1964-нжи йыл*

1. n — битин сан боланда $n^5 - n$ аңлатманың 30-а бөлүнйәндигини субут эдиң.

2. Деңлемәни чөзмели:

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^{16})(1 + a^{32}).$$

3. Жеми тапмалы:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (n + 1)x^n .$$

4. Деңлемәни чөзмели:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3} .$$

5. Системаны чөзмели:

$$\begin{cases} x^2 - x^2y^2 + y^2 = 19 \\ x - xy + y = 4 \end{cases}$$

6. R радиуслы тегелегиң ичинден A, B ве $Ç$ нокатларда бири-бирине галташян үч дең тегелек чызылан. AB в[illegible] BC хем CA дугалар билен чәкле[illegible] эгричызыкл[illegible] трапецияның мей[illegible] хасапла[illegible]

7. [illegible]иңишли[illegible]ң берлен нокадындан берлен текизликде ятан ве бир нокатда кесишйән гөни чызыклара индерилен перпендикулярларың эсасларының геометрик орунларыны тапмалы.

8. ABC ве $A_1B_1C_1$ ики үчбурчлук параллел дәл текизликде ятярлар ве оларың жүбүтме-жүбүт параллел дәл тараплары бар. Шунлукда дегишли депелери бирлешдирйән гөни чызыклар бир O нокатда кесишйәрлер. Үчбурчлукларың дегишли тарапларының довамларының жүбүтме-жүбүт кесишйәндиклерини ве оларың кесишме нокатларының бир гөни чызыгың үстүнде ятяндыгыны субут этмели.

9. Берлен ики төвереге галташян (дүрли радиуслы ве оларың бири бейлекисиниң ичинде ятяр) ве берлен төвереклериң бириниң үстүнде ятан A нокатдан гечйән төверек чызмалы.

10. R ве r радиуслы ики төверек бири-бирине дашындан галташяр. Төвереклере дашкы галташян гечирилен ве онуң галташма нокатлары төвереклериң кесишме нокады билен бирлешдирилен. Эмеле гелен үчбурчлугың тарапларыны кесгитлемели.

* 1654-нжи йылда олимпиада диңе 10-11-нжи класларда гечирилди.

1965-нжи йыл

11. (7,8) Квадратың периметри 20 % артанда квадратың мейданы нәче процент артар?

12. (7) A ве B пунктларың арасында үч теплоход гатнаяр. Биринжи теплоход (эйләк-бейләк) әхли ёлы 6 суткада гечйәр; икинжи теплоход әхли ёлы 7 суткада гечйәр; үчүнжи теплоход әхли ёлы 8 суткада гечйәр. Теплоходларың үчүси-де A пунктдан бир вагтда чыканларындан соң A пунктда нәче гүнден душушарлар:

1) Биринжи билен икинжи
2) Икинжи билен үчүнжи
3) Үчүси-де билеликде.

3. a эсасы h_a бейиклиги ве b тарапа гечирилен медианасы боюнча ABC үчбурчлугы гурмалы.

4 (7-10). Гысгалмаян дробь берлен. Шу дробы 1-е членли долдурян дробуң-да гысгалмаяндыгыны субут этмели.

(7). Үч окувчы депдер сатын алып, оны ашакдакы ялы пайлашыпдырлар:

Биринжи окувчы депдерлериң хеммесиниң $\frac{1}{3}$ - ни ве ене 8 депдер алыпдыр;

Икинжи окувчы галан депдерлериң $\frac{1}{3}$ - ни ве ене 8 депдер алыпдыр.

Үчүнжи окувчы галан депдерлериң $\frac{1}{3}$ - ни ве ене 8 депдер алыпдыр.

Окувчыларың хер бири нәче депдер сатын алыпдыр?

16 (8). Көпелдижилере дагытмалы:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 .$$

17 (8). Эгер x_1 ве x_2 санлар $x^2 + bx + b^2 + a^2 = 0$ деңлемәниң көклери болса, онда

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = -a$$

субут этмели.

18 (8). 77^{100} сан нәхили цифр билен гутаряр?

19 (8). b ве c үчбурчлугың берлен тараплары ве $\angle A = 2 \angle B$. a тарапыны тапмалы.

20 (9). Берлен ики нокат аркалы гечйән ве берлен гөни чызыга галташян төверек гурмалы.

21 (9). Үчбурчлугың үч медианасының жеминиң периметринден кичидигини, эмма периметриң $\frac{3}{4}$ - ден улудыгыны субут этмели.

22 (9). Дүзүминде дүрли процентли миси болан аграмлары 8 кг ве 10 кг ики бөлек сплавдан дең аграмлы ики бөлеги кесип алыпдырлар. Шу бөлеклериң хер бирини галан бөлеклериң бейлекиси билен эреденлеринден соңра тәзе алнан бөлеклериң хер бириндәки кесимиң проценти дең болупдыр. Кесип алнан бөлеклериң хер бириниң аграмы нәче?

23 (9,10). Деңлемәни чөзмели:

$$\sqrt{4a^2 + 8a + 4} - \sqrt{a^2 - 2a + 1} = 3 .$$

24 (9). M ве N нокатлар херекет эдйәрлер, шунлукда MN гөни чызыгың MN кесими херекетсиз A нокат аркалы гечйәр ве шол нокатда берлен гатнашыкда бөлүнйәр. Эгер M нокат төверек боюнча херекет эдйән болса, онда N нокадың-да төверек боюнча херекет эдйәндигини субут этмели.

25 (10). Деңлемелер системасыны чөзмели:

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80 \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 5 \end{cases}$$

26 (10). Бурчлары ве ики гаршылыклы тараплары боюнча дөртбурчлук гурмалы.

27 (10). Деңсизлиги субут этмели:

$$P \geq 3r\sqrt{3} ,$$

бу ерде P — ярым периметр, r — ичинден чызыдан төверегиң радиусы.

28 (10). Деңлиги субут этмели:

$$S = \sqrt{r_a r_b r_c} ,$$

бу ерде r_a, r_b, r_c — үчбурчлугың дашяныңдан чызылан төверереклериң радиуслары.

29 (11). Эгер

$$y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}},$$

$$z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$$

болса, онда

$$x = 10^{1-\frac{1}{1-\lg z}}$$

субут этмели.

30 (11). Эгер болса, $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$

онда

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$$

субут этмели.

31 (11). Эгер n ислендик битин положител сан болса, онда

$$3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$$

аңлатманың 19-а бөлүнйэндигини субут этмели.

32 (11). Радиусы r деӊ болан шар тетраэдриӊ хемме гапыргаларына галташяр. Тетраэдриӊ гапыргасынын узынлыгыны тапмалы.

33 (11). Учлары берлен атанак ики гөни чызыгыӊ үстүнде болан кесимлериӊ орталарыныӊ көплүгиниӊ берлен атанак гөни чызыклара умумы болан перпендикулярыӊ ортасы ве онуӊ перпендикуляры аркалы гечйэн текизликдигини субут этмели.

34 (11). Гиӊишликде берлен A ве B ики нокатдан дегишлиликде p ве q узаклыкда ятан нокатларыӊ геометрик орунларыны тапмалы, шунлукда $\frac{p}{q} \neq 1$.

Бу геометрик орунларыӊ меркези AB гөни чызыгыӊ үстүнде ятан төверекдигини субут этмели.

35 (11). Деӊлемэни чөзмели:

$$\sin(x-\alpha) - \sin(x-\beta) - \sin(\beta-\alpha) = 0,$$

бу ерде $\beta \neq \alpha + 2\pi n$.

1966-нжы йыл

36 (5). Ашакдакы 10 саныӊ көпелтмек хасылы нэхили цифр билен гутаряр?

$$11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 27 \cdot 29$$

37 (5). Ашакдакы язылмадык цифрлери тапмалы:

$$\begin{array}{r} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \times \qquad 3\ 4\ \cdot\ \cdot \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \ \\ 2\ 3\ 5\ 0\ 3\ 3\ \ \ \ \ \ \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 6 \end{array}$$

38 (5). Җеми хасапламалы:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72}.$$

39 (5). Ашакдакы дробларыӊ хайсысы улы?

$$\frac{1000001}{1000001} \quad \text{я-да} \quad \frac{10000001}{10000001}$$

40 (5). Ашгабатдан Москва бир вагтда ики самолет учяр: оларыӊ биринҗисиниӊ тизлиги 400 км/сагат, икинҗисиниӊки болса 360 км/сагат. Ики сагатдан соӊ биринҗи самолёт тизлигини сагатда 300 км ченли азалдяр. Ашгабатдан нэче узаклыкда икинҗи самолёт биринҗиниӊ ызындан етер?

41 (6,7). Мейданы сан тайдан периметрине деӊ болан ве тараплары битин санлар билен аӊладылян гөнүбурчлукларыӊ хеммесини тапмалы.

42 (6,7). Ашакдакы санларыӊ хайсысы улы?

$$\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} \quad \text{я-да} \quad \frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}$$

43 (6,7). ABC үчбурчлукда D ве E нокатлар AB ве BC тарапларыӊ орталары. M нокат AC тарапыӊ үстүнде ятяр. Эгер $MD < AD$ болса, онда $ME > CE$ деӊсизлиги субут этмели.

44 (6,7). Трапецияның мейданы 1 деӊ. Шу трапецияның улы диагоналы нәхили иӊ кичи баханы алып билер?

45 (6,7). Атанакларың ериндәки цифрлери тапмалы:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrr}
x & x & x & x & x & x & x & x & x \\
\cline{7-9}
-x & x & x & x & & & x & 8 & x \\
\cline{1-6}
 & & x & x & x & & & & \\
 & -& x & x & x & & & & \\
\cline{3-6}
 & & x & x & x & x & & & \\
 & -& x & x & x & x & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & 0 & & & & \\
\end{array}
$$

46 (8). Ашакдакы деӊлемәниӊ битин санларда нәче чөзүви бар?

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1960$$

47 (8). Дөртбурчлугың үч бурчы күтек. Йити бурчуң депесинден гечйән диагоналың бейлеки диагоналдан улудыгыны субут этмели.

48 (8). Текизликде n нокат ерлешен, шунлукда депелери шол нокатларда болан ислендик үчбурчлугың мейданы 1-е деӊ. Шу нокатларың хеммесини мейданы 4 деӊ болан үчбурчлугың ичинде ерлешдирмек болянлыгыны субут этмели.

49 (8,9). Циркул ве чызгыч аркалы 19^{0} бурчы 19 деӊ бөлеге бөлмели.

50 (9-11). x-иӊ хайсы бахасында $x(x+1)(x+2)(x+3)$ көпчлен иӊ кичи баха эе боляр? Шу иӊ кичи баханы тапмалы.

51 (9-11). Ислендик дөртбурчлугың тараплары диаметр хөкмүнде кабул эдилип гурлан тегелеклериӊ шол дөртбурчлугы бүтинлей япяндыкларыны субут этмели.

52 (9-11). Текизликде A, B ве C үч нокат берлен. AMB ве BMC үчбурчлукларың дашындан чызылан төверeклериӊ радиусларының жеми иӊ кичи баха эе болар ялы, шу текизликде шейле бир M нокады тапмалы.

53 (9-11). Ашакдакы таблицаның хер бир сетиринде ве хер бир сүтүнинде арифметик прогрессия болар ялы эдип, таблицаны долдурың.

1			
			6
		6	
	9		

1967-нжи йыл

54 (6). n-иӊ хич бир бахасында

$$\frac{n-6}{15} \quad \text{ве} \quad \frac{n-5}{24}$$

дробларың бир вагтда битин санлара деӊ болмаяндыгыны гөркезмели.

55 (6). $ABCD$ трапецияның BC гапдал тарапының ортасы. M нокат онуӊ A ве D депелери билен бирлешдирилен. MDA үчбурчлугың мейданының трапецияның мейданындан ики эссе кичидигини субут этмели.

56 (6). Гөнүбурчлы үчбурчлугың гөни бурчуның депесинден медиана, биссектриса ве бейиклик гечирилен. Биссектрисаның медиана билен бейиклигиӊ арасындакы бурчы ики деӊ бөлеге бөлйәндигини субут этмели.

57 (6). Бир ярым товук бир ярым гүнде бир ярым юмуртга гузлаярлар. Дөрт товук 9 гүнде нәче юмуртга гузлар?

58 (7). Эгер ики битин саның квадратларының жеми 7-ә бөлүнйән болса, онда шу санларың хер бири 7-ә бөлүнйәндир. Субут этмели.

59 (7,8). Эгер ABC үчбурчлугың B депесинден BA ве BC тарапларына перпендикуляр эдип гечирилен гөни чызыклар AC тарапы деӊ үч бөлеге бөлйән болсалар, онда шол үчбурчлугың бурчларыны кесгитлемели.

60 (7). Мекдепде гечирилен викторинада 30 сораг теклип

эдилди. Хер бир догры жогаба 7 очко берилди, нәдогры жогапдан болса, 12 очко айрылды. Эгер окувчы 77 очко топлан болса, онда ол нәче сорага догры жогап берипдир.

61 (7). Ики дең төверек берлен, шунлукда оларың хер бири бейлекиниң меркезинден гечйәр ве олар A ве B нокатларда кесишйәрлер. A нокат аркалы эркин кесиҗи гөни чызык гечирилйәр, ол төвереги C ве D нокатларда кесйәр. BCD үчбурчлугың деңтараплыдыгыны субут этмели.

62 (8). Эгер $a^2 + a + 1 = 0$, $a \neq 0$ болса, онда

$$a^{14} + \frac{1}{a^{14}} = -1$$

деңдигини субут этмели.

63 (8,10). Гой, A сан 1967 белгили ве 9-а бөлүнйән эркин сан болсун. a шол A саның цифрлериниң жеми, b-алнан a саның цифрлериниң жеми. b саның цифрлериниң жемини тапмалы.

64 (8,9). Гипотезалары бирмеңзеш болан гөнүбурчлы үчбурчлукларың ичинден иң улы периметрлисини тапмалы.

9-нҗы клас

65 (9). Ашакдакы көпчлениң иң кичи бахасыны тапмалы:

$$x(x+2)(x+3)(x+6)(x+11)(x+12)$$

66 (9). Деңлемәни чөзмели:

$$2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$$

67 (9,10). Дөртбурчлугың гаршылыклы ики тарапларының ортасындан гечирилен гөни чызык бейлеки ики тарапының довамының кесишме нокады аркалы гечйәр. Дөртбурчлугың трапециядыгыны субут этмели.

68 (9). Үчбурчлугың медианасының эркин нокады аркалы медиананы өз ичине алян тарапларына параллел гөни

чызыклар гечирилен. Шу гөни чызыкларың кесип алян үчбурчлукларының деңулулыклыдыгыны субут этмели.

69 (10). x-иң хайсы бахасында

$$x(x+1)(x+2)(x+3)$$

көпчлен максимал баха эе боляр, бу ерде $-3 \le x \le 0$.

70 (10). Эгер $0 \le x \le 1$ болса, онда

$$(1+x)^{\pi} + (1-x)^{\pi} \le 2^{\pi}$$

деңсизлиги субут этмели.

71 (10). ABC үчбурчлугың биссектрисалары O нокатда кесишйәрлер, шунлукда

$$AO = \sqrt{3} \cdot MO \quad \text{ве} \quad BO = \frac{ON}{\sqrt{3}-1}.$$

Эгер BN ве AM үчбурчлугың биссектрисалары болсалар, онда үчбурчлугың бурчларыны тапмалы.

1968-нҗи йыл

72 (7). 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9

аңлатмада скобкалары язмалы, шунлукда нетиҗе:

а) иң кичи (минимал)

б) иң улы (максимал)

болмалы.

73 (7). k - ның хайсы бахаларында

$$k^{k+1} + (k+1)^k$$

аңлатма 3-е бөлүнйәр?

74 (7). Үчбелгили саның шол саның цифрлериниң жемине дең болан сана гатнашыгының иң улы бахасыны кесгитлемели.

75 (7). Гүберчек ак көпгранлык берлен. Хич бир ики гара

гранының умумы гапыргасы болмаз ялы эдип, онуң гранларының ярысындан көпүсини гара реңк билен реңклемек мүмкиндир. Онуң ичинден шар чызып болмаяндыгыны субут этмели.

76 (8). Деңлемэни битин санларда чөзмели:

$$1 - x - x^2 - x^3 = 2y$$

77 (8). Гүберчек дөртбурчлугың дең үч тарапларының орталары берлен. Дөртбурчлугы гурмалы.

78 (8). A ве D нокатларда кесишйэн ики төверек берлен. AB ве AC биринҗи ве икинҗи төвереге дегишлиликде галташянлар (B ве C нокатлар төвереклериң үстүнде) ве

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}.$$

Субут этмели:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

79 (8). C нокат берлен төверегиң AB дугасының ортасы, P нокат төверегиң ичинде ятяр. Эгер $PA < PB$ болса, онда $\angle APC > \angle CPB$ субут этмели.

80 (9,10). Деңлемэни йөнекей санларда чөзмели:

$$x^y + 1 = z$$

81 (9,10). m ве n битин положител санлар, шунлукда субут этмели

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

82 (9,10). $n \geq 2$ болмадык ислендик $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ үчин

$$|\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n + \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n| \leq 1.$$

83 (9,10). Ики тарапының берлен орталары боюнча ве шол тарапларың бирине гечирилен биссектрисаның ятян гөни чызыгы боюнча үчбурчлук гурмалы.

1969-нҗы йыл

84 (7,8). 111 ... 1222 ... 22 (1969 бирлик ве 1969 икилик бар) саның ики саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылыдыгыны субут эдиң.

85 (7,9). Эгер a, b ве c бири-бириниден үйтгешик болсалар, онда субут этмели:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \neq 0$$

86 (7,8,10). Үчбурчлугың бейикликлери 3, 4, 5. Шу үчбурчлук гөнүбурчлымы, йитибурчлымы я-да күтекбурчлымы?

87 (7,8). Радиусы 1 дең болан тегелеклер билен радиусы $R = 1{,}2$ дең болан тегелеги япмак үчин шол тегелеклериң иң азындан нэчеси герек?

88 (7,8). Берлен $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ алтыбурчлугың гаршылыклы тараплары параллел. $A_1A_3A_5$ ве $A_2A_4A_6$ үчбурчлукларың мейданларының деңдиклерини субут этмели.

89 (9). Радиусы 1 дең болан тегелеклер билен радиусы $R = 1{,}5$ дең тегелеги япмак үчин шол тегелеклериң иң азындан нэчеси герек?

90 (9). $ABCD$ гөнүбурчлы җайда 40 отаг бар (сурата сер.) ве ики саны гоңшы отагың арасында гапы бар. Хер бир отагдан диңе бир гезек гечип, A-дан B гечип болармы? A-дан C гечип болармы? A-дан D гечип болармы?

B							C
A							D

91 (9,10). n-иң хайсы бахалары үчин тарапларының бириниң узынлыгы 1-е дең, диагоналларының хер

бириниң узынлыгы битин сан болан гүберчек n-үчбурчлук бар ($n \geq 4$)?

92 (9). Текизликде берлен ABC үчбурчлугың ичинде P нокады гурмалы, шунлукда $KA = EB = HC$ болмалы, бу ерде K, E, H нокатлар P нокатдан AB, BC, CA тараплара дегишлиликде индерилен перпендикулярларың эсасларыдырлар.

93 (10). a, b, c санларың кәбир бахаларында

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

деңлеманиң түкениксиз көп чөзүви болуп билерми (гаралян санлары хеммеси хакыкы санлар)?

94 (10). Арифметик прогрессияны дүзйән дөрт саны положител җүбүт сан тапмалы, шунлукда ахыркы үчүсиниң җеми ики четкисиниң җемине, көпелтмек хасылы илки икисиниң ярым җеминиң кубуна дең болмалы.

95 (10). Берлен төверегиң ичинде онуң меркези билен габат гелмейән A нокат белленилен. A нокат аркалы эркин хорда гечирилен, онуң учларындан M нокатда кесишйән төвереге галташмалар гечирилен. M нокатларың геометрик орнуны тапмалы.

1970-нҗи йыл

96 (7,8). Санларың хайсысы улы

$$\sqrt{1969} + \sqrt{1971} \quad \text{я-да} \quad 2\sqrt{1970}\,?$$

97 (7,8). Ховуза 30 саны балык гойберилипдир, олар бири-бирини иййәрлер. Үч балыгы иен балык дойяр. Доян балыкларың-да үчүсини иен балык дойяр. Доян балыкларың иң көп саны нәче болуп билер?

98 (7,8,10). ABC бурчуң ичинден ики төверек чызылан, оларың бири AB тарапына A нокатда, бейлекиси болса BC тарапына C нокатда галташяр. Шу төверeклериң AC гөни чызыкдан дең хордалары кесйәндиклерини субут этмели.

99 (7,8). Үчбурчлугың тарапларының узынлыклары ызыгидерли битин санлар. Эгер онуң медианаларының бириси биссектрисаларың бирине перпендикуляр болса, онда үчбурчлугың тарапларының узынлыкларыны тапмалы.

100 (7,8,9). Волейбол боюнча биринҗи ер үчин бирнәче команда ойнады, оларың хер бири бейлеки команда билен бир гезек ойнады. Эгер командаларың хайсы болса-да икиси бирмеңзеш санда еңиш газанан болсалар, онда A команда B команданы, B команда C команданы, C команда болса A команданы утар ялы шейле бир A, B ве C үч команданың тапылҗакдыгыны субут этмели (волейболда деңлик ёк).

101 (9). Үчбурчлугың тарапларының узынлыклары ызыгидерли санлар. Эгер шу үчбурчлук йити бурчлы болса, онда улулыгы боюнча ортакы тарапына гечирилен бейиклигиң шол тарапы тапавуды 4-е дең болан кесимлере бөлйәндигини субут этмели.

102 (9). 1970 саны тәк санларың квадратларының җеминиң такык квадрат болянлыгыны субут этмели.

103 (9). γ_1 ве γ_2 ики төверек γ төвереге A_1 ве A_2 нокатларда ичинден галташярлар. C нокат γ төверегиң эркин нокадыдыр. A_1C ве A_2C гөни чызыклар γ_1 ве γ_2 төвереклери дегишлиликде B_1 ве B_2 нокатларда кесйәрлер. A_1A_2 ве B_1B_2 гөни чызыкларың параллелдиклерини субут этмели.

104 (9,10). Деңлемәни битин санларда чөзмели:

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x}} = \frac{10}{7}.$$

105 (10). Бир цифрини үйтгетмек билен йөнекей сан алынмаян шейле бир натурал саны ойлап тапың.

106 (10). Эгер ABC үчбурчлугың CH бейиклиги AB тарапың ярысына дең болса, A бурч 75° болса, онда шол үчбурчлугың B бурчуны тапмалы.

107 (10). Кәбир планетада 20 дөвлет бар, шунлукда оларың

ислендик үчүсиниң ичинде икиси хениз дипломатик арагатнашыгы ёла гоймандырлар (сыясы илчилери ёк). Шу планетада илчиханаларың санының 200-ден көп дәлдигини субут этмели.

1971-нжи йыл

108 (7,8). ABC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң меркези O нокат, BC, CA ве AB гөни чызыклара гөрә O нокада дегишлиликде симметрик болан A_1, B_1, C_1 нокатлары гуралың. ABC ве $A_1B_1C_1$ үчбурчлукларың деңдигини субут этмели.

109 (7,9). Төверегиң үстүнде он нокат белленилен. Депелери шол нокатларда болан япык болмадык ве өз-өзүни кесмейән, докуз звенолы дөвүк чызыкларың нәчеси бар?

110 (7,8,10). ABC үчбурчлугың ичинде BOK, COM, AOP үчбурчлукларың мейданлары дең болар ялы O нокады тапмалы, шунлукда K, M, P нокатлар дегишлиликде AB, BC, CA тарапларың үстлеринде ятярлар, шейле хем $OK \parallel BC$, $OM \parallel AC$, $OP \parallel AB$.

111 (7,8). Бири-бириниң ызындан язылан ики саны ики-белгили сан дөртбелгили саны эмеле гетирйәр. Эмеле гелен сан илки ики саның көпелтмек хасылына бөлүнйәр. Икибелгили санлары тапмалы.

112 (7,8). Ики адам билеликде оюн ойнаярлар. Оларың өңүнде ики үйшмек отлучөп бар. Оларың бири өңлериндәки үйшмеклериң бирини ташлап, бейлекисини ики бөлеге бөлйәр. Икинҗиси болса алнан ики үйшмегиң бирини ташлап, бөйлекисини ики бөлеге бөлйәр ве ш.м.. Иң соңкы бөлеклериң хер биринде бир отлучөпүң галаны себәпли, өз нобатында гөчүп билмесе, шол-да утдуряр. Эгер илки башда бир бөлекде 20, бейлекисинде 25 саны отлучөп бар болса, онда оюнчыларың ойны башлаяны утдурярмы я-да онуң гаршыдашы утдурярмы?

113 (9). ABC гөнүбурчлы үчбурчлугың биссектрисасы CM ве бейиклиги CH (C бурч 90^0-а дең). HD ве HE кесимлер AHC ве CHB үчбурчлукларың биссектрисалары C, D, E,

H, M нокатларың бир төверегиң үстүнде ятяндыкларыны субут этмели.

114 (9,10). a, b ве c — дүрли санлар. Эгер $x^2 + ax + bc = 0$ ве $x^2 + bx + ca = 0$ деңлемелериң эдил бир умумы көки бар болса, онда шу деңлемелериң бейлеки көклериниң

$$x^2 + cx + ab = 0$$

деңлемәни канагатландыряндыкларыны субут этмели.

115 (9). 2^{1971} ве 5^{1971} санларың бири бейлекисиниң ызындан язылан. Җеми нәче цифр язылан?

116 (9). Үчбурчлугың ики тарапының узынлыклары 10 ве 15 см. Шу тарапларың арасындакы биссектрисаның узынлыгының 12 см улы дәлдигини субут этмели.

117 (10). Санларың бирнәчесиниң җеминиң хич бири долы квадрат болмаз ялы миллион натурал сан сайлап алып болармы?

118 (10). Текизликде догры тетраэдр гөрнүшли даш ятыр. Оны гөтермек мүмкин дәл, эмма оны гапыргасы аркалы бейлеки гранына агдарып боляр (шунлукда ол ерден үзүлмели дәл). Дашы илки башдакы гранының үстүнде дәл-де, башга бир граның үстүнде ятар ялы эдип, өңки ерине тогаламалы. Шуны ерине етирип болармы?

119 (10). $ABCD$ трапецияда M нокат AB ян тарапың ортасы, K нокат болса CD тарапың ортасы. Эгер трапецияның мейданының ики эссеси $AK \cdot KB + CM \cdot MD$ болса, онда $AB = CD = BC + AD$ субут этмели.

1972-нжи йыл

120 (8). Деңтараплы үчбурчлугың дашындан KLM үчбурчлук чызылан, шунлукда, $LB = MC = KA$. KLM үчбурчлугың деңтараплыдыгыны субут этмели.

121 (8,9). $(x^2 + x + 1)^{1972}$ аңлатмада x-ың 0 ве 3 дережелисиниң коэффициентини тапмалы.

122 (8,10). Циркулың ве чызгыҗың көмеги билен берлен кесими $1 : \sqrt{3}$ ялы гатнашыкда ики бөлеге бөлмели.

123 (8). Түкениксиз өйҗүкли күшт тагтасыны атың гөчи билен гечип болармы, ягны *A* өйҗүкден ислендик өйҗүге барып болармы?

124 (9,10). Берлен *ABCD* дөртбурчлугың *BD* диагоналының узынлыгы 1-е дең

$$\angle BAC = \angle BDA\,; \quad \angle B = \angle D = \frac{\pi}{2}$$

Дөртбурчлугың мейданыны тапмалы.

125 (9). Шу системаның битин санларда чөзүвиниң ёкдугыны субут этмели.

$$\begin{cases} 7x^2 - 5y^2 = m \\ 5u^2 - 7v^2 = m \qquad (m \neq 0) \end{cases}$$

126 (10). 99 саны докузлык ызлы ызындан язылыпдыр. Эмеле гелен 199 белгили сан долы квадрат болар ялы эдип, шу саның ызындан ене-де лайык 100 цифри язып болҗакдыгыны субут этмели.

127 (10). *a* ве *b* хакыкы санлар берлен.

Эгер
$$x^2 - 3xy^2 = a^3 - 3ab^2$$
$$3x^2 - y - y^3 = 3a^2b - b^3$$

болса, онда *x* ве *y* санлары тапмалы.

1973-нҗи йыл

128 (5,6). Бир ящикде дүрли реңкли 100 саны шар бар. Оларың 26-сы гызыл, 25-си гөк, 10 саныcы сары, 14-си яшыл, 20-си ак, 5-си гара. Оларың ичинде 16 шарың хөкман бир меңзеш реңкли болмагы үчин иң азындан нәче шар чыкармалы?

129 (5,6). Нокатларың ерини цифрлер билен долдурмалы.

$$\begin{array}{ccccc} & & \cdot & \cdot & 5 \\ & & \cdot & 4 & \cdot \\ \cline{3-5} & & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

130 (5,6). 7-ә галындысыз бөлүнйән ве 2-ә, 3-е, 4-е, 5-е ве 6-а бөлүненде галындыда 1 галян иң кичи саны тапмалы?

131 (5,6). Циркулың ве чызгыҗың көмеги билен 66° бурчы 11 дең бөлеге бөлмели.

132 (5,6). Субут этмели:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \frac{1}{100^2} < 0{,}99$$

133 (7). Оюнчыда 8 саны шар бар. Оларың 2-си гызыл, 2-си яшыл ве 2-си гара. *A* ве *B* ики оюнчы шейле оюн ойнаярлар: Оларың хер бири өз нобатында кубуң депесине шар беркидйәрлер. Шу оюн кубуң хер депесинде бир шар болянча довам эдйәр. Шу оюнда *A* оюнчы бир депеде ве шол депеден чыкян гапыргаларың ахырларындакы шарларың хеммеси дүрли реңкде болмагына чалышяр. *B* оюнчы болса оңа пәсгел берҗек боляр. Эгер илкинҗи гөчүми *A* оюнчы башласа, онда ким утар? Эгер биринҗи гөчүми *B* оюнчы башласа, онда ким утар?

134 (7). Эгер $x^y = y^x$ болса, онда $x = y$ деңлиги субут этмели (x ве y натурал санлар).

135 (7). Эгер *P* илкинҗи *K* йөнекей санларың көпелтмек хасылы болса, онда $(P+1)$ ве $(P-1)$ санларың хич бириниң долы квадрат дәлдигини субут этмели.

136 (7). *ABC* үчбурчлукда *BAC* бурч *BCA* бурча дең ве 50°-а дең. Бурч $OAC = 10^{\circ}$, бурч $OCA = 30^{\circ}$ болар ялы эдип, *ABC* үчбурчлугың ичинден *O* нокады алыпдырлар. *BOA* бурчы кесгитлемели.

137 (7). $ABCD$ параллелограмда $AB = AK$, $BC = CH$ болар ялы эдип, AB ве BC тарапларың үстүнде дегишлиликде H ве K нокатлар сайланып алнан. KHD үчбурчлугың деңянлыдыгыны субут этмели.

138 (7). Тараплары 13, 5, 5,2 болан үчбурчлугың күтек бурчлудыгыны субут эдиң.

139 (7). Гызыл фишканың диаметрал гаршысында яшыл фишка болар ялы ве ики саны яшыл фишка янашык дурмаз ялы эдип, төверегиң үстүнде 20 гызыл ве бирнәче яшыл фишкалары гоюп боларммы?

140 (8). Он натурал саның көпелтмек хасылы 10^{10} - а дең. Шу санларың иң улы җеми нәчә дең? (Санларың дүрли болмаклыгы хөкман дәл).

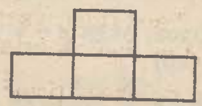
141 (8). Эгер P йөнекей сан болса ($P > 2$) , онда

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{P-1}.$$

гысгалмаян дробуң санавҗысының P сана бөлүнйәндигини субут эдиң.

142 (8). Бирнәче диаметр төвереги дең бөлеклере бөлйәрлер. Тегелегиң ичинден ислендик нокады алалың. Шу нокатдан диаметрлериң хеммесине индерилен перпендикулярларың эсасларының догры көпбурчлугың депелери болядыгыны субут этмели.

143 (8,9). Кагызда 50 х 50 өйҗүк бар. Өйҗүклериң хер биринде сан язылан.



фигура билен япып болян хер дөрт саны өйҗүкдәки санларың җеминиң 4-е дең болядыгы беллидир. Өйҗүклериң хер биринде 1 сан бардыгыны субут эдиң.

144 (9). Төверегиң үстүнде 10 саны ак ве 20 гара, җеми 30 фишка ерлешдирилен. Араларында үч фишка болан ислендик ики фишканы сүйшүрмек боляр. Эгер шейле

чалшырманың бириси бейлекиниң бирнәче чалшырмасы аркалы алынян болса, онда шейле ики чалшырма эквивалент чалшырма дийилйәр. Эквивалент дәл чалшырмалар нәче?

145 (9,10). Радиусы 1-е дең болан төверекде бирнәче хорда гечирилен. Эгер хер бир диаметри k-дан көп болмадык хорданы кесйән болса, онда хордаларың хеммесиниң җеминиң узынлыгының $3{,}15k$-дан кичидигини субут этмели.

146 (9). Эгер арифметик прогрессияны дүзйән

$$a\,,\, b+b\,,\, a+2b\,, \dots ,\, a+kb\,, \dots \;(\, b \neq 0\,)$$

ызыгидерлиликден түкениксиз геометрик прогрессияны дүзйән ызыгидерлиги сайлап алмак болян болса, онда $\frac{k}{b}$ гатнашыгың рационал сандыгыны субут этмели.

147 (9). x-иң хайсы бахаларында

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x + \frac{1}{2}}$$

деңсизлик ерине етирилйәр?

148 (9,10). P нокатда кесилйән ики саны гөни чызык боюнча ики нокат бирмеңзеш тизлик билен деңөлчегли херекет эдйәр. Гөни чызыкларың бири боюнча A нокат, бейлекиси боюнча B нокат херекет эдйәр. Олар P нокатдан бир вагтда гечмейәрлер. APB үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң P нокатдан үйтгешик болан мыдама белли бир нокат аркалы гечйәндигини субут эдиң.

149 (10). Гой, P_A кәбир гүберчек бәшбурчлугың периметри болсун, P_B болса биринҗи бәшбурчлугың тарапларының орталарыны ызыгидерли бирикдирмек нетиҗесинде алнан бәшбурчлугың, P_c болса икинҗи бәшбурчлугың тарапларының орталарыны бирикдирмек нетиҗесинде алнан бәшбурчлугың периметри болсун. Субут этмели:

$$P_C \le \frac{1}{4} P_A + \frac{1}{2} P_B$$

150 (10). Натурал саның онлук системасындакы язгысында 1973 цифрлериң ызлы-ызындан гелйәндиклерине душ гелйән болса, онда шол сана “ягшы” сан, гаршылыклы халда гелйәнине болса, “яман” сан диелиң (мысал үчин, 1719732 сан “ягшы”, 5379173 сан болса “яман”). П белгили санларың ичинде ягшы санлар яман санлардан көп болар ялы шейле бир K-ың барлыгыны субут этмели.

151 (10). x-ың әхли хакыкы бахаларында $f(x)$ функцияның 1-е дең болмадык хакыкы баханы аляндыгы белли, шунлукда

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

бу ерде a белленилен положител сан. Функцияның периодикдигини субут этмели.

152 (10). Деңсизлиги чөзүң:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}.$$

1974-нжи йыл

153 (7). Бирнәче бирмеңзеш догры үчбурчлуклар берлен. Оларың хер бириниң депелеринде эркин тертипде 1, 2 ве 3 санлар язылан. Үчбурчлуклары бири-бириниң үстүнде гойярлар ве оларың хер бир бурчундакы санларың җемини тапярлар. Бурчларың хер бириндәки җем 25, 50 болуп билерми?

154 (7). Домино ойнуна гаралың, шунлукда

гөрнүшдәки дашҗагазларда адаты 0-дан 6-а ченли санлар дәл-де 0-дан k ченли санларың язылмагы мүмкин. Эгер дашҗагазларың хеммесини япык тегелек эдип гоймак мүмкин болса, онда k-ың җүбүт сандыгыны субут этмели.

155 (7). Текизликде 1974 нокат ерлешдирилен. Ислендик

ики нокатдың арасындакы узаклык 1 см кичи. Нокатларың хеммесиниң мейданы 1 см^2 дең болан квадратың ичинде ерлешендиклерини субут этмели.

156 (7). Катетлери $2a$ ве $2b$ болан гөнүбурчлы үчбурчлугың медианаларыны тапмалы.

157 (8). Догры ишлейән сагадың сагат стрелкасының, минут ве секунт стрелкаларының суткада җүбүтме-җүбүт такык 120° бурч эмеле гетирйән вагты бармы?

158 (8). $x = x^y + y$ деңлигиі канагатландырян битин ве отрицател дәл x ве y санлары тапмалы.

159 (8). Бурчуң ичинде төверек берлен. Төверегиң үстүнде шейле бир нокады тапмалы, шол нокатдан бурчуң тарапына ченли болан узынлыкларың җеми минимал болмалы.

160 (8). $ABCD$, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$ гөнүбурчлы трапеция берлен, шунлукда $AB = 3$ см, $CD = 4$ см, $AD = 5$ см. Трапецияның диагоналларының кесишме нокадындан AD ченли болан узаклыгы тапмалы.

161 (9,10). Башкы 11 цифрлери бирлик болан 20 белгили саның долы квадрат болуп билмеҗегини субут этмели.

162 (9).

$$x + 3^y = 1$$

$$\sqrt{xy^3} \leq 1974$$

болар ялы әхли x ве y санлары тапмалы.

163 (9). Гой, $f(x) = x^2 + px + q$ болсун, бу ерде p ве q — хакыкы санлар.

$|f(a-d)|$, $f(a)$, $|f(a+d)|$ санларың иң болманда бириниң $\frac{d^2}{2}$ — ден кичи дәлдигини субут этмели.

164 (9). Текизликде 1974 нокат берлен, шунлукда оларың ислендик үчүси радиусы 1-дең кичи болан төверегиң үстүнде ятяр. Нокатларың хеммесиниң, радиусы бире дең болан тегелекде ятяндыгыны субут этмели.

165 (9). Гой, $3 < x < 4$ болсун. $x^3 - 3x^2 + 1 > 0$ субут этмели.

166 (10). $ABCD$ гөнүбурчлугың BC тарапында $BK = 4\ KC$ болар ялы эдип, K нокады, CD тарапында $CM = 4\ MD$ болар ялы эдип, M нокады алалың. Тарапларың нәхили гатнашыгында ($AB : AD$) бурч KAM иң улы баха эедир?

167 (10). AB ве CD төверегиң параллел болмадык хордалары. KAB, KCD, HBA ве HCD дөрт бурчуң хер бири гөни бурч болар ялы эдип, K ве H нокатлар сайланып алыныпдырлар. KH-иң:

а) төверегиң меркезинден гечйәндигини,

б) AD ве BC гөни чызыкларың кесишме нокадындан гечйәндигини субут этмели.

168 (10). Эгер $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = x^2 - 5x + 7$ болса, онда x тапмалы.

169 (10). $1971 \cdot 1972 \cdot 1973 \cdot 1974 + 1$ саның долы квадрат болярдыгыны субут этмели.

1975-нжи йыл

170 (7,8). Квадратың ичинде дең мейданлы ве умумы мейданлары 1975 S (мейданларының жеми) болан 1976 фигура ерлешдирилен, бу ерде S квадратың мейданы. Шу фигураларың хеммесиниң умумы нокадының бардыгыны субут эдиң.

171 (7,8). Ашакдакы деңлиги канагатландырян x, y, z йөнекей санларың хеммесини тапмалы:

$$xyz = 5\ (\ x + y + z\ )\ .$$

172 (7,10). 1, 2, ... , 9 цифрлерден 4 цифр сайлап алярлар ве олардан бири-бирине хас голай болан ики саны икибелгили саны дүзйәрлер (оларың тапавудыны d билен беллэлиң). Шейлеликде, цифрлериң хер дөрдүсине кэбир тапавут дегишлидир.

Шу d тапавут нәхили иң улы баха эе болуп билер? (Мысал үчин, эгер 1, 2, 7, 9 цифрлер сайланып алнан болса, онда $27 - 19 = 8$, $d = 8$).

173 (7,8). а) Текизликде чызылан квадраты 6 ве 7 кичи квадрата бөлүп болармы (хөкман конгруэнт болмалы дэл)?

б) 2 ве 3 квадрата бөлүп болармы?

174 (9,10). Үчбурчлугың ики бейиклиги 20 ве 12. Үчүнжи бейиклигиң 30-дан кичидигини субут этмели.

175 (9,10). Деңсизлиги субут эдиң:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots \frac{1}{99} - \frac{1}{1000} < \frac{2}{5}$$

176 (9,10). Текизликде радиусы 1-е дең болан ве меркези O нокатда болан төверек гечирилен. Квадратың ики депеси шу төверегиң үстүнде ятяр. Бейлеки ики депеси O нокатдан нәхили иң улы узаклыкда ятып билер? (Төверегиң үстүнде квадратың ики гоңшы депелери ятярляр).

177 (9). Текизликде чызылан квадраты кичи k саны квадрата бөлүп болмажак k-ның бахаларыны гөркезмели.

178 (10). Деңлемәни чөзмели:

$$9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$$

179 (10). Гой, $n < (44 - 1975)^{100} < n+1$, n - битин сан. n-иң тәк сандыгыны субут этмели.

1976-нжы йыл

180 (7,10). Мая билен Мырат билеликде ишләп, меллеги 14 гүнде депип агдардылар. Мырадың бир өзи шол ери 15 гүнде гутарян болса, Мая нәче гүнде гутарар?

181 (7,8,10). Ислендик гүберчек бәшбурчлукда онуң диагоналларындан үчбурчлук гурар ялы үч диагоналыны сайлап алмагың мүмкиндигини субут этмели.

182 (7,9). Волейбол турнирине алты команда гатнашды. Олардан хер ики команда өз араларында бир гезек ойнады. Шу командаларың ичинден шейле бир A ве B

ики команданы тапмак болар, шол икисинден бейлеки командаларың хер бири шол A ве B командаларың бирине утдурандыр. Шоны субут этмели.

183 (7,8). Ашакдакы деңлемәниң битин чөзүвлери түкениклими я-да түкениксиз

$$xy + 4y + 4x = 1 ?$$

184 (9). Эгер ABC, BCD, CDE, DEA, EAB үчбурчлукларың хер бириниң мейданы 1-е дең болса, онда $ABCDE$ бәшбурчлугың мейданыны тапмалы.

185 (9,10). m ве n ики натурал сан берлен, $m < n$. Бири m саның бөлүҗиси, бейлекиси n билен өзара йөнекей болан ики саның җеми гөрнүшинде язмагың мүмкиндигини субут этмели.

186 (9). Параллел ики гөни чызыгың хер бириниң үстүнде 10 нокат белленипдир. Берлен гөни чызыкларың бириниң үстүндәки нокатлар билен бейлеки гөни чызыгың үстүндәки нокатларың кәбирини бирикдирйән бирнәче кесим гечирмели, шонда кесимлер золагың ичинде кесишмели дәл (кесимлериң учларының габат гелмеклери мүмкиндир).

а) шейле кесимлериң 20 санысыны гечирмегиң мүмкин дәлдигини субут этмели.

б) шейле кесимлериң 19 санысыны нәче усул билен гечирмек мүмкин?

187. Волейбол турнирине 14 команда гатнашды. Оларың хер ики командасы өз араларында бир оюн ойнады. Шу командаларың ичинден шейле бир A, B ве C үч команданы тапмак болар, ягны шол үчүсинден бейлеки командаларың хер бири шол A, B ве C командаларың иң болманда бирине утдурандыр. Шоны субут этмели.

188. $ABCD$ гүберчек дөртбурчлугың диагоналлары O нокатда кесишйәрлер. Эгер AOB үчбурчлугың мейданы 4 болса ве COD үчбурчлугың мейданы 9 болса, онда берлен дөртбурчлугың мейданының иң кичи бахасы нәче болуп билер?

1977-нҗи йыл

189 (7,9,10). Бир тагта кагызы бәш бөлеге бөлйәрлер ве шол бөлеклериң бирини ташлаярлар. Шондан соңра галан бөлеклериң бирини алып, оны бәш бөлеге бөлйәрлер ве бир бөлегини ташлаярлар ве ш.м. Кәбир вагтда нобатдакы ташланмалы бөлек ташланылман эмеле гелен бөлеклери санапдырлар. Оларың саны 1977 болупдыр.

Саналанда ялңышлык гойберилендигини субут этмели.

190 (7,8). Аграмлары 370 кг, 372 кг, 374 кг, 376 кг, ..., 468 кг болан 50 саны дашы еди саны үчтонналык машында әкидип болармы?

191 (7,8). Төверегиң дашында ятан нокат аркалы гечйән хордаларың нокатлар көплүгини тапмалы.

192 (7,8). $ABCD$ трапецияда AD эсасындакы бурчларың җеми $\frac{\pi}{2}$ деӊ. Эсасларының орталарыны бирикдирйән кесимиң эсасларының тапавудының ярысына деңдигини субут этмели.

193 (8,9). Эгер гүберчек дөртбурчлугың тараплары кесишйәнчәлер довам этдириленде алнан ики саны үчбурчлук деңулулыклы болса, онда диагоналларың бириниң бейлекисини ики деӊ бөлеге бөлйәндигини субут этмели.

194. Хер бир үйшмекде k саны терези дашы болан ики үйшмек бар, шунлукда оларың хер бириндәки дашлар массаларының артмагы боюнча ерлешдирилендирлер. ($2k$-1) гезек чекмек билен әхли $2k$ дашыда оларың массаларының артмагы боюнча ерлешдирип болҗакдыгыны субут этмели (бир гезек чекиленде ики дашың массасыны деңешдирмек мүмкин, $2k$ дашың ислендик икисиниң массалары дүрлидирлер).

198 (8,10). Төверек боюнча 30 сан язылан, оларың хер бири сагат стрелкасы боюнча өзүниң ызындан гелйән ики

саның тапавудының модулына дең. Санларың хеммесиниң жеми 1 дең. Шу санлары тапмалы.

196 (9,10). Дөртбурчлугың хер бир тарапы периметриң бөлүҗиси болан битин сандыр. Шу дөртбурчлугың хич болманда ики тарапының конгруэнтдигини субут этмели.

197 (9). $x \geq 0$ боланда $\frac{1+x^2}{1+x}$ аңлатманың иң кичи бахасыны тапмалы.

198 (10). D ве E нокатлар ABC догры үчбурчлугың тарапларыны $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$ гатнашыкларда бөлйәрлер. AD ве CE гөни чызыклар O нокатда кесишйәрлер. AOC бурчуң гөни бурчдугыны субут этмели.

199 (10). Радиусы 1-е дең болан тегелегиң ичинде гүберчек бәшбурчлук ерлешен. Шол бәшбурчлугың тарапларының ве диагоналларының жеминиң 17-ден кичидигини субут этмели.

1978-нжи йыл

200 (7,8). 5^{1978} саның ахыркы дөрт цифрини тапмалы.

201 (7,8). Сагат икиден ишләнде сагадың стрелкалары 37° бурчы эмеле гетирдилер. Шол стрелкаларың сагат икиден соң илкинҗи гезек 37° бурчы эмеле гетирмеклери үчин нәче вагт герек?

202 (7,8,10). Берлен диагоналлары ве оларың арасындакы берлен бурчы боюнча әхли дөртбурчлукларың ичинде иң кичи периметрлисини тапмалы.

203 (7,8). Класда 40 адам бар. Баскетбол ойнаянлары 26, сувда йүзйәнлери 25 адам, лыжада тыпянлары 27. Бир вагтда йүзйәнлер хем-де баскетбол ойнаянлар 15, баскетбол ойнаянлар ве лыжада тыпянлар 16, йүзйәнлер ве лыжада тыпянлар 18 адам. Шолардан бир адам бедентербие сапагына гатнашмаяр.

Спортуң әхли гөрнүшине нәче адам гатнашяр? Спорт секциясының диңе бир гөрнүшине нәче адам гатнашяр?

204 (8). Йитибурчлы үчбурчлугың A депеси үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң O меркези билен бирикдирилен. AH кесим үчбурчлугың бейиклиги. $\angle BAH = \angle OAC$ боляндыгыны субут этмели.

205 (9). Текизликде 1978 нокат берлен. Шолардан башга-да берлен нокатлара ченли узаклыклары өзара дең болмадык нокадың бардыгыны субут этмели.

206 (9,10). Гиңишликде өзара атанаклайын ятан үч гөни чызык берлен. Гапыргаларының үчүси шу гөни чызыкларда ятян параллелепипед бармы?

207 (9). ABC үчбурчлугың A бурчуның l биссектрисасыны

$$l = \frac{b\,c \sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

формула билен хасаплап боляндыгыны субут этмели.

208 (9). Ики саны үчбелгили саның көпелтмек хасылы гөрнүшинде аңладылян 6 белгили санлар көпми я-да галан 6 белгили санлар көп?

209 (9,10). Ашакдакы деңлемәниң хемме битин чөзүвлерини тапмалы:

$$3 \cdot 2^x + 1 = y^2$$

210 (10). $|a - b| \geq 1978$ болар ялы ве $ax^2 + (a+b)x + b = x$ деңлемәниң хакыкы көки болмаз ялы, а ве b санлар бармы?

211 (10). $\sin\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ве $\cos\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ санларың хайсы улы (таблицалары уланмалы дәл)?

212 (10). Гиңишликде өзара атанаклайын ятан үч гөни чызык берлен. Гапыргаларының үчүси шу гөни чызыкларда ятан параллепипед бармы?

1979-нжы йыл

213 (7). Деңлемелер системасыны чөзмели:

$$\begin{cases} x^3 - 2y = 7 \\ \dfrac{1-9x}{5} = \dfrac{19+3x}{8} \end{cases}$$

214 (7). Деңянлы үчбурчлугың эсасындакы исләндик нокатдан онуң ян тарапларына чепли болан узакларың жеминиң эсасындакы депелериң бириндеп ян тарапа чепли болан узаклыга деңдигини субут этмели.

215 (7). Бир миллион саны диңе үчлүк цифри ве арифметик амалларың белгилерини хем-де зерур болса скобкалары уланмак аркалы, бөлмек амалыны ерине етирмән, язып болармы?

216 (7,8). 5^{1979} саның иң соңкы дөрт цифрини тапмалы.

217 (8). Деңлемелер системасыны чөзмели:

$$\begin{cases} y - 3{,}5 = 0{,}5\,x \\ |x| - y = -2 \end{cases}$$

218 (8). Деңянлы үчбурчлугың эсасындакы исләндик нокатдан онуң ян тарапларына чепли болан узаклыкларың жеминиң эсасындакы депелериң бириндеп ян тарапа чепли болан узаклыга деңлигини субут этмели.

219 (8). Көп гатлы жайың айнасындан Останкино телевизион башнясы кэбир бурч астындан гөрүнйэр. AB кесимде шейле бир нокат тапмалы, шунлукда хем жай хем-де башня бирмеңзеш бурч астындан гөрүнмели. Чызгыд ене-де шейле хэсиетли нокады тапмага сынанышың.

220 (9). $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натурал санлар, оларың жеми 100 деңь. Оларың ИУБ (иң улы умумы бөлүжиси) нэхили иң улы бахаңы алып билер?

221 (9). Берлен a_n ызыгидерлик боюнча гурлан $b_n = a_{n+1} - a_n$ ызыгидерлик кемелйэн ызыгидерлик, шунлукда b_1 сан a

сандан кичидир. Онда $c_n = \dfrac{a_n}{n}$ ызыгидерлигиң-де кемелйэн ызыгидерликдигини субут этмели.

222 (9). Мейданы 1-е деңь болан ABC үчбурчлугың дашындан чызылан, A нокат B_1C_1 тарапда B_1 ве C_1 нокатларың арасында ятан, B нокат A_1 ве C_1 нокатларың арасында A_1B_1 тарапда ятан, эркин ABC үчбурчлуклара гаралың. A_1BC, AB_1C, BAC_1 үчбурчлукларың мейданларының көпелтмек хасылының исләндикче кичи болуп билжекдигини субут этмели.

223 (9). Ашакдакы тождествоны (кесгитлениш областда) субут этмели.

$$tg\,\alpha + tg\,(\alpha + 20^o) + tg\,(\alpha + 40^o) + \ldots tg\,(\alpha + 160^o) = 9\,tg\,9\alpha$$

224 (9). Деңлемэни чөзүң:

$$\cos x \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} = 1\,.$$

225 (10). Ашакдакы деңлемэниң иң кичи көкүни тапмалы:

$$x - [\sqrt{x}\,]^2 = n$$

(n-битин, $[\sqrt{x}\,]$ сан x саның битин бөлеги)

226 (10). Төверек ве онуң ичинден чызылан үчбурчлугың бир депесинден чыкян бейиклигиң, биссектрисаның хем-де медиананың довамларының шол төвереги кесйэн P, O, R үч нокады берлен. Шу үчбурчлугы гурмалы.

227 (10). Членлериниң хеммеси положител ве дүрли болан геометрик прогрессияда четки членлериниң орта арифметик бахасының эхли членлериниң орта арифметик бахасындан улудыгыны субут этмели.

228 (10). f функцияның узынлыгы 4 деңь болан $[a,b]$ кесимиң хер бир нокадында производнысы бар. $x \in [a,b]$ кэбир бахасы үчин

$$f\,'(x) - [f(x)]^2 < 1$$

деңсизлигиң ерине етйэндигини субут этмели.

229 (10). AE ве CD кесимлер ABC үчбурчлугың бурчлары-ның биссектрисалары. Эгер

$$\frac{\angle BDE}{\angle EDC} = \frac{\angle BED}{\angle DEA}$$

болса, онда ABC үчбурчлугың деңянлыдыгыны субут этмели.

230 (7). Эркин ABC үчбурчлугың тарапларында $AMNB$ ве $ACKP$ квадратлар гурлан. MC ве BP кесимлериң конгруэнтдиклерини ве перпендикулярдыкларыны субут эдиң.

231 (7). x-ың ислендик бахасында $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$ аңлатманың положител баха эдигини субут эдиң.

232 (7). a ве b санларың битин бахаларында $a^4 + b^4$ жем 9 цифр билен гутарып билерми?

233 (7). Хайсы натурал сан өзүнден өңки гелйән натурал санларың хеммесиниң жемине дең? Шейле натурал саның еке-тәкдигини субут эдиң.

234 (8). $2^{99} + 2^9$ жемиң 100-е бөлүнйәндигини субут этмели.

235 (8). S — нокат ABC үчбурчлугың медианаларының кесишме нокадыдыр. S нокат аркалы эркин гөни чызык гечирилен. Гой, M ве N нокатлар шу гөни чызыгың үчбурчлугың тараплары билен кесишйән нокатлары болсун. Субут этмели:

$$\frac{1}{2} \le \frac{MS}{NS} \le 2\,.$$

236 (8). Эгер ислендик үчбелгили саның ызындан шол саны өзүни язсак, онда алнан алтыбелгили сан 7-ә, 11-е ве 13-е бөлүнер. Субут этмели.

237 (8). Квадратың ики гоңшы депесиниң координаталары (0,0) ве (3,5; 5,5) берлен. Квадратың бейлеки ики депесиниң координаталарыны тапың.

238 (9). $\overline{OA} + 5 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot \overline{OC} + 7\ OD$ шертден A, B, C, D

нокатларың бир текизликде ятяндыкларыны субут этмели.

239 (9). $ABCD$ трапецияда AB ве CD эсаслары BD ян тарапа перпендикулярдырлар.

Эгер $AB = 10$, $CD = 15$ болса, онда диагоналларың кесишме нокадындан BD тарапа ченли узаклыгы тапмалы.

240 (9). Ашакдакы тертипде ерлешен

$$\lg 3\,,\ \lg(3^x - 2)\,,\ \lg(3^x + 1)$$

санлар арифметик прогрессияны дүзйәрлер. x-ы тапмалы.

241 (9). $\dfrac{1 + x^2}{1 + x}$ аңлатманың иң кичи бахасыны тапмалы, бу ерде $x \ge 0$.

242 (9). Мекдепде гечирилен викторинада 30 сораг теклип эдилди. Хербир догры жогап үчин гатнашяна 7 очко языляр, нәдогры жогап үчин онуң топлан очколарындан 12 очко айрыляр. Эгер викторина гатнашян 77 очко топлан болса, онда ол нәче сорага догры жогап берипдир?

243 (10). Гой, α ве β ислендик натурал сан болсун $3^\alpha + 1$ саның $3^\beta - 1$ сана бөлүнмейәндигини субут этмели.

244 (10). Гой

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

ве

$$|f(x)| \le 1980\,|g(x)|$$
$$|g(x)| \le 1980\,|f(x)|$$

болсун.

Субут этмели: $m = n$.

245 (10). $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ызыгидерликде биринжи член $a_1 = 1$,

бейлеки хер бир соңкы член өң янындакы аркалы шейле формула билен кесгитленилйәр:

$$a_{n+1} = \frac{2a_{n+1} + 1}{a_n + 1}.$$

Ызыгидерлигиң пределиниң бардыгыны субут этмели. Шол предели тапмалы.

246 (10). Гой, $x_1, x_2, \dots, x_n$ нокатлар $[0,1]$ кесимиң нокатлары болсун. Онда ашакдакыны субут этмели:

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq 4\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

1981-нҗи йыл

247 (7). Хасапламалы:

$$\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$$

248 (7). Берлен ABC үчбурчлугың ичинден ромб чызмалы, шунлукда ABC бурч ромбуң ве үчбурчлугың умумы бурчы болмалы.

249 (7). Класда 35 окувчы бар. Олардан 20 окувчы математика кружогына, 11 окувчы биология кружогына гатнашярлар. Окувчыларын 10-сы шу кружоклара гатнашмаярлар. Биологлардан нәче окувчы математика билен гызыкланяр?

250 (7). Ишчиниң нормансы ерине етирйән вагты 20 % азалды. Ишчиниң зәхметиниң өндүриҗилиги нәче процент артды?

251 (8). $ABCD$ параллелограм берлен. P ве N нокатлар дегишлиликде BC ве CD тарапларың орталары. AP ве AN кесимлериң BD диагоналыны 3 дең бөлеге бөлйәндигини субут этмели.

252 (8). 4, 5, 9 ве 11-е бөлүненде галындыда дегишлиликде 3, 4, 8 ве 10 алынян иң кичи натурал саны тапмалы.

253 (8). $x^2 - y^2 = 3^y$ деңлемәни канагатландырян санларың хеммесини тапмалы.

254 (8). От ятырян бригада бир гүнде отлы ериң ярысыны ве 2 га ятырды. Соңкы гүнде бригада галан ериң 25 % отуны ятырды. Ондан соң 6 га галды. От ятырылян ериң мейданы нәче?

255 (8). 1-ден 100 ченли натурал санлар көплүгини 5 бөлек көплүге бөлмели. Шунлукда оларың хер бириндәки санларың җеми бири-бирине дең болмалы.

256 (9). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубуң AA_1, BC ве C_1D_1 гапыргаларында дегишлиликде K, L, M нокатлары тапмалы, шунлукда оларың арасындакы узаклыкларың квадратларының җеми мүмкин болан иң кичи баханы алмалы.

257 (9). Трапецияның ичинден төверек чызылан. Трапецияның ян тарапларыны диаметр эдип, оларың үстүнде чызылан төверреклериң бири-бирине галташяндыкларыны субут этмели.

258 (9). A, B ве C пунктлар деряның кенарында ерлешен. Деряның акымы боюнча B пункт A-дан ашакда, C болса B-дан ашакда ерлешен. A-дан B-е ченли узаклык B-дан C-е чени болан узаклыга дең. $ABCB$ маршрут боюнча пароход 6 сагат, $BCBA$ маршрут боюнча болса 8 сагат йөрейәр. Деряның акымының тизлиги 2 км/саг. Пароходың тизлигини тапмалы.

259 (9). $1981 \cdot 1983 \cdot 1987 + 1$ саның долы квадратдыгыны субут этмели.

260 (9). Субут этмели:

а) $2^{100} > 10^{30}$

б) $2^{100} < 10^{31}$

261 (10). Үчбурчлы $SABC$ пирамидада BC гөни чызыгың үстүнде D нокат берлен. Шунлукда: $AB = SA = SC = 2\,SD$

ве AB, SA хем SD гөни чызыклар өзара перпендикулярдырлар $\frac{DC}{BC}$ гатнашыгы тапмалы.

262 (10). Деңлемәни натурал санларда чөзмели:

$$\frac{11}{x} + \frac{13}{y} = \frac{7}{17}$$

263 (10). Гой, ABC деңянлы үчбурчлугың эсасы AC болсун.

$$F = \frac{AC^2 + AB^2}{S_{ABC}}$$

функцияның иң кичи бахасыны тапмалы.

264 (10). Субут этмели:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} < \frac{2}{5}$$

265 (10). Хемишелик тизликлери болан ики автомобиль A ве B пунктлардан бири-бирине тарап бирвагтда херекет эдип башладылар. Биринҗиниң B пункта гелмезинден 1 сагат өң, икинҗиниң A пункта гелмезинден 4 сагат өң олар душушдылар. Эгер икинҗиниң тизлиги 60 км/саг болса, онда биринҗи автомобилиң тизлигини тапмалы.

1982-нҗи йыл

266 (8). $|4x^2 - 12x - 27|$ йөнекей сан болар ялы x-иң әхли битин бахаларыны тапмалы.

267 (8). $a > b > 0$, $a^2 + b^2 = 6ab$ болса, $\frac{a+b}{a-b}$ тапмалы.

268 (8). A бурчуң дашындан алнан M нокатдан ики кесиҗи гөни чызык гечирилйәр, оларың бири бурчуң тарапларындан AB ве AC ики конгруэнт кесими кесип аляр, бейлекиси болса шу тараплары дегишлиликде D ве E нокатларда кесйәр.

Субут этмели: $\frac{BD}{CE} = \frac{MD}{ME}$

269 (8). ABC үчбурчлукда AK биссектриса гечирилен. ABK үчбурчлугиң ичинден чызылан төверегиң меркези ABC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң меркези билен габат гелйәр. ABC үчбурчлугың бурчларыны тапмалы.

270 (8,9,10). 9 л ве 11 л гөврүмли ики гап бар. Шуларың көмеги билен крандан 10 л сувы 11-литирлик габа нәхили эдип гуймалы?

271 (9). Битин коэффициентли хич бир $P(x)$ көпчлен үчин $P(7) = 5$, $P(15) = 9$ деңликлериң ерине етирилмейәндигини субут этмели.

272 (9). Тараплары a, b, c, d болан дөртбурчлугың мейданы S деӊ. Субут этмели: $S \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

273 (9). Уссаханада дүрли бәш станок бар. Бир ишчә бир станокда ишлемеги өвретмек 1000 манада дүшйәр. Ишчилерден ислендик үчүси болманда станокларың хеммесини ишде пейдаланар ялы 8 ишчә иш өвретмели. Бу ишчилери тайярлар ялы нәхили иң аз мукдарда пул харч этмели?

274 (9). Эгер $1 + x + y = 0$ болса, онда $1 + x^3 + y^3 = 3xy$ субут этмели.

