Güýçgeldi Gutlyýew

Ähtimallyklar teoriýasyndan we matematiki statistikadan meseleleri çözmekde gollanma

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan makullanyldy

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2017

UDK 000.0:000
G 86

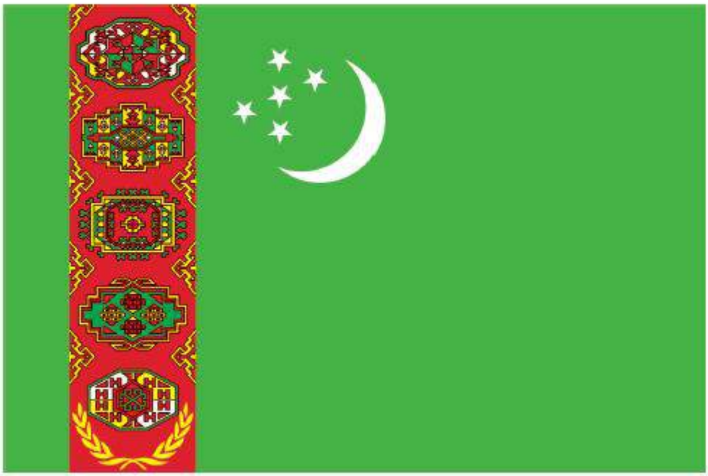
G.Gutlyýew
G 86 **Ähtimallyklar teoriýasyndan we matematiki statistikadan meseleleri çözmekde gollanma.** Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. –A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2017.

Gollanmada ähtimallyklar teoriýasynyň we matematiki statistikanyň elementlerine degişli bolan düşünjeler, maglumatlar we usullar beýan edilýär, teoriýany berkitmek üçin mysal-meseleler çözülip görkezilýär. Bölümleriň soňundan, talyplaryň özbaşdak taýýarlanmaklary we ýerine ýetirmekleri üçin gönükmeler hem-de meseleler getirilýär.

TDKP №79, 2017 KBK 65.05 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

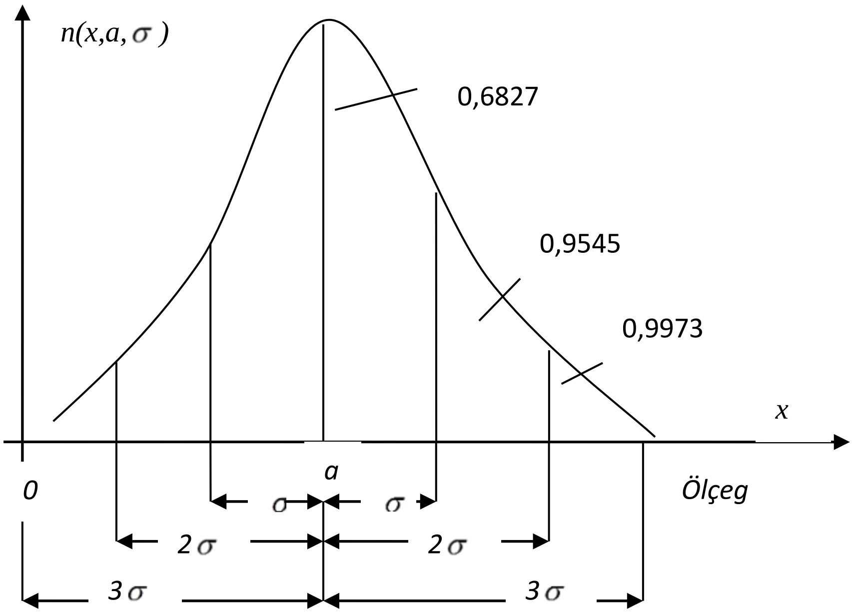
Giriş.
Ähtimallyklar teoriýasynyň we matematiki statistikanyň predmeti hem-de meseleleri

Ykdysadyýetde, önümçilikde we ylmy derňewlerde biz häli-şindi üýtgemeýän şertlerde köp gezek gaýtalanyp geçirilýän tejribeler, amallar ýa-da hadysalar bilen iş salyşýarys. Şunlukda, şertleriň esasy toplumynyň üýtgewsizdigine, aýratyn tejribeleriň, meselem uzynlygy, jisimiň massasyny, zarýadlanmasyny ölçemek we ş.m. örän dykgat bilen geçirilýändigine garamazdan, elmydama netijeler biri-birlerinden azda-kände tapawutlanýar, ýagny olar tötänleýin üýtgemeleri başdan geçirýär. Şu hadysalarda, şol bir gaýtalanmalarda ulgamlaýyn ýalňyşlyklary, gödek sowalyklary aradan aýyrsak hem ölçeglere, köp sanly dolandyrylmaýan we bir ölçemeden beýlekä geçilende üýtgäp durýan dürli faktorlar täsir edýärler. Şeýle faktorlara enjamyň aýratyn bölekleriniň tötänleýin wibrasiýasy, ýerine ýetirijiniň duýuş organlarynyň fiziologik üýtgemesi, ykdysady gurşaw, göz öňünde tutulmaýan daşky gurşawyň temperaturasy, jisimiň optiki, magnit we elektrik häsiýetleri, çyglylygy we ş.m. degişlidir.

Tötänleýin täsirlerde aýratyn tejribeleriň netijelerini öňünden aýdyp bolmasa hem gaýtalamalaryň sanynyň artmagy bilen gitdigiçe durnuklaşýan kanunalaýyklyklar ýüze çykýar. Muny ölçemeleriň paýlanyşynyň egrisiniň mysalynda görmek bolar (1-nji surat).

Paýlanyş egrisiniň aşagyndaky meýdan bire deň bolup, x oky boýunça islendik interwala degişli meýdan, seredilýän interwala ölçegiň tötänleýin netijesiniň düşmeginiň ähtimallygyny aňladýar.

Suratdan görşümiz ýaly, alynýan netijeleriň esasy köplügi käbir a **merkeziň** ýa-da **orta bahanyň** töwereginde jemlenýär. Bu ýerde a − orta baha (oňa matematiki garaşma hem diýilýär), σ – ölçegiň takyklygy (başgaça, orta kwadratik gyşarma). (a-σ , a+σ) interwalda ölçegleriň ülşi 0,6827-ä deň; (a-2σ , a+2σ) interwalda 0,9545; (a-3σ , a+3σ) interwalda bolsa, eýýäm, 0,9973-e deň. a we σ – hemişeliklere *paýlanyşyň egrisiniň parametrleri* diýilýär.



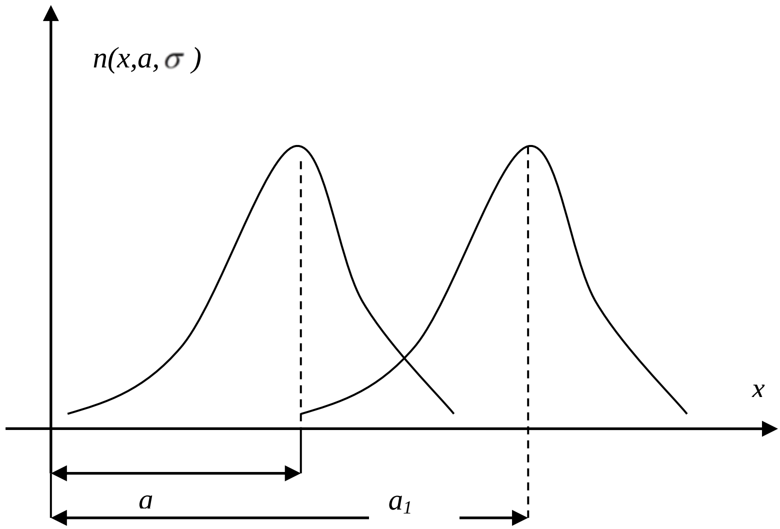
1-nji surat

Eger şol bir şertlerde, şol bir enjam hem-de takyklyk arkaly başga obýekti $a_1>a$ bahada köp gezek ölçesek, onda egriniň formasy üýtgemän, gaýtalanýan ölçegleriň netijeleriniň toplanmagynyň merkezi abssissa oky boýunça saga süýşerdi (2-nji surat).

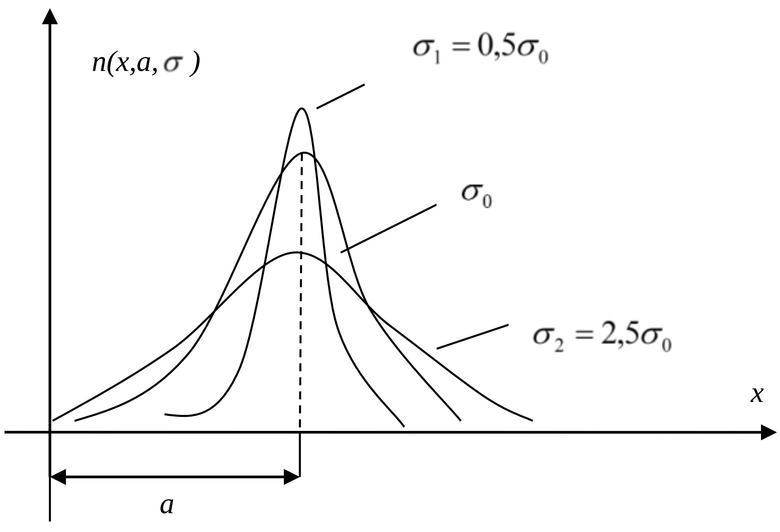
Bizi gyzyklandyrýan *a* ululygy ölçemegiň usulyny üýtgedeliň, ýagny ölçegi başga enjam arkaly amala aşyralyň. Onda netijeleriň toplanmagy *a* bahanyň töwereginde bolup, egriniň formasy üýtgärdi (3-nji surat), bu ýerde σ – artsa, takyklyk kemelýär we tersine.

Ölçegleriň paýlanyşynyň egrisine ylymda we tehnikada giňden ulanylýan tötän ýalňyşlyklar teoriýasynyň we iň kiçi kwadratlar usulynyň esasyny goýan meşhur nemes matematigi Gaussyň (1777 – 1855) hatyrasyna **Gaussyň egrisi** hem diýilýär.

Durmuşda şeýle köp sanly ölçegleri, tejribeleri geçirmek – örän köp zähmeti, wagt resurslaryny hem-de serişdelerini talap edýär. Şol sebäpli, praktikada, az sanly gaýtalanýan ölçemeler üçin tötän ýalňyşlyklar teoriýasynyň usullaryny ulanyp, *a* we σ parametrleri



2-nji surat



3-nji surat

bahalandyrýarlar.

Häzirki döwürde bu teoriýany matematiki statistika ylmynyň bölümleri hem ulanýar. **Matematiki statistika ylmy** – köpçülikleýin hadysalara degişli we tötän faktorlaryň toplumynyň täsirini göz öňünde tutýan tejribe maglumatlaryny işläp düzmegiň rasional tärlerini öwredýär.

Matematiki statistikanyň bölümleri paýlanyş kanunlarynyň parametrlerini bahalandyrýar, çaklamalary statistiki taýdan barlaýar. Korrelýasiýa teoriýasy ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklary bahalandyrýar we ş.m.

Tebigaty öwrenmegiň we tehnikanyň ösmegi matematiki statistikanyň öňünde birnäçe täze meseleleri goýdy, olary çözmek bolsa, matematiki statistikanyň usullarynyň mundan beýläk hem kämilleşmegine getirdi.

Statistika adalgasy "status" diýen latyn sözünden gelip çykyp, *zatlaryň ýagdaýy* diýmegi aňladýar. Ol ilki başda döwleti öwrenmek manysynda ulanylypdyr. Häzirki wagtda statistika diýlip, *birinjiden*, köpçülikleýin jemgyýetçilik hadysalarynyň hasabyny ýöretmeklige, *ikinjiden*, durmuş, ykdysady, tebigy we ş.m. hadysalaryň ýörite kitaplarda, metbugatda çap edilmegine, *üçünjiden*, köpçülikleýin hadysalary mukdar taýdan öwrenýän ylyma aýdylýar.

Okuw gollanmasy girişden we üç sany bapdan ybarat. I we II baplar ähtimallyklar teoriýasynyň tötän wakalar we tötän ululyklar bölümlerine bagyşlanyp, zerur düşünjeler hem-de maglumatlar degişli mysallaryň çözgütleri arkaly beýan edilýär. III bapda amaly ähmiýetli matematiki statistikanyň elementleri düşündirilýär, degişli meseleler çözülýär. Bölümleriň soňundan talyplaryň özbaşdak ýerine ýetirmekleri üçin gönükmeler hem-de meseleler getirilýär. Meseleleriň aglaba köpüsiniň jogaplary görkezilendir.

1. Ähtimallyklar teoriýasynyň elementleri

1.1. Tötän wakalar

Bilşimiz ýaly, durmuş hadysalary we prosesler käbir amallaryň, synag – tejribeleriň köp gezek gaýtalanmagy bilen häsiýetlendirilýär.

Synag – köp gezek gaýtalanyp bilinmegi mümkin bolan käbir kesgitli şertleriň toplumynyň amala aşyrylmasydyr, synagyň (tejribäniň) netijesine bolsa **waka** hökmünde seredilýär. Meselem, käbir şertlerde nyşana ok atylmada okuň nyşana degmegi wakadyr, degmezligi – başga bir wakadyr.

Şol bir şertlerde, geçirilýän synaglaryň her birinde hökmany ýagdaýda ýüze çykýan waka – **hökmany waka** diýilýär, synaglaryň hiç birinde ýüze çykyp bilmeýän waka **mümkin däl waka** diýlip atlandyrylýar, synaglarda ýüze çykmagy ýa-da çykmazlygy mümkin bolan wakalara **tötän wakalar** diýilýär. Mysal üçin, granlary 1-den 6-a çenli sanlar bilen belgilenen kubjagaz oklananda, 1-den 6-a çenli sanlaryň biriniň düşmegi hökmany wakadyr, 8-lik sanyň düşmegi mümkin däldir, diňe 3-lük sanyň düşmegi – tötändir.

Wakalary köplenç uly latyn harplary bilen belgilemek kabul edilen. Hökmany waka U, mümkin däl waka V, tötän wakalar bolsa galan latyn harplary arkaly belgilenýärler.

Bir tipli synaglaryň her birinde deň mümkinçilikli ýüze çykyp biljek wakalary H_1, H_2, ... H_n arkaly aňladalyň. Bu wakalara **elementar wakalar** diýlip, wakalaryň köplügi $\{H_1, H_2, ... H_n\}$ ýaly belgilenýär. Bu köplükde biriniň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmagyny inkär edýän wakalara **özara sygyşmaýan wakalar** diýilýär. Meselem, granlary 1-den 6-a çenli sanlar bilen belgilenen kubjagaz oklananda, H_i – “i sanyň düşmegi “ $(i=\overline{1,6})$ diýip belgilesek, onda $\{H_1, H_2\}$, $\{H_1, H_3\}$,...,$\{H_1, H_6\}$,$\{H_2, H_3\}$,....,$\{H_2, H_6\}$, $\{H_3, H_4\}$, $\{H_3, H_5\}$, $\{H_3, H_6\}$, $\{H_4, H_5\}$, $\{H_4, H_6\}$, $\{H_5, H_6\}$ – jübüt-jübütden özara sygyşmaýan wakalaryň köplükleridir.

Wakalar köplüginde bir wakanyň ýüze çykmagy ýa-da çykmazlygy beýleki wakanyň ýüze çykmagyna täsir etmese, şeýle wakalara **özara bagly däl wakalar** diýilýär. Meselem, ýokarky mysalda H_i ($i=\overline{1,6}$)-özara bagly däl wakalardyr.

1.2. Wakalaryň üstünde geçirilýän amallar

Elementar wakalar arkaly çylşyrymly wakalar emele getirilýär. Meselem, kubjagazly meselede:
$A=\{H_1, H_2, H_3\}$ – "täk sanlaryň düşmegi",
$B=\{H_1, H_2, ..., H_6\}$ – "1-den 6-a çenli sanlaryň düşmegi" diýip belgilesek, A wakanyň ýüze çykmagy B waka getirýär, ýa-da A-dan B gelip çykýar. Bu halaty $A\subseteq B$ ýa-da $B\supseteq A$ ýaly belgileýärler. Eger bir wagtda $A\subseteq B$ hem-de $B\subseteq A$ ýerine ýetýän bolsa, onda A we B wakalara **deňgüýçli** diýilýär hem-de $A=B$ ýaly belgilenýär.

A wakanyň ýüze çykmaýan wagty we diňe şonda ýüze çykýan waka ***A* wakanyň garşylykly wakasy** diýilýär we $\overline{A}$ bilen belgilenýär, "A däl" diýlip okalýar.

A we B wakalaryň **logiki jemi** ýa-da **birleşmesi** diýip, olaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyndan durýan waka aýdylýar we $A+B$ ýa-da $A\cup B$ ýaly belgilenip, "A ýa-da B wakanyň ýüze çykmagy" görnüşde okalýar. Bu ýerden

$$A+\overline{A}=U, \quad A+A=A, \quad U+V=U$$

gelip çykýar.

Eger A_i $(i=\overline{1,n})$ wakalar ulgamy berlen bolsa, onda olaryň jemi

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

ýa-da birleşmesi

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

görnüşde belgilener. Meselem, kubjagazly meselede, H_1, H_2,..., H_6 wakalar üçin $H_1 + H_2 = A$ – “san 2-den uly däl”, $H_2 + H_4 + H_6 = B$ – “san diňe jübüt” ýaly çylşyrymly wakalary alarys.

A we B wakalaryň **logiki köpeltmek hasyly** ýa-da **kesişmesi** diýlip, olaryň ikisiniň hem bir wagtda ýüze çykmagyndan durýan waka aýdylýar we AB ýa-da $A\cap B$ ýaly belgilenip, “A we B wakanyň ýüze çykmagy” görnüşde okalýar. Meselem, $A=\{H_1,H_2,H_3\}$, $B=\{H_1,H_3,H_5\}$ bolsa, onda $AB=\{H_1, H_3\}$ bolar.

Wakalar üçin

$$A\cdot\bar{A}=V, \qquad U\cdot V=V, \qquad A\cdot A=A$$

boljagy hem düşnüklidir. Özara sygyşmaýan A we B wakalar üçin $A\cdot B = V$ bolýanyny hem belläliň.

$A_i\ (i=\overline{1,n})$ wakalar ulgamy üçin olaryň köpeltmek hasyly

$$A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i$$

ýa-da kesişmesi

$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

ýaly belgilenýär.

Mysal. Nyşana yzly-yzyna 3 gezek ok atylýar. Goý, A_1 – “ok nyşana I gezekde degdi”, A_2 – “ok nyşana II gezekde degdi”, A_3 – “ok nyşana III gezekde degdi” wakalary bolsun. Onda, meselem, $B=\bar{A}_1$ – “ok nyşana I gezekde degmedi”, $C=A_1A_2A_3$ – “üç gezekde hem ok nyşana degdi” ýa-da $D=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$ “nyşana ok diňe I ýa-da diňe II gezekde degdi” ýaly çylşyrymly wakalary alarys.

1.3. Wakanyň ýygylygy we ähtimallygy

Şol bir şertlerde geçirilen N sany synaglaryň gaýtalanmalaryna–seriýasyna seredeliň. Goý, bizi wakalar köplüginiň A kesgitli wakasy, meselem, şaýylyk köp gezek oklananda, onuň suratly ýüzüniň düşmegi gyzyklandyrýan bolsun. Eger synaglar seriýasynda A waka anyk $k_N(A)$ gezek ýüze çykan bolsa, onda

$$W_N(A) = \frac{k_N(A)}{N} \tag{1.1}$$

sana wakanyň ýüze çykmagynyň şol seriýadaky **otnositel ýygylygy** diýilýär.

Eger A waka mümkin däl bolsa, onda $A=V$ bolup, geçirilýän synaglaryň islendik seriýasynda $k_N(A)=0$, diýmek, $W_N(A)=0$ alarys. Eger $A=U$ bolsa, onda hemişe $k_N(A)=N$ bolup, $W_N(A)=1$ bolar. Onda islendik A üçin

$$0 \leq W_N(A) \leq 1. \tag{1.2}$$

Eger synaglaryň seriýasy eýýäm geçirilen bolsa, $W_N(A)$ ululyk (1.1) gatnaşyk boýunça ýönekeý hasaplanar. Eger N – onçakly uly bolmasa, onda synaglaryň seriýalarynda ýygylygyň bahasy düýpli üýtgäp durar. Emma synaglaryň gaýtalanma sanlary ýeterlik uly bolan seriýalarda, A wakanyň ýygylygy **durnuklylyga** eýe bolýar we 1-den kiçi otrisatel däl sana ymtylar. Bu sana tötän ***A wakanyň ýüze çykmagynyň mümkinçiliginiň mukdar taýdan ölçegi*** hökmünde **ähtimallyk** (*probabilitas* sözünden) diýilýär hem-de $P(A)$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde

$$W_N(A) \approx P(A). \tag{1.3}$$

Synaglaryň ýeterlik köp sanly seriýalarynda ýygylygyň durnuklylygy hem-de ähtimallyga ýakynlygy ähtimallygy ýakynlaşan hasaplamaga ýardam edýär. Öz gezeginde, $P(A)$-ny bilmek N-iň uly bahasynda ol ýa-da beýleki takyklykda hem-de ygtybarlylykda, öňde durýan tejribelerde, A wakanyň ýüze çykmagynyň ýygylygyny öňünden kesgitlemäge mümkinçilik berýär.

Durmuşda häli-şindi bizi gyzyklandyrýan wakalaryň ähtimallygyny bahalandyrmagyň diýseň kynçylykly, käwagtlar bolsa, düýbünden mümkin däl ýagdaýlary ýüze çykýar. Şonuň bilen birlikde, ýönekeý wakalaryň ähtimallygy baradaky maglumatlar toplanandyr. Ähtimallyklar teoriýasynyň esasy meselesi hem tejribelerden ýa-da berlen prosesiň tebigaty bilen baglanyşykly ýolbermelerden belli bolan käbir ýönekeý wakalaryň ähtimallygy arkaly seljermeler we hasaplamalar üsti bilen bizi gyzyklandyrýan çylşyrymly wakalaryň ähtimallyklaryny tapmakdyr.

Eger käbir A_1 we A_2 wakalar sygyşýan bolsalar, onda

$$P(A_1+A_2)\neq P(A_1)+P(A_2)$$

ýa-da has takygy

$$P(A_1+A_2) \leq P(A_1)+P(A_2). \qquad (1.4)$$

Goý, synaglar seriýasynyň A_1, A_2, ..., A_n wakalary özara sygyşmaýan bolup, olaryň jemi hökmany wakany emele getirsin:

$A_1 + A_2 + ... + A_n = U$. Onda

$$P(A_1+A_2+...+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=P(U)=1. \qquad (1.5)$$

alarys.

Hususanda, özara garşylykly (sygyşmaýan) A we $\overline{A}$ wakalar üçin

$$A+\overline{A}=U \Leftrightarrow P(A)+P(\overline{A})=P(U)=1, \qquad (1.6)$$

$\overline{U}=V$ bolany sebäpli

$$U+\overline{U}=U+V=U \Leftrightarrow P(U)+P(V)=1, \; P(V)=0 \qquad (1.7)$$

formulalar alnar.

Eger $A \subseteq B$ bolsa, onda

$$P(A) \leq P(B) \tag{1.8}$$

deňsizligiň ýerine ýetjegi düşnüklidir.

1.4. Ähtimallygyň klassyky kesgitlenişi

Goý, $H_1, H_2, ..., H_n$ – elementar wakalar şol bir S seriýadaky wakalar köplügine degişli bolup, aşakdaky şertleri kanagatlandyrsynlar:

1) $H_1, H_2, ..., H_n$ – jübüt-jübütden sygyşmaýan wakalar, ýagny, $H_iH_j=V$ $(i \neq j)$ ýerine ýetýär;

2) $H_1, H_2, ..., H_n$ – wakalaryň doly ulgamyny düzýär, ýagny $H_1+H_2+ ...+ H_n=U$;

3) $H_1, H_2, ..., H_n$ – wakalaryň ähtimallyklary özara deň $P(H_1)=P(H_2)=...=P(H_n)$.

Bu üç şert ýerine ýetende “S seriýa **ýagdaýlar shemasyna** gelýär”, H_i $(i=\overline{1,n})$ waka bolsa **ýagdaý** diýilýär.

Goý, A waka ýagdaýlar shemasyndaky wakalar bilen baglanyşykly bolsun. Eger H_i ýagdaý A wakanyň ýüze çykmagyna getirýän bolsa, onda H_i ýagdaýa ***A* wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän ýagdaý** diýilýär. Eger ýagdaýlar shemasynda n sany ýagdaý bolup, A waka ýardam edýän ýagdaýlaryň sany m bolsa, onda

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.9}$$

formulany alarys. Muňa **ähtimallygyň klassyky kesgitlenişi** diýilýär.

Eger H_1 , H_2 , ..., H_n , ... – ýagdaýlaryň tükeniksiz ulgamyny emele getirýän bolsa, onda $H=H_1+H_2+...+H_n+...$ waka üçin

$$P(H)=P(H_1+H_2+...+H_n+...)=P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)+...=\sum_i P(H_i)$$

ýerine ýeter. Bu ýerde sag tarapdaky $\sum_i P(H_i)$ tükeniksiz hatar ýygnanýar diýlip hasap edilýär.

Mysal. Granlary 1-den 6-a çenli sanlar bilen belgilenen kubjagaz oklanýar. 1) Jübüt sanlaryň düşmeginiň ähtimallygyny kesgitlemeli. 2) 3-e bölünýän sanlaryň düşmeginiň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Ilki bilen, H_i – “i sanyň düşmegi “ ($i=\overline{1,6}$) diýip belgiläp, bu tejribäniň ýagdaýlar shemasyna gelýändigini görkezeliň. Dogrudan hem:

- H_i, $i=\overline{1,6}$ − jübüt-jübütden sygyşmaýan wakalar**;**
- H_i, $i=\overline{1,6}$ − wakalaryň doly ulgamyny düzýär;
- H_i, $i=\overline{1,6}$ − deň ähtimallykly wakalar.

Diýmek, tejribe ýagdaýlar shemasyna gelýär**.**

1) Goý, A – “Jübüt sanlaryň düşmegi” wakasy bolsun. Ýagdaýlar shemasynda bu waka ýardam edýän ýagdaýlar − elementar wakalar: H_2, H_4, H_6. Onda $m=3$ we $n=6$ bahalara görä, (1.9) formuladan alarys:

$$P(A) = m/n = 3/6 = 0{,}5.$$

2) Goý, B – “3-e bölünýän sanlaryň düşmegi” wakasy bolsun. Bu waka üçin H_3 we H_6 ýagdaýlar ýardam edýär. Onda $m=2$, $n=6$ bolup, (1.9) formuladan:

$$P(B) = m/n = 2/6 = 1/3$$

kesgitläris. Şu mesele boýunça

$$P(A+B) = 4/6 = 2/3, \quad P(AB) = 1/6$$

boljagy hem düşnüklidir.

Mysal. 100 sany detal ölçegleri boýunça 4 sany topara bölünip, I toparda – 15, II toparda – 40, III toparda – 30 we IV toparda – 15 detallar ýerleşdirilen. Tötänden alnan detalyň toparlara degişliliginiň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. B_i – “detal i-nji topara degişli”($i=\overline{1,4}$) belgiläliň. Eger 100 detal ölçegleri boýunça artýan tertipde ýerleşdirilip nomerlenen bolsa, onda $H_1, H_2, ..., H_{100}$ ýagdaýlary alnyp, I topara $H_1, H_2, ..., H_{15}$, II topara $H_{16}, H_{17}, ..., H_{55}$ detallar degişli bolardy we ş.m. Onda

$$P(B_1) = P(H_1 + H_2 + \cdots + H_{15}) = P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_{15})$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100} = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

Şuňa meňzeşlikde alarys:

$$P(B_2) = P(H_{16} + H_{17} + \cdots + H_{55}) = {}^{40}/_{100} = 0{,}4;$$

$$P(B_3) = P(H_{56} + H_{57} + \cdots + H_{85}) = {}^{30}/_{100} = 0{,}3;$$

$$P(B_4) = P(H_{86} + H_{87} + \cdots + H_{100}) = {}^{15}/_{100} = 0{,}15.$$

1.5. Ähtimallygyň statistiki kesgitlenişi

Köplenç halatlarda tejribe ýagdaýlar shemasyna getirilmeýär. Onda ähtimallygy klassyky kesgitleme boýunca tapyp bolmaz. Beýle ýagdaýlarda statistiki usula ýüzlenýärler. Ol şundan ybaratdyr. Tejribäni şol bir şertlerde n gezek gaýtalaýarlar. Eger n gezekde A waka m gezek ýüze çyksa, onda m/n gatnaşyga A wakanyň ýygylygy diýilýär we $W_n(A)$ ýa-da $P^*(A)$ ýaly belgilenýär, ýagny $P^*(A) = m/n$. Şweýsar alymy J. Bernulliniň subut etmegine görä, islendik kiçi $\varepsilon > 0$ san üçin

$$|P^*(A) - P(A)| = |m/n - P(A)| > \varepsilon$$

diýen wakanyň ähtimallygy n tükeniksizlige ymtylanda nola ymtylýandyr, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - P(A)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

deňlik ýerliklidir. Ýönekeý dil bilen aýdanyňda, islendik A wakanyň ýygylygy n-iň bahasynyň artmagy bilen onuň ähtimallygyna ymtylýar.

Diýmek, wakanyň ýygylygy bilen onuň ähtimallygynyň arasynda örän jebis baglanyşyk bar. Bu ýygylyk kesgitlenendäki geçirilen tejribeleriň sany näçe köp boldugyça aýdyň bolýar. Biz ähtimallygy wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligini aňladýan san hökmünde kesgitledik. Ýokarda getirilen delillere göra, n uly bolan ýagdaýynda wakanyň ýygylygyna hem wakanyň ýüze çykmagyny häsiýetlendirýän san hökmünde garamak dogrudyr.

Mysal. B.W. Gnedenkonyň [8] kitabynda şwed döwletiniň statistikasynyň 1935-nji ýyl boýunça ýaňy dogan çagalaryň gyzlara we oglanlara paýlanyşy baradaky maglumatlary tablisa (1.1-nji tablisa) görnüşinde getirilýär.

1.1 –nji tablisa

Gyz dogma ýygylygy	*Jemi*	*Gyz*	*Oglan*	*Aýlar*
0,486	7280	3537	3743	1
0,490	6957	3407	3550	2
0,490	7883	3866	4017	3
0,471	7884	3711	4173	4
0,478	7892	3775	4117	5
0,482	7609	3665	3944	6
0,477	7585	3621	3964	7
0,486	7393	3596	3797	8
0,485	7203	3491	3712	9
0,491	6903	3891	3512	10
0,482	6552	3160	3392	11
0,473	7132	3371	3761	12
0,482	***88273***	***42591***	***45682***	***Ýyl***

Tablisadan görnüşi ýaly, gyz çaganyň dogmagynyň ýygylygy, geçirilen synaglaryň möçberiniň uly bolany sebäpli, aýba-aý üýtgemeýär diýen ýaly (şol bir 0,482 sanyň golaý töwereginde ýerleşýär). Bu bolsa wakanyň ýygylygynyň, tejribäniň sanynyň köpelmegi bilen, belli bir sana ymtylýandygyny görkezýär.

Mysal. Ýokarda agzalan kitapda, iki alym tarapyndan teňňe oklananda, onuň suratly tarapynyň çykmagynyň ýygylygyny kesgitlemek üçin geçirilen işleriň netijeleri hem getirilýär (1.2-nji tablisa). Görşümiz ýaly, bu tablisa hem ýokarda aýdylanlary tassyklaýar.

1.2 –nji tablisa

Synag geçirijiler	***Oklanan sany***	***Surat tarapynyň çykan sany***	***Ýygylyk***
Býuffon	4040	2048	0,5069
K. Pirson	12000	6019	0,5016
K. Pirson	24000	12012	0,5005

Wakalaryň ýüze çykmak mümkinçiliginiň ähtimallygyň üsti bilen aňladylmagynyň düýp manysy uly ähtimallykly wakalaryň kici ähtimallykly wakalardan köp ýüze çykmagy bilen düşündirilýär. Bu ýagdaý amaly meseleleri çözmekde giňden ulanylýar. Mysal üçin, wakalaryň ähtimallyklarynyň üsti bilen olaryň haýsyna öwrenilýän prosesde köp üns bermeli, haýsyna az üns bermeli diýen sowala jogap berip bolar ýa-da ähtimallyklary kiçi bolan wakalara mümkin däl wakalar hökmünde, ähtimallyklary uly bolan wakalara bolsa, hökmany wakalar hökmünde garap, prosesi öwrenmegi ýeňilleşdirmek mümkin.

1.6. Ähtimallygyň geometriki kesgitlenişi

Wakalaryň ähtimallyklaryny klassyky usul bilen hem, statistiki usul bilen hem kesgitlemek umumy halda aňsat däldir. Köp wakalaryň ähtimallyklaryny bu iki ýol bilen hasaplamak mümkin hem däl. Meselem, käbir tejribelerde ýüze çykýan wakalaryň sanynyň tükeniksiz köp bolmagy mümkin. Bu ýagdaýda klassyky usuly ulanmak mümkin däl. Tükenikli bolýan halda bolsa olaryň içinden ýagdaýlar shemasyny emele getirýänlerini saýlap almak kyn bolýar, ýagny geçirilýän tejribeleriň köpüsi klassyky usulyň şertlerini kanagatlandyrmaýar. Bu halatda statistiki usula ýüzlenilse hem tejribeleriň hemmesinde şol bir şertleriň ýerine ýetirilmegini gazanmak kyn bolmagy ýa-da tejribäni şol bir şertlerde näçe köp geçirseň-de ähtimallygyň takyk bahasyny bilip bolmazlygy mümkin.

Ine, şuňa görä, käbir meseleler çözülende, ähtimallygyň geometriki kesgitlemesini ulanýarlar. Goý, biziň tejribämiz berlen nokady *[a,b]* kesimde tötänden ýerleşdirmekden ybarat bolsun. *[a,b]* kesimde ýatýan, uzynlygy *l*-e deň bolan kesimi alalyň. Berlen nokat *[a,b]* kesimde tötänden ýerleşdirildi, diýmek, şol nokadyň alnan *l* kesime düşmeginiň ähtimallygy kesimiň *l* uzynlygyna baglydyr, emma *l* kesimiň *[a,b]* kesimiň haýsy böleginde ýerleşýänine bagly däldir. Şeýle şertde *A* – “nokat *l* kesimiň üstüne düşdi” wakasynyň *P(A)* ähtimallygy

$$P(A) = l/(b-a)$$

formula arkaly kesgitlenýär.

Goý, *D* − tekizlikde (giňişlikde) ýatan, meýdany (göwrümi) *S (V)* bolan oblast bolsun. *Q* − şol oblastda ýatýan we meýdany (göwrümi) S_1 (V_1) bolan kiçi oblast bolsun. Onda *D* oblastda tötänden ýerleşdirilen *C* nokadyň *Q* oblasta düşmeginiň *P* ähtimallygy

$$P = S_1/S, \quad (P = V_1/V)$$

formula bilen tapylýar.

Mysal. *A* we *B* nokatlary birleşdirýän telefon simi tötänden *C* nokatda üzülýär. *C* nokadyň *A* nokatdan uzaklygynyň *l*-den kiçi bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, *A* we *B* nokatlary birleşdirýän simiň uzynlygy *d* bolsun. Simiň üstünde *A* nokatdan uzaklygy *l*-e deň bolan *D* nokady alalyň. Şeýlelikde, biziň meselämiz, “*C* nokat uzynlygy *d-l* bolan DB kesime düşer” diýen F wakanyň ähtimallygyny hasaplamaklyga getirildi

$$P(F)=\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{d-l}{d}.$$

Mysal. $x^2/25+y^2/16=1$ deňlemeli ellips bilen çäklenen tekizligiň böleginiň içinde $x^2+y^2\leq 9$ tegelek ýerleşdirilen. Bölege tötänden oklanan nokadyň ellips arkaly çäklenen bölek (S_{ell}) bilen tegelegiň (S_{teg}) arasyndaky halkanyň içine (S_{halka}) düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A – “nokadyň halka düşmegi” wakasy bolsun. Onda

$$P(A) = S_{halka} / S_{ell} =(S_{ell}-S_{teg}) / S_{ell} = (\pi ab-\pi r^2)/\pi ab.$$

Bu ýerde $a=5, b=4, r=3$. Onda

$$P(A)=(20\pi-9\pi)/(20\pi)=11/20=0{,}55.$$

1.7. Kombinatorikanyň esasy formulalary

Ähtimallyga degişli meseleler çözülende kombinatorikanyň formulalary ulanylýar. Kombinatorikanyň çalşyrmalar, ýerleşdirmeler we utgaşdyrmalar düşünjeleri bardyr.

Kesgitleme. Dürli n elementlerden düzülen we biri-birinden diňe şol elementleriň yzygiderlikde ýerleşiş tertibi bilen tapawutlanýan setirlere **çalşyrmalar** diýilýär. Çalşyrmalaryň sany P_n bilen belgilenip,

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$$

ýaly hasaplanýar.

Mysal. 2 sany, 3 sany we 5 sany dürli reňkli şarjagazlardan düzüp bolýan çalşyrmalaryň sanyny kesgitlemeli.

Çözülişi. $P_2=2!=2;\ P_3=3!=6;\ P_5=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

Kesgitleme. Dürli n elementleriň m sanysyndan düzülen bolup, biri-birinden ýa elementleriň yzygiderlikde ýerleşiş tertibi bilen ýa-da elementleriň özi bilen tapawutlanýan setirlere **ýerleşdirmeler** diýilýär. Ýerleşdirmeleriň sany A_n^m bilen belgilenip,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

formulada hasaplanýar.

Mysal. 5 sany dürli şarjagazlardan 2 element boýunça düzülen ýerleşdirmeleriň sanyny kesgitlemeli.

Çözülişi. $$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!} = 4\cdot 5 = 20$$

Kesgitleme. Dürli *n* elementleriň *m* sanysyndan düzülen bolup, biri-birinden elementleriň iň bolmanda biri bilen tapawutlanýan setirlere **utgaşdyrmalar** diýilýär. Utgaşdyrmalaryň sany C_n^m bilen belgilenip,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{P_m}$$

formula boýunça hasaplanýar.

Mysal. 5 sany dürli reňkli şarjagazlardan 3 element boýunça düzülen utgaşdyrmalaryň sanyny tapmaly.

Çözülişi.

$$.C_n^m = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10.$$

Eger *n* sany elementleriň arasynda *k* sany meňzeşleri bar bolsa we $n_1, n_2, \ldots, n_k$, degişlilikde, meňzeş elementleriň gaýtalanma sanlary bolsalar, ýagny $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, onda *n* elementlerden duran hem-de elementleri gaýtalanyp bilýän orun çalşyrmalaryň $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ sany şeýle tapylýar

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Mysal. 5 sany şarjagazlaryň 3-si ak, 2-si gara. Olardan düzülen orun çalşyrmalaryň sanyny hasaplamaly.

$$P(3,2) = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = 2 \cdot 5 = 10.$$

1.8. Gaýtarylmasyz saýlama barada mesele

Gaýtarylmasyz saýlama meselesinde saýlanan predmetler yzyna gaýtarylmaýar. Şeýle saýlama meselesiniň ähtimallygynyň formulasyny ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini ulanyp tapalyň.

Goý, käbir toplumyň her *N* obýekti diňe *A* ýa-da $\bar{A}$ nyşanlara eýe bolsun. Şeýlelikde, toplumyň M obýekti *A* nyşanly ($M \leq N$), *N-M* obýekti bolsa $\bar{A}$ nyşanly bolar. Köplenç, *M* san, diýmek, M/N drob san näbelli bolýar. Şu drob sany ýakynlaşan hasaplamak üçin *N* obýektden *n (n<N)* obýekti saýlap, olardan *A* nyşanly m obýektleriň ($m \leq n$) sanyny kesgitläliň. Käbir şertlerde, dogrudan hem *m/n* san M/N sana takmyn deň bolýar.

Goý, *M* san belli bolsun. *n* obýektli saýlamada *A* nyşanly *m* obýekti tapmagyň ähtimallygyny kesgitläliň.

Eger başky toplumda *N* obýekti nomerlesek, onda alynjak *n* obýektli toplumlaryň sany C_N^n utgaşdyrma deň bolar. *A* nyşanly *m* obýektli toplumlaryň sany C_M^m utgaşdyrma, $\bar{A}$ nyşanly *n-m* obýektli toplumlaryň sany C_{N-M}^{n-m} utgaşdyrma boýunça kesgitlener. Onda *n* obýektli toplumdan *A* nyşanly bolmaklyga ýardam edýän kombinasiýalaryň sany $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ aňlatma boýunça kesgitlener.

Diýmek, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi boýunça, *n* obýektli saýlamada *A* nyşanly obýektleriň *x* sanysynyň bolmagynyň ähtimallygy $P_{NM}(n,x)$ şeýle kesgitlenýär

$$P_{NM}(n,x) = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}\ . \qquad (1.10)$$

Mysal. Goý, *N=100, M=30, n=3, x=1* bolsun. Onda

$$P_{100,30}(3,1) = \frac{C_{30}^1 \cdot C_{70}^2}{C_{100}^3} = \frac{30 \cdot 70 \cdot 69 \cdot 3}{100 \cdot 99 \cdot 98} = 0{,}448$$

Gaýtarylmaly saýlamada tötänligiň saklanmagy üçin, , nobatdaky saýlamalaryň islendiginde seredilýän toplumyň her elementiniň galan elementler bilen deň ähtimallygynyň bolmagyny gazanmalydyr. Şu talaplaryň ýönekeý ýalydygyna garamazdan, iş ýüzünde amala aşyrmak ýeňil däldir. Häzirki döwürde tötänleýin saýlamany tötän sanlaryň kompýuter programmasyny ulanyp ýerine ýetirýärler.

1.9. Wakalaryň jeminiň ähtimallygyny hasaplamakdaky esasy formulalar

Islendik A we B wakalaryň jeminiň $P(A+B)$ ähtimallygy aşakdaky formula arkaly tapylýar

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.11)$$

Eger $A \cdot B=V$ bolsa, onda $P(A \cdot B)=0$ bolup, (1.11) formuladan

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1.11a)$$

alarys.

A_i $(i=\overline{1,n})$ wakalaryň ulgamy üçin

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P\left(A_i A_j A_k\right) + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \qquad (1.12)$$

alarys. Bu formulany (1.11) formuladan we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp subut etmek bolar.

