A. Garajaýew, A. Öwezow, O. Meläýewa

YKDYSADY MATEMATIKI MODELLER WE USULLAR

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2017

UOK 330.4 + 519.8 : 378
G 19

Garajaýew A. we başg.
G 19 **Ykdysady matematiki modeller we usullar.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2017.

Okuw kitabynda ykdysady prosesleri derňemekde ulanylýan esasy matematiki modelleriň görnüşleri, şeýle hem dürli ykdysady meseleleriň goýluşynyň we olaryň çözülişiniň algoritmi berlendir.

Ykdysady meseleleriň kesgitsizlikdäki meýilnamalary matematiki modelleriň düzülişinde, ýasama usullaryny peýdalanyp seredilýän meseleleriň derňelişinde ulanylýar.

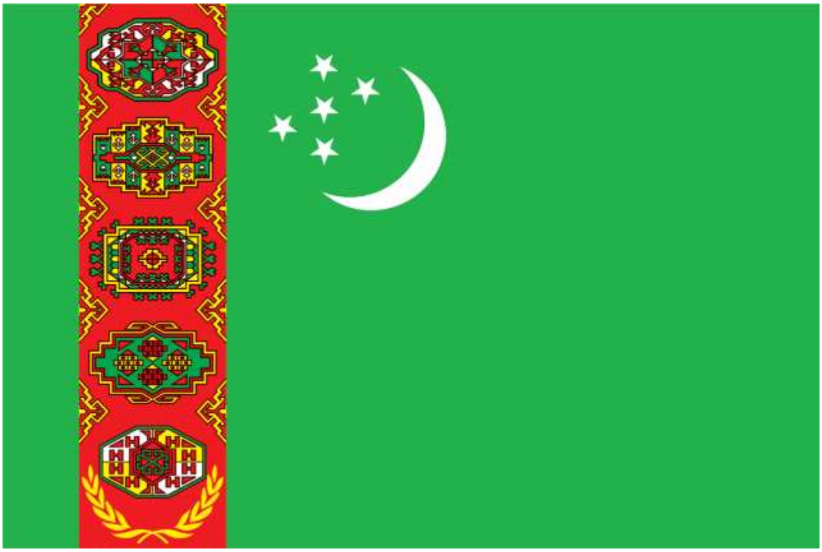
Okuw kitabynda ykdysadyýetde matematiki usullara we modellere degişli giň matematiki meselelere seredilýär. Şeýle hem, çyzykly we çyzykly däl programmirleme meseleleri, optimal dolandyrma meseleleri, optimallaşdyrma meseleleriniň san usullary bilen çözülişini amala aşyrmak üçin degişli algoritmleriň düzülişiniň gurluşyna aýratyn üns berilýär.

Okuw kitaby matematiki derňewiň we çyzykly algebranyň esaslary bilen tanyş bolan ýokary okuw mekdepleriniň maliýe, ykdysadyýet, amaly matematika, informatika we ykdysady--tehniki hünärleri boýunça bilim alýan talyplara niýetlenilip, ondan ykdysadyýetde matematiki modelleri ulanýan we içgin gyzyklanýan, oňa degişli derňewleri geçirýän ylym-bilim işgärleri hem peýdalanyp bilerler.

TDKP № 231, 2017 KBK 65.05 + 22.12 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

SÖZBAŞY

Ýurdumyzyň ykdysadyýetiniň hil taýdan özgerdilmegi üçin Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň belleýşi ýaly, ykdysady ösüşi ylmy taýdan üpjün etmegi, ýagny onuň strategik ugurlaryny ylmy taýdan esaslandyrmak we bazar ykdysadyýetiniň üýtgemelerini öňünden kesgitläp dolandyrmakda ylma esaslanan taktiki usullary saýlap almagy üpjün etmek zerurdyr. Bu jogapkärli iş geljekki hünärmenlere düýpli ykdysady bilim bermeklige esaslanýar. Düýpli ykdysady bilim almak bolsa geljekki ykdysatçy hünärmende hemmetaraplaýyn taýýarlygyň, şol sanda jemgyýetiň ösüş aýratynlyklaryna akyl ýetirmek, onuň esasynda ykdysadyýetiň ösüşiniň umumy kanunalaýyklyklarynyň biziň ýurdumyzdaky milli aýratynlyklaryna baglylykdaky ykdysady görkezijileriň ösüşine aň ýetirip, zerur halatynda çalt çözgüt kabul etme ukybynyň terbiýelenmegini göz öňünde tutýar. Hünärmeniň umumy dünýägaraýşynyň terbiýelenmegi, onuň pikir ýöretme ukybynyň we zerur halatynda dürli şertlere bagly ýagdaýlarda iň gowy çözgüdi kabul edip alma ukybynyň ösmegi köp derejede oňa berlen düýpli matematiki bilime baglydyr.

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň saýasynda Berkarar döwletiň bagtyýarlyk döwründe ýurdumyzyň durmuş-ykdysady ösüşiniň ähli ugurlarynyň sazlaşykly ösmegini üpjün etmäge gönükdirilen iňňän oýlanyşykly, öňdengörüjilikli, ynsanperwer syýasat durmuşa geçirilýär. Munuň özi biziň gazanýan ähli üstünliklerimiziň girewi bolup hyzmat edýär. Türkmenistanda işjeň alnyp barylýan maýa goýum syýasatynyň ýurdumyzy durmuş-ykdysady taýdan ösdürmäge gönükdirilen maksatnamalary üstünlikli durmuşa geçirmek üçin uly mümkinçilikleri döredýär.

Ýurdumyzda ylmy-tehniki progresiň üstünlikli amala aşyrylyşy, adamyň işiniň dürli meseleleriniň çözülişi innowasion tehniki serişdeleriň we matematiki usullary ulanylyşy bilen baglydyr.

Okuw kitabynda ykdysady prosesleriň derňelýän ýagdaýynda ulanylýan matematiki modelleriň esasy görnüşleri we meseleleriň goýluşlary getirilendir. Aýratyn baplarda kesgitsizlik şertlerinde meýilnamalaşdyrma we ykdysady meseleleri seljermekde ýasama usullaryň ulanylyşy berlendir.

Belli bolşy ýaly, matematikada, modelde, ykdysadyýetde we beýleki köp sanly ugurlarda matematiki ylym-bilim barlaglarynyň doly şekilini, ýagny analitiki hasaplamalary we özgertmeleri amala aşyrmak, matematiki hasaplamalary geçirmek, alnan netijeleri gaýtadan işlemek we ş.m. hereketleri ýerine ýetirmek üçin dürli maksatnamalar, integrirlenen ulgamlar işlenip düzülendir, olara mysal hökmünde Mat Lab 6.5, Excel, QSB we ş. m. görkezmek bolar.

Kitap 12 bapdan ybarat bolup, kitabyň başynda modeller we modelirlemek düşünjeleri, modelleriň toparlara bölünişi, modelleri gurmagyň ýörelgeleri, modelirlemegiň esasy tapgyrlary hem-de modellerde başlangyç meseleler getirilýär.

I bapda çyzykly programmirlemegiň we ikileýin meseläniň düşünjeleri, meseleleriň goýluşy, çyzykly programmirlemegiň iki näbellili meselesini çözmekligiň grafiki usuly, çyzykly programmirlemegiň umumy meselesini çözmegiň simpleks usuly, bu usuly beýan etmegiň dürli görnüşleri, bazis çözüwler, başlangyç bazis meýilnamasyny gurmak we ş. m. getirilýär.

II bapda ulag meselesiniň goýluşy, meseläniň matematiki modeli, ulag meselesiniň aýratynlyklary, ulag meselesinde getirilýän umumy meseleler, ulag meselesiniň daýanç çözüwini Demirgazyk-Günbatar usuly bilen tapmak, ulag meselesiniň modellerini käbir ykdysady meseleleri çözmekde hem derňemekde ulanmak we ş.m. barada maglumatlar berilýär.

III bapda dinamiki programmirleme meseleleri,ýagny iň gysga ýol meselesi, dinamiki programmirlemegiň usullary bilen çözülýän käbir ykdysady meseleler öwrenilýär we meseleleriň çözülişiniň kompýuter programmasynda görkezilişi getirilýär.

IV bapda bitin sanly çyzykly programmirlemegiň diskret, parametriki we ülüşli çyzykly programmirleme meseleleri öwrenilýär, onda bitin sanly programmirleme meselesini çözmegiň kommiwoýa-žeriň meselesi hem öwrenilýär we bu meseleleriň çözülişi kompýuter programmasynda görkezilýär.

V bap çyzykly däl programmirleme meselelerini öwrenmäge degişli bolup, onda bu görnüşli meseleleri çözmegiň grafiki usuly, Lagranžyň köpeldijiler usuly, gradiýentler usuly boýunça çözmegiň algoritmi getirilýär.

VI bapda ykdysady stohastiki programmirleme meselesiniň goýluşy, stohastiki meseläniň iki tapgyrda çözülişi, stohastiki meseläniň düzetmesiz çözülişi we stohastiki meseläniň umumylaşdyrylan gradiýentler usuly bilen çözülişi getirilýär.

VII bapda ýönekeý ykdysady modellere, ýönekeý agregirlenen ykdysady önümçilik funksiýalaryna, köp gabat gelýän önümçilik funksiýalaryna, ydysady modelleriň ýönekeý görnüşleriniň derňelişine we tehniki progresiň modelirlenilişine seredilýär.

VIII bapda önümçilik funksiýasynyň birnäçe umumy häsiýetleri, birnäçe serişdeli şol bir görnüşli önümçilik funksiýalary, öňünden çaklamanyň modelinde önümçilik funksiýasynyň peýdalanylyşy, hojalyk birleşmesiniň ykdysady metriki modeli berilýär.

IX bapda halk hojalyk ulgamyny meýilnamalaşdyrmak pudagara modellere, statistiki we dinamiki pudagara modellere seredilýär.

X bapda ykdysady obýektleriň hereketlerini meýilnamalaşdyrmak meselesinde matematiki derňew, ýükleri daşamanyň meýilnamasy, önümçiligiň tizleşdirilen görnüşdäki meýilnamalaşdyrmasynyň käbir modelleri we pudaklary ösdürmek meýilnamasynyň modeli getirildi. Bu bapda başga-da torlaýyn modeller öwrenilýär, onda torlaýyn modeller barada esasy düşünjeler getirilýär we torlaýyn modellere degişli meselä seredilýär.

XI bapda ykdysady modellerde kesgitsizlige, kesgitsiz faktorlaryň esasy iki görnüşine we serişdeleri dolandyrmakda tötän faktorly modellere seredilýär. Bulardan başga-da köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlary barada maglumatlar, bu ulgamlaryň tükeniksiz garaşmalar, garaşmak we nobatyň çäkli uzynlygy bolan görnüşleri öwrenilýär. Bu bapda köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlarynda awtoulaglary ýangyç bilen üpjün ediş stansiýada nobatyň bolmazlygyny kesgitlemek ýaly meselä seredilýär.

XII bapda ykdysady modellerde ýasama usulynyň seljermeleri barada maglumatlar we meseleler getirilýär.

Bu ders matematiki ugrundan öwrenilýän «Ýokary matematika», «Matematiki programmirlemek», «Matematiki modelirlemek», «Optimizirlemek usullary», «Optimal dolandyryş», «Köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlary» we ş. m. birnäçe ugurlar boýunça maglumatlary özünde birikdirýär. Kitap ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin niýetlenip, ondaky maglumatlar «Matematiki modelirlemek», «Optimallaşdyrma usullary», «Matematiki programmirlemek», «Hasaplaýyş matematika» we ş.m. derslerde hem ulanylyp bilner. Olardan başga-da bu maglumatlara gyzyklanma bildirýän dürli öwrenijiler, şol sanda mugallymlar, alymlar, orta we hünärment okuw mekdepleriniň okuwçylary, dürli okuw merkezleriniň öwrenijileri hem peýdalanyp bilerler.

GIRIŞ

Ýurdumyzda hormatly Prezidentimiziň taýsyz tagallasy bilen bilim ulgamynda düýpli ösüşler başlandy. Hormatly Prezidentimiziň öňden görüjilikli, adalatly syýasatynyň esasynda Watanymyzyň ykdysadyýetinde ösüşler gazanylýar. Ykdysadyýetiň ösüşiniň esasy ýollarynyň biri hem onuň geljekde optimal meýilnamalaşdyrylmagy hem-de dolandyrylmagy esasynda bolýar. Islendik ykdysady meseläni optimal çözmek üçin ol meseläniň matematiki modeli düzülmelidir we degişli programmalar peýdalanylmalydyr.

Okuw kitabynda ykdysady matematiki meseleleriň derňewlerinde giňden ýaýran çemeleşmelere degişli bolan meýilleşdirme we dolandyrma meselelerini birnäçe usullar bilen derňemekdäki soraglara seredilýär.

Islendik taslamanyň derňewi üç tapgyrda amala aşyrylýar:

1. Taslama aýratyn böleklere bölünýär we olardan logiki yzygiderlik düzülýär. Geçirilýän iş diýlip, oňyn ýerine ýetirilmegine sarp edilýän wagty ýa-da beýleki serişdeleri talap edýän hadysa aýdylýar.

2. Her işiň ýerine ýetiriliş dowamlylygyny bahalandyrmak; taslamanyň ýerine ýetirilmegi üçin kalendar meýilnamany düzmek we taslamanyň tutuşlygyna ýerine ýetirilmeginiň tamamlanandygyny kesgitleýän işleri aýyrmak.

3. Her işiň serişdelere bolan talabyny bahalandyrmak; meýilnamany gowulandyrýan pul we beýleki serişdeler bilen üpjün etmekligi göz öňünde tutmak bilen işleri ýerine ýetirilmekligiň meýilnamasyny gaýtadan seljermek.

Esasy iş amaly ykdysady meseleleri derňemeklige, ol meseleleriň matematiki modelini ulanmaklyga degişli bolan «model» diýilýän adalgany kesgitlemekden başlanýar.

Deterministik däl, ýagny kesgitsiz faktorlar aşakdaky iki görnüşe bölünýärler.

I. Paýlanyş kanuny belli {tötänleýin faktor}.

Bu görnüşli faktor, adatça, gaýtalanyp durýan hadysalar öwrenilende ýüze çykýar.

Mysal hökmünde telefon ulgamyny modelirlemek meseläni getirmek bolar. Biz berlen wagt birliginde näçe sany telefon jaňynyň boljakdygyny kesgitli aýdyp bilmeýäris, emma jaňlaryň sanynyň paýlanyş funksiýasyny ýeterlik dowamly wagtyň içinde gelen jaňlaryň sanyny bellige almak bilen hasaplamak bolýar.

II. Kesgitsiz faktor, ýagny faktor baradaky informasiýa diňe onuň haýsy hem bolsa bir Y köplüge degişliligi bilen çäklenýär: $y \subseteq Y$.

Kesgitsiz faktorlar aşakdaky ýagdaýlarda ýüze çykyp biler.

1. Derňelýän ykdysady modelde derňewçi bilen bir hatarda onuň bilen deň bähbitleri aramaýan daşgary gatnaşyjylar hem bolanda, meselem, daşary ýurtlar bilen ediljek söwda maksatnamalaşdyrylanda daşary ýurtlaryň etjek hereketlerini göz öňüne tutmak zerurdyr; köp ýagdaýlarda şeýle hereketleriň nähili boljakdygyny öňünden kesgitlemek mümkin däl.

2. Kesgitsiz faktorlar hadysanyň ýa-da käbir ululyklaryň ýeterlik derejede öwrenilmändigi sebäpli hem ýüze çykyp biler. Muňa howa şertini mysal getirmek bolar. Şeýle kesgitsizlige tebigy kesgitsizlik hem diýilýär.

3. Kesgitsiz faktorlar parametrler ýeterlik derejede mälim bolmadyk ýagdaýynda girdejiniň ölçegi bolan $C(x,y)$ funksiýanyň parametrleri bilen hem baglanyşykly bolup biler.

Okuw kitabynda serediljek käbir meselelerde ulgamy häsiýetlendirýän faktorlar tötänleýin diýip hasap edilýär. Şeýle meselelere stohastik parametrli meseleler hem diýilýär.

Ýokarda belläp geçişimiz ýaly, adatça, stohastik parametrli meseleler gaýtalanyp durýan hadysalary derňemekde ulanylýar. Şonuň üçin hem şeýle meseleler derňelip netije çykarylanda, adatça, köp gaýtalananda ortaça optimal bolan çözülişi teklip edilýär.

Stohastik parametrli meselede paýlanyş funksiýasy belli bolan y ululyk faktoryň tötän ululygy diýip kabul edilýär. Şonuň bilen birlikde girdejiniň ölçegi bolan $C(x,y)$ hem tötänleýin ululykdyr we onuň paýlanyş kanuny x dolandyryjy ululyga baglydyr. Şeýlelikde, stohastik ulgamy optimallaşdyrmak meselesini aşakdaky görnüşde goýmak bolar (ýönekeýlik üçin, goý, X köplük y parametre bagly däl bolsun): $x \in X$ nokatlaryň içinden:

$$E[C(x^*, y)] = \max_{x \in X} E\,[C(x,y)]$$

deňlik ýerine ýeter ýaly

$$\max_{x \in X} E\,[C(x,y)]$$

bahany berýän x^* nokady tapmaly.

Bu ýerde E matematiki garaşmany aňladýar.

Her bir adam wagtal-wagtal durmuşda gabat gelýän dürli meseleleri çözmeli bolýar. Ol meseleler ýeke-täk netijeli ýol ýa-da usul bilen çözülmeýän bolmagy mümkin. Bu ýagdaýlarda meseläniň iň oňat we amatly çözüliş usulyny gözläp tapmaly bolýar. Ýöne dürli ýagdaýlarda iň oňat çözüwleriň biri-birinden tapawutly bolmagy mümkin. Meselem, okuwçy mekdepden uzakda ýaşaýan bolsa we mekdebe ýöräp 30 minutda ýa-da bu ýoluň bir bölegini awtobusly, galan bölegini bolsa, trolleýbus bilen 20 minutda geçýän bolsun. Eger iki çözüwi deňeşdirsek, okuwçy mekdebe iň az wagtda barmaly bolsa, ýagny onuň kriteriýasy minimum wagta görä oňat bolsa, onda ikinji çözüwiň amatlylygy (oňatlygy) aýdyň görünýär. Başga kriteriýa görä (meselem, minimal baha ýa-da harajat, minimal dürli görnüşli ulaglar) birinji çözüw iň amatly bolýar. Durmuşda bolsa, köplenç ýagdaýlarda iň oňat diýen düşünje san taýdan kriteriýasy, ýagny minimum çykdajy, normadan minimum gyşarma, maksimum tizlik, girdeji we ş.m. düşünje bilen aňladylyp bilner. Şoňa görä matematiki meseläniň (optimumyň oňat ýa-da amatly) optimal netijesini tapmak üçin meseläni goýmak bolýar. Sebäbi iň kiçi ýa-da iň uly bahasyny tapmakda aýratyn tapawut ýok. Meseläniň optimal çözüwini tapmak meselesine *optimallaşdyrma meselesi* diýilýär.

Optimal netije, düzgün boýunça ýüzüniň ugruna birden tapylmaýar, ol prosesiň netijesinde tapylýar, oňa optimallaşdyrma prosesi diýilýär we prosesde ulanylýan usula optimallaşdyrma usuly diýip at berilýär. Ýönekeý ýagdaýlarda meseläniň şerti matematiki dile geçirilýär we meseläniň matematiki şekillendirilişi alynýar. Ýöne amalyýetde bolsa meseläniň matematiki şekillendiriş prosesi ýeterlik derejede çylşyrymly bolup durýar.

Optimallaşdyrma usullary ykdysady matematiki ders bolup, ekstremal meselelerini öwrenmek we olaryň çözüliş usullaryny işläp düzmek bilen meşgul bolýar.

Umumy ýagdaýda ekstremal meseläniň matematiki goýluşy: $g_i(x_{1,} x_{2..,} x_n) \le b_i$ ($i = 1, 2, ..., m$) şerti ýerine ýetirende $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ -maksat funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahasyny kesgitlemekden durýar, bu ýerde f, g_i – berlen funksiýalar, b_i– haýsy hem bolsa bir hakyky sanlar.

f we g_i funksiýalaryň häsiýetine baglylykda optimallaşdyrma usullaryny aýratyn özbaşdak ders hökmünde seretmek, ol kesgitli meseleler synpyny öwrenmek we olaryň çözüliş usullaryny işläp düzmek bolar. Şeýle hem ol çyzykly we çyzykly däl programmirleme meselelerine bölünýär. Eger f we g_i çyzykly funksiýa bolsalar, onda degişli mesele çyzykly programmirlemegiň meselesidir. Eger haýsy hem bolsa funksiýalaryň biri çyzykly däl bolsa, onda mesele çyzykly däl programmirlemegiň meselesi bolýar. Optimallaşdyrma usullarynda iň köp öwrenilen bölüm bolup, çyzykly programmirlemegiň meselesi bolup durýar. Çyzykly programmirlemegiň meselesini çözmek üçin birgiden usullar, algoritmler we programmalar işlenip düzülen.

Çyzykly däl programmirleme meselesinde has giňişleýin öwrenilen güberçek programmirleme meselesidir. Bu meselelerde berlen funksiýalar güberçek ýapyk köplükde kesgitlenýärler we olaryň çözüwleri minimum güberçek (ýa-da maksimum oýuk) netijäni berýärler. Öz gezeginde güberçek programmirlemegiň meselesiniň arasynda giňden yzygiderli kwadrat programmirlemäniň meselesi derňelýändir. Şeýle meseleleriň umumy ýagdaýda çözülişiniň netijesinde maksimum (ýa-da minimum) kwadrat funksiýalary tapmak talap edilýär. Eger-de onuň näbellileri haýsy hem bolsa bir çyzykly deňsizlikler ýa-da deňlemeler sistemasyny ýa-da çyzykly däl deňlemeler we çyzykly deňsizlikler sistemasyny bilelikde özünde saklaýan şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda ol matematiki programmirlemäniň aýratyn meseleler synpyna bitinsanly, parametrik we ülüşli çyzykly programmirlemäniň meseleleri degişlidir

Bitinsanly programmirleme meselesinde näbelliler diňe bitin--sanly bahalary kabul edip biler. Parametrik programmirleme meselesi maksat funksiýa ýa-da funksiýalar üýtgeýän ululyklaryň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan funksiýalar, ýa-da olaryň ikisi hem şol wagtda haýsam bolsa bir parametrlere bagty bolanda seredilýär. Ülüşli-çyzykly programmirleme meselesinde maksat funksiýasy iki sany çyzykly funksiýalaryň gatnaşygy görnüşinde berilýär we üýtgeýän ululyklaryň kesgitleniş ýaýlasyny bu ýagdaýda kesgitlenýän funksiýalar hem çyzyklydyrlar.

Stohastik we dinamiki programmirleme meseleleri aýratyn synpa degişlidirler.

Eger maksat funksiýalarda ýa-da üýtgeýän ululyklaryň kesgitleniş ýaýlasyny kesgitlenýän funksiýalarda tötän ululyklar bar bolsa, onda olar ýaly mesele stohastik programmirlemäniň meselesine degişlidirler. Eger meseläniň çözüwini tapmak prosesi, köp tapgyrly bolsa, onda olar ýaly mesele dinamiki programmirlemegiň meselesine degişlidir.

Matematiki usullaryň ykdysadyýetde ulanylyşy. Minimum wagt, minimum çykdajy (optimum iň oňat ýa-da iň amatly), maksimum girdeji we ş.m. meselelere optimal meseleler diýilýär, ol meseleleri çözmek usullara bolsa optimallaşdyrma usullary diýilýär. Ýönekeý ýagdaýlarda seredilýän meseläniň şertini aňsatlyk bilen matematiki dile geçirip onuň matematiki modelini düzýäris.

Optimallaşdyrmada matematiki modelirleme.

Optimallaşdyrma – bu **iň oňat (iň amatly)** çözüwi saýlamakdyr. Matematikada optimallaşdyrma usullary, bu düýpli netijeleri we san usullary, özünde saklamak bilen özara deňeşdirmezden we doly saýlamazdan birnäçe, ýagny örän köp mümkin bolan alternatiw wariantlardan iň oňadyny saýlamaga mümkinçilik berýär. Onuň üçin bolsa seredilýän meseläni matematiki dilde ýazmak hökmandyr, ýagny öwrenilýän optimallaşdyrmaly obýektiň matematiki modelini düzmekdir.

Optimallaşdyrmanyň matematiki modeli – bu azdan ýa-da känden emele gelýän prosesiň ýa-da meseläniň doly matematiki ýazgysyny derňemekden durýandyr.

Optimallaşdyrmanyň matematiki modeli düzülende hökmany suratda öwrenilýän meseläniň esasy wajyp taraplaryny göz öňüne tutmaly, onuň çözülişi seredilýän meseläni kanagatlandyrar ýaly bolmaly. Umuman aýdanyňda optimallaşdyrmanyň matematiki modelini düzmegiň bellibir düzgüni ýok hem bolsa, meseläni matematiki modeli düzmeklige şertli görnüşde aşakdaky tapgyrlara bölmek bolýar:

1. Obýektiň optimallaşdyrma çäginiň kesgitlenilişi. Bu tapgyryň hökmanlygy köplenç ýagdaýda hakyky sistemanyň hemme tarapyny göz öňüne tutmak we doly suratlandyrmak mümkin hem däl. Ýöne onda esasy näbellileri, parametrleri we aýry çäklendirmeleri aýratynlaşdyryp, düzülen sistemanyň takmynan görnüşiniň içki gurluşyny ýönekeýleşdirip, hakyky üzňe bölegini düzülen sistemada şekillendirmelidir.

Meselem, kärhananyň haýsy hem bolsa bir sehiniň işiniň optimallaşdyrmasy birnäçe ýagdaýlarda onuň beýleki sehleriniň işleýşine bagly bolman hem biler. Sehiň işleýşini ýagny serişdeler bilen üpjün edilişini we öndürilen önümleriň ýerleşdirilişini, beýleki kärhanalar bilen aragatnaşygyny we beýleki faktorlary sistemanyň üzňe bölegi diýip hasap etmek bolar. Onda onuň daşary aragatnaşyklaryny fiksirlenen ýa-da göz öňüne tutulmaýan diýmek bolýar. Şoňa görä obýektiň çägine başlangyç ýagdaýda optimallyga nädogry saýlanan diýmek bolýar, onda bu ýagdaýda sistemanyň çägini giňeltmek, başga bir ýagdaýda gysmak bolar. Oňa seredilýän sehiň işi mysal bolup biler. Umuman aýdylanda,eger ol ahyrky netijä täsir edip bilýän bolsa, tehnikanyň tejribeliginde seredilýän çylşyrymly sistemany boldugyça ýönekeýleşdirmek gerek.

2. Dolandyryjy näbellileriň saýlanyşy. Bu tapgyrda matematiki modele girýän biri beýlekisinden tapawutly ululyklaryň, alyp biljek bahalarynyň dürli görnüşlerinden iň oňat netijäni berýänlerini saýlamak gerek (dolandyryjy näbelliler), ýagny birnäçe ululyklar fiksirlenilýär ýa-da daşky faktorlar bilen kesgitlenilýär. Dolandyryjy näbellileri kesgitlenýän bahalaryň içinde iň oňadyna degişlileri optimaldyr. Şol bir ululyklar optimallaşdyrma sistemasynyň saýlanan çägine we şekillendirilişi derejesine baglylykda dolandyryjy näbellileriň bolmagy ýa-da bolmazlygy mümkin. Meselem: ýokarda seredilen ýagdaýda sehiň optimal işlemegi üçin dolandyryjy näbelliler: haýsy hem bolsa bir çig malyň göwrümi, başga bir sehden üpjün edilmegi, bir ýagdaýda fiksirlenen ýa-da biziň saýlamagymyza bagly däl, ýa-da kadaly ýagdaýda işleýär we ş.m.

3. Dolandyryjy näbellileriň çäkleriniň kesgitlenilişi. Hakyky şertlerde dolandyryjy näbellileriň bahasyny saýlamak üçin düzgün boýunça çäklendirmeler goýulýar, olar bar bolan serişdeler, güýçler we başga mümkinçilikler bilen baglanyşykly bolýar. Matematiki model düzülende bu çäklendirmeler, adaty, deňlemeler we deňsizlikler ýa-da şeýle bir köplükler görnüşinde, ýagny dolandyryjy näbellileriň bahalary görkezilýär. Dolandyryjy näbellileriň bahalaryny kesgitlemäge degişli bolan hemme çäklendirmeler toplumyna optimallaşdyrma meselesiniň çözülmegine rugsat edilýän köplük diýilýär.

Meselem: sehiň bir ýyldaky öndürýän önüminiň möçberi haýsy hem bolsa bir önüm boýunça dolandyryjy näbelliler bolup, onuň bahasy birinjiden, otrisatel bolup bilmeýär, ikinjiden, ýokardan çäklendirilen bolup, sehiň enjamlarynyň öndürijiligi maksimumdyr.

4. Optimallaşdyrmanyň san kriteriýasynyň saýlanylyşy. Optimallaşdyrylýan obýektiň matematiki modeliniň esasy böleginiň san kriteriýasy, hökman maksimum ýa-da minimum bahalara eýe bolup, ol derňelýän obýektiň özüni alyp barşyna degişlilikde iň oňat wariantyna eýedir. Bu kriteriýanyň ululygy saýlanan dolandyryjy näbellileriň bahalary bilen doly kesgitlenilýär, ýagny bu näbellileriň funksiýasy maksat funksiýa diýlip atlandyrylýar. Ykdysady tehniki meselelerde, tejribelikde optimallaşdyrma kriteriýasynyň giňeldilen spektory ulanylýar.

Meselem: ykdysadyýetde bu kriteriýalar gymmat (önümiň) girdeji düýpli maýa goýum we ş.m. tehniki ýa-da fiziki ulgamlaryň parametri--tehnologiki prosesiň dowamlylygy, ulanylýan energiýa, maksimum mehaniki ýükler, hereketiň tizligi we ş.m. Şeýle hem birnäçe ýagdaýlarda kriteriýany saýlamak ýeke-täk we aýdyň däldir. Kä halatlarda ony kesgitlemek örän kyndyr.

Meselem: bir wagtyň özünde maksimumy hem-de minimumy kesgitlemek meselesi harajat maksimum ygtybarlylyk, minimum energiýany harç etmek we ş.m. Bu ýagdaýdan çykalga diýip biz her bir aýratyn ýagdaýda maksat funksiýanyň kriteriýasyny kesgitläris, ýagny birnäçe kriteriýalardan birisini esasy diýip saýlarys galanlaryny bolsa, ikinji derejeli we ş.m.

5. Matematiki meseläniň optimallygynyň şekillendirilişi. Ýokarda bellenilen tapgyrlary birleşdirip, bir meseläniň matematiki modeli edil matematiki mesele ýaly edip, matematiki meseläni optimallaşdyrarys, ýagny onuň maksat funksiýasy, çäklendirmeler ulgamy, dolandyryjy näbellileriň üsti bilen ýeterlik derejede aşakdaky umumy görnüşde şekillendirilýär. Minimumlaşdyrma (maksimumlaşdyrma) diýip n näbellili $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ maksat funksiýanyň berlen U – köplükde n – ölçegli E_n wektor giňişliginiň U köplüginde iň bolmanda bir nokatda minimuma (maksimuma) ýetýär diýip düşünilýär, edil şonuň ýaly eger zerur bolsa, minimuma (maksimuma) U köplüginde $f(x)$ funksiýanyň bahasy kesgitlenilýär.

Optimallaşdyrma meselesiniň umumy matematiki şekillendirilişi aşakdaky ýaly görkezilýär:

$$f(x) \to \min(\max),$$
$$x \in U,$$

bu ýerde $f(x)$ maksat funksiýa, U-dolandyryjy näbellileriň berlen çäklendirmelerde rugsat edilen köplügi.

6. Matematiki modeliniň maglumatlar bilen üpjünçiligi. Dogry hakyky obýekt we onuň ýeterlik derejede häsiýetlerini doly şekillendirýän matematiki model tejribelikde peýdalanmak üçin peýdasyz bolmagy mümkin, haçan hökmany suratda gerek bolan informasiýa, ýagny onuň ululyklary, näbellileri, parametrleri, umuman aýdanda, matematiki modele girýän informasiýalar ýok bolsa.

Meselem: sehiň işleýşiniň optimallaşdyrmasynyň matematiki modeli çig malyň goýluşynyň göwrümi, ýagny beýleki sehlerden alnan önümleriň satylman galan önümlerini saklamak üçin edilen harajatlary we maksatnamalaryň görkezmeleriniň bozulmagy önümçilikde, şeýle hem enjamlaryň işlemezligi we olary işçi güýji bilen üpjün etmek we ş.m. birnäçe ýagdaýlarda optimallaşdyrma üçin düzülen matematiki model tejribelikde ulanmak üçin gerek bolýan informasiýa bilen üpjün edilmeli, hakykatda bolsa, onuň mümkin däldigi gelip çykýar. Bu ýagdaýda matematiki modeli täzeden düzmeli bolýar, ýagny ondaky şertleri ýerine ýetirmeýän parametrler getirilmeýär. Şeýlelikde, matematiki modeli düzmek prosesinde optimallaşdyrylýan obýektiň modeline girýän ululyklaryň hemmesi ölçenilýän bolmalydygyny üpjün etmeli, matematiki modeli hemmetaraplaýyn öwrenmeli.

I BÖLÜM
YKDYSADYÝETDE MATEMATIKI MODEL WE ÇYZYKLY PROGRAMMIRLEME

§1. Model we modelirleme. Ykdysady hadysalarda matematiki modelirlemäniň aýratynlyklary

Biziň kitabymyz amaly ykdysady meseleleri derňemekde matematiki modelleriň ulanylyşyna degişli, şonuň üçin ilki bilen biz «model» adalgany kesgitläliň.

Model adalgasy, ylmy we umumy taýdan ulanylyşy giňden ýaýrandyr, ol dürli ýagdaýlarda dürli manylarda ulanylýar.

Model sözi *modulus* diýen latyn sözünden gelip çykýar we *ölçeg*, *ölçeme, görkezme, norma* diýen manyny berýär. Model sözüniň manysyna mysal edip, globus Ýer şarynyň modeli ýa-da suratçy portreti çekýän adamynyň modeli diýip atlandyrýar, awtoulaglar sergisine çykarylan awtoulag hem şol görnüşdäki öndüriljek ulaglaryň modeli bolup hyzmat eder.

Matematikada modeller nazaryýetinde model hökmünde berlen häsiýetleri we gatnaşyklary özünde saklaýan toplumlaryň erkin köplüklerine seredilýär. Şeýlelikde, matematika bilen baglanyşykly model düşünjesine umumy kesgitleme berip bolmaýar.

Bu ýagdaýda model adalgasy, giňden peýdalanylýan modelirleme usulynda peýdalanylyşy bilen çäklendirsek, onda ol çykalga bolmagy mümkin.

Modelirleme diýmek, obýektleri öwrenmek üçin, olaryň gös-göni özüni öwrenmek däl-de, şoňa meňzeşini, ýagny başga käbir kömekçi obýektleri öwrenip, derňäp, netije çykarmaga aýdylýar. Şeýle kömekçi obýektlere **model** diýilýär.

Modeliň şeýle kesgitlemesi tebigy ylymlarda we ykdysady derňewlerde hemmeler tarapyndan kabul edilen ýagdaýdyr.

Bize belli bolşy ýaly, modelirleme usuly iki sany uly toparlardan durýar: *materialistik (predmet) we ideal modelirlemelerden.* Eger öwrenilýän obýektiň geometrik, fiziki, dinamiki we funksional häsiýetlerine görä döredilen modeliň esasynda seredilýän mesele derňelýän bolsa, onda oňa *materialistik (predmet) modelirlemesi* diýilýär. Şoňa görä-de,hususy ýagdaýlarda, modelirleme fiziki, bir meňzeş we ş.m. bolup biler. Şeýlelik bilen, predmet ýa-da material modelirleme, öz tebigy häsiýetlerine görä (eksperimental) barlag esasynda bolup durýar. Predmet modelirlemeden, ideal modelirleme (prinsipial) düýpgöter tapawutlanýar, modelirlenilýän obýektiň esasy bolup material birmeňzeşligiň modeli, käbir meňzeş ideal, pikirli bolup durýar. Ykdysady derňewlerde ideal modelirleme ulanylýar. Öz gezeginde ideal modelirlemäni hem iki sany synpa bölmek bolýar: alamatly we intuitiw (pikirlenip bilmek) modelirleme. Şoňa görä, ideal modelirlemäniň derňewiniň esasynda, ideal modeliň nazary häsiýetlere esaslanýandygy dogrudyr.

Matematikanyň ýeten üstünlikleriniň netijeleri gumanitar ylymlardada giňden ulanylyp başlandy. XX asyryň öz başlangyçlaryny ynsanperwer ylymlaryň meselelerinden alýan şoňa degişli bölümler emele geldi. 300 ýylyň dowamynda fizikleriň we matematikleriň bilelikdäki işleriniň netijesinde, fiziki prosesler üçin matematiki modelleriň ulgamyny gurmak başartdy. Şol sebäpden, fizikadaky matematiki modelirlemäniň tejribelerini ykdysady derňewlerde-de ulanmak amatly bolar.

Mundan başga-da, matematikanyň ösüşi, köplenç derňelýän fiziki modeller bilen baglanyşyklydyr. Häzirki zaman matematikasynyň, differensial deňlemeler, toparlar nazaryýeti, topologiýa we funksional derňew ýaly ugurlar, synpyň ýa-da kwant mehanikasyndaky termodinamika synpyň we ş.m emele gelen meseleler bilen örän jebis aragatnaşykdadyr.

Model diýip, özara esaslanan birmeňzeşligi bar bolup, hili boýunça bolsa dürli bolan, iki obýekte aýdylýar. Bu obýektleriň birine hakyky, ikinjisine bolsa *model ýa-da nusga* diýilýär.

Modelirleme çylşyrymly ulgamlary öwrenmek, derňemek üçin ulanylýan usuldyr. Modelirleme hili boýunça dürli: fiziki, geometrik, biologik, matematiki we ş.m. ulgamlarda ulanylyp bilner. Çylşyrymly ulgamlary çuňňur derňemek we öwrenmek üçin matematiki modelirleme ulanylýar.

Matematiki model ykdysady meseleleri derňemekde hem giňden ulanylýar. Onuň esasy sebäbi ykdysady ulgamlary häsiýetlendirmek, köpsanly çylşyrymly arabaglanyşyklara bagly bolup durýar. Ol bolsa öz gezeginde birnäçe näbellileri özara baglylykda matematiki tarapdan deňlemeler we deňsizlikler görnüşinde oňat aňlatmak bolýandygyndandyr. San taýdan arabaglanyşykly bolan deňlemeler we deňsizlikler ulgamyny derňemek ykdysady ulgamyny derňemäge mümkinçilik berýär. Diýmek, ykdysady-matematiki model diýlip, san taýdan arabaglanyşygy aňladýan we ykdysady ulgamyň arabaglanyşygynyň matematiki görnüşidir. Optimallaşdyrma modelleri matematiki programmirlemä esaslanýar we matematikanyň bir bölegi bolup durýar. Ol ekstremal meseleleriň funksiýalaryny öwrenmek we çözmek üçin gerek bolan usullaryň optimal wariantlaryny saýlamakdan durýar. Optimallaşdyrma – bu modeliň matematiki deňlemeleriniň we deňsizlikleriniň modelini we haýsy hem bolsa bir maksat funksiýasyna baglylykda, ykdysady meseläniň iň oňat (optimal) çözüwini kesgitlemekden durýar.

Esasy kynçylyk meseläniň çözülişiniň birnäçelerinden (wariantlaryndan) saýlap, iň oňat ýa-da iň peýdaly ýagdaýda serişdeleri ýerleşdirmek bolup durýar. Bu iň oňat wariant bolsa, *optimal wariant* diýlip atlandyrylýar. Meseläniň optimal çözülişini gözleýän meselä bolsa *optimallaşdyrma meselesi* diýilýär.

Optimal meseleleri çözmekde ulanylýan usullara *optimallaşdyrma usullary* diýilýär.

Islendik meseläniň çözüliş yzygiderligi aşakdaky tapgyrlardan durýar:

1. Seredilýän obýekti öwrenmekden, ýagny gerek bolan parametrleri kesgitlemekden.

2. Häsiýetlendirme modelinden, ýagny optimallaşdyrmanyň esaslaryny (kriteriýasyny) kesgitlemekden.

3. Matematiki modelirlemekden, ýagny meseläni häsiýetlendirmekden, matematiki görnüşde (dilde) ýazmakdan.

4. Meseläniň çözüliş usulyny saýlamakdan. Mesele matematiki görnüşde ýazylyp, ony çözmek üçin öňden belli bolan usuly ýa-da täze usuly ulanmakdan.

5. Kompýuterlerde meseläni çözmek üçin programmany saýlamakdan ýa-da ýazmakdan.

6. Meseläni kompýuterde çözmekden.

7. Meseläniň çözülişini derňemekden.

Derňemek esasan iki usulda:

1) adaty matematiki taýdan

2) düýpli ykdysady taýdan

ýerine ýetirilýär. Derňewiň netijesinde, modele üýtgetmeler ýa-da takyklyklar girizilýär, soňra ähli tapgyrlar täzeden gaýtalanýar.

Ulgamyň optimal dolandyrmagyny matematiki dile geçirilende ýüze çykýan optimallaşdyrmak meselesine aşakdaky görnüşde goýmak bolar: $X(y)$ köplüge degişli bolan x nokatlaryň içinden girdejiniň ölçegi bolan $C(x, y)$ funksiýa iň uly baha berýän x^* nokady saýlap almaly. Bu ýerde y ulgamy häsiýetlendirýän parametr (faktor). Determirlenen meselede ulgamyň parametri kesgitli baha eýe bolan diýip hasap edilýär, ýagny $y = y_0$. Gysgaldylan görnüşde aşakdaly ýaly ýazylýar

$$\max_{x \in X(y)} C(x, y); \qquad y = y_0.$$

y parametriň bahasy kesgitsiz, ýagny determirlenmedik bolanda, meseläni beýle görnüşde goýmak bolmaýar.

§2. Ykdysady proseslerde önümçilik-tehniki derejäniň esasy prinsipleriniň görkezilişi

Öwrenilýän ykdysady ulgam, ýagny bütin halk hojalygymy, ykdysady pudakmy, aýratyn kärhana ýa-da aýratyn önümçilik bolsa hem ol birnäçe sanly ýönekeý (elementar) ykdysady birlikleriň toplumy görnüşinde modelirlenýär, özem her birlik funksiýa hökmünde häsiýetlenilýär. Olar önümçilik prosesinde we önümiň çykarylyşynda serişdeleriň haýsy biri hem bolsa, özaralarynda çykdajylaryň baglanyşyklaryndan durýarlar.

Ýokarda görkezilen haýsy hem bolsa, ykdysady birlikde önüm çykarylyşyna seredeliň. Ol funksiýalar önümçilikde (prosesinde) harajat edilýän resurslar bilen onuň çykarylyşyna edilýän resurslaryň arabaglanyşygyny görkezýärler. Bu funksiýalara önümçilik funksiýalar diýilýär. Goý, haýsy hem bolsa, ykdysady birlikde önüm çykarylyşyna seredeliň. Goý, m görnüşdäki önümçilik bolsun. y_i bilen i-görnüşdäki önümi belgiläliň ($i = \overline{1,m}$). Ähli çykarylýan önümleriň toplumy y wektor bolsun, ýagny

$$y = (y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_m).$$

y wektordaky her bir önümiň möçberi, manatda ýa-da tebigy görkeziji (tonna, kilowat sagatda we ş.m). Käwagtda, y wektor, diňe bir elementden hem durup biler, ýagny skalýar ululyga öwrülip biler. Seredilýän önümçilikde işçi güýjüni, esasy we aýlama gaznany, tebigy serişdeleri, çig mal ulanmak zerur. Bu ululyklar (resurslar) serişdeler diýlip atlandyrylýar. Eger x_j bilen j-nji serişdäniň mukdaryny bellesek, onda ähli n serişdeleri x – wektor bilen aňladylar, ýagny:

$$x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n).$$

Önümçilik funksiýasy (giň manyda) diýlip, ulanylýan serişdeler bilen önümiň çykarylyşynyň arasyndaky gatnaşyga aýdylýar:

$$F(y, x, a) = 0, \tag{1}$$

bu ýerde a – p sany parametrlerden (sanlardan) durýan wektor:

$$a = (a_1, ..., a_k, ..., a_p).$$

(1) gatnaşygyň wektor bolmagy hem mümkin, ol birnäçe deňlemelerden durýar diýip güman edilýär. $F(x, y, a)$ – funksiýanyň görnüşi we onuň parametrleri adaty umumy ykdysady ýa-da tehnologik pikirler bilen kesgitlenilýär, şeýle hem statistiki informasiýalary täzeden derňeme ýoly bilen önümçilik funksiýasynyň (1) umumy görnüşiniň ýerine, köplenç ýagdaýlarda onuň hususy hallary ulanylýar:

1) önüm öndüriliş funksiýada, üýtgeýän ululyklar-serişdeleriň harajaty, funksiýa bolsa onuň öndürilişi:

$$y = f(x, a). \tag{2}$$

2) harajatyň funksiýasy, bagly däl üýtgeýän ululyklar-önümiň öndürilişi, funksiýa bolsa harajatlar:

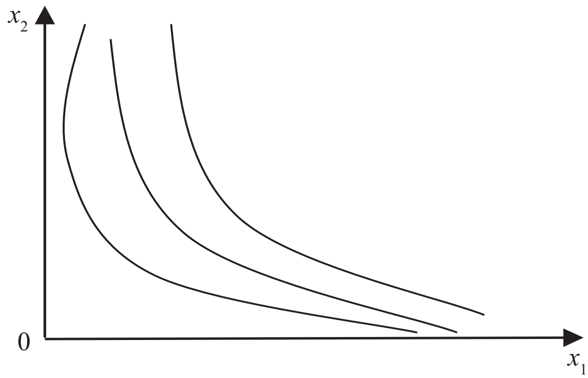
$$x = h(y, a). \tag{3}$$

Bu ýerde x, y we a ululyklar köp komponentli, wektorlar bolmagy mümkin. Diýmek (2) we (3) deňlemeler degişlilikde önümçilik we harajat funksiýasyny aňladýar.

Köp gabat gelýän önümçilik funksiýalarynyň birine seredeliň, ýagny derejeli önümçilik funksiýa, bir önümli we iki sany önümçilik resursly: $y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, $a > 0$, $\alpha_1 > 0$ $\alpha_2 > 0$

(2) formula, köplenç, başga görnüşde ýazylýar:

$$y \le f(x, a). \qquad (4)$$

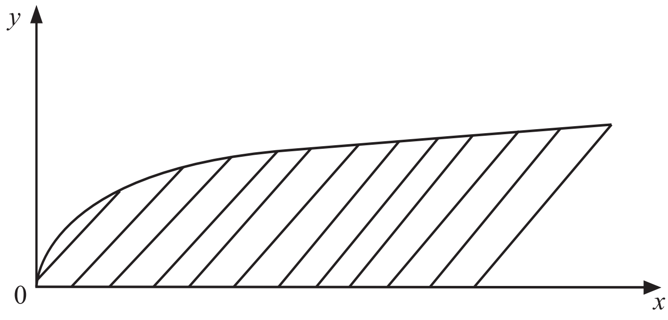


1-nji surat

Bu deňsizlik ulanylýan serişdeleriň birnäçe sanlarynda, kesgitli sanda önümi çykarmak bolýandygyny görkezýär. Şeýle hem az sanda önüm çykaryp bolýandygyny görüp bolýar. Bir serişdeleriň we bir önüm çykarylan ýagdaýynda, derejeli önümçilik funksiýasy

$$y = ax^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad a > 0$$

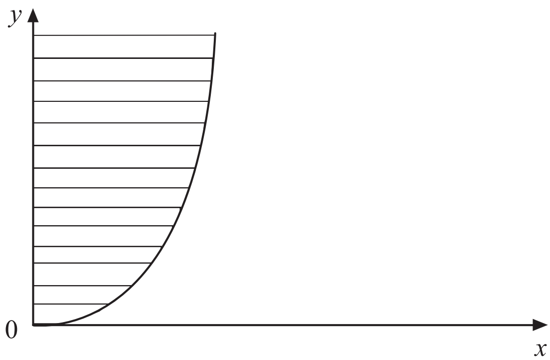
görnüşde ýazylar.



2-nji surat

Şeýle hem:

$$x = ay^{\beta}, \quad \beta > 0, \quad a > 0$$



3-nji surat

§3. Matematiki modelirlemäniň kömegi bilen ykdysady prosesleri derňemäniň esasy tapgyrlary

Ykdysady obýektleri ýa-da hadysalary modelirlemede bellibir tapgyrlary geçmeli bolýar.

Tapgyr bu matematiki model düzülenden soň, düzülen modeli derňemekdir. Modeli derňemegiň usullaryny hökman öňünden saýlamaly we meseläni çözmegiň ýollaryny kesgitlemeli.

Birinji tapgyr meseläniň goýluşyna bagyşlanýar. Köp görnüşli ylmy barlaglary (model we model däl) şertleýin iki esasy toparlara bölüp bolar: amaly meseleleri çözmek üçin niýetlenen we arassa öwreniş maksatly düýpli derňewler. Şular ýaly bölünme ýeterlik derejede şertleýin hem bolsa, ol peýdaly her hili düýpli barlaglar daş-töweregimizdäki gurşaw barada bilimi ýiteldýär, anyklaşdyrýar hem-de amaly ähmiýetli işleriň geçirilmegi üçin esas döredýär. Şoňa görä-de derňew geçirijiniň öňünde durýan esasy meseläni nygtaýar.

Modelirlemäniň esasy kynçylygy gerekli modelleri saýlamakdan durýar. Düýpli barlagda fundamenti giňeltme, çuňlaşdyrma we modeller öýüniň üstünden gurma bolup geçýär.

Bu okuw kitaby, esasan, amaly ähmiýetli derňewlere bagyşlanan. Şonuň üçin bu paragrafda diňe amaly ähmiýetli barlagyň geçirilişiniň usulyýetine serederis.

Amaly ähmiýetli derňewleriň esasy aýratynlyklarynyň biri bu işe edaralaryň ýa-da şahslaryň gatnaşmagy, olar barlag geçirijileriň öňünde meseläni goýarlar, barlaglaryň netijelerinden peýdalanylýar, köplenç ýagdaýda barlagy maliýe taýdan üpjün edýärler. Şular ýaly şahsy ýa-da edara taraplar müşderiler diýlip atlandyrylýar, *Çözgüdi Kabul Edýän Şahs* (*ÇKEŞ*) diýen at hem ulanylýar. Bu at adatça müşderini gyzyklandyrýan hödürlemelerden dogry çözgütleri saýlamak bilen baglydyr.

Adatça, müşderiniň öňünde köpsanly dürli-dürli meseleler durýar. Olar ýeterlik derejede umumy kesgitlenýärler. Birinji tapgyryň maksady müşderini gyzyklandyrýan meseleleriň arasynda çözülişi häzirki zaman ösüş derejesini ykdysady matematiki usullaryndan peýdalanyp bolýanlaryny tapmak.

Barlaglarda ulanylýan, her hili modellere görä, ýygy-ýygydan jikme-jiklik derejesi bilen tapawutlanýarlar. Müşderini gyzyklandyrýan, meselelerden iň bolmanda käbirlerini seljermäge mümkinçilik berýän has ýönekeý modelleriň esasynda barlaga başlamak göwnejaý. Soňra ýönekeý modellerden alnan netijeleri takyklamaga we has kyn meseleleri seljermäge ygtyýar berýän, has kyn modellere geçsek bolar.

Meýilnamalaşdyrma meselelerinde öwrenilýän obýektiň matematiki modelleriniň barlaglarynyň maksady has amatly çözgütleriň görnüşlerini saýlamak bolup durýar (meselem, resurslary paýlama, ykdysady birlikleriň arasynda ýumuşlar we tabşyryklar). Meseleleriň kesgitlenýän ýagdaýynda, müşderiniň «has amatly» çözgüt diýip nämäni göz öňünde tutýandygyny düşünmek wajypdyr. Eger biz müşderiniň gyzyklanmalaryna we maksatlaryna nädogry düşünsek, onda çylşyrymly ýalňyşlyklara getireris. Köp ýagdaýlarda müşderiň bähbidini «ulgamyň işleýşiniň hil görkezijisi» diýip atlandyrýan ululyk bilen görkezip bolýar (kriteriýa, maksat funksiýa). Hil görkezijisi – öwrenilýän ulgamyň ösüşinde her bir ösüş wariantlary san taýdan bahalandyrýan käbir funksiýadyr. Hil görkezijisi kesgitlenenden soň derňelýän modeliň wariantlarynyň içinden dolandyrmanyň hiliniň maksimal görkezijä getirýänini tapmak. Gynansak-da, hil görkezijisini hemişe gurup bolmaýar. Käwagt birnäçe görkezijiler bar, olaryň hersi özbaşyna wajyp we olary bir kriteriýa birleşdirip bolmaýar. Bular ýaly ýagdaýda müşderä ykdysady ulgamlaryň seljermesiniň netijelerini meýilnamalaşdyrma meselesiniň çözgütlerinden iň gowy (optimal) görnüşde däl-de, beýleki usullar bilen görkezmeli bolýar.

Müşderi bilen bilelikde, barlag geçirijiniň öňünde duran mesele kesgitlenenden soň, barlagyň ikinji tapgyryna başlasak bolar: öwrenilýän ykdysady obýektiň matematiki modelini düzmek we ony identifisirlemek. Bu tapgyr ykdysady modelleriň binasyndan amatly modelleri saýlamakdan we öwrenilýän obýektimize laýyklykda, parametrleri saýlanmakdan durýar. Modelleriň parametrleriniň ähmiýetini saýlamak prosesine modeliň *indentifikasiýasy* diýilýär. Ykdysady prosesleriň matematiki modelleriň önümçilik-tehnologik derejesini gurma ýörelgeleri seljerilen ýagdaýynda, önümçilik funksiýalarynyň parametrlerini tehnologik maglumatlarynyň we statistik ykdysady görkezijileri seljermegiň esasynda saýlanýandygyny biz eýýäm aýtdyk. Bu aýdylanlar modelleriň beýleki parametrlerine hem degişlidir.

Matematiki model gurlanda hakyky obýektleriň ähli arabaglanyşygy nazara alynmaýar, bu bolsa iş ýüzünde amala aşyryp bolmaýan çözgütleri saýlanmagyna getirip bilýär. Bu ýagdaý bolmaz ýaly, modelde üýtgeýänlere käbir goşmaça çäklendirmeler girizilen bolmaly. Ol çäklendirmeler gurlanda müşderiniň bilimini we tejribesini dolulygyna ulanmak wajypdyr.

Modeli gurmakda indiki tapgyr gurlan modeli derňemek. Öňünden barlaglaryň birinji tapgyrynda kesgitlenen we müşderi üçin ykdysady ulgamy dolandyrmagyň görnüşleriniň has amatlysyny saýlamakda, önümçilik-tehnologik prosesleriň seljerilmeginden ybarat bolan, meseleleriň çözgütleri üçin modeli seljermegiň usulyny saýlamak wajypdyr.

Ykdysady modeli derňemekde birnäçe esasy usullar bardyr. Biz bu usullary, meseläniň üsti bilen, kibernetik ulgamlaryň bir synpy arkaly görkezeliň, olar tükenikli ölçegli x wektoryň üsti bilen, ýeke-täk suratlandyrylýar we häsiýetlendirilýär, onuň ýagdaýlarynyň üýtgemegi bolsa differensial deňlemeler ulgamy bilen görkezilýär.

$$\dot{x} = f(x, u, \xi, \eta, t), \tag{5}$$

bu ýerde t – wagt, u, ξ, η – ulgama daşky täsir edijiler, u – dolandyryjylar wektory, ýagny daşyndan edilýän täsirler *Çözgütleri Kabul Edijä* (*ÇKE*) baglydyr; haýsy hem bolsa bir dolandyryşy saýlap almak ulgamyny ösdürmekde bellibir netijelere getirip ξ – tötänleýin täsirleriň wektory diýip düşünmek bolar, ýagny ÇKE bagly däl, (barlanmaýan (seredilmeýän)) birnäçe görnüşli statistik häsiýetler görnüşinde. η – diýip kesgitlenmeýän täsirleriň, ýagny daşky täsirleriň wektory, onuň bahasy barada bolup biläýjek bahalarynyň araçäginden başga biz öňünden hiç bir kesgitli zat bilemzok. Eger ulgamyň başlangyç ýagdaýyny

$$x(0) = x_0 \tag{6}$$

diýip alsak we daşky täsirleri $u(t)$, $\xi\,(t)$, $\eta\,(t)$ wagtyň [0,T] kesiminde berlen wagta bagly bolan funksiýalar bolsa, onda [0,T] kesimde wagtyň islendik pursadynda ulgamyň ýagdaýyny anyk kesgitläp bolýar.

Ykdysady meselelerde dolandyryjy wektora her bir wagt pursadynda, köp halatlarda ulgamyň ýagdaýyna we wagta bagly bolan çäklendirmeler goýulýar:

$$u(t) \in U\,(x, t). \tag{7}$$

Tötänleýin täsir ediji ξ wektor, haýsy hem bolsa bir statiki ululyk bilen berilýär. Aýdalyň, kesgitsiz täsir ediji wektoryň paýlaşdyrma funksiýasy haýsy hem bolsa bir köplüge degişlilikde berilýär, mümkin, ol wagta ýa-da ulgamyň ýagdaýyna baglylykda bolup biler:

$$\eta(t) \in G\,(x, t). \tag{8}$$

u(t), *ξ(t)*, *η(t)* daşky täsirler arkaly ulgamyň ýagdaýlarynyň, başgaça aýdylanda $x(t)$ traýektoriýasynyň dinamiki üýtgemeginiň dürli wariantlarda amala aşyrylmagy örän wajyp faktdyr.

Daşarky täsirleriň her bir täze warianty, ulgamyň täze traýektoriýasyna getirýär, şoňa görä-de (5) – (8) gatnaşyklary kanagatlandyrýan tükeniksiz köp traýektoriýalar bardyr. Eger biz (5) – (8) ulgamyň tötän we kesgitsiz täsirleri ýok we ulgamyň gatnaşyklary wagta bagly däl diýen hususy hallaryna seretsek, onda

$$\dot{x} = f(x, u); \tag{9}$$

$$u \in U(x); \tag{10}$$

$$x(0) = x_0 \tag{11}$$

ulgamda, dolandyryjy wektoryň ýeke däldigi bu ulgamyň hem tükeniksiz köp traýektoriýasynyň bardygy gelip çykýar. Ykdysady matematiki modelleriň derňew usullarynyň esasy görnüşlerini ilki bilen (9) – (11) ulgamda görkezeliň. Olaryň birinjisi, modeliň hil taýdan derňewinden, ýagny onuň birnäçe häsiýetlerini aýdyňlaşdyrmakdan durýandyr.

Mysal üçin, haçan-da $u(t) = u = const$ bolanda $f(x^*(u), u) = 0$ şertler ýerine ýetse, ýagny $\dot{x} = 0$, we $x(0) = x^*$ bolar ýaly (ulgamyň bu ýagdaýda uzak wagtlaýyn bolmagy), $x^*(u)$ nokatlary tapmak. Bu ýagdaýlar deňagramlyly (stasionar) diýlip atlandyrylýar. Köplenç ýagdaýlarda, haýsy dolandyryşlarda $x(t)$ wektory düzüjileriniň proporsional ösýändigini kesgitlejek bolýarlar, ýagny $x(t) = \bar{x}g(t)$ (*sazlaşykly ösüş* diýilýär).

Goý, ulgamyň ösüş kriteriýasy aşakdaky görnüşde bolsun

$$\int_O^T C(x(t), \quad u(t))\,dt, \tag{12}$$

bu ýerde T – wagt pursady, oňa köp halatda meýilnamalaşdyrmanyň gözýetimi (mümkinçiligi) diýilýär.

(12) bahasy näçe köp boldugyça şonça-da ulgamyň ösmeginiň warianty *ÇKE*-ni has kanagatlandyrýar.

Kriteriý kesgitlenensoň optimallaşdyrmak meselesi şu aşakdaky matematiki meselä getirilýär:

(12) kriteriý iň maksimal bahany alar ýaly

$$\{u(t), \quad x(t)\}, \quad 0 \le t \le T$$

jübütleriň içinden (9) – (11) gatnaşyklary kanagatlandyrýan $\{u^*(t), x^*(t)\}$ jübütleriň maksimum bahasyny tapmak.

I bap
Çyzykly programmirleme meselesi

§1. Çyzykly programmirleme meselesine gelýän amaly meseleler

1. Önümçiligi meýilnamalaşdyrma meselesi

Goý, kärhana n-görnüşli önümleri öndürýän bolsun, ol önümleri öndürmek üçin kärhanada m görnüşli serişdeleri peýdalanýan bolsun, ýagny

$$b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_m.$$

Önümleriň her bir görnüşinden gelýän ykdysady peýda (her bir önüm birliginde, arassa girdeji görnüşinde):

$$c_1, c_2, ..., c_j, ..., c_n.$$

Her bir önüm birligi üçin harç edilýän zerur bolan serişde birliginiň mukdary belli diýip alsak, onda

$$a_{11}, a_{12}, ..., a_{ij}, ..., a_{mn},$$

bu ýerde a_{11} birinji önüm birligini öndürmek üçin, birinji serişdeden näçe birlik almaklygyň sanyny görkezýär we ş.m umumy ýagdaýda a_{ij}– san, serişde birligiň sanyny i $(i = \overline{1, m})$ nomer üçin görkezýär, bir önümi öndürmek üçin gerek bolan önüm birligini j nomer bilen $(j = (\overline{1, n})$ belläliň.

Bu sanlara arassa tehniki koeffisiýentler diýilýär, olaryň sany (m, n) deňdir. Goý, önümçilik x meýilnamasyny düzmeklik talap edilsin (ýagny, $x_1, x_2, ..., x_n$ önümleriň her bir görnüşinden näçe birlik almalydygyny kesgitlemeli). Netijede, girdejiniň jemini üpjün etmek üçin girdejini maksat funksiýadaky gözlenýän ululyklaryň üsti bilen aňladalyň. Birinji görnüşli önümi birligi c_1 girdeji birligini berýär. Meýilnama boýunça birinji görnüşli önümden x_1 san birligi öndürilip, girdejini (c_1 x_1) jeminde berýär. Edil şonuň ýaly meýilnamalaşdyrylan ikinji görnüşli önümiň öndürilmegi x_2 san birliginde bolup, (c_2 x_2) girdeji bilen üpjün edýär we ş.m. Umumy girdeji (ony z bilen belläliň) aşakdaky görnüşde düzülýär.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Bu aňlatma meseläniň maksat funksiýasy bolýar. Bular ýaly jemler gysgaça $\sum$ alamatynyň üsti bilen ýazylýar. Ýokardaky deňlemäniň sag tarapyndaky baglanyşyk birjynsly bölekleriň jeminden durýar, olaryň biri-birinden tapawudy diňe indeks bolup durýar. Şeýlelikde, ýokardaky maksat funksiýa aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Indi bolsa çäklendirmeler sistemasyny düzeliň, ýagny x meýilnamanyň komponentleri bolan x_j kanagatlanar ýaly şertleri getirip şekillendireliň. Onuň üçin önüm öndürilende sarp (harç) edilen serişdeleriň her bir görnüşiniň sanyny kesgitläliň. x_1 önümi öndürmek üçin (birinji görnüşli önüm birligini) birinji serişdeden a_{11} x_1 birlik harç edilmeli; x_2 önümi öndürmek üçin (ikinji görnüşli önüm birligini) birinji serişdeden a_{12} x_2 birlik harç edilmeli we ş.m. Birinji serişdäniň umumy harajaty:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n,$$

görşümiz ýaly, bu aňlatmada koeffisiýentleriň birinji indeksi üýtgemeýär, ikinjisi bolsa üýtgeýär. Ýöne serişdäniň umumy harajaty onuň möçberinden köp bolmaly däldir, şonuň üçin seredilýän aňlatma diňe kiçi ýa-da iň bolmanda b_1 birinji serişdä deň bolmalydyr:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1.$$

Edil şular ýaly şertde beýleki serişdeler üçin hem deňsizlikleri düzmek bolýar. Ýokarda görkezilen belligiň esasynda (indekslere degişli) ýazmak bolar:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \le b_2,$$

....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \le b_i,$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \le b_m .$$

Seredilýän meýilnamanyň hakykatdan hem dogry bolmagy üçin x_j komponentler ýokardaky deňsizlikleri kanagatlandyrmalydyr. Ýöne gözlenýän näbellilere ýene-de bir şertiň goýulmagy meseläniň ykdysady-tehniki manysynyň bardygyny aňladýar, ýagny olar otrisatel sanlar bolup bilmeýärler. Şol bir wagtda x_j näbellileriň haýsy hem bolsa biri nola deň bolup biler. Bu bolsa öndürilýän önümiň bu görnüşiniň ykdysady tarapdan peýdaly däl ýa-da girdejisizdigini aňladýar. Diýmek, ýokarda alnan deňsizliklerdäki näbellilere otrisatel dällik şertini girizmeli:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_j \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0.$$

Netijede, alnan deňsizlikleriň we maksat funksiýanyň bilelikdäki meselesini alarys, ýagny olary aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n}).$$

Bu meseläni aşakdaky görnüşde şekillendirmek bolar. x meýilnamanyň x_j komponentlerini şeýle bir kesgitlemeli, netijede hemme deňsizlikleri kanagatlandyrmaly we maksat funksiýa iň uly max iň kiçi min bahalara eýe bolar ýaly seredilýän çäklendirmeler sistemasy we maksat funksiýa seredilýän näbellilere görä çyzykly bolýanlygy sebäpli, biz çyzykly programmirlemäniň meselesini alýarys.

2. Iýmitiň rasionynyň meselesi

Hojalykda iýmleriň n görnüşleri bar bolsun, olaryň her birinde ýokumly maddalaryň m dürli görnüşleri bar. Birinji iýmiň bir birligi birinji ýokumly maddalaryň a_{11} birliklerini, ikinji ýokumly maddalaryň a_{21} birliklerini, üçünjiniňki – a_{31} we ş.m. düzýändikleri; ikinji iýmiň bir birligi birinji ýokumly maddalaryň a_{12} birliklerini, ikinjiniňki – a_{22}, üçünjiniňki – a_{32} we ş.m. düzýändikleri mälim. Umumy ýagdaýda j – nomer bilen iýmiň bir birliginde i – nomer bilen ýokumly maddalaryň a_{ij} birlikler düzýärler (diýmek, koeffisiýentiň birinji indeksi ýokumly maddalaryň nomeri, ikinji bolsa – iýmiň nomeri bolýar). Görkezilen tehniki koeffisiýentlerini iýmleriň himiki we beýleki seljermeleri esasynda kesgitleýärler.

$b_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ bilen her ýokumly maddalaryň birlikleriniň köplügini belgiläris, şony mallaryň ýaşaýşa ukyplylygyny üpjün etmek üçin hökmany tertipde rasiona girizmek gerek. Başgaça aýdanymyzda, b_i – bu malyň hökmany almaly, i-nji ýokumly maddalarynyň minimal mukdary. Bu koeffisiýentler mallaryň mal tehnigi tarapyndan düzülýär.

j-nji iýmiň bir birliginiň bahasyny $c_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ bilen belgiläris. c_j ululyklar belli hasaplanýar.

Ähli talaplary kanagatlandyrýan we iň pes baha bolan, şular ýaly X rasiony (iým bermäniň meýilnama) düzmek talap edilýär. Başgaça aýdanymyzda, berlen talaplara döz gelmek üçin rasionda her iýmiň näçe birlikleri ($x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$) girizmek zerurlygyny kesgitlemek gerek.

Meseläniň matematiki görnüşini kesgitläliň.

Gözlenilýän x_j ululyklardan z rasionyň bahasy aşakdaky görnüşde aňladylýar:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,.$$

Bu aňlatma meseläniň bitin funksiýasy bolar.

Näbellilere goýulýan şertler aşakdakylar ýaly bolmaly. Birinji ýokumly maddany alalyň. Iým bermäniň meýilnamasynda oňa

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n$$

birlikler girer we bu mukdar talabyň minimumyndan b_1-den pes bolmaly däl:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1.$$

Meňzeş şertler ähli galan ýokumly maddalar boýunça hem ýazylýarlar:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \geq b_2,$$

$$..$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \geq b_i,$$

$$..$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \ .$$

Meseläniň fiziki esasy ýene üýtgeýänleriň otrisatellik däl şertini talap edýär (rasiondaky iýmiň mukdary otrisatel bolup bilmeýär):

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

$$...........$$

$$x_j \geq 0,$$

$$...........$$

$$x_n \geq 0.$$

Bu deňsizlikleriň ählisiniň jeminde çäklendirmeler ulgamy emele gelýär.

Meseläniň matematiki modeli şular ýaly kesgitlenýär: çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrýan we funksionalyň iň pes bahalaryna eýe bolan (funksiýany bitinleýin minimuma öwürýän), x_j näbellileriň şular ýaly bahasyny tapmaly. Sebäbi emele gelen funksional we çäklendirmeler ulgamy çyzykly bolup durýar, bu bolsa meseläniň – çyzykly programmirlemäniň meselesine gelýändigini görkezýär.

3. Ulag meselesi

Goý, A_1 we A_2 iki punktda birjynsly ýükler ýerleşen bolsun, olaryň sany degişlilikde a_1 we a_2, A_1 we A_2 punktlary *ugradylýan* punktlar diýip atlandyralyň. Görkezilen ýükleri bellenen B_1, B_2, B_3 punktlara eltmeli, degişlilikde olaryň sany b_1, b_2, b_3. Bu ýagdaýda ýükleriň serişdeleri we olara bolan isleglere deň diýip hasap etsek, ýagny

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3,$$

her bir ýük birliginiň bir ugradylýan punktdan bellenilen punkta eltilmeginiň bahasy belli, ony degişlilikde $c_{11}, c_{12}, ..., c_{ij}$ bilen belgiläliň (başgaça c_{ij} san **tarif** diýlip atlandyrylýar). Berlenleri 1-nji tablisa girizeliň, olar **tarifleriň matrisasy** ýa-da **bahalaryň matrisasy** diýen ady göterýär.

1-nji tablisa

Eltilmeli punkt / Ugradylýan punkt	B_1	B_2	B_3	Ätiýäşlyk serişdeleri
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
Ýüklere bolan islegler	b_1	b_2	b_3	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Ýükleri eltmegiň meýilnamasyny düzmek talap edilýär. Her bir ugradylmaly punktdan her bir bellenen eltilmeli punkta, näçe ýük birligini eltmek gerek. Bu meýilnama seredilýän meselede alty sany sandan durýar:

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}).$$

Bu sanlary degişli öýjüklerde ýerleşdirip, ýagny gatnawlar boýunça eltmegiň matrisasyny alarys. Biziň meselämizde bu iki matrisalar (tarifler we eltilmeler) birleşdirilen we bir matrisa görnüşinde *1-nji tablisa* getirilen.

Meýilnamalaryň sany aşakdaky şertleri ýerine ýetirmeli:

1. Bellenilen punktlara eltilmeli zerur bolan ýükleriň sanynyň şerti (her bir eltimeli punktyň islegini kanagatlandyrmaly):

$$x_{11} + x_{21} = b_1,$$

$$x_{12} + x_{22} = b_2,$$

$$x_{13} + x_{22} = b_3.$$

2. Her bir punktdan ugradylmaly ýükleriň şerti (punktda bar bolan ýükleriň mukdary):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2. \end{cases}$$

3. Otrisatel dällik şerti: $x_{ij} \geq 0$ (ýüküň mukdary otrisatel bolup bilmeýär).

Meseläniň şertinden görnüşi ýaly, hemme gatnawlaryň umumy bahasy:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij},$$

ol hem minimum bolmalydyr.

Eger näbelliler otrisatel baha eýe bolsalar, onda eltilmeli ýükleri tersine, ýagny yzyna eltmeli bolýar, bu bolsa bolmaly däl şert.

Mesele. Dört sany kärhana bar bolan ykdysady etrapda 3 görnüşli çig mal peýdalanylyp önüm öndürilýär. Her bir kärhananyň çig mallara bolan talaplary, degişlilikde 120, 50, 190 we 110 birlik çig mallar biri-birinden aýratyn üç sany ýerde ýerleşdirilen. Ol ýerlerde serişdeleriň mukdary degişlilikde 160, 140, 170 birlik ýerleşdirilen. Her bir kärhana bar bolan çig mallar islendik punktlarda serişdeleri getirip bilýär. Şol punktlara degişli kärhanalara getirmäniň tarif bahalary belli we aşakdaky matrisa görnüşde berlen:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ulag bilen eltilmäniň harajaty minimum bolar ýaly, serişdeleri kärhanalara eltmeginiň maksatnamasyny düzmeli.

Çözülişi: Goý, x_{ij} çig mal birliginiň i-nji punktdan j-nji punkta eltilmesiniň mukdary bolsun. Onda ulag meselesiniň matematiki modeline görä çig mallaryň kärhanalara eltilmeginiň we olary zerur serişdeler bilen üpjün etmegiň şerti aşakdaky deňlemeleriň esasynda ýazylyp bilner:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110.$$

Ýükleriň eltilmeginiň bahasy aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$F = 7x_{11} + 8x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} +$$
$$+ 8x_{24} + 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34}.$$

Şeýlelikde, bu ulag meselesiniň matematiki goýluşy ýokardaky çyzykly deňlemeler sistemasynyň otrisatel dällik şertine görä çözülişini tapmakdan ($x_{ij} \geq 0$), şeýle hem, F maksat funksiýanyň minimum bahalaryny kesgitlemekden durýar.

4. Serişdeleri peýdalanmak barada mesele

Goý, iki görnüşli P_1 we P_2 önümleri öndürmek üçin dört görnüşli serişdeleri S_1, S_2, S_3, S_4 peýdalanmak gerek bolsun. Dürli görnüşli serişdeleriň ätiýaçlygy (zapasy) çäklendirilen we degişlilikde b_1, b_2, b_3, b_4 şertli birliklerden durýan bolsun. Serişdeleriň san birligi, dürli görnüşli önümleri öndürmek üçin onuň zerurlyklary belli we tablisa görnüşinde berlen.

2-nji tablisa

Serişdeleriň görnüşleri	Ätiýaç serişde	Önümleriň görnüşleri	
		P_1	P_2
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Girdeji	-	c_1	c_2

3-nji tablisa

Serişdeleriň görnüşleri	Ätiýaç serişde	Önümleriň görnüşleri	
		P_1	P_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Girdeji	-	7	5

Öndürilýän P_1 we P_2 önümleriň hemmesi ýerleşdirilenden soňra, alnan girdeji kärhana üçin maksimum bolar ýaly meýilnama düzmeli (*2-nji tablisa*). Goýlan meseläniň matematiki görnüşi aşakdaky sanly meselede seredeliň. Goý, kärhana P_1 görnüşli önümiň x_1 birligini we P_2 görnüşli önümiň x_2 birligini öndürýän bolsun. Onuň üçin $(2x_1 + 3x_2)$ birlik S_1 serişde gerek bolsun (*3-nji tablisa*). Ýöne S_1 serişde bary-ýogy 19 birlikden durýar, onda aşakdaky deňsizlik ýerine ýetmeli $(2x_1 + 3x_2) \le 19$. Deňsizligiň emele gelmegi, kärhananyň maksimum girdejini almagy bilen S_1 serişdäniň ätiýaçlygyny doly görnüşde paýlanmaýandygy bilen baglydyr.

Edil şonuň bilen meňzeşlikde galan serişdeleriň görnüşine hem degişli deňsizlikleri ýazmak bolýar:

$$2x_1 + x_2 \le 13 \ (S_2 \ \textit{serişde}),$$

$$3x_2 \le 15 \ (S_3 \ \textit{serişde}),$$

$$3x_1 \le 18 \ (S_4 \ \textit{serişde}).$$

Bu şertlerde F girdeji kärhana tarapyndan $F = 7x_1 + 5x_2$ görnüşinde alynýar. Şeýlelikde, bu meseläniň matematiki modeli aşakdaky ýaly bolýar:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 19, \\ 3x_1 + x_2 &\le 13, \\ 3x_2 &\le 15, \\ 3x_1 &\le 18. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistema dört sany çyzykly deňsizlikden we aşakdaky çyzykly deňlemeden durýar:

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

§2. Deňlemeler ulgamynyň Žordan usuly bilen çözülişi

1. Ýönekeý Žordan usuly. Goý, bize E^n Ýewklidiň giňişliginde n näbellili, m çyzykly deňlemeler ulgamy berlen bolsun.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{is}x_s + \ldots + a_{in}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

bu ýerde a_{ij} – belli sanlar ($i = 1, 2, 3, \ldots, r, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots s, \ldots, n$).

Sistemany aşakdaky tablisa görnüşinde ýazalyň we ony geljekde Žordanyň tablisasy diýip atlandyralyň.

Eger $n < m$ bolsa, onda (1)-nji ulgam üçin aşakdaky tablisany ýazýarys.

4-nji tablisa

	x_1	x_2	...	x_{s-1}	x_s	x_{s+1}	...	x_n
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	$a_{1,s-1}$	a_{1s}	$a_{1,s+1}$	...	a_{1n}
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	$a_{2,s-1}$	a_{2s}	$a_{2,s+1}$	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i=$	a_{i1}	a_{i2}	...	$a_{i,s-1}$	a_{is}	$a_{i,s+1}$	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r=$	a_{r1}	a_{r2}	...	$a_{r,s-1}$	a_{rs}	$a_{r,s+1}$	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	$a_{m,s-1}$	a_{ms}	$a_{m,s+1}$		a_{mn}

Bu tablisany (1)sistemanyň koeffisiýentleriniň matrisasy diýip kabul etmek bolar we ony (1) sistemanyň özi diýip hasap edilýär. Ýagny sistemanyň çep baş sütüninde ýerleşen näbellini sistemanyň birinji setiriniň birinji koeffisiýentiniň birinji näbellisine köpeldilmegine goşmak ýokarky baş setiriň ikinji koeffisiýentiniň ikinji näbellisine köpeldilmegine deňdir we ş.m. Indi biz «bir ädim ýönekeý Žordan ýok etmek» diýlip atlandyrylýan özgertmä seredeliň.

(1) sistemadan r-nji deňlemä seredeliň:

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n,$$

x_s koeffisiýenti $a_{rs} \neq 0$ nola deň bolmaly däl, onda alarys:

$$x_s = \frac{1}{a_{rs}}(-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \ldots - a_{r,s-1}x_{s-1} + y_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \ldots - a_{rn}x_n). \quad (2)$$

Geljekde özgertmelere amatly bolar ýaly x_s-näbelliniň ýerine y_r-näbelli goýlan. Indi bolsa galan (m-1) deňlemeleriň hemmesinde x_s-näbelliniň bahasyny goýalyň. Şonuň üçin (1) sistemadan i indeksli bir deňlemäni alyp, onda (2) deňlemeden x_s-näbelliniň bahasyny goýalyň.

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i,s-1}x_{s-1} + a_{is}\Big[\frac{1}{a_{rs}}(-a_{r1}x_1 -$$
$$-a_{r2}x_2 - \ldots - a_{r,s-1}x_{s-1} + y_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \ldots -$$
$$-a_{rn}x_n)\Big] + a_{i,s+1}x_{s+1}\ldots + a_{in}x_n$$

Ýaýlary açyp, x_j näbellä görä birmeňzeş agzalary getirip alarys:

$$y_i = \left(a_{i1} - \frac{a_{is}a_{r1}}{a_{rs}}\right)x_1 + \left(a_{i2} - \frac{a_{is}a_{r2}}{a_{rs}}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{i,s-1} - \frac{a_{is}a_{r,s-1}}{a_{rs}}\right)x_{s-1} +$$
$$+\frac{a_{is}}{a_{rs}}y_r + \left(a_{i,s+1} - \frac{a_{is}a_{r,s-1}}{a_{rs}}\right)x_{s+1} + \ldots + \left(a_{in} - \frac{a_{is}a_{rn}}{a_{rs}}\right)x_n. \quad (3)$$

(3) aňlatma ozal biziň peýdalanan r nomerli deňlemämizden başga (1) sistemanyň islendik deňlemesi üçin dogrudyr. Şoňa görä (3) sistemada i indeks islendik $i = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m$ bahalary alyp bilýär.

(3) aňlatmada x_j näbellä degişli koeffisiýentleriň hemmesiniň gurluşynyň kanuny şol bir meňzeşlikdedir. Bu kanunyň esasynda

i-nji deňlemäniň j-nji näbellisi x-iň koeffisiýentini b_{ij} bilen belläp, bu koeffisiýent üçin aşakdaky formulany alarys:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}. \tag{4}$$

Bu ýerde $i \neq r$ (bu deňleme sistemadan çykaryldy) we $j \neq s$ (x_s näbellä baglanyşykly näbellileriň sanyndan hem çykaryldy, x_s näbellini çalşan y_r näbelliniň koeffisiýenti bolsa başga düzgün boýunça kesgitlenilýär).

(2) we (3) birleşdirip, (4) belgilemäni göz öňünde tutup aşakdaky sistemany alarys:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1,\,s-1}x_{s-1} - \dfrac{a_{1s}}{a_{rs}} y_r + \\
\qquad + b_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + b_{1n}x_n, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
y_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{i,\,s-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{is}}{a_{rs}} y_r + \\
\qquad + b_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + b_{in}x_n, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
y_{r-1} = b_{r-1,1}\, x_1 + b_{r-1,2}x_2 + \ldots + b_{r-1,\,s-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{r-1,\,s}}{a_{rs}} y_r + \\
\qquad + b_{r-1,s+1}x_{s+1} + \ldots + b_{r-1,n}x_n, \\
x_s = -\dfrac{a_{r1}}{a_{rs}} x_1 - \dfrac{a_{r2}}{a_{rs}} x_2 - \ldots - \dfrac{a_{r,s-1}}{a_{rs}} x_{s-1} + \dfrac{1}{a_{rs}} y_r - \\
\qquad - \dfrac{a_{r,s+1}}{a_{rs}} x_{s+1} - \ldots - \dfrac{a_{rn}}{a_{rs}} x_n, \\
y_{r+1} = b_{r+1,1}x_1 + b_{r+1,2}x_2 + \ldots + b_{r+1,\,s-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{r+1,\,s}}{a_{rs}} y_r + \\
\qquad b_{r+1,\,s+1}x_{s+1} + b_{r+1n,}x_{n,} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{m,s-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{ms}}{a_{rs}} y_r + \\
\qquad b_{m,s+1}x_{s+1} + \ldots + b_{mn}x_n
\end{array}\right\} \tag{5}$$

(5) sistema üçin Žordanyň tablisasyny düzeliň (5-nji tablisa).

Şeýlelikde (1) sistemadan (5) sistema geçmek diýmek, 4-nji tablisadan 5-nji tablisa geçmek diýmekdir (ekwiwalentdir). Berlen Žordanyň tablisasynda x_s – rugsat ediji sütün diýilýär, y_r – setire bolsa rugsat ediji setir diýilýär. Rugsat edilýän setirde we sütünde ýerleşýän a_{rs}- elemente bolsa rugsat edýän element diýilýär.

4-nji tablisadan 5-nji tablisa geçmegiň düzgüni gutarnykly görnüşde aşakdaky ýaly şekillendirilýär.

5-nji tablisa

	x_1	x_2	...	x_{s-1}	y_r	x_{s+1}	...	x_n
$y_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	$b_{1,s-1}$	$\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$b_{1,s+1}$	...	b_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i =$	b_{i1}	b_{i2}	...	$b_{i,s-1}$	$\frac{a_{is}}{a_{rs}}$	$b_{i,s+1}$	...	b_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_{r-1} =$	$b_{r-1,1}$	$b_{r-1,2}$	...	$b_{r-1,s-1}$	$\frac{a_{r-1,s}}{a_{rs}}$	$b_{r-1,s+1}$	...	$b_{r-1,n}$
$x_s =$	$-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$-\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	...	$-\frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}}$	$\frac{1}{a_{rs}}$	$-\frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}}$	...	$-\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
$y_{r+1} =$	$b_{r+1,1}$	$b_{r+1,2}$	...	$b_{r+1,s-1}$	$\frac{a_{r+1,s}}{a_{rs}}$	$b_{r+1,s+1}$	...	$b_{r+1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	$b_{m,s-1}$	$\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$b_{m,s+1}$	...	b_{mn}

Tablisada ýönekeýleşdirip, rugsat ediji elemente degişli däl setirde ýa-da sütünde, elementi tapmak düzgünine, gönüburçluk düzgüni diýilýär. Ony umumy görnüşde şekillendireliň:

1) Goý, a_{ij} rugsat ediji element we ol a_{rs} element bilen hasaplanylýan bolsun . Onda a_{rj} we a_{is} elementler bir diagonaly emele getirýärler:

$$\begin{tikzcd} a_{ij}(+) \arrow[dr, leftrightarrow] & (-)\, a_{is} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ a_{rj} & \boxed{a_{rs}}\,(:) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (-)\, a_{is} \arrow[dr, leftrightarrow] & (+)\, a_{ij} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ (:)\,\boxed{a_{rs}} & a_{rj} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (:)\,\boxed{a_{rs}}\,(+) \arrow[dr, leftrightarrow] & (-)\, a_{rj} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ a_{is} & a_{ij} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (-)\, a_{rj} \arrow[dr, leftrightarrow] & (+)\,\boxed{a_{rs}}\,(:) \arrow[dl, leftrightarrow] \\ a_{ij} & a_{is} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a_{ij}(-) \arrow[dr, leftrightarrow] & (\times)\, a_{is} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ a_{rj} & (:)\,\boxed{a_{rs}} \end{tikzcd}$$

$$b'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$$

2) Rugsat ediji element ters ululyk bilen çalşyrylýar.

3) Rugsat ediji sütüniň galan elementleri rugsat ediji elemente bölünýär.

4) Rugsat ediji setiriň galan elementleri rugsat ediji elemente bölünýär we olaryň alamatlary çalşyrylyp ýazylýar.

5) Galan elementler aşakdaky formula bilen hasaplanylýar:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}},$$

$i \neq r, j \neq s$ (gönüburçluk düzgüni boýunça).

Mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny alalyň.

$$y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3,$$
$$y_2 = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$
$$y_3 = 7x_2 - x_3.$$

6-njy tablisa

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	1	3	$\boxed{-2}$
$y_2 =$	4	–2	3
$y_3 =$	0	7	–1

7-nji tablisa

	x_1	x_2	y_1
$x_3 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$y_2 =$	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y_3 =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

bolýar.

Tablisadan görşümiz ýaly, biz 1-ädim Žordan usulyny ulanyp alan tablisamyzda y_1 bilen x_3-iň ýerini çalyşdyk. Edil şonuň ýaly edip degişlilikde hemme näbellileriň ýerini çalşyp, meseläniň çözüwini kesgitläp bilýäris.

Netije. Bu usulyň esasynda biz berlen ulgamyň näbellilerini tablisa görä kesgitläp bilýäris. Ýöne Žordan usulynyň ulanylmasynyň sany ulgamyň elementlerinden düzülen matrisanyň rangynyň sanyna deň bolmalydyr.

2. Modifisirlenen Žordan usuly. Goý, bize ýokardaky ýaly ulgam berlen bolsun, ýagny

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ms}x_s + \dots + a_{mn}x_n, \end{aligned}\right\}$$

(1)-nji sistemany başga görnüşde ýazalyň, ýagny

$$\begin{aligned} y_i = (-a_{i1})(-x_1) + (-a_{i2})(-x_2) + \dots + (-a_{is})(-x_s) + \\ + \dots + (-a_{in})(-x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \tag{6}$$

Amatlylyk üçin aşakdaky belgilemäni girizeliň:

$$-a_{ij} = a_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \ \ j = 1, 2, \dots, n). \tag{7}$$

Onda (2) - (3) we (4) – (5) aňlatmalary göz öňünde tutup, (1) sistema deňgüýçli bolan (7) sistemany emele getireris we şol bir yzygiderlikde ýönekeý Žordan usulyndaky özgertmeleriň esasynda 8-nji tablisany alarys.

8-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_s$	...	$-x_n$
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}	...	a_{1n}
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2s}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
$y_r=$	a_{r1}	a_{r2}	...	$\boxed{a_{rs}}$	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ms}	...	a_{mn}

Eger biz ýokarda sereden Žordan usulymyz ýaly, yzygiderlikde görkezilen 4 punkt boýunça 8-nji tablisadan 9-njy tablisa geçsek, onda biz ony aşakdaky görnüşde ýazyp bileris. Goý, Žordan element diýip $a_{rs} \neq 0$ alalyň.

Goý $a_{rs} \neq 0$ bolsun, onda

9-njy tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-y_r$	...	$-x_n$
$y_1=$	b_{11}	b_{12}	...	$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	...	b_{1n}
$y_2=$	b_{21}	b_{22}	...	$-\frac{a_{2s}}{a_{rs}}$	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
$x_s=$	$\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	...	$\frac{1}{a_{rs}}$	...	$\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	b_{m2}	...	$-\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	...	b_{mn}

Eger biz ýokarda sereden Žordan usulymyz ýaly, yzygiderlikde görkezilen 4 punkt boýunça 9-njy tablisadan 10-njy tablisa geçsek, onda biz ony aşakdaky görnüşde ýazyp bileris.

9-njy tablisadan görnüşi ýaly, biz y_r bilen x_s-iň ýerini çalyşdyk we aşakdaky amallary ýerine ýetirdik:

1) $-a_{rs}$ elementi Žordan element diýip saýladyk we 10-njy tablisada ony $\left(\frac{1}{a_{rs}}\right)$ diýip ýazdyk.

2) Şol elementiň ýerleşen setirine Žordan setir diýip, onuň hemme elementlerini a_{rs} elemente böldük.

3) Şol elementiň ýerleşen sütüninde bar bolan elementleriň hemmesini şol elemente böldük, alamatlaryny bolsa tersine öwrüp aldyk.

4) Galan hemme elementleri Žordan usulyndaky ýaly

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}.$$

formula bilen tapdyk. Biz 10-njy tablisada Žordan usuly bilen 1-nji ulgamy çözmeklik üçin bir ädim Žordan usulyny ulandyk. Eger-de biz yzygiderlikde şol usuly ulansak, onda ýokardaky görkezilen 3-nji görnüşe görä takyk netije alarys.

Steýnisiň teoremasy. *Eger Žordan tablisasynda $m \le n$ çyzykly baglanyşyksyz setirler bar bolsa, m ädimden soňra hemme y_i-ler ($i = 1, 2, ..., m$) ýokary geçýär, x-ler aşak geçýär, artykmajy bolsa x-ler bolýar.*

Subudy. Onda biz aşakdaky tablisany alýarys.

10-njy tablisa

	y_1	y_2	...	y_r	x_{r+1}	...	x_n
x_1	b_{11}	b_{12}	...	b_{1r}	$b_{1',r+1}$	...	b_{1n}
x_2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2r}	$b_{2,r+1}$	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	b_{r1}	b_{r2}	...	b_{rr}	$b_{r,r+1}$	...	b_{rn}
y_{r+1}	$c_{r+1,1}$	$c_{r+1,2}$	...	$c_{r+1,r}$	0	...	0
y_{r+2}	$c_{r+2,1}$	$c_{r+2,2}$	...	$c_{r+2,r}$	0	...	0
...	...	....	...	...	...	...	...
y_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mr}	0	...	0

Eger $m \leq n$ bolup, bu ulgamyň matrisasynyň rangy r-e deň bolsa, onda sag tarapdaky tablisada ýerleşen elementler olara deň bolýarlar.

Onda galan y-ler öz aralarynda çyzykly baglanyşyklydyrlar. Ony şeýle ýazmak bolýar:

$$\left.\begin{array}{l} y_{r+1} = + c_{r+1,1}y_1 + c_{r+1,2}y_2 + \ldots + c_{r+1,r}y_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = + c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mr}y_r \end{array}\right\}$$

bu bolsa Steýnisiň teoremasyny doly subut edýär.

Mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny alalyň.

$$y_1 = x_1 - 4x_2 + 3x_3,$$
$$y_2 = -5x_1 + x_2,$$
$$y_3 = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3.$$

11-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1=$	-1	4	-3
$y_2=$	5	-1	0
$y_3=$	-2	$\boxed{3}$	4

12-nji tablisa

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$
$y_1=$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{25}{3}$
$y_2=$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$x_2=$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

$$y_1 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}y_3 + \frac{25}{3}x_3,$$
$$y_2 = -\frac{13}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{4}{3}x_3,$$
$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{4}{3}x_3.$$

§3.Çyzykly programmirlemäniň umumy meselesi

1. Meselesiniň goýluşy we onuň häsiýetleri

Çyzykly z funksiýa berlen:

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n, \tag{8}$$

bu ýerde p_j – belli bolan koeffisiýentler (olar dürli hakyky sanlar bolup bilerler).

p_j koeffisiýentler n ölçegli Ýewklid giňişliginde $\overline{P}(p_1, p_2, \ldots p_n)$ baha wektoryny, x_j näbelliler bolsa $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wektory berýärler. z funksiýany $\overline{P}$ we gözlenýän $\vec{x}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak bolar:

$$z = \overline{P} \cdot \overline{x}$$

z funksiýa maksat funksiýa ýa-da meseläniň funksionaly diýilýär.

Çäklendirmeler ulgamy berlen:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \le a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m, \cdot \end{gathered} \tag{9}$$

$$x_j \ge 0.$$

z funksionalyň iň uly ýa-da iň kiçi baha eýe bolmagyny üpjün edýän we (9)-y kanagatlandyrýan $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wektory (nokady, näbelliler toplumyny) tapmaly. Ýokarda bellenilişi ýaly, (9) ulgam n ölçegli Ýewklid giňişliginde güberçek köpburçlugy kesgitleýär. Eger bu köpburçluk boş bolsa (nokatlaryň hiç birini özünde saklamaýar), onda meseläniň çözüwi ýok diýip hasap edilýär.

Eger bu köpburçluk boş däl we diňe bir nokada getirilmeýän bolsa, onda tükeniksiz nokatlar köplügi bar bolup, bu nokatlaryň her biri z funksionalyň bellibir takyk baha eýe bolmagyny üpjün edýärler we (9)-y kanagatlandyrýarlar. Bu nokatlaryň içinde z ululygyň maksimuma ýa-da minimuma eýe bolýan nokadyny tapmaly. Bu nokady önüm arkaly tapmak usuly ýerlikli bolmaýar, sebäbi max z ýa-da min z kesgitleniş ýaýlanyň içinde däl-de, gyrada ýerleşýär.

1-nji teorema. *z funksional maksimuma* (max*imuma*) (9) *deňsizlikler bilen kesgitlenýän Ω köpburçlugyň gyra nokadynda eýe bolýar.*

Subudy. Ω köpburçluk gyra nokatlaryň tükenikli sanyna eýedir. Goý, gyra nokatlar aşakdakylar bolsun:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}.$$

Onda $\forall x \in \Omega$ nokat gyra nokatlaryň güberçek kombinasiýasy bolup durýar:

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)},$$

bu ýerde

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Goý, z funksiýa käbir x_0 nokatda maksimuma eýe bolýar diýeliň:

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \overline{x_0} \qquad (x_0 \in \Omega).$$

$x_0 \in \Omega$ bolýanlygy üçin bu nokat gyra nokatlaryň güberçek kombinasiýasy bolup durýar. Diýmek, käbir λ_i^O bar bolsa, aşakdakyny alarys:

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \overline{x}^{(i)} = \lambda_1^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)} + \lambda_2^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_r^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(r)}.$$

Her bir $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)}$, $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)}, \ldots, \overline{P} \cdot \overline{x}^{(r)}$, skalýar köpeltmek hasyly san ululykdyr. Bu sanlardan iň ulusyny saýlalyň; goý, bu san $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ bolsun. $\overline{x}^{(h)}$ gyra nokatlar köplüginiň biri bolup durýar; $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ bolsa, funksionalyň şol nokatda eýe bolýan bahasy.

$\overline{P}\ \overline{x}^{(i)}$ hemme $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(i)}$ skalýar köpeltmek hasyllaryň ýerine olaryň iň ulusyny $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$-ny goýalyň; deňligiň ýerine deňsizlik alarys:

$$z_{\max} \leq \lambda_1^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} + \lambda_2^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} + \ldots + \lambda_r^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$$

(eger hemme $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(i)}$,-ler bir-birine deň bolanda, onda deňlik alamaty goýlardy, şonuň üçin deňsizlige deňlik hem goşulýar). $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$,-i jemiň daşyna çykaryp we $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 = 1$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$z_{\max} \leq \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} \cdot \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}.$$

Şeýlelik bilen,

$$z_{\max} \leq \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}.$$

Bu ýerde $Z_{\max}$ alnan köplükde funksionalyň iň uly bahasy; $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$, funksionalyň käbir gyra nokatda eýe bolýan bahasy. Emma iň uly baha mümkin bolan bahalardan kiçi bolup bilmeýär, şonuň diňe «=» alamaty galýar:

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}.$$

Diýmek, z uly baha diňe gyra nokatda eýe bolýar.

2-nji teorema. *Eger z funksional maksimuma* (*maximuma*) *birnäçe gyra nokatlarda eýe bolýan bolsa:*

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)} = \ldots = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}, \quad k < r$$

(r – gyra nokatlaryň umumy sany), onda z şol bir baha agzalan k nokatlaryň güberçek gabygynyň her bir nokadynda eýe bolýar.

Subudy. $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ nokatlar bilen emele gelen güberçek köplügiň islendik x nokadyndaky z funksionalyň bahasyna seredeliň:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1;$$

$$z(x) = \overline{P} \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{x}^{(i)} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(i)} = \lambda_1 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} + \lambda_2 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_k \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} =$$

$$= \lambda_1 z_{\max} + \lambda_2 z_{\max} + \ldots + \lambda_k z_{\max} =$$

$$= z_{\max} (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) = z_{\max} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = z_{\max} \cdot 1 = z_{\max}.$$

Diýmek, güberçek gabygynyň islendik nokadynda $z(x)$-iň bahasy:

$$z(x) = z_{\max}.$$

Geometriki manyda, eger max z iki nokatda ýerine ýetýän bolsa, onda ol bütin kesimde ýerine ýetýär; eger üç nokatda ýerine ýetýän bolsa, onda bütin üçburçlukda we ş.m. Eger max z hemme gyra nokatlarda ýerine ýetýän bolsa, onda çözüwler ýaýlasynda funksional üýtgemeýär. Subut edilen teoremalar meseleleriň çözüw usullarynyň esasyny düzýärler.

2. Meseläniň geometriki şekillendirilişi. Goý, E^n-ýewklidiň giňişliginde maksat funksiýa berlen bolsun:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i < b_j,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

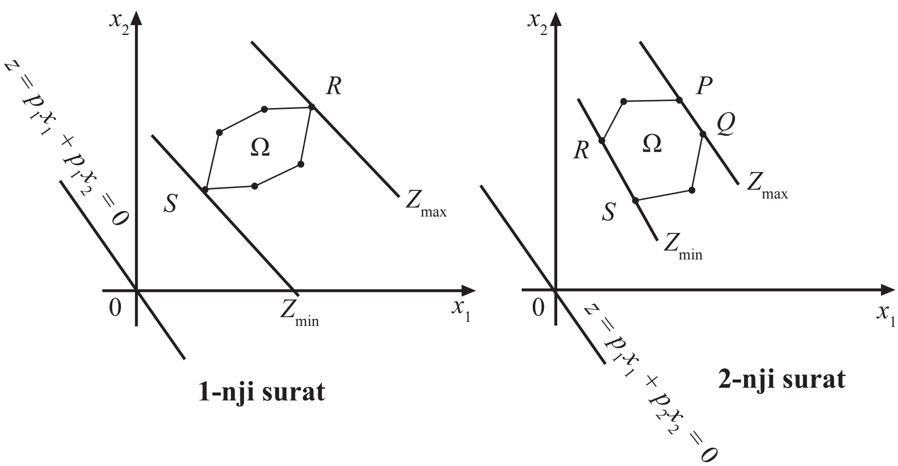
Bu meseläniň geometriki çözülişi maksat funksiýanyň

$$z = 0$$

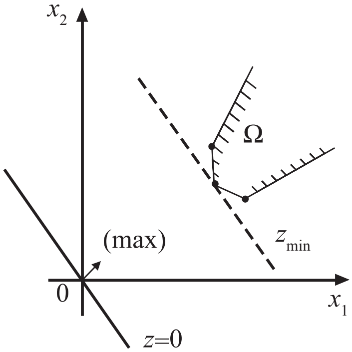
şerti bilen kesgitlenilýär. Eger biz $x'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ erkin nokady alsak, onda ol nokada görä maksat funksiýa şeýle görnüşde ýazylýar:

$$z(x') = \sum_{i=1}^{n} p_i x'_i. \tag{10}$$

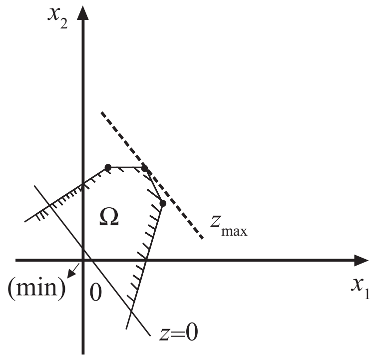
Bu bolsa ýokary tekizlikden daşlaşýan nokady görkezýär. Onda biz 10-njy şerte görä, ýokary tekizligi koordinatalar başlangyjyndan geçirip, x' nokada görä oňa parallel bolan tekizligi kesgitlemeli bolýarys. Meseläni aýdyňlaşdyrmak üçin biz ony ýönekeýleşdirip, tekizlikde x_1 hem-de x_2 nokat arkaly hususy hala Ýewklidiň E^2 2-nji giňişliginde seredeliň. Onda biz aşakdaky hususy hallary alýarys.



