoremasynyň has umumy şertlerdäki subudy A.M. Lýapunowyň ady bilen baglydyr.

Ähtimallyklar teoriýasynyň we matematiki statistikanyň soňky ösüşlerini rus sowet matematikleriniň atlary bilen baglanyşdyrmak bolar (C.N. Bernşteýn, B.I. Romanowskiý, A.N. Kolmogorow, A.Ý. Hinçin, B.W. Gnedenko, A.W. Skorohod we başgalar).

I bölüm
ÄHTIMALLYKLAR TEORIÝASY

I bap
TÖTÄN WAKALAR. WAKANYŇ ÄHTIMALLYGY

§1. Tötän waka we ähtimallyk düşünjesi

Ähtimallyklar teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biri tötän waka (ýa-da ýöne waka) düşünjesidir. Waka diýlip, tejribäniň (synagyň, eksperimentiň) netijesinde ýüze çykýan ýa-da ýüze çykyp bilmeýän islendik fakta aýdylýar. Meselem: oýnalýan kubjagaz (granlarynda birden alta çenli sanlar ýazylan kubjagaz) oklananda altylygyň düşmegi, tehniki enjamyň iş wagtynda hatardan çykmagy, teňňe oklananda sanyň düşmegi, maşgalada birinji doglan çaganyň oglan bolmagy, tötänleýin alnan önümiň standarta gabat gelmegi tötän wakalardyr.

Wakalar bilen käbir sanlary baglanyşdyrýarlar, ol sanlar bu wakalaryň ýüze çykmagynyň obýektiw mümkinçiligini häsiýetlendirýärler we wakalaryň ähtimallyklary diýlip atlandyrylýar.

Ähtimallyk düşünjesine birnäçe usul bilen çemeleşilýär. Olaryň biri klassyky usul bolup, ol synagyň netijesinde wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän wakalaryň sanynyň deňmümkinçilikli wakalaryň umumy sanyna bolan gatnaşygyna esaslanýar.

Beýlekisi statistiki usul bolup, ol synaglaryň uly seriýasynda wakanyň ýygylygy düşünjesine esaslanýandyr. N sany synaglaryň seriýasynda wakanyň ýygylygy diýlip, berlen wakanyň ýüze çykan synaglarynyň sanynyň synaglaryň umumy sanyna bolan gatnaşygyna aýdylýar. Synaglaryň N sanynyň artmagy bilen otnositel ýygylyk bir hemişelik ululyga ymtylýar. Bu ululyga wakanyň ähtimallygy diýilýär.

Matematikanyň bir bölümi görnüşinde ähtimallyklar teoriýasy aksiomalara we köplükler teoriýasynyň elementar düşünjelerine esaslanýar.

§2. Köplükler teoriýasynyň esasy düşünjeleri

Köplük diýlip, islendik erkin obýektleriň toplumyna aýdylýar, toplumyň agzalaryna köplügiň elementleri diýilýär. Köplükleriň mysallary: berlen ýokary okuw jaýynda okaýan talyplaryň köplügi, 100--den uly bolmadyk natural sanlaryň köplügi, tekizlikde radiusy bire deň bolan we merkezi koordinata başlangyjynda bolan töweregiň içinde ýatýan nokatlaryň köplügi.

Köplükler bir uly harp bilen ýa-da onuň elementleriniň sanawy bilen berilýär. Meselem, 1-den 100-e çenli natural sanlaryň köplügi

$A = \{1, 2, 3, ..., 100\} = \{\text{i} - \text{bitin}, 1 \leq \text{i} \leq 100\}$ görnüşde berilýär.

Tekizlikde merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan tegelegiň içinde we çäginde ýatýan nokatlar $C = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ köplük görnüşinde berilýär. Bu ýerde x we y-nokadyň dekart koordinatalary, R-tegelegiň radiusydyr.

Elementleriň sanyna görä köplükler tükenikli we tükeniksiz köplüklere bölünýär. $A = \{1, 2, ..., 100\}$ tükenikli köplük, onuň 100 elementi bar. Hemme natural sanlaryň $N = \{1, 2, ..., n...\}$ köplügi we jübüt sanlaryň $N_2 = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ köplükleri tükeniksiz köplüklerdir. Eger tükeniksiz köplügiň hemme agzalaryny kesgitli yzygiderlik bilen sanap bolýan bolsa, oňa hasaply köplük diýilýär (ýokarda getirilen N we N_2 köplükler hasaply köplüklerdir).

$C = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ köplük tükeniksiz köplük bolsa-da, hasaply däldir (onuň elementlerini bir-biriniň yzyndan belgiläp bolmaýar).

A we B iki köplügiň gabat gelmegi üçin olar şol bir elementlerden ybarat bolmalydyr (köplükleriň gabat gelmegi $A = B$ görnüşde belgilenýär). Meselem, $x^2 - 5x + 4 = 0$ deňlemäniň kökleri $\{1, 4\}$ köplük bilen gabat gelýär.

$a \in A$ ýazgy: a obýektiň A köplügiň elementidigini aňladýar, başgaça aýdanda, a-nyň A köplüge degişlidigini aňladýar. $a \notin A$ ýazgy obýektiň A köplüge degişli däldigini aňladýar.

Boş köplük diýlip, hiç bir elementi özünde saklamaýan köplüge aýdylýar we $\varnothing$ görnüşde belgilenýär. Meselem, $x^2 + y^2 \leq -1$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügi boş köplükdir: $\{x^2 + y^2 \leq -1\} = \varnothing$ Hemme boş köplükler bir-birine ekwiwalentdir.

Eger B köplügiň hemme elementleri A köplüge girýän bolsa, B köplüge A köplügiň bölek köplügi (bölegi) diýilýär ($B \subseteq A$ ýa-da $A \supseteq B$ görnüşde belgilenýär).

Mysallar:

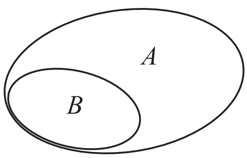
$$\{1, 2, ..., 100\} \subseteq \{1, 2, ...1000\},\ \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \{x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Boş köplük islendik köplügiň bölek köplügi hasap edilýär:

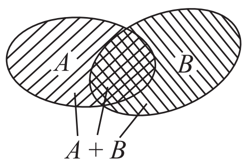
$\varnothing \subseteq A$.

Köplükleriň degişliligini geometrik taýdan şekillendirmek bolar. Bu ýagdaýda köplükleriň elementleri bolup tekizligiň nokatlary hyzmat edýär.

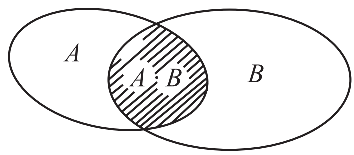
(*1-nji suratda* B köplük A köplügiň bölegidir)



1-nji surat



2-nji surat



3-nji surat

A we B köplükleriň birleşmesi (jemi) diýlip, $C = A + B$ köplüge aýdylýar. C köplük A köplügiň elementlerinden we B köplügiň elementlerinden hem-de A we B köplüklere degişli bolan elementlerden ybaratdyr. Gysgaça aýdylanda, iki köplügiň birleşmesi köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan elementleriň toplumydyr.

Mysallar:

$$\{1, 2, ..., 100\} + \{50, 51, ..., 200\} = \{1, 2, ..., 200\}$$

$$\{1, 2, ..., 100\} + \{1, 2, ..., 1000\} = \{1, 2, ..., 1000\}$$

$$\{1, 2, ..., 100\} + \varnothing = \{1, 2, ..., 100\}$$

A we B köplügiň birleşmesi *2-nji suratda* şekillendirilen. Berlen köplükleriň islendik sanynyň birleşmesi ýokardaka meňzeş kesgitlenýär:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Bu köplük $A_1, A_2...A_n$ köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan elementlerden ybaratdyr.

A we *B* köplükleriň kesişmesi (köpeltmek hasyly) diýlip, bir wagtda *A* köplüge we *B* köplüge degişli bolan elementlerden düzülen $D = AB$ köplüge aýdylýar. Mysallar:

$$\{1, 2, ..., 100\} \cdot \{50, 51, ..., 200\} = \{50, 51, ..., 100\}$$
$$\{1, 2, ..., 100\} \cdot \{1, 2, ..., 1000\} = \{1, 2, ..., 100\}$$
$$\{1, 2, ..., 100\} \cdot \varnothing = \varnothing$$

Iki köplügiň kesişmesi *3-nji suratda* şekillendirilen.

Islendik sandaky köplükleriň kesişmesi ýokardaka meňzeş kesgitlenýär:

$$A_1 \cdot A_2 ... A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Bu köplük bir wagtda A_1, A_2, ... A_n köplüklere degişli bolan elementlerden ybaratdyr. Eger $AB = \varnothing$ bolsa, köplükler kesişmeýärler, ýagny olaryň umumy elementleri ýokdur.

Köplükler teorýasyndan getirilen bu maglumatlar ähtimallyk teorýasynyň gurluşynyň teoretiki-köplükler sistemasynda peýdalanmak üçin ýeterlikdir.

§3. Tötän wakalar we olaryň arasyndaky gatnaşyklar. Elementar wakalaryň giňişligi

Öň belleýşimiz ýaly, ähtimallyklar teoriýasynda ilkinji esasy düşünje tötän waka düşünjesidir. Gözegçiligiň ýa-da synagyň netijeleri waka diýlip atlandyrylýar. Wakalar latyn elipbiýiniň *A*, *B*, *C*, *D*,... baş harplary bilen belgilenýär.

Wakanyň ýüze çykmagy üçin kesgitli şertler toplumynyň ýerine ýetmegi zerurdyr.

Nyşana ok atylanda atmaga taýýarlyk görmek, tüpeňe ok salmak, nyşana almak (şertler toplumy), tüpeňiň gulagyny gysmak-synag, nyşana degmek ýa-da degmezlik – waka.

Wakalar öz arasynda birnäçe görnüşlere bölünýär, Hökmany waka, mümkin däl waka, tötän waka.

Hökmany waka diýlip, berlen şertlerde synagyň netijesinde hökman ýüze çykýan waka aýdylýar. Meselem, oýnalýan kubjagaz oklananda ýediden kiçi sanlaryň biriniň düşmegi hökmany wakadyr. π-san irrasional sandyr – hökmany waka. Natural sanlaryň hatarynda jübüt sanlar bar – hökmany waka.

Mümkin däl waka diýlip, şertler toplumynyň ýerine ýetmegi netijesinde berlen synagda ýüze çykyp bilmeýän waka aýdylýar. Meselem, içinde diňe ak şarlar bolan gapdan gök şaryň alynmagy, elektrik zynjyrynda tok ýok wagty çyranyň ýanmagy, üç gezek ok atyp bäş gezek nyşana degmeklik – mümkin däl wakalardyr.

Tötän waka diýlip, şertler toplumynyň ýerine ýetmegi netijesinde ýüze çykyp bilýän ýa-da ýüze çykyp bilmeýän wakalara aýdylýar. Meselem, oýnalýan kubjagaz oklananda täk sanyň düşmegi, teňňe oklananda sanyň düşmegi tötän wakalardyr. Tötän wakalar hakynda gürrüň edilende synagyň ýa-da gözegçiligiň netijesini öňünden aýdyp bolmaýanlygy göz öňünde tutulýar. Eger synagyň netijesini öňünden aýdyp bolýan bolsa, şeýle wakalara determinirlenen wakalar diýilýär.

Ähtimallyklar teoriýasynda determinirlenen däl tötän wakalar öwrenilýär. Berlen synagda iki sany A we B wakanyň biriniň ýüze çykmagy beýlekisiniň ýüze çykmagyny ret edýän bolsa, onda bu wakalara sygyşyksyz wakalar diýilýär, A_1, A_2, ..., A_n wakalaryň hiç bir ikisi bilelikde ýüze çykyp bilmeýän bolsa, onda olara jübüt-jübütden sygyşyksyz wakalar diýilýär. Meselem, teňňe oklananda A-sanyň düşmegi, B-şekiliň düşmegi sygyşyksyz wakalardyr.

Eger şertler toplumynyň ýerine ýetmegi netijesinde A we B wakalaryň ýüze çykmagynyň birmeňzeş mümkinçiligi bar bolsa, olara deňmümkinçilikli wakalar diýilýär. Meselem, teňňe bir gezek oklananda sanyň ýa-da şekiliň düşmegi, oýnalýan kubjagaz oklananda birden alta çenli oçkolaryň islendik biriniň düşmegi deňmümkinçilikli wakalardyr.

Eger topardaky wakalaryň haýsy-da bolsa biriniň ýüze çykmagy hökmany waka bolsa, onda ol wakalara ýeke-täk mümkinçilikli wakalar diýilýär. Teňňe oklananda A-sanyň düşmegi, B-şekiliň düşmegi ýeke-täk mümkin bolan wakalardyr.

Ýeke-täk mümkin bolan wakalaryň köplügine sygyşyksyz wakalaryň doly topary diýilýär.

Eger A_1, A_2, ..., A_n wakalaryň synagyň netijesinde diňe biri hökman ýüze çykýan bolsa, onda olar sygyşyksyz wakalaryň doly toparyny emele getirýärler. Meselem, oýnalýan kubjagaz oklananda ýüze çykýan A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 wakalar doly topary emele getirýärler.

Eger A we $\overline{A}$ wakalar ýeke-täk mümkin bolan wakalar bolup, doly topary emele getirýän bolsalar, olara garşylykly wakalar diýilýär. Meselem, bir gezek ok atylanda ýeke-täk mümkin bolan wakalar: A-nyşana degmek, $\overline{A}$-nyşana degmezlik. Sygyşyksyz, deňmümkinçilikli, ýeke-täk mümkinçilikli, doly topary emele getirýän wakalaryň giňişligine elementar wakalaryň giňişligi ýa-da elementar wakalaryň köplügi diýilýär. Şunlukda wakalaryň özüne elementar wakalar diýilýär. Her elementar waka elementar wakalaryň giňişliginde nokat hökmünde garalýar. Elementar wakalaryň giňişligini Ω bilen belgiläliň.

Eger ω bu giňişligiň elementar wakasy bolsa, $\omega \in \Omega$ görnüşde belgilenýär. Elementar wakalaryň giňişligi ýokardaky ýaly kesgitlenen bolsa, onda ony düzýän ω_1, ω_2,... ω_n wakalara ýagdaýlar (mümkinçilikler) diýilýär, synaga bolsa ýagdaýlar shemasyna getirilýän synag diýilýär.Islendik çylşyrymly wakany elementar wakalaryň toplumy görnüşinde aňlatmak bolar. Meselem, her synagda döreýän ýagdaýlar elementar wakadyr. Teňňe oklananda döreýän ýagdaýlary iki sany elementar waka bölmek bolar: sanyň düşmegi we şekiliň düşmegi. Elementar wakalaryň giňişliginiň mysalyna seredeliň.

Teňňe üç gezek oklananda aşakdaky elementar wakalar ýüze çykýar:

$w_1 = \{sss\}$, $w_2 = \{ssý\}$, $w_3 = \{ýss\}$, $w_4 = \{ýýs\}$, $w_5 = \{ýsý\}$, $w_6 = \{sýs\}$, $w_7 = \{ýýý\}$, $w_8 = \{sýý\}$.

(bu ýerde *s*-san, *ý*- ýadygärlik).

Eger A wakanyň ýüze çykmagy bilen B waka-da ýüze çykýan bolsa, A waka B wakany ýüze çykarýar diýilýär ýa-da B waka A wakanyň hususy haly diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär $A \subset B$.

Eger $A \subseteq B$ we $B \subseteq A$ bolsa, onda A we B wakalara deňgüýçli, özara ekwiwalent wakalar diýilýär we $A = B$ görnüşde belgilenýär. Meselem, tötänleýin bir hakyky san bellenildi, $\Omega = \{-\infty, +\infty\}$, A = {bellenen san 3-e bölünýär}, B = {bellenen sanyň sifrleriniň jemi 3-e bölünýär}, bu ýerde $A = B$.

Aşakdaky wakalary deňeşdireliň:

A – kubjagaz oklananda ikilik sanyň düşmegi;

B – kubjagaz oklananda jübüt sanyň düşmegi.

Bu ýerde eger A waka ýüze çykýan bolsa, B waka hem ýüze çykýar. Bu fakty $A \subset B$ görnüşde aňlatmak bolar. A waka B wakanyň hususy halydyr, sebäbi B waka üç elementar wakadan, 2, 4, 6 sanlaryň düşmeginden, A waka bolsa diňe bir 2 sanyň düşmeginden ybaratdyr.

Mysala seredeliň: A – ýagyş ýagýar, B – howa bulutly.

Bu ýerde B waka A wakanyň hususy halydyr. Ýagyş ýaganda hemişe howa bulutly bolýar, ýöne bulutly howa ýagşyň ýagmagyny aňlatmaýar.

Hemme elementar wakalary özünde saklaýan, ýagny elementar wakalaryň Ω giňişligi bilen gabat gelýän waka hökmany wakadyr. Hiç bir elementar wakany özünde saklamaýan boş köplük $\varnothing$ mümkin däl wakadyr.

§4. Wakalaryň üstünde amallar

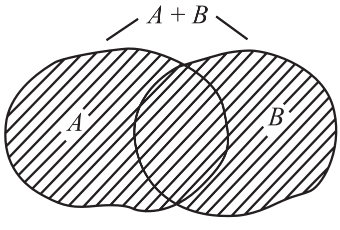
Wakalaryň üstünde amallar köplükleriň üstündäki amallara meňzeş kesgitlenýär.

1) Wakalaryň birleşmesi (jemi).

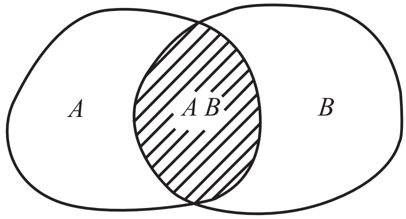
A we B wakalara seredeliň. A we B iki wakanyň birleşmesi, (jemi) diýlip, bu wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyndan ybarat bolan C waka aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenýär (*4-nji surat*):

$$A \cup B = C \quad \text{ýa-da} \quad A + B = C.$$

Birnäçe A_1, A_2, ..., A_n wakalaryň jemi diýlip, bu wakalaryň iň bolmanda, biriniň ýüze çykmagyndan ybarat bolan D waka aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenýär:



4-nji surat



5-nji surat

$$D = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \quad \text{ýa-da} \quad D = A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Mysala seredeliň: 1) Oýnalýan kubjagaz oklanýar. $\omega_1 \cup \omega_3 \cup \omega_5$ waka, ω_1, ω_3, ω_5 wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyny, täk sanlaryň düşmegini aňladýar. Şonuň üçin

$$D = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5.$$

Eger A we B sygyşyksyz wakalar bolsa, onda wakalaryň bir wagtda ýüze çykmagy mümkin däldir, şonuň üçin wakalaryň $A + B$ jemi A wakanyň ýa-da B wakanyň ýüze çykmagyndan ybaratdyr.

2) Wakalaryň kesişmesi (köpeltmek hasyly).

A we B iki wakanyň kesişmesi diýlip, bu wakalaryň bir wagtda ýüze çykmagyndan ybarat bolan C waka aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenýär (*5-nji surat*):

$$A \cap B = C \quad \text{ýa-da} \quad AB = C.$$

Birnäçe A_1, A_2, ..., A_n wakalaryň kesişmesi diýip, bu wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyndan ybarat bolan waka aýdylýar we $A_1 A_2 ... A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ görnüşde belgilenýär.

Meselem, nyşana üç ok atylýar diýip hasap edip, aşakdaky wakalara seredeliň:

B_1 – birinji okuň nyşana degmezligi;

B_2 – ikinji okuň nyşana degmezligi;

B_3 – üçünji okuň nyşana degmezligi.

Onda $B = B_1\ B_2\ B_3$ waka bir gezegem nyşana degmezligi aňladýar.

Köplenç çylşyrymly wakalary ýönekeý wakalaryň üsti bilen aňlatmaly bolýar. Şeýle bolanda wakalary goşmak we köpeltmek düzgünlerinden peýdalanylýar.

Meselem, nyşana üç gezek ok atylanda aşakdaky elementar wakalaryň ýüze çykmagy mümkin:

A_1 – birinji gezek nyşana degmek;

$\overline{A_1}$ – birinji gezek nyşana degmezlik;

A_2 – ikinji gezek nyşana degmek;

$\overline{A_2}$ – ikinji gezek nyşana degmezlik;

A_3 – üçünji gezek nyşana degmek;

$\overline{A_3}$ – üçünji gezek nyşana degmezlik.

Üç gezek atylanda diňe bir gezek nyşana degmekden ybarat bolan *B* waka seredeliň. Bu ýerde *B* wakany elementar wakalaryň aşakdaky kombinasiýasynyň üsti bilen aňlatmak mümkin:

$$B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

Ikiden az bolmadyk gezek nyşana degmekden ybarat bolan *C* waka aşakdaky görnüşde aňladylýar:

$$C = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3.$$

Çylşyrymly wakalaryň elementar wakalaryň üsti bilen aňladylyşynyň şeýle usullary ähtimallyk teoriýasynda köp ulanylýar.

A we *B* iki wakanyň tapawudy diýlip, *A* wakanyň ýüze çykyp, *B* wakanyň ýüze çykmazlygyndan ybarat bolan *C* waka aýdylýar we $C = A - B$ ýa-da $A = B + C$ görnüşde belgilenýär.

Wakalaryň üstündäki amallaryň düzgünine seredeliň.

1. $A + A = A$
2. $A + B = B + A$
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$
4. $AB = BA$
5. $AA = A$
6. $A\,(BC) = (AB)\,C$
7. $A\,(B+C) = AB + AC$
8. $A + (BC) = (A + B)\,(A + C)$
9. $A + \varnothing = A$
10. $A\varnothing = \varnothing$
11. $A + \Omega = \Omega$
12. $A\,\Omega = A$
13. $\overline{\Omega} = \varnothing$
14. $A + \overline{A} = \Omega$
15. $\overline{\overline{A}} = A$
16. $A\overline{A} = \varnothing$
17. $\overline{A}\Omega = \overline{A}$.

§5. Wakanyň ähtimallygy

Wakalara seredip olaryň her biriniň ýüze çykmak mümkinçiliginiň dürlüdigini görýäris. Wakalaryň mümkinçiligini san taýdan deňeşdirmek üçin olaryň her biri bilen kesgitli bir sany baglanyşdyrýarlar, ol san näçe uly bolsa wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligi şonça-da uludyr. Bu sana wakanyň ähtimallygy diýilýär, ol wakanyň obýektiw mümkinçiliginiň san ölçegidir.

A wakanyň ähtimallygy *P*(*A*) simwol bilen belgilenýär (probabilitas – ähtimallyk sözünden).

Goý, synagyň netijesinde elementar wakalaryň *n* sanysy ýüze çykýar diýeliň. Olaryň arasynda *m* sanysynyň ýüze çykmagy *A* wakanyň ýüze çykmagyna getirýär diýeliň. Bu *m* sany waka, *A* wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän wakalar diýilýär.

Kesgitleme. *A* wakanyň ähtimallygy diýlip, bu wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän deň mümkinçilikli wakalaryň *m* sanynyň, hemme mümkin bolan elementar wakalaryň *n* sanyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.

Diymek,

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Bu ýerde: *P*(*A*) – *A* wakanyň ähtimallygy;
m – *A* wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany;
n – hemme elementar wakalaryň sany.

Ähtimallygyň kesgitlemesinden gelip çykýan häsiýetlerine seredeliň:

1. Islendik wakanyň ähtimallygy otrisatel däldir we birden uly bolup bilmez.

Hakykatdan-da, *A* waka ýardam edýän wakalaryň *m* sany otrisatel bolup bilmez we wakalaryň *n* umumy sanyndan uly däldir, şonuň üçin:

$$0 \le m \le n, \quad bu\ ýerden \quad 0 \le \frac{m}{n} \le 1$$

deňsizlikleri göz öňüne tutup alarys:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Hökmany wakanyň ähtimallygy bire deňdir. Bilşimiz ýaly, hökmany wakanyň ýüze çykmagyna ýeke-täk mümkinçilikli, deň mümkinçilikli, sygyşyksyz wakalaryň hemmesi ýardam edýär, şonuň üçin $m = n$, $P = 1$.

3. Mümkin däl wakanyň ähtimallygy nola deň, sebäbi bu waka ýardam edýän wakalaryň sany $m = 0$.

Mesele. Gapda 5 gyzyl, 10 gara we 19 gök şar bar. Gapdan tötänleýin gyzyl, gara, gök şaryň alynmagynyň ähtimallygy nähili?

Çözülişi. Bu ýerde 3 waka seredilýär. A – gyzyl şaryň alynmagy, B – gara şaryň alynmagy, C – gök şaryň alynmagy

$$P(A) = \frac{5}{34}; \qquad P(B) = \frac{10}{34}; \qquad P(C) = \frac{19}{34}.$$

Ähtimallygyň ýokarda getirilen kesgitlemesine klassyky kesgitleme diýilýär. Bu model boýunça wakanyň ähtimallygy synaga çenli kesgitlenýär we wakanyň ýüze çykmagynyň obýektiw mümkinçiliginiň san ölçegini aňladýar.

Klassyky kesgitlemede synagyň netijesinde ýüze çykýan ýagdaýlaryň sany tükenikli diýlip hasap edilýär. Ýöne iş ýüzünde şeýle ýagdaýlaryň sanynyň tükeniksiz bolýan wagtlary köp duş gelýär. Şeýle bolanda klassyky kesgitlemäni ulanmak bolmaýar.

Bu bolsa klassyky kesgitlemäniň çäklidigini görkezýär. Ondan başga-da, synagyň netijesinde ýüze çykýan elementar wakalaryň deň mümkinçilikli bolmagy hakyndaky talaplary esaslandyrmak kyn bolýar.

Şu sebäplere görä klassyky kesgitleme bilen bir hatarda statistiki kesgitlemeden hem peýdalanylýar.

§6. Statistiki ähtimallyk

Goý, synaglaryň n seriýadan ybarat bolan toplumy geçirilen diýeliň, olaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagy-da, çykmazlygy-da mümkin. Berlen synaglarda A wakanyň ýygylygy diýlip, A wakanyň ýüze çykan synaglarynyň sanynyň hemme synaglaryň sanyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.

A wakanyň ýygylygyny $P^*(A)$ bilen belgiläp, kesgitlemä görä alarys:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Bu ýerde m san A wakanyň ýüze çykan synaglarynyň sany, n synaglaryň umumy sany.

Mesele. Hil barlagyny geçirmek üçin önümleriň toplumyndan 200 sanysy tötänleýin alyndy, olaryň 4 sanysy hili pes önüm bolup çykdy. Hili pes önümleriň ýygylygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, A hili pes önümiň alynmagy bolsun, onda

$$m = 4, n = 200,$$

$$P^* = \frac{4}{200} = 0{,}02.$$

Wakanyň ýygylygynyň häsiýetlerine seredeliň:

1. A wakanyň ýygylygy nol bilen biriň arasynda ýerleşen otrisatel bolmadyk sandyr:

$$0 \le P^*(A) \le 1, \quad 0 \le \frac{m}{n} \le 1, \quad 0 \le m \le n.$$

2. Hökmany wakanyň ýygylygy bire deňdir. Hökmany waka her synagda ýüze çykýar, diýmek, $m = n$:

$$P^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

3. Mümkin däl wakanyň ýygylygy nola deňdir. Hakykatdan-da, synaglar gaýtalananda bu waka hiç haçan ýüze çykmaýar, diýmek, $m = 0$:

$$P^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Wakanyň ýygylygyny diňe synag geçirilenden soň kesgitläp bolýar, şunlukda synaglaryň dürli seriýasynda, şol bir şertlerde wakanyň ýygylygy hemişelik bolup galmaýar.

Şonuň üçin ýygylyk düşünjesi wakanyň gowy häsiýetlendirijisi däldir. Ýöne synaglaryň sanynyň köpelmegi bilen ýygylyk ýuwaş-ýuwaşdan durnuklaşýar, başgaça aýdylanda, ol käbir hemişelik sana golaýlaşýar. Seredilýän waka bilen käbir hemişelik sany baglanyşdyrmak bolar. Bu hemişelik san wakanyň ähtimallygydyr.

Diýmek, synaglaryň sanynyň artmagy bilen wakanyň ýygylygy bir hemişelik sanyň golaýynda toplanýar. Bu sana tötän wakanyň ähtimallygy diýilýär.

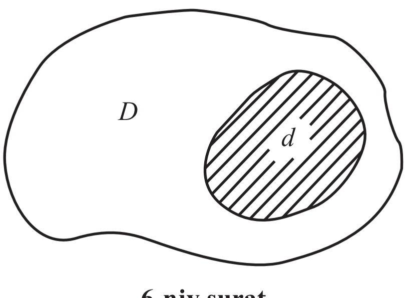
Bu kesgitlemä ähtimallygyň statistiki kesgitlemesi diýilýär. Ol kesgitlemäniň esasy artykmaçlygy onuň real tejribelere esaslanýanlygydyr. Ýöne ähtimallygy ynançly kesgitlemek üçin tejribeleriň köp sanlysyny geçirmeli bolýar, bu bolsa uly çykdajylary talap edýär.

§7. Geometrik ähtimallyk

Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinde deň mümkinçilikli doly toparlaryň tükenikli sanyna seredilýär. Ýöne amaly meseleler çözülende mümkin bolan ýagdaýlaryň sany tükeniksiz bolan synaglara köp duş gelinýär. Şeýle synaglar üçin klassyky kesgitlemeden peýdalanyp bolmaýar. Ýöne bu ýagdaýda wakalaryň deň mümkinçilikliliginden ugur alýan ähtimallygy kesgitlemegiň beýleki bir usulyndan peýdalanmak bolar. Bu usul gönüniň, tekizligiň ýa-da giňişligiň tükenikli bölegine nokadyň tötänleýin düşmegine getirýän meselelerde ulanylýar. Şu ýerden bu usulyň geometrik ähtimallyk diýlen ady gelip çykýar.

Kesgitlilik üçin iki ölçegli ýagdaýa seredeliň. Bir ölçegli we üç ölçegli ýagdaýlarda meýdanyň ýerine uzynlyk we göwrüm barada aýtmak gerek bolýar.

Goý, tekizlikde meýdany S_D bolan *D* oblast berlen we bu oblastyň içinde meýdany S_d bolan beýleki bir d oblast bar diýeliň. (*6-njy surat*)



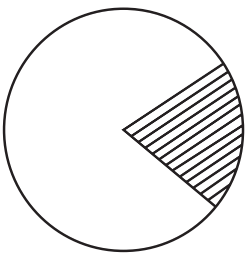
6-njy surat

D oblasta tötänleýin bir nokat oklanýar, bu nokadyň d oblasta düşmeginiň ähtimallygy nämä deň diýlen sorag ýüze çykýar. Şunlukda tötänleýin oklanan nokat *D* oblastyň islendik nokadyna düşüp biler we onuň *D* oblastyň islendik bölegine düşmeginiň ähtimallygy bu bölegiň meýdanyna proporsionaldyr we onuň ýerleşen ýerine we formasyna bagly däldir. Diýmek, D oblasta tötänleýin oklanan nokadyň d oblasta düşmeginiň ähtimallygy

$$P = \frac{S_d}{S_D}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, nokadyň käbir oblastyň içine tötänleýin düşmeginiň mümkinçiligi bu oblastyň ýagdaýyna ýa-da onuň çäklerine bagly däldir, diňe onuň ölçeglerine baglydyr. Diýmek, tötän nokadyň käbir oblastyň içine düşmeginiň ähtimallygy bu oblastyň ölçegleriniň nokadyň düşüp biläýjek oblastynyň bütin ölçegine bolan gatnaşygyna deňdir.

1-nji mesele. Hemişelik burç tizligi bilen çalt aýlanýan tegelek nyşana bar diýeliň. Bu nyşananyň bäşden bir bölegi gara reňke reňklenen, galan bölegi ak reňkli. Nyşana ok atylýar we nyşana degmek hökmany waka hasap edilýär. Nyşananyň gara sektoryna degmegiň ähtimallygyny tapmaly.



7-nji surat

Bizi gyzyklandyrýan ähtimallyk tegelegiň gara reňke reňklenen böleginiň meýdanynyň onuň bütin meýdanyna bolan gatnaşygyna deňdir, ýagny $P = \frac{1}{5}$ (*7-nji surat*).

§8. Ähtimallygyň aksiomatiki kesgitlenişi

Ähtimallygyň statistiki kesgitlemesinde biziň sereden tassyklamalarymyz matematiki taýdan berk esaslandyrylan bolman, olar synagyň netijesinde alnan we ähtimallygyň häsiýetleri ýygylygyň esasy häsiýetleri bilen gabat gelýär diýlip hasap edilýär. Diňe şeýle bolanda bu teoriýa synaglaryň netijesi bilen gabatlaşýar.

Ýygylygyň birinji häsiýetine esaslanyp, ýagny tötän ululygyň ýygylygy bir bilen noluň arasynda ýerleşen otrisatel bolmadyk sandyr diýlen häsiýete esaslanyp, ähtimallygyň birinji aksiomasy formulirlenýär.

Goý, her bir waka bu wakanyň ähtimallygy diýlip at berilýän käbir san degişli edilipdir diýeliň. Wakalaryň ähtimallyklaryndan aşakdaky aksiomalary kanagatlandyrmagy talap edeliň:

1. Wakanyň ähtimallygy nol bilen biriň arasynda ýerleşendir.

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1}$$

2. Ähtimallyklary goşmak aksiomasy: eger A we B sygyşyksyz wakalar bolsa, onda

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Bu aksioma wakalaryň islendik tükenikli sany üçin umumylaşdyrylýar.

Eger $A_1, A_2, \ldots A_n$ sygyşyksyz wakalar bolsa, onda

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3}$$

3. Wakalaryň tükeniksiz yzygiderligi üçin goşmak aksiomasy.

Eger $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ sygyşyksyz wakalar bolsa, onda

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{4}$$

Ähtimallyklar teoriýasynyň aksiomalary elementar wakalaryň ähtimallyklarynyň üsti bilen islendik wakanyň ähtimallygyny hasaplamaga mümkinçilik döredýär. Şunlukda elementar wakalaryň ähtimallyklaryny nähili hasaplamalydygy baradaky meselä seredilmeýär. Amalýetde olar synagyň simmetrikligine seredip (meselem, oýnalýan kubjagaz oklananda onuň islendik granynyň düşmekligi deň ähtimallykly hasap edilýär) ýa-da synagyň netijesi boýunça (ýygylyklar) hasaplanýar.

§9. Kombinatorikanyň düzgünleri

Kombinatorika ähtimallyk teoriýasynda giňden ulanylýar. Matematikanyň bu bölümleriniň biri-birine ýakynlygy ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi bilen düşündirilýär. Bu kesgitlemä görä $P(A)$ ähtimallygy kesgitlemek hemme mümkin bolan elementar wakalaryň n sanyny, A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän wakalaryň k sanyny kesgitlemeklige getirýär. Bu mesele bolsa kä halatlarda kombinatoriki häsiýetlere eýe bolýar.

Deň mümkinçilikli we ýardam ediji ýagdaýlaryň sanyny bilmek üçin kombinatorikanyň formulalaryny ulanmak meseläniň çözülişini aňsatlaşdyrýar. Ähtimallyk teoriýasynyň meselelerinde n elementli köplüklerden alnan k elementli ($k \leq n$) kombinasiýalara (birleşmelere) seredilýär.

Birleşmeleriň üç görnüşine seredeliň: 1) ýerleşdirmeler, 2) çalşyrmalar, 3) utgaşmalar.

1) Kesgitleme. Berlen n elementlerden alnan biri-birinden elementleri ýa-da olaryň tertibi bilen tapawutlanýan k elementli bölek köplüklere ýerleşdirmeler diýilýär. n elementden alnan k elementli ýerleşdirmeleriň sany

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Mesele. 1, 2, 3,4, 5 sanlaryň köplüginden näçe sany (gaýtalanýan sanlary bolmadyk) üç belgili san düzmek bolar?

Çözülişi. $n = 5$, $k = 3$, $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2) Kesgitleme. Diňe elementleriniň tertibi bilen tapawutlanýan n elementli köplüklere çalşyrmalar diýilýär.

Çalşyrmalar ýerleşdirmeleriň hususy halydyr. Hemme çalşyrmalaryň sany P_n bilen belgilenýär. Ýerleşdirmeleriň formulasynda $k = n$ hasap edip alarys:

$$P_n = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3...n = n!$$

$$P_0 = 0! = 1.$$

Mesele. Uniwersitetiň kassasyna talyp hakyny almak üçin 4 talyp geldi. Olar näçe sany usul bilen nobata durup bilerler?

Çözülişi: $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

3) Kesgitleme berlen köplügiň n elementlerinden düzülen k elementli utgaşmalar diýlip, bir-birinden, iň bolmanda, bir element bilen tapawutlanýan köplüklere aýdylýar. n elementden düzülen k elementli utgaşmalaryň sany

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formula boýunça hasaplanýar.

Mesele. Toparda 25 talyp bar. Olaryň 10-sy gyz,15-si oglan. Topardan bije boýunça 5 talyp alyndy, olaryň ikisiniň gyz bolmagynyň ähtimallygy nähili?

Çözülişi. Hemme mümkin bolan elementar wakalaryň sany

$$n = C_{25}^5 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21.$$

Gözlenýän wakanyň, ýagny 5 talypdan ybarat toparlaryň (2 gyz, 3 oglan) ýüze çykmagyna ýardam edýän wakalaryň sanyny bilmek üçin aşakdakylary kesgitläliň:

1) Gyzlardan düzümi boýunça dürli näçe jübüdi düzüp bolar?

2) Oglanlardan düzümi boýunça dürli näçe üçlük düzüp bolar?

Gyzlaryň jübüdiniň sany C_{10}^2, oglanlaryň üçlüginiň sany C_{15}^3 deňdir. Olary hasaplalyň.

$$C_{10}^2 = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 9 \cdot 5, \qquad C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Gyzlaryň her jübüdi oglanlaryň üçlügi bilen bir topara düşüp bilerler. Şonuň üçin iki gyzdan we üç oglandan ybarat bolan toparlaryň sany

$$m = C_{10}^2 \cdot C_{15}^3 = 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Saýlanyp alnan 5 talybyň arasynda 2 gyzyň bolmagynyň ähtimallygy

$$P = \frac{m}{n} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}{5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} = \frac{195}{506} = 0,385.$$

§10. Ähtimallyklary goşmak teoremasy

1-nji teorema. Sygyşyksyz wakalaryň tükenikli sanysynyň jeminiň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir.

Subudy. Teoremany ilki bilen A we B iki wakanyň jemi üçin subut edeliň. Goý, hemme mümkin bolan n sany deň mümkinçilikli, ýeke-täk mümkinçilikli sygyşyksyz wakalaryň arasynda n_1 sanysy A wakanyň ýüze çykmagyna, n_2 sanysy B wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýär diýeliň. Onda ol wakalaryň ähtimallyklary aşakdaky ýaly kesgitlener:

$$P(A) = \frac{n_1}{n}, \quad P(A) = \frac{n_2}{n}. \tag{1}$$

Şerte görä A we B wakalar sygyşyksyzdyrlar. Diýmek, A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän n_1 ýagdaýlaryň hiç biri B wakanyň ýüze çykmagyna ýardam etmeýär,ýöne B wakanyň ýüze çykmagyna galan n_2 yagdaý ýardam edyär, bu ýerden görnüşi ýaly, wakalaryň $A + B$ jemine hemme mümkin bolan n ýagdaýlaryň arasynda $n_1 + n_2$ ýagdaýlar ýardam edýär, şonuň üçin $A + B$ wakanyň ähtimallygy

$$P(A+B) = \frac{n_1 + n_2}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Diýmek,

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Iki waka üçin teorema subut edildi. Matematiki induksiýa usulyny ulanyp, teoremany wakalaryň tükenikli sany üçin subut edeliň. Goý, teorema $A_1, A_2, ..., A_n$ sygyşyksyz wakalar üçin dogry diýeliň. Onda

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{3}$$

Wakalaryň $A_1 + A_2 + ... + A_n + A_{n+1}$ jemine iki wakanyň jemi ýaly seredeliň: $(A_1 + A_2 + ... + A_n) + A_{n+1}$, onda iki waka üçin teoremanyň subut edilendigini göz öňüne tutup alarys:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + A_{n+1}) = P[(A_1 + A_2 + ... + A_n) + A_{n+1}] =$$
$$= P(A_1 + A_2 + ... + A_n) + P(A_{n+1}).$$

Bu teorema wakalaryň sany n bolanda dogry hasap edildi. Onda

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + A_{n+1}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

2-nji teorema. Doly topary emele getirýän sygyşyksyz wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir.

Subudy. Berlen wakalaryň doly topary emele getirýänligi üçin $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$. Beýleki tarapdan, $A_1, A_2, \dots, A_n$ wakalar sygyşyksyzdyrlar. Onda birinji teorema görä

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Diýmek,

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(\Omega) = 1.$$

Subut etmelimiz hem şudy.

3-nji teorema. A waka garşylykly bolan $\overline{A}$ wakanyň ähtimallygy A wakanyň ähtimallygy bilen birligiň arasyndaky tapawuda deňdir.

Subudy. A we oňa garşylykly bolan $\overline{A}$ wakalar doly topary emele getirýärler, onda ikinji teorema görä

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Bu ýerden

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

Subut edilen ähtimallyklary goşmak teoremasy diňe sygyşyksyz wakalar üçin dogrydyr. Onuň şeýledigi göz öňüne tutulmasa, nädogry we manysyz netijelere gelinmegi mümkin. Ony aşakdaky meselede görmek bolar. Gowaça tohumynyň gögerijiligi 60%. Ekilen 5 tohumdan haýsydyr biriniň gögerip çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly. Birinji, ikinji, ..., bäşinji tohumlaryň gögermegini, degişlilikde, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 wakalar bilen belgiläliň. Gözlenýän ähtimallygy ähtimallyklary goşmak teoremasyny ulanyp hasaplasak:

$$P(A_1) + P(A_2) + (A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 = 3.$$

Ähtimallygyň üçe deň bolmagy manysyzdyr. Şeýle nädogry netijä gelinmeginiň sebäbi goşmak teoremasynyň ulanylan wakalary sygyşykly wakalardyr. Hakykatdan-da, A_1 wakanyň ýüze çykmagy (birinji tohumyň gögermegi) A_2 wakanyň ýüze çykmagyny (ýagny ikinji tohumyň hem gögermegini) aradan aýyrmaýar.

4-nji teorema. Eger A wakanyň ýüze çykmagy bilen B waka hem ýüze çykýan bolsa, onda A wakanyň ähtimallygy B wakanyň ähtimallygyndan uly däldir.

Subudy. B wakanyň A waka ekwiwalent bolmagy mümkin ýa-da ony $B_1 + B_2$ görnüşde aňlatmak mümkin. Bu ýerde B_1 waka A waka ekwiwalentdir, B_2 bolsa B_1 waka bilen sygyşyksyzdyr. Birinji ýagdaýda $P(A) = P(B)$ bolanda teorema dogrudyr.

Ikinji ýagdaýda ähtimallyklary goşmak teoremasynyň esasynda

$$P(B_1) + P(B_2) = P(B)$$

deňlik dogrudyr.

$$P(B_1) = P(A)$$

bolanlygy üçin,

$$P(A) + P(B_2) = P(B).$$

Bu ýerden $P(A) \leq P(B)$. Sebäbi, ähtimallygyň häsiýetlerine görä: $P(B_2) \geq 0$.

§11. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasy

1-nji kesgitleme. B waka ýüze çykdy diýlen şertde hasaplanan A wakanyň ähtimallygyna B waka görä şertli ähtimallyk diýilýär we $P_B(A)$ ýa-da $P(A/B)$ görnüşde belgilenýär. Bu kesgitlemä görä $P(A/\overline{B})$ – ähtimallyk A wakanyň B waka ýüze çykmadyk ýagdaýyndaky ähtimallygyny aňladýar.

1-nji mesele. Ýygnaýja iki stanokda ýasalan detallar gelip düşýär. Şunlukda birinji stanokda ýasalan 100 detal, olaryň 90 sanysy standart, ikinji stanokda ýasalan 150 detal, olaryň 130 sanysy standart. Eger B waka tötänleýin alnan detalyň birinji stanokda ýasalan bolmagy bolsa, detallaryň üýşmeginden alnan bir detalyň standart detal bolmagynyň (A waka) ähtimallygyny we $P(A/\overline{B})$ hem-de $P(A/B)$ şertli ahtimallyklary tapmaly.

Çözülişi. A wakanyň ähtimallygy hemme standart detallaryň sanynyň iki stanokda ýasalan detallaryň umumy sanyna bolan gatnaşygyna deňdir:

$$P(A) = \frac{90+130}{100+150} = \frac{220}{250} = \frac{22}{25}.$$

Alnan detalyň standart bolup, onuň birinji stanokda ýasalan bolmagynyň şertli ähtimallygy

$$P(A/B) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 0{,}9,$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{130}{150} = \frac{13}{15}.$$

$P(A/\overline{B})$ – ähtimallyk detalyň standart bolup, onuň birinji stanokda ýasalmadyklygyny (ikinji stanokda ýasalandygyny) aňladýar.

1-nji teorema (Ähtimallyklary köpeltmek).

A we B wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy olaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekisiniň şertli ähtimallygyna köpeltmek hasylyna deňdir:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \tag{1}$$

$$P(AB) = P(B)P(A/B). \tag{2}$$

Subudy. Hemme mümkin bolan n sany ýeke-täk mümkinçilikli,deň mümkinçilikli sygyşyksyz wakalaryň m sanysy A wakanyň ýüze çykmagyna we olaryň k sanysy B wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýär diýeliň. Onda A wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

B wakanyň şertli ähtimallygy

$$P(B/A) = \frac{k}{n}.$$

A we B wakalaryň köpeltmek hasylynyň ýüze çykmagyna n umumy ýagdaýlaryň k sanysy ýardam edýär. Diýmek, bu drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny m-e köpeldip alarys:

$$P(AB) = \frac{m \cdot k}{n \cdot m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A) \cdot P(B/A).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

2-nji mesele. Elektrik çyralarynyň 15 sanysyndan 3 sanysy standart däl. Bir wagtda alnan iki çyranyň ikisiniň hem standart däl bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Birinji çyranyň (A waka) we ikinji çyranyň (B waka) standart däl bolmagy gözlenýän waka. Ol wakanyň ähtimallygyny

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

formula boýunça tapalyň:

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

$$P(B/A) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7};$$

$$P(AB) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{35}.$$

2-nji teorema. Eger A we B wakalaryň ähtimallyklary birden we noldan tapawutly bolsa, onda A wakanyň ähtimallygy şertli ähtimallyklaryň $P(A/B)$ we $P(A/\overline{B})$ ikisi bilen hem gabat gelýär ýa-da olaryň hiç biri bilen gabat gelmeýär.

