T Ü R K M E N I S T A N Y Ň   S E R H E T   I N S T I T U T Y

M A T E M A T I K A

(Serhet institutyna okuwa girýänler üçin)

TÜRKMENISTANYŇ SERHET INSTITUTY

MATEMATIKA

(Serhet institutyna okuwa girýänler üçin)

Taýýarlan: uly leýtenant W. Pirgeldiýew

Bu gollanma Türkmenistanyň Serhet institutyna okuwa girmäge isleg bildirýän dalaşgärler we esgerler üçin taýýarlanyldy.

Okuwa girmäge taýýarlyk görýän dalaşgärler degişli soragyň jogabyny dürli okuw kitaplaryndan gözläp ýörmän, eýsem bu gollanmadan çalt tapyp bilerler.

Gollanma taýýarlanylanda mekdepde häzirki döwürde ulanylýan degişli okuw kitaplaryndan peýdalanyldy.

Serhet institutynyň çaphanasy.
Aşgabat 2013ý

1. Sanlaryň 2-ä, 3-e, 5-e, 9-a we 10-a bölüjülik nyşanlary.

Predmet sanalýan sanlara *natural* sanlar diýilýär. Bu sanlaryň köplügi N harpy bilen belgilenýär. Olara: 1, 2, 3, 4, ... sanlar degişlidirler

Natural sanlar, natural sanlara garşylykly sanlar we nol *bitin* sanlar köplügini emele getirýärler. Bu sanlar köplügi Z harpy bilen belgilenýär. Olara: 0,±1,±2,±3,... sanlar degişlidirler.

Bire we özüne bölünýän sanlara *ýönekeý* sanlar diýilýär. Olara: 2,3,5,7,11, ... sanlar degişlidir.

Özünden we birden başga bölüjileri bolan sanlara düzme sanlar diýilýär. Olara: 4, 6, 9, 15, 25, ... sanlar degişlidir.

Tükeniksiz periodik onluk droblara, ýagny $\frac{m}{n}$ gatnaşyk görnüşinde ýazyp bolýan sanlara *rasional* sanlar diýilýär. (Bu ýerde *m* bitin we *n* bolsa natural sanlardyr). Bu sanlar köplügi Q harpy bilen belgilenýär. Olara: 2; 3,2; -1,2; … sanlar degişlidir.

Tükeniksiz periodik däl onluk droblara, ýagny $\frac{m}{n}$ gatnaşyk görnüşinde ýazyp bolmaýan sanlara *irrasional* sanlar diýilýär. (Bu ýerde *m* bitin we *n* bolsa natural sanlardyr).

Rasional we *irrasional* sanlara *hakyky* sanlar diýilýär. Bu sanlar köplügi R harpy bilen belgilenýär. Olara: $3, -14, 6.8, 3\sqrt{3},$... sanlar degişlidir.

Bölüjilik nyşanlary.

1. Jübüt sanbelgi (sifr), ýagny 0, 2, 4, 6, 8 bilen tamamlanýan san 2-ä galyndysyz bölünýär. Mysal üçin 8; 254; 10862.
2. Sany düzýän sanbelgileriň jemi 3-e galyndysyz bölünýän bolsa, onda ol san hem 3-e galyndysyz bölünýär. Mysal üçin 413796; 4+1+3+7+9+6=30:3=10 30 san 3-e galyndysyz bölünýär diýmek 413796 san hem 3-e bölünýär.
3. 0 ýa-da 5 sanbelgisi bilen tamamlanýan sanlar 5-e galyndysyz bölünýär.
4. Sany düzýän sanbelgileriň jemi 9-a galyndysyz bölünýän bolsa, onda ol san 9-a hem galyndysyz bölünýär.
5. Soňky sanbelgisi 0 bilen tamamlanýan sanlar 10-a galyndysyz bölünýär. Mysal üçin 1280; 4001700; 100040.

2. Göterimler (prosentler).

Sanyň ýüzden bir bölegine *göterim* diýilýär. Göterime degişli esasan üç görnüşli meseleler duş gelýär.

1. a sanyň $p\%$-ini tapmak. Gözlenilýän x san $x = \frac{a.p}{100}$ formula boýunça tapylýar. Meselem, 40 sanyň 3%-i $x = \frac{40.3}{100} = 1{,}2.$
2. $p\%$-i b-e deň bolan a sany tapmak. Gözlenilýän a san $a = \frac{b.100}{p}$ formula boýunça tapylýar. Meselem, 3%-i 12-ä deň bolan *a* sany tapalyň: $a = \frac{12.100}{3} = 400.$
3. b san a sanyň näçe göterimini düzýär. Bu göterim $p = \frac{b.100}{a}$ formula boýunça tapylýar. Meselem, 11 san 5-iň näçe göterimini düzýär? Formula boýunça $p = \frac{11.100}{5} = 220(\%)$ alarys.

3. Proporsiýalar we olaryň häsiýetleri.

Iki paýyň deňligine, ýagny $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ýa-da $a \div b = c \div d$ görnüşli aňlatmalara *proporsiýa* diýilýär.

a we *d* proporsiýanyň gyraky, *b* we *c* bolsa ortaky agzalary.

Proporsiýanyň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

1. Proporsiýanyň gyraky agzalarynyň köpeltmek hasyly onuň ortaky agzalarynyň köpeltmek hasylyna deň, ýagny $a \cdot b = b \cdot c$
2. Proporsiýada ortaky ýa-da gyraky agzalaryň orunlaryny çalşyrmak bolar, ýagny $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

4. Rasional görkezijili derejäniň häsiýetleri.

n - natural san bolanda $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}$. Bu ýerde a^n-dereje, a-derejäniň esasy, n-derejäniň görkezijisi.

$$0^n = 0; \; 1^n = 1, \qquad n \in N$$

Algebrada natural derejeler bilen birlikde položitel sany islendik rasional derejä götermek hem göz öňünde tutulýar.

Otrisatel derejä götermek:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Nolynjy derejä götermek:

$$a^0 = 1, \qquad a \neq 0.$$

Droby derejä götermek:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ görnüşde ýazmak bolar

Aşakdaky häsiýetler derejäniň islendik rasional görkezijileri üçin dogrudyr:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \; b \neq 0.$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0.$

5. Gysga köpeltmek formulalary.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2$$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \\ = a^2 - 2ab + b^2$$

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
$$(a-b)(a+b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 == a^2 - b^2$$

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$$(a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a(a^2 + 2ab + b^2) + \\ +b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
$$(a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a(a^2 - 2ab + b^2) - \\ -b(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$;

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}^2-\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)=\mathrm{a}(\mathrm{a}^2-\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)+\mathrm{b}(\mathrm{a}^2-\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)$$
$$=\mathrm{a}^3-\mathrm{a}^2\mathrm{b}+\mathrm{ab}^2+\mathrm{a}^2\mathrm{b}-\mathrm{ab}^2+\mathrm{b}^3=\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3$$

7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+2ab+b^2)$;
$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)=\mathrm{a}(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)-\mathrm{b}(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)$$
$$=\mathrm{a}^3+\mathrm{a}^2\mathrm{b}+\mathrm{ab}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{b}-\mathrm{ab}^2-\mathrm{b}^3=\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3$$

6. Algebraik droblar. Drobuň esasy häsiýeti. Algebraik droblar üstünde amallar.

a/b - ady drob (bu ýerde a we b bitin sanlar) $a-$ drobuň sanawjysy, $b-$ drobuň maýdalawjysy.

Eger drobuň sanawjysy maýdalawjysyna deň ýa-da sanawjysy maýdalawjysyndan uly bolsa onda beýle droblara nädogry droblar diýilýär.

Drobuň sanawjysynam maýdalawjysynam şol bir sana köpeltseň ýa-da bölseň drobuň manysy ütgemeýär, ýagny, oňki droba deňgüýçli bolan drob alynýar.

Drobuň esasy häsiýeti: *eger drobuň sanawjysy we maýdalawjysy noldan tapawutly şol bir sana köpeldilse ýa-da bölünse, şol droba deň drob alynýar:*

$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$, (bu ýerde $b\neq 0, c\neq o$).

Meselem, $\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}$; $\frac{8}{12}=\frac{8\div 4}{12\div 4}=\frac{2}{3}$.

Sanawjysy we maýdalawjysy özara ýönekeý sanlar bolan droba *gysgalmaýan* drob diýilýär. Ýa-da bitin sanlaryň gatnaşygyna drob diýilýär.

Birmeňzeş maýdalawjyly droblary goşmak (aýyrmak) üçin olaryň maýdalawjylaryny öňküligine goýup, olaryň sanawjylaryny goşmaly (aýyrmaly):

$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

Meselem, $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$.

Dürli maýdalawjyly droblary goşmak (aýyrmak) üçin ol droblary iň kiçi umumy maýdalawja getirmeli we alnan droblary goşmaly (aýyrmaly).

Maýdalawjylary özara ýönekeý, ýagny IUUB (iň uly umumy bölüjisi) (n;q)=1 bolanda droblary goşmak we aýyrmak:

$\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq}$.

Meselem, $\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 7-4\cdot 3}{3\cdot 7}=\frac{14-12}{21}=\frac{2}{21}$.

Maýdalawjylary $n=ad$ we $q=bd$ deň bolan droblary goşmak we aýyrmak:

$\frac{m}{ad}\pm\frac{p}{bd}=\frac{mb+ap}{abd}$.

Meselem, $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{5}{2\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4}=\frac{5\cdot 3+7\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{29}{24}$.

Ady droby bitin sana köpeltmek üçin onuň sanawjysyny şol bitin sana köpeltmeli, maýdalawjysyny bolsa üýtgetmän goýmaly:

$\mathrm{c}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}$.

Meselem, $\frac{3}{5}\cdot 4=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$.

Droby droba köpeltmek üçin sanawjylary köpeldip sanawjyda, maýdalawjylary köpeldip bolsa maýdalawjyda ýazmaly:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Meselem, $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 8}=\frac{21}{32}$.

Droby droba bölmek üçin bölünijini bölüjä ters sana köpeltmeli:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Meselem, $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2}=\frac{15}{8}$.

7. Funksiýalaryň beriliş usullary.

Funksional baglylyk, dürli funksiýalar we olaryň grafikleri.

Bir ütgeýän ululygyň beýleki ütgeýän ululyga baglylygyna funksional baglylyk ýa-da funksiýa diýilýär. Bagly däl ütgeýän ululyga başgaça argument diýip atlandyrylýar we adatça x bilen belgilenýär, bagly ütgeýän ululygy bolsa argumentiň funksiýasy diýip atlandyrylýarlar we y bilen belgilenýär.Funksional baglylykda bagly däl x ululygyň her bir bahasyna bagly bolan y ululygyň ýeke-täk bahasy gabat gelýär.Bagly ütgeýän y ululygyň bahalaryna funtsiýanyň bahalary diýilýär.

Bagly däl ütgeýän x ululygň alyp bilýän ähli bahalary funksiýanyň **kesgitleniş ýaýlasyny** emele getirýärler, ol $D(f)$ görnüşde belgilenýär. Bagly ütgeýän y ululygyň alyp bilýän ähli bahalary funksiýanyň **bahalarynyň ýaýlasyny** emele getirýärler, ol $E(f)$ bilen belgilenýär.

Funksiýanyň berliş usullary

1.**Analitiki usul**. Köplenç üýtgeýän bilen funksiýanyň arasyndaky baglanyşyk funksiyanyň bahasyny tapmak üçin üýtgeýäniň üstünde geçirilýän amallary görkezýän formulanyň üsti bilen berilýär. Funksiyanyň şeýle berlşine analitiki usul diýilýär.

2.**Tablisa usuly**. Funksiýanyň berlşiniň köp ýaýran usullarynyň biri tablisa usuly bolup, ol üýtgeýäniň bahalyrynyň we şolara degişli funksiýanyň bahalarynyň tablisasyny görkezýär. Mysal hökmünde trigonometrik funksiýalaryň tablisalaryny, logarifmleriň tablisalaryny görkezmek bolar.

Funksiýanyň tablisa usuly boýunça berlşine otlylaryň hereketiniň tertibiniň ýazgysy hem mysal bolup biler. Şol ýazgy boýunça haýsy wagtda otlynyň nirede bolýandygyny kesgitlemek bolar.

3. **Grafiki usul**. Üýtgeýäniň we funksiýanyň baglanyşygynyň çyzgy üsti bilen berlşine grafiki usul diýilýär.

1.Lukmançylykda ýüregiň işleýşine, onuň ritimligine we pulsuna **kardiograf** atly enjamyň döredýän kardiogrammasy (grafig) esasynda baha berilýär.

2.Ýer gatlagynyň yranmasyny **seýsmograf** şekillendirýär.Onuň esasynda haçan we nirede ýer yranmasynyň bolandygyny hem-de onuň güýjini kesgitlemek bolar.

3.**Wibrometr** dürli gurluşlaryň (meselem, köprüleriň, gämileriň we ş.m) silkinme hereketlerini hasaba alýar.

8. Artýan we kemelýän funksiýalar.

Eger erkin üýtgeýän *x* ululygyň her bir bahasyna oňa bagly üýtgeýän *y* ululygyň diňe bir bahasy degişli bolsa, onda şeýle baglylyga *funksional baglylyk* ýa-da *funksiýa* diýilýär.

Erkin baha alýan *x* ululyga argument, oňa baglylykda üýtgeýän *y* ululyga bolsa funksiýa diýilýär.

Argumentiň her bir bahasyna funksiýanyň ýeke-täk bahasy degişli bolmalydyr. Bagly üýtgeýän ululygyň bahasyna funksiýanyň bahasy diýilýär.

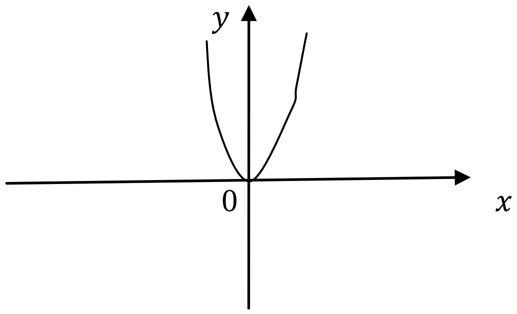
Bagly däl üýtgeýän ululygyň alyp bilýän bahalarynyň hemmesi funksiýanyň kesgitleniş oblastyny emele getirýär.

Funksiýanyň kesgitleniş oblastyna argumentiň ýolbererlik bahalarynyň köplügi hem diýilýär we ol *D(f)* bilen belgilenýär.

Eger *X*köplüge degişli islendik x_1 we x_2 üçin $x_1 < x_2$ bolanda $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda *y=f(x)* funksiýa *X* aralykda *artýan* funksiýa, eger – de $f(x_1) > f(x_2)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda ol funksiýa *X* aralykda *kemelýän* funksiýa diýilýär.

Mysal: $f(x) = x^2$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny kesgitlemeli.

Çözülişi:Berlen funksiýa san okunda kesgitlenendir. Şunlukda, $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ we $x_1 < x_2$ bolanda $f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$ bolýandygy hem-de $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ we $x_1 < x_2$ bolanda $f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$ bolýandygy üçin berlen funksiýa $(-\infty, 0)$ aralykda kemelýändir, $(0, +\infty)$ aralykda bolsa artýandyr. Onuň şeýle grafigi bolar:



Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny anyklamak üçin önüm düşünjesinden hem peýdalanmak bolar.

Eger käbir aralykda $f'(x) > 0$ýa – da $f'(x) < 0$ bolsa, onda şol aralykda funksiýa degişlilikde artýandyr ýa – da kemelýändir.

9. Periodik, jübüt we täk funksiýalar.

Eger noldan tapawutly *T* san bar bolup, islendik *x* üçin *f(x+T)=f(x)=f(x – T)* deňlik dogry bolsa, onda *y=f(x)* funksiýa *periodik* funksiýa diýilýär. Şeýle *T* sanlaryň iň kiçisine ol funksiýanyň periody diýilýär. Ähli trigonometrik funksiýalar periodik funksiýalaryň mysallary bolup biler. Sinus we kosinus funksiýalaryň periody 2π deň bolup, tangens we kotangens funksiýalaryň periody π sana deňdir. Periodik funksiýanyň grafigini onuň bir periodynda gurup, beýlekilerinde şolar ýaly periodik dowam etdirilýär.

Kesgitleme: Eger *x* argumentiň islendik ýolbererlik bahalarynda *f(-x)=f(x)* deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda *y=f(x)*funksiýa ***jübüt*** funksiýa diýilýär.

Her bir jübüt funksiýanyň grafigi ordinatalar okuna görä simmetirikdir.

Kesgitleme: Eger *x* argumentiň islendik ýolbererlik bahalarynda *g(-x)=-g(x)* deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda *y=g(x)* funksiýa ***täk*** funksiýa diýilýär.

Her bir täk funksiýanyň grafigi koordinatalar başlangyjyna görä simmetrikdir.

Mysal: $f(x) = 5x^2 + 4,\ g(x) = 3x^3 - 5x$funksiýalaryň jübüt ýa-da täkdigini anyklamaly.

Çözülişi: $f(-x) = 5(-x)^2 + 4 = 5x^2 + 4 = f(x)$we $g(-x) = 3(-x)^3 - 5(-x) = -3x^3 + 5x = -(3x^3 - 5x) = -g(x)$ bolýandygy esasynda *f(x)* jübüt, *g(x)* täk funksiýadyr.