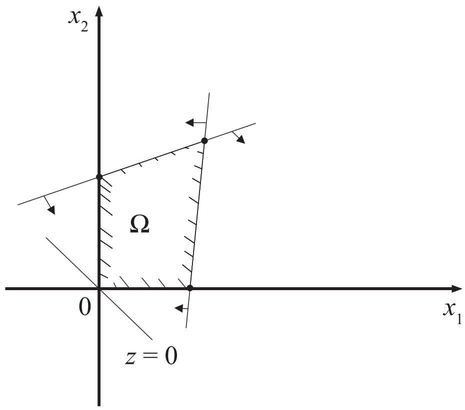
1-nji surat **2-nji surat**



3-nji surat



4-nji surat



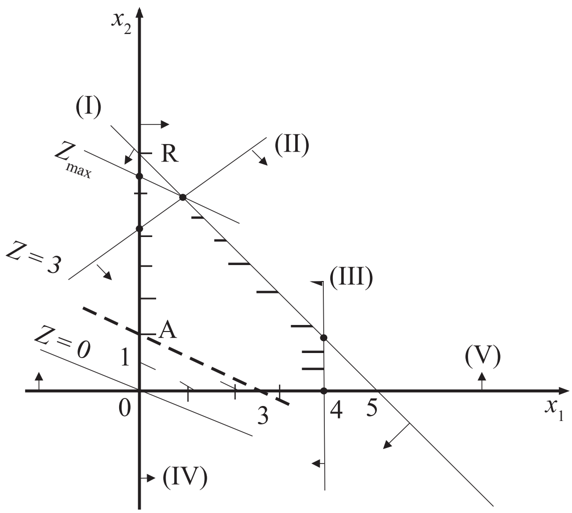
5-nji surat

Görşümiz ýaly, çyzgylaryň her birinde dürli görnüşler görkezilen. Ω – köpburçlugyň çäklendirilen ýapyk görnüşinde maksimum hem minimum kesgitlenilýär. Haýsy hem bolsa bir tarapy çäklendirilmedik görnüşinde ýa maksimum kesgitlenilýär, onda minimum kesgitlenilmeýär. Tersine, minimum kesgitlenilýär, onda maksimum kesgitlenilmeýär.

3. Meseläniň grafiki usul bilen çözülişi. Çyzykly programmirleme meselesini ýokarda seredilen meselä görä grafiki usul bilen çözmeklik we $z = 0$ şertini maksat funksiýa görä goýup aýdyňlaşdyrmak üçin tekizlikde E^2 Ω-köpburçluga seredip, onuň depelerini kesgitläliň hem-de maksimum we minimum bahalaryny tapalyň. Goý, aşakdaky görnüşde mesele berlen bolsun.

$$z_{\max} = x_1 + 3x_2,$$

$$\left.\begin{array}{lll} (I) & x_1 + x_2 & \leq 5, \\ (II) & -x_1 + x_2 & \leq 3, \\ (III) & x_1 & \leq 4, \\ (IV) & x_1 & \geq 0, \\ (V) & x_2 & \geq 0. \end{array}\right\}$$



6-njy surat

Eger biz $z = p_1 x_1 + p_2 x_2$ deňlemä görä $z = p_1 \cdot p_2$ diýip alsak we

$$p_1 p_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

ululyga bölsek

$$\frac{p_1 x_1}{p_1 p_2} + \frac{p_2 x_2}{p_1 p_2} = \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2},$$

$$\frac{x_1}{p_2} + \frac{x_2}{p_1} = 1;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{5} + \dfrac{x_2}{5} = 1 \\ -\dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{3} = 1. \end{cases}$$

Bu ýerden,

$$x_2 = 4,\ x_1 = 1.$$

Şeýlelikde,

$$z_{\max} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 13.$$

§4. Çyzykly programmirleme meselesiniň çözüliş usullary

Meseläniň simpleks usuly bilen çözüliş ideýasy. Goý, bize başlangyç mesele ýa-da çyzykly z funksiýa

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n, \tag{11}$$

we oňa degişli çäklendirmeler ulgamy:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\le a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\le a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\le a_m \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

berlen bolsun.

Bu ýerde $x_1, x_2, ..., x_n$ – önümleriň görnüşleri; $p_1, p_2, ..., p_n$ belli hakyky sanlar (bahalar) – önümleriň bir birligini ýerleşdirmegiň bahalary. p_j-koeffisiýentler, n ölçegli Ýewklid giňişliginde $\vec{p}(p_1, ..., p_n)$ baha wektoryny, x_j – üýtgeýänler $\vec{x}(x_1, ..., x_n)$ wektory kesgitleýändigi üçin, z funksiýa $\vec{p}$ baha wektory bilen gözlenýän wektoryň skalýar köpeltmek hasyly ýagny

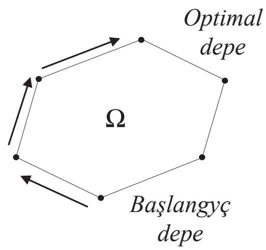
$$z = \vec{P} \cdot \vec{x}$$

görnüşinde hem aňladylyp bilner. Bu funksiýa maksatlaýyn ýa-da baha funksiýasy – meseläniň funksionaly diýip atlandyrylýar. Ulgamdaky $a_1, a_2, ..., a_m$ – sanlar resurslaryň görnüşlerini aňladýarlar; a_{ij} – ykdysady-tehnologik koeffisiýent bolup, j önümi öndürmekde sarp edilýän i görnüşli resursy kesgitleýär. Çyzykly maksatnamalaşdyrma umumy goýluşda $a_1, a_2, ..., a_m$ çäklendirmeler bilen alynýar. Emma ykdysady meseleler çözülende üýtgeýänlere

$$x \ge 0 \tag{13}$$

şert goýulýar. Şeýle hem bolsa meseleler çözülende üýtgeýänler otrisatel bahany hem alyp bilerler. (11), (12), (13) şertler bilen kesgitlenýän meselä çyzykly maksatnamalaşdyrmanyň meselesi, formulalara bolsa ol meseläniň modeli diýilýär. Biziň esasy meselämiz funksionala minimum ýa-da maksimum baha berýän we (12) deňsizlikleri ýerine ýetirýän $\vec{x}(x_1, ..., x_n)$ wektory kesgitlemekden ybaratdyr. Deňsizlikleriň (12) ulgamy E^n giňişliginde Ω güberçek köpgranlygy kesgitleýär we ol köpgranlygyň bir depesinde z funksional minimum ýa-da maksimum baha eýe bolýar. Eger-de bu köpgranlyk boş bolsa, ýagny bir nokady hem özünde saklamasa, onda meseläniň çözüwi ýok.

Eger-de bu köpgranlyk boş bolmasa we diňe bir nokatdan durmaýan bolsa, onda bu köplük (12) şerti kanagatlandyrýar we z funksionaly belli bir baha eýe edýän nokatlaryň tükeniksiz sanyny özünde saklaýar. Olaryň içinden z funksionalyň minimum ýa-da maksimum bahasyny kesgitleýän nokadyny tapmaly (z funksionalyň minimum we maksimum bahalarynyň bu köplügiň araçäklerinde kesgitlenýänligi üçin önümleri ulanyp bolmaýar). Bu ýagdaý hem bize köpgranlygyň hemme nokatlaryny optimallyga derňemän, eýsem diňe onuň depelerinde bu işi ýerine ýetirmäge mümkinçilik berýär.



7-nji surat

Şeýlelikde, simpleks usuly bilen meseläni çözmekligiň esasy ideýasy aşakdakydan ybaratdyr. Köpgranlygyň haýsy hem bolsa bir depesini alyp, ondan bize gerek bolan depä çenli gidýäris. Bu ideýany amala aşyrmak üçin başlangyç depäni almaklygy öwrenmeli, soňra ondan başlap depeden-depä geçip, her gezek optimuma ýakynlaşmagyň usulyýetini tapmaly. Ilki bilen (12) ulgamdaky her bir deňsizligi (-1) sana köpeldip, olaryň garşylykly alamatyny alarys. Azat agzalary deňsizligiň çep bölegine geçirip, olary y_i bilen belgiläliň:

13-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
$z =$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	0

Bu tablisada başlangyç çyzykly maksatnamalaşdyrma meselesiniň hemme şertleri ýerleşdirilendir. Eger x_j üýtgeýänlere $x_j \geq 0$ şertler goýlan bolsa, onda soňraky işleri 13-nji tablisa bilen başlamaly. Eger x_j ululyklara otrisatel dällik şert goýulmadyk bolsa, onda 14–15-nji tablisa özgerdilýär.

Goý, x_j-ler üçin $x_j \geq 0$ şert goýulmadyk bolsun we (12) ulgamda $m > n$ hem-de $(a_{ij})_{m \times n}$ matrisasynyň rangy n bolsun. Onda n – yzygiderlikli ädimiň kömegi bilen 15-nji tablisa özgerdiler (ýokarky setire n sany y_i-leri geçireris).

14-nji tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
$x_n =$	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}	bn
$y_{n+1} =$	$b_{n+1,\,1}$	$b_{n+1,\,2}$	...	$b_{n+1,\,n}$	b_{n+1}
...	...	...	...	...	...
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mn}	b_m
$z =$	q_1	q_2	...	q_n	Q

Bu tablisada çepde n sany x-ler, (m-n) sany y-ler, ýokarda bolsa n sany y-ler ýerleşer. z setir hem özgerer: täze q koeffisiýentler we Q azat agza emele geler.

14-nji tablisada ýokarda n setiri alyp, y-leriň üsti bilen aňladarys:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - \dots - b_{1n}y_n + b_1, \\ x_2 &= -b_{21}y_1 - b_{22}y_2 - \dots - b_{2n}y_n + b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= -b_{n1}y_1 - b_{n2}y_2 - \dots - b_{nn}y_n + b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Eger y-leriň bahasyny hasaplap, olary (14) ulgamda ornuna goýsak, onda x-leriň gözlenýän bahalaryny alarys. Şonuň üçin hem tablisanyň bu bölegi meseläniň çözüwiniň soňunda peýdalanylýar. Ýokardaky n setiri 14-nji tablisadan aýyrsak, 15-nji tablisany alarys.

15-nji tablisa

	$-y_1$	...	$-y_j$	...	$-y_s$	...	$-y_n$	1
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	...	$b_{n+1,j}$	...	$b_{n+1,s}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i=$	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{is}	...	b_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r=$	b_{r1}	...	b_{rj}	...	b_{rs}	...	b_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
$z=$	q_1	...	q_j	...	q_s	...	q_n	Q

Bu tablisada çyzykly maksatnamalaşdyrma meselesi täze görnüşde alynýar:

$$z = -q_1y_1 - q_2y_2 - \dots - q_ny_n + Q, \tag{15}$$

funksiýa we çäklendirmeler ulgamyndan özgerdilip alnan deňsizlikler ulgamy alynýar:

$$\left.\begin{array}{l} y_i = -b_{i1}y_1 - b_{i2}y_2 - \dots - b_{in}y_n + b_i \geq 0 \\ (i = n+1, n+2, \dots, m) \end{array}\right\} \tag{16}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad \dots, \quad y_n \geq 0.$$

Şeýlelikde, (16) şertleri kanagatlandyrýan we (15) funksiýa minimum (ýa-da maksimum) bahany berýän y-leriň (y_1, y_2, ..., y_n) toplumyny tapmak talap edilýär. Ähli m-lerden n sany y-leri kesgitlemek gerek bolýar, galan m-n sany y-ler öňküleri ýaly çyzykly baglydyrlar.

Meseläniň bu täze görnüşe getirilişiniň sebäbi, üýtgeýänler üçin otrisatel bolmazlyk şertiniň alynmagydyr, başlangyç y-ler üçin bolsa bu şert aýdylmadykdyr.

2. Daýanç meýilnamany tapmagyň algoritmi. Azat agza sütünine seredýäris. Eger olaryň hemmesi položitel bolsa, onda daýanç meýilnama tapylan:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \ldots, \quad y_n = 0, \quad y_{n+1} = b_{n+1}, \quad y_{n+2} = b_{n+2}, \quad \ldots, \quad y_m = b_m$$

Goý, azat agzalaryň içinde otrisatel san bar bolsun: $b_r<0$.

1. r – nomerli setire seredýäris. Eger bu setirde hemme elementler otrisatel däl bolsa, ýagny

$$b_{rj} \geq 0,$$

onda çäklendirilen ulgam boş köpgranlygy kesgitleýär, deňsizlikler bilelikde däl, meseläniň çözüwi ýok.

Goý, r – setirde b_{rs} koeffisiýent otrisatel bolsun:

$$b_{rs} < 0.$$

Bular ýaly koeffisiýentleriň sany birnäçe bolmagy mümkin.

2. s belgili sütüniň koeffisiýentlerine seredeliň we azat agza sütüniň elementleri bilen jübütleýin deňeşdireliň (bir setirde). Haýsy jübütleriň elementleriniň alamatlary birmeňzeş bolsa, olary fiksirleýäris. Bu jübütlerde azat agzalary s sütündäki koeffisiýentlere ýagny $\frac{b_i}{b_{is}}$ bölýäris we simpleks gatnaşygy alýarys, ol bolsa položitel bolar.

3. Iň kiçi simpleks gatnaşygy taparys:

$$\min\left(\frac{b_i}{b_{is}}\right) = \frac{b_{i_0}}{b_{i_0 s}}.$$

Rugsat ediji element hökmünde s sütüniň $b_{i_0 s}$ elementini alýarys, ol bolsa minimal simpleks gatnaşyk setirinde ýerleşendir. Bu element bilen bir ädim simpleks ýok etmek amalyny ýerine ýetirýäris.

4. Şeýlelikde, biz hemme beýleki otrisatel azat agzalary ýönekeýleşdireris. Soňra tükenikli ädimlerin sanyndan soň daýanç meýilnamany alýarys, ýa-da meseläniň çözüwiniň ýokdugyny görýäris.

3. Meseläniň gönüburçluk düzgüni bilen çözülişi. Goý, bize deňlemeler ulgamy berlen bolsun:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -17, \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Çözülişi: Berlen ulgamy tablisa görnüşde ýazyp, bu ulgamy näbellileri yzygiderli ýok etmek usuly bilen çözeliň:

16-njy tablisa

x_1	x_2	x_3	Azat agzalar
3	2	– 7	– 17
– 4	3	5	4
5	– 4	– 3	5

Çözüwi rugsat ediji element hökmünde, birinji deňlemäniň x_2 elementini ikinji sütünden alalyň we 17-nji tablisa geçeliň:

17-nji tablisa

x_1	x_2	x_3	Azat agzalar
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{-7}{2}$	$\frac{-17}{2}$
$\frac{-17}{2}$	0	$\frac{31}{2}$	$\frac{59}{2}$
11	0	–17	–29

Tablisany ýönekeýleşdirip, elementleri kesgitleýän düzgüni tapalyň. Onuň üçin 17-nji tablisanyň elementlerini emele getirýän prosesi ýerine ýetireliň. (16) we (17) matrisalary aşakdaky görnüşde ýazalyň:

18-nji tablisa

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 & -17 \\ -4 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ \boxed{-\frac{17}{2}} & 0 & \frac{31}{2} & \frac{59}{2} \\ 11 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}.$$

Geçiş prosesinde aşakdaky amallar ýerine ýetirildi:

1. Rugsat ediji setiriň (birinji) elementlerini, öňki elementleriň rugsat ediji elementine ($a_{12} = 2$) bölünip alyndy.

2. Rugsat ediji sütünde (ikinji), rugsat ediji elementden (a_{12}) galan hemme elementleri nola deňdir.

3. Goý, haýsy hem bolsa bir element rugsat ediji sütüne ýa-da setire degişli däl bolsun. Meselem, $a'_{21} = -\frac{17}{2}$ elementi tapmak üçin, biz öňki $a_{21} = -4$ elementiň üstüne $\frac{3}{2}$ sany goşalyň, (–3)-e köpeldeliň.

$$-\frac{17}{2} = -4 + \frac{3}{2}(-3) = \frac{(-4)2 - 3 \cdot 3}{2} = \frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}{a_{12}}.$$

Bu düzgüni başgaça şekillendirmek hem bolýar. 16-njy tablisada tablisada gönüburçlugy şeýle bir aýratynlaşdyralyň, netijede, hasaplamaga degişli element (-4) we rugsat ediji element 17-nji tablisada diagonallaryň birisini emele getirer ýaly. Soňra bu elementleriň köpeltmek hasylyndan, beýleki diagonalyň elementleriniň köpeltmek hasylyny aýyrýarys we alnan rugsat ediji elemente bölýäris. $\frac{59}{2}$ elementi hasaplama seredeliň. Gönüburçlugy aýratynlaşdyralyň, ol aşakdaky görnüşde bolar:

$$\frac{59}{2} = \frac{4 \cdot 2 - 3(-17)}{2} \quad \boxed{\begin{matrix} 2 & -17 \\ 3 & 4 \end{matrix}}$$

4. Optimal çözüwiň kesgitlenilişi. Eger (12) ulgama serişdeler ($a_1, a_2, \ldots, a_{1n}$), şeýle hem soňky emele gelen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ serişdeleriň hemmesi degişli $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$ bolsa, onda bu meseläniň meýilnamasy daýançdyr. Ykdysady tarapdan onuň hemme serişdesi üpjündir. Haýsy hem bolsa biri oňly däl bolsa, onda şol setiri (-1)-e köpeldip, ony daýanç meýilnama getirmek bolýar.

Eger 19-njy tablisadaky azat hemişelikleriň hemmesi položitel bolsalar, şeýle hem maksat funksiýanyň setirindäki koeffisiýentleriň hemmesi položitel bolsalar, onda ol mesele optimal çözülendir. Eger maksat funksiýanyň haýsy hem bolsa koeffisiýentleriniň birisi položitel däl bolsa, onda ol çözüw optimal däldir. Berlen meseläniň optimal çözüwini kesgitlemek üçin biz meseläniň daýanç meýilnamasynyň barlygyna esaslanmaly bolýarys. Diýmek:

$$b_j \geq 0. \;\; j = \overline{1, n}.$$

Onda bu meseläniň n gezek simpleks usuly ulanylýan tablisasy aşakdaky görnüşde ýazylýar (*19-njy tablisa*).

19-njy tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	…	$-y_n$	
$y_{n+1} =$	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$	…	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
$y_{n+2} =$	$b_{n+2,1}$	$b_{n+2,2}$	…	$b_{n+2,n}$	b_{n+2}
…	…	…	…	…	…
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	…	$b_{m,n}$	b_m
$z =$	q_1	q_2	…	q_n	Q

Eger z setirde maksat funksiýanyň hemme koeffisiýentleri položitel bolsa, onda bu tablisa seredilýän meseläniň optimal çözüwiniň bardygyny görkezýär. Şeýlelikde, islendik amaly meseläniň optimal çözüwini kesgitlemeklik aşakdaky yzygiderlikde ýerine ýetirilýär.

1. Eger berlen meselede azat agzalaryň biri otrisatel bolsa, onda seredilýän meýilnama daýanç däl şerti ýerine ýetirýär. Daýanç elementleri üçin şol setiriň hemme elementlerini (-1)-e köpeltmeli.

2. Eger z setirdäki elementleriň içinde otrisatel element bar bolsa, onda ol meýilnama optimal bolup bilmez. Ony optimallyga öwürmek üçin şol elementiň sütüninde bar bolan elementleri azat agza sütüniniň elementlerine paýlamaly we iň kiçisini almaly.

3. Eger maksat funksiýanyň koeffisiýentleriniň içinde birnäçe otrisatel element bar bolsa, onda biz olaryň içinden iň kiçi ýa-da absolýut ululygy boýunça iň uly elementi saýlap, şol sütüniň gatnaşygyna seredýäris. Onda biz şol setiriň gatnaşygyny t-diýip bellesek simpleks gatnaşygy alarys:

$$t = \min \frac{b_r}{b_{rs}}.$$

4. Eger bu meseläniň daýanç meýilnamasy barlanjak bolsa, onda $y_1 = 0; y_2 = 0; \ldots, y_n = 0,$

$$y_{n+1} = b_{n+1,}$$

$$y_{n+2} = b_{n+2,}$$

....

$$y_m = b_{m,}$$

$$z = Q.$$

5. Eger optimal çözüwi 3-nji punkta görä kesgitläp bolmasa, ýagny alnan netijede z setirde ýene-de otrisatel element ýüze çyksa, onda bu shema hemme element položitel bolýança dowam edilýär. Netijede, optimal çözüw alynýar.

6. Eger meseläni tersine minimum kesgitlemeli bolsa, onda maksat funksiýanyň koeffisiýentleriniň hemmesiniň otrisatel bolmaklygyny gazanmaly.

7. Eger meseläniň goýluşyna görä z setiriň koeffisiýentleriniň hemmesiniň položitel ýa-da otrisatel bolmagy gazanylmasa, onda mesele optimal çözülmeýär.Ýagny, maksimum hem-de minimum bahalary kesgitlemek mümkin däl.

Meselä seredeliň:

$$z = 5x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -1$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$y_1 = -x_1 - x_2 - x_3 + 2 \geq 0$$

$$y_2 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 \geq 0$$

$$y_3 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 \geq 0$$

$$y_4 = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

20-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	1	2
$y_2 =$	4	2	1	3
$y_3 =$	1	$\boxed{-1}$	2	–1
$y_4 =$	–3	2	–2	5
$z =$	–5	1	–3	0

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{-1}{-1}, \frac{5}{2}$$

21-nji tablisa

	$-x_1,$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	2	1	3	1
$y_2 =$	$\boxed{6}$	2	5	1
$x_2 =$	–1	–1	–2	1
$y_4 =$	–1	2	2	3
$z =$	–4	1	–1	–1

22-nji tablisa

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_1 =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_2 =$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$
$y_4 =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{19}{6}$
$z =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$

5. Optimal meýilnamanyň algoritmi. 1) Daýanç meýilnamasy alnandan soňra z – indeks setirine seredýäris. Eger onuň hemme elementleri otrisatel däl bolsa, onda optimal meýilnama tapylan. Bu çözüw tablisanyň ýokarsynda ýerleşen näbellileriň nola deňlenmegi netijesinde alynýar, gapdalyndakylar bolsa azat agzalara deňlenýär.

2) Eger z – setiriň koeffisiýentleriniň içinde (azat agzadan başga) birisi otrisatel bolsa, onda şol koeffisiýentli sütüni rugsat ediji diýip, kabul edýäris. Eger otrisatel koeffisiýentler birnäçe sany bolsa, onda rugsat ediji diýip, iň uly absolýut ululygy bolan koeffisiýentli sütüni alýarys.

3) Saýlanyp alnan sütünde rugsat ediji element, iň kiçi simpleks gatnaşyk boýunça saýlanyp alynýar.

4) Bu element bilen bir ädim simpleks usuly ulanylyp, näbelli ýok edilýär.

5) Alnan meýilnamanyň optimallyga barlananda (z setiriň koeffisiýentleriniň alamatlary barlanýar – algoritmiň 1-nji ädimi). Eger z setiriň koeffisiýentleriniň arasynda otrisatel element bar bolsa, onda ol prosesiň gaýtalanmagyna getirýär.

6) Eger haýsy hem bolsa bir otrisatel koeffisiýentli sütünde we z setirde položitel koeffisiýent bolmasa (ýagny rugsat ediji elementi saýlap bolmaýar), onda meseläniň çözüliş oblastynda funksional z çäksiz bolup, gerek bolan möçberinde uly bahalary kabul edip bilýär. Meseläniň maksimum çözüwi ýok.

Amaly meseleleriň simpleks usuly bilen çözülişi.

M1. $z = 2x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 - x_2 + x_3 \le 3$ $\quad y_1 = -x_1 + x_2 - x_3 + 3 \ge 0$

$2x_1 + x_2 - 4x_3 \le -2$ $\quad y_2 = -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 \ge 0$

$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le -1$ $\quad y_3 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1 \ge 0$

$5x_1 + x_2 + x_3 \le 4$ $\quad y_4 = -5x_1 - x_2 - x_3 + 4 \ge 0$

$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 6$ $\quad y_5 = -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6 \ge 0$

23-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$\boxed{1}$	–1	1	3
$y_2 =$	2	1	–4	–2
$y_3 =$	–1	–3	2	–1
$y_4 =$	5	1	1	4
$y_5 =$	4	–2	–3	6
$z =$	–2	1	–1	0

24-nji tablisa

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	$\boxed{1}$	–1	1	3
$y_2 =$	–2	3	–6	–8
$y_3 =$	1	–4	3	2
$y_4 =$	–5	6	–4	–11
$y_5 =$	–4	2	–7	–6
$z =$	2	–1	1	6

$$t = \min \frac{b_i}{a_{ij}}$$

25-nji tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	–1	$\frac{1}{3}$
$x_2 =$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	–2	$-\frac{8}{3}$
$y_3 =$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	–5	$-\frac{26}{3}$
$y_4 =$	–1	-2	8	5
$y_5 =$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	–3	$-\frac{2}{3}$
$z =$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	–1	$\frac{10}{3}$

26-njy tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1
$x_1 =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{31}{15}$
$x_2 =$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_3 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{26}{15}$

26-njy tablisanyň dowamy

$y_4 =$	$-\frac{11}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{133}{15}$
$y_5 =$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{22}{15}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{68}{15}$
$z =$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{76}{15}$

26 – njy tablisadan x_i üýtgeýänler üçin täze aňlatmalary ýazalyň:

$$x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{15}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{31}{15}$$

$$x_2 = \frac{1}{5}y_2 + \frac{2}{5}y_3 + \frac{4}{5}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{26}{15}.$$

27-nji tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1
$y_4 =$	$\frac{11}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{133}{5}$
$y_5 =$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{22}{15}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{68}{15}$
$z =$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{76}{15}$

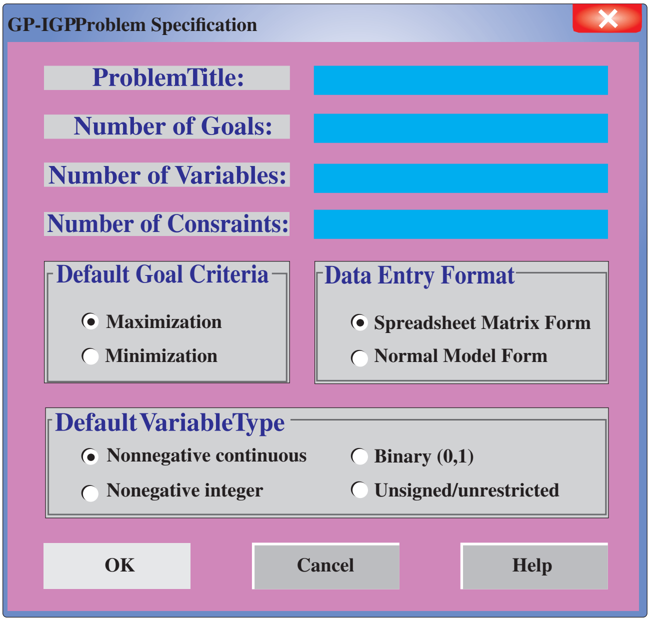
Bu tablisadan meseläniň täze goýluşyny alarys:

$$z = -\frac{5}{3}y_1 - \frac{1}{15}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{76}{15}.$$

6. Optimal çözüwiň informasion tehnologiýalar arkaly tapylyşy. QSB *(Quantitative System for Business)* programmasynyň kömegi bilen çyzykly programmirleme meselesiniň optimal çözüwini tapmaklygyň tehnologiýasyna seredeliň.

Programmanyň penjiresi açylandan soňra esasy menýunyň ***«File -> New Problem«*** düwmelerine basyp, täze mesele penjirämizi açýarys.

Täze meselämiziň penjiresi aşakdaky görnüşde bolar:



Täze meseläni girizmek üçin:

1) ***Program title*** – meseläniň adyny girizmeli;

2) ***Number of Goals*** – maksat funksiýanyň sanyny girizmeli (mydama 1);

3) ***Number of Variables***– üýtgeýjileriň sanyny girizmeli;

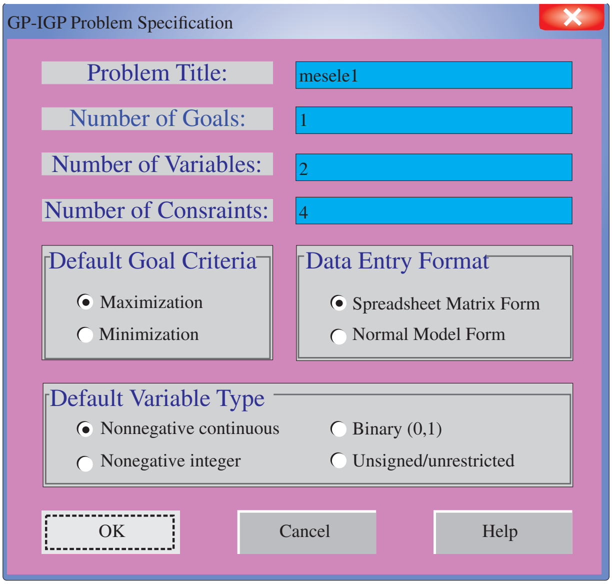
4) ***Number of Constraints*** – çäklendirmeler ulgamynyň sanyny girizmeli;

5) ***Default Goal Criteria*** – diýlen ýerde maksat funksiýa laýyklykda maximum ýa-da minimum saýlamaly;

6) ***Data Entry Format*** – diýlen ýerde meseläni nähili ýagdaýda girizmek isleýändigimize laýyklykda Spreadsheet Matrix Form ýa-da Normal Model Form saýlamaly;

7) ***Default Variable Type*** – diýlen ýerde meseläňiziň netijesiniň alyp biljek bahalaryna laýyklykda şol ýerdäkilerden birini saýlamaly (meselämiziň çyzykly programmirleme meselesi bolanlygy üçin Nonnegative continuous saýlamaly);

8) Mesele girizilenden soň penjire aşakdaky görnüşi alar:



9) Meseläniň bahalary girizilenden soň ýokardaky penjirämiziň ***OK*** düwmesine basmaly;

10) ***OK*** düwmesine basylandan soň aşakdaky penjire peýda bolar:

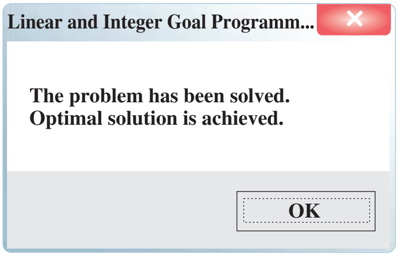
Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Max: G1				
C1			<=	
C2			<=	
C3			<=	
C4			<=	
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
Variable Type	Continuous	Continuous		

11) Ýokardaky formanyň ***Max:G1*** setirine maksat funksiýanyň koeffisiýentlerini girizmeli. Aşakdaky ***C1, C2, …, Cn***, degişlilikde

1-nji, 2-nji, ..., *n*-nji deňlemeleriň koeffisiýentlerini girizmeli (**Bellik**: çäklendirmeler ulgamynyň şertini üýtgetmek üçin şertiň üstüne iki gezek basmaly). Ondan soň penjire aşakdaky görnüşi alar :

Variable -->	X1	X2	Direction	R.H.S
Max:G1	3	4		
C1	2	3	<=	9
C2	3	2	<=	13
C3	1	-1	<=	1
C4	0	0	<=	2
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	0		
VariableType	Continous	Continous		

Şeýlelikde, mesele girizildi. Meseläniň netijesini almak üçin esasy menýudaky Solve and Analyze düwmesine basmaly. Basylandan soň aşakdaky penjire peýda bolar. Bu penjiräniň OK düwmesine basmaly. (Meseläniň çözülendigini habar berýär)



12) Meseläniň çözüwi aşakdaky penjire arkaly görkezilýär.

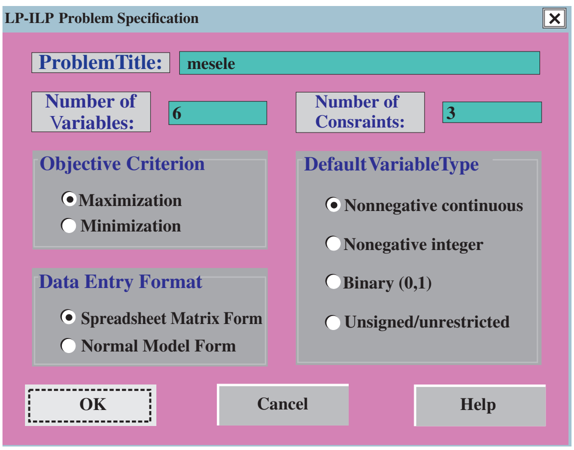
	13:04:44		Sunday	May	08	2011		
	Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	G1	X1	2,40	3,00	7,20	0	2,67	M
2	G1	X1	1,40	4,00	5,60	0	-3,00	4,50
	G1	Goal	Value	(Max.) =	12,80			
	Constrain	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Suplus	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	ShadowPrice Goal 1
1	C1	9,00	<=	9,00	0	2,00	12,00	1,40
2	C2	10,00	<=	13,00	3,00	10,00	M	0
3	C3	1,00	<=	1,00	0	-0,50	4,00	0,20
4	C4	1,40	<=	2,00	0,60	1,40	M	0

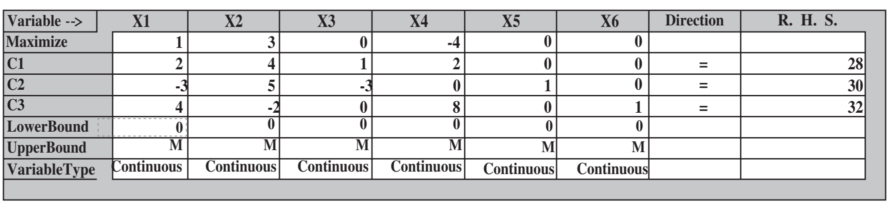
13) Meseläniň çözüwi ýokardaky görkezilen baha deňdir.
14) Meseläniň netijesi alnandan soň programmany ýapmaly.
Mysal. Meseläniň çözüwini tapyň.

1. $$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max;$$

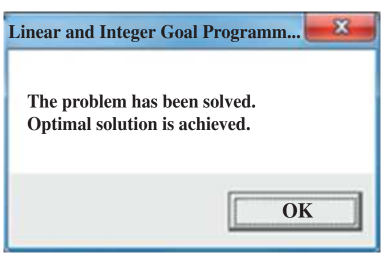
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}).$$





Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Direction	R. H. S.
Maximize	1	3	0	-4	0	0		
C1	2	4	1	2	0	0	=	28
C2	-3	5	-3	0	1	0	=	30
C3	4	-2	0	8	0	1	=	32
LowerBound	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		



	22:58:51		Thusday	October	17	2013		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Constribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0,9091	1,0000	0,9091	0	basic	0,5294	1,5000
2	X2	6,5455	3,0000	19,6364	0	basic	2,0000	5,6667
3	X3	0	0	0	-0,3636	at bound	-M	0,3636
4	X4	0	-4,0000	0	-5,2727	at bound	-M	1,2727
5	X5	0	0	0	-0,0909	at bound	-M	0,0909
6	X6	41,4545	0	0	0	basic	-0,1000	0,1081
	Objective	Function	(Max.) =	20,5455				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	28.0000	=	28,0000	0	0,6364	24,0000	93,1429
2	C2	30.0000	=	30,0000	0	0,0909	-15,0000	35,0000
3	C3	32.0000	=	32,0000	0	0	-9,4545	M

Meseläniň çözüwi: $F_{max} = 20,5455$.

2. $$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6}).$$

3. $$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

§5. Çyzykly programmirlemäniň ikeldilen meselesi

1. Ikeldilen mesele barada düşünje. Bize belli bolşy ýaly, islendik kärhana önüm öndürmek üçin özüne gerek bolan serişdeleri üpjün edýär. Soňra şonuň esasynda dürli görnüşli önümleri öndürip, gerek bolan ýa-da soralýan islegleri kanagatlandyrýar.

Biz ýokarda bu meselä görä çyzykly programmirlemäniň esasy görnüşine seredipdik. Ol degişlilikde:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}. \qquad (17)$$

Maksat funksiýa, şeýle hem çäklendirmeler ulgamy:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (18)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}. \qquad (19)$$

Ýagny, bar bolan m sany serişdäniň esasynda n dürli önümi öndürip çykarmaly diýen çyzykly programmirlemäniň meselesiniň umumy modeli.

Birnäçe ýagdaýlaryň esasynda kärhana önümleri öndürmän, özünde bar bolan serişdeleri ýokary bahada başga bir kärhana ýerleşdirip, edil önümiň öndürilip çykarylan bahasyny talap edýär. 2-nji kärhana bolsa, bu serişdeleri mümkin boldugyça arzan almak isleýär.

Ykdysady tarapdan seredeniňde çyzykly programmirlemäniň esasy meselesi, hojalygy meýilnamalaşdyrmakdan durýandyr. Goý hojalykda a_1, a_2, …, a_n serişdeler bar bolsun. Onda olary n-dürli önümleri çykarmak üçin ulanmak bolýar. Her önüminiň (x_1, x_2, …, x_n) öndürijiligiň göwrümini kesgitlemeli. Şunlukda önümiň umumy bahasy

$$z = p_1 x_2 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n. \qquad (20)$$

maksimal bolmaly. Çäklendirmeler ulgamy:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq a_m. \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Bu ýerde p_j – simpleks gatnaşyk – j-nji önüm birligiň bahasy, a_{ij} – ykdysady tehnologiki koeffisiýent – i-nji serişdäni ulanmak bilen

j-nji önümi öndürmekligiň normasy. Ykdysady many boýunça ähli näbelliler otrisatel däl:

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{22}$$

Indi bolsa bu berlenlerden peýdalanyp başga bir ykdysady meselä seredeliň.Mysal üçin, haýsy hem bolsa bir kärhana, hojalykda bar bolan ähli serişdeleri satyn almakçy bolýar. Bu şertden ugur alyp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ optimal bahalary kesgitlemek bolar:

1) serişdeleriň umumy bahasyny satyn alýan kärhana minimumlaşdyrmaga ymtylýar;

2) ýöne her bir serişde üçin hojalyga bolmanda onuň taýyn önümi hökmünde aljak girdejisini tölemeli. Eger bolmanda hojalyga serişdeleri satmasa girdejili bolýar, ol öz öndürijiligini gurnap biler;

3) w-serişdeleriň umumy bahasy öndürijilik bahasy bolup ýüze çykýar:

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m. \tag{23}$$

Alnan maksat funksiýany minimallaşdyrmaly.

Ikinji talap şeýle çäklendirmelere getirýär. Birinji önümiň birligine a_{11} harajatlamaýan, birinji serişdäniň birliginiň u_1 bahasy bilen, a_{21} ikinji serişdäniň birliginiň u_2 bilen we ş.m. $u_m m$ serişdäniň a_{mn} bahasy bilen. Ähli serişdeleriň bahasy 1, 2,...,m önüm birliginiň öndürijiligine gidip, şu aşakdaka deň bolar:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq p_1.$$

Şuňa meňzeşlikde pikir ýöretsek, 2-nji, 3-nji we ş.m. önümiň görnüşleri üçin getirip bolar. Netijede, deňsizlikler ulgamyny alýarys:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq p_1, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq p_n. \end{array}\right\} \tag{24}$$

Ykdysady many boýunça gözlenilýän bahalar otrisatel däl:

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0, \tag{25}$$

Deňsizlikleriň umumylygy (24), (25) we meseleleriň sistemasyny emele getirýär.

Matematiki formulalary, ýagny (20)-(22) formula bilen birinji meseläni, (23)-(25) formula bilen ikinji meseläni deňeşdireliň.

1) Bir meseläniň näbellileriniň sany beýleki deňsizlikleriň sanyna deňdir.

2) Çäklendirmeler ulgamynyň koeffisiýentiniň matrisalary biriniň beýlekisinden transponirlemegi bilen alynýar.

3) Deňsizlikler ulgamynda çäklendirmeleriň gapma-garşy manylary bolup (≤ çalyşýar ≥), näbellileriň otrisatel dälligi saklanýar.

4) Çäklendirmeler ulgamynyň erkin agzalary bir meseläniňki beýlekiniň funksionalynyň koeffisiýenti bolýar, funksionalyň koeffisiýenti bolsa çäklendirmeleriň erkin agzasyna öwrülýär.

5) Bir meselede funksional maksimumlaşýar, beýlekide minimallaşýar. Çyzykly programmirlemegiň meselesine görkezilen häsiýetlere eýe bolan özara ikileýinlik diýilýär.

Olaryň biri esasy ýa-da göni, beýlekisi oňa çatyrymly ýa-da ikileýin meseledir. Göni mesele diýip, biz birinjini hasap ederis. Göni meseläniň çäklendirmeler ulgamyna goşmaça y_i näbellileri girizip, şu aşakdaky görnüşi alarys:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0, \\ y_2 = - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_2 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_m \geq 0. \end{array}\right\} \quad (26)$$

Ikileýin meselede goşmaça näbellileri v_j (y) üsti bilen belläris:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots\_a_{m1}u_m - p_1 \geq 0, \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - p_2 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = a_{1m}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - p_n \geq 0. \end{array}\right\} \quad (27)$$

Göni meseläni Žordan tablisasy görnüşinde ýazýarys.

26-njy tablisa

Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
$Z =$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	0

Sebäbi ikileýin mesele şol bir berlenler boýunça şekillendirilen, ony şol tablisa girizip bolýar. (23), (24), (27) aňlatmalary derňemek bilen görýäris, ýagny u_i azat näbelliler ikileýin meselede setir bilen däl-de, sütün bilen ýazylýar. Ikileýin meseläniň tablisasynyň esasy böleginiň ýokarsynyň her bir sütüninde degişlilikde goşmaça v_j goýalyň, azat agzalar sütünini bolsa w funksionala geçireliň. Azat näbelliler sütüniniň iň soňky öýjüginde 1 goýýarys (*27-nji tablisa*). Onda ikileýin mesele 27-nji tablisada aşakdaky görnüşde okalýar:

27-nji tablisa

Ikeldilen mesele		$v_1 =$	$v_2 =$	...	$v_n =$	$w =$
	Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
u_1	$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
u_2	$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
u_m	$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
1	$Z =$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	0

Bular ýaly tablisa bilelikde ýazylan iki mesele, ýagny esasy (başdaky) we ikeldilen (soňky) mesele diýilýär. Bu meseläni ýokarda seredilen çyzykly programmirleme meselesi hökmünde simpleks usulyndan peýdalanyp, ädimme-ädim Žordan näbellileri ýok etmegiň esasynda onuň optimal çözüwini tapýarys.

28-nji tablisa

Ikeldilen mesele		$v_1=$	$u_m=$	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
u_1	$y_1 =$	b_{11}	$-\frac{a_{12}}{a_{m2}}$	...	b_{1n}	b_1
u_2	$y_2 =$	b_{21}	$-\frac{a_{22}}{a_{m2}}$	...	b_{2n}	b_2
...	...	...		...	...	...
v_2	$x_2 =$	$\frac{a_{m1}}{a_{m2}}$	$\frac{1}{a_{m2}}$	...	$\frac{a_{mn}}{a_{m2}}$	$\frac{a_m}{a_{m2}}$
1	$z =$	q_1	$\frac{p_2}{a_{m2}}$	...	q_n	Q

2. Ikeldilen meselede esasy teoremalar

1-nji teorema. *Eger ikeldilen meseleleriň biriniň optimal çözgüdi bar bolsa, onda onuň beýlekisiniň ekstremal aňlatmalary, ýagny olaryň funksionaly gabat gelýär.* max z = min w.

Eger-de bir meselede funksional çäklendirilmedik bolsa, onda oňa ikeldilen mesele ters gelýär.

Subudy. Ikeldilen tablisa göni hem ikeldilen meseläni ýazalyň we olarda modifisirlenen Žordan aýyrmalarynyň (ýok etmeleriniň) ädimini ýerine ýetireliň we ony tä göni meseläniň optimal meýilnamasyny alýançak dowam edýäris. Netijede, biz (26) tablisa gelýäris, şeýlelikde b_i-niň ähli azat agzalary we z setirindäki ähli koeffisiýentleriň we q_j-niň otrisatel dälliginde $b_i \geq 0$, $q_j \geq 0$ meýilnama $y_1 = \ldots = y_s = x_{s+1} = \ldots = x_n = 0$ bolup, $z = Q$ optimal maksimum aňlatmany alýarys.

29-njy tablisa

Ikeldilen mesele		$u_1 =$	...	$u_S =$	v_{s+1}	...	$v_n =$	$w =$
	Göni mesele	$-y_1$	...	$-y_s$	$-x_{s+1}$	...	x_n	1
v_1	$x_1 =$	b_{11}	...	b_{1s}	$b_{1,\ s+1}$	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
v_s	$x_s =$	b_{s1}	...	b_{ss}	$b_{s,\ s+1}$	...	b_{sn}	b_s
u_{s+1}	$y_{s+1} =$	$b_{s+1,\ s}$	...	$b_{s+1,\ s}$	$b_{s+1,\ s+1}$	...	$b_{s+1,\ n}$	b_{s+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
u_m	$y_m =$	b_{m1}	...	b_{ms}	b_{ms+1}	...	b_{mn}	b_m
1	$z =$	q_1	...	q_s	q_{s+1}	...	q_n	Q

Indi bolsa ikeldilen meselä seredeliň. Sütüniň çep esasy bölegine degişli ýerleşen näbellileri nola deňläliň:

$$v_1 = ... = v_s = u_{s+1} = ... \ u_m = 0.$$

Onda ýokarda ýerleşen esasy setiriň nabellileri aşakdaky deňlikleri kabul edip alýar:

$$u_1 = q_1, \ ..., u_s = q_s, v_{s+1} = q_{s+1} \ ... \ v_n = q_n.$$

Ýokarda belleýşimiz ýaly, q_i koeffisiýentleriň ählisi otrisatel däldigi sebäpli, bu meýilnamany kabul edip bolýar. Ikeldilen meselede azat näbellileriň sany *m*-e deň we şonça (çep sütündäki azat näbelliler) meýilnama degişli näbelliler nola deňlenen. Diýmek, bu meýilnama (опорный) daýanç, geometriki tarapdan bolsa köpgranlygyň depeleriniň çözüwini görkezýär. Şunuň ýaly meýilnamalaryň içinden onuň optimal çözüwini gözlemeli.

29-njy tablisadan ikeldilen meseläniň maksat funksiýasyna seredeliň:

$$w = b_1v_1 + \dots + b_sv_s + b_{s+1}u_{s+1} \dots + b_mu_m + Q.$$

29-njy tablisada azat agzalaryň otrisatel däldigi tapylypdyr: $b_i \geq 0$, *v* we *u* näbelliler bolsa ikeldilen meseläniň manysy boýunça otrisatel däldir. Munuň esasynda her bir $b_i\ v_i$ we $b_j\ u_j$ görnüşli goşulyjylar otrisatel däldirler we olaryň ählisiniň jemi

$$b_1v_1 + ... + b_sv_s + b_{s+1}u_{s+1} + ... + b_mu_m$$

islendik kabul edip bolýan meýilnama üçin otrisatel däldir. Bu jem Q azat agzanyň üstüne goşulýar we w-niň minimumyny gazanmak üçin ony mümkin boldugyça kiçeltmeli. Otrisatel däl sanlaryň içinde iň azy nol. Bizi gyzyklandyrýan jemiň nola deň bolmaklygy üçin her bir näbelli v we u goşulyjylary nola deňlemek ýeterlikdir.

Şeýlelikde, her bir ikeldilen meseläniň meýilnamasyny 29-njy tablisadan näbellileriň nola deňlenip alynmagy üçin onuň daýanç meýilnamasynyň bolmaklygy we funksionalyň minimumlygy, ýagny onuň optimallygy bolmaly. Eger b_i-niň azat agzalarynyň arasynda nol bar bolsa, onda oňa gabat gelýän gapdal näbelliler belli bir aňlatma çenli noldan ulaldylyp bilner we bu ýagdaýda funksionalyň ululygy üýtgemeýär. Bu ýagdaýda ikeldilen meselede optimal meýilnamalar köpdür. Minimum v we maksimum z şol bir Q azat agza deň bolýar. Bu gutarnykly teoremanyň birinji bölegini subut edýär.

Goý, göni meselede z funksional çäklendirilmedik bolsun.

Algebraik taýdan bu daýanç meýilnamanyň 29-njy tablisadaky sütünleriniň biri, goý, s sütünde q_s koeffisiýent otrisatel bolsun, galan beýleki koeffisiýentler bolsa položitel däl bolsun. $b_{is} \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. s sütün çözmäge rugsat edýän bolmaly, ýöne onda şol elementi saýlap we meýilnamanyň gowulaşmagy üçin hiç bir ädim etmek bolmaýar.

Ikeldilen meseläniň ýagdaýyna seredip geçeliň. Munuň üçin u_s näbelliniň aňlatmasyny ýazalyň. Şeýle şowsuz baş sütüni gapdal näbellileriň üsti bilen aňladalyň:

$$u_s = b_{1s}v_1 + \cdots + b_{ss}v_s + b_{s+1,\,s}u_{s+1} + \cdots + b_{ms}u_m + q_s.$$

Bu aňlatmanyň sag tarapynda otrisatel däl v we u näbelliler, şeýle hem položitel däl b koeffisiýentli elementler ýerleşen. Şeýle ululyklaryň köpeltmek hasyly, ýagny $b_{\text{is}}\ v_i$ ýa-da $b_{js}\ u$ položitel däl bolup, şeýle köpeltmek hasylynyň jemi:

$$b_{1s}v_1 + \cdots + b_{ss}v_s + b_{s+1,s}u_{s+1} + \cdots + b_{ms}u_m \leq 0.$$

Amatly ýagdaýda bu jemi nola getirip bolýar, onuň üçin v we u degişli näbellileri nola deňlemeli. Ýöne u_s näbelli otrisatel bolar, sebäbi $u_s = q_s$, $q_s < 0$.

Sag tarapdaky islendik näbelliniň nolunyň ýerine haýsy hem bolsa bir položitel baha berilse, ol meseläni öňküden hem çylşyrymlaşdyrýar. Meseläniň şertine görä, bu näbelliler u_s näbelliler bilen bilelikde otrisatel bolup bilmeýärler.

Teorema doly subut edildi.

Mysal. Bu teoremany aşakdaky ýaly mysal bilen görkezeliň.

Goý, göni meseläniň görnüşi bar bolsun, onda funksiýanyň maksimumyny tapmaly:

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3.$$

aşakdaky şertlerde:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 \le 5, \\ & 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 12, \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8, \\ & 2x_1 + 8x_2 - x_3 \le 11. \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}\right\}$$

Ikeldilen mesele şeýle şekillendirilýär. Funksionalyň minimumyny tapmaly:

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4,$$

çäklendirilmelerde:

$$\left.\begin{aligned} & u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 \ge 12, \\ & u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 \ge 6, \\ & -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 \ge -7, \\ & u_1 \ge 0, \quad i = 1,2,3,4. \end{aligned}\right\}$$

Meselede goşmaça näbellileri girizeliň.

Göni mesele:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 + 5 \ge 0, \\ & y_2 = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 12 \ge 0, \\ & y_3 = -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 \ge 0, \\ & y_4 = -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 11 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Şeýlelikde, ikeldilen mesele:

$$\left.\begin{aligned} & v_1 = u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 12 \ge 0, \\ & v_2 = u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 - 6 \ge 0, \\ & v_3 = -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 + 7 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Ilki meseläni ikeldilen tablisa ýazalyň (*30-njy tablisa*) we göni meseläniň optimumyny almak üçin modifisirlenen Žordan aýyrmasyndan iki ädim ätmeli (*31-nji we 32-nji tablisa*).

30-njy tablisa

Ikeldilen mesele	*Göni mesele*	$v_1=$ $-x_1$	$v_2=$ $-x_2$	$v_3=$ $-x_3$	$w=$ 1
u_1	$y_1=$	$\boxed{1}$	1	-1	5
u_2	$y_2=$	2	4	-5	12
u_3	$y_3=$	1	-3	1	8
u_4	$y_4=$	2	8	-1	11
1	$z=$	-12	-6	7	0

31-nji tablisa

Ikeldilen mesele	*Göni mesele*	$u_1=$ $-y_1$	$v_2=$ $-x_2$	$v_3=$ $-x_3$	$w=$ 1
v_1	$x_1=$	1	1	-1	5
u_2	$y_2=$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3=$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4=$	-2	6	$\boxed{1}$	1
1	$z=$	12	6	-5	60

32-nji tablisa

Ikeldilen mesele	*Göni mesele*	$u_1=$ $-y_1$	$v_2=$ $-x_2$	$u_4=$ $-y_4$	$w=$ 1
v_1	$x_1=$	-1	7	1	6
u_2	$y_2=$	-8	20	3	5
u_3	$y_3=$	3	-16	-2	1
v_3	$x_3=$	-2	6	1	1
1	$z=$	2	36	5	65

32-nji tablisada ýokarky näbellileri göni meseläniň noluna deňleýäris we onuň optimal meýilnamasyny ýazyp alarys:

$$x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 1, z_{\max} = 65, w_{\min} = 65.$$

Ikileýin mesele üçin nola gyraky näbellileri deňleýäris we iň soňky setirde tablisada ýokarkylaryň aňlatmasyny okaýarys.

Esasy näbellileriň optimal aňlatmalary şu aşakdaky ýaly bolar:

$$u_1 = 2, u_2 = u_3 = 0, u_4 = 5;$$

Munda funksionalyň aňlatmasy minimal we göni meseläniň $w_{\min} = 65$ funksionalyň aňlatmasyna deň.

2-nji teorema. *Eger-de meseläniň optimal çözgüdi onuň çäklendirilmesini deňsizlige öwürýän bolsa, onda optimal meýilnamada ikileýin meselede gabat gelýän näbelli nola deň.*

Eger optimal meýilnamanyň haýsy-da bolsa bir komponenti položitel bolsa, onda ikileýin meseläniň gabat gelýän çäklendirmesi onuň optimal meýilnamasy bilen deňlige öwrülýär.

Şu getirilen mysalda göni meseläniň optimal meýilnamasy ikinji gezek üçünji şertlerini (Q) deňsizlige öwürýär.

$$2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 < 12$$
$$6 - 3 \cdot 0 + 1 < 8.$$

Ikeldilen meseläniň optimal meýilnamasynda ikinji we üçünji esasy näbelliler nola deň:

$$u_2 = u_3 = 0$$

Göni meseläniň optimal meýilnamasynyň birinji we üçünji komponentleri polojiteldir: $x_1 = 6, x_3 = 1$. Degişlilikde ikeldilen meseläniň birinji we üçünji çäklendirmeleri optimal bahalary bilen onuň näbellileri deňlige öwrülýärler:

$$2 + 2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 5 = 12$$
$$-2 - 5 \cdot 0 + - 5 = -7$$

Umumy ýagdaýda teoremany subut etmeýäris.

3. Ikeldilen simpleks usul

Goý, çyzykly programmirleme meselesi bar bolsun. Funksionalyň minimumyny tapmaly:

$$z = p_1x_1 + ... + p_jx_j + ... + p_sx_s + ... + p_nx_n + P. \qquad (28)$$

Çäklendirmeler ýerine ýetirilende:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots a_{1n}x_n + a_1 \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{is}x_s + \ldots a_{in}x_n + a_i \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_r = a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rj}x_j + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots a_{rn}x_n + a_r \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots a_{mn}x_n + a_m \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots n.
\end{array}\right\} \qquad (29)$$

33-nji tablisada meseläni ýazalyň. Meseläniň meýilnamasyny öň bolşy ýaly, ýokarky näbellileri nola deňeşmek bilen, gyrakylary bolsa erkin agzalary bilen.

Bu hem funksionala degişli, şonuň üçin 33-nji tablisadan alarys:

$$z = P. \qquad (30)$$

33-nji tablisa

Ikeldilen mesele	x_1	...	x_j	...	x_s	...	x_n	1
$y_1 =$	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i =$	a_{i1}		a_{ij}		a_{is}		a_{in}	a_j
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r =$	a_{r1}	...	a_{rj}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	a_r
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	a_m
$z =$	p_1	...	p_j	...	p_s	...	p_n	P

Ähli erkin agzalar otrisatel bolmasa, meýilnama goýberilip bilner:

$$a_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (31)$$

Hasaplaýjy operasiýa hökmünde bu meseläni çözmek üçin Žordan ýok etmäni peýdalanarys.

Meýilnamanyň optimal kriteriýalary aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$z' = P' = P - \frac{a_r}{a_{rs}} \cdot p_s$$

ýa-da

$$z' = z - \frac{a_r}{a_{rs}} \cdot p_s. \tag{32}$$

Adaty Žordan kesgitlemelerinde başga tablisa geçmek üçin çözýän setiriň elementleri çözýän elemente bölünýärler we belgilerini näbelliler. a_r položitel erkin agzanyň ýerine täze tablisada $\frac{a_r}{a_{rs}}$ san durýar. Alynýan meýilnamada bu san hem položitel bolmaly: $\left(\frac{-a_r}{a_{rs}}\right) > 0$ (bu bolsa öz gezeginde $a_{rs} < 0$ bolmagy talap edýär). Bu ýagdaýda $p_s < 0$ azalýar, $p_s > 0$ köpelýär $p_s = 0$ üýtgemän galýar.

Mesele çözülende eger p_j -niň ähli koeffisiýentleri položitel bolsa, bu ýagdaýda funksional artýar. Ýagny, tablisada funksionalyň aňladylyşy minimal, meýilnama bolsa optimal. P_j koeffisiýentiň arasynda noluň bolmagy bilen meýilnamany täze tablisa geçirip üýtgedip bolýar, ýöne funksional öňküligine galar. Bu ýagdaýda optimal meýilnamalar köpdür. Eger noluň üstünde otrisatel elementler ýok bolsa, meýilnama ýeke-täk bolup galýar. Şeýlelik bilen bu minimum meselede optimal goýberilýän meýilnamanyň kriteriýasydyr.

Şeýlelikde, minimum meselede optimal ýol bermeleriniň meýilnamanyň kriteriýasy z setiriň koeffisiýentininiň erkin agzalardan başgasynyň otrisatel däldigi bolup durýar, .

$$p_j \geq 0, j = 12, ..., n. \tag{33}$$

Ikileýin simpleks usulda meseläniň çözülişi şeýle yzygiderlikde ýerine ýetirilýär. Ilki bilen z setiriň koeffisiýentleriniň otrisatel däldigi, soňra bolsa erkin agzalaryň otrisatel däldigi alynýar. Munuň ýaly tertip üçin çözülýän elementi saýlama düzgünini esaslandyrmak gerekdir.

z setirde p_s-niň otrisatel koeffisiýentini kesgitlemeli. Eger a_{rs} elementi çözülýän diýip hasaplasak, onda adaty Žordan (aýyrmasy) ýok etmesi ädiminden soň $p_s < 0$ a derek $\frac{p_s}{a_{rs}}$ sany alarys, ol položitel bolmaly. Bu ýerden hem $a_{rs} < 0$ bolup jemi çykar. Eger-de $p_s < 0$ koeffisiýentli sütünde, ýöne dürli a_{rs} otrisatel elementi saýlasaň we ony çözgütli diýip hasaplasaň, onda netijede edilen ädimden soň z-setirde bir minusyň ýerine başga biri peýda bolup biler. Saýlawy tertipleşdirmäge şu aşakdaky teorema kömek edýär.

Çözülýän setiriň elementlerine z setiriň koeffisiýentleriniň gatnaşyklaryny düzeliň (z nomer bilen):

$$\frac{p_s}{a_{rs}}, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Alnan sanlardan položitellerini saýlalyň:

$$\frac{p_s}{a_{rs}} > 0,$$

olara ikileýin gatnaşyklar diýilýär.

1-nji teorema. *Eger çözüji element iň kiçi ikileýin gatnaşyklar boýunça saýlansa, onda adaty Žordan aýyrmasyndan emele gelen ädimden soň, z setiriň koeffisiýenti çözülýän ulgamynda hemişe položitel, galan z setiriň koeffisiýentleri bolsa öz belgilerini saklaýarlar.*

Subudy. Goý,

$$\frac{p_s}{a_{rs}} = \min\left(\frac{p_j}{a_{rj}} > 0\right) \text{ bolsa, onda} \tag{34}$$

bu sütün s belgili çözüjidir.

Onda z setiriň täze koeffisiýentlerinde $\frac{p_s}{a_{rs}} > 0$-a deň bolar we teoremanyň birinji bölümi subut edildi.

Erkin (j *nomerli*) sütüni alalyň we z setiriň p_j täze koeffisiýenti üçin aňlatma düzeliň.

$$p_j' = p_j - \frac{p_s}{a_{rs}} a_{rj} = a_{rj}\left(\frac{p_j}{a_{rj}} - \frac{p_s}{a_{rs}}\right). \tag{35}$$

Teoremadan görnüşi ýaly, z-setirde minuslaryň sanynyň köpelmezligi üçin çözülýän ulgamy iň kiçi ikilik gatnaşyklar boýunça düzmeli.

Ähli ýokarda ýazylanlar mesele çözmegiň birinji tapgyrynda çözüji element sanlaryň tertibini kesgitleýär.

1) z setirde otrisatel koeffisiýent ýerleşýär;

2) Saýlanan sütünde otrisatel san gözlenýär we ony düzýän setir çözgüde alynýar;

3) Ikileýin gatnaşyklar hasaplanylýar we olardan iň kiçisi çözýän elementi görkezýär.

Goý, $p_s < 0$, bolanda s sütünde topbakda başga otrisatel sanlar ýok bolsun.

$$a_{is} \geq 0, i = 1, 2, ..., m.$$

Bu ýagdaýda s sütüniň haýsy bir elementi alynsada we näçe ädim ädilse-de koeffisiýent p_s otrisatel bolup galar, sütüniň beýleki hemme elementleri bolsa položitel bolar. (33) şert ýerine ýetirilmeýär.

x_s näbelli ululyklara $x_s = t > 0$ bahany bereliň, beýleki hemme ýokarky näbellileri bolsa, nola deňlälin. Onda

$$y_i = a_{is}t + a_i, i = 1, 2..., m, \tag{36}$$

$a_{is} > 0$ şertde t parametri islendigiňçe ulaldyp bolýar we a_i-iň alamatyna garamazdan $y_i > 0$ alarys, ýagny çäklendirmeler sistemasy (29) kanagatlandyrylýar.

Funksionalyň bahasy bu ýagdaýda çäksiz kiçelýär:

$$z = p_s t + P \rightarrow -\infty$$

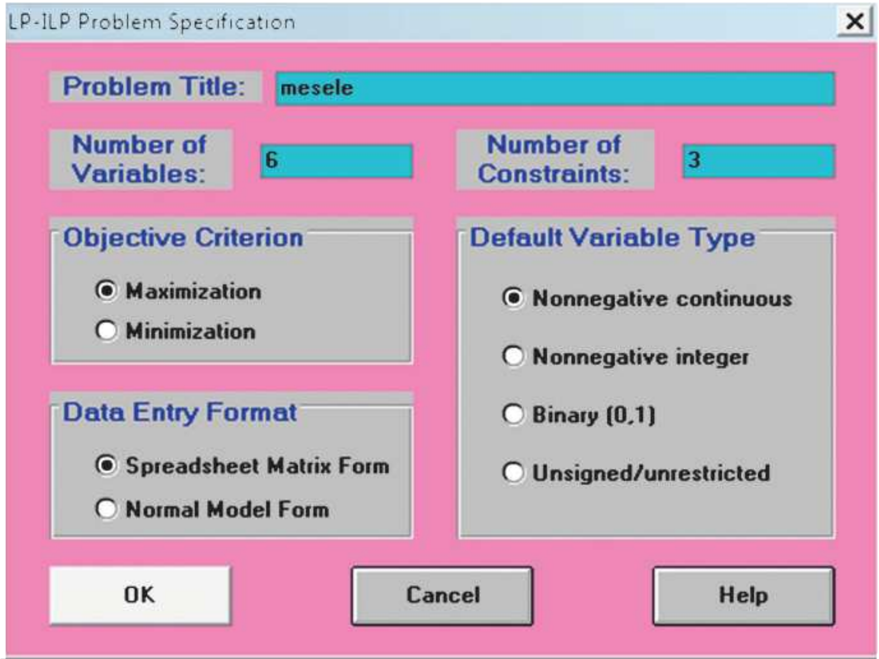
Eger $a_{is} = 0$ we $a_i < 0$ bolsa, onda (36)-dan görnüşi ýaly islendik gutarnykly t, $y_i = a_i < 0$.

Islendik $p_s < 0$ şerte salgylanyp, näbelli x_s-i 0 ulaltmaly, ýöne islendik i nomerli deňsizligi onuň položitel aňladylyşy kanagatlandyrmaýar. Bu bolsa meseläniň çäklendirmesiniň garşylyklydygyny görkezýär.

5. Optimal çözüwiň informasion tehnologiýalar arkaly çözülişi. ***QSB (Quantitative System for Business)*** programmasynyň kömegi bilen ikileýin çyzykly programmirleme meselesiniň optimal çözüwini tapmaklygyň tehnologiýasyna seredeliň.

Programmanyň penjiresi açylandan soňra esasy menýunyň ***«File -> New Problem»*** düwmelerine basyp, täze mesele penjirämizi açýarys.

Täze meselämiziň penjiresi aşakdaky görnüşde bolar:



Täze meselämize girizmek üçin :

1) ***Program title*** – meseläniň adyny girizmeli;

2) ***Number of Variables*** – üýtgeýjileriň sanyny girizmeli;

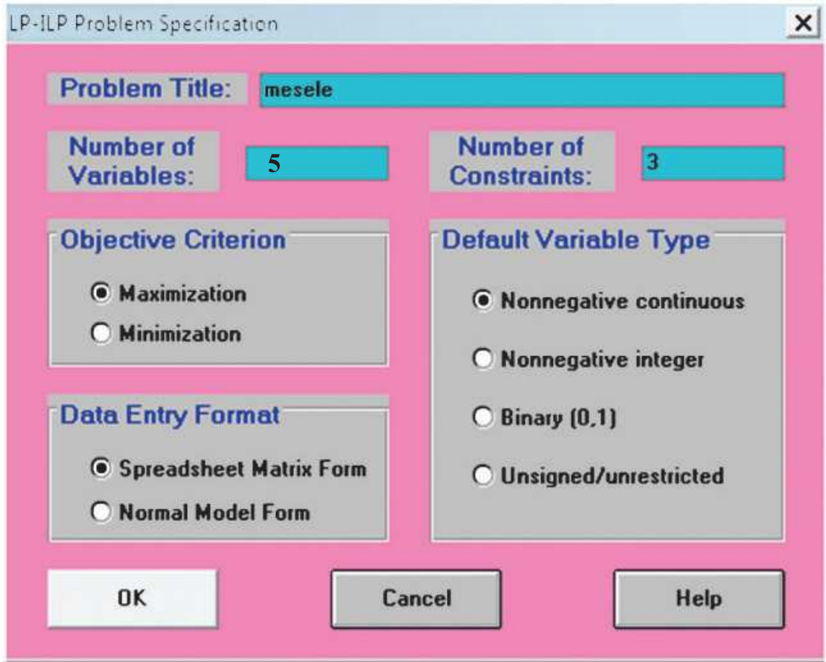
3) ***Number of Constraints*** – çäklendirmeler ulgamynyň sanyny girizmeli;

4) ***Default Goal Criteria*** – diýlen ýerde maksat funksiýa laýyklykda maximum ýa-da minimum saýlamaly;

5) ***Data Entry Format*** – diýlen ýerde meseläni nähili ýagdaýda girizmek isleýändigimize laýyklykda Spreadsheet Matrix Form ýa-da Normal Model Form saýlamaly;

6) ***Default Variable Type*** – diýlen ýerde meselämiziň netijesiniň alyp biljek bahalaryna laýyklykda şol ýerdäkilerden birini saýlamaly (meselämiziň ikileýin programmirleme meselesi bolanlygy üçin Nonnegative integer saýlamaly);

7) Meselämizi girizenimizden soň penjirämiz aşakdaky görnüşi alar:



8) Meselämiziň bahalaryny girizenimizden soň ýokardaky penjirämiziň ***OK*** düwmesine basmaly;

9) ***OK*** düwmesine basanymyzdan soň aşakdaky penjire peýda bolar :

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize							
C1						<=	
C2						<=	
C3						<=	
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

10) Ýokardaky formanyň Maximize setirine maksat funksiýamyzyň koeffisiýentlerini girizmeli. Aşakdaky $C1, C2, \ldots, Cn$ degişlilikde 1-nji, 2-nji, ..., n-nji deňlemeleriň koeffisiýentlerini girizmeli (Bellik: çäklendirmeler ulgamynyň şertini üýtgetmek üçin şertiň üstüne iki gezek basmaly). Ondan soň penjire aşakdaky görnüşi alar:

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize	0	2	0	1			
C1	0	1	1	3	0	=	9
C2	0	3	0	-2	1	=	5
C3	1	2	0	1	0	=	6
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

11) Şeýlelikde, meselämizi girizdik. Meselämiziň netijesini almak üçin esasy menýudaky ***Solve and Analyze*** düwmesine basmaly. Basanymyzdan soň aşakdaky penjire peýda bolar. Bu penjiräniň ***OK*** düwmesine basmaly (Meseläniň çözülendigini habar berýär).

Linear and Integer Goal Programm... X

The problem has been solved.
Optimal solution is achieved.

OK

12) Meseläniň çözüwi aşakdaky penjire arkaly görkezilýär.

	21:42:26		Sunday	May	08	2011
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	0	0	0	-1,0000	at bound
2	X2	2,0000	2,0000	4,0000	2,0000	at bound
3	X3	1,0000	0	0	0	basic
4	X4	2,0000	1,0000	2,0000	0	basic
5	X5	3,0000	0	0	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	6,0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	9,0000	=	9,0000	0	0
2	C2	5,0000	=	5,0000	0	0
3	C3	6,0000	=	6,0000	0	1,0000

13) Meselämiziň çözüwi ýokardaky görkezilen baha deňdir.

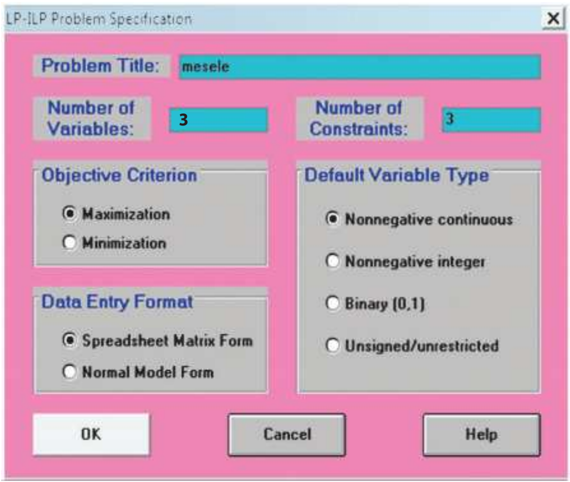
14) Meseläniň netijesini alanyňyzdan soň programmany ýapyp bilersiňiz.

Mysal. Ikeldilen meseläni kesgitlemeli.

1. $F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	-2	5	-4		
C1	4	2	-3	>=	9
C2	3	-2	5	>=	8
C3	1	3	4	>=	12
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	1	1	1		
Variable Type	Binary	Binary	Binary		

Infeasible	solution !!!	Make any of	the following	RHS changes	and solve the	problem again.
10-17-2013 23:48:30	Constraint	Direction	Right Hand Side	Shadow Price	Add More Than This To RHS	Add Up To This To RHS
1	C1	>=	9,0000	0	-M	-6,0000
2	C2	>=	8,0000	0	-M	-2,0000
3	C3	>=	12,0000	0	-M	-4,0000

2. $F = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

3. $F = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 7, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

II bap
Çyzykly programmirlemäniň ýörite meseleleri

§1.Ulag meselesi

1. Ulag meselesiniň goýluşy. Ulag meselesi bu ugradylýan punktdan barmaly punkt aralygynyň çykdajysynyň minimal bolmagy üçin hakyky ýüze çykýan mesele bolup durýar.

Bu çyzykly programmirleme meselesidir, ýöne birnäçe häsiýetleriň netijesinde ony simpleks usuly bilen çözmän, ondan hem has ýeňil usul bilen çözmek bolýar. Kitabymyzyň girişinde ulag meselesine degişli meselä seredildi. Ulag meselesiniň goýluşy aşakdaky görnüşdedir:

Ugradylan m sany punktlaryň her birinde a_i birlik ýük serişdeleri bar. n sany barmaly punktlarda bolsa b_j birlik ýüke isleg bar. Bir birlik ýüki degişli gatnawlara eltmegiň bahasy c_{ij}-e deň. $(c_{ij})_{mxn}$ matrisa **tarifler matrisasy** diýilýär (çykdajylar ýa-da harajatlar). Ulag meselesiniň meýilnamasy diýlip $X = (x_{ij})_{mxn}$ matrisa aýdylýar, her bir x_{ij} san ýük birliginiň mukdary, ýagny i-nji ugradylýan punktdan j-nji punkta eltilmeli. Şeýle hem X matrisa ýükleri daşamak matrisasy hem diýilýär. Köplenç tarifler matrisasy bilen daşamak matrisasy bilelikde şol bir ikeldilen matrisada ýerleşdirilýär. Ýükleri daşamanyň bahasy z-i gysgaça ikeldilen jem görnüşinde ýazmak bolýar:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \qquad (1)$$

Bu bolsa meseläniň funksionaly bolup, onuň üçin minimum bahany gözlemeli. Gözlenýän x_{ij} ýükleri daşamak meselesiniň manysynda aşakdaky şertleri goýmak zerurdyr.

1-nji tablisa

Ýük eltilmeli punkt / Ýük ugradylmaly punkt	1	2	...	j	...	n	Bar bolan seriş-deler
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1j} x_{1j}	... ...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2j} x_{2j}	... ...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
i	c_{il} x_{il}	c_{i2} x_{i2}	... ...	c_{ij} x_{ij}	... ...	c_{in} x_{in}	a_i
...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	... ...	c_{mj} x_{mj}	... ...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Ýüklere bolan islegler	b_1	b_2	... ...	b_j	... ...	b_n	$\Sigma a_m = \Sigma b_n$

1. Hemme ýükleri ugradylýan punktdan daşamagyň şerti (m deňlemeler):

$$\left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + ... + x_{1j} + ... + x_{1n} = a_1, \\
x_{21} + x_{22} + ... + x_{2j} + ... + x_{2n} = a_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{1i1} + x_{i2} + ... + x_{ij} + ... + x_{in} = a_i, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mj} + ... + x_{mn} = a_m.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

2. Zerur bolan ýükleri isleglere daşamagyň şerti (n deňlemeler) :

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + ... + x_{i1} + ... + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{i2} + ... + x_{m2} = b_2, \\ .... \\ x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{ij} + ... + x_{mj} = b_j, \\ .... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{in} + ... + x_{mn} = b_n. \end{array}\right\} \quad (3)$$

3. Näbellileriň otrisatel dällik şerti, ýagny yzyna daşamak gadagan:

$$x_{ij} \geq 0;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n. \quad (4)$$

Bu serişdeler çäklendirmeler ulgamyny emele getirýär. Bu ulgamyň komponentlerini kanagatlandyrýan islendik meýilnama dogrudyr. Görşümiz ýaly, çäklendirilen ulgam esasan hem (m + n) deňleme bilen berlendir. Eger x_{ij} matrisanyň elementlerini setir boýunça goşsak, netijede $\sum_{i=1}^{m} a_i$ alarys. Eger biz şol bir x_{ij} elementleri sütün boýunça goşsak, netijede $\sum_{i=1}^{m} b_j$ alarys. Goşulyjylaryň ýerini çalşanyň bilen jem üýtgemeýär. Şoňa görä islendik mümkin bolan meýilnama üçin aşakdaky şert hökman ýerine ýetýär:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_j. \quad (5)$$

Bar bolan serişdeler gerek bolan islegleri kanagatlandyrmaly. Bu ýagdaýda düzülen modele ýapyk model diýlip, meseläni çözmek üçin zerur we ýeterlik şert hasaplanýar. Eger $\sum a_i > \sum b_j$ ýa-da $\sum a_i < \sum b_j$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{i=1}^{m} b_j \quad (6)$$

bolsa, mesele açyk diýlip hasap edilýär.

Eger (6)-nyň esasynda barmaly punktymyzda isleg az bolsa, onda ugradýan punktlaryň serişdeleriniň üstüne ýetmeýän bölegi goşup, onuň eltmesiniň bahasyny 0-hasap edýäris.

Edil şonuň ýaly islegler az bolup serişde köp bolsa, onuň eltilmeli bahasyny 0 diýip hasap edip, açyk modeli ýapyga öwrüp meseläni çözýäris.

Birinji ýagdaý:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

onda

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_i.$$

2-nji tablisa

Ýük eltilmeli punkt / Ýük ugradylmaly punkt	1	2	...	n	$n+1$	Bar bolan serişdeler
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1n} x_{1n}	0 $x_{1,n+1}$	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2n} x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	a_2
...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	... ...	c_{mn} x_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	a_i
Ýüklere bolan islegler	b_1	b_2	... ...	b_n	b_{n+1}	$\sum a = \sum b.$

Ikinji ýagdaý: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ onda

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

3-nji tablisa

Ýük ugradylmaly punkt \ Ýük eltilmeli punkt	1	2	...	n	Bar bolan serişdeler
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	... ...	c_{mn} x_{mn}	a_m
m+1	0 $x_{mn+1,1}$	0 $x_{mn+1,2}$	... ...	0 $x_{mn+1,n}$	a_{m+1}
Ýüklere bolan islegler	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j.$

Ulag meselesi aşakdaky düzgünlere eýedir:

1. Çäklendirmeler (hemme $n \times m$ deňlemeler) deňlemeler bilen berilýändir.

2. Her bir näbelli meýilnama diňe iki deňlemä girýändir. x_{ij} näbelli deňlemä a_i we b_j deňlemäniň sag tarapy bolup girýär.

3. Deňlemede koeffisiýentler bire deňdir.

2. Ulag meselesiniň potensiallar usuly bilen optimal çözülişi

Umumy ýagdaýda optimallaşma meselesi simpleks usuly bilen çözülýär. Ýöne bu usul bilen ulag meselesini çözmeklik çylşyrymly hasaplamalary talap edýär. Şonuň üçin hem bu mesele potensiallar usuly ýa-da paýlaşdyrma usuly bilen çözülýär. Ulag meselesiniň islendik çözüwi maketlerde amala aşyrylýar. Potensiallar usulyny ulanmak üçin maket aşakdaky görnüşdedir:

4-nji tablisa

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="1">Ýük eltilmeli punkt
Ýük ugradylmaly punkt</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>j</td><td>...</td><td>n</td><td rowspan="2">Bar bolan serişdeler</td></tr>
<tr><td></td><td>v_j
u_i</td><td>v_1</td><td>v_2</td><td>...</td><td>v_j</td><td>...</td><td>v_n</td></tr>
<tr><td>1</td><td>u_1</td><td>c_{11}</td><td>c_{12}</td><td>...</td><td>c_{1j}</td><td>...</td><td>c_{1n}</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>u_2</td><td>c_{21}</td><td>c_{22}</td><td>...</td><td>c_{2j}</td><td>...</td><td>c_{2n}</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>i</td><td>u_i</td><td>c_{il}</td><td>c_{i2}</td><td>...</td><td>c_{ij}</td><td>...</td><td>c_{in}</td><td>a_i</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>m</td><td>u_m</td><td>c_{m1}</td><td>c_{m2}</td><td></td><td>c_{mj}</td><td></td><td>c_{mn}</td><td>a_m</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ýüklere bolan islegler</td><td>b_1</td><td>b_2</td><td>...</td><td>b_j</td><td>...</td><td>b_n</td><td>$\sum a_i = \sum b_j$</td></tr>
</table>

Maketiň esasy bölegi iki sany çyzyk bilen belgilenendir. Ol $m \times n$ öýjükden durýandyr. Bu bölege degişli her bir öýjük (i, j) belgi bilen bellenendir. Mysal üçin, (2, 1) belgi ikinji setirdäki birinji sütündäki öýjügi aňladýar. Maket özünde tarifleriň matrisasyny hem saklaýar. v_1 setiriň we u_i sütüniň näme aňladýandygyny soňra düşündireris.

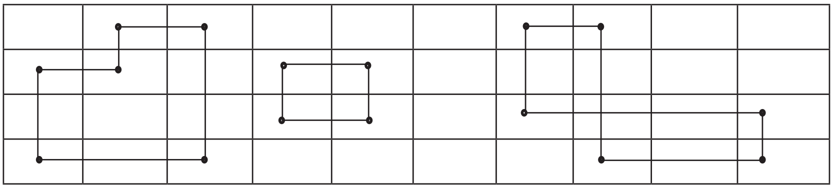
Elektrik torundaky potensiallara meňzeşlikde sanlara degişli bolan potensiallar usuly ady girizilýär. Elektrik torundaky bir düwünden beýleki düwne tok olardaky potensiallaryň tapawudy simiň garşylygyndan uly bolsa geçýär. Ulag meselesinde garşylyk bolup, her ugruň (marşrutyň) tarifi oýnaýar.

Käbir kömekçi düşünjelere seredeliň.

Maketdäki öýjükleriň islendik köplügine **toplum** diýilýär. Eger topluma girýän iki goňşy öýjük bir hatarda (setirde, sütünde) ýerleşýän bolsa we hiç bir üç öýjük bir hatarda ýerleşmese, onda öýjükleriň beýle toplumyna (yzygiderligine) **zynjyr** diýilýär. Zynjyryň mysaly 5-nji tablisada berlendir.

Alnan öýjükler gönüler bilen birikdirilen, kesimleriň kesişýän öýjükleri alynmaýar. Eger zynjyryň soňky öýjügi birinji öýjük bilen bir hatarda ýerleşse, onda beýle ýapyk zynjyra **sikl** diýilýär. Onuň görnüşleri 5-nji tablisada berlendir.

5-nji tablisa

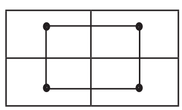


1-nji teorema. *Goý, m setirli we n sütünli maketde (matrisada) m+n öýjük islendik ýagdaýda belgilenen bolsun we goý, m+n ≤ mn. Bu ýagdaýda depeleri belgilenen öýjükde (hemmesi bolmazlygy hem mümkin) ýerleşen sikli elmydama gurup bolar.*

Bellik. m we n bitin sanlar, şonuň üçin deňsizlik elmydama ýerine ýetýän däldir. Mysal üçin, bu sanlaryň haýsy hem bolsa biri birlik bolsa, onda deňsizlik ýerine ýetmeýär. Mysal üçin, $m = 3$, $n = 1$ bolsa, $3 + 1 > 3 \cdot 1$ Ýöne $m = 2$, $n = 2$ bolsa, $2 + 2 = 2 \cdot 2$ deňligi alarys. m we n birwagtda ikiden uly bolsa, deňsizlik elmydama ýerine ýetýär.

Subudy. $m = 2$, $n = 2$ ýagdaýa seredeliň. Maketde $m + n = 4$ öýjügi almaly. Bu ýagdaýda teorema dogry, alnan öýjükler sikl emele getirýär. Goý, indi $m > 2$, $n > 2$ bolsun. Subudyny matematiki induksiýa usuly bilen geçirýäris.

6-njy tablisa



Goý, $(m + n)$ öýjük saýlanyp, setirleriň we sütünleriň jemi $(m + n - 1)$ bolan maket üçin teorema dogry bolsun. Teoremanyň subudy $(m + n)$ üçin alarys. Birinji ýagdaý: Belgilenen öýjükleriň içinde bir hatarda ýeke özi bolan öýjük bar bolsun. Bu öýjügi taşlap onuň ýerleşen setirini hem ulanmaýarys. Şeýlelikde, setirleriň sany bir birlik kemelen, sütünleri öňküligine galan makede geleris. Bu ýagdaýda setirleriň we sütünleriň bilelikdäki jemi $(m + n - 1)$ bolar we bellenen öýjükleriň sanyndan bir birlik kemeler. Diýmek, matematiki induksiýa görä bu ýagdaý üçin teorema dogrudyr.

Ikinji ýagdaý: Goý, indi her bir hatarda sütünde birden köp bellenen öýjük bar bolsun ýa-da öýjükleriň hiç biri bolmasyn. Bir öýjügi «+» bilen belgiläp, beýleki sütündäki öýjüge düşýäris, indi sütün boýunça hereket edip, beýleki setire düşeris we şuňa meňzeşlikde dowam edýäris. Käbir tapgyrdan soňra biz öňki bellenen öýjüge geleris, ýapyk zynjyr alarys, ol bolsa sikldir. Ýokarda görkezilişi ýaly, teorema $m = 2$, $n = 2$ $(m + n = 4)$ üçin dogrudyr. Onda ýokarda görkezilen ýagdaýa görä $m + n = 5$ $(m + n > 4)$; $m + n = 6$ $(m + n > 5)$ we şuňa meňzeş ýagdaýlar üçin teorema dogrudyr.

Eger komponentleriniň meýilnamalary $x_{ij} > 0$ bolan öýjükler toplumy özünde hiç bir sikli saklamaýan bolsa, onda $X(x_{ij})$ ýol bererlik meýilnama sikli däl (asikliki) diýilýär. Onuň mysaly aşakdaky tablisada berlen.

7-nji tablisa

•	•			
	•	•		
		•	•	
			•	
				•
				•

Bu ýerde nokatlar $x_{ij} > 0$ bahalary alýan öýjükleri aňladýar ($x_{ij} > 0$ meseläniň setirine görä bolup bilmez). Asiklik meýilnamalaryň içinde optimal meýilnamalaryň hem boljakdygyny görmek bolýar. Eger asiklik $X(x_{ij})$ meýilnamada položitel komponentleriň sany

$$N = m + n - 1$$

deň, beýleki komponentler nola deň bolsa, onda öýjükleriň toplumyndaky $x_{ij} > 0$ bahalaryň ýerleşen tarifleriň matrisasyndaky c_{ij} elementlere X belgilenen elementler diýilýär. Eger položitel komponentli meýilnamanyň sany aşakdaka deň bolsa

$$N < m + n - 1,$$

onda öňki alnan öýjükleriň üstüne $(m + n - 1)$ sana ýeter ýaly we öňküler bilen bilelikde sikli emele getirmez ýaly nol bahaly öýjükleri goşmaly. Şunlukda, ähli alnan öýjükleriň c_{ij} tarifleri X belgilenen diýip hasap edilýär. Asiklik meýilnamanyň komponentleriniň sany

$(m+n\text{-}1)$ sandan uly bolup bilmez, sebäbi $N = m + n - 1$ bolanda, subut edilen teorema görä saýlanyp alnan öýjüklerde sikl gurup bolar.

2-nji teorema (*esasy teorema*). *Eger-de ulag meselesiniň käbir* $X = (x_{ij})_{m+n}$ *meýilnamasy üçin ähli* $i = 1, 2, .., m; j = 1, 2, \ldots, n$ *üçin*

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \tag{7}$$

d*eňsizligi kanagatlandyrýan* $x_{ij} > 0$, $(x_{ij}(\text{-}X))$ *üçin bolsa*

$$v_j - u_i = c_{ij} \tag{8}$$

deňligi kanagatlandyrýan $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_m; v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_n$ sanlaryň içinde $m + n$ sany ulgamyny saýlap alyp bolsa, onda X meýilnama optimaldyr.

u_i, v_j sanlara ugradyjylaryň we kabul edijileriň potensiallary diýilýär. (7) we (8) şertlere X meýilnamanyň potensiallaşdyrma şerti diýilýär.

Her bir (i, j) öýjüge iki potensial: i-u we j-v degişlidir. Potensiallaşma şerti aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

Ähli öýjükler üçin potensiallaryň tapawudy tarifleriň sanyna deň ýa-da ondan kiçi bolmalydyr, X belgilenen öýjükler üçin bolsa ol san tarifleriň sanyna deň bolmalydyr. Bu şertleri kanagatlandyrýan meýilnama **potensial meýilnama** diýilýär.

Şeýlelikde, esasy teorema aşakdaky ýaly kesgitlenýär: eger ulag meselesiniň käbir meýilnamasy potensial bolsa, onda ol meýilnama optimaldyr.

Subudy. Goý, käbir $X(x_{ij})$ meýilnama üçin potensiallyk şerti ýerine ýetirýän bolsun, ýagny (7) we (8) şertleri kanagatlandyrýan u_i we v_j sanlaryň ulgamy bar bolsun.

8-nji tablisa

	v_1	v_2	...	v_j	...	v_n	
u_1	c_{11}	c_{12}		c_{1j}		c_{1n}	a_1
u_2	c_{21}	c_{22}		c_{2j}		c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
u_i	c_{i1}	c_{i2}		c_{ij}		c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
u_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mj}		c_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_j		b_n	$\sum$

Başga söz bilen aýdanyňda goý, X meýilnama potensial bolsun. Bu meýilnamanyň optimal boljakdygyny subut edeliň.

X meýilnama

$$z_X = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{9}$$

funksionala baha berýän bolsun. Bize X meýilnamanyň optimallygy ýa-da däldigi belli däl, şonuň üçin hem optimal $X'(x^1_{ij})$ meýilnamany alyp, onuň

$$z_{\min} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij} \tag{10}$$

funksionala nähili baha berýändigini seredeliň (ulag çykdajylary iň az). X' meýilnama üçin onuň potensiallyk şerti kanagatlandyrýanlygy belli däl, ýöne X meýilnamanyň potensiallygy üçin maketiň her bir (i,j) öýjügine (7) deňsizlik

$$v_j - u_i \le c_{ij}$$

degişlidir ýa-da tersine

$$c_{ij} \ge v_j - u_i. \tag{11}$$

Maketiň her öýjüginden degişli x'_{ij} element alyp, ony bu deňsizligiň iki bölegine-de köpeldip, jemläp alarys:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij} \ge \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (v_j - u_i)x'_{ij}. \tag{12}$$

Bu deňsizligiň san bölegini S bilen belläliň:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (v_j - u_i)x'_{ij}. \tag{13}$$

Bu jemi tapawut görnüşinde hem ýazyp bolar:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v_j x'_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} u_i x'_{ij}. \tag{14}$$

(14) jemi aşakdaky ýaly özgerdeliň. Ol jemleriň birinjisi açyk ýagdaýda

$$\begin{gathered} v_1(x'_{11} + x'_{21} + \ldots + x'_{m1}) + \\ + v_2(x'_{12} + x'_{22} + \ldots + x'_{m2}) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + v_n(x'_{1n} + x'_{2n} + \ldots + x'_{mn}) \end{gathered}$$

ýa-da

$$\sum_{u=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij}\right).$$

Şuňa meňzeşlikde ikinji jemi hem

$$\sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\right)$$

görnüşde alarys. Onda (14) deňlik aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$S = \sum_{u=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\right), \tag{15}$$

$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij}$. jem j sütün boýunça meýilnamanyň komponentleriniň jemine deňdir we ol j kabul edijiniň isleglerine deňdir:

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_j.$$

Şuňa meňzeşlikde jem i setir boýunça alnan meýilnamanyň komponentleriniň jemine deňdir we ol i ugradyjydaky harytlaryň sanyna deňdir:

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i.$$

Bu setirler we sütünler boýunça alnan jemler islendik ýol bererlikli meýilnama üçin dogry bolar we şol sanda $X(x_{ij})$ meýilnama üçin hem dogrudyr:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j. \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Şonuň üçin hem islendik ýolbererlikli meýilnamalar üçin alarys:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \\ \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

we x'_{ij} ýazylan (15) deňlik x_{ij} üçin hem dogry bolar:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right). \qquad (18)$$

Indi (15) deň özgertmeleri tersine geçirip,

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v_j x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} u_i x_{ij}$$

alarys we (14) deňliklerde hem şeýdip (13) deňlige meňzeş deňlik alarys:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (v_j - u_i) x_{ij}. \qquad (19)$$

$X(x_{ij})$ meýilnamanyň potensiallygy üçin her bir

$$v_j - u_i = c_{ij}$$

deňlik ýerine ýetirilýär, beýleki komponentler nola deň, şonuň üçin hem degişli goşulyjylar nola öwrülerler. Şonuň üçin hem (19) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \qquad (20)$$

Bu bahany (12) deňsizlikde ornuna goýup

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x'_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \qquad (21)$$

deňsizlige geleris ýa-da (9) we (10) deňlikleri hasaba alyp,

$$z_{\min} \geq z_x \qquad (22)$$

deňsizlige geleris. Başgaça aýdylanda X meýilnama boýunça ulag çykdajylary minimum çykdajylardan kiçidir ýa-da deňdir:

$$z_X = z_{\min}. \qquad (23)$$

X meýilnama minimal harajatlary getirýär, ol optimal, teorema subut edildi.

Şeýlelikde, eger meýilnama potensial bolsa, onda ol optimal. Bu optimal meýilnama barada subut edilýän kriteriýadyr.

Tersine ýagdaý hem dogrudyr: *eger meýilnama optimal bolsa, onda ol hökmany potensialdyr.* Bu şert (zerurlyk) subutsyz kabul edilýär.

Esasy teoremany ulanyp, potensiallar usulynyň algoritmini düzeliň.

§2. Potensiallar usulynyň algoritmi

Potensiallar usulynyň algoritmi iki ädime bölünýär:

1. Başlangyç ädim, ol çözüwiň başynda ýerine ýetirilýär;

2. Umumy gaýtalanýan ädim, ol heniz optimum alynýança gaýtalanýar.

1. **Başlangyç ädim**

Bu ädim özünde aşakdaky üç tapgyry saklaýar:

1. Mümkin bolan asikliki meýilnamany tapmak.

2. Ugradylýan we eltilýän nokatlaryň potensiallarynyň sanlarynyň ulgamyny düzmek.

3. Ulgamyň potensiallygyny seljermek. Eger ol potensial (ýagny meýilnama potensial) bolsa, onda tapylan meýilnama optimal. Eger ulgam potensial bolmasa, onda umumy gaýtalanýan ädime geçilýär.

Birinji tapgyr. Demirgazyk-günbatar burçy bilen mümkin bolan asikliki meýilnamany tapmaly.

Maketiň üstünde işleýäris (*9-njy tablisa***).** Tariflere garamazdan, (1,1) ýokarky çepki öýjügi doldurmakdan meýilnamany düzüp başlaýarys (demirgazyk-günbatar burçundan).

a_1-iň ätiýaçlyklaryna we b_1-iň talaplaryna seredeliň. Eger $a_1 < b_1$ bolsa, onda (1, 1) öýjükde a_1 ýazylýar. Eger $b_1 < a_1$ bolsa, onda (1, 1) öýjüge b_1 ýazylýar, birinji kabul ediş punktyň ähli islegleri birinji ugradyş punktyň hasabyna ýapylýar. Birinji balansdan soň balans täzeden ýazylýar (hem islegler, hem ätiýaçlyklar üýtgeýär). Birinji setirde galan öýjükleri çyzmak bolýar, sebäbi ähli ýük birinji punkta ugradyldy. Ikinji tapgyr ýene-de demirgazyk-günbatar burçundan başlanýar. Birinji kabul ediş punktynyň galan islegi kanagatlandyrylýar, şol ýere ($b_1 - a_1$) ýük birligi ikinji ugradyş punktdan eltilýär.

9-njy tablisa

a_1	–	–	–	–	a_1	0	
$b_1 - a_1$					a_2	a_2	$a_2 - b_1 + a_1$
–					a_3	a_3	a_3
–					a_4	a_4	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$b_j \backslash a_i$		
b_1-a_1	b_2	b_3	b_4	b_5			
0	b_2	b_3	b_4	b_5			

we ş.m.

Eger birinji punktyň islegi dolulygyna kanagatlanan bolsa, birinji sütünde galan öýjükleri çyzyp goýýarys. Ikinji operasiýadan soň balans täzeden ýazylýar. Ýazmak ýene-de demirgazyk-günbatardan başlanýar, bu ikinji kabul ediş punktyň islegini kanagatlandyrýar, entek sagda we aşakda nollar durmaýar, ähli ýük paýlanan we islegler kanagatlanandyr. Tablisanyň içinde alnan meýilnama ýolbererli bolar. Ol hem meseläniň çözülişiniň başlangyjy hökmünde alynýar.

Mesele. Goý, meseläniň şerti 10-njy tablisada görkezilen bolsun (indiki tablisalarda setir we sütün punktlaryň nomerleri goýberilýär).

10-njy tablisa

Ýük eltilmeli punktlar / Ýük ugradylmaly punktlar	1	2	3	4	Bar bolan serişdeler
1	2	4	6	10	90
2	1	3	7	4	100
3	4	8	13	7	140
Ýüklere bolan islegler	110	100	80	40	330

Ilkinji meýilnamany düzmek üçin (1, 1) öýjüge ýüzlenýäris. Onuň üçin ätiýaçlyklar 90-a, islegler 110-a deň. Bu sanlardan iň pesi (1,1) ugur boýunça daşama diýip hasap edilýär:

$$x_{11} = \min\{90, 110\} = 90.$$

Bu sany (1, 1) öýjüge ýazyp, galan ätiýaçlyklar hem islegler hasaplanylýar we olar tablisanyň goşmaça sütünine we setirine girizilýär. Birinji ugradyş punktda ätiýaçlyklar indi nola deň bolup, kabul ediş punktyň hiç birine hiç zat daşap bolmaýandygy üçin, birinji setiriň galan öýjükleri çyzylýar (*11-nji tablisa*).

11-nji tablisa

2 90	4 –	6 –	10 –	90	0
1	3	7	4	100	100
4	8	13	7	140	140
110	100	80	40	a_j / b_j	
20	100	80	40		

Soňra (2,1) öýjük – tablisanyň galan böleginiň demirgazyk-günbatar burçy alynýar. Onuň üçin ätiýaçlyklar 100-e, islegler bolsa – diňe 20-ä deň. Iň pes sany (2,1) ugur boýunça daşama bolar:

$$x_{21} = \min\{100, 20\} = 20.$$

Bu san öýjüge girizilýär, birinji sütüniň iň soňky öýjügi çyzylýar (birinji punktyň islegleri kanagatlanan), galan ätiýaçlyklar we islegler hasaplanylýar we olar täze setire hem sütüne ýazylýar (*12-nji tablisa*).

12-nji tablisa

2 90	4 –	6 –	10 –	90	0	
1 20	3	7	4	100	100	80
4 –	8	13	7	140	140	140
110	100	80	40	a_j / b_j		
20	100	80	40			
0	100	80	40			

Ýene-de tablisanyň doldurylmadyk böleginiň demirgazyk-günbatar burçy tapylýar. Bu (2, 2) öýjük bolar. Onuň üçin ätiýaçlyklar 80-e, islegler – 100-e deň. Alýarys:

$$x_{22} = \min\{80, 100\} = 80,$$

bu sany tablisa girizýäris, ätiýaçlyklaryň we islegleriň hasabyny döredýäris, sebäbi ikinji punktda ätiýaçlyklar gutardy, ikinji setiriň iki öýjügini çyzyp goýýarys (*13-nji tablisa*).

13-nji tablisa

2 90	4 –	6 –	10 -	90	0		
1 20	3 80	7 -	4 -	100	100	80	0
4 –	8	13	7	140	140	140	140
110	100	80	40	a_j \ b_j			
20	100	80	40				
0	100	80	40				
	20	80	40				

Şular ýaly hereketleri (3,2), (3,3), (3,4) öýjükler üçin hem dowam edýäris. Netijede, 14-nji tablisa alynýar, goşmaça böleginde diňe nollar durar (iň soňky 40 sany ýazmak bilen noly hem üçünji setirde, hem dördünji setirde goýýarys). Bu ähli ätiýaçlyklaryň gutarandygyny, islegleriň kanagatlandyrylanyny, ilkinji meýilnamanyň düzülendigini subut edýär.

13-nji tablisany alanymyzdan soň amaly taýdan ätiýaçlyklary deňeşdirmeli, galan üçünji punktda dykgatlaryny (olar 140-a deň), (20,80 we 40) kabul ediş punktyň islegleri bilen hem laýyk gelýän öýjüklere iň soňky sanlary girizmek aňsat.

14-nji tablisa

2 90	4 –	6 –	10 –	90	0					
1 20	3 80	7 –	4 –	100	100	80	0			
4 –	8 20	13 80	7 40	140	140	140	140	120	40	0
110	100	80	40	a_j \ b_j						
20	100	80	40							
0	100	80	40							
	20	80	40							
	0	80	40							
		0	40							
			0							

Demirgazyk-günbatar burçyň usuly bilen gurlan meýilnamanyň iki häsiýetini subut ederis.

1-nji teorema. *Alnan meýilnamanyň položitel komponentleriniň sany* ($m + n$-1)*-den uly däldir*.

Subudy. Goý, m setirden we n sütünden düzülen maket bar bolsun.Ýol bererli çözülişi gözlemegiň dowamynda her ädiminde bir öýjüge x_{ij} položitel sany girizýäris. Şol ýagdaýda ýa sagynda, ýa-da aşagynda bir nol ýazylýar (ýa ätiýaçlyklar gutardy, ýa isleg kanagatlanan). Iň soňky öýjük doldurylan ýagdaýynda hemişe iki nol ýazylýar. Hasaplamanyň soňunda sag tarapynda m sany nollar, tablisanyň aşagynda – n sany nollar, jeminde bolsa ($m + n$) sany nollar durar. Iň soňky sany ýazmaklyk özüne iki noly çekenligi sebäpli, meýilnamanyň komponentleriniň iň uly sany bir birlik az bolar: ($m + n$ – 1).

Meýilnama gurulýan ýagdaýynda haýsydyr bir tapgyrda islegler ätiýaçlyklar bilen deň bolar (birinji ammaryň birinji dükana näçe ýük gerek bolsa, şonça-da ýüki bar). Onda meýilnamanyň bir komponentini ýazmak iki noly çeker we komponentleriň umumy sany ($m + n$ – 1)-den kiçi bolar. Teorema subut edildi.

2-nji teorema. *Demirgazyk-günbatar burçunyň usuly boýunça düzülen meýilnama asikliki bolar.*

Subudy. Diňe bir öýjügi düzýän, maket alalyň, ýagny $m = 1$; $n = 1$, $p = m + n = 2$, meýilnama bolsa $X = x_{11}$ asikliki bolar. Meýilnama birinji häsiýete jogap berýän, bir položitel komponenti düzýär:

$$m + n - 1 = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Goý, $p = m + n - 1$ tassyklama, ýagny (m – 1)xn ýa-da mx(n – 1) ölçegli matrisa üçin dogry bolsun. Onda ol tassyklama $p = m + n$ üçin, ýagny ölçegi başlangyç matrisanyňkydan 1 birlik artdyrylsa-da, dogrudygyny subut edeliň (*15-nji tablisa*).

Maketiň birinji öýjügini dolduralyň, ätiýaçlyklary we islegleri täzeden ýazalyň. Şol ýagdaýda ýa ätiýaçlyklar gutaran bolmaly we birinji setirde çyzyk goýmaly, ýa-da islegler kanagatlanan we birinji sütüni çyzmaly. Goý, çyzyklar setirde bolsun. Bu setiri aýryp, demirgazyk-günbatar burçunyň usuly boýunça, gurlan, asikliki meýilnama bar diýen çaklama bilen (m – 1)xn tablisany alarys. Bu meýilnama bir öýjügi goşsak sikli emele getirmeýär, sebäbi sikli almak üçin şol bir setirde we şol bir sütünde başga öýjügiň bolmagy gerek, bizde bolsa şol bir (birinjide) sütünde başga öýjük bolup biler, şol bir setirde (birinjide) bolsa ýok. Şonuň üçin mxn tablisa üçin şol usul boýunça düzülen meýilnama asikliki bolar.

