Türkmenistanyň Goranmak ministrliginiň
Beýik Saparmyrat Türkmenbaşy adyndaky
Harby instituty

ELEMENTAR MATEMATIKA – II

(Okuw-usuly gollanma)

Aşgabat – 2018

Bu okuw-usuly gollanma matematikanyň “Elementer matematika” boýunça taýýarlanyldy. Okuw-usuly gollanmada orta mekdep derejesindäki temalara seredildi, ýagny kwadrat funksiýalar, deňlemeler we deňlemeler sistemasy, progressiýa, trigonometrik we ters trigonometrik funksiýalaryň üstünde geçirilýän amallar, rasional görkezijili dereje, görkezijili we logarifmik funksiýalar barada düşünje berildi hem-de olara degişli mysallar çözülip görkezildi. Mundan başga-da harby talyplaryň özbaşdak çözmekleri üçin mysallar jogaplary bilen berildi. Bu okuw-usuly gollanma harby talyplaryň bilimlerini barlamak we bahalandyrmak üçin niýetlenendir.

Taýýarlanlar: Harby institutyň Fizika-matematika kafedrasynyň uly mugallymy G.G.Durdyýewa we mugallym M.K.Ataýew.

Synçylar:

- M.Rahymow – Harby institutyň Fizika-matematika kafedrasynyň professory, fizika-matematika ylymlarynyň doktory.

- T.Annaýew – S.A.Niýazow adyndaky Türkmen oba hojalyk uniwersitetiniň Tebigy bilimler kafedrasynyň dosenti, fizika-matematika ylymlarynyň kandydaty.

GIRIŞ

Adamzat taryhyna nazar salmagymyz bize adamyň öz gündelik durmuşyny dolandyrmakda ýerine ýetirýän islendik hereketiniň dürli häsiýetli meseleleri çözmegi bilen baglydygyny görkezýär. Şeýle meseleleri çözmekde matematikanyň giňden ulanýandygy düşnüklidir. Bu diýildigi matematikany öwrenilende ilki bilen başlangyç düşünjeleri yzygiderlikde öwrenmekligi talap edýär. Matematikany öwrenmek adamda logiki oýlanmalaryň takyk bolmagyny, çylşyrymly hadysalary ýönekeýleşdirmegi, her bir meselä çuňňur düşünmek başarnyklaryny kämilleşdirýär. Häzirki zaman talyplary diňe bir matematikanyň esaslaryny bilmek bilen çäklenmän, olary öz işleriniň çäklerinde ulanmagy, mümkin bolan ylmy gözleglerinde täze matematika usullardan ýeterlik peýdalanmagy başarmalydyrlar. Şol sebäpli bu okuw-usuly gollanmamyz matematikanyň mekdep derejesinde taýýarlanyp, aşakdaky temalara seredildi, ýagny kwadrat funksiýalar, deňlemeler we deňlemeler sistemasy, progressiýa, trigonometrik we ters trigonometrik funksiýalaryň üstünde geçirilýän amallar, rasional görkezijili dereje, görkezijili we logarifmik funksiýalar barada düşünje berildi hem-de olara degişli mysallar işlenilip görkezildi. Mundan başga-da harby talyplarymyzyň alan bilimlerini düýpli özleşdirmekleri üçin ýumuşlaryň toplumy hödürlenýär. Özbaşdak işlemek üçin mysallaryň ýerine ýetirilişiniň dogrulygyny barlamak üçin, olaryň jogaplary hem berilýär. Okuw-usuly gollanmany "Ýokary matematika" dersini okatmakda ulanylýan edebiýatlara goşmaça hökmünde ulanmak maslahat berilýär.

I BAP. KWADRAT FUNKSIÝA

Funksiýa barada düşünje

Bir üýtgeýän ululygyň beýleki bir üýtgeýän ululygyň ýeke-täk bahasyna gabat gelýän bolsa, onda oňa *funksional baglylyk* ýa-da *funksiýa* diýilýär we $y = f(x)$ ýaly belgilenýär. Bagly däl üýtgeýän ululyga başgaça argument diýip atlandyrylýar we adatça x bilen belgileýärler, bagly üýtgeýän ululyga bolsa argumentiň funksiýasy diýip atlandyrýarlar we y bilen belgileýärler. Funksional baglylykda bagly däl x ululygyň her bir bahasyna bagly bolan y ululygyň ýeke-täk bahasy gabat gelýär. Bagly üýtgeýän y ululygyň bahalaryna funksiýanyň bahalary diýýärler.

Bagly däl üýtgeýän x ululygyň alyp bilýän ähli bahalary *funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny* emele getirýär, ol $D(f)$ görnüşde belgilenýär. Bagly üýtgeýän ululygyň alyp bilýän ähli bahalary *funksiýanyň bahalarynyň ýaýlasyny* emele getirýär, ol $E(f)$ görnüşde belgilenýär.

Funksiýanyň grafigi – koordinata tekizliginde $E(f)$ nokatlaryň köplügidir. Nokatlaryň absissalary argumentiň bahalaryna, ordinatalary bolsa funksiýanyň degişli bahalaryna deňdir.

Funksiýanyň artmagy we kemelmegi

Kesgitleme. Eger berlen aralykdaky argumentiň uly bahasyna funksiýanyň uly bahasy degişli bolsa, onda ol funksiýa şol aralykda *artýan funksiýa* diýilýär.
Bu kesgitlemäni başgaça ýazalyň:

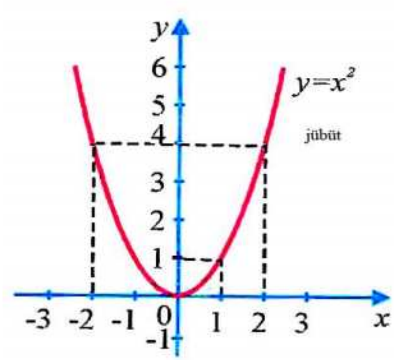
Eger $x_2 > x_1$ şerti kanagatlandyrýan käbir aralykdaky islendik x_1, x_2 üçin $f(x_2) > f(x_1)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda şol aralykda $f(x)$ funksiýa artýan funksiýa diýilýär.

Kesgitleme. Eger berlen aralykdaky argumentiň uly bahasyna funksiýanyň kiçi bahasy degişli bolsa, onda ol funksiýa şol aralykda *kemelýän funksiýa* diýilýär.
Bu kesgitlemäni başgaça ýazalyň:

Eger $x_2 > x_1$ şerti kanagatlandyrýan käbir aralykdaky islendik x_1, x_2 üçin $f(x_2) < f(x_1)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda şol aralykda $f(x)$ funksiýa kemelýän funksiýa diýilýär.

Jübüt we täk funksiýalar

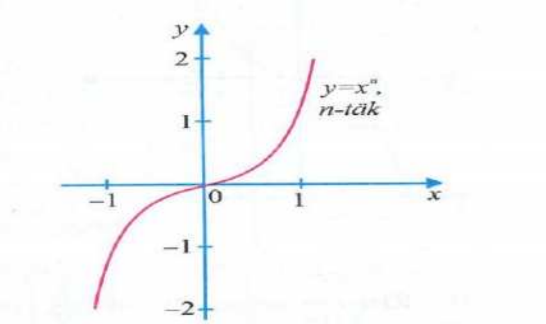
Kesgitleme. Eger $y = f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolan islendik x üçin $-x$-iň bahasy hem şol kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolsa we $f(-x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýa *jübüt funksiýa* diýilýär.
Jübüt funksiýanyň grafigi ordinata okuna görä simmetrikdir.
Meselem, $y = 3,\ y = x^2, y = |x|$ jübüt funksiýalardyr.



Kesgitleme. Eger $y = f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolan islendik x üçin $-x$-iň bahasy hem şol kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolsa we $f(-x) = -f(x)$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýa *täk funksiýa* diýilýär.

Täk funksiýanyň grafigi koordinata başlangyjyna görä simmetrikdir.

Meselem, $y = x,\ y = x^3,\ y = \frac{2}{x}$ täk funksiýalardyr.



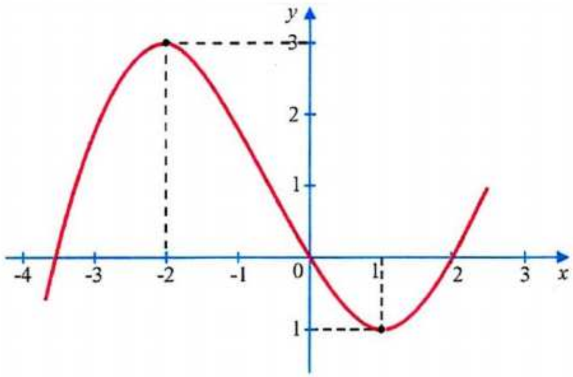
Kesgitleme. Eger $y = f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolan islendik x üçin $-x$-iň bahasy hem şol kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolsa we $f(-x) = f(x)$ hem-de $f(-x) = -f(x)$ deňlikler ýerine ýetmeýän bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýa täk funksiýa hem däl, jübüt funksiýa hem däl.

Meselem, $y = x^2 - 2x,\ y = x^2 + x^3$ funksiýalar ne-de jübüt, ne-de täkdirler.

Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary

Eger $x = a$ nokadyň töweregindäki ähli nokatlar üçin $f(x) < f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa onda $y = f(x)$ funksiýa $x = a$ nokatda *maksimuma* eýedir.

Eger $x = a$ nokadyň töweregindäki ähli nokatlar üçin $f(x) > f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa onda $y = f(x)$ funksiýa $x = a$ nokatda *minumima* eýedir.



Eger $[a, b]$ kesime degişli bolan we şol kesimdäki ähli x – ler üçin $f(x) \leq f(c)$ deňsizlik ýerine ýetýän c nokat bar bolsa, onda $[a, b]$ kesimde kesgitlenen $y = f(x)$ funksiýa şol kesimde özüniň iň uly bahasyna eýe bolýar.

Eger $[a, b]$ kesime degişli bolan we şol kesimdäki ähli x – ler üçin $f(x) \geq f(c)$ deňsizlik ýerine ýetýän c nokat bar bolsa, onda $[a, b]$ kesimde kesgitlenen $y = f(x)$ funksiýa şol kesimde özüniň iň kiçi bahasyna eýe bolýar.

Funksiýanyň nollary, alamatynyň hemişelik aralyklary

$y = f(x)$ funksiýanyň nola deň bolýan x – iň bahalaryna *funksiýanyň nollary* diýilýär.

Mysallar:

1. $f(x) = 4{,}5x - 18$ funksiýanyň nollaryny we alamatynyň hemişelik aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi: $4{,}5x - 18 = 0$

$4{,}5x = 18$

$x = 18 : 4{,}5$

berlen deňlemäniň köki $x = 4$, onda $4{,}5x - 18 > 0$ we $4{,}5x - 18 < 0$ deňsizlikleri çözmek bilen, berlen funksiýanyň $x > 4$ bolanda diňe položitel bahalara, $x < 4$ bolanda diňe otrisatel bahalara eýe bolýandygyny alarys. Diýmek, $f(4) = 0$, $(4; +\infty)$ bolanda

$f(x) > 0$, $(-\infty; 4)$ bolanda bolsa $f(x) < 0$.

2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ funksiýanyň nollaryny tapyň.

Çözülişi: Funksiýanyň nollaryny tapmak üçin $f(x) = 0$ deňlemäni çözeliň.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$
$$x_1 = \frac{2-4}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1,\ x_2 = \frac{2+4}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Ters funksiýa barada düşünje

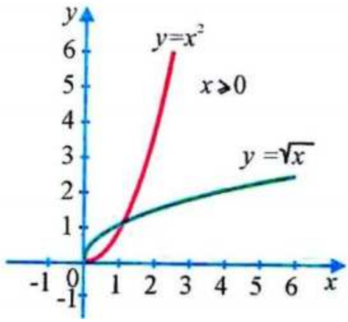
Biz şu wagta çenli funksiýalary öwrenenimizde argumentiň x_0 bahasy boýunça funksiýanyň y_0 bahasynyň tapylyşyna seredipdik. Käte ters meselä, funksiýanyň y_0 bahasy boýunça argumentiň x_0 bahasynyň tapylyşyna hem seretmeli bolýar.

Goý, $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiýa berlin bolsun. $y = \frac{1}{2}x + 1$ deňlikde x üýtgeýän ululygy y arkaly aňlatsak, $x = 2y - 2$ bolar. Bu formula bolsa y funksiýanyň her bir bahasyna x argumentiň diňe bir bahasy degişlidir. Şunuň ýaly ters baglanyşygy funksional baglylyk bolan funksiýalara *öwrülişikli funksiýalar* diýilýär.

Mysal: $x \geq 0$ bolanda $y = x^2$ funksiýanyň ters funksiýasyny tapalyň.

Çözülişi:$[0; \infty)$ san aralygynda bu funksiýa artýar, diýmek ters funksiýasy bardyr. $y = x^2$ deňlikden $x = \sqrt{y}$, x bilen y-iň ýerlerini çalyşsak $y = \sqrt{x}$ bolar.

$y = \sqrt{x}$ funksiýa $[0; \infty)$ aralykda $y = x^2$ funksiýanyň ters funksiýasydyr.



Teorema. Özara ters funksiýalaryň grafikleri $y = x$ göni çyzyga görä simmetrikdir.
Eger $(x_0; y_0)$ nokat $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine degişli bolsa, onda $(y_0; x_0)$ nokat $y = g(x)$ ters funksiýanyň grafigine degişlidir.
$y = x^2$ we $y = x^2$ nokatlar bolsa $y = x$ göni çyzyga görä simmetrikdir.

Kwadrat üçagza we onuň kökleri

Kesgitleme. $ax^2 + bx + c$ görnüşli köpagza (bu ýerde x – üýtgeýän ululyk, a, b, c – käbir sanlar, özem $a \neq 0$) *kwadrat üçagza* diýilýär.
Meselem, $2x^2 - 3x + 4$, $3x^2 + 0{,}7x$, $2x^2 - 3$, $0{,}8x^2$ - aňlatmalar kwadrat üçagzalardyr.
Kwadrat üçagzanyň köki diýip üýtgeýän ululygyň bu üçagzanyň bahasyny nola deň edýän bahasyna aýdylýar.
$ax^2 + bx + c$ kwadrat üçagzanyň köklerini tapmak üçin $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäni çözmek gerek.
Mysal: $2x^2 + 3x - 5$ kwadrat üçagzanyň köklerini tapalyň.
Çözülişi: $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = -2\frac{1}{2}$$

ax^2+bx+c kwadrat üçagza hem $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň köklerine eýe bolany üçin, ol edil kwadrat deňlemäniňki ýaly iki köke, bir köke eýe bolup biler ýa-da onuň köki bolman hem biler. Ol kwadrat deňlemäniň $D=b^2-4ac$ diskriminantynyň alamatyna baglydyr we oňa kwadrat üçagzanyň hem diskriminanty diýilýär.

Eger $D>0$ bolsa, kwadrat üçagzanyň iki köki bar.
Eger $D=0$ bolsa, kwadrat üçagzanyň bir köki bar.
Eger $D<0$ bolsa, kwadrat üçagzanyň köki ýok.

ax^2+bx+c kwadrat üçagzany $a(x-m)^2+n$ aňlatma görnüşine getirmek amatly bolýar (bu ýerde m we n käbir sanlar). Bu özgertmä kwadrat üçagzadan kwadrat iki agzany bölüp çykarmak diýilýär.

Mysal: $2x^2-12x+36$ üçagzany doly kwadraty bölüp çykarmak arkaly özgerdeliň:

Çözülişi:

$2x^2-12x+36 = 2(x^2-6x+18) = 2(x^2-2\cdot 3\cdot x+$
$+3^2-3^2+18) = 2((x-3)^2+9) = 2(x-3)^2+18$
$2x^2-12x+36 = 2(x-3)^2+18$

Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagytmak

Teorema. Eger x_1 we x_2 sanlar ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň kökleri bolsa, onda ony

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

görnüşde aňlatmak bolar.

Subudy. ax^2+bx+c kwadrat üçagzany a – ny ýaýyň daşyna çykarmak arkaly özgerdeliň. Onda alarys:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$ax^2 + bx + c$ kwadrat üçagzanyň kökleriniň $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäniň hem kökleri bolýändygy üçin, Wiýetiň teoremasyny ulanyp alarys:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Ýaýyň içindäki äňlatma garalyň:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 x -$$
$$-x_2 x + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)$$

Şeýlelikde,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Mysal: $3x^2 + 7x - 10$ kwadrat üçagzany köpeldijilere dargatmaly.

Çözülişi: $$3x^2 + 7x - 10 = 0$$
$$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 169$$
$$x_1 = \frac{-7 + 13}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{-7 - 13}{2 \cdot 3} = \frac{-20}{6} = -3\frac{1}{3}$$
$$3x^2 + 7x - 10 = 3(x - 1)\left(x + 3\frac{1}{3}\right)$$
$$3x^2 + 7x - 10 = (x - 1)(3x + 10)$$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Aşakdaky funksiýalaryň haýsylary artýan, haýsylary kemelýän?