Subudy. Goý, $P(A) = P(A/B)$ onda $P(A) = P(A/\overline{B})$ boljakdygyny subut etmeli. A wakanyň we $A\overline{B} + AB$ wakalaryň ekwiwalentdigini görmek kyn däldir. Şonuň üçin olaryň ähtimallyklary gabat gelýär.

$$P(A) = P(AB + A\overline{B}).$$

Ähtimallyklary goşmak teoremasyny peýdalanyp alarys:

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}).$$

Ähtimallyklary köpeltmek teoremasyny peýdalanyp alarys:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(\overline{B}) \cdot P(A/\overline{B}).$$

Bu ýerden

$$P(\overline{B}) \cdot P(A/\overline{B}) = P(A) - P(B) \cdot P(A/B).$$

Şerte görä

$$P(A/B) = P(A).$$

Onda

$$P(\overline{B}) \cdot P(A/\overline{B}) = P(A) - P(B) \cdot P(A) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Soňky deňligi $P(\overline{B}) \neq 0$ gysgaldyp alarys:

$$P(A/\overline{B}) = P(A).$$

Teoremanyň birinji bölegi subut edildi. Onuň ikinji böleginiň dogrudygy birinji böleginden gelip çykýar. Hakykatdan-da, eger $P(A) \neq P(A/B)$ bolsa, onda $P(A/\overline{B})$ şertli ähtimallyk $P(A)$ ähtimallyk bilen gabat gelmeýär. Sebäbi, onda $P(A)$ teoremanyň birinji böleginde $P(A/B)$ bilen gabat gelerdi. Diýmek, $P(A/B) = P(A)$. Subut etmelimiz hem şudy.

3-nji teorema (Umumylaşdyrylan). Birnäçe wakanyň köpeltmek hasylynyň (bir wagtda ýüze çykmagynyň) ähtimallygy olaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekileriniň şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylyna deňdir. Şunlukda şertli ähtimallyklar öňdäki wakalaryň hemmesi ýüze çykdy diýlen şertde hasaplanýar:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Subudy. Teoremany subut etmek üçin doly matematiki induksiýa usulyny ulanalyň. Goý, teorema $n - 1$ waka üçin dogry diýeliň:

$$P(A_1A_2...A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_{n-1}/A_1A_2...A_{n-2}).$$

$A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ wakalaryň köpeltmek hasylyna deň bolan C wakany girizeliň:

$$C = A_1A_2...A_{n-1},$$

onda

$$P(A_1A_2...A_{n-1}A_n) = P(CA_n) = P(C)P(A_n/C),$$

$$P(C) = P(A_1A_2...A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_{n-1}/A_1A_2...A_{n-2}).$$

Diýmek,

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

3-nji mesele. Gutuda 10 sany utuşly bilet, 15 sany utuşsyz bilet bar. Biri yzly- yzyna 4 bilet aldy. Alnan biletleriň hemmesiniň utuşly bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A_1 – birinji alnan bilediň utuşly bolmagy, A_2 – ikinji bilediň utuşly bolmagy, A_3, A_4 – üçünji we dördünji biletleriň utuşly bolmagy bolsun. Bize A_1, A_2, A_3, A_4 wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygyny tapmak gerek. Onuň üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan peýdalanalyň:

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3),$$

A_1 – wakanyň ähtimallygy

$$P(A_1) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5},$$

A_1 waka ýüze çykdy diýlen şertde hasaplanan A_2wakanyň ähtimallygy

$$P(A_2/A_1) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

A_1 waka we A_2 waka ýüze çykdy diýlen şertde A_3wakanyň ähtimallygy

$$P(A_3/A_1A_2) = \frac{8}{23}.$$

A_1, A_2, A_3 wakalar bolup geçdi diýlen şertde A_4 wakanyň ähtimallygy

$$P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{7}{22}.$$

Diýmek,

$$P(A_1A_2A_3A_4) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{23}\cdot\frac{7}{22} = \frac{21}{1265}.$$

§12. Bagly we bagly däl wakalar

1-nji kesgitleme. Eger A wakanyň ýüze çykmagy bilen B wakanyň ähtimallygy üýtgemeýän bolsa, onda A we B wakalara bagly däl wakalar diýilýär. Eger tersine bolsa, A we B wakalara bagly wakalar diýilýär.

1-nji mysal. Gapda 8 ak we 12 gara şar bar. Gapdan tötänleýin bir şar alynýar, soňra alnan şar yzyna gaýtarylýar we synag gaýtalanýar. B waka birinji synagda ak şaryň alynmagy, A waka ikinji synagda ak şaryň alynmagy bolsun. Bu ýerde A wakanyň $P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ ähtimallygy birinji synagyň netijesine bagly däldir. Diýmek, A we B bagly däl wakalardyr.

2-nji mysal. Gutuda 40 sany çyra bar. Olaryň 35 sanysy standart, 5 sanysy standart däl. Tötänleýin bir çyra alynýar, soňra çyra guta gaýtarylman synag gaýtalanýar. B waka birinji synagda standart çyranyň alynmagy, A ikinji synagda standart çyranyň alynmagy bolsun. Onda B waka bolup geçdi diýlen şertde A wakanyň ähtimallygy

$$P(A/B)=\frac{34}{39}.$$

Eger birinji synagda B waka bolmadyk bolsa (standart däl çyra alnan bolsa), onda

$$P(A/\overline{B})=\frac{35}{39}.$$

Diýmek, A wakanyň ähtimallygy B wakanyň bolanyna ýa-da bolmadygyna baglydyr.

Wakalaryň biriniň beýlekisine bagly bolmazlygynyň matematiki şerti A we B wakalar üçin aşakdaky görnüşde berilýär:

$$P(A/B)=P(A), \quad P(B/A)=P(B),$$

bagly bolmagynyň şerti

$$P(A/B)\neq P(A), P(B/A)\neq P(B).$$

2-nji kesgitleme. Eger $A_1, A_2 \dots A_n$ wakalaryň islendik ikisi özara bagly däl bolsalar, onda ol wakalara jübüt-jübütden bagly däl wakalar diýilýär.

3-nji kesgitleme. Eger $A_1, A_2 \dots A_n$ wakalaryň her biriniň ähtimallygy beýlekileriniň bolmagy bilen (biriniň ýa-da birnäçesiniň islendik kombinasiýasynda we islendik sanynda) üýtgemeýän bolsa, onda bu wakalara toplumlaýyn bagly däl wakalar diýilýär.

Wakalaryň toplumlaýyn bagly däl bolmagy jübüt-jübütden bag-lylyga garanyňda has güýçlidir. S.N. Bernşteýniň meselesinde 3 sany jübüt-jübütden bagly däl wakalaryň toplumlaýyn bagly bolmagynyň mümkindigini görkezeliň.

Gutuda 4 bilet bar, olaryň san belgileri 110,101,011,000. Goý, *A*, *B*, *C* wakalar tötänleýin alnan bilediň san belgisiniň birinji, ikinji, üçünji sanynyň bir bolmagy bolsun. Olaryň her birine 4 sany mümkin bolan ýagdaýyň iki sanysy ýardam edýär. Diýmek,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Eger *A* waka ýüze çykan bolsa (110 ýa-da 101 san belgili bilet alnan), *B* wakanyň ähtimallygy ýene-de 0,5 deňdir. Sebäbi oňa iki ýagdaýyň biri ýardam edýär: $P(B/A) = 0,5$. Diýmek, *A* we *B* wakalar bagly däldirler. Edil şuňa meňzeşlikde *A* we *C* hem-de *B* we *C* wakalaryň jübüt-jübütden bagly däldigini görkezmek bolar. Eger *A* we *B* wakalar ýüze çykan bolsalar, ýagny 110 san belgili bilet alnan bolsa onda *C* waka mümkin däl wakadyr, sebäbi üçünji ýerde nol dur. Şonuň üçin C wakanyň şertli ähtimallygy $P(C/AB) = 0$. Diýmek, *A*, *B*, *C* wakalar toplumlaýyn bagly, ýöne olar jübüt-jübütden bagly däldirler.

Iki sany bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy has ýönekeý görnüşe gelýär.

1-nji teorema. Iki sany bagly däl wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Subudy. Eger *A* we *B* wakalaryň biri beýlekisine bagly däl bolsa,

$$P(B/A) = P(B),\ P(A/B) = P(A).$$

Onda ähtimallyklary köpeltmek teoremasy aşakdaky görnüşi alar:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

Netije. Toplumlaýyn bagly däl wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy ol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)\,P(A_2)...P(A_n).$$

3-nji mesele. 10 sany kartoçkanyň her birinde 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 sanlar ýazylan. Tötänleýin alnan we ýanaşyk goýlan 3 kartoçkadaky sanlaryň 125 sany düzmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Gözlenýän wakany D bilen belgiläliň. Bu wakanyň ýüze çykmagy üçin birinji alnan kartoçkada sanyň bir bolmagy (A waka), ikinji kartoçkadaky sanyň iki bolmagy (B waka), üçünji kartoçkadaky sanyň 5 bolmagy (C waka) gerek. D wakanyň ähtimallygy bagly wakalaryň ähtimallyklaryny köpeltmek teoremasy boýunça hasaplanylýar:

$$P(D)=P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{720}.$$

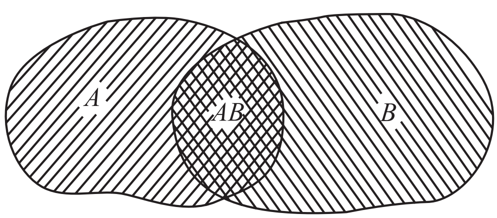
§13. Sygyşykly wakalar üçin goşmak teoremasy

10-njy paragrafda sygyşyksyz wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasyny subut etdik. Sygyşyksyz wakalaryň ähtimallyklaryny goşmak teoremasyna we ähtimallyklary köpeltmek teoremasyna esaslanyp, sygyşykly wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasyna seredeliň.

Teorema. Iki sany A we B sygyşykly wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy, bu wakalaryň ähtimallyklarynyň jeminden olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygynyň aýrylmagyna deňdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1)$$

Subudy. A wakanyň ýüze çykmagy üçin aşakdaky iki sany sygyşyksyz wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagy ýeterlikdir: AB ýa-da $A\overline{B}$, edil şuňa meňzeşlikde, B wakanyň ýüze çykmagy üçin aşakdaky iki sany sygyşyksyz wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagy ýeterlikdir: AB ýa-da $\overline{A}B$ (*8-nji surat*).



8-nji surat

Şonuň üçin sygyşyksyz wakalaryň ähtimallyklaryny goşmak teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}), \tag{2}$$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B), \tag{3}$$

A ýa-da B wakalaryň, iň bolmanda biriniň ýüze çykmagy üçin jübüt-jübütden sygyşyksyz bolan AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ wakalaryň arasyndan biriniň ýüze çykmagy ýeterlikdir. Şonuň üçin $P(A + B)$ ähtimallyk üç wakanyň ähtimallyklarynyň jemine deňdir.

$$P(A + B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B). \tag{4}$$

(2) we (3) deňlikleri goşup taparys:

$$P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

Bu aňlatmany (4) deňlikde goýup alarys:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

Eger A we B özara bagly wakalar bolsalar, (1) formula aşakdaky görnüşi alar:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B/A).$$

Eger A we B wakalar bagly däl bolsalar,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

(1) formulany 3 waka üçin aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \\ - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \tag{5}$$

n waka üçin

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(A_1A_2) - \\ - P(A_1A_3) - ... - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + ... + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - ... + \\ + (-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n). \tag{6}$$

Meseleler çözülende (5) ýa-da (6) formulalardan peýdalanmak uly hasaplamalary talap edýär. Şonuň üçin garşylykly wakalara geçmek amatly bolýar:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \, ... \, \overline{A}_n). \tag{7}$$

Mesele. Şol bir nyşana iki gezek ok atylýar. Birinji gezek nyşana degmegiň ähtimallygy 0,6, ikinji gezek nyşana degmegiň ähtimallygy 0,8. Iň bolmanda, bir gezek nyşana degmegiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A – birinji gezekde nyşana degmek, B – ikinji gezekde nyşana degmek bolsun. A we B sygyşykly we bagly däl wakalardyr. Olaryň ähtimallyklary

$$P(A) = 0,6, \quad P(B) = 0,8.$$

Onda (1) formula görä

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB) = P(A) + P(B) – P(A)P(B) =$$

$$= 0,6 + 0,8 – 0,6 \cdot 0,8 = 0,92.$$

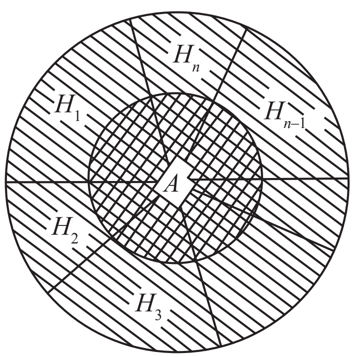
Garşylykly wakalara geçip (7) formulany A we B iki waka üçin ulanyp alarys:

$$P(A + B) = 1 – P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 – 0,4 \cdot 0,2 = 0,92.$$

§14. Doly ähtimallygyň formulasy

Goý, bizi gyzyklandyrýan käbir A waka sygyşyksyz doly topary emele getirýän H_1, H_2,...H_n wakalaryň biri bilen ýüze çykýar diýeliň (*9-njy surat*).

Şeýle wakalara köplenç gipotezalar hem diýilýär. Hemme gipotezalaryň $P(H_1)$, $P(H_2)$, ...$P(H_n)$ ähtimallyklary berlen. Onda A wakanyň ähtimallygy aşakdaky teorema boýunça kesgitlenýär:



9-njy surat

Teorema. $H_1, H_2..., H_n$ gipotezalaryň biri bilen ýüze çykyp bilýän A wakanyň ähtimallygy, gipotezalaryň ähtimallyklarynyň A wakanyň şertli ähtimallyklaryna köpetmek hasyllarynyň jemine deňdir:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \tag{1}$$

Subudy. $H_1, H_2...H_n$ gipotezalar doly topary emele getirýärler, şonuň üçin A wakany aşakdaky wakalaryň jemi görnüşinde ýazmak bolar:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i.$$

H_i wakalar sygyşyksyzdyrlar, onda $AH_i (i = 1, 2, ..., n)$ wakalar hem sygyşyksyzdyrlar. Bu bolsa bize A wakanyň ähtimallygyny kesgitlemek üçin sygyşyksyz wakalary goşmak teoremasyny ulanmaga mümkinçilik berýär:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i). \tag{2}$$

A we H_i wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp tapylýar:

$$P(AH_1) = P(H_1) P(A/H_1),$$
$$P(AH_2) = P(H_2) P(A/H_2),$$
- - - - - - - - - - - - - - - - - -
$$P(AH_n) = P(H_n) P(A/H_n).$$

Bu ähtimallyklary (2) formula goýup alarys:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

1-nji mesele. Sehde stanoklaryň 3 görnüşi bar. Olarda birmeňzeş detallar öndürilýär. Olaryň öndürijilikleri deň, ýöne detallaryň işleniş hili dürli. Birinji görnüşli stanokda öndürilýän detallaryň 94% ýokary hilli, ikinji stanok üçin ol 90%, üçünji stanok üçin 85%. Sehiň günüň dowamynda öndüren detallary bir ýere jemlenýär. Eger birinji görnüşli stanoklaryň sany 5, ikinji görnüşli stanoklar 3, üçünji görnüşliler 2 sany bolsalar, detallaryň üýşmeginden tötänleýin alnan bir detalyň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A waka tötänleýin alnan detalyň ýokary hilli bolmagy bolsun.

Gipotezalara seredeliň :

H_1 – detal 1-nji görnüşli stanokda taýýarlanylan;

H_2 – detal 2-nji görnüşli stanokda taýýarlanylan;

H_3 – detal 3-nji görnüşli stanokda taýýarlanylan.

Sehdäki stanoklaryň sanlaryny we öndürijiliginiň meňzeşdigini göz öňüne tutup alarys:

$$P(H_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(H_2) = \frac{3}{10}, \quad P(H_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Bu gipotezalara görä şertli ähtimallyklar:

$$P(A/H_1) = 0{,}94, \quad P(A/H_2) = 0{,}9, \quad P(A/H_3) = 0{,}85.$$

Doly ähtimallygyň formulasyna görä:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0{,}94 + \frac{3}{10}\cdot 0{,}9 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}85 = 0{,}91.$$

§15. Baýesiň formulasy

Biz şu wagta çenli gipotezalaryň ähtimallyklaryna synaga çenli seretdik. Başgaça aýdylanda, şertleriň kompleksiniň düzüminde synagyň netijesi ýokdy.

Aşakdaky meselä seredeliň. Sygyşyksyz $H_1, H_2 \ldots H_n$ gipotezalaryň doly topary bar. Bu gipotezalaryň $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ ähtimallyklary belli. Synag geçirilip, onuň netijesinde käbir A waka ýüze çykýar, bu wakanyň her gipoteza boýunça şertli $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots P(A/H_n)$ ähtimallyklary belli. Bizi her gipoteza üçin $P(H_i/A)$ şertli ähtimallyklar gyzyklandyrýar. Bu ähtimallyklar aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{j=1} P(H_j)P(A/H_j)}. \quad (1)$$

(1) formula ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan gelip çykýar. Hakykatdan-da,

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A),$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}. \quad (2)$$

Bu ýerde

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j).$$

(2) formula Baýesiň formulasy diýilýär (Baýes (1702–1761) iňlis matematigi). Eger hemme H_i ($i = 1, 2, ..., n$) gipotezalaryň synaga çenli birmeňzeş ähtimallyklary bar bolsa, ýagny $P(H_i) = p$ bolsa, Baýesiň formulasy aşakdaky görnüşi alar:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A/H_j)}. \quad (3)$$

1-nji mesele. Üç sany gapda birmeňzeş önümler bar. Birinji gapda 10 önüm bolup, olaryň üçüsi standart däl, ikinjide 15 önüm bolup, olaryň 5 sanysy standart däl, üçünji gapda 20 önüm bolup, olaryň 6-sy standart däl. Tötänleýin bir önüm alnyp, ol standart däl bolup çykdy. Bu önümiň ikinji gapdan alnan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Tötänleýin alnan önümiň birinji, ikinji, üçünji gapdan bolmagy baradaky gipotezalary, degişlilikde, H_1, H_2, H_3 belgiläliň.

Onda bu gipotezalaryň ähtimallyklary synaga çenli özara deň we $\frac{1}{3}$-e deň, diýmek,

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Synagyň netijesinde tötänleýin alnan önümiň standart däldigi baradaky A waka ýüze çykýar. Bu wakanyň H_1, H_2, H_3 gipotezalara görä şertli ähtimallyklary

$$P(A/H_1)=\frac{3}{10};\quad P(A/H_2)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3};\quad P(A/H_3)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

Baýesiň (3) formulasy boýunça synagdan soň H_2 gipotezanyň ähtimallygy

$$P(H_2/A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{3}{10}}=\frac{5}{14}.$$

2-nji mesele. Köpçülikleýin öndürilýän käbir önümiň 95% standart önüm. Önümiň hilini barlamagyň ýönekeýleşdirilen usuly boýunça derňew geçirilýär. Bu usul 99% ýagdaýda standart önümler üçin we 3% ýagdaýda standart däl önümler üçin gowy netijeler berýär. Ýönekeýleşdirilen usul boýunça derňelende önümiň standart bolmagynyň ähtimallygy nähili?

Çözülişi. Gipotezalary girizeliň. H_1 önümiň standart bolmagy we H_2 önümiň standart däl bolmagy. Derňewe çenli olaryň ähtimallyklary:

$$P(H_1) = 0{,}95 \qquad P(H_2) = 0{,}05.$$

Önümiň ýönekeýleşdirilen barlagdan üstünlikli geçmeginiň (B waka) şertli ähtimallyklary $P(B/H_1) = 0{,}99$ we $P(B/H_2) = 0{,}03$. Bizi barlagy geçen önümiň standart bolmagynyň $P(H_1/B)$ ähtimallygy gyzyklandyrýar. Baýesiň (2) formulasyny ulanyp alarys:

$$P(H_1/B)=\frac{P(H_1)\cdot P(B/H_1)}{P(B)}=\frac{0{,}95\cdot 0{,}99}{0{,}95\cdot 0{,}99+0{,}05\cdot 0{,}03}\approx 0{,}998.$$

Diýmek, barlagy üstünlikli geçen 1000 önümden 998 sanysynyň standart, 2 sanysynyň standart däl bolmagy mümkin.

§16. Gaýtalanýan synaglar. Bernulliniň formulasy. Has ähtimal ýygylyk

Şol bir synagyň birnäçe gezek gaýtalanýan ýagdaýlaryna köp duş gelinýär. Her synagyň netijesinde käbir A wakanyň ýüze çykmagy-da, çykmazlygy-da mümkin, şunlukda bizi her synagyň netijesi däl-de, A wakanyň synaglaryň seriýasynda ýüze çykmagynyň umumy sany gyzyklandyrýar. Şuňa meňzeş meselelerde synaglaryň seriýasynda wakanyň ýüze çykmagynyň sanynyň ähtimallygyny bilmek gerek bolýar. Eger synaglar baglanyşyksyz bolsa, bu mesele aňsatlyk bilen çözülýär. Her synagyň netijesinde ýüze çykýan wakanyň ähtimallygy beýleki synaglaryň ýagdaýyna bagly bolmasa, onda bu synaglara baglanyşyksyz synaglar diýilýär. Meselem, teňňäniň yzygiderli birnäçe gezek oklanmagy baglanyşyksyz synaglardyr. Baglanyşyksyz synaglar birmeňzeş şertlerde we dürli şertlerde geçirilip bilner. Birinji ýagdaýda A wakanyň ähtimallygy hemme synaglarda deň bolar. Ikinji ýagdaýda A wakanyň ähtimallygy synagdan synaga üýtgeýär. Biz birinji ýagdaýa seretjekdiris.

Mesele. Nyşana bir-biri bilen baglanyşyksyz üç gezek ok atylýar, her gezek nyşana degmegiň ähtimallygy p deň. Üç gezek ok atylanda iki gezek nyşana degmegiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. B_2 – waka nyşana iki okuň degmegi bolsun. Bu waka üç usul bilen ýüze çykýar:

Birinji we ikinji gezekde nyşana degmek, üçünji gezekde degmezlik;

Birinji we üçünji gezek nyşana degmek, ikinji gezekde degmezlik;

Birinji gezek nyşana degmän, ikinji we üçünji gezekde nyşana degmek.

Diýmek, B_2 – wakany wakalaryň köpeltmek hasyllarynyň jemi görnüşinde aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$B_2 = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3.$$

Bu ýerde:

A_1, A_2, A_3 – birinji, ikinji, üçünji gezek nyşana degmek,

$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – birinji, ikinji, üçünji gezek nyşana degmezlik.

B_2 wakanyň ýüze çykmagynyň sanalyp geçilen üç ýagdaýynda sygyşyksyzlygyny we köpeltmek hasyllaryna girýän wakalaryň bagly däldigini göz öňüne tutup, şeýle wakalar üçin goşmak we köpeltmek teoremalaryny ulanyp alarys:

$$P(B_2) = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp, \qquad 1-p=q.$$

$$P(B_2) = 3p^2q.$$

Edil şuňa meňzeşlikde, bizi gyzyklandyrýan wakanyň ýüze çykmagynyň hemme mümkin bolan ýagdaýlaryny sanap, aşakdaky umumy meseläni çözmek bolar.

n sany baglanyşyksyz synag geçirilýär, synagyň netijesinde käbir A wakanyň ýüze çykmagy-da, çykmazlygy-da mümkin. A wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy p deň, ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy $q = 1 - p$ deň.

A wakanyň baglanyşyksyz n synagda k gezek ýüze çykyp, $n - k$ gezek ýüze çykmazlygynyň $Pn(k)$ ähtimallygyny tapalyň. Bizi gyzyklandyrýan wakany B bilen belgiläliň. Ol waka sygyşyksyz wakalaryň jemine dargaýar, olaryň her biri kesgitli synaglaryň k sanysynda A wakanyň ýüze çykmagyny, galan $n - k$ sanysynda ýüze çykmazlygyny (garşylykly wakanyň ýüze çykmagyny) aňladýar.

Diýmek,

$$B = A_1A_2\ldots A_k\overline{A}_{k+1}\ldots\overline{A}_n + \ldots + \overline{A}_1A_2\ldots A_{k-1}A_k\,A_{k+1}\overline{A}_{k+2}\ldots\,\overline{A}_n. \qquad (1)$$

Ähtimallyklary goşmak teoremasyna we synaglaryň baglanyşyksyzlygyna görä (1) jemde her goşulyjynyň ähtimallygy:

$$[P(A)]^k \cdot [P(\overline{A})]^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k} = p^kq^{n-k}. \qquad (2)$$

(1) jemdäki goşulyjylaryň sany C_n^k deňdir, sebäbi ol n synagdan k synagy saýlap almagyň usullarynyň sanyna (utgaşmalaryň sanyna) deňdir. (1), (2) deňliklerden ähtimallyklary goşmak teoremasyny ulanyp alarys.

$$P(B) = P_n(k) = C_n^kp^kq^{n-k}.$$

Bu ýerde,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

onda

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (3)$$

(3) formula Bernulliniň formulasy diýilýär.

Baglanyşyksyz n synagda A wakanyň ýüze çykmagynyň k sanyna A wakanyň ýygylygy diýilýär. k-nyň her bahasyna (3) formula boýunça hasaplanýan ähtimallyk degişlidir.

k ýygylyk bilen $P_n(k)$ ähtimallygyň arasynda aşakdaky tablisa boýunça aňladylýan baglanyşyk bardyr:

k – A wakanyň ýygylygy	0	1	2	…	k	...	n
$P_n(k)$ – k ýygylygyň ähtimallygy	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Bu tablisa (2) formula ýaly, $P_n(k)$ ähtimallygy kesgitleýär:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Bu ähtimallyklaryň toplumyna ähtimallyklaryň paýlanyşynyň binomial kanuny diýilýär. Binomial diýilmeginiň sebäbi bu ähtimallyklaryň her biri $(p + q)^n$ Nýuton binomynyň dagytmasynyň goşulyjylaryna deň:

$$(p+q)^n = q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 n^{n-2} + C_n^3 p^3 n^{n-3} + ... +$$
$$+ C_n^k p^k n^{n-k} + ... + p^n.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, nol ýygylygyň ähtimallygy dagytmanyň birinji goşulyjysyna deň, 1 ýygylygyň ähtimallygy ikinji goşylyja we ş.m., n – ýygylygyň ähtimallygy dargytmanyň iň soňky goşulyjysyna deň.

Bu dagytmada:

q^n – baglanyşyksyz n synagda A wakanyň hiç gezek ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy.

$C_n^1 pq^{n-1}$ – A wakanyň bir gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy.

$C_n^2 p^2 q^{n-2}$ – A wakanyň iki gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy.

....

p^n – A wakanyň hemme synaglarda, ýagny n gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy.

0, 1, 2, 3, …, k, …n – ýygylyklar A wakanyň ýüze çykmagynyň hemme kombinasiýalaryny öz içine alýar, şonuň üçin olar wakalaryň doly toparyny emele getirýärler. Biziň bilşimiz ýaly, doly topary düzýän wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir. Diýmek,

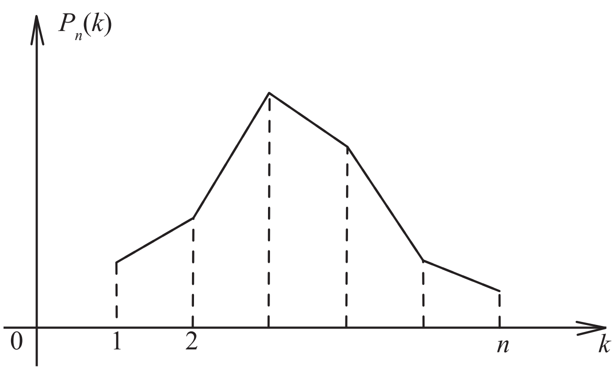
$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

A wakanyň ýüze çykýan synaglarynyň sanyny, ýagny ýygylygyny μ bilen belgiläliň, onda $P_n(k)$ ähtimallygyň ýerine $P_n(\mu = k)$ ýazmak bolar. A wakanyň ýüze çykmagynyň sanynyň berlen aralykda bolmagynyň ähtimallygy $P_n(k_1 \le \mu \le k_2)$ ähtimallyklary goşmak teoremasyna görä:

$$P_n(k_1 \le \mu \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(\mu = k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{n}{k!(n-k)} p^k q^{n-k}.$$

($\mu = k$ waka k-nyň dürli bahalary üçin sygyşyksyzdyr).

Binomial paýlanyşy grafiki şekillendirmek üçin gönüburçly koordinatalar sistemasynda OX okunda k = 0, 1, 2, 3, ..., n ýygylyklary, OY okunda $P_n(k)$ ähtimallyklary ýerleşdirýärler.



10-njy surat

Soňra (k, $P_n(k)$) nokatlary gurup, olary kesimler bilen birleşdirýärler. Alnan döwük çyzyga poligon ýa-da paýlanyşyň köpburçlugy diýilýär. (*10-njy surat*).

1-nji mesele. p = 0,4 we n = 5 bolanda paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

Çözülişi. Şerte görä $n = 5,\ p = \frac{2}{5}$ we $q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, k ýygylyga 0, 1, 2, 3, 4, 5 bahalary berip, $P_5(k)$ ähtimallyklary hasaplalyň.

$$P_5(k) = C_5^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{5-k} = C_5^k 2^k \cdot 3^{5-k} \cdot \frac{1}{5^5} = C_5^k 2^k 3^{5-k} \cdot 0{,}00032.$$

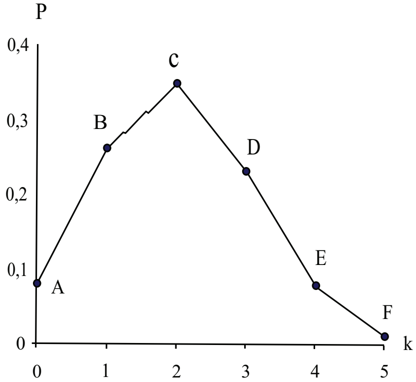
k	0	1	2	3	4	5
$P_n(k)$	0,078	0,259	0,346	0,230	0,077	0,010

OK ok boýunça ýygylyklary ýerleşdireliň, *OP* ok boýunça bolsa ähtimallyklary ýerleşdireliň (*11-nji surat*).

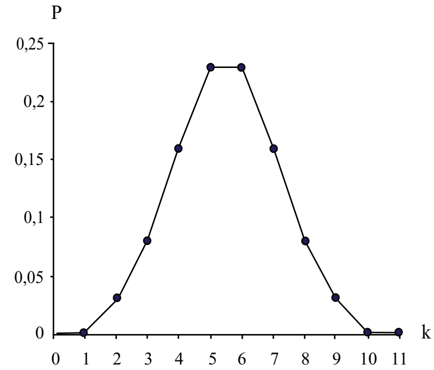
A(0; 0,078), B(1;0,259), C(2; 0,346), D(3; 0,230), E(4; 0,077), F(5; 0,10) nokatlary guralyň.

A, B, C, D, E, F nokatlary kesimler bilen yzygiderli birleşdireliň.

ABCDEF döwük çyzyk ähtimallyklaryň poligonydyr. Bu köpburçluk ýygylygyň üýtgemegi bilen ähtimallygyň üýtgeýändigini görkezýär. Şunlukda k ýygylygyň noldan 2-ä çenli üýtgemegi bilen ähtimallyk artýar, 2-ä deň bolan ýygylygyň iň uly ähtimal-



11-nji surat



12-nji surat

lygy bardyr, oňa wakanyň ýüze çykmagynyň has ähtimal sany diýilýär.

2-nji mesele. $p = \frac{1}{2}$ we $n = 11$ bolanda binomial paýlanyşy düzmeli. Ähtimallyklaryň poligonyny gurmaly.

Çözülişi. Şerte görä $p = \frac{1}{2}$ we $n = 11$, $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $k = 0$, 1, 2, ..., 11.

$p = q = \frac{1}{2}$ bolany üçin $p^k q^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048} = 0,000488$, bu sany C_n^k köpeldip, aşakdaky paýlanyşy alarys:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_n(k)$	0,00	0,00	0,03	0,08	0,16	0,23	0,23	0,16	0,08	0,03	0,00	0,00

Bu paýlanyşa degişli köpburçluk *12-nji suratda* şekillendirilen. Ol $k = 5{,}5$-e görä simmetrikdir. $k = 5$ we $k = 6$ ýygylyklaryň iň uly 0,23 ähtimallyklary bardyr. Diýmek, bu ýerde iki sany 5 we 6 has ähtimal san bardyr.

Bu meseläni umumy görnüşde çözeliň. n baglanyşyksyz synagda A waka 0, 1, 2, $k-1$, k, $k+1$, ... n gezek

$$P_n(0), P_n(1), P_n(2), P_n(3),..., P_n(k-1), P_n(k), P_n(k+1),..., P_n(n) \quad (4)$$

ähtimallyklar bilen ýüze çykýar we olaryň her biri Bernulliniň formulasy boýunça kesgitlenýär. Iki goňşy ähtimallyklaryň gatnaşygyny düzeliň.

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{n!\cdot p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} : \frac{n!\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-k+1}}{(k-1)!(n-k+1)!}.$$

Bu ýerde:

$$(n-k+1)! = (n-k)!\cdot(n-k+1), \qquad k! = (k-1)!k.$$

gysgaltmalardan soň alarys:

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{q}. \quad (5)$$

Bu gatnaşygyň bire deň, birden uly, birden kiçi bolmagyna baglylykda, $P_n(k)$ ähtimallyk, degişlilikde, $P_n(k-1)$ ähtimallyga deň, uly ýa-da kiçidir. Has ähtimal ýygylygy k_0 bilen belgiläliň. Onda:

$$\frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0-1)} \geq 1 \quad \text{bolsa,} \quad P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1).$$

Degişli gysgaltmalardan soň alarys:

$$(n-k_0+1)p \geq k_0 q, \quad np - k_0 p + p \geq k_0 q, \quad np + p \geq k_0 q + k_0 p,$$

$$np + p \geq k_0(p+q).$$

Bu ýerden:

$$k_0 \leq np + p, \tag{6}$$

$$\frac{P(k_0+1)}{P_n(k_0)} \leq 1; \quad P_n(k_0+1) \leq P_n(k_0).$$

Degişli gysgaltmalardan soň alarys:

$$\frac{P_n(k_0+1)}{P_n(k_0)} = \frac{(n-k_0)p}{(k_0+1)q}.$$

Bu ýerden:

$$(n-k_0)\,p \leq (k_0+1)q,$$

$$np - q \leq k_0\,(p+q),$$

$$np - q \leq k_0. \tag{7}$$

(6) we (7) deňsizlikleri birleşdirip alarys:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \tag{8}$$

Has ähtimal k_0 ýygylygyň bahalaryny (8) deňsizlikden kesgitlemek bolar.

3-nji mesele. Eger her synagda wakanyň ähtimallygy 0,2 bolsa, 19 baglanyşyksyz synagda wakanyň ýüze çykmagynyň has ähtimal sanyny tapmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä $n = 19$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$ (8) formulany peýdalanyp alarys:

$$np - q = 19 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 = 3,$$

$$np + p = 19 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 = 4.$$

bitin san, diýmek, has ähtimal ýygylyk iki sany: 3 we 4.

4-nji mesele. Eger $n = 7,\ p = \frac{2}{3}$ bolsa, has ähtimal ýygylygy tapmaly.

Çözülişi.

$$np - q = 7 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

$$np + p = 7 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3},$$

$$4\frac{1}{3} < k_0 < 5\frac{1}{3}, \quad k_0 = 5.$$

Bu ýerde has ähtimal ýygylyk 5-e deň.

§17. Muawryň-Laplasyň lokal teoremasy

Synaglaryň sany uly bolanda Bernulliniň formulasy boýunça $P_n(k)$ ähtimallygy tapmak üçin uly hasaplamalary geçirmeli bolýar. Diýmek, synaglaryň sany uly bolanda Bernulliniň formulasyndan peýdalanmak amatly bolmaýar. Şu sebäplere görä $P_n(k)$ ähtimallygy ýeterlik takyklykda çylşyrymly bolmadyk hasaplamalaryň kömegi bilen kesgitlär ýaly formula gerek bolýar. n uly bolanda we $p = \frac{1}{2}$ bolanda Bernulliniň formulasynyň asimptotik görnüşi (1730 ý.) Muawr tarapyndan, islendik $0 < p < 1$ üçin (1783 ý.) Laplas tarapyndan tapylypdyr.

Muawryň-Laplasyň lokal teoremasy. Eger A wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň p ähtimallygy hemişelik bolup, noldan we birden tapawutly bolsa, synaglaryň sany ýeterlik uly bolsa, onda A wakanyň n synagda k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy

$$P_n(k) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}} \tag{1}$$

ýakynlaşan formula bilen hasaplanýar.

Bu ýerde:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{2}$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \qquad q = 1 - p. \tag{3}$$

(1) formula Muawryň-Laplasyň formulasy diýilýär. $P_n(k)$ ähtimallygyň bahasynyň otnositel takyklygy n-iň artmagy bilen artýar. Muawryň-Laplasyň lokal teoremasynyň manysy şundan ybaratdyr.

(1) formula boýunça hasaplamalary ýönekeýleşdirmek üçin $f(x)$ funksiýanyň bahalary ýörite tablisada (*1-nji goşundy*) ýerleşdirilýär. Bu tablisadan peýdalanylanda $f(x)$ funksiýanyň häsiýetlerini göz öňüne tutmaly bolýar.

1. $f(x)$ funksiýa jübüt funksiýadyr, ýagny $f(-x) = f(x)$. Sebäbi (2) aňlatmada x-yň derejesi jübütdir. Şonuň üçin tablisada argumentiň položitel bahalary alnandyr.

2. Argumentiň položitel bahalary üçin $f(x)$ funksiýa monoton kemelýän funksiýadyr.

Hakykatdan-da:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

aňlatmanyň sanawjysy hemişelik, maýdalawjysy bolsa monoton artýar.

3. Eger $x > 5$ bolsa, onda $f(x) \approx 0$ hasap edilýär, sebäbi $f(x)$ funksiýa eýýäm $x = 5$ bolanda örän kiçidir: $f(5)=0{,}0000015$, şuny we $f(x)$ funksiýanyň 2-nji häsiýetini göz öňüne tutup, tablisa $x > 5$ bahalar üçin dowam etdirilmeýär.

Mesele. Eger önümiň standart däl bolmagynyň ähtimallygy 0,01 deň bolsa, tötänleýin alnan 1000 önümiň 5 sanysynyň standart däl bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çozülişi. $n = 1000$, $p = 0{,}01$, $q = 1 - p = 0{,}99$, $k = 5$,

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}} = 0{,}32,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{npq}}(k - np) = 0{,}32 \cdot (5 - 1000 \cdot 0{,}01) = 0{,}32 \cdot (5 - 10) = -1{,}6.$$

Tablisadan (*1-nji goşundy*) $f(x)$ funksiýanyň degişi bahasyny tapýarys:

$$f(-1,6) = f(1,6) = 0,1109 \approx 0,11.$$

(1) formula görä:

$$P_{1000}(5) \approx 0,32 \cdot f(1,6) = 0,32 \cdot 0,11 = 0,035.$$

§18. Puassonyň teoremasy

Eger her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy nola ýakyn bolsa, synaglaryň n sany uly bolsa-da, np köpeltmek hasylynyň uly bolmadyk bahasynda Muawryň-Laplasyň formulasy boýunça hasaplanan $P_n(k)$ ähtimallyk ýeterlik takyk bolmaýar. Şonuň üçin bu ýagdaýa laýyk geler ýaly başga ýakynlaşan formulany gözlemeli bolýar. Ähtimallygyň örän kiçi bahalary üçin Puassonyň ýakynlaşan formulasyndan peýdalanylýar.

Puassonyň teoremasy. Eger A wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik we kiçi bolsa, baglanyşyksyz synaglaryň sany ýeterlik uly bolsa, şunlukda $np = \lambda$ köpeltmek hasyly uly däl bolsa, A wakanyň n synagda k gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (1)$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Subudy. $\lambda = np$ deňlikden $p = \frac{\lambda}{n}$ deňligi alarys. Bernulliniň formulasyndan p ähtimallygy $\frac{\lambda}{n}$ bilen çalşyryp alarys:

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-2}.$$

Toždestwolaýyn öwürmeleri geçirip alarys:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} . \quad (2)$$

Synaglaryň n sanynyň ýeterlik uly san bolanlygy üçin $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}, \dots,\ 1 - \frac{k-1}{n}$ we $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ köpeldijileri bire deň diýip hasap etmek mümkin, onda (2) aňlatma ýönekeýleşer we aşakdaky görnüşe geler:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n . \quad (3)$$

Bize belli bolşy ýaly,

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} .$$

Diýmek, ýeterlik uly n üçin

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} .$$

Bu aňlatmany (3) formula goýup, (1) formula geleris.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Subut etmelimiz hem şudy.

Mesele. Aragatnaşyk enjamy 1000 abonente hyzmat edýär. Berlen wagt aralygynda abonentiň jaň etmeginiň ähtimallygy 0,005. Berlen wagt aralygynda 7-den köp talabyň (jaňyň) bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A waka 7-den köp talabyň bolmazlygy bolsun, A waka çylşyrymly wakadyr, ol 8 elementar waka bilen kesgitlenýär: w_0 – talap bolmazlygy, w_1 – bir talap, w_2 – iki talap, ..., w_7 – ýedi talabyň bolmagy. A wakanyň ähtimallygy elementar wakalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir:

$$P(A) = P_{1000}(w_0) + P_{1000}(w_1) + P_{1000}(w_2) + \dots + P_{1000}(w_7).$$

Her goşulyjyny hasaplamak üçin Puassonyň formulasyny ulanalyň. Meseläniň şertine görä: $n = 1000$, $p = 0{,}005$, $\lambda = pn = 5$, onda

$$P_{1000}(w_i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-5}\frac{5^i}{i!} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, ..., 7).$$

Onda

$$P(A) = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + ... + \frac{5^7}{7!}\right) \approx 0{,}875.$$

Puassonyň teoremasynyň esasy kemçilikleriniň biri p ähtimallygyň kiçi bolmagynyň ($p \to 0$) talap edilýändigidir, ol şert hemme ýagdaýlarda ýerine ýetmeýär.

§19. Muawryň-Laplasyň integral teoremasy

Amaly meseleler çözülende $P_n(k)$ ähtimallygyň aýratyn alnan bahalaryny däl-de, olaryň jemini hasaplamak gerek bolýar.

Meselem, eger doglan 1000 çaganyň arasynda oglanlaryň sanynyň 455-den 545 aralygynda bolmagynyň ähtimallygy gözlenýän bolsa:

$$P_{1000}(455 \le k \le 545) = P_{1000}(455) + P_{1000}(456) + P_{1000}(457) + ... + P_{1000}(545).$$

(eger oglanyň dogulmagynyň ähtimallygy belli bolsa). Her goşulyjyny Muawryň-Laplasyň lokal formulasy boýunça tapmak bolar, ýöne 91 goşulyjynyň jemini tapmak uly hasaplamalary talap edýär. Şonuň üçin ýokarda agzalan usullar bilen bu meseläni çözmek amatly däldir. Diýmek, bize ýokarda agzalan wakalaryň ähtimallyklaryny kesgitlemek üçin başga usullara ýüzlenmek gerek bolýar. Bu meseläni çözmek üçin Muawryň-Laplasyň integral teoremasy peýdalanylýar.

Muawryň-Laplasyň integral teoremasy. Eger A wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň p ähtimallygy hemişelik bolup, noldan we birden tapawutly, synaglaryň sany ýeterlik uly bolsa, onda n synagda A wakanyň ýüze çykýan synaglarynyň k sanynyň a bilen b-niň arasynda bolmagynyň ähtimallygynyň ýakynlaşan bahasy aşakdaky deňlikden kesgitlenýär:

$$P(a \le k \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (1)$$

Bu ýerde $\Phi(x)$ funksiýa Laplasyň funksiýasy diýilýär. Ol:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{2}$$

deňlik bilen kesgitlenýär,

$$x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}. \tag{3}$$

(1) formula Muawryň-Laplasyň integral formulasy diýilýär.

Muawryň-Laplasyň lokal we integral formulalary *npq* köpeltmek hasyly birnäçe ýüz bolsa ýeterlik takyklygy berýär. Ýokary takyklyk talap edilmeýän ýerlerde *npq* köpeltmek hasylynyň uly bolmadyk bahalarynda (20-den kiçi bolmasa) bu formulalary ulanyp bolar.

(2) formula boýunça kesgitlenen $\Phi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasy düzülen (*2-nji goşundy*). Bu funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan peýdalanmak üçin onuň häsiýetlerini bilmek gerek.

1. $\Phi(x)$ funksiýa täkdir, ýagny:

$$\Phi(-x)=-\Phi(x).$$

Eger (2) formulada x argumenti $-x$ bilen çalyşsak, $\Phi(-x)$ alarys. Soňra alnan kesgitlenen integralda täze näbelli girizýäris: $t=-z$, onda $dt=-dz$. Täze z näbelli boýunça integrirlemegiň predelleri 0 we x bolar.

Diýmek,

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\Phi(x).$$

Bu ýerde «kesgitlenen integralyň ululygy üýtgeýänleriň bellenilişine bagly däldir» diýlen häsiýetden peýdalandyk. Diýmek, görkezilen häsiýet dogrudyr. Bu häsiýete göra $\Phi(x)$ funksiýanyň tablisadaky bahalary diňe argumentiň položitel bahalary üçin berilýär.

2. $\Phi(x)$ funksiýa monoton artýar.

Bu häsiýeti subut etmek üçin $x_2>x_1$ bolanda $\Phi(x_2)>\Phi(x_1)$ bolýandygyny subut etmeli. Onuň üçin $\Phi(x_2)$ funksiýany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\Phi(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\Phi(x_1)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\alpha.$$

Bu ýerde:

$$\alpha=\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt>0.$$

Sebäbi bu kesgitlenen integral t-niň islendik bahasynda položitel funksiýadan alnan integral bolanlygy üçin položiteldir. Diýmek, $\Phi(x_2)>\Phi(x_1)$. Bu häsiýet subut edildi.

3. $x>5$ bahalar üçin $\Phi(x)\approx 1$ hasap etmek bolar. Hakykatdan-da, $\Phi(5)=0{,}9999994\approx 1$, onda $x>5$ bolanda $\Phi(x)\approx 1$, sebäbi bu funksiýa x-iň ulalmagy bilen artýar, ýöne birden uly bolup bilmeýär:

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=1.$$

Mesele. Bugdaý tohumynyň gögerijiligi 90%. 600 tohum ekildi. Gögerip çykan tohumlaryň sanynyň 520-den az bolmazlygynyň we 570-den köp bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. $n=600$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$, onda

$$P(520\le k\le 570)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

$$x_1=\frac{520-600\cdot 0{,}9}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=\frac{-20}{7{,}35}=-2{,}72;\quad x_2=\frac{570-600\cdot 0{,}9}{7{,}35}=4{,}08,$$

$$P(520\le k\le 570)\approx\Phi(4{,}08)+\Phi(2{,}72)=0{,}4999+0{,}4967=0{,}99.$$

Özüňi barlamak üçin soraglar.

1. Ähtimallyk teoriýasynyň öwrenýän meseleleri nämeden ybarat?
2. Nähili wakalara tötän wakalar diýilýär?
3. Sygyşykly wakalar diýlip nähili wakalara aýdylýar?
4. Nähili wakalara doly topar diýilýär?
5. Doly topary düzýän wakalara mysallar getiriň?
6. Birnäçe wakanyň jemi diýlip nähili waka aýdylýar?
7. Wakalaryň köpeltmek hasyly (kesişmesi) nähili kesgitlenýär?

