Türkmenistanyň Goranmak ministrligi

Türkmenistanyň Goranmak ministrliginiň Beýik Saparmyrat Türkmenbaşy adyndaky Harby instituty

M. Rahymow, J. Atabaýewa, A. Kaşaňow

MATEMATIKANYŇ BAŞLANGYÇ DÜŞÜNJE ENDIKLERI

Aşgabat 2009

Rahymow M., J.Atabaýewa, A.Kaşaňow

Başlangyç matematika düşünje endikleri

Türkmenistanyň Goranmak ministrliginiň Beýik Saparmyrat Türkmenbaşy adyndaky Harby institutynyň Alymlar geňeşinde çapa hödürlendi. (35-nji mejlis, 30.06.2009)

Okuw kömekçi gollanmada matematikanyň başlangyç düşünjeleri boýunça matematikanyň usullaryny we endiklerini görkezýän formulalar we mysallar getirilýär.

Kitapça giň auditoriýa üçin niýetlenendir. Mundan okuwçylar, talyplar, inžener-tehnika işgärleri we öz işlerinde matematikany ulanýanlar başlangyç zerur düşünjeleri we endikleri alyp bilerler.

Mazmuny

Geometriýa

Planimetriýa

Stereometriýa

Giriş

Bu gollanma kitapçasy gysga görnüşde, giň köpçülige başlangyç matematika düşünjelerini we endiklerini ýetirmek maksady bilen taýýarlanyldy. Durmuşda, häzir matematikany okaýan ýa-da ony ulanýan adamlarda matematikanyň başlangyç düşünjeleriniň esasynda matematiki endikleri döretmegiň zerurlygy örboýuna galdy. Matematika pikirlenmäniň we endikleriň başlangyç matematika, ýagny arifmetika sapagynda başlanýandygy bellidir. Şonuň üçin şu gollanmamyzda sanlar düşünjesine we olaryň üstünde geçirilýän amallara-endiklere dolurak ünüs berdik. Elbetde, matematika düşünjeleri boýunça endikleri döretmek işi şu kitapçada berlen maglumatlar bilen çäklenmeýändigi düşnüklidir.

Şu gollanma taýýarlanylanda wagtyň çäkli bolany üçin birnäçe ýerlerde taýýar gönükmeler alyndy. Biz mundan öň çykan birnäçe gollanmalardan we okuw kitaplardan peýdalanmaly bolduk. Emma ol ulanylan maglumatlar awtorlyk düşünjesine zeper ýetirmän, eýsem işjeň gatnaşyklary giňelder we beýgelder diýip tama edýäris. Esasy maksadymyz başlangyç matematika düşünjelerini we endiklerini giň köpçülige ýaýratmak, ylym-bilimiň, inžener-tehnika, şol sanda, harby inžener-tehnika ylmynyň ösüşine ýardam etmekdir. Gollanmanyň arifmetika bölümi we kitapdaky taryhy maglumatlar fizika-matematika ylymlarynyň doktory, professor M. Rahymow, algebra we matematika analiziň (seljermäniň) başlangyçlary bölümi professor M.Rahymow, uly mugallym J.Atabaýewa we Türkmenistanyň ussat mugallymy, tehnika ylymlarynyň kandidaty A. Kaşaňow, geometriýa bölümi A.Kaşaňow tarapyndan taýýarlanyldy. A. Kaşaňow. „Matematikadan ýan kitaby, 2008” atly kitapçanyň awtorlarynyň biri hökmünde şu kitapçada getirilen geometriýa degişli maglumatlary peýdalandy.

Awtorlar bu kitapçada bolup biljek ýalňyşlary bize iberjeklere ýa-da olary düzedip, bu kitapçany giňeldip, köpçülige ýetirjeklere öz minnetdarlyklaryny bildirýärler.

Professor M. Rahymow

Elipbiýler we belgiler

Türkmen elipbiýi

Ýazylyşy	Okalyşy	Ýazylyşy	Okalyşy
A a	A	*N n*	En
B b	Be	*Ň ň*	Ňe
Ç ç	Çe	*O o*	O
D d	De	*Ö ö*	Ö
E e	e	*P p*	Pe
Ä ä	ä	*R r*	Re
F f	ef	*S s*	Se
G g	ge	*Ş ş*	Şe
H h	he	*T t*	Te
I i	i	*U u*	U
J j	je	*Ü ü*	Ü
Ž ž	že	*W w*	We
K k	ka	*Y y*	Y
L l	el	*Ý ý*	Ýe
M m	em	*Z z*	Ze

Latyn elipbiýi

Ýazylyşy	Okalyşy	Ýazylyşy	Okalyşy
A a	a	*N n*	En
B b	be	*O o*	O
C c	se	*P p*	Pe

D d	de	*Q q*	ku
E e	e	*R r*	er
F f	ef	*S s*	es
G g	že	*T t*	te
H h	aş	*U u*	u
I i	i	*V v*	we
J j	ýot (ži)	*W w*	dubl-we
K k	ka	*X x*	iks
L l	el	*Y y*	igrek
M m	em	*Z z*	zet

Grek elipbiýi

Ýazylyşy	**Okalyşy**	**Ýazylyşy**	**Okalyşy**
$A\ \alpha$	Alfa	$N\ \nu$	nýu
$B\ \beta$	Beta	$\Xi\ \xi$	ksi
$\Gamma\ \gamma$	gamma	$O\ o$	omikron
$\Delta\ \delta$	Delta	$\Pi\ \pi$	pi
$E\ \varepsilon$	epsilon	$P\ \rho$	ro
$Z\ \zeta$	Dzeta	$\Sigma\ \sigma$	sigma
$H\ \eta$	Eta	$T\ \tau$	tau
$\Theta\ \theta$	Teta	$\Upsilon\ \upsilon$	ipsilon
$I\ \iota$	Iota	$\Phi\ \varphi$	fi

Κ κ	kappa	*Χ χ*	hi
Λ λ	lambda	*Ψ ψ*	psi
Μ μ	Mýu	*Ω ω*	omega

Rus elipbiýi

Ýazylyşy	Okalyşy	Ýazylyşy	Okalyşy
А а	А	*Р р*	эр
Б б	Бэ	*С с*	эс
В в	Вэ	*Т т*	тэ
Г г	Гэ	*У у*	у
Д д	Дэ	*Ф ф*	эф
Е е	Е	*Х х*	ха
Ё ё	Ё	*Ц ц*	цэ
Ж ж	Жэ	*Ч ч*	че
З з	Зэ	*Ш ш*	ша
И и	И	*Щ щ*	ща
Й й	и крат.	*Ъ ъ*	тв. знак
К к	Ка	*Ы ы*	ы
Л л	Эл	*Ь ь*	мг. знак
М м	Эм	*Э э*	э
Н н	Эн	*Ю ю*	ю
О о	О	*Я я*	я
П п	Пэ		

Belgiler we käbir hemişelikler

	Belgisi	Aňladylyşy	Mysal üçin
1.	=	deňdir	$a=b$
2.	≠	deň däldir	$a\neq b$
3.	≡	toždestwolaýyn deň	$a+b\equiv b+a$
4.	≈	takmynan deň	$a\approx b$
5.	>	uludyr	$a>b$
6.	<	kiçidir	$a<b$
7.	≥	uludyr deňdir	$a\geq b$
8.	≤	kiçidir deňdir	$a\leq b$
9.	%	göterim (prosent)	5%
10.	$\lvert\ \rvert$	absolýut (modul) ululyk	$\lvert a\rvert$
11.	$\sqrt{\ }$	kwadrat kök	$\sqrt{9}=3$
12.	$\sqrt[n]{\ }$	n – derejeli kök	$\sqrt[n]{a}$
13.	$f(x)$	*x*-iň *f* – funksiýa-sy	$f(3), f(y)$
14.	!	faktorial	6!=1·2·3·4·5· ·6=240
15.	$\log_a b$	*a*-esasly *b*-niň logarifmi	$\log_2 32=5$
16.	$\lg b$	10 esasly *b*-niň logarifmi	$\lg 1000=3$
17.	ln	natural logarifm (e – esasly logarifm)	$\ln e=1$
18.	→	Ymtylma	$x\to a$
19.	lim	çäk (predel)	$\lim\limits_{n\to\infty} P_n=C$
20.	const	hemişelik belgisi	π, e-const.
21.	$\sum$	Jem	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+...+a_n$
22.	i	hyýaly birlik	$\sqrt{-1}=i$
23.	Δ	Üçburçluk	ΔABC
24.	**Δ**	artdyrma	$\Delta x=x_1-x$

25.	$\angle$	burç	$\angle ABC$
26.	$\cup(\cap)$	egriniň dugasy	$\overset{\cup}{AB}(\overset{\cap}{AB})$
27.	$\parallel$	parallel	$AB \parallel CD$
28.	$\perp$	perpendikulýar	$AB \perp CD$
29.	~	meňzeş	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$
30.	º ' "	gradus minut sekunt } burç ýa-da duga ölçeg birligi	40º36′25”
31.	sin	sinus	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
32.	cos	kosinus	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
33.	tg	tangens	tg45 º=1
34.	ctg	kotangens	ctg15 º18′= =3,655
35.	arcsin	arksinus	$\arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ$
36.	arccos	arkcosinus	
37.	arctg	arktangens	
38.	arcctg	arkkotangens	
39.	( )	tegelek ýaý	
40.	[ ]	kwadrat ýaý	
41.	{ }	figuraly ýaý	
42.	π	islendik tegelegiň usynlygynyň özüniň diametrine bolan gatnaşygy	$\pi \approx 3{,}14159...$
43.	π	kähalatlarda burçuň radian ölçeg birliginde ulanylýar	$\pi = 180^\circ$
44.	$\forall$	islendik	
45.	$\exists$	barlyk	

46.	y', $\frac{dy}{dx}$ $f'(x)$ $\frac{df(x)}{dx}$	*y* ýa-da *f(x)* funksiýalaryň önümleriniň belgileri	$(x^2+x+5)' = 2x+1$
47.	$\int$	integral	$\int_{-1}^{3} x^2dx$
48	N	natural sanlar köplügi	N=1,2,3,…
49	Z	bitin sanlar köplügi	$Z = -\infty,...,-2-1,0,1,2,...,+\infty$
50	Q	rasional sanlar köplügi	$Q = -\infty;...:-2,5;-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};0;1,0;\frac{3}{2};...;+\infty$
51	L	irrasional sanlar köplügi	$\pi = 3,14159265358\,97...$ $\sqrt{2} = 1,4142...$ $\cos 10^0 = 0,9848...$
52	R	hakyky sanlar köplügi	$R = Q \bigcup L$
53	$\bigcup$	birleşme	A we B köplükleriň birleşmesi, $A \bigcup B$
54	$\bigcap$	kesişme	A we B köplükleriň kesişmesi, $A \bigcap B$
55	$\subset$	bölek köplük	$N \subset Z$
56	$\in$	degişlidir	$N \in R$
57	$\notin$	degişli däldir	$\frac{1}{2} \notin Z$

Birnäçe hemişelikler

$\pi \approx 3,14159265358\,97932\ \ldots$

$\ln \pi \approx 0,4971498727\ \ldots$

$e \approx 2,7182818285\ \ldots..$

$\ln e \approx 0,4342944819...$

$\ln 2 \approx 0,3010299957...$

$cos 10^0 \approx 0,9848...$

$\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots$

$\sqrt{3} \approx 1,732\ldots$

$\sqrt{5} \approx 2,236\ldots$

Arifmetika

§1. Natural sanlar

Arifmetika-sanlar baradaky ylymdyr. Arifmetika sözi grek sözünden gelip çykyp, san we sungat sözlerini aňladýar. Arifmetika beýleki ylymlar bilen bir hatarda adamzat durmuşynyň zerurlygyndan döräpdir. Adamlara gazanjyny hasaplamak, töweregindäki zatlary sanamak, wagt hasabyny we ş.m. bilmek we tapawutlandyrmak zerur bolupdyr. Şeýlelikde, natural (ady) sanlar döräpdir. Sanamak we hasaplamak boýunça ilkinji kitaplar biziň eramyzdan birnäçe asyr öň döräpdir. Arifmetikanyň maglumatlary biziň eramyzdan üç asyr öň ýaşap geçen grek alymy Ýewklidiň ,,Başlangyç” we Diofantyň ,,Arifmetika” diýlen kitaplarynda bar. Horezm we Gadymy Mary şäherlerinde ýaşan belli türkmen alymy Muhammet Ibn Musa al-Horezmi (780-850 ýý.) arifmetika barada kitap ýazypdyr, ol kitabyň latynça terjimesi XII asyrda Ýewropa düşüpdir we arifmetikanyň ösmegine uly goşant goşupdyr. Bu beýik türkmen alymynyň işlerinden soň Ýewropada onluk diýilýän orunly (pozisiýaly) nomerlemek (belgilemek) ýaýrapdyr. Arap sifrleri diýilýän 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 on sany sifrleriň kömegi bilen sanlary şol sifrleriň duran ornuna görä bahalandyrmak bilen belgiläp başlapdyrlar.

Predmetleri sanamak üçin ulanýan sanlara natural sanlar diýilýär: 1,2,3,..., n,...(tükeniksiz dowam edýär). Natural sanlar N harpy bilen bellenilýär. Nol san, ýagny 0 natural sanlara girmeýär. Emma zerurlyk dörän wagty noly hem natural sanlara birikdirip giňeldilen natural sanlar diýilýän sanlar toplumyny alýarlar:

N: 1,2,3,...,n,...-natural sanlar.

Ň: 0,1,2,3,...,n,...-giňeldilen natural sanlar.

Natural sanlary ýazmak üçin 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sifrler ulanylýar, onuň üçin ol sanlary yzygider ýazýarlar we yzdan sananyňda ol sifrleriň tutýan ornuna laýyklykda olara dürli bahalar berýärler. Mysal üçin, 32. Bu mysalda yzda ýazylan 2 birlikleriň sanyny görkezýär, öňde ýazylan 3 onluklaryň sanyny,ýagny otuz sany birligi aňladýar. Şonuň üçin sagdan çepe (yzdan-öňe) okalanda 2-ä birlikler 3-e bolsa onluklar diýlip okalýar. Emma 123 sanda yzdaky 3 birlikleri, 2-i onluklary, 1 ýüzlükleri aňladýar. 2009 sanda 9 birlikleri, 0 onluklaryň ýokdugyny, yzdan üçünji 0 sifr bolsa ýüzlükleriň ýokdugyny, öňdäki 2 sifr bolsa iki sany müňlükleriň bardygyny aňladýar.Yzdan sifrleriň ornuny kesgitlemekde birlikler, onluklar, ýüzlükler, müňlükler, on müňlükler, ýüz müňlükler, millionlar, milliardlar, trillionlar we beýlekiler ulanylýar. Natural sanlaryň öňünda ýazylan noly taşlap ýazmak mümkin. Sebäbi, ol başda duran nol başda duran sifre berilýän bahanyň ýokdugyny aňladýar.

Käbir uly sanlary ýazalyň (syn ediň, yzdaky nollary taşlap ýazmak bolmaýar; yzdaky orunda duran sifrler üç noldan köpelýär we yzdan sanalanda öňdäki nollaryň orunlary we bahalary üýtgeýär).

Müň -1000

Million -1000 000,

Milliard -1000 000 000,

Trillion -1000 000 000 000,

Kwadrillion -1000 000 000 000 000,

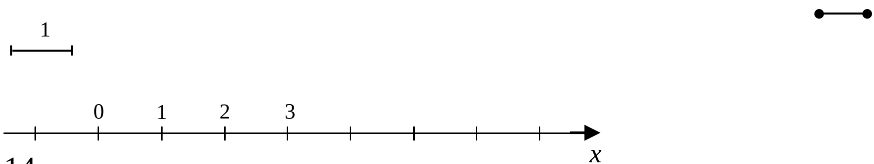
Kwintillion -1000 000 000 000 000 000,

Sekstillion -1000 000 000 000 000 000 000,

Septillion -1000 000 000 000 000 000 000 000.

1.Koordinata göni çyzygy

Üstünde başlangyç hasap nokady, birlik kesimi we ugry görkezilen gönä koordinata oky ýa-da koordinata göni çyzygy diýilýär.



Natural sanlary koordinata okunda başlangyç 0 nokatdan başlap birlik kesimi ölçäp goýmak bilen çepden saga yzygiderli ýerleşdirip görkezýärler.

2. Natural sanlary goşmak

Arifmetikada käbir şertler kanagatlandyrylyp berlen iki san boýunça üçünji san tapylýan bolsa, onda bu herekete (prosese) amal diýilýär. Arifmetikada esasan dört amallara seredilýär: goşmak, aýyrmak, köpeltmek we bölmek.

Iki natural sanlary goşmak diýip şu sanlaryň ikisi bilelikde alnanda olarda bar bolan birlikleriň sanyny görkezýän üçünji natural sana aýdylýar. Goşulýan sanlara goşulyjylar diýilýär, goşmakdan alnan sana jem diýilýär.

Mysal. 5+7=12 birinji goşulyja bäş sany birlik, ikinji goşulyjyda ýedi sany birlik bar, olaryň ikisinde bilelikde on iki sany birlik bar, netijede, bäş bilen ýediniň jemi 12-ä deň. Köp orunly (köp sifrli) natural sanlary goşmak üçin, olary yzygiderli ýokardan aşak dik sütin boýunça sagdan çepe (yzdan-öňe) sifrleriň orunlaryny deňleşdirip ýazmaly, başgaça aýdylanda birlikleriň aşagynda birlikler, onluklaryň aşagynda onluklar we ş.m.m. durar ýaly edip ýazmaly. Sifrler dikligine yzdan goşulup başlanýar. Eger-de iki natural sany goşanda dikligine yzda duran sifrleriň jemi on we ondan uly bolsa, onda ol jemiň yzky sifri sütüniň aşagynda ýazylyp, öňdäki sütünde duran sifrleriň jemine bir birlik goşulýar. Mysal.

$$\begin{array}{r} 29327 \\ +\ \underline{4398186} \\ 4427513 \end{array}.$$

Natural sanlary goşmakda ýene-de natural san alynýar. Diýmek, goşmak amaly natural sanlarda elmydama ýerine ýetýär. Nola natural sany goşmakdan, ýa-da natural sana noly goşmakdan jem üýtgemez.

Mysal üçin, 99+0=0+99=99; 0+0=0.

3.Natural sanlary aýyrmak

Ýokarda iki natural sany goşup jem diýilýän üçünji sany kesgitledik. Indi goşmak amalyna ters bolan aýyrmak amalyny kesgitläliň. Bu amaly ýerine ýetirmekde hem üç sany natural sanlar gatnaşýar.

Bir goşulyjy we jemi belli bolup ikinji goşulyjyny tapmak amalyna natural sanlary aýyrmak amaly diýilýär. Iki natural sanlary aýyrmakdan alnan üçinji sana olaryň tapawudy diýilýär. Aýyrmak amalynda berlen sandan aýrylýan sany tapawutlandyrmak üçin birinjä kemeliji, ikinjä kemeldiji diýilýär.

Mysal üçin, 35-18=17; bu ýerde 35-e kemeliji, 18-e kemeldiji, 17-ä tapawut diýilýär. Şu mysaly aýyrmagyň kesgitlemesine görä 18+17=35 diýip ýazyp bolýar. Aýyrmak amaly natural sanlar köplüginde elmydama ýerine ýetmeýär, mysal üçin, 11-11=0- natural san däl, ýagny tapawut 0 natural sanlar köplügine degişli däl. Başga mysal: 11-14=?. Tapawudy hatda giňeldilen natural köplüginde hem aňladyp bolmaýar. Bu iki mysalda kemeliji kemeldijä deň, ýa-da ondan kiçi. Diýmek, eger kemeliji kemeldijiden uly bolsa, onda aýyrmak amaly natural sanlar köplüginde ýerine ýetýär. Natural sandan noly aýyrmakdan tapawut üýtgemez: 15-0=15. Köpbelgili natural sanlary aýyrmak düzgüni goşmak amalyndaky ýaly dikligine ýazyp birliklerden birlikleri ,onluklardan onluklary,... aýyrmak bilen amala aşyrylýar.

4.Natural sanlary köpeltmek

Natural sanlary köpeltmek amaly diýip goşulyjylary deň bolan jemi tapmaklyga aýdylýar. Mysal üçin, her biri 3-e deň bolan 9 goşulyjynyň jemini tapmaklyk 3+3+3+3+3+3+3+3+3= $3\cdot 9$. Köpeltmek alamatyny × we **.** (nokat) görnüşde belleýärler. Şu mysalda 3-e köpeliji, 9-a bolsa köpeldiji diýilýär. Bu mysaldaky jem 27-ä köpeltmek hasyly diýilýär. Natural sanlary köpeltmek aşakdaky iki sany häsiýete eýedir:

1. Eger köpeldijileriň biri 1-e deň bolsa onda köpeltmek hasyly ikinji köpeldijä deňdir. Mysal üçin, $1\cdot 7$ =7, $100\cdot 1$= 100.
2. Eger-de köpeldijileriň iň bolmanda biri 0-a deň bolsa, onda köpeltmek hasyly 0-a deňdir. Mysal üçin, $0\cdot 51$=0; $0\times 0 = 0$.

Iki köpbelgili sanlary köpeltmek üçin olaryň sifrleriniň köpüni (ulusyny) ýokarda ýazmaly, kiçisini onuň aşagyndan ýazyp, ikisiniň gapdal aralygynda köpeltmek belgisini goýmaly we aşagynda kese çyzyk çyzmaly. Ýokardaky ýazylan köp sifrli sany köpeliji, aşagynda ýazylan kiçi sany köpeldiji hasap edip, başda köpeldijiniň birlikler ornunda duran sagdaky sana köpelijini köpeltmeli, netijäni kese çyzygyň aşagynda ýazmaly, soň köpelijini köpeldijiniň sagdan ikinji sifrine köpeltmeli, netijäni kese çyzygyň aşagynda ýazylan ilkinji sanyň birlikleri aňladýan soňky sifrinden bir öý (orun) çepe süýşürip, onuň aşagyndan ýazmaly.Köpeldijiniň çepden üçünji sifrine köpeltmek ýokardaka meňzeşlikde köpeldilýär we netije kese çyzykdan aşakda üçünji setirde bir öý çepe süýşürmek bilen ýazylýar. Köpeldijiniň ähli sifrlerini şu tertipde köpeldip we kese çyzygyň aşagynda çepe bir öý süýşürmek bilen ýazyp, kese çyzykdan aşakda ýazylan sanlary goşmak amalynyň düzgüni boýunça goşmaly. Mysallar:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}456\\123\end{array}\\ \hline 1368\\ +\ 912\\ 456\\ \hline 56088\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}642\\305\end{array}\\ \hline 3210\\ +\ 000\\ 1926\\ \hline 195810\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}642\\395\end{array}\\ \hline 3210\\ +\ 5778\\ 1926\\ \hline 253590\end{array}$$

5.Natural sanlary deňeşdirmek

Goý, a we b harplar natural sanlaryň islendik ikisini aňlatsyn. Mysal üçin, a=17, b=41. Eger natural sanlar yzygiderliginde b san a sandan sagda ýerleşen bolsa, edil şonuň ýaly hem koordinatalar okunda b san a sandan sagda şekillendirilen bolsa, onda b san a sandan uly diýilýär ýa-da a san b sandan kiçi diýilýär we şeýle ýazylýar: $a < b, b > a$. Natural sanlaryň üçüsini hem deňeşdirmek mümkin. Eger b san a sandan sagda ýerleşip, c san bolsa b sandan sagda ýerleşen bolsa, onda c san a sandan hem sagda ýerleşendir. Şeýle ýazylýar: $b > a$ we $c > b$ deňsizliklerden $c > a$. Bu gatnaşyk goşa deňsizlik bilen hem ýazylýar: $a < b < c$.

1. Eger-de iki sany natural sanlarda sifrleriň duran orunlarynyň sany we şol degişli orunlarda duran sifrler deň bolsalar, onda ol sanlar deňdirler. Mysal. 72559123 we 72559123 sanlar deňdirler, emma 72559123 we 72559321 sanlar deň däldirler.
2. Iki natural sanlarda sifrleriň duran orunlarynyň sany haýsysynda köp bolsa şol natural san uludyr. Mysal. 38745>7397.
3. Eger iki natural sanlaryň sifrleriniň duran orunlarynyň sany deň bolsa, onda çepden ilkinji degişli sifrleri haýsynyňky uly bolsa şol san uludyr. Mysallar. 437>399, 2975>2897.

6.Natural sanlary bölmek

Natural sanlary bölmek amaly diýip iki köpeldijiniň köpeltmek hasyly we köpeldijileriň biri belli bolup, beýleki köpeldijini tapmak amalyna aýdylýar.

Bölünýän sana bölüniji, bölünijini bölýän sana bölüji, bölmek amalynyň netijesinde alnan sana paý ýa-da gatnaşyk diýilýär. Bölmek amaly şeýle ýazylýar: 42:7=6. Bu ýerde 42-bölüniji, 7-bölüji, 6-paý. Bölmek belgisi bolan iki nokat bölüniji bilen bölüjiniň arasynda goýulýar. Bölmek amaly köpeltmek amalyna ters amaldyr.

1) Eger bölüniji bilen bölüji deň bolsa, onda paý 1-e deňdir, ýagny 18:18=1.
2) Eger bölüji bire deň bolsa, onda paý bölünijä deňdir.
3) Nuly nuldan tapawutly islendik sana bölmekde paý nula deňdir, mysal üçin, 0:11=0.
4) Islendik sany nula bölmek mümkin däldir.

Natural sanlarda bölmek amaly elmydama ýerine ýetmeýär, başgaça aýdylanda, bölmek amaly ýerine ýetirilende paýda elmydama natural san gelip çykmaýar. Mysal üçin, 40:9-mümkin däldir, ýagny natural san alynmaýar.

62’5’ | 25   14’4’1’2’ | 12
\-   25   -   1201

50
125
-
125
0

12
24
-
24
12
-
12
0

7.Natural sanlary galyndyly bölmek

Bir meselä seredeliň. Talyplaryň ijeňligini artdyrmak üçin mugallym topary 3-e bölüpdir. Her bölek topardan 3 talyby saýlap alypdyr. Mugallym jemi 41 sany deň derejede çözüp bolýan soraglary taýýarlapdyr. Özara ýaryş guramak üçin talyplara we toparlara soraglary nähili paýlamaly?

Çözülişi. Görnüşi ýaly, sapaga işjeň gatnaşýanlaryň sany 3.3=9. Mugallym 41:9 amaly ýerine ýetirende 9·4=36 bilip, ýene-de 5 sany soragyň galandygyny bilýär. Şol 5 soraglardan özara ýaryşýan üç bölek toparlaryň her birine bilelikde jogap bermek üçin bir soragdan berýär. Şunlukda, galan iki soragy netijeleri deň bolan toparlary tapawutlandyrmak üçin alyp galýar. Diýmek, galan her bir 5 soragyň zerur gerek ýeri bar ekeni; saýlanyp alnan talyplaryň her birine 4 soragdan we her bir topara bir soragdan bermeli, galan iki sorag deň netijeler gazanan toparlary tapawutlandyrmak üçin goşmaça soraglar hökmünde alyp galmaly. Netijede, 41:9=9·4+5. Bu ýerde hem 41-e bölüniji, 9-a bölüji, 4- e paý, 5-e bolsa galyndy diýilýär.

Diýmek, galyndyly bölmek durmuşda gerek ekeni. Görnüşi ýaly, galyndy elmydama bölüjiden kiçidir we nuldan uludyr ýa-da deňdir. Galyndyly bölmäge degişli umumy formula ýazyp bolar. Bölüniji a sany b bölüjä bölmekde g paý we r galyndy bolsa, onda $a = b \cdot g + r, 0 \le r < b$.

473 | 13
- 36
39
83
-

78

5 (galyndy)

8.Derejä götermek amaly

Derejä götermek amalyny köpeltmek amalynyň hususy ýagdaýy görnüşinde alýarlar. Hakykatdan-da, köpeldijileriň sany birnäçe bolup, köpeldijileriň hemmesi hem deň bolsalar, onda şol bir köpeldijini olaryň sanyça öz-özüne köpeltmeli bolýar. Mysal üçin, $3\cdot3\cdot3\cdot3$. Köpeldijileriň sany 4-e deň, olaryň her biri 3-e deň. Bu ýagdaýda köpeltmek amalyny şeýle ýazýarlar 3^4 we oňa 3-iň 4-nji derejesi diýilýär. Netijede, $3^{4=}81$. Şu mysalda 3-e esas, 4-e dereje görkeziji, 81-bolsa dereje diýilýär. Esas köpeldijini, dereje bolsa köpeldijileriň sanyny görkezýär. Mysal. $6^3=6\cdot6\cdot6=36\cdot6=216$. Ikinji derejä kwadrat, 3-nji derejä kub diýilýär. Islendik sanyň birinji derejesi özüne deňdir. Mysal üçin, $8^1=8$.

Sanyň nolunjy derejesine düşüneliň. Ýokarda köpeltmek hasylyny kesgitlänimizde köpeldijileriň biri 1-e deň bolsa, onda köpeltmek hasylynyň köpeldijileriň ikinjisine deňdigini görkezdik. Netijede, islendik sanyň 1-e deň bolan köpeldijisi bar, ýagny $1\cdot6^3=216$; $1\cdot5^3=125$. Emma sanyň dereje görkezijisi esasyň şol köpeltmek hasylynda näçe gezek gaýtalanýandygy görkezýär. Eger esas bir gezek gaýtalansa, onda $1\cdot6^1=1\cdot6=6$, iki gezek gaýtalansa, onda $1\cdot6^2=1\cdot6\cdot6=1\cdot36=36$.

Eger-de 1-iň ýanyndaky esas hiç gezek gaýtalanmasa, ýagny dereje görkeziji nola deň bolsa, başgaça aýdylanda, 1-e özünden başga san köpeldilmese, onda dereje bire deň bolar: $1\cdot6^0=1\cdot5^0=1\cdot7^0=1$, $6^0=5^0=7^0=1$.

Diýmek, islendik sanyň nolunjy derejesi bire deňdir diýlen netijäni alarys. Derejä götermek amalynyň häsiýetlerini ýazalyň.

1) Bir esasly derejeleri köpeltmek üçin şol esasy dereje görkezijileri goşup derejä götermeli.Mysal.

   $2^5\cdot2^3=2^{5+3}=2^8=256$.

2) Bir esasly derejeleri bölmekde bölünijiniň dereje görkezijisi bölüjiniň dereje görkezijisinden kiçi bolmasa, onda

bölünijiniň dereje görkezijisini aýryp, esasyny olaryň tapawudyna götermeli.Mysal: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4.$

3) Eger-de bölüniji we bölüji bolup gelýän bir esasly derejeleriň dereje görkezijileri deň bolsalar, onda bir tarapdan olaryň deňligi sebäpli paý 1-e deň bolar, beýleki tarapdan esasy dereje görkezijileriň tapawudy bolan nola götermeli bolar. Netijede, islendik sanyň nolunjy derejesiniň 1-e deň bolýandygyny subut ederis: $2^5 : 2^5 = 2^{5-5} = 2^0 = 1,$
$1 = 100^{100} : 100^{100} = \; = 100^{100-100} = 100^0$, $100^0 = 1$.

9.Arifmetik amallaryň häsiýetleri.
Goşmak amalynyň häsiýetleri

1. Goşmak amaly goşulyjylaryň orun çalşyrma kanunyna eýedir: $a + b = b + a$. Mysal. $5 + 6 = 6 + 5$
2. Üç sany natural sanlary goşmak amaly goşmagyň utgaşdyrma kanunyna eýedir: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Mysal. $(4 + 7) + 9 = 4 + (7 + 9)$; $11 + 9 = 4 + 16$; $20 = 20$.

Aýyrmak amalynyň häsiýetleri

1. Jemi sandan aýyrmak. Eger-de jem $b + c$ kemeliji a-dan uly bolmasa, onda natural sandan jemi aýyrmakdan natural san ýa-da nol alynýar; aýyrmak amaly kesgitlenen we $a - (b + c) = a - b - c$ deňlik dogrudyr.
Mysal. $37 - (25 + 7) = 37 - 25 - 7 = \; = 12 - 7 = 5$.
2. Jemden sany aýyrmak. Jem $a + b$ kemeliji hökmünde kemeldijiden kiçi bolmasa, onda giňeldilen natural sanlar köplüginde $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$.
Mysal. $(23 + 27) - 17 = (23 - 17) + 27 =$
$= 23 + (27 - 17) = 33$.
3. Natural sana tapawudy goşmak. $a + (b - c) = (a + b) - c$
Mysal. $4 + (7 - 5) = (4 + 7) - 5 = 6$
4. Natural sandan tapawudy aýyrmak. $a - (b - c) = a - b + c$

Mysal. $18-(16-7)=18-16+7=9$

Köpeltmek hasylynyň häsiýetleri

1. Köpeltmek hasylynda köpeldijileriň ornuny çalşyrma kanuny: $ab=ba$ Mysal. $7\cdot 8=8\cdot 7$
2. Üç sany natural sanlaryň köpeltmek hasylynda utgaşdyrma kanuny: $a\cdot b\cdot c=a(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$. Mysal $5\cdot 13\cdot 7=5(13\cdot 7)=(5\cdot 13)\cdot 7=455$
3. Jeme görä köpeltmek hasylynyň paýlaşdyrma kanuny.
$(a+b+c)d=d(a+b+c)=ad+bd+cd$ Mysal .
$(3+5+7)\cdot 9=9\cdot(3+5+7)=3\cdot 9+$
$+5\cdot 9+7\cdot 9=27+45+63=135$
4. Tapawudy sana köpeltmek. $(a-b)c=ac-bc$
Mysal . $(19-12)\cdot 5=19\cdot 5-12\cdot 5==95-60=35$.