Eger bu wakalar jübüt-jübütden sygyşmaýan bolsalar, onda (1.12) formuladan

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.12a)$$

alarys. Meseleler çözülende (1.12) formuladan peýdalanmak uly hasaplamalary talap edip biler, şeýle ýagdaýlarda garşylykly wakalara geçmek usulyndan peýdalanmak amatlydyr

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_n). \qquad (1.12b)$$

Mysal. Nyşana merkezde ýerleşen tegelekden we ony gurşap alýan iki halkadan ybarat. Mergen nyşana ok atýar. Okuň tegelege, birinji halka we ikinji halka degmeginiň ähtimallyklary degişlilikde 0,20; 0,15; we 0,10 deň. “Mergeniň oky nyşana deger” diýlen A wakanyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. A_1 – “Ok tegelege deger”, A_2 – “Ok 1-nji halka deger”, A_3 – “Ok 2-nji halka deger” wakalaryny belgiläliň. Onda

$$A=A_1+A_2+A_3. \quad P(A)=P(A_1+A_2+A_3) =$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}20+0{,}15+0{,}10=0{,}45.$$

Mysal. 100 enjamdan 5-si näsaz. 100 enjamdan tötänden 2-sini saýlap alýarlar. A – “Şol iki enjamyň iň bolmanda biri saz” wakasynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. $\bar{A}$ – “Alnan enjamlaryň ikisi hem näsaz” wakasydyr. Onda

$$\bar{m}=C_5^2=10. \quad n=C_{100}^2=9900/2=4950,$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\bar{m}}{n} = \frac{10}{4950} = \frac{1}{495},$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{495} \approx 0{,}998.$$

Mysal. Şol bir nyşana iki gezek ok atylyp, her gezekde okuň nyşana degmeginiň ähtimallyklary degişlilikde 0,9 we 0,6 deň. Iň bolmanda bir gezekde okuň nyşana degmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Goý, A – "Birinji gezekde okuň nyşana degmegi", B – "Ikinji gezekde okuň nyşana degmegi" wakalary bolsunlar. A we B sygyşykly we bagly däl wakalar bolup, olaryň ähtimallyklary $P(A)=0,9$ we $P(B)=0,6$ deň. Onda (1.11) formula görä:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)= P(A)+P(B)- P(A)P(B)=$$
$$=0,9+0,6-0,9 \cdot 0,6 =0,96.$$

Garşylykly wakalara geçip, (1.12b) formulany diňe A we B wakalar üçin peýdalanyp alarys

$$P(A+B)=1-P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) =1 – 0,1 \cdot 0,4=1-0,04=0,96.$$

1.10. Wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygyny hasaplamakdaky formulalar

Goý, kesgitli şertlerde A wakanyň ýüze çykmak ähtimallygy belli bolsun. Birden şert üýtgese, ýagny synag dowamynda B waka hem ýüze çyksa, onda A wakanyň ähtimallygynyň üýtgemegi mümkin. A wakanyň üýtgän ähtimallygyna **şertli ähtimallyk** diýilýär we $P(A/B)$ ýaly belgilenýär.

Şertli ähtimallyklar

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad (P(B)\neq 0);$$
$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (P(A)\neq 0) \tag{1.13}$$

formulalar bilen kesgitlenýär. Bu ýerde

$P(A), P(B)$ – şertsiz ähtimallyklardyr;

$P(AB)$ – wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy.

(1.13) formulalardan

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B),\quad P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \qquad (1.14)$$

alarys. Eger A we B wakalar bagly däl bolsalar, onda

$$P(A/B)=P(A), \qquad P(B/A)=P(B)$$

ýerine ýetip, (1.14) formulalardan

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \qquad (1.14^1)$$

formula alnar.

Mysal. Gapda 7 ak we 3 gara şarlar bar. Aşakdaky wakalaryň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

1) A – "Gapdan ak şary çykarmak";
2) G – "Gapdan gara şary çykarmak";
3) C – "Bir gara şar çykarylansoň, ýene ak şary çykarmak";
4) B – "Bir ak şar çykarylansoň, ýene ak şary çykarmak".

Çözülişi. 1) $P(A)=7/10=0{,}7$; 2) $P(G)=3/10=0{,}3$;
3) $P(C)=P(A/G)=7/9=0{,}777$; 4) $P(B)=P(A_1/A)=6/9=0{,}666$.

Bu ýerde A_1 bilen "Ýene ak şary çykarmak" wakasyny şertli belledik. Görşümiz ýaly, $P(A)\neq P(A/G)\neq P(A_1/A)$.

Eger $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň islendik kombinasiýasy galan wakalaryň islendik kombinasiýasy bilen bagly däl bolsa, onda olara **toplumlaýyn bagly däl wakalar** diýilýär.

Toplumlaýyn bagly däl wakalar üçin aşakdaky formula dogrudyr

$$P(A_1A_2... A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n). \qquad (1.15)$$

Islendik A_i $(i=1, 2, ..., n)$ wakalar üçin şeýle formula alynýar:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}). \qquad (1.16)$$

1.11. Doly ähtimallyklar formulasy

Goý, käbir synagyň netijesinde H_i $(i = \overline{1,n})$ wakalaryň islendik biri ýüze çykyp, olar aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan bolsunlar:

1) $H_i H_j = V$ $(i \neq j)$ – jübüt-jübütden sygyşmaýan wakalar;

2) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = U$ –wakalaryň doly ulgamyny emele getirýärler;

Onda H_i $(i = \overline{1,n})$ wakalara **çaklamalar** diýilýär.

Eger A waka şu tejribede ýüze çykýan bolsa, onda

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A/H_n) \qquad (1.17)$$

formula dogrudyr. Bu formula **doly ähtimallyklar formulasy** diýilýär.

Mysal. Dükana *I, II, III* firmalardan şol bir görnüşli azyk önümleri getirilen bolup, olaryň tutuş mukdardaky hem-de zaýalyk möçberleri görkezilen (1.3-nji tablisa).

1.3-nji tablisa

Görnüşler	**Firmalar**		
	I	***II***	***III***
Ülüş mukdary	50%	30%	20%
Zaýalygy	2%	3%	5%

Goý, A – "Götänden alnan haryt oňat" wakasy bolsun. $P(A)$ – ähtimallygy kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, H_i $(i = \overline{1,3})$ – "Haryt i-nji firmadan getirilen" wakasy bolsun. Maglumatlara görä $P(H_1)=0,5;$ $P(H_2)=0,3;$ $P(H_3)=0,2.$

$P(A/H_1)=1-0,02=0,98$ – I-den getirilen harydyň oňat bolmagynyň ähtimallygy.

$P(A/H_2)=1-0,03=0,97$ – II-den getirilen harydyň oňat bolmagynyň ähtimallygy.

$P(A/H_3)=1-0,05=0,95$ – III-den getirilen harydyň oňat bolmagynyň ähtimallygy.

Onda (1.17) formula görä hasaplarys

$$P(A)=0,5\cdot 0,98+0,3\cdot 0,97+0,2\cdot 0,95=0,971.$$

1.12. Çaklamalaryň ähtimallyklarynyň (Beýesiň) formulasy

A waka ýüze çykandan soň çaklamalaryň ähtimallyklarynyň hem üýtgemegi mümkin. Üýtgän $P(H_i/A)$ $(i=\overline{1,n})$ ähtimallyklary iňlis alymy Beýesiň formulasy boýunça hasaplaýarlar

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},\ i=\overline{1,n}. \qquad (1.18)$$

Bu ýerde $P(A)$ ähtimallyk (1.17) formula boýunça tapylýar.

Mysal. Ýokarky mysalyň şertlerinde, goý, *A* waka ýüze çykan bolsun. H_1, H_2, H_3 çaklamalaryň üýtgän $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$, $P(H_3/A)$ ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. $P(A)=0,971$ – belli. Onda (1.18) – den alarys

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,98}{0,971}=0,5046$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,3\cdot 0,97}{0,971}=0,2997$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0,2\cdot 0,95}{0,971}=0,1957$$

1.13. Gaýtalanýan synaglar üçin formulalar

Şol bir şertlerde gaýtalanýan synaglaryň islendiginde *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki synaglara bagly däl bolan şol bir san bolsa, onda şeýle synaglara **bagly däl synaglar** diýilýär.

Goý, bagly däl synaglaryň her birinde A waka şol bir p ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsun (onda $\bar{A}$ waka $q=1-p$ ähtimallyk bilen ýüze çykar). Bu ýagdaýda n synagda A wakanyň m gezek ($m \leq n$) ýüze çykmagynyň $P_n(m)$ ähtimallygyny Bernulliniň formulasy boýunça hasaplaýarlar:

$$P_n(m) = C_n^m \, p^m \, q^{n-m} \qquad (q=1-p) \qquad (1.19)$$

Mysal. Bagly däl synaglarda nyşana 5 gezek ok atylýar. Her gezekde okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy $p=0,7$ deň. "Atylan 5 okuň 3-si nyşana deger" diýen A wakanyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. (1.19) formula boýunça alarys: $q=1-0,7=0,3$,

$$P_5(3) = C_5^3 0,7^3 0,3^2 = \frac{5!}{3!\,2!} 0,343 \cdot 0,09 = 0,3087 .$$

n san uly bolanda $P_n(m)$ ähtimallygy (1.19) formula boýunça hasaplamak kynçylyk döredýär. Bu ýagdaýlarda ähtimallygy takmyn hasaplamakda fransuz matematigi Laplasyň teoremalaryny ulanýarlar.

Laplasyň lokal teoremasy. n – ýeterlik uly san bolanda $P_n(m)$ ähtimallyk

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \;\; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} . \qquad (1.20)$$

formulada hasaplanýar. ($\varphi(x)$-iň bahasy goşundydan, g.1-nji tablisadan tapylýar).

Mysal. $p=0,2;\ n=400;\ m=104 \qquad P_{400}(104)$-?

Çözülişi. $q=1-p=1-0,2=0,8.$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{104 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{104 - 80}{20 \cdot 0,4} = \frac{24}{8} = 3.$$

Tablisadan $\varphi(3)=0,0044$ tapýarys. Onda (1.20) –den alarys

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{0,0044}{8} \approx 0,0006.$$

Laplasyň integral teoremasy. n – ýeterlik uly san bolanda, “m san m_1 we m_2 $(m_1 < m_2)$ sanlaryň arasynda ýatyr” diýen wakanyň $P_n(m_1,m_2)$ ähtimallygy

$$P_n(m_1,m_2) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1) \qquad (1.21)$$

formulada hasaplanýar, bu ýerde:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

($\Phi(x)$-iň bahasy goşundydan, g.2-nji tablisadan tapylýar).

Mysal. $n=100;\ p=0,75;\ m_1=70;\ m_2=80 \qquad P_{100}(70,80)$-?

Çözülişi. $q=1-p=1-0,75=0,25.$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = -1,15; \quad x_2 = 1,15$$

$$P_{100}(70,80) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi(x_2)-(\Phi(-x_2))=\Phi(x_2)-(-\Phi(x_2))=$$

$$=2\Phi(x_2)=2\Phi(1,15)=2\cdot 0,3749=0,7498.$$

1. Gönükmeler we meseleler

Tötän waka, onuň ýygylygy we ähtimallygy. Geometriki ähtimallyk

1.1. Aşakdaky wakalaryň haýsysynyň 1) tötän, 2) hökmany, 3) mümkin däl waka bolýandygyny görkeziň:

1) Alnan bir lotereýa biledi boýunça utuş;

2) Eger gapda 3 gök we 5 gyzyl şar bolsa, tötänleýin alnan şaryň reňkli bolmagy;

3) Eger 5 bally bahalaryň sistemasy kabul edilen bolsa, giriş synaglarynda dalaşgäriň 4 synagdan 25 bal toplamagy;

4) Oýnalýan kubjagaz oklananda ýokarky granynda altydan uly oçkonyň düşmezligi.

1.2. Goý, $A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c,d\}$ köplükler berlen bolsun. $A+B$; AB tapmaly.

Çözülişi. $A+B=\{a,b,c\}+\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$,

$AB=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}$.

1.3. Iki sany oýnalýan kubjagaz oklanýar. Düşen oçkolaryň jeminiň 7-ä deň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. **Jogaby:** $\frac{1}{6}$.

1.4. Gapda 1-den 10-a çenli nomerlenen 10 sany şarlar bar. Bir şary çykardylar. Bu şaryň nomeriniň 10-dan uly däldigininiň ähtimallygyny kesgitlemeli. **Jogaby:** $P(A)=1$

1.5. Gapda 15 şar bolup, olaryň 5-si ak, galany gara. Bir şar tötänden alyndy. Aşakdaky wakalaryň ähtimallyklaryny tapmaly:

a) A-“Çykarylan şar gök reňkde”;

b) B- “Çykarylan şar ak reňkde”;

ç) C-“Çykarylan şar gara reňkde”.

Jogaby: $P(A)=0$, $P(B)=1/3$, $P(C)=2/3$,

1.6. Gapda 20 şar bolup, olardan 5-si ak, 7-si gara, 8- si gyzyl reňkde. Çykaryljak şaryň gyzyl reňkde bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. **Jogaby:** $P(G)=2/5$.

1.7. Kitabyň nomerlenen 500 sany sahypasy bar. 7 sana bölünýän nomerleriň bolmagynyň otnositel ýygylygyny tapmaly.

Jogaby: 71/500.

1.8. Gutuda 30 detal bolup, olaryň 5-si zaýa. Gutudan tötänden çykarylan detalyň zaýa bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: P (A)=5/30=1/6.***

1.9. Gapda 21 standart, 10 sany standart däl detallar saklanyp, daşalan wagty detallaryň biri ýitirilen. Gapdan tötänden çykarylan detal standart bolup çykdy. Ýitirilen detalyň: a) standart; b) standart däl bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. ***Jogaby: a)2/3; b) 1/3.***

1.10. Gutuda 6 sany birmeňzeş, ýöne nomerlenen kubjagazlar ýerleşdirilen. Ýeke-ýekeden kubjagazlaryň hemmesi çykarylanda, olaryň nomerleriniň artýan tertipde bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 1/720.***

1.11.. *0x* san okunda uzynlygy *L* bolan *0A* kesim alnyp, bu kesimde *B(x)* nokady bellenen. *0B* we *BA* kesimleriň uzynlyklarynyň *L/4*- den uly bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. *0A* kesimi *C,D,E* nokatlar arkaly dört sany deň böleklere böleliň $OC = CD = DE = EA = L/4$.

Meseläniň şerti boýunça, nokat *DE* kesime düşmeli. Onda

$$P = \frac{DE}{OA} = \frac{L/4}{L} = \frac{1}{4}.$$

1.12. *R* radiusly tegelege tötänden nokat taşlanan. Nokadyň tegelegiň içinden çyzylan: a) kwadrata; b) dogry üçburçluga; ç) dogry altyburçluga düşmeginiň ähtimallyklaryny hasaplaň.

Jogaby: a) 2/π; b) 3√3/(4π) ç) 3√3/(2π).

1.13. Tarapynyň uzynlygy *a* deň bolan deňtaraply üçburçluga nokat taşlanan. Eger üçburçlugyň islendik ýerine nokadyň düşmegi deňmümkinçilikli hasaplanýan bolsa, bu nokadyň üçburçlugyň içinden çyzylan tegelege düşmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly. ***Jogaby: π/3√3***

1.14. *R* radiusly şaryň daşyndan kub çyzylan. Kubuň içine tötänden taşlanan nokadyň kubuň içindäki şaryň içine düşmeginiň ähtimallygyny kesgitlemeli. **Jogaby:** $P = \pi / 6$.

1.15. Oglanjyk elipbiýiň kesilip ýasalan *N, A, L, A, K, B* harplary bilen oýnaýar. Ol harplar tötänleýin düzülip goýlanda “*BALKAN*” sözüniň alynmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby:*** 1/360.

1.16. Ýaryşa 10 sany deňgüýçli küştçüler gatnaşýar. Olaryň arasynda orunlary paýlaşmagyň näçe usuly bolup biler? ***Jogaby: 3628800.***

1.17. 12 adamdan näçe usulda 6 adamlyk brigadalary döredip bolar? ***Jogaby: 924.***

1.18. 8 sany ätiýaçlyk ýollarynda 5 sany otly düzümlerini näçe usulda ýerleşdirip bolar? ***Jogaby: 6720***

1.19. Gapda 10 sany şar bolup, olaryň 6-sy ak, galany gara. Iki şary aldylar. Olaryň ikisiniň hem ak bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde hemme ýagdaýlaryň sany

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45.$$

A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän ýagdaýlaryň sany

$$m = C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15.$$

Diýmek, $P(A) = m/n = 15/45 = 1/3.$

1.20. Talyplaryň toparynda *16* talyp bar, olaryň *10*-sy gyz, *6*-sy oglan. Küşt ýaryşyna gatnaşmak üçin *3* talyp alyndy. Bu üçlügiň ikisiniň gyz, biriniň oglan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: $\mathbf{\frac{27}{56}}$

1.21. Gapda 15 detal bolup, olaryň 10-sy reňklenen. Tötänden çykarylan 3 detalyň ählisiniň reňklenen bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 24/91.***

1.22. Teňňe iki gezek oklanan. Iki gezekde hem suratly ýüzüniň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly. **Jogaby:** 1/4

1.23. Birinji gapda 1-den 5-e çenli, ikinji gapda 6-dan 10-a çenli nomerlenen şarlar bar. Gaplaryň her birinden bir şar çykardylar. Çykarylan şarlaryň nomerleriniň jemi:
A- “7-den az däl”; B – “11-e deň”; C – “11-den uly däl” wakalarynyň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Jogaby: $P(A)=1,\quad P(B)=1/5,\ P(C)=3/5,$

1.24. 30 talypdan ybarat toparda barlag işi alnyp, olardan 6-sy 5-lik, 10-sy 4-lik, 9-sy 3-lük bahalar alanlar. Çagyrylan üç talybyň, üçüsiniň hem 2-lik baha alanlar bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Jogaby: $P(A)=1/406.$

1.25. Lotoreýada 1000 bilet bolup, olaryň 500-si utuşly, galanlary utuşsyzdyr. Iki bilet satyn alyndy. Ikisiniň hem utuşly bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli. **Jogaby:** $P(A)=499/1998.$

1.26. Tötänden 5 belgili telefon nomeri alnan. Bu nomeriň sifrleriniň hemmesiniň *a)* dürli; *b)* täk sanlar bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: a) 0,3024; b) 0,0312***

1.27. Goý, *N* sany adam tegelek stoluň daşynda tötänden ýerleşdirilen bolsun. Iki sany kärdeşiň ýanaşyk oturmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. ***Jogaby: 2/(N-1)!***

Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek teoremalary. Şertli ähtimallyk

1.28. Gapda 10 ak, 15 gara, 20 sary we 25 ýaşyl reňkli şarlar bar. Bir şary çykardylar. “Çykarylan şar: 1) ak; 2) gara; 3) sary; 4) ýaşyl, 5) ak ýa-da gara; 6) sary ýa-da ýaşyl; 7) ak ýa-da gara, ýa-da sary reňkli ” diýlen wakalaryň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. Bu ýerde: $n=10+15+20+25=70;$

1) $P(A)=m_A/n=10/70=1/7.$ 2) $P(G)=15/70=3/14;$

3) $P(S)=20/70=2/7.$ 4) $P(Ya)=25/70=5/14.$

Ähtimallyklary goşmak teoremasyny ulanyp alarys:

5) $P(A+G)=P(A)+P(G)=1/7+3/14=5/14;$

6) $P(S+Ya)=P(S)+P(Ya)=2/7+5/14=9/14;$

7) $P(A+G+S)=P(A)+P(G)+P(S)==1-P(Ya)=1-5/14=9/14.$

1.29. Gapda 7 ak, 8 gyzyl we 10 gök şarlar bar. Çykarylan şaryň reňkli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 0,72.***

1.30. Arasynda 6 sany zaýasy bolan 80 önümiň toplumy kabul edilende, olardan tötänden 40 sanysy alnyp barlanýar. Eger barlananlaryň içinde zaýasy ikiden köp bolmasa, onda toplum kabul edilýär. Önümleriň toplumynyň kabul edilmeginiň ähtimallygyny kesgitlemeli. ***Jogaby: 0,337.***

1.31. Birinji gapda 2 ak we 10 gara şarlar bar, ikinji gapda bolsa 8 ak we 4 gara şarlar ýerleşdirilen. Gaplaryň her birinden bir şar çykardylar. “Çykarylan şarlaryň ikisi hem ak” diýlen wakanyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A – “Birinji gapdan çykan ak şar”, B – “Ikinji gapdan çykan ak şar” wakalary bolsunlar. Bular bagly däl wakalar bolup, $P(A)=2/12=1/6;\quad P(B)=8/12=2/3$. Ähtimallyklary köpeltmek teoremalaryny ulanyp alarys

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=(1/6)\cdot(2/3)=1/9.$$

1.32. 1.31-nji gönükmäniň şertlerinde, çykarylan şarlaryň biriniň ak, beýlekisiniň gara bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Aşakdaky wakalary belläliň:

A- “I gapdan çykarylan şar ak”;
B- “II gapdan çykarylan şar ak”;
C- “I gapdan çykarylan şar gara”;
D- “II gapdan çykarylan şar gara”.

Onda $P(A)=2/12=1/6;\ P(C)=P(\overline{A})=1-1/6=5/6;$

$$P(B)=8/12=2/3;\ P(D)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-2/3=1/3.$$

AD – “I gapdan çykarylan şar ak, II gapdan çykarylan gara sar” wakasydyr. Onda

$$P(AD)=P(A)\cdot P(D)=(1/6)\cdot(2/3)=1/18.$$

Şuňa meňzeşlikde

$$P(BC)=P(B)\cdot P(C)=(2/3)\cdot(5/6)=5/9.$$

Indi, “Gaplaryň birinden çykarylan şar ak, beýleki gapdan çykarylan gara şar” diýlen wakanyň ähtimallygyny tapalyň. Onda ähtimallyklary goşmak teoremasyna görä

$$P=P(AD+BC)=P(AD)+P(BC)=1/18+5/9=11/18.$$

1.33. Gapda 6 ak we 8 gara şarlar bar. Gapdan bir-birden iki şar çykardylar (şarlar yzyna gaýtarylmady). Şarlaryň ikisiniň hem ak reňkli bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, A – “Birinji çykarylmada ak şaryň bolmagy”, B – “Ikinji çykarylmada ak şaryň bolmagy” wakalary bolsunlar. Onda baglanyşykly wakalar üçin ähtimallyklaryň köpeltmek hasyly

$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$ formulada tapylýar. Bu ýerde:

$P(A) = 6/(6+8) = 3/7$-ilkinji ak şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy;

$P(B/A) = (6-1)/(6+8-1) = 5/13$- birinji ak şar çykandan soň, ikinji ak şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy. Diýmek,

$P(AB) = (3/7)\cdot(5/13) = 15/91.$

1.34. Gapda 3 ak we 5 gara şarlar bar. Gapdan tötänden 2 şary çykardylar. Bu şarlaryň dürli reňkde bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.***Jogaby: 15/28***

1.35. Gapda 10 ak we 15 gyzyl şarlar bar. Gapdan tötänden 2 şary çykardylar. Çykarylan şarlaryň ikisiniň hem gyzyl reňkde bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. ***Jogaby: 7/20.***

1.36. Gapda 4 ak we 5 gyzyl şarlar bolup, olary bir-birden çykaryp gapdalda goýdular. Iň soňky çykarylan şaryň ak reňkde bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 1/9=0,1111***.

1.37. Üç atyjy biri-birlerinden habarsyz nyşana bir ok atýarlar. Atyjylaryň oklarynyň nyşana degmekleriniň ähtimallyklary degişlilikde 0,75; 0,8 we 0,9 sanlara deň. Birwagtda üç atyjynyň hem oklarynyň nyşana degmegiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. $P(A) = 0{,}75; \quad P(B) = 0{,}8; \quad P(C) = 0{,}9.$

$P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}54.$

1.38. 1.37-nji meseläniň şertlerinde, iň bolmanda, bir atyjynyň okunyň nyşana degmeginiň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Atyjylaryň her biriniň oklarynyň nyşana degmezliginiň ähtimallyklaryny tapalyň:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20.$

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10.$

Onda üç atyjynyň hem oklarynyň, birwagtda, nyşana degmezliginiň ähtimallygy

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = 0{,}25\cdot 0{,}20\cdot 0{,}10 = 0{,}005.$$

Emma $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ wakanyň garşylykly wakasy – iň bolmanda bir atyjynyň okunyň nyşana degmeginiň ähtimallygydyr. Diýmek,

$$P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

1.39. Üç atyjynyň oklarynyň nyşana degmekleriniň ähtimallyklary degişlilikde 0,8; 0,7; 0,9 sanlara deňdir. Atyjylar bir wagtda atdylar. *a)* diňe bir okuň; *b)* iň bolmanda bir okuň nyşana degmeginiň ähtimallyklaryny tapmaly. ***Jogaby: a) 0,092; b) 0,994.***

1.40. Sehde 3 sany awtomat-stanoklar bolup, olar şol bir görnüşli detaly ýasaýarlar. Birinji stanogyň iş öndürijiligi ortanjydan iki esse köp, üçünjiniňki bolsa ortanjydan iki esse az. Bu stanoklaryň zaýa detal ýasamaklygynyň ähtimallyklary, degişlilikde 0,05; 0,03 we 0,01 sanlara deňdir. Taýyn detallar şol bir konteýnerde saklanýar. Konteýnerden tötänden alnan detalyň zaýa bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 0,0385***

1.41. Bir iş gününiň dowamynda stanogyň döwülmeginiň ähtimallygy α deň (α-kiçi položitel san). 5 güniň dowamynda stanogyň döwülmezliginiň ähtimallygyny tapmaly ($\alpha = 0{,}01$).

Çözülişi. Bu ýerde 1-α – stanogyň bir güniň dowamynda döwülmezliginiň ähtimallygydyr. Onda $(1-\alpha)^5$ – stanogyň bäş günüň dowamynda döwülmezliginiň ähtimallygyny aňladar. Bu ýerde binomial dargatma boýunça takmyn taparys

$$P = (1-\alpha)^5 \approx 1 - 5\alpha.$$

Onda α *=0,01* bahada alarys

$$P \approx 1 - 5 \cdot 0{,}01 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

1.42. Gapda *a* ak, *b* gara we *c* gök şarlar bar. Bir şary çykardylar. “Çykarylan şar: 1) ak; 2) gara; 3) gök; 4) ak ýa-da gara; 5) ak ýada gök; 6) gara ýa-da gök” diýlen wakalaryň ähtimallyklaryny kesgitlemeli.

Jogaby: 1) $a/(a+b+c)$; 2) $b/(a+b+c)$; 3) $c/(a+b+c)$;

4) $(a+b)/(a+b+c)$; 5) $(a+c)/(a+b+c)$; 6) $(b+c)/(a+b+c)$.

1.43. Birinji gapda *a* ak we *b* gara şarlar; ikinji gapda bolsa, *c* ak we *d* gara şarlar bar. Gaplaryň her birinden bir şardan çykardylar. Şarlaryň ikisiniň hem garadygynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $bd \cdot (a+b)^{-1} \cdot (c+d)^{-1}$

1.44. Iki atyjynyň oklarynyň nyşana degmekleriniň ähtimallyklary, degişlilikde p_1 we p_2 sanlara deňdir. Atyjylar birwagtda atdylar. “Atyjylaryň biriniň oky nyşana deger, beýlekiňki degmez” wakasynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Jogaby: $p_1 + p_2 - 2p_i \cdot p_2$

1.45. Maý aýynyň islendik gününde şäheriň temperaturasynyň 5^0-dan kiçi bolmagynyň ähtimallygy α deň (α - kwadratyny hasap etmeseň hem bolýan kiçi položitel san). Maý aýynyň ilkinji üç gününde temperaturanyň 5^0-dan pes bolmazlygynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Jogaby: 1-3α

1.46. Birinji gapda 1 ak, 2 gyzyl we 3 gök şarlar, ikinji gapda 2 ak, 6 gyzyl, 4 gök şarlar bar. Her gapdan bir şar çykardylar. Çykarylan şarlaryň arasynda gök şaryň ýokdugynyň ähtimallygyny tapmaly.

Jogaby: 1/3

1.47. Günüň dowamynda stanogyň näsaz işlemeginiň ähtimallygy 0,03 deň. Yzygider dört günüň dowamynda stanogyň saz işlemeginiň ähtimallygyny hasaplamaly. **Jogaby:** $\approx 0{,}88$

1.48. Toparda 12 oglan we 18 gyz bar. Iki adamy tötänleýin saýlaýarlar. Saýlamanyň: 1) ikisi oglan; 2) ikisi gyz; 3) biri oglan, biri gyz bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Jogaby: 1) $22/145$; 2) $51/145$; 3) $72/145$.

1.49. Gapda 9 ak we 1 gara şarlar ýerleşdirilen. Birbada üç şary çykardylar. Şarlaryň hemmesiniň ak reňkde bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. **Jogaby:** 0,7

1.50. Bir nyşana üç ok atylýar. Her atuwda okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,5-e deň. “Bu atyşlaryň netijesinde nyşana diňe oklaryň biri deger” wakasynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Jogaby: 0,375.

Doly ähtimallyklar formulasy. Beýesiň formulasy

1.51. Dört sany birmeňzeş gap bolup, birinji gapda 1 ak we 1 gara şarlar, ikinjide – 2 ak we 3 gara şarlar, üçünjide – 3 ak we 5 gara şarlar, dördünjide – 4 ak we 7 gara şarlar ýerleşdirilen.

H_i – "i-nji gaby saýlamak" *(i=1, 2, 3, 4)* wakasy bolsun. Islendik i-nji gaby saýlamagyň ähtimallygy $P(H_i)=1/4$ bolsun. Tötänden gaplaryň biri saýlanyp, ondan bir şar çykarylýar. Bu şaryň reňkiniň ak bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Formula boýunça

$$P(H_1)= P(H_2)= P(H_3)= P(H_4)=1/4$$

Goý, A – "çykarylan şaryň reňki ak" wakasy bolsun. Onda meseläniň şerti boýunça alarys

$P(A/H_1)=1/2$- birinji gapdan ak şary saýlamagyň şertli ähtimallygy;

$P(A/H_2)=2/5$-ikinji gapdan ak şary saýlamagyň şertli ähtimallygy;

$P(A/H_3)=3/8$-üçünji gapdan ak şary saýlamagyň şertli ähtimallygy;

$P(A/H_4)=4/11$-dördünji gapdan ak şary saýlamagyň şertli ähtimallygy.

Onda tutuş gaplardan ak şary saýlamaklygyň ähtimallygy – doly ähtimallyk bolup

$$P(A) = P(H_1)\cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P(H_2)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right) + P(H_3)\cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right) + P(H_4)\cdot P\left(\frac{A}{H_4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}\right) = 0{,}25\cdot(0{,}5+0{,}4+0{,}375+0{,}3636) = 0{,}25\cdot 1{,}6386 = 0{,}4096.$$

1.52. Üç sany birmeňzeş gaplar bolup, birinjide 20 ak şar, ikinjide – 10 ak we 10 gara şar, üçünjide – 20 gara şar goýlan. Tötänden saýlanan gapdan ak şary çykarýarlar. Çykarylan şaryň birinji gapdan alnan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, *A* – “ak şaryň çykmagy” wakasy, H_1, H_2, H_3- degişli gaplary saýlamagyň çaklamalary bolsunlar. Onda meseläniň şerti boýunça

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$-gaplary saýlamagyň deň mümkinçilikleri bar.

$P(A/H_1)=20/20=1.$ ak şary I-gapdan saýlamagyň ähtimallygy;

$P(A/H_2)=10/20=1/2$-ak şary II gapdan saýlamagyň ähtimallygy;

$P(A/H_2)=0/20=0$-ak şary III gapdan saýlamagyň ähtimallygy;

Onda birinji gapdan ak şaryň çykmagynyň ähtimallygyny Beýesiň formulasy arkaly şeýle hasaplarys

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{1\cdot(1/3)}{1\cdot(1/3)+(1/2)\cdot(1/3)+0\cdot(1/3)}=\frac{2}{3}$$

1.53. Gapda *N* sany önüm bolup, olaryň arasynda ýaramsyzlary hem bolmagy mümkin. Tötänden alnan önüm ýaramly boldy. Aşakdaky wakalaryň ähtimallyklaryny kesgitlemeli:

- “Gapdaky hemme önümler ýaramly”;
- “Gapdaky *N-1* önümler ýaramly, 1 önüm ýaramsyz”;
- “Gapdaky *N-2* önümler ýaramly, 2 önüm ýaramsyz”;
- . . . .
- “Gapdaky hemme önümler ýaramsyz”.

Çözülişi. Goý, A – “Ýaramly önümiň ýüze çykmagy” wakasy bolsun. Mundan hem başga, tejribeden öň hemme çaklamalar deň mümkinçilikli diýeliň

$$P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=\ldots=P(H_N)=1/(N+1).$$

Bu ýerde şertli ähtimallyklar

$$P(A/H_0)=1, \quad P(A/H_1)=\frac{N-1}{N}; \quad P(A/H_2)=\frac{N-2}{N}, \ \cdots$$

$$P(A/H_{N-1})=\frac{1}{N}, \quad P(A/H_N)=0$$

bahalara eýedir. Onda Beýesiň formulasyna laýyklykda

$$P(H_0/A)=\frac{1\cdot\frac{1}{N+1}}{1\cdot\frac{1}{N+1}+\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+0\cdot\frac{1}{N+1}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\cdots+\frac{N-1}{N}+1}=\frac{N}{1+2+3+\cdots+(N-1)+N}=\frac{2}{N+1}$$

Şuňa meňzeşlikde alarys

$$P(H_1/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N}, \quad P(H_2/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-2}{N},$$

$$P(H_N/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{0}{N}=\frac{2}{N+1}\cdot 0=0.$$

1.54. Birinji gapda 5 ak we 10 gara şarlar, ikinjide 3 ak we 7 gara sarlar bar. Ikinji gapdan birinji gaba bir şary geçirdiler we şondan soň, birinji gapdan tötänden bir şary aldylar. Alnan şaryň reňkiniň ak bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, H_i – “i-nji gaby saýlamak” *(i=1, 2)* wakasy bolsun. Ikinji gapdan birinjä bir şar geçirilenden soň, birinji gapda şarlaryň iki toplumy döredi: 1) öňden bar bolan 5 ak we 10 gara – 15 sarlar; 2) ikinji gapdan getirilip goýlan 1 şar.

Goý, A – “Alnan şaryň reňki ak” wakasy bolsun. Onda ak şaryň birinji toplumdan alynmagynyň ähtimallygy

$$P(A/H_1)=5/15=1/3.$$

Ak şaryň ikinji toplumdan alynmagynyň ähtimallygy, ikinji gabyň başky ýagdaýyndan alynmagyna deň bolup, $P(A/H_2)=3/10$ bolar. Şunlukda, erkin çykarylan şaryň birinji topluma degişli bolmagynyň ähtimallygy $P(H_1)=15/16$; ikinji topluma degişli bolmagynyň ähtimallygy $P(H_2)=1/16$ deňdir. Doly ähtimallygyň formulasyna görä

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=.$$

$$=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{10}=\frac{53}{160}.$$

1.55. Birinji gapda 1 ak we 2 gara şarlar, ikinji gapda 100 ak we 100 gara şarlar ýerleşdirilen. Ikinji gapdan birinjä bir şary geçirdiler we şondan soň, ikinji gapdan tötänden bir şary aldylar. Alnan şaryň öň ikinji gapda bolandygynyň we reňkiniň akdygynyň ähtimallygyny tapmaly. **Jogaby:** 1/3.

1.56. Dükana üç sany fabrikden degişlilikde 20%, 46% we 34% möçberde önüm gelip düşýär. Bu fabrikleriň zaýa önüm çykarmaklarynyň ähtimallyklary, degişlilikde 0,03, 0,02 we 0,01 ýaly kesgitlenen. Dükandan tötänden alnan önümiň zaýa bolup, onuň hem birinji fabrikde öndürilendigininiň ähtimallygyny kesgitlemeli. ***Jogaby:* $\approx$*0,322***

Gaýtalanýan synaglar üçin formulalar

1.57. Gapda 20 ak we 10 gara şarlar bar. Yzly-yzyna 4 şary çykardylar, her gezekki çykarylmadan öň, çykarylan şary gaýtardylar we şarlary garyşdyrdylar. Dört çykarylan şaryň ikisiniň ak bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Dört synagda hem ak şaryň çykmagynyň ähtimallygy şol bir *p=20/30=2/3* hasap etmek bolar. Onda $q=1-p=1-2/3=1/3.$ Bernulliniň formulasyny ulanyp hasaplarys

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3\cdot4}{1\cdot2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{27}.$$

1.58. *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,4-e deň. 10 synagda *A* wakanyň üç gezege çenli ýüze çykmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Bu ýerde $p=0,4;$ $q=0,6.$

A wakanyň 0 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy

$$P_{10}(0)=C_{10}^0p^0\cdot q^{10}=q^{10}.$$

A wakanyň 1 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy

$$P_{10}(1)=C_{10}^1p^1q^9=\frac{10!}{1!\ 9!}p^1q^9=10pq^9.$$

A wakanyň 2 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy

$$P_{10}(2)=C_{10}^2p^2q^8=\frac{10!}{2!\ 8!}p^2q^8=\frac{9\cdot10}{1\cdot2}p^2q^8=45p^2q^8.$$

A wakanyň 3 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy

$$P_{10}(3)=C_{10}^3p^3q^7=\frac{10!}{3!\ 7!}p^3q^7=\frac{8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3}p^3q^7=120p^3q^7.$$

Onda *A* wakanyň 3 gezege çenli ýüze çykmagynyň ähtimallygy şeýle tapylar

$$P=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)+P_{10}(3)=$$
$$=q^{10}+10pq^9+45p^2q^8+120p^3q^7=$$

$$=q^7\left(q^3+10pq^2+45p^2q+120p^2\right)=$$

$$=0{,}6^7\left(0{,}216+1{,}44+4{,}32+7{,}68\right)\approx 0{,}38$$

1.59. Maşgalada oglan we gyz çagalaryň dogmagynyň ähtimallyklary deň hasap ediľýär. 5 çagadan üçüsiniň gyz, ikisiniň oglan bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Gyz çaganyň dogmagynyň ähtimallygy *p=0,5*. Onda *q=1-p=1-0,5=0,5 (q* – oglan çaganyň dogmagynyň ähtimallygy). Bernulliniň formulasyna görä

$$P_5(3)=C_5^3p^3q^2=\frac{5!}{3!2!}\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5^2=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 0{,}5^5=0{,}3125.$$

1.60. 1.59-njy meseläniň şertlerinde, maşgalada gyz çagalaryň sanynyň 3-den köp bolmajakdygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Gyz çaganyň dogulmazlygynyň ähtimallygy

$$P_5(0)=C_5^0p^0q^5=\frac{5!}{0!5!}\cdot 1\cdot q^5=q^5=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}.$$

1 gyz çaganyň dogulmagynyň ähtimallygy

$$P_5(1)=C_5^0p^0q^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}.$$

2 sany gyz çaganyň dogulmagynyň ähtimallygy

$$P_5(2)=C_5^2p^2q^3=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}.$$

3 sany gyz çaganyň dogmagynyň ähtimallygy

$$P_5(3)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}.$$

Onda

$$p=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}.$$

1.61. Şaýylyk 8 gezek oklanýar. Onuň suratly ýüzüniň 6 gezek ýokarylygyna düşmeginiň ähtimallygy hasaplamaly. **Jogaby: 7/64**

1.62. Geçirilen bäş sany tejribeleriň her birinde *A* waka *p=0,4* ähtimallyk bilen ýüze çykyp bilýär. Şu tejribelerde *A* wakanyň üç gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 0,2304***

1.63. Şaýylyk 6 gezek oklanýar. Onuň suratly ýüzüniň ýokary düşmeginiň 3 gezege çenli bolmagynyň ähtimallygy tapmaly:

Jogaby: 21/32

1.64. Käbir önümçilikde zaýa önümiň çykmagynyň ähtimallygy *p=0,3* deň. Barlag üçin alnan dört önümden ýarysynyň zaýa bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli. ***Jogaby: 0,2646.***

1.65. Toparda 20 oglan we 10 gyz bar. Mugallymyň beren üç soragynyň her birine bir okuwçy jogap berdi. Jogap berenleriň içinden ikisiniň oglan, biriniň gyz bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. **Jogaby: 4/9**

1.66. Dört sany gaplaryň her birinde 5 ak we 15 gara şarlar bar. Gaplaryň her birinden bir şar aldylar. 2 ak we 2 gara şarlaryň çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly. **Jogaby: 27/128**

1.67. Gaýtalanan synaglar üçin *p=0,2; n=400; m=96* bahalarda $P_n(m)$ ähtimallygy Laplasyň lokal teoremasyny ulanyp hasaplamaly.

Jogaby: $\approx 0{,}0006$.

1.68. *100* sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy *p=0,8.* Bu synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň sanynyň *75* bilen *90* aralygynda bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. ***Jogaby: 0,8882***

1.69. Gaýtalanýan synaglar üçin, “ m san m_1 we m_2 sanlaryň arasynda ýatyr” diýlen wakanyň ähtimallygyny $n=100;\ p = 0{,}65;\ m_1 = 60;\ m_2=70$ bahalarda, Laplasyň integral teoremasyny ulanyp hasaplamaly. **Jogaby:** $P_{100}(60{,}70) \approx 0{,}7016$.

1.70. Fabrik *70%* birinji sortly önümi goýberýär. Barlaga alnan *1000* önümiň içinden birinji sortlylarynyň sanynyň *652* we *760* sanlaryň arasynda bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Jogaby: $\approx$***0,99979.***

2. Tötän ululyklar

2.1. Diskret tötän ululyklaryň paýlanyşlary barada düşünje

Islendik synagda kesgitli baha eýe bolýan, emma öňünden haýsy bahany aljagyny aýdyp bolmaýan ululyklara **tötän ululyklar** diýilýär. Şeýlelikde, tötän ululyklara argumenti synag meýdanynyň elementar wakasy bolup hyzmat edýän funksiýa hökmünde garamak bolar.

Tehnikada duş gelýän tötän ululyklary **diskret tötän ululyklar** we **üznüksiz tötän ululyklar** toparlaryna bölýärler.

Synagda alyp bilýän hemme bahalaryny natural sanlar bilen belgiläp bolýan tötän ululyklara **diskret tötän ululyklar** (DTU) diýilýär (meselem, nyşana degen oklaryň sany).

Synagda alýan bahalary bir kesimi ýa-da tutuş sanlar okuny doldurýan tötän ululyklara **üznüksiz tötän ululyklar** (ÜTU) diýilýär (meselem, okuň degen ýeriniň nyşanadan daşlygy, ölçeg ýalňyşlyklary we ş.m.).