8. Nähili wakalara deň mümkinçilikli wakalar diýilýär?
9. Garşylykly wakalar nähili kesgitlenýär?
10. Sygyşykly we sygyşyksyz wakalara mysallar getiriň?
11. Wakanyň ýygylygy diýlip nämä aýdylýar?
12. Ýygylygyň nähili häsiýetlerini bilýärsiňiz?
13. Ähtimallygyň statistiki kesgitlemesini getiriň?
14. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini formulirläň?
15. Wakanyň ähtimallygy haýsy predellerde üýtgeýär?
16. Sygyşyksyz wakalar üçin goşmak teoremasyny formulirläň?
17. Doly topary emele getirýän wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi nämä deň?
18. Nähili ähtimallyga şertli ähtimallyk diýilýär?
19. Nähili wakalara bagly däl wakalar diýilýär?
20. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasyny formulirläň.
21. Sygyşykly wakalary goşmak teoremasyny formulirläň.
22. Sygyşyksyz wakalaryň, iň bolmanda, biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy nähili kesgitlenýär?
23. Doly ähtimallygyň formulasyny subut ediň.
24. Baýesiň formulasyny getirip çykaryň.
25. Nähili meseleler çözülende doly ähtimallygyň formulasy ulanylýar?
26. Bagly däl synaglar diýlip nähili synaglara aýdylýar?
27. Nähili meseleler çözülende Bernulliniň formulasy ulanylýar?
28. Has ähtimal ýygylyk diýlip nämä aýdylýar?
29. Muawr-Laplasyň lokal teoremasy nähili formulirlenýär?
30. Puassonyň teoremasyny formulirläň.
31. Muawr-Laplasyň integral teoremasyny formulirläň.

Meseleler we gönükmeler

1. Kesgitli bir synaga degişli elementar wakalaryň giňişligi berlen:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

Özünde 2 ýa-da 3 elementar wakany saklaýan wakalary guruň.

Çözülişi.

1) $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $A_4 = \{\omega_2, \omega_3\}$, $A_5 = \{\omega_2, \omega_4\}$, $A_6 = \{\omega_3, \omega_4\}$.

2) $B_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $B_3 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $B_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$,

$$A_i \subset \Omega \ (i = 1, 2, ..., 6), \ \ B_j \subset \Omega \ (j = 1, 2, 3, 4).$$

2. Teňňe üç gezek oklanýar. Elementar wakalaryň giňişligini gurmaly.

3. Goý, $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$. $A + B$; AB tapmaly.

Çözülişi:

$$A + B = \{a, b, c\} + \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\},$$

$$AB = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}.$$

4. Nyşana üç gezek ok atylýar. Goý, A_k waka k-njy gezek ok atylanda nyşana degmek bolsun ($k = 1, 2, 3$). A_k we $\overline{A}_k$ wakalaryň üstündäki amallardan peýdalanyp, aşakdaky wakalary görkeziň;

A – «üç gezek nyşana degmek»;

B – «üç gezek hem nyşana degmezlik»;

C – «iň bolmanda, bir gezek nyşana degmek»;

D – «iň bolmanda, bir gezek nyşana degmezlik»;

M – «ikiden az bolmadyk gezek nyşana degmek»;

F – «birden az bolmadyk gezek nyşana degmek».

5. Oýnalýan kubjagaz oklanýar. Aşakdaky wakalaryň haýsysy sygyşykly, haýsylary sygyşyksyz?

1) A-jübüt oçkolar düşdi, B-täk oçkolar düşdi.

2) A-täk oçkolar düşdi, B-üçe kratny bolan oçkolar düşdi.

3) A-düşen oçkolar ýönekeý sanlar, B-jübüt oçkolar düşdi.

6. Aşakdaky wakalaryň jübüdiniň haýsylary özara garşylykly?

1) Talyp synagy «bäşlige» tabşyrdy, «ikilige» tabşyrdy.

2) Iki gezek ok atylanda iň bolmanda, bir gezek nyşana degmek; iki okuň hiç biri nyşana degmedi.

7. Aşakdaky wakalaryň haýsysynyň 1) tötän, 2) hökmany, 3)mümkin däl waka bolýandygyny görkeziň.

1) Alnan bir lotereýa biledi boýunça utuş.

2) Eger gapda 3 gök we 5 gyzyl şar bolsa, tötänleýin alnan şaryň reňkli bolmagy.

3) Eger 5 bally bahalaryň sistemasy kabul edilen bolsa, giriş synaglarynda dalaşgäriň 4 synagdan 25 bal toplamagy.

4) Oýnalýan kubjagaz oklananda ýokarky granynda altydan uly oçkonyň düşmezligi.

8. Iki sany oýnalýan kubjagaz oklanýar. Düşen oçkolaryň jeminiň 7-ä deň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{1}{6}$.

9. Oglanjyk kesilip ýasalan elipbiýiň *U*, *M*, *R*, *A*, *P*, *G* harplary bilen oýnaýar. Ol harplar tötänleýin düzülip goýlanda «MURGAP» sözüniň alynmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{1}{720}$.

10. Talyplaryň toparynda 16 talyp bar: olaryň 10-sy gyz, 6-sy oglan. Küşt ýaryşyna gatnaşmak üçin 3 talyp alyndy. Bu üçlügiň ikisiniň gyz, biriniň oglan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{27}{56}$.

11. Detallaryň toplumynda 10 detal bar, olaryň 7-si standart. Tötänleýin alnan 6 detalyň 4-siniň standart bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{1}{2}$.

12. Teňňe 3 gezek oklanýar. Iň bolmanda, 2 gezek şekiliň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{1}{2}$.

13. Kartlaryň doly toparyndan (52 kart) tötänleýin 3 kart alynýar. Alnan kartlaryň arasynda bir tuzuň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}204$.

14. 13-nji meseläniň şertinde alnan kartlaryň arasynda, iň bolmanda, bir tuzuň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}217$.

15. Önümleriň 100 sanysyndan 6-sy standart. Bu partiýadan tötänleýin 10 önüm alynýar. Alnan 10 önümiň arasynda diňe ikisiniň standart bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p \approx 0{,}13$.

16. 35 sany synag sowalnamasynyň arasyndan tötänleýin biri alynýar. Ol alnan sowalnamanyň belgisiniň üçe kratny san bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{11}{35}$.

17. $X = \{B, A, P, L, E\}$ elementleriň köplügi berlen. X köplügiň elementleri tötänleýin ýagdaýda hatara goýlanda «LEBAP» sözüniň alynmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $\frac{1}{120}$.

18. $X = \{1, 2, ..., 30\}$ köplük berlen. Tötänleýin alnan sanyň 30-yň bölüjisi bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p \approx 0{,}2667$.

19. Kartoçkalaryň her birinde A, G, I, M, O, R, T, L harplar ýazylan. Olary tötänleýin ýagdaýda hatara goýsak, ALGORITM sözüniň alynmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{1}{8!}$.

20. 15 oglandan we 5 gyzdan ybarat bolan talyplaryň topary bije boýunça 4 adamdan ybarat bolan nobatçy toparçany döredýärler. Bu toparçanyň düzüminde 2 oglanyň we 2 gyzyň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi: Synagyň şerti 20 adamdan 4 adamy saýlamakdan ybarat. Alnan 4 adamyň bije boýunça alynýanlygy üçin, synagyň netijeleri deň ähtimallykly we sygyşyksyzdyrlar. Diýmek, $n = C_{20}^4$. Goý, A waka saýlanyp alnan 4 adamyň 2 gyz 2 oglan bolmagyny aňladýar diýeliň. 15 oglanyň arasyndan 2 oglany C_{15}^2 usul bilen saýlap almak bolar, oglanlar alnandan soň 5 gyzdan 2 sanysyny C_5^2 usul bilen saýlap almak bolar. Diýmek, A wakanyň ýüze çykmagyna $C_{15}^2\ C_5^2$ sany ýagdaý ýardam edýär. Onda gözlenýän ähtimallyk

$$P(A) = \frac{C_{15}^2 C_5^2}{C_{20}^4} \approx 0{,}217.$$

21. Gutuda 4 gyzyl we 6 gök galam bar. Tötänleýin 3 galam alyndy, olaryň ikisiniň gyzyl galam bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}3$.

22. N detaldan ybarat bolan toplumda n sany standart detal bar. Tötänleýin m detal alynýar. Alnan detallaryň arasynda k standart detalyň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Ähli mümkin bolan wakalaryň umumy sany, ýagny N detaldan m detaly saýlap almagyň usullarynyň sany N elementden alnan m elementli utgaşmalaryň C_N^m sanyna deňdir.

Bizi gyzyklandyrýan wakanyň (m detalyň arasynda k standart detalyň bolmagy) ýüze çykmagyna ýardam edýän wakalaryň sanyny hasaplalyň. n standart detalyň arasyndan k standart detaly C_n^k usul bilen saýlap almak bolar, şunlukda galan $m - k$ detallar standart däldir, olary $N - n$ standart däl detallaryň arasyndan C_{N-n}^{m-k} usul bilen almak bolar. Diýmek, gözlenýän wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän wakalaryň sany

$$C_n^k C_{N-n}^{m-k}, \text{ onda } \ p = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

23. Gapda üç gyzyl, dört gök we bäş sary şar bar. Tötänleýin 3 şar alynýar. Alnan şarlaryň bir reňkli ýa-da dürli reňkli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Belgilemeleri girizeliň: A – şarlaryň üçüsi hem dürli reňkli, B – şarlaryň üçüsi hem gyzyl reňkli, C – şarlaryň üçüsi hem gök reňkli, D – şarlaryň üçüsi hem sary reňkli bolsun. A, B, C, D wakalar sygyşyksyzdyrlar, onda

$$P(A + B + C + D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D).$$

A – wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_4^1 C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220}.$$

B – wakanyň ähtimallygy

$$P(B)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}.$$

C – wakanyň ähtimallygy

$$P(C)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}.$$

D – wakanyň ähtimallygy

$$P(D)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{10}{220}.$$

Gözlenýän ähtimallyk

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=\frac{60}{220}+\frac{4}{220}+\frac{10}{220}+\frac{1}{220}=\frac{75}{220}.$$

24. Gapda 10 detal bar, olaryň 7-si standart. Gapdan yzly-yzyna üç detal alynýar. Olaryň ikisiniň standart detal bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p=\frac{378}{720}.$

25. Atyjy daşlaşýan nyşana üç gezek ok atýar. Birinji gezek nyşana degmegiň ähtimallygy 0,9, ikinji gezek bu ähtimallyk 0,8, üçünji gezek 0,7. Aşakdaky wakalaryň ähtimallyklaryny tapmaly: 1) üç gezek hem nyşana degmezlik; 2) üç gezek nyşana degmek; 3) iki gezek nyşana degmek.

Jogaby: 1) $p=0{,}006$, 2) $p=0{,}504$, 3) $p=0{,}398$.

26. Ekmek üçin taýýarlanan tohumyň gögerijiligi 98%. Tohumyň gögermek üçin oňaýly ýagdaýa düşmegi 96%. Ekilen tohumyň näçe göterimi gögerip çykar?

Çözülişi. Goý, A_1 – ekilen tohumyň gögermäge ukyply bolmagy, A_2 – tohum gögermek üçin oňaýly ýagdaýa düşmegi bolsun. C waka-ekilen tohumyň gögerip çykmagy, bu bolsa A_1 we A_2 wakalaryň bir wagtda ýüze çykmagyny aňladýar.

$$P(C)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)=0{,}98\cdot 0{,}96=0{,}94.$$

Diýmek, tohumlaryň 94%-i gögerer.

27. Maldarçylyk toplumynda mallara iýmit bermek üçin iki sany transportýor işleýär. Olaryň her biriniň gyş aýlarynda döwülmän işlemeginiň ähtimallygy 0,9. Gyş aýlarynda, iň bolmanda, bir transportýoryň döwülmän işlemeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A_1 – birinji transportýoryň döwülmän işlemegi;

A_2 – ikinji transportýoryň döwülmän işlemegi bolsun.

A_1 we A_2 wakalar sygyşyklydyrlar, diýmek, iň bolmanda, bir transportýoryň işlemeginiň ähtimallygy

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}99.$$

A_1A_2 – transportýorlaryň ikisiniň hem işlemegini aňladýar.

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81.$$

28. Enjam üç sany baglanyşyksyz işleýän elementlerden ybarat. Birinji elementiň t wagtda hatardan çykmaklygynyň ähtimallygy $p_i = 0{,}9$, ikinji element üçin bu ähtimallyk $p_2 = 0{,}8$, üçünji element üçin $p_3 = 0{,}7$. Enjamyň elementleriniň, iň bolmanda, biriniň t wagt aralygynda hatardan çykmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly

Jogaby: $p = 0{,}994$.

29. Hojalyk harytlary ýasalýan dört sany zawodda taýýarlanan bir görnüşli elektrik çyralary gelip düşdi. Şunlukda: I zawoddan 250 sany, II zawoddan 525 sany, III zawoddan 275 sany, IV zawoddan 950 sany çyra geldi. Çyralaryň standarta gabat gelmeginiň ähtimallygy agzalan zawodlar üçin degişlilikde: 0,15; 0,30; 0,20; 0,10. Dükanyň tekjelerinde goýlanda çyralar garyşdyrylyp goýuldy. Dükandan satyn alnan bir çyranyň standart bolup çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A-alnan çyranyň standart bolmagy bolsun, A_1, A_2, A_3, A_4, bu çyranyň degişlilikde birinji, ikinji, üçünji, dördünji zawodda taýýarlanmagy bolsun. Dükana gelen hemme çyralaryň sany 2000, onda gipotezalaryň ähtimallyklary

$$P(A_1) = \frac{250}{2000} = 0{,}125, \qquad P(A_2) = \frac{525}{2000} = 0{,}2625,$$

$$P(A_3) = \frac{275}{2000} = 0{,}1375, \qquad P(A_4) = \frac{950}{2000} = 0{,}475.$$

Meseläniň şertinden

$$P(A/A_1) = 0{,}15, \qquad P(A/A_2) = 0{,}30,$$
$$P(A/A_3) = 0{,}20, \qquad P(A/A_4) = 0{,}10.$$

Doly ähtimallygyň formulasyny ulanyp alarys:

$$P(A) = 0{,}125 \cdot 0{,}15 + 0{,}2625 \cdot 0{,}30 + 0{,}1375 \cdot 0{,}20 +$$
$$+ 0{,}475 \cdot 0{,}10 = 0{,}175.$$

30. 10 sany gutuda iki görnüşli detallar bar. Birinji üç gutuda 3 detal birinji görnüşli, 7-si ikinji görnüşli, 4-nji gutuda 9 detal birinji görnüşli, 1 detal ikinji görnüşli, galan 6 gutunyň her birinde 1 detal birinji görnüşli, galan 9-sy ikinji görnüşli . Gutularyň tötänleýin birinden bir detal alynýar. Bu detalyň ikinji görnüşli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}76$.

31. Üç sany birmeňzeş gap bar. Birinji gapda iki ak we bir gara şar ; ikinji gapda üç ak we bir gara şar; üçünji gapda iki ak we iki gara şar bar. Tötänleýin bir gapdan bir şar alynýar, bu şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{23}{36}$.

32. Matematikadan synaga gelen 10 talybyň üçüsi «bäşlige», dördüsi «dörtlüge», «ikisi» üçlüge taýýarlanypdyr, emma bir talyp düýpli taýýarlanmandyr. Sowalnamalarda 20 sorag bar. «Bäşlige» taýýarlanan talyp 20 soraga, dörtlüge taýýarlanan talyp 16 soraga, üçlüge taýýarlanan talyp 10 soraga jogap berip bilýär, taýýarlanmadyk talyp 5 soraga jogap berip bilýär. Her talyba 20 soragyň içinden tötänleýin üç sorag berilýär. Birinji çagyrylan talyp 3 soraga-da jogap berdi. Bu talybyň bäşlikçi bolmagynyň ähtimallygy nähili?

Jogaby: $p \approx 0{,}58$.

33. Ýygnaýjy sehe üç stanokda ýasalan detallar gelip düşýär. Şunlukda: birinji stanokdan 30%, ikinjiden 20%, üçünjiden 50%. Birinji stanokda ýasalan detallaryň 2%-i, ikinjide ýasalan detallaryň

1%-i, üçünji stanokda ýasalan detallaryň 3%-i standart däl. Tötänleýin alnan bir detal standart däl bolup çykdy. Bu detalyň birinji stanokda ýasalan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = \frac{6}{23}$.

34. Pagtanyň belli bir sortunyň süýümleriniň 80%-iniň uzynlygy 46 *mm*-den uly däldir. Tötänleýin 5 süýüm alynýar. Olaryň arasynda uzynlygy 46 *mm*-den uly bolmadyk süýümleriň ikiden köp bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Alnan islendik süýümiň 46 *mm*-den uzyn bolmazlygynyň ähtimallygy 0,8. Bizi bolsa *k* sany süýümleriň arasynda 46 *mm*-den uzyn bolmadyk süýümleriň sanynyň 2-den köp bolmazlygynyň ähtimallygy gyzyklandyrýar.

$$P(k \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0(0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^5 + C_5^1(0{,}8) \cdot (0{,}2)^4 +$$
$$+ C_5^2(0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}00032 + 0{,}0064 + 0{,}0512 = 0{,}05798.$$

35. Dükandan alnan elektrik çyrasynyň standart bolmagynyň ähtimallygy 0,8. Talyp 5 çyra aldy. Olaryň arasynda standart çyralaryň sanynyň dörtden az bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}737$.

36. Teňňe 4 gezek oklanýar. 2 gezek şekiliň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}375$.

37. Süläniň tohumunyň gögerijiligi 90%. Ekilen 7 tohumdan 5 tohumyň gögerip çykmagynyň ähtimallygy nämä deň?

Jogaby: $p = 0{,}127$.

38. Tikin fabriginiň önümleriniň 30%-i ýokary hilli. Talyp bu fabrigiň önüminden 6 sanysyny satyn aldy. Ol önümleriň 4 sanysynyň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}06$.

39. Teňňe 20 gezek oklanýar. Şekiliň düşmeginiň has ähtimal sanyny tapmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä $p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$, $n=20$. Goý, m has ähtimal san bolsun, onda $np-q \leq m \leq np+p$ $np-q=20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$, $np + p = 20 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2} < m < 10\frac{1}{2}$ bu ýerde $m = 10$.

Eger $nq - q$ we $np + p$ bitin sanlar bolsa, onda olaryň arasynda aralyk bitin san bolmaýar, onda m iki baha eýe bolýar: $m_1=pn-q, m_2=np+p$. Meselem, eger teňňe 25 gezek oklanýan bolsa

$$np - q = 25 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 12, \quad np + q = 25 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 13.$$

$$12 \leq m \leq 13, \quad m = 12, \quad m = 13.$$

40. Eger her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,2 bolsa, 19 synagda wakanyň ýüze çykmagynyň has ähtimal sanyny tapmaly.

Jogaby: $m_1 = 3$, $m_2 = 4$.

41. Eger $p = 0{,}4$ we $n = 5$ bolsa binomial paýlanyşyň tablisasyny düzmeli we ähtimallyklaryň köpburçlugyny gurmaly.

42. Eger $p = \frac{1}{2}$ we $n = 11$ bolsa, binomial paýlanyşyň tablisasyny düzmeli we ähtimallyklaryň köpburçlugyny gurmaly.

43. Eger wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,64 bolsa, wakanyň ýüze çykmagynyň has ähtimal sany 51 bolar ýaly, näçe gaýtalanýan baglanyşyksyz synag geçirmeli?

Jogaby: $n = 79; 80$.

44. Käbir A wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8. 100 sany baglanyşyksyz synagda bu wakanyň 85 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}046$.

45. Pagta süýüminiň 76%-iniň uzynlygy 40 *mm*-den kiçidir. Tötänleýin 20 süýüm alynýar, olaryň 16 sanysynyň uzynlygynyň 40 *mm*-den kiçi bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p = 0{,}18$.

46. Teňňe 40 gezek oklanýar, 25 gezek şekiliň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: p = 0,036.

47. Eger her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik we 0,2 bolsa, 400 synagda bu wakanyň 80 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: p = 0,04986.

48. Tokar stanogynda standart detalyň ýasalmagynyň ähtimallygy 0,4 . Tötänleýin alnan 26 detalyň 13 sanysynyň standart bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: p = 0,093.

49. Oglanyň dogulmagynyň ähtimallygyny 0,515 hasap edip, 80 sany täze doglan çaganyň 42 sanysynyň oglan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: p = 0,009.

50. Her gezek ok atylanda nyşana degmegiň ähtimallygy 0,6. 600 gezek ok atylanda nyşana degen oklaryň sanynyň 330-dan 375 aralygynda bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: p = 0,8882.

II bap
TÖTÄN ULULYKLAR

§1. Tötän ululyklar barada düşunje. Tötän ululyklaryň mysallary

Ähtimallyklar teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biri tötän ululyk düşünjesidir. Tötän ululyk ýagdaýa görä ol ýa-da başga san bahalaryny alyp bilýän ululykdyr, şunlukda ol her bir bahany kesgitli ähtimallyk bilen kabul edýär.

Tötän ululyk we tötän waka düşünjeleri baglanyşyklydyr.

Tötän waka synagyň hil häsiýetlendirijisi bolsa, tötän ululyk onuň san häsiýetlendirijisidir. Eger tötän wakalar baglanyşyksyz bolsalar, tötän ululyklar hem baglanyşyksyzdyrlar. Tötän ululyklaryň mysallaryna seredeliň.

1) Bir gije-gündiziň dowamyndaky telefon gepleşikleriniň sany;
2) Bir ýylda bir sygyrdan alnan süýdüň mukdary;
3) Bir ýylda bir towukdan alnan ýumurtgalaryň sany;
4) Pagtanyň hasyllylygy (*s*);
5) Bir ýylda 100 ene goýundan alnan guzularyň sany;
6) Süýtdäki ýagyň göterimi (%);
7) Belli bir ýerde aprel aýynda ýagan ygalyň mukdary (*mm*);
8) Ösüşiň 10 hepdesiniň başynda bir ösümligiň agramy.

Tötän ululyklar iki topara bölünýärler:
1) Diskret tötän ululyklar (1-5 mysallar),
2) Üznüksiz tötän ululyklar (6-8 mysallar).

Kesgitleme. Eger X tötän ululyk degişli $p_1, p_2, ..., p_n$ ähtimallyklar bilen $x_1, x_2, ..., x_n$ tükenikli ýa-da tükeniksiz hasaply bahalary kabul edýän bolsa, oňa diskret tötän ululyk diýilýär.

Synagyň netijesinde X tötän ululygyň p_k ähtimallyk bilen x_k bahany almagy:

$$P(X = x_k) = p_k \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

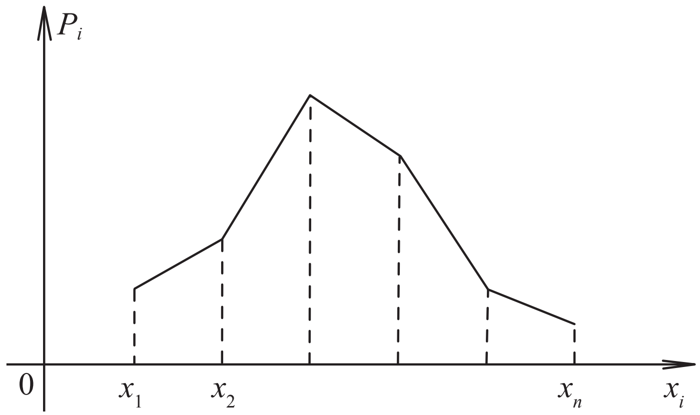
görnüşde belgilenilýär.

(1) formula X tötän ululygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Köplenç diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny tablisa görnüşinde berilýär:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Bu tablisanyň birinji setiri tötän ululygyň mümkin bolan bahalaryny, ikinji setiri bolsa olaryň degişli ähtimallyklaryny aňladýar.

Diskret tötän ululygyň paýlanyşyny grafiki şekillendirmek üçin gönüburçly koordinatalar sistemasynda (x_i, p_i) nokatlary gurýarlar, soňra olary kesimler bilen birleşdirip, paýlanyşyň köpburçlugy diýlen figurany alýarlar (*13-nji surat*).



13-nji surat

1-nji mesele. Oýnalýan kubjagaz oklananda belli bir sanyň düşmeginiň ähtimallygy $\frac{1}{6}$-e deňdir. Onda oçkolaryň paýlanyşyny aşakdaky tablisa bilen bermek bolar:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-nji mesele. Synag geçirilip, olaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p. A wakanyň ýüze çykmagynyň μ sany binomial kanun boýunça paýlanan diskret tötän ululyk.

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1, n).$$

Bu ululyk aşakdaky tablisa bilen berilýär:

k	0	1	2	...	n
p	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	...	p^n

$X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ wakalar doly topary emele getirýärler, şonuň üçin:

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1 \qquad (2)$$

ýa-da

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \quad (3)$$

Ähtimallyklar teoriýasynda tötän ululyklaryň baglanyşyksyzlygy hakyndaky düşünje wajyp orun tutýar.

Kesgitleme. Eger, $X = x_i$ we $Y=y_j$ (i =1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m) wakalar islendik i we j üçin bagly däl bolsalar, onda X we Y diskret tötän ululyklara bagly däl ululyklar diýilýär.

Diskret tötän ululyklar üçin seredilen bu düşünjeleri umumylygy bozman giňeltmek bolar. Diskret tötän ululyk tükenikli ýa-da tükeniksiz (hasaply) x_1, x_2, ..., x_k, ... san bahalary olara degişli $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, ..., $p_k = P(X = x_k)$, ... ähtimallyklar bilen alyp biler. X tötän ululygyň paýlanyşy (1) formula bilen aňladylýar, eger X tükeniksiz köp bahalary alýan bolsa, k = 1, 2, 3, ..., bu ýagdaýda (3) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Bu ýerde tükenikli jemiň ýerine tükeniksiz hatar duran diskret tötän ululyklara seredilýär. Şunlukda hemme girizilen düşünjeler we häsiýetler tötän ululyk tükeniksiz bahalary alan ýagdaýynda-da öz güýjüni saklaýar, ýöne tükenikli jemleriň ýerine tükeniksiz hatarlary almaly bolýar.

Tükenikli bahalary alyp bilýän diskret tötän ululygyň mysaly hökmünde bir günüň dowamynda ilatly punktda doglan çagalaryň sanyny, awtobusdaky ýolagçylaryň sanyny, maşgaladaky çagalaryň sanyny görkezmek bolar.

Tükeniksiz bahalary alyp bilýän tötän ululygyň mysaly edip birinji gezek nyşana degilýänçä atylan oklaryň sanyny almak bolar. Bu tötän ululyk aşakdaky bahalary alyp biler:

1 (birinji gezekde nyşana degilse), 2 (birinji gezekde nyşana degilmän, ikinji gezekde nyşana degilse), 3 (birinji we ikinji gezekde nyşana degilmän, üçünji gezekde nyşana degilse) we ş. m. tükeniksizlige çenli. Hakykatda-da atyşlaryň sany haýsydyr bir N sandan kiçidir diýlen netijä gelmek mümkin däl. Sebäbi ilkinji N gezek atylan oklaryň hiç biriniň nyşana degmezligi mümkin. Onda biz ýene-de bir

gezek oky atmaly bolýarys. Diýmek, tötän ululygyň alyp bilýän bahalary tükeniksiz (ýöne ol hasaply köplük).

Goý, X tötän ululyk x_i bahany $p_i = P(X = x_i)$ ähtimallyk bilen kabul edýär diýeliň. Y tötän ululyk y_j bahany $P(Y = y_j) = p_j$ ähtimallyk bilen kabul edýär diýeliň. kX tötän ululygyň paýlanyş kanunyny aşakdaky ýaly bermek mümkin:

kX	kx_1	kx_2	...	kx_n
p	p_1	p_2	...	p_n

$x + y$ jem täze tötän ululyk bolup, ol $x_i + y_j$ görnüşdäki bahalary p_{ij} ähtimallyk bilen kabul edýär. Diýmek,

$$p_{ij} = P(X = x_i;\ Y = y_j) = P(X = x_i)\ \ P(Y = y_j) = p_i p_j.$$

Tötän ululyklaryň tapawudynyň we köpeltmek hasylynyň paýlanyşy şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär.

§2. Diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy

Diňe paýlanyş kanuny boýunça tötän ululyk barada pikir ýöretmek köplenç kyn bolýar. Şonuň üçin tötän ululyklary käbir hemişelik ululyklaryň üsti bilen häsiýetlendirýärler. Olaryň arasynda iň wajyplarynyň biri matematiki garaşmadyr.

Bir meselä seredeliň. Dynç alyş öýünde hemmesi utuşly lotereýa oýny geçirilýär. 1000 sany utuş bar, olaryň 400 sanysy – 1 manat, 300 sanysy – 2 manat, 200 sanysy – 10 manat, 100 sanysy – 20 manat möçberinde utýar. Bir lotereýa satyn alan adam üçin ortaça utuşyň mukdary nähili?

$1 \cdot 400 + 2 \cdot 300 + 10 \cdot 200 + 20 \cdot 100 = 5000$ utuşlaryň sanyny 1000-e böleliň: $5000/1000 = 5$ manat, ýöne ortaça utuşy kesgitlemek üçin aňlatmany aşakdaky ýaly görnüşde hem ulanmak bolar:

$$1 \cdot 400/1000 + 2 \cdot 300/1000 + 10 \cdot 200/1000 + 20 \cdot 100/1000 =$$
$$= 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}1 = 5 \textit{ manat}.$$

Beýleki tarapdan, bu meseläniň şertinde utuşyň möçberi 1 manat, 2 manat, 10 manat, 20 manat bahalary kabul edip bilýän, ähtimallyklary, degişlilikde, 0,4, 0,3, 0,2, 0,1 bolan tötän ululykdyr. Diýmek, garaşylýan ortaça utuş utuşlaryň möçberiniň degişli ähtimallyklara köpeltmek hasyllarynyň jemine deň.

Kesgitleme. Diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip, bu ululygyň kabul edip bilýän bahalarynyň olaryň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar.

Matematiki garaşma $M(x)$ simwol bilen belgilenilýär.

Kesgitlemä görä:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \qquad (1)$$

Tötän ululygyň matematiki garaşmasy hemişelik ululykdyr. Ol synaglarda tötän ululygyň nähili ortaça bahasyna garaşyp boljakdygyny görkezýär. Käwagtlarda diňe matematiki garaşmanyň özi tötän ululyga ýeterlik häsiýetnama berýär.

Matematiki garaşmanyň häsiýetlerine seredeliň:

1. Hemişelik sanyň matematiki garaşmasy şol hemişelige deňdir.

Subudy. Hemişelik c sana bire deň bolan ähtimallyk bilen c bahany kabul edýän tötän ululyk ýaly seretmek bolar. Şonuň üçin onuň matematiki garaşmasy:

$$Mc = c \cdot 1 = c.$$

2. Hemişelik sany matematiki garaşmanyň simwolynyň daşyna çykarmak bolar:

$$M(kX) = kM(X).$$

Bu ýerde k – hemişelik san.

Subudy. Öň belleýşimiz ýaly, $k\,X$ tötän ululykdyr,

$$P(kX = kx_i) = p_i \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Onuň matematiki garaşmasy

$$M(kX) = kx_1p_1 + kx_2p_2 + ... + kx_np_n = k(x_1p_1 + ... + x_np_n) = kM(X).$$

3. X we Y tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Subudy. Goý, X we Y aşakdaky kanunlar boýunça paýlanan diýeliň:

X	x_1	x_2	...	x_n
$P\{X=x_k\}=p_k$	p_1	p_2	...	p_n

Y	y_1	y_2	...	y_s
$q_i=P\{Y=y_i\}$	q_1	q_2	...	q_s

Diýmek, $X+Y$ tötän ululyk x_k+y_i $(k=1, 2, ...n,\ i=1, 2, ..., s)$ bahalary kabul edip biler. $X=x_k$ we $Y=y_i$ wakalaryň ähtimallyklaryny r_{ki} bilen belgiläliň. Onda

$$M(X+Y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}(x_k+y_i)r_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}x_k r_{ki}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}y_i r_{ki}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k\left(\sum_{i=1}^{s}r_{ki}\right)+\sum_{i=1}^{s}y_i\left(\sum_{k=1}^{n}r_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_k p_k+\sum_{i=1}^{s}y_i q_i=M(X)+M(Y).$$

Bu ýerde aşakdaky aňlatmalardan peýdalanyldy:

$$\sum_{i=1}^{s}r_{ki}=p_k,\qquad \sum_{k=1}^{n}r_{ki}=q_i.$$

Ol deňlikler jübüt-jübütden sygyşyksyz wakalary goşmak teoremasyndan gelip çykýar. Hakykatdan-da, $\{X=x_k\}$ wakany jübüt-jübütden sygyşyksyz

$$\{X=x_k,\ Y=y_1\},\ \{X=x_k,\ Y=y_2\},\ ...,\ \{X=x_k,\ Y=y_s\}$$

wakalaryň jemi görnüşinde aňlatmak bolar. Onda

$$p_k=P\{X=x_k\}=P\{X=x_k,\ Y=y_1\}+P\{X=x_k,\ Y=y_2\}+...+$$

$$+P\{X=x_k,\ Y=y_s\}=r_{k1}+r_{k2}+...+r_{ks}=\sum_{i=1}^{s}r_{ki}.$$

Edil şuňa meňzeşlikde

$$q_i=P\{Y=y_i\}=P\{X=x_1,\ Y=y_i\}+P\{X=x_2,\ Y=y_i\}+...+$$

$$+P\{X=x_n,\ Y=y_i\}=r_{i1}+r_{i2}...+r_{ni}=\sum_{k=1}^{n}r_{ki}.$$

4. X we Y bagly däl tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy bu ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Subudy. 3-nji häsiýet üçin ulanan bellemelerimizi peýdalanalyň

$$r_{ki} = \{X = x_k, Y = y_i\} = P\{X = x_k\} \cdot P\{Y = y_i\} = p_k q_i .$$

Sebäbi X we Y ululyklar bagly däldirler. XY köpeltmek hasyly $x_k y_i$ bahalary alýar. Şonuň üçin

$$M(X \cdot Y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} x_k y_i r_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} x_k y_i p_k q_i = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \left(\sum_{i=1}^{s} y_i q_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_k p_k M(Y) = M(X) M(Y).$$

5. Iki tötän ululygyň tapawudynyň matematiki garaşmasy matematiki garaşmalaryň tapawudyna deňdir:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

Subudy.

$$M(X - Y) = M(X + (-Y)) = M(X) + M(-Y) = M(X) - M(Y).$$

6. $M(X - c) = M(X) - c$

Subudy.

$$M(X - c) = M(X) - M(c)$$

matematiki garaşmanyň birinji häsiýetine görä $M(c) = c$. Diýmek,

$$M(X - c) = M(X) - c.$$

7. $M(X - M(X)) = 0.$

Subudy.

(6) häsiýeti peýdalanyp, $c = M(X)$ hasap edip alarys:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

§3. Diskret tötän ululygyň dispersiýasy

Köp ýagdaýlarda diňe matematiki garaşma ýeterlik derejede tötän ululygy häsiýetlendirip bilmeýär. Goý, tötän ululyklar aşakdaky paýlanyş kanunlary bilen berlen diýeliň:

Y	–20	–10	0	10	20
q	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

X	–0,1	–0,01	0	0,01	0,1
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Bu ululyklaryň matematiki garaşmalary meňzeş we nola deň, ýöne olaryň paýlanyş häsiýetleri başga, X tötän ululyk matematiki garaşmadan az tapawutlanýan bahalary alyp bilýär, Y tötän ululyk bolsa matematiki garaşmadan gowy tapawutlanýan bahalary alyp bilýär. Edil şunuň ýaly, iki welaýatda ýylyň dowamynda düşýän ygalyň birmeňzeş orta bahalarynda bu welaýatlarda klimat hem birmeňzeş diýip bolmaýar. Ortaça aýlyk hakyň belli bolmagy ýokary we az hak tölenýän işçileriň udel agramy barada pikir ýöretmäge mümkinçilik bermeýär. Umuman aýdylanda, matematiki garaşma boýunça ortaçadan gyşarmanyň ululygy barada aýtmak kyn bolýar. Ýöne bu gyşarma baha bermek örän wajyp bolup durýar.

Tötän ululygyň dargawlygyna dürli usullar bilen baha berip bolar.

Tötän ululygyň bahalarynyň matematiki garaşmanyň töweregindäki dargawlygyna baha bermek üçin dispersiýadan we orta kwadratik gyşarmadan peýdalanylýar.

X tötän ululygyň bahalarynyň matematiki garaşmanyň golaýyndaky dargawlygyny $x_i - a$ tapawut häsiýetlendirýär. Ýöne bu tapawudyň ortaça bahasy dargawlygy häsiýetlendirmeýär, sebäbi matematiki garaşmanyň 7-nji häsiýetine görä $M(x_i - a) = 0$. Şu sebäbe görä bu gyşarmalaryň $(x_1 - a)^2, (x_2 - a)^2, ..., (x_n - a)^2$ kwadratlaryna seredilýär. Ol tapawutlara $(X - a)^2$ tötän ululygyň bahalary ýaly düşünmek bolar. Tötän ululyk bu bahalary, degişlilikde, $p_1, p_2, ...p_n$ ähtimallyklar bilen kabul edýär. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyna tötän ululygyň dispersiýasy diýilýär we $D(X)$ simwol bilen ýa-da $\sigma^2(X)$ bilen belgilenýär.

Kesgitleme. Tötän ululygyň öz matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň kwadratynyň matematiki garaşmasyna dispersiýa diýilýär:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 \tag{1}$$

ýa-da

$$D(X) = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \dots$$
$$+(x_n - a)^h P_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i. \qquad (2)$$

Dispersiýa hemişelik ululyk bolup, ol tötän ululygyň ikinji jemleýji häsiýetlendirijisidir.

Kesgitleme. X tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasy diýlip, dispersiýadan alnan kwadrat köküň arifmetiki bahasyna aýdylýar:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Orta kwadratik gyşarma dispersiýa garanda dargawlygyň has köp ulanylýan ölçegidir. Onuň ölçegi tötän ululygyň ölçegi bilen gabat gelýär. Meselem, eger tötän ululygyň bahalary gektarlarda, gramlarda, metrlerde we ş.m. aňladylýan bolsa, onda orta kwadratik gyşarma hem gektarlarda, gramlarda, metrlerde we ş.m. aňladylýar.

Dispersiýanyň häsiýetlerine seredeliň.

1. Hemişelik sanyň dispersiýasy nola deňdir:

$$D(c) = M[c - M(c)]^2 = M[c - c] = M(0) = 0.$$

2. Hemişelik sany kwadrata göterip, dispersiýa alamatynyň daşyna çykarmak bolar:

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

Bu ýerde k – hemişelik san.

Subudy. Goý, X berlen tötän ululyk bolsun. Onda kX täze tötän ululyk bolup, onuň matematiki garaşmasy $kM(X)$ bolar. (matematiki garaşmanyň 2 häsiýeti). kX tötän ululyga (1) formulany ulanyp alarys:

$$D(kX) = M[kX - M(kX)]^2 = M\{k^2[X - M(X)]^2\} =$$
$$= k^2 M[X - M(X)]^2 = k^2 D(X),$$

3. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$

Subudy. $M(X) = a$ hasap edip alarys:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X - a)^2 = M(X^2 - 2aX + a^2) = M(X^2) -$$
$$- M(2aX) + M(a^2).$$

Matematiki garaşmanyň 1 we 2 häsiýetlerine görä

$$M(2aX) = 2aM(X), \quad M(a^2) = a^2,$$

$$D(X) = M(X^2) - 2aM(X) + a^2 = M(X^2) - 2a^2 + a^2.$$

Bu ýerden

$$D(X) = M(X^2) - a^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

4. Bagly däl X we Y tötän ululyklar üçin

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Subudy.

$$D(X + Y) = M\{(X + Y) - [M(X) + M(Y)]\}^2 = M\{[X - M(X)] +$$
$$+ [Y - M(Y)]\}^2 = M\{[X - M(X)]^2 + [Y - M(Y)]^2 +$$
$$+ 2[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\},$$

$$D(X + Y) = M[X - M(X)]^2 + M[Y - M(Y)]^2 +$$
$$+ 2M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}.$$

$X - M(X)$ we $Y - M(Y)$ – tapawutlar bagly däl tötän ululyklardyr. Sebäbi X we Y bagly däldirler. Onda matematiki garaşmanyň 4-nji häsiýetine görä

$$M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\} = M(X - M(X)) \cdot M(Y - M(Y)).$$

Sag tarapdaky köpeldijileriň ikisi hem matematiki garaşmanyň 7-nji häsiýetine görä nola deňdir. Onda

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

5. Bagly däl iki tötän ululygyň tapawudynyň dispersiýasy olaryň dispersiýalarynyň jemine deň:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Subudy.

$$X - Y = X + (-1) \cdot Y.$$

Dispersiýanyň 2-nji häsiýetine görä

$$D(X - Y) = D(X) + D[(-1) \cdot Y] = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

§4. Binomial paýlanyş

Diskret tötän ululyklaryň paýlanyş kanunlarynyň arasynda has giň ýaýrany biziň öň tanyş bolan binomial paýlanyşymyzdyr. Bu paýlanyş Bernulliniň formulasy bilen berilýär:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Binomial kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapalyň. $M(X) = m_x$ belgiläliň.

Diskret tötän ululyk üçin matematiki garaşmanyň kesgitlemesine görä:

$$m_x = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2}$$

Bu jemi hasaplamak üçin:

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$$

aňlatmany p boýunça differensirläp alarys:

$$n(p + q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^{m-1} q^{n-m}. \tag{3}$$

(3) deňligiň iki tarapyny hem p sana köpeldip alarys:

$$np(p + q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{4}$$

(2) we (4) deňlikleriň sag taraplary deňdirler, diýmek, olaryň çep taraplary hem deňdir:

$$m_x = np(p + q)^{n-1}.$$

$p + q = 1$ bolanlygy üçin:

$$m_x = np. \tag{5}$$

Binomial paýlanyşyň dispersiýasyny hasaplamak üçin:

$$D(X)= M[X^2] - (m_x)^2 \tag{6}$$

formuladan peýdalanalyň. Ilki bilen $M(X^2)$ tapalyň:

$$M[X^2] = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{7}$$

Onuň üçin (3) aňlatmany ýene bir gezek p boýunça differensirläliň:

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} m(m-1) C_n^m p^{m-2} q^{n-m}.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem p^2 köpeldip, alarys:

$$n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} m(m-1) C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Bu ýerden $p + q = 1$ deňligi göz öňüne tutup alarys:

$$n^2p^2 - np^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} = M[X^2], \qquad \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} = m_x = np,$$

onda:

$$n^2p^2 - np^2 = M[X^2] - np.$$

Bu ýerden:

$$M[X^2] = n^2p^2 - np^2 + np. \tag{8}$$

(8) aňlatmany (6) formulada goýup we $m_x = np$ bolýandygyny bilip alarys:

$$D(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

ýa-da

$$D(X) = npq.$$

Bu ýerden orta kwadratik gyşarma

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}\,.$$

Mesele. Detalyň standart däl bolmagynyň ähtimallygy 0,06 deň. 50 detaldan ybarat bolan toplumda standart däl detallaryň sanynyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

Çözülişi. X tötän ululyk binomial kanun boýunça paýlanandyr. Şonuň üçin:

$$m_x = np = 50 \cdot 0{,}06 = 3,$$
$$D(X) = npq = 50 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94 = 2{,}82.$$

§5. Puassonyň paýlanyşy

Eger X tötän ululyk diňe bitin otrisatel bolmadyk $m = 0,1,2,3,\ldots$ bahalary

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

ähtimallyk bilen alýan bolsa, ol Puassonyň kanuny boýunça paýlanandyr. Bu kanuna seýrek duş gelýän hadysalaryň kanuny hem diýilýär (meselem, ýylyň dowamynda üçem çaganyň dogulmagy). Puassonyň kanuny boýunça paýlanan tötän ululygyň matematiki garaşmasy we dispersiýasy bu kanuny kesgitleýän λ parametre deňdir:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} =$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + 2 \cdot \frac{\lambda}{2!} + 3 \cdot \frac{\lambda^2}{3!} + \ldots + m\frac{\lambda^{m-1}}{m!} + \ldots\right) =$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots\right).$$

Ýaý içindäki duran hataryň jemi hatarlar teoriýasyndan belli bolşy ýaly, e^{λ} deňdir. Diýmek,

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \tag{1}$$

Dispersiýany hasaplamak üçin

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

formuladan peýdalanalyň.

$$M(X^2) = 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + 1^2 \cdot \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} + 2^2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + 3^2 \cdot \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} + \ldots$$
$$+ m^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} + \ldots = e^{-\lambda}\left(\lambda + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{1!} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{2!} + \ldots + m\frac{\lambda^m}{(m-1)!} + \ldots\right). \tag{2}$$

Ýokarda belleýşimiz ýaly,

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem λ köpeldeliň, soňra λ boýunça differensirläp alarys:

$$(1+\lambda)e^{\lambda} = 1 + 2\frac{\lambda}{1!} + 3\frac{\lambda^2}{2!} + 4\frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + m \cdot \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots$$

Alnan aňlatmanyň iki tarapyny hem λ köpeldip, soňra (2) deňligi göz öňüne tutup alarys:

$$M(X^2) = e^{-\lambda} \cdot (\lambda + \lambda^2)e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2; \quad D(X) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Diýmek, Puassonyň paýlanyşynyň matematiki garaşmasy we dispersiýasy özara gabat gelýärler. Eger tötän ululygyň takyk paýlanyşy binomial paýlanyş bolsa we matematiki garaşma dispersiýadan az tapawutlanýan bolsa, ýagny $np \approx npq$ bolsa, Puassonyň paýlanyşy onuň ýakynlaşmasy görnüşinde ulanylýar. Şu sebäbe görä Puassonyň paýlanyşy amaly meseleler çözülende giňden ulanylýar.

1-nji mesele. Demir ýol menzilindäki kassa bir sagadyň dowamynda ortaça 30 ýolagçy ýüz tutýar. Bir minudyň dowamynda kassa ikiden köp bolmadyk ýolagçynyň ýüzlenmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Bir minudyň dowamynda kassa gelýänleriň sanynyň matematiki garaşmasy

$$\lambda = m_x = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

Meseläniň şertine görä berlen minudyň dowamynda kassa ýüz tutan adamlaryň sanynyň 0, 1, 2 bolmagy mümkin. Şonuň üçin gözlenýän ähtimallyk

$$P(m \le 2) = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\right] \approx 0,98.$$

2-nji mesele. Zawod taýýarlaýyş bölümine 500 sany ýokary hilli önüm ugratdy. Önümiň ýolda zaýa bolmagynyň ähtimallygy 0,002. Taýýarlaýyş bölümine gelen önümleriň üçüsiniň zaýa önüm bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Bu meseläniň ýakynlaşan çözüwini Puassonyň formulasyny ulanyp tapmak bolar. Meseläniň şertine görä:

$$p = 0{,}002, \quad q = 1 - p = 1 - 0{,}002 = 0{,}998, \quad n = 50.$$

Zaýa önümleriň sanynyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapalyň:

$$m_x = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1.$$

$$D(X) = npq = 500 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 0{,}998.$$

Görşümiz ýaly, $m_x \approx D(x)$. Şonuň üçin $\lambda = m_x = 1$ hasap edip, gözlenýän ähtimallygyň ýakynlaşan bahasyny Puassonyň formulasy boýunça taparys:

$$P_3 = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \frac{1}{3!}e^{-\lambda} = \frac{1}{6 \cdot e} \approx 0{,}06.$$

§6. Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

Kesgitleme. Eger tötän ululyk bütin bir aralykda islendik bahany alyp bilýän bolsa, başgaça aýdylanda, tötän ululygyň alyp bilýän bahalary käbir tükenikli ýa-da tükeniksiz aralygy doldurýan bolsa, onda oňa üznüksiz tötän ululyk diýilýär.