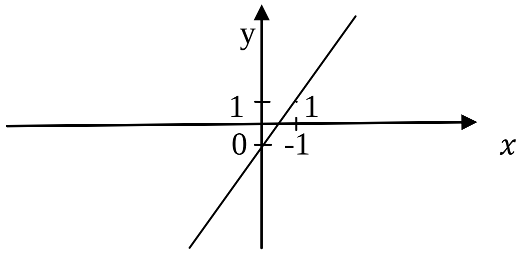
Funksiýanyň jübüt ýa – da täk bolmagy hökmany däldir. Mysal üçin, $f(x) = x^2 + x^3$ bolanda $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$ bolar we
$x^2 - x^3 \neq x^2 + x^3,\ x^2 - x^3 \neq -(x^2 + x^3)$. Şonuň üçin funksiýa jübüt hem däl, täk hem däl.

10. $y = kx + b$ funksiýa, onuň häsiýetleri we onuň grafigi.

y=kx+b görnüşli formula bilen berlen funksiýa çyzykly funksiýa diýilýär. Onuň kesgitleniş oblasty ähli san okudyr. Çyzykly funksiýanyň grafigi göni çyzykdyr. Ony gurmak üçin bolsa onuň diňe iki nokadyny gurmak ýeterlikdir. Şonuň üçin çyzykly funksiýanyň grafigini gurmak üçin argumentiň iki bahasy üçin oňa degişli bolan funksiýanyň iki bahasyny tapyp tekizlikde şol nokatlary gurýarlar we olaryň üstünden göni çyzyk geçirýärler.

Mysal №1. $y = 2x - 1$ çyzykly funksiýanyň grafigini gurmaly.

Çözülişi: Bufunksiýanyň grafigini gurmak üçin iki sany nokadyny tapmak ýeterlikdir we bu iki nokadyň üstünden göni çyzyk geçiräýmeli.

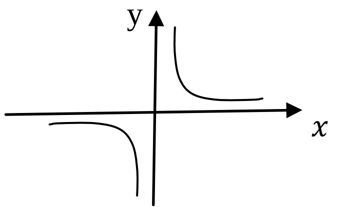


11. $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ **funksiýa, onuň häsiýetleri we onuň grafigi.**

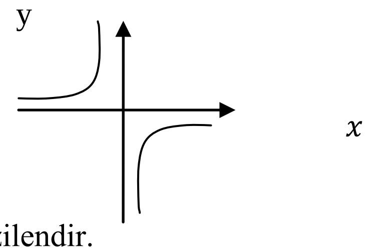
Eger *x* we *y* üýtgeýän ululyklar ters proporsional bolsalar, onda olaryň baglanyşygy $xy=k$ deňlik bilen aňladylýar. Bu ýerde *y* ululygy *x* arkaly aňladyp, $y = \frac{k}{x}$ formula bilen berlen funksiýany alarys, bu formuladaky *k* san ters proporsionallygyň koeffisiýentidir. Bu funksiýanyň kesgitleniş oblasty nola deň bolmadyk ähli sanlardan ybaratdyr. Ters proporsionallygy aňladýan $y = \frac{k}{x}$ funksiýa täk funksiýa bolup, onuň grafigi koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik bolan iki şahadan durýan egri çyzykdyr. Ol giperbola diýip atlandyrylýar. Onuň grafigi $k > 0$ bolanda I we III çärýekde ýerleşýär, $k < 0$ bolanda bolsa II we IV çärýeklerde ýerleşýär.

Giperbola koordinata oklaryna näçe ýakynlaşan bolsa – da olar bilen onuň umumy nokatlary ýokdyr.

1. Eger k>0 bolsa



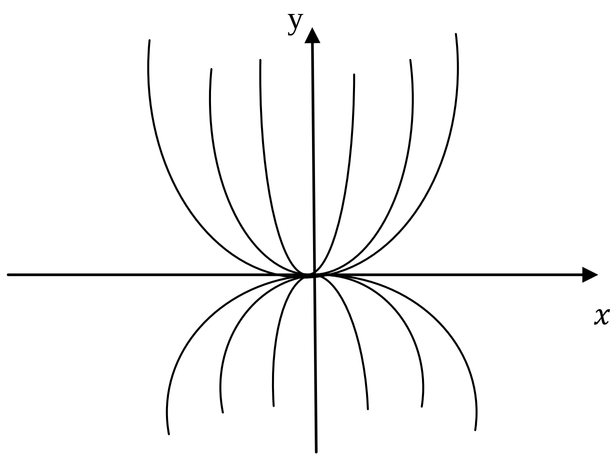
2. Eger k<0 bolanda



funksiýalaryň grafikleriniň gurluşlary ýokarda görkezilendir.

12. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ **funksiýa, onuň häsiýetleri we onuň grafigi.**

$y = x^2,\ y = ax^2,\ y = ax^2 + bx,\ y = ax^2 + c,\ y = ax^2 + bx + c$ görnüşdäki funksiýalaryň grafigine parabola diýilýär.



$y = ax^2 + bx + c$ funksiýanyň garfigini gurmak üçin funksiýany $y = a(x-m)^2 + n$ görnüşe getirmeli $x = m$ bolanda *y=n* bolýar (m;n) nokat parabolanyň depesi bolýar. $m = -\frac{b}{2a}; n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ formulalar boýunça m-i we n-i tapyp bolýar. *a>0* parabolanyň şahalary ýokary, *a<0* bolanda aşak gönikdirilendir.

$y = -x^2 - 4x - 5$ funksiýanyň garafigini guralyň

1. $a=1<0$ parabolanyň şahalary aşak bakdyrylan.
2. Parabolanyň depesini tapmaly $m=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(-1)}=-2$

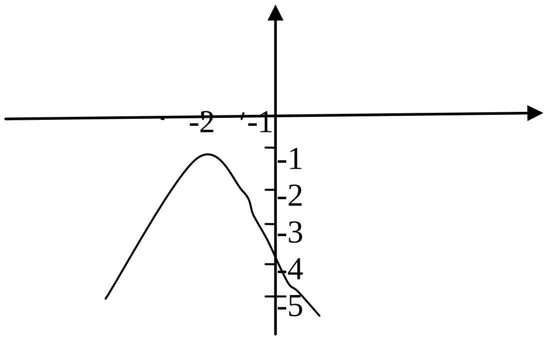
   $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{16-4*5}{4(-1)}=-\frac{-4}{-4}=-1$

(m;n)=(-2;-1) nokatparabolanyň depesi.

3. Absissalar oky bilen grafigiň kesişme nkatlaryny tapmaly: Ol nokatda $y=0$ Onda -$x^2-4x-5=0$ $D=b^2-4ac=16-20=-4<0$

Diýmek grafik absissalar okuny kesmeýär.

4. Ordinata oky bilen grafigiň kesişýän nokadyny tapmaly. Ol nokatda $x=0$ $onda$ $y=-0^2-4*0-5=-5$ Diýmek (0;-5) grafigini gurmaly a<0 onda



13. $y=x^n$ funksiýa, onuň häsiýetleri we onuň grafigi.

$$y=x^n \qquad (1)$$

formula bilen berilen fnksiýa derejeli funksiýa diýilýär. Bu ýerde x – argument, y – oňa bagly funksiýa. n natural san bolanda oňa natural derejeli funksiýa diýilýär.

x – iň islendik bahasynda x^n aňlatmanyň manysy bardyr. Şol sebäpli natural derejeli funksiýanyň kesgitleniş oblasty ähli hakyky sanlaryň köplüginden ybaratdyr.

Argumentiň x=0 bahasynda islendik natural derejeli funksiýanyň bahasynyň nola deň bolýandygyny üçin ($0^n=0$), onuň grafigi kordinatalar başlangyjyndan geçýändir. Bu häsiýet dereje görkezijiniň jübütligine ýa-da täkligine bagly däldir.

$n=1$ bolanda alynýan $y=x$ funksiýanyň grafigi kordinatalar sistemasynyň I we III çärýekleriniň bissektrissalary bolan göni çyzykdyr. n – ň jübüt we täk bolmagyna laýyklykda, derejeli funksiýanyň dürli häsiýetleri bardyr.

1-nji häsiýet. n görkeziji jübüt san bolan halda argumentiň noldan tapawutly islendik bahasynda $x^n>0$ bolýar (sebäbi islendik sanyň jübüt derejesi položitel san).

Diýmek, jübüt derejeli funksiýanyň grafigi I we II çärýeklerde ýerleşýär.

2-nji häsiýet. n görkeziji jübüt san bolan halda argumentiň noldan tapawutly islendik bahasynda $(-x)^n=x^n$ deňlik ýerine ýetýär, ýagny (1) funksiýa jübütdir. Şol sebäpli, jübüt derejeli funksiýanyň grafigi ordinatalar (y-ler) okuna görä simmetrikdir.

3-nji häsiýet. Jübüt derejeli funksiýa $[0;+\infty)$ aralykda artýar, $(-\infty;0]$ aralykda bolsa kemelýän funksiýadyr.

4-nji häsiýet. n görkeziji täk bolup, x>0 bolanda $x^n>0$, x<0 bolanda bolsa $x^n<0$ bolýar. Şol sebäpli täk derejeli $y=x^n$ funksiýanyň grafigi I we III çärýeklerde ýerleşýär.

5-nji häsiýet. n görkeziji täk san bolan halda argumentiň islendik bahasynda $(-x)^n=-x^n$ deňlik ýerine ýetýär. Diýmek, täk derejeli funksiýanyň grafigi kordinatalar başlangyjyna görä simmetrikdir.

6-njy häsiýet. Täk derjeli funksiýa (-∞;+∞) san okunda artýan funksiýadyr.

Natural n san üçin $y=x^{-n}$ funksiýa bitin otrisatel görkezijili derejeli funksiýa diýilýär. $n=1$ bolanda alynýan $y=1/x$ funksiýa $y=k/x$ funksiýanyň hususy halydyr, grafigi hem giperboladyr.

14. Çyzykly deňlemeleriň çözülişi.

Harplaryň islendik bahalarynda bahalary özara deň bolan iki aňlatma *toždestwo* diýilýär.

Eger deňlikde bahasy tapylmaly harp bar bolsa, onda ol deňlige *deňleme* diýilýär. Harpyň deňlemäni dogry san deňligine öwürýän bahasyna deňlemäniň *çözüwi* ýa-da *köki* diýilýär.

Kökleri gabat gelýän deňlemelere *deňgüýçli deňlemeler* diýilýär.

$ax = b$ (x-ütgeýän ululyk, a we b käbir sanlar) görnüşli deňlemä *çyzykly deňleme* diýilýär.

a) $a = 0, b \neq 0$ bolanda $0 * x = b$ deňlemäniň çözüwi ýok.

b) $a = 0, b = 0$ bolanda islendik san $0 * x = 0$ deňlemäniň kökүdir, ýagny onuň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

ç) $a \neq 0$ bolanda $ax = b$ deňlemäniň köki ýeketäk $x = \frac{b}{a}$ bolar.

15. Arifmetiki kwadrat kök we onuň häsiýetleri. $y = \sqrt{x}$ funksiýa we onuň grafigi.

$\sqrt[n]{a} = b$. a sandan alnan n – nji derejeli arifmetiki kök diýip, n – nji derejesi a deň bolan otrissatel däl b $sana$ $(b^n = a)$ aýdylýar. $n - e$ köküň görkezijisi, a bolsa kök aşagyndaky aňlatma diýilýär. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Eger: 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$ şertler ýerine ýetýän bolsa, $\sqrt{a} = b$ aňlatma *arifmetiki kwadrat kök* diýilýär.

Arifmetiki köküň häsiýetleri:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$; $b \geq 0$.

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0, b > 0$.

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0$.

4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$.

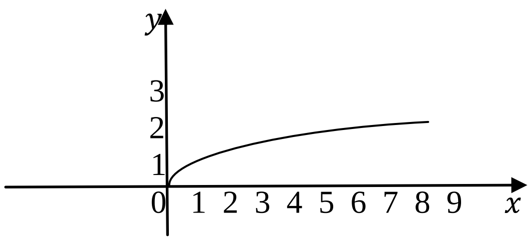
5) $\sqrt[n*m]{a^{k*m}} = \sqrt[n]{a^k}$.

6) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0$.

$y = \sqrt{x}$ funksiýanyň islendik $x \geq 0$ bolanda manysynyň bardygy sebäpli, onuň kesgitleniş oblasty bolup, otrissatel däl sanlaryň köplügi hyzmat edýär. Bu funksiýanyň bahalar köplügi hem otrissatel däl sanlaryň köplügidir. Bu funksiýa jübüt hem däldir, täk hem däldir, x – položitel bahalarynda artýan funksiýadyr. Onuň grafigini gurmak üçin x – ň 0, 1, 2, 4, 9 bahalaryna degişli $y = \sqrt{x}$ funksiýanyň 0, 1, 1.4, 2, 3 bahalaryny tapýarys we tablissa düzýäris.

x	0	1	2	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.4	2	3

Soňra kordinatalar sistemasynda tablisada kordinatalary görkezilen nokatlary gurýarys we olary endigan çyzyk bilen birleşdirýäris.



16. Kwadrat deňleme we onuň kökleriniň formulasy.

Kesgitleme. $ax^2+bx+c=0$ *görnüşde ýazyp bolýan deňlemelere kwadrat deňlemeler diýilýär, bu ýerde x - näbelli ululyk,* a , b *we* c *käbir hemişelik sanlar, özünem* a> *0.*

$ax^2+bx+c=0$deňlemedäki a sany birinji koeffisiýent, b sany ikinji koeffisiýent, c sany azat çlen diýip atlandyrýarlar

Kwadrat deňlemäniň çep bölegi ikinji derejeli köpçlendir. Şonuň üçin kwadrat deňleme ikinji derejeli deňleme hem diýilýär.

Birinji koeffisiýenti 1-e deň bolan kwadrat deňlemä getirilen kwadrat deňleme diýilýär.

Eger $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemede b we c koeffisiýentleriň iň bolmanda biri nola deň bolsa, onda şonuň ýaly deňlemä doly däl kwadrat deňleme diýilýär

Doly däl kwadrat deňleme üç görntisde bolýar

1) Eger $b=0$ we $c\neq 0$ bolsa, onda $ax^2+c=0$ Eger $-c/a>0$, ýagny a we c dürli alamatly bolsa, onda deňlemäniň $-\sqrt{-c/a}$ we $\sqrt{-c/a}$ sanlara deň bolan iki köki bardyr,

2) Eger c=0 we $b\neq 0$ bolsa, onda $ax^2+bx=0$. Ol deňlemäni çözmek üçin onuň çep bölegi köpeldijilere dagydylýar $(x(ax+b)=0)$ we $x_1=0$, $x_2=-b/a$ kökleri tapylýar.

3) Eger $b=0$ we $c=0$ bolsa, onda $ax^2=0$. Ol deňleme $x^2=0$ deňlemä deňgüýçli hem-de onuň x=0 ýeke-täk köki bardyr.

Teorema. $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň köklerini tapmak üçin $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ we $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ formulalar adalatlydyr.

Subudy. $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň iki bölegini hem a sana bölüp, oňa deňgüýçli bolan

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

getirilen kwadrat deňleniäni alarys Alnan deňlemäni aşakdaky ýaly özgerdeliň:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\ ,\quad x^2+2\frac{b}{2a}x=-\frac{c}{a};$$

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a};$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a};\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

D=b^2-4ac belgilemäni ulanyp alarys:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2} \qquad (1)$$

Bu ýerde diskriminanta baglylykda üç ýagdaýyň bolmagy mümkin

1) Eger D otrissatel (D<0), bolsa onda $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň köki ýokdyr. Hakykatdan-da D<0 bolanda (1) deňlemede $\frac{D}{4a^2}$ drobuň bahasy otrissateldir, çep bölegi bolsa otrissateldäldir. Diýmek (1) deňlemäniň we oöa deögüýçli bolan $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň hem kökleri ýok.

2) Eger D=0 bolsa, onda (1) deňleme aşakdaky görnüşi alar: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ = 0. Bu ýerden $x=-\frac{b}{2a}$ ýeketäk köki bardyr.

3) Eger D položitel bolsa. Onda $\frac{D}{4a^2}$ droby $\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$ görnüşde ýazyp, (1) deňligi $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=0$ görnüşde ýazmak bolar. Ony köpeldijilere dagydalyň: $\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)-\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0$ bu deňlik esasynda deňlemäniň $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ we $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ iki sany dürli kökleri alarys.

Ony gysgaça aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Bu formula kwadrat deňlemäniň kökleriniň formulasy diýilýär.

$ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäni $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ formulany ulanyp çözmek üçin:

a)ilki diskreminaty hasaplamaly we ony nola deňlemeli;

b)Eger položitel ýa-da nola deň bolsa, onda kökleriň formulasyndan peýdalanyp, deňlemäni çözmeli. Eger deňlemäniň diskraminanty otrissatel bolsa onda deňlemäniň kökleri ýok diýip ýazmaly.

17. Wiýetiň teoremasy.

$x^2-7x+12=0$ getirilen kwadrat deňlemäniň $x_1=3$ we $x_2=4$ kökleri bar. Bu kňkleriň jemi 7 – ä deň: $x_1+x_2=7$, köpeltmek hasyly bolsa 12 – ä deň: $x_1*x_2=12$.

Getirilen kwadrat deňlemede kökleriň jeminiň garşylykly alamaty bilen alnany, ikinji çleniň koýeffisiýentine, kökleriniň köpeltmek hasyly bolsa azat çlene deňdigini görýäris. Getirilen kwadrat deňlemäniň ikinji çleniniň koýeffisiýenti we azat çleni bilen onuň kökleriniň arasyndaky baglanyşygy baradakyteoremany ilkinji gezek fransuz matematigi Fransua Wiýet (1540-1603) subut etdi. Şoňa görä-de bu teorema onuň hormatyna Wiýetiň teoremasy diýlip atlandyrylýar.