Tötän ululyklary $X, Y, \ldots$ ýaly, olaryň alyp biljek bahalaryny bolsa $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ ýaly belgileýärler.

Goý, X diskret tötän ululyk $X=x_1$, $X=x_2$, ... , $X=x_n$ bahalary alýan bolsun. Bu wakalaryň ýüze çykmaklarynyň ähtimallyklaryny degişlilikde $P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2$, ... , $P(X=x_n)=p_n$ ýaly belgiläliň. Onda X DTU-nyň paýlanyş kanunyny – hataryny (2.1-nji tablisa).

2.1-nji tablisa

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

ýa-da

$$X\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{Bmatrix}$$

görnüşlerde aňladýarlar.

Paýlanyş hatary belli bolsa DTU berildi hasap edilýär. Şunlukda, $X=x_1$, $X=x_2$, ... , $X=x_n$ wakalaryň jübüt-jübütden sygyşmaýan we doly ulgamy emele getirýän bolandyklary üçin islendik paýlanyş hatarynda

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

deňlik ýerine ýetýär.

2.1-nji tablisa görnüşindäki paýlanyşa, başgaça, ***teoretiki paýlanyş*** diýilýär. Eger tablisada DTU-laryň bahalarynyň köp sanly synaglar boýunça alnyşynyň otnositel ýygylyklary hem getirilen bolsa, onda ***empiriki (statistiki) paýlanyş kanunyny – hataryny*** alarys (2.2-nji tablisa).

2.2-nji tablisa

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{W}$	w_1	w_2	...	w_n

Syn etmeleriň – synaglaryň sany ýeterlik uly bolsa, teoretiki we empiriki paýlanyşlar amaly taýdan gabat gelýärler.

2.2. Tötän ululyklaryň binomial we Puasson paýlanyş kanunlary

Goý, bagly däl synaglaryň her birinde gyzyklanylýan waka şol bir p ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsun, onda garşylykly wakanyň ähtimallygy $q=1-p$ bolar. Onda gaýtalanýan n sany synaglar üçin X DTU-nyň alyp bilýän bahalary $0, 1, 2, ..., n$ sanlar bolup, $X=x_k=k$ wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy Bernulliniň

$$P_k = C_n^k \; p^k \, q^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, ..., n \qquad (2.1)$$

formulasy bilen tapylýan bolsa, onda X DTU ***binomial kanun boýunça paýlanan*** diýilýär.

Formulada ulanylýan n we p hemişeliklere ***binomial kanunyň parametrleri*** diýlip at berilýär.

Mesele. Nyşana 3 ok atylýar. Her okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy $p=0,4$. Goý X – nyşana degen oklaryň sany bolsun. Onuň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

Çözülişi. $X=x_i=i;$ $\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ wakalar üçin Bernulliniň (2.1) formulasyny ulanyp alarys

$$x_0 = 0, \qquad p_0 = C_3^0\, p^0\, q^{3-0} = C_3^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216;$$

$$x_1 = 1, \qquad p_1 = C_3^1\, p^1\, q^{3-1} = C_3^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432;$$

$$x_2 = 2, \qquad p_2 = C_3^2\, p^2\, q^1 = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288;$$

$$x_3 = 3, \qquad p_3 = C_3^3\, p^3\, q^{3-3} = C_3^3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064.$$

Diýmek, X-iň şeýle binomial paýlanyş kanunyny alarys (2.3-nji tablisa).

2.3-nji tablisa

X	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*0,216*	*0,432*	*0,288*	*0,064*

Eger X DTU-nyň alyp bilýän bahalary *0,1,2, ...* sanlar bolup, $X=x_k=k$ wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy Puassonyň:

$$P_k \approx \frac{\alpha^k}{k!}\, e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (2.2)$$

formulasy boýunça tapylýan bolsa, onda X DTU ***Puassonyň kanuny boýunça paýlanan*** diýilýär. Meselem, synaglar özara bagly däl bolup, p san örän kiçi we n san örän uly hemişelik sanlar bolsalar, onda $\alpha = np$ belgilemek arkaly

$$P_k \approx \frac{(np)^k}{K!}\, e^{-(np)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad (2.2^1)$$

görnüşdäki Puassonyň kanuny boýunça paýlanyşa geleris.

Mesele. Elektrik desgasy *n=1000* sany elektroelementlerden durýar. Bir elementiň ýylyň dowamynda bozulmagynyň ähtimallygy *p=0,001* deň we bu ähtimallyk beýleki elementlere bagly däl. Ýylyň dowamynda desganyň iki elementiniň bozulmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. *n=1000; p=0,001; k=2* bahalar üçin (2.2) – (2.2^1) formulalardan alarys

$$\alpha = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1, \qquad P_2 = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{2 \cdot e} = 0{,}184.$$

2.3. Bagly däl tötän ululyklaryň paýlanyşlary

Goý, *X* we *Y* DTU-lar berlip, olar, degişlilikde x_i , $i = \overline{1,l}$ we y_j , $j = \overline{1,m}$ bahalary alýan bolsunlar. Eger islendik *i* we *j* üçin $X=x_i$ we $Y=y_j$ wakalar bagly däl bolsalar, onda *X* we *Y* ululyklara ***bagly däl tötän ululyklar*** diýilýär. Bagly däl tötän ululyklaryň paýlanyş hatarlary hem bagly däldyr. Mysal üçin, biri-birlerinden habarsyz iki atyjy öz nyşanalaryna atanda, olaryň nyşana degen oklarynyň sany bagly däl tötän ululyklardyr.

Goý, *Z* tötän ululygy z_k , $k = \overline{1,n}$ bahalary alsyn. Eger islendik *i* ($i = \overline{1,l}$), *j* ($j = \overline{1,m}$) we *k* ($k = \overline{1,n}$) nomerler üçin $(X=x_i)$, $(Y=y_j)$ we $(Z=z_k)$ wakalar toplumlaýyn bagly däl bolsalar, onda *X*, *Y* we *Z* ululyklara ***toplumlaýyn bagly däl tötän ululyklar*** diýilýär.

Goý, *X* we *Y* tötän ululyklar öz paýlanyş hatarlary bilen berlen bolsunlar (2.4-nji we 2.5-nji tablisalar).

2.4-nji tablisa

X	x_1	x_2	...	x_l
$\boldsymbol{P_x}$	p_1	p_2	...	p_l

2.5-nji tablisa

Y	y_1	y_2	...	y_m
$\boldsymbol{P_y}$	q_1	q_2	...	q_m

Onda olaryň $Z=X+Y$ jeminiň paýlanyş hatary (2.6-njy tablisa)

2.6-njy tablisa

Z	x_1+y_1	x_1+y_2	...	x_1+y_m	x_2+y_1	x_2+y_2	...	x_l+y_m
P	p_1q_1	p_1q_2	...	$p_1\, q_m$	$p_2\, q_1$	$p_2\, q_2$	...	$p_l\, q_m$

ýaly tapylýar. Eger x_i+y_j ululyklar birnäçe meňzeş sanlar bolsalar, onda paýlanyş hatarynda x_i+y_j bir gezek belgilenýär, olara degişli ähtimallyklar bolsa, goşulyp ýazylýar.

X we Y tötän ululyklaryň köpeltmek hasyly $Z=X\cdot Y$ täze bir tötän ululykdyr we onuň paýlanyş hatary şeýle görnüşdedir (2.7-nji tablisa).

2.7-nji tablisa

Z	x_1y_1	x_1y_2	...	x_1y_m	x_2y_1	x_2y_2	...	x_ly_m
P	p_1q_1	p_1q_2	...	$p_1\, q_m$	$p_2\, q_1$	$p_2\, q_2$	...	$p_l\, q_m$

Eger $x_i\cdot y_j$ ululyklar birnäçe meňzeş sanlar bolsalar, onda paýlanyş hatarynda $x_i\cdot y_j$ bir gezek belgilenýär, olara degişli ähtimallyklar bolsa goşulyp ýazylýar.

2.4. Diskret tötän ululygynyň matematiki garaşmasy

Mehanikanyň statika kursundan belli bolşy ýaly, berlen okuň ugry boýunça n sany nokatlaryň koordinatlary $x_i(i=\overline{1,n})$, olara täsir edýän agyrlyk güýçleri $p_i(i=\overline{1,n})$ bolan jisimiň C agyrlyk merkeziniň koordinaty

$$x_C=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

formula boýunça tapylýar. Tötän ululygyň bahalaryny toparlamagyň merkezi hökmünde hem onuň alýan bahalarynyň merkezi kabul edilmelidir, ýagny tötän ululygyň garaşylýan ortaça bahasy, onuň alýan bahalarynyň degişli “agramlaryna” – ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň bu “agramlaryň”–ähtimallyklaryň jemine bölünmegine deňdir. Şeýlelikde, alynýan san häsiýetlendirijisine X tötän ululygyň ***matematiki garaşylýan bahasy*** ýa-da ***matematiki garaşmasy*** (MG) diýilýär hem-de *M(X)* ýa-da m_x ýaly belgilenýär. Onda, 2.1-nji tablisa görnüşinde berlen DTU üçin alarys

$$M(X) = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} =$$

$$+x_1p_1 + \ x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i\,. \tag{2.3}$$

Bu ýerde $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Eger $p_1=p_2=...=p_n=1/n$ bolsa, onda

$$M(X) = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

ýagny, bu ýagdaýda, MG ululygyň orta arifmetiki bahasy bilen gabat gelýär.

Eger DTU-nyň mümkin bolan bahalary hasaply köplügi emele getirýän bolsa, onda (2.3) formulanyň sag tarapynda tükenikli jemiň ornuna tükeniksiz san hataryny alarys, onuň jemi bolsa:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \tag{2.3a}$$

ýaly kesgitlener. Şunlukda, sag tarapdaky hatar absolýut ýygnanýan bolmalydyr.

Tejribeler arkaly alynýan empiriki paýlanyş üçin bahalaryň dagynyklygynyň merkezi – matematiki garaşmasy

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_iw_i \tag{2.3b}$$

ýaly hasaplanýar, bu ýerde w_i $(i = \overline{1,n})$ – otnositel ýygylyklar.

MG-niň fiziki manysyna ölçenýän, syn edilýän ululyklaryň "hakyky bahasy" ýaly seretmek bolar.

MG-niň esasy häsiýetleri şulardyr:

1)M(C)=C, C=const; *2) M(CX)=CM(X);*

$$3)\ M\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)=\sum_{i=1}^{k} M(X_i)$$

4) Bagly däl $X_1, X_2, \ldots, X_k$ DTU-laryň köpeltmek hasylynyň MG-si olaryň MG-leriniň köpeltmek hasyllaryna deňdir

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k)=M(X_1)\cdot M(X_2)\ldots M(X_k)$$

ýa-da

$$M\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right)=\prod_{i=1}^{k} M(X_i).$$

Mesele. 10000 lotoreýa biletiniň haýsydyr 1 bileti – 1000 manat, 10 bileti – 100 manat, 100 bileti – 1 manat utýar. Tötänden satyn alnan lotoreýa biletiniň utuş bahasynyň – diskret tötän ululygynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly we MG-ni hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde

$$x_1=1000;\ p(X=x_1)=p_1=0{,}0001;\ \ x_2=100;\ \ p_2=10/10000=0{,}001;$$
$$x_3=1;\ p_3=100/10000=0{,}01;\ x_4=0;\ \ p_4=1-(p_1+p_2+p_3)=0{,}9889.$$

Onda tötän ululygyň paýlanyş kanuny – hatary (2.8-nji tablisa)

2.8 – nji tablisa

X	$x_1=1000$	$x_2=100$	$x_3=1$	$x_4=0$
P	*0,0001*	*0,001*	*0,01*	*0,9889*

görnüşde bolar. Bu ýerden

$$M(X) = 1000\cdot 0{,}0001+100\cdot 0{,}001+1\cdot 0{,}01+0\cdot 0{,}9889 =$$

$$= 0{,}1+0{,}1+0{,}01 = 0{,}21\ (manat).$$

Diýmek, *M(X) = 0,21 manat = 21 teňňe* bir biletiň hakyky düşýän gymmaty – “adalatly bahasy” bolýar.

2.5. Diskret tötän ululygynyň dispersiýasy

Goý, X tötän ululygyň matematiki garaşmasy $M(X)$ bolsun. $X^I=X-M(X)$ tötän ululyga X ululygyň öz matematiki garaşmasyndan ***gyşarmasy*** diýilýär.

Teorema. $MX^I=0.$

Subudy. $MX^I = M(X-M(X)) = M(X)-M(M(X)) = M(X)-M(X)=0.$

Kesgitleme. X DTU-nyň ***dispersiýasy*** – ***orta bahadan dagynyklygynyň ölçegi*** diýip, X^I gyşarmanyň kwadratynyň MG-si bolan

$$D(X)=M(X-M(X))^2 \tag{2.4}$$

ululyga – sana aýdylýar.

MG-niň häsiýetlerini peýdalanyp,

$$D(X) = M(X-M(X))^2=M(X^2-2X\cdot M(X)+M^2(X))=$$
$$= M(X^2)-2M(X)\cdot M(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X)$$

ýa-da

$$D(X)=M(X^2)-m_x^2 \tag{2.4^I}$$

hasaplama formulasyny ulanmak amatlydyr. Eger X DTU paýlanyş kanuny bilen berilse, onda

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2\,. \tag{2.4^{II}}$$

formulany alarys. Dispersiýanyň häsiýetlerini belläliň:

1) $D(C)=0, \quad C=const.$
2) $D(CX)=C^2 D(X)$
3) Bagly däl X we Y DTU-lar üçin

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Dispersiýa tötän ululygyň bahalarynyň orta bahanyň – matematiki garaşmanyň töweregindäki dagynyklygynyň, ýaýraňlygynyň ölçegini häsiýetlendirýär. Eger dispersiýa nola deň bolsa, onda bir ähtimallyk bilen ululyk özüniň MG-sine deň bolan bahany kabul edýär we tersine − hemişelik ululygyň dispersiýasy nola deňdir.

Dispersiýanyň ölçeg birligini tötän ululygyň birligi bilen gabat getirmek üçin *X* tötän ululygyň ***orta kwadratik gyşarmasy*** σ_x ululygyny girizýärler hem –de

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} \qquad (2.5)$$

formula bilen hasaplaýarlar.

Ýaýraňlygyň otnositel häsiýetlendirijisi hökmünde *X* tötän ululygyň ***wariasiýa (üýtgeme) koeffisiýenti*** γ_x ululygyny girizýärler hem-de

$$\gamma_x = \frac{\sigma_x}{M(X)} \cdot 100\% \qquad (2.6)$$

formula bilen hasaplaýarlar, bu ýerde $M(X)\neq 0$, σ_x kiçi ululyk bolandaky ýagdaý göz öňünde tutulýar.

Empiriki paýlanyş üçin hem ýokarda getirilen ululyklaryň hasaplanyşy teoretiki paýlanyşyňka meňzeşdir (p_i ýerine w_i ulanylýar).

Mesele. Lotoreýa biletli mesele üçin dispersiýany, orta kwadratik gyşarmany hem-de wariasiýa koeffisiýentini hasaplamaly.

Çözülişi. $M(X)=m_x=0,21$. Tablisa düzeliň (2.9-njy tablisa).

2.9-njy tablisa

$\boldsymbol{X^2}$	$x_1^2 = 1000000$	$x_2^2 = 10000$	$x_3^2 = 1$	$x_4^2 = 0$
P	*0,0001*	*0,001*	*0,01*	*0,9889*

Onda alarys $M(X^2) = 1000000 \cdot 0,0001 + 10000 \cdot 0,001 +$

$+0 \cdot 0,9889 = 100 + 10 + 0,01 + 0 = 110,01.$

(2.4^{I}) formulada ornuna goýup taparys

$D(X)=110{,}01-(0{,}21)^2=110{,}01-0{,}441=109{,}9659.$

Bu ýerden

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} = \sqrt{109{,}9659} \approx 10{,}4865,$$

$$\gamma_x = \frac{\sigma_x}{M(X)} \cdot 100\% = \frac{10{,}4865}{0{,}21} \cdot 100\% = 4993{,}55\% .$$

Görşümiz ýaly, bu meselede ýaýrañlygyň–dagynyklygyň derejesi diýseň uludyr.

2.6. Tötän ululyklaryň paýlanyş funksiýalary

Kesgitleme. *X* tötän ululyk üçin *X<x* wakanyň ähtimallygyna onuň ***paýlanyş funksiýasy*** ýa-da ***paýlanyşyň integral funksiýasy*** diýilýär we *F(x)* arkaly belgilenýär. Diýmek, kesgitlemä görä

$$F(x)=P(X<x) . \qquad (2.7)$$

F(x) funksiýanyň ähtimallygy aňladýandygy üçin ol aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) $0 \le F(x) \le 1$ – çäklenen funksiýa;
2) $x_1 < x_2$ bolanda $F(x_1) \le F(x_2)$ – kemelmeýän funksiýa;
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$

F(x) funksiýa DTU-lar hem-de ÜTU-lar üçin kesgitlenýär.

Paýlanyş kanuny (hatary) bilen berlen *X* DTU üçin paýlanyş funksiýasy

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i) \qquad (2.8)$$

görnüşde tapylýar.

Mysal. *X* DTU paýlanyş hatary bilen berlen (2.10-njy tablisa).

2.10-njy tablisa

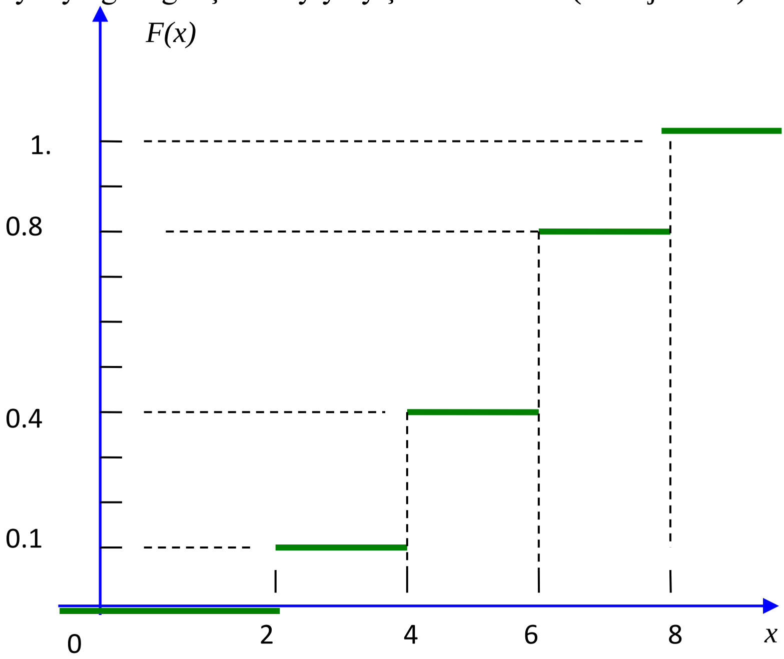
X	*2*	*4*	*6*	*8*
P	*0,1*	*0,3*	*0,4*	*0,2*

Onuň paýlanyş funksiýasynyň grafigini gurmaly.

Çözülişi. (2.8) formula görä alarys

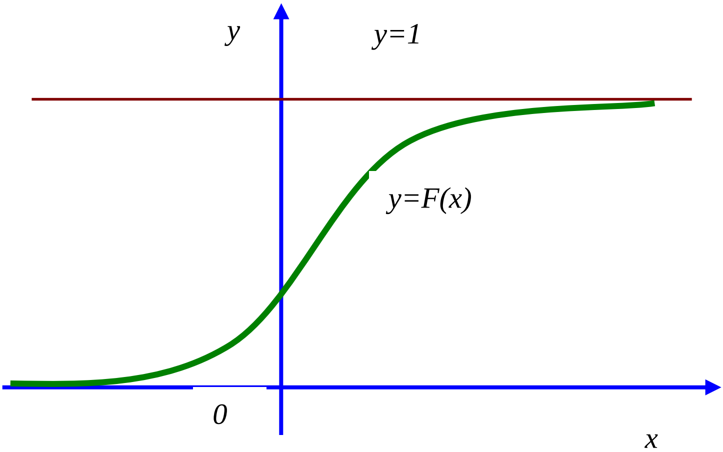
$$F(x)=\begin{cases} 0\,, & x\le 2\ bolsa\,, \\ 0{,}1\,, & 2<x\le 4\ bolsa\,, \\ 0{,}4\,, & 4<x\le 6\ bolsa\,, \\ 0{,}8\,, & 6<x\le 8\ bolsa\,, \\ 1\,, & x>8\ bolsa. \end{cases}$$

Funksiýanyň grafigi aşakdaky ýaly şekillendiriler (2.1-nji surat).



2.1–nji surat

Tötän ululygyň ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň integral funksiýasy *F(x)* üznüksiz bolsa, onda oňa ÜTU diýilýändigini hem belläliň. *X* ÜTU-nyň paýlanyş funksiýasynyň tipli grafigini şeýle görkezmek bolar (2.2-nji surat).



2.2-nji surat

Şeýlelikde, *X* tötän ululygyň bahalarynyň hemmesi *(a,b)* aralyga degişli bolsa, onda $x \leq a$ bolanda *F(x)=0*, $x > b$ bolanda *F(x)=1* boljagy düşnüklidir. Diýmek, *X* ÜTU – nyň *(a,b)* aralyga düşmeginiň ähtimallygy

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad (2.9)$$

formula arkaly kesgitlener.

Mysal. X tötän ululygyň

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left(arctg\, x + \frac{\pi}{2}\right)$$

paýlanyş funksiýasy berlen. $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} < X < \sqrt{3}\right)$ ähtimallygy kesgitlemeli.

Çözülişi. (2.9) formula görä alarys

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} < X < \sqrt{3}\right) = F(\sqrt{3}) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(arctg\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6} \ .$$

Mysal. X ÜTU-nyň paýlanyş funksiýasy berlen

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1\,, \\ a(x-1)^3\,, & 1 \le x \le 3\,, \\ 1\,, & x > 3\,. \end{cases}$$

a koeffisiýenti tapmaly, *P(1≤x≤2)* ähtimallygy hasaplamaly we *F(x)*-iň grafigini gurmaly.

Çözülişi. *F(x)* funksiýanyň üznüksizligi hem-de 3)-nji häsiýet esasynda:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to 3} F(x) = \lim_{x\to 3} a(x-1)^3 = a(3-1)^3 = 8a = 1,$$

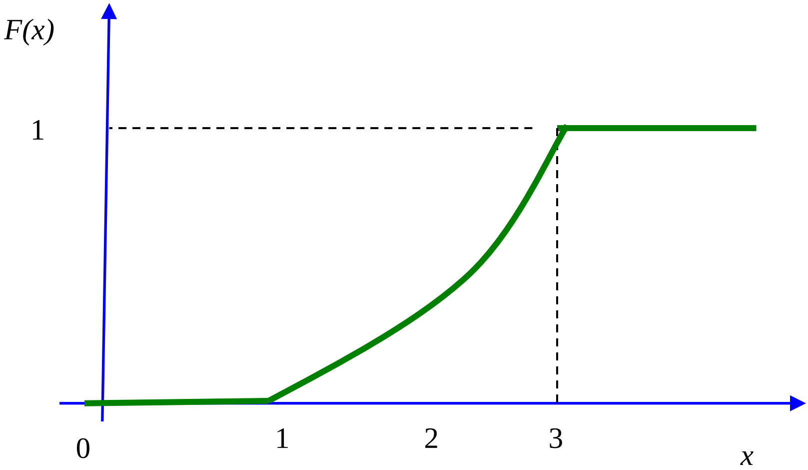
8a = 1 taparys. Onda *a=1/8* bolup, paýlanyş funksiýasynyň anyk görnüşi şeýle bolar

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1\,, \\ \frac{1}{8}(x-1)^3\,, & 1 \le x \le 3\,, \\ 1\,, & x > 3\,. \end{cases}$$

Bu ýerden, (2.9) formula esasynda hasaplarys

$$P(1 \le x \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{8}(2-1)^3 - \frac{1}{8}(1-1)^3 = \frac{1}{8}.$$

F(x) funksiýanyň grafigi şeýledir (2.3-nji surat).



2.3-nji surat

2.7. Üznüksiz tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy

Bilşimiz ýaly, ÜTU – lar özleriniň paýlanyş ýa-da dykyzlyk funksiýalary arkaly berilýärler.

Kesgitleme. *X* ÜTU – nyň paýlanyş funksiýasynyň önümine ***paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy*** ýa–da ***paýlanyşyň differensial funksiýasy*** diýilýär we *f(x)* arkaly belgilenýär. Diýmek, kesgitlemä görä

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (2.10)$$

Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň häsiýetleri şulardan ybarat:

1) Islendik $x \in R$ üçin $f(x) \geq 0;$

2) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx;$

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt;$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

5) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Mysal. $F(x) = \dfrac{1}{\pi}(arctg\, x + \dfrac{\pi}{2}).$ $f(x)$−dykyzlyk funksiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi}(arctg\, x + \frac{\pi}{2})' = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Mysal. X ÜTU şeýle dykyzlyk bilen paýlanan:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \;\; bolsa \;, \\ a \cdot \sin 2x & , \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \;\; bolsa \;, \\ 0 & , \quad x > \pi/2 \;\; bolsa. \end{cases}$$

a koeffisiýenti, $F(x)$ funksiýany tapmaly hem-de

$$P(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$$

ähtimallygy hasaplamaly, $f(x)$ we $F(x)$ funksiýalaryň grafiklerini gurmaly.

Çözülişi. 4)-nji häsiýet boýunça

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{\pi/2} a \cdot \sin 2x\,dx = 1 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \cdot \cos 2x \Big|_{0}^{\pi/2} = 1$$

ýa-da *a =1* alarys.

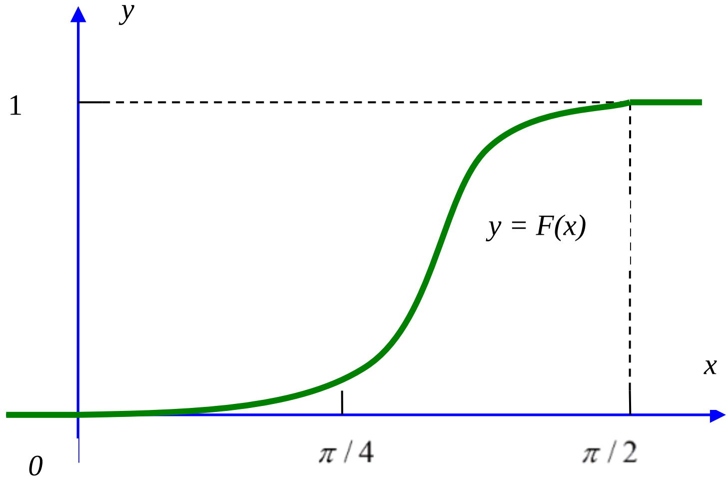
Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň 3)-nji häsiýetinden alarys

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \ \ bolsa \ , \\ \dfrac{1-\cos 2x}{2} \ , & 0 \le x \le \pi/2 \ bolsa \ , \\ 1 \quad , & x > \pi/2 \ bolsa. \end{cases}$$

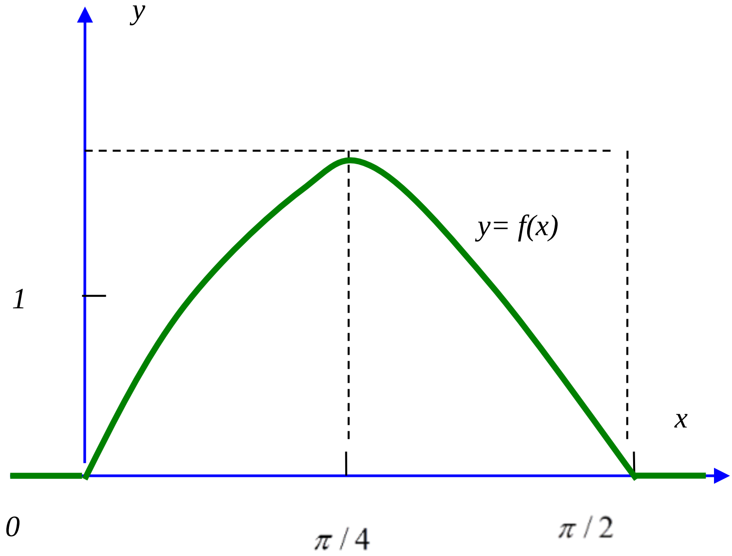
Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň 2)-nji häsiýetinden taparys

$$P\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right) = \int_{0}^{\pi/4} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

F(x) we *f(x)* funksiýalarynyň grafiklerini şeýle şekillendirmek bolar (2.4-nji we 2.5-nji suratlar).



2.4-nji surat



2.5-nji surat

2.8. Üznüksiz tötän ulúlyklaryň matematiki garaşmasy we dispersiýasy

X ÜTU-nyň matematiki garaşmasy

$$M(X) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (2.11)$$

formulada hasaplanýar, bu ýerde $f(x)$ – paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasydyr.

X ÜTU-nyň dispersiýasy

$$D(X) = M(X-m_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X-m_x)^2 f(x)\, dx \qquad (2.12)$$

ýa-da

$$D(X) = M(X^2)-m_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right]^2$$

formulalarda hasaplanyp, onuň orta kwadratik gyşarmasy

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (2.13)$$

formulada tapylýar.

Mysal. Eger *X* ÜTU-nyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x < 0 \;\; bolsa, \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, \; 0 \le x \le 2 \; bolsa, \\ 1\,, \; x > 2 \; bolsa \end{cases}$$

görnüşde bolsa, onda *M(X), D(X)* we $\sigma(X)$ bahalary tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasyny tapalyň

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0\,, \quad x < 0 \;\; ýa-da \;\; x > 2 \; bolsa, \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2, \quad 0 \le x \le 2 \; bolsa. \end{cases}$$

Onda (2.11)- (2.13) formulalara görä alarys

$$M(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4\right]_0^2 = 1,$$

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5\right]_0^2 = 1{,}2 \ ,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1{,}2 - 1^2 = 0{,}2 \ ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0.2} \approx 0{,}447 \ .$$

2.9. Tötän ululyklaryň goşmaça san häsiýetlendirijileri

Tötän ululyklaryň häsiýetlerini has içgin beýan etmekde moda, mediana, başlangyç we merkezi momentler, asimmetriýa koeffisiýenti hem-de eksses ýaly goşmaça san häsiýetlendirjileri peýdalanylýar.

X DTU-nyň M_0 – ***modasy*** diýip, onuň iň ýokary ähtimallykly $x=M_0$ bahasyna aýdylýar.

X ÜTU-nyň M_0 – ***modasy*** diýip, paýlanyşyň $f(x)$ dykyzlyk funksiýasy boýunça $f(M_0) = max\ f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan M_0 bahasyna aýdylýar.

Eger mysal hökmünde X DTU üçin 2.11-nji tablisa garasak, onda iň ýokary 0.4 ähtimallykly $M_0=x=5$ baha modadyr.

2.11-nji tablisa

X	*1*	*3*	*5*	*7*
P	*0.1*	*0.2*	*0.4*	*0.3*

X tötän ululygyň M_e ***medianasy*** diýip onuň $P(X<M_e) = P(X>M_e)$ deňligi kanagatlandyrýan M_e bahasyna aýdylýar.

Eger tötän ululygyň bahalary simmetrik paýlanan bolsa, onda $M_0=M_e=m_x$, ýagny moda we mediana matematiki garaşma bilen gabat gelýärler.

X tötän ululygynyň k-njy tertipli başlangyç we merkezi momentleri degişlilikde

$$\alpha_k = M(X^k), \tag{2.14}$$

$$\mu_k = M(X\text{-}m_x)^k, \tag{2.15}$$

formulalar bilen tapylýarlar.

Görşümiz ýaly,

$$\alpha_1 = M(X) = m_x;\ \mu_1 = M(X\text{-}m_x) = 0;\ \mu_2 = D(X).$$

Teoretiki ýa-da empiriki paýlanyşyň normal paýlanyşdan tapawutlanmagyny kesgitlemek üçin

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \tag{2.16}$$

asimmetriýa hem-de

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \tag{2.17}$$

eksses ýaly häsiýetlendirijiler hasaplanýar.

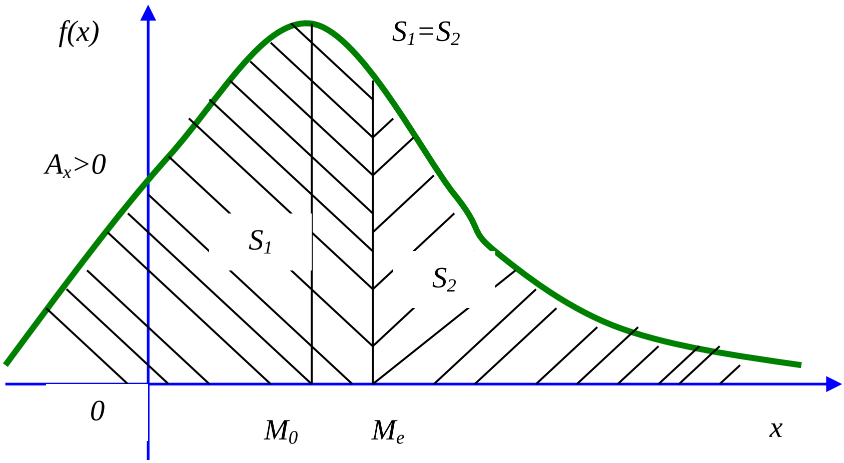
Eksses $f(x)$ dykyzlyk funksiýasynyň grafiginiň depesiniň çürüligini häsiýetlendirýär. Normal paýlanyş üçin $A_s=0$, $E_x=0$ şertler yerine ýetýär.

X ÜTU üçin modanyň, medirananyň, asimmetriýanyň we ekssesiň grafiki aňladylmalary 2.6-2.9-njy suratlarda görkezilendir.

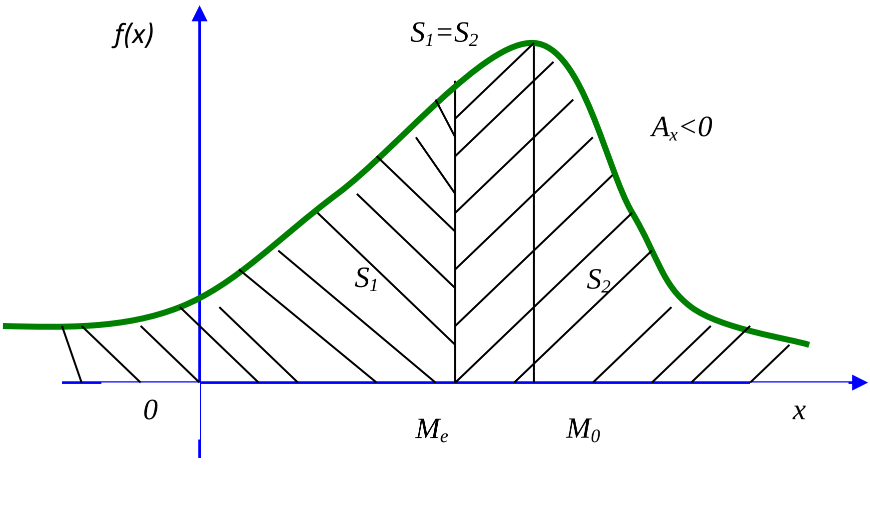
Bellik. (2.14) we (2.15) formulalar arkaly kesgitlenýän k-njy tertipli başlangyç we merkezi momentleriň arasynda şeýle baglanyşyklar bardyr

$$\mu_1=0, \qquad \mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2, \qquad \mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3,$$

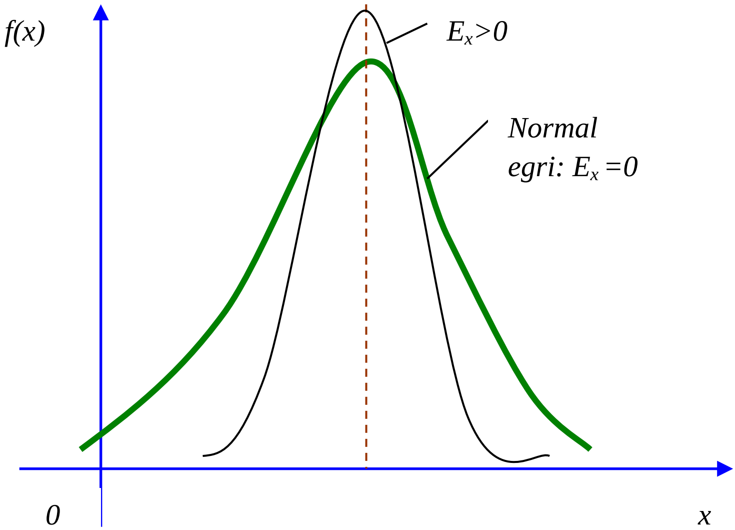
$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4 .$$



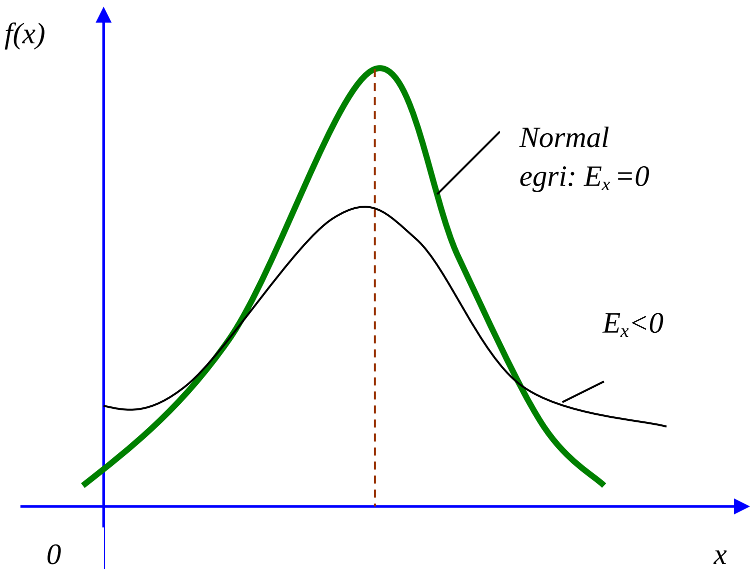
2.6-njy surat



2.7-nji surat



2.8-nji surat



2.9-njy surat

Eger tötän ululygyň paýlanyşy matematiki garaşma görä simmetrik ýerleşen bolsa, onda täk tertipdäki hemme merkezi momentler nola deňdir, ýagny $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = ... = 0$. Bu formulalary kompýuter modelirlemesinde ulanmak amatlydyr.

Mysal. *X* DTU binomial kanun boýunça paýlanan (2.12-nji tablisa).

2.12-nji tablisa

x_k	0	1	2	...	n
p_k	$c_n^0 p^0 q^n$	$c_n^1 p^1 q^{n-1}$	$c_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$c_n^n p^n q^0$

Bu ýerde $p_k = c_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,1,2,...,n$. Onuň esasy we goşmaça san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

Çözülişi. Esasy san häsiýetlendirijilerine *X* DTU-nyň matematiki garaşmasy, dispersiýasy we orta kwadratik gyşarmasy degişlidir.

1) *X*-iň matematiki garaşmasy

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k P_k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^k = np \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_n^k p^{k-1} q^{n-k}.$$

Emma bu ýerde

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k} = C_{n-1}^{k-1}.$$

Onda

$$M(X) = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} = np(p+q)^{n-1} = np,$$

ýagny *M(X)=np*.

2) *X*-iň *D(X)*-dispersiýasyny tapmak üçin, ilki bilen $M(X^2)$-y kesgitläliň:

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{k}{n}C_n^k p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np(\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}).$$

Ýaý içindäki jemleriň birinjisi binominal kanun boýunça paýlanan X ululygyň matematiki garaşmasydyr, bu ýerde

$$P_{k-1} = P(X=k-1) = C_{n-1}^{k-1}\ p^{(k-1)-(k-1)}\ q^{(n-1)-(k-1)}.$$

Şol sebäpli, bu jem *(n-1)p* aňlatma deňdir. Ikinji jem bolsa

$(p+q)^{n-1}=1$ baha deň. Onda

$$M(X^2) = np((n-1)p+1) = np(n-1)p+np.$$

Şeýlelikde,

$$D(X)= M(X^2)-[M(X)] = np(n-1)p+np-(np)^2 =$$

$= n^2p^2-np^2+np-n^2p^2 = np(1-p) = npq$. Diýmek, $D(X)=npq$.

3) X-iň orta kwadratik gyşarmasy σ_x

$$\sigma_x=\sqrt{D(x)} = \sqrt{npq}.$$

4) X-iň başlangyç momentleri:

$\alpha_1 =M(X)=np;$ $\alpha_2 =M(X^2) =D(x)+m_x^2=npq+n^2p^2;$

$$\alpha_3 = M(X^3) = np\left[1 + 3(n-1)p + (n-1)(n-2)p^2\right];$$

$$\alpha_4 = M(X^4) = np\left[1 + 7(n-1)p + 6(n-1)(n-2)p^2 +\right.$$

$$\left.+ (n-1)(n-2)(n-3)p^3\right].$$

5) X-iň merkezi momentleri:

$$\mu_1 = M(X - m_x)^1 = M(X - m_x) = 0;$$

$$\mu_2 = M(X - m_x)^2 = D(x) = npq;$$

$$\mu_3 = M(X - m_x)^3 = npq(1 - 2p);$$

$$\mu_4 = M(X - m_x)^4 = np[q + (5 + 2n)p - 6(2 + n)(n - 1)p^2 -$$

$$-3(n + 1)(n - 1)(n - 2)p^3].$$

6) X-iň asimmetriýasy A_X

$$A_X = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{npq(1-2p)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}.$$

7) X-iň ekssesi E_x

$$E_X = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{q + (5+2n)p - 6(2+n)(n-1)p^2 - 3(n^2-1)(n-2)p^3}{npq^2} - 3.$$

2.10. Tötän ululyklaryň esasy paýlanyş kanunlary

DTU-lar boýunça, esasan, binomial we Puassonyň paýlanyş kanunlary ulanylýar.

Bilşimiz ýaly, gaýtalanýan n synaglaryň her birinde gyzyklanylýan waka şol bir p ähtimallykda ýüze çykýan bolup, $X=x_k=k$ $(k=0,1,...,n)$ wakanyň ýüze çykmagynyň p_k ähtimallygy $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ formula boýunça tapylýan bolsa, onda X DTU binomial kanun boýunça paýlanan diýilýär. Bu ýagdaýda

$$m_X = M(X) = np\ , \quad D(X) = npq\ .$$

Eger synaglaryň n sany uly, p ähtimallyk kiçi san bolup, X DTU-nyň alyp bilýän bahalary 0,1,2… sanlar, $X=x_k=k$ wakanyň ýüze çykmagynyň p_k ähtimallygy

$$p_k = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$$

formula boýunça tapylýan bolsa, onda X DTU Puassonyň kanuny boýunça paýlanan diýilýär. Bu ýagdaýda

$$M(X)=D(X)=\alpha=np.$$

Puassonyň kanunyna, adatça, wakalaryň ýönekeý akymyny berýän DTU-lar tabyndyr (meselem, telefon beketine, tiz kömegine çagyrylyşlaryň sany, hyzmat kärhanasyna sargytlaryň sany we ş. m.).