Bölmegiň häsiýetleri

Ilkinji bellemeli zat, ol hem islendik sany nola bölmek manysyz.

1. **Sana Jemi bölmek**: $(a+b):c=a:c+b:c$.
Mysal. $(21+18):3=21:3+18:3=$
$=7+6=13$.
2. **Tapawudy sana bölmek** : $(a-b):c=ac:bc.$
Mysal. $(21-18):3=21:3-18:3=\ =7-6=1$.
$(65-25):5=65:5-25:5==13-5=8$
3. **Sany köpeltmek hasylyna bölmek**.

Sany köpeltmek hasylyna bölmek üçin şol sany köpeldijileriň birine bölüp, alnan paýy galan köpeldijileriň köpeltmek hasylyna bölmek gerek.

$a:(b\cdot c\cdot d)=(a:b):(c\cdot d)$.

Mysal. $120:(3\cdot 4\cdot 5)=(120:3):(4\cdot 5)==40:20=2$

4. **Köpeltmek hasylyny sana bölmek**.

Köpeltmek hasylyny sana bölmek üçin köpeldijileriň birini şol sana bölüp, alnan paýy beýleki köpeldijileriň köpeltmek hasylyna köpeltmeli.

$(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b\,,(a\cdot b\cdot c):d=(a\cdot b)\cdot(c:d)$.

Mysallar: $(27 \cdot 8 \cdot 625) : 25 = (27 \cdot 8) \cdot (625 : 25) =$
$= 196 \cdot 25 = 4900$.

5. Sany paýa köpeltmek.

Sany paýa köpeltmek üçin şol sany bölünijä köpeldip, alnan köpeltmek hasylyny bölüjä bölmek ýeterlikdir:
$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$. Mysal.

$4 \cdot (200 : 8) = (4 \cdot 200) : 8 = 800 : 8 = 100$

6. **Sany paýa bölmek**.

Sany paýa bölmek üçin şol sany bölünijä bölüp, alnan paýy bölüjä bölmek ýeterlikdir. $a : (b : c) = (a : b)c$. Mysal.

$360 : (180 : 3) = (360 : 180) \cdot 3 = \; = 2 \cdot 3 = 6.$

Emma $360 : (720 : 3) -$ amaly ýerine ýetirip bolmaýar, sebäbi $(360 : 720) \cdot 3 -$ aňlatmadaky bölmek amaly $360 : 720$ natural sanlar köplüginde ýerine ýetmeýär.

7. **Paýy sana bölmek**.

Paýy sana bölmek üçin şol sany bölüjä köpeldip, bölünijini alnan köpeltmek hasylyna bölmek ýeterlikdir:
$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$ ýa-da $(a : b) : c = (a : c) : b.$

Mysal. $(320 : 4) : 5 = 320 : (4 \cdot 5) = (320 : 5) : 4 = 16$

10. Arifmetiki amallaryň ýerine ýetiriliş tertibi, ýaýlary açmak

Arifmetiki amallary ýerine ýetirmekligiň tertibi kesgitlenen. Alamatlaryň ýerine ýetiriliş tertibine görä san netije (jem, tapawut, köpeltmek hasyl, paý) dürli bolmagy mümkin. Şonuň üçin alamatlary üç basgançaga bölýärler. Birinji basgançaga goşmak we aýyrmak, ikinji basgançaga köpeltmek we bölmek, üçünji basgançaga derejä götermek amallaryny degişli edýärler. Eger-de san aňlatmalaryny hasaplamakda ýaý ýok bolsa, onda alamatlary çepden saga ýazylyş tertibi boýunça ýerine ýetirilýär. Mysallar:

$$11 - 3 + 5 + 8 - 6 = 8 + 5 + 8 - 6 = = 13 + 8 - 6 = 21 - 6 = 15;$$
$$80 : 5 \cdot 4 \cdot 3 = 16 \cdot 4 \cdot 3 = 64 \cdot 3 = 192$$

San aňlatmasynda dürli basgançakly amallar ýerine ýetirilýär. Eger-de aňlatmada ýaýyň içinde görkezilen amallar bar bolsa, onda ilki ýaýyň içindäki amallar ýerine ýetirilip, soň üçünji basgançak, ikinji basgançak, birinji basgançak tertip boýunça amallardan başlap görkezilen amallar ýerine ýetirilýär. Mysallar:

$$320-(64:8+16)=320-(8+16)= =320-24=296.$$

$$45+24\cdot 5-(59-9)=45+120-50= =165-50=115$$

§2. Sanlaryň bölünijilik düşünjesi

1. Eger jemiň her bir goşulyjysy haýsy hem bolsa bir sana bölünýän bolsa, onda olaryň jemi hem şol sana bölünýändir. Mysal. $12+16+84=112$; $12:4=3;\ 16:4=4;$

   $84:4=21;\ \ 112\cdot 4=28.$

   Tersine, goşulyjylaryň diňe biri haýsy-da bolsa bir sana bölünmän, beýleki goşulyjylaryň hemmesi şol sana bölünýän hem bolsa, onda jem şol sana bölünýän däldir. Mysal.

   $32:5-$bölünmeýär, $30:5=6,$ 35:5=7-bölünýär. Emma

   $32+30+35=97$ -jem 5-e bölünmeýär.
2. Eger kemelýän we kemeldiji haýsy-da bolsa bir sana bölünýän bolsa, onda tapawut hem şol sana bölünýändir. Mysal. $75:5=15,\ \ 45:5=9.$

Tapawut $75-45=30$, 5-e bölünýär we

$75:5-45:5=(75-45):5=30:5=6.$

3. Köpeltmek hasylynyň sana, sanyň köpeltmek hasylyna bölünijiligi. Mysal.

12 san 3-e bölünýär, onda bir köpeldijisi 12 bolan islendik köpeltmek hasyly

l 3-e bölünýär, ýagny $47\cdot 12;\ \ 11\cdot 13\cdot 12;$ 12·111·12 sanlar 3-e bölünýär.

Eger-de köpeldijileriň her biri haýsy-da bolsa bir sana bölünmeýän bolsa, onda köpeltmek hasyly şol sana bölünýän däldir.

Eger berlen san köpeltmek hasylyna bölünýän bolsa, onda şol san köpeltmek hasylynyň her bir köpeldijisine bölünýändir. Mysal. 120 san 3·4·5=60 köpeltmek hasyla bölünýär. Onda 120 san 3,4 we 5 sanlaryň her birine hem bölünýär. Tersine tassyklama nädogry, ýagny käbir san sanlaryň birnäçesine bölünýän bolsa-da olaryň köpeltmek hasylyna bölünmeýän bolmagy mümkin. Mysal. 240 san 24,2,3,8,5,4 bölünýär. Emma 240 san 3·4·5·8=480 sana bölünmeýär (natural sanlar köplüginde).

1.Bölünijilik nyşanlary

1. Soňy diňe nol bilen gutarýan sanlar 10-a bölünýändir. Mysal. $43130:10=4313$
2. Eger sanyň soňy nol we 5 bilen gutarýan bolsa, onda ol san 5-e bölünýändir. Mysal. 230 we 235 sanlar 5-e bölünýärler.
3. Eger sanyň soňy 0,2,4,6,8,.. sanlar bilen gutarýan bolsalar, onda ol san 2-ä bölünýändir. Mysal. 3572 san 2-ä bölünýär.
4. Eger sanyň sifrleriniň jemi 3 we 9-a bölünýän bolsa, onda ol san degişlilikde 3-e ýa-da 9-a bölünýändir. Mysallar. 1) 123 sanyň sifrleriniň jemi ($1+2+3=6$) 3-e bölünýär, 123 san hem 3-e bölünýär: $123:3=41$. Emma 123 san 9-a bölünmeýär. 2) 63 sanyň sifrleriniň jemi ($6+3=9$) 9-a bölünýär, ol sanyň özi 63-e hem 9-a bölünýär.
5. Eger sanyň soňky iki sifrleri 4-e, ýa-da 25-e bölünýän sanlary aňladýan bolsa, onda degişlilikde, şol san 4-e we 25-e bölünýändir. Mysallar: 7500 sanyň soňky iki 00-nol san 4-e we 25-e bölünýär. Şonuň üçin ol san 4-e we 25-e bölünýär. 7516-sanyň soňky iki sifri 16 sany aňladýar, 16 hem 4-e bölünýär. Netijede $7516:4=1879$ (4-e bölündi). 1175 sanyň soňky iki sifri 75 sany aňladýar we ol 25-e bölünýär (4-e bölünmeýär), netijede, 1175 san 25-e bölünýär, emma 4-e bölünmeýär: $1175:25=47$.
6. Eger sanyň soňky 3 sifrleriniň we galan beýleki sifrleriniň aňladýan sanlarynyň tapawudy 7-ä ýa-da 11-e, ýa-da 13-e bölünýän bolsa, onda, degişlilikde ol san 7-ä,11-e we 13-e bölünýändir. Mysal. 253264 sanyň soňky üç sifrleri 264 sany, galan sifrleri şol tertipde 253 sany aňladýar, olaryň 264-253=11 tapawudy 11-e bölünýär, emma 7-ä we 13-e bölünmeýär. Şeýlelikde, 253264 san 11-e bölünýär, emma ol san 7-ä we 13-e bölünmeýär.

2.Ýönekeý we düzme sanlar

Eger-de natural san diňe özüne we bire bölünýän bolsa, onda oňa ýönekeý natural san diýilýär. Eger natural sanyň özünden we birden başga bölüjileri, ýagny ikiden köp bölüjileri bar bolsa, onda oňa düzme natural sanlar diýilýär. Mysallar.
2,3,5,7,11,13,17,19,23,...-ýönekeý sanlar
4,6,8,9,10,12,14,15,16,...-düzme sanlar.
Arifmetikanyň esasy teoremasy. Islendik düzme natural sany ýeke-täk görnüşde ýönekeý sanlaryň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak mümkin. Mysallar.
28=2·2·7, 18=2·3·3, 51=3·17. Düzme sanlary ýönekeý sanlara dargatmak beýleki sanlary bölmekdäki ýaly dik sütün boýunça ýönekeý sanlar boýunça amala aşyrylýar, mysal üçin:

525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$525 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

3.Iň uly umumy bölüji

Sanlar üstünde arifmetiki amallary ýerine ýetirmekde iki we ondan-da köp sanlary şol bir sana bölmek zerurlygy ýüze çykýar. Eger iki (ikiden köp) sanyň ikisi (hemmesi) şol bir sana bölünýän bolsa, onda şol bölýän sana umumy bölüjileriň arasyndan (eger olar köp bolsalar) iň ulusyny tapmak gerek bolýar. Iň uly bölüjini tapmak üçin bölünýän sanlary ýönekeý köpeldijilere dargatmaly, mysal.

126	2	540	2	630	2
63	3	270	2	315	3
21	3	135	3	105	3
7	7	45	3	35	5
1		15	3	7	7
		5	5		1
			1		

Şu 126,540,630 sanlaryň umumy bölüjileri 2,3,3 sanlardan ybaratdyr. 540 sanyň ýönekeý köpeldijilerindäki artykmaç gezek gelen 2 we 3 iň uly umumy bölüjini kesgitlemekde alynmaýar. Alnan umumy köpeldijileriň köpeltmek hasyly şol sanlaryň iň uly umumy bölüjisini kesgitleýär. Diýmek, iň uly umumy bölüjini B bilen belläp alarys: B(126,540,630)=2·3·3=18. Berlen 126,540,630 sanlaryň 18 sandan uly umumy bölüjileri ýok.

4.Iň kiçi umumy kratny

Arifmetiki amallar ýerine ýetirilende iki we ondan-da köp sanlaryň hemmesine bölünýän sanlaryň içinden iň kiçisini saýlap almak meselesi ýüze çykýar. Mysal üçin, 3 we 6 sanlara bölünýän sanlar 12,18,24,36,48,72,.. olaryň kiçisi 12 sandyr. Emma 6-nyň özi hem 3-e we 6-a umumy bölüniji bolup bilýär. Iň kiçi umumy kratnyny (bölünijini) tapmak hem ýönekeý köpeldijilere dargatmak usuly bilen amala aşyrylýar. Mysal.

$270 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5 =$ (3-üç gezek gaýtalanýar)

$300 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5 =$ (2-iki gezek, 5- iki gezek gaýtalanýar)

$315 = 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 =$ (3-iki gezek gaýtalanýar)

Iň kiçi umumy kratny tapylanda sanlaryň ýönekeý görkezijelere dargadylandaky köpeldijileriň haýsy sanda köp gezek gaýtalanýan bolsa şonça gezek hem şol köpeldiji alynýar we alnan köpeldijileriň köpeltmek hasyly iň kiçi kratny hökmünde tapylýar. Iň uly umumy kratnyny (bölünijini) K harpy bilen belläliň. Onda,

$K(270{,}350{,}315) = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7 = 18900$.

Iki sanyň iň kiçi umumy kratnysy hem şonuň ýaly tapylýar. Mysal.

$$270 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2\cdot 3^3\cdot 5,$$

$$72 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 2^3\cdot 3^2$$

Bellik. $K(270{,}72) = 2^3\cdot 3^3\cdot 5 = 8\cdot 27\cdot 5 = = 1080$

Üns bereliň, K(270,72)=1080 san 270·72=15940 sandan has kiçidir. Eger-de düzme sanlara derek ýönekeý sanlar alyp, olaryň iň kiçi umumy bölüjilerini tapmak talap edilse, onda K san ol sanlaryň özleriniň köpeltmek hasylyna deňdir. Mysal.

K(3,5)=3·5=15, K(17,19)=17·19=323

§3. Ady droblar

1.Drob düşünjesi

Drob sözi rus sözünden alnan, ol ülüş, seçme, bölejikler manyny berýär. Okuw kitaplarynda drob sözleri terjime edilmän alnany üçin, biz hem drob sözüni ulanalyň. Kabul edilen ölçeg birligi deň böleklere bölünende onuň bir ýa-da birnäçe bölegine ady drob diýilýär.

Drob kese çyzyk bilen bellenýär. Kese çyzygyň ýokarsynda ýazylan sana sanawjy, aşagynda ýazylan sana maýdalawjy diýilýär.

Mysallar. $\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{9}$.

Şu mysallaryň ilkinjisinde ölçeg birligi 7 sany bölege bölüp, bir bölegiň alnandygyny, ikinjisinde birligi bäşe bölüp, 3 sany bölegiň (ülüşiň) alnandygyny, üçünjisinde birligi dokuz bölege bölüp, ol bölekleriň ikisiniň alnandygyny aňladýar. Diýmek, ady drob bölmek amalyny aňladýar, onda şol droblary $\frac{1}{7} = 1:7$; $\frac{3}{5} = 3:5$; $\frac{2}{9} = 2:9$ ýaly ýazmak hem mümkin. Birligi näçe bölege bölseň-de, şonça bölek alnan bolsa, onda ol ady drob ýene-de şol birligiň alnandygyny görkezýär we $\frac{7}{7} = 1$, $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{9}{9} = 1$ ýaly ýazylýar. Diýmek, ady drobyň sanawjysy we maýdalawjysy deň bolsa onda ol drob bire deňdir. Birligi böleklere bölüp, şol birligiň bölekleriniň sanyndan köp alynýan bolsa, onda drobyň sanawjysy maýdalawjydan uly bolar. Mysal üçin, $\frac{9}{7}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{9}$. Netijede, birlikden hem köp alnan sanlary ady drob görkezip bilýän ekeni. Ady drobuň sanawjysy maýdalawjysyndan kiçi bolsa, onda onuň ýaly ady droblara dogry ady droblar diýilýär, eger-de ady drobuň sanawjysy maýdalawjysyndan uly bolsa, onda onuň ýaly ady droblara nädogry ady droblar diýilýär. Sanawjysy we maýdalawjysy deň droblary hem nädogry droblara goşmak bolar. Nädogry droblara syn edeliň. Ölçeg birligini deň böleklere bölüp, şol bölekleriň hemmesi alnan bolsa, onda sanawjy bilen maýdalawjy deň bolup, ýene-de şol birlik alyndy, ýagny drob bire deň boldy. Onda nädogry drobuň sanawjysynyň uly

boldugy onuň birden uludygyny aňladýar. Onda nädogry drobuň sanawjysyndaky bölekleriň sanawyny görkezýän sandan maýdalawja deň san aýratyn ýazyp ölçeg birligi ýa-da ol birligiň birnäçesini soň beýleki birligiň ýene-de şol deň bölejiklere deň böleginiň näçesiniň alnandygyny ýazyp bolýar.
Mysallar:

$$\frac{9}{4}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5};\quad \frac{13}{5}=\frac{5+5+3}{5}=2+\frac{3}{5};$$

$$\frac{38}{11}=\frac{11+11+11+5}{11}=3+\frac{5}{11};\quad \frac{15}{13}=\frac{13+2}{13}=1+\frac{2}{13}.$$

Bu droblary $1+\frac{4}{5}=1\frac{4}{5};\quad 2+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5};$

$3+\frac{5}{11}=3\frac{5}{11};\quad 1+\frac{2}{13}=1\frac{2}{13}$

ýaly ýazýarlar we olara gatyşyk ady droblar diýilýär. Gatyşyk ady droblary nädogry droba geçirmek üçin bitin bölek bilen maýdalawjyny goşup, olaryň köpeltmek hasylyna sanawjyny goşup, netijäni sanawjyda ýazmak ýeterlik.

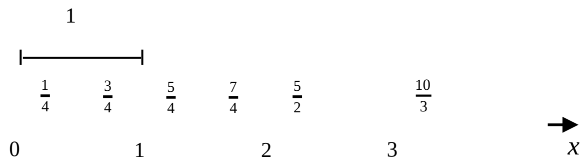
Mysal üçin, $3\frac{5}{11}=\frac{3\cdot 11+5}{11}=\frac{33+5}{11}=\frac{38}{11}.$

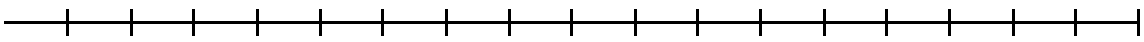
Üns beriň, drobuň maýdalawjysyny üýtgetmän maýdalawjyda ýazmaly.

Islendik nädogry droby gatyşyk droba öwrüp bolýar. Onuň üçin sanawjyny maýdalawja galyndyly bölmeli, ýeten paýy bitin bölek, galyndyny bolsa sanawjy hökmünde ýazmaly.

Mysal. $\frac{41}{3}=13\frac{2}{3}.$

Koordinata okunda ölçeg birliginiň ady droba degişli bölekleriň alnyşyny şekillendireliň:





Bellik. Drob düşünjesi, ýagny ady droblar köplügi natural sanlar köplüginden, hatda nol sany öz içine alýan giňeldilen natural sanlardan has giňdir we bu sanlar köplügini öz içine alýar. Hakykatdan-da, drobuň sanawjysynda giňeldilen natural sanlardan, maýdalawjysynda bolsa natural sanlardan ýazsak, onda drob sanlary we giňeldilen natural sanlar köplügini alarys. Hakykatdan-da, $\frac{m}{n}$; $m \in N$, $n \in N$; Mysal üçin, $m = o$, $n \in N$, $\frac{0}{n} = o$; $m = 1$, $n = 99$, $\frac{1}{99}$; $m = 1$, $n = 1$, $\frac{m}{n} = 1$; n=1, m=1,2,3,..., $\frac{m}{n} -$ natural sanlar köplügi.

2.Droblaryň häsiýetleri

Drob sanlary diňe giňeldilen natural we natural sanlaryň gatnaşygy görnüşinde däl-de, drob görnüşli sanlaryň gatnaşygy görnüşinde hem ýazmak mümkin. Şonuň üçin droby umumy görnüşde $\frac{a}{b} = a : b$ görnüşde ýazmak bolýar, bu ýerde a we b sanlar ady droblar köplüginden, emma b$\neq 0$ we **0:0- manysyz**.Droblaryň esasy häsiýetleri:

1) $\frac{a}{b}$, $b \neq o$ we $\frac{c}{d}$, $d \neq o$ (nola bölmek gadagan) iki drob deň diýilýär, egerde $a \cdot d = b \cdot c$ bolsa. Mysal. $\frac{4}{5} = \frac{40}{50}$; sebäbi $4 \cdot 50 = 5 \cdot 40.$ Bu deňligiň iki tarapynda hem 10 köpeldiji bar. Onda onuň iki tarapyny hem 10-a bölüp alarys $4 \cdot 50 = 5 \cdot 4.$ Bu bolsa

$\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$ droba getirdi. Diýmek, berlen mysaldaky $\frac{40}{50}$ drobuň sanawjysyna we maýdalawjysyna umumy köpeldiji bolup gelýän sany gysgaltmak mümkin, şunlukda şol drobuň san bahasy üýtgemez.
2) Droblar sanawjysynyň we maýdalawjysynyň umumy köpeldijisini gysgaltmakdan umumy köpeldijä ady sana köp onuň bahasy üýtgemez.

3.Droblary goşmak

1) Droblary goşanda, eger-de droblaryň maýdalawjysy deň bolsalar, onda jem diýlip atlandyrylýan drobuň çyzyk belgisiniň aşagynda (maýdalawjysynda) goşulyjylaryň maýdalawjysyny ýazmaly, sanawjysynda goşulyjylaryň sanawjylaryny goşmaly. Mysal.

$$\frac{7}{13}+\frac{5}{13}=\frac{7+5}{13}=\frac{12}{13};\ \frac{8}{9}+\frac{7}{9}==\frac{8+7}{9}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

2) Dürli maýdalawjyly droblary goşmak üçin goşulyjy droblaryň maýdalawjylarynyň iň kiçi umumy kratnysyny tapyp, ony jem drobuň maýdalawjysynda ýazmaly. Bu kratna umumy maýdalawjy diýilýär. Soň umumy maýdalawjyny her bir goşulyjy drobuň maýdalawjysyna bölmeli, alnan paýlary degişli goşulyjy droblaryň sanawjylarynyň depesinden kese çyzyk çyzyp, onuň ýokarsyndan ýazmaly. Şondan soň alnan paýlary özleriniň aşagynda duran degişli sanawjylara köpeldip, netijede alnan köpeltmek hasyllary goşup, jem drobuň sanawjysynda ýazmaly.
Mysallar.

$$\frac{{}^{4\diagup}2}{3}+\frac{{}^{3\diagup}3}{4}=\frac{4\cdot 2+3\cdot 3}{12}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}.$$

$$\frac{{}^{4\diagup}117}{270}+\frac{{}^{15\diagup}7}{72}=\frac{4117+15\cdot 7}{1080}=\frac{468+105}{1080}=$$

$$=\frac{573}{1080}=\frac{3\cdot 191}{3\cdot 360}=\frac{191}{360}.$$

$-\ 1080\,\underline{|270}$ $\qquad$ $1080\,\underline{|72\ }$

$$\begin{array}{l} \underline{\;1080\;} \\ \quad 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} -\;\underline{\;72\;}\; 15 \\ \quad 360 \\ -\;\underline{\;360\;} \\ \qquad 0 \end{array}$$

3) Ady droblary aýyrmak amaly edil natural sanlardaky ýaly kemeliji kemeldijiden kiçi bolmadyk ýagdaýda ýerine ýetýär. Aýyrmak amalyny ýerine ýetirmek hem goşmak amalyndaky ýaly ýerine ýetirilýär, ýöne jem drobuň sanawjysyna kemeldijä degişli köpeltmek hasylyň öňünde aýyrmak (minus) amaly goýulýar. Mysallar.

$$\frac{{}^{3/}3}{4}-\frac{{}^{4/}2}{3}=\frac{3\cdot3-4\cdot2}{12}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}.$$

$$\frac{{}^{4/}117}{270}-\frac{{}^{15/}7}{72}=\frac{4\cdot117-15\cdot7}{1080}==\frac{468-105}{1080}=\frac{363}{1080}=\frac{121}{360}.$$

4) Gatyşyk droblarda goşmak we aýyrmak amallaryny ýerine ýetirilende olary ilki nädogry droblara geçirip, ýokarda görkezilen usullarda jemi ýa-da tapawudy tapmak bolýar. Emma jemiň (tapawudyň) sanawjysynda uly sanlar emele gelmegi mümkin. Şonuň üçin ýene-de gatyşyk droblara geçmeli bolýar. Şu sebäpli gatyşyk droblary goşup aýyranda şol amallary goşulýan we aýrylýan gatyşyk droblaryň bitin böleklerinde, hemde dogry ady drob böleklerinde aýratyn ýerine ýetirilýär, netijäni ýene-de gatyşyk droblar görnüşinde ýazýarlar. Mysallar.

$$11\frac{2}{3}+4\frac{5}{6}=11+\frac{2}{3}+4+\frac{5}{6}=(11+4)+(\frac{{}^{2/}2}{3}+\frac{{}^{1/}5}{6})=15+\frac{2\cdot2+1\cdot5}{6}=$$

$$15+\frac{9}{6}=15+\frac{3}{2}=15+1+\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}.$$

$$7\frac{4}{5}-5\frac{3}{7}=7+\frac{4}{5}-(5+\frac{3}{7})=7+\frac{4}{5}-5-\frac{3}{7}=$$

$$=(7-5)+(\frac{{}^{7/}4}{5}-\frac{{}^{5/}3}{7})=2+\frac{7\cdot4-5\cdot3}{35}=2+\frac{13}{35}=2\frac{13}{35}.$$

Eger gatyşyk droblarda aýyrmak amaly ýerine ýetirilende kemelijiniň drob bölegi kemeldijiniň drob böleginden kiçi bolsa, onda kemelijiniň bitin böleginden bir birlik alyp, drob bölegi nädogry droba öwürmeli. Mysal. $3\frac{2}{9}-1\frac{5}{6}=3+\frac{2}{9}-\left(1+\frac{5}{6}\right)$

Görnüşi ýaly, $\frac{2}{9}$ drob $\frac{5}{6}$-den kiçi, şonuň üçin bitin bölek 3-den bir birligi alyp, drob bölek $\frac{2}{9}$-ni nädogry droba geçireliň:

$2+1+\frac{2}{9}=2+\frac{11}{9}$. Indi $2+\frac{11}{9}-\left(1+\frac{5}{6}\right)$ tapawut ýokarky düzgün boýunça ýerine ýetirilýär:

$$(2-1)+\left(\frac{^{2/}11}{9}-\frac{^{3/}5}{6}\right)=1+\frac{2\cdot 11-3\cdot 5}{18}=1+\frac{7}{18}=1\frac{7}{18}.$$

4.Droblary köpeltmek

1. $\frac{a}{b}$ *we* $\frac{c}{d}$ droblary köpeltmek üçin köpeltmek hasyl diýlen drobda sanawjyda sanawjylary köpeldip, maýdalawjyda maýdalawjylary köpeldip ýazmaly:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Mysal. $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 4}=\frac{15}{28}$.

2. Droblary köpeltmek amalynda gatyşyk droblar bar bolsa, onda olary nädogry droba öwrüp, soň köpeltmek hasyly tapmaly. Mysal

$$2\cdot 3\frac{2}{7}=2\cdot\frac{23}{7}=\frac{2}{1}\cdot\frac{23}{7}=\frac{2\cdot 23}{1\cdot 7}=\frac{46}{7}=6\frac{4}{7}.$$

3. Iki sana özara ters sanlar diýilýär, eger olaryň köpeltmek hasyly bire deň bolsa, ýagny, a we $\frac{1}{a}$ sanlar özara ters sanlardyr, sebäbi

$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$ onda $\frac{a}{b}$ *we* $\frac{b}{a}$ sanlar hem özara ters sanlardyr.Sebäbi,

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1.$

5.Droblary bölmek

1. Droblary bölmek amalynda bölünijiniň sanawjysyny bölüjiniň maýdalawjysyna köpeldip, paýy drobuň sanawjysynda ýazmaly, bölünijiniň maýdalawjysyny bölüjiniň sanawjysyna köpeldip, paýy drobuň maýdalawjysynda ýazmaly: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$

Bölmekde özara ters sanlary ulanyp, bölüjä ters sany bölünijä köpeltmek hem ýeterlik:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

3. Islendik sany drob görnüşinde ýazyp bolýandygyny ýokarda görkezipdik. Eger droblary bölmek amalynda bitin sanlar ýa-da gatyşyk droblar bar bolsa, onda olary nädogry droba geçirip, soň bölmek amalyny ýerine ýetirmeli. Mysallar:

$$2\frac{3}{7} : 5\frac{2}{3} = \frac{17}{7} : \frac{17}{3} = \frac{17}{7} \cdot \frac{3}{17} = \frac{17 \cdot 3}{7 \cdot 17} = \frac{3}{7}.$$

$$6 : \frac{3}{8} = \frac{6}{1} : \frac{3}{8} = \frac{6}{1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{1} = 16.$$

§4. Onluk droblar

1.Onluk drob düşünjesi

Ýokarda ady droblary $\frac{m}{n}$ (ýa-da $\frac{a}{b}$) görnüşde ýazyp bolýandygyny görkezdik. Eger ady drobuň maýdalawjysy n=10, 100, 1000,... bolsa, onda onuň ýaly droblara onluk droblar diýilýär. Mysal üçin, $\frac{9}{10}$=0,9; $\frac{67}{100} = 0{,}67;$ $\frac{333}{1000} = 0{,}333;$ $\frac{1011}{1000} = 1{,}011.$ Üns bereliň, onluk droblaryň hem ýazylyşynda sifrleriň duran orny onuň aňladýan birlikleriniň, onluklarynyň,..., mukdaryny (sanyny) görkezýär. Onluk droblarda oturdan öňdäki sifrler bitin sanlary, oturdan yzdaky sifrler bolsa ülüşleri (bölekleri) aňladýar. Mysal üçin, 0,67 onluk drobda ölçeg birligiň 100 deň bölege bölünip, ol bölekleriň 67 sanysynyň alnandygyny aňlatsa, oturdan öňdäki duran nol sanyň bitin birlik böleginiň ýokdugyny aňladýar. Emma 1,011 onluk drobda ölçeg birlikleriniň 1000 deň böleklere bölünip, tutuş bir bitiniň alnyp, onluk birligiň 11 sany bölejikleriniň alnandygyny aňladýar. Diýmek, oturdan öňdäki sifrleri okanda sagdan çepe birlikler, onluklar,..., oturdan soňky sifrleri okanda çepden saga onluk, ýüzlük, müňlük,..., ülüşler (bölekler) diýip okamaly. Onluk droblaryň bitin böleginiň öňündäki (ilkinji) noly we drob bölegindäki iň soňky noly taşlap ýazyp bolýar, şunlukda ol drobuň bahasy üýtgemez.

2.Onluk droblary deňeşdirmek

Onluk droblary deňeşdirmek üçin ilki bitin böleklerine syn etmeli. Eger-de onluk droblaryň biriniň bitin bölegi beýlekisiniň bitin böleginden uly bolsa, onda şol onluk drob ikinjisinden uludyr. Eger onluk droblaryň bitin bölekleri
deň bolsa, onda oturdan soň deň orunda duran sifrleriň ulusyna degişli onluk drob uludyr.
Mysallar. 31,099>29,999; 3,101>3,099; 2<3,011; 0,3>0,21.