1. $y = 6x + 5$
2. $y = 2x + 1$
3. $y = 35x - 13$
4. $y = x + 10$
5. $y = 12 - x$
6. $y = 1{,}5x - 4{,}5$

Funksiýanyň nollaryny tapyň:

7. $y = -0{,}7x + 14$
8. $y = (3x - 18)(x + 7)$
9. $y = \frac{6+3x}{x^2+1}$
10. $y = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$
11. $y = 4(x^2 + 9)$

12. $y = 2x(x+3)$

Kwadrat üçagzanyň köklerini tapyň:

13. $x^2 - x - 12$
14. $-2x^2 - x - 0{,}125$
15. $9x^2 - 9x + 2$
16. $-0{,}5x^2 + 3{,}5x$
17. $10x^2 + 5x - 5$
18. $x^2 - 2x - 8$
19. $-4x^2 + 24x - 36$
20. $4x^2 - 4$

Kwadrat üçagzany köpeldijilere dargadyň:

21. $x^2 - 4x - 45$
22. $x^2 + 10x - 11$
23. $3x^2 - 7x + 4$
24. $5x^2 - 8x + 3$
25. $2x^2 - 5x + 3$
26. $3x^2 - 13x + 14$

Droby gysgaldyň:

27. $\frac{3x+3}{4x^2+3x-1}$

28. $\frac{4x^2-3x-52}{3x-12}$

29. $\frac{9-b^2}{b^2-b-6}$

30. $\frac{2y^2-9y+4}{y^2-16}$

Jogaplary:

7. 20, 8. $(-7; 1)$, 9. $\pm\sqrt{-1}$, 10. $(-2; 1)$, 11. ± 3, 12. $\pm\sqrt{3}$,
13. $-3; 4$, 14. $-\frac{1}{4}$, 15. $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$, 16. $0; 7$, 17. $-1; \frac{1}{2}$, 18. $-2; 4$
19. $-\frac{5}{8}$, 20. $-1; 1$, 21. $(x-9)(x+5)$,
22. $(x-1)(x+11)$, 23. $3(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)$
24. $5(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)$, 25. $2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$,
26. $3(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)$, 27. $\frac{12}{4x-1}$, 28. $\frac{24}{8x+12}$, 29. $\frac{b+3}{b+2}$,
30. $\frac{2y-1}{2(y+4)}$.

II BAP. DEŇLEMELER WE DEŇLEMELER SISTEMASY

Bitin deňleme we onuň kökleri

Goşmak, aýyrmak, köpeltmek we noldan tapawutly sana bölmek amallarynyň kömegi bilen düzülen aňlatmalara *bitin aňlatmalar* diýilýär.

Biragzalar, köpagzalar bitin aňlatmlardyr.

$(4x - y)(x^3 - xy - 6y^3),\ a^5 - (a + b)(a^3 - 7b),$

$5a - \frac{b+3c}{7}\ ,\ 9m^2 : 5$

Çep we sag bölekleri bitin aňlatmalar bolan deňlemelere *bitin aňlatmalar* diýilýär.

Meselem, $3(x^2 + 2)(x - 2) = 7x - (x + 9)$ (1)

$\frac{y^5-1}{6} - \frac{y^2+1}{3} = 2y^2$ (2)

deňlemeler bitin deňlemelerdir.

(1) deňlemede ýaýlary açalyň, agzalarynyň hemmesini çep bölege geçireliň we meňzeş agzalary toplalyň.

$$3x^3 - 6x^2 + 6x - 12 = 7x - x - 9$$
$$3x^3 - 6x^2 - 3 = 0$$
$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0$$

(2) deňlemäniniň çep we sag böleklerini 6 – ä köpeldip, bu deňlemäni ýokarky deňlemä ýaly özgerdeliň:

$$y^5 - 1 - 2(y^2 + 1) = 12y^2$$
$$y^5 - 1 - 2y^2 - 2 = 12y^2$$
$$y^5 - 14y^2 - 3 = 0$$

Bir näbellili üçinji derejeli deňlemeleriň çözülişi

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ görnüşli deňlemä bir näbellili üçinji derejeli deňleme diýilýär(bu ýerde a,b,c,d – käbir san,özem $a \neq 0$).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

görnüşli üçinji derejeli deňlemä seredeliň.
Eger b, c, d – koeffisiýentler bitin sanlar bolsa, onda (1) deňlemäniň bitin köklerini d – erkin agzanyň bölüjileriniň arasyndan gözlemeli. Haçanda x_1 bitin kök tapylan bolsa, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ köpagzany $(x - x_1)$ – e bölýäris. Bölünmekden emele gelen paý – ikinji derejeli köpagzadyr. Ony nola deňläp, kwadrat deňlemäni alarys.
Mysal: $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
Çözülişi: Deňlemäniň bitin köklerini $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$ sanlaryň arasyndan gözläliň, sebäbi olar azat agzanyň bölüjileri bolup durýärlar. Bu sanlary barlap, $x = 2$ köki tapýarys.
$x^3 - x^2 - 8x + 12$ köpagzany $x - 2$ ikiagza bölýäris we paýda $x^2 + x - 6$ köpagzany alarys.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 8x + 12 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - x - 6 \\ \quad x^2 - 8x & \\ \quad \underline{x^2 - 2x} & \\ \qquad -6x + 12 & \\ \qquad \underline{6x + 12} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6) =$$
$$= (x - 2)(x - 3)(x + 2) = 0$$
$$x - 2 = 0, \qquad x - 3 = 0, \qquad x + 2 = 0$$

Köpagzanyň kökleri: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2$.

Bir näbellili dördünji derejeli deňlemeleriň çözülişi

1. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ görnüşli deňleme.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ görnüşli deňlemä *bikwadrat deňleme* diýilýär.(bu ýerde $a \neq 0$).
Bikwadrat deňlemä dördünji derejeli deňlemäniň hususy halydyr. $x^2 = y$ ornuna goýmany geçirip, bikwadrat deňleme $ay^2 + by + c = 0$ görnüşli kwadrat deňlemä getirilýär.

$ay^2 + by + c = 0$ deňlemäniň y_1, y_2 köklerine baglylykda aşakdaky ýagdaýlaryň bölmagy mumkin:

1). $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ bolanda bikwadrat deňlemäniň dört sany hakyky köki bar: $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$

2). $y_1 \geq 0, y_2 < 0$ bolanda bikwadrat deňlemäniň iki sany hakyky köki bar: $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$

$y_1 < 0, y_2 \geq 0$ bolanda hem edil şonuň ýalydyr.

3). $y_1 < 0, y_2 < 0$ bolanda bikwadrat deňlemäniň hakyky kökleri ýokdur.

Mysallar:

1. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi:

$$x^2 = y$$

$$4y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + 3}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1\,,$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - 3}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,.$$

$x^2 = 1$ deňlemäniň kökleri: $x = -1,\ x = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$ deňlemäniň kökleri: $x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$

Jogaby: $-1; 1; -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};$.

2. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi:

$$x^2 = y$$

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 1 = 64 + 36 = 100$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9\,,$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 - 10}{2} = \frac{-2}{2} = -1\,.$$

$$x^2 = 9 \text{ deňlemäniň kökleri: } x = -3,\ x = 3$$
$$x^2 = -1 \text{ deňlemäniň kökleri ýokdur.}$$

Jogaby: $-3; 3$

2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ görnüşli deňleme.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (1)$$

Deňlemäniň rasional köklerini tapmak üçin dürli usullar ulanylýar(bu ýerde $a_0, a_1, a_3, \dots, a_n$ – bitin sanlar). Olaryň biri (1) deňlemäniň iki bölegini hem a_0^{n-1} – e köpeltmekden , şoňra bolsa $a_0x = t$ belgilemäni girizmekden ybaratdyr.

Beýleki usul (1) deňlemäniň rasional köklerini $\frac{p}{q}$ görnüşde gözlemekden ybaratdyr (bu ýerde p san $a_n - i$ň bölüjisi; q san bolsa a_0 – ň bölüjisidir we p bilen q sanlar özara ýönekeý sanlardyr).

Mysallar:

1. $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: Deňlemäniň iki bölegini hem 4 – e köpeldip we $2x = t$ ornuna goýmany geçirip alarys:

$$(2x)^4 + 4(2x)^3 + (2x)^2 - 6(2x) - 4 = 0$$
$$t^4 + 4t^3 + t^2 - 6t - 4 = 0$$

Azat agzanyň bölüjisi -1 deňlemäniň köküdir. Onda

$$t = -1,\ t^3 + 3t^2 - 2t - 4 = 0$$

Bu deňlemäniň bir köki -1. Onda

$$t = -1,\ t^2 + 2t - 4 = 0$$
$$t = -1,\ t = -1 \pm \sqrt{5}\,,\ x = -0{,}5\,,\ x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Jogaby: $-0{,}5\,,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Deňlemäni başga usul bilen çözeliň:

$$4x^4 + 2x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$$

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ – azat agzanyň bölüjileridir. Bu sanlary barlap, $x = -\frac{1}{2}$ taparys. $4x^4 + 2x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$ köpagzany $x + \frac{1}{2}$ bölup, paýda $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ köpagzany alarys. Bu köpagzanyň kökini hem ýokarky ýaly taparys: $x = -\frac{1}{2}$. Ondan soňra alarys: $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, $x = -\frac{1}{2}$,

$x^2 - x - 1 = 0$; $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Jogaby: $-\frac{1}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Deňlemäni çözüň.

1. $4(x+3) - 3(x+2) - 2(x+1) + x = 0$
2. $(x-1) + 2(x-2) + 3(x-3) = 6\left(x - 2\frac{1}{3}\right)$
3. $\left((3x-54)\cdot 8 - 159\right): 21 = 21$
4. $\frac{1}{3}(3x-6) = \frac{2}{7}(7x-21) + 9$
5. $\frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{1}{24} - \frac{x(x+3)}{2} = \frac{(2x-1)^2}{6}$
6. $\frac{x(2-x)}{6} - \frac{(x-3)^2}{2} = \frac{6}{5} - \frac{(4-x)^2}{3}$
7. $x = \frac{(3-x)^2}{9} - \frac{x(x-12)}{18} + \frac{(3-x)(x-12)}{36}$
8. $2(1-x) = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x+1)(x-1)}{6}$
9. $(4x-1)^2 + 38 = (2x-3)(8x-1)$
10. $20\frac{2}{3} + (25x-2)(1+3x) = \frac{(15x+1)(15x-1)}{3}$
11. $0{,}5x^3 - 7 = 0{,}5x(x-3)(x+1)$
12. $x(x-11) + 36 = (6-x)(x+6)$

Deňlemäniň bitin we hakyky köklerini tapyň:

13. $x^3 - 5x + 4 = 0$
14. $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$
15. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$
16. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

17. $x^3 - 7x - 6 = 0$
18. $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$
19. $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$
20. $x^3 + 7x^2 + 4x - 2 = 0$

Deňlemeleri täze näbellini girizmek usuly bilen çözüň:

21. $(x^2 + 6x)^2 - (x^2 + 6x) = 14$
22. $(2x^2 + 3)^2 - 7(2x^2 + 3) + 10 = 0$
23. $(3x^2 + 4)^2 - 10(3x^2 + 4) + 21 = 0$
24. $(x^2 + 5x)^2 - 4(x^2 + 5x) - 12 = 0$
25. $(x^2 + 4x)^2 - 3(x^2 + 4x) = 10$
26. $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 15 = 0$
27. $(x^2 + 8x)^2(x^2 + 6x - 6) = 280$
28. $(x^2 - 9x)^2(x^2 - 9x - 12) = 160$
29. $(x^2 + 4x - 1)(x^2 + 4x + 3) = 12$
30. $(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x + 1) = -5$

Jogaplary:

1. $ýok$, 2. $tükeniksiz$, 3. 43, 4. -5, 5. $\left(-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$,
6. $(0; 2)$, 7. $(0; 21)$, 8. $(-6; 1)$, 9. -2, 10. -1,
11. $(-3{,}5)$, 12. 0, 13. $x = 1$, 14. $x = 2, x = -3$,
15. $x = 1$, 16. $x = \frac{1}{2}, x = -1, x = 2$, 17. $x = -2, x = -1, x = 3$,
18. $x = -7, x = -3, x = 1$, 19. $x = 1, x = 2 \pm \sqrt{5}$,
20. $x = -1, x = -3 \pm \sqrt{11}$, 21. $1;\ -7;\ -3 \pm \sqrt{17}$,
22. $(1;\ -1)$, 23. $(1;\ -1)$, 24. $\left(-6; 1; \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}\right)$,
25. $\left(1;\ -5;\ -2 \pm \sqrt{2}\right)$, 26. $(-1; 1; 3; 5,)$
27. $\left(-10; 2;\ -4 \pm \sqrt{2}\right)$, 28. $\left(1; 8; 9 \pm \sqrt{161}\right)$,
29. $\left(-2 \pm \sqrt{7}\right)$, 30. $(1; 4; 0; 3)$.

Iki näbellili deňlemeler sistemasynyň çözüwler köplügini koordinata tekizliginde şekillendirmek

Eger göni çyzykler kesişýän bolsalar, onda olaryň bir sany umumy nokady bardyr. Onda berlen deňlemeler sistemasynyň diňe bir çözüwi bardyr.

Eger göni çyzyklar parallel bolsalar, onda olaryň umymy nokatlary ýokdur. Onda berlen deňlemeler sistemasynyň çözüwi ýokdur.

Eger göni çyzyklar biri-birine gabat gelýän bolsalar, onda berlen deňlemeler sistemasynyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

Mysallar:

1. Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Çözülişi: Her deňlemede y – i x – iň üsti bilen aňladyp, berlen deňlemeler sistemasyna deňgüýçli sistemany alarys:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 & (I) \\ y = -3x + 6 & (II) \end{cases}$$

$y = 2x - 4$ deňlemeden taparys: eger $x = 4$ bolsa, $y = 4$ bolar, eger $x = 0$ bolsa, onda $y = -4$ bolar. Diýmek, (I) deňlemäniň grafigi $(4; 4)$ we $(0; -4)$ nokatlardan geçýän göni çyzykdyr.

$y = -3x + 6$ deňlemeden taparys: eger $x = 0$ bolsa, $y = 6$ bolar, eger $x = 3$ bolsa, onda $y = -3$ bolar. Diýmek, (2) deňlemäniň grafigi $(0; 6)$ we $(3; -3)$ nokatlardan geçýän göni çyzykdyr.

Göni çyzyklar $(2; 0)$ nokatda kesişýärler. Diýmek, deňlemeler sistemasy ýeke-täk $x = 2$ we $y = 0$ çözüwe eýedir.

2. Berlen deňlemeler sistemasynyň näçe çözüwiniň bardygyny anyklamaly:

$$\begin{cases} 6x - 5y = 2 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

Çözülişi: Deňlemeleriň ikisinde hem y – i x – iň üsti bilen aňladyp, berlen deňlemeler sistemasyna deňgüýçli sistemany alarys:

$$\begin{cases} -5y = -6x + 2 \\ -2y = -4x + 10 \end{cases}, \text{ ýa-da } \begin{cases} y = 1{,}2x - 0{,}4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Birinji deňlemäniň burç koeffisenti 1,2 – ä, ikinjiňki bolsa 2 – ä deň. Görşümiz ýaly, olar dürli-dürli. Diýmek, bu göni çyzyklar kesişýärler. Onda deňlemer sistemasynyň ýeke-täk çözüwi bardyr.

3. Deňlemeler sistemasynyň näçe çözüwi bar:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 & (I) \\ 8x + 4y = 20 & (II) \end{cases}$$

Çözülişi: Deňlemeleriň ikisinde hem y – i x – iň üsti bilen aňladyp, berlen deňlemeler sistemasyna deňgüýçli sistemany alarys:

$$\begin{cases} y = -2x + 11 \\ 4y = -8x + 20 \end{cases}, \text{ ýa-da } \begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

Deňlemeleriň burç koeffisiýentleri deň, emma olar deňgüýçli deňlemeler däldirler. Diýmek bu deňlemeleriň grafikleri paralleldirler, bu deňlemeler sistemasynyň çözüwi ýokdyr.

4. Deňlemeler sistemasynyň näçe çözüwi bar:

$$\begin{cases} 12x + 6y = 18 & (I) \\ 14x + 7y = 21 & (II) \end{cases}$$

Çözülişi: Deňlemeleriň ikisinde hem y – i x – iň üsti bilen aňladyp, berlen deňlemeler sistemasyna deňgüýçli sistemany alarys:

$$\begin{cases} 6y = -12x + 18 \\ 7y = -14x + 21 \end{cases}, \text{ ýa-da } \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

funksiýanyň grafikleri biri-birine gabat gelýärler, sebäbi bu deňlemeler deňgüýçlidirler. Munuň özi sistemanyň tükeniksiz köp çözüwiniň bardygyny aňladýar.

Biri birinji, beýlekisi ikinji derejeli üýtgeýän iki ululykly iki deňlemeler sistemasyny çözmek

Üýtgeýän iki ululykly deňlemeler sistemasyny çözmek – sistemanyň deňlemeleriniň her birini dogry deňlige öwürýän üýtgeýän ululyklaryň bahalar jübütini tapmak diýmekdir. Başgaça aýdylanda, deňlemeler sistemasyny çözmek şu sistema girýän deňlemeleriň çözüwler köplükleriniň kesişmesini tapmak diýmekdir. Deňlemeler sistemasyny ornuna goýmak usulyny peýdalanyp çözüp bolýar. Munuň üçin birinji derejeli deňlemeden üýtgeýän bir ululygy beýleki bir üýtgeýän ululyk arkaly aňladýarlar we tapylan aňlatmany ikinji derejeli deňlemede goýýarlar. Derejesi ikiden ýokary bolmadyk üýtgeýän bir ululykly deňlemäni alýarlar. Ony çözüp, şol üýtgeýän ululygyň bahasyny tapýarlar, soňra bolsa beýleki üýtgeýän ululygyň bahalaryny tapýarlar.