Wiýetiň teoremasy. Eger $x^2+px+q=0$ (bu ýerde p, q –sanlar, x- näbelli ululyk) getirilen kwadrat deňlemäniň x_1 *we* x_2 kökleri bar bolsa, onda $x_1+x_2=-p$ $x_1*x_2=q$ deňlikler dogrudyr.

Subudy: Kwadrat deňlemeleriniň kökleriniň formulasy boýunça

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{D}}{2};\quad x_2=\frac{-p-\sqrt{D}}{2};\ D=p^2-4q$$

Kökleriň jemini we köpeltmek hasylyny tapalyň:

$$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}+\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-p+\sqrt{D}+-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p$$

$$x_1*x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}*\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{(-p+\sqrt{D})(-p-\sqrt{D})}{4}=\frac{(-p)^2-(\sqrt{D})^2}{4}=\frac{p^2-D}{4}$$
$$=\frac{p^2-p^2+4q}{4}=\frac{4q}{4}=q$$

Şeýlelikde, $x_1+x_2=-p,\ \ x_1*x_2=q.$

Eger D=0 bolanda $x^2+px+q=0$ deňlemäniň iki deň $(x_1=x_2=-\frac{p}{2})$ köki bar diýip şertleöilse, onda teorema bu halda hem dogry bolar:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p$$

$$x_1*x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)*\left(-\frac{p}{2}\right)=\frac{p^2}{4}=q,\ \ (D=0,p^2=4q)$$

Teorema subut edildi.

18. Kwadrat üççleni köpeldijilere dagytmak.

ax^2+bx+c aňlatma kwadrat üççlen diýilýär. Ony hemişelik m *we* n sanlar üçin $ax^2+bx+c=a(x-m)^2+n$ görnüşde ýazmaklyga kwadrat üçagzany bölüp çykarma diýilýär.

Teorema: Eger x_1 *we* x_2 sanlar ax^2+bx+c kwadrat üççleniň kökleri bolsa, onda
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
deňlik ýerine ýetýär.

Subudy: Wiýetiň teoremasyna görä ax^2+bx+c kwadrat üççleniň koýefissiýentleri üçin
$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$ we $\frac{c}{a}=(x_1*x_2)$
bolýanlygy sebäpli, ax^2+bx+c kwadrat üççleni
$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a[x^2(x_1+x_2)x+x_1x_2]=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=$
$=a[x(x-x_1)(x-x_2)]$
görnüşde köpeldijilere dagytmak bolar. Eger-de ax^2+bx+c kwadrat üççleniň kökleri ýok bolsa, onda ony köpeldijilere dagydyp bolmaýar.

Indi bolsa hususy hallara garalyň: 1) eger $c=0$ bolsa, onda ony

$$ax^2+bx=ax(x+b/a)$$

görnüşde köpeldijilere dagytmak bolar. 2) eger $b=0,\ c/a<0$, ýagny $-c/a>0$ bolsa, onda ony

$$ax^2+c=a(x^2-(-c/a))=a\left[x^2-\left(\sqrt{-c/a}\right)^2\right]=a\left(x-\left(\sqrt{-c/a}\right)\right)\left(x+\left(\sqrt{-c/a}\right)\right)$$

görnüşde köpeldijilere dagytmak bolar. Mysal üçin, doly däl $9x^2-4=0$ deňlemäni şeýle gönüşde köpeldijilere dagytmak bolar: $9x^2-4=9\left(x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=9\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

19. Deňsizlikler we olaryň esasy häsiýetleri.

<, ≤, >, ≥, ≠ belgileriň haýsy hem bolsa biri bilen baglanyşdyrylan iki algebraik aňlatma *deňsizlik* diýilýär.

Eger deňlikde bahasy tapylmaly harp bar bolsa, onda ol dňlige *deňleme* diýilýär. Harpň deňlemäni dogry san deňsizligine öwürýän bahalaryna *deňsizligiň çözüwi* diýilýär.

Deňsizlikleriň esasy häsiýetlerine getirýäris:

1) Eger $a > b$ bolsa, onda $b < a$.
2) Eger $a > b$ $a > b$ we $b > c$ bolsa, onda $a > c$.
3) Eger $a > b$ we c islendik san bolsa, onda $a + c > b + c$.
4) Eger $a > b$ we $c > 0$ bolsa, onda $ac > bc$.
5) Eger $a > b$ we $c < 0$ bolsa, onda $ac < bc$.
6) Eger $a > b$ we $c < d$ bolsa,, onda $a + c > b + d$.
7) Eger $a > 0, b > 0$ we $a > b$ bolsa onda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
8) Eger $a, b, \boldsymbol{c}$ we d položitel sanlar üçin $a > b$ we $c > d$ bolsa, onda $ac > bd$.
9) Eger a we b položitel sanlar üçin $a > b$ bolsa, onda $a^n > b^n (n - natural\ san)$.

Deňsizlikleri agzama-agza aýyrmak bolmaýar. $a > b$ we $c < d$ deňsizliklerden $a - c > b - d$ deňsizlik gelip çykmaýar. Meselem, 6>4, 5>2, emma 6-5<4-2.

Iki bölegi položitel däl deňsizligi jübüt derejä göterip hem ýalňyş deňsizligi almak mümkin. Meselem, 4>-5, emma $4^2 < (-5)^2$

20. Çyzykly deňsizlikler ulgamy we olaryň çözüliş usullary.

$ax > b$ $(a \neq 0)$ (> belginiň ornunda<, ≤, ≥. belgileriň islendigi bolup biler) görnüşli deňsizliklere *çyzykly deňsizlik* diýilýär. Bu deňsizligi çözmeklik üçin onuň iki bölegini hem a koýefissiýente bölmeli.

Eger $a > 0$ bolsa onda deňsizligiň çözüwi $x > \frac{b}{a}$, eger $a < 0$ bolsa onda deňsizligiň çözüwi $x < \frac{b}{a}$ bolar.

Mysala seredeliň: $5x + 6 < 7(x - 4) + 8$ deňsizligi çözeliň. Ýaýlary açyp näbelli goşulyjylary deňsizligiň çep bölegine, belli goşuljylary bolsa sag bölegine geçireliň.

$$5x - 7x < -28 + 8 - 6; \quad -2x < -26; \quad x > 13.$$

Jogaby: $x \in (13; +\infty)$.

Indi bolsa, ≤, ≥ görnüşli deňsizlikler bilen berilen bir mysalyň işlenişine seredeliň: $8(x - 2) \geq 3x - 1$. Edil ýokarky mysal ýaly ýaýlary açyp näbelli goşulyjylary deňsizligiň çep bölegine, belli goşuljylary bolsa sag bölegine geçireliň.

$$8x - 3x \geq 16 - 1; \quad 5x \geq 15; \quad x \geq 3.$$

Jogaby: $x \in [3; +\infty)$

Bu mysalyň jogaby ýokarky mysalyň jogabyndan azajyk tapawud edýär, ýagny, birinji mysalyň jogabynda x 13-i öz içine almaýar, ikinji mysalda bolsa x 3-i öz içine alýar.

21. Bir näbellili ikinji derejeli deňsizlikler we olaryň çözüliş usullary.

$ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$ (> belginiň ornunda <, ≤, ≥. belgileriň islendigi bolup biler) görnüşli deňsizliklere *kwadrat deňsizlikler* diýilýär. Bu deňsizligi çözmeklik üçin oňa degişli $ax^2 + bx + c = 0$ deňlemäniň diskraminantyny we bar bolsa köklerini tapmak zerurdyr. Soňra $y = ax^2 + bx + c$ funksiýanyň shematik grafiginden peýdalanmak oňaýlydyr.

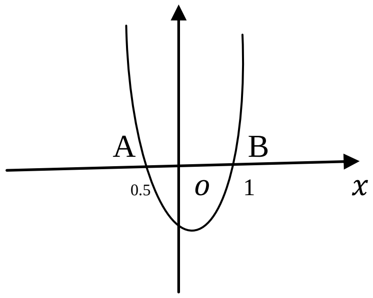
Mysal. $2x^2 - x - 1 > 0$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi. Ilki bilen $y = 2x^2 - x - 1$ kwadrat funksiýanyň köklerini tapalyň:

$$2x^2 - x - 1 = 0; \quad D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 * 2 * (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 * 2} = \frac{1 + 3}{4} = \frac{4}{4} = 1; \quad x_2 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Diýmek $y = 2x^2 - x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ kwadrat funksiýanyň grafiginiň şahalary ýokary ugrukdyrylan, Ox okuny $x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{1}{2}$ nokatlarda kesip geçýän we depesi $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ nokatda bolan paraboladyr.



Çyzgydan görnüi ýaly, $x > -1/2$ ýa-da $x > 1$ bolanda funksiýa položitel bahalary, $-\frac{1}{2} < x < 1$ bolanda bolsa otrissatel bahalary alýar. Şol sebäpli $2x^2 - x - 1 > 0$ deňsizligiň çözüwler toplumuny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

Eger $2x^2 - x - 1 < 0$ deňsizligi çözmek gerek bolsa, onda onuň çözüwleriniň $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ boljakdygy çyzgydan görünýär.

Bu mysaldan peýdalanyp, $ax^2 + bx + c > 0$ kwadrat deňsizligiň çözülişine seredeliň. $D = b^2 - 4ac$ diskriminantyň alamatyna baglylykda üç hal bolup biler.

1) Eger $D > 0$ bolsa onda $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigi Ox oky kesmez we $a > 0$ bolanda ol okdan ýokarda we $a < 0$ bolanda ol okdan aşakda ýerleşýär. Şoňa görä birinji halda deňsizligiň çözüwi ähli san okudyr, ikinji halda bolsa onuň çözüwi ýokdyr.

2) Eger $D < 0$ bolsa, onda $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigi Ox oky kwadrat üççleniň kökleri bolan $x_1\ we\ x_2$ $(x_1 < x_2)$ nokatlarda kesýär. Şunlukda, $ax^2 + bx + c > 0$ deňsizlik $a > 0$ bolanda $(-\infty; x_1)\ we\ (x_2; +\infty)$ interwallarda we $a < 0$ bolanda $(x_1; x_2)$ interwalda ýerine ýetýär, ýagny şol interwallar deňsizligiň çözüwidir.

3) Eger $D = 0$ bolsa, onda $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigi $ax^2 + bx + c = 0$ deňlemäniň ýeke-täk köki bolan x_1 nokatda Ox okuna galtaşýandyr. Şoňa görä $ax^2 + bx + c > 0$ deňsizligiň çözüwi $a > 0$ bolanda $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ we $a < 0$ bolanda deňsizligiň çözüwi ýokdur.

$ax^2 + bx + c < 0$ deňsizligiň çözüwleri hem şoňa meňzeşlikde tapylýar.

22. Arifmetik progressiýa, onuň n – nji agzasynyň we ilkinji n agzalarynyň jeminiň formulalary.

Kesgitleme. Eger san yzgiderliginiň islendik iki goňşy çlenleriniň tapawudy hemişelik d sana deň bolsa, onda bu yzgiderlige *arifmetiki progressiýa* diýilýär. d sana arifmetiki progressiýanyň tapawudy diýilýär.

$$a_{n+1} - a_n = d \ \ ýa - da \ \ a_{n+1} = a_n + d$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa onda $\{a_n\}$ yzgiderlik arifmetik progressiýadyr.

Mysal üçin, $a_1 = 1\ we\ d = 1$ bolanda, onuň çlenleri 1, 2, 3, 4, ..., n,... bolar. Eger $a_1 = 44\ we\ d = -13$ bolsa, onda arifmetik progressiýanyň çlenleri 44, 31, 18, 5, -8, -21,...bolar.

Goý, $\{a_n\}$ yzgiderlik arifmetik progressiýa bolsun. Onda kesgitlemä görä

$$a_n - a_{n-1} = d$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_3 - a_2 = d$$
$$a_2 - a_1 = d$$

bolar. Bu deňlikden çlenme-çlen goşup alarys:

$$a_n - a_1 = (n-1)d \ \text{ýa} - da \ \ a_n = a_1 + (n-1)d$$

Bu formula arifmetik progressiýanyň n-nji çleniniň formulasy diýilýär.

Indi arifmetik progressiýanyň ilkinji n çlenleriniň jeminiň formulasyny getirip çykaralyň. Ol jemi S_n bilen belgiläliň. Onda

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

bolar. Bu deňligi

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

görnüşde hem ýazmak bolar.

Soňky iki deňligi çlenme-çlen goşup alarys:

$$2S_n = (a_1 + a_n)(a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Ýaýlaryň içindäki jemler özara deňdirler. Olaryň her birini $(a_1 + a_n)$ - e deň diýip we goşuljylaryň sanynyň n-e deňdigini göz öňünde tutup,

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

deňligi alarys. Bu ýerde bolsa

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

formulany alarys. Oňa arifmetiki progressiýanyň ilkinji n çlenleriniň jeminiň formulasy diýilýär.

23. Geometrik progressiýa, onuň n – nji agzasynyň we ilkinji n agzalarynyň jeminiň formulalary.

Kesgitleme: Yzgiderligiň ikinji çleninden başlap her bir çleni özünden öň ýanyndaky çleni şol bir sana köpeldilmeginden alynýan bolsa, onda şeýle yzgiderlige gometrik progressiýa diýilýär.

Kesgitlemä görä:

1) b_1
2) $b_2 = b_1 * q$
3) $b_3 = b_2 * q = b_1 * q * q = b_1 * q^2$
4) $b_4 = b_3 * q = b_1 * q^2 * q = b_1 * q^3$

....

n) $b_n = b_1 * q^{n-1}$

(Düşündirilişi: b_2-çlende indeksi 2-ä deň q-nyň derejesi 1-e deň, b_3-de 3-e deň q-nyň derejesi 2-ä deň, b_4-de 4-e deň q-nyň derjesi bolsa 3-e deň we ş.m b_n-de n-e deň)

Ahyrky alnan formula hem geometrik progressiýanyň n-nji çleniniň formulasy bolýar.

Diýmek: $b_n = b_1 * q^{n-1}$

Goý b_n- geometrik progressiýa bolsun, S_n- onuň çlenleriniň jemi bolsun. Onda

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n \qquad (1)$$

(1) Deňligiň iki bölegini hem q-maýdalawja köpeldeli. Onda

$qS_n = b_1q + b_2q + b_3q + \cdots + b_{n-1}q + b_nq, \ \ b_1q = b_2; b_2q = b_3, ..., b_{n-1}q = b_n$
geometrik progressiýanyň kesgitlemesine görä bolýar.

$$qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + b_nq \qquad (2)$$

(2)-den (1)-i aýraly:

$$qS_n - S_n = b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + b_nq - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n) = b_nq - b_1$$

bu ýerde $b_n = b_1 * q^{n-1}$ deň onda $b_nq = b_1 * q^n$

$$S_n(q-1) = b_1q^n - b_1 = b_1(q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q-1)}$$

Ahyrky alnan formula geometrik progressiýanyň ilkinji n-çlenleriniň jeminiň formulasydyr.

24. Iki näbellili çyzykly deňlemeler sistemasy we olaryň çözülişi.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

deňlemeler sistemasyna iki näbellili çyzykly deňlemeler sistemasydiýilýär. Bu sistemada $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$- berlen hakkyky sanlar. Näbelli x we y ululyklaryň sistemanyň her bir deňlemesi dogry deňlige öwürýän bahalarynyň jübütine deňlemäniň çözüwi diýilýär. Deňlemeler sistemasyny çözmeklik onuň ähli çözüwlerini tapmaklyga ýa-da çözüwleriniň ýokdugyny görkezmekligi aňladýar.

Sistemanuň koýefissentlerine baglylykda aşakdaky üç ýagdaý bolup biler:

1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ - bu halda sistemanyň ýeketäk çözüwi bardyr;
2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ - bu halda sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr;
3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ - bu halda sistemanyň çözüwi ýokdyr.

Şeýlelikde, (1) sistemany çözmekligi 1-3 şertleri barlamakdanbaşlamaly. Şunlukda, 1-nji şerti ýerine ýetende onuň çözüwüni tapmak üçin, aşakdaky usullardan peýdalanmak bolar.

1) Ornuna goýmak usuly. Bu usul bilen sistema çözülende:

a) deňlemeleriň haýsy hem bolsa birinde bir näbelli beýleki näbelli arkaly aňladylýar;
b) alnan aňlatma sistemanyň beýleki deňlemesinde ol näbelliniň ornuna goýulýar;
c) alnan bir näbellili deňleme çözülýär;
d) soňra ornuna goýmak arkaly ikinji näbelliniň bahasy tapylýar.

Mysal №1 $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ sistemany çözmeli.

Çözülişi. Birinji deňlemeden $x = 2 + 2y$ tapyp, ony ikinji deňlemede x ornuna goýýarys: $2(2 + 2y) + 3y = 11,\quad 7y = 7,\quad y = 1$ *y-iň* bu bahasyny birinji deňlemede goýup, x-i taparys: $x - 2 * 1 = 2,\ \ x = 4$. Şeýlelikde, sistemanyň çözüwi $x = 4, y = 1$ bolar.

2) Goşmak usuly. Bu usul bilen sistema çözülende:

a) sistemanyň deňlemelerini olardaky näbellileriň biriniň koýefisiýentleri garşylykly sanlar bolarýaly edip, käbir sanlara köpeltmeli;
b) sistemanyň deňlemeleriniň çep we sag böleklerini çlenme-çlen goşmaly;
c) alnan bir näbellili deňlemäni çözmeli;
d) soňra näbellii ululygyň tapylan bahasynydeňlemeleriň birinde ornuna goýup, ikinji näbelliniň bahasyny tapmaly.