3.Onluk droblary goşmak

Onluk droblary goşmak üçin olary natural sanlardaky ýaly dikligine birini beýlekisiniň aşagynda ýazmaly, şunlukda oturyň aşagynda otur, birlikleriň, onluklaryň,.., we drob ülüşleriň onluklary, ýüzlükleri,..., gabat geler ýaly edip ýazmaly. Sifrleri goşmakda ondan uly san alynsa, onda şol sanyň birligi şol orunda ýazylyp, onlugy öňdäki orunda duran sifrleriň jemine goşulýar.
Mysallar:

$$+\begin{array}{r}0{,}137\\ \underline{3{,}579}\\ 3{,}716\end{array} \qquad +\begin{array}{r}7{,}105\\ \underline{4{,}996}\\ 12{,}101\end{array}$$

4.Onluk droblary aýyrmak

Onluk droblary aýyrmak amaly hem kemelijiniň kemeldijiden kiçi bolmadyk ýagdaýynda ýerine ýetirilýär. Kemelijide sifri kemelijiniň degişli orunda duran sifrinden kiçi bolsa, onda kemelijidäki şol sifriň öňünde duran sifrinden bir san alynýar we şol sifre on san hökmünde goşulýar. Aýyrmak amalyny ýerine ýetirmek üçin hem droblar goşmak amalyndaky ýaly dikligine ýazylýar. Mysallar:

$$-\begin{array}{r}7{,}568\\ \underline{5{,}357}\\ 2{,}211\end{array} \qquad -\begin{array}{r}87{,}365\\ \underline{19{,}978}\\ 67{,}387\end{array} \qquad -\begin{array}{r}0{,}9003\\ \underline{0{,}7128}\\ 0{,}1875\end{array}$$

5.Onluk droblary köpeltmek

Onluk droblary köpeltmek üçin olaryň oturlaryna üns bermän bitin sanlaryň köpeldilişi ýaly köpeltmeli, alnan köpeltmek hasylynyň yzyndan öňe sanap, köpeldijileriň ikisindäki oturdan soňda duran sifrleriň sanyça sifrleri goýup, otur kesmeli (goýmaly). Mysallar:
$15{,}23 \cdot 0{,}093 = 1{,}41639.$ $15{,}23 \cdot 1{,}903 =$
$= 28{,}98269;$

$$\times\begin{array}{r}12{,}34\\ \underline{0{,}2}\\ 2{,}468\end{array}$$

6.Onluk droblary bölmek

Onluk droblarda bölmek amalyny ýerine ýetirmek üçin ilki olaryň oturdan yzda (sagda) duran sifrleriniň sanyny deňlemeli we olary natural sanlaryň bölünişi ýaly bölmeli. Islendik bitin sanlary hem onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar, ýagny oturdan soň nol goýup, sifrleriň orunlaryny deňläp bolýar. Onluk droblary 10, 100, 1000,..., köpeltmekde (bölmekde) otury köpeldijidäki (bölüjidäki) nollaryň sanyça öňe (yza) süýşürmeli.

7.Onluk droby ady droba, ady droby onluk droba öwürmek. Periodiki droblar

1. Onluk droby ady droba öwürmek üçin onluk drobuň oturdan soňky ülüşleri (bölekleri) aňladýan sany drobuň sanawjysynda ýazmaly, maýdalawjyda bolsa bir sifriň yzynda oturdan soňky sifrleriň sanyça nollar goýulan sany ýazmaly. Mysal.

$$0{,}3=\frac{3}{10};\ \ 0{,}43=\frac{43}{100};$$

$$0{,}00085=\frac{85}{100000}=\frac{17}{50000}.$$

2. Eger onluk drobuň bitin böleginde noldan uly san bar bolsa, onda onuň diňe drob (ülüş) bölegini ady droba geçirip, netijäni gatyşyk drob görnüşinde ýazmaly. $2{,}3=2\frac{3}{10}.$

3. Ady droby onluk droba öwürmek üçin sanawjyny maýadalawja bölmeli. Mysal.

$$\begin{array}{r|l} -\,90 & 25 \\ \underline{75} & \overline{0{,}36} \\ 150 & \\ -\,\underline{150} & \\ 0 & \end{array}$$

4. Ady droby onluk droba öwrende tükeniksiz onluk drob emele gelmegi mümkin. Sifrleriň käbir ornundan başlap, sifrleri belli bir düzgün boýunça gaýtalanyp gelýän tükeniksiz onluk droblara periodik onluk droblar diýilýär.Mysallar:0,3333...; 0,48666,...;

2,3057575.. Periodik droblaryň periodlary, ýagny gaýtalanýan sifrleri ýaýyň içinde ýazylýar, mysal üçin, ýokarky droblarda 0,(3); 0,48(6); 2,305(75) ýaly ýazylýar. Islendik ady droby tükenikli, ýa-da tükeniksiz onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar. Periodiki droblary hem ady drob görnüşinde ýazmak bolýar. Onuň üçin periodik drobuň periodynyň ikinji gezek gaýtalanýanyna çenli alyp, şondan soňky sifrleri taşlap, san ýazmaly, soň şol periodik drobuň periodynyň birinji gezek gaýtalanýanyna çenli alyp, şondan soňky sifrleri taşlap san ýazmaly. Olaryň birinjisinden ikinjisini aýryp sanawjyda ýazmaly, maýdalawjyda bolsa perioddaky sifrlerçe 9-lyk sifrleri ýazmaly, 9-lyklaryň yzyndan oturdan perioda çenli sifrleriň sanyça nollary ýazmaly. Mysallar:

$$0,(37) = \frac{37-0}{99} = \frac{37}{99}; \quad 0,2(75) = \frac{275-2}{990} =$$

$$= \frac{273}{990} = \frac{91}{330}$$

$$2,43(123) = \frac{243123-243}{99900} = \frac{242880}{99900} =$$

$$= \frac{24288}{9990} = \frac{12144}{4995}$$

4. Periodik droby onluk droba öwürmegiň ýene-de bir düzgüni bar.

Bilşimiz ýaly, bölmek amaly köpeltmek amalyna ters amal hökmünde köpeldijileriň biri näbelli, köpeltmek hasyly belli bolup, beýleki belli köpeldijiniň kömegi bilen näbelli köpeldijini tapmaklyga aýdylýardy, ýagny $a \cdot x = b \Rightarrow x = b : a$ kesgitlenipdi. Diýmek, $ax = b$ san deňliginden näbelli x-i $b : a$ amal bilen tapmak bolýar.

Indi periodik drobuň ady droba öwürmegiň başga usulyna seredeliň. Gözlenýän ady droby x bilen belläliň we mysallara seredeliň: $x = 0,3737...$

Gözlenýän ady drob. Mysal: $2,7575..$ Birinji periodda iki sifr bar, şonuň üçin bu deňligiň iki tarapyny hem 100-e köpeldip,

$100x = 275{,}7575...$ alnan deňlikden öňkini aýyrmaly.

$99x = 275 - 2 = 273;\quad x = \frac{273}{99} = \frac{91}{33} = 2\frac{25}{33}.$

Mysal. $x = 2{,}43(125)$- drobuň birinji periody gutarýança bäş sany sifr bar, onda bu sany 100000-e köpeltmeli:
$100000\,x = 343125{,}125125....$. Indi berlen drobuň ilkinji periodyna çenli iki sifriň bardygy üçin ony 100-e köpeldiň:
$100x = 343{,}125125...$ alnan droblarda taparys: 99900 x =343125-343=342782; $\quad x = \frac{342782}{99900} = \frac{171391}{49925}$

8.Gatnaşyk. Proporsiýa

Natural (ady) sanlary bölmek amalyna gatnaşyk diýipdik, ýagny $a : b = \frac{a}{b}$; a-sana öňünden gelýän, b-sana yzyndan gelýän san diýilýär. Proporsiýa diýip iki gatnaşygyň deňligine aýdylýar; ýagny $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Bu ýerde a we d sanlara proporsiýanyň gyraky agzalary, b we c sanlara ortadaky agzalary diýilýär.

9.Proporsiýanyň häsiýetleri

1. Proporsiýanyň gyraky agzalarynyň köpeltmek hasyly onuň ortaky agzalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny $ad = bc$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ proporsiýanyň gyraky we ortaky agzalarynyň orunlaryny üýtgetmek mümkin: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$; $\quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Görnüşi ýaly, bu proporsiýalaryň hemmesinde ad=bc. Soňky deňlikden peýdalanyp, proporsiýanyň näbelli agzasyny tapyp bolýar.

Mysal. $\frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Rightarrow cx = ad \Rightarrow x = \frac{ad}{c}.$

10.Prosent (Göterim)

1. Sanyň 100-den bir ($\frac{1}{100}$) bölegine prosent diýilýär. Prosent % bellenýär. Mysal üçin, 20%, 100% ýaly ýazylýar. Berlen san 1-e deň bolsa, onda 1%-i 0,01-e deňdir, onuň 25%-i 0,25 sana deňdir, 50%-i 0,5 sana deňdir. Berlen b sanyň a%-ni tapmak üçin b sanyň özüni $\frac{a}{100}$-sana köpeltmeli; mysal üçin, 80-niň 90 %-i $\frac{80\cdot 90}{100}=\frac{72}{1}=72$ deňdir.

2. Egerde sanyň özi belli bolman, onuň a%-niň b-sana deňdigi belli bolsa, onda belli däl dan $x=\frac{b}{a}\cdot 100.$ x sany tapmak üçin proporsiýa düzmek hem mümkin, ýagny

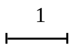
$$\begin{matrix} x-100\% \\ b-a\% \end{matrix} \quad \Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{100}{a}\Rightarrow ax=100b\Rightarrow x=\frac{b}{a}\cdot 100.$$

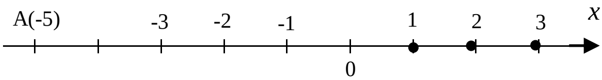
Egerde süýşürintgiler bankynda goýlan puluň 5%-i 370 manada deň bolsa, onda şol goýumyň özi $x=\frac{370}{5}\cdot 100=74\cdot 100=7400$ manada deňdir.

3. Iki sanyň prosent gatnaşyklaryny tapmak üçin hem proporsiýa düzmek amatlydyr. Mysal üçin, hojalykda tabşyrylan a mukdardaky meýilleşdirlen işi b mukdarda ýerine ýetirilipdir diýeliň. Onda şol iş $x=\frac{b}{a}\cdot 100\%$ ýerine ýetirilipdir. Mysal üçin, Türkmenistanda bir ýylda 1mln tonna pagta derek 1,1 mln pagta taýýarlanan bolsa, onda maksatnama $x=\frac{1,1}{1}\cdot 100\%=110\%$ ýerine ýetirilipdir. Eger harby okuw türgenleşikde esgeriň 10 okundan 9-sy nyşana degen bolsa, onda esgeriň mergenlik derejesi $x=\frac{9}{10}\cdot 100\%=90\%$ deňdir.

§5.Bitin sanlar köplügi

Biz ýokarda koordinata göni çyzygy düşünjesini girizdik:





Natural sanlarda aýyrmak amalyny ýerine ýetirenimizde kemeliji kemeldijiden kiçi bolanda şol amaly ýerine ýetirmek mümkin däl diýip netije çykarypdyk. Diýmek, natural sanlar köplügi aýyrmak amalyny ýerine ýetirmek üçin darlyk edýän ekeni. Beýleki tarapdan, koordinata göni çyzygyň başlangyç nokadyndan başlap, onuň görkezilen ugry boýunça natural sanlary ösýän tertipde ýerleşdiripdik.Natural sanlaryň zatlary sanamak üçin ulanylýandygyny nazara alsak ýa-da natural sanlaryň uzaklyk birliklerini aňladýandygyny nazara alsak, onda başlangyç nokatdan çepe tarap hem uzaklygy ölçemelidigi aýdyňdyr we zerurlykdyr. Uzaklyk ölçegi başlangyç nokadyndan çepe-de, saga-da deň bolmaly.Koordinata başlangyjyndan saga edilişi ýaly ondan çepde 1,2,3,..., bilen belläliň. Bu täze girizilen sanlara natural sanlara garşylykly sanlar diýilýär, olar natural sanlardan diňe alamatlary bilen tapawutlanýar. Otrisatel, nol, natural sanlar köplügine ž harpy bilen bellenýär. Biziň bitin otrisatel sanlary kesgitleýşimize syn etsek, otrisatel sanlaryň haýsy-da bolsa (başlangyç) nokatdan san okunyň ters ugruna alnan uzaklygy aňladýandygyny görmek bolýar. Onda 1+(-1) amala düşüneliň. Başlangyç nokatdan bir birlik sagda bellenen nokatdan bir birlik çepe geçeniňde ýene-de koordinata başlangyjyna gelinýär. Diýmek, 1+(-1)=0. Edil şonuň ýaly hem (-1)+1=0, 2+(-2)=0, (-2)+2=0,..

Netije, garşylykly sanlaryň jemi nola deňdir.
$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

§6.Rasional sanlar köplügi

1. Edil koordinata başlangyjyndan sagda ady droblaryň kesgitlenilişi ýaly, ýagny ölçeg birlikleriniň droblara (böleklere) bölünişi ýaly edip, otrisatel ady drob sanlar girizilýär. Otrisatel drob sanlar hem degişlilikde, položitel drob sanlara garşylyklydyrlar we olar koordinata başlangyjyndan sagda we çepde deň daşlaşandyrlar.

$$\frac{m}{n}+(-\frac{m}{n})=(-\frac{m}{n})+(\frac{m}{n})=0.$$

Položitel, otrisatel drob sanlara we nol sana bilelikde rasional sanlar köplügi diýilýär we Q harpy bilen bellenýär. Islendik rasional sany $\frac{m}{n},\ m\in \check{z},\ n\in N$ -görnüşde ýazmak mümkin.

2. Rasional sanlar köplüginde goşmak, aýyrmak, köpeltme , bölmek (nola bölmek mümkin däl) amallaryny ýerine ýetirmek mümkin. Bu arifmetiki amallaryň natural sanlar köplüginde görkezilen häsiýetleri rasional sanlar köplüginde hem saklanýar.

3. Her bir rasional sana koordinata gönüsinde ýeke-täk bir nokat degişlidir. Degişli nokat latyn harplary bellenýär, şol nokady görkezýän sana bolsa ol nokadyň koordinatasy diýilýär we şeýle bellenýär $A(a),\ A(5),\ B(4)$,.. .

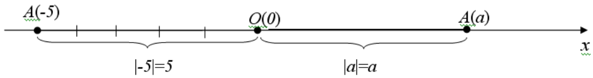
§7.Sanyň moduly we onuň geometrik manysy

Koordinata göni çyzygynda $A(-5)$ nokadyň O hasap başlangyjyndan uzaklygy 5-e deň. Şonuň üçin 5-e -5 sanyň moduly diýilýär. Umuman aýdanda, otrisatel däl ($a\geq 0$) a sana garşylykly bolan -a sanyň moduly diýip şol a sanyň özüne aýdylýar. Modul elmydama otrisatel däldir. Onda položitel sanyň moduly özüne deňdir. Sanyň modulyny aşakdaky formula bilen ýazyp bolýar.

$$|a|=\left\{\begin{array}{l} a, egerde\ a>o \\ o, egerde\ a=o \\ -a, egerde\, a<o. \end{array}\right\}$$

Mysallar: $|-3|=-(-3)=3,\ |0|=0,\ \ |3|=3,\ \ |-4{,}5|=4{,}5.$

Islendik alamatly a sanyň modulynyň geometrik manysy şol sanyň koordinata gönysinde şekillendiren $A(a)$ nokadyndan $O(o)$ koordinata başlangyjyna çenli uzaklygy aňladýar.



§8.Položitel we otrisatel sanlaryň üstünde geçirilýän amallar.

1. Položitel we otrisatel sanlary goşmak we aýyrmak

1. Iki otrisatel sany goşmak üçin olaryň modullaryny goşmaly we alnan sanyň öňünde minus „-“ belgini goýmaly:

$$(-7)+(-3)=-(|-7|+|-3|)=$$

$$=-(7+3)=-10.$$

$$(-3{,}5)+(-7{,}9)=-(|-3{,}5|+|-7{,}9|)=$$

$$=-(3{,}5+7{,}9)=-11{,}4$$

2. Položitel sana otrisatel sany we otrisatel sana položitel sany goşmak üçin goşulyjylaryň modullarynyň ulusyndan kiçisini aýyrmaly we alnan sanyň öňünde moduly uly bolan goşulyjynyň alamatyny goýmaly:

$$25+(-12)=25-12=13; \quad |-12|=12,$$

$$3{,}8+(5{,}6)=-(5{,}6-3{,}8)=-1{,}8; \quad |-5{,}6|=5{,}6.$$

3. Položitel sanlardan otrisatel sany aýyrmak üçin, otrisatel sanyň öňünde minus alamatynyň goýulýandygyny,bu bolsa aýrylýan sanyň modul bahasyny aňladýandygyny göz öňünde tutup, položitel sana otrisatel sanyň modulyny goşmaly:

$$2-(-3)=2+3=5; \quad 6{,}5-(-7{,}8)=6{,}5+7{,}8=14{,}3.$$

4. Otrisatel sandan otrisatel sany aýyrmak üçin kemeliji otrisatel sana kemeldiji otrisatel sanyň modulyny goşmaly:

$$-7-(-8)=-7+8=1; \quad 16{,}5-(-13{,}2)=-16{,}2+13{,}2=-3{,}3.$$

2.Položitel we otrisatel sanlary köpeltmek

1. Položitel sany otrisatel sana ýa-da otrisatel sany položitel sana köpeltmek üçin şol sanlaryň modullaryny bir-birine köpeldip, alnan sanyň öňünde minus (-) alamatyny goýmaly. Mysal.

$$(-3,4)\cdot 0,07=-(|-3,4|\cdot|0,07|)=-(3,4\cdot 0,07)=-0,238.$$

2. Otrisatel sany otrisatel sana köpeltmek üçin olaryň modullaryny köpeltmeli.

Mysallar:

$$(-3,4)\cdot(-5,7)=|-3,4|\cdot|-5,7|=3,4\cdot 5,7=19,38;$$

$$(-2\frac{3}{5})\cdot(-3\frac{2}{7})=\left|-2\frac{3}{5}\right|\left|-3\frac{2}{7}\right|=2\frac{3}{5}\cdot 3\frac{2}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{23}{7}=\frac{299}{35}=8\frac{19}{35}.$$

3.Položitel we otrisatel sanlary bölmek

1. Otrisatel san otrisatel sana bölünende alynýan paý položitel sandyr:

2. Dürli alamatly iki sanyň biri beýlekisine bölünende alynýan paý otrisatel sandyr.Mysal. $-56:8=-(56:8)=-7.$

§9.Tükeniksiz periodik we periodik däl onluk droblar. Irrasional sanlar

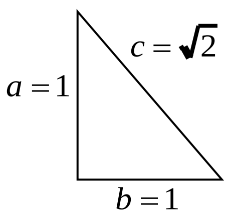
1. Onluk droblary öwrenenimizde, has takygy periodik droblary onluk droba öwrenimizde ady droblaryň tükeniksiz onluk droblara öwürmegiň aýratynlygy barada aýtmadyk, elbetde, ady droby onluk droba öwürmek üçin sanawjyny maýdalawja bölmeli. Bir ýagdaýa üns bereliň. Ady drobuň maýdalawjysyny ýönekeý köpeldijilere dargadanda diňe 2 we 5 sanlardan ybarat köpeldijiler alynsa, onda ady drob tükenikli onluk droba öwrülýär. Mysallar:

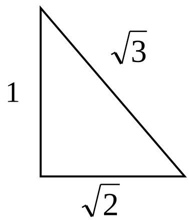
$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{7}{16} = 0{,}4375; \quad \frac{3}{40} = 0{,}075; \quad \frac{9}{50} = 0{,}18.$$

2. Maýdalawjysynyň ýönekeý köpeldijilere dargatmasynda 2 we 5 sanlardan başga-da ýönekeý san bar bolsa, onda ady droby diňe tükeniksiz periodik onluk droba öwrüp bolýar.

3. Tükeniksiz periodik däl sanlar barmy diýlen soraga geçeliň. Şeýle sanlar bar ekeni. Ol sanlara, ýagny tükeniksiz periodik däl onluk droblar, ýa-da irrasional sanlar diýilýär. Mysallar. Islendik töweregiň uzynlygyny onuň diametrine bölsek hemişelik san, ýa-da islendik tegelegiň meýdanyny onuň radiusynyň kwadratyna bölsek ýene-de şol hemişelik san çykýar. Ol san π bilen bellenip, onuň $\pi = 3{,}14159265...$ tükeniksiz periodik sana deňligi subut edilen. Alymlar irrasional sanlary girizmekde köp taraplaýyn çemeleşdiler. Şol çemeleşmeleriň biri $x^2 - 2 = 0$ deňlemäni çözmek bilen baglanyşykly bolupdyr. Kwadraty ikä deň bolan x rasional san tapylmandyr. Emma irrasional $\sqrt{2} = 1{,}41...$ san girizilenden soň, bu deňlemäniň çözüwi tapylypdyr: $x = \pm\sqrt{2}$ -irrasional san. Başga bir mesele. Ýegipet üçburçlugy diýilýän gönüburçly üçburçlugyň katetleri bire deň bolsa, onda onuň gipotenuzasy näçä deň? Elbetde, Pifagoryň teoremasy boýunça $a^2 + b^2 = c^2, \quad c^2 = 2; \quad c = \sqrt{2} = 1{,}41..$





$\sqrt{2}$ -irrasional sanlar girizilenden soň $\sqrt{3}$ sany hem kesgitläp bolýar. Netijede, irrasional sanlar köplügini alýarys. Ol köplük tükeniksiz, ýagny irrasional sanlaryň sany tükeniksizdir.

4. Rasional sanlaryň her birine sanlar okunda (koordinata göni çyzygynda) bir sany ýeke-täk nokadyň degişlidigini ýokarda aýtdyk.

Edil şonuň ýaly-da her bir irrasional sana-da koordinata göni çyzygynda ýeke-täk bir nokat degişlidir.
5. Rasional we irrasional sanlaryň köplüklerine bilelikde, ýagny olaryň birleşmesine (jemine) hakyky sanlar köplügi diýilýär we R harpy bilen bellenýär.
6. Ýokary matematikanyň matematika seljerme bölüminde koordinata okunyň her bir nokadyna degişli ýeke-täk hakyky sanyň, tersine, her bir hakyky sana koordinata okunyň ýeke-täk nokadynyň bardygy subut edilýär, başgaça aýdanda koordinata okunyň nokatlary bilen hakyky sanlar okunyň arasynda bir belgili degişliligiň bardygy subut edilýär. Bu bolsa hakyky san barada aýdyp, oňa degişli nokady göz öňünde tutmagy, tersine, koordinata okunyň nokady barada aýdyp hakyky sany öňünde tutmaga mümkinçilik berýär.
7. Hakyky sanlaryň üstünde geçirilýän arifmetik amallar rasional sanlaryň üstünde geçirilýän amallara meňzeş geçirilýär.

Özbaşdak ýerine ýetirmek üçin ýumuşlar

Arifmetikanyň (ýokarda görkezilen) düşünjelerini we endiklerini barlamak üçin aşakdaky san aňlatmalarynyň bahasyny tapmaly. Şulara meňzeş mysallar ýokary okuw mekdeplerine giriş synaglarynda dalaşgärlere hödürlenýär:

1. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}):\frac{169}{24}}.$ (jogaby 20)

2.$(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}):1{,}25+(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}.$ (jogaby

1)

3. $\dfrac{(0{,}666...+\frac{1}{3}):0{,}25}{0{,}12(3):0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64.$ (jogaby 11)

4. Proporsiaýdan x näbellini tapmaly:

$$\frac{(4-3{,}5\cdot(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}):0{,}16}{x}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$$ (jogaby 1)

5. $$\frac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{x}.$$ (jogaby $\frac{1}{3}$)

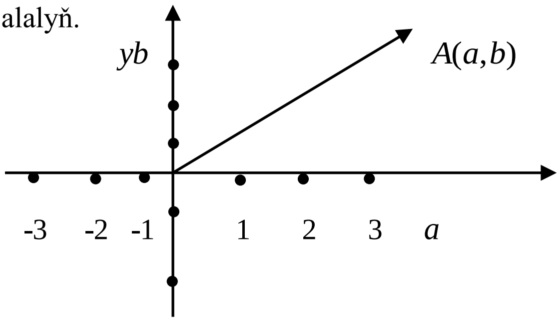
6. Irrasional san aňlatmanyň bahasyny tapmaly:

$$\frac{\sqrt{6{,}3\cdot1{,}7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot6{,}3\cdot1{,}7}}.$$ (jogaby 1)

§10.Kompleks sanlar

1.Kompleks sanlar düşünjesi

1. Kompleks sanlar düşünjesi hakyky sanlar düşünjesinden has giň düşünje. Koordinata tekizligini, başgaça aýdanda, tekizlikde Dekart koordinata ulgamyny girizeliň. Onuň ugurlary saga we ýokary (wertikal) ugrukdyrylan iki özara perpendikulýar göni çyzyklary alalyň.



Olaryň ikisiniň üstünde deň ölçeg birliklerini kabul edeliň. Bu perpendikulýar gönüleriň kesişme nokadyna koordinata başlangyjy diýilýär.

1. Matematika analiz (derňew,seljerme) bölümde tekizligiň nokatlar köplügi bilen hakyky sanlaryň ikisinden düzülen (a,b) sanlar köplüginiň arasynda bir belgili degişliligiň bardygy subut edilýär. Şonuň üçin, her bir (a,b) jübüt koordinata tekizliginde ýeke-täk bir A nokady kesgitleýär, ol $A(a,b)$ ýaly belgilenýär; a-sana A-nokadyň birinji koordinatasy, b-sana onuň ikinji koordinatasy, ýa-da degişlilikde absissasy, ordinatasy diýilýär. Nokadyň koordinatasynyň orunlaryny çalyşmak bolmaýar.
2. Biz hakyky sany natural derejä götermäni öwrendik. Netijede, mysal üçin, $x^2-2=0,$ $x^2-1=0$ deňlemeleriň çözüwleriniň $\pm\sqrt{2},$ ± 1 bolýandygyny gördük. Başgaça aýdanda, bu deňlemeleriň hakyky sanlar köplüginde çözüwleriniň bardygyna göz ýetirdik. Indi $x^2+1=0$ deňlemä seredeliň. Eger-de islendik hakyky sanyň kwadratynyň položitel sandygyny göz öňünde tutsak we iki položitel x^2 we 1 sanlaryň jeminiň nola deň bolmajagyny bilsek, onda soňky deňlemäniň hakyky sanlar köplüginde çözüwi ýok diýlen netijäni alarys. Bu deňlemäniň çözülişini tapmak üçin hakyky sanlar köplügini giňeltmeli diýlen netijä geleris. Hyýaly birlik diýlen sany girizeliň: $i=\sqrt{-1},$ $i^2=-1.$ Görnüşi ýaly, hyýaly birligiň kwadraty minus bire deňdir. Beýle san hakyky sanlar köplüginde ýokdy. Islendik b hakyky sany hyýaly birlige köpeldip, hyýaly bi sany alýarys. Hyýaly sanlar bilen hakyky a sanlaryň jemine kompleks san diýilýär we şeýle ýazylýar $a+bi.$ Bu ýerde a-sana kompleks $a+bi$ sanyň hakyky bölegi, bi-sana hyýaly bölegi, b-sana hyýaly birligiň koeffisiýenti diýilýär. Eger-de $a=b=0$ bolsa, onda 0 hakyky sany, $b=0$ bolsa, islendik hakyky sany, $a=0$ islendik hyýaly sany alýarys. Şeýlelikde, hakyky sanlar kompleks sanlaryň hususy haly ekeni. Eger-de a sany öňki ýaly ox okunda ýerleşdirsek, hyýaly birligiň koeffisiýenti b sany oy okunda ýerleşdirsek, onda nokatlary gurmak usulynda ýene-de $A(a,b)$ nokady alarys. Diýmek, şu tertipde $a+bi$ san koordinata tekizliginde $A(a,b)$ nokady kesgitleýär ekeni. Kompleks $a+bi$ san bilen bilelikde $a-bi$ kompleks sanlara hem seredýärler. Bu sanlara

özara çatyrymly sanlar diýilýär. $a-bi$ kompleks san $A(a,-b)$-nokady kesgitleýär. Iki kompleks sanlar deňdir, haçan-da $a=c,\ b=d,$ onda $a+bi=c+di\ \ a+bi, c+di$.

2.Kompleks sanlaryň üstünde geçirilýän arifmetik amallar

1. Kompleks sanlary goşmak üçin olaryň hakyky böleklerini we hyýaly birlikleriň koeffisiýentlerini aýratynlykda goşmak (aýyrmak) ýeterlikdir: $a+bi\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$ Mysal.
$3+5i\pm(2+3i)=(3\pm 2)+(5\pm 3)i.$
Umumy ýagdaýda iki sany kompleks sanlaryň jemi (tapawudy) ýene-de kompleks sandyr.
2. Kompleks sanlary köpeltmek üçin köpeldijileriň biriniň hakyky we hyýaly böleklerini beýleki köpeldijä köpeldip, jemlemeli we jemde emele gelen köpeltmek hasyllary köpeltmegiň paýlaşdyrma kanuny esasynda hasaplamaly; $i^2=-1,\ \ i^4=1,\ \ i^3=-i$,...hasaba almaly:

$$(a+bi)(c+di)=a(c+di)+bi(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$$
$$ac-bd+(ad+bc)i.$$

Umumy ýagdaýda, iki kompleks sanyň köpeltmek hasyly hem kompleks sandyr. Emma çatyrymly kompleks sanlaryň köpeltmek hasyly položitel hakyky sandyr:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$$
$$(2+3i)(2-3i)=2^2+3^2=13.$$

3. Kompleks sany kompleks sana bölmek (bölüniji noldan tapawutly bolmaly) üçin drobuň maýdalawjysyny we sanawjysyny maýdalawjynyň çatyrymlysyna köpeltmeli, alnan konpleks sanlary köpeldip, netijede hakyky bölegi aýryp ýazmaly:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2+d^2}=$$
$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Umumy ýagdaýda, kompleks sanlary bölmekde hem kompleks san alynýar.

3.Kompleks sanyň moduly

Hakyky sanlaryň moduly şol sanyň, ýagny koordinata göni çyzygyndaky nokatdan başlangyç nokada çenli uzaklygy aňladýardy. Edil şol düşünjäni kompleks sanlarda hem ulanyp kompleks sandan, ýagny $A(a,b)$ nokatdan koordinata başlangyjyna çenli uzaklyga $a+bi$ sanyň moduly diýilýär. Onda OAa gönüburçly üçburçlukdan Pifagoryň teoremasy boýunça alarys:

$$d = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Diýmek, kompleks sanyň moduly nola deňdir, haçan-da ol sanyň özi nola deň bolanda $a=b=0,$ tersine tassyklama hem dogrudyr.

Bellik. Kompleks sanlary hakyky sanlaryň deňeşdirilişi ýaly deňeşdirmek bolmaýar. Emma olaryň modullaryny deňeşdirip bolýar.

4.Kompleks sanlaryň trigonometrik görnüşi

$a+bi$ kompleks sany koordinata tekizliginde şekillendireliň. Geometriýa sapagynda gönüburçly üçburçlukdan sinus we cosinus funksiýalary
kesgitleýärler. Şol usula görä $a+bi$ sanyň modulynyň ox oky bilen emele getiren burçuny φ bilen belläliň. Onda OAB gönüburçlugyň ýiti φ burçunyň garşysynda ýatan katetiň d gipotenuza bolan gatnaşygyna sin φ funksiýa, emma şol ýiti φ burça sepleşýän katetiň gipotenuza bolan gatnaşygyna cos φ funksiýa diýip kabul edilýär. Netijede,

$\frac{b}{r} = \sin\varphi, \frac{a}{r} = \cos\varphi.$ Bu ýerdn $b = r\sin\varphi,\ a = r\cos\varphi.$ su

Diýmek, $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$ Görnüşi ýaly, burç φ koordinata başlangyjynyň daşynda bir gezek aýlananda koordinata tekizliginde islendik nokady belläp bolýar. Onda $o \le \varphi \le 360^0$; ýada $o \le \varphi \le 2\pi.$ Burç φ-e $a+bi$ kompleks sanyň argumenti diýilýär.

5.Kompleks sany derejä götermek

Kompleks sanyň trigonometrik görnüşini ulanyp kwadrata götereliň:

$$(a+bi)^2 = a \quad -b^2 + 2abi =$$

$$= r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi +$$

$$+ 2\cos\varphi\sin\varphi i) = r^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi i);$$

Umumy görnüşde:

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin)\varphi\right]^2 = r^2(\cos 2\varphi + \sin \quad 2\varphi).$$

$$(a+bi)^n = r\left[r(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]^n =$$

$$= r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Bu formula Muawranyň formulasy diýilýär. Kompleks sandan kök almak düşünjesi hem bar. Gysgaça aýdanda, hususy halda n görkeziji kök almagyň aşakdaky formulasy dogrudyr

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}),$$

Eger $n = 2;$ $\sqrt{r(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}).$

Kompleks sanlar üçin görkezijili funksiýa düşünjesi hem kesgitlenendir. Hususanda, **Eýleriň formulasy** diýilýän aşakdaky formula dogrudyr:

$$\ell^{a+bi} = \ell^a(\cos b + i\sin b).$$

Kompleks sanlar düşünjesi mekdep okuw maksatnamalarynda we kitaplarynda, şeýlede, köp ýokary mekdepleriniň maksatnamalarynda berilmeýär. Emma ýökary matematikanyň köp bölümleri,mysal üçin, differensial deňlemeleriň çözülişleriniň teoriýasy kompleks sanlaryň häsiýetlerine esaslanýar.

Şu gollanmamyzda kompleks sanlar we olaryň häsiýetleri ulanylmaýar, ýagny esasy düşünjeler diňe hakyky sanlar köplüginde seredilýär.