275 (10). Ики саны ызыгидерлик берлен

$$x_1, x_2, \dots , x_n, \dots$$

$$y_1, y_2, \dots , y_n, \dots$$

Гой, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ болсун. Эгер x_n ве y_n ызыгидерлик дүзүлен болса, онда

$$x_{n+1} = x_n - 4y_n\ ,\ y_{n+1} = y_n + 4x_n$$

Субут этмели: $x_{1982} \cdot y_{1982} \neq 0$

276 (10). Үчбурчлугың тараплары 1 : 3 : 2 ялы гатнашярлар. Үчбурчлугың бурчларыны тапмалы.

277 (10). *ABCD* дөртбурчлугың *A* депесиндәки бурч гөни бурч болуп, *B*, *C*, *D* депелериндәки бурчларың улулыклары болса арифметик прогрессияны эмеле гетирйәрлер. Дөртбурчлугың депелериниң хеммесинден деӊ узаклыкда ятан *O* нокадың еке тәкдигини субут этмели.

278 (10). α, β, γ-ың ислендик бахалары үчин $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ үч саның иӊ болманда бириниӊ $\frac{1}{2}$-ден улы дәлдигини субут этмели.

279 (10). n сан $2n + 1$ ве $3n + 1$ санлары кәбир натурал санларың квадратлары болар ялы эдйән натурал сандыр. n - саның 8-е бөлүнйәндигини субут этмели.

1983-нжи йыл

280 (8). Натурал сан тапмалы, шунлукда шол сан өзүниң өӊүнден гелйән әхли натурал тәк санларың жеми $\frac{1}{50}$ деӊ болмалы.

281 (8). *ABC* йити бурчлы үчбурчлугың *A* депеси үчбурчлугың дешындан чызылан төверегиӊ *O* меркези билен бирлешдирилен. *AH* - үчбурчлугың бейиклиги.

$\angle BAH = \angle OAC$ деӊлиги субут этмели.

282 (8). a, b, c — натурал санлар.

$a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$ аӊлатманың бахасының $a + b + c$ жеме кратныдыгыны субут этмели.

283 (8). 400 саны битин положител санларың көпелтмек хасылы 400 деӊ. Шу санларың мүмкин болан максимал жемини тапмалы, шу сандан улы саны алып болмажакдыгыны субут этмели.

284 (8). $2^{1982} + 1$ саны ики натурал көпелдиже дагытмалы, шунлукда оларың хер бири 1000 аз болмалы дәл.

285 (9). $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 999$ деӊлемәниӊ чөзүвини битин санларда тапмалы.

286 (9). Гөнүбурчлы трапецияның эсасларының бириниӊ узынлыгы 3 см, бейлекисиниӊки 5 см. Онуӊ диагоналларының кесишме нокадындан эсасына перпендикуляр болан тарапына ченли узаклыгы тапмалы.

287 (9). Суратдакы фигураның мейданыны тапмалы.

бу ерде $AB = BC = CD = DE = a$.

288 (9). Тагтада шейле санлар язылан:

$$1, 2, 3, \dots, 1983$$

Ислендик ики саны бозуп, оларың ерине шол санларың тапавудыны язмак боляр. Шу процесе энчеме гезек гайталанандан соӊра тагтада бир сан галяр.

Шу саның бирлик болуп билмежекдигини субут этмели.

289 (10). Эгер $a^2 + b^2 = c^2$ ве $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ болса, онда, $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$ деӊлиги субут этмели.

290 (10). Текизликде $n > 3$ нокат берлен, шунлукда оларың хич бир үчүси бир гөни чызыгың үстүнде ятмаяр. Берлен нокатларың иӊ болманда, үчүсинден гечйән ве галан нокатларың бирини-де өз ичине алмаян төверек бармы?

291 (10). α, β, γ бурчлы үчбурчлугың гөни бурчлы болмагы үчин

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

зерур ве етерликдир. Субут эдиӊ.

292 (10). Трапецияның эсасларының узынлыклары a ве b деӊ. Трапецияның ян тарапларыны бирикдирйән ве

эсасларына параллел болуп, трапецияның мейданы ики дең бөлеге бөлйән кесимиң узынлыгыны тапмалы.

1984-нжи йыл

293 (8). Эгер $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{7}$ болса, онда $\dfrac{x^4}{x^8-x^4+1}$ дробуң бахасыны тапмалы.

294 (8).

$$\begin{cases} x^2 + y^5 = 11 \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

системаның битин санларда чөзүвиниң ёкдугыны субут этмели.

295 (8). $33^{77}+77^{33}$ сан нәхили цифр билен гутаряр?

296 (8). Гөнүбурчлугың депелеринден онуң диагоналына индерилен перпендикулярлар оны үч дең бөлеге бөлйәр. Шу гөнүбурчлугың тарапларының узынлыкларының гатнашыгыны тапмалы.

297 (9). ABC үчбурчлугың B депесинден AC тарапа гечирилен BD бейиклик шол тарапы $AD = 14{,}4$ ве $DC = 25{,}6$ дең болан кесимлере бөлйәр. Шол үчбурчлугың ичинден чызылан тегелегиң мейданыны тапмалы.

298 (9). Хасапламалы:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.$$

299 (9). ABC гөнүбурчлы үчбурчлукда C бурч гөни, A бурчуң улулыгы α дең $|\alpha < \dfrac{\pi}{4}|$. AB гипотенузаның узынлыгы a дең, D нокат гипотенузаның ортасы, B_1 нокат CD гөни чызыга гөрә B нокада симметрик. ABB_1 үчбурчлугың мейданыны тапмалы.

300 (9). Эсаслары a ве b дең болан деңянлы трапеция төверегиң дашындан чызылан. Шу трапецияның диагоналының узынлыгыны тапмалы.

301 (10). Хасапламалы:

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}.$$

302 (10). $e^{x-2} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ деңлемәниң нәче көки бар?

303 (10). $\lim \sin n$ бармы? Бу ерде n-натурал сан.

304 (10). Кәбир санын цифрлериниң орунлары чалшырылды. Алнан саны илки башдакы билен гошдулар. Эгер җем 10^{1984} болса, онда илки башдакы санын 10-а бөлүнйәндигини субут этмели.

305 (10). Үчбурчлугың бейикликлериниң узынлыклары 3 см, ве 4 см ве 5 см. Шу үчбурчлук нәхили үчбурчлук — йити бурчлымы, күтекбурчлымы я-да гөнүбурчлы?

1985-нжи йыл

306 (8). 7^{19} санын иң соңкы цифрини тапмалы.

307 (8). $x^2 - 3x - 5 = 0$ деңлемәни чөзмән, $\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right)$ ве $\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right)$ көклери болан квадрат деңлемәни дүзүң, бу ерде x_1 ве x_2 берлен деңлемәниң көклери.

308 (8). Диагоналлары өзара перпендикуляр болан трапецияның бейиклиги 4 см. Эгер диагоналларының бири 5 см болса, онда трапецияның мейданыны тапмалы.

309 (8). Деңсизлиги субут этмели.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \ge x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

310 (8). Класда 15 күштчи бар. Олардан кәбир вагтда хер бириниң башга 8 оюнчыны утанлыгы белли боляр.

эсасларына параллел болуп, трапецияның мейданы ики дең бөлеге бөлйән кесимиң узынлыгыны тапмалы.

1984-нжи йыл

293 (8). Эгер $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{7}$ болса, онда $\frac{x^4}{x^8-x^4+1}$ дробуң бахасыны тапмалы.

294 (8).

$$\begin{cases} x^2 + y^5 = 11 \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

системаның битин санларда чөзүвиниң ёкдугыны субут этмели.

295 (8). $33^{77} + 77^{33}$ сан нәхили цифр билен гутаряр?

296 (8). Гөнүбурчлугың депелеринден онуң диагоналына индерилен перпендикулярлар оны үч дең бөлеге бөлйәр. Шу гөнүбурчлугың тарапларының узынлыкларының гатнашыгыны тапмалы.

297 (9). ABC үчбурчлугың B депесинден AC тарапа гечирилен BD бейиклик шол тарапы $AD = 14{,}4$ ве $DC = 25{,}6$ дең болан кесимлере бөлйәр. Шол үчбурчлугың ичинден чызылан тегелегиң мейданыны тапмалы.

298 (9). Хасапламалы:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.$$

299 (9). ABC гөнүбурчлы үчбурчлукда C бурч гөни, A бурчуң улулыгы α дең $|\alpha < \frac{\pi}{4}|$. AB гипотенузаның узынлыгы a дең, D нокат гипотенузаның ортасы, B_1 нокат CD гөни чызыга гөрә B нокада симметрик. ABB_1 үчбурчлугың мейданыны тапмалы.

300 (9). Эсаслары a ве b дең болан деңянлы трапеция

төверегиң дашындан чызылан. Шу трапецияның диагоналының узынлыгыны тапмалы.

301 (10). Хасапламалы:

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}.$$

302 (10). $e^{x-2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ деңлемәниң нәче көки бар?

303 (10). $\lim \sin n$ бармы? Бу ерде n-натурал сан.

304 (10). Кәбир саның цифрлериниң орунлары чалшырылды. Алнан саны илки башдакы билен гошдулар. Эгер жем 10^{1984} болса, онда илки башдакы санын 10-а бөлүнйәндигини субут этмели.

305 (10). Үчбурчлугың бейикликлериниң узынлыклары 3 см, ве 4 см ве 5 см. Шу үчбурчлук нәхили үчбурчлук — йити бурчлымы, күтекбурчлымы я-да гөнүбурчлы?

1985-нжи йыл

306 (8). 7^{19} саның иң соңкы цифрини тапмалы.

307 (8). $x^2 - 3x - 5 = 0$ деңлемәни чөзмән, $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)$ ве $\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)$ көклери болан квадрат деңлемәни дүзүң, бу ерде x_1 ве x_2 берлен деңлемәниң көклери.

308 (8). Диагоналлары өзара перпендикуляр болан трапецияның бейиклиги 4 см. Эгер диагоналларының бири 5 см болса, онда трапецияның мейданыны тапмалы.

309 (8). Деңсизлиги субут этмели.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

310 (8). Класда 15 күштчи бар. Олардан кәбир вагтда хер бириниң башга 8 оюнчыны утанлыгы белли боляр.

Бири-бирини утан ики күштчиниң барлыгыны субут эдиң.

311 (9). 7^{19} саның иң соңкы цифрини тапмалы.

312 (9). Ики саны сагат гүндиз 12-ни гөркезйәр. Оларың биринҗиси суткада 8 минут өңе гидйәр, икинҗиси болса суткада 4 минут гиҗә галяр. Олар нәче вагтдан соң енеде илкинҗи гезек бир вагтда гүндиз сагат 12-ни гөркезер?

313 (9). Кәбир адамың яшы 1957-нҗи йылда онуң догулан йылының цифрлериниң җемине дең. Онуң яшы нәче?

314 (9). Эгер саның өзи 3 сан артдырыланда онуң цифрлериниң җеми үч эссе азалян болса, онда шейле үчбелгили санларың хеммесини тапмалы.

315 (9). Бейикликлери 1, $\sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5}$ болан үчбурчлук бармы?

316 (10). 7^{19} саның соңкы цифрини тапмалы.

317 (10). $ABCD$ трапецияның AB эсасы a, CD эсасы b деӊ ($a < b$). A, B ве C депелериң үстүнден гечйән төверек AD тарапа галташяр. AC диагоналы тапмалы.

318 (10). Йити бурчуң ичинден бири-бирине галташян тегелеклер чызылан. Шу тегелеклериң радиусларының геометрик прогрессияны эмеле гетирйәндигини гөркезиң. Бу прогрессияның майдалавҗысы билен берлен бурчуң улулыгының арасындакы багланышыгы тапың.

319 (10). P текизлигиң үстүнде улулыгы 60° деӊ болан BAC бурч берлен. S нокат бурчуң A депесинден 25 см, AB тарапдан 7 см, AC тарапдан 20 см узаклыкда ерлешен. S нокатдан P текизлиге ченли узаклыгы тапмалы.

320 (10). Субут этмели:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

1986-нҗы йыл

8-нҗи клас

321. Деңлемәни чөзмели:

$$(x - 2y)^2 + (1 - x + y)^2 = 0.$$

322. a ве b положител санлар үчин ашакдакы деңсизлигиң ерине етйәндигини субут этмели:

$$(a+b)(a^3+b^3) \geq (a^2+b^2)^2$$

323. $24^a \cdot 25^b \cdot 27^c \cdot 30^d = 1$ болар ялы отрицател болмадык шейле бир битин a, b, c, d санлар бармы?

324. $ABCD$ гүберчек дөртбурчлук берлен. O — онуң диагоналларының кесишме нокады. ABO ве COD үчбурчлукларың мейданлары деӊ. BOC ве AOD үчбурчлукларың меңзешдиклерини субут эдиң.

325. Ики күштчи бири-бири билен 1986 дөв ойнаярлар. Оларың бири бейлекисинден ярым очко көп топлап билерми (утана 1 очко, утдырана 0 очко ве деӊ болана $\frac{1}{2}$ очко языляр)?

9-нҗы клас

326. Текизликде параллелограм ве онуң дашында нокат берлен. Параллелограмы деӊ улулыкда ики бөлеге бөлйән гөни чызыгы берлен нокат аркалы диңе бир чызгыҗың көмеги билен нәхили эдип гечирмели?

327. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ отрицател болмадык 7 саны сан берлен, шунлукда $a_1 = a_7 = 0$.

Кәбир $i \in \{2,3,4,5,6\}$ номер үчин $a_{i+1} + a_{i-1} \leq a_i\sqrt{3}$ боляндыгыны субут этмели.

328. Кубуң бәш депеси гызыл реңк билен реңкленен.

Гапыргаларың ужунда бир меңзеш реңкли иң болманда үч саны гапырганың тапылҗакдыгыны субут этмели.

329. Деңлемәни чөзмели:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{x-1}.$$

330. Үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң меркези үчбурчлугың ичинде ятяндыгы белли ве шол төверегиң меркези хем-де үчбурчлугың ики депеси аркалы гечйән төверегиң үчбурчлугың тарапына галташяндыгы белли болса, шу үчбурчлугың деңянлыдыгыны субут этмели.

10-нҗы клас

331. (x,y) координаталары $(x\text{-}2)\ (y\text{-}2)\ \geq\ 0$ шерти канагатландырян нокатларың көплүгини координата текизлигинде шекиллендириң.

332. Куб деңлемәни чөзмели:

$$30x^3-31x^2+10x-1=0.$$

333. Ашакдакы функцияның иң улы ве иң кичи бахаларыны тапың:

$$y=\frac{5\sin^2 10x}{\sin^4 5x+\cos^4 5x}$$

334. Деңлемәни чөзмели:

$$\int_0^x \cos^2(xu)\,du=\frac{x}{2}+\frac{1}{4x}\cos 2x^2.$$

335. Гөни чызык параллелограмың мейданыны ики дең бөлеге бөлйәр. Шол гөни чызыгың диагоналларының кесишме нокады аркалы гечйәндигини субут этмели.

1987-нҗи йыл

8-нҗи клас

336. Эгер үчбурчлугың кәбир медианасы онуң биссектрисасы болса, онда шол үчбурчлугың деңянлыдыгыны субут эдиң.

337. Бир огланың яшының саны (долы яшының саны) бейлеки огланың яшының санына бир нәче йыл озалкы гатнашыгы хәзирки ялы болупдыр. Шу гатнашыгы тапың.

338. Үчбелгили саны тапмалы, шунлукда шол саны өзүниң цифрлериниң җеминден 11 эссе улы болмалы.

339. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ сан рационал санмы я-да иррационал?

9-нҗы клас

340. Үчбурчлугың тараплары 4, 9 ве 10 см. Шу үчбурчлук йити бурчлумы, күтек бурчлымы я-да гөнүбурчлы?

341. A ве B шәхерлеринден бир вагтда ики поезд бирибириниң гаршысына уграярлар. Биринҗи поездиң тизлиги икинҗи поездиң тизлигинден 10 км/сағ артык. Поездлер AB аралыгың ортасындан 28 км узаклыкда душушярлыр. Эгер биринҗи поезд A-дан икинҗиден 45 мин. гич чыкан болса, онда поездлер AB аралыгың ортасында душушарлар. AB аралыгы тапмалы.

342. Дөртбелгили сан ызыгидерли үч йөнекей санының көпелтмек хасылыдыр ве чепден сага окалышы, сагдан чепе окалышы ялыдыр. Шу саны тапмалы.

343. Цифрлериниң хеммеси үйтгешик болан нәче докузбелгили сан бар?

344. Деңсизлиги субут этмели:

Эгер $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ болса, онда

$$a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n \leq n\, a_1\, a_2 \ldots a_n$$

10-нжы клас

345. P ве $P+2$ санлар 3-ден улы йөнекей санлардырлар. $P+1$ санын 6-а бөлүнйэндигини субут этмели.

346. $ax^2 + bx + c = 0$ деңлемэниң хакыкы көклери ёк ве $a - b +$ $+ c > 0$. c - саның аламаты нэхили?

347. Нетижеде 1987 сан алынар ялы эдип, 1, 2, 3, ..., 86, 87 санларың арасында "-" ве "+" аламатларыны гоймак мүмкинми?

348. ABC үчбурчлукда A бурч B бурчдан ики эссе улы. Берлен b ве c тараплары боюнча a тарапыны тапмалы.

349. Эгер гөнүбурчлы үчбурчлукларың катетлериниң бири 5 см деӊ болса, онда тарапларының узынлыклары битин санлар билен аӊладылян үчбурчлукларың саны нэче?

1988-нжи йылың олимпиадасы

8-нжи клас

350. Деңлемелер системасыны чөзмели:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1987 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1988 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = 1985 \end{cases}$$

351. Гөнүбурчлы үчбурчлукда катетлериниң жеминиң үчбурчлугың дашындан ве ичинден чызылан төверек-лериң диаметрлериниң жемине деңдигини субут эдиң.

352. Ики күштчи бири-бири билен 1988 дөв оюн ойнадылар. Оларың бириниң бейлекиден ярым очко артык топлап билмеги мүмкинми (Эгер күштчи утса 1 очко, дең болса 0,5 очко, утдырса 0 очко аляр)?

353.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots - \frac{1}{999} + \frac{1}{1000}$$

жеми A билен белләлиң.

а) $A < \dfrac{5}{12}$ субут этмели.

б) $A > \dfrac{2}{5}$ субут этмели.

354. Параллелограмың ики депеси $ABCD$ гүберчек дөртбурчлугың AB ве CD тарапларының орталарында бейлеки ики депеси болса BC ве AD тарапларың үстүнде ятярлар. Параллелограмың мейданының $ABCD$ дөртбурчлугың мейданындан ики эссе кичидигини субут эдиң.

9-нжы клас

355. Кэбир натурал n сан үчин 2^n ве 5^n санлар эдил шол бир цифрлер билен башланылар. Шу цифрлер нэхили цифр болуп билерлер?

356. $y = \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

функцияның иң улы ве иң кичи бахаларыны тапмалы.

357. P нокат $ABCD$ гөнүбурчлугың ичинде ерлешйэр. $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ деңлиги субут этмели.

358. "Ики ак", "Ики гара", "Гара ве ак" язгылы бир меңзеш ящиклерде ики ак, ики гара, гара ве ак шарҗагазлар бар, эмма язгыларың ящиклериң ичиндэкилере дегишлидиги белли дэл. Ящиклериң хеммесиндэки шарҗагазлары

кесгитлемек үчин иң азындан нәче шарҗагаз чыкармалы болар?

10-нжы клас

359. Шейле бир иң кичи натурал сан тапмалы, шунлукда оны 2-ә бөлениңде такык квадрат алынмалы, 3-е бөлениңде болса такык куб алынмалы.

360. Эгер деңлемәниң көклери $5x_1 + 2x_2 = 1$ баглылыкда болуп, b сан битин болса, онда $5x^2 + bx - 28 = 0$ деңлемедәки b коэффициенти тапмалы.

361. Ит 30 м узаклыкдакы тилкини ковалаяр. Ит хер бөкенде 2 м, тилки болса 1 м гечйәр, эмма тилки үч бөкенде ит диңе ики гезек бөкйәр. Нәче метрден соң ит тилкиниң ызындан етер?

362. ABC үчбурчлук берлен. Төверек A ве B депелерден гечйәр, хемде AC ве CB тараплары дегишлиликде P ве Q нокатларда кесйәр. AB тарапың үстүнде $QR \parallel CA$, $PS \parallel CB$ болар ялы эдип, R ве S нокатлар алнан. P, Q, R, S нокатларың бир төверегиң үстүнде ятяндыкларыны субут эдиң.

363. Бурчлары

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$$

деңлиги канагатландырян үчбурчлугың гөнүбурчлудыгыны субут эдиң.

1989-нжы йыл

364. Гой, a, b - положител санлар болсун.

Субут этмели: $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$

365. Эгер 1, 2, 3, ..., 1989 санларың араларында "+" я-да "-"

белгилер гоюлса ве (гошмак, айырмак) амаллар ерине етирилсе, онда нәхили иң кичи отрицател дәл саны алмак мүмкин?

366. $a^5 - a^3 + a = 2$ белли болса, $a^6 > 3$ деңсизлиги субут этмели.

367. Гүберчек $ABCD$ дөртбурчлугың гаршылыклы AB ве CD тарапларының орталарыны бирлешдирйән кесим AC диагонал билен кесишенде ярпа бөлүнйәр. ABC ве ACD үчбурчлукларың мейданларының деңдигини субут этмели.

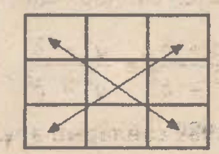
9-нжы клас

368. Тарапларына параллел ики җүбүт гөни чызыклар билен берлен параллелограм докуз параллелограма бөлүнйәр. Эгер берлен параллелограмың мейданы S_1, меркези (штрихленен) параллелограмың мейданы S_2 болса, онда $ABCD$ дөртбурчлугың мейданыны тапмалы.

369. Телевизион вышканың эсасындан a, b ве c узаклыкда горизонтал текизликде ятян үч нокатлардан бу вышка җеми 90°-дең болан бурчлар боюнча гөрүнйәр. Вышканың бейиклигини тапмалы.

370. Ислендик үчбелгили саның ызындан шол саны язмак билен алтыбелгили сан алнан. Шу алнан алтыбелгили сан билен 1989 саның иң улы умумы бөлүҗиси нәчә деӊ болуп билер?

371. 9x9 өлчегли тагтаның хер өйҗүгинде томзак отыр. Сигнал боюнча хер томзак гоңшы өйҗүклериң бирине (диагонал боюнча) гечйәр. Шунлукда, сигналдан соң кәбир өйҗүкде бирнәче томзагың, кә биринде болса хич бириниң болмазлыгы мүмкин. Иң азындан нәче өйҗүгиң бош болмагы мүмкин?



372. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ боланда, $\frac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x$ деңсизлигиң догрудыгыны субут эдиң.

10-нжы клас

373. Деңлемәни чөзүң:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 = 0 .$$

374. Координата текизлигинде

$$\left((-1)^{[x]} - (-1)^{[y]}\right)^2 \geq 2$$

болар ялы эдип, (x,y) нокатлар көплүгини шекиллендириң.

375. Гөнүбурчлук гөрнүшиндәки гүл клумбасы 216 кв. метр болмалы. Узын тарапларының бойы боюнча ини 2 м болан, бейиклиги тарапларының бойы боюнча ини 3 м ёлҗагаз болмалы. Ёлҗагазларың мейданының иң кичи болмагы үчин гөнүбурчлы участогың (клумба билен ёлҗагазың) өлчеглери нәхили болмалы?

376. Таблицасыз ве калькуляторсыз хасапламалы:

$$\frac{\lg (2 \sin 15^o)}{\lg (2 \cos 15^o)} .$$

377. Радиусы 1 см болан тегелегиң дөртден бириниң гөрнүшиндәки фигура билен өлчеглери 2,15 см х 4 см болан гөнүбурчлужда бири-бириниң үстүнде гойман иң аз санда нәчесини ерлешдирмек болар?

АШГАБАТ ШӘХЕР ОЛИМПИАДАСЫ

1963-нжи йыл

Биринҗи вариант

378 (10). Гөни призманың эсасы радиусы 25 см болан төверегиң ичинден чызылан дөртбурчлук. Гапдал гранларының мейданлары 7:15:20:24 ялы гатнашярлар. Иң улы гранының диагоналы 52 см. Призманың гөврүмини тапмалы.

379 (10). Ашакдакы җеми тапмалы:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} .$$

380 (10). Математики индукция методы билен ашакдакы деңлиги субут этмели:

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} .$$

381 (10). Эгер $\angle A$, m_b, $b + c$ берлен болса, онда үчбурчлугы гурмалы.

Икинҗи вариант

382 (10). Ашакдакы җеми тапмалы:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \ldots$$

383 (10). Деңлемәни чөзмели:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} + 4 .$$

384 (10). Берлен бурчуң тарапларындан берлен узлыкдакы хордалары кесип алян берлен радиуслы төверек гечирмели.

385 (10). ABC гөнүбурчлы үчбурлугың BC гипотенузасының үстүнден дашкы квадрат гурлан. Онуң диагоналларының кесишме нокады үчбурчлугың гөни бурчуның депеси билен бирикдирилен. Эгер AB ве AC катетлер дегишлиликде 3 см ве 4 см дең болсалар, онда гипотенузада алнан кесимлериң узынлыкларыны тапмалы.

1964-нжи йыл

386 (10). Догры дөртбурчлы пирамиданың чатык гранларының арасындакы икигранлы бурч 120° дең. Пирамиданың гапдал үсти $18\sqrt{2}$ см^2 дең. Пирамиданың эсасының мейданыны хасапламалы.

387 (10). Эгер деңянлы үчбурчлугың эсасы a болса ве h_a бейиклик билен ян тарапларының җеми белли болса, онда шол деңянлы үчбурчлугы гурмалы.

388 (10). Натурал санның кубы билен шол санның өзүниң тапавудының 6-а бөлүнийэндигини субут этмели.

389 (10). Ашакдакы көпелтмек хасылыны тапмалы:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{3}$$

390 (10). Ашакдакы аңлатма нәче дең?

$$32^{\frac{2}{3}\log_{32}125}$$

391 (10). Түкениксиз хатарың җемини тапмалы:

$$1+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots,$$

бу ерде $0<x<1$.

392 (10). Системаны чөзмели:

$$\begin{cases} x^2+3xy+3y^2=19 \\ 2x^2+xy-3y^2=-8 \end{cases}$$

1965-нжи йыл

Биринҗи вариант

393 (8). Ислендик n битин саның бахасында $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ битин сандыгыны субут этмели.

394 (8). $x^2+px+q=0$ деңлемәни чөзмезден онуң көклериниң кубларының җемини тапмалы.

395 (8). Эгер ики гөнүбурчлы үчбурчлугың мейданлары оларың гипотенузалары ялы гатнашян болса, онда үчбурчлуклар меңзешдирлер. Субут этмели.

396 (8). Хер бириниң гөврүми 30 литр болан ики саны бир меңзеш гапда җеми 30 литр спирт бар. Биринҗи гапдакы спирти сув билен долдурярлар ве соңра алнан гарынды билен икинҗи габы долдурярлар, ондан соңра икинҗи гапдан биринҗи габа алнан тәзе гарындыдан 12 литр гуйярлар. Эгер икинҗи гапдакы спирт биринҗидәкиден 2 литр аз болан болса, онда илки башда гапларың хер биринде нәче спирт бар экен?

Икинҗи вариант

397 (8). Плотлар (сувда йүзмек үчин бири-бирине беркидилен бир нәче шалман) A пунктдан деряның аягына ченли сувуң угры боюнча акып баряплар. Деряның аягында олары плот A-дан чыкандан $17\frac{1}{8}$ сутка вагт геченден соң пароход оны тиркеге алып көл билен B пункта элтйәр. Эгер пароход тиркегсиз хер бир рейсе A-дан B ченли 61 саг. ве B-дан A-а ченли 79 сагат вагт сарп эдйән болса ве тиркеге алып гиден вагты онуң

тизлиги ики эссе азалян болса, онда пароход деряның аягындан B пункта ченли плотлары нэче вагт тиркеге алыпдыр?

398 (8). Деңлемэни чөзмели:

$$(7x+3)^4+(2x-6)^4=(3x+7)^4+(6x-2)^4$$

399 (8). A тарапы, m_b медианасы ве h_a бейиклиги боюнча үчбурчлук гурмалы.

400 (8). Бир меңзеш h бейикликлери ве бир меңзеш a эсаслары болан ики саны басганчаклара халы язылан. Эгер биринҗи басганчагың 12 саны басганчагы, икинҗиниң 18 саны басганчагы бар болса, онда шол халыларың узынлыклары бир меңзеш боларmы?

Биринҗи вариант

401 (9). a^5-5a^3+4a саның 120-э бөлүнйэндигини субут этмели.

402 (9). Эгер $x=\sqrt{ab}$, $a>0$, $b>0$ болса, онда ашакдакы аңлатманы садалашдырмалы:

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}$$

403 (9). Хер бириниң n члени болан p арифметик прогрессия берлен. Оларың биринҗи членлери дегишлиликде 1, 2, 3, ..., p дең, тапавутлары болса 1, 3, 5, ..., $2p$-1 дең. Прогрессияларың хеммесиниң членлериниң жеминиң $\frac{1}{2}np\,(np+1)$ деңдигини субут этмели.

404 (9). R радиуслы төверек берлен. Онуң ичинден бири-бирине өзара галташян ве берлен төвереге галташян нокатларының арасындакы эгри чызыклы фигураның S мейданыны хасапламалы.

Икинҗи вариант

405 (9). Хасапламалы:

$$5^{0,2-\sqrt[-3]{146-\frac{\sqrt[3]{21}}{21^{-2/3}}}}$$

406 (9). Хасапламаның хайсы системасында

$$371\cdot 11=4181$$

деңлигиң догрудыгыны такыкламалы.

407 (9). Эгер $a_1\geq 0,\ a_2\geq 0,\ a_3\geq 0,\ a_4\geq 0$ болса, онда

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

деңсизлиги субут этмели.

Биринҗи вариант

408 (10). Дөрт доган билеликде бир телевизоры сатын алдылар. Биринҗи бейлекилериң төлэн пулларының $\frac{1}{2}$ бөлегини төледи. Икинҗи $\frac{1}{3}$ бөлегини төледи. Үчүнҗи $\frac{1}{4}$ - ни төледи. Дөрдүнҗи 45,5 манат төледи. Телевизорың бахасы нэче?

409 (10). Тождествоны субут этмели:

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}}-\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sec\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}$$

410 (10). Хер сетирдэки ве хер бир сүтүндэки членлери геометрик прогрессияны дүзер ялы эдип, бош өйҗүклери долдурмалы.

		12	
144			
			81
	288		

411 (10). Гапыргасы a деӊ болан кубы бир нокатдан чыкян үч гапырганыӊ орталарындан гечйән текизлик билен бурчлары боюнча кесйәрлер. Алнан көпгранлыгыӊ үстүни кесгитлемели.

412 (10). Ислендик a, b, c, d хакыкы санлар үчин ашакдакы деӊсизлигиӊ догрудыгыны субут этмели:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abc .$$

Икинҗи вариант

413 (10). Деӊлемәни чөзмели:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x .$$

414 (10). Эсасы, депесиндәки бурчы ве бейлеки ики тарапыӊ җеми боюнча үчбурчлук гурмалы.

415 (10). Гөнүбурчлы ABC үчбурчлугыӊ катетлериниӊ ве гипотенузасыныӊ үстлеринде үчбурчлугыӊ дашында ерлешен квадратлар гурлан. Эгер ABC үчбурчлугыӊ гипотенузасы ве катетлериниӊ җеми белли болса, онда үчбурчлугыӊ депелери болмадык квадратларыӊ депелеринден эмеле гелен алтыбурчлугыӊ мейданыны хасапламалы.

416 (10). Кәбир дөртбелгили саныӊ (чепден сага) цифрлери дөрт саны ызыгидерли сандыр. Эгер саныӊ (чепдәки) ики цифриниӊ орны чалшырылса, онда такык квадрат сан алыняр. Шол саны тапмалы.

Биринҗи вариант

417 (11). Үчбурчлы $SABC$ пирамида берлен, SCB граны эсасыныӊ текизлигине перпендикуляр, $SC = SB = 1$, депедәки текиз бурчлары 60°. Пирамиданыӊ гөврүмини тапмалы.

418 (11). Деӊлемәни чөзмели:

$$(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos 3x) = \frac{1}{2} .$$

419 (11). Тождествоны субут этмели:

$$\log_2 7 \cdot \log_3 7 + \log_3 7 \cdot \log_5 7 = \frac{\log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7}{\log_{30} 7}$$

420 (11). Эгер

$$\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^m$$

дагытманыӊ дөрдүнҗи членениӊ биномиал коэффициентиниӊ үч эссесиниӊ $\log_{10}$ билен дагытманыӊ икинҗи членениӊ бионимал коэффициентиниӊ $\log_{10}$ тапавуды 1-е деӊ болса, онда x-иӊ хайсы бахасында бином дагытмадакы 9 эссе көпелдилен үчүнҗи члени билен шол дагытмадакы бәшинҗи членӊ арасындакы тапавут 240 деӊ болҗакдыгыны кесгитлемели.

421 (11). Гапыргасы a деӊ болан кубы бир депеден чыкян үч гапырганыӊ орталарындан гечйән текизликлер билен кесйәрлер. Алнан көпгранлыгыӊ үстүни кесгитлемели.

Икинҗи вариант

422 (11). Тарапы, ики тарапыныӊ җеми ве шу тарапларыныӊ бирине гечирилен бейиклик боюнча үчбурчлук гурмалы.

423 (11). Эгер a ве b катетлери ве c гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасы болса, онда

$$c \geq \frac{a+b}{2}$$

субут этмели.

424 (11). Ашакдакы деңлиги хасапламаның хайсы системасында догрудыгыны такыкламалы:

$$371 \cdot 11 = 4181$$

425 (11). Ашакдакы аңлатмаларың хайсысы улы:

$$\log_3 7 \quad \text{я-да} \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$$

426 (11). Деңлемәни чөзмели:

$$\log_3 x + \log_x 3 - 2\log_3 x \cdot \log_x 3 = \frac{1}{2}$$

1966-нжы йыл

427 (6-7). A ве B ики завод заказы 12 гүнде ерине етирмели. Ики гүн гечenden соң A завод ремонта дуряр, шондан соңра заказы ерине етирмек үчин диңе B завод ишлейәр. B заводың өндүрижилиги A заводың өндүрижилигиндениң $\frac{2}{3}$ дендиги белли. Ене-де нәче гүнден соң заказың ерине етирилжекдигини кесгитлемели.

428 (6-7). Ашакдакы жеми хасапламалы:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 995 + 997 + 999$$

429 (6-7). Нокатларың орнуна етмейән цифрлери гоймалы:


```
    .  2  .
 x     .  7
 ----------
  2  2  .  8
+ 6  .  0
 ------------
1  .  4  6  .
```

```
          6
 x
 ------------
        .
+    .
   .  .
 ------------
  .  .  .  6
```

430 (6-7). Дөрт саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылы 3024 дең. Шу санлары тапмалы.

431 (6-7). 24 саны бочканың 5-си долы, 11-си ярты ве 8-си болса бош. Үч адамың арасында 24 бочканы дең пайламалы (бир гапдан бейлеки габа гуймак болмаяр).

432 (8). Эркин ABC үчбурчлугың BC тарапың довамында D нокады алалың ве ACD хем ABC бурчларың биссектрисаларыны гечирелиң. Биссектрисаларың кесишмегинден алнан йити бурчуң A бурчуң ярысына дендигини субут этмели.

433 (8). Окувчы 78 саны икибелгили саны көпелтмели, шунлукда шу саның онлукларының цифри бирликлериниң цифринден үч эссе улудыгы белли. Ол ялңышып, икинжи көпелдижиде цифрлериң орунларыны чалшырыпдыр, шунлукда көпелтмек хасылы хакыкы болмалысындан 2808 сан аз болупдыр. Хакыкы көпелтмек хасылы нәче дең?

434 (8). Жеми 396-а дең болан дөрт саны тапмалы, шунлукда эгер биринжи сана 5 гошулса, икинжиден 5 айрылса, үчүнжи 5-е көпелдилсе, дөрдүнжи 5-е пайланылса, онда шол дөрт сан бири-бирине дең боляр. Илки башдакы санлары тапмалы.

435 (8). A ве B бирвагтда бири-бириниң гаршысына Москвадан ве Туладан чыкып хемишелик тизлик билен херекет эдйәрлер. A ёлагчы Москвадан Тула ченли узаклыгы x сагатда гейәр, B болса Туладан Москва ченли аралыгы y сагатда гечйәр. Олар A ёлагчының Тула

ченли бармагына m сагат галанда ве B ёлагчының Москва бармагына n сагат галанда ёлда душушярлар. $x^2 : y^2 = m : n$ боляндыгыны гөркезмели.

436 (78). $ABCD$ трапеция берлен. Ашакдакы багланышыклары субут этмели:

$$\frac{AO \cdot OC}{AC^2} = \frac{OB \cdot OD}{BD^2} \quad \text{ве} \quad \frac{AO \cdot OD}{AD^2} = \frac{OB \cdot OC}{BC^2}$$

(O нокат диагоналларың кесишме нокады).

437 (8). Үчбелгили санның ызындан оны язып, ондан бир сан улы сан языляр. Нетиҗеде алнан санның долы квадратдыгыны билип, шол саны тапмалы.

438 (9). Системаны чөзмели:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy\,(x + y) = -2 \end{cases}$$

439 (9). ABC үчбурчлукда A ве B депелерден биссектрисалар гечирлен. Соңра шу биссектрисалара параллел эдип, C депеден гөни чызыклар гечирилен. Шу гөни чызыкларың биссектрисалар билен кесишме D ве E нокатлары бирлешдирленде DE ве AB гөни чызыклар параллел болупдырлар. ABC үчбурчлугың деңянлыгыны субут этмели.

440 (9). Ашакдакы деңсизлиги субут этмели:

$$2\sqrt{(p - a)(p - c)} \le a\,,$$

(бу ерде a, b, c үчбурчлугың тараплары, p - болса онуң ярым периметри).

441 (9). Субут этмели:

$$S = \frac{abc\,(h_a + h_b + h_c)}{2\,(ab + bc + ac)}\,,$$

(бу ерде S, тараплары a, b, c ве бейикликлери болан ABC үчбурчлугың мейданыдыр).

442 (9). Деңлемәни чөзмели:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1\,, \quad x > 1.$$

443 (9). Йөнекейлешдирмели:

$$\left(\frac{\dfrac{a + \sqrt[3]{2a^2x}}{2x + \sqrt[3]{4ax^2}} - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6}$$

444 (9). Хасапламалы:

$$\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}.$$

445 (8). Ашакдакы санларың хайсысы улы:

$$100^{20} \text{ я-да } 9850^{10}\,?$$

446 (10-11). $AB \parallel CD \parallel EF$ гөни чызыклар берлен (CD чызык AB билен EF арасында). AB ве CD арасында M ве N ики нокат берлен, CD ве EF арасында P нокат берлен. Берлен AB, CD ве EF үч гөни чызыкларың хер бириниң үстүнде үчбурчлугың депелериниң бири ятар ялы ве онуң тарапларының хер бириниң үстүнде берлен нокатларың бири ятар ялы эдип, үчбурчлук гурмалы.

447 (10-11). Деңлемелер системасыны чөзмели:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = x + y + z = \dfrac{13}{3}\,, \\ xyz = 1 \end{cases}$$

448 (10-11). ABD ве ACD үчбурчлукларың дашындан чызылан төверереклериң радиусларының R ве r деңдигини билип, $ABCD$ ромбуң тейданыны тапмалы.

449 (10-11)7 Шарың ичинден ян гапыргалары b дең болан пирамида чызылан. Пирамиданың эсасы, тараплары ян гранларының текизликлери билен шар кесигиң α ве β дугаларыны дартян гөнүбурчлук. Шарың гөврүмини тапмалы.

450 (10-11). Эгер $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ санлар арифметик прогрессияны эмеле гетирйэн болсалар, онда ашакдакы деңлиги субут этмели:

$$n^2 = (kn)^{\log_k m}$$

451 (10-11). ABC үчбурчлукда h_a бейиклик шу үчбурчлугың A депесинден дашкы бурчуның биссектрисасының ярысына деңдир. B ве C бурчларың тапавудыны тапмалы.

452 (10-11). $x^{73} - x^{37}$ гөрнүшдэки саның х-иң ислендик натурал бахасында 10 бөлүнйэндигини субут этмели.

453 (10-11). Деңлемэни чөзмели:

$$9^{\log_{25} x^2} + \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(9^{\log_{25}(x+1)} - 9^{\log_{25} x}\right).$$

454 (10-11). b^2 сан a^2 ве c^2 санларың орта арифметик бахасы онда натурал a, b ве c санлары тапмалы.

(бу ерде $a < b < c$)

1967-нжи йыл

455 (6). n-иң хич бир битин бахаларында

$$\frac{n-16}{15} \quad \text{ве} \quad \frac{n-15}{24}$$

дробларың бир вагтда битин сана дең болуп билмейэндигини субут этмели.

456 (6). $ABCD$ трапецияның BC тарапының ортасы M нокат, онуң A ве D депелери бирлешдирилен. MDA үчбурчлугың мейданының трапецияның мейданындан ики эссе кичидигини субут этмели.

457 (6). Гөнүбурчлы үчбурчлукда C гөни бурчуның депесинден медиана, биссектриса ве бейиклик гечирилен. Биссектрисаның медиана билен бейиклигиң арасындакы бурчы дең ики бөлеге бөлйэндигини субут этмели.

458 (6). Бир ярым товук бир ярым гүнде бир ярым юмуртга гузлапдырлар. 4 товук 9 гүнде нэче юмуртга гузлар?

459 (7). Эгер ики битин саның квадратларының жеми 7-э бөлүнсе, онда шу санларың хер бири 7-э бөлүнер. Субут этмели.

460 (7). Мекдеп викторинасында 30 сораг теклип эдилйэр. Хер бир догры жогап үчин оюна гатнашана 7 очко баха берилйэр, нэдогры жогап үчин ондан 12 очко айрыляр. Эгер ол 77 очко газанан болса, онда ол нэче сорага догры жогап берипдир?

461 (7). Эгер ABC үчбурчлугың B депесинден BA ве BC тараплара гечирилен перпендикулярлар AC тарапы үч дең бөлеге бөлйэн болсалар, онда үчбурчлугың бурчларыны кесгитлемели.

462 (7). Ики дең төверек берлен, шунлукда оларың хер бири бейлекиниң меркезинден гечйэр ве A ве B нокатларда кесишйэрлер. A нокат аркалы эркин кесиҗи гөни чызык гечирилйэр, ол төвереклери C ве D нокатларда кесйэр. BCD үчбурчлугың деңтараплыдыгыны субут этмели.

463 (8). Эгер $a^2 + a + 1 = 0$ болса, онда $a^{14} + \dfrac{1}{a^{14}} = -1$ субут этмели. Бу ерде $a \neq 0$.

464 (8). Докуза бөлүнйэн 1967 цифрли сан алнан. Онуң цифрлериниң жемини A билен, A саның цифрлериниң жемини болса B билен белгилэлиң. B саның цифрлериниң жемини тапмалы.

465 (8). Эгер ABC үчурчлугың B депесинден BA ве BC тарапларына гечирлен перп[illegible]лярлар AC тарапы үч дең бөлеге бөлйэн болса, о[illegible]угың бурчларыны кесгитлемели.

466 (8). Бир меңзеш [illegible] болан гөнүбурчлы үчбурчлукларың и[illegible] периметрлисини тапмалы.

467 (9). Ашакдакы көпчлен[illegible]сыны тапмалы:

$$x\,(x+2)\,(x+3)\,(x[illegible])$$

468 (9). Деңлемәни чөзмели:

$$2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1 .$$

469 (9). Бирмеңзеш гипотенузалары болан гөнүбурчлы үчбурчлукларың ичинде иң улы периметрлисини тапмалы.

470 (9). Дөртбурчлугың гаршылыклы тарапларының ортасындан гечйән гөни чызык бейлеки ики тарапың довамының кесишме нокадындан гечйәр. Дөртбурчлугың трапециядыгыны субут этмели.

471 (10). $-3 \le x \le 0$ хайсы бахасында $x\ (x+1)\ (x+2)\ (x+3)$ көпчлен максимал баханы аляр.

472 (10). $0 \le x \le 1$ боланда, ашакдакы деңсизлиги субут этмели:

$$(1+x)^{\pi} + (1-x)^{\pi} \le 2^{\pi} .$$

473 (10). ABC үчбурчлугың биссектрисалары O нокатда кесишйәрлер, шунлукда $AO = OM\sqrt{3}$ ве $BO = \dfrac{NO}{\sqrt{3} - 1}$. Эгер BN ве AM үчбурчлугың биссектрисалары болсалар, онда онуң бурчларыны тапмалы.

474 (10). Дөртбурчлугың ики гаршылыклы тарапларының ортасындан гечирилен гөни чызык бейлеки ики тарапының довамларының кесишме нокадындан гечйәр. Дөртбурчлугың трапециядыгыны субут этмели.

475 (10). Докуза бөлүнйән 1967 цифрли сан алнан. Онуң цифрлериниң жемини A билен, A санын цифрлериниң жемини болса B билен белгиләлиң. B санын цифрлериниң жемини тапмалы.

МЕСЕЛЕЛЕРИҢ ЧӨЗҮЛИШЛЕРИ ВЕ ГӨРКЕЗМЕЛЕР

1. $P = n^5 - n = n\,(n^4 - 1) = n\,(n^2 - 1)\,(n^2 + 1) =$

$= (n - 1)\ n\ (n + 1)\ (n^2 + 1)$

Деңлигиң саг бөлегиндәки $(n - 1)\ n\ (n - 1)$ үч саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылы 6-а бөлүнйәр. Инди $(n - 1)\ n\ (n + 1)\ (n^2 + 1)$ көпелтмек хасылының 5-е бөлүнйәндигини субут этмели.

Эгер n сан 5 бөлүнйән болса, онда $n = 5k$ язмак мүмкин, эгер n сан 5 бөлүнмейән болса, онда галындыда 1, 2, 3 я-да 4 галар, ягны $n = 5k + 1$, $n = 5k + 2$, $n = 5k + 3$, $n = 5k + 4$ аларыс. Эгер $n = 5k + 1$ болса, онда $(n - 1)$ сан 5 бөлүнер, эгер $n = 5k + 2$ болса, онда $n^2 + 1 = (5k - 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5\,(5k^2 + 4k + 1)$ сан 5=е бөлүнйәр, эгер-де $n = 5k + 3$ болса, онда

$n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 =$

$= 5\,(5k^2 + 6k + 2)$ сан 5=е бөлүнйәр, эгер-де $n = 5k + 4$ болса, онда $n^2 + 1 = 5k + 5 = 5\,(k + 1)$ сан 5 бөлүнйәр. Шейлеликде, n-иң ислендик битин сан бахасында $(n^5 - n)$ сан 5=е бөлүнйәр.

2. Берлен

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^x =$$
$$= (1 + a)\,(1 + a^2)\,(1 + a^4)\,(1 + a^8)\,(1 + a^{16})\,(1 + a^{32})$$

деңлигиң чеп бөлеги геометрик прогрессияның $(1 + x)$ члениниң жемидир, бу ерде $q = a$. Шол жеми ашакдакы формула аркалы хасаплалың:

$$S = \frac{1 - a^x \cdot a}{1-a} = \frac{1 - a^{x+1}}{1-a}.$$

Инди

$$\frac{1 - a^{x+1}}{1-a} =$$

$= (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$
деңлиги умумы майдалавжа гетирип,

$$1 - a^{x+1} =$$

$= (1-a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$
я-да

$$1 - a^{x+1} =$$

$= (1-a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$

я-да $1 - a^{x+1} = 1 - a^{64}$ аларыс, бу ерден

$$a^{x+1} = a^{64}; \quad x+1 = 64; \quad x = 63.$$

Шейле чөзүленде $1 - a \neq 0$ я-да $a \neq 1$ дийип гүман эдйәрис. Эгер $a=1$ болса, онда илки башдакы деңликден $x+1 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 64$, $x = 63$ аларыс.

3. 1-нжи усул. Берлен жеми S_n билен белгиләлиң ве деңлигиң ики бөлегини-де $x = a$ көпелделиң, онда аларыс:

$$S_n \cdot x = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + (n+1)x^{n+1}$$

Шу деңлиги биринжи деңликден айралың, онда

$$S_n - S_n \cdot x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1}$$

аларыс. Инди

$$S_n(1-x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}$$

аларыс, бу ерден

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

2-нжи усул.

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$$

$$S_n = 1 + (1+1)x + (1+2)x^2 + \ldots + (1+n)x =$$

$$= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x + x^2 + \ldots + nx^n =$$

$$= \frac{1 + x^{n+1}}{1-x} + x(S_n - (n+1)x^n).$$

Бу ерден

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}$$

4.

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}.$$

$$\frac{x^2 + 8x + 20}{x+4} = \frac{(x+4)^2 + 4}{x+4} = x + 4 + \frac{4}{x+4}.$$

$$\frac{x^2 + 4x + 6}{x+2} = \frac{(x+2)^2 + 2}{x+2} = x + 2 + \frac{2}{x+2}.$$

Диймек,

$$\frac{x^2 + 6x + 12}{x+3} = \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3} = x + 3 + \frac{3}{x+3},$$

я-да

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}.$$

я-да

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+4}.$$

я-да

$$\frac{-x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-x}{(x+3)(x+4)}$$

я-да

$$x\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)}\right) = 0.$$

Бу ерден, $x=0$ я-да

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} = 0.$$

Диймек,

$$(x+1)(x+2) = (x+3)(x+4) = 0$$

я-да

$$3x+2 = 7x+12; \quad 4x = -10; \quad x = -\frac{5}{2}.$$

5. $$\begin{cases} x^2 - x^2y^2 + y^2 = 19 \\ x - xy + y = 4 \end{cases}$$

Шу системаны шейле язярыс:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy - x^2y^2 = 19 \\ x + y - xy = 4 \end{cases}$$

Инди $x+y=z$ ве $xy=u$ билен белгилэрис, онда

$$\begin{cases} z^2 - 2u - u^2 = 19 \\ z - u = 4 \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} (z+u)(z-u) - 2u = 19 \\ z - u = 4 \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} 4(z+u) - 2u = 19 \\ z - u = 4 \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} 4x + 2u = 19 \\ z - u = 4 \end{cases}$$

$$6z = 27; \quad z = \frac{9}{2}; \quad 6u = 3; \quad u = \frac{1}{2}.$$

Инди

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{9}{2} \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

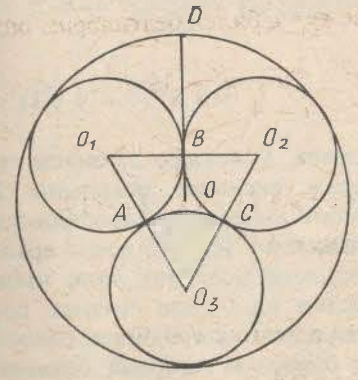
Шу системаны Виетиң теоремасыны уланып чөзйәрис, ягны

$$v^2 - \frac{9}{2}v + \frac{1}{2} = 0; \quad 2v^2 - 9v + 1 = 0; \quad v_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{4}$$

Җогабы:

$$x_1 = \frac{9+\sqrt{73}}{4}; \quad x_2 = \frac{9-\sqrt{73}}{4};$$

$$y_1 = \frac{9-\sqrt{73}}{4}; \quad y_2 = \frac{9+\sqrt{73}}{4}.$$



1-нжи сур.

6. Гой, $O_1B = z$ берлен болсун, онда

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2r; \qquad OD = R.$$

$$S_{O_1O_2O_3} = \frac{O_1O_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}.$$

$$S_{O_3AC} = \frac{\pi r^2}{6}; \quad Q = r^2\sqrt{3} - 3\cdot\frac{\pi r^2}{6} = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$Q = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

$$O_3O = R - r; \quad OC = \frac{OO_3}{2};$$

$$(OO_3)^2 + OC^2 + O_3C^2 = \frac{OO_3^2}{4} + r^2$$

$$2r = (R - r)\sqrt{3}; \quad r(2 + \sqrt{3}) = R\sqrt{3}; \quad r = R(2\sqrt{3} - 3) \qquad (2)$$

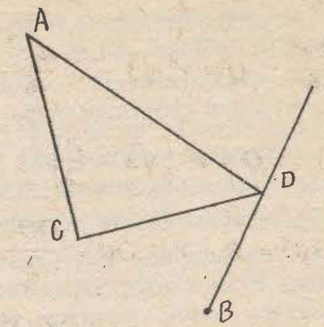
/1/ ве /2/ деңликлерден аларыс:

$$Q = R^2(2\sqrt{3} - 3)^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 3R^2(7 - 4\sqrt{3})\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

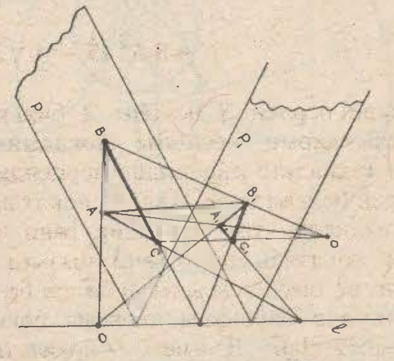
7. Гиңишликде берлен S нокады A билен, текизликдәки гөни чызыкларың кесишме нокадыны B билен, A нокатдан текизлиге индерилен перпендикулярың эсасыны C билен белгиләлиң. Инди B нокат аркалы гечйән ве шол текизликде ятан ислендик гөни чызыгы алалың. Соңра A нокатдан шол гөни чызыга перпендикуляр индерелиң ве онуң эсасыны D билен белләлиң. Онда үч перпендикуляр барадакы теорема боюнча $CD \perp BD$ болар (2-нҗи сур). Диймек, D нокат диаметри BC деӊ болан төверегиң үстүнде ятяр. Терсине шол төверегиң ислендик нокады, B нокатдан гечип, текизликде ятан

гөни чызыклара A нокатдан индерилен перпендикулярың эсасыдыр. Шонуң үчин гөзленилйән геометрик орун, диаметри BC деӊ болан төверекдир.



2-нҗи сур.

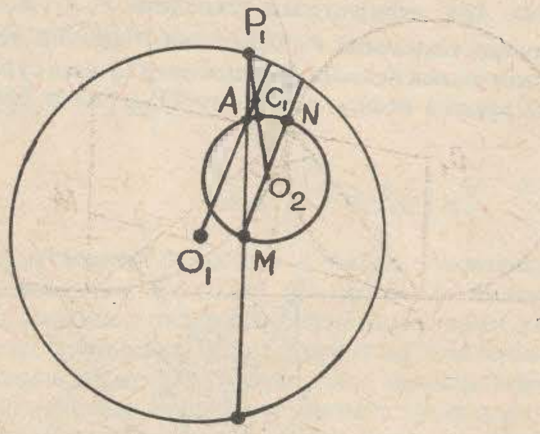
8. Гой, ABC үчбурчлугың текизлиги P, A_1, B_1, C_1 үчбурчлугың текизлиги P_1 болсун ве P хем P_1 текизликлер l гөни чызык боюнча кесишсинлер (3-нҗи сурат). A, B ве O аркалы гечйән текизлиги Q_{AB} билен белләлиң. AB_1



3-нҗи сур.

гөни чызык Q_{AB} текизликде ятяр ве AB гөни чызык билен кәбир T_{AB} нокатда кесишйәр (чүнки A_1B_1 билен AB параллел дәлдирлер). Шу нокат хем P хем-де P_1 текизликде ятяр, диймек, ол l гөни чызыгың үстүнде ятяр. Шонуң ялы эдип, BC, ве B_1C_1 гөни чызыкларың кесишме T_{BC} нокадының l гөни чызыгың үстүнде ятяндыгыны субут эдерис. AC ве A_1C_1 гөни чызыкларың T_{AC} кесишме нокадының-да l гөни чызыгың үстүнде ятянлыгы шонуң ялы субут эдилйәр.

9. Гой, O_1 ве O_2 берлен төвереклериң меркезлери болсун (4-нжи сур). O_1A гөни чызык гечирйәрис. Икинжи төверегиң O_2 меркезинден O_1A гөни чызыга параллел гөни чызык гечирйәрис. Шу гөни чызык икинжи төвереги кәбир M ве N нокатларда кесер. Инди MA гөни чызыгы гечирип, онуң икинжи төвереги кәбир P_1 нокатда кесйәндигини гөрйәрис. Соңра O_2P_1 гөни чызыгы гечирйәрис, ол O_1A гөни чызыгы кәбир C_1 нокатда кесер.



4-нжи сур.

MO_2P_1 ве AC_1P_1 үчбурчлуклар меңзешдирлер, диймек,
$C_1A = C_1P_1$

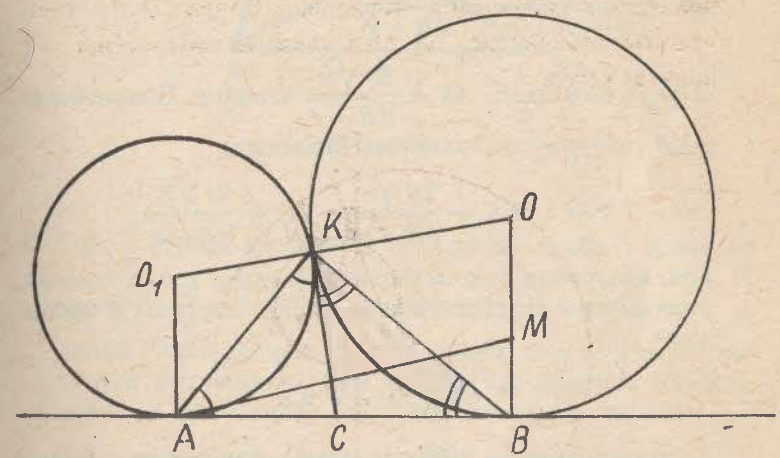
Шейлеликде, меркези C_1 нокатда болан ве C_1A радиуслы гечирилен төверек гөзленилйән төверекдир.

Меселәниң икинжи чөзүвини алмак үчин биринжи чөзүвиң M нокат аркалы алнышы ялы N нокада гарамалы, нетижеде $C_2A = C_2P_2$ аларыс.

Эгер MA я-да NA гөни чызыкларың бири икинжи төвереге галташян болсалар, онда меселәниң бир чөзүви боляр.

10. Гой, O_1 ве O_2 галташян төвереклериң меркезлери болсун. AB шол төвереклере галташян болсун. Илки билен O ве O_1 меркезлери бирлешдирелиң, соңра $AM \parallel O_1O$ гөни чызык гечирелиң. (5=нжи сур. сер.). Онда

$$AB^2 = \sqrt{(R+r)^2-(r-r)^2} = \sqrt{4Rr} \quad \text{аларыс.}$$



5-нжи сур.

Инди $KC \perp OO_1$ гечирелиң. Нетижеде аларыс: $CK = CB = CA$ онда C нокады меркез эдип, чызан CA радиуслы төверегимиз B ве K нокатлардан гечер. Диймек, AKB

гөни бурчдур (чүнки AB диаметре даяняр). Инди OBC гөнүбурчлы үчбурчлукдан

$$OC^2 = BC^2 + OB^2 = \left(\sqrt{Rr}\right)^2 + R^2 = R^2 + Rr ;$$

$$OC = \sqrt{R(R+r)}$$

$OBCK$ дөртбурчлугың гаршылыклы бурчларының жеми 180°, диймек, шол дөртбурчлугың дашындан төверек чызмак мүмкиндир. Онда шол дөртбурчлук үчин Птоломейиң теоремасыны уланып, ашакдакыны аларыс:

$$OC \cdot BK = BC \cdot OK + OB \cdot KC ;$$

$$BK = \sqrt{R(R+r)} = R\sqrt{Rr} + R\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rr}$$

$$BK = \frac{2r\sqrt{Rr}}{\sqrt{R(R+r)}} = \frac{2R}{\sqrt{R+r}}$$

Шунуң ялы эдип, $AK = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}$ тапарыс. Шейлеликде, AKB үчбурчлугың гөзленйән тараплары:

$$AB = 2\sqrt{Rr} ; \quad BK = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}} ; \quad AC = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}} .$$

11. Гой, квадратың тарапы бирлик хөкмүнде кабул эдилсин, онда онуң периметри 4 дең болар. Периметр 20 % артды, ягны

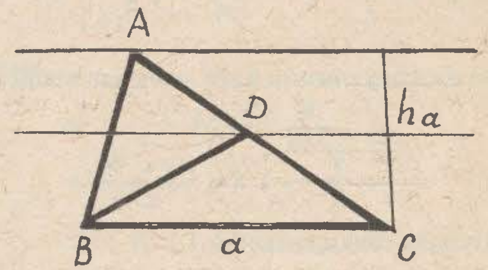
$$4 \cdot \frac{20}{100} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Алнан периметр 4,8 болар. Онда шу квадратың тарапы 4,8:4=1,2 болар. Онуң мейданы $(1{,}2)^2 = 1{,}44$ болар. Диймек, мейдан 44 % артяр.

12. Биринжи ве икинжи теплоходлар A пунктда 42 суткадан соң душушарлар, биринжи ве үчүнжи теплоходлар A пунктда 24 суткадан соң душушарлар (6 ве 8 санларың иң кичи умумы кратнысы 24 сан), биринжи, икинжи ве үчүнжи теплоходларың душушмаклары үчин 6, 7 ве 8

санларың иң кичи кратнысыны тапярыс, шол сан 168 болар.

13. $BC=a$, кесими гуряpыс (6-нжы сур). Инди BC кесимден h_a узаклыкда $EF \parallel BC$ гөни чызыгы гечирйәрис. Инди EF ве BC гөни чызыклардан дең узаклыкда $MN \parallel BC$ гечирйәрис. Соңра B нокады меркез эдип, радиусы медиана дең болан дуганы гечирйәрис, нетижеде D нокады аляpыс. Инди CD гөни чызыгы гечирйәрис, нетижеде A нокады аляpыс. A, B ве C нокатлар гөзленилйән үчбурчлугың депелеридир.



6-нжы сур

14. Гой, $\frac{a}{b}$ берлен дробь болсун. Онда шу дробы 1 долдурян дробь $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ болар. Инди $\frac{b-a}{b}$ дробь гысгалян дийип гүман эделиң. Шейле диймек, b-a ве b санларың умумы бөлүжилери бар диймекдир, башгача айданымызда a ве b санларың умумы бөлүжиси болмалы. Бу болса меселәниң шертине гаршы гелйәр. Диймек $\frac{b-a}{b}$ дробь гысгалмаяр.

15. Окувчыларың биринжиси депдерлериң хеммесиниң $\frac{1}{3}$ ве 8 депдер аляр. Икинжи окувчы галанларының $\frac{1}{3}$ ве 8

дептер аляр, үчүнҗи окувчы соңкы галындының $\frac{1}{3}$ ве 8 дептер аляр. Биринҗи галындыны a билен, икинҗи галындыны b билен, дептерлериң хеммесиниң саныны x билен белгилесек, ашакдакылары аларыс: биринҗи окувчының сатын алан дептерлериниң саны $\frac{1}{3}x + 8$, икинҗининңки $\frac{1}{3}a + 8$, үчүнҗининңки $\frac{1}{3}b + 8$ болар.

$$a = x - \left(\frac{1}{3}x + 8\right) = \frac{2}{3}x - 8; \quad a = \frac{2}{3}x - 8; \quad b = \frac{4x - 120}{9}$$

Инди үчүнҗи окувчының алан дептерлериниң саны

$$\frac{\frac{4x - 120}{9}}{3} + 8 = \frac{4x + 96}{27}$$

болар. Шундан соңкы галынды

$$\frac{4x - 120}{9} - \frac{4x + 96}{27} = \frac{8x - 456}{27}$$

болар. Меселәниң шертине гөрә $\frac{8x - 456}{27} = 0$, диймек,

$$8x - 456 = 0, \qquad 8x = 456, \qquad x = 57.$$

Биринҗи окувчы $\frac{1}{3}\ 57 + 8 = 27$ дептер аляр. Икинҗи окувчы $\frac{1}{3} - (57 - 27) + 8 = 18$ дептер аляр. Үчүнҗи окувчы $\frac{1}{3} - (57 - 27 - 18) + 8 = 12$ дептер аляр.

16. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = ((a+b)+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 =$

$= (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 - (a^3 + b^3) - c^3 =$

$= (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 -$

$- (a+b)(a^2 - ab + b^2) =$

$= (a+b)((a+b)^2 + 3(a+b)c + 3c^2 - (a^2 - ab + b^2)) =$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) + 3ac + 3bc + 3c^2 - a^2 + ab - b^2 =$

$= (a+b)(ab + ac + bc + c^2) \cdot 3 =$

$= 3(a+b)(a(b+c) + c(b+c)) =$

$= 3(a+b)(b+c)(a+c).$

17. Виетиң теоремасы боюнча

$$x_1 + x_2 = -b \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 = a + b^2 \qquad (2)$$

Шу ерден

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = b^2,$$

$$x_1 x_2 = a + b^2 \;;$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2 = b^2,$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + a + b^2 = b^2,$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = -a.$$

18. $77^{100} = (77^4)^{25} = (\ldots 1)^{25} = \ldots 1$, чүнки
$7^1 = 7$
$7^2 = 49$
$7^3 = \ldots 3$ билен гутаряр
$7^4 = \ldots 1$ билен гутаряр.

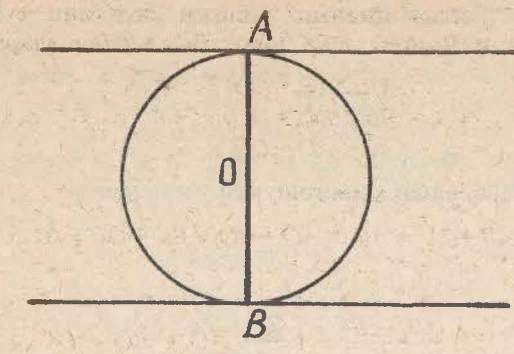
19. 1-нҗи усул. Гой, $\angle B = \alpha$ болсун, онда $\angle A = 2\alpha$ (7-нҗи сур). Синуслар теоремасы боюнча, аларыс:

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} \quad \text{я-да} \quad \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha},$$

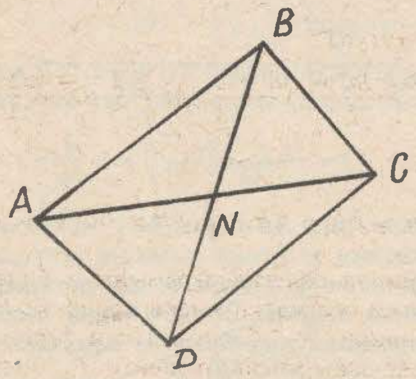
бу ерден $a = 2b\cos\alpha$.

Инди косинуслар теоремасы боюнча

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$$



10-нжы сур.



11-нжи сур.

ABC үчбурчлукдан аларыс: $BD < AB + AD$
$$2\,BN < AB + BC$$

Шуңа меңзеш эдип, ашакдакыны аларыс:
$$2\,CP < AC + BC$$
$$2\,AM < AB + AC$$

Ахыркы үч деңсизлиги членме-член гошуп, аларыс: я-да

$2\,BN + 2\,CP + 2\,AM < AB + BC + AC$, шуны субут этмек талап эдилйәрди.

Тассыкламаның икинҗи бөлегини субут этмек үчин AOB, BOC , AOC үчбурчлуклардан аларыс:

$$AB < AC + BO$$
$$BC < BO + OC$$
$$AC < AO + OC$$

Шу деңсизликлери гошуп,

$$AB + BC + AC < AO + BO + BC + OC + AC + OC$$

я-да

$$\frac{AB + BC + AC}{2} < AO + BO + OC \text{ аларыс.}$$

Эмма

$$AO = \frac{2}{3}AM\,; \quad BO = \frac{2}{3}BN\,; \quad OC = \frac{2}{3}CP$$

гөз өңүнде тутуп,

$$\frac{AB + BC + AC}{2} < \frac{2}{3}AM + \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP$$

я-да

$$AM + BN + CP > \frac{3}{4}(AB + BC + AC) \text{ аларыс.}$$

22. Кесип айрылан бөлегиң аграмыны x билен белләлиң. Гой, биринҗи бөлекдәки мисиң проценти P_1 ве икинҗи бөлекдәкиниңки P_2 болсун. Инди биринҗи бөлекден кесилен x кг-дакы мисиң проценти P_1 боланы себәпли, шол ерде $\frac{x}{100}\cdot P_1$ (кг) мис болмалы. Шонуң ялы икинҗи кесилен бөлекде $\frac{x}{100}\cdot P_2$ мис болмалы. Инди биринҗиден кесилип галан бөлекде $\frac{8-x}{100}\cdot P_1$ (кг) икинҗидәкиде болса $\frac{10-x}{100}\cdot P_2$ (кг) мис болар. Меселәниң шертине гөрә

$$\frac{x}{100}\cdot P_1 + \frac{10-x}{100}\cdot P_2 = \frac{x}{100}\cdot P_2 + \frac{8-x}{100}\cdot P_1$$

я-да

$$x\cdot P_1 + (10-x)\cdot P_2 = x\,P_2 + (8-x)\cdot P_1$$

я-да

$$x\cdot P_1 + 10\,P_2 - P_2\cdot x = P_2\cdot x + 8\,P_1 - P_1\cdot x$$

я-да

$$x\cdot P_1 - P_2x - P_2x + P_1x = 8\,P_1 - 10\,P_2$$

$$2\,P_1x - 2\,P_2x = 2\,(4\,P_1 - 5\,P_2)\,;$$

$$P_1x - P_2x = 4\,P_1 - 5\,P_2\,; \quad x = \frac{4\,P_1 - 5\,P_2}{P_1 - P_2}.$$

23. $\sqrt{4a^2 + 8a + 4} + \sqrt{a^2 - 2a + 1} = 3\,;$

$\sqrt{4\,(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2} = 3\,;$

$2\,|\,a+1\,| + |\,a-1\,| = 3\,;\quad 2a+2+a-1=3\,;\quad a=\frac{2}{3}$

я-да $\quad -2a-2+a-1=3\,;\quad a=-6$

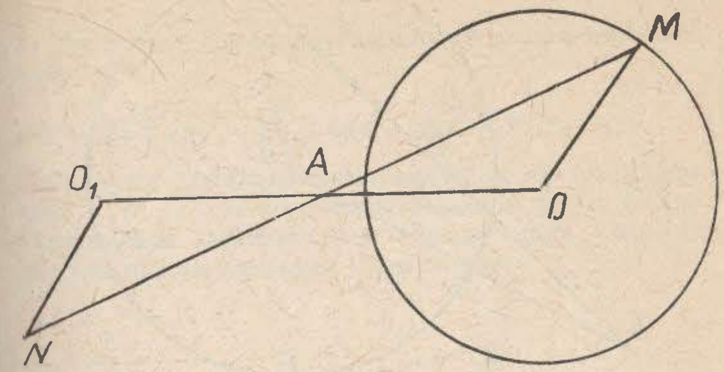
я-да $\quad -2a-2-a+1=3\,;\quad a=-\frac{4}{3}$

я-да $\quad 2a+2-a+1=3\,;\quad a=0$

Алнан бахалары барлап гөрйәрис, нетиҗеде $a=-\frac{4}{3}$ ве $a=0$ бахалар берлен деңлемәни канагатландырярлар.

24. Гой, M нокат r радиуслы төверек боюнча херекет этсин, N нокат болса MN гөни чызык боюнча херекетсиз A нокат аркалы гечсин ве $MA : AN = m : n$ болсун (12-нҗи сур).

AO кесимиң довамында O_1 нокады сайлап алалың, шунлукда $OA : AO_1 = m : n$ болсун. Инди ахыркы ики деңликден аларыс: $OA : AO_1 = MA : AN$ диймек, OMA ве



12-нҗи сур.

ONA үчбурчлуклар меңзешдирлер

$\frac{OM}{O_1N} = \frac{OA}{AO_1} = \frac{m}{n}$, бу ерден $\frac{r}{O_1N} = \frac{m}{n}$; $O_1N = \frac{nr}{m}$,

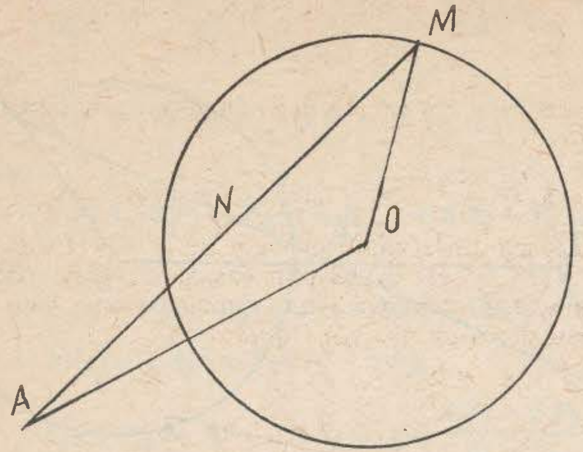
ягны O_1N кесимиң узынлыгы үйтгемейәр, шонуң үчинде N нокатда төверек боюнча херекет эдйәр.

2-нҗи усулы. Гой, $\frac{MN}{AN} = \frac{m}{n}$ болар ялы M нокат херекет этсин (13-нҗи сур.).

Эгер M нокат херекет этсе, онда A нокат меңзешлигиң дашкы меркези болар ве N херекет эденде, биринҗи фигура, ягны M нокадың чызян фигурасына меңзеш болан фигураны чызар. M нокат төверепи чызяр, шонуң үчин N нокатда төверепи чызар.

25. $\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80 \\ y^2 + y\sqrt{x^2y} = 5 \end{cases}$

Шу системаны шейле язалың:



13-нжи вур.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x^6} + x\sqrt[3]{x^4y^2} = 80\\ \sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{x^2y^4} = 5\end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases}\sqrt[3]{x^4}\,(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) = 80\\ \sqrt[3]{y^4}\,(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2}) = 5\end{cases}$$

Инди ахыркы системаның биринҗи деңлемесини шол системаның икинҗи деңлемесине бөлелиң, онда

$$\sqrt[3]{x^4 : y^4} = 2^4$$

аларыс. Инди $x^4 = 2^{12} \cdot y^4$ я-да $x^4 - 2^{12} \cdot y^4 = 0$ я-да $(x^2 - 2^6 \cdot y^2)\,(x^2 + 2^6 \cdot y^2) = 0$ аларыс. x ве y санларың хакыкы бахалары үчин $x^2 + 2^6 \cdot y^2 \neq 0$ шонуң үчин

$x^2 - 2^6 \cdot y^2 = 0$; $x^2 = 2^6 \cdot y^2$; $x = \pm\, 8y$.

1) $x = 8y$ баханы берлен системаның биринҗи деңлемесине гоюп, аларыс:

$4y^2 + 8y\sqrt[3]{8y^3} = 80$; $64y^2 + 16y^2 = 80$; $y = \pm\, 1$.

Диймек,

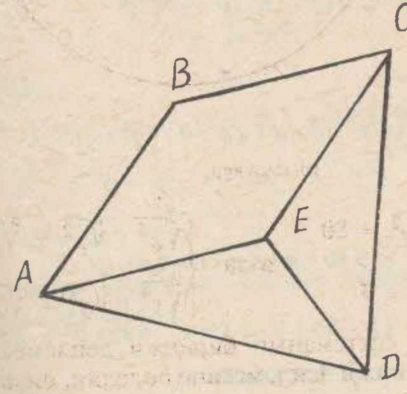
$x_1 = 8$; $x_2 = -8$;

$y_1 = 1$; $y_2 = -1$.

2) Инди $x = -8\,y$ баханы шол биринҗи деңлемә гоюп, аларыс:

$64y^2 - 8y\sqrt[8]{-8y^3} = 80$; $64y^2 + 16y^2 = 80$; $y = \pm\, 1$.

26. Гой, берлен $ABCD$ дөртбурчлукда BC ве AD тарапларың хем A, B, C, D бурчларың бахалары белли болсун. Гөзленилйән дөртбурчлугы гурмак үчин параллел гөчүрме методы уланалың (14-нҗи сур).



14-нҗи сур.

BC кесими өз-өзүне параллел эдип, AE ягдая гөчүрелиң. E нокады C ве D нокатлар билен бирлешдирип, алнан AED үчбурчлугы гуруп боляндыгыны гөрйәрис (чүнки $AE=BC$ ве AD берлен тарап, EAD бурч болса $\angle\ BAD$ — $\angle\ FBC$ деңдир). AED үчбурчлук гурландан соң, EC кесими гечирйәрис, бу ерде $\angle\ AEC = \angle\ LB$ ве $EC=AB$. Диймек, гөзленилйән үчүнҗи депәни - C нокады тапмак мүмкин. Инди A депеде берлен DAB бурчы гурярыс ве C депеде берлен DCB бурчы гурярыс. Нетиҗеде дөрдүнҗи B депәни алярыс.

27. Санларың орта арифметик бахасы шол санларың орта геометрик бахасындан кичи дәлдир диен тассыкламадан пейдаланып, аларыс:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

я-да

$$\frac{3p-(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

я-да

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

я-да

$$\frac{p^3}{27} \geq (p-a)(p-b)(p-c)$$

я-да

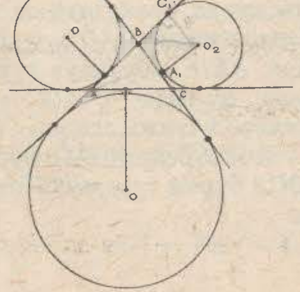
$$\frac{p^4}{27} \geq p(p-a)(p-b)(p-c)$$

эмма $p(p-a)(p-b)(p-c)=s^2$ онда $p^4 \geq 27\,s^2$.

Белли болшы ялы $s=pr$, онда

$p^4 \geq 27\,p^2r^2$; $p^2 \geq 27\,r^2$; $p \geq 3r\sqrt{3}$

28.



15-нжи сур.

Белли болшы ялы, $BA_1 = BC_1 = P$

ABC үчбурчлугың мейданыны S билен, BO_2C_1 үчбурчлугың мейданыны S_1 билен беллесек, ве O_2AC үчбурчлугың мейданыны S_2 билен беллесек онда

$$S = pr\,;\quad S_1 = \frac{1}{2}p\cdot r_b\,;\quad S_2 = \frac{1}{2}b\cdot r_b$$

Инди $2S_1 = p\cdot r_b$; $2S_2 = b\cdot r_b$.

Диймек, $S = 2S_1 - 2S_2$ я-да $pr = p\cdot r_b - p\cdot r_b$

Эдил шонуң ялы эдип, $pr = p\cdot r_a - a\cdot r_a$

ве $pr = p\cdot r_c - c\cdot r_c$ аларыс.

Шу ерден

$$(pr)^3 = r_a(p-a)\cdot r_b(r-b)\cdot r_c(p-c)$$

Инди $p^3\cdot r^3\cdot p = r_a\cdot r_b\cdot r_c\cdot S^2 = r_a\cdot r_b\cdot r_c\cdot p^2\cdot r^2$;

$$S = \sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$$

29. Меселәниң шертинде берлен деңликлерден ашакдакылары аларыс:

$$lg\,y = \frac{1}{1-lg\,x} \qquad (1)$$

$$lg\,z = \frac{1}{1-lg\,y} \qquad (2)$$

Инди (1) деңликден

$$lg\,y - lg\,x\cdot lg\,y = 1\,;\quad lg\,x = \frac{1}{1-lg\,y}.$$

(2) деңликден болса

$$lg\,y = \frac{1}{1-lg\,z}$$ аларыс.

Инди $lg\,x = 1 - \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{lg\,z}}$ я-да $lg\,x = \dfrac{1}{1-lg\,z}$.

Бу ерден $x = 10$ тапарыс.

30. Меселәниң шертиндәки деңликден

$$x^2 - 2x \cos x + 1 = 0$$

аларыс.

Шу деңлемәни чөзүп, $x = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$

аларыс. Инди ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де n-нҗи дережә гөтерелиң, онда

$$x^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$$

я-да

$$x^n = \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha$$

Инди $\dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{\cos n\alpha \mp i \sin n\alpha} = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$

Диймек,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha + \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$$

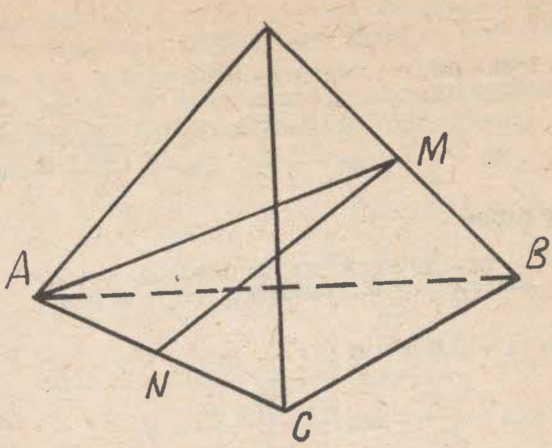
$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos\alpha$$

31. $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1} = 27^n \cdot 9 + 10 \cdot 8^n = 27^n \cdot 9 + (19 - 9) \cdot 8^n = 27^n \cdot 9 + 19 \cdot 8^n - 9 \cdot 8^n = 8^n \cdot 19 + 9 \cdot (27^n - 8^n)$.

Соңкы гошулыҗыларың биринҗиси 19-а бөлүнйәр, инди икинҗисине гаралың.

$27^n - 8^n$ тапавут n саның ислендик битин положител бахасында (27-8) ягны 19-а бөлүнйәр. Шейлеликде, берлен аңлатма 19-а бөлүнйәр.

32. Меселәниң шертине гөрә шар тетраэдриң хемме гапыргаларына галташяр, онда шарың меркези гапыргалардан дең узаклыкда ятяндыгы себәпли галташма нокатлар гапыргалары ики дең бөлеге бөлйәрлер (16-нҗи сур).



16-нҗи сурат

Чызгыдан гөрнүши ялы $MN^2 = MA^2 - AN^2$ я-да

$MA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ве $AN = \dfrac{a}{2}$ боланы себәпли.

33. $MN = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$; $(2r)^2 = \dfrac{a^2}{2}$;

$4r^2 = \dfrac{a^2}{2}$; $a = 2r\sqrt{2}$.

34. Гиңишликде берлен A нокатдан P узаклыкда ятан нокатларың көплүги шар үстүдир. Шонуң ялы берлен B нокатдан q узаклыкда ятан нокатларың көплүги-де шар үстүдир. Шу ики үст төверек боюнча кесишйәрлер.

35. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$\sin(x - \alpha) - (\sin(x - \beta) + \sin(\beta - \alpha)) = 0$$

Инди

$$\sin(x - \alpha) = 2\sin\frac{x - \alpha}{2}\cos\frac{x - \alpha}{2}$$

ве

$$\sin(x-\beta)+\sin(\beta-\alpha)=2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x-2\beta+\alpha}{2}$$

беллэп, ашакдакыны аларыс:

$$\sin\frac{x-\alpha}{2}\left(\cos\frac{x-\alpha}{2}-\cos\frac{x-2\beta+\alpha}{2}\right)=0$$

Шу ерден

1) $\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$, диймек, $\frac{x-\alpha}{2}=\pi n$

я-да $x=2\pi n+\alpha$

2) $\cos\frac{x-\alpha}{2}-\cos\frac{x-2\beta+\alpha}{2}=0;$

$2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{x-\beta}{2}=0;$

$\sin\frac{x-\beta}{2}=0;\qquad \frac{x-\beta}{2}=\pi n;\qquad x=2\pi n+\beta$

36. Көпелтмек хасылына гаралың:

$$11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\cdot21\cdot23\cdot25\cdot27\cdot29$$

Шу ерде көпелтмек хасылында 5-лик билен гутарян сан душ гелйәр. Ислендик тәк сан 5-лиге көпелдиленде, көпелтмек хасыл 5-лик билен гутаряр, диймек, меселәниң шертинде берлен көпелтмек хасыл 5-лик билен гутарар.

37.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\times & & & & & 3 & 4 & \cdot \\
\hline
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
2 & 3 & 5 & 0 & 3 & 8 & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6
\end{array}$$

Хусусы көпелтмек хасылың үчүнҗи сетиринден гөрнүши ялы 3 хайсы болса-да бир сана көпелдилип, 8 билен гутарян сан алыныпдыр. Диймек көпелдиҗиниң иң ахыркы цифри 6 болмалы, онда көпелдиҗиниң иң ахыркы цифри 1 болмалыдыр. Шейлеликде ашакдакыны аларыс:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\
\times & & & & & 3 & 4 & 1 \\
\hline
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \\
2 & 3 & 5 & 0 & 3 & 8 & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6
\end{array}$$

Шейле ойланманы довам эдип, аларыс:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 7 & 8 & 3 & 4 & 6 \\
\times & & & & & 3 & 4 & 1 \\
\hline
 & & & 7 & 8 & 3 & 4 & 6 \\
 & & 3 & 1 & 3 & 3 & 8 & 4 \\
 & 2 & 3 & 5 & 0 & 3 & 8 & \\
\hline
2 & 6 & 7 & 1 & 5 & 9 & 8 & 6
\end{array}$$

38. $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}=$

$=\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}=$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)=$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}.$

39. $\frac{1000001}{100001}$ я-да $\frac{10000001}{1000001}$

$$\frac{10^5+1}{10^4+1} \quad \text{я-да} \quad \frac{10^6+1}{10^5+1}$$

Терс дроблара гаралың:

$$\frac{10^4+1}{10^5+1} \quad \text{ве} \quad \frac{10^5+1}{10^6+1}$$

$$\frac{10^4+1}{10^5+1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10\,(10^5+1)}$$

ве

$$\frac{10^5+1}{10^6+1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10\,(10^6+1)}$$

Шу ерден гөрнүши ялы

$$\frac{9}{10\,(10^5+1)} > \frac{9}{10\,(10^6+1)}$$

Диймек,

$$\frac{10^5+1}{10^4+1} < \frac{10^6+1}{10^5+1}$$

я-да

$$\frac{1000001}{100001} < \frac{10000001}{1000001}.$$

40. Самолётларың бириңжиси ики сагатда 800 км гечер, икинҗиси болса 720 км гечер. Соңра бириңжиси самолётың тизлиги 300 км/саг боляр. Диймек, инди оларың тизлигиниң тапавуды 360 км/саг - 300 км/саг болар.

800 - 720 = 80 км. гечмек үчин 80 : 60 = $\frac{4}{3}$ сагат вагт герек болар. Шейлеликде, икинҗи самолёт бириңжиниң ызындан $\frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ сагатда етер. Шу вагтың ичинде ол $360 \cdot \frac{10}{3} = 1200$ км ёл гечер.

Шейлеликде, икинҗи самолёт бириңҗиниң ызындан Ашгабатдан 1200 км узаклыкда етер.

41. Эгер гөнүбурчлугың тарапларыны x ве y билен беллесек, онда меселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс:

$$xy = 2\,(x+y)$$

Шу ерден гөрнүши ялы x ве y санларың бири җүбүт болмалы. Гой, $y = 2k$ болсун. Онда $kx = x + 2k$ я-да $k\,(x-2) = x$ аларыс. Бу ерде k, x ве $(x-2)$ санлар натурал санлардыр. Инди

$$k = \frac{x}{x-2}$$

деңлиги шейле язалың:

$$k = \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$$

k саның натурал сан болмагы үчин $\frac{2}{x-2}$ сан битин сан болмалы. Онда $x - 2 = 1$ я-да $x - 2 = 2$ болмалы, ягны $x = 3$ я-да $x = 4$ болмалы. Шу баханы $xy = 2\,(x+y)$ деңлемеде гоюп, аларыс:

$$3y = 2\,(3+y), \qquad y = 6$$

я-да

$$4y = 2\,(4+y), \qquad y = 4$$

Шейлеликде, $x = 3$, $y = 6$

$x = 4$, $y = 4$

42. $$\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} - \frac{1}{10} = \frac{10^{1966} + 10 - 10^{1966} - 1}{10\,(10^{1966}+1)} =$$

$$= \frac{9}{10\,(10^{1966}+1)}$$

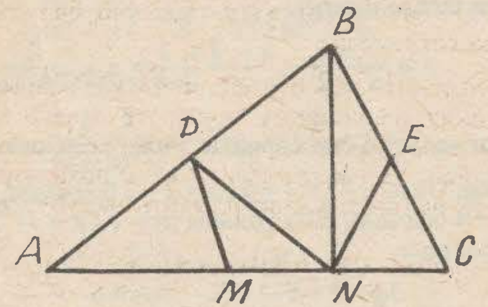
$$\frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1} - \frac{1}{10} = \frac{10^{1967} + 10 - 10^{1967} - 1}{10\,(10^{1967}+1)} =$$

$$= \frac{9}{10\,(10^{1967} + 1)}$$

Диймек,

$$\frac{10^{1965} + 1}{10^{1966} + 1} > \frac{10^{1966} + 1}{10^{1967} + 1}$$

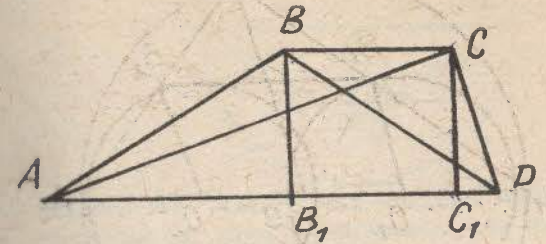
43. Гой, ABC үчбурчлукда BN онуң бейиклиги болсун ве D хем E нокатлар AB ве BC тарапларың орталары болсун (17-нжи сур).



17-нжи сур.

Эгер M нокат N нокатдан чепде ятан болса, онда $MD < AD$ болар. Хакыкатдан-да, $AD = DB = ND$. Эмма $MD < ND$ я-да $MD < AD$. BNC гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасына гечирилен медианасы BC гипотенузаның ярысына деңдир, ягны $NE = CE = BE$ эмма $NE > NE = BE$, диймек, $ME > EC$.

44. Гой, $ABCD$ трапецияның диагоналлары $AC = d_1$ ве $BD = d_2$ болсун ве $d_1 > d_2$ (18-нжы сур). Инди $AC_1 = P_1$ ве $BB_1 = P_2$ болсун, трапецияның эсасларыны a ве b билен бейиклиги h билен белгилэлиң.



18-нжы сурат.

Ияки билен $P_1 + P_2 = a + b$ белгилэлиң. $P_1 \geq P_2$ боланы себэпли

$$P_1 \geq \frac{a + b}{2},$$

меселэниң шертине гөрэ

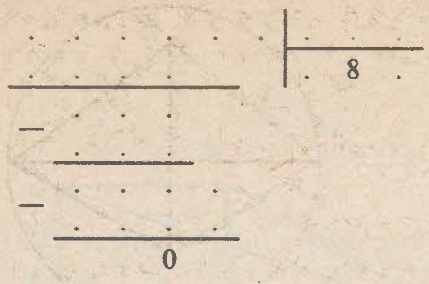
$$\frac{a + b}{2} \cdot h = 1 \quad \text{я-да} \quad \frac{a + b}{2} = \frac{1}{h}.$$

Инди ACC_1 гөнүбурчлы үчбурчлукдан

$$d_1^2 = P_1^2 + h^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{h^2} + h^2 = \left(\frac{1}{h} - h\right)^2 + 2.$$

Шу ерден гөрнүши ялы d_1^2 саның иң кичи бахасы $\frac{1}{h} = h$ боланда алыняр, ягны $h = 1$ болмалы. Шейлеликде, трапецияның улы диагоналының иң кичи бахасы $d_1 = \sqrt{2}$. Шу баха трапеция деңянлы боланда алыняр.

45.



Шу ерден гөрнүши ялы бөлүҗи 8-е көпелдиленде үч белгили сан алыныпдыр. Онуң өң янындакы ве соң янындакы көпелтмек хасылы дөрт белгили сан, диймек, пай 989 болмалы.

Җогабы: етен пай 989, бөлүҗи 112.

46. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1960$ деңликден, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 14\sqrt{10}$ аларыс. Шу ерден $\sqrt{x} = 14\sqrt{10} - \sqrt{y}$; $x = 1960 - 28\sqrt{10y} + y$ меселәниң шертине гөрә x битин сан болмалы. Иң соңкы деңликден гөрнүши ялы $\sqrt{10y}$ сан битин положител сан болмалы онда

$\sqrt{10y} = 10k$ я-да $10y = 100k^2$; $y = 10k^2$

Шонуң ялы эдип, $x = 10l^2$ аларыс. Диймек,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 14\sqrt{10}$$

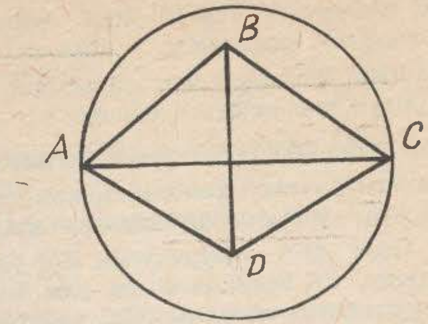
деңликден

$$\sqrt{10l^2} + \sqrt{10k^2} = 14\sqrt{10}$$

аларыс.

Бу ерден $l + k = 14$; $0 \le k \le 14$ боланы себәпли $k = 0,1,2,...,14$, ягны онуң 15 бахасы бар. Шейлеликде меселәниң 15 битин чөзүви бар.

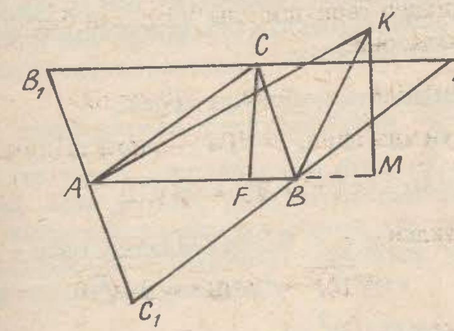
47. Берлен дөртбурчлугың улы диагоналыны диаметр эдип төверек чызалың (19-нҗы сур)



19-нҗы сурат.

B ве D депелериндәки бурчларың күтек боланлары себәпли B ве D нокатлар төверегиң ичинде ятарлар. Онда BD диагонал AC диагоналдан кичи болар.

48. Гой, ABC үчбурчлугың мейданы 1 деңболсун (20-нҗы сур.)



20-нҗи сурат.

Инди A нокатдан BC тарапа, B нокатдан AC тарапа ве C нокатдан AB параллел гөни чызыклары гечирелиң. Нетиҗеде $A_1B_1C_1$ үчбурчлугы аларыс. A_1BAC дөрт-бурчлук параллелограмдыр. Онда A_1BC ве ABC

үчбурчлуклар деңдирлер. Шону ялы B_1AC үчбурчлук ве ABC үчбурчлук хем-де ACB үчбурчлук ве ABC үчбурчлуклар деңдирлер. Диймек, $A_1B_1C_1$ үчбурчлугың мейданы дөрт саны дең үчбурчлукдан ыбарат болуп, шол мейдан 4 деңдир.

Инди шол n нокатларың хеммесиние $A_1B_1C_1$ үчбурчлуыгың ичинде ятяндыкларыны субут эделиң. K нокат $A_1B_1C_1$ үчбурчлугың дашында ятяр дийип гүман эделиң. Онда AKB үчбурчлугың KM бейиклиги ABC үчбурчлугың CF бейиклигинден улы боланы себәпли AKB үчбурчлугың мейданы ABC үчбурчлугың мейда-нындан улудыр.

49. 19° бурчы (дуганы) 19 гезек төверегиң үчтүнде өлчәп гойсак 361° аларыс. Шейлеликде, 1° дең болан дуга эмеле гелер.

Икинжи усулы. 19° бурчы 90° долдурярыс. Эмеле гелен гөни бурчы ики ве үч дең бөлеге бөлйәрис. Нетижеде 15° ве 11° дең бурчлары аларыс. Инди 15° бурчдан 11° бурчы айырсак 4° бурч галар. Шу бурчуң биссектрисасыны гечирип, 2° дең болан бурчы аларыс. Иң ахырда 2° бурчуң биссектрисасыны гечирип, 1° дең болан бурчы аларыс.

50. Берлен аңлатманы шейле язярыс,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=(x(x+3))((x+1)(x+2))=$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$$

Инди $x^2+3x=y$ билен белләлиң, онда

$$y(y+2)=y^2+2y=(y+1)^2-1$$

Инди $z=(y+1)^2-1$.

Шу ерден гөрнүши ялы, $z=(y+1)-1$ функцияның иң кичи бахасы $y=-1$ боланда алыняр. Диймек,

$$x^2+3x=-1;\ x^2+3x+1=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};$$

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\qquad x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

x-ың бахаларында берлен көпчлениң бахасы -1 деңдир, хакыкатданда

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=$$
$$=-1(-1+2)=-1.$$

51. Берлен дөртбурчлугың тарапларыны диаметр эдип, дөрт саны төверек гурярыс.

Эгер хайсы дөртбурчлугың ичинде ятан хем болса бир K нокады тегелеклер япян болмасалар, онда дөртбурчлугың дөрт тарапының хер бири шу нокатдан $\frac{\pi}{2}$ бурчдан кичи бурч асты билен гөрүнерди. Шейле болуп билмез, чүнки шол нокадың төверегиндәки дөрт бурчуң жеми $2n$ болмалыдыр.

52. ABC үчбурчлугың B депесинден AC тарапына BM перпендикуляр индерелиң. Инди AB ве BC тараплары диаметр эдип, төверек чызылан .

Инди шол төвереклериң радиусларының $\frac{AB}{2}$ ве $\frac{BC}{2}$ боляндыгы гөрүнйәр. Эгер M нокат башга бир ерден алынса, онда ABM ве BMC үчбурчлукларың дашындан чызылан k төвереклериң радиусларының жеминиң озалкы төвереклериң радиусларының жеминден улы болжакдыгыны гөрмек кын дәлдир.

53.

1			
1+d			6
1+2d		6	
1+3d	9		

Эгер дөрдүнҗи сетирдәки арифметик прогрессияның тапавудыны d_1 билен беллесек, онда

$$d_1 = 9 - (1 + 3d) = 8 - 3d$$

болар ве ашакдакыны аларыс:

1			
$1+d$			6
$1+2d$		6	
$1+3d$	9	$17-3d$	$25-6d$

Эгер үчүнҗи сүтүндәки арифметик прогрессияның тапавудыны d_2 билен белгилесек, онда

$$d_2 = 17 - 3d - 6 = 11 - 3d$$

аларыс. Диймек, таблица шейле гөрнүше гелйәр:

1		$6d-16$	
$1+d$		$3d-5$	6
$1+2d$		6	
$1+3d$	9	$17-3d$	$25-6d$

Инди таблицаның биринҗи сетири шейле гөрнүшде болар:

1	$3d-8,5$	$6d-16$	$9d-24,5$
$1+d$		$3d-5$	6
$1+2d$		6	
$1+3d$	9	$17-3d$	$25-6d$

Үчүнҗи сетирдәки арифметик прогрессияның тапавудыны d_3 билен белгилесек, онда

$$d_3 = 2,5 - d$$

ве ашакдакы таблицаны аларыс:

1	$3d-8,5$	$6d-16$	$9d-24,5$
$1+d$			6
$1+2d$	$25-d$	6	$8,5-d$
$1+3d$	9	$17-3d$	$25-6d$

Инди таблицаның икинҗи сетириндәки арифметик прогрессияның тапувудыны d_4 билен белгилесек, онда

$$6 = 1 + d + 3d_4; \qquad d_4 = \frac{5-d}{3}$$

болар ве таблица ашакдакы гөрнүши алар:

1	$3d-8,5$	$6d-16$	$9d-24,5$
$1+d$	$\frac{8+2d}{3}$	$\frac{d+13}{3}$	6
$1+2d$	$3,5-d$	6	$8,5-d$
$1+3d$	9	$17-3d$	$25-6d$

Инди ислендик сетири я-да ислендик сүтүни алып, арифметик прогрессияның хәсиетини уланып, d тапарыс.

Меселем, дөрдүнҗи сүтүнден,

$$6 = \frac{9d - 24,5 + 8,5 - d}{2} = \frac{8d - 16}{2} = 4d - 8; \quad d = 3,5.$$

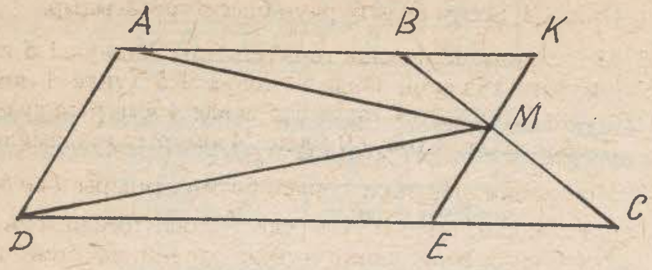
54. Гой, n санын кәбир бахаларында биринҗи ве икинҗи дробь битин сан болсунлар. Гой n-иң шейле бахасы k болсун, онда гүман эдилишине гөрә $k - 6 = 15a$ ве $k - 5 = 24b$, бу ерде a ве b санлар битин санлардырлар. Соңкы ики деңликден ашакдакыны аларыс.

$$(k - 5) - (k - 6) = 24b - 15a$$

я-да $\quad 1 = 3(8b - 5a)$

Шу ерден гөрнүши ялы соңкы деңлиги канагатландырян битин a ве b санлар ёкдур.

55. Берлен $ABCD$ трапецияның ян тарапының ортасы болан M нокат аркалы $KE \parallel AD$ кесим гечирелиң (21-нҗи сур.)

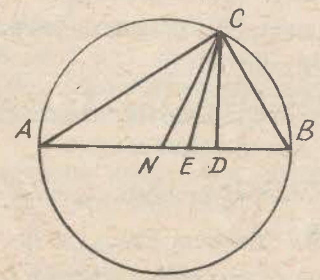


21-нҗи сурат

Эмеле гелен BKM ве MEC үчбурчлуклар деңдирлер, диймек, берлен $ABCD$ трапеция $AKED$ параллелограм билен деңулулыклыдыр.

Инди AMD үчбурчлугың мейданы $AKED$ параллелограмың мейданының ярысына деңдиги гөрүнйәр, башгача айданымызда, AMD үчбурчлугың мейданы берлен $ABCD$ трапецияның мейданының ярысына деңдир.

56. Гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасына гечирилен медиана шол гипотенузаның ярысына деңдир, диймек $AN = NB = CN$ (22-нҗи сур.)



22-нҗи сур

Инди чызгыдан гөрнүши ялы $\angle ABC < \angle BCN$,

эмма $\angle ABC = \angle ACD$.

Онда CE кесим DC бурчуң биссектрисасыдыр.

57. Меселәниң шертинден гөрнүши ялы 3 товук 1,5 гүнде 3 юмуртга гузлаяр. Онда 1 товук 1,5 гүнде 1 юмуртга гузлар. Диймек, 4 товук 1,5 гүнде 4 юмуртга гузлаҗак. Шейлеликде, 4 товук 9 гүнде 24 юмуртга гузламалыдыр.

58. Меселәниң шертинде берлен битин санлары a ве b билен белгиләлиң, онда $a^2 + b^2$ сан 7-ә бөлүнмели. Гой, a сан 7-ә бөлүнмейәр дийип гүман эделиң ве етен пайы k билен, галындыны m билен белгиләлиң. Шонуң ялы, b сан 7-ә бөлүнмейәр дийип гүман эдйәрис ве пайы t билен, галындыны n билен белгиләлиң. Онда ашакдакыны аларыс:

$$a = 7k + m \qquad \text{ве} \qquad b = 7t + n.$$

$$a^2 + b^2 = 49k^2 + 14km + m^2 + 49t^2 + 14tn + n^2$$

Шу ерден гөрнүши ялы $m^2 + n^2$ сан 7-ә бөлүнмели. m ве n санларың алып билҗек бахалары 1,2,3,4,5,6 я-да плюс, минус билен белгилесек, онда шол бахалар шейле:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

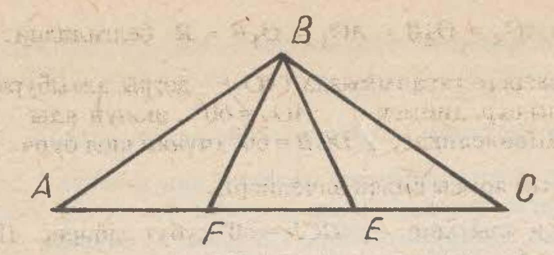
$m^2 + n^2$ аңлатмада шу бахалары гоюп, оларың хич биринде-де $(m^2 + n^2)$ саның 7-ә бөлүнмейәндигини гөрйәрис. Диймек, $(m^2 + n^2)$ саның 7-ә бөлүнмеги үчин $m = 0$ ве $n = 0$ болмалы. Шейле диймек, a ве b санлар 7-ә бөлүнйәрлер диймекдир.

59. Меселәниң шертине гөрә $AF = FE = EC$ ве $FB \perp BC$

хем-де $BE' \perp AB$ (23-нҗи сур.)

BFC гөнүбурчлы үчбурчлукда $BE = FE = EC$, шонуң ялы

$BF = AF = FE$. Диймек, BFC үчбурчлук деӊ тараплы, ягны $\angle FBC = 60^{\circ}$; онда, $\angle ABF = 30^{\circ}$ ве $\angle CBF = 30^{\circ}$. Диймек, $\angle BAF = 30^{\circ}$ ве $\angle BCE = 30^{\circ}$. Шейлеликде,



23-нжи сур.

ABC үчбурчлукда $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$.

60. Гой, догры җогапларың саны x болсун, онда нәдогры җогапларың саны $(30 - x)$ болар. Догры җогаплар үчин $7x$ очко, нәдогрылары үчин $(30 - x) \times 12$ очко topланар. Меселәниң шертине гөрә, ашакдакыны аларыс:

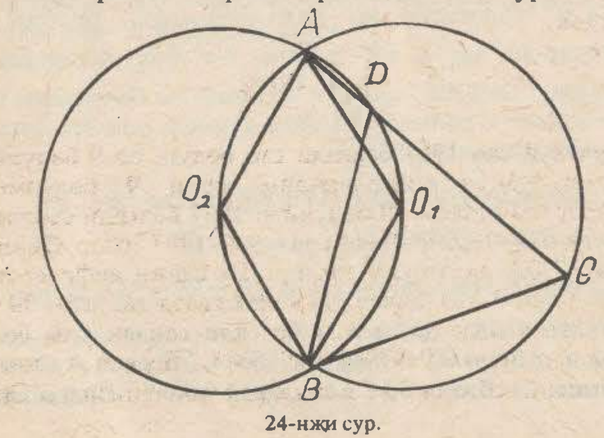
$$7x - (30 - x)\,12 = 77$$

$$7x - 360 + 12x = 77$$

$$19x = 437, \qquad x = 23.$$

Шейлеликде, догры җогапларың саны 23, нәдогрыларының болса 7.

61. A нокады төверереклериң меркезлери болан O_1 ве O_2 нокатлар билен бирлешдирелиң (24-нжи сур.).



24-нжи сур.

Инди $AO_2 = O_2B = AO_1 = O_1B = R$ белгиләлиң.

O_1 төверереге гаранымызда (AO_2) - догры алтыбурчлугың тарапыдыр, диймек, $\angle O_1AO_2 = 60^\circ$, шонуң ялы $\angle O_2BO_1 = 60^\circ$. Шейлеликде, $\angle DCB = 60^\circ$ (чүнки шол бурч $\angle AO_2B$ дуганың ярысы билен өлчелйәр).

Шонуң ялы эдип, $\angle DCB = 60^\circ$ субут эдйәрис. Шейлеликде, BCD үчбурчлук деңтараплыдыр.

62. Меселәниң шертине гөрә

$$a + \frac{1}{a} = -1.$$

Шу ерден

$$a^2 + a = -1; \quad a^2 = -a - 1; \quad a^3 = a^2 \cdot a = a(-a-1);$$

$$a^3 = -(a^2 + a) = 1; \quad a^3 = 1;$$

$$a^{14} + \frac{1}{a^{14}} = a^{12} \cdot a^2 + \frac{1}{a^{12} \cdot a^2} = (a^3)^4 \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^4 \cdot a^2} =$$

$$= a^2 + \frac{1}{a^2},$$

эмма башдакы деңликден гөрнүши ялы $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = -1.$

Диймек,

$$a^{14} + \frac{1}{a^{14}} = -1.$$

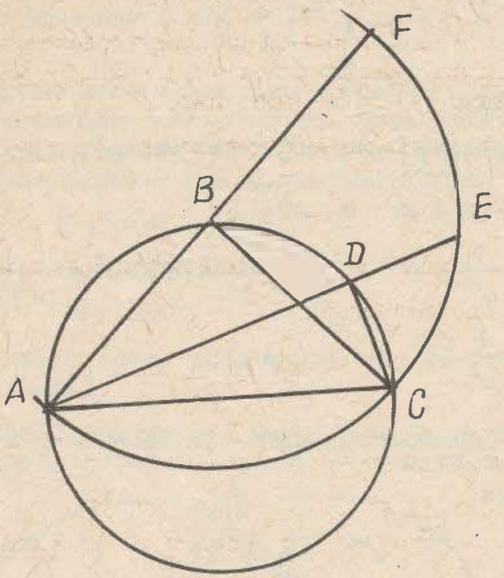
63. Берлен A сан 1967 белгили сан болуп, ол 9 бөлүнйәр. Диймек, онуң цифрлериниң җеми 9 бөлүнмели. Цифрлериниң җеми 9 бөлүнйән 1967 белгили санларың иң улусы $9+9+...+9=(1+1+...+1)\cdot 9=9\cdot 1967$ болар. Диймек, a сан 17703 сандан улы дәлдир. Шу санын цифрлериниң хер бирини 9-лык билен чалшанымызда-да, ягны 99 999 сан аланымызда-да, b ики белгили сандан улы болуп билмейәр (чүнки $9+9+9+9+9=9\cdot 5=45$). Берлен A саның 9 бөлүнйәни себәпли a ве b санларда 9 бөлүнйәрлер. Эмма

b сан 45-ден улы дәл, онда b сан ашакдакы бахаларың бирини алып билер:

9, 18, 27, 36, 45

Шу санларың ислендик хер бириниң цифрлериниң җеми 9 деңдир. Диймек, b саның цифрлериниң җеми 9 деңдир.

64. Бир меңзеш AC эсаслары болан гөнүбурчлы үчбурчлукларың хеммесине AC диаметрли төверегиң ичинден чызылан ялы гарамак мүмкиндир. (25-нҗи сур.)



25-нҗы сур.

Инди ABC үчбурчлукда $AB=BC$ эдип алалың ве кәбир башга ADC үчбурчлуга гаралың.

$BF = AB$ ве $DE = DC$ өлчәп гоялың. Чызгыдан гөрнүши ялы ABC үчбурчлугың ики тарапының җеми AF кесиме деңдир. Шу кесимлериң бири диаметр боланы себәпли $AF = AE$.

Диймек, $AB + BC + AC > AD + DC + AC$.

Шейлеликде, бир меңзеш улулыкдакы гипотинузалары болан гөнүбурчлы үчбурчлукларың ичинде иң улы периметрлиси деңянлы үчбурчлукдыр.

65. $x(x+2)(x+3)(x+6)(x+11)(x+12) =$

$= ((x(x+6)(x+11))((x+2)(x+3)(x+12)) =$

$= (x^3 + 17x^2 + 66x)(x^3 + 17x^2 + 66x)$

Гой, $x^3 + 17x^2 + 66x = y$ болсун. Онда

$y(y+72) = y^2 + 72y = (y+36)^2 - 36^2$

$z = (y+36)^2 - 36^2$ функцияның графигини гуралың. Графикден гөрнүши ялы $z = (y+36)^2 - 36^2$ функция кичи баха $y = -36$ боланда эедир.

66. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$$

$2^x \neq 0$ боланы себәпли деңлемәниң ики бөлегини-де 2^x сана бөлелиң, онда

$$\frac{1}{2^x} + \frac{3^{\frac{x}{2}}}{2^x} = 1$$

аларыс. Инди

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1; \quad \frac{1}{2} = \sin 30^o; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^o$$

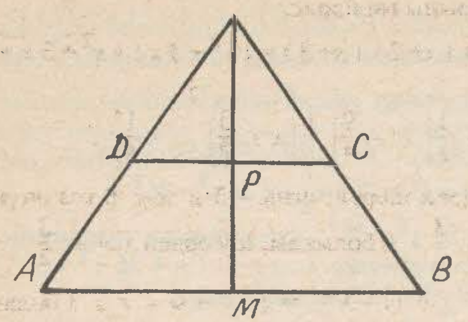
$$(\sin 30^o)^2 + (\cos 30^o)^2 = 1,$$

бу ерден $x = 2$.

Б е л л и к . x-ың башга бахаларында деңлигиң деңсизлиге өврүлйәндигини субут этмек кын дәлдир.

67. Шу ерде трапеция барадакы лемманы уланярыс, эгер трапецияның ян тарапларының довамларының кесишме нокадыны трапецияның диагоналларының кесишме нокады билен бирлешдирсек, шол гөни чызык

трапецияның ики эсасында деӊ бөлеклере бөлер. (26-нҗи сур).

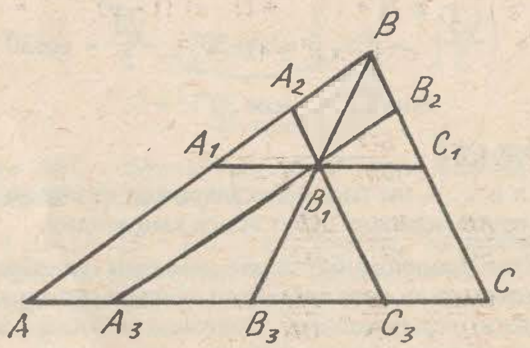


26-нҗи сур.

Меселәниң шертине гөрә PM кесим DC ве AB тарапларың ортасындан гечер, онда трапеция барадакы лемманың терсине тассыкламаны уланып, $ADCB$ дөртбурчлугың трапециядыгыны субут эдерис.

68. Меселәниң шертине гөрә B_1 нокат BB_3 медиананың үстүнде ятяр (27-нҗи сур).

Онда A_1B_1B ве BB_1C_1 үчбурчлуклар деңулулык-



27-нҗи сур.

лыдырлар. Инди $A_1A_2B_1$ ве $B_1B_2C_1$ үчбурчлукларың деңулулыклыдыгыны гөрйәрис. Айдыланлары гөз өңүнде тутуп, AA_2C_3 ве A_3B_2C үчбурчлукларың деңулулыклыдыларыны гөрйәрис.

69. $x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) =$

$$= \left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Меселедәки шерти, ягны $-3 \le x \le 0$ гөз өңүнде тутсак, онда $x + \frac{3}{2} = 0$ болмалы, шу ерден $x = -\frac{3}{2}$.

70. $(1+x)^\pi + (1-x)^\pi = 2^\pi$ $(0 \le x \le 1$ боланда). Илки билен $x = 0$ ве $x = 1$ бахалара гаралың. Шу халда деңлик гелип чыкянлыгы айдыңдыр. Инди шейле деңлиги язалың:

$$(1+x) + (1-x) = 2$$

Шу деңлигиң ики бөлегини-де $2^{\pi-1}$ сана көпелделиң, онда

$$2^\pi = (1+x)\cdot 2^{\pi-1} + (1-x)^{2\pi-1}$$

аларыс. Инди $2 \ge (1+x)$ гөз өңүнде тутуп, шейле деңсизлиги аларыс:

$$2^\pi \ge (1+x)(1+x)^{\pi-1} + (1-x)(1-x)^{2\pi-1} =$$
$$= (1+x)^\pi + (1-x)^\pi.$$

71. $\frac{AO}{ON} = \sqrt{3}$; $\frac{BO}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$; $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$.

$\frac{AM}{AB} = \frac{OM}{OB}$; $\frac{AB}{BN} = \frac{AO}{ON}$.

$$\frac{AM}{AB} = \sqrt{3} - 1 \; ; \quad \frac{AB}{BN} = \sqrt{3} \; .$$

$$AM = AB\,(\sqrt{3} - 1) \; ; \quad BN = \frac{AB}{\sqrt{3}} \; .$$

$$MC = \frac{AM}{AB} \cdot BC = (\sqrt{3} - 1) \cdot BC \; .$$

$$CN = \frac{BN}{AB} \cdot AC = \frac{AC}{\sqrt{3}} \; .$$

$$\frac{BN}{ML} = \frac{NC}{LC} = \frac{BC}{MC} \; ; \quad \frac{\frac{AB}{\sqrt{3}}}{ML} = \frac{\frac{AC}{\sqrt{3}}}{LC} = \frac{BC}{(\sqrt{3} - 1)\,BC} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$ML = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot AB \; ; \quad LC = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot AC \; .$$

$$AM + ML + LC = AC \; .$$

$$AB\,(\sqrt{3} - 1) + AB \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 1) + AB \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot AC = AC$$

$$AB\,(\sqrt{3} - 1) + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = AC\left(1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$2 \cdot AB = AC \; ; \quad BN + NC = BC \; ; \quad AC + AB = \sqrt{3} \cdot BC \; ;$$

$$BC = \sqrt{3} \cdot AB \; .$$

$$4AB^2 = AC^2 \; ; \quad 3AB^2 = BC^2 \; ; \quad AB^2 = AC^2 - BC^2 \; ;$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \; ;$$

$$\angle B = 90^\circ \; ; \quad \angle C = 30^\circ \; ; \quad \angle A = 60^\circ \; .$$

72. 1)

$$((((((((1:2):3)):4))):5)))):6))))):7)))))):8))))))):9))))))))$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{9} - \text{min}$$

2) $1 : (((((((2 : 3) : 4) : 5) : 6) : 7) : 8) : 9)$ - max

73. Гой, k сан 3-е бөлүнсин.

$$A_k = k^{k+1} + (k + 1)^k$$

Онда саг бөлекде k^{k+1} сан 3-е бөлүнер, икинҗи гошулыҗы ($k+1$)^k сан 3-е бөлүнмез. Диймек, шу халда A_k сан 3-е бөлүнмейәр.

Эгер k сан 3-е бөлүненде галындыда 1 ҷалян болса, онда

$$A_k = k^{k+1} + (k + 1)^k$$

аңлатманың 3 бөлүнйәнлигине гарамалы.

$$k = 3m + 1$$

$$A_k = k^{k+1} + (k + 1)^k = (3m + 1)^{k+1} + (3m + 2)^k$$

Шу аңлатманың 3 бөлүнйәнлиги $1 + 2^k$ аңлатманың 3 бөлүнйәнлигине баглыдыр.

($1 + 2^k$) аңлатмада k - тәк сан болса, онда ол (1 + 2) сана, ягны 3-е бөлүнйәр.

Шу халда $\quad k = 2t + 1$

дийип белләп билерис. Диймек, k сан 3-е бөлүненде галындыда 1 галяр ве 2 бөлүненде-де галындыда 1 галяр.

Шейлеликде k сан 6-а бөлүненде-де галындыда 1 галяр, ягны

$$k = 6p + 1$$

Инди k сан 3-е бөлүненде галындыда 2 галяр дийип гүман эделиң. Шу халда ашакдакыны аларыс:

$$A_k = (3n + 2)^{k+1} + (3n + 3)^k$$

Шу ерден гөрнүши ялы саг бөлекдәки биринҗи гошу-

лыжы 3-е бөлүнмейәр, икинҗи болса бөлүнйәр, диймек, A_k сан 3-е бөлүнмейәр.

74. Үчбелгили саны шейле язалың

$$100\,x + 10\,y + z$$

Шол саның цифрлериниң җеми $(x + y + z)$ болар.

Инди $100\,x + 10\,y + z < 100\,(x + 1)$, чүнки $10\,y + z$ икибелгили сан 100 сандан кичидир.

Эгер y ве z цифрлериң бирден бири 0-дан үйтгешик болса, онда

$$x + y + z \geq x + 1$$

Диймек,

$$\frac{100x + 10y + z}{x + y + z} < \frac{100\,(x + 1)}{x + 1} = 100$$

Шейлеликде, y ве z цифрлериң бирден бири нулдан тапавутлы болса, онда гөзленилйән гатнашык 100-ден кичидир.

Эгер $y + z = 0$ болса, онда шол сан $100\,x$ дең̄дир, онуң цифрлериниң җеми

$$x + 0 + 0 = x \qquad \text{болар}$$

ве гөзленилйән гатнашык

$$\frac{100\,x}{x} = 100\,.$$

Шейлеликде, гаралян гатнашының иң улы бахасы 100 дең̄дир.

75. Эгер шол көпгранлыгың ичинде шар чызып болян болса, онда галташма нокатдан чыкып, депелери бирикдирйән кесимлер гранларың хер бирини үчбурчлуклара бөлйәрлер, шунлукда хер бир гара үч бурчлуга она дең болан ак үчбурчлук янашяр. Ондан башга-да, гара үчбурчлукларда, шарың галташма нокадының төверегиндәки бурчларың җеми гара гранларың җеминиң саныны аңладяр.

76. $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y; \qquad (1 + x) + x^2\,(1 + x) = 2^y;$

$$(1 + x)\,(1 + x^2) = 2^y$$

Иң ахыркы деңлигиң чеп бөлегиндәки көпелдиҗилериң хер бири 2-иң дережесидир.

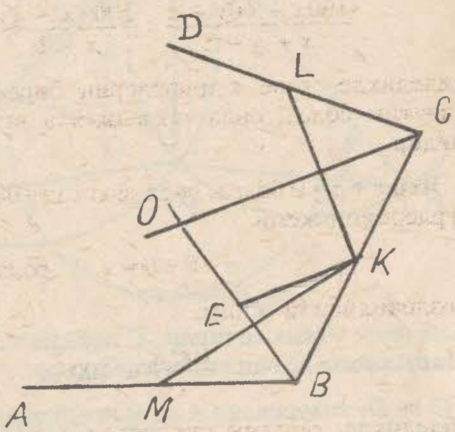
Диймек, x 0 я-да 1 дең болуп билер. Эгер $x = 0$ болса, онда

$$(1 + 0)\,(1 + 0) = 2^y, \quad 1 = 2^y, \quad y = 0$$

Эгер $x = 1$ болса, онда

$$(1 + 1)\,(1 + 1) = 2^y, \quad 4 = 2^y, \quad y = 2$$

Җогабы: $x = 0$, $x = 1$,

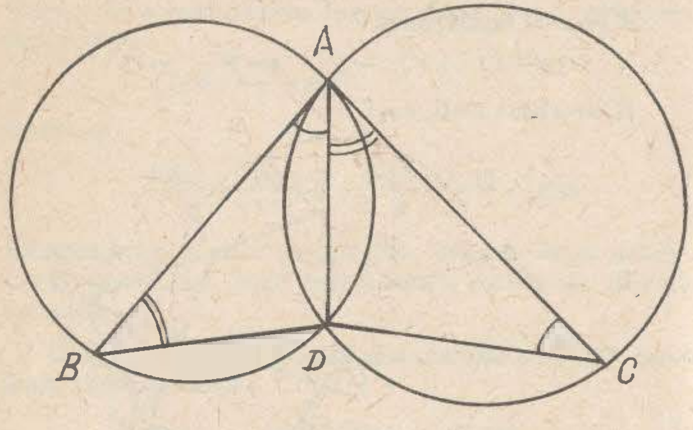


28-нҗи сур.

$$y = 0,\ y = 2$$

77. Гой, M, K, L гөзленилйән дөртбурчлугың дең тарапларының орталары болсун (28-нҗи сур).

Берлен M ве K нокатлары бирлешдирйәрис. Дөртбурчлугың B депеси MK кесимиң ортасындан гечирилен перпендикулярың үстүнде ятмалыдыр. Инди K ве L нокатлары бирлешдирйәрис. Онда гөзленилйән дөртбурчлугың C депеси KL кесимиң ортасындан гечирилен перпендикулярың үстүнде ятмалыдыр. Чызгыдан гөрнүши ялы BOC бурчуң ичинде ятан K нокат аркалы гөни чызык гечирмели, шунлукда бурчуң тарапларының арасындакы кесим K нокатда ярпа бөлүнмели. Шу меселәни чөзмек үчин OC кесиме параллел эдип, K нокат аркалы KE гөни чызыгы гечирйәрис. Инди $OE = EB$ кесими өлчәп гойярыс. Алнан B нокат ве K нокат



29-нҗы сур.

аркалы гөни чызык гечирип, C нокады тапярыс. D депәниң тапылышы-да эдил шонуң ялыдыр.

78. Гой, O ве O_1 төвереклер A ве D нокатларда кесишсинлер (29-нҗы сур.).

ACD ве ABD үчбурчлуклар меңзешдирлер. Хакыкатдан-да O_1 төвереге гранда CAD бурчы галташма билен хорданың арасындакы DA дуганың ярысы билен өлчелйәр. Эмма ABD бурч-да шол дуганың ярысы билен өлчелйәр. Диймек,

Шонуң ялы $\angle ACD = \angle DAB$.

Инди үчбурчлукларың меңзешлигинден ашакдакыны аларыс:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{я-да} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ве} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD}.$$

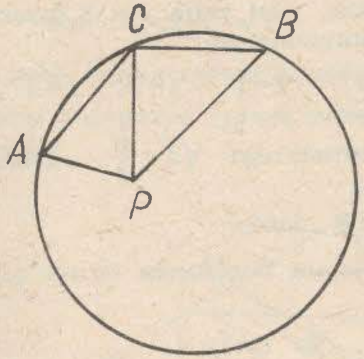
Соңкы ики деңликден

$$AD = \frac{AB \cdot CD}{AC} \quad \text{ве} \quad AD^2 = CD \cdot BD$$

я-да

$$\frac{AB^2 \cdot CD^2}{AC^2} = CD \cdot BD.$$

Шу ерден



30-нҗы сур.

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}.$$

79. APC ве BPC үчбурчлуклара гаралың (30-нҗы сур).

Шол үчбурчлукларда $AC=CB$ (чүнки AC ве CB дугалар меселәниң шертине гөрә дендирлер), CP тарап умумы. Диймек, $\angle BCP > \angle ACP$, чүнки $BP > AP$, ягны $\angle APC > \angle CPB$.

80. $x^y + 1 = z$,

z-иң тәклиги себәпли x^y - җүбүт сандыр.

($z - 1$) саның жүбүт сан болмагы үчин x жүбүт сан болмалыдыр. Йөнекей санларың ичинде диңе бир жүбүт сан бар, ягны ол хем 2. Диймек, $x = 2$.

Инди

$$2^y = z - 1$$

y - йөнекей сан. Гой, $y = 2$ болсун, онда $2^2 = z - 1$, $z = 5$

y - иң галан бахалары тәк болмалы. Эмма

$$2^y + 1 = z$$

деңликде y-иң тәк бахаларында ахыркы онуң чеп бөлеги 3-е бөлүнйәр ве z йөнекей сан болмаяр.

Шейлеликде, y-иң диңе $y = 2$ бахасы меселәниң шертини канагатландыряр.