Mysal: Deňlemeler ulgamyny çözeliň:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 2 \end{cases}$$

Çözülişi: Birinji deňlemeden üýtgeýän x ululygy y arkaly aňladalyň: $x = 1 - 2y$, ikinji deňlememede x – aňlatma derek $1 - 2y$ aňlatmany goýup, üýtgeýän ululykly deňlemäni alarys:

$$(1 - 2y)^2 - 3(1 - 2y)y - 2y^2 = 2$$

$$1 - 4y + 4y^2 - 3y + 6y^2 - 2y^2 = 2$$

$$8y^2 - 7y - 1 = 0$$

$$y_1 = -\frac{1}{8}, \qquad y_2 = 1$$

Tapylan y- iň bahasyny birinji deňlemede goýup, x – iň bahasyny tapalyň. $x_1 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 1\frac{1}{4}$

$$x_2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

Jogaby: $\left(1\frac{1}{4};\ -\frac{1}{8}\right), (-1; 1)$

Iki näbellili ikinji derejeli iki deňlemeli sistemanyň çözülişi

Eger sistema üýtgeýän iki ululykly ikinji derejeli iki deňlemeden düzülen bolsa, onda onuň çözüwini tapmak, adatça, kyn bolýar. Ornuna goýmak usulyny ýa-da deňlemeleri goşmak usulyny peýdalanyp, aýry-aýry hallarda şolar ýaly sistemany çözmek bolar.

Mysal: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ deňlemeler sistemasyny çözeliň.

Çözülişi: Ornuna goýmak usulyny ulanyp alarys: $y = \frac{6}{x}$

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$$

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = 3$$

$$y_1 = -2, \qquad y_2 = 2$$

Jogaby: $(-3;\ -2), (3;\ 2)$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 313 \\ x^2 - y^2 = 25 \end{cases}$

Çözülişi: Deňlemelerini agzama-agza goşup alarys:

$$2x^2 = 338\ , \quad x^2 = 169$$

$$x_1 = -13, \qquad x_2 = 13$$

$$y_1 = -12, \qquad y_2 = 12$$

Jogaby: $(-13; -12), (13; 12)$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Deňlemeler sistemasyny grafiki usulda çözüň:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = -6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = -8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 4 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ (x - 2)(y + 2) = x^2 + 2xy \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ \frac{1}{2x} + \frac{3}{2y} = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{4}{x+2} - \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases}$

Deňlemeler sistemasyny usullary ulanyp çözüň:

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228 \\ 3x^2 - 2y^2 = 172 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ xy = 30 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14 \\ x^2 + 2y^2 = 18 \end{cases}$

25. $\begin{cases} xy + 3x - 4y = 12 \\ xy + 2x - 2y = 9 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20 \\ x^2 - 2x + y = -5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - 3xy + 4y = 0 \\ x + 3xy - 3y = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y^2 + 3x - y = 1 \\ y^2 + 6x - 2y = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} xy + x = 56 \\ xy + y = 54 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x - xy = 10 \\ y + xy = 6 \end{cases}$

Jogaplary:

1. 2. $(4; -2), (-4; 2), (2; -4), (-2,4)$,

5. $(2; 0), (0; -2)$, 6. $\left(\sqrt{-3}; -2\right), \left(-\sqrt{3}; 4\right)$,

7. $(1; 0), (-2; 4)$, 8. $(0; 0), (2; 4)$, 9. $(-3;\ -6), (1; 2)$,

10. $(2;\ -2), (4{,}4;\ -5{,}2)$, 11. $(1; 0), (4;\ -2)$,

12. $(1;\ -1)$, $\left(\frac{2}{3}\ ;\ -1\frac{1}{6}\right)$,

13. $(2; 2), (0{,}75; 4{,}5)$, 14. $(0; 3), (4; -1)$,
15. $(-2; -3), (2; 3)$, 16. $(2; 3), (3; 2)$,
17. $\left(\frac{6}{\sqrt{6}};\ -\sqrt{6}\right), \left(-\frac{6}{\sqrt{6}}\ ;\ \sqrt{6}\right)$,
18. $\left(\pm 4\sqrt{-1};\ \pm 5\sqrt{-1}\right), (\pm 5; \pm 4)$,
19. $(4; 3), (-4; -3)$, 20. $(10; 8), (-10; -8)$,
21. $(3; 1), (-3; 1)$, 22. $(5; 6), (-5; -6)$,
23. $(6; 5), (-6; -5)$,
24. $(4; 1), (-4; -1)$, 25. $\left(4; \frac{1}{2}\right), (-3; -3)$,
26. $(1; -4), (0; -5)$, 27. $(1; -2), \left(\frac{8}{18}; -\frac{1}{3}\right)$
28. $\left(\frac{1}{3}; 1\right), \left(-\frac{1}{3}; -1\right)$, 29. $(8; 6), (-7; -9)$,
30. $(5; 1), \left(-\frac{2}{3}; 18\right)$.

III BAP. PROGRESSIÝALAR

Arifmetiki progressiýanyň n – nji agzasynyň formulasy

Ikinji agzadan başlap her bir agzasy öň ýanyndaky agzanyň üstüne şol bir sanyň goşulmagy bilen alnan yzygierlige *arifmetik progressiýa* diýilýär.

Başgaça aýdylanda, eger islendik n natural san üçin $a_{n+1} = a_n + d$ (bu ýerde d − haýsydyr bir san) şert ýerine ýetýän bolsa, onda (a_n) yzygiderlige arifmetik progressiýa diýilýär.

Meselem, $a_6 = a_5 + d$; $a_{100} = a_{99} + d$ > 0 bolanda arifmetik progressiýa artýar, $d < 0$ bolanda kemelýär.

Ikinjiden başlap, onuň islendik agzasy bilen, öň ýanyndaky agzanyň tapawudynyň d deňligi, arifmetik progressiýanyň kesgitlemesinden gelip çykýar, ýagny islendik n natural san üçin

$$d = a_{n+1} - a_n$$

deňlik dogrudyr

Mysallar:

1. Yzygiderligiň artýandygyny ýa – da kemelýändigini kesgitlemeli

$$-3, -5, -7, -9, -11, \ldots$$

Çözülişi:

$-3, -5, -7, -9, -11, \ldots$ yzygiderlik $a_1 = -3$ $d = -2$ bolan arifmetik progressiýadyr we ol kemelýändir, sebäbi

$$-3 > -5, -5 > -7, \qquad -7 > -9, -9 > -1$$

2. Goý, $a_1 = -3$, $d = 0{,}5$ berlen bolsun. Arifmetik progressiýany ýazmaly.

Çözülişi: Agzalary

$$a_2 = a_1 + d = -3 + 0{,}5 = 2{,}5$$
$$a_3 = a_2 + d = -2{,}5 + 0{,}5 = -2$$
$$a_4 = a_3 + d = -2 + 0{,}5 = -1{,}5$$
$$a_5 = a_4 + d = -1{,}5 + 0{,}5 = -1$$

$$a_6 = a_5 + d = -1 + 0{,}5 = -0{,}5$$
$$a_7 = a_6 + d = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$$
$$a_8 = a_7 + d = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$$
bolan arifmetik progressiýa berilýär. Onda şeýle arifmetik progressiýany ýazarys:
$$-3; -2{,}5;\ -2;\ -1{,}5;\ -1;\ -0{,}5; 0; 0{,}5; \ldots$$
Kä halatda arifmetik progressiýada tutuş yzygiderlige däl-de onuň ilkinji birnäçe agzalaryna seredilýär. Bu ýagdaýda tükenikli arifmetik progressiýa barada gürrüň edilýär.

Arifmetik progressiýanyň kesgitlemesi boýunça alarys:
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$
$$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 4d) + d = a_1 + 5d$$
Edil şonuň ýaly $a_7 = a_1 + 6d$ alarys we, umuman, $n - nji$ agzany (a_n) tapmak üçin (a_1) birinji agzanyň üstüne $(n-1)d$ aňlatmany goşmaly, ýagny
$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
Biz arifmetik progressiýanyň $n - nji$ agzasynyň formulasyny aldyk.

Bu formulany ulanyp, mesele çözmegiň mysallaryny getireliň.

3. Progressiýanyň $51 -$ nji agzasyny tapmaly:

$75; 73; 5; 72; \ldots$

Çözülişi: Onuň tapawudy $d = 73{,}5 - 75 = -1{,}5$; şonuň üçin
$$a_{51} = 75 + (-1{,}5) \cdot (51 - 1) = 0.$$
Arifmetik progressiýanyň esasy häsiýeti:

Yzygiderlik birinjiden (eger tükenikli arifmetik progressiýa bolsa, iň soňkudan) başga her bir agzasy, onuň öňündäki we yzyndaky agzalaryň orta arifmetiki bahasyna deň bolan ýagdaýynda we diňe şol ýagdaýda arifmetik progressiýadyr:
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Arifmetik progressiýanyň ilkinji n agzalarynyň jeminiň formulasy

Ilki bilen arifmetik progressiýanyň başyndan we ahyryndan deň daşlaşan islendik iki agzasynyň jeminiň birinji we iň soňky agzalarynyň jemine, ýagny

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$
$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n,$$

we ş.m

Indi jemiň ähli goşulyjylaryny täzeden, artýan tertipde:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

we kemelýän tertipde

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

täzeden ýazalyň hem – de iki deňligi – de agzama – agza goşalyň. Onda alarys:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Deňligiň sag böleginde sanlaryň n sany jübüdi özara goşulýarlar we olaryň her biri $a_1 + a_n$ jeme deňdir. Şonuň üçin

$$2S_n = (a_1 + a_n\ ) \cdot n.$$

Soňky deňligiň iki bölegini – de $2 -$ ä bölüp, arifmetik progressiýanyň birinji n agzasynyň jeminiň formulasyny alarys:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n\ ) \cdot n}{2}.$$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar

a_n yzygiderlik arifmetik progressiýadyr. Eger:

$a_1 = 10\ \ d = 3$ bolsa, a_6 – ny

1. $a_1 = 6{,}8\ d = -1{,}5$ bolsa, a_{22} – ni
2. $a_1 = -2{,}3\ \ d = 1{,}7$ bolsa, a_{31} – ni
3. $a_1 = 9{,}1\ \ d = 2$ bolsa, a_{17} – ni

4. $a_1 = 3{,}5 \;\; d = -0{,}7$ bolsa, a_{39} – y
5. $a_1 = -4{,}1 \; d = 4$ bolsa, a_{50} – ni tapyň

a_n yzygiderlik arifmetik progressiýadyr. Eger:

6. $c_1 = -2 \;\; d = 0{,}3$ bolsa, c_{12} – ni
7. $c_1 = 17 \;\; d = 0{,}5$ bolsa, c_{36} – ny
8. $c_1 = -3{,}2 \;\; d = 1{,}5$ bolsa, c_{23} – i
9. $c_1 = -3{,}2 \;\; d = -1{,}5$ bolsa, c_{23} – i
10. $c_1 = 5{,}7 \; we \; d = -2{,}9$ bolsa, c_{49} – y

Arifmetik progressiýanyň birinji on agzasynyň jemini tapyň:

11. $4; 8; 12; 16; \dots;$
12. $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots;$
13. $5; 2; -1; -4; \dots;$
14. $3; 7; 11; 15; \dots;$

Hasaplamaly:

15. $1 - den \; 99 - a$ çenli ähli täk sanlaryň jemini tapyň
16. $2 - den \; 100 - e$ çenli ähli jübüt sanlaryň jemini tapyň

Hataryň n agzalarynyň jemini hasaplaň:

17. $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots;$
18. $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots;$

Eger

19. $a_2 - a_6 + a_4 = -$ we $a_8 - a_7 = 2a_4;$
20. $S_4 - S_6 + 2a_5 + a_3 = 0$ we $S_2 + S_3 = 2;$
21. $S_3 = -3, \;\; S_5 = 10, \;\; S_7 = 35$

bolsa, arifmetik progressiýany tapyň.

Eger

22. $a_1 = 1$ we $S_5 = \frac{1}{4}(S_{10} - S_5)$
23. $a_1 \, a_2 \; a_3 = 120, \;\; a_1 + a_2 + a_3 = 15$

bolsa, arifmetik progressiýany tapyň.

Jogaplary:
1. $a_6 = 25$, 2. $a_{22} = -24{,}7$, 3. $a_{31} = 48{,}7$, 4. $a_{17} = 41{,}1$
5. $a_{39} = -23{,}1$, 6. $a_{50} = 191{,}9$, 7. $c_{12} = 1{,}3$, 8. $c_{36} = 34{,}5$, 9. $c_{23} = 29{,}8$, 10. $c_{23} = -37{,}7$, 11. $s_{10} = 220$,
12. $S_{10} = 220$, 13. $S_{10} = \frac{125}{12}$, 14. $S_{10} = -85$,
15. $S_{10} = 210$

Geometrik progressiýanyň n - nji agzasynyň formulasy

Kesgitleme. Ikinjiden başlap her bir agzasy öň ýanyndaky agzanyň şol bir sana köpeldilmegi netijesinde alnan, her biri noldan tapawtly bolan sanlaryň yzygierligine *geometrik progressiýa* diýilýär.
Başgaça aýdylanda, eger, islendik natural n üçin $b_n \neq 0$ we $b_{n+1} = b_n \cdot q$ şert ýerine ýetýän bolsa, onda b_n yzygiderlik geometrik progressiýadyr.

Geometrik progressiýanyň kesgitlemesinden, onuň ikinjiden başlap islendik agzasynyň öň ýanyndaky agza bolan gatnaşygy q deňligi, ýagny islendik natural $n-de$ $\frac{b_n+1}{b_n} = q$ deňligiň dogrudygy gelip çykýar.

q sana geometrik progressiýanyň maýdalawjysy diýilýär.

Eger q progressiýanyň maýdalawjysy 1 – den uly bolsa, onda $b_1 > 0$ bolanda progressiýa artýan, $b_1 < 0$ bolanda kemelýändir. Eger $q = 1$ bolsa, ona geometrik progressiýanyň ähli agzalary özara deňdirler. Geometrik progressiýany bermek üçin onuň birinji agzasyny we maýdalawjysyny görkezmek ýeterlikdir.
Meselem, eger $b_1 = 432$ we $q = \frac{1}{3}$ bolsa,

$$432; 144; 48; 16; 5\frac{1}{3}; \ldots \quad .$$

geometrik progressiýany alarys.

$b_n = 7 + 5\sqrt{2}\ we\ q = \sqrt{2} - 1$ şertler bilen
$7 + 5\sqrt{2};\ \ 3 + 2\sqrt{2};\ \ \sqrt{2} + 1; 1;\ \sqrt{2} - 1; \ldots$.
Geometrik progressiýa berilýär.

Eger $b_1 = -3$ we $q = -1$ bolsa, $-3; +3; -3; +3; -3; \ldots.$ geometrik progressiýany alarys.

Eger $b_1 = 6$ we $q = 1$ bolsa, 6; 6; 6; 6; 6; ... geometrik progressiýany alarys.

Geometrik progressiýanyň birinji agzasyny we maýdalawjysyny bilip, yzygiderli ikinji, üçünji we umuman, islendik agzasyny tapmak mümkin:

$$b_2 = b_1 q$$
$$b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2$$
$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3$$
$$b_5 = b_4 q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4$$

Edil şonuň ýaly $b_6 = b_1 q^5$, $b_7 = b_1 q^6$ birnäçe agzalary tapylýar. Umuman b_n – i tapmak üçin biz b_1 – i, q^{n-1} – e köpeltmeli bolarys, ýagny

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Biz geometrik progressiýanyň n – nji agzasynyň formulasyny aldyk.

Mysallar:

1. Geometrik progressiýanyň $b_1 = 1$ we $q = 3$ bolsa, onda b_8 – i tapmaly.

Çözülişi: Geometrik progressiýanyň n – nji agzasynyň formulasy boýunça taparys:

$$b_8 = 1 \cdot 3^7 = 2187.$$

2. Eger $b_1 = 2$ we $b_3 = 1$ bolsa, (b_n) geometrik progressiýanyň 10-njy agzasyny tapyň.

Çözülişi: Geometrik progressiýanyň birinji we üçünji agzalaryny bilip onuň maýdalawjysyny tapyp bolýar.

$b_3 = b_1 q^2$ bolany üçin $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{1}{\mathbf{2}}$ $q^2 = \frac{1}{2}$ deňlemäni çözüp taparys:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ýa – da } q = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Şeýlelikde, meseläniň şertini kanagatlandyrýan iki progressiýa

Eder $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolsa, onda, $b_{10} = b_1$

$$q^9 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = 2 \cdot \frac{2^4\sqrt{2}}{2^9} = -\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

Meseläniň iki çözüwi bar: $b_{10} = \frac{\sqrt{2}}{16}$ ýa – da $b_{10} = -\frac{\sqrt{2}}{16}$.

Goý, $b_{n-1}, b_{n,}\ b_{n+1}$ geometrik progressiýanyň üç yzygider agzasy bolsun, bu ýerde n san $1-$ den uly bolan islendik natural san. Onda alarys:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n};$$

Bu gatnaşyklaryň her biri progresiýanyň q maýdalawjysyna deňdir. Proporsiýanyň häsiýeti boýunça alarys:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Kwadraty berlen sanlaryň köpeltmek hasylyna deň bolan sana olaryň *orta geometrik bahasy* diýilýär.