Eger akymyň α intensiwligi wagt birliginde wakanyň ýüze çykmagynyň ortaça sanyny aňladýan bolsa, onda t wagtyň dowamynda k sany wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy Puassonyň

$$P_k(t) = \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!} \qquad (2.18)$$

formulasy boýunça kesgitlenýär. (2.2), (2.18) formulalar boýunça hasaplamalary ýönekeýleşdirmek üçin goşundylarda ýörite tablisa getirilen (g.3-nji tablisa).

ÜTU-lar üçin ýeterlik köp mukdardaky paýlanyş kanunlary ulanylýar.

2.10.1. Deňölçegli paýlanyş

Eger $[a,b]$ kesimde *X* ÜTU-nyň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\ bolsa, \\ 0, & x\notin[a,b]\ bolsa \end{cases} \qquad (2.19)$$

görnüşde berlen bolsa, onda *X* ÜTU bu kesimde deňölçegli kanun bilen paýlanan diýilýär. Onuň san häsiýetlendirijileri

$$m_x = M(X) = (a+b)/2\ ,\ \ D(X) = (b-a)^2/12.$$

deň bolar.

Mysal. Deňölçegli paýlanan tötän ululygyň hemme bahalary *[2;8]* kesimde ýerleşýär. Tötän ululygyň bahasynyň *(3;5)* aralyga düşmeginiň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň 2-nji häsiýetinden alarys

$$P(c<X<d)=\int_c^d f(x)\,dx,\ (c,d)\subset[a,b].$$

Bu ýerde: $c=3,\ d=5;\ f(x)=1/(b-a)=1/(8-2)=1/6$. Onda

$$P(3<X<5)=\int_3^5\frac{1}{6}dx=[\frac{1}{6}x]_3^5=\frac{1}{6}(5-3)=\frac{1}{3}.$$

2.10.2. Görkezijili paýlanyş. Ygtybarlylyk funksiýasy

ÜTU-lar üçin Puassonyň kanunynyň analogy bolup görkezijili (eksponensial) paýlanyş hyzmat edýär. Eger *X* ÜTU-nyň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , x<0 \ bolsa, \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x\geq 0, \ bolsa. \end{cases} \tag{2.20}$$

görnüşde berlen bolsa, onda ol tötän ululyga $\lambda>0$ parametrli görkezijili kanun boýunça paýlanan diýilýär. Diýmek, görkezijili paýlanyşyň paýlanyş funksiýasy (integral funksiýasy)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x},$$

ýagny

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , x<0 \ bolsa, \\ 1-e^{-\lambda x} & , x\geq 0, \ bolsa. \end{cases} \tag{2.20a}$$

görnüşde bolar. Görkezijili kanun boýunça paýlanan X ÜTU-nyň (α, β) interwala düşmeginiň ähtimallygy şeýle tapylýar

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=(1-e^{-\lambda\beta})-(1-e^{-\lambda\alpha})=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \tag{2.20b}$$

Görkezijili paýlanyşyň esasy san häsiýetlendirijilerini kesgitläliň:

$$M(X)=\int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}, \tag{2.20c}$$

$$D(X)=\int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-[M(x)]^2=$$

$$=\left[-x^2e^{-\lambda x}-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}, \tag{2.20d}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.20e)$$

Goşundyda e^{-x} funksiýany hasaplamagyň tablisasy getirilen (g.3-nji tablisa).

Mysal. X ÜTU görkezijili kanun boýunça paýlanan

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x < 0 \ bolsa, \\ 4e^{-4x}\ , & x \geq 0 \ bolsa. \end{cases}$$

Synaglaryň netijesinde X ululygyň *(0,2; 0,5)* interwala düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. (2.20*b*) formulany ulanyp alarys

$$P(0,2<X<0,5)=e^{-4 \cdot 0,2} - e^{-4 \cdot 0,5} = 0,4493-0,1353 = 0,314.$$

Eger T haýsy-da bolsa bir enjamyň bozulman işlemeginiň dowamlylygyny aňladýan tötän ululyk bolup, λ – döwülmeleriň intensiwligi (wagt birliginde döwülmeleriň ortaça sany) bolsa, onda bu enjamyň bozulman işlemeginiň t dowamlylygyny görkezijili kanun boýunça paýlanan tötän ululyk hasap etmek bolar. Onda

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t} \quad (\lambda >0)$$

paýlanyş funksiýasy enjamyň t wagtyň dowamynda hatardan çykmagynyň ähtimallygyny kesgitlär.

Belleme girizeliň

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}. \qquad (2.21)$$

R(t) funksiýasyna ***ygtybarlylyk funksiýasy*** diýilýär, ol t wagtyň dowamynda mehanizmiň bozulman işlemekliginiň ähtimallygyny aňladýar.

Mysal. Desganyň üznüksiz işlemeginiň dowamlylygynyň paýlanyş dykyzlygy $f(t) = 0{,}02\, e^{-0.02t}$ ($t \geq 0$, $t-$sagatlardaky wagt) görnüşdäki funksiýa bolan görkezijili kanuna tabyndyr. Desganyň bozulman $t=100$ sagat işlemeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä

$\lambda = 0{,}02$; $t=100$ sagat.

Onda (3.21) formula görä

$$p=P(T>t)=R(t)=R(100)= e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}1353.$$

2.10.3. Normal paýlanyş kanuny. Laplasyň funksiýasy

Eger tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.22}$$

görnüsde bolsa, onda oňa m_x , σ parametrli normal kanun boýunça paýlanan diýilýär. Görşümiz ýaly, $f(x)$ funksiýasy üçin hem dykyzlyk funksiýasyna häsiýetli

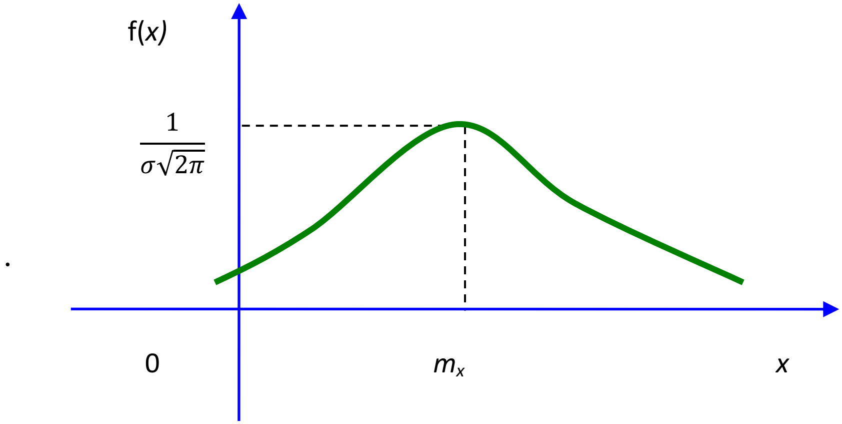
1) $f(x) > 0;$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

şertler ýerine ýetýär.

$y=f(x)$ egriniň grafigi $x=m_x$ göni çyzyga görä simmetrik ýerleşýär (2.10-njy surat). Egriniň $x=m_x$ nokatdaky maksimal ordinatasynyň bahasy $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ ululyga deňdir, abssissa oky bolsa egriniň asimptotasy bolup hyzmat edýär. Bu ýerde

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = m_x \ , \ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \sigma_x^2$$

bolany üçin $D(X) = \sigma^2$



2.10-njy surat

Belgileme girizeliň

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad (2.23)$$

(2.23) formula bilen kesgitlenýän $\Phi(x)$ funksiýa ***Laplasyň funksiýasy*** ýa-da ***ähtimallyklaryň integraly*** diýilýär. Bu funksiýa ***ýalňyşlar funksiýasy*** hem diýýärler we *erf x* ýaly belgileýärler. Laplasyň funksiýasynyň

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad (2.24)$$

normirlenen görnüşi hem ulanylýar. Olaryň arasyndaky baglanyşyk

$$\overline{\Phi}(x) = 0{,}5\Phi(x/\sqrt{2}) \text{ ýa-da } \overline{\Phi}(x\sqrt{2}) = 0{,}5\Phi(x) \qquad (2.25)$$

görnüşindedir.

Laplasyň funksiýalarynyň bahalaryny hasaplamak üçin ýörite tablisa goşundyda getirilen (g.2-nji tablisa).

Normal kanuna tabyn bolan X ÜTU-nyň bahalarynyň (α,β) interwala düşmeginiň ähtimallygy Laplasyň funksiýalarynyň üsti bilen şeýle kesgitlenýär

$$P(\alpha < X < \beta) = 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (2.26)$$

Laplasyň funksiýalarynyň esasy häsiýetlerini belläliň:

1) $\Phi(0)=0$, sebäbi $\Phi(0)=\int_0^0 e^{-t^2}dt = 0.$

2) $\Phi(+\infty)=1$, sebäbi $\Phi(+\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$

3) $\Phi(x)$-täk funksiýa.

Normal paýlanyş üçin şeýle formula hem dogrudyr

$$`\ P(|X - m_x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (2.27)$$

ýa-da

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad (2.27^1)$$

Bu formulalar arkaly normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň bahalarynyň m_x-e görä simmetrik bolan interwala düşmeginiň ähtimallygy tapylýar.

Hususan-da, $\delta = 3\sigma_x$ bolsa, onda (2.27)-den alarys

$$P(|X - m_x| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1.$$

Diýmek, normal paýlanan X ululygyň bahalary özleriniň matematiki garaşmasyndan $3\sigma_x$-den artyk daşlaşmaýarlar. Muňa, başgaça, "$3\sigma_x$ - ***düzgüni***" hem diýilýär.

Mysal. X ÜTU $m_x=40$ matematiki garaşmaly, $D_x=200$ dispersiýaly normal kanun boýunça paýlanan. Tötän ululygyň bahalarynyň *(30, 80)* interwalyna düşmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Bu ýerde

$$\alpha=30,\ \beta=80,\ m_x=m=40,\ \ \sigma_x = \sigma = \sqrt{D} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Onda (2.26) formula görä hem-de degişli tablisadan peýdalanyp alarys

$$P(30<X<80) = 0{,}5[\Phi(\tfrac{80-40}{10\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}})-\Phi(\tfrac{30-40}{10\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}})] = 0{,}5[\Phi(2) + \Phi(0{,}5)] =$$

$$=0{,}5[0{,}995+0{,}521]=0{,}758.$$

Mysal. Taýýarlanýan detallaryň uzynlyklarynyň standartdan gyşarmasy normal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk hasaplanýar. Eger standart uzynlyk $m=40$ *sm*, orta kwadratik gyşarma $\sigma = 0{,}4$ sm bolsa, onda 0,8 ähtimallyk bilen önümiň uzynlygynyň haýsy takyklygyny kepillendirip bolar?

Çözülişi. Bu ýerde (2.27^1) formula laýyklykda $P(|X-40|<\varepsilon)=0{,}8$ deňlik ýerine ýetýän ε bahany kesgitlemek talap edilýär. Formula görä alarys

$P(|X\text{-}40| < \varepsilon) = \Phi(\frac{\varepsilon}{0{,}4\sqrt{2}}) = \Phi(1{,}77\,\varepsilon).$

Diýmek, mesele

$\Phi(1{,}77\,\varepsilon) > 0{,}8$

deňsizligi çözmeklige getirilýär. Bu deňsizligi kanagatlandyrýan ε ululygyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

g.3-nji tablisa boýunça alarys

$1{,}77\varepsilon \geq 0{,}91$. Bu ýerden $\varepsilon \geq 0{,}52$.

2.10.4. Paýlanyşlaryň Weýbull kanuny

Eger *X* ÜTU-nyň paýlanyşlarynyň *F(x)* integral funksiýasy *a>0, b>0, c*-hakyky sanlar üçin

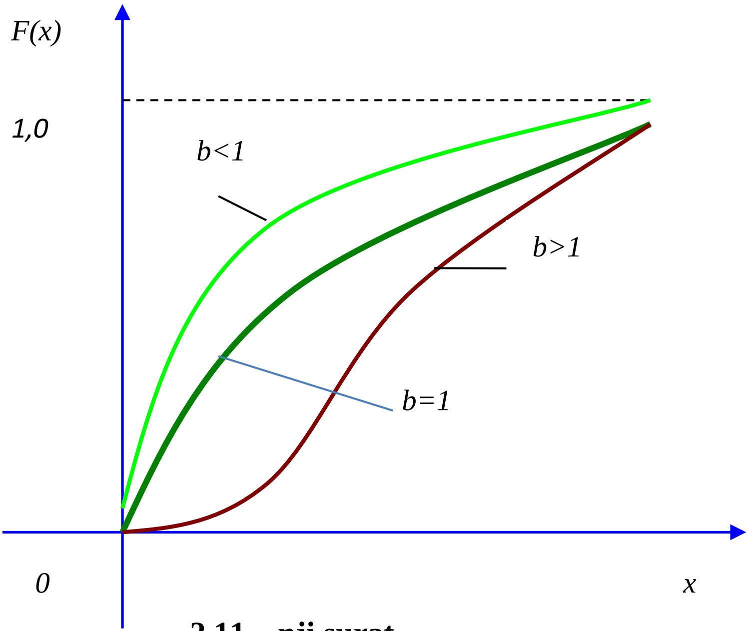
$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & x < c\ bolsa, \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b}, & x \geq c\quad bolsa\ , \end{cases} \qquad (2.28)$$

görnüşinde bolsa, onda *X* tötän ululygy ***Weýbullyň kanuny boýunça paýlanan*** diýilýär. Bu ýerde, *a,b,c* sanlara degişlilikde, ***masştabyň, formanyň*** we **süýşmäniň *parametrleri*** diýlip at berilýär.

Paýlanyşlaryň Weýbull kanunynyň differensial funksiýasy ýa-da dykyzlyk funksiýasy kesgitleme boýunça şeýle tapylýar

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0\ , & x < c\ bolsa, \\ \frac{b}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b}, & x \geq c\ bolsa. \end{cases} \qquad (2.29)$$

(2.28) formulada kesgitlenýän *F(x)* funksiýasynyň *c=0* süýşmede hem-de *b*-formanyň parametriniň dürli *(0<b<1, b=1, b>1)* bahalaryndaky grafikleri 2.11-nji suratda görkezilen.

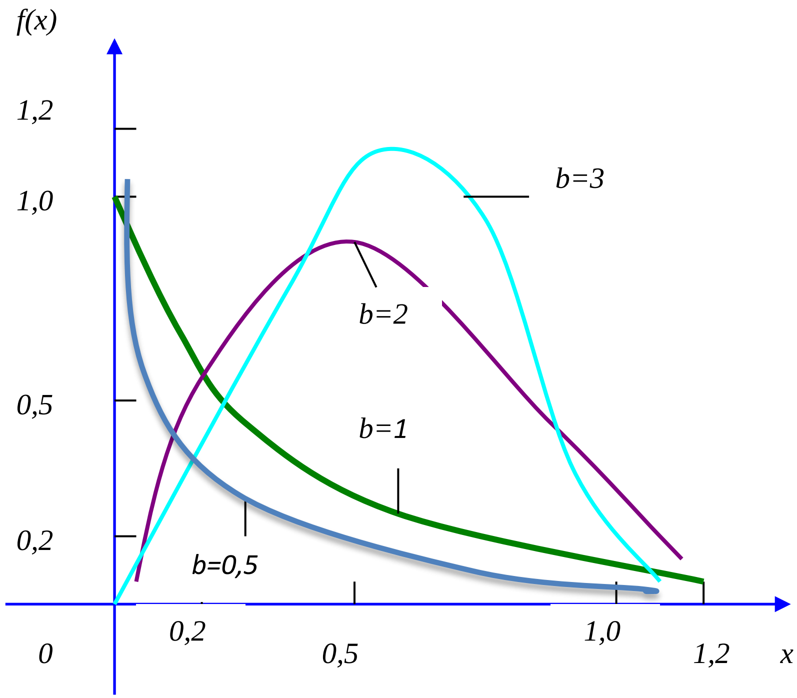


2.11 – nji surat

f(x) dykyzlyk funksiýasynyň *c=0* süýşmede, *a=1* masştabda hem-de *b*-formanyň parametriniň *b=0,5; b=1; b=2; b=3* bahalaryndaky grafikleri 2.12-nji suratda getirilen.

Bellik. Hususy ýagdaýda, haçanda formanyň parametri *b=1* bolanda, Weýbullyň paýlanyşy görkezijili (eksponensial) paýlanyşa öwrülýär, masştabyň *a* parametri bolsa *M(X)* matematiki garaşma we $\sigma(X)$ orta kwadratik gyşarma deň bolýar. Ýagny,

$$M(X)=a;\ \ \sigma(X)=a;\ \ D(X)=a^2.$$



2.12 – nji surat

Umumy ýagdaýda (haçan-da *b≠1* bolanda), *M(X)* we *D(X)* ululyklary Weýbullyň paýlanyşy üçin

$$M(X) = a\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{b}} e^{-x} dx + c, \tag{2.30}$$

$$D(X) = a^2 \left(\int_0^{\infty} x^{\frac{2}{b}} e^{-x} dx - \left(\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{b}} e^{-x} dx \right)^2 \right). \tag{2.31}$$

formulalarda tapylýar. Hasaplamalary ýönekeýleşdirmek üçin **gamma funksiýasy**

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \qquad \text{(goşunda, g.5-nji tablisa seret)}$$

girizilip, (2.30) we (2.31) formulalary:

$$M(X) = a\Gamma(1+1/b) + c, \qquad (2.30^1)$$

$$D(X) = a^2 \left(\Gamma(1+2/b) - (\Gamma(1+1/b))^2\right) \qquad (2.31^1)$$

görnüşlerde ulanýarlar.

(2.28) formuladan alarys

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-(\frac{\alpha-c}{a})^b} - e^{-(\frac{\beta-c}{a})^b} \qquad (2.32)$$

Weýbullyň paýlanyşy enjamlaryň döwülmesiz işleme wagtyny (elektrik gurluşlaryň, maşyn desgalarynyň ygtybarlylygyny we ş.m.) bahalandyrmakda, poladyň çeýelik predelleriniň we çydamlylygynyň seljermesinde ulanylýar. Bu paýlanyş üc parametre bagly bolany üçin has çylşyrymlydyr, emma, beýleki paýlanyşlar bilen deňeşdirilende has umumy-uniwersaldyr.

Mysal. Podşipnik gurluşynyň hyzmat ediş möhleti Weýbulluň paýlanyş kanunyna tabyn bolan X tötän ululygydyr. Bu ýerde masştab parametri $a = 10$ ýyl, forma parametri $b=2$ we süýşme parametri c=0 kabul edilýär. Podşipnigiň ortaça hyzmat ediş möhledini, bu möhletden orta kwadratik gyşarmany we gurluşyň iň azyndan 9 ýyl hyzmat etmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. (2.30^1), (2.31^1) we (2.32) formulalardan alarys

$$\overline{X} = M(X) = 10\Gamma(1+\frac{1}{2}) = 10\cdot 0{,}8862 = 8{,}862 \text{ (ýyl)}$$

$$D(X) = 100(\Gamma(1+1) - (\Gamma(1+\frac{1}{2}))^2) = 100(1{,}0 - 0{,}8862^2) =$$

$$=100(1{,}0-0{,}7854) = 100 \cdot 0{,}2146 = 21{,}46;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{21{,}46} = 4{,}63 \text{ (ýyl)},$$

$$P(9 \le X < +\infty) = e^{-0{,}9^2} - e^{-\infty} = e^{-0{,}81} = 0{,}4449.$$

Bu ýerde, goşundydan e^x, e^{-x} we *Γ(x)* funksiýalaryň bahalarynyň tablisalary peýdalanyldy (g.3, g.4-nji tablisalar).

2.11. Uly sanlaryň kanunlary

Ýeterlik uly *n* sanda geçirilýän bagly däl synaglar üçin esasy kesgitlemäni hem-de Çebyşewiň, Bernulliniň we Muawr – Laplasyň teoremalaryny subutsyz getireliň.

Kesgitleme. Eger hemme ýeterlik uly *n* sanlar üçin

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda X_n tötän ululyk ***ähtimallyk boýunça*** *a* ***sana ýygnanýar*** diýilýär, bu ýerde:

ε – erkin kiçi položitel san;

δ – baha bolsa, *ε* we *n* ululyklaryň saýlanyşyna baglydyr.

Bu kesgitlemäniň adalgalarynda Çebyşewiň teoremasy şeýle formulirlenýär.

Çebyşewiň teoremasy. Ýeterlik köp sandaky bagly däl synaglarda tötän ululygyň syn edilýän bahalarynyň orta arifmetiki bahasy onuň matematiki garaşmasyna ähtimallyk boýunça ýygnanýar, ýagny,

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} x_i / n - M(x)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \qquad (2.33)$$

Bu deňsizlikde $0 < \delta < \dfrac{D(x)}{n\varepsilon^2}$ kabul etmek bolar, bu ýerde *D(X)* – *X* ululygyň dispersiýasydyr.

Çebyşewiň teoremasy uly sanlar kanunlarynyň biri bolmak bilen, ähtimallyklar teoriýasynyň köp amaly ulanylyşlarynyň esasyny düzýär.

Uly sanlar kanunlarynyň ýönekeýleriniň biri hem Bernulliniň teoremasydyr.

Bernulliniň teoremasy. Eger ýeterlik köp sandaky bagly däl synaglarda wakanyň ähtimallygy synaglaryň her birinde *p (q=1-p)* sana deň bolsa, onda tötän wakanyň ýygylygy wakanyň ähtimallygyna ähtimallyk boýunça ýygnanýar, ýagny,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\delta \; . \qquad (2.34)$$

Bu ýerde δ deregine

$$0<\delta<\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

bahalaryň birini almak bolar.

Mysal. Teňňe 1000 gezek oklanýar. San belginiň ýüze çykmagynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň 0,1 – den kiçi bolmagynyň ähtimallygyny aşakdan bahalandyrmaly.

Çözülişi. Bu ýerde: *n=1000; p=q=0,5; ε=0,1*.
(2.34) deňsizlige görä alarys

$$\delta=\frac{pq}{n\varepsilon^2}=\frac{0,5\cdot 0,5}{1000\cdot 0,1^2}=\frac{0,25}{10}=0,025$$

$$P(/\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}/<0,1)>1-0,025$$

$$P(/\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}/<0,1)>0,975$$

Bu ýerde $/\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}/<0,1$ deňsizlik 400 < m < 600 goşalaýyn deňsizlige deňgüýçlidir. Onda teňňäniň san belgisiniň düşme sanynyň

(400; 600) interwalda bolmagynyň ähtimallygy 0,975 – den uludyr diýip aýtmak bolar.

Eger bagly däl n synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p sana deň bolsa, onda wakanyň ýüze çykmagynyň m/n ýygylygy binomial kanun boýunça paýlanan tötän ululykdyr, onuň matematiki garaşmasy we dispersiýasy, degişlilikde, p we $\sqrt{pq/n}$ sanlara deňdir. Şunlukda,

$$\tau_n = \frac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{pq/n}} \tag{2.35}$$

tötän ululygyň matematiki garaşmasy $M(\tau_n)=0$, dispersiýasy $D(\tau_n)=1$ bolup, oňa tötän wakanyň ***normirlenen ýygylygy*** diýilýär (onuň paýlanyşy hem binomialdyr).

Muawr – Laplasyň teoremasy. Ýeterlik köp sandaky bagly däl synaglarda, normirlenen (2.35) ýygylygyň binomial paýlanyş kanuny, predelde, şol bir matematiki garaşmaly (0-a deň) we dispersialy (1- e deň) normal paýlanyş kanunyna öwrülýär.

Bu teoremanyň netijesinde, n-iň uly bahalarynda $P(a<\tau_n<b)$ ähtimallygy ýakynlaşan hasaplamak üçin Laplasyň funksiýasyndan peýdalanýarlar, ýagny

$$P(a < \tau_n < b) = P\left(a < \frac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < b\right) = P\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{2.36}$$

Mysal. Synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p sana deň. N synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň sanynyň α-dan β-ä çenli bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Belli bolşy ýaly

$$\left(a < \frac{x-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \Leftrightarrow (np + a\sqrt{npq} < x < np + b\sqrt{npq})\ .$$

Bu ýerde:

$$np + a\sqrt{npq} = \alpha,\ \ np + b\sqrt{npq} = \beta$$

belgiläliň. Onda

$$a = \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}, \qquad b = \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}$$

taparys. Bu ýerden, normirlenmedik X tötän ululygy üçin Muawr-Laplasyň teoremasyny ulanyp, (2.36) formulanyň esasynda alarys

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right). \qquad (2.36^1)$$

Goý, $n=100$, $\alpha=40$; $\beta=60$, $p = q = \frac{1}{2}$ bolsun. Onda

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100\ \cdot 0{,}5\ \cdot 0{,}5} = \sqrt{25} = 5.$$

(2.36^1) – e görä

$$P(40 < X < 60) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{60 - 100 \cdot 0.5}{5 \cdot \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{40 - 100 \cdot 0.5}{5 \cdot \sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{10}{5\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{5\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2})\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\Phi(\sqrt{2})\right) = \Phi\left(\sqrt{2}\right) = \Phi(1{,}4142) = 0{,}954.$$

2.12. Tötän ululyklaryň sistemasy

Köplenç, synagyň netijesi diňe bir X tötän ululyk bilen däl-de, birnäçe X_1, X_2, ..., X_n tötän ululyklar arkaly beýan edilýär. Bu ýagdaýda, görkezilen tötän ululyklar $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ***sistemany emele getirýär*** diýilýär.

Iki tötän ululykdan (X,Y) sistemany, geometriki taýdan, tekizlikdäki tötän nokat ýaly şekillendirmek bolar. Şeýlelikde, (X,Y) tötän nokadyň D oblasta düşmeginden ybarat wakany $(X,Y) \in D$ görnüşinde belleýärler.

Iki diskret tötän ululyklaryň sistemasynyň paýlanyş kanuny tablisa görnüşinde berlip bilner (2.12-nji tablisa). Bu ýerde

$x_1 < x_2 < ... < x_m$, $y_1 < y_2 < ... < y_n$;

p_{ij} – birwagtda ýerine ýetýän $X=x_i$, $Y=y_j$ deňliklerden ybarat bolan wakanyň ähtimallygy.

2.12-nji tablisa

Y / X	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Şunlukda, eger $(X=x_i, Y=y_j)$ hemme kombinasiýalar wakalaryň doly toparyny emele getirýärler we

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

ýerine ýetip, tablisa tükeniksiz sanly setirlerden we sütünlerden ybarat bolup hem biler.

Üznüksiz tötän ululyklaryň *(X,Y)* sistemasynyň paýlanyş kanuny, esasan, *f(x,y)* – ähtimallyklaryň dykyzlyk funksiýasy arkaly berilýär. Onda *(X,Y)* tötän nokadyň *D* oblast düşmeginiň ähtimallygy

$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D f(x,y)dx\,dy \qquad (2.37)$$

formula bilen kesgitlener.

Ähtimallyklaryň dykyzlyk funksiýasy şeýle häsiýetlere eýedir:

1) $f(x,y) \geq 0,$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy = 1.$

Eger hemme *(X,Y)* tötän nokatlar *D* tükenikli oblasta degişli bolsalar, onda soňky häsiýet

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

görnüşi alar.

Sistema girýän *X* we *Y* diskret tötän ululyklaryň matematiki garaşmalary

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\, p_{ij},$$

$$m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i\, p_{ij} \qquad (2.38)$$

formulalar bilen, üznüksiz tötän ululyklaryň matematiki garaşmalary bolsa

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)dx\, dy,$$
$$m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)dx\, dy \qquad (2.39)$$

formulalar arkaly tapylýar.

(m_x; m_y) nokada tötän ululyklaryň *(X,Y)* sistemasynyň ***ýaýrama merkezi*** diýilýär.

Eger *X* we *Y* tötän ululyklary bagly däl bolsalar, onda m_x we m_y ululyklaryny hasaplamak aňsat bolar. Bu ýagdaýda bu tötän ululyklaryň aýratynlykdaky paýlanyş kanunlaryny peýdalanýarlar.

Sistema girýän *X* we *Y* diskret tötän ululyklaryň dispersiýalary

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2, \qquad (2.40a)$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j - m_y)^2 \qquad (2.40b)$$

formulalarda tapylýar, üznüksiz tötän ululyklaryň dispersiýalary bolsa

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^2 f(x,y)dx\, dy\,,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y - m_y)^2 f(x,y)dx\, dy \qquad (2.41)$$

formulalar arkaly kesgitlenýär.

X we *Y* tötän ululyklaryň orta kwadratik gyşarmalary

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}\ ,\ \sigma_Y = \sqrt{D(Y)} \qquad (2.42)$$

ýaly tapylyp, dispersiýalary hasaplamak üçin

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,\ D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 \qquad (2.43)$$

formulalary peýdalanylyp bilner.

Tötän ululyklaryň sistemasynyň teoriýasynda ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy häsiýetlendirýän hem-de ***korrelýasiýa momenti*** ýa-da ***kowariasiýa*** diýlip atlandyrylýan

$$C_{XY} = M\left[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)\right] \qquad (2.44)$$

ululyk amaly meselelerde düýpli rol oýnaýar. Diskret tötän ululyklary üçin korrelýasiýa momenti

$$C_{XY} = \sum_m \sum_n (x_n - m_x) \cdot \left(y_m - m_y\right) p_{nm} \,. \qquad (2.44^{\mathrm{I}})$$

formulada, üznüksiz tötän ululyklary üçin bolsa

$$C_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) \cdot \left(y - m_y\right) f(x, y) dx\, dy \qquad (2.44^{\mathrm{II}})$$

formula arkaly tapylýar. Korrelýasiýa momentini

$$C_{XY} = M(XY) - M(X)M(Y) \qquad (2.45)$$

formulada hem kesgitleýärler, bu ýerde

$M(XY) = \sum_m \sum_n x_n\, y_m\, p_{mn}$ (DTU-lar üçin),

$M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx\, dy$ (ÜTU-lar üçin).

Bilşimiz ýaly, eger *X* we *Y* ululyklaryň islendik biriniň ähtimallygynyň düşýän aralyklary beýlekiňkä bagly bolmasa, onda bu ululyklara ***bagly däl*** diýilýär. Bu ýagdaýda:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y); \quad C_{xy} = 0$$

X we Y ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy häsiýetlendirmek üçin r_{XY}– ***korrelýasiýa koeffisiýentini***

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_Y} \qquad (2.46)$$

ölçegsiz ululykda hasaplap ulanýarlar. Eger X we Y ululyklar bagly däl bolsalar, onda $r_{XY}=0$. Eger X we Y tötän ululyklary

$$Y=aX+b \qquad (2.47)$$

çyzykly baglanyşykda bolsalar, onda

$$r_{XY} = sgn\ a = \begin{cases} 1\ , & eger\ a > 0\ bolsa\ , \\ -1\ , & eger\ a < o\ bolsa\ , \end{cases} \qquad (2.48)$$

ýaly kesgitlenýär. Umuman, korrelýasiýa koeffisiýenti

$$-1 \le r_{XY} \le 1$$

goşa deňsizligini kanagatlandyrýar.

Mysal. Iki gutuda 6 şardan bolup, 1-nji gutuda: №1 belgili 1 şar, №2 belgili 2 şar we №3 belgili 3 şar bar. 2-nji gutuda: №1 belgili 2 şar, №2 belgili 3 şar we №3 belgili 1 şar bar. Goý, X – "1-nji gutudan çykarylan şaryň nomeri", Y –"2-nji gutudan çykarylan şaryň nomeri" bolsun. Gutularyň her birinden bir şar çykardylar.

Tötän ululyklaryň *(X,Y)* sistemasynyň paýlanyş kanunynyň tablisasyny düzmeli, *M(X), M(Y), D(X), D(Y),* r_{XY} – ululyklary tapmaly.

Çözülişi. Tötän (*x;y*) nokatlaryň gaýtalanmalarynyň sanyny kesgitläliň.

Tötän nokat (1;1) – gaýtalanma sany $1 \cdot 2=2=m_{11}$,
Tötän nokat (1;2) –gaýtalanma sany $1 \cdot 3=3=m_{12}$,
Tötän nokat (1;3) –gaýtalanma sany $1 \cdot 1=1=m_{13}$,
Tötän nokat (2;1) –gaýtalanma sany $2 \cdot 2=4=m_{21}$,

Tötän nokat (2;2) –gaýtalanma sany $2 \cdot 3=6=m_{22}$,
Tötän nokat (2;3) –gaýtalanma sany $2 \cdot 1=2=m_{23}$,
Tötän nokat (3;1) –gaýtalanma sany $3 \cdot 2=6=m_{31}$,
Tötän nokat (3;2) –gaýtalanma sany $3 \cdot 3=9=m_{32}$,
Tötän nokat (3;3) –gaýtalanma sany $3 \cdot 1=3=m_{33}$.

Gaýtalanmalaryň jemi sany $n=36$. Belli bolşy ýaly

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{n},\ i,j=1,2,3$$

kesgitläris. Onda paýlanyş kanunynyň tablisasy şeýle görnüşde bolar (2.13-nji tablisa).

2.13-nji tablisa

X \ Y	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Hemme ähtimallyklaryň jemi bolsa bire deň (wakalaryň doly topary).

$$M(X) = m_x = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{4} +$$

$$+1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{3}$$

$$M(Y) = m_Y = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{18}$$

$$+1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}.$$

Diýmek, $(m_x,\ m_y)=\left(\frac{7}{3};\frac{11}{6}\right)$ nokat berlen *(X,Y)* sistema üçin ýaýrama merkezidir.

Meseläniň şerti boýunça *X* we *Y* tötän ululyklary özara bagly däl. Onda olaryň her biriniň paýlanyş kanunlaryny aýratynlykda ýazyp, *M(X)* we *M(Y)* ululyklary aňsat tapyp bolar.

X (*Y)* ululygyň paýlanyş kanunyny ýazmak üçin, 2.13-nji tablisadan onuň kabul edýän *1,2,3* bahalaryny we her baha degişli setir (sütün) boýunça ähtimallyklaryň jemini alarys (2.14-nji, 2.15-nji tablisalar)

2.14-nji tablisa

X	1	2	3
P_x	1/6	1/3	1/2

2.15-nji tablisa

Y	1	2	3
P_y	1/3	1/2	1/6

Bu tablisalardan bolsa

$$m_x=\sum p_i\,x_i=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=7/3$$

$$m_y=\sum p_j\,y_j=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=1/3+1+1/2=11/6$$

D(X), D(Y) ululyklary 2.14, 2.15-nji tablisalary ulanyp tapmak bolar.

2.13-nji tablisa boýunça hasaplamak üçin, $X^I=X-m_x$, $Y^I=Y-m_y-$ *gyşarmalar (merkezleşdirilen ululyklar)* sistemasyna geçip, degişli tablisany düzeliň (2.16-njy tablisa).

$$X^I=X-m_x=X-\frac{7}{3},\quad Y^I=Y-m_y=Y-\frac{11}{6},$$

$$D(X)=\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{9}.$$
$$D(Y)=\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+$$
$$+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{17}{36}.$$

2.16-njy tablisa

X^I \ Y^I	-5/6	1/6	7/6
-4/3	1/18	1/12	1/36
-1/3	1/9	1/6	1/18
2/3	1/6	1/4	1/12

Bu ýerden taparys

$$\sigma_X=\frac{\sqrt{5}}{3}\ ,\qquad \sigma_Y=\frac{\sqrt{17}}{6}.$$

r_{xy} – korrelýasiýa koeffisiýentini tapmak üçin, ilki bilen, (2.44^I) formula boýunça korrelýasiýa momentini (kowariasiýany) hasaplalyň. Onuň üçin bolsa 2.16-njy tablisadan peýdalanarys

$$C_{XY}=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{36}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{18}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{108}+\frac{1}{72}+\frac{7}{216}\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{54}+\frac{1}{36}+\frac{7}{108}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{36}+\frac{1}{24}+\frac{7}{12}\right)=$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0=0$$

Bu ýerde $C_{XY} = 0$ bolany üçin, (2.46) formuladan tapylýan $r_{XY} = 0$ bolar.

Mysal. Tötän ululyklaryň *(X,Y)* sistemasy

$$f(x,y)=\begin{cases} a\,Sin\,(x+y)\,, & eger\ (x,y)\in D\ bolsa\,; \\ 0\,, & eger\ (x,y)\notin D\ bolsa \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýaly paýlanyş kanunyna tabyn. *D* oblast $0\le x\le \pi/2\,,\ 0\le y\le \pi/2$ kwadrat görnüşindedir.

Şu mysal boýunça: 1) a-koeffisiýenti; 2) m_x, m_y matematiki garaşmalary; 3) σ_X , σ_Y orta kwadratik gyşarmalary; 4) r_{xy} korrelýasiýa koeffisiýentini tapmaly.

Çözülişi. 1) *a* koeffisiýenti dykyzlyk funksiýasynyň 2-nji häsiýeti boýunça

$$a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)\,dx\,dy=1$$

deňlemeden taparys. Bu ýerde

$$\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dy=-\int_0^{\pi/2}\left[\cos(x+y)\right]_0^{\pi/2}dx=\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x)dx=$$

$$=[\sin x-\cos x]_0^{\pi/2}=(1-0)-(0-1)=1+1=2.$$

Diýmek, *2a=1* $\Leftrightarrow$ *a= 1/2*. Onda dykyzlyk funksiýasy *D* oblastda *f(x,y)=(1/2) sin(x+y)* görnüşindedir.

2) (2.39) formulalardan alarys

$$m_x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x * \sin(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dy\right)xdx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right)dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)dx = \frac{1}{2}x(\sin x+\cos x)|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+$$
$$\sin x)dx = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}..$$

Şuňa meňzeşlikde taparys $m_y = \frac{\pi}{4}$.

3) *X* tötän ululygyň dispersiýasyny tapalyň

$$\sigma_X^2 = M(x^2) - m_x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(sinx+cosx)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x+y)\,|_0^{\frac{\pi}{2}}dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(sinx+cosx)dx -$$
$$\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2 \approx 0{,}1865.$$

Şular ýaly $\sigma_Y^2 = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2 \approx 0{,}1865$ bahany alarys.

Diýmek, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = (\pi^2+8\pi-32)/16 \approx 0{,}1865..$

Bu ýerden $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{\pi^2+8\pi-32}/4 \approx \sqrt{0{,}1865} \approx 0{,}4318$.

4) Kowariýasiýany (2.45) formulada hasaplalyň:

$$C_{XY} = M(XY) - M(X) * M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xysin(x+y)dy\,dx - \frac{\pi}{4}\cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx \int_0^{\frac{\pi}{2}} ysin(x+y)dy - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[ycos(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\,dy\right]xdx - \frac{\pi^2}{16}.$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - Sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + Sinx\right]dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot Sinx - Cosx + Sinx\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot Sinx + Cosx - Sinx\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}x\left(Sinx - \frac{\pi}{2}Cosx + Cosx\right)\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(Sinx - \frac{\pi}{2}Cosx + Cosx\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(Sinx - \frac{\pi}{2}Sinx - Cosx\right)\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.$$

Bu ýerden

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x\sigma_Y} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -\frac{0{,}73686}{3{,}002346} \approx -0{,}2454.$$

2.13. Ikiölçegli paýlanyşlar we olaryň şertli paýlanyş kanunlary

Bilşimiz ýaly, iki sany tötän wakanyň arasynda baglanyşyk bolanda bir waka ýüze çykandaky beýleki wakanyň ýüze çykmagynyň şertli ähtimallygy şertsiz ähtimallykdan tapawutlanýardy. Şuňa meňzeşlikde, bir tötän ululygyň beýleki ululygyň üýtgemesine täsirini derňemek üçin ikinji ululygyň fiksirlenen bahasynda birinji ululygyň şertli paýlanyş kanunyna seredýärler.

Goý, X ululyk özüniň bir $X=x_i$ bahasyny alan bolsun. Şunlukda, beýleki Y ululyk, umuman aýdanyňda, özüniň mümkin bolan y_1, y_2, ... , y_j, … bahalarynyň islendigini kabul edip biler, emma, bu bahalaryň ähtimallyklary $P(y_1)$, $P(y_2)$, ... , $P(y_j)$, … ähtimallyklardan tapawutlanarlar.

Hakykatdan hem, eger $X=x_i$ waka syn edilen bolsa, onda $Y=y_j$ wakanyň şertli ähtimallygy, (1.13) formulalara laýyklykda, $P(x_i,y_j)/P(x_i)$ gatnaşyga deň bolar. Bu şertli ähtimallygy $P(y_j/x_i)$ bilen belgiläliň. Onda

$$P(y_j/x_i) = P(Y = y_j/X = x_i) = \frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i)} \qquad (2.49)$$

Kesgitleme. Şol bir $X=x_i$ şerte degişli bolan

$$P(y_1/x_i), P(y_2/x_i), \dots, P(y_j/x_i)$$

şertli ähtimallyklaryň toplumyna ***X=x_i bolandaky Y ululygyň şertli paýlanyşy*** diýilýär.

Düzgün boýunça, şertli ähtimallyklaryň jemi hem bire deň bolmalydyr

$$\sum_j P(y_j/x_i) = \frac{\sum_j P(x_i,y_j)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i)}{P(x_i)} = 1. \qquad (2.50)$$

Bu şertli paýlanyş kanunlaryny gysgaça beýan etmek üçin, bir ölçegli paýlanyşlar üçin hasaplanýan häsiýetlendirijileri ulanmak bolar.

Has möhüm häsiýetlendiriji, $X=x$ fiksirlenen bahada, Y ululygyň $M(Y/x)$ – ***şertli matematiki garaşmasydyr,*** bu ýerde x ululyk x_1, x_2, ... , x_i, ... bahalaryň birine deňdir. Şeýlelikde

$$M(Y/x) = \sum_j y_j \, P\left({}^{y_j}/_{x} \right). \qquad (2.51)$$

Şuňa meňzeşlikde, ***şertli dispersiýa*** we ýokary tertipli ***şertli momentler*** düşünjeleri girizilýär.