Җогабы: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

81. Меселәниң шертине гөрә $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$. Онда $2 > \frac{m^2}{n^2}$

я-да $2n^2 - n > 0$ болар.

m ве n санларың положител битин санлар боланы себәпли

$$2n^2 - m^2 \geq 1 .$$

Инди

$$\sqrt{2}\, n - m \geq \frac{1}{\sqrt{2}\, n + \sqrt{2}\, m}$$ аларыс.

Бу ерден

$$\sqrt{2}\, n - m \geq \frac{1}{\sqrt{2}\, n + m};$$

$m < \sqrt{2}\, n$ боланы себәпли m саның ерине $\sqrt{2}\, n$ сан гоюп, аларыс:

$$\sqrt{2}\, n - m > \frac{1}{\sqrt{2}\, n + \sqrt{2}\, n}$$

я-да

$$\sqrt{2}\, n - m > \frac{1}{2\sqrt{2}\, n}$$

я-да

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

82. Эгер $n = 2$ дийип гүман этсек, онда:

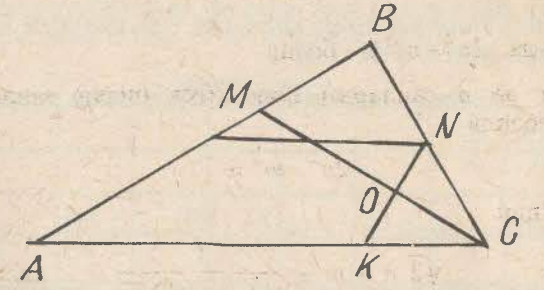
$$|\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2| = |\cos(\alpha_1 - \alpha_2)|$$

аларыс. Белли болшы ялы

$$|\cos(\alpha_1 - \alpha_2)| \leq 1$$

Умумы халы шу ягдая гетирмек мүмкиндир.

83. Гөзленилйән үчбурчлук гурлан дийип гүман эделиң. (31-нҗи сур).



31-нҗи сур.

Гурлушы чызгыдан гөрүнйәр.

1. Берлен N нокатдан берлен m биссектриса перпендикуляр гечирийәрис ве $NO = OK$ өлчәп гойярыс.

2. K нокат аркалы MN гөни чызыга параллел эдип, KC гечирийәрис, нетиҗеде C нокады тапярыс.

3. C нокатдан $CA = 2\, MN$ өлчәп гойярыс.

4. A ве M нокатлар аркалы хем-де C ве N нокатлар

аркалы гечирилен гөни чызыклар кесишип, гөзленилйән үчбурчлугың үчүнҗи депесини кесгитлейәрлер.

84. Гөзленйән саны $k\,(k+1)$ гөрнүше гетирмек мүмкин, бу ерде $k=333...3$ (1969 үчлүк).

85. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\neq 0;$

$$a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b=$$
$$=b(a^2-c^2)-b^2(a-c)-ac(a-c)=$$
$$=(a-c)(ba+bc-b^2-ac)=$$
$$=(a-c)(a(b-c)-b(b-c))=(a-c)(b-c)(a-b).$$

а, b, c санларың бири-бириниден тапавутлыдыклары себәпли шу көпелтмек хасыл нула деӊ дәлдир.

86. Үчбурчлугың тарапларыны a, b, c билен белгилесек, онда ашакдакыны аларыс:

$$3a=4b=5c$$

(шу аӊлатмаларың хер бири үчбурчлугың мейданының ики эссесини аӊладяр).

Диймек, гөзленилйән үчбурчлугың тараплары $3a$; $\frac{3a}{4}$; $\frac{3a}{5}$.

Шейлеликде, $(3a)^2>\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{3a}{5}\right)^2$

догрыдыр шонуӊ үчин шу үчбурчлук күтекбурчлудыр.

87. Радиусы 1,2 деӊ болан тегелегиӊ дашындан квадрат чызалыӊ. Бу квадратың тарапы 2,4 болар. Шол квадратың үстүни радиусы 1-е деӊ болан төверегиӊ дашындан чызылан квадратлар билен япалыӊ. Шу квадратларың бириниӊ тарапы $\sqrt{2}$ я-да такмынан 1,4 болар.

Диймек, тарапы 2,4 болан квадратың үстүни тарапы 1,4 деӊ болан квадратлар билен япмак үчин оларың 4 санысы герек болар. Шейлеликде, радиусы 1,2 деӊ болан

тегелегиӊ үстүни радиусы 1-е деӊ болан 4 саны тегелек билен япмак мүмкиндир.

88. Берлен алтыбурчлугы үч саны параллелограма (ики усул билен) бөлелиӊ. Онда тараплары берлен алтыбурчлугың гаршылыклы тарапларының тапавудынап деӊ болан үчбурчлук билен үч саны параллелограм аларыс.

Алтыбурчлугың мейданыны S_6 ве шол ятланылян үчбурчлугың мейданыны S_3 билен беллесек, онда меселәниӊ шертиндәки ики саны үчбурчлугың хер бириниӊ мейданы ашакдакы ялы болар:

$$\frac{S_6+S_3}{2}.$$

89. Радиусы 1,5 деӊ болан тегелегиӊ дашындан квадрат чызярыс. Шу квадратың тарапы 3-е деӊдир. Диймек, оны тарапы 1,4 деӊ болан квадратлар билен япмак үчин оларың 9 санысы герекдир.

90. Җайдакы отаглары ак ве гара реӊк билен күшт тагтасы ялы эдип реӊкләлиӊ. (2-нҗи таблица серет).

2-нҗи таблица

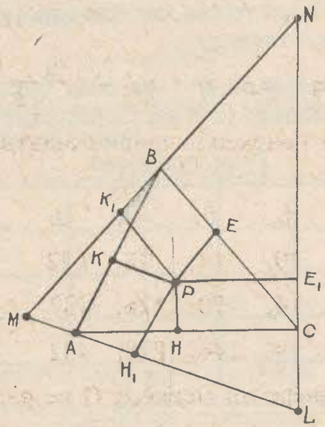
B							C	
A							D	

А чыкылып башлананда ак реӊкли җайдан гара реӊкли җая гечилйәр. Соӊра икинҗи әдимде гарадан ага гечилйәр ве ш.м. Шейлеликде тәк әдимде акдан гара гечилйәр, җеми 39 әдим этмели. Онда 39-нҗы әдимде акдан гара гечилмели. Эмма *B* ак. Диймек, *A*-дан *B* гечмек мүмкин дәл.

A-дан *D* ве *A*-дан *C* гечмек мүмкиндир.

91. Шу меселеде мысаллары гетирмек билен чәкленйәрис. Меселем, $n = 4$ я-да $n = 5$ болсун. Онда онуң бир тарапы 1 дең болуп, диагоналларыны битин санларда аңлатмак мүмкиндир. Эгер $n \geq 6$ болса, онда 1 дең болан тарапы эсас эдип, шол тарапың учларындан диагоналлары гечирсек, эмеле гелен үчбурчлугың бир тарапы 1 дең, бейлеки ики тарапының хер бири битин сан билен аңладылмалы. Үчбурчлугың ики тарапының тапавуды үчүнҗи тарапдан кичидир, шу халда 1-ден кичидир. Шу ягдайың диңе деңянлы үчбурчлукда болмагы мүмкиндир.

92. A депеден PK кесиме параллел гөни чызык гечирйәрис. Шонуң ялы B депеден PE кесиме ве C депеден PH кесиме параллел гөни чызыклары гечирйәрис. Инди $PH_1 \parallel AK$; $PK_1 \parallel BE$ ве $PE_1 \parallel CH$ гечирйәрис.



32-нҗи сур.

Нетиҗеде, $PH_1 = AK = BE = PK_1 = CH = PE_1$ аларыс. Диймек, P нокат MNL үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң меркезидир.

93. $\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$;

$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} = c - \sqrt{x}$, бу ерден

$$x + a\sqrt{x} + b = c^2 - 2c\sqrt{x} + x$$

аларыс.

я-да $$\sqrt{x} = \frac{c^2 - b}{a + 2c}$$

Деңлемәниң түкениксиз көп чөзүвиниң бардыгы үчин дробуң санавҗысы ве майдалавҗысы нула дең болмалыдыр.

94. Гөзленилйән санлар a_1, a_2, a_3, a_4 болсун. Онда меселәниң шертине гөрә

$a_1 = 2a$; $a_2 = 2a + 2b$; $a_3 = 2a + 4b$; $a_4 = 2a + 6b$,

бу ерде $d = 2b$.

Инди меселәниң шертини гөз өңүнде тутуп, деңлеме дүзйәрис.

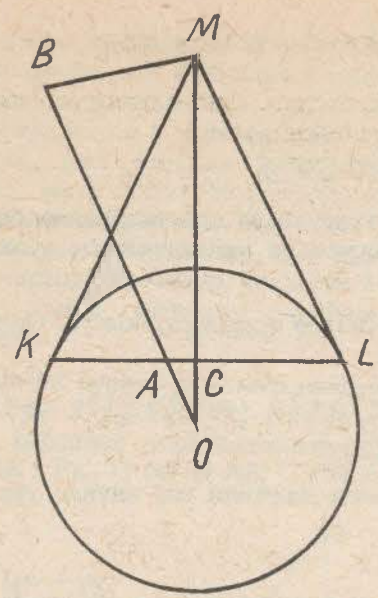
$$(a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_4) = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^3.$$

Шу деңлемәни йөнекейлешдирип ашакдакы җогаплары аларыс:

6,	6,	6,	6
10,	14,	18,	22
14,	70,	126,	182
9,	144,	228,	432

95. Гой, берлен төверегиң меркези O ве радиусы R болсун (33-нҗи сур).

Төверегиң ичинде берлен A нокат аркалы OA гөни чызык гечирелиң. Соңра A нокат аркалы KL хорда гечирип, ве L нокатларда төвереге галташянлары гечирйәрис. Гой, олар кәбир M нокатда кесишсинлер. Инди M нокатдан OA гөни чызыга перпендикуляр гечирйәрис. Гой, оларың кесишме нокады B болсун. OM кесим билен хорданың кесишме нокадыны C билен белләлиң. $OM \perp KL$



33-нҗи сур

диймек, OAC ве OMB үчбурчлуклар меңзешдирлер. онда:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OM}{OA},$$

бу ерден

$$OB = \frac{OM \cdot OC}{OA}.$$

OKM ве OKC үчбурчлуклар меңзешдирлер, онда

$$\frac{OK}{OC} = \frac{OM}{OK} \quad \text{я-да} \quad OM \cdot OC = R^2.$$

Инди

$$OB = \frac{R^2}{OA}.$$

Тассыкламаны терсине субут этмек кын дәлдир.

96. $\sqrt{1969} + \sqrt{1971}$ ве $2\sqrt{1970}$

санлары деңешдирелиң. Гой, оларың улулыгы y билен (нәбелли) белленилсин, ягны

$$\sqrt{1969} + \sqrt{1971} \qquad 2\sqrt{1970}$$

я-да $1969 + 1971 + 2\sqrt{1969 \cdot 1971} < 4 \cdot 1970$

я-да $3940 + 2\sqrt{1969 \cdot 1971} < 3940 + 3940$

я-да $2\sqrt{1969 \cdot 1971} < 3940$

квадрата гөтерийәрис, онда $3942 \cdot 3938 < 3940^2$

$$(3940 + 2)(3940 - 2) < 3940^2$$

$$3940^2 - 4 < 3940^2$$

диймек,

$$\sqrt{1969} + \sqrt{1971} < 2\sqrt{1970}$$

97. Эгер 7 балык доян болса, онда оларың иен балыклары 21 болмалы: җеми 21+7=28. Галан ики балыкда доюп билҗек. Шейлеликде, шу халда 9 балыгың доюп билҗеги гөрүнйәр. Гой, доян балыкларың саны n болсун, галан балыкларың саны k болсун. Онда ийлен балыкларың саны $3n$ болар. Диймек,

$k + 3n = 30$, $k = 3(10 - n) = 3m$, бу ерде $m = 10 - n$

$m + n = 10$; $m \geq 1$, онда $n = 9$.

98. Гой, ABC бурчуң тарапларына галташян төверeклериң меркезлери O ве O_1 нокатлар болсун (34-нҗи сур).

$BA = BA_1$ ве $BC = BC_1$

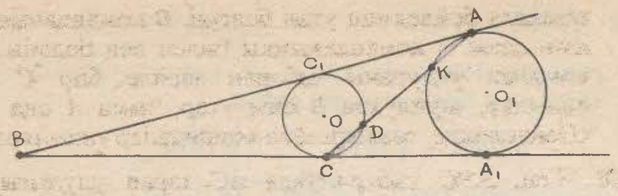
$$AC_1^2 = AC \cdot AD$$

Шонуң ялы $CA_1^2 = CA \cdot CK$

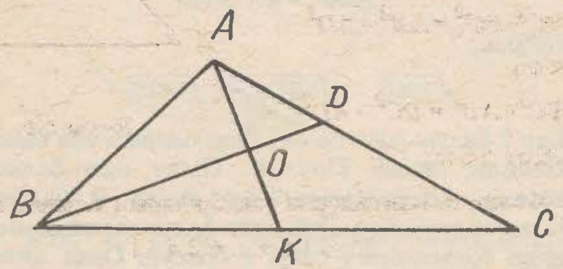
$AC_1 = CA_1$ боланы себәпли, $AD = KC$ я-да

$$AK = DC$$

99. Гой, AK - медиана, BD - биссектриса болсун (35-нҗи сур).



34-нжи сур.



35-нжи сур.

Меселәниң шертине гөрә $AK \perp BD$. Онда AOB ве BOK үчбурчлуклар дендирлер. Диймек, $AB = BK = KC$.

Инди $AB = n$, $AC = n + 1$, $BC = n + 2$ билен белесек, онда

$BC = BK + KC = n + n = 2n$ аларыс. Эмма $BC = n + 2$ боланы себәпли, $n + 2 = 2n$ аларыс. Шу ерден $n = 2$. Шейлеликде, үчбурчлугың тараплары: 2, 3, 4.

100. Волейбол ойнунда деңе-деңлик болманы себәпли хер бир оюн команда үчин я утуш я-да утулыш билен гутаряр. Дең утушлары болан ики команда гаралың. Гой, оларың бири A бейлекиси B болсун хем-де A

команда бейлекини утан болсун. B команданың утушының саны A команданыңкы билен дең боланы, эмма A команда утдураны себәпли шейле бир C команда тапылар, шунлукда B оны утар, эмма A оңа утдурар. Шейлеликде, гөзленилйән командалар тапылярлар.

101. Гой, ABC үчбурчлукда AC тарап улулыгы боюнча ортада болсун (36-нжи сур).

BDC үчбурчлукдан:

$BD^2 = BC^2 - DC^2$

ADB үчбурчлукдан
$BD^2 = AB^2 - AD^2$

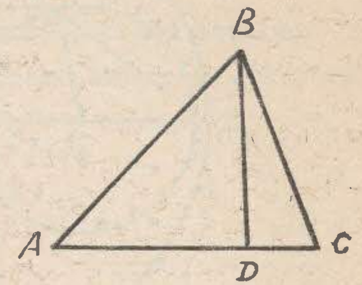
Инди

$BC^2 - DC^2 = AB^2 - AD^2$

я-да

$BC^2 - AB^2 = DC^2 - AD^2$

Җогабы: 4



36-нжи сур.

102. Меселем, ызыгидерли тәк санларың җемине гаралың:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1$$

Инди

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

аларыс.

n саны тәк санларың җеми:

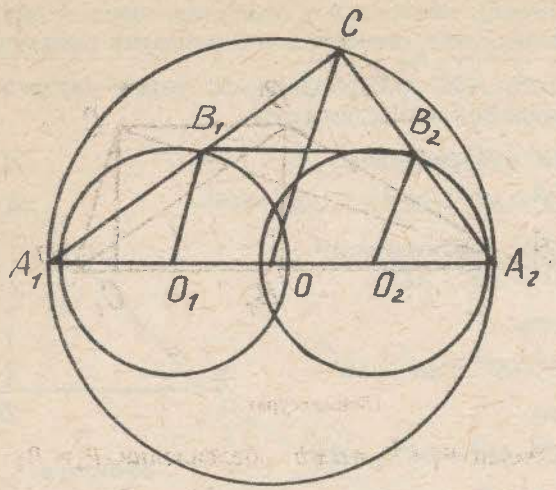
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

дийип гүман эделиң ве $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + 2n + 1$ җемиң долы квадрат болляндыгыны субут эделиң.

Гүман эдилишине гөрә:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

103. $A_1O_1B_1$ ве A_1OC үчбурчлуклар меңзешдирлер (37-нжи сур.)



37-нжи сур.

Диймек, $O_1B_1 \parallel OC$

Шонуң ялы $O_2B_2 \parallel OC$, ягны $O_1B_1 \parallel O_2B_2$;

$O_1B_1 = O_2B_2 = r$ боланы себәпли $O_1B_1\ B_2O_2$ дөртбурчлук параллелограмдыр.

Диймек, $O_1O_2 \parallel B_1B_2$.

Инди $A_1O_1K_1$ ве A_1OA_2 үчбурчлукларың меңзешдиклерини гөрйәрис, онда $O_1K_1 \parallel OA_2$ болар. $O_1K_1 = O_2A_2$

боланы себәпли $K_1O_1O_2A_2$ дөртбурчлук параллелограмдыр. Диймек, $A_2K_1 \parallel B_1B_2$

Шейлеликде, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$

104. $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \cfrac{10}{7}$. Меселәниң шертине гөрә x, y, z

санлар битин санлардырлар.

$-\infty; \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$

$$x + \frac{1}{\frac{yz+1}{z}} = \frac{10}{7};$$

$$x + \frac{z}{yz+1} = \frac{10}{7};$$

$$\frac{xyz+x+z}{yz+1} = \frac{10 \cdot k}{7 \cdot k}$$

$$\frac{xyz}{yz+1} = \frac{10}{7},$$

шу деңлигиң чеп бөлегиндәки дробуң майдалавҗысы ($yz + 1$) сан битин сан болмалы, шонуң ялы санавҗыда битин сан болмалы. Инди

$$\begin{cases} xyz + x + z = 10k; \\ yz + 1 = 7 \cdot k; \end{cases}$$

$x(yz+1) + z = 10k$
$x \cdot 7k + z = 10k$
$z = 10k - 7kx$

$$x \cdot 7k + z = 10k,$$

$$z = 10k - 7kx.$$

я-да

$$\begin{cases} x(yz+1) + z = 10k; \\ yz + 1 = 7k; \end{cases}$$

$$z = (10 - 7x) \cdot k,$$

Шу ерде z, x, k санлар битин санлардырлар. Диймек, $x = 1$, $k = 1$ боланда $z = 3$, онда $y = 2$.

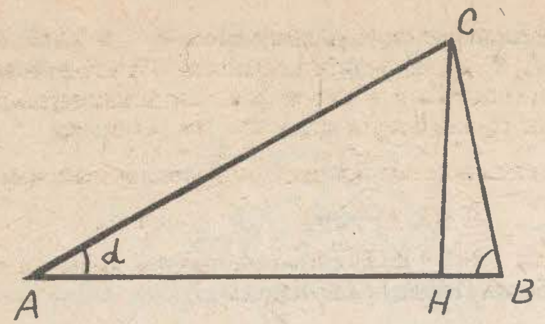
105. Гөзленйән саны җүбүт санларың ичинден сайлап алмалы, чүнки җүбүт саның өңдәки цифрлериниң үйтгемеги билен йөнекей сан алынмаз. Мысал үчин, меселәниң шертини канагатландырян санлардан 620, 622, 624, 626, 628, я-да 840, 842, 844, 846, 848 санлары гөркезмек мүмкиндир.

106. Меселәниң шертине гөрә

$$CH = \frac{1}{2} AB \quad \text{ве} \quad \angle ABC = 75^\circ.$$

BAC бурчы тапмалы. BCH үчбурчлукдан аларыс.

$$BH = CH \cdot ctg\, 75^\circ$$



38-нжы сур.

Шонуң ялы ACH үчбурчлукдан аларыс:

$$AH = CH \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

Инди $\quad BH + AH = CH \cdot (\operatorname{ctg} 75^{0} + \operatorname{ctg} \alpha)$

я-да $\quad AB = CH \cdot (\operatorname{ctg} 75^{0} + \operatorname{ctg} \alpha)$

я-да $\quad AB = \frac{1}{2} AB \cdot (\operatorname{ctg} 75^{0} + \operatorname{ctg} \alpha)$

я-да $\quad \operatorname{ctg} 75^{0} + \operatorname{ctg} \alpha = 2$

Эгер $\operatorname{ctg} 75^{0} = \operatorname{ctg} (45^{0} + 30^{0})$ гөз өңүнде тутсак, онда $\operatorname{ctg} 75^{0} = 2 - \sqrt{3}$ аларыс. Диймек, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$, бу ерден $\alpha = 30^{0}$. Шейлеликде, гөзленилйән бурч $BAC = 30^{0}$.

107. Ашакдакы ялы схема гаралың:

A, B ве C үч дөвлети алалың. Оларың ичинде A ве C билен хениз дипломатик арагатнашык ёк дийип гүман эделиң. Инди B, C ве D билен-де шейле, соңра D, E ве K билен-де шейле ве ш.м. Шу халда илчиханаларың санының җеми 38 болар.

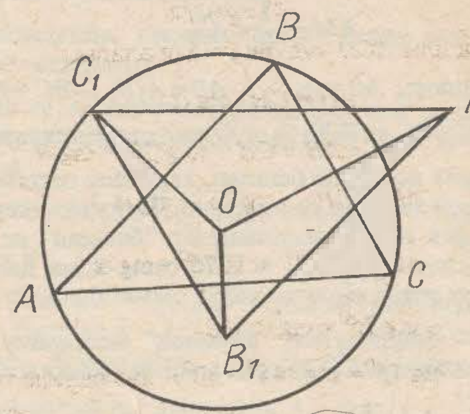
Инди A, B, D соңра A, D, K, A, B, M ве ш.м. гаралың.

Шу халда илчиханаларың саны $9 \cdot 2 = 18$ болар. Соңра C, K, E, C, M, ве ш.м. гаралың. Шу халда илчиханаларың саны $8 \cdot 2 = 16$ болар. Галан ягдайларда-да оларың саны 16-дан болуп, җеми $16 \cdot 9 = 144$ болар.

Шейлеликде, илчиханаларың санларының җеми

$$38+18+144=200 \qquad \text{болар.}$$

108. Гой, ABC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң меркези O болсун (39-нҗи сур.)



39-нҗи сур.

BC кесиме гаранда O нокада симметрик A_1 нокады гаралың. Шонуң ялы эдип, B_1 ве C_1 нокатлары гуралың.

KL , LM , KM кесимлер берлен ABC үчбурчлугың орта чызыкларыдырлар. диймек,

$$KL = \frac{1}{2} AC$$

$$LM = \frac{1}{2} AB$$

$$KM = \frac{1}{2} BC$$

C_1OA_1 үчбурчлукда KL кесим онуң орта чызыгыдыр, диймек,

$$KL = \frac{1}{2} A_1C_1 .$$

Шонуң ялы B_1OA_1 үчбурчлукда

$$LM = \frac{1}{2} A_1B_1$$

ве C_1OB_1 үчбурчлукда

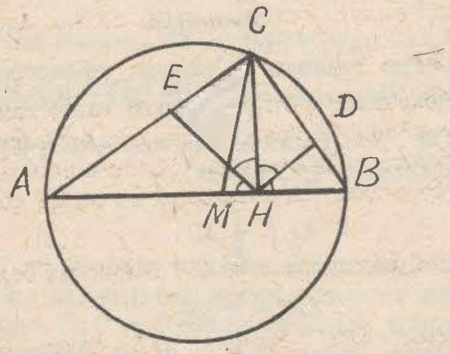
$$KM = \frac{1}{2} B_1C_1.$$

Шейлеликде, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Диймек, ABC ве $A_1B_1C_1$ үчбурчлуклар деңдирлер.

109. Ислендик нокатдан башлап, хер гезек гоңшы нокатлара нокатдакы звеноны гечирйәрис. Шунлукда хер бир дөвүк чызык ики гезек хасапланыляр "башдан" ве "аякдан", диймек, жеми $10 \cdot 2^7 = 1280$ саны япык дәл, өз-өзүни кесмейән докуз звенолы дөвүк чызык болҗак.

110. ABC үчбурчлугың ичинден меселәниң шертини канагатландырян O нокады алалың (40-нжы сур.) .



40-нжи сур.

Инди $ON \perp BC$, $BE \perp BC$ гечирелиң. Онда $BE = ON$ болар. Меселәниң шертинде ятланылян COM, BOK үчбурчлукларда диймек, $MC = KO$.

KO кесими AC тарап билен кесишйәнчә довам эдип, D нокады аларыс. Эмеле гелен $CMOD$ дөртбурчлук параллелограмдыр, ягны $OD = MC$, эмма $MC = KO$, диймек, $OK = OD$. Онда KAD үчбурчлукда AO медианадыр. AO кесими довам эдип, ABC үчбурчлукда AL-ың медианадыгыны гөрйәрис. Шонуң ялы эдип, BO ве CO медианадыкларыны гөрйәрис.

Шейлеликде, гөзленилйән O нокат медианаларың кесишме нокадыдыр.

111. Гой, $\overline{ab}$ ве $\overline{cd}$ гөзленилйән икибелгили санлар болсун. Онда меселәниң шертине гөрә $\overline{abcd}$ сан $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ саны бөлүнйәр

$1000\,a + 100\,b + 10\,c + d = 100\,(10\,a + b) + (10\,c + d) =$

$= 100\,A + B$.

Эгер $100\,A + B$ сан $\overline{AB}$ сана бөлүнйән болса, онда $B = KA$, бу ерде $K = 1,2,...,9$. Эмма $100 + K$ сан $\overline{AK}$ сана бөлүнйәр, шоноң үчин 100 сан K сана бөлүнйәр, ягны $K = 1,2,4$ болмалы, шунлукда A - сан $\left(1 + \frac{100}{K}\right)$ саның бөлүҗиси болуп, икибелгили сан болмалыдыр.

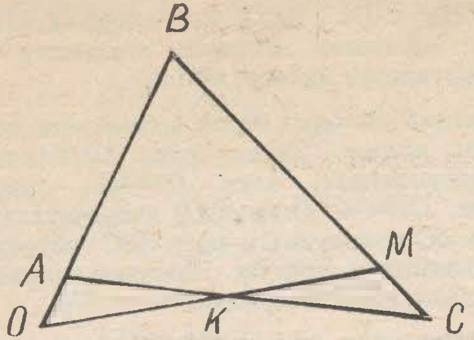
Җогабы: 17, 34, 13, 52.

112. Хер бөлекдәки отлучөплериң саны тәк болса, онда ойны башлаян утдурар. Галан халларда башлаян җүбүт санлы бөлеги гоймалы ве шол бөлеги ики саны тәк санлы бөлеге бөлмели. Шейлеликде, 20 ве 25 болса башлаян утар.

113. Гой, CM биссектриса ве CH бейиклик болсун (41-нҗи сур.).

HE кесим AHC бурчуң, HD болса BHC бурчуң биссектрисалары болсун.

Инди $\angle\, CME = \angle\, CHE = \alpha$ (шол бир CE дуга даянлар) .



41-нҗи сур.

Шонуң ялы $\angle MDE = \angle MHE = \alpha = 45^\circ$

Шейлеликде, $\angle MEC$ үчбурчлук деңянлы гөнүбурчлы үчбурчлукдыр. $MECD$ квадратдыр. Диймек, CM диаметр эдип чызылан төверек D, M, E, C нокатлар аркалы гечер. Шол төверегиң H нокатдан гечҗегини субут эделиң. Хакыкатдан-да $CDHM$ дөртбурчлукда

$$\angle DHM + \angle DCM = 180^\circ.$$

Диймек, M, C, D үч депеден гечйән төверек шол дөртбурчлугың дөрдүнҗи H депесинденде гечер.

114. $x^2 + ax + bc = 0$

ве

$$x^2 + bx + ca = 0,$$

шу ерден

$$x(a - b) + c(b - a) = 0$$

аларыс. Диймек, $x = c$. Шу көк деңлемелериң икиси үчин-де умумы көкдүр.

Инди

$c^2 + ac + bc = 0$; $c(c + a + b) = 0$; $c = 0$; $c = -(a + b)$

Инди Виетиң теоремасыны уланып, аларыс:

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 \cdot x_2 = -bc$$

я-да $\quad cx_2 = bc$; $\quad x_2 = b$.

Икинҗи деңлеме үчин

$$x_1 + x_3 = -b$$

$$x_1 \cdot x_3 = -ca$$

я-да $\quad cx_3 = ca$; $\quad x_3 = b$.

Шу көклер $x^2 + cx + ab = 0$ деңлемәни канагатландырярлар. Ягны $c = -(a + b)$ аларыс.

115. Гой, 2^{1971} санын цифрлериниң саны k ве 5^{1971} санын цифрлериниң саны p болсун. Эгер

$$10^{k-1} < 2^{1971} < 10^k$$

$$10^{p-1} < 5^{1971} < 10^p$$

болса, онда

$$10^{k+p-2} < 10^{1971} < 10^{p+k}$$ аларыс.

Инди $k + p - 2 < 1971 < p + k$ болса,

онда $p + k = 1972$ болар.

Бизиң гөзлейән санымызда шу 1972 цифр бар.

116. Белли болшы ялы

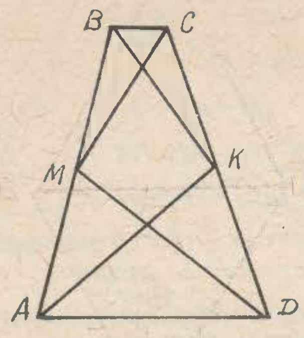
$$\frac{BK}{KC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Инди K нокатда BK биссектриса перпендикуляр эдип, OM кесими гечирелиң. Нетиҗеде $BM=BO$ аларыс. Чызгыдан гөрнүши ялы $BK < BO = 12$. Диймек, $BK < 12$.

117. Гой, $A_1, A_2, ..., A_k$ ызыгидерлик сайланып алнан болсун ве оларың җеми C дең болсун. Онда A_{k+1} саны $c^2 + 1$ эдип алмак мүмкиндир.

118. Тарапы 1 дең болан деңтарaплы үчбурчлуклардан гөзенек чызалың.

Онуң депелерини A, B, C, D харплар билен белгилэлиң.



42-нжи сур.

Инди биз $ABCD$ тэтраэдри нәхили эдип өвүрсек-де D депе бейлеки A, B, C депелериң хич бириниң ерине дүшмез.

119. Трапецияның мейданы AKB ве CMD үчбурчлукларың мейданларының жемине дендир, шонуң үчин берлен деңликден

$$\angle AKB = \angle CMD$$

гелип чыкяр.

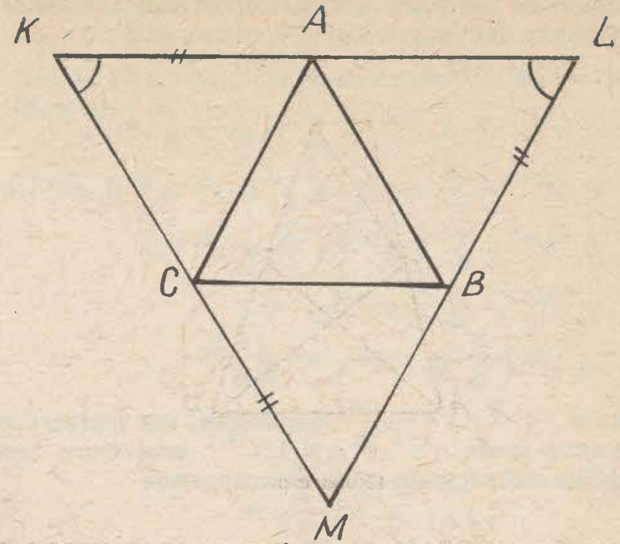
Инди $\angle AKB = \angle CMD = 90^\circ$,

ягны K нокат, меркези M нокатда болан AB диаметрли төверегиң үстүнде ятяр, M нокат болса, меркези K нокатда болан, CD диаметрли төверегиң үстүнде ятяр. Диймек, $AB = CD = BC + AD$.

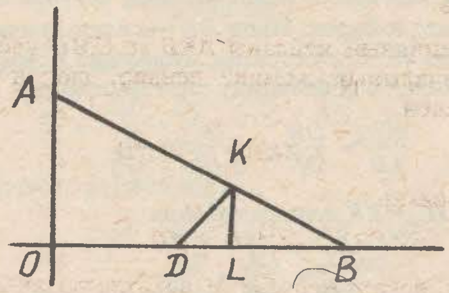
120. $\angle K > 60^\circ$ дийип гүман эделиң. Онда $\angle L \leq 60^\circ$ я-да $\angle M \leq 60^\circ$.

Гой, $\angle L = 60^\circ$ болсун. Онда $\angle LBA + BAL > 120^\circ$.

Инди $\angle KAC = 60^\circ$ боланы себәпли $\angle BAL + \angle KAC = 120^\circ$. Диймек, $\angle LBA > \angle KAC$. Шейлелиде, $AL > KC$.



43-нжи сур.



44-нжи сур.

(Шу ерде AKC ве ABL үчбурчлуклар деңешдирилйәр). Инди $\angle K > 60^\circ$ боланы себәпли (гүман эдилишине гөрә) $\angle KAC + \angle KCA < 120^\circ$ ве $\angle BAL + \angle KAC = 120^\circ$. Диймек, $\angle KAC < \angle BAL$. Шейлеликде CAK ве ABL үчбурчлуклардан $KC > AL$ аларыс. Биринжи тарапдан

$KC < AL$ -ден, икинжиден болса $KC > AL$. Шейле болуп билмез. Диймек, $\angle K = 60^\circ$. Бейлеки бурчлар үчин шулар ялы нетиже аларыс. Шейлеликде, KLM - деңтараплы үчбурчлукдыр.

121. $(x^2+x+1)^{1972} = (x^2+x+1)^{1971}(x^2+x+1) =$

$$= \sum \alpha_i x^{3i} + \sum \beta_j x^{3j+1} + \sum \gamma_k (x^2 + x + 1) =$$

$$= \sum \alpha_i x^{3i+2} + \sum x_i x^{3i+1} + \sum \alpha_i x^{3i} + \sum \beta_j x^{3j+3} +$$

$$+ \sum \beta_j x^{3j+2} + \sum \beta_j x^{3j+1} + \sum \gamma_j x^{3k+6} +$$

$$+ \sum \gamma_j x^{3k+5} + \sum \gamma_j x^{3k+4} =$$

$$= \sum \alpha_i x^{3i} + \sum \beta_j x^{3j+3} + \sum \gamma_k x^{3k+3} + \ldots$$

Диймек, $(x^2+x+1)^{1972}$ көпчлениң, үче кратны болан дережели жеми $(x^2+x+1)^{1971}$ көпчлениң хемме коэффициентлериниң жеми ялыдыр, ягны

$$(1+1+1)^{1971} = 3^{1971}.$$

122. Ики саны өзара перпендикуляр кесим аларыс, оларың бириниң үстүнде a, бейлекисиниң үстүнде $a\sqrt{3}$ кесимлери өлчэп гойярыс. Инди $BD = a$ кесими өлчэп гойярыс. D нокатда 45° бурч гурярыс, нетижеде K нокады аларыс. K нокатдан KL перпендикуляры гечирйэрис

$$\frac{KL}{LB} = \frac{OA}{OK} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

аларыс. $DL = KK$ боланы себэпли

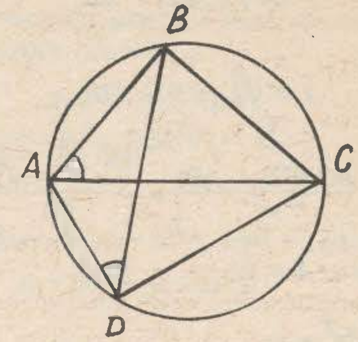
$$\frac{KL}{LB} = \frac{DL}{LB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

аларыс.

123. A өйжүги алалың. Шу өйжүк аркалы золак гечирелиң. Инли ат B өйжүкде дийип гүман эделиң. B өйжүгиң шол золакдакы проекциясына гөзекчилик эделиң. A өйжүкден шу проекция ченли узаклык мыдама 3 бөлүнйэр (4-1, 7-1 ве ш.м.), ягны хусусан 1-е деңдэл. Диймек, x өйжүге хич вагт барып болжак дэл.

124. $ABCD$ дөртбурчлукда $\angle B = \angle D = 90^{\circ}$ боланы себэпли AC төверегиң диаметридир (45-нжи сур).

Инди $\angle BAC = \angle ADB$ боланы себэпли $BC = AB = 90^{\circ}$. Онда $AB = BC$.



45-нжи сур.

BCD үчбурчлугың мейданы

$$S_1 = \frac{BD \cdot BC \cdot CD}{4R} = \frac{BC \cdot CD}{4R}$$

ABD үчбурчлугың мейданы

$$S_2 = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4R} = \frac{AB \cdot AD}{4R}.$$

$ABCD$ дөртбурчлугың мейданы

$$S = S_1 + S_2 = \frac{BC \cdot CD + AB \cdot AD}{4R} =$$

$$= \frac{BC \cdot CD + AB \cdot AD}{4R} = \frac{BC\,(CD + AD)}{4R}$$

ABC үчбурчлукдан $BC = 2R\sqrt{2}$.

Инди $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (Птоломейиң теоремасы).

Шу ерден

$$2R \cdot 1 = 2R\sqrt{2} \cdot CD + 2R\sqrt{2} \cdot AD =$$
$$= 2R\sqrt{2}\,(CD + AD)$$

я-да

$$1 = \sqrt{2}\,(CD + AD)\,;$$

$$S = \frac{BC\,(CD + AD)}{4R} = \frac{2R\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{4R} = \frac{1}{2}.$$

Ж о г а б ы: $S = \frac{1}{2}$

125. $\begin{cases} 7x^2 - 5y^2 = m \\ 5u^2 - 7v^2 = m \end{cases}$ $(m \neq 0)$

$$7x^2 - 5y^2 = 5u^2 - 7v^2\,; \quad 7x^2 + 7v^2 = 5u^2 + 5y^2\,;$$
$$7\,(x^2 + v^2) = 5\,(u^2 + y^2)$$
$$x + v^2 = \frac{5\,(u^2 + y^2)}{7}$$

Ики санын квадратының жеми 7-э бөлүнмели, онда оларың хер бири 7-э бөлүнмели. Диймек, $y = 7\,s$, $n = 7\,t$ онда $m = 7k$.

$$\begin{cases} 7x^2 - 5 \cdot 49\,s^2 = 7k \\ 5 \cdot 49\,t^2 - 7v^2 = 7k \end{cases} \qquad x^2 + v^2 = 35\,(s^2 + t^2)$$

Шейлеликде, x, y, u, v, m санлар 7-э бөлүнйэрлер. Биз илки башда шол санлары өзара йөнекей санлар дийип билйэрдик. Хакыкатдан-да, эгер x, y, m санларың y умумы бөлүҗиси болан болса, биз шол бөлүҗэ гысгалдардык. Эдил шонуң ялы u, v санларада шу дегишлидир.

126. Гой, $x^2 < 10^{199} - 10^{100}$ болсун ве x шейде санларың иң улусы болсун. Онда

$$x^2 < 10^{199} < 16 \cdot 10^{198}$$

Диймек, $x < 4 \cdot 10^{99}$

Инди $(x+1)^2 - x^2 = 12x + 1 < 8 \cdot 10^{99} + 1 < 10^{100} - 1$.

Шейлеликде, $(x+1)^2 = 10^{199} - 1$.

127. Берлен системаның икинҗи деңлемесиниң ики бөлегини-де i көпелдип, аларыс:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a^3 - 3ab^2 \\ 3xyi - y^3\,i = 3a^2b\,i - b^3\,i \end{cases}$$

Инди

$$x^3 - 3xy^2 + (3xy - y^3)\,i = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3) \cdot i$$
$$(x + iy)^3 = (a + bi)^3$$

Бу ерден

а) $x + iy = (a + bi)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$; $x = a$; $y = b$

я-да

б) $x + iy = (a + bi)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;

$$x = \frac{1}{2}(-a - b\sqrt{3})$$
$$x = \frac{1}{2}(-b + a\sqrt{3})$$

я-да

в) $x + iy = (a + bi)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;

$$x = \frac{1}{2}(-a + b\sqrt{3})$$
$$x = \frac{1}{2}(-b - a\sqrt{3})$$

128. Санлары 16-дан аз болан дүрли реңкдәки шарларың хеммесини алалың, ягны 10+14+5=29 шар алалың. Инди галан дүрли реңкдәки шарларың херсинден 15 саңысыны алалың, ягны 15+15+15=45 шар алалың.

Җеми алнан шарлар 29+45=74

Эгер ене-де бир шар алсак, ягны 74+1=75, онда шоларың ичинде 16 шар хайсы хем болса бир меңзеш реңкли болар.

129. Биринҗи хусусы көпелтмек хасылы 3 йүзден көпүрәк, чүнки шоле ерде йүзлүклериң разрядында 3-лик бар. Диймек, көпелдиҗиниң йүзлүклери 3, көпелдиҗиниң бирликлери 1, ягны

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & . & 5 \\ & & & 4 & 1 \\ \hline & & 3 & . & 5 \\ 1 & 2 & . & 0 & \\ \hline 1 & 2 & . & . & 5 \end{array}$$

Инди $4 \cdot 3 = 12$ боланы себәпли 4 шейле бир сана көпелтмели, шунлукда алнан көпелтмек хасыла 2 гошуланда бир белгили сан болмалы. Шу шерти канагатландырян санлар 0 ве 1. Диймек,

$$\begin{array}{cccccc} & & & 3 & 1 & 5 \\ \times & & & & 4 & 1 \\ \hline + & & & 3 & 1 & 5 \\ & 1 & 2 & 6 & 0 & \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 1 & 5 \end{array} \quad \text{я-да} \quad \begin{array}{cccccc} & & & 3 & 0 & 5 \\ \times & & & & 4 & 1 \\ \hline + & & & 3 & 0 & 5 \\ & 1 & 2 & 2 & 0 & \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array}$$

130. 2, 3, 4, 5, 6 санлар үчин иң кичи умумы кратны сан 60. Диймек, $60n+1$ гөрнүшдәки сан 7 бөлүнмели ве меселәниң шертини канагатландырмалы.

Гой, $N = 60n + 1$ аңлатмада $n = 1$ болсун, онда

$N = 60 \cdot 1 + 1 = 61$ сан 7-ә бөлүнмейәр. $n = 2$ боланда

$N = 60 \cdot 2 + 1 = 121$ сан 7-ә бөлүнмейәр ве ш.м. $n = 5$ боланда $N = 60 \cdot 5 + 1 = 301$ сан 7-ә бөлүнйәр. Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян сан 301.

131. Илки билен 66° деӊ бурчы гурярыс. Соңра шол бурчы 90° долдурярыс. Нетиҗеде 24° деӊ бурч алярыс. Шу бурчуң биссектрисасыны гечирип, 12° бурч алярыс. Инди 12° бурчы ики деӊ бөлеге бөлүп, 6° деӊ бурч аларыс. Шу 6° деӊ бурчы берлен бурчуң үстүнде 11 гезек өлчәп гойярыс.

132. Субут этмели.

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4}$$

....

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99 \cdot 100}$$

Инди

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} <$$

$$< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99$$

Диймек,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<0{,}99$$

133. Икинҗи гөчен утяр. *B*-ың стратегиясы шейле: *A*-ың хер бир гөчүмине шейле гөчйәр: вертикал гапырганың бейлеки ужуна эдил, шол бир реңкдәи икинҗи шары гойяр. Эгер *B* биринҗи гөчйән болса, онда *A*-ың стратегиясы шейле: *B*-ың гөчүмиңе җогап эдип, гаршылыклы депеде шол реңкдәки икинҗи шары гойяр.

134. Берлен $$x^y+y^x=x^x+y^y. \qquad (1)$$

Субут этмели: $x=y$

Чөзүлиши:

$$x^y-x^x=y^y-y^x$$

$$x^y\,(1-x^{x-y})=y^y\,(1-y^{x-y})$$

Эгер $x>y$ болса, онда

$$x^x-y^y>y^x-y^y$$

я-да

$$x^y\,(x^{x-y}-1)=y^y\,(y^{x-y}-1)$$

Меселәниң шертине гөрә (1) ерине етирилйәр, онда

$$x=y$$

135. Меселәниң шертине гөрә $p=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_k$. $(p+1)$ сан долы квадрат дийип гүман эделиң. Онда $(p+1)$ - тәк сан боланы себәпли шейле язярыс: $2n+1$. Инди

$$p+1=(2n+1)^2.$$

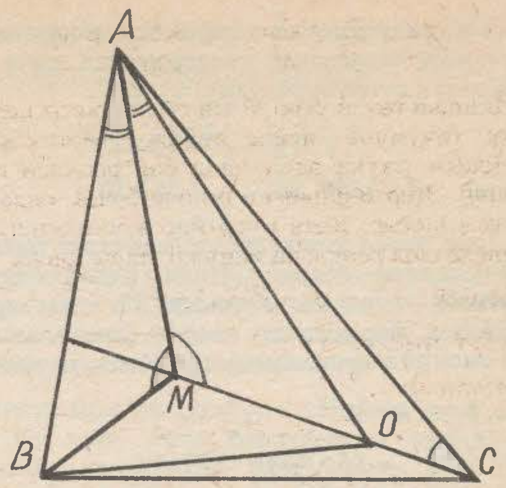
(гүман эдилишине гөрә).

Эмма $p=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_k=4n\,(n+1)$

я-да $3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p_k=2n\,(n+1)$

Шу деңлигиң чеп бөлеги тәк сан, саг бөлеги болса җүбүт, шейле болуп билмез. Диймек $(p+1)$ сан долы квадрат дийип гүман этмек догры дәлдир.

136. *BAO* бурчуң биссектрисасыны гуралың (46-нҗи сур.)



46-нҗи сур.

Меселәниң шертине гөрә $\angle ACO=30^\circ$. Чызгыдан гөрнүши ялы $\angle MAC=30^\circ$. Диймек, $MC=MA$. Инди *ABM* ве *OBM* үчбурчлуклара гаралың.

$$\angle BAM=\angle MAO=20^\circ$$

$$\angle BMA=\angle OMA=120^\circ$$

MA - умумы тарап. Диймек, $AB=AO$. Онда

$$\angle ABO=\angle AOB=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$$

Шейлеликде, $\angle AOB=70^\circ$

137. *AHCD* деңянлы трапециядыр, чүнки $HC=CB=AD$ (49-нҗи сур.) $DH=AC$

AKCD деңянлы трапециядыр, чүнки

$$|AK|=|AB|=|DC|,$$

онда $DK=AC$. Диймек, $|DK|=|DH|$. Үчбурчлук *DHK* - деңянлы.

138. Үчбурчлугың ики тарапының квадратларының жеми үчүнжи тарапының квадратындан кичи, диймек, үчбурчлук күтек бурчлудыр, чүнки

$$(\sqrt{13})^2 + 5^2 < (5\sqrt{2})^2$$

я-да $\quad 13 + 25 < 50, \qquad 38 < 50$

139. Диңе гызыл фишкаларың диаметрал гаршысында яшыл фишкалары гоялың. Инди гызыл фишкадан яшыл фишка гечиленде хеммеси 20 саны аралык боланы себәпли бир реңкли гоңшы фишкаларың аралыгыны гечмән айланып билмерис. Диймек, мүмкин дәл.

140. $a, b, c ... k = 10^{10}$

$a + b + c + ... + k$ жеми тапмалы.

$b + b < ab + 1$. Шу деңсизлик мыдама ерине етирилйәр. Онда

$$a + b + c + ... + k < abc ... k + 1$$

Диймек,

$$a + b + c + ... + k < 10^{10} + 1$$

141. Берлен дробуң майдалавжысы $(p-1)!$ болар. Санавжыдакы гошулыжылары жүбүтме-жүбүт тапалың, онда

$$\frac{(p-1)!}{k} + \frac{(p-1)!}{p-k} = \frac{(p-1)!\,(p+k-k)}{k(p-k)} = \frac{(p-1)!\,p}{k(p-k)}$$

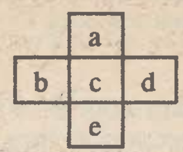
Диймек, санавжы p сана бөлүнйәр.

142. A нокатдан CD диаметре перпендикуляр индерелиң, онуң эсасыны A_1 билен белгиләлиң. Соңра C_5D_5 диаметре перпендикуляр индирелиң ве онуң эсасына A_2

билен белгиләлиң. ве ш.м. Нетижеде OAA_1 , OA_1A_2 ве ш.м. гөнүбурчлы үчбурчлуклар алынярлар. Оларың хеммесиниң гипотенузасы OA кесимдир. Диймек, ислендик A диаметрлере индерилен перпендикулярларың эсаслары, OA кесими диаметр эдип чызылан төверегиң үстүнде ятярлар.

Шейлеликде, алнан көпбурчлук догры көпбурчлукдыр .

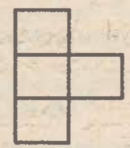
143. Ашакдакы гөрнүшдәки фигура гаралың.



$a = b = e$ деңликлери субут эделиң. Меселәниң шертине гөрә $a + b + c + d = 4$. Икинжи тарапдан $a + c + d + e = 4$ бу ерден $b = e$. Инди $a + b + c + d = 4$ ве $b + c + d + e = 4$, бу ерден $a = e$ алыняр. Диймек, $a = b = e$.

Шейле деңликлери өйжүклериң хеммеси үчин алмак мүмкин. Шу ерде диңе бурчлардакы өйжүклерден башгаларының хеммесинде бири-бирине дең санлар алыняр.

Шу гөрнүшдәки фигураларың хер бир өйжүклериндәки санларың бири-бирине дең болуп, оларың жеми 4 боланы себәпли, хер бир өйжүкдәки сан 1 деңдир.



Бурчдакы өйжүклери

шу гөрнүшдәки фигура алалың, шу ерде a билен белленилен өйжүк бурчдакыдыр. Галан үч өйжүгиң хер биринде 1 сан бар, дөрт өйжүкдәки санларың жеми 4 дең, диймек, бурчдакы өйжүкде-де 1 сан бар. Шейлеликде, өйжүклериң хер биринде 1 сан бардыгы субут эдилди.

144. Нокатлары 1, 2, 3 ... тертип боюнча номерләлиң. жүбүт номерли фишкаларың көплүгиниң ичинде фишкалары эркин чалшырмак мүмкин, тәк номерлилерини-де шейле чалшырмак мүмкиндир. Шонуң үчин көплүклериң хер

бирине нәче ак фишка дүшенлиги билен хеммеси кесгитленйәр, диймек, эквивалент дәл чалшырмагың саны $x + y = 10$ деңлемәниң битин положител чөзүвиниң саны ялыдыр. Шу деңлемәниң 11 чөзүви бар.

Җогабы: 11

145. Хер хорда билен дартылян кичи дугалара ве олар билен диаметрал гаршылыкларына гаралың. Эгер диаметр бир хорданы кесйән болса, онда гаралян дугаларың узынлыкларының җеми π болар, эгер-де k хорданы кесйән болса, онда гаралян дугаларың узынлыкларының җеми $2k$ болар. Эгер-де хордаларың саны k-дан көп болмаса, онда

$$S_{дуг.уз.} \le 2\pi k$$

болар. Эгер диңе кичи дугалара гарасак, онда деңсизлик гүйчленйәр ве ашакдакы гөрнүши аляр:

$$S_{kдуг.уз.} < \pi k$$

Эмма хордаларың узынлыкларының җеми оларың дартян дугаларының узынлыкларындан кичидир, ягны

$$S_{хор.уз.} < S_{кич.дуг.уз.} < \pi k < 3{,}15\,k$$

Шейлеликде,

$$S_{хор.уз.} < 3{,}15\,k .$$

146. Гой берлен арифметик прогрессиядан геометрик прогрессияны сайлап алмак мүмкин болсун ве шол геометрик прогрессияның биринҗи члени $a + mb$ икинҗи члени $a + nb$ үчинҗи члени $a + pb$ болсун.

Геометрик прогрессияның хәсиети боюнча

$$(a+mb)(a+pb) = (a+nb)^2 .$$

Инди $\quad a^2 + apb + mba + mpb^2 = a^2 + 2nab + n^2b^2$

я-да $\quad ab(m+p-2n) = b^2(n^2 - mp)$, бу ерден

$$\frac{a}{b} = \frac{n^2 - mp}{m + p - 2n}$$

m, n, p санларың рационал сан боланлары себәпли $\frac{a}{b}$ сан рационалдыр.

147. Берлен деңсизлиги шейле язалың:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x + \frac{1}{2}} > 0 ;$$

$$\frac{x + 1 + x}{x(x+1)} - \frac{4}{2x+1} > 0 ;$$

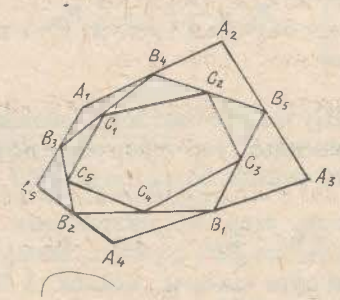
$$\frac{2x + 1}{x(x+1)} - \frac{4}{2x+1} > 0 ;$$

$$\frac{(x+1)^2 - 4(x^2 + x)}{x(x+1)(2x+1)} > 0 ;$$

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} > 0 .$$

Илки билен, $x \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne -\frac{1}{2}$ экенлигини белләлиң. Онда $x > 0$ ве $-1 < x < \frac{1}{2}$ боланда берлен деңсизлигиң ерине етирилйәндиги айдындыр.

149. Биринҗи бәшбурчлугың депелерини A_1, A_2, ..., A_5 билен белгиләлиң.



47-нҗи сур.

$A_1A_2A_3A_5$ дөртбурчлукда B_3B_5 кесим орта чызыкдыр, онда:

$2\,B_3B_5 \le A_1A_2 + .A_3A_3$; $B_3B_4B_5$ үчбурчлукда C_1C_2 кесим орта чызыкдыр, шонуң үчин $2\,C_1C_2 = B_3B_5$

Инди

$$2 \cdot 2\,C_1C_2 \le A_1A_2 + A_3A_5,$$

эмма A_3A_5 кесим $A_3A_4A_5$ үчбурчлугың орта чызыгыдыр, онда:

$$A_3A_5 = 2\,B_1B_2$$

Диймек,

$$C_1C_2 \le \frac{A_1A_2}{4} + \frac{B_1B_2}{2}.$$

Бәшбурчлукларың хер бир тарапы үчин шуңа меңзеш дегширмелери гечирип, ашакдакыны аларыс:

$$C_2C_3 \le \frac{A_2A_3}{4} + \frac{B_2B_3}{2}$$

. . . .

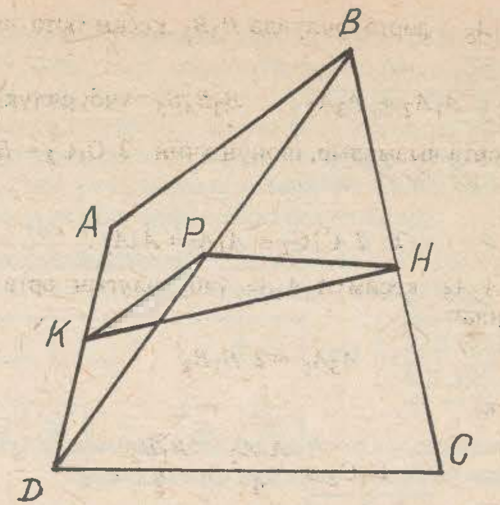
$$C_5C_1 \le \frac{A_5A_1}{4} + \frac{B_5B_1}{2}$$

Шу деңсизликлери членме-член гошуп, аларыс:

$$P_C \le \frac{1}{4}P_A + \frac{1}{2}P_B.$$

Б е л л и к . Шу меселе чөзүленде ашакдакы тассыкламадан пейдаланылды: эгер гүберчек $ABCD$ дөртбурчлукда KH онуң орта чызыгы болса, онда $2\,KH \le AB + CD$.

Хакыкатдан-да, эгер BD диагоналың ортасы P нокат болса, онда $KP + PH \ge KH$. Эмма KP кесим ABD үчбурчлугың орта чызыгы, диймек, $2\,KP = AB$. Шонуң ялы $2\,|PH| = |DC|$.



48-нжи сур.

Шейлеликде, $2\,PH + 2\,KP \ge 2\,KH$ я-да $2\,KH \le AB + CD$.

151. Меселәниң шертине гөрә

$$f(x+a) = 1 + \frac{f(x)}{1-f(x)}$$

$f(x+2a)$ тапалың.

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = \frac{1 + \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} =$$

$$= \frac{1 - f(x) + 1 + f(x)}{1 - f(x) - 1 - f(x)} = -\frac{1}{f(x)}.$$

Инди $f(x+3a)$ тапалың.

$$f(x+3a) = f((x+2a)+a) = \frac{1 + f(x+2a)}{1 - f(x+2a)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{f(x)}}{1 + \frac{1}{f(x)}} = \frac{f(x) - 1}{f(x+1)} .$$

Инди $f(x+4a)$ тапалың.

$$f(x+4a) = f((x+3a)+a) = \frac{1 + f(x+3a)}{1 - f(x+3a)} =$$

$$= \frac{1 + \frac{f(x) - 1}{f(x+1)}}{1 - \frac{f(x) - 1}{f(x+1)}} = f(x) .$$

Шейлеликде, $f(x+4a) = f(x)$. Диймек, $f(x)$ функция периоды $4a$ болан периодик функциядыр.

152. Берлен деңсизлиги шейле язярыс:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \geq \frac{8}{3} \quad \text{я-да} \quad \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} \geq \frac{2}{3} .$$

$\sin^2 2x > 0$ боланы себәпли $3\cos 2x \geq 2\sin^2 2x$ я-да

$$3\cos 2x - 2\sin^2 2x \geq 0$$

я-да $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 \geq 0$

$$\cos 2x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} ;$$

$$\cos 2x_1 = \frac{1}{2} ; \quad \cos 2x_2 = -2 .$$

Шейлеликде, диңе $\cos 2x = \frac{1}{2}$ алыняр.

Диймек, деңсизлигиң чөзүвлери шейле

$$\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1 ,$$

бу ерден $\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi k$.

153. Эгер хер бир бурчдакы җем 25 болса, онда үч бурчдакы җем 75 болар. Бир үчбурчлугың үч бурчундакы җем $1 + 2 + 3 = 6$ деӊ, онда $75 : 6 = 12{,}5$, ягны үчбурчлукларың саны дробь сан боляр, шейле болуп билмез. Диймек, хер бир бурчдакы җем 25 болуп билмейәр. Эгер шол җем 50 болса, онда үч бурчдакы җем $3 \cdot 50 = 150$, эмма $150 : 6 = 25$ үчбурчлук алыняр, шейле болуп билер.

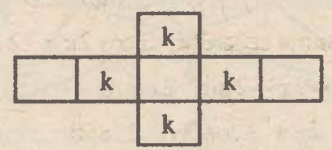
154. Домино ойнундакы дашларда k сан языланларының саны ($k + 1$) болар, чүнки шейле дашлар бар:

$\boxed{0 \mid k}$, $\boxed{1 \mid k}$, $\boxed{2 \mid k}$,....,

$\boxed{k\text{-}1 \mid k}$, $\boxed{k \mid k}$

Япык тегелекде дубль, ягны $\boxed{k \mid k}$

даш диңе k саны дашларың арасында болуп билер, ягны



шонуң үчин шу дашы айыралың, онда домино оюнында k санлы дашларың саны K болар. Эмма япык тегелекде олар җүбүтме-җүбүт орунлашяндырлар, ягны мысал үчин, шейле:

$\boxed{1 \mid k}\boxed{k \mid 4}$

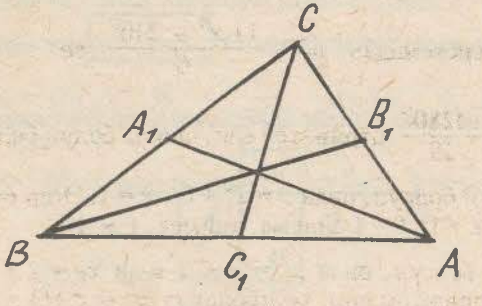
я-да

$\boxed{1 \mid k}\boxed{k \mid 4}$

Диймек, тегелекдәки k санлы дашларың мукдары җүбүт болмалы. Эгер-де, k-тәк сан болса, онда дашларың саныда тэк болар ве япык тегелеги эмеле гетирип билмезлер.

155. Терсине гүман эделиң. 1974 нокадың бири квадратың дашында ятыр диелиң. Онда 1973 нокатдан квадратың ичинде ятан иң болманда бир нокат тапылыр, шунлукда шол нокатдан берлен нокада ченли узаклык 1 см-ден көп болар, гаршылыклы халда, ягны шейле болмаса, квадратың дашындакы нокады өз ичине алар ялы эдип квадраты гөчүрип болар, бу болса меселэниң шертине гаршылыклыдыр, чүнки ислендик ики нокадың арасындакы узаклык 1см-ден аздыр.

156. Белли болшы ялы гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасына гечирелен медиана гипотинузаның ярысына деңдир, ягны



49-нжи сур.

$$CC_1 = AC_1 = BC_1 .$$

Инди $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4a^2 + 4b^2$

$$AB = 2\sqrt{a^2 + b^2}\ ; \quad CC_1 = \frac{AB}{2} = \sqrt{a^2 + b^2}\ ;$$

$$AA_1 = \sqrt{4a^2 + b^2}\ ; \quad BB_1 = \sqrt{a^2 + 4b^2}$$

157. Сутканың довамында шейле момент ёк. Терсине гүман эделиң, ягны шейле момент болсун ве x^0 бурч сагат стрелкасының минут ве секунд стрелкалары билен 120^0 бурч эмеле гетирип, 12-ден соңкы аралыгы болсун, онда шу ашакдакыны аларыс:

$$\begin{cases} 12 \cdot x^o = 360^0 \cdot n + x^o + 120^o \\ 12 \cdot 60 \cdot x^o = 360^0 \cdot n_1 + x^o + 240^o \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} 12 \cdot x^o = 360^0 \cdot n + x^o + 240^o \\ 12 \cdot 60 \cdot x^o = 360^0 \cdot n_1 + x^o + 120^o \end{cases},$$

бу ерде n_1-минут стрелкасының өврүлмесиниң саны, n секунт стрелкасының өврүлмесиниң саны. Онда $n = \frac{n_1}{60}$

Деңлемелериң биринжи системасындан аларыс:

$$n_1 = \frac{11\,x^o - 120^o}{6}, \text{ онда } \quad x^o = -\frac{6960^o}{59} \text{ отрицател сан.}$$

Икинжи системадан $n_1 = \dfrac{11\,x^o - 240^o}{6}$ ве

$$x^o = -\frac{14280^o}{59} \text{ отрицател сан, шейле болуп билмез.}$$

158. Гой, $y = 0$ болсун, онда $x = x^0 + 0$, $x = 1$. Эгер $y=1$ болса, онда $x = x + 1$, $0 = 1$ аларыс, диймек, $y \neq 1$.

Гой, $y=2$ болсун, онда $x^2 = x + 2$ я-да $x_1 = 2$; $x_2 = -1$ (канагатландырмаяр). $y=3$ боланда $x^3 = x + 3$ алярыс ве шунуң дерңевени гечирип билмейэрис. Шонуң үчин, инди x баха берелиң. Гой, $x=3$ болсун, онда $3^y = 3 + y$, эмма шу деңлик y-иң хич бир бахасында ерине етирилмейэр.