Meselem, 6 san 4 we 9 sanlaryň orta geometrik bahasydyr, sebäbi $6^2 = 4 \cdot 9$.

Şeýlelikde, *geometrik progresiýanyň ikinjiden başlap islendik agzasy onuň bilen goňşy agzalaryň orta geometrik bahasyna deňdir*.

Geometrik progressiýanyň ilkinji n agzalarynyň jeminiň formulasy

Goý (b_n) geometrik progressiýa berlen bolsun. Geometrik progressiýanyň birinji n agzasynyň jemini S_n bilen belgiläliň:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n \qquad (1)$$

(1) deňligiň iki bölegini – de q köpeldeliň

$$S_nq = b_1q + b_2q + b_3q + \cdots + b_{n-1}q + b_nq$$

aşakdakylary göz öňünde tutup alarys,

$$b_1q = b_2, b_2q = b_3, b_3q = b_4, \dots, b_{n-1}q = b_n$$

onda

$$S_nq = b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + b_nq \qquad (2)$$

(2) deňlikden (1) deňligi aýyralyň:

$$S_nq - S_n = (b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + b_nq) -$$

$$-(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n) = b_nq - b_1$$

$$S_n(q-1) = b_nq - b_1.$$

bu ýerden $q \neq 1$ bolanda

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q-1} \qquad (I)$$

gelip çykýar.

Biz geometrik progressiýanyň ilkinji n agzalarynyň jeminiň formulasyny aldyk. Bu ýerde
$q \neq 1$. Eger $q = 1$ bolsa, onda progressiýanyň ähli agzalary birinji agza deňdir we $S_n = nb_1$.

Jemiň formulasynda b_n agzany, b_1q^{n-1} bilen çalyşsak, ony başga görnüşde ýazyp bolar:

$$S_n = \frac{b_nq^{n-1}q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1};$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} \qquad \text{eger } q \neq 1 \qquad \text{(II)}$$

Mysal: $b_1 = 1$ we $q = 2$ bolan (b_n) geometrik progressiýanyň birinji otuz agzasynyň jemini tapmaly.

Çözülişi: Progerssiýanyň birinji agzasynyň we maýdalawjysynyň belli bolany üçin (II) formuladan peýdalanmak amatly bolar.

Alarys:

$$S_{32} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{32} - 1)}{2 - 1} = 2^{32} - 1$$
$$= 4294967295.$$

Özbaşdak işlemek üçib mysallar:

Aşakdaky geometrik progressiýanyň $n -$ nji agzalarynyň formulalaryny tapyň:

1. $81; 54; 36; \dots;$
1. $-256;\ -192;\ -144; \dots;$
2. $-\sqrt{2}; 1;\ -0{,}5\sqrt{2}; \dots;$
3. $2 - \sqrt{3}; 7 - 4\sqrt{3}; 26 - 15\sqrt{3}; \dots;$
4. $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 3);\ \sqrt{5} + 1; 4; \dots;$
5. $5; -5; 5;\ -5; \dots;$

Geometrik progressiýanyň 7$-nji$ agzasny hasaplaň:

6. $5; 10; 20; \dots;$
7. $1100;\ 110;\ \ 11; \dots;$
8. $6; 3; 1{,}5; \dots;$
9. $5\frac{5}{8};\ -3\frac{3}{4};\ 2\frac{1}{2}; \dots;$

Geometrik progressiýada:

10. $b_1 = 76\frac{4}{5}$, $n = 6,\ \ b_6 = -\frac{12}{5}$
11. $b_1 = -20\frac{1}{4}$, $n = 5,\ \ b_5 = -\frac{1}{4}$

bolsa, onuň maýdalawjysyny we agzalarynyň jemini tapyň.

Geometrik progressiýada:

12. $q = 4,\ n = 8,\ b_8 = 49152$
13. $q = 2\frac{1}{2},\ n = 6\ \ \ b_6 = -3125$

bolsa, onuň birinji agzasyny we agzalarynyň jemini kesgitläň.

Geometrik progressiýada:

14. $q = 2,\ n = 9,\ S_9 = 1533$

15. $q = \frac{1}{2},\ n = 5\ \ S_5 = 3\frac{7}{8}$

bolsa, onuň birinji we iň soňky agzasyny tapyň.

Geometrik progressiýada:

16. $b_1 = 1,\ b_n = -512,\ S_n = -341$

17. $b_1 = \frac{3}{2},\ b_n = \frac{1}{1458},\ S_n = 1\frac{91}{792}$

bolsa, onuň agzalarynyň sanyny kesgitläň.

Jogaplary:

1. $b_n = 3^{3+n} \cdot 2^{n-1}$, 2. $b_n = 2^{10-2} \cdot 3^{n-1}$,

3. $b_n = \sqrt{2}^n - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$, 4. $b_n = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$,

5. $b_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 3\right)\left(1 - \sqrt{5}\right)^{n-1}$, 6. $b_n = 5(-1)^{n-1}$,

7. $b_7 = 640$, 8. $b_7 = 11 \cdot 10^3$, 9. $b_7 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

10. $S_6 = \frac{45}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 11. $S_6 = -896,\ g = -2$,

12. $S_5 = -30,\ g = \frac{1}{3}$, 13. $S_8 = 65535,\ b_1 = 3$,

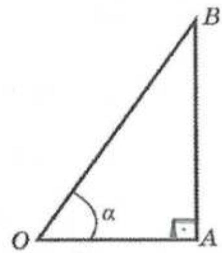
14. $S_6 = 5187,\ b_1 = -32$, 15. $b_1 = 3$, $b_9 = 768$.

IV BAP.TRIGONIMETRIK AŇLATMALAR WE FUNKSIÝALAR

$$sina = y\ ,\ \ cosa = x\ ,$$
$$tga = \frac{y}{x}\ ,\ ctga = \frac{x}{y}$$
$$sin^2x + cos^2x = 1$$
$$tga = \frac{sina}{cosa}\ ,\ ctga = \frac{cosa}{sina}$$

Erkin burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi

α ýiti burçuň sinusy diýip, üçburçlugyň α burçuň garşysynda ýatan katetiniň gipotenuzasyna bolan gatnaşygyna aýdylýar: $sin\alpha = \frac{AB}{BO}$



α ýiti burçuň kosinusy diýip, üçburçlugyň α burça sepleşýän katetiniň gipotenuzasyna bolan gatnaşygyna aýdylýar:
$cos\alpha = \frac{OA}{BO}$

α ýiti burçuň tangensi diýip, üçburçlugyň α burçuň garşysynda ýatan katetiniň ol burça sepleşýän katete bolan gatnaşygyna aýdylýar:
$tg\alpha = \frac{AB}{OA}$

α ýiti burçuň kotangensi diýip, üçburçlugyň α burça sepleşýän katetiniň onuň garşysynda ýatan katete bolan gatnaşygyna aýdylýar: $ctg\alpha = \frac{OA}{AB}$

α ýiti burçuň sekansy diýip, gipotenuzanyň bu burça sepleşýän katete bolan gatnaşygyna aýdylýar: $sec\alpha = \frac{OB}{OA}$

α ýiti burçuň kosekansy diýip, gipotenuzanyň bu burçuň garşysyndaky katetebolan gatnaşygyna aýdylýar: $cosec\alpha = \frac{OB}{AB}$

formulalar arkaly kesgitlenýändigi bellidir. Özünem olar diňe şol burçuň ululygyna bagly bolup, üçburçlugyň taraplarynyň ululygyna bagly däldir. Başgaça aýdylanda bolsa, burçuň sinusy, kosinusy we tangensi burçuň funksiýalarydyr. Olara *trigonometrik funksiýalar* diýilýär. Bu funksiýalaryň ters ululyklaryda trigonometrik funksiýalar bolup, olaryň ýörite atlary hem bardyr:

$sin\alpha$ – nyň ters ululygy $kosekans$ diýlip atlandyrylýar. $cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\alpha}$

$cos\alpha$ – nyň ters ululygy $\sec\alpha$ ýaly belgilenip, sekans diýilip atlandyrylýar: $\sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$

$tg\alpha$- nyň ters ululygy $ctg\alpha$ ýaly belgilänip, kotangens diýip atlandyrylýar: $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

Sinusiň, kosinusyň, tangensiň we kotangensiň häsiýetleri

$$\sin(-\alpha) = -sin\alpha$$

Meselem, eger $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ bolsa, onda $\sin(-30)^0 = -\frac{1}{2}$ bolar.

$$\cos(-\alpha) = cos\alpha$$

Meselem, eger $cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolsa, onda $\cos(-30^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolar.

$$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$$

Meselem, eger $\text{tg}\,45^0 = 1$ bolsa, onda $\text{tg}(-45^0) = -1$ bolar.

$$ctg(-\alpha) = -ctg(\alpha)$$

Meselem, eger $ctg60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bolsa, onda $\text{ctg}(-60^0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ bolar.

Şol bir argumentiň sinusynyň we kosinusynyň kwadratlarynyň jemi bire deňdir.

$$sin^2x + cos^2x = 1 \qquad (1)$$

Meselem, $\alpha = 30^0$ burç üçin formula boýunça alarys:

$$sin^2 30^0 + cos^2 30^0 = 1$$

$$sin30^0 = \frac{1}{2}, \ cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$\alpha = -30^0$ burç üçin hem formula boýunça alarys:

$$sin^2(-30^0) + cos^2(-30^0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Tangensiň we kotangensiň kesgitlemesinden ugur alyp,

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \quad \text{we} \quad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} \qquad (2)$$

Bu formulalara hem trigonometrik funksiýalar diýilýär.
Meselem, $\alpha = 60^0$ burç üçin (2) formula boýunça alarys:

$tg60^0 = \frac{sin60^0}{cos60^0}, \quad ctg60^0 = \frac{cos60^0}{sin60^0}$

$sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ cos60^0 = \frac{1}{2}$

$$tg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$ctg60^0 = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(-60^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = -\sqrt{3}$$

$$ctg(-60^0) = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aňlatmalary özgertmekde trigonometrik toždestwolaryň ulanylyşy

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

$$tg^2\alpha = \frac{1 - cos^2\alpha}{cos^2\alpha}$$
$$tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$
$$tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$cos^2\alpha \cdot (tg^2\alpha + 1) = 1$$
$$cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$
$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

α – ýiti burçdur.

Mysallar:

1. $tg\alpha = 1$ bolýandygyny bilip, ýiti burç üçin $cos\alpha$ – ny hasaplalyň.

Çözülişi: $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dogrudan hem, tablisa boýunça $tg45^0 = 1$ we $cos45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Jogaby: $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Eger $tg\alpha = \sqrt{3}$ we $0 < \alpha < 90^0$ bolsa, $2cos^2\alpha - 3cos\alpha$ aňlatmanyň bahasyny tapalyň.

Çözülişi: $2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} -$

$$-3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{2}{4} - \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

Jogaby: -1.

Getirme formulalary

Mysallar we olaryň çözülişi:

1. $sin120^0$ bahany tapmaly.

$$sin120^0 = \sin(90^0 + 30^0) = cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jogaby: $sin120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $tg1110^0$ bahany tapmaly.

$$tg1110^0 = tg(3 \cdot 360^0 + 30^0) = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Jogaby: $tg1110^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $cos^2(270^0 - \alpha) \cdot ctg2(90^0 - \alpha)$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

$$cos^2(270^0 - \alpha) \cdot ctg2(90^0 - \alpha) = (-sin\alpha)^2 \cdot (-ctg\alpha)^2 =$$

$$= sin^2\alpha \cdot \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = cos^2\alpha$$

Jogaby: $cos^2\alpha$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:
Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

1. $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} + ctg\alpha$
2. $tg\alpha + \frac{cos\alpha}{1+sin\alpha}$
3. $\frac{cos\alpha}{1-sin\alpha} + \frac{cos\alpha}{1+sin\alpha}$
4. $\frac{sin^3\alpha+cos^3\alpha}{sin\alpha+cos\alpha} + sin\alpha cos\alpha$
5. $\frac{1-2sin\alpha cos\alpha}{sin\alpha-cos\alpha}$
6. $\frac{cos^2\alpha-sin^2\alpha}{1+sin\alpha cos\alpha}$
7. $(1 + tg\alpha)^2 + (1 - tg\alpha)^2$
8. $(sin\alpha - cos\alpha)^2 + 2cos\alpha \cdot (sin\alpha - cos\alpha)$
9. $sin\alpha + cos\alpha \cdot tg(-\alpha)$
10. $cos^2\alpha \cdot tg^2(-\alpha) - 1$

11. $\frac{sin\alpha \cdot ctg(-\alpha)}{cos\alpha}$
12. $\frac{sin\alpha + \cos(-\alpha)}{1 - tg(-\alpha)}$
13. $\sin(\alpha - 270^0)$
14. $\cos(\alpha - 90^0)$
15. $tg(\alpha - 180^0)$
16. $ctg(\alpha - 360^0)$
17. $\sin(270^0 - \alpha) + ctg(90^0 - \alpha) + tg(360^0 + \alpha)$
18. $\cos(90^0 - \alpha) + sin(270^0 - \alpha) - cos(450^0 - \alpha)$
19. $\frac{\sin(90^0 + \alpha) \cdot \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha) \cdot \cos(180^0 + \alpha)}$
20. $\frac{\sin(-\alpha) \cdot ctg(-\alpha)}{\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) \cdot \cos(\alpha - 180^0)}$
21. $\frac{\sin(90^0 + \alpha) \cdot cos(360^0 - \alpha)}{\mathrm{tg}(90^0 - \alpha) \cdot \cos(270^0 + \alpha)}$
22. $\frac{\sin(90^0 + \alpha) \cdot cos(360^0 + \alpha)}{\mathrm{tg}(90^0 + \alpha) \cdot \cos(270^0 + \alpha)}$

Toždestwolary subut ediň:

23. $\frac{sin\alpha \cdot tg\alpha}{sin\alpha + tg\alpha} = \frac{tg\alpha - sin\alpha}{sin\alpha \cdot tg\alpha}$
24. $\frac{tg\alpha + ctg\beta}{ctg\alpha + tg\beta} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$
25. $\frac{tg^2\alpha - sin2^2\alpha}{cos^2\alpha - ctg^2\alpha} = -tg^6\alpha$
26. $\frac{tg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha} = sin^2\alpha$
27. $\frac{tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{ctg\alpha}{ctg^2\alpha - 1}$
28. $\frac{tg\alpha}{sin\alpha} - \frac{sin\alpha}{ctg\alpha} = cos\alpha$
29. $\frac{sin^2\alpha - cos^2\alpha + cos^4\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha + sin^4\alpha} = tg^4\alpha$
30. $\frac{tg^2\alpha + 1}{tg^2\alpha - 1} = \frac{1}{sin^2\alpha - cos^2\alpha}$

Jogaplary:

1. $\frac{1}{sin\alpha}$, 2. $\frac{1}{cos\alpha}$, 3. $\frac{2}{cos\alpha}$, 4. $(sin\alpha + cos\alpha)^2$, 5. $sin\alpha - cos\alpha$,
6. $\frac{cos\alpha - sin\alpha}{sin\alpha + cos\alpha}$, 7. $2sec^2\alpha$, 8. $-cos2\alpha$, 9. 0, 10. $-sin^2\alpha - 1$,

11. -1, 12. $cos\alpha$, 18. $-cos\alpha$, 19. $-tg\alpha$, 20. $-ctg\alpha$, 21. $cos\alpha$, 22. $-cos\alpha$.

Burçuň radian ölçegi

Islendik burça şöhläniň öz başlangyç nokadynyň daşynda aýlanmagyndan emele gelýän figura hökmünde garamak bolar. Şunlukda şöhläniň sagat diliniň aýlanýan ugruna garşylykly ugur boýunça aýlanmagyndan emele gelen burçlara položitel burçlar, şöhläniň sagat diliniň aýlanýan ugry boýunça aýlanmagyndan emele gelen burçlara bolsa otrisatel burçlar diýilmeklik kabul edilendir. Bize burçlaryň graduslarda, minutlarda we sekuntlarda ölçenilýändigi mälimdir. Bu ölçegleriň arasynda aşakdaky ýaly gatnaşyklar bar:

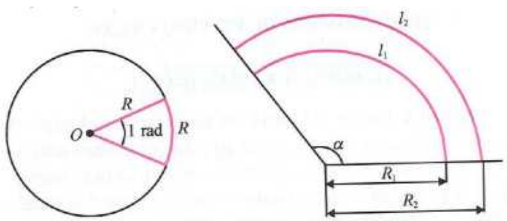
$1^0 = 60'$, $1' = 60''$, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^0$, $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$

Uzaklygy hemişe santimetr, wagty sekunt, massany gramda we ş.m. bilen ölçemeklik amatly bolmaýşy ýaly, burçlary hem hemişe graduslarda ölçemeklik amatly däldir. Praktikada burçlary ölçemegiň başga bir ölçeg birligi – radian ýygy-ýygydan ulanylýar. “Radian” sözi “radius” diýen latyn sözünden gelip çykandyr.

Kesgitleme. Merkezi burçuň daýanýan dugasynyň ululygynyň radiusyň ululygyna bolan gatnaşygyna (l, R) burçuň *radian ölçegi* diýilýär.

Merkezi burçuň radian ölçegini φ harpy bilen belgiläp, kesgitlemä laýyklykda $\varphi = \frac{l}{R}$ formulany alarys.