Üznüksiz tötän ululygyň kesgitlemesinden görnüşi ýaly, onuň mümkin bolan bahalaryny sanap çykmak mümkin däl. Sebäbi olaryň sany tükeniksiz uly, şonuň üçin onuň paýlanyş kanunyny tablisa görnüşinde berip bolmaýar.

Tükeniksiz $(-\infty, x)$ aralyga seredeliň, x – erkin hakyky san. Synagyň netijesinde X tötän ululyk x_i, $x_i \in (-\infty, x)$ bahalaryň birini alypdyr diýeliň. Başgaça aýdylanda, $X < x$ boldy diýeliň. Bir synagyň netijesinde X tötän ululygyň käbir x sandan kiçi bahany almagy x-a bagly bolan kesgitli ähtimallyga eýedir, ýagny $X < x$ wakanyň ähtimallygy x-iň funksiýasydyr:

$$P(X < x) = F(x). \tag{1}$$

Kesgitleme. X tötän ululygyň x-dan kiçi bahany almagynyň $P(X < x)$ ähtimallygyna X tötän ululygyň paýlanyşynyň integral funksiýasy ýa-da integral paýlanyş kanuny diýilýär.

San okunda $P(X < x) = F(x)$ deňlik X tötän nokadyň x nokatdan çepde ýerleşýändigini aňladýar. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalary alyp bilýän diskret X tötän ululyk üçin paýlanyş funksiýasy aşakdaky görnüşi alar:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \tag{2}$$

Jemiň aşagyndaky $x_i < x$ deňsizlik jemlemek prosesiniň tötän ululygyň mümkin bolan bahalarynyň x-dan kiçi bahany alýanlaryna degişlidigini aňladýar. (2) deňlikden görnüşi ýaly, diskret tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy diskret funksiýadyr. Ol ululygyň mümkin bolan $x_1, x_2, ..., x_n$ bahalarynyň üstünden geçende basgançaklar boýunça artýar. Şunlukda her basgançagyň beýikligi degişli bahalaryň ähtimallyklaryna deňdir.

1-nji mesele. Nyşana baglanyşyksyz üç gezek ok atylýar. Her synagda nyşana degmegiň ähtimallygy 0,4. Nyşana degmegiň sanynyň paýlanyş funksiýasyny gurmaly.

Çözülişi. Nyşana degmegiň sanyny X bilen belgiläliň. Onda X tötän ululygyň mümkin bolan bahalary aşakdaky ýaly bolar:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Tötän ululygyň mümkin bolan bahalarynyň ähtimallyklaryny Bernulliniň formulasy boýunça hasaplalyň:

$$P(X = x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n - x_i}.$$

Bu ýerde $n = 3$, onda

$$P(X = 0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = (0,6)^3 = 0,216,$$

$$P(X = 1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 0,432,$$

$$P(X = 2) = 0,288, \qquad P(X = 3) = 0,064.$$

Paýlanyşyň tablisasyny düzeliň:

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

(2) formulany ulanyp, paýlanyş funksiýasyny guralyň:

1. $F(x) = \sum\limits_{x_i < 0} P(X = x_i) = 0,$

2. $F(x) = \sum\limits_{x_1 < 1} P(X = x_i) = P(X = 0) = 0,216,$

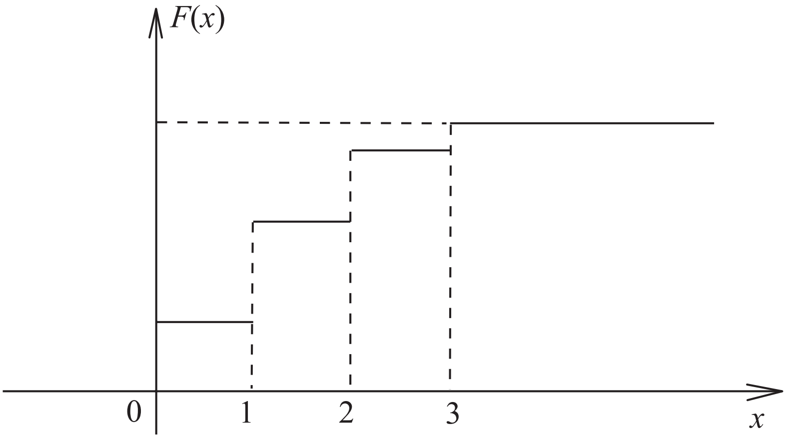
3. $F(x) = \sum\limits_{x_i < 2} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,216 + 0,432 = 0,648,$

4. $F(x) = \sum\limits_{x_i < 3} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,936,$

5. $F(x) = P(X = 3) = 0,064,$

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1.$$

Paýlanyş funksiýanyň grafigi *14-nji suratda* görkezilen.



14-nji surat

Seredilen meselede tötän ululygyň bahalary aralyklara bölünen. Ol aralyklarda başga mümkin bolan bahalar ýok. Bellemeli zat, bu aralyklarda paýlanyş funksiýasynyň bahalary hemişelik. Şonuň üçin funksiýanyň grafigi basgançak görnüşde alynýar. Tötän ululyk her gezek täze baha alanda basgançak bu bahanyň ähtimallygyna deň bolan beýiklige ýokary galýar. Paýlanyş funksiýanyň häsiýetlerine seredeliň.

1. Paýlanyş funksiýasy nol bilen biriň arasynda ýerleşen otrisatel däl funksiýadyr:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Bu häsiýet ähtimallygyň häsiýetiniň esasynda ýüze çykýar.

2. Tötän ululygyň (x_1, x_2) aralyga düşmeginiň ähtimallygy paýlanyş funksiýasynyň aralygyň uçlaryndaky bahalarynyň tapawudyna deňdir:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (3)$$

Subudy. Aşakdaky üç waka seredeliň. A-waka $X < x_2$, B-waka $X < x_1$, C-waka x_1 $X < x_2$. Bu ýerden görnüşi ýaly, A waka B we C iki sany sygyşyksyz wakalaryň jemine deň:

$$A = B + C.$$

Sygyşyksyz wakalary goşmak teoremasyna görä

$$P(A) = P(B) + P(C),$$

ýöne

$$P(A) = P(X < x_2) = F(x_2),$$
$$P(B) = P(X < x_1) = F(x_1),$$
$$P(C) = P(x_1 \le X < x_2).$$

Onda

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2). \quad (4)$$

Bu ýerden

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Subut etmelimiz hem şudy.

(3) deňlikde $x_2 \to x_1$ predele geçip, X tötän ululygyň (x_1, x_2) aralyga düşmeginiň ýerine bu ululyk aýratyn alnan bir bahany alýar diýen netijä geleris:

$$P(X = x_i) = \lim_{x_2 \to x_1} P(x_1 \le X < x_2) = \lim_{x_2 \to x_1} [F(x_2) - F(x_1)]. \quad (5)$$

Bu predeliň bahasy $F(x)$ funksiýanyň x_1 nokatda üznüksiz bolmagyna ýa-da diskret funksiýa bolmagyna baglydyr. Eger funksiýa x_1 nokatda üzülýän bolsa, onda (5) predel bu funksiýanyň x_1 nokatda üzülýän aralygyna (böküş aralygyna) deňdir. Eger funksiýa x_1 nokatda üznüksiz bolsa, onda bu predel nola deňdir.

Üznüksiz X tötän ululygyň $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň hem üznüksiz bolýanlygy üçin $F(x)$ funksiýanyň predeliniň x_1 nokatda nola deň bolýanlygyndan üznüksiz tötän ululygyň islendik aýratyn alnan bahasynyň ähtimallygynyň nola deň bolýanlygy gelip çykýar. Bu netije birbada geň ýaly bolup görünýär, ýöne ol wakanyň ähtimallygynyň statistiki kesgitlemesi bilen ylalaşýar. Bu kesgitlemä görä wakanyň ähtimallygynyň nola deň bolmagy bu wakanyň ýygylygynyň synaglaryň sanynyň artmagy bilen tükeniksiz kemelmek meýlini häsiýetlendirýär, ýöne wakanyň mümkin däl wakadygyny aňlatmaýar.

3. Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny $x_2 > x_1$ bolanda $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Bu häsiýet 2 häsiýetden gelip çykýar. Hakykatdan-da, (4) formula görä

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Islendik wakanyň ähtimallygy otrisatel däldir. Onda

$$P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0.$$

Bu bolsa eger $x_2 > x_1$ bolsa, $F(x_2) \geq F(x_1)$ bolmalydygyny aňladýar.

4. Paýlanyş funksiýasy üçin $x = -\infty$ bolanda $F(-\infty) = 0$, $x = +\infty$ bolanda $F(+\infty) = 1$. Hakykatdan-da, x nokadyň çep tarapa tükeniksizlige süýşmegi bilen X tötän nokadyň x – dan çepe düşmegi predelde mümkin däl wakadyr. Şonuň üçin bu wakanyň ähtimallygy nola ymtylýar, ýagny

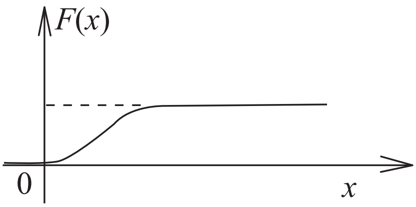
$$F(-\infty) = 0.$$

Edil şuňa meňzeşlikde, x nokadyň saga tarap tükeniksizlige süýşmegi bilen X tötän nokadyň x-dan çepe düşmegi predelde hökmany waka öwrülýär. Şonuň üçin bu wakanyň ähtimallygy bire ymtylýar, ýagny $F(+\infty) = 1$. Paýlanyş funksiýasynyň seredilen häsiýetlerini gysgaça aşakdaky ýaly formulirlemek bolar:

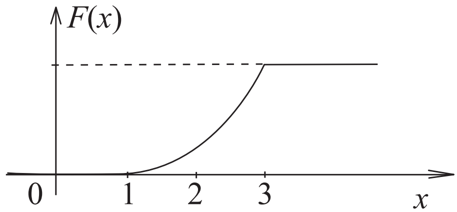
Her bir paýlanyş funksiýasy otrisatel däl, kemelmeýän we $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ şertleri kanagatlandyrýan funksiýadyr.

Ters tassyklama hem dogrudyr, ýagny sanalyp geçilen häsiýetleri kanagatlandyrýan islendik funksiýa käbir tötän ululygyň paýlanyş funksiýasydyr.

Görşümiz ýaly, paýlanyş funksiýasynyň kömegi bilen islendik aralykda tötän ululygyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny ýa-da islendik nokatda diskret tötän ululygyň mümkin bolan bahalarynyň ähtimallygyny tapmak mümkin, şonuň üçin paýlanyş funksiýasy tötän ululygyň paýlanyş kanunyny kesgitleýär. Seredilen häsiýetlerden görnüşi ýaly, paýlanyş funksiýasynyň grafigi üznüksiz tötän ululyk üçin aşakdaky *15-nji suratda* şekillendirilişi ýalydyr:



15-nji surat



16-njy surat

Üznüksiz tötän ululygyň aýratyn alnan bahasynyň ähtimallygynyň nola deň bolýanlygy üçin (3) deňligi aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Diýmek, aralygyň araçäk nokatlary goşulyp hem,goşulman hem biler.

2-nji mesele. Üznüksiz X tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; eger \; x \leq 1 \; bolsa; \\ a(x-1)^2, \quad eger \; 1 < x \leq 3 \; bolsa; \\ 1, \; eger \; x > 3 \; bolsa \end{cases}$$

aňlatma görnüşinde berlen bolsa, a koeffisiýenti tapmaly we $F(x)$ funksiýanyň grafigini gurmaly. Synagyň netijesinde X tötän ululygyň (1;2) aralyga düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Üznüksiz X tötän ululygyň paýlanyş funksiýasynyň üznüksiz bolanlygy üçin $x = 3$ bolanda $a(x-1)^2 = 1$, bu ýerden $a = \frac{1}{4}$. Bu funksiýanyň grafigi *16-njy suratda* şekillendirilen. Paýlanyş funksiýasynyň ikinji häsiýetine görä

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{4}(2-1)^2 - \frac{1}{4}(1-1)^2 = \frac{1}{4}.$$

§7. Üznüksiz tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy

Paýlanyş funksiýasy tötän ululygyň tükenikli we kesgitleýji häsiýetlendirijisidir. Ýöne san okunyň käbir nokadynyň golaý töwereginde tötän ululygyň paýlanyşy barada giňişleýin pikir ýöretmäge paýlanyş funksiýasy mümkinçilik bermeýär. Üznüksiz tötän ululygyň dürli nokatlaryň golaý töwereginde özüni alyp barşy barada paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy ýa-da differensial funksiýa diýlip atlandyrylýan funksiýa aýdyň maglumat berýär. Dykyzlyk funksiýasyna we onuň häsiýetlerine seredeliň.

Goý, paýlanyş funksiýasy $F(x)$ bolan X tötän ululyk berlen diýeliň. Bu tötän ululygyň $(x, x + \Delta x)$ aralyga düşmeginiň ähtimallygyny hasaplalyň. Paýlanyş funksiýasynyň häsiýetine görä

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Bu ähtimallygyň artdyrmanyň uzynlygyna bolan gatnaşygyny düzeliň:

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Bu gatnaşyga berlen aralygyň birlik uzynlygyna degişli orta ähtimallyk diýilýär. $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny differensirlenýän funksiýa hasap edip, (1) aňlatmada $\Delta x \to 0$ predele geçip alarys:

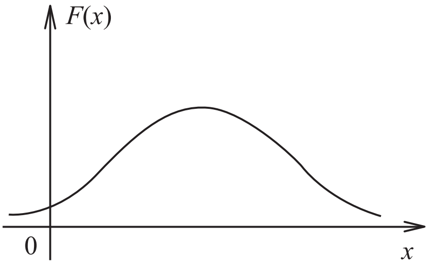
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \qquad (2)$$

Kesgitleme. Tötän ululygyň $(x, x + \Delta x)$ elementar aralyga düşmeginiň ähtimallygynyň Δx artdyrma bolan gatnaşygynyň $\Delta x \to 0$ predeline tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy diýilýär we $f(x)$ bilen belgilenýär.

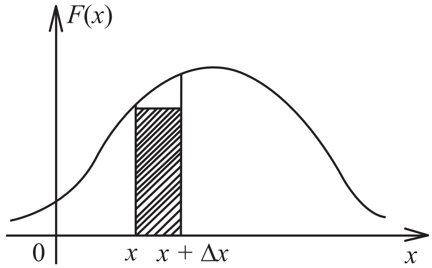
(2) deňlige görä $f(x)$ funksiýa paýlanyş funksiýasynyň birinji önümine deňdir:

$$f(x) = F'(x).$$

Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy synaglar gaýtalananda X tötän ululygyň bahalarynyň x nokadyň golaý töwereginde peýda bolmaklygynyň ýygylygyny aňladýar.



17-nji surat



18-nji surat

Tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlygyny aňladýan funksiýanyň grafigine paýlanyşyň egrisi diýilýär.

Paýlanyşyň egrisiniň mysaly görnüşi *17-nji suratda* görkezilen.

Ox okunyň üstünde Δx elementar bölege (uzynlyga) seredeliň, we X tötän ululygyň $(x, x + \Delta x)$ aralyga düşmeginiň ähtimallygyny tapalyň. Bir tarapdan, bu ähtimallyk $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň $dF(x)$ artdyrmasyna deň ($\Delta x = dx$). Beýleki tarapdan, X tötän ululygyň elementar bölege düşmegi $f(x)dx$ deň (sebäbi $\Delta F(x) \approx f(x)dx$). Geometrik taýdan ol beýikligi $f(x)$, esasy dx bolan gönüburçlugyň meýdanyna deň (*18-nji surat*).

$f(x)dx$ ululyga ähtimallygyň elementi diýilýär. Paýlanyş funksiýasy bilen dykyzlyk funksiýasynyň baglanyşygyna seredeliň. Eger paýlanyş funksiýasy OX okunyň hemme ýerinde üznüksiz bolsa, dykyzlyk funksiýasy käbir tükenikli nokatlardan başga hemme ýerde kesgitlenen bolsa, onda X tötän ululyga üznüksiz ululyk diýilýär.

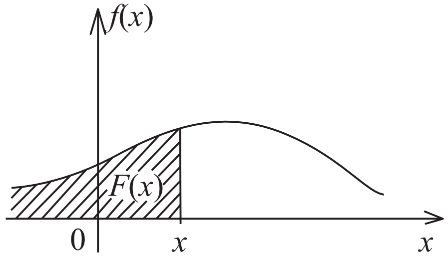
Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň häsiýetlerine seredeliň:

1) Dykyzlyk funksiýasy otrisatel däldir, ýagny $f(x) \geq 0$. Bu häsiýet dykyzlyk funksiýasynyň kemelmeýän $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň önümi bolýandygyndan gelip çykýar.

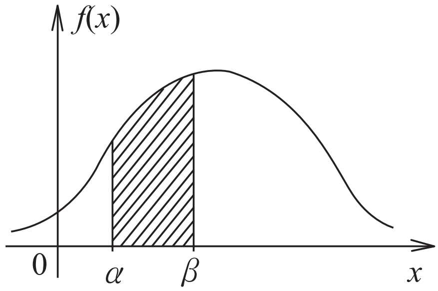
2) $F(x)$ paýlanyş funksiýasy dykyzlyk funksiýasyndan $(-\infty, x)$ aralykda alnan integrala deňdir:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{3}$$

Subudy. Funksiýanyň differensialynyň kesgitlemesine görä $dF(x) = f(x)dx$



19-njy surat



20-nji surat

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} dF(x) = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

Diýmek, sebäbi $F(-\infty) = 0$.

19-njy suratda dykyzlyk funksiýasynyň grafiginde paýlanyş funksiýasy çyzylyp garaldylan meýdan bilen görkezilen.

3) Üznüksiz X tötän ululygyň aralyga düşmeginiň ähtimallygy bu aralyk boýunça dykyzlyk funksiýasyndan alnan integrala deňdir:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{4}$$

Subudy. Paýlanyş funksiýasynyň häsiýetiniň esasynda

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

(3) formula görä

$$F(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx, \qquad F(\alpha) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

Şonuň üçin

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx + \int_{a}^{-\infty} f(x)dx = \int_{a}^{\beta} f(x)dx.$$

Subut etmelimiz hem şudy.

Alnan netijäni geometrik taýdan aşakdaky ýaly düşündirmek bolar. Üznüksiz tötän ululygyň (α, β) aralyga düşýän bahany almagynyň ähtimallygy egriçyzykly trapesiýanyň garaldylan böleginiň meýdanyna deňdir (*20-nji surat*).

4) Dykyzlyk funksiýasyndan tükeniksiz aralykda alnan integral bire deňdir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{5}$$

Subudy. (3) deňlikde x ululygy $+\infty$ bilen çalşyryp we $F(+\infty) = 1$ bolýandygyny göz öňüne tutup alarys:

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Subut etmelimiz hem şudy.

Eger tötän ululygyň mümkin bolan bahalarynyň tükenikli (a we b) çäkleri bar bolsa, onda dykyzlyk funksiýasy bu aralygyň daşynda nola deňdir. Onda 4-nji häsiýeti aşakdaky ýaly ýazmak mümkin:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Geometrik taýdan bu häsiýet paýlanyşyň egrisi we OX oky bilen çäklenen meýdanyň bire deňligini aňladýar.

§8. Üznüksiz tötän ululygyň san häsiýetlendirijileri

Üznüksiz X tötän ululyga seredeliň. Bu tötän ululygyň mümkin bolan bahalary (a, b) aralykda bolup, onuň dykyzlyk funksiýasy $f(x)$ diýeliň.

Seredilýän tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň. Onuň üçin $[a, b]$ aralygy n sany Δx_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$, bölek aralyklara böleliň. Bu bölejikleriň her birinde x_i nokady alyp, $f(x_i)$ funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň. Soňra $f(x_i)\ \Delta x_i$, $i = 1, 2, ..., n$ köpeltmek hasyllaryny tapalyň.

Dykyzlyk funksiýasynyň x_i nokatdaky bahasynyň bölek Δx_i aralyga köpeltmek hasyly X tötän ululygyň Δx_i aralyga düşmeginiň ähtimallygynyň ýakynlaşan bahasyny berýär.

$f(x_i)\ \Delta x_i$ san ähtimallygyň elementidir. Ol tötän ululygyň x_i bahany almagynyň (Δx_i kiçi bolanda) ähtimallygynyň ýakynlaşan bahasydyr. Onda

$$M(X) \approx x_1 f(x_1)\Delta x_1 + x_2 f(x_2)\Delta x_2 + ... + x_n f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i.$$

$M(X)$ matematiki garaşmanyň takyk bahasyny almak üçin $n \to \infty$ ýokarky jemde predele geçip alarys:

$$M(X) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b xf(x)dx.$$

Diýmek, mümkin bolan bahalary (a, b) aralyga degişli bolan üznüksiz tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip,

$$\int_a^b xf(x)dx$$

kesgitli integrala aýdylýar. Diýmek,

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \tag{1}$$

Eger tötän ululygyň mümkin bolan bahalary san okunyň hemme ýerinde kesgitlenen bolsa, onda

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Diskret tötän ululygyň dispersiýasynyň kesgitlemesine meňzeşlikde üznüksiz tötän ululygyň dispersiýasy kesgitlenýär:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx. \tag{2}$$

Eger mümkin bolan bahalar san okunyň hemme ýerine degişli bolsa, onda

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Matematiki garaşmanyň we dispersiýanyň häsiýetleri diskret tötän ululygyňky ýaly formulirlenýär.

Diskret tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasynyň ýa-da standartyň

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$$

ölçegleri tötän ululygyň ölgeçleri bilen gabat gelýär. Dispersiýany hasaplamak üçin köplenç has amatly bolan aşakdaky formulalardan peýdalanylýar:

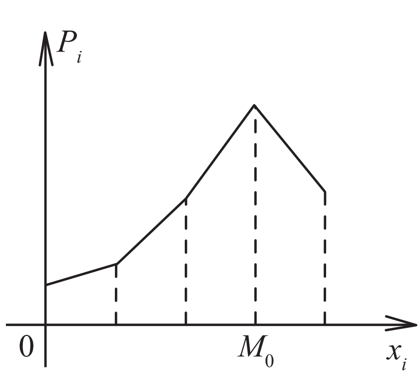
$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left[\int_a^b xf(xdx)\right]^2, \tag{3}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]^2. \tag{4}$$

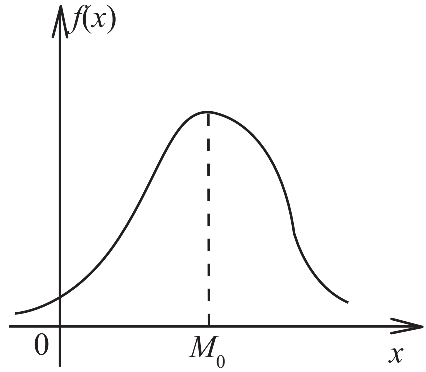
§9. Moda we mediana

Her bir tötän ululyk barada onuň paýlanyş kanunyny we matematiki garaşmasyny bilmek gerekdigini biz gördük. Ýöne tötän ululygy has doly häsiýetlendirmek üçin onuň beýleki häsiýetlendirijilerinden hem peýdalanylýar. Moda we mediana şeýle häsiýetlendirijilere degişlidir.

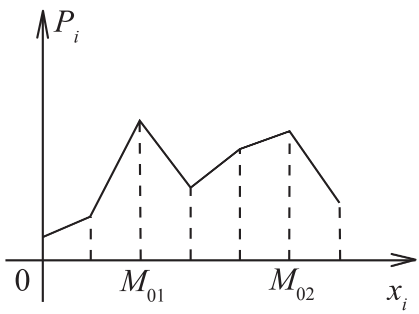
Ähtimallyklar teoriýasynda tötän ululygyň M_0 modasy diýlip, onuň has ähtimal bahasyna aýdylýar. Üznüksiz tötän ululyk üçin moda paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň maksimuma eýe bolýan nokadydyr. (21) we (22) *suratlarda* diskret we üznüksiz tötän ululygyň modasy görkezilen, $f(M_0) = max$. Eger paýlanyşyň köpburçlugy (paýlanyşyň egrisi) iki ýa-da birnäçe maksimuma $f(M_{01}), f(M_{02})$ eýe bolýan bolsa, oňa iki modaly ýa-da köp modaly paýlanyş diýilýär (*23-nji we 24-nji suratlar*).



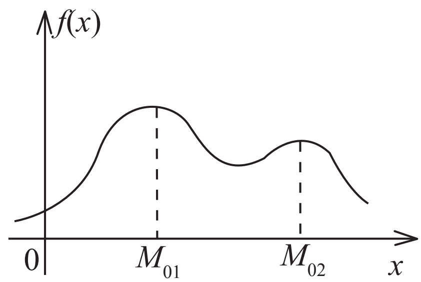
21-nji surat



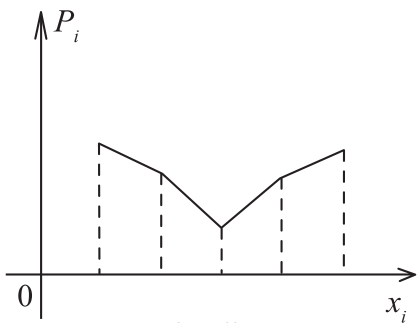
22-nji surat



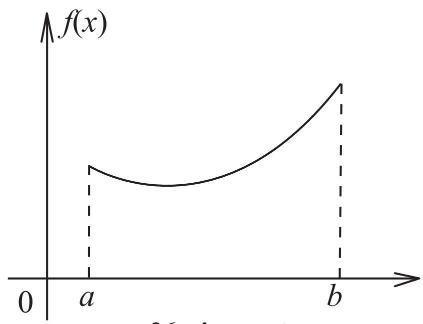
23-nji surat



24-nji surat



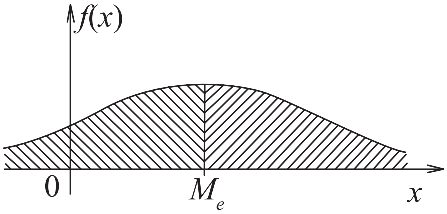
25-nji surat



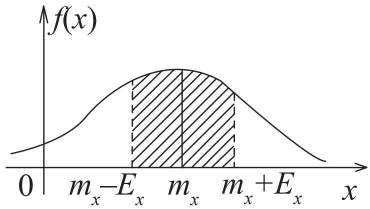
26-njy surat

Käwagtlarda paýlanyşyň minimumy bolup, onuň maksimumy bolmaýar, şeýle paýlanyşlara antimodal paýlanyş diýilýär (*25-nji* we *26-njy suratlar*).

Eger tötän ululygyň x-dan uly ýa-da kiçi bahany almagynyň ähtimallygy deň bolsa, onda onuň bu bahasyna mediana (M_e) diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:



27-nji surat



28-nji surat

$$P(X < M_e) = P(X > M_e).$$

Geometrik taýdan mediana paýlanyşyň egrisi bilen çäklenen meýdany deň ikä bölýän nokadyň abssissasydyr (*27-nji surat*). Bu meýdanlaryň her biri 0,5-e deňdir, sebäbi paýlanyşyň egrisi bilen çäklenen meýdan bire deňdir. Şonuň üçin M_e nokatda paýlanyş funksiýasy

$$F(M_e) = P(X < M_e) = 0,5.$$

Eger paýlanyş bir modaly we simmetrik bolsa, onda tötän ululygyň ýagdaýyny häsiýetlendirýän ululyklar, matematiki garaşma, moda we mediana gabat gelýär. X tötän ululygyň dargawlygyny häsiýetlendirmek üçin ähtimal gyşarma diýlip atlandyrylýan gyşarmadan peýdalanýarlar, ol gyşarma E_x bilen belgilenilýär. Ähtimal gyşarma matematiki garaşma görä simmetrik bolan bölegiň ýarysydyr:

$$P(|x - m_x| < E_x) = 0,5.$$

Geometrik taýdan E_x ähtimal gyşarma abssissa okunyň matematiki garaşma görä simmetrik bolan böleginiň ýarysydyr, ol paýlanyşyň egrisi bilen çäklenen meýdanda ýerleşýär (*28-nji surat*).

§10. Tötän ululygyň momentleri

Tötän ululygyň esasy san häsiýetlendirijileriniň umumylaşdyrmasy tötän ululygyň momentleri düşünjesidir. «Moment» sözi mehanikadan alnandyr, bu düşünje jisimiň massasynyň paýlanyşyny aňlatmak üçin ulanylýar. Ähtimallyklar teoriýasynda momentleriň iki görnüşini tapawutlandyrýarlar: başlangyç we merkezi momentler.

X tötän ululygyň k-njy tertipli başlangyç momenti diýip, X^k ululygyň matematiki garaşmasyna aýdylýar:

$$\alpha_k = M(X)^k.$$

Diýmek, diskret tötän ululyk üçin başlangyç moment aşakdaky jem bilen aňladylýar:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.$$

Üznüksiz tötän ululyk üçin – integral bilen aňladylýar:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Tötän ululygyň başlangyç momentleriniň arasynda birinji tertipli moment aýratyn ähmiýete eýedir, ol tötän ululygyň matematiki garaşmasydyr.

Ýokary tertipli başlangyç momentler, esasan, merkezi momentleri hasaplamak üçin ulanylýar.

Tötän ululygyň k-njy tertipli merkezi momenti diýlip, $(X - m_x)^k$ ululygyň matematiki garaşmasyna aýdylýar:

$$\mu_k = M(X - m_x)^k.$$

Diskret tötän ululyk üçin merkezi moment aşakdaky jem bilen aňladylýar:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i.$$

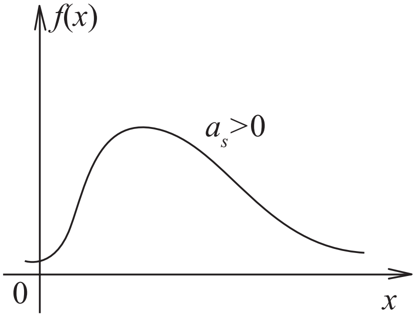
Üznüksiz tötän ululyk üçin integral bilen aňladylýar:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx.$$

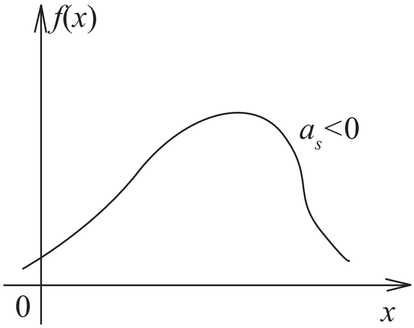
Birinji tertipli merkezi moment matematiki garaşmanyň häsiýetine görä nola deňdir.

Tötän ululygyň merkezi momentleriniň arasynda ikinji merkezi moment aýratyn ähmiýete eýedir, ol tötän ululygyň dispersiýasydyr. Ähtimallyklar teoriýasynda tötän ululygy häsiýetlendirmek üçin üçünji we dördünji tertipli merkezi momentlerden hem giňden peýdalanylýar.

Üçünji tertipli merkezi moment paýlanyşyň asimmetriýasynyň häsiýetnamasydyr. Üçünji tertipli merkezi moment tötän ululygyň kuby bilen ölçegdeşdir, şonuň üçin ölçegsiz ululyga – μ_3 merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň kubyna bolan gatnaşyga seredilýär:



29-njy surat



30-njy surat

$$a_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

a_s ululyga asimmetriýanyň koeffisiýenti diýilýär, *29-njy suratda* paýlanyşyň egrisiniň položitel asimmetriýasy ($a_s > 0$), *30-njy suratda* bolsa otrisatel asimmetriýasy ($a_s < 0$) bardyr.

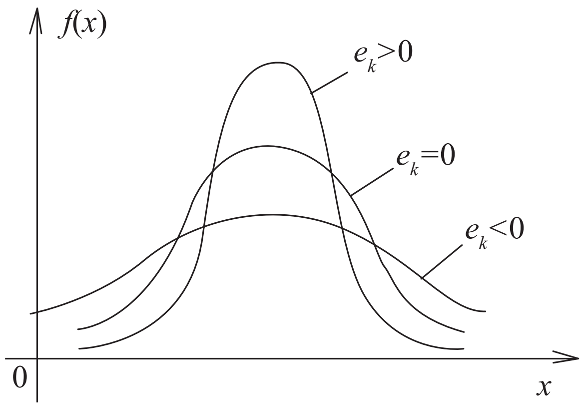
μ_4 dördünji merkezi moment paýlanyşyň egrisiniň ýiti depelidigini ýa-da ýalpak depelidigini häsiýetlendirmek üçin ulanylýar. Paýlanyşyň bu häsiýeti eksses diýlip atlandyrylýan ululyk bilen aňladylýar.

X tötän ululygyň ekssesi diýlip, aşakdaky ululyga aýdylýar:

$$e_k = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Normal paýlanyş kanuny diýlip at berilýän (bu kanun bilen biz soň tanşarys) kanun üçin $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3.$ Bu paýlanyş üçin eksses nola deňdir. Normal paýlanyşyň egrisi etalon ýaly kabul edilip, beýleki paýlanyşyň egrileri onuň bilen deňeşdirilýär. Has ýiti depeli egrileriň položitel ekssesi bardyr, ýalpak depeli egrileriň bolsa otrisatel ekssesi bardyr (*31-nji surat*).

Seredilen başlangyç we merkezi momentlerden başga-da, praktikada absolýut momentler diýlip atlandyrylýan momentlerden hem peýdalanylýar. Absolýut başlangyç moment aşakdaky formula boýunça kesgitlenilýär:



31-nji surat

$$\beta_k = M\,|X|^k.$$

Absolýut merkezi moment

$$\gamma_k = M\,|X - m_x|^k.$$

formula bilen kesgitlenýär.

Bu kesgitlemelerden görnüşi ýaly, jübüt tertipli absolýut momentler adaty momentler bilen gabat gelýär. Täk tertipli absolýut momentlerden has köp ulanylýany birinji absolýut merkezi momentdir:

$$\gamma_1 = M\,|X - m_x|.$$

Oňa orta arifmetiki gyşarma diýilýär. Orta arifmetiki gyşarma, dispersiýa we orta kwadratik gyşarma bilen bir hatarda tötän ululygyň dargawlygynyň görkezijisi hökmünde peýdalanylýar.

§11. Deňölçegli paýlanyş

Eger üznüksiz X tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy $[a, b]$ kesimde hemişelik bolup, kesimiň daşynda nola deň bolsa, onda tötän ululyk bu kesimde deňölçegli paýlanandyr. Diýmek,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & eger \quad x < a, \\ c, & eger \quad a \le x \le b, \\ 0, & eger \quad x > b. \end{cases}$$

Bu ýerde c hemişelik sandyr. Dykyzlyk funksiýasynyň grafigi *32-nji suratda* şekillendirilendir. Biziň bilşimiz ýaly, paýlanyşyň egrisi bilen çäklenen meýdan bire deňdir, şonuň üçin deňölçegli paýlanyşyň dykyzlygy (a, b) aralykda esasy $b - a$ bolan gönüburçlugyň beýikligine deňdir:

$$c = \frac{1}{b - a}.$$

Diýmek, $f(x)$ dykyzlygy aşakdaky ýaly ýazmak bolar.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & eger \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b - a}, & eger \quad a \leq x \leq b, \\ 0, & eger \quad x > b. \end{cases} \tag{1}$$

(a, b) aralykda deňölçegli paýlanyş üçin paýlanyş funksiýasyny tapalyň.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b - a}dx = \left. \frac{x}{b - a} \right|_{a}^{x} = \frac{x - a}{b - a} \qquad a \leq x \leq b.$$

Eger $x < a$ bolsa, $F(x) = 0$, eger $x > b$ bolsa, $F(x) = 1$, diýmek,

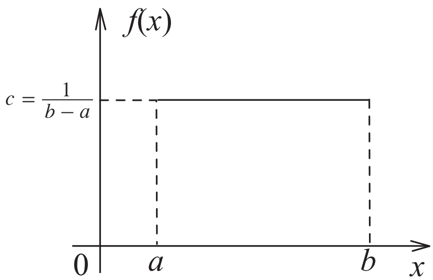
$$F(x) = \begin{cases} 0, & eger \quad x < a, \\ \dfrac{x - a}{b - a}, & eger \quad a \leq x \leq b, \\ 1, & eger \quad x > b. \end{cases} \tag{2}$$

$F(x)$ funksiýanyň grafigi *33-nji suratda* görkezilen. Görşümiz ýaly, üznüksiz tötän ululygyň deňölçegli kanun boýunça paýlanan bolmagy üçin onuň mümkin bolan bahalary kesgitli bir aralyga degişli bolmaly, ondan başga-da bu aralygyň çäklerinde tötän ululygyň bahalarynyň birmeňzeş ähtimallyklary bardyr.

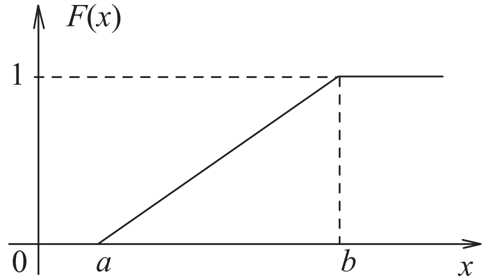
(a, b) aralykda deňölçegli paýlanan tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny kesgitläliň.

$$m_x = \int_{a}^{b} \frac{x}{b - a}dx = \left. \frac{x^2}{2(b - a)} \right|_{a}^{b} = \frac{a + b}{2}.$$

Diýmek, deňölçegli paýlanyşyň matematiki garaşmasy onuň paýlanyş aralygynyň ortasynda ýerleşendir.



32-nji surat



33-nji surat

Deňölçegli paýlanyşyň dispersiýasyny aşakdaky formula boýunça gözläliň:

$$D(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Bu ýerden orta kwadratik gyşarmany tapalyň:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Deňölçegli kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň (α, β) aralyga düşmeginiň ähtimallygy

$$P(a < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

$P\ (\alpha < X < \beta)$ ähtimallyk tötän ululygyň (a, b) aralygyň içinde ýerleşen (α, β) aralyga düşmeginiň ähtimallygydyr.

§12. Görkezijili paýlanyş

Ähtimallyklar teoriýasynyň amaly meseleleri çözülende, esasan hem köpçülige hyzmat ediş teoriýasynda, biologiýada, ygtybarlyk teoriýasynda, fizikada we beýleki ugurlarda eksponensial ýa-da görkezijili kanun boýunça paýlanan tötän ululyklar bilen köp duş gelinýär.

Üznüksiz X tötän ululygyň görkezijili kanun boýunça paýlanan bolmagy üçin onuň dykyzlyk funksiýasy aşakdaky ýaly bolmaly:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & eger \ \ x \geq 0, \\ 0, & eger \ \ x < 0. \end{cases}$$

Bu paýlanyşyň egrisi *34-nji suratda* görkezilen. Görkezijili kanunyň paýlanyş funksiýasyny tapalyň.

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Diýmek,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & eger \ \ x \geq 0, \\ 0, & eger \ \ x < 0. \end{cases}$$

Paýlanyş funksiýasynyň grafigi *35-nji suratda* görkezilen. Görkezijili kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň (a, b) aralyga düşmeginiň ähtimallygyny tapalyň.

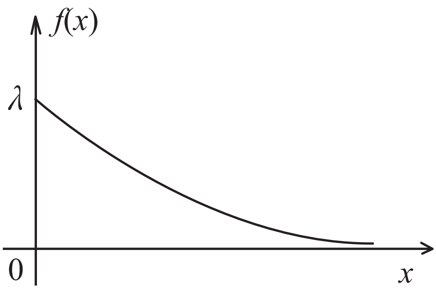
Goý, X tötän ululyk

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

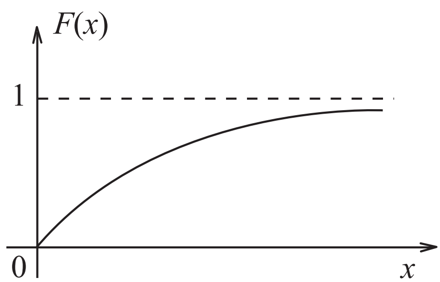
paýlanyş funksiýasy bilen berlen diýeliň, onda:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = [1 - e^{-\lambda b}] - [1 - e^{-\lambda a}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Görkezijili kanun boýunça paýlanan X tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny kesgitläliň.



34-nji surat



35-nji surat

$$M(X) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Bölekler boýunça integrirläp, $u = x,\ dv = e^{-\lambda x}\, dx$ hasap edip alarys:

$$du = dx,$$

$$v = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}.$$

Diýmek,

$$m_x = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Dispersiýany tapmak üçin:

$$D(X) = M[X^2] - m_x^2$$

formuladan peýdalanalyň.

$$M[X^2] = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Iki gezek bölekler boýunça integrirläp alarys:

$$M[X^2] = \frac{2}{\lambda^2},$$

onda:

$$D(X) = M[X^2] - m_x^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bu ýerden

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Diýmek, görkezijili kanun üçin matematiki garaşma we orta kwadratik gyşarma meňzeşdir.

Mesele. Çyranyň işleýiş t wagty görkezijili kanun boýunça paýlanan. Eger çyranyň ortaça işleýän wagty 400 sagada deň bolsa, onuň 600 sagatdan az bolmadyk wagt işlemeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä t tötän ululygyň matematiki garaşmasy 400 sagada deň. Diýmek, $\lambda = \frac{1}{400}$. Gözlenýän ähtimallyk

$$P(t \geq 600) = 1 - P(t < 600) = 1 - F(600) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{400}\cdot 600}\right) =$$

$$e^{-\frac{600}{400}} = e^{-1,5} \approx 0,2231.$$

§13. Normal paýlanyş kanuny

Üznüksiz tötän ululyklaryň paýlanyşlarynyň arasynda normal paýlanyş kanuny esasy orny eýeleýär. Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (1)$$

görnüşdedir. Bu ýerde a we σ_x – normal paýlanyşyň parametrleri.Normal paýlanyş kanuny amaly meseleler çözülende giňden ulanylýar. Eger X tötän ululyk köp sanly faktorlaryň täsiri bilen dörän bolsa, onda bu ululyklaryň paýlanyşy normal kanun bilen berilýär. Faktorlaryň her biri aýratynlykda X ululyga ujypsyz täsir edýär, şol bir wagtda haýsy faktoryň täsiriniň güýçlüdigini hem görkezip bolmaýar. Normal paýlanyşy bolan tötän ululygyň mysaly hökmünde stanokda ýasalan detallaryň ölçegleriniň nominal (standart) ölçeglerden gyşarmasyny, ölçegler geçirilende goýberilýän ýalňyşlyklary, ok atylanda nyşanadan gyşarmalary almak bolar.

Normal paýlanyş kanunyny beýleki kanunlardan tapawutlandyrýan esasy aýratynlyklaryň biri bu kanunyň predel kanun bolmagydyr, beýleki kanunlar bu kanuna golaýlaşýarlar.

Görşümiz ýaly, normal paýlanyş kanuny iki parametr bilen kesgitlenýär. Normal paýlanyşy bermek üçin bu parametrleri bermek ýeterlikdir. Normal paýlanyşyň san häsiýetlendirijilerini tapalyň.

Üznüksiz tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň kesgitlemesine görä

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Täze näbelli girizeliň:

$$z=\frac{x-a}{\sigma},$$

bu ýerden $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$.

Integrirlemegiň predelleriniň üýtgemeýänligi üçin

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Bu goşulyjylaryň birinjisi nola deň (koordinata başlangyjyna görä simmetrik bolan predellerde alnan täk funksiýanyň integraly). Goşulyjylaryň ikinjisi a deň ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$ Puassonyň integraly).

Diýmek, $M(X) = a$. Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň matematiki garaşmasy a parametre deňdir.

Üznüksiz tötän ululygyň dispersiýasynyň kesgitlemesine görä

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx.$$

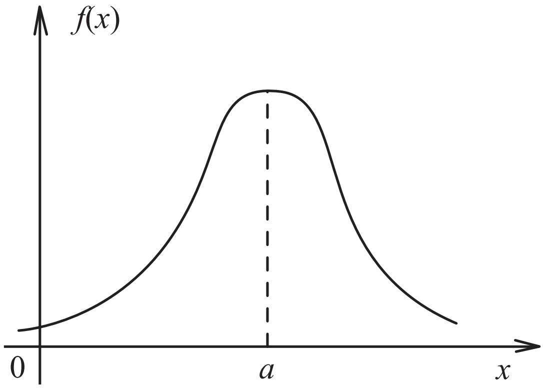
Täze näbelli girizeliň: $z = (x - a)/\sigma$, bu ýerden $x - a = \sigma z$ $dx = \sigma\, dz$. Integralyň predelleriniň üýtgemeýänligini göz öňüne tutup alarys:

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot ze^{-\frac{x^2}{2}}dz.$$

Bu ýerde $u = z$, $dv = ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$ belgiläp, bölekler boýunça integrirläp alarys:

$$D(X) = \sigma^2.$$

Diýmek, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma$, şoňa görä normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasy σ parametre deňdir.



36-njy surat

Normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň grafigine normal egri (Gaussyň egrisi) diýilýär.

Normal egriniň käbir häsiýetlerine seredeliň.

Paýlanyşyň egrisi a nokadyň üstünden geçýän ordinata simmetrikdir.

Egriniň diňe bir maksimumy bardyr, $x = a$ bolanda ol $\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}$ aňlatma deňdir.

Eger $|x| \to \infty$, onda egriniň şahalary ox okuna asimptotik ýakynlaşýarlar.

a matematiki garaşmanyň üýtgemegi σ = const bolanda paýlanyşyň egrisiniň Ox okunyň ugry boýunça süýşmekligine getirýär. Şunlukda paýlanyşyň egrisi öz görnüşini saklaýar.

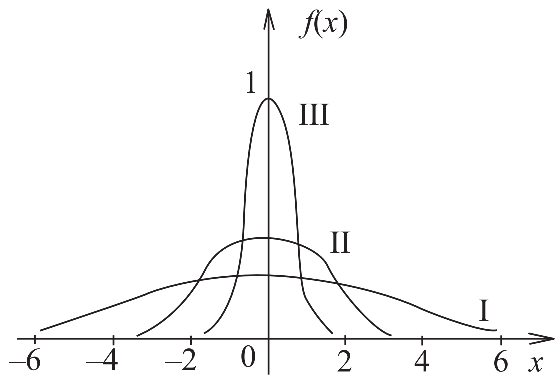
σ_x orta kwadratik gyşarmanyň üýtgemegi bilen a = const bolanda paýlanyşyň egrisi öz görnüşini üýtgedýär.

37-nji suratda I egri $\sigma_x = 2{,}5$ ýagdaýa degişlidir, II egri $\sigma_x = 1$ ýagdaýa, III egri $\sigma_x = 0{,}4$ ýagdaýa degişlidir.

Biziň bilşimiz ýaly, eger tötän ululyk $f(x)$ dykyzlyk funksiýasy bilen berlen bolsa, X tötän ululygyň (α, β) aralyga düşmeginiň ähtimallygy

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

formula boýunça kesgitlenýär.



37-nji surat

Goý, X tötan ululyk normal kanun boýunça paýlanan diýeliň, onda X tötän ulylygyň (α, β) aralyga degişli baha almagynyň ähtimallygy

$$P(a < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Täze näbelli girizeliň:

$$t = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Onda

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (2)$$

(2) integraly hasaplamak üçin Laplasyň funksiýasy diýilýän funksiýanyň ýörite tablisasyndan peýdalanylýar.