Mysal №2 $\begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$ sistemany çözmeli.

Çözülişi. Birinji deňlemäni 2-ä, ikinjini -5-e köpeldip,

$$\begin{cases} 10x + 6y = 16 \\ -10x + 25y = 15 \end{cases}$$

sistemany alarys we olary goşup, birinji näbellini ýoklarys (ýagny x näbellini):

$$\begin{cases} 10x + 6y = 16 \\ \quad 31y = 31 \end{cases}$$

Sistemanyň ikinjisinden $y = 1$ tapyp we ony birinjisinde goýup, $x = 1$ taparys. Şeýlelikde, sistemanyň çözüwi $x = 1,\ \ y = 1$ bolar.

3) Çyzgy usuly. Bu usul bilen sistemany çözmek üçin onuň deňlemeleriniň her biriniň çyzgysyny aýry-aýrylykda gurup, olaryň kesişme nokadynyň kordinatalaryny tapmaly.

25. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa we onuň çlenleriniň jeminiň formulasy.

Goý, $\{b_n\}$ geometrik progressiýa berilen bolsun. Onuň ilkinji n çlenleriniň jemi

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

deňdir. Bu jemi

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n$$

görnüşde ýazyp bolýar. Bu deňlikden $|q| < 1$ bolanda n-ň artmagy netijesinde q^n-ň barha kemelik nola, S_n-ň bolsa $\frac{b_1}{1-q}$ sana ýakynlaşýandygy gelip çykýar. Diýmek

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$$

deňligi alarys. Eger $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$ diýip belgilesek, onda

$$S_n = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{ýa-da} \quad S_n = \frac{b_1}{1-q}$$

deňligi alarys. Bu formula $|q| < 1$ bolandaky tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jeminiň formulasy diýilýär.

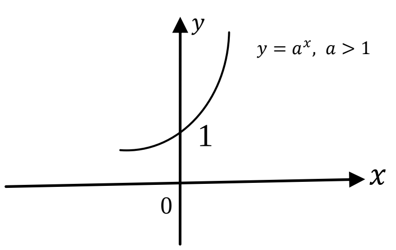
26. Görkezijili funksiýa, onuň häsiýetleri we grafigi.

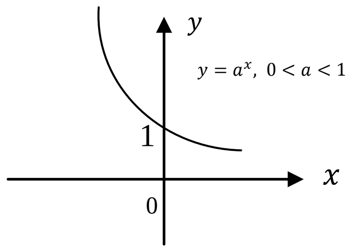
Kesgitleme: $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ formula arkaly berilen funksiýa a esasly görkezijili funksiýa diýilýär.

Görkezijili funksiýanyň aşakdaky ýaly häsiýetleri bardyr:

1) Bu funksiýanyň kesgitleniş oblasty $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlaryň köplügi;
2) Onuň bahalar köplügi $\boldsymbol{R}_+$ hemme položitel sanlaryň köplügi;
3) $a > 1$ bolanda san okunda funksiýa artýar; $0 < a < 1$ bolanda bolsa funksiýa kemelýär;
4) a-nyň islendik bahasy üçin $a^0 = 1$;
5) x-iň we y-iň islendik hakyky bahalarynda aşakdaky deňlikler ýerliklidir:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \qquad b \neq 0.$$





27. Logarifm. Köpeltmek hasylynyň, paýyň, derejäniň logarifmleri.

Kesgitleme: a esasa görä b sanyň logarifmi diýlip b sany almak üçin a esasy derejä götermek gerek bolan dereje görkezjä aýdylýar.

Ol san $\log_a b$ ýaly belgilenýär we "a esasa görä b sanyň logarifmi" diýlip okalýar. Bu kesgitleme boýunça $a^{\log_a b} = b$ deňlik dogrydyr. Oňa esasy logarifmik toždestwo diýilýär.

Logarifmik aşakdaky esasy häsiýetleri bardyr:

1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
5) $\log_a x^p = p \log_a x$

Birinji we ikinji häsiýetler logarifmiň kesgitlemesinden gelip çykýar. Soňky üçüsini subut etmek üçin esasy logarifmik toždestwony ulanarys. Şol toždestwa boýunça ýerine ýetýän $a^{\log_a x} = x,\ a^{\log_a y} = y$ deňlikleri köpeldip,

$$xy = a^{\log_a x} * a^{\log_a y} \qquad (1)$$

deňligi alarys. Esasy logarifmik toždestwo boýunça $xy = a^{\log_a (x*y)}$ (2).

(1) we (2) deňlikleriň çep bölekleriniň deňliginden olaryň sag bölekleriniň deňligi gelip çykýar:

Bu deňliklerden bolsa esaslary deň bolan derejeleriň deňliginden olaryň görkezijileriniň deňligi gelip çykýar: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Edil şonuň ýaly

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}, \qquad \frac{x}{y} = a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}$$

deňlikler esasynda $a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}$ deňlikler ýerine ýetýär we ondan $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ deňlik gelip çykýar. Derejäniň häsiýeti we esasy logarifmik toždestwony ulanyp,

$$a^{p\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^p = x^p = a^{\log_a x^p}$$

deňligi alarys. Bu ýerden bolsa derejeleriň we esaslaryň deňliginden $\log_a x^p = p\log_a x$ deňlik gelip çykýar.

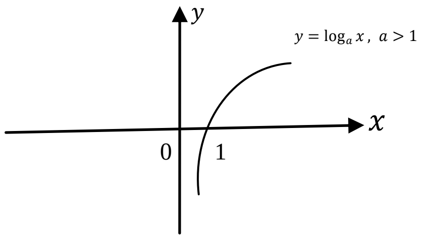
Eger logarifmiň esasy 10 bolsa, onda oňa onluk logarifm diýilýär we lg ýaly belgilenýär. Eger-de logarifmiň esasy e san bolsa ($e \approx 2.71$), onda oňa natural logarifmi diýilýär we ln bilen belgilenýär.

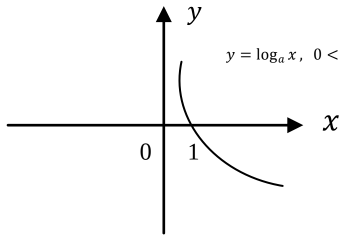
28. Logarifmik funksiýa, onuň häsiýetleri we grafigi.

Kesgitleme: $y = \log_a x$ formula arkaly berilen funksiýa logarifmik funksiýa diýilýär.

Logarifmik funksiýanyň aşakdaky ýaly häsiýetleri bardyr:

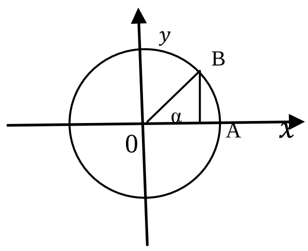
1) Logarifmik funksiýanyň kesgitleniş oblastyhemme položitel sanlaryň köplügidir.
2) Logarifmik funksiýanyň bahalar oblasty hemme hakyky sanlar köplügidir.
3) Islendik hakyky y üçin $\log_a(a^y) = y$ deňlik ýerine ýetýär, ýagny $y = \log_a x$ funksiýa $x_0 = a^{y_0}$ bolanda y_0 bahany alýar.
4) $a > 1$ bolanda logarifmik funksiýa kesgitleniş oblastynda artýar, $0 < a < 1$ bolanda bolsa kemelýär.





29. Şol bir argumentli trigonometrik funksiýalaryň arasyndaky baglanşyk.

Merkezi kordinatalar başlangyjynda bolan birlik töwerek çyzalyň we OE başlangyç radiusy α burça öwreliň. Onda ol OB ýagdaýa eýe bolar.



Töweregiň radiusynyň 1-e deňdigi sebäpli*(R=1*), sinusyň we kosinusyň kesgitlemelerine görä $y = sin\alpha,\ x = cos\alpha$ deňlikleri alarys. Onda $(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = y^2 + x^2 = |AB|^2 + |OA|^2$ bolar.

Pifagoryň teoremasyna görä, OAB göniburçly üçburçlukdan $|AB|^2 + |OA|^2 = |OB|^2$ deňligi alarys. $|OB| = R = 1$ bolýanlygy üçin

$$sin\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1$$

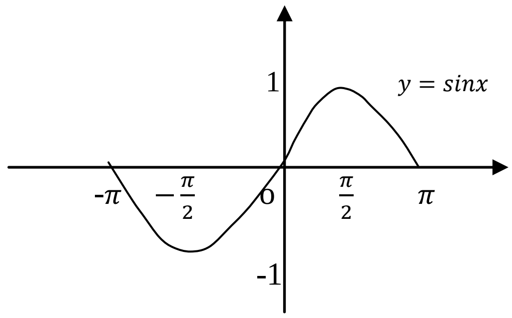
$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \quad we \quad ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

formulalar dogrydyr.

30. y = sinx funksiýa, häsiýetleri we grafigi.

Bu funksiýalarň şeýle häsiýetleri bar.

1. Kesgitleniş oblasty ähli hakyky sanlar köpligi
2. Bahalar köpligi $[-1,\ 1]$ kesimdir
3. Funksiýa täkdir
4. Funksiýa periodikdir, esasy periody 2π deňdir
5. Funksiýa $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ kesimlerde artýar we $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$ kesimlerde kemelýär.

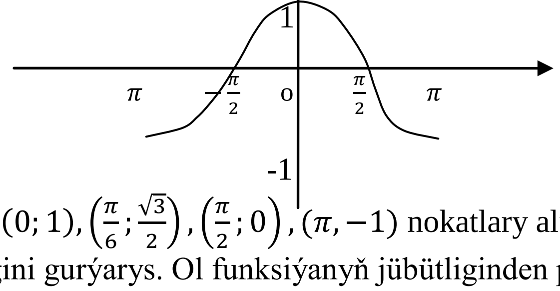


Grafige degişli $(0,0)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; $(\pi, 0)$ nokatlary alyp, $y = sinx$ funksiýanyň $[0, \pi]$ kesimdäki grafigini gurýarys. Ol funksiýanyň täkliginden peýdalanyp, onuň $[-\pi, \pi]$ kesimdäki grafigini gurýarys. Soňra ol funksiýanyň *2π* periodikligi wsasynda, san okunda onuň doly grafigini gurýarys.

31. y = cosx funksiýa, häsiýetleri we grafigi.

Bu funksiýalarň şeýle häsiýetleri bar.

1. Kesgitleniş oblasty ähli hakyky sanlar köpligi
2. Bahalar köpligi $[-1,\ 1]$ kesimdir
3. Funksiýa jübütdir
4. Funksiýa periodikdir, esasy periody 2π deňdir
5. Funksiýa $[-\pi + 2n\pi,\ 2n\pi]$ kesimlerde artýar we $[2n\pi,\ \pi + 2n\pi]$ kesimlerde kemelýär.

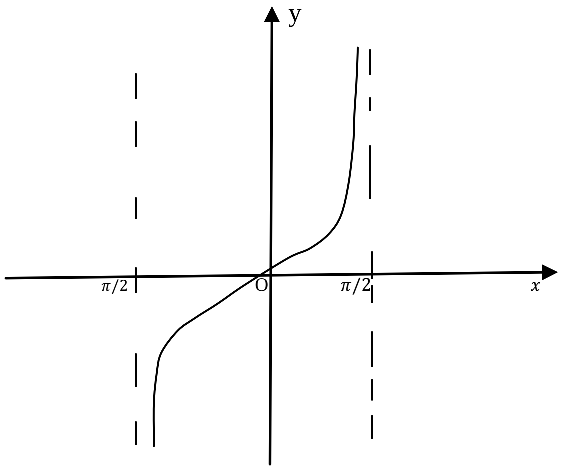


Grafige degişli $(0; 1)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $(\pi, -1)$ nokatlary alyp, $y = cosx$ funksiýanyň $[0, \pi]$ kesimdäki grafigini gurýarys. Ol funksiýanyň jübütliginden peýdalanyp, onuň $[-\pi, \pi]$ kesimdäki grafigini gurýarys.

Soňra ol funksiýanyň 2π periodikligi esasynda, san okunda onuň doly grafigini gurýarys.

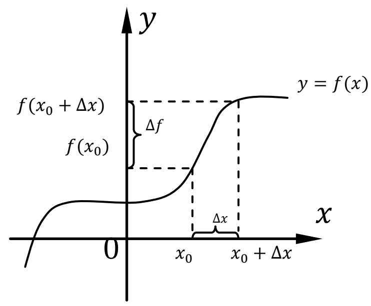
32. y = tgx funksiýa, häsiýetleri we grafigi.

1. Kesgitleniş oblasty san okunyň $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; k \in Z$ nokatlaryň köpligidir
2. Bahalar köpligi ähli san okudyr
3. Esasy periody π bolan periodic funksiýadyr
4. Funksiýa täkdir
5. Funksiýa $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ interwalda artýar



$(0;0), \left(\frac{\pi}{4};1\right), \left(\frac{\pi}{3};\sqrt{3}\right)$ nokatlary endigan birleşdirip, $y = tgx$ funksiýanyň $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykdaky grafigini we soňra ol funksiýanyň täkliginden peýdalanyp $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ interwaldaky grafigini gurup bileris.

33. Önüm onuň kesgitlenişi. Önümiň häsiýetleri.



$y = f(x)$ funksiýada x agumentiň fiksirlenen (kesgitlenen) x_0 nokadynyň etrabynda (töwereginde) x_0 nokatda Δx (delta iks) artdyrma berýäris. $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta x = x - x_0$ Δx-argumentiň artdyrmasynda $y = f(x)$ funksiýa $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ artdyrma eýe bolar. Bu tapawuda f funksiýanyň x_0 nokatdaky artdyrmasy diýilýär, ol Δf (delta ef) bilen belgilenýär. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Alnan tapawudyň Δx -a bolan gatnaşygyny alaly.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Şeýlelik bilen alnan sana f -funksiýanyň x_0 nokatdaky ütgeýişiniň tizligi diýilýär ýa-da f funksiýanyň x_0 nokatdaky önümi diýilýär.

Kesgitleme: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ predel f funksiýanyň x_0- nokatdaky önümi diýilýär. Ol köplenç $f'(x_0)$ (ef ştrih iks nol) bilen belgilenýär. Ýa-da ýöne f' bilen belgilenýär.

Hemişelik sanyň önümi nola deňdir.

x-ň önümi bire deňdir.

Derejeden önüm alnanda dereje öňüne geçýär we dereje bir birlik kemelýär. Ýagny, $(x^n)' = n * x^{n-1}$ görnüşde alnyp biliner.

Mysal: $y = 3x^4$ funksiýadan önüm almaly.

Çözülişi: Derjeden alnan önümiň häsiýeti boýunça bu funksiýanyň önümi aşakdaky ýaly bolar. $y' = (3x^4)' = 3 * 4x^{4-1} = 12x^3$

34. Asyl funksiýa we onuň häsiýetleri.

Kesgitleme: Eger berlen aralygyň ähli x-leri üçin $F'(x) = f(x)$ (1) bolsa, onda berilen aralykda f funksiýa üçin F funksiýa asyl funksiýa diýilýär.

f asyl funksiýalarynyň hemmesini, f funksiýa üçin asyl funksiýanyň umum görnüşi diýip atlandyrylýan bir formulanyň kömegi bilen ýazmak mümkin.

1-nji teorema: Eger F funksiýa I aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, onda islendik hemişelik C san üçin $F(x) + C$ funksiýa hem I aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasydyr.

Subudy: Teoremanyň şertine görä islendik $x \in I$ üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Şonuň esasynda hemişelik C san üçin $[F(x) + c]' = F'(x) + c' = F'(x)$ bolýanlygyna görä, islendik $x \in I$ üçin $[F(x) + c]' = f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Ol bolsa I aralykda $F(x) + C$ funksiýanyň hem f funksiýa üçin asyl funksiýa bolýandygyny görkezýär.

Bu teorema görä, eger f funksiýanyň I aralykda iň bolmanda bir asyl funksiýasy bar bolsa, onda bu funksiýanyň I aralykda tükeniksiz köp asyl funksiýalary bardyr. Şeýlelikde, eger $\Phi(x)$ we $F(x)$ funksiýalar I aralykda f funksiýanyň asyl funksiýalary bolsalar, onda bu asylfunksiýalaryň arasynda nähilli baglanşyk bar diýen sorag ýüze çykýar.

Asyl funksiýany tapmaklygyň käbir düzgünlerine seredeliň, bu düzgünler diferensirlemegiň degişli düzgünlerine meňzeşdir.

1-nji düzgün. Eger f funksiýa üçin F asyl funksiýa, g üçin G asyl funksiýa bolsa, onda $f + g$ üçin $F + G$ asyl funksiýadyr.

Hakykatdan-da, şert boýunça $F' = f$ we $G' = g$ bolýanlygy üçinjemiň önümini hasaplamagyň düzgüni boýunça $(F + G)' = F' + G' = f + g$ alarys.

2-nji düzgün. Eger f üçin F asyl funksiýa, k san hemişelik bolsa, onda kf üçin kF asyl funksiýadyr.

Hakykatdan-da, k hemişelik köpeldijini önüm belgisiniň daşyna çykarmak mümkin, şoňa görä-de $(kF)' = kF' = kf$.

3-nji düzgün. Eger $f(x)$ üçin $F(x)$ asyl funksiýa bolup k we b hemişelik bolsalar, şunlukda $k \neq 0$ bolsa, onda $f(kx + b)$ üçin $\frac{1}{k}F(kx + b)$ asyl fuksiýadyr.