15-nji tablisa

	–	–	–	–	a_1
					a_2
					a_m
b_1	b_2			b_n	a_i / b_j

Eger birinji öýjügi doldurmagyň netijesinde sütün çyzylsa, onda ony aýryp, mx$(n – 1)$ matrisa geleris, onuň üçin tassyklama dogrudyr. Bir doldurylan öýjük bilen sütüni goşmak sikli emele getirenok, diýmek bu ýerde hem meýilnama asikliki bolup galar.

Teorema $p = 2$ üçin dogry bolany üçin, ol $p = 3, 4, \ldots$ üçin hem, ýagny islendik matrisa üçin hem dogrudyr. Häsiýeti subut edilen.

Başlangyç ädimiň ikinji tapgyry: potensiallar ulgamyny kesgitlemek.

Her bir ugradylýan punkt (u_i bilen bellenilýär) we her bir kabul edýän (u_j) punkta potensial ýazylýar. Potensiallaryň hemmesi $(m + n)$ sana deň. Olar maketa her bir ýörite bellenilen setirlerde we sütünlerde ýazylýar. X – bellenen c_{ij} tarifler üçin (olaryň sany hemişe $(m + n – 1)$-e deň)

$$v_j - u_i = c_{ij}$$

deňligi kanagatlandyrmaly.

Bu deňleme potensiallary tapmak üçin hyzmat eder. Ýöne sistemada bular ýaly deňlemeleriň sany diňe $(m + n – 1)$-e deň bolup, näbellileriň sany $(m + n)$-e deňdir, ýagny bir birlik köpdür. Bular ýaly deňlemeler ulgamy tükeniksiz köp çözüwe eýedir, olaryň islendigi biziň maksadymyza laýykdyr. Haýsy hem bolsa bir çözüwini tapmak üçin, biz bir potensialyň bahasyny erkin saýlap alýarys (meselem,

$u_i = 0$ diýip hasap edýäris). Galan hemme potensiallary emele gelen ulgamyň çözüwinden kesgitleýäris.

Ýokarda getirilen meseläniň çözülişini dowam edeliň. 14-nji tablisanyň esasy bölegini tapylan, ýolbererli meýilnamany ýazalyň (16-njy tablisa).

16-njy tablisa

Ýük eltilmeli punktlar / Ýük ugradylmaly punktlar		1	2	3	4	Bar bolan serişdeler
	u_i \ v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2 90	4 –	6 –	10 –	90
2	u_2	1 20	3 80	7 –	4 –	100
3	u_3	4 –	8 20	13 80	7 40	140
Ýüklere bolan islegler		110	100	80	40	330

Maketde $m + n - 1 = 6$ we meýilnamanyň komponentleriniň sany hem 6-a deň, potensiallary gözlemek bolar. (Eger meýilnamanyň komponentleriniň sany 6-dan kiçi bolsa, meýilnama ýetmeýän daşamalary nola deň bolan, öýjükleri girizmeli bolardy, ýöne sikller bolmaz ýaly). X – bellenen öýjükler üçin deňlikleri düzýäris:

$$v_1 - u_1 = 2,$$
$$v_1 - u_2 = 1,$$
$$v_2 - u_2 = 3,$$
$$v_2 - u_3 = 8,$$
$$v_3 - u_3 = 13,$$
$$v_4 - u_3 = 7.$$

Biz ýedi näbelliler bilen alty deňlikleri aldyk. $u_1 = 0$ diýip hasap edýäris we yzygiderli galan potensiallary hasaplaýarys: $v_1 = 2$, $u_2 = 1$, $v_2 = 4$, $u_3 = -4$, $v_3 = 9$, $v_4 = 3$. Bu potensiallar bilen 17-nji tablisany alýarys.

17-nji tablisa

u_i \ v_j	2	4	9	3	a_i
0	2 90	4 –	6 –	10 –	90
1	1 20	3 80	7 –	4 –	100
-4	4 –	8 20	13 80	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Praktiki taýdan ähli potensiallar göni tablisadan hasaplanýar, ýokary hereket edilende tarif potensiala goşulýar, aşak bolanda - aýrylýar.

Başlangyç ädimiň üçünji tapgyry: meýilnamany ýa-da potensiallar ulgamyny potensiallyga barlamaklyk.

Potensiallyk

$$v_j - u_i \le c_{ij}$$

deňsizlik, ähli öýjükler üçin ýerine ýetýändigindedir. Bu ýagdaýda X öýjükleri barlamak gerek däl, sebäbi olarda potensiallar deňlikleri ýerine ýetirme şertlerinden saýlanan.

Biziň mysalymyz üçin boş öýjükler üçin aşakdaky potensiallaryň tapawudyny we tarifleri alarys:

$$
\begin{array}{ll}
(1,2) & v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12}, \\
(1,3) & v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}, \\
(1,4) & v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}, \\
(2,3) & v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{23}, \\
(2,4) & v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}, \\
(3,1) & v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}.
\end{array}
$$

(1, 3) öýjük barlanandan soň şol bada meýilnamanyň potensial däldigini aýtmak bolar. Emma şular ýaly hasaplamalary ähli boş öýjükler üçin hemişe etmelidir.

Şertler bozulan ýagdaýlary saýlalyň we olary aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$(1,3) \quad \delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3,$$
$$(2,3) \quad \delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1,$$
$$(3,1) \quad \delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2.$$

Umumy ýagdaýda položitel δ_{ij} tapawutlary saýlanýar:

$$\delta_{ijv} = v_j - u_i - c_{ij} > 0.$$

Munda başlangyç ädim gutardy.

2. Umumy gaýtalanýan ädim.

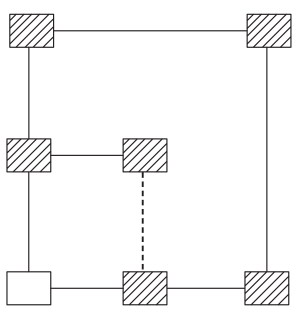
Umumy ädim aşakdaky yzygiderlilikde ýerine ýetirilýär.

1. položitel δ_{ij} tapawutlardan iň ulusynyň $\delta_{i_0 j_0}$) tapawudyny tapalyň:

$$\delta_{i_0 j_0} = \max\,(v_j - u_i - c_{ij} > 0).$$

Goý, bu maksimum ($i_0\, j_0$) öýjük üçin ýerine ýetýän bolsun. Bu öýjügi X – bellenen ($m + n - 1$) öýjükleriň içine goşalyň.

Onda öýjükleriň sany ($m + n$) bolýar, bular ýaly ýagdaýda elmydama sikli gurup bolýar. Bu sikl häzirki ýagdaýda ýeke-täk bolup durýar. Hakykatdan, bellenilen X öýjükleriň saýlanany asiklik bolýar. Onuň üstüne bir öýjügi goşalyň we onuň üçin iki sikli gurmak bolýar diýip güman edeliň. Bu ýagdaýda, başlangyç ýagdaýdaky depelerden sikl alyp bolýandygyny alýarys, ol bolsa başlangyç ýagdaýyň asikligine garşy bolýar. Şonuň üçin bular ýaly sikl diňe birdir we ony tapmak meselesine gelýäris (*1-nji surat*).



1-nji surat

Biziň mysalymyzda iň uly tapawut $\delta_0 = 3$ (1, 3) öýjükde ýerleşýär. Bu öýjügi saýlama goşup, onuň üstünde sikl gurýarys (*18-nji tablisa*).

18-nji tablisa

u_i \ v_j	2	4	9	3	a_i
0	– 2 90	4 –	6 –	10 –	90
1	+ 1 20	3 80	7 –	4 –	100
–4	4 –	+ 8 20	– 13 80=θ	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

2. Sikli bahalandyrýarys, ýagny onuň depelerinde alamatlary ýerleşdirýäris. Başlangyç öýjükde (saýlanma goşýarys) plýus goýýarys, sagat diliniň ugry boýunça ýa-da tersine hereket edip, minus,plýus alamatyny gezekleşdirip goýýarys we bu hereketi başlan depä gelýänçäk dowam edýäris. Belli bolşy ýaly, siklde depeleriň sany jübüt, şoňa görä hereketiň ugrunyň haýsy tarapa bolýandygynyň tapawudy ýok. Netijede, biz bir bahaly sikl diýlip atlandyrylýan sikli alýarys. Ol bolsa deň iki bölege bölýän otrisatel ýarym zynjyry we položitel ýarym zynjyry alýarys.

3. Ýüki daşamagyň iň kiçi bahasyny – otrisatel ýarym zynjyryň $(x_{ij})^-$ öýjükde gözleýäris. Goý, ol θ deň bolsun:

$$\min (x_{ij})^- = \theta.$$

Eger şeýle bahalar birnäçe bolsa, onda olaryň haýsy hem bolsa birini saýlap almak bolar.

4. Ýüki daşamagyň otrisatel ýarym zynjyrynyň her bir öýjüginden θ-ny aýyrýarys, her bir položitel ýarym zynjyryň öýjügine θ-ny goşýarys. Bu hereket θ ululygyň sikl boýunça süýşmesi diýlip atlandyrylýar. Süýşme prosesi meýilnamany üýtgedýär, ýöne meýilnama hemişe ýolbererli bolup galýar. Bir öýjüge θ-ny goşýarys, başga bir öýjükden bolsa θ-ny aýyrýarys, netijede balans bozulmaýar.

Minimum ýüki daşamak meselesinde süýşürilenden soňra otrisatel ýarym zynjyrly öýjük emele gelýär. Onuň tersine saýlawa girizilen $(i_0 j_0)$ öýjükde θ emele gelýär. Birinji öýjügi meýilnamadan çykarýarys, ikinji öýjügi bolsa meýilnama girizýäris: meýilnama öňküsi ýaly asiklik bolup galýar.

Süýşürilenden soňra alnan meýilnamany aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} \text{ sikle girmeýän öýjükler üçin;} \\ x_{ij}+\theta \text{ položitel ýarym zynjyryň öýjükleri üçin;} \\ x_{ij}-\theta \text{ otrisatel ýarym zynjyryň öýjükleri üçin.} \end{cases}$$

Seredilýän mysalda (*18-nji tablisa*) otrisatel ýarym zynjyrda iň kiçi bahaly ýüki daşamak 80-e deň, özem ony iki öýjükde (2,2) we (3,3). (3,3) öýjükde $\theta = 80$ diýip alalyň. Öýjükdäki (1,3) öýjügi saýlawa girizip, ýüki daşamany 80; (3,2), (2,1) ýüki daşamadan bolsa 80-i goşýarys. (1,1), (2,2) we (3,3) öýjüklerde ýüki daşamany bolsa 80-i aýyrýarys. (3,3) öýjüklerde nollary ýazmaýarys, sebäbi ol meýilnamadan çykarylýar. (2,2) öýjükde bolsa nol ýazýarys, ol meýilnamada galýar we bellenen öýjükde X sany saklaýar hem-de $(m + n - 1)$-e deň bolýar. Netijede, aşakdaky (*19-njy tablisa*) ýerleşdirilen meýilnama gelýäris.

19-njy tablisa

u_i \ v_i	2	4	6	3	a_i
0	2 10	4	6 80	10	90
1	– 1 100	3+ 0	7 –	4 –	100
–4	4 +	8 – 100 = θ	13	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

5. Meýilnama süýşürilenden soň alnanlar üçin täze potensiallar ulgamyny düzýäris. Bu täze potensiallary başlangyç ädimde hasaplanylyşy ýaly hasaplamak bolýar, eýýäm ulgamy bar bolan düzedişi bilen hem tapmak bolýar.

Eýelenen öýjükler üçin aşakdaky deňlikler ýerine ýetirilen bolmaly:

$$v_j - u_i = c_{ij}.$$

Şonuň üçin tablisada süýşürmäniň netijesinde emele gelen öýjügi alarys we onuň üçin olaryň tapawudy tarife deň bolar ýaly potensiallary düzedýäris. Eýelenen öýjükler san bolan iň az sütünde ýa-da setirde duranlaryň, birini üýtgetmek has amatly.

Soňra başga eýelenen öýjükleri barlaýarys we galan potensiallary yzygiderlikde korrektirleýäris. Kanuna görä ähli sanlar üýtgemä sezewar bolanok we şular ýaly düzgün hasaplaşyklary peseldýär.

Biziň mysalymyzda (*18-nji we 19-njy tablisa*) (1,3) öýjük üçin $u_1 = 0$ galdyrarys, v_3-i bolsa 9-y 6-a düzedýäris, şonda

$$v_3 - u_1 = 6 - 0 = 6 = 6 = c_{13}.$$

Galan eýelenen öýjükler boýunça deňlikler öňki potensiallar bilen ýerine ýetirilýär. Şonuň ýaly täze potensiallar ulgamy bir düzediş bilen alnan.

6. Täze ulgamy potensiallyga ýagny, tapylan meýilnamanyň optimallyga barlagy geçirýäris. Onuň üçin

$$v_j - u_i \leq c_{ij}$$

ähli eýelenmedik öýjükler üçin ýerine ýetýändigini barlaýarys. Eger olar üçin deňsizlikler ýerine ýetýän bolsa, onda ulgamyň potensial we meýilnamanyň optimal, çözülişi gutardy.

Eger haýsydyr öýjük üçin deňsizlikler ýerine ýetmeýän bolsa, onda δ_{ij} tapawut hasaplanýar we optimal meýilnama alynýança ýene-de umumy ädim ädilýär.

Ýokary mysalda (*19-njy tablisa*):

$$\begin{array}{ll}
(1,2) & v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12}, \\
(1,4) & v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}, \\
(2,3) & v_3 - u_2 = 6 - 1 = 5 < 7 = c_{23}, \\
(2,4) & v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}, \\
(3,1) & v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}, \\
(3,3) & v_3 - u_3 = 6 - (-4) = 10 < 13 = c_{33}.
\end{array}$$

Diňe bir (3,1) öýjükde şert ýerine ýetirilmeýär. Ony saýlama girizýäris, sikli belleýäris, süýşürme geçirýäris (*19-njy tablisa*). Onuň üçin potensiallary düzedýäris we olary tablisa ýazýarys. Täze meýilnama tapýarys (*20-nji tablisa*).

20-nji tablisa

u_i \ v_j	2	4	6	5	a_i
0	2 10	4	6 80	10	90
1	1 0	3 100	7	4	100
-2	4 100	8	13	7 40	140
b_i	110	100	80	40	330

Bu ulgamy potensiallyga barlaýarys:

$$
\begin{array}{ll}
(1,2) & 4 - 0 = 4 = 4, \\
(1,4) & 5 - 0 = 5 < 10, \\
(2,3) & 6 - 1 = 5 < 7, \\
(2,4) & 5 - 1 = 4 = 4, \\
(3,2) & 4 - (-2) = 6 < 8, \\
(3,3) & 6 - (-2) = 8 < 13.
\end{array}
$$

Ähli boş öýjükler üçin potensiallaryň tapawudy tarifden kiçi ýa-da deň,diýmek ulgam potensial, meýilnama-da optimal.

Berlen meýilnama boýunça daşamagyň bahasy iň pes bolar:

$$z_{\min} = 10 \cdot 2 + 80 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 1480.$$

(2,1) öýjükde tarif iň pes bolsa hem, daşama nola deň. Ýöne Birinji kabul ediş punkty boýunça ondan alynýan artyk çykdajy başga marşrutlarda ykdysady tarapdan ýapylýar. Optimal meýilnama bu ýerde aýdyň däldir.

§3. Algoritmiň esaslandyrmasy

1. **Monotonlyk**. Bu paragrafda her bir ädim täze, şeýle hem optimallygyň kriteriýasyny ýerine ýetirýän öňkä garanyňdakydan kem däldigini subut ederis. Başgaça aýdylanda, sikl boýunça süýşürmeler daşama meýilnamany erbetleşdirmeýändigini görkezmek bolar.

Başlangyç şertler hökmünde aşakdakylar berlen:

1) işiň umumy ädiminde asikliki meýilnama bardyr.

2) sikl boýunça süýşürme täze asikliki meýilnamany berýär.

3) sikl asikliki meýilnamanyň bir öýjügiň saýlama goşulmagyndan alnan, onuň üçin düzgüni potensialyň bozulmaklygy maksimaldyr:

$$\delta_{iojo} = \max(\upsilon_j - u_i - c_{ij}) > 0.$$

Pikir ýöretmäniň dowamynda şu öýjügiň hut özüni topluma goşulmagynyň näme üçin gerekdigini görkezeris.

Monotonlygynyň algoritmini görkezmek üçin indiki teoremany subut edeliň.

Teorema. *Eger asikliki meýilnama potensiallaryň tapawudy takyk tarifa deň bolan öýjügi birikdirsek*

$$v_j - u_i = c_{ij},$$

onda sikl boýunça süýşürme funksionaly üýtgetmeýär (daşamagyň umumy bahasyny üýtgetmeýär).

Subudy. Goý, berlen başdaky meýilnama $X(x_{ij})$ bolsun. Sikl boýunça süýşürmäniň netijesinde täze X' (x_{ij}'). ýolberer meýilnamany taparys. Bu meýilnama funksionala täze ähmiýet berýär, oňa geçenki meýilnama bilen berilýän ähmiýet hökmünde seretmek bolýar, ýene--de haýsam bolsa düzediş

$$z' = \sum\sum c_{ij}x_{ij}^{'} = z + \sum{}' = c_{ij}x_{ij} + \sum{}'.$$

$\sum'$ düzedişiň ululygyny taparys. Položitel ýarym zynjyryň her bir öýjügine daşamaklyga θ goşarys, onda daşamagyň bahasyna $(+\, c_{ij}\, \theta)$ goşular. Sikliň ähli položitel ýarym zynjyry funksionala $\sum^{+} c_{ij}\ \theta$ düzediş berer ýa-da θ-hemişelik bolany üçin, $\theta\sum^{+} c_{ij}$. Daşamakdan otrisatel ýarym zynjyr ýazylan öýjüklerde θ hasaplarys. Bu öýjükdäki düzedişiň bahasy ($-c_{ij}\,\theta$) deň, a hemme otrisatel ýarym zynjyra şeýle düzediş berer.

$$-\sum{}^{-} c_{ij}^{\theta} = -\theta \sum \overline{c_{ij}}.$$

Sikl ýarym zynjyrlaryň ikisinde bahanyň jemlenen düzedişini berer.

$$\Sigma' = \theta\Sigma^{+} c_{ij} - \theta\Sigma^{-} c_{ij} = (\Sigma^{+} c_{ij} - \Sigma^{-} c_{ij})\theta$$

we funksionalyň täze bahasy:

$$z' = \Sigma\Sigma c_{ij} x'_{ij} = \Sigma\Sigma c_{ij} x_{ij} + (\Sigma^{+} c_{ij} - \Sigma^{-} c_{ij})\theta$$

deň bolar.

(i, j) öýjügi birikdirilen haýsam bolsa bir sikli alarys (1-nji surat). Položitel we otrisatel ýarym zynjyrlaryň öýjüklerindäki tarifleriniň jemleriniň tapawudyny taparys. Teoremanyň şertlerine görä birikdirilen (i, j) öýjügiň tarifi potensiallaryň tapawudyna deňdir:

$$c_j = v_j - u_i.$$

Sikliň beýleki öýjükleri üçin, X-bellenilen, bu şertler potensiallar ulgamy düzülende ýerine ýetirilýär:

$$\begin{aligned} c_{kj} &= v_j - u_k, \\ c_{kr} &= v_r - u_k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{is} &= v_s - u_i. \end{aligned}$$

Gözlenilýän jemleriň tapawudy ($\Sigma^{+} c_{ij} - \Sigma^{-} c_{ij}$) potensiallaryň üsti bilen aşakdaky görnüşde ýazylar:

$$\begin{array}{r} \cancel{v}_j - \cancel{u}_i - \cancel{v}_j + u_k + \\ + \cancel{v}_r - \cancel{u}_k - \cancel{v}_r + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \cancel{v}_s - \ldots - v_s + \cancel{u}_i \\ \hline 0 \end{array}$$

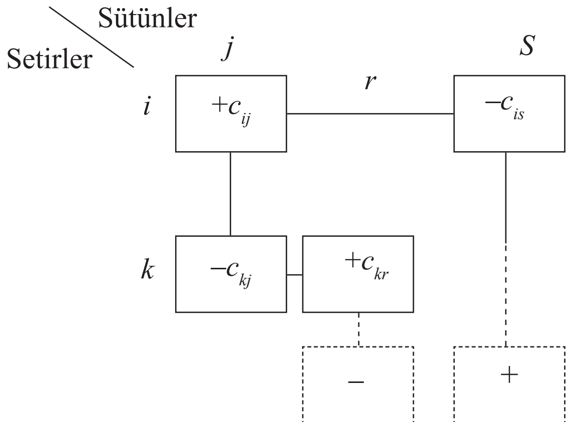
Şeýlelikde,

$$(\Sigma^{+} c_{ij} - \Sigma^{-} c_{ij}) = 0.$$

Bu ýerden

$$\sum\sum c_{ij} x'_{ij} = \sum\sum c_{ij} x_{ij} \quad \text{ýa-da} \quad z' = z.$$

Ýagny, funksional θ sana garamazdan üýtgemän galdy. Şony hem subut etmek talap edilýärdi.



2-nji surat

Indi meseläniň algoritmine seredeliň:

$$v_j - u_i > c_{ij}$$

deňsizligi kanagatlandyrýan öýjügi meýilnama birikdireliň, onda şeýle ýazyp bolar:

$$c_{ij} = v_j - u_i - \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} > 0.$$

Potensiallaryň üsti bilen aňladylan tarifleri goşup we aýryp alarys

$$\cancel{\nu}_j - \cancel{\mu}_i - \delta_{ij} - \nu_i - \cancel{\mu}_k +$$
$$\cancel{\nu}_r - \cancel{\mu}_k - \cancel{\nu}_r + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\underline{+\cancel{\nu}_s - \ldots - \cancel{\nu}_s + \cancel{\mu}_i}$$
$$-\delta_{ij}$$
$$\left(\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij}\right) = -\delta_{ij}$$

Funksionalyň täze aňlatmasy:

$$z' = \sum\sum c_{ij}x'_{ij} = \sum\sum c_{ij}x_{ij} - \delta_{ij}\theta$$

deň bolar. Şonuň ýaly $\delta_{ij} > 0$ we $\theta > 0$ bolany üçin, $\delta_{ij}\theta > 0$ uly bolar we täze meýilnama funksionala öňküden kiçi bahany berer:

$$z' < z.$$

Şoňa görä-de δ_{ij} näçe köp boldugyça, şonça-da funksional kiçelýär we hut şeýle öýjügi saýlama goşulýar. Emma bu tassyklama takyk däl, sebäbi funksionalyň kemelmegi θ-dä hem baglydyr.

Diýmek, öýjük laýyk saýlananda, funksionalyň bahasy monoton kiçeler, (ýagny algoritm monotondyr).

Funksionalyň üýtgemeýändigi hakyndaky teoremany § 2-däki mysalyň çözülişinde görkezmek bolar.

Optimal meýilnamamyz bar. 2-nji paragraf 20-nji tablisada (1,2) we (2,4) öýjükler üçin aşakdaky şertler ýerine ýetýär:

$$v_j - u_i = c_{ij},$$

$$4–0 = 4 = 4,$$

$$5–1 = 4 = 4.$$

(2, 4) öýjükde gurlan sikl, 0 süýşürmäni berýär. (1, 2) öýjükde sikl gurarys; $\theta = x_{11} = 10$. Süýşürmeden soň 21-nji tablisany alarys.

21-nji tablisa

v_j / u_i	2	4	6	5	a_i
0	2 10 −	4 +	6 80	10	90
1	1 + 0	3 − 100	7	4	100
-2	4 100	8	13	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Täze meýilnama optimal, sebäbi sistema potensiallygyna galýar. Funksiýanyň potensialyny hasaplalyň:

$$z = 10 \cdot 4 + 80 \cdot 6 + 10 \cdot 1 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 1480 = z_{\min},$$

ýagny funksional üýtgemedi. Bu häsiýeti optimal meýilnamanyň modifikasiýasyny gözlemek üçin ulanmak bolar, eger ol bar bolsa.

2. Optimal meýilnamany asiklikleriniň arasynda gözlemek. Goý, birnäçe siklleri toplap bolýan asikliki däl meýilnama bar bolsun. Siklleriň içinden birini alarys we onda süýşürmäni ýerine ýetirýäris. Sikliň ähli öýjüklerini X bilen belgiläris, ýagny olar üçin potensiallaryň tapawudy tarifa deň, onda öňki teoremalar boýunça daşamagyň bahasy üýtgemeýär, eger bir öýjük bolsa, onda nula deň bolar. Bu öýjügi meýilnamadan aýryp, belgilenen sikli pozýarys.

Beýleki sikller şeýle edilýär, olary süýşürip, nolly öýjügi aýrylýar. Şonuň bilen hem funksionalyň aňlatmasy üýtgemeýär, meýilnama bolsa asikliki bolar. Soňra, eger bu meýilnama optimal bolmasa ony gowulandyrýarys. Hasaplamalaryň göwrümini gysgaltmak üçin optimal meýilnamany asiklikleriň arasynda gözlemek ýeterlikdir,

22-nji tablisa

u_i \ v_j	2	4	6	5	a_i
0	2	+ 4 10	6 80	10	90
1	1 10	3 90	7	4	100
–2	4 100	− 8	13 0	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Algoritmiň soňy. Bu algoritmiň häsiýetnamasy onuň monotonlygyndan we asikliki meýilnamalaryň sanynyň tükenikli bolmagyndan gelip çykýar.

Funksionalyň maksimumynyň tapylyşy mysallaryň arasynda, ulaglara birikdirilen, maksimum bitin funksiýalary gözlemek gerek. §1 Çözmek üçin tapawutlanan aýratynlyklary gurnarys.

Subudyna görä ýokardaky teorema süýşürmeden soň funksional aňlatma alýarys:

$$z' = z - \delta_{ij}\,\theta,$$

bu ýerde z funksionalyň başlangyç ädimlerinde bahasy.

$$\delta_{ij} = (v_j - u_i) - c_{ij}.$$

θ – süýşürmäniň ululygy (sikliň otrisatel ýarym zynjyrynda iň kiçisi).

Eger $\delta_{ij} < 0$ bolsa, onda $z' > z$, bolar. θ – elmydama položitel, bu şeýle bolar:

$$(v_j - u_i) - c_{ij} < 0$$

ýa-da ýönekeý ýagdaýda:

$$v_j - u_i < c_{ij}.$$

Diýmek, funksionalyň bahasyny artdyrmak üçin potensiallaryň tapawudy tarifden kiçi bolan öýjügi meýilnama goşmaly. Şolar ýaly öýjükleriň bolmazlygy funksionaly ulaldyp,ýagny maksimuma ýetmeklik bolmaýandygyny aňladýar. Ilkibaşdaky meýilnama demirgazyk – günbatar burç ýa-da maksimal elementler (başdaky uly tarifler bilen) usuly bilen tapylýar. Çözülişi galan tertipde üýtgemeýär.

Mysal. Hojalyklar boýunça oba hojalyk ekinlerini ekmek hakyndaky maglumatlar berlen (*23-nji tablisada*).

23-nji tablisa

Hojalyklar / Oba hojalyk önümleri	1	2	3	4	Ekişiň meýilnamasy
	1 ga-dan şertli girdeji				
1	8	5	4	6	300
2	12	11	9	13	500
3	10	15	18	14	180
Sürlen ýeriň meýdany	220	310	200	250	980

Maksimum umumy girdejini üpjün edýän meýilnamany özbaşdak düzmeli.

Bu maglumatlary tablisa ýazýarys we maksimal elementiň usuly boýunça meýilnamany gurýarys, 23-nji *a* tablisa alnar.

Iň ýokary tarif (18) bolany üçin, ilki bilen (3;3) öýjügi doldurýarys. (180,200) sanlaryň kiçisini, ýagny, 180-i goýýarys we bu setirde başga öýjükler alynmaýar.Galan tablisada tarifi iň ýokary 13-e deň. (2;4) öýjügi saýlap, (250,500) sanlaryň kiçisini ýazýarys hem-de 4-nji sütüni aýyrýarys we ş.m.

Tapylan meýilnama üçin adaty ýol bilen potensiallary tapýarys (23-nji tablisa). Mundan boş öýjüklerde soň gerekli şertleriň ýerine ýetirilýändigini barlarys (1;1) öýjükde potensiallaryň tapawudy tarifden uly ýa-da deň). Biziň mysalymyzda şert ýerine ýetmeýär. $6 - 0 < 8$.

Bu öýjügi topluma salýarys we onda sikl gurýarys, ony belleýäris we 220 sana süýşürýäris. Täze meýilnamany alýarys (23-nji *b* tablisa).

Bu meýilnama üçin potensiallary üýtgedip, olaryň tapawudy her boş öýjük üçin tarifden uludygyna göz ýetirýäris. Mundan beýläk gowulandyrmak mümkin däl, meýilnama optimal. Ol has uly girdejini getirýär.

$$z_{\max} = 220 \cdot 8 + 60 \cdot 5 + 250 \cdot 11 + 250 \cdot 13 + 180 \cdot 18 = 11380.$$

3. Paýlaýjy usuly

Ulag meselesiniň paýlaýjy usuly potensiallar usulyndan hasaplamalarynyň käbir üýtgemegi bilen we optimallyk kriteriýasynyň görnüşi boýunça tapawutlanýar. Paýlaýjy usulyň algoritmi aşakdakylardan ybarat:

1. $(m + n - 1)$ komponenti başlangyç asikliki meýilnamany gözleýäris (komponentleri ýetmeýän ýagdaýynda nollary bilen doldurýarys).

2. Topluma boş öýjügi girizýäris, ony alamatlandyrýarys, goşmak alamatyny belgileýäris, we sikliň ähli depelerinde duran alamatlary boýunça tarifleriň algebraik jemini hasaplaýarys. Alnan sany öz alamaty bilen boş öýjüge ýerleşdirýäris.

3. Bu 2 punktda görkezilen operasiýany her bir boş öýjük üçin geçirýäris, ýagny her gezek öň täzeden hasaplanan sikli gurýarys. Netijede her bir boş öýjükde san emele geler (položitel, otrisatel ýa-da nol).

4. Eger alnan ähli sanlar otrisatel däl bolsa, onda funksionaly minimuma getirýän optimal çözülişi tapylan. Eger bu sanlar položitel

däl bolsa, funksionalyň maksimumy gazanylar. Dürli alamatly sanlar bar bolan ýagdaýynda meýilnama boş öýjügi girizýäris, şonda minimum üçin moduly boýunça iň uly otrisatel sanlar we maksimum üçin položitel sanlar durar.

5. Saýlanan öýjüge degişli bolan sikliň otrisatel ýarym zynjyrynda iň kiçi sany tapýarys we sikliň ugry boýunça şol sana süýşürýäris. Täze ýol bererli meýilnamany tapýarys.

6. Bu meýilnamanyň optimaldygyny barlaýarys, ýagny her bir boş öýjük üçin täzeden hasaplaşyk sikli gurýarys we tarifleriň algebraik jemini hasaplaýarys.

Meýilnama optimal däl ýagdaýynda ýene-de meýilnama boş öýjügi girizýäris we degişli sikl boýunça süýşürme geçirýäris, meýilnama optimal boýunça dowam edýäris.

Tarifleri täzeden hasaplaýyşlaryň netijesinde tapylan γ_{ij} san başdaky öýjüklerde durýan tarifleriň we şol öýjük üçin potensiallaryň tapawudynyň arasyndaky tapawuda deňdigi berk subut edilýär:

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i) = -(v_j - u_i - c_{ij}) = -\delta_{ij}.$$

Şonuň üçin paýlaýjy usulynda alnan sanlaryň manysy we kriteriýalarynyň optimallygy hakykatda potensiallar usulyndaky ýalydyr.

Elde hasaplamalar üçin potensiallar usuly has amatly. Emma meseläniň çözülişi paýlaýjy usulyna başga usullar esaslanýan, bu hem ony öwrenme zerurlygy ýüze çykýar.

Mesele. Goý, meseläniň şerti we minimal elementiň usuly boýunça tapylan başlangyç meýilnama 24-nji tablisada ýazylan bolsun.

24-nji tablisa

ýük eltilmeli punktlar v_j / ýük ugradylmaly punktlar u_i	1	2	3	4	a_i
1	3 0	2 25 −	4 5 +	1 20	50
2	1 30	3 +3	2 10	5 +6	40
3	5 +1	2 -1 +	5 20 −	4 +2	20
b_j	30	25	35	20	110

Her boş öýjük üçin täzeden hasaplamanyň siklini gurýarys, ony alamatlandyrýarys we tarifleriň algebraik jemini alýarys. 24-nji tablisada (3,2) öýjük üçin gurlan sikl görkezilen. Gerekli jem:

$$\gamma_{32} = +2 - 2 + 4 - 5 = -1.$$

Tablisa agram salmazlyk üçin onda beýleki sikller görkezilmedik däl, diňe her boş öýjükde täzeden hasaplamanyň netijeleri tegelejikde ýazylandyr.

Tapylan sanlaryň arasynda bir otrisatel san bar ((3,2) öýjükde), şeýlelikde, optimal çözüwi alynmadyk. Bu öýjügi topluma girizýäris, gerekli sikli belleýäris, $\theta = x_{33} = 20$ alýarys we bu sana süýşürme geçirýäris. Netijede, täze meýilnama gelýäris (*25-nji tablisa*).

Tarifleriň täzeden hasaplamalaryny geçirip, ähli jemleriň otrisatel däldigine göz ýetirýäris. Diýmek, tablisada ýazylan meýilnama optimal. Şonuň üçin daşamanyň bahasy iň pes:

$$z = 5 \cdot 2 + 25 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 220.$$

25-nji tablisa

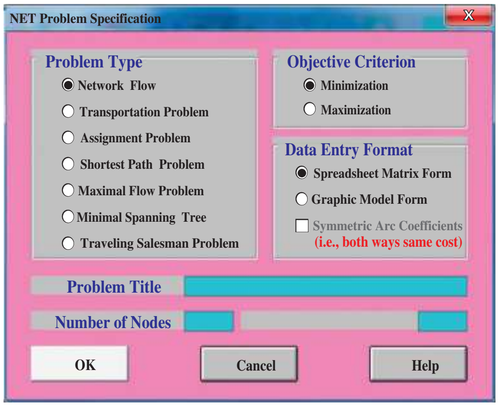
ýük ugradylmaly punktlar u_i \ ýük eltilmeli punktlar v_j	1	2	3	4	a_i
1	3 0	2 5	4 25	1 20	50
2	1 30	3 +3	2 10	5 +6	40
3	5 +2	2 20	5 +1	4 +3	20
b_j	30	25	35	20	110

(1,1) öýjük üçin tarifleriň algebraik jemi degişli gelýän sikl boýunça nola deň. Potensiallar usulyndaky ýaly, eger bu öýjügi topluma girizmek üçin süýşürme geçirsek, onda meýilnama üýtgär, ýöne funksionalyň bahasy öňküligine galar.

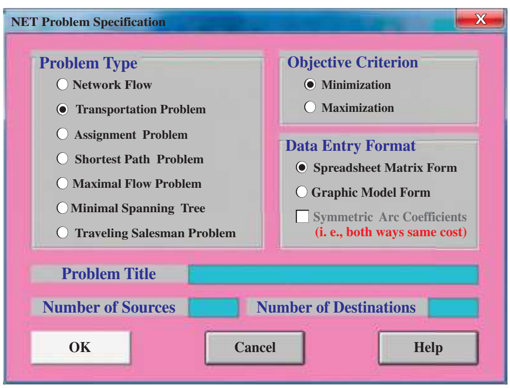
Meseläniň optimal çözüwiniň informasion tehnologiýalar arkaly tapylyşy. ***QSB (Quantitative System for Business)*** programmasynyň kömegi bilen ulag meselesiniň optimal çözüwini tapmaklygyň tehnologiýasyna seredeliň.

Programmanyň penjiresi açylandan soňra esasy menýunyň ***«File -> New Problem»*** düwmelerine basyp, täze mesele penjiresi açylýar.

Täze meseläniň penjiresi aşakdaky görnüşde bolar :



1) Problem Type diýlen ýerden meseläniň görnüşini saýlamaly. Bellik : Ulag meselesini çözmek üçin ***Transportation Problem****-i* saýlamaly. Penjirämiz aşakdaky görnüşe geler.



2) Objective Criterion diýlen ýerden meselämize laýyklykda maximum ýa-da minimum saýlamaly;

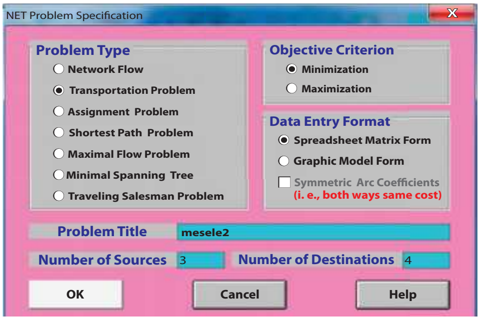
3) Data Entry Format diýlen ýerde meseläni nähili ýagdaýda girizmek isleýändigimize laýyklykda Spreadsheet Matrix Form ýa-da Graphic Model Form saýlamaly;

4) Program title – meseläniň adyny girizmeli;

5) Number of Sources diýlen ýere sütünleriň (çeşmeleriň) sanyny girizmeli;

6) Number of Destinations diýlen ýere setirleriň (barmaly ýerleriň) sanyny girizmeli;

7) Meseläni girizenimizden soňra penjire aşakdaky görnüşe geler :



8) Soňra penjiräniň ***OK*** düwmesine basmaly. Şondan soň aşakdaky penjire peýda bolar. Bu ýere meseläniň berlişini girizmeli.

From \ To	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Supply
Source 1					0
Source 2					0
Source 3					0
Demand	0	0	0	0	

9) Berlişini girizenimizden soňra aşakdaky görnüşi alar :

From \ To	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Supply
Source 1	30	50	62	10	650
Source 2	40	50	80	20	850
Source 3	50	10	30	30	700
Demand	500	800	300	600	2200

10) Şeýlelik bilen, meselämizi girizdik. Meselämiziň netijesini almak üçin esasy menýudaky Solve and Analyze düwmesine basmaly. Şondan soň meseläniň çözüwi ekranda peýda bolar. Meseläniň çözüwi aşakdaky penjire arkaly görkezilýär:

05-08-2011	Form	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Rediced Cost
1	Source 1	Destination 1	50	30	1500	0
2	Source 1	Destination 4	600	10	6000	0
3	Source 2	Destination 1	450	40	18000	0
4	Source 2	Destination 2	400	50	20000	0
5	Source 3	Destination 2	400	10	4000	0
6	Source 3	Destination 3	300	30	9000	0
	Total	Objective	Function	Value =	58500	

11) Meseläniň çözüwi ýokardaky görkezilen baha deňdir;

12) Meseläniň netijesini alanyňyzdan soň programmany ýapyp bilersiňiz.

III bap
Dinamiki programmirleme meseleleri

§1. Dinamiki optimallaşdyrma meselesiniň köp ädimli proses arkaly çözülişi

Dinamiki programmirleme köp ädimli (köp tapgyrly) meseläniň optimal çözüwini tapmaklykda ulanylýan iň amatly usuldyr. Bu usulda durmuşda duş gelýän käbir çylşyrymly amallar, ykdysady meseleler birnäçe ýönekeý meselelere bölünip, ädimme-ädim çözülýär.

Dinamiki programmirlemäniň esasynda yzygiderli optimallaşdyrma usuly ýatyr. Bu usula getirilýän meseleler çözülende uly ölçegli mesele yzygiderli optimal kiçi ölçegli mesele bilen çalşyrylýar. Dinamiki programmirlemäniň esasy ulanylyş usuly prosesiň birmeňzeş ädimlere ýa-da tapgyrlara bölünmegi bolmak bilen, ädimleriň jeminiň hasaba alnan görnüşde olaryň her haýsy aýratyn meýilleşdirilen bolmalydyr.

Optimallyk prinsipi. Meselede optimallygyň özüni alyp baryş häsiýeti aşakdaky görnüşe eýe bolmaly. Başlangyç ýagdaý we başlangyç çözüw nähili bolsa hem, soňky çözüw onuň ýagdaýyna görä düzülen optimallygyň özüni alyp barşyndan alnan başlangyçdaky netijeden durýar. Meselede geljek üçin düzülýän maksatnama seredeliň. Goý, hojalykda iki bölüme seredilýän bolsun: ösümlik we maldarçylyk. Olaryň geljekde ösmegi üçin başlangyç wagtda k_1 serişde goýberilen. Ösümlik bölege x_1 manat harç edip, biz bir ýylyň dowamynda $f(x_1)$ girdejini alýarys. Şeýlelikde, maldarçylyk üçin $k_1 - x_1$, serişde galýar, ol bolsa φ $(k_1 - x_1)$ ýyllyk girdeji berýär. Onda umumy girdeji:

$$z_1 = f(x_1) + \varphi(k_1 - x_1).$$

Birinji ýylyň ahyrynda başlangyç serişde k_1 üýtgeýär we k_2 serişde emele gelýär. k_2 ululyk k_1 başlangyç serişdäniň möçberine we onuň birinji ýylda paýlanylyşyna, ýagny, x_1-e bagly. Alnan k_2 serişdeler önümçilik serişdeleriniň peýdalanylmasynyň netijesinde başlangyçdan az bolmagy, öňküligine galmagy, şeýle hem eger onda girdejiniň kesgitli bölegi goýlan bolsa, köpelmegi hem mümkin.

Ikinji hojalyk ýylynyň başlamazyndan ozal, serişdeleri täzeden paýlamak: ösümliklere x_2 manat, maldarçylyga bolsa $(k_2 - x_2)$ manat ugradylýar. Onda umumy girdejini degişlilikde alarys:

$$z_2 = f(x_2) + \varphi(k_2 - x_2).$$

Geljek ýyl üçin serişdäniň mukdary:

$$k_3 = \Psi(k_2, x_2).$$

Bu yzygiderligi dowam edip, n hojalyk ýyl üçin pudaklary maliýeleşdirmäniň möçberiniň x_n manat we $(k_n - x_n)$ manat boljakdygyna göz ýetireris. Bu ýagdaýda umumy girdeji:

$$z_n = f(x_n) + \varphi(k_n - x_n).$$

Bu ýerden $k_n = \Psi(k_{n-1}, x_{n-1})$. Ol serişdeleriň geçen her ýyldaky paýlanmasyna baglydyr, ýöne ol anyk görünmeýär. Başlangyç serişde k_1 belli bolsa, f,φ,ψ funksiýalaryň görnüşinden kesgitlenilmeli n ýylyň dowamynda jemi girdeji maksimum bolar ýaly serişdeleri paýlamany meýilnamalaşdyrmaly. Netijede, maksat funksiýa:

$$z = f(x_1) + \varphi(k_1 - x_1) + f(x_2) + \varphi(k_2 - x_2) + \ldots + f(x_n) + \varphi(k_n - x_n)$$

ýa-da

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i \to \max$$

görnüşi alar. n sany baglanyşyksyz näbellileriň funksiýasyny gysgaça $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ görnüşde ýazmak bolar. Aýdyň görnüşdäki şertlerden başga $0 \le x_j \le k_j$; $j = \overline{1,n}$ şertleri hem goşalyň. Şeýle hem näbellilere başga çäklendirilmeler hem goýulmagy mümkin. Eger olar deňleme görnüşinde berlen bolsa, onda biz meseläni şertli ekstremumyny tapmak meselesine getirip çözüp bileris. Çäklendirmeler ulgamy deňsizlikler bilen berlende, onda çyzykly däl programmirleme meselesi alynýar we ony ýokarda görkezilen usullaryň haýsy-da bolsa biri bilen çözmek bolar. Ýöne bu ýerde hem aýratyn ýagdaýlaryň biri bolmagy mümkin: eger gözlenýän funksiýa üznükli bolsa ýa-da näbellileriň bir bölegine ýörite şertler berlen bolsa (bitinsanly, diskretlilik we ş.m),onda has amatly gradiýent usulyny ulanyp bolmaýar, wariantlaryň göni saýlanma usuly bolsa (giňişlik torunda düwünlerden aýlanyp geçmek usuly) mydama çendenaşa uly hasaplamalara getirýär.

Meýilnamalaşdyrylan prosesi n tebigy kesgitlenen tapgyrlara böleris. Birinji tapgyrda maýa goýumyň x_1 ölçegini taparys. Biz bu ululygy ikinji ýylyň paýlamasyna degişli bolan k_2 serişdeleriň hasaplanmagynda ulanarys. k_2-ni gözläp, ikinji tapgyrda x_2-ni taparys: x_2 boýunça k_3-i kesgitläris we üçünji tapgyrda x_3-i taparys we ş.m. Bu ýagdaýda her tapgyrda meseläni diňe bir näbelli bilen çözmeli, bu bolsa berlen islendik köpölçegli meseleleriň çözüwinden has ýeňildir.

Ýöne bu ýerde goşmaça kynçylyk ýüze çykýar. Goý, bu meselede maldarçylyk has girdejili pudak bolsun. Bu pudakdan has köp girdeji almak üçin meýilnamanyň birinji tapgyrynda maksimum serişdeleri maldarçylyga gönükdirmeli bolardy. Ýöne bu geljekde sazlaşygyň bozulmagyna getirip, önümçiligiň pese düşmegine, iýmit bolçulygynyň peselmegine we netijede girdejileriň birden azalmagyna getirerdi. Hemme meýilleşdirilen perioddaky jemleýji ykdysady peýdalylyk bolup biljeginden, has pese düşerdi. Şonuň üçin hem her bir ädimde hökmany suratda diňe bir berlen hojalyk ýylyndaky netijeleri göz öňünde tutman, eýsem geljekdäki bolup geçjek ýagdaýlary hem göz öňünde tutmalydyr.

Olaryň haýsy ýol bilen alnandygyna garamazdan, geljek ýylyň netijelerini ulanmak meýilnama üçin başlangyç bolýar. Geljek meýilleşdirileninde hökman alynjak netijeler, şeýle hem serişdeleriň paýlanylyşynyň ähli geljek ýyllarda alynjak girdejilere ýetirjek täsirini hem göz öňünde tutmalydyr. Ine, bu hem meseläniň çözülişini kynlaşdyrýan goşmaça şert bolup durýar.

Şeýlelik bilen seredilýän mesele iki aýratynlyga eýedir:

1. Ol aýratyn tapgyrlara tebigy görnüşde paýlanylýar (hojalyk ýyly);

2. Her bir tapgyrda meýilnamalaşdyrylýan ululyklaryň bahasy, geljekde hemme hasaplamalarda ýetiljek umumy peýdanyň maksimumy bilen baglanyşykly bolmalydyr.

Bular ýaly meseleleri çözmek hem dinamiki programmirlemäniň dersini düzýändir. Dinamiki programmirleme meselesiniň esasy manysy, onuň birnäçe näbellili bir meseläniň bir näbellili birnäçe meseleleriň yzygiderlikde çözülmegine getirýänliginden durýandyr. Deňlemäniň sany başdaky seredilýän meseläniň näbellileriniň sanyna deň bolup, tebigy ýa-da başga bir usulyň esasynda şol sandaky tapgyrlardan durýar. Bu ýagdaýda dürli çözüwleriň nähili baglanyşýandygyny ýene şol mysalda seredeliň.

Goý, başlangyç ýagdaý (k_1 serişdeleriň mukdary) bize belli ahyrky ýagdaý bolsa kesgitlenmedik bolsun. Meseläni tapgyrlara bölüp ony ters tertipde, ýagny yzyndan başlap başyna çenli çözeliň.

Kesgitlenýän k_n serişdeleriň ulylygynyň mümkin bolan bahalarynyň hataryny alalyň. Bu bolsa k_n üýtgeýän boýunça giňişlik torunyň ýollarynyň koordinatalarynyň saýlanyşyna deň güýçlüdir. Her bir şeýle baha üçin n ýylyň maliýeleşdirilmeginiň optimal meýilnamasyny taparys. Sebäbi, bu ýyl periodda iň soňky, şonuň üçin geljek hakynda aladalanmasaň hem bolar.

Her bir k_n üçin optimal maksatnama saýlanyp alynýar. x_n näbelli üçin $[0;k_n]$ aralykda birnäçe bahalary barlamaklyk göz öňüne tutulýar, ýagny şu ok boýunça koordinatalaryň düwünleri saýlanylýar. Şonuň üçin girdejiniň ulylygy hasaplanylýar:

$$z_n = f(x_n) + \varphi(k_n - x_n).$$

Maksimum girdejini üpjün edýän x_n-iň şeýle bir bahalarynda we k_n şol girdejiniň özi z_n fiksirlenilýär, ýene-de k_n-iň başga bir bahasy we soňra has köp girdejini berýän x_n saýlanylýar we ş.m. Bu usulyň düwünleri ýönekeý aýlanyp geçmek usulyndan tapawudy – bu ýerde diňe bir optimal meýilnama däl-de, k_n-iň näçe bahasy alnan bolsa, şonça optimal meýilnama gözlenilýär.

Soňundan ikinjä (n-1)-nji tapgyra geçýäris. (n-2)-nji ýylyň netijeleri hakynda çaklamalary düzüp (ýagny k_{n-1} üçin bahalary saýlap), (n-1) ýylyň serişdelerini geljekki iki ýylda, ýagny (n-1) we n-nji ýyllaryň girdejisi maksimal bolar ýaly edip paýlaýarys.

Şol maksat bilen $k_{n-1} = k^{(1)}_{n-1}$ birinji bahasyny alýarys, $x_{n-1} = x'_{n-1}$ göz öňüne tutulan birinji bahany we meýilnamalaşdyrylan ýyldaky mümkin bolan girdejini hasaplaýarys:

$$z'_{n-1} = f(x'_{n-1}) + \varphi\,(k^{(1)}_{n-1} - x'_{n-1})$$

we şeýle meýilnama bilen şertlendirilen geljek ýyl üçin paýlanylan serişdeleriň mukdaryny kesgitleýäris:

$$k_n^{'} = \varphi(k_{n-1}^{(1)}, x_{n-1}^{'}).$$

k_n-iň bahalarynyň içinden birinji ädimde peýdalanylan oňa örän ýakyn k'_n-i saýlalyň. Oňa z'_n-e deň bolan iň soňky tapgyrdaky maksimal girdeji degişli bolýar. Iki ýyldaky girdejileri jemläp alarys:

$$z_{n-1}^{*} = z_{n-1}^{'} + z_n^{'}.$$

x'_{n-1}, k'_n, z^*_{n-1} ululyklary fiksirleýäris.

Indi $x_{n-1} = x''_{n-1}$ bahany alyp, hasaplaýarys:

$$z''_{n-1} = f(x''_{n-1}) + \varphi(k_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{''})$$
$$k_n^{''} = \varphi(k_{n-1}^{(1)}, x_{n-1}^{''}),$$

k_n-iň bahalaryndan k''_n-e ýakynlaşýan sany saýlap alarys we oňa laýyk gelýän degişli maksimal girdeji z''_n-i tapylan z''_{n-1} bilen goşýarys:

$$z_{n-1}^{**} = z_{n-1}^{''} + z_n^{''}.$$

Gerek bolan $x_{n-1}^{''}$, $k_n^{''}$, Z_{n-1}^{**} ululyklary ýatda saklaýarys.

Şeýdip, alnan interwal boýunça x_{n-1}-iň $[0, k_{n-1}^{(1)}]$ kesimdäki ähli bahalaryny saýlaýarys we her biri üçin iki ýyldaky jemi girdejini tapýarys. Has amatly girdeji

$$z_{n-1}^{(1)} = \max(z_{n-1}^{*}, z_{n-1}^{**}, ...)$$

berlen $k_{n-1}^{(1)}$ serişdeleriň mukdarynyň paýlanylyşynyň optimal meýilnamasyny görkezer. $x_{n-1}^{(1)}$, $k_n^{(1)}$ bahalar we $z_{n-1}^{(1)}$ girdejiniň ululygy gutarnykly fiksirlenýär. Aralykdaky $x_{n-1}^{'}$, $x_{n-1}^{''}$ netijeler we başgalar gerek bolmanlygy üçin ýitirilýär.

Şondan soňra $k_{n-1} = k_{n-1}^{(2)}$ ikinji bahany alýarys we edil şuňa meňzeş usul bilen onuň üçin optimal meýilnamany, şeýle hem $x_{n-1}^{(2)}, k_{n-1}^{(2)}$, $z_{n-1}^{(2)}$ ululyklary tapýarys.

Şeýle meýilnamadan k_{n-1} üçin näçe baha alnan bolsa, şonçasy düzüler. Olaryň her biri şertli optimal diýip atlandyrylýar, şeýle hem (n-2) ýylyň netijelerinde paýlanmaly serişdelere hasaplamada kabul edilen bilen deň bolmagy şerti bilen optimal diýip bolar.

Üçünji ädimde mümkin bolan k_{n-2} bahalar saýlanylýar we olaryň her biri (n-2), (n-1) we n-nji ýyllardaky jemi girdeji iň uly bolar ýaly paýlanylýar.

N ädimden soň 1-nji tapgyra baryp ýeteris. Bu ýerde eýýäm geljekki ýyl üçin netijeler hakynda çaklama etmek gerek däl. Sebäbi serişdeleriň başlangyç mukdary k_1 bize berlen. Bu serişdeleri paýlaýarys, şeýle hem ähli ýyllar üçin iň köp girdejini üpjün edýän $x_1$bahany taparys. Bu ädimde ýeke-täk bolar.

Indi bolsa başyndan ahyryna çenli hiç hili hasaplamazdan tersine hereket başlanýar, x_1 bahasy alnan interwala çenli takyklykda k_2 ululygy kesgitleýär; ol boýunça fiksirlenen netijelerden x_2-ni saýlaýarys, şonuň bilen k_3 hem kesgitlenýär; x_3 ululyk üçin şertli optimal x_3-i alýarys we ş.m. k_n-e ýetýänça dowam etdirýäris. Şeýlelikde, başdan-aýaga gaýtalap geçip, biz her tapgyrda şertli optimal meýilnamalardan gereklisini saýlaýarys; olaryň hemmesi bilelikde bize meseläniň optimal meýilnamasyny berýär.

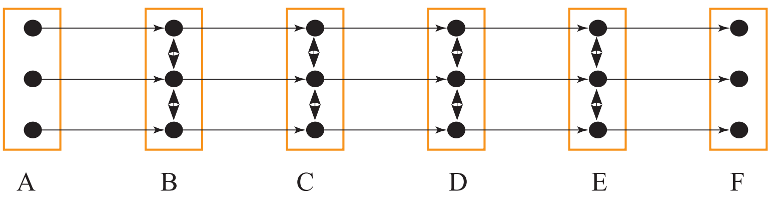
Çözmegiň şeýle tertibinde k_1 serişdeleriň dürli başlangyç mukdary üçin optimal meýilnamalary hasaplamak bolar. Munuň üçin diňe iň soňky ädimi gerek bolan mukdarda hasaplamak ýeterlikdir.

Eger meselede soňky ýagdaý belli bolup, başlangyç berilmedik bolsa, ony göni tertipde başdan-soňa çözmek amatlydyr, şonda geljekki meýilnamalar amatly bolýar: geljek $(n + 1)$-nji ýyl üçin hasaplanan optimal meýilnamany gurmak üçin, ädilen n ädime ýene bir ädim goşmak ýeterlikdir.

Köplenç meselede başlangyç bellidir, soňky ýagdaý ýa-da olar üçin mümkin bolan bahalaryň ýaýlasy hem görkezilendir. Beýle meseläni göni hem-de ters tertipde-de çözmek bolýar.

Meseläniň çözülişiniň beýany giňişlik torunda düwünleri aýlanyp geçmek usulydyr, ýöne saýlamalary tertipleşdirmek we olaryň amatly dällerini her bir ädimde aýyrmak geçirilýän hasaplamalaryň sanyny örän azaldýar. Muňa düşünmek üçin dinamiki programmirlemegi göni saýlama bilen deňeşdirmek üçin aşakdaky ýönekeý mysallara seredeliň.

1. Goý, A şäherden F şähere geçmek üçin 4 sany aralykdaky duralgalardan geçmeli bolsun, ýagny jemi 5 bölüm ýol bolmaly bolsun.



1-nji surat

Her bir punktdan beýleki bir punkta eltýän 3 sany dürli dowamlylykdaky aralygy, ýoluň hilini, ulagyň görnüşini we duralgada düşüp-münülmesiniň wagtyny hasaba almak bilen *F* punkta iň çalt baryp boljak gatnawy kesgitlemeli.

Wariantlaryň sanyny ýönekeý saýlama usulynda hasaplalyň. Munuň üçin aralyk nokatlar boýunça soňundan başlangyjyna tarap hereket ederis. Eger biz şäheriň üç duralgasynyň islendik birine *E* barsak (meselem, demir ýola), onda *F* punkta barmak üçin 3 mümkinçilik: hereketi demir ýol boýunça dowam etdirmek, awtobusa münmek ýa-da uçara garaşmak ýüze çykýar. Şonuň üçin bir *E* nokatda üç warianta seretmeli. Olaryň her biri bilen *D*-den *E* çenli 3 ugruň biri baglanyşyp biler, şeýle hem *D* nokatda eýýäm F punkta hereketiň $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ wariantlary bolar.

Bu 9 wariant bilen *C*-den *D*-e çenli üç ugruň her biri baglanyşýar we *C* nokatda indi $3 \cdot 3^2 = 3^3$ warianta seretmeli bolýar. *B* nokatda olar 3^4 bolar, başlangyç A punktda bolsa $3^5 = 243$ wariant bolar. Umumy ýagdaýda meselede *n* tapgyr bar bolsa we olaryň her birine *n* netije mümkin bolsa, wariantlaryň sany r^n-e deň bolar.

Dinamiki programmirleme meselesinde iň soňky *EF* tapgyrda üç warianta seredilýär we olardan iň gowusy (az wagt hereket edýänini) saýlanylýar. Şol boýunça ugruň nomeri we hereketiň dowamlylygy ýatda saklanylýar. Indiki ädimde *DE*-niň üç ugrunyň her biriniň hereketiniň wagty saýlanylýan *EF* ugruň minimum wagty bilen goşulýar. Üç netijeden kiçisi fiksirlenýär; ol *D* punktdan *F* punkta çenli minimum wagty, şeýle-de, hereketiň gatnawlaryny berýär. Görşümiz ýaly, *D* nokatda 9 däl-de 3 warianta seretmek ýeterlik. Hasaplamanyň bu tertibinde diňe *C* nokatda 3 wariant barlanylman, eýsem *A* we *B* nokatda hem barlanmaly. Meseläni doly çözmek üçin ýönekeý abzaldan 243:15 = 16 esse kiçi bolan $3 \cdot 5 = 15$ wariantyň hemmesiniň hasaby gerek.

Umumy ýagdaýda *n* ädimde we *r* netijede *rn* wariantlar seredilmäge degişlidir. Bu san r^n-den ýeterlik kiçi. Emma, dinamiki programmirleme güýçli taraplaryň hataryna hem eýedir. Düwünleri aýlanyp geçmek usullary üçin hasaplamanyň programmasy ýeňillik bilen gurulýar. Giňişlik tory gurlanda (näbellileriň bahalarynyň aralygy saýlananda) diskretlilik ýa-da bitin san ýaly şertleri göz öňünde tutmak ýeňildir. Meselem, x_1 näbelli şu bahalary alyp biler: 0;1,5;3,8;4,7 we ş.m. x_2 näbelli bolsa 0,1,2,3 we ş.m. Bu bahalary biz wariantlaryň hasaplamasynda ulanarys.

Ýoluň her bir tory (näbellileriň bahalarynyň toplumy) çäkli funksiýanyň goýluşynyň ýolbererliginde barlanylýar. Olar islendik bolup biler we olaryň mukdarynyň ulalmagy hasaplamany kynlaşdyrmaýar. Gözlenýän funksiýanyň görnüşi hem rol oýnamaýar: ol absolýut ululyk bilen berlip bilner, üzülme nokadyna eýe bolup biler we ş.m. Şunuň ýaly kynçylyklary bolan meseleleri entek diňe dinamiki programmirleme bilen çözüp bolýar, bu hem onuň ulanylmagyny şertlendirýär.

2. Goý, m ýyldan durýan T period wagtda bir topar senagat kärhanalaryň iş maksatnamalary meýilnamalaşdyrylýan bolsun. Başlangyç period wagtda kärhanalaryň ösmegi üçin Q_o goýberilen serişdäni hökman kärhanalaryň arasynda paýlamak gerek diýeliň. Kärhanalar iş prosesinde goýberilen serişdeleri harç etmeli. Ýöne her bir kärhana kesgitli period wagtda (hojalyk ýyl) goýberilen serişdäniň göwrümine baglylykda girdeji alýar. Her ýylyň başynda bar bolan serişdeler kärhanalaryň arasynda täzeden paýlanylýar. Şonuň üçin her ýylyň başynda kärhanalaryň her birine näçe serişde goýbermeli we netijede bitin T period wagtda hemme kärhanalar toparynyň girdejileriniň jeminiň maksimumyny kesgitlemeklik talap edilýär. Bu meseläniň çözüliş prosesi köp ädimli bolýar. Dolandyrma ädimi (meýilnamalaşdyrma) bu ýerde hojalyk ýyly bolýar. Şeýle hem dolandyrma prosesi bolup, her bir hojalyk ýylyň başynda serişdeleriň paýlanmagy (täzeden paýlanmagy) durýar.

3. Başga bir meselä seredeliň. Goý, ýük göterijiligi P-e deň bolan uçara bölünmeýän n görnüşli ýükleri ýüklemeklik gerek bolsun. Her bir ýüküň j-nji görnüşiniň agramy we bahasy belli bolup, degişlilikde C_j we P_j birliklerden durýar. Uçara ýükleriň her bir görnüşinden näçe ýüklemelidigini kesgitlemeli. Netijede bolsa ýükleriň jeminiň bahasy iň ýokary, olaryň agramy bolsa uçaryň ýük göterijiliginden köp bolmaly däldir. Seredilýän meseläniň prosesini tapgyrlara böleliň: birinji tapgyrlarda uçara ýüklenmeli ýükleriň birinji görnüşleriniň mümkin bolan hemme wariantlarynyň içinden şertli optimallygy, ikinji tapgyrda bolsa uçara birinji we ikinji görnüşli ýükleri ýüklemäniň optimal wariantyny kesgitleýäris. Meseläniň çözüliş prosesi uçara n görnüşli ýükleriň ýüklenmeginiň optimal warianty tapylýança dowam edýär. Seredilen meselelerden görşümiz ýaly, dinamiki programmirleme usuly köp näbellili bir mesele birnäçe yzygiderli çözülýän az sanly näbellili meseleler bilen çalşylýar. Meseläniň çözüş prosesi ädimlere bölünýär. Şeýle hem ädimleriň nomerleri, düzgün boýunça iň soňundan başlangyjyna çenli dowam edýär.

§2.Dinamiki optimallaşdyrmada R. Belmanyň algoritmi

Diskret programmirleme meselesiniň çözüliş usullarynyň içinde Belmanyň algoritmi esasy orna eýedir. Belmanyň algoritmine seretmek üçin biz bir ölçegli goş haltasyna (ranes) seredeliň.

Bir ölçegli ranes baradaky meseläniň goýluşyny aşakdaky görnüşinde ýazalyň:

Ýük göterijiligi d deň bolan ranes bar bolup, ol n sany dürli agramdaky ýüklerden doldurylan bolsun. Goý, ol ýükleriň görnüşleri $j(j=\overline{1,n})$ sany bolsun. j-nji ýüküň agyrlygyny a_j bilen, onuň eltilmeginiň bahasyny bolsa c_j bilen belläliň.

Bu meselede ranesiň içinde ýerleşen ýükleriň sanynyň hem-de agramynyň esasynda bahalaryň jemlenmesinden emele gelen maksimum girdejini almak üçin meseläniň matematiki modelini düzmeli. Onuň modeli aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max. \qquad (1)$$

(1) formulanyň esasynda ranesda (goşhalta) ýüklenilip getirilýän harytlaryň umumy bahasy kesgitlenilýär:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le d, \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \ bitin \ (j=1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

(2), (3) şertlerden kesgitlenen meseläniň maksimum girdejisini kesgitlemek gerek bolsun. Bu meseläni dinamiki programmirlemäniň usuly bolan wariantlary yzygiderli derňemek usulynyň algoritminiň esasynda kesgitlemek bolýar. Meseläniň çözüwinde gözlemek usuly biri-biriniň içinde ýerleşdirilen ýaýlalardan durýan yzygiderlige seredilýär.

Ýokarda görkezilen shemanyň esasynda meseläniň çözüwi gözlenilýär. Bu ýerde emele gelýän n sany näbellili funksiýanyň maksimumyny derňemek meselesini bir näbellili n ädimden durýan funksiýanyň maksimumyny kesgitlemek meselesi bilen çalyşýarys. Diýmek, näbellileriň sanyny ädimleriň sany bilen çalyşýarys. Eger biz k-njy ädimde ranesiň maksimum bahasynyň effektini $f_k\,(a)$ diýip belgilesek, her ädimde meseläniň çözüwini bir näbellili funksiýanyň maksimumyny tapmak bilen çalyşsak, onda aşakdaky deňlige geleris:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j=\left(c_n x_n+\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j\right).$$

Onda, onuň maksimumy

$$\max F(x)=\max\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j=\max c_n x_n+\max\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j.$$

x_1, x_2, ... , x_n, näbelliler (2), (3) şertlerde saýlanylýar. Ýagny *a*) $x_n=0$ bolsa, onda fiksirlenen x_n üçin

$$\max F(x)=\max\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j.$$

Bu ýerde $x_j\in[0;\,d]$.

b) $x_n=1$ bolsa, onda

$$\max F(x)=c_n+\max\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j.$$

Bu ýerde $x_j\in[0;\,d\text{-}a_1]$. Onda şerte görä, biz maksat funksiýany aşakdaky görnüşde alarys:

$$\max\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j=f_{n-1}(d-a_n x_n),$$

bu ýerden $0\le x_n\le\left[\dfrac{d}{a_n}\right]$ gelip çykýar. Onda bu şertden

$$0\le\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j\le d-a_n x_n \qquad \text{deňsizligi alarys.}$$

Onda soňky deňsizlikden biz maksat funksiýany *d* ranese görä alarys:

$$f_n(d)=\max_{0\le x_n\le\left[\frac{d}{a_n}\right]}[c_n x_n+f_{n\text{-}1}(d-a_n x_n)]. \qquad (4)$$

Diýmek, bu meseläniň maksat funksiýasy (4) görnüşde kesgitlenen bolýar. Eger $f_0(a)=0$ bolsa, onda $0\le a\le d$ gatnaşyk emele gelýär. Bu bolsa meseläniň şertine görä, maksimum maksat funksiýany kesgitlemekde yzygiderli wariantlar usulynyň netijesi ulanylýar.

Hasaplanyş algoritmini aşakdaky görnüşde ýazalyň :

1. k bilen biziň eýýäm seredip geçen görnüşimizi belläp geçeliň (ilki başdan $k = 1$).

2. Bitin interwaly üýtgeýänleriň resurslary boýunça maglumatlary sany Δ uzynlykly interwallar böleliň. Olaryň hersi üçin $f_k(l\Delta)$ funksiýany ýatda saklap öýjükleri girizeliň. ($l = 0, 1, 2, \ldots, m$).

3. Işjeň β öýjük alnan iň uly girdejini ýazalyň (başdakysy nola deň).

4. x serişdeli (resursly) k ädimde amaly çözüwi $y_k(x)$-iň üsti bilen belläliň.

5. $y_k(x)$, $f_k(x - y_k a_k)$, $c_k y_k$ ulanyp, $c_k y_k + f_k(x - a_k y_k)$ hasaplalyň we α öýjükde ýazalyň.

6. α bilen β öýjüklerdäki sanlary deňeşdireliň. Eger öýjükdäki sanlar köp bolsa, onda 8-e geçeris. Eger $\alpha > \beta$ bolsa, onda 7-ä geçeris.

7. $\beta := \alpha$, $\gamma := y_k(x)$

8. $y_k(x)$-ini δ ululyk bilen çalşalyň: $y_k(x) = y_k(x) + \delta$.

9. $y_k(x) > \frac{x}{a_k}$ bolsa, onda $0 \le y_k(x) \le \frac{x}{a_k} y_k(x)$ üýtgetme bolmaýar we 10-a geçeris. Eger $y_k < \frac{x}{a_k}$ bolsa, onda 5-e geçeris.

10. $y_k(x)$-iň başdaky x serişdesi tükenensoň girdejä getirýän degişli öýjük üçin ýatlama $f_k(x)$ we $y_k(x)$-iň ýeten iň uly derejesini ýatlalyň. Bu seredilen serişdeler toplumynyň amatly çözüwi.

11. Başdaky x serişdeleriň toplumyny Δ sanly k görnüşli täze serişdeler toplumy boýunça täze mesele alarys.

12. Eger $x + \Delta \le d$ bolsa, onda 5-nji bölümçä geçeris. Eger $x + \Delta \le d$ bolsa, onda k görnüşli serişdeleri ulanmak üçin çözüwleriň prosesi tamamlanýar (k sany dürli abzallar bilen doldurylan ranes).

13. $f_{k-1}(x)$ massiwiň ýerine $f_k(x)$ massiwi geçireliň.

14. $k := k + 1$ ($k + 1$ abzal üçin meseläniň çözüwi).

15. $k \le n$ bolanda, eger «Hawa» bolsa, onda $x_i = 0$ we 5-e geçeris. Eger $k > n$ bolsa, onda hasap tamamlanýar.

Geçirilen hasaplamalaryň netijesinde biz n sany tablisa aldyk. Olaryň hersi umumy girdejini we fiksirlenen sanlaryň serişdeleriniň ulanylmaklygy üçin bu girdejilere ýetmegiň amatly görnüşlerini kesgitleýär. Çözüwiň 2-nji bölümi – gurlan tablisalardan amatly çözülişi saýlamak. Bu aşakdaky ýaly amala aşyrylýar.

1. Serişdäni ulanmagyň n sany görnüşini we x_0 başdaky serişdeler toplumyny özünde saklaýan meselä seredeliň. Öýjükdäki k görnüşleriniň sanyny, k_1-resurslaryň toplumyny ýatlalyň.

2. Öýjüklerde görkezilen k we k_1 ululyklar üçin k-njy tablisadan girdejä ýetmegiň amatly görnüşini kesgitläliň. Goý, ol ululyk $y_k(x)$ bolsun.

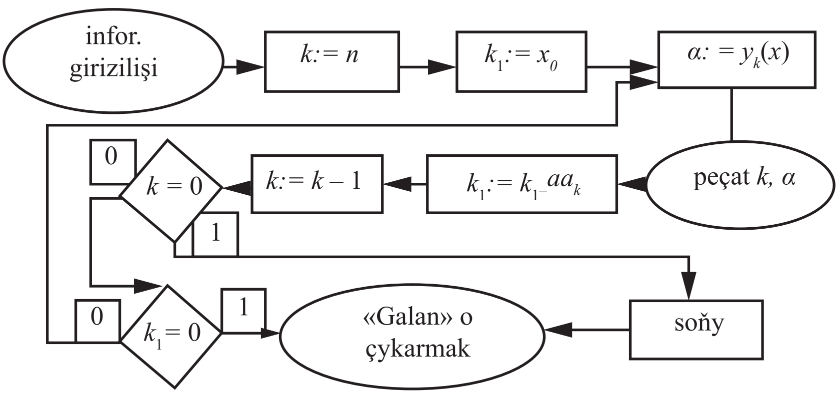
3. $y_k(x)$ çapa goýbermek. Çapa goýberilen $y_k(x)$-i α-da ýatlalyň.

4. $k_1 := k_1 - a_k y_k(x)$; $k := k - 1$.

5. Derňewi (seljermesi): Eger $k \neq 0$ bolsa, onda k_1 nolunjy deňligi barlamaly.

$$k_1 = \begin{cases} \neq 0, & \text{bolsa, 2-ä geçmeli.} \\ = 0 & \text{bolsa, galan hemme görnüş orny nollar.} \end{cases}$$

Eger $k = 0$ bolsa, onda çap etmek prosesi tamam. 2 bölümiň blok-shemasy 2-nji suratda getirilen.



2-nji surat

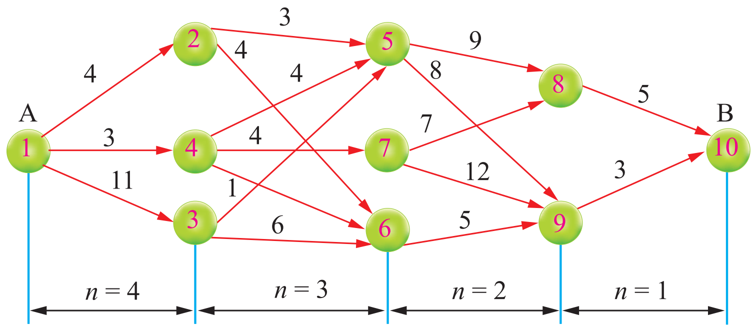
§3. Dinamikanyň usullary bilen ykdysady meseleleriň çözülişi

Ykdysady tejribede birnäçe meseleler gabat gelip, olar dinamiki meýilnamanyň meseleleriniň çözüliş usulyna ýa-da berlişine degişlidir.

Ykdysadyýetde meseläniň goýluş ýa-da çözüliş usuly boýunça birnäçe meseleleriň görnüşine duş gelmek bolýar. Olara wagt boýunça meýilnamalaşdyrylýan optimal ýakyn we uzaga meýilnamalaşdyrma hem degişlidir. Olary her aralyga degişli biri-biri bilen bagly statiki modelleriň toplumyny düzmek usuly bilen ýa-da olary bitewi optimal dinamiki meýilnamalaşdyrma meselesini gurup, köpädimli usuly ulanyp çözmek bolýar.

1. Iň kiçi aralygy saýlama meselesi. Dinamiki programmirleme usuly bilen çözülýän meselelere birnäçe amaly mesele görnüşinde garap geçeliň. Goý, toruň başlangyç we ahyrky depeleriniň aralygyndaky uzaklygyň iň gysgasyny tapmak gerek bolsun. Bu meseläniň çözüwi dinamiki programmirleme usuly bilen çözülýär.

1-nji mysal. Goý, A şäherden B şähere ýük getirmek talap edilýän bolsun. Bu şäherleri baglanyşdyrýan ýollaryň tory 1-nji suratda şekillendirilen. $S(S=\overline{1,9})$şäherden $(j=\overline{2,10})$ şähere ýük daşamagyň nyrhy toruň degişli dugalarynda goýlan. Ýüki daşamagyň jemi çykdajysy iň az bolan, A we B şäherleri baglanyşdyrýan ýoly tapmaly.



3-nji surat. *A (1) we B (10) şäherleriň arasyndaky ýollaryň shemasy*

Çözülişi: 3-nji suratdaky nomerli tegelekler bilen belgilenen toruň depeleri şäherlere degişli bolan ulag magistrallaryny aňladýar.

Depeleriň ähli köplüklerini bölek köplüklere böleliň. Birinji bölek köplüge başlangyç 1 depäni goşalyň; ikinjä – 1 depeden çykýan dugalaryň depelerini; üçünjä – ikinji bölek köplügiň depesinden çykýan dugalaryna degişli depelerini birikdireliň. Şeýlelik bilen bölmäni dowam etdirip, bäş bölek köplügi alarys: {1}, {2,3,4}, {5,6,7}, {8,9}, {10}. Görnüşi ýaly, 1-nji şäherden 10-njy şähere islendik ýol her biri bölek köplüklere degişli depeleri baglanyşdyrýan dogry dört dugany özünde saklaýar. Bu ýerden meseläniň çözüliş prosesiniň (optimal ýoluň tapylyşy) – 4 tapgyra bölünýändigi gelip çykýar. Birinji tapgyrda ikinji bölek köplüge degişli haýsy şäheriň üsti bilen 1 şäherden ýüki äkidip boljakdygynyň çözüwi alynýar. Ikinji tapgyrda üçünji bölek köplügiň haýsy şäheriniň üsti bilen ikinji bölek köplüge degişli käbir şäherden ýüki äkidip boljakdygy kesgitlenilýär we ş.m. Toruň ahyrky depesinden başlangyjyna çenli tapgyrlary nomerläliň we indiki belgilemeleri girizeliň: $f_n\ (s)$ – eger ahyrky şähere çenli n ädim galan bolsa, s şäherden ahyrky şähere ýüki äkitmegiň minimum çykdajysy; $j_n\ (s) - f_n\ (s)$ alnar ýaly, S şäherden ugramaly şäheriň nomeri; c_{sj}-S şäherden J şähere ýük daşamagyň nyrhy. Bu belgilemeleriň ählisi möhüm manyny göterýär. $f_n\ (s)$-maksat funksiýany, $f_n\ (s)$ funksiýadaky s-sistemanyň ýagdaýyny (şäheriň nomerini), n indeks bolsa S şäherden ahyrky şähere çenli n ädimiň galandygy baradaky dinamiki informasiýany aňladýar.

Meseläni B şäherden başlap yzlygyna çözmek usuly bilen çözeliň. Ýük 10-njy şähere getirilen diýip güman edeliň, 10-njy şäherden ýük äkitmeli däldigi üçin, galan ädimleriň sany nola deň (n = 0) we f_n $(s) = f_0\ (10) = 0$ gelip çykýar.

Indiki ädime seredeliň (n=1) we onuň üçin funksiýanyň bahasyny hasaplalyň. Görnüşi ýaly, 10-njy şähere ýük ýa 8-nji şäherden, ýa-da 9-njy şäherden getirmek bolýar. Bu iki ýagdaý üçin hem daşamagyň çykdajysyny hasaplalyň:

$$f_1\ (8) = c_{8,10} + f_0\ (10) = 5 + 0 = 5,\ \ s = 8,\ \ j_1\ (8) = 10.$$

$$f_1\ (9) = c_{9,10} + f_0\ (10) = 3 + 0 = 3,\ s = 9,\ \ j_1\ (9) = 10.$$

Hasaplamany $n = 2$ bolanda geçirmek üçin, ýüküň ýerleşýän ýeri barada çaklamany guralyň: birinji çaklama ýük 5-nji şäherde ýerleşýär; ikinji – ýük 6-njy şäherde ýerleşýär; üçünji – ýük 7-nji şäherde ýerleşýär.

5-nji şäherden 10-njy şähere ýüki ýa 8-nji şäheriň üsti bilen, ýa-da 9-njy şäheriň üsti bilen äkitmek bolýar, şonuň üçin 5 şäherden amatly ýol

$$f_2(5) = \min_j[c_{58} + f_1(8); c_{59} + f_1(9)] = \min(9 + 5; 8 + 3) = 11$$

aňlatmadan tapylýar. Bu ýerde s = 5 we j_2 (5) = 9 şertli optimal ýoly 9 şäherden geçýär.

Şuňa meňzeşlikde, s = 6 we s = 7 üçin funksiýanyň bahasyny taparys:

$$f_2(6) = c_{69} + f_1(9) = 8;$$

$$f_2(7) = \min_j[c_{78} + f_1(8); c_{79} + f_1(9)] = 12.$$

Ähli hasaplamalary tablisada ýerine ýetirmek amatlydyr. Birinji [$n = 1$, $c_{sj} + f_0(j)$] we ikinji [$n = 2$, $c_{sj} + f_1(j)$] tapgyrlaryň hasaplamalaryny 1-nji we 2-nji tablisalarda ýerleşdireliň.

1-nji tablisa

s \ j	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$
8	5 + 0	5	10
9	3 + 0	3	10

2-nji tablisa

s \ j	8	9	$f_2(s)$	$j_2(s)$
5	9 + 5	8 + 3	11	9
6		5 + 3	8	9
7	7 + 5	12 + 3	12	8

Gara wertikal çyzykdan çepde ýerleşýän tablisanyň sütünlerindäki sifrler ýüki S şäherden J şähere eltmegiň c_{sj} nyrhyny we ýüki J şäherden B şähere çenli eltmegiň f_{n-1} (j) nyrhyny aňladýar. Munuň bilen ýüki S şäherden ahyrky şähere eltmegiň şertli optimal çykdajysy kesgitlenilýär. Çykdajylar (funksiýanyň bahasy) f_n (5) bilen belgilenen we wertikal çyzykdan sagdaky birinji sütünde ýazylan şertli optimal ýoldan geçýän şäher bolsa $j_n(s)$ bilen belgilenen. n = 3 üçin rekkurrent gatnaşyk

$$f_3(s) = \min_{s,j}[c_{sj} + f_2(j)]$$

görnüşi alar. Şertli optimal bahalary hasaplamak üçin 2-nji tablisadan ýokardaky ädimde alnan $f_2(j)$-niň bahasynyň peýdalanylýandygyny belläliň. Üçünji ädim [$n = 3$, $c_{sj} + f_2(j)$] üçin hasaplamalar 3-nji tablisada getirilen. Bu ýerde iki öýjük ştrihlenendir, çünki 2-nji we 3-nji şäherden 7-nji şähere barmak bolmaýar.

3-nji tablisa

$s \backslash j$	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$
2	3 + 11	4 + 8		12	6
3	1 + 11	6 + 8		12	5
4	4 + 11	6 + 8	4 + 12	14	6

Ýüki getirmegiň çykdajysy $f_4(1) = 16$ we ikinji şäherden $j_4(1) = 2$ bolany üçin optimal ýoluň geçýändigini görkezýän dördünji ädim $[n = 4,\ c_{sj} + f_3(j)]$ üçin hasaplamalar 4-nji tablisada getirilendir. Soňra 3-nji tablisadan $s = 2$ bolanda, $j_3(2) = 6$ bolany üçin optimal ýoluň 6-njy şäherden geçýändigi gelip çykýar.

4-nji tablisa

$s \backslash j$	2	3	4	$f_4(s)$	$j_4(s)$
1	4 + 12	11 + 12	3 + 14	16	2

Tablisalara seretmegi dowam etdirip, $n = 2$ üçin optimal ýoluň 9 şäherden ($j_2(6) = 9$) geçýändigini kesgitläris.

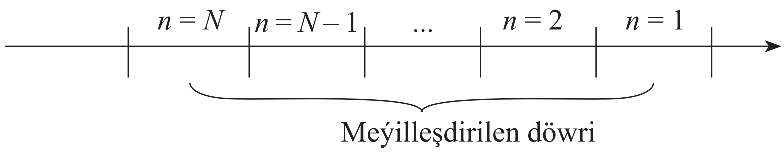
Ahyrynda, ýük 9-njy şäherden ahyrky 10-njy şähere eltilýär, şeýlelik bilen soňky tablisadan birinjä tarap hereket edip, ýüki 10-njy şäherden 9-njy şähere, 9-njy şäherden 6-njy şähere, 6-njy şäherden 2-nji şähere, 2-nji şäherden bolsa 1-nji şähere getirmekligiň iň gysga ýol boljakdygyny görýäris. Bu tertip boýunça hereket edilse, ýoluň çykdajysynyň $f_4(1) = 4 + 4 + 5 + 3 = 16$ boljakdygyny kesgitleýäris.

2. Enjamlary çalyşmanyň optimallaşdyrma meselesi. Belli bolşy ýaly, ulanmak prosesinde enjam diňe fiziki taýdan däl, moral taýdan hem güýçden gaçýar we wagtyň geçmegi bilen ony çalşyrmaly bolýar, bu bolsa optimallygyň dürli kriteriýalary bilen amala aşyrylýar. Kriteriýa hökmünde kärhananyň girdejisini alarys.

Goý, kärhana meýilleşdirilen döwrüň başynda N ýyldan t ýyllyk enjama eýe bolsun. Meýilleşdirilen döwrüň her bir ýylyndaky t ýyllyk enjamda öndürilen önümleriň nyrhy $r(t)$ we onuň ýyllyk ulanma $u(t)$ çykdajylary bellidir. Eger bu ykdysady taýdan maksadalaýyk bolsa, meýilleşdirilen döwrüň islendik ýylynyň başynda enjam täzesi bilen çalşyrylyp bilner. Bu ýagdaýda köne enjam galyndy nyrh $S(t)$ boýunça esaslandyrylyp bilner, täze enjamyň bahasy bolsa P-e deňdir. Tutuş N ýyl meýilleşdirilen döwürde maksimum girdejini emele getirýän enjamy çalşyrmagyň optimal strategiýasyny tapmak talap edilýär.

Dinamiki programmirleme meselesiniň çözülişine umumy ýakynlaşma esasynda optimizasiýa prosesiniň ahyryndan başlarys, munuň üçin döwrüň ahyryndan başyna çenli ýyllary: $n = 1, 2, ..., N$ nomerläris. n-nji ýylyň başynda t ýyllyk enjam bar bolsa diýen şertde soňky n ýyldaky kärhananyň maksimum girdejisini $f_n(t)$ bilen belgiläris.

Meseläniň çözüliş prosesine garalyň (*4-nji surat*).



4-nji surat. *Dinamiki programmirleme meselelerinde döwürleriň tertibi*

Goý, $n = 1$ we meýilleşdirilen döwrüň ahyrynyň birinji ýylynyň başynda t ýyllyk enjam bar bolsun. Bar bolan enjamy biz saklap ýa-da täzesi bilen çalşyryp bileris. Eger enjam saklanylsa, onda girdeji $r(t)$-$u(t)$-e deň bolar, eger ol täzesi bilen çalşyrylsa, onda soňky ýyl boýunça girdeji $r(0)$-$u(0)$ + $s(t)$-p aňlatma bilen kesgitleniler («0» – nol ýyllyk enjam).

$n = 1$ üçin maksimum girdeji:

$$f_1(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) \mathit{pul\ birl.}\, t = 0, 1, 2 \\ r(0) - u(0) + s(t) - p\ \mathit{pul\ birl.} \end{cases} \qquad (5)$$

(5) formula boýunça şertli-optimal çözüwleriň hatary tapylýar, çünki ýylyň birinji başyndan ahyryna çenli enjamyň t ýaşy takyk belli däl we biz ol barada dürli çaklamalary edýäris. Soňra, soňky iki ýyldaky döwre seredilýär ($n = 2$). Bu ýagdaýda girdeji iki bölekden durar

(öň ýanyndaky ýylyň girdejisine soňky ýylyň girdejisi goşulýar). Eger döwrüň başynda t ýyllyk enjam bar bolsa we biz ony saklaýan bolsak, onda ol ahyrky ýylyň başynda t+1 ýyllyk bolar, eger ony täzesi bilen çalyşmaly diýen çözüw kabul edilse, onda soňky ýylyň başynda ol 1 ýyllyk bolar.

Onda soňky 2 ýyl boýunça girdeji:

$$f_2(t) = \max_{l}\begin{cases} r(t) - u(t) + f_1(t+1) \quad pul\ birl.\ t = 0,1,2, \\ r(0) - u(0) + s(t) - p + f_1(1) \quad pul\ birl. \end{cases} \qquad (6)$$

Hasaplamalary meňzeşlikde dowam etdirip, ahyrdan 3-nji ýylyň girdejisiniň we soňky iki ýylyň girdejisiniň jemine deň bolýan, n=3 üçin f_3 (t) girdejini almak kyn däl.

Umumy rekurrent gatnaşyk:

$$f_n(t) = \max_{t.n}\begin{cases} r(t) - u(t) + f_{n-1}(t+1)\ pul\ birl. \\ r(0) - u(0) + s(t) - p + f_{n-1}(1)\ pul\ birl. \end{cases} \qquad (7)$$

$$n = 2, 3, ...; \qquad t = 0, 1, 2, ...$$

Rekkurrent gatnaşygyň ulanylyşyna mysalda seredeliň.

2-nji mysal. Maksimum girdejini üpjün edýän 7 ýyldan köp bolmadyk ulanma döwürli enjamy çalşyrmagyň optimal strategiýasyny tapyň. t ýyllyk enjamda bir ýylda öndürilen önümiň nyrhy $r(t)$ we bu enjam üçin eksplutasion çykdajylar $u(t)$ 5-nji tablisada getirilendir.

5-nji tablisa

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$r(t)$*pul birl.*	39	38	37	36	34	32	31	30
$u(t)$ *pul birl.*	16	16	17	18	19	20	21	21

Enjamyň galyndy nyrhy ýaşyna bagly däl we ol 5 müň pul birligine deň, täze enjamyň bahasy hem wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär we 16 müň pul birligine deň diýip hasap edilýär.

Çözülişi: Her bir $n = 1, 2, ..., 7$ we $t = 0, 1, 2, ..., 7$ baha üçin girdejileriň hasaplamasy 6-njy tablisada ýazylýar.

6-njy tablisa

Şäher nomer-leri	T / $f_n(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýedinji	$f_1(t)$	23	22	20	18	15	12	12	12
Altynjy	$f_2(t)$	45	42	38	34	34	34	34	34
Bäşinji	$f_3(t)$	65	60	54	54	54	54	54	54
Dördünji	$f_4(t)$	83	76	74	72	72	72	72	72
Üçünji	$f_5(t)$	99	96	92	90	88	88	88	88
Ikinji	$f_6(t)$	119	114	110	108	108	108	108	108
Birinji	$f_7(t)$	137	132	128	126	126	126	126	126

Enjamyň $t = 0, 1, 2, ..., 7$ ýaşynyň dürli çaklamalarynda soňky ýyl ($n = 1$) üçin hasaplamalary amala aşyrarys.

$t = 0$ bolanda (1) rekkurrent gatnaşyk:

$$\max\begin{cases} r(0) - u(0) \\ r(0) - u(0) + s - p \end{cases} = \max\begin{cases} 39 - 16 \\ 39 - 16 + 5 - 16 \end{cases} =$$

$$=\max\begin{cases} 23 \\ 12 \end{cases} = 23 \textit{ pul birligi}$$

görnüşi alar. t=1 bolanda

$$f_1(t) = \max\begin{cases} r(1) - u(1) \\ r(0) - u(0) + s - p \end{cases} = \max\begin{cases} 38 - 16 \\ 12 \end{cases} = 22 \textit{ pul birligi.}$$

Görnüşi ýaly, eger enjam 5 ýyl ulanylan bolsa, onda ol saklanylanda hem, çalşyrylanda hem girdeji birmeňzeş we 12-ä deň.

Çalşyrmaly diýen netijä geleris we saklanylmaga degişli beýleki sanlardan 12 sany gara çyzyk bilen aýratynlaşdyrarys.

$t = 6$ we $t = 7$ bolanda girdeji 12-ä deň we çalşyrmaga degişli bolar.

(6) formula boýunça 0-dan 7-ä çenli enjamyň dürli t ýaşlarynda $n = 2$ bolanda kärhananyň girdejisi aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$f_2(0) = \max\begin{cases} r(0) - u(0) + f_1(1) \\ r(0) - u(0) + s - p + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 23 + 22 \\ 12 + 22 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 45 \\ 34 \end{cases} = 45 \textit{ pul birl.}$$

$$f_2(1) = \max\begin{cases} r(1) - u(1) + f_1(2) \\ 34 \end{cases} = \max\begin{cases} 22 + 40 \\ 34 \end{cases} = 42 \textit{ pul birl.}$$

$$f_2(2) = \max\begin{cases} 20 + 18 \\ 34 \end{cases} = 38,\ f_2(3) = \max\begin{cases} 18 + 15 \\ 34 \end{cases} = 34 \textit{ pul birl.}$$

Görnüşi ýaly, enjamyň çalşyrylan ýagdaýynda $t \geq 3$ bolanda girdeji ýokary bolar.

Hasaplamalary n = 3, 4, ..., 7, bahalar üçin meňzeşlikde amala aşyryp, 6-njy tablisanyň ähli öýjüklerini doldurarys.

6-njy tablisada ýogyn gara çyzykdan sagdaky ýazylan girdejileriň enjamyň çalşyrylmagyna degişlidigini belläliň. 6-njy tablisanyň elementlerini peýdalanyp, meýilleşdirilen döwrüň başynda enjamyň islendik ýaşynda ony çalşyrmagyň strategiýasyny we girdejini taparys. f_7 (4) = 126 müň pul birligi. girdejini biz f_7 (t) setiriň we t = 4 sütüniň kesişmesinde tapdyk. f_7 (4) = 126 müň pul birl. girdejiniň ýogyn gara çyzykdan sagda ýazylandygyna üns bereliň, onda birinji ýylyň başynda enjamy täzesi bilen çalşyrýarys we onuň ýaşy t = 0 bolýar, birinji ýylyň ahyrynda enjamyň ýaşy 1 ýyl bolar. Soňra, t = 1 bolanda 2-nji ýyla degişli öýjüge serederis. Bu öýjük ýogyn gara çyzykdan çepräkde ýerleşdirilen we enjamyň ikinji ýylda saklanyp galmagyna degişlidir. Galan 6 ýyldaky girdeji $f_6(1)$ = 114 müň pul birligine deň. Ikinji ýylyň ahyrynda (üçünjiniň başynda) enjama 2 ýyl bolar we $f_5(2)$ = 92 müň pul birligine deň bolar. Soňra dördünji ýylda enjamy çalyşmalydygyny kesgitleýäris, çünki $f_4(3)$ = 72 müň pul birlik. Bäşinji ýylda enjam saklanylýar we girdeji $f_3(1)$ = 60 müň pul birl. bolýar. Hasaplamany dowam etdirip, 2-nji çalşyrmadan soň enjamyň meýilleşdirilen periodyň ahyryna çenli saklanýandygyny görýäris, çünki $f_2(2) = 38$ müň pul birlik we $f_1(2) = 18$ müň pul birlik girdeji gara çyzykdan çepräkde ýerleşdirilendir.

Optimal strategiýanyň shemasyny aşakdaky görnüşde göz öňüne getirmek mümkin:

$$f_7(4) \xrightarrow[\textit{çalyşma}]{\textit{birinji ýyl}} f_6(1) \xrightarrow[\textit{ýatda saklama}]{\textit{ikinji ýyl}} f_5(2) \xrightarrow[\textit{ýatda saklama}]{\textit{üçünji ýyl}}$$

$$f_4(3) \xrightarrow[\textit{çalyşma}]{\textit{dördünji ýyl}} f_3(1) \xrightarrow[\textit{ýatda saklama}]{\textit{bäşinji ýyl}} f_2(2) \xrightarrow[\textit{ýatda saklama}]{\textit{altynjy ýyl}}$$

$$f_1(3) \xrightarrow[\textit{ýatda saklama}]{\textit{ýedinji ýyl}}$$

Dinamiki programmirlemäniň köp ädimli meseleleriniň çözülişiniň aýratyn serişdesine period üçin däl-de, bütin meýilleşdirilen periodda maksimum peýdany üpjün edýän möhüm bir aýratynlykdygyna üns bereliň. Optimal strategiýadan daşlaşmagyň hem peýdaly däldigini görmek kyn däl. Şonuň ýaly, meselem, eger birinji we 3-nji ýylda meýilleşdirilen periodyň başynda ýaşy 4 ýyl bolan enjamy täzesi bilen çalyşmasaň, onda girdeji 17 müň pul birl. aşak düşer (netijäni barlalyň).

3. Maliýede optimal maýa goýumyň ulanylyşy. Önümçilik tejribeliginde we işewürligiň beýleki ýaýlasynda çig mallary we materiallary satyn almakda serişdeleri hojalyk kompleksiniň pudaklarynyň arasynda paýlamakda, enjamlary satyn almakda we ş.m. maliýe serişdelerini utgaşdyryp peýdalanmak meselesi ýüze çykýar.

Önümçiligi tehnika bilen üpjün etmek we modernizasiýasynda maýa goýum serişdeleriniň paýlanyş meselesine garalyň.

n kärhananyň önümçiliginiň tehniki we modernizasiýa – döwrebaplaşma maksatnamasyny durmuşa geçirmekde c mlrd.pul birligi göwrümde maýa goýum goýlan. Her bir kärhana boýunça hasaplamalar geçirildi we önümçiligiň öndürijiliginiň mümkin bolan ösüşiniň oňa goýlan maýa goýum serişdelerine baglylygy alyndy: $q_i(x_i) = \overline{1,n}$

Ähli kärhanalaryň öndürijiliginiň umumy ösüşi iň uly bolar ýaly bar bolan serişdeleri kärhanalaryň arasynda paýlamak zerurdyr.

Seredilýän meselede wagtlaýyn dinamikanyň faktory we tebigy ädimler ýa-da tapgyrlar ýokdur, şonuň üçin dinamiki programmirleme meselesiniň çözülişine umumy ýakynlaşmadan ugur alyp, n näbellili meseläni az sanly näbellili bölek meseleleriň hataryna böleliň. Serişdeleriň jeminiň bir (goý, birinji bolsun) kärhana goýlan ýagdaýyna garalyň, $n = 1$. Eger birinji kärhana serişdeleriň x birligi goýulsa, onda önüm öndürilişiniň ösüşi:

$$f_1(x) = q_i(x), \quad 0 \leq x \leq c.$$

Soňra serişdeleri iki kärhananyň arasynda paýlarys ($n = 2$). Eger serişdeleriň x birligini ikinji kärhana goýsak, onda ondaky öndürijiligiň ösüşi $q_2(x)$ bolar, galan $c - x$ birlik serişdeleri bolsa birinji kärhana goýarys. Birinji kärhanada öndürijiligiň ösüşi $f_1(c - x)$ bolar, umumy ösüş bolsa

$$q_2(x) + f_1(c - x)$$

deň bolar.

Birinji kärhana goýlan serişdeleriň göwrümi ikinji kärhana goýlan x serişdeleriň göwrümine baglydyr, mundanam önümçiligiň öndürijiliginiň ösüşiniň hem baglylygy gelip çykýar. Önümçiligiň öndürijiliginiň ösüşiniň ähli mümkin summar bahalarynda maksimumyny almak zerurdyr. Bu aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$f_2(c) = \max_{0 \leq x \leq c}(q_2(x) + f_1(c - x)). \tag{8}$$

Serişdeler üç, has takygy üçünji we birinji iki, kärhananyň arasynda paýlanylanda, $f_2(c)$ hasaplanylandan soň $f_3(c)$ hasaplamak mümkin:

$$f_3(c) = \max_{0 \leq x \leq c}(q_3(x) + f_3(c - x)).$$

n kärhanalaryň islendik sany üçin bolsa:

$$f_n(c) = \max_{0 \leq x \leq c}(q_n(x) + f_{n-1}(c - x)). \tag{9}$$

Paýlanylan serişdeleriň dürli bahalary üçin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ululyklar tapylandan soň, önümçiligiň öndürijiliginiň maksimum ösüşini üpjün edýän n-nji kärhana goýlan serişdeleriň $x_n^*(c)$ optimal göwrümini tapýarys. Onda galan n-1 kärhanalara c-$x_n^*(c)$ serişdeler goýulýar we f_{n-1} c-$x_n^*(c)$ bahadan ugur alyp, n-1 kärhanalara goýlan serişdeleriň $x_{n-1}^*(c)$ göwrümini tapýarys. Meňzeşlikde $x_2^*(c)$ we $x_1^*(c)$ alýarys.

3-nji mysal. Kärhanada öndürijiligiň summar ösüşi maksimum bolar ýaly, 200 mln. pul birligi maýa goýumy birleşmäniň dört kärhanasynyň arasynda paýlamak zerur. Kärhanalarda öndürijiligiň ösüşi $q_i(x)$, $i = \overline{1,4}$ goýlan x serişdeleriň göwrümine baglylykda 7-nji tablisada görkezilen.

7-nji tablisa

Serişdeler (c), pul birl.	**Önüm öndürijiligiň ösüşi, $q_i(x)$ müň pul birl.**			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
30	12	14	10	17
60	35	30	25	33
90	62	55	60	52
120	65	70	68	63
150	80	82	81	78

Çözülişi: (7) formula laýyklykda $n = 1$ bolanda $q_i(x)$-e deň bolan $f_1(c)$ bahalary taparys we olary 8-nji tablisada ýazarys.

8-nji tablisa

$x_1^*(c)$	$f_1(c)$
30	12
60	35
90	62
120	65
150	80

Iki kärhananyň arasynda serişdeleriň şertli-optimal paýlanyşyna gararys, onuň üçin (8) formulany ulanarys. Amatlyk üçin hasaplamalary 9-njy tablisa ýerleşdireris.

c	Ikinji önümçilik kärhanasynyň şertleriniň bölünişi (x_2)						$f_2(c)$	$x_2(c)$
	0	30	60	90	120	150		
30	0+12	14+0	–	–	–	–	14	30
60	0+35	14+12	30+0	–	–	–	35	0
90	0+62	14+35	30+12	55+0	–	–	62	0
120	0+65	14+62	30+35	55+12	70+0	–	76	30
150	0+80	14+65	30+62	55+35	70+12	82+0	92	60

Iki kärhananyň arasynda 60 mln.pul birliginde serişdeleriň paýlanyşynyň nähili hasaplanylýandygyny görkezeris. Paýlamanyň warianty üç: ikinji kärhana 0 mln.pul birligi; onda birinjä – 60 mln.pul birl., ikinjä – 30 mln.pul birl. we birinjä 30 mln.pul birl.; ikinjä – 60 mln. pul birl., onda birinjä – 0 mln.pul birl. 9-njy tablisanyň ikinji setirinde ikinji kärhana goýlan serişdeleriň degişli göwrümleriniň aşagynda, iki goşulyjydan durýan kärhanalaryň önüm öndürijiliginiň ösüşiniň jemi ýazylan: birinji goşulyjy – ikinji kärhananyň önüm öndürijiliginiň ösüşi 7-nji tablisadan alynýar, ikinji bolsa – birinji kärhananyňky 8-nji tablisadan alynýar. Soňra (8) formula boýunça maksimum ösüşi tapalyň:

$$f_2(60) = \max\,(0 + 35; 14 + 12; 30 + 0) = 35.$$

9-njy tablisanyň soňky iki sütüninden hem görnüşi ýaly, eger ikinji kärhana 0 mln.pul birligi, birinjä bolsa 60 mln.pul birligi goýlan bolsa, onda öndürijiligiň häzirki ösüşi üpjün edilýär ($f_2(c) = 35$; $x_2\,(c) = 0$).

9-njy tablisanyň galan ähli elementleriniň hasaplamasy şuňa meňzeşlikde geçirilen. Soňra $n = 3$ üçin serişdeleriň üçünji we ilkinji iki kärhanalaryň arasynda paýlanyşynyň şertli-optimal çözüwini hasaplarys we hasaplamalary 10-njy tablisada ýerleşdireris, bu ýerde, birinji goşulyjy başdaky 7-nji tablisadan, $f_2\,(c)$ deň bolan ikinji goşulyjy 9-njy tablisadan alynýar.

10-njy tablisa

c	Üçünji önümçilik kärhanasynyň şertleriniň bölünişi (x_3)						$f_3(c)$	$x_3(c)$
	0	30	60	90	120	150		
30	0 + 14	10 + 0	-	-	-	-	14	0
60	0 + 35	10 + 14	25 + 0	-	-	-	35	0
90	0 + 62	10 + 35	25 + 14	60 + 0	-	-	62	0
120	0 + 76	10 + 62	25 + 35	60 + 14	68 + 0	-	76	0
150	0 + 92	10 + 76	25 + 62	60 + 35	68 + 14	81 + 0	95	90

11-nji tablisada dördünji we birinji üç kärhanalaryň arasynda serişdeleriň paýlanyşynyň hasaplamalary getirilen.