Умумы халда $x \geq 3$ ве $y \geq 2$ боланда аларыс:

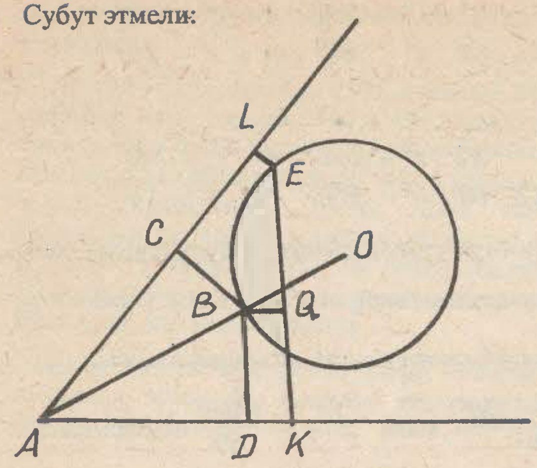
$$x^y > x + y$$

Шейлеликде

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

159. Берлен бурчуң A депесини берлен төверегиң O меркези билен бирлешдирип, кэбир B нокады аларыс.

Субут этмели:



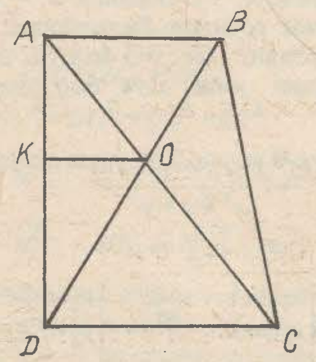
50-нжи сур.

$$BC + BD < EL + EK.$$

B нокатдан *KE* кесиме *BQ* перпендикуляр индерйәрис. Чызгыдан гөрнүши ялы $BD = QK$ эмма $BC < QE + EL$.

Диймек, $BC + BD < EL + EK$.

160. Меселәниң шертине гөрә $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$.



51-нжи сур.

$AB = 3$ см, $CD = 4$ см, $AD = 5$ см, $OK = x$.

$\triangle ABD \sim \triangle KOD$, онда $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{5}$; $\triangle ADC \sim \triangle AOK$ онда $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$. Инди $\frac{x}{3} : \frac{x}{4} = \frac{5-y}{5} = \frac{y}{5}$ я-да $\frac{4}{3} = \frac{5-y}{y}$ я-да $\frac{7}{3} = \frac{5}{y}$, бу ерден $y = \frac{15}{7}$, онда $x = \frac{12}{7}$.

161. Шейле сана гаралың: 33...3. Шу саны квадрата гөтерелиң, ягны

$$(333\ldots3)^2 = \left(\frac{10^{10} - 1}{3}\right)^2 = \frac{10^{20} - 2 \cdot 10^{10} + 1}{9} =$$

$$= \frac{10^{20} - 2 \cdot 10^{10} + 2 - 1}{9} = \frac{(10^{20} - 1) - 2\,(10^{10} - 1)}{9} =$$

$$= \frac{10^{20} - 1}{9} - \frac{2\,(10^{10} - 1)}{9} = \underbrace{111\ldots1}_{20\text{ гезек}} - \underbrace{222\ldots2}_{10\text{ гезек}} =$$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{9\text{ гезек}}0\underbrace{888\ldots8}_{9\text{ гезек}}9$$

Шу сан берлен сандан аздыр. Инди 33...3 саны 1 сан артдыралың ве алнан саны квадрата гөтерелиң, ягны

$$\frac{10^{10} - 1}{3} + 1 \text{ саны я-да } \frac{10^{10} - 1}{3} + 1 = \frac{10^{10} + 2}{3}$$

саны квадрата гөтерелиң, онда

$$\left(\frac{10^{10} + 2}{3}\right)^2 = \frac{10^{20} + 4 \cdot 10^{10} + 4}{9} =$$

$$= \frac{10^{20} - 1 + 4\,(10^{10} - 1) + 9}{9} =$$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{20\text{ гезек}} + \underbrace{444\ldots4}_{10\text{ гезек}} + 1 = 111\ldots1 = \underbrace{111\ldots1}_{10\text{ гезек}} \cdot \underbrace{555\ldots5}_{9\text{ гезек}}6$$

Шу сан берлен сандан улудыр. Биз ики саны ызыгидерли саны алдык ве оларың квадратларыны тапдык. Эмма берлен сан шу алнан ики саның арасындадыр, диймек, берлен сан долы квадрат болуп билмейәр.

162. Көк астында отрицател дәл сан болмалы. Ики хала гаралың:

а) $x \ge 0$, $y \ge 0$; $x = 0$ ве $y = 0$ чөзүвлер берлен деңлемелер системасыны канагатландырярлар.

$x^2 + y^2 \ge 0$ болса, онда $x + 3^y > 1$, ягны $x + 3^y \ne 1$.

б) $x < 0$, $y < 0$ боланда $x + 3^y < 1$. Шейлеликде, $x = y = 0$.

163. $a = 0$, $d \ge 0$ дийип гүман этмек мүмкиндир.

Гой, $|f(-d)|$, $|f(0)|$, $|f(d)|$ санларың ислендиги $\frac{d^2}{2}$-ден кичи болсун:

$$|d^2 - pd + q| < \frac{d^2}{2}, \quad |q| < \frac{d^2}{2}, \quad |d^2 + pq + q| < \frac{d^2}{2}.$$

Бу ерден

$$d^2 \pm pd + q < \frac{d^2}{2}, \quad d^2 + q < \frac{d^2}{2}, \quad q < -\frac{d^2}{2}, \quad |q| \ge \frac{d^2}{2}$$

гапма-гаршылык алынды.

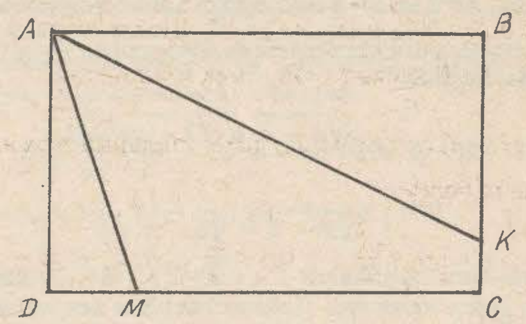
164. Терсине гүман эделиң. Гой, 1974 нокатларың бири болан M нокат тегелегиң дашында ятан болсун. Онда тегелегиң ичинде ятан хөкман бир K нокат тапылар, шунлукда $|KM| > 2$ болар, чүнки гаршылыклы халда тегелеги сүйшүрип шол M нокады тегелегиң ичине салып боларды (тегелегиң радиусы 1 деӊ). Диймек, K ве M нокатлар, радиусы 1-ден кичи болан төверегиң үстүнде ятып билҗек дәлдирлер. Шейлеликде, M нокат меселәниң шертини анагатландырмаяр. Алнан гаршыма-гаршылык, нокатларың хеммесиниң радиусы бире деӊ болан тегелегиң ичинде ятяндыкларыны субут эдйәр.

165. Берлен $x^3 - 3x^2 + 1 > 0$ деңсизлиги шейле язярыс:

$x^2(x - 3) + 1 > 0$. Ахыркы деңсизлик айдыңдыр, чүнки ислендик бахасында $x > 0$ ве $x > 3$ боланы себәпли $x - 3 > 0$.

Шейлеликде, $x^3 - 3x^2 + 1 > 0$ деңсизлик $x > 3$ боланда ерине етирилйәр.

166. KAM бурчуң иң улы бахасы KAB ве MAD бурчлар иң кичи баха эе боланларында алыняр.



52-нҗи сур.

$$tg\angle KAB = \frac{4a}{5b}; \quad tg\angle MAD = \frac{b}{5a}.$$

$$\frac{4a}{5b} = \frac{b}{5a}; \quad 20a^2 = 5b^2; \quad b = 2a.$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5b}{5a} = \frac{10a}{5a} = 2; \quad \frac{AB}{AD} = \frac{2}{1}.$$

167. KH кесиме меселәниң шертини канагатландырян M нокатларың көплүги хөкмүнде гаралың: M нокатдан AB ве CD кесимлере индерилен перпендикулярларың эсаслары шу кесимлери эдил шол бир гатнашыкда бөлйәрлер. $K = 1$ боланда тегелегиң меркези алыняр, $K = \frac{AB}{CD}$ болакда AD ве BC кесимлериң кесишме нокады алыняр.

168. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де квадрата гөтерелиң, онда

$$x-2+\sqrt{(x-2)(3-x)}+3-x=(x^2-5x+7)^2$$

я-да

$$2\sqrt{(x-2)(3-x)}=(x^2-5x+7)^2-1=$$

$$=(x^2-5x+7)(x^2-5x+7+1)=(x^2-5x+6)(x^2-5x+8)=$$

$$=-(x-2)(3-x)(x^2-5x+8)\ .$$

Диймек, $x=2$ ве $x=3$ деңлемәни канагатландырярлар.

Деңлемәниң кесгитлениш областында $2<x<3$ ашакдакыны аларыс:

$$(\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x})^2>1$$

ве

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>1$$

Деңлемәниң сан бөлеги $1-(x-2)(3-x)$ деңдир, бу болса 1-ден кичидир. Диймек, берлен деңлемәниң 2 ве 3-ден башга көклери ёкдур.

169. $1971\cdot1972\cdot1973\cdot1974+1=$

$$=1971\,(1971+3)\,(1971+1)\,(1971+2)+1=$$

$$=(1971^2+3\cdot1971)\,(1971^2+3\cdot1971+2)+1=$$

$$=(1971^2+3\cdot1971)^2+2\cdot(1971^2+3\cdot1971)+1=$$

$$=(1971^2+3\cdot1971+1)^2$$

170. Илки билен фигураларың долдурыжыларыны тапалың, ягны

$$S=\frac{1975\,S}{1976}+\frac{S}{1976}\,.$$

Хер фигураның долдурыжысының мейданы $\frac{S}{1976}$; 1976 саны долдурыжы фигураларың мейданы S дең. Хер бир

фигураның мейданы $\frac{1975\,S}{1976}$ боланы себәпли оларың хер бири шол квадратың ярысындан көпүсини япяр. Шейлеликде, меселәниң шертинде берлен фигураларың хеммесиниң умумы нокады болмалыдыр.

171. $xyz=5\,(x+y+z)$ деңлиги шейле язярыс:

$xyz-5\,x=5\,(y+z)$, бу ерден $x\,(yz-5)=5\,(y+z)$, бу ерден,

$$x=\frac{5\,(y+z)}{yz-5}\,.$$

Меселәниң шертине гөрә x йөнекей сандыр. Гой, $x=2$ болсун, онда ашакдакыны аларыс:

$$2=\frac{5(y+z)}{yz-5}\quad \text{я-да}\quad 2yz-10=5y+5z\quad \text{я-да}$$

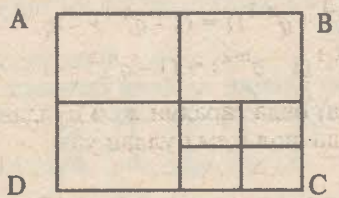
$$2\,yz-5\,y=5\,z-10\,,\qquad y\,(2\,z-5)=5\,z+10\,,$$

бу ерден $y=\dfrac{5z+10}{2z-5}\,.$

Шу деңлигиң чеп бөлегиндәки y сан йөнекей сан болмалы, шонуң үчин $y=2,3,5,7,...$ бахалары гоюп, 2 ве 3 санларың меселәниң шертини канагатландыряндыгыны гөрйәрис.

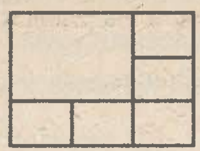
Шейлеликде, $x=2$ боланда $y=5$ ве $z=7$ бахалар алыняр. Эгер $x=2$ боланда $y=7$ баха гоюлса, онда $z=5$ болар. Диймек меселәниң шертини канагатландырян санлар $x=2$, $y=5$, $z=7$ ве $x=2$, $y=7$, $z=5$.

173. Текизликде $ABCD$ квадраты алалың.



а) Шол квадратың 7 кичи квадрата бөлүниши суратда гөркезилен.

б) Инди берлен квадраты ашакдакы ялы эдип, 6 саны кичи квадрата бөлелиң.



174. Гой, $h_a = 20$ см , $h_b = 12$ см берлен болсун, a , b , c - үчбурчлугың тараплары. Үчбурчлугың мейданыны формулалар аркалы хасапламак мүмкиндир.:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}\,; \quad S = \frac{b \cdot h_b}{2}\,; \quad S = \frac{c \cdot h_c}{2}\text{, бу ерден аларыс:}$$

$$a \cdot h_a = c \cdot h_c \text{ ве } b \cdot h_b = c \cdot h_c \text{ я-да } \frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$$

$$\text{я-да } \frac{a}{c} + 1 = \frac{h_c}{h_a} + 1 \quad \text{я-да } \frac{a+c}{c} = \frac{h_c + h_a}{h_a}\,; \quad a + c > b$$

боланы себәпли $\frac{a+c}{c} > \frac{b}{c}$ болар. Диймек, $\frac{b}{c} = \frac{h_a + h_c}{h_a}$.

Инди $\frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_b}$. Ахыркы деңсизлиги гөз өнүнде тутуп,

$$\frac{h_c}{h_b} < \frac{h_a + h_c}{h_a} \quad \text{я-да} \quad \frac{h_c}{12} < \frac{20 + h_c}{20} \quad \text{я-да } 8\,h_c < 240 \text{ я-да}$$

$h_c < 30$ аларыс.

175. Илкинҗи бәш члениң җемини тапалың:

30 20 15 12 10

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{23}{60}$$

Галан члenлериниң җемини S билен белгиләлиң, ягны

$$S = -\frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \dots - \frac{1}{999} + \frac{1}{1000}$$

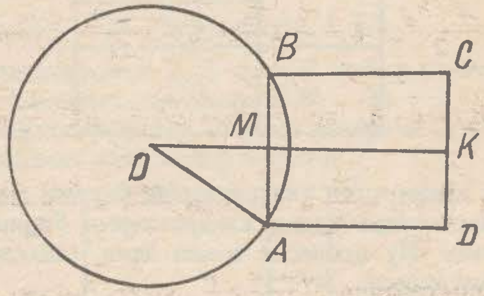
Шу җем отрицател сандыр

Диймек, меселәниң шертиндәки җем $\frac{23}{60}$ -дан аздыр.

Эмма $\frac{23}{60} < \frac{24}{60}$. Диймек,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} < \frac{2}{5}$$

176. Гой, $\angle$ KOA = 4 болсун. Онда $|OK| = |OM| + |MK|$, $|MK| = 2\,|MA|$.



53-нжи сур.

$OK = \cos\varphi + 2\sin\varphi\,;\quad KD = MA\,;$

$$OD^2 = KD^2 + OK^2 = \sin^2\varphi + (\cos\varphi + 2\sin\varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi + 4\sin^2\varphi =$$

$$= 1 + 4\sin\varphi\cos\varphi + 4\sin^2\varphi =$$

$$= 1 + 4\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi = 1 + 2\sin 2\varphi + 2(1 - \cos 2\varphi) =$$

$$= 1 + 2\sin 2\varphi + 2 - 2\cos 2\varphi =$$

$$= 3 + 2(\sin 2\varphi - \cos 2\varphi) =$$

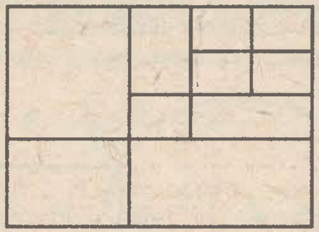
$$= 3 + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\varphi\right) =$$

$$= 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 + 2\sqrt{2}\,.$$

$OD^2 \leq 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$; OD-иң кичи бахасы:

$OD = 1 + \sqrt{2}$ болар.

177. Берлен квадраты 4 саны кичи квадрата бөлмек мүмкиндир (сурата середелиң).



Инди алнан кичи квадратларың бирини дөрт квадрата бөлелиң, соңра алнан квадратларың бирини 4 бөлеге бөлелиң. Шу процесси довам эдип, ашакдакы ызыгидерлиги аларыс.

$4, 7, 10, 13, \ldots, 3k+1$, бу ерде $k = 1, 2, 3, \ldots$

Инди берлен квадраты ашакдакы ялы эдип, 6 саны кичи квадрата бөлелиң.

Соңра алнан квадратларың бирини 6 саны кичи квадрата бөлелиң, нетижеде 11 саны квадрат аларыс. Соңра алнан квадратларың бирини 4 саны кичи квадрата бөлелиң, соңра алынян квадратларың бирини

хер гезек 4 саны кичи квадратлара бөлелиң, нетижеде ашакдакы ызыгидерликлери аларыс:

$1, 6, 11, 14, 17, \ldots$ я-да $11, 14, 17, 20, \ldots, 3k+2$,

бу ерде $k = 3, 4, \ldots$

Инди берлен квадраты алты квадрата бөлйәрис. Соңра хер гезек алнан квадратларың бирини 4 квадрата бөлйәрис. Нетижеде ашакдакы ызыгидерлиги алярыс:

$6, 9, 12, 15, \ldots, 3k$, бу ерде $k = 2, 3, \ldots$

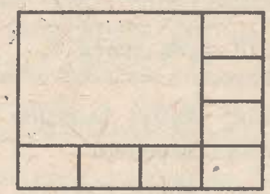
Шейлеликде, ашакдакы ызыгидерликлер алындылар:

$4, 7, 10, 13, \ldots, 3k+1$, бу ерде $k = 1, 2, 3, \ldots$

$11, 14, 17, 20, \ldots, 3k+2$, бу ерде $k = 3, 4, \ldots$

$12, 15, 18, 21, \ldots, 3k$, бу ерде $k = 4, 5, 6, \ldots$

Шу ызыгидерликлере 2, 3, 5, 5, 8 санлар гирмейәрлер. Бейлеки санларың гирйәндиги $3k$, $3k+1$, $3k+2$ аңлатмалардан гөрүнйәр. Берлен квадраты 8 саны кичи квадрата бөлмек мүмкиндир (сур.сер).



Берлен квадраты 10 сандан кичи болан 2, 3, 5 квадрата бөлмек мүмкин дәл.

Шейлеликде, k-ың ёкарда гөркезилен бахаларының үчүсинде-де габат гелмейән бахаларында бөлмек болмаяр, ягны k=2, 3, 5 бахаларда бөлмек болмаяр.

178. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$3^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 2^{2\sqrt{x}} = 2^x \cdot 3^x$$

я-да

$$3^{2+\sqrt{x}} \cdot 2^{2\sqrt{x}} = 2^x \cdot 3^x$$

Шу деңлигиң чеп ве сag бөлегиндәки дережелериң эсаслары йөнекей санлар боланы үчин деңлик диңе деӊ эсаслы дережелериң гөркезиҗилери деӊ боланда ерине етирилмели, ягны

$$2 + \sqrt{x} = x \quad \text{ве} \quad 2\sqrt{x} = x$$

болмалы. Шу ерден $x = 4$ тапарыс.

179. Ашакдакы аӊлатма гаралыӊ:

$$(44 + \sqrt{1975})^{100} + (44 - \sqrt{1975})^{100}$$

Шу җеми ашакдакы ялы дагыдярыс:

$$44^{100} + 100 \cdot 44^{99} \cdot \sqrt{1975} + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 44^{98} \cdot (\sqrt{1975})^2 + \ldots +$$

$$+ 100 \cdot 44(\sqrt{1975})^{99} + (\sqrt{1975})^{100} + 44^{100} -$$

$$- 100 \cdot 44^{99} \cdot \sqrt{1975} + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 44^{98}(\sqrt{1975})^2 - \ldots -$$

$$- 100 \cdot 44(\sqrt{1975})^{99} + (\sqrt{1975})^{100} =$$

$$= 2 \cdot 44^{100} + 2 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 44^{98}(\sqrt{1975})^2 + \ldots + 2 \cdot 1975 .$$

Шу саныӊ (җемиӊ) җүбүт сандыгы айдыӊдыр. Инди $\sqrt{1975}$ билен 44 деӊешдирелиӊ.

$$44 < \sqrt{1975} < 45$$

Диймек,

$$0 < (44 - \sqrt{1975})^{100} < 1$$

Меселәниӊ шертине гөрә:

$$n < (44 - \sqrt{1975})^{100} < n + 1$$

$$n + 1 = (44 + \sqrt{1975})^{100} + (44 - \sqrt{1975}) -$$

җүбүт сандыр. Диймек, n-тәк сандыр.

180. Мырадыӊ бир өзи бир гүнде ишиӊ $\frac{1}{15}$ бөлегини ерине етирер. Олар билеликде бир гүнде ишиӊ $\frac{1}{14}$ бөлегини ерине етирип билерлер. Онда Мая бир гүнде шол ишиӊ $\frac{1}{14} - \frac{1}{15} = \frac{1}{210}$ бөлегини ерине етирер. Шейлеликде, мая ишиӊ хеммесини 210 гүнде ерине етирер.

181. Эгер шол бәшбурчлугы диагоналларыныӊ хеммеси бирибирине деӊ болса, онда ислендик үч диагоналдан деӊтараплы үчбурчлук гурмагыӊ мүмкиндиги айдыӊдыр.

Эгер диагоналлар деӊ болмасалар, онда оларыӊ иӊ улусыны сайлап алмалы ве онуӊ учларындан бәшбурчлугыӊ ики саны диагоналыны гечирип, алнан үч диагоналдан үчбурчлук гурмак мүмкиндигини субут этмек кын дәлдир.

Эгер *ABCDE* бәшбурчлугыӊ иӊ улы диагоналы *BE* болса, онда гөзленилйән диагоналлар хөкмүнде *BE*, *BD* ве *CE* диагоналлары алмак мүмкиндир.

182. 1. Эгер *A* команда галан бейлеки командаларыӊ хеммесини утан болса, онда ислендик команданы *B* команда дийип кабул этмек болар.

2. Эгер *A* команда бейлеки командаларыӊ диӊе бирине утдуран болса, онда *A* команданы утаны *B* команда хөкмүнде кабул этмелидиги айдыӊдыр.

3. *A* команда ики команда утдуран болса, онда шол утан ики команданыӊ өз араларындакы утаныны *B* команда хөкмүнде кабул эдерис.

Командаларыӊ арасында җеми 15 оюн гечендиги себәпли, оларыӊ ичинде иӊ болманда үч команданы утан команда тапылар. Шу команданыда *A* команда хөкмүнде кабул эдйәрис. Шейлеликде, мүмкин болан халларыӊ хеммесине гаралды.

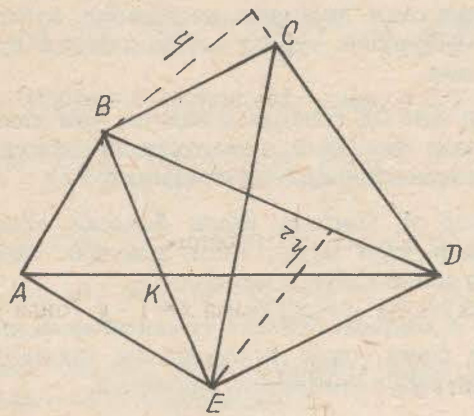
183. Берлен деӊлемәни ашакдакы гөрнүшде азярыс:

$$xy + u\,(x + y) = 1\,; \qquad u = \frac{1 - xy}{x + y}$$

Ахырки деӊлигиӊ сag бөлегиндәки дробуӊ майдалавжысы бире деӊ болар ялы эдип, x ве y битин санлар сайланып алынанда берлен деӊлемэниӊ битин чөзүвлери тапылар.

Шейлеликде, берлен деӊлемэниӊ битин санларда түкениксиз көп чөзүви бардыр.

184. Илки билен берлен үчбурчлугыӊ диагоналларыныӊ дегишлиликде онуӊ тарапларына параллельдиклерини субут этмели. Меселэниӊ шертине гөрэ:



54-нжи сур.

$$S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDE} = S_{DEA} = S_{EAB} = 1$$

Тапмалы: S_{ABCDE}

$$S_{BCD} = CD\frac{h_1}{2}; \quad S_{CDE} = CD\frac{h_2}{2}; \quad S_{BCD} = S_{CDE},$$

диймек, $h_1 = h_2$. Шейлеликде, CD эсаса гечирилен h_1 ве h_2 бейикликлер деӊдирлер, диймек, BE диагонал CD тарапа параллельдир. Шунуӊ ялы эдип, BC тарап билен AD диагоналыӊ параллельдиклерини субут эдерис. Диймек, $ACDK$ дөртбурчлук параллелограмдыр. Паралпелограмыӊ BD диагоналы оны ики саны деӊулулыкдакы үчбурчлуга бөлйэр. Диймек, $S_{BKD} = 1$.

Инди AKB мейданыны тапалыӊ

$S_{AKB} = S_{KED}$, чүнки, $S_{ABE} - S_{AKE} = S_{AED} - S_{AKE}$ я-да $1 - S_{AKE} = 1 - S_{AKE}$. Гой, $S_{AKE} = x$ болсун, $S_{KED} = y$ болсун, онда

$$\frac{AK \cdot h}{2} = x; \quad \frac{KD \cdot h}{2} = y$$

Шу үчбурчлукларыӊ бейиклери деӊ боланы себэпли

$$\frac{AK}{KD} = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

$AE \parallel BD$ боланы себэпли $\triangle AKE \sim \triangle KBD$, онда

$$\frac{AK^2}{KD^2} = \frac{x}{1} \qquad (2)$$

(1) ве (2) деӊликлерден аларыс:

$$\frac{x^2}{y^2} = x \text{ я-да } y^2 = x, \text{ эмма } x = 1 - y, \text{ онда } y^2 + y - 1 = 0,$$

бу ерден $y = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Шейлеликде,

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{BKD} + S_{ADE} + S_{AKB} =$$
$$= 1 + 1 + 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

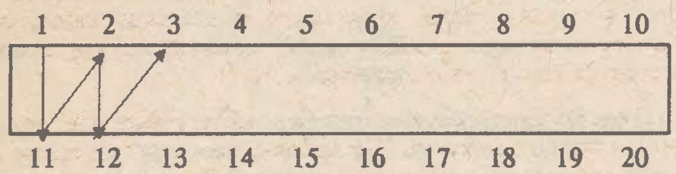
185. m ве n санлары йөнекей көпелдиҗилере дагыдярыс.

$$m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots p_k^{\beta_k} \cdot a$$
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$$

бу ерде $\beta_i \geq 0$, a - йөнекей көпелдиҗи я-да n-саныӊ дагытмасына гирмейэн йөнекей көпелдиҗилериӊ көпелтмек хасылыдыр. Онда a билен n санларың өзара йөнекейдиклери айдыңдыр. Онда m билен $(n-a)$ санларың өзара йөнекейдиклери шу ерден гөрүнйәр, чүнки n билен а санларың умумы бөлүҗилери ёкдур, диймек, $(n-a)$ тапавутда n ве a санларың дагытмасына гирйән бөлүҗилер болмазлар, m сан болса дине n билен a санларың бөлүҗилеринден ыбаратдыр, шейлеликде, n саны ашакдакы гөрнүшде язмак мүмкиндир:

$n = a-(n-a)$, бу ерде a сан m саның бөлүҗисидир, $(n-a)$ сан m сан билен өзара йөнекейдир. Шоны хем субут этмелиди.

186. Ики саны параллел гөни чызыгың хер биринде 10 саны нокады ерлешдирелиң ве оларың биринҗисиндәкилери 1, 2 ...10. икинҗисиндәкилери болса 11, 12, ...20 санлар билен белләлиң.



Инди 1 ве 11, 11 ве 2, 2 ве 12, 12 ве 3 ве ш.м. бирлешдирелиң. Умуман золагың ичинде кесимлер кесишмез ялы эдип, биз гөни чызыгың бириндәки нокатлары бейлеки гөни чызыгың нокатлары билен нәхили эдип бирлешдирсекде, хер бир кесими гечиренимизден соңра, шол нокатдан бейлеки гөни чызыгың нокатларына эййәм кесим гечирмек мүмкин болмаян, бир нокады йитирйәрис. Шейле эдип, 19 кесими гечирип, 19 нокады йитирйәрис ве ахыркы 20-нҗи нокат 19-нҗы кесимиң уҗы болҗагыны гөрйәрис, бу болса 20-нҗи нокады бейлеки гөни чызыгың хич бир нокады билен бирлешдирип болмаҗакдыгыны гөркезйәр, шонуң билен а) тассыклама субут эдилйәр. Инди б) тассыклама гечели. б) 19 кесими гечирмек үчин учдакы 1 ве 11, 10 ве 20 нокатлары өзара бирлешдирмели болярыс, шунлукда кесимлер кесишмез ялы эдип, хер

бир кесимиң учларының бирини бейлеки нокатлар билен бирлешдирмек мүмкин дәлдир. Диймек, биз диңе (20-2) = 18 нокат билен иш салышярыс. Олардан islendik 9 санысыны эркин сайлап алмак мүмкиндир. Шонуң үчин 19 кесими

$$C_{18}^{9} = \frac{18\cdot 17\ldots 10}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}$$

усул билен бирлешдирмек мүмкиндир.

187. Командалар җеми 13 + 12 + 11 + ... + 2 + 1 = 91 оюн ойнапдырлар. Диймек, 91 утуш 91 утдуруш болупдыр. Шонда исләндик ягдайда-да 14 команданың ичинде иң болманда 7 утуш газанан команда тапылар. Инди мүмкин болан вариантлара гаралың.

1. Командаларың хеммесини утан бир команда бар дийип гүман эделиң. Шу халда A команда хөкмүнде яңкы команданы алып, B ве C командалароың ерине исләндик ики команданы аларыс.

2. Диңе бир утдуран команда бар дийип гүман эделиң ве оны A билен белләлиң. Шу халда B команданың ерине A команданы утан команданы алып, C команданың ерине исләндик команданы алярыс.

3. Эгер A команда ики команда утдуран болса, онда B ве C командаларың ерине A команданы утан командалары алярыс.

4. A команда үч команда утдурды дийип гүман эделиң. Шу халда A команданы утан үч команда өз араларында ойнаярлар. Эгер оларың ичинде хайсы-да болса бириниң ики утушы бар болса, онда шол команданы B дийип алярыс, C команданың ерине болса галан икисиниң бирини кабул эдйәрис.

5. A команда дөрт команда утдурды дийип гүман эделиң. Шол дөрт команда өз араларында ойнаярлар. Олар җеми 6 оюн ойнаярлар. Оларың ичинде иң азындан ики утушы болан команда хөкман тапылар. Шол команданы B дийип кабул эдйәрис. B команда утдурмадык команданы C дийип алярыс.

6. *A* команда бэш команда утдурды дийип гуман эделиң. Шу бэш команда өз аралында ойнаярлар. Эгер шуларың ичинде еңен команда бар болса, онда шол команданы *B* дийип кабул эдйэрис. *C* команданың ерине бейлекилериң ислендигини алмак мүмкиндир. Эгер диңе бир утдурышы бар болса, онда шу команданы *B* дийип алярыс. *C* команданың ерине *B* команданыа утан команданы алярыс.

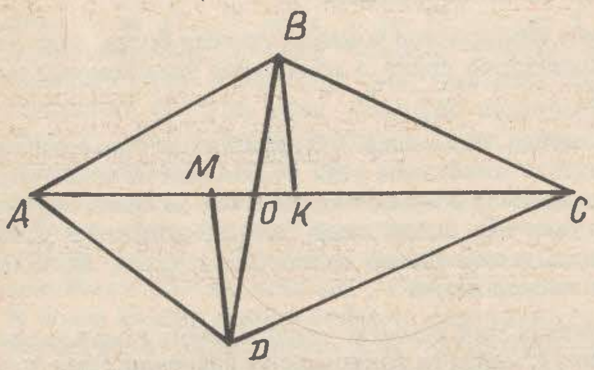
Эгер команданың ики утушы ве ики утдурышы бар болса, онда *B* команда хөкмүнде шол команданы алярыс. *C* команда хөкмүнде болса, өз аралындакы оюнда *B* команданы утаны алярыс.

7. *A* команда алты команда утдурды диелиң. Шу халда алты команда өз араларында ойнаярлар ве меселе озалкы гаралан үчүнҗи ягдая гетирилйэр.

188. Меселэниң шертине гөрэ $S_{AOB}=4$; $S_{COD}=9$.

S_{ABCD} -мейданың иң кичи бахасыны тапмалы.

$$S_{AOB} = \frac{AO \cdot BK}{2} \qquad (1)$$



55-нжи сур.

$$S_{BOC} = \frac{OC \cdot BK}{2} \qquad (2)$$

$$S_{AOD} = \frac{AO \cdot MD}{2} \qquad (3)$$

$$S_{DOC} = \frac{OC \cdot MD}{2} \qquad (4)$$

Инди (1) ве (4) хем-де (2) ве (3) деңлемелери членме-член көпелделиң, онда ашакдакыны аларыс.

$$S_{AOD} \cdot S_{DOC} = \frac{AO \cdot OC \cdot BK \cdot DM}{4}$$

$$S_{BOC} \cdot S_{AOD} = \frac{AO \cdot OC \cdot BK \cdot DM}{4}$$

Шу ерден, $S_{BOC} \cdot S_{AOD} = S_{AOD} \cdot S_{DOC}$.

$S_{BOC} \cdot S_{AOD}$ көпелтмек хасылы үйтгемейэн улулык боланы себэпли көпелдиҗилери гошулыҗы эдип аланымызда җемиң иң кичи баха эе болмагы үчин олар бири-бирине дең болмалыдыр. Диймек, гошулыҗыларың хер бири 6 деңдир.

Шейлеликде, гөзленилйэн мейдан 9 + 4 + 6 + 6 = 25 деңдир.

189. Кагызы бэш бөлеге бөлүп, бир бөлеги ташланыландан соңра 4 галяр. Икинҗи гезек бир бөлегини алып 5 бөлеге бөлйэрлер ве 1 бөлегини ташлаярлар, онда шейле боляр:

$$(4-1)+(5-1)=3+4.$$

Инди шол бөлеклериң бирини бэш бөлеге бөлүп, бир бөлеги ташланыландан соңра шейле боляр:

$$3+(4-1)+4=3+3+4$$

Ене-де бир бөлеги алыняр ве оны бэш бөлеге бөлүп, бир бөлеги ташлаярлар, онда:

$$3+3+(4-1)+4=3+3+3+4$$

Шу процеси довам эдип, ашакдакыны аларыс:

$$3k+4$$

Инди шу бөлекден 1-ни алып, 5 бөлеге бөлйәрис, онда:

$$3k+(4-1)+5=3k+3+5=3k+8 \quad \text{аларыс.}$$

Иң соңкы гөзек бәш бөлеге бөлүнenden соң бир бөлеги ташламады, шонуң үчин $3k+3+5=3k+8$ болды. Нетижеде ашакдакы деңлик алынмалы:

$$3k+8=1977$$

Бу ерден $3k=1969$, $k=\frac{1969}{3}$. Шу ерден гөрнүши ялы k битин сан дәл. Диймек, саналанда ялңышлык гойберилипдир.

190. 50 саны дашың хеммесиниң аграмыны шейле хасапламак мүмкин:

$$S=370+372+374+376+\ldots+462+464+466+468$$
$$S=468+466+464+462+\ldots+376+374+372+370$$

$$2S=(370+468)+(372+466)+\ldots+(462+376)+\ldots+(468+570)$$

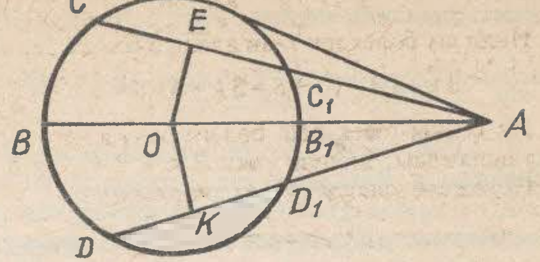
$$2S=838\cdot 50; \qquad S=20950 \text{ (кг)}$$

Шейлеликде, 50 саны дашың аграмы 20950 кг, ягны 21 тоннадан, аз, диймек, 7 саны үчтонналык машын шол йүки экидип билҗек.

191. Гой, берлен төверек (O,OB) болсун. Төверегиң дашында ятан A нокатдан AC, AB, AD кесимлери гечирелиң. Онда меселәниң шертине гөрә D_1D, B_1B, C_1C хордаларың орталары болан E, O, K ве ш.м. нокатларың көплүгини тапмалы. Эгер O нокады E, K ве ш.м. нокатлар билен бирлешдирсек, онда $OE \perp C_1C$, $OK \perp D_1D$ ве ш.м. аларыс. Диймек,

$$\angle OEA=90^\circ<OKA$$

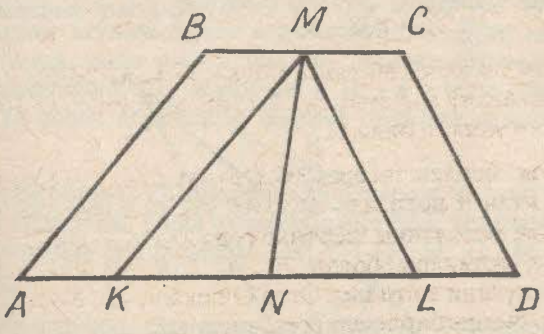
ве ш.м. Шол гөнүбурчлы үчбурчлукларың хеммесиниң гипотенузасы AO кесимдир. Онда A нокатдан төвереге гечирилен кесимлериң эмеле гетирен хордаларының орталары болан E, K ве ш.м. нокатларың хеммеси AO



56-нҗы сур.

кесими диаметр эдип чызылан төверегиң үстүнде ятмалы, башгача айданымызда, шол хордаларың орталары болан нокатлар көплүги төверекдир.

192. Гой, $ABCD$ трапецияның AD эсасының ортасы N болсун, BC эсасының ортасы M болсун. M нокатдаен CD тарапа параллел эдип, ML кесим гечирелиң, шонуң ялы AB тарапа параллел эдип, MK кесим гечирелиң.



57-нҗи сур.

Нетижеде KML гөнүбурчлы үчбурчлугы аларыс.

Хакыкатда-да,

$$\angle MKL=\angle BAK \quad \text{ве} \quad \angle MLK=\angle CDL.$$

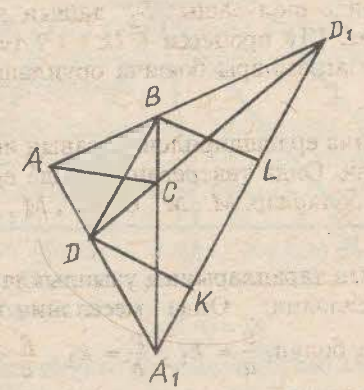
Эмма меселәниң шертине гөрә $\angle BAK + \angle CDL = \frac{\pi}{2}$.

Онда $\angle MKL + \angle MLK = \frac{\pi}{2}$.

Диймек, $\angle KML = \frac{\pi}{2}$.

Гөнүбурчлы үчбурчлукда гипотенуза гечирилен медиана гипотенузаның ярысына деңдир, диймек, $MN = \frac{KL}{2}$, эмма $KL = AD - AK - LD = AB - BC$ я-да $MN = \frac{AD - BC}{2}$.

193. Эгер $ABCD$ берлен гүберчек дөртбурчлук болса, онда меселәниң шертине гөрә гаршылыклы тараплары довам эдип алнан ADD_1 ве ABA_1 үчбурчлуларың мейданлары деңдирлер, ягны $S_{ABB_1} = S_{ADD_1}$ я-да $S_{BCD_1} = S_{DCA_1}$ я-да $S_{BA_1D_1} = S_{DD_1A_1}$ чүнки дең мейданларың үстүне шол бир $S_{CD_1A_1}$ мейдан гошуляр. Эгер BA_1D_1 үчбурчлугың мейданы A_1D_1D үчбурчлугың мейданына дең болса, онда



58 -нжи сур.

$$\frac{1}{2} \cdot A_1D_1 \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot A_1D_1 \cdot BL,$$

бу ерде DK ве BL шол үчбурчлукларың бейикликлеридир.

Иң соңкы деңликден $DK = BL$ гелип чыкяр. Эгер AD тарапа B ве D нокатлардан индерилен перпендикуляр кесимлер дең болсалар, онда AD кесим билен DB кесим параллелдирлер. Диймек, BDA_1D_1 дөртбурчлук трапециядыр. Трапеция барадакы лемманың эсасында BD кесим AC кесим билен ярпа бөлүнйәр, башгача айданымызда AC диагонал BD диагоналы ики дең бөлеге бөлйәр.

194. Гой, биринҗи үйшмекдәки дашлар агырлыклары боюнча шейле орунлашан болсунлар:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k$$

Икинҗи үйшмекдәкилер шейле:

$$b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_k$$

Инди a_1 дашы b_1 даш билен аграмы боюнча деңешдирйәрис. Гой, b_1 даш агыр болсун. Онда шол b_1 дашы a_2 дашың аграмы билен деңешдирйәрис. Эгер a_2 даш агыр болса, онда шол дашы b_2 дашың аграмы билен деңешдирйәрис. Шу процесси ($2k - 1$) гезек гайталап әхли $2k$ дашы аграмлары боюнча орунлашдырып билерис.

195. Төверек боюнча ерлешдирилен 30 санын иң улусыны M билен белләлиң. Онда төверегиң үстүнде ерлешдирилен санлар шейле болярлар: M , M , O , M , M , O , M , M , O ве ш.м.

196. Дөртбурчлугың тарапларының узынлыкларыны a , b , c ве d билен белләлиң. Онда меселәниң шертине гөрә $a + b + c + d = p$ болуп, $\frac{p}{a} = k_1$, $\frac{p}{b} = k_2$, $\frac{p}{c} = k_3$, $\frac{p}{d} = k_4$ битин санлары аларыс.

Бу ерден $\frac{p}{k_1} + \frac{p}{k_2} + \frac{p}{k_3} + \frac{p}{k_4} = a + b + c + d$

болар я-да

$$p\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}\right)=p$$

я-да $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}=1.$

Инди $a<b<c<d$ дийип гүман эделиң. Онда дөртбурчлугың иң улы тарапы онуң периметриниң ярысындан кичидир, ягны $d<\frac{p}{2}$, чүнки дөртбурчлугың улы диагоналы онуң иң улы тарапындан улудыр, эмма шол улы диагонал $l<\frac{p}{2}$. Эгер $d<\frac{p}{2}$ болса, онда $d\le\frac{p}{3}$ болмалы. Онда $c\le\frac{p}{4}$; $b\le\frac{p}{5}$; $a\le\frac{p}{6}$ болар. Инди

$$d+c+b+a\le\frac{p}{3}+\frac{p}{4}+\frac{p}{5}+\frac{p}{6}$$

я-да

$$p\le p\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

я-да

$$1\le\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

Деңсизлигиң чеп ве сағ белеклери шол бир дөртбурчлугың периметрини аңлатмалы, ягны деңсизликден деңлиги гечмели. Эгер деңсизлигиң сағ белегиндәки дроблар үйтгешик болсалар, онда оларың жеми хич вагтда бире дең болуп билмез. Шол дөрт дробуң жеминиң бире дең болмагы үчин ики дробь бири-бирине дең болмалы. Шу халда икинжи ве үчүнжи дробларың хер бири $\frac{1}{4}$ дең болмалы, ягны

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2+3+1}{6}=1.$$

Шейлеликде, дөртбурчлугың хер бир тарапы онуң

периметриниң бөлүжиси болмагы үчин шол тарапларың хич болманда икиси конгруэнт болмалы.

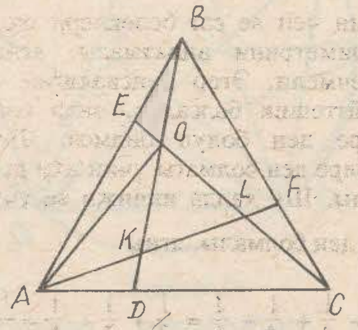
197. Гой, $\frac{1+x^2}{1+x}=y$ болсун. Онда $1+x^2=y+xy$ я-да $x^2-xy-y+1=0$ аларыс. Шу квадрат деңлемәни x гөрә чөзүп аларыс.

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4(1-y)}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4y-4}}{2},$$

шу ерден $y^2+4y-4\ge0$ аларыс. Инди $y_1=2\sqrt{2}-2$; $y_2=-2\sqrt{2}-2$ аларыс. Шу бахалары $\frac{1-x}{1-x}=y$ деңликде гоюп, $x=\sqrt{2}-1$ баханы тапарыс.

Диймек, $x\ge0$ боланда $\frac{1+x^2}{1+x}$ аңлатманың иң кичи бахасы $(2\sqrt{2}-2)$ болуп, шу баха $x=\sqrt{2}-1$ боланда алыняр.

198. Берлен догры үчбурчлугың тарапларында $AE:CB=2:1$ ве $CD:DA=2:1$ болар ялы эдип, D ве E нокатлары аларыс. Соңра $BF:FC=2:1$ болар ялы эдип, CB тарапда F нокады аларыс ве шол нокады A депе билен бирлешдирйәрис.



59-нжи сур.

Алнан OKL үчбурчлук дең тараплыдыр. Хакыкатдан-да BEC үчбурчлук билен AFC үчбурчлук дендир (ики тарапы ве оларың арасындакы бурч боюнча). Диймек,

$$\angle FCE = \angle FAC .$$

Онда $\angle FAC + \angle ACE = 60^\circ$, диймек, $\angle ACL = 120^\circ$.

Онда $\angle KLO = 60^\circ$.

Шонуң ялы $\angle LOK = 60^\circ$ ве $\angle OKL = 60^\circ$ гөрйәрис.

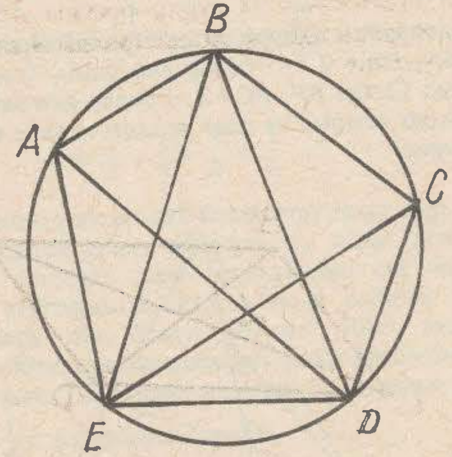
Инди OK кесим билен AK кесимиң деңдиклери гурлушдан гөрүнйәр. Диймек, $\angle AOK = \angle KAO$.

Онда $\angle KOB + \angle AOK = 60^\circ$ боланы себәпли, оларың хер бири 30° деңдир, ягны $\angle KAO = \angle AOK = 30^\circ$.

Шейлеликде,

$$\angle AOC = \angle AOK + \angle COD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \text{ ш.с.э.т.э.}$$

199. AC, AD, BD, BE, CE диагоналларың хер бири төверегиң диаметринден кичидир, ягны $AC + AD + BD + BE + CE < 10$



60 -нҗи сур.

Инди шол бәшбурчлугың периметри төверегиң узынлыгындан кичидигини гөз өңүнде тутсак, онда ашакдакыны аларыс:

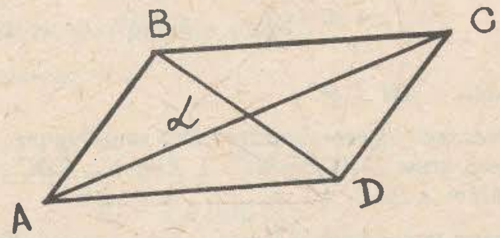
$$AB + BC + CD + DE + EA < 2\pi R .$$

Шейлеликде, бәшбурчлугың диагоналлары билен тарапларың җеми ($10 + 2\pi$)-ден я-да 17-ден кичидир.

200. Хасаплап гөрйәрис. $5^2 = 25$; $5^4 = 625$; $5^8 = 390625$; $5^{16} = ...5625$. Диймек, ахыркы дөрт белги нобатма нобат гайтланҗак ве $5^{1978} = (5^{16})^{123} \cdot 5^{10} = ...5625$ болҗак.

201. Сагадың улы стрелкасы 12 бөлек гечене онуң кичи стрелкасы 1 бөлек гечйәр. Шейлеликде, оларың бириниң тизлигини 1 дийип алсак, икинҗисиниң тизлиги $\frac{1}{12}$ болар. Инди шол стрелкаларың арасындакы 323° бурчы 37° чеңли азалтмак үчин, ягны $323^\circ - 37^\circ = 286^\circ$ ёлы гечмек үчин $286 : \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 286 : \frac{11}{12} = 52$ минут вагт герек болҗак.

202. Гөзленилйән дөртбурчлугың параллелограмдыгыны субут эделиң. Гой, берлен AC ве BD диагоналлары ве оларың арасындакы α бурчы боюнча $ABCD$ параллелограм гурулан болсун. AC диагоналы A_1C_1 ягдайы алар ялы гөчүрелиң.



61-нҗи сур.

Онда берлен диагоналлары ве оларың арасындакы шол бир бурч боюнча гурлан A_1BC_1D дөртбурчлугы аларыс. Шу алнан дөртбурчлугың периметри илки гурлан $ABCD$ параллограмың периметринден улудыр. Шейлеликде, ашакдакыны субут этмели:

$$A_1B + BC_1 + C_1D + DA_1 > AB + BC + CD + DA .$$

Субуты.

$$A_1B = DC_2 ; \quad A_1D = C_2B ; \quad AB = CD ; BC = DA .$$

Инди $BC_1 + C_1D + DC_2 + C_2B > 2\ BC + 2\ CD$ дeңсизлиги субут этмели.

$C_2B + BC_1 > 2\ BC$ деңсизлик айдыңдыр, чүнки үчбурчлугың ики тарапының жеми, үчүнҗи тарапа гечирилен медиананың ики эссесинден улудыр.

Инди $C_1D + DC_2 > 2\ CD$ деңсизликде шонуң ялы субут эдилйәр.

Шейлеликде, $ABCD$ параллелограмың периметри иң кичи баха эедир. Гөзленилйән дөртбурчлук параллелограмдыр.

203. Меселләниң чөзүлиши ашакдакыдан айдың гөрүнйәр.

Хакыкатдан-да, меселәниң шертине гөрә шейле деңлеме аларыс:

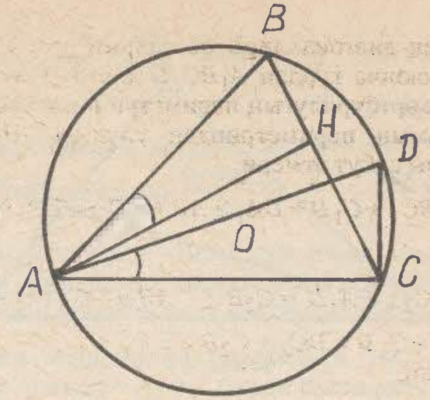
$$25 + (27 - (34 - x)) + (16 - x) + 26 - (31 - x) + 1 = 40$$

$$x + 30 = 40 , \qquad x = 10 .$$

204. Берлен: $AH \perp BC$.

AO кесими довам эдип, ADC гөнүбурчлы үчбурчлук аларыс, ягны $\angle\ ACD = 90^0$. $\angle\ ABC = \angle\ ADC$. Диймек, $\angle\ BAH = \angle\ DAC$.

205. Берлен нокатлары A_1 , A_2 , A_3 ,..., A_{1978} билен белгиләлиң. Инди шу нокатларың хеммесини җүбүтме-җүбүт кесим билен бирлешдирелиң. Алнан кесимлериң хеммесиниң ортасындан перпендикуляр гечирелиң. Шол



62-нҗи сур.

перпендикулярларың хич бириниң үстүнде ятмаян нокат меселәниң шертини канагатландыряр.

206. Гөни чызыклар компланар болмасалар, онда атанак ятан хер хайсы ики гөни чызыгың үстүнден, хер бири шол гөни чызыкларың бирини өз ичине алян, ики параллел текизлик гечирйәрис.

Кесишән үч җүбүт текизликлериң кесишмесинден гөзленилйән паралеллепипеди аларыс.

207. Эгер үчбурчлугың мейданыны хасапламак үчин $S = \frac{1}{2}ab\sin A$ формуланы улансак, онда меселәниң гысга ёл билен чөзүлишини аларыс.

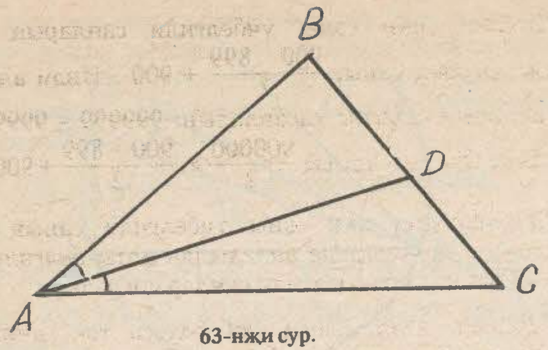
Хакыкатдан-да,

$$S_1 = \frac{1}{2}c\,l\sin\frac{A}{2} ;$$

$$S_2 = \frac{1}{2}b\,l\sin\frac{A}{2} ;$$

$$S = \frac{1}{2}c\,l\sin A$$

Диймек,



63-нжи сур.

$$\frac{1}{2}bc\sin a = \frac{1}{2}cl\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{A}{2};$$

$$cb\sin A = (c+b)\,l\sin\frac{A}{2}$$

$$l = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}.$$

208. Ики саны үчбелгили санларың көпелтмек хасылларының саныны тапалың.

Иң улы үчбелгили сан 999-дыр. Үчбелгили санларың саны $999 - 99 = 900$ саныдыр. Илки билен оларың бирмеңзешлериниң көпелтмек хасылларының саныны тапалың, ягны $100\cdot100$, $101\cdot101$, $102\cdot102$,..., ..., $999\cdot999$. Шу гөрнүшдәки көпелтмек хасылларың саны 900 болар. Инди $a\cdot b$ гөрнүшдәки көпелтмек хасылларың саныны тапалың, бу ерде a ве b санларың хер бири үчбелгили саны аңладяр.

$100\cdot101$, $100\cdot102$,..., $100\cdot999$. Шуларың саны 899.

$101\cdot100$, $101\cdot102$,..., $101\cdot999$ 899 саны

$102\cdot100$, $102\cdot101$,..., $102\cdot999$ 899 саны

Җеми $\frac{900\cdot899}{2}$.

Диймек, ики саны үчбелгили санларың көпелтмек хасылының саны: $\frac{900\cdot899}{2} + 900$. Инди алты белгили санларың саныны хасаплалың: $999999 - 99999 = 900000$ саны. Оларың ярысы $\frac{900000}{2} > \frac{900\cdot899}{2} + 900$.

Шейлеликде, ики саны үчбелгили саның көпелтмек хасылы гөрнүшинде аңладылян алты белгили санларың саны галан алты белгили санлардан аздыр.

209. Берлен деңлемәниң чеп бөлеги тәк, диймек, y тәк сандыр. Инди $y = 2z + 1$ билен белгилесек, онда ашакдакыны аларыс.

$$3\cdot2^x + 1 = (2z+1)^2;\quad 3\cdot2^x + 1 = 4z^2 + 4z + 1;$$

$$3\cdot2^x = 4z(z+1);\quad 3\cdot2^{x-2} + 1 = z(z+1).$$

Инди z билен $(z+1)$ санларың өзара йөнекей санлардыгыны гөз өңүнде тутсак, онда $z = 3$ я-да $z + 1 = 3$ аларыс.

$y = 2z + 1$ деңликден $y = 7$ ве $y = 5$ бахалары тапарыс. Инди $3\cdot2^x + 1 = y^2$ деңлемеден $3\cdot2^x = 7^2 - 1$, $3\cdot2^x = 48$; $2^x = 16$; $x = 4$ ве $3\cdot2^x = 5^2 - 1 = 24$; $2^x = 8$; $x = 3$ тапарыс. $x = 0$ боланда $y = 2$ болар.

Шейлеликде, $(4,\pm7)$, $(3,\pm5)$, $(0,\pm2)$ чөзүвлери аларыс.

210. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$ax^2 + (a+b-1)\,x + b = 0$$

Инди

$$x = \frac{-(a+b-1) \pm \sqrt{(a+b-1)^2 - 4ab}}{2a}.$$

Меселәниң шертине гөрә $(a+b-1)^2 - 4ab < 0$ болмалы я-да $a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b - 4ab < 0$

я-да $a^2 + b^2 - 2ab + 1 - 2a - 2b < 0$

я-да $(a-b)^2 - 2(a+b) + 1 < 0$.

Шу шерти канагатландырмак үчин $a - b = 1978$, $a + b = 1978^2$ эдип алмак етерликдир.

211. $\sin\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \cos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ве $\cos\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ боланы себәпли $\sin\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \cos\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

212. Гиңишликде өзара атанаклайын ятан гөни чызыклары a, b ве c билен белгиләлиң. Эгер a ве b атанаклайын ятан гөни чызыклар болсалар, онда өзара параллел болан диңе бир җүбүт текизлик бардыр, шунлукда оларың бири биринҗи гөни чызыгы өз ичинде сакляяр, бейлекиси болса икинҗи гөни чызыгы өз ичинде сакляяр, бейлекиси болса икинҗи гөни чызыгы өз ичинде сакляяр.

Инди атанаклайын ятан a ве b гөни чызыкларың үстүнде параллелепипедиң ики гапыргасы ятан болса, онда a ве b гөни чызыклары өз ичине алян α ве β текизликлер параллелепипедиң ики граны билен габат гелйәрлер.

Шейлеликде, параллелепипедиң атанаклайын ятан гапыргаларының үч җүбүтиниң үч параллел текизликде ятып билмеҗекдиги шу ерден гелип чыкяр.

Инди эгер a, b ве c параллел текизликлерде ятмаян атанаклайын ятан гөни чызыклар болсалар, онда үч гапыргасы шу гөни чызыкларың үстүнде ятян параллелепипедиң барлыгыны субут этмек кын дәлдир.

$a \subset \alpha_1$; $b \subset \beta_1$; $\alpha_1 \parallel \beta_1$ болар ялы шейле бир җүбүт (α_1, β_1) текизликлер бардырлар.

Эдил шонуң ялы $a \subset \alpha_2$; $c \subset \gamma_1$; $\alpha_2 \parallel \gamma_1$ болар ялы (α_2, γ_1) җүбүт текизликлер бардырлар.

Иң ахырда $b \subset \beta_2$; $c \subset \gamma_2$; $\beta_2 \parallel \gamma_2$ болар ялы шейле бир җүбүт (β_2, γ_2) текизликлер бардырлар.

Шейлеликде, (α_1, β_1), (α_2, γ_1), (β_2, γ_2) үч җүбүт параллел текизликлер алынды. Хер бир җүбүтиң текизлиги галан җүбүтлериң текизликлери билен кесишйәрлер. Җеми 12 саны гөни кесишме бар, шол санлара a, b, c гөни чызыклар хем гирйәрлер.

α_1, β_1, α_2, γ_1, β_2, γ_2 алты текизлик гиңишликде параллелепипеди кесип алярлар.

213. Берлен системаның икинҗи деңлемесинден ашакдакыны аларыс:

$$8 - 72x = 95 + 15x,$$

бу ерден $x = -1$ тапарыс.

Инди шол системаның биринҗи деңлемесинден

$$-1 - 2y = 7 \quad \text{аларыс.}$$

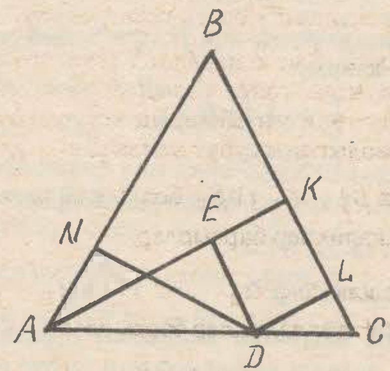
Диймек, $x = -1$, $y = -4$

Җогабы: $(-1, -4)$.

214. Чызгыдан гөрнүши ялы $DL = EK$.

Инди $\Delta AND = \Delta AED$.

чүнки $\angle ADE = \angle BCA$.



64-нҗи сур.

ве $\angle N = \angle E = 90^0$ ве $\angle ADE = \angle DAN$.

AD тарап умумы тарапдыр. Диймек, $AE = DN$

Шейлеликде, $DL + DN = KE + AE = AK$.

215. Меселем, шейле язмак мүмкин: $333333 \cdot 3 + 3 : 3 = 1000000$. Бөлмек амалы ерине етирилмесе меселәни чөзүп болмаз, чүнки мыдама 3-е кратны сан алнар, 1000000 сан 3-е кратны дәлдир.

216. $5^4 = 625$

$5^8 = 390625$

$5^{12} = 24414065$

....

$5^{1979} = 5^{4 \times 494} \cdot 5^3 = \dots 0625 \cdot 125 = \dots 8125$

Шу ерде $5^{4n} = \dots 0625$ беллəп, хер гезек периоды 4 аралыкда $5^{4n} = \dots 0625$ болҗакдыгыны гөрйәрис.

Җ о г а б ы : ... 8125.

217. Эгер $x > 0$ болса, онда берлен система ашакдакы гөрнүши алар:

$$y - 3{,}5 = 0{,}5\,x$$

$$x - y = -2$$

Шу системаны чөзүп, $x = 3$, $y = 5$ тапарыс. Эгер $x < 0$ болса, онда аларыс:

$$\begin{cases} y - 3{,}5 = 0{,}5\,x \\ x - y = -2 \end{cases}$$

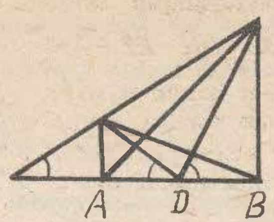
Бу ерден $x = -1$ ве $y = 3$ бахалары тапарыс.

Җ о г а б ы : (3,5), (-1,3) .

218. 216-нҗы меселә сер.

219. Меселәниң чөзүлиши ашакдакы суратдан айдың гөрүнйәр:

210. Эгер $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ санларың иң улы умумы бөлүҗиси d болса, онда $a_1 = db_1$, $a_2 = db_2$,..., $a_{10} = db_{10}$ ве $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = d\,(b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) = 1001$ болар.



65-нҗи сур.

Эмма $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot = (7 \cdot 13) \cdot 11 = 91 \cdot 11$ диймек, $d\ (b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) = 11 \cdot 91$. Шейлеликде, умумы бөлүҗиниң иң улы бахасы 91 болуп билер.

221. Меселәниң шертине гөрә

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{na_{n+1} - na_n - a_n}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{n(a_{n+1} - a_n) - a_n}{n(n+1)} = \frac{nb_n - a_n}{n(n+1)}$$

$$nb_n - a_n < nb_{n-1} - a_n = n(a_n - a_{n-1}) - a_n =$$

$$= (n-1)\,a_n - na_{n-1} = (n-1)\,a_n - (n-1)\,a_{n-1} - a_{n-1} =$$

$$= (n-1)\,(a_n - a_{n-1}) - a_{n-1} =$$

$$= (n-1)\,b_{n-1} - a_{n-1} < \dots < b_1 - a_1 < 0$$

222. S_3-иң ислендикче улы баха алып билҗекдиги 69-нҗы суратдан гөрүнйәр. Бу ерде S_1 - const ; $S_2 \to S_2{}' > 0$; гөрнүши ялы S_1 - const ; $S_2 \to 0$; $S_3 \to S_3{}' > 0$

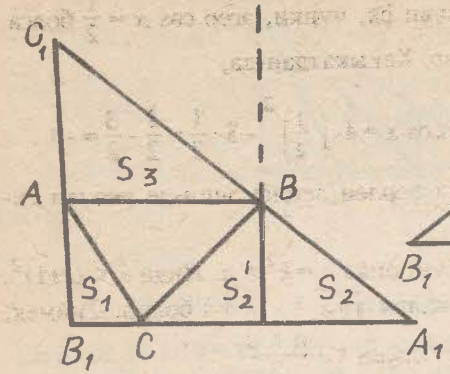
223. Илки билен шейле тождество язалың:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3 \operatorname{tg} \alpha .$$

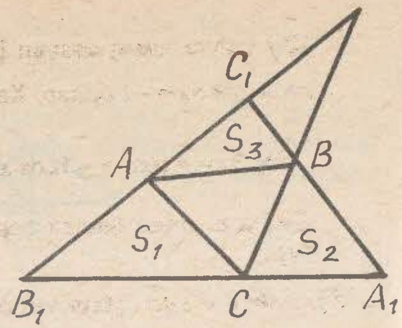
Шонуң ялы ене-де ики тождество язалың:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 80^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 140^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 100^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ).$$



66-нжи сур.