(2.51) deňligi göz öňünde tutup, *M(Y/x)* ululygy

$$\bar{y}(x) = M(Y/x) = \frac{\sum_j y_j \, P(x, y_j)}{\sum_j P(x, y_j)} \qquad (2.51^1)$$

görnüşde hem hasaplap bileris. Şoňky formula boýunça, *M(Y/x)* matematiki garaşma $X=x=const$ wertikal göni boýunça Y_j $(j=1,2, ...)$ ordinatalarda ýerleşen $p(x_i, y_j)$ massalaryň merkezi hökmünde seredilýär. *X*-iň üýtgemegi, ýagny 2.12-nji tablisanyň bir sütüninden beýlekisine geçilmegi bilen, *M(Y/x)* hem üýtgeýär. Diýmek, biz, $x=x_1, x_2, ... , x_i , …$ bahalar üçin kesgitlenen

$$\bar{y}(x) = M(Y/x)$$

funksiýasyna seredip bileris. Bu funksiýa *X* boýunça *Y*-iň **regressiýasy** ýa-da **regressiýa funksiýasy** diýilýär.

Şu ýerde, her bir *X=x* bahada *Y* bahalary üýtgäp duran tötän ululyk bolsa-da, *x*-iň bir bahasyndan beýlekisine geçilende, *Y*-iň *X*-e baglylygy, köplenç, *Y*-iň orta ölçegleriniň (bahalarynyň) üýtgemesinde ýüze çykýar. Şu soňky baglanyşygy hem $\bar{y}(x)$ regressiýa egrisi beýan edýär.

Aýdylanlara meňzeşlikde, $Y=y_j$ fiksirlenen bahalarda

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}, \text{ i=1,2, ...} \qquad (2.52)$$

ähtimallyklaryň toplumy bilen kesgitlenýän, *X* – ululygyň şertli paýlanyş kanunyna seredip bileris, şeýlelikde,

$$\sum_i P(x_i/y_j) = \frac{\sum_i P(x_i,y_j)}{P(y_j)} = \frac{P(y_j)}{P(y_j)} = 1$$

X ululygyň *Y* boýunça regressiýasy bolsa

$$\bar{x}(y) = M(X/y) = \sum_i x_i \ P(x_i/y) = \frac{\sum_i x_i \ P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

ýaly kesgitlener. Bu funksiýa *Y=y=const* gorizontal gönüleriň üstünde ähtimallyklaryň agyrlyk merkezleriniň üýtgemesini beýan edýär.

X we *Y* ululyklar üznüksiz paýlanan ýagdaýynda, olaryň bilelikdäki *p(x,y)* paýlanyşy ähtimallyklaryň dykyzlygydyr we integrirlenýän funksiýadyr. Şunlukda, *Q(X,Y)* tötän nokadyň O*xy* tekizligiň haýsy-da bolsa bir *G oblastyna* düşmekliginiň ähtimallygy

$$P[Q(X,Y) \subset G] = \iint_G \ p(x,y)\, dx\, dy \qquad (2.53)$$

formulada kesgitlenýär. Bu ýagdaýda *Q(X,Y)* nokadyň okuň izolirlenen nokatlarynyň tekiz egriniň bölegini emele getirýän köplügine (meselem, *G* oblastyň çägine) düşmeginiň ähtimallygy nola deňdir. Mundan hem başga, *(X,Y*) ululyklaryň mümkin bolan bahalaryna degişli bolmadyk nokatlarda hem *p(x,y)=0* hasap edilýär.

Geometriki taýdan, *Z=p(x,y)* funksiýasy ***paýlanyş üstüni*** emele getirýär.

Kesgitleme.

$$P_{xy}(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x,y) dx\, dy \qquad (2.54)$$

funksiýasyna ***ikiölçegli (X,Y) ululygyň paýlanyşynyň integral funksiýasy*** diýilýär.

(2.54)-de kesgitlenýän $P_{xy}(x,y)$ funksiýasy *Q(X,Y*) tötän nokadyň tekizligiň bölegine düşmeginiň ähtimallygyny aňladýar. *x* we *y* üýtgeýänleriň bahalarynyň artmagy bilen, bu funksiýanyň hem bahasy artýar we onuň maksimal bahasy bire deňdir.

Iň ýönekeý mysal bolup, *(x,y)* tekizligiň haýsy-da bolsa bir böleginde ***ikiölçegli tötän ululygyň deňölçegli paýlanyşy*** hyzmat edýär. Bu ýagdaýda

$$P(x,y)=\begin{cases} C=const\ , & haçanda\ (x,y)\subset G, \\ \quad 0 \quad , & haçanda(x,y)\not\subset G. \end{cases}$$

C hemişelik

$$\iint_G C\,dx\,dy = C\iint_G dx\,dy = CS_G = 1$$

şertden kesgitlenip, onuň bahasy $C=1/S_G$ deňdir, bu ýerde S_G – san *G* oblastyň meýdanydyr. Şunlukda, *Q(X,Y)* tötän nokadyň *G* oblastyň içindäki *g* meýdança düşmeginiň ähtimallygy:

$$\iint_g p(x,y)dx\,dy = \iint_g C\,dx\,dy = \frac{1}{S_G}\int_g dx\,dy = \frac{S_g}{S_G} \qquad (2.55)$$

ýaly tapylar, bu ýerde S_g – ululyk g – niň meýdany. Geometriki ähtimallygyň kesgitlenişi ýaly, bu baha g meýdançanyň G oblastyň içinde ýerleşiş ýagdaýyna däl-de, diňe S_g – ululyga baglydyr.

Eger ikiölçegli paýlanyşyň *p(x,y)* dykyzlygy berlen bolsa, onda bir ölçegli paýlanyş funksiýalaryny we dykyzlygy kesgitlemek bolar. Dogrudan hem, (2.53) umumy formula laýyklykda taparys

$$P(X<x)=P(X<x,Y<\infty)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy. \qquad (2.56)$$

Şol sebäpli, *X* ululygyň $P_X(x)$ dykyzlygy üçin alarys

$$P_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy. \qquad (2.57)$$

Şuňa meňzeşlikde kesgitläris

$$P_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dydx\ . \qquad (2.58)$$

X=x berlen bahada Y ululygyň şertli paýlanyş kanuny şertli dykyzlyk arkaly kesgitlenýär

$$P_Y(y/x) = \frac{P(x,y)}{P_x(x)} = p(x,y)/\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,. \tag{2.59}$$

Şuňa meňzeşlikde, berlen Y=y ýagdaýynda X-iň şertli dykyzlygy üçin

$$P_X(x/y) = \frac{p(x,y)}{P_Y(y)} = p(x,y)/\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx \tag{2.60}$$

formulany alarys.

X boýunça Y-iň we Y boýunça X-iň regressiýa çyzyklary, şertli matematiki garaşmalar ýaly şeýle kesgitlenýär

$$\bar{y}(x) = M(Y/X) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,p(y/x)\,dy = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\,p(x,y)\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy}, \tag{2.61}$$

$$\bar{x}(y) = M(X/Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x/y)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x,y)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx} \tag{2.62}$$

Bu düşünjeleriň hemmesini islendik sandaky ölçegler üçin umumylaşdyrmak bolar.

Iki ölçegli paýlanyş we onuň häsiýetlendirijileri hususan-da, regressiýa çyzyklary barada anyk maglumatlary almak üçin, amalyýetde, her birinde X we Y ululyklaryň bilelikdäki bahalary bellenen, n syn etmeleriň netijeleri ulanylýar. Şeýle maglumatlaryň toplumy, adatça, ***korrelýasiýa tablisasy*** görnüşinde bolýar.

2.14. Regressiýa çyzyklary. Korrelýasiýa

Goý, tötän ululyklaryň (X,Y) sistemasy berlen bolup, n synaglaryň netijesinde n sany nokatlar:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

(bu nokatlaryň içinde gabat gelýänleri hem bolmagy mümkin) alnypdyr diýeliň. Bu tötän ululyklaryň sistemasynyň korrelýasiýa koeffisiýentini hasaplamak talap edilýär.

n-iň ýeterlik uly bahasynda, uly sanlar kanunyny göz öňünde tutmak bilen, σ_X^2 , σ_Y^2 we C_{xy} kesgitlenýän formulalarda *M(X)* we *M(Y)* matematiki garaşmalaryny, degişli tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahalary bilen çalşyrmak bolar. Şunlukda, şeýle ýakynlaşan deňlikler ulanylýar:

$$M(X) \approx \bar{x} = (\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i)/n;\ M(Y) \approx \bar{y} \approx (\textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i)/n,$$

$$\sigma_X^2 \approx (\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2)/n - \overline{x^2};\ \sigma_Y^2 \approx (\textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2)/n - \bar{y};^2 \qquad (2.63)$$

$$C_{xy} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}\,; \qquad r_{XY} \approx \frac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_Y}\ .$$

Eger

$$|r_{xy}|\sqrt{n-1} \geq 3 \qquad (2.64)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda *X* we *Y* tötän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk ***ýeterlik ähtimallykly*** hasap edilýär.

Eger *X* we *Y* ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk kesgitlenen bolsa, $\bar{y}(x)$-çyzykly ýakynlaşma çyzykly regressiýanyň formulasy arkaly berilýär

$$\bar{y}(x) - \bar{y} = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \qquad (2.65)$$

ýa-da

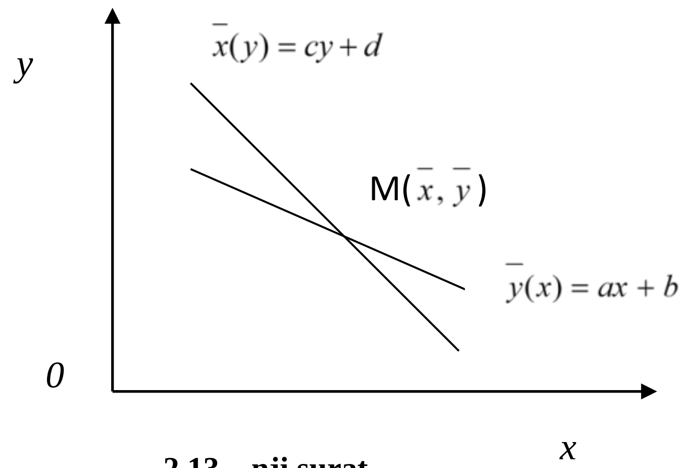
$$\bar{y}(x) = ax + b$$

$\bar{x}(y)$ – çyzykly ýakynlaşma çyzykly regressiýanyň formulasy arkaly şeýle berilýär

$$\bar{x}(y) - \bar{x} = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}) \qquad (2.66)$$

ýa-da $\qquad \bar{x}(y) = cy + d.$

Şu ýerde $\bar{y}(x) = ax + b$ we $\bar{x}(y) = cy + d$ çyzyklaryň dürli gönülerdigini belgiläp geçeliň (2.13-nji surat)



2.13 – nji surat

Birinji göni çyzyk wertikal boýunça, ikinji göni çyzyk gorizontal boýunça gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemini minimallaşdyrmak baradaky meseläni çözmegiň netijesinde alynýar.

Çyzykly regressiýanyň deňlemelerini gurmak üçin aşakdaky ädimler ýerine ýetirilýär:

- *(X,Y)* bahalaryň başlangyç tablisasy boýunça $\bar{x}, \bar{y}$, $\sigma_X, \sigma_Y, C_{xy}, r_{XY}$ ululyklaryň bahalaryny (2.63) formulalara laýyklykda hasaplamaly;
- *X* we *Y* ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk baradaky çaklamany (2.64) deňsizlik boýunça barlamaly;
- $\bar{x}(y)$ *we* $\bar{y}(x)$ regressiýa çyzyklarynyň deňlemelerini düzmeli we bu deňlemeleriň grafiklerini gurmaly.

Mysal. (X,Y) bahalaryň başlangyç tablisasy berlen (2.17-nji tablisa). r_{xy}-korrelýasiýa koeffisiýentini we regressiýa çyzyklarynyň deňlemelerini tapmaly.

2.17-nji tablisa

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51	1,50

I	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
Y	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Çözülişi. Hasaplaýyş tablisasyny düzeliň (2.18-nji tablisa).

2.18-nji tablisa

I	***X***	***Y***	X^2	Y^2	***XY***
1.	0,25	2,57	0,0625	6,6049	0,6425
2.	0,37	2,31	0,1369	5,3361	0,8547
3.	0,44	2,12	0,1936	4,4944	0,9328
4.	0,55	1,92	0,3025	3,6864	1,0560
5.	0,60	1,75	0,3600	3,0625	1,0500
6.	0,62	1,71	0,3844	2,9241	1,0602
7.	0,68	1,60	0,4624	2,5600	1,0880
8.	0,70	1,51	0,4900	2,2801	1,0570
9.	0,73	1,50	0,5329	2,2500	1,0950
10.	0,75	1,41	0,5625	1,9881	1,0575
11.	0,82	1,33	0,6724	1,7689	1,0906
12.	0,84	1,31	0,7056	1,7161	1,1004
13.	0,87	1,25	0,7569	1,5625	1,0875
14.	0,88	1,20	0,7744	1,4400	0,0560
15.	0,90	1,19	0,8100	1,4161	1,0710
16.	0,95	1,15	0,9025	1,3225	1,0925
17.	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,0000
$\sum$	11,95	26,83	9,1095	45,4127	17,3917

Tablisa maglumatlary boýunça alarys

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 11{,}95\ , \quad \sum_{i=1}^{17} y_i = 26{,}83\ , \quad \sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 9{,}1095\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{17} y_i^2 = 45{,}4127\ , \qquad \sum_{i=1}^{17} x_i y_i = 17{,}3917$$

Onda (2.63) formulalar boýunça taparys:

$\bar{x}$=11,95/17=0,7029; $\qquad \bar{y} = \frac{26{,}83}{17} = 1{,}5782;$

$\sigma_X^2 = \frac{9{,}1095}{17} - (0{,}7029)^2 = 0{,}0418; \qquad \sigma_x = 0{,}2042;$

$\sigma_Y^2 = 45{,}4127/17 - (1{,}5782)^2 = 0{,}1806; \qquad \sigma_y = 0{,}4250;$

$C_{xy} = \frac{17{,}3917}{17} - 0{,}7029 \cdot 1{,}5782 = -0{,}0863\ ;$

$r_{xy} = \frac{-0{,}0863}{0{,}2042 * 0{,}4250} = -0{,}9943$.

(2.64) deňsizligi barlalyň

$$|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1} = 0{,}9943 \cdot \sqrt{16} = 0{,}9943 \cdot 4 = 3{,}9772{,}3.$$

Aňlatmanyň san bahasy 3-den uly. Diýmek, *X* we *Y* tötän ululyklaryň arasynda düýpli baglanyşyk bar. Onda (2.65) formula boýunça $\bar{y}(x)$ çyzykly regressiýanyň deňlemesini tapalyň

$$\bar{y}(x) - 1{,}5782 = -\frac{0{,}9943 * 0{,}4250}{0{,}2042} \cdot (x - 0{,}7029)$$

ýa-da

$$\bar{y}(x) = -2{,}0695x + 3{,}0329. \qquad (*)$$

(2.66) formula boýunça $\bar{x}(y)$ -çyzykly regressiýanyň deňlemesi şeýle görnüşde bolar

$$\bar{x}(y) - 0{,}7029 = -\frac{0{,}9943 \cdot 0{,}2042}{0{,}4250}(y - 1{,}5782)\,;$$

ýa-da

$$\bar{x}(y) = 0{,}4776y + 1{,}4566 \qquad (**)$$

Tablisa arkaly kesgitlenýän nokatlary hem-de (*) we (**) regressiýalary gurup, iki regressiýa çyzyklarynyň hem *M(0,7029;1,5782)* nokatdan geçýändigini görýäris. Birinji çyzyk ordinatalar okundan 3,0329-a barabar kesimi, a ikinji çyzyk bolsa, abssissa okundan 1,4566 uzynlykly kesimi bölüp alýar. (X_i, Y_i) – nokatlar regressiýa çyzyklaryna golaý ýerleşen.

Mysal. 79 synagyň netijesinde $X = \sigma_S / \sigma_B$ we *Y* ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa tablisasy alnan (-nji tablisa 2.19)

2.19-njy tablisa

X \ Y	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0,6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

Bu ýerde: σ_S – poladyň akyjylygy; σ_B -poladyň berklik predeli; *Y* – uglerodyň polatdaky göterimleýin mukdary. Tablisada getirilen bitin sanlar degişli *(X,Y)* tötän nokatlaryň gaýtalanyp gelmek (kratnylyk) sanyny aňladýar. Meselem, *x=0,8*; *y=0,6* ýagdaý 79 synagda 14 gezek ýüze çykypdyr.

Korrelýasiýa koeffisiýentini we regressiýa göni çyzyklarynyň deňlemelerini kesgitlemeli.

Çözülişi. Tablisa maglumatlaryny ulanyp taparys:

$\bar{x} = 0{,}703$; $\bar{y} = 0{,}622$; $\frac{\sum x^2}{79} = 0{,}505$,

$\frac{\sum y^2}{79} = 0{,}398$, $(\sum xy)/79 = 0{,}427$.

Dispersiýany we kowariýasivany kesgitläliň:

$\sigma_X^2 = 0{,}505 - (0{,}703)^2 = 0{,}505 - 0{,}493 = 0{,}012$; $\sigma_X = 0{,}11$,

$\sigma_Y^2 = 0{,}398 - (0{,}622)^2 = 0{,}398 - 0{,}387 = 0{,}011$; $\sigma_Y = 0{,}105$,

$C_{xy} = 0{,}427 - 0{,}703 \cdot 0{,}622 = 0{,}427 - 0{,}437 = -0{,}01.$

Korrelýasiýa koeffisiýentini tapalyň

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_Y} = -\frac{0{,}01}{0{,}11 \cdot 0{,}105} = -0{,}867.$$

$|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1}$ köpeltmek hasylyny hasaplalyň

$|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1}$=0,867· $\sqrt{78}$=0,867·8,84=7,663.

Görşümiz ýaly, *X* we *Y* ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk ýeterlik ähtimallykly. Onda çyzykly regressiýanyň deňlemeleri şeýle tapylar

$$\overline{y}(x) - \overline{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \quad \text{ýa – da}$$

$$\bar{y}(x) = -0{,}622 = -0{,}867 \cdot \frac{0{,}105}{0{,}11} \cdot (x - 0{,}703),$$

$$\bar{y}(x) = -0{,}828x + 1{,}204$$

$$\overline{x}(y) - \overline{x} = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}) \quad \text{ýa – da}$$

$$\bar{x}(y) = -0{,}703 = -0{,}867 \cdot \frac{0{,}11}{0{,}105} \cdot (y - 0{,}622),$$

$$\bar{x}(y) = -0{,}908y + 1{,}26$$

2. Gönükmeler we meseleler

2.1. Gapda 1-den 4-e çenli momerlenen dört sany şar bar. Bu gapdan iki şary çykardylar. X tötän ululygy – çykarylan şarlaryň nomerleriniň jemi. X tötän ululygynyň paýlanyş hataryny gurmaly.

Çözülişi. X tötän ululygy {1,2,3,4} nomerler köplüginden şeýle bahalary alyp biler:

$x_1=1+2=3$; $x_2=1+3=4$; $x_3=1+4=5$; $x_4=2+3=5$; $x_5=2+4=6$; $x_6=3+4=7$.

Bu bahalaryň ýüze çykmagynyň şol bir $p=1/6$ ähtimallykly mümkinçilikleri bardyr. Onda x_3 we x_4 deň bahalary bir gezek görkezip, degişli ähtimallyklaryny goşup, şeýle paýlanyş hataryny alarys

X	3	4	5	6	7
P	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

2.2. Atyjy nyşana 3 ok atýar. Atyşlaryň her birinde okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0.3 deň. X-nyşana degen oklaryň sany. Onuň paýlanyş hataryny ýazmaly.

Jogaby:

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

2.3. Eger her gezek ok atylanda okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy $0,2$ bolsa, bagly däl üç synagda nyşana degen oklaryň sanynyň paýlanyş hataryny düzmeli.

Çözülişi. X tötän ululyk nyşana degmegiň sany, ok atylýar, diýmek, $\bar{X}$ tötän ululyk aşakdaky bahalary kabul edip biler: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Synaglar bagly däl, her synagda wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy $0,2$. Diýmek,

$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ $(m=0, 1, 2, 3)$, $P(X_1=0)=0,512$, $P(X_2=1)=0,384$, $P(X_3=2)=0,096$, $P(X_4=3)=0,008$.

Şeýlelik bilen biz X tötän ululygyň paýlanyşynyň aşakdaky hataryny alarys

X	0	1	2	3
P	0,512	0,384	0,096	0,008

Barlagy: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}96 + 0{,}008 = 1.$

2.4. Käbir ýerde mart aýynyň 30%-i ýagyşly günler bolýar. Mart aýynyň bir hepdesiniň ýagynly günleri gabat gelýän X tötän ululygyň paýlanyşynyň hataryny düzmeli. ***Jogaby:***

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
P	*0,082*	*0,243*	*0,313*	*0,226*	*0,098*	*0,025*	*0,009*	*0,0002*

2.5. Teňňe *5* gezek oklanýar. *X* tötän ululyk şekiliň düşmeginiň sany bolsa, onuň paýlanyş kanunyny tapmaly.

Jogaby:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

2.6. Desganyň 1000 elementi bolup, olar biri-birlerine bagly dällikde işleýär. *T* wagtyň dowamynda islendik elementiň bozulmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. *T* döwürde üç elementiň bozulmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. **Jogaby:** 0,18.

2.7. *X* we *Y* diskret tötän ululyklary öz paýlanyş hatarlary bilen berlen.

X	3	5	6	9
$\boldsymbol{P_x}$	0,2	0,3	0,4	0,1

Y	2	4	7
$\boldsymbol{P_y}$	0,3	0,5	0,2

$Z_1=X+Y$ we $Z_2=X\cdot Y$ tötän ululyklarynyň paýlanyş hatarlaryny ýazmaly.

Jogaby:

$\boldsymbol{Z_1=X+Y}$	5	7	8	9	10	11	12	13	16
$\boldsymbol{P_{Z_1}}$	0,06	0,19	0,12	0,15	0,24	0,03	0,06	0,13	0,02

$Z_2=X\cdot Y$	6	10	12	18	20	21	24	35	36	42	63
P_{Z_2}	0,06	0,09	0,22	0,03	0,15	0,04	0,2	0,06	0,05	0,08	0,02

2.8. X DTU paýlanyş hatary bilen berlen

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Onuň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny kesgitlemeli.

Jogaby: $M(X)=1.32;\ D(X)=0.95;\ \delta(X)=\sqrt{D(X)}=0.975.$

2.9. X DTU aşakdaky paýlanyş hatary bilen berlen

X	*2*	*5*	*8*	*9*
P	*0,1*	*0,4*	*0,3*	*0,2*

M(X), $D(X)$, $\sigma(X)$ tapmaly.

Jogaby: M(X)=6,4, D(X)=4,84, σ (X)=2,2

2.10. X DTU paýlanyş hatary bilen berlen

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Onuň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly. **Jogaby:** $M(X)=-0,3;\ D(X)=15,21;\ \delta(X)=3,9.$

2.11. X DTU paýlanyş hatary bilen berlen

X	10	20	30	40	50
P	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Onuň paýlanyş funksiýasyny tapmaly we grafigini gurmaly.

Jogaby: $$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le 10\ bolsa\ , \\ 0{,}2\ , & 10<x\le 20\ bolsa\ , \\ 0{,}5\ , & 20<x\le 30\ bolsa\ , \\ 0{,}85\ , & 30<x\le 40\ bolsa\ , \\ 0{,}95\ , & 40<x\le 50\ bolsa\ , \\ 1\ , & x>50\ bolsa. \end{cases}$$

2.12. *X* ÜTU paýlanyş funksiýasy(integral funksiýasy) arkaly berlen.

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<1\ bolsa, \\ (x-1)/2, & 1\le x\le 3\ bolsa, \\ 1\ , & x>3\ bolsa. \end{cases}$$

X-tötän ululygynyň bahalarynyň (1,5; 2,5) we (2,5; 3,5) interwallaryna düşmeginiň ähtimallyklaryny hasaplamaly.

Çözülişi. $P_1= F(2.5)-F(1.5)= (2{,}5-1)/2- (1{,}5-1)/2= 0{,}75-0{,}25=0{,}5.$

$$P_2=F(3{,}5)- F(2{,}5)=1-(2{,}5-1)/2=1-0{,}75=0{,}25.$$

2.13. *X* ÜTU aşakdaky paýlanyş (integral funksiýasy) arkaly berlen

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<2\ bolsa, \\ (x-2)^2\ , & 2\le x\le 3\ bolsa, \\ 1\ , & x>3\ bolsa. \end{cases}$$

X tötän ululygynyň bahalarynyň (1; 2,5) we (2,5; 3,5) interwallaryna düşmeginiň ähtimallyklaryny tapmaly.

Jogaby: $P_1=0{,}25;\ \ P_2= 0{,}75.$

2.14. 2.12-nji gönükmäniň şerti boýunça X ÜTU-nyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasyny tapmaly.
Çözülişi. Dykyzlyk funksiýasy paýlanyş funksiýasynyň önümine deňdir, yagny,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0\ , \quad x < 1\ bolsa, \\ 1/2,\ 1 \le x \le 3\ bolsa, \\ 0\ , \quad x > 3\ bolsa. \end{cases}$$

2.15. 2.13-nji meseläniň şerti boýunça X ÜTU-nyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasyny kesgitlemeli.
Jogaby:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0\ , \quad x < 2\ bolsa, \\ 2(x-2),\ 2 \le x \le 3\ bolsa, \\ 0\ , \quad x > 3\ bolsa. \end{cases}$$

2.16. X ÜTU şeýle dykyzlyk bilen paýlanan

$$f(x) = \begin{cases} a/\sqrt{a^2 - x^2}\ , \ |x| < a\ bolsa, \\ 0 \qquad\quad , \ |x| \ge a\ bolsa. \end{cases}$$

1) a koeffisiýenti tapmaly; 2) X tötän ululygynyň bahalarynyň (*a/2; a*) interwala düşmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly; 3) Dykyzlyk funksiýasynyň grafigini gurmaly.

Jogaby: *1)* $a=1/\pi$ *; 2)* $P(a/2<X<a) =1/3$.

2.17. $f(x)=1/(x^2+ \pi^2)$ funksiýanyň käbir X tötän ululygynyň ähtimallyklarynyň dykyzlygydygyny görkezmeli we bu tötän ululygynyň bahalarynyň $(\pi,\ \infty)$ interwalyna düşmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly. **Jogaby.** $P(\pi<x<\infty)= 1/4$.

2.18. Funksiýa berlen

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0\ bolsa, \\ 0.5\cdot\sin x, & 0\le x\le\pi\ bolsa, \\ 0\ , & x>\pi\ bolsa. \end{cases}$$

Bu funksiýanyň käbir X tötän ululygynyň ähtimallyklarynyň dykyzlydygyny görkezmeli, $M(X)$, $D(X)$, $\delta(X)$ san häsiýetlen-dirijilerini tapmaly.
Jogaby. $M(X)=\pi/2$; $D(X)=0,69$; $\delta(X)=0,81$.

2.19. Funksiýa berlen

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0\ bolsa, \\ \lambda(4x-x^2), & 0\le x\le 2\ bolsa, \\ 0\ , & x>2\ bolsa. \end{cases}$$

λ-nyň haýsy bahasynda $f(x)$ funksiýasy käbir X ÜTU-nyň dykyzlyk funksiýasy bolar? λ-nyň tapylan bahasynda, $M(X)$, $D(X)$, $\delta(X)$ san häsiýetlendirijilerini tapmaly.
Jogaby. $\lambda=1/4$; $M(X)=16/15$; $D(X)=44/225$; $\delta(X)=0.44$

2.20. X DTU –nyň paýlanyş hatary bilen berlen

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Bu tötän ululygynyň modasyny, ilkinji dört tertipli başlangyç we merkezi momentlerini, asimmetriýasyny we ekssesini tapmaly.
Jogaby. $M_0=3$ $\alpha_1=4,6$; $\alpha_2=4,6$; $\alpha_3=177,4$; $\alpha_4=1293,8$; $\mu_1=0$; $\mu_2=5,44$; $\mu_3=4,992$; $\mu_4=64,55$; $A_x=\mu_3/\sigma^3=0,394$; $E_x=\mu_4/\sigma^4-3=-0,82$.

2.21. Funksiýa berlen

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad , \quad x<0 \ we \ x>2 \ bolsa, \\ \quad ax^2 \ , \ 0\le x\le 1 \ bolsa\,, \\ a(2-x)^2 \quad , \quad 1<x\le 2 \ bolsa.\end{cases}$$

a-nyň haýsy bahasynda *f(x)* funksiýa käbir *X* ÜTU-nyň paýlanyş dykyzlygy bolar? *a*-nyň tapylan bahasynda tötän ululygyň ilkinji dört tertipli başlangyç, merkezi momentlerini, asimmetriýasyny we ekssesini tapmaly.

Jogaby. $a=3/2.$ $\alpha_1=1;$ $\alpha_2=1{,}1;$ $\alpha_3=1{,}3;$ $\alpha_4=1\frac{22}{35}$

$\mu_1=0;$ $\mu_2=0{,}1;$ $\mu_3=0;$ $\mu_4=1/35.$

$D(X)=\mu_2=0{,}1;$ $\delta_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}1}=0{,}316;$ $A_x=0$ $E_x=-1/7$

2.22. Desga özara bagly däl işleýän üç elementden ybarat. Elementleriň her biriniň bozuk bolmagynyň ähtimallygy 0.1 deň. Desganyň bozuk elementleriniň sanynyň paýlanyşynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly, matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi. *X* ÜTU şeýle bahalary alyp biler:

$x_0=0,$ $x_1=1,$ $x_2=2,$ $x_3=3.$ (hemme elementler saz, biri bozuk, ikisi bozuk, üçüsi hem bozuk). Bu ýerde: $n=3,$ $p=0.1,$ $q=0.9$ bolany üçin Bernulliniň

$p_m=P_n(m)=C_n^m\, p^m q^{n-m}$, $m=0,1,2,...,n$

formulasyny ulanyp taparys:

$p_0=P_3=(0)=q^3=0{,}729;$ $p_1=P_3(1)=C_3^1\, p\cdot q^2=0{,}343;$

$p_2=P_3(2)=C_3^2\, p^2q=0{,}027;$ $p_3=P_3(3)=p^3=0{,}001.$

Onda *X* DTU-nyň binomial paýlanyş kanuny

X	0	1	2	3
P	0,729	0,343	0,027	0,001

görnüşinde bolar. Matematiki garaşma we dispersiýa:

$M(X)=m_x=np=3\cdot 0{,}1=0{,}3;$ $D(X)=npq=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}27$ bahalary alar.

2.23. Dört bagly däl tejribeler geçirilip, olaryň her birinde A waka $p=0.4$ ähtimallykly ýüze çykýar. X DTU dört tejribelerde A wakanyň ýüze çykmalarynyň sany. X DTU-nyň paýlanyş hataryny, paýlanyş funksiýasyny tapmaly, matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny hasaplamaly.
Jogaby. $M(X)=1,6;\ D(X)=0,96.$

2.24. Desga bagly däl işleýän 1000 elementden ybarat bolup, T döwürde elementleriň her biriniň bozulmagynyň ähtimallygy $p=0,002$ deň. T döwürde üç elementiň bozulmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.
Jogaby. Puassonyň kanuny boyunça $P_3(T)=0,18.$

2.25. Zawod ammara 500 sany önüm iberdi. Önümleriň her birine ýolda zeper ýetmeginiň ähtimallygy $p=0,002$ deň. Ýolda: a)üç önüme, b) üçden az önüme, ç) üçden köp önüme, d) iň bolmanda bir önüme zeper ýetmeginiň ähtimallygyny tapmaly.
Jogaby. a)0,0613; b)0,9187; ç)0,019; d) 0,632.

2.26. X tötän ululygy (2; 8) kesimde hemişelik dykyzlykly paýlanan. $M(X)$, $D(X)$ ululyklary hem-de $P(3\leq X\leq 5)$ ähtimallygy hasaplamaly.
Jogaby. $M(X)=5;\ D(X)=3;\ P(3\leq X\leq 5)=0,333.$

2.27. Eger awtobus hereketiniň grafigi berjaý edilse, onda ýolagçynyň awtobusa garaşmasynyň ortaça wagty 3,5 min deň. Garaşma wagtynyň deňölçegli paýlanyş kanunyna eýedigi belli. Minimal garaşma wagty 0 min hasap edilýär. Ýolagçynyň awtobusa 2 min-dan 5 min-a çenli garaşmaly boljakdygynyň ähtimallygyny kesgitlemeli. **Jogaby.** $P(2\leq x\leq 5)=3/7.$

2.28. Sapardan soň awtomobili abatlamak we hyzmat etmek işleriniň dowamlylygy matematiki garaşmasy 5 min bolan görkezijili kanuna tabyndyr. Nobatdaky sapardan soň bu wagtyň 10 min-dan geçmejekdigini ähtimallygyny tapmaly.
Jogaby. 0,8647

2.29. Awtomat şarjagazlary taýynlaýar. Eger şarjagazyň diametriniň nominaldan (bolmalysyndan) *X* gyşarmasy absolýut ululygy boýunça 0,7 mm-den geçmeýän bolsa, onda ol talaba laýyk hasap edilýär. Tötän yalňyşlygy orta kwadratik gyşarmasy δ=0,4 mm bolan normal paýlanan hasap etmek bilen, 100 sany taýyn edilen şarjagazlardan talaba laýyklarynyň ortaça sanyny kesgitlemeli.
Jogaby. 92

2.30. *X* tötän ululygy $m_x = 25$ matematiki garaşmaly normal paýlanan. Tötän ululygyň (10; 15) kesime düşmeginiň ähtimallygy 0,2-ä deň. *X* tötän ululygynyň bahalarynyň (35; 40) kesimine düşmeginiň ähtimallygy nämä deň? **Jogaby.** 0,2.

2.31. *X* normal tötän ululygy. Onuň bahalarynyň m_x matematiki garaşmasyndan $3\sigma_X$ ululyga gyşarmasynyň ähtimallygyny tapmaly.
Jogaby. 0,9973.

2.32. Gapda 1000 ak we 2000 gara şarlar bar. Her gezek yzyna gaýtaryp, 300 sany şarlary çykardylar. Çykarylan ak şarlaryň *m* sanynyň $80<m<120$ goşa deňsizligi kanagatlandyrýandygynyň ähtimallygyny aşakdan bahalandyrmaly.
Çözülişi. Goşa deňsizligi şeýle ýazalyň

$$-20<m-100<20 \text{ ýa-da } -\frac{1}{15} < \frac{m}{300}-\frac{1}{3} < \frac{1}{15}$$

Bu ýerde: $p=\frac{1}{3};\ q=\frac{2}{3};\ n=300;\ \varepsilon=\frac{1}{15}$. Onda Bernulliniň uly sanlar teoremasy-kanuny esasynda alarys.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad \text{ýa-da}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{15}\right)>1-\frac{(1/3)(2/3)}{300*1/225}=\frac{5}{6}.$$

2.33. Gapda 100 ak we 100 gara şarlar bar. Yzyna gaýtarmasy bilen 50 şary çykardylar. Çykarylan ak şarlaryň *m* sanynyň *15<m<35* goşa deňsizligi kanagatlandyrýandygynyň ähtimallygyny aşakdan bahalandyrmaly.

$$\textbf{Jogaby. } P\left(\left|\frac{m}{50}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{5}\right)\geq 7/8.$$

2.34. Gapda 80 ak we 20 gara şarlar bar Ak şaryň ýüze çykmagynyň ýygylygynyň ähtimallykdan gyşarmasynyň 0.1-den kiçi bolmagyna 0.95 ähtimallykda garaşyp bolar ýaly, gapdan (her gezekde yzyna gaýtaryp, garyşdyryp) näçe şary çykarmak gerek? **Jogaby.** 61

2.35. *X* we *Y* ululyklaryň berlen bahalary üçin korrelýasiýanyň koeffisiýentini hasaplamaly. Regressiýanyň göni çyzygynyň deňlemelerini ýazmaly.

a)

x_i	4	6	8	10	12
p_i	5	8	7	9	14

Jogaby: $\overline{y}_x=0{,}95x+1;\ r_s=0{,}895;$

b)

x_i	3	5	7	9	10	12
p_i	14	10	9	9	6	5

Jogaby: $\overline{y}_x=-0{,}99y+16{,}4;\ r_s=-0{,}93;$

ç)

x_i	10	20	25	28	30
p_i	5	8	7	12	14

Jogaby: $\overline{y}_x=0{,}45y-1{,}1;\ r_s=0{,}89.$

2.36. *(X,Y)* iki ululyklaryň sistemasynyň paýlanyş kanunyny kesgitleyän tablisa berlen

Y / *X*	20	40	60
10	3 λ	λ	0
20	2 λ	4 λ	2 λ
30	λ	2 λ	5 λ

1) λ – koeffisiýenti; 2) m_x, m_y – matematiki garaşmalary;

2) σ_X^2 , σ_Y^2 -dispersiýalary; 4)r_{xy}-korrelýasiýa koeffisiýentini tapmaly.

Jogaby. 1) *λ=1/20; 2) m_x=22, m_y=41; 3) σ_X^2 =56 ;*

4) σ_Y^2 =259; 5) r_{xy} = 0,56.

2.37. Tötän ululyklaryň *(X,Y)* sistemasy

$$f(x,y)=\begin{cases} a^2-x^2-y^2 \ , \ \ x^2+y^2\le a^2 \ \ (a>0) \ bolsa, \\ \qquad\qquad 0 \ , \ \ x^2+y^2>a^2 \ \ bolsa. \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýaly paýlanyş kanunyna tabyn.

1) *a* koeffisiýenti;

2) m_x, m_y-matematiki garaşmalary;

3) σ_X^2 , σ_Y^2 – dispersiýalary;

4) r_{xy} – korrelýasiýa koeffisiýentini tapmaly.

Jogaby. *1) a=$\sqrt[4]{2/\pi}$; 2) m_x= m_y=0;*

3) σ_X^2 = σ_Y^2=1/(3√2π); 4) r_{xy}=0.

2.38. Tötän ululyklaryň (X, Y) sistemasynyň paýlanyşy tablisa görnüşinde berlen

X* \ *Y	0,02	0,04	0,06	0,08
0,01	0,01	0,03	0,04	0,02
0,02	0,02	0,24	0,10	0,04
0,03	0,04	0,15	0,08	0,03
0,04	0,04	0,06	0,08	0,02

1) Sistemanyň tötän ululyklarynyň her biriniň paýlanyş kanunlaryny;

2)*Y=0,06* bolanda *X* tötän ulylygynyň şertli paýlanyş kanunyny;

3) m_x, m_y, σ_X^2 , σ_Y^2 – ululyklary ;

4) sistemanyň korrelýasiýa koeffisiýentini;

5) *M(X/Y=0.04)*-şertli matematiki garaşmany kesgitlemeli.

Jogaby. *m_x=0,026; m_y=0,0482; σ_X^2 =0,0092;*

σ_Y^2 =0/0165; r_{xy}=-0,072; M(X/Y=0,04)=0,012.

2.39. Berlen korrelýasion tablisa boýunça regressiýanyň gönüleriniň saýlama deňlemelerini tapmaly.

a)

x_i / y_i	10	15	20	25	30	35
15	6	4	-	-	-	-
25	-	6	8	-	-	-
35	-	-	-	21	2	5
45	-	-	-	4	12	6
55	-	-	-	-	1	5

Jogaby: $\bar{y}_x=0{,}589y+4{,}44.$

b)

x_i / y_i	5	10	15	20	25	30
14	4	6	-	8	-	4
24	-	8	10	-	6	-
34	-	-	32	-	-	-
44	-	-	4	12	6	-

Jogaby: $\bar{y}_x=0{,}39x+22{,}9.$

ç)

x_i / y_i	10	15	20	25	30	35	40
100	2	4	-	8	4	-	10
110	3	-	5	-	2	10	-
120	-	3	-	4	5	6	-
130	2	-	4	6	-	-	5
140	-	4	7	-	-	1	5

Jogaby: $\bar{y}_x=0{,}0655y+35.$

3. Matematiki statistikanyň elementleri

3.1. Matematiki statistikanyň meseleleri

Matematiki statistika (MS) – tejribeleriň ýa-da eksperimentleriň netijesinde alnan maglumatlary tertipleşdirýän, toparlaýan, öwrenýän hem-de şolar esasynda ylmy taýdan esaslandyrylan usullary işläp-düzýän we netijeleri çykarýan ylymdyr.

Durmuşyň we tebigatyň adamlaryň öňünde goýýan köp meselelerini uly takyklykda çözmek klassyk usullarda başartmaýan halatlarynda MS-iň usullaryna ýüzlenýärler, sebäbi:

1) öwrenilýän sistema täsir edýän wakalar örän köp bolup, olaryň hemmesini göz öňünde tutup bolmaýar;

2) öwrenilýän sistema täsir edýän wakalar totän bolsalar, olary göz öňünde tutmak mümkin hem däldir.

MS bolsa öz çykarýan netijelerinde tejribelerde ýüze çykýan maglumatlara daýanýar. Maglumatlar bolsa sistema täsir edýän totän we totän däl wakalaryň hemmesini göz öňünde tutýar.

MS-iň usullary ähtimallyklar teoriýasynyň totän wakalarynyň hem-de totän ululyklarynyň öwrenilmeginden gelip çykan esasy teoretiki kanunlara esaslanýar. Şol sebäpli, MS-de çykarylýan netijeler çürt-kesik, ol ýa-da beýleki görnüşdäki jogap bolman, belli bir ygtybarlylykda beýan edilýär. Çözgüdi kabul ediji fiziki ýa-da ýuridiki tarap bolsa şol ygtybarlylyga esaslanyp, belli bir karara gelýär.

Mysal üçin, goý, birnäçe kärhananyň öndürýän şol bir enjamlaryny örän köp mukdarda almak gerek bolsun. Kärhanalara baglylykda, enjamlaryň otnositel bozuklygynyň sany dürli bolup, bu işde uly ýitgä sezewar bolunmagy mümkin.

Näsaz enjamlaryň sany tötän ululykdyr. Eger bu ululygyň paýlanyş hatary ýa-da matematiki garaşmasy ýa-da dispersiýasy belli bolsa, onda käbir karara gelse bolar. Bu häsiýetlendirijileri ýakynlaşan tapyp hem çözgüdi kabul etmek bolar. Bu bolsa MS-iň meselesidir.

MS-iň esasy wezipeleriniň biri-de öwrenilýän ululygyň tejribe geçirmek bilen alnan bahalarynyň esasynda tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dagynyklygyny we paýlanyş kanunyny takmyn hasaplamak we alnan takmyn ululyklaryň ygtybarlylygyny kesgitlemekdir. Şeýle meselelere seretmekde zerur bolan düşünjeleri girizeliň.