11-nji tablisa

c	Dördünji önümçilik kärhanasynyň şertleriniň bölünişi (x_4)						$f_4(c)$	$x_4(c)$
	0	30	60	90	120	150		
30	0 + 14	17 + 0	-	-	-	-	17	30
60	0 + 35	17 + 14	33 + 0	-	-	-	35	0
90	0 + 62	17 + 35	33 + 14	52 + 0	-	-	62	0
120	0 + 76	17 + 62	33 + 35	52 + 14	63 + 0	-	79	30
150	0 + 95	17 + 76	33 + 62	52 + 35	63 + 14	78 + 0	95	$\left\{\begin{matrix}0\\60\end{matrix}\right.$

11-nji tablisanyň soňky setirinde optimal çözüw ýazylan. Önümçiligiň öndürijiliginiň maksimum ösüşi $f_4^*(150) = 95$. Bu ösüş, eger dördünji kärhana 0 mln.pul birl. goýulsa, 150 mln.pul birl. bolsa, birinji üç kärhanalaryň arasynda paýlanylsa ýa-da dördünji 60 mln.pul birl. goýulsa, 90 mln.pul birl. galan üç kärhanalaryň arasynda optimal paýlanylan bolsa gazanylýar.

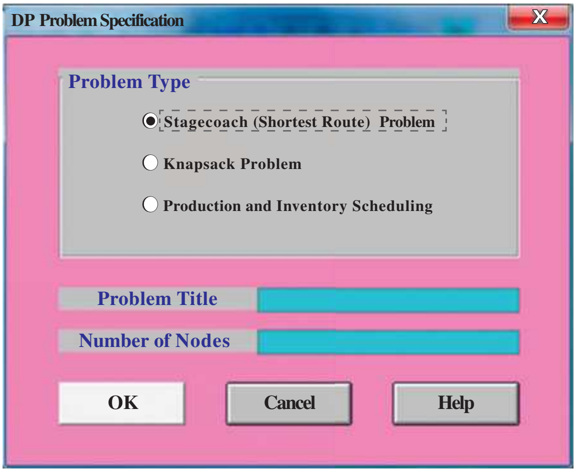
x_4^* (150) = 0 bolanda, serişdeleriň paýlanyşynyň wariantyna garalyň. Bu ýagdaýda, ýokarda bellenişi ýaly, ähli 150 mln.pul birl. üç kärhananyň arasynda paýlanylýar we 10-njy tablisadan alarys: f_3^* (150) = 95 we x_3^*(150) = 90, şeýle hem optimal çözüwe laýyklykda üçinji kärhana 90 mln.pul birl. goýulýar. Onda birinji ikisi üçin 60 mln. pul birligi galdy. 9-njy tablisadan görnüşi ýaly f_2^* (60) = 35 mln.pul birligi we x_2^* (60)=0 bolar. Bu ýerden, birinji kärhana 60 mln. pul birligi goýulýar, şeýle hem x_1^* (60) we f_1^*(60) = 35-e deň.

Dinamiki programmirleme meselelerini çözmek bilen biz köp pudaklaryň işlerini ýeňilleşdirýäris. Meselem, zawod-fabriklerde öndürilýän önümlerde az çykdajy bilen köp girdeji almaklygy şu programmirlemäniň üsti bilen gazanyp bileris.

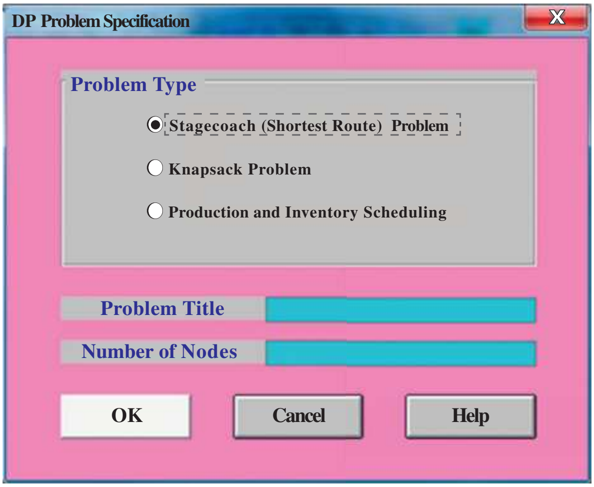
§4. Dinamiki optimallaşdyrma meseleleriniň innowasion tehnologiýalaryň kömegi bilen çözülişi

Şu ýerde öň bar bolan kompýuter programmalarynyň biri *QSB* programmasynyň üsti bilen dinamiki programmirleme meselesine gelýän iň gysga ýoly saýlap almak meselesiniň çözülişine seredeliň. Onuň üçin ilki bilen programmany açýarys. Programmanyň penjiresi açylandan soňra esasy menýudan ***«File → New Problem»*** düwmelerine basyp, täze mesele penjirämizi açýarys.

Täze meselämiziň penjiresi aşakdaky görnüşde bolar:

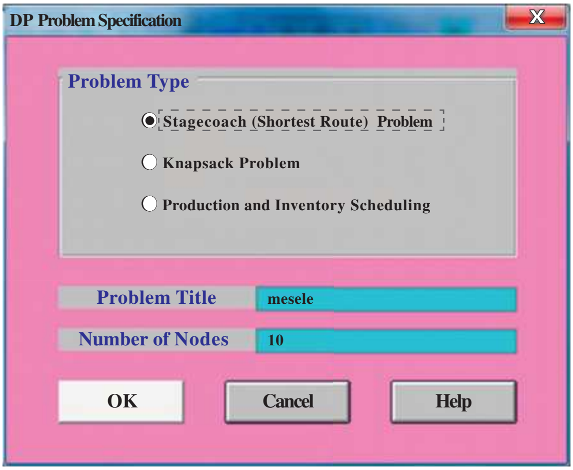


1) ***Problem Type*** diýlen ýerden meseläniň görnüşini saýlamaly. Bellik: Iň gysga ýol meselesini çözmek üçin *Stagecoach* (*Shortest Route*) *Problem-i* saýlamaly. Saýlanymyzdan soň penjirämiz aşakdaky görnüşe geler;



2) ***Problem title*** diýlen ýere meseläniň adyny girizmeli;

3) ***Number of Nodes*** diýlen ýere nokatlaryň (şäherleriň) sanyny girizmeli;



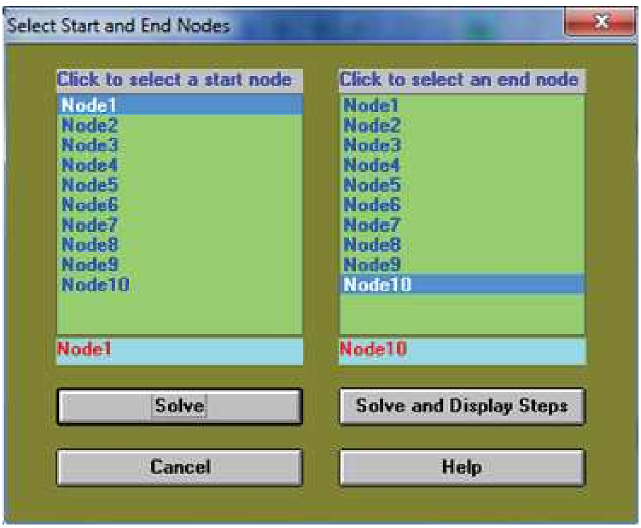
4) Berlenleri girizenimizden soňra penjiräniň ***OK*** düwmesine basmaly. Ondan soň aşakdaky penjire peýda bolar;

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7	Node8	Node9	Node10
Node 1										
Node 2										
Node 3										
Node 4										
Node 5										
Node 6										
Node 7										
Node 8										
Node 9										
Node 10										

5) Bu penjirä nokatlaryň (şäherleriň) arasyndaky uzaklyklary girizmeli. Eger 2 nokadyň (şäheriň) arasynda ýol bolsa, onda şol öýjüge max (uly san) girizmeli. Girizenimizden soň penjirämiz aşakdaky görnüşe geler;

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7	Node8	Node9	Node10
Node 1	1000	4	11	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Node 2	1000	1000	1000	1000	3	4	1000	1000	1000	1000
Node 3	1000	1000	1000	1000	6	1	1000	1000	1000	1000
Node 4	1000	1000	1000	1000	6	4	4	1000	1000	1000
Node 5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	9	8	1000
Node 6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	5	1000
Node 7	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	7	12	1000
Node 8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	5
Node 9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	3
Node 10	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

6) Şeýlelik bilen meselämizi girizdik. Meselämiziň netijesini almak üçin esasy menýudaky ***Solve and Analyze*** düwmesine basmaly. Şondan soň meselämizde aşakdaky penjire peýda bolar;



7) Meselämiziň şertine laýyklykda, haýsy nokatlaryň (şäherleriň) arasyndaky gysga ýoly tapmalydygyny görkezmeli. Mysal üçin, ýokardaky şekilde 1-nji nokat (şäher) bilen 10-njy nokady (şäher) saýladyk. Ýagny ol, 1-nji nokat (şäher) bilen 10-njy nokadyň (şäheriň) arasyndaky iň gysga ýoly tapmak isleýändigimizi aňladýar;

8) Ondan soňra meselämizi çözmek üçin penjiredäki Solve düwmesine basmaly;

9) Soňra meselämiziň çözülişi aşakdaky ýaly bolar:

05-08-2011 Stage	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Diastance to Node10
1	Node1	Node2	4	4	16
2	Node2	Node6	4	8	12
3	Node6	Node9	5	15	8
4	Node9	Node10	3	16	3
	From Node1	To Node10	Min. Distance	= 16	CPU = 0

10) Meseläniň çözüwi ýokardaky görkezilen baha deňdir;

11) Meseläniň netijesini alanyňyzdan soňra programmany ýapyp bilersiňiz.

II BÖLÜM
ÇYZYKLY DÄL PROGRAMMIRLEMÄNIŇ KÄBIR MESELELERI

IV bap
Matematiki programmirlemäniň käbir meseleleri

§1. Bitinsanly çyzykly programmirleme meselesi

1. Bitinsanly meselä gelýän amaly meseleler

Birnäçe optimallaşdyrma amaly meseleler çözülende ululyklaryň bitin sanlar bilen aňladylmagy gerek bolýar (maşynlaryň sany, agregatlaryň sany, mallaryň baş sany we ş.m.). Şeýle meseleler bitinsanly optimallaşdyrma meselesine degişlidir. Olar çyzykly we çyzykly däl bolup biler.

Bu ýerde maksat funksiýa we çäklendirme çyzykly bolanda bitinsanly çyzykly optimallaşdyrma meselesine seretmek bilen çäkleneliň. Bitinsanly optimallaşdyrma meselesiniň matematiki modeli edil çyzykly optimallaşdyrma meselesi ýalydyr, ýöne näbellileriň käbiri ýa-da hemmesi bitin san bolmalydygy goşmaça talaby kanagatlandyrmaly. Eger-de bitin sanlylygyň talaby meseläniň bölek näbelli ululyklaryna ýaýradylan bolsa, onda beýle mesele bölekleýin bitinsanly diýlip atlandyrylýar.

Bitinsanly optimallaşdyrma meselesiniň matematiki modelini ýazalyň:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Funksiýanyň ekstremal (maksimum we minimum nokady) bahasyny tapmaly, aşakdaky çäklendirmelerde:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \{\leq, =, \geq\} b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}.$$

1-nji mesele. Ýük göterijiligi P we sygdyryjylygy V m_3 bolan gämi n dürli bölünmeýän serişdeler bilen doldurylýar. Her bir serişdäniň agramy p_j, bahasy c_j we göwrümi $V_j (j = \overline{1,n})$ bilen häsiýetlendirilýär. Jemleýji baha maksimal bolar ýaly we ýük göterijiliginiň hem sygdyryjylygynyň çäkleri ýerine ýeter ýaly edip gämini şeýle görnüşde doldurmaly.

Meseläniň näbelli parametrlerini x_j bilen belgiläliň, bu ýagdaýda

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{eger gämä } j\text{-nji ýük ýüklenýän bolsa,} \\ 0, & \text{ýük ýüklenmeýän ýagdaýda.} \end{cases}$$

Belgilemäni göz öňünde tutsak:

$$x_j = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq P,$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V.$$

Çäklendirmelerde meseläniň matematiki modeli şeýle görnüşi alar:

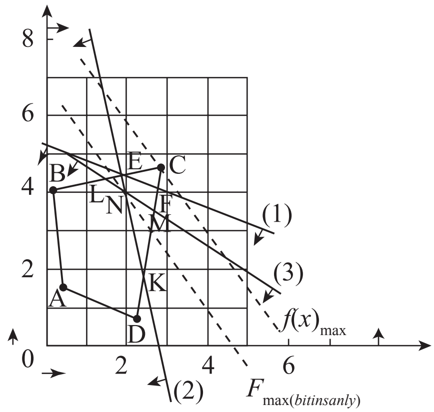
$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max.$$

2. Bitinsanly çyzykly optimallaşdyrma meselesiniň Gomoriniň usuly bilen çözülişi

Gomoriniň usuly simpleks usulynyň we kesme usulynyň ulanylmagyndan alnan. Onuň manysy örän ýönekeýdir we aşakdakydan ybaratdyr.

Ilki başda simpleks usuly bilen bitinsanly çyzykly optimallaşdyrma meselesiniň optimal çözüwi tapylýar. Eger alnan çözüw bitinsanly bolsa, onda maksada ýetdigimizdir. Eger-de optimal çözüw bitinsanly bolmasa, onda meseläniň şertine goşmaça çäklendirme girizilýär. Soňra simpleks usuly bilen giňeldilen mesele çözülýär, ýagny onuň daýanç we optimal çözüwleri tapylýar. Eger täze çözüw bitinsanly bolmasa, onda oňa ýene-de bir goşmaça çäklendirme girizilýär. Goşmaça çäklendirmeleri girizmek we meseläni simpleks usuly bilen çözmek prosesi tä bitinsanly optimal çözüw tapylýança ýa-da onuň ýokdugyna göz ýetirilýänçä dowam eder.

1-nji suratda. Gomoriniň usulynyň geometriki şekillendirilişiniň penjiresi görkezilen. Çyzgydan görnüşi ýaly, *ABCD* dörtburçlukda funksiýanyň maksimum baha C nokatda ýetýär, ol bolsa bitinsanly däl.



1-nji surat. *Gomoriniň usulynyň geometrik şekillendirilişi*

Birinji goşmaça çäklendirme gurulandan soň 1-nji suratdaky göni çyzyk *E* we *F* nokadyň üstünden geçip, *ABEFD* köpburçlukda täze mümkin çözüwler ýaýlasynda funksiýa özüniň maksimal bahasyna bitinsanly däl F nokatda ýetýär. Çäklendirmeler ulgamyna ikinji goşmaça çäklendirmäni girizsek, göni *E* we *K* nokatlardan geçýär, funksiýa *ABEKD* köpburçlugyň bitinsanly däl *E* nokadynda maksimum nokada ýetýär, çäklendirmeler ulgamyna üçünji goşmaça çäklendirme girizilenden soň bolsa göni *L* we *M* nokatlardan geçýär, funksiýanyň maksimum nokady *ABLNKD* köpburçlugyň bitinsanly *N*(2;4) koordinataly nokadynda tapylýar.

Goşmaça çäklendirmeleriň diňe bitinsanly däl nokatlary kesendigini we ýekeje-de bitinsanly nokady kesmändigini görmek kyn däldir.

Dogry goşmaça çäklendirmäň nähili gurulýandygyny görkezeliň.

Eger goşmaça çäklendirme çyzykly bolup, optimal bitinsanly däl nokady mümkin çözüwler ýaýlasyndan kesip aýyrsak we mümkin çözüwler ýaýlasynyň içinde ýekeje-de bitinsanly nokady kesmeýän bolsa, onda ol dogry goşmaça çäklendirme bolar.

Goý, aşakdaky çäklendirmelerde:

$$z = p_1x_1 + p_2x_0 + ... + p_nx_n, \tag{1}$$

funksionalyň maksimumyny tapmak gerek bolsun:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \le a_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + aix_n \le a_i, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \le a_m, \end{cases} \tag{2}$$

Üýtgeýänleriň otrisatel dällik şerti bolup hem biler, bolmanam biler, ýöne olar hökman bitin sanlar bilen aňladylmaly.

Eger (2) ulgamyň a_{ij} we a_i koeffisiýentleriniň arasynda drob sanlar bar bolsa, onda her bir deňsizligi umumy maýdalawja getirýäris we deňsizlige bu maýdalawja köpeldýäris. Şonuň üçin, umumylygy ýitirmän (2) ulgamyň hemme koeffisiýentleri bitinsanlar diýip güman etmek bolar.

(2) çäklendirmeler ulgamyny aşakdaky görnüşe getireliň:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + ... + a_{1j}(-x_j) + ... + a_{1n}(-x_n) + a_1 \ge 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_i = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + ... + a_{ij}(-x_j) + ... + a_{in}(-x_n) + a_i \ge 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_m = a_{m1}(-x_1)\ a_{m2}(-x_2) + ... + a_{mj}(-x_j + ...a_{mn}(-x_n) + a_m \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

(3) ulgamda koeffisiýentleriň we üýtgeýänleriň hemmesi bitin sanlar bolany üçin, y_i üýtgeýäniň bahasy hem bitin san bolar. Şeýle görnüşde meseleden aýrylýandygyna ýa-da aýrylmaýandygyna garamazdan x_j üýtgeýäniň bitin sanlylygy y_i üýtgeýäniň bitin sanlylygyna täsir edýär. Amatlylyk üçin ýönekeýleşdirilen mesele bitinsanly programmirleme meselesi bolmagynda galýar.

Goý, x_j üýtgeýäne otrisatel dällik şerti goýlan bolsun, onda olary meseleden aýyrmak hökman däl. Şunlukda, l-nji x we y üýtgeýänler orunlaryny çalyşýarlar, ýagny tablisanyň ýokarsynda we çep esasy sütüninde üýtgeýänleriň ikisi hem bolar.

5-nji tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_l$	$-x_{l+1}$	...	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1l}	$b_{1,l+1}$	...	b_{1n}	b_1
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2l}	$b_{2,l+1}$	...	b_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_l =$	b_{l1}	b_{l2}	...	b_{1l}	$b_{1,l+1}$	...	b_{ln}	b_l
$y_{l+1} =$	$b_{l+1,l}$	$b_{l+1,2}$	...	$b_{l+1,l}$	$b_{l+1,\, l+1}$	...	$b_{l+1,n}$	b_{l+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{ml}	$b_{m,\, l+1}$	...	b_{mn}	b_m
$z =$	q_1	q_2	...	q_l	q_{l+1}	...	q_n	Q

Optimallaşdyrmanyň şertine görä hemme $b_1, \ldots, b_m$ azat agzalar we $q_1, \ldots, q_n$ koeffisiýentler otrisatel däldirler.

Eger alnan tablisada azat agzalaryň hemmesi bitin sanly bolsa, onda meseläniň çözüldigidir. Eger olaryň arasynda bolmanda biri drob sanly bolsa, onda çözüwi dowam etmeli.

Geljekde amatlylyk üçin tablisanyň çep esasy sütünindäki üýtgeýänleriň hemmesini $\eta_i (i = 1, 2, ..., m)$ bilen, hemme ýokarky üýtgeýänleri bolsa $(-\xi_j)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ bilen belgiläliň. Şunlukda, (5-nji tablisa) tablisa başga görnüşi alar (*6-njy tablisa*).

Goý, b_i azat agza drob san bolsun. Edil şol i-nji setirde b_{ij} koeffisiýentleriň arasynda bitin we drob sanlaryň bolmagy mümkin. n bilen berlen koeffisiýentden uly bolmadyk iň uly bitin sany belläliň. Mysal üçin, eger $b_i = 1.7$ bolsa, onda $n_i = 1$; eger $b_{il} = -1.4$ bolsa, onda $n_{i1} = -2$; eger $b_{i2} = 3$ bolsa, onda $n_{i2} = 3$ we ş.m.

6-njy tablisa

	$-\xi_1$	...	$-\xi_j$	...	$-\xi_n$	1
$\eta_1 =$	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\eta_i =$	b_{il}	...	b_{ij}	...	b_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\eta_m =$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}	b_m
$z =$	q_1	...	q_j	...	q_n	Q

6-njy tablisada i-nji setiriň her bir koeffisiýentinden onuň bitin bölegini aýralyň. Tapawudy β bilen belgiläp ýazyp bileris.

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{ij} = b_{ij} - n_{ij}(j = 1, 2, .., n), \\ &\beta_i = b_i - n_i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Eger b_{ij} koeffisiýent bitin san bolsa, onda $b_{ij} = n_{ij}$ we β_{ij} tapawut nola deň. Eger b_{ij} drob san bolsa, onda β_{ij} tapawut dogry drob bolar. n_{ij} položitel, edil şonuň ýaly otrisatel koeffisiýentler üçin hem mydama b_{ij}-den kiçi, şonuň üçin $\beta_{ij} - n_{ij}$ tapawut položitel. Bu netijeleri birikdirip alsak, β_{ij} tapawut dogry drob ýa-da nol bolar. b_i bitin san bolmagy üçin β_i tapawut nol bolup bilmez:

$$\left.\begin{aligned} &0 \le \beta_{ij} < 1, \\ &0 < \beta_i < 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(5) şertdäki (4) formula bilen kesgitlenýän β_{ij} ululyga b sanyň drob doldurgyjy diýilýär. 6-njy tablisadan η_i üçin aňlatmany ýazalyň:

$$\eta_i = b_{i1}(-\xi_1) + ...b_{ij}(-\xi_j) + ... + b_{in}(-\xi_n) + b_i.$$

Bu ýerde b_{ij} *we* b_i-iň ýerine olaryň bitin we drob bölekleri bilen aňladylýan (4) formuladaky aňlatmasyny goýup alarys:

$$\eta_i = (n_{i1} + \beta_{i1})(-\xi_i) + ... + (n_{ij} + \beta_{ij})(-\xi_j) + ... +$$
$$+ (n_{in} + \beta_{in})(-\xi_n) + (n_i + \beta_i) = n_{i1}(-\xi_1) + \xi_{i1}(-\xi_2) + ... +$$
$$+ n_{ij}(-\xi_j) + ... + n_{in}(-\xi_n) + n_i + \beta_{i1}(-\xi_1) + \beta_{i2}(-\xi_2) + ... +$$
$$+ \beta_{ij}(-\xi_j) + ... + \beta_{in}(-\xi_n) + \beta_i$$

ýa-da

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) + \beta_i. \tag{6}$$

(6) deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$-\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i.$$

Täze deňsizligiň bir bölegini s_i bilen belgiläliň:

$$s_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i. \tag{7}$$

Ýokardaky goýlan şertlerde s_i ululygyň özüni nähili alyp barýandygyny anyklalyň.

Eger ξ_j we η_i-bitin sanlar bolsa, onda (7) aňlatmanyň sag tarapynda $(-n_{ij}\ \xi_j)$ bitin sanlaryň köpeltmek hasylyny alarys. Bu köpeltmek hasyllaryň jemi bitin san bolýar, muňa ýene iki sany n_i we η_i bitin sanlar algebraik goşulýar, netijede bitin san alynýar. Şeýlelikde, s_i ululyk bitinsanly bolar.

$\xi_j \geq 0$ we $\eta_j \geq 0$ bolany üçin (7) aňlatmada otrisatel däl β_{ij} sanlar bilen otrisatel $(-\xi_j)$ sanlaryň köpeltmek hasylyny alýarys. Şeýle köpeltmek hasylyň otrisatel jemi položitel san ýa-da nol bolar. Islendik sana položitel san goşulanda netije öňküsinden ulalýar (bu ýerde $(-\beta_{ij})$):

$$-\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(-\xi_j)-\beta_i \geq -\beta_i,$$

bu ýerden

$$s_i \geq -\beta_i.$$

(5)-e görä β_i ululyk hakyky položitel drobdur. San okunda $(-\beta_i)$ nokat (-1) we 0 nokatlaryň arasynda ýatýar. Gözlenýän s_i ululyk $(-\beta_i)$--den uly we şol bir wagtda ol bitinsanly. Ýöne $(-\beta_i)$-den uly iň kiçi bitin san nol bar. Degişlilikde, s_i 0, 1, 2, 3 we ş.m. bahalary alyp bilýär. Ahyrky netijede islendik bitinsan otrisatel däl ξ_i we η_i-de s_i ululyk bitin san otrisatel däl bahalary kabul eder.

(7) deňsizligiň (1) deňligine görä meselä goşmaça çäklendirmeleri girizeliň:

$$s_i = -\beta_{il}(-\xi_1) - \ldots - \beta_{ij}(-\xi_j) - \ldots -\beta_{in}(-\xi_n) -\beta_i \geq 0. \tag{8}$$

Bu şertde koeffisiýent bolup, *i*-nji setirdäki koeffisiýentleriň otrisatel alamaty bilen alnan drob bölegi hyzmat edýär. Giňeldilen meseläni 7-nji tablisada ýazalyň.

7-nji tablisa

	$-\xi_1$	...	$-\xi_j$	...	ξ_n	1
$\eta_1 =$	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\eta_i =$	b_{il}	...	b_{ij}	...	b_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\eta_m =$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}	b_m
$s_i =$	$-\beta_{i1}$	...	$-\beta_{ij}$	...	$-\beta_{in}$	$-\beta_i$
$z =$	q_1	...	q_j	...	q_n	Q

Şol bir wagtda öň tapylan $\xi_1 = ... = \xi_j = ... = \xi_n = 0$ optimal meýilnama giňeldilen mesele üçin ýolbererlikli däldir, şonuň üçin bu ýagdaýda

$$s_i = -\beta_i < 0.$$

Gomoriniň usulynyň geometriki şekillendirilişi bitinsanly gözenek çyzylan (*1-nji surat*) suratda görkezilendir. Suratdan görnüşi ýaly, funksiýa özüniň maksimal bahasyna *ABCD* dörtburçlugyň bitinsanly däl *C* nokadynda ýetýär.

Gomoriniň usulynyň ulanylyşyny 2-meseläniň çözülişinde seredeliň.

Şeýle görnüşde ilki bilen giňeldilen meseläniň daýanç çözüwini, soňra bolsa optimal çözüwini tapmak gerek bolýar.

2-nji mesele. Önüm öndürýän kärhananyň bir böleginde hökman 3 görnüşli enjamlary gurnamaly. Enjamlaryň birinjisiniň bahasy 2 milliard manat, ikinjisiniň bahasy 3 milliard manat we üçünjisiniň bahasy 1 milliard manat. Enjamlary satyn almak üçin kärhana 20 milliard manat möçberinde pul serişdesini goýberýär. Enjamlary ýerleşdirmek üçin kärhananyň önüm öndürýän bölegininiň meýdany 40 m^2-e deň. Bir çalşykda enjamlaryň her görnüşiniň öndürijiligi 2, 4 we 3 önüm birligine deň.

Eger geçelge göz öňüne tutulanda, birinji enjamy gurnamak üçin 9 m^2, ikinji üçin 7 m^2, üçünji üçin 10 m^2 meýdan gerekdigi belli bolsa, onda önümçilik bölüminde maksimal öndürijiligi almak üçin her görnüşden näçe enjamyň gerekdigini kesgitlemeli.

Çözülişi. Her görnüşli enjamyň satyn alynmaly mukdaryny x_1, x_2 we x_3 bilen belgiläliň. Şonda meseläniň matematiki modeli aşakdaky ýaly ýazylar:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20; \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \leq 40, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \text{ } we \text{ } bitin \text{ } (j = \overline{1,3}).$$

Ülüşli bahaly azat agzalaryň setirinde beýleki hemme elementler bitin bolany üçin çyzykly optimallaşdyrma meselesiniň bitinsanly çözüwi ýokdur. Bu setirde gurlan goşmaça çäklendirmede ülüşli sanlar diňe azat agzalaryň sütüninde bolýar, galan ülüşli bölekler bolsa nola deň bolar.

1-nji tablisa

	$-x_2$	$\downarrow$ $-x_1$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	2	3	1	20	20/3
$\rightarrow y_2 =$	9	7	10	40	40/7
Z =	– 2	– 4	– 3	0	

2-nji tablisada optimal, ýöne bitinsanly däl çözüw görkezilendir.

2-nji tablisa

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	13/7	–3/7	–23/7	20/7
$x_2 =$	9/7	1/7	10/7	40/7
Z =	22/7	4/7	19/7	160/7

3-nji tablisadaky Z_1 goşmaça çäklendirme ikinji setiriň elementleri arkaly formulirlenen:

$$Z_1\left(-\frac{2}{7}\right) - (-x_1) + \left(-\frac{1}{7}\right)(-y_2) + \left(-\frac{3}{7}\right)(-x_3) - \frac{5}{7}$$

bu ýerde:

$$a_{21} = \frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7},\ a_{22} = \frac{1}{7} - 0 = \frac{1}{7},\ a_{23} = \frac{10}{3} - 1 = \frac{3}{7},$$

$$a_{24} = \frac{40}{7} - 5 = 5/7.$$

3-nji tablisa

	$-x_1$	$\downarrow$ $-y_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	– 13/7	– 3/7	– 23/7	20/7	–
$x_2 =$	9/7	1/7	10/7	40/7	40
$\to Z_1 =$	– 2/7	– 1/7	– 3/7	– 5/7	5
$Z =$	22/7	4/7	19/7	160/7	

Hemme ülüşli bölekler goşmaça setirde otrisatel alamaty bilen ýazylan. 4-nji tablisada optimal bitinsanly çözüw alnan.

4-nji tablisa

	$-x_1$	$-z_1$	$-x_3$	1
$y_1 =$	– 6/7	– 3	17/7	5
$x_2 =$	7	– 1	7	5
y_2	2	– 7	3	5
Z =	2	4	1	20

3-nji mysal. Meseläniň bitinsanly çözüwini tapmaly.

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3.$$

Berlen funksionalyň maksimumyny tapmaly, eger çäklendirmeler ulgamy aşakdaky görnüşde berlen bolsa

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 5x_1 - x_3 \geq 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4. \end{cases}$$

Bu çäklendirmeler ulgamyny amatly görnüşe getireliň:

$$y_1 = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4 \geq 0,$$

$$y_2 = -5x_1 + x_3 + 12 \geq 0,$$

$$y_3 = -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4 \geq 0,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Bu meseläni tablisa görnüşinde ýazalyň.

8-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	3	-2	4
$y_2 =$	5	0	-1	12
$y_3 =$	$\boxed{2}$	-1	3	4
z =	-2	-1	3	0

Meseläni çözmek üçin, çözüji elementi (2-ni) saýlap alalyň we näbellileri ýok etmek üçin modelleşdirilen Žordan usuly bilen ädim ädip, 9-njy tablisany alýarys.

9-njy tablisa

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{7}{2}}$	$-\frac{7}{2}$	2
$y_2 =$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{2}$	2
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
z =	1	-2	6	4

Indi, 7/2 sana çözüji element hökmünde seredip, 2-nji ädimi ädip, 10-njy tablisany alarys.

10-njy tablisa

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	-1	$\frac{4}{7}$
$y_2 =$	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{5}{7}$	-6	$\frac{12}{7}$
$x_1 =$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	4
$z =$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	4	$\frac{36}{7}$

Alnan çözüw optimal, ýöne bitinsanly däl:

$$x_1 = \frac{16}{7};\ x_2 = \frac{4}{7};\ x_3 = 0.$$

Şonuň üçin bitinsanly meýilnamany gözlemeli bolýar. Ol ýönekeý we ikeldilen usullar diýen iki ýol bilen gözlenilýär. Erkin agzalaryň arasyndan ülüşli agzany saýlap alýarys. Sebäbi, biziň seredýän meselämizde olaryň hemmesi ülüşli. Şonuň üçin biz olaryň islendigini saýlap alyp bilýäris. Meselem, 1-nji setirden $\frac{4}{7}$ saýlaýarys, 4-nji formula boýunça β koeffisiýentiň 1-nji b setirinden ülüşli bölegini tapalyň:

$$\beta_{11} = -\frac{1}{7} - (-1) = \frac{6}{7},$$

$$\beta_{12} = \frac{2}{7} - 0 = \frac{2}{7},$$

$$\beta_{13} = -1 - (-1) = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{4}{7} - 0 = \frac{4}{7}.$$

Goşmaça çäklendirme aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$s_1 = -\frac{6}{7}(-y_2) - \frac{2}{7}(-y_1) - 0(-x_3) - \frac{4}{7} \geq 0.$$

Çäklendirmäni mysala geçirip, 11-nji tablisany alýarys.

11-nji tablisa

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	-1	$\frac{4}{7}$
$y_2 =$	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{5}{7}$	-6	$\frac{4}{7}$
$x_1 =$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	-1	$\frac{16}{7}$
$s_1 =$	$-\frac{6}{7}$	$\boxed{-\frac{2}{7}}$	0	$-\frac{4}{7}$
$z =$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	4	$\frac{36}{7}$

Tablisada getirilen meýilnamany peýdalanyp bolmaýar. Çözüji elementi (-2/7) kabul edýäris, näbellileri ýok etmek üçin modelleşdirilen Žordan usulyny peýdalanmak arkaly bir ädim ädip, 12-nji tablisa alynýar.

12-nji tablisa

	$-y_3$	$-s_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	-1	1	-1	0
$y_2 =$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1 =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_1 =$	$\boxed{3}$	$-\frac{7}{2}$	0	2
$z =$	-1	2	4	4

Meseläniň tapylan çözüwi bitinsanly, ýöne ol optimal görnüşde däl. Şonuň üçin çözüji elementi saýlap (3 san), indiki ädim ädilýär (*13-nji tablisa*).

13-nji tablisa

	$-y_1$	$-s_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-1	$\frac{2}{3}$
$y_2 =$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1 =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_3 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
$z =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	4	$\frac{14}{3}$

Seredilýän mesele optimal görnüşe getirilen, ýöne onuň bitin sanlylygy bozuldy. Ülüşli $\frac{2}{3}$ azat agzany saýlap alyp, täzeden 1-nji setiriň koeffisiýentlerinden ýokardaky ýaly şol bir meňzeşlikde şekillendireliň. Hakykatdan, tejribelikde ol tablisa görnüşde düzülýär, sebäbi koeffisiýentleriň ülüşli bölegi ýatdan aňsat hasaplanylýar. Olary aýyrmak (–) alamaty bilen alarys (*14--nji tablisa*).

14-nji tablisa

	$-y_1$	$-s_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-1	$\frac{2}{3}$
$y_2 =$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1 =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_3 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
s_2	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{5}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$
z =	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	4	$\frac{14}{3}$

Tablisalaryň ýazylmagy üçin, gowusy olaryň her bir setirinde goşmaça ýer goýmaly. Eger şol goşmaçada çäklendirme gerek bolmasa, onda şol setir doldurylman galýar. Şol şert gerek bolsa, onda biz şol setire dolduryarys we çözüwi dowam ederis. 14-nji tablisada ýazylan meýilnamany ýene-de peýdalanyp bolmaýar. Çözüji ($-\frac{1}{3}$) elementi saýlaýarys we ýene-de bir ädim ädýäris (*15-nji tablisa*).

15-nji tablisa

	$-s_2$	$-s_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	1	$\frac{-1}{5}$	-1	0
$y_2 =$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1 =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_3 =$	1	-2	0	0
$y_1 =$	-3	$\frac{5}{2}$	0	2
$z =$	2	0	4	4

15-nji tablisada alnan meýilnama optimal we bitinsanly, diýmek, 14-nji tablisa üçin optimal çözüw tapyldy:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ z_{max} = 4.$$

Ýokarda belleýşimiz ýaly, şeýle meýilnama bizde ýokarda 13-nji tablisada getirildi, ýöne ol optimal bolmady. Bu bolsa köpburçlukda ýeke-de bir $(2; \frac{2}{3}; 0)$ depe bar bolup, maksat funksiýanyň uly bahasynyň bolmagyna getirdi, ýöne onuň bir koordinatasynyň ülüşliligi bilen tapawutlandy. 2-nji çäklendirme bilen bu nokat *Gomoriniň* kesme usulynyň esasynda koordinatalary (2; 0; 0) bitinsanly bolup optimal, çözüwe eýe boldy. Indi bolsa bitinsanly optimal çözüwi tapmak üçin ikeldilen simpleks usuly ulanalyň. Tapawut 12-nji tablisadan başlanýar. Bu tablisada çözüji setir diýip ýene-de 4-nji setiri alýarys, ýöne onda çözüji element ikeldilen modelleşdirilen gatnaşyk bilen kesgitlenýär. Olar deňdir:

$$\frac{5}{7}:\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{5}{6}; \qquad \frac{4}{7}:\left(-\frac{2}{7}\right) = -\,2.$$

Moduly boýunça iň kiçi 1-nji element, ýagny çözüji elemet diýip $\left(-\frac{6}{7}\right)$ alýarys. Soňra bir ädim modelleşdirilen näbellileri ýok etmek esasynda 11-nji tablisadan 16-njy tablisa gelýäris.

16-njy tablisa

	$-s_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	-1	0
$y_2 =$	$-\frac{5}{2}$	0	-6	2
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	0	1	2
$y_3 =$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$s_2 =$	$-\frac{5}{6}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	2
$z =$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{14}{3}$

16-njy we 13-nji tablisa toždestwolaýyn deň bolup, ol 11-nji tablisadan iki ädim soň alnandyr. Görşümiz ýaly, bitinsanly meýilnama tapylmady, şonuň üçin 1-nji setir boýunça goşmaça şerti düzüp, ony 16-njy tablisanyň s_2 setirine ýazýarys. Bu setir üçin ikileýin modelleşdirilen gatnaşygy hasaplap alýarys:

$$\frac{5}{6}:\left(-\frac{5}{6}\right)=-2;\ \frac{1}{3}:\left(-\frac{1}{3}\right)=-1,$$

olar özaralarynda deň, ýöne uly bolmadyk tapawutlylygy kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Ýagny 2-nji sütün diýip kabul edilýär. Ýene-de bir ädim ädip, 17-nji tablisany alýarys (ol 15-nji tablisa toždestwalaýyn deň). Onda bitinsanly meýilnama optimal. Görşümiz ýaly ikeldilen simpleks usul 3 ädim bilen däl-de, 2 ädim bilen alnan.

17-nji tablisa

	$-s_1$	$-s_2$	$-x_3$	1
$x_2 =$	-1	1	-1	0
$y_2 =$	$-\frac{5}{2}$	0	-6	2

$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	0	1	2
$y_3 =$	-2	1	0	0
$y_1 =$	$\frac{5}{2}$	-3	0	2
$z =$	0	1	4	4

3. Bitinsanly çyzykly optimallaşdyrma meselesiniň şahalanma we araçäk usuly bilen çözülişi

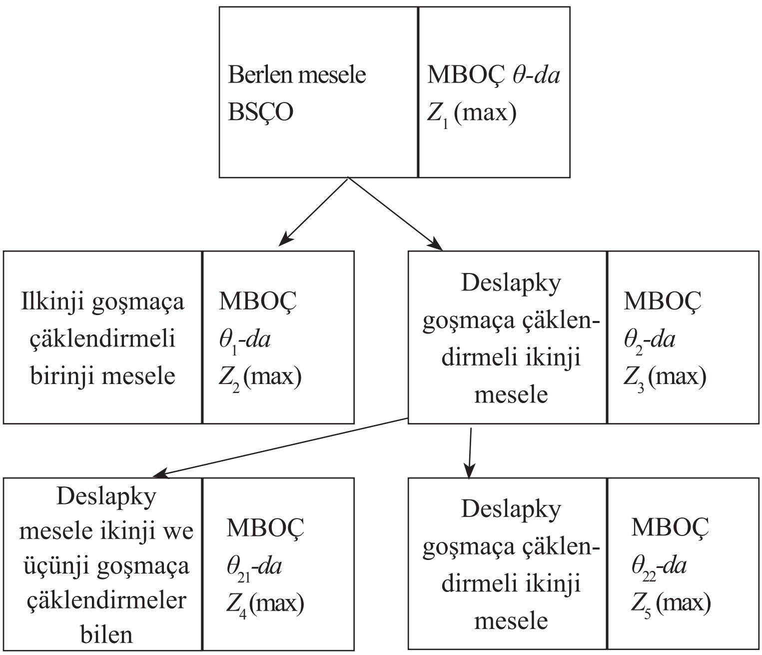
Usulyň gurluşy we onuň tehnologiýasynyň ulanylyşy şundan ybarat, ýagny ilki mümkin çözüwler ýaýlasynyň çäklendirmeler ulgamynda bitin sanlylygyň şertini hasaba almazdan simpleks usuly bilen meseläniň θ optimal çözüwi tapylýar (funksiýanyň maksimum nokadyny tapmaklyga seredeliň).

Eger alnan çözüwde käbir üýtgeýänler drob bahalary boýunça deň bolsalar, onda haýsy hem bolsa bir drob üýtgeýäni saýlap onuň üstünde iki sany çäklendirmäni guralyň. Bir çäklendirmede optimal çözüwdäki drob üýtgeýäniň bahasyndan geçmeýän üýtgeýäniň bahasy iň uly bitin sandan kiçi ýa-da şoňa deň, beýleki çäklendirmede bolsa ol iň kiçi bitin bahadan uly ýa-da şoňa deň, ýöne ülüşli üýtgeýäniň bahasyndan kiçi däl.

Mysal üçin, goşmaça çäklendirmeler $x_2 = \frac{9}{2}\left(4 \le \frac{9}{2} \le 5\right)$ üýtgeýäniň üstünde gurulsa, onda birinji çäklendirme $x_2 \le 4$, ikinji $x_2 \ge 5$ bolar. Şunlukda, biz öňki meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasyndan drob bahaly $x_2(4 < x_2 < 5)$ aralykdaky üýtgeýäni aýyrýarys. Berlen aralyk θ-niň mümkin çözüwler ýaýlasyny θ_1 we θ_2 böleklere bölýär. Täze mümkin çözüwler ýaýlasy (θ_1) öňki meseläniň çäklendirmesine $x_2 \le 4$ goşmaça çäklendirmäniň, θ_2 bolsa $x_2 \le 5$ goşmaça çäklendirmäniň goşulmagyndan alnan.

Netijede, mümkin çözüwler ýaýlasy θ-niň bölünmeginden iki sany täze çyzykly optimallaşdyrma meselesi alyndy. Olary çözeliň. Eger olar çözülenden soň alnan üýtgeýänleriň bahalary bitinsanly bolmasa, onda bu meseläniň funksiýalarynyň bahalaryny deňeşdirip, funksiýasynyň bahasy uly bolan meselesini saýlaýarys we drob bahaly täze üýtgeýände iki sany goşmaça çäklendirmäni (üçünji we dördünji) gurup, bu meseläni ýene-de iki sany täze bölek meselä bölýäris. Netijede, 2-nji suratdaky ýaly şahany alýarys.

Eger şahalanma (täze meselä bölmek) bar bolsa, bitinsanly çözüwiň tapylmagy bilen tamamlanýar. Bu usulda her bir şahalanma meselesindäki funksiýanyň bahalary serhet bolup çykyş edýär. Meseläniň çözülişiniň her bir tapgyrynda geljekki şahalanma funksiýasynyň bahasy uly bolan şaha (meselä) daýanýar. Şonuň üçin funksiýalarynyň bahalary kiçi bolan bölek meselelere (şahalara) üns berilmän hem biler.



2-nji surat

Ýöne käwagt mesele bölek meseleleriň funksiýalarynyň bahalaryny deňeşdirmek bilen çözülende, öňki taşlanan şahalara dolanmaly bolýar we geljekki çözüwi olar bilen dowam etmeli.

Bitinsanly çyzykly optimallaşdyrma meselesiniň hemme çözüwleriniň köplüginiň gutarnykly bolany üçin, deslapky meseläniň bölek meselä soňky dargamasyndan soň optimal çözüw tapylar.

Indiki meselede şahalanma we serhet usullarynyň ulanylyşyny görkezeliň.

4-nji mysal. $Z = x_1 + 2x_2$ funksiýanyň aşakdaky çäklendirmelerde:

$$7x_1 + 5x_2 \le 35,$$

$$x_1, x_2 \ge 0 - bitin.$$

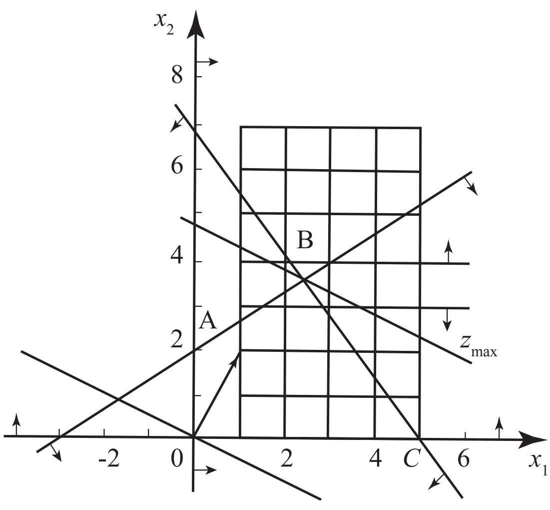
$$-2x_1 + 3x_2 \le 6$$

maksimum nokadyny tapmaly

Çözülişi. Aýdyňlyk üçin grafiki usul bilen çözeliň. Meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasy *OABC* köpburçluk bolýar (*3-nji surat*). $x_1 = 2{,}42$ we $x_2 = 3{,}63$ koordinataly *B* nokatda funksiýanyň $Z^B_{\max} = 9,64$ maksimal bahasy tapylýar.

Üýtgeýänleriň bahalarynyň drob bolany üçin x_2 näbelli boýunça meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasyny iki bölege böleliň. Olaryň biri $x_2 \le 3$, ikinjisi bolsa $x_2 \ge 4$ nokatlaryň köplügini saklar.

Netijede, iki sany täze çyzykly optimallaşdyrma meselesini alýarys. №2 we №3 meseleler (deslapky mesele №1 bolar).



3-nji surat. *Meseläniň şahalanma we serhet usullary bilen çözülişiniň birinji tapgyry*

2-nji mesele

$$z = x_1 + 2x_2 \text{ (max)}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$x_2 \le 3,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3-nji mesele

$$z = x_1 + 2x_2 \text{ (max)}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$x_2 > 4,$$

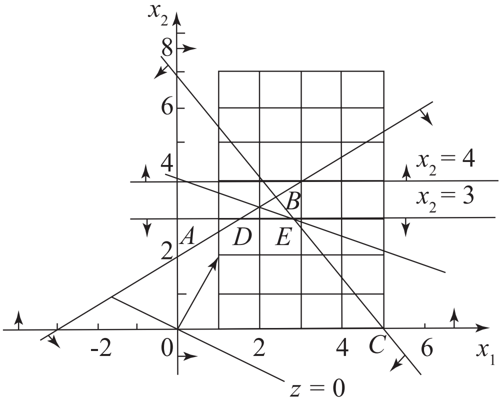
$$x_1 \ge 0.$$

4-nji suratda meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasy görkezilen. Görnüşi ýaly, deslapky mümkin çözüwler ýaýlasynyň bitinsanly ýekeje nokady hem ýitirilmedi.

2-nji meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasy *OADES* köpburçluk bolýar. $x_1 = 2{,}86$ we $x_2 = 3$ koordinataly E nokatda funksiýa $Z^B_{\max} = 8,86$ maksimal bahasyna ýetýär.

2-nji meseläniň çözüwi bitinsanly däldir.

Mümkin çözüwleriň ýaýlasy boş (*3-nji mesele*). Bu meseläniň çäklendirmesi garşylykly we onuň çözüwi ýokdur.



4-nji surat. *Ikinji tapgyr*

Çözüwi dowam edip, $x_1 = 2{,}86$ näbelli boýunça № 2 meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasynyň köplügini iki sany bölek köplüge böleliň. Netijede, degişlilikde $x_1 \le 2$ we $x_1 \ge 3$ goşmaça çäklendirmeli iki sany täze mesele alýarys:

4-nji mesele

$z = x_1 + 2x_1$ (max)

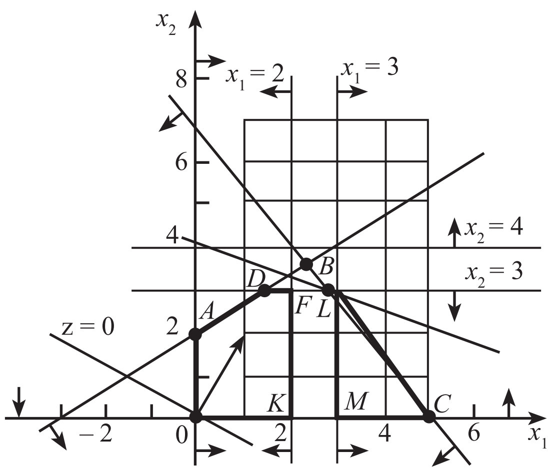
$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

5-nji mesele

$z = x_1 + 2x_2$ (max)

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bu meseleleriň mümkin çözüwler ýaýlasy 5-nji suratda görkezilen. 4-nji meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasy *OADFK* köpburçluk bolýar. $x_1 = 2$ we $x_2 = 3$ koordinataly F nokatda funksiýa $Z^F_{\max} = 8$ maksimal bahasyna ýetýär. Şeýle görnüşde 4-nji meseläniň bitinsanly çözüwini aldyk.



5-nji surat. *Üçünji tapgyr*

5-nji meseläniň mümkin çözüwler ýaýlasy *LMC* üçburçluk bolýar.

$x_1 = 3$; $x_2 = 2{,}8$ koordinataly *L* nokatda funksiýa $Z^L_{\max} = 8{,}6$ maksimal bahasyna ýetýär.

4-nji meseläniň bitinsanly çözüwinde funksiýanyň bahasynyň $Z^L_{\max} = 8{,}6$ $Z^F_{\max} = 8{,}6$-dan kiçi bolany üçin, indiki 6-7-nji meselelere bölünmek $x_2 = 2{,}8$ bitinsanly däl näbelli boýunça 5-nji meseläniň paýyna düşýär. Goşmaça işleri geçirmezden 6-njy meseläniň $x_2 \leq 3$ goşmaça çäklendirmeli mümkin çözüwler ýaýlasy ýokdur, 7-nji meseläniň $x_2 \leq 2$ goşmaça çäklendirmeli bitinsanly optimal çözüwinde funksiýanyň bahasy 7 birlige deň, ýagny $Z^F_{\max} = 8$-den kiçi.

Şeýle görnüşde, başdaky meseläniň bitinsanly çözüwi aşakdakylardan ybarat:

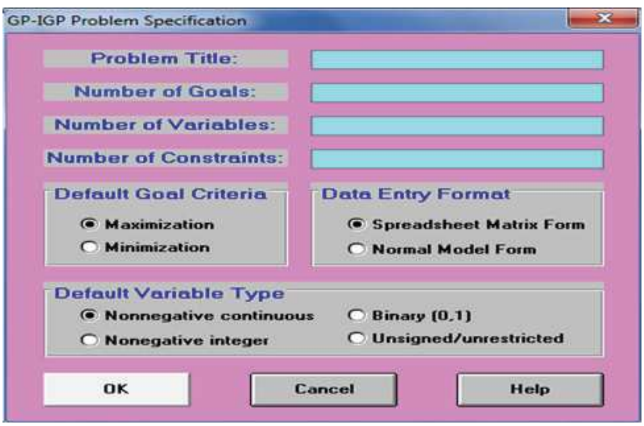
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad Z^F_{\max} = 8.$$

§2. Bitinsanly meseläniň optimal çözüwiniň informasion tehnologiýalar arkaly tapylyşy

QSB (Quantitative System for Business) programmasynyň kömegi bilen bitinsanly çyzykly programmirleme meselesiniň optimal çözüwini tapmaklygyň tehnologiýasyna seredeliň.

Programmanyň penjiresi açylandan soňra esasy menýunyň «***File*** ⇒ ***New Problem***» düwmelerine basyp, täze mesele penjirämizi açýarys.

Täze meselämiziň penjiresi aşakdaky görnüşde bolar :



Täze meselämizi girizmek üçin:

1) ***Program title*** – meseläniň adyny girizmeli;

2) ***Number of Goals*** – maksat funksiýanyň sanyny girizmeli (mydama 1);

3) ***Number of Variables*** – üýtgeýjileriň sanyny girizmeli;

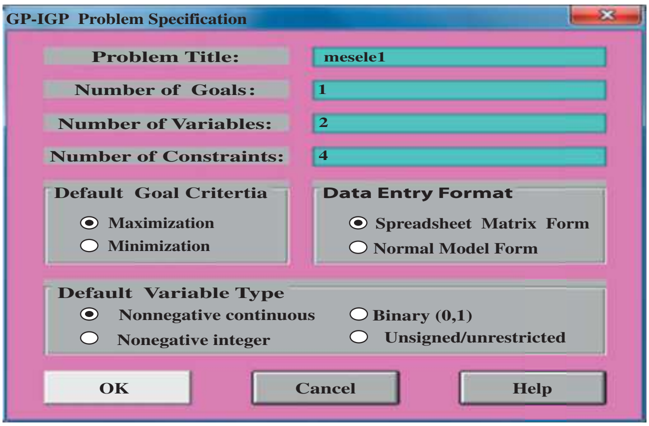
4) ***Number of Constraints*** – çäklendirmeler ulgamynyň sanyny girizmeli;

5) ***Default Goal Criteria*** – diýlen ýerde maksat funksiýa laýyklykda maksimum ýa-da minimum saýlamaly;

6) ***Data Entry Format*** – diýlen ýerde meseläni nähili ýagdaýda girizmek isleýändigimize laýyklykda Spreadsheet Matrix Form ýa-da Normal Model Form saýlamaly;

7) ***Default Variable Type*** – diýlen ýerde meselämiziň netijesiniň alyp biljek bahalaryna laýyklykda şol ýerdäkilerden birini saýlamaly (meseläniň çyzykly programmirleme meselesi bolanlygy üçin Nonnegative integer saýlamaly);

8) Meselämizi girizenimizden soň penjirämiz aşakdaky görnüşi alar:



9) Meselämiziň bahalaryny girizenimizden soň ýokardaky penjirämiziň OK düwmesine basmaly;

10) ***OK*** düwmesine basanymyzdan soň aşakdaky penjire peýda bolar:

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Max: G1				
C1			<=	
C2			<=	
C3			<=	
C4			<=	
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
Variable Type	Continuous	Continuous		

11) Ýokardaky formanyň Max:G1 setirine maksat funksiýamyzyň koeffisiýentlerini girizmeli. Aşakdaky C_1, C_2, …, C_n degişlilikde 1-nji, 2-nji, ..., *n*-nji deňlemeleriň koeffisiýentlerini girizmeli (**Bellik**: çäklendirmeler ulgamynyň şertini üýtgetmek üçin şertiň üstüne iki gezek basmaly). Ondan soň penjire aşakdaky görnüşi alar:

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Max: G1				
C1			<=	
C2			<=	
C3			<=	
C4			<=	
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
Variable Type	Continuous	Continuous		

Şeýlelikde, meselämizi girizdik. Meselämiziň netijesini almak üçin esasy menýudaky Solve and Analyze düwmesine basmaly. Basanymyzdan soň aşakdaky penjire peýda bolar. Bu penjiräniň OK düwmesine basmaly (Meseläniň çözülendigini habar berýär).

Linear and Integer Goal Programm...

The problem has been solved.
Optimal solution is achieved.

OK

12) Meselämiziň çözüwi aşakdaky penjire arkaly görkezilýär.

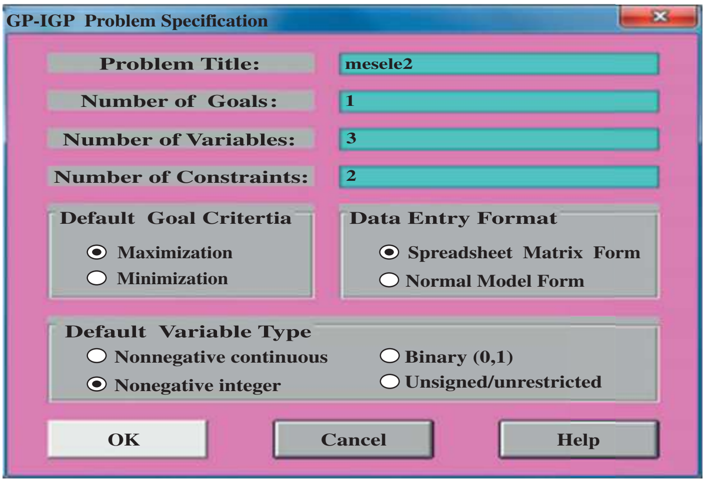
	21:42:26		Sunday	May	08	2011
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	0	0	0	-1,0000	at bound
2	X2	2,0000	2,0000	4,0000	2,0000	at bound
3	X3	1,0000	0	0	0	basic
4	X4	2,0000	1,0000	2,0000	0	basic
5	X5	3,0000	0	0	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	6,0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	9,0000	=	9,0000	0	0
2	C2	5,0000	=	5,0000	0	0
3	C3	6,0000	=	6,0000	0	1,0000

13) Meselämiziň çözüwi ýokardaky görkezilen baha deňdir.

14) Meseläniň netijesini alanyňyzdan soň programmany ýapyp bilersiňiz.

4-nji mysal

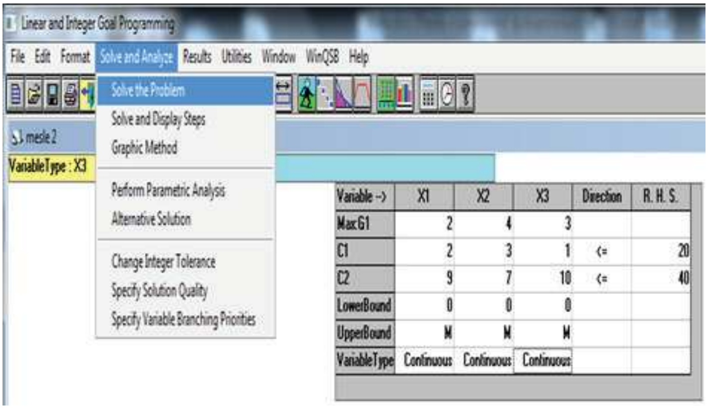
2-nji mysalyň ***QSB*** programmasynda hem çözüliş usulyna seredeliň. Programmanyň esasy penjiresi açylandan soň oňa meseläniň ady, maksat funksiýanyň sany, üýtgeýjileriň we deňlemeleriň sany girizilýär. Ol şeýle görnüşde bolar:



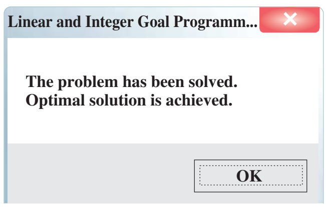
Soňra ***OK*** düwmesini basyp, indiki penjiräni açýarys, onda Max:$G1$ setirine maksat funksiýanyň üýtgeýjileriniň koeffisiýentleri, $C1$ setirine birinji deňlemäniň üýtgeýjileriniň koeffisiýentleri, $C2$ setirine bolsa ikinji deňlemäniň üýtgeýjileriniň koeffisiýentleri girizilýär. Bu bahalaryň girizilen görnüşi aşakda görkezilen.

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Max:G1	2	4	3		
C1	2	3	1	<=	20
C2	9	7	10	<=	40
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
Variable Type	Continuous	Continuous	Continuous		

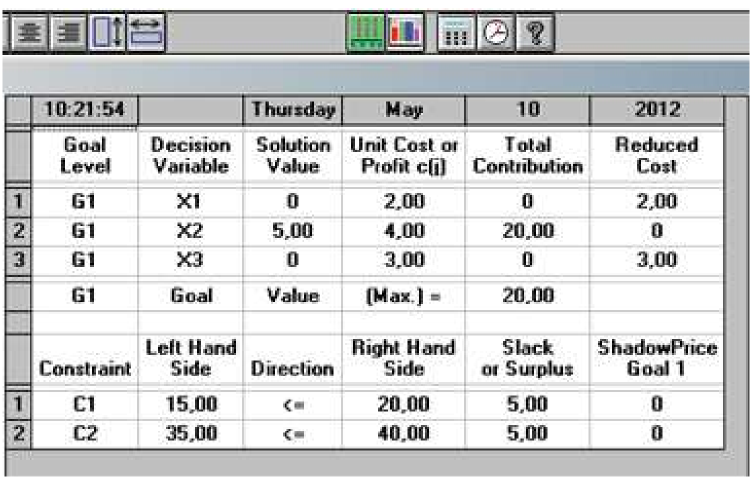
Indi esasy menýudaky ***Solve and Analyze*** düwmesine basyp, ***Solve the Problem*** diýen buýruga basýarys, ýagny aşakdaky ýaly:



Soňra aşakdaky penjire peýda bolar.



OK düwmäni basyp, meseläniň çözüwini alarys, ýagny gözlenýän maksimum baha 20-ä deň.



	10:21:54		Thursday	May	10	2012
	Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost
1	G1	X1	0	2,00	0	2,00
2	G1	X2	5,00	4,00	20,00	0
3	G1	X3	0	3,00	0	3,00
	G1	Goal	Value	(Max.) =	20,00	
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	ShadowPrice Goal 1
1	C1	15,00	<=	20,00	5,00	0
2	C2	35,00	<=	40,00	5,00	0

§3. Diskret programmirleme meselesi

1. Meseläniň goýluşy

Bitinsanly meseleleriň içinde, näçe belli meselelere seredilýär, ýagny ýerini çalşyrma arkaly ekstremal meseläniň çözüşini gözlemek örän uly gyzyklanma döredýär. Bu görnüşdäki meseleler kombinator görnüşli meseleler diýen ada eýe boldular.

Bu görnüşli meselelere, bellemek meselesi degişli bolup (персонала), olaryň çözülişi bolsa ($P_1, P_2, \dots, P_n$), 1, 2, ..., n sanlaryň ornuny çalyşma görnüşinde berilýär. Her bir bellenen P_i degişlilikde ($i = 1, 2, \dots, n$)-niň üsti bilen aňladylýar. Bize belli bolşy ýaly, bellemе meselesi çyzykly programirlemäniň ulag meselesiniň hususy haly bolup, ol meseläniň çözüliş usuly hiç hili kynçylyk döretmeýär. Şoňa görä bu meselä üns bermän, biz umumy meseleleriň kombinator görnüşine seredeliň, olar bolsa ozal seredilen belli usullara gelmeýär.

Örtme barada mesele. Goý, graf G bize berlen bolsun. Grafyň gapyrgalarynyň sanynyň minimum nokadyny kesgitlemek gerek. Haçan grafyň her bir depesi onuň gapyrgalaryna degişlilikde şol bir örtüge girýän bolsa, onda biz aşakdaky matrisany alarys.

$$A = \| a_{ij} \|, \ (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Eger onuň elmentleri aşakdaky görnüşde kesgitlenýän bolsa,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{i-nji depe j-nji gapyrga degişli bolsa,} \\ 0, & \text{i-nji depe j-nji gapyrga degişli däl bolsa,} \end{cases} \tag{10}$$

bu matrisa **insident matrisa** diýilýär.

Eger i-nji depesi j-nji gapyrga degişli bolsa, oňa insident diýilýär. Bu meseläniň matematiki modelini aşakdaky görnüşde düzmek bolýar.

Eger G graf A insident matrisasy bilen häsiýetlendirilýän bolsa, onda biz degişlilikde deň x_j –bilen bitewi näbellili *j-i* aşakdaky görnüşde kesgitlemek bolýar.

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{eger j-nji gapyrga örtüge girýän bolsa,} \\ 0 & \text{eger j-nji gapyrga örtüge girmeýän bolsa,} \end{cases} \tag{11}$$

meseläni minimumlaşdyrmak gerek, ýagny

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min, \tag{12}$$

minimum (12) aşakdaky şertlerde:

1. Her bir depäniň, bolmanda bir gapyrganyň örtügine girýän bolsa,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x \geq 1. \tag{13}$$

2. Her bir x_j – näbelliniň bitewüligi ýerine ýetýän bolsa, (9), (13) – şertleriň esasynda (11), (12) şertler bu meseläniň matematiki modelini aňladýar.

Kommiwoýažoryň meselesi (gezim söwda agenti). Goý, n sany şäher bar bolsun. Gezimli söwdagär agenti haýsy hem bolsa bir şäherden çykyp, galan hemme şähere degişlilikde aýlanyp, ýene-de başdaky şähere dolanyp gelýän bolsun. Her şähere 1 gezek girmek we her şäherde bir gezek çykmak bolýar. Şonuň üçin gezimli söwdagäriň gatnawy, ýapyk halka şekili emele getirýär. Her bir şäher beýleki şäherler bilen özara ýollary bilen berkidilip, olaryň matrisasy bellidir. Gatnawlaryň ýapyk ugurlarynyň minimum nokadyny tapmaly. Görşümiz ýaly, bu mesele ýokarda agzalan bellemek meselesini ýada salýar. Sebäbi, gezimli söwdagär her şähere diňe bir gezek baryp bilýär (her bir dalaşgär diňe 1 wezipä bellenip bilýär). Onda olaryň tapawudy ýapyk gatnawy guramalydygyny kesgitlemeklik talap edýär (dalaşgär wezipä bellenmegi talap edýär). Bu meseläniň matematiki görnüşde ýazylyşy :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{i-nji şäherden j-nji şähere geçýän bolsa} \\ 0, & \text{0, geçmeýän bolsa} \end{cases} \tag{14}$$

Bu ýerde $i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{15}$$

minimumlaşdyrmany talap edýär.

Aşakdaky şertlerde girmek

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2 \ldots n, \tag{16}$$

çykmak

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1,\ i, j = 1, 2..., n,\ i \neq j \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2...n \tag{18}$$

funksiýa minimumlaşmany talap edýär. Aşakdaky şertlerde (16) girmek, (17) çykmak. (15)-(18) seredilýän kommiwoýažoryň (gezim söwda agenti) meselesiniň matematiki modeli. (18)-ki U_i we U_j elementlere azat bahalary kabul edip alyp bilýär. (15) şert kommiwoýažor ýogsa her bir şähere diňe bir gezek girip bilýär. (16) şert kommiwoýažor her şäherden diňe bir gezek çykyp bilýär. (18) şert bolsa n sany şäheriň ýapyk gatnaw ýoluny emele getirýändigini görkezýär. Ýöne şol bir wagtyň esasynda hiç bir şäherde halka emele gelmeýär. Ýagny, (18) şert şol petläniň bolmaýandygyny görkezýär. Indi bolsa biz (18) şerte dürli tarapdan derňewler geçireliň. Goý, (18) şerte görä (gezim söwdä agenti) kommiwoýažor kiçijik r-sikl boýunça şäherlere aýlanyp, k-şäherden durýan sikli ýerine ýetirýän bolsun.

Onda biz bar bolan hemme (18) deňsizlige görä goşup kiçi sikliň ugry boýunça alarys.

$$\sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{j=1}^{k} u_j + nk \leq (n-1)k.$$

Sebäbi,

$$\sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{j=1}^{k} u_j = 0,$$

şerte görä,

$$nk \leq (n-1)k, \text{ bu ýerde } k < n,\ k \neq 0.$$

Diýmek, ýapyk kiçi sikl, n-den az sanly şäherleriň ýoklugyny görkezýär. Şeýle hem u_i üçin haýsy hem bolsa bir başlangyç punktdan başlap, ýapyk sikliň bardygyny görkezmek bolýar we (18) şerti ýerine ýetirýär.

Hemme $x_{ij} = 0$ (j-nji şäher i-nji şäherden soň barylmandyr) (17)--niň erkinliginiň esasynda deňsizlikden alarys,

Goý, haýsy hem bolsa bir k-njy ädimde i-nji şähere j-nji şäherden öň barylýan bolsun, ýagny $x_{ij} = 1$. Onda u_i bilen u_j-iň erkinliginiň esasynda $u_i = k$, $u_j = k + 1$ bilen belläp, (18) deňsizlikden alarys:

$$u_i - u_j + nx_{ij} = k - (k+1) + n = n - 1.$$

Ýagny u_i, u_j – tükenikli bahalary gatnaw üçin n – şäher bar bolup, (17) şerti deňsizlik hökmünde, ýerine ýetirýär, takyk bolanda bolsa deňlik ýerine ýetýär.

Diýmek, (15)-(18) meseläniň kommiwoýažoryň meselesini suratlandyrýandygyny görýäris. Bu meseläniň amaly mesele i hökmünde örän uly ähmiýeti bardyr.

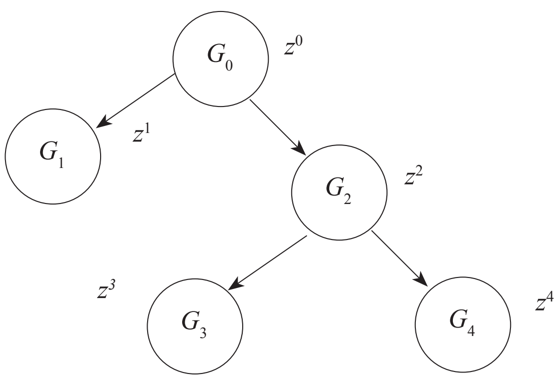
2. Diskret programmirlemede wariantlary yzygiderli seljerme usuly

1) Usulyň nazary esaslary we hasaplamanyň shemalary. Kesme usuly öwrenenimizde amaly meseläniň çözüwini alyp bolmazlygyna getirýän ýetmezçiliklerine üns beripdik. Bu 1-nji we köp gezek yzygiderli bahalary kesgitlemek usulynyň ulanylmagy, hasaplamalarda ýalňyşlygyň barlygy, ikinji bir tarapdan

$$\gamma_0^k \geq \sum_{j \in N_k} \gamma_j^k x_j$$

formula bilen goşmaça çyzykly çäklenmeleriň gurulmagy bilen düşündirilýär. Bu ýerde γ_j^k-baglanyşykly dälligiň bahasy. Bu ýetmezçilikler wariantlary yzygiderli derňemek usullarynda ýokdur. Wariantlary yzygiderli derňemek usulynyň shemasy R.Belmanyň ady bilen bagly dinamiki programmirleme usuly Littla, Suini, Karel ady bilen bagly bolup, şahalama we araçäkleme usulyna girýändir.

Kesme usulyndan tapawutlylykda wariantlary yzygiderli derňemek usulynda çyzykly programmirlemäniň apparatlary ulanylmaýar we hasaplama ýalňyşlyklaryna sezewar bolmaýar. Aşakdaky mesele üçin şahalama we araçäkleme usulynyň umumy shemasyna seredip geçeliň:



6-njy surat

$x \in G$ köplügiň toplumynda $F(x)$ funksiýanyň kiçi baha eýe bolandaky manysyny kesgitlemeli bolsun. Ýagny $z = F(x)$ funksiýanyň G-niň erkin gurluşynyň sanyndaky oblastda iň kiçi bahasyny tapmak talap edilýär diýeliň. Usulyň i-deňligini göz öňünde tutup başdaky köplügiň x-iň alyp bilýän bahalaryny G_0 bilen belläliň. G_0 köplügiň aşaky çägine bitin $F(x)$ funksiýany goýalyň. Goý, ol z^0 bolsun (Meselem, z^0– diýip F(0) bahasyny saýlap bolýar). Almak mümkin bolan G_0 köplügi tükenikli kiçi böleklere böleliň, ýagny

$$\bigcup_{i=1}^{k} G_i = G_0, \qquad \bigcap_{i=1}^{k} G_i = \varnothing$$

bolýan kesişmeýän $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bölek köplüklere böleliň. Her bir G_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ bölek köplügi käbir z^i bahalandyrma bilen kesgitläliň we geljekki şahalama üçin saýlan bölek köplüklerimiziň barlagyny hem-de çözüwiň ahyrky netijesini almak maksady bilen guralyň. Ýokardaky çyzgyda bölek köplüklere şahalanma prosesi gurlan. Ol çyzgyda her bir ädimde şahalanma prosesi üçin saýlanan bölek köplüklerimiziň öz gezeginde 2 sany kesişmeýän bölek köplüklere bölünen. Diýmek, köplük G_0-lere bölünen we olar bahalandyrylan. Goý, olar z^1, z^2 bolsun. Eger $z^1 < z^2$ bolsa, onda indiki şahalanma üçin G_2 bölek köplükde çözüwiň bolmaklygynyň ähtimallygy uludyr diýip alalyň.

Bu başlangyç meseläniň çözüwini yzygiderli gurmaklyga aşakdaky ýaly düşünilýär: Eger $G_2 \subset G_0$ we

$$z^2 = \min_{x \in G_2} F(x),$$
$$z^0 = \min_{x \in G_0} F(x)$$

bolsa, onda

$$\min_{x \in G_2} F(x) \geq \min_{x \in G_0} F(x).$$

Şonuň üçin käbir G_i köplükleri bölek köplüklere bölenimizde, bölek köplüklerimiziň bahalarynyň bölýän köplügimizden az däldigini alýarys. Indi optimal çözüwi kesgitlemek mümkin. Wariantlarynyň çözüwlerini optimal diýip, biz bölek köplügiň bahasy entek şahalanmadyk köplügiň bahasyndan uly bolmalydygyny alarys. Goý, $x^* \in G_v$

$$F(x^*) = z(G_v) \leq z(G_i), \quad \bigcup_i G_i = G.$$

Onda x^* meseläniň optimal çözüwi bu ýerde bolýar. Wariantlaryň yzygiderli derňew usuly optimal çözüwiň yzygiderli ýakynlaşmasy bilen baglanyşykly bolany üçin, wariantyň optimal çözüwe ýakynlaşmasynyň derejesi baradaky sorag ýüze çykýar. Goý,

$$G = \bigcup_{i=1}^{s} G_i, \xi = \min z(G_i)$$

bolsun. Eger x-başlangyç meseläniň käbir çözüwi bolsa, onda

$$\xi \leq \min F(x) \leq F(x')$$

Diýmek,

$$\Delta = F(x') - \zeta$$

ýakynlaşmanyň takyk bahasy. Ony şeýle şekillendirmek mümkin.Eger $\Delta > \varepsilon$ (ε-gerek bolan takyklykda), ýöne çözüwi almak wagtymyz berlen wagtymyzdan artýan bolsa, onda çözüwi tapmak prosesi gutaryldy. Şahalanma we araçäkleme usullarynyň shemasynyň derňewinde (seljermesinde) şeýle soraglar ýüze çykýar: bölek köplügi, olaryň bahalaryny nähili gurmaly? Bu soraglaryň jogaby algoritmiň hasaplanylyşy we adatça çözülýän meseläniň aýratynlygy bilen kesgitlenýär.

2) Diskret programmirlemede Lend we Doýguň algoritmi. Agzalan bu algoritm bitinsanly hasaplamany we bölekleýin bitin sanly hasaplaýyş meseläniň çözüwi üçin ulanylýar. Ýöne onuň shemasy wariantlary yzygiderli derňemek usulyna her ädimde simpleks usulynyň şahalanmasynyň ulanylyşy bilen degişlidir. Umumy meseläni bitin hasaplanyşyň üýtgeýänleriň iki tapgyrynyň çäklenmesiniň programmirlemesini ýazalyň:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{19}$$

bu ýaýlada

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i. \; i = 1, 2, .., m, \tag{20}$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \; j = 1, 2, ..., n, \tag{21}$$

$$x_j - \text{bitin}, j = 1, 2, ..., n. \tag{22}$$

(20), (21), (22) oblastlarda (19) deňsizligiň maksat funksiýanyň maksimum nokady almaly. Sanlaryň käbirleriniň tükeniksiz uly bolmagy mümkin.

(19)-(22) meseleleriň çözülişi mümkin we hemme x_j-leriň optimal çözüwleri bitinsanly bolsa, onda (19)-(21) hem-de (19)-(22) meseleleriň çözüwi optimaldyr. Eger haýsy hem bolsa bir optimal çözüwiň wektorynyň koordinatasy bitinsanly däl bolsa, onda şahalanma prosedurasyny ulanmaly bolýar. Ony aşakdaky görnüşde gurnamak bolýar.

Goý, $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$-lar (9)-(11) meseleleriň optimal çözüwi bolsun. Goý, $z_o = F(x^*)$(19)-(22) meseleleriň şertleri bilen kesgitlenen başdaky köplügiň z_0 bahasy hökmünde alalyň. Goý, x_k^*-bitin däl bolsun, $(1 \leq k \leq n)$.

Optimal bitinsanly hasaplanyşyň meýilnamasynda x_k^*-nyň bolmanda $[x_k^*]$-a çenli kiçeldilmeli ýa-da $[x_k^*]$+1-e çenli ulaldylmaly. Bu pikir şahalanmanyň shemasynyň şertine görä goýlan. Diýmek onda, $G_0 = \bigcup_i G_i$ we $\bigcap_i G_i \neq \varnothing$ bolan G_i bölek köplükleri gurmak düzgünine görä alnandyr.

Bu ýerde G_0 hemme çözüwleri kanagatlandyrýan hem-de öz içinde saklaýan köplükdir we (20)-(22) şertleri ýerine ýetirýändir. G_1 we G_2-leri guralyň:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{x/x \in G_0, x_k \leq [x_k^*]\}. \\ G_2 &= \{x/x \in G_0, x_k \geq [x_k^*] + 1\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Diýmek, (19)-(22) meseleleriň çözüwi prosesi 2 sany çyzykly programmirleme meseläniň çözüwleri bilen çalşyrylýar. Olaryň 1-njisinde $j = k$ bolanda (22) şert (23) talap bilen, 2-njisinde bolsa (24) şert bilen çalşyrylýar.

$$\begin{cases} 0 \leq x_k \leq [x_k^*], \\ x_k \geq [x_k^*] + 1. \end{cases}$$

Ýene alnan meseleleri çözeliň. Eger olaryň çözülmesi mümkin bolmasa, onda degişli bölek köplügiň bahasy tükeniksizlik bolýar. Bu bölek köplük indiki şahalanma üçin gadagan. Eger hasaplamanyň hemme şertleri ýerine ýetse, meselem, (19)-(22) mesele üçin onda onuň amatly çözüwi bolup, (19)-(22) meseleler üçin çözüw ýolberrerliklidir. Eger bitin hasaplamanyň şertleri 2 gurlan meseleler üçin ýerine ýetýän bolsa, onda başky (19)-(22) meseleleriň amatly çözüwi bolup durýar.

Eger bitinsanly hasaplamanyň şertleri gurlan meseleleriň amatly çözüwleriniň koordinatalarynyň iň bolmanda biri üçin hem ýerine ýetmeýän bolsa, onda

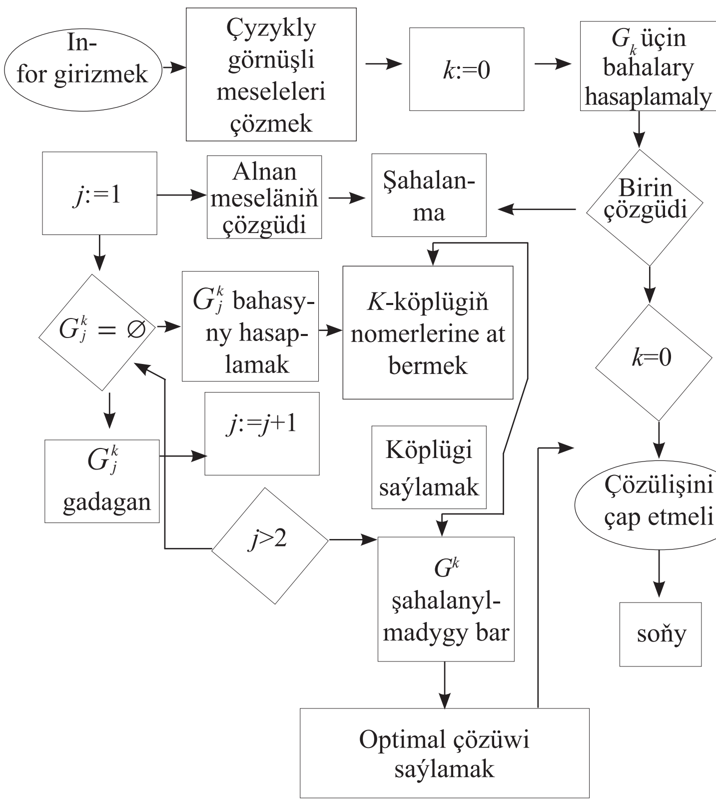
$$G_i = \{x/x \in G_{i-1},\ x_s \leq [x_s^*]\},$$
$$G_{i+1} = \{x/x \in G_{i-1}, x_s \geq [x_s^*] + 1\}. \qquad (24)$$

Düzgün boýunça şahalanma geçireris.

Bu ýerde l-uly bahaly köplügiň indeksi S, $G_{i\text{-}1}$ ýaýladaky mesele üçin optimal çözüwiň bitin däl koordinatalarynyň nomeri.

Diýmek, Lend bilen Doýguň algoritmi her bir bölek köplügi simpleks usuly bilen tapmakdan optimal meýilnamany bitinsanly hasaplamanyň koordinatalar köplüginiň yzygiderli şahalanmasyndan ybaratdyr.

Usulyň blok shemasy getirilen.



7-nji surat

1-nji bellik. Eger maksat funksiýanyň hemme koeffisiýentleri C_j bitin, $j \le n_j$ we $j > n_j$-de 0-a deň bolsa, onda G_i köplük üçin baha ondan has güýçli

$$\xi(G_i) = \xi(G_i) =]F(x_i^*)[$$

baha bilen çalşyrylyp bilner.]a[bellik – a-dan kiçi bolmadyk iň kiçi bitin sany aňladýar.

2. Algoritmiň çäkliligi G köplügiň çäkliliginden gelip çykýar.

3. Biziň seçip alan algoritmimiz eger bitinsanly hasaplamanyň şertleri n sana däl-de, eýsem $n_1 < n$ näbellilere goýlanda has peýdalylygy aýdyňdyr.

1-nji mysal. $F(x) = x_1 + x$ şerte görä x-iň max-ny tapmaly.

$$\begin{gathered} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_i\text{-bitinler}, \\ i = 1, 2. \end{gathered}$$

Optimal meseläniň meýilnamasy şertsiz bitinsanlar $x^* = \left(4\frac{4}{9}, 2\frac{5}{9}\right)$, $z_0 = F(x^*) = 7$, bitin däl sanlaryň meýilnamasy. x_1^* koordinatasymy alyp, G_0 iki sany köplüklere dargatmaly.

$$\begin{gathered} G_1 = \{x / x \in \mathrm{G}_0\ x_1 \le 4\}, \\ G_2 = \{x / x \in \mathrm{G}_0, x_1 \ge 5\} \end{gathered}$$

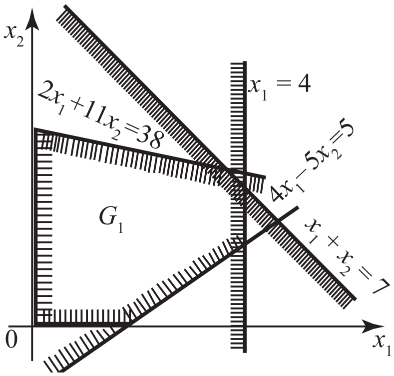
Edil şonuň ýaly çyzykly programirlemäniň iki sany meselesini alarys:

$$\max F(x) = x_1 + x_2,$$

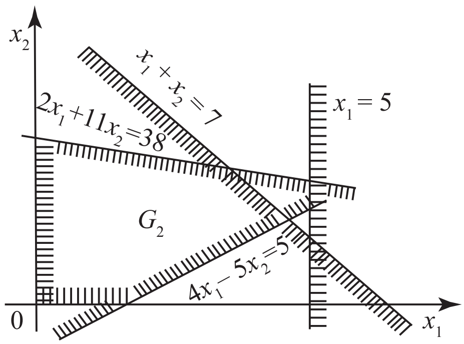
şertlere görä

$$\begin{gathered} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4\,x_1 - 5\,x_2 \le 5, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$$
$$x_1 + x_2 \leq 7,$$
$$4\,x_1 - 5\,x_2 \leq 5,$$
$$x_1 \geq 5,$$
$$x_2 \geq 0.$$



8-nji surat



9-njy surat

Bu meseleleri geometrik görnüşde çözeris (8–9-njy suratlar boýunça). G_2 köplügiň boşlugy sebäpli, oňa şeýle baha bereris: $z_2 = \infty$. G_1 köplük üçin şuny alarys.

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2\frac{8}{11},\ z^1 = 6\frac{8}{11}.$$

G_1 köplüge şahalanma geçirilen:

$$G_3 = \{x / x \in G_1\ x_2 \leq 2\},$$
$$G_4 = \{x / x \in G_1\ x_2 \leq 3\}.$$

Dowamlylykda, iki meseläni çözmek gerek:

$$\max F(x) = x_1 + x_2.$$

Şerte görä

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$$
$$x_1 + x_2 \leq 7,$$
$$4x_1 - 5x_2 \leq 5,$$
$$x_1 \geq 0.$$

$$0 \le x_2 \le 2.$$

$$2x_1 + 11x_2 \le 38,$$

$$x_1 + x_2 \le 7,$$

$$4x_1 - 4x_2 \le 5,$$

$$x_1 \ge 0,$$

$$x_2 \ge 3\ .$$

Birinji meseläniň çözüwi: $x_1 = 3\frac{3}{4}$, $x_2 = 2$, $z^2 = 5\frac{3}{4}$;

Ikinjisi: $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 3$, $z^4 = 5{,}5$.

Indiki ädimde G_3 köplükden şahalandyryp we tükenikli ädim sandan soňra bitinsanly optimal meýilnamasyny alarys:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ F(x) = 5.$$

3. Diskret programmirlemede şahalanma we araçäk usuly

1. Şahalanma we araçäk usulyna biz kommiwoýažoryň meselesi görnüşinde seredeliň.

Goý, $C = \| c_{ij} \|$ matrisanyň elementi c_{ij}, i-şäherden j-şähere geçmeginiň harajaty bilen kesgitlenilýän bolsun. Şeýle hem $(i;j)$ şäherleriň jübütini emele getirýän. t sikl diýip, n sany yzygiderli şäherleriň jübütler toparynyň her bir şäherden diňe bir gezek girip çykmasyny

$$t = [(i_{2,}\, i_2), (i_{2,}\, i_3), ..., (i_{n\text{-}1,}\, i_n)\ (i_{n,}\, i_1)],$$

ýagny gatnaw ýoluny emele getirmesine aýdalyň. Her (i,j) jübüt gatnaw kommunikasiýasyny emele getirýär. Onda degişli c matrisa t sikli üçin $z(t)$ umumy harajatlaryň jemi bolup, bu

$$z(t) = \sum_{(i,j) \in t} c_{ij}$$

gatnaw boýunça kommunikasiýasy matrisanyň elementleriniň jemidir. Her bir setirde we her bir sütünde siklde diňe bir element saklanýar. Getirme matrisasyny we getirme prosesini girizeliň. Eger C matrisanyň käbir i-nji setirinden we j-nji sütünden hemme elementleriň minimal kiçilerini aýyrsak, onda her setirde we her sütünde iň bolmanda bir nol bar bolan matrisany alarys. Alnan matrisa getirilen diýilýär, nollary emele getirme prosesine bolsa getirme diýilýär. Getirme elementler prosesinde aýyrmalaryň jemine **getirilýän konstantalar** diýilýär we h^k bilen belgilenýär. Bu ýerde k – **getirmäniň tertip belgisi**. Başlangyç c matrisanyň oňyn däl elementlerden ybaratdygy aýdyňdyr. Getirme matrisa geçilme onuň hemme elementleri oňyn bolar ýaly gurnalan. c matrisa bilen gabat gelýän başlangyç meseläniň amatly gatnaw bilen getirme matrisa üçin optimal gatnaw gözleg prosesini guralyň. Getirme prosesini has giň şekillendireliň.

Goý,

$$c_{i,j(i)} = \min_j c_{ij}$$

bolsun, onda

$$c^*_{ij} = c_{ij} - c_{i,j(i)} \tag{25}$$

Goý,

$$c^*_{i(j),j} = \min_i c_{ij}$$

bolsa, onda

$$c''_{ij} = c'_{ij} - c^*_{i(j),j} \tag{26}$$

Şeýle oňyn ýa-da nol C matrisadan

$$h' = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j(i)} + \sum_{j=1}^{n} c^*_{i(j),j}, \tag{27}$$

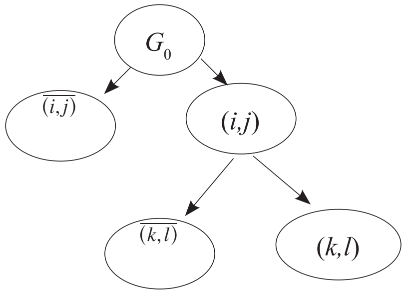
deň bolan getirilýän hemişelikleriň jeminden ybarat oňyn ýa-da nol getirilen matrisany almaklyga mümkinçilik berýär.

Eger $z(t)$ getirmeden öňki matrisa üçin t sikliň çykdajylary; $az^1(t)$ getirmeden soňky matrisa üçin t sikliň çykdajylary; a,h getirme konstantalaryň jemi bolsa, onda

$$z(t) = h^1 + z^1(t)$$

bolar.

Getirilen matrisa diňe oňly ýa-da nol elementlerden ybarat bolsun. h^1 öňki köne matrisada t sikliň çykdajysynyň aşaky çägi bolýar.



10-njy surat

Şahalanma prosedurasyny düşündirmek, suratlandyrmak we şekillendirmek üçin bu usulyň geometriki manysyny ulanalyň. Hemme siklleri özara kesişmeýän bölek köplükleri bolup biljekleriniň jübütlerini (i,j) gadagan $\overline{(i,j)}$bilen belläp, agaçlaryň şahalarynyň bolan depeleriniň jübütlerini şekillendireliň. Onda (i,j) depeden geçýän şaha i-den j-e geçýän hemme gatnawlary öz içinde saklaýar. $\overline{(i,j)}$ depeden geçýän şaha bolsa i-den j-e geçilmesi gadagan bolan hemme gatnawlary öz içinde saklaýar. Meselem, $\overline{(k,l)}$depeden geçýän şaha i-şäherden j-e geçilme we k-dan l-e gadagan bolan geçilmäniň hemme gatnawyny özünde saklaýar. Şol bir wagtyň özünde bolsa (k,l)-den geçýän şaha i-şäherden soň j-şähere, k-şäherden soňra bolsa l şähere barylmasynyň hemme gatnawyny özünde saklaýar. Käbir X depeden agajyň ýokarysyna çykylsa, X-e degişli sikle girýän hemme depeleri hem-de sikle girip bilmeýänleri aýdyp bolýar. Bu ýerde şahalanma prosesiniň depeleriň uçlarynda şekillenýän köplükleriň birikmesiniň islendik tapgyrynda hemme siklleriň köplügini emele getirýändigini belläliň. Şahalanmanyň geçilýän depesini X-iň üsti bilen belgilemegi şertleşeliň. Iň uly ähtimaly bar bolan depesini Y-iň üsti bilen, gadagan şäherleriň jübütiniň depesini bolsa çyzyjak bilen belgiläliň. X-depä degişlilikde $w(x)$ aşaky çägi hk bolan getirilýän konstantalaryň jemini belgiläliň we şahalanma üçin şäherleriň jübütiniň saýlanyş prosedurasyny şekillendireliň. Şahalanma üçin şäherleriň jübütiniň saýlanyş prosesini guralyň. Iki adamyň arasyndaky oýnalýan oýun hökmünde $\overline{Y}$ we Y köplükleri guralyň. Goý, Y oýunçynyň aşakdaky artykmaçlyklary bar bolsun. Ol oýlanma üçin öň saýlanmadyk islendik şäherler jübütini saýlap bilýän bolsun. Ol minimal uzynlykly sikli gurmak maksady bilen degişli getirilýän matrisanyň degişli nol elementi bolar ýaly şäherleriň jübütini saýlamalydygy aýdyňdyr. Emma getirilen matrisanyň her bir setirinde we her sütüninde iň bolmanda bir nol element bardyr. Diýmek, Y-oýna girmegiň birinji ädiminde n-den az bolmadyk sanly dalaşgär bolar.

Jübütleriň saýlawynyň bir dälligi birinji oýunçy üçin meseläni çözmekligi kynlaşdyrýar. Şonuň üçin strategiýanyň bir bahalylygy saýlawyň ikinji $\overline{Y}$ oýunçynyň oýunda özüni alyp barşyna çäklilik şertlerini talap edýär. Has takygy ol çäklendiriş şertleri:

Eger Y oýunçy (i, j) jübüti saýlap alan bolsa, onda $\overline{Y}$ oýunça i şäherden çykmaklyk zerur, ýöne j şähere däl-de islendik başga şähere barmak bolýar. j-e girmek gerek, ýöne i-den däl-de islendik başga şäherden girmek bolýar. Bu geçişde $\overline{Y}$-iň i-den j-e göni geçişe görä has köp ýitgileri boljak. $\overline{Y}$ ýitgileri minimirlemek üçin şeýle mümkin bolan geçişi saýlamak maksada laýyk bolar. Şonuň üçin i-nji setirde ol j-niň ýok bolan getirilen matrisadaky iň kiçi aralygyndaky şäheri saýlar. Şondan soň Y oýunçy hemme mümkin şäherler jübütiniň içinden $\overline{Y}$ üçin iň köp çykdajylary etjek jübütini saýlap alar ýaly edýär. Aýlanyp söwdalaşmak baradaky meseläniň çözüwi üçin şahalanma we araçäkleme usulynyň umumy ideýasy şeýledir.

Algoritmini ýazalyň:

1. Goý, $k = 1$.

2. C^k getirilen matrisany emele getirýän setirlerden we sütünlerden C matrisanyň getirmesini amala aşyralyň.

3. X köplük üçin baha bolan n^k getirilýän konstantalaryň jemini hasaplalyň. Ony w (X) bilen belläliň.

4. Hemme (i, j)-ler üçin $c_{ij}^k = 0$ bolan X köplüge girmek üçin dalaşgärleri saýlalyň, $i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$;

5. Y-a girmek üçin saýlanan dalaşgärler üçin

$$\theta(i,j) = \min_{j' \neq j} c_{i,j'} + \min_{i' \neq i} c_{i',j^*}$$

hasaplalyň.

6. Hemme i,j-den $c_{ij}^k = 0$ bolan

$$\theta(k,l) = \max \theta(i,j)$$

saýlalyň. (k, l) jübüt Y köplüge girizilýär we $\overline{Y}$ köplük bilen gadagan bolup durýar.

7. $\overline{Y}$ köplük üçin onuň bahalaryny hasaplalyň:

$$w(\overline{Y}) = w(X) + \theta(k, l),$$

ol bolsa X we $\theta(k, l)$ köplükler üçin ozal edilen harajatlara deňdir.

8. Her şäherden diňe bir gezek çykmak bolýandygy üçin, k-njy setiri geljekki seretmelerimizden aýyrmaly. Her şähere diňe bir gezek girmek bolýandygy üçin, j-nji sütün aýrylýar.

9. Käbir şahalanma ädimlerimizde alnan kesilen matrisa 2×2 ölçegli bolany üçin we diňe 2 sany mümkin şäherler jübütini özünde saklaýandygy aýdyňdyr. Bu jübütler halkasyz käbir gatnaw üçin soňlaýjy jübütler bolýar. Diýmek, 2×2 gatnaw emele gelmesiniň aýratynlygy eýe şonuň üçin 9 bolanda kesilen matrisanyň ölçegi 2×2 ölçegidigi barlanýar. Eger «Hawa« bolsa, 11-e, «Ýok» bolsa, 10-a geçilýär.

10. Alnan matrisa getirilen bolýarmy? Eger «Hawa» bolsa, onda Y köplügiň bahasy Y-iň $w(Y) = w(x)$ alynmasyna sebäp bolsa şeýle bir köplüge deň. Eger «ýok» bolsa, onda ýaňy alnan matrisanyň getirilmesi amala aşyrylýar we $h(k + 1)$ hasaplanylýar. Ondan soň

$$w(Y) = w(X) + h^{(k+1)}, k := k + 1$$

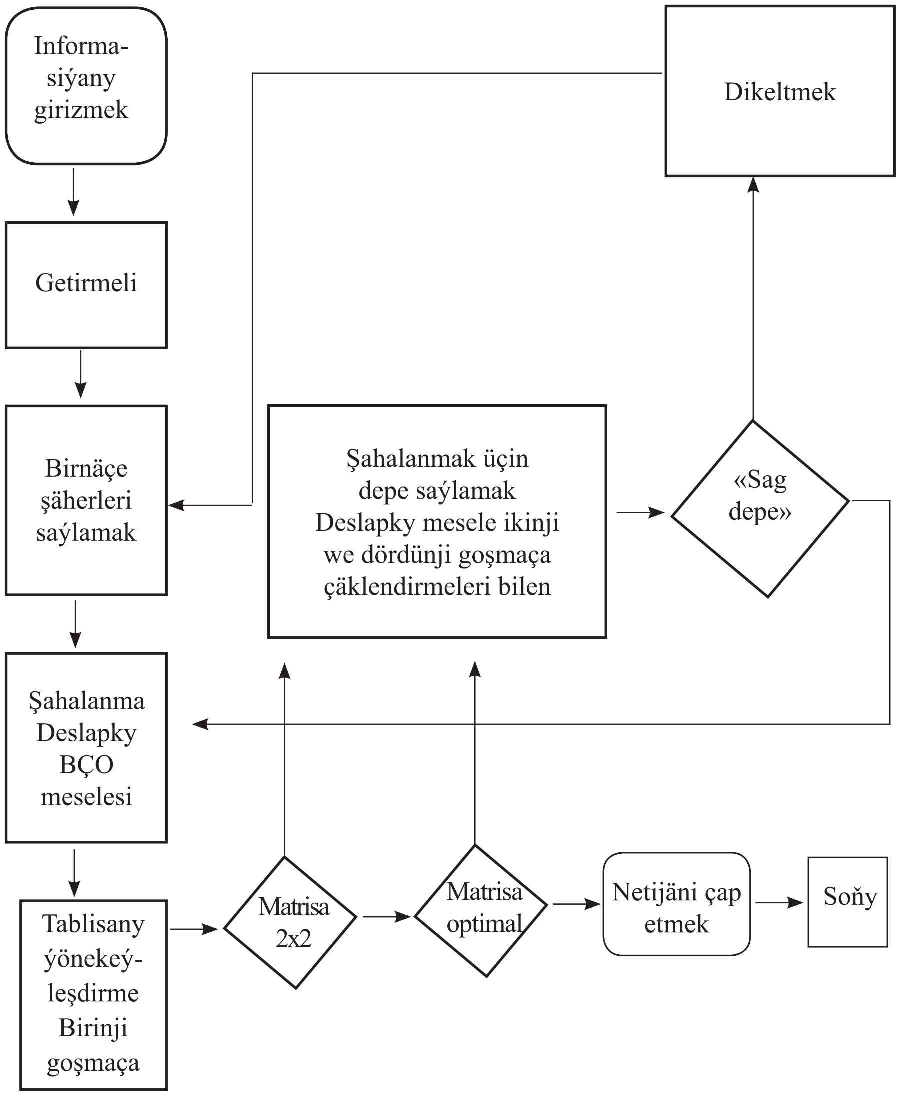
alynýar we 4 bölümçä geçilýär.

11. Amatlygyň şertiniň barlanyşy: Eger ýapyk sikliň bahasy geljekki hemme mümkin köplükleriň şahalanmasynyň bahasynda köp bolmasa, onda alnan ýapyk gatnaw amatly. Eger-de haýsy hem bolsa bir köplügiň ondan kiçi bahasy bar bolsa, onda alnan ýapyk gatnaw ýatda saklanýar. Şeýle hem şahalanma prosesini kiçi bahaly köplükde dowam etmeli.

Usulyň blok-shemasy 11-nji suratda şekillendirilen. *Käbir bellikler:* «matrisa 2×2» bolan ýapyk şäherler jübüti üçin ýapyk gatnawy emele getirmesiniň alnyş pursady kesgitlenilýär. «Gaýtadan almak»bloga geçişiň diňe geljekki şahalanma üçin degişli köplük perspektiw bolanda bolýar. Bu ýagdaýda indiki şahalanma üçin dalaşgärleri saýlama prosesi başdaky C matrisany öňki ýagdaýyna getirmek talap edilýär, $\overline{Y}$ -san

$$q = \sum_{(i,j) \in x} c_{ij}$$

gurlan *x* köplük üçin öň gurlan gatnaw *q* çykdajylaryny hasaplamaly. Ondan soň *X*-e girýän jübütler üçin setirleri we sütünleri çyzmaly we dalaşgärleri saýlamak üçin alnan matrisany şahalanma getirmeli.



11-nji surat

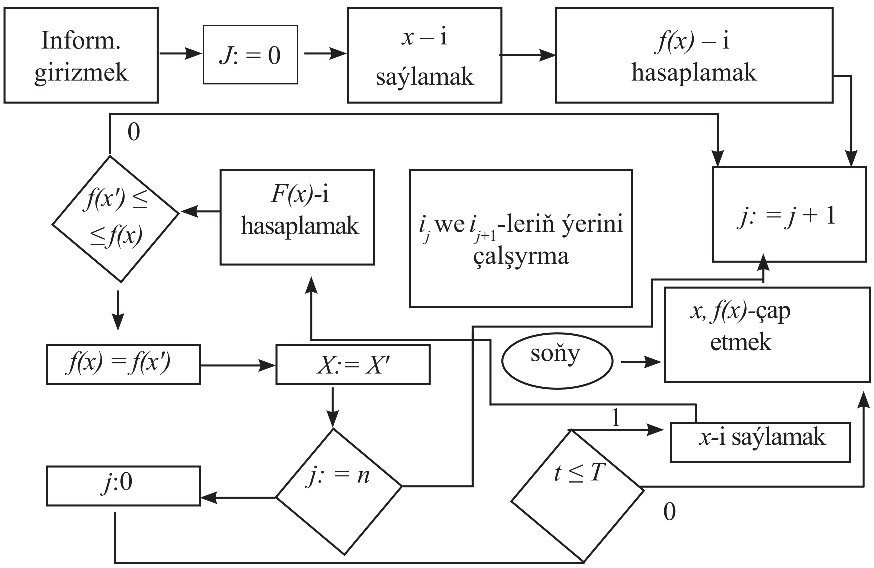
2. Diskret programmirlemede lokal optimally algoritmi we meselesiniň algoritmleriniň derňewi. Bu usul kommiwoýažor meseläniň takmynan çözülişini gözlemek ideýalaryna esaslanýar.