Algebra we derňewiň başlangyçlary

§1. Algebranyň we matematika derňewiniň ösüşi barada käbir maglumatlar

Bize belli bolan ylmy çeşmelere görä algebranyň ilkinji meseleleri takmynan biziň eramyzdan öň XVIII asyrda Ýegipet we Wawilon matematikleri tarapyndan kesgitlenipdir we çözülipdir. Şol wagtlar esasan bir näbellili deňlemeler çözülipdir. Wawilon alymlarynyň iki näbellili iki deňlemeleri, kwadrat we kub deňlemeleri çözülişleri biziň şu günlerimize çenli saklanyp galypdyr.

Gadymy grek matematigi Diofant Aleksandriýskiý tarapyndan biziň eramyzyň 250-nji ýyllarynda ýazylan “Arifmetika” diýen ylmy işlerinde algebranyň häsiýetli meseleleri, pikir ýöretmeleri ýazylypdyr. Diofanta Wawilon matematikleriniň işleri belli bolupdyr. Emma ol umumy çözüw usullary we otrisatel sanlar barada bilmändir diýip alymlar tassyklaýarlar. Diofant öz işlerinde matematika simwollaryny ulanypdyr.

Hindi matematikleri hem algebranyň ösüşine uly goşant goşupdyrlar, olar eýýäm biziň eramyzyň birinji-ikinji ýüzýyllyklarynda irrasional sanlary ulanypdyrlar. VII asyrda hindi matematigi Brahmaguptanyň işlerinde bir näbellili birinji we ikinji tertipli deňlemeleriň teoriýasy belli bolupdyr, ol otrisatel sanlar bilen hem işläpdir. Beýleki hindi matematigi Bhaskarynyň işlerinde kwadrat deňlemäniň iki köki hem tapylyp, onuň otrisatel köküniň zerurlygy ýok hasap edilipdir.

Biziň eýýamymyzyň IX asyryndan başlap, Arap halifatynyň düzümine girýän ýurtlarda grek we hindi matematikleriniň ylmy işleri terjime edilip, olar boýunça ylmy derňewleri dowam edipdirler. Umuman, ylmyň ösüşinde, şol sanda algebranyň ylmy binýadyny tutmakda Orta Aziýa matematikleriniň, aýratyn hem türkmen matematikleriniň goşan goşantlary önjeýli bolupdyr. Horezmde we Maryda ýaşan beýik türkmen matematigi Muhammet ibn Musa al-Horezmi (780-850) Maryda ýaşan döwründe “Hisab al-jabr wa-l-mukabala” (algebra we almukabala hasaplamalary) kitabyny ýazypdyr. Beýik matematigiň arap dilinde ýazan bu kitabynyň adynyň manysyny “Doldurma we garşydoldurma hasaplamalary” görnüşinde bermek bolar. Al-Horezmi aýrylýan ululygyň deňligiň beýleki tarapyna geçirilende goşulyja öwrülmegine “doldurma” (al-jabr) diýip kesgitläpdir. Näbellileri deňligiiň bir tarapyna, bellileri deňligiň beýleki tarapyna toplamaklyga “garşydoldurma”(l-mukabala) diýip kesgitläpdir.

Al-Horezminiň işleri Ýewropa we dünýäniň beýleki ylmy merkezlerine ýaýrap, algebra ylmynyň ösüşine uly itergi beripdir. “Al-jawr”sözünden algebra sözi döräpdir we bu ylmy at ähli ýurtlarda ykrar edilipdir. Beýik matematik bu işinde birinji we ikinji tertipli deňlemeleriň teoriýasyny işläp düzüpdir, onuň geometriýa we musulman kanunlary boýunça emläk-miras paýlamak meselelerinde ulanylyşyny görkezipdir. Al-Horezminiň işleri grek, hindi we Orta Aziýa matematikleriniň işleriniň jemi bolmak bilen, bu beýik akyldaryň özi dünýä ylmynyň taryhyna baky giripdir. Beýik akyldaryň adynyň ylymda köp ulanmagy bilen Al-Horezmi ady “Algoritm” diýen matematika ylmy terminine öwrülipdir.

Gadymy Mary şäherinde dogulan, ylmy taryha al-Habaş al-Hasib (hasaplaýjy) ady bilen giren Beýik Türkmen matematigi Ahmet al-Marazwi (764-874) öz wagtynda gadymy ylmy we medeni merkez bolan Bagdat şäherinde ýaşapdyr we ylymda şu wagta çenli ulanylyp gelýän trigonometrik funksiýalary (tangens,kotangens) göniburçly üçburçlugyň katetleriniň gatnaşygy görnüşinde girizipdir we olaryň bahalarynyň tablisasyny düzüpdir. Beýik matematik kosekans düşünjesini hem girizipdir.

Beýleki biziň ildeşimiz, gadymy Mary şäherinde ýaşan, beýik akyldar Omar Haýýam (1043-1131) 1070-nji ýyllar aralygynda birinji, ikinji, üçünji we beýleki käbir görnüşli deňlemeleri geometrik gurluşlar arkaly çözmegiň usullary boýunça algebradan kitap ýazypdyr. Samarkantly beýik akyldar Ulugbek (1394-1449) özüniň astronomiýa ylmy boýunça geçiren derňewlerinde trigonometrik tablisalary düzmek üçin

$$x^3 + ax + b = 0$$

deňlemäniň san çözüwlerini tapmaklygy işläp düzüpdir. Şol döwürde ýaşap geçen orta aziýaly alym al-Kaşi bitin sanlardan alnan islendik görkezijili kökleriň bahalaryny tapmagyň düzgünlerini işläp düzüpdir. Al-Kaşi ilkinji gezek $a + b$ iki agzany islendik derejä götermegiň (Nýutonyň binomy) düzgünlerini işläp düzüpdir.

Ýewropada algebra XIII asyrdan başlap ösdürilip başlanypdyr; üçünji we dördünji derejeli deňlemeler Ýewropa matematikleriniň üns merkezine geçipdir. Beýik italýan matematikleri H.Tartalýa, J.Kardano we Ferraro bu deňlemeleriň takyk çözüwleriniň formulalaryny tapypdyrlar. Bu gazanylan netijeler algebra ylmynyň ösüşinde uly ädim bolupdyr. Dördünji derejeden ýokary derejeli deňlemeleriň çözüwleriniň takyk formulalaryny tapmak meselesi matematikleriň güýçli derňewlerine mynasyp bolupdyr. Emma norwegiýaly matematik H.G.Abel (1802-1829) derejesi dörtden uly bolan umumy algebraik deňlemeleri radikallarda (formulalarda) çözüp bolmaýandygyny subut edipdir.

Algebra ylmynyň ösüşiniň indiki basgançagy fransuz matematigi Fransua Wiýetiň gazanan ylmy netijeleri bilen baglanyşykly bolupdyr. Onuň 1591-nji ýylda çap eden “analitik sungata giriş” diýen işinde ilkinji gezek algebranyň teoriýasy matematikanyň simwolikalary bilen beýan edilipdir. Bu beýik alym üçünji we dördünji derejeli deňlemeleri öwrenende getirme usullaryny peýdalanypdyr, emma ol deňlemeleriň položitel däl kökleriniň hemmesini taşlapdyr. 1629-njy ýylda Žirar diýen matematik ”algebrada täze oýlap tapylyş”diýen işini çap edipdir we otrisatel kökleri hem hasaba alyp, deňlemäniň derejesine deň kökleriň bardygyny görkezipdir. Žirardan başga ýewropa matematikleriniň hemmesi otrisatel kökleri ykrar etmändirler. Emma fransuz matematigi Rene Dekart (1596-1650) özüniň koordinata göni çyzygynda otrisatel kökleriň geometrik manysyny berenden soň, deňlemeleriň otrisatel kökleri hasaba alnyp başlanýar. Şeýlelikde, algebranyň döreýiş we ösüş taryhynda deňlemeleriň çözülişi baradaky ylym hökmünde kabul edilipdir. Häzirki wagtda algebra ylmy diňe bir sanlar bilen geçirilýän amallaryň däl, eýsem islendik tebigatly elementlerden ybarat bolan köplükleriň üstünde geçirilýän amallar bilen baglanyşykly teoriýany öwrenýär. Häzirkizaman algebra ylmynyň esasy bölümleriniň içinde meýdan, halka we topar teoriýalaryny görkezmek bolar. Bu teoriýalar ýokary algebra kursunda öwrenilýär. Algebranyň toparlar teoriýasyny esaslandyran we deňlemeleriň kökleriniň radikallarda tapylmak soragyna gutarnykly jogap tapan, bar-ýogy 21 ýaş ömri bolan, juwan fransuz alymy Galuanyň (1811-1832) adyny bellemek okyjylar üçin tolgundyryjy bolar diýip hasap edýäris.

Gadymy Ýegipetde, Wawilonda, Hindistanda, Hytaýda, Gresiýada, Arap Halifatlarynda, Orta Aziýada, şol sanda Türkmenistanda arifmetika, algebra, geometriýa we astronomiýa ylymlarynyň ösmegi bilen bir ululygyň üýtgemeginiň başga bir ululygyň üýtgemegine baglylygy ýüze çykarylypdyr, ýagny ululyklaryň arasyndaky funksional baglanyşyk düşünjesi kämilleşdirlipdir. Mysal üçin, üçburçluklaryň elementleriniň arasyndaky baglanyşyklar, töweregiň uzynlygynyň we tegelegiň meýdanynyň radiusynyň uzynlygyna baglylygy, asman jisimleriniň hereketleri bilen baglanyşykly, häzirki wagtda aýdylyşy ýaly, trigonometrik funksiýalar düşünjesi kesgitlenipdir, funksiýalaryň bahalarynyň tablisalary düzülipdir. Mysal üçin, Merwiň ylmy merkezinde Omar Haýýamyň (1043-1131) ýolbaşçylygynda başlanyp, Abdyrahman al-Haziri (XII asyr) tarapyndan dowam etdirilen Soltan Sanjaryň ýyl ýazgysy diýlip atlandyrylan, beýik akyldar al-Biruniniň (X-XI) we beýleki alym ildeşlerimiziň täsiri astynda ýazylan (zij, 1115-1120) ylmy işde $60\sin\theta$, $60\operatorname{ctg}\theta$ görnüşli funksiýalaryň tablisalary berlipdir.

Şotland alymy J.Neper (1550-1617) logarifmik tablisalary oýlap tapypdyr, şweýsar alymy Ýu. Býurgi antilogarifmiň tablisalaryny düzüpdir.

Ylmyň taryhynyň esasy meseleleriniň biri Gündogar halklarynyň alymlarynyň, şol sanda türkmen halkynyň gerçek ogullarynyň dünýä ylmyna goşan goşantlaryny öwrenmekden ybaratdyr. Türkmen halkynyň ruhy-medeni, ylmy gymmatlyklarynyň heniz doly öwrenilmänligi bellidir. Türkmenistan Garaşsyzlygyny alandan soň, türkmen halkynyň gadymy miraslaryny öz halkymyz tarapyndan öwrenmäge mümkinçilik tapdy. Soňky 50 ýyldan gowrak wagtyň dowamynda türkmen alymlarynyň dürli ugurlardan ýazan ylmy işleri dünýa derejesinde ykrar edildi. Emma bu ylmy işleriň aglaba bölegi häzirkizaman problemalaryna bagyşlanandyr. Matematikanyň taryhyny öwrenmekde alym M.Atagarryýewiň türkmenistanly alymlaryň eden işleri boýunça ýazan ylmy dissertasiýasy bellenmäge mynasypdyr. Ol özüniň ylmy işinde daşary ýurtlarda saklanyp galan ylmy çeşmeleriň kömegi bilen şu wagtky Türkmenistanyň çäginden daşarda ýaşan doganlar: at-Türkiman Tadži ad-Din (1282-1343) we Ali ad-Dini (1284-1349), Kemal ad-Din at-Türkiman atly türkmen matematik-astronomlaryň işländigini ýüze çykardy.

Matematikanyň täze taryhyny öwrenmekde matematikler toparynyň taýýarlan we ýakynda çap edilen “Türkmenistanyň matematik alymlary” atly kitabynyň ähmiýeti uly bolar diýip hasap edýäris.

§2. Algebraik aňlatmalar we olaryň üstünde amallar

Algebrada sanly we harply aňlatmalaryň üstündäki amallar öwrenilýär. Aňlatmadaky harplar üýtgeýän bahaly ululyklar hasap edilip, olaryň alyp biljek bahalarynyň köplügi görkezilýär ýada ol köplügi kesgitlemek talap edilýär.

Sanlaryň, üýtgeýän ululyklaryň we olaryň derejeleriniň köpeltmek hasylyndan durýan aňlatma *biragza* diýilýär. Aýratyn harplar ýa-da sanlar hem biragzalardyr. Mysal üçin, $\frac{a+3}{b+7}; 3m^2n; 9(p^2+q); a; 3,7.$ aňlatmalar biragzalardyr.

Birnäçe biragzalaryň algebraic jemine köpagza diýilýär. Mysal üçin, $2xy+x+3$ aňlatma köpagzadyr, has takygy üç agzadyr. Algebranyň ähli amallary goşmagyň we köpeltmegiň aşakdaky häsiýetlerine esaslanýar.

Orun çalşyrma häsiýeti:

$a+b=b+a; \quad a\cdot b=b\cdot a.$

Utgaşdyrma häsiýeti:

$a+(b+c)=(a+b)+c, \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$

Paýlaşdyrma häsiýeti: $(a+b)c=a\cdot c+b\cdot c.$

§3. Gysga köpeltmek formulalary

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

Mysallar:

$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 3.$

$(5a-3b)^2 = 5^2 a^2 - 2\cdot 5\cdot 3ab + 3^2 b^2 =$

$= 25a^2 - 30ab + 9b^2.$

$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4.$

$(a+2b)^3 = a^3 + 3a^2(2b) + 3a(2b)^2 + (2b)^3 =$

$= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3.$

$(x+3)(x^2-3x+9) = x^3 - 3x^2 + 9x + 3x^2 -$

$-9x + 27 = x^3 + 27.$

$(2-y)(4+2y+y^2) = 8 + 4y + 2y^2 - 4y -$

$-2y^2 - y^3 = 8 - y^3.$

§4. Derejeler, kökler we olaryň häsiýetleri

Eger n - natural san bolsa, onda $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ gezek}$. Bu ýerde a^n – dereje, a – derejäniň esasy, rasional san. n –derejäniň görkezijisi. Derejäniň şu kesgitlemesi islendik p rasional görkeziji üçin hem dogrudyr.0^n=0 ; 1^n=1 , $n \in N$.

Mysal: $(1{,}2)^2 = 1{,}2\cdot 1{,}2 = 1{,}44, \quad 2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16.$

Algebrada natural derejeler bilen birlikde islendik položitel sany rasional derejä götermek kesgitlenýär.

Otrisatel derejä götermek:

$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$. Mysal, $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$.

Nulynjy derejä götermek:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0, 2^0 = 1.$$

Drob derejä götermek:

$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$ .Mysal. $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \quad 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}.$

Aşakdaky häsiýetler derejäniň islendik rasional görkezijileri üçin dogrudyr:

1. $a^q \cdot a^p = a^{q+p}$. Mysal. $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$.

2. $a^q : a^p = a^{q-p}$. Mysal. $3^6 : 3^3 = 3^{6-3} = 3^3$.

3. $\left(a^q\right)^p = a^{qp}$. Mysal. $(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6$.

4. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$. Mysal. $(4 \cdot 3)^3 = 4^3 \cdot 3^3$.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}, b \neq 0$. Mysal. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{3^3}{4^3}$.

6. $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}, \; a \neq 0$ **.**Mysal $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

§ 5. Deňsizlikler we olaryň esasy häsiýetleri

$<, \leq, >, \geq, \neq$ belgileriň haýsy hem bolsa biri bilen baglanyşdyrylan iki algebraik aňlatma *deňsizlik* diýilýär.

San deňsizlikleriň esasy häsiýetleri:

1. Eger $a>b$ bolsa, onda $b<a$.
2. Eger $a>b$ we $b>c$ bolsa, onda $a>c$.
3. Eger $a>b$ we c islendik san bolsa, onda $a+c>b+c$.
4. Eger $a>b$ we $c>0$ bolsa, onda $ac>bc$.
5. Eger $a>b$ we $c<0$ bolsa, onda $ac<bc$.
6. Eger $a>b$ we $c>d$ bolsa, onda $a+c>b+d$.
7. Eger $a>0$, $b>0$ we $a>b$ bolsa, onda $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
8. Eger a, b, c we d položitel sanlar üçin $a>b$ we $c>d$ bolsa, onda $ac>bd$.
9. Eger a we b položitel sanlar üçin $a>b$ bolsa, onda $a^n > b^n$, (n-natural san).

Deňsizlikleri agzama-agza aýyrmak bolmaýar. $a>b$ we $c>d$ deňsizliklerden $a-c>b-d$ deňsizlik gelip çykmaýar. Mysal üçin,6>4, 5>2, emma
6-5<4-2.

Iki bölegi položitel däl deňsizligi jübüt derejä götermek bolmaýar.Sebäbi, ýalňyş deňsizlik alynmagy mümkin. Mysal üçin, 4>-5,emma $4^2<(-5)^2$.

§6. Aralyk, ýaýla we köplük düşünjeleri

Aralyk düşünjesi koordinata göni çyzygynda alnan iki nokadyň arasyndaky uzaklyk düşünjesi bilen baglanyşyklydyr. Geometriýadan belli bolşuna görä gönüniň üstünde alnan dürli iki nokadyň kesip alan bölegine kesim diýilýär. Ol kesimi kesip alýan nokatlaryň şol kesimiň özüne degişli bolmagyda we bolmazlygyda mümkin. Emma şol gyraky nokatlaryň kesime degişliliginiň ýa-da degişli däldiginiň onuň uzynlygyna täsiriniň ýokdugyny belläliň. Sebäbi, nokadyň ölçegi, ýagny uzynlygy ýokdur. Islendik iki nokadyň arasynda (kesimde) tükeniksiz nokatlaryň ýerleşendigi matamatiki derňew ylmynda subut edilendir. Matamatiki derňewde tükenikli ýa-da tükeniksiz kesimiň (göni, ýarym göni) ähli nokatlaryny görkezmek zerurlygy ýüze çykýar. Mysal üçin, x üýtgeýän ululygyň bahalarynyň belli bir tükenikli ýa-da tükeniksiz kesime degişlidigini görkezmek zerurlygy ýüze çykýar. Şu ýagdaýda, ýagny x-yň bahalarynyň tutuş bir kesimiň nokatlaryna degişli ýagdaýda, eger kesimi kesip alan nokatlar $x = a$ we $x = b$ bolsalar, hem-de $a < b$ bolsa, onda bu nokatlaryň şol kesimlere degişliligi ýada degişli däldigi bilen baglylykda kesimiň çäklerini görkezip şeýle ýazýarlar $x \in (a, b)$, $x \in [a, b)$, $x \in (a, b]$, $x \in [a, b]$ a we b nokatlary görkezip, x ululygyň bahalary açyk (a,b), ýarym açyk (ýarym ýapyk) $[a, b)$, $(a, b]$ we ýapyk [a,b] aralyklar degişlidir (üýtgeýändir) diýip okalýar. Eger x ululygyň bahalarynyň toplumy tutuş koordinata göni çyzygynyň nokatlaryny aňladýan bolsa, onda $x \in (-\infty, +\infty)$ ýazylýar we onuň bahasy $(-\infty, +\infty)$ aralykda üýtgeýär, ýada x ululyk $-\infty$ -den $+\infty$ -e çenli üýtgeýär diýilýär. Edil şuňa meňzeşlikde $(-\infty, +b)$, $(-\infty, +b]$ ýada $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ aralyklar hem kesgitlenýär. (a,b) aralyga a,b interwal diýlip hem okalýar, [a,b] aralyga a,b segment diýlip hem okalýar, (a,b], [a,b) – aralyklara ýarym segmentler ýada ýarym interwallar hem diýilýär. Aralyk düşünjesi goşa deňsizlikler bilen hem aňladylýar:

$a < x < b$ - üýtgeýän ululyk $x \in (a, b)$,

$a \le x < b$ - üýtgeýän ululyk $x \in [a, b)$,

$a < x \le b$ - üýtgeýän ululyk $x \in (a, b]$,

$a \le x \le b$ - üýtgeýän ululyk $x \in [a, b]$.

Koordinata tekizliginde hem aralyk düşünjesi bar, ýagny iki nokadyň arasyndaky aralyk ýada uzaklyk düşünjeleri bar. Emma iki nokady birleşdirýän kesim tekizligiň tutuş bir bölegine degişli nokatlaryň hemmesini öz içine alyp bilmeýär. Şonuň üçin, tekizlikde belli bir meýdana eýe bolan geometrik figuranyň nokatlaryny tutuşlygyna görkezmek maksady bilen tekizligiň haýsyda bolsa bir ýa-da birnäçe egrileriň toplumy bilen çäklenen bölegi baradaky düşünjäni girizmek zerurlygy ýüze çykýar. Bu ýagdaýda aralyk, interwal, segment düşünjeleri tekizligiň bölegine degişli nokatlary görkezmek üçin ýeterlik bolmaýar. Tekizligiň çäkli ýada çäksiz böleklerine ýaýla diýip at bermek bilen şol düşünjäni kesgitläliň. Tegelek görnüşde berlen ýaýla düşünjesini kesgitläliň. Tegelegi tekizligiň beýleki böleginden çäkleýän egriniň töwerekdigini nazara alsak, hem-de tegelegiň merkeziniň (x_0, y_0) nokatda, radiusy r – e deň diýip kabul etsek, onda şol ýaýlany aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$D = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2\}$$

Eger ýaýla göniburçluk görnüşinde berlen bolsa , onda

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

Ýaýla başga görnüşde hem berlip biler, mysal üçin,

$$D = \{(x, y) : y \ge x^2,\ y \le a\}$$

Şu we beýleki mysallarda ýaýlany çakleýän deňsizliklerde deňlik alamaty aýrylsa, onda şoňa degişli çäklerdäki nokatlar ýaýla degişli däldir. Mysal üçin,

$$D = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c < y < d\}$$

$$D = \{(x, y) : y > x^2,\ y \leq a\}$$

Bu ýaýlalaryň birinjisi açyk, beýleki ikisi ýarym açyk ýaýlalardyr.

Giňişlikde hem ýaýla düşünjesi üç üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky deňsizlik gatnaşyklary bilen berlip bilner.

Köplük düşünjesi aralyk we ýaýla düşünjelerinden has umumy düşünje bolup ol diňe sanlar ýada tekizlikde alnan nokatlar toplumyny öz içine alman, anyk geometriki şekili talap etmeýän abstrakt düşünjedir. Köplük düşünjesini düzýän ilkinji düşünjä element diýilýär. Köplügiň elementleri islendik tebigatly bolup biler. Netijede, islendik tebigatly elementleriň toplumyna köplük diýilýär. Köplükler uly latyn harplary bilen bellenilýär, olara degişli elementler kiçi latyn harplary bilen bellenilýär. Islendik elementleriň şol köplüge degişlidigi ýada degişli däldigi şeýle bellenilýär: $a \in A,\ a \notin A$. Eger köplügiň hiç bir elementi ýok bolsa, onda oňa boş köplük diýilýär. Boş köplük $\varnothing$ bilen bellenilýär. Köplükleriň elemetleriniň sany tükeniksiz bolsa, onda oňa tükeniksiz köplük diýilýär, elementleriniň sany tükenikli bolsa, onda ol köplüge tükenikli köplük diýilýär. Eger köplügiň elementlerini tertipleşdirip natural sanlar bilen belgilemek (nomerlemek) mümkin bolsa, onda ol köplüge hasaply köplük diýilýär. Mysallar:

1. Ýokary okuw jaýynda okaýan talyplaryň köplügi tükenikli köplükdir.
2. Asmandaky ýyldyzlaryň köplügi tükeniksiz köplükdir.
3. Koordinata okundaky nokatlaryň sany tükeniksiz köplükdir.
4. Ýer şarynda ýaşaýan adamlaryň köplügi tükenikli köplükdir.
5. Suwsuz çölde ýaşaýan balyklaryň köplügi boş köplükdir.
6. $x^2 + 1 = 0$ deňlemäniň hakyky sanlar köplügindäki çözüwleriniň köplügi boş köplükdir.
7. $x^2 - 1 = 0$ deňlemäniň çözüwleriniň köplügi iki $x = \pm 1$ elementlerden ybarat tükenikli köplükdir.
8. Natural sanlar köplügi tükeniksiz köplükdir.
9. Moduly r-den kiçi bolmadyk kompleks sanlaryň köplügi tükeniksiz köplükdir.
10. Rasional sanlar köplügi hasaply, irrasional sanlar köplügi bolsa hasapsyz köplüklerdir.

Köplükler üstünde birleşme, kesişme we tapawut düşünjeleri kesgitlenendir. Iki köplügiň birleşmesi diýip ol köplükleriň iň bolmanda birine degişli elementlerden düzülen üçünji köplüge aýdylýar. Iki köplügiň kesişmesi diýip ol köplükleriň ikisine hem degişli elementlerden düzülen üçünji köplüge aýdylýar. Köplükleriň birleşmesi $\bigcup$, kesişmesi ∩, tapawudy \ belgiler bilen bellenilýär.

Mysallar: A$\bigcup\varnothing$=A, A$\cap\varnothing=\varnothing$. Q – rasional sanlar köplügi, I – irrasional sanlar köplügi bolsun. Onda Q$\bigcup$I=R – hakyky sanlar köplügi, R \ Q=I – irrasional sanlar köplügi, R∩I=I – irrasional sanlar köplügi.

§7. *n*-nji derejeli arifmetiki kök

Otrisatel däl *a* sandan alnan *n-nji derejeli arifmetiki kök* diýip, *n*-nji derejesi *a* deň bolan *($b^n=a$)* otrisatel däl *b* sana aýdylýar we şeýle bellenýär: $\sqrt[n]{a}=b$; *n*-e köküň görkezijisi, *a* bolsa kök aşagyndaky aňlatma diýilýär.

Eger: 1) $b\geq 0$; 2) $b^2=a$ şertler ýerine ýetýän bolsa, $\sqrt{a}=b$ aňlatma *arifmetiki kwadrat kök* diýilýär.Mysal üçin, $\sqrt{4}=2, \sqrt{49}=7.$

Emma $-\sqrt{4}=-2, -\sqrt{49}=-7$ -arifmetiki kökler däldir.Sebäbi, olar otrisatel sanlardyr.

4. Arifmetiki köküň häsiýetleri:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, a\geq 0; b\geq 0.$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a\geq 0; b>0.$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}, a\geq 0$.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}, a\geq 0$.

5. $\sqrt[n\cdot m]{a^{k\cdot m}}=\sqrt[n]{a^k}, a\geq 0.$

6. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, \quad a\geq 0$.

7. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a; \quad \sqrt[n]{a^n}=a$.

Mysallar:

1) $\sqrt[3]{2\cdot 3} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}$, **2)** $\sqrt[6]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{5}}$,

3) $(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2}$, **4)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[4\cdot 3]{8}$,

5) $\sqrt[3\cdot 5]{4^{2\cdot 5}} = \sqrt[3]{4^2}$, **6)** $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$.

§8. Deňleme düşünjesi.Çyzykly bir näbellili deňlemeler

Eger iki aňlatmanyň deňligini görkezýän deňlik harplaryň (üýtgeýän ululyklaryň) islendik bahalarynda deň bolsa,onda ol deňlige *toždestwo* diýilýär.

Eger deňlikde bahasy tapylmaly näbelli ululyk bar bolsa, onda ol deňlige *deňleme* diýilär. Näbelli ululygyň deňlemäni dogry san deňligine öwürýän bahasyna deňlemäniň *çözüwi ýada köki* diýilýär.

Kökleri gabat gelýän deňlemelere *deňgüýçli deňlemeler* diýilýär.

Bir näbellili çyzykly deňleme

$ax = b(x -$ näbelli ululyk,a we b käbir belli sanlar) görnüşli deňlemä çyzykly deňleme diýilýär.Ünüs bereliň, näbelli ululygyň derejesi bire deňdir, şonuň üçin oňa çyzykly deňleme diýilýär.

a) $a = 0, b \neq 0$ bolanda $0\cdot x = b$ deňlemäniň çözüwi ýok.

b) $a = 0, b = 0$ bolanda islendik x-iň islendik san bahasy deňlemäniň köküdir,ýagny $0\cdot x = 0$, diýmek onuň tükeniksiz köp çözüwi bar.

ç) $a \neq 0$ bolanda $ax = b$ deňlemäniň ýeke-täk çözüwi bardyr we

$x = \frac{b}{a}$.

Mysallar:

$$x+5=7, \qquad x-5=8, \qquad 5x=20,$$
$$x=7-5, \qquad x=8+5, \qquad x=20:5,$$
$$x=2. \qquad x=13. \qquad x=4.$$
$$barlagy: \qquad barlagy: \qquad barlagy:$$
$$2+5=7. \qquad 13-5=8. \qquad 5\cdot 4=20.$$

$$x:4=8, \quad 2x-3=9, \qquad 4x+5=21,$$
$$x=8\cdot 4, \quad 2x=9+3, \qquad 4x=21-5,$$
$$x=32. \qquad 2x=12, \qquad 4x=16,$$
$$barlagy: \qquad x=12:2=6. \qquad x=16:4=4.$$
$$32:4=8. \quad barlagy: \qquad barlagy:$$
$$2\cdot 6-3=9. \quad 4\cdot 4+5=21.$$

§9. Çyzykly deňlemeler ulgamy

$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ görnüşli deňlemä iki näbellili çyzykly iki deňlemeler ulgamy diýilýär.Bu ýerde a,b,c,d,p,q koeffisiýentler diýilýän sanlar belli hasap edilýär, x,y näbelli ululyklar,olaryň bahalary gözlenilýär.

$ad-bc\neq 0$ bolanda bu ulgamyň çözüwi

$x=\dfrac{pd-qb}{ad-bc}$, $y=\dfrac{aq-cp}{ad-bc}$ formulalar boýunça tapylýar.

ad-*bc*=0 we *pd*-*qb*≠0 bolanda ulgamyň çözüwi ýok. *ad*-*bc*=0 we *pd*-*qb*=0 bolanda (birinji deňlemäniň koeffisiýentleri ikinji deňlemäniň koeffisientlerine proporsional) ulgamyň tükeniksiz köp çözüwi bar. Mekdep okuw kitaplarynda bu deňlemeler ulgamy aşakdaky üç usul boýunça çözülýär.

Ornuna goýmak usuly. Bu usulda ulgamyň bir deňlemesindäki bir näbelli ululygy beýleki näbelliniň üsti bilen aňladýarlar we bu näbelli ululygyň bahasyny ikinji deňlemede ornuna goýup beýleki näbelli boýunça çyzykly deňleme çözülýär. Bu näbelliniň tapylan bahasy deňlemeleriň birinde ornunda goýulyp, beýleki näbelli tapylýar. Mysal.

$\begin{cases} x+2y=5, \\ 4x-3y=-2. \end{cases}$ birinji deňlemeden x tapyp ikinji deňlemede onuň

bahasyny goýup alarys: $\begin{cases} x=5-2y, \\ 4(5-2y)-3y=-2. \end{cases}$ ikinji deňlemeden y bahasyny tapalyň;

$$20-8y-3y=-2, \quad -11y=-22, \quad y=2.$$

$x=5-2y=5-2\cdot 2=1$. Jogaby: *x*=1, *y*=2.

Goşmak usuly.Bu usul boýunça iki deňlemede hem näbellileriň biriniň koeffisiýentlerini garşylykly deň bolar ýaly edip nuldan tapawutly sanlara köpeldilýär. Iki deňlemäni goşup beýleki näbelli boýunça çyzykly deňleme alyp ulgamyň çözüwi tapylýar.Mysal.

$\begin{cases} 3x+2y=2, \\ 2x-3y=10. \end{cases}$ ulgamyň birinji deňlemesini 3-e, ikinji deňlemesini bolsa 2-ä köpeldip olary agzama-agza goşýarys:

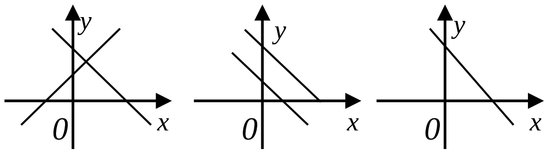
$$+\begin{array}{l} 9x+6y=6 \\ \underline{4x-6y=20} \\ \quad 13x=26 \end{array}$$

x=2 . $3\cdot 2+2y=2$, *y*=-2. Jogaby: *x*=2, *y*=-2.

Grafik usuly:

$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ deňleme ulgamyna seredeliň.