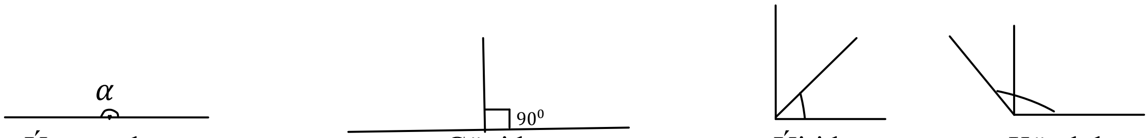
Hakykatdan-da, çylşyrymly funksiýanyň önümini hasaplamak düzgüni boýunça $\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b)$ alarys.

Geometriýa:

1. Çatyk we wertıkal burçlar.

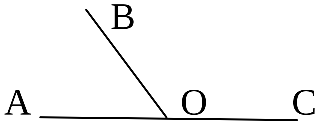
Bir nokatdan çykýan iki şöhläniň emele getiren şekiline *burç* diýilýär. Göni çyzygyň iki nokat bilen çäklenen bölegine *kesim* diýilýär.

Eger burç 180^0 deň bolsa, oňa ýazgyn burç diýilýär. Eger burç 90^0 deň bolsa, oňa göniburç diýilýär. Eger burç 90^0-dan kiçi, ýagny göniburçdan kiçi bolsa, oňa *ýiti burç* diýilýär. Eger burç göniburçdan uly ýazgyn burçdan kiçi, ýagny 90^0-dan uly 180^0 kiçi bolsa, oňa *kütek burç* diýilýär.

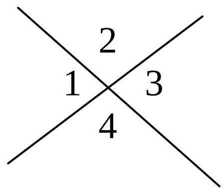


Ýazgyn burç   Göni burç   Ýiti burç   Kütek burç

Bir tarapy umumy, beýleki taraplary bolsa biri beýlekisiniň dowamy bolan iki burça *çatyk burçlar* diýilýär.



1-nji surat



2-nji surat

1-nji suratda ∠AOB we ∠BOC çatyk burçlardyr. Sebäbi BO bu burçlaryň ikisi üçin hem umumy tarap bolup hyzmat edýär, AO we OC taraplar bolsa bir beýlekisiniň dowamy bolup durýar, OA we OC şöhleleriň ýazgyn burç emele getirýändigi üçin $\angle AOB + \angle BOC = 180^0$. Diýmek, çatyk burçlaryň jemi 180^0-a deňdir.

Eger bir burçuň taraplary beýleki burçuň taraplarynyň dowamy bolsalar, beýleki iki burça *wertikal burçlar* diýilýär.

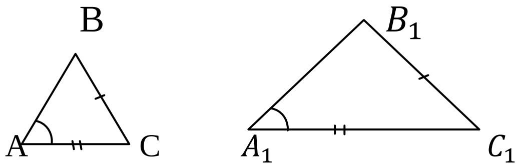
2-nji suratdaky 1 burçuň taraplarynyň dowamlary 3 burçy emele getirýär. Şoňa görä-de 1 we 3 burçlar wertikal burçlardyr. Edil şoňa meňzeş 2 we 4 burçlar hem wertikal burçlardyr. 1 burç 2 burç bilen şeýle hem 4 burç bilen çatykdyr. Çatyk burçlaryň häsiýeti boýunça $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$ we $\angle 1 + \angle 4 = 180^0$. Bu ýerden $\angle 2 = 180^0 - \angle 1$ we $\angle 4 = 180^0 - \angle 1$ alarys. Diýmek, 2 we 4 burçlaryň gradus ölçegleri deňdirler. Onda bu burçlaryň özleri hem deňdirler.

Diýmek wertikal burçlar deňdirler.

2. Üçburçluklaryň deňlik nyşanlary.

Teorema (I nyşan): **Eger bir üçburçlugyň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy degişlilikde başga bir üçburçlugyň iki tarapyna we olaryň arasyndaky burçuna deň bolsa, onda şeýle üçburçluklar deňdirler.**

Subudy: $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ bolan ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar berlen bolsun.



1-nji surat

Bu üçburçluklaryň deňdiklerini subut edeliň.(1-nji surat) ∠A=∠A_1 bolany üçin A depe bilen A_1 gabat geler ýaly AB we AC taraplar bolsa degişlilikde A_1B_1 we A_1C_1 şöhleleriň üstüne düşer ýaly edip, ABC üçburçlugyň $A_1B_1C_1$ üçburçlugyň üstüne goýup bolar. AB=A_1B_1 we AC=A_1C_1 bolany üçin AB tarap A_1B_1 tarap bilen AC tarap A_1C_1 tarap bilen, ýagny B nokat B_1 nokat bilen C nokat C_1 bilen gabat geler. Bu bolsa BC tarapyň B_1C_1 tarap bilen gabat gelýändigini görkezýär. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar doly gabat gelýärler. Diýmek, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar deňdirler. Teorema subut edildi.

Teorema (II nyşan): **Eger bir üçburçlugyň bir tarapy we oňa sepleşýän iki burçy degişlilikde başgabir üçburçlugyň bir tarapyna we oňa sepleşýän deň bolsa, onda beýle üçburçluklar deňdirler.**

Teorema (III nyşan): **Eger bir üçburçlugyň üç tarapy degişlilikde başga bir üçburçlugyň üç tarapyna deň bolsa, onda şeýle üçburçluklar deňdirler.**

3. Gönüburçly üçburçluklaryň deňlik nyşanlary.

Göniburçly üçburçlukda iki katetiň arasyndaky burçuň göni burç bolany üçin üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyndan: “**Eger göniburçly üçburçlugyň katetleri başga bir gönüburçly üçburçlugyň katetlerine degişlilikde deň bolsa, onda ol üçburçluklar deňdirler**” diýen tasyklama gelip çykýar. Üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyndan **“Eger göniburçly üçburçlugyň kateti we oňa sepleşýän ýiti burçy başga bir göniburçly üçburçlugyň katetine we oňa sepleşýän ýiti burçuna deň bolsa, onda ol üçburçluklar deňdirler”** diýen tassyklama gelip çykýar.

Göniburçly üçburçluklaryň deňliginiň ýene-de iki nyşanyna garap geçeliň.

Teorema: **Eger göniburçly üçburçlugyň gipotenuzasy we ýiti burçy başga bir gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna we ýiti burçyna deň bolsa, onda beýle üçburçluklar deňdirler.**

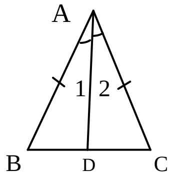
Subudy: Gönüburçly üçburçluklaryň ýiti burçlarynyň jeminiň 90^0 deňdigi üçin bu gönüburçly üçburçluklaryň beýleki ýiti burçlary hem özara deňdirler. Onda bu gönüburçly üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany boýunça, ýagny tarapy (gipotenuzasy) sepleşýän iki burçy boýunça deňdirler. Teorema subut edildi.

Teorema: **Eger bir gönüburçly üçburçluuň gipotenuzasy we kateti beýleki gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna we katetine deň bolsa, onda beýle üçburçluklar deňdirler.**

4. Deňýanly üçburçlygyň häsiýeti.

Teorema: **Deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçlary deňdirler.**

Subudy: Esasy BC bolan ABC deňýanly üçburçluga seredeliň we ∠B=∠C bolýandygyny subut edeliň (1-nji surat). Bu üçburçlugyň AD bisektrisasyny geçireliň. Üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşany boýunça BAD we CAD üçburçluklar deňdirler. Sebäbi AD tarap bu üçburçluklaryň ikisi üçin hem umumy, ABC deňýanly üçburçluk bolany üçin AB=AC we AD bissektrisa bolany üçin ∠ABD=∠CAD. Bu üçburçluklaryň deňliginden olaryň degişli burçlarynyň deňliginden olaryň degişli burçlarynyň deňligi ýagny ∠B=∠C gelip çykýar. Teorema subut edildi.



1-nji surat

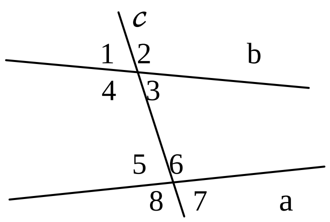
Teorema: **Deňýanly üçburçlugyň esasyna geçirilen bissektrisasy onuň hem medianasy, hem beýikligidir.**

Subudy: Ýene-de 1-nji surata seredeliň. ABC deňýanly üçburçluk, AD onuň esasyna geçirilen bissektrisa. ABD we ACD üçburçluklaryň deňliginden BD=DC we ∠3=∠4 gelip çykýar. BD=DC deňlik D nokadyň BC tarapyň ortasydygyny görkezýär. Diýmek, AD bissektrisa şol bir wagtyň özünde ABC üçburçlugyň medianasybolup hyzmat edýär. 3 we 4 burçlaryň deňliginden (çatyk burçlardygy üçin) olaryň göni burçlardygy gelip çykýar. Diýmek, AD bissektrisa ABC üçburçlugyň beýikligi bolup hyzmat edýär. Teorema subut edildi.

Üçburçlugyň her depesinden diňe bir bissektrisa, bir mediana we bir beýikligi geçirip bolýandygyna görä, deňýanly üçburçlugyň esasyna geçirilen mediana bissektrisa we beýiklikdir, edil şeýle beýiklik hem bissektrisadyr we medianadyr.

5. Göni çyzyklaryň parallelik nyşanlary.

Iki göni çyzygyň parallellik nyşanlary. a we b göni çyzyklaryň kesiji çyzygy diýlip, olaryň ikisini hem kesýän c göni çyzyga aýdylýar. a we b göni çyzyklar c kesiji göni çyzyk bilen kesişende emele gelen 8 burçuň (1-nji surat) ýörüte atlary bardyr



1-nji surat

3 we 5, 4 we 6 atanak ýatan burçlar.
4 we 5, 3 we 6 birtaraplaýyn burçlar.
1 we 5, 4 we 8, 2 we 6, 3 we 7 degişli burçlar.
Iki göni çyzygyň parallelliginiň bu burçlaryň jübütleri bilen baglanyşykly üç nyşana garap geçeliň.

Teorema:** **(I nyşan) **Eger iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip geçende alynýan atanak ýatan burçlar deň bolsa, onda ol göni çyzyklar paralleldirler.**

Teorema:** **(II nyşan) **Eger iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip geçende alynýan degişli burçlar deň bolsa, onda ol göni çyzyklar paralleldirler.**

Teorema:** **(III nyşan) **Eger iki göni çyzygy üçünji c göni çyzyk bilen kesişende alnan birtaraplaýyn burçlaryň jemi 180^0-a deň bolsa, onda ol göni çyzyklar paralleldirler.**

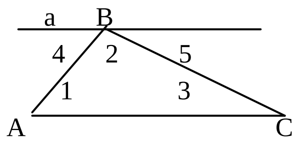
Parallel iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip geçende alynýan: 1) atanak ýatan burçlar deňdirler; 2) degişli burçlary deňdirler; 3) birtaraplaýyn burçlaryň jemi 180^0-a deňdir.

6. Üçburçlygyň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema.

Teorema: **Üçburçlugyň burçlarynyň jemi 180^0-a deňdir.**

Subudy: Erkin ABC üçburçluga seredeliň we $\angle A+\angle B+\angle C= 180^0$ bolýanldygyny subut edeliň.

B nokadyň üsti bilen AC tarapa parallel bolan a göni çyzygy geçireliň (1-nji surat).



1-nji surat

1 we 4 burçlara we AC göni çyzyklary AB kesiji göni çyzyk kesip geçende alnan atanak ýatýan burçlar, 3 we 5 burçlar bolsa a we AC göni çyzyklary BC kesiji göni çyzyk kesip geçende alnan atanak ýatýan burçlar bolany üçin $\angle 4=\angle 1$, $\angle 5=\angle 3$ (1).

4,2 we 5 burçlaryň jeminiň bolsa B depeli ýazgyn burça deňdigi, ýagny $\angle 4+\angle 2+\angle 5= 180^0$ boljaklygy aýdyňdyr. Bu ýerden (1) deňlikleri göz öňünde tutup alarys: $\angle 1+\angle 2+\angle 3= 180^0$ ýa-da $\angle A+\angle B+\angle C= 180^0$. Teorema subut edildi.

Eger üçburçlugyň haýsy bolsa-da bir tarapyny dowam etdirsek, onda üçburçlugyň burçlarynyň biri bilen çatyk bolan burç alarys. Beýle burça üçburçlugyň daşky burçy diýilýär. Üçburçlugyň her bir depesinde iki sany daşky burç gurup bolar.

Teorema: **Üçburçlugyňdaşky burçy onuň bilen çatyk bolmadyk beýleki iki burçuň jemine deňdir.**

7. Üçburçlygyň garşysyndaky taraplary bilen burçlarynyň arasyndaky baglanyşyk.

Teorema: **Üçburçlukda uly tarapyň garşysynda uly burç ýatýar we tersine, uly burçuň garşysynda uly tarap ýatýar.**

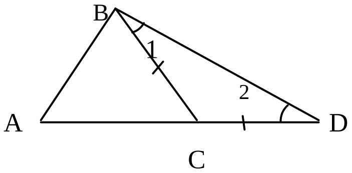
Netije: Göniburçly üçburçlukda gipotenuza katetlerden ulydyr. Dogurdan-da, gipotenuza göni burçuň, katet bolsa ýiti burçuň garşysynda ýatýar.

8. Üçburçlyk deňsizligi.

Teorema: **Üçburçlugyň her bir tarapy onuň beýleki iki tarapynyň jeminden kiçidir.**

Subudy: Erkin ABC üçburçlugy alalyň we AB<AC+CB bolýandygyny subut edeliň. AC tarapyň dowamynda BC tarapa deň bolan CD kesimi alyp goýalyň (1-nji surat).

Alnan BCD deňýanly üçburçlukda 1 we 2 burçlar deňdirler. ABD üçburçlukda ∠ABD>∠1, diýmek, ∠1=∠2 bolany üçin, ∠ABD<∠2. Üçburçlukda uly burçuň garşysynda uly tarapyňýatýanlygy üçin, AD>AB AD=AC+CD=AC+CB bolany üçin AC+CB>AB deňsizligi alarys. Teorema subut edildi.



1-nji surat

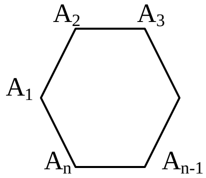
Netije: Bir göni çyzykda ýatmaýan A, B we C üç nokat üçin AB<AC+BC, AC < AB +BC, BC<BA+AC deňsizlikler dogrudyr. Bu deňsizlikleriň her birine üçburçlugyň deňsizligi diýilýär.

9. Güberçek köpburçlygyň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema.

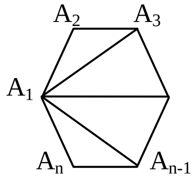
Teorema: **Güberçek n-burçlugyň içki burçlarynyň jemi (n-2)·180^0 deňdir.**

Subudy: 1-nji suratda şekillendirilen güberçek n burçluga seredeliň. Bu köpburçlugyň burçlarynyň jemini tapmak üçin bir depesinden ähli dagonallaryny geçireliň. Şonda n burçluk köpburçluklara bölüner (2-nji surat).

Bu üçburçluklaryň sany n burçlugyň taraplarynyň Sanyndan 2 san kemdir, ýagny n-2 – ä deňdir. Her bir üçburçlugyň burçlarynyň jeminiň 180^0-a deňdigini göz öňünde tutup, n burçlugyň burçlarynyň jeminiň (n-2)·180^0 bolýanlygyny tapýarys.



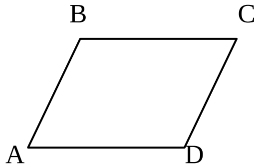
1-nji surat



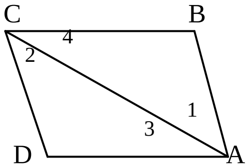
2-nji surat

10. Parallelogramyň häsiýetleri.

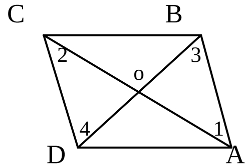
Kesgitleme: **Garşylykly taraplary jübüt-jübütden parallel bolan dörtburçluga parallelogram diýilýär.**



1-nji surat



2-nji surat



3-nji surat

1-nji suratda AB∥CD, AD∥BC bolan ABCD parallelogram şekillendirilendir. Parallelogramyň käbir häsiýetlerine seredip geçeliň.

1. Parallelogramyň diagonaly ony deň iki üçburçluga bölýär. ABCD parallelograma seredeliň (2-nji surat). AC diagonal bu parallelogramy ABC we ADC iki üçburçluga bölýär. Bir tarapy we oňa sepleşýän iki burçy boýunça ABC we ADC üçburçluklar deňdirler. Sebäbi AC tarap bu üçburçluklaryň ikisi üçin hem umumy, CD we AB parallel taraplar kesiji AC göni çyzyk bilen kesilende alnan atanak ýatýan burçlar hökmünde ∠1=∠2, BC we AD parallel taraplary kesiji AC göni çyzyk bilen kesilende alnan atanak ýatýan burçlar hökmünde ∠3=∠4.

2. Parallelogramyň garşylykly taraplary we garşylykly burçlary özara deňdirler. ABC we AC üçburçluklaryň deňliginden (2-nji surat) olaryň degişli taraplarynyň we burçlarynyň deňligi, ýagny AB=CD, BC=AD we ∠B=∠D alynýar. ∠1=∠2 we ∠3=∠4 deňliklerden peýdalanyp alarys: ∠A=∠1+∠3=∠2+∠4=∠C. Diýmek, ∠A=∠C.