Başlangyç tötän gözlegiň çözülişini kesgitlemek (başlangyç yzygiderli şäherlere aýdylýar) aşakdaky ýaly geçýär. Bu çözüwiň töwereklerini tapawutlandyrmak we nokatlaryň töwereginde maksimum funksiýanyň lokal optimallygy kesgitlenýär, ýagny tapawutlaryň köplenç ýagdaýda lokal optimallygy gözlenende ýönekeý saýlama esasynda gözlenýär. Sebäbi töweregi köp bolmadyk nokatlaryň sanyndan durýar. Soňra tötän saýlaw başga bir çözüliş üçin ýerine ýetýär we onuň töwereginde tötän lokal optimal gözlenýär ýa-da kesgitlenýär. Bu prosesiň özi yzygiderlikde köp gezek gaýtalanýar. Optimal çözülişiň hili hökmünde şeýle bir şäherleriň üstünde aýlananlaryň yzygiderligi göz öňünde tutulýar. Netijede, maksat funksiýa hemme seredilenler bilen deňeşdirilende iň kiçi baha eýe bolýar. Mümkin bolan şäherleriň köpüsini G diýip bellesek hem-de $x = (i_1, i_2, ..., i_n)$ ýerini çalyşmalaryň 1, 2, ..., n görnüşleriniň üsti bilen maksat funksiýa $f(x)$ x ýerini çalşandan düzülen ýoluň uzynlygynyň geçmelisini görkezýär. Onuň algoritmi aşakdakydan durýar.

Eger ýerine çalyşmanyň tötän saýlawyny $X^0 = (i_1, i_2, ..., i_n)$ bilen belgilesek we i_1 bilen i_2-niň ýerini çalşyp, täze alnan ýerini çalyşmany x' bilen belläliň we yzygiderlikde maksat funksiýany $f(x')$ *we* $f(x_o)$ hasabyň $f(x)$ maksat funksiýa ýa-da $f'(x')$ we $f(x^0)$ ýerini çalyşmalar yzygiderliginde bahalaryny kesgitläp alalyň. Içinden iň azyny minimum nokady ýatda saklarys, ýagny

$$f(x) = \min \{ f(x'), f(x^0) \}.$$

Biz x-de şeýle bir şähere yzygiderlige aýlanylýanlygyny ýatda saklarys Şonuň netijesinde $f(x)$ maksat funksiýanyň bahasyna degişli bolar ýaly. Alnan bar bolan çözüwde 2 we 3 elementleriň ýerini çalşyp, şeýle hem şäheriň aýlanýanlygynyň yzygiderliginiň ýerini çalşyp aşakdaky netijäni alarys. Ýagny täze emele gelen yzygiderlige x'' bilen belläp, onuň yzygiderligine geçiş ýoluny $f(x'')$-diýip maksat funksiýany belläris. Öňki n-1 $f(x)$ maksat funksiýa bilen täze alnan x''-i ýatda saklanan ýaçeýkada deňeşdirip, haýsy birisi az bolsa şony ýatda saklap, degişlilikdäki yzygiderligi, ýagny onuň x-däki bahasyny kesgitläris. Şeýlelik bilen n-1 çalşyrmadan uly bolmadyk şondan soňra biz onuň iň oňadyny tötän başlangyç ýerini çalyşmazdan, ýagny $(i_1, i_2, ..., i_n)$ onuň kesgitlejekdigi aýdyňdyr. Eger biz x-i yzygiderlik geçmişiniň gatnaşyklarynyň yzygiderliklerine degişli diýip hasap etsek we ony $f(x)$-ň ýerleşen ýaçeýkasynda ýazsak netijede bahasy gatnawyň (marşrut) uzynlygyna bagly bolup durýar. Eger meseläni çözmeklikde harç edilen t wagt haýsam bolsa berlen k ululykdan artykmaç bolmasa, onda tötän ýerini çalyşmany biz saýlap bileris we proses şu yzygiderlikde gaýtalanýandyr. Ýokarda görkezilen prosedura haýsy hem bolsa bir ädimden alnan gözlenen optimallaşdyrmanyň çözülişine ýakyndygyny we ýakynlaşdyrmanyň derejesiniň bahalanmaga mümkinçilik berýändigini görmek bolýar. Şeýle hem optimall çözüwi derňemek düzgüniniň başga ýollary kesgitli däldir. Şol berlen wagtda bu usul we onuň modellenişi (bir wagtda ýerini çalyşma bir şäherden köp şäher üçin ýerine ýetýär.) islendik wagt pursatynda haýsy hem bolsa bir yzygiderlikde şäheri aýlanmak we olara degişli bolan $f(x)$-i – kesgitlemek üçin mümkinçilik döredýär. Ýokarda görkezilen algoritmleriň shemasy aşakdaky görnüşde şekillendirilýär.



12-nji surat. *Algoritmiň shemasy*

3. Diskret programmirleme meselesiniň algoritmleriniň derňewi. Şahalanma we araçäk usuly n ädimden optimal bolmanam bilýän käbir ýapyk sikli almaga mümkinçilik berýär. Hasaplama prosesiniň kynçylyklary şulardan durýar. Her ädimde matrisanyň elementleriniň derňewini geçirmeli; her ädimde nol elementleri saýlamaly, şahalanma we gurma bahalaryna dalaşgäri saýlamagyň ýönekeý usuly. n uly bolanda wagtyň sarp edilişine görä çözüw agajynyň şahalarynyň köpelmegi sebäpli, meseläniň çözüwi optimallyga getirilmänem bilinýär.

Belmanyň usuly n ädimde optimal ugry almaga mümkinçilik berýär. Emma $2 \le k < n$ ädimleri geçirmegiň kynçylyklary uly n üçin bu usul amatly däldigine şaýatlyk edýär.

Lokal optimizasiýaly tötän gözleg algoritmi çözüwi almak üçin sarp edilen wagt berlen T ululykdan uly bolmaly däl şertli n uly bolanda meseläni maşynda çözmek maslahat berlip bilner.

1-nji mesele. Kommiwoýažoryň meselesine seredeliň. Goý,

$P_1 = (1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1)$, $P_2 = (1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1)$,
$P_3 = (1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1)$, $P_4 = (1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1)$,
$P_5 = (1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1)$, $P_6 = (1 \to 4 \to 3 \to 4 \to 1)$, bolsun, onda

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 4 & 8 \\ 6 & \infty & 6 & 7 \\ 5 & 2 & \infty & 5 \\ 3 & 2 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

C-matrisanyň getirmesiniň sany 13-e deň ($[1] = 2$, $u[2] = 6$, $u[3] = 2$, $u[4] = 2$, $u[1] = V[2] = V[3] = 0, V[4] = 1$). Başlangyç baha $W(D) = 13$, getirilen matrisa:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Birinji ädimde D-köplük iki köplüge dargadylýar:

$$D_1^1 = D\{(1.2)U(2.1)\} = \{P_1, P_2\}$$

$$D_1^0 = D\{u(1.2)\} = \{P_3, P_4, P_5, P_6\}$$

Bu soňky köplükler birinji ädimde olaryň degişli bahalary:

$$W(D_1^1) = 16 : W(D_1^0) = 15,$$

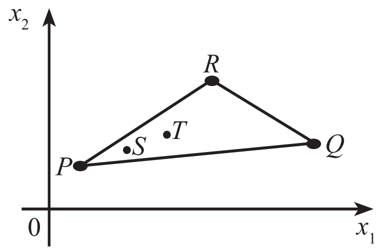
onda matrisalar

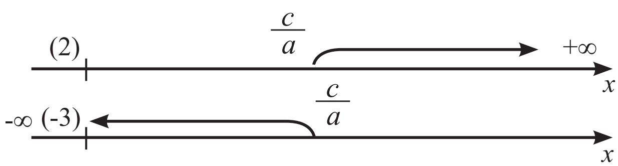
$$C_1^1 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 1 & \infty & 0 \\ 0 & 4 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Ikinji ädimde D_1^0-köplük

$$D_2^1, = \{(1,3)\cup(1,2),(3,1)\} = \{P_{3,} P_4\}\ we\ D_2^0, = \{\varnothing\cup(1,3)\} = \{P_5, P_6\}$$

köplüklere dargaýar. Olaryň bahasy degişlilikde $W(D_2^1) = 15$, $W(D_2^0) = 18$. Soňky köplükler bolup ikinji ädimde D_1^1, D_2^1, D_2^0köp-lükler bolýar.





13-nji surat

Üçünji ädimde D_2^1 -köplük iň az (minimum) baha eýe bolup, olaryň arasynda tapawutlanýar, onda onuň dargadylmasy:

$$D_3^2 = \{(2,1),(1,3)\cup(1,2),(3,1),(3,2)\} = \{P_4\};$$
$$D_3^1 = \{(1,3)\cup(1,2),(3,1),(2,1)\} = \{P_3\}.$$

§4. Parametrik çyzykly programmirleme meselesi

1. Meseläniň goýluşy

Eger kärhanalar tarapyndan öndürilýän önümleri gorap saklamak gerek bolsa, onda onuň bahasy önümiň öndürilip taýýarlanan pursadynda hemişelik bölek bolup, onuň goralyp saklanýan wagtyna baglylykda bolsa üýtgeýän bölek bolup durýar. Şeýle hem baglylyk adaty ýagdaýda çyzyklydyr. Meseläniň optimal maksatnamalaşdyrmasynyň funksionaly (maksat funksiýasy) şeýle önümçilik üçin onuň koeffisiýentleri bir parametre t çyzykly bagly bolup durýar.

Köplenç ýagdaýda maksat funksiýanyň koeffisiýentleriniň diňe takmynan bahalary belli bolýar, olary t parametrli çyzykly funksiýalar görnüşine getirip, bu koeffisiýentleriň üýtgeýän ýagdaýynda meseläniň çözülişinde t parametriň özüni alyp barşyny öwrenmek bolýar (durnukly diýlip atlandyrylýar). Çäklendirmeler ulgamlarynyň koeffisiýentleriniň üýtgeýän ýagdaýlary üçin hem edil şonuň ýaly derňemäni geçirmek bolýar:

1. Eger biz t parametriň maksat funksiýasynyň we çäklendirmeler sistemasynyň umumy ýagdaýyna seretsek, onda

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 + b_1 t, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 + b_2 t, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m + b_m t. \end{cases} \tag{28}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j t)(-x_j) \tag{29}$$

$$x_j \ge 0 \ \ t \in [\alpha, \beta]. \tag{30}$$

2. Eger biz t parametri diňe çäklendirmeler ulgamynda seretsek, onda ol aşakdaky görnüşde şekillendirilýär:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 + b_1 t, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 + b_2 t, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m + b_m t. \end{cases}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j), \tag{29'}$$

$$x_j \ge 0 \quad t \in [\alpha, \beta].$$

3. Diňe t parametriň maksat funsiýasyndaky ýagdaýyna seredilse, mesele aşakdaky görnüşe eýe bolýar. Çäklendirmeler ulgamy berlen:

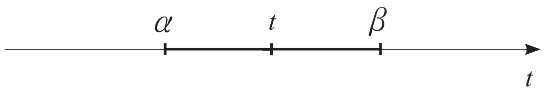
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m \\ x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{28'}$$

Bu sistemadaky deňsizlikler bilelikde çözülişe eýedir we Ω köpgranlygy kesgitleýär. Maksat funksiýa z_t berlen:

$$z_t = \sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)(-x_j),$$

c_j we d_j sanlar bellidir we hemişelikdir. t ululyk bolsa üýtgeýän parametr bolup, $[\alpha, \beta]$ kesimde islendik bahalary alyp bilýär (*14-nji surat*).

Bu ýagdaýda optimal maksatnamany tapyp bolmaýar, sebäbi onuň ýeke-täk bolmazlygy mümkin, ýagny t parametriň dürli bahalarynda olaryň biri-birinden tapawutly bolmagy mümkin. Şoňa görä, meseläni başga görnüşde goýmaly bolýar. Ýagny, $[\alpha, \beta]$ kesimi birnäçe tükenikli böleklere bölüp, t-niň şeýle bir bahasynda Ω köpgranlygyň şol bir depesinde funksional z_t maksimuma eýe bolar ýaly.



14-nji surat

2. Meseläniň analitik usulda çözülişi

Bu meseläniň çözülişiniň algoritmi umumy görnüşde iki bölekden durýar.

1. Goý t-niň fiksirlenen bahasynyň iň kiçisi $t = \alpha$ bolsun. Onda maksat funksiýanyň hemme koeffisiýentleri hemişelikler bolýarlar. Bu ýagdaý üçin meseläni çözeliň, ýagny z_α maksimuma ýetýän depesini tapalyň.

2. z_α maksimuma şol bir depede eýe bolýandygy üçin t parametriň hemme bahasyny kesgitläliň. Tapylan aralagy $[\alpha, \beta]$ berlen kesimden aýralyň. Galan aralyk üçin ýene-de meseläni çözýäris, ýagny algoritme görä birinji ýagdaýa geçýäris. Şeýle yzygiderligi tä $[\alpha, \beta]$ kesimi bölek aralyklara bölüp gutarýançak dowam edýäris.

Bu algoritme hemmetaraplaýyn seredeliň:

1. Goý, $t = \alpha$ bolsun. Onda maksat funksiýany aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$z_a = \sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j\alpha)(-x_j). \tag{31}$$

Simpleks tablisany düzeliň. Onda c we d koeffisiýentler üçin, degişlilikde iki setiri goşalyň (*18-nji tablisa*). Bu tablisanyň z_t setiriniň her bir sütüninde c_j we d_j iki san däl-de, ol sanlaryň jeminden durýan bir san durýar. Tablisanyň iň soňky iki setirinde erkin t parametr üçin z_t çyzygy görnüşde ýazylýar. z_t almak üçin iň soňky setiriň koeffisiýentlerini t-e köpeldip, ony iň soňkynyň öňündäki setiriň degişli koeffisiýentleri bilen goşmak gerek.

Simpleks usuly bilen seredilýän tablisadaky meseläni çözüp, onuň daýanç meýilnamasyny, soňra bolsa optimal maksatnamasyny tapýarys. Biz iň soňky iki setiriň koeffisiýentlerini hem simpleks usulyny ulanyp üýtgedýäris. Täze koeffisiýentleri p, q bilen belläliň. Şeýle hem P we Q belläp, täze tablisany (*19-njy tablisa*) alarys.

Meýilnama optimal bolýanlygy üçin z_t setiriň hemme koeffisiýentleri otrisatel däldir:

$$p_j + q_j\alpha \geq 0.$$

Soňra biz ikinji tapgyra seredeliň.

2. t-niň şol bir depede maksimuma eýe bolup biljek bahalaryny kesgitlemeli. Başgaça aýdylanda t-niň tablisada ýazylan maksatnama optimal bolup galar ýaly bahasyny tapmaly.

Eger z setiriň hemme koeffisiýentleri otrisatel bolmasa (däl bolsa) maksatnama optimaldyr, şoňa görä-de meseläni çözmek üçin z_t funksiýanyň koeffisiýentleriniň hemmesi otrisatel bolmaz ýaly z-leri tapmaly:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + q_1 t \geq 0, \\ p_2 + q_2 t \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_j + q_j t \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_n + q_n t \geq 0. \end{array}\right\} \tag{32}$$

Bu deňsizlikler ulgamynyň çözülişinde t-niň gerek bahasy tapylýar.

18-nji tablisa

	x_1	$-x_2$	$\dots$	$-x_n$	1
$y_1 =$ $y_2 =$ $\vdots$ $y_m =$		(a_{ij})			a_1 a_2 $\vdots$ a_m
$z_\alpha =$	$c_1 + d_1\alpha$	$c_2 + d_2\alpha$	...	$c_n + d_n\alpha$	0
$z_t = \begin{cases} \\ \end{cases}$	c_1 d_1	c_2 d_2	... ...	c_n d_n	0 0

19-njy tablisa

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$	1
$x_1 =$ $\vdots$ $x_s =$ $y_{s+1} =$ $\vdots$ $y_m =$				(b_{ij})				b_1 $\vdots$ b_s b_{s+1} $\vdots$ b_m
$z_\alpha =$	$p_1+q_1\alpha$	$p_2+q_2\alpha$	...	$p_s+q_s\alpha$	$p_{s+1}+q_{s+1}\alpha$	...	$p_n+q_n\alpha$	$P + Q\alpha$
$z_t = \begin{cases} \\ \end{cases}$	p_1 q_1	p_2 q_2	... ...	p_s q_s	p_{s+1} q_{s+1}	... ...	p_n q_n	P Q

Dürli ýagdaýdaky hususy görnüşlere seredeliň.

1) Goý, hemme koeffisiýentler $q_j > 0$ bolsun. (32) ulgamdan alarys:

$$q_j t \geq -p_j,\ t \geq -\frac{p_j}{q_j}, (j = \overline{1,n}).$$

Položitel sana bölünende deňsizligiň manysy üýtgemeýär. $(-p_j/q_j)$ sanlaryň gatnaşygy n sany deňsizlikler ulgamyndan alynýar we t parametr olaryň her birinden uly bolmalydyr. Bu sanlaryň içinden iň ulusyny saýlalyň:

$$\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right).$$

Eger t-ni bu gatnaşykdan iň uly edip alsak, onda galan şertler öz-özünden ýerine ýeter:

$$\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \le t.$$

Bu ýagdaýda t üçin ýokardaky çäk ýokdur, sebäbi islendik ýagdaýdaky t görkezilenden uly bolup, ulgam (32) kanagatlanýar. Şeýlelikde, tükenikli görnüşde:

$$\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \le t < \infty.$$

Gözlenýän aralygyň ahyryny α_1 we α_2 bilen belläp, hemme $q_j > 0$ ýagdaýlar üçin onuň aşakdaky bahalaryny alarys:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \\ \alpha_2 &= +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$[\alpha_1, \alpha_2]$ aralykda funksional şol bir depede maksimuma ýetýär. Diýmek,

$$t \in [\alpha_1, \alpha_2].$$

2) Goý, hemme koeffisiýentler $q_j < 0$ bolsun. (32) deňsizlikler ulgamyny çözýäris. Ýagny otrisatel sana bölenimizde deňsizligiň manysy tersine öwrülýär:

$$q_j t \ge -p_j,$$

$$t \le -\frac{p_j}{q_j}, \ (j = \overline{1,n}).$$

Eger t-ni n sanyň azyndan az edip alsak, onda hemme şertler ýerine ýetýär.

$$t \le \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right).$$

Bu ýerde t üçin hiç hili aşaky çäk ýokdur, şonuň üçin t-ni tükeniksiz kiçeltmek bolýar:

$$-\infty < t \le \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right).$$

Ýokardaky ýaly, gözlenýän aralygy degişlilikde α_1 we α_2 bilen belläliň:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = -\infty \\ &\alpha_2 = min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ýokarda görkezilen aralyk ýaly $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

3) Goý, q_j sanlaryň içinde položitelleri we otrisatelleri bar bolsun. Onda (32) deňsizlikler ulgamyny degişli alamatly, q_j koeffisiýentli iki sany topara bölmek bolýar. Onda položitel q_j-li deňsizlikler toparyndan alarys:

$$\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \le t.$$

Şeýle hem otrisatel q_j-li deňsizlikler toparyndan alarys:

$$t \le \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right).$$

(32) ulgamyň hemmesiniň kanagatlanmagy üçin t şol bir wagtyň özünde alnan deňsizlikleriň ikisini hem kanagatlandyrmalydyr:

$$\underbrace{\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)}_{(q_j>0)} \le t \le \underbrace{\min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)}_{(q_j<0)}.$$

Ýagny

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)(q_j > 0), \\ &\alpha_2 = \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)(q_j < 0), \\ &t \in [\alpha_1, \alpha_2]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Bu ýagdaýda t gyra bahalaryň ikisini hem kabul edýär.

4) Eger haýsy hem bolsa bir j_0 sütünde koeffisiýenti $q_{j0} = 0$ bolsa, onda ol nol göz öňünde tutulmaýar. Aşakdaky ýagdaýlara görä z_α setirde degişli koeffisiýenti $(p_{j0} + q_{j0})$ deňdir we optimallyk şertine görä ýazylan tablisada maksatnama otrisatel däldir:

$$p_{j_0} + q_{j0}\alpha \ge 0,$$

$q_{j0} = 0$ bolýanlygy üçin:

$$p_{j_0} + 0 \cdot \alpha = p_{j_0} \geq 0.$$

Ýagny, tablisadaky iň soňky setiriň öňündäki setiriň koeffisiýenti otrisatel däldir. Degişlilikde, z_t koeffisiýentiň görnüşi aşakdaka deň bolar:

$$p_{j_0} + q_{j0}\, t = p_{j_0} + 0 \cdot t.$$

Bu koeffisiýent islendik t-de otrisatel däldir:

$$p_{j_0} + 0 \cdot \mathrm{t} = p_{j_0} \geq 0.$$

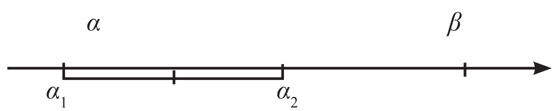
Şonuň üçin bular ýaly sütüniň bolany bilen, ony göz öňüne tutmasaň hem bolýar. Alnan netijeleri birleşdirip, ýeke-täk bir düzgüni alýarys.

Hemme ýagdaýlarda, ýagny $q_j = 0$-dan başga t-niň üýtgeýän çägi bolup $\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$ gatnaşyk hyzmat edýär. q_j koeffisiýentiň položitel ýagdaýynda z parametr uludan-uly, otrisatel bolanda kiçi gatnaşyk bolmaly. Şeýlelikde, (32) ulgamyň çözülişinden t-niň üýtgeýän (α_1, α_2) aralyk çägini kesgitleýäris, ol bolsa şol bir depede optimal çözüwe eýedir. Bir alnan aralyk $[\alpha_1, \alpha_2]$ bilen berlen $[\alpha, \beta]$ aralygy deňeşdireliň. Bu ýagdaýda biz $t = \alpha$ üçin meseläni çözendigimizi ýatdan çykarmalyň. Ýagny, α_1 bahasyna bagly bolmadyk $\alpha{:}\alpha_1 = \alpha$ birinji aralygyň çep gyrasy üçin (α_1 sagda bolup bilmeýär, α görä, çepde bolup bilýär).

Eger $\alpha_2 \geq \beta$, onda $[\alpha, \beta]$ aralygyň hemmesi $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralygyň içinde ýerleşýär we mesele çözülýär: t-niň islendik bahasy üçin $t \in [\alpha, \beta]$ funksiýa z_t şol bir depede maksimuma eýe bolýar (*15-nji surat*).

15-nji surat

Goý, $\alpha_2 < \beta$,onda $[\alpha, \alpha_2]$ aralygyň tapylan depesinde funksiýa maksimuma eýe bolýar, galan $[\alpha_2, \beta]$ aralykda goşmaça derňemekligi talap edýär (*16-njy surat*).



16-njy surat

10-njy tablisada α_2-niň bahasyny kesgitleýän j_0 sütüne seredeliň:

$$\alpha_2 = -\frac{p_{jo}}{q_{jo}}.$$

(34) we (35) formuladan görnüşi ýaly, α_2 baha $\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$ gatnaşygyň iň kiçi bahasy bolup, degişlilikde q_j otrisatel koeffisiýentdir .

$t < \alpha_2$ bolanda (32) ulgamyň hemme deňsizliklerini kanagatlandyrýar, şeýle hem $(p_j + q_j \alpha)$ hemme koeffisiýentler güýçli položitel, edil şonuň ýaly hem j_0 sütüniň koeffisiýenti:

$$p_{j0} + q_{j_0} t > 0,$$

t-ni $t = \alpha_2$-ä çenli ulaldalyň. Onda j_0 sütüniň koeffisiýentleri nola öwrülýär:

$$p_{jo} + q_{jo}\alpha_2 = p_{jo} + q_{jo}\left(-\frac{p_{j0}}{q_{j0}}\right) = 0$$

20-nji tablisa

	j_0	
$z_t = \{$	p_{j_0} q_{j_0}	

Beýleki sütünlerde q_j otrisatel bahasy bilen $t = \alpha_2$ kiçidir. $\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$ gatnaşykda, $(q_j + q_j t)$ koeffisiýentler güýçli položitelligine galýar. q_j-iň položitel bolan sütünlerinde ýokarda kesgitlenilişi ýaly, t-niň otrisatel däl sana ulalmasyna nol däl koeffisiýentler: $(p_j + q_j t)$ öwrülmeýärler. t-niň geljekki ulalmasyna-da j_0 sütündäki koeffisiýenti otrisatel edýär:

$$p_{j0} + q_{j_0} t < 0.$$

Şol bir wagtyň özünde galan hemme koeffisiýentler şeýle ulalmanyň başlangyç periodynda otrisatel däl bolup galýar. Diýmek, haçan $t > \alpha_2$ bolanda j_0 sütün simpleks tablisada rugsat ediji bolýar. Eger sütünde položitel koeffisiýentler ýok bolsa, ýagny rugsat ediji α_2

elementi saýlap bolmasa, onda ol haçan $t > \alpha_2$ bolanda funksional z_t çäksizdir, bu bolsa derňelýän meseläniň galan hemme $[\alpha_2, \beta]$ aralykda çözüwiniň ýoklugyny aňladýar. Eger j_0 sütünde položitel koeffisiýenti bar bolsa, onda meseläniň çözülişini dowam edýäris.

Şonuň üçin z_α setiri $z_{\alpha 2}$ setir bilen çalyşýarys we (ýagny t-niň ýerine α_2 goýýarys) j_0 sütünde rugsat ediji elementi iň kiçi simpleks gatnaşyga görä saýlaýarys we bir ädim modelleşdirilen Žordan yzygiderli ýok etmäni ýerine ýetirýäris. $t = \alpha_2$ bolýandygy sebäpli $z_{\alpha 2}$ setiriň koeffisiýenti j_0 sütünde elmydama nola deň bolýar, bu setir özgerdilende ol üýtgemeýär we onuň galan hemme koeffisiýentleri otrisatel däldir, onda bu ädim biz optimal çözüwi aşakdaky tertipde alarys. Tapylan çözüw üçin edil birinji haldaky ýaly meňzeşlikde t parametriň üýtgeýän aralygy kesgitlenilýär. Eger j_2-niň bahasy, j birnäçe sütünlerde alynýan bolsa, onda rugsat edilen diýlip olaryň islendigini almak bolýar.

Netijede, birinji hereketiniň algoritminiň, ýagny haçan $t = \alpha$ fiksirlenen üçin optimal çözüw gözlenende z_α ýokardan çäklendirilmedik bolmagy mümkin. Bu ýagdaýda haýsy hem bolsa bir j_0 sütünde z_α-setiriň koeffisiýenti otrisateldir:

$$p_{j0} + q_{j0}\alpha < 0,$$

galan hemme koeffiýentler bolsa j_0 sütünde položitel däldir (diýmek, rugsat ediji elementi saýlap bolanok). j_0 sütünde t aşakdaky erkin baha eýe bolar:

$$(p_{j0} + q_{j0}t).$$

Bizi gyzyklandyrýan zatlaryň biri hem $t \geq \alpha$ bolan ýagdaýy. Onda biz $t = t_0$ bahany alsak, görkezilen koeffisiýent nola deň bolýar:

$$p_{j_0} + q_{j_0}t_0 = 0,$$

bu ýerden

$$t_0 = -\frac{p_{jo}}{q_{jo}}. \tag{36}$$

$t = \alpha$ bolanda koeffisiýent otrisatel bolýar:

$$p_j + q_{j_0}\alpha < 0,$$

1) Goý, $q_{j_0} < 0$ onda

$$q_{j_o}\alpha < -p_{j_o},\ \alpha > -\frac{p_{j_0}}{q_{j_0}} \text{ ýa-da } \alpha > t_0.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly t_0 nokat koordinatalar okunda α-nyň çep tarapynda ýatýar (*17-nji surat*).

17-nji surat

t-niň otrisatel bolýan başga koeffisiýentini tapalyň:

$$p_{j0} + q_{j_0}\,\mathrm{t} < 0,\quad q_{j0} < 0,$$

$$q_{j_o}t < -p_{jo},\ \ t > -\frac{p_{jo}}{q_{jo}},\ t > t_o.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly t-niň bahasyny çäklendirmek islendik $t > t_0$ baha üçin $t \geq \alpha$ deňsizlik dogry.

Onda z_i setir otrisatelligine galar:

$$p_{j_0} + q_{j_0}t < 0.$$

2) Eger $q_{j0} = 0$ bolsa, onda

$$p_{j_0} + q_{j_0}\alpha = p_{j_0} < 0,$$

t-niň islendik bahasynda ýerine ýeter. Şeýlelikde, $t \geq \alpha$ islendik $q_{j_0} \leq 0$ koeffisiýent üçin z_i setirdäki j_0 sütün otrisatel bolup galar.

Bu sütünden meseläni kanagatlandyrýan bahany alyp bilmeýär. Onda $t \geq \alpha$ deňsizlik $[\alpha, \beta]$ aralykda z_i çyzykly deňlemäniň çözüwi bolmaýar.

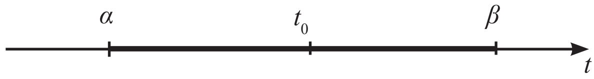
3) Eger $q_{j_0} > 0$ we $t = \alpha$, onda

$$p_{j0} + q_{j_0}\,\alpha < 0,$$

bu ýerden

$$q_{jo}a < -p_{jo};\quad a < -\frac{p_{jo}}{q_{jo}};\ \ \alpha < t_0.$$

Ýagny, t_0 bu ýagdaýda koordinata oklarynda α-nyň sag tarapynda (*18-nji surat*) ýa-da

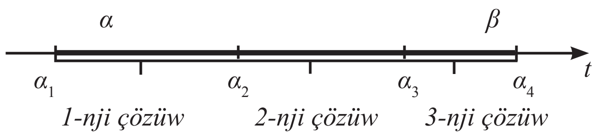


18-nji surat

t – bahada bolsa, onda $\alpha \leq t < t_0$ bolar. Bu interwalda hem z_t funksiýa hiç hili çözüwe eýe bolmaýar. $t = t_0$ bahada ol nola deň bolar t-niň artmagy bilen ol položitel bahany alar. $t \geq t_0$ täze çözgüde getirýär:

$$t_0 = -\frac{p_{jo}}{q_{jo}}.$$

Şonuň üçin şeýle tipli meseleleriň algoritimleri düzülende olar haýsy hem bolsa bir interwal aralygynda dowam eder (*19-njy surat*).



19-njy surat

Bu ýerde meseläniň çözüwi $t = \alpha_2$, $t = \alpha_3$ we ş.m. ýaly böleklerde amala aşyrylýar .

Mesele. Bitinsanly funksiýa üçin parametrik programmirleme meselesiniň maksat funksiýasy:

$$z_t = tx_1 + (1 + t)\, x_2 + (6 - 2t)\, x_3 \rightarrow \max,$$
$$t \in [1, 8]$$

we onuň çäklendirmeler ulgamy berlen:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1,$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4,$$
$$x_j \geq 0.$$

1) Eger $t = 1$ diýsek hemişelik koeffisiýentli funksionaly alýarys:

$$z_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max.$$

2) z_1 bitinsanly maksat funksiýa we t_1-e görä iki setirli meselä gelýäris (*21–22-nji tablisa*).

21-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	2	3	$\boxed{1}$	1
$y_2=$	3	1	−2	3
$y_3=$	4	2	1	4
$z_1=$	−1	−2	−4	0
$z_t=\{$	0	−1	−6	0
	−1	−1	2	0

22-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$y_1=$	2	3	1	1
$y_2=$	7	7	2	5
$y_3=$	2	−1	−1	3
$z_1=$	7	10	4	4
$z_t=\{$	12	17	6	6
	−5	−7	−2	−2

22-nji tablisada tapylan çözgüt $t = 1$ bolany üçin optimal, sebäbi z_1 setiriň ähli koeffisiýentleri otrisatel däl. Bu çözgüt:

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Şol bir depede boljak optimal çözgüt üçin, şol t-niň ähmiýetini kesgitläliň. Şonuň ýaly ählisi $q_j < 0$ (azat agzany hasap etmän, iň soňky setirde ähli sanlar otrisatel), (33) formulalardan peýdalanýarys:

$$\alpha_1 = -\infty$$

$$\alpha_2 = \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right),$$

$$(t \in (\alpha_1, \alpha_2))$$

$$\left.\begin{aligned} 12 + \frac{12}{5}(-5) &= 0 \\ 17 + \frac{12}{5}(-7) &= \frac{1}{5} \\ 6 - 2\frac{12}{5} &= \frac{6}{5} \\ 6 - 2\frac{12}{5} &= \frac{6}{5} \end{aligned}\right\}$$

Biziň ýagdaýymyz üçin $\alpha_1 = 1$ (berlen aralygyň çep tarapy);

$$-\frac{p_1}{q_1} = -\frac{12}{-5} = \frac{12}{5},\ -\frac{p_2}{q_2} = -\frac{17}{-7} = \frac{17}{7},$$

$$-\frac{p_3}{q_3} = -\frac{6}{-2} = 3.$$

Şol sanlardan iň kiçisi $\frac{12}{5} = a_2$.

$1 \le t \le \frac{12}{5}$ ýagdaýda çözüwi (0, 0, 1) nokatda bolar. Alnan kesim $\left[1, \frac{12}{5}\right]$ berlenden [1, 8] kiçi. Seretmezden tapylan kesimi aýyrýarys we $\left[\frac{12}{5}, 8\right]$ galan kesim üçin meseläni çözýäris. Onuň üçin t-e $t = \frac{12}{5}$ ähmiýeti berýäris we onuň üçin $Z_{\frac{12}{5}}$ setiri hasaplaýarys. Birinji sütünde noly alarys; $Z_{\frac{12}{5}}$ setiriň galan koeffisiýentleri položitel. Tablisada başga sanlaryň ählisini üýtgetmän galdyrýarys. Netijede, 23-nji tablisa gelýäris.

23-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$\boxed{2}$	3	1	1
$y_2 =$	7	7	2	5
$y_3 =$	2	–1	1	3
$z_{\frac{12}{5}} =$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
$z_t = \{$	12 –5	17 –7	6 –2	6 –2

24-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$y_2 =$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$y_3 =$	–1	–4	–2	2
$z_1 =$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
$z_t = \{$	–6 $\frac{5}{2}$	–1 $\frac{1}{2}$	0 $\frac{1}{2}$	0 $\frac{1}{2}$

$t > \frac{12}{5}$ ýagdaýda noluň ýerinde otrisatel san emele geler we meýilnama optimal bolmagyny bes eder. Şonuň üçin şol sütüni rugsat berýän diýip alýarys. Rugsat berýän element 2 bilen ädimi ädip, $Z_{\frac{12}{5}}$ setiriň koeffisiýentlerinde üýtgemän galan 24-nji tablisany alýarys.

Täze meýilnama optimal:

$$x_2 = x_3 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2},$$

sebäbi $z_{\frac{12}{5}}$ setiriň ähli koeffisiýentleri otrisatel däl. Iň soňky setirde ähli koeffisiýentler q_j položitel: $q_j > 0$, bu ýagdaý üçin bolsa (32) formulalar boýunça

$$\alpha_1 = \max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$$

$$\alpha_2 = +\infty.$$

Hasaplaýarys:

$$-\frac{p_1}{q_1} = -\frac{-6}{\frac{5}{2}} = \frac{12}{5},\ -\frac{p_2}{q_2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$-\frac{p_3}{q_3} = \frac{-0}{\frac{1}{2}} = 0.$$

Şol sanlardan iň ulusy $\frac{12}{5}$, degişlilikde, $\alpha_1 = \frac{12}{5}$

Ýöne welin, bu şonsuzam aýdyňdy, sebäbi α_1-e derňelýän aralygyň çepiniň soňy hemişe hyzmat edýär. $\alpha_2 = +\infty$ görä,

$$\frac{12}{5} \leq t < +\infty$$

üçin (1/2, 0, 0) şol bir depede optimal çözgüdi alarys. Bu aralyk $[\frac{12}{5}, 8]$ barlap öwrenilýänden has uly, şonuň üçin mesele çözülen.

Netije: $1 \leq t \leq \frac{12}{5}$ ýagdaýynda $\overline{a}_1(0; 0; 1)$ depede optimal çözgüt, $\frac{12}{5} \leq t \leq 8$ ýagdaýynda $\overline{a}_2(\frac{1}{2}; 0; 0)$ depede optimal çözgüt (*15-nji surat*). $t = \frac{12}{5}$ ýagdaýynda çözgüdi $\overline{a}_1$ we $\overline{a}_2$ depeleriň ikisinde we olaryň güberçek görnüşinde, islendik nokatda $\overline{a} = \lambda\overline{a}_1 + (1-\lambda)\overline{a}_2$, bu ýerde $0 \leq \lambda \leq 1$.

3. Geometrik manysy we grafiki çözülişi

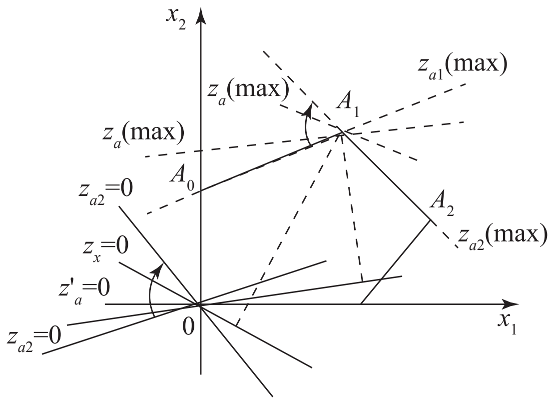
Meseläniň çäklendirme sistemasy Ω köpgranlygy kesgitleýär. Aşakdaky deňleme koordinata başlangyjyndan geçýän käbir gipertekizlige degişli edilýär:

$$z_t = 0$$

ýa-da

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)(-x_j) = 0.$$

Indi parametre baha bereliň: $t = \alpha$. Bu ýagdaýda gipertekizlik belli bir ýagdaýy eýeleýär. Ony koordinatalar başlangyjyndan maksimal süýşürip, A_1 nokatda onuň çözüwini alarys (*20-nji surat*).



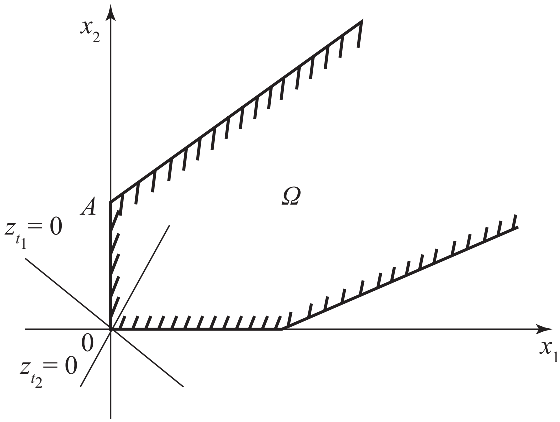
20-nji surat

Indi parametriň ulylygyny üýtgedeliň, α derek $t = \alpha'$ bahany alalyň. Bu ýagdaýda gipertekizlik öz ýagdaýyny üýtgeder, emma ol şonda-da koordinatalar başlangyjyndan geçer, ýagny ol koordinatalar başlangyjynda öňki ýagdaýyna görä belli bir burça aýlanar. $z_{a'} = 0$ gipertekizligi koordinatalar başlangyjyndan süýşürip, ýene-de A_1 depä düşeris. Ýöne bu ýagdaýda funksionalyň maksimal bahasy başga bolar. Sebäbi ol häzirki gipertekizlige degişli bolan A_1nokadyň asylan gyşarmasyna deň. Bu gipertekizlik bolsa aýlandy we gyşarmasy üýtgedi.

Şuňa meňzeşlikde t başdaka $t = \alpha''$ baha berip, ýene-de A_1 nokatda çözüwini taparys we ş.m. Tä gipertekizlik A_1 A_0 gapyrga parallel ($t = \alpha_1$ bolanda) ýa-da A_1 A_2 gapyrga parallel ($t = \alpha_2$ bolanda) bolýança dowam etdireris. Bu iki çözüwiň hem degişli gapyrgalaryň ähli nokatlarynda tükeniksiz köp optimal çözüwleri bolar.

t-ni ýene-de ulaldyp (α_2-den hem ulaldyp), optimal çözüwi indi özüniň t interwal üýtgemesi bolan A_2 depede alarys. Analitiki usulda bu geçiş Žordan kadadan çykmalaryň modifisirlenen ädimlerinden peýdalanylyp ýerine ýetirilýär.

Eger Ω köpgranlyk çäklenmedik bolsa, onda $z_t = 0$ gipertekizlik t-niň käbir bahalarynda z_t çäklenmedik bolar.



21-nji surat

Ýokardaky 21-nji suratda z_{t1} çäksiz, z_{t2} bolsa A nokatda maksimal bahany alýar.

Ýokardaky alnanlardan iki üýtgeýänlilerden düzülen parametrik programmirleme meselesini grafiki usulda hem çözüp bolýar. Onuň çözüliş yzygiderligini meselede aýdyňlaşdyraly. Goý,

$$-x_1 + x_2 \le 3,$$

$$4x_1 + 5x_2 \le 51,$$

$$2x_1 - 5x_2 \le 3,$$

$$x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

şertlerde

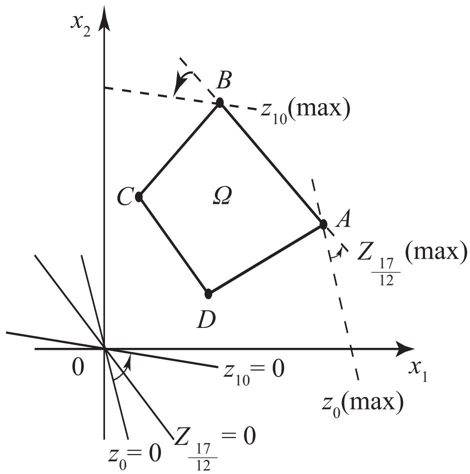
$$z_t = 5x_1 + (2 + 3t)x_2 \qquad (t \in [0, 10]),$$

deňlemäniň maksimumyny tapmaklyk talap edilsin.

Ω köpburçluk gurlup, parametre iň kiçi $t = 0$ baha berilsin we

$$z_0 = 5x_1 + 2x_2$$

funksiýa üçin A nokatda maksimum tapylsyn (*22-nji surat*).



22-nji surat

z_t-ni nola deňläliň we funksionalyň deňlemesinden islendik t üçin gönüniň deňlemesini tapalyň:

$$x_2 = -\frac{5}{2+3t}x_1.$$

Bu göni çyzygyň burç koeffisiýentini k_z bilen belgiläliň:

$$k_z = -\frac{5}{2+3t},.$$

Ol koeffisiýentiň başlangyç t = 0 bolandaky bahasy:

$$k_{z0} = -\frac{5}{2}.$$

t parametre görä burç koeffisiýentiniň önümini tapalyň:

$$(k_z)'_t = \left(-\frac{5}{2+3t}\right)'_t = \frac{15}{(2+3t)^2}.$$

Önüm islendik t üçin hem položitel bolany üçin t-ni ulaltdygyňça burç koeffisiýenti hem ulalýar.

Bu artmanyň predelini hasaplalyň:

$$\lim_{t\to+\infty} k_z = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{5}{2+3t}\right) = -0,$$

t-ni ulaltdygyňça k_z burç koeffisiýenti otrisatel tarapdan nola ýakynlaşýar. Bu üýtgemä sagadyň aýlanýan ugrunyň tersine aýlanmaga rugsat berlen esasy göniniň soňky gorizontal ýagdaýyna ýetmegi mysal bolup biler.

Bu analiziň dowamynda şu aşakdakylary ýatda saklamaly: Esasy göniniň wertikal ýagdaýynda ol göniniň burç koeffisiýenti funksiýa görnüşinde kabul edilende, ol funksiýa üzülýär. Esasy göniniň sagat diliniň tersine absissa okundan başlap, göni wertikal ýagdaýyna ýetýänçä aýlananda burç koeffisiýenti 0-dan $+\infty$-e çenli artýar, ondan soň bolsa ($-\infty$)-den 0-a çenli artýar.

t ulalanda esasy göniniň özüni alyp barşyny kesgitläp, optimal çözüwiň özüni nädip alyp barjakdygyny görmek ýeňildir.

Bu ýagdaýda t-niň käbir bahalaryna çenli optimum A depede bolar, soňra bolsa t-niň galan bahalarynda optimum B depä geçer. Çözüwiň A hem-de B depede bolan momentini, ýagny çözüwiň ähli AB gapyrgada bolmaklygyny tapmaklyk üçin esasy göniniň we AB göniniň burç koeffisiýentlerini deňlemeli, ýagny olar bu ýagdaýda parallel bolmaly.

$$k_{AB} = -\frac{4}{5}$$

bolany üçin

$$-\frac{4}{5} = -\frac{5}{2+3t}; \quad t = \frac{17}{12}.$$

Şunlukda,

$$0 \le t < \frac{17}{12}$$

bolanda optimal çözüwi A depede bolar.

$$\frac{17}{12} < t \le 10$$

bolanda bolsa optimal çözüw B depede bolýar.

$$t = \frac{17}{12}$$

bolanda bolsa optimal çözüw A we B depelerde we AB gapyrganyň ähli nokadynda bolar. Nokatlaryň koordinatalary $A(9, 3)$ we $B(4, 7)$ degişli deňlemeleriň jübütini işläniňde tapylýar.

§5. Ülüşli çyzykly programmirleme meselesi

1. Ykdysady meseleler we olaryň matematiki şekillendirilişi

Goý, haýsy hem bolsa bir önümçilik kärhanasynyň önüm öndürişi n görnüşli tehnologiýa arkaly bolsun. Eger önümiň öndürilişine birlik wagtynda seredilse we ol degişlilikde $q_1, q_2, \ldots q_n$ diýip bellenilse, edil şonuň ýaly hem şol birlik wagtda önümi öndürmäge çykarylýan harajat degişlilikde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bilen belgilense, şeýle-de önümiň öndürilişiniň tehnologiýalarynyň görnüşlerini $x_1, x_2, \ldots x_n$ näbelliler bilen bellenilse,

$$z_2(x) = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n = \sum_{j=1}^{n} q_jx_j$$

görnüşde önümiň umumy çykyşynyň n tehnologiýa arkaly jemini kesgitläp bolar. Edil şonuň ýaly-da:

$$z_1(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{j=1}^{n} p_jx_j.$$

Ykdysadyýetde belli bolan gymmat diýen görkezijini ýokardakydan alarys:

$$F = \frac{z_1(x)}{z_2(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} q_jx_j}, \tag{37}$$

(37) – bu önümi öndürmek üçin düşýän gymmaty. (37)-iň netijesi gatnaşygyň kiçiligi we ululygy bilen kesgitlenilýär. Eger (37) örän kiçi bolsa, onda seredilýän kärhananyň girdejisi uly bolýar, tersine (37) uly bolsa, onda kärhananyň girdejisi kiçi bolýar.

Maksat funksiýanyň ülüşli bolmagy bilen bu mesele çyzykly däl programmirleme meselesine öwrülýär.

Mundan başga hem ykdysady görkezmeleriň biri, ýagny önümçilikden girýän arassa girdeji ol önümiň bahasyndan harajady aýyrmakda emele gelýär. Eger arassa girdejini harajada bölsek, ykdysadyýetde peýdalylyk düşünje alnar.

Netijede, ülüşli çyzykly däl meseläniň matematiki modelini aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$F = \frac{z_1(x)}{z_2(x)} \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ \ (i = \overline{1,m}), \tag{39}$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, ..., n. \tag{40}$$

2. Esasy teoremalar

1-nji teorema. *Ω köpburçlyga degişli bolan göni çyzykly kesimde ülüşli z funksional monoton üýtgeýändir.*

S u b u d y. Goý, bize Ω köplügiň içinde, ýagny köpburçlukda ahyrky nokatlara x' we x'' bolan kesim berlen bolsun. Onda köpburçlugyň güberçek häsiýetine görä ahyrky nokatlaryň üsti bilen şol kesimiň islendik nokatlarynyň çyzykly kombinasiýasyny

$$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'', 0 \le \lambda \le 1$$

görnüşinde ýazmak bolar. Onda şol kesimiň içinde ýerleşen nokatlary şeýle görnüşde ýazmak bolar:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda x'_1 + (1-\lambda)x'_1 \\ x_2 = \lambda x_1^{'} + (1-\lambda)x'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda x'_n + (1-\lambda)x'_n \end{array}\right\}$$

Eger biz drobuň sanawjysyny kesgitlesek, onda:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = p_1(\lambda x_1{}' + (1-\lambda)x_1{}'') + \\ &+ p_2\left(\lambda x_2{}' + (1-\lambda)x_2^{''}\right) + ... + p_n(\lambda x'_n + (1-\lambda)x_n{}') = \\ &= \lambda(p_1x_1^{'} + p_2x_2 + ... + p_nx_n) + (1-\lambda)(p_1x_1{}' + p_2x_2^{''} + ... + p_nx_n^{''}) \end{aligned}$$

$$z_1(x) = \lambda z_1(x') + (1-\lambda)z_1(x'').$$

Edil ýokardaky ýaly drobuň maýdalawjysyny ýazýarys:

$$z_2(x) \ z_2(x) = \lambda z_2(x') + (1-\lambda)z_2(x'') \tag{41}$$

$$z(x) = \frac{\lambda z_1(x') + (1-\lambda)z_1(x'')}{\lambda z_2(x') + (1-\lambda)z_2(x'')}. \tag{42}$$

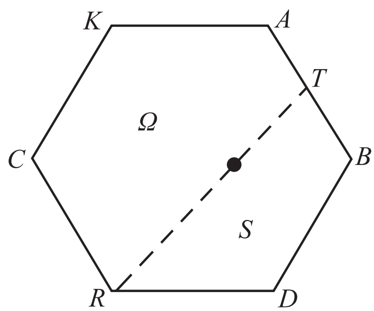
Eger-de biz (42) berlen x^1 hem-de x^n näbellileri, ýagny köpburçlukda berlen göni çyzykly kesimiň ahyrky nokatlary hasaba alnan bolsa, onda (42) görnüşdäki ülüşli funksiýalarymyz λ näbellä görä funksiýany emele getirýär. (42-ä) görä önüm alyp, funksiýanyň monotonlygyny kesgitläliň:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{z_1(x')z_2(x'') - z_2(x'')z_2(x')}{[z_2(x)]^2}. \qquad (43)$$

Netijede, biz λ görä (43)-i aldyk, ol gatnaşyk, esasan, alamaty boýunça drobuň sanawjysyna bagly bolup durýar. (43) esasynda ülüşli funksional z-iň alamatynyň şol bir görnüşde saklanýandygy üçin onuň monotondygy görünýär. Teorema subut edildi.

2-nji teorema. *Ülüşli funksional z Ω köpburçlugyň diňe depelerinde maksimum hem-de minimum bahalara eýe bolup bilýär. Eger z funksional Ω-köpburçlugyň birnäçe depelerinde maksimuma hem-de minimuma eýe bolup bilýän bolsa, onda şol köpburçlugyň gabygynda hem eýedir.*

Subudy. Biz teoremanyň 1-nji bölegininiň subudyny tersinden subut edeliň. Goý, bize Ω köpburçlugy berlen bolsun. Goý, şol köpbuçlukda ýerleşen s nokatlarda z funksional maksimum baha eýe bolýan bolsun.



23-nji surat

Eger biz şol s nokatlardan aşaklygyna R depä çenli süýşsek, onda z funksiýanyň bahasy artýan bolsun. Eger s nokatlardan ýokary T nokatlara çenli süýşsek, onda z funksiýanyň bahasy peselýär. Haçan T nokatlara baranda ol minimum baha eýe bolar. Onda biz ters tarapa hereket edenden soň funksiýanyň monoton artýandygyny görýäris. Ýagny R nokatlar T nokatlara tarap hereket edenden soňra onuň monoton kemelýändigini görýäris. Onda ekstremum elmydama köpburçlugyň çäkli nokatlarynda, depesinde ekstremuma eýe bolýar. Eger-de biz köpgranlyga seretsek, onda ol ekstremumyna gapdal gapyrgasynda eýe bolýar.

1-nji teoremanyň esasynda z funksiýanyň monoton artýandygyny ýa-da monoton kemelýändigini görmek bolýar. Indi bolsa teoremanyň 2-nji bölegine seredeliň.

Goý, $x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}$ nokatlarda z funksiýa maksimuma ýetýän bolsun. Ol nokatlar güberçek köpburçlugyň ahyrky nokatlary diýlip hasaplanylýar. Meseläniň şertine görä

$$z_{\max}(x) = \frac{z_1(x^1)}{z_2(x^2)} = \frac{z_1(x^2)}{z_2(x^2)} = ... = \frac{z_1(x^k)}{z_2(x^k)}. \tag{44}$$

Eger-de biz Ω köpburçlugyň gabygynda ýerleşýän erkin x nokatlaryny saýlasak, onda ol nokatlaryň esasynda biz çyzykly kombinasiýasyny ýazyp bileris:

$$z(x) = \frac{z_1(x)}{z_2(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n}{q_1x_1 + q_1x_1 + ... + q_nx_n}. \tag{45}$$

Eger deňligiň sag we çep taraplaryna, degişlilikde $q_1, q_2, ..., q_n$ köpeldilse,onda aşakdaky netijäni almak bolýar:

$$z(x) = \frac{\lambda_1 z_1(x^{(1)}) + \lambda_2 z_1(x^{(2)}) + ... + \lambda_k z_1(x^{(k)})}{\lambda_1 z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 z_2(x^{(2)}) + ... + \lambda_k z_2(x^{(k)})}.$$

Meseläniň şertine görä (44)-den alarys:

$$\begin{cases} z_1(x^{(1)}) = z_{\max} z_2(x^{(1)}), \\ z_1(x^{(2)}) = z_{\max} z_2(x^{(2)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1(x^{(k)}) = z_{\max} z_2(x^{(k)}). \end{cases}$$

$z(x)$ gatnaşykda ýokarda goýup, aşakdaky gatnaşygy alarys:

$$z(x) = \frac{\lambda_1 z_{\max} z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 z_{\max} z_2(x^{(2)}) + ... + \lambda_k z_{\max} z_2(x^{(k)})}{\lambda_1 z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 z_2(x^{(2)}) + ... + \lambda_k z_2(x^{(k)})} =$$

$$= \frac{z_{\max}\left[\lambda_1 z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 z_2(x^{(k)})\right] + \ldots + \lambda_k Z_2(x^{(k)})\right]}{\lambda_1 z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 z_2(x^{(2)}) + \quad + \lambda_k z_k(x^{(k)})} = z_{\max}.$$

Teorema subut edildi.

3. Geometriki manysy we grafiki çözülişi

Biz meseläniň grafiki usul bilen çözülişini kesgitlemek üçin Ω köpburçluga seredeliň. Ýagny, tekizlikde x_1 we x_2 koordinatalaryna görä:

$$z = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{q_1 x_1 + q_2 x_2},$$

bu ýerden x_2-ni tapalyň:

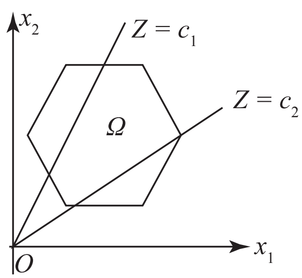
$$zq_1 x_1 + zq_2 x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$(zq_2 - p_2)x_2 = (p_1 - zq_1)x_1,$$

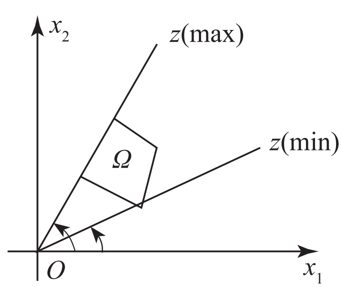
$$x_2 = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2} x_1 \quad \text{ýa-da } x_2 = kx_1,$$

$$k = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2}.$$

Belli bolşy ýaly, ýokardaky x_1-e we x_2-ä görä deňleme koordinatalar okunyň başlangyjyndan geçýän bissektrisany aňladýar. Eger biz z funksiýanyň bahasyny hasaba alsak, onda k-nyň takyk bahasyny alarys. Ol bolsa z funksiýanyň artmagynyň esasynda koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzyk saga ýa-da çepe koordinatalar başlangyjyna görä aýlanýar. Sebäbi, k burç koeffisiýenti z-iň üýtgemegi bilen üýtgeýär.



24-nji surat



25-nji surat

z-iň monoton üýtgemegi bilen k hem üýtgäp, koordinatalar başlangyjyndan çykýan göni çyzyk tekizlikde ýerleşen köpburçlugyň maksimum hem-de minimum depelerini koordinatalar okunyň daşyndan aýlanmak esasynda kesgitlenilýär. Eger z monoton artýan bolsa, onda onuň hereketi sagat diliniň tersine bolýar. Eger kemelýän bolsa, onda sagat diliniň ugruna bolýar.

z funksiýanyň kemelýändigini ýa-da artýandygyny kesgitlemek üçin, ýagny onuň monotonlygyny kesgitlemek üçin k-dan z-e görä önüm alýarys:

$$\frac{dk}{dz} = \frac{-q_1(zq_2 - p_2) - (p_1 - zq_1)q_2}{(zq_2 - p_2)^2} = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{(zq_2 - p_2)^2}.$$

Görşümiz ýaly, alnan önümiň netijesinde emele gelen gatnaşykda drobuň maýdalawjysy elmydama položitel, onda bu gatnaşyk sanawjysyna bagly bolup, sanawjyda bolsa z näbelli bolmanlygy üçin oňa bagly däldir. Şoňa görä bu önümiň alamaty hemişelik bolup, z funksiýa artanda gatnaşyk artýar, kemelende bolsa kemelýär we koordinatalar okunyň daşynda aýlanýar. Tersine, göni çyzyk bir ugur boýunça aýlananda, z funksional diňe ösýär ýa-da diňe kemelýär. Şonuň üçin z diňe artanda ýa-da kemelende koordinatalar okuna görä onuň maksimum ýa-da minimum depeleri kesgitlenýär. Diýmek, z funksiýanyň maksimumyny ýa-da minimumyny kesgitlemeklik onuň depelerini kesgitlemekligiň özeni bolup durýar. Bu ýagdaýda aşakdaky ýagdaýlaryň bolmagy mümkin:

1) Eger Ω köpburçluk berlip, z funksiýa ösýän ýa-da artýan bolsa, onda koordinatalar okundan çykyp, göni çyzygy kesgitläp, onuň minimum hem-de maksimum depelerini tapýarys.

2) Birnäçe ýagdaýlarda Ω köpburçlugy çäklendirilmedik, ýöne onuň maksimum hem-de minimum depeleri kesgitlenen bolsa, onuň maksimum hem-de minimum bahalary tapylýar.

3) Eger z funksiýa haýsy hem bolsa bir depeden maksimum, minimum kesgitlenen bolsa, onda onuň ikinji biri kesgitlenmän, Ω köpburçlugyň haýsy hem bolsa bir tarapyna ∞-e görä barýan bolsa, onda olar ∞-e duşuşyp, onuň maksimum asimptotiki bahasy bar diýilýär.

4) Eger maksimum, minimum bahasy kesgitlenen bolsa, onda onuň maksimum, minimum bahalary diňe asimptotiki bahalara eýe bolup, deň bolýar.

4. Ülüşli çyzykly programmirlemede simpleks usul

Ülüşli çyzykly programmirleme meselesinde çäklendirmeler ulgamy çyzykly, funksionalyň ekstremumynyň çözgüdi bolsa köpburçlugynyň depesinde ýetýär.

Bu çyzykly programmirleme bilen meňzeşlik ülüşli çyzykly meseläni optimallygyň görnüşiniň üýtgeşik kriteriýalary arkaly ýönekeý simpleks-usuly bilen çözmäge mümkinçilik berýär. Funksionalyň maksimumyny tapmaly:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n}{q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_nx_n} = \frac{z_1(x)}{z_2(x)}. \qquad (46)$$

Çäklendirmeler amala aşyrylan ýagdaýynda:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m, \\ &x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Meseläniň çözülişi şular ýaly yzygiderlikde amala aşyrylýar:

1. Ýönekeý ýol bilen birinji Žordanyň tablisasyny düzýäris. Bu ýagdaýda funksional üçin iki setir öňünden görnüp,ýokarkysynda sanawjynyň koeffisiýentleri, aşakdakysynda bolsa maýdalawjynyň koeffisiýentleri ýazylýar (*25-nji tablisa*).

25-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	a_m
$z_1 =$	$-p_1$	$-p_2$	$\dots$	$-p_n$	0
$z_2 =$	$-q_1$	$-q_2$	$\dots$	$-q_n$	0

2. Eger tablisada ýazylan meýilnama daýanç bolmaýan we a_i azat agzalarynyň arasynda otrisatel sanlar bar bolsa, onda modifisirlenen Žordanyň ädimleri bilen z_1 we z_2 setirleriň koeffisiýentleri we

ähli özgertmeleri barladyp, daýanç meýilnamasy gözlenýär. Netijede, k ädimler bilen 26-njy tablisa alynýar.

26-njy tablisa

	$-y_1$	$\dots$	$-x_s$	$\dots$	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	$\dots$	b_{1s}	$\dots$	b_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_r =$	b_{r1}	$\dots$	$\boxed{b_{rs}}$	$\dots$	b_{rn}	b_r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m =$	b_{m1}	$\dots$	b_{ms}	$\dots$	b_{mn}	b_m
$z_1 =$	p'_1	$\dots$	p'_s	$\dots$	p'_n	$P^{(k)}$
$z_2 =$	q'_1	$\dots$	q'_s	$\dots$	q'_n	$Q^{(k)}$

Bu tablisada b_i ähli azat agzalar otrisatel däl. z_1 we z_2 üçin setirlerde umumy ýagdaýda noldan tapawutly $P^{(k)}$ we $Q^{(k)}$ azat agzalar emele gelerler ($Q^{(k)}$ köpburçlugyň çözgüdinde maýdalawjynyň položitellik şerti boýunça noldan tapawutly).

Çyzykly programmirlemedäki ýaly, tablisada ýazylan, çözgüdi, ähli ýokarky üýtgeýänleri nola deňläp, gapdalyndakylary bolsa azat agzalara deňläp alýarys. Köpburçlugyň depesi şeýle tapylýar. Bu ýagdaýda k-njy ädimde funksionalyň bahasy:

$$z^{(k)} = \frac{P^{(k)}}{Q^{(k)}}.$$

z funksionalyň maksimumynyň optimal çözgüdini gözlemeklige seredeliň. Onuň üçin alnan depeden haýsydyr bir gapyrga boýunça optimal depä golaý ýerleşen köpburçlugyň goňşy depesiniň ýerini üýtgetmek gerek.

Analitiki ýol bilen modifisirlenen Žordanyň kadadan çykmasyny käbir rugsat beriji element b_{rs} bilen indiki ädimi ätmek gerek. Mesele şol elementi saýlamaklygyň düzgünini goýmakdan ybarat bolýar.

Diýmek, goý, rugsat beriji b_{rs} element bolsun. Täze (k + 1) 16-njy tablisada $P^{(k)}$ sana derek

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \frac{p'_s b_r}{b_{rs}}$$

san bolar; meňzeş ýagdaýynda $Q^{(k)}$sanyň deregine

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - \frac{q_s^{'} b_r}{b_{rs}}$$

bolar. (k + 1)-nji ädimde funksionalyň ähmiýeti şu aşakdaky täze sanlaryň gatnaşygyna deňdir:

$$z^{(k+)} = \frac{P^{(k)} - \frac{p_s^{'} b_r}{b_{rs}}}{Q^{(k)} - \frac{q_s^{'} b_r}{b_{rs}}}.$$

Alnan we öňki funksionalyň bahasynyň tapawudyny tapalyň:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = \frac{P^{(k)} - \frac{p_s^{'} b_r}{b_{rs}}}{Q^{(k)} - \frac{q_s^{'} b_r}{b_{rs}}} - \frac{P^{(k)}}{Q^{(k)}}.$$

Droblary umumy maýdalawja getirýäris:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = \frac{P^{(k)}Q^{(k)} - p_s^{'} Q^{(k)} \frac{b_r}{b_{rs}} - P^{(k)}Q^{(k)} + q_s^{'} P^{(k)} \frac{b_r}{b_{rs}}}{Q^{(k)}\left(Q^{(k)} - \frac{q_s^{'} b_r}{b_{rs}}\right)}.$$

Sanawjyda umumy maýdalawjyny minus alamaty bilen ýaýa salyp, meňzeş agzalary getireliň. Maýdalawjyda bolsa ýaýdaky aňlatmany $Q^{(k+1)}$-a çalşalyň:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = \frac{p_s^{'} Q^{(k)} - q_s^{'} P^{(k)}}{Q^{(k)} Q^{(k+1)}} \left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right).$$

Drobuň birinji sanawjysyny d_s simwol bilen aňladarys:

$$d_s = p_s^{'} Q^{(k)} - q_s^{'} P^{(k)} = \begin{vmatrix} p_s^{'} & P^{(k)} \\ q_s^{'} & Q^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Bu s sütünde we 16-njy tablisanyň azat agzalarynyň sütüninde duran z_1 we z_2 setirleriň elementleri bilen ikinji tertipli kesgitleýji bolup durýar. Bu belleme bilen alarys:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = \frac{d_s}{Q^{(k)} Q^{(k+1)}} \left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right). \qquad (49)$$

(43) aňlatmany barlalyň.

1. Köpburçlugyň çözgüdinden aýrylmaz ýaly, simpleks gatnaşyk $\frac{b_r}{b_{rs}}$ mümkin bolan ählisinden minimal we položitel bolmaly:

$$t = \frac{b_r}{b_{rs}} = \min\left(\frac{b_r}{b_{rs}}\right) > 0$$

(bu ýerde $b_{rs} > 0$ bolmaly, sebäbi meýilnamanyň ýolbererlik şerti boýunça $b_r > 0$ bomaly). Diýmek, (43) aňlatmada ýaý hemişe otrisatel bolar:

$$\left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right) < 0.$$

2. Islendik meýilnama üçin çözgüdiň ýaýlasynda şert boýunça funksionalyň maýdalawjysy hemişe položitel bolsa

$$Q^{(i)} > 0,$$

onda birinji drobuň maýdalawjysynda köpeldijileriň ikisem hemişe položitel bolar. Şonuň üçin $z^{(k+1)} - z^{(k)}$ tapawudyň alamaty d_s kesgitleýjiniň alamatyna bagly. Eger bu kesgitleýji položitel bolsa

$$d_s > 0,$$

onda (43) aňlatmanyň ähli sag bölegi otrisatel bolar:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} < 0.$$

Onda

$$z^{(k+1)} < z^{(k)}.$$

Başgaça, eger rugsat beriji hökmünde d_s položitel bilen sütüni alsak, onda Žordanyň kadadan çykmasynyň ädiminden soň funksionalyň bahasy peseler.

Eger d_s kesgitleýji otrisatel bolsa:

$$d_s < 0,$$

onda (43) aňlatmanyň sag bölegi položitel bolar:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} > 0,$$

$$z^{(k+1)} > z^{(k)}.$$

Bu ýagdaýda tertipleýin ädimde funksionalyň bahasy artar.

Eger $d_s = 0$ bolsa, onda

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = 0,$$
$$z^{(k+1)} = z^{(k)}$$

funksionalyň bahasy üýtgemän galar.

d_s kesgitleýji rugsat beriji sütüni saýlamak üçin hem kriteriýa bolup hyzmat edýär.

Şular ýaly netijeleri alyp, optimal meýilnamany gözläp tapmak üçin aşakdaky algoritmiň punktlaryny kesgitlemek bolar.

3. Daýanç meýilnama tapylandan soň her sütün üçin (42) kesgitleýjiniň bahasyny hasaplaýarys:

$$d_j = \begin{vmatrix} p_j^{'} & P^{(k)} \\ q_j^{'} & Q^{(k)} \end{vmatrix} = p_j^{'} Q^{(k)} - q_j^{'} P^{(k)} \, (j = 1, 2, ..., n)$$

we tablisanyň goşmaça setirinde alnan ähmiýeti girizeris. Azat agzalaryň setirlerini z_1 we z_2 bölmezden aýratyn deňlikde, ýagny funksionalyň ähmiýetini şol setirde azat agzalarynyň sütüninde ýazýarys:

$$z^{(k)} = \frac{P^{(k)}}{Q^{(k)}}.$$

Netijede 27-nji tablisany alarys.

4. Funksionalyň maksimumyna meseläniň çözgüdi ýagdaýynda rugsat beriji sütün üçin d_j kesgitleýjide otrisatel bolanyny saýlaýarys:

$$d_j = d_s < 0.$$

Eger şolar ýaly sütünler birnäçe bolsa, gowusy rugsat beriji hökmünde d_s kesgitleýji bilen absolýut ululyk boýunça has köp bolan sütüni almaly.

5. Saýlanan sütünde rugsat beriji element simpleks gatnaşygynyň iň pesi boýunça gözlenilýär.

6. Tapylan rugsat beriji element bilen modifisirlenen Žordanyň kadadan çykmasynyň bir ädimi ätlenilýär. Bu ýagdaýda z_1 we z_2 setirleriň koeffisiýentleri umumy kanun boýunça özgerdilýär, emma iň soňky setir doldurylmaýar.

27-nji tablisa

	$-y_1$	…	$-x_s$	…	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	…	b_{1s}	…	b_{1n}	b_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$y_r =$	b_{r1}	…	$\boxed{b_{rs}}$	…	b_{rn}	b_r
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$y_m =$	b_{m1}	…	b_{m2}	…	b_{mn}	b_m
$Z_1 =$	p'_1	…	p'_2	…	p'_n	$P^{(k)}$
$Z_2 =$	q'_1	…	q'_2	…	q'_n	$Q^{(k)}$
$d_j =$	d_1	…	d_s	…	d_n	$z^{(k)} = \dfrac{P^{(k)}}{Q^{(k)}}$

7. Her sütün üçin ýene d_j kesgitleýji hasaplanylýar, emma meýilnama üçin $z^{(k+1)}$ funksionalyň ähmiýetidir. Eger d_j kesgitleýjileriň arasynda iň bolmanda bir otrisatel san bar bolsa, şol rugsat beriji sütün bilen täze ädim ädilýär we ş.m.

8. Indiki ädimde hemme d_j kesgitleýjiler otrisatel däl bolan ýagdaýynda, optimal çözgüde ýetiler.

9. Funksionalyň minimumy meseläniň çözgüdi bolan ýagdaýynda rugsat beriji hökmünde d_j kesgitleýjiniň položitel ähmiýeti hökmünde sütüni kabul edýär. Rugsat beriji setir simpleks gatnaşygynyň minimumy boýunça gurulýar. d_j kesgitleýjileriň položitel dälligi optimallygyň kriteriýasy bolup hyzmat edýär.

Algoritmi üýtgetmegiň deregine, funksionalyň sanawjysynda alamaty üýtgedip, meseläni maksimum ýagdaýynda çözüp bolýar.

Mesele. Funksionalyň maksimumyny we minimumyny tapmaly:

$$z = \frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{3x_1 + x_2 + 5x_3}$$

çäklendirmeleri ýerine ýetirilen ýagdaýynda:

$$3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2 \geq 0,$$

$$x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 12 \geq 0,$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 - 1 \geq 0,$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3.$$

Birinji Žordanyň tablisasyny düzeliň, iki setirini funksionalyň koeffisiýentleri boýunça sanawjy we maýdalawjy üçin aýratyn dolduralyň (*28-nji tablisa*).

28-nji tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_2$	1
$y_1 =$	–3	6	1	2
$y_2 =$	–1	7	2	12
$y_3 =$	–2	4	$\boxed{-1}$	–1
$z_1 =$	–1	–2	1	0
$z_2 =$	–3	–1	–5	0

29-njy tablisa

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_3$	1
$y_1 =$	– 5	$\boxed{10}$	1	1
$y_2 =$	– 5	15	2	10
$x_3 =$	2	– 4	– 1	1
$z_1 =$	– 3	2	1	– 1
$z_2 =$	7	21	– 5	5
$d_j =$	8	11	0	$-\frac{1}{5}$

Azat agzalarynyň arasynda otrisatel sanlar bar bolany üçin, birinji hereket bilen daýanç meýilnamany taparys (*29-njy tablisa*). Şolar ýaly meýilnamany gözläp, tablisada ýene bir setiri goşýarys, d_s kesgitleýjileriň we z funksionalyň ähmiýetlerini hasaplaýarys we şol ýere ýazýarys:

$$d_1 = -3 \cdot 5 - 7(-1) = -8,$$

$$d_2 = 2 \cdot 5 - (-21)(-1) = -11,$$

$$d_3 = 1 \cdot 5 - (-5)(-1) = 0,$$

$$z = -\frac{1}{5}.$$

Ähli d_j kesgitleýjiler položitel däl bolany üçin, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ depede funksional minimuma ýetýänliginden $z_{\min} = -\frac{1}{5}$ netije çykarýarys.

Funksionalyň maksimumyny almak üçin rugsat beriji hökmünde ilkinji sütün saýlanyp alynýar, sebäbi onda otrisatel kesgitleýji iň uly absolýut ululygy (11) alýar. Bu sütünde rugsat beriji element bilen iň soňky d_j setirden başga ähli tablisany özgerdip, indiki ädim ädilýär we 30-njy tablisa alynýar.

30-njy tablisa

	$-x_1$	$-y_1$	$-y_3$	1
$x_2 =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$y_2 =$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2}$
$x_3 =$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$
$z_1 =$	-2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$
$z_2 =$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{21}{10}$	$-\frac{29}{10}$	$\frac{71}{10}$
$d_j =$	$-\frac{92}{5}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{5}$	$-\frac{12}{71}$

31-nji tablisa

	$-y_2$	$-y_1$	$--y_3$	1
$x_2 =$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
$x_1 =$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$
$x_3 =$	0	$\boxed{\frac{2}{5}}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$
$z_1 =$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{28}{5}$
$z_2 =$	$\frac{7}{5}$	0	$-\frac{11}{5}$	19
$d_j =$	$\frac{184}{25}$	$-\frac{133}{5}$	$\frac{878}{25}$	$\frac{28}{95}$

z_1 we z_2 setirleriň elementlerini ulanyp, täze tablisa üçin d_j kesgitleýjileri hasaplaýarys. Birinji sütünde bular ýaly kesgitleýji otrisatel: $d_1 = -\frac{92}{5}$, $\frac{5}{2}$-ni saýlaýarys, indiki ädimi ätleýäris (*31-nji tablisa*). Täze tablisada kesgitleýjileri hasaplap, ýene bir otrisateli tapýarys, şonuň üçin çözüji element $\frac{2}{5}$ bilen ýene bir ädim ätleýäris (*32-nji tablisa*).

32-nji tablisa

	$-y_2$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2=$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{5}{2}$
$x_1=$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{11}{2}$
$y_1=$	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
$z_1=$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{21}{2}$
$z_2=$	$\frac{7}{5}$	0	$-\frac{11}{5}$	19
$d_j=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{133}{2}$	6	$\frac{21}{38}$

Iň soňky tablisada (*32-nji tablisa*) ähli d_j kesgitleýjiler otrisatel däl. Bu belli däl ähmiýetler $x_1 = \frac{11}{2}$; $x_2 = \frac{5}{2}$; $x_3 = 0$ bolan ýagdaýynda funksionalyň maksimuma $z_{max} = \frac{21}{38}$ ýetýändigi barada aýdylýar. Mesele çözülen.

5. Bir jynsly däl funksionalyň ekstremumy we asimptotiki çözülişi.

Goý, aşakdaky meseläniň maksimumyny tapmak talap edilsin:

$$z = \frac{p_1 x_1 + ... + p_n x_n}{q_1 x_1 + ... + q_n x_n} = \frac{z_1(x)}{z_2(x)}$$

aşakdaky çäklendirmelerde:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m. \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Aşakdaky tablisany düzüp we birnäçe Žordan ädiminden soň sanawjy z_1 we maýdalawjy z_2 funksionalda P we Q azat agzalar peýda bolýan tablisany alarys (*33-nji tablisa*).

33-nji tablisa

	$-y_1$	…	$-x_k$	…	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	…	b_{1k}	…	b_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…
$y_k =$	b_{k1}	…	b_{kk}	…	b_{kn}	b_k
…	…	…	…	…	…	…
$y_m =$	b_{m1}	…	b_{mk}	…	b_{mn}	b_m
$z_1 =$	p'_1	…	p'_k	…	p'_n	P
$z_2 =$	q'_1	…	q'_k	…	q'_n	Q

Maksimum mesele aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$z = \frac{-p_1y_1 - ... - p_kx_k - ... - p_nx_n + P}{-q_1y_1 - ... - q_1x_1 - ... - q_nx_n + Q}, \tag{50}$$

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + ... + b_{1k}x_k + ... + b_{1m}x_n \leq b_1, \\ b_{k1}x_1 + ... + b_{kk}x_n + ... + b_{km}x_n \leq b_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}x_1 + ... + b_{mk}x_n + ... + b_{mn}x_n \leq b_m. \end{array}\right\} \tag{51}$$

$$y_i \geq 0, x_j \geq 0.$$

Ýokardaky mesele has çylşyrymly, sebäbi ol birjynsly däl. Onuň sanawjysyna *P, Q* goşulýar. Bu meseläniň çözülişiniň amatly ýoluny görkezmek üçin biz tekizlikde iki näbellili görnüşdäki kysymly däl meselä seredeliň we onuň geometriki manysyna üns bereliň.

Goý, tekizlikde kysymly däl ülüşli çyzykly programmirleme meselesi berlen bolsun:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_0}, \tag{52}$$

aşakdaky çäklendirmelerde:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq a_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq a_m, \end{array}\right\} \tag{53}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Üýtgeýänleri çalşyralyň:

$$\left.\begin{array}{l} x_l = \xi_1 + x_1^0 \\ x_2 = \xi_2 + x_2^0 \end{array}\right\}, \tag{54}$$

$$z = \frac{p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_1x_1^0 + p_2x_2^0 + p_0}{q_1\xi_1 + q_2\xi_2 + q_1x_1^0 + q_2x_2^0 + q_0}, \tag{55}$$

$$\begin{array}{l} p_1x_1^0 + p_2x_2^0 + p_0 = 0, \\ qx_1^0 + q_2x_2^0 + q_0 = 0. \end{array} \tag{56}$$

$$z = \frac{p_1\xi_1 + p_2\xi_2}{q_1\xi_1 + q_2\xi_2}, \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 &\le (a_1 - a_{11}x_1^0 - a_{12}x_2^0) \\ a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 &\le (a_m - a_{m1}x_1^0 - a_{m2}x_2^0) \end{aligned}\right\}, \tag{58}$$

$x_1^0,\ x_2^0,\ p_1^0,\ q_1^0,\ a_{11},\ ...,\ a_{m1}$ – hakyky sanlar, bu soňky ulgama ξ_1, we ξ_2 görä simpleks usuly ulanyp, onuň optimal çözüwi tapylýar.

§6. Çyzykly programmirlemäniň we oýunlar teoriýasynyň meseleleri

1. Oýunlar teoriýasynyň ykdysady we geometrik manysy. Eger birnäçe dawalaşýan taraplar (şahslar) berlen kanunlaryň toplumlary bilen kesgitleýän, käbir çözgütleri kabul edýän bolsa, we şahslaryň hersine kesgitlenen tölegler bilen dawanyň mümkin bolan ahyrky ýagdaýlaryň bolmagy belli bolsa, onda *oýun* bolup geçýändigi, oýnuň bolmagy diýilýär. Oýunlar teoriýasynyň meselesi bu oýunçynyň özüni alyp baryş ýoluny saýlamakdan ybarat bolýar, ondan gyşarma (ret etme), diňe onuň utuşyny peseldip bilýär.

1-nji kesgitleme. Eger gatnaşýan taraplaryň bähbiti (talaplary) dolulygyna ýa-da bölekleýin garşylykly bolsa, onda bu ýagdaý *dawaly (konfliktli)* diýlip atlandyrylýar.

2-nji kesgitleme. *Oýun* – bu hakyky ýa-da görnüşi taýdan, resmi dawa. Onda iň bolmanda iki gatnaşyjylar (oýunçylar) bolmaly, olaryň hersi öz maksatlaryna ýetmäge çalyşýar.

3-nji kesgitleme. Käbir maksatlara ýetmege gönükdirilen oýunçylaryň ýol bererli hereketleri *oýnuň kanunlary* diýlip atlandyrylýar.

4-nji kesgitleme. Oýnuň netijeleriniň san taýdan bahasy *töleg* diýlip atlandyrylýar.

5-nji kesgitleme. Eger oýuna diňe iki tarap (iki şahslar) gatnaşýan bolsa, onda bu oýun *iki bolup oýnalýan (jübütleýin)* diýlip atlandyrylýar.

6-njy kesgitleme. Eger tölegleriň jemi nola deň bolsa, ýagny bir oýunçynyň utulmagy, ikinjiniň ýeňişine deň bolsa, onda iki bolup oýnalýan oýun *nol jemli oýun* diýlip atlandyrylýar.

Iki bolup oýnalýan oýnuň nol jemlisi hem aşakda seredilýär.

7-nji kesgitleme. Oýunçy her bir mümkin bolan ýagdaýlardan öz etjek hereketini saýlamagyň takyk ýazgysyna oýunçynyň *strategiýasy* diýilýär.

8-nji kesgitleme. Oýunçynyň strategiýasy *optimal* diýlip atlandyrylýar, eger oýnuň köp gezek gaýtalanýan ýagdaýynda ol oýunça maksimal mümkin bolan ortaça ýeňişi üpjün edýän bolsa (ýa-da, onda şol bir zat, minimal mümkin bolan ortaça utulyş).

Goý, iki oýunçy bar bolsun, olardan biri öz mümkin bolan m strategiýalaryndan $(i = \overline{1,m})$ *i-nji strategiýany saýlap bilýär, ikinjisi bolsa, birinjiniň saýlawyny bilmän, öz mümkin bolan n strategiýalardan* $(j = \overline{1,n})$ *j*-nji strategiýany saýlaýar. Netijede, birinji oýunçy a_{ij} ululygy utýar, ikinji bolsa bu ululyga ýeňilýär.

a_{ij} sanlardan matrisany düzeliň

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matrisanyň setirleri birinji oýunçynyň strategiýalaryna laýyk gelýär, sütünler bolsa – ikinjiniň strategiýalaryna laýyk gelýär. Bu strategiýalar arassa diýlip atlandyrylýar.

9-njy kesgitleme. *A* matrisa *tölegli (*ýa-da *oýnuň matrisasy)* diýilýär.

10-njy kesgitleme. *m* setirleri we *n* sütünleri bar bolan *A* matrisa, $m \times n$ ölçegli ahyrky oýun diýilýär.

11-nji kesgitleme. $\alpha = \max_i (\min_i a_{ij})$ sana oýnuň *aşaky bahasy* ýa-da *maksimin* diýilýär, oňa degişli strategiýa (setir) bolsa *maksiminli* diýilýär

12-nji kesgitleme. $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$ sana oýnuň *ýokarky bahasy* ýa-da *minimaks* diýilýär, oňa degişli oýunçynyň strategiýasy (sütün) bolsa – *minimaksly* diýilýär.

***1-nji teorema**. Oýnuň aşaky bahasy hemişe oýnuň ýokarky bahasyndan ýokary däldir*.

13-nji kesgitleme. Eger $\alpha = \beta = v$ bolsa, onda v sana *oýnuň bahasy* diýilýär.

14-nji kesgitleme. $\alpha = \beta$ bolan, onda oýna *eýerli nokatly oýun* diýilýär.

Eýerli nokatly oýun üçin minimaksly ýa-da maksiminli strategiýasyny saýlamak ýeterlikdir sebäbi olar optimal.

Eger matrisa arkaly berlen oýnuň eýerli nokady ýok bolsa, onda onuň çözgüdini tapmak üçin garyşyk strategiýalar ulanylýar.

15-nji kesgitleme. Komponentleriniň her biri, oýunçy tarapyndan ulanylýan arassa strategiýalaryň otnositel ýygylygyny görkezýän, wektora berlen oýunçynyň *garyşyk strategiýasy* diýilýär.

Bu kesgitlemeden wektoryň komponentleriniň jemi 1-e deňligi, komponentleriň özleri bolsa otrisatel dälligi gös-göni gelip çykýar. Adaty birinji oýunçynyň garyşyk strategiýasyny $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ wektor hökmünde, ikinji oýunçynyň bolsa $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ wektor hökmünde aňladýarlar, bu ýerde $u_i \geq 0\,(i = \overline{1,m})$, $z_j \geq 0\ (j = \overline{1,n})$, $\Sigma_{i=1}^{m} u_i = 1, \Sigma_{j=1}^{n} z_j = 1$.

Eger U^* – birinji oýunçynyň optimal strategiýasy, Z^* – ikinji oýunçynyň optimal strategiýasy bolsa, onda

$$\nu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* z_j^*$$

san oýnuň bahasy bolýar. Oýnuň optimal strategiýasyny we bahasyny kesgitlemek hem oýnuň çözgüdini tapmak prosesini düzýär.

2-nji teorema. Nol jemli her bir matrisaly oýnuň garyşyk strategiýalarda çözgüdi bar.

3-nji teorema. v san oýnuň bahasy, *U^* we Z^** bolsa – optimal strategiýalar bolmagy üçin, aşakdaky deňsizligi ýerine ýetirmesi zerur we ýeterlikdir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \geq \nu(j = \overline{1,n}) \text{ we } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j^* \leq \nu \ \ (i = \overline{1,m}).$$

Eger 2-nji teorema oýnuň çözgüdi barlygy barada jogap berýän bolsa, onda indiki teorema 2×2, 2×n we n×2 oýunlar üçin bu çözgüdi nähili tapmaly diýen soraga jogap berýär, mysallar aşakda getirilendir

4-nji teorema. Eger oýunçylaryň biri optimal garyşyk strategiýany ulanýan bolsa, onda onuň utuşy oýnuň bahasyna deňdir we optimal oýunda ikinji oýunçy nähili ýygylyk bilen strategiýalary (olaryň içinde arassa strategiýalar hem), ulanjagyna bagly däl.

1-nji mesele. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matrisa bilen berlen oýnuň çözgüdini tapmaly, we şol çözgüdiň geometriki manysyny bermeli.

Çözülişi. Ilki bilen berlen matrisada eýerli nokadyny barlalyň. Onuň üçin setirleriň hersinde minimal elementleri (2 we 4) we sütünleriň hersinde maksimal elementleri (6 we 5) tapalyň. Diýmek, oýnuň aşaky bahasy α = max (2; 4) = 4, oýnuň ýokarky bahasy bolsa β = min(6; 5) = 5. Bu ýerden $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, onda oýnuň çözgüdi garyşyk optimal strategiýalar bolýar, oýnuň bahasy v bolsa $4 \leq v \leq 5$ çäklerde bolar.

Goý A oýunçy üçin strategiýa $U = (u_1; u_2)$ wektor bilen berilen bolsun. Onda 4-nji teorema esasynda B oýunçy tarapyndan B_1 ýa-da B_2 arassa strategiýalar ulanylan ýagdaýynda, A oýunçy oýnuň bahasyna deň bolan, ortaça ýeňşi alar, ýagny:

$$2u_1^* + 6u_2^* = \nu \text{ (}B_1\text{ strategiýa ýagdaýynda),}$$

$$5u_1^* + 4u_2^* = \nu\text{(}B_2\text{ strategiýa ýagdaýynda).}$$

Bu deňliklerden başga-da u_1^*we u_2^* ýygylyklary baglaşdyrýan deňlemäni goşarys:

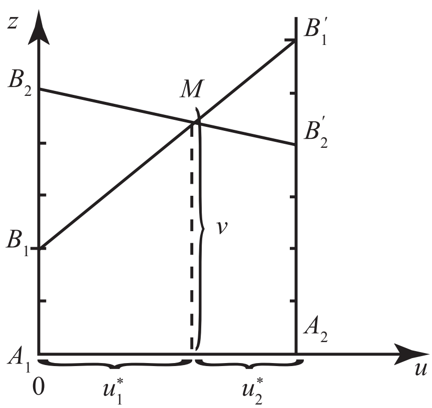
$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Üç näbelliler bilen alnan üç deňlemeler ulgamyny çözüp, $u_1^* = \frac{2}{5}$; $u_2^* = \frac{3}{5}$; $\nu = \frac{22}{5}$ taparys. Indi B oýunçy üçin optimal strategiýany tapalyň. Goý, berlen oýunçy üçin strategiýa $Z = (z_1; z_2)$ wektor tarapyndan berilsin. Onda

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

Soňky ulgamdan alnan haýsydyr bir iki deňlemeden düzülen deňlemeler ulgamyny çözüp, $z_1^* = \frac{1}{5}$; $z_2^* = \frac{4}{5}$ alarys. Diýmek, oýnuň çözgüdi garyşyk strategiýalar $U^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ we $Z^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$, oýnuň bahasy bolsa $\nu = \frac{22}{5}$ bolýar.

Indi berlen oýnuň çözgüdiniň geometrik manysyny bereliň. Onuň üçin *uOz* tekizlikde koordinatalar ulgamyny girizeliň we Ou okda $A_1\ A_2$ birlik uzynlykly kesimi aýryp goýalyň, onuň her nokadynda degişlilikde käbir garyşyk strategiýany $U = (u_1, u_2) = (u_1, 1\text{-}u_1)$ goýalyň (*26-njy surat*). Aýratyn hem, A_1 (0;1) nokada A_1 strategiýa, A_2 (1;0) nokada bolsa – A_2 strategiýa we ş.m. jogap berýär.



26-njy surat

A_1 we A_2 nokatlarda perpendikulýary we alnan gönülerde oýunçylaryň ýeňişini goýalyň. Birinji perpendikulýarda (berlen ýagdaýda ol Oz ok bilen gabat gelýär) A_1 strategiýa ýagdaýynda, ikinjisinde bolsa A_2 strategiýa ýagdaýynda A oýunçynyň ýeňişini aýryp goýalyň. Eger *A* oýunçy A_1 strategiýany ulanýan bolsa, onda onuň ýeňişi *B* oýunçynyň B_1 strategiýa ýagdaýynda 2-ä deň, B_2 strategiýa ýagdaýynda ol 5-e deň. 2 we 5 sanlara *Oz* okda B_1 we B_2 nokatlar laýyk gelýär.

Eger A oýunçy A_2 strategiýany ulanýan bolsa, onda onuň ýeňişi B oýunçynyň B_1 strategiýa ýagdaýynda 6-a deň, B_2 strategiýa ýagdaýynda ol 4-e deň. Bu iki sanlar perpendikulýarda B_1'we B_2' iki nokady kesgitleýärler, A_2 nokatda goýlan. B_1 we B_1', B_2 we B_2' nokatlary öz aralarynda birleşdirip iki gönini alarys, Ou okdan oňa çenli aralygy laýyk gelýän strategiýalaryň islendik utgaşdyrmalar ýagdaýynda orta ýeňşi kesgitleýär. Meselem, B_1B_1' kesimiň islendik nokadyndan Ou oka çenli aralyk B oýunçynyň B_1 strategiýalaryň we A_1 we A_2 strategiýanyň (u_1 we u_2 ýygylyk bilen) islendik utgaşdyrmalar ýagdaýynda v_1 orta ýeňşini kesgitleýär. Bu aralyk $2u_1 + 6u_2 = v_1$-e deň. Meňzeş ýagdaýda, B_2 strategiýa ulanylan ýagdaýynda orta ýeňiş B_2B_2' kesime degişli bolan nokatlaryň ordinatalary bilen kesgitlenýär.

Şeýlelikde, B_1MB_2' döwüge degişli bolan nokatlaryň ordinatalary olara islendik garyşyk strategiýa ulanylan ýagdaýynda A oýunçynyň minimal ýeňşini kesgitleýärler. Bu minimal ululyk M nokatda maksimal bolýar. Diýmek, bu ordinata v oýnuň bahasyna deň. M nokadyň koordinatalaryny B_1B_1' we B_2B_2' gönüleriň kesişme nokadynyň koordinatalary hökmünde tapalyň. Laýyk gelýän üç deňlikleriň aşakdaky görnüşi bar:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \nu, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \nu, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Iň soňky deňlemeler ulgamyny çözüp, $u_1^* = \frac{2}{5}$; $u_2^* = \frac{3}{5}$; $\nu = \frac{22}{5}$ alarys. Meňzeş ýagdaýda B oýunçy üçin optimal strategiýa tapylýar.

Onuň kesgitlemesi üçin deňlemeler bar:

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 22/5, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

ýa-da

$$z_1^* = \frac{1}{5};\ z_2^* = \frac{4}{5}.$$

Diýmek, oýnuň çözgüdi garyşyk strategiýalar $U^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ we $z^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Oýnuň bahasy bolsa $\nu = \frac{22}{5}$ bolýar. Bular ýaly netijä biz ýokarda geldik.

2×2 oýnuň çözgüdini tapmaklygyň ýokarda getirilen netijelerini jemläp, $2\times n$ ýa-da $n\times2$ oýunlaryň çözgütlerini tapmaklygyň esasy tapgyrlaryny görkezip bolýar.

1. Ikinji (birinji) oýunçynyň strategiýalaryna laýyk gelýän gönüleri gurýarlar.

2. Ýeňşiň aşaky (ýokarky) çägini kesgitleýärler.

3. Maksimal (minimal) ordinata bilen nokatda kesişýän iki gönä laýyk gelýän, ikinji (birinji) oýunçynyň iki strategiýasyny tapýarlar.

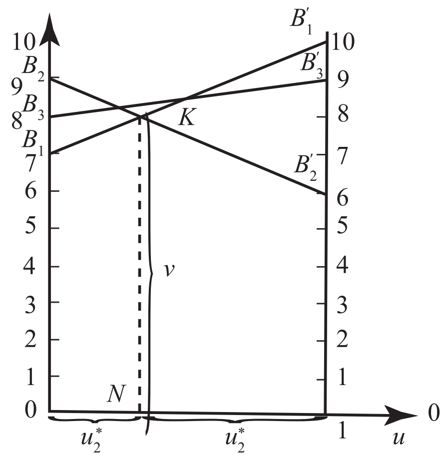
4. Oýnuň bahasyny we optimal strategiýalary kesgitleýärler.

2-nji mesele. Berlen matrisa tarapyndan

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

oýnuň çözülişini tapmaly.

Çözülişi. 22-nji suratda strategiýalara B_1B_1', B_2B_2' we B_3B_3' gönüler laýyk gelýär. B_1KB_2' döwük bolsa B oýunçynyň ýeňşiniň aşaky çägine laýyk gelýär. Oýnuň $U^* = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, $Z^* = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\upsilon = 8$ çözülişi bar.



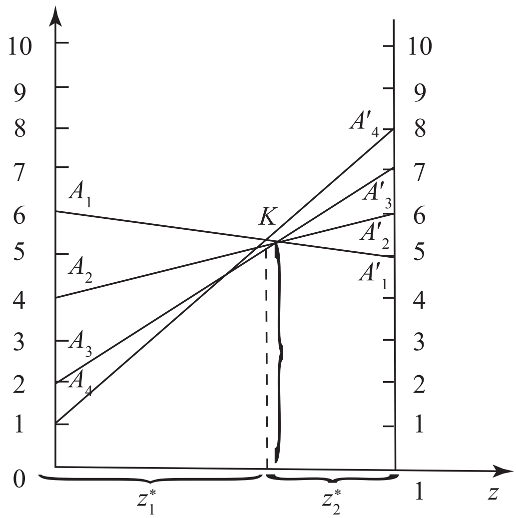
27-nji surat

3-nji mesele. Berlen matrisa tarapyndan

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

oýnuň çözülişini tapmaly.

Çözülişi. Matrisanyň 2×4 ölçegliligi bar. A oýunçynyň strategiýalaryna laýyk gelýän gönüleri guralyň (*28-nji surat*). $A_1KA_4^{'}$ döwük *A* oýunçynyň ýeňşiniň ýokarky çägine, *NK* bolsa oýnuň bahasyna laýyk gelýär. Oýnuň çözülişi aşakdaky ýaly: $U^* = \left(\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}\right)$, $Z^* = \left(\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right)$, $\nu = \frac{43}{8}$.



28-nji surat

4-nji mesele. Tikinçilik kärhanasy eşigiň täze modeliniň köpçülik çykyşyna meýilnamalaşdyrýar. Bu modelde islegi takyk kesgitläp bolanok. Emma onuň ululygyny üç mümkin bolan ýagdaýlar (I, II, III) bilen häsiýetlendirýändigini, çaklamak bolýar. Bu ýagdaýlaryň hasaby bilen berlen modeliň üç mümkin bolan çykyş wariantlary seljerilýär (*A, A', B*). Bu wariantlardan hersi öz çykdajylaryny talap edýär we ahyrky hasapda her dürli täsiri üpjün edýär.

Islegiň ýagdaýyna laýyk gelýän we modeliň çykyşynyň berlen göwrümi ýagdaýynda kärhananyň alýan, girdejisi (müň manat) matrisa tarapyndan kesgitlenilýär:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ Á \\ B \end{array} \begin{pmatrix} I & II & III \\ 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}.$$

Islegiň islendik ýagdaýynda girdejiniň ortaça ululygyny üpjün edýän, eşigiň modeliniň çykyşynyň göwrümini tapmaklyk talap edilýär.

Çözülişi. Ilki bilen ilkinji matrisanyň eýerli nokady barlygyny barlalyň. Onuň üçin onuň setirlerinde minimal elementlerini (22; 21; 20) we sütünlerde – maksimal elementlerini (22; 23; 24) tapalyň. Setirleriň minimal elementleriniň arasynda maksimaly $\alpha = 22$ san, sütünleriň maksimal elementleriniň arasynda minimaly bolsa $\beta = 22$ san bolýar. Şeýlelikde, $\alpha = \beta = 22$. 22 san oýnuň bahasy bolup durýar. Oýun eşigiň modeliniň çykyşynyň I wariantyna laýyk gelýän eýerli nokady bar. Berlen warianta laýyk gelýän, modeliň çykyşynyň göwrümi, islegiň islendik ýagdaýynda 22 müň manatda girdejini üpjün edýär.

Geometriki manysyny ulanyp, aşakdaky matrisalar bilen kesgitlenýän, oýunlaryň çözgüdini tapyň.

5-nji mesele. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

6-njy mesele. $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

7-nji mesele. Köwüş fabrikasy *A* we *B* köwüşleriň iki modeliniň çykyşyny meýilnamalaşdyrýar. Bu modellere isleg kesgitlenen däl, emma onuň iki ýagdaýdan (I we II) birini kabul edýändigini, çaklamak bolýar. Bu ýagdaýlara baglylykda kärhananyň girdejisi her dürli we $A = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$ matrisa tarapyndan kesgitlenilýär. Şol ýagdaýda kärhana bildirilýän islegiň islendik ýagdaýynda girdejiniň ortaça ululygy kepillendirilýän modellerden hersiniň çykyşynyň göwrümleriniň arasynda optimal gatnaşygy tapyň.

2. Çyzykly programmirleme meselelerinde oýunlar teoriýasynyň meseleleri bilen tanyşlyk.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa tarapyndan kesgitlenýän m x n oýna seredeliň.

3-nji teorema görä, birinji oýunçynyň optimal strategiýasy $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ we oýnuň bahasy v üçin $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} u_i^* \geq \nu(j = \overline{1,n})$ deňsizlik ýerine ýetýär. Kesgitlilik üçin $v > 0$ bolýar diýip çak edeliň. Bu hemişelik A matrisanyň ähli elementlerine şol bir C hemişelik sanyň goşulmagynyň optimal strategiýalaryň üýtgemegine getirýändigini, diňe C-e oýnuň bahasyny ulaldýandygyny bellemek bolýar.

Indi soňky deňsizligiň iki bölegini v-a bölüp, alarys:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{u_i^*}{\nu} \geq 1 \;\; (j = \overline{1,n}).$$

$\frac{u_i^*}{\nu} = y_i^*$ goýarys, onda

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* \geq 1 \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad y_i^* \geq 0 \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Girizilen belgilenmäni ulanyp, $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ şerti $\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 1/\nu$ görnüşde täzeden ýazýarys. Sebäbi birinji oýunçy maksimal ýeňişi almaklyga çalyşýar, onda ol $1/v$ minimum ululygy üpjün etmeli. Onuň hasaby bilen, birinji oýunçynyň optimal strategiýasyny kesgitlemesi

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \;\; (j = \overline{1,n});\; y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

şertler ýagdaýynda

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

funksiýanyň minimal bahasyny tapmaklyga getirýär.

Pikiriň meňzeş ýagdaýynda netijesi ikinji oýunçynyň optimal strategiýasynyň kesgitlemesi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le 1 \ (i = \overline{1,m})$; $x_j \ge 0 \, (j = \overline{1,n})$ ýerine ýeten ýagdaýynda $F = \sum_{j=1}^{n} x_j$ funksiýanyň maksimal bahasyny tapmaklyga getirýär. Bu ýerde $x_j = z_j / v$.

Şeýlelikde, berlen oýnuň çözgüdini tapmak üçin A matrisa tarapyndan kesgitlenýän ikileýin meseläniň indiki taýyny düzmek gerek we onuň çözgüdini tapmaly.

Göni mesele.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le 1 \ (i = \overline{1,m}); \qquad x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n})$$

şertler ýerine ýeten ýagdaýynda

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

funksiýanyň maksimal bahasyny tapmaly.

Ikileýin mesele.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge 1 \ (j = \overline{1,n}); \ y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m})$$

şertler ýerine ýeten ýagdaýynda

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

funksiýanyň minimal bahasyny tapmaly.

Ikileýin meseläniň taýynyň çözgüdini ulanyp, strategiýalary we oýnuň bahasyny kesgitlemek üçin formulalary alarys:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v\,y_i^*, \qquad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*,$$

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} x_j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \qquad \left(i = \overline{1,m}; \qquad j = \overline{1,n}\right).$$

Diýmek, çyzykly programmirleme usulyny ulanmak bilen oýnuň çözgüdini tapmaklyk prosesi aşakdaky tapgyrlary öz içine alýar:

1. Berlen matrisaly oýnuň ekwiwalenti, çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň taýyny düzýär.

2. Ikileýin meseläniň taýynyň optimal meýilnamalaryny kesgitleýärler.

3. Oýnuň bahasynyň we strategiýalarynyň optimal we ikileýin meseläniň taýynyň meýilnamalarynyň arasyndaky gatnaşygy ulanyp, oýnuň çözülişini tapýarlar.

8-nji mesele. Matrisa tarapyndan kesgitlenýän

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oýnuň çözülişini tapmaly.

Çözülişi. Çyzykly programmirleme meseleleriniň ikileýin taýyny düzeliň. Göni mesele:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

şertler ýerine ýeten ýagdaýynda $F = x_1 + x_2 + x_3$ funksiýanyň maksimumyny tapmaly.

Ikileýin mesele:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + y_3 \geq 1, \\ y_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

şertler ýerine ýeten ýagdaýynda $F^* = y_1 + y_2 + y_3$ funksiýanyň minimumyny tapmaly.

Göni we ikileýin meseleleriň optimal meýilnamalaryny tapalyň (*34-nji tablisa*).