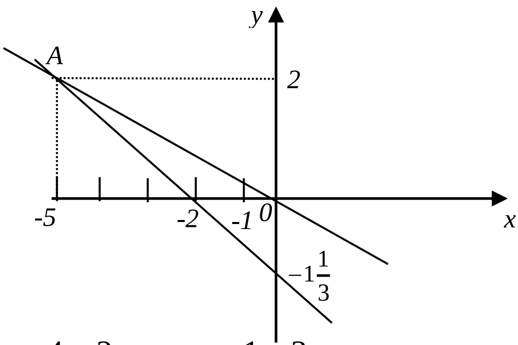
Iki deňlemeden hem y tapalyň: $y=\dfrac{p}{b}-\dfrac{a}{b}x, \quad y=\dfrac{q}{d}-\dfrac{c}{d}x.$ Görnüşi ýaly burç koeffisiýentleri $-\dfrac{a}{b}$ we $-\dfrac{c}{d}$ deň bolan iki sany çyzykly funksiýa aldyk.Koordinata tekizliginde burç koeffisiýentleriň ýagdaýyna görä bu iki sany çyzykly funksiýanyň grafikleri (göni çyzyklar) kesişip ýa-da kesişmän bilerler. Grafikleriň kesişme nokady iki funksiýa üçin hem umumydyr. Diýmek, kesişme nokadyň koordinatalary iki deňleme üçin hem umumydyr, ýagny çözüwidir. Egerde deňlemelerden alnan çyzykly funksiýalaryň grafikleri kesişmeseler, onda ulgamyň çözüwi ýokdyr.



Birinji grafik boýunça çözüw bar.Ikinji ýagdaýda çözüw ýok; näbellileriň koeffisiýentleri proporsional, grafikleri parallel, $ad - bc = 0$ üçünji ýagdaýda deňlemeler gabat gelýär, ulgamyň tükeniksiz köp çözüwi bar.

Mysal. $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 8y = 1 \end{cases}$

Çözüwi:Çyzykly funksiýanyň grafigi göni çyzyk bolanlygy üçin grafigiň diňe iki nokadyny tapmaklyk ýeterlikdir.



$y = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}x, \qquad y = \frac{1}{8} - \frac{3}{8}x.$

Birinji funksiýada $x = -2$ bolanda $y = 0.$ $x = 0$ bolanda $y = -\frac{4}{3}$ deň. Koordinatalary $(-2;0)$ we $\left(0;-\frac{4}{3}\right)$ iki nokadyň üstünden göni çyzyk geçireliň.Ikinji funksiýada

$x=0$ bolanda $y=\frac{1}{8}$; $x=\frac{1}{3}$ bolanda $y=0$ deň.Koordinatalary $\left(0;\frac{1}{8}\right)$ we $\left(\frac{1}{3};0\right)$ nokatlardan göni çyzyk geçireliň.Bu grafikler $A(-5;2)$ nokatda kesişýärler.Netijede, deňleme ulgamynyň ýeke-täk $x=-5; y=2$ çözüwi bar.

§ 10. Kwadrat deňleme

1. Doly kwadrat deňleme

Doly kwadrat deňleme diýip $ax^2+bx+c=0$ (x -üýtgeýän ululyk, a, b we c käbir belli sanlar) görnüşli deňlemä aýdylýar.Kwadrat deňlemede $a\neq 0$; garşylykly ýagdaýda birinji derejeli deňleme alnar, ýagny $a=0$ bolsa, onda $bx+c=0$, bu deňlemäni geçen temada öwrendik. Şonuň üçin $a\neq 0$ ýagdaýa seredeliň.

Eger $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ bolsa, onda doly kwadrat deňleme aşakdaky ýaly çözülýär. $D=b^2-4ac$ san aňlatma doly kwadrat deňlemäniň diskriminanty diýilýär.Eger $D>0$ bolsa , onda deňlemäniň

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad we \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

iki köki bar. Eger $D<0$ bolsa, onda deňlemäniň hakyky köki ýok. Eger $D=0$ bolsa, onda deňlemäniň iki köki gabat gelýär: $x=-\frac{b}{2a}$ (bir köki bar).

Mysal. $3x^2+11x+6=0$

Çözülişi: a=3, b=11, c=6,

$D = 11^2 - 4\cdot 3\cdot 6 = 121 - 72 = 49$ $x_1 = \frac{-11+\sqrt{49}}{2\cdot 3} = \frac{-11+7}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$,

$x_2 = \frac{-11-\sqrt{49}}{2\cdot 3} = \frac{-11-7}{6} = \frac{-18}{6} = -3.$

2. Doly däl kwadrat deňleme

a) Goý $b = 0, c \neq 0.$ Onda $ax^2 + c = 0$ .Bu deňleme aşakdaky ýaly çözülýär: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Eger a we c koeffisiýentleriň alamatlary meňzeş bolsa, onda bu deňlemäniň çözüwi ýok, sebäbi kök aşagyndaky aňlatma otrisatel sandyr: $-\frac{c}{b} < 0.$ Eger-de a we c koeffisiýentleriň alamatlary dürli bolsa, onda $-\frac{c}{b} > 0$ we bu deňlemäniň iki çözüwi bar. Mysal. $2x^2 - 32 = 0$,Çözüwi: $2x^2 = 32$, $x^2 = 32 : 2 = 16, x = \pm\sqrt{16} = \pm 4,$ $x_1 = 4, x_2 = -4$.

b)Eger $b = c = 0$ bolsa, onda $ax^2 = 0$. Deňlemäniň ýeke-täk çözüwi $x = 0$.

ç) Eger $c = 0$, onda $ax^2 + bx = 0$ deňlemäniň çözüwi aşakdaky ýaly tapylýar: $x(ax+b) = 0$, onda $x_1 = 0$, ikinji çözüwini $ax + b = 0$ deňlemeden alarys $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Diýmek, bu deňlemäniň iki köki bar.

Mysal, $x^2 - 2x = 0;$ $x(x-2) = 0,$ $x_1 = 0,$ $x_2 = 2.$

3. Getirilen kwadrat deňleme

Doly kwadrat deňlemäniň iki tarapyny hem $a \neq 0$ sana bölüp alarys:

$x^2 + px + q = 0$ (bu ýerde $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$) deňlemä getirilen kwadrat deňleme diýilýär.Bu deňlemäniň çözüwi aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} .$$

Eger $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ bolsa, deňlemäniň iki köki bar. Eger $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ bolsa, deňlemäniň köki ýok.

Eger $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ bolsa, deňlemäniň $x = -\frac{b}{2a}$ iki köki hem deňdir.

Mysal. $x^2 - 4x - 60 = 0$.

Çözülişi:p=-4, q =-60 .

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - (-60)} = 2 \pm \sqrt{64} = 2 \pm 8,$$

$$x_1 = 2 + 8 = 10, \qquad x_2 = 2 - 8 = -6.$$

4. Wiýetiň teoremasy

Eger x_1 we x_2 getirilen kwadrat deňlemäniň $x^2 + px + q = 0$ kökleri bolsa, onda

$$x_1 + x_2 = -p \;; \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

deňlikler dogrudyr. Mysal:

Goý $x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$*onda* $p = -(3-1) = -2,$

$q = 3 \cdot (-1) = -3, \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$

§ 11. Kwadrat üçagzany çyzykly köpeldijilere dagytmak

$ax^2 + bx + c$ aňlatma *kwadrat üçagza* diýilýär. Eger $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäniň x_1 we x_2 kökleri bar bolsa, onda $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ formula dogrudyr.

Mysal. $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ deňlemäniň diskriminanty $D = 1 > 0$ onda deňlemäniň kökleri $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1.$

Kwadrat üçagzany çyzykly köpeldijilere dagydyp ýazyp bileris.

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

§ 12. Çyzykly deňsizlikler

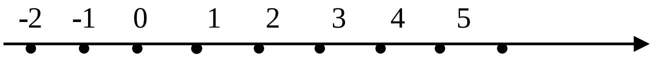
$ax+b>0, ax+b\geq 0, \quad ax+b<0, \quad ax+b\leq 0 \ (a\neq 0)$ görnüşli deňsizliklere *çyzykly deňsizlikler* diýilýär. Bu ýerde x näbelli ululyk, a, b-berlen sanlar. Näbelliniň berlen deňsizligi dogry san deňsizligine öwürýän bahalaryna *deňsizligiň çözüwi* diýilýär.

$ax+b>0$ deňsizligi çözmek üçin onuň iki bölegini hem a koeffisiýente bölmeli we çözüwi aşakdaky ýaly tapmaly: eger a>0 bolsa, onda deňsizligiň çözüwi $x>\frac{b}{a}$, eger a<0 bolsa, onda $x<\frac{b}{a}$.

Mysal. $6x+20>3x+35$ deňsizligi çözeliň. Näbelli goşulyjylary deňsizligiň çep bölegine, belli goşulyjylary bolsa sag bölegine geçireliň.

$6x-3x>35-20, \quad 3x>15, \quad x>5.$

Jogaby:Çözüwler aralygy 5-den uly hemme hakyky sanlaryň köplügidir, ol şeýle ýazylýar: $x>5; \quad x\in(5,\infty)$. Bu jogaby san okunda görkezip bolýar:



§ 13. Funksiýalar, olaryň häsiýetleri we grafikleri

1.Funksiýa düşünjesi.

Goý, D - $(a,b), [a,b], (a,b], [a,b)$ aralyklaryň birini aňlatsyn. a, b - sanlar tükeniksiz baha eýe bolsalar, onda diňe ýaý belgiler ulanylýar.Edil şuňa meňzeşlikde , E - şol aralyklaryň biri bolsun.

Eger D aralykdaky (köplükdäki) her bir nokada E köplügiň ýeke-täk bir nokady degişli edilen bolsa, onda D we E köplükleriň arasynda *funksional baglanyşyk* bar diýilýär. Eger D köplügiň islendik nokadyny x bilen belgilesek, D köplügiň nokatlaryny bolsa y bilen belgilesek onda bu funksional baglanyşyk şeýle ýazylýar:

$y=f(x), x\in D=D(f).$ Bu ýerde D funksiýanyň barlyk (berlen, argumentiň ýolbererlik bahalar) aralygy (ýaýlasy), $\mathrm{E}=\mathrm{E}(f)$ -funksiýanyň üýtgeýän aralygy (ýaýlasy) diýilýär; x -özbaşdak üýtgeýän ululyk ýa-da argument , y -bagly üýtgeýän ululyk ýa-da funksiýa diýilýär, f -funksiýa-degişlilik belgisi.

Mysallar:

1. $y = x^2 + 1$ funksiýanyň kesgitleniş *aralygy* $D = (-\infty, +\infty)$, ýa-da $x \in (-\infty, +\infty)$, ýa-da $-\infty < x < +\infty$. $\mathrm{E} = (1, +\infty)$.

2. $y = \dfrac{2}{x-1}$ funksiýanyň kesgitleniş *aralygy* $x - 1 \neq 0$ ýa-da $-\infty < x < 1$ we $1 < x < +\infty$ ýa-da $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. $y = \sqrt{x-1}$ funksiýanyň kesgitleniş *aralygy* $x - 1 \geq 0$ ýa-da $1 \leq x < +\infty$ ýa-da $[1; +\infty)$.

4. $y = \sin x, y = \cos x$, $D = (-\infty, +\infty)$, $\mathrm{E} = [-1, .1]$

2. Funksiýalaryň berliş usullary

Funksiýalar adatça şu aşakdaky üç usulda berilýär.

Analitik usuly. Bu usulda funksional baglanşyk matematik formulalaryň kömegi bilen berlip, ol formulada **y** funlsiýanyň degişli bahasyny tapmak üçin özbaşdak üýtgeýän x ululygyň berlen bahasynyň üstünde ýeryne ýetirilmeli amallar görkezilýär, şeýle hem, funksiýanyň kesgitleniş aralygy berilýär ýada ony tapmak talap edilýär.Mysallar.y=2 x +1,D=(3, ∞);

y=$|x|$, $y = \sin x, y = ax^2 + bx + c$.

Tablissa usuly. Funksiýalar bu usul boýunça berlende özbaşdak üýtgeýän x ululygyň her bir bahasyna degişli y funksiýanyň degişli bahasy tablissada görkezilýär:

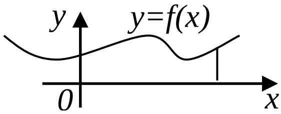
x	x_1	x_2	....	x_n
y	y_1	y_2	....	y_n

Mysal. Howanyň tempraturasynyň sagatlarda üýtgemesi

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	-0,5	1	3	3,5	4

.

Grafik usuly. Funksiýalar bu usul boýunça berlende funksional baglanşyk koordinata tekizliginde çyzyklaryň-gragikleriň kömegi bilen aňladylýar we $x-$ iň her bahasyna degişli y -iň bahasyny tapmak üçin x -iň absissa okunda duran nokadyndan funksiýanyň grafigine tarap ordinata okuna parallel göni çyzyk geçirýärler,şol göni çyzygyň grafigi kesen nokadyndan absissa okuna parallel geçirip,bu gönüniň ordinata okuny kesen nokadyny belleýärler, hemde bu nokadyň ordinatasyny funksiýanyň bahasy hökmünde kabul edýärler:



Bellik. Funksiýanyň tablissa we grafik usullary bilen berlişi durmuşda, tejribide we ylmy derňewlerde köp gabat gelýär. Emma bu usullar bilen funksiýalar berlende üýtgeýän ululyklaryň bahalary takmynan,ýagny ýakynlaşan bahalarda berilýär.

3. Artýan we kemelýän funksiýalar

Eger (α,β) san aralygynyň $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik x_1, x_2 sanlary üçin $f(x_1) > f(x_2)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda *y=f(x)* funksiýa (α, β) aralykda *kemelýän funksiýa* diýilýär.Mysal üçin, $y = x^2$ funksiýa $(-\infty;0)$, $y = \sin x$ funksiýa $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiýa $(-\infty;+\infty)$ aralykda kemelýän funksiýalardyr .

Eger (α,β) san aralygynyň $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik x_1, x_2 sanlary üçin $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda *y=f(x)* funksiýa (α,β) aralykda *artýan funksiýa* diýilýär. Mysal üçin, $y = x^2$ funksiýa $[0;+\infty]$, $y = \sin x$ funksiýa $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $y = x$ funksiýa $(-\infty;+\infty)$ aralykda artýan funksiýalardyr.

4. Jübüt, täk we periodik funksiýalar

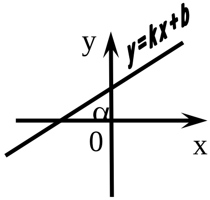
Eger *x* argumentiň islendik ýolbererlik bahasynda $f(-x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýa *jübüt funksiýa* diýilýär. Mysal . $y = x^2, y = \cos x, y = \frac{1}{1+x^2}$ - jübüt funksiýalardyr.

Eger *x* argumentiň islendik ýolbererlik baha-synda $f(-x) = -f(x)$ deňlik ýerine ýetýän bolsa onda *y*=*f*(*x*) funksiýa *täk* *funksiýa* diýilýär. Mysal üçin, $y=x, y=\sin x, y=\frac{1}{x}$ - täk funksiýalardyr.

Eger x argumentiň $x+T\in D$ bahasy üçin $f(x+T)=f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan $T\neq 0$ san bar bolsa, onda $y=f(x)$ funksiýa *periodik funksiýa,* T sana bolsa onuň *periody* diýilýär. Mysal üçin, $y=\sin x, y=\cos x$ funksiýalaryň periody $T=2\pi$; $y=tgx, y=ctgx$ funksiýalaryň periody $T=\pi$.

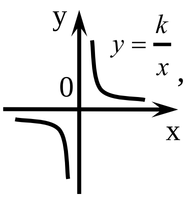
5. Çyzykly funksiýa

$y=kx+b$ formula bilen berlen funksiýa çyzykly funksiýa diýilýär.Bu ýerde k we b käbir berlen sanlar; k- burç koeffisiýent ;$k=tg\alpha$. *Kesgitleniş we bahalarynyň aralygy*: $D=E=(-\infty;\ +\infty)$. Çyzykly funksiýanyň grafigi göni çyzykdyr. Funksiýanyň grafigini gurmak üçin onuň üstünden geçýän iki nokadyny tapmak ýeterlikdir.



Çyzykly funksiýa $k>0$ bolanda artýar we $k<0$ bolanda kemelýär. Eger $k>0$ ($b=0$)bolsa, onda $y=kx$ funksiýanyň grafigi koordinatalar başlangyjyndan geçer we koordinata tekizliginiň 1-nji we 3-nji çärýeklerinde ýerleşer. Eger $k<0$ bolsa, onda $y=kx$ funksiýanyň grafigi koordinatalar tekizliginiň 2-nji we 4-nji çärýeklerinde ýerleşer.Eger-de $b\neq 0$ bolsa, onda b san çyzykly funksiýanyň grafiginiň ordinata okundan kesip alan kesimini aňladar.Mysal üçin, $b=2$ bolsa, onda grafik koordinata başlangyjyndan ordinata oky boýunça iki birlik ýokardan geçer, ýagny ordinata okyny $(0,2)$ nokatda keser.

6. Ters proporsionallyk

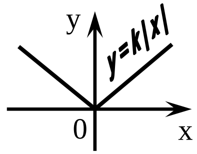


$y=\frac{k}{x}$ görnüşli formula bilen berlen funksiýa *ters*

proporsional funksiýasy diýilýär.
Bu ýerde *k* hemişel*ik san, oňa proporsionallyk koeffisiýenti diýilýär.*
Funksiýanyň kesgitleniş we bahalarynyň aralyklary:$(-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$,başgaça aýdanyňda, $x = 0$ nokat kesgitleniş we barlyk aralyklaryna girmeýär. Bu funksiýanyň grafigine *giperbola* diýilýär. Eger *k*>0 bolsa, onda bu funksiýanyň grafigi koordinatalar tekizliginiň 1-nji we 3-nji çärýeklerinde ýerleşýär.

Eger *k*<0 bolsa, onda bu funksiýanyň grafigi koordinatalar tekizliginiň 2-nji we 4-nji çärýek-lerinde ýerleşýär. *k*>0 bolanda funksiýa kemelýär, *k*<0 bolanda bolsa artýar.
Aýratyn bellemäge mynasyp häsiýetleriniň biri bu funksional baglanyşygyň üýtgeýän ululyklarynyň bahalarynyň köpeltmek hasyly hemişelik *k* sana deňligidir,ýagny $x \cdot y = k$.
Hemişelik *k* sanyň dürli bahalarynda ters proporsionallyk funksiýasy tükeniksiz sany “parallel” egriler toplumyny kesgitleýär.

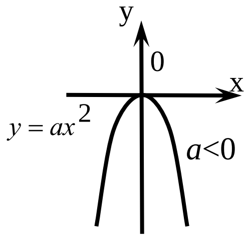
7. $y = k|x|$ **funksiýa.** Bu ýerde k hemişelik san, ýagny koeffisiýent, $k = 1$ bolanda $y = |x|$ funksiýa alynýar.**Gyzgyda k aýyrmaly**. $|k \neq 1|$ bolanda $y = k|x|$ funksiýanyň grafigi $y = |x|$ funksiýnyň grafigi ordinata oky



boýunça *k* sanyň $|k| > 1$ we $|k| < 1$ yagdaýlara laýyklykda ,degişlilikde, *k* esse “gysmak” we “giňeltmek” bilen alynýar. Funksiýanyň grafigi *y* oka görä simmetrikdir we iki sany gönininiň birleşmesinden alnandyr.Funksiýanyň häsiýeti sanyň modulynyň häsiýetlerine esaslanýar. *k*>0 bolanda bu funksiýanyň grafigi koordinatalar tekizliginiň 1-nji we 2-nji çärýeklerinde ýerleşýär, *k*<0 bolanda bolsa, koordinatalar tekizliginiň 3-nji we 4-nji çärýeklerinde ýerleşýär.

8. Kwadrat funksiýa

$y = ax^2 + bx + c$ görnüşli funksiýa *kwadrat funksiý* diýilýär. Görnüşi ýaly bu funksiýanyň bahasy nula deň bolanda, ýagny $y = 0$ ýagdaýda $ax^2 + bx + c = 0$ doly kwadrat deňleme alynýar.



Ox okunyň üstünde y-iň bahasynyň nula deň bolýanlygy üçin kwadrat deňlemäniň kökleriniň kwadrat funksiýanyň grafiginiň Ox okuny kesýän nokatlaryny görkezýändigi gelip çykýar.Hususy hallara seredeliň: $a = 1, b = c = 0$ bolanda $y = x^2$ funksiýa alynýar.Bu funksiýanyň grafigi paraboladyr. Bu parabolanyň depesi koordinatalar başlangyjynda bolup, onuň şahalary ýokarlygyna ugrukdyrlandyr.Eger $a = -1, b = c = 0$ bolanda $y = -x^2$ funksiýa alynýar, bu funksiýanyň grafigine hem parabola diýilýär.Bu parabola hem koordinata başlangyjyndan geçýär, emma bu parabolanyň şahalary aşaklygyna ýüzlenendir. $y = x^2$ *we* $y = -x^2$ funksiýalaryň grafikleri koordinata başlangyjyna görä simmetrikdir. Eger $a \neq 1, b = c = 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ alynýar; funksiýanyň grafigi a sanyň modulyna görä Oy okuna simmetrik we şol oka görä a esse "gysylan" we "giňeldilen" $y = \pm x^2$ funksiýalaryň grafiklerinden alynýar.

Kwadrat funksiýany doly derňemek üçin onuň sag tarapyndaky kwadrat üç agzanyň doly kwadratyny bölüp çykarýarlar:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Bu funksiýanyň grafigine umumy ýagdaýda hem parabola diýilýär. Parabolanyň depesiniň koordinatalary $x_0 = -\frac{b}{2a}$ we $y_0 = -\frac{D}{4a}$ formulalar arkaly kesgitlenilýär. Kwadrat funksiýanyň grafigini gurmak $y = \pm x^2$ parabolany Oy oky boýunça “gysmak” we “giňeltmek” , hem-de Ox oky boýunça parallel süýşürmek arkaly amaly aşyrylýar.

a>0 bolanda $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ aralykda kemelýär we

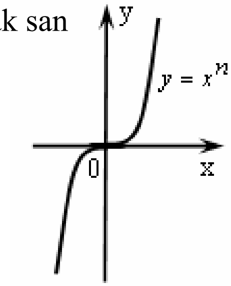
$[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ aralykda artýar.

a<0 bolanda $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$aralykda artýar we $[\frac{b}{2a};+\infty)$ aralykda kemelýär.

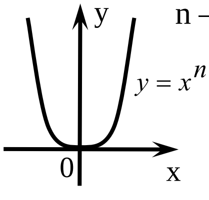
9. $y = x^n$ **derejeli funksiýa.**

Bu ýerde n-natural san. Bu funksiýanyň kesgitleniş aralygy $x \in (-\infty; +\infty)$, n jübüt san bolanda funksiýanyň grafigi I we II çärýeklerde ýerleşýär we ordinatalar okuna görä simmetrikdir we [0; +∞) aralykda artýar,
(-∞; 0] aralykda bolsa kemelýär.

n – täk san



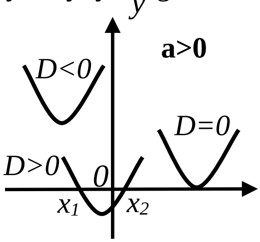
n –jübüt san

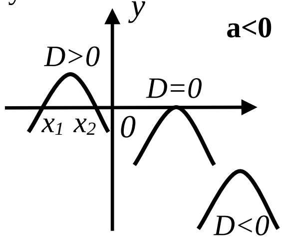


n-täk san bolanda funksiýanyň grafigi I we III çärýeklerde ýerleşýär, koordinatalar başlangyjyna görä simmetrikdir we (-∞; +∞) aralykda artýar.

§14. Kwadrat deňsizlikler.

Kwadrat ax^2+bx+c *üçagzanyň* $>,<,\leq,\geq$ deňsizlikleriň biri arkaly nul bilen deňeşdirmesine *kwadrat deňsizlik* diýilýär. Mysal üçin, $ax^2+bx+c>0$ kwadrat deňsizlikdir. Kwadrat deňsizlikleriň çözüliş usullary kwadrat funksiýanyň häsiýetlerine esaslanýar.Kwadrat deňsizlikleri çözmek üçin degişli $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň diskriminantyny derňemeli we köklerini kesgitlemeli. Soňra $y=ax^2+bx+c$ funksiýanyň grafigini göz öňüne getirip, onuň $ox-okuny$ kesýän nokatlaryny (kwadrat deňlemäniň kökleri), kemelýän,artýan we aralyklaryny kesgitlemek zerurdyr.





1. $a>0$, $D>0$ (1-nji sur.).Bu ýagdaýda parabolanyň şahalary ýokaryk ugrukdyrylan we ol Ox okuny $x_1 = x_2$ nokatlarda 2-nji surat kesýär. Bu halda deňsizligiň çözüwi $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ bolar.

2. $a>0$, $D=0$ (1-nji sur.).Bu ýagdaýda parabolanyň şahalary ýokaryk ugrukdyrylan we ol Ox okuna $x_{1=}$ nokatda galtaşýar. Bu halda deňsizligiň çözüwi $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ bolar.

3. $a>0$, $D<0$ (1-nji sur.).Bu ýagdaýda parabolanyň şahalary ýokaryk ugrukdyrylan we ol Ox okuny kesmeýär, ýagny Ox okundan ýokarda ýerleşen. Bu halda deňsizligiň çözüwi $(-\infty; +\infty)$ bolar.

4. $a<0$, $D>0$ (2-nji sur.). Bu ýagdaýda parabolanyň şahalary aşak ugrukdyrylan we ol Ox okuny x_1 we x_2 nokatlarda kesýär. Bu halda deňsizligiň çözüwi $(x_1;x_2)$ bolar.

5. $a<0$, $D=0$ (2-nji sur.). Bu ýagdaýda parabolanyň şahalary aşak ugrukdyrylan we ol Ox okuna x_1 nokatda galtaşýar. Bu halda deňsizligiň çözüwi ýokdur.

6. a<0, D<0 (2-nji sur.). Bu ýagdaýda parabolanyň şahalary aşak ugrukdyrylan we ol Ox okuny kesmeýär. Bu halda deňsizligiň çözüwi ýokdur.

Mysal hökmünde $x^2+4x-5<0$ deňsizligiň çözülişine seredeliň. $x^2+4x-5=0$ kwadrat deňsizlige seredeliň. $D=4^2-4\cdot1\cdot(-5)=36>0$. $x_1=-5$ we $x_2=1$.

a>0 we D>0 bolany üçin bu deňsizligiň çözüwi (-5; 1) bolar. Sebäbi, şu aralykda parabolanyň grafigi Ox okundan aşakda ýerleşer.

7.Deňsizlikleri çözmegiň aralyklar (interwallar) usuly

Deňsizlikleri çözmegiň aralyklar usuly üznüksiz funksiýanyň grafiginiň ox okuny kesip geçýän nokatlatynyň (funksiýanyň nollary) sanlar okuny her birinde funksiýanyň alamatyny hemişelik saklaýan kesimlere we şöhlelere bölmek häsiýetine esaslanýar. Berlen funksiýa köpagza we onuň kökleri $x=x_{1,}x=x_{2,\dots,}x=x_n$ bolsa, onda ol funksiýany çyzykly köpeldijileriň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyp bolýar:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

$x_1<x_2<\dots<x_n$; $(-\infty,x_1),(x_{1,}x_2),\dots,(x,\infty)$ -aralyklar (interwallar).

Eger, mysal üçin, $f(x)>0$ deňsizligi çözmek talap edilýän bolsa, onda $x-x_i, i=1,2,\dots,n,$ çyzykly köpeldijileriň her biriniň alamatlaryny ýokarda görkezilen interwallarda kesgitläp, soň $f(x)$ funksiýanyň löpeltmek hasyl hökmünde položitel alamaty saklaýan aralygy kesgitlemeli.

Mysal. $f(x)=(x+1)(x-2)(x-4)>0$ deňsizligi çözmek talap edilsin. Bu deňsizligi zözmek üçin $(-\infty,-1),(-1,2),(2,4),(4,\infty)$ aralyklara seredeliň we aşakdaky jedweli düzeliň:

eger $x\in(-\infty,-1) bolsa, onda f(x)<0,$

eger $x\in(-1,2), onda f(x)>0,$

eger $x\in(2,4), onda f(x)<0,$

eger $x \in (4,\infty), onda f(x) > 0.$

Diýmek, berlen funksiýa (-1,2),(4, ∞) arlyklarda položitel, onda berlen deňsizligiň çözüwi $(-1,2) \cup (4,\infty)$ köplükdir.

§15. Görkezijili füunksiýa , onyň häsiýetleri we grafigi

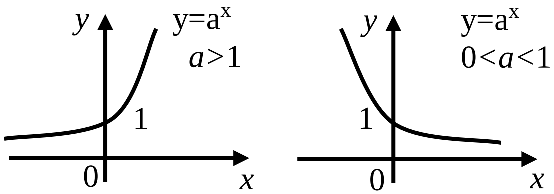
$y = a^x$ (bu ýerde a>0, a≠1) formula arkaly berlen funksiýa a esasly *görkezijili funksiýa* diýilýär.Bu ýerde x dürli hakyky bahalary kabul edip bilýän üýtgeýän ululykdyr.

$y = a^x$ funksiýa $a > 1$ bolanda aşakdaky häsiýetlere eýedir:

a) funksiýanyň kesgitleniş aralygy hemme hakyky sanlaryň köplügidir;
b) funksiýanyň bahalarynyň köplügi hemme polozitel sanlar;
ç) artýan funksiýa
d) $x = 0$ bolanda funksiýa 1 deň;
e) $x > 0$ bolanda funksiýa $a^x > 1$;
ä) $x < 0$ bolanda funksiýa $0 < a^x < 1.$

$y = a^x$ funksiýa $0 < a < 1$ bolanda aşakdaky häsiýetlere eýedir:

a) funksiýanyň kesgitleniş aralygy $D(f) = R$;
b) funksiýanyň bahalarynyň köplügi $E(f) = R$;
ç) kemelýän funksiýa;
d) $x = 0$ bolanda funksiýa 1 deň;
e) $x > 0$ bolanda funksiýa $0 < a^x < 1$;
ä) $x < 0$ bolanda funksiýa $a^x > 1.$



x-iň we y-iň islendik hakyky bahalarynda aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

§16. Görkezijili deňlemeler

Dereje görkezijisinde üýtgeýän ululygy saklaýan deňlemä çörkezijili deňleme diýilýär. Görkezijili deňleme çözülende, olary şol bir esasa getirýän özgertmeler geçirilýär we täze üýtgeýän ululygy girizmek arkaly deňleme algebraik deňlemä getirilýär.

Görkezijili deňlemä degişli mysala seredeliň. Mysal.1). $8^x = 32$, $2^{3x} = 2^5$ bu ýerden $3x = 5, x = \dfrac{5}{3}$

2). $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30$, $3^{2x} \cdot 3^2 + 3^{2x} = 10,$

$y = 3^{2x}, 9y + y = 30, \quad 10y = 30, \quad y = 3,$

$3^{2x} = 3, \quad 2x = 1, x = \dfrac{1}{2}$

§ 17. Logarifm we onuň häsiýetleri

b sany almak üçin a sany götermek gerek bolan x dereje görkezijä a $(a > 1, a \neq 1)$ esasa görä b sanyň logarifmi diýilýär we şeýle beellenýär $\log_a b = x$, başgaça, $a^x = b (a > 0, b > 0, a \neq 1)$. Görkezijili funksiýa bilen logarifm düşünjesiniň tapawudyna ünüs bereliň. Görkezijili funksiýada dereje görkeziji x berlen hasap edilip a^x aňlatmanyň bahasy tapylýardy. Emma logarimde bu aňlatmanyň b bahasy berlip şol baha a^x ululygy deň etjek x-iň bahasyny tapmak talap edilýär. Dereje görkeziji we logarifm düşünjeleri özara ters operasiýalardyr.

Mysallar: 1) $\log_4 16 = 2$, sebäbi $4^2 = 16$,

2) $\log_2 8 = 3$, sebäbi $2^3 = 8$,

3) $\log_2 0.25 = -2$, sebäbi $2^{-2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Logarifmiň häsiýetleri:

1) $\log_a 1 = 0,\qquad 2)\log_a a = 1,$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$,

4) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

5) $\log_a x^p = p\log_a x$,

6) $\log_a d = \dfrac{\log_b d}{\log_b a}$ (bir esasdan beýleki esasa geçmek formulasy),

7) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Eger logarifmiň esasy $a = e$=2,71…-irrasional san bolsa, onda $\log_e b = \ln b$ ýaly bellenýär we natural logarim diýlip okalýar.Eger a =10 bolsa, onda $\log_{10} b = \lg b$ -bellenýär we onluk logarfm diýlip okalýar.

Sanyň logarifmini tapmakdan ters operasiýa geçmeklige, ýagny logarifmik $\log_a b = c$ deňlikden görkezijili $a^c = b$ deňlige geçmeklige

potensirleme diýilýär.