Bu funksiýa $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt$ görnüşde berilýär. Bu funksiýanyň bahalary goşundynyň *2-nji tablisasynda* berilýär. Çylşyrymly bolmadyk öwrümleriň kömegi bilen (2) aňlatmany Laplasyň funksiýasyna getireliň:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha - a}{\sigma}}^{\frac{\beta - a}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta - a}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\alpha - a}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

(3) formulanyň hususy halyna seredeliň:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Bu formuladan peýdalanyp, parametrleri a we σ bolan X tötän ululygyň $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ aralyga düşmeginiň ähtimallygyny tapalyň:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9972.$$

Bu ýerden görşümiz ýaly, parametrleri a we σ bolan X tötän ululyk üçin $|X - a| < 3\sigma$ deňsizligiň ýerine ýetmeginiň ähtimallygy hökmany wakanyň ähtimallygyna golaýlaşýar. «Üç sigma düzgüni» diýlen at şu ýerden gelip çykýar.

Eger $a = 0$, $\sigma = 1$ bolsa, onda bu paýlanyşa normirlenen paýlanyş diýilýär. Normirlenen paýlanyşyň dykyzlygy

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bu funksiýa üçin ýörite tablisa düzülendir (*1-nji goşundy*).

Goý,

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(z-a)^2/2\sigma^2} dz$$

umumy görnüşdäki normal kanunyň paýlanyş funksiýasy bolsun.

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

normirlenen kanunyň paýlanyş funksiýasy bolsa, onda olaryň arasynda

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

ýaly baglanyşyk bardygyny görmek kyn däldir.

Normirlenen we normal kanun boýunça paýlanan X tötän ululygyň $(0, x)$ aralyga düşmeginiň ähtimallygyny Laplasyň

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

funksiýasyny peýdalanyp tapmak bolar.

§14. Normal paýlanyş kanuny bilen baglanyşykly paýlanyş kanunlary

1. Pirsonyň paýlanyşy

Iňlis biology Pirson χ^2(hi-kwadrat) paýlanyş diýip at berilýän paýlanyşy girizipdir.

Goý, X_i $(i = 1,2,\ldots n)$ normal kanun boýunça paýlanan baglanyşyksyz tötän ululyklar bolsun. Olaryň her biriniň matematiki garaşmasy nola deň, orta kwadratik gyşarmalary bolsa bire deň. Onda bu tötän ululyklaryň kwadratlarynyň jemi, ýagny

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

erkinlik derejesi $k = n$ bolan χ^2 kanun boýunça paýlanandyr. Bu paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ eger \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, \ eger \ x > 0. \end{cases}$$

Bu ýerde $\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ – gamma funksiýanyň bahasy, k – paýlanyşyň parametri. Gamma funksiýasynyň bahasy islendik položitel m san üçin aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx.$$

(Gamma-funksiýa barada giňişleýin maglumatlar ýokary matematikanyň doly kurslarynda berilýär).

2. Stýudentiň paýlanyşy

Goý, X normal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk bolsun, şunlukda $M(X) = 0$, $\sigma(X) = 1$. Z – ululyk erkinlik derejesi k bolan χ^2 kanun boýunça paýlanan bolsa, onda

$$T = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{Z}{k}}}.$$

aňlatma t – paýlanyş ýa-da Stýudentiň (iňlis matematigi W. Gossetiň lakamy) paýlanyşy diýilýär. k erkinlik derejesi uly boldugyça bu paýlanyş normal paýlanyşa ýakynlaşýar.

3. Fişeriň-Snedekoryň paýlanyşy

Eger X we Y bagly däl, χ^2 kanun boýunça paýlanan, erkinlik derejeleri k_1 we k_2 bolan tötän ululyklar bolsa, onda

$$F = \frac{\dfrac{X}{k_1}}{\dfrac{Y}{k_2}}$$

ululygyň paýlanyşyna erkinlik derejeleri k_1 we k_2 bolan, Fişeriň-Snedekoryň F paýlanyşy diýilýär. Bu paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & eger\ x \le 0, \\ C_0 \dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & eger\ \ x > 0. \end{cases}$$

Bu ýerde

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}.$$

F paýlanyş k_1 we k_2 erkinlik derejeleriniň berilmegi bilen kesgitlenýär.

4. Makswelliň paýlanyşy

Eger üznüksiz tötän ululyk diňe položitel bahalary alýan bolsa, onuň dykyzlyk funksiýasy aşakdaky aňlatma bilen kesgitlenen bolsa:

$$\varphi_M(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}},$$

(bu ýerde $\alpha > 0$ – paýlanyşyň parametri), onda bu ululyk Makswelliň kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

§15. Uly sanlar kanuny

Uly sanlar kanuny ähtimallyklar teoriýasynda wajyp orun eýeleýär. Ol matematika ylmy bilen ähtimallyk teoriýasyny we köp sanly gözegçilikleriň esasynda ýüze çykýan kanunalaýyklyklary baglanyşdyrýar. Uly sanlar kanuny ätiýaçlandyryşyň dürli görnüşlerinde ilatyň köp sarp edýän harytlarynyň assortimentini meýilnamalaşdyrmakda we ş.m. meselelerde giňden ulanylýar.

Käbir hil nyşanlarynyň san häsiýetlendirijileriniň orta arifmetiginiň birjynsly hadysalaryň uly topary üçin durnukly häsiýete eýe bolýanlygy öňden bellidir. Teoretiki taýdan ortaçalaryň bu häsiýetini diňe uly sanlar kanunynyň esasynda düşündirmek bolar. Eger tötän ululyklar üçin käbir umumy şertler ýerine ýetýän bolsa, onda orta arifmetiginiň durnuklylygy amaly taýdan hökmany waka öwrülýär. Bu şertler uly sanlar kanunynyň manysyny düzýärler. Uly sanlar kanunyny formulirlemek, onuň ideýalaryny ösdürmek we teoremalaryny subut etmek rus alymlary P.L. Çebyşewe, A.A. Markowa, A.M. Lýapunowa degişlidir.

1. Markowyň deňsizligi

Lemma. Eger X ululygyň matematiki garaşmasy a deň bolsa, we X diňe položitel (ýa-da nol) bahalary kabul edýän bolsa, onda

X ululygyň at^2-dan uly bolmazlygynyň ähtimallygy $1 - \frac{1}{t^2}$-dan kiçi däldir.

Subudy. Bu lemmany diňe diskret ululyk üçin subut edeliň. Goý, X diskret tötän ululyk bolup, ol n dürli bahalary kabul edýär we olaryň hemmesi otrisatel däl diýeliň. Seredilýän ululygyň matematiki garaşmasy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \rho_i = a > 0.$$

Goý, X ululygyň n bahalarynyň arasynda k sanysy at^2 položitel sandan uly diýeliň; olary $x_1, x_2, \ldots x_k$ bilen belgiläliň, bu bahalaryň ähtimallyklaryny $p_1, p_2, \ldots p_k$ bilen belgiläliň, onda

$$x_1 > at^2; \quad x_2 > at^2; \quad \ldots\ x_k > at^2.$$

Bu deňsizlikleri, degişlilikde, $p_1, p_2, \ldots p_k$ ähtimallyklara köpeldip goşalyň:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k > at^2 p_1 + at^2 p_2 + \ldots + at^2 p_k$$

ýa-da

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k > at^2 (p_1 + p_2 + p_k),$$

bu ýerden

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k < \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k}{at^2},$$

alnan deňsizlikde $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ jem X-iň bahalarynyň käbiriniň at^2-dan uly bolmagynyň ähtimallygydyr. Ony $P(X > at^2)$ belgiläliň, onda

$$p_1 + p_2 + \ldots p_k = P(X > at^2),$$

$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k$ sanawjy bolsa

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = a > 0$$

jemden uly däldir. Şonuň üçin eger sanawjyny a san bilen çalyşsak, deňsizlik üýtgemez, ol diňe güýçlener. Şoňa görä

$$P(X > at^2) < \frac{a}{at^2} \quad \text{ýa-da} \quad P(X > at^2) < \frac{1}{t^2}.$$

Bizi bu waka ters bolan waka gyzyklandyrýar. Ol wakanyň ähtimallygyny $P(X \leq at^2)$ bilen belgiläp alarys:

$P(X > at^2) + P(X \leq at^2) = 1$ ýa-da
$P(X \leq at^2) = 1 - P(X > at^2)$ şeýle-de

$P(X > at^2) < \frac{1}{t^2}$, bolýanlygy sebäpli

$$P(X \leq at^2) > 1 - \frac{1}{t^2}. \tag{1}$$

Bu deňsizlik X-yň bahalarynyň arasynda at^2-dan uly bahalary bolmasa-da, öz manysyny saklaýar. (1) deňsizlige Markowyň deňsizligi diýilýär (A.A. Markow (1856–1922), beýik rus matematigi). Markowyň deňsizligi üznüksiz tötän ululyk üçin hem dogrudyr.

2. Çebyşewiň deňsizligi

Lemma. Eger X tötän ululygyň matematiki garaşmasy a bolsa we dispersiýasy $D(X)$ bolsa, onda islendik tötän ululyk üçin X-yň a matematiki garaşmadan gyşarmasynyň absolýut ululygy boýunça $\varepsilon > 0$ sandan uly däl bolmaklygynyň ähtimallygy

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

tapawutdan uludyr.

Subudy. Çebyşewiň deňsizligini almak üçin $(X - a)^2$ tötän ululyga Markowyň deňsizligini ulanmak bolar, sebäbi $(X - a)^2$ ululygyň bahalary otrisatel däldir, onuň matematiki garaşmasy $M(X - a)^2 = D(X)$ deňdir. (1) deňsizlige görä

$$P((X - a)^2 \leq D(X)t^2) > 1 - \frac{1}{t^2},$$

$$(X - a)^2 \leq D(X)\, t^2 \quad \text{ýa-da} \quad (X - a)^2 \leq \sigma^2 (X)\, t^2$$

deňsizlik

$$|X - a| \leq \sigma(X)t,$$

(bu ýerde $t > 1$) deňsizlige deňgüýçlüdir, şonuň üçin $(X-a)^2 \le \sigma^2(X)\, t^2$ deňsizligiň ähtimallygy şol bir wagtda $|X-a| \le \sigma(X)t$ deňsizligiň hem ähtimallygydyr, diýmek,

$$P(|X-a| \le \sigma(X)t) > 1 - \frac{1}{t^2} \tag{2}$$

$$\sigma(X)t = \varepsilon$$

hasap edip alarys:

$$\frac{1}{t^2} = \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Onda

$$P(|X-a| \le \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{3}$$

Mesele. Stanokda ýasalýan detallaryň 10 sanysy seljerilende olaryň görkezilen ölçeglere gabat gelmeýänleriniň sany X tötän ululygy düzýär. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasy $a = 1{,}28$, orta kwadratik gyşarmasy $\sigma(X) = 1$ bolsa, X-iň bahasynyň 4-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. X-yň bahasynyň dörtden uly bolmazlygy X-iň a matematiki garaşmadan gyşarmasynyň 2,72-den uly bolmazlygyny aňladýar:

$$|X - 1{,}28| \le 2{,}72.$$

$\varepsilon = 2{,}72$ hasap edip, Çebyşewiň deňsizligini ulanyp alarys:

$$P(|X - 1{,}28| \le 2{,}72) > 1 - \frac{1}{(2{,}72)^2} = 1 - 0{,}135 = 0{,}865.$$

Çebyşewiň deňsizligi ähtimallygyň diňe aşaky çägini kesgitleýär (ýokarky meselede ähtimallyk 0,865-den uludyr), ýöne bu ähtimallygy Çebyşewiň deňsizligi boýunça bilip bolmaýar.

Çebyşewiň deňsizligini islendik tötän ululyk üçin (onuň paýlanyşy nähili bolsa-da) ulanyp bolýar. Tötän ululygyň paýlanyşy dürli bolup biler, ýöne eger olaryň şol bir matematiki garaşmalary we şol bir dispersiýalary bolsa, Çebyşewiň deňsizligine görä ähtimallygyň üýtgemeginiň aşaky çägi şol bir san bolar.

3. Bernulliniň teoremasy

Çebyşewiň deňsizligini A wakanyň n bagly däl synagda ýüze çykmagynyň ýygylygy üçin ulanalyň. $\frac{m}{n}$ – ýygylyk kesgitli matematiki garaşmasy we dispersiýasy bolan tötän ululykdyr:

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p, \qquad D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}.$$

Bu bahalary Çebyşewiň deňsizligine girizip alarys:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

p, q, ε berlen položitel sanlardyr, onda $n \to +\infty \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$, ähtimallyk bolsa

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \to 1.$$

Teorema. Eger bagly däl synaglaryň sany tükeniksiz artýan bolsa, islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ deňsizligiň ähtimallygy bire ymtylýar.

Bernulliniň teoremasy bagly däl n synagda A wakanyň $\frac{m}{n}$ ýygylygynyň onuň p ähtimallygyna ýakynlaşmagyna san taýdan baha berýär. Bu baha $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ deňsizligiň ähtimallygy bilen kesgitlenýär. Eger A wakanyň ýüze çykmagynyň p ähtimallygy belli bolmasa, onda pq köpeltmek hasylynyň iň uly bahany alýan $p = \frac{1}{2}$ ýagdaýyna seretmek bolar. Bu ýagdaýda $pq = \frac{1}{4}$, onda

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Eger (4) formulada ε we n belli bolsa, synaglaryň berlen sanynda ýygylygyň ähtimallykdan gyşarmasynyň ε-dan uly bolmazlygynyň p

ähtimallygy tapylýar. Eger p we ε belli bolsa, onda synaglaryň n sany, eger n we p belli bolsa, onda ýygylygyň ähtimallykdan gyşarmasynyň çäkleri tapylýar.

4. Çebyşewiň teoremasy

Goý, X_1, X_2, ..., X_n tötän ululyklar we a_1, a_2,…a_n, degişlilikde, olaryň matematiki garaşmalary bolsun. Bu tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahasy:

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

tötän ululykdyr, onuň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}M(X_1 + X_2 + ... + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n}(MX_1 + MX_2 + ... + MX_n) = \frac{1}{n}(a_1, + a_2, + ... + a_n)$$

ýa-da

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Diýmek, n tötän ululygyň orta arifmetiginiň matematiki garaşmasy bu ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň orta arifmetigine deňdir. Hususy halda, hemme X_1, X_2, … X_n tötän ululyklaryň matematiki garaşmalary a deň bolsa, ýagny

$$M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = a,$$

onda

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = a.$$

Goý, X_1, X_2, … X_n ululyklar jübüt-jübütden bagly däl we olaryň dispersiýalary, degişlilikde, $D(X_1)$, $D(X_2)$, … $D(X_n)$ bolsun. Bu ululyklaryň orta arifmetiginiň dispersiýalaryny tapalyň:

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(DX_1 + DX_2 + ... + DX_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}{n}.$$

Diýmek, n sany jübüt-jübütden bagly däl bolan tötän ululyklaryň orta arifmetigininiň dispersiýasy olaryň dispersiýalarynyň orta arifmetigininiň $\frac{1}{4}$-e köpeltmek hasylyna deňdir.

Eger $X_1, X_2, \dots X_n$ ululyklaryň dispersiýalary deňölçegli çäklenen bolsa, ýagny şeýle C položitel san bar bolup,

$$\sigma^2(X_1) \le \mathbf{C}, \quad \sigma^2(X_2) \le C, \quad \sigma^2(X_n) \le C,$$

bolsa, onda dispersiýalaryň orta arifmetigi bu C sandan uly däldir:

$$\frac{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}{n} \le \frac{nC}{n} = C.$$

Emma tötän ululyklaryň orta arifmetigininiň dispersiýasy $\frac{C}{n}$-den uly däldir:

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \le \frac{n}{n^2} C = \frac{C}{n}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, $X_1, X_2, \dots X_n$ ululyklaryň her biriniň aýratynlykda degişli matematiki garaşmadan gyşarmalary çäkli, ýöne kiçi däldir, emma bu ululyklaryň orta arifmetigininiň matematiki garaşmanyň golaýyndaky dargawlygy has kiçidir (n näçe uly bolsa şonça-da kiçidir).

Çebyşewiň teoremasy. Eger $X_1, X_2, \dots X_n$ jübüt-jübütden bagly däl tötän ululyklar bolup, olaryň dispersiýalary şol bir hemişelik san bilen çäklenen bolsa, onda islendik $\varepsilon > 0$ san üçin

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n} \right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

deňsizligiň ähtimallygy n-iň artmagy bilen birlige ýakynlaşýar, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) \right| < \varepsilon \right\} = 1. \qquad (2)$$

Subudy. (1) deňsizlikde

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)$$

diýip belgiläp, ony aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon$$

ýa-da

$$|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon$$

$\overline{X}$ tötän ululyga Çebyşewiň deňsizligini ulanyp alarys:

$$p(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}.$$

Bu ýerde

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_n).$$

Dispersiýalaryň C hemişelik ululyklar bilen çäklenendigini göz öňünde tutup ($D(X_n) \leq C$) alarys: $D(\overline{X}) \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$

Diýmek, $P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$

Soňky deňsizlikde $n \to \infty$ predele geçip alarys:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1.$$

Ähtimallygyň birden uly bolup bilmeýänligi üçin

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) = 1$$

ýa-da

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Subut etmelimiz hem şudy.

5. Lýapunowyň teoremasy

Umumy görnüşde Çebyşewiň teoremasy bilen aňladylan uly sanlar kanunynyň teoretiki ähmiýeti örän uludyr.

Uly sanlar kanuny ätiýaçlandyryşyň dürli görnüşleriniň esasynda ýatýar. Ilat tarapyndan köpçülikleýin ulanylýan harytlaryň assortimenti meýilnamalaşdyrylanda olara bolan isleg göz öňüne tutulýar, şol islegde uly sanlar kanunynyň täsiri ýüze çykýar. Statistikada giňden ulanylýan saýlama usulynyň ylmy taýdan esaslandyrmasy uly sanlar kanunyna daýanýar.

Normal kanun boýunça paýlanan bagly däl tötän ululyklaryň tükenikli jeminiň normal kanun boýunça paýlanandygyny subut etmek kyn däldir. Eger-de bagly däl tötän ululyklar normal kanun boýunça paýlanmadyk bolsa, olara käbir şertleri goýup, olaryň jeminiň normal kanun boýunça paýlanan bolmagyny gazanmak baradaky meseläni ilkinji bolup rus alymlary P.L. Çebyşew we onuň okuwçylary A.A. Markow we A.M. Lýapunow dagy çözdüler.

Lýapunowyň teoremasy. Eger bagly däl $X_1, X_2, \dots X_n$ tötän ululyklaryň, degişlilikde, $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n$ we $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots \sigma_n^2$ deň bolan tükenikli matematiki garaşmalary we tükenikli dispersiýalary bar bolsa we

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

şert ýerine ýetýän bolsa, bu ýerde $c_1, c_2,\ \dots\ c_n$ – degişlilikde, X_1, X_2, …, X_n tötän ululyklaryň üçünji tertipli absolýut merkezi momentleri, onda tötän ululyklaryň jemi n-iň tükeniksiz artmagy bilen ýeterlik derejedäki takyklykda parametrleri

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

bolan normal kanun boýunça paýlanandyr. Bu formulirlenen teoremany subut etmek üçin bu kitabyň çäginde ulanylýan düşünjelerden has giň matematiki apparatdan peýdalanmaly bolýar. Şonuň üçin bu teoremany subutsyz kabul edeliň. Umuman aýdylanda, bu teorema Lýapunowyň teoremasy däl-de, onuň bir netijesidir, ýöne bu netije praktiki meseleler çözülende ulanmak üçin doly ýeterlikdir. Saýlama usulyny esaslandyrmak üçin Lýapunowyň teoremasyndan gelip çykýan ýene-de bir netijeden peýdalanylýar.

Teorema. Eger tötän ululyk bagly däl, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklaryň ýeterlik uly jemi görnüşinde berlen bolsa we ol tötän ululyklaryň üçünji tertipli absolýut merkezi momentleri bar bolsa, onda bu tötän ululyk normal kanun boýunça paýlanandyr.

Özüňi barlamak üçin soraglar

1. Nähili ululyga tötän ululyk diýilýär?
2. Diskret we üznüksiz tötän ululyklaryň kesgitlemesini beriň.
3. Diskret tötän ululyklaryň we üznüksiz tötän ululyklaryň mysallaryny getiriň.
4. Tötän ululygyň paýlanyş kanuny diýlip nämä aýdylýar?
5. Paýlanyş funksiýasy diýlip nähili funksiýa aýdylýar?
6. Paýlanyş funksiýasynyň häsýetlerini sanaň.
7. Paýlanyş funksiýasyny bilip, tötän ululygyň berlen aralyga düşmeginiň ähtimallygyny nähili tapmaly?
8. Diskret we üznüksiz tötän ululyklaryň paýlanyş funksiýalarynyň grafikleri näme bilen tapawutlanýarlar?
9. Dykyzlyk funksiýasy diýlip nähili funksiýa aýdylýar?
10. Dykyzlyk funksiýasynyň häsiýetlerini sanaň we olary subut ediň.
11. Dykyzlyk funksiýasyny bilip, tötän ululygyň berlen aralyga düşmeginiň ähtimallygyny nähili tapmaly?
12. Diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip nämä aýdylýar?
13. Matematiki garaşmanyň häsiýetleriniň sanawyny getiriň.
14. Tötän ululygyň modasy nähili kesgitlenýär?
15. Tötän ululygyň medianasy diýlip nämä aýdylýar?
16. Tötän ululygyň dispersiýasy nähili kesgitlenýär?
17. Dispersiýanyň häsiýetleriniň sanawyny getiriň.
18. Tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasy diýlip nämä aýdylýar?
19. Tötän ululygyň k-njy tertipli başlangyç momenti diýlip nämä aýdylýar?
20. Tötän ululygyň k-njy tertipli merkezi momenti diýlip nämä aýdylýar?
21. Binomial paýlanyşyň matematiki garaşmasy we dispersiýasy nämä deň?
22. Deňölçegli paýlanyş diýlip nähili paýlanyşa aýdylýar?
23. Deňölçegli paýlanyşyň dispersiýasy we matematiki garaşmasy nämä deň?
24. Görkezijili paýlanyş diýlip nähili paýlanyşa aýdylýar?
25. Görkezijili paýlanyşyň matematiki garaşmasy we dispersiýasy nämä deň?
26. Normal paýlanyş diýlip nähili paýlanyşa aýdylýar?
27. Normal paýlanyşyň parametrleri nämä deň?
28. Markowyň deňsizligi diýlip nähili deňsizlige aýdylýar?
29. Çebyşewiň deňsizligi diýlip nähili deňsizlige aýdylýar?
30. Bernulliniň teoremasy nähili formulirlenýär?
31. Çebyşewiň teoremasy nähili formulirlenýär?

Meseleler we gönükmeler

1. Eger her gezek ok atylanda nyşana degmegiň ähtimallygy 0,2 bolsa, bagly däl üç synagda nyşana degmegiň sanynyň paýlanyşynyň tablisasyny düzüň.

Çözülişi. X tötän ululyk nyşana degmegiň sany, ok atylýar, diýmek, $\overline{X}$ tötan ululyk aşakdaky bahalary kabul edip biler: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Synaglar bagly däl, her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,2. Diýmek,

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} (m = 0, 1, 2, 3), \qquad P(X_1 = 0) = 0,512,$$

$$P(X_2 = 1) = 0,384, \qquad P(X_3 = 2) = 0,096, \qquad P(X_4 = 3) = 0,008.$$

Şeýlelik bilen biz X tötän ululygyň paýlanyşynyň aşakdaky tablisasyny alarys:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Barlag: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,512 + 0,384 + 0,96 + 0,008 = 1.$

2. Käbir ýerde mart aýynyň 30%-i ýagyşly günler bolýar. Mart aýynyň bir hepdesiniň ýagyşly günleri bilen gabat gelýän X tötän ululygyň paýlanyşynyň tablisasyny düzmeli. Paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

Jogaby:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,0824	0,2472	0,3128	0,2263	0,0975	0,0250	0,0086	0,0002

3. Mallaryň sürüsinde A keseliň garşysyna sanjym geçirilýär. Sanjymyň netijesinde keseliň ýok edilmeginiň ähtimallygy 0,9. Bejergi işleri geçirilenden soň sürüden 4 mal saýlanyp alyndy. Alnan mallaryň arasynda sagdyn mallaryň sanynyň paýlanyşyny tapmaly. Paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

Jogaby:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

4. Bugdaý tohumynyň arasynda hapa-haşal otlaryň tohumy 10%. Tötänleýin 4 tohum alyndy. Alnan tohumlaryň arasynda hapa-haşal otlaryň tohumynyň sanynyň paýlanyşynyň tablisasyny düzmeli. Paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

Jogaby:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,650	0,090	0,184	0,061	0,015

5. Teňňe 5 gezek oklanýar. X tötän ululyk sanyň düşmeginiň sany bolsa, onuň paýlanyş kanunyny tapmaly.

Jogaby:

x	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

6. Elektron enjam 4 sany parallel işleýän bölümden ybarat. Bölümleriň her biriniň iş gününiň dowamynda hatardan çykmagynyň ähtimallygy hemişelik we 0,1 deň. Iş gününiň dowamynda hatardan çykan bölümleriň sanynyň paýlanyşyny tapmaly. Matematiki garaşmany, dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany hasaplamaly.

Jogaby: $M(X) = 0{,}4$, $D(X) = 0{,}36$, $\sigma(X) = 0{,}6$

7. X tötän ululyk aşakdaky paýlanyş tablisasy bilen berlen:

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ tapmaly.

Jogaby: $M(X) = 6{,}4$, $D(X) = 4{,}84$, $\sigma(X) = 2{,}2$.

8. Eger 100 sany lotereýa satyn alnan bolsa we olaryň her biriniň utmagynyň ähtimallygy 0,05 bolsa, utuş düşjek lotereýalaryň sanynyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, X utuş düşen lotereýalaryň sany bolsun. X tötän ululyk binomial kanun boýunça paýlanandyr, sebäbi seredilýän synaglar Bernulliniň shemasyna gabat gelýär. Onda

$$M(X) = np = 100 \cdot 0{,}05 = 5,$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 4{,}75.$$

9. Käbir ýerde aprel aýynda howanyň gije-gündiziň dowamyndaky ortaça temperaturasy aşakdaky kanun boýunça paýlanan:

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

$M(t)$ matematiki garaşmany tapyň.

Jogaby: $M(t) = 4$.

10. Fakultetde talyplaryň ýetişigi 90%. Tötänleýin 40 talyp alynýar. Alnan topara düşen talyplaryň arasynda sapaklaryna ýetişýän talyplaryň sanynyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapyň.

Jogaby: $M(X) = 36$, $D(X) = 3{,}6$.

11. Talyplaryň toparynda lotereýa oýny gurnalýar. Üç sany utuş bar, olaryň ikisiniň bahasy 20 manat, beýlekisiniň bahasy 30 manat. Bir manat töläp bir bilet alan talyp üçin arassa utuşyň jeminiň paýlanyşyny tapmaly. Jemi 50 sany bilet satyldy.

Çözülişi. Gözlenýän X tötän ululyk üç sany baha kabul edip biler: 1 manat (eger talyp utmasa, ol lotereýa üçin tölän bir manadyny ýitirýär), 19 manat; 29 manat (utyşyň möçberi bir manat kemelýär – bilediň bahasy). Tötän ululygyň birinji bahasyna 50 den 47 sany ýagdaý ýardam edýär, ikinji bahasyna iki, üçünji bahasyna bolsa bir ýagdaý ýardam edýär.

Şonuň üçin olaryň ähtimallyklary:

$$P(X=-1)=\frac{47}{50}=0{,}94, \qquad P(X=19)=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}=0{,}04,$$

$P(X=29)=\frac{1}{50}=0{,}02$. Onda tötän ululygyň paýlanyş kanuny aşakdaky ýaly bolar:

Utuşyň jemi	– 1	19	29
Ähtimallygy	0,94	0,04	0,02

12. Eger bir gezek ok atylanda nyşana degmegiň ähtimallygy 0,1 bolsa, dört gezek ok atylanda nyşana degmegiň sanynyň paýlanyşyny tapmaly.

Jogaby:

Nyşana degmegiň sany	0	1	2	3	4
Ähtimallyk	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

13. Aşakdaky paýlanyş kanuny bilen berlen X tötan ululygyň dispersiýasyny tapmaly:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Jogaby: $D(X) = 1{,}29$

14. Gapda 4 gara we 2 ak reňkli şar bar. Tötänleýin 4 şar alynýar. 1) Alnan 4 şaryň arasynda gara şarlaryň sanyna deň bolan X tötän ululygyň paýlanyş kanunyny tapmaly.

2) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde X tötän ululyk gipergeometrik kanun boýunça paýlanandyr:

$$P = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Bu kanuny tablisa görnüşinde ýazalyň:

X	2	3	4
$P(X=k) = \dfrac{C_4^k C_2^{4-k}}{C_N^m}$	$\dfrac{6}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

Bu ýerde

$$M(X) = \sum x_i p_i = 2 \cdot \frac{6}{15} + 3 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{8}{3},$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$M(X^2) = \sum x_i^2 P_i = 4 \cdot \frac{6}{15} + 9 \cdot \frac{8}{15} + 16 \cdot \frac{1}{15} = \frac{112}{15}.$$

$$D(x)=\frac{112}{15}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{16}{45},\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{16}{45}}=\frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

15. Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy berlen:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ eger\ x\leq -1, \\ \frac{1}{1}x+\frac{1}{4},\ eger\ -1\leq x\leq 3, \\ 1,\ eger\ x>3. \end{cases}$$

Synagyň netijesinde tötän ululygyň (0;2) aralyga degişli bahany almagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $P(0<X<2)=\frac{1}{2}$.

16. *X* tötän ululyk paýlanyş funksiýasy bilen berlen:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ eger\ x\leq 2, \\ \frac{1}{2}x,\ eger\ 2\leq x\leq 4, \\ 1,\ eger\ x>4. \end{cases}$$

Synagyň netijesinde *X* tötän ululygyň üçden kiçi baha almagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $p=0{,}5$.

17. *X* tötän ululyk dykyzlyk funksiýasy bilen berlen:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ eger\ x\leq 1, \\ ax,\ eger\ 1\leq x\leq 3, \\ 0,\ eger\ x>3. \end{cases}$$

1) *a* koeffisiýenti, 2) $M(X)$, 3) $D(X)$ tapmaly.

Jogaby: 1) $a=\frac{1}{4}$ 2) $M(X)=2{,}6$ 3) $D(X)=0{,}31$.

18. Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy berlen:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ eger\ x\leq 0, \\ \frac{1}{8}x^3,\ eger\ 0<x\leq 2, \\ 1,\ eger\ x>2. \end{cases}$$

Dykyzlyk funksiýasy üçin aňlatmany ýazmaly. $0 \leq X \leq 1$ deňsizligiň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, \textit{eger } 0 < x \leq 2, \\ 0, \textit{eger } x \leq 0, x > 2, \end{cases}$$

$$P(0 < X < 1) = 0{,}125.$$

19. Dänäniň agramy tötän ululyk bolup, ol normal kanun boýunça paýlanandyr. Dänäniň agramynyň matematiki garaşmasy 0,15 g, orta kwadratik gyşarmasy 0,03 g. Gögeriş almak üçin tohumyň agramy 0,10 g ýokary bolmaly. 1) gögeriş alyp boljak tohumlaryň göterimini kesgitlemeli; 2) her bir aýratyn alnan tohumyň agramynyň 0,99 ähtimallyk bilen näçe gramdan uly bolmajakdygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Tohumyň tötän agramyny X bilen belgiläliň. Meseläniň şertine görä $M(X) = a = 0{,}15$, $\sigma_x = 0{,}03$.

1) Talaba laýyk gögeriş berýän tohumlaryň göterimi tötänleýin alnan tohumyň gögerip çykmagynyň ähtimallygyna deňdir. Meseläniň şertine görä talaba laýyk gögeriş almak üçin tohumyň agramy 0,10 gramdan az bolmaly däldir. Diýmek, agramy $X > 0{,}10$ şerti kanagatlandyrýan tohumlaryň hemmesi gögeriş berýär. Bu wakanyň ähtimallygyny tapalyň. Onuň üçin aşakdaky formuladan peýdalanalyň:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma_x}\right)\right],$$

$$P(0,10 < X) = P(0,10 < X < \infty) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\infty - 0,15}{0,03}\right) - \Phi\left(\frac{0,10 - 0,15}{0,03}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{0,05}{0,03}\right)\right] = \frac{1}{2}[1 + 0,905] \approx 0,952..$$

Diýmek, 95% tohum talaba laýyk gögeriş berer.

2) Gözlenýän agramy β bilen belgiläliň. Ony $P(-\infty < x < \beta) = 0{,}99$ şertden kesgitläliň, ýokarda görkezilen formuladan peýdalanalyň:

$$P(-\infty < x < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - 0,15}{0,03}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 0,15}{0,03}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - 0,15}{0,03}\right) + 1\right] \approx 0,99,$$

$$\Phi\left(\frac{\beta - 0,15}{0,03}\right) = 2 \cdot 0,99 - 1 = 0,98.$$

$\Phi(x)$ funksiýanyň tablisasyndan funksiýanyň 0,98 bahasy üçin argumentiň bahasyny tapalyň, ol 2,33-e deň, onda $\frac{\beta - 0,15}{0,03} = 2,23,$ bu ýerden $\beta = 2,33 \cdot 0,03 + 0,15 = 0,22$.

Diýmek, tötänleýin alnan tohumyň agramy 0,99 ähtimallyk bilen 0,22 g köp däldir.

20. Bir ga ýere sepilýän tohumyň talaba laýyk agramy 150 kg. Iş ýüzünde bir ga ýere sepilýän tohumyň mukdary şol agrama golaý bolar, tötänleýin gyşarmanyň orta kwadratigi 10 kg bolsa: 1) 100 ga ýere sepiljek tohumyň möçberiniň 15,1 t. köp bolmazlygynyň ähtimallygyny; 2) 100 ga ýere 0,95 ähtimallyk bilen talaba laýyk ekiş geçirmek üçin gerek bolan tohumyň mukdaryny kesgitlemeli.

Jogaby: $P(X < 15,1) = 0,841$, $\beta = 15,16$ *t*.

21. Detalyň ölçeginiň standartdan gyşarmasy tötän ululyk bolup, ol normal kanun boýunça paýlanandyr. Onuň ölçeginiň 259 *mm* we 262 mm aralykda bolanlary talaba laýyk (standart) hasap edilýär.

1) Standart detalyň taýýarlanmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

2) ($\sigma_x = 1$ bolanda) talaba laýyk gelmeýän detallaryň göterimini tapmaly.

Jogaby: P ≈ 0,888, $P_{s.d} = 18\%$.

22. X tötän ululyk normal kanun boýunça paýlanan. Onuň matematiki garaşmasy $M(X) = 5$, dispersiýasy $D(X) = 0,64$. Synagyň netijesinde X tötän ululygyň bahasynyň (4; 7) aralyga düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $P = 0,8882$

23. Detalyň uzynlygynyň standartdan gyşarmasy tötän ululyk bolup, ol normal kanun boýunça paýlanandyr. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasy $a = m_x = 40$ *sm.*, orta kwadratik gyşarmasy $\sigma = 0{,}4$ *sm*. Detalyň uzynlygynyň standartdan gyşarmasynyň absolýut ululygy boýunça 0,6 *sm*-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi: Meseläni çözmek üçin

$$P(|X - m_x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan peýdalanalyň. Meseläniň berlenlerini goýup alarys:

$$P(|X - 40| < 0{,}6) = 2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

24. Zawodda taýýarlanylan detallaryň diametri tötän ululyk bolup, ol normal kanun boýunça paýlanan. Bu tötän ulylygyň matematiki garaşmasy $a = m_x = 2{,}5$ *sm*, orta kwadratik gyşarmasy $\sigma = 0{,}01$. Eger ähtimallygy 0,9973-e deň bolan wakany hökmany waka diýip hasap etsek, bu detalyň diametriniň haýsy çäklerde üýtgejekdigini ynamly aýdyp bolarmy?

Jogaby: (2,47;2,53)

25. Goý, käbir ösümligiň tohumynyň gögerijiligi 70% bolsun. Çebyşewiň deňsizligini ulanyp, 10000 sany ekilen tohumyň gögerip çykanlarynyň her tohumyň gögermeginiň ähtimallygyndan tapawudynyň absolýut ululygy boýunça 0,01-den uly däldigine baha bermeli.

Çözülişi. Wakanyň ýygylygy bagly däl *n* sany synag geçirilende tötän ululykdyr. Onuň matematiki garaşmasy, wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň *p* ähtimallygyna, dispersiýasy bolsa *pq/n* ululyga deňdir. Şoňa görä wakanyň ýygylygy üçin Çebyşewiň deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

$$P = 0{,}7, \quad q = 0{,}3, \quad n = 10000, \quad \varepsilon = 0{,}01,$$

$$P\left(\left|\frac{\mathrm{X}}{10000} - 0{,}7\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}01^2 \cdot 10000} = 0{,}79.$$

Diýmek, 10000 tohum ekilende gögerip çykan tohumlaryň sanynyň, her bir tohumyň gögermeginiň ähtimallygyndan gyşarmasy absolýut ululygy boýunça 0,79-dan kiçi däldir.

II bölüm
MATEMATIKI STATISTIKANYŇ ELEMENTLERI

I bap
SAÝLAMA USULYNYŇ ESASLARY, STATISTIKI PAÝLANYŞ

§1. Matematiki statistikanyň öwrenýän meseleleri. Baş toplum we saýlama

«Statistika» (latynça status-ýagdaý) sözi köpçülikleýin bolup durýan wakalar (hadysalar) barada san maglumatlaryny aňladýar. Birjynsly köpçülikleýin wakalaryň (hadysalaryň) käbir kanunalaýyklyklara (statistiki kanunalaýyklyklar) tabyn bolýandygyny adamlar ir wagtlardan bäri bilýärler. Şeýle kanunalaýyklyklaryň belli bolmagy her bir waka barada öňünden pikir ýöretmäge mümkinçilik bermeýär, ýöne birjynsly wakalaryň (hadysalaryň) toplumynyň özüni nähili alyp barjakdyklaryny ýeterlik takyklyk bilen öňünden görmek bolýar. Mysal üçin, bize belli bolan faktlaryň (kanunalaýyklyklaryň) birine ýüzleneliň: ortaça her doglan 1000 çaganyň 515 sanysy oglan we 485 sanysynyň gyz bolýandygy belli, ýöne belli bir maşgalada ogluň ýa-da gyzyň bolmagyny öňünden aýdyp bolmaýar. Şuňa meňzeş mysallary başga-da (durmuşdan, biologiýadan, medisinadan, tehnikadan, ykdysadyýetden we şm.) getirmek bolar.

Matematiki statistika synaglaryň (tejribeleriň) netijelerini işläp taýýarlamagyň has umumy usullary baradaky ylymdyr.

Matematiki statistikanyň häzirki usullaryny peýdalanmaklyk biologiýadan başlapdyr. XIX asyryň soňky çärýeginde iňlis biology K. Pirson matematiki statistikanyň düýbüni tutupdyr. Ol adam bedeniniň san häsiýetnamalaryny öwrenmekden başlapdyr. Soňra Pirsonyň mekdebinde çyzykly korrelýasiýany we regressiýany öwrenipdirler. Matematiki statistikanyň kömegi bilen öwrenilýän ykdysadyýetdäki özara baglanyşyklara we san kanunalaýyklyklaryna ekonometrika ylmy diýilýär.

Statistiki toplum diýlip birmeňzeş predmetleriň ýa-da wakalaryň köplügine aýdylýar. Bu topluma girýän elementlere onuň agzalary diýilýär. Topluma girýän agzalaryň umumy sanyna onuň göwrümi diýilýär.

Goý, berlen toplumyň käbir X hil nyşany öwrenilýär diýeliň (meselem, sygyrlaryň sürüsinde olaryň agramy ýa-da süýtdäki ýagyň mukdary). X hil nyşanynyň san bahasy toplumyň bir agzasyndan beýleki agzasyna geçende üýtgeýär. X-tötän ululykdyr. Bu ululyk barada maglumat almak üçin toplumyň agzalaryny tutuşlygyna (bütinleýin) derňemeli bolýar.

Dolulygyna derňewe sezewar edilýän topluma baş toplum diýilýär (*Bt*), ony düzýän agzalaryň sanyna (N) toplumyň göwrümi diýilýär. Ýöne toplumy tutuşlygyna derňemek köplenç kyn bolýar, şonuň üçin amaly ýetde saýlama usuly ulanylýar.

Saýlama toplumy (*st*) ýa-da ýöne saýlama diýlip baş toplumdan derňemek üçin bölünip aýrylan predmetleriň toplumyna aýdylýar. Saýlama girýän predmetleriň sanyna (n) saýlamanyň göwrümi diýilýär. Eger baş toplumyň her bir elementiniň saýlama girmegi üçin deň mümkinçilik döredilen bolsa, onda bu saýlama (reprezentatiw) wekilçilikli saýlama diýilýär.

Saýlamany düzmekligiň iki usuly ulanylýar, gaýtarylýan we gaýtarylmaýan saýlama. Gaýtarylýan saýlamada her bir saýlanyp alnan obýekt derňelenden soň baş topluma gaýtarylýar, soňra täze obýekt saýlanyp alynýar. Gaýtarylmaýan saýlamada alnan obýektler baş topluma gaýtarylmaýar. Gaýtarylýan usula baglanyşyksyz synaglar shemasy ýaly, gaýtarylmaýan usula bolsa baglanyşykly synaglar shemasy ýaly seretmek bolar. Saýlamany düzmegiň bu iki usuly hem birmeňzeş netijelere getirýär. Bulardan başga-da, saýlamany düzmekligiň ýönekeý (tötän), mehaniki, tipiki we seriýalaýyn görnüşleri tapawutlandyrylýar. Eger baş toplumyň her bir agzasyny belgiläp, olaryň belgilerini kartoçkalara geçirsek, soňra kartoçkalary gowy garyşdyryp, olardan bir toparyny alsak, onda alnan kartoçkalaryň belgileri ýönekeý (tötänleýin) saýlamany düzýär. Eger baş toplumyň obýektleri kesgitli aralyklarda saýlanyp alnan bolsa, onda ol saýlama mehaniki saýlama diýilýär. Meselem, ýumurtganyň hili derňelýän bolsa, onda konweýerden her bir 25-nji ýumurtga alynýar. Goý, baş toplum birnäçe kesişmeýän toparlara bölünen diýeliň. Her topardan tötänleýin obýektler alynýar, bu usula tipiki usul diýilýär. Meselem, hasyllylygy kesgitlemek üçin bütin meýdan böleklere bölünýär we her bölekde hasyllylyk kesgitlenýär. Seriýalaýyn saýlama almak üçin baş toplum kesişmeýän toparlara bölünýär. Soňra tötänleýin käbir toparlar saýlanyp alynýar. Şeýle usul bilen alnan saýlama seriýalaýyn saýlama diýilýär.

Statistiki toplumyň käbir X hil nyşanyna gözegçilik edeliň. Gözegçiligiň ilkinji netijeleri toplumyň agzalarynyň sany we hil nyşanynyň her agza degişli san bahasydyr. X hil nyşanynyň bahalaryny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilen belgiläliň we olara wariantalar diýip at bereliň.

Eger statistiki toplumyň içinde birmeňzeş san bahalary alyp bilýän birnäçe agzasy bolsa, şeýle agzalary toparlara ýygnaýarlar, soňra bolsa wariantalary artýan ýa-da kemelýän tertipde ýerleşdirýärler.Bu hatara köplenç hil nyşanynyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Iki ýa-da üç basgançakly tablisadan ybarat bolan bu hatara wariasion hatar hem diýilýär.

§2. Statistiki paýlanyş. Statistiki paýlanyşyň grafiki şekillendirilişi

Statistiki gözegçilikleriň esasynda alnan öwrenilýän X nyşanyň n bahasyndan (wariantalardan) ybarat bolan saýlama wariasion (üýtgeýän) hatar diýilýär. x_j ($j = 1, 2, ..., n$) bahalary artýan tertipde ýerleşdirilip ranžirlenen wariasion hatar alýarlar.

Öwrenilýän X nyşanyň diskret bolmagy mümkin. Diskret nyşanyň bahalary bir-birinden öňden belli bolan tükenikli ululyklarça (adamlaryň sany, doglan ýyly) tapawutlanýarlar.

Eger hatar üznüksiz bolsa, onda nyşanyň bahalary bir-birinden tükeniksiz kiçi ululyga tapawutlanýarlar (wagt, agram, harydyň bahasy).

Dikret X nyşanyň m ýygylygy diýlip, saýlama girýän X_i birmeňzeş wariantalaryň sanyna aýdylýar. Ranžirlenen wariasion hatarda birmeňzeş wariantalar yzly-yzyna ýerleşendir:

$$\underbrace{x_1, x_{1,\dots} x_1 \dots}_{m_1}\ \underbrace{x_i, x_{i,\dots} x_i \dots}_{m_i}\ \underbrace{x_k, x_{k,\dots} x_k \dots}_{m_k}.$$

X diskret nyşan üçin wariasion hatar tablisa görnüşinde berilýär, onuň birinji setirinde öwrenilýän nyşanyň x_i bahalary ikinji setirinde bu bahalara degişli m_i ýygylyklar ýerleşdirilýär. Şeýle tablisa statistiki paýlanyş diýilýär. Wariasion hatarda statistiki paýlanyşa geçilişine meselede düşüneliň. Statistiki gözegçiligiň netijesinde wariasion hatar alnan: 7, 17, 14, 17, 10, 7, 7, 14, 7, 14; waryantlary artýan tertipde ýerleşdirip ranžirlenen wariasion hatar alarys

$$\underbrace{7, 7, 7, 7,}_{m_1=4}\ \underbrace{10}_{m_2=1},\underbrace{14, 14, 14,}_{m_3=3}\underbrace{17, 17}_{m_4=2}.$$

Bu hatara degişli statistiki paýlanyşy tablisada görkezeliň ($k = 4$)

x_i	77	110	114	117
m_i	44	11	33	22

Üznüksiz X nyşan üçin statistiki paýlanyş interwal hatar bilen berilýär, onuň birinji setirinde öwrenilýän X nyşanyň bahalarynyň $x_{j-1}-x_j$ görnüşli aralyklary, ikinji setirde bu aralyklara degişli m_i ýygylyklar bilen berilýär. $x_{j-1}-x_j$ bellik tapawudy däl-de, X-nyşanyň x_{j-1}-den, x_j-e çenli hemme bahalaryny görkezýär, ýöne aralygyň x_j sag çägi oňa degişli däldir.

Üznüksiz hatar üçin m_i ýygylyk $x_j \in [x_{i-1}; x_i]$ aralyga düşen dürli x_j-leriň sanyny görkezýär.

Üznüksiz X nyşan üçin wariasion hatarlardan degişli statistiki paýlanyşa geçilişini meselede görkezeliň. Statistiki gözegçilikleriň esasynda alnan wariasion hatar berlen:

3,14; 1,41; 2,87; 3,62; 2,71; 3,95.

Ranžirlenen wariasion hatar:

x_j: 1,41; 2,71; 2,87; 3,14; 3,62; 3,95; ($j = 1, 2, \dots, 6$).

Bu hatarda degişli statistiki paýlanyş

x_i	1–2	2–3	3–4
m_i	1	2	3

Eger diskret hataryň dürli bahalarynyň sany ýeterlik uly bolsa, onda hasaplamalary aňsatlaşdyrmak üçin ony üznüksiz hatar görnüşinde ýazýarlar.