34-nji tablisa

i	*Bazis*	$C_б$	P_o	1	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_5	0	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			0	-1	-1	-1	0	0	0
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	1	1	2	1	0	0	0	1
		0	1	0	-1	0	0	1	0
1	P_2	1	1/2	1/2	1	0	1/2	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1/2	3/2	0	0	-1/2	0	1
			3/2	1/2	0	0	$^1/_2$	1	0

34-nji tablisadan ilkinji meseläniň $x^* = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ optimal meýilnamasynyň, ikileýin meseläniň bolsa $y^* = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ optimal meýilnamasynyň bardygy aýdyň görünýär. Şeýlelikde, oýnuň bahasy $\nu = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}$, oýunçylaryň optimal strategiýalary bolsa $U^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$; $Z^* = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ýokarda her dürli matrisaly oýun üçin ikileýin meseläniň simmetrik taýyny ýazyp bolýandygy görkezildi. Tersine hem dogrudyr. Her dürli ikileýin meseläniň simmetrik taýy üçin matrisaly oýny ýazmak bolýar.

Goý, ikileýin meseläniň simmetrik taýy berlen bolsun: göni mesele: $F = CX$, $AX \leq B$, $X \geq 0$; ikileýin mesele: $F^* = BX$, $XA \geq C$, $Y \geq 0$.

Şonda bu ikileýin meseleleriň simmetrik taýyna matrisa tarapyndan kesgitlenýän

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}$$

oýna laýyklykda goýmak bolýar, bu ýerde T indeks transponirlemek operasiýasyny aňladýar.

Eger her bir matrisaly oýnuň optimal strategiýasy bar bolsa, onda her dürli çyzykly programmirleme meselesiniň çözgüdiniň ýokdugyny bellemek gerek.

9. Ikileýin meseleleriň indiki taýlary tarapyndan kesgitlenýän oýny düzmeli.

Göni mesele:

$$2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Ikileýin mesele:

$$10y_1 + 12y_2 \to$$
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \ge 2, \text{min} \\ y_1 + 3y_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Çözülişi. Bu ýerde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$B^T = (10;\ 12);\ \text{C} = (2;\ 3), C^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Şeýlelikde, ikileýin meseleleriň ilkinji simmetrik taýyna

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & +1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisa tarapyndan kesgitlenýän, matrisaly oýnuň laýyklygynda goýmak bolýar.

10-nji – 13-nji meselelerde aşakdaky matrisalar tarapyndan kesgitlenýän, oýunlaryň çözülişini tapyň:

10-njy mesele. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

11-nji mesele. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$

12-nji mesele. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

13-nji mesele. $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

14-nji we 15-nji meselelerde olar tarapyndan kesgitlenýän ikileýin meseleleriň simmetrik taýlary üçin matrisaly oýny guruň.

14-nji mesele.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_2 \to \max; \quad F^* = 12y_1 + \dots 14y_2 + \dots 14y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 14, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 16, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ -4y_1 + y_2 - y_3 \ge 1. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

15-nji mesele.

$$F = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \max; \qquad F^* = 18y_1 + 16y_2 + 24y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 5, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 7, \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \geq 8, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

V bap
Çyzykly däl programmirleme meseleleri

Bu bapda biz wektor argumentli skalýar funksiýa seretjekdiris. Goý, $f(x)$ funksiýasy n ululyga bagly bolsun. Bu funksiýanyň maksimumyny ýa-da minimumyny tapmak üçin onuň hususy önümlerini tapyp, nola deňlemeli bolýar. Şeýlelikde, alnan deňlemeler ulgamynyň çözüwi minimum ýa-da maksimum nokatlar (funksiýanyň önüminiň nola öwrülýän nokady) bolar.

§1. Çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesiniň goýluşy

1. Çyzykly däl programmirleme meselesiniň ykdysady geometrik manysy. Amaly meseleleriň köpüsi optimallygy çözmeklik üçin onuň matematiki modeli düzülende umumy görnüşde çyzykly däldir.

Çyzykly däl programmirleme meselesiniň aşakdaky görnüşde berilmegi mümkin:

1) Maksat funksiýasy çyzykly, çäklendirmeler ulgamy çyzykly däl;

2) Maksat funksiýasy çyzykly däl, çäklendirmeler ulgamy çyzykly;

3) Maksat funksiýa hem-de çäklendirmeler ulgamy çyzykly däl.

Biz bu meseläni dürli usullar bilen çözüp, onuň optimaldygyny kesgitleýäris. Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesi aşakdaky görnüşde berlen bolsun:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, (\min), \tag{1}$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2 \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i \ge 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

(1)-(3)-e çyzykly programmirlemäniň umumy meselesiniň matematiki modeli diýilýär. f, g_i-niň sany näbellä degişli bolan b_i berlen san (serişdäniň görnüşleri).

Eger meseläniň çözülişi bar bolsa we ol (2)-ni kanagatlandyrýan bolsa, onda aşakdaky şertler ýerine ýetýändir:

$$f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geq f(x_1, x_2, ..., x_n) - \max$$

$$[f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geq f(x_1, x_2, ..., x_n)] - \min$$

Eger seredilýän (1)-(3) deňleme çyzykly bolsa, onda ol mesele belli usullar bolan simpleks, tora, excel elektron tablisasy arkaly optimal çözülýär:

$$E^n = \text{çyzykly giňişlik} + (a \cdot b) + \|x\|.$$

Eger (1)-(3) çözülende ol meseläniň esasynda emele gelen köpgranlyk (köpburçluk) çyzykly däl bolan ýagdaýynda hemme wagt güberçek (oýuk) bolmaýar, onuň sebäbi gipertekizlik köpgranlygyň ýeke bir depelerinden däl-de, onuň içinden geçmegi hem mümkindigindedir.

Çyzykly däl programmirleme meselesiniň çözülişi kesgitlenilende onuň geometriki manysyny peýdalanalyň:

1) giperüst (gipertekizlik);

2) meseläniň çözüwiniň bar bolan ýaýlasyny kesgitlemeli;

3) ýokarky aşaky derejäni kesgitlemeli we onuň gipertekizlige görä ýerleşişini barlamaly. Eger onuň çözüwi ýok bolsa, onda ýaýlada boş köplük ýa-da ýeke-täk çözüwi bar;

4) çäklendirilen ýaýlanyň esasynda maksimum (minimum) nokatlaryň üsti bilen gipertekizlige görä egri çyzyk ýa-da göni çyzyk, ýagny şol nokatlardan geçýän çyzgyny kesgitlemeli.

2. Çyzykly maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

1-nji mesele. Önümçilikde käbir azyk iki görnüşde öndürilýär. Eger birinji görnüşli serişdäniň bahasy 3 manat, ikinjiniňki 4 manat, ählisiniňki 12 manat bolsa, onda serişdeleriň ululyklarynyň optimal paýlanyşygyny kesgitlemeli. Birinji serişdäniň x_1 mukdaryndan we ikinji serişdäniň x_2 mukdaryndan $2x_1^{0,5} \cdot x_2^{0,5}$ önüm birligini almak mümkin. Umuman, işlenilip taýýarlanylan önümiň mukdary bilen onuň çykarylýan serişdelerini baglanyşdyrýan $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiýa önümçilik funksiýasy diýilýär. Önüm üçin ýönekeýje önümçilik funksiýasy iki dürli serişde üçin şeýle ýazylýar:

$$y = cx_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha},$$

bu ýerde c we α – hemişelik ululyklar, $0 < \alpha < 1$. y funksiýa diňe iki resurs bolan ýagdaýy üçin görkezilen: x_1 – zähmet, x_2 – baýlyk (kapital), bu ýerdäki α bu resurslaryň degişli paýlaryny aňladýar.

y funksiýa ýönekeý önümçilik funksiýasy, şeýle hem muňa iki resursyň we bir önümiň arasyndaky baglylyk ýaly garalýar. Bu funksiýa derňewlerde wajypdyr.

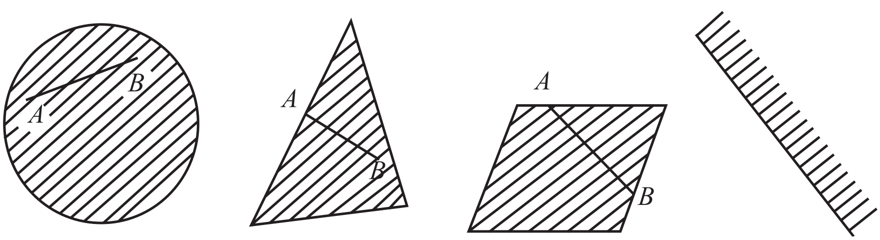
Meseläniň matematiki modeli. Goý, x_1 – I görnüşli resursyň mukdary, x_2 – II görnüşli resursyň mukdary bolsun. Çäklendirmeler ulgamy:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_1 \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Maksat funksiýasy:

$$y = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \tag{5}$$

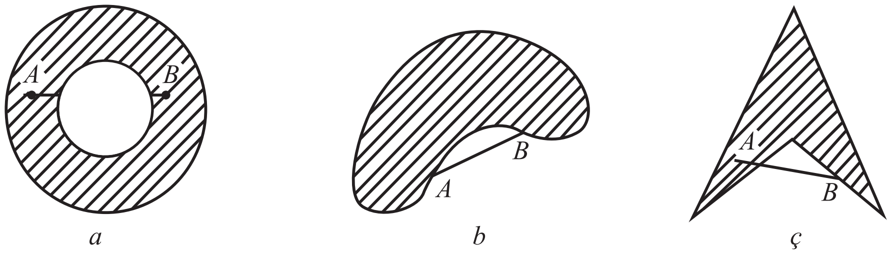
bolsun. (4) formulanyň çözüwler köplüginde (5) funksiýanyň iň uly bahasyny tapmak talap edilýär.



a *b* *ç* *d*

1-nji surat

Bu meselede ulgam çyzykly çäkli, maksat funksiýa çyzykly bolmaýar. Ýagny, (1) we (2) meseleler çyzykly däl programmirleme meselesine degişlidir.

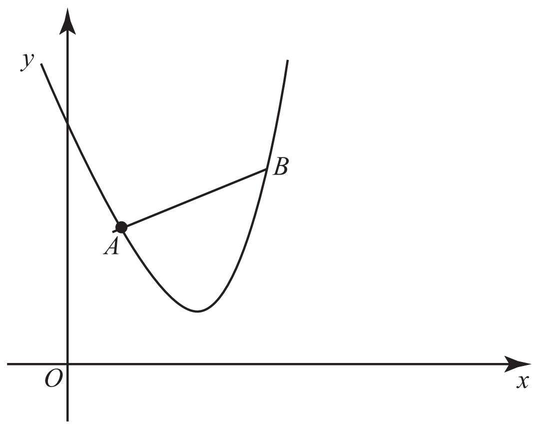


2-nji surat

Şeýle meseleleriň käbir aýratyn çözüwleriniň üstünde durup geçeliň. Çyzykly däl programmirlenýän meseleleri çözmek üçin aşakdakylary bilmek zerurdyr:

1) Meseläniň ýol bererli çözüwleriniň köplügi oýuk ýa-da güberçek.

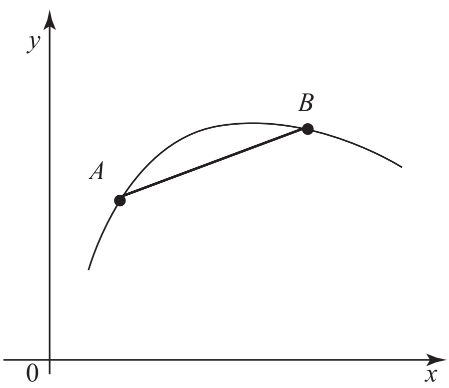
2) Maksat funksiýa güberçekmi ýa-da oýukmy?



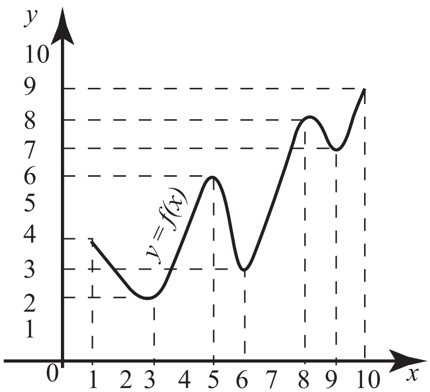
3-nji surat

Gerekli kesgitlemeleri ýatlalyň. Eger-de köplük islendik A we B nokatlardan geçirilen AB kesimiň ähli nokatlaryny özünde saklaýan bolsa, onda bu köplüge güberçek diýilýär. 1-nji suratda nokatlar tekizliginde güberçek köplüge sfera, piramida, prizma we beýlekiler degişlidir. 2-nji suratda güberçek däl köplüge mysallar görkezilendir. Güberçek däl köplükde AB kesimiň ähli nokatlaryndan bu köplükde ýatmaýan iň bolmanda iki nokady görkezip bolar. Giňişlikde güberçek däl köplüge tory mysal getirip bolar. Bir üýtgeýänli $y = f(x)$ funksýanyň grafiginiň islendik iki nokadyny birleşdirýän kesim grafikde ýa-da ondan ýokarda ýatýan bolsa, bu funksiýa güberçek diýilýär (*3-nji surat*).

Birnäçe üýtgeýänli güberçek ýa-da oýuk funksiýalar düşünjesini formulirlemek mümkin. Eger-de $z = f(x_1; x_2, ..., x_n)$ giperüstüň islendik iki nokadyny birleşdirýän kesim onuň üstünde ýa-da ondan ýokarda ýatýan bolsa, onda oňa güberçek diýilýär (*4-nji surat*). Haçanda onuň iki nokadyny birleşdirýän kesim üstde ýa-da ondan aşakda ýatýan bolsa, onda giperüste $z = f(x_1; x_2, ..., x_n)$ oýuk diýilýär.



4-nji surat



5-nji surat

Ýene-de geljekde talap ediljek kesgitlemeleri ýatlalyň. Goý, ýapyk Φ köplükde kesgitlenen $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýa berlen bolsun. Φ köplügiň elementleri $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bolsun. Şonuň üçin $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýany $z = f(x)$ görnüşde ýazarys.

Eger $\varepsilon > 0$ san tapylyp, $x - x_0 < \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli x-ler üçin $f(x) \leq f(x_o)(f(x) \geq f(x_o))$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $z = f(x)$ funksiýa kesgitlenen käbir ýapyk X köplükde $x_0 \epsilon X$ nokatda lokal maksimuma (lokal minimuma) ýetýär diýilýär.

Funksiýanyň lokal maksimuma (minimuma) ýetýän x_0 nokadyna lokal maksimum (minimum) nokady diýilýär.

Mysal. 5-nji suratda käbir bir üýtgeýänli [1; 10] kesimde kesgitlenen funksiýanyň grafigi şekillendirilen (bu funksiýa oýuk hem däl, güberçek hem däl). Funksiýa [1; 10] kesimde lokal minimuma ($x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 9$) we iki lokal maksimuma ($x_4 = 5$, $x_5 = 8$) eýedir.

Goý, $z = f(x)$ funksiýa X ýapyk köplükde kesgitlenen bolsun. Eger $x_o \in X$ we islendik $x_0 \epsilon X$ üçin $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ deňsizlik dogry bolsa, onda bu funksiýa x_0 nokatda absolýut maksimuma (minimuma) ýetýär diýilýär. «Absolýut» termini bilen bilelikde käwagtlar «global» termini hem ulanylýar. Gysgaça aýtsak, funksiýanyň global maksimumy onuň kesgitleniş ýaýlasyndaky iň uly bahalary, global minimumy bolsa iň kiçi bahalary. Global maksimum we global minimum bilelikde funksiýanyň global ekstremumy diýlip atlandyrylýar. 5-nji suratda görkezilen funksiýanyň grafiginde global minumum 2-ä deň we lokal minimumlaryň iň kiçisi bilen gabat gelýär. Global maksimum 9-a deň, funksiýa $x_6 = 10$ nokatda bu baha ýetýär we iň uly lokal maksimum bilen gabat gelýär.

3. Çyzykly däl maksat funksiýaly
we çyzykly çäklendirmeler ulgamly meseleler

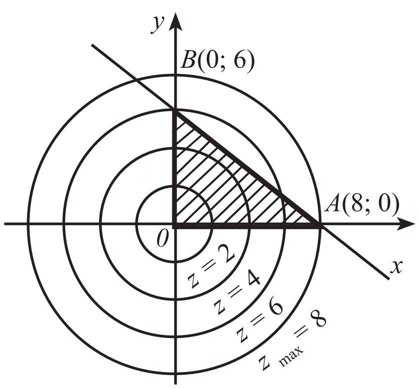
Şeýle meseleleriň ýol berilýän çözüwler köplügi mydama güberçek, çünki çyzygy çäklilik *n* ölçegli giňişlikde güberçek köpgranlygy emele getirýärler. Çyzykly programmirlemeden tapawutlylykda çyzykly däl programmirlemelerde maksat funksiýanyň optimal çözüwleriniň bu köpgranlygyň depelerinde ýerleşmegi hökman däldir.

1-nji mesele.

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 \le 0, \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

şertlerde $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Çözüwleriň ýol berilýän köplügi 6-njy suratda garalanan.



6-njy surat

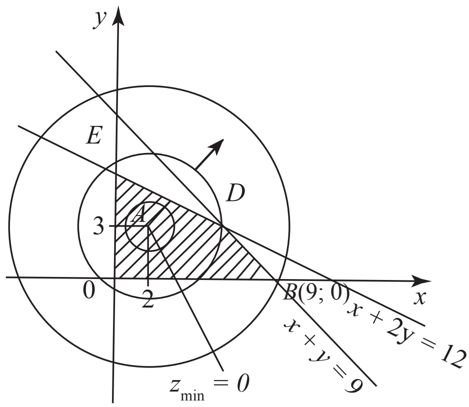
Eger-de maksat funksiýa fiksirlenen c nokady bersek, onda merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan c^2 radiusly töwerek alarys. Goý, c = 1, 2, 3, ... bolan töwerekleri çyzalyň. 6-njy suratdan görnüşi ýaly, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýa A(8;0) nokatda iň uly baha ýetýär. $r_{max} = 8$

2-nji mesele.

$$\begin{cases} x + 2y \le 12, \\ x + y \le 9, \\ x \ge 0, \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi. Ýol berilýän köpburçluklary we birnäçe dereje çyzyklary guralyň (*7-nji surat*).



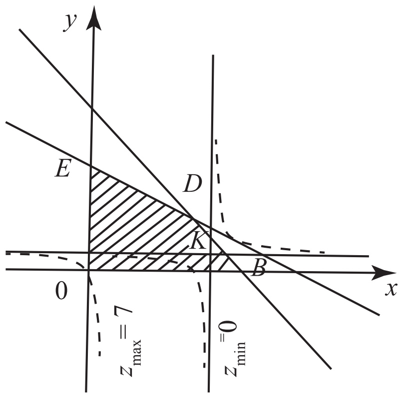
7-nji surat

$z = c$ dereje çyzygy A(2; 3) nokada merkezi bolan $r = \sqrt{c}$ radiusly töweregi berýär. 7-nji suratdan görnüşi ýaly $z_{min} = 0$ baha A(2; 3) nokatda ýetýär, z_{max} bolsa B(9; 0) nokada ýetýär. Şeýlelikde, $z_{min} = 0$; $z_{max} = (9–2)^2 + (0–3)^2 = 58$.

3-nji mesele.

$$\begin{cases} x + 2y \le 12, \\ x + y \le 9. \\ x \ge 0, \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x-7)(y-1)$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

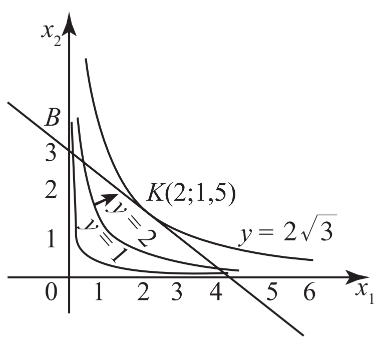


8-nji surat

Çözülişi. Ýol berilýän meýilnama köpburçlugy biz eýýäm 2-nji meselede gurduk, *a* dereje çyzygy bolsa asimptotalary $x = 7$, $y = 1$ (*8-nji surat*) bolup hyzmat edýän deňtaraply giperboladyr. *z* ululygyň boýuna *z* giperbola asimptota kesigininiň nokadyndan başlap kiçelýär. *z*-iň iň uly bahasy degişli $O(0, 0)$ nokatdan geçýän giperbolada, iň kiçi bahany bolsa funksiýa $K(7,1)$ nokatda alýar. Şeýlelikde, $O(0, 0)$ nokatda $z_{max} = 7$, $K(7; 1)$ nokatda $z_{min} = 0$.

4-nji mesele. (2 meseläniň şertine seret.)

Çözülişi. Ýol berilýän meýilnamalar köplügi *AB* kesimiň nokatlar köplügi (*9-njy surat*), dereje çyzygy bolsa giperboladyr.



9-njy surat

Eger-de $y = 1$ bolsa, onda $x_2 = \dfrac{1}{4x_1}$ giperbola, eger-de $y = 2$ bolsa, onda $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$ giperbola bolar. $x_2 = \dfrac{3}{x_1}(y = 2\sqrt{3})$ giperbolanyň AB kesim bilen bir umumy $K(2;1{,}5)$ nokady bolar. Şeýlelikde, $x_1 = 2, x_2 = 1{,}5$ bolanda iň uly baha ýetýär we ol $2\sqrt{3}$-e deň. Bu mesele aňsat çözülýär we analitiki $3x_1 + 4x_2 = 12$ deňlemeden x_2-ni x_1-iň üsti bilen aňlatmak bolar.

$$x_2 = \frac{12 - 3x_1}{4}.$$

Şeýlelikde, y bir üýtgeýänli funksiýa ýaly bolar.

$$y = 2\sqrt{x_1 \frac{12 - 3x_1}{4}} = \sqrt{x_1(12 - 3x_1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x_1(12 - 3x_1)}.$$

$3x_1$ we 12-$3x_1$ otrisatel däl köpeldijileriň jemi hemişelik. Şonuň üçin $3x_1$(12-$3x_1$) köpeldiji bilen y-e deň bolsa, iň uly bahany alýar.

Alarys:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{12 - 6}{4} = 1{,}5; \;\; y_{\max} = 2\sqrt{3}.$$

Garalýan çyzykly däl meseläniň görnüşi drob çyzykly maksat funksiýaly meselä meňzeşdir.

$$z = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n}{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n}$$

görnüşli funksiýalara drob çyzykly funksiýa diýilýär.

4. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

1-nji mesele. Kärhana bir görnüşli önüm öndürýär we ol önüm dört tehnologik usul bilen taýýarlanylýar. Bu usullarda işlenende wagt birliginde q_1, q_2, q_3, q_4 önüm alynýar, bu önümleriň gymmaty P_1, P_2, P_3, P_4 ybarat. Berlen meseläniň matematiki modelini düzmeli. Önümleriň gymmaty iň kiçi bolar ýaly we her bir usulda kärhana degişlilikde t_1, t_2, t_3, t_4 sagatdan köp bolmadyk wagtda işlener ýaly önüm goýberilişiniň meýilnamasyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, x_1 birlik kärhana birinji tehnologiýa boýunça işleýän bolsun, x_2 ikinji, x_3 üçünji, x_4 dördünji. Onda önümiň umumy goýberilişi

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4;$$

önümiň umumy çykdajysy bolsa

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$$

deňdir.

Umumy çykdajynyň umumy önümiň goýberilişine bolan gatnaşygyna **önümiň gymmaty** diýilýär:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}.$$

Indi

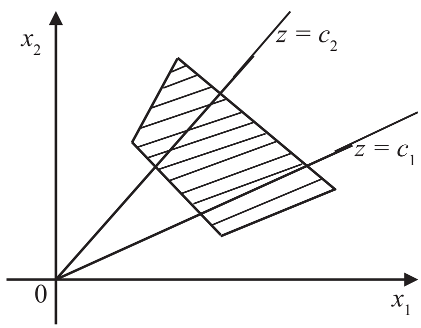
$$0 \leq x_1 \leq t_1; 0 \leq c_2 \leq t_2;$$

$$0 \leq x_3 \leq t_3; 0 \leq x_4 \leq t_4$$

çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}$$

maksat funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly.



10-njy surat

Drob çyzykly maksat funksiýaly meseläniň üýtgeýän ululygyny çyzykly programmirlenen meselä getirip, soňra simpleks usuly bilen çözeris. Bu nähili edilýär? Munuň bilen soňrak tanyşarys. Ilkibada drob çyzykly progammirlenen meseleleriň geometrik manysy we grafiki usullary bilen tanşalyň.

$O_{x_1x_2}$ tekizlikde

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{q_1x_1 + q_2x_2},$$

maksat funksiýa garalyň. x_2-ni bölüp çykarsak:

$$zq_1x_1 + zq_2x_2 = p_1x_1 + p_2x_2$$

ýa-da

$$(zq_2 - p_2)x_2 = (p_1 - zq_1)x_1; \qquad x_2 = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2} \cdot x_1; \qquad x_2 = kx_1$$

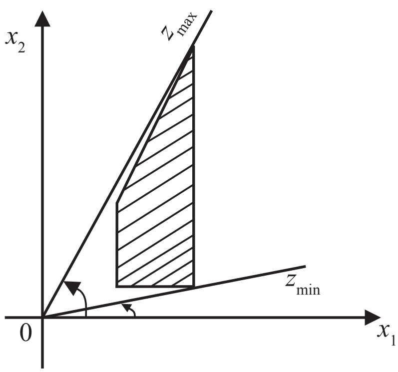
bu ýerde

$$k = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2}.$$

$x_2 = kx_1$ deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän gönini berýär. z-iň käbir fiksirlenen z bahalarynda göniniň k burç koeffisiýenti hem fiksirlenen a göni kesgitlenen. z-iň bahasynyň üýtgemegi bilen $x_2 = kx_1$ göni koordinatalar başlangyjynyň daşyndan öwrülýär (*10-njy surat*).

z-iň monoton artmagy bilen k burç koeffisiýentiniň üýtgemegine garalyň. Munuň üçin k-dan z boýunça önüm alarys.

$$\frac{dk}{dz} = \frac{-q_1(zq_2 - p_2) - (p_1 - zq_1)q_2}{(zq_2 - p_2)^2} =$$
$$= \frac{-zq_1q_2 + p_2q_1 - p_1q_1 - zq_1q_2}{(zq_2 - p_2)^2} = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{(zq_2 - p_2)^2}.$$



11-nji surat

Önümiň maýdalawjysy mydama položitel, sanawjysy bolsa z-e bagly däl. Şeýlelikde, önümiň hemişelik alamaty bolar. z-iň ösmegi bilen burç koeffisiýenti diňe artýar ýa-da kemelýär, a göni bolsa bir tarapa öwrülýär. Tersine, göniniň bir ugra öwrülmegi bilen

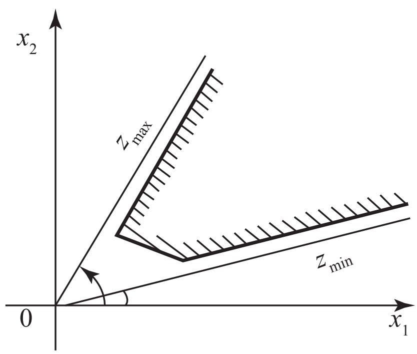
z diňe ösýär ýa-da kemelýär, z-iň ösmegi bilen göniniň aýlanyş ugruny kesgitläliň. Şeýle dürli ýagdaýlaryň bolmagy mümkin:

1. Köpburçluk çäkli, global maksimumy we minimumy bar (*11-nji surat*).

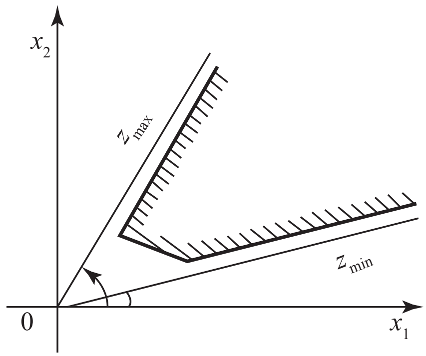
2. Ýol berilýän meýilnamanyň köplügi çäkli däl, ýöne funksiýa global ekstremuma ösýär (*13-nji surat*).

3. Ýol berilýän meýilnamanyň köplügi çäkli däl we global ekstremumlardan biri ösmeýär (*14-nji surat*).

4. Emele gelýän köplük çäksiz, ekstremumlaryň ikisi hem asimptotik.

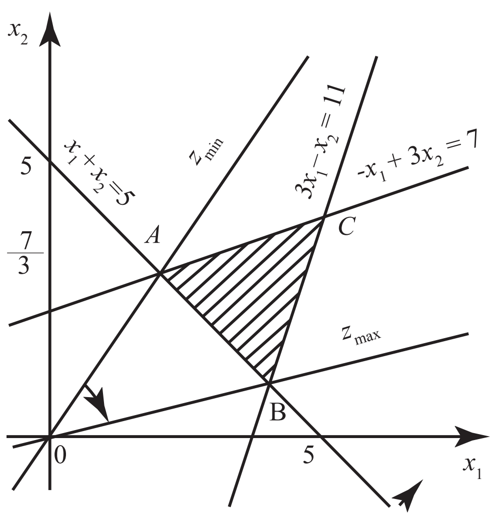


12-nji surat



13-nji surat

5. Köplük çäkli däl, ekstremumyň ikisi-de asimptotiki (*14-nji surat*).



14-nji surat

2-nji mesele.

$$z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

maksat funksiýasynyň

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ 3x_1 - x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

çäklendirmeler ulgamynda global maksimumyny we minimumyny tapmaly.

Çözülişi. Ýol berilýän köplügiň çyzgysyny guralyň (*14-nji surat*). Optimum koordinatalar başlangyjynyň töwereginde göniniň aýlanmasynda ýerleşýär, onda ekstremal nokatlar A we B depeler bolar.

Ýokardaky ýaly edip aňlatmadan maksat funksiýa üçin x_2-ni bölüp çykararys:

$$x_2 = \frac{3 - z}{z + 1} \cdot x_1.$$

Indi aýgytlaýjy göniniň burç koeffisiýentini tapalyň:

$$k = \frac{3 - z}{z + 1}.$$

Önüm alsak,

$$\frac{dk}{dz} = \frac{-4}{(z + 1)^2}.$$

Bu önüm z-iň islendik bahasynda otrisatel, onda

$$k = \frac{3 - z}{z + 1}$$

funksiýa kemelýär. Bu bolsa göniniň aýlanmasynyň sagat diliniň ugry boýunçadygyny aňladýar. Şeýlelikde, A depede maksat funksiýasy iň kiçi, B depede iň uly bahany alar. Praktiki ekstremal nokatlary ýönekeý gurmak mümkin. Degişli deňlemäni çözüp, A we B depeleriň koordinatalaryny kesgitläris. $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 1)$; $z_A < z_B$ bolýandygyny belläris, sebäbi A depede global minimuma, B depede bolsa global maksimuma ýetýär.

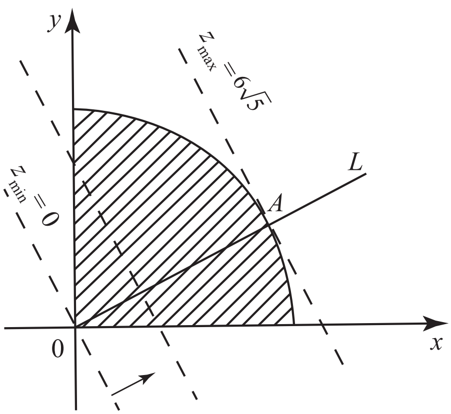
5. Çyzykly maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

1-nji mesele.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36, \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ulgamynyň çözüwler köplüginde $z = 2x + y$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi. 1-nji suratda ýol bererlikli çözüwler köplügi garaldylan. Bu köplük güberçek $z = 2x + y$ funksiýa $k = -2$ burç koeffisiýentli gönä parallel. Görnüşi ýaly, global minimum $O(0; 0)$ nokatda, global maksimum $x^2 + y^2 = 36$ töwerege A galtaşma nokatda bolýar. A nokadyň koordinatasyny tapalyň. Onuň üçin l göniniň deňlemesini düzmek, göniniň we töweregiň deňlemesini özünde saklaýan ulgamy çözmek ýeterlikdir.



15-nji surat

l göni dereje çyzygyna perpendikulýar, şeýlelikde, onuň burç koeffisiýenti $k_1 = \dfrac{1}{2}(k_1 \cdot k = -1)$bolar. l göni O nokadyň üstünden geçýär we $k_1 = \dfrac{1}{2}$burç koeffisiýente eýe bolýar. Şonuň üçin onuň deňlemesi. $y = \dfrac{1}{2}x$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

ulgamy çözüp,

$$x = \frac{12\sqrt{5}}{5}, \qquad y = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

bahalary alarys.

Şeýlelikde, $O(0;0)$ nokatda global minimuma ýetýär. Ol nola deňdir, global maksimuma $A(2;\ 4)$ nokatda ýetýär we $6\sqrt{5}$-e deň. Lokal ekstremumlaryň globallardan tapawudy funksiýa ösmeýär.

2-nji mesele.

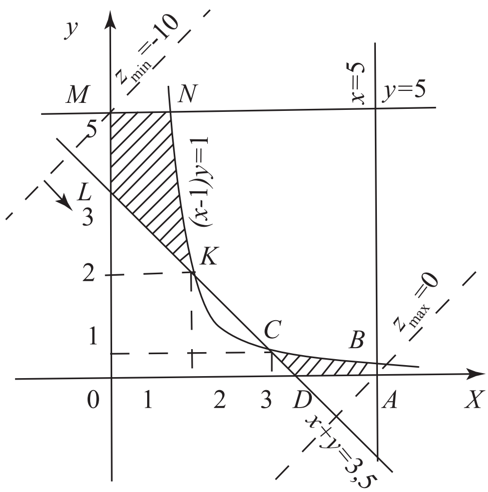
$$z = x - y - 5$$

funksiýanyň

$$\begin{cases} (x-1)y \le 1 \\ x + y \ge 3,5 \\ 0 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 5 \end{cases}$$

deňsizlikler ulgamynyň çözüwler köplüginde global ekstremumlaryny tapmaly.

Çözülişi. Ýol bererli çözüwler köplügi her biri güberçek bolan (*16-njy surat*) iki aýratyn bölekden ybarat.



16-njy surat

$z = x - y - 5$ maksat funksiýanyň *A, B, C, D, K, N, M, L* nokatlardaky bahalaryny hasaplalyň. Bu nokatlaryň koordinatalary şeýle bolar:

$$A(5;0), \quad B\left(5;\frac{1}{4}\right), \quad C\left(3;\frac{1}{2}\right), \quad D(3;\,5;\,0), \quad K\left(1\frac{1}{2};2\right).$$

$$L(0;3;5), \quad N\left(1\frac{1}{5};5\right), \quad M(0;5)$$

Onda,

$$z_B = -\frac{1}{4}, \quad z_c = -2,5, \quad z_D = -1,5, \quad z_K = -5,5,$$

$$z_L = -8,5, \quad z_N = -8,8, \quad z_A = 0, \quad z_M = -10$$

Global maksimuma (5; 0) nokatlarda ýetýär we ol 0-a deň, global minimuma bolsa (0, 5) nokatlarda ýetýär we 10-a deň. Funksiýa *C* nokatda –2,5-e deň bolan globaldan tapawutlanýan lokal minimuma ýetýär. Şonuň üçin *K* nokatda hem globaldan tapawutlylykda lokal maksimuma ýetýär.

6. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

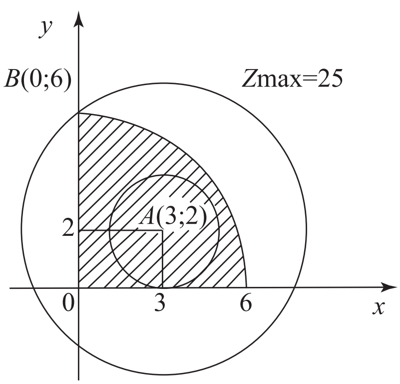
1-nji mesele.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36, \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

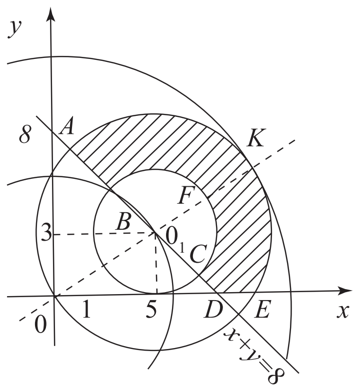
çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde

$$z = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

funksiýanyň düýpli ekstremumyny tapmaly.



17-nji surat



18-nji surat

Çözülişi. $z = (x-3)^2 + (y-2)^2$ funksiýanyň dereje çyzygynyň merkezi $A(3, 2)$ (*17-nji surat*) nokatda bolan töwerek bolýar. $A(3, 2)$ nokatda global minimuma ýetýär, $B(0;6)$ nokatda bolsa global maksimuma ýetýär (*18-nji surat*). $Z_{min} = 0$, $Z_{max} = 25$.

Aýdylanlary mysallarda düşündireliň.

2-nji mesele. Çäklendirmeler ulgamynyň köplüginde

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 \geq 9. \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 \leq 36, \\ x + y \geq 8, \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0. \end{cases}$$

$z = x^2 + y^2$ funksiýanyň global ekstremumlaryny tapmaly.

Çözülişi. 18-nji suratda ýol bererli çözüwler köplügi ştrihlenen. Suratda görnüşi ýaly, ol güberçek däl. z funksiýanyň ähmiýetiniň B nokatda iň pes, K nokatda bolsa – iň uly baha eýe bolýandygy aýdyňdyr ($(x–5)^2 + (y–3)^2 = 36$ tegelegiň galtaşma nokady we beýihe çyzyklaryň derejesi).

B we K nokatlaryň koordinatalaryny taparys. B nokat $x + 8 = y$ gönä we $(x–5)^2 + (y–3)^2 = 9$ tegelege degişlidir. Şonuň üçin onuň koordinatalaryny aşakdaky ulgamdan taparys:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-y)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 12y + 9 = 0 \\ x = 8 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + 3\sqrt{0,5} \\ x = 5 - 3\sqrt{0,5} \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} y = 3 - 3\sqrt{0,5} \\ x = 5 + 3\sqrt{0,5}, \end{cases}$$

$$B(5 - 3\sqrt{0,5}; 3 + 3\sqrt{0,5}).$$

K nokat $y = \frac{3}{5}x$ deňleme bilen OO_1 merkezleriň çyzygyna we

$$(x–5)^2 + (y–3)^2 = 36$$

tegelege degişlidir. Aşakdaky ulgama gelýäris:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=36\\ y=\frac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}17x^2-170x-25=0\\ y=\frac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=5+\frac{30}{\sqrt{34}} \\ y=3+\frac{18}{\sqrt{34}} \end{cases} \quad ya-da \begin{cases} x=5-\frac{30}{\sqrt{34}} \\ y=3-\frac{18}{\sqrt{34}} \end{cases} \right);$$

$$K\left(5+\frac{30}{\sqrt{34}};\ 3+\frac{18}{\sqrt{34}}\right).$$

Diýmek, $z_{\min} = 43 - 12 \cdot \sqrt{0,5}$; $z_{\max} = 40 + 12 \cdot \sqrt{34}$. F nokat lokal maksimum bolýar, çünki z funksiýanyň bahasy goňşy B we C depelerdäki bahalaryndan uludyr. Onda C lokal minimum nokat bolýar.

Seredilen mesele çyzykly däl meseleler hatarynyň aýratynlyklarynyň çyzykly meselelere garanyňda kyndygyna göz ýetirmäge mümkinçilik berýär.

Eger-de çäkli meseleler ulgamy çyzykly, maksat funksiýasy çyzykly däl bolsa, onda maksat funksiýanyň ýol berilýän meýilnamanyň gyraky nokatlarynda optimuma ýetmegi zerur däl. Eger ol ekstremuma çäk nokadynda ýetýän bolsa, onda bu nokadyň gyraky bolmagy hökman däl.

Şeýlelikde, ýol berilýän çözüwler köplüginiň depeleri bilen çäklenen şeýle tipli meseleleri çözmek üçin hasaplanyş usuly bolup bilmez. Şeýle tipli meseleleriň käbirinde lokal optimum global bilen gabat gelmeýär. Çyzykly däl ulgam çyzykly bolanda ýol berilýän ýaýlanyň güberçekligi saklanmaýar. Eger-de ýol berilýän ýaýla güberçek däl bolsa, onda çyzykly maksat funksiýasynda hem global lokal optimumlaryň tapawudy bolup biler. Lokal optimum bar bolan ýagdaýynda globaldan tapawutlylykda, bir depeden goňşy depä geçmegine esaslanýan simpleks tipli hasaplanyş usulyny ulanmaga mümkinçilik ýok.

Çyzykly däl programmirleme meseleleri üçin (global lokal optimumy tapawutly bolan) köp hasaplanyş usullary lokal ekstremum nokady tapmaga mümkinçilik berýär. Umumy ýagdaýlarda olar global optimum bilen gabat gelip, gurmaga mümkinçilik berýär. Bu usul bilen lokal optimumy tapmak amalyýetde, köplenç, peýda berýär.

Çyzykly programmirleme teoriýasynda funksiýanyň güberçekligine we oýuklygyna aýratyn gyzyklanma bildirýärler. Aşakdaky kesgitlemeler adalatlydyr.

Goý, $f(x)$ galtaşýan X güberçek köplükde güberçek köplük bolsun. Onda islendik lokal minimum X-de global minimum bolýar.

Eger-de $f(x)$ galtaşýan güberçek X köplükde oýuk funksiýa bolsa, onda X-de $f(x)$-iň islendik lokal maksimumy global minimumy bolar.

3-nji mesele.

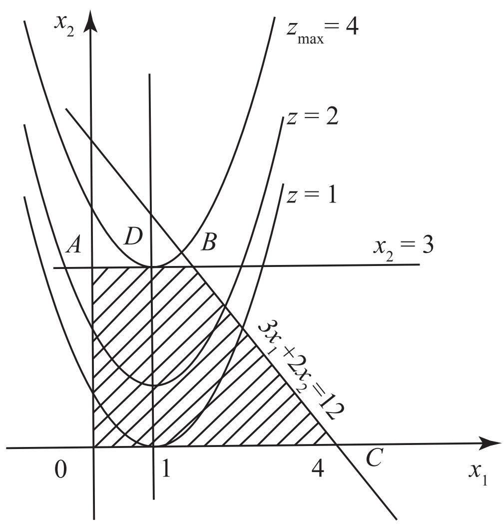
$$\begin{cases} x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde

$$z = 2x_1 - x_1^2 + x_2$$

funksiýanyň maksimumyny tapmaly.

Çözülişi. $z = 2x_1 - x_1^2 + x_2$ funksiýanyň dereje çyzygy parabola bolar (*19-njy surat*).



19-njy surat

z funksiýa iki sany oýuk $f_1(x_1) = 2x_1 - x_1^2$ we $f_2(x_2) = x_2$ funksiýalaryň jemi ýaly garamak bolar. Şeýlelikde, z funksiýanyň lokal maksimumy global bolar. $z_{max} = 4$ baha $D(1;3)$ nokatda ýetýär.

§2. Lagranjyň köpeldijilerini ulanmak usuly

Goý, bizden köp ululyga bagly $f(x)$ funksiýanyň minimumyny tapmak talap edilýän bolsun, bu ýerde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wektor ululykdyr. Bu meseläni çözmek üçin

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} = 0,\ i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{6}$$

deňlemeler ulgamyny çözmeli. Eger meselä goşmaça:

$$g_i(x) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, m, \tag{7}$$

görnüşli şert goýulýan bolsa, onda şol ýagdaýda ýokarky usuly ulanmak bolar.

(6) deňlemäniň käbir ululyklara görä çözüp bolýan ýagdaýlaryna seredeliň. Minimum nokady bolaýmagy ähtimal hasaplanýan nokadyň ýaýlasynda

$$g_j\,(x), j = 1, 2, \ldots, m,$$

funksiýa seredeliň. Goý, bu ýaýlada funksiýanyň ikinji tertipli önümi bar diýip düşüneliň. Ýakobiniň rangy m-e deň bolsun. Onda

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Eger şu ýerde, aýdyň däl görnüşde berlen funksiýalaryň häsiýetlerine salgylansak, (6)-deňleme $x_1, x_2, \ldots, x_m$ näbellilere görä çözülip bilner:

$$x_j = \varphi_j\,(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), j = 1, 2, \ldots, m. \tag{9}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ – ululyklara bagly üýtgeýän ululyklar, $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ – ululyklara bolsa erkin üýtgeýän ululyklar diýilýär. Eger (9)-y $f(x)$ funksiýada goýsak, onda

$$f(\varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \varphi_2(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = f(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

funksiýany alarys. Görşümiz ýaly, bu funksiýa *n-m* ululyga baglydyr. Diýmek, biz *n-m* ululyga bagly funksiýanyň minimumyny gözlemeli bolýarys. Ýöne kähalatlarda üýtgeýän ululyklaryň sanyny azaltmak mümkin däl. Şeýle ýagdaýlarda, stasionar nokatlarda funksiýanyň doly differensirlenýän nola öwrülýänligine salgylanmaly bolýarys.

Şu nukdaýnazardan çemeleşsek, alarys:

$$df(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)dx_j + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^*)dx_k = 0. \qquad (10)$$

Bu ýerde ∂x_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ bagly üýtgeýän ululyklaryň differensialy, ∂x_k, $k = m + 1$, $k = m + 2$, …, n erkin üýtgeýän ululyklaryň differensialydyr. Bular öz aralarynda

$$\sum_{i-1}^{m} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_k} dx_k = 0, \; j = 1, 2, .., m, \qquad (11)$$

görnüşde baglanyşykdadyrlar. (10) we (11)-de bagly üýtgeýän ululyklaryň differensiallarynyň koeffisiýentleri nola deň bolar ýaly λ_1, λ_2, …, λ_m sanlary gözläp tapalyň we bu sanlary (11) deňlemä agzama-agza köpeldeliň. Alnan netijäni (10) bilen goşalyň. Onda

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x^*) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x^*) \right) dx_j + \\ &+ \sum_{k=m+1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(x^*) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_k}(x^*) \right) dx_k = 0, \end{aligned} \qquad (12)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ erkin ululyklar bolandyklary üçin olary

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x^*) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x^*) = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m \qquad (13)$$

bolar ýaly saýlap boljakdygyna (8) güwä geçýär. Eger (13) ýerine ýetse,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(x^*) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_k}(x^*) = 0,$$

$$k = m + 1, \ldots, n \tag{14}$$

deňligiň ýerine ýetjegi-de gutulgysyzdyr. (7), (13) we (14) deňlemeler bilelikde n+m üýtgeýän ululykly m+n deňlemeler ulgamynyň döredýärler $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$-ululyklara görä). Şu usula **Lagranjyň köpeltmek hasylyny ulanmak usuly** diýilýär. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sanlara bolsa **Lagranjyň köpeldijileri** diýilýär. Bu usulda mesele şu aşakdaky algoritm boýunça çözülýär.

1. Lagranjyň funksiýasy diýip at alan $n + t$ üýtgeýän ululyga bagly

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \tag{15}$$

funksiýany gurmaly.

2. x we λ görä Lagranjyň funksiýasynyň hususy önümlerini tapmaly we ony nola deňlemeli, ýagny

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g_j(x) = 0, \; j = 1, 2, ..., m. \end{aligned} \tag{16}$$

3. Alnan deňlemeler ulgamyny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ näbellilere görä çözmeli. Lagranjyň funksiýasynyň umumy görnüşi şu aşakdaky ýaly berilýär:

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + (\lambda, g(x)). \tag{17}$$

Eger şeýle bir $\{\lambda^*, x^*\}$ nokat bar bolup, bu nokatda

$$L(x, \lambda^*) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x^*, \lambda) \tag{18}$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda bu nokada Lagranjyň funksiýasynyň eýer nokady diýilýär. (18) deňsizligi

$$\begin{aligned} &L(x^*, \lambda^*) = \inf_k L(x^*, \lambda) = \sup_x L(x, \lambda^*) = \\ &= \max_x \inf_\lambda L(x, \lambda) = \min_\lambda \inf_x L(x, \lambda) \end{aligned}$$

görnüşde ýazmak bolar.

§3.Gradiýent usullary

Ilki bilen dereje çyzygynyň manysyna düşüneliň. Bu çyzykly berlen funksiýanyň bahasy hemişelik bolup gelýär. Şunuň ýaly çyzyklar, şol bir funksiýa üçin örän köpdür. Eger biz dereje çyzygynyň üstünde haýsy-da bolsa bir nokady alyp şol nokatda funksiýanyň gradiýentini tapsak, bu wektor dereje çyzygyna ortogonaldyr. Onuň ugry bolsa funksiýanyň iň çalt ösýän ugry bilen gabat gelýär. Gradiýente gapma-garşy ugrukdyrylan wektora antigradiýent diýilýär we funksiýanyň iň çalt kemelýän ugry bilen gabat gelýär.

Diýmek, meseläniň goýluşyna baglylykda şeýle bir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wektorlaryň yzygiderligini gurmaly boljak eken, şonda bu wektorlar

$$f(x_0) > f(x_1) > \ldots > f(x_n) \tag{19}$$

ýa-da

$$f(x_0) < f(x_1) < \ldots < f(x_n)$$

şerti kanagatlandyrmalydyrlar (maksimumy tapmak meselesinde). Biz minimum meselä seretjekdiris. Diýmek, biziň gurjak wektorymyz (14)-i kanagatlandyrmalydyr. Şu usula kemelme usuly hem diýilýär. Ol usullar, kemelmäniň ugrunyň saýlanyşyna baglylykda biri-birinden tapawutlanýar. Şu usullarda $\{x_n\}$ nokatlaryň yzygiderligi

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k P_k \tag{20}$$

formula arkaly tapylýar. Bu ýerde P_k – kemelmäniň ugry; α_k – şu ugur boýunça ädimiň uzynlygy. Eger biz (20)-de P_k -nyň ýerine antigradiýent, ýagny $-f'(x_0)$ wektory saýlap alsak, onda

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f' x_0, \;\; \alpha_k > 0, \; \mathrm{k} = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Bu usula gradiýent usuly diýilýär. (21) deňligi

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_k), \;\; i = 1, 2, .., n \tag{22}$$

görnüşde ýazmak hem bolar.

Gradiýent usullar örän köp. Şolaryň iň amatlysynyň biri α_k-ny has kiçi saýlap almakdan ybaratdyr. Her gezek ädim saýlanyp alnanda α_k ululyk

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) - f(x_k) \le -\varepsilon\alpha_k \|f'(x_k)\|^2 \qquad (23)$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly saýlanyp alynýar. Bu ýerde $0 < \varepsilon < 1$.

Ýene bir amatly usula seredeliň. Ol usulda x_k nokatdan x_{k+1} nokada geçilende $f(x_k - \alpha f'(x_0))$ funksiýanyň α boýunça minimumy tapylýar. Bu usula has çalt kemeltme usuly diýilýär. Şu iki usul bilen gysgajyk tanşalyň.

I usul. Eger (21)-de α_k-nyň bahasyny örän kiçi edip alsak, onda funksiýanyň kemelmegini üpjün etmek bolar:

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) < f(x_k) \qquad (24)$$

ýerine ýeter. Ýöne bu ýagdaýda gözleýän nokadymyza ýetýänçäk örän köp we birmeňzeş hasaplamalary geçirmeli bolarys. Eger α_k-ny ulurak saýlap alsak, (24)-iň ýerine ýetmezligi mümkin.

Şeýle ýagdaýlaryň bolmazlygy üçin her bir α_k-nyň bahasynda (23) şerte görä barlanylýar. Eger şol şert ýerine ýetmese, α_k-ny täzeden saýlap almaly. Şeýlelikde, biz $\alpha > 0$ taparys we bu ululyk (23)-i kanagatlandyrar. Şu tapylan α sany soň üýtgetmän galdyrarys.

Her gezek (23)-şerti barlap durmak aňsat iş däl. Şu kynçylykdan dynmak üçin ilki bilen $f(x)$ funksiýanyň häsiýetlerine seredip görmeli. Eger ol Lipşisiň şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$\alpha_k = \alpha = \frac{1-\varepsilon}{L}. \qquad (25)$$

Bu ýerde L – Lipşisiň hemişeligidir. Ýöne bu ýerde-de oňaýsyzlyk ýüze çykýar. Sebäbi bize L-ululyk, islän wagtymyz belli bolup durmaýar.

II usul. Bu usulda α_k

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) = \min_{a>0} f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) \qquad (26)$$

şerti kanagatlandyrar ýaly saýlap alynýar. α_k saýlanandan soň (21)-ni ulanyp gözlenilýän nokat tapylýar. Gradiýent usullarynyň ýene-de ençemesi bar. Olar bilen tanyşmaga meýil bildirýän okyjylaryň dykgatyna kitabyň ahyrynda getirilen edebiýatlary hödürleýäris.

VI bap
Stohastik progrimmirleme meselesi we usuly

§1. Stohastik meseläniň goýluşy

Ykdysady meseleleriň kesgitli (determinirlenen) modelleriniň esasynda köplenç ýagdaýlarda ykdysadyýetiň takyk (real) proseslerinde oňat netijeleri alyp bolmaýar. Bu esasan hem biziň modele girizýän çäklendirmelerimiziň we esasy görkezijileriň tötän häsiýetleri bilen düşündirilýär. Şeýle kesgitsiz şertde işlenilip düzülen ýörite matematiki modeller we usullar öz gezeginde stohastik programmirleme diýen ady aldy.

Çyzykly programmirleme meselesine seredeliň:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

ýerine ýetirilen çäklendirmelerde:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_1, (i = (\overline{1,m}) \\ &x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}). \end{aligned} \tag{2}$$

Kesgitlilik üçin hojalykdaky pudaklaryň optimal düzümi gözlenýär diýip hasap edeliň. Bu şertlerde maksimum arassa girdejini kesgitlemek bolýar.

Munuň ýaly meselede maksat funksiýanyň we çäklendirmeler ulgamynyň koeffisiýentlerini doly kesgitlemeklik mümkin däldir. Her bir pudakdan aýratyn hem ekerançylykdan alynýan peýda hasyllylyga baglydyr. Oňa bolsa öz gezeginde howa şertleriniň täsiri uludyr. Soňky aýdylanlaryň tötänleýin üýtgeýänligi sebäpli, maksat funksiýanyň köp koeffisiýentleri (ýa-da olaryň hemmesi) tötän ululyklar bolup biler. Çäklendirmeler ulgamynyň koeffisiýentleri a_{ij} barada hem edil şuny aýtmak bolar. Olaryň käbiri natural ýa-da iýmitlik birleşiklere görä hasyllylyk, ýagny tötän ululyklar bolar. Beýlekiler hem üýtgeýän daşky şertlere bagly bolup ýa-da belli bir derejede kesgitli (determinirlenen) bolup bilerler. Öz tebigaty boýunça b_i şertler hem dürli bolarlar. Eger hojalykda sürümli ýeriň meýdanyny kesgitli hasap edip bolýan bolsa, onda ekerançylykda zähmet serişdeleri (mümkin bolan adam, günler) işlemäne ýaramly günlere hem, işçileriň sanyna hem baglydyr. Şu ululyk tötänleýin ululyk bolar. Meselede ulanylýan tötänleýin ululyklar üçin stohastik we beýleki soraglaryň esasynda tötänleýinlik häsiýetlerini kesgitlemek mümkin bolsa (paýlanyş funksiýasyny, matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny), onda mesele töwekgellik şertlerinde çözülýär diýip hasap edýäris. Eger tötän parametrleriň üýtgeýşiniň stohastik kanuna laýyklygy barada hiç hili maglumat ýok bolsa, onda kesgitsizlik şertlerindäki mesele diýip atlandyrylýan meseläni alarys. Stohastik programmirleme iki görnüşdäki meseleleri hem öwrenýär.

Stohastik mesele goýlanda diňe bir çäklendiriji şertler we maksat funksiýa belli edilmeýär-de, eýsem şol bir wagtda haýsy meýilnama rugsat berilýändigini, haýsynyň bolsa optimal boljakdygy kesgitlenilýär. Adaty (determinirlenen) meselelerde rugsat berilýän diýlip, çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrýan meýilnama, optimal meýilnama diýip bolsa, onda bu funksional maksimum (minimum) many berýän meýilnama diýlip hasap edilýär. Stohastik meseleler üçin bu kesgitlemeler dogry bolmalydyr. Hakykatdan hem, $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ meýilnama (2)-nji çäklendirmeler ulgamyny a_{ij} we b_i tötänleýin koeffisiýentleriň manylarynyň bir jeminde kanagatlandyryp, başga bir jeminde kanagatlandyrman biler. Edil şunuň ýaly-da, haýsy bolsa bir meýilnama maksat funksiýasynyň tötänleýinlik koeffisiýentleriniň bir topary üçin optimal bolup, başga bir topary üçin optimal däl bolup biler.

Indi bolsa ýolbererlikli meýilnamanyň mümkin bolan kesgitlemesine seredeliň. Onuň üçin bolsa üýtgeýän ululyklaryň bahalar toplumy meseläni çäklendirýän ähli tötän koeffisiýentleri kanagatlandyrýan bolmalydyr. Şunuň ýaly meýilnama ýolbererlikli meýilnama diýilýär. Haýsy hem bolsa bir çäklendirmede kiçiräk düzgün bozmalar ýüze çyksa, onda onuň soňunyň heläkçilikli gutarmagy mümkin. Ýolbererlikli meýilnamanyň şeýle kesgitleme berlen stohastik meselesine berk görnüşli mesele diýilýär. Bu hili meýilnama tapylan optimal çözüwi düzetmäge mümkinçilik bermeýär we elmydama determinirlenen bolýandyr. Çäklendirilen ulgamyň birnäçe şertlerini kanagatlandyrmaýan ýolbererlikli meýilnama hem hasap edip bolar. Düzgüni bozmanyň ululygy gaty uly bolmaly däldir. Şeýle kiçi düzgün bozmanyň meýilnamasyny tapmak üçin maksimum çözüwi – minusly, minimumy – plýusly bolan birnäçe koeffisiýentli maksat funksiýasyny girizýärler. Düzgün bozmanyň şeýle saýlanan koeffisiýente köpeldilmegine jerime diýilýär. Şeýlelikde, çözüw prosesinde esasy kriteriýa optimallaşdyrylman, şol bir wagtda jerimäniň jemi hem minimallaşdyrylýar. Stohastik meseläniň şunuň ýaly goýluşyna berk däl görnüş diýilýär.

Çäklendirilen ulgamyň birnäçe meselelerinde şeýle şekillendirmäni aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\right) \geq p_i,\ 0 < p_i \leq 1,\ (i = \overline{1,m}). \tag{3}$$

Bu ýerde p, p_i- ähtimallyk nyşanlary. Ýerine ýetmegi möhüm bolan şerti alanlarynda p_i ululygyň bahasyny bire golaý saýlap alýarlar. Möhüm däl ýagdaýynda bolsa p_i –niň bahasyny nola golaý saýlap alýarlar.

Stohastik programmirlemäniň (X, (3)) şertli görnüşli meselesine ähtimallygy çäklendirilen mesele diýilýär. Bu hem berk däl hasap edilýär. p_i ähtimallygyny saýlamak berlen şerti ýerine ýetirmäniňde alnan jerimäniň ölçegi bilen deňeçerräkdir. Eger ähli $p_i = 1$ (ähli jerimeler tükeniksiz uly), mesele berk hasaplanylýar.

Berk däl meseleleri tötän faktorlar hasaba alnanda ulanmak has ukyplydyr. Ony ulanmaklyk halk hojalygyny meýilnamalaşdyrmakda has hakykata golaýdyr.

Optimal çözüwiň sanyny kesgitlemegiň dürli formulirlemesi bardyr. Eger meýilnamalaşdyrmakda maksimum girdeji ýa-da minimum çykdajy maksat edilen bolsa, stohastiki meselede maksimum (minimum) gözlenilýär.

Oba hojalygynda geçirilýän birnäçe çäreler (dürli meliorasiýa) ýylyň amatly we amatsyz gelmeginde önüm öndürilişini peseltmezlik üçin gönükdirilendir.

Stohastik meselelerde şunuň ýaly çäreleri meýilnamalaşdyrmak üçin funksiýanyň dispersiýasyny minimallaşdyrmak gerek bolýar. Meseläni maksimum girdeji almak üçin hem goýmak bolar. Munuň ýaly maksat funksiýasy arassa girdeji almagyň matematiki garaşmasy hem bolar we onuň dispersiýasy birnäçe koeffisiýente köpeldilmesidir. Islendik stohastik meseleler birnäçe özgertmelerden soň determinirlemäge getirilýär, soňkusy çyzykly däl bolýar. Häzirki zaman kompýuterlerinde bar bolan programmalar arkaly islendik stohastik meseleleriň optimal çözüwlerini kesgitlemek mümkin. Özgerdilen meseläni çözmek meýilnamanyň zerur komponentini tapmak bolup durýar. Eger ol determinirlenen bolsa, onda komponenti hasaplamak üçin goşmaça ululyklary tapmak gerek bolýar.

Stohastik programmirlemede meseläni diňe çözmekde däl, saýlamakda hem kynçylyklar ýüze çykýar. Matematiki programmirlemäniň ähli bölümleriniň içinde şu bölüm iň az işlenendir.

§2. Stohastik meseläniň iki tapgyrda çözülişi

Kesgitsiz şertde soralýan önümçilik meýilnamasyna mysal hökmünde seredeliň.

Mesele. Goý, kärhana *m* görnüşli önüm öndürýän bolsun, onuň üçin *n* görnüşli gerek serişdeler satyn alnýan bolsun, ýöne alynmaly serişdelere (önümlere) heniz isleg bildirilmänkä gerek materiallara isleg bildirip goýmaly, öndüriljek önümlere takmynan islegleriň möçberleri takyklanandan soňra önümçiligiň meýilnamasy aşakdaky şertlere görä düzülýär:

1.Goşmaça gerek bolan serişdeleri ýokary bahadan satyn almaga rugsat edilmeli.

2.Jerimeleriň kesgitliliginiň esasynda serişdeleri satyn almaga bildirilen islegleri yzyna gaýtarmak hem bolýar

3.Hemme islegleri doly ýerine ýetirmeseň hem bolýar, ýöne kärhana jerime görnüşde goşmaça ýitgä sezewar bolýar.

Goý, a_{ij}, ol i-nji görnüşli önüm birligi üçin j-nji görnüşli serişdäniň harajatynyň normasy, x_j – j-nji görnüşli isleg bildirilen serişdeleriň sany, c_j – onuň bahasy, y_j – goşmaça satyn alynmaly serişdäniň sany, d_j- – onuň bahasy, z_j – j-görnüşde yzyna gaýtarylan serişdäniň böleginiň ululygy, f_j yzyna gaýtarylan serişdede jerime birlik, w_i – i görnüşde meýilnamalaşdyrylyp öndürilýän önüm, $\{\xi_i\}_i^m$ kärhananyň öndürýän önümine bolan isleg tötän wektor, b_i – i-nji birlik önümiň satylmagyndan gelen girdeji, g_i – i-nji görnüşli serişdäniň berilmänligi üçin salnan jerime bolsun.

Biziň seredýän meselämiz iki tapgyrdan durýar. Birinji tapgyrda $\{x_i\}_{j=1}^{n}$ wektor saýlanýar, ol bolsa gerek bolan (hökman) önümçilik serişdeleri. Ikinji tapgyrda belli bolanda $\{\xi_i\}_{i=1}^{m}$ görä $\{y_i\}_{j=1}^{n}, \{z_1\}_{j=1}^{n}, \{w_i\}_{i=1}^{n}$,– näbelliler saýlanyp satyn alnan materiallaryň esasynda önümçiligiň meýilnamasy kesgitlenýär.

Bular ýaly görnüşli optimal meýilnamalaşdyrma meselelerine ikitapgyrly stohastik programmirleme meselesi diýilýär.

Matematiki modeli düzmek üçin ilki bilen 2-nji tapgyra seredeliň. Goý, $\{\xi_i(\overline{\omega})\}_{i=1}^{m}$tötän wektoryň takyk ýerleşdirilmesi $\{\xi_i\}_{i=1}^{m}$ degişlilikdäki tötänleýin waka $\overline{\omega}$. Onda girdejiniň maksimum birinji tapgyrynyň meýilnamasynyň fiksirlenmeginde $\left\{\overline{x_j}\right\}_{j=1}^{n}$ aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$max\Big(\sum_{i=1}^{m} b_i w_i - \sum_{i=1}^{n}(\xi_i(\overline{\omega}) - w_i)g_i + \\ + \sum_{j=1}^{n}(c_j - f_j)z_j - \sum_{j=1}^{n} d_j y_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j\Big) \tag{4}$$

çäklendirilen şertleri

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \le \overline{x}_j + y_j - z_j \qquad j = \overline{1,n}; \tag{5}$$

$$0 \le m_i \le \xi_i(\overline{\omega}); \qquad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$y_j \ge 0; z_j \ge 0\ , \qquad j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Bu meseläniň optimallygynyň meýilnamasy we funksiýa kriteriýasy diňe $\{\overline{x}_j\}$ we $\{\xi_i(\omega)\}$-e baglylygy görünýär. Sebäbi $\{\xi_i(\omega)\}$ -bize bagly bolmadyk tötän faktorlar bilen kesgitlenip, (paýlama) dargadylyp hökman ortara funksiýanyň kriteriýasyny her bir fiksirlenen, $\{\overline{x}_j\}$ýagny matematiki garaşmasyna funksiýa kriteriýasyna seretmeli. Goý, (X, (4–7)) meselede $\varphi(\{\overline{x}_j\},\ \{\xi_i(\omega\})$ funksiýa kriteriýanyň optimal bahasy bolsun, onda

$$\Phi(\{\overline{x}_j\}) = M_\omega \varphi(\{\overline{x}_j\}), \{\xi_j(\omega)\})$$

(M_ω – matematiki garaşmanyň simwoly)

Indi bolsa birinji tapgyrly meseläni aýdyňlaşdyralyň. Netijede, $\Phi(x)$ maksimum bolar ýaly edip, $x = \{x_j\}$ saýlalyň. $\Phi(x)$ funksiýanyň islendik $x \geq 0$ üçin kesgitlenendigini görmek bolýar. Şoňa görä bu meselä güberçek programmirleme meselesi hökmünde seretmek bolýar. Esasy goşmaça kynçylyklar $\Phi(x)$ funksiýanyň aýdyň däl görnüşde berilmeginden-de, kesesinden bolsa çyzykly programmirlemäniň tükeniksiz köp meselesiniň çözülmeginiň netijesinden we maksat funksiýasynyň bu meseleler üçin ortaça bahasynyň, degişlilikde kesgitli ähtimal bölünmeginden ybaratdyr. Diňe hususy ýagdaýda tötän wektoryň bahalarynyň köplügi tükenikli bolanda, iki tapgyrdan durýan stohastik programmirlemäniň çyzykly meselesi, çyzykly programmirlemäniň ýörite görnüşine getirilýär.

Hakykatdan, goý, wektor $\{\xi\}_{i=1}^{m}$ tükenikli sanly bahalaryny kabul edip bilýän bolsun, $s^{(1)}, s^{(2)}, ..., s^{(r)}$, degişlilikdäki ähtimallyklar

$$p_1, p_2, \ldots, p_r; \quad \sum_{k=1}^{r} p_k = 1,\ p_k > 0,\ s^{(k)} = \{s_i^{(k)}\}_{i=1}^{m}, (k = \overline{1,r}).$$

Eger (X, (4–7)) meseläniň näbellilerini

$\{\xi_i\}_{i=1}^{m} = s^{(k)}, w_{ik}, y_{jk}, z_{jk}$ diýip bellesek, onda

$$\Phi(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{r} p_j \Big(\sum_{i=1}^{m} b_i w_{ik}^{*} - \sum_{i=1}^{m} (s_i^{(k)} - w_{ik}^{*}) g_i + \sum_{j=1}^{n} (c_j - f_j) z_{jk}^{*} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} d_j y_{jk}^{*} \Big) - \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j .$$

Iki tapgyrly mesele aşakdaky çyzykly programmirleme meselesine getirilýär.

$$\min \Phi(\overline{x}) \text{ – i tapmaly.} \tag{8}$$

Çäklendirmeler

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_{ik} < \overline{x}_j + y_{jk} - z_{jk} \quad (j = \overline{1,n});$$

$$0 \le w_{ik} \le s_i^{(k)} \quad (i = \overline{1,m}). \tag{9}$$

$$y_{jk} \ge 0,\ z_{jk} \ge 0\,(k = \overline{1,r}).$$

Mesele r sany bagly däl meselelere dargaýar, diňe $\overline{x}_j$ görä olar baglanyşykly bolýarlar. Umumy ýagdaýda çyzykly iki tapgyrly stohastik mesele aşakdaky görnüşde goýulýar.

Berlen. A matrisanyň möçberi, $m \times n_1$: möçberi $m \times n_2$ matrisalar toplumynyň möçberi, $D\xi$ tötän ξ parametre bagly: wektor c we wektorlar toplumlary, c_ξ^1, b_ξ, degişlilikde olaryň möçberleri n_1, n_2, m. Her bir hasaba alnan ξ üçin seredilýän mesele aşakdaky görnüşde şekillendirilýär:

$$\min(c_\xi^1, y), \tag{10}$$

Çäklendirme:

$$D_\xi y \ge b_\xi - Ax. \tag{11}$$

Goý, $y_\xi^*(x)$ meseläniň optimal çözülişi islendik ξ üçin bar bolsun. Onda

$$\min_{x \ge 0}\lfloor (c,x) + M_\xi(c_\xi^1, y_\xi^*(x)) \rfloor, \xi \in \Sigma,$$

Bu ýerde M_ξ -nyşan ξ tötän parametre görä paýlanmanyň matematiki garaşmasy. Goý,

$$R_\xi(x) = (c_\xi^1, y_\xi^*(x)), \forall x \ge 0$$

funksiýa ähtimallyk ölçegi boýunça integrirlenýän we ölçenýän Σ bölek köplükde kesgitlenen bolsun.

Goý,

$$M_\xi(c_\xi^1, y_\xi^*(x)) = F(x)$$

funksiýa $x \ge 0$ ýaýlada güberçek bolsun.

Goý, $x_1, x_2 \ge 0$ we α üçin $0 \le \alpha \le 1)$, $x(\alpha) = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ ξ-ni fiksirläp alarys:

$y(\alpha) = \alpha y_\xi^*(x_1) + (1-\alpha) y_\xi^*(x_2)$, $y(\alpha)$ (11) deňsizligi ýerine ýetirýär we

$$(c_\xi^1, y(\alpha)) = \alpha(c_\xi^1, y_\xi^*(x_1)) + (1-\alpha)(c_\xi^1, y_\xi^*(x_2)) =$$
$$= \alpha R_\xi(x_1) + (1-\alpha) R_\xi(x_2).$$

Bu ýerde

$$R_{\xi}(x(\alpha)) = (c_{\xi}^{1}, y_{\xi}^{*}(x(\alpha))) \leq \alpha R_{\xi}(x_1) + (1-\alpha) R_{\xi}(x_2).$$

ξ görä paýlamany integrirländen soňra alarys:

$$F(x(\alpha)) \leq \alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2).$$

Bu $F(x)$-iň güberçekligini görkezýär. Şeýlelikde, iki tapgyrly çyzykly stohastik mesele güberçek funksiýanyň minimum meselesine getirilýär:

$$f(x) = (c, x) + F(x), \text{ haçan-da } x \geq 0.$$

Eger tötän ξ wektoryň ýerleşdirilmesi tükenikli bolsa, onda biz çyzykly programmirlemäniň düzümi meselesini alýarys. Umumy ýagdaýda tötän wektoryň ýerleşdirmesi tükeniksiz san bolsa, iki tapgyrly meseläni takmynan çyzykly programmirlemäniň meselesi hökmünde görkezjek bolup görmeli, ýöne oňat takyk görnüşde aljak bolsaň, onda çyzykly programmirleme meselesine örän uly göwrümde seretmeli bolýar. Esasy kynçylyk $F(x)$ aýdyň däl görnüşde berilmegi bilen baglanyşyklydyr.

§3. Stohastik programmirlemäniň meseläniň düzetmesiz çözülişi

Stohastik programmirleme meselesiniň modeli we onuň korreksiýa däl çözülişi.

Stohastik programmirleme meselesi çyzykly däl programmirleme meselesine getirilýär. Onuň çözülişi bir tapgyrda kabul edilýär we tötän parametriniň ýerleşdirmesini anyklap bolmaýar. Şeýle meselelerde, düzgün bolşy ýaly, maksat funksiýa we çäklendirilen tötän parametr manysynda ortalaşdyrylan diýlip düşünilýär. Bu ýagdaýda matematiki model aşakdaky görnüşe eýe bolýar.

Funksiýa berlen:

$$f_{\nu}(x, \omega),\ \nu = 0, 1, \ldots, m,\ x \in E_n,\quad \omega \in \Omega \text{ – tötän parametr.}$$

Kesgitlemeli:

$$\min M_{\omega} f_0(x, \omega) \tag{12}$$

Aşakdaky çäklendirmelerde

$$M_\omega f_i(x,\omega) \le 0, \quad (i = \overline{1,m}). \tag{13}$$

Eger her bir x hasaba alnanda

$$f_v(x,\omega), (v = 0, 1, \ldots, m)$$

funksiýany integrirlemä gönükdirsek, ähtimallyklar ölçegi boýunça Ω ýaýlasynda kesgitlenen we

$$M_\omega f_v(x,\omega) = \overline{f}_v(x),$$

bilen belgilesek, onda biz adaty görnüşdäki çyzykly däl programmirleme meselesini alarys:

$$\min \overline{f}_0(x). \tag{14}$$

$$\overline{f}_i(x) \le 0, (i = \overline{1,m}). \tag{15}$$

Stohastik (10), (11) meseläniň çözülişinde esasy kynçylyk $f_v(x)$ funksiýanyň aýdyň görnüşini diňe adatdan daşary ýagdaýlarda almak bolýanlygy, esasan, biz $f_v(x, \omega)$ funksiýany ýönekeý hasaplama bilen onuň bahasyny we onuň gradiýentini x, ω fiksirläp kesgitleýäris.

Wajyp kiçi synply meselelere «Çäklendirilen ähtimallykly meseleler» girýär. Beýle modeller çäklendirmeleriň absolýut ýerine ýetmekligini talap etmän, diňe ähtimallygy kesgitlemekligi talap eden ýagdaýlarda ulanylýar.

Onda matematiki modeli aşakdaky görnüşde tapmaly:

$$\min_x M_\omega f_o(x;\omega)_x$$

$$P\{f_i(x,\omega) \le 0\} \ge p_i; 0 < p_1 \le 1, (i = 1,...,m) \text{ şertlerde.}$$

Eger häsiýetlendiriji funksiýa girizilse

$$\chi_i(x,\omega) = \begin{cases} 0, f_i(x,\omega) > 0, \\ 1, f_i(x,\omega) \le 0, \end{cases}$$

onda şu aşakdaky mesele alnar:

$$\min_x M_\omega f_0(x,\omega) / M_\omega[\chi_i(x,\omega) - p_i] \ge 0, (i = \overline{1,m})$$

§4. Stohastik meseläniň umumylaşdyrylan gradiýentler usuly bilen çözülişi

Stohastik programmirlemäniň umumylaşdyrylan gradiýent usuly, tötän gözleg usulyna, ýagny gaýtalanýan hereketi görkezýän usullara degişli. Stohastik umumylaşdyrylan gradiýent usulynyň minimumlaşdyrylan $f(x)$ güberçek funksiýasy indiki gaýtalanýan hereketi görkezýän formula bilen ýazylýar:

$$x_{k+1} = x_k - h_k(x_k) \cdot \overset{\Delta}{\nabla}_\omega(x_k), \tag{16}$$

bu ýerde h_k– k-njy ädimde ädimli köpeldiji.

$\overset{\Delta}{\nabla}_\omega(x_k)$ – tötän wektor, ýagny (x_k) nokatda umumylaşdyrylan gradiýentiň $f(x)$ funksiýasy matematiki garaşmasy bilen gabat gelýän bolsa. Ýönekeýlik üçin $\overset{\Delta}{\nabla}_\omega(x_k)$wektoryň ähtimallyk häsiýetleri (λ_k) nokatda kesgitlenýär we ýokardaky gözleg prosesine degişli däl diýeliň. Goý, x^* – $f(x)$ funksiýanyň ýeke-täk minimum nokady bolsun.

Teorema. *Goý, aşakdaky şertler ýerine ýetýän bolsun:*

$$\textbf{\textit{1)}}\ \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x_k) = +\infty;\ h_k(x_k) > 0$$

$$\textbf{\textit{2)}}\ \sum_{k=1}^{\infty} h_k^2(x_k) < \infty$$

$$\textbf{\textit{3)}}\ M_\omega \left\| \overset{\Delta}{\nabla}_\omega(x_k) \right\|^2 \le c$$

hemme k-lar üçin k = 0, 1, ...,

Onda bire deň bolan ähtimallyk bilen

$$\lim_{k\to\infty} \| x_k - x^* \| = o$$

Subudy.

Goý, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$– tötän ululyklaryň yzygiderligi bolsun we aşakdaky şert ýerine ýetýän bolsun:

$$M(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1) \le y_{n-1}.$$

Beýle tötän yzygiderlikler **ýarym martingal** diýlip atlandyrylýar. Ýarym martingal üçin indiki gabatlaşma teoremasy subut edilen.

Eger

$$M(|y_n|) \leq c < +\infty,$$

onda birlik ähtimallygy bilen y_n predel yzygiderligi tapylan:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y^*,$$

bu ýerde

$$M(|y^*|) < +\infty$$

$\| x_k - x^* \|^2$ – yzygiderligiň özüni alyp barşyna syn edeliň:

$$\| x_{k+1} - x^* \|^2 = \left\| x_k - h_k(x_k)\hat{\nabla}\omega(x_k) - x^* \right\|^2 =$$
$$= \| x_k - x^* \|^2 - 2h_k\left(\hat{\nabla}\omega(x_k), x_k - x^*\right) + h_k^2 \left\| \hat{\nabla}\omega(x_k) \right\|^2;$$

$$M_\omega \| x_{k+1} - x^* \|^2 = M_\omega \| x_k - x^* \|^2 - 2h_k(x_k)\left(M_\omega \hat{\nabla}\omega(x_k), x_k - x^*\right) +$$
$$+ h_k^2(x_k) \cdot M_\omega \left\| \hat{\nabla}\omega(x_k) \right\|^2.$$

Şunlukda

$$M_\omega \hat{\nabla}\omega(x_k) = \hat{\nabla} f(x_k); \;\; (\bar{\nabla} f(x_k), x_k - x^*) \geq 0,$$

onda

$$M_\omega(\| x_{k+1} - x^* \|^2 x_k) \leq \| x_k - x^* \|^2 + ch_k^2 \qquad (17)$$

ululyga seredeliň:

$$z_k = \| x_{k+1} - x^* \|^2 + c \sum_{k=s}^{\infty} h_k^2.$$

Deňsizlik aşaky deňsizlige deň güýçlüdir:

$$M(z_{k+1} \mid z_k, ..., z_1) \leq z_k.$$

Bu ýerde $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ýarym martingal bilen z^* predel birlik ähtimallykda gabat gelýär. Sebäbi

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{k=s}^{\infty} h_k^2 = 0.$$

Şu predele-de $\| x_k - x^* \|^2$ birlik ähtimallykly gabat gelýär. Indi bolsa predeliň nola deňdigini görkezeliň. Tersine subut edeliň. Eger bu beýle däl bolsa, onda $\varepsilon, \delta > 0$ tapylyp, ähtimallyk bilen noldan has aşakdaky tükeniksiz yzygiderlik bardyr:

$$x_{k1}(\omega), ..., x_{ki}(\omega), ..., k_1(\omega) < k_2(\omega) < ...,$$

şeýle deňsizlik ýerine ýeter ýaly

$$\| x_{k_i}(\omega) - x^* \| \geq \varepsilon,$$

bu ýerde

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k M_\omega \left[\hat{\nabla}_\omega (x_k), x_k - x^* \right] = \infty,$$

Bu bolsa aşakdaky gatnaşyga ters gelýär:

$$M_\omega \| x_{k+1} - x^* \|^2 = \| x_0 - x^* \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(M_\omega \hat{\nabla}_\omega (x_k) x_k - x^* \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 M_\omega \left\| \hat{\nabla}_\omega (x_k) \right\|^2.$$

Teorema subut edildi.

Umumylaşdyrylan stohastik gradiýentler usulyny stohastik çyzykly programmirlemäniň iki tapgyrly meselesini çözmekde ulanalyň. Goý, $\lambda_\xi^*(x)$ (10), (11) – ikileýin meseläniň optimal çözgüdi bolsun. $M_\omega A^T \lambda_\xi^*(x_0)$ wektoryň x_0 nokatda $F(x)$ funksiýa umumylaşdyrylan gradiýentdigini görkezeliň. Munuň üçin aşakdaky deňsizligi barlalyň:

$$R_\xi(x) - R_\xi(x_0) \geq (-A^T \lambda_\xi^*(x_0), x - x_0).$$

Hakykatdan hem

$$R_\xi(x) - R_\xi(x_0) = (c_\xi^1, y_\xi^*,(x)) - (c_\xi^1, y_\xi^*(x_0)).$$

Çyzykly programmirlemäniň ikileýinlik teoremasyna laýyklykda:

$$(c_\xi^1, y_\xi^*(x)) = (\lambda_\xi^*(x), b_\xi - Ax) \geq (\lambda_\xi^*(x_0), b_\xi - Ax).$$
$$(c_\xi^1, y_\xi^*(x_0)) = (\lambda_\xi^*(x_0), b_\xi - Ax_0).$$

Bu ýerde

$$R_\xi(x) - R_\xi(x_0) \geq (\lambda_\xi^*(x_0), A(x_0 - x)) = (-A^T \lambda(x_0), x - x_0).$$

Ortaça bahany hasaplalyň:

$$F(x) - F(x_0) \geq (-M_\omega A^T \lambda^*_{\xi(\omega)}(x_0), x - x_0).$$

Bu deňsizlik $F(x)$ funksiýanyň umumylaşdyrylan gradiýentiniň kesgitlemesine laýyklykda x_0-da $-M_{gw} A\lambda^*_{\xi(\omega)}(x_0)$ deňdigini görkezýär. Bu ýerden umumylaşdyrylan stohastik gradiýent usulyna esaslanýan çyzykly programmirlemäniň iki tapgyrly meselesiniň kesgitlenen çözgüt usuly gelip çykýar.

Bu usul aşakdakylardan ybaratdyr:

1) Tötän ýaly sanlary işläp çykarýan kömekçi programmanyň kömegi bilen $\xi(w)$ tötän parametr hökmünde paýlanan garaşsyz tötän ululyklaryň yzygiderli amala aşyrylyşyna meňzedilýän yzygiderliligi alýarys; $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$

2) $x = x_0$-dan başlalyň. k ädimden $x = x_k$ alarys. Şondan soňra $\bar{\xi}_{k+1}$ bahasyny işläp düzýäris we (10), (11) meseläni çözýäris hem-de $x = x_k$ we $\xi = \xi_{k+1}$ ikileýin üýtgeýän $\lambda_{\xi_{k+1}}(x_k)$ bahany alýarys;

3) Tötän gözlemäniň ädimini ýerine ýetirýäris:

$$x_{k+1} = P^+\left[x_k - \hat{\nabla}(x_k)h_k\right].$$

$\left(P^+(x) - \hat{\nabla}(x_k)\right)$ wektor hökmünde $-A^T\lambda^*_{\xi k+1}(x_k)$ kabul edip (x) wektoryň düzüjilerini 0-a öwürýän operatordyr, ýagny

$$x_{k+1} = P^+\left[x_k - h_k A^T \lambda^*_{\xi_{k+1}}(x_k)\right];$$

4) k-ni k+1 bilen çalşyp, 2-ä geçýäris.

Jemlenen stohastik gradiýentler usulyny $f_v(x, \omega) - x$ funksiýa boýunça güberçek bolan şertinde (12), (13) meseläni çözmek üçin hem ulanyp bolar.

Otrisatel däl agramlary ortalamagyň güberçek funksiýalaryň sanyndan çykarmaýandygy sebäpli, $\bar{f}_v(x) = M_\omega f_v(x, \omega)$funksiýa hem güberçekdir.

Ýylmanak däl jerime funksiýalar usulyny ulanyp, güberçek programmirleme (14), (15) meselesini güberçek funksiýany minimizirlemek meselesine getireris:

$$F(x) = \bar{f}_0(x) + \sum_{i=1}^{m} s_i \varphi_i(\bar{f}_i(x)), \tag{18}$$

(s_i-ýeterlik derejede uly položitel san)

$\hat{\nabla}F(x)$ umumylaşdyrylan gradiýent aşakdaky formula bilen hasaplanýar:

$$\bar{\nabla}F(x) = \bar{\nabla}\bar{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} s_i(\bar{f}_i(x))\bar{\nabla}\bar{f}_i(x),$$

$$s_i(f) = \begin{cases} 0, & f \leq 0, \\ s_i, & f > 0. \end{cases}$$

Onuň stohastik meňzeşligi aşakdaky görnüşde alnyp bilner:

$$\bar{\nabla}F(x) = \bar{\nabla}f_0(x,\bar{\omega}) + \sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(x,\bar{\omega})\bar{\nabla}f_i(x,\bar{\omega}). \qquad (19)$$

Bu ýerde $\bar{\omega} \in \Omega - \omega -$ tötän parametriň amala aşyrylmasy (ýa-da ω amala aşýan ýaly görkezýän ýalan tötän ululyk)

Indi $\overline{\nabla}(x)$ formula boýunça (12) hasaplap çykarmak bilen $F(x)$ funksiýa degişlilikde jemlenen stohastik gradiýentler (16) usulynyň umumy shemasyny peýdalanyp, (12), (13) meseläniň çözgüdini almak mümkin.

III BÖLÜM. YKDYSADY ULGAMYŇ MATEMATIKI MODELIRLENILIŞI

VII bap
Ykdysadyýeti ösdürmekde uzak möhletleýin agregirlenen model

§1. Ykdysady ýönekeý model

Ykdysadyýetiň agrerirlenen modelleri ykdysadyýetiň uzak möhletleýin (ýigrimi, otuz we köp ýyllarda) ösmeginiň tendensiýalaryny öwrenmekde ulanylýar. Bu modellerde sany köp bolmadyk görkezijiler arkaly hojalygy suratlandyrmak başardýar.

Uzak möhletleýin çaklamada matematiki modeliniň aşakdaky bäş bölegi (blogy) hökman bolmaly:

1) önümçilik işleriniň bölegi
2) ylmy-tehniki progres bölegi
3) serişdeler bölegi (serişdeler)
4) halkyň sanynyň köpelişini öwrenýän (demografiýa) bölegi
5) durmuş-ykdysady mehanizmler (gurluşlar) bölegi.

Diňe birinji we ikinji bölekli meselä serediler. Ýagny iň ýönekeý wariantyna we olaryň mysalynda ýokary agregirlenen modeller (ykdysady ösüşiň modeli diýip hem atlandyrylýar) gurlanda, ulanylanda we çaklamalarda haýsy soraglaryň ýüze çykýandygyny göreris. Matematiki model düzülende ilki bilen esasy näbellileriniň we parametrleriniň manysyny derňemek zerurdyr. Bir sektorly diýilýän matematiki modele seredeliň. Bir sektorly modelde ykdysadyýetiň önümi bir jynsly hasap edilýär, ýagny diňe bir görnüşdäki önümden ybarat. Meselem, milli girdeji, arassa (täzeden döredilen) material jemgyýetçilik önüm.

Şeýlelikde, esasy sazlaşyk-gatnaşygyň matematiki modeliniň nämedigi düşnüklidir. Eger Y_t bir ýylyň t dowamynda milli girdeji bolsa, onda I_t bir ýylyň t dowamynda, arassa maýa goýum (önümçiligi giňeltmek üçin maýa) C_t bilen bir t ýyldaky harajat, onda daşky söwdany sazlaşdyrylan diýip hasap etsek (ýagny daşary çykarylan bilen girizilene deň), onda ýazmak bolýar:

$$I_t + C_t = Y_t. \tag{1}$$

Bu ýerde önümçilige degişli bolmadyklar çykdajylar diýlip, hasap edilýär. Maýa goýumlara bolsa fonduň aýlamagynyň köpelmegine degişli serişde diýip düşünmeli. Ýagny döwlet ýa-da her bir raýat, goranmak, bilim we ş.m. Şeýle hem köp maýa goýumlar esasy fonduň ösmegine getirýär. Ýagny aýlanma maýa goýumyň esasynda t-niň bir ýylyň dowamyndaky ululygyny K_t bilen bellesek, onda esasy maýa goýumyň dinamikasyny aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$K_{t+1} = K_t + I_t. \tag{2}$$

Indi milli girdeji nireden alynýar we ol nämä bagly bolar diýip sorasak, onda ol önümçilik prosesinde döredilýär. Bir ýylyň t dowamynda döredilen milli girdejiniň ýönekeýje matematiki modelini, esasy fonduň sanynyň, önümçilik bilen meşgul bolýanlaryň (işgärleriň sany) bir ýylyň t dowamyndaky funksiýasy hökmünde seretmek bolýar. Ony L_t diýip belläliň. Önümçilik funksiýasy:

$$Y_t = F(K_t, L_t, t). \tag{3}$$

Bu baglylyk önümçilik funksiýasy bolýar! Umuman, işçileriň sany halkyň hemişelik bölegini düzýär hem-de birgidişinde deň ösýär diýip hasap edilýär:

$$L_t = L_0\, e^{\eta t}. \tag{4}$$

Indi bolsa girdejini çykdajy bilen *maýa goýumyň* öz aralarynda paýlanyş mehanizmini görkezeliň.

Maýa goýumy we harajaty bu $s_t = I_t / Y_t$ ýygnama normatiwiniň üsti bilen kesgitlemek ýerlikli:

$$\dot{I}_t = s_t\, Y_t, \tag{5}$$

$$C_t = (1 - s_t)Y_t, \tag{6}$$

$$0 \le s_t \le 1. \tag{7}$$

Ýöne hakyky ýagdaýda s_t uly bolmaly däldir, sebäbi ol ýeterlik derejede C_t çykdajyny kanagatlandyrmalydyr. Eger wagtyň başlangyç $t = 0$ pursadynda, zähmetkeşleriň sany L_0 we esasy önümçilik fondlarynyň mukdary K_0 berlen bolsa, onda η parametr hem berlendir.

Hemme gatnaşyklary birleşdirip, aşakdaky çaklamanyň matematiki modelini alarys:

$$\begin{cases} Y_t = F(K_t, L_t, t), \\ I_t = s_t Y_t, \\ C_t = (1 - s_t) Y_t, \\ K_{t+1} = K_t + I_t, \\ L_t = L_0 e^{\eta t}, \\ K_0 - berlen. \end{cases} \tag{8}$$

Bu ulgamda ýeke-täk azat näbelli bar. Ol hem ýygnama normasy s_t. Ony dolandyryjy diýip hasap etsek, onda onuň üýtgemegi bilen (8) ulgamy derňemek we ýokardaky bir parametrli meselede, näbellileri her bir ýyldan üýtgemeýän, eýsem üznüksiz üýtgeýän diýip hasap etsek, onda (8) modeli differensial görnüşde ýazmak bolar:

$$\dot{K} = I(t) \tag{9}$$

we model aşakdaky görnüşde ýazylar:

$$\begin{aligned} & Y(t) = F(k(t), L(t), t), \\ & I(t) = s(t) Y(t), \\ & C(t) = (1 - s(t)) Y(t), \\ & \dot{K}(t) = I(t), \\ & L(t) = L_0 e^{\eta t}, \\ & K(0) = K_o \\ & K_0 - berlen. \end{aligned} \tag{10}$$

Eger biz hemme modellerde hemmetaraplaýyn alsak, onda her bir deňlemä bir topar blok modeller degişli bolarlar we ykdysadyýetiň birnäçe elementlerine degişli bolarlar.

§2. Ýönekeý agregirlenen ykdysady modelde önümçilik funksiýasy

Ýokarda seredilen modelde milli girdejiniň önümçilik gaznasynyň mukdary we zähmetkeşleriň sanyna baglylygyny görkezýän önümçilik funksiýasyny ulandyk. Önümçilik funksiýasy umumy görnüşde aşakdaky ýaly berilýär:

$$y = F(x, a), \tag{11}$$

bu ýerde y – işleriň netijesi bolan wektor, x – serişdeleriň wektory, a – önümçilik funksiýasynyň parametrleriniň wektory, ýagny önümçilik funksiýanyň ýokardaky

$$Y = F(K, L, t)$$

görnüşinden

$$Y = F(K, L)$$

diýip alalyň (önümçilik funksiýasy t-wagt parametrine bagly däl):

$$K \geq 0,\ \ L \geq 0;\ \ F(0, L) = 0,\ \ F(K, 0) = 0. \tag{12}$$

Esasy fonduň mukdarynyň we zähmetkeşleriniň sanynyň ösmegi milli girdejiniň ösmegine getirýär. Ýagny, eger önümçilik funksiýasy differensirleýän bolsa, onda

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0. \tag{13}$$

$$K > 0,\ \ L > 0.$$

Ondan başga hem ikinji tertipli önüme seredilýär. Ýagny haýsam bolsa bir önümçilik resursyna çykdajynyň köpelmegi, onuň ulanylmagynyň peselmegine getirýär:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \tag{14}$$

Eger önümçiligiň masştaby üýtgese, ýagny önümçilikde ulanylýan serişdeleriň sany proporsional ösýän bolsa, onda $F(K,L)$ bilen $F(\lambda K, \lambda L)$, $\lambda > 0$ bahalary nähili bagly bolup biler diýen matematiki mesele ýüze çykýar.

Serişdeleriň sanynyň ösmegi bilen milli girdeji ösýär:

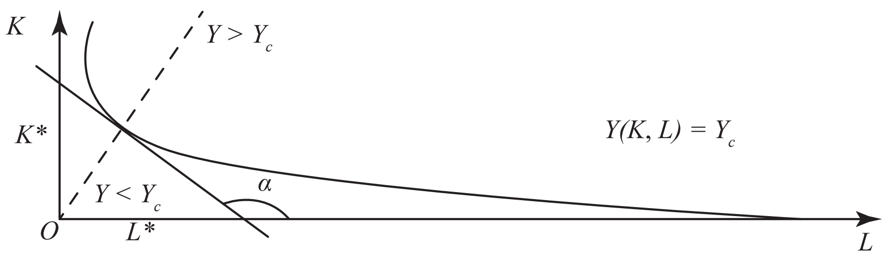
$$F(\lambda K, \lambda L) > F(K, L);\ \lambda > 1,$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L);\ \lambda > 0. \tag{15}$$

Bu bolsa milli girdejiniň ösüşiniň serişdeleriň ösüşine proporsionaldygyny görkezýär.

(12)–(15) gatnaşyklar önümçilik funksiýasynyň esasy häsiýetlerine görä, şol bir sanly milli girdejini serişdeleriniň dürli K, L – gatnaşygynda hem öndürmek bolýandygyny görkezýär.

(K, L) tekizlikde $Y_C = F(K, L)$ iki üýtgeýän ululykly funksiýanyň nokatlarynyň geometrik toplumyna Y_C *izokwanta* diýilýär. Izokwantanyň mysaly 1-nji suratda berlendir.



1-nji surat

$F(K, L) = Y_C$ gatnaşyk arkaly berlen izokwanta, $K(L)$ baglylygyň grafigi hökmünde seretmek bolýar. Bu bolsa aýdyň däl funksiýanyň aýdyň görnüşidir.

Suratdan görşümiz ýaly, izokwantada şu şert ýerine ýetýändir: K(L) monoton kemelýän funksiýadyr:

$$\frac{dK(L)}{dL} < 0.$$

Ýokarda görkezilen görnüşdäki önümçilik funksiýasynyň islendik $K(L)$ izokwantasynyň şu häsiýete eýedigini görkezeliň.

Hakykatdan (12)–(15) gatnaşyklary kanagatlandyrýan $F(K,L)$ – funksiýanyň islendik izokwantasynda islendik $\{K, L\}$ – nokady alalyň, onda ol nokat izokwantanyň deňlemesini kanagatlandyrýandyr:

$$F(K, L) = Y_C.$$

K,L ululyklara dK we dL kiçi artdyrmalary bereliň, ýagny

$$F(K + dK, L + dL) = Y_C$$

bolar ýaly, onda

$$F(K + dK, L + dL) - F(K, L) = 0,$$

dK,dL kiçi bolany üçin

$$\frac{dF(K,L)}{\partial K}dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dL = 0,$$

$$\frac{\partial K}{dt} = -\frac{\partial F(K,L)/\partial L}{\partial F(K,L)/\partial K}.$$

(13) gatnaşyga görä, izokwantanyň ugry boýunça hereket edilse, onda $dK/dL < 0$, ýagny $K(L)$–monoton kemelýän funksiýadyr.

$\gamma = \dfrac{dK(L)}{dL}$ ululyga çalyşmanyň predel normasy diýilýär we her birliginiň zähmet çykdajysynyň köpelen wagty esasy fonduň näçä boşamaklygynyň mümkindigini görkezýär. Eger milli girdejini öňküsi ýaly saklajak bolsak, çalyşmanyň predel normasy γ-otrisatel baha eýe bolmalydyr, sebäbi bir serişde ulanylandan soňra, başga bir serişdäni köpeltmeli bolýar. Çalşyrmanyň predel normasynyň γ üýtgeme tizliginiň san taýdan häsiýetini aňlatmak üçin izokwantanyň ugry boýunça σ diýen ululyk ulanylýar. Oňa serişdeleriň maýyşgak çalşyrmasy diýilýär. Bu σ-ululyk, izokwantanyň ugry boýunça hereket edilende çalşyrmanyň predel normasy 1% üýtgeýän wagty esasy gaznalaryň zähmetkeşleriň sanyna görä näçe göterim üýtgemelidigini görkezýär:

$$\sigma = \frac{d(K(L))}{K/L} : \frac{d\gamma}{\gamma}, \tag{16}$$

eger görkeziji hökmünde γ boýunça L-den önüm alynsa, γ ululygyň üýtgeme tizligini häsiýetlendirmek örän ýönekeý bolýar.

Önümleriň serişdeler boýunça çykarylmagynyň (öndürmäniň) ýene bir wajyp häsiýeti maýyşgaklyk koeffisiýentini aşakdaky formulalar bilen kesgitläp bolýanlygydyr:

$$E_K = \frac{K}{F(K,L)}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}; \; E_L = \frac{L}{F(K,L)}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}.$$

Bu koeffisiýentler önümçilik serişdelerine sarp edilen harajatyň 1% üýtgemekliginde milli girdejiniň näçe göterim üýtgeýändigini görkezýär. Şeýle hem öndürilişiň maýyşgaklyk koeffisiýenti E_K, E_L-leriň bahalary K we L-iň haýsy bahalarynda hasaplanandygyna bagly bolýar.

Ykdysady tejribede, köplenç, milli girdeji esasynda ölçenýän ortaça gazna haýry (berlişi) diýen düşünje ulanylýar:

$$\Phi_K = \frac{Y}{K} = \frac{F(K,L)}{K}.$$

Bu ululygyň esasynda çykarylyşyň maýyşgaklyk koeffisiýentini esasy gaznalar boýunça aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$E_K = \frac{1}{\Phi_K}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}.$$

Ýagny, milli girdejiniň maýyşgaklyk koeffisiýenti esasy gazna görä, milli girdejiniň önüminiň esasy gaznasynyň ortaça gazna berlişine bolan gatnaşygyna deňdir. Edil şonuň ýaly edip E_L koeffisiýenti hem düşündirmek bolýar. Diýmek, islendik x önümçilik serişdesiniň E_x koeffisiýenti serişdäniň predel peýdalylygynyň orta peýdalylyga bolan gatnaşygyny görkezýär diýip aýtmak bolýar.

Biz esasan hem $L > 0$ bahasyna serederis. Onda (15) formulanyň esasynda

$$Y = F(K, L)$$

gatnaşygy ýönekeýleşdirmek bolýar. Ony aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$Y = LF(K/L, 1)$$

ýa-da

$$\frac{Y}{L} = F(K/L, 1).$$

$$y = \frac{Y}{L},\ k = \frac{K}{L}.$$

Belgileme girizeliň:

$$y = \frac{Y}{L}, k = \frac{K}{L},$$

onda

$$f(K) = F(k, 1), f(k) = y.$$

y – bir zähmetkeş üçin milli girdeji, k–bir zähmetkeşe gerek bolan esasy gaznanyň mukdary, $f(k)$ – bu iki görkezijini baglanyşdyrýan önümçilik funksiýasy. Eger $F(K, L)$-belli bolsa, onda $f(k)$-ny kesgitlemek bolýar we tersine.

$$f(0) = 0. \tag{17}$$

Şeýle hem $f(k)$–funksiýanyň $F(K, L)$-iň häsiýeti boýunça, iki gezek differensirlenýän üznüksiz funksiýadygy aýdyňdyr. Onuň önümleriniň häsiýetlerine seredeliň:

$$1) \quad \frac{df(k)}{dk} = \frac{dF(k,1)}{dk} > 0.$$

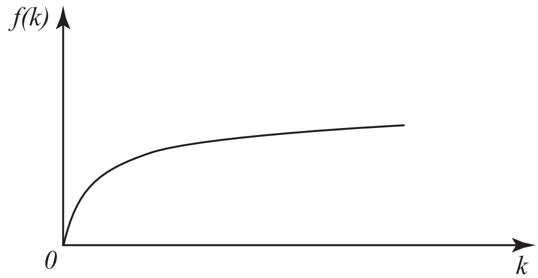
$$2) \quad \frac{d^2 f}{dk^2} = \frac{d}{dk}\left(\frac{dF(k,1)}{dk}\right) < 0.$$

Şeýlelikde, $f(k)$ – funksiýa aşakdaky gatnaşyklary ýerine ýetirýär:

$$f'(k) > 0; \tag{18}$$

$$f''(k) < 0. \tag{19}$$

$f(k)$ bir näbelli funksiýa bolanlygy üçin, onuň grafigini tekizlikde görkezmek bolýar. Ol funksiýanyň esasy häsiýeti çyzgyda suratlandyrylýar.