$l = R$ bolan halda $\varphi = 1$ bolýandygy sebäpli, daýanýan dygasynyň uzynlygy töweregiň radiusyna deň bolan merkezi burça 1 *radianlyk burç* diýilýär.



α^0 merkezi burçuň daýanýan dugasynyň uzynlygynyň $l = \frac{\pi R \alpha^0}{180^0}$ bolýandygy mälimdir. Onda şol burçuň radian ölçegi

$$\varphi = \frac{l}{R} = \frac{\pi \alpha^0}{180^0} \text{ bolar.}$$

R radiusly töweregiň uzynlygy $2\pi R$ – e deň. Ony R – e bölüp, doly töwerekde 2π radianyň barlygyny anyklarys. Gradus hasabynda doly töwerekde 360^0 bar.

Onda $2\pi = 360^0,\ \pi = 180^0$y ýerden

$$1^0 = \frac{\pi}{180^0} \approx 0{,}017rad, \qquad 1rad = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$$

Şeýlelik bilen, şol bir burçuň gradus we radian ölçegleriniň arasyndaky baglanyşygy

$\varphi = \frac{\pi \alpha^0}{180^0}$ ýa-da $\alpha^0 = \frac{180^0 \varphi}{\pi}$ formula arkaly aňladylýar. Bu formulalaryň kömegi bilen graduslarda berlen burçy radian ölçeginde, radianlarda berlen bolsa gradus ölçeglerinde aňladyp bolar.

Mysal üçin,

1. $\alpha^0 = 90^0$ bolsa, bu burçuň radian ölçegi
   $\varphi = \frac{\pi \cdot 90^0}{180^0} = \frac{\pi}{2}\ rad$ bolar.
2. $\alpha^0 = 120^0$ bolsa, bu burçuň radian ölçegi
   $\varphi = \frac{\pi \cdot 120^0}{180^0} = \frac{2\pi}{3}\ rad$ bolar.
3. $\varphi = 2\pi$ bolsa, onda $a^0 = \frac{180^0 \cdot 2\pi}{\pi} = 360^0$ bolar.
4. $\varphi = 1$ bolsa, onda $a^0 = \frac{180^0 \cdot 1}{\pi} \approx \frac{180^0}{3{,}14} \approx 57{,}3^0$ bolar.

Sinus funksiýanyň alamaty 1-nji we 2-nji çärýekde položiteldir, 3-nji we 4-nji çärýekde bolsa otrisateldir.

Kosinus funksiýanyň alamaty 1-nji we 4-nji çärýekde položiteldir, 2-nji we 3-nji çärýekde bolsa otrisateldir.

Tangens we *kotangens* funksiýalaryň alamaty 1-nji we 3-nji çärýekde položiteldir, 2-nji we 4-nji çärýekde bolsa otrisateldir.

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Radianlarda berlen burçlaryň gradus ölçegini tapyň:

1. $\varphi = 2$
2. $\varphi = \frac{\pi}{15}$
3. $\varphi = \frac{7\pi}{9}$
4. $\varphi = \frac{5\pi}{2}$
5. $\varphi = \frac{3}{4}$
6. $\varphi = \frac{\pi}{12}$
7. $\varphi = 1{,}5\pi$
8. $\varphi = \frac{11\pi}{4}$
9. $\varphi = \frac{\pi}{9}$
10. $\varphi = \frac{7\pi}{3}$

Graduslarda berlen burçlaryň radian ölçegini tapyň:

11. $\alpha^0 = 18^0$
12. $\alpha^0 = 30^0$
13. $\alpha^0 = 135^0$
14. $\alpha^0 = 450^0$
15. $\alpha^0 = 900^0$
16. $\alpha^0 = 1000^0$
17. $\alpha^0 = 67^0 30'$
18. $\alpha^0 = 15^0$
19. $\alpha^0 = 11^0 15'$
20. $\alpha^0 = 75^0 15'$

Aşakdaky haýsy çärýegiň burçlary:

21. $\varphi = 4$
22. $\varphi = \frac{\pi}{7}$
23. $\varphi = \frac{5\pi}{3}$
24. $\varphi = \frac{21\pi}{4}$
25. $\varphi = \frac{4\pi}{5}$
26. $\varphi = -3{,}25$
27. $\varphi = \frac{13\pi}{6}$
28. $\varphi = \frac{29\pi}{15}$
29. $\varphi = -\frac{4\pi}{9}$
30. $\varphi = 6$

Jogaplary:

1. $\approx 114^0 35'$, 2. 12^0, 3. 140^0, 4. 150^0, 5. $\approx 42^0 58'$,

6. 15^0, 7. 270^0 , 8. 495^0 9. 20^0 , 10. 420^0 , 11. $\frac{\pi}{10}$,
12. $\frac{\pi}{6}$, 13. $\frac{2\pi}{3}$, 14. $\frac{5\pi}{2}$, 15. 5π, 16. $\frac{50\pi}{9}$,
17. $\frac{3\pi}{8}$, 18. $\frac{\pi}{12}$, 19. $\frac{\pi}{16}$,

San argumentli trogonometrik funksiýalaryň bahalarynyň tablisasy

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:
Aňlatmanyň bahalaryny tapyň:

1. $5sin\frac{\pi}{2} - 2cos\pi + 3tg0$
2. $2cos\frac{\pi}{2} + 3sin\frac{3\pi}{2} - 3cos\pi$
3. $4sin\pi - 2cos\frac{3\pi}{2} - tg\pi$
4. $6cos0 - sin\frac{\pi}{2} + ctg\frac{3\pi}{2}$
5. $3cos\frac{\pi}{2} - 4sin\frac{3\pi}{2} + 8tg\pi$
6. $2cos\pi + 6ctg\frac{\pi}{2} - 5sin2\pi$
7. $7tg2\pi + sin0 - cos\frac{3\pi}{2}$
8. $a^2sin\frac{\pi}{2} + b^2cos0 + 2abcos\pi$
9. $sin\pi + cos\frac{\pi}{3} + sin^2\frac{\pi}{4}$
10. $3sin\frac{\pi}{6} + 2cos\pi + ctg^2\frac{\pi}{6}$
11. $6sin\frac{5\pi}{6} - 2cos2\pi + tg^2\frac{\pi}{3}$
12. $3tg\frac{\pi}{4} - sin^2\frac{\pi}{3} + ctg^2\frac{\pi}{4}$
13. $sin^2\frac{\pi}{4} + 3cos\frac{\pi}{3} - tg\frac{3\pi}{4}$
14. $2sin\frac{\pi}{6} - cos\frac{2\pi}{3} + ctg\frac{\pi}{4}$
15. $4sin^2\frac{\pi}{3} - ctg\frac{5\pi}{4} + 2cos^2\frac{\pi}{4}$
16. $sin\frac{7\pi}{6} + cos^2\frac{\pi}{6} + tg\frac{\pi}{6}$

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

17. $cos^4\alpha(1 + tg^2\alpha) + sin^2\alpha$
18. $\left(\frac{1}{sin\alpha} + ctg\alpha\right)\left(\frac{1}{sin\alpha} - ctg\alpha\right)$
19. $\left(\frac{1}{cos^2\alpha} - 1\right)ctg^2\alpha$
20. $\left(1 - \frac{1}{sin^2\alpha}\right)tg^2\alpha$
21. $\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}$

22. $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}$

23. $\frac{cos\alpha tg\alpha}{sin^2\alpha}-ctg\alpha cos\alpha$

24. $sin\alpha - cos\alpha(tg\alpha + ctg\alpha)$

25. $\frac{tg^2\alpha - sin^2\alpha}{ctg^2\alpha - cos^2\alpha}$

26. $\frac{cos^2\alpha - sin^2\beta}{sin^2\alpha sin^2\beta} - ctg^2\alpha ctg^2\beta$

27. $tg\alpha + \frac{cos\alpha}{1+sin\alpha}$

28. $ctg\alpha - \frac{cos\alpha}{1+sin\alpha}$

Toždestwolary sübüt etmeli:

29. $\frac{cos\alpha}{1-sin\alpha}=\frac{1+sin\alpha}{cos\alpha}$

30. $1-2sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

Jogaplary:

1. 7, 2. 0, 3. 0, 4. 5, 5. 4, 6. -2, 7. 0, 8. $(a-b)^2$,
9. 1, 10. $2\frac{1}{2}$, 11. 4, 12. $\frac{3}{4}$, 13. 3, 14. $2\frac{1}{2}$, 15. $2+\sqrt{2}$
16. $\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$, 17. 1, 18. 1, 19. 1, 20. -1, 21. 0, 22. $cos2\alpha$
23. $sin\alpha$, 24. $-\frac{cos^2\alpha}{sin\alpha}$, 25. $tg^6\alpha$, 26. -1, 27. $\frac{1}{cos\alpha}$,
28. $\frac{cos\alpha}{sin\alpha(1+sin\alpha)}$

Iki burcyň jeminiň we tapawudynyň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi

$$\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$$

Mysal: $sin15^0$ we $cos75^0$ hasaplamaly.

Çözülişi:

$sin15^0=\sin(45^0-30^0)=sin45^0cos30^0-cos45^0sin30^0=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$cos75^0=\cos(30^0+45^0)=cos30^0cos45^0-sin30^0sin45^0$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\frac{7\pi}{12}=tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{3}+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Formulalary ulanyp hasaplaň:

1. $cos15^0$
2. $sin75^0$
3. $sin105^0$
4. $cos105^0$
5. $tg15^0$
6. $ctg105^0$
7. $tg75^0$
8. $ctg\frac{\pi}{12}$

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

9. $\sin(\alpha+\beta)-sin\alpha cos\beta$
10. $\cos(\alpha-\beta)-cos\alpha cos\beta$
11. $sin\alpha sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$
12. $sin\alpha cos\beta-\sin(\alpha-\beta)$

Amatly usul bilen hasaplaň:

13. $cos29^0cos31^0 - sin29^0sin31^0$
14. $sin35^0cos25^0 + cos35^0sin25^0$
15. $cos49^0cos4^0 + sin4sin4^0$
16. $sin148^0cos58^0 - cos148^0sin58^0$
17. $sin\frac{3\pi}{8}cos\frac{\pi}{8} - cos\frac{3\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}$
18. $cos\frac{7\pi}{40}cos\frac{3\pi}{40} - sin\frac{7\pi}{40}sin\frac{3\pi}{40}$
19. $cos\frac{7\pi}{10}cos\frac{\pi}{5} + sin\frac{7\pi}{10}sin\frac{\pi}{5}$
20. $cos\frac{\pi}{7}sin\frac{8\pi}{7} - sin\frac{\pi}{7}cos\frac{8\pi}{7}$
21. $\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}$
22. $\frac{ctg14^0ctg16^0-1}{ctg14^0+ctg16^0}$
23. $\frac{tg\frac{3\pi}{7}-tg\frac{2\pi}{21}}{1+tg\frac{3\pi}{7}tg\frac{2\pi}{21}}$
24. $\frac{ctg\frac{3\pi}{5}ctg\frac{\pi}{10}+1}{ctg\frac{3\pi}{5}-ctg\frac{\pi}{10}}$

Ýönekeýleşdiriň:

25. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$
26. $\frac{\cos(\alpha+\beta)-co\,s(\alpha-\beta)}{co\,s(\alpha+\beta)+co\,s(\alpha-\beta)}$
27. $\frac{cos\alpha cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-sin\alpha sim\beta}$
28. $\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

Toždestwolary subut ediň:

29. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta$
30. $cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = cos^2\alpha - sin^2\beta$

Jogaplary:

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, 2. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, 3. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$, 5. $2-\sqrt{3}$, 6. $\sqrt{3}-2$, 7. $2+\sqrt{3}$, 8. $-2+\sqrt{3}$, 9. $\frac{1}{2}$
10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 11. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12. 1 13. 1 14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 16. 1, 17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 18. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 19. 0, 20. 0, 21. 1, 22. $\sqrt{3}$, 23. $\sqrt{3}$, 24. 0,
25. $tg\alpha ctg\beta$, 26. $-tg\alpha tg\beta$,
27. $tg\alpha tg\beta$, 28. $tg\alpha$.

Ikeldilen burçuň trigonometrik funksiýalary

Goşmak formulalary trogonometrik funksiýalary baglanyşdyrýan esasy formulalaryň biri hasaplanylýar. Olardan dürli argumentli trigonometrik funksiýalary baglanyşdyrýan bir näçe formulalar getirilip çykarylýar.

$$\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta \qquad (2)$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} \qquad (3)$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta} \qquad (4)$$

Formulalarda $\beta=\alpha$ diýip, ikeldilen burçuň trigonometrik funksiýalaryny alarys.

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha \qquad (5)$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha \qquad (6)$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad (7)$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha} \qquad (8)$$

(6) formulada $cos^2\alpha$ – nyň ýerine $1-sin^2\alpha$ - ny ýa-da $sin^2\alpha$ –nyň ýerine $1-cos^2\alpha$ – ny goýsak, ýene-de iki sany formula alnar.

$$cos2\alpha = 1-2sin^2\alpha \qquad (9)$$

$$cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 \qquad (10)$$

Mysal: $4sin\alpha cos^5\alpha - 4sin^5\alpha cos\alpha$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

Çözülişi:

$4sin\alpha cos^5\alpha - 4sin^5\alpha cos\alpha = 4sin\alpha cos\alpha(cos^4\alpha - sin^4\alpha) =$
$2 \cdot 2sin\alpha cos\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha)(cos^2\alpha + sin^2\alpha) =$
$2sin2\alpha cos2\alpha \cdot= sin4\alpha$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Aňlatmalary ýöneýleşdiriň:

1. $\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{1+sin2\alpha}$
2. $\frac{1-sin2\alpha}{(sin\alpha-cos\alpha)^2}$
3. $\frac{cos2\alpha}{sin\alpha+cos\alpha}$
4. $\frac{cos2\alpha-cos^2\alpha}{1-cos^2\alpha}$
5. $2cos^2\alpha - cos2\alpha$
6. $1 - 8sin^2\alpha cos^2\alpha$
7. $1 - 2sin^2\frac{\alpha}{8}$
8. $2cos^2\frac{\alpha}{6} - 1$
9. $sin2\alpha ctg\alpha - 1$
10. $\frac{1}{2}tg\alpha sin2\alpha + cos^2\alpha$
11. $(tg\alpha + ctg\alpha)sin2\alpha$
12. $(1 - tg^2\alpha)cos^2\alpha$
13. $\frac{sin2\alpha}{sin\alpha} - \frac{cos2\alpha}{cos\alpha}$
14. $\frac{ctg\alpha-tg\alpha}{cos2\alpha}$
15. $\frac{2tg\frac{\alpha}{2}\cdot cos^2\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2}-cos^2\frac{\alpha}{2}}$
16. $\frac{1-sin2\alpha}{cos\alpha-sin\alpha}$
17. $4sin\alpha cos\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha)$
18. $cos^4\alpha - 6cos^2\alpha sin^2\alpha + sin^4\alpha$
19. $\frac{1-cos2\alpha+sin2\alpha}{1+cos2\alpha+sin2\alpha}$

20. $\frac{cos^2 2\alpha - 4cos^2\alpha + 3}{cos^2 2\alpha + 4cos^2\alpha - 1}$
21. $\frac{1+cos2\alpha}{1-cos2\alpha}$
22. $\frac{1-sin2\alpha}{1+sin2\alpha}$
23. $\frac{1-cos\alpha+cos2\alpha}{sin2\alpha-sin\alpha}$
24. $\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$
25. $1 + cos4\alpha$
26. $1 - cos4\alpha$
27. $tg\alpha(1 + cos2\alpha)$
28. $\frac{2sin\alpha+sin2\alpha}{2sin\alpha-sin2\alpha}$

Toždestwolary subut ediň:

29. $(sin\alpha + cos\alpha)^2 = 1 + sin2\alpha$
30. $(tg\alpha + ctg\alpha)sin2\alpha = 2$

Jogaplary:

1. 1 , 2. 1 , 3. $cos\alpha - sin\alpha$, 4. -1 , 5. 1 , 6. $cos^2 4\alpha$, 7. $cos^2\frac{\alpha}{4}$, 8. $cos^2\frac{\alpha}{3}$, 9. $cos2\alpha$, 10. $sin^2\alpha$, 11. 2 , 12. $cos2\alpha$, 13. $\frac{1}{cos\alpha}$, 14. $\frac{2}{sin2\alpha}$, 15. $-tg\alpha$, 16. $cos\alpha - sin\alpha$, 17. $sin4\alpha$, 18. $cos4\alpha$, 19. $tg\alpha$, 20. $tg^4\alpha$, 21. $ctg^2\alpha$, 22. $tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, 23. $ctg\alpha$, 24. $ctg^2\frac{\alpha}{2}$, 25. 26. 27. $sin2\alpha$, 28. $tg^2\frac{\alpha}{2}$.