Wariasion hataryň ikinji setirinde m_i ýygylyklaryň ýerine

$$w_i = \frac{m_i}{n}$$

otnositel ýygylyklaryň görkezilmegi mümkin. Ýygylyklaryň jemi saýlamanyň n göwrümine deňdir, otnositel ýygylyklaryň jemi bire deňdir:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Statistiki paýlanyşyň aşakdaky dört görnüşde berilmegi mümkin:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

Ýygylyklaryň diskret hatary

$x_{i-1} - x_i$	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{k-1} - x_k$
m_i	m_1	m_2	...	m_k

Ýygylyklaryň üznüksiz hatary

x_i	x_1	x_2	...	x_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

Otnositel ýygylyklaryň diskret hatary

$x_{i-1} - x_i$	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{k-1} - x_k$
w_i	w_1	w_2	...	w_k

Otnositel ýygylyklaryň üznüksiz hatary

Eger statistiki paýlanyşda ýygylyklaryň ýerine (otnositel ýygylyklaryň ýerine) toplanan ýygylyklar (otnositel toplanan ýygylyklar) görkezilen bolsa, onda paýlanyşyň şeýle hataryna kumulýatiw paýlanyş diýilýär.

X nyşanyň bahalarynyň berlen x-dan kiçi bahalarynyň sanyna toplanan ýygylyk diýilýär: $H(x) = m(X < x)$, başgaça aýdaňda, ol saýlamadaky $x_j < x$ şerti kanagatlandyrýan wariantalaryň sanydyr.

Diskret hatardan kumulýatiw hatara geçmek, ýagny toplanan ýygylyklaryň diskret hataryna geçmek aşakdaky aňlatmalaryň kömegi bilen amala aşyrylýar:

$$H(x_1) = 0; \quad H(x_i) = m(X < x_i) = \sum_{l=1}^{i-1} m_1 .$$

Bu ýerde $i = 1,2,3, ..., k + 1$, şunlukda

$$H(x_{k+1}) = n;$$

ýa-da tablisa görnüşinde

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_k	x_{k+1}
$H(x_i)$	0	m_1	$m_1 + m_2$	...	$H(x_{i-1}) + m_{i-1}$	...	$H(x_{k-1}) + m_{k-1}$	$H_{x_k} + m_k = n$

Ýygylyklaryň aralyk hataryndan toplanan ýygylyklaryň aralyk kumulýatiw hataryna geçmek aşakdaky aňlatmalaryň kömegi bilen amala aşyrylýar:

$$H(x_0) = 0, \quad H(x_i) = m(X < x_i) = \sum_{l=1}^{i} m_l, \quad i = 1, 2, ... k, H(x_k) = n$$

ýa-da tablisa görnüşinde

$x_{i-1} - x_i$	$-\infty - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{i-1} - x_i$	...	$x_{k-1} - x_k$
$H(x_i)$	0	m_1	$m_1 + m_2$	...	$H(x_{i-1}) + m_i$	...	$H(x_{k-1}) + m_k = n$

Toplanan otnositel ýygylyk diýlip, X-nyşanyň x-yň berlen bahalaryndan kiçi bahalarynyň sanynyň saýlamanyň göwrümine bolan gatnaşygyna aýdylýar:

$$F^*(x) = \frac{H(x)}{n} = \frac{m(X < x)}{n}.$$

$X < x$ wakanyň $F(x) = P(X < x)$ ähtimallygyny aňladýan teoretiki paýlanyş funksiýasyna meňzeşlikde $X < x$ wakanyň otnositel ýygylygyny kesgitleýän

$$F^*(x) = \frac{m(X < x)}{n}$$

görnüşdäki paýlanyşyň empirik funksiýasyny girizýärler. Diýmek, paýlanyşyň empirik funksiýasy $F^*(x)$ toplanan otnositel ýygylyklaryň hatary bilen berilýär.

Bernulliniň teoremasyndan $F^*(x)$ empirik funksiýanyň ähtimallyk boýunça $F(x)$ funksiýa ymtylýandygyndan aşakdaky aňlatma gelip çykýar:

$$\lim_{n \to \infty} P(|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon) = 1, \quad (\varepsilon > 0).$$

Şonuň üçin empirik funksiýany baş toplumyň teoretiki funksiýasyna baha bermek üçin ulanmak bolar.

Toplanan otnositel ýygylyklaryň diskret hataryny iki sany deňhukukly usul bilen almak bolar:

1) otnositel ýygylyklaryň diskret hataryndan kumulýatiw hatara geçmek:

$$F^*(x_1) = 0, \qquad F^*(x_i) = \frac{m(X < x_i)}{n} = \sum_{\ell=1}^{i-1} w_\ell .$$

Bu ýerde $i = 1, 2, 3..., k + 1$, şunlukda $F^*(x_{k+1}) = 1$, ýa-da tablisa görnüşinde

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_k	x_{k+1}
$F^*(x_i)$	0	w_1	$w_1 + w_2$	...	$F^{\vee}_{(x_i-1)} + w_{i-1}$	...	$F^*(x_{k-1}) + w_{k-1}$	$F^*(x_k) + w_k = 1$

2) Toplanan ýygylyklaryň diskret hataryndan toplanan otnositel ýygylyklaryň diskret hataryna geçmek aşakdaky görnüşde amala aşyrylýar:

$$F^*(x_i) = \frac{H(x_i)}{n}, \quad \text{bu ýerde } i = 1, 2, ..., k.$$

Toplanan otnositel ýygylyklaryň aralyk hatary aşakdaky iki sany deňhukukly usul bilen alynýar:

1) Otnositel ýygylyklaryň aralyk hataryndan kumulýatiw hatara-toplanan otnositel ýygylyklaryň aralyk hataryna geçmek, aşakdaky aňlatmalaryň kömegi bilen amala aşyrylýar:

$$F^*(x_0) = 0; \qquad F^*(x_i) = \frac{m(X < x_i)}{n} = \sum_{i=1}^{k} w_i.$$

Bu ýerde $i = 1, 2, ..., k$, şunlukda

$$F^*(x_k) = 1$$

ýa-da tablisa görnüşinde

$x_{i-1} - x_i$	$-\infty - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{i-1} - x_i$	...	$x_{k-1} - x_k$
$F^*(x_i)$	0	w_1	$w_1 + w_2$	...	$F^*(x_{i-1}) + w_i$	...	$F^*(x_{k-i}) + w_k = 1$

2) Toplanan ýygylyklaryň aralyk hataryndan toplanan otnositel ýygylyklaryň aralyk hataryna geçmek, aşakdaky aňlatma bilen berilýär:

$$F^*(x_i) = \frac{H(x_i)}{n},$$

bu ýerde $i = 0, 1, 2, ..., k$.

Statistiki paýlanyşy grafiki şekillendirmek üçin aşakdakylardan peýdalanylýar:

– diskret hatar poligon görnüşinde şekillendirilýär. Ýygylyklaryň poligony döwük çyzyk bolup, onuň kesimleri koordinatalary (x_i, m_i) bolan nokatlary birleşdirýär; edil şuňa meňzeşlikde, otnositel ýygylyklaryň poligony döwük çyzyk bolup, onuň kesimleri koordinatalary (x_i, w_i) bolan nokatlary birleşdirýär.

– interwal hatar gistogramma (basgançak) görnüşinde şekillendirilýär. Ýygylyklaryň gistogrammasy gönüburçluklardan ybarat bolan basgançak şekilli figuradyr. Gönüburçluklaryň esaslary uzynlygy h_i bolan aralyklar, beýiklikleri bolsa ýygylyklaryň $\frac{m_i}{h_i}$ dykyzlygyna deň. Otnositel ýygylyklaryň gistogrammasyna seredilýän bolsa, gönüburçluklaryň beýiklikleri otnositel ýygylyklaryň dykyzlygyna deň:

$$\frac{w_i}{h_i} = \frac{m_i}{n \cdot h_i}.$$

Bu ýerde $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Köp meseleler çözülende h ululyk hemme aralyklar üçin deň hasap edilýär:

$$h_i = h = \frac{(x_k - x_0)}{k}, \qquad (i = 1, 2, ..., k).$$

Ýöne ranžirlelen wariasion hatar üçin

$$x_0 \leq x_{\min} = x_{(i)}; \quad x_k > x_{\max} = x_{(n)}.$$

Ýaý içinde ranžirlelen wariasion hataryň belgileri görkezilen. Gistogrammanyň meýdany gönüburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deňdir.

$S_ý$ – ýygylyklaryň gistogrammasynyň meýdany, $S_{otn.ý}$ – otnositel ýygylyklaryň gistogrammasynyň meýdany bolsa,

$$S_ý = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} h \cdot \frac{m_i}{h} = \sum_{i=1}^{k} m_i = n,$$

$$S_{\text{otn.ý}} = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} h \cdot \frac{m_i}{n \cdot h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i = 1.$$

Diýmek, ýygylyklaryň gistogrammasynyň meýdany saýlamanyň n göwrümine deň, otnositel ýygylyklaryň gistogrammasynyň $S_{otn.ý}$ meýdany bire deň. Ähtimallyklar teoriýasynda otnositel ýygylyklaryň gistogrammasyna paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň grafigi degişlidir. Şonuň üçin gistogrammany baş toplumyň paýlanyş kanunyny saýlap almak üçin peýdalanmak bolar.

Kumulýatiw hataryň grafigi kumuliýata görnüşinde berilýär. Ony gurmak üçin OX okunda wariantalar (nyşanyň bahalaryny) ýa-da aralyklary (interwallary), ordinata okunda bolsa toplanan $H(x)$ ýygylyklar ýa-da otnositel toplanan $F^*(x)$ ýygylyklar ýerleşdirilýär, soňra bolsa koordinatalary $(x_i; H_{(i)})$ ýa-da $(x_i; F^*(x_i))$ bolan nokatlar kesimler bilen birleşdirilýär.

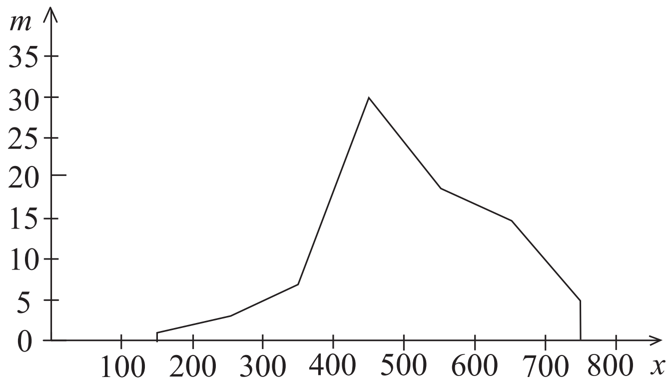
Ähtimallyklar teoriýasynda kumulýata paýlanyş funksiýasynyň grafigi degişlidir.

1-nji mesele. 80 sany kärhananyň işgärleriniň sany boýunça paýlanyşy berlen (adam):

x_i	150	250	350	450	550	650	750
m_i	1	3	7	30	19	15	5

Ýygylyklaryň paýlanyşynyň poligonyny gurmaly.

Çözülişi. X nyşan – kärhanada işleýän adamlaryň sany. Bu meselede X nyşan diskret ululykdyr. Nyşanyň dürli bahalarynyň sany köp däl – $K = 7$. Şonuň üçin interwal (aralyk) hatary gurmak amatly däl. Berlen diskret hatar üçin ýygylyklaryň paýlanyşynyň poligonyny guralyň (*38-nji surat*)



38-nji surat

2-nji mesele. Bir detaly işläp taýýarlamak üçin sarp edilýän wagty (min) boýunça 100 işçiniň paýlanyşy berlen:

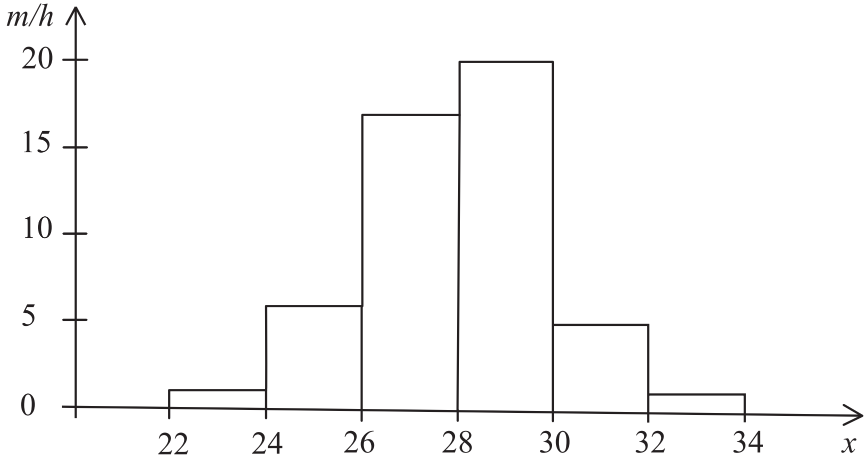
$x_{i-1} - x_i$	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34
m_i	2	12	34	40	10	2

Ýygylyklaryň paýlanyşynyň gistogrammasyny gurmaly.

Çözülişi. X nyşan bir detaly işläp taýýarlamak üçin sarp edilýän wagt (min). Üznüksiz statistiki paýlanyşyň ýygylyklarynyň gistogrammasyny guralyň (*39-njy surat*). Onuň üçin aşakdaky hasaplamalary geçireliň.

$$h = \frac{(x_k - x_0)}{k} = \frac{(34 - 22)}{6} = 2$$

$k = 6$, ýygylygyň dykyzlygy $\frac{m_i}{h}$



39-njy surat

$x_{i-1} - x_i$	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34
$\frac{m_i}{h}$	1	6	17	20	5	1

3-nji mesele. Birinji meselede berlen paýlanyş üçin toplanan ýygylyklary tapmaly we kumulýatany gurmaly.

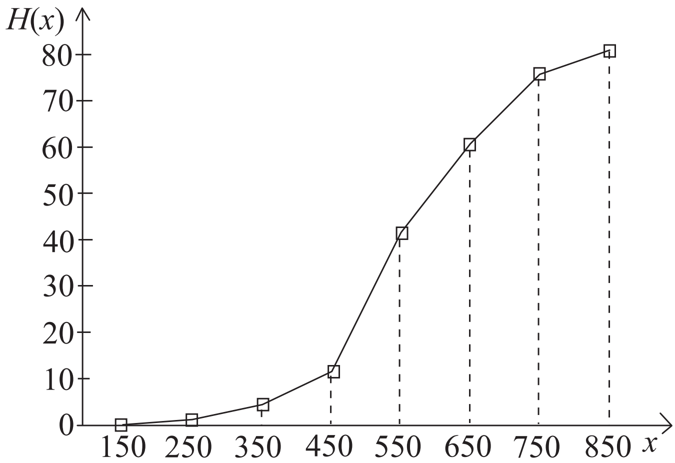
Çözülişi. Aşakdaky aňlatmadan peýdalanalyň:

$$H(x_1) = 0,\ \ H(x_i) = H(x_{i-1}) + m_{i-1}$$
$$i = 2, 3, ..., k + 1, k = 7$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	150	250	350	450	550	650	750	850
m_i	1	3	7	30	19	15	5	0
$H(x_i)$	0	0+1	1+3=4	4+7=11	11+30=41	41+19=60	60+15=75	75+5=80

Kärhanalaryň işgärleriniň sany boýunça paýlanyşynyň kumulýatasyny guralyň (*40-njy surat*).

4-nji mesele. Ikinji meselede berlen paýlanyş boýunça paýlanyşyň empirik funksiýasyny düzmeli we otnositel ýygylyklaryň kumulýatasyny gurmaly.



40-njy surat

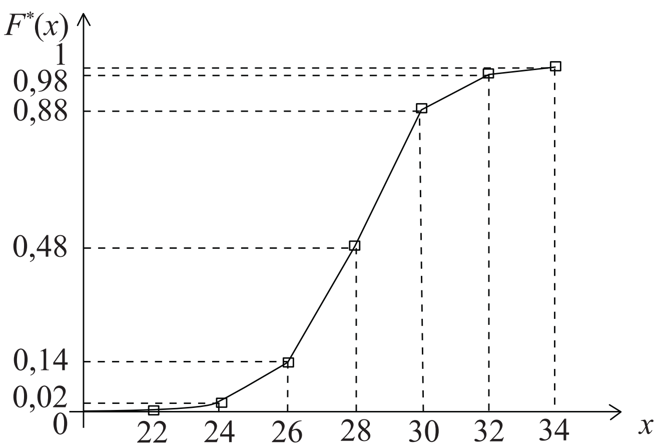
Çözülişi.

Aşakdaky aňlatmadan peýdalanalyň:

$$H(x_0) = 0, \quad H(x_i) = H(x_{i-1}) + m_i, \quad (i = 1, 2, ..., k, \quad k = 6)$$

$$F^*(x_i) = \frac{H(x_i)}{n} \quad (i = 0, 1, 2, ..., k; \quad n = \sum_{i=1}^{k} m_i = 100)$$

Barlagy: $F^*(x_k) = 1$.



41-nji surat

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_{i-1}-x_i$	$-\infty-22$	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34
m_i	0	2	12	34	40	10	2
$H(x_i)$	0	0+2=2	2+12=14	14+34=48	48+40=88	88+10=98	98+2=100
$F^*(x)$	0	0,02	0,14	0,48	0,88	0,98	1

$(x_i;\ F^*(x_i))$ nokatlary guralyň. Soňra olary kesimler bilen birleşdirip, paýlanyşyň kumulýatasyny alarys (*41-nji surat*).

§3. Statistiki paýlanyşyň saýlama san häsiýetlendirijileri

1. Ortaça ululyklar düşünjesi

Statistikada ortaça ululyklar wajyp orny eýeleýärler. Ol ar iň köp ulanylýan jemleýji ululyklar bolup, wakalara we hadysalara mahsus bolan kanunalaýyklyklary häsiýetlendirýärler.

Oba hojalygynda oba hojalyk önümleriniň öndürilişiniň ortaça derejesini, oba hojalyk kärhanalarynyň ortaça ululygyny, ekinleriň ortaça hasyllylygyny, mallaryň ortaça önümliligini we şuňa meňzeşleri bilmek gerek bolýar. Ortaça ululyklar öwrenilýän toplumda üýtgeýän (warirlenýän) nyşanyň tipiki ölçegini görkezýär, başgaça aýdylanda, öwrenilýän toplumdaky umumylygy açyp görkezýär. Meselem, bir sygyrdan alnan süýdüň mukdary sygyrlaryň toparynda dürli aralykda üýtgäp biler. Şunlukda, oňa täsir edýän sebäpler birinjiden, bütin topar üçin umumydyr (iýmitlendirilişiň derejesi, saklanýan şertleri we ş.m.) beýleki tarapdan, olaryň her biri üçin hususydyr. Hasaplanan ortaça sagym umumy faktorlaryň täsirini aňladýar, ýöne hususy faktorlaryň täsiri öz-özünden ýitip gidýär.

Ortaça ululyklar umumy göwrümiň (absolýut statistiki görkezijiniň) toplumyň birlik sanyna bolan gatnaşygy bilen hasaplanýar. Ýokardaky meselede bir sygyrdan alnan süýdüň ortaça mukdaryny topardan alnan umumy sagymyň sygyrlaryň sanyna bölünmeginden kesgitlenilýär. Ortaça ululyklar hasaplananda käbir talaplary göz öňüne tutmak zerurdyr. Ilki bilen, toplum hil taýdan birjynsly birliklerden ybarat bolmaly. Meselem, seredilen meselede sygyrlaryň topary dürli tohumly we dürli ýaşdaky sygyrlardan düzülen bolsa, onda sagymy häsiýetlendirmek üçin tohumlary we ýaşlary boýunça bölmeli, şeýle edilende mallaryň önümçiligine has obýektiw baha berler.

Umuman, islendik toplumda ortaçany hasaplamazdan öň hil düzümi boýunça birjynsly toparlary bölüp aýyrmaly.

Ortaça ululyklary ulanmak berlenleriň köpçülikleýin umumylaşdyrylmagyna esaslanan bolmaly. Göwrümi boýunça uly bolmadyk toplumlar üçin hususy häsiýetli sebäpler nyşanyň üýtgemegine umumy kanunalaýyklyklara garanda has güýçli täsir edýär. Tersine, köpçülikleýin hadysalarda umumy aýratynlyklar has görnükli bolup, birlik obýektleriň aýratynlyklary ýok bolup gidýär.

Statistikada ortaçalaşdyrylýan ululyklaryň görnüşine görä ortaça ululyklaryň dürli görnüşleri ulanylýar.

Derejeli ortaçalar diýlip aşakdaky formula boýunça hasaplanýan ortaçalara aýdylýar:

$$\bar{x} = \sqrt[m]{\frac{\sum x^m}{n}}.$$

Bu ýerde: $\bar{x}$ – derejeli ortaça;
x – wariantalar (nyşanyň bahalary);
n – wariantalryň sany;
m – ortaçanyň dereje görkezijisi.

Derejäniň görkezijisi ortaça ululygyň görnüşini kesgitleýär.

Eger, $m = 1$ bolsa, orta arifmetiki baha alynýar;
$m = -1$ bolsa, orta garmonik baha alynýar;
$m = 0$ bolsa, orta geometrik baha alynýar;
$m = 2$ bolsa, orta kwadratik baha alynýar.

Paýlanyşyň wariasion hataryň üsti bilen berilmegi doly görnüşde bolsa-da, örän çylşyrymly, aýratyn hem saýlama toplumy uly bolanda kynçylyk döredýär.

Köp ýagdaýlarda berlen toplum üçin ol toplumy geregi ýaly häsiýetlendirýän birnäçe sany görkezmek ýeterlik bolýar. Bu sanlara statistiki görkezijiler ýa-da paýlanyşyň san häsiýetlendirijileri diýilýär.

Bu häsiýetlendirijiler saýlama toplumy üçin hem, baş toplum üçin hem şol bir formulalar boýunça hasaplanýar.

Olara saýlamanyň ortaçasy, dispersiýa, orta kwadratik gyşarma, moda, mediana, wariasiýanyň gerimi, wariasiýanyň koeffisiýenti degişlidir. Olaryň arasynda iň wajyplary ortaçalar we dispersiýadyr.

2. Orta arifmetik

Goý, göwrümi n bolan saýlama X nyşanyň $x_1, x_2, ..., x_n$ wariantalary bilen berlen diýeliň. Eger wariantalaryň her biri bir gezek duş gelýän bolsa, onda X nyşanyň orta arifmetigi wariantalaryň jeminiň olaryň sanyna bölünmegine deňdir:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{1}$$

formula boýunça kesgitlenýän ortaça ýönekeý orta arifmetik diýilýär.

Eger-de wariantalaryň arasynda deň wariantalar bar bolsa, olary toparlara birleşdirýärler, şondan soň alnan hatarda sütünleriň sany dürli wariantalaryň sanyna deň bolýar.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	....	n_k

Onda kesgitlemä görä orta arifmetik, her wariantanyň onuň ýygylygyna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň toplumyň göwrümine (hemme ýygylyklaryň jemine) bölünmegine deňdir:

$$\overline{x_s} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i. \tag{2}$$

Mesele. Wariasion hatar bilen berlen saýlamanyň $\overline{x_s}$ orta arifmetigini (saýlamanyň ortaçasyny) tapmaly.

x_i	2	4	6
m_i	10	30	10

Çözülişi.

$$\overline{x_s} = \frac{1}{n}\sum x_i m_i = \frac{1}{50}(2 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 10) = 4.$$

Ýokarda görkezilen (2) formula boýunça hasaplanan saýlamanyň ortaçasyna ölçenen ortaça diýilýär. Ölçenen ortaça tötän ululygyň bellenişine we olara degişli wariantalaryň bellenişine bagly däldir. Meselem, beýleki bir U nyşan barlanýan bolsa, onuň bahalary u_1, u_2, ...u_k, ýygylyklary n_1, n_2, ..., n_k bolsa, onda ölçenen ortaça (2) formula meňzeş formula boýunça hasaplanýar:

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i n_i.$$

Goý, X nyşan üçin wariasion hatar berlen (diskret ýa-da üznüksiz) diýeliň. Şunlukda,wariantalar tapawudy h bolan arifmetiki progressiýany düzýär diýeliň, ýagny $h = x_{i+1} - x_i = const$ (h-ädim). X nyşana tötän näbelli ýaly seredeliň, bu näbellini täze näbelli bilen aşakdaky formula boýunça çalşalyň:

$$X = x_0 + hU \tag{3}$$

formulada x_0 – wariantalaryň islendik biri, U – täze tötän ululyk. (3) formula boýunça täze tötän ululyga geçmek koordinata başlangyjyny abssissasy x_0 bolan täze nokada parallel göçürmeklige deňgüýçlüdir.

(3) formuladan:

$$U = \frac{X - x_0}{h}$$

gelip çykýar, soňra U (u_1, u_2, ..., u_n) ululygyň san bahalary X (x_1, x_2, ..., x_n) ululygyň san bahalaryndan gelip çykýar we aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{h} \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Bu formula boýunça tapylan san bahalara şertli wariantalar diýilýär.

Orta arifmetiki baha şertli wariantalaryň üsti bilen aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\overline{x} = x_0 + h\overline{u}. \tag{4}$$

Bu formulada

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum n_i u_i$$

şertli wariantalaryň ölçenen ortaçasy.

(4) formulany onuň sag we çep taraplaryny deňeşdirip, subut etmek bolar.

$$x_0 + h\bar{u} = x_0 + h\frac{\sum n_i u_i}{n} = x_0 + h\frac{\sum n_i \frac{x_i - x_0}{h}}{n} =$$

$$= x_0 + \frac{\sum x_i n_i}{n} - x_0\frac{\sum n_i}{n} = x_0 + \bar{x} - x_0 = \bar{x},$$

$$\frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}, \qquad \frac{\sum n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Diýmek,

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{u}.$$

Mesele. Etrapda bugdaýyň hasyllylygy (*s/ga*) wariasion hatar bilen berlen, $h = 3$,

x_i – hasylylyk	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27
n_i ekin meýdany %-de	6	12	33	22	19	8

Etrap boýunça bugdaýyň ortaça hasyllylygyny $(\bar{x}_g)$ tapmaly.

Çözülişi. Aralyklaryň her birini onuň ortasy bilen çalşyp, x_0 – hökmünde iň uly ýygylygy bolan $x_0 = 16.5$ wariantany kabul edip, täze şertli wariantalardaky tablisany alarys:

x_i	n_i	$u_i = \frac{x_i - x_0}{h}$	$n_i \cdot u_i$
10,5	6	–2	–12
13,5	12	–1	–12
16,5	33	0	0
19,5	22	1	22
22,5	19	2	38
25,5	8	3	24
	$\sum n_i = 100$		$\sum n_i u_i = 60$

Bu ýerde

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = \frac{60}{100} = 0,6.$$

Onda

$$\overline{x_b} = x_0 + h\overline{u} = 16,5 + 3 \cdot 0,6 = 18,3 \quad s/ga.$$

Eger baş toplumyň X nyşanynyň x_1, x_2, ..., x_n hemme bahalary dürli bolsalar, onda

$$\overline{x_b} = a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}.$$

Goý, agzalan baş toplumdan tötänleýin bir obýekt alynýar diýeliň. Şol obýektiň x_1 bolmagynyň ähtimallygy $\frac{1}{N}$-e deňdir.

(N – toplumyň göwrümi). Edil şeýle ähtimallyk bilen islendik beýleki obýektiň alynmagy mümkin. Onda X nyşana paýlanyşa aşakdaky tötän ululyk ýaly seretmek bolar:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	...	$\frac{1}{N}$

Onda

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \frac{1}{N} + ... + x_n \frac{1}{N} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_x}{N} = a.$$

Diýmek, eger gözegçilik edilýän X nyşana tötän ululyk ýaly seretsek, onda baş ortaça bu nyşanyň matematiki garaşmasyna deňdir:

$$\overline{x_b} = M(X) = a.$$

3. Orta garmonik

Orta garmonik orta arifmetigiň ters ululygydyr:

$$\overline{x}_{\text{garm}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$$

ýa-da

$$\overline{x}_{\text{garm}} = \frac{\sum m}{\sum \frac{m}{x}}.$$

Eger jemlemäge degişli ululyklar wariantalaryň özi däl-de, olara ters bolan ululyklar bolsa, onda orta garmonik tapylýar.

4. Orta kwadratik

$$\bar{x}_{kw} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

ýa-da

$$\bar{x}_{kw} = \sqrt{\frac{\sum x^2 m}{\sum m}} = \sqrt{\frac{x_1^2 m_1 + x_2^2 m^2 + \ldots + x_n^2 m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}.$$

Eger wariantalaryň berlen ululyklary orta arifmetikden ýa-da normadan gyşarmany aňladýan bolsalar, onda diňe orta kwadratikden peýdalanylýar.

Mesele. Ölçegleriň netijesinde önümiň uzynlygynyň berlen normadan gyşarmalary kesgitlenen. Bu gyşarmalaryň orta ululygyny tapmaly.

Önümiň uzynlygynyň normadan gyşarmasy *mm x*	Önümleriň sany *m*	x^2	$x^2\ m$
–1,8	1	3,24	3,24
–0,8	3	0,64	1,92
0,2	4	0,04	0,16
1,2	1	1,44	1,44
2,2	1	4,84	4,84
jemi	10		11,60

Tablisanyň esasynda orta kwadratigi hasaplalyň:

$$\bar{x}_{kw} = \sqrt{\frac{\sum x^2 m}{\sum m}} = \sqrt{\frac{11,60}{10}} \approx 1,08.$$

Diýmek, önümiň uzynlygynyň berlen normadan gyşarmasynyň ortaçasy takmynan 1,08 *mm* deň.

5. Orta geometrik

$$\bar{x}_{gm} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Orta geometrik, esasan, dinamika öwrenilende, ýagny ortaça aýlyk koeffisiýentler hasaplananda, senagat önümçiliginiň ösüş depgini hasaplananda ulanylýar.

Mesele: Oba hojalyk kärhanasynda iri şahly mallaryň baş sanynyň bir ýyldaky ösüş depgini berlen:

Ýyllar	Baş sanynyň ösüş koeffisiýenti
1999	0,942
2000	1,021
2001	0,995
2002	1,084
2003	1,153

Iri şahly mallaryň baş sanynyň üýtgeýşiniň ortaça koeffisiýentini tapmaly.

Çözülişi. Mallaryň baş sanynyň umumy ösüşi ösüş koeffisiýentleriniň köpeltmek hasylyna deňdir. Şonuň üçin ösüşiň koeffisiýentiniň ortaçasyny kesgitlemekde orta geometrik ulanylýar:

$$\overline{x}_{gm} = \sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = \sqrt{0,942 \cdot 1,021 \cdot 0,995 \cdot 1,084 \cdot 1,153} = 1,036.$$

Diýmek, bäş ýylda mallaryň baş sanynyň ortaça ösüşi 1,036 deň, başgaça aýdylanda, mallaryň baş sany her ýylda 1,036 esse ýa-da 3,6% köpelipdir.

6. Moda we mediana

Ýokarda getirilen ortaça ululyklar topluma haýsydyr bir nyşan boýunça umumylaşdyrylan häsiýetnama berýärler. Olar düzüm häsiýetlendirijileri diýlip atlandyrylýan ortaçalar bilen doldurylýar, olara moda, mediana, kwartiller, desiller we başgalar degişlidir. Bu görkezijileriň arasynda moda we mediana has köp peýdalanylýar.

Moda – nyşanyň toplumda has köp duş gelýän bahasydyr. Bu görkeziji ol ýa-da başga nyşanyň tipiki ululygyny häsiýetlendirmek üçin ulanylýar (meselem, iri şahly mallaryň fermasynyň iň köp ýaýran ölçegi, oba hojalyk önümleriniň köp gabat gelýän bahasy we ş.m).

Mediana – tertipleşdirilen (artýan ýa-da kemelýän tertipde) wariasion hatary san taýdan iki deň bölege bölýän ululykdyr. Meselem, eger bir aýyň dowamynda sygyrdan alnan süýdüň median bahasy 3,5 *s* bolsa, onda sygyrlaryň ýarysy 3,5 *s*-den az süýt berýär, beýleki ýarysy bolsa 3,5 *s*-den köp süýt berýär.

Diskret wariasion hatarda moda diýlip iň uly ýygylygy bolan wariants aýdylýar.

Aralyk (interwal) hatar üçin modany aşakdaky formula boýunça kesgitleýärler:

$$M_0 = X_{M_0} + h_{M_0} \frac{f_{M_0} - f_{M_{0-1}}}{2f_{M_0} - f_{M_{0-1}} - f_{M_{0+1}}}.$$

Bu ýerde M_0 – moda, X_{M_0} – modal aralygyň aşaky çägi; h_{M_0} – modal aralygyň ululygy; f_{M_0} – modal aralygyň ýygylygy; $f_{M_{0-1}}$ – modal aralygyň öň ýanyndaky aralygyň ýygylygy; $f_{M_{0+1}}$ – modal aralykdan soňky aralygyň ýygylygy. Modal aralyk diýlip iň uly ýygylygy bolan aralyga aýdylýar.

Aralyk hatar üçin mediana aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$M_e = X_{Me} + h_{Me} \frac{\sum f/2 - S_{Me-1}}{f_{Me}}.$$

Bu ýerde: M_e – mediana;
X_{Me} – median aralygyň aşaky çägi;
h_{Me} – median aralygyň ululygy;
$\sum f$ – ýygylyklaryň jemi;
S_{Me-1} – median aralykdan öňki aralykda toplanan ýygylyklaryň jemi;
f_{Me} – median aralygyň ýygylygy.

Median aralyk diýlip, toplanan ýygylyklaryň jemi ýygylyklaryň ýarysyna deň ýa-da ýygylyklaryň ýarysyndan uly bolmadyk aralyga aýdylýar.

§4. Saýlama toplumyň dispersiýasy we onuň häsiýetleri

Baş toplumda ýa-da saýlama toplumda X nyşanyň paýlanyşyny diňe ortaçanyň bahasynyň belli bolmagy bilen häsiýetlendirip bolmaýar. Ortaça görä X nyşanyň san bahalarynyň nähili dargaw ýerleşendiklerini bilmek gerek bolýar. Bu dargawlygy häsiýetlendirýän ululyklara dargawlygyň häsiýetlendirijileri diýilýär.

Dargawlyga iň takmyny baha bermekligi wariasiýanyň geriminiň üsti bilen amala aşyrmak mümkin:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Bu ýerde $x_{\max}$ we $x_{\min}$ san bahalar X nyşanyň iň uly we iň kiçi bahalarydyr. Bu häsiýetnama ol ýa-da beýleki wariantalaryň nähili ýygylykda duş gelýänligini görkezmeýär. Şonuň üçin ol dargawlygy häsiýetlendirmek üçin ýeterlik bolmaýar. Ýöne paýlanyşyň gerimi diýlip at berilýän R ululyk wariasiýa takmynan baha bermek üçin senagatyň käbir pudaklarynda önümiň hilini statistiki usullar bilen öwrenmekde ulanylýar.

Dargawlyga teoretiki we amaly taýdan baha bermek üçin iň amatly häsiýetlendiriji dispersiýadyr. Saýlama toplumyň we baş toplumyň dispersiýalary aşakdaky formulalar bilen kesgitlenýär:

$$D_S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_s})^2 \cdot n_i. \qquad (1)$$

$$D_b = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_b})^2 N_i.$$

Köplenç dispersiýany

$$D_S = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \quad (\overline{x} = \overline{x_S}) \qquad (2)$$

formula boýunça hasaplamak amatly bolýar.

(2) formula ýönekeý özgertmeleriň kömegi bilen (1) formuladan alynýar:

$$D_S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i - 2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i n_i}{n} + (\overline{x})^2\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i}{n};$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \overline{x}, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n}.$$

Bu ýerden $D_S = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

Eger X nyşan üçin wariasion hataryň wariantalary deň daşlaşan bolsalar hem-de wariantalaryň özi we ýygylyklary uly sanlar bolsa, onda täze U näbellä geçmek amatlydyr. Ol geçiş öň belleýşimiz ýaly, aşakdaky formula boýunça amala aşyrylýar:

$$X = x_0 + hU,$$

onda

$$D_S(X) = D(x_0 + hU) = D(x_0) + h^2 D(U),$$

ýöne

$$D(x_0) = 0, \qquad D(U) = \overline{u^2} - (\overline{u})^2.$$

Diýmek,

$$D_S(X) = h^2[\overline{u^2} - (\overline{u})^2]. \tag{3}$$

(2) formulany ulanyp, dispersiýany hasaplamaklyga degişli meselä seredeliň.

Goý, baş toplumyň ýa-da saýlama toplumyň X nyşanynyň hemme bahalary k topara bölünen diýeliň. Her topara özbaşdak toplum ýaly seredeliň. Onda toparyň ortaçasyny we toparyň ortaçasyna görä toparlaýyn dispersiýany tapmak bolar.

Toparlaýyn dispersiýa diýlip, toparlaýyn ortaça görä nyşanyň topara degişli bahalarynyň dispersiýasyna aýdylýar:

$$D_{j\text{top}} = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_j)^2}{N_j}.$$

Bu ýerde: $n_i - x_i$ bahanyň ýygylygy;

j – toparyň belgisi;

$\overline{x}_j$ – j-nji toparyň toparlaýyn ortaçasy;

$N_j = \sum n_j$ – j-nji toparyň göwrümi.

1-nji mesele. Aşakdaky iki topardan ybarat bolan toplumyň toparlaýyn dispersiýasyny tapmaly.

Birinji topar

x_i	5	4	2
n_i	2	7	1

Ikinji topar

x_i	8	3
n_i	3	2

$$N_1 = \sum n_i = 10, \quad N_2 = \sum n_i = 5.$$

Çözülişi. Toparlaýyn ortaçalary tapalyň:

$$\overline{x_1} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{\sum n_i} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 1 \cdot 2}{10} = 4,$$

$$\overline{x_2} = \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 3}{5} = 6.$$

Toparlaýyn dispersiýalary tapalyň:

$$D_{1\text{top}} = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_i})^2}{N} = \frac{2 \cdot (5-4)^2 + 7(4-4)^2 + 1 \cdot (2-4)^2}{10} = 0{,}6,$$

$$D_{2\text{top}} = \frac{3 \cdot (8-6)^2 + 2 \cdot (3-6)^2}{5} = 6.$$

Her toparyň dispersiýasyny bilip, olaryň orta arifmetigini tapmak bolar.

Topariçi dispersiýa diýlip, toparlaýyn dispersiýalaryň ortaçasyna aýdylýar:

$$D_{\text{topiç}} = \frac{\sum N_j \cdot D_{j\text{top}}}{n}.$$

Bu ýerde $N_j - j$-nji toparyň göwrümi,

$$n = \sum_{j=1}^{k} N_j$$

bütin toplumyň göwrümi.

2-nji mesele. Birinji meseläniň berlenleri boýunça topariçi dispersiýany tapmaly.

Çözülişi. Gözlenýän dispersiýa şu formula boýunça kesgitlenýär:

$$D_{\text{topiç}}=\frac{N_1\cdot D_{1\text{top}}+N_2\cdot D_{2\text{top}}}{n}=\frac{10\cdot 0,6+5\cdot 6}{15}=\frac{12}{5}.$$

Toparlaýyn we umumy ortaçalary bilip, toparlaýyn ortaçalaryň dispersiýasyny umumy ortaça görä tapmak bolar.

Toparara dispersiýa diýlip, umumy ortaça görä, toparlaýyn ortaçalaryň dispersiýasyna aýdylýar:

$$D_{\text{toparara}}=\frac{\sum_{J=1}^{K}N_j\cdot(\overline{x_j}-\overline{x})^2}{n}.\ D_{\text{toparara}}=\frac{\sum_{J=1}^{K}N_j\cdot(\overline{x_j}-\overline{x})^2}{n}.$$

Bu ýerde: $\overline{x_j}$ – j-nji toparyň ortaçasy;

N_j – j-nji toparyň göwrümi;

$\overline{x}$ – umumy ortaça;

$n=\sum_{j=1}^{k}N_j$ – ähli toplumyň göwrümi.

3-nji mesele. 1-nji meseläniň berlenleri boýunça toparara dispersiýany tapmaly.

Çözülişi. Umumy ortaçany tapalyň:

$$\overline{x}=\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}=\frac{1\cdot 2+7\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 8}{15}=\frac{14}{3}.$$

Ýokarda tapylan $\overline{x_1}=4$, $\overline{x_2}=6$ toparlaýyn ortaçalary peýdalanyp toparara dispersiýany taparys:

$$D_{\text{toparara}}=\frac{N_1(\overline{x_1}-\overline{x})^2+N_2(\overline{x_2}-\overline{x})^2}{n}=\frac{10\cdot\left(4-\frac{14}{3}\right)^2+5\cdot\left(6-\frac{14}{3}\right)^2}{15}=\frac{8}{9}.$$

Ähli toplumyň dispersiýasyny kesgitläliň. Umumy dispersiýa diýlip, umumy ortaça görä bütin toplumyň dispersiýasyna aýdylýar:

$$D_{\text{umumy}}=\frac{\sum n_i(x_i-\overline{x})^2}{n}.$$

4-nji mesele. 1-nji meseledäki berlenler boýunça umumy dispersiýany tapmaly.

Çözülişi. Umumy ortaçanyň $\frac{14}{3}$-e deňdigini bilip, gözlenýän umumy dispersiýany tapalyň.

$$D_{\text{umumy}} = \frac{2\cdot\left(5-\frac{14}{3}\right)^2 + 7\cdot\left(4-\frac{14}{3}\right)^2 + 1\cdot\left(2-\frac{14}{3}\right)^2}{15} +$$

$$+\frac{3\cdot\left(8-\frac{14}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(3-\frac{14}{3}\right)^2}{15} = \frac{148}{45}.$$

Bellik. Tapylan umumy dispersiýa toparara dispersiýa bilen topariçi dispersiýalaryň jemine deňdir:

$$D_{\text{umumy}} = \frac{148}{45}, \qquad D_{\text{toparara}} + D_{\text{toparici}} = \frac{12}{5} + \frac{8}{9} = \frac{148}{45}.$$

Diýmek,

$$D_{\text{umumy}} = D_{\text{toparara}} + D_{\text{topariçi}}.$$

§5. Saýlama toplumyň jemleýji häsiýetlendirijilerini hasaplamagyň usullary

1. Başlangyç we şertli momentler. Empirik momentler

Saýlamanyň jemleýji häsiýetlendirijilerini kesgitlemek üçin, köplenç degişli teoretiki momentlere meňzeş kesgitlenýän empirik momentlerden peýdalanylýar. Teoretiki momentlerden tapawutlylykda empirik momentler gözegçilikleriň esasynda kesgitlenýär.

Adaty k-njy tertipli empirik moment diýlip, $x_i - c$ tapawudyň k-njy derejesiniň orta bahasyna aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenilýär:

$$M_k' = \frac{\sum n_i (x_i - c)^k}{n}.$$

Bu ýerde: x_i – gözegçilik edilýän warianta;
n_i – wariantanyň ýygylygy;
$n = \sum n_i$ – saýlamanyň göwrümi;
c – hemişelik san (ýalan nol).

Başlangyç k-njy tertipli empirik moment diýlip, $c = 0$ bolanda k-njy tertipli adaty momente aýdylýar we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$M_K = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

Hususy halda, $k = 1$ bolanda

$$M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \overline{x_s}.$$

Diýmek, birinji tertipli başlangyç empirik moment saýlamanyň ortaçasyna deňdir.

k-njy tertipli merkezi empirik moment diýlip, $c = \overline{x_s}$ bolandaky adaty momente aýdylýar we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_s})^k}{n}.$$

Hususy halda,

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_s})^2}{n} = D.$$

Diýmek, 2-nji tertipli merkezi empirik moment saýlamanyň dispersiýasyna deňdir.

Merkezi momentleri adaty momentleriň üsti bilen aşakdaky ýaly aňlatmak bolar:

$$m_2 = M_2' - (M_1')^2,$$

$$m_3 = M_3' - 3M_2'M_1' + 2(M_1')^3,$$

$$m_4 = M_4' - 4M_3'M_1' + 6M_2'(M_1')^2 - 3(M_1')^4.$$

Merkezi momentleri tapmaklyk uly hasaplamalary talap edýär. Başlangyç wariantalaryň şertli wariantalar bilen çalşyrylmagy hasaplamalary ýönekeýleşdirýär.

k-njy tertipli şertli empirik moment diýlip, şertli wariantalar üçin hasaplanan k-njy tertipli başlangyç momente aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - c}{h}\right)^k}{n}.$$

Hususy halda,

$$M_1^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - c}{h}\right)}{n} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - c\frac{\sum n_i}{n}\right] = \frac{1}{h}(\overline{x_s} - c).$$

Bu ýerden

$$\overline{x_s} = M_1^* h + c. \tag{1}$$

Diýmek, saýlamanyň ortaçasyny tapmak üçin birinji tertipli şertli momenti hasaplap, h-a köpeldip, netijä c ýalan noly goşmak ýeterlikdir. Adaty momentleri şertli momentleriň üsti bilen aňladalyň

$$M_k^* = \frac{1}{h^k}\frac{\sum n_i (x_i - c)^k}{n} = \frac{M_k'}{h^k}.$$

Bu ýerden $M_k' = M_k^* h^k$.

Diýmek, k-njy tertipli adaty momenti tapmak üçin şol tertipli şertli momenti h^k köpeltmek ýeterlikdir.

Merkezi momentleri şertli momentleriň üsti bilen aňladyp, hasaplamalar üçin amatly aşakdaky formulalary alarys:

$$m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2,$$

$$m_3 = [M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2[M_1^*]^3]h^3,$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^* (M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4]h^4.$$

Şertli momentleriň üsti bilen saýlamanyň dispersiýasyny hasaplamak üçin aşakdaky formuladan peýdalanylýar:

$$D_s = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

2. Saýlama toplumyň ortaçasyny we dispersiýasyny hasaplamak üçin köpeltmek hasyllary usuly

Bir-birinden deň uzaklykda duran wariantalar üçin köpeltmek hasyllary usulyny ulanyp, dürli tertipli şertli momentleri hasaplamak amatly bolýar. Şertli momentleri bilip, bizi gyzyklandyrýan başlangyç we merkezi empirik momentleri tapmak bolar. Hususan-da, köpeltmek hasyllary usulyny ulanyp, saýlamanyň ortaçasyny we dispersiýasyny hasaplaýarlar. Onuň üçin aşakdaky ýaly düzülýän tablisadan peýdalanylýar:

Birinji sütünde artýan tertipde berlen wariantalary ýazýarlar.

Ikinji sütünde wariantalaryň ýygylyklaryny ýazýarlar, hemme ýygylyklary goşup, olaryň jemini sütüniň iň soňky gözenegine ýazýarlar.

Üçünji sütüne $U_i = (x_i - c)/h$ şertli wariantalary ýazýarlar, ýalan nol diýlip, iň uly ýygylygy bolan warianta kabul edilýär.

Ýalan noly saklaýan gözenege o ýazylýar, noldan ýokarlygyna yzygiderli –1, –2, –3, ..., noldan aşaklygyna 1, 2, 3, … sanlar ýazylýar.

Ýygylyklary şertli wariantalara köpeldip, dördünji sütüne ýazýarlar, olaryň $\sum n_i u_i$ jemini bolsa iň aşaky gözenege ýerleşdirýärler.