Mysallar:

1) $\ln x = 5\ln c,$
$\ln x = \ln c^5,$
$x = c^5.$

2) $\ln x = a,$
$x = e^a.$

§18. logarifmik funksiýalar

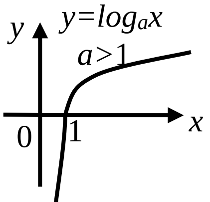
$y = \log_a x$ (bu ýerde a>0, a≠1) formula arkaly berlen funksiýa *logarifma funksiýa* diýilýär.

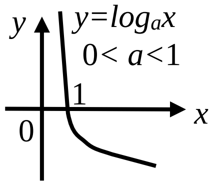
Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: (0; +∞).

Funksiýanyň bahalarynyň ýaýlasy: (-∞; +∞).

a>1 bolanda funksiýa kesgitleniş ýaýlasynda artýar;

0<a<1 bolanda bolsa kemelýär.





Esaslary deň bolanda $y = \log_a x$ we $y = a^x$ funksiýalaryň grafikleri I we III çärýekleriň bissektrisalaryna görä simmetrikdir(**Grafikde görkez?!!!).**

§19. Logarifmli deňlemeler

Logarifmik aňlatmalry özünde saklaýan deňlemelere logarifmik deňlemeler diýilýär.

$\log_a x = b, (a > 0, a \neq 1)$ deňlemä ýönekeý logarifmiki deňleme diýilýär. Bir esasly $\log_a f(x) = \log_a \varphi(b)$ görnüşli logarimik deňleme $f(x) = \varphi(x)$, $f(x) > 0, \varphi(x) > 0$ deňlemä getirilýär.

Mysal. $\lg (x-1) + \lg(x+1) = \lg 2$.Çözüwi:

$\lg ((x-1)(x+1)) = \lg 2$, $(x-1)(x+1) = 2$,

$x^2 - 1 = 2$, $x^2 = 3$ $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$.

Bu kwadrat deňlemäniň $x_2 = -\sqrt{3}$ köki berlen logarifmik deňlemäni kanagatlandyrmaýar,sebäbi, log(-$\sqrt{3}$ -1)-san ýokdur; logarifm argumentiň otrisatel bahasynda kesgitlenen däldir. $x = -\sqrt{3} -$ del kök hem diýilýär. Netijede, berlen deňlemäniň çözüwi $x = \sqrt{3}$.

§ 20. San yzygiderliligi. Progressiýalar

1. San yzygiderliligi

Agzalary natural sanlaryň kömegi bilen aňladylan hem-de yzygiderli tertipde ýazylan sanlar köplügine **san yzygiderliligi** diýilýär.

Belgilenişi: $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ ýa-da $\{a_n\}$; a_n - yzygiderliligiň umumy agzasy.

Eger agzalar üçin $a_{n+1} > a_n$ bolsa, onda san yzygiderliligi artýar, eger-de $a_{n+1} < a_n$, n=1,2,3,... bolsa, onda san yzygiderliligi kemelýär diýilýär.

Mysallar:

1. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ - yzygiderlilik artýar.

2. $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$ - yzygiderlilik kemelýär.

2. Arifmetiki progressiýalar

Ikinji agzadan başlap, her bir agzasy öň ýanyndaky agza şol bir d sanyň goşulmagy arkaly alynýan san yzygiderliligine arifmetik progressiýa diýilýär. Geometrik progressiýanyň umumy agzasy:

$$a_n = a_{n-1} + d, n = 1,2,3,\dots.$$

Goşulýan d sana arifmetiki progressiýanyň tapawudy diýilýär.
Mysal: 3,5,7,9… tapawudy $d = 2$-ä deň bolan arifmetiki progressiýadyr.

$a_n = a_1 - a_2 + d(n-1)$ n-nji agzasy

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ ilkinji n agzanyň jemi

Esasy häsiýetleri:

1) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ **2)** $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$

3) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$ **4)** $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$

3. Geometriki progressiýa

Eger san yzygiderliliginiň birinji agzasyndan beýleki her bir agzasy özünden öňdäki agzanyň hemişelik noldan tapawutly q sana köpeldilmegi arkaly alynýan bolsa, onda bu yzygiderlige geometrik progressiýa diýilýär we onuň umumy agzasy

$$b_n = b_{n-1}.q, \qquad b_n = b_1.q^{n-1}, \text{ n=1,2,3,}\dots.$$

Mysal üçin, 3,6,12,24…- yzygiderlik maýdalawjysy q=2 bolan geometrik progressiýadyr.

$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}, (q \neq 1)$ ilkinji n agzanyň jemi.

Esasy häsiýetleri:

1) $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$, **2)** $b_n^{\ 2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$,

3) $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots$, **4)** $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_4}{b_3}$.

Tükeniksiz kemelýän geometriki progressiýanyň jemi;

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

§21. Burçlaryň radian we gradus ölçegi.

Bir nokatdan çykýan iki şöhle ýada kesim we olar bilen çäklenen tekizligiň böleginden ybarat bolan figura burç diýilýär.Burçy çakleýän şöhlelere onuň taraplary diýilýär.

Eger burçuň taraplary göni çyzyk emele getirse, onda ol burça ýazgyn burç diýilýär. Ýazgyn burçuň ululygy 180° deň. OA kesimi ölçäp koordinata başlangyjyndan sagda ox okunyň üstünde goýalyň. Bu kesime başlangyç radius diýip at bereliň. Başlangyç radiusyň sagat diliniň ugruna aýlanmagyndan emele gelen burçuny otrisatel, sagat diliniň tersine aýlanmagyndan emele gelen barçuny položitel diýlip kabul edilen. Başlangyç radiusyň (merkeziň daşynda) sagar diliniň tersine aýlanyp onuň yzyna öwrülip gelmeginde emele gelen burça doly burç diýilýär. Doly burçyň ululygy 360° deň. Burçlaryň ululygy graduslarda ölçenilýär. Ýazgyn burçuň 1/180 bölegine ýada doly burçuň 1/360 deň bolan bölegine bir gradus diýilýär we şeýle 1° bellenýär. Burçlary ölçemek üçin transportirden peýdalanýarlar. Gradusyň $\frac{1}{60}$ bölegine **minut**, minudyň $\frac{1}{60}$ bölegine bolsa **sekund** diýilýär. Minuty “$^{/}$”, sekundy “$^{//}$” görnüşde belgileýärler.

Mysal. 45 gradus 30 minut 15 sekunt $45^0 30^{/} 15^{//}$ görnüşde ýazylýar.

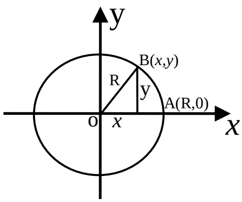
Burçlaryň ululygyny diňe graduslarda däl, eýsem radianlarda hem ölçeýärler. Islendik töweregiň radiusyna deň bolan töweregiň dugasy we ol duganyň uçlaryny merkez bilen birleşdirýän radiuslaryň emele getiren burçuna bir radian diýilýär. Diýmek, burçuň **radian** ölçeginde, bu burça degişli duganyň uzynlygy ölçenilýär. Emma töweregiň uzynlygy $l = 2\pi$ radiana deňdir. Onda doly burç, ýagny $360^\circ = 2\pi.$ Bu ýerden, ýazgyň burçuň ululygy π-e, göni burçuň ululygy $\frac{\pi}{2}$-deň, $\pi \approx 3{,}141596$.Burçuň gradus ölçeginden radian ölçegine we tersine geçmek üçin aşakdaky formulalar ulanylýar:

$$\alpha^0 = \frac{180^0 \cdot \alpha_{rad}}{\pi}, \qquad \alpha_{rad} = \frac{\pi \cdot \alpha^o}{180},$$

$$1_{rad} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0; \quad 1^0 = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745 rad.$$

§22. Burçuň trigonometrik funksiýalary.

Merkezi koordinata başlangyjynda we radiusy R deň bolan töwerege seredeliň.Bu töweregiň üstünde $A(R,0)$ nokady belläliň. Başlangyç OAradiusy $O(0,0)$nokadyň daşynda sagat diliniň ters ugruna aýlap α burçy emele getirenimizde $A(R,0)$ nokat $B(x,y)$ nokada geçer. $B(x,y)$ nokadyň ordinatasynyň radiusa bolan gatnaşygyna α burçuň *sinusy* diýilýär we şeýle bellenýär: $\sin\alpha = \frac{y}{R}$.



$B(x,y)$ nokadyň abssissasynyň radiusa bolan gatnaşygyna α burçuň *kosinusy* diýilýär we şeýle bellenýär: $\cos\alpha = \frac{x}{R}$.

$B(x,y)$ nokadyň ordinatasynyň onuň abssissasyna bolan gatnaşygyna α burçuň *tangensi* diýilýär: $tg\alpha = \frac{y}{x}$.

$B(x, y)$ nokadyň abssissasynyň onuň ordinatasyna bolan gatnaşygyna α burçuň *kotangensi* diýilýär: $ctg\,\alpha = \dfrac{x}{y}$.

§23 Trigonometrik funksiýalaryň koordinata çärýeklerindäki alamatlary.

Sinus funksiýanyň almaty birinji we ikinji çärýekde položiteldir, üçinji we dördünji çärýekde bolsa otrisateldir.

Kosinus funksiýanyň alamaty ikinji we üçünji çärýeklerde otrisatel, birinji we dördünji çärýeklerde položiteldir.

Tangens we **kotangens** funksiýanyň alamaty birinji we üçinji çärýekde položiteldir, ikinji we dördünji çärýekde bolsa otrisateldir.

Trigonometriki funksiýalaryň käbir burçlardaky bahalary.

Gradus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Rad.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$ctg\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

§24. Getirme formulalar

Getirme formulalarda argumentleri $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ bolan trigonometrik funksiýalary α argumentli beýleki trigonometrik funksiýalaryň üsti bilen aňladylýar.

Funksiýa	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Funksiýa	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

§25. Esasy trigonometrik toždestwolar

1. Şol bir argumentli trigonometrik funksiýalaryň arasyndaky baglanyşyk.

1. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$ 5. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$

2 . $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$.

3. $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$.

4. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

7. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha$.

6. $1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

8. $1+ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2.Ikeldilen argumentiň trigonometrik funksiýalary

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, 2) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

3) $tg 2a = \dfrac{2tga}{1-tg^2 a}$ 4) $ctg 2a = \dfrac{ctg^2 a - 1}{2ctga}$

5) $\sin^2 2a = \dfrac{1-\cos 4a}{2}$ 6) $\cos^2 2a = \dfrac{1+\cos 4a}{2}$

3.Ýarym argumentiň trigonometrik funksiýalary

1) $\sin\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$, 2) $\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$

3) $tg\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}}$ 4) $ctg\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}}$

Netijiler:

1) $tg\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sin a}{1+\cos a}$ 2) $tg\dfrac{a}{2} = \dfrac{1-\cos a}{\sin a}$

3) $ctg\dfrac{a}{2} = \dfrac{1+\cos a}{\sin a}$ 4) $ctg\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sin a}{1-\cos a}$

4.Trigonometrik funksiýalaryň argumentlerini goşmagyň formulalary:

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

5.Trigonometrik funksiýalaryň jemini we tapawudyny köpeltmek hasylyna özgertmegiň formulalary

$$1)\sin a+\sin\beta=2\sin\frac{a+\beta}{2}\cdot\cos\frac{a-\beta}{2};$$

$$2)\sin a-\sin\beta=2\sin\frac{a-\beta}{2}\cdot\cos\frac{a+\beta}{2};$$

$$3)\cos a+\cos\beta=2\cos\frac{a+\beta}{2}\cdot\cos\frac{a-\beta}{2};$$

$$4)\cos a-\cos\beta=2\sin\frac{a+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-a}{2};\ 5)tga+tg\beta=\frac{\sin(a+\beta)}{\cos a\cdot\cos\beta},$$

$$6)tga-tg\beta=\frac{\sin(a-\beta)}{\cos a\cdot\cos\beta};$$

$$7)ctga+ctg\beta=\frac{\sin(a+\beta)}{\sin a\cdot\sin\beta};\quad 8)ctga-ctg\beta=\frac{\sin(\beta-a)}{\sin a\cdot\sin\beta}.$$

6.Trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasylyny jeme özgertmegiň formulalary

$$1)\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$2)\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$3)tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}\qquad 4)ctg\alpha ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

§26. Trigonometrik funksiýalaryň häsiýetleri we grafikleri

$y=\sin x$ funksiýanyň esasy häsiýetleri.

1) kesgitleniş ýaýlasy hemme hakyky sanlaryň köplügi,

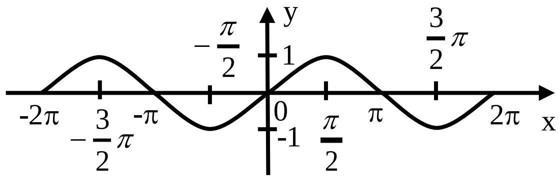
2) bahalar köplügi- $[-1,1]$ kesimiň nokatlar köplügidir,

3) $\sin x$ -täk funksiýa,ýagny $\sin(-x) = -\sin x$ hemme $x \in R$,

4) $\sin x$ periodik funksiya,onuň iň kiçi periody 2π deňdir, ýagny

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, x \in R,$$

5) $\sin x = 0, \quad x = \pi k$.



Bu funksiýanyň grafigine *sinusoida* diýilýär.

$y = \cos x$ funksiýanyň esasy häsiýetleri:

1) kesgitleniş ýaýlasy hemme hakyky sanlaryň köplügi,

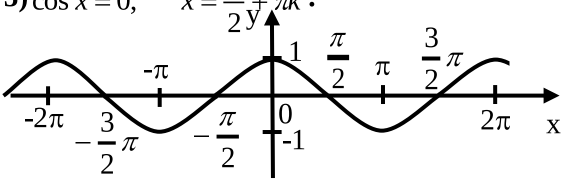
2) bahalar köplügi -$[-1,1]$ kesimiň nokatlar köplügidir,

3) $\cos x$-jübit funksiýa, ýagny $\cos(-x) = \cos x$ hemme $x \in R$,

4) $\cos x$-periodik funksiya,onuň iň kiçi periody 2π deňdir, ýagny

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, x \in R,$$

5) $\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.



$y = tgx$ funksiýanyň esasy häsiýetleri:

1)kesgitleniş ýaýlasy: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ - bitin sanlardan beýleki hakyky sanlaryň köplügi,

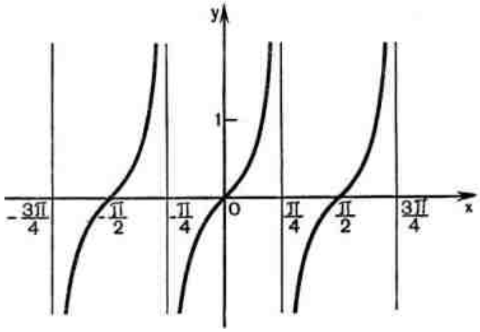
2) bahalar köplügi- san okunuň ähli nokatlary,

3) tgx - täk funksiýa, ýagny kesgitleniş ýaýlada $tg(-x) = -tgx$,

4) tgx -periodik funksiya, onuň iň kiçi periody π deňdir, ýagny

$$tg(x + k\pi) = tgx, k \in Z, x \in R,$$

5) $tgx = 0, \quad x = \pi k, k \in Z$.



$y = ctgx$ funksiýanyň esasy häsiýetleri.

1) kesgitleniş ýaýlasy: $x = \pi k, k \in Z$ sanlardan beýleki hakyky sanlaryň köplügi,

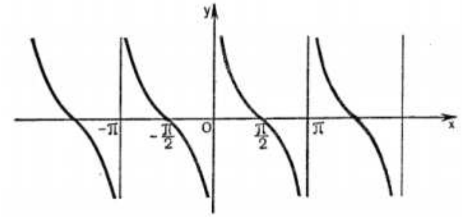
2) bahalar köplügi: koordinata okunyň ähli nokatlary,

3) $ctgx$ - täk funksiýa,ýagny kesgitleniş ýaýlada $ctg(-x) = -ctgx$,

4) $ctgx$ periodik funksiya, onuň iň kiçi periody π deňdir:

$$ctg(x + k\pi) = ctgx, \quad k \in Z .$$

5) $ctgx = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.



§27. Ters trigonometrik funksiýalar

1. Goý garalýan ℓ aralykda $f(x)$ -üznüksiz funksiýa berlen bolsun we ol aralykda kemelýän ýada artýan bolsun, hem-de a san funksiýanyň bahalar köplügine degişli bolsun. Onda $f(x) = a$ deňleme ℓ aralykda ýeke-täk çözüwe eýedir.

Sinus funksiýa $\ell = [-\pi/2, \pi/2]$ aralykda artýar, onuň bahalar köplügi -1-den 1-e çenli arakykdyr. Onda, eger

$-1 \le a \le 1$ bolsa, onda $\sin x = a$ deňlemäniň $x = b$ bolan ýeke-täk çözüwi bardyr. Bu b sana a sanyň arksinusy diýilýär we şeýle bellenýär: $b = \arcsin a$,eger
$\sin b = a; -\pi/2 \le b \le \pi/2; -1 \le a \le 1.$

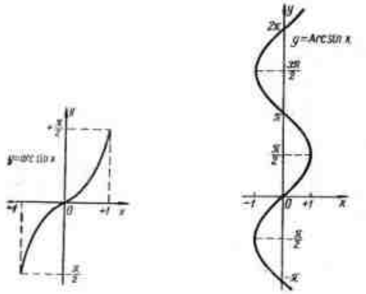
Şuňa meňzeşlikde:

$\arccos a = b; eger \cos b = a; b \in [o, \pi], a \in [-1,1],$

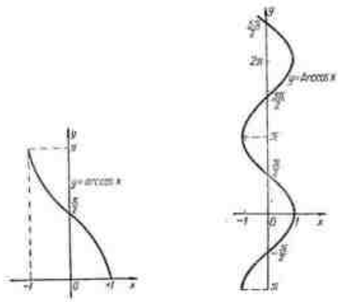
$arctga = b, eger\ tgb = a; b \in [-\pi/2, \pi/2], a \in (-\infty, \infty).$

$arcctga = b, eger\ ctgb = a;\ b \in [0, \pi]; a \in (-\infty, \infty)$.

2. y=arcsin x funksiýany girizeliň. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $x \in [-1; 1]$ we bahalarynyň ýaýlasy: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. *arcsin (-x)=- arcsin x* bolany üçin täk funksiýa. Funksiýa kesgitleniş ýaýlasynda artýar.



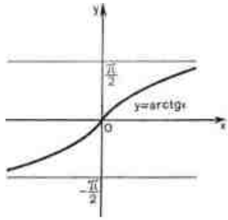
3. $y = \arccos x$ funksiýa.Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $x \in [-1; 1]$ we bahalarynyň ýaýlasy: $y \in [0; \pi]$.



Funksiýa täk hem däl jübüt hem däl.Funksiýa kesgitleniş ýaýlasynda kemelýär.

4. ***y=arctg x*** funksiýa. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $x\in(-\infty;+\infty)$ we bahalarynyň ýaýlasy: $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

arctg (-x)=- arctg x bolany üçin täk funksiýa. Funksiýa tutuş san okunda artýar.

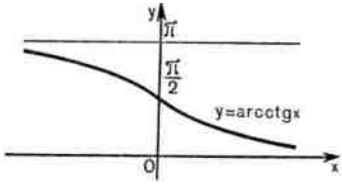


5. ***y=arcctg x*** funksiýa.

Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $x\in$ (-∞; +∞) we bahalarynyň ýaýlasy: $y\in(0;\pi)$.

Funksiýa täk hem däl jübüt hem däl.

Funksiýa tutuş san okunda kemelýär.



§28. Trigonometrik deňlemeleriň we deňsizlikleriň çözülişi

1.**Ýönekeýje trigonometrik deňlemeleriň çözülişi** Özünde näbelliniň trigonometrik funksiýalaryny saklaýan deňlemelere *trigonometrik deňlemeler* diýilýär. Islendik trigonomtrik deňlemäniň çözülişi ýönekeýje trigonometrik deňlemeleriň çözülişine getirilýär.

$\sin x = a$. Eger $|a|>1$ bolsa, onda bu deňlemäniň çözüwi ýok. Eger $|a|\le 1$ bolsa, onda bu deňlemäniň çözüwi

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k\in Z.$$

Hususy hallarda bu deňlemäniň çözüwi aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$\sin x = 0;\ \ x = \pi k,\ \ k\in Z.$$

$$\sin x = 1;\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k\in Z.$$

$sin\, x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in Z$.

cos x = a. Eger $|a|>1$ bolsa, onda bu deňlemäniň çözüwi ýok. Eger $|a|\leq 1$ bolsa, onda bu deňlemäniň çözüwi $x = \pm arccos\ a + 2\pi k,\ k\in Z.$
Hususy hallarda bu deňlemäniň çözüwi
aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$cos\, x = 0;\ \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

$cos\, x = 1;\ \ x = 2\, k\pi,\ \ k\in Z.$

$cos\, x = -1;\ \ x = \pi + 2\, k\pi,\ \ k\in Z.$

tg x = a. *a* islendik san bolanda hem bu deňle-mäniň çözüwi $x = arctg\ a + k\pi,\ k\in Z$ bolar.

ctg x = a. *a* islendik san bolanda hem bu deňlemäniň çözüwi $x = arcctg\ a + k\pi,\ k\in Z$ **.**

Çylşyrymly trigonometrik deňlemeler ýönekeý trigonometrik deňlemelere getirmek arkaly çözülýär. Mysallara seredeliň.

1) $2\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$ deňlemäni çözmeli.

Bu deňlemäniň üstünde aşakdaky özgertmäni geçirýäris: $2\cos x = \sqrt{2}\sin x$. Cosx=0 bolsa berlen deňleme çözüwe eýe däldir,şonuň üçin cosx$\neq 0$ hasap edip berlen deňlemäniň iki bölegini hem $\sqrt{2}\cos x$ bölüp, $tgx = \sqrt{2}$ ýönekeý deňleme alarys.

Jogaby: $x = arctg\sqrt{2} + k\pi, k \in Z.$

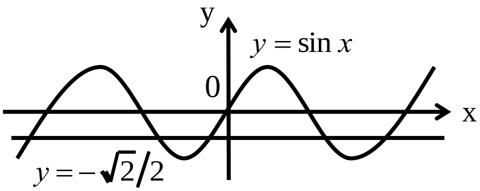
2) $\sin x - \sin 2x = 0$ deňlemäni çözmeli. sin2*x*=2cos*x* sin*x* formulany ulanyp alarys: $\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$. Bu deňlemeden $\sin x = 0$ we $2\cos x = 1$ ýönekeý deňlemeleri alarys. Olary çözüp $x_1 = \pi k$ we

$\cos x = \frac{1}{2};\ \ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$ alarys.

2.Trigonometrik deňsizlikler

Ýönekeý trigonometrik deňsizlikleriň çözülişini grafigiň kömegi bilen düşündireliň.

1) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Şol bir koordinatalar tekizliginde $y = \sin x$ we $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ funksiýalaryň grafiklerini gurýarys hem-de $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$ aralykda berlen deňsizligiň ýerine ýetýändigini görýäris.



Jogaby: -3π/4+2kπ<x<π/4+2kπ, k$\in$Z .

§29. Funksiýalaryň önümi

Funksiýanyň artdyrma düşünjesine seredeliň. Üýtgeýän ululygyň öňki bahasy bilen onuň soňky alan bahasynyň arasyndaky tapawuda şol ululygyň artdyrmasy diýilýär. Funksiýanyň argumentiň üýtgemesinde, ýagny argumentiň alan artdyrmasyna degişli artdyrma aljakdygyny belläliň. Argumentiň artdyrmasyny Δx bilen, funksiýanyň artdyrmasyny Δy bilen belläliň. Onda ýazyp bileris:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Berlen x *nokady öz içine alýan aralykda* $y = f(x)$ *funksiýanyň* Δy *artdyrmasyny oňa degişli bolan argumentiň artdyrmasyna böleliň we* $\Delta x \to 0$ predele geçeliň:

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Egerde şu predel bar bolsa,onda şol predele $y = f(x)$ *funksiýanyň önümi diýilýär we şeýle bellenýär:* y'; $f'(x)$.

Önümiň geometriki manysy $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşma göni çyzygyň Ox okunyň položitel tarapy bilen emele getiren burçunyň tangensini aňladýar: $k = f^{|}(x) = tg\varphi$.

Önümiň fiziki manysy material nokadyň wagtyň pursatyndaky tizligini aňladýar.

Önüm almaklygyň düzgünleri:

1) $c' = 0$, c- const. 2) $x' = 1$

3) $(u+v)' = u' + v'$ 4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ 6) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$

7) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$ 8) $(cu)' = cu'$, c-const.

Önümiň tablisasy.

1) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ***2)*** $(x^n)' = nx^{n-1}$

3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ***4)*** $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

5) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ***6)*** $(e^x)' = e^x$

7) $(\sin x)' = \cos x$ ***8)*** $(\cos x)' = -\sin x$

9) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ***10)*** $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ***12)*** $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 14)$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

§30. Funksiýanyň ekstremumy. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary

Eger berlen a nokady öz içine alýan ýeterlik kiçi aralygyň (interwalyň) ähli nokatlaryna degişli x ululygyň bahalary üçin $f(x) > f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýa $x = a$ nokatda **minumuma** eýe diýilýär.

Eger a nokady öz içine alýan ýeterlik kiçi aralygyň (interwalyň) ähli nokatlaryna degişli x ululygyň bahalary üçin $f(x) < f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýa $x = a$ nokatda **maksimuma** eýe diýilýär.

Funksiýanyň min we max nokatlaryna onuň **ekstremum nokatlary** diýilýär.

Funksiýanyň ekstremum nokatlarynyň ýeterlik kiçi interwallarynda funksiýanyň artmak we kemelmek häsiýetleriniň üýtgeýändigini görmek bolýar. Hakykatdanda, minimum nokadyň çep tarapynda funksiýa kemelip, şol nokadyň sag tarapyna geçende artyp başlaýar. Funksiýanyň maksimum nokadynda ýagdaý tersine üýtgeýar; maksimum nokady çep tarapynda funksiýa attýar, sag tarapynda kemelýär. Funksiýanyň birinji tertipli önüminiň alamatyna görä funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklary kesgitlenýär. Has takygy, eger kabir aralykda funksiýanyň önüminiň alamaty položitel bolsa, onda şol aralykda funksiýa artýar, tersine, eger funksiýanyň önüminiň alamaty otrisatel bolsa, onda garalýan aralykda funksiýa kemelýär.

Eger a nokat funksiýanyň ekstremum nokady bolsa, onda a nokatda bu funksiýanyň önümi nola deňdir (Ferma teoremasy) ýa-da bu nokatda onuň önümi ýokdir.

Funksiýanyň önüminiň nola deň bolýan nokatlaryna kritiki nokatlar diýilýär.

Kritiki nokatlarda funksiýanyň ekstremumyny kesgitlemek üçin onuň önüminiň garalýan kritiki nokadyň ýakyn çepindäki we ýakyn sagyndaky alamatlaryny kesgitlemeli. Eger garalýan kritiki nokadyň çepinde funksiýanyň önümi otrisatel, sagynda položitel bolsa, onda şol kritiki nokatda berlen funksiýa minimuma eýedir.Eger funksiýanyň önüminiň alamaty kritiki nokadyň ýakyn çepinde plolžitel, pnuň ýakyn sagynda otrisatel bolsa, onda şol kritiki nokatda berlen funksiýa mahsimuma eýedir. Eger funksiýanyň önüminiň alamaty kritiki nokadyň ýakyn çepinde we sagynda üýtgemese,onda şol kritiki nokatda berlen funksiýa ekstrenşmuma eýe däldir.

Mysal 1. $y = x^2 - 4x$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi:

$y' = 2x - 4, \quad 2x - 4 = 0, \quad x = 2;$

$f'_{x<2} < 0 \ (-), \quad f'_{x>2} > 0 \ (+).$

Funksiýanyň önümi özüniň alamatyny (-)-dan (+)-a üýtgedýär, şonuň üçin onuň x=2 nokatda min bardyr.

$y_{\min} = 2^2 - 4\cdot 2 = -4$.

§31. Funksiýanyň differensialynyň ulanyşy.

Differensialyň kömegi bilen funksiýanyň ýakynlaşan bahasyny $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ formula bilen hasaplamak bolar.

Mysal , $\sqrt[3]{1{,}02}$ hasaplamaly:

Çözülüşi:

$y = \sqrt[3]{x}$, $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,$1{,}02 = 1 + 0{,}02$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{1+0{,}02} \approx 1 + \frac{0{,}02}{3\cdot 1} = 1{,}0066$$

§32. Kesgitsiz integral we onuň geometrik manysy

Eger $[a,b]$ aralygyň her bir x nokady üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetse,onda $F(x)$ funksiýa şol aralykda $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär. Şol bir berlen üznüksiz funksiýanyň tükeniksiz köp asyl funksiýalary bardyr.Hakykatdanda, $f(x)$ funksiýa üçin $F(x)$ funksiýa asyl funksiýa bolsa, onda $F(x)+C$ (C -islendik hemişelik san) funksiýalar hem şol $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýalarydyr, sebäbi, $(F(x)+C)' = f(x)$. Funksiýalar toplumy $F(x)+C$ koordinatalar tekizliginde tükeniksiz “parallel” egrileriň toplumyny aýladýar. $\{F(x)+C\}$ topluma $f(x)$ funksiýadan alnan kesgitsiz integral diýilýär we şeýle bellenýär: $\int f(x)dx = F(x)+C$ .Kesgitsiz integral häsiýetler

$$1) d[\int f(x)dx] = f(x)dx$$

$$2) \int dF(x) = F(x) + c$$

i $$3) \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$k \neq 0; k = const$$

$$4) \int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

Kesgitsiz integrallaryň jedweli

$$1)\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = +c(c - const)$$

$$2)\int \frac{dx}{x} = \ell n \mid x \mid +c$$

$$3)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c(a > 0; a \neq 1; a - const$$

$$4)\int e^x dx = e^x + c$$

$$5)\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$6)\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$7)\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

$$8)\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

$$9)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c(-a < x < a)$$

$$10)\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c; (a \neq 0)$$

$$11)\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ell n \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c; (a \neq 0)$$

$$12)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ell n \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c; (a \neq 0)$$

§33. Kesgitli integral we onuň ulanylyşy

1. Nýuton-Leýbnisiň formulasy

Kesgitli integrallar belli aralayklarda kesgitlenýär. Goý garalýan $[a,b]$ aralykda $F'(x) = f(x)$ bolsun. Onda aşakdaky san aňlatma $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ garalýan $[a,b]$ aralykda

$f(x)$ funksiýadan alnan kesgitli integral diýilýär we bu formulaula Nýuton-Leýbnisiň formulasy diýilýär.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$

4. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$

5. $f_1(x) \le f_2(x)$

$\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx \quad (a < b)$

Mysal:

1) $\int_{-1}^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$

2) $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

2. Tekiz figuranyň meýdanyny hasaplamak.

Goý $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl bolsun. Onda $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi, $x = a$, $x = b$ göni çyzyklar we Ox okuň a hem-de b nokatlary arasyndaky kesimi bilen çäklenen tekiz figura egriçyzykly trapesiýa diýilýär. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

formula bilen hasaplanýar.

Eger egriçyzykly $ABCD$ figura aşakdan $y = f_1(x)$ we ýokardan $y = f_2(x)$ funksiýalaryň grafikleri bilen, gapdallaryndan bolsa $x = a$ we $x = b$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsa, onda ol figuranyň meýdany $S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$ formula bilen hasaplanýar.

.Mysal.

$y=x^2$ we y=2x göni bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x^2=2x, x^2-2x=0, x(x-2)=0, \\ &x=0, y=0, x=2, y=4 \end{aligned}$$

$$S=\int_0^2 2xdx-\int_0^2 x^2dx=x^2\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

3. Egri duganyň uzynlygyny hasaplamak.

Goý $y=f(x)$ funksiýa $[a,b]$ aralykda üznüksiz we kesgitlenen bolsun.

$f(x)$ funksiýanyň grafigi egri çyzykdyr, şu egriniň $[a,b]$aralykdaky dugasynyň *l* uzynlygy aşakdaky formula bilen hasaplanýar:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Eger-de funksiýa parametrik görnüşde berlen bolsa,ýagny $x=f(t), y=\varphi(t)$, $x=a=f(\alpha); x=b=f(\beta); t\in[\alpha,\beta]$ bolsa,onda

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt.$$

4. Aýlanma jisimiň göwrümini hasaplamak

Goý $y=f(x)$funksiýa $[a,b]$aralykda üznuksiz bolsun. Bu funksiýanyň grafiginiň görkezilen aralykda emele getiren egri çyzykly trapesiýany Ox okuň daşynda doly bir gezek aýlamakdan emele gelen geometrik jisimiň göwrümi aşakdaky formulanyň kömegi bilen hasaplanýar.