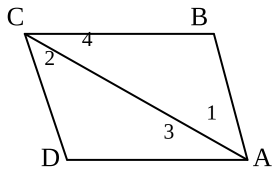
3. Parallelogramyň diogonallary kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýärler. Goý AC we BD ABCD parallelogramyň diogonallary we O olaryň kesişme nokady bolsun. AO=OC we BO=OD bolýanlygyny subut edeliň (3-nji surat). Munuň üçin garşylykly ýerleşen üçburçluklaryň haýsy bolsa-da bir jübütini, meselm, AOB we DOC üçburçluklary deňeşdirip göreliň. Bu üçburçluklarda parallelogramyň garşylykly taraplary bolany üçin AB=DC. DC we AB parallel göni çyzyklary kesiji AC göni çyzyk kesip geçende emele gelýän atanak ýatýan burçlar bolany üçin ∠1=∠2. DC we AB parallel göni çyzyklary kesiji BD göni çyzyk kesip geçende emele gelýän atanak ýatýan burçlar bolany üçin ∠3=∠4.

Bu ýerden üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany (bir tarapy we oňa sepleşýän iki burçy) boýunça DOC üçburçluk AOB üçburçluga deňdir. Deň üüçburçluklarda bolsa deň burçlaryň garşysynda deň taraplar ýatýar. Diýmek, AO=OC we BO=OD.

11. Parallelogramyň nyşanlary.

Parallelogramyň üç nyşanyna seredeliň.

1. Eger dörtburçlugyň garşylykly iki tarapy deň we parallel bolsa, onda ol dörtburçluk parallelogramdyr.



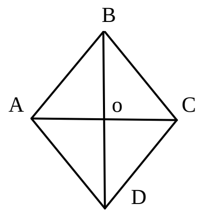
1-nji surat

Goý, ABCD dörtburçlukda AB=CD we AB∥CD bolsun. ABCD dörtburçluk parallelogramdygyny subut edeliň (1-nji surat). Dörtburçlugyň AC diogonalyby geçireliň. AB we CD parallel göni çyzyklary AC kesiji göni çyzyk kesip geçende alnan atanak ýatýan burçlar hökmünde ∠1=∠2. AB=CD we AC tarapyň umumy hem-de ∠1=∠2 bolany üçin, üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşany (iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy) boýunça ABC we ADC üçburçluklar deňdirler. Bu üçburçluklaryň deňliginden 3 we 4 burçlaryň deňdigi gelip çykýar, çünki olar deň üçburçluklarda deň taraplaryň garşysynda ýatýarlar. Emma 3 we 4 burçlar AD we BC göni çyzyklary AC kesiji göni çyzyk kesip geçende alnan atanak ýatan burçlardyr. Diýmek, AD we BC taraplar özara paralleldir. Bu bolsa ABCD dörtburçlugyň parallelogramdygyny görkezýär.

2. ***Eger dörtburçlugyň garşylykly taraplary jübüt-jübütden deň bolsalar, onda ol dörtburçluk parallelogramdyr.***
3. ***Eger dörtburçlugyň diogonallary kesişseler we kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýän bolsalar, onda ol dörtburçluk parallelogramdyr.***

12. Rombyň diagonallarynyň häsiýetleri.

Ahli taraplary deň bolan parallelograma romb diiýilýär.
Romb parallelogram bolany üçin, ol parallelogramyň ähli häsiýetlerine eýedir.
Rombuň diagonaly ony deň iki iiçburçluga bųlýär. Rombuň garşylykly taraplary we burçlary özara deňdirler, onuň diagonallary bolsa kesişme nokadynda deň ýarpa bųliinýärler.
Bulardan başga-da romb aşakdaky aýratyn häsiýetlere eýedir:
Rombuň diagonallary özara perpindikulýardyrlar we onuň burçlaryny deň ýarpa bųlýärler.

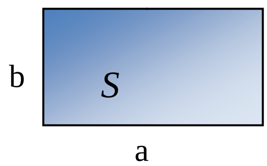


1-nji surat.

ABCD romba seredeliň (1-nji sur.). AC⊥BD bolýandygyny we her bir diagonalyň degişli burçlary deň ýarpa bölýändigini subut etmek talap edilýär. Meselem, ∠BAC=∠DAC bolýandygyny subut edeliň. Kesgitlenişi boýunça AB=AD, şoňa görä-de BAD deňýanly üçburçlukdyr. Romb parallelogram bolany üçin, onuň diagonallary O kesişme nokadynda ýarpa bölünýärler. Diýmek, AO kesim BAD deňýanly üçburçlugyň medianasydyr, beýikligidir hem-de bissektrisasydyr. Şoňa göräд – de AC⊥BD we ∠BAC=∠CAD. Subut etmelimiz hem şudy.

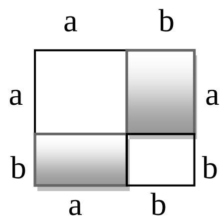
13. Kwadratyň we gönüburçlugyň meýdanlary.

Eger kwadratyň tarapy kesimleri ölçemegiň saýlanylyp alnan birliginde a san bilen aňladylýan bolsa, onda bu kwadratyň meýdany a^2 san bilen aňladylýar.
Şeýlelik bilen, tarapy a deň bolan kwadratyň meýdany $S=a^2$ formula boýunça hasaplanylýar.
Teorema: **Gönüburçlugyň meýdany onuň çatyk taraplarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.**
Subudy. Taraplary a, b we meýdany S bolan gönüburçluga (1-nji sur.) seredeliň.



1-nji surat

Bu gönüburçlugy 1-nji suratda görkezilişi ýaly, tarapy a+b bolan kwadrata çenli dolduralyň. Kwadratyň meýdanynyň formulasyna görä bu täze alnan kwadratyň meýdany $(a+b)^2$ deňdir.
Bu kwadratyň meýdany S bolan berlen gönüburçlukdan, oňa deň bolan S meýdanly gönüburçlukdan hem-de meýdanlary a^2 we b^2 bolan iki kwadratdan düzülendir.

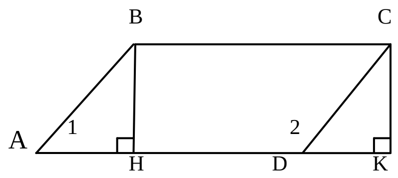


$(a+b)^2=S+S+a^2+b^2$
ýa-da $a^2+2ab+b^2=2S+a^2+b^2$
Bu ýerden 2S=2ab; S=ab alarys. Teorema subut edildi.

14. Parallelogramyň meýdanynyň formulalary.

Parallelogramyň islendik bir tarapyny onuň esasy, garşysyndaky tarapyň islendik nokadyndan esasy özünde saklaýan göni çyzyga inderilen perpendikulýary bolsa onuň beýikligi diýip şertleşeliň.

Teorema: Parallelogramyň meýdany onuň esasynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir.



1-nji surat

Subudy. S meýdanly ABCD parallelograma seredeliň. AD tarapy esas edip alyp, BH we CK beýiklikleri geçireliň (1-nji surat). S=AD∗BH bolýandygyny subut etmek talap edilýär.

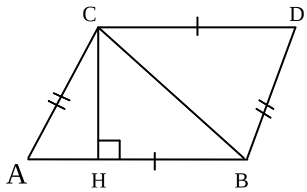
Ilki bilen HBCK gönüburçlugyň meýdanynyň hem S bolýandygyny subut edeliň. ABCK trapesiýa ABCD parallelogramdan we DCK üçburçlukdan düzülendir. Şeýle hem bu trapesiýa HBCK gönüburçlukdan we ABH üçburçlukdan düzülendir. Emma DCK we ABH gönüburçly üçburçluklar gipotenuzalary we ýiti burçlary boýunça deňdirler. Sebäbi olaryň AB we CD gipotenuzalary parallelogramyň garşylykly taraplary hökmünde deňdirler. 1 we 2 burçlary bolsa AB we CD parallel göni çyzyklary kesiji AD göni çyzyk kesip geçende alnan degişli burçlar hökmünde deňdirler. Diýmek, meýdanyň 1-nji häsiýetine görä ABH we DCK gönüburçly üçburçluklaryň meýdanlary deňdirler. Bu ýerden ABCD parallelogramyň we HBCK gönçburçlugyň meýdanlarynyň deňdikleri gelip çykýar. Gönüburçlugyň meýdany hakyndaky teorema görä S=BC∗BH. BC=AD bolany üçin S=AD∗BH. Teorema subut edildi.

15. Üçburçlugyň meýdanynyň formulalary.

Üçburçlugyň haýsy hem bolsa bir tarapyna onuň esasy diýilýär. Beýiklik diýlende bolsa üçburçlugyň depesinden onuň esasyna ýa-da esasyny özünde saklaýan göni çyzyga geçirilen perpendikulýar göz öňünde tutulýar.

Teorema: **Üçburçlugyň meýdany onuň esasynyň beýikligine köpeltmek hasylynyň ýurysyna deňdir.**

Subudy. Goý, ABC üçburçlugyň meýdany S bolsun (1-nji sur.). AB tarapy esas edip alyp, üçburçlugyň CH beýikligini geçireliň. S=0,5∗AB∗CH bolýanlygyny subut edeliň.



1-nji surat

1-nji suratda görkezilişi ýaly, ABC üçburçlugy ABDC parallelograma çenli dolduralyň. ABC we DCB üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň üçünji nyşany boýunça deňdirler. BC olaryň ikisi üçin hem umumy tarap, parallelogramyň garşylykly taraplary hökmünde AB=CD we AC=BD. ABC we DCB üçburçluklaryň deňliginden olaryň meýdanlarynyň deňligi gelip çykýar. Diýmek, ABC üçburçlugyň meýdany ABCD parallelogramyň meýdanynyň ýarysyna deňdir, ýagny S=0.5∗AB∗CH. Teorema subut edildi.

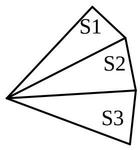
1-netije. Gönüburçly üçburçlugyň meýdany onuň katetleriniň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deňdir.

2-netije. Eger iki üçburçlugyň beýiklikieri deň bolsa, onda olaryň meýdanlary olaryň esaslary ýaly gatnaşýarlar.

Teorema. **Eger bir üçburçlugyň burçy beýleki bir üçburçlugyň burçuna deň bolsa, onda bu üçburçluklaryň meýdanlary şol deň burçlary emele getirýän taraplaryň köpeltmek hasyllary ýaly gatnaşýarlar.**

16. Trapesiýanyň meýdanynyň formulasy.

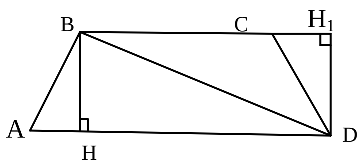
Adatça, erkin köpburçlugyň meýdanyny tapmak üçin ol köpburçlugy üçburçluklara bölýärler. Soňra her bir üçburçlugyň meýdanyny tapyp, olary goşýarlar. Bu üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemi berlen köpburçlugyň meýdanyna deňdir(1-nji sur.).



1-nji surat. $S = S_1 + S_2 + S_3$

Şu usuldan peýdalanyp, trapesiýanyň meýdanynyň formulasyny getirip çykaralyň.

Trapesiýanyň esaslarynyň biriniň islendik nokadyndan beýleki esasy özünde saklaýan göni çyzyga geçirilen perdendikulýara trapesiýanyň beýikligi diýilýär. 2-nji suratdaky BH kesim ABCD trapesiýanyň beýikligidir.



2-nji surat.

Teorema: **Trapesiýanyň meýdany onuň esaslarynyň jeminiň ýarysynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir.**

Subudy: Esaslary *AD* we *BC*, beýikligi BH hem-de meýdany S bolan *ABCD* trapesiýa seredeliň (2-nji surat.). Bu trapesiýanyň meýdanynyň *S=0,5(AD+BC)BH* boljaklygyny subut edeliň.

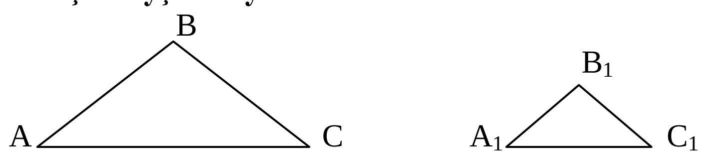
BD diagonal *ABCD* trapesiýany *ABD* we *BCD* üçburçluklara bölýär. Şoňa görä-de $\boldsymbol{S = S_{\mathrm{ABD}} + S_{BCD}}$.

AD we *BH* kesimleri *ABD* üçburçlugyň, *BC* we *DH*, kesimleri *BCD* üçburçlugyň esaslary we beýiklikleri hökmünde alalyň. Onda

$\boldsymbol{S_{ABD} = 0,5 \cdot AD \cdot BH}$, $\boldsymbol{S_{BCD} = 0,5 \cdot BCD \cdot H_1 . DH_1 = BH}$ bolany üçin,

$\boldsymbol{S_{\mathrm{BCD}} = 0,5 \cdot BC \cdot BH}$. Şeýlelik bilen, *S=0,5·AD·BH+0,5·BC·BH=0,5(AD+BC)·BH.* Teorema subut edildi.

17. Üçburçlyklaryň meňzeşlik nyşanlary.



Ýokarda görkezilen üçburçluklara seredeliň. Bu üçburçluklar meňzeşdir. Bularyň meňzeşligi aşakdaky üç sany teorema esasynda görkezmek bolar.

Teorema: **Eger bir üçburçlugyň iki burçy degişlilikde beýleki üçburçlugyň iki burçuna deň bolsa, onda bu üçburçluklar meňzeşdirler.** Ýagny, eger $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{A_1}, \angle \boldsymbol{B} = \angle \boldsymbol{B_1}$ bolsa, onda $\Delta \boldsymbol{ABC} \sim \Delta \boldsymbol{A_1 B_1 C_1}$

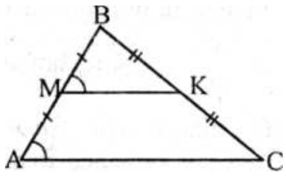
Teorema: **Eger bir üçburçlugyň iki tarapy beýleki üçburçlugyň iki tarapyna proporsional we bu taraplaryň emele getiren burçlary deň bolsa, onda bu üçburçluklar meňzeşdirler.** Ýagny, eger $AB: A_1B_1 = AC: A_1C_1$ we $\angle A = \angle A_1$, bolsa, onda $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Teorema: **Eger bir üçburçlugyň üç tarapy beýleki üçburçlugyň üç tarapyna proporsional bolsa, onda bu üçburçluklar meňzeşdirler.** Ýagny, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ bolsa, onda $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

18. Üçburçlygyň orta çyzygy we onuň häsiýeti.

Üçburçlugyň iki tarapynyň ortalaryny birikdirýän kesime onuň orta çyzygy diýilýär. Üçburçlugyň orta çyzygy hakyndaky teoremany subut edeliň.

Teorema: **Üçburçlugyň orta çyzygy onuň üçüinji tarapyna paralleldir we şol tarapyň ýarysyna deňdir.**



1-nji surat.

Subudy: Goý, *MK* kesim *ABC* üçburçlugyň orta çyzygy bolsun (1-nji surat.). *MK∥AC* we **MK=0,5AC** bolýandygyny subut edeliň. *BKM* we *BAC* üçburçluklar üçburçluklaryň meňzeşliginiň ikinji nyşany boýunça (B burç umumy, $\frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BC} = 0{,}5$) menzeşdir. Şona görä-de $\angle 1 = \angle 2$ MK we $\frac{MK}{AC} = 0{,}5$. $\angle 1 = \angle 2$ deňlikden *MK∥AC*, $\frac{MK}{AC} = 0{,}5$ denlikden bolsa, MK=0,5·AC gelip çykýar. Teorema subut edildi.

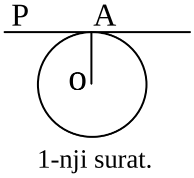
19. Töwerege galtaşýan we onuň häsiýeti.

Töwerek bilen diňe bir umumy nokady bolan göni çyzyga galtaşýan göni çyzyk, umumy nokada bolsa galtaşma nokady diýilýär.

Galtaşýan göni çyzygyň häsiýeti hakyndaky teoremany subut edeliň.

Teorema: **Töwerege galtaşýan göni çyzyk bu töweregiň galtaşma nokada geçirilen radiusyna perpendikulýardyr.**

Subudy. Goý, p göni çyzyk O merkezli töwerege A nokatda galtaşýan bolsun p galtaşýan göni çyzygyň OA radiusa perpendikulýardygyny subut edeliň (l-nji surat.).



1-nji surat.

p galtaşýan göni çyzyk OA radiusa perpendikulýar däldir diýip güman edeliň. Bu ýagdaýda OA radius p göni çyzyga geçirilen ýapgyt çyzyk bolar.

O nokatdan p göni çyzyga geçirilen perpendikulýar OA ýapgyt çyzykdan kiçidir. Diýmek, töweregiň O merkezinden p göni çyzyga çenli uzaklyk radiusdan kiçi bolar. Şoňa görö-de p göni çyzyk bilen töweregiň iki sany umumy nokady bolmalydyr.

Emma bu meseläniň şertine garşy gelýär. Sebäbi p galtaşýan göni çyzyk. Bu garşylyk bolsa başdaky güman etmämiziň nädogrydygyny görkezýär. Diýmek, p galtaşýan göni çyzyk OA radiusa perpendikulýardyr. Teorema subut edildi.

Bir nokatdan töwerege geçirilen galtaşýan iki göni çyzygyň kesimleri özara deňdirler hem-de olar bu nokat we töweregiň merkezi arkaly geçýän göni çyzyk bilen deň burçlary emele getirýärler.