Ýygylyklary şertli wariantalaryň kwadratlaryna köpeldip, bäşinji sütüne ýazýarlar. Olaryň $\sum n_i u_i^2$ jemini iň aşaky gözenege ýerleşdirýärler.

Ýygylyklary şertli wariantalaryň bir birlik ulaldylan jeminiň kwadratyna köpeldip, altynjy (barlag) sütüne ýazýarlar, $\sum n_i (u_i + 1)^2$ jemi iň soňky gözenege ýerleşdirýärler.

Eger $\sum n_i (u_i + 1)^2$ jem $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$ jeme deň bolsa, onda bu hasaplamalaryň dogry geçirilendigini aňladýar.

3. Saýlama toplumyň asimmetriýasy we ekssesi

Normal kanundan başga paýlanyş kanunlary öwrenilende olary san taýdan deňeşdirmek gerek bolýar. Şeýle maksat bilen ýörite häsiýetnamalar girizilýär, olara asimmetriýa we eksses degişlidir. Normal paýlanyş kanuny üçin bu häsiýetnamalar nola deňdir. Eger öwrenilýän paýlanyş üçin asimmetriýa we eksses uly bahalara eýe bolmaýan bolsa, onda bu paýlanyşyň normal paýlanyşa ýakyn paýlanyşdygyny görkezýär, eger tersine bolsa, bu paýlanyş normal paýlanyşdan uly tapawut berýär.

Eger berlen paýlanyş simmetrik paýlanyş bolsa, (onda bu paýlanyşyň grafigi $x = M(X)$ gönä simmetrikdir) her bir täk tertipli merkezi moment nola deňdir. Simmetrik däl paýlanyşlar üçin täk tertipli merkezi momentler noldan tapawutlydyrlar. Şonuň üçin bu momentleriň her birini asimmetriýany bahalamak üçin ulanmak bolar. Meselem, m_3 momenti alalyň. Ýöne bu momenti asimmetriýa baha bermek üçin almak amatly däl, sebäbi ol tötän ululygyň ölçenýän ölçegine bagly. Bu näsazlygy aradan aýyrmak üçin ony σ^3 bölýärler we ölçegsiz häsiýetnama alýarlar.

Empirik paýlanyşyň asimmetriýasy

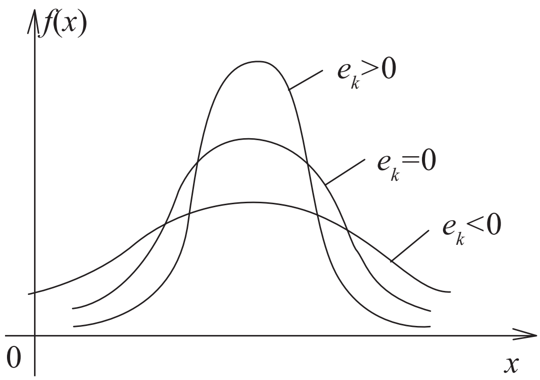
$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3}$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Bu ýerde m_3 – üçünji tertipli empirik merkezi moment, σ_s – saýlamanyň orta kwadratik gyşarmasy,

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3.$$

Eger egriniň «uzyn bölegi» matematiki garaşmadan sagda ýerleşen bolsa, onda asimmetriýa položiteldir, eger tersine bolsa, asimmetriýa otrisateldir. Amaly meseleler çözülende egriniň moda görä nähili ýerleşendigine seredip paýlanyşa baha berýärler.

«Kötelligi» kesgitlemek (bahalamak) üçin eksses diýlip atlandyrylýan häsiýetlendirijiden peýdalanýarlar. Ol e_k görnüşde belgilenýär we aşakdaky ýaly kesgitlenýär:



42-nji surat

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_4} - 3.$$

Ýokarda belleýşimiz ýaly, eger eksses noldan tapawutly bolsa, onda bu paýlanyşyň egrisi normal egriden tapawutlanýar.

Eger eksses položitel bolsa, onda egriniň (normal egrä garanda) has beýik we ýiti depesi bardyr, eger eksses otrisatel bolsa, onda deňeşdirilýän egriniň depesi normal egrä garaňda pesräkdir (ýalpagrakdyr) (*42-nji surat*).

§6. Paýlanyşyň parametrlerine statistiki baha bermek

1. Baha bermekden edilýän talaplar

Baş toplum öwrenilende bizi, birinji nobatda, X hil nyşanynyň paýlanyş kanuny we ol kanunyň parametrleri gyzyklandyrýar.

Öwrenilýän hil nyşanynyň paýlanyş kanunyny bilmek ol nyşan barada bize gymmatly maglumatlary berýär hem-de onuň san bahalarynyň üýtgeýşini öňünden bilmeklige mümkinçilik döredýär. Ýöne eger paýlanyş kanunynyň parametrleri belli bolmasa, onda hemme maglumatlar diňe hil görkezijilerdir. Şu sebäplere görä bu parametrleriň, iň bolmanda ýakynlaşan bahalamalaryny bilmek meselesi ýüze çykýar (şunlukda baş toplumda X hil nyşanynyň paýlanyş kanuny belli hasap edilýär).

Paýlanyşyň parametrleri – tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasynyň ýa-da paýlanyş funksiýasynyň formulasyna girýän sanlardyr. Käbir köp duş gelýän paýlanyşlara we olaryň parametrlerine seredeliň.

Paýlanyş kanuny	**$f(x)$, $F(x)$**	**parametrler**	**parametrleriň sany**
1	**2**	**3**	**4**
1. Deňölçegli	$f(x) = \begin{cases} 0, & eger \ \ x \le a, \\ \frac{1}{b-a}, & eger \ \ a < x < b. \end{cases}$	a we b	2
2. Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a, σ	2

1	2	3	4
3. Görkezijili	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$	λ	1
1. Binomial	$F(x)=\sum\limits_{x_k<x} C_n^{x_k}\cdot p^{x_k}\cdot q^{n-x_k}$	n, p	2
2. Puasson	$F(x)=\sum\limits_{x_k<x}\dfrac{\lambda^{x_k}}{(x_k)!}e^{-\lambda}$	λ	1

Baş toplumyň haýsydyr bir näbelli Θ_b parametrini bahalamak adatça saýlama toplumyň Θ_s parametriniň kömegi bilen amala aşyrylýar. Şeýle diýmeklik, baş toplumyň näbelli $\overline{x_b}=M(x)=a$ ortaçasyny we näbelli dispersiýasyny bahalamak üçin, degişlilikde, saýlamanyň ortaçasy $\overline{x_s}=\frac{1}{n}\sum x_i n_i$ we saýlamanyň dispersiýasy $D_s=\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^2 n_i$ ulanylýar diýildigidir. Saýlamanyň bu häsiýetnamalary ýeterlik uly göwrümli bir saýlamanyň berlenleri boýunça alynýar.

Bir tötän saýlamanyň berlenleriniň esasynda alnan paýlanyşyň näbelli parametrlerini statistiki bahalamakdan aşakdaky talaplar edilýär:

1. Olar süýşmeýän bolmaly.

Baş toplumyň näbelli Θ_b parametriniň süýşmeýän bahalamasy diýlip, matematiki garaşmasy bahalanýan parametre deň bolan (saýlama toplumyň islendik göwrümi üçin) Θ_s statistiki bahalama aýdylýar. Başgaça aýdylanda bolsa, $M(\Theta_s)=\Theta_b$ süýşmeýän bahalamadyr. Eger $\Theta_b<M(\Theta_s)$ ýa-da $M(\Theta_s)<\Theta_b$ bolsa, onda bahalama süýşýän bahalamadyr.

Süýşmeýän bahalama ölçegleriň sistematik ýalňyşlyklarynyň esasynda ýa-da saýlama baş toplumdan alnanda tötänleýin alynmak şerti bozulan ýagdaýynda ýüze çykýar. Süýşmeýän bahalama hemişe parametriň takyk bahasynyň artdyrylmagyna ýa-da kemeldilmegine getirýär.

2) Olar effektiw bolmaly.

Effektiw bahalama diýlip, saýlamanyň berlen n göwrümi üçin mümkin boldugyça iň kiçi dispersiýasy bolan süýşmedik statistiki bahalama aýdylýar:

$$D(\Theta_s)=\min.$$

3) Olar esasly bolmaly.

Eger islendik tükeniksiz kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Theta_s - \Theta_b| < \varepsilon) = 1.$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, Θ_b bahalama esasly bahalama diýilýär.

Amalyýetde näbelli parametrleri bahalamak gerek bolanda ýokarda görkezilen talaplaryň arasynda bahalamanyň süýşmeýän bolmagy has wajypdyr. Saýlamanyň $\overline{x_s}$ ortaçasynyň bu talaplaryň hemmesini kanagatlandyrýandygyny subut etmek kyn däldir. Goý, seredilýän saýlama reprezentatiw saýlama bolsun, ýagny baş toplumyň hemme elementleriniň bu saýlama girmek üçin deň mümkinçiligi bar diýeliň. Hil nyşanynyň $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalaryna birmeňzeş paýlanan, deň matematiki garaşmalary bolan bagly däl tötän ululyklar ýaly seretmek bolar:

$$M(\overline{x_s}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} na = a.$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ululyklaryň her biriniň baş toplumyň paýlanyşy bilen gabat gelýän paýlanyşy bardyr, onda $M(X) = a$. Şoňa görä

$$M(\overline{X_s}) = M(X).$$

Uly sanlar kanunynyň esasynda

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Theta_s - \Theta_b| < \varepsilon) = 1.$$

Bu ýerden $\overline{x_s}$-iň esasly bahalamadygy gelip çykýar.

Ekstremuma derňemek usulyny ulanyp, $\overline{x_s}$-nyň effektiw bahalama bolýandygyny görkezmek bolar.Eger baş toplumyň D_b dispersiýasy saýlamanyň D_s dispersiýasynyň kömegi bilen bahalanýan bolsa, ol süýşýän bahalamadyr. Şunlukda, hemişe D_b-niň takyk bahasynyň kemeldilmegi tarapyndan, sebäbi köp sanly şol bir n göwrümi bolan dürli saýlamalaryň dispersiýalarynyň ortaça bahasy baş dispersiýadan kiçidir, ýagny $M(D_s) < D_b$, has takygy

$$M(D_s) = \frac{n-1}{n} D_b.$$

Ýöne saýlamanyň berlenleri boýunça (goý, ol saýlama göwrümi boýunça uly bolmasyn) D_s hasaplansa, soňra bolsa ony $\frac{n}{n-1}$ gatnaşyga köpeltsek, onda täze S^2 bahalamany alarys:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_s. \tag{1}$$

Bu ululyga saýlamanyň düzedilen dispersiýasy diýilýär. Bu bahalama D_b dispersiýanyň süýşmeýän bahalamasydyr. Hakykatdan-da

$$M(S^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_s\right) = \frac{n}{n-1} M(D_s) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_b = D_b.$$

Belli bolşy ýaly, saýlamanyň dispersiýasy

$$D_s = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 n_i}{n}, \qquad (\overline{x} = \overline{x}_s).$$

Düzedilen dispersiýa bolsa

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 n_i}{n} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 n_i}{n-1}.$$

D_s we S^2 dispersiýalar üçin formulalary deňeşdirip, olaryň diňe maýdalawjylary bilen tapawutlanýandyklaryny görýäris. Saýlamanyň ýeterlik uly n göwrümi üçin olaryň arasyndaky bu tapawut ýok bolup gidýär.

Eger baş toplumdan alnan saýlama uly bolmasa (meselem, $n < 30$), onda dispersiýany düzedýärler. Diýmek, baş toplumyň X hil nyşanynyň dispersiýasyny bahalamak üçin düzedilen saýlama dispersiýa ulanylýar. Statistikada S^2 ululyga «düzedilen» sözüni galdyryp, ýöne dispersiýa diýilýär, sebäbi amalýetde köplenç göwrümi kiçi saýlamalardan ($n < 30$) peýdalanylýar.

Degişlilikde, $\sigma(X) = \sigma_b$ orta kwadratik gyşarmany bahalamak üçin

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 n_i}{n-1}} \tag{2}$$

ululykdan peýdalanylýar. Oňa X tötän ululygyň (hil nyşanynyň) standart gyşarmasy (ýa-da ýöne standart) diýilýär. S ululyga adatça düzedilen orta kwadratik gyşarma diýilýär. Saýlama toplumyň göwrümi kiçi bolanda ($n < 30$) standartdan peýdalanylýar.

S^2 ululyk $\sigma^2(X) = D_b$ üçin süýşmeýän bahalama bolsa-da, S standart $\sigma(X) = \sqrt{D_b}$ üçin süýşýän bahalamadyr. Ýöne bu bahalamadan düzedişsiz peýdalanýarlar, sebäbi süýşmeklik köp bir uly däldir.

Mesele. Saýlamanyň berlen

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

paýlanyşy boýunça baş ortaçanyň we baş dispersiýanyň süýşmeýän bahalamalaryny tapmaly (saýlamanyň göwrümi $n = 10 < 30$)

Çözülişi. 1) $\overline{x_b}$ üçin $\overline{x_s}$ süýşmeýän bahalamadyr:

$$\overline{x_s} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 26,85.$$

2) $D_b = \sigma^2(X)$ üçin süýşmeýän bahalama:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{n-1} = 4,89, \quad (\overline{x} = \overline{x_s}).$$

§7. Bahalamagyň takyklygy. Ynamly ähtimallyk. Ynamly aralyk

Haýsydyr bir paýlanyşyň parametriniň bir san bilen kesgitlenýän bahalamasyna nokatlaç bahalama diýilýär. Meselem, bir saýlamanyň berlenleri boýunça tapylan $\overline{x_s}$ orta arifmetiki baha $M(X) = \overline{x_b}$ baş ortaçanyň nokatlaç bahalamasydyr. Bu bahalamanyň takyklygy nähili diýen sorag ýüze çykýar. Nokatlaç bahalama, aýratyn hem olar göwrümi uly bolmadyk saýlama üçin hasaplanan bolsa ýakynlaşýan bahalamadyr. Şoňa görä aralykdaky bahalamalardan peýdalanmak amatly bolýar. Aralykda bahalama diýlip bahalanýan parametri özünde saklaýan iki san bilen, ýagny aralygyň uçlary bilen kesgitlenýän bahalama aýdylýar.

Goý, Θ_b baş toplumyň bahalamaga niýetlenen X hil nyşanynyň haýsydyr bir näbelli parametri bolsun. Bahalamany saýlama topluma degişli Θ_s parametriň üsti bilen geçireliň. Θ_s nokatlaç bahalama, diýmek, ol Θ_b-iň ýakynlaşan bahalamasydyr (ol bahalamadan edilýän talaplary kanagatlandyrýar diýip hasap edeliň). Bu bahalamanyň ýalňyşlygy (gyşarmasy) Θ_b bilen Θ_s-iň arasyndaky tapawudyň absolýut ululygy näçe kiçi bolsa, şonça-da kiçidir. Ýagny $\delta > 0$ we $|\Theta_b - \Theta_s| < \delta$, onda δ näçe kiçi bolsa, bahalamanyň takyklygy uludyr. Diýmek, δ ululyk bahalamanyň takyklygyny häsiýetlendirýär. $|\Theta_b - \Theta_s| < \delta$ deňsizlik Θ_s we δ belli bolanda Θ_b-ni özünde saklaýan aralygy kesgitleýär, sebäbi ýokarky deňsizlikden

$$\Theta_s - \delta < \Theta_b < \Theta_s + \delta$$

gelip çykýar. $|\Theta_b - \Theta_s| < \delta$ deňsizligiň ähtimallygyna ynamly ähtimallyk diýilýär we γ bilen belgilenýär:

$$P(|\Theta_b - \Theta_s| < \delta) = \gamma.$$

Köplenç γ ynamly ähtimallyk sanlaryň üsti bilen berilýär: 0,95; 0,99; 0,999. Käwagtlar «ynamly ähtimallyk 0,95-e deňdir» diýen sözleriň ýerine «togsan bäş göterim kepillendirme» hem diýilýär (başgaça aýdylanda, γ – ynamlylyk koeffisiýentidir). $|\Theta_b - \Theta_s| < \delta$ deňsizligi ikitaraplaýyn deňsizlik bilen çalşyp alarys:

$$P(\Theta_s - \delta < \Theta_b < \Theta_s + \delta) = \gamma. \qquad (*)$$

(*) formula aşakdaky ýaly okalýar; $\Theta_s - \delta < \Theta_b < \Theta_s + \delta$ aralygyň näbelli Θ_b parametri özünde saklamagynyň ähtimallygy γ deňdir. $(\Theta_s - \delta;\ \Theta_s + \delta)$ aralyga ynamlylyk aralygy diýilýär. Bu aralygyň başlangyjy we soňy tötändir (olara ynamlylyk çäkleri diýilýar), sebäbi Θ_s-iň bahalary bir saýlama toplumdan beýlekisine geçilende üýtgeýän tötän ululykdyr. (*) formula Θ_b-niň $(\Theta_s - \delta;\ \Theta_s + \delta)$ aralyga düşmeginiň ähtimallygy ýaly seretmek bolmaýar, sebäbi Θ_b – sandyr, tötän ululyk däldir.

§8. Saýlama toplumyň göwrümi uly bolanda näbelli matematiki garaşma baha bermek üçin ynamly aralyk

Goý, baş toplumda X hil nyşany käbir öňünden belli bolmadyk kanun boýunça paýlanan, onuň matematiki garaşmasy-da, dispersiýasy-da (diýmek, orta kwadratik gyşarmasy-da) belli däl diýeliň. Ýeterlik uly göwrümli saýlama üçin (n > 30) öňünden belli bolan γ ynamlylyk ähtimallygy bilen näbelli

$$M(X) = \overline{x_b} = a$$

matematiki garaşmany ynamly aralygyň kömegi bilen bahalamaly. Başgaça aýdylanda, göwrümi $n > 30$ bolan saýlama üçin $M(X) = a$ parametri özünde saklaýan degişli γ – ynamly ähtimallygy bolan ynamly aralygy tapmaly.

$M(X) = \overline{x_b} = a$ bahalamany $\overline{x_s}$ ululyk boýunça geçireliň. Onuň üçin baş toplumdan $n > 30$ göwrümli tötänleýin saýlama toplum alalyň we X hil nyşanynyň $x_1, x_2, \dots x_n$ san bahalarynyň (wariantalaryň) ortaçasyny tapalyň:

$$\overline{x_s} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i.$$

$\overline{x_s}$-iň tötän ululykdygyny biz öň belläpdik. $x_1, x_2, \dots x_n$ wariantalar özara bagly bolmadyk, baş toplumyň X hil nyşany bilen birmeňzeş paýlanan tötän ululyklardyr:

$$M(X) = a, D(X) = D, \sigma(X) = \sigma_b.$$

Saýlama toplumyň ortaçasynyň birmeňzeş paýlanan we özara bagly däl tötän ululyklardygyny göz öňüne tutup alarys:

$$M(\overline{X_3}) = a, \quad D(\overline{X_3}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{D_b}{n}, \quad \sigma(\overline{X_3}) = \frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}.$$

Beýleki tarapdan X tötän ululyk birmeňzeş paýlanan, ýeterlik uly sanly tötän ululyklaryň jemi bolanlygy üçin Lýapunowyň teoremasyndan gelip çykan netijä görä ol tötän ululyk normal kanunyň paýlanyşyna ýakyn kanun boýunça paýlanandyr.

Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üçin

$$P(|\overline{X_s} - M(\overline{X_s})| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\overline{X_s})}\right).$$

Bu ähtimallygyň γ deň bolmagyny talap edeliň. Ondan başga-da, $M(\overline{X_s}) = M(X) = a$ we $\sigma(\overline{X_s}) = \frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}$ deňlikleri göz öňüne tutup alarys:

$$P(|\overline{X_s} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_b}\right) = \gamma,$$

$$P(\overline{X_s} - \delta < a < \overline{X_s} + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_b}\right) = \gamma.$$

Belgileme girizeliň we $\overline{X_s}$ ortaçany $\overline{x_s}$ bilen çalyşalyň

$$t = \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma_b},$$

onda

$$\delta = t\frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}.$$

Netijede alarys:

$$P\left(\overline{x_s} - t\frac{\sigma_b}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_s} + t\frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \qquad (1)$$

(1) formula boýunça γ ynamly ähtimallyk bilen $M(X) = a$ näbelli parametri özünde saklaýan

$$\left(\overline{x_s} - t\frac{\sigma_b}{\sqrt{n}},\quad \overline{x_s} + t\frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}\right).$$

ynamly aralyk kesgitlenendir. Bu aralygyň başlangyjy we soňy t we σ_b näbellileri özünde saklaýar. Olaryň birinjisi $2\Phi(t) = \gamma$ aňlatmadan kesgitlenýär.

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \quad \text{we} \quad t = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Bu ýerde $\phi^{-1}(x)$ Laplasyň funksiýasyna ters bolan funksiýadyr. Orta kwadratik gyşarmany bolsa, oňa ýakynlaşýan standart gyşarma bilen çalyşýarlar:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x_s})^2 n_i}{n-1}},$$

onda (1) formula aşakdaky görnüşi alar:

$$P\left(\overline{x_s} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_s} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \qquad (2)$$

Biz her warianta $x_1, x_2, \dots x_n$ saýlamada bir gezek duş gelýär diýip hasap edýäris. Eger wariantalar birden beýleki ýygylyklar bilen alynýan bolsa-da, şol bir jogap alynýar. Bu ýagdaýda saýlamanyň ortaçasy we standart gyşarma aşakdaky formulalardan kesgitlenýär:

$$\overline{x_s} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i, \qquad S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x_s})^2 n_i}{n-1}}.$$

Mesele. Baş toplumdan alnan

$x = x_i$	100	300	500	700	900
n	5	20	40	25	10

saýlama boýunça $\gamma = 0{,}95$ ynamly ähtimallyk bilen näbelli matematiki garaşma üçin ynamly aralygy tapmaly.

Çözülişi. Saýlama uly ($n = 100 > 30$), şonuň üçin aşakdaky formuladan peýdalanalyň:

$$P\left(\overline{x_s} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_s} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 2\phi(t) = \gamma,$$

$$\overline{x_s} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = 530,$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x_s})^2 n_i}{n-1}} = 208,$$

$$t = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}475) = 1{,}96,$$

$$\delta = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 40,8.$$

$\overline{x}_s \pm \delta$ ynamly aralyklary tapalyň:

$$\overline{x}_s - \delta = 530 - 40,8 = 489,2,$$

$$\overline{x}_s + \delta = 530 + 40,8 = 570,8.$$

Diýmek, 95% ynamlylyk bilen näbelli $M(X) = a$ parametr (489, 2; 570, 8) aralyga degişlidir diýip tassyklamak bolar. Başgaça aýdylanda, $\gamma = 0,95$ ähtimallyk bilen $a = 530 \pm 40,8$. Alnan netijäniň manysy: eger baş toplumdan göwrümleri $n = 100$ bolan saýlamalaryň ýeterlik uly sanyny alsak, onda 95% ähtimallyk bilen näbelli $M(X) = a$ parametr (489, 2; 580, 8) aralyga degişlidir we galan 5% ýagdaýda $M(X)$ bu aralygyň daşynda ýatýan bolmagy mümkindir.

Bahalamanyň takyklygyny kesgitleýän

$$\delta = t\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

formuladan görnüşi ýaly, saýlamanyň n göwrümi näçe uly bolsa, bahalama şonça-da takykdyr, sebäbi δ ululyk n ulaldygyça kemelýär. Tersine, eger ynamlylygyň artmagyny talap etsek (meselem $\gamma = 0,99$ ýa-da $\gamma = 0,999$ bolsa), onda $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ Laplasyň funksiýasynyň bahasy artýar. Edil şonuň bilen bilelikde t argumentiň bahasy hem artýar, sebäbi $\phi(t)$ funksiýa t argumentiň artýan funksiýasydyr. Ýöne bu ýagdaýda δ hem artýar. Diýmek, bahalamagyň takyklygy kemelýär. Başgaça aýdylanda, gowy däl takyklyk ýokary takyklyga garanda has ähtimaldyr. Eger baş toplumuň X hil nyşany normal kanun boýunça paýlanan bolsa we $\sigma(X) = \sigma_b$ bolsa, ynamly aralygy kesgitlemek üçin $n < 30$ bolanda (1) formuladan peýdalanmak bolar.

(3) formulany ulanyp meseleleriň üç görnüşini çözmek bolar:

Saýlamanyň berlen n göwrümi boýunça we bahalamagyň δ takyklygy boýunça γ ynamly ähtimallygy tapmak.

Berlen ynamly γ ähtimallyk we saýlamanyň n göwrümi boýunça bahalamanyň δ takyklygyny kesgitlemek.

γ we δ belli bolsa, saýlamanyň n göwrümini tapmak.

Soňky meselede bahalamagyň takyklygyny kesgitleýän

$$\delta = t\frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}$$

formuladan $n = \dfrac{t^2\sigma_b^2}{\delta^2}$ tapylýar. Bu ýerde σ_b – orta kwadratik gyşarma. t – Laplasyň funksiýasynda baglanyşyksyz üýtgeýän ululygyň bahasy, ol $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$ deňlikden kesgitlenýär.

§9. Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň matematiki garaşmasy üçin ynamly aralyk

$$\overline{x}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

saýlamanyň ortaçasynyň paýlanyşy baş toplumda X-iň paýlanyşyna we saýlamanyň göwrümine baglydyr. Hususan-da, eger saýlamanyň göwrümi uly bolsa ($n > 30$), onda X nyşanyň paýlanyşynyň görnüşi nähili bolsa-da saýlamanyň ortaçasy (Lýapunowyň teoremasyndan gelip çykýan netijelere görä) normal kanun boýunça paýlanandyr we onuň matematiki garaşmasy hem-de orta kwadratik gyşarmasy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$M(X) = M(\overline{X}_s) = a,$$

$$\sigma = \sigma(\overline{X}_s) = \frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}.$$

Köp halatlarda σ_b berilmeýär, şonuň üçin biz ony standart (düzedilen orta kwadratik) gyşarma bilen çalyşmaga mejbur bolýarys. Bu bolsa saýlama toplumyň göwrümi uly bolanda uly ýalňyşlyklara getirýär.

Eger-de saýlama toplum kiçi bolsa ($n \leq 30$), onda saýlamanyň $\overline{x}_s$ ortaçasynyň normal kanun boýunça paýlanan bolmagy üçin saýlama normal kanun boýunça paýlanan baş toplumdan saýlanyp alnan bolmaly (beýleki ýagdaýlarda $\overline{x_s}$ normal kanun boýunça paýlanan däldir).

$M(X) = a$ näbelli matematiki garaşma baha bermek saýlamanyň $\overline{x_s}$ ortaçasy boýunça geçirilýär, (diňe bir saýlamanyň netijesi boýunça) onda kiçi saýlama üçin $\overline{x_s}$ ortaçanyň $\overline{x_b} = M(X)$ ortaçadan gyşarmasynyň has uly bolmagy mümkin, ondan başga-da $\sigma(X) = \sigma_b$ orta kwadratik gyşarmanyň standart gyşarma bilen çalyşylmagy kiçi saýlama bolan ýagdaýynda gödek ýalňyşlyklara getirýär.

Diýmek, paýlanyşy baş toplumdaky X-iň paýlanyşynyň näbelli parametrlerine bagly bolmadyk we $M(X) = a$ näbelli parametr üçin kiçi göwrümli saýlama bolanda ynamlylyk aralygyny gurar ýaly tötän ululygy gözlemeli bolýar.

Bu meseläni çözmek iňlis statistigi Gossete başardypdyr (ol öz çözüwini «Stýudent» lakamy bilen neşir edipdir). Ol aşakdakyny subut etdi: eger baş toplumyň X hil nyşany normal kanun boýunça paýlanan bolsa,

$$T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

tötän ululygyň paýlanyşy diňe saýlamanyň n göwrümine baglydyr. Bu tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlygy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$S(t,n) = B_n\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Bu ýerde: t – T-nyň san bahalary,
B_n – diňe saýlamanyň n göwrümine bagly bolan koeffisiýent.

T – tötän ululygyň paýlanyşyna Stýudentiň paýlanyşy ýa-da t – paýlanyş diýilýär. Stýudentiň paýlanyşy saýlamanyň islendik göwrümi üçin (şol sanda kiçi göwrüm üçin hem) $M(X) = a$ matematiki garaşma üçin ynamly aralygy gurmaga mümkinçilik berýär. Bu bolsa hasaplamalar geçirilende wagty we serişdeleri tygşytlamaga mümkinçilik döredýär. Şonuň üçin Stýudentiň paýlanyşy normal toplumda baş ortaça baha bermekde statistikanyň ýeten ýokary derejeleriniň biri hasap edilýär.

$M(X)$ üçin gözlenýän ynamly aralygy guralyň. γ ynamly ähtimallyk berlen diýeliň we bu ähtimallyk $|T| < t_\gamma$ wakanyň ähtimallygyna deň diýeliň:

$$P(|T| < t_\gamma) = \gamma,$$

onda $S(t, n)$

$$P(|T| < t_\gamma) = P(-t_\gamma < T < t_\gamma) = \int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} S(t,n)dt =$$

$$= 2B_n \int_0^{t_\gamma} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt = \gamma$$

funksiýanyň t argumente görä jübüt funksiýa bolanlygy üçin soňky integral iki üýtgeýänli funksiýany berýär t_γ we n ýagny $\varphi(t_\gamma, n) = \gamma$.

$$T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

ululygy göz öňüne tutup alarys:

$$P\left(-t_\gamma < \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_\gamma\right) = \varphi(t_\gamma, n) = \gamma.$$

Özgertmeleri geçirenimizden soň $\overline{X}$-ny $\overline{x_s}$ bilen çalşyp alarys:

$$P\left(\overline{x_s} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_s} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma = \varphi(t_\gamma, n). \qquad (4)$$

t_γ, n, γ üç ululygy baglanyşdyrýan $\varphi(t_\gamma, n) = \gamma$ deňlikden olaryň islendik birini tapyp bolar, meselem,

$$t_\gamma = \varphi_1(\gamma, n).$$

Bu funksiýa üçin tablisa düzülip, ol belli γ we n üçin t_γ-ny tapmaklyga, t_γ we n boýunça γ ynamly ähtimallygy, t_γ we γ boýunça saýlamanyň n göwrümini tapmaga mümkinçilik berýär (*3-nji goşundy*).

Mesele. Goýunlaryň uly sürüsinden tötänleýin saýlama geçirilip, 25 goýun alyndy we olar gyrkylanda alnan ýüň (*kg*) aşakdaky netijeleri berdi:

x_i – ýüňüň agramy	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5	4,5-5,5
n_i – goýunlaryň sany	4	10	8	3

$\gamma = 0{,}95$ ähtimallyk bilen sürüdäki goýunlaryň ýüňüniň $M(X) = a$ ortaça agramy üçin ynamly aralygy kesgitlemeli.

Çözülişi. X – ýüňüň agramy normal paýlanan tötän ululyk, $n = 25 < 30$ – saýlamanyň göwrümi kiçi. Şol sebäbe görä sürüdäki goýunlaryň ýüňüniň ortaça agramy üçin ynamly aralygy Stýudentiň paýlanyşyny peýdalanyp, (4) formula boýunça taparys:

$$P\left(\overline{x_s} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma = 0{,}95.$$

1. Saýlamanyň berlenlerine görä $\overline{x_s}$ we s-i tapalyň

$$\overline{x_s} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3}{25} = 3{,}4$$

$$S = \sqrt{\frac{(2-3{,}4)^2 \cdot 4 + (3-3{,}4)^2 \cdot 10 + (4-3{,}4)^2 \cdot 8 + (5-3{,}4)^2 \cdot 3}{24}} \approx 0{,}9.$$

2. 3-nji goşundydan $n = 25$ we $\gamma = 0{,}95$ boýunça $t_\gamma = 2{,}064$ tapýarys.

Baha bermegiň takyklyk häsýetnamasyny tapalyň.

$$\delta = t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}064 \cdot \frac{0{,}9}{5} = 0{,}37.$$

3. Ynamly aralygyň çäkleri

$$\overline{x_s} - \delta = 3{,}4 - 0{,}37 = 3{,}03,$$

$$\overline{x_s} + \delta = 3{,}4 + 0{,}37 = 3{,}77.$$

Diýmek, $\gamma = 0{,}95$ ähtimallyk bilen süri boýunça her goýundan alnan ýüňüň ortaça agramy

$$M(X) = a = (3{,}4 \pm 0{,}37)\ kg$$

ýa-da

$$3,03 < a < 3,77.$$

Eger saýlamanyň n göwrümini kiçeltsek, ynamly aralyk giňelýär. Meselem, eger $\overline{x_s} = 3,4$ we $\gamma = 0,95$, saýlamanyň göwrümi $n = 9 < 30$ bolsa, onda

$$\delta = 2,064 \cdot \frac{0,9}{3} \approx 0,62 \qquad M(X) = a = \overline{x_s} \pm \delta = (3,4 \pm 0,62)\, kg,$$

diýmek, $\gamma = 0,95$ ähtimallyk bilen $2,78 < a < 4,02$,

Özüňi barlamak üçin soraglar

1. Matematiki statistika nämäni öwrenýär?
2. Matematiki statistikanyň esasy meseleleri nämeden ybarat?
3. Matematiki statistikanyň esasy düşünjeleri nämeden ybarat?
4. Wariasion hatar diýlip nämä aýdylýar?
5. Saýlama usuly nämeden ybarat?
6. Statistiki paýlanyş diýlip nämä aýdylýar?
7. Paýlanyşyň köpburçlugy (poligon) diýlip nämä aýdylýar?
8. Gistogramma diýlip nämä aýdylýar?
9. Statistiki paýlanyşyň san häsiýetnamalaryny atlandyryň?
10. Orta arifmetiki nahili kesgitlenýär?
11. Orta geometrik hähili kesgitlenýär?
12. Orta garmonik nähili kesgitlenýär?
13. Mediana we moda saýlama üçin nähili kesgitlenýär?
14. Saýlamanyň dispersiýasy nähili kesgitlenýär?
15. Paýlanyşyň parametrlerini bahalamakdan edilýän talaplary getiriň.
16. Süýşmeýän bahalama diýlip nämä aýdylýar?
17. Effektiw bahalama diýlip nähili bahalama aýdylýar?
18. Aralykda bahalama diýlip namä aýdylýar?
19. Ynamly aralyk nähili kesgitlenýär?
20. Ynamly ähtimallyk diýlip nämä aýdylýar?
21. Näbelli matematiki garaşma üçin ynamly aralygy görkeziň.

Meseleler we gönükmeler

1. 20 maşgalanyň maşgala agzalarynyň sany seljerilende aşakdaky ýaly boldy:

2; 5; 3; 4; 1; 3; 6; 2; 4; 3; 4; 1; 3; 5; 2; 3; 4; 3; 4; 3. Şu berlenler boýunça wariasion hatar düzmeli we otnositel ýygylyklaryň paýlanyşynyň poligonyny gurmaly.

2. 20 sany daýhan hojalygynda 1 ga ýerden alnan bugdaýyň hasyllylygy (s) belli: 13,9; 12,4; 13,1; 6,3; 11,8; 11,6; 10,5; 10,4; 10,6; 11,3; 15,1; 11,7; 11,3; 10,2; 11,0; 10,7; 8,2; 9,6; 10,2; 15,1.

Paýlanyşyň aralyk (interwal) hataryny gurmaly, gistogramma çyzmaly.

3. Tötänleýin alnan 50 sany talybyň hasap depderçelerindäki bahalar seljerilende olaryň ýokary matematikadan alan bahalary aşakdakylar ýaly boldy: 4, 4, 2, 3, 5, 3, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 3, 5, 3, 3, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 3.

Diskret wariasion hatar düzmeli, poligon gurmaly, ortaçany, dispersiýany, modany, medianany, warasiýanyň koeffisiýentini, wariasiýanyň gerimini tapmaly.

4. Sygyrlaryň sürüsinden tötänleýin alnan 50 sygryň agramy ölçenende (s) aşakdaky netijeler alyndy: 4,2; 4,5; 3,1; 5,1; 4,3; 4,7; 3,5; 4,4; 5,3; 3,7; 4,0; 4,8; 4,6; 3,0; 3,2; 5,2; 4,2; 3,9; 4,8; 4,6; 4,2; 2,9; 3,8; 5,6; 4,4; 5,5; 4,1; 4,3; 4,5; 5,4; 3,0; 4,1; 4,6; 3,0; 5,2; 4,2; 4,8; 3,4; 4,5; 5,0; 3,8; 3,9; 4,9; 4,5; 3,1; 3,1; 5,3; 4,2; 4,2; 4,4.

Üznüksiz wariasion hatar düzmeli, gistogramma gurmaly. Ortaçany, dispersiýany, orta kwadratik gyşarmany, modany we medianany tapmaly.

5. Saýlama ýygylyklaryň paýlanyşy görnüşinde berlen:

x_i	125	135	145	155	165	175	185
n_i	5	10	30	25	15	10	5

Otnositel ýygylyklaryň paýlanyşyny tapmaly. Ortaçany, dispersiýany, orta kwadratik gyşarmany, modany, medianany, wariasiýanyň koeffisiýentini, wariasiýanyň gerimini tapmaly.

6. Saýlamanyň 25 birligi derňelende aşakdaky netijeler alyndy: 9; 11; 9; 6; 6; 7; 6; 8; 9; 9; 11; 10; 6; 7; 6; 8; 9; 10; 4; 9; 10; 7; 8; 9; 6.

1) Baş toplumyň ortaçasy diýip haýsy ululygy almaly?

2) Baş toplumyň dispersiýasy diýip haýsy ululygy almaly?

3) Çäkleri bolan ynamly aralygy tapmaly.

Çözülişi. Baş toplumyň ortaçasynyň ýakynlaşan bahasy hökmünde saýlamanyň orta arifmetigini kabul edýäris:

$$\overline{x}_b \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Baş toplumyň dispersiýasyny bahalamak üçin

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

formulany ulanalyň.

Saýlamanyň ortaçasynyň orta kwadratik gyşarmasyny

$$\sigma_{\overline{x}} \approx S_{\overline{x}} = \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}$$

formula boýunça tapalyň.

Baş toplumyň ortaçasy diýlip,

$$\overline{x}_b \approx \frac{\sum_{i=1}^{25} n_i x_i}{25} = \frac{200}{25} = 8$$

ululygy kabul edeliň.

Baş toplumyň dispersiýasy diýip,

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \overline{x})^2}{25-1} = \frac{80}{24} \approx 3,33$$

ululygy kabul edeliň.

Ynamly aralyk $\overline{x} \pm 2 \cdot S_{\overline{x}}$; $S_{\overline{x}} = \dfrac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{3,33}}{\sqrt{25}} \approx 0,365,$

$8 \pm 2 \cdot 0,365$; $8 \pm 0,73$.

7. Köpeltmek hasyllary usulyny ulanyp, berlen statistiki paýlanyş üçin: 1) saýlamanyň ortaçasyny; 2) saýlamanyň dispersiýasyny; 3) orta kwadratik gyşarmany tapmaly.

1)

x_i	130	140	150	160	170	180	190
n_i	5	10	30	25	15	10	5

2)

x_i	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	15,5
n_i	5	15	40	25	8	4	3

8. Normal paýlanyş kanunynyň näbelli a matematiki garaşmasyny bahalamak üçin 0,95 ähtimallyk bilen ynamly aralygy tapmaly. Şunlukda saýlamanyň $\bar{x}$ ortaçasy, saýlamanyň n göwrümi we orta kwadratik gyşarmasy berlen:

a) $\bar{x} = 75{,}15, \quad \sigma = 8, \quad n = 64,$

b) $\bar{x} = 75{,}10, \quad \sigma = 13, \quad n = 169.$

II bap
KORRELÝASION TEORIÝANYŇ ELEMENTLERI

§1. Funksional, statistiki we korrelýasion baglanyşyklar

Statistikada öwrenilýän üýtgeýän ululyklar öz aralarynda haýsydyr bir baglanyşykda ýa-da baglanyşyksyz bolup bilerler. Meselem, eger X ygalyň mukdary, Y dökülen döküniň mukdary we Z hasyllylyk bolsa, onda görüşimiz ýaly, Z-ululyk $\boldsymbol{X}$-a we $\boldsymbol{Y}$-e bagly, emma X we Y özara baglanyşyksyzdyrlar.

Köp meselelerde öwrenilýän tötän ululygyň beýleki tötän ýa-da tötän däl ululyklar bilen nähili baglanyşygynyň bardygyny bilmek gerek bolýar. Meselem, hasyllylygyň (tötän ululyk) nähili derejede ygalyň mukdaryna (tötän ululyk) we dökülen döküniň mukdaryna (tötän däl ululyk) baglylygyny bilmek peýdalydyr.

Ýönekeýlik üçin, ilki bilen tötän ululygyň diňe bir tötän ýa-da tötän däl ululyk bilen baglanyşygyna seredeliň.

San bahalary, degişlilikde, $x_1, x_2, ...,$ we $y_1, y_2...,$ bolan X we Y üýtgeýän ululyklara seredeliň. Eger X ululygyň bir bahasyna belli bir kanun boýunça Y ululygyň bir bahasy degişli bolsa (ýagny olaryň arasynda özara bir bahaly baglanyşyk bar bolsa), onda X we Y ululyklaryň arasynda funksional baglanyşyk bar diýilýär. Simwoliki taýdan bu baglanyşyk

$$y = f(x)$$

formula bilen berilýär.

Funksional baglanyşyklary biz ýokary matematika kursunda öwrenipdik.

Statistiki baglanyşyk diýlip at berilýän beýleki bir baglanyşyga has köp duş gelinýär. Üýtgeýänleriň haýsy-da bolsa biriniň bir bahasyna beýleki üýtgeýäniň bahalarynyň bir topary (ýa-da paýlanyşy) degişli bolsa, onda bu baglanyşyga statistiki baglanyşyk diýilýär.

Eger üýtgeýänleriň biriniň üýtgemegi bilen beýlekisiniň ortaçasy üýtgeýän bolsa, onda bu baglanyşyga korrelýasion baglanyşyk diýilýär. Statistikanyň korrelýasion baglanyşygy öwrenýän bölümine korrelýasiýanyň teoriýasy diýilýär. Bu teoriýanyň elementleri bilen tanyş bolalyň.

§2. Şertli paýlanyş. Şertli ortaça

Agajyň X ýaşynyň üýtgemegi bilen onuň Y sütüniniň ýogynlygynyň üýtgeýşiniň mysalyna seredeliň.

1-nji tablisa

X – ýaşy / Y – ýogynlygy	X – ýaşy		
	35-ýyl	40-ýyl	45-ýyl
8-9	8	–	–
9-10	10	8	–
10-11	28	12	6
11-12	24	22	10
12-13	14	20	26
13-14	10	18	16
14-15	6	12	16
15-16	–	8	18
16-18	–	–	8

Bu tablisa seredip, biz agajyň X ýaşynyň şol bir bahasyna sütüniň ýogynlygynyň Y paýlanyşynyň degişli bolýandygyny görýäris. Şunlukda ýaşyň üýtgemegi bilen sütüniň ýogynlygynyň paýlanyşy hem üýtgeýär.

Görşümiz ýaly, X we Y ululyklar statistiki baglanyşykdadyrlar. Bu statistiki baglanyşygyň korrelýasion baglanyşykdygyny subut edeliň. Y – ululygyň şertli statistiki paýlanyşy diýlip bu ululygyň X-yň takyk bir bahasyndaky paýlanyşyna aýdylýar. Meselem, agajyň Y ýogynlygynyň $X = 35$ ýyl we $X = 40$ ýyl bahalaryndaky şertli statistiki paýlanyşy aşakdaky wariasion hatarlar bilen berilýär:

$Y_{X=35}$	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15
n_i	8	10	28	24	14	10	6

$Y_{X=40}$	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16
n_i	8	12	22	20	18	12	8

Y-iň bahalarynyň X-iň takyk bir bahasyndaky ortaçasyna şertli ortaça diýilýär. Olar aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\bar{y}_{x=35} = \left(\frac{\sum y_i n_i}{n}\right)_{x=35} =$$

$$= \frac{8,5 \cdot 8 + 9,5 \cdot 10 + 10,5 \cdot 28 + 11,5 \cdot 24 + 12,5 \cdot 14 + 13,5 \cdot 10 + 14,5 \cdot 6}{8 + 10 + 28 + 24 + 14 + 10 + 6} =$$

$$= 11,3$$

$$\bar{y}_{x=40} = \left(\frac{\sum y_i n_i}{n}\right)_{x=40} =$$

$$= \frac{9,5 \cdot 8 + 10,5 \cdot 12 + 11,5 \cdot 22 + 12,5 \cdot 20 + 13,5 \cdot 18 + 14,5 \cdot 12 + 15,5 \cdot 8}{8 + 12 + 22 + 20 + 18 + 12 + 8} =$$

$$= 12,46.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, agajyň ýogynlygynyň şertli ortaçasy ýaşyň üýtgemegi bilen üýtgeýär, diýmek, X we Y ululyklaryň arasyndaky statistiki baglanyşyk korrelýasion baglanyşykdyr.

Adamlar özüniň gündelik durmuşynda, önümçilikde, ykdysadyýetde we beýleki pudaklarda korrelýasion baglanyşyk bilen köp duş gelýärler. Korrelýasion baglanyşygyň käbir mysallaryna seredeliň:

1. Adamyň boýy bilen onuň agramynyň arasyndaky baglanyşyk.

2. Hasyllylyk bilen dökülen döküniň arasyndaky baglanyşyk.

3. Işgäriň iş stajy bilen onuň zähmet öndürijiliginiň arasyndaky baglanyşyk.

§3. Korrelýasion teoriýanyň iki esasy meselesi

Korrelýasion baglanyşygy öwrenmek öz öňünde iki maksady goýýar:

Korrelýasion baglanyşygyň görnüşini bilmek.

Baglanyşygyň jebislik derejesini bilmek.

Bu meselelere düşünmek üçin §2-de seredilen meselä ýüzleneliň.

Agajyň sütüniniň ýogynlygyna täsir edýän faktorlaryň sanawyna (onuň ýaşyndan başga-da) aşakdakylar hem degişlidir:

1) Topragyň strukturasy;

2) Kök sistemasynyň ösüşi;

3) Iýmitleniş şertleri;

4) Ýagtylandyrylyş şertleri;

5) Ygalyň mukdary;

6) Kesellilik hadysalary we başgalar.

Bu faktorlar ýyldan-ýyla tötänleýin ýagdaýda agajyň ösüşine öz täsirini ýetirýärler. Şeýle faktorlaryň hemmesi bilelikde agajyň ýaşynyň şol bir bahasyna sütüniň ýogynlygynyň bahalarynyň toplumynyň degişli bolmagyna getirýär. Başgaça aýdylanda, bu faktorlar agajyň ýaşy bilen onuň sütüniniň arasyndaky baglanşygyň umumy görnüşine öz täsirini ýetirýär. Eger bizi agajyň sütüniniň ýogynlygy bilen onuň ýaşynyň arasyndaky baglanyşyk gyzyklandyrýan bolsa, onda tötänleýin täsir ediji (üýtgediji) faktorlary mümkinçilik boldugyça hasaba almazlyk gerek bolýar. Onuň üçin köp sanly gözegçilikleriň netijelerini umumylaşdyrmak we tötänleýin hadysalaryň öz-özüni ýok edýän statistiki häsiýetnamalaryny hasaplamak gerek bolýar. Diýmek, korrelýasion teoriýanyň birinji meselesi X we Y ululyklaryň arasyndaky baglanyşygyň görnüşini «artykmaç» faktorlaryň hasaba alynmazlyk şertinde öwrenmekden ybaratdyr. Başgaça aýdylanda, X we Y ululyklaryň üstünde geçirilen tejribäniň netijesinde olaryň arasyndaky korrelýasion baglanyşygyň deňlemesini ýazmak talap edilýär. Bu deňleme ululyklaryň biriniň şertli ortaçasynyň beýleki ululyk bilen baglanyşygyny aňladýar we aşakdaky iki görnüşde ýazylýar:

$$\overline{y_x} = f(x), \tag{1}$$

$$\overline{x_y} = \varphi(y). \tag{2}$$

Korrelýasion baglanyşygyň (1) we (2) deňlemelerine, degişlilikde, regressiýanyň «y-iň x-iň üsti bilen» we «x-iň y-iň üsti bilen» aňladylan deňlemeleri diýilýär. Olar üýtgeýänleriň biriniň ýagdaýy boýunça beýlekisiniň üýtgeýşine görä çaklamalar etmäge mümkinçilik berýär.