2-nji surat

§3. Köp gabat gelýän önümçilik funksiýasy

Önümçiligi häsiýetlendirýän köp gabat gelýän önümçilik funksiýalarynyň görnüşlerine seredeliň. Ilki bilen islendik sandaky serişdeler üçin köp gabat gelýän önümçilik funksiýasyna seredeliň

$$Y = Y_0 x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Biziň seredýän meselämizde bu funksiýa aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$Y = Y_0 \left(\frac{K}{K_0} \right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L_0} \right)^{\beta}.$$

Bu ýerde Y_0, K_0, L_0, α, β – statiki informasiýalaryň üsti bilen kesgitlenýän položitel sanlar. Bu sanlaryň manysy örän düşnükli bolar: eger $K = K_0$, $L = L_0$, onda $Y = Y_0$. Eger $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ gatnaşyklarda bu funksiýa (12) – (15) gatnaşyklary kanagatlandyrýan bolsa, ýagny iň bolmanda bir önümçilik resursynda nol harajatlar edilende nola öwrülýär we ösýär, her bir resursyň ulanylmagy ösende ösýär, özem ulanmaklygyň peýdalylygy (effektiwligi) bu ýagdaýda peselýär. (15) gatnaşygyň ýerine ýetmegi üçin milli girdeji serişdeleriň ulanylmagy bilen proporsional ösmeli we aşakdaky gatnaşyk ýerine ýetmeli:

$$\alpha + \beta = 1. \tag{20}$$

Bu funksiýa ilkinji gezek amerikan ykdysadyýetçileri Kobba we Duglas tarapyndan öwrenilendigi we hödürlenendigi üçin olaryň adyny göterýär. (20) gatnaşykdan *Kobba-Duglasyň* önümçilik funksiýasyny aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$Y = Y_0 \left(\frac{K}{K_0} \right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L_0} \right)^{1-\alpha}. \tag{21}$$

Bu funksiýanyň häsiýetine seredeliň. Onuň izokwantasy $Y = Y_c$ aşakdaky deňleme görnüşde ýazylýar:

$$K = K_0 \left(\frac{Y_c}{Y_0} \left(\frac{L}{L_0} \right)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$Y = Y_c$ izokwantada aşakdaky tassyklamalaryň ýerine ýetmegi aýdyňdyr:

$$\lim_{L \to \infty} K(L) = 0 \text{ we } \lim_{L \to \infty} K(L) = +\infty.$$

Bu ýerden izokwantanyň asimptotalarynyň koordinatalar oklarydygy görünýär. Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy üçin çalşyrmanyň predel normasy γ aşakdaky görnüşde hasaplanýar:

$$\gamma = -\frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{K}{L}. \tag{22}$$

Bu ýerden Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy üçin çalyşmanyň predel normasynyň *K/L* gazna üpjünçiliginden çyzykly funksiýadygy görünýär we ol önümçilik faktorlaryň proporsional ösüşinde üýtgemeýär:

$$\frac{K}{L} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\gamma. \tag{23}$$

Onda çalyşmanyň maýyşgaklygyny aşakdaky görnüşde hasaplamak bolýar.

$$\sigma = \frac{\gamma}{(K/L)}\frac{d(K/L)}{d\gamma} - \frac{\gamma}{(K/L)}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).$$

(23) gatnaşygyň esasynda $\sigma = 1$.

Şeýle hem çykarmanyň maýyşgaklyk koeffisiýentini hasaplalyň:

$$E_K = \frac{K}{Y}\frac{dY}{dK} = \frac{K}{Y_0\left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-\alpha}} Y_0\left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-\alpha}\alpha\left(\frac{K}{K_0}\right)^{1-\alpha}\frac{1}{K_0} - \alpha.$$

Edil şonuň ýaly birmeňzeşlikde alarys:

$$E_L = \frac{L}{Y}\frac{dY}{dL} = 1 - \alpha.$$

Seredilýän (21) önümçilik funksiýasy üçin önümleri öndürmeklige gerek bolan serişdeleriň maýyşgaklyk koeffisiýenti hemişelikdir we serişdeler ululygynda görkezijileriniň derejelerine deňdir. Şoňa görä E_K, E_L-iň ykdysady manysyny ýatlap, Kobba-Duglasyň funksiýasynyň görkezijileriniň derejeleriniň ykdysady manysy, degişli serişdeleriň ulanylmagynyň predel peýdalylygyň orta peýdalylyga bolan gatnaşygyndan durýanlygyndadyr.

Indi bolsa Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy üçin, oňa degişli bolan udel çykarylyş bilen fond üpjünçiliginiň baglylygyny görkezýän $f(k)$-ny guralyň. Ol bu ýagdaýda aşakdaky görnüşe eýedir:

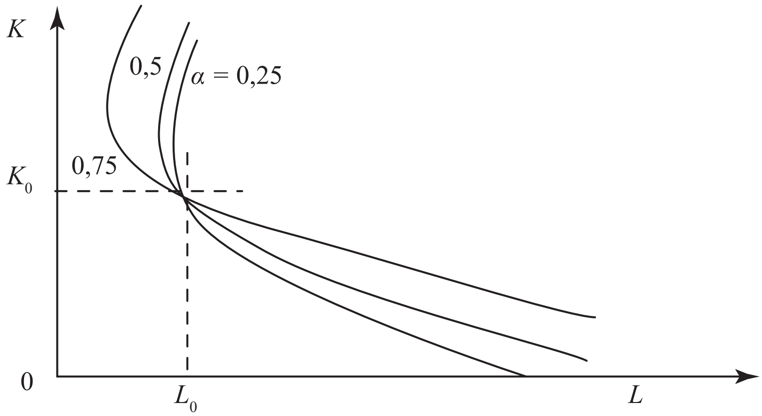
$$f(k) - F(k,1) = Y_0\left[\frac{k}{K_0}\right]^{\alpha}\left[\frac{1}{L_0}\right]^{1-\alpha} = y_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{\alpha}.$$

Bu ýerde

$$k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \ y_0 = \frac{Y_0}{L_0}.$$

$f(k)$ funksiýanyň (17) – (19) gatnaşyklary kanagatlandyrýanlygy aýdyňdyr. Ondan başga hem önümçiligiň ösmegi bilen Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy aşakdaky häsiýete eýedir:

$$\lim_{k \to 0} f(k) = +\infty,$$



3-nji surat

ýagny gazna üpjünçiliginiň ösmegi bilen önümçiligiň çäksiz ösmegi mümkin.

Bular ýaly funksiýa geçen asyryň 60-njy ýyllarynda hödürlendi we ***çalyşmanyň maýyşgaklygynyň hemişeliginiň*** **(*ÇMH*)** funksiýasy diýlip atlandyryldy. *CES* (*ÇMH*) iňlis dilindäki adynyň baş harplary bilen bellenen aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$Y = Y_0\left[\alpha\left(\frac{K}{K_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}. \qquad (24)$$

Kobba-Duglasyň funksiýasyndaky ýaly Y_0, K_0, L_0-položitel hemişelikler.

$0 < \alpha < 1,\ 0 < \rho < +\infty$. (23) funksiýany özümize oňaýly görnüşde ýazmak bolar:

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{-\rho} = \alpha\left(\frac{K}{K_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\rho}.$$

Bu funksiýa üçin çalyşmanyň maýyşgaklygy σ-ny tapalyň. Çalyşmanyň predel normasy γ-ny haýsy hem bolsa bir $Y = Y_C$ izokwantada tapalyň:

$$\gamma = \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\rho}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}. \tag{25}$$

Bu ýerden görşümiz ýaly, çalyşmanyň predel normasy izokwantada- $\frac{K}{L}$ fond üpjünçiligiň funksiýasy γ-nyň bahasy bilen bagly bolup, aşakdaky gatnaşyk ýerine ýetýär:

$$\frac{K}{L} = \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\rho}\gamma\right]^{1/1+\rho}. \tag{26}$$

Indi bolsa çalyşmanyň maýyşgaklygynyň bahasyny kesgitläliň:

$$\sigma = \frac{\gamma}{K/L}\frac{d(K/L)}{d\gamma} = \frac{\gamma}{(K/L)}\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\rho}\right]^{1/1+\rho}\frac{1}{1+\rho}\gamma^{1/(1+\rho)-1} =$$
$$= \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\rho}\right]^{1/(1+\rho)}\frac{1}{1+\rho}\frac{1}{(K/L)}\gamma^{1/(1+\rho)}.$$

K/L we *g* (25) gatnaşyk bilen baglanyşykly bolandygy üçin, aňsatlyk bilen alarys:

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}. \tag{27}$$

Şeýlelik bilen (27) gatnaşykdan (24) önümçilik funksiýasynyň hakykatdan hem hemişelik çalyşma maýyşgaklygynyň σ bardygyny görmek bolýar.

Bu funksiýanyň häsiýetlerine seredeliň. Goý, $Y = Y_ç$ bolsun. Onda izokwantanyň deňlemesini (24) funksiýa üçin aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$\left(\frac{Y_c}{Y}\right)^{-\rho} = \alpha\left(\frac{K}{K_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\rho},$$

ýagny

$$K(L) = K_0\left[\frac{1}{\alpha}\left(\left(\frac{Y_c}{Y_0}\right)^{-\rho} - (1-\alpha)\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\rho}\right)\right]^{-1/\rho}.$$

Bu egri iki sany asimptota eýedir. Haçanda $L \to +\infty$ esasy gazna K hemişe kemelýär, ýöne nola ymtylman, Kobba-Duglas funksiýasynyň bolşy ýaly haýsy hem bolsa bir položitel sana ymtylar:

$$\lim_{L \to +\infty}(K/L) = K_0 \lim_{L \to 0}\left[\frac{1}{\alpha}\left(\left(\frac{Y_ç}{Y_0}\right)^{-\rho} - (1-\alpha)\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\rho}\right)\right]^{-1/\rho} = K_0 \alpha^{1/\rho}\frac{Y_ç}{Y_0}.$$

Edil şonuň ýaly hem $Y = Y_ç$ izokwantada görkezmek bolar:

$$\lim_{n \to \infty} L(K) = L_0(1-\alpha)^{1/\rho}\frac{Y_ç}{Y_0}.$$

Şonuň üçin funksiýa *ÇMH/Y* $(K, L) = Y_ç$ aşakdaky görnüşe eýedir.

Şeýlelikde, çalyşmanyň maýyşgaklygynyň hemişelik funksiýasyndan peýdalansak, gapma-garşylykdan gaça durmak bolýar. Ýagny, haýsy hem bolsa bir serişdäni başga biri bilen çalyşmak hakykatdan daşlaşmak bilen bagly bolup durýar.

Önüm çykarylyşynyň maýyşgaklyk koeffisiýenti *ÇMH* funksiýa üçin serişdeler boýunça:

$$E_K = \frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\alpha(K/K_0)^{-\rho}}{\left[\alpha(K/K_0)^{-\rho}(1-\alpha)\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\rho}\right]},$$

edil şonuň ýaly hem

$$E_L = \frac{(1-\alpha)(L/L_0)^{-\rho}}{[\alpha(K/K_0)^{-\rho} + (1-\alpha)(L/L_0)^{-\rho}]}.$$

Görşümiz ýaly, Kobba-Duglasyň funksiýasynda bolşy ýaly $E_k < 1, E_t < 1$. Ýagny predel peýdalylygy ortaça bahadan kiçidir. Şeýle hem serişdeleriň maýyşgaklyk koeffisiýentini başga görnüşde ýazmak bolýar. Ol öňki alnana ekwiwalentdir:

$$E_k = \alpha\frac{(Y/Y_0)^{\rho}}{(K/K_0)^{\rho}},$$

$$E_L = (1-\alpha)\frac{(Y/Y_0)^{\rho}}{(L/L_0)^{\rho}}.$$

Çalyşmanyň hemişelik maýyşgaklygynyň funksiýasyna, degişlilikde fond üpjünçiliginiň udel önüm çykarmanyň $f(k)$ funksiýasyna baglanyşygyna seredeliň.

Bu ýagdaýda:

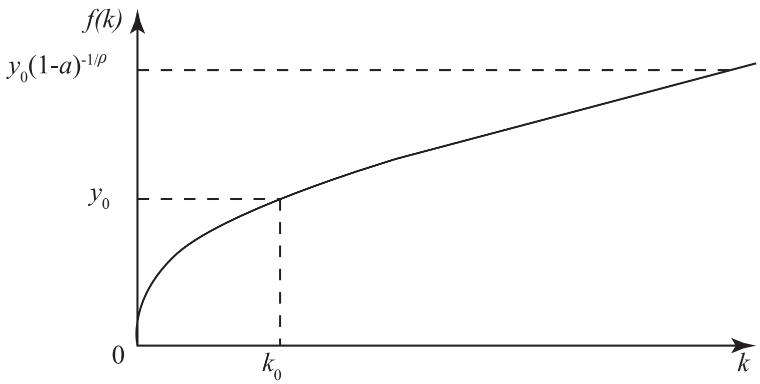
$$f(k) = F(k, 1) = Y_0\left[\alpha\left(\frac{k}{K_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\left(\frac{1}{L_0}\right)^{-\rho}\right]^{-1/\rho} =$$

$$= y_0\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\right]^{-1/\rho}.$$

Görşümiz ýaly, bu funksiýa (17)-(19) gatnaşyklary kanagatlandyrýar. Onuň grafigine seredeliň. Bu egriniň asimptotasy bardyr, ýagny fond üpjünçiliginiň tükeniksiz ösmeginde, Kobba-Duglasyň funksiýasyndan tapawutlylykda önümçilik çäksiz ösmeýär. Asimptotanyň barlygyny ýeňillik bilen subut edip bolýar.

Hakykatdan

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{k\to\infty} y_0\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\right]^{-1/\rho} = y_0(1-\alpha)^{-1/\rho},$$



4-nji surat

bu häsiýet izokwantanyň asimptotasynyň bardygyny görkezýär. Haýsy hem bolsa bir resursyň çäkliliginden, beýleki bir serişdäniň ösmekliginden peýdalanyp, öňünden milli girdejiniň islendik ýetjek derejesini kesgitläp bolmaýar.

Eger $\rho \to 0$, onda *ÇMH* funksiýanyň hemme häsiýeti Kobba--Duglasyň funksiýasynyň degişli häsiýetlerine ymtylýar:

$$\sigma_{ÇMH} = \frac{1}{1+\rho} \to 1 = \sigma_{K-D}$$

$$Y_{ÇMH} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{-\rho}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} \to -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}.$$

Eger $\rho \to 0$, çalyşmanyň maýyşgaklygynyň hemişelik önümçilik funksiýasy Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasyna ymtylýar. Ýagny

$$\lim_{\rho \to 0} f_{ÇMH}(k) = f_{K-D}(k)$$

bolýandygyny görkezeliň. Aşakdaky predeli kesgitlemeli:

$$\lim_{\rho \to 0} y_0\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\right]^{-1/\rho}.$$

Soňky predelde kwadrat ýaýyň içindäki aňlatmanyň bire, derejäniň görkezijisiniň bolsa –*k*, –∞ ymtylýandygyny görmek bolýar, ýagny biz 1/1, ∞ görnüşdäki kesgitsizligi alarys. Goý, bu predel *A* deň bolsun. Onda seredilýän funksiýa üçin natural logarifmiň predelini tapalyň. Ol bolsa ln *A* deň bolmalydyr:

$$\lim_{\rho \to 0} \ln\left\{y_0\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\right]^{-1/\rho}\right\} \ln y_0 +$$
$$+ \lim_{\rho \to 0}\left\{-\frac{1}{\rho}\ln\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right) + (1-\alpha)\right]\right\}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, logarifmlenýän funksiýa $\rho \to 0$ bolanda bire ymtylýandyr we 0/0 görnüşdäki kesgitsizlik alnar. Ony Lopitalyň düzgüni boýunça derňäliň. Onda

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\ln\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\right]}{-\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{-\dfrac{1}{\left[a\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho}(1-\alpha)\right]^{\alpha \ln\left(\frac{k}{k_0}\right)\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho}}}}{-1} =$$
$$= \alpha \ln \frac{k}{k_0}.$$

Şeýlelikde,

$$\ln A = \ln y_0 + \alpha \ln \frac{k}{k_0},$$

ýagny

$$A = y_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{\alpha},$$

bu ýerden

$$\lim_{\rho \to 0} f_{ÇMH}(k) = y_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{\alpha} = f_{K-D}(k)$$

Belli bolşy ýaly, $f(k)$ funksiýa $F(K, L)$ funksiýany doly kesgitleýär. Şeýlelikde, Kobba-Duglasyň funksiýasyny *ÇMH* funksiýadan ρ predele geçmek bilen alyp bolýandygynyň tassyklamasyny subut etdik.

Indi bolsa $\rho \to +\infty$ ymtylanda nähili bolýandygyna seredeliň.

$$\lim_{\rho \to 0} f(k)$$

$$\lim_{\rho \to 0} f_{ÇMH}(k) = \lim_{\rho \to 0} y_0\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\rho} + (1-\alpha)\right]^{-1/\rho} =$$

$$\lim_{\rho \to 0}\left[\alpha\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-1/\rho} + (1-\alpha)\right]^{-\rho}.$$

Eger $k \geq k_0$ bolsa, onda ýaýyň birinji bölegi nola ymtylýar, kwadrat ýaý tutuşlygyna bire ymtylýar. Ony aňsatlyk bilen görmek bolýar. $k \geq k_0$ üçin alarys:

$$\lim_{\rho \to \infty} f_{ÇMH}(k) = y_0.$$

Eger $k < k_0$ bolsa, onda k/k_0 kwadrat ýaýy daşyna çykaryp alarys:

$$\lim_{\rho \to \infty} f_{ÇMH}(k) = \lim_{\rho \to \infty} y_0 \frac{k}{k_0}\left[\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{k}{k_0}\right)^{1/\rho}\right]^{-\rho}$$

Kwadrat ýaýyň ikinji bölegi nola ymtylýar, ($k < k_0$) bolanda, bu ýaý bire ymtylýar. Şoňa görä-de:

$$\lim_{\rho \to \infty} f_{ÇMH}(k) = y_0 \frac{k}{k_0}.$$

Gazna üpjünçiligine baglylykda udel çykyşyň baglylygyny täze $f_{\infty}(k)$ funksiýa diýip bellesek, onda ony şeýle kesgitläp bolar:

$$f_\infty(k) = \lim_{\rho\to\infty} f_{ÇMH}(k) = \begin{cases} y_0 \dfrac{k}{k_0}, & \text{eger } k \le k_0 \\ y_0, & \text{eger } k \ge k_0 \end{cases}$$

ýa-da

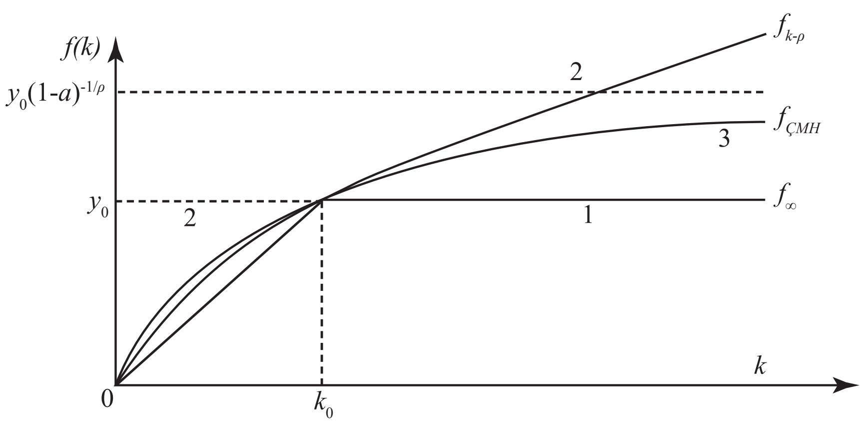
$$f_\infty(k) = y_0 \min\left\{\frac{k}{k_0}, 1\right\}. \tag{28}$$

F_∞ (K, L)- önümçilik funksiýany bu ýagdaý üçin aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$f_\infty(K,L) = Ly_0 \min\left\{\frac{k}{k_0}, 1\right\} = L\frac{Y_0}{L_0}\min\left\{\frac{K}{L}\frac{L_0}{K_0}, 1\right\} =$$

$$= Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\}. \tag{29}$$

$f_\infty(k)$ funksiýany aşakdaky görnüşde şekillendirip bolar:



5-nji surat

$$\left.\begin{aligned} f_\infty(k) &\to 1 - egri \\ f_{k-p}(k) &\to 2 - egri \\ f_{ÇMH}(k) &\to 3 - egri \end{aligned}\right\}.$$

Bu egrileri deňeşdirmek üçin ýokardaky çyzga seredeliň. Birinjiden, täze alnan funksiýa üçin (19) gatnaşyk ýerine ýetýär. Ol egriniň döwükliginiň (üzülmekliginiň) barlygy sebäpli, onuň hemme nokatlarynda k boýunça önümiň barlygy barada gürrüň edip bolmaýar. (17)-(19) häsiýetleriň ýerine bu funksiýa üçin şu häsiýeti getirmek bolar: eger $k \leq k_0$ bolanda ol çyzykly artýar; $k \geq k_0$ bolanda hemişelik bolup durýar. Şeýlelikde, onuň örän wajyp aýratynlygy, ýagny bu funksiýada esasy gaznalaryň we işçi güýjüň sanynyň arasyndaky proporsiýa bardyr: $k = k_0$.

Eger gazna üpjünçiligi bu ululykdan uly bolsa, onda goşmaça gazna peýda getirmeýär. Eger $k < k_0$ bolsa, onda bu işçi güýjüniň birnäçe bölegi önümçilikde ulanylmaýar, şeýle hem peýda getirmeýär.

Soňky tassyklama $F_{\infty}(K,L)$ funksiýa derňelende örän düşnükli bolýar. Goý, $k = k_1 < k_0$, ýagny $K_1/L_1 < k_0$ ýa-da $(K_1/K_0) < (L_1/L_0)$ bolsun. Onda işçi güýjüni (sanyny) täzeden alyp, $L_2 = K_1/K_0$, biz milli girdejini alarys:

$$Y_2 = Y_0 \min\left(\frac{K_1}{K_0}, \frac{L_1}{L_0}\right) = Y_0 \min\left(\frac{K_1}{K_0}, \frac{K_1}{K_0 L_0}\right) =$$

$$= Y_0 \min\left(\frac{K_1}{K_0}, \frac{K_1}{K_0}\right) = Y_0 \frac{K_1}{K_0}.$$

Işçi güýjüniň köne sany boýunça $(L_1/L_0) > (K_1/K)$, şoňa görä :

$$Y_1 = Y_0 \min\left(\frac{K_1}{K_0}, \frac{L_1}{L_0}\right) = Y_0 \frac{K_1}{K_0}.$$

Şeýlelik bilen işçi güýjüniň $(L_1\text{-}L_2)$ bölegi şu ýagdaýda önümçilik üçin hiç hili peýda bermeýär. Şu önümçilik funksiýa üçin ýeke-täk k_0 oňat gazna üpjünçiliginiň barlygy sebäpli, bir serişde başga bir serişde bilen çalşylmaýar. Eger çalyşmanyň maýyşgaklyk *CES* funksiýasynyň (27) formulasynda $\rho \to \infty$ predele geçsek, onuň nola deň bolýandygyny göreris. (29) aňlatmadaky funksiýa nol maýyşgakly çalyşmanyň önümçilik funksiýasy ýa-da hemişelik proporsiýaly önümçilik funksiýa, ýa-da bölek-çyzykly önümçilik funksiýa diýilýär.

Yc mukdarly birnäçe milli girdejini öndürmek üçin aşakdaky deňlikleri ýerine ýetirer ýaly bölek-çyzykly önümçilik funksiýasynyň izokwantasyny derňäliň:

$$\frac{K_ç}{K_0} = \frac{Y_ç}{Y_0}; \quad \frac{L_ç}{L_0} = \frac{Y_ç}{Y_0}.$$

Bu ýerde esasy gaznanyň K_0 we işçi güýjüniň $L_ç$ mukdarynyň alynmagy amatlydyr (rasionaldyr). Onda serişdeleriň hiç biri artykmaç bolmaz. $L > L_ç$ bolar ýaly biz L işçi güýjüni köpeltsek, onda

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K_ç}{K_0}, \frac{L}{L_2}\right\} = y_0 \frac{K_ç}{K_0} = Y.$$

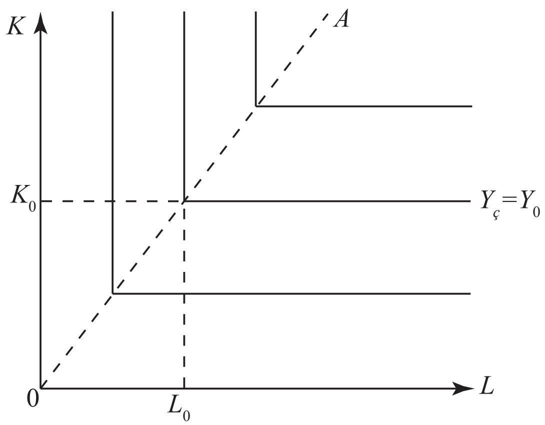
Eger $L > L_ç$ berlende, esasy gaznanyň mukdaryny köpeltsek, ýagny $K > K_0$ bolsa, onda

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \ \frac{L_ç}{L_0}\right\} = Y_0 \frac{L_ç}{L_0} = Y_ç.$$

Şeýlelikde, hemişelik proporsiýaly önümçilik funksiýanyň izokwantasyny esasy gaznanyň we işçi güýjüniň amatly mukdarlary bolan nokatlardan çykýan dik we kese şöhleler emele getirýärler. Bu çyzgydaky derejelere seredip, $Y_ç = Y_o$ izokwantanyň dik böleginde, ýagny

$$\gamma = -\infty, E_k = 0, E_L = 1,$$

kese böleginde ($K = K_0$ bolanda, $Y_ç = Y_0$ nokatlarda $L > L_0$), $\gamma = 0$, $E_k = 1$, $E_L = 0$.



6-njy surat

Galan izokwantalar üçin γ hem-de E_k we E_L ululyklar üçin şolar ýaly bahalary almak bolar. OA şöhleden ýokarda serişdeleriň balansirlenen ulanylyşy bolan nokatlar ýerleşen, ýagny $k = k_0$ bolsa, alarys:

$$Y = Y_0 \min\{K/K_0, L/L_0\} = Y_0 L/L_0.$$

OA şöhleden aşakda:

$$Y = Y_0 \min\{K/K_0, L/L_0\} = Y_0 K/K_0 .$$

Şoňa görä izokwantanyň dik böleklerinde:

$$\frac{\partial y}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{Y_0}{L_0}.$$

Kese böleklerinde bolsa:

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{Y_0}{K_0}, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = 0.$$

Bu ýerden γ, E_k we E_L ululyklaryň ýokarda görkezilen bahalaryny alýarys.

Şeýle hem bu ululyklaryň bahalaryny çalyşmagyň hemişelik maýyşgaklyk funksiýasynda $\rho \to +\infty$ predele geçmek arkaly alyp bolýar.

Hemişelik proporsiýaly funksiýany ulanmak gaty bir amatly däldir, sebäbi önümçilikde haýsy hem bolsa bir serişdäniň köpelmegi, şol önümçiligiň göwrüminiň belli bir mukdarda ulalmagyna getirýär. Bu funksiýalary diňe haýsy hem bolsa serişdeleriň biri has ýetmezçilik (defisit) etse, beýlekisi artykmaçlyk edýän bolsa ulanmak bolar.

Derejeli funksiýalaryň ulanylyşy beýlekilere görä köp gabat gelýär, sebäbi onuň parametrlerini bahalandyrmak aňsat we derejeli funksiýalary ulanmak ýönekeý.

§4. Ykdysady modelleriň ýönekeý görnüşleriniň derňelişi

Birinji bölümdäki ýönekeý ykdysady matematiki modele ýene-de bir gezek seredeliň. Şeýle hem ikinji we üçünji bölümlerde seredilen önümçilik funksiýasynyň häsiýetlerini ulanyp, ykdysady matematiki modeli derňäliň. Berlen matematiki modeliň önümçilik funksiýasynyň wagta bagly däl bolan ýagdaýyna seredeliň:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)), \tag{30}$$

$$L(t) = s(t)Y(t), \tag{31}$$

$$C(t) = (1 - s(t))Y(t), \tag{32}$$

$$\dot{K} = I(t) \tag{33}$$

$$L(t) = L_0(t)e^{\eta t}. \tag{34}$$

$$K(0) = K_0. \tag{35}$$

(30)-(35) matematiki modeliň derňewi onuň dürli traýektoriýasynyň derňewinden durýar. Ikinji bölümiň (12)-(15) önümçilik funksiýasynyň häsiýetlerine görä bu ulgamyň käbir umumy häsiýetlerini derňäliň. Şonuň üçin (30)-(35) matematiki modeli has ýönekeý görnüşde ýazalyň, ýagny (31) gatnaşygy (33) gatnaşykda ýerinde goýup alarys:

$$\dot{K} = s(t)Y(t). \tag{36}$$

(36)-da (30) we (34)-i goýup alarys:

$$\dot{K} = s(t)F(K(t), L_0e^{\eta t}), \tag{37}$$

edil şunuň ýaly edip çykdajylar üçin hem gatnaşygy almak bolýar:

$$C(t) = (1 - s(t))F(K(t), L_0e^{\eta t}). \tag{38}$$

Görşümiz ýaly, biziň seredýän modelimizi diňe iki sany gatnaşygyň we (35) başlangyç şertiň esasynda aýdyňlaşdyryp ýazmak bolýar.

Eger täze näbellilere geçsek, onda Kobba-Duglasa görä $\alpha + \beta = 1$; $0 < \rho < +\infty$; $\sigma = 1/(1 + \rho)$. $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$.

$k = K/L$ (gazna üpjünçiligi). $c = C/L$ (bir işçä bolan çykdajy). Önümçilik funksiýasynyň (15) häsiýetini ulanyp, (37) gatnaşygyň ýerine aşakdaky gatnaşygy alarys:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{1}{L}sF(K,L) - \frac{K}{L} * \frac{\dot{L}}{L} =$$
$$= sf(k) - k\frac{\eta L_0 e^{\eta t}}{L_0 e^{\eta t}} = sf(k) - \eta k.$$

(38) gatnaşygyň netijesiniň esasynda alarys:

$$c = \frac{C}{L} = (1 - s)\frac{1}{L}F(K,L) = (1 - s)f(k).$$

Şeýlelik bilen biziň seredýän modelimiz gysgaça aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$\dot{k} = sf(k) - \eta k, \tag{39}$$

$$c = (1 - s)f(k), \tag{40}$$

$$k(0) = k_0. \tag{41}$$

Görşümiz ýaly, (30)-(35) model bilen (39)-(41) model özara ekwiwalentdir. Belli bir önümçilik funksiýasyny saýlamazdan, seredilýän modeliň traýektoriýasyny gurmak bolmaýar, emma şeýle-de bolsa onuň birnäçe häsiýetlerini tapyp bolýar. Edil şonuň bilen bilelikde milli girdejide maýa goýumlar hemişelik bolsa, modeliň traýektoriýasynyň häsiýetlerine seredeliň, ýagny $s(t) = s = const$.

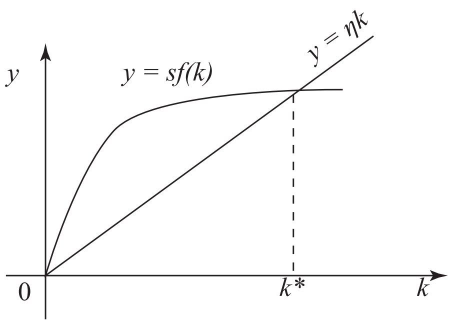
Bu häsiýetler diňe nazaryýet taýdan wajyp bolman, eýsem ykdysady tejribeden görnüşi ýaly, birnäçe döwürleriň maýa goýumlary wagta örän gowşak baglydyr.

Maýa goýumlaryň paýy hemişelik bolanda, (39) differensial deňlemäniň koeffisiýentleri wagta bagly däldir, onda $k_0 = \bar{k}$ bolup, (39) deňlemäniň çözüwi $k(t) \equiv \bar{k}$ funksiýany kanagatlandyrýan $\bar{k}$-nyň bahalary bardyr.

k-ululygynyň şeýle bahalaryny (39) deňlemäniň deňagramly (stasionar) nokatlary diýip kabul edeliň. Emma, şeýle $\bar{k}$ nokatlary tapmak üçin $\dot{\bar{k}} = 0$ deňlemäniň hemme çözüwlerini tapmaly, ýagny

$$sf(\bar{k}) - \eta\bar{k} = 0. \tag{42}$$

Ilki bilen meseläniň grafiki derňewini geçireliň. Soňky deňlemäni iki sany deňlemä dargadyp seredeliň: $y = sf(k)$ we $y = \eta k$.



7-nji surat

Çyzga görä k-nyň iki sany gözlenýän $k = 0$ *we* $k = k^*$ bahalary bar. (s,η) islendik bahasynda we önümçilik funksiýasynyň parametrleri üçin $k = 0$ (42) funksiýanyň çözüwidir, sebäbi $f(0) = 0$.

$y = sf$ we $y = \eta k$ grafikleriň noldan tapawutly bolan ýeke-täk k^* kesişme nokady bardyr. Umumy ýagdaýynda kesişme nokadyň ýok bolmazlygy hem mümkin, sebäbi ol grafikler kesişmänem bilerler. Birinjiden, $k > 0$ bolmagy mümkin, onda aşakdaky deňsizligi alarys:

$$sf(k) < \eta k. \tag{43}$$

Ikinjiden, ähli $k > 0$ üçin

$$sf(k) > \eta k \tag{44}$$

bolmagy mümkin. Bu ýagdaýlaryň ikisinden hem k^*-yň ýoklugyny görýäris. Indi bolsa parametrleriň haýsy bahalarynda bu deňsizlikleriň bolmaklygynyň mümkinligini kesgitläliň.

1. Hemme $k > 0$, (43) deňsizligiň ýerine ýetmekligi üçin, ol şertiň k-nyň kiçi bahalary üçin hem ýerine ýetmekligi zerurdyr. k-nyň kiçi bahalarynda alarys:

$$sf(k) \approx s[f(0) + kf'(0)].$$

Önümçilik funksiýasynyň (17)-nji häsiýetine görä $f(0) = 0$ bolany üçin (43) şertiň ýerine ýetmekligi üçin $k > 0$ özüniň ýeterlik derejede kiçi bolmaklygy bilen aşakdaky şertiň ýerine ýetmegi zerurdyr:

$$skf'(0) < \eta k.$$

Bu şertiň (43) deňsizlik üçin hem ýeterlikdigini görkezmek bolýar. Hakykatdan hem, goý, hemme $k > 0$ üçin $f'(k) < 0$ (ony 2-nji bölümiň (19) formulasynda kesgitläpdik). Diýmek, $f'(k) > f'(0)$ hemme $k > 0$, şoňa görä $f(k) < kf'(0)$ ýagny $sf(k) < skf'(0) < \eta k$, hemme $k > 0$, ýagny biz ýene-de bir gezek (43) şerti gaýtalap alýarys. Şeýlelikde, hemme $k > 0$ bolanda (43) deňsizligiň ýerine ýetmekligi üçin $sf'(0) < \eta$ şert zerur we ýeterlikdir. Hemişelik maýyşgakly çalyşmanyň (24) önümçilik funksiýasy üçin alarys:

$$f'(0) = \alpha^{-1/\rho} \frac{y_0}{k_0}.$$

2. Indi bolsa hemme $k > 0$ bolanda, (44) şertiň ýerine ýetmekligi hakyndaky meselä seredeliň. (44) şert

$$\varphi(k) = sf(k) - \eta k$$

funksiýanyň ähli $k > 0$ üçin položitel bolmagyna ekwiwalentdir. Bu funksiýa üznüksizdir. k kiçi bolanda, derňewden görşümiz ýaly (1-nji punktdan) döwletiň ykdysadyýeti üçin $\varphi(k) > 0$ diýen netijäni alarys.

Hemişelik maýyşgakly çalyşmanyň, ýokarda görşümiz ýaly, $k \to \infty$ kese (gorizontal) $y = y_0(1-\alpha)^{-\rho}$ asimptotasy bar, diýmek, k-nyň ýeterlik uly bahasynda alarys:

$$\eta k > y_0(1-\alpha)^{-\rho} > f_{ÇMH}(k) \geq sf_{ÇMH}(k),$$

ýagny

$$\varphi(k) < 0 .$$

Bu $\varphi(k) < 0$ gatnaşyk *K-D* funksiýasy üçin ýerine ýetýändigini hem görkezmek bolýar.

K-D funksiýasynyň $k \to \infty$ asimptotasy ýok hem bolsa, k ýeterlik uly bolanda aşakdaky gatnaşyk dogrudyr:

$$sf_{K-D}(k) = sy_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{\alpha} < \eta k.$$

Şonuň üçin (44) şert ähli $k > 0$ üçin ýerine ýetip bilmeýär.

k-nyň bahasy kiçi bolanda $\varphi(k) > 0$, k-nyň bahasy uly bolanda $\varphi(k) < 0$ bolýandygyndan we $\varphi(k)$-nyň üznüksizliginden, şeýle bir $k = k'$, $\varphi(k^*) = 0$ deňlik ýerine ýeter, ýagny

$$sf(k^*) = \eta k^*.$$

ηk funksiýa k görä çyzykly ösýändiginden, $sf''(k)$ üçin , $sf''(k) < 0$, k^*-nyň ýeke-täkligi gelip çykýar.

Şeýlelikde, ýokardaky çyzgyda ηk we $sf(k)$ funksiýalaryň gatnaşyklary häsiýetlendirilen, ýagny olaryň diňe iki sany kesişýän $k = 0$ we $k = k^*$ nokatlary bardyr.

$0 < k < k^*$aralykdan k-nyň islendik bahasy üçin $sf(k) > \eta k$ deňsizlik adalatlydyr, şonuň üçin ähli şeýle nokatlar üçin $k = sf(k) - \eta k > 0$ alýarys, ýagny hemme traýektoriýalarda $(0, k^*)$aralygyň islendik nokadyndan başlap k-nyň bahasy tä k^* kiçi bahasyna ýetýänçä artar.

Eger başlangyç pursatda ulgam deňagramlykdaky $k = 0$ nokatda bolan bolsa, onda islendik kiçijik täsir etmeklik (yrgyldatmaklyk) ony $k > 0$ nokada getirýär, soňra ulgamy $k = 0$ başlangyç bahasyndan daşlaşyp başlamagyna getirýär. Şular ýaly deňagramly nokada durnukly däl nokat diýilýär. Oňa seredip ýörmäniň manysy ýok.

Eger $k > k^*$ bolsa, onda $\dot{k} = sf(k) - \eta k < 0$ alarys, şonuň üçin $k > k^*$ bolanda k ululyk tä k^* kiçi bahasyna ýetýänçä kiçelýär. Geçirilen derňewleriň esasynda (42) deňlemäniň ähli traýektoriýalary islendik $k_o > 0$ başlangyç bahasynda k^* ymtylýandygyna aňsatlyk bilen düşünmek bolýar. Eger $k_o = k^*$ bolsa, onda $k(t) = k^*$, özem sähelçe tötänleýin yrgyldynyň netijesi k^*-dan hiç hili tapawudy döretmeýär. Şonuň üçin deňagramly $k = k^*$ nokat durnuklydyr. Eger (39)-(41) model üçin $k(t) = k^*$ bolsa, onda (30)-(35) model üçin alarys:

$$K(t) = k(t)L(t) = k^*L_0e^{\eta t}.$$

Edil şonuň ýaly,

$$Y(t) = L(t)f(k(t) = f(k^*)L_0e^{\eta t}.$$

Ilatyň ösüş derejesi η-nyň artmagy bilen maýa goýumlary $I(t)$ we çykdajylary $C(t)$ hem ösýär. Şeýle ýagdaý sazlanan (balansirlenen) ösüşiň düzgüni diýlip atlandyrylýar.

Maýa goýumyň normasy hemişelik bolsa, (30)-(35)-nji modelde ähli traýektoriýalar sazlaşdyrylan ösüşe ymtylýarlar.

Elbetde sazlaşdyrylan ösüşiň düzgüni özi hem maýa goýumyň normasy s ululyga baglydyr, sebäbi k^*-nyň bahasy s-e bagly: s-iň ösmegi k^*-nyň ösmegine getirýär, η-nyň ösmeginde k kemelýär.

(30)-(35)-nji modelde ähli traýektoriýalar s ululyga baglylykda sazlaşdyrylan ösüşe ymtylýan bolsalar, onda sazlaşykly ösüş düzgüniniň haýsysy amatly diýen sorag ýüze çykýar. Şoňa görä-de, biz dürli düzgünleri deňeşdirmek üçin, ilki bilen ýörite ölçeg (kriteriý) girizmeli. Belli bolşy ýaly, ykdysady ulgamyň wezipesi, dürli wajyp meseleleri çözmekdir. Ol bolsa örän köp özara gabat gelmeýän ölçegleri gurup bolýandygyny aňladýar. Ykdysady meseleleri optimal meýilnamalaşdyrmak we öňünden kesgitlemek, çaklamak (прогнозировать) üçin gerek bolan birnäçe ölçegleriň içinden ýeke-täk birini saýlamak meselesi henize çenli gutarnykly çözülenok. Ýöne dürli awtorlar tarapyndan hususy hallara seredilendigini, meselem, N.N. Moiseýew tarapyndan meýilnamalaşdyrmagyň maksatnama usuly arkaly ölçegsiz meseläni çözmek bolýandygynyň görkezilendigini bellemek bolar.

Ykdysadyýeti ösdürmek meselesinde ölçeg saýlamak, seredilýän *MM* üçin ýönekeý, sebäbi esasy maksat ilatyň isleglerini kanagatlandyrmak. Dürli tertipleri bahalandyrmak üçin, sazlaşykly ösüşi kesgitlemeli:

$$c = (1 - s)f(k^*),$$

k^* hem s-ululyga baglydyr.

$k^*(s)$ baglanyşygyň (42) gatnaşyk esasynda kesgitlenýändigini ýatlalyň. Şoňa görä:

$$c(s) = f(k^*) - \eta k^*.$$

Bu ýerde $k^* = k^*(s)$. Bu funksiýanyň ekstremum şerti aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\frac{d}{ds}[f(k^*) - \eta k^*] = 0$$

ýa-da

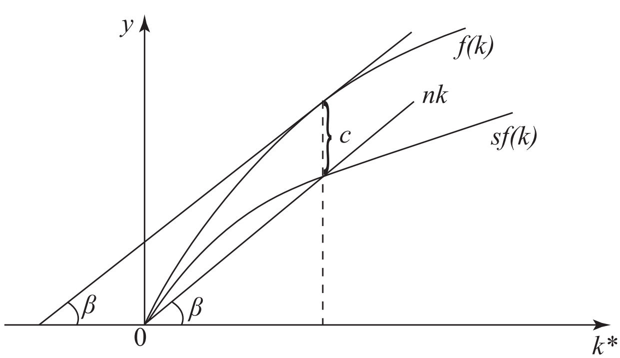
$$\left[f'(k^*) - \eta\right]\frac{dk^*}{ds} = 0.$$

Ýokarda seredilen çyzgyny derňäp:

$$\frac{dk^*}{ds} > 0$$

ýeňillik bilen düşünmek bolýar, onda ekstremum şerti aşakdaky görnüşde bolýar:

$$f'(k^*) = \eta. \tag{45}$$



8-nji surat

Bizi gyzyklandyrýan önümçilik funksiýalary özüne mahsus bolan uly bahalara we kiçi bahalara eýe bolan k-nyň ýeterlik uly bahasynda, elmydama (45) şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk k*-nokat bardyr. (42) gatnaşykdan iň oňat ŝ-ululygy saýlamak bolýar, ýagny

$$\hat{s} = \frac{\eta k^*}{f(k^*)}.$$

$\hat{s}$ -iň bahasy elmydama bardyr, özem ýeke-täkdir. Alnan netijeleri çyzga görä düşündireliň. $f(k)$-funksiýanyň grafiginden k* optimal ululyk (45)-nji gatnaşyga görä $f'(k) = \eta$, ýagny tg$\beta = \eta$ deňligi kanagatlandyrýan grafikdäki $f(k)$ nokady tapmak bilen kesgitlenilýär. Soňra koordinatlar başlangyjyndan ηk göni çyzyk geçirilýär we onuň kesişmesinden dik geçýän göni çyzyk bilen kesişmesi bahany berýär, şonuň üstünden $\hat{s}f(k)$ egri çyzyk geçýär. Tapylan $\hat{s}$-iň bahasy sazlaşdyrylan düzgündäki c maksimal islegleri üpjün edýär. $\hat{s}$-iň hemişelik toplanma normasynda (30)-(35)-nji matematiki modeliň derňelişiniň netijesine seredeliň. Islendik ýagdaýda ulgamyň traýektoriýalary asimptotik sazlaşykly ösüşe eýe bolýar. Şol ösüşiň tizligi bolsa, ilatyň ösüş tizligine deňdir. Her bir adamyň harajaty we islegi ykdysadyýýetiň sazlaşykly ösüşinde şol bir durşuna üýtgemän galýar. Eger dolandyrmagyň wagta görä üýtgemesini – toplamanyň normasy $s(t)$-ni alsak, has gowy netijeleri alyp bolarmy?

Şonuň üçin (30)-(35)-nji modeliň ýa-da (39)-(41)-nji modeliň derňewini $s(t)$ dolandyrma bilen geçireliň.

Ykdysadyýýetiň sazlaşykly ösüşinde ölçeg hökmünde c-ni her bir işgäriň wagt birligine görä harçlanma ululygy diýip alarys. Ykdysadyýýetiň sazlaşykly ösüşiniň traýektoriýasy (30)-(35)-nji matematiki modelde hemişelik bolýandygy üçin şeýle etmeklige mümkinçilik berýär. Indi $s(t)$ wagta görä üýtgeýän ululyk bolýar.

Meýilnamalaşdyrylyşyň ähli wagt aralygy üçin jemlenen harajatlary maksimallaşdyryp, aşakdaky ululygy alarys.

$$U = \int_O^T c(t)dt. \tag{46}$$

Bu ýerde T-meýilnamalaşdyrmanyň gözýetimidir. Köplenç ýagdaýda (46) ölçegiň ýerine onuň has umumy görnüşi hem ulanylýar:

$$U = \int_O^T q(t)c(t)dt.$$

Bu ýerde $q(t)$ – wagtyň dürli pursatlarynda harajaty kesgitleýän berlen funksiýa, köplenç $q(0) = 1$ diýip çak edilýär, $q(t)$ bolsa t wagta görä monoton kemelýän funksiýa.

Meselem:

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t},$$

$\delta \geq 0$ berlen ululyk. Biz häzirki ýagdaýda diňe (46) ölçege seretjekdiris.

Ykdysadyýetiň ösüşi haýsy hem bolsa bir gutarnykly möwsüme (wagta) görä derňelende, onuň şol wagtdan daşarky ýagdaýynda nähili boljagynyň pikirini etmeklik hökmandyr.

Bu seredilýän ýönekeý matematiki modelde esasy gaznanyň bir işçä görä hasaplananda derňelýän möwsümden soň uly bolmaklygynyň aladasyny etmekligi, ýagny $k(T)$ ululyga çäklendirme goýmaklygy aňladýar.

Bu çäklendirme aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$k(T) = k_T, \tag{47}$$

bu ýerde k_T-berlen ululyk.

Indi bolsa seredilýän mesele aşakdaky ýaly ýazylýar. Toplanmanyň normasynyň ululygy $s(t)$-niň $0 \leq t \leq T$ ýagdaýda $0 \leq s(t) \leq 1$ çäklenmäni kanagatlandyrar ýaly, (39)-(41) matematiki modeliň goşmaça (47) şertinde (46) ölçegi maksimumlaşdyrar ýaly bir wagta baglylygyny tapmaly.

Bu goýlan meseläniň hemme ýagdaýda çözülişiniň ýokdugyny bellemeli. Sebäbi k_T-niň şeýle bir uly bahasyny saýlasak, onda (39)-(41) matematiki model üçin $[0;T]$ wagt möwsüminde ulgam üçin olar ýaly gazna üpjünçiligine ýetip bolmaýar. Bu bolsa (39)-(41) ulgamyň matematiki modeliniň derňewiniň wajyplygyny görkezýär.

(39)-(41) matematiki model ulgamynda $[0;T]$ wagt aralygynda $k(T)$-niň ähli ýetýän bahalaryndan göwnejaý (akyla laýyk) k_T ululygy saýlap bilsek, onda düzülen optimallaşdyrma meselesi çözüwe eýe bolar. Meýilnamalaşdyrylyşyň gözýetimi T ýeterlik derejede uly baha eýe bolsa, onda $s(t)$ optimal dolandyrma şeýle ýagdaýa gelýär: ilki bilen (45) gatnaşyk bilen kesgitlenýän k^* nokada näçe çalt baryp bolar ýaly edip $s(t)$-niň bahasyny saýlamaly, soňra wagtyň ähli möhletinde diýen ýaly $s(t)$-niň bahasy $\hat{s}$-e deň bolmaly, möhletiň ahyrynda bolsa iň gysga (minimal) wagtda ulgamy k^* nokatdan k_T nokada geçirmeli. Şeýlelik bilen ýene-de her bir işgäre maksimal harajat edilen (30)-(35) sazlaşykly ösüşiň matematiki modeli alyndy. Şeýle sazlaşykly ösüşiň traýektoriýasyna çykmaklyk (k_0 we k_T) çäklerde k_0 we k_T-niň bahasyna bagly däldir. (39)-(41) matematiki modele magistral diýlip atlandyrylýar, ol aşakdaky meseläniň çözülişi bilen meňzeşdir.

A nokatdan ýeterlik derejede daşda ýerleşen B nokada barmaly bolsun, uzak bolmadyk ýerden bolsa awtomagistral geçýär, onda meseläniň iň amatly çözülişi ýakyn ýol bilen awtomagistrala çykyp, magistral bilen barmaly ýeriň iň golaýyna barýança gidip, soňra iň ýakyn ýol bilen *B* ýere barmak.

Şeýlelik bilen (30)-(35) matematiki model arkaly ýazylan ykdysady ulgam diňe esasy fonda we işgärleriň sanyna bagly bolan önümçilik funksiýasy bilen hem-de tizlik önümi bilen ösýän we ilatyň ösüş tizliginden ýokary ösýän görnüşde düzülen. Munuň esasy kynçylygynyň sebäbi, *MM* dolandyryş edaralary tehniki progrese baglylykdaky ykdysady peýdalylygyň ösüşini göz öňünde tutmaýar. Bu meseläniň derňelmegi tehniki ösüşde ykdysadyýetiň ösmeginiň esasy rol oýnaýandygyny we onuň wajypdygyny görkezýär. Eger bu tersine bolsa, onda düzülen *YMM* ykdysadyýetiň ösüşini dogry kesgitläp bilmez.

§5. Tehniki ösüşiň modelirlenilişi

Bu bölümde agregirlenen modellerde serişdeleriň peýdalanylyşyny ýokarlandyrýan ösüşi uzak möhletleýin çaklamagyň esasy usullaryny peýdalanyp boljak matematiki modellere seredeliň. Bu ýerde önümçilik serişdeleriniň peýdalylygynyň ösmegi, esasanam, köpsanly tehniki, guramaçylyk we durmuş ýagdaýlaryna bagly bolup durýandygyny belläliň, ýöne olaryň haýsy biriniň esasydygyny saýlamak kyndyr. Ykdysady matematiki modelde tehniki ösüş diýlip, umuman, ulanylýan serişdeleriň möçberini köpeltmän, önümiň sanyny köpeldýän ähli hadysalaryň toplumyna aýdylýar.

Agregirlenen modellerde serişdeleriň peýdalanylyşyny ýokarlandyrýan ösüşiň uzak möhletleýin çaklanylyşyny modelirlemek tehniki ösüşiň derňewinde ulanylýan esasy 4 ugur boýunça amala aşyrylýar:

1) awtonom (özbaşdak) tehniki ösüş. Bu ýagdaýda, serişdeleriň peýdalylygynyň ösmekligi maýa goýuma, işçi güýjüniň dinamikasyna bagly däldir, olar daşyndan getirilýärler.

2) maddylaşdyrylan (maddy görnüşe getirilen) tehniki ösüş. Bu ýerde ösüş täze, has kämil enjamlary we täze has tejribeli işçi güýjüni (hünärmenleri) ulanmak bilen gazanylýar.

3) «indusirlenen» tehniki ösüş. Bu öňki ykdysadyýetiň ösen derejesine esaslanyp, onuň netijesi bolup durýar.

4) ykdysady ulgamdan aýratyn bir pudagy saýlap almak arkaly: bu pudagyň önümi-tehniki ösüşi.

Bulara aýratynlykda, seredeliň.

Awtonom (özbaşdak) tehniki ösüşiň modelinde K esasy gaznalaryňy we L hünärli işçi güýjüniň hiliniň gowulandyrylmagy daşyndan berlen diýip hasaplanylýar we önümçilik funksiýasy aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$Y = F(A(t)K, B(t)L), \tag{48}$$

bu ýerde $A(t); B(t)$ – wagta görä berlen funksiýalar, $A(t)$ – esasy gaznalaryň ulanylyşynyň netijeliligini görkezýär, $B(t)$ – işçi serişdeleriň ulanylyşynyň netijeliligini görkezýär.

Köplenç, awtonom (özbaşdak) tehniki ösüşiň üç sany esasy ýagdaýlaryny tapawutlandyrýarlar:

1) $A(t) \equiv B(t)$, ýagny esasy gazna we işçi serişdeleri ulanmaklygyň netijeliligi wagta baglylykda proporsional ösýärler:

$$Y = A(t)\, F(K, L). \tag{49}$$

2) $A(t) \equiv 1$ bolanda zähmet serişdeleriniň peýdalylygy ösýär, esasy gaznadaky bolsa öňki derejede galýar:

$$Y = F(K, B(t), L, B(t)L). \tag{50}$$

3) $B(t) \equiv 1$ bolanda esasy fonduň peýdalanylyş effektiwligi ösýär, zähmet serişdeleriniň peýdalanylyş effektiwligi üýtgemeýär:

$$Y = F(A(t), K, L). \tag{51}$$

Bu ýagdaýlaryň (48) tehniki ösüş üçin haýsysynyň gowudygyny dürli-dürli esaslandyryp bolar. Olary aýratynlykda getirip durman, bu (49)-(51) wariantlaryň hemmesinde umumy bolan aýratynlyga üns bersek, olaryň her birinde önümçiligi ösdürmek diňe wagta bagly bolup durýar. Köplenç, $A(t) = e^{\beta_1 t}$, $B(t) = e^{\beta_2 t}$ görnüşde seredilýär, soňra degişli bolan ykdysady statistikany işläp, β_1, β_2, parametrleriň bahalary kesgitlenilýär.

Awtonom (özbaşdak) tehniki ösüşiň esasy aýratynlygy, olar köp maýa goýuma, ýagny täze gaznalaryň ýüze çykmaklygyna bagly däldigindedir.

Tehniki progresiň emele gelşiniň çeşmeleri esasy we örän wajyp sorag bolup durýar. (48) görnüşdäki önümçilik funksiýasynyň esasynda ykdysadyýetiň ýokary ösüş derejesini köp maýa goýumsyz hem saklap boljak diýen düşünje gelip çykýar. Onuň beýle däldigi düşnüklidir. Şoňa görä soňky döwürlerde maddylaşdyrylan (maddy görnüşe getirilen) tehniki progressiw köp ulanylýar. Şeýle hem wagtyň geçmegi bilen esasy fonduň hemmesi effekt, ýokary peýdalylygy däl-de, diňe şol pursatda (momentde) girizilýäni diýlip hasap edilýär. Has takygy, υ ýyldaky girizilen esasy fondlar üçin önümçilik funksiýasy şu görnüşde bolar:

$$Y(\upsilon) = e^{\beta\upsilon} K^{a}(\upsilon) L^{1-\alpha}(\upsilon), \tag{52}$$

bu ýerde α, β – hemişelikler, K – ýylda υ girizilen esasy fonduň mukdary, L – bu fondlarda göz öňüne tutulýan işçileriň sany.

Görşümiz ýaly, υ – ýyl üçin gaznalar $e^{\beta\upsilon}$ eksponentaly (49) görnüşdäki awtonom tehniki ösüş Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy görnüşinde ýazylýar. Eger $K(\upsilon, t)$ – υ ýyldaky öndürilen we t ýyla çenli saklanan esasy gaznalary bellesek, şeýle hem – t-nji ýyldaky işgärleriň sany, $Y(\upsilon, t)$ – şu gaznalarda öndürilen önümleriň mukdary bolsa, onda t – ýyldaky hemme esasy gaznalar we hemme zähmetkeşler üçin, önümçilik funksiýany aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} Y(\vartheta, t)\,dv = \int_{-\infty}^{t} e^{\beta v} K^{\alpha}(v,t) L^{1-\alpha}(v,t)\,dv, \tag{53}$$

ýagny $Y(\upsilon, t)$ – önümiň çykyşy hemme ýyllar boýunça häzirki pursada çenli integrirlenýär.

t ýylda bar bolan esasy gaznalaryň sany $K(t)$-ni aşakdaky formula boýunça alarys:

$$K(t) = \int_{-\infty}^{t} K(\nu, t)\,d\nu, \tag{54}$$

zähmetkeşleriň umumy sany $L(t)$:

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} L(\upsilon, t) d\upsilon. \tag{55}$$

Zähmetkeşleriň $L(t)$ sanyny işe ukyply ähli ilatyň sanyna deň diýip alsak, olary esasy gaznalaryň arasynda dürli görnüşde bölmek bolýar, şoňa görä $Y(t)$ – milli girdejini, $K(t)$– umumy esasy gaznany we $L(t)$ – zähmetkeşleriň umumy sanyny arabaglanyşdyrýan önümçilik funksiýany gurmak üçin, işçileri dürli gaznalara bölmek (paýlamak) hakyndaky çaklama seretmeli. Şeýle hem esasy gaznany almaklygyň ýollaryny öňe sürmeklik hökmandyr, başgaça aýdylanda olaryň çykmagy (gutarmagy) hakyndaky çaklama hem seretmelidir: meselem,

$$K(\upsilon, T) = I(\upsilon)\, e^{-\mu(t-\upsilon)}, \tag{56}$$

bu ýerde $I(v), v$ – ýylyň maýa goýumlary (ýagny, esasy gaznalar μ-iň ösmegi bilen sandan çykyp başlaýar). Geljekdäki şeýle mümkinçilikler – çaklamalar kesgitlenenden soňra $Y(t)$, $K(t)$ we $L(t)$-leriň aralaryndaky baglanyşyklar doly suratlandyrylýar.

Kähalatlarda maddylaşdyrylan (maddy görnüşe getirilen) tehniki ösüş hem ulanylýar. Ykdysady ulgama bu ösüş diňe täze esasy gaznalary girizmek däl-de, eýsem işçi güýjüniň (hünärmenleriň) tejribesini ösdürmek bilen gazanylýar; birnäçe başga wariantlar hem bar. Olaryň hemmesiniň degerlikli derejede orunlary bar hem bolsa, ýagny ösüş düýpli maýa goýum bilen baglanyşykly bolsa hem, tehniki ösüşiň gelip çykyşy düşnüksizligine galýar. Ony düşündirmek üçin, köplenç halatda, indusirlenen «индуцированного» – «ykdysadyýetiň öňki ösüşi bilen bagly bolan» tehniki ösüşiň modeli peýdalanylýar. Şeýle görnüşli ýönekeý modelleriň içinde: tehniki ösüş döwletde eýýäm näçe maýa goýum goýlandygyna bagly bolup durýar diýlip çak edilýär. Bu ýagdaýy modeli düzüjiler şeýle düşündirýärler: düýpli maýa goýumlar näçe köp goýulsa, şonça-da köp açyşlar we döredijilikler emele gelýär, olar bolsa tehniki ösüşi emele getirýärler.

Eger $G(v)$ – döwletde ýyldaky düýpli maýa goýumlaryň jeminiň sany diýip bellesek, onda $G(v)$-ni aşakdaky formula boýunça hasaplamak bolar:

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\nu} I(\tau) d\tau. \tag{57}$$

Goý, tehniki ösüş, esasy gaznalar soňky wagtlarda ulanylyp, zähmet serişdeleriň peýdalanylmagynyň ýokarlandyrylmagyndan ybarat bolsun, ýagny:

$$Y(v, t) = F(K(v, t), B(v)L(v, t)).$$

Ýokarda belleýşimiz ýaly, «indusirlenen» tehniki ösüşiň esasy manysy – B(υ)-niň düýpli maýa goýumlaryň jemlenmeginiň mukdara G(υ) baglylygyndan ybaratdyr. Goý,

$$B(\nu) = \frac{1}{g(G(\nu))}$$

bolsun, bu ýerde $g(G)$ – haýsy hem bolsa bir monoton kemelýän funksiýa. Goý, v ýyldaky esasy gaznalar üçin ulanylýan önümçilik funksiýa hemişelik proporsiýaly funksiýa bolsun. Onda

$$Y(\nu, t) = A\min\left[\frac{K(\nu, t)}{K_0},\ \frac{1}{g(G(\nu))}\cdot\frac{L(\nu, t)}{L_0}\right]. \qquad (58)$$

Bu ýagdaýda tehniki ösüşi esasy gaznanyň doly ulanylmagy üçin işçileriň sanyny azaltmak bilen gazanmak diýip düşündirmek bolar.

Ýönekeýlik üçin, goý, esasy gazna zaýalanman T ýyllap hyzmat edensoň taşlanýan bolsun. Onda $K(v,t)$-niň ululygyny aşakdaky formula boýunça hasaplamak bolar:

$$K(\nu, t) = \begin{cases} I(\nu), & \text{haçan } t - v < T \\ 0, & \text{haçan } t - v \geq T. \end{cases} \qquad (59)$$

(59)-njy gatnaşygy (57) eksponensial çykarylyşyň ýerine ulanmak bolýar. Esasy gaznalaryň umumy sany:

$$K(t) = \int_{t-T}^{t} I(\nu)d\nu.$$

Eger ähli $L(t)$ işçi güýçleri, ýöne şondan köp bolmadygyny doly ulanar ýaly, her ýylda $I(v)$ düýpli maýa goýumy edilýär diýip güman etsek, onda alarys:

$$\frac{K(v, t)}{K_0} = \frac{L(\nu, t)}{L_0}\frac{1}{g(G(\nu))}, \qquad (60)$$

özem

$$L(t) = \int_{t-T}^{t} L(\nu,t)d\nu. \quad (61)$$

(60) gatnaşygy (61) gatnaşykda ýerine goýup, aşakdaky formulany alarys:

$$L(t) = \int_{t-T}^{t} \frac{L_0}{K_0} K(\nu,t) g(G(\nu)) d\nu. \quad (62)$$

Goý, ýönekeýlik üçin $g(G) = g_o G^{-h}$, bolsun, bu ýerde – g_o, h hemişelikler $h \in (0;1)$. Belli bolşy ýaly, $dG = I(\nu)d\nu$, şonuň üçin (62) formulany aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$L(t) = \int_{G(t-T)}^{G(t)} \frac{L_0}{K_0} g_0 G^{-h} dG = \frac{L_0}{K_0} g_0 \frac{1}{1-h} (G^{1-h}(t) - G^{1-h}(t-T)). \quad (63)$$

Doly milli girdejini aşakdaky formula boýunça hasaplap bolýar:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{t-T}^{t} Y(\nu,t)d\nu = A \int_{t-T}^{t} \frac{K(\nu,t)}{K_0} d\nu = \\ &= A \int_{G(t-T)}^{G(t)} \frac{1}{K_0} dG = \frac{A}{K_0}[G(t) - G(t-T)]. \end{aligned} \quad (64)$$

(63) we (64) gatnaşyklardan alarys:

$$Y(t) = \frac{A}{K_0} G(t) \left[1 - \left(1 - \frac{1-h}{g_0} \frac{K_0}{L_0} \frac{L(t)}{G^{1-h}(t)} \right)^{\frac{1}{1-h}} \right]. \quad (65)$$

(65) gatnaşyk düýpli maýa goýumlary girizmek arkaly gazanylan «indusirlenen» tehniki ösüşiň önümçilik funksiýasyny görkezýär. Şu görnüşdäki tehniki ösüşli başga modeller hem bar.

Şular ýaly ösüşleri derňemek, beýleki «awtonom» we «maddalaşdyrylan» ösüşler hakykata örän golaý hem bolsa, olar şeýle garşylyklara eýe bolýarlar: eger ösüş diňe bir düýpli maýa goýumlara bagly bolsa, onda ylmyň ösmegine uly harajatlar çykarmak nämä gerek?! Görşümiz ýaly, şeýle maksatly çykdajysyz (harajatsyz) hiç bir düýpli maýa goýum önümçiligiň peýdalylygynyň tiz ösüşi üpjün edip bilmez. Bu ösüşler her bir onýyllykda ýokary derejede önümçilik güýjüne öwrülýän, ylmyň gazananlaryna bagly bolup durýar. Şonuň üçin tutuş ylmy-tehniki progres barada gürrüň etmekligiň manysy bardyr. Soňky döwürlerde ylma we tehnika edilýän harajatlaryň önümçiligiň ösüşine täsirini öwrenmek modellerinde ylmy-tehniki önümçiligiň pudagy hökmünde seredilýär. Şolar ýaly modeli suratlandyrmak maksady bilen (48) önümçilik funksiýa seredeliň:

$$Y = AF(K, L).$$

A funksiýa t bagly däl-de, aşakdaky differensial deňlemäni kanagatlandyrýan bolsun:

$$A = \delta(A, V), \tag{66}$$

bu ýerde V – ylmy derňewlere bolan çykdajylar, $\delta(A, V)$ – berlen funksiýa. Onda (30)-(35) ykdysady modeli, (66) gatnaşyk görnüşindäki ylmy-tehniki ösüş ýagdaýynda umumylaşdyryp, aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$Y(t) = A(t)F(K(t), L(t)), \tag{67}$$

$$I(t) = s_1(t)Y(t), \tag{68}$$

$$V(t) = s_2(t)Y(t), \tag{69}$$

$$C(t) = (1 - s_1(t) - s_2(t))Y(t), \tag{70}$$

$$\dot{K}(t) = I(t). \tag{71}$$

$$\dot{A}(t) = \delta(A(t), V(t)), \tag{72}$$

$$L(t) = L_0 e^{\eta t}, \tag{73}$$

$$K(0) = K_0, \tag{74}$$

$$A(0) = A_0. \tag{75}$$

Bu modelde milli girdeji $Y(t)$ esasy gazna $s_1(t)Y(t)$, ylmy-tehniki ösüşe $s_2(t)\ Y(t)$ we çykdajy $(1 - s_1(t) - s_2(t))$ düýpli maýa goýumlara bölünýärler. Şeýle hem,

$$0 \le s_1(t) \le 1,\ 0 \le s_2(t) \le 1,\ s_1(t) + s_2(t) \le 1.$$

Bu model (30)-(35) ykdysady matematiki modelden çylşyrymly bolsa-da, onuň üçin sazlaşykly ösüşiň derňelişini geçirmek we ykdysady ulgamlaryň ösüşiniň dürli ölçeglerinde $s_1(t)$ we $s_2(t)$ optimal dolandyrmalary saýlamak we şoňa meňzeşleri geçirip bolýar.Tehniki ösüşiň islendik görnüşini göz öňüne tutup düzülen modelleri derňemeklik, tehniki ösüşsiz modeli derňemekden örän çylşyrymly mesele bolup durýar.

VIII bap
Ykdysady ulgamlary seljermekde we modelirlemekde önümçilik funksiýasynyň peýdalanylyşy

§1. Önümçilik funksiýasynyň birnäçe umumy häsiýetleri

Bu bapda y skalýar önümli we $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ peýdalanylýan serişdeleriň otrisatel däl wektorly önümçilik funksiýasyna serederis. Önümçilik funksiýasy ulanylýan serişdelere degişlilikde $y = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ önümiň çykyşyny goýýar.

Önümçilik funksiýasy gurlanda ulanylýan esasy çaklamalara seredeliň.

1.Önümçilikde peýdalanylýan serişdeleriň çykdajysyny köpeltmek arkaly önümiň öndürilişi azalyp bilmez diýip hasap edeliň. Bu bolsa önümçilik funksiýasyny gurmakda, elmydama goýulýan şertleriň biridir.

1. Birinji çaklama.

$f(x)$ – funksiýa kemelmeýär, ýagny $\bar{x} \geq x$ şertden

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \tag{1}$$

şert gelip çykýar.

Bu şert aýdyň hem bolsa, ol elmydama ýerine ýetmeýär. Mysal üçin, oba hojalyk önümlerini öndürmek üçin peýdalanylýan ýerleriň sanyny köpeldeli. Onda hemme ýerleriň ekilmeginiň netijesinde ýerleri işläp bejermegiň hiliniň peselmegi, ýygnanylan (ýetişdirilen) hasylyň azalmagyna getirer. Şoňa görä birinji şerti kanagatlandyrmaýan önümçilik funksiýasynyň gurulmagy mümkin.

1-nji kesgitleme. (1) gatnaşygy kanagatlandyrýan ähli x wektorlaryň köplügine *ykdysady ýaýla* diýilýär. Ondan daşary goşmaça harajatlar ykdysady peýdasyz, zyýanlydyr.

Differensirlenýän funksiýa üçin bu şert aşakdaky şert bilen ekwiwalentdir. Goý, $\bar{x} = x + t\zeta$, bu ýerde $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, ..., \zeta^n) \geq 0$ – önümçilige goşmaça çekilen serişdeleriň arasyndaky proporsiýalary häsiýetlendirýän wektor, $t > 0$ – olaryň mukdaryny kesgitleýän skalýar ululyk. Teýloryň formulasy boýunça aşakdaky tapawudy hasaplarys:

$$\frac{1}{t}(f(x+t\zeta)-f(x)) = f'(x,\zeta) + 0(1) \geq 0.$$

$f'(x, \zeta)$ – bu ýerde ζ – ugur boýunça f-dan alnan önüm.

$t \to 0$ ýagdaýda:

$$f'(x,\zeta) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f \zeta^i}{\partial x^i} \geq 0,$$

ýagny f funksiýanyň önümi islendik x nokatda islendik otrisatel däl ζ ugur boýunça otrisatel däldir.

Eger $f(x)$ – funksiýanyň ähli hususy önümleri bar bolsa, onda $\zeta > 0$ erkinligine görä, bu ýerden aşakdaky şerti alarys:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}).$$

$\frac{\partial f}{\partial x^i}$ – hususy önüm, i-nji serişdäniň mukdarynynyň birlige köpeldilmeginiň esasynda köpelen goşmaça önüme deňdir.

2-nji kesgitleme. i-nji serişdäniň mukdarynyň birlige köpeldilmeginiň esasynda, goşmaça alnan önümiň mukdaryna i-nji serişdäniň predel öndürijiligi diýilýär.

Indi bolsa ykdysady ýaýlany şeýle kesgitlemek bolar: önümçilik serişdeleriniň giňişligindäki şeýle bir $\{x\}$ köplükdir, ýagny onda aşakdaky şert ýerine ýetýän bolsa:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0, \quad (i = (\overline{1,n}).$$

Eger $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ funksiýanyň üznüksizligini göz öňüne tutsak (şertini goýsak), onda ykdysady ýaýlanyň araçägi (gyrasy):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0(i = 1, 2, \ldots, n)$$

deňligiň ýerine ýetýän üstleridir. Bu üste, köplenç, bölünýän (paýlaşdyrýan) üst diýilýär.

2. *Ikinji çaklama.*

Haýsy hem bolsa bir serişdäniň mukdaryny köpeltmek bilen beýleki serişdeleriň mukdary üýtgemän galsa, onda ol serişdäniň ulanylmagynyň peýdalylygy peselýär.

Bu talap matematiki taýdan aşakdaky görnüşde şekillendirilýär: $f(x)$ funksiýa – güberçek aşak (ýokary), öz argumentlerine görä otrisatel däl bölekde.

$f(x)$ – otrisatel däl ortantada öz argumentlerinde güberçekligi ýokarlygyna bolan funksiýa diýilýär, eger X köplükde islendik iki sany x_1 we x_2 nokatlar (wektorlar) ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$,) we $\alpha \in [0,1]$islendik sanlar üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)\,. \qquad (2)$$

$f(x)$ funksiýa üznüksiz iki gezek differensirlenýän bolsa, onuň ýokarlygyna güberçekligi hemme položitel serişdelerde $f(x)$ funksiýanyň ikinji tertipli önümlerinden H matrisasynyň položitel däl kesgitliligine ekwiwalentdir. (Gesseniň matrisasy)

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{kdx^n \partial x^n} \end{bmatrix},$$

ýagny

$$(\zeta, H\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \zeta^i \zeta^j \leq 0. \qquad (3)$$

islendik ζ wektor üçin

Ýeke-täk serişde ulanylýan bolsa, iki gezek üznüksiz differensirlenýän *f(x)* önümçilik funksiýasynyň güberçekligi deňsizlik görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \leq 0 \left(\text{ ýa-da } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \leq 0 \right).$$

Bu bolsa aýdyň bolan ykdysady mana eýedir: serişdäniň predel öndürijiligi ösmeýär. Bu talap, birnäçe serişdeler bolan ýagdaýyna hem degişli bolup durýar: (3) talabyň ýerine her bir serişdäniň aýratynlykda predel öndürijiliginiň ösmeýändigi baradaky çaklama öňe sürülýär:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \leq 0. \tag{4}$$

$f(x)$ funksiýanyň aşaklygyna güberçekliginiň ýerine ýetmekligi üçin (4) şertiň, ýeterlik däldigini görkezmek kyn däldir. Mysal hökmünde x^1 we x^2 serişdeli derejeli önümçilik funksiýa seredeliň:

$$f(x^1, x^2) = (x^1)^{2/3}(x^2)^{2/3}.$$

(4)-nji gatnaşygyň ýerine ýetýändigi aýdyňdyr:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} = -\frac{2}{9}\frac{(x^2)^{2/3}}{(x^1)^{2/3}} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} = -\frac{2}{9}\frac{(x^1)^{2/3}}{(x^2)^{4/3}} < 0.$$

Şeýle-de bolsa ol aşaklygyna güberçek däldir. Dogrudan hem, (2)-nji aşaklygyna güberçekligiň kesgitlemesinde x_1 diýip $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ nokady, x_2 diýip $x^1 = 1$, $x^2 = 1$ nokady, şeýle hem $\alpha = 1/2$ diýip alsak, onda

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Beýleki tarapdan, $f(0;0) = 0$, $f(1;1)$ we

$$\alpha f(0,0) + (1-\alpha)f(1;1) = \frac{1}{2}.$$

Şeýlelik bilen (2)–nji aşaklygyna güberçeklik şerti seredilýän funksiýa üçin ýerine ýetmeýär.

3. Üçünji çaklama.

Önümçiligiň göwrüminiň giňelmegi hemişelik ykdysady netije (peýda) berýän önümçilik funksiýasy bilen häsiýetlendirilýär.

Önümçiligiň göwrüminiň giňelmegi bilen hemişelik ykdysady netije (peýda) berýän önümçilik funksiýasy önümiň çykarylyşynyň üýtgemeginiň harajatlaryň üýtgemegine proporsionallygy bilen häsiýetlendirilýär.

Goý, çykdajylar giňişliginde haýsy hem bolsa bir x nokadyň hemme koordinatalary $t(t > 1)$ sana köpeldilip, $tx = (tx^1, ..., tx^n)$ baha ýetýän bolsun. Onda önümçilik funksiýasy önümçiligiň göwrüminiň giňelmegi bilen hemişelik ykdysady netije (peýda) berýän esasda harajatyň hem proporsional ösmegi bilen häsiýetlendirilýän bolsun:

$$f(tx) = tf(x).$$

Şeýle hem önümçilik funksiýasy önümçiligiň göwrüminiň giňelmeginden öndürijiligiň artmagyny (kemelmegini) berýär, eger ol hemme harajatlardan uly (kiçi) derejede artýan bolsa:

$$f(tx) > tf(x), \qquad (f(tx) < tf(x)).$$

3-nji kesgitleme. Eger $f(x)$ skalýar funksiýa aşakdaky gatnaşygy kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa γ derejeli birjynsly funksiýa diýilýär:

$$f(tx) = t^{\gamma} f(x) \tag{5}$$

Önümçiligiň göwrüminiň giňelmegi bilen birjynsly önümçilik funksiýa $\gamma > 1$ bolanda artýandygy, $\gamma < 1$ bolanda kemelýändigi, $\gamma = 1$ bolanda (çyzykly birjynsly funksiýa) hemişelik ykdysady netije (peýda) berýändigi bilen häsiýetlendirilýär.

$\gamma = 1$ iki sany önümçilik serişdeleri bolan çyzykly birjynsly funksiýanyň hususy halyna seredeliň. (5) gatnaşygy t boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial f(tx)}{\partial x^2}x^2 = \gamma t^{\gamma-1} f(x).$$

Eger $t = 1$ diýip alsak, bu gatnaşygy her bir serişde boýunça differensirlesek, onda:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^1}x^1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x^1} + \frac{kd^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^2}x^2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x^1}.$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2 \partial x^1}x^1 + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2 \partial x^2}x^2 + \frac{\partial f(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^2}.$$

Birinji gatnaşykdan x^1-i x^2-iň üsti bilen aňladyp, ikinji gatnaşykda ýerinde goýup, soňra $x^2 > 0$ gysgaldyp alarys:

$$\frac{\partial^2 f(x) \partial^2 f(x)^2}{\partial x^1 \partial x^1 \partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2 \partial x^1} = 0. \tag{6}$$

(4) we (6) gatnaşyklar funksiýanyň Gesse matrisasynyň esasy minorlarynyň alamatlaryny kesgitleýärler, şeýlelik bilen (3) kwadratik görnüşiň položitel däldiginiň ýeterlik şerti bolup durýar. Şeýlelik bilen,

(4) şert iki sany önümçilik resurslary bolan çyzykly birjynsly funksiýanyň egriliginiň (oýuklylygynyň) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \leq 0$ ýeterlik şerti bolýar. Bu bolsa $\gamma = 1$ bolandaky hususy hal bolýar. Şonuň üçin biziň öňki bölümde sereden önümçilik funksiýamyza, aşaklygyna güberçek önümçilik funksiýasyny suratlandyrma hökmünde seretmek bolar.

4. Serişdeleriň çalşyrmasyny derňemek (seljermek) üçin fiksirlenen çykarmanyň üsti bolan izokwanta seredeliň. Şol bir derejede harajatlaryň giňişliginde y_0 önümiň çykarylyşyndaky x nokatlaryň köplügi

$$\{x{:}f(x) = y_0\}$$

izokwanta diýlip atlandyrylýar.

Izokwantanyň ugry boýunça $f(x)$ funksiýanyň differensirlenmegi aşakdaky gatnaşygy berýär:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = 0.$$

Eger berlen nokatda önümçiligiň predel öndürijiligi noldan tapawutly bolsa, onda serişdeleri öz aralarynda çalşyrmak bolýar.

i-nji we j-nji harajatlardan başgasyny kesgitlesek (bellesek, fiksirlesek), onda:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = 0.$$

Bu ýerden izokwantanyň ugry boýunça:

$$\frac{dx^i}{dx_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x^i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x^j}} = h_{ij}.$$

Otrisatel alamatly predel harajatlaryň gatnaşygyna deň bolan h_{ij} ululyga çalşyrmanyň predel normasy diýilýär. Ol hemişelik önüm çykarylanda i-nji resursyň bir birligini çalşyrmak üçin j-nji serişdäniň näçe birliginiň gerek bolýandygyny görkezýär. Minus alamaty bolsa bir serişdäniň harajatynyň azalmagy bilen beýleki biriniň harajatynyň hökman köpelmelidigini görkezýär.

Serişdäniň orta öndürijiligi (ýa-da harajatyň norma görkezijisi-normatiwi) aşakdaky gatnaşyk boýunça kesgitlenilýär:

$$\frac{f(x)}{x^i}$$

orta öndürijilige ters bolan $\frac{x^i}{f(x)}$ ululyk i-nji serişdäniň orta harajatyny kesgitleýär (ýa-da berlen serişdä degişlilikde önümiň mukdaryny: eger ol serişde zähmet bolsa – köp zähmet talap edijilik; eger ol gazna bolsa esasy gaznanyň harçlanyşynyň netijeliligi; energiýa – talap edijilik; maddylyk we ş.m.).

Aňryçäk (predel) öndürijiligiň ortaça öndürijilige görä gatnaşygyna, i-nji görnüşli serişdäniň harajatynyň üýtgemegine görä çykarmanyň maýyşgaklygy diýilýär:

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{x^i}{f(x)} = \frac{\partial\, ln f(x)}{\partial\, ln x^i}.$$

Başgaça aýdylanda i-nji serişdä görä çykarmanyň maýyşgaklygy diýip bu önümiň göterimli ösüşiniň, harajatyň göterimli ösüşine bolan gatnaşygyna ýa-da predel önümiň orta harajatlara köpeltmek hasylyna aýdylýar:

$$\varepsilon(x) = \lim_{i \to 1}\frac{t}{f(tx)}\frac{\partial f(tx)}{\partial t} = \lim_{t \to 1}\frac{\partial\, ln f(tx)}{\partial\, ln t}.$$

Onda

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{x^i}{f}.$$

Ýagny

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x).$$

Serişdeleriň çalşyrmagynyň maýyşgaklygy σ_{ij} diýen düşünjäni girizeliň:

$$\sigma_{ij} = \frac{d(x^i/x^j)}{dh_{ij}}\frac{h_{ij}}{(x^i/x^j)} = \frac{d\ell n(x^i/x^j)}{d\ell n(-h_{ij})}.$$

Ol i-nji we j-nji serişdeleriň harajatlar gatnaşygynyň göterim üýtgemesiniň, olaryň predel öndürijilikleriniň gatnaşygynyň göterim üýtgemesine bölünmegine deňdir. Predel çalşyrmanyň normasy ulanylýan serişdeleriň baglanyşygyna bagly bolmaýan hususy halynda:

$$\frac{dh_{ij}}{d(x^i/x^j)} = 0, \tag{7}$$

ýagny σ_{ij} – çalşyrmanyň maýyşgaklygy tükeniksiz ýokary. Bu ýagdaýda serişdeleri özara doly çalşyryp bolýar diýip hasap edilýär. $\sigma_{ij} = 0$ bolanda, serişdeleri özara çalşyryp bolmaýar.

§2. Birnäçe serişdeli şol bir görnüşli önümçilik funksiýalary

Indi bolsa hemişe duş gelýän önümçilik funksiýalaryna seredeliň. Bu funksiýalaryň aglaba köpüsi, öňki bölümlerde sereden önümçilik funksiýalarymyzyň umumylaşdyrylan görnüşleri bolup durýar. Esasan hem çalyşmanyň hemişelik maýyşgakly önümçilik funksiýasy ulanylýar. Önümçilik funksiýalaryň argumentleri we önüm normalaşdyrylan (norma salnan), ýagny

$$y = \frac{Y}{Y_0}, \ \ x^1 = \frac{X^1}{X_0^1}, \dots, \ \ x^n = \frac{X^n}{X_0^n}.$$

1.Çyzykly önümçilik funksiýasy.

Önümiň çykyşy, harajata çyzykly baglanyşykly diýip hasap edeliň:

$$y = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \tag{8}$$

Bu ýerde hemme serişdeleri doly çalşyryp bolýar. Predel öndürijilik we çalşyrmanyň predel normasy hemişelik bolup (önümçilikde meşgul bolýan serişdeleriň möçberine bagly däldir), aşakdaky gatnaşyk arkaly görkezilýär:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = a_i, \quad h_{ij} = -\frac{a_j}{a_i}.$$

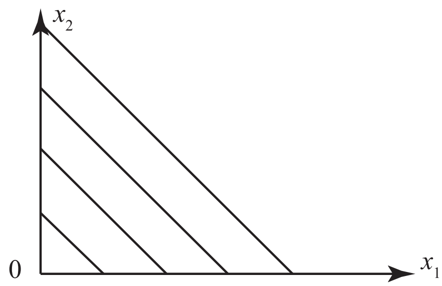
Çalşyrmanyň maýyşgaklygy tükeniksiz uly:

$$\sigma_{ij} = \infty, (dh_{ij} = 0).$$

Önümçiligiň maýyşgaklygy bolsa bire deňdir:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{x^i}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x^i}{f} = \frac{f}{f} = 1.$$

Şoňa görä önümçiligiň möçberiniň giňelmegi bilen öndürilýän önümiň girdejiligi hemişe köpelýär. Serişdeleriň arasyndaky proporsiýanyň hiç hili ähmiýeti ýok bolýar. Iki üýtgeýän ululykly çyzykly funksiýanyň deň çykarylyşlaryň çyzyklary (izokwantalary) aşakdaky çyzgyda görkezilýär.



1-nji surat

2. Kobba-Duglasyň (K-D) funksiýasy.

K-D funksiýasy aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$f(x) = A(x^1)^{a_1} \cdot (x^2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x^n)^{a_n}. \qquad (9)$$

Bu ýerde serişdeler özara çalşyrylýarlar, ýöne çalşyrmagyň maýyşgaklygy kiçidir we serişdäniň bahalylygy umumy harajatlarynda-da olaryň proporsiýalary ösende kiçelýär. (9) gatnaşygy logarifmik görnüşde ýazanymyzda, ol aşakdaky ýaly bolýar:

$$\ln y = \ln A + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x^i. \qquad (10)$$

Çykaryşyň maýyşgaklygy:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x^i} = \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{x^i}{y} = a_i. \qquad (11)$$

Önümçiligiň maýyşgaklygy:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

$\varepsilon > 1$ artýan, $\varepsilon > 1$ kemelýän, $\varepsilon = 1$ hemişelik ýagdaýynda önümçiligiň möçberiniň berýän girdejisi. (11) gatnaşykdan çalyşmanyň predel öndürijiligini we predel normasyny alarys:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i \frac{y}{x^i}, \ h_{ij} = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}, \frac{x^i}{x^j}.$$

Şeýlelikde, hasaba alnan önüm çykarylyşda birnäçe serişdeleriň çykdajysynyň (harajatynyň) ösmegi bilen predel öndürijilik peselýär. Çalşyrmanyň normasy h_{ij} ösýär, *i*-nji serişdäniň udel harajaty ösende, ýagny *j*-nji serişdäniň ýetmezini dolmak üçin *i*-nji serişdä artýan goşmaça harajat gerek bolýar.

Çalşyrmanyň maýyşgaklygy bire deňdir:

$$\sigma_{ij} = \frac{d\ln(x^i l x^j)}{d\ln(-h_{ij})} = 1.$$

(10) gatnaşykdan görşümiz ýaly, eger önümçilik *K-D* funksiýanyň üsti bilen kesgitlenýän bolsa, onda $\dot{y}/y$ önümiň ösüşiniň gidişi $\dot{x}^i / x^i (i = \overline{1,n})$ harajatlaryň faktorlarynyň ösüşiniň gidişine çyzykly bagly bolup durýar:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha_1 \frac{\dot{x}^1}{x^1} + \alpha_2 \frac{\dot{x}^2}{x^2} + ... + \alpha_n \frac{\dot{x}^n}{x^n}. \qquad (12)$$

Şeýlelik bilen eger hemme faktorlar şol bir göterime artsalar, onda önümiň çykyşy hem şol göterime artýar.

3. Hemişelik proporsiýaly önümçilik funksiýasy.

Şeýle önümçilik funksiýa aşakdaky deňleme:

$$Y = Y_0 A\min\left(\frac{X^1}{X_0^1}, \frac{X^2}{X_0^2}, ..., \frac{X^n}{X_0^n}\right) \qquad (13)$$

ýa-da normalaşdyrylan üýtgeýän ululyklar arkaly berilýär:

$$Y = A \min(x^1{}_, x^2, ..., x^n). \qquad (14)$$

Bu ýerde Y – önümiň çykyşy, Y_0 – normirleýji köpeldiji, x^i – *i*-nji görnüşli serişdeleriň harajaty, X_0^i – *i*-nji serişdäniň udel harajatyny häsiýetlendirýär – AY_0 mukdarda önümi çykarmak üçin gerek bolan harajatlar.

Iki serişdeli (zähmet L we enjamlar K) hususy halda, öňki bölümden belli bolşy ýaly formulany alarys:

$$Y = A\min\left[\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right]. \tag{15}$$

Funksiýa differensirlenmeýän bolsa-da üznüksizdir. Haýsy hem bolsa bir serişdäniň harajatynyň ösmegi bilen, ikinjisi hasaba alnan bolup önüm çykyşynda ösüş emele gelmeýär.

Hemişelik proporsional çalşyrmaýan önümçilik funksiýasynyň faktorlary çalşyrylmaýarlar we çalşyrmanyň maýyşgaklygy σ_{ij} nola deňdir:

$$\sigma_{ij} = 0.$$

Önümçiligiň maýyşgaklygy bire deňdir, ol bolsa hemişelikdäki netije (peýda) önümiň möçberine degişli bolup durýar:

$$\varepsilon = \frac{t}{\min\limits_i(tx^i)}\frac{\partial(\min\limits_i(tx^i))}{\partial t} = \frac{t}{t\min\limits_i x^i}\frac{\partial\left(\min\limits_i(tx^i)\right)}{\partial t} = 1.$$

4. Hemişelik maýyşgakly çalşyrmanyň funksiýasynyň umumy görnüşi.

Hemişelik maýyşgakly çalşyrmanyň önümçilik funksiýasynyň has umumylaşdyrylan görnüşinden predele geçmeklik bilen öňki seredilen ähli funksiýalary alyp bolýar.

Ol aşakdaky görnüşe eýedir:

$$y = A\left(\beta_i\left(\frac{X^1}{X_0^1}\right)^{-\rho} + \ldots + \beta_n\left(\frac{X^n}{X_0^n}\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \tag{16}$$

Bu ýerde γ – birjynslylygyň görkezijisi, önümçiligiň maýyşgaklygy bilen gabat gelýär: $\varepsilon = \gamma$

Geljekde (16) funksiýany gysgaça, funksiýanyň hemişelikli maýyşgaklygy diýip atlandyrjakdyrys.

(16) funksiýanyň logarifmik görnüşini şeýle ýazmak bolýar:

$$\ln y = -\frac{\gamma}{\rho}\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x^i)^{-\rho}\right] + \ln A. \tag{17}$$

Bu gatnaşygy differensirläp, alarys:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x^i} = \frac{\gamma\beta_i(x^i)^{-\rho-1}}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x^i)^{-\rho}}.$$

Bu ýerden önümçiligiň maýyşgaklygyndan alarys:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{y}\frac{\partial y}{\partial x^i} = \gamma.$$

Çalşyrmanyň predel normasy:

$$h_{ij} = -\frac{\partial y}{\partial x^j}\bigg/\frac{\partial y}{\partial x^i} = -\frac{\beta_j}{\beta_i}\left(\frac{x^i}{x^j}\right)^{1+\rho}$$

aňlatma deňdir.

Bu gatnaşygy logarifmirläp, alarys:

$$\ln(-h_{ij}) = \ln\frac{\beta_j}{\beta_i} + (1+\rho)\ln\left(\frac{x^i}{x^j}\right).$$

Çalşyrmanyň maýyşgaklygy üçin hemme serişde jübütleri üçin şol bir ululygy alarys:

$$\sigma_{ij} = \frac{d(\ln(x^{x^i}\!/_{x^j}))}{d(\ln(-h_{ij}))} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Bu ýerden görşümiz ýaly, eger $\rho \to -1, \sigma_{ij} \to \infty$, alýarys (çalşyrmanyň maýyşgaklygy tükeniksiz uly bolan çyzykly funksiýa), eger $\rho \to 0$, onda $\sigma_{ij} \to 1$ (çalşyrmanyň maýyşgaklygy bire deň bolan *K-D* funksiýasy), eger $p \to \infty, \delta_{ij} \to 0$, (fiksirlenen proporsiýaly harajatlaryň önümçilik funksiýasy) alarys.

Öňki seredilen bölümde, 9-njy çyzgydan görnüşi ýaly, öndürijiligiň zähmet gaznasy üpjünçiligine bagly bolanda, grafiki baglanyşyklyklar deňeşdirilse: $\sigma = 1$ (2-nji egri), $0 < \sigma < 1$ (3-nji egri) we $\sigma = 0$ (1-nji egri). Görşümiz ýaly, çalyşmanyň ýumşaklygy köp boldugyça, şonça köp gazna üpjünçiliginiň ulalmagyna getirýär. $\rho \to 0$ bolanda Lopitalyň düzgünini (17) ulanyp, K-D funksiýanyň formulasyny alarys:

$$\ln y = \lim_{p \to 0} \frac{\gamma \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln x^i (x^i)^{-\rho}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x^i)^{-\rho}} + \ln A = \gamma \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln x^i + \ln A.$$

$\beta_i \gamma$ – ny α_i bilen çalşyryp, *K-D* funksiýany hemişeki görnüşinde alarys:

$$y = A(x^1)\alpha^1, \ldots, (x^n)\alpha^n$$

ýa-da başdaky näbelliler bilen:

$$\frac{Y}{Y_0} = A\left(\frac{X^1}{X_0^1}\right)^{\alpha_1}, \ldots, \left(\frac{X^n}{X_0^n}\right)^{\alpha_n}.$$

$\rho \to \infty$ bolanda Lopitalyň düzgünini ulanyp, alarys:

$$\ln y^{\infty} = \ln A + \lim_{\rho \to \infty}\left[-\frac{\gamma \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (x^i)^{-\rho}\right)}{\rho}\right] =$$

$$= \ln A + \lim_{\rho \to \infty}\left[\frac{\gamma \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln(x^i)(x^i)^{-\rho}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i (x^i)^{-\rho}}\right] =$$

$$= \ln A + \lim_{\rho \to \infty}\left[\gamma \frac{\beta_k \ln x^k + \sum_{i \neq k} \beta_i \ln x^i \left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{\rho}}{\beta_k + \sum_{i \neq k} \beta_i \left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{\rho}}\right].$$

Bu ýerde $x^k = \min\limits_i i . \rho \to \infty$ predele geçip, alarys:

$$lny^{\infty} = 1nA + \gamma 1nx^k.$$

ýagny

$$y^{\infty} = A(x^k)^{\gamma} = \mathrm{A}(\min_i x^i)^{\gamma}.$$

$\gamma = 1$ bolanda, belli bir proporsiýaly funksiýany alýarys:

$$y^{\infty} = A\min(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

$\rho = -1$ we $\gamma = 1$ bolanda, çyzykly funksiýany alarys:

$$y = a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Bu ýerde $a_i = A\beta_i$, $\quad i = 1, \ldots, n$.

§3. Çaklamanyň modelinde önümçilik funksiýasynyň peýdalanylyşy

Bize belli bolşy ýaly, önümçilikde esasanam iki faktor ulanylýar:

L-zähmet we *K*-enjamlaşdyrmak, düşýän baha manysynda (önümiň mümkinçilikleri)

Önümiň düýpli çykarylyşyny Q bilen belläliň. Önümçiligiň $Q(K,L)$ funksiýasy bilen aňladylýar. Ony wagta görä, differensirläp aşakdaky harajatyň ösüşiniň tizligi bilen önümiň çykarylyşynyň gatnaşygyndan alarys:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \varepsilon_0 + \varepsilon_K \frac{\dot{K}}{K} + \varepsilon_L \frac{\dot{L}}{L} + \xi_Q(t). \qquad (18)$$

Q-çykarylýan önümiň göwrümi;

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}, \ \ \varepsilon_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}$$

ululyklar bolsa zähmete we enjamlaşdyrma görä çykyşyň çeýeligi: ε_0 aýratyn tehniki progresi häsiýetlendiriji bölegi (düzüji): ξ_0 tötänleýin bölegi (düzüji). Eger $\varepsilon_0, \varepsilon_k, \varepsilon_L$, ululyklary hemişelik diýip hasap etsek, onda (18) gatnaşygy differensirläp, *K-D* funksiýany logarifmik görnüşde alarys:

$$lnQ = \varepsilon_0 t + \varepsilon_k lnK + \varepsilon_L lnL + \xi_Q(t).$$

Indi bolsa zähmetiň we gaznanyň üýtgemesiniň dinamikasyny görkezmeli. Goý, enjamlar bölekleýin zaýalanýan we düýpli maýa goýumlaryň hasabynda köpelýän (инвестиции) bolsun. Gaznanyň dinamikasynyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$K(t) = (1 - \mu)K(t-1) - \text{ɥ}\Delta K(t) + \xi_k(t),$$

bu ýerde μ– bir ýylda zaýalanýan gaznanyň paýy, $\Delta K(t)$-herekete girizilýän esasy gaznalaryň göwrümi. ɥ – täzeden girizilýän $\Delta K(t)$

gaznanyň ortaça ýyllyk gazna geçiriş koeffisiýenti. Täzeden girizilýän gaznalar geçen ýyllaryň I düýpli maýa goýumlarynyň üsti bilen kesgitlenýär (meselem, geçen üç ýylyň dowamynda). Bu baglanyşyk düýpli maýa goýumy amala aşyrmak funksiýasy :

$$\Delta K(t) = \eta_0 + \eta_1 I(t) + \eta_2 I(t-1) + \eta_3 (t-2) + \xi_{\Delta K}(t).$$

Bu ýerde $I(t)$ t-nji ýylda maýa goýumy, $\eta_1 I(t)$ t-nji ýylda düýpli maýa goýumyň hasabynda gaznalaryň ösüşi, $\eta_1 I(t)/\ \Delta k(t)$ t-nji ýylda düýpli maýa goýumyň hasabynda gaznalaryň udel artmasy, onda aýdyňdyr:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \leq 1.$$

Düýpli maýa goýumy erkin däldir. Olar öňünden görkezilen düzgün boýunça öndürilýär we harajatlar ýygnanylmaly gaznany ýitirmeklik we gös-göni şoňa görä düýpli maýa goýumlary aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$I(t) = \lambda_0 + \lambda_1 S(t) + \lambda_2 D(t) + \xi_I(t).$$

Bu ýerde $S(t)$–t ýylda ýygnanma gaznanyň ösmegi, λ_1-ýygnanma gaznanyň ösmeginiň düýpli maýa goýuma gidýän paýy, $D(t)$ – amortizasiýa gaznasynyň ösüşi, λ_2 – gaznanyň ýitmekligine düşýän paýy.

Şeýle hem önümiň deňagramlylygynyň (баланс) şertini ýazmaly. Önüm girdeji Y we V häzirki maddy harajatlar diýen iki düzüjä bölünýär. Olar bolsa:

$$Y(t) = Q(t) - V(t)$$

deňlemäni berýärler.

Önümçilikde maddy harajatlar önümiň möçberinde proporsionaldyr we aşakdaky deňlemeden hasaplanýar:

$$V(t) = \beta_0 + \beta_1 Q(t) + \xi_V(t),$$

bu ýerde β_0 – bu önümçiligiň möçberine bagly bolmadyk harajatlaryň şertli gurnalan bölegi, β_1 – önümiň birligine sarp edilýän harajatyň ululygyny kesgitleýän maddy harajatlaryň koeffisiýenti. Eger Türkmenistanyň içinde ulanylýan milli girdejini $\tilde{Y}$ bilen bellesek, onda ony aşakdaky formula boýunça ýazmak bolar:

$$\tilde{Y}(t) = \frac{Y(t)}{1 + \psi_o l^{-\psi_1(t)}} + \xi_{\tilde{Y}}(t).$$

Milli girdejiniň ýygnamalara gidýän s_1-paýynyň durnukly ululykdygyny bellemek gerek. Ony hemişelik diýip hasap edip, onuň üçin formulany alarys:

$$S(t) = s_0 + s_1\tilde{Y}(t) + \xi_s(t).$$

Amortizasiýa tutup galma:

$$D(t) = d_0 + d_1K(t) + d_2z + \xi_D(t)$$

gaznalara degişlidir. Bu ýerde, d_1 – amortizasiýa möçberi (normasy), $d_2\ z$ – amortizasiýa tutup galmanyň möçberi gözden geçirilende, birden ýokary-aşak özgermelerini (üýtgemelerini) hasaba almak üçin girizilen bellik.

Türkmenistandaky peýdalanylýan (ulanylýan) girdejileriň ýygnamadan galanlarynyň ählisi ulanylma (peýdalanma) gidýär:

$$C(t) = (1 - c_0)\tilde{Y}(t) - S(t) + \xi_c(t).$$

Işleýänleriň sanyny kesgitlemeklik galýar. Ol wagtyň geçmekligi bilen parabolanyň kanuny boýunça ösýän, ilatyň sanyna bagly bolup durýar:

$$P(t) = x_0 + x_1\sqrt{t + x_2} + \xi_D(t).$$

Parabolanyň kanuny şeýle bir ýagdaýa degişli: ilatyň sany ösýär, emma ösüşiniň tizligi peselýär ($dL/dt > 0$, $d^2 L/dt^2 < 0$). Zähmet teklipleri diňe ilatyň sany bilen kesgitlenmän, önümçilikde gerek bolan işçi güýjüni görkezýän $F(t)$ iş haky gaznasy bilen hem kesgitlenýär:

$$L(t) = \varphi_0 + \varphi_1P(t) + \varphi_2F(t) + \xi_L(t)$$

Iş hakynyň umumy gaznasy öndürilen girdeji bilen kesgitlenilýär:

$$F(t) = \gamma_0 + \gamma_1Y(t) + \xi_F(t).$$

Bu gatnaşyk bilen ykdysady matematiki model arabaglanyşygy birleşdirýär. Ýöne, ilatyň durmuşynyň maddy hal-ýagdaýynyň derňewi üçin goşmaça iki sany kömekçi ululyk girizilýär: peýdalanma (sarp etme) gaznasy we ilatyň sany bilen kesgitlenýän her bir adama sarp edilýän maddy nygmatlaryň we hyzmatlaryň möçberi:

$$B(t) = \delta_0 + \delta_1C(t)/L(t) + \xi_B(t)$$

we şäheriň her bir ýaşaýjysynyň hasabyna ýaşaýyş gaznasy. Şäher ilatynyň sany $M(t)$-ilatyň umumy sanyna baglydyr:

$$M(t) = \sigma_0 + \sigma_1 P(t) + \xi_M(t).$$

Türkmenistanyň milli girdejisiniň möçberiniň esasynda ilatyň jan başyna görä ýaşaýyş gaznasy şäheriň bir ýaşaýjysynyň hasabynda kesgitlenilýär:

$$\frac{N(t)}{M(t)} = \theta_0 + \theta_1 \frac{\tilde{Y}(t)}{P(t)} + \xi_N(t).$$

Modeldäki hemme ululyklar ($N(t), P(t), L(t), M(t)$ başgasy) milli manatda ölçelýär. Bu ýerde $P(t)$ – ähli ilatyň sany, $M(t)$ – şäher ilaty, $L(t)$ – işleýänleriň sany (müň adam hasabynda ölçelýär). $N(t)$-ýaşaýyş gaznasy (million kw.m.).