Teorema: **Radiusyň töweregiň üstünde ýatan uçky nokadynda radiusa perpendikulýar bolan göni çyzyk töwerege galtaşýan göni çyzykdyr.**

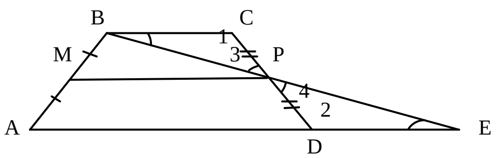
Subudy .Teoremanyň şertinden berlen radiusyň töweregiň merkezinden berlen göni çyzyga geçirilen perpendikulýardygy gelip çykýar. Şoňa görä-de, töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli uzaklyk radiusa deňdir. Diýmek, göni çyzygyň we töweregiň diňe bir umumy nokady bardyr. Bu bolsa berlen göni çyzygyň töwerege galtaşýan göni çyzykdygyny aňladýar. Teorema subut edildi.

20. Trapesiýanyň orta çyzygy we onuň häsiýeti.

Gapdal taraplarynyň ortalaryny birikdirýän kesime trapesiýanyň orta çyzygy diýilýär.

Teorema:Trapesiýanyň orta çyzygy onuň esaslaryna paralleldir we olaryň ýarym jemine deňdir.

Subudy. Goý, *ABCD* berlen trapesiýa we *MP* onuň orta çyzygy bolsun (1-nji surat).



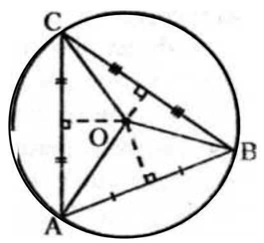
1-nji surat.

B depe we *CD* gapdal tarapyň ***P*** ortasy arkaly göni çyzyk geçireliň. *AD* göni çyzygy käbir *E* nokatda kesýär. *CP=PD*, $\angle 1=\angle 2$ (atanak ýatan burçlar), $\angle 3=\angle 4$ (dik burçlar) bolany üçin *BCP* we *EPD* üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany boýunça deňdirler. $\Delta BCP=\Delta EPD$ deňlikden *PB=PE, BC=ED* deňlikler gelip çykýar. Trapesiýanyň PM orta çyzygy *ABE* üçburçlugyň hem orta çyzygydyr. Bu ýerden *PM∥AE* we PM=0,5·AE=0,5 *(AD+BC)* alynýar. Teorema subut edildi.

21. Üçburçlygyň daşyndan çyzylan töwerek.

Eger köpburçlugyň ähli depeleri töweregiň üstünde ýatýan bolsa, onda töwerege köpburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek, köpburçluga bolsa bu töweregiň içinden çyzylan köpburçluk diýilýär.

Teorema: **Islendik üçburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolar.**



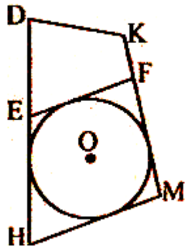
1-nji surat.

Subudy. ABC üçburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlarynyň kesişme nokadyny O bilen belgiläp, OA, OB we OC kesimleri geçireliň (1-nji surat). O nokadyň üçburçlugyň depelerinden deňdaşlaşanlygy üçin OA=OB=OC. Şoňa görä-de O merkezli OA radiusly töwerek üçburçlugyň ähli depeleriniň üstünden geçýär, ýagny ABC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerekdir. Teorema subut edildi.

Bellik.Üçburçlugyň daşyndan diňe bir töwerek çyzyp bolýandygyny belläp geçeliň. Eger üçburçlugyň daşyndan iki töwerek çyzyp bolýar diýip güman etsek, onda olaryň her biriniň merkezi üçburçlugyň depelerinden deňdaşlaşandyr. Şoňa görä-de ol merkezler üçburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlarynyň kesişme nokady bolan O nokat bilen gabat geler. Radius bolsa O nokatdan üçburçlugyn depesine çenli uzaklyk bilen gabat gelýär. Diýmek, bu töwerekler gabat gelýärler.

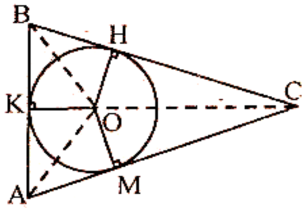
22. Üçburçlygyň içinden çyzylan töwerek.

Eger köpburçlugyň ähli taraplary töwerege galtaşýan bolsa,onda ol töwerege köpburçlugyň içinden çyzylan töwerek, köpburçluga bolsa bu töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk diýilýär**.**



1-nji surat.

1-nji suratda EFMH dörtburçluk töweregiň daşyndan çyzylan köpburçlukdyr. DKMH dörtburçluk bolsa bu töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk däldir, sebäbi onuň *DK* tarapy töwerege galtaşmaýar. 2-nji suratda ABC üçburçluk O merkezli töweregiň daşyndan çyzylandyr.



2-nji surat.

Üçburçlugyň içinden çyzylan töwerek baradaky teoremany subut edeliň.

Teorema: **lslendik üçburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolar.**

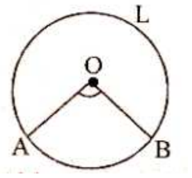
Subudy. Erkin ABC üçburçlugyň bissektrisalarynyň kesişme nokadyny *O* bilen belgiläliň. *AB,BC,CK* taraplara degişlilikde *OK,OH,OM* perpendikulýarlary geçireliň (2-nji surat). *O* nokadyň *ABC* üçburçlugyň taraplaryndan deňdaşlaşanlygy üçin *OK= OH=OM.* Şoňa görä-de *O* merkezli *OK* radiusly töwerek *K, H* we *M* nokatlaryň üstünden geçýär. *OK, OH* we *OM* radiuslar perpendikulýar bolany üçin *ABC* üçburçlugyň taraplary töwerege *K, H, M* nokatlarda galtaşýarlar. Diýmek, *O* merkezli *OK* radiusly töwerek *ABC* üçburçlugyň içinden çyzylandyr. Teorema subut edildi.

BeIlik. Üçburçlugyň içinden diňe bir töwerek çyzyp bolýandygyny belläp geçeliň. Eger üçburçlugyň içinden iki töwerek çyzyp bolar diýip güman etsek, onda her bir töweregiň merkezi üçburçlugyň taraplaryndan deň daşlykda ýatardylar we bissektrisalaryň kesişme nokady bolan *O* nokat bilen gabat gelerdiler. Töweregiň radiusy bolsa *O* nokatdan üçburçlugyň tarapyna çenli uzaklyga deň bolardy. Diýmek, bu töwerekler gabat gelýärler.

23. Merkezi we içinden çyzylan burçlar.

Depesi töweregiň merkezinde bolan burça merkezi burç diýilýär.

Töweregiň dugasyny graduslarda ölçäp bolýar. Eger *O* merkezli töweregiň *AB* dugasy ýarym töwerekden kiçi ýa-da ýarym töwerege deň bolsa, onda onuň gradus ölçegi *AOB* merkezi burçuň gradus ölçegine deňdir. Eger *AB* duga ýarym töwerekden uly bolsa, onda onuň gradus ölçegi $360°-\angle AOB$ deňdir (1-nji surat). Bu ýerden töweregiň umumy uçlary bolan iki dugasynyň gradus ölçegleriniň jeminiň $360°$ deňligi gelip çykýar.



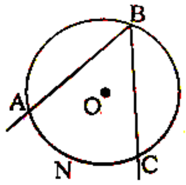
1-nji surat.

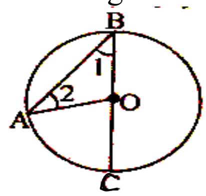
Depesi töweregiň üstünde bolup, taraplary bolsa töweregi kesip geçýän burça içinden çyzylan burç diýilýär.

Içinden çyzylan burç hakyndaky teoremany subut edeliň.

Teorema: **Içinden çyzylan burç öz daýanýan dugasynyň ýarysy bilen ölçenýär.**

Subudy. Goý, ABC burç O merkezli töweregiň AC dugasyna daýanýan içinden çyzylan



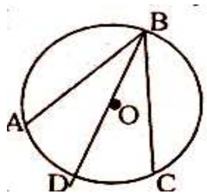


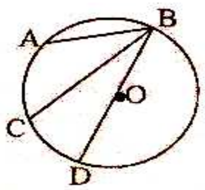
2-nji surat. 3-nji surat.

burç bolsun (2 -nji surat). $\angle ABC=$ $=0,5\cup AC$ bolýandygyny subut edeliň. *BO* şöhläniň *ABC* burça görä ýerleşişiniň mümkin bolan üç ýagdaýyna seredeliň.

1) *BO* şöhle *ABC* burçuň bir tarapy, meselem, *BC* tarapy bilen gabat gelýär (3-nji surat). Bu ýagdaýda *AC* duga ýarym töwerekden kiçi bolýar. Şoňa görä-de $\angle AOC = \cup AC$. *ABO* deňýanly üçburçluk bolany üçin onuň esasyna sepleşýän 1 we 2 burçlar deňdirler, $\angle AOC$ bolsa *ABO* deňýanly üçburçlugyň daşky burçydyr. Şoňa görä-de, $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Bu ýerden $2\angle 1 = \cup AC$ ýa-da $\angle ABC = \angle 1 = 0,5\cup AC$ gelip çykýar.

2) *BO* şöhle *ABC* burçy iki burça bölýär. Bu ýagdaýda *BO* şöhle *AC* dugany käbir *D* nokatda kesýärr (4-nji surat).



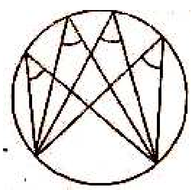


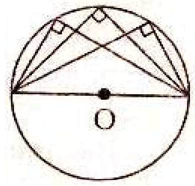
4-nji surat. 5-nji surat.

D nokatda *AC* dugany *AD* we *DC* iki duga bölýär. Öň subut edişimize görä $\angle ABD=0,5\cup AD$ we $\angle DBC=0,5\cup DC$. Bu deňlikleri goşup alarys: $\angle ABD+\angle DBC=0,5\cup AD+0,5\cup DC$ ýa-da $\angle ABC=0,5\cup AC$.

4„njisurat

3) *BO* şöhle *ABC* burçy iki burça bölmeýär we onuň hiç bir tarapy bilen gabat gelmeýär (5-nji surat). Öň subut edişimize görä $\angle ABD=0,5\cup AD$ $\angle ABC=\angle ABD-\angle CBD$ bolany üçin alarys: $\angle ABC =0,5\cup AD-0,5\cup CD =0,5AC$. Teorema subut edildi.





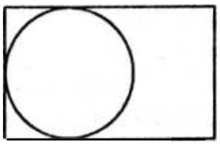
6-njy surat. 7-nji surat.

1-nji netije. Şol bir duga daýanýan içinden çyzylan burçlaryň hemmesi özara deňdirler (6-njy surat).

2-nji netije. Ýarym töwerege daýanýan içinden çyzylan burç göni burçdur (7-nji surat).

24. Töweregiň daşyndan çyzylan dörtburçlyk.

Üçburçlukdan tapawutlylykda her bir dörtburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolmaz. Meselem, kwadrat bolmadyk, ýagny çatyk taraplary deň bolmadyk gönüburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolmaz. Beýle gönüburçlugyň içinden onuň üç tarapyna galtaşýan töwerek çyzyp bolar, emma ähli dört tarapyna galtaşýan töwerek geçirip bolmaz (1-nji surat).

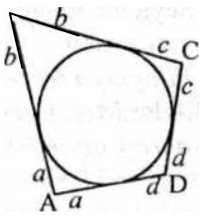


1-nji surat.

Eger dörtburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolsa, onda onuň taraplary aşakdaky ajaýyp häsiýete eýedir.

Islendik daşyndan çyzylan dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň jemi deňdir.

2-nji suratdan peýdalanyp, bu häsiýetiň dogrulygyna göz ýetirip bolar. Bu suratda galtaşýan taraplaryň deň kesimleri şol bir harplar bilen belgilenendir. Dogrudan hem $AB+CD=a+b+c+d$, $BC+AD=a+b+c+d$. Şoňa görä-de $AB+CD$-$BC+AD$.



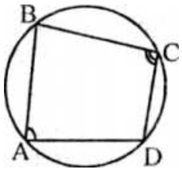
2-nji surat.

Bu tassyklama ters bolan “*Eger dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň jemi deň bolsa, onda bu dörtburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolar”* diýen tassyklamada dogrudyr.

25. Töweregiň içinden çyzylan dörtburçlyk.

Üçburçluklardan tapawutlylykda islendik dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolmaz. Meselem, kwadrat bolmadyk rombuň daşyndan töwerek çyzyp bolmaýar.

Eger dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolýan bolsa, onda onuň burçlary aşakdaky ajaýyp häsiýete eýedir.



1-nji surat.

Islendik içinden çyzylan dörtburçlugyň garşylykly burçlarynyň jemi 180° deňdir.

1-nji suratdan we içinden çyzylan burç hakyndaky teoremadan peýdalanyp bu häsiýetiň dogrulygyna göz ýetirmek kyn däldir. Dogrudan-da, $\angle A=0,5\cup BCD$, $\angle C= 0,5\cup BAD$ bolany üçin $\angle A+\angle C=0,5(\cup BCD+\cup BAD)=0,5\text{-}360^0=l80°$

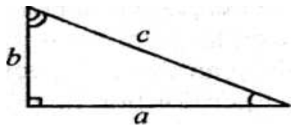
Şu tassyklama ters bolan: *“Eger dörtburçlugyň garşylykly burçlarynyň jemi 180° deň bolsa, onda onuň daşyndan töwerek çyzyp bolar”* diýen tassyklamada dogrudyr.

26. Pifagoryň teoremasy.

Meýdanlaryň häsiýetlerinden peýdalanyp, gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň we gipotenuzasynyň arasyndaky ajaýyp gatnaşygy tapýarys. Häzirki subut etjek teoremamyza Pifagoryň teoremasy diýilýär we ol geometriýanyň iň wajyp teoremalarynyň biri bolup durýar.

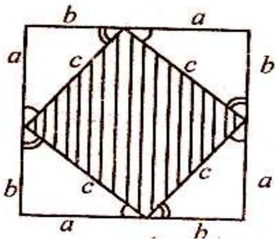
Teorema: **Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasynyň kwadraty onuň katetleriniň kwadratlarynyň jemine deňdir.**

Subudy. Katetleri a, b we gipotenuzasy c bolan gönüburçly üçburçluga (1-nji surat) seredeliň.



1-nji surat.

$c^2 = a^2 + b^2$ bolýandygyny subut edeliň.



2-nji surat.

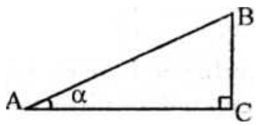
2-nji suratda görkezilişi ýaly bu üçburçlugyň tarapy $a+b$ bolan kwadrata dolduralyň. Bu kwadratyň meýdany $(a+b)^2$ deňdir. Beýleki bir tarapdan, bu kwadrat her biriniň katetleri a we b bolan dört sany deň gönüburçly üçburçlukdan we tarapy c bolan kwadratdan düzülendir. Şoňa görä-de $S = 4 \cdot 0{,}5 \cdot ab + c^2 = 2ab + c^2$

Şeýlelik bilen $(a+b)^2 = 2ab + c^2$. Bu ýerden $c^2 = a^2 + b^2$ deňligi alarys. Teorema subut edildi.

Pifagoryň teoremasyna ters teorema:

Teorema: Eger üçburçlugyň bir tarapynyň kwadraty onuň beýleki iki tarapynyň kwadratlarynyň jemine deň bolsa, onda bu üçburçluk gönüburçly üçburçlukdyr.

27. Gönüburçly üçburçlygyň taraplary bilen burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar.



1-nji surat.

C burçy göni bolan ABC gönüburçly üçburçluga seredeliň (1-nji surat). BC katete A burçuň garşysynda ýatan katet, AC katete boisa, A burça sepleşýän katet diýilýär.

A burçuň garşysynda ýatan BC katetiň AB gipotenuza bolan gatnaşygyna A burçuň sinusy diýilýär. (sinA** bilen belgilenýär we* “sinus A”*** diýilip okalýar).

$$\boldsymbol{sinA = \frac{BC}{AB}} \qquad (1)$$

A burça sepleşýän AC katetiň AB gipotenuza bolan gatnaşygyna A burçuň kosinusy diýilýär. (cosA** bilen belgilenýär we* ***“kosinus A” *diýilip okalýar).*

$$\boldsymbol{cosA = \frac{AC}{AB}} \qquad (2)$$

A burçuň garşysynda ýatýan BC katetiň bu burça sepleşýän AC katete bolan gatnaşygyna A burçuň tangensy diýilýär. (tgA bilen belgilenýär we ***“tangens A”*** diýilip okalýar).

$$tgA = \frac{BC}{AC} \qquad (3)$$

(1) we (2) formulalary ulanyp alarys:

$$\frac{\boldsymbol{sinA}}{\boldsymbol{cosA}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{AB}} : \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AB}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{AB}} \cdot \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{AC}}$$

Bu deňligi (3) deňlik bilen deňeşdirsek $\boldsymbol{tgA} = \frac{\boldsymbol{sinA}}{\boldsymbol{cosA}}$ $(\boldsymbol{4})$ formulany alarys. Burçuň tangensi şol burçuň sinusynyň şol burçuň kosinusyna bolan gatnaşygyna deňdir.

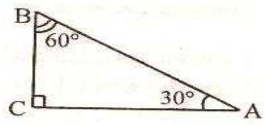
Eger bir gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçy beýleki gönüburçly üçburçlugyň yiti burçuna deň bolsa, onda bu burçlaryň sinuslary, kosinuslary we tangensleri deňdir.

$$sin\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1 \qquad (5)$$

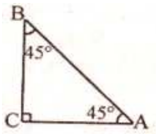
Bu formula trigonometrik (“trigonometriýa” grek sözü bolup türkmençe terjime edilende “üçbrçlugy ölçemek” diýmegi aňladýar) toždestwo diýilýär.