Korrelýasion teoriýanyň ikinji meselesi korrelýasion baglanyşygyň jebisligini anyklamakdan ybaratdyr. Başgaça aýdylanda, ululyklaryň biriniň üýtgemegi nähili derejede beýlekisiniň üýtgemegine täsir edýändigini bilmekden ybaratdyr. Bu mesele ýörite san häsiýetlendirijiniň üsti bilen çözülýär, onuň ululygyna görä baglanyşygyň jebisligi anyklanýar. Bu häsiýetlendirijä korrelýasiýa koeffisiýenti ýa-da korrelýasion gatnaşyk diýilýär.

§4. Korrelýasion tablisa

Ýokarda seredilen *1-nji tablisa* umumy görnüşdäki korrelýasion tablisanyň hususy halydyr. Bu tablisa X we Y ululyklaryň üstünde geçirilen gözegçilikleriň toplanan netijelerini statistiki taýdan işläp taýýarlamak üçin niýetlenen.

Umumy görnüşdäki tablisa seredeliň. Bu tablisada x_i-sanlar X-ululygyň (tötän ýa-da tötän däl) san bahalary $i = 1, 2, 3, \dots n$;

2-nji tablisa

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	**Jemi** n_y	$\overline{x_{y_i}}$
y_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1i}	...	n_{1n}	n_{y1}	$\overline{x_{y_1}}$
y_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2i}	...	n_{2n}	n_{y2}	$\overline{x_{y_2}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	n_{jl}	n_{j2}	...	n_{ji}	...	n_{jn}	n_{yj}	$\overline{x_{y_j}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	n_m	n_{m2}	...	n_{mi}	...	n_{mn}	n_{ym}	$\overline{x_{y_m}}$
Jemi n_x	n_{x1}	n_{x2}	...	n_{xi}	...	n_{xn}	n	$\overline{x}$
$\overline{y_{x_m}}$	$\overline{y_{x_1}}$	$\overline{y_{x_2}}$	...	$\overline{y_{x_i}}$	...	$\overline{y_{x_n}}$	$\overline{y}$	...

y_j – sanlar Y tötän ululygyň san bahalary ($j = 1,2,3, ..., m$)

$m \leq n$ – tablisanyň gönüburçly ýa-da kwadrat tablisa bolmagy mümkin.

n_{ij} ($i = 1,2, ... n; j = 1,2, ..., m$) $A = \{X = x_i$ we $Y = y_i\}$ – wakanyň ýüze çykmagynyň ýygylygy (bu waka $X = x_i$ we $Y = y_i$ wakalaryň bir wagtda ýüze çykmagyny aňladýar);

n – tablisadaky ýygylyklaryň jemi $n = \sum n_x = \sum n_y$. Bu jemler x-iň we y-iň hemme bahalary boýunça alynýar.

Mesele. Korrelýasion tablisa seredeliň:

3-nji tablisa

$Y \backslash X$	**1**	**3**	**5**	**7**	**Jem** n_y	$\overline{x_y}$
2	1	2	1	–	4	3
4	2	4	4	2	12	4
6	–	1	2	1	4	5
Jem n_x	3	7	7	3	$n = 20$	$\overline{x} = 4$
$\overline{y_x}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{14}{3}$	$\overline{y} = 4$	

Bu tablisada X ululyk 1,3,5,7 san bahalary alýar, Y bolsa 2,4,6 bahalary alýar. Ikinji setiriň we üçünji sütüniň kesişmesinde duran 4 san $X = 5$ we $Y = 4$ wakalaryň 4 gezek bilelikde ýüze çykandygyny aňladýar. Dördünji sütüniň birinji setir bilen kesişmesindäki gözenek boş, bu bolsa $X = 7$ we $Y = 2$ wakalaryň bilelikde ýüze çykmandygyny aňladýar. Şunlukda, $X = 7$ waka aýratynlykda $2 + 1 = 3$ gezek, $Y = 2$ waka bolsa $1 + 2 + 1 = 4$ gezek ýüze çykdylar.

Birinji goşmaça sütünde we birinji goşmaça setirde setirler we sütünler boýunça ýygylyklaryň jemi, goşmaça setiriň we sütüniň kesişmesinde bolsa hemme ýygylyklaryň $n = 20$ jemi ýerleşdirilen. Soňky setirde we soňky sütünde ýerleşdirilen sanlara düşünmezden öň, ýokardaky tablisadan 2 sany göçürmä seredeliň:

$X_{y=2}$	1	3	5	7
n_j	1	2	1	0

$Y_{x=3}$	2	4	6
n_i	2	4	1

Bu göçürmeler iki sany wariasion hatary aňladýar, olara şertli wariasion hatarlar ýa-da şertli statistiki paýlanyş diýilýär. Olaryň birinjisi X ululyk üçin $Y = 2$ bahany alan ýagdaýynda, ikinjisi bolsa Y tötän ululyk üçin $X = 3$ bahany alan ýagdaýynda seredilen. X we Y ululyklaryň bu hatarlar üçin hasaplanan ortaçalaryna şertli ortaçalar diýilýär we $\bar{x}_{y=2}$, $\bar{y}_{x=3}$ görnüşde ýazylýar. Olary hasaplalyň:

$$\bar{x}_{y=2} = 2 = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0}{1 + 2 + 1} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$\bar{y}_{x=3} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1}{2 + 4 + 1} = \frac{26}{7}.$$

Beýleki şertli ortaçalar şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär. Olaryň hemmesi *3-nji tablisanyň* soňky sütüninde we soňky setirinde ýerleşdirilen. Ýygylyklaryň jemi $n = 20$ görkezilen gözenekde, sagda we aşakda $\bar{x}$ we $\bar{y}$ ortaçalar ýerleşdirilen, olar aşakdaky adaty formulalar boýunça hasaplanýar:

$$\overline{x} = \frac{\sum n_x x}{n}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum n_y y}{n}.$$

Indi bolsa korrelýasion baglanyşygyň kesgitlemesini aşakdaky ýaly takyklalyň:

Eger X-iň her bir bahasyna Y-iň bütin bir paýlanyşy degişli bolsa we ol paýlanyşda X-iň üýtgemegi bilen $\overline{y}_x$ şertli ortaça hemişelik bolup galmaýan bolsa, onda Y tötän ululyk X bilen korrelýasion baglanyşykdadyr.

X tötän ululygyň Y bilen korrelýasion baglanyşygy şuňa meňzeş kesgitlenýär.

§5. Regressiýanyň empirik we teoretiki çyzyklary

Goý, tejribe geçirilip, onuň netijesinde korrelýasion tablisa alnyp, Y ululygyň $\overline{y}_x$ şertli ortaçalary hasaplanypdyr diýeliň. $(x_i, \overline{y}_x)$ jübütleriň her birine tekizlikde dekart koordinatalar sistemasynda $M_i(x_i, \overline{y}_{x_i})$ nokadyň koordinatlary ýaly seredeliň. Alnan nokatlary kesimler bilen birleşdirip, döwük çyzygy alarys. Bu döwük çyzyga regressiýanyň empirik (tejribeden alnan) çyzygy diýilýär. Regressiýanyň empirik çyzygy üçin predel bolup hyzmat edýän deňleýji çyzyga regressiýanyň teoretiki çyzygy diýilýär. Bu çyzygyň deňlemesi X we Y ululyklaryň arasyndaky baglanyşygyň kanunalaýyklygyny aňladýan deňlemedir. Gözegçilikleriň netijeleri işlenip taýýarlanylanda empirik çyzygyň ýerine tötän ululygyň biriniň beýlekisiniň üýtgeýşine bagly bolan baglanyşygyny has ähtimal aňladýan deňleýji çyzyk alynýar. Bu çyzygyň deňlemesi $\overline{y}_x = f(x)$ ýa-da $\overline{x}_y = \varphi(y)$ görnüşde berilýär we oňa öň belleýşimiz ýaly, x-iň y-iň üsti bilen ýazylan ýa-da y-iň x-iň üsti bilen ýazylan regressiýanyň teoretiki deňlemesi diýilýär.

Regressiýanyň teoretiki çyzygy berlen şertlerde öwrenilýän baglanyşygyň matematiki modelidir. Regressiýanyň teoretiki çyzygy bir ululygyň beýleki ululyga görä üýtgeýşiniň ortaçasyny, ýagny beýleki täsir ediji faktorlar hasaba alynmadyk ýagdaýyny görkezýär. Şeýle çyzygyň deňlemesi empirik çyzygyň görnüşine görä kesgitlenýär.

Köplenç regressiýanyň teoretiki çyzyklary görnüşinde aşakdakylar ulanylýar:

$$\overline{y}_x = kx + b \quad \text{ýa-da} \quad \overline{x}_y = k_1 y + b_1,$$

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c \quad \text{ýa-da} \quad \overline{x}_y = a_1 y^2 + b_1 y + c_1,$$

$$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b \quad \text{ýa-da} \quad \overline{x}_y = \frac{a_1}{y} + b_1,$$

$$\overline{y}_x = ab^x \quad \text{ýa-da} \quad \overline{x}_y = a_1 b_1^y,$$

$$\overline{y}_x = a\log_b x \quad \text{ýa-da} \quad \overline{x}_y = a_1 \log_{b1} y.$$

«Regressiýa» (regressio) – yza hereket diýlen adalga biologiýadan alnan. Fransuz alymy Galton uly mukdarly statistiki maglumatlary öwrenende çagalaryň käbir görkezijiler boýunça ene-atalaryň ortaça görkezijilerine «gaýdyp» gelýändiklerini görüpdir. Ol «yzagaýdyşlygy» Galton regressiýa diýip atlandyrypdyr. Bu adalga soňra statistika girizilipdir. Eger regressiýanyň tejribäniň netijesinde alnan döwük çyzyklarynyň (regressiýanyň empirik çyzygy) üstünden deňleýji göni çyzyk geçirsek, bu göni y-iň x-iň üýtgeýşine baglylygyny aňladýar. Ýöne şeýle çyzyklaryň köp sanysyny geçirmek bolar. Ol göni tejribäniň esasynda alnan nokatlaryň arasyndan nähili geçmeli diýlen sorag ýüze çykarýar. Bu mesele eger öňünden teoretiki çyzygyň görnüşi belli bolsa, iň kiçi kwadratlar usuly bilen çözülýär. Ol usula görä döwük çyzygyň depelerinden regressiýanyň teoretiki çyzygynyň nokatlaryna (bu nokatlaryň abssissalary tejribeden alnan nokatlaryň abssissalaryna deň bolmaly) çenli aralygyň kwadratlarynyň jemi minimum bolmaly. Iň kiçi kwadratlar usuly eger çyzygyň görnüşi saýlanyp alnan bolsa, regressiýanyň çyzyklarynyň köplüginiň arasyndan iň kiçi kwadratlar manysynda X we Y ululyklaryň arasyndaky hakyky baglanyşygy aňladýan diňe bir çyzygy bölüp aýyrmaga mümkinçilik berýär. Eger bu çyzyk göni çyzyk bolsa, onda korrelýasion baglanyşyga çyzykly baglanyşyk ýa-da çyzykly korrelýasiýa diýilýär.

§6. Çyzykly korrelýasiýa. Regressiýanyň koeffisiýenti

Goý, tejribäniň netijesinde alnan Y nyşanyň X nyşana regressiýa çyzygy deňleýji göni çyzyk bilen çalşyrylan diýeliň. Bu gönä regressiýa gönüsi diýilýär. Onuň deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\overline{y}_x = kx + b. \tag{1}$$

Bu ýerde k we b näbelli ululyklar, olar iň kiçi kwadratlar usuly bilen kesgitlenýär. Eger tejribäniň esasynda alnan, X nyşanyň Y nyşana regressiýa deňlemesi göni çyzyk bilen çalşyrylan bolsa, onda ol göniniň deňlemesi

$$\overline{x}_y = k_1 y + b_1 \tag{2}$$

görnüşde ýazylýar. Bu ýerde näbelli k_1 we b_1 koeffisiýentler iň kiçi kwadratlar usuly bilen kesgitlenýär. k we b näbellileri kesgitlemek üçin iň kiçi kwadratlar usulyny ulanyp, iki sany çyzykly deňlemeler sistemasyny düzýärler.

k we b näbellilere görä sistema:

$$\begin{cases} b\sum\limits_{(x)} n_x + k\sum\limits_{(x)} n_x x = \sum\limits_{(x)} n_x \overline{y}_x \\ b\sum\limits_{(x)} n_x x + k\sum\limits_{(x)} n_x x^2 = \sum\limits_{(x)} n_x x\overline{y}_x \end{cases} \tag{3}$$

$k_1$we b_1 näbellilere görä sistema:

$$\begin{cases} b_1\sum\limits_{(y)} n_y + k_1\sum\limits_{(y)} n_y y = \sum\limits_{(y)} n_y \overline{x}_y \\ b_1\sum\limits_{(y)} n_y y + k_1\sum\limits_{(y)} n_y y^2 = \sum\limits_{(y)} n_y y\overline{x}_y \end{cases} \tag{4}$$

Belgilemeleri girizeliň:

$$\begin{aligned} &\sum_{(x)} n_x = n, &&\sum_{(y)} n_y = n, \\ &\sum_{(x)} n_x x = n\overline{x}, &&\sum_{(y)} n_y y = n\overline{y}, \\ &\sum_{(x)} n_x \overline{y}_x = n\overline{y}, &&\sum_{(y)} n_y \overline{x}_y = n\overline{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

(5) belgilemeleri göz öňünde tutup, (3) we (4) sistemalaryň birinji deňlemelerini aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$bn + kn\overline{x} = \overline{y}n,$$

$$b_1 n + k_1 n\overline{y} = \overline{x}n.$$

Bu ýerden $b = \overline{y} - k\overline{x}$, $b_1 = \overline{x} - k_1\overline{y}$, onda (1) we (2) deňlemelerden

$$\overline{y}_x = kx + \overline{y} - k\overline{x}, \quad \overline{x}_y = k_1 y + \overline{x} - k_1\overline{y},$$

ýa-da

$$\overline{y}_x - \overline{y} = k(x - \overline{x}), \tag{6}$$

$$\overline{x}_y - \overline{x} = k_1(y - \overline{y}). \tag{7}$$

(6) we (7) deňlemelere regressiýa göni çyzyklarynyň deňlemeleri diýilýär.

Bu gönüleriň k we k_1 burç koeffisiýentlerine regressiýanyň koeffisiýentleri diýilýär we olar aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$R_{yx} = k = \mathrm{tg}\alpha, \quad R_{xy} = k_1 = \mathrm{tg}\beta.$$

(6) we (7) deňlemeleri regressiýa koeffisiýentiniň üsti bilen ýazalyň:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = R_{yx}(x - \overline{x}),$$

$$\overline{x}_y - \overline{x} = R_{xy}(y - \overline{y}).$$

Bu deňlemelere, degişlilikde, Y-iň X-iň üsti bilen aňladylan regressiýasynyň deňlemesi we X-iň Y-iň üsti bilen aňladylan regressiýasynyň deňlemesi diýilýär.

Regressiýanyň R_{yx} we R_{xy} koeffisiýentleriniň fiziki manysyna düşünmek üçin (6) deňlemede $x = x_1$ hasap edeliň. Onda:

$$\overline{y}_{x1} = \overline{y} + kx_1 - k\overline{x}.$$

Eger x-yň bahasyny bir birlik üýtgedip $x = x_2 = x_1 + 1$ hasap etsek, onda

$$\overline{y}_{X_2} = \overline{y}_{X_1+1} = \overline{y} + kx_1 + k - k\overline{x}.$$

Onda $R_{yx} = k = \overline{y}_{X_2} - \overline{y}_{X_1}$, $R_{y_x} = \overline{y}_{X_i+1} - \overline{y}_{X_1}$.

Öň belleýşimiz ýaly, regressiýanyň göni çyzygy tötän ululygyň üýtgeýşiniň ortaçasyny berýär (beýleki faktorlaryň täsiri hasaba alynmadyk ýagdaýynda), regressiýanyň R_{yx} koeffisiýenti (edil şonuň ýaly R_{xy}) bolsa ululyklaryň biri bir birlik üýtgände beýlekisiniň ortaça näçe birlik üýtgejekdigini görkezýär.

Regressiýanyň R_{yx} we R_{xy} koeffisiýentlerini tapmak üçin (3) we (4) sistemalardan k we k_1 ululyklary tapmak ýeterlikdir. Ondan soň (5) belgilemeleri göz öňünde tutup, aşakdaky aňlatmalary alarys:

$$R_{yx} \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \qquad R_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}.$$

Bu ýerde

$$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \sigma_x^2, \qquad \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \sigma_y^2.$$

Onda

$$R_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^2}, \qquad R_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_y^2} \tag{8}$$

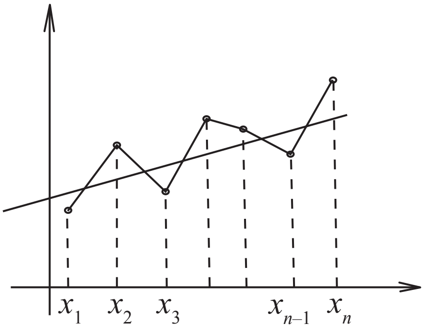
formulalary alarys.

$\sigma_x^2 > 0$, $\sigma_y^2 > 0$ bolanlygy üçin R_{xy} we R_{yx} koeffisiýentleriň alamatlary diňe sanawjylaryň alamatlaryna baglydyr. Sanawjylaryň ikisiniň hem meňzeş bolanlygy üçin regressiýanyň koeffisiýentleriniň ikisi hem položiteldir ýa-da ikisem otrisateldir, ýagny $R_{yx} \cdot R_{xy} > 0$, bu bolsa regressiýanyň göni çyzyklarynyň ikisiniňem absissa oky bilen ýiti burç ýa-da kütek burç emele getirýändigini görkezýär.

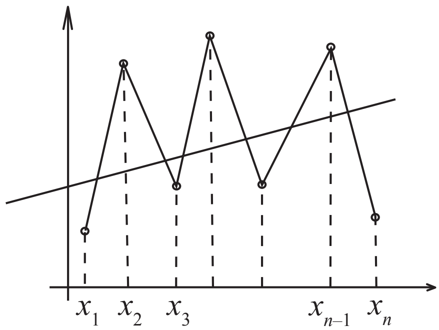
§7. Korrelýasianyň koeffisiýenti

Regressiýanyň teoretiki çyzygy, onuň nähili görnüşdedigine garamazdan, bir ululygyň beýleki ululygyň ortaçasynyň üýtgeýşine baglylykda nähili üýtgeýändigini görkezýär. *43-nji we 44-nji suratlarda* iki sany gözegçiligiň netijeleri görkezilen, olaryň ikisinde-de şol bir teoretiki çyzygy, ýagny göni çyzygy alýarlar.

Tejribäniň netijesinde alnan nokatlaryň göni çyzykdan gyşarmalaryna beýleki (hasaba alynmaýan) faktorlaryň täsiri hökmünde seretmek bolar. *43-nji suratda* bu faktorlaryň täsiri ujypsyz, ýöne *44-nji* *suratda* ol faktorlaryň täsiriniň uludygy (gyşarmalardan) görünýär. Bu bolsa X we Y nyşanlaryň arasyndaky baglanyşygyň ikinji ýagdaýda birinjä garanda gowşakdygyny görkezýär.



43-nji surat



44-nji surat

Indi bolsa X bilen Y nyşanlaryň arasyndaky baglanyşyga san taýdan baha bereliň. Şeýle bahalama üçin regressiýanyň koeffisiýentini ulanmak bolardy, ýöne onuň ululygy tötän ululyklaryň ölçeg birliklerine baglydyr.

Regressiýanyň koeffisiýentleri tötän ululyklaryň ölçeg birlikleriniň saýlanyp alnyşyna bagly bolmaz ýaly olar üçin bir umumy ölçeg birligini girizmeli bolýar. Statistikada şeýle umumy ölçeg birligi bolup tötän ululygyň standarty hyzmat edýär, ol standart hökmünde bu ululygyň orta kwadratik gyşarmasy alynýar.

Regressiýanyň R_{yx} we R_{xy} koeffisiýentlerini standartlaryň üsti bilen aňlatmak üçin olary standartlaryň gatnaşyklaryna köpeldeliň. Bu ýagdaýda biz regressiýa koeffisiýentleri üçin täze aňlatmalary alarys:

$$R^*_{yx} = R_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$R^*_{xy} = R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Şeýlelik bilen biz standartlarda aňladylan regressiýanyň koeffisiýentleriniň ikisiniň ýerine birini (sebäbi formulalaryň sag taraplary deň) alarys. Bu alnan ululyga korrelýasiýa koeffisiýenti diýilýär we r harpy bilen belgilenýär:

$$r = R_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{9}$$

Çyzykly korrelýasiýanyň koeffisiýenti abstrakt ululyk bolup, onuň ululygyna görä X we Y-iň arasyndaky baglanyşygyň jebisligine baha berilýär.

§8. Korrelýasiýanyň koeffisiýentiniň häsiýetleri

1. Korrelýasiýanyň koeffisiýenti absolýut ululygy boýunça birden uly däldir:

$|r| \leq 1$ ýa-da $-1 \leq r \leq 1$.

2. r bire näçe ýakyn bolsa, X we Y-iň arasyndaky baglanyşyk şonça-da jebisdir, beýleki täsir ediji (hasaba alynmadyk) faktorlaryň täsiri azdyr.

3. $r = 1$ ýa-da $r = -1$ bolsa, X we Y-iň arasynda korrelýasion baglanyşyk ýokdur, ol baglanyşyk funksional baglanyşykdyr we aşakdaky formulalar boýunça aňladylýar:

$$\overline{y}_x = kx + b; \qquad \overline{x}_y = k_1 y + b_1.$$

Şunlukda, ikinji deňleme birinji deňlemeden ony x-a görä çözüp alynýar (regressiýanyň gönüleri gabat gelýärler, beýleki faktorlaryň täsiri ýetmeýär, hemme tejribe boýunça alnan nokatlar bir göniniň – regressiýanyň gönisiniň üstünde ýatýarlar).

4. Korrelýasiýanyň koeffisiýentiniň alamaty regressiýanyň koeffisiýentleriniň alamatlary bilen gabat gelýär:

$$r = R_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \sigma_x > 0, \quad \sigma_y > 0.$$

Meselem, eger $r = -0{,}9$ bolsa, X faktor-nyşany bilen Y netije-nyşany bir-birine tersdir (olaryň biriniň ulalmagy bilen beýlekisi kemelýär) we jebisdir (diňe 10% del faktorlaryň täsirine baglydyr).

Bellik. Korrelýasiýanyň koeffisiýentiniň 2 we 3 häsiýetlerinden görnüşi ýaly, regressiýanyň gönüleriniň arasyndaky γ burç boýunça tötän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyga hil taýdan baha bermek bolar. Bu burç näçe kiçi bolsa, gönüler şonça bir-birine ýakyndyr, diýmek, baglanyşyk jebisdir.

Eger $\gamma = 0$ bolsa, gönüler gabat gelýär we baglanyşyk funksional (çyzykly) baglanyşyga öwrülýär we tersine, eger baglanyşyk funksional bolsa, gönüler gabat gelýärler.

5. Eger $r = 0$ bolsa, onda X we Y nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasion baglanyşyk ýokdur. Bu ýagdaýda regressiýanyň gönüleri özara perpendikulýardyrlar. Hakykatdan-da,

$$r = R_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.$$

Onda $R_{yx} = R_{xy} = 0$, sebäbi $\sigma_x > 0$; $\sigma_y > 0$. Onda regressiýanyň

$$\bar{y}_x - \bar{y} = R_{yx}(x - \bar{x}),$$
$$\bar{x}_y - \bar{x} = R_{xy}(y - \bar{y})$$

gönüleriniň deňlemelerinden alarys:

$$\bar{y}_x = y, \qquad \bar{x}_y = x.$$

Umuman, korrelýasiýanyň koeffisiýentiniň nola deň bolmagy X bilen Y-iň arasynda diňe çyzykly korrelýasion baglanyşygyň ýokdugyny aňladýar. Bu bolsa beýleki korrelýasion baglanyşygyň (meselem, egriçyzykly ýa-da funksional baglanyşygyň) ýokdugyny aňlatmaýar.

6. Korrelýasiýanyň koeffisiýenti regressiýanyň gönüleriniň koeffisiýentleriniň orta geometrik ululygydyr, ýagny

$$r = \pm\sqrt{R_{yx}\cdot R_{xy}}\,.$$

Bu aşakdakydan gelip çykýar:

$$R = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x\sigma_y} = \pm\sqrt{\left(\frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x\sigma_y}\right)^2} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x^2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_y^2}} = \pm\sqrt{R_{yx}\cdot R_{xy}}\,.$$

Köküň öňündäki alamat regressiýanyň koeffisiýentleriniň alamatlary bilen kesgitlenýär. Eger $R_{yx} < 0$ (diýmek, $R_{xy} <0$) bolsa, onda köküň öňünde minus alamaty alynýar. Tersine bolsa plýus alamaty alynýar.

§9. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentini hasaplamagyň usullary

Iki sany X we Y tötän ululygyň arasyndaky baglanyşyk derňelende baş topluma durşuna gözegçilik edilýän ýagdaýa seýrek duş gelinýär. Şeýle gözegçilikler üçin ondan uly bolmadyk tötänleýin saýlama alnyp derňelýär. Şu saýlamanyň esasynda tapylan korrelýasiýanyň koeffisiýentine saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti diýilýär. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýenti r_s bilen belgilenýär. r_s bir saýlamadan beýleki saýlama geçilende üýtgeýär, diýmek, ol tötän ululykdyr. Eger şeýle bolsa, biz bu ululygyň paýlanyşy we san häsiýetlendirijileri, meselem, $M(r_s)$, $D(r_s)$ we başgalar barada aýdyp bileris. Korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentiniň bu häsiýeti baş toplum üçin korrelýasiýanyň koeffisiýentini bahalamaga mümkinçilik döredýär (biziň ahyrky maksadymyz saýlama toplumdaky däl-de, baş toplumdaky korrelýasion baglanyşygyň jebisligini barlamakdan ybaratdyr).

Goý, käbir baş toplumdan alnan tötänleýin saýlama üçin X we Y nyşanlaryň arasyndaky baglanyşygy aňladýan korrelýasion tablisa berlipdir diýeliň. Biz X we Y üçin wariasion hatarlarda ädimleri (goňşy wariantalaryň arasyndaky tapawutlar) hemişelik hasap edeliň:

$$h_x = x_{i+1} - x_i = conts \quad i = 1, 2, ..., n;$$

$$h_y = y_{j+1} - y_j = conts \quad j = 1, 2, ..., m;$$

Korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentiniň hasaplanyşyny ýönekeýleşdirmek üçin X we Y tötän ululyklardan täze U we V tötän ululyklara geçeliň, olar X we Y bilen aşakdaky çyzykly baglanyşykdadyrlar:

$$X = x_0 + h_x U;$$

$$Y = y_0 + h_y V. \tag{*}$$

(*) formulalardan U we V täze näbellileri tapalyň:

$$U = \frac{X - x_0}{h_x};$$

$$V = \frac{Y - y_0}{h_y}.$$

Eger X ululyk $x_1, x_2,...,$ bahalary, Y ululyk $y_1, y_2, ...,$ bahalary alýan bolsa, degişlilikde U ululyk $u_1, u_2, ...,$ V ululyk $v_1, v_2, ..,$ bahalary alýar we olar aşakdaky formulalar boýunça kesgitlenýär:

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{h_x};$$

$$v_j = \frac{y_j - y_0}{h_y}.$$

(u_i we v_j – şertli wariantlar) Şertli wariantlaryň ortaçalary aşakdaky formulalar boýunça kesgitlenýär:

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum u_i n_i, \qquad \overline{v} = \frac{1}{n}\sum v_j n_j,$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum u_i^2 n_i, \qquad \overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum v_j^2 n_j.$$

Onda

$$\overline{x} = x_0 + h_x\overline{u}, \quad \overline{y} = y_0 + h_y\overline{v},$$

$$\sigma_x = h_x\sigma_u, \quad \sigma_y = h_y\delta_v,$$

$$D_x = h_x^2 Du, \quad Dy = h_y^2 Dv,$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}, \qquad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2},$$

$$\sigma_x = h_x\sigma_u, \quad \sigma_y = h_y\delta_v,$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_0 y_0 + x_0 h_y \overline{v} + y_0 h_x \overline{u} + h_x h_y \overline{u}\,\overline{v},$$

$$\overline{xy} = x_0 y_0 + x_0 h_y \overline{x} + y_0 h_x \overline{u} + h_x h_y \overline{uv},$$

$$\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = h_x h_y(\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}),$$

$$r_s = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{h_x h_y (\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v})}{h_x h_y \sigma_u \sigma_v} = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\sigma_u \sigma_v}.$$

Bu ýerde görşümiz ýaly, korrelýasiýanyň koeffisiýentiniň täze we köne wariantalardaky formulalary meňzeşdir.

$$\overline{uv} = \frac{\sum n_{uv} uv}{n}.$$

deňligi göz öňünde tutup, korrelýasiýanyň koeffisiýentini hasaplamak üçin amatly formulany alarys:

$$r_s = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v}.$$

Regressiýanyň saýlama koeffisiýentini bilip, regressiýanyň saýlama deňlemelerini aňsat tapyp bolar:

$$R_{xy} = r_s \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

$$R_{yx} = r_s \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Diýmek, regressiýanyň gönüleriniň deňlemeleri aşakdaky görnüşi alarlar:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_s \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}), \qquad \overline{x}_y - \overline{x} = r_s \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}).$$

Mesele. Berlen korrelýasion tablisa boýunça korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentini we regressiýanyň göni çyzyklarynyň saýlama deňlemelerini tapmaly.

y \ x	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	n_y
18	4	6					10
28		8	10				18
38			4	35	5		44
48			4	12	6		22
58				1	3	2	6
n_x	4	14	18	48	14	2	$n = 100$

Çözülişi. Hasaplamalary ýönekeýleşdirmek üçin şertli wariantalardaky korrelýasion tablisany düzeliň, «ýalan nollar» diýip $x_0 = 45$ we $y_0 = 35$ kabul edeliň, bu wariantalara iň uly ýygylyk (35) degişlidir. Alnan tablisany ulanyp, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, σ_u, σ_v, ululyklary tapalyň.

$V \backslash U$	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	n_v
–2	4	6					10
–1		8	10				18
0			4	35	5		44
1			4	12	6		22
2				1	3	2	6
n_u	4	14	18	48	14	2	$n = 100$

$$\overline{u} = \frac{-3 \cdot 4 - 2 \cdot 14 - 1 \cdot 18 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 2}{100} = -0{,}4,$$

$$\overline{v} = \frac{-2 \cdot 10 - 1 \cdot 18 + 1 \cdot 22 + 2 \cdot 6}{100} = -0{,}04,$$

$$\overline{u^2} = \frac{9 \cdot 4 + 4 \cdot 14 + 1 \cdot 18 + 1 \cdot 14 + 4 \cdot 2}{100} = 1{,}32,$$

$$\overline{v^2} = \frac{4 \cdot 10 + 1 \cdot 18 + 1 \cdot 22 + 4 \cdot 6}{100} = 1{,}04,$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{1{,}32 - (-0{,}4)^2} = 1{,}077,$$

$$\sigma_v = \sqrt{v^{-2} - (\overline{v})^2} = \sqrt{1{,}04 - (0{,}04)^2} = 1{,}019.$$

Indi bolsa $\sum n_{uv}uv$ – jemi tapalyň. Şertli wariantalardaky korrelýasion tablisadan biz $\sum n_{uv}uv$ aňlatmada u-nyň her san bahasy yzygiderli v-niň san bahalaryna köpeldilýär (ýa-da tersine) we ol köpeltmek hasyly olaryň bilelikde ýüze çykmagyny aňladýan n_{uv} ýygylyga köpeldilýär, soňra bu köpeltmek hasyllary jemlenýär. Biziň meselämizde

$$\sum n_{uv}uv = -3 \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) \cdot 6 + (-2) \cdot (-1) \cdot 8 +$$
$$+(-1) \cdot (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 90,$$
$$\sum n_{uv}uv = 90.$$

Korrelýasiýanyň koeffisiýentini hasaplalyň:

$$r_s = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{90 - 100 \cdot (-0{,}4) \cdot (-0{,}04)}{100 \cdot 1.077 \cdot 1{,}019} = 0{,}81.$$

Korrelýasianyň koeffisiýentiniň 0,81 ululygy X we Y nyşanlaryň arasyndaky çyzykly korrelýasion baglanyşygyň has jebisdigini görkezýär. Bu ýerde diňe 19% beýleki faktorlaryň paýyna düşýär.

Regressiýanyň gönüleriniň deňlemelerini ýazmak üçin aşakdaky ululyklary hasaplalyň:

$$\overline{x} = x_0 + h_x\overline{u} = 45 + 5 \cdot (-0,4) = 43,$$

$$\overline{y} = y_0 + h_y\overline{v} = 38 + 10 \cdot (-0,04) = 37,6,$$

$$\sigma_x = h_x\sigma_u = 5 \cdot 1,077 = 5,385,$$

$$\sigma_y = h_y\sigma_v = 10 \cdot 1,019 = 10,19.$$

Onda regressiýanyň gönüleriniň saýlama deňlemeleri:

$$\overline{y}_x - 37,6 = 0,806\frac{10,19}{5,358}(x - 43),$$

$$\overline{x}_y - 43 = 0,806\frac{5,385}{10,19}(y - 37,6)$$

ýa-da

$$\overline{y}_x = 1,525x - 27,975,$$

$$\overline{x}_y = 0,426y + 41,4.$$

Käbir ýagdaýlarda X we Y nyşanlaryň ölçegleri umumy görnüşli korrelýasion tablisa getirmeýär, her obýekt üçin faktor-nyşanynyň we netije-nyşanynyň ölçegleri bilen kanagatlanýarlar. Şeýle ýagdaýda korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentini aşakdaky formula boýunça kesgitlemek amatlydyr:

$$r_s = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \overline{y})^2}}.$$

Mesele. Towugyň 10 sany ýumurtgasynyň X uzynlygy we Y agramy ölçenende aşakdaky tablisa alyndy:

Ýumurtga N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Uzynlygy X (mm)	60	58	57	55	56	58	55	57	55	59
Agramy Y (g)	56	53	54	51	54	59	55	55	56	58

Towuk ýumurtgasynyň uzynlygy bilen agramynyň arasyndaky korrelýasiýanyň saýlama koeffisiýentini tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen $\overline{x}$ we $\overline{y}$ ortaçalary tapalyň:

$$\overline{x} = \frac{570}{10} = 57 \qquad \overline{y} = \frac{550}{10} = 55.$$

Korrelýasiýanyň koeffisiýentine girýän jemleri hasaplamak amatly bolar ýaly kömekçi tablisa düzeliň:

№	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
1	60	56	3	9	1	1	3
2	58	53	1	1	–2	4	–2
3	57	54	0	0	–1	1	0
4	55	51	–2	4	–4	16	8
5	56	54	–1	1	–1	1	1
6	58	59	1	1	4	16	4
7	55	55	–2	4	0	0	0
8	57	55	0	0	0	0	0
9	55	56	–2	4	1	1	–2
10	59	57	2	4	2	4	4
$\sum$	570	550		28		44	16

Tablisadan alarys:

$$\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 16,$$

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 28,$$

$$\sum (y_i - \overline{y})^2 = 44,$$

$$r_s = \frac{16}{\sqrt{28}\sqrt{44}} \backsimeq 0,455.$$

§10. Egriçyzykly korrelýasiýa. Korrelýasion gatnaşyk. Korrelýasion gatnaşygyň häsiýetleri

1. Egriçyzykly korrelýasiýa

Goý, tejribäniň netijesinde alnan döwük çyzyk egri çyzyk bilen çalşyrylan diýeliň, şeýle ýagdaýda korrelýasiýa egriçyzykly korrelýasiýa diýilýär. Regressiýanyň şeýle egrileri hökmünde öňden öwrenilen belli elementar funksiýalaryň grafikleri ulanylýar. Şeýle egriniň parabola, giperbola, görkezijili ýa-da logarifmik funksiýa bolmagy mümkin. Saýlanyp alnan egriniň näbelli parametrlerini kesgitlemek üçin iň kiçi kwadratlar usulyndan peýdalanylýar.

Eger regressiýanyň çyzygy hökmünde kwadrat parabola saýlanyp alnan bolsa, ýagny

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$$

bolsa, onda näbelli a, b, c parametrleri iň kiçi kwadratlar usuly bilen kesgitlemek üçin, a, b, c näbellilere görä çyzykly deňlemeleriň aşakdaky sistemasyny çözmeli bolýar:

$$\begin{aligned} c\sum_x n_x + b\sum_x n_x x + a\sum_x n_x x^2 &= \sum_x n_x \overline{y}_x, \\ c\sum_x n_x x + b\sum_x n_x x^2 + a\sum_x n_x x^3 &= \sum_x n_x x\overline{y}_x, \\ c\sum_x n_x x^2 + b\sum_x n_x x^3 + a\sum_x n_x x^4 &= \sum_x n_x x^2\overline{y}_x. \end{aligned}$$

Bu sistemany çözüp, $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$ näbelli parametrleri tapyp, $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ deňlemä goýup, regressiýanyň teoretiki çyzygynyň

$$\overline{y_x} = a_0x^2 + b_0x + c_0$$

görnüşdäki deňlemesini alarys.

2. Korrelýasion gatnaşyk

Eger X we Y nyşanlaryň arasyndaky baglanyşyk egriçyzykly bolsa, onda baglanyşygyň jebisligini kesgitlemek üçin korrelýasiýanyň koeffisiýenti däl-de, η korrelýasion gatnaşyk hyzmat edýär. Korrelýasion gatnaşyk aşakdaky formulalar boýunça kesgitlenýär:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x}; \qquad \eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y}.$$

Bu formulalarda

$$\sigma_{\overline{x}_y} = \sqrt{D(\overline{y}_x)} = \sqrt{\frac{\sum n_x(\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n}}; \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)};$$

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{D(\overline{x}_y)} = \sqrt{\frac{\sum n_y(\overline{x}_y - \overline{x})^2}{n}}; \quad \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

3. Korrelýasion gatnaşygyň häsiýetleri

Korrelýasion gatnaşyk birden uly bolmadyk položitel sandyr.

Eger $\eta = 0$ bolsa, X we Y ululyklar korrelýasion baglanyşykda bolmaýarlar.

Eger $\eta = 1$ bolsa, onda X we Y ululyklar funksional baglanyşykda bolýarlar. Bu bolsa tejribäniň esasynda alnan nokatlaryň regressiýanyň egri çyzygynyň üstünde ýatýandygyny aňladýar.

Eger $\eta = |r| = 1$ bolsa, onda tejribäniň netijesinde alnan hemme nokatlar regressiýanyň göni çyzygynyň üstünde ýatýarlar.

Mesele. Berlen korrelýasion tablisa boýunça X we Y tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasion gatnaşygy tapmaly.

Y* \ *X	**1**	**2**	n_y
2	30	1	31
6	1	18	19
n_x	31	19	$n = 50$
$\overline{Y}_x$	$\frac{66}{31}$	$\frac{110}{19}$	

Çözülişi. Hasaplamalary geçireliň:

1) $\overline{y}_{x=1} = \dfrac{2 \cdot 30 + 1 \cdot 6}{31} = \dfrac{66}{31}, \quad \overline{y}_{x=2} = \dfrac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 18}{19} = \dfrac{110}{19}.$

2)

$$\overline{y} = \frac{\sum_y n_y y}{n} = \frac{31 \cdot 2 + 19 \cdot 6}{50} = 3,52, \quad (\overline{y})^2 = (3,52)^2 = 12,39.$$

$$3)\ \overline{y^2} = \frac{\sum_y n_y y^2}{n} = \frac{31 \cdot 2^2 + 19 \cdot 6^2}{50} = 16,16,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{16,16 - 12,39} = 1,942.$$

$$4)\ \eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_x n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n}}}{\sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}},$$

$$\frac{\sum n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n} = \frac{31\left(\frac{66}{31} - 3,52\right)^2 + 19\left(\frac{110}{19} - 3,52\right)^2}{50} = 3,16.$$

$$5)\ \sigma_{\overline{y}x} = \sqrt{3,16} = 1,778, \quad \sigma_y = 1,942,$$

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{1,778}{1,942} = 0,915.$$

Görşümiz ýaly, korrelýasion baglanyşyk jebis.

Eger ýokarky tablisa üçin korrelýasiýanyň koeffisiýentini hasaplasak, r = 0,908 ululygy alarys, degişli çyzykly regressiýanyň deňlemesini bolsa

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})\,\overline{y}_x - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

formula boýunça hasaplardyk we regressiýanyň deňlemesi

$$\overline{y}_x = 3,6x - 1,45$$

bolardy (barlap görüň).

Özüňi barlamak üçin soraglar

1. Statistiki baglanyşyk diýlip nähili baglanyşyga aýdylýar?
2. Korrelýasion baglanyşyk nähili kesgitlenýär?
3. Şertli paýlanyş diýlip nähili paýlanyşa aýdylýar?

4. Şertli ortaça nähili kesgitlenýär?
5.Korrelýasion baglanyşygyň mysallaryny getiriň.
6.Umumy görnüşde korrelýasion tablisany düzüň.
7. Regressiýanyň empirik (tejribäniň esasynda alnan) çyzygy diýlip nämä aýdylýar?
8. Çyzykly korrelýasiýa diýlip nämä aýdylýar?
9. Iň kiçi kwadratlar usuly diýlip nähili usula aýdylýar?
10.Regressiýanyň göni çyzygynyň deňlemesi nähili ýazylýar?
11.Regressiýanyň koeffisiýenti nähili kesgitlenýär?
12.Korrelýasiýanyň koeffisiýentini nähili kesgitlemeli?
13.Korrelýasiýanyň koeffisiýentiniň häsiýetlerini görkeziň.
14.Egriçyzykly korrelýasiýa diýlip nähili baglanyşyga aýdylýar?
15.Korrelýasion gatnaşyk nähili kesgitlenýär?
16.Korrelýasion gatnaşygyň häsýetlerini görkeziň.

Meseleler we gönükmeler

1. *X* we *Y* ululyklaryň berlen bahalary üçin korrelýasiýanyň koeffisiýentini hasaplamaly. Regressiýanyň göni çyzygynyň deňlemelerini ýazmaly.

a)

x_i	4	6	8	10	12
y_i	5	8	7	9	14

Jogaby: $\overline{y}_x = 0{,}95x + 1$; $r_s = 0{,}895$;

b)

x_i	3	5	7	9	10	12
y_i	14	10	9	9	6	5

Jogaby: $\overline{x}_y = -\,0{,}99y + 16{,}4$; $r_s = -\,0{,}93$;

ç)

x_i	10	20	25	28	30
y_i	5	8	7	12	14

Jogaby: $\overline{y}_x = 0{,}45x - 1{,}1$; $r_s = 0{,}89$.

2. Berlen korrelýasion tablisa boýunça regressiýanyň gönüleriniň saýlama deňlemelerini tapmaly.

y_i \ x_i	10	15	20	25	30	35
15	6	4	–	–	–	–
25	–	6	8	–	–	–
35	–	–	–	21	2	5
45	–	–	–	4	12	6
55	–	–	–	–	1	5

Jogaby: $\overline{x}_y = 0{,}589y + 4{,}44.$

y_i \ x_i	5	10	15	20	25	30
14	4	6	–	8	–	4
24	–	8	10	–	6	–
34	–	–	32	–	–	–
44	–	–	4	12	6	–

Jogaby: $\overline{y}_x = 0{,}39x + 22{,}9.$

y_i \ x_i	10	15	20	25	30	35	40
100	2	4	–	8	4	–	10
110	3	–	5	–	2	10	–
120	–	3	–	4	5	6	–
130	2	–	4	6	–	–	5
140	–	4	7	–	–	1	5

Jogaby: $\overline{x}_y = 0{,}0655y + 35.$

Goşundylar

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

1-nji goşundy

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
04	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2224	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1093	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

x	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962

x	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ funksiýanyň bahalary

n	γ			n	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

$q = q(\gamma, n)$ funksiýanyň bahalary

n	v			n	v		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

χ^2 paýlanyşyň kritiki nokatlary

k	α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Stýudentiň paýlanyşynyň kritiki nokatlary

k	α					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
k	α					

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Täze Galkynyş eýýamy – Aşgabat, 2008.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Türkmenistanyň ykdysady strategiýasy: halka daýanyp, halkyň hatyrasyna. – Aşgabat, 2010.

3. Türkmenistanyň XX Halk maslahatynyň resminamalary, çykyşlar we metbugatdaky seslenmeler. –Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullygy, 2007.

4. Türkmenistanyň 2030-njy ýyla çenli durmuş-ykdysady ösüşiniň esasy görkezijileri. –Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullygy, 2010.

5. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М: Высшая школа, 2003.

6. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: Высшая школа, 2004

7. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М:Физматлит, 2002.

8. *Вентцель Е.С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей и математической статистике. М:Центракадемия, 2003.

9. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М:УРСС, 2005.

10. *Калинина В.Н.*, *Панкин В.Ф.* Математическая статистика. М.; Высшая школа 1994.

11. *Мацкевич И.П.*, *Свирид Г. П.*, *Булдык Г. М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике. Минск; Высшая школа,1996

12. *Маркович Э.С.* Курс высшей математики с элементами математической статистики. М; Высшая школа,1972.

13. *Розанов Ю.А.* Лекции по теории вероятностей. М; Наука,1985.

14. *Солодовников А.С.* Теория вероятностей М; Просвещение 1983.

15. *Скороход А.В.* Вероятность вокруг нас, Киев. Наукова думка 1990.

16. *Севастянов Б. А*, *Чистяков В.П.*, *Зубков А.М.* Сборник задач по теории вероятностей. М; Наука, 1970.

17. *Севастянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М. Наука, 1982

18. *Тимофеева Л.К.*,*Суханова Е. И.*, *Сафиулин Г.Г.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Самара,1994

Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М; Наука, 1987.

19. *Hudaýberenow Ö.* Ýokary matematika. Aşgabat, 2007.

20. *Annaýew T.* Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika. A: TOHU, 2010.

Mazmuny

Tirkeş Annaýew

ÄHTIMALLYKLAR TEORIÝASY WE MATEMATIKI STATISTIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*T. Sadykow*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Neşir üçin jogapkär	*M. Almazowa*

Çap etmäge rugsat edildi
Möçberi 60 x 90 $^{1}/_{16}$. Edebi garniturasy.
Şertli. Çap listi. Şertli-reňkli ottiski. Hasap-neşir listi.
Çap listi. Sargyt № 2690. Sany.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.