66-нжи *a* сур.

Шу үч тождестволары членме-член гошалың.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha+20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha+40^\circ) + \ldots + \operatorname{tg}(\alpha+160^\circ) =$$

$$= 3\,(\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ)) = 3 \cdot 3\operatorname{tg} 9\alpha$$

224. Берлен деңлемә гөрә $\cos x > 0$ ве $\cos 3x > 0$ боланы себәпли, деңлемәни шейле язмак мүмкиндир:

$$\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x\sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} =$$

$$= \sqrt{\cos x - \cos^2 x} + \sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} = 1$$

Инди ислендик $z \in R$ үчин $z - z^2 \le \frac{1}{4}$ деңсизлигиң ерине етирилйәндигини ве шунлукда деңлик диңе $z = \frac{1}{2}$ боланда ерине етирилйәндигини белләп, аларыс:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Шу системаның чөзүви ёк, чүнки, эгер $\cos x = \frac{1}{2}$ болса, онда $\cos 3x = -1$ болар. Хакыкатдан-да,

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 .$$

Диймек, илки башда берлен деңлемәниң-де чөзүви ёк-дур.

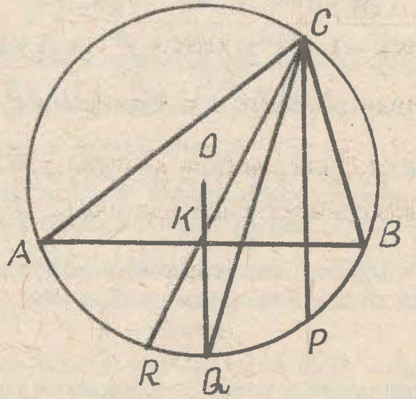
225. Гой, $k = [\sqrt{x}\,]$ болсун, онда $x = k^2 + n$. Инди $x < (k+1)^2$, чүнки гаршылыклы халда $[\sqrt{x}\,] \ge k + 1$ болар. Диймек, $x = k^2 + n. < (k+1)^2$, бу ерден $k > \frac{n+1}{2}$.

Шу шерти канагатландырян минимал натурал сан

$$k_{min} = \left[\frac{n-1}{2}\right] + n\ ,$$

шонуң үчин $x_{min} = \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)^2 + n$,

226. Эгер биссектриссаның довамының төверек билен кесишйән нокадыны төверегиң O меркези билен бирикдирсек, онда OQ кесими аларыс. Чызгыдан гөрнүши ялы $OQ \perp AB$, Эмма CP бейиклик хем шол AB тарапа перпендикулярдыр. Диймек, $OQ \parallel CP$.



67-нжи сурат

Бу ерден C депәниң гурлушы гелип чыкяр: ягны төверегиң O меркезини берлен Q нокат билен бирлешдирийәрис. Соңра OQ кесиме параллел эдип, P нокат аркалы гөни чызык гечирийәрис, нетижеде C нокады алярыс. Инди C нокады R нокат билен бирлешдирийәрис. CR ве OQ кесимлериң кесишме нокады болан K нокады алярыс, K нокатда OQ кесиме перпендикуляр галдырярыс. Нетижеде гөзленилйән ABC үчбурчлугы алярыс.

227. Меселәниң шертине гөрә $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ызыгидерлигиң члелериниң хеммеси положител ве үйтгешикдир. Ондан башга-да шу ызыгидерлик геометрик прогрессияны дүзйәр.

Субут этмели: $\dfrac{a_1 + a_n}{2} > \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Субуты:

$$\frac{a_1 + a_1 q^{n-1}}{2} > \frac{a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}}{n}$$

я-да

$$n\,(1 + q^{n-1}) > 2\,(1 + q + \ldots + q^{n-1})$$

$$(1 + q^{n-1}) + (1 + q^{n-1}) + \ldots + (1 + q^{n-1}) >$$

$$> 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q + \ldots + q^{n-1} \qquad \text{я-да}$$

$$((1 + q^{n-1}) - (1 + q^{n-1})) + ((1 + q^{n-1}) - (1 + q^{n-2})) + \ldots +$$

$$+ ((1 + q^{n-1}) - (q^{n-1} + 1)) > 0 .$$

Инди

$$((1 + q^{n-1}) - (q^{n-k} + q^{n-1})) = (1 - q^{n-1}) - (q^{k-1} - q^{n-1}) =$$

$$= (1 - q^{n-k}) - q^{k-1}(1 - q^{n-k}) = (1 - q^{n-k})\,(1 - q^{k-1})$$

Эгер $q < 1$ болса, онда гаралян җем нулдан улы. Эгер $q > 1$ болса, онда-да шол җем нулдан улы.

228. Терсине гүман эделиң. Эгер кесимиң хемме еринде

$f' \geq 1 + f'^2$ болса, ягны $(\operatorname{arctg} f)' \geq 1$ болса, онда $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a \geq b - a = 4 > z$ болар.

Бу болса $|\operatorname{arctg} z| < \dfrac{\pi}{2}$ деңсизлик билен гапма гаршыдыр.

229. Меселәниң шертине гөрә $\dfrac{\angle BDE}{\angle EDC} = \dfrac{\angle BED}{\angle DEA}$

я-да

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varphi}{\gamma} = k\,; \quad \beta = k\alpha\,; \quad \varphi = k\gamma\,;$$

$$\beta + \varphi = k\,(\alpha + \gamma)$$

Инди AOC ве ODE үчбурчлуклардан $x + y = \alpha + \gamma$ алярыс. Диймек, $\beta + \varphi = k\,(x + y)$. Инди ABC ве DBE үчбурчлуклардан $\beta + \varphi = 2x + 2y = 2\,(x + y)$, диймек, $k\,(x + y) = 2\,(x + y)$ бу ерден $k = 2$. Гой, O ве O_1 нокатлар ABC ве DBE үчбурчлукларың биссектрисаларының кесишме нокатлары болсун. Онда DOE ве DOE үчбурчлуклар деңдирлер ве $OO_1 \perp DE$, чүнки

$$\frac{\varphi}{2} = \alpha \qquad \text{ве} \qquad \frac{\beta}{2} = \alpha\,.$$

Диймек, $\beta = \varphi$.

Бу болса ABC үчбурчлугың деңянлыгыны субут эдйәр.

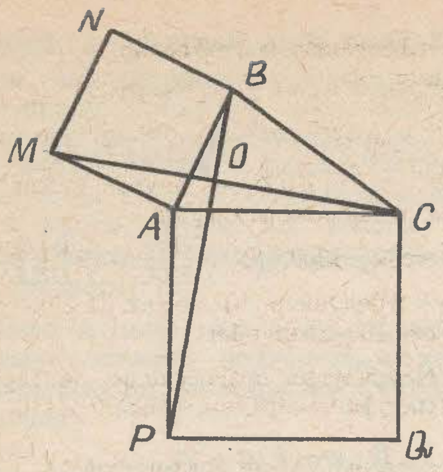
230. Меселәниң шертине гөрә $AC = PQ$ ве $AB = MA$.

Ондан башгада $\angle MAC = \angle BAP$.

Диймек, MAC ве BAP үчбурчлуклар деңдирлер. Инди шол үчбурчлукларың деңликлеринден $\angle BPA = \angle ACM$ гелип чыкяр. $\angle PAC = 90^\circ$. Диймек, $\angle BOC = 90^\circ$, ягны $BP \perp MC$.

231. $(x-1)\,(x-6)\,(x-3)\,(x-4) + 10 = (x^2 - 7x + 6)\,(x^2 - 7x + 12) + 1 = $
$= (x^2 - 7x)^2 + 18\,(x^2 - 7x) + 82 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1$

7—1457



68-нжи сур.

Шу ерден гөрнүши ялы x-ың ислендик бахасында берлен аңлатма положител баха эедир.

232. Ислендик битин саның дөрдүнжи дережесиниң нәхили цифр билен гутарып билҗекдигине гаралың. Ашакдакы таблицаны дүзелиң. Шол максат билен a сана мүмкин болан битин бахалары берелиң. Эгер $a = 0$ болса, онда $a^4 = 0$, эгер $a = 1$ болса, онда $a^4 = 1$. Эгер-де $a = 2$ болса, онда a^4 сан 6 цифр билен гутарар. Инди ашакдака середелиң.

a : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7

a^4 : 0, 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1

Шейлеликде, a^4 саның 0, 1, 5 ве 6 цифрлер билен гутарып билҗекдигини гөрйәрис. b^4 сан хем шейле. Онда $a^4 + b^4$ җемиң 9 билен гутарып билмеҗекдиги шу ерден айдың гөрүнйәр.

233. Меселәниң шертине гөрә $1 + 2 + ... + (n - 1) = n$ болмалы я-да $\frac{1 + (n - 1)}{2}(n - 1) = n$, бу ерден

$\frac{n-1}{2} = 1$; $n - 1 = 2$; $n = 3$ аларыс.

Диңе $n = 3$ боланда $1 + 2 = 3$ болар.

234. $2^{99} + 2^0 2^9 (2^{90} + 1) = 2^9 (2^{30} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1) =$
$= 2^9 (2^{10} + 1)(2^{20} - 2^{10} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1)$

Инди $2^{10} + 1 = 1025$ гөз өңүнде тутсак, ве $2^9 = 512$ беллесек, ашакдакыны аларыс:

$2^{99} + 2^9 = 512 \cdot 10025 (2^{20} - 2^{10} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1)$

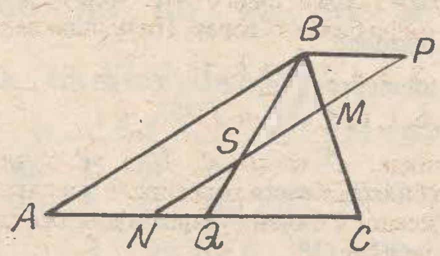
512 сан 4-е бөлүнйәр, 1025 болса 25-е бөлүнйәр, диймек $2^{99} + 2^9$ сан 100-е бөлүнйәр.

235. ABC үчбурчлугың B депесинден AC тарапа параллел эдип BP кесими гечирелиң, ягны $BP \parallel AC$.

Гой, MP кесим NM-иң довамы болсун. $\frac{MS}{NS} \le \frac{PS}{NS}$ деңсизлик айдындыр. Инди BSP ве NSQ үчбурчлукларың меңзешликлеринден $\frac{PS}{NS} = \frac{BS}{SQ} = 2$.

Бу ерден $\frac{MS}{NS} \le 2$. Шонуң ялы $\frac{NS}{MS} \le 2$.

Диймек, $\frac{MS}{NS} \ge \frac{1}{2}$.

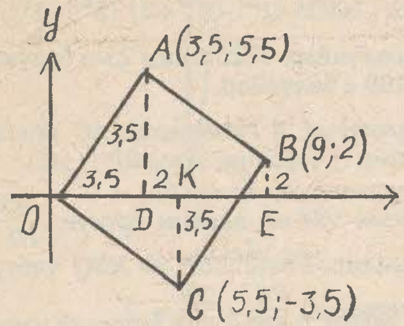


69-нжи сур.

236. Гой, берлен үчбелгили сан $\overline{abc}$ болсун. Онда меселәниң шертине гөрә $abcabc$ алтыбелгили саның 7-ә, 11-е ве 13-е бөлүнйәндигини субут этмели.

$\overline{abcabc} = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c =$
$=100100a + 10010b + 1001c = 1001\ (100a + 10b + c)$,

эмма $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Шейлеликде, алнан алтыбелгили сан 7-ә 11-е ве 13-е бөлүнйәр.



70-нжи сур.

238. $4 \cdot \overline{OA} + 5 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot \overline{OC} + (4+5-2) \cdot \overline{OD}$

$4 \cdot (\overline{OA} - \overline{OD}) + 5 \cdot (\overline{OB} - \overline{OD}) = 2 \cdot (\overline{OC} - \overline{OD})$.

Диймек, $\overline{OC} - \overline{OD}$, $\overline{OA} - \overline{OD}$, $\overline{OB} - \overline{OD}$ векторлар компланардырлар.

239. Меселәниң шертине гөрә $BD \perp CD$ ве $BD \perp AB$

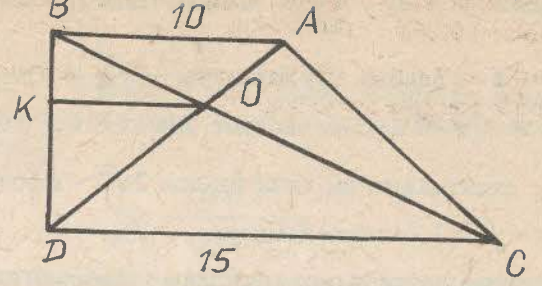
$AB = 10$; $CD = 15$.

$\triangle AOB \sim \triangle COD$, онда $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{OC}{OB} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{OC + OB}{OB} = \dfrac{3+2}{2}\ \dfrac{BC}{BO} = \dfrac{5}{2}$

$\triangle CBD \sim \triangle OBK$, онда $\dfrac{CB}{OB} = \dfrac{CD}{OK}$; $\dfrac{CD}{OK} = \dfrac{5}{2}$;

$OK = \dfrac{2 \cdot CD}{5}$; $OK = \dfrac{2 \cdot 15}{5} = 6$; $OK = 6$



71-нжи сур.

240. Меселәниң шертине гөрә:

$$lg\,(3^x - 2) = \frac{lg\,3 + lg\,(3^x + 1)}{2}$$

я-да

$$2\,lg\,(3^x - 2) = lg\,3 + lg\,(3^x + 1)\ ;$$
$$lg\,(3^x - 2) = lg\,3 \cdot (3^x - 2)$$

я-да

$$(3^x - 2)^2 = 3 \cdot (3^x + 1)\ ;$$
$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 4 = 3^{x+1} + 3\ ;$$
$$3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 1 = 0\ ;$$
$$3^x = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\ ;$$
$$x = \log \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\ .$$

241. Гой, $\dfrac{1 + x^2}{1 + x} = y$ болсун. Онда $1 + x^2 = y\,(1 + x)$ я-да

$x^2 - yx - y + 1 = 0$;

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(1-y)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 4}}{2}$$

Шу ерден $y^2 + 4y - 4 \geq 0$ аларыс. Инди $y_1 = 2\sqrt{2} - 2$

ве $y_2 = -2 - 2$ аларыс. Шу бахалары $\frac{1 + x^2}{1 + x} = y$ деңликде гоюп, $x = \sqrt{2} - 1$ баханы тапарыс. Диймек, $x \geq 0$ боланда $\frac{1 + x^2}{1 + x}$ аңлатманың иң кичи бахасы $2\sqrt{2} - 2$ болуп, шу баха $x = \sqrt{2} - 1$ боланда алыняр.

242. Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни алярыс.

$$7x - 12y = 77$$

бу ерде догры жогап берлен сорагларың саны x билен белленилди, нәдогры жогап берлен сорагларың саны y билен белленилди.

Ёкарда язылан деңлемеден аларыс:

$$x = \frac{77 + 12y}{7} = 11 + \frac{12}{7}y.$$

x битин сан болмалы, онда y = 7 , 14, 21, ...

Шу бахаларың ичинден дине y = 7 баха меселәниң шертини канагатландыряр. Диймек, x = 23 , y = 7 . Догры жогап берлен меселелериң саны 23, нәдогры жогап берлен меселелериң саны 7.

243. $$\frac{3^\alpha + 1}{3^\beta - 1} = \frac{3^\alpha - 1 + 2}{3^\beta - 1} = \frac{3^\alpha - 1}{3^\beta - 1} + \frac{2}{3^\beta - 1}.$$

Эгер $\alpha = \beta$ болса, онда меселедәки тассыклама догры.

Гой, $\alpha > \beta$ болсун, онда $\alpha \geq n\beta$ ве $\alpha < (n+1)\beta$. Инди шу бахалары ёкарда гоюп, тассыкламаның догрудыгыны гөрйәрис.

244. Меселәниң шертинден ашакдакыны аларыс:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 1980 \qquad (1)$$

ве

$$\frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leq 1980 \qquad (1)$$

Инди k > n дийип гүман эделиң. Ёкардакы деңликлериң биринҗисинде пределе гечип, шу ашакдакы формуланы аларыс:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty ,$$

чүнки, санавҗыдакы көпчлениң дережеси майдалавҗыдакы көпчлениң дережесинден улудыр.

Эгер $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty$, болса, онда (1) деңсизлик канагатландрылмаяр. Диймек, $k \leq m$ болмалы. Эдил шонуң ялы (2) деңсизликден $k \geq m$ гелип чыкяр. Шейлеликде, $k = m$.

245. $$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1} = \frac{2a_n + 2 - 1}{a_n + 1} = \frac{2(a_n + 1) - 1}{a_n + 1} = 2 - \frac{1}{a_n + 1}.$$

$\frac{1}{a_n + 1} > 0$, диймек, хемме $a_n < 2$. $\{a_n\}$ ызыгидерлик чәкленен ызыгидерликдир.

Инди

$$a_1 = 1 , \qquad a_2 = \frac{2a_1 + 1}{a_1 + 1} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Гой, $a_k > a_{k-1}$ болсун.

Онда

$$a_{k+1} - a_k = \frac{2a_k + 1}{a_k + 1} - \frac{2a_{k-1} + 1}{a_{k+1} + 1} = \frac{a_k - a_{k-1}}{(a_k + 1)(a_{k-1} + 1)} > 0$$

ягны $\{a_n\}$ ызыгидерлик артян ызыгидерликдир.

Белли болшы ялы, артян чәкленен ызыгидерлигиң пределі бардыр.

Гой, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ болсун. Онда $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}$ деңликде

пределе гечип, аларыс: $a = \dfrac{2a + 1}{a + 1}$

я-да $a^2 + a = 2a + 1$; $a^2 - a - 1 = 0$.

Шу ерден $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ тапарыс.

Әхли $a_n > 0$ боланы себәпли $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ аларыс.

246. Шейле деңлемә гаралың:

$$f(y) = y^2 - (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)\, y + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

$$f(0) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

$$f(1) = 1 - 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 0$$

чүнки хер бир $x_i \geq x_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($x_i \in [0,1]$)

$f(0) \geq 0$ ве $f(1) \leq 0$ боланы себәпли деңлемәниң дискриминанты нулдан кичи дәлдир, ягны

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 4\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq 0$$

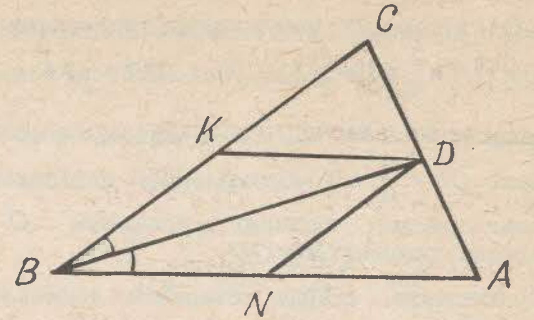
я-да

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

247. $$\frac{2^{19}\cdot 27^3 + 15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10} + 12^{10}} = \frac{2^{18}\cdot 2\cdot 3^9 + 5\cdot 3\cdot 2^{18}\cdot 3^8}{2^9\cdot 3^9\cdot 2^{10} + 2^{20}\cdot 3^{10}} =$$

$$= \frac{2^{18}\cdot 3^9\cdot 2 + 5\cdot 2^{18}\cdot 3^9}{2^{19}\cdot 3^9 + 2^{19}\cdot 3^9\cdot 2\cdot 3} = \frac{2^{18}\cdot 3^9(2+5)}{2^{19}\cdot 3^9(1+6)} = \frac{1}{2}.$$

248. *ABC* бурчуң биссектрисасыны гечирйәрис (72-нжи сурат).

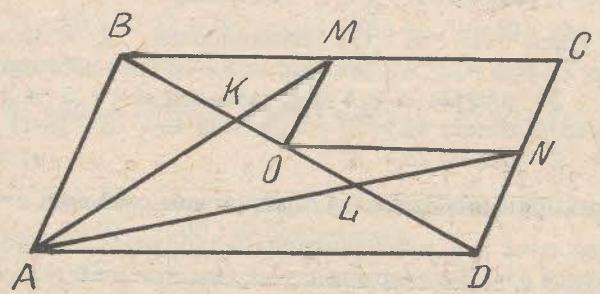


72-нжи сур.

249. Меселәниң шертине гөрә 10 окувчы кружокларың хич бирине гатнашмаярлар. Онда кружоклара гатнашянларың саны 35 - 10 = 25 окувчы болар. 20 окувчы математика кружогына гатнашяр, диймек, диңе биология кружогына 25 - 20 = 5 окувчы гатнашяр. Математика ве биология гатнашянларың саны 11 - 5 = 6 окувчыдыр.

250. Эгер озал норманы ерине етирмек үчин t сагат герек болса, инди оңа $t - \dfrac{t}{5} = \dfrac{4t}{5}$ сагат вагт герек болҗак. Диймек, зәхмет өндүрижилиги озалка гаранда $t : \dfrac{4t}{5} = \dfrac{5}{4}$ эссе артҗак, я-да 25^0 артҗак.

251.



73-нжи сур.

O нокады M ве N нокатлар билен бирлешдирйәрис. Нетижеде $\Delta\ OKM \sim \Delta\ ABK$ ве $\Delta\ ONL \sim \Delta\ ALD$.

Инди OM кесим DBC үчбурчлугың орта чызыгы боланы себәпли $OM = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$, онда $OK = \frac{1}{2} BK$

Шонуң ялы OLN ве ALD үчбурчлукларың меңзешликлеринден $OL = \frac{1}{2} LD$ алыняр. $ABCD$ параллелограмың диагоналларының кесишме нокадыны O билен белгиледик, диймек, $OB = OD$.

Шейлеликде, ёкарда гетирилен деңликлери гөз өңүнде тутуп,

$$BK = LD = KL$$

аларыс.

252. Эгер $4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11$ көпелтмек хасылыны алсак, онда шол 1980 сан берлен санларың хеммесине галындысыз бөлүнер. Меселәниң шертине гөрә гөзленилйән сан 4-е, 5-е 9-а ве 11-е бөлүненде дегишлиликде 3, 4, 8 ве 10 алыняр. Диймек, 1980-ден 1 айырсак, ягны 1980 - 1 = 1979 саны алсак, онда меселәниң шертини канагатландырян саны аларыс. Шейлеликде, гөзленилйән сан 1979.

253. Берлен деңлиги шейле язалың: $(x+y)\ (x-y) = 3^y$.

Гой, $x + y = 3^a$ (1) ве $x - y = 3b$ (2)

болсун, онда $a + b = y$ (3) болар.

Инди (1) ве (2) деңликлерден $2y = 3a - 3b$ я-да $2\ (a+b) = 3^a - 3^b$ аларыс. $a > b$ боланы себәпли $4a > 3^a - 3b$ аларыс. $a > b$ деңсизликден $a - 1 \geq b$ гелип чыкяр. Диймек, $4a > 3^a - 3^{a-1}$ я-да $4a > 3^{a-1}(3-1)$ я-да $4a > 3^{a-1} \cdot 2$ я-да $2a > 3^{a-1}$.

Иң ахыркы деңсизликден гөрнүши ялы $a = 1$ я-да $a = 2$.

Инди $a = 1 \geq b$ деңсизликден $a = 1$ боланда $b = 0$ ве $a = 2$ боланда $b = 1$ бахалары тапярыс. Онда $y = a + b$ деңликден $y_1 = 1$ ве $y_2 = 2 + 1 = 3$ бахалары тапярыс.

$2x = 3^a - 3^b$ деңликден $2\ x_1 = 3^1 + 3^0 = 4$, $x_1 = 2$ ве $2\ x_2 = 3^2 + 3 = 12$; $x_2 = 6$ тапарыс.

254. Гой, гөзленилйән мейдан x га болсун. Онда меселәниң шертине гөрә бригада биринҗи гүн $\left(\frac{x}{2} + 2\right)$ га ериң отуны оряр. Соңкы гүне болса $x - \left(\frac{x}{2} + 2\right)$ га галяр. Инди шу саның 25 % тапярыс, ягны

$$\frac{\frac{x}{2} - 2}{100} \cdot 25 = \frac{x - 4}{8} \quad \text{(га)}$$

Шерте гөрә $\frac{x}{2} - 2 - \frac{x - 4}{8} = \frac{3x - 12}{8}$ (га) галан ер 6 га дең болмалы, Онда $\frac{3x - 12}{8} = 6$, $3x = 60$, $x = 20$ га.

Җогабы: Мейдан 20 га

255. Санларың җемини тапалың: $\frac{1 + 100}{2}\, 100 = 101 \cdot 50$.

Бәш бөлеге бөлүп $\frac{101 \cdot 50}{5} = 101 \cdot 10$ тапарыс.

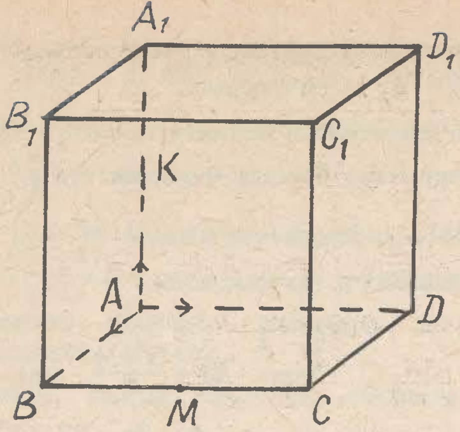
Инди

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (10 + 91) =$$
$$= (11 + 90) + (12 + 89) + (13 + 81) + ... + (20 + 81) =$$
$$= (21 + 80) + (22 + 79) + (23 + 78) + ... + (30 + 71) =$$
$$= (31 + 70) + (32 + 69) + (33 + 68) + ... + (40 + 61) =$$
$$= (41 + 60) + (42 + 59) + (43 + 58) + ... + (50 + 51)$$

болар.

Диймек, гөзленилйән көплүклер ашакдакылардыр $\{1,2,...,10,91,...,100\}$ ве бейлекилер.

255. Гой, кубун гапыргасы а болсун. Кубуң A депесини координаталар системасының башлагыҗында ерлешдирелиң.



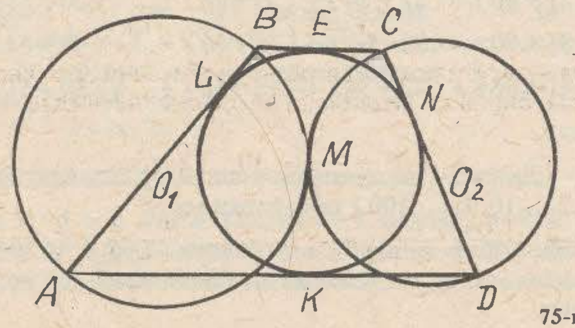
74-нжи сур.

Онда $K(0;0;z)$, $M(a;y;0)$, $N(x;a;0)$ болар. Инди

$$KM^2+MN^2+KN^2=a^2+y^2+z^2+((x-a)^2+(a-y)^2+a^2)+$$
$$+(x^2+a^2+(a-z))=(2x^2-2ax)+(2y^2-2ay)+$$
$$+(2z^2-2az)+6a^2=$$
$$=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{9a^2}{2}.$$

Диймек, $x=y=z=\dfrac{a}{2}$ ве минимал баха $\dfrac{9a^2}{2}$ дендир.

257. $AL=AK=u$; $BL=BE=x$; $EC=CN=y$; $ND=DK=z$



75-нжи сур.

(шол бир нокатдан төвереге гечирилен галташмалар).

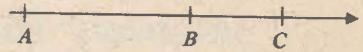
$$O_1O_2=\frac{BC+AD}{2}=\frac{x+y+u+z}{2};$$

$$O_1M=R_1=\frac{AB}{2}=\frac{x+u}{2};$$

$$O_2M=\frac{CD}{2}=\frac{y+z}{2}=R_2.$$

Диймек, $O_1O_2=R_1+R_2$.

258. $$\begin{cases}\dfrac{AB}{x+2}+\dfrac{BC}{x+2}+\dfrac{CB}{x-2}=6\\[2mm] \dfrac{BC}{x+2}+\dfrac{CA}{x-2}=8\end{cases}$$



Меселәниң шертине гөрә $AB=BC$, онда $AB=BC=y$ билен беллəп, ашакдакыны аларыс:

$$\begin{cases}\dfrac{2y}{x+2}+\dfrac{y}{x-2}=6\\[2mm] \dfrac{y}{x+2}+\dfrac{2y}{x-2}=8\end{cases}$$

Шу системаның биринжи деңлемесини 2-ә көпелдип, алнан деңликден икинжи деңлемәни членме-член айырярыс, онда ашакдакыны аларыс:

$$\frac{3y}{x+2}=4.$$

Инди системаның икинжи деңлемесини 2-ә көпелдип, ондан биринжи деңлемәни айырярыс, нетижеде

$$\frac{3y}{x-2}=10 \quad \text{аларыс.}$$

Инди $\dfrac{3y}{x+2}:\dfrac{3y}{x-2}=4:10$ я-да $\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{2}{5}$ аларыс.

Иӊ ахыркыдан $\frac{2x}{-4} = \frac{7}{-3}$ я-да $\frac{x}{2} = \frac{7}{3}$ аларыс.

Бу ерден, $x = \frac{14}{3}$ (км/саг).

259. $1981\,(1981 + 1)\,(1981 + 2)\,(1981 + 3) + 1 =$

$$= (1981^2 + 3\cdot 1981)\,(1981^2 + 3\cdot 1981 + 2) + 1 =$$
$$= (1981^2 + 3\cdot 1981)^2 + 2\,(1981^2 + 3\cdot 1981) + 1 =$$
$$= (1981^2 + 3\cdot 1981 + 1)^2 .$$

260. а) $2^{100} > 10^{30}$; $(2^{10})^{10} > (10^3)^{10}$; $(1024)^{10} > (1000)^{10}$.

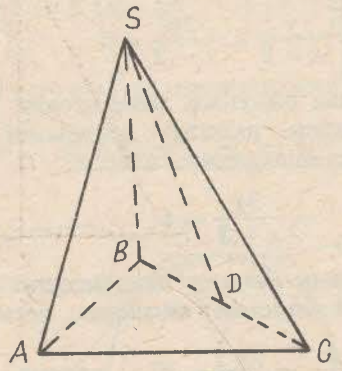
б) $2^{100} < 10^{31}$; $2^{100} < 2^{31}\cdot 5^{31}$; $2^{69} < 5^{31}$;

$2^{69}\cdot 2^6 < 5^{28}\cdot 5^3$; $(2^9)^7\cdot 64 < (5^4)^7\cdot 125$;

$512^7\cdot 64 < 625^7\cdot 125$

261. Ашакдакы белгилемәни гиризелиӊ:

$\vec{AB} = \vec{p}$, $\vec{SA} = \vec{q}$, $\vec{SC} = \vec{r}$, $p = 1$, $\frac{DC}{BC} = x$



76-нжы сур.

Онда $\vec{SD} = (1 - x)\,\vec{r} + x\,(\vec{p} + \vec{q})$;

я-да $[\vec{SD} = (1 + x)\,\vec{r} + x\,(\vec{q} - \vec{p})]$;

$\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$; $\vec{p}\cdot\vec{CD} = 0$

боланы себәпли $\vec{CD}\cdot\vec{CD} = \frac{1}{4}$.

Бу ерден меселәниӊ чөзүви алыняр.

262. Берлен деӊлемәни шейле язалыӊ:

$$(11y + 13x)\cdot 17 = 7xy .$$

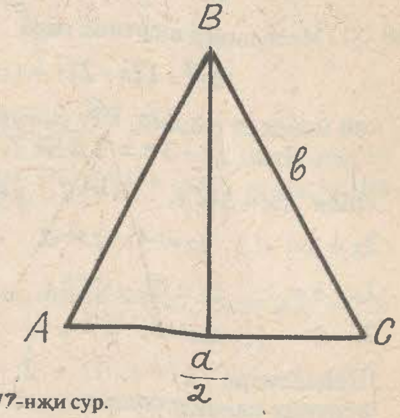
Инди $x = 17k$ билен белләп, аларыс:

$$(11y + 13\cdot 17k)\cdot 17 = 7\cdot 17ky$$

я-да $11y + 13\cdot 17k = 7ky$

$y = \frac{13\cdot 17k}{7k - 11}$; $7k - 11 = 17$; $k = 4$; $x = 68$; $y = 52$.

263. Гой, $AC = a$, $AB = b$ болсун, онда



77-нжи сур.

$F = \frac{a^2 + b^2}{\frac{1}{2}\,a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$ аларыс.

Гой, $\frac{b^2}{a^2} = k$ болсун, онда $F = \frac{4(1 + x)}{\sqrt{4x - 1}}$ аларыс.

264. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{6}=\frac{23}{60}$

Инди $\frac{23}{60}<\frac{2}{5}$, чүнки $\frac{23}{60}<\frac{24}{60}$

Берлен деңлигиң соңкы членлериниң җеми отрицател баха эе боландыгы үчин

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-...-\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}<\frac{2}{5}$$

265. Эгер икинҗи автомобилиң A пункта гелмезинден 4 сагат өң душушан болсалар, онда шу автомобиль 4 сагатда 240 км ёл гечер. Инди биринҗи автомобилиң тизлигини x билен белгилесек, ол автомобиль душушыга ченли $\frac{240}{x}$ сагат ёл йөрәр, икинҗи болса $\frac{x}{60}$ сагат ёл йөрәр.

Онда $\frac{240}{x}=\frac{x}{60}$ деңликден, $x=120$ км/сагтапарыс.

266 (8). Меселәниң шертине гөрә

$$|4x^2-12x-27|=|(2x+3)\ (2x-9)|$$

сан йөнекей сандыр. Шу саның көпелдиҗилериниң бири 1 дең. Ягны $2x+3=\pm\ 1$ я-да $2x-9=\pm\ 1$.

Инди $2x+3=1$, $2x=-2$, $x=-1$,

$2x+3=-1$, $2x=-4$, $x=-2$,

$2x-9=1$, $2x=10$, $x=5$,

$2x-9=-1$, $2x=8$, $x=4$.

Шейлеликде, $x=-1;\ -2;\ 4;\ 5$ бахалар меселәниң шертини канагатландырярлар.

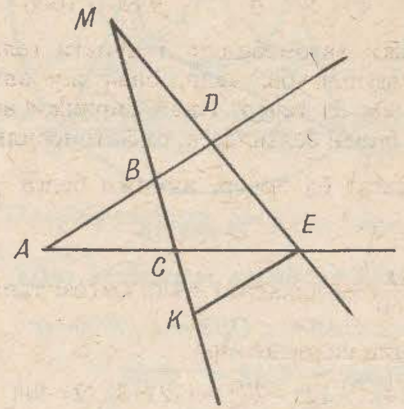
267 (8). $\frac{a+b}{a-b}$ гатнашык гөзленилйәр. Онда $a^2+b^2=6ab$

деңликден $a^2+b^2-2ab=4ab$ ве $a^2+b^2+2ab=8ab$

аларыс. Онда $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{8ab}{4ab}=2$; $\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}$

268 (8). Илки билен $EK \parallel BD$ эдип гуралың.

Онда $\angle ABC=\angle EKC$.



78-нҗи сур.

Меселәниң шертине гөрә үчбурчлук ABC деңянлыдыр, диймек, $\angle ABC=\angle ACB$.

Инди $\angle ACB=\angle KCE$.

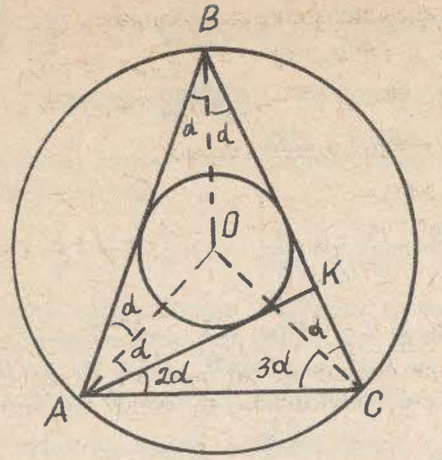
Диймек, CEK үчбурчлук деңянлыдыр, онда $KE=CE$. Гурлуша гөрә $\Delta\ MBD \sim \Delta\ MKE$, диймек

$$\frac{MD}{ME}=\frac{BD}{KE}=\frac{BD}{CE}.$$

269 (8). Меселәниң шертине гөрә $\angle BAK=\angle KAC$ ве $\angle BAO=\angle OAK$.

$\angle OAB=\angle ABO$ чүнки $OB=OA$.

Шонуң ялы $\angle OAC=\angle OCA$; $\angle OBC=\angle OCB$.



79-нжи сур.

Инди $\angle OAK = \alpha$ билен белгилесек, онда

$\angle OAK = \angle OAB = \angle OBK = \angle OCK = \alpha$

аларыс. Эмма $CAK = KAB$.

Шонуң үчин $CAK = 2\alpha$.

Шейлеликде,

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 4\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$;

$\alpha = 18^\circ$.

Диймек, $\angle CAB = 72^\circ$; $\angle ABC = 36^\circ$; $\angle BCA = 72^\circ$.

270 (8,9). Меселәниң чөзүлиши ашакдакыдан гөрүнйәр

11 л	0	11	2	2	0	11	4	4	0	11	6	6	0	11	8	8	0	11	10
9л	0	0	9	0	2	2	9	0	4	4	9	0	6	6	9	0	8	8	9

271 (9). $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$

көпчленден ашакдакылары аларыс:

$P(15) = a_0 15^n + a_1 15^{n-1} + ... + a_{n-1} 15 + a_n$

$P(7) = a_0 7^n + a_1 7^{n-1} + ... + a_{n-1} 7 + a_n$

Бу ики деңликлерден аларыс:

$P(15) - P(7) =$

$= a_0 (15^n - 7^n) + a_1 (15^{n-1} - 7^{n-1}) + ... + a_{n-1} (15-7)$

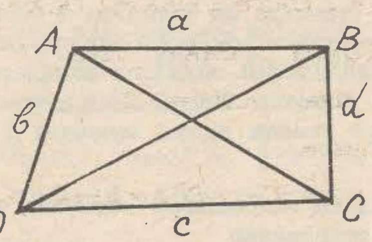
я-да

$9 - 5 = a_0 (15^n - 7^n) + a_1 (15^{n-1} - 7^{n-1}) + ... + a_n (15-7)$

Иң ахыркы деңлигиң саг бөлеги 8-е бөлүнйәр, эмма чеп бөлеги 8-е бөлүнмейәр, бу болса тассыкламаны субут эдйәр.

272 (9). $ABCD$ дөртбурчлукда $S = S_{ABD} + S_{BCD}$

ве $S = S_{ABC} + S_{ADC}$



80-нжи сур.

Инди $S_{ABD} = \frac{1}{2} ab \sin A$ болjaндыгы

белли. Онда $S_{ABD} \le \frac{1}{2} ab$

$S_{BCD} = \frac{1}{2} cd \sin C$ я-да $S_{BCD} \le \frac{1}{2} dc$

язмак болар.

Инди $\quad S \le \frac{1}{2}dc + \frac{1}{2}dc \quad$ язмак болар.

Инди

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}\, ad \sin B \\ S_{ADC} &= \frac{1}{2}\, bc \sin D \end{aligned}\right\} \text{ я-да } \left\{\begin{aligned} S_{ABC} &\le \frac{1}{2}\, ad \\ S_{ADC} &\le \frac{1}{2}\, bc \end{aligned}\right.$$

ялы язмак болар.

Ёкардакы деңсизликлерден

$$2S \le \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc\,;$$

$$2S \le \frac{1}{2}a(b+d) + \frac{1}{2}c(b+d)$$

я-да $S \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ аларыс.

273 (9). Хер станокда иң болманда 4 ишчи ишләп билмелидир: эгер хайсы хем болса бир станокда диңе үч ишчи ишләп билйән болса, онда шол ишчилер болманда станок ишлемән дурмалы болар. Шейлеликде, иш өвретмек үчин харч этмели пулуң мукдары $5 \cdot 4 \cdot 1000 = 20000$ манат.

Ашакдакы таблицадан гөрнүши ялы шу мукдардакы пул етерликдир

	1	2	3	4	5	6	7	8
№1	x	x	x	x	o	o	o	o
№2	x	x	x	o	x	o	o	o
№3	x	x	x	o	o	x	o	o
№4	x	x	x	o	o	o	x	o
№5	x	x	x	o	o	o	o	x

Хайсы хем болса бир ишчиниң ишләп билйән станок-

лары атанак билен белленилен. Эгерише -"инче хүнәрли" ишчилер гелйән болсалар (4 - 8), онда олар 5 станокларың хеммесини ишледип билерлер. Эгер-де олардан K саны ишчиише гелмеселер, онда олары K саны "универсаллар" (1 - 3) чалышярлыр.

274 (9). Меселәниң шертинде берлен $1 + x + y = 0$ деңлиги ашакдакы ялы язалың:

$$x + y = -1$$

Инди $\quad x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -1$

я-да $\quad x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y) = -1$

я-да $\quad x^3 + y^3 + 3xy\,(-1) = -1$

я-да $\quad x^3 + y^3 + 1 = 3xy$

275 (10). $\quad x_{n+1} = x_n - 4y_n\,; \qquad y_{n+1} = y_n + 4x_n\,;$

$$x_1 = 1\,; \qquad y_1 = 2$$

Шу ерден гөрнүши ялы ислендик натурал n үчин x_n -тәк сандыр. Онда $\quad x_n \ne 0\,,\quad$ ягны $\quad x_{1982} \ne 0$.

Инди $\quad y_{1982} \ne 0$ гөркезмели.

$y_{n+2} = y_n + 1 + 4x_{n+1}; \qquad y_{n+2} = y_n + 4x_n + 4x_{n-1};$

$y_{n+2} = y_n + 4x_n + 4(x_n - 4y_n) = y_n + 4x_n + 4x_n - 16y_n$

$y_{n-2} - y_n = 8(x_n - 2y_n)$

Инди

$$y_4 - y_2 = 8\,(x_2 - 2y_2)$$
$$y_6 - y_4 = 8\,(x_4 - 2y_4)$$
$$y_8 - y_6 = 8\,(x_6 - 2y_6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{1980} - y_{1978} = 8\,(x_{1978} - 2y_{1978})$$
$$y_{1982} - y_{1980} = 8\,(x_{1980} - 2y_{1980})$$

$y_{1982} - y_2 = 8\,k \qquad$ бу ерден

$k = (x_2 - 2y_2) + (x_4 - 2y_4) + ... + (x_{1980} - 2y_{1980})$

$y_2 = y_1 + 4x_1 = 6$.

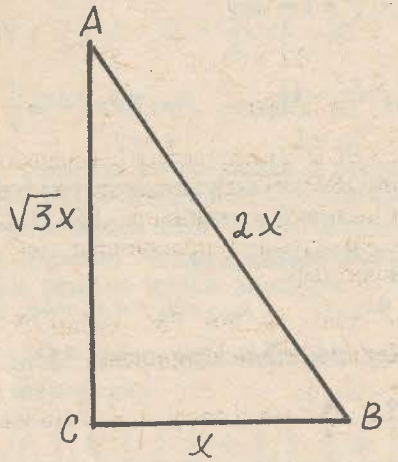
Онда $y_{1982} - 6 = 8k$

Иӊ соӊкы деӊликден гөрнүши ялы сан 8-е бөлүнмейәр, диймек, $y_{1982} \neq 0$, ш.с.т.э.

276 (10). Үчбурчлугыӊ тараплары шейле: x; $\sqrt{3} \cdot x$; $2x$.

Шу ерден гөрнүши ялы $x^2 + (\sqrt{3} \cdot x)^2 = (2x)^2$,

ягны $x^2 + 3x^2 = 4x^2$. Диймек, шу үчбурчлугыӊ ики тарапыныӊ квадратларыныӊ жеми үчүнжи тарапыныӊ квадратына деӊдир. Онда шу үчбурчлук гөнүбурчлыдыр.



81-нжи сур.

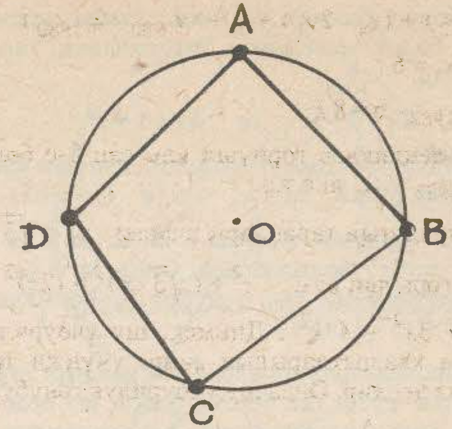
277 (10). Меселәниӊ шертине гөрә

$\angle A = 90^o$, $\angle C = \angle B + d$; $\angle D = \angle B + 2d$.

$\angle B + \angle C + \angle D = \angle B + \angle B + d + \angle B + 2d =$
$= 3\angle B + 3d$.

$3\angle B + 3d = 360^o + 90^o = 270^0$, $\angle B = 90^o$.

Диймек, $\angle C = \angle B + d = 90^o$.



82-нжи сур.

Онда $\angle B + \angle D = 180^o$.

Шейлеликде, $ABCD$ дөртбурчлугыӊ гаршылыклы бурчларыныӊ жеми 180^o. Онда шу дөртбурчлугыӊ дашындан төверек чызмак мүмкиндир. Шол төверегиӊ O меркези дөртбурчлугыӊ депелеринден деӊ узаклыкда ятан еке тәк нокатдыр.

278 (10). Терсине гүман эделиӊ. Гой, кәбир α, β, γ үчин ашакдакы деӊликлер ерине етирилсин:

$\frac{1}{2} < \sin\alpha\cos\beta$, $\frac{1}{2} < \sin\beta\cos\gamma$, $\frac{1}{2} < \sin\gamma\cos\alpha$

Шу үч деӊсизликлери бири-бирине көпелдип, ашакдакыны аларыс:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < \sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\gamma\sin\gamma\cos\alpha$

я-да $\frac{1}{8} < (\sin\alpha\cos\alpha)(\sin\beta\cos\beta)(\sin\gamma\cos\gamma)$

я-да $1 < (2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\beta\cos\beta)(2\sin\gamma\cos\gamma)$

я-да $1 < \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$.

Шейле болуп билмез. Диймек, гуман эдилиши догры дәл, бу болса меселәниң шертиндәки тассыкламаны субут эдйәр.

279 (10). Гой, $2n+1=a^2$ ве $3n+1=b^2$

болсун. Онда биринжи деңликден гөрнүши ялы а-тәк сан болсалыдыр. Инди $2n=a^2-1=(a-1)(a+1)$.

Шу ерден гөрнүши ялы $(a-1)$ ве $(a+1)$ санларың икиси-де жүбүт болмалыдыр. Онда $2n=(a-1)(a+1)$ деңликден гөрнүши ялы n-жүбүт сан болмалыдыр. Инди $3n=b^2-1=(b-1)(b+1)$.

Шу деңликден гөрнүши ялы b-тәк сандыр. Эгер ики саны ызыгидерли жүбүт сан берлен болса, шу ерде $(b-1)$ ве $(b+1)$ онда оларың бири 2-ә икинжиси болса 4-е бөлүнер. Шейлеликде, $3n=(b-1)(b+1)$ деңликден гөрнүши ялы n сан 8-е бөлүнйәр.

280. Эгер гөзленилйән сан жүбүт болса, онда шол саны $2n$ билен эгер-де тәк болса, онда $2n+1$ билен белгилэлиң. Онда меселәниң шертине гөрә ашакдакылары аларыс:

$$\frac{n^2}{50}=2n \quad \text{я-да} \quad \frac{n^2}{50}=2n+1$$

Биринжи деңликден $n=100$, онда $2n=200$. Икинжи деңлигиң битин көки ёк.

Жогабы: $2n=200$.

271. $\angle CAD=90^o-\angle CDA$; $\angle BAH=90^o-\angle ABC$.

$\angle CDA=\angle BAH$.

Диймек, $\angle CAD=\angle BAH$.

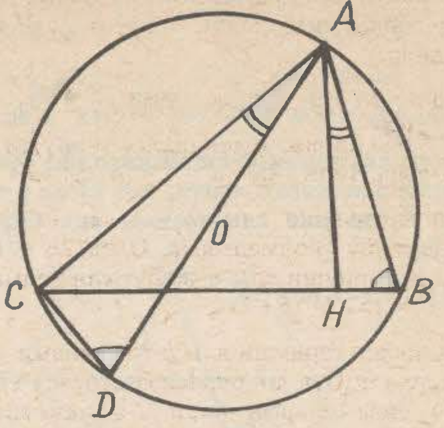
282. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)=$

$=a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)-c(b^3-c^3)+c(b^3-c^3)=$

$=(b^3-c^3)(a-c)+bc^3-ba^3+ca^3-cb^3+cb^3-c^4=$

$=(a-c)(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-c^3)=$

$=(a-c)(b^3-c^3)+(a^3-c^3)(c-b)=$



83-нжи сур.

$=(a-c)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-c^2)=$

$=(a-c)(b-c)(b^2+bc+a^2-bc)=$

$=(a-c)(b-c)(a+b+c)$.

283. Эгер көпелдижилериң бири 400 болуп, галанларының хер бири 1 дең болса, онда максимам жем алыняр. Шу халда жем $400+1+1+1+...+1=799$.

Эгер көпелдижилериң ичинде 1-ден тапавутлы ики саны a ве b көпелдижи бар дийип гуман этмек, онда көпелтмек хасылың 400 дең болмагы үчин иң улы көпелдижи 200-ден улы болмалы дәлдир. Шейлеликде, көпелдижилериң жеми болса азаляр.

Жогабы: 799.

284. $2^{1982}+1=2^{1982}+2\cdot 2^{991}+1-2^{992}=$

$=(2^{991})^2+2\cdot 2^{991}+1-2^{992}=(2^{991}+1)^2-(2^{496})^2=$

$=(2^{991}+1+(2^{496})(2^{991}+1-2^{496})$

285. $(x-y)(x^2+xy+y^2)=1\cdot 999=3\cdot 333=9\cdot 111=27\cdot 37$

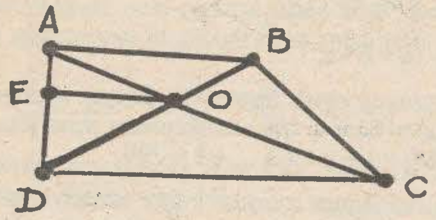
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=999 \end{cases} \text{я-да} \begin{cases} x-y=3 \\ x^2+xy+y^2=333 \end{cases}$$

$$\text{я-да} \begin{cases} x-y=9 \\ x^2+xy+y^2=111 \end{cases} \quad \text{я-да} \begin{cases} x-y=27 \\ x^2+xy+y^2=37 \end{cases}.$$

Алнан дөрт системаның биринҗисиниң битин көклери ёк. Икинҗи деңлемәни чөпүп, $x = 12$ ве $y = 9$ бахалары тапярыс. Галан ики системаның хич бириниң битин көклери ёк.

Җ о г а б ы : $x = 12$ ве $y = 9$.

286.



84-нҗи сур.

$OE = x$

$\triangle DOE \sim \triangle DAB$, онда $\dfrac{x}{3} = \dfrac{DE}{DA}$

$\triangle DOE \sim \triangle ADC$, онда $\dfrac{x}{5} = \dfrac{AE}{AD}$;

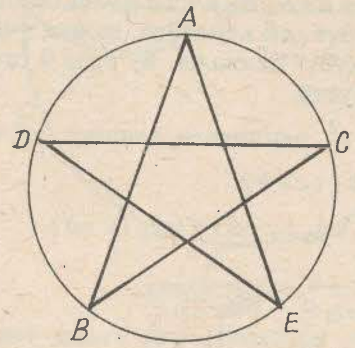
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{DE}{DA} + \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$$

$$\frac{5x+3x}{15} = 1; \quad x = \frac{15}{8} \text{ (см)}$$

287 (9).

$BF = a\sin 18^o$; $AF = a\cos 18^o$; $KO_2 = AK \sin 18^o$;

$AO_2 = AK \cos 18^o$; $(AK = DK)$



85-нҗи сур.

$2AK + 2AK \sin 18^o = a$;

$$AK = \frac{a}{2(1+\sin 18^o)}; \quad AO_2 = \frac{a}{2(1+\sin 18^o)} \cdot \cos 18^o;$$

$$KO_2 = \frac{a}{2(1+\sin 18^o)} \cdot \sin 18^o;$$

$$BO_1 = AK = \frac{a}{2(1+\sin 18^o)};$$

$$O_1F = BO_1 \sin 36^o = \frac{a}{2(1+\sin 18^o)} \sin 36^o;$$

$$S = S_{BECD} + S_{DAC} - 5S_{BO_1E}$$

288 (9). Тагтада язылан санларың җеми җүбүт сан. Хакыкатдан-да

$$\frac{1+1983}{2}\ 1983 = 992 \cdot 1983 \text{ - җүбүт сан.}$$

Хер бир операциядан соң алнан санларың җеми җүбүт боляр. Хакыкатдан-да, биринҗи җемден $(a + b)$ айрылып, оңа $(a - b)$ сан гошуляр, ягны башдакы җеме

$(a - b) - (a + b) = a - b - a - b = 2\,b$ җүбүт сан гошуляр. Хер гезекде җем җүбүт сан кемелйәр, шонуң үчин иң соңкы еке галан сан җүбүт болмалы. Бу ерде 0 сан хем җүбүт санын орнуны тутяр.

289 (10). $a^2 + b^2 = c^2$ деңликден, аларыс: $a^2 = c^2 - b^2$

я-да $a^2 = (c + b)(c - b)$

я-да $2 \log_a a = \log_a (c + b) + \log_a (c - b)$

я-да $2 = \dfrac{1}{\log_{(c+b)} a} + \dfrac{1}{\log_{(c-b)} a}$,

бу ерден

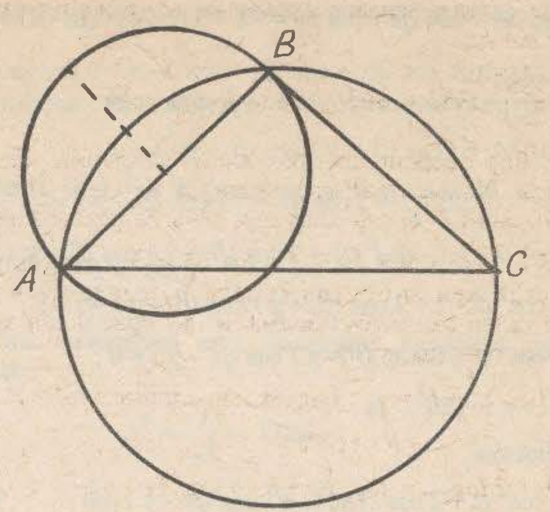
$$\log_{(c+b)} a + \log_{(c-b)} a = 2 \log_{(c+b)} a \cdot \log_{(c-b)} a .$$

290 (10). Берлен нокатларың ичинден иң голай ятан ики нокады сайлап алалың. Гой, олар A ве B нокатлар болсун (86-нҗы сур).

A ве B нокатлар аркалы иң кичи радиуслы төверек гечирелиң.

Инди ABC бурч иң улы болар ялы эдип, шейле бир C нокады сайлап алалың. ACB бурчуң йити бурч болҗакдыгы айдыңдыр, чүнки шол бурч күтек болса, онда AB аралык иң кичи болмазды. ABC үчбурчлугың дашындан төверек чызалың. Инди берлен нокатларың кәбири, меселем, M нокат тегелегиң ичинде ятыр дийип гүман эделиң.

а) Гой, M билен C нокат бир сегментиң ичинде ятсынлар. Онда $\angle AMB > \angle ACB$ болар, бу болса C нокадың сайланып алнышына гаршыдыр.



86-нҗы сур.

б) M нокат башга бир сегментде ятяр дийип гүман эделиң, онда AMB бурч күтек бурч болар, бу болса, ене-де C нокадың сайланып алнышына гаршыдыр. Диймек, төверегиң ичинде шейле нокат ёк. Эмма велин, төверегиң үстүнде болмагы мүмкин.

291 (10). Гой, $\alpha = 90^\circ$ болсун. Шу халда

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$

деңлиги субут этмели.

$\cos 180^\circ + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 + \cos 2\beta + 2\cos 2\gamma =$

$= -1 + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma)$, эмма $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Шонуң үчин $\beta + \gamma = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Диймек,

$-1 + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = -1 + 2\cos 90^\circ \cos(\beta - \gamma)$

Шейлеликде,

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 + 2\cos 90^\circ \cos(\beta - \gamma) = -1$.

Инди гой, $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ болун. Шу халда үчбурчлугың гөнүбурчлудыгыны субут эделиң.

$\cos 2\alpha + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = -1$;

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = -1$.

$\cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = -1$.

$2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = -1$;

$2\cos^2\alpha + 2\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = 0$;

$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$.

Диймек,

$2\cos^2\alpha + 2\cos(180^\circ - \alpha)\cos(\beta - \gamma) = 0$;

$2\cos\alpha\,(\cos\alpha - \cos(\beta - \gamma)) = 0$;

$\cos\alpha = 0$; $\quad \alpha = 90^\circ$.

292. Меселәниң шертине гөрә:

$$\frac{a + x}{2} h_1 = \frac{S}{2} \quad \text{ве} \quad \frac{b + x}{2} h_2 = \frac{S}{2},$$

бу ерде x - гөзленилйән узынлык, S берлен трапецияның мейданы, h_1 ве h_2 кесилип алнан трапецияларың бейикликлеридир.

Инди $S = \frac{a + b}{2}(h_1 + h_2)$, $\frac{a + x}{2} h_1 = \frac{S}{2}$ ве $\frac{b + x}{2} h_2 = \frac{S}{2}$ деңликлерден гөзленилйән х-и тапарыс, ягны

$$h_1 = \frac{S}{a + x}, \quad h_2 = \frac{S}{b + x} \quad \text{ве} \quad S = \frac{a + 2}{2}\left(\frac{S}{a + x} + \frac{S}{b + x}\right)$$

я-да $1 = (a + b)\left(\frac{1}{a + x} + \frac{1}{b + x}\right)$,

бу ерде $x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$ я-да $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

293. Меселәниң шертинде берленлерден ашакдакыны аларыс:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = 7.$$

Бу ерден $x + \frac{1}{x} = 6$ я-да $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 36$

я-да $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$.

Ахыркы деңлигиң ики бөлегини квадрата гөтерип, аларыс:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 1154.$$

Инди

$\frac{x^4}{x^8 - x^4 + 1}$ аңлатманы шейле язалың $\frac{x^8 - x^4 + 1}{x^4}$.

Инди

$$\frac{x^8 - x^4 + 1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} - 1 = 1154 - 1 = 1153.$$

Диймек, $\frac{x^8 - x^4 + 1}{x^4} = 1153$, онда $\frac{x^4}{x^8 - x^4 + 1} = \frac{1}{1153}$.

294. Берлен системадакы икинҗи деңлемеден гөрнүши ялы z-тәк сандыр. Онда $z = 2m + 1$ билен беллесек, ашакдакыны аларыс:

$z^2 - 2y^2 = (2m + 1)^2 - 2y = 4m(m + 1) + 1 - 2y^2$,

$2m(m + 1) - y^2 = 0$. Диймек, y - жүбүт сандыр. Онда $y = 2^n$ билен беллесек, ве берлен системаның биринҗисини гөз өңүнде тутсак, x саның тәк сандыгы гөрүнер, ягны $x = 2l + 1$.

Инди

$$(2l+1)^2+y^5=(2l+1)^2+(2n)^5=4l^2+4l+1+32n^2=11\ ,$$

$$2l^2+2l+16n^2=5\ ,$$

бу болса мүмкин дәл, чүнки шу деңлигиң чеп бөлеги жүбүт сан, саг бөлеги болса тәк сандыр.

295. $33^{77}=33^{76}\cdot 33=(33^4)^{19}\cdot 33=(3^4\cdot 11^4)^{19}\cdot 33$

шу сан 3-лик билен гутаряр.

$77^{33}=77^{32}\cdot 77=(77^4)^8\cdot 77=(7^4\cdot 11^4)^8\cdot 77$

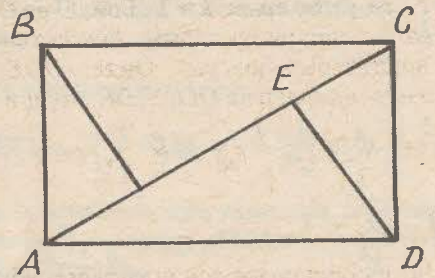
шу сан 7-лик билен гутаряр. Җем 0 билен гутаряр.

296. Меселәниң шертине гөрә $CE=EK=KA$

$$AD^2+CD^2=AC^2\ ;\quad DE^2+CE^2=CD^2\ ;\quad CE=\frac{AC}{3}\ .$$

$$DE^2+EA^2=AD^2\ ;\quad EA^2-CE^2=AD^2-CD^2\ ;$$

$$EA=2\cdot CE$$



87-нжи сур.

$$4CE^2-CE^2=AD^2-CD^2\ ;\qquad 3CE^2=AD^2-CD^2\ ;$$

$$3\cdot\frac{AC^2}{9}=AD^2-CD^2\ ;\quad \frac{AC^2}{3}=AD^2-CD^2\ ;$$

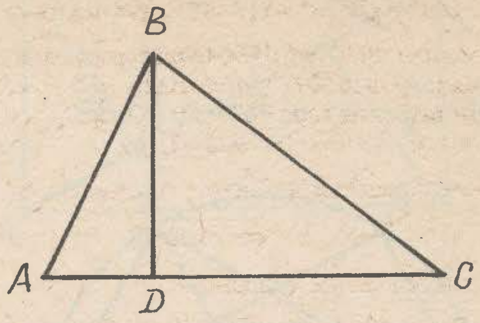
$$\frac{AD^2+CD^2}{3}=AD^2-CD^2\ ;\qquad 4CD^2=2\,AD^2\ ;$$

$$\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

297. Меселәниң шертине гөрә

$$AD=14{,}4\ ;\quad DC=25{,}6\ ;\quad AC=AD+DC=40\ ;$$

$$AB^2=AC\cdot AD\ ;\quad AB^2=40\cdot 14{,}4=122\cdot 22\ ;\quad AB=24\ .$$



88-нжи сур.

$$BC^2=AC\cdot CD=40\cdot 25{,}6=4\cdot 256=210\ ;\quad BC=32\ .$$

$$P=\frac{40+24+32}{2}=48\ ;\quad S_\Delta=\frac{24\cdot 32}{2}\ ;$$

$$r=\frac{S}{P}\ ;\quad r=\frac{24\cdot 16}{48}=8\ ;$$

$$S_{тег.}=\pi r^2=\pi\, 8^2=64\,\pi\ .$$

298. $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=$

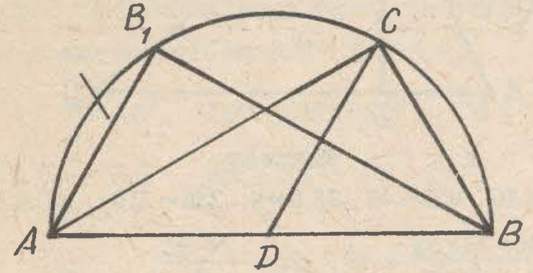
$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=$$

$$\frac{\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{2}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

299. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\angle B_1BA=\frac{\pi}{2}-2\alpha$



89-нжи сур.