Ýarym burçuň trigonometrik funksiýalary

Ikeldilen burçyň

$$cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha ,$$
$$cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$$

formulalaryndan

$$2sin^2\alpha = 1 - cos2\alpha$$

$$2cos^2\alpha = 1 + cos2\alpha$$

deňlikler alynýar. Soňky deňliklerden $sin^2\alpha$ – ny we $cos^2\alpha$ – ny tapalyň.

$$sin^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{2}, \ cos^2\alpha = \frac{1+cos2\alpha}{2}$$

Bu formulalarda α –ny $\frac{\alpha}{2}$ bilen çalyşsak we kök alynsa, onda

$$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}} \quad (2)$$

bolar. (1) deňligi (2) deňlige agzama-agza bölsek, $tg\frac{\alpha}{2}$ – ny hasaplamak üçin formula alarys:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} \quad (3)$$

(1)-(3) formulalarda kök belgisiniň öňündäki alamatlar $\frac{\alpha}{2}$ burçuň haýsy çärýekde gutarýanlygyna baglylykda, şol çärýekde $sin\frac{\alpha}{2}$, $cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$ –nyň alamatlary nähili bolsa, şol alamat alynýar.

Mysallar:

1. $sin15^0$ – ny hasaplalyň.

Çözülişi:

$$sin15^0 = \sqrt{\frac{1-cos30^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

2. $cos\frac{7\pi}{12}$ – ny hasaplalyň.

Çözülişi:

$$cos\frac{7\pi}{12} = -\sqrt{\frac{1+cos\frac{7\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{1+cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}{2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1 - cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Trigonometrik funksiýalary ýarym burçuň tangensi arkaly aňlatmak

Käbir meseleler çözülende trigonometrik funksiýalaryň ählisini olaryň haýsy hem bolsa biri arkaly aňlatmak zerur bolýar. Şeýle funksiýa hökmünde tangensi almak amatlydyr. α argumentiň ähli trigonometrik funksiýalaryny $\frac{\alpha}{2}$ burçyň tangensi arkaly kwadrat köksüz aňladyp bolýar. Ol formulalary getirip çykaralyň.

$$sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left(2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}\right) : cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}\right) : cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left(cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}\right) : cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}\right) : cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Diýmek,

$$sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1} \qquad (4)$$

$$cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (5)$$

Bu formulalar $cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, ýagny $\alpha \neq \pi + 2k\pi, k \in Z$ bolanda dogrudyr. α – ny $\frac{\alpha}{2}$ bilen çalşyp, hem-de $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ deňlikden peýdalanyp alarys:

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (6)$$

$$ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}} \qquad (7)$$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Toždestwolary subut ediň:

1. $1 + sin\alpha = 2cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$
2. $1 - sin\alpha = 2sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$
3. $1 + 2cos2\alpha + cos4\alpha = 4cos^2\alpha cos2\alpha$
4. $1 - 2cos3\alpha + cos6\alpha = -4sin^2\frac{3\alpha}{2}cos3\alpha$
5. $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$
6. $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$
7. $\frac{1+sin2\alpha}{cos2\alpha} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$
8. $\frac{2sin\alpha-sin2\alpha}{2sin\alpha+sin2\alpha} = tg^2\frac{\alpha}{2}$
9. $\frac{sin2\alpha}{1+cos2\alpha} \cdot \frac{cos\alpha}{1+cos2\alpha} = tg\frac{\alpha}{2}$
10. $ctg\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\alpha}{2} = 2ctg\alpha$
11. $sin\alpha - tg\frac{\alpha}{2} = cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}$
12. $\frac{cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{cos\alpha} - tg\alpha$

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

13. $\sqrt{\frac{1-cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$
14. $\sqrt{\frac{1+cos4\alpha}{2}}$

15. $2sin^2\frac{\alpha}{2}+cos\alpha$

16. $2cos^2\frac{\alpha}{2}-cos\alpha$

17. $\sqrt{\frac{1-cos\frac{\alpha}{2}}{1+cos\frac{\alpha}{2}}}$

18. $\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}\cdot tg^2\frac{\alpha}{2}-cos^2\alpha$

19. $\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}}\cdot ctg^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\alpha$

20. $\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}-tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Jogaplary:

13. $sin\frac{\alpha}{2}$, 14. $cos2\alpha$, 15. 1, 16. 1, 17. $tg\frac{\alpha}{8}$, 18. $sin^2\alpha$, 19. $cos^2\alpha$, 20. 0.

Sinuslaryň we kosinuslaryň jemini hem tapawudyny köpeltmek hasylyna öwürmek

Sinuslaryň we kosinuslaryň jemini hem tapawudyny trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyp bolýar. $sin\alpha+sin\beta$ aňlatmany köpeltmek hasyly görnüşinde ýazalyň.Onuň üçin α we β burçlary

$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$

diýip belgiläp, jemiň sinusynyň formulasyndan peýdalanyp alarys:

$$sin\alpha+sin\beta=sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+$$

$$+sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}+sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$

$$-cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Diýmek, $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Aşakdaky üç formula hem şu usulda getirilip çykarylýar:

$$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasylyny jeme öwürmek

Sinuslar üçin goşmak formulalaryny

$\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$ we

$\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$ goşup alarys:

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2sin\alpha cos\beta$

Soňky deňlikden $sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Biz bir burçuň sinusinyň beýleki burçuň kosinusyna köpeltmek hasylyny jeme öwürmegiň formulasyny aldyk.

Kosinuslar üçin goşmak formulalaryny ýazalyň.

$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

Olary goşup we aýyryp alarys:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2cos\alpha cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2sin\alpha sin\beta$$

Soňky deňliklerden:

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$sin\alpha sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$$

Mysallar we olaryň çözülişleri:

1. $sin75^0 - sin15^0 = 2sin\frac{75^0-15^0}{2}cos\frac{75^0+15^0}{2} =$

$= 2sin30^0cos45^0 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $cos\frac{7\pi}{12} + cos\frac{\pi}{12} = 2cos\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}cos\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2} = 2cos\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{4}$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $1 + sin\alpha = sin\frac{\pi}{2} + sin\alpha = 2sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} =$

$= 2sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar.
Aňlatmalary köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyň:

1. $sin3\alpha + sin\alpha$
2. $sin4\beta - sin6\beta$
3. $cosx + cos5x$
4. $cos2y - cos3y$
5. $cos56^0 + cos24^0$
6. $sin7^0 + sin19^0$
7. $sin28^0 - cos36^0$
8. $cos31^0 - sin62^0$
9. $sin\frac{3\pi}{5} - sin\frac{\pi}{5}$
10. $cos\frac{11\pi}{12} + cos\frac{3\pi}{4}$
11. $sin\frac{\pi}{10} + cos\frac{\pi}{12}$
12. $cos\frac{\pi}{8} - sin\frac{5\pi}{8}$
13. $sin\frac{\pi}{12} - sin\frac{11\pi}{12}$
14. $cos\frac{\pi}{12} - cos\frac{5\pi}{12}$
15. $cos\frac{11\pi}{12} - cos\frac{5\pi}{12}$

16. $sin\frac{\pi}{12}+cos\frac{11\pi}{12}$

Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

17. $sin15^0-sin105^0$
18. $cos105^0+cos75^0$
19. $sin15^0+cos15^0$
20. $cos75^0-sin75^0$
21. $tg22^0 30'+tg67^0 30'$
22. $tg22^0 30'-tg67^0 30'$
23. $tg\frac{11\pi}{12}+tg\frac{5\pi}{12}$
24. $tg\frac{11\pi}{12}-tg\frac{5\pi}{12}$
25. $sin52^0 30' sin7^0 30'$
26. $cos105^0 cos75^0$

Toždestwolary subut ediň:

27. $\frac{sin\alpha+sin3\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha}=tg2\alpha$
28. $\frac{sin\alpha+2sin2\alpha+sin3\alpha}{cos\alpha+2cos2\alpha+cos3\alpha}=tg2\alpha$
29. $\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha}=tg3\alpha$
30. $\frac{tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta}{tg\alpha\cdot tg(\alpha+\beta)}=tg\beta$

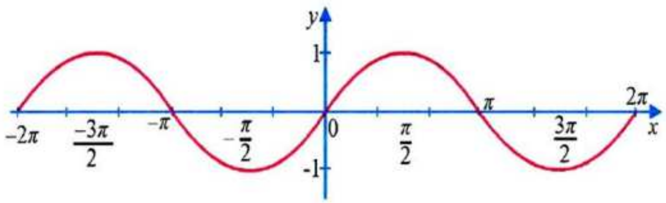
Jogaplary:

1. $2sin\alpha cos5\alpha$, 2. $-2sin\beta cos5\beta$, 3. $2cos3xcos2x$,
4. $2sin\frac{5y}{2}sin\frac{y}{2}$, 5. $2cos40^0cos16^0$, 6. $2sin13^0cos6^0$,
7. $2cos40^0cos16^0$, 8. $2sin13^0cos6^0$, 9. 0,3631 ,
10. $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$, 13. 1, 14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 15. $-\sqrt{3}$, 16. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
17. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 18. 0, 19. $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 20. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 21. $2\sqrt{2}$, 22. -2,
23. $2\sqrt{3}$, 24. -4
25. $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$, 26. $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

Trigonometrik funksiýalaryň häsiýetleri we grafikleri

$y = sinx$ funsiýanyň häsiýetleri we grafigi.

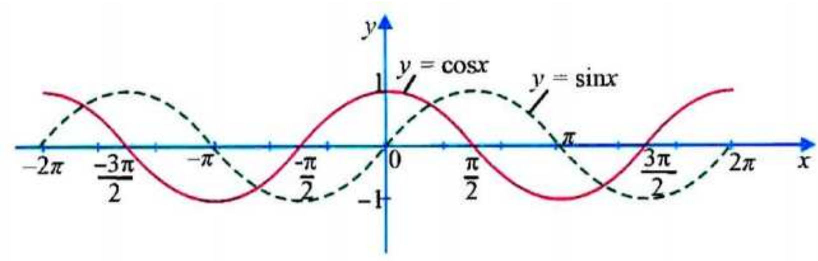
1. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $-\infty < x < +\infty$;
2. Funksiýanyň üýtgeýiş ýaýlasy: $-1 \leq sinx \leq +1$;
3. Funksiýanyň periody 2π: $sin(x + 2\pi n) = sinx$;
4. Funksiýa täk: $\sin(-x) = -sinx$;
5. Funksiýanyň nullary, ýagny absissa okuny kesýän nokatlary: $x = \pi n$;
6. $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ bolanda $sinx > 0$ we $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$ bolanda $sinx < 0$;
7. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ bolanda funksiýa artýar we $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ bolanda fynksiýa kemelýär;
8. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ bolanda funksiýa maksimuma eýedir we $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ bolanda funksiýa minumima eýedir;
9. $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ bolanda funksiýa güberçekdir we $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$ bolanda funksiýa oýukdyr;
10. $y = sinx$ funksiýanyň grafigi;



$y = cosx$ funsiýanyň häsiýetleri we grafigi.

1. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $-\infty < x < +\infty$;
2. Funksiýanyň üýtgeýiş ýaýlasy: $-1 \leq cosx \leq +1$;
3. Funksiýanyň periody 2π: $cos(x + 2\pi n) = cosx$;
4. Funksiýa jübüt:$\cos(-x) = cosx$;
5. Funksiýanyň nullary $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ nokatlardyr;

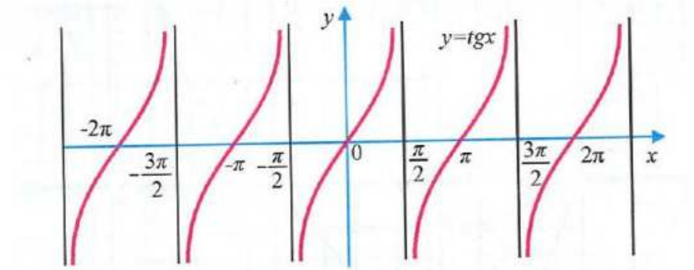
6. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ bolanda $cosx>0$ we
$\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ bolanda $cosx<0$;
7. $\pi+2\pi n<x<2\pi+2\pi n$ bolanda funksiýa artýar we
$2\pi<x<\pi+2\pi n$ bolanda fynksiýa kemelýär;
8. $x=2\pi n$ bolanda funksiýa maksimuma eýedir we
$x=\pi+2\pi n$ bolanda funksiýa minumima eýedir;
9. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ bolanda funksiýa güberçekdir we
$\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ bolanda funksiýa oýukdyr;
10. $y=cosx$ funksiýanyň grafigi;



$y=tgx$ funsiýanyň häsiýetleri we grafigi.

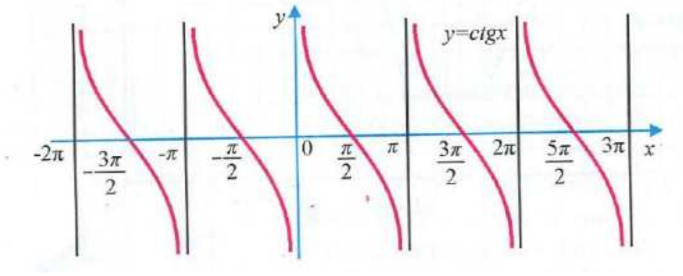
1. $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ aralykda funksiýa üznüksizdir we kesgitlenendir. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ nokatlarda funksiýa kesgitsizdir;
2. Funksiýanyň üýtgeýiş ýaýlasy: $-\infty<tgx<+\infty$ we çäksizdir;
3. Funksiýanyň periody π: $tg(x+\pi)=tgx$;
4. Funksiýa täk:tg$(-x)=-tgx$;
5. Funksiýanyň nullary $tgx>0$ nokatlardyr;
6. $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ bolanda $tgx>0$ we
$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<2\pi n$ bolanda $tgx<0$;
7 Funksiýa hemme aralykda artýandyr;
8. Funksiýanyň maksimumam we minumimam ýokdyr;

9. $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \pi n$ bolanda funksiýa güberçekdir we
$\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$ bolanda funksiýa oýukdyr;
10. $y = tgx$ funksiýanyň grafigi;



$y = ctgx$ funsiýanyň häsiýetleri we grafigi.

1. $\pi n < x < \pi + \pi n$ aralykda funksiýa üznüksizdir we kesgitlenendir. $x = \pi n$ nokatlarda funksiýa kesgitsizdir;
2. Funksiýanyň üýtgeýiş ýaýlasy: $-\infty < ctgx < +\infty$ we çäksizdir;
3. Funksiýanyň periody π: $ctg(x+\pi) = ctgx$;
4. Funksiýa täk: $c\,\mathrm{tg}(-x) = -ctgx$;
5. Funksiýanyň nullary $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$ nokatlardyr;
6. $\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$ bolanda $ctgx > 0$ we
$\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \pi+\pi n$ bolanda $ctgx < 0$;
7 Funksiýa hemme aralykda kemelýändir;
8. Funksiýanyň maksimumam we minumimam ýokdyr;
9. $\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \pi+\pi n$ bolanda funksiýa güberçekdir we
$\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$ bolanda funksiýa oýukdyr;
10. $y = ctgx$ funksiýanyň grafigi;



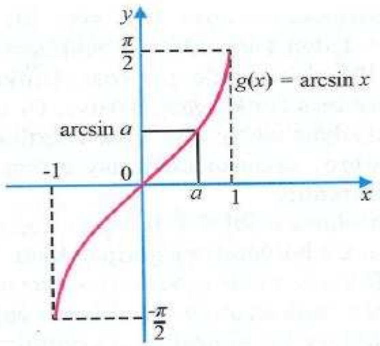
Ters trigonometrik funksiýalar

Arksinus. $y = sinx$ funksiýa $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykda artýar we -1 – den 1 – e çenli ähli bahalary kabul edýär. Diýmek $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykda $y = sinx$ funksiýanyň ters funksiýasy bardyr. Oňa *arksinus* diýilýär we arcsin bilen belgilenýär(arçus latyn sözi bolup duga diýmekdir, arcsin$a$ sinusy a deň bolan dugany aňladýar).

Kesgitleme. $arcsina$ sinusy a deň bolan $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykdaky burçdur.

Mysal: $arcsin\frac{1}{2}$ tapalyň.

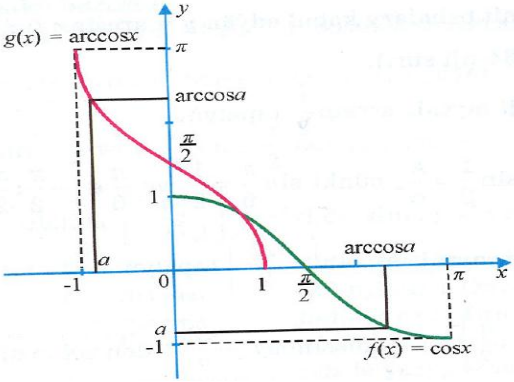
Çözülişi: $arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, çunki $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ we $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



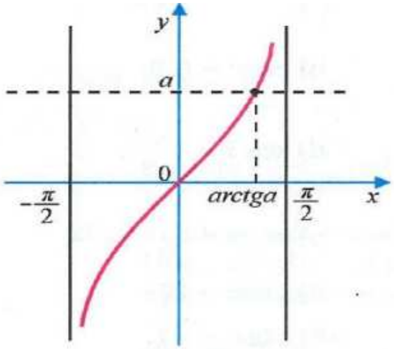
Arkcosinus. $y = cosx$ funksiýa $[0; \pi]$ aralykda kemelýär we -1 – den 1 – e çenli ähli bahalary kabul edýär. Diýmek $[0; \pi]$ aralykda $y = cosx$ funksiýanyň ters funksiýasy bardyr. Ol funksiýa *arkkosinus* diýilýär we arccos bilen belgilenýär. **Kesgitleme.** $arccosa$ kosinusy a deň bolan $[0; \pi]$ aralykdaky burçdur.

Mysal: $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tapalyň.