Öwrenilýän X tötän ululygynyň (birjynsly obýektleriň) tejribeler esasynda alnan bahalarynyň $x_1, x_2,...,x_N$ toplumyna ***baş toplum*** diýilýär. N uly san bolanda baş toplumdan, tötän usullarda, kiçiräk toplumy saýlap alýarlar we oňa ***saýlama toplum*** diýip at berýärler. Baş ýa-da saýlama toplumyň elementleriniň sanyna ***toplumyň göwrümi*** diýilýär. Eger alnan toplum baş toplumyň mukdar gatnaşyklaryny ýeterlik oňat häsiýetlendirýän bolsa, onda oňa ***reprezentatiw*** (***wekilçilikli***) diýilýär.

3.2. Saýlama ýygylyk we otnositel ýygylyk

Goý, n göwrümli saýlama toplum berlen bolsun. Saýlamanyň netijelerini tablisada ýerleşdireliň (3.1-nji tablisa).

3.1-nji tablisa

$\boldsymbol{i}$	1	2	3	...	n
$\boldsymbol{\xi_i}$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_n

Bu ýerde $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ ululyklar X tötän ululygyň degişlilikde $1, 2, 3, ... , n$-nji synaglardaky alan bahalarydyr. X tötän ululygyň getirilen bahalarynyň içinde birmeňzeşleriniň hem bolmagy mümkin. Birmeňzeş bahalary birleşdirip şeýle tablisany alarys (3.2-nji tablisa).

3.2-nji tablisa

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	x_3	...	x_l
$\boldsymbol{n_i}$	n_1	n_2	n_3	...	n_l

Bu ýerde n_i $(i=1, 2,...,l)$ san x_i bahanyň ýüze çykmalarynyň sanydyr. $n_1,n_2,...,n_l$ sanlara, başgaça X tötän ululygyň $x_1, x_2, ..., x_l$ bahalarynyň

ýygylyklary diýilýär. Şeýlelikde, $n_1+n_2+...+n_l=n$, ýagny tötän ululygyň hemme bahalarynyň ýygylyklarynyň jemi saýlamanyň n göwrümine deňdir.

Eger $x_1, x_2,...,x_l$ bahalar artýan tertipde ýerleşdirilen bolsalar, onda 3.2-nji tablisa (bahalaryň ýygylyklarynyň paýlanyşyna) ***wariasion hatar*** ýa-da ***ýygylygyň saýlama paýlanyşy*** diýilýär.

$\omega_i = n_i/n$, $i=1, 2, ... ,l$ ululyga x_i bahanyň ***otnositel ýygylygy*** diýilýär. Şeýlelikde,

$$\sum_{i=1}^{l} w_i = \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i = \frac{1}{n}\cdot n = 1 .$$

X diskret tötän ululygyň ***otnositel ýygylygynyň saýlama paýlanyşy*** diýip şeýle tablisa aýdylýar (3.3-nji tablisa).

3.3-nji tablisa

$\mathbf{x_i}$	x_1	x_2	x_3	...	x_l
ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	...	ω_l

Aýdyňlyk üçin, diskret tötän ululygynyň saýlama paýlanyşyny ***paýlanyşyň poligony*** arkaly görkezýärler. Onuň üçin (x_1, ω_1), (x_2, ω_2),..., (x_l, ω_l) yzygider nokatlary $xO\omega$ koordinata tekizliginde gurup, olary göni çyzygyň kesimleri arkaly birleşdirýärler. Alnan döwük çyzyk paýlanyşyň poligonydyr. Şeýlelikde, poligonyň (döwük çyzygyň) depesi däl nokatlar MS üçin ähmiýetli däldir.

Mysal. Synagyň netijesinde X DTU şeýle bahalary kabul edýär:

$\xi_1=2$	$\xi_2=5$	$\xi_3=7$	$\xi_4=1$	$\xi_5=10$
$\xi_6=5$	$\xi_7=9$	$\xi_8=6$	$\xi_9=8$	$\xi_{10}=6$
$\xi_{11}=2$	$\xi_{12}=3$	$\xi_{13}=7$	$\xi_{14}=6$	$\xi_{15}=8$
$\xi_{16}=3$	$\xi_{17}=8$	$\xi_{18}=10$	$\xi_{19}=6$	$\xi_{20}=7$
$\xi_{21}=3$	$\xi_{22}=9$	$\xi_{23}=4$	$\xi_{24}=5$	$\xi_{25}=6$

Bu maglumatlar boýunça:

1) Tötän ululygyň bahasynyň we onuň ýygylygynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýan tablisasyny düzmeli;

2) Saýlama paýlanyş tablisany gurmaly;

3) Paýlanyşyň poligonyny şekillendirmeli.

Çözülişi.

1) Saýlamanyň göwrümi $n=25$. Onda bahalar boýunça şeýle baglanyşyk tablisasy alnar (3.4-nji tablisa).

3.4-nji tablisa

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

Görşümiz ýaly: $l=10$, $n = \sum_{i=1}^{l} n_i = 25$.

2) Ýygylyklar boýunça $\omega_j=n_j/n$, $(j=1, 2, ...l)$ düzgünde otnositel ýygylyklary tapyp, saýlama paýlanyşy alarys (3.5-nji tablisa).

3.5-nji tablisa

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1/25	2/25	3/25	1/25	3/25	5/25	3/25	3/25	2/25	2/25

Bu ýerde

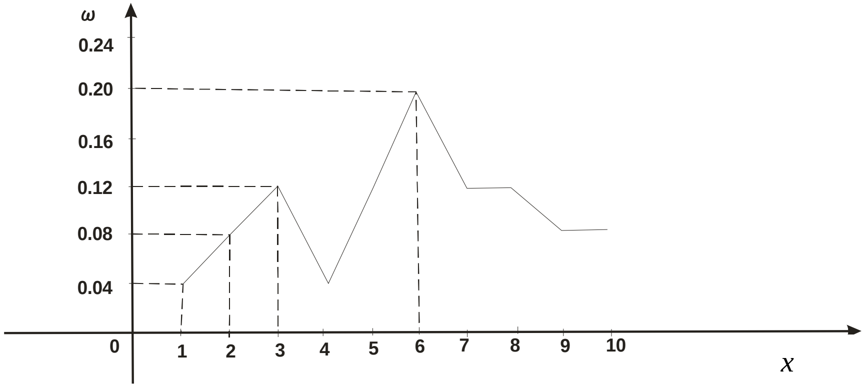
$$\sum_{j=1}^{l} \omega_j = \frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \frac{3}{25} + \frac{1}{25} + \frac{3}{25} + \frac{5}{25} + \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{2}{25} + \frac{2}{25} = 1.$$

Soňky tablisany şeýle görnüşde hem ýazmak bolar (3.5^1-nji tablisa).

3.5^1-nji tablisa

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_i	0.04	0.08	0.12	0.04	0.12	0.2	0.12	0.12	0.08	0.08

3) $xO\omega$ koordinatalar tekizliginde *(1;0,04), (2;0,08), (3;0,12)* we ş.m. nokatlary belgiläp, olary göni çyzygyň kesimleri arkaly yzygider birleşdireliň. Alnan döwük çyzyk X tötän ululygynyň paýlanyş poligonydyr (3.1-nji surat)



3.1-nji surat

Suratdan görşümiz ýaly, (2;0.08) hem-de (5;0.12) nokatlar poligonyň depeleri däldirler. Şol sebäpli, bu nokatlaryň MS üçin ähmiýeti ýokdur.

Eger X – üznüksiz tötän ululyk bolsa, onda onuň alýan iň kiçi we iň uly bahalaryny degişlilikde a we b bilen belgiläp, $[a,b]$ kesimi l böleklere $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_l = b$ görnüşde bölüp, onuň saýlama paýlanyşyny şeýle görnüşde aňlatmak amatlydyr (3.6-njy tablisa).

3.6-njy tablisa

I_i	$I_1=[x_0,x_1)$	$I_2=[x_1,x_2)$	$I_3=[x_2,x_3)$	...	$I_l=[x_{l-1},x_l]$
ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	...	ω_l

Bu ýerde ω_j san X ÜTU-nyň bahasynyň (x_{j-1}, x_j), $j=1,2,.., l$ interwala düşmeginiň otnositel ýygylygydyr.

Eger X ÜTU şol bir x_i sana deň bolan k sany bahany kabul edýän bolsa, onda k jübüt bolanda, bu bahalaryň ýarysyny $[x_{i-1}, x_i]$

interwala, galan ýarysyny $[x_i, x_{i+1}), 1 \leq i \leq l-1$ interwala degişli etmek bolar. k täk bolanda, bu interwallaryň birine $(k+1)/2$ sany bahalary beýlekisine $(k-1)/2$ sany bahalary degişli etdirmek bolar. Saýlamanyň n göwrümi uly san bolanda köp sanly bahalaryň haýsy interwala degişli edilýändiginiň parhy ýokdur.

Üznüksiz tötän ululygyň paýlanyşyny şekillendirmek üçin ***gistogrammalar*** diýlip atlandyrylýan diagrammalardan peýdalanýarlar. Gistogrammalaryň iki görnüşi bardyr. Gistogrammalaryň birinji görnüşi bölek interwallary tötän ululygyň bahalarynyň bu interwallara düşmeginiň ýygylygy bilen baglanyşdyrýar.

Goý, X ÜTU şeýle tablisada kesgitlenen bolsun (3.7-nji tablisa):

3.7-nji tablisa

I_i	$I_1=[x_0, x_1)$	$I_2=[x_1, x_2)$	$I_3=[x_2, x_3)$	...	$I_l=[x_{l-1}, x_l]$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_l

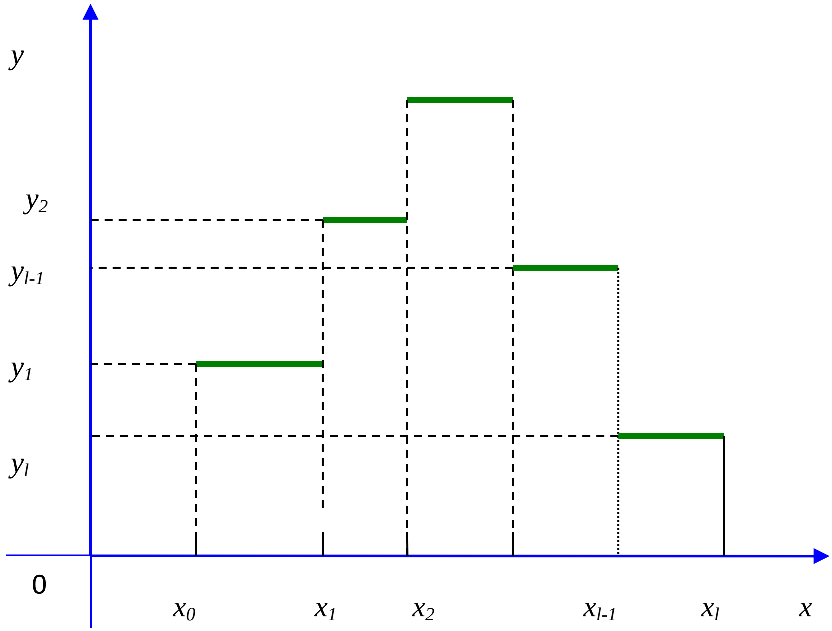
x_i-x_{i-1}, $i=1,2,...,l$ tapawutlar ((x_{i-1}, x_i) – interwallar) dürli uzynlykda ýa-da $h=x_i-x_{i-1}$ hemişelik sana deň bolup bilerler. Soňky ýagdaýda $h=(x_l-x_0)/l$ sana ***tablisanyň ädimi*** diýilýär. ÜTU-lar üçin, köplenç, soňky ýagdaýy ulanýarlar.

Ýygylyk bilen baglanyşykly gistogrammany gurmak üçin ordinata boýunça funksiýanyň çenden uly bahalary bolmaz ýaly, eger $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1,2,...,l$ bolsa, onda $y=n_i/h$ funksiýany girizýärler; xOy koordinatalar tekizliginde Ox oky boýunça $x_0, x_1,..., x_l$ nokatlary belgiläp, ini $h=x_i-x_{i-1}$, beýikligi $y_i=n_i/h$, $i=1,1,...,l$ bolan gönüburçluklary gurýarlar (3.2-nji surat). Gönüburçluklaryň her biriniň meýdany 3.7-nji tablisada getirilen degişli ýygylyklary aňladar

$$S_i=(n_i/h)h=n_i, \ i=1,2,...,l.$$

X ÜTU-nyň saýlama paýlanyşyny häsiýetlendirýän (otnositel ýygylyk bilen baglanyşykly) gistogrammany gurmak üçin, eger

$\xi\epsilon(x_{i-1}, x_i)$, $i=1,2,...,l$ bolsa onda $y=\omega_i/h$ funksiýany girizýärler; xOy koordinatalar tekizliginde Ox oky boýunça $x_0, x_1, ..., x_l$ nokatlary belgiläp, ini $h=x_i-x_{i-1}$, beýikligi $y_i=\omega_i/h$, $i=1,2,...,l$ bolan gönüburçluklary gurýarlar. Gönüburçluklaryň her biriniň meýdany 3.6-njy tablisada getirilen degişli otnositel ýygylyklary aňladar, olaryň meýdanlarynyň jemi bolsa 1-e deňdir. Bu gistogrammanyň şekili 3.2-nji suratdaka meňzeşdir, diňe, ordinata boýunça $y_i=\omega_i/h$ ululyklar kesgitlenýär.



3.2-nji surat

$S_i=(\omega_i/h)\cdot h=\omega_i$, $i=1,2,...,l$. $\quad \sum_{i=1}^{l} S_i = \sum_{i=1}^{l} w_i = 1.$

Mysal. Synagyň netijesinde *X* ÜTU şeýle bahalary kabul edýär.

$\xi_1=16$	$\xi_2=17$	$\xi_3=9$	$\xi_4=13$	$\xi_5=21$
$\xi_6=11$	$\xi_7=7$	$\xi_8=7$	$\xi_9=19$	$\xi_{10}=5$
$\xi_{11}=17$	$\xi_{12}=5$	$\xi_{13}=20$	$\xi_{14}=18$	$\xi_{15}=11$
$\xi_{16}=4$	$\xi_{17}=6$	$\xi_{18}=22$	$\xi_{19}=21$	$\xi_{20}=15$
$\xi_{21}=15$	$\xi_{22}=23$	$\xi_{23}=19$	$\xi_{24}=25$	$\xi_{25}=1$.

Berlen maglumatlara görä [0;25] kesimi $l=5$ böleklere bölüp, otnositel ýygylyklaryň gistogrammasyny gurmaly.

Çözülişi. $h=(\xi_{25}-\xi_0)/l=(25-0)/5=5.$

Ilki bilen ýygylyklaryň paýlanyşyny düzeliň (3.8-nji tablisa).

3.8-nji tablisa

I_i	$I_1=[0;5)$	$I_2=[5;10)$	$I_3=[10;15)$	$I_4=[15;20)$	$I_5=[20;25]$
n_i	3	5	4	8	5

Onda saýlama paýlanyş şeýle görnüşde bolar (3.9-njy tablisa).

3.9-njy tablisa

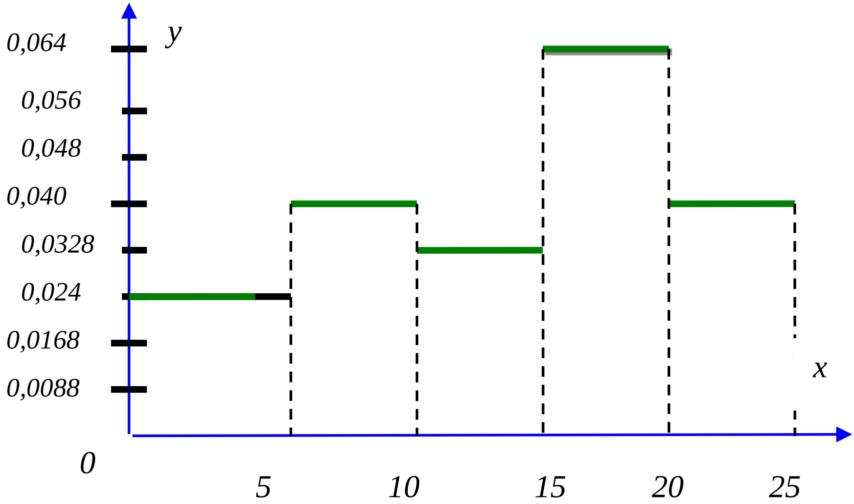
I_i	$I_1=[0;5)$	$I_2=[5;10)$	$I_3=[10;15)$	$I_4=[15;20)$	$I_5=[20;25]$
ω_i	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2

Gistogrammany gurmak üçin şeýle tablisany düzeliň (3.10-njy tablisa).

3.10-njy tablisa

I	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25]
$y=\omega_i/h$	0,024	0,040	0,032	0,064	0,040

Onda otnositel ýygylyklaryň gistogrammasyny şeýle şekillendirmek bolar(3.3-nji surat).



3.3 –nji surat

3.3. Saýlama paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary

Tötän ululugyň paýlanyş funksiýasynyň

$$F(x) = P(X < x)$$

deňlik bilen kesgitlenýändigini öňden bilýäris. Şunlukda, *F(x)* funksiýa ***teoretiki paýlanyş funksiýasy*** diýilýär.

Goý, *X* ÜTU-nyň synag netijesinde alnan *n* göwrümli $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ saýlama toplumy berlen bolsun. Topluma girýän bahalaryň iň kiçisi *a*, iň ulysy *b* diýeliň. $[a, b]$ kesimi $a=x_0, x_1, x_2, ..., x_{l-1}, x_l= b$ görnüşde erkin *l* sany böleklere, ýagny,

$$I_1=[x_0, x_1), I_2=[x_1, x_2), ..., I_{l-1}=[x_{l-2}, x_{l-1}), I_l=[x_{l-1}, x_l]$$

interwallara böleliň.

Goý, $F^*(x)$ funksiýa X ÜTU-nyň $X < x$ deňsizligi kanagatlandyrýan bahalarynyň ýüze çykmasynyň otnositel ýygylygy bolsun. Onda $F^*(x)$ – e ***saýlama paýlanyş funksiýasy*** diýlip, şeýle görnüşde kesgitlenýär

$$F^*(x) = \begin{cases} 0\,, \quad eger \;\; x \le x_0 \;\; bolsa\,, \\ \sum_{i=1}^{k} \omega_i\,, \;\; eger \; x_{k-1} < x \le x_k \; bolsa\,, \\ 1\;, \;\; eger \;\; x > x_l \, bolsa\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Bu ýerde $x_0, x_1, x_2, ...x_l$ nokatlar $F^*(x)$ funksiýanyň birinji kysymly üzülme nokatlarydyr.

Bernulliniň teoremasyna laýyklykda, n sanyň tükeniksiz artmagy bilen otnositel ýygylyklar wakanyň ähtimallygyna ähtimallyk boýunça ymtylýar. Onda saýlamanyň ýeterlik uly göwrüminde $F^*(x)$ funksiýa paýlanyşlaryň teoretiki paýlanyşyna, ýagny $F(x)=P(X< x)$ funksiýasyna golaý bolar.

Mysal. X ÜTU-nyň ýygylygynyň saýlama paýlanyşy berlen (3.11-nji tablisa).

3.11 – nji tablisa

I_i	[5;7)	[7;10)	[10;15)	[15;20]
n_i	2	3	8	7

Saýlama paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

Çözülişi. Ilki bilen X ululygyň otnositel ýygylygynyň saýlama paýlanyşyny tapalyň. (3.12-nji tablisa).

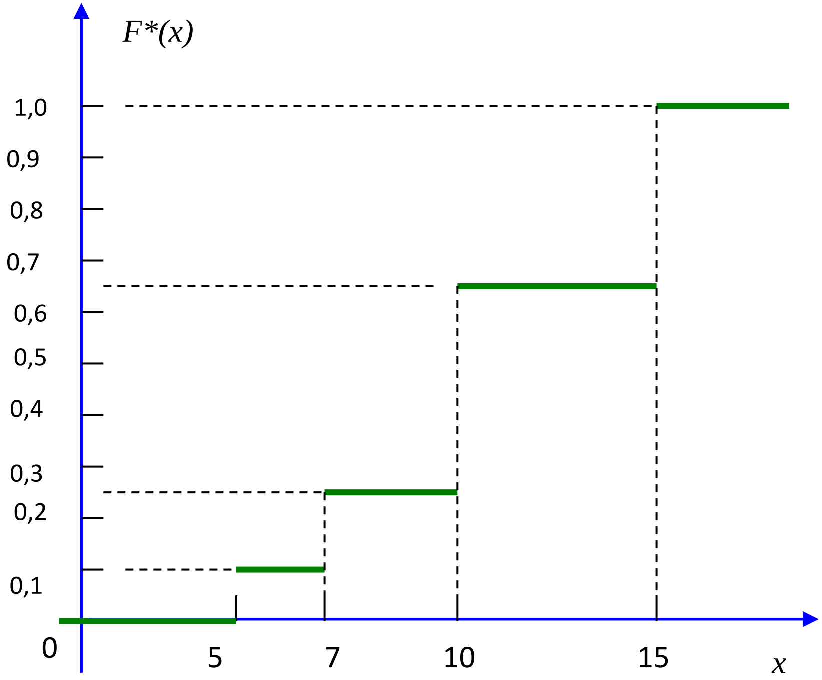
3.12 – nji tablisa

I_i	[5;7)	[7;10)	[10;15)	[15;20]
ω_i	*2/20=0,1*	*3/20=0,15*	*8/20=0,4*	*7/20=0,35*

Onda (3.1) formula laýyklykda alarys

$$F^*(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le 5\ bolsa\ , \\ 0{,}1\ , & 5 < x \le 7\ bolsa\ , \\ 0{,}25, & 7 < x \le 10\ bolsa\ , \\ 0{,}65, & 10 < x \le 15\ bolsa\ , \\ 1{,}0\ , & x > 15\ bolsa. \end{cases}$$

$F^*(x)$-saýlama paýlanyş funksiýasynyň grafigini şeýle görkezmek bolar (3.4-nji surat).



3.4 –nji surat

Saýlama dykyzlyk funksiýasy $f^*(x)$ şeýle kesgitlenýär

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & eger\ x \notin I_j = [a,b]\ bolsa, \\ \omega_j / |I_j|, & eger\ x \in I_j = [a,b]\ bolsa. \end{cases}$$

Bu ýerde $|I_j|$ ululyk I_j interwalyň uzynlygydyr.

$f^*(x)$ funksiýanyň grafigine ***gistogramma*** diýilýär (3.3-nji surata seret).

3.4. Tötän ululygyň orta bahasyny kesgitlemek

Saýlama paýlanyşy bilen berlen X tötän ululygyň $\bar{x}$ orta bahasy şeýle formulalar bilen kesgitlenýär

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_l x_l}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i x_i, \quad (3.2)$$

ýa-da

$$\bar{x} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_l x_l = \sum_{i=1}^{l} \omega_i x_i. \quad (3.3)$$

(3.2) we (3.3) formulalar saýlama toplum üçin ulanylýar. Şuňa meňzeşlikde, baş toplum üçin X tötän ululygyň $\overline{X}$ orta bahasy tapylýar

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\ . \quad (3.4)$$

Bu ýerde N – baş toplumyň göwrümidir. Şunlukda, X tötän ululygyň x_i , $(1 \le i \le N)$ deň bolan bahany almaklygynyň ähtimallygy $p_i = n_i/N$ bolany üçin, (3.4) deňligi şeýle hem ýazmak bolar:

$$\overline{X} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_N p_N = M(X). \quad (3.5)$$

Bernulliniň uly sanlar kanunyna laýyklykda, saýlama toplum üçin hem $\overline{X} \approx M(X)$ ýazyp bileris. Şeýlelikde, mundan beýläk, saýlama toplumyň göwrümi bolan n sany ýeterlik uly hasap etmek bilen, $\overline{X}$ =*M(X)* kabul ederis.

Eger X tötän ululygyň hemme bahalary a hemişelik sana golaý bolsalar, onda $\bar{x}$-iň hasaplanyş formulasyny ýönekeýleşdirmek bolar

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{l} \omega_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{l} \omega_i (x_i - a + a) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \omega_i (x_i - a) + a \sum_{i=1}^{l} \omega_i = \overline{x - a} + a \, ,$$

ýagny,

$$\bar{x} = a + \overline{x - a}, \qquad (3.6)$$

bu ýerde $\overline{x - a}$ ululyk *x-a* tötän ululygynyň orta bahasydyr. Diýmek, ýeterlik uly *n* san üçin şeýle deňlik ýerine ýetýär:

$$M(X)=a+M(X-a) \, . \qquad (3.7)$$

Mysal. *X* tötän ululygyň bahalarynyň ýygylygynyň saýlama paýlanyşy berlen (3.13-nji tablisa).

3.13-nji tablisa

x_i	*13.8*	*13.9*	*14*	*14.1*	*14.2*
n_i	*4*	*3*	*7*	*6*	*5*

Tötän ululygyň orta bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Görşümiz ýaly, saýlama toplumyň göwrümi *n=25* hem-de *X* ululygyň hemme bahalary *a=14-e* ýakyn. Onda, ilki bilen, *X-a=X-14* ululygyň otnositel ýygylygynyň saýlama paýlanyşyny düzeliň (3.14-nji tablisa).

3.14-nji tablisa

x_i-14	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2
ω_i	0.16	0.12	0.28	0.24	0.2

Onda taparys

$$\overline{x-14}=\sum_{i=1}^{5}\omega_i\cdot(x-14)=(-0{,}2)\cdot 0{,}16+(-0{,}1)\cdot 0{,}12+$$

$$+0\cdot 0{,}28+0{,}1\cdot 0{,}24+0{,}2\cdot 0{,}2=-0{,}032-0{,}012+0{,}024+$$

$+0{,}04=0{,}02$. Diýmek, $\sigma_0\,\overline{x}=14+0.02=14.02$.

3.5. Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany kesgitlemek

Saýlama paýlanyş bilen berlen X tötän ululygynyň ***saýlama dispersiýasy*** diýip

$$D^*(X)=\omega_1(x_1-\bar{x})^2+\omega_2(x_2-\bar{x})^2+...+w_l(x_l-\bar{x})^2 \qquad (3.8)$$

formula bilen kesgitlenýän ululyga aýdylýar. Bu ýerden görnüşi ýaly, saýlama dispersiýa $(X-\bar{x})^2$ tötän ululygynyň orta bahasydyr. N sanyň ulalmagy bilen $\overline{x}$ ululyk ähtimallyk boýunça $M(X)$ baha, $\omega_1, \omega_2,..., \omega_l$ otnositel ýygylyklar bolsa degişli ähtimallyklaryna ymtylýar. Şeýlelikde, saýlamanyň uly göwrüminde takmyn deňlik ýerine ýetýär

$$D^*(X)\approx D(X).$$

Saýlama orta kwadratik gyşarma

$$\sigma^*(X)=\sqrt{D^*(X)} \qquad (3.9)$$

Formula bilen tapylýar. Onuň ölçegliligi X ululygyňky ýalydyr. Mundan beýläk, saýlamanyň n göwrümini ýeterlik uly san hasap edip, $D^*(X)$ we $\sigma^*(X)$ ululyklaryň deregine, degişlilikde, $D(X)$ we $\sigma(X)$ ýazgylary ulanarys.

Eger X tötän ululygyň bahasy hemişelik a ululygyna golaý bolsa, onda saýlama dispersiýany hasaplamak ýönekeýleşýär.

$$D^*(x) = \sum_{i=1}^{l} \omega_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{l} \omega_i\,[(x_i - a) - (\overline{x} - a)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \omega_i(x_i - a)^2 - 2(\overline{x} - a)\sum_{i=1}^{l} \omega_i(x_i - a) + (\overline{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{l} \omega_i =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{l} \omega_i(x_i - a)^2 - 2(\overline{x} - a)\overline{(x - a)} + (\overline{x} - a)^2.$$

(3.6) deňlikden alarys: $\overline{x}$-a = $\overline{(x - a)}$. Onda

$$D^*(X) = \overline{(X-a)^2} - \left(\overline{X-a}\right)^2. \qquad (3.10)$$

Bu ýerde $\overline{(X-a)^2}$ ululyk $(X\text{-}a)^2$ tötän ululygynyň orta bahasydyr; $\left(\overline{X-a}\right)^2$ bolsa, X-a tötän ululygynyň orta bahasynyň kwadratydyr.

(3.10) deňligiň çep tarapy a hemişelige bagly däldir, onda ýönekeýleşdirmegiň netijesinde, a hemişelik deňligiň sag tarapyndan ýok edilmelidir. Hususan-da, $a=0$ ýagdaýynda (3.10) deňlikden

$$D(X) = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 \qquad (3.11)$$

alarys. Bilşimiz ýaly, (3.11) formula ähtimallyklar teoriýasynda hem ulanylýardy.

Eger X we Y tötän ululyklary özara $Y=kX+b$ görnüşinde çyzykly bagly bolsalar, onda bu ululyklaryň orta bahalary hem şol bir çyzykly baglanyşykdadyr:

$$\overline{Y} = k\overline{X} + b \quad \text{ýa-da} \quad M(Y)=kM(X)+b. \qquad (3.12)$$

Eger Y ululygyň dispersiýasyny X ululygyň dispersiýasy arkaly aňlatsak, onda şeýle baglanyşyga geleris

$$D(Y)=D(kX+b)=D(kX)+D(b)=k^2D(X)+0=k^2D(X)$$

Diýmek,

$$D(Y) = k^2 \cdot \left[\overline{X^2} - (\bar{X})^2\right] \qquad (3.13)$$

Mysal X-14 tötän ululygynyň bahalarynyň otnositel ýygylyklarynyň paýlanyşy (3.14-nji tablisa) tapylan. Ol ýerde

$$\overline{X-14} = 0{,}02; \quad \overline{X} = 14 + 0{,}02; \quad \overline{X} - 14 = 0{,}02.$$

Saýlama paýlanyş üçin $D(X)$ we $\sigma(X)$ bahalary kesgitlemeli.

Çözülişi. Hasaplaýyş tablisasyny düzeliň(3.15-nji tablisa).

3.15-nji tablisa

$(x_i-14)^2$	0,04	0,01	0	0,01	0,04
ω_i	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Bu ýerden $\overline{(X-14)^2} = 0{,}04 \cdot 0{,}16 + 0{,}01 \cdot 0{,}12 + 0 \cdot 0{,}28 +$

$$+ 0{,}01 \cdot 0{,}24 + 0{,}04 \cdot 0{,}2 = 0{,}0064 + 0{,}0012 + 0{,}0024 + 0{,}008 = 0{,}018.$$

Diýmek,

$$D(X)=0{,}018-(0{,}02)^2=0{,}0176; \quad \sigma(X) = \sqrt{0{,}0176} \approx 0{,}133.$$

Mysal. Berlen saýlama paýlanyş (3.16-njy tablisa) üçin $\overline{y}$ we *D(Y)* ululyklary kesgitlemeli.

3.16-njy tablisa

y_i	*3*	*7*	*11*	*15*	19	23
ω_i	*0,02*	*0,18*	*0,35*	*0,3*	0,1	0,05

Çözülişi. Tablisadan görşümiz ýaly, *Y* ululygyň alýan bahalary ilkinji agzasy 3-e, tapawudy 4-e deň bolan arifmetiki progressiýany emele getirýär. Goý, *X* tötän ululygy 1,2,3,4,5,6 yzygider bahalary alýar diýeliň. Onda $Y=3+4(X-1)$ ýa-da $Y=4X-1$ baglanyşyk arkaly *Y* ululyk 3,7,11,15,19,23 bahalary kabul eder. Şeýlelikde, *X* we X^2 tötän ululyklar üçin saýlama paýlanyşlary (3.17-nji, 3.18-nji tablisalar) düzüp bolar.

3.17-nji tablisa

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
ω_i	*0,02*	*0,18*	*0,35*	*0,3*	*0,1*	*0,05*

3.18-nji tablisa

x_i^2	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*
ω_i	*0,02*	*0,18*	*0,35*	*0,3*	*0,1*	*0,05*

Bu ýerden taparys:

$$\bar{X} = 0{,}02 + 0{,}36 + 1{,}05 + 1{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 3{,}43,$$

$$\bar{X}^2 = 0{,}02 + 0{,}72 + 3{,}15 + 4{,}8 + 2{,}5 + 1{,}8 = 12{,}99.$$

Onda (3.12) formuladan alarys

$$\overline{y} = k\overline{x} + b = 4 \cdot 3{,}43 - 1 = 13{,}72 - 1 = 12{,}7.$$

(3.13) formula görä kesgitläliň

$$D(Y) = 4^2(12{,}99 - 3{,}43^2) = 16(12{,}99 - 11{,}76) = 19{,}68.$$

3.6. Saýlama boýunça tötän ululygyň momentlerini, asimmetriýasyny we ekssesini tapmak

Ähtimallyklar teoriýasyndaky düşünjelere meňzeşlikde, X tötän ululygyň s-nji tertipli başlangyç we merkezi momentleri degişlilikde

$$\alpha_s(X) = M(X^s), \quad \mu_s(X) = M[(X - m_x)^s]$$

formulalar bilen hasaplanýar, bu ýerde m_x ululyk X tötän ululygyň matematiki garaşmasydyr.

Eger saýlamany reprezentatiw – wekilçilikli, göwrümini bolsa ýeterlik uly hasap etsek, onda $\alpha_s(X)$ we $\mu_s(X)$ ululyklary takmyn hasaplap bileris:

$$\alpha_s(X) \approx \sum_{i=1}^{l} \omega_i \cdot x_i^s \ , \ \ \mu_s(X) \approx \sum_{i=1}^{l} \omega_i \cdot (x_i - \bar{x})^s. \qquad (3.14)$$

Şeýlelikde: $\alpha_1(X)=M(X)$, $\mu_1(X) = 0$, $\mu_2(X) = D(X)$.

Eger X tötän ululygy matematiki garaşmanyň töwereginde simmetrik paýlanan bolsa, onda täk tertipli beýleki merkezi momentler hem nola deňdir:

$$\mu_s(X) = 0\ , \quad s = 1,\ 3,\ 5,...$$

Eger X tötän ululygynyň bahalary käbir a sana golaý bolsalar, onda $\nu_s = (X - a)^s$ belgilemäni ulanmak arkaly merkezi momentleri hasaplamak üçin aşakdaky formulalary peýdalanmak bolar:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2\ ,\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3\ ,$$
$$(3.15)$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

Hususan-da, $a=0$ mahalynda, başlangyç we merkezi momentleriň arasynda ilkinji 4 tertip üçin şeýle formulalara gelinýär:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,\ \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4. \qquad (3.16)$$

s-nji tertipli başlangyc we merkezi momentleriň ölcegliligi s-nji tertipli tötän ululygyň ölcegliligi ýalydyr.

$C=const$ baha üçin $\mu_S(X+C) = \mu_S(X)$ deňligi subut etmek bolar. Şu esasda, eger X we Y tötän ululyklary $Y=kX+b$ çyzykly aňlatmada baglanyşykly bolsalar, onda Y tötän ululygynyň s-nji tertipli merkezi momenti

$$\mu_S(Y) = \mu_S(kX+b) = k^S\mu_S\left(X + \frac{b}{k}\right) = k^S\mu_S(X) \qquad (3.17)$$

formulada kesgitlenýär.

Çyzykly baglanyşykda Y tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasy şeýle hasaplanýar

$$\sigma(Y) = \sqrt{k^2\mu_2(X)} = |k|\sqrt{\mu_2(X)} = |k|\sigma(X). \qquad (3.18)$$

Asimmetriýa A_x we eksses E_x ululyklaryny öňden belli

$$A_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}, \qquad E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \qquad (3.19)$$

formulalarda hasaplarys.

Goý, X üznüksiz tötän ululygy bolsun. Onuň san häsiýetlendirijilerini hasaplamak üçin tablisa düzeliň (3.19-njy tablisa).

3.19-njy tablisa

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_l
$\boldsymbol{\omega_i}$	ω_1	ω_2	...	ω_l

Bu ýerde x_i san $(\xi_{i-1}+\xi_i)/2$ hasap edilýär. Şeýlelikde, bu tablisa boýunca tötän ulugynyň orta bahasyny, saýlama dispersiýany, orta kwadratik gyşarmany, başlangyç we merkezi momentleri, asimmetriýany hem-de ekssesi ýokardaky getirilen formulalarda hasaplamak bolar.

$Y=kX+b$ tötän ululygyň asimmetriýasyny we ekssesini X tötän ululygyň asimmetriýasy we ekssesi arkaly aňlatmak bilen

$$A_x(Y) = \frac{\mu_3(Y)}{\sigma^3(Y)} = \frac{k^3\mu_3(X)}{|k|^3\sigma^3(X)} = sgn(k)\cdot A_x(X), \qquad (3.20)$$

$$E_x(Y) = \frac{\mu_4(Y)}{\sigma^4(Y)} - 3 = \frac{k^4\mu_4(X)}{|k|^4\sigma^4(X)} - 3 = E_x(X) \qquad (3.21)$$

formulalara geleris.

(3.20) formulada

$$A_x(Y) = \begin{cases} A_x(X), eger\ k \geq 0\ bolanda, \\ -A_x(X), eger\ k < 0\ bolanda \end{cases}$$

ýagdaý alynýar.

Mysal. Saýlama paýlanyş (3.20-nji tablisa) boýunça berlen tötän ululygyň ilkinji dört tertipli merkezi momentlerini hasaplamaly.

3.20-nji tablisa

x_i	*11*	*12*	*13*	*14*
ω_i	*0,35*	*0,25*	*0,15*	*0,25*

Çözülişi. $\alpha = 10$ kabul etmek bilen, hasaplanyş tablisasyny düzeliň (3.21-nji tablisa). Onda $\nu_s = (X-a)^s$, $s = \overline{1,4}$ formula laýyklykda, tablisadan:

$$\nu_1 = 2{,}30;\ \nu_2 = 6{,}70;\ \nu_3 = 22{,}40;\ \nu_4 = 80{,}50$$

bahalary alarys.

3.21-nji tablisa

x_i-*a*	ω_i	ω_i (x_i-*a*)	ω_i $(x_i-a)^2$	ω_i $(x_i-a)^3$	ω_i $(x_i-a)^4$
1	*0,35*	*0,35*	*0,35*	*0,35*	*0,35*
2	*0,25*	*0,50*	*1,00*	*2,00*	*4,00*
3	*0,15*	*0,45*	*1,35*	*4,05*	*12,15*
4	*0,25*	*1,00*	*4,00*	*6,00*	*64,00*
$\sum$		*2,30*	*6,70*	*22,40*	*80,50*

Bu ýerden (3.15) formulalary ulanyp taparys:

$$\mu_1(X) = 0;\ \mu_2(X) = 6{,}7 - 2{,}3^2 = 1{,}41;$$

$$\mu_3(X) = 22{,}4 - 3{,}0 \cdot 6{,}7 \cdot 2{,}3 + 2 \cdot 2{,}3^3 = 0{,}504$$

$$\mu_4(X) = 80{,}5 - 4 \cdot 22{,}4 \cdot 2{,}3 + 6 \cdot 6{,}7 \cdot 2{,}3^2 - 3 \cdot 2{,}3^4 = 3{,}1257$$

Mysal. Saýlama paýlanyş (3.22-nji tablisa) boýunca berlen Y tötän ululygynyň ilkinji dört merkezi momentlerini hasaplamaly.

3.22-nji tablisa

y_i	*4*	*9*	*14*	*19*
ω_i	*0,4*	*0,2*	*0,3*	*0,1*

Çözülişi. Çörşümiz ýaly, *Y* ululygyň alýan 4;9;14;19 bahalary arifmetiki progressiýany emele getirýär. Onda *Y=4+5(X-1)*, ýagny *Y=5X-1*, *k=5*, *b=-1* görnüşde ýazyp, *X* tötän ululyk üçin hasaplanyş tablisasyny (3.23-nji tablisa) düzeliň.

3.23-nji tablisa

x_i	ω_i	$x_i\omega_i$	$\omega_i x_i^2$	$\omega_i x_i^3$	$\omega_i x_i^4$
1	*0,4*	*0,4*	*0,4*	*0,4*	*0,4*
2	*0,2*	*0,4*	*0,8*	*1,6*	*3,2*
3	*0,3*	*0,9*	*2,7*	*8,1*	*24,3*
4	*0,1*	*0,4*	*1,6*	*6,4*	*25,6*
$\sum$		*2,1*	*5,5*	*16,5*	*53,5*

Diýmek, (3.14) formulalara görä

$$\alpha_1 = 2{,}1;\ \alpha_2 = 5{,}5;\ \alpha_3 = 16{,}5;\ \alpha_4 = 53{,}5.$$

Onda (3.16) formulalara laýyklykda taparys:

$$\mu_1(X) = 0;\ \ \mu_2(X) = 5{,}5 - 4{,}41 = 1{,}09;$$

$$\mu_3(X) = 16{,}5 - 6{,}3 \cdot 5{,}5 + 2 \cdot 2{,}1^3 = 0{,}372;$$

$$\mu_4(X) = 53{,}5 - 8{,}4 \cdot 16{,}5 + 6 \cdot 4{,}41 \cdot 5{,}5 - 3 \cdot 4{,}41^2 = 2{,}0857.$$

Indi (3.17) formulalary ulanyp:

$$\mu_s(Y) = 5^S \mu_s(X),\ s = \overline{1{,}4}$$

ýazarys hem-de

$$\mu_1(Y) = 0,\quad \mu_2(Y) = 2{,}5 \cdot 1{,}09 = 27{,}25;$$

$$\mu_3(Y) = 125 \cdot 0{,}372 = 46{,}5;\ \mu_4(Y) = 625 \cdot 2{,}0857 = 1303{,}5625$$

bahalary taparys.

Mysal. Saýlamanyň maglumatlaryny ulanyp (3.24-nji tablisa), *X* üznüksiz tötän ululygynyň ilkinji dört tertipli başlangyç we merkezi momentlerini, asimmetriýasyny we ekssesini tapmaly.

3.24-nji tablisa

I_i	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10]
n_i	3	4	10	5	3

Çözülişi.. Saýlamanyň göwrümi $n=3+4+10+5+3=25$.

X-iň bahalary deregine interwallaryň ortasyny kabul edip, hasaplanyş tablisasyny düzeliň (3.25-nji tablisa). Tablisa maglumatlaryndan taparys:

$\alpha_1 = 5{,}08$; $\alpha_2 = 31{,}08$; $\alpha_3 = 210{,}52$; $\alpha_4 = 1530{,}60$.

Bu ýerden *M(X)=5,08;* $\mu_1 = 0$.

(3.16) formulalara görä taparys: $\mu_2 = 31{,}08 - 25{,}8064 = 5{,}1736$, ýagny, *D(X) = 5,1736*.