AB_1B үчбурчлукдан

$$BB_1=AB\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=a\sin 2\alpha;$$

$$AB=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=a\cos 2\alpha;$$

$$S=\frac{1}{2}BB_1\cdot AB_1=\frac{a^2}{4}\sin 4\alpha.$$

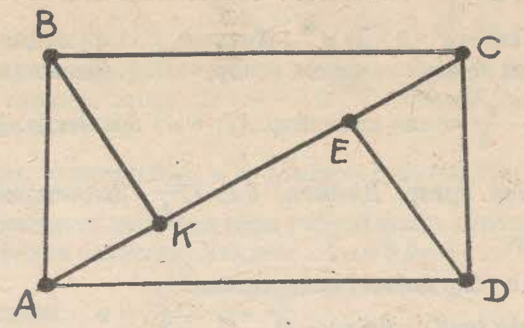
300. Меселәниң шертине гөрә $AD=a$; $BC=b$ ве $AB=CD$

$$KD=AL=\frac{a-b}{2};\quad CQ=CE;\quad DE=DF$$

Диймек, $CD=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$

$$AC^2=CK^2+AK^2;\quad CD^2=CK^2+KD^2;$$

$$AC^2-CD^2=AK^2-KD^2;$$



90-нжи сур.

$$AC^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=(AK+KD)(AK-KD)=$$

$$=AD\ (AK-KD)=ab;$$

$$AC^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=ab;$$

$$AC^2=ab+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{a^2+6ab+b^2}{4};$$

$$AC=\frac{\sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}.$$

301. $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=$

$$=\frac{1}{2}+2\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}+\cos 40^o+\cos 40^o=\frac{1}{2}.$$

302. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ билен белгиләлиң.

Инди $f'(x) = e^x(x-2)\,e^{-3}$. Диймек, $f(x)$ функция $(-0,0)$ аралыкда 0-дан ∞ ченли артяр, $(0;2]$ аралыкда болса $+\infty$-ден $-\dfrac{e^2}{4}$ ченли кемелйәр. $[2;+\infty)$ аралыкда $-\dfrac{e^2}{4}$-ден $+\infty$ ченли артяр. Диймек, $f(x) = \dfrac{e^x}{4}$ деңлемәниң ики көки бар.

303. $\lim \sin n$ бар диийп гүман эделиң.

Онда $(\sin(n+2) - \sin x) \to 0$.

Эмма велин, $\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1\cos(n+1)$,

бу ерден $n \to \infty$ боланда $\cos n \to 0$.

Инди $\sin 2n = 2\sin n\cos n \to 0$.

Диймек, $2\sin n \to 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = 0$ ве $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$,

бу болса мүмкин дәл, чүнки $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.

304. Гой, a-илки башдакы сан, b - үйтгедилен сан болсун ве $a + b = 10^{1984}$ болсун. a саның цифрлерини $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ билен, b саның цифрлерини болса $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ билен белләлиң. $a_n = 0$ деңлиги субут этмели.

$a_n \neq 0$ диийп гүман эделин.

Онда
$$a_n + b_n = 10$$
$$a_{n-1} + b_{n-1} = 9$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 + b_1 = 9 \qquad \text{аларыс.}$$

Бу ерден

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 10 + 9\,(n-1)$.

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ цифрлер $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ цифрлериң орун чалшырмалары боланы себәпли

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Шонуң үчин-де $10 + 9\,(n-1)$ сан жүбүт сан болуп, a сан тәк сандыр. Эмма $a + b = 10^{1984}$ боланы себәпли $n = 1984$.

Алнан гаршылык $a_n = 0$ деңлиги субут эдйәр.

305. Меселәниң шертине гөрә үчбурчлугың тарапларыны a, b, c билен беллесек, аларыс: $4a = 3b = 5c$.

Бу ерден $a = \dfrac{5c}{4}$, $b = \dfrac{5c}{3}$.

Үчбурчлукда $a^2 + b^2 = c^2$ гөнүбурчлы үчбурчлук аларыс. Эгер $a^2 + b^2 < c^2$ болса күтек бурчлы үчбурчлугы аларыс. Шу ерден

$$a^2 + b^2 = \frac{25c^2}{16} + \frac{25c^2}{9} = \frac{25c^2 \cdot 25}{16 \cdot 9};$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{25c}{12}\right)^2.$$

Шу ерде $a^2 + b^2 > c^2$. Диймек, шол үчбурчлук йити бурчлы үчбурчлукдыр.

306. $7^{19} = 7^{16} \cdot 7^3$

$7 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = \ldots 3$, $7^4 = \ldots 1$

Инди: $7^{16} = (7^4)^4 = (\ldots 1)^4 = \ldots 1$

$7^3 = \ldots 3$. Диймек, $7^{16} \cdot 7^3 = \ldots 3$

Шейлеликде, 7^{19} саның иң соңкы цифри 3 болмалыдыр.

307. $\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right) =$

$= 3 + \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 \pm \dfrac{3}{5} = \dfrac{-15+3}{-5} = \dfrac{12}{5}$.

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1x_2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}=$$

$$=-5+\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=-5+\frac{x_1^2+x_2^2}{-5}-\frac{1}{5}=$$

$$=-\frac{26}{5}+\frac{x_1^2+x_2^2}{5}.$$

Инди $x_1+x_2=3$ деңликден аларыс:

$$x_1^2+x_2^2=9-2x_1x_2=9-2(-5)=19.$$

Диймек, $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=\frac{12}{5}$

ве $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=\frac{-26}{5}-\frac{19}{5}=-9.$

Шейлеликде, гөзленилйән квадрат деңлеме:

$y^2-\frac{12}{5}y-9=0$ я-да $5y^2-12y-45=0$ болар.

308. Меселәниң шертине гөрә

$AC=5$; $CK=h=4$; $AC\perp BD$

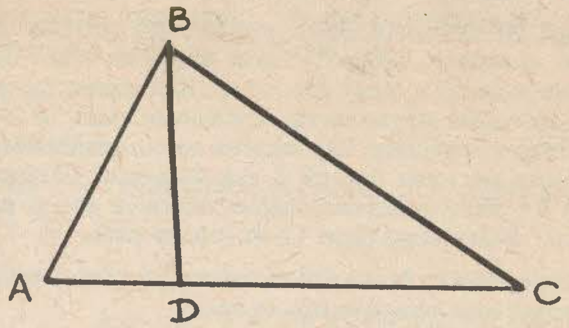
$CE \parallel AD$ эдип гечирсек, онда ACE гөнүбурчлы үчбурчлук аларыс. Диймек, ACK үчбурчлукдан $AK=3$ тапарыс. Инди $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AK}$ деңлиги аларыс. Шу ерден

$AE=\frac{AC^2}{AK}$ я-да $AE=\frac{5^2}{3}=\frac{25}{3}$ аларыс.

Гөзленилйән мейдан:

$$S=\frac{AD+BC}{2}CK=\frac{AE}{2}CK=\frac{25}{3}\cdot\frac{4}{2}=\frac{50}{3}.$$

309. Берлен деңсизлиги шейле язярыс:



91-нжи сур.

$$\frac{x_1^2}{4}-x_1x_2+x_2^2+\frac{x_1^2}{4}-x_1x_3+x_3^2+\frac{x_1^2}{4}-x_1x_4+x_4^2+$$

$$+\frac{x_1^2}{4}-x_1x_5+x_5^2=$$

$$=\left(\frac{x_1}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{x_1}{4}-x_3\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_4\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_5\right)^2.$$

310. $14+13+12+\ldots+1=\frac{1+14}{2}\cdot 14=15\cdot 7.$

Инди, эгер A оюнчы B-ны утан болса, онда стрелканы A-дан B тарап угрукдыралың. Онда стрелкаларың саны $15\cdot 8$ болар. Бу болса эхли кесимлериң санындан көп (оларың саны $15\cdot 7$). Шейлеликде, иң болманда онуң үстүнде ики угры гөркезйән, мысал үчин A-дан B тарап ве B-дан A тарап, бир кесимиң барлыгы шу ерден гелип чыкяр.

312. Сагатларың гөркезйән вагтларының тапавуды бир сутқада $8+4=12$ минут артяр. Шонуң үчин сагатларың

икисиниң-де гөркезйән вагты $\frac{24 \cdot 60}{12} = 120$ суткадан соң габат гелер.

Соңра 240 суткадан, 360 суткадан, 480 суткадан ве ш.м. габат гелерлер. 120 n суткада биринжи сагат $120 \cdot 8$ n минут я-да 16 n сагат өңе гидер. Шу моментде сагатларың икиси-де догры вагты гөркезмеги үчин 16 n сагады 24 бөлмек зерурдыр. Шу шертиң ерине етирилмеги үчин n саның иң кичи бахасы 3 дең болмалы. Шейлеликде, $120 \cdot 3 = 360$ суткада сагатларың икиси-де ене-де шол бир вагты, ягны гүндиз сагат 12-ни гөркезерлер.

313. Догулан йылы шейле беллэлиң: $\overline{1xyz}$. Онда меселэниң шертине гөрэ ашакдакыны аларыс:

$$1957 - \overline{1xyz} = 1 + x + y + z$$

я-да

$$1000 + 900 + 50 + 7 - 1000 - 100x - 10y - z = 1 + x + y + z ,$$

я-да $956 = 101x + 11y + 2z$, $x = \frac{956 - 11y - 2z}{101}$

я-да $x = 9 + \frac{47 - 11y - 2z}{101}$.

Меселэниң шертине гөрэ x битин положител сан, диймек, $\frac{47 - 11y - 2z}{101}$ дробуң бахасы нула деӊ болмалы. Шу шерти канагатландырян бахалар: $y = 3$, $z = 7$.

Диймек, догулан йылы 1937.

314. Гөзленилйэн үчбелгили саның ахыркы цифри едиден аз дэлдир, чүнки шол сан 3 сан артдырыланда онуң цифрлериниң жеми үч эссе азаляр. Гөзленилйэн саның илкинжи ики цифри докузлук болуп билмезлер, чүнки шу халда сан 3 сан артдырыланда онуң цифрлериниң жеми үч эсселен көп азалар. Инди шол саны xyz билен беллесек, онда $x < 9$, $y = 9$, $z > 6$ аларыс. Инди шу сан үчин меселэниң шерти ерине етирилсе, онда аларыс:

$$3 \cdot [(x + 1) + (z + 3 - 10)] = x + 9 + z$$

бу ерден $2x + 2z = 27$, шейле болуп билмез, чүнки ахыркы деңлигиң чеп бөлегиндэки сан җүбүт, саг бөлегиндэки болса тэк сандыр. Гой, $\overline{xyz}$ сан инди меселэниң шертини канагатландырян сан болсун, шунлукда $y < 9$, $z > 6$ болсун.

Онда $3 [x + (y + 1) + (z + 3 - 10)] = x + y + z$,

бу ерден .

Инди $x \geq 1$ деңсизлиги гөз өңүнде тутсак, онда аларыс:

117, 207, 108.

315. Шейле үчбурчлук бар дийип гүман эделиң. Шунлукда $h_1 = 1$; $h_2 = \sqrt{5}$; $h_3 = 1 + \sqrt{5}$ ве a_1 , a_2 , a_3 үчбурчлугың дегишлиликде бейикликлери ве тараплары болсун. Онда

$$a_1 = \frac{2S}{h_1}, \quad a_2 = \frac{2S}{h_2}, \quad a_3 = \frac{2S}{h_3}$$ болар.

Бу ерде S - үчбурчлугың мейданы.

Үчбурчлугың ики тарапының җеми үчүнҗи тарапындан улудыр, ягны:

$a_1 < a_2 + a_3$ я-да $\frac{2S}{h_1} < \frac{2S}{h_2} + \frac{2S}{h_3}$ я-да $\frac{1}{h_1} < \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$,

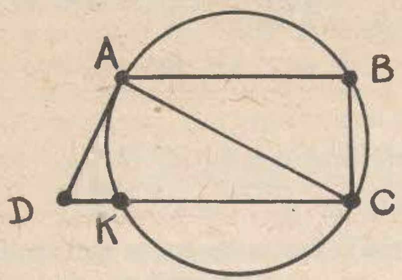
бу ерден $1 < \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{1 + \sqrt{5}}$ я-да

$1 < \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; $1 < \frac{4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{20}$; $25 < 9\sqrt{5}$

я-да $25^2 < 81 \cdot 5$; $625 < 405$ шейле болуп билмез.

Меселэниң шертини канагатландырян үчбурчлук ёк.

317. DAC бурч хорда билен галташаның арасындакы бурч боланы себэпли AKC дуганың ярысы билен өлчелйэр. Шонуң ялы ABC бурч-да шол дуганың ярысы билен өлчелйэр. Инди AK ве BC дугаларың деңлигини беллэп, аларыс:

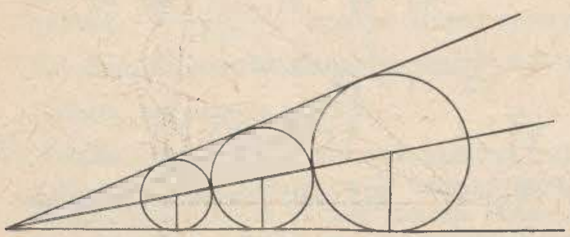


92-нжи сур.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD}; \quad AC = \sqrt{AB \cdot CD}\ ; \quad AC = \sqrt{ab}\ .$$

318. $BO_{k+1} = r_{k+1}$ ве $BO_k = r_k$ билен белләлиң.

Онда



93-нжи сур.

$$r_k = OO_k \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\ ; \quad r_{k+1} = r_k - r_k \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - r_{k+1} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\ ;$$

$$r_{k+1}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = r_k\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\ ;$$

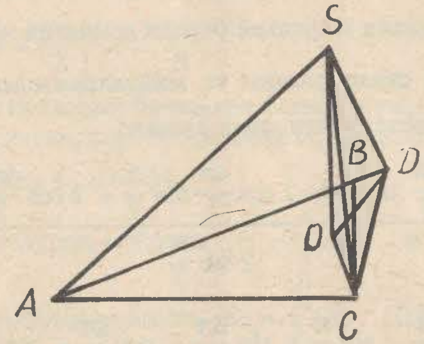
$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}\ .$$

Шейлеликде, радиуслар геометрик прогрессияны эмеле гетирйәрлер, шол прогрессияның майдалавҗысы $\dfrac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$ дендир.

319. Меселәниң шертине гөрә $SB = 7$, $SA = 25$, $SC = 20$.

$\angle\ DAC = 60^o$.

OS тапмалы. Чызгыдан гөрнүши ялы ASC гөнү-



94-нжи сур.

бурчлы үчбурчлукдан аларыс:

$AC^2 = AS^2 - SC^2$; $AC^2 = 25^2 - 20^2$; $AC = 15$.

ADC гөнүбурчлукда $\angle\ DAC = 60^o$, онда $\angle ADC = 30^o$.

Диймек, $AD = 2AC = 30$.

ABS гөнүбурчлы үчбурчлукдан аларыс:

$AB^2 = AC^2 - SB^2 = 25^2 - 7^2$; $AB = 24$.

ADC үчбурчлукдан

$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 30^2 - 15^2$; $CD = 15\sqrt{3}$.

$BD = AD - AB = 30 - 24 = 6$.

Инди $\Delta ADC \sim \Delta ODB$.

Онда $\frac{BD}{CD} = \frac{OB}{AC}$; $\frac{6}{15\sqrt{3}} = \frac{OB}{15}$,

$OB = \frac{15 \cdot 6}{15\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$; $OB = 2\sqrt{3}$.

OBS үчбурчлукдан,

$OS^2 + OB^2 = BS^2$; $OS^2 = 72 - 12 = 37$.

$OS = \sqrt{37}$.

320. Меселәниң шертинде берлен деңлигиң чеп бөлегиндәки дробуң санавҗысыны ве майдалавҗысыны $2\sin\frac{\pi}{7}$ аңлатма көпелделиң, онда аларыс:

$$\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\pi}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

321. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 1 - x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y \\ 1 - 2y + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

322. $(a+b)(a^3+b^3) - (a^2+b^2) \geq 0$;

$a^4 + ab^3 + a^3b + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 \geq 0$;

$ab(b^2 + a^2 - 2ab) \geq 0$;

$ab(a - b)^2 \geq 0$.

323. $2^{3a} \cdot 3^a \cdot 5^{2b} \cdot 3^{3c} \cdot 2^d \cdot 3^d \cdot 5^d =$

$= 2^{3a+d} \cdot 3^{a+3c+d} \cdot 5^{2b+d} = 1$.

$\begin{cases} 3a + d = 0 \\ a + 3c + d = 0 \\ 2b + d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} d = -3a \\ a + 3c - 3a = 0 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} d = -3a \\ 3c - 2a = 0 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases}$

Бу ерден $b = \frac{3a}{2}$; $c = \frac{2a}{3}$.

Инди b ве c санларың битин сан болмагы үчин, меселем, $a = 6$ дийип алсак, онда шейле бахалары тапарыс:

$a = 6$, $b = 9$, $c = 4$, $d = -18$.

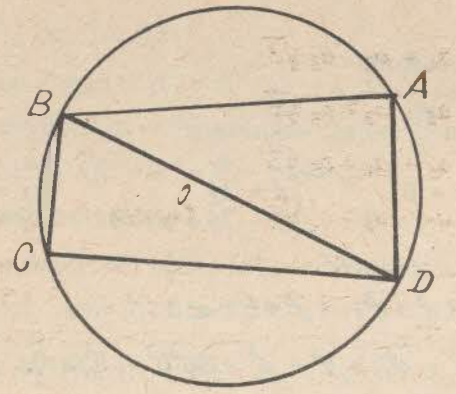
324. ABO үчбурчлугың мейданы $S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha$.

COD үчбурчлугың мейданы $S_2 = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\alpha$.

Диймек, $OB \cdot AO = OC \cdot OD$ я-да $\frac{AO}{OD} = \frac{OC}{OB}$ ве

$\angle BOC = \angle AOD$.

Диймек, AOD ве BOC үчбурчлуклар meңзешдирлер.



95-нжи сур.

325. Күштчилериң икисиниң топлан очколарының санының жеми битин сан болмалыдыр, ягны 1986 болмалыдыр. Диймек, оларың бири бейлекисинден ярым очко артык топлап билмез.

326. Берлен N нокат билен параллелограмың диагоналларының кесишме O нокады аркалы гечйән NOE гөни чызыгың шу параллелограмың мейданыны ики деңулулыкдыкы бөлеге бөлйәндигини субут эделиң.

Хакыкатдан-да $\triangle BOK = \triangle ODE$, чүнки $OB = OD$

ве $\angle BOK = \angle DOE$ ве $\angle OBK = \angle ODE$.

Шонуң ялы $\triangle OKC = \triangle AOE$, чүнки $\angle AOE = \angle KOC$, $\angle OCK = \angle OAD$ ве $OA = OC$. Шейлеликде, АВКЕ дөртбурчлук билен $CDEK$ дөртбурчлык деңулулыклыдырлар. Диймек, параллелограмың дашында ятан ислендик N нокат билен параллелограмың диагоналларының кесишме O нокады аркалы гечйән гөни чызык параллелограмың мейданыны дең ики бөлеге бөлйәр.

327. Терсине субут эделиң, ягны:

$$a_3 + a_1 > a_2\sqrt{3}$$

$$a_4 + a_2 > a_3\sqrt{3}$$

$$a_5 + a_3 > a_4\sqrt{3}$$

$$a_6 + a_4 > a_5\sqrt{3}$$

$$a_7 + a_5 > a_6\sqrt{3} \quad \text{болсун.}$$

$a_1 = 0$ боланы себәпли биринжи деңсизликден аларыс: $a_3 > a_2\sqrt{3}$. Шонуң үчин $a_4 + a_2 > a_3\sqrt{3} > 3a_2$, ягны $a_4 > 2a_2$. Шонуң $a_7 = 0$ ялы боланы себәпли бәшинжи деңсизликден тапарыс: $a_5 > a_6\sqrt{3}$, шонуң үчин

$a_6 + a_4 > a_5\sqrt{3} > 3a_6$, ягны $a_4 > a_2 + a_6$.

Диймек, $a_4 > a_2 + a_6$.

Икинжи тарапдан икинжи ве дөрдүнжи деңсизликлери гошуп ве үчүнжи деңсизлиги хасаба алып, ашакдакыны аларыс:

$$a_6 + 2a_4 + a_2 > (a_3 + a_5)\sqrt{3} > a_4\sqrt{3}\sqrt{3} = 3a_4,$$

ягны $a_6 + a_2 > a_4$. Гаршылык алынды.

328. Бири-бирине жүбүтме-жүбүт перпендикуляр болан гапыргалара середелиң. Кубуң шу гапыргаларының бириниң ики ужы-да гызылдыр, чүнки гаршылыклы халда кубуң гызыл депелериниң саны дөртден көп болмазды, бу болса меселәниң шертине гөрә мүмкин дәлдир. Инди бири-бирине параллел болан ики саны дөртлүге (дөрт гапырга) серетсек ене-де ики саны гызыл гапырга алынар.

Шейлеликде, гапыргаларың ики ужуның-да гызыл боланларының саны үчден аз дәлдир.

329. $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{x-1}$

Деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, аларыс:

$$x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} + x + 2\sqrt{x-1} =$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

я-да

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{(x-1)^2};$$

$$2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-1)^2};$$

$$2x + 2\,|x-2| = \frac{1}{(x-1)^2};$$

Эгер $x - 2 > 0$ болса

онда $\qquad 2x + 2 - 4 = \frac{1}{(x-1)^2};$

$$4(x-1) = \frac{1}{(x-1)^2};\ (x-1)^3 = \frac{1}{4};\ x - 1 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2};$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt[3]{2}}{2}.$$

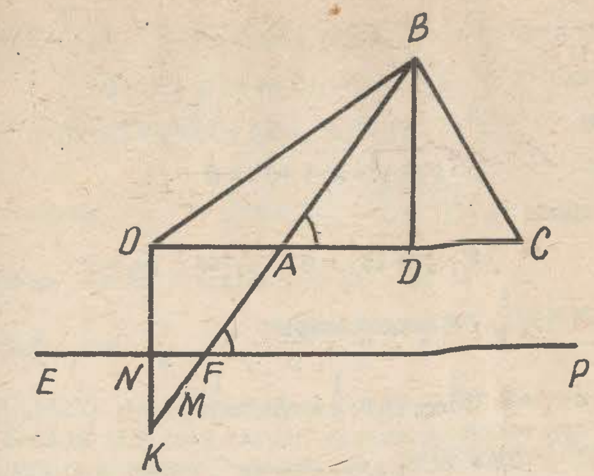
Эгер $x - 2 < 0$ болса, онда аларыс:

$$2x - 2x + 4 = \frac{1}{(x-1)^2};\quad (x-1)^2 = \frac{1}{4};\ x - 1 = \pm\frac{1}{2};$$

$$x = 1 + \pm\frac{1}{2};\quad x_2 = \frac{3}{2};\quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Меселәниң шертине гөрә $x - 1 = 0$, $\ x - 1 > 0$.

330. Гой, ABC үчбурчлугың A ве C депелеринде хем-де шол үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң O меркезинден гечйән төверек үчбурчлугың BC тарапына галташсын. $AO = OC = OC = R$ дашындан чызылан төверегиң радиусы. BC галташян билен OC кесижиниң арасындакы OCB бурч OC дуганың ярысы билен өлчелйәр. Төверегиң ичинден чызылан OAC бурч OC дуганың ярысы билен өлчелйәр. OA ве OC хордалар



96-нжы сур.

деңдирлер, диймек, AO ве OC дугалар-да деңдирлер. Онда OAC ве OCA бурчлар-да деңдирлер. Инди

$$\angle COB = \angle OCB \text{ ве } \angle OBA = \angle OAB.$$

Шейлеликде, $\angle BAC = \angle ABC$, ягны $AC = BC$, диймек, ABC деңянлы үчбурчлукдыр.

331. $(x-2)(y+2) \ge 0$

деңсизликден ашакдакылары аларыс:

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0; \\ y + 2 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge -2 \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} x - 2 \le 0; \\ y + 2 \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 2 \\ y \le -2 \end{cases}$$

Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян нокатлар көплүги суратдакы ялы шекиллендирилйәр.

332. $30x^3 - 31x^2 + 10x - 1 = 0$ деңлемеде $x = \frac{1}{y}$ билен беллесек, ашакдакыны аларыс:

$$y^3 - 10y^2 + 31y - 30 = 0.$$

Инди $\quad y^3 - 2y^2 - 8y^2 + 16y + 15y - 30 = 0.$

я-да $\quad y^2(y-2) - 8y(y-2) + 15(y-2) = 0$

я-да $\quad (y-2)(y^2 - 8y + 15) = 0.$

Бу ерден $\quad y_1 = 2.$

$$(y^2 - 8y + 15) = 0; \quad y_2 = 5; \quad y_3 = 3.$$

Инди $x = \frac{1}{y}$ деңликден аларыс:

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{5}; \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

333. $\sin^4 5x + \cos^4 5x =$

$= (\sin^2 5x + \cos^2 5x)^2 - 2\sin^2 5x \cos^2 5x =$

$= 1 - 2\sin^2 5x \cos^2 5x.$

Инди $\quad y = \dfrac{5\sin^2 10x}{1 - 2\sin^2 5x \cos^2 5x},$

я-да

$$y = \frac{10\sin^2 10x}{2 - 4\sin^2 5x \cos^2 5x}; \quad y = \frac{10\sin^2 10x}{2 - (2\sin 5x \cos 5x)^2};$$

$$y = \frac{10\sin^2 10x}{2 - 2\sin^2 10x} \quad \text{я-да} \quad y = \frac{10}{\dfrac{2}{\sin^2 10x} - 1};$$

y-иң иң улы бахасы $\sin^2 10x$ саның иң улы бахасында алыняр. Диймек, $\sin^2 10x = 1$ боланда $y = \dfrac{10}{\dfrac{2}{1} - 1} = 10$ болар.

334. $\displaystyle\int_0^x \cos(xu)\,du = \int_0^x \frac{1 + \cos(2xu)}{2}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x du + \frac{1}{2}\int_0^x \cos(2xu)\,du = \frac{1}{2}\Big|_0^x + \frac{1}{4}\sin xu\Big|_0^x =$$

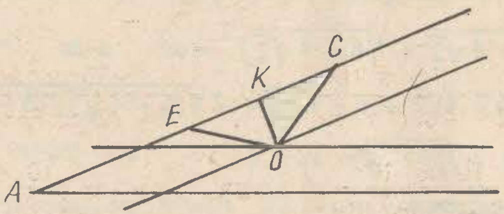
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4x}\sin 2x^2.$$

Диймек, $\quad \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4x}\sin 2x^2 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\cos 2x^2}{4x}$

я-да $\quad \sin 2x^2 = \cos 2x^2 \quad$ я-да $\quad \mathrm{tg}^2\, 2x^2 = 1;$

$$2x^2 = \pi k + \frac{\pi}{4}; \quad x^2 = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{4\pi k + \pi}{8}}.$$

335. $ABCD$ параллелограмың мейданыны дең ики бөлеге бөлйән MN гөни чызык параллелограмың диагоналларының кесишме O нокады аркалы гечмейәр дийип гүман эделиң. Инди O нокат аркалы MN гөни чызыга параллел KE гөни чызыгы гечирелиң. Онда белли болшы ялы шу гөни чызык $ABCD$ параллелограмың мейданы дең ики бөлеге бөлйәр. Диймек, параллелограмың диагонала-



97-нжи сур.

рының кесишме O нокады аркалы гечмейән MN гөни чызык параллелограмың мейданыны дең ики бөлеге бөлйәр дийип гүман этмек нәдогрыдыр. Шейлелик-де, параллелограмың мейданыны дең ики бөлеге бөлйән гөни чызыкларың хеммеси параллелограмың диагоналларының кесишме O нокады аркалы гечйәрлер.

336. Берлен ABC үчбурчлугың медианасыны довам эдип,

$ABCD$ параллелограм гурярыс. Онда алнан ABD ве BCD үчбурчлуклар деңдирлер (бир тарапы ве оңа сеплешйән ики бурчы боюнча). Диймек, $AB = BC$.

337. Огланларың бириниң яшыны x билен, бейлекисиниң яшыны y билен беллесек, онда ашакдакы деңлемәни аларыс:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+a}{y+a}.$$

Инди $xy - xa = xy + ya$, бу ерден $x = y$.

Ж о г а б ы : 1

338. Меселәниң шертине гөрә

$$100a + 10b + c = 11\ (a + b + c)$$

Инди $89\,a - b - 10\,c = 0$. Бу ерден

$b = 89\,a - 10\,c$. Меселәниң манысына гөрә a, b, c санлар бирбелгили санлар болмалы. Онда $c = 8$, $a = 1$ ве $b = 9$ аларыс.

339. Гой, $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = x$ болсун. Онда

$\left(\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\right)^2 = x^2$ я-да

$$x^2 = 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})} =$$

$$= 12 + 2\sqrt{36 - 32} = 12 + 4.$$

Диймек, $x = 4$.

Ж о г а б ы : рационал сан.

340 (9). Гой, $a = 10$, $b = 9$, $c = 4$ болсун. Онда

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

$$10^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot \cos A;$$

$$\cos A = \frac{81 + 16 - 100}{72} = \frac{-3}{72} = -\frac{1}{24}.$$

Диймек, $\cos A < 0$, онда A - күтек бурчдур.

342 (9). Ислендик йөнекей саның $6k \pm 1$ гөрнүшде языляндыгы беллидир.

Эгер $k = 2$ болса, онда 11 ве 13 ики саны ызыгидерли саны аларыс. Эгер $k = 3$ болса, онда 17 аларыс. Шейлеликде, алнан үч саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылы $11 \cdot 13 \cdot 17$ болар. Инди меселәниң шертине гөрә шол дөртбелгили саның чепден сага окалышы билен сагдан чепе окалышы бирмезңешдир. Онда шол дөртбелгили сан шейле язылар:

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b =$$

$$= 11\ (91a + 10b)$$

Оны көпелтмек хасылында, ягны $11 \cdot 13 \cdot 17$-де көпелдижилериң бири 11 дең, шу ердәки алнан 11 $(91\,a + 10b)$ санда-да көпелдижилериң бири 11 дең. Диймек, гөзленилйән сан $11 \cdot 13 \cdot 17 = 1221$.

Ж о г а б ы : 1221.

344 (9). Эгер $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ болса, онда субут этмели: $a_1 + a_2^2 + \ldots a_n^n < n\, a_1 a_2 \ldots a_n$.

Субуды.

$$a_1 \leq a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

$$a_2^2 \leq a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

$a_3^3 \leq a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, чүнки $a_3^2 \leq a_1 a_3$, онда $a_3^2 \leq a_1 a_2 a_3$

. . . .

$$a_n^n \leq a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

$$a_1 + a_2^2 + \ldots a_n^n \leq n\, a_1 a_2 \ldots a_n$$

345. $p > 3$ ве p йөнекей сан, онда $p + 1$ сан жүбүт сандыр. Диймек, $(p + 1)$ сан 2-э бөлүнйәр. Инди шол саның 3-е бөлүнйәндигини субут эделиң. Гой, $(p + 1)$ сан 3-е

бөлүнмейән сан болсун. Онда шол саны 3-е бөленимизде галындыда 1 я-да 2 галар. Эгер галынды-да 1 галса, онда $(p+1)-1=p$ сан 3-е бөлүнер. Эмма p йөнекей сан, шонуң үчин ол 3-е бөлүнмейәр. Эгер-де галынды-да 2 галса, онда $(p+1)+1=p+2$ сан 3-е бөлүнер. Эмма меселәниң шертине гөрә $(p+2)$ сан йөнекей сандыр, диймек, ол сан 3-е бөлүнмели дәлдир. Шейлеликде, $(p+1)$ сан 3-е бөлүнмейәр дийип гүман этмек догры дәл. Онда $(p+1)$ сан хем 2-ә хем-де 3-е, ягны 6 бөлүнйәр.

347. 1, 2, 3,..., 86, 87 ызыгидерликде 44 саны тәк сан болуп, 43 саны жүбүт сан бар. Шол 44 саны тәк санларың алгебраик жеми жүбүт сан болар. Шу жүбүт сан билен галан 43 саны жүбүт санның алгебраик жеми жүбүт сан болар. Шейлеликде, берлен ызыгидерлигиң членлериниң арасында "-" ве "+" аламатларыны гоюп 1987 саны алмак мүмкин дәлдир.

348 (10). ABC үчбурчлукда AD биссектриса боланы себәпли ашакдакыны аларыс:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{c}{b} \quad \text{я-да} \quad \frac{AD+DC}{DC}=\frac{b+c}{b} \quad \text{я-да} \quad \frac{a}{DC}=\frac{b+c}{b}.$$

Инди $\Delta ABC \sim \Delta ADC$, онда $\frac{c}{a}=\frac{a-DC}{b}$

(бу ерде $a-DC=a-AD$).

Инди $DC=\frac{ab}{b+c}$ ве $a-DC=\frac{bc}{a}$ я-да

$$DC=a-\frac{bc}{a}-\frac{a^2-bc}{a}.$$

Диймек, $\frac{ab}{b+c}-\frac{a^2-bc}{a}$ я-да $a^2b=a^2b+a^2c-b^2c-bc^2$ я-да $a^2c=b^2c+bc^2$, $a^2=b^2+bc$,

бу ерден $a=\sqrt{b^2+bc}$.

349 (10). Меселәниң шертине гөрә $a=5$, онда $52+b^2=c^2$ я-да $25=c^2-b^2$, $c+b=\frac{25}{c-b}$. Инди $(c+b)$ санның

битин сан боланы себәпли 25 сан $(c-b)$ сана бөлүнмели. Шу ягдай $c-b=1$ боланда мүмкиндир, чүнки $c-b=5$ болса, онда $(c+b)$ санда 5-е деӊ болар, шейле болмагы мүмкин дәл. Диймек, $c-b=1$, онда $c+b=25$, бу ерден $2c=26$ я-да $b=12$ аларыс. Шейлеликде, катети 5 деӊ болан диӊе бир гөнүбурчлы үчбурчлук бар (5; 12;13).

350 (8). Деңлемелериң хеммесини гошуп, аларыс:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=5960 \quad \text{я-да} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2980$$

$\frac{1}{x}+1988=2980$; $\frac{1}{x}=992$; $x=\frac{1}{992}$.

$\frac{1}{y}+1985=2980$; $\frac{1}{y}=995$; $y=\frac{1}{995}$.

$\frac{1}{z}+1987=2980$; $\frac{1}{z}=993$; $z=\frac{1}{993}$.

351 (8). Суратдан айдың гөрүнйәр: $CA_1=CB_1$; $C=90^0$.

Онда $B_1C=A_1C=O_1B_1=O_1A_1=r$. Инди $AB_1=AC_1$ ве $BA_1=BC_1$. Онда $AC+BC=2R+2r$.

352 (8). Ики күштчи 1988 дөв ойнан болсалар, онда оларың топлан очколарының саны 1988 болмалы. Шонуң үчин оларың бири бейлекисинден ярым очко артык топлап билмез.

353 (8). а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.

Галан членлериниң жеми отрицател сан. Шонуң үчин $A<\frac{5}{12}$

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{23}{30}$.

Эмма $A<\frac{24}{60}$ деңсизлиги субут этмели. Диймек, $A<\frac{2}{5}$.

354 (8). Гой, $ABCD$ дөртбурчлугың BC ве AD тарапларының орталара E ве F болсун. $EMFK$ дөртбурчлугың паралле-

лограмдыгыны субут этмек кын дәл. Хакыкатдан-да, $ABCD$ дөртбурчлугың AC диагоналыны гечирсек, онда $KE \parallel AC$ ве $KE = \frac{1}{2} AC$ болар. Шонуң ялы $MF \parallel AC$ ве $MF = \frac{1}{2} AC$ болар. Диймек, $KE \parallel MF$ ве $KE = MF$. Онда $EMFK$ параллелограмдыр. Шейлеликде, KM ве EF кесимлериң орталары габат гелйәрлер. Эмма KM кесимиң ортасы LN кесимиң ортасы биленде габат гелйәр, чүнки $KLMN$ - параллелограмдыр. Шейлеликде, EF ве LN кесимлериң орталары габат гелйәрлер. Шунуң шейле болмагы ики ягдайда мүмкин:

1) Эгер L билен E габат гелип, N билен F габат гелсе;

2) $ELFN$ дөртбурчлук параллелограм боланда, шонуң үчин $BC \parallel AD$ болмалы. Гаралан халларың ислендигинде-де $KLMN$ ве $EMFK$ параллелограмлар деңулулыкдадырлар. Инди $EMFK$ дөртбурчлугың мейданының $ABCD$ дөртбурчлугың мейданыны ярысына деңдигини субут эделиң. Шол максат билен $EM = \frac{1}{2} BD$, $MF = \frac{1}{2} AC$, $FK = \frac{1}{2} BD$ ве $KE = \frac{1}{2} AC$ болянлыгыны беллэлиң. Шу ерден гөрнүши ялы $EMFK$ параллелограмың мейданы $ABCD$ дөртбурчлугың мейданының ярысына деңдир.

355. $2^5 = 32$ ве $3^5 = 3125$ боланы себәпли шол цифр үч болуп билер. Башга цифрлериң болуп билмежегини субут эделиң. Гой, 2^n ве 5^n санлар a цифр билен башлансынлар ве дегишлиликде $s + 1$ ве $t + 1$ цифри болсун. Онда $n > 3$ боланда

$$a \cdot 10^s < 2n < (a+1) \cdot 10^s \quad \text{ве } a \cdot 10^t < 5^n < (a+1) \cdot 10^k .$$

Шу деңсизликлери көпелдип, аларыс:

$$a^2 \cdot 10^{s+t} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{s+t} \quad \text{я-да}$$

$$a^2 < 10^{n-s-t} < (a+1)^2 \quad .$$

Инди $1 \le a$ ве $a+1 \le 10$ деңсизликлерден ашакдакыны аларыс:

$n - s - t = 1$. Диймек, $a^2 < 10$ ве $(a+1)^2 > 10$. Эмма a - цифр боланы себәпли $a = 3$.

356. $$y = \frac{\sin^2 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\sin^2 2x}{1 - \frac{\sin^2 2x}{2}} = \frac{2\sin^2 2x}{2 - \sin^2 2x} =$$

$$= -2\frac{4}{2 - \sin^2 2x}; \quad y = -2 + \frac{4}{2 - \sin^2 2x}; \quad y \ge 0 .$$

$x = 0$ боланда $y = 0$. y - иң кичи бахасы 0

$\sin 2x = \pm 1$ боланда

$$y = -2 + \frac{4}{2-1} = 2; \quad y_{иңулы} = 2 .$$

357. $PC^2 = PK^2 + KC^2$

$PA^2 = PL^2 + AL^2$

$$PC^2 + PA^2 = PK^2 + KC^2 + PL^2 + AL^2 \qquad (1)$$

Инди

$PB^2 = PK^2 + KB^2$

$PD^2 = PL^2 + LD^2$

$$PB^2 + PD^2 = PK^2 + KB^2 + PL^2 + LD^2 \qquad (2)$$

$KC = LD$ ве $BK = AL$ деңликлери гөз өңүнде тутуп (1) ве (2) деңликлерден аларыс:

$PC^2 + PA^2 = PB^2 + PD^2$.

359. Гөзленилйән саны x билен беллэлиң.

Онда $\begin{cases} \frac{x}{2} = n^2 \\ \frac{x}{3} = m^3 \end{cases}$ аларыс.

Бу ерден $2n^2 = 3m^3$. Инди $n = 2\cdot 3^2$; $m = 2\cdot 3$ эдип алмак етерликдир. Онда $2n^2 = 2^3\cdot 3^4$; $3m^2 = 2^3\cdot 3^4$ болар.

Диймек, $x = 648$.

360. $\begin{cases} x_1x_2 = -\dfrac{28}{5} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{5} \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ системадан ашакдакыны тапарыс:

$x_2 = 4$ я-да $x_2 = -3\frac{1}{2}$,

$x_1 = -1\frac{2}{5}$ я-да $x_1 = 1\frac{3}{5}$.

Инди $b = -5\,(x_1 + x_2)$ боланы себәпли $b = -13$ я-да $b =$ $=9\frac{1}{2}$.

Ж о г а б ы: $b = -13$.

361. Гөзленилйән аралыгы x билен белләлиң. Онда тилкиниң гечен аралыгы $(x - 30)$ м боляр. Итиң ики гезек бөкенде гечен ёлуны, диймек, тилкиниң үч гезек бөкенде гечйән ёлуны бирлик хөкмүнде кабул эделиң. Онда вагт бирлигинде ит 4 м, тилки болса 3 м ёл гечер. Диймек, итиң ковалаян вагты $\frac{x}{4}$ дең болар, тилкиниң гачян вагты болса $\frac{x-30}{3}$ болар. Бу вагтлар деңдирлер, диймек, $\frac{x}{4} = \frac{x-30}{3}$, бу ерден $x = 120$м.

2-нҗи чөзүлиши. Ит ики бөкенде 4м, тилки болса 3 бөкенде 3 м аралыгы гечйәр. Онда шулар ялы ягдайы бир цикл дийип кабул этмек, бир циклде аралык 1 м азаляр. Диймек, ит $4\cdot 30 = 120$ м аралыгы гечер.

362. $PS \parallel CB$ ве $QR \parallel CA$ боланы себәпли PS ве QR гөни чызыклар кәбир M нокада кесишйәрлер.

$PCQM$ - параллелограмдыр, шонуң үчин

$\angle QPM = \angle CQP$.

PAB ве PQB бурчлар PB хорда даянярлар, оларың депелери болса PB-ден дүрли тарапда ятярлар. Шонуң үчин $\angle PAB + \angle PQB = 180^o$.

Икинҗи тарапдан CQP бурч PQB бурчы язгын бурча долдуряр, ягны $\angle CQP + \angle PQB = 180^o$.

Диймек, $\angle CQP = \angle PAB$.

CA билен QR параллел боланлары себәпли PAB ве QRS бурчлар деңдирлер.

Шейлеликде, $\angle QPC = \angle CQP = \angle PAB = \angle QRS$.

363. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2\,(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$,

бу ерден $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ я-да

$\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2 C = \sin^2(A + B) =$

$= \sin^2 A\cos^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B + \sin^2 B\cos^2 A$

Инди

$\cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A - \sin^2 A\cos^2 B =$

$= 2\sin A\cos B\sin B\cos A$;

$\cos^2 A\,(1 - \sin^2 B) + \cos^2 B\,(1 - \sin^2 A) =$

$= 2\sin A\cos B\sin B\cos A$ я-да

$2\cos^2 A\cos^2 B = 2\sin A\sin B\cos B\cos A$ я-да

$\cos A\cos B = \sin A\sin B$, бу ерден

$\cos A\cos B - \sin A\sin B = 0$ я-да

$\cos(A + B) = 0$; $A + B = 90^o$.

Диймек, $\angle C = 90^o$.

364. Меселәниң берлен шертиндәки деңсизликден аларыс:

$a^4 + ab^3 + a^3b + b^4 \geq a^4 + a^2b^2 + a^2b^2 + b^4$

я-да $a^3b + ab^3 \geq 2a^2b^2$ я-да $ab\,(a^2 + b^2) \geq 2a^2b^2$, бу ерден $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ я-да $(a-b)^2 \geq 0$.

365. $1 + (2-3) + (4-5) + (6-7) + ... + (994-995) +$
$+ (1989-1988) + (1987-1986) + ... + (997-996) = 1$

366. $a^6 + 1 = (a^2+1)(a^4 - a^2 + 1) = (a^2+1)\dfrac{a^5 - a^3 + a}{a} =$

$= (a^2+1)\dfrac{2}{a} = \left(a + \dfrac{1}{a}\right) \cdot 2 \geq 2 \cdot 2.$

Диймек, $a^6 > 3$.

367. $\Delta PKE = \Delta PLF$ (гөнүбурчлы үчбурчлукларың гипотенузалары ве йити бурчлары дең), онда $KE = LF$. Шейлеликде, ABC ве ACD үчбурчлукларың оларың умумы тарапына индерилен бейикликлери дегишлиликде $2KE$ ве $2LF$ ден, диймек, оларың мейданлары дең.

368. 1. $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмың мейданыны S_1 билен, $A_2B_2C_2D_2$ параллелограмың мейданыны S_2 билен белләлиң.

Инди AB_1BA_2 параллелограмың мейданыны S_3 билен, B_2BC_1C параллелограмың мейданыны S_4, C_2CD_1D параллелограмың мейданыны S_5, D_2DA_1A параллелограмың мейданыны S_6 билен беллесек, ашакдакыны аларыс:

$$S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = S_1 - S_2.$$

Инди $ABCD$ дөртбурчлугың мейданыны S_7 билен беллесек, онда

$$S_7 = S_1 - \frac{S_1 - S_2}{2} = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

Шейлеликде, гөзленилйән мейданы $S_7 = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$.

369. $x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $x = b\,\mathrm{tg}\,\beta$; $x = c\,\mathrm{tg}\,\gamma$

$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$; $\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma)$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,[90^\circ - (\beta+\gamma)] = \mathrm{ctg}\,(\beta+\gamma)$.

$$\mathrm{ctg}\,(\beta+\gamma) = \frac{1 - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma};$$

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha = a\frac{1 - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma} =$$

$$= a\frac{1 - \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{c}}{\frac{x}{b} + \frac{x}{c}} = a\frac{\frac{bc - x^2}{bc}}{\frac{xc + bx}{bc}} = a\frac{bc - x^2}{x(b+c)};$$

$$x^2(b+c) = abc - ax^2;$$

$$x^2(a+b+c) = abc;$$

$$x = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

370. Гой, меселәниң шертиндәки үчбелгили сан $\overline{abc}$ болсун. Онда

$\overline{abcabc} = 100000a + 10000b + 10000c + 100a + 10b + c =$

$= 100100a + 10010b + 1001c = 1001\,(100a + 10b + c) =$

$= 11 \cdot 13 \cdot 17\,(100a + 10b + c)$

Диймек, алнан алтыбелгили сан 11, 13 ве 17 бөлүнйәр. Инди $1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$.

Шейлеликде, $\overline{abcabc}$ сан билен 1989 саның иң улы бөлүҗиси 17 болар.

371. Бош галан өйҗүклериң саны 9-дан аз дәлдир. Хакыкатдан-да, гоңшы вертикал дик өйҗүкле дүрли реңкде болар ялы эдип тагтаның вертикал өйҗүклерини ак ве гара реңклер билен реңкләлиң.

Гой, чепден биринҗи вертикал ак реңкде болсун. Онда җеми ак реңкли өйҗүклериң саны $9 \cdot 5 = 45$ болар, гара реңкдәкилериң саны болса $9 \cdot 4 = 36$ болар.

Гара өйҗүкдәки томзак сигналдан соң ак реңкли өйҗүге гечер, ак реңкли өйҗүкдәки томзак болса гара реңкли өйҗүге гечер. Диймек, гара өйҗүкдәки 36 томзак ак өйжүк геченлеринден соң азындан 45 - 36 = 9 өйжүк бош галжак.

372. $\dfrac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x$ субут этмели.

$3x > 4 \sin x - \sin x \cos x$ я-да $3x - 4 \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x > 0.$

$f(x) = 3x - 4 \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$;

$f'(x) = 3 - 4 \cos x - \cos 2x = 2 - 4 \cos x + 1 - \cos 2x =$
$= 2 - 4 \cos x + 2 \cos^2 x = 2(1 - 2\cos x + \cos^2 x) =$
$= 2(1 - \cos x)^2.$

$f'(x) = 2(1 - \cos x)^2.$

Шу аңлатма $0 < x < \frac{\pi}{2}$ боланда положител баха эдир.

Диймек, $(0; \frac{\pi}{2})$ интервалда функция $f(x)$ артяр, шонуң үчин-де $f(x) > f(0) = 0$, ягны $0 < x < \frac{\pi}{2}$ боланда

$3x > 4 \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$ деңсизлик ерине етирилйәр.

373. $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 = 0$;
$(x^6 - 2x^3 + 1) + (x^4 - 2x^2 + 1) = 0$;
$(x^3 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 = 0.$

Иң соңкы деңлигиң чеп бөлегиндәки гошулыжыларың хер бири нула дең болмалы, ягны $x^3 - 1 = 0$ ве $x - 1 = 0$.

Бу ерден $x = 1$.

375. Гөнүбурчлук гөрнүшиндәки участогың бир тарапыны x болен беллесек, икинжи тарапы $\frac{216}{x}$ болар.

Инди меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлиги аларыс:

$S(x) = 216 - 4x = \left(\frac{216}{x} - 4\right) \cdot 6$;

$S'(x) = -4 + \frac{216 \cdot 6}{x^2}$; $S'(x) = 0$;

$-4x^2 + 216 \cdot 6 = 0$; $x^2 = 324$; $x = 18$.

Ж о г а б ы : 18 м ; 12 м.

376. $\dfrac{lg\,(2 \sin 15^o)}{lg\,(2 \cos 15^o)} = \dfrac{lg\,\dfrac{2 \sin 15^o \cos 15^o}{\cos 15^o}}{lg\,(2 \cos 15^o)} = \dfrac{lg\,\dfrac{\frac{1}{2}}{lg\,(\cos 15^o)}}{lg\,(2 \cos 15^o)} =$

$= \dfrac{lg\,\dfrac{1}{2 \cos 15^o}}{lg\,(2 \cos 15^o)} = \dfrac{lg\,(2 \cos 15^o)^{-1}}{lg\,(2 \cos 15^o)} = -\dfrac{lg\,(2 \cos 15^o)}{lg\,(2 \cos 15^o)} = -1$

377. В нокады меркез эдип, чызылан дуганың радиусы 1 см, O_1 нокады меркез эдип, чызылан дуганың радиусы-да 1 см дең (O_1MN үчбурчлугың гурлушына гөрә).

Эгер O_1B кесимиң узынлыгы 2-ден улы болса, онда яңкы агзалан дугалар кесишйәрлер. Шу ягдайда меселәниң шертини O_1MN фигура каннагатландырар.

Инди O_1B кесимиң узынлыгының 2-ден улудыгыны гөркезелиң.

$O_1F = OF - O_1O = \frac{2{,}15}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2{,}15 - \sqrt{2}}{2}$;

$O_1F = AQ$.

O_1QB гөнүбурчы үчбурчлукдан

$O_1B^2 = O_1Q^2 + (AB - AQ)^2 = 1 + \left(2{,}15 - \frac{2{,}15 - \sqrt{2}}{2}\right) > 2$

Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян фигураларың иң азындан 10 санысыны ерлешдирмек мүмкиндир.

378. $BC : AB : AD : DC = 7 : 15 : 20 : 24$ я-да $BC = 7x$;

$AB = 15x$; $AD = 20x$; $DC = 24x$.

Ашакдакыны гөрмек кын дәл:

$(7x)^2 + (24x)^2 = (20x)^2 + (15x)^2$ (98-нжи сур. сер.)

Шу деңликден BCD ве BDA бурчлурың гөни бурчдыгы гелип чыкяр. Онда BD диаметрдир. $BD = 25x$. Эмма меселәниң шертине гөрә $BD = 50$. Онда $25x = 50$, $x = 2$ см; $AD = 40$ см, $AB = 30$ см, $BC = 14$ см, $DC = 48$ см.

Призманың бейиклигини шейле хасаплаярыс:

$h^2 = 52^2 - 48^2$ я-да $h = \sqrt{4 \cdot 100} = 2 \cdot 10$; $h = 20$ см.

Призманың эсасының мейданы

$$S = 936 \text{ см}^2; \quad V = 936 \cdot 20 - 1872 \text{ см}^3.$$

379. $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)};$$

$$S = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

380. Гой, $n = 1$ болсун, онда $1 = \frac{1(2-1)(2+1)}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} = 1$

$n = k$ боланда деңлик догры дийип гүман эделиң, ягны $n = k$ боланда:

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Инди $n = k + 1$ боланда ёкардакы деңлигиң догрудыгыны субут эделиң, ягны:

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

$$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} =$$

$$= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3} =$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3)}{3} =$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2 + 2k + 3k + 3)}{3} =$$

$$= \frac{(2k+1)(2k(k+1) + 3(k+1))}{3} =$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3};$$

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

381. Гөзленйән үчбурчлугы гурмак үчин шейле үчбурчлугы гурярыс: $m_b + b$; a ве A бурч.

Чызгыда $BK = m_b + b$; $FM = MK$

$FM = FN$ болар ялы эдип гөни чызык гечирйәрис.

a радиуслы B нокады меркез эдип, дуганы чызярыс ве O нокады тапярыс. Инди $AD = AO$ өлчәп гойярыс. OBD гөзленилйән үчбурчлукдыр. NFK ве OAK үчбурчлукларың меңзешлигинден $AK = 2\,AO$ я-да $AK = AO - AD = b$. Онда $BK = m_b + b$. Инди ABC үчбурчлугы гурмак үчин $DC = AD$ кесими өлчәп гоймалы. C ве B нокатлары бирлешдирип, ABC үчбурчлугы аларыс.

382. Гой,

$$S_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \dots$$

$$S_n = \frac{1}{5}\left(2+\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5^3}\left(2+\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5^5}\left(2+\frac{3}{5}\right) + \dots$$

$$S_n = \left(2+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \dots\right);$$

$$\frac{S_n}{2+\frac{3}{5}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \dots$$

Соңкы деңлигиң саг бөлеги түкениксиз кичелйән геометрик прогрессия, онда:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \dots = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{24};$$

$$\frac{S_n}{\frac{13}{5}} = \frac{5}{24}; \quad S_n = \frac{\frac{13}{5}\cdot 5}{24} = \frac{13}{24}.$$

383. Берлен деңлемәни шейле язярыс:

$$\frac{x - 1 + 2}{x - 1} + \frac{x + 2 - 4}{x + 2} + \frac{x - 4 + 8}{x - 4} = 4$$

Инди

$$\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+2} - \frac{6}{x+3} + \frac{8}{x-4} = 0;$$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{8}{x-4} = \frac{4}{x+2} + \frac{6}{x+3};$$

$$\frac{10x - 16}{(x-1)(x-4)} = \frac{10x + 24}{(x+2)(x+3)}.$$

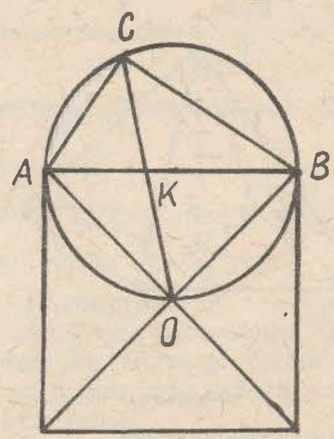
Шу деңлемәни чөзүп, $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{345}}{10}$ аларыс.

384. Меселәниң шертине гөрә OC ве EC кесимлер берлен. Онда

$$OK = \sqrt{OC^2 - CK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{EC^2}{4}}$$

Инди бурчуң AE тарапына OK аралыкда параллел гөни чызык гечирйәрис. Шонуң ялы эдип, бурчуң AD тарапына OL аралыкда параллел эдип гөни чызык гечирйәрис. Нетиҗеде, O нокады аларыс. O нокады меркез эдип, R радиуслы чызылан төверек гөзленилйән төверекдир.

385. $AOBC$ дөртбурчлугың гаршылыклы бурчларының җеми



98-нҗи сур.

180°. Диймек, шол дөртбурчлугың дашындан төверек чызмак мүмкиндир. Шол төверекдәки AO ве BO хордаларда деңдирлер. Онда олара дегишли дугаларда деңдирлер. Башгача айданымызда ACO ве OCB бурчлар деңдирлер, чүнки олар дең дугалара даянярлар. Шейлеликде, CK кесим C бурчуң биссектрисасыдыр.

Онда $\frac{BC}{AC} = \frac{BK}{KA}$ я-да $\frac{BK}{KA} = \frac{4}{3}$.

Шейлеликде, $BK = 4x$ ве $KA = 3x$.

Инди $BC^2 + AC^2 = AB^2$, я-да $43 + 32 = (7x)^2$;

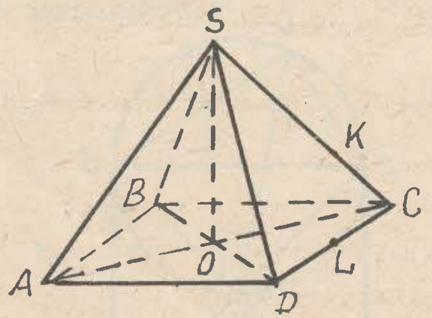
$x^2 = \frac{25}{49}$; $x = \frac{5}{7}$.

Диймек, $BK = \frac{20}{7}$; $KA = \frac{15}{7}$.

386. Гой, $DL = x$ болсун. Онда $OD = x\sqrt{2}$.

OKD үчбурчлукдан аларыс: $OD^2 + OK^2 = KD^2$.

Инди $2x^2 + \left(\frac{KD}{2}\right)^2 = KD^2$; $KD^2 = \frac{8x^2}{3}$.



99-нжи сур.

DKC гөнүбурчлы үчбурчлукдан

$KC^2 = (2x)^2 - \frac{8x^2}{3}$ я-да $KC^2 = \frac{4x^2}{3}$; $KC = \frac{2x}{\sqrt{3}}$.

Инди DSK гөнүбурчлы үчбурчлукдан аларыс:

$SD^2 = SK^2 + DK^2$ я-да $SD^2 = (SC - KC) + \frac{8x^2}{3}$.

$$SD^2 = \left(SC - \frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8x^2}{3}.$$

Шу ерден $S = x\sqrt{3}$ аларыс.

OSD гөнүбурчлы үчбурчлукдан $SD^2 = OD^2 + OS^2$

я-да $(x\sqrt{3})^2 = (DL + OL)^2 + H^2$

я-да $3x^2 = x^2 + x^2 + H^2$; $H = x$.

Диймек, $DL = OL = OS$. Инди OSD үчбурчлукдан $OS^2 + OL^2 = SL^2$ я-да $2OL^2 = SL^2$ я-да $SL^2 = 2x^2$ бу ерден $SL = x\sqrt{2}$. DSC үчбурчлугың S_1 мейданы деңдир:

$S_1 = \frac{1}{2} DC \cdot SL = \frac{1}{2} 2x \cdot x\sqrt{2}$; $S_1 = x^2\sqrt{2}$.

Меселәниң шертине гөрә $\frac{18\sqrt{2}}{4} = x^2\sqrt{2}$; $x^2 = \frac{9}{2}$.

Пирамиданың әсасының мейданы $S_2 = 4x^2 = 4 \cdot \frac{9}{2}$.

Җогабы: 18 см^3.

388. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$;

$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$;

Бу ерден гөрнүши ялы $n^3 - n$ үч саны ызыгидерли санларың көпелтмек хасылыдыр. Онда шол үч саның бири хөкман 3-е бөлүнер. Ондан башга-да үч саны ызыгидер- ли саның бири җүбүтдир. Шейлеликде, $n^3 - n$ сан $3 \cdot 2 = 6$ бөлүнйәр.

389. Берлен көпелтмек хасылы шейле язмак мүмкин:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \ldots 3^{\frac{1}{2^n}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

Шу дережәниң дереҗе гөркезиҗиси кемелйән геометрик прогрессиядыр. Онда

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Диймек, көпелтмек хасылы дендир $3^{1-\frac{1}{2^n}}$.

390. $N = 32^{\frac{2}{2}\log_{32}125}$

$$\log_{32}N = \frac{2}{3}\log_{32}125 \cdot \log_{32}32 = \frac{2}{3}\log_{32}125 = \log_{32}125^{\frac{2}{3}}$$

$$N = 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25\,; \quad 32^{\frac{3}{2}\log_{32}125} = 25\,.$$

391. Гой, $S_n = 1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$ болсун. Онда

$$S_n\, x = x + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \ldots$$

$$S_n - S_n\, x = 1 - x + 2x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

$$S_n - S_n\, x + 2x - x^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

Меселәниң шертине гөрә $0 < x < 1$ боланы себәпли ахыркы деңлигиң саг бөлеги түкениксиз кемелйән геометрик прогрессиядыр. Онда

$$S_n - S_n\, x + 2x - x^2 = \frac{1}{1-x}\,;$$

$$S_n\,(1 - x) = \frac{1}{1-x} + x^2 - 2x\,;$$

$$S_n = \frac{1 - 2x + x^2 + x^3}{(1-x)^2}.$$

392. Берлен системаның биринҗи деңлемесиниң ики бөлегини-де 8-е, икинҗисини 19 көпелдип, соңра олары гошуп, аларыс:

$$46x^2 + 43\,xy - 33\,y^2 = 0\,.$$

Инди шу деңлигиң ики бөлегини-де x^2 бөлүп ($x \neq 0$) аларыс:

$$33 \cdot \frac{y^2}{x^2} - 43\,\frac{y}{x} - 46 = 0\,.$$

Инди $\frac{y}{x} = z$ билен белләп, аларыс:

$$32\,z^2 - 4z - 46 = 0\,; \qquad z_1 = 2\,.$$

Инди $\frac{y}{x} = 2$; $y = 2x$. Шу бахаены берлен системаның биринҗи деңлемесине гоюп, аларыс:

$$x^2 - 3x \cdot 2x + 3\,(2x)^2 = 19\,; \quad 19x^2 = 19\,;$$

$$x = \pm\,1\,; \quad y = \pm\,2\,.$$

393. $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$

Соңкы дробуң санавҗысында үч көпелдиҗиниң бири 3-е бөлүнйәр, бейлекиси 2-ә бөлүнйәр. Диймек, шол дробуң санавҗысы 6-а бөлүнйәр. Онда $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ сан битин сандыр.

394. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$

$= (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) =$

$= (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) =$

$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

Эмма $x_1 + x_2 = -p$ ве $x_1\, x_2 = q$.

Диймек,

$$x_1^3 + x_2^3 = (-p)^3 - 3q(-p) = -p^3 + 3pq;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3.$$

395. Меселәниң шертине гөрә ABC ве $A_1B_1C_1$ үчбурчлукларда:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{C_1^2}{C_2^2}.$$

Инди

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1b_1}{\frac{1}{2}a_2b_2} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2}; \qquad \frac{C_1^2}{C_2^2} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2};$$

$$\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2}; \qquad a_1b_1 = (a_2^2 + b_2^2) = a_2b_2(a_1^2 + b_1^2)$$

$$a_1b_1(a_2^2 + b_2^2) - a_2b_2(a_1^2 + b_1^2) = 0$$

Бу ерден аларыс:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1b_2 - a_1a_2) = 0; \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0;$$

$$b_1b_2 - a_1a_2 = 0; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Диймек, ABC ве $A_1B_1C_1$ үчбурчлуклар меңзешдирлер.