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx .$$

Mysal: $y^2 = 2x$ parabolany $[0,3]$ aralykda Ox okuň daşynda aýlanmagyndan emele gelen geometrik jisimiň göwrümini hasaplamaly.

$$y^2 = 2x, \quad x = 3, \quad y = 0, \qquad a = 0, \; b = 3;$$

$$V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = 9\pi .$$

5. Aýlanma üstüň meýdanyny tapmak.

$y = f(x)$ egriniň *AB* dugasy Ox okuň daşyndan aýlananda aýlanma üsti emele getirýär.Bu aýlanma üstüň meýdany

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

formula bilen hasaplanylýar. Eger duga Oy okuň daşyndan aýlanýan bolsa, onda aýlanma üstüň meýdany $S = 2\pi \int_m^n x\sqrt{1 + x'^2}\, dx$

formula bilen hasaplanylýar.

Mysal: $x^2 + y^2 = r^2$ töweregiň Ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny tapmaly.

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{y^2}} = \frac{r}{y}$$

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad S = 2 \cdot 2\pi \int_0^r y \frac{r}{y} dx = 4\pi r x \Big|_0^r = 4\pi r^2.$$

§34. Kesgitli integralyň ýakynlaşan bahalaryny tapmagyň formulalary

Käbir ýagdaýlarda funksiýalaryň asyl funksiýasyny tapyp bolmaýar.Şonuň üçin integralyň ýakynlaşan bahasyny tapmaly bolýar. [a;b] aralygy $x_i, i = 0,1,2,...,n$ nokatlar bilen n deň böleklere böleliň,onda her bölek kesimiň uzynlygy aşakdaky formula bilen tapylar: $h = \frac{b-a}{n}$.

1. Gönüburçlulklar formulasy.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right),\ y_i = f(x_i), i = 1,2,...,n.$$

2.**Trapesiýa formulasy**.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + .. + y_{n-1}\right)$$ formula bilen hasaplanýar.

Mysal: $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ integraly trapesiýalar formulasy bilen hasaplamaly:

$$\frac{b-a}{n} = \frac{9-3}{6} = 1;\ y = \frac{1}{x}$$

$x_0 = 0; y_0 = 0.5$ $x_4 = 4, y_4 = 0.353$

$x_1 = 1; y_1 = 0.447$ $x_5 = 5, y_5 = 0.333$

$x_2 = 2; y_2 = 0.409$

$x_3 = 3; y_3 = 0.3$

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 2,002$$

§35 Ikinji we üçünji tertipli kesgitleýjiler

Eger-de 4 sany $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sanlar kwadrat tablisa görnüşinde ýerleşdirlen bolsa we ol tablisa aşakdaky san baha degişli edilen bolsa, onda oňa 2-nji tertipli kesgitleýji diýilýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Üçinjinji tertipli kesgitleýjiler 9 sany san elementlerden kwadrat tablisa görnüşinde ýazylyp, ol şeýle kesgitlenýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Mysal 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 2$$

Mysal 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 7 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot (-2) = -18 - 28 + 12 - 12 + 18 + 28 = 0$$

Kesgitleýjiniň a_{ij} elementiň M_{ij} *minory* diýip, berlen kesgitleýjiniň i setiriniň we j sütüniniň üstüni çyzanymyzda emele gelen täze bir kesgitleýjä aýdylýar.

Mysal 3. $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $i=j=1$, $M_{11}=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=14+4=8$

Kesgitleýjiniň elementleriniň *algebraik doldurgyjy* diýip, $(-1)^{i+j}$ alamaty bilen alynýan a_{ij} elementiň M_{ij} minoryna aýdylýar we aşakdaky ýaly bellenilýär:

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

Mysal 4.

A= $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-4$

§36 Deňleme ulgamyny kesgitleýjileriň kömegi bilen çözmek

3 – näbellili 3 – tertipli deňlemeler ulgamynyň umumy görnüşini ýazalyň:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

Bu deňlemäniň näbellileriniň koefisiýentlerinden ybarat üçinji tertipli esasy kesgitleýjini we erkin agazalaryň (deňlemele riň sag taraplarynyň) gatnaşmagynda kömekçi kesgitleýjileri düzeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} ç & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

kesgitleýjisi nuldan tapawutly bolsa, onda onuň ýeke-täk çözüwi bardyr.

Eger $\Delta \neq 0$ bolsa, onda berlen ulgamyň ýeke-täk çözüwi bardyr, ol çözüw

$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$ formulalar bilen tapylýar. Ulgamyň çözüüini tapmagyň bu usulyna Krameriň düzgüni diýilýär.

Eger $\Delta = 0$ bolsa, onda berlen ulgam çözüwie eýe bolman hem biler ýa-da tükeniksiz köp çözüwe eýe bolup biler. Bu ýagdaý näbellileriň koefisiýentleriniň özara proporsionallyk häsiýetlerine esaslanyp goşmaça derňelýär. Kramariň düzgüni çyzykly deňlemeler ulgamynyň hemmesi üçin hem dogrudyr. Kramer düzgünini ulanmagyň ýeke-täk şerti ol hem berlen çyzykly deňlemeler ulgamynyň esasy kesgitleýjisiniň noldan tapawutly bolmagydyr.

Mysal .

$$\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Çözülişi:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5-6=-11,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}12 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-12-21=-33,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 12\\ 2 & 7\end{vmatrix}=35-24=11, \qquad x_1=\frac{-33}{-11}=3,$$

$$x_2=\frac{11}{-11}=-1.$$

§37. Matrisalar we olaryň üstünde amallar

m-setirden *n*-sütünden ybarat bolan göniburçly san tablisasyna *matrisa* diýilýär. Matrisalar gysgaça $A=\{a_{ij}\}$ görnüşde ýada

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

yaly bellenýär. Setirlariniň we sütünleriniň sanlaryny görkezýän m we n sanlara matrisanyň ölçegleri diýilýär. Matrisanyň ölçegi şeýle bellenýär: $m\times n$ we göniburçly matrisalar diýilýär. Eger matrisalaryň setirleriniň we sütünleriniň sanlary deň bolsalar, ondaň onuň ýaly matrisalara kwadrat matrisalar diýilýär.

Matrisalaryň üstünde geçirilýän amallara seredeliň. Deň ölçegli *A* we *B* matrisalaryň jemi diýip, olaryň degişli elementleriniň jemlerindeň emele gelen matrisa aýdylýar.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix},$$ bu ýerde

$$c_{11}=a_{11}+b_{11} \quad c_{12}=a_{12}+b_{12}$$
$$c_{21}=a_{21}+b_{21} \quad c_{22}=a_{22}+b_{22}.$$

Mysal.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 6 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2-5 & 1+3 & 3+16 \\ 0+6 & 0+3 & 0+4 \\ -1+7 & 3+10 & 8+0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 19 \\ 6 & 3 & 4 \\ 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrisalary hemişelik sana köpeltmek amaly kesgitlenendir. A matrisany k hemişelik sana köpeltmek üçin onuň her bir elementini şol sana kepeltmeli:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Iki sany kwadrat matrisalaryň köpeltmek hasyly diýip aşakda görkezilen düzgün boýunça alnan üçünji C matrisa aýdylýar:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Mysal. Matrisalary köpeltmeli**.**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Çözülişi:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 4+2\cdot 2 & 3\cdot(-1)+2\cdot 3 \\ 1\cdot 4+2\cdot 2 & 1\cdot(-1)+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

§38. Deňlemeler ulgamyny matrisalar usuly bilen çözmek. Goý, deňlemeler ulgamy berlen bolsun:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Näbelliniň kofisiýentlerindeň, erkin agzalardan we näbellileriň özlerinden aşakdaky matrisalary düzeliň:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Matrisalaryň köpeltmek hasylynyň häsiýetinden peýdalanyp berlen deňlemeler ulgamyny aşakdaky ýaly ýazyp bileris (Syn ediň, deňlemäniň çep tarapynda üç ölçegli kwadrat A matrisa bilen 3×1 ölçegli X matrisanyň köpeltmek hasyly, deňlemäniň sag tarapynda 3×1 ölçegli B matrisa ýazylýar!):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ ýa-da $AX=B$ *ýa-da*

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

bu ýerde A^{-1} - A matrisa ters matrisa. Soňky formuladadan näbellileriň bahalaryny tapmak üçin ters matrisany tapmagyň aşakdaky formulasyny ulanmaly.Goý, berlen sistemanyň koýefisiýentlerinden düzülen üç ölçegli kwadrat A matrisanyň elementlerinden düzülen üçünji tertipli kesgitleýji $D \neq 0$ bolsun. Onda A-matrisa ters A^{-1} matrisasy bardyr. A matrisanyň D kesgitleýjisiniň algebraik doldurgyçlaryny $A_{ij}, i, j = 1,2,3$ bilen belläliň. Onda

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Mysal .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 17 \end{cases}.$$

Çözülişi:

1) *A*-matrisanyň kesgitleýjisini tapalyň:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

2) *A*-matrisanyň hemme elementleriniň algebraik dolduryjysyny

tapalyň: $A_{11}=4$, $A_{12}=-3$, $A_{21}=-2$, $A_{22}=1$.

Täze matrisany düzeliň:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Alnan matrisany transponirläliň:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Alnan matrisany $\dfrac{1}{D}$ köpeldeliň we A^{-1} ters matrisany tapalyň:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

5) Ters matrisany *B*-matrisa köpeldeliň:

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 7+1\cdot 17\\ \frac{3}{2}\cdot 7-\frac{1}{2}\cdot 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$, onda $x_1=3$, $x_2=2$.

§39 Kombinatorikanyň elementleri

Jemlemek usuly. Eger käbir *A* obýekti *m* usullar bilen, *B* obýekti *k* usullar bilen (*A* obýekt–däki ýaly däl) alyp bolýan bolsa, onda “ýa *A*, ýada *B*” obýekti $m+k$ usullar bilen almak bolar. Bu usula *jemlemek düzgüni* diýilýär.

Köpeltmek usuly. Egerde *A* we *B* obýektler degişlilikde *m* we *k* sany dürli usullar bilen saýlanyp bilinýän bolsalar, olaryň ähli mümkin bolan jübütleriniň sany *mk* bolar. Bu usula *köpeltmek düzgüni* diýilýär.

Çalşyrmalar. Tükenikli köplügiň elementleri–niň islendik tertipde ýerleşmeklerine ol elementlerden *çalşyrma* diýilýär we ol

$$P_n=n!$$

formula boýnça hasaplanylýar.

Ýerleşdirmeler. *n* elementli köplügiň tertipleşdirilen *m* elementli bölek köplüklerine *n* elementden *m* elementli *ýerleşdirmeler* diýilýär we ol

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

formula boýunça hasaplanylýar.

Utgaşdyrmalar. *n* elementli köplügiň islendik *m* elementli bölek köplügine *n* elementden *m* elementli *utgaşdyrma* diýilýär we ol

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

formula boýunça hasaplanylýar.

Nýuton binomynyň formulasy.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^m a^{n-m} b^m + + ... + C_n^n b^n,$$

$n \in N.$

Geometriýa

Planimetriýa

§1. Geometriýanyň esasy düşünjeleri

Geometriýa ylmy hem beýleki ylymlar ýaly adamzat durmuşynyň zerurlyklaryndan ýüze çykypdyr.”Geometriýa“ grek sözi bolup, ol ýer ölçemekligi aňladýar. Ilkinji geometrik tassyklamalar we maglumatlar gadymy Ýegipetde, Wawilonda, Hytaýda, Hindistanda,Gresiýada belli bolupdyr.Biziň eramyzdan öň 6-njy asyrda söwda gatnaşyklarynyň ösmegi bilen geometriýanyň maglumatlary Ýegipetden we Wawilondan Gresiýa düşüpdir.Grek alymlary tarapyndan geometriýanyň maglumatlary sistemalaşdyrylyp berk subut edip bolýan tassyklamalar görnüşine getirilipdir. Beýik grek alymy Ýewklid biziň eramyzdan 300 ýyl öň ýazan “Ýewklidiň başlangyçlary”diýen kitaplar toplumynda geometriýanyň ylmy esaslaryny beripdir,bu başlangyç düşünjeler häzirki zaman geometriýa ylmynyň hem düýp mazmunyny tutýar.

Geometriýa ylmynyň gurluşy aksioma düşünje gatnaşyklarynda düzülendir. Aksioma düşünjesi baş düşünje bolup, ol subutsyz kabul edilýän, şübhesiz, aýdyň-anyk tassyklamadyr.

Teorema – aksioma esaslanyp, logiki pikerlenme ýöretmeleriň esasynda subut edilýän tassyklama.

Ýewklidiň geometriýasy diýilýän geometriýanyň esasy obýektlerini we gatnaşyklaryny getireliň:

1.Nokatlar. 3.Tekizlikler, üstler.

2.Gönüler, egriler. 4.Giňişlikler, jisimler.

Bu düşünjeler boýunça kesgitlemeler kabul edilýär.

Kesgitleme 1. Nokat böleklere eýe däldir.Nokat ölçegsiz obýektdir.

Kesgitleme 2. Çyzyk insiz uzynlykdyr. Çyzyk bir ölçegli obýektdir.
Kesgitleme 3. Çyzygyň araçäkleri nokatlardyr.
Kesgitleme 4. Özüniň ähli nokatlaryna görä birmeňzeş ýerleşen egri göni çyzykdyr.
Kesgitleme 5. Diňe ini we uzynlygy bolan obýekt üstdür (tekizlikdir). Üst iki ölçegli obýektdir.
Kesgitleme 6. Üç ölçegi (beýikligi, ini we uzynlygy) bolan obýekt geometrik jisimdir.

Ýewklid şu kesgitlemelere esaslanyp aksiomalary (postulatlary) ýazypdyr:

1. Her bir nokatdan islendik beýleki nokada göni geçirmek mümkinligi talap edilýär.
2. Islendik gönini kesgitsiz dowam etmek mümkinligi.
3. Islendik merkezden islendik radiusly töwerek çyzmak mümkinligi.
4. Ähli göni burçlaryň deňligi.
5. Her gezek, haçan-da bir göni beýleki iki göni çyzygy kesende emele gelen bir taraplaýyn burçlaryň jemi iki göni burçdan kiçi bolanda, bu gönüler jemiň iki göni burçdan kiçi tarapynda kesişmek mümkinligi.

   Häzirki zaman geometriýa ylmynda başlangyç düşünjeleri, aksiomalary başgaça hem getirýärler. Ýewklidiň aksiomalaryndan gelip çykýan häsiýetler:
   1. Tekizligiň islendik iki nokadyndan göni, onda-da diňe bir göni geçirmek mümkin.
   2. Eger iki gönüniň biriniň iki nokady beýlekiniň iki nokadyna gabat geler ýaly edip, biri-biriniň üstünde goýulsa, onda bu gönüler beýleki ähli nokatlarda hem gabat gelýändirler.
   3. Iki gönüler diňe bir nokatda kesişýärler.

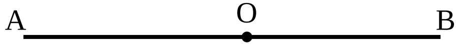
Ýewklidiň V- aksiomasy parallel gönüler, meňzeş figuralar, trigonometriýa we ş.m. teoriýalaryň esaslaryny düzýär. Emma, häzirki zaman geometriýa ylmynda parallel gönüleri tekizlikde kesişmeýän gönüler hökmünde kabul edilip, Ýewklidiň V-aksiomasyny ulanman hem geometrik tassyklamalar subut edilýär.

Köp asyrlaryň dowamynda alymlar Ýewklidiň V- aksiomasyny (postulatyny) beýleki aksiomalardan getirip çykarmaga, ýagny ony subut etmäge çalyşypdyrlar. Emma 1826ý.rus alymy, Kazan uniwersitetiniň professory N.I.Lobaçewskiý bu postulatyň beýleki postulatlardan getirip çykaryp bolmajakdygyny subut edip, özüniň täze geometriýasyny esaslandyrýar, soňy bilen ol geometriýa Lobaçewskiniň geometriýasy diýen ady alýar.Lobaçewskiniň geometriýasy Ýewklidiň geometriýasyndan tapawutlylykda Ýewklidiň V- postulatyna derek Lobaçewskiniň “Tekizlikde göniniň daşyndan alnan nokadyň üstünden berlen gönä parallel bolan iň bolmanda iki göni çyzyk geçirip bolar” diýen aksiomasyna esaslanýar.

Nikolaý Iwanowiç Lobaçewskiý (1792-1856) 1811ý Kazan uniwersitetini gutarýar, şol uniwersitetde professor (1816), dekan we ýigrimi ýylyň dowamynda rektor bolup işleýär. Ömrüniň ahyrynda bu beýik alymyň gözi görmeýär, özüniň açan geometriýasy boýunça soňky ýazan işlerini dilden aýdyp ýazdyrypdyr. Ylmy jemgyýet Lobaçewskiniň geometriýasyny onuň özi aradan çykandan soň doly ykrar edipdir. Ýewklidiň V- postulatynyň problemasy bilen meşgullanan alymlaryň içinden nemes alymy K.Gaussyň (1777-1855) we wenger alymy Ýa. Boýainiň (1802-1860) işleri aýratyn bellenmäge mynasypdyr. Bu beýik alymlar hem Lobaçewski bilen bir döwürde, biri-birinden habarsys, tekizlikde göniniň daşyndan alnan nokatdan oňa parallel tükeniksiz sany gönüleri geçirip bolýandygy baradaky tassyklamany esaslandyrypdyrlar. Emma olar bu ideýanyň dowamly goraýjylary bolmandyrlar.

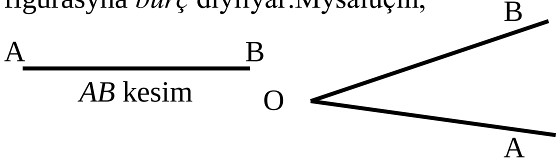
1. **Nokat, göni çyzyk, şöhle, kesim we burç**

Nokat gönini garşylykly taraplara ugrukdyrylan iki şöhlä bölýär.Diýmek, şöhle bir nokatdan çykan belli ugra ugrukdyrylan ýarym göni çyzyk ekeni.
Mysal üçin, *a* göni çyzygyň üstünde alnan *O* nokat ol göni çyzygy *OA* we *OB* iki *şöhlelere* bölýär.

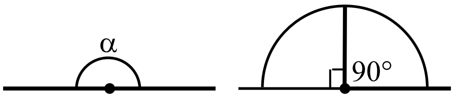


Kesim göniniň iki nokat aralygynda ýatan bölegidir. Kesim iki tarapy hem çäkli göni çyzykdyr.

Bir nokatdan çykýan iki şöhläniň ýa-da kesimiň emele getiren figurasyna *burç* diýilýär.Mysalüçin,

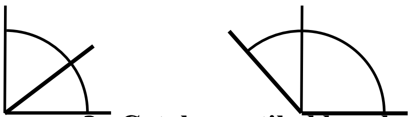


Eger burç 180° deň bolsa, oňa *ýazgyn burç* di-ýilýär.Eger burç 90° deň bolsa, oňa *göni burç* diýilýär.



Ýazgyn burç Göni burç

Eger burç 90° kiçi, ýagny göni burçdan kiçi bolsa, oňa *ýiti burç* diýilýär.Eger burç gönübur-çdan uly ýazgyn burçdan kiçi, ýagny 90° -dan uly 180° kiçi bolsa, oňa *kütek burç* diýilýär.


Ýiti burç Kütek burç

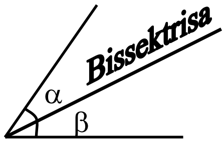
2. Çatyk, wertikal burçlar, bissektrisa

Bir tarapy umumy, beýleki taraplary bolsa biri beýlekisiniň dowamy bolan iki burça *çatyk burçlar* diýilýär.

Eger bir burçuň taraplary beýleki burçuň taraplarynyň dowamy bolsalar, beýle iki burça *wertikal burçlar* diýilýär.


Çatyk burçlar Wertikal burçlar

Burçuň depesinden çykyp, ony deň iki burça bölýän şöhlä *burçuň bissektrisasy* diýilýär.



$\angle\alpha = \angle\beta$

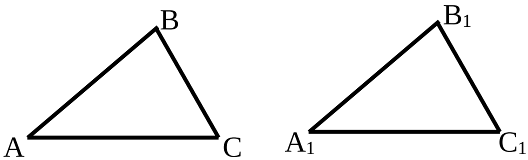
§2. Üçburçluklaryň deňliginiň nyşanlary.

Bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan üç nokat-dan we olary jübüt-jübütden birikdirýän üç kesimden ybarat figura *üçburçluk* diýilýär. Aşakdaky tassykla-malar üçburçluklaryň deňlik nyşanlarydyr.

1. Eger $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ bolsa, onda $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2. Eger $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ bolsa, onda $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

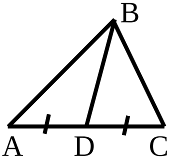
3. Eger $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ bolsa,. onda $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



§3. Üçburçlugyň medianasy, bissektrisasy we beýikligi

Üçburçlugyň islendik bir depesini onuň gar-şysynda ýatan tarapyň ortasy bilen birikdirýän kesime *mediana* diýilýär. *BD* mediana üçin aşakdaky deňlik dogrudyr.

$$BD^2 = \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4}.$$



BD -mediana

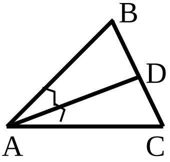
Üçburçlugyň medianalary bir nokatda kesişýär-ler we kesişme nokadynda 1:2 ýaly gatnaşykda bölünýärler.

Üçburçlugyň berlen burçunyň bissektrisasy-nyň berlen depäni onuň garşysynda ýatýan tara-pyň üstündäki nokat bilen birikdirýän kesimi üçburçlugyň berlen depesinden

geçirilen *bissektrisasydyr*.

AD bissektrisa üçin aşakdaky

deňlik dogrudyr.



AD-bissektrisa

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

Üçburçlugyň bissektrisalary bir nokatda ke-sişýärler. Bu nokat ol üçburçlugyň içinden çy-zylan töweregiň merkezidir.

Üçburçlugyň islendik bir depesinden onuň garşysyndaky tarapyny

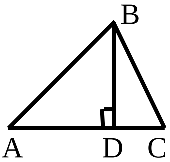
saklaýan göni çyzyga

geçirilen perpendikulýara

üçburçlugyň berlen depe-

sinden inderilen *beýiklik*

diýilýär.



BD -beýiklik

Üçburçlugyň beýiklikleri bir nokatda kesişýär-ler.

Kesimiň ortasyndan geçip, oňa perpendikulýar bolan göni çyzyga *kesimiň orta perpendikulýa-ry* diýilýär. Üçburçlugyň taraplarynyň orta per-pendikulýarlary bir nokatda kesişýärler. Bu no-kat ol üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezidir.

Iki tarapy deň bolan *üçburçluga deňýanly üçburçluk* diýilýär. Deňýanly üçburçlugyň üçünji tarapyna onuň *esasy* diýilýär.

Deňýanly üçburçlugyň *esasyndaky burçlary deňdir.*

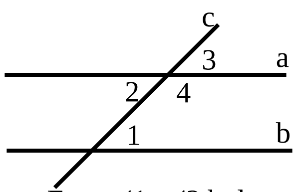
Eger üçburçlugyň esasyndaky burçlary deň bolsa, onda ol deňýanly üçburçlukdyr.

Deňýanly üçburçlugyň esasyna geçirilen bis-sektrisasy onuň hem medianasy hem beýikligi-dir.

§4. Iki göni çyzygyň parallellik nyşanlary

Bir tekizlikde ýatýan, kesişmeýän iki göni çyzyga *parallel göni çyzyklar* diýilýär.

Parallellik aksiomasy. Berlen göni çyzykda ýatmaýan nokat arkaly berlen göni çyzyga parallel bolan diňe bir göni çyzyk geçirip bolar.



1-nji nyşan. Eger $\angle 1=\angle 2$ bolsa, onda $a||b$.

2-nji nyşan. Eger $\angle 1=\angle 3$ bolsa, onda $a||b$.

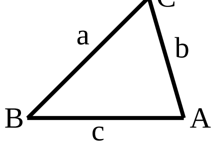
3-nji nyşan. Eger $\angle 1+\angle 4=180^0$ bolsa, onda $a||b$.

Bu tassyklamalara ters bolan tassyklamalar hem dogrudyr. Eger $a||b$ bolsa, onda:

a)$\angle 1=\angle 2$; **b)** $\angle 1=\angle 3$; **ç)** $\angle 1+\angle 4=180^0$.

§5. Üçburçlugyň taraplarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar.

Üçburçlugyň burçlarynyň jemi 180° deňdir.



$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$.

Üçburçlugyň uly tarapynyň garşysynda

uly burç ýatýar, ýagny eger $a>b$ bolsa, onda $\angle A>\angle B$. Tersine, üçburçlugyň uly burçunyň garşysynda uly tarap ýatýar, ýagny eger $\angle A>\angle B$ bolsa, onda $a>b$.

Üçburçlugyň islendik iki tarapynyň jemi onuň üçünji tarapyndan uludyr.

$$a<b+c; \quad b<a+c; \quad c<a+b.$$

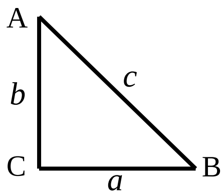
Bu deňsizligiň kömegi bilen köp tassyklamalary ýeňillik bilen subut edip bolýar.

Mesele. Käbir ABC üçburçlugyň içinde erkin K nokat alnypdyr. Bu nokatdan üçburçlugyň de-pelerine çenli uzaklyklaryň jeminiň üçburçlu-gyň perimetriniň ýarysyndan uludygyny subut etmeli.

Çözülişi. AKB, AKC we BKC üçburçluklara se-redeliň we olaryň her biri üçin üçburçlygyň deňsizligini ýazalyň: $AK+KB>AB$, $AK+KC>AC$, $BK+KC>BC$. Bu üç deňsizlikleri agzama-agza goşup we alnan deňsizligi 2-ä bölüp subut etmek talap edilýän deňsizligi alarys: $AK+BK+KC>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$

§6. Gönüburçly üçburçluk

$\angle A+\angle B=90^{0}$. a, b – katetler, c- gipotenuza

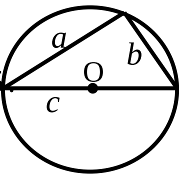


Pifagoryň teoremasy. Gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň kwadratlarynyň jemi onuň gipotenuzasynyň kwadratyna deňdir.

$c^2=a^2+b^2$

Mysal üçin, $a=3, b=4$, onda

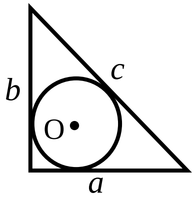
$c^2=3^2+4^2=25, c=\sqrt{25}=5, c=5$



Gönüburçly üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy:

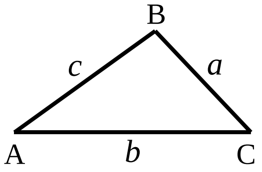
$R=\frac{c}{2}$.

Gönüburçly üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusy:



$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Kosinuslar teoremasy



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

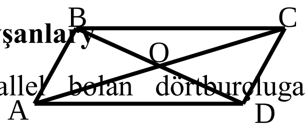
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C$

Sinuslar teoremasy

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

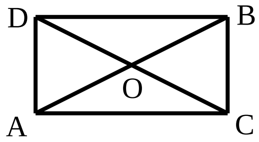
R - üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy.

§7. Parallelogramyň nyşanlary



Garşylykly taraplary jübüt-jübütden parallel bolan dörtburçluga *parallelogram* diýilýär.

Ähli burçlary göni burçlar bolan parallelograma *gönüburçluk* diýilýär. Gönüburçlugyň diagonal-lary özara deňdir we olar kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýärler.



Mesele. Göni burçly üçburçlugyň göni burçunyň depesinden geçirilen medianasynyň gipote-nuzanyň ýarysyna deňdigini subut etmeli.

Çözülüş. Goý, *ABC* üçburçlugyň *C* burçy göni bolsun. *B* nokadyň üsti bilen

AC tarapa, *A* nokadyň üsti bilen bolsa *BC* tarapa parallel göni çyzyklary geçireliň. Alnan parallelogram gönüburçluk bolany üçin onuň diagonallary özara deň we kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýärler. Diýmek, *OC*=0,5*AB*.

Aşakdaky nyşanlar boýunça dörtburçlugyň parallelogramdygyny ýa-da däldigini kesgitläp bolýar.

1. Eger $AB=CD$, $AB\|CD$ bolsa, onda $ABCD$ parallelogramdyr.

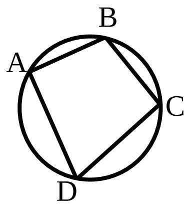
2. Eger $AB=CD$, $BC=AD$ bolsa, onda $ABCD$ parallelogramdyr.

3. Eger $AO=OC$, $BO=OD$ bolsa, onda $ABCD$ parallelogramdyr.

Parallelogramyň diagonallarynyň häsiýeti

$BD^2+AC^2=2AB^2+2AD^2$.

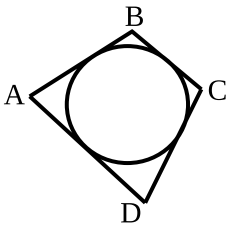
§8. Içinden we daşyndan çyzylan dörtburçluk



1. *Içinden çyzylan dörtburçluk*

$\angle A+\angle C=180^0$.

Tersine, eger $\angle A+\angle C=180^0$ bolsa, onda $ABCD$ dörtburçlugyň daşyndantöwerek çyzyp bolar.



Ptolomeýiň teoremasy. Içinden çyzylan dörtburçlukda $BD\bullet AC=AB\bullet CD+AD\bullet BC$.

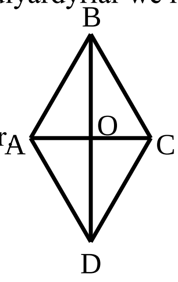
2. Daşyndan çyzylan dörtburçluk $AB+CD=AD+BC$.

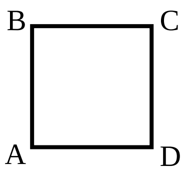
Tersine, eger$AB+CD=AD+BC$ bolsa, onda $ABCD$ dörtburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolar.

§9. Romb we kwadrat.

Ähli taraplary deň bolan parallelograma *romb* diýilýär.*Rombyň diagonallary* özara perpendikulýardyrlar we rombyň her bir burçuny deň ýarpa bölýärler.

Ähli taraplary deň bolan gönüburçluga *kwadrat* diýilýär.

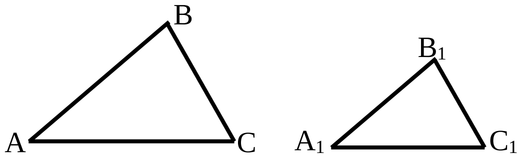




Kwadrata burçlary gönüburçly

bolan romb hem diýip bolar.

§10. Üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlary



1. Eger $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ bolsa, onda

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. Eger $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1$ we $\angle A=\angle A_1$ bolsa, onda $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

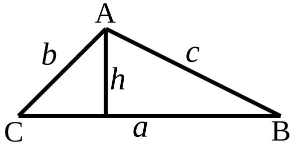
3. Eger $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ bolsa, onda

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Üçburçlugyň iki tarapynyň ortalaryny birikdir-ýän kesime onuň *orta çyzygy* diýilýär. Üçburçlugyň orta çyzygy onuň üçünji tarapyna paralleldir we onuň ýarysyna deňdir.

§11. Köpburçluklaryň meýdanlary

Üçburçlugyň meýdany



$S=\frac{1}{2}a \cdot h$

$S=\frac{1}{2}bc \cdot \sin A.$

Mysal üçin, berlen üçburçlugyň esasy $a=12m,$ beýikligi $h=8m$ bolsa, onda $S=\frac{1}{2}ah$ formulany ulanyp taparys: $S=\frac{1}{2}\cdot 12m\cdot 8m=48m^2$.Üçburçlugyň meýdanynyň başga formulalary hem bar:

$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$, bu ýerde R - ABC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy.

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$, bu ýerde r- ABC üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusy.

$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, tarapy a – deň bolan deňtaraply üçburçlugyň meýdany.

$S=\frac{a\cdot b}{2}$, katetleri a we b bolan gönüburçly üçburçlugyň meýdany.

Geronyň formulasy

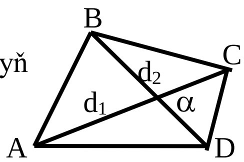
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, bu ýerde p üçburçlugyň ýarym perimetri:

$p=\frac{a+b+c}{2}$. Mysal üçin, üçburçlugyň taraplary belli bolsa: $a=12m, b=10m, c=8m.$ Onda

$$p=\frac{12+10+8}{2}m=15m,$$

$$S=\sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)}m^2\approx 39{,}69m^2$$

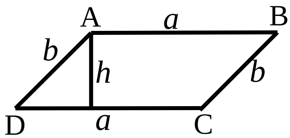
Dörtburçlugyň meýdany



$S=0{,}5\cdot d_1\cdot d_2\cdot \sin\alpha$, bu ýerde d_1 we d_2 dörtburçlugyň diagonallary, α bolsa olaryň arasyndaky burç.