Çözülişi: $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, sebäbi $[0; \pi]$ aralykda kosinusy $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ – ä deň bolan burç $\frac{3\pi}{4}$ – e deňdir.



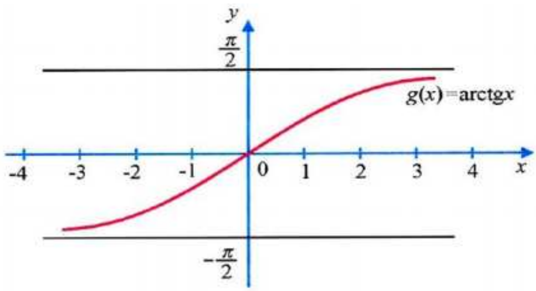
Arktangens. $y = tgx$ funksiýa $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda artýar we $-\infty$ - den $+\infty$ - e çenli ähli bahalary kabul edýär. Şonuň üçin onuň ters funksiýasy bardyr. Oňa *arktangens* diýilýär we $arctg$ diýlip belgilenýär.



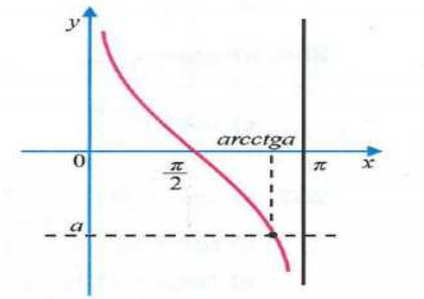
Kesgitleme. $arctga$ tangensi a deň bolan $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykdaky burçdur.

Mysal: $arctg1$ bahasyny hasaplaň.

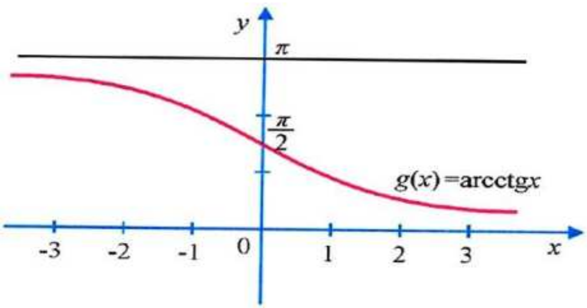
Çözülişi: $tg\frac{\pi}{4} = 1$ we $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bolanlygyna görä, $arctg1 = \frac{\pi}{4}$.



Arkkotangens. $y = ctgx$ funksiýa $[0; \pi]$ aralykda artýar we $-\infty$ - den $+\infty$ - e çenli ähli bahalary kabul edýär. Şonuň üçin onuň ters funksiýasy bardyr. Oňa *arkkotangens* diýilýär we $arcctg$ diýlip belgilenýär.



Kesgitleme. $arcctga$ kotangensi a deň bolan $[0;\pi]$ aralykdaky burçdur.
Mysal: $arctg\sqrt{3}$ bahasyny hasaplaň.
Çözülişi: $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, çünki $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ we $\frac{\pi}{6} \in [0;\pi]$



Ýönekeý trigonometrik deňlemeleriň çözülişi

Trigonometrik funksiýalary özünde saklaýan deňlemelere *trigonometrik deňlemeler* diýilýär.
Trigonometrik deňlemeleriň çözülişi trigonometrik funksiýalaryň degişli bahasy boýunça argumentiň bahasy boýunça argumentiň bahasyny gözlemeklige syrykdyrylýar. Şonuň üçin hem biz ilki bilen

$sinx = a, \quad cosx = a, \quad tgx = a, \quad ctgx = a$

Görnüşli deňlemelerden x – i tapmaklygy öwreneliň.

1. $sinx = a$ deňleme.

$|a| > 1$ bolanda $sinx = a$ görnüşli deňlemäniň çözüwi ýokdur. Sebäbi x – iň islendik bahasynda $|sinx| \leq 1$

$$x = (-1)^k arcsina + \pi k, k \in Z$$

Mysallar:

Çözülişleri:

1. $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deňlemäni çözeliň.

$$x = (-1)^k arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

2. $5sin3x + 2 = 0$ deňlemäni çözüň.

$$5sin3x = -2, \qquad sin3x = -\frac{2}{5}$$

$$3x = (-1)^k arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{(-1)^k}{3} arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

2. $cosx = a$ deňleme.

$|a| > 1$ bolanda $cosx = a$ görnüşli deňlemäniň çözüwi ýokdur. Sebäbi x – iň islendik bahasynda $|cosx| \leq 1$

$$x = \pm arccosa + 2\pi k, k \in Z$$

Mysallar:

Çözülişleri:

1. $cosx = -\frac{1}{2}$ deňlemäni çözmeli.

$$x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

2. $cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deňlemäni çözmeli.

$$2x-\frac{\pi}{6}=\pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k, k\in Z$$
$$2x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,$$
$$x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{8}+2\pi k, k\in Z$$

3. $tgx=a$ deňleme.

a – nyň islendik bahasynda uzynlygy π – e deň bolan $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ aralykda $tgx=a$ deňlemäniň diňe bir köki bardyr. Ol kök $arctga$ deňdir. Onuň üstüne tangensiň periodyny goşup, $tgx=a$ deňlemäniň ähli köklerini alarys:

$$x=arctga+\pi k, k\in Z$$

Mysal: $tgx=-1$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: $x=arctg(-1)+\pi k, k\in Z$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

4. $ctgx=a$ deňleme.

$ctgx=a$ deňlemäniň $(0;\pi)$ aralykda diňe bir köki bardyr. Ol kök $arcctga$ deňdir. Onuň üstüne kotangensiň periodyny goşmak arkaly alynýar, ýagny

$$x=arcctga+\pi k, k\in Z$$

Mysal: $ctgx=-\sqrt{3}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi: $x=arcctg(-\sqrt{3})+\pi k, k\in Z$

$$x=\frac{5\pi}{6}+\pi k, k\in Z$$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Hasaplaň:

1. $arcsin0$
2. $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
4. $arccos(-1)$
5. $arctg\sqrt{3}$
6. $arctg0$
7. $arcctg(-1)$
8. $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$

9. $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 4arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. $2arccos0 - \arccos(1)$

11. $6arctg\sqrt{3} - arcctg1$

12. $2arctg(-\sqrt{3}) + arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Deňlemeleri çözüň:

13. $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. $2sinx - 1 = 0$

15. $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

16. $3cosx - 2 = 0$

17. $tgx = \sqrt{3}$

18. $tgx + \sqrt{3} = 0$

19. $ctgx = -1$

20. $\sqrt{3}ctgx + 1 = 0$

21. $2sinx - cosxsinx = 0$

22. $sinx + sin2x = 0$

23. $cosx = sin2xcosx$

24. $cos2x - sin4x = 0$

25. $2sin^2x + 3sinx + 1 = 0$

26. $2cos^2x - cosx - 1 = 0$

27. $9cos^2x = 7cosx$

28. $6tg^2x + tgx - 1 = 0$

29. $2tgx - 3ctgx - 1 = 0$

30. $tgx = ctgx$

Jogaplary:

1. 0, 2. $\frac{\pi}{4}$, 3. $\frac{2\pi}{3}$, 4. $-\pi$, 5. $\frac{\pi}{3}$, 6. 0, 7. $\frac{3\pi}{4}$, 8. $\frac{5\pi}{6}$,
9. $-\frac{13\pi}{12}$, 10. 0, 11. $\frac{7\pi}{4}$, 12. 2π , 13. $(-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$,
14. $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$, 15. $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$,
16. $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$, 17. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$, 18. $\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$,
19. $\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$, 20. $\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$, 21.
22. $\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, 23. $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{(-1)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in$
25. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$
26. $2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$
29. $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$, 30. $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z,\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

V BAP. RASIONAL GÖRKEZIJILI DEREJE

n-nji derejeli köküň kesgitlenişi

Kesgitleme: n – nji derejesi a deň bolan sana a sandan alnan n *– nji derejeli kök* diýilýär.
Meselem, 8 sandan alnan üçünji derejeli kök, ýagny kub kök 2 – ä deňdir, $2^3 = 8$, 5 we -5 sanlaryň her biri 625 sanyň dördünji derejeli kökleridir, çünki $5^4 = 625$ we $(-5)^4 = 625$.
Indi $y = x^n$ funksi garalyň, bu ýerde x özbaşdak üýtgeýän ululyk, n – natural san. Bu funksiýa *natural görkezijili derejeli funksiýa* diýilýär.
Kesgitleme: n – nji derejesi a bolan otrisatel däl sana a sandan alnan n *– nji derejeli arifmetik kök* diýilýär.
Meselem, $\sqrt[3]{343} = 7$, sebäbi $7^3 = 343$ we $7 > 0$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}\text{, sebäbi } \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \text{ we } \frac{1}{2} > 0$$

n – täk san bolanda islendik a sanyň n – nji derejeli köki bardyr we ol ýeke-täkdir. $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, hakykatdan-da,
$\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = -1 \cdot a = -a,$
ýagny $-\sqrt[n]{a}$ san $-a$ sanyň n – nji derejeli kökүdir. Şeýle kök n täk bolanda ýeke-täkdir. Diýmek, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. Bu deňlik ($n$ täk bolanda) otrisatel sanyň täk derejeli köküni şol derejeli arifmetik köküň üsti bilen aňlatmaga mumkinçilik berýär.
Meselem, $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4$
Şeýlelikde, n jübüt bolanda islendik položitel sanyň n – nji derejeli iki köki bardyr,
nol sanyň n – nji derejeli köki 0 – deňdir,
otrisatel sanyň jübüt derejeli köki ýokdur.

n – nji derejeli arifmetiki köküň häsiýetleri

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad a \geq 0$

Mysallar we olaryň çözülişi:

1. $\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10$
2. $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$
4. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$
5. $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[9]{7^6}$
6. $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:
Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

1. $\sqrt[4]{16}$
2. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$
3. $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$
4. $\sqrt[4]{0{,}0625}$
5. $\sqrt[9]{512}$
6. $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$
7. $\sqrt[5]{-32}$
8. $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$
9. $12 - 6\sqrt[3]{0{,}125}$
10. $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{2{,}25}$

11. $\sqrt[4]{16 \cdot 0{,}0001}$

12. $\sqrt[6]{64 \cdot \frac{1}{729}}$

13. $\sqrt[5]{0,2^{10} \cdot 10^{10}}$

14. $\sqrt[3]{\frac{5^6}{2^9}}$

15. $\sqrt[3]{\frac{0{,}125}{2^6}}$

16. $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$

17. $\sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}$

18. $\sqrt[6]{5^{10}} \cdot \sqrt[6]{2^{12} \cdot 5^2}$

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

19. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

20. $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m^2}}$

21. $\sqrt{\sqrt[4]{4}}$

22. $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$

23. $\left(3 + 2\sqrt{6}\right)^2 + \left(3 - 2\sqrt{6}\right)^2$

24. $\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2$

Sanlary deňeşdiriň:

25. $\sqrt[4]{8}$ we $\sqrt{3}$

26. $\sqrt{2}$ we $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

Deňlemeleri çözüň:

27. $x^6 - 64 = 0$

28. $16x^4 - 1=0$

29. $0{,}02x^6 - 1{,}28 = 0$

30. $0{,}01x^3 + 10 = 0$

Jogaplary:

1. 2, 2. $-\frac{1}{2}$, 3. $\frac{3}{2}$, 4. 0,5, 5. 2 , 6. $\frac{3}{2}$, 7. -2, 8. 10, 9. 9, 10. 0 , 11. 0,4, 12. $\frac{2}{3}$, 13. 4, 14. $\frac{25}{8}$, 15. $\frac{0{,}5}{4}$, 16. 17. 14 , 18. 100, 19. $\sqrt[6]{2}$, 20. $\sqrt[3]{m}$, 21. $\sqrt[4]{2}$, 22. $\sqrt[3]{4}$, 23. $24\sqrt{6}$, 24. 81 , 25. $\sqrt[4]{8} < \sqrt{3}$, 26. $\sqrt{2} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, 27. 2, 28. $\frac{1}{2}$, 29. 2 , 30. -10

Rasional görkezijili dereje we onuň häsiýetleri. Kökli we drob görkezijili derejeli aňlatmalary töždestwolaýyn özgertmek

1. Eger m – bitin, n – natural san ($n \geq 2$) bolsa, onda islendik položitel a sanyň $\frac{m}{n}$ derejesi $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$ deňlik arkalyk kesgitlenýär.
2. Birmeňzeş esasly iki derejäni biri-birine köpeltmek üçin esasyny öňküligine galdyryp, dereje görkezijilerini goşmak ýeterlikdir: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
p we g rasional sanlary deň maýdalawjyly droblar görnüşinde aňladalyň: $p = \frac{k}{n}$, $g = \frac{m}{n}$ $(k \in Z, m \in Z, n \in N)$.

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^k \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^{k+m}}$$
$$= a^{\frac{k+m}{n}} = a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{n}} = a^{p+q}$$

3. Birmeňzeş esasly bir derejäni beýleki derejä bölmek üçin esasyny öňküligine galdyryp, sanawjynyň dereje görkezijisinden maýdalawjynyň dereje görkezijisini aýyrmak ýeterlikdir: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
p we g rasional sanlary deň maýdalawjyly droblar görnüşinde aňladalyň: $p = \frac{k}{n}$, $g = \frac{m}{n}$ $(k \in Z, m \in Z, n \in N)$.

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^{\frac{k}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^k}}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{a^k}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{k-m}} = a^{\frac{k-m}{n}} = a^{\frac{k}{n}-\frac{m}{n}} = a^{p-q}$$

4. Derejäni derejä götermek üçin esasyny öňküligine galdyryp, dereje görkezijilerini köpeltmek ýeterlikdir: $(a^p)^q = a^{pq}$
p we g rasional sanlary deň maýdalawjyly droblar görnüşinde aňladalyň: $p = \frac{k}{n}$, $g = \frac{m}{n}$ $(k \in Z, m \in Z, n \in N)$.

$$(a^p)^q=\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^m}=\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^m}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{km}}}=\sqrt[n^2]{a^{km}}$$

$$=a^{\frac{km}{n^2}}=a^{\frac{k}{n}\cdot\frac{m}{n}}=a^{pq}$$

5. Köpeltmek hasylyny derejä götermek üçin köpeldijileriň her birini şol derejä göterip, soň olary köpeltmek ýeterlikdir: $(ab)^p=a^pb^p$

p rasional sany drob görnüşinde aňladalyň: $p=\frac{k}{n}$ $(k\in Z, n\in N)$.

$$(ab)^p=(ab)^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^k}=\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{b^k}=a^{\frac{k}{n}}\cdot b^{\frac{k}{n}}=a^pb^p$$

6. Paýy derejä götermek üçin bölünijiniň şol derejesini bölünijiniň şol derejesine bölmek ýeterlikdir: $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$

p rasional sany drob görnüşinde aňladalyň: $p=\frac{k}{n}$ $(k\in Z, n\in N)$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^k}=\frac{\sqrt[n]{a^k}}{\sqrt[n]{b^k}}=\frac{a^{\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}}=\frac{a^p}{b^p}$$

Mysal: $\frac{6}{1+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ drobuň maýdalawjysyny köklerden boşatmaly.

Çözülişi:

$$\frac{6}{1+\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{6\left[(1+\sqrt{5})+\sqrt{2})\right]}{\left[(1+\sqrt{5})-\sqrt{2})\right]\left[(1+\sqrt{5})+\sqrt{2})\right]}=\frac{6(1+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{6(1+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\left(6+2\sqrt{5}\right)-2}=\frac{6(1+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{5}}=\frac{3(1+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2+\sqrt{5}}$$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Hasaplaň:

1. $64^{\frac{2}{3}}$
2. $125^{\frac{5}{6}}:5$
3. $9^{2\frac{1}{2}}$
4. $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$
5. $4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{1\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{9}}$
6. $8^{-\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$

7. $2^{1,3}\cdot 2^{-0,7}\cdot 2^{1,4}$

8. $7^{-\frac{4}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{12}}\cdot 7^{-\frac{3}{4}}$

9. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right]^{-0,5} - 7,5\cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,5}$

10. $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$

11. $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right]^{0} : (36)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

12. $0,027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5,5)^{0}$

Sanlary deňeşdiriň:

13. $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{5}{6}}$ we $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ we $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$

15. 3^{600} we 5^{400}

16. 7^{30} we 4^{10}

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

17. $\frac{x^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}$

18. $\frac{a^{\frac{1}{2}}\sqrt[5]{b^{2}}}{a^{\frac{1}{8}}\sqrt[5]{b^{3}}}$

19. $\frac{8^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{9}}{3^{\frac{5}{3}}\sqrt{2}}$

20. $\frac{16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[5]{25}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{-1,6}}$

Jem görnüşinde ýazyň:

21. $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{4}}\right)$

22. $x^{0,5}y^{0,5}(x^{-0,5} - y^{1,5})$

23. $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$

24. $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)$

Droblary gysgaldyň:

25. $\frac{4\cdot3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}-3}$

26. $\frac{2^{\frac{1}{4}}-2}{5\cdot2^{\frac{1}{2}}}$

27. $\frac{3+3^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}}$

28. $\frac{10}{10-10^{\frac{1}{2}}}$

29. $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$

30. $\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a-b}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

Jogaplary:

1. 16, 2. $\sqrt[3]{5^2}$, 3. 243, 4. $\frac{81}{16}$, 5. 4, 6. 2, 7. 4, 8. $\frac{1}{49}$,

9. 0, 10. $2\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$, 11. $-\frac{19}{3}$, 12. 32, 13. $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{5}{6}} > \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}=\sqrt{2}\cdot2^{\frac{3}{14}}$, 15. $3^{600}>5^{400}$, 16. $7^{30}>4^{10}$,

17. $x^{\frac{2}{5}}$, 18. $\frac{a^{\frac{3}{8}}}{b^{\frac{1}{5}}}$, 19. $\frac{2}{3}$, 20. 50, 21. $bc^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}c$,

22. $y^{0,5}-x^{0,5}y^2$, 23. $x+y$, 24. $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$, 25. $-2-2\sqrt{3}$,

26. $\frac{\sqrt[8]{8}}{20}-\frac{\sqrt{2}}{10}$, 27. $3\sqrt{3}+3$, 28. $\frac{10}{9}+\frac{\sqrt{10}}{9}$,

Irrasional deňlemeler we deňsizlikler

Üýtgeýän ululygy kök belgisiniň aşagynda saklaýan deňlemelere *irrasional deňlemeler* diýilýär.