396. Гой, икинҗи гапдакы спиртиң мукдары x болсун. Биринҗи гапдакы спиртиң үстүнде сув гуйландан соңра алнан гарындыларың бир литринде $\frac{x}{30}$ (бөлек) спирт ве $\left(1 - \frac{x}{30}\right)$ сув бар. Биринҗи гапдан икинҗи габа гарынды гуйландан соңра шол ерде $\left(30 - x + \frac{x}{30} \cdot x\right)$ литр

спирт ве $\left(1 - \frac{x}{30}\right)$ x литр сув болар. Алнан гарындының бир литринде $\left(1 - \frac{x}{30} + \frac{x^2}{30}\right)$ литр спирт бар. Онда шу гарындының 12 литринде

$$12\left(1 - \frac{x}{30} + \frac{x^2}{30}\right)$$

литр спирт болар. Шейлеликде, иң соңунда биринҗи гапда

$$12\left(1 - \frac{x}{30} + \frac{x^2}{30}\right) + \frac{x}{30}(30 - x)$$

литр спирт бар, икинҗи гапда болса $18\left(1 - \frac{x}{30} + \frac{x^2}{30}\right)$ литр спирт бар. Меселәниң шертине гөрә

$$18\left(1 - \frac{x}{30} + \frac{x^2}{30}\right) + 2 = 12\left(1 - \frac{x}{30} + \frac{x^2}{30}\right) + x - \frac{x^3}{30}$$

Шу ерден ашакдакы деңлемәни аларыс:

$$x^2 - 30x + 200 = 0; \qquad x_1 = 20; \quad x_2 = 10$$

Диймек, биринҗи гапда 20 литр спирт, икинҗи гапда 10 литр спирт бар.

397. Гой, плот буксир билен x сагатда көлден гечен болсун.

Эгер $17\frac{1}{18}$ сутка я-да 411 сагат плотларың A-дан B ченли гечен вагты болса, онда $(411 - x)$ плотларың A-дан С ченли вагты болар.

$\frac{AC}{411 - x}$ сувуң акыш тизлиши.

A-дан B ченли ёлы пароход буксирсиз 61 сагатда гечйәр, шунлукда C-дан B ченли аралыгы $\frac{x}{2}$ сагатда гечйәр. Онда

AC аралыгы ол $61 - \frac{x}{2}$ вагтда гечер, шунлукда онуң тизлиги шейле болар:

$$\frac{AC}{61 - \frac{x}{2}} \qquad (1)$$

Пароход ызына гайданда B-дан A ченли ёлы 79 сагатда гечйәр, BC ёлы $\frac{x}{2}$ вагтда гечйәр, онда ол AC ёлы $79 - \frac{x}{2}$ сагатда гечер ве онуң тизлиги:

$$\frac{AC}{79 - \frac{x}{2}} \qquad (2)$$

Эгер (1)-ден (2)-ни айырсак, онда деряның акыш тизлигиниң ики эссесини аларыс:

$$\frac{AC}{61 - \frac{x}{2}} - \frac{AC}{79 - \frac{x}{2}} = \frac{2AC}{411 - x}.$$

Бу ерден

$$x^2 - 244x + 4480 = 0$$

деңлемәни аларыс,

x_1 көк меселәниң шертини канагатландырмаяр, диймек, пароход плотлары көл боюнча 20 сагат алып барыпдыр.

398. $(7x + 3)^4 - (3x + 7)^4 = (6x - 2)^4 - (2x - 6)^4$;

$$\left[(7x + 3)^2 + (3x + 7)^2\right]\left[(7x + 3)^2 - (3x + 7)^2\right] =$$
$$= \left[(6x - 2)^2 + (2x - 6)^2\right]\left[(6x - 2)^2 - (2x - 6)^2\right];$$
$$(49x^2 + 42x + 9 + 9x^2 + 42x + 49)(10x + 10)(4x - 4) =$$
$$= (36x^2 - 24x + 4 + 4x^2 - 24x + 36)(8x - 8)(4x - 4);$$
$$(x^2 - 1) \cdot 40(58x^2 + 84x + 58) = 32(40x^2 - 48x + 40)(x^2 - 1);$$
$$5(x^2 - 1)(58x^2 + 84x + 58) - 4(x^2 - 1)(40x^2 - 48x + 40) = 0;$$

$$(x^2 - 1)(130x^2 + 612x + 130) = 0.$$

Бу ерден, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ве ш.м.

399. $BC = a$ кесими гурярыс. Соңра шу кесимден h_a узаклыкда ятан ве оңа параллел болан EF гөни чызыгы гечирйәрис. Инди шу ики гөни чызыкларың ортасындан олара параллел эдип, MN гөни чызыгы гурярыс. Соңра B нокады меркез эдип, m_b радиуслы дуга гечирйәрис, ол MN гөни чызыгы кәбир D нокатда кесер. Инди CD гөни чызыгы гечирип, гөзленилйән үчбурчлугың үчүнҗи A депесини аларыс.

400. Басганҗакларың биринҗисиниң үстүни япян халының узынлыгыны b билен, икинҗининкини c билен белләлиң. Биринҗиниң бир басганҗагының узынлыгы h_1, шол басганҗагың бейиклиги h_2. Икинҗиниң бир басганҗагының узынлыгы h_1' шол басганҗагың бейиклиги h_2' болсун. Инди

$$h_1 = \frac{a}{12};\quad h_2 = \frac{h}{12};\quad h_1 + h_2 = \frac{a + h}{12}.$$

$$b = 12(h_1 + h_2);\quad b = a + h;\quad h_1' = \frac{a}{18};\quad h_2' = \frac{h}{18};$$

$$h_1' + h_2' = \frac{a + h}{18};\quad c = a + h;\quad b = a + h;\quad b = c.$$

401. $a^5 - 5a^3 + 4a = a^5 - 4a^3 - a^3 + 4a =$

$$= a^3(a^2 - 4) - a(a^2 - 4) = (a^2 - 4)(a^3 - a) =$$
$$= a(a^2 - 1)(a + 2)(a - 2) = (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$$

Берлен аңлатма бәш саны ызыгидерли санларың көпелтмек хасылыдыр, диймек, оларың бири 5-е бөлүнйәр, бейлекиси 4-е, соңкысы 3 ве ондан соңкысы 2-ә бөлүнйәр. Башгача айданымызда шол аңлатма $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ сана бөлүнйәр.

402. $$\frac{\sqrt{(a + x)(x + b)} + \sqrt{(a - x)(x - b)}}{\sqrt{(a + x)(x + b)} - \sqrt{(a - x)(x - b)}} =$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}\right)^2}{\left(\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}\right)^2}=$$

$$=\frac{(a+x)(x+b)+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}+(a-x)(x-b)}{(a+x)(x+b)-(a-x)(x-b)}=$$

$$=\frac{ax+ab+x^2+bx+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}+ax-ab-x^2+bx}{ax+ab+x^2+bx-ax+ab+x^2-bx}=$$

$$=\frac{2\left[(a+b)x+\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}\right]}{2(ab+x^2)}=$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{(a^2-ab^2)(ab-b^2)}}{2(ab+ab)}=$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\sqrt{(a-b)(a-b)}}{2a\,b}=$$

$$=\frac{\sqrt{ab}\,(a+b+a-b)}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}\,2a}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}\,.$$

430. Биринҗи прогрессияның n-нҗи члениниң n-е дендиги, икинҗи прогрессияныңкы $2+3\,(n-1)=3\,n-1$ дендиги меселәниң шертинден гелип чыкяр, ягны:

$$a_{n_2}=3n-1\,,$$

$$a_{n_3}=5n-2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n_p}=(2p-1)\,n-p+1\,,$$

$$S_1=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}\,,$$

$$S_2=\frac{2+(3n-1)}{2}\cdot n=\frac{3n^2+n}{2}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_p=\frac{p+(2p-1)n-p+1}{2}\cdot n=\frac{(2p-1)n^2+n}{2}\,.$$

$$S=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_p$$

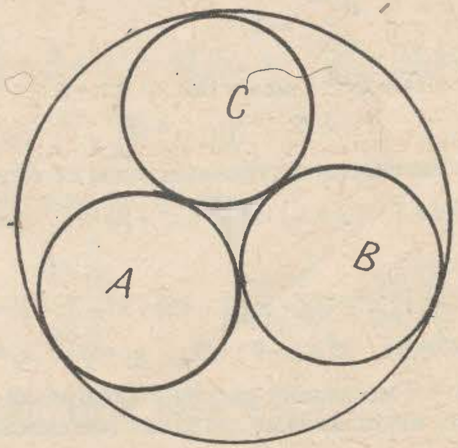
$$S=\frac{1}{2}\left[n^2+n+3n^2+n+5n^2+n+\ldots+(2p-1)n^2+n\right],$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(1+3+5+\ldots+(2p-1)\right)n^2+np\right],$$

$$S=\frac{1}{2}\left(n^2p^2+np\right)=\frac{1}{2}np\,(np+1)\,,$$

$$S==\frac{1}{2}np\,(np+1)\,.$$

404. Гөзленилйән мейданы S билен белләлиң. Онда шол мейданы тапмак үчин деӊ тараплы ABC үчбурчлугың



100-нҗи сур.

мейданындан Anm секторың мейданының үч эссесини айырмалы болар; ягны:

$$S = \frac{1}{4}(2r)^2\sqrt{3} - 3\frac{\pi r^2}{6} = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right),$$

бу ерде r - ичинден чызылан төверегиң радиусыдыр, ягны $2r = AB$.

$AB = BC = CA = OA\sqrt{3}$ эмма $AO = OD - AD = R - r$

$$OA^2 = r^2 + \left(\frac{OA}{2}\right)^2 \quad \text{я-да} \quad OA^2 = r^2 + \frac{OA^2}{4}$$

я-да $r = \dfrac{\sqrt{3}\cdot OA}{2}$.

Инди $r = \dfrac{\sqrt{3}\,(R-r)}{2}$ я-да $r = \dfrac{\sqrt{3}\,R}{2+\sqrt{3}} = R\,(2\sqrt{3} - 3)$;

$$S = 3R^2\,(7-4\sqrt{3})\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

405. $5^{0,2 - \sqrt[-3]{146 - \frac{\sqrt[3]{21}}{21^{-3}}}} = 5^{0,2 - \sqrt[-3]{146 - 21^{\frac{1}{2}}\cdot 21^{\frac{2}{3}}}} =$

$= 5^{0,2 - \sqrt[-3]{146-21}} = 5^{0,2 - \sqrt[-3]{125}} = 5^{0,2 - 5^{-1}} = 5^0 = 1.$

406. Гой, гөзленилйән системаның эсасы x болсун, онда:

$(3x^2 + 7x + 1)\,(x + 1) = 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ аларыс.

Инди

$3x^3 + 3x^2 + 7x^2 + 7x + x + 1 - 4x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

$-x^3 + 9x^2 = 0$; $x^2\,(x - 9) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 9$.

Диңе $x = 9$ меселәниң шертини канагатландыряр. Шейлеликде, хасапламаның докузлык системасы алынды.

407. $$\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \ge \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \ge$$

$$\ge \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\cdot\sqrt{a_3 a_4}} \ge \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

408. Биринҗи бейлекилериң төлән пулларының $\frac{1}{2}$ бөлегини төлейәр, диймек, ол төлемели пулуң хеммесиниң $\frac{1}{3}$ бөлегини төлейәр, икинҗи болса галанларың төлән пулуның $\frac{1}{3}$ бөлегини төлейәр, диймек, ол эхли төлемели пулуң $\frac{1}{4}$ бөлегини төлейәр, үчүнҗи доганы галанларың төлән пулларының $\frac{1}{4}$ бөлегини төлейәр, диймек, эхли төлемели пулуң $\frac{1}{5}$ бөлегини төлейәр. Дөрдүнҗи болса 45,5 манат төлейәр. Шейлеликде, телевизорың бахасыны x билен беллесек, ашакдакы деңлемәни аларыс:

$$x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5}\right) = 45,5; \quad x - \frac{47x}{60} = 45,5,$$

бу ерден $x = \dfrac{60\cdot 45,5}{13} = 210$.

Телевизорың бахасы 210 манат.

409. $$\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}} - \frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sec\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}; \quad \frac{\sin 54^o}{\operatorname{cosec} 30^o} - \frac{\sin 18^o}{\sec 60^o} = \frac{1}{4};$$

$\sin 54^o \sin 30^o - \sin 18^o \cos 60^o = \frac{1}{4}$;

$$\sin 54^\circ \frac{1}{2} - \sin 18^\circ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \qquad \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

410. Геометрик прогрессияларың членлерини шейле белгилэлиң:

Биринжи сетириң членлерини: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$;

Икинжи сетириң членлерини: $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$;

Үчүнжи сетириң членлерини: $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$;

Дөрдүнжи сетириң членлерини: $a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$,

бу ерде $a_{13} = 12$, $a_{21} = 144$, $a_{34} = 81$, $a_{42} = 288$.

Инди биринжи сүтүндэки геометрик прогрессияның майдалавжысы $12\, q^2$ болар. Хакыкатдан-да $a_{13} = a_{11}\, q^2 = 12$, бу ерден $a_{11} = \frac{12}{q^2}$.

Онда $144 = a_{11} x$; $x = 12\, q^2$, бейлеки сүтүнлер үчин-де шейле дегширмелери гечирип, гөзленилйэн прогрессиялары тапарыс.

411. Эмеле гелен фигураның үсти деңдир:

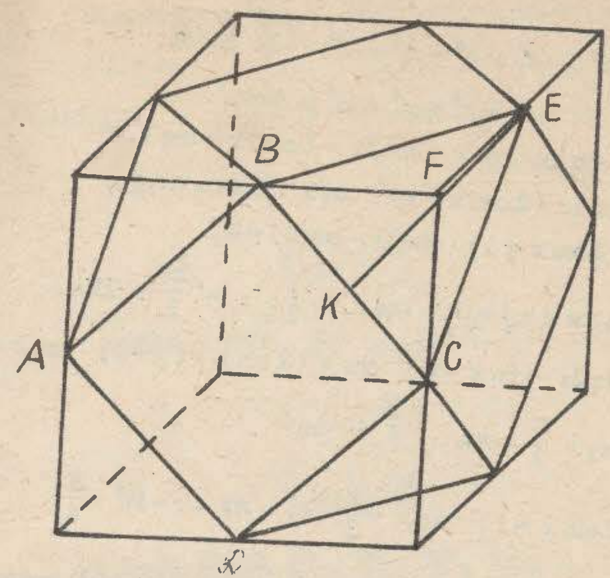
$$6\, S_{ABCD} + 8\, S_{BCE}.$$

$$S_{ABCD} = BC^2$$

Инди BCF гөнүбурчлы үчбурчлукдан аларыс:

$$BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}; \quad S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EK,$$

бу ерде ЕК кесим деңтараплы ВЕС үчбурчлугың бейиклигидир. Онда $EK = \frac{a\sqrt{6}}{4}$



101-нжи сур.

$$S_{CBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2 \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8};$$

$$S = 6 \cdot \frac{a^2}{2} + 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3+\sqrt{3});$$

$$S = a^2(3+\sqrt{3}).$$

412. $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$;

$c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2$.

Шу деңсизликлери гошалың, онда аларыс:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2(a^2b^2 + c^2d^2).$$

Эмма

$$\frac{a^2b^2 + c^2d^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2c^2d^2}; \quad a^2b^2 + c^2d^2 \geq 2abcd.$$

Инди $\quad a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2 \cdot 2abcd$;

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd .$$

413. $2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x$;

$\sin 2x\ (2 \cos x + 1) = \cos x\ (2 \cos x + 1)$;

$(2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$;

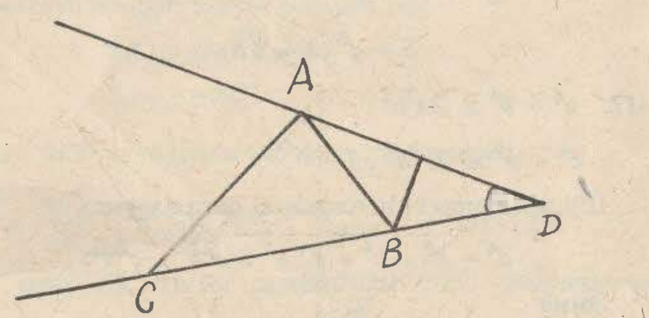
$2 \cos x + 1 = 0$; $\quad \cos x = -\dfrac{1}{2}$; $x_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

$\sin 2x - \cos x = 0$; $\quad \cos x\ (2 \sin x - 1) = 0$; $\quad \cos x = 0$;

$x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

$2 \sin x = 1$; $\quad \sin x = \dfrac{1}{2}$; $\ x_3 = \pi k + (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6}$.

414. $CD = a + c$ кесими өлчәп гоялың. Соңра D нокатда $\dfrac{\alpha}{2}$ бурчы гуралың. Инди C нокады меркез эдип, $CA = b$ радиуслы дуга чызалың. AD кесимиң ортасындан оңа перпендикуляр гечирелиң. Алнан B нокады A билен бирлещдирип, гөзленилйән ABC үчбурчлугы аларыс. (102-нжи сур. сер.)



102-нжи сур.

Алнан ABC үчбурчлук меселәниң шертини канагатландыряр.

Хакыкатдан-да, $\angle ABC = \alpha$; $\quad CB + BA = a + c\ $ ве $AC = b$.

415. Гой, $\angle CAB = \alpha$; $\angle ABC = \beta$ болсун. Онда

$\angle DAN = 180^o - \alpha$; $\ S_{AND} = \dfrac{bc \sin \alpha}{2} = \dfrac{bc}{2} \cdot \dfrac{a}{c} = \dfrac{ab}{2}$;

$$S_{DAN} = \frac{ab}{2} .$$

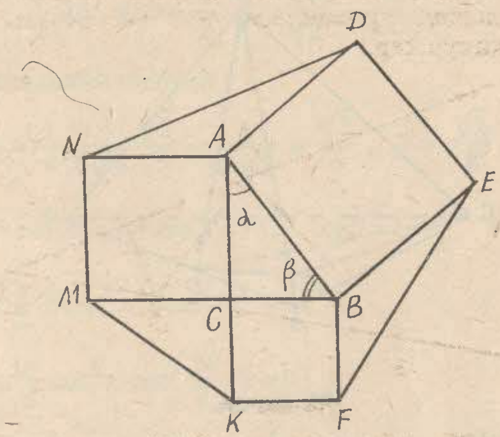
$\angle EBF = 180^o - \beta$; $\ S_{BEF} = \dfrac{ac \sin \beta}{2} = \dfrac{ac}{2} \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{2}$;

$$S_{BEF} = \frac{ab}{2} .$$

$$S_{MCK} = \frac{ab}{2} ;$$

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = (a + b)^2 + c^2 .$$

$$S = (a + b)^2 + c^2 .$$



103-нжи сур.

416. Меселәниң шертине гөрә берлен дөртбелгили саның цифрини: x ; $(x+1)$; $(x+2)$; $(x+3)$. Илки ики цифрлериң орунлары чалшырыландан соңра шейле боляр: $(x+1)$; x ; $(x+2)$; $(x+3)$.

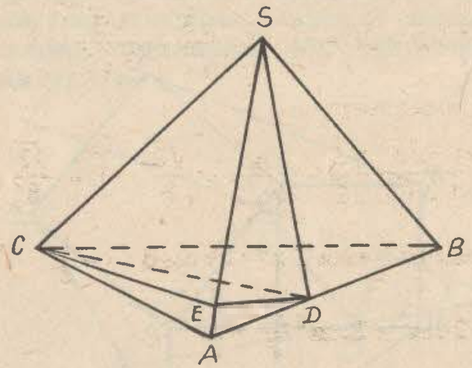
Алнан саны шейле язярыс:

$$1000(x+1)+100x+10(x+2)+(x+3)$$

Такык квадрат саның ахыркы цифри шейле болуп билер: 1, 4, 5, 6, 9. Гой, $x+3=9$ болсун, онда аларыс: 7689. Бу сан такык квадрат дәлдир. Инди гой, $x+3=6$ болсун, онда 4356 аларыс. Шу сан такык квадратдыр, ягны $66^2 = 4356$. Гой, $x=5$ болсун, онда 3245 сан алынар, бу сан такык квадрат дәлдир. Инди $x+3=4$ болсун, онда 2134 сан алынар, бу сан-да такык квадрат дәлдир.

Диймек, диңе 4356 сан меселәниң шертини канагатландыряр; ягны илки башдакы дөртбелгили сан 3456 болмалыдыр.

417. SC гапырга перпендикуляр эдип, AE кесими гечирйәрис (сур.сер). SCB үчбурчлук деңтараплыдыр



104-нжи сур.

DSB үчбурчлукдан $DB = \frac{1}{2}$, чүнки меселәниң шертине

гөрә $AB = AS = BS = 1$. Инди $DS = \frac{\sqrt{3}}{2}$. С нокатдан BS кесиме CE перпендикуляр гечирелиң ве D нокады E нокат билен бирлешдирелиң. Онда $DE \perp BS$ болар. Инди $SE = x$ билен беллесек, онда $CS = 2x$ болар. CSD үчбурчлукдан аларыс: $CD^2 + SD^2 = CS^2$, я-да

$$CD^2 = (2x)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4x^2 - \frac{3}{4}.$$

DSE үчбурчлукдан $DE = \frac{1}{2} DS = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ве $SD^2 = DE^2 + SE^2$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + SE^2$;

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{16} + SE^2;$$

$$SE^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}; \quad SE = \frac{3}{4}; \quad x = \frac{3}{4}$$

ABC үчбурчлугың мейданы деңдир.

$$\frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Пирамиданың гөврүми

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}; \quad V = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

418. $(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x) = \frac{1}{2}$;

$$2\cos^2\frac{x}{2}\; 2\cos^2 x\; 2\cos^2\frac{3x}{2} = \frac{1}{2};$$

$$16\cos^2\frac{x}{2}\cos^2 x\cos^2\frac{3x}{2} - 1 = 0;$$

$$\left(4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2} - 1\right)\left(4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2} + 1\right) = 0;$$

$$4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}-1=0;$$

$$2\cos x\,\left(2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\right)+1=0;$$

$$2\cos x\,(\cos 2x+x)-1=0;$$

$$2\cos x\cos 2x+2\cos^2 x-1=0;$$

$$2\cos x\cos 2x+\cos 2x=0;$$

$$\cos 2x\,(2\cos x+1)=0;\quad \cos 2x=0;$$

$$2x=\pi k+\frac{\pi}{k};\quad x_1=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

$$2\cos x+1=0;\quad \cos x=-\frac{1}{2};\quad x_2=2\pi k+\frac{2\pi}{3}.$$

Инди $4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}+1=0$. Шу деңлемәни-де ёкардакы ялы чөзмек мүмкиндир.

419. $\log_2 7\cdot\log_3 7\cdot\log_5 7\left(\frac{1}{\log_5 7}+\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_3 7}\right)=$

$$=\frac{\log_2 7\cdot\log_3 7\cdot\log_5 7}{\log_{30} 7}$$

Инди

$\frac{1}{\log_5 7}+\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_3 7}=\frac{1}{\log_{30} 7}$ я-да

$\log_{30}5+\log_{30}2+\log_{30}3=1$ я-да

$\log_{30}5\cdot 2\cdot 3=1;\quad \log_{30}30=1.$

420. Меселәниң шертине гөрә

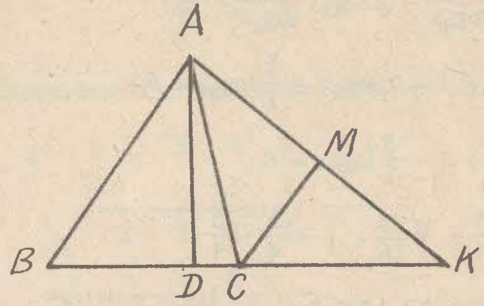
$$lg\,3\cdot C_m^3-lg\,m=1;$$

$$lg\,\frac{3m\,(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}-lg\,m=lg\,10;$$

$$lg\,\frac{3m\,(m-1)(m-2)}{2m}=lg\,10;\quad m\,(m-1)(m-2)=20m;$$

$$(m-1)(m-2)-20=0;\quad m=6.$$

421. Эркин алнан гөни чызыгың үчтүнде ислендик D нокатдан шол гөни чызыга перпендикуляр галдырярыс ве $DA=h_a$ кесими онуң үстүнде өлчеп гойярыс (105-нжи сур. сер.).



105-нжи сур.

A нокады меркез эдип, c радиуслы дуга чызярыс, нетижеде B нокады алярыс. $AB=C$, B нокатдан $BK=a+b$ кесими өлчәп гойярыс. A ве K нокатлары бирлешдирйәрис. AK кесимиң ортасындан перпендикуляр гечирип, C нокады алярыс. ABC гөзленилйән үчбурчлукдыр.

423. $(a-b)^2\geq 0;\quad a^2-2ab+b^2\geq 0;\quad a^2+b^2\geq 2ab;$

$c^2\geq 2ab;\quad 2c^2-c^2\geq 2ab;\quad 2c^2\geq c^2+2ab;$

$2c^2\geq a^2+b^2+2ab;\quad 2c^2\geq(a+b)^2;\quad c^2\geq\frac{(a+b)^2}{2};$

$$c\geq\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

425. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7} = \frac{\log_3 \frac{1}{7}}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 \frac{1}{7}}{-1} = \frac{\log_3 1 - \log_3 7}{-1} = \log_3 7$.

426. $\log_3 x + \log_x 3 = -2 \log_3 x \cdot \log_x 3 = \frac{1}{2}$;

$$\log_3 x + \frac{\log_3 3}{\log_3 x} - 2 \log_3 x \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{1}{2}$$

$$(\log_3 x)^2 + 1 - 2 \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x = 0 ;$$

$$(\log_3 x)^2 + 1 - \frac{5}{2} \log_3 x = 0 ;$$

$$\log_3 x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} ;$$

$$\log_3 x = 2 ; \quad x_1 = 9 ; \quad \log_3 x = \frac{1}{2} ; \quad x_2 = \sqrt{3} .$$

427. Эгер A заводың бир өзи x гүнде ерине етирйән болса, онда B завод гүнде ерине етирер. Онда бир гүнде A завод $\frac{1}{x}$ ве B завод $\frac{1}{\frac{2x}{3}} = \frac{3}{2x}$ бөлегини ерине етирер. Диймек, икиси бир гүнде $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{5}{2x}$ бөлегини ерине етирер. Икинжи тарапдан олар бир гүнде $\frac{1}{12}$ бөлегини ерине етирйәрлер. Бу ерден $x = 30$ (гүн) аларыс. B завод 20 гүнде ерине етирер. Инди ики гүнде A завод $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ бөлеги ерине етирйәр. Онда галаны

$$1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}, \quad \frac{14}{15} : \frac{1}{30} = \frac{14 \cdot 30}{15} = 20 \quad \text{гүн.}$$

428. Четки членлериниң жеми 1000. Шейле жемиң саны 250. Диймек, әхли жем $1000 \cdot 250 = 250000$.

429. Илкинжи хусусы көпелтмек хасылы 8 билен гутаряр,

диймек, көпелижиниң ахыркы цифри 4 болмалы, онда ашакдакыны аларыс:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \cdot & 2 & 4 \\
\times & & & & \cdot & 7 \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & 6 & 8 \\
+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\hline
 & \cdot & \cdot & 4 & 6 & 8
\end{array}$$

Шейле дегширмелери гечирип, галан цифрлери тапарыс:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 3 & 2 & 4 \\
\times & & & & 5 & 7 \\
\hline
 & & 2 & 2 & 6 & 8 \\
+ & 1 & 6 & 2 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 8 & 4 & 6 & 8
\end{array}$$

Инди

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 6 & \cdot \\
\times & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
 & & & & \cdot & \cdot \\
+ & & & \cdot & \cdot & \\
 & & \cdot & \cdot & & \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & \cdot & 6
\end{array}$$

Шу ерде 60-дан кичи болмадык сан хайсы хем болса бир сана көпелдиленде көпелтмек хасылда икибелгили сан алыняр, диймек, шол көпелдижи 1 болмалыдыр. Шейлеликде, ашакдакыны аларыс:

$$\begin{array}{r} \times \quad 6\ \cdot \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \cdot\ \cdot \\ +\quad \cdot\ \cdot\ \\ \cdot\ \cdot\ \quad \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ 6 \end{array}$$

Көпелтмек хасылы 6 билен гутаряр, диймек,

$$\begin{array}{r} \times \quad 6\ 6 \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 6\ 6 \\ +\quad 6\ 6\ \ \\ 6\ 6\ \ \ \ \\ \hline 7\ 3\ 2\ 6 \end{array}$$

430. Көпелтмек хасыл 4 билен гутаряр, диймек, көпелдиҗилериң ичинде 0 ёк. Инди эгер көпелдиҗилериң хеммеси 10 дең дийип гүман этсек, онда көпелтмек хасыл 10000 болар. Бу болса 3024-ден көпдүр. Көпелдиҗилериң ичинде 5-де болуп билмейәр, чүнки 5-лик җүбүт сана көпелдиленде көпелтмек хасылы 0 билен гутарар. Шейлеликде, гөзленилйән санлар шейле болмалы:

$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

431. Җеми 24 саны бочка бар, диймек, хер бир адама 8 бочкадан етҗек. Әхли бочкалардакы сувуклыклар:

$$5 + \frac{11}{2} = \frac{21}{2} \quad \text{(бочка)}$$

Диймек, хер бир адама $\frac{21}{2} : 3 = \frac{7}{2}$ бочка сувуклык етҗек.

Шейлеликде, ашакдакылары аларыс:

1	2	3
3 долы	2 долы	7 ярым
1 ярым	3 ярым	1 бош
4 бош	3 бош	

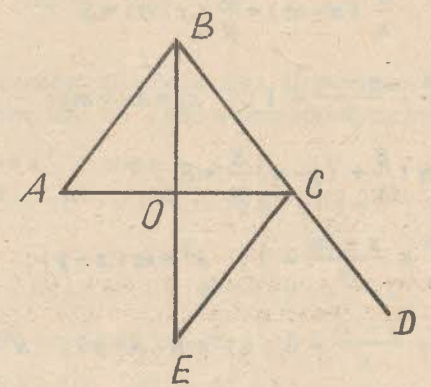
432. $\angle ACD = \angle A + \angle B$; $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$.

Инди

$$\angle E = 180^0 - \angle ACE - \angle COE = 180^0 - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} -$$

$$-180^0 + \left(\angle A + \frac{\angle B}{2}\right) = -\frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} + \angle A + \frac{\angle B}{2} =$$

$$= \frac{\angle A}{2}.$$



106-нҗы сур.

433. Эгер санының бирликлерини x билен белгилесек, онда $30x + x = 31x$ аларыс. Ялңыш язылан сан $10x + 3x = 13x$ болар. Инди меселәниң шертине гөрә аларыс:

$$78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808, \quad 78(31x - 13x) = 2808,$$

$78 \cdot 18x = 2808, \qquad x = 2.$

Диймек, окувчының көпелтмели саны 62. Хакыкы көпелтмек хасылы болса $78 \cdot 62 = 4836$ болмалыдыр.

434. $x + y + z + t = 396; \quad x + 5 = y - 5 = 52 = \frac{t}{5};$

$x = 5z - 5; \quad y = 5z + 5; \quad t = 25z.$

Диймек, $x + y + z + t = 5z - 5 + 5z + 5 + z + 25z = 36z;$

$36z = 396; \; z = 11.$

$x = 50; \quad y = 60; \quad z = 11; \quad t = 275.$

435. Меселәниң шертине гөрә $x - m = y = n$

$\frac{S}{x}$ — A ёлагчының тизлиги

$\frac{S}{y}$ — B ёлагчының тизлиги

Инди $\frac{S}{x}(x - m) + \frac{S}{y}(y - n) = S$

$$\frac{x - m}{x} + \frac{y - n}{y} = 1; \quad xy = nx + my;$$

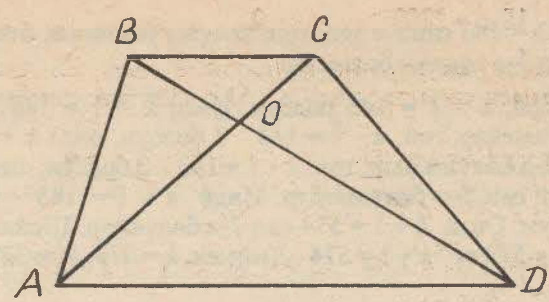
$$(x - m)\frac{S}{x} + (y - n)\frac{S}{y} = S;$$

$$\frac{x - m}{x} + \frac{x - m}{y} = 1; \quad x^2 = m(x + y);$$

$$\frac{y - n}{x} + \frac{y - n}{y} = 1; \quad y^2 = n(x + y); \quad x^2 : yx^2 = m : n$$

436. $\triangle BOC \sim \triangle AOD; \; \frac{BO}{OD} = \frac{OC}{OA}; \; \frac{BO + OD}{OD} = \frac{OC + OA}{OA}.$

$$\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{AO}; \; \frac{AO}{OD} = \frac{AC}{OD}; \; \frac{AO}{OD} = \frac{OC}{BO}; \; \frac{AO^2}{OD^2} = \frac{AC \cdot OC}{BD \cdot BO}$$



107-нжи сур.

$$\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{AO^2}{OD^2} = \frac{AC \cdot OC}{BD \cdot BO}; \; \frac{AC \cdot OC}{AC^2} = \frac{BD \cdot BO}{BD^2}$$

Инди $\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO}; \; \frac{BC}{AD} = \frac{OB}{OD};$

$$\left(\frac{BC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{OC}{AO}\right)^2 = \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OB}{OD}; \; \frac{AO \cdot OD}{AD^2} = \frac{OC \cdot OB}{BC^2}.$$

437. Гой, үчбелгили сан $\overline{abc}$ болсун. Шу сандан бир сан улы саны язалың, $\overline{abc} + 1$. Инди меселәниң шертине гөрә

$\overline{abcabc} + 1 = k^2$ я-да

$10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 a + 10b + c + 1 = k^2$ болмалы.

Инди

$10^3(10^2 a + 10b + c) + (10^2 a + 10b + c) = k^2 - 1;$

$(10^2 a + 10b + c)(10^3 + 1) = k^2 - 1;$

$(10^2 a + 10b + c) \cdot 1001 = k^2 - 1;$

$$10^2 a + 10b + c = \frac{(k - 1)(k + 1)}{1001} = \frac{(k - 1)(k + 1)}{7 \cdot 11 \cdot 13}.$$

a, b, c санлар натурал санлардырлар,

диймек, $10a^2 + 10b + c$ сан битин натурал сандыр. Инди $(k - 1)$ ве $(k + 1)$ үчбелгили санлар болуп, оларың бири

$11 \cdot 13 = 143$ сана я деӊ я-да кратны болмалы, бейлекиси болса 7-ә кратны болмалы.

Гой, $k - 1 = 143$ болсун. Онда $k + 1 = 145$ сан 7-ә бөлүнмейәр, гой, $k - 1 = 143 \cdot 2$ болсун, онда $k + 1 = 288$ сан 7-ә бөлүнмейәр, гой, $k - 1 = 143 \cdot 3$ болсун, онда $k + 1 = 431$ сан 7-ә бөлүнмейәр. Инди $k - 1 = 143 \cdot 4 = 572$ болсун. Онда $k + 1 = 574$ сан 7-ә бөлүнйәр. Шейлеликде, $k - 1 = 572$ ве $k + 1 = 574$. Диймек, $k = 573$, $k^2 = 328329$.

438. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ 3x^2y + 3xy^2 = -6 \end{cases}$ я-да $(x+y)^3 = 1$; $x+y = 1$,

онда $xy = -2$.

Шейлеликде, $\begin{cases} x = y = 1 \\ x y = -2 \end{cases}$ системаны чөзүп, аларыс:

$x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $y_1 = -1$; $y_2 = 2$.

439. Меселәниӊ шертине гөрә

$\angle ABD = \angle DBC$; $\angle BAE = \angle EAC$.

$CD \parallel EA$; $CE \parallel DB$; $DE \parallel AB$.

ABC үчбурчлугыӊ деӊянлыдыгыны субут этмели.

Субуды. Гой, $DE \parallel AB$ болсун. ABC үчбурчлук дүрли тараплы дийип гүман эделиӊ.

$AB \parallel DE$ боланы себәпли $\angle BDE = \angle ABD = \angle DBC$,

$CD \parallel AE$ боланы себәпли $\angle DCA = \angle CAE$ ве

$\angle CDE = \angle AED$.

Диймек, $\triangle CND$ ве $\triangle ANE$ деӊянлы, ягны

$DN + NE = NC + NA$ я-да $DE = AC$. Шонуӊ ялы $CE \parallel DB$ боланы себәпли аларыс: $CB = DE$.

Диймек, $AC = BC = DE$, ягны ABC үчбурчлук деӊянлыдыр.

440. Субут этмели

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)} \le a.$$

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)} = 2\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)} =$$

$$= \sqrt{(a+c-b)(a+b-c)} = \sqrt{[a+(c-b)][a+(b-c)]} =$$

$$= \sqrt{[a-(b-c)][a+(b-c)]} = \sqrt{a^2-(b-c)^2}$$

Эгер $c \neq b$ болса, онда $\sqrt{a^2-(b-c)^2} < a$,

эгер $b = c$ болса, онда $\sqrt{a^2-(b-c)^2} = a$.

Шейлеликде, $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \le a$.

441. $S = \frac{1}{2} a h_a$; $S = \frac{1}{2} b h_b$; $S = \frac{1}{2} c h_c$;

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c};$$

$$h_a + h_b + h_c = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad \text{я-да}$$

$$abc\,(h_a + h_b + h_c) = 2S\,(bc + ac + ab), \quad \text{бу ерден}$$

$$S = \frac{abc\,(h_a + h_b + h_c)}{2S\,(ab + bc + ac)}.$$

442. $x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (x-1) - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1} - 2)^2$

$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (x-1) - 6\sqrt{x-1} + 9 = (\sqrt{x-1} - 3)^2$$

Инди берлен деӊлемәни шейле язалыӊ. $|x|$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 3)^2} = 1. \quad -x$$

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1. \quad x$$

Ашакдакы халлара гаралыӊ:

$$\sqrt{x-1} > 3; \quad \sqrt{x-1} < 2; \quad 2 \le \sqrt{x-1} \le 3.$$

Шу халлардан диңе $2 \le \sqrt{x-1} \le 3$ канагатландыряр, ягны:

$$\sqrt{x-1} - 2 - (\sqrt{x-1} - 3) = 1 .$$

Шу деңлик тождество өврүлйәр, диймек $2 \le \sqrt{x-1} \le 3$ боланда деңлеме x-иң әхли бахасында ерине етирилйәр.

444. $$\frac{2^{19}\cdot 27^3 + 15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10} + 12^{10}} = \frac{2^{19}\cdot 3^9 + 5\cdot 2^{18}\cdot 3^9}{2^{19}\cdot 3^9 + 2^{20}\cdot 3^{10}} =$$

$$= \frac{2^{18}\cdot 3^9\cdot(2+5)}{2^{18}\cdot 3^9\cdot(2+3\cdot 2^2)} = \frac{1}{2}.$$

445. $100^{20} = (100^2)^{10} = 10000^{10}$; $\quad 10000^{10} > 9850^{10}$.

447. $$\begin{cases} yz + xz + xy = \dfrac{13}{3} \\ x + y + z = \dfrac{13}{3} \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{z} + z\left(\frac{13}{3} - z\right) = \frac{13}{3}; \quad \frac{1}{z} + \frac{13}{3}z - z^2 = \frac{13}{3};$$

$$3z^3 - 13z^2 - 3 + 13z = 0; \quad 3(z^3 - 1) - 13z(z-1) = 0;$$

$$(z-1)(3z^2 + 3z + 3 - 13z) = 0;$$

$$(z-1)(3z^2 - 10z + 3) = 0;$$

$$z_1 = 1; \quad z_2 = 3; \quad z_3 = \frac{1}{3}.$$

Эгер $z = 1$ болса, онда $\quad xy = 1; \quad y = \dfrac{1}{x}; \quad x + y = \dfrac{10}{3}.$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{1}{3}; \quad y_1 = \frac{1}{3}; \quad y_2 = 3.$$

Эгер $z = 3$ болса, онда

$$xy = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{1}{3x}; \quad x + y = \frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3};$$

$$x + \frac{1}{3x} = \frac{4}{3}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = \frac{1}{3}; \quad y_3 = \frac{1}{3}; \quad y_4 = 1.$$

Эгер $z = \frac{1}{3}$ болса, онда

$$xy = 3; \quad y = \frac{3}{x}; \quad x + y = \frac{13}{3} - \frac{1}{3} = 4$$

Шейлеликде, $\quad x = 1; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{3}; 1; 3$

$$y = \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3}; 3; 3; 1$$

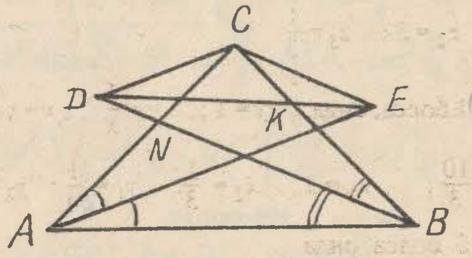
$$z = 3; 3; 1; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}.$$

448. M, радиусы r деӊ болан төверегиӊ меркези, F радиусы R деӊ болан төверегиӊ меркези. $AE = ED$.

Гой, $AD = a$, $AM = r$, $FD = R$ болсун. $\triangle AME \sim \triangle FED$.

$$\frac{AM}{FD} = \frac{ME}{ED}; \quad \frac{r}{R} = \frac{ME}{\frac{a}{2}}; \quad ME = \frac{ar}{2R}; \quad \triangle AME \sim \triangle AOD$$

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AE}{AO}; \quad \frac{r}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{AO}; \quad AO = \frac{a^2}{2r}; \quad AC = \frac{a^2}{r};$$



|X-1| ≥ 3

1) -(X-1) = 3

2) X-1 = 3

108-нжи сур.

$$\frac{AM}{AD}=\frac{ME}{OD};\quad \frac{r}{a}=\frac{ar}{2R\cdot OD};\quad OD=\frac{a^2}{2R};\quad BD=\frac{a^2}{R}.$$

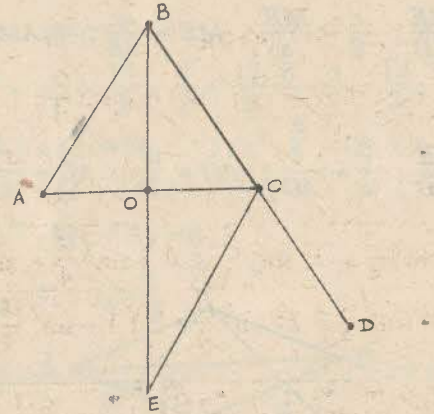
AOD үчбурчлукдан аларыс: $AD^2=AO^2+OD^2$ я-да

$$a^2=\frac{a^4}{4r^2}+\frac{a^4}{4}R^2;\quad a^2=\frac{a^4\,(R^2+r^2)}{4R^2r^2};$$

$$\frac{a^2\,(R^2+r^2)}{4R^2r^2}=1;\quad a^2=\frac{4R^2r^2}{R^2+r^2};$$

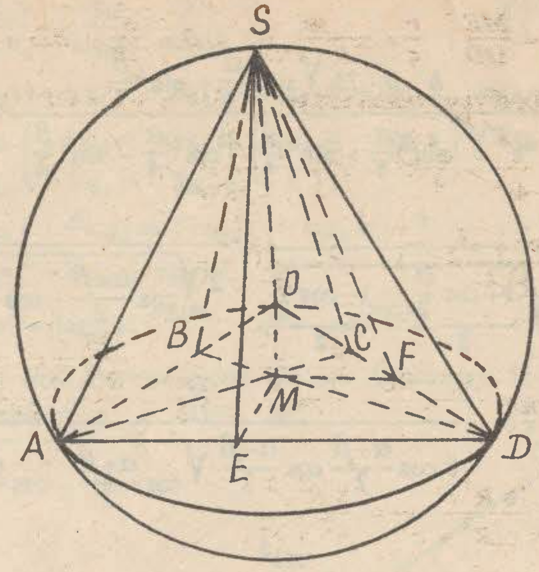
$$S_{ABOD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{\frac{a^2}{r}\cdot\frac{a^2}{R}}{2}=\frac{a^2a^2}{2Rr}=\frac{\frac{4R^2r^2}{R^2+r^2}\cdot\frac{4R^2r^2}{R^2+r^2}}{2Rr}=$$

$$=\frac{16\,R^4\,r^4}{2\,R\,r\,(R^2+r^2)}=\frac{8\,R^3\,r^3}{R^2+r^2}$$



109-нжи сур.

449. $SD=SC=b;\quad OD=OS=CA=R;\quad \angle\,DSC=\frac{\alpha}{2};$



110-нжи сур.

$$\angle\,ACD=\frac{\beta}{2};\quad \angle\,DSF=\frac{\alpha}{4};\quad DF=b\sin\frac{\alpha}{4};$$

$$ED=b\sin\frac{\beta}{4};$$

$$MD=\sqrt{b^2\sin^2\frac{\alpha}{4}+b^2\sin^2\frac{\beta}{4}}=b\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\beta}{4}}.$$

$$SM=\sqrt{b^2-b^2\sin^2\frac{\alpha}{4}-b^2\sin^2\frac{\beta}{4}}=b\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\beta}{4}}.$$

$$S_{BSD}=\frac{1}{2}\cdot 2b^2\sqrt{\left(\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\beta}{4}\right)\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\beta}{4}\right)}.$$

$$S=\frac{abc}{4R};\quad (\,a=SB;\quad b=SD;\quad c=BD\,)$$

$$R = \frac{abc}{4S};$$

$$R = \frac{b \cdot b \cdot 2b\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4}}}{4b^2\sqrt{\left(\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\beta}{4}\right)}} =$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2} - \frac{1-\cos\frac{\beta}{2}}{2}}} = \frac{b}{2\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{b^3}{8\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}} =$$

$$= \frac{\pi b^3}{2\cdot 3\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

$$V = \frac{\pi b^3\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}{6\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}.$$

450. $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ **санларың арифметик прогрессиясыны дүзйэндиклери себэпли ашакдакы деңлиги аларыс:**

$\log_k x - \log_m x = \log_m x - \log_n x$;

$2\log_m x = \log_k x + \log_n x$.

Инди $\log_a x = \dfrac{\log_k x}{\log_k a}$ **формуланы уланып, аларыс:**

$$\frac{2\log_k x}{\log_k m} = \frac{\log_k x}{\log_k k} + \frac{\log_k x}{\log_k n};$$

$2\log_k x \cdot \log_k n = \log_k x \cdot \log_k m + \log_k x \cdot \log_k m$;

$2\log_k x \cdot \log_k n = \log_k x\ (\log_k m \cdot \log_k n + \log_k m)$;

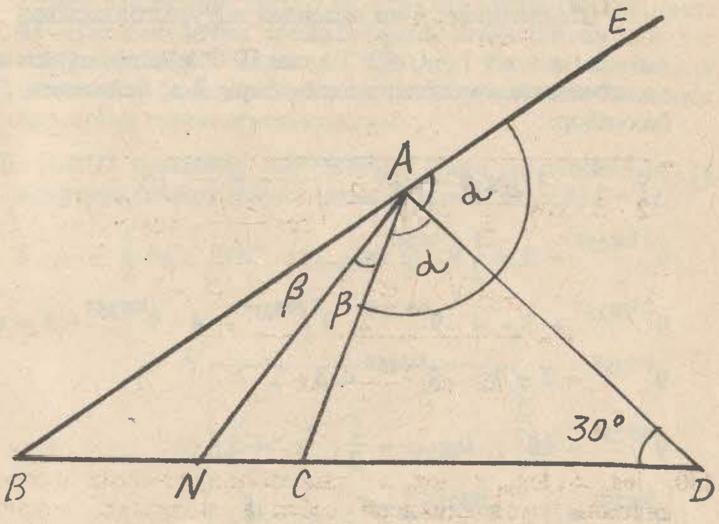
$2\log_k n = \log_k m\ (\log_k n + 1)$;

$2\log_k n^2 = \log_k m\ (\log_k n + \log_k k)$;

$\log_k n^2 = \log_k m\ \log_k nk$;

$\log_k n^2 = \log_k (nk)^{\log_k m}$; $n^2 = (nk)^{\log_k m}$.

451. Гой, ***EAC*** **бурчуң биссектрисасы** ***AD*** **болсун. Меселэниң шертине гөрэ** $\angle ADE = 30^o$.



111-нжи сур.

BAC **бурчуң** ***AN*** **биссектрисасыны гечирелиң. Инди**

$\angle ACB = \angle DAC + \angle ADC = \alpha + 30^o$;

$\angle C = \alpha + 30^o$; $\angle B + \angle C = 2\alpha$; $\angle B + \alpha + 30^o = 2\alpha$;

$\angle B = \alpha - 30^o$; $\angle C - \angle B = \alpha + 30^o - \alpha + 30^o = 60^0$;

$\angle C - \angle B = 60^0$.

452. $x^{73} - x^{37} = x^{37}(x^{36} - 1) = x^{37}(x^{18} - 1)(x^{18} + 1) =$

$= (x - 1)x(x + 1)(x^2 + 1)x^{36}A$,

бу ерде A билен галан көпелижилериң хеммеси белленилди. Инди эгер x сан 5-е бөлүненде галындыда 1 галса, онда $(x - 1)x(x + 1)(x^2 + 1)$ аңлатмада $x - 1$ сан 5-е бөлүнер, эгер-де галындыда 4 галса, онда $x + 1$ сан 5-е бөлүнер. Инди x сан 5-е бөлүненде 3 ве 2 сан галынды галян ягдайына середйәрис. Эгер 2 галса, онда $x^2 + 1$ сан 5-е бөлүнер, чүнки шу халда $x = 5k + 2$ болар ве $x^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$ аларыс.

Шейлеликде, x-иң ислендик натурал бахасында $(x - 1)x(x + 1)(x^2 + 1)$ сан 10 бөлүнйәр, чүнки шу аңлатмадакы көпелдижилериң бири 2-ә, бейлекиси 5-е бөлүнйәр.

453. $9^{2\log_{25}x} + \log_2 8 = \frac{1}{2}\left(9^{\log_{25}x+1} - 9^{\log_{25}x}\right)$;

$9^{2\log_{25}x} + 3 = \frac{1}{2}9^{\log_{25}x}(9 - 1)$;

$9^{2\log_{25}x} + 3 = 4 \cdot 9^{\log_{25}x}$; $9^{2\log_{25}x} - 4 \cdot 9^{\log_{25}x} + 3 = 0$;

$9^{\log_{25}x} = 2 \pm 1$; $9^{\log_{25}x} = 3$;

$9^{\log_{25}x} = 9^{\frac{1}{2}}$; $\log_{25}x = \frac{1}{2}$; $x_1 = 5$;

$9^{\log_{25}x} = 1$; $9^{\log_{25}x} = 9^o$; $x_2 = 1$.

454. Меселәниң шертине гөрә $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$ я-да

$2b^2 = a^2 + c^2$; $\sqrt{a^2 + c^2} = b\sqrt{2}$.

Инди b = 1,2,3,4,5,... дийип гүман этмек, онда $b = 1$

боланда $a^2 + c^2 = 2$; шу халда $a = c = 1$. Эмма меселәниң шертине гөрә $a < b < c$, ягны $a \neq c$.

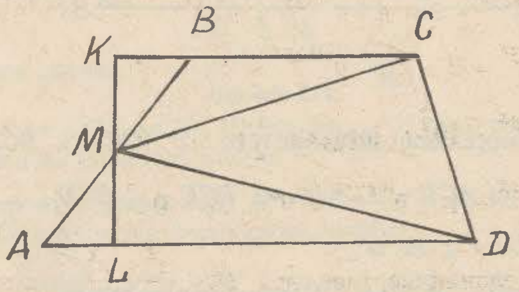
Гой, $b = 2$ болсун, онда $a^2 + c^2 = 8$ болар. Шу деңлигиң натурал санларда ерине етирилмеги үчин $a = c = 4$ болмалы, эмма меселәниң шертине гөрә $a \neq c$. Шу процеси довам эдип, $b = 5$ боланда $a^2 + c^2 = 50$ аларыс. Онда $a = 1$ боланда $c = 7$ болар, я-да $a = 7$ боланда $c = 1$ болар. Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян санлар $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$, я-да $a = 7$, $b = 5$, $c = 1$.

455. Биринжи дробь битин a баха, икинжи дробь битин b баха эе болар ялы n-иң кәбир k бахасы бар дийип гүман эделиң. Онда $k - 16 = 15a$, ве $k - 15 = 24b$ болар.

Бу ерден $24b - 15a = 1$ я-да $3(8b - 5a) = 1$ аларыс. Гүман эдилишине гөрә a ве b санлар битин санлар, онда $8b - 5a$ сан битин сандыр. Эмма велин битин сан 3-е көпелдиленде 1 алынмаз. Диймек, берлен дробларда n-иң кәбир бахаларында шол дробларың битин бахалары бар дийип гүман этмек нәдогры.

456. $ABCD$ трапеция $AM = MB$. Инди трапецияның M нокатдан гечйән бейиклигини гурярыс, ягны $MK = ML$

$S_{MBC} = \frac{1}{2}BC \cdot MK$; $S_{AMD} = \frac{1}{2}AD \cdot ML$



112-нжи сур.

Гой, $MK = ML = h$ болсун, онда

$S_{MBC} = \frac{1}{2}BC\,h$; $S_{AMD} = \frac{1}{2}AD\,h$.

Эмма трапецияның мейданы $S = \frac{BC + AD}{2} \cdot 2h$ я-да

$S = (BC + AD)\, h$.

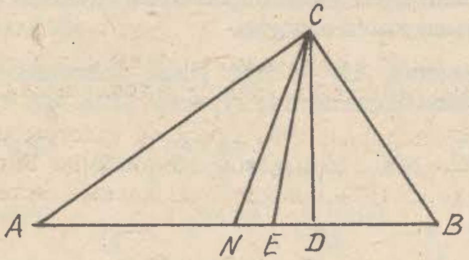
Шейлеликде,

$$S_{MCD} = (BC + AD)\, h - \frac{h}{2}(BC + AD) = \frac{BC + AD}{2} \cdot h\,;$$

$$S_{MCD} = \frac{(BC + AD)\, h}{2} = \frac{S}{2}\,.$$

457. Гөнүбурчлы үчбурчлукда гипотенуза гечирилен медиана гипотенузаның ярысына деңдир, ягны: $CN = AN = NB$.

Диймек, $\angle CAN = \angle ACN$. Эмма $\angle A + \angle B = 90^o$ ве $\angle B + \angle BCD = 90^o$. Диймек, $\angle ACN = \angle BCD$.



113-нжи сур.

Инди меселәниң шертине гөрә $\angle ACE = \angle BCE$

онда $\angle ACE - \angle ACN = \angle BCE - \angle BCD$;

$\angle ECN = \angle ECD$.

458. 1,5 товук 1,5 гүнде 1,5 юмуртга гузлапдыр.

3 товук 1,5 гүнде 3 юмуртга гузлар

1 товук 1,5 гүнде 1 юмуртга гузлар

4 товук 1,5 гүнде 4 юмуртга гузлар

4 товук 9 гүнде 24 юмуртга гузлар

459. a ве b санлар 7-ә бөлүненде галындыда 1,2,3,4,5,6 я-да 1,2,3,-3,-2,-1 я-да $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ санларың галынды галмаклары мүмкиндир. Инди $a = 7m + x$ ве $b = 7n + y$ язып, аларыс:

$$a^2 + b^2 = (7m + x)^2 + (7n + y)^2 =$$
$$= 7\,(7m^2 + 7n^2 + 2mn + 2ny) + x^2 + y^2$$

x^2 ве y^2 санларың хер бирини $(\pm 1)^2$, $(\pm 2)^2$, $(\pm 3)^2$ бахалара ээ болмаклары мүмкин. Шонуң үчин ашакдакылары аларыс:

$0^2 + 0^2 = 0$, $1^2 + 1^2 = 2$, $2^2 + 2^2 = 8$,

$0^2 + 1^2 = 1$, $1^2 + 2^2 = 5$, $2^2 + 3^2 = 13$,

$0^2 + 2^2 = 4$, $1^2 + 3^2 = 10$, $2^2 + 4^2 = 20$,

$0^2 + 3^2 = 9$.

Меселәниң шертине гөрә $a^2 + b^2$ сан 7-ә бөлүнйәр, диймек, шу халда $0^2 + 0^2 = 0$ алыняр, ягны $a^2 + b^2$ санын 7-ә бөлүнмеги үчин оларың хер бири 7-ә бөлүнмелидир.

460. Гой, догры җогапларың саны x болсун, нәдогры җогапларың саны болсун $12y$ нәдогры җогап үчин айрылан очколарың саны. Шейлеликде, ашакдакы системаны аларыс:

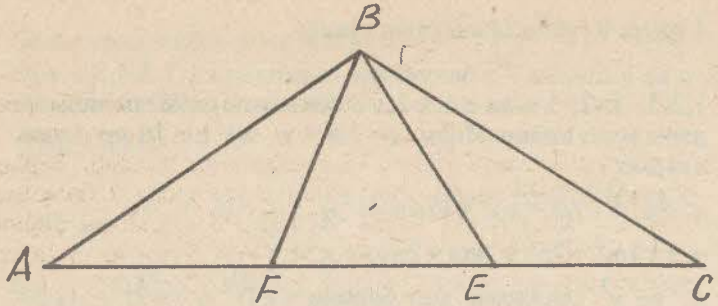
Шу ерден аларыс: $\begin{cases} 7x - 12y = 77 \\ x + y = 30 \end{cases}$

Инди $19\,x = 437$, $x = 23$. Шейлеликде, 77 очко топлан 23 сорага догры җогап берлипдир.

461. Меселәниң шертине гөрә $AF = FE = EC = a$; $BE = BF = FE$; BEF үчбурчлук деңтараплы, диймек,

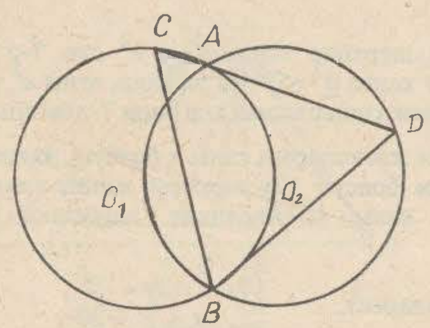
$\angle BEC = 180^o - 60^o = 120^o$. Онда $\angle BCE = 30^o$. Шонуң ялы $\angle ABF = \angle FAB = 30^o$.

Шейлеликде, $\angle ABC = \angle ABF + \angle ABE + \angle CBE =$
$= 30^o + 60^o + 30^o = 120^o$.



114-нжи сур.

462. O_1A ве O_1B төверегиң радиусы боланы себәпли AO_1B дуга 120^o, онда $\angle BDC = 60^o$. Шонуң ялы AO_2 ве BO_2 төверегиң радиусы. Диймек, $\angle BCD = 60^o$ (115-нжи сурат).



115-нжи сур.

Шейлеликде, BCD үчбурчлук деңтараплыдыр.

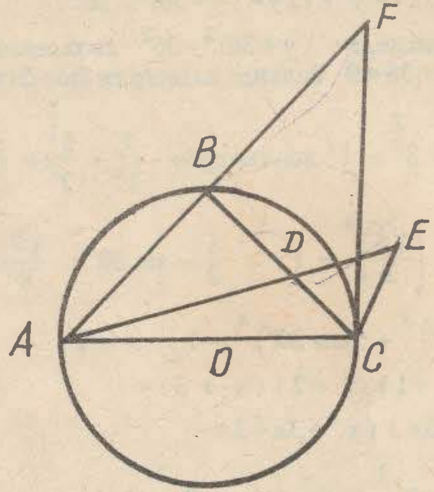
463. Эгер $a^2+a+1=0$ болса, онда $(a-1)(a^2+a+1)=0$, ягны $a^3-1=0$, бу ерден $a^3=1$.

Инди $a^{14} = a^{12}a^2 = (a^3)^4 a^2$; $a^2+a+1=0$ деңликден аларыс: $a^2+a=-1$; $a^4+2a^3+a^2=1$; $a^4+a^2=-1$; $a^2+1=-\frac{1}{a^2}$; $a^2+\frac{1}{a^2}=-1$.

Инди $a^{14}+\frac{1}{a^{14}}=a^2+\frac{1}{a^2}=-1$

464 (8). Берлен саның цифрлериниң саны 1967 боланы үчин A сан $9\cdot1967=17703$ сандан улы дәлдир. Шонуң үчин B сан ики белгили $9\cdot5=45$ сандан улы дәлдир. Берлен саның 9 бөлүнйәни үчин A ве B санларда 9 бөлүнмелидир. Онда B сан 9, 18, 27, 36, 45 санларың бирине деңдир. Бу санларың хайсысына дең болса-да B саның цифрлериниң жеми 9 болар.

465. Гой, ΔABC деңянлы болсун. Башга бир ADC үчбурчлуга гаралың. AB катети довам эдип, $BF = BC$ өлчәп гоялың.



116-нжи сур.

AD катети довам эдип, $DE = DC$ өлчәп гоялың.

F ве E нокатлары C нокат билен бирлешдирелиң, $\angle F = \angle E$, чүнки оларың хер бири 45^o деңдир. B нокады меркез эдип, AF диаметрли чызылан төверек A, F, E ве C нокатларың үстүнден гечер, чүнки $BA = BF = BC$ ве AC кесим дең бурчлар асты билен гөрүнйәр

$(\angle F = \angle E)$. Онда AF шол төверегиң диаметр болуп, AE онуң хордасыдыр. Диймек, $AF > AE$.

Инди $AF + AC > AE + AC$ я-да $AB + BF + AC > AD + DE + AC$ я-да $AB + BC + AC > AD + DC + AC$.

Шейлеликде, бир меңзеш улулыкдакы гипотенузалары болан гөнүбурчлы үчбурчлукларың ичинде иң улы периметрлиси деңянлы үчбурчлукдыр.

467. $x(x+2)(x+3)(x+6)(x+11)(x+12) =$

$= [x(x+6)(x+11)][(x+2)(x+3)(x+12)] =$

$= (x^3 + 17x^2 + 66x)(x^3 + 17x^2 + 66x + 72) =$

$= y(y+72) = y^2 + 72y = (y+36)^2 - 36^2.$

Шейлеликде, $z = (y+36)^2 - 36^2$ көпчлениң иң кичи бахасы $y + 36 = 0$ боланда алыняр ве шол баха $z = -36^2$.

468. $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$ деңлемеден $\frac{1}{2^x} + \frac{3^{\frac{x}{2}}}{2^x} = 1$ аларыс.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1; \quad \frac{1}{2} = \sin 30^o; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^o;$$

$$(\sin 30^o)^x + (\cos 30^o)^x = 1; \quad x = 2.$$

471. $x(x+1)(x+2)(x+3) =$

$= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) =$

$$= \left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \left[\frac{9}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2\right].$$

$x(x+1)(x+2)(x+3)$ аңлатманың максимал бахасы $x + \frac{3}{2} = 0$, ягны $x = -\frac{3}{2}$ боланда алыняр.

472. $(1+x)^\pi + (1-x)^\pi \le 2^\pi$, $0 \le x \le 1$ боланда $(1+x) + (1-x) = 2$. Шу ерден

$$2^\pi = (1+x)\,2^{\pi-1} + (1-x)\,2^{\pi-1};$$

$$2^\pi = (1+x)\,2^{\pi-1} + (1-x)\,2^{\pi-1} \ge (1+x)(1+x)^{\pi-1} +$$
$$+ (1-x)(1-x)^{\pi-1} = (1+x)^\pi + (1-x)^\pi.$$

$$2^\pi \ge (1+x)^\pi + (1-x)^\pi.$$

МАЗМУНЫ