3.25-nji tablisa

x_i	ω_i	$x_i\omega_i$	$\omega_i x_i^2$	$\omega_i x_i^3$	$\omega_i x_i^4$
1	*0,12*	*0,12*	*0,12*	*0,12*	*0,12*
3	*0,16*	*0,48*	*1,44*	*4,32*	*12,96*
5	*0,40*	*2,00*	*10,00*	*50,00*	*250,00*
7	*0,20*	*1,40*	*9,80*	*68,60*	*480,20*
9	*0,12*	*1,08*	*9,72*	*87,48*	*787,32*
$\sum$		*5,08*	*31,08*	*210,52*	*1530,60*

$$\mu_3 = 210{,}52 - 3 \cdot 5{,}08 \cdot 31{,}08 + 2 \cdot 5{,}08^3 = -0{,}9462.$$

$$\mu_4 = 1530{,}60 - 4 \cdot 5{,}08 \cdot 210{,}52 + 6 \cdot 5{,}08^2 \cdot 31{,}08 -$$

$$-3 \cdot 5{,}08^4 = 67{,}3004.$$

Bu bahalardan alarys

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}1736} \approx 2{,}275;$$

$$A_x(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = -\frac{0{,}9462}{2{,}275^3} \approx -0{,}0804;$$

$$E_x(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = -\frac{67{,}3004}{2{,}275^4} - 3 \approx -0{,}488.$$

3.7. Tejribe maglumatlary esasynda tötän ululyklaryň paýlanyş kanunlaryny kesgitlemek

3.7.1. Puassonyň paýlanyşynyň hataryny tapmak

Puassonyň paýlanyşy X tötän ululygyň $x=0,1,2,3,\ldots$ bahalaryna degişli ähtimallyklary

$$p_x = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x=0,1,2,... \qquad (3.22)$$

formula boýunça tapýar. Şeýlelikde, X tötän ululygyň paýlanyş hatary şeýle görnüşde bolar (3.26-njy tablisa).

3.26-njy tablisa

x_i	0	1	2	3	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	...

Durmuşda, synaglarda X tötän ululygy tükenikli-çäklenen sanly bahalary alýar $x=0,\ 1,\ 2,\ ...\ ,\ l$, sebäbi, λ ululygyň ýeterlik uly bahalarynda hem $\frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}$ ululygyň bahasy kiçidir.

Puassonyň paýlanyşy üçin $M(X)=D(X)=\lambda$ bolýandygyny hem ýatlalyň.

Goý, bize saýlama paýlanyş berlen bolsun (3.27-nji tablisa).

3.27-nji tablisa

x_i	0	1	2	...	l
n_i	n_0	n_1	n_2	...	n_l

Bu paýlanyşy şeýle görnüşde ýazalyň (3.28-nji tablisa).

3.28-nji tablisa

x_i	0	1	2	...	l
ω_i	ω_0	ω_1	ω_2	...	ω_l

Bu ýerde $n=n_0+n_1+n_2+...+n_l$, $w_i=n_i / n$, $i=0,1,...,l$.

Eger berlen paýlanyş üçin $M(X)$ we $D(X)$ ululyklaryň bahalary özara ýakyn bolmasalar, onda paýlanyş Puassonyňky däldir. Eger $M(X)\approx\lambda$ we $D(X)\approx\lambda$ bolsa, onda λ bahany $x=0,1,2,...,l$ bahalar üçin (3.22) formulada goýup, $p_0, p_1, p_2, ..., p_l$ ähtimallyklary hasaplaýarys. Şunlukda, bu ähtimallyklar hem degişlilikde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_l$ otnositel ýygylyklara ýakyn bolsalar, onda tötän ululyk Puassonyň kanuny boýunça paýlanan diýip hasap etmek bolar.

Mysal. Saýlama paýlanyş berlen(3.29-njy tablisa). Bu paýlanyşyň Puassonyň paýlanyşyna ýakyndygyny görkezmeli we tötän ululygyň bahalary we bu bahalaryň ähtimallyklary arasyndaky baglanyşygy dikeltmeli.

3.29-njy tablisa

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	7	21	26	21	13	7	3	2

Çözülişi. Saýlamanyň göwrümini tapalyň

$$n = \sum_{i=0}^{7} n_i = 7 + 21 + 26 + 21 + 13 + 7 + 3 + 2 = 100.$$

Onda saýlama paýlanyşyň tablisasyny şeýle ýazmak bolar (3.30-njy tablisa).

3.30-njy tablisa

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_i	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Bu ýerden tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň

$$M(X)=0,21+0,52+0,63+0,52+0,35+0,18+0,14=2,55.$$

Kömekçi tablisany düzeliň (3.31-nji tablisa). Onda

3.31-nji tablisa

x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49
ω_i	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

$M(X^2)=0,21+1,04+1,89+2,08+1,75+1,08+0,98=9,03,$
$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2 = 9,03-2,55^2=9,03-6,503=2,527.$

Görşümiz ýaly, $M(X)$ we $D(X)$ ululyklaryň bahalary özara golaý. λ =2,52 diýeliň. Onda (3.22) formula boýunça ähtimallyklar

$$p_x=\frac{e^{-2.52}}{x!}2,52^x,\ x=0,1,2,...,7.$$

görnüşde hasaplanyp, tötän ululygyň bahalarynyň ähtimallyklarynyň paýlanyş hataryny alarys (3.32-nji tablisa).

3.32-nji tablisa

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,08	0,20	0,25	0,21	0,13	0,07	0,03	0,01

3.30-njy we 3.32-nji tablisalar boýunça ω hem-de P ululyklaryň degişli bahalary özara ýakyn. Diýmek, tötän ululyk Puassonyň kanuny boýunça paýlanan.

3.7.2. Deňölçegli dykyzlykly paýlanyşy kesgitlemek

Goý, X üznüksiz tötän ululygynyň tejribe – synag esasynda alnan saýlama paýlanyşy berlen bolsun (3.33-nji tablisa).

3.33-nji tablisa

I_i	$[\xi_0, \xi_1)$	$[\xi_1, \xi_2)$	...	$[\xi_{l-1}, \xi_l]$
ω_i	ω_1	ω_2	...	ω_l

Eger $\omega_1, \omega_2,..., \omega_l$ sanlar biri – birlerine golaý bolsalar, onda synag maglumatlaryny işläp taýýarlamak üçin deňölçegli dykyzlykly paýlanyş kanunyndan peýdalanmak amatlydyr. Bilşimiz ýaly, deňölçegli paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x)=\begin{cases} 0, x<a\ bolsa; \\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\ bolsa; \\ 0, x>b\ bolsa. \end{cases}$$

görnüşinde kesgitlenip, onuň matematiki garaşmasy, dispersiýasy we orta kwadratik gyşarmasy

$M(X)=(a+b)/2, \quad D(X)=(b-a)^2/12, \quad \sigma(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

formulalarda tapylýar. Şeýlelikde,

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = M(X) \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sigma(X) \end{cases} \tag{3.23}$$

çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmek arkaly a we b ululyklary, diýmek, gözlenýän dykyzlyk funksiýasyny kesgitlemek bolar.

Mysal. Tejribe maglumatlary esasynda X ululygyň saýlama paýlanyşy berlen (3.34-nji tablisa). Deňölçegli paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasyny tapmaly.

3.34-nji tablisa

I_i	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60]
n_i	11	14	15	10	14	16

Çözülişi. Saýlamanyň göwrümi $n=80$. Tablisa düzeliň (3.35-nji tablisa).

3.35-nji tablisa

I_i	5	15	25	35	45	55
ω_i	11/80	14/80	15/80	10/80	14/80	16/80

$X=5T$ kabul edip, T üçin hasaplanyş tablisasyny düzeliň (3.36-njy tablisa).

3.36-njy tablisa

t_i	ω_i	$\omega_i t_i$	$\omega_i t_i^2$
1	11/80	11/80	11/80
3	7/40	21/40	63/40
5	3/16	15/16	75/16
7	1/8	7/8	49/8
9	7/40	63/40	567/40
11	1/5	11/5	121/5
$\sum$		25/4	509/10

Onda alarys

$M(X)=5M(T)=5\cdot(25/4)=31,25;$

$M(X^2)=5^2M(T^2)=25\cdot(509/10)=1272,5;$

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=1272,5-31,25^2=295,9375$

(3.23) deňlemeler sistemasyny düzeliň

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 31.25 \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sqrt{295,9375} \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp,

$a=1,46;\ b=61,04\ ;\quad 1/(b-a)=1/(61,04-1,46)=0,017$

bahalary kesgitläp,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1,46\ we\ x > 61,04\ bolsa, \\ 0,017, & 1,46 \le x \le 61,04\ bolsa \end{cases}$$

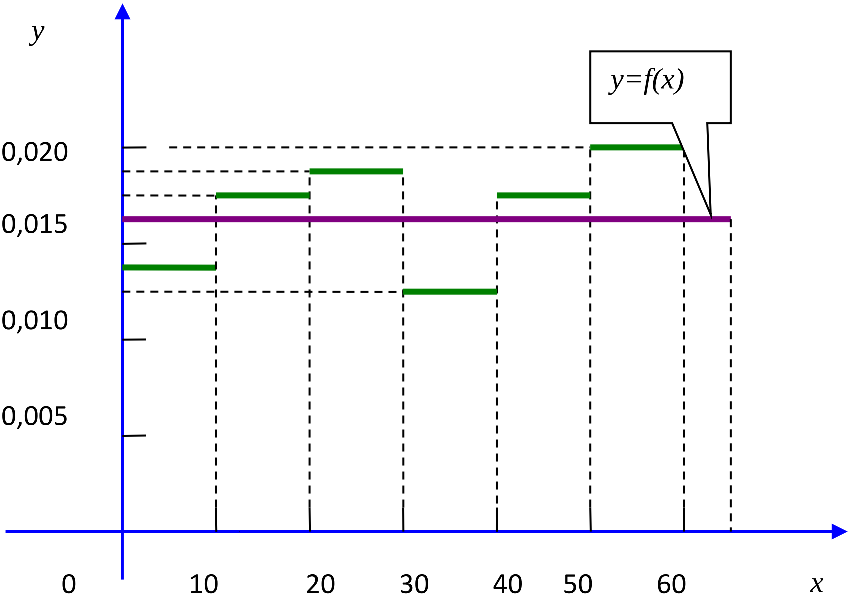
dykyzlyk funksiýasyny alarys.

Dykyzlyk funksiýasynyň grafigini gistogramma bilen deňeşdireliň. Onda $h=10$ kabul etmek bilen, gistogrammany gurmak üçin tablisa düzeliň (3.37-nji tablisa).

3.37-nji tablisa

I_i	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60]
ω_i/h	0,0138	0,0175	0,0188	0,0125	0,0175	0,0200

Şol bir *xOy* koordinatalar tekizliginde gistogrammanyň we dykyzlyk funksiýasynyň grafiklerini guralyň (3.5-nji surat).



3.5 –nji surat

Deňölçegli paýlanyş matematiki garaşmasyna görä simmetrik bolany üçin $\mu_3(X) = 0$. Şeýle paýlanyşda islendik *a* we *b* üçin

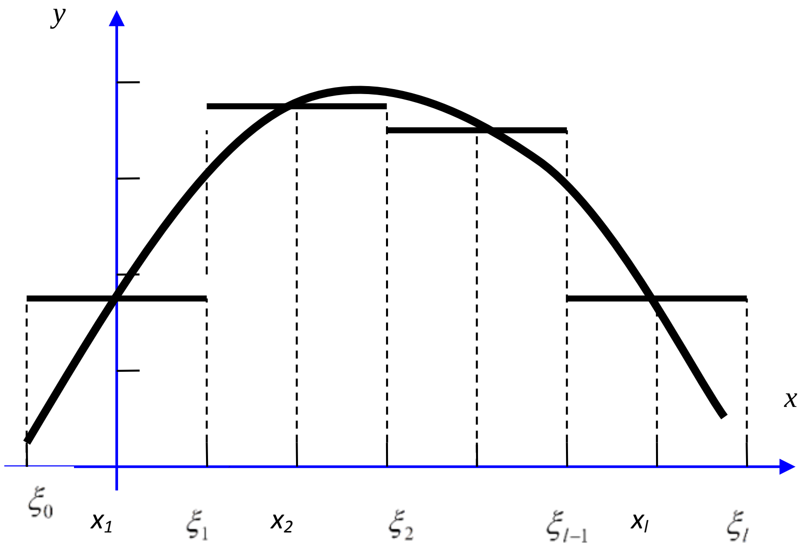
$E_x(X)=-1,2.$

3.7.3. Saýlama normal paýlanyşy tapmak

Goý, saýlama paýlanyşyň (3.38-nji tablisa) gistogrammasy şeýle şekilde (3.6-njy surat) bolsun.

3.38-nji tablisa

I_i	$[\xi_0, \xi_1)$	$[\xi_1, \xi_2)$	…	$[\xi_{l-1}, \xi_l]$
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_l



3.6 –njy surat

Bu ýerde $x_i = \frac{(\xi_{i-1}+\xi_i)}{2}$, $i = 1,2,\dots,l$. $h = \frac{\xi_l - \xi_0}{l}$,
h-tablisanyň ädimi.

Gistogramma boýunca $(x_1, \omega_1/h), (x_2, \omega_2/h),\dots,(x_l, \omega_l/h)$ nokatlary endigan egri çyzyk bilen birikdireliň (3.6-njy surat). Eger alnan egri çyzyk Gaussyň (normal) egrisine golaý bolsa, onda statistiki maglumatlary paýlanyşlaryň normal kanuny boýunça isläp taýýarlamak bolar.

Saýlama paýlanyş boýunça $m=M(X)$ – matematiki garaşmany hem-de $\sigma = \sigma(X)$ – orta kwadratik gyşarmany kesgitlemek bilen

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (3.24)$$

funksiýa seredeliň. x_1, x_2, ..., x_l nokatlarda (3.24) funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň. Bu ýerde, $hf(x_1),hf(x_2),...,hf(x_l)$ köpeltmek hasyllarynyň (3.24) normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň bahalarynyň degişlilikde (ξ_0, ξ_1), (ξ_1, ξ_2),..., (ξ_{l-1}, ξ_l) interwallaryna düşmeginiň ähtimallyklarydygyny görmek kyn däldir. Şeýlelikde, eger berlen saýlama paýlanyş normal kanuna golaý bolsa, onda

$$hf(x_i)\approx\omega_i,\ i=1,2,...,l$$

takmyn deňlik ýerine ýeter.

Mysal. Saýlama paýlanyş berlen (3.39-njy tablisa). Bu paýlanyşyň normal paýlanyşa golaýdygyny görkezmeli, paýlanyşyň otnositel ýygylyklarynyň gistogrammasyny hem-de dykyzlyk funksiýasynyň grafigini gurmaly.

3.39-njy tablisa

I_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30]
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Çözülişi. Saýlamanyň göwrümi $n=50$. Otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzeliň (3.40-njy tablisa).

3.40-njy tablisa

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
ω_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02

Bu tablisa üçin üýtgeýänleri çalşyrmanyň $X=3T-1,5$, $T=\overline{1,10}$ formulasyny ulanyp, T we T^2 saýlama paýlanyşlary ýazalyň (3.41-nji tablisa).

3.41-nji tablisa

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02
t_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Bu ýerden alarys

$M(T)=0,02+0,12+0,24+0,48+1,1+1,2+0,98+0,80+0,36+0,2=5,5;$

$M(T^2)=0,02+0,24+0,72+1,92+5,5+7,2+6,86+6,4+3,24+2=34,1;$

$M(X)=3M(T)-1,5=3\cdot 5,5-1,5=16,5-1,5=15.$

$\sigma^2(X)=9(34,1-30,25)=34,65;\ \sigma(X)=\sqrt{34,65}\approx 5,9.$

$m=M(X)=15;$ $\sigma=\sigma(X)=5,9$ bahalary (3.24) funksiýa goýup,

$$f(x)=\frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-15)^2}{2\cdot 5,9^2}}$$

paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasyny alarys.

$(x-15)/5,9=u$ bellemäni girizeliň. Onda $f(x)=\frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-u^2}{2}}$, ýa-da $f(x) \approx 0{,}17 z_u$. Bu ýerde $z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

z_u funksiýanyň bahalary goşundynyň g.1-nji tablisasynda getirilendir. Bu bahalary ulanyp, *h=3* üçin tablisa düzeliň(3.42-nji tablisa).

3.42-nji tablisa

x_i	u_i	z_u	$f(x_i)$	$hf(x_i)$
1,5	-2,29	0,029	0,005	0,02
4,5	-1,78	0,082	0,014	0,04
7,5	-1,27	0,178	0,030	0,09
10,5	-0,76	0,299	0,051	0,15
13,5	-0,25	0,387	0,066	0,20
16,5	0,25	0,387	0,066	0,20
19,5	0,76	0,299	0,051	0,15
22,5	1,27	0,178	0,030	0,09
25,5	1,78	0,082	0,014	0,04
28,5	2,29	0,029	0,005	0,02

3.40-njy we 3.42-nji tablisalary deňeşdirmek arkaly $hf(x_i) \approx w_i,\ i=1,2,...,10$ takmyn deňligiň ýerine ýetýändigini görýäris.

Soňky tablisa boýunça alnan netijeleri, tötän ululygyň bahalarynyň berlen *(a,b)* interwala düşmeginiň ähtimallygy

$$P(a < X < b) = 0{,}5 \cdot \left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

formula boýunca hasaplanýan ähtimallyklar bilen hem deňeşdirmek bolar, bu ýerde

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ч} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Laplasyň funksiýasy bolup, onuň bahalary goşundynyň g.2-nji tablisasynda getirilýär. Bu tablisany ulanyp taparys (*m=M(x)=15*):

$P(0< X <3)=0,5[-\Phi(1,44)+ \Phi(1,80)]=$

$=0,5(-0,9583+0,9891)=0,0154\approx 0,02;$

$P(3< X <6)=0,5[-\Phi(1,08)+ \Phi(1,44)]=$

$=0,5(-0,8733+0,9583)=0,0425\approx 0,04;$

$P(6< X <9)=0,5[-\Phi(0,72)+ \Phi(1,08)]=$

$=0,5(-0,6914+0,8733)=0,0905\approx 0,09;$

$P(9< X <12)=0,5[-\Phi(0,36)+ \Phi(0,72)]=$

$=0,5(-0,3893+0,6914)=0,151\approx 0,15;$

$P(12< X <15)=0,5[-\Phi(0)+\Phi(0,36)]=$

$=0,5\cdot 0,3893=0,1946\approx 0,19;$

$P(15< X <18)=0,5[-\Phi(0,36)+\Phi(0)]=$

$=0,5\cdot 0,3893=0,1946\approx 0,19;$

$P(18<X<21)=0,5[\Phi(0,72)-\Phi(0,36)]=$

$=0,5(0,6914-0,3893)=0,151\approx 0,15;$

$P(21<X<24)=0,5[\Phi(1,08)-\Phi(0,72)]=$

$=0,5(0,8733-0,6914)=0,091\approx 0,09;$

$P(24<X<27)=0,5[\Phi(1,44)-\Phi(1,08)]=$

$=0,5(0,9583-0,8733)=0,0425\approx0,04;$
$P(27<X<30)=0,5[\Phi(1,80)-\Phi(1,44)]=$
$=0,5(0,9891-0,9583)=0,0151\approx0,02.$

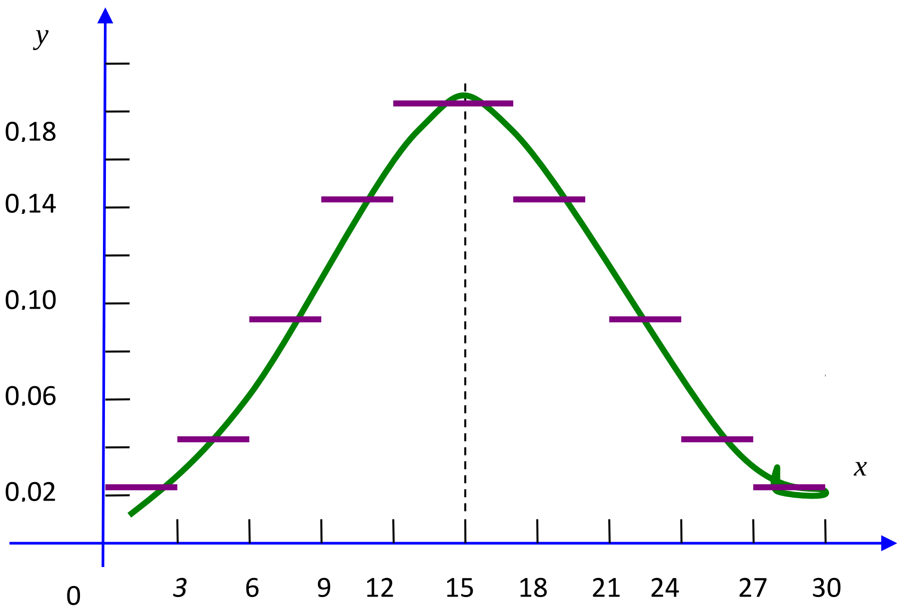
Netije-de, şeýle tablisany alarys(3.43-nji tablisa).

3.43-nji tablisa

I_i	[0,3)	[3,6)	[6,9)	[9,12)	[12,15)	[15,18)
p_i	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19

[18,21)	[21,24)	[24,27)	[27,30]
0,15	0,09	0,04	0,02

W we *P* ululyklaryň bahalaryny deňeşdirmek bilen, berlen saýlama paýlanyş normal kanuna tabyn diýip hasap etmek bolar (3.7-nji surat).



3.7-nji surat

3.7.4. Saýlama paýlanyşy Şarlýeniň paýlanyşyna kybaplaşdyrmak

Bilşimiz ýaly, normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

egrisi – grafigi $x=m$ $(x=M(x))$ göni çyzyga görä simmetrikdir. Emma durmuşda, köplenç, asimmetrik (simmetrik däl) paýlanyşlar duş gelýär. Haçanda asimetriýa özüniň absolýut ululygy boýunca onçakly uly bolmasa, onda saýlama paýlanyşy Şarlýeniň kanuny boýunça deňleýärler. Şarlyýeniň kanunynyň dykyzlyk funksiýasy şeýle kesgitlenýär

$$\sigma_0 f_Ş(x) = f(x) + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{A_x(X)}{6} z_u(u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24} z_u(u^4 - 6u^2 + 3)\right] \qquad (3.25)$$

Bu ýerde $f(x)$ – normal kanunyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy,

$$u = \frac{x-m}{\sigma}, \quad z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

$A_x(X)$, $E_x(X)$ – degişlilikde paýlanyşyň asimmetriýa we eksses koeffisiýentleri.

Şeýlelikde, (3.25) formulanyň sag tarapyndaky ikinji goşulyjy normal paýlanyşyň düzedilmesidir. Görşümiz ýaly, $A_x(X)=E_x(X)=0$ ýagdaýda Şarlýeniň paýlanyşy normal paýlanyş bilen gabat gelýär.

Şarlýeniň paýlanyşyny şeýle ähtimallyk görnüşinde hem ulanýarlar

$$P = \frac{h}{\sigma} \cdot Z_u \left[1 + \frac{A_x(X)}{6}(U^3 - 3U) + \frac{E_x(X)}{24}(U^4 - 6U^2 + 3)\right]. \qquad (3.26)$$

Bu ýerde h – tablisanyň ädimidir.

Mysal. Berlen saýlama paýlanyş (3.44-nji tablisa) üçin Şarlýeniň kanunyny ulanmaly.

Çözülişi. Bu ýerde $n=100$. Tablisa düzeliň (3.45-nji tablisa).

3.44-nji tablisa

I_i	[0,3)	[3,6)	[6,9)	[9,12)	[12,15)	[15,18)	[18,21)	[21,24)	[24,27)	[27,30]
n_i	1	5	8	15	28	21	10	6	3	3

3.45-nji tablisa

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
ω_i	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

$X=3T-1,5$ belgiläp, täze T üýtgeýäne geçeliň. Onda T tötän ululygyň saýlama paýlanyşy şeýle bolar (3.46-njy tablisa).

3.46-njy tablisa

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_i	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Kömekçi hasaplaýyş tablisasyny düzeliň(3.47-nji tablisa).

3.47-nji tablisa

t_i	ω_i	$\omega_i t_i$	$\omega_i t_i^2$	$\omega_i t_i^3$	$\omega_i t_i^4$
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2	0,05	0,10	0,20	0,40	0,80
3	0,08	0,24	0,72	2,16	6,48
4	0,15	0,60	2,40	9,60	38,40
5	0,28	1,40	7,00	35,00	175,00
6	0,21	1,26	7,56	45,36	272,16
7	0,10	0,70	4,90	34,30	240,10
8	0,06	0,48	3,84	30,72	245,76
9	0,03	0,27	2,43	21,97	197,73
10	0,03	0,30	3,00	30,00	300,00
$\sum$		5,36	32,06	209,52	1476,44

Bu tablisa boýunça taparys:

$M(T)=5{,}36;\ M(X)=3\cdot5{,}36-1{,}5=14{,}58;\ M(T^2)=32{,}06;$

$D(T)=32{,}06-28{,}73=3{,}33;\ \sigma(T)=\sqrt{3{,}33}=1{,}83;$

$$\sigma(X)=3\cdot\sigma(T)=5{,}49;$$

$$\mu_3(T)=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=209.52-3\cdot5{,}36\cdot32{,}06+$$

$$+2\cdot5{,}36^3=1{,}98;$$

$$A_x(T)=\frac{\mu_3(T)}{\sigma^3(T)}=\frac{1{,}98}{1{,}83^3}=0{,}32;$$

$$\mu_4(T)=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\cdot\alpha_2-3\alpha_1^4=$$

$$=1476{,}44-4\cdot5{,}36\cdot209{,}32+6\cdot5{,}36^2\cdot32{,}06-$$

$$-3\cdot5{,}36^4=34{,}59;$$

$$\sigma^4(T)=3{,}33^2=11{,}0889;$$

$$E_x(T)=\frac{34{,}59}{11{,}09}-3=0{,}12;\qquad E_x(X)=0{,}12$$

.

Alan maglumatlarymyz boýunça

$h=3,\ M(X)=14{,}58=m,\quad u=(x-14{,}58)/5{,}49,$

$$A_x(X)=0{,}32;\ E_x(X)=0{,}12.$$

Onda Şarlýeniň paýlanyşynyň otnositel ýygylygyny (3.26) formula boýunca hasaplap bileris

3.48-nji tablisa

x_i	u_i	z_u	u_i^2	u_i^3	u_i^4	$3u_i$	$6u_i^2$	$0.5(u_i^3-3u_i)$	$0.005\cdot(u_i^4-6u_i^2+3)$	S	P
1,5	-2,38	0,02	5,66	-13,48	32,08	-7,14	33,96	-0,32	0,005	0,69	0,01
4,5	-1,84	0,0.7	3,39	-6,28	11,46	-5,52	20,37	-0,04	-0,03	0,90	0,04
7,5	-1,29	0,17	1,66	-2,15	2,77	-3,87	9,96	0,09	-0,02	1,05	0,09
10,5	-0,74	0,30	0,55	-0,41	0.30	-2,22	3,30	0,09	0,00	1,09	0,18
13,5	-0,19	0,39	0,04	-0,01	0,00	-0,57	0,24	0,03	0,015	1,06	0,23
16,5	0,35	0,38	0,12	0,04	0,01	1,05	0,72	-0,05	0,01	0,97	0,20
19,5	0,90	0,27	0,81	0,73	0,66	2,7	4,86	-0,10	-0,005	0,89	0,13
22,5	1,44	0,14	2,07	2,99	4,30	4,32	12,42	-0,07	-0,025	0,88	0,07
25,5	1,99	0,06	3,96	7,88	15,68	5,97	23,76	0,10	-0,025	1,05	0,03
28,5	2,54	0,02	6,45	16,39	41,62	7,62	38,70	0,44	0,03	1,5	0,02

$$P = \frac{3}{5{,}49} z_u \left[1 + \frac{0{,}32}{6}(u^3 - 3u) + \frac{0{,}12}{24}(u^4 - 6u^2 + 3)\right]$$

ýa-da $P = 0{,}55 \cdot z_u \cdot S$, bu ýerde

$$S = 1 + 0{,}05(U^3 - 3u) + 0{,}005(U^4 - 6U^2 + 3).$$

Şarlýeniň kanuny boýunça deňleşdirilen ýygylyklary tapmak üçin tablisa düzeliň (3.48-nji tablisa).

Şarlýeniň kanuny boýunça alnan ýygylyklary (P) hem-de statistiki tablisada berlen ýygylyklary (W) deňeşdirmek arkaly olaryň bahalarynyň özara ýeterlik golaýdygyny görýäris. Emma statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşyklylygy barada gutarnykly aýtmak üçin ýörite nyşanlardan peýdalanmalydyr.

3.7.5. Pirsonyň we Romanowskiniň ylalaşyk kriterileri

Statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşyklylygy baradaky soraga seredeliň. Goý, saýlama paýlanyş käbir belli teoretiki paýlanyş kanuny (deňölçegli, normal paýlanyş, Şarlýeniň kanuny we başgalar) arkaly deňleşdirilen bolsun.

Statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşyklygy üçin Pirson tarapyndan şeýle kriteri teklip edildi. Ilki bilen

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{l} \frac{(\omega_i - p_i)^2}{p_i} \qquad (3.27)$$

ululyk girizilýär, bu ýerde

ω_i-statistiki tablisa boýunça berlen otnositel ýygylyklar;

p_i-käbir teoretiki paýlanyş boýunça alnan ähtimallyklar.

Şundan soň erkinlik derejesiniň sany diýilýän

$$r = l - t \qquad (3.28)$$

tapawut hasaplanýar, bu ýerde

l – statistiki tablisanyň razrýadlanma – böleklenme sany,

t – ululyk $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ ýygylyklara goýulýan şertleriň sany.
Meselem, normal kanun üçin *t=3* kabul edilýär, sebäbi, bu kanun üçin

1) $\sum_{i=1}^{l} \omega_l = 1,$

2) $\sum_{i=1}^{l} \omega_i x_i = m_x,$ (3.29)

3) $\sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 \cdot \omega_i = D_x.$

ýaly üç sany şertler ulanylýar, bu ýerde m_x, D_x – ululyklar degişlilikde teoretiki paýlanyş kanunynyň matematiki garaşmasy we dispersiýasydyr.
Şarlýeniň paýlanyş kanuny boýunça *t=5*, sebäbi, bu kanun boýunça

1) $\sum_{i=1}^{l} p_l = 1\,,$

2) $\sum_{i=1}^{l} p_i x_i = m_x\,,$

3) $\sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i = D_x\,,$

4) $\sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^3 \cdot p_i = \mu_3(X),$

5) $\sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^4 \cdot p_i = \mu_4(X)\,.$

ýaly 5 sany şertler peýdalanylýar.
Indiki ädimde goşundynyň g.5-nji tablisasyny ulanyp, χ^2 we *r* bahalar boýunça statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşyklylygynyň häsiýetlendiriji ähtimallygy bolan *p* sany tapýarlar.
Eger *p* ≤ *0.1* bolsa, onda teoretiki paýlanyş geçirilen eksperimenti “***erbet häsiýetlendirýär***” diýlen netije çykarylýar.

Eger $p>0.1$ bolsa, onda “***teoretiki paýlanyş baradaky çaklama tejribe maglumatlaryna garşy gelmeýär***” netijesine gelinýär.

W.J. Romanowskiý tarapyndan şeýle ylalaşyklyk kriterisi teklip edildi: ilki bilen

$$A = \left|\chi^2 - r\right| / \sqrt{2r} \qquad (3.30)$$

ululyk kesgitlenýär, şeýlelikde, teoretiki we saýlama ýygylyklaryň arasyndaky V – tapawutlylyk

$$V = \begin{cases} tötän, \quad eger\ A < 3\ bolsa, \\ tötän\ däl, \quad eger\ A \geq 3\ bolsa \end{cases} \qquad (3.31)$$

hasap edilýär.

Goşundynyň g.5-nji tablisasy ulanylan halatynda r ululygyň belli bahasynda χ^2 ululygyň bitin bahasyna degişli p ähtimallyk tapylýar. Eger χ^2 drob san bolsa (köplenç, şeýle hem bolýar), onda $\chi^2=c$ drob sany özünde saklaýan iň kiçi bitin (a,b) interwal alynýar ($c\epsilon(a,b)$ ýa-da $a<c<b$). Tablisadan r-iň şol bir bahasynda $\chi^2=a$ san üçin $p(a)$, $\chi^2=b$ san üçin $p(b)$ ähtimallyklar tapylyp, interpolýasiýa usulynda $\chi^2=c$ san üçin

$$p(c)=p(a)+(p(b)-p(a))\cdot(c-a) \qquad (3.32)$$

formula boýunça gözlenýän $p(c)=p$ ähtimallyk kesgitlenýär.

Mysal. Berlen saýlama paýlanyş (3.34-nji tablisa) boýunça deňölçegli dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1{,}46 \; we \; x > 61{,}04 \; bolanda, \\ 0.017, & 1{,}46 \le x \le 61{,}04 \; bolanda \end{cases} \qquad (*)$$

kesgitlenen. Statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşýandyklaryny barlamaly.

Çözülişi. (-10,0), (0,10), (10,20), ..., (60,70), (70,80) interwallary boýunça (*) formula görä ähtimallyklary tapyp, tablisa düzeliň (3.49-njy tablisa). Bu ýerde

3.49-njy tablisa

I_i	[-10;0)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80]
p_i	0	0,14	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,01	0

P(0<X<10)=P(1,46<X<10)=(10-1,46)·0,017=0,14;
P(60<X<70)=P(60<X<61,04)=0,01

bolýandygyny belläliň.

χ^2 ululygy (3.27) formula boýunça hasaplamak üçin kömekçi tablisany düzeliň (3.50-nji tablisa).

3.50-nji tablisa

ω_i	p_i	ω_i-p_i	$(\omega_i-p_i)^2$	$(\omega_i-p_i)^2/p_i$
0,14	0,14	0	0	0
0,17	0,17	0	0	0
0,19	0,17	0,02	0,0004	0,0023
0,13	0,17	-0,04	0,0016	0,0094
0,17	0,17	0	0	0
0,2	0,17	0,03	0,0009	0,0052
0	0,01	-0,01	0,0001	0,01
				0,0269

Bu ýerde, saýlama paýlanyşa görä, *n=80*. Diýmek,

$\chi^2 = 80 \cdot 0{,}0269 = 2{,}152$; *l=7; t=3.*

Onda (3.28) formula görä, $r=l\text{-}t=7\text{-}3=4$. Görşümiz ýaly,

$\chi^2 = c\ x^2 = c = 2{,}152\epsilon(2;3)$, $a=2$; $b=3$.

Onda $r=4$ bahada g.6-njy tablisadan taparys:

$\chi^2 = 2 = a$ üçin $p(a)=p(2)=0{,}7358$;

$\chi^2 = 3 = b$ üçin $p(b)=p(3)=0{,}5578$.

Netije-de, (3.32) formulany ulanyp alarys

$p(c)=p(2{,}152)=p(2)+(p(3)\text{-}p(2))\cdot(2{,}152\text{-}2) = 0{,}7358 + (0.5578 -$

$- 0{,}7358)\cdot 0{,}152 = 0{,}7358\text{-}0{,}178\cdot 0{,}152=0{,}7087.$

Bu ýerden görnüşi ýaly,

$$p(c)=p=0{,}7087>0.1.$$

Onda, “*berlen saýlama paýlanyş deňölçegli dykyzlykly paýlanyş kanuny bilen doly ylalaşýar*” diýen netijäni ynamly tassyklamak bolar.

Mysal. Saýlama paýlanyş berlen (3.51-nji tablisa) Bu paýlanyşyň deňölçegli dykyzlykly teoretiki paýlanyş bilen ylalaşýandygyny anyklamaly.

3.51-nji tablisa

I_i	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45)	[45,50)
n_i	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

Çözülişi. Bu ýerde $n=70$. Şeýle tablisany düzeliň (3.52-nji tablisa).

3.52-nji tablisa

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
ω_i	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

Bu tablisa boýunça taparys:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{10} x_i\omega_i = 2{,}5(1 \cdot 0{,}029 + 3 \cdot 0{,}171 + 5 \cdot 0{,}114 + 7 \cdot 0{,}057 + 9 \cdot 0{,}2 + 11 \cdot 0{,}086 + 13 \cdot 0{,}14 + 15 \cdot 0{,}029 + 17 \cdot 0{,}014 + 19 \cdot 0{,}157) = 24{,}4285\,;$$

$$M(X^2) = 2{,}5^2(1 \cdot 0{,}029 + 9 \cdot 0{,}171 + 25 \cdot 0{,}114 + 49 \cdot 0{,}057 + 81 \cdot 0{,}2 + 121 \cdot 0{,}086 + 169 \cdot 0{,}14 + 225 \cdot 0{,}029 + 289 \cdot 0{,}014 + 361 \cdot 0{,}157 = 782{,}67;$$

$$D(x) = 782{,}67 - 596{,}75 = 185{,}92;\ \sigma(x) = \sqrt{185{,}92} = 13{,}63.$$

Deňölçegli dykyzlykly paýlanyşyň a we b parametrlerini tapmak üçin sistemany çözeliň:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 24{,}43 \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 13{,}63 \end{cases}$$

$\begin{cases} a + b = 48{,}86 \\ b - a = 47{,}16 \end{cases}$ (*b=48,01; a=0,85*)

Onda *1/(b-a)=1/47,16=0,0212* bolup, dykyzlyk funksiýasy

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ eger \ x<0{,}85 \ bolsa, \\ 0{,}0212, eger \ \ 0{,}85\le x\le 48{,}01 \ bolsa, \\ 0, \ eger \ \ x>48{,}01 \ bolsa. \end{cases}$$

görnüşi alar. Indi, dykyzlyk funksiýasyny ulanyp, tapylan kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň bahalarynyň berlen interwallara düşmeginiň ähtimallyklaryny tapalyň (3.53-nji tablisa).

3.53-nji tablisa

I_i	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
p_i	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106
I_i	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45)	[45,50)	[50,55]
p_i	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

Bu tablisada

$P(0<X<5)=P(0{,}85<X<5)=4{,}15\cdot 0{,}0212=0{,}088,$

$P(45<X<50)=P(45<X<48{,}01)=3{,}01\cdot 0{,}0212=0{,}064$

bolýandygyny belläliň.

χ^2 ululygyň hasaplanyş tablisasyny düzeliň (3.53-nji tablisa).

3.54-nji tablisa

ω_i	p_i	ω_i-p_i	$(\omega_i-p_i)^2$	$(\omega_i-p_i)^2/p_i$
0,029	0,088	-0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	-0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	-0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	-0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	-0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	0,093	0,009	0,141
$\sum$				0,515

Netije-de,

$$\chi^2 = 70 \cdot 0{,}515 = 36{,}05; \quad l = 10; \quad t = 3; \quad r = 7.$$

Goşundynyň g.5-njy tablisasyndan *r=7*; χ^2=30 üçin *p=0,0001* ähtimallygy taparys. Tablisada *r* hemişelik, χ^2 ululygyň bahasy artýan halatynda *p* ähtimallygyň bahasynyň kiçelýäni üçin, χ^2=36.05 baha üçin *p<0.0001* boljagy düşnüklidir, bu bolsa *0,1*-den has kiçi ähtimallykdyr.

Diýmek, bu ýagdaýda teklip edilen teoretiki paýlanyş tejribe maglumatlaryny örän erbet beýan edýär.

Şeýle netijäni Romanowskiniň kriterisi hem tassyklaýar. Dogrudan hem, (3.30) boýunça

$$A = \frac{|x^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|36{,}05 - 7|}{\sqrt{14}} = \frac{29{,}05}{3{,}742} \approx 7{,}763 > 3.$$

Mysal. Saýlama paýlanyş berlen (3.39-njy tablisa). Tötän ululygyň normal paýlanandygy baradaky çaklamany Pirsonyň we Romanowskiniň nyşanlary arkaly anyklamaly.

Çözülişi. Hasaplaýyş tablisasyny düzeliň (3.55-nji tablisa).

3.55-nji tablisa

ω_i	p_i	ω_i-p_i	$(\omega_i$-$p_i)^2$	$(\omega_i$-$p_i)^2/p_i$
0,02	0,02	0,00	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	-0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	-0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,02
0,20	0,20	0,00	0,0000	0,00
0,14	0,15	-0,01	0,0001	0,0007
0,10	0,09	0,01	0,0001	0,001
0,04	0,04	0,00	0,0000	0,00
0,02	0,02	0,00	0,0000	0,00
$\sum$				0,0387

Şundan soň alarys

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{10} \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i} = 50 \cdot 0,0387 = 1,935\,;$$

l=10;   t=3;   r=l-t=10-3=7.

Onda χ^2 *=1,935= c, a=1; b=2* belgiläp, goşundynyň g.5-nji tablisasyndan *r=7* sütüni boýunça taparys:

χ^2 *=a=1; p(a)=p(1)=0,9948,*

χ^2 *=b=2; p(b)=p(2)=0,9598.*

(3.32) formulany ulanyp, *p=p(c)* aralyk ähtimallygy hasaplalyň

p= p(c) = p(1,935) = p(1) + (p(2)-p(1))·(c-a) = 0,9948 + +(0,9598-

-0,9948) (1,935-1) = 0,9948-0,035·0,935 = =0,9621 > 0,1.

Alnan ähtimallyk 0,1-den has uly, hat-da 1-e ýakyn. Onda Pirsonyň kriterisine görä, berlen saýlama paýlanyş normal kanunyň paýlanyşy bilen ýeterlik oňat beýan edilýär.

Romanowskiniň kriterisine görä hem alarys

$$A = \frac{|x^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|1,935-7|}{\sqrt{14}} = \frac{|-5,065|}{3,742} = \frac{5,065}{3,742} \approx 1,354 < 3.$$

Diýmek, “*berlen saýlama paýlanyş bilen teoretiki(normal) paýlanyşyň arasyndaky tapawutlylyk tötänleýin*” diýip hasap etmek bolar.

Mysal. Berlen saýlama paýlanyşy (3.56-njy tablisa) paýlanyşyň normal kanuny bilen deňlemeli. Statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşyklylygyny Pirsonyň we Romanowskiniň nyşanlary boýunça barlamaly.

Çözülişi. Paýlanyş boýunça $n=100$. Tötän ululygyň bahalary degişlilikde interwallaryň orta arifmetiki bahalary bilen gabat gelýär hasap edip, otnositel ýygylyklaryň paýlanyşyny düzeliň(3.57-nji tablisa).