28. 30^0, 45^0 we 60^0 burçlaryň sinusy, kosinusy we tangensi.

Ilki bilen 30° we 60° burçlar üçin sinusyň, kosinusyň we tangensiň bahalaryny tapalyň. Munuň üçin *∠A=30°* we *∠B=60°* bolan *C* gönüburçly *ABC* üçburçluga seredeliň (1-nji surat).



1-nji surat.



2-nji surat.

30° burçuň garşysynda ýatan katet gipotenuzanyň ýarysyna deňdir, ýagny *BC:AB=0,5*. Emma *BC:AB=sinA=sin30°*. Şeýle hem *BC:AB=cosB=cos60°*. Diýmek, *sin30°=0,5, cos60°=0,5*. Esasy trigonometrik toždestwony ulanyp alarys:

$$cos30^0 = \sqrt{1 - sin^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin60^0 = \sqrt{1 - cos^2 60^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boldsymbol{tgA} = \frac{sinA}{cosA}$ formulany ulanyp alarys:

$$tg30^0 = \frac{sin30^0}{cos30^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ; \qquad tg60^0 = \frac{sin60^0}{cos60^0} = \sqrt{3}$$

Indi *sin45°, cos45°, tg45°* tapalyň. Onuň üçin *C* burçy göni bolan *ABC* deňýanly gönüburçluga seredeliň (2-nji surat). Bu üçburçlukda AC=BC, ∠A=∠B=45°. Pifagoryň teoremasyny ulanyp $AB^2=AC^2+BC^2=2AC^2=2BC^2$ alarys.

Soňky deňlikden $\boldsymbol{AC} = \mathrm{BC} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\sqrt{2}}$ gelip çykýar.

Diýmek, $sin45^0 = sinA = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad cos45^0 = cosA = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

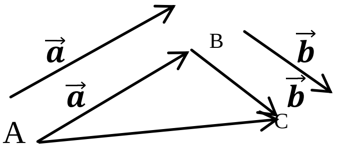
$tg45^0 = tgA = \frac{BC}{AC} = 1$ bahalaryny taparys.

29. Wektorlar. Wektorlary goşmak, aýyrmak. Wektory sana köpeltmek.

Kesgitleme. *Haýsy ujunyň başlangyçdygy, haýsy ujunyň bolsa ahyrdygy görkezilen kesime ugrykdyrylan kesim ýa-da wektor diýilýär.*

Wektorlary goşmagyň üçburçluk düzgüni

Goý, $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ iki wektor berlen bolsun. Erkin *A* nokady belleýäris we bu nokatdan $\vec{\boldsymbol{a}}$ wektora deň bolan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ wektory alyp goýýarys (1-nji surat).



1-nji surat.

Soňra *B* nokatdan $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektora deň bolan $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ wektory alyp goýýarys. $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ weklora $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlaryň jemi diýilýär.

Wektorlary goşmagyň bu düzgünine üçburçluk düzgüni diýilýar. Onuň düşündirilişi 1-nji suratda görkezilendir.

$\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlaryň jemi $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$ gönüşde ýazylýar. Üçburçluk dzgüni boýunça $\vec{\boldsymbol{a}}$ wektory nol wektor bilen goşup, islendik $\vec{\boldsymbol{a}}$ wektor üçin $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{0}}=\vec{\boldsymbol{a}}$ deňligiň dogrulygy hakynda netije çykarýarys. Başlangyjy we ahyry gabat gelýän wektora nol wektor diýilýär.

Wektorlary goşmagyň parallelogram düzgüni:

Teorema: a, b we c wektorlar üçin:

1. $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{a}}$ (orun ç***alşyrma kanuny)***
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ***(utgaşdyrma kanuny) deňlikler dogrudyr.***

Wektorlary aýyrmak. $\vec{\boldsymbol{b}}$ ***wektor bilen goşulada*** $\vec{\boldsymbol{a}}$ ***wektory berýän wektor*** $\vec{\boldsymbol{a}}$ ***we*** $\vec{\boldsymbol{b}}$ ***wektorlaryň tapawudy diýlýär.***

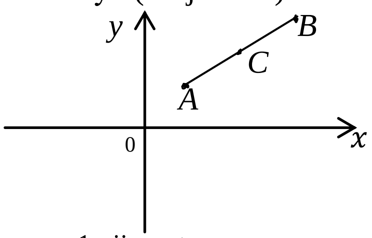
$\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\vec{\boldsymbol{b}}$ wektorlaryň tapawudy $\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}$ görnüşde ýazylýar.

Goý, $\vec{\boldsymbol{a}}$ erkin nol däl wektor bolsun. Eger $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\overrightarrow{\boldsymbol{a_1}}$ wektorlaryň uzynlyklary deň, ýöne olar garşylykly ugrukdyrylan bolsalar, onda $\vec{\boldsymbol{a}}$ we $\overrightarrow{\boldsymbol{a_1}}$ wektorlara garşylykly wektorlar diýilýär.

Teorema. *Islendik* $\vec{\boldsymbol{a}}$ *we* $\vec{\boldsymbol{b}}$ *wektorlar üçin* $\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{a}}+(-\vec{\boldsymbol{b}})$ *deňlik dogrudyr.*

30. Kesimiň ortasynyň koordinatalary.

Goэ, *Oxy* koordinatalar sistemasynda *A* nokadyň $(x_1; y_1)$, *B* nokadyň $(x_2; y_2)$ koordinatalary bar bolsun. *AB* kesimiň ortasy *C* nokadyň *(x;y)* koordinatalaryny kesimiň uçlarynyň koordinatalary arkaly aňladalyň (1-nji surat).



1-nji surat.

C nokat *AB* kesimiň ortasy bolany üçin $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}=0{,}5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{\boldsymbol{OB}})$ (1) deňlik dogrudyr.

$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$, we $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ wektorlaryň koordinatlary *C*, *A* we *B* nokatlaryň degişli koordinatlaryna deňdir. $\overrightarrow{OC}\{x; y\}, \overrightarrow{OA}\{x_1; y_1\}, \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}\{x_2; y_2\}$ (1) – i deňligi koordinatlarda ýazyp alarys:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Şeýlelik bilen kesimiň ortasynyň her bir koordinatasy onuň uçlarynyň degişli koordinatlarynyň jeminiň ýarysyna deňdir.

31. Tekizlikde iki nokadyň arasyndaky uzaklygy tapmagyň formulasy.

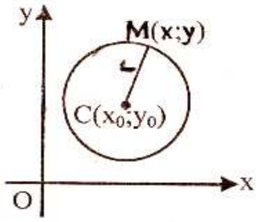
Goý, M_1 nokadyň koordinatalary $(x_1; y_1)$, M_2 nokadyň koordinatalary bolsa $(x_2; y_2)$ bolsun. M_1 we M_2 nokatlaryň arasyndaky d uzaklygy olaryň koordinatalarynyň üsti bilen aňladalyň.

$\overrightarrow{M_1M_2}$ wektora seredeliň. Onuň koordinatalary $\{x_1; y_1; x_2; y_2\}$ deň. Diýmek, bu wektoryň uzynlygy $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formula boýunça tapylyp bilner. Emma $|\overrightarrow{M_1M_2}| = d$. Şoňa görä-de, $M_1(x_1; y_1)$ we $M_2(x_2; y_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

32. Töweregiň deňlemesi.

Berlen gönüburçly koordinatalar sistemasynda r radiusly we C merkezli töweregiň deňlemesini getirip çykaralyň. Goý, C nokadyň koordinatalary $(x_0; y_0)$ bolsun (1-nji surat).



1-nji surat.

Erkin *M(x;y)* nokatdan *C* nokada çenli uzaklyk $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formula boýunça hasaplanylýar. Eger *M* nokat berlen töweregiň üstünde ýatýan bolsa, onda *CM=r* ya-da $CM^2 = r^2$ bolar, ýagny *M* nokadyň koordinatalary:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (1) deňlemäni kanagatlandyrýar.

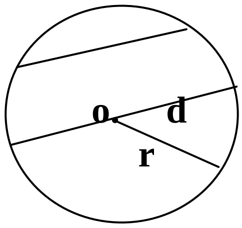
Eger *M(x;y)* nokat berlen töwerekde ýatmaýan bolsa, onda $CM^2 \neq r^2$, ýagny, M nokadyň koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrmaýar. Şoňa görä-de gönüburçly koordinatalar sistemasynda merkezi $C(x_0; y_0)$ nokatda bolan *r* radiusly töweregiň deňlemesi $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ görnüşe eýedir.

Hususy halda merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan *r* radiusly töweregiň deňlemesi aşakdaky ýalydyr: $x^2 + y^2 = r^2$.

33. Töweregiň uzynlygynyň formulasy.

Berlen nokatdan berlen uzaklykda ýerleşen ähli nokatlaryň emele getirýän geometrik figurasyna töwerek diýilýär. Şunlukda berlen nokada onuň merkezi we berlen *r* sana onuň radiusy diýilýär. Töweregiň iki nokadyny birleşdirýän kesime horda we onuň hordanyň bölen bölegine duga diýilýär. Töweregiň merkezinden geçýän horda onuň diametri diýilýär. Töweregiň tekizliginde ýatýan we töwerek bilen bir umumy nokady bolan gönä töwerege galtaşma diýilýär. Depesi töwerekde bolan, taraplary töweregi kesýän burça töweregiň içinden çyzylan burç diýilýär. Bir nokatdan çykýan töwerege galtaşýan iki gönüniň emele getiren burçyna onuň daşyndan çyzylan burç diýilýär. Iki radiusyň emele getiren burçyna (ýagny depesi töweregiň merkezinde ýatýan burça) merkezi burç diýilýär. Diametr radiusyň iki essesidir ýagny $d = 2r$.

Tegelek diýip tekizligiň töwerek bilen çäklenen bölegine aýdylýar.



Töweregiň uzynlygynyň formulasy.

Töweregiň uzynlygyny onuň radiusy arkaly aňladylýan formulany getirip çykaralyň. Goý, R we R' radiusly töwerekleriň uzynlyklary C we C' bolsunlar. Bu töweregiň her biriniň içinde dogry n-burçlugy çyzalyň we olaryň perimetrlerini P_n we P_n' taraplaryny a_n $_{we}$ a_n' bilen belgiläliň $a_n = 2Rsin(\frac{180^0}{n})$ formulany ulanyp alarys:

$P_n = na_n = n2Rsin(\frac{180^0}{n})$; $P_n' = na_n' = n2R'sin(\frac{180^0}{n})$;

Diýmek, $\frac{P_n}{P_n'} = \frac{2R}{2R'}$ (1)

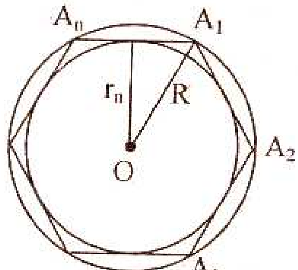
n-niň islendik bahasynda bu deňlik dogrudyr. Indi n sany çäksiz ulaldalyň. n→∞ bolanda $P_n \to C$, $P_n' \to C'$ bolany üçin $\frac{P_n}{P_n'}$ gatnaşygyň predeli $\frac{C}{C'}$ gatnaşyga deňdir. Beýleki bir tarapdan (1) deňlige göra bu predel $\frac{2R}{2R'}$. Şeýlelik bilen $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Bu deňlikden $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$ deňlik ýagny töweregiň uzynlygynyň diametrine bolan gatnaşygynyň ähli töwerekler üçin şol bir sandygy gelip çykýar. Bu san π grek harpy bilen belgilenýär (ol Pi diňip okalýar) $\frac{C}{2R} = \pi$ deňlikden R radiusly töweregiň uzynlygyny hasaplamak üçin formulany alarys.

$$C = 2\pi R; \quad \pi = 3.14$$

34. Tegelegiň meýdanynyň formulasy.

R radiusly O merkezli tegelek tekizligiň O nokadyny we O nokatdan R-den uly bolmadyk uzaklykda ýerleşen ähli nokatlaryny özünde saklaýar.

R radiusly tegelegiň meýdanyny hasaplamak üçin formulany getirip çykaralyň. Munuň üçin tegelegi çäklendirýän töweregiň içnden çyzylan $A_1A_2 \dots A_n$ dogry n-burçluga seredeliň (1-nji surat).



1-nji surat

Köpburçlugyň berilen tegelegiň içnden ýerleşýändigi üçin tegelegiň S meýdanyny $A_1A_2 \dots A_n$ köpburçlugyň S_n meýdanyndan uly boljakdygy düşnüklidir. Eger $A_1A_2 \dots A_n$ dogry n-burçlugyň içnden töwerek çyzsak, onda bu töwerek bilen çälenýän tegelegiň S_n' meýdany köpburçluguň meýdanyndan kiçi bolar. Sebäbi bu tegelek köpburçluguň içnde ýerleşýär. Şoňa göräde $S_n' < S_n < S$ deňsizlik ýerine ýeter.

Köpburçluguň taraplarynyň sanyny çäksiz ulaldyp başlaýarys. Belli bolşyýaly $r_n = R\cos\left(\frac{180^0}{n}\right)$ (bu ýerde r_n köpburçluguň içinden çyzylan töweregiň radiusy).

Taraplaryň sany çäksiz artanda, ýagny n→∞ bolanda $\cos\left(\frac{180^0}{n}\right)$ aňlatma 1-e ymtylýar, ýagny $\cos\left(\frac{180^0}{n}\right) \to 1$. Şoňa göräde $r_n \to R$ ýägny köpburçlugyň içnden çyzylan töweregiň r_n radiusy, onuň daşyndan çyzylan R radiusyna ymtylýar. Başga sözler bilen aýdanymyzda köpburçluguň taraplarynyň sany çäksiz artdyrylanda onuň içinden çyzylan töwerek onuň daşyndan çyzylan çyzylan töwerege ymtylýar. Şoňa göräde n→∞ bolanda $S_n \to S$ gelip çykýar. Şoňa görä $S_n = 0.5P_n r_n$ formuladan n→∞ bolanda r_n→R, $P_n \to 2\pi R$ $S_n \to S$ bolýandygyny gözöňünde tutup alarys:

$$S = 0.5\pi R * R = \pi R^2$$

Diýmek, R radiusly tegelegiň S meýdanyny tapmak üçin

$$S = \pi R^2$$

formulany alarys

Eger-de dalaşgäriň jogaby kanagatlanarsyz bolsa, onda oňa aşakdakylara meňzeş goşmaça mysallar berilip biliner.

Hasaplaň.

1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{16+6-12}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

2) $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) : \frac{5}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} : \frac{5}{12} = \frac{7}{18} : \frac{5}{12} = \frac{7}{18} \cdot \frac{12}{5} = \frac{14}{15}$

3) $2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} = \frac{12+3-4}{24} \frac{11}{24}$

5) $6{,}4 : \frac{80}{30} = \frac{64}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{8 \cdot 3}{10 \cdot 10} = \frac{24}{100} = 0{,}24$

Deňlemäni çözüň.

6) $3x - 3 = 15$
$3x = 15 + 3$
$x = \frac{18}{3} = 6$

7) $\frac{1}{3}x + 4 = 0$
$\frac{1}{3}x = -4$
$x = -12$

8) $\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x} \qquad / \cdot 5x$
$17 = 10x - 35$
$10x = 35 + 17 \quad 10x = 52 \quad x = 5{,}2$

9) $2x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{8}$

10) $5x - (x+3) = 5$

$5x - x - 3 = 5$

$4x = 5 + 3$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4$

Deňlemeler ulgamyny çözüň.

11) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 - y \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

$2(3 - y) - 4y = -6$

$6 - 2y - 4y = -6$

$-6y = -12$

$y = 2, \ \ x = 3 - 2 = 1$ $\quad$ $jogaby: \{1; 2\}$

12) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = 2 - 3x \end{cases}$

$2x - 3(2 - 3x) = 5$

$2x - 6 + 9x = 5$

$11x = 11$

$x = 1, \ \ y = 2 - 3 \cdot 1 = -1$ $\quad$ $jogaby: \{1; -1\}$

13) $\begin{cases} x - 3y = -6 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y - 6 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases}$

$5(3y - 6) - 2y = -4$

$15y - 30 - 2y = -4$

$13y = 30 - 4$

$13y = 26$

$y = 2, \ \ x = 3 \cdot 2 - 6 = 0$ $\quad$ $jogaby: \{0; 2\}$

Kwadrat deňlemelri çözüň.

14) $x^2 - 4x - 21 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-21) \cdot 1 = 16 + 48 = 64$

$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6;$

$x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{4-8}{2} = \frac{-4}{2} = -2; \quad jogaby\ (6; -2)$

15) $x^2 - 2x - 8 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4;$

$x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2; \quad jogaby\ (4; -2)$

16) $x^2 - 5x + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 2516 = 9$

$x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4;$

$x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1;$

17) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$

Görkezijili deňlemeleri çözüň.

18) $27^{1-x} = \frac{1}{81}$

$3^{3(1-x)} = 3^{-4}$

$3(1-x) = -4$

$3 - 3x = -4$

$-3x = -7 \quad x = \frac{7}{3}$

19) $4^{1-2x} = \left(\frac{1}{16}\right)^{2+x}$

$1 - x = -2(2 + x)$

$1 - x = -4 - 2x$

$x = -5$

20) $9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$

$3^2 \cdot 3^{4(1-2x)} = 3^{3(2-x)}$

$2 + 4(1 - 2x) = 3(2 - x)$

$2 + 4 - 8x = 6 - 3x$

$6 - 6 = 8x - 3x$

$x = 0$