Paralellogramyň meýdany

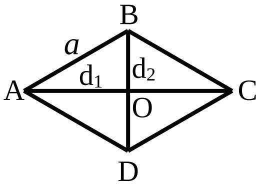
S=*a*•*h* ;   *S*=a*b*•*sin A.*



Mysal üçin, parallelogramyň esasy 4 m ,beýikligi 10 m bolsa, onda $S = ah = 4.\cdot 10m^2 = 40m^2$.

Rombyň meýdany

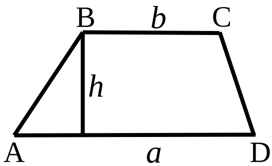
$S = a^2 \sin A;\quad S = \frac{1}{2}d_1 d_2$



A – taraplaryň arasyndaky burç, d_1 we d_2 –diagonallar.

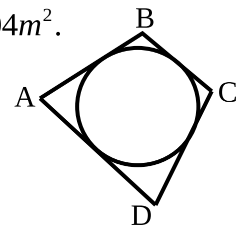
Trapesiýa we onuň meýdany

Iki tarapy parallel we beýleki iki tarapy bolsa parallel bolmadyk dörtburçluga *trapesiýa* diýilýär. Trapesiýanyň parallel taraplaryna onuň *esaslary,* beýleki iki tarapyna bolsa *gapdal taraplary* diýilýär. Trapesiýanyň gapdal tarapla-rynyň ortalaryny birikdirýän kesime onuň *orta çyzygy* diýilýär. Trapesiýanyň orta çyzygy onuň esaslaryna paralleldir we olaryň jeminiň ýarysyna deňdir.



Trapesiýanyň meýdany: S=$\frac{a+b}{2}\cdot h$

Mysal üçin, trapesiýanyň esaslary we beýiklikleri berlen bolsa: $a = 16m, b = 10m, h = 8m.$ Onda $S = \frac{16+10}{2}\cdot 8m^2 = 204m^2$.

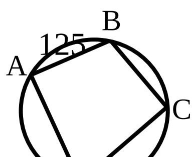


Daşyndan çyzylan dörtburçlugyň meýdany

S=(*AB*+*BC*+*CD*+*AD*)•*r*

(*r*-içinden çyzylan töweregiň radiusy).

Içinden çyzylan dörtburçlugyň



meýdany

Eger *AB*=*a*, *BC*=*b*, *CD*=*c*, *AD*=*d* we $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

belgilemeleri girizsek, onda

ABCD içinden çyzylan dörtburçlugyň meýdany

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ formula boýunça tapylýar.

§12. Töwerek we tegelek.

Berlen nokatdan berlen uzaklykda ýerleşýän ähli nokatlaryň emele getirýän geometrik figurasyna *töwerek* diýilýär. Berlen nokada *töweregiň merkezi* diýilýär.

Töweregiň merkezini onuň islendik nokady bilen birikdirýän kesime *töweregiň radiusy* diýilýär.

Töwerek bilen diňe bir umumy nokady bolan göni çyzyga töwrege *galtaşýan çyzyk*, bu umumy nokada bolsa *galtaşma nokat* diýilýär.

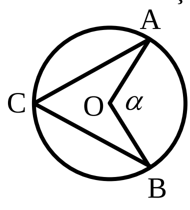
Töwerege galtaşýan göni çyzyk bu töweregiň galtaşma nokada geçirilen radiusyna perpendikulýardyr.

Töwerek bilen diňe iki umumy nokady bolan göni çyzyga töwregi *kesiji çyzyk* diýilýär.

Töweregiň islendik iki nokadyny birikdirýän kesime *horda* diýilýär.

Töweregiň merkezinden geçýän horda *diametr* diýilýär.

Eger töweregiň iki hordasy kesişýän bolsalar, onda bir hordanyň kesimleriniň köpeltmek hasyly beýleki hordanyň kesimleriniň köpeltmek hasylyna deňdir. Tekizligiň töwerek bilen çäklenen bölegine *tegelek* diýilýär. Depesi töwere-giň merkezinde bolan burça *merkezi burç* diýilýär.



$\angle AOB$ – merkezi burç; Depesi töweregiň üstünde bolup, taraplary bolsa töweregi kesip geçýän burça

içinden çyzylan burç diýilýär. $\angle ACB$ – içinden çyzylan burç.

Içinden çyzylan burç öz daýanýan dugasynyň ýarysy bilen ölçenilýär.

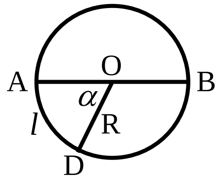
$\angle AOB=\alpha°$; $\cup AB=\alpha°$ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cup AB.$

1° deň burç töweregiň $\frac{1}{360}$ bölegine deňdir.

§13. Töweregiň we onuň dugasynyň uzynlyklary . Tegelegiň we onuň sektorynyň meýdanlary.

$C=2\pi R=\pi d$ -töweregiň uzynlygy (π≈3,141…)

$l=\frac{\pi R\alpha^0}{180^0}$ - AD duganyň uzynlygy.



$S=\pi R^2=\frac{\pi d^2}{4}$ - tegelegiň meýdany.

$S=\frac{\pi R^2\alpha^0}{360^0}$ - AOD sektoryň meýdany.

§14. Wektorlar

Özüniň san bahasy we giňişlikdäki ugry bilen häsiýetlendirilýän fiziki ululyklara wektor ululyklar ýa-da *wektorlar* diýilýär.

$A \longrightarrow B$

$\overrightarrow{AB}$ wektor

Başgaça, haýsy ujunyň başlangyjydygy, haýsy ujunyň bolsa ahyrydy-

gy (soňydygy) görkezilen kesime ugrukdurylan kesim ýa-da *wektor* diýilýär.

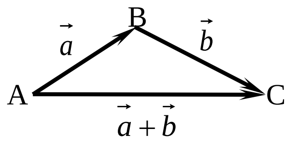
Eger wektoryň başlangyjy we ahyry gabat gelse, onda oňa *nol wektor* diýilýär.

Eger nol däl wektorlar bir göni çyzygyň ýa-da parallel göni çyzyklaryň üstünde ýatýan bolsalar, onda olara *kollinear wektorlar* diýil-ýär. Kollinear we bir ugra ugrukdyrylan wek-torlara *ugurdaş*, kollinear we garşylykly ugra ugrukdyrylan wektorlara *garşylykly ugrukdy-rylan* wektorlar diýilýär.

Eger wektorlar ugurdaş we olaryň uzynlyklary deň bolsalar, onda olara *deň wektorlar* diýilýär.

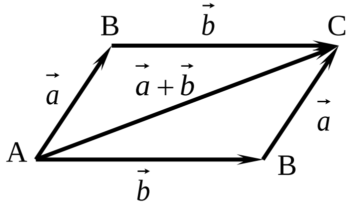
Wektolary goşmagyň üçburçluk düzgüni.

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



Wektolary goşmagyň parallelogram düzgüni.

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



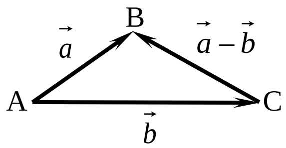
Wektorlary aýyrmak.

$\vec{b}$ wektor bilen goşulanda

$\vec{a}$ wektory berýän

wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$

wektorlaryň *tapawudy* diýilýär $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$.



Wektorlary goşmagyň kanunlary.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar üçin

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (orun çalşyrma kanuny);

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (utgaşdyrma kanu-ny) deňlikler dogrudyr.

Wektorlary saklaýan iki göni çyzygyň arasyn-daky burça bu *iki wektoryň arasyndaky burç* diýilýär.

Iki wektoryň *skalýar köpeltmek hasyly* diýip olaryň uzynlyklarynyň ol wektorlaryň arasyn-daky burçuň kosinusyna köpeltmek hasylyna aýdylýar. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ (bu ýerde α

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç).

Wektorlary skalýar köpeltmegiň häsiýetleri.

Islendik $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlar we islendik k san üçin aşakdaky gatnaşyklar dogrudyr:

1. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ (orun çalşyrma kanuny).

2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (paýlaşdyrma kanuny).

3. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\vec{b})$ (utgaşdyrma kanuny).

Wektorlary skalýar köpeltmegiň kesgitlemesin-

den aşakdaky deňlikleri ýazyp bileris:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},\quad \vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\quad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}.$$

§15. Koordinatalar usuly

Wektoryň her koordinatasy onuň ahyrynyň koordinatasy bilen başlangyjynyň koordinata-synyň tapawudyna deňdir. Eger $A(x_1;\ y_1)$ we $B(x_2;\ y_2)$ bolsa, onda AB wektoryň koordinata-lary $\{x_2\text{-}x_1;\ y_2\text{-}y_1\}$ bolar. AB wektoryň uzynlygy ýa-da A we B nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\left|\overrightarrow{AB}\right|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ formula boýunça tapylýar. $\vec{a}\{x;\ y\}$ wektoryň uzynlygy $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ formula arkaly tapylýar.

AB kesimiň ortasynyň her bir koordinatasy onuň uçlarynyň degişli koordinatalarynyň jeminiň ýarysyna deňdir, ýagny $x = 0{,}5 \cdot (x_1 + x_2)$; $y = 0{,}5 \cdot (y_1 + y_2)$.

Merkezi $A(x_0; y_0)$ nokatda we radiusy *r* bolan töweregiň deňlemesi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

Merkezi *A*(0; 0) nokatda we radiusy *r* bolan töweregiň deňlemesi: $x^2+y^2=r^2$.

STEREOMETRIÝA

§16. Stereometriýanyň aksiomalary. Giňişlikde parallellik

Geometriýanyň giňişlik jisimleriniň we figura-larynyň häsiýetlerini öwrenýän bölümine *stere-ometriýa* diýilýär. Stereometriýanyň esasynda ýatan aksiomalary we olardan gelip çykýan käbir netijeleri getireliň.

1. Bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan üç nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirip bolar.

2. Eger göni çyzygyň iki nokady tekizlikde ýatýan bolsa, onda ol göni çyzygyň ähli nokatlary bu tekizlikde ýatýandyr.

3. Eger iki tekizligiň umumy bir nokady bar bolsa, onda olar bu nokat arkaly geçýän göni çyzyk boýunça kesişýärler.

Bu aksiomalardan aşakdaky netijeler gelip çykýar.

1. Göni çyzyk we onuň üstünde ýatmaýan nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirip bolar.

2. Kesişýän iki göni çyzygyň üstünden bir we diňe bir tekizlik geçirip bolar.

Eger giňişlikde iki göni çyzyk bir tekizlikde ýatýan we kesişmeýän bolsalar, onda olara *parallel* göni çyzyklar diýilýär.

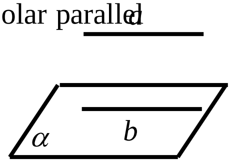
Bir tekizlikde ýatmaýan göni çyzyklara *atanaklaýyn* göni çyzyklar diýilýär.

Eger iki göni çyzygyň haýsy hem bolsa biri tekizlikde ýatyp, beýlekisi hem bu tekizligi birinji göni çyzygyň üstünde ýatmaýan nokat arkaly kesýän bolsa, onda olar atanaklaýyn göni çyzyklardyr.

Atanaklaýyn iki göni çyzyga parallel we ke-sişýän iki göni çyzygyň arsyndaky burça bu atanaklaýyn iki göni çyzygyň arasyndaky burç diýilýär.

Atanaklaýyn göni çyzyklaryň umumy per-pendikulýarynyň uzynlygyna olaryň arasyndaky uzaklyk diýilýär.

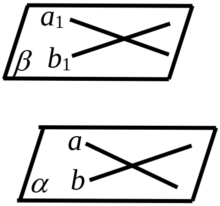
Eger a göni çyzyk α tekizligi kesmeýän bol-sa, ýagny a göni çyzyk bilen α tekizligiň umu-my nokady bolmasa, onda olar parallel diýilýär.



Eger berlen tekizligiň üstünde ýatmaýan a göni çyzyk, tekizligiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir b göni çyzyga parallel bolsa, onda ol berlen tekizlige paralleldir.

Parallel tekizlikler. Iki tekizligiň umumy nokady ýok bolsa, onda olara parallel tekizlikler diýilýär.

Iki tekizligiň parallellik nyşany



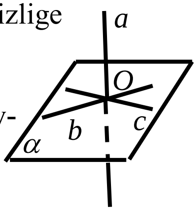
Eger α tekizligiň kesişýäniki a we b göni çyzygy beýleki bir β tekizligiň kesişýän iki a_1 we b_1 göni çyzygyna degişlilik-de parallel bolsalar, onda ol tekizlikler paralleldirler.

Parallel tekizlikleriň häsiýetleri

1. Eger parallel iki tekizlik üçünji tekizlik arkaly kesilýän bolsa, onda kesişme çyzyklary paralleldirler.
2. Parallel göni çyzyklaryň parallel iki tekizligiň arasynda galan kesimleri deňdirler.
3. Eger göni çyzyk parallel iki tekizligiň birini kesýän bolsa, onda ol beýleki tekizligi hem kesýändir.
4. Eger tekizlik parallel iki tekizligiň birini kesýän bolsa, onda ol beýleki tekizligi hem kesýändir.
5. Tekizligiň daşynda berlen nokat arkaly bu tekizlige parallel bolan bir we diňe bir tekizlik geçirip bolar.

§17. Giňişlikde perpendikulýarlyk. Göni çyzygyň proýeksiýasy. Ikigranly burç

Eger göni çyzyk tekizlik bilen kesişip onuň islendik göni çyzygyna perpendikulýar bolsa, onda göni çyzyk tekizlige perpendikulýar diýilýär.



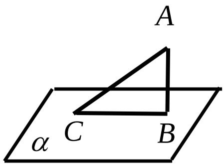
Göni çyzygyň we tekizligiň perpenikulýarlyk nyşany. Eger göni çyzyk tekizlikde ýatan kesişýän iki göni çy-zygyň her birine perpendikulýar bolsa, onda ol bu tekizlige hem perpendikulýardyr.

Eger tekizlik parallel iki göni çyzygyň birine perpendikulýar bolsa, onda ol onuň beýlekisine hem perpendikulýardyr. Tersine, şol bir tekizli-ge perpendikulýar iki göni çyzyk paralleldir.

Eger kesim tekizlige perpendikulýar bolup, onuň bir ujy bu tekizlikde bolsa, onda oňa ber-len *tekizlige perpendikulýar* diýilýär.

Eger bu kesim tekizlige perpendikulýar bol-masa we onuň bir ujy bu tekizlikde bolsa, onda bu kesime *ýapgyt çyzyk* diýilýär.

Nokatdan tekizlige inderilen perpendikulýa-ryň uzynlygyna nokatdan tekizlige çenli *uzaklyk* diýilýär.



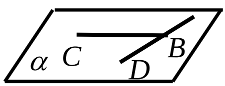
Eger şol bir *A* nokatdan α tekizlige *AB* perpendikul-ýar we *AC* ýapgyt çyzyk geçirilen bolsa, onda ýap-gyt çyzgyň uzynlygy perpendikulýaryň uzynly-gyndan uludyr. *BC* kesime bolsa *AC* ýapgyt çy-zygyň *α tekizlige bolan proýeksiýasy* diýilýär.

Giňişligiň islendik nokadyndan berlen tekiz-lige perpendikulýar bolan bir we diňe bir göni çyzyk geçirip bolar.

Üç perpendikulýar hakynda teorema.

Tekizlikde *AB* ýapgyt çyzygyň *B* esasyndan onuň *CB* proýeksi

-

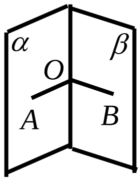


ýasyna geçurulen *DB* perpen-dikulýar göni çyzyk *AB* ýap-gyt çyzygyň özüne-de perpendikulýardyr. Tersine, eger tekizlikde *BD* göni çyzyk *AB* ýapgyt çyzy-ga perpendikulýar bolsa, onda ol ýapgyt çyzy-gyň *BC* proýeksiýasyna hem perpendikulýar-dyr.

Tekizligi kesýän we oňa perpendikulýar bol-madyk göni çyzyk bilen onuň proýeksiýasynyň arasyndaky burça *göni çyzyk bilen tekizligiň arasyndaky burç* diýilýär.

Ikigranly burçlar. Tekizligiň üstünde ýatan göni çyzyk tekizligi iki sany ýarym tekizlige bölýär. Iki sany ýarym tekizlikden we olaryň kesişme çyzygyndan emele gelen figura *ikig-ranly burç* diýilýär. Ikigranly burçlary emele getirýän ýarym tekizliklere ikigranly burçuň *granlary* diýilýär. Ýarym tekizlikleriň umumy araçägine ikigranly burçuň *gapyrgasy* diýilýär.

Ikigranly burçuň gapyr-gasynyň üstünde islendik O nokady alyp, oňa α tekizlik-de OA we β tekizlikde OB perpendikulýarlary geçireliň. Alnan AOB burça bu ikigran-ly burçuň *çyzyk burçy* diýilýär.



Eger kesişýän tekizlikleriň arasyndaky burç 90° deň bolsa, onda olara perpendikulýar tekizlikler diýilýär.

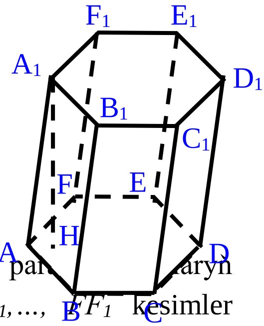
Iki tekizligiň perpendikulýarlyk nyşany. Eger bir tekizlik beýleki tekizlige perpendikulýar bo-lan göni çyzygyň üsti bilen geçse, onda ol tekiz-likler perpendikulýardyrlar.

§18. Köpgranlyklar, olaryň üstleriniň meýdany we göwrümi

Üsti tükenikli sanly tekiz köpburçluklardan ybarat bolan jisime köpgranlyk diýilýär.

Prizma

Iki grany parallel tekizliklerde ýatan deň köp-burçluk bolup, galan granlary parallelogramlar-dan düzülen köpgranlyga *prizma* diýilýär. Parallel tekizliklerde ýatan $ABCDEF$ we $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ köp-burçluklara *prizmanyň esaslary*, AA_1B_1B, BB_1C_1C,…, FF_1A_1A parallelog-ramlara *prizmanyň*



gapdal granlary diýilýär. Bu köpburçluklaryň we pa aryň taraplary *prizmanyň gapyrgalarydyr.* AA_1, BB_1,…, FF_1 kesimler *prizmanyň gapdal gapyrgalarydyr.*

Prizmanyň esasynyň haýsy hem bolsa bir nokadyndan beýleki esasyň tekizligine geçirilen perpendikulýar kesime *prizmanýn beýikligi* diýilýär. Eger prizmanyň gapdal gapyrgalary esaslaryna perpendikulýar bolsalar, onda oňa *göni prizma*, tersine bolan halda *ýapgyt prizma* diýilýär.

Prizmanyň gapdal üsti $S_{g.ü.}=P_{p.k.}\bullet\ell$ formula, doly üsti bolsa $S_{d.ü.}=S_{g.ü.}+2S_{es}$ formula boýunça tapylýar. Bu formulalarda $P_{p.k.}$- prizmanyň per-pendikulýar kesiginiň perimetri,

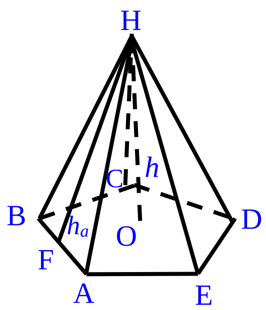
ℓ- gapdal gapyrgasy.

Göni prizmanyň göwrümi $V=S_{es}\bullet h$ (h-gapdal gapyrga bilen gabat gelýär) formula, ýapgyt prizmanyň göwrümi $V=S_{es}\bullet h$ ($h=A_1H$ – esasa inderilen beýiklik) formula boýunça tapylýar.

Piramida

Bir grany köpburçluk bolup, galan granlary umumy depeleri bolan üçburçluklardan ybarat bolan köpgranlyga *piramida* diýilýär.

ABCDE köpburçluga piramidanyň *esasy*, *ABH, BCH,…, EAH* üçburçluklara piramida-nyň *gapdal granlary*, *H* nokada piramidanyň *depesi* diýilýär. Piramidanyň depesinden onuň esasyna geçirilen *HO* perpendiku-lýara piramidanyň *beýikligi* diýilýär. Eger piramidanyň esasy dogry köpburçluk bolup, onuň merkezini piramidanyň depesi bilen birikdirýän kesim piramidanyň be-ýikligi bolsa, onda oňa

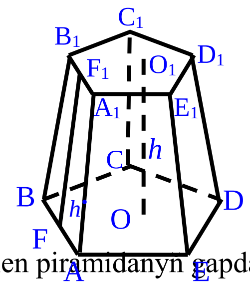


dogry piramida diýilýär. Dogry piramidanyň gapdal granlary özara deň bolan deňýany üçburçluklardyr. Onuň *ABH* gapdal granynyň *HF* beýikligine dogry pirami-danyň *apofemasy* diýilýär. Dogry piramidanyň gapdal üsti $S_{g.ü.}=0{,}5P\cdot h_a$ formula, doly üsti bolsa $S_{d.ü.}=S_{g.ü.}+S_{es.}$ formula boýunça tapylýar. Bu ýerde h_a- dogry piramidanyň apofemasy-nyň uzynlygy, P- bolsa dogry piramidanyň esasynyň perimetri.

Piramidanyň göwrümi $V=\frac{1}{3}S_{es.}\cdot h$ (h- piramidanyň beýikligi) formula boýunça tapylýar. Mysal üçin, piramidanyň meýdany $S=36m^2$, beýikligi $h=6m$ deň bolsa,onda $V=\frac{1}{3}=36\cdot 6m^3=72m^3$.

Kesilen piramida

Piramidany onuň esasyna parallel tekizlik bi-len kesmek arkaly *kesilen piramida* diýilip at-landyrylýan köpgranlyk alynýar. Kesilen piramidanyň parallel tekizliklerde ýatýan $ABCDE$ we $A_1B_1C_1D_1E_1$ granlaryna *esaslary*, beýleki AA_1B_1B, BB_1C_1C, ..., EE_1A_1A granlaryna bolsa *gapdal granlary* diýilýär.



Dogry kesilen piramidanyň gapdal üsti $S_{g.ü.}=0{,}5(P+p)\cdot h^*$ (P we p- dogry kesilen pi-ramidanyň esaslarynyň perimetrleri, h^*-apo-femasynyň uzynlygy) formula, doly üsti $S_{d.ü.}=S_{g.ü.}+S_{es}+S'_{es.}$ formula, göwrümi bolsa

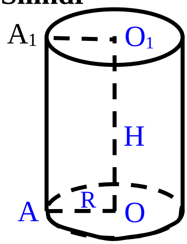
$$V=\frac{1}{3}h(S_{es}+S'_{es}+\sqrt{S_{es}\cdot S'_{es}})$$

(S_{es} we S'_{es}- kesilen piramidanyň esaslarynyň meýdanlary) formula boýunça tapylýar.

§19. Aýlanma jisimleri

Silindr

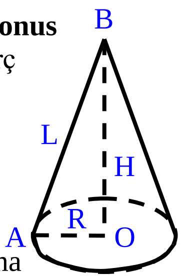
AA_1O_1O gönüburçlugy tarap-larynyň biriniň daşynda (mese-



lem, OO_1) aýlamak bilen *göni togalak silindr* emele getirmek bolar. Şunlukda $AO=A_1O_1=R$ silindriň *radiusy*, AA_1 silindriň *emele getirijisi*, OO_1 bolsa silindriň *oky* diýilýär.

Silindriň gapdal üsti $S_{g.ü.}=2\pi RH$ formula, doly üsti $S_{d.ü.}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R)$, göwrümi bolsa $V=\pi R^2H$ formula boýunça tapylýar. Bu formulalarda R-silindriň esasynyň radiusy, H- silindriň beýikligi.

Konus

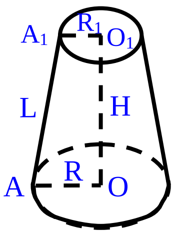


O burçy göni bolan AOB gönüburçly üçburçlugy katetleriniň biriniň (meselem, OB katetiniň) daşynda aýlasak, göni togalak *konus* diýilýän geometrik jisim emele geler. Şunlukda gönüburçly üçburçlugyň $AB=L$ gipotenuzasyna konusyň *emele getirijisi*, $AO=R$ katetine konusyň *radiusy*, $BO=H$ katetine bolsa konusyň *beýikligi* diýilýär.

Konusyň gapdal üstüniň meýdany $S_{g.ü.}=\pi RL$ formula, doly üstüniň meýdany $S_{d.ü.}=\pi RL+\pi R^2=\pi R(L+R)$ formula, göwrümi bolsa $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$ formula boýunça tapylýar.

Kesilen konus

Konusyň esas bilen oňa parallel kesiji tekiz-ligiň arasynda ýerleşýän bölegine *kesilen konus* diýilýär.



Kesilen konusyň gapdal üstüniň meýdany $S_{g.ü.}=\pi(R+R_1)L$ formula, doly üstüniň meýdany $S_{d.ü.}=\pi(R+R_1)L + \pi R^2+\pi R_1^2$

formula, göwrümi bolsa

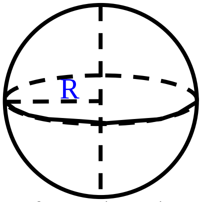
$V=\frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + R_1^2 + R \cdot R_1)$ formula boýunça tapylýar. Bu ýerde R we R_1- kesilen konusyň esaslarynyň radiuslary, H- kesilen konusyň beýikligi, L- kesilen konusyň emele getirijisi.

Şar we onuň bölekleri

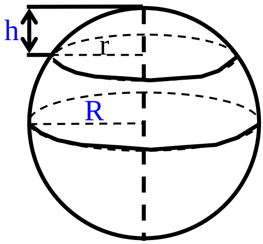
Berlen nokatdan berlen uzaklaykda ýerleşen ähli giňişlik nokatlaryndan düzülen üste *sferik üst* ýa-da *sfera* diýilýär. Sfera bilen çäklenen jisime *şar* diýilýär.

Şaryň üstüniň ýa-da sferanyň meýdany $S_ş=4\pi R^2$ formula, şaryň göwrümi $V_ş=\frac{4}{3}\pi R^3$ formula boýunça tapylýar.

Şary tekizlik bilen iki bölege bölüp, *şar segmentlerini* alarys. Şar segmentiniň üstüniň meýdany $S_{seg.}=2\pi Rh$ formula, onuň göwrümi bolsa



$V_{seg.}=\pi h^2(\mathrm{R}-\frac{h}{3})=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)$ formula boýunça tapylýar. Bu formulalarda R-şaryň radiusy, h- segmentiň beýikligi, r-segmentiň radiusy. Parallel tekizlikleriň arasyndaky şaryň bolegine *şar gatlagy*, sferanyň bölegine *sfera guşaklygy* diýilýär.



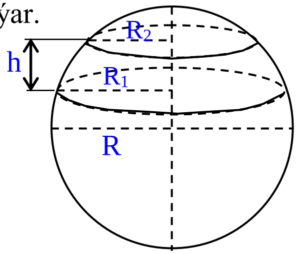
Sfera guşaklygynyň meýdany

$$S_{ş.g.}=2\pi Rh$$

formula, şar gatlagynyň göwrümi bolsa

$$V_{ş.g.}=\frac{1}{6}\pi h(3R_1^2+3R_2^2+h^2)$$

formula boýunça tapylýar.
Bu formulalarda
h- guşagyň beýikligi,
R- şaryň radiusy,
R_1 we R_2- guşagyň esaslarynyň radiuslary.



§20. Analitiki geometriýanyň esaslary.

Tekizlikde göni çyzyk.Gönileriň görnüşleri.

$$Ax+By+C=0 \quad (1)$$

deňlemä göni çyzygyň umumy deňlemesi diýilýär. Goý $A=0$, onda $By+C=0$, $By=-C$,

1. Goý $B=0$, onda $Ax+C=0$, $Ax=-C$,

Göni çyzyga perpendikulýar bolan islendik nul bolmadyk $\vec{n}=\{A,B\}$ wektora göni çyzygyň normal wektory diýilýär.

Berlen nokatdan geçýän we normal wektory bolan göni çyzygyň

$$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{M_1M}=A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

Göni çyzyga parallel bolan, işlendik nul bolmadyk $\vec{n}=(a,b)$ wektora göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory diýilýär. Berlen nokatdan geçýän we ugrukdyryjy wektory bolan göni çyzygyň deňlemesi:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

$M_1(x_1, y_1,)$ we $M_2(x_2, y_2,)$ nokatlardan geçýän gönininiň deňlemesi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ I}$$

Giňişlikde tekizlik we onuň deňlemesi.

Islendik birinji derejeli deňleme tekizligi kesgitleýär $Ax + By + Cz + D = 0$ deňlemä tekizligiň umumy deňlemesi diýilýär.Haýsy hem bolsa $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň we tekizligiň normal wektory $\vec{n}(A, B, C)$ (tekizlige perpendikulýar bolan wektor) berlen bolsa, onda onuň deňlemesi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ we $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekizlikler berlen bolsa,onda

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$ tekizlikler bir-birine paralleldirler,

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$ tekizlikler gabat gelýärler

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ tekizlikler perpendikulýardyr.

Iki tekizligiň arasyndaky burç aşakdaky formula bilen kesgitlenilýär:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Eger-de $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nokatlar bir gönide ýatmaýan bolsalar, onda olaryn üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ kesimlerdäki tekizligiň deňlemesi.

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nokatdan tekizlige çenli aralyk aşakdaky formulanyň kömegi bilen hasaplanýar.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Giňişlikde göni çyzyk.

$\vec{a}$ wektora parallel we berlen $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokatdan geçýän gönüň deňlemesi wektor görnüşinde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$$

Bu ýerde $\vec{r}$ - $M(x, y, z)$ nokadyň radius wektory,

$\vec{r}_0$ - $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň radius wektory,

t – hakyky bahalary kabul edýän parametr.

$\vec{a}$ - gönüň ugrykdyryjy wektory. gönüň deňlemesi koordinatalary boýunça aşakdaky görnüşe eýedir.

$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$

gönüniň kanonik deňlemesini alarys:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ we $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlardan geçýän gönüniň deňlemesi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

iki gönüniň arasyndaky kosinus burç aşakdaky ýaly kesgitlenilýar:

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

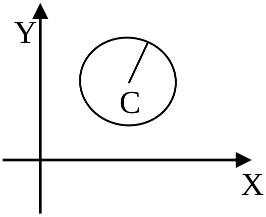
$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nokatdan gönä çenli uzaklyk aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}$$

Ikinji tertipli egriler

Töwerek

Kesgitleme. Merkez diýip atlandyrylýan nokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Töweregiň islendik nokadyny, onuň merkezi bilen , şeýle-de şol kesimiň uzynlygyna radius diýilýär.



$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

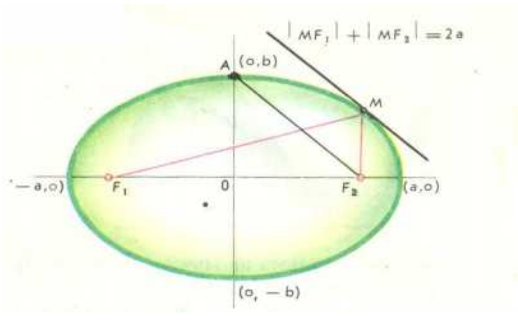
Eger töweregiň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa, onda
$x^2+y^2=R^2$

Ellipis.

Kesgitleme. Fokuslar diýilip atlandyrylýan berlen iki nokda çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik san bolan tekizligiň nokatlar köplügine ellipis diýilýär.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

bu deňlemä ellipsiň kononik deňlemesi diýilýär.



Giperbola we

Kesgitleme. Fokuslar diýlip atlandyrylýan berlen iki nokatdan uzaklyklarynyň tapawudy hemişelik san bolan tekizligiň nokatlar köplügine giperbola diýilýär.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parabola.

Kesgitleme. Fokus diýip atlandyrylýan berlen nokatdan we direktrisa diýlýp atlandyrylýan berlen göni çyzykdan deň daşlykda duran tekizligiň nokatlar köplügine parabola diýilýär.

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

Bu deňlemä parabolanyň kanonik deňlemesi diýilýär.

Awtorlar barada maglumat.

Muhammet Rahymow – fizika- matematika ylymlaryň doktory, professor, Halkara kompýuter ylymlary we sistemalar akademiýasynyň akademigi,ýokara derejeli matematika mugallymy, Türkmenistanyň Goranmak ministrliginiň Beýik Saparmyrat Türkmenbaşy adyndaky Harby institutynyň Dünýä tejribesini öwreniş we umumy ylymlar (DTÖ we UY) kafedrasynyň başlygy.

Jeren Kakajanowna Atabaýewa- DTÖ we UY kafedrasynyň uly mugallymy.

Annageldi Kaşaňow- tehniki ylymlaryň kandidaty, Türkmenistanyň ussat mugallymy, ýokary derejeli matematika we fizika mugallymy, DTÖ we UY kafedrasynyň mugallymy.