3.56-njy tablisa

I_i	[4,1;4,2)	[4,2;4,3)	[4,3;4,4)	[4,4;4,5)	[4,5;4,6)	[4,6;4,7)	[4,7;4,8)	[4,8;4,9)	[4,9;5,0)
n_i	1	2	3	4	5	8	8	9	10
I_i	[5,0;5,1)	[5,1;5,2)	[5,2;5,3)	[5,3;5,4)	[5,4;5,5)	[5,5;5,6)	[5,6;5,7)	[5,7;5,8)	[5,8;5,9]
n_i	10	9	9	7	5	4	3	2	1

3.57-nji tablisa

x_i	4,15	4,25	4,35	4,45	4,55	4,65	4,75	4,85	4,95
ω_i	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,08	0,8	0,09	0,1
x_i	5,05	5,15	5,25	5,35	5,45	5,55	5,65	5,75	5,85
ω_i	0,1	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

Tötän ululygyň bahalarynyň 5 sana golaý bolany üçin X-5 tötän ululyk üçin kömekçi tablisany düzeliň (3.58-nji tablisa).

Bu tablisa boýunça alarys

$$M(X-5)=-0,001;\ M[(X-5)^2]=0,1404;\ M(X)=5+M(X-5)=4,999;$$

$$D(X)=M[(X-5)^2]-[M(X-5)]^2=0,1404;$$

$$D(x) = M[(x-5)^2] - [M(x-5)]^2 = 0,1404;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0,1404} \approx 0,375.$$

Onda X tötän ululygynyň dykyzlyk funksiýasyny şeýle ýazmak bolar

3.58-nji tablisa

x_i-5	ω_i	$(x_i -5)\ \omega_i$	$(x_i -5)^2\ \omega_i$
-0,85	0,01	-0,0085	0,0072
-0,75	0,02	-0,0150	0,0113
-0,65	0,03	-0,0195	0,0127
-0,55	0,04	-0,0220	0,0121
-0,45	0,05	-0,0225	0,0101
-0,35	0,08	-0,0280	0,0098
-0,25	0,08	0,0200	0,0050
-0,15	0,09	-0,0135	0,0020
-0,5	0,10	-0,0500	0,0003
0,5	0,10	0,0500	0,0003
0,15	0,09	0,0135	0,0020
0,25	0,09	0,0225	0,0056
0,35	0,07	0,0245	0,0086
0,45	0,05	0,0225	0,0101
0,55	0,04	0,0220	0,0121
0,65	0,03	0,0195	0,0127
0,75	0,02	0,0150	0,0113
0,85	0,01	0,0085	0,0072
$\sum$		-0,001	0,1404

$$f(x) = \frac{1}{0{,}375\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-5)^2}{2\cdot 0{,}375^2}} \qquad (**)$$

ýa-da *f(x)=2,67 Z_u*, bu ýerde

u=(x-5)/0,375=2,67(x-5), $Z_u = \left(\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\right) \cdot e^{-u^2/2}$.

Bu normal kanun boýunça paýlanan tötän ululygyň bahalarynyň (4,1;4,2), (4,2;4,3),...,(5,8;5,9) interwallaryna düşmeginiň ähtimallyklaryny kesgitläliň hem-de statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşyklylygyny Pirsonyň we Romanowskiniň nyşanlary boýunça anyklalyň. Onuň üçin hasaplaýyş tablisasyny düzeliň (3.59-nji tablisa).

Diýmek, $\chi^2 = 100 \cdot 0{,}014 = 1{,}4;\quad l = 18;\ t = 3;\ r = 15.$

Goşundynyň g.5-nji tablisasyndan *r = 15* üçin taparys:

$$\chi^2 = 1 = a; \qquad p(a) = p(1) = 1000;$$

$$\chi^2 = 2 = b; \qquad p(b) = p(2) = 1000; \quad c{=}1{,}4.$$

Onda

$$p=p(c)=p(a)+(p(b)-p(a))\cdot(c-a)=$$

$$=1{,}000+(1-1)(1{,}4-1)=1{,}000+0=1{,}000 > 0{,}1.$$

Pirsonyň kriterisine görä, saýlama paýlanyşyň normal paýlanyşdygy (matematiki garaşmasy 5-e deň, dispersiýasy 0,14-e deň) baradaky çaklama dogrudyr.

Romanowskiniň kriterisine görä,

$$A = \frac{|x^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|1{,}4 - 15|}{\sqrt{30}} = \frac{13{,}6}{5{,}477} \approx 2{,}483 < 3$$

Bu bolsa statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň arasyndaky tapawutlylyk bar bolsa hem onuň tötänden bolýandygyny, ýagny berlen paýlanyşyň (**) dykyzlyk funksiýasy bolan normal paýlanyşdygyny ýene bir gezek tassyklaýar.

Mysal. Berlen saýlama paýlanyşyň (3.44-nji tablisa) Şarlýeniň paýlanyş kanunyna kybapdaşdygy baradaky çaklamany barlamaly.

Çözülişi. Ýokarda işlenen mysalyň maglumatlary esasynda kömekçi tablisany düzeliň (3.60-njy tablisa).

4,95	4,85	4,75	4,65	4,55	4,45	4,35	4,25	4,15	x_i
-0,13	-0,40	-0,66	-0,93	-1,20	-1,47	-1,74	-2,00	-2,27	u_i
0,39	0,37	0,32	0,25	0,19	0,13	0,09	0,05	0,03	z_u
1,04	0,99	0,85	0,67	0,51	0,35	0,24	0,13	0,08	$f(x_i)$
0,10	0,10	0,09	0,02	0,05	0,04	0,02	0,02	0,01	$hf(x_i)$
0,10	0,09	0,08	0,08	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	w_i
0,10	0,10	0,09	0,07	0,05	0,04	0,02	0,02	0,01	p_i
0,00	-0,01	-0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	$w_i - p_i$
0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,000	0,000	0,0001	0,000	0,000	$(w_i-p_i)^2$
0,000	0,001	0,001	0,001	0	0	0,005	0	0	$(w_i-p_i)^2/p_i$

3.59-njy tablisa

∑	5,85	5,75	5,65	5,55	5,45	5,35	5,25	5,15	5,05
	2,27	2,00	1,74	1,47	1,20	0,93	0,66	0,40	0,13
	0,03	0,05	0,09	0,13	0,19	0,25	0,32	0,37	0,39
	0,08	0,13	0,24	0,35	0,51	0,67	0,85	0,99	1,04
	0,01	0,02	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,10	0,10
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,09	0,09	0,10
	0,01	0,02	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,10	0,10
	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,000
0,014	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000

3.60-njy tablisa

ω_i	p_i	ω_i-p_i	$(\omega_i-p_i)^2$	$(\omega_i-p_i)^2/p_i$
0,01	0,01	0	0,0000	0
0,05	0,04	0,01	0,0001	0,003
0,08	0,09	-0,01	0,0001	0,001
0,15	0,18	-0,03	0,0009	0,005
0,28	0,23	0,05	0,0025	0,011
0,21	0,20	0,01	0,0001	0,001
0,10	0,13	-0,03	0,0009	0,007
0,06	0,07	-0,01	0,0001	0,001
0,03	0,03	0,00	0,0000	0,000
0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
$\sum$				0,034

Netije-de,

$$\chi^2 = 100 \cdot 0{,}034 = 3{,}4 \ ; l = 10; \ \ t = 5; \ \ r = 10 - 5 = 5.$$

Goşundynyň g.5-nji tablisasyndan $r=5$ üçin taparys:

$\chi^2 = 3 = a$; $\quad$ $p(a)=p(3)=0{,}7000$;

$\chi^2 = 4 = b$; $\quad$ $p(b)=p(4)=0{,}5494; \ c=3{,}4.$

Onda

$P=p(c)=p(a)+(p(b)-p(a))\cdot(c-a)=0{,}7000+(0{,}5494-0{,}7)\cdot 0{,}4=0{,}7000-$
$-0{,}1506\cdot 0{,}4 = 0{,}63976 > 0{,}1$

Romanowskiniň kriterisini hem ulanalyň

$$A = \frac{|x^2-r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|3{,}4-5|}{\sqrt{10}} = \frac{1{,}6}{3{,}162} \approx 0{,}506 < 3.$$

Şeýlelikde, Pirsonyň we Romanowskiniň kriterilerine laýyklykda, berlen saýlama paýlanyşy Şarlýeniň paýlanyş kanuny bilen aňladyp boljakdygy baradaky çaklama tassyklanýar.

3.7.6. Kolmogorowyň ylalaşyk kriterisi

Goý, saýlama paýlanyş berlen bolsun (3.61-nji tablisa).

3.61-nji tablisa

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	x_3	...	x_l
$\boldsymbol{\omega_i}$	ω_1	ω_2	ω_3	...	ω_l

Bu ýerde, x_1, x_2, x_3, ..., x_l – tötän ululygyň degişli interwallarynyň orta bahalarydyr. Goý, interwallaryň uzynlyklary şol bir h sana deň bolsun. Kolmogorowyň kriterisinde statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň tapawutlylygynyň ölçegi hökmünde $F^*(x)$ we $F(x)$ funksiýalaryň tapawudynyň modulynyň maksimal bahasy ulanylýar, bu ýerde
$F^*(x)$, $F(x)$ – degişlilikde, tötän ululygyň saýlama paýlanyş funksiýasy hem-de teoretiki (integral) funksiýasy. Bu funksiýalaryň hasaplanyş formulalary bellidir:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \ bolsa, \\ \sum_{j=1}^{k} \omega_j, & x_k < x \le x_{k+1} \ (k = 1,2,\dots,l-1) \ bolsa, \\ 1, & x > x_l \ bolsa; \end{cases} \qquad (3.33)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \ bolsa, \\ \sum_{j=1}^{k} p_j, & x_k < x \le x_{k+1} \ (k = 1,2,\dots,l-1) \ bolsa, \\ 1, & x > x_l \ bolsa. \end{cases} \qquad (3.34)$$

Bu ýerde

$$p_j = hf(x_j),\ j=1,2,\dots,l; \qquad (3.35)$$

$f(x)$ – funksiýa bolsa X tötän ululygynyň paýlanyş dykyzlygydyr. Şundan soň

$$Q = \max|F*(x) - F(x)|,\ \lambda = Q\sqrt{n} \qquad (3.36)$$

bahalar kesgitlenýär, bu ýerde n – saýlamanyň göwrümi.

$$p(\lambda) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2} \qquad (3.37)$$

deňlikden, diňe tötän sebäpleriň hasabyna Q tapawudyň syn edilýänden az däldigini ähtimallygy tapylýar (g.7-nji tablisa).

Kolmogorowyň kriterisine görä, statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň arasyndaky kybapdaşlygy kesgitlemegiň algoritmi aşakdaky ädimlerden ybaratdyr:

1-nji ädim. Statistiki tablisanyň maglumatlary esasynda, (3.33) formula görä, $F^*(x)$ funksiýanyň bahalary tapylýar.

2-nji ädim. Belli dykyzlyk funksiýasy, (3.35) hem-de (3.34) formulalary ulanylyp, $F(x)$ funksiýanyň bahalary kesgitlenýär.

3-nji ädim. (3.36) formulalardan λ tapylýar.

4-nji ädim. Goşundynyň g.6-njy tablisasyndan $p(\lambda)$ kesgitlenýär.

5-nji ädim. Eger $p(\lambda) \geq 0.5$ bolsa, onda paýlanyşlaryň kybapdaşlygy baradaky çaklama tassyklanýar, ýogsa-da çaklama inkär edilýär.

Mysal. Saýlama paýlanyş berlen (-nji tablisa 3.29). Saýlama paýlanyşyň Puassonyň paýlanyşyna kybapdaşlyk derejesini Kolmogorowyň kriterisini ulanyp kesgitlemeli.

Çözülişi. Öň çözlen mysalyň maglumatlaryny ulanyp, tablisa düzeliň (3.62-nji tablisa). Bu ýerden:

$Q = max|F^*(X) - F(X)| = 0{,}02;\ n = 100;$

$\lambda = Q \cdot \sqrt{n} = 0{,}02 \cdot \sqrt{100} = 0{,}02 \cdot 10 = 0{,}2$.

3.62-nji tablisa

x_i	ω_i	$F^*(x_i)$	p_i	$F(x_i)$	$F^*(x_i)-F(x_i)$
0	0,07	0,07	0,08	0,8	-0,01
1	0,21	0,28	0,20	0,28	0
2	0,26	0,54	0,25	0,53	0,01
3	0,21	0,75	0,21	0,74	0,01
4	0,13	0,88	0,13	0,87	0,01
5	0,07	0,95	0,07	0,94	0,01
6	0,03	0,98	0,03	0,97	0,01
7	0,02	1,00	0,01	0,98	0,02

$p(\lambda)=p(0,2)=1,00\geq 0,5$. Diýmek, berlen saýlama paýlanyş Puassonyň paýlanyşyna kybapdaş.

Mysal. Saýlama paýlanyş berlen(3.63-nji tablisa). Kolmogorowyň kriterisini peýdalanyp, paýlanyşyň normal paýlanyş bilen kybapdaşdygyny barlamaly.

3.63-nji tablisa

I_i	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)	[10,12)	[12,14)	[14,16)	[16,18)	[18,20]
n_i	10	29	51	58	102	90	81	39	30	10

Çözülişi. Tablisa boýunça $n=10+29+...+10=500$. Berlen paýlanyşy şeýle görnüşde ýazalyň(3.64-nji tablisa).

3.64-nji tablisa

x_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
w_i	0,02	0.06	0,10	0,12	0,20	0,18	0,16	0,08	0,06	0,02

$X=2T-1$ belgiläp, täze T üýtgeýän üçin hasaplaýyş tablisasyny düzeliň (3.65-nji tablisa).

3.65-nji tablisa

t_i	ω_i	$\omega_i t_i$	$\omega_i t_i^2$
1	0,02	0,02	0,02
2	0,06	0,12	0,24
3	0,10	0,30	0,90
4	0,12	0,48	1,92
5	0,20	1,00	5,00
6	0,18	1,08	6,48
7	0,16	1,12	7,84
8	0,08	0,64	5,12
9	0,06	0,54	4,86
10	0,02	0,20	2,00
$\sum$		5,50	34,38

Soňky tablisadan alarys

$M(T)=5,50;\ M(T^2)=34,38;\ D(T)=34,38-30,25=4,13;$

$\sigma(T) = \sqrt{4{,}13} = 2{,}032$. $M(X)=2M(T)-1=2\cdot 5{,}5 - 1 = 10$;

$\sigma(X) = 2\sigma(T) = 4{,}064$.

Onda paýlanyş dykyzlygyny şeýle ýazmak bolar

$$f(x) = \frac{1}{4{,}064\sqrt{2\Pi}} \cdot e^{-(x-10)^2/(2\cdot 4{,}064^2)}, \qquad (^*)$$

ýa-da $f(x)=0{,}246\cdot Z_u$,

bu ýerde $u=(x-10)/4{,}064$; $Z_u = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$

Aşakdaky tablisalary düzeliň (3.66, 3.67-nji tablisalar).

3.66-njy tablisa

x_i	u_i	Z_u	$f(x_i)$	$hf(x_i)$
1	-2,214	0,035	0,009	0,02
3	-1,722	0,091	0,022	0,04
5	-1,230	0,187	0,046	0,09
7	-0,738	0,303	0,075	0,15
9	-0,246	0,387	0,095	0,19
11	0,246	0,387	0,095	0,19
13	0,738	0,303	0,075	0,15
15	1,230	0,187	0,046	0,09
17	1,722	0,091	0,022	0,04
19	2,214	0,035	0,009	0,02

Ahyrky tablisanyň soňky sütünininiň bahalary nola ýakyn. Şu ýagdaýyň özi hem berlen saýlama paýlanyşyň normal paýlanyşdygyny görkezýär. Bu soragy gutarnykly çözmek üçin Kolmogorowyň kriterisinden peýdalanalyň.

Tablisanyň maglumatlary boýunça

$Q=max|F^*(x)-F(x)|=|0,03|=0,03.\ n=500$

bolany üçin

$$\lambda = Q \cdot \sqrt{n} = 0,03 \cdot \sqrt{500} \approx 0,67.$$

3.67-nji tablisa

x_i	ω_i	$hf(x_i)$	$F^*(x_i)$	$F(x_i)$	$F^*(x_i)-F(x_i)$
1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,00
3	0,06	0,04	0,08	0,06	0,02
5	0,10	0,09	0,18	0,15	0,03
7	0,12	0,15	0,30	0,30	0,00
9	0,20	0,19	0,50	0,49	0,01
11	0,18	0,19	0,68	0,68	0,00
13	0,16	0,15	0,84	0,83	0,01
15	0,08	0,09	0,92	0,92	0,00
17	0,06	0,04	0,98	0,96	0,02
19	0,02	0,02	1	0,98	0,02

Goşundynyň g.6-njy tablisasyndan taparys

$P(0,65)=0,7920;\ P(0,70)=0,7112.$

λ bahanyň artmagy bilen $P(\lambda)$ bahanyň kemelýäni üçin

$0,7112<P(\lambda)<0,7920,$

Diýmek, $P(\lambda)\geq 0.5$ şert ýerine ýetýär. Onda, islendik x üçin $F^*(x)\approx F(x)$ takmyn deňligiň absolýut ýalňyşlygy 0,75 ähtimallyk bilen 0.03-den kiçidir.

3. Gönükmeler we meseleler

3.1. Saýlama berlen

2	5	11	9	12
3	13	8	4	7
6	8	7	5	9
12	10	9	11	12
11	8	13	12	8

Bu maglumatlar boýunça

1) Tötän ululygyň bahalarynyň we olaryň degişli ýygylyklarynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýan tablisany düzmeli.
2) Saýlama paýlanyş tablisasyny düzmeli.
3) Paýlanyşyň poligonyny şekillendirmeli.

Jogaby:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	1	1	1	2	1	2	4	3	1	3	4	2

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ω_i	1/25	1/25	1/25	2/25	1/25	2/25	4/25	3/25	1/25	3/25	4/25	2/25

3.2. 3.1-gönükme boýunça saýlamany *X* ÜTU boýunça maglumatlar hasap edip, [1;15] kesimi $l=5$ böleklere bölüp, ýygylyklaryň paýlanyşynyň we saýlama paýlanyşyň tablisalaryny doldurmaly, statistiki paýlanyşyň gistogrammasyny gurmaly.

Jogaby:

I_i	[1,3)	[3,6)	[6,9)	[9,12)	[12,15]
n_i	1	4	7	7	6

I_i	[1,3)	[3,6)	[6,9)	[9,12)	[12,15]
ω_i	1/25	4/25	7/25	7/25	6/25

3.3. Saýlama paýlanyş berlen

x_i	2	4	6	8
n_i	4	6	7	3

Saýlama paýlanyş funksiýasyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Otnositel ýygylyklar boýunça saýlama paýlanyş hataryny ýazalyň:

x_i	2	4	6	8
ω_i	4/20	6/20	7/20	3/20

Onda kesgitlemä görä, saýlama paýlanyş funksiýasy şeýle tapylar:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \le 2 \quad bolsa, \\ 4/20 \quad , \quad 2 < x \le 4 \quad bolsa, \\ 10/20 \quad , \quad 4 < x \le 6 \quad bolsa \ , \\ 17/20 \quad , \quad 6 < x \le 8 \quad bolsa \ , \\ 1 \ , \quad x > 8 \quad bolsa \ . \end{cases}$$

3.4.Käbir saýlama berlen

14	16	20	15	18	12	13	10	17	15	12
17	11	17	13	11	17	16	12	16	13	16
12	19	18	9	7	18	15	11	11	14	13
10	16	15	17	21	13	17	16	13	15	15
18	14	16	14	10	14	8	15	16	16	14

Ýedi interwal boýunça saýlamanyň statistiki toplumyny gurmaly, saýlama paýlanyş we dykyzlyk funksiýalaryny ýazmaly.

Çözülişi. Bu ýerde:

$n=55.\ a=x_{min}=7;\ b=x_{max}=21.\ b-a=21-7=14.\ l=7;$

$h=(b-a)/l=14/7=2.$

Onda $l=7$ interwallar boýunça hasaplanyş tablisasyny guralyň:

1	2	3	4	5	6
Interwal nomeri i	Interwal I_i	Ýygylyk n_i	Otnositel ýygylyk $w_i=n_i/n$	Toplanan otnositel ýygylyk	w_i/h
1	[7;9)	2	0,0364	0,0364	0,011820
2	[9;11)	4	0,0726	0.1091	0,05455
3	[11;13)	8	0,1455	0,2546	0,12730
4	[13;15)	12	0,2182	0,4728	0,23640
5	[15;17)	16	0,2909	0,7637	0,38185
6	[17;19)	10	0,1818	0,9455	0,47275
7	[19;21]	3	0,0545	1,0000	0,50000

Onda tablisanyň 5-nji sütüni boýunça saýlama paýlanyş funksiýasyny şeýle taparys:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le 7\ bolsa,\\ 0{,}0364\ , & 7<x\le 9\ \ bolsa,\\ 0{,}1091\ , & 9<x\le 11\ bolsa,\\ 0{,}2546\ , & 11<x\le 13\ bolsa,\\ 0{,}4728\ , & 13<x\le 15\ bolsa,\\ 0{,}7637\ , & 15<x\le 17\ bolsa,\\ 0{,}9455\ , & 17<x\le 19\ bolsa,\\ 1{,}0000\ , & x>19\ bolsa. \end{cases}$$

Tablisanyň 6-nji sütüni boýunça statistiki dykyzlyk funksiýasyny kesgitläris, onuň grafigi gistogrammadyr.

$$f^*(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le 7\ bolsa,\\ 0{,}01820\ , & 7<x\le 9\ \ bolsa,\\ 0{,}05455\ , & 9<x\le 11\ bolsa,\\ 0{,}12730\ , & 11<x\le 13\ bolsa,\\ 0{,}23640\ , & 13<x\le 15\ bolsa,\\ 0{,}38185\ , & 15<x\le 17\ bolsa,\\ 0{,}47275\ , & 17<x\le 19\ bolsa,\\ 0{,}50000\ , & x>19\ bolsa. \end{cases}$$

3.5. Käbir saýlama berlen

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	46	42	43	57	44	54	59
77	47	28	27	49	49	14	28	61	30
61	35	47	46	58	45	42	21	30	40
67	65	39	35	41	60	54	42	59	60

On sany interwal boýunça saýlamanyň statistiki toplumyny gurmaly, saýlama paýlanyş we dykyzlyk funksiýalaryny ýazmaly.

3.6. Saýlama paýlanyş berlen

x_i	4	6	10	12
n_i	10	15	5	20

Tötän ululygyň orta bahasyny tapmaly.

Jogaby: $\overline{x} = 420/40 = 10{,}5.$

3.7. Saýlama paýlanyş berlen

3.8.

x_i	14,8	14,9	15	15,1	15,2
n_i	4	3	7	6	5

Tötän ululygyň orta bahasyny tapmaly.

Jogaby: $\overline{x} = 15 + 0{,}02 = 15{,}02.$

3.9. 3.6-njy gönükmäniň şerti boýunça, saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany kesgitlemeli.

3.10. 3.7-nji gönükmäniň şerti boýunça, saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany tapmaly.

3.11. 3.6-njy gönükmäniň şerti boýunça saýlamany ulanyp, *X* DTU-nyň ilkinji dört tertipli başlangyç we merkezi momentlerini, asimmetriýasyny hem-de ekssesini tapmaly.

3.12. 3.7-nji gönükmäniň şerti boýunça saýlamany ulanyp, *X* DTU-nyň ilkinji dört tertipli başlangyç we merkezi momentlerini, asimmetriýasyny hem-de ekssesini hasaplamaly.

3.13. Berlen saýlama paýlanyşyň Puassonyň paýlanyşyna ýakyndygyny görkezmeli hem-de tötän ululygyň bahalary we bu bahalaryň ähtimallyklary arasyndaky baglanyşygy tapmaly:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	1	3	8	14	17	17	15	10	7	5	2	1

Jogaby: *M(X)=5,06; D(X)=5,01.*

3.14. Tejribe maglumatlaryny deňölçegli dykyzlykly paýlanyş kanuny arkaly derňemeli

I_i	[-1;1)	[1;3)	[3;5)	[5;7)	[7;9]
n_i	6	7	4	5	8

Jogaby: *M(X)=4,13; D(X)=9,07; a=-1,09; b=9.35.*

3.14. Berlen saýlama paýlanyşyň normal paýlanyşa golaýdygyny görkezmeli, paýlanyşyň otnositel ýygylyklarynyň gistogrammasyny hem-de dykyzlyk funksiýasynyň grafigini gurmaly.

I_i	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)
n_i	4	4	8	16	18	20	30
I_i	[8;9)	[9;10)	[10;11)	[11;12)	[12;13)	[13;14)	[14;15]
n_i	28	22	18	14	10	4	4

Jogaby: *M(X)=8,02; D(X)=8.23;* $\sigma(X)\approx 2{,}87$ *;*

$f(x)=1/(2{,}87\sqrt{2\pi})\cdot e^{-(x-8{,}02)^2/(2\cdot 2{,}87^2)}$.

3.15. Berlen saýlama paýlanyş üçin Şarlýeniň kanunyny ulanmaly.

I_i	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)	[10,12)	[12,14)	[14,16)	[16,18)	[18,20]
n_i	2	6	9	14	26	22	17	11	7	3

3.16. 3.13-nji meseläniň şertindäki saýlama paýlanyş boýunça deňölçegli dykyzlyk funksiýasy kesgitlenen.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1{,}09\ we\ x>9{,}35\ bolanda,\\ \\ 10{,}44 & -1{,}09\ \le x\le 9{,}35\ bolanda\end{cases}$$

Statistiki we teoretiki paýlanyşlaryň ylalaşýandygyny Pirsonyň we Romanowskiniň kriterileri boýyunça barlamaly.

3.17. 3.15-nji meseläniň şertinde görkezilen saýlama paýlanyş Kolmogorowyň kriterisini peýdalanyp, paýlanyşyň Şarlýeniň kanuny bilen kybapdaşdygyny barlamaly.

Goşundy

g.1-nji tablisa

$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ **funksiýanyň bahalary**

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.40	399	399	3988	396	3984	398	3980	3977	3973
0.1	3970	396	396	3956	395	3945	394	3932	3925	3918
0.2	3910	390	389	3885	387	3867	385	3847	3836	3825
0.3	3814	380	379	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	367	365	3637	362	3605	359	3572	3555	3538
0.5	3521	350	348	3467	345	3429	341	3391	3372	3352
0.6	3332	331	329	3271	325	3230	321	3187	3166	3144
0.7	3123	310	306	3056	304	3011	299	2966	2943	2920
0.8	2897	287	285	2827	280	2780	275	2732	2709	2685
0.9	2661	264	261	2589	256	2541	252	2492	2468	2444
1.0	2420	239	237	2347	232	2299	227	2251	2227	2203
1.1	2179	215	213	2107	208	2059	203	2012	1989	1965
1.2	1942	192	189	1872	185	1826	180	1781	1758	1736
1.3	1714	169	167	1647	163	1604	158	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449

g.1-nji tablisanyň dowamy

2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

g.2-nji tablisa

$$\Phi(x) = \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \text{ и } \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

funksiýalaryň bahalary

X	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	X	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	X	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	X	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0.00	0.000	0.000	0.60	0.6039	0.2257	1.20	0.9103	0.3849	1.80	0.9891	0.4641
0.02	0.0226	0.0080	0.62	6194	2324	1.22	9155	3888	1.82	0.9899	4656
0.04	0.0451	0.0160	0.64	6346	2389	1.24	9205	3925	1.84	9907	4671
0.06	0.0676	0.0239	0.66	6494	2454	1.26	9252	3962	1.86	9915	4686
0.08	0.0901	0.0319	0.68	6638	2517	1.28	9297	3997	1.88	9922	4699
0.10	0.1125	0.0398	0.70	6778	2580	1.30	9340	4032	1.90	9928	4713
0.12	0.1348	0.0478	0.72	6914	2642	1.32	9381	4066	1.92	9934	4726
0.14	0.1569	0.557	0.74	7047	2703	1.34	9419	4099	1.94	9939	4738
0.16	0.1790	0.0636	0.76	7175	2764	1.36	9456	4131	1.96	9944	4750
0.18	0.2009	0.0714	0.78	7300	2823	1.38	9490	4162	1.98	9949	4761
0.20	0.2227	0.0793	0.80	7421	2881	1.40	9523	4192	2.00	9953	4772
0.22	0.2443	0.871	0.82	7538	2939	1.42	9554	4222	2.05	9963	4798
0.24	0.2657	0.0948	0.84	7651	2995	1.44	9583	4251	2.10	9970	4821
0.26	0.2869	0.1026	0.86	7761	3051	1.46	9610	4279	2.15	9976	4842
0.28	0.3079	0.1103	0.88	7867	3106	1.48	9636	4306	2.20	9981	4860
0.30	0.3286	0.1179	0.90	7969	3159	1.50	9661	4332	2.25	9985	4877
0.32	0.3491	0.1255	0.92	8068	3212	1.52	9684	4357	2.30	9988	4892
0.34	0.3694	0.1331	0.94	8163	3264	1.54	9706	4382	2.35	9991	4906
0.36	0.3893	0.1406	0.96	8254	3315	1.56	9726	4406	2.40	9993	4918
0.38	0.4090	0.1480	0.98	8342	3365	1.58	9745	4429	2.45	9995	4928
0.40	0.4284	0.1554	1.00	8427	3413	1.60	9763	4452	2.50	9996	4939
0.42	0.4475	0.1628	1.02	8508	3461	1.62	9780	4474	2.60	9998	4953
0.44	0.4662	0.1700	1.04	8586	3508	1.64	9796	4495	2.70	9999	4965
0.46	0.4847	0.1772	1.06	8661	3554	1.66	9811	4515	2.80	9999	4974
0.48	0.5027	0.1844	1.08	8733	3599	1.68	9825	4535	2.90	0.9999	4981
0.50	0.5205	0.1915	1.10	8802	3643	1.70	9838	4554	3.00	1.0000	4986
0.52	0.5379	0.1985	1.12	8868	3686	1.72	9850	4573	3.20	1.0000	4993
0.54	0.5549	0.2054	1.14	8931	3729	1.74	9861	4591	3.40	1.0000	4996
0.56	0.5716	0.2123	1.16	8991	3770	1.76	9872	4608	3.60	1.0000	4998
0.58	0.5879	0.2190	1.18	0.9048	0.3810	1.78	0.9882	0.4625	3.80	1.0000	0.4999

g.3-nji tablisa

e^{-x} funksiýanyň bahalary

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0	1,00	0,31	0,733	0,62	0,5379	0,93	0,3946	1,24	0,2894
0,01	0,9900	0,32	0,7261	0,63	0,5326	0,94	0,3906	1,25	0,2865
0,02	0,9802	0,33	0,7189	0,64	0,5273	0,95	0,3867	1,26	0,2837
0,03	0,9704	0,34	0,7118	0,65	0,5220	0,96	0,3829	1,27	0,2808
0,04	0,9608	0,35	0,7047	0,66	0,5169	0,97	0,3791	1,28	0,2780
0,05	0,9512	0,36	0,6977	0,67	0,5117	0,98	0,3753	1,29	0,2753
0,06	0,9418	0,37	0,6907	0,68	0,5066	0,99	0,3716	1,3	0,2725
0,07	0,9324	0,38	0,6839	0,69	0,5016	1	0,3679	1,31	0,2698
0,08	0,9231	0,39	0,6771	0,7	0,4966	1,01	0,3642	1,32	0,2671
0,09	0,9139	0,4	0,6703	0,71	0,4916	1,02	0,3606	1,33	0,2645
0,10	0,9048	0,41	0,6637	0,72	0,4868	1,03	0,3570	1,34	0,2618
0,11	0,8958	0,42	0,6570	0,73	0,4819	1,04	0,3535	1,35	0,2592
0,12	0,8869	0,43	0,6505	0,74	0,4771	1,05	0,3499	1,36	0,2567
0,13	0,8781	0,44	0,6440	0,75	0,4724	1,06	0,3465	1,37	0,2541
0,14	0,8694	0,45	0,6376	0,76	0,4677	1,07	0,3430	1,38	0,2516
0,15	0,8607	0,46	0,6313	0,77	0,4630	1,08	0,3396	1,39	0,2491
0,16	0,8521	0,47	0,6250	0,78	0,4584	1,09	0,3362	1,4	0,2466
0,17	0,8437	0,48	0,6188	0,79	0,4538	1,1	0,3329	1,41	0,2441
0,18	0,8353	0,49	0,6126	0,8	0,4493	1,11	0,3296	1,42	0,2417
0,19	0,8270	0,5	0,6065	0,81	0,4449	1,12	0,3263	1,43	0,2393
0,20	0,8187	0,51	0,6005	0,82	0,4404	1,13	0,3230	1,44	0,2369
0,21	0,8106	0,52	0,5945	0,83	0,4360	1,14	0,3198	1,45	0,2346

g.4-nji tablisa

Γ(p),(1$\leq p \leq 2$ bolanda) – **gamma – funksiýanyň bahalary**

p	*Γ(p)*	*p*	*Γ(p)*	*p*	*Γ(p)*	*p*	*Γ(p)*
1,00	1,0000	1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,75	0,9191
1,01	0,9943	1,26	9044	1,51	8866	1,76	9214
1,02	9888	1,27	9025	1,52	8870	1,77	9238
1,03	9835	1,28	9007	1,53	8876	1,78	9262
1,04	9784	1,29	8990	1,54	8882	1,79	9288
1,05	9735	1,30	8975	1,55	8889	1,80	9314
1,06	9687	1,31	8960	1,56	8896	1,81	9341
1,07	9642	1,32	8946	1,57	8905	1,82	9368
1,08	9597	1,33	8934	1,58	8914	1,83	9397
1,09	9555	1,34	8922	1,59	8924	1,84	9426
1,10	9514	1,35	8912	1,60	8935	1,85	9456
1,11	9474	1,36	8902	1,61	8947	1,86	9487
1,12	9436	1,37	8893	1,62	8959	1,87	9518
1,13	9399	1,38	8885	1,63	8972	1,88	9551
1,14	9364	1,39	8879	1,64	8986	1,89	9584
1,15	9330	1,40	8873	1,65	9001	1,90	9618
1,16	9298	1,41	8868	1,66	9017	1,91	9652
1,17	9267	1,42	8864	1,67	9033	1,92	9688
1,18	9237	1,43	8860	1,68	9050	1,93	9724
1,19	9209	1,44	8858	1,69	9068	1,94	9761
1,20	9182	1,45	8857	1,70	9086	1,95	97,99
1,21	9156	1,46	8856	1,71	9106	1,96	9837
1,22	9131	1,47	8856	1,72	9126	1,97	9877
1,23	9108	1,48	8857	1,73	9147	1,98	9917
1,24	9085	1,49	8859	1,74	9168	1,99	9958
						2,00	1,0000

g.5-nji tablisa

χ^2 kriteri üçin ähtimallyklaryň bahalary

r / χ^2	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.317	0.606	0.801	0.909	0.962	0.985	0.994	0.998
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	660	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0156	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21			0001	0003	0008	0018	0038	0071
22			0001	0002	0005	0012	0025	0049
23			0000	0001	0003	0008	0017	0034
24				0001	0002	0005	0011	0023
25				0001	0001	0003	0008	0016
26				0000	0001	0002	0005	0010
27					0001	0001	0003	0007
28					0000	0001	0002	0005
29						0001	0001	0003
30						0000	0001	0002

g.5-nji tablisanyň dowamy

r / χ^2	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.9994	0.9998	0.9899	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	9915	9963	9985	9994	9998	9999	1.0000	1.0000
3	9643	9814	9907	9955	9979	9991	0.9896	0.9998
4	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977	9989
5	8343	8913	9312	9580	9752	9858	9921	9958
6	7399	8153	8734	9161	9462	9665	9797	9881
7	6371	7254	7991	8576	9022	9347	9576	9733
8	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238	9489
9	4373	4321	6219	7029	7729	8311	8775	9134
10	3505	4405	5304	6160	6939	7622	8197	8666
11	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526	8095
12	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790	7440
13	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023	6728
14	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255	5987
15	0909	1321	1825	2414	3074	3782	4514	5246
16	0669	0996	1411	1912	2491	3134	3821	4530
17	0487	0744	1079	1496	1993	2562	3189	3856
18	0352	0550	0816	1157	1575	2068	2627	3239
19	0252	0403	0611	0885	1231	1649	2137	2687
20	0179	0293	0453	0671	0952	1301	1719	2202
21	0126	0211	0334	0504	0729	1016	1368	1785
22	0089	0151	0244	0375	0554	0786	1078	1432
23	0062	0107	0177	0277	0417	0603	0841	1137
24	0043	0076	0127	0203	0311	0458	0651	0895
25	0030	0053	0091	0148	0231	0346	0499	0698
26	0020	0037	0065	0107	0170	0259	0380	0540
27	0014	0026	0046	0077	0154	0193	0287	0415
28	0010	0018	0032	0055	0090	0142	0216	0316
29	0006	0012	0023	0039	0065	0104	0161	0239
30	0004	0009	0016	0028	0047	0076	0119	0180

g.6-njy tablisa

$P(\lambda) = 1 - \sum_{i=-\infty}^{\infty}(-l)^j e^{-2j^2\lambda^2}$ **funksiýanyň bahalary**

λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)
0.00	1.0000	0.45	0.9874	0.90	0.3927	1.70	0.0062
0.05	1.0000	0.50	9639	0.95	3275	1.80	0032
0.10	1.0000	0.55	9228	1.00	2700	1.90	0015
0.15	1.0000	0.60	8643	1.10	1777	2.00	0007
0.20	1.0000	0.65	7920	1.20	1122	2.10	0003
0.25	1.0000	0.70	7112	1.30	0681	2.20	0001
0.30	1.0000	0.75	6272	1.40	0397	2.30	0.0001
0.35	0.9997	0.80	5441	1.50	0222	2.40	0.0000
0.40	0.9972	0.85	4653	1.60	0120	2.50	0.0000

Edebiýat:

1. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. I-II tom.Türkmen döwlet neşirýat gullugy. Aşgabat, 2010. ý.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynda ýurdymyzyň ylym wekilleri bilen maslahatda "Türkmenistanyň ylmy: özgertmeler strategiýasy" barada sözlän sözi "Türkmenistan gazeti. A., 2012 ýylyň 13-nji iýuny"
3. Aşyrow O., Gurbanmämmedow N., Soltanow H., Almazow M. Ýokary matematika. II kitap. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. Aşgabat, TDNG, 2012
4. Annaýew T. Ähtimallyklar teoriýasy we matematiki statistika. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. –A.:TDNG, 2013
5. Hudaýberenow Ö.G. Ýokary matematika. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. Aşgabat, TDNG, 2007
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.:Высшая школа, 2004.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.:Высшая школа, 2003.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2005.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В двух частях, Часть I, II. М.: Высшая школа, 1986.
10. Венецкий И.Г., Кильдишев Г.С. Теория вероятностей и математической статистики. – М.: «Статистика», 1975
11. Смирнов Н.В. и Дунин – Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: «Наука», 1965
12. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. /А.И.Кибзун[и др.] М.2002.

Mazmuny

Giriş. 7
Ähtimallyklar teoriýasynyň we matematiki statistikanyň predmeti hem-de meseleleri 7
1. Ähtimallyklar teoriýasynyň elementleri 11
1.1. Tötän wakalar 11
1.2. Wakalaryň üstünde geçirilýän amallar 12
1.3. Wakanyň ýygylygy we ähtimallygy 13
1.4. Ähtimallygyň klassyky kesgitlenişi 16
1.5. Ähtimallygyň statistiki kesgitlenişi 18
1.6. Ähtimallygyň geometriki kesgitlenişi 20
1.7. Kombinatorikanyň esasy formulalary 22
1.8. Gaýtarylmasyz saýlama barada mesele 24
1.9. Wakalaryň jeminiň ähtimallygyny hasaplamakdaky esasy formulalar 25
1.10. Wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygyny hasaplamakdaky formulalar 27
1.11. Doly ähtimallyklar formulasy 29
1.12. Çaklamalaryň ähtimallyklarynyň (Beýesiň) formulasy 30
1.13. Gaýtalanýan synaglar üçin formulalar 30
1. Gönükmeler we meseleler 33
2. Tötän ululyklar 48
2.1. Diskret tötän ululyklaryň paýlanyşlary barada düşünje 48
2.2. Tötän ululyklaryň binomial we Puasson paýlanyş kanunlary 49
2.3. Bagly däl tötän ululyklaryň paýlanyşlary 51
2.4. Diskret tötän ululygynyň matematiki garaşmasy 52
2.5. Diskret tötän ululygynyň dispersiýasy 55
2.6. Tötän ululyklaryň paýlanyş funksiýalary 57
2.7. Üznüksiz tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlyk funksiýasy 61
2.8. Üznüksiz tötän ululyklaryň matematiki garaşmasy we dispersiýasy 64
2.9. Tötän ululyklaryň goşmaça san häsiýetlendirijileri 66
2.10. Tötän ululyklaryň esasy paýlanyş kanunlary 72
2.10.1. Deňölçegli paýlanyş 74
2.10.2. Görkezijili paýlanyş. Ygtybarlylyk funksiýasy 74

2.10.3. Normal paýlanyş kanuny. Laplasyň funksiýasy 77
2.10.4. Paýlanyşlaryň Weýbull kanuny 81
2.11. Uly sanlaryň kanunlary 85
2.12. Tötän ululyklaryň sistemasy 89
2.13. Ikiölçegli paýlanyşlar we olaryň şertli paýlanyş kanunlary 99
2.14. Regressiýa çyzyklary. Korrelýasiýa.......................................104
2. Gönükmeler we meseleler...111
3. Matematiki statistikanyň elementleri..123
3.1. Matematiki statistikanyň meseleleri 123
3.3. Saýlama paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary.............................131
3.4. Tötän ululygyň orta bahasyny kesgitlemek 134
3.5. Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany kesgitlemek 136
3.6. Saýlama boýunça tötän ululygyň momentlerini, asimmetriýasyny we ekssesini tapmak 140
3.7. Tejribe maglumatlary esasynda tötän ululyklaryň paýlanyş kanunlaryny kesgitlemek...146
3.7.1. Puassonyň paýlanyşynyň hataryny tapmak 146
3.7.2. Deňölçegli dykyzlykly paýlanyşy kesgitlemek 148
3.7.3. Saýlama normal paýlanyşy tapmak 151
3.7.4. Saýlama paýlanyşy Şarlýeniň paýlanyşyna kybaplaşdyrmak158
3.7.5. Pirsonyň we Romanowskiniň ylalaşyk kriterileri..................162
3.7.6. Kolmogorowyň ylalaşyk kriterisi 177
3. Gönükmeler we meseleler...182
Goşundy 188
Edebiýat: 196