Mysal: $\sqrt{1+3x}=1-x$ deňlemäni çözeliň.

Çözülişi:

$$\sqrt{1+3x}=1-x$$
$$1+3x=1-2x+x^2$$
$$x^2-5x=0$$
$$x_1=0,\qquad x_2=5$$

Irrasional deňsizlikler çözülende berlen deňsizlik oňa deňgüýçli rasional deňsizlikleriň ulgamyna ýa-da şeýle ulgamlaryň toplumyna getirilýär.

Irrasional deňsizlikler çözülende ýalnyşlyk göýbermezlik üçin, berlen deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasyny anyklamalydyr, soňra kesgitleniş ýaýlada ýa-da onuň böleklerinde deňgüýçli özgertmeler geçirmelidir.

Mysallar:

1. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ deňsizligi çözeliň.

Çözülişi: $x^2-x-2 \geq 0, \quad x \leq -1, \; x \geq 2.$

Şeýlelikde deňsizligiň ähli çözüwleriniň köplügi $x=-1, x \geq 2$ aralykdan ybaratdyr.

2. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$ deňsizligi çözeliň.

Çözülişi: $\begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases}$

Bu ulgamyň birinji deňsizliginiň çözüwi $\left[-2\sqrt{2}\,; 2\sqrt{2}\right]$ kesim bolar. $x+2 > 8-x^2$, ýagny $x^2+x-6 > 0$ deňsizligiň çözüwi bolsa $(-\infty;\ -3)$, $(2;\ +\infty)$ aralykdyr. Şunlukda, berlen deňsizligiň çözüwi $2; 2\sqrt{2}$ aralykdyr.

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:

Deňlemeleri çözüň:

1. $\sqrt{x+6} = 3$
2. $\sqrt{x^4+19} = 10$
3. $\sqrt{4-x} = x+2$
4. $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x+7}$
5. $\sqrt[3]{x^2-28} = 2$
6. $\sqrt{(2x-1)(3x+1)} = x+1$
7. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{10x-5} = x-3$
8. $x + \sqrt{2x+3} = 6$
9. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2-2x+4}$
10. $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$

11. $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2}$
12. $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-1}$
13. $2 + \sqrt{10 - x} = \sqrt{22 - x}$
14. $\sqrt{x}\sqrt{2 - x} = 2x$
15. $\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10 \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \sqrt{5y+1} = 8 \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2 \end{cases}$
17. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \\ x - y = 16 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$
19. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ x - y = 32 \end{cases}$
20. $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 8 \end{cases}$

Deňsizlikleri çözmeli:

21. $\sqrt{x-3} < 5$
22. $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$
23. $\sqrt{x^2 - 10x} < 3$
24. $\sqrt{4x - x^2} \leq 2$
25. $\sqrt{6x - x^2} \geq 3$
26. $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x - 1}$
27. $\sqrt{1 - x} \leq \sqrt{x + 1}$
28. $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$
29. $\sqrt{x + 78} < x + 6$
30. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x$

Jogaplary:

1.   2. 9, 3. $(0;-5)$, 4. 4, 5. $(-6;6)$, 6. 0, 7. 4,
8. $(3;11)$, 9. $(1;3)$, 10. $(1;-5)$, 11. $(2;-10)$, 12. $(0;5)$,
13. 6, 14. $0;\frac{2}{5}$, 15. $(-2;4)$, 16. $(6;3)$, 17. $(25;9)$, 18. $(9;1)$, 19. $(36;4)$, 20. $(16;4)$, 21. $[-\infty;8]$, 22.

Irrasional görkezijili dereje

Eger $a > 0$ we α položitel irrasional san bolsa, onda

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}$$

Meselem, $5^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{5^{\sqrt{3}}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}}$.

Esasy $a > 0$, $b > 0$ bolanda, görkezijileri x, y islendik hakyky sanlar bolan derejeleriň aşakdaky ýaly esasy häsiýetleri bardyr:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$

Mysallaryň çözülişlerine seredeliň:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{5}} = (2^{-1})^{-\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}}$
2. $3^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{0,5\sqrt{3}-1} = 3^{\sqrt{3}} \cdot (3^{-2})^{0,5\sqrt{3}-1} = 3^{\sqrt{3}} \cdot 3^{-\sqrt{3}+2} =$
   $3^{\sqrt{3}-\sqrt{3}+2} = 9$
3. $\frac{3^{\sqrt{12}}}{3^{\sqrt{3}}} = 3^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$
4. $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{27}} = 2^{\sqrt{3}\sqrt{27}} = 2^{\sqrt{81}} = 2^9 = 512$

Görkezijili deňlemeleriň we deňsizlikleriň çözülişi

Dereje görkezijisinde üýtgeýän ululygy saklaýan deňlemelere *görkezijili deňlemeler* diýilýär.

Mysal: $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi:

$$5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$$

$$5^x + 3 \cdot 5^{-2} \cdot 5^x = 140$$

$$5^x \left(1 + \frac{3}{25}\right) = 140$$

$$5^x \cdot \frac{28}{25} = 140$$

$$5^x = 140 : \frac{28}{25}$$

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

$$x = 3$$

Görkezijili deňsizlikler çözülende $y = a^x$ funksiýanyň $a > 1$ bolanda artýandygyny, $0 < a < 1$ bolanda bolsa kemelýändigini göz öňünde tutmak zerurdyr.

Mysal: $3^x > 27$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi:

$$3^x > 27$$

$$3^x > 3^3$$

$$x > 3$$

$a = 3 > 1$ bolany üçin $y = 3^x$ funksiaý artýan funksiýadyr. Şoňa görä-de bu deňsizligiň çözüwi $x > 3$ bolar.

Jogaby: $(3; \infty)$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:
Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

1. $\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

2. $5^{1-2\sqrt{7}} \cdot 25^{1+\sqrt{7}}$

3. $27^{\sqrt{3}} : 3^{3\sqrt{3}}$

4. $\left(2^{\sqrt[3]{9}}\right)^{3\sqrt{3}}$

5. $a^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}-2}$

6. $a^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{a^2 : a^{4\sqrt{3}}}$

7. $a^{\sqrt{3}} \cdot a^{2,7} : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{3}}}$

8. $\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

9. $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1$

10. $\sqrt{\left(x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}xy\right)^{\sqrt{2}}}$

Deňlemeleri çözüň:

11. $27^x = \frac{1}{9}$

12. $25^{-x} = \frac{1}{125}$

13. $3^x + 3^{x+1} = 108$

14. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

15. $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

16. $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 65^x + 10 = 0$

17. $2^{5-x} = 2^{3x-3}$

18. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

19. $9^x - 3^x - 6 = 0$

20. $3^x + 9^{x-1} - 810=0$

21. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 23^y = \frac{11}{4} \\ 2^x - 3^y = -\frac{3}{4} \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2^x 3^y = 648 \\ 3^x 2^y = 432 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 4^x + 4^y = 80 \end{cases}$

Deňsizlikleri çözüň:

25. $2^x > \frac{1}{8}$

26. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} > \frac{1}{16}$

27. $\left(\frac{2}{9}\right)^{3x-7} \geq 20\frac{1}{4}$

28. $\sqrt{8^{x-1}} \geq \sqrt[3]{4^{2-x}}$

29. $6^{-3}(6^{3-x})^2 > 2^x \cdot 3^x$

30. $2^x \cdot 3^{x-1} < 6^{2-x} \cdot 3^{-1}$

Jogaplary:

1. 3, 2. 125, 3. 1, 4. 8, 5. a^2, 6. $\sqrt{a}$, 7. $a^{2,7}$, 8. a^3, 9. $\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}$, 10. $x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{2}}$, 11. $-\frac{2}{3}$, 12. 1,5 , 13. 3, 14. 1, 15. 1, 16. 2, 17. 2, 18. 1, 19. 1, 20. 4, 21. $(-2;0)$, 22. $(3;2)$, 23. $(3;4)$, 24. $(-log_2 9; log_3 8)$, 25. $x > -3$, 26. $(-1;2)$, 27. $x \leq \frac{5}{3}$, 28. $x \geq \frac{17}{18}$, 29. $x < 1$, 30. $x < 1$.

Logarifmler

a esasa görä b sanyň *logarifmi* diýip, b sany almak üçin a esasyň göterilmeli dereje görkezijisine aýdylýar.

$$a^{log_a b} = b$$

formula esasy logarifmik toždestwo diýilýär.(by ýerde $b > 0, a > 0, a \neq 1$).

Mysallaryň çözülişlerine seredeliň:

1. $2^4 = 16$ bolany üçin $log_2 16 = 4$ bolar.
2. $3^{-3} = \frac{1}{27}$ bolany üçin $log_3 \frac{1}{27} = -3$ bolar.
3. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ bolany üçin $log_5 \sqrt[3]{25} = log_5 \sqrt[3]{5^2} = log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ bolar.
4. $10^0 = 1$ bolany üçin $log_{10} 1 = 0$ bolar.

Logarifmleriň esasy edip, köplenç, 10 sany kabul edýärler. Sanlaryň 10 esasa görä alnan logarifmlerine *onluk logarimler* diýýärler. Onluk logarifmleri belgilemek üçin, adatça, log belgini däl-de, lg belgini peýdalanýarlar, şonda esasy görkezýän 10 sany ýazmaýarlar. Meselem, $log_{10}105$ deregine ýöne $lg105$ ýazýarlar.

Esasy $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$ bolan logarifmlere *natural logarifmler* diýilýär we olar ln görnüşde belgilenilýär. Meselem, $log_e 3$ deregine $ln3$ ýazýarlar we ş.m.

Köpeltmek hasylynyň, paýynyň, derejäniň we köküň logarifmi

1. $log_a(xy) = log_a x + log_a y$
2. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$
3. $log_a x^k = k log_a x$
4. $log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} log_a x$
5. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, \quad log_a b = \frac{1}{log_b a}$

Mysallaryň çözülişlerine seredeliň:

1. $log_5 35 = log_5(7 \cdot 5) = log_5 7 + log_5 5 = log_5 7 + 1$
2. $log_3 \frac{9}{16} = log_3 9 - log_3 16 = 2 - log_3 16$
3. $log_4 27 = log_4 3^3 = 3log_4 3$
4. $log_2 \sqrt{10} = \frac{1}{2} log_2 10$
5. $log_{64} 4 = \frac{log_2 4}{log_2 64} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad log_{625} \sqrt{5} = \frac{log_5 \sqrt{5}}{log_5 625} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$

Logarifmik deňlemeleriň we deňsizlikleriň çözülişi

Çylşyrymly logarifmik deňlemeler köp halatlarda käbir özgertmeler arkaly ýönekeý deňlemä getirilip çözülýär. Eger $a > 0$ we $a \neq 1$ bolsa, onda şeýle deňlemäniň $x = a^b$ ýeke-täk köki bardyr.

Mysal: $log_x(x^2 - 4x + 12) = 2$
Çözülişi: $$x^2 = x^2 - 4x + 12$$
$$x = 3$$
Barlagy: $x = 3$ bolanda
$log_x(x^2 - 4x + 12) = log_3(3^2 - 4 \cdot 3 + 12) = log_3 9 = 2$

Logarifmik deňsizlikler çözülende hem $y = log_a x$ funksiýanyň $a > 1$ bolanda artýandygyny, $0 < a < 1$ bolanda bolsa kemelýändigini göz öňünde tutmak zerurdyr.
Mysallar:
1. $log_2(2x + 3) < 1$
Çözülişi: $log_2 2 = 1$ göz öňünde tutup, alarys:
$$log_2(2x + 3) < log_2 2$$
$y = log_2 x$ funksiýa artýan funksiýadyr. Şonuň üçin
$$2x + 3 < 2$$
$$x < -0{,}5$$
Logarifmik funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny, ýagny $2x + 3 > 0$ şerti hem göz öňünde tutmalydyrys. Bu deňsizligi çözüp $x > -1{,}5$ alarys: Diýmek, berlen deňsizligiň çözüwi: $-1{,}5 < x < -0{,}5$.
Jogaby: $(-1{,}5; -0{,}5)$
2. $log_2^2 x + log_2 x - 2 \leq 0$
Çözülişi: $$log_2 x = t$$
$$t^2 + t - 2 \leq 0$$
$$t_1 = -2, \ \ t_2 = 1$$
$-2 \leq log_2 x \leq 1, \ \ \frac{1}{4} \leq x \leq 2, \ \ x > 0$ şert ýerine ýetýär.
Jogaby: $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$

Özbaşdak işlemek üçin mysallar:
Hasaplamaly:
1. $log_2(sin\frac{\pi}{6})$
2. $log_3(tg\frac{\pi}{3})$

3. $log_2(cos\frac{\pi}{4})$
4. $log_3(ctg\frac{\pi}{3})$
5. $log_x 81 = 4$
6. $log_x 27 = 3$
7. $log_x\sqrt{2} = -4$
8. $log_x 0{,}64 = -2$
9. $log_8 2 + log_8 4$
10. $log_{12}4 + log_{12}36$
11. $log_2 3 + log_2 5\frac{1}{3}$
12. $log_5 100 - log_5 4$

Deňlemeleri çözmeli:

13. $log_6(x+1) + log_6(2x+1) = 1$
14. $log_3(3-x) + log_3(4-x) = 1 + log_3 4$
15. $log_{0,5}(x+2) + log_{0,5}(x+3) = log_{0,5}3 - 1$
16. $log_3\sqrt{x+8} - 1 = log_3 2 - log_3\sqrt{x-8}$
17. $log_2\sqrt{x+1} - 1 = log_2 3 - log_2\sqrt{2x+3}$
18. $log_2 x + log_2(x-2) = 2log_2\sqrt{3}$
19. $log_3(3^x+8) = 2 - x$
20. $log_{x-1}(x^2-7x+6) = 1$
21. $log_{1-x}(x^2+3x-4) = 1$
22. $x^2 + 7 = 6x \cdot log_8 x \cdot log_x 16$
23. $x^2 \cdot log_x 27 \cdot log_9 x = x + 14$
24. $log_3(2^x-1) + log_3(2^x-3) = 1$

Deňsizlikleri çözmeli:

25. $log_4(x-2) < 2$
26. $log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1$
27. $log_5(3x+1) > 2$
28. $log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < -2$
29. $log_2(x^2-5x+4) < 2$
30. $log_2(x-1) - log_2(2x-4) > 0$

Jogaplary:

1. -1, 2. $\frac{1}{2}$, 3. $-\frac{1}{2}$, 4. $-\frac{1}{2}$, 5. 3, 6. 3, 7. $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$, 8. $\frac{5}{4}$,
9. 1, 10. 3, 11. 2, 12. 2, 13. 1, 14. 0, 15. 0, 16. 10,
17. 3, 18. 3, 19. 0, 20. 7, 21. -5, 22. 7, 23. 2, 24. 2,
25. $(2; 18)$, 26. $(0; 1{,}5)$, 27. $8; +\infty)$, 28. $12; +\infty)$,
29. $(0; 1) \cup (4; 5)$, 30. $(1; +\infty)$

Ulanylan edebiýatlar

1. С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н.Решетников А.В.Шевкин. Арифметика. “Москва”, 1988г.
2. В.С.Крамор. Повтаряем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. Москва: “Просвещение”, 1990г.
3. К.И.Швецов, Г.П.Бевз. Справочник по елементарной математике, Киев: Наука думка, 1965г.
4. В.Т.Лисичкин, И.П.Соловейчик. Математика, Москва: “Высшая школа”,1991г.
5. A.Orazgulyýew, J.Atabaýewa, G.Durdyýewa, A.Abdyrahmanow. Elementar matematika, Aşgabat, 2004ý.
6. H.Geldiýew, A.Orazgulyýew, A.Öwezow, A.Kaşaňow, B.Haýdarow, M.kakabaýew, J.Bäşimow, O.Meläýewa, Matematikadan ýan kitaby, Aşgabat, 2008ý.
7. M.Rahymow, J.Atabaýewa, A.Kaşaňow, Matematikanyň başlangyç düşünji-endikleri, Aşgabat, 2009ý.
8. Orta mekdebiň VIII synpy üçin “Algebra” okuw kitaby, Aşgabat, 2011ý.
9. Orta mekdebiň IX synpy üçin “Algebra” okuw kitaby, Aşgabat, 2008ý.

Mazmuny

V BAP. RASIONAL GÖRKEZIJILI DEREJE

Bellikler