§4. Hojalyk birleşmesiniň ekonometriki modeli

Önümçilik funksiýalary we olar bilen bagly bolan ekonometriki matematiki modeller regiondan we pudaklardan uly (iri) bolmadyk obýektlerde ulanylýar. Ekonometriki matematiki modelleri uly (iri) birleşmeleriň, kärhanalaryň işlerini hem derňemekde ulanmak bolýar. Şonuň üçin ýokardaky görnüşindäki matematiki modele seredeliň. Iri birleşmeler önümçilik, maliýe we önümleri ýerleşdirme funksiýalaryny ýerine ýetirýärler. Şoňa degişlilikde ykdysady matematiki modelde 3 sany blok bardyr. Önümçilik blogy özünde 6 sany ekonometriki (statistiki) gatnaşyklary (funksiýalary) we dört sany toždestwony saklaýar. Önümiň çykarylyşy bahanyň üsti bilen aňladylanda, $Q(t)$, *K-D* önümçilik funksiýasyny 3 faktorly önümçilik (senagat-önümçilik işgärleriniň ortaça sany – $L(t)$, ortaça ýylyň önümçiliginiň esasy gaznanyň möçberi – $K(t)$, material harajatynyň jemlenmesi – $V(t)$) we aýratyn tehniki ösüş:

$$Q(t) = \alpha_0 L^{\alpha_1}(t) K^{\alpha_2}(t) V^{\alpha_3}(t) e^{\gamma t} + \xi_Q(t), \qquad (19)$$

bu ýerde γ – tehnik) ösüşiň tizligi, $\xi ...(t)$ – hemme deňlemelerde regressiýanyň ýalňyşy (tötän, düzüji). Esasy gaznanyň dinamikasy aşakdaky deňleme bilen kesgitlenilýär. Ol deňlemä girýän möçberiň göwrümi bolsa, geçen ýyla görä, işe girizilýäniň ululygy $\Delta K(t)$ we ulanyş tutumlary üçin tutulmanyň jemlenişi $D(t)$: $k(t-1)$

$$K(t) = b_0 + b_1K(t-1) + b_2\Delta K(t) - b_3D(t) + \xi_K(t). \tag{20}$$

Işçi güýji geçen ýyldaky işgärleriň sanynyň ösüş koeffisiýentine köpeldilmegi bilen kesgitlenilýär:

$$L(t) = b(t)L(t-1). \tag{21}$$

Material harajatlar, özünde hemme esasy material harajatlaryň görnüşleriniň bahalanmagynyň gatnaşygy hökmünde aňladylýar:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i q_i V_i(t) + \lambda_0 \tag{22}$$

Bu ýerde $V_i(t)$ – material serişdeleriň möçberi, olar i-nji pudaklardan alynýandyr. q_{i} – bu i-nji serişdäniň orta bahasy: λ_i – bu i-nji material harajatlaryň görnüşleriniň peýdalylygyny kesgitleýän koeffisiýent. Kärhananyň işleýşiniň wajyp görkezijisi zähmet hakynyň möçberi bolup durýar:

$$R(t) = W(t)L(t), \tag{23}$$

bu ýerde $W(t)$ – işçileriň orta zähmet haklary. Orta iş haky, onuň geçen ýylky bahasynyň, önümiň möçberiniň ýumşaklygy, işçileriň sany $E_{\frac{Q}{L}}(t)$ boýunça we olaryň bilim (taýýarlyk) derejesi $J(t)$ bilen kesgitlenilýär:

$$W(t) = w_0 - w_1W(t-1) + w_2E_{Q/L}(t)J(t) + \xi_W(t). \tag{24}$$

Bu ýerde $W(t\text{-}1)$ iş hakynyň (biriniň) stawkasyny stabilizirlemek faktory, $E_{\frac{Q}{L}}(t)$ we $J(t)$ onuň üýtgemesini kesgitleýär, ol bolsa işgärleriň bilim derejesine we zähmet öndürijiliginiň ösüşine baglydyr.

Ulanyş tutumlarynyň ululyklary täzeden girizilen gaznanyň möçberine we öňki ýylyň esasy gaznasynyň ortaça ýyllygy bilen kesgitlenilýär. Ol bolsa bejerilmäge we dikeldilmäge goýberilen harajatlardan aýrylmagyna deňdir. Şoňa görä, α_1 we α_2 koeffisiýentler aşakdaky formula bilen hasaplanýar:

$$D(t) = (\alpha_1 + \alpha_2)(K(t-1) + \Delta K(t)), \tag{25}$$

bu ýerde $D(t)$ – materialyň ýylyň başyndaky harajatlary. $K(t\text{-}1)$ – bir ýyldaky material çykdajylaryň jemi we ýerleşdirilmedik önümleriň bahasy bolsa, ol öndürilen önümiň bahasy $QT(t)$ bilen ýerleşdirilen $QR(t)$ haryt önümleriň bahasynyň özaralaryndaky tapawudyna deňdir:

$$M(t) = c_0 + c_1 S(t-1) + c_2\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i V_i(t)\right) + \\ + c_3(QT(t) - QR(t)) + \xi_M(t), \tag{26}$$

bu ýerde c_i ($i = 0, 1, 2, 3$)– statistiki parametrler.

Ulag çykdajylary $T(t)$ – ol ulag çykdajylarynyň, ýagny materiallary we çig mallary hem-de taýýar önümleri φ ulag bahasy bilen orta we uzak ýere eltmegiň çykdajylarynyň jeminden ybaratdyr. Onda Q_i dürli ýükler we ýükleri eltmekligiň möçberi $\overline{V}_i$ (eltip berilýän materiallar) we Q_j (taýýar önüm) hemme görnüşli ýükler boýunça:

$$T(t) = d_0 + d_1\left(\varphi \sum_{i=1}^{k} \theta_i \overline{V}_i(t)\right) + d_2\left(\varphi \sum_{i=1}^{k} Q_j(t)\right) + \xi_T(t). \tag{27}$$

Doly harajatlar $P(t)$ özüne düşýän gymmatyň hemme elementlerini öz içine alýar we (23), (25–27) gatnaşyklaryň kömegi bilen hasaplanýar. Mundan başga-da çykdaja barlaglara we bejerip taýýarlamaklyga $z(t)$, edara ýolbaşçylaryna we başga çykdajylarynyň $A(t)$ harajatlary girýändir:

$$P(t) = R(t) + D(t) + M(t) + T(t) + Z(t) + A(t).$$

Önümleri ýerleşdirme blogy 2 sany regression deňlemelerden we 2 sany toždestwolardan durýandyr. Birleşigiň önümlerine bolan islegleriň töläp bilýän funksiýasy $X(t)$ üç sany klassyky faktorlara baglydyr we islegleri kesgitleýändir: $Y(t)$ önümleri ulanýanlaryň girdejisiniň indeksi, orta bahasynyň $\rho_\vartheta(t)$ indeksi, galan harytlaryň ρ_0 bahasynyň indeksi:

$$X(t) = g_0 Y^{g_1}(t) \rho_\vartheta^{-g_2} \rho_0^{g_3} + \xi_X(t).$$

Bahanyň indeksini $\rho(t)$ kesgitlemek üçin hojalyk birleşmesiniň önüminiň geçen döwürdäki $\rho(t\text{–}1)$ bahasynyň indeksini, birleşigiň serişdeleriniň ulanylýan bahasynyň indeksleri, ýagny çigmal we materiallar $\rho_1(t)$, zähmet haky $W(t)$ bilen baglanyşdyrmak bolýar.

Ulanyş tutumlarynyň tutulyş normasy $\alpha_1 + \alpha_2$, $QR(t)/QT(t)$ gatnaşyk bilen häsiýetlendirilýän islegiň konýukturasy, onuň ýerleşdirilişi we öndürilen önümiň harytlary:

$$p(t) = l_0 + l_i p(t-1) + l_2 W(t) + l_3 p_1(t) +$$
$$+ l_4(a_1 + a_2) - l_5\left(\frac{QR(t)}{QT(t)}\right) + \xi_p(t).$$

Eger isleg $QT(t)$ köp bolsa, onda önümiň ýerleşdirmesi, harydyň öndürilişiniň möçberine deňdir diýip kabul edilýär:

$$QR(t) = QT(t).$$

Eger tersine bolsa, onda potensial ýygnalyp goýlan harytlar $S(t)$ döredilýär. Taýýar önümiň ýygnalyp goýulmasynyň $S(t)$ dinamikasy ýönekeý deňleme bilen ýazylýar.

$$S(t) = QT(t) - QR(t) + S(t-1).$$

Ýokardaky gatnaşygyň sag tarapynda öndürilen önümiň möçberi bilen ýerleşdirilen haryt önümleriniň arasyndaky tapawut goşmak periodynyň başynda galan ýygnalyp goýlan galyndydan durýandyr. Önümiň ýerleşdirilen sanyndan $QR(t)$ umumy alnan pul, önümiň $VR(t)$ «fiziki» möçberiniň onuň $P(t)$ bahasyna köpeldilmegine goşulyp, geçen ýylyň $q(t–1)$ periody, t – period üçin sazlaşykda hasaba alynýar:

$$QR(t) = p(t)VR(t) + q(t-1).$$

Maliýe 6 sany toždestwony we 2 sany ekonometriki gatnaşyklary özünde saklaýar. Birleşmäniň girdejisini, $\pi(t)$ umumy alnan puluň we umumy çykdajynyň tapawudyna goşmaça kömegiň goşulmagy mümkin bolanda $\delta(t)$ aşakdaka deňdir:

$$\pi(t) = p(t)VR(t) + q(t-1) - P(t) + \delta(t).$$

Girdejini paýlamak hereket edýän normatiwler we düzgünler esasynda degişlilikde ýerine ýetirilýär. Aşakdaky ýazylan sazlaşykda, degişlilikde göz öňüne tutulan döwlet býujetine aýyrmak, degişlilikde bir iş hakyndan girdeji salgydyny τ tölemek $KP(t)$, durnuklandyryş gaznasyna geçirmek, degişlilikde μ_1, μ_2, μ_3 normatiwler bilen önümçiligi ösdürmek we bar bolan serişdeleriň aýlanyşygyny giňeltmek aşakdaky ýaly amala aşyrylýar:

$$\pi(t) = \tau\pi(t) + KP(t) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)((1-\tau)\pi(t) - KP(t)).$$

Belli bolşy ýaly, maýa goýumlar $IB(t)$ döwlet býujetiniň hasabyna, düýpli goýumlardan, amortizasion aýyrmalardan, önümçiligi durnuklaşdyrmak gaznasynyň aýyrmalaryndan, geçen ýyllardan galan:

$$I_{\text{gal}}\,(t-1)$$

maýa goýum galyndylaryndan, düýpli goýumlara gidýän $KR(t)$ bergileriň jemlenmeginden ybaratdyr:

$$I(t) = IB(t) + \alpha_2\,(K(t-1) + \Delta K(t)) + \mu_2((1-t)\pi(t)-$$
$$- Kp(t) + I_{\text{gal}}(t-1)+\beta_1\,KR(t).$$

Aýlanma serişdesi $KO(t)$, geçen perioddaky aýlanma serişdelerinden $KO(t-1)$, şol bir wagtda olaryň aýlanma N sanyndan , material ätiýaçlyklarynyň $MR(t)$ jemlerinden we girdejiniň bergilere bolan gatnaşyklarynyň jemlenmegi bilen kesgitlenýär:

$$KO(t) = f_0 + f_1\left(\frac{KO(t-1)}{N}\right) + f_2 MR(t) + f_2\left(\frac{\pi(t)}{KR(t)}\right) + \zeta_{KO}(t).$$

Bu ýerde f_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ statistiki parametrler.

KR(t) bergä täsir edýär: geçen peroiddaky $KR(t\text{-}1)$ bergi; girdejiniň ululygy; umumy maýa goýumyň ululygy; berginiň talabyny kesgitleýjiler; aýlanyjy serişdeleriň göwrümi (onuň bölegi bergi bilen üpjün edilmeli):

$$KR(t) = h_0 - h_1 KR(t) + h_2\pi(t) + h_3 I(t) + h_4 KO(t) + \zeta_{KR}(t).$$

Hemaýat ediji gazna geçen perioddan galan serişdäniň we girdejiniň galanlary bilen jemlenýär:

$$KS(t) = KS_{\text{gal}}(t-1) + \mu_2((1-\tau)\pi(t) - KP(t)).$$

Edil şonuň ýaly önümçiligi ösdürme gaznasynyň deňlemesi ýazylýar:

$$KI(t) = KI(t-1) + \mu_1\,((1-t)\pi(t) - KR(t)).$$

Ahyrynda bolsa kabul edilen düzgünler we normatiwler boýunça $OB(t)$ býujetden aýrylýar. Olar bolsa önümiň satylan göwrüminiň r stawka boýunça salgyda geçirilenden, t stawka görä girdeji salgydyndan we goşmaça geçirimlerden $OD(t)$ jemlenýär:

$$OB(t) = rpVR(t) + \tau\pi(t) + OD(t).$$

Seredilen model wariantly hasaplamalar üçin düzülip kesgitlenendir. Bular ýaly modeller umuman birleşmelere degişli bolup, esasy imitasion modellerdir we birleşmäniň hojalyk dolandyrylyşygynyň, işleýşiniň dürli çözüwleriniň täsirini barlaýar.

IX bap
Halk hojalygynyň ösüşini meýilnamalaşdyrmak we pudagara modelleri seljermek

§1. Halk hojalyk ulgamyny meýilnamalaşdyrmakda pudagara modeller

Pudagara balans ykdysady ulgamyň pudaklaryň arasyndaky aragatnaşyklaryny häsiýetlendirýän tablisany öz içine alýar. Bular ýaly tablisany düzmezden öňürti, pudagara balansda gatnaşmasy mümkin bolan pudaklaryň sanawyny düzmek gerek. Pudagara balansda pudaklaryň sanyny n bilen belgiläliň. Halk hojalygynyň pudagara balansy üç sany bölümden durýar (kähalatlarda kwadrantlar diýilýär). Pudagara balansyň umumy görnüşi 1-nji tablisada getirilen. Biziň tarapymyzdan saýlanan maddy önümçiligiň ähli pudaklary balansda görkezilen. Balansda her pudagyň özüne birinjiden, aýratyn setir we ikinjiden, aýratyn sütün degişli bolýar. Şeýle, i-nji pudagy balansyň i-nji setirine we i-nji sütünine degişli bolýar. Balansyň n birinji setiriniň we n birinji sütüniň kesişmesinde ýerleşen matrisanyň elementleri pudagara balansyň birinji bölümi (birinji kwadrant) diýlip atlandyrylýar. Bu – pudagara balansyň iň wajyp bölegi, şonuň üçin onda pudagara aragatnaşyklar barada maglumat saklanýar: i-nji pudagyň önüminiň j-nji pudakdaky ýylyň önümçilik çykdajylaryny görkezýän i-nji setiriň we j-nji sütüniň kesişmesinde x_{ij} ululyk durýar. Goý, balansyň birinji pudagy – elektrik energiýasynyň önümçiligi, ikinjisi – kömür senagaty diýeli. Onda x_{12} ululyk kömri öndürmäge elektrik energiýanyň ýyllyk çykdajylaryny aňladýar. Şonuň bilen, x_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$) ululyklar pudaklaryň önümçiliginiň önümçilik işi tarapyndan şertleşilen çig mallaryň, materiallaryň, ýangyjyň we energiýanyň pudagara tabşyryklaryny häsiýetlendirýär.

1-nji tablisa

Pudaklar	1	2	...	n	Jemi	Taýýar önüm	Jemi önüm
1	x_{11}	x_{12}	...	v_{1n}	$\sum_j x_{1_j}$	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\sum_j x_{2j}$	y_2	x_2
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\sum_j x_{nj}$	y_n	x_n
Jemi	$\sum_{i=1} x_{i1}$	$\sum_{i=1} x_{i2}$	...	$\sum_{i=1} x_{in}$	$\sum_i \sum_j x_{ij}$	$\sum_i y_i$	$\sum_i x_i$
Arassa önüm	v_1	v_2	...	v_n	$\sum_j v_j$		
Bary	x_1	x_2	...	x_n	$\sum_j x_j$		

i-nji setire seredeliň. x_{i1}, x_{i2}, …, x_{in} ululyklar *i*-nji pudagyň halk hojalygyň beýleki pudaklaryna tabşyryklary, *i*-nji pudagyň önümleriniň beýleki pudaklar üçin önümçilik serişdeleri hökmünde paýlanylmagy beýan edilýär. Eger biz *i*-nji sütüne seretsek, onda x_{1i}, x_{2i}, …, x_{ni} ululyklar beýleki pudaklardan alnan maddy önümçiligi, *i*-nji pudak tarapyndan çig mallaryň, materiallaryň, ýangyç we energiýanyň peýdalanylýandygyny beýan eder. Şeýlelikde, pudagara balansyň birinji bölümi ähli *n* pudaklaryň maddy önümçiliginiň önümçilik maksadyna önümçilik çykdajylarynyň we önümleriň paýlanmasynyň umumy görnüşini berýär. Onda aýratyn önümleriň balanslarynyň öňünde pudagara balansy ägirt uly artykmaçlyga eýedir.

x_{ij} ululyklar önümçilik serişdeleriniň bahasyny görkezýär, ol manatlarda aňladylýar. Şular ýaly görnüşli balansy bahalaýyn diýip atlandyrmak bolar. Birinji kwadrantda ähli sanlar şol bir birliklerde ölçenilýänligi üçin, olary jemlemek bolar. Pudagara balansyň birinji bölüminiň çäklerinde i-nji setir boýunça x_{ij} ululygyň jemini tapalyň:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

Bu ululyk beýleki pudaklara i-nji pudagyň maddy önümçilikleriniň ähli tabşyryklarynyň jemini aňladýar, ol önümçiligiň sarp edilmegini häsiýetlendirýär. $\sum\limits_{j-1}^{n} x_{ij}$ ululyklar ähli pudaklar üçin sütüni emele getirýärler, ol pudagara balansda x_{ij} pudagara çeşmeleriň matrisasyndan sagyna salynýar. $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ ululyklaryň sütüni, (bu ýerde $i = 1, ..., n$,) ol hem balansyň birinji bölümine degişlidir.

Indi j-nji sütüne we şol sütün boýunça x_{ij} ululygyň jemine seredeliň:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}$ ululyk j-nji pudagyň ýylyň dowamynda önümçilik çykdajylarynyň jemine deňdir. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}$ ululyklaryň setiri, bu ýerde $j = 1, ..., n,$ pudagara balansda pudagara çeşmeleriň matrisasyndan aşagyna salynýar we ol balansyň birinji bölüminiň bölegi hasaplanýar.

Şeýlelikde, pudagara balansyň birinji bölümi (n + 1) setirlerden we (n + 1) sütünlerden ybarat bolup durýar, üstesine-de (n + 1)-nji sütünde, degişlilikdäki setirleriň jemi, emma (n + 1)-nji setirde, degişlilikdäki sütünleriň jemi goýlan. (n + 1)-nji setiriň we (n + 1)-nji sütüniň kesişmesinde aşakdaky ululyk durýar:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

ol (n + 1)-nji sütüniň birinji n elementleriniň jemi. Bu ululygyň, şeýle-de, (n + 1)-nji setiriň birinji n elementleriniň jemine deňdigi aýdyň görünýär. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ san ähli pudaklaryň önümçilik çykdajylarynyň jemine deňdir (ýa-da önümçilik pudaklaryň önümleriniň önümçilige sarp edilmegi). Oňa halk hojalygyň aralyk önümi diýilýär.

Indi, taýýar önümine bagyşlanan halk hojalygynyň ikinji bölümine seredeliň. Pudak önümleriniň önümçilik sarp edilmesiniň sütüninden sagda pudaklaryň önümleriniň taýýar sarp edilmesiniň sütüni ýerleşen, onuň astynda häzirki önümçilik sarp edilmesine girmeýän hususy we jemgyýetçilik sarp edilmegine düşünilýär. Bu ýere çykan aýratyn gaznalaryň toplanan pullary we olaryň öweziniň doldurylyşy, ätiýaçlyklaryň ösüşi, ilatyň hususy sarp etmesi, döwlet apparatynyň we goragynyň içindäki bar zatlaryna çykdajylary, ilata hyzmat etmek boýunça çykdajylary (magaryf, saglygy goraýyş we ş.m.) girýär. Ondan başga-da, taýýar önüme önümleriň saldo eksporty we importy girýär. Tablisada i-nji pudagyň önümleriniň taýýar sarp edilmesi y_i bilen belgilenen. Adatça, bu ululyklar pudagara balanslarda has jikme-jik seredilýär, ýöne biz oňa seretmeris. Taýýar sarp edilmeden başga-da, balansyň ikinji bölümine pudaklaryň jemi (tutuş) goýberilişleriniň sütüni girýär. Jemi goýberiliş i-nji pudak üçin aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

Şol iň soňky $(n + 3)$-nji sütün $(n + 1)$-nji we $(n + 2)$-nji sütünleriň jemi ýaly kesgitlenilýär. Ikinji bölümiň $(n + 1)$-nji setirinde

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i$$

jemler durýar. Birinji jem halk hojalygynyň taýýar önüminiň jemine deň, emma ikinji – önümiň tutuş jemine deňdir.

Halk hojalygyň pudagara balansynyň üçünji bölümine geçeliň. Üçünji bölüm birinji bölümiň astynda ýerleşen we pudaklaryň jemi önüminiň bahalaýyn gurluşyny görkezýär. Biziň tablisamyzda üçünji bölüm iki setirden ybarat. Olaryň birinjisinde v_j $(j = 1, \dots ,n)$ ululyklar ýerleşen, olaryň hersi x_j pudagyň jemi öndüminiň we önümçilik çykdajylarynyň $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ arasyndaky tapawudyna deň bolan pudagyň şertleýin-arassa önümini aňladýar:

$$v_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \qquad j = 1, ..., n.$$

Adatça, halk hojalygyň pudagara balanslarynda her pudagyň şertli-arassa önümi esasy fondlaryň könelmeginiň öwezini dolmakda ulanylýan amortizasiýa tutumlaryna we girdejä, aýlyk hakyna we beýleki çykdajylara bölünýän pudagyň arassa önümine bölünýär. Pudagara balansyň ikinji bölümindäki ýaly, üçünji bölüme has giňişleýin seretmeris. Balansyň üçünji bölüminiň (n + 1)-nji sütüninde setirleriň jemleri durandyr. Bu ýerde pudagyň önüminiň dargamagyndan taýýar we aralyk önümler:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_j, \qquad i = 1,..,n$$

we pudagyň önüminiň dargamagyndan önümçilik çykdajylary we şertli-arassa önüm:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j, \qquad j = 1,..,n$$

bolsa, onda

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j\right)$$

ýa-da

$$\sum_{j=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j$$

gatnaşyklar gelip çykýar.

Halk hojalygynyň jemi taýýar önümi şertli-arassa önümleriň jemine deňdir. Şeýlelikde, üçünji bölümde taýýar önüm gatnaşdyrylýar, emma eger ol ikinji bölümde taýýar önümiň islenýän gurluşyny häsiýetlendirýän y_i ululyklara bölünýän bolsa, onda üçünji bölümde taýýar önümiň bahasy, ykdysadyýetiň haýsy pudaklarynda çykarylýandygy görkezilýär.

Pudagara balansyň dördünji bölümi önümçiligiň şertlerine we önümleri ýerlemeklige gös-göni gatnaşygy bolmaýar we meýilnama hasabynda ulanylmaýar. Bu bölüm maliýe-karz ulgamynda amala aşyrylýan, halk hojalygynda täzeden paýlamak gatnaşyklaryny häsiýetlendirýär.

Geçenki bapda halk hojalygynyň işiniň görkezijisine milli düşewünt hökmünde seredilipdi. Milli düşewünt $\sum_{i=1}^{n} y_i$ taýýar önümiň jeminiň we esasy gaznalaryň könelmeginiň öwezini dolýan amortizasiýa tutumlarynyň tapawudy hasaplanylýar, ol halk hojalygynyň pudagara balansynyň esasynda kesgitlenip bilner.

Diýmek, biz halk hojalygyň pudagara balansynyň dört bölümine seretdik, olar kwadrantlar (dörtlük) diýip atlandyrylýar. Emma soňky wagtlar pudagara balansyň köp täze shemalary emele geldi, olar esasan dört bölümde görkezilendir.

Halk hojalygynyň pudagara balansynyň umumy gurluşyna seredildi. Ýöne pudagara balansa seretmek – bu entek model däl, ol ýurduň ykdysadyýeti barada statistiki maglumatlary görkezýän usul. Ol aýratyn kärhanalaryň işiniň netijelerini agregirlemegiň esasynda düzülýär. Bular ýaly balans hasabat diýip atlandyrylýar. Pudagara balansyň hasabyndan başga-da meýilnamaly pudagara balansy işlenip taýýarlanylýar. Meýilnamaly balanslar diňe statistikany seljermegiň esasynda hasaplanylyp bilinmez. Olaryň düzülmegi üçin geçenki paragraflarda seredilen, pudagara modelleri ulanmak gerek.

Bellik. Birinjiden, balanslaryň pudagara görnüşi diňe bütinleý halk hojalygy üçin däl-de, aýratyn ykdysady etraplar üçin üçin gurulýar. Etraplaryň arasyndaky önümçilik aragatnaşyklary etrabara balanslarda görkezilen bolup biler. Ikinjiden, biz hasap balanslaryň gurluşynyň käbir kyn soraglarynda durup geçmedik: pudaklaryň sanawyny saýlamak, çeşmeleriň bahalaryny kesgitlemek üçin nyrhlar ulgamy we ş.m. Şeýle-de bolsa bu wajyp we kyn soraglar biziň kitabymyzyň çäginden çykýar, okyjy pudagara modelleri öwrenmeklik bilen olaryň barlygyny-da unutmaly däl.

§2. Statistiki pudagara modeli

Her bir pudagyň önüminiň halk hojalygynyň pudagara balansynda paýlanyşy aşakdaky getirilýän gatnaşyk bilen ýazylýar:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Pudagara model, adatça şu aşakdaky sebäplere esaslanyp gurulýar:

I. Her bir pudakda önümçiligiň ýeke-täk tehnologiýasy bar;

II. Önümçiligiň sarp ediliş normalary çykarylýan önümiň möçberine bagly däl;

III. Önümçilikde önümiň bir görnüşini başga bir görnüşi bilen çalyşmaga ýol berilmeýär;

Şular ýaly çaklamalara görä, x_{ij} ululyk i we j üçin aşakdaky görnüşi almaly:

$$x_{ij} = a_{ij}x_i \quad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,n. \tag{2}$$

a_{ij} ululyk göni çykdajylaryň koeffisiýenti diýlip atlandyrylýar. Bu koeffisiýent i-nji pudagyň j-nji pudagynyň birlik önümiň öndürilmegine önümiň näçe mukdaryny çykdajy etmek gerekdigini görkezýär. Göni çykdajylaryň koeffisiýenti pudagara modellerinde hemişelik ululyk diýlip hasap edilýär. Okyjylaryň ünsüni (2) gatnaşyga gönükdireli, ol gatnaşyk, esasan, pudak üçin çykdajylaryň funksiýasyny kesgitleýär (çykdajylaryň funksiýalary barada biz eýýäm birinji bölümde durup geçdik). (2) gatnaşyk a_{ij} tehnologik koeffisiýentleriň esasynda j-nji pudagyň x_j önümleriň öndürilişi boýunça beýleki pudaklaryň x_{ij} (i = 1, …, n) önümleriň çykdajylaryny kesgitlemäge mümkinçilik berýär.

Eger (2) gatnaşygy (1) önümiň balansynda goýsak, onda alarys:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \quad i = 1,...,n.$$

Bu gatnaşygy matrisa görnüşinde ýazmak amatly:

$$x = Ax + y, \tag{3}$$

bu ýerde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, …, y_n)$, A, a_{ij}, $i = 1, …, n$, $j = 1, …, n$ koeffisiýentleriň matrisasy (göni çykdajylaryň matrisasy). (3) gatnaşyga önümleri paýlamanyň kanuny diýilýär. Ol pudagara modellerde esasy gatnaşyk bolup durýar.

Ilki bilen göni çykdajylaryň koeffisiýentleriniň ähmiýetini nähili ýol bilen amala aşyryp bolýandygy barada sorag ýüze çykýar. Iki esasy ýollar bar. Olaryň biri pudagara modeliň «has ýönekeý birlikleri» hökmünde pudagyň görkezmesine esaslanan. Bular ýaly ýagdaýda koeffisiýentler geçen ýyllar üçin hasabat balanslarynyň esasynda kesgitlenilýär. Göni çykdajylaryň koeffisiýentleriniň wagtynda üýtgemezligi pudagara balansyň amatly saýlawyna ýetirýär. Tejribäniň görkezişi ýaly, dogry saýlanan ýagdaýynda iri pudaklaryň kanagatlanarlykly göni çykdajylaryň koeffisiýentleri kanagatlanarlykly berk bolýarlar. Göni çykdajylaryň şonuň ýaly gurluş usulyna statistiki usul diýilýär.

Göni çykdajylaryň koeffisiýentlerini hasaplamagyň beýleki usuly normatiwdir. Onda olaryň haýsy-da bolsa biri üçin normatiw çykdajylar eýýäm oýlanyp tapylan, pudagara balansyň pudaklarynyň aýratyn önümçiliklerden düzülendigi, çylşyrymly düzüminiň bardygy çak edilýär. Eger pudaklaryň önümçilige nähili önümi goýberjekdigi öňünden belli bolsa, onda orta pudakly göni çykdajylaryň koeffisiýentlerini normatiw çykdajylar boýunça hasaplap bolýar.

Eger göni çykdajylaryň koeffisiýentleri hasaplanan bolsa, onda (3) gatnaşygy oba hojalygy meýilnamalaşdyrmak we seljermek üçin ulanyp bolýar. Dogrudanam, pudaklaýyn düzümde taýýar önüm tabşyrylsa, onda pudaklaryň jemi goýberilişleri (3)-e görä şu aşakdaky gatnaşykdan kesgitlenýär:

$$(E - A)x = y,$$

bu ýerde E – birlik matrisa. Diýmek,

$$x = (E - A)^{-1}y, \tag{4}$$

bu ýerde $(E - A)^{-1}$ – matrisa $(E - A)$ matrisanyň ters matrisasy. Şunuň ýaly, göni çykdajylaryň koeffisiýentleriniň esasynda önümleriň balansy taýýar goýberilişi boýunça derrew pudaklaryň önümleriniň goýberilişlerini kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Onda önümçiligi meýilnamalaşdyrmak üçin pudagara modelleriň ulanylyşynyň esasy manysy goýlan.

Ýöne öňürti pudagara balanslaryň esasynda meýilnamalaşdyrma meselesine geçmezden öň, (4) hökmany bilmeli, formulada ulanylýan ters matrisa barmy, şeýle hem haçandyr birwagt pudaklaryň jemi goýberilişleriniň otrisatel alamatlaryny alarysmy? Şu soraga jogap bermezden öňürti göni çykdajylaryň koeffisiýentleriniň birnäçe häsiýetlerini görkezeliň. Birinjiden, olar otrisatel däl,

$$a_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ ...,\ n,\ j = 1,\ ...,\ n. \tag{5}$$

Bu tassyklama x_{ij} ululygyň otrisatel dälliginden we x_j pudaklaryň jemi goýberilişleriniň položiteldiginden gelip çykýar. Ikinjiden,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1,\ j = 1, ..., n. \tag{6}$$

Bu tassyklamany aşakdaky ýaly edip alyp bolýar. Geçen paragrafda alnan

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_{j,} \qquad j = 1, ..., n \tag{7}$$

gatnaşykdan

$$v_j > 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

we ähli pudakda şertli-arassa önümiň položitellilik talabyndan peýdalanyp alarys:

$$x_j > \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Položitellilik talabynyň şertli-arassa önümi aýlyk haklary bolup durýar. Şonuň üçin hem (8)-nji şert ýerine ýetýär. (7) we (8) gatnaşyklardan peýdalanyp alarys:

$$x_j > \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

Şeýle hem (7) gatnaşyk hem ýerine ýetýär. Matrisalar teoriýasynda (7) we (8) şertleriň ýerine ýetmegi bilen $B = (E–A)^{-1}$ matrisa bardyr we onuň b_{ij} elementleri otrisatel däl. Şeýlelikde, alarys:

$$x = By, \tag{9}$$

bu ýerde B – doly çykdajylaryň matrisasydyr, b_i – doly çykdajylaryň koeffisiýentidir. b_{ij}-koeffisiýent j-nji pudagyň önümi bilen i-nji pudagy üpjün etmekdir. Aşakdaky deňligi barlap bolar:

$$B = E + A + A^2 + A^3 + ... \tag{10}$$

Hakykatdan hem bu deňligiň sag bölegini çepden (E-A) köpeldip alarys:

$$(E - A)(E + A + A^2 + A^3 + ...) = E + A + A^2 + A^3 + ... - A - A^2 - A^3 - ... = E.$$

Şeýlelikde, alarys:

$$E + A + A^2 + A^3 + ... = (E - A)^{-1} = B.$$

(10) gatnaşykdan alarys:

$$b_{ij} \geq a_{ij} \; (i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., n),$$

b_{ij} – doly çykdajylar koeffisiýenti. i-nji pudagyň önümine we j-nji pudagyň soňky önüm birligine bolan talap göni çykdajylar koeffisiýentinden kiçi däldir.

Şeýlelikde, B doly çykdajylaryň matrisasyny bilmeklik (8) gatnaşygyň esasynda taýýar önüm boýunça pudaklaryň jemi goýberilişlerini kesgitlemäge, ondan soň pudaklaryň jemi goýberilişleri we göni çykdajylaryň matrisasy boýunça (2) formula boýunça meýilnama pudagara balansy gurmaga mümkinçilik berýär. Bu hili matematiki model meýilleşdirilen pudagara balansyň hasabyny geçirmäge mümkinçilik berýär. Hakykatdan hem iň gowy pudagara balansy saýlamak optimallaşdyrylan meseläni çözmeklige ýardam edýär. Ilkinji nobatda optimallaşdyrma kriteriýalaryny görkezeliň. Onuň üçin her bir pudagyň önüm birligine soňky önümi degişli edeliň. i-nji pudak üçin bu sany c_i $(i = 1, ..., n)$ bilen belgiläliň we $c_i > 0$. Onda soňky önümiň wektoryny aşakdaky görkeziji bilen bahalandyryp bolar:

$$U = (c, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \tag{11}$$

bu ýerde $c = (c_1, ..., c_n)$. (7) gatnaşygy kagatlandyrýan x pudagyň önümleri we y soňky önümiň otrisatel däl wektorlaryny saýlap, (11) maksimum kriteriýa getirýän bolsun.

Meseläniň ýalňyş goýlandygyny aýdyp bolar, diýmek meseläniň çözüwi ýokdur.

Hakykatdan hem, goý, $\{\tilde{y}, \tilde{x}\}$ wektorlaryň jübüti goýlan meseläniň çözüwi bolsun. Bu wektorlar otrisatel däldir we (7) gatnaşygy kanagatlandyrýar. U maksimal baha eýedir: $\tilde{U} = (c, \tilde{y})$. $\tilde{y} = \alpha\tilde{y}$ wektora seredeliň, bu ýerde $\alpha > 1$. Görnüşi ýaly $\approx{y} = \alpha \tilde{y} \geq 0$. Şeýle hem $\approx{x} = \alpha\tilde{x}$ otrisatel däldir. Soňky önümiň wektorynyň kriteriýasynyň bahasyny tapalyň:

$$\tilde{\tilde{U}} = \left(c, \tilde{\tilde{y}}\right) = \alpha(c, \quad \tilde{y}) = \alpha\tilde{U} > \tilde{U}.$$

Soňky gatnaşyk edilen çaklama garşy bolup, $\{\tilde{y}, \tilde{x}\}$goýlan meseläniň çözüwidir.

Meseläniň şowsuz goýulmagynyň sebäbi nämede?

Sebäbi anyk, ýagny pudagyň jemi goýberilişini çäksiz ulaldyp, goýberiş wektory (8) (ýa-da (3)) bilen deňagramlaşýar. Hakyky ykdysady ulgamda pudagyň jemi goýberilişi çig mala, ýangyja, energiýa we beýleki zatlara görä çäklidir. Meseläniň dogry goýulmagy üçin iň bolmanda bu sebäpleriň birini hasaba almak zerurdyr. Pudak alnanda bu serişdeleri hasaba alalyň. Onuň üçin hemişelik proporsiýalar bilen öndürijilikli funksiýalar ulanylýar:

$$x_i \le \min\{d_i^1 K_i, d_i^2 L_i\}, \quad i = \dots n, \tag{12}$$

bu ýerde K_i–i-nji pudakda esasy fondlaryň mukdary, d_i^1–i-nji pudagyň fond gaýtaryjy koeffisiýenti, C_i – i-nji pudakda işleýänleriň sany, d_i^2 – i-nji pudakda zähmet öndürijiligi. Öndürijilik funksiýasynyň häsiýetleri barada geçen bapda aýdylyp geçildi. Häzir bolsa bu funksiýany berlen meselede gurnalyň. Esasy gaznalar boýunça çäklendirmeler aşakdaky formada ýazylýar:

$$x_i \le \xi, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{13}$$

bu ýerde $\xi_i = d_i^1 K_i$– i-nji pudagyň kuwwatlylygy. Adatça, balans görnüşli modellerde fond berijiniň bahasy berilýär. (13) gatnaşykda kuwwaty üýtgewsiz diýip kabul ederis. Ýöne pudagyň kuwwaty täze kärhanalaryň gurulmagy bilen üýtgäp biler. Täze gaznanyň gurulmagy köp wagt talap edýär. Köp ýagdaýlarda bu proses gysga wagtly ýagdaýynda hasaba alynmaýar. Gaznalaryň könelmesiniň ululygy kanagatlanarlykly az, şonuň üçin birinji ýakynlaşmada ony pudakda önümiň goýberilişine bagly däl ýa-da hiç haçan hasap etmeli däl diýmek bolýar. Bir pudakdan beýleki pudaga kuwwatlary geçiriş prosesi diňe aýratyn ýagdaýlarda duş gelýär, şonuň üçin olary hasaba almak gerek däl.

Indi zähmet serişdelerini ulanmaga girişeliň. Eger kuwwaty bir pudakdan beýleki pudaga geçirsek, onda adatça olar gabat gelmeýärler. Ýönekeý ýagdaýda bu zähmet serişdesiniň çäklendirmesini aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = R, \tag{14}$$

bu ýerde R – işçileriň umumy sany. (14) gatnaşyk işçileriň doly meşguldygyny aňladýar. (12) gatnaşykdan bolsa aşakdaky deňsizlik alynýar:

$$x_i \leq d_i^2 L_i.$$

Doly meşgul bolmaklyk talabyny hasaba alyp alarys:

$$x_i = d_i^2 L_i. \tag{15}$$

(14) we (15) gatnaşyklardan zähmet boýunça çäklendirmeleri alarys:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{d_i^2} = R. \tag{16}$$

Bu gatnaşyk zähmetkeşleri hiç hili çäklendirmesiz bir edaradan beýleki edara geçirip bolýandygyny aňladýar. Şonuň üçin hem (16) gatnaşyga beýleki baglylyklary goşmak hem zerurdyr. Her bir anyk ýagdaý üçin pudagara modeller (16) gatnaşygy bilen çäklendirilýär.

Çäklendirmeden başga esasy gaznalar we zähmet serişdeleri boýunça birnäçe pudaklaryň önümleri goýberilişiniň mümkinçiligine (nebit alýan diýeli) tebigy gazylyp alynýan aýrylan çäklendirmelerdigine, oba hojalyk önüminiň sürüme ýaramly meýdany boýunça çäkliligine täsirini görkezýär.

Şeýlelikde, maksimum kriteriýany almak üçin x we y bahalaryň otrisatel däl wariantlaryny tapalyň.

$$U = (c, y) \to \max$$

aşakdaky şertler ýerine ýetende:

$$x = Ax + y,$$

$$x \leq \xi,$$

$$(x, d_2) \leq R.$$

Bu ýerde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $d_2 = \left(\frac{1}{d_1^2}, \ldots, \frac{1}{d_n^2}\right)$.

A, ξ, d_2, R – ululyklar öňünden berlen.

Alnan mesele çyzykly programmirlemegiň meselesidir we ol A-matrisanyň uly bahalarynda hem çözülýändir.

Bu ýerde birnäçe kynçylyklaryň ýüze çykýandygyny belläliň. Olaryň iň esasylarynyň biri c_i koeffisiýentleri saýlamak meselesidir, şonuň kömegi bilen iň soňky önümiň dürli wektoryny düzýän baha emele getirilýär. Bu kyn mesele bolanlygy üçin, geçen paragrafda aýdylyşy ýaly, iň soňky önüm täze gaznalaryň gurulmagyndan, ilatyň isleglerinden, döwlet we goranyş ähmiýetli çykdajylardan, saldonyň eksportyna we importyna we ş.m. maýa goýumlardan ybarat. Modelleriň kömegi bilen bu meseläni çözüp bolýar. Ýagny, onuň üçin esasy gaznanyň dinamiki modelini düzmek zerurlygy ýüze çykýar. Bu hili modellere pudagara dinamiki modeller diýilýär.

§3. Dinamiki pudagara modeller

Goý, pudagara dinamiki halk hojalyk modeline seretmeklik gerek bolsun. Ýagny, wagta bagly bolan halk hojalygynyň ösüşiniň modeline seredeliň. Pudagara model, köplenç, ýagdaýlarda wagta diskret we (t = 1, 2, …T) – bahalary kabul edip alýar diýip hasap edeliň. t wagtdan t+1 kesim aralygy bir ýyl diýip hasap edeliň, onuň nomeri t bolsun, $X_i(t)$ bilen i-nji pudagyň jemi öndürilen önümini belläliň (1 ýylda t), $y_i(t)$ bir ýylda i-nji pudagyň taýýar önümini peýdalanmagy aňladýar. Onda her bir pudagyň önümini sazlamany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + y_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (17)$$

Her bir pudagyň taýýar önüminiň gurluşyna dinamiki modelde yzygiderli seretmeklik gerek bolýar, emma statiki modelde beýle däl, sebäbi taýýar önümiň dürli komponentleri halk hojalygynyň ösüşine dürli täsir edýär. Aşakdaky hödürlenýän ýönekeý modelimizde gatnaşyklar ýerine ýetýär diýip hasap edýäris.

$$y_i(t) = z_i(t) + w_i^{H}(t) + w_i^{\Gamma}(t) + [q_i(t+1) + q_i(t)], \qquad (18)$$

bu ýerde $z_i(t)$ – bir ýylda (t) täze esasy gazna. Ýerine ýetirilip köne çykarylanlaryň i-nji pudagyň önümleriniň harajatynyň $W_i^{H}(t)$ – bir ýylda (t) halkyň peýdalanan i-nji pudagynyň önümini (t) dolandyrma we goranma. i-nji pudagyň önüminiň harajaty $q_i(t)$ – de (t), i-nji pudagyň önüminiň pudagy (zapasy), ýagny $q_i(t+1) - q_i(t)$ bir ýylyň dowamynda (t) i-nji pudagyň önüminiň barlygynyň köpelişi. Şeýle hem hemme pudaklaryň önümlerini (zapasda) ýygnap goýup bolýar. Onda hemme önümlerde jemlenen (zapaslary) ýygnananlary saklap bolmaýar. Onda $q_i(t+1)-q_i(t)$, (17) gatnaşykda bolýar. Daşky söwda seredilmeýär.

Taýýar önüme, esasy gaznanyň goýumlarynyň harajaty onuň sanynyň köpelmegine getirýär. Esasy gaznanyň dinamikasyny aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar (aýrylan gaznalar alynmaýar):

$$\zeta_i(t+1)=\zeta_i(t)+\theta_i(t-\tau_i^m), \tag{19}$$

bu ýerde $\zeta(t)$ – bu ýylyň başynda (t) i-nji pudagyň güýçlüligi, $\theta_i(t)$-bir (t) ýylda başlanýan τ_i^m gurluşygyň güýçlüligi, (19) deňlemede görkezilişi ýaly gurluşyk başlanandan τ_i^m ýyldan soň güýjeme doly güýje girýär. τ_i^m – ululyk önümçilik tizligi diýen ady göterýär. Bu wagt jaý gurluşygyna gerek bolan wagtlaryň jeminden, ýagny ýygnamaga, düzetmäge, ýerleşdirmäge gerek, şeýle hem täze esasy gaznalaryň esasynda harç edilen wagtlardan durýar. τ_i^m – gurluşyk prosesinde pudaklarda häsiýetlendirilýär. Bu ululygy belli diýip hasap edeliň. Indi bolsa harçlanmany maýa goýum bilen, esasly gaznany bolsa dinamiki modeliň kuwwaty bilen baglaşdyrmak bolýar. Goý, gurluşyk birliginiň kuwwaty j-nji pudak üçin, ýylyň (τ) gurluşygy üçin hökmany harajat $f_{ij}(\tau)$-bu i-nji pudagyň birlik önümi diýip hasap edeliň.

Onda i-nji pudak üçin bir (t) ýylda gerek bolan doly harajady $z_i(t)$ bilen belläp, aşakdaky görnüşde hasaplanyp bilner:

$$z_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\tau=0}^{\tau_j^m} f_{ij}(\tau)\theta_j(t-\tau). \tag{20}$$

Indi bolsa kuwwaty boýunça pudaklaryň önüm goýberişiniň çäklendirmelerini ýazalyň. Iň ýönekeý önümiň goýberilişini ýylyň orta hasaby bilen kuwwaty diýip çäklendirsek, ýagny:

$$x_i(t)\le \overline{\zeta}_i(t), \tag{21}$$

bu ýerde $\overline{\zeta_i(t)}=\dfrac{1}{2}[\zeta_i(t)+\zeta_i(t+1)]$ (bu ýerde güýçler ýylyň dowamynda deňölçegli diýip çaklanylýar).

Kärhanada doly we bölekleýin önüm öndürip başlanýar. Bu ýagdaýlary öwrenilýän modele girizmek üçin ilki $a_i(t)$ funksiýa girizeliň, ol bolsa gurluşyk başlandan näçe (τ) ýyldan soň i-nji pudagyň önüm berip başlajakdygyny we paýynyň nähili kuwwatynyň barlygyny görkezýär. Onda kuwwat boýunça çäklendirmäni aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$x_i(t) \leq \zeta_i(t) + \sum_{i=0}^{\tau_i^m} \alpha_i(\tau)\theta_i(t-\tau). \tag{22}$$

Bu gatnaşyk (21) gatnaşyk bilen bile ulanylýar. Taýýar isleglериň beýleki düzümleri bilen baglanyşykly gatnaşyga seredeliň. Ýerli halkyň isleglериniň kanagatlandyrylmagynda hemişe çäklendirme aşakdan goýulýar:

$$\omega_i^H(t) \geq \overline{\omega}_i^H(t), \tag{23}$$

bu ýerde $\overline{\omega}_i^H(t)$– ululyk öňünde berilýär. Her pudagyň dolandyrylyşyna we goranmaga edilýän önümiň çykdajylaryna $\omega_i^\Gamma(t)$gerek zatlary öňünden hasap etmek.

Önümleriň ätiýaçlyklarynyň döredilmegi ösüş prosesine we täzeden önümçiligi gurmakda kömek edip biler. Ätiýaçlyklarda bolmalysy ýaly oňly dällik (otrisatel dällik) şerti goýulýar:

$$q_i(t) \geq 0. \tag{24}$$

Goşup bolmaýan önümleri paýlamaklygy (18) gatnaşygyň kömegi bilen ýazmak bolýar:

$$q_i(t+1) = q_i(t) = 0.$$

Zähmet serişdeleriniň çäklendirmelerinde iň ýönekeý görnüşde statiki modele meňzeş edip, modeliň çäklendirmeleriniň formulasyny ýazmak bolýar:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(t)}{d_i^2} = R(t). \tag{25}$$

Bu ýerde $R(t)$– zähmet serişdeleriniň dinamikasy. Ýokarda agzalanlardan başga-da çäklendirmeler (otrisatel däl) oňaýly däl şertleri hem pudaklaryň jemi goýberýän önümine

$$x_i(t) \geq 0 \tag{26}$$

gurluşygyň başlanmagyna

$$\theta_i(t) \geq 0 \tag{27}$$

goýulýar.

Indi model doly kesgitlenen. Bu dinamiki model ПИ-modeliň önümçiliginiň ösüşiniň we başgaça gurmanyň aňsat warianty bolup durýar. Ol geçen asyryň altmyşynjy ýyllarynda A.A. Petrow we Ý.I. Iwanilow tarapyndan hödürlenendir.

Eger ätiýaçlyklaryň, güýçleriň we doly gutarmadyk gurluşyklaryň hem-de dinamikanyň başlangyç ähmiýetlerini, ähli pudaklar üçin $\theta_i(t)$ gurluşyklaryň, $\omega_i^H(t)$ ilatyň islegleriniň we $x_i(t)$ jemi goýberilişleriň $t = 1, \ldots, T$ ähli wagtdaky ähmiýetlerini görkezsek, onda dinamiki pudagara modeliň şu paragrafynda beýan edilmegi boýunça halk hojalygynyň ösüşiniň dinamikasyny gurmaga synanyşyp bolýar.

$\omega_i^H(t)$, $\theta_i(t)$, x_i(t) dolandyryjylaryň görnüşleriniň ählisi modelleriň gatnaşyklaryny, ýagny önümiň balansyny, güýçleri we zähmet serişdeleri boýunça çäklendirmeleri we ş.m. kanagatlandyrmaýar. Halk hojalygynyň ösüşiniň ýolbererlik görnüşini agtarma özünde kyn meseläni göz öňünde tutýar, ony *EHM*-iň kömegi bilen çözýärler.

Kesgitlenen modeli tarapyndan beýan edilen ykdysady ulgamyň ösüşiniň ýolbererlik görnüşini tapmak kyn hem bolsa, ol adatça ýeke-täk bolmaýar. Şonuň üçin model seljerilýän ýagdaýynda ýol bererlik görnüşini däl-de, optimallygyny tapmaga synanyşylýar. Kriteriýanyň iň aňsat görnüşi geçen paragrafda seredilen kriteriýanyň dinamiki ýagdaýyna umumylaşdyrma bolup durýar:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i^H(t) \to \max. \tag{28}$$

Bu ýerde öňki paragrafdan tapawutlylykda, y_i taýýar isleg $\omega_i^H(t)$ ilatyň islegine çalşyrylan, ondan başga-da ähli wagt pursatlary boýunça jemi alynýar.

Bular ýaly kriteriý, adatça gowy däl, sebäbi onuň ulanylýan ýagdaýynda aglaba pudaklar boýunça ilatyň az isleg bildirýän derejede ýerleşýändigini aňladýan aşakdaky deňligi alarys: $\omega_i^H(t) = \overline{\omega_i}^H(t)$. Emma birnäçe pudaklarda, mysal üçin, (28) kriteriýanyň iň oňat nokadynda – isleg $\overline{\omega_i}^H(t)$ derejeden üstün çykar. Ondan başga-da, güýçler belli bir wagt pursadyna çenli ösýär, (28) kriteriýa diňe islegiň ugry kesgitleýän bolsa, ondan soňra gurluşyk bes edilýär.

Beýleki tarapyndan, kriteriýa hökmünde aşakdaky ululygy alyp bolýar:

$$\xi = \min_i \frac{\xi_i(T)}{\mu_i} \to \max. \tag{29}$$

Bu kriteriýa μ_i ululyk tarapyndan berlen güýçleriň düzüminde maksimal ösüşe getirjek, şular ýaly görnüşleriň ösüşini tapmaklyga getirer. Şular ýaly ýagdaýda isleg $\overline{\omega}_i^H(t)$ aşaky derejede ýerleşer.

Pudagara modeliň kriteriýasynyň gurluşyna ýene bir usuly $\overline{\omega}_i^H$ ilatyň isleginiň käbir «göwnejaý» düzümleriniň tabşyrygy girýär. Ondan soň kriteriýanyň ösüşi ω ululyk hasaplanýar:

$$\omega\tilde{\omega}_i^H \geq \sum_{t=1}^{T} \omega_i^H(t).$$

Bu ýönekeý dinamiki model- ösüş we täzeden dikeldiş birnäçe alymlar tarapyndan düzüldi.

IV
BÖLÜM.

AÝRATYN YKDYSADY OBÝEKTLERIŇ HEREKETLERINI MEÝILNAMALAŞDYRMAKDA PEÝDALANYLÝAN MATEMATIKI MODELLER

X bap
Aýratyn ykdysady obýektleriň hereketlerini meýilnamalaşdyrmakda peýdalanylýan matematiki modeller

§1. Ykdysady obýektleriň hereketlerini meýilnamalaşdyrmak meselesinde matematiki derňew

Ykdysadyýeti umumy ýeketäk bir meýilnama getirmek, kitabyň geçenki baplarynda, ählihalk eýeçiligine degişli bolan önümçilige esaslanýar we onuň sosial ulgamynyň uly üstünligi bolup durýar. Ýurduň derejesinde meýilnamalaşdyrmak meselelerinde matematiki usullaryň peýdalanylmagyndan oňa uly täsiri ýetýär. Emma, ýurduň ykdysadyýetiniň özüniň iň kyn obýekt bolýandygyny göz öňünde tutmak gerek. Şonuň üçin her bir modelde önümçiligiň we gurallaryň görnüşlerini paýlamagy, ähli kärhanalaryň işleriniň iň gowy wariantlaryny jikme-jik görkezmek mümkin hem däl. Halk hojalygy bolup duran, şular ýaly ulgama netijeli ýolbaşçylyk etmek üçin ony köp derejeli ulgam görnüşinde taýýarlaýarlar. Ykdysadyýeti dolandyrmakda merkezi guramalar ýokary derejäni emele getirýärler. Ykdysady ulgam bolan dolandyryjy pudaklar bolsa merkezi guramalaryň ikinji derejesi bolup durýar. Üçünji dereje – önümçilik birleşmeleri bolup, olaryň düzümini dördünji dereje bolan- kärhanalar düzýär. Şular ýaly düzümi köp basgançakly düzüm diýip atlandyryp bolýar. Şeýlelikde, halk hojalygy özünde köp derejeli kyn düzümi göz öňünde tutýar. Bu gurluşda ýeke bir aşakdan ýokarlygyna özara aragatnaşykly ulgam bolman, eýsem birmeňzeş derejedäki guramalaryň keseligine hem özara gatnaşykda bolýandygyny belläliň.Keseligine aragatnaşygyň barlygy hojalygyň düzümini has hem kynlaşdyrýar.

Bu ýerde ýazylan köp derejeli hojalygyň düzümi ýurduň ykdysadyýetini meýilnamalaşdyrma meselesini çözmek ýagdaýynda doly göwrümde ulanylýar. Merkezi agzalaryň meýilnamalaşdyrylyşy (Döwlet meýilnamasy) pudaklaryň – derejeleriniň aşagynda ýerleşýän ösüşiň esasy görkezijileri we umumy alamatda olaryň arasyndaky aragatnaşyklary kesgitleýärler. Pudak ministrlikleri olaryň garamagynda bolan edaralaryň işini has jikme--jik meýilnamalaşdyrýarlar, üstesine-de edaralaryň ýokarsynda durýanlardan alnan görkezijiler normatiw (hökmany) bolýarlar. Öz gezeginde önümçilik edaralary öz işini ýene has jikme-jik nomenkla-turada kesgitleýärler we şuňa meňzeşler.

Elbetde, halk hojalygynyň köp basgançakly düzümi ykdysady-matematiki modellerde ulanylýar we nazara alynýar. Merkezi meýilnamalaşdyrylyş agzalary üçin balans modelleri işläp taýýarlanylýar, okyjy bu maglumatlar bilen geçenki bapda tanyşdy. Balans modellerini aýratyn ykdysady etraplar üçin hem işläp taýýarlaýarlar. Aýratyn kärhanalaryň işlerini meýilnamalaşdyrmak üçin hödürlenýän bapda beýan edilen has ýönekeý matematiki modeller hem ulanylýar. Bu modeler, ýurduň köpderejeli birleşdirilen ýeketäk ykdysady model bolup, ol birnäçe meseleleri derňemäge, hem kämilleşdirmek bilen baglanşykly bolan ykdysady ulgamy meýilnamalaşdyrmaga we dolandyrmaga mümkünçilik berýär, hususy ýagdaýda, haýsy görkezijileri bellemeklik maksadalaýyk, haýsylaryny bölek ulgamlaryň hatarynda galdyrmany we bölek ulgamlaryň meýilnamasyny ylalaşyp nähili görnüşde gurnamaly, şeýle hem, önümçiligiň işini höweslendirmek üçin haýsy mehanizimleri peýdalanmaly.

Aýratyn ykdysady ulgamlaryň işlerini meýilnamalaşdyrma üçin ulanylýan, modellere seretmäge geçeliň. Bu ýagdaýda ulgamlaryň işleriniň kriteriýalary we resurslary eýýäm tabşyrylan diýip hasap ederis. Bu ýerde ýazylan ykdysady obýektleriň meýilnamalaşdyrylyşynyň modeli iň gowy meýilnamany saýlamak üçin niýetleneni üçin, onuň astynda adatça käbir kriteriýalaryň manysynda optimal, meýilnama düşünilýän bolsa, onda optimizasiýa meseleleriniň çözülişlerini eýýäm bar bolan usullary ulanmak üçin, bular ýaly görnüşde modelleri kesgitlemäge synanyşýarlar. Optimizasion meseleleriniň çözülişleriniň iň uly ösüş usullary çyzykly programmirleme usuly, çyzykly deňliklerden we deňsizliklerden düzülen, modelleriň esasynda optimizasiýa usullary bolup durýarlar, üstesinede optimizasiýalaryň kriteriýalary meseleleriň üýtgeýänlerinden çyzykly funksiýalar bolup durýar. Bu çyzykly modeller tejribeli ykdysady hasaplamalarda iň uly giň ýaýramany alandyklarynyň, sebäpleriniň biri bolup durýar.

Elbetde, çyzykly programmirlemäniň usullarynyň gowy ösmegi ykdysady obýektleriň çyzykly modelleriniň giň ýaýramagy üçin ýeterlik däl, ýöne çyzykly modeller köp ýagdaýlarda peýdalanmak üçin ýeterlikdir.

Umumy görnüşde önümçilik-ykdysady meseleleriniň ep-esli bölegi şoňa alyp barýan *çyzykly programmirleme meselesi* indiki görnüşde kesgitlenip bilner:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

n sany $x_1^*, .., x_n^*$, ululyklardan düzülen x^* wektorda çyzykly funksiýanyň maksimuma (ýa-da minimuma) ýetmegi üçin x^* wektory arasynda gerek x^* wektorlaryň arasynda, m deňlemeleri

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, .., m.$$

we l deňsizliklere

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = m+1, ..., m+l,$$

kanagatlandyrýany saýlap almaly

l deňsizlikleriň arasynda x wektoryň elementleriniň otrisatel dällik talaplaryny görkezýän deňsizlikleriň hem bolup biljekdigine üns bereliň. Käwagt şular ýaly deňsizlikleri aýratyn ýazyp berýärler.

Meseläniň çäklendirmelerini kanagatlandyrýan x-iň ähli wektorlaryny ýolbererli diýip atlandyrýarlar, x^* wektor bolsa, onda çyzykly funksiýanyň maksimumyna ýetýänini optimal diýip atlandyrýarlar.

Biz çyzykly programmirleme meselesiniň ähmiýetleri ýa-da interpretasiýalary bilen meşgullanmarys, onuň çözülişleriniň usullary barada hem gürrüň etmeris, diňe olaryň her dürli aýratyn ýagdaýlaryny çözmäge niýetlenen standart programmalaryň we usullarynyň birnäçe sanysy işlenip düzülendigini belläp geçeris. Biz çyzykly programmirleme meseleleriniň iki iň giňden ýaýran klasyna, ulag meselesi we umumylaşdyrylan ulag (paýlama) meselesine serederis.

Ulag meselesi we $n * m$ sany $x_{ij}(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ ululyklary saýlamak gerek, olarda funksiýa minimuma ýetmegi üçin

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

berlen şertlerde

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,...,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,...,m.$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, ..., n; j = 1, ..., m.$$

Bu meseläniň çäkleri örän ýöriteleşdirilen görnüşde bolany üçin, ol çyzykly programmirlemäniň umumy meselesinden ýeňil. Täsin, ulag meselesine ykdysady obýektlerini meýilnamalaşdyrmasynyň problemalary dürli tiplerine getirýär. Şonuň üçin ulag meselelerini çözmegiň täsirli usullaryny gurmak boýunça ep-esli güýçler edilip başlandy we bu güýçler üstünlikli gutardy. Häzirki wagtda ulag meselesini ep-esli basym çözüp bilýärler we köp sanly üýtgeýänler bilen, çyzykly programmirlemäniň ýönekeý meselesine garanyňda. Bu meseläniň öz ady (ulag) onuň emele gelşi bilen bagly: ol optimal ýükleri daşamagyň meselesinden emele geldi, şol barada indiki paragrafda gürrüň berler. Ulag meselesinden başga, ulag meselesiniň we çyzykly programmirlemäniň umumy meselesiniň arasynda aralykdaky ýerleşmäni eýeleýär, mesele käwagt duş gelýär. Bu şeýle atlandyrylýan *umumylaşdyrylan ulag meselesi* (şeýle hem *paýlama meseleleri* ýa-da λ *meseleleri* diýip atlandyrylýar) bolup, ol indiki görnüş bilen kesgitlenilýär:

x_{ij} $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ ululyklaryň şeýle $n \times m$ sanysy saýlamak gerek,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}.$$

funksiýany minimizirlemek üçin şertler ýerine ýetirilen ýagdaýynda:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,..,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,...,m$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = 1,...,n; \quad j = 1,...,m.$$

Bu mesele tiplerden çäklendirmeleriň birinde diňe ep-esli λ_{ij} ululyklar bilen (bu ýerden şular meseläniň atlaryndan biri hem – λ mesele) ulag meselesinden tapawutlanýandygyny, görmek aňsat. Umumylaşdyrylan ulag meselesi üçin şeýle hem çyzykly programmirlemäniň umumy meselesiniň algoritm çözülişlerine garanyňda, has täsirli, algoritm çözülişleri oýlanylyp tapyldy. Ulag meselesi *EHM*-iň kömegi bilen göz çeni bilen onuň çözülişleriniň algoritmi umumylaşdyrylan ulag meselesinden aňsat, emma umumylaşdyrylan ulag meselesi çyzykly programmirlemäniň umumy meselesinden aňsat. Modelleri gurmak ýagdaýynda problemany mümkin boldugyça has ýönekeý meselä getirmek üçin, olary şeýle kesgitlemäge çalyşýarlar. Elbetde, bular ýaly maglumat ykdysady ulgamy öwrenýänler üçin alamatlarynyň ýoýmagynyň hasabynda amala aşyrylmaýar.

§2. Ýükleri daşamagyň meýilnamasy

Halk hojalygynyň meýilnamalaşdyrmagynda ýükleri daşamagyň meýilnamalaşdyrmagy möhüm orun eýeleýär. Häzirki zaman önümçilikde, önümleriň çykarylmagynyň ösüşi bilen kärhanalaryň arasynda (önümleriň) we çig mal serişdelerini daşamagyň zerurlygy çykýar. Biziň ýurdumyzyň möçberini göz öňünde tutsak, onda halk hojalygynyň önümini ulanýan adamlaryň köplügi sebäpli ýükleriň möçberi uly görnüşe ýetmelidir. Şoňa görä-de ýükleri daşamagyň çykdajylary uly bolýar. Şol çykdajylary azaltmak üçin, biz şu meselä seredýäris.

Goý, bize ýükleri birnäçe ýerlerden (iberilýän punktlardan) alyjylaryň punktyna daşamakly gerek bolsun. Goý, iberilýän punktlaryn sany n, şolaryň her birinde $a_i(i = \overline{1,n})$ sany ýük bar, bolsun. Alyjylaryň punktlarynda ýüklere bolan islegler hem deň diýeliň, ol $b_j(j = \overline{1,m})$ islegler bolsun.

Onda

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j, \tag{1}$$

ýagny iberilýän punktlar alyjylaryň isleglerini doly kanagatlandyrýandyr.

Meýilnamalaşdyrma meselesiniň maksady ýükleri daşamakdaky çykdajyny azaltmakdyr.

Goý, x_{ij} – ýüküň mukdary, i – iberilýän punkt, j – bolsa alyjylaryň punkty bolsun. Ol otrisatel däl ölçegdir:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

i punktda bar bolan ýüklerden köp iberip bolmaýar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Alyjylar punktynyň şertlerini kanagatlandyrmak aşakdaky ýaly ýerine ýetirilýär:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

(1)-nji şertiň ýerine ýetmegi üçin ýokardakyny başgaça aňladyp bolýar:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

$$\sum_{i=1} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

x_{ij} önümi daşamaklygyň şertlerini kanagatlandyrýan tükeniksiz wariantlar bardyr. Elbetde, olary tapmak üçin çykdajyny azaltmak, ýagny ýüküň tonna-km çykdajylary proporsional bolsun, onda optimalaşdyrmanyň ölçegi:

$$J = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}, \tag{5}$$

bu ýerde c_{ij}-nji iberilýän punkt bilen j-nji alyjy punktyň arasyndaky aralyk. (2-4) deňlemelerini kanagatlandyrýan we (5)-nji deňligiň x_{ij} ölçegini saýlamaly.

Görşümiz ýaly, bu deňlemeler (3–4) deňsizlikleriň alamatlary bilen tapawutlanýandyr. (1) deňligi kanagatlandyrýan ulag modeline ýapyk model diýilýär. Görşümiz ýaly, c_{ij} – punktlaryň arasyndaky aralygy aňlatman, ol ýüki daşamak üçin çykdajyny hem aňladyp bilýär.

Ýükleriň mukdary isleglerden köp bolan ýagdaýynda ulag meselesiniň başga-da modelleri bolup bilýär, mysal üçin;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Bu ýagdaýda (3) deňleme aşakdaky ýaly bolar:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,n},$$

emma (4) deňleme üýtgemän galýar.

Eger tersine

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$$

şert ýerine ýetse, ýagny islegleri kanagatlandyrmak üçin ýükleriň mukdary az bolsa, onda (3) deňleme üýtgemeýär, emma (4)-nji aşakdaky ýaly bolar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Bu ulag modellerine açyk modeller diýilýär. Ulag meseleleriniň ýapyk hem açyk görnüşleri öz arasynda az tapawutlydyr.

Ikinji wariantda ulag meselesiniň açyk modeli alyjy, islegi kanagatlandyrman, ýükleri daşamasynyň çykdajysy nazarda tutulýar. Emma bu elmydama beýle däl; alyjylaryň islegleri kanagatlanman, olaryň ýitgileri hasaplanyp, bu mesele ulag meselesi hem bolup bilmez. Ýöne şol ýitgiler gowşurylmadyk ýüke proporsional bolsa, onda bu mesele çyzykly bolup galýar.

Ýapyk ulag meselesiniň başga-da dürli görnüşleri bar. Mysal üçin, i_0 punktdan j_0 punkta ýük daşamaly bolsun. Onuň üçin $c_{i_0 j_0}$ käbir uly sana deň bolsun, onda bu mesele optimal meýilnamada ulanylmaz ýa--da käbir ýagdaýlarda $x_{i_0 j_0}$ hökmany $x^*_{i_0 j_0}$-dan kiçi bolmaly däl, ýagny

$$x_{i_0 j_0} > x^*_{i_0 j_0},$$

onda a_{i_0} we $b_{j_0} x^*_{i_0 j_0}$ bahalaryna kiçeltmeli (elbetde $x^*_{i_0 j_0} \leq a_{i_0}$ we $x^*_{i_0 j_0} \leq b_{j_0}$) we bu ulag meseläni çözmeli. Ilki ýagdaýyň çykdajylaryny deňeşdirmeli.

Ýöne bir ýagdaýa seredeliň: goý, i_0 punktdan j_0 punkta $x_{i_o j_o} \leq d_{i_o j_o}$ şert bilen ýük geçirmeli bolsun. Bu şert ýoluň geçirijiligine bagly bolup, ony amaly usullar bilen ulag meselesine getirip bolýar.

Ykdysady tejribede köp tapgyrly ulag meselesi hem bar,ol meselede ýüki daşamakda ammar diýen punkt ýüze çykýar. Onda eltilmeli ýüküň saklanýan ýönekeý ýapyk modeli islege hem hödürlemä deňdir.

$$\sum_{k=1}^{p} d_k = \sum_{i-1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Ýüki daşamagyň meýilnamasyny saýlamaly, onuň üçin $x_{ik}^{(1)}$– iberilmeli punktdan ammara we $x_{kj}^{(2)}$– ammardan alyjylaryň punktyna aşakdaky şertlerde ýerine ýetýär:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^{(1)} = a_i, \quad (i = \overline{1,n}),$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^{(1)} = d_k, \quad (k = \overline{1,p}),$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{kj}^{(2)} = d_k, \quad (k = \overline{1,p}),$$
$$\sum_{k=1}^{p} x_{kj}^{(2)} = b_j, \quad (j = \overline{1,m}),$$
$$x_{ik}^{(1)} \geq 0, (i = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,p}),$$
$$x_{kj}^{(2)} \geq 0, \ (k = \overline{1,p}; \quad j = \overline{1,m}).$$

Umumy çykdajylar bolsa minimum bolmalydyr.

$$J=\sum_{i-1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^{(1)} x_{ik}^{(1)}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}^{(2)} x_{kj}^{(2)}$$

Indi çylşyrymly ulag meselelerine seredeliň: goý, bize birnäçe ulagyň dürli görnüşi berilsin, birnäçe ýollar bilen gatnaşsynlar, ýagny her ýol bilen geçirilen ýükler bize belli bolsun. Onda matematiki modelini guralyň.

Goý, x_{ij} – i-nji görnüşli j-nji ýoldan geçen ulagyň sany bolsun $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$, λ_{ij} – bolsa i-nji ulagyň j-nji ýoldaky ýüküniň mukdary; b_j – j-nji ýoldan geçirilen ýüküň mukdary;$(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ a_i- i-nji görnüşli ulagyň sany. Onda ýüki geçirmegiň doly görnüşiniň şertleri aşakdaky ýaly bolar:

$$\sum_{i-1}^{n}\lambda_{ij}x_{ij}=b_j,\quad (j=\overline{1,m}).$$

Diňe bar bolan ulag ulanylanda:

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\le a_i,\qquad (j=\overline{1,n})$$

x_{ij}-ölçegiň otrisatel däl şertlerinde:

$$x_{ij}\ge 0,\qquad (j=\overline{1,n})\qquad (j=\overline{1,m}).$$

Çözüwiň meýilnamasyny saýlamak üçin ýüküňi geçirmegiň çykdajysyny minimuma getirmeli, ýagny

$$J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij},$$

bu ýerde c_{ij}– i-nji ulagyň j-nji ýoldaky çykdajysy.

Bu meseläni umumylaşdyrylan ulag meselesine getirdik, ýöne ony ulag meselesine öwürmek üçin bir ýoluň üsti bilen daşalan ýükler bilen ulagyň hemme görnüşleriniň önümçiligi deň bolmaly, ýagny $\lambda_{ij}=\lambda_i$ hemme $i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ üçin, onda ýüküň doly daşalmasynyň ýoly aşakdaky ýaly görnüşde bolar:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=\frac{b_j}{\lambda_j};\ j=\overline{1,m}\qquad(\lambda_j>0).$$

Bu ýagdaýda seredilýän mesele ulag meselesine degişli bolar. Öndürijileriň deňligi barada gürrüň etmesek,onda λ – meselesine seredilýär. λ – meseläniň çözüw algoritmi örän oňaýly, ulag modellerinden tapawutlylykda onuň kömegi bilen kiçi ölçegli meseleleri çözmek bolýar. Ulag meselesindäki ýaly λ – meselesinde-de hem çylşyrymly ýagdaýlar bolup bilýär.

Indi bu meselä başgaça seredeliň. Öňki garalan meselede c_{ij}– çykdajylaryň matrisasy belli bolup, her iberilen punktdan alyjy punkta ýük daşamagy mümkin diýip hasap etdik. Her bir iberilýän punkt bilen alynýan punktlaryň özara aýratyn ýollary bar we oňa çykarylan çykdajylar göz öňüne tutulan diýip hasap etdik. Eger karta seretsek, ilatly ýerlerde käbir ýollar özara bagly bolup, birnäçeleriň üstünden geçýär. Şeýlelik bilen ýüki iberilmeli ýere birnäçe ýol bilen geçirip bolar. Şonuň üçin bu gurluşda mesele diňe matrisa görnüşinde berilmän, ol tor görnüşinde hem berlip bilner. Şol tor gurluşyndaky ulag meselesine seredeliň.

Goý, n punkt berlen bolsun, olar özara bagly bolup, ikitaraplaýyn ýük daşamaly bolsun. Hemme punktlarda önümçileriň we alyjylaryň galyndysy bolan $a_i(i=\overline{1,n})$ berlen. Eger $a_i > 0$ bolsa, onda bu punktda önümiň artykmaçlygy bar, eger-de $a_i < 0$ bolsa, onda ol alyjy punkt. Tor gurluşynda $a_i = 0$ bolan punktlar hem bolup biler, olara geçiriji punktlar diýilýär. Goý, i bilen j punktlary birikdirýän $A(k) - k$ punktlaryny iberilýän kesimleriň köplügi, $B(k) - k$ punktlardan alynýan kesimleriň köplügini belgiläliň. Goý, x_{ij} (ij) ýoldan geçirilýän ýüküň mukdary bolsun, ýagny

$$x_{ij} \geq 0.$$

Her k punkt üçin ýazyp bileris:

$$\sum_{(t,k)\in A(k)} x_{ij} - \sum_{(k,j)\in B(k)} x_{kj} = -a_k, \quad k = 1, ..., n$$

şertleri $x_{ij} \leq d_{ij}$ kanagatlandyrýan bolsun. Isleg we hödürleme balansy ýerine ýetende $\sum_{k=1}^{n} a_k$=0 bolar. Bu meselede ulag çykdajylar

$$\sum_{(i,j)} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

bolar

Indi bolsa torda çyzykly meseläniň wajyp hususy halyna – maksimal geçirme meselesine seredeliň. Goý, ulag torda ýekeje bir önüm çykarýan punkt we alyjy punkt bolsun. Olar özara başga punktlardan geçýän ýollar bilen baglanyşykly bolsun. Mysal üçin, nebiti geçiriji tor, nebiti çykarýan ýeri ony gaýtadan işleýän ýer bilen baglanyşdyrýar. Bu ýagdaýda k düwne girýän $A(k)$ kesimleriň köplügi iberilýän $B(k)$ kesimleriň köplügi bilen gabat gelmeýär.

Her (i, j) kesimiň, i bilen j düwünlerini baglanyşdyrýan d_{ij}-degişlilikde otrisatel däl san goýulýar we magistralyň geçirijilik mümkinçiligini häsiýetlendirýär. Bu d_{ij}– sany ýüküň i-den j punkta wagt birliginde maksimal mukdarynyň daşalmagy diýip güman edip bolýar.

Maksimal geçiriji baradaky meselede v – kuwwatlylygyň çeşmesi alyjy punktynyň ulanylmagyna deňdir. Bu meselede v – ölçegi maksimal bolmaly. Şeýlelikde, x_{ij}-geçişligi toruň düwünlerinde aşakdaky şertleri ýerine ýetirmeli:

$$\sum_{(t,k)\epsilon A(k)} x_{ik} - \sum_{(k,j)\epsilon B(k)} x_{kj} = 0, \quad k = 1, ..., n-1$$

($k = 0$) çeşmesi üçin

$$\sum_{(0,j)\epsilon B(0)} x_{0j} = v,$$

($k = n$) çeşmesi üçin

$$\sum_{(i,k)\epsilon A(0)} x_{in} = v,$$

hemme $0 \le x_{ij} \le d_{ij}$ – bu ýerde ýüküň maksimala ýetmegi bilen torda $v \to \max$ bolar.

§3. Önümçiligiň tizleşdirilen görnüşdäki meýilnamalaşdyrylyşynyň käbir modelleri

Bu ýerde önümçiligiň tizleşdirilen görnüşdäki meýilnamalaşdyrmasynda ulanylýan ýönekeý matematiki modeller barada gürrüň gider. Iň ýönekeý meseläniň goýluşy şeýledir.

Goý, kärhanada n sany işçi önümçilik bölüminde hyzmat edýän bolsun. Olaryň her birine aýratyn enjam berkidilendir. Goý, i-nji işçä i-nji belgili enjam berkidilen bolsun. Jemi brigada m görnüşli önüm çykarýar, ýöne çykaryljak önümleriň beýannamasy (номенклатура) her gün üýtgeýär diýeliň. Şonuň üçin işçilere her günki ýumuşlaryny paýlamak meselesi ýüze çykýar, ýagny j görnüşli şaýlaryň b_j sanyny çykarmaly, bu ýerde $(j = \overline{1,m})$ deňdir. Adatça, işçilere gündelik ýumşy paýlaýan ussa aşakdaky görkezijiler bellidir:

λ_{ij} – bu i-nji işçiniň bir sagatda öndürýän j görnüşli şaýynyň mukdary; c_{ij} bu i-nji işçiniň j-nji görnüşli şaýlary bir sagatda öndürmäge edilen çykdajysy, bu ýerde $(i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,m})$. Işçileriň tapawutlyklarynyň görkezijileri işçileriň kwalifikasiýalaryna we enjamlaryň dürlüligine baglydyr.

Goý, x_{ij} – bu i-nji işçiniň j görnüşli şaýy öndürmegine harç edilen wagty bolsun. Olar aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

$$x_{ij,} \geq 0(i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,m}), \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq \mathrm{T},\ \ (i = \overline{1,n}). \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij} \leq bj,\ \ (j = \overline{1,m}). \tag{8}$$

Bu ýerde (7)-nji şert işçiniň ýumşy ýerine ýetirmek üçin sarp eden wagtynyň her günüň iş wagtyndan geçmeýändigini kesgitleýär. (8)-nji şert bolsa işçileriň gündelik ýumşy doly ýerine ýetirmegini kesgitleýär. Indi bolsa optimal meýilnamalaşdyrma meselesini guralyň. (6)–(8)-nji şertleri kanagatlandyrýan çykdajylary iň az baha getirýän x_{ij} ululyklaryň bahalaryny tapmaly:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{9}$$

Bu optimallaşdyrma meselesi umumylaşdyrylan ulag meselesidir.

Bu mesele ýönekeý ulag meselesine getirilýär, haçanda her bir sagatda öndürilýän önümiň mukdary haýsy işçiniň işlänine däl-de, diňe onuň görnüşine bagly bolsa:

$$\lambda_{ij} = p_j(i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,m}).$$

Onda (8) deňligiň ýerine (bu ýerde $p_j > 0$).

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j / p_j,\ \ (j = \overline{1,m})$$

ýazyp bileris.

Şeýlelikde, (9)-njy çykdajyny minimallaşdyrmak meselesi (6), (7), (8)-nji şertleriň ýerine ýetmegi bilen ýönekeý ulag meselesi bolup durýar.

Indi bolsa tizleşdirilen görnüşdäki meýilnamalaşdyrma meselesiniň başga bir görnüşine seredeliň.

Goý, biziň seretjek önümçiligimizde enjamlaryň dürli görnüşleri berlip (dürli görnüşdäki enjamyň sany bire deň), şaýlaryň her görnüşini dürli görnüşdäki enjamda gaýtadan işlemeli bolsun. Goý, n sany dürli görnüşli enjamlar we m sany dürli görnüşli şaýlar bar bolsun. j görnüşdäki şaýyň i-nji enjamda gaýtadan işlenilmeginiň wagtyny $a_{ij}(i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m})$bilen belgiläliň. Bir iş wagtynyň dowamynda çalşyrmaň enjamy ulanylan wagtynyň jemine T diýsek, x_j bilen iş wagtyň dowamynda j-nji görnüşli şaýlaryň mukdaryny bellesek, onda aşakdaky deňsizligi alarys:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \le T, \quad (i=\overline{1,n}). \tag{10}$$

Goý, kärhananyň işgärlerine her günki $b_j(j=\overline{1,m})$ görnüşdäki şaýlaryň çykarylyşynyň meýilnamasy berilýän bolsun. Ýokardaky seredilen meseleden tapawutlylykda meýilnama doly ýerine ýetirilýär we meýilnamadan artyk hem ýerine ýetirilip bilner:

$$x_j \ge b_j(j=\overline{1,m}). \tag{11}$$

Mundan başga-da, şaýlaryň her görnüşiniň öndürilen mukdary otrisatel däldir:

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,m}).$$

Önümleriň haýsy görnüşlerini bellenilen meýilnamadan artyk çykarmaly, haýsylaryny bolsa diňe meýilnama boýunça çykaryp bolar diýen soraga jogap (masteriň kabul etjek çözüwi şu modeliň hem çözüwi bolup durýar) – çözüwi kabul etmegiň kriteriýasyny tapmakdyr.

Goý, j görnüşli şaýyň çykarylmagy c_j-goşmaça material höweslendirmä getirýän bolsun. Onda meseläniň goýluşy şeýle bolar: öndürilen şaýlardan şeýle bir görnüşlerini, mysal üçin, x_j-ni saýlap almaly, olar iş wagtyndan artyk işlemezden meýilnamany doly ýerine ýetirip, goşmaça girdejini ýokary derejä ýetirmeli:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max. \qquad (12)$$

Bu mesele çyzykly programmirlemäniň umumy görnüşli meselesi bolup, ol algoritmleriň kömegi bilen çözülýär.

Bu meseläniň (6)-(9) şertlerinde gündelik işlerini paýlaşdyrmakda her bir işçiniň gaýtadan işleýän şaýlarynyň sanynyň bitin däl bolmazlygy mümkin. Köp ýagdaýda bu çözüliş amatsyz bolmagy mümkin, sebäbi her bir işçi şaýlary başyndan tä soňuna çenli öndürmeli bolýar. Bu kynçylygy nähili ýeňmeli? Eger şaýlaryň sany has köpräk bolsa, mysal üçin, birnäçe onluk bolsa, onda şaýlaryň sanyny optimal tegeläp almak bolýar. Bu ýagdaýda optimal çözüwlerde gyşarmalar ýüze çykýar. Emma olar uly däl, şonuň üçin bu usul tejribelikde giňden ulanylýar. Emma şaýlaryň sany birlikler bilen ölçenilse, onda tegeleklеme çäklendirmelerden we optimal çözüwlerden uly gyşarmalara getirip biler. Bir işçiniň öndürmeli şaýlarynyň her görnüşiniň mukdary bitin z_{ij} diýip alsak, (6)-(9) meseläni täzeden şeýle ýazyp bolar:

$$z_{ij} = \lambda_{ij} \; x_{ij}, (i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}) \qquad (13)$$

ýa-da

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = b_j (j = \overline{1,m}) \qquad (14)$$

bolar. (12) we (13) deňlikler (9)-a ekwiwalentdir. Eger aşakdaky şerti goşsak

$$z_{ij} - bitin \; (i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}), \qquad (15)$$

onda täze mesele (6), (7), (12)-(14), (10) deňlemeleriň üsti bilen goýlar, ony çözüp şaýlaryň sany bitin bolanda işleriň paýlanyşynyň optimal meýilnamalaşdyrylyşyny taparys. Bu görnüşli meseleler çyzykly programmirlemäniň diskret meseleleridir (bu ýerde umumylaşdyrylan ulag meselesi). Bu meseleleri çözmeklikde uly kynçylyklar döreýär.

Biziň sereden modellerimiz statiki modellerdir. Hakykatda bolsa işleriň meýilnamalaşdyrmasyny wagt bilen baglylykda düzmeli bolýar. Wagtyň hasabaty işiň kalendar meýilnamalaşdyrylyşy atly usullaryň kömegi bilen ýerine ýetirilýär. Bu usullar örän çylşyrymly modellerde ulanylýar.

§4. Pudaklary ösdürmek meýilnamasynyň modeli

Bu bölümde ýene-de bir wajyp meseleleriň biri, ýagny ýük daşama çykdajysyny göz öňünde tutup, pudaklaryň geljegi bar bolan meýilnamalaşdyrylyşyna serederis. Bu modeller hakykata has golaý bolup, olarda ýükleri daşamakda çykdajylaryň ululygy we önümleriň köplügi hasaba alynýar. Ýöne modeliň hakykata golaý bolanlygy üçin meseläniň ýönekeýligi ýitýär.

Indi bolsa pudaklaryň meýilnamalaşdyryş meselesine seredeliň. Onuň iň ýönekeý wariantyna serederis: pudak bir görnüşdäki önümi öndürýän bolsun, pudagyň önümine islegler (talaplar) öňünden belli, ýagny talap ediji punktlaryň sany m bolsun we j-nji punktda talabyň mukdary $b_j(j = \overline{1,m})$ ululyga deňdir.

Önümleriň çykarylyşyny dürli n punktlarda öndürip bolýandyr. Şol punktlaryň her birinde bir kärhana gurup bolýar we y_i – i-nji punktda guruljak kärhananyň kuwwatlylygy bolsun we ol ýokardan çäklendirilen:

$$y_j \leq y_i^{\max}, \quad (i = \overline{1,n}). \tag{16}$$

Elbetde, bu ölçeg otrisatel bolup bilmez, ýagny

$$y_j \geq 0, \quad (i = \overline{1,n}). \tag{17}$$

Kuwwatlylygyň ýokardan çäklendirilmesi şol ýaşaýyş punktda işçi ýa-da başga resurslaryň çäkliligi bilen bagly bolup biler. Eger i-nji punktdaky öndürilýän her önüme harçlanan harajat $a_i(i = \overline{1,n})$ bolsa, onda, punktyň doly çukdajysynyň möçberi – $a_i y_i$ deň bolsun.

Goý, x_{ij}– bu i-nji öndüriji punktdan j-nji talap ediji punkta daşalýan ýüküň göwrümi bolsun, onda oňa bolan harajatlar berlen we c_{ij} deň bolsun. Bu ýerden ýükleriň ähli öndüriji punktlar we talap ediji punktlary boýunça doly daşalmagyna bolan harajatlar aşakdaka deňdir:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}.$$

Elbetde x_{ij} ölçegler otrisatel däldir:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,n}; \ j = \overline{1,m}). \tag{18}$$

Her bir öndüriji punktdan önümiň doly iberilmegi kärhananyň şol punktdaky kuwwatlylygyna deňdir, ýagny

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = y_i, \quad (i = \overline{1,n}). \tag{19}$$

Her talap ediji punktda bolsa ýüküň diňe gerek bolan mukdaryny almalydyr, ýagny

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,m}). \tag{20}$$

Meseläniň goýluşy şeýle: (16)-(20) şertler ýerine ýetende çykdajylaryň jemlerini

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{21}$$

minimallaşdyrýan $y_i \ (i = \overline{1,n})$ kuwwatlylyklaryň ululyklaryny we $x_{ij} \, (i = \overline{1,n}; \ j = \overline{1,m})$daşalýan ýükleriň göwrümlerini tapmak.

Pudaklaryň geljegi bar bolan optimal meýilnamalaşdyrma meselesi çyzykly programmirlemäniň meselesine getirildi.

Kärhananyň kuwwatlylygyny çäklendiriji şertlere seredeliň, ýagny

$$0 \le y_i \le y_i^{\max}, i = \overline{1,n}.$$

Kärhananyň kuwwatlylygyny kesgitlemekligiň birnäçe usullary bardyr, onuň iň ýönekeýi bolan (17)-nji şertiň ýerine

$$y_i^0 \le y_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{22}$$

şerti goýmak. Bu ýerde y_i^0 öňden bar bolan önümçilik kuwwatlylygy.

Ýöne bu usulyň gaty bir amatly däldigini agzap geçmelidiris, sebäbi bar bolan kuwwatlyklaryň ýerleşişiniň rasional däl bolmagy mümkin (mysal üçin, çig malyň doly alnyp gutaran ýerinde). Şonuň üçin bu kuwwatlyklary başga önümçiliklerde ulanmaklyk mümkinçiliklerini göz öňüne tutmaly bolýar (kuwwatlyklaryň konwersiýasy). V_i – i-nji punktdaky kuwwatlyklaryň konwersiýasy (bar bolan kuwwatlylykda önüm birliginiň beýleki kuwwatlylyga geçilende berýän girdejisi V_i belli bolanda) arkaly alnan girdeji aşakdaky formula boýunça hasaplanar:

$$V_i = \begin{cases} 0, & eger\ y_i \geq y_i^0, \\ v_i(y_i^0 - y_i), & eger\ y_i \leq y_i^0\ . \end{cases}$$

Indi bolsa optimal çözüwiň kriteriýasyny aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} V_i \to \min. \qquad (23)$$

Bu kriteriýa öňki kuwwatlyklary hasaba almak mümkiçiliklerini berýär. Konwersiýalardan gelen girdejileriň jemi bu kriteriýada otrisatel alamatlydyr, sebäbi beýleki harajatlar bolan goşulyjylardan tapawutlylykda, ol girdejidir.

Eger biz kuwwatlylyk diňe diskret bahalary alyp bilýär diýsek, onda i-nji punktda y_i^k (k – wariantyň nomeri, $k = \overline{1, s_i}$) kuwwatly wariantlar gurulmagy mümkin. Şol wariantlaryň birini saýlamaly. Goý, z_i^k – nol ýa-da bir bahany alýan üýtgeýän ululyk bolsun, eger $z_i^k = 1$ bolanda i-nji punktda k wariant guruljakdygyny aňladýar.

Şeýlelikde, her bir punkt üçin diňe bir wariant saýlamalydyr. Bu şerti aşakdaky ulgam hökmünde ýazyp bileris:

$$\sum_{k=1}^{S_i} z_i^k = 1, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (24)$$

Bu deňlik bilen (16) we (17) şertleri çalşyp bolýar. (18)-nji şert bolsa üýtgemeýär:

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m}). \qquad (25)$$

Indi bolsa (19) şertli deňsizlik aşakdaky ýaly bolar:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_{i,} (i = \overline{1, n}), \qquad (26)$$

bu ýerde

$$y_i = \sum_{k=1}^{S_i} z_i^k y_i^k.$$

(24)-iň esasynda:

$$y_i = \sum_{k=1}^{S_i} z_i^k y_i^k = y_i^{k_0},$$

bu ýerde k_0– i-nji punkt üçin saýlanan wariantyň nomeri. (19) gatnaşykdaky deňlik alamatyny (26)-daky deňsizligiň alamaty bilen çalyşýar, ýagny diskret kuwwatlylykda talaplary doly kanagatlandyrmak üçin kuwwatlyklary saýlamak mümkin däl bolan ýagdaýlar bolup biler. Alyjylaryň islegini doly kanagatlandyrmak (20)-nji şerti üýtgetmeýär:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,m}). \tag{27}$$

Ýükleri daşamak üçin çykdajylaryň aňlatmasy öňki ýaly galar, emma önüm birligini öndürmäge çykan çykdajylar bir wariantdan beýleki warianta geçende üýtgäp bilerler.

Goý, *k*-njy wariant üçin *i*-nji punktdaky çykdajylar a_i^k-a deň bolsun. Onda şol punktdaky harajatlary aşakdaky jem görnüşinde ýazmak bolýar:

$$\sum_{k=1}^{S_i} z_i^k y_i^k a_i^k,$$

hemme önümleri öndürmek üçin çykarylan çykdajylary bolsa

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{S_i} z_i^k y_i^k a_i^k$$

Indi bolsa pudaklaryň geljegi bar bolan meýilnamalaşdyryş meselesini şeýle kesgitläp bileris: (24)-(27) şertler ýerine ýetende umumy çykdajylary

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{S_i} z_i^k y_i^k a_i^k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{28}$$

minimuma getirýän a_i^k we x_{ij} tapmaly.

Bu mesele diskret programmirlemäniň meselesi bolup durýar. Bu meseleler üçin dürli algoritmler işlenilendir, olaryň içinde ýakynlaşan görnüşleri bardyr.

§5. Tor usuly bilen meýilnamalaşdyrmak

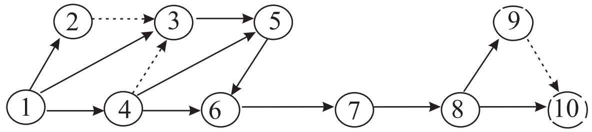
Geçen bapda ulag meseleleri beýan edilen ýagdaýynda tor modelleri barada gürrüň edilipdi.

Bu paragrafda ykdysady-matematiki meseleleri seljermegiň giň ýaýran we ýakynlaşan görnüşlerine, ýagny tor barlag usulynyň meýilnamalaşdyrmak we dolandyrmak meselelerine degişli bolan soraglara serederis. Soňky on-on bäş ýylda tor usullarynyň giňden ýaýramagy ýüze çykýan meseleleriň wajyplygy bilen bagly. Kalendar meýilnamany düzmek, işleriň käbir toplumynyň amala aşmagynyň we ony ýerine ýetirmegiň prosesinde amatly çözülişleriň kabul edilmeginiň meselelerini olary seljermek üçin niýetlenendirler. Işleriň toplumynyň astynda käbir binalaryň, gäminiň, uçaryň ýa-da islendik beýleki kyn obýektleriň gurluşygyna hem, şol desganyň taslamasyny işläp düzmeklige hem, hat-da taslamanyň amala aşyrylyşynyň meýilnamalaşdyryş prosesine hem – umuman dürli görnüşli işleriň köp möçberiniň ýeterligini amala aşyrmak hökmany bolan her meseläni ýerine ýetirmek üçin düşünmek bolýar. Tor modelleri ulanyp bolýan meseleler aýratyn adamlaryň işinden başlap we taslamalary gutarmazdan, her ädimde duş gelýär, olara ýüzlerçe guramalar we on müňlerçe adamlar gatnaşýarlar (meselem, iri territorial-önümçilik toplumyny döretme we işläp taýýarlama).

Tor modeli diýip modeliň esasy torunyň bolýandygyny bilýäris. Tor depeleriň köplüginden (düwünleriň) we dürli jübüt depeleri birleşdirýän dugalaryň köplüginden (gapyrgalaryň, halkalaryň) durýar. Her dugada kesgitli ugur berlen bolup biler. Çyzgyda toruň depeleri tegelejikler bilen, dugalar bolsa olary birleşdirýän çyzyklar bilen şekillendirilýär. Ugur peýkamlar bilen görkezilýär. Her depä san goýulýar. j depe bilen i depäni birleşdirýän duga (i, j) ýa-da p_{ij} nyşan bilen belgilenýär.

Tor modeliniň gurluşynyň birinji tapgyry taslamanyň tor grafigini gurmak bolýar. Modelirlemäniň bu bölegi örän wajyp we köp wagty alýar.

Taslama diýip (işleriň toplumynyň) käbir netijelere ýetmek üçin gerek bolan işleriň jemine aýdylýar. Bu işler öz aralarynda olaryň ýerine ýetirilmeginiň tertibi bilen bagly. Onda taslama tor tarapyndan hödürlenen bolup biler (ýa-da tor grafigi). Tor işleri logiki aragatnaşyklaryň görnetin şekilini berýär. Toruň esasy elementleri hadysalar we işlerdir. Hadysalar aralyk meseleleriň ýerine ýetmeginiň netijeleri hökmünde interpretirlenip bilner. Iş – bu bir ýagdaýdan beýleki ýagdaýa geçmek üçin gerek prosesiň dowamlylygydyr. Mysal üçin, 1-nji suratdaky tagta galyby agaç materiallary bolmazdan ýasalyp bilinmez. 4 we 3-nji hadysalary birleşdirýän punktir çyzyk 4-nji hadysa tamamlanandan soň, agaç materiallaryň eltiljegine we şondan soň tagta galybyň desgasynyň başlanyp biljekdigini görkezýär.



1-nji surat

Ýokarda ýazylan işleriň toplumynyň usuly «hadysalar – işler» diýen dili ulanýar. «işler – aragatnaşyklar» diýen beýleki usuly hem ulanmak bolýar. Bu ýagdaýda toruň depeleri işler bolýar, dugalar bolsa olaryň logiki aragatnaşyklaryny görkezýär.

Bu usuly ylmy işleri taýýarlamagy meýilnamalaşdyrmagyň mysalynda görkezeris. Model barlagyny geçirmegiň esasy tapgyry öwrenilendigi üçin tor grafiginiň işleriniň manysy düşnüklidir.

Şeýlelikde, käbir ykdysady obýektler üçin optimal meýilnamany gurmagyň we modelirlemegiň meselesi ýüze çykýar.

Bu meseläni çözmek üçin aşakdaky işleri geçirmek gerek:

A – barlagyň problemasyny kesgitlemek;

B – öwrenilýän obýektiň matematiki modelini gurmak;

Ç – maglumaty ýygnamak;

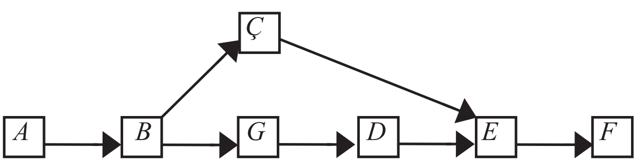
G – meseläni çözmegiň usulyny saýlamak;

D – EHM üçin programmany gurmak we işletmek;

E – optimal meýilnamany hasaplamak;

F –müşderä hasabatyň netijelerini bermek.

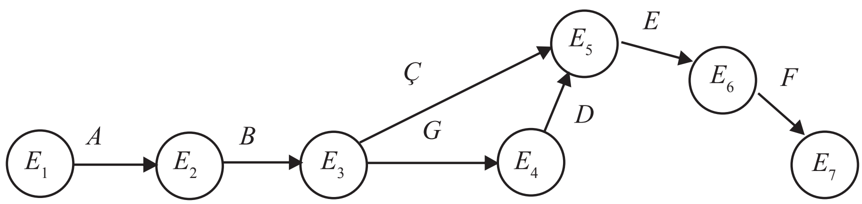
Bu işler kesgitli yzygiderlilikde ýerine ýetirilmeli. *A* işiň ilki ýerine ýetirilýändigi aýdyň, *B* iş üçin *A* işiň eýýäm ýerine ýetirilendigi zerur; *Ç* we *G* işleri *B* iş ýerine ýetirilenden soň başlamak bolýar; *D* işiň ýerine ýetmegi üçin *A, B, G* işler ýerine ýetirilmeli; *E* iş üçin *Ç* we *D* işler ýerine ýetirilmeli; iň soňunda bolsa *E* işden soň *F* iş gelýär.



2-nji surat

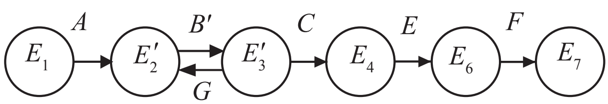
«Işler – aragatnaşyklar» diýen toruň grafigi 2-nji suratda görkezilendir. Kyn tor grafiklerinde käbir işler birmeňzeş bolup, ozalky hadysalar gaýtalanýar.

Meselä seretmek üçin indiki hadysalary girizmek gerek: E_1 – A iş başlandan soň barlagyň ýerine ýetirilmeginiň başy; E_2 – B iş başlandan soň problemany formulirleme tapgyrynyň soňy; E_3 – modelirleme tapgyrynyň soňy, şol pursatdan *Ç* we *G* işlere başlamak bolýar; E_4 – usuly saýlama tapgyrynyň tamamlanmasy; E_5 – programmalary işletmegiň we maglumatlary ýygnamagyň gutarmasy, şondan soň *E* işi ýerine ýetirmek bolýar; E_6 – hasaplamalaryň soňy; E_7 – barlagyň tamamlanmasy. Soňky hadysalar *F* iş bilen birikdirilen. Tor grafigi 3-nji suratda şekillendirilendir.



3-nji surat

Bu grafik has ýönekeýdir: hemme işler çylşyrymly gurluşy emele getirýän *B, G* we *D* işlerden başgasy biri-biriniň yzyndan gelýär. Toruň çylşyrymlylygyny işleriň sanynyň hadysalaryň sanyna bolan gatnaşygy kesgitleýär. Bu toruň çylşyrymlylygy birlige deňdir. Bu ýagdaýda tory gurmaklykda kynçylyklar döremeýär. Ýöne şeýle tory gurmakda-da ýalňyşlyk goýberilmegi mümkindir. Goý, *B* (modeli gurmak) we *D* (kompýuter programmany düzmek) işleri işleriň başlangyç sanawynda bir işe birleşdirip we $B^{/}$ diýip atlandyrsak,onda torly grafigi guranymyzda aşakdaky şekili alarys.

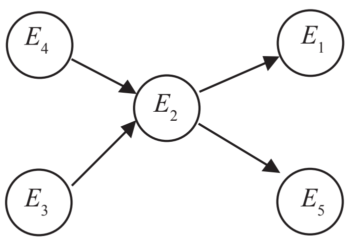


4-nji surat

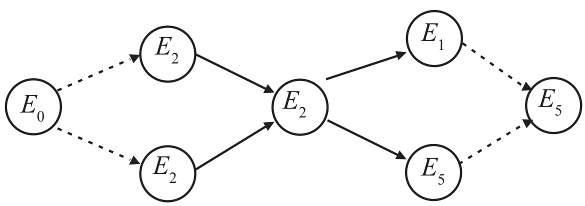
E_2' hadysa hasaplama usuly seçilip alynýança (*G* işi) ýerine ýetirip bolmaýan, *B′* işe geçmek bolýandygyny aňladýar. Hasaplama usulyny seçip almaklyga bolsa modeli gurnamaklyk (hadysa E_3') tamamlanýança başlamak bolmaýar. 4-nji suratda şekillendirilen ýagdaý sudur (kontur) diýlip atlandyrylýar. Sudurlar has çylşyrymly gurluşda hem bolýarlar. Umumy görnüşde sudur ugur görkezijileriň geçýän ilişen işiniň yzygiderligini kesgitleýär, onuň başlangyç we soňky depeleri gabat gelýär. Torda sudurlaryň bolmagy, birnäçe işleriň özlerinden soň gelýändigini aňladýar. Çylşyrymly torlarda sudura köp möçberli işler girýär. Bu torlarda sudury gözlemeklik kompýuteriň kömegi bilen geçirilýär.

Eger-de torda sudur tapylan bolsa, onda işleriň sanawyna we olaryň arasyndaky logiki aragatnaşyklara täzeden seretmeklik hökmanydyr. Biziň mysalymyzda *B′* işi *B* we *D* işlere bölmek gerek bolýar.

Suduryň emele gelmeginiň sebäbi işleriň sanawynyň nädogry seçilip alynmagyndandyr.Adatça tor düzülende, onda ýeke-täk başlangyç hadysa we ýeke-täk tamamlaýjy hadysa bolmaklygy talap edilýär. Eger düzülen torda bu beýle bolmasa, onda 5–6-njy suratlarda görkezilişi ýaly ýasama (fiktiw) işler girizilýär.

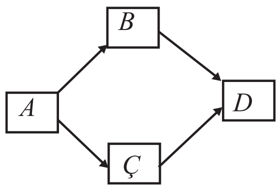


5-nji surat

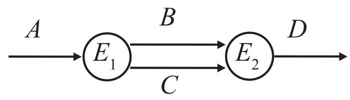


6-njy surat

Torly modeller gurlanda ugurdaş geçirilýän işleri hem belläliň. Goý, torly grafik 7-nji suratdaky belentlikli grafik görnüşde berlen bolsun, grafige geçmek bilen biz «hadysalar – işler» diýen adalgalarda *B* we *Ç* işleriň umumy başlangyç (*A* işiň tamamlanmagy) we tamamlaýjy hadysalardan (*G* işiň başlanmagy) durýandygyny görýäris. Bu 8-nji suratda aýdyň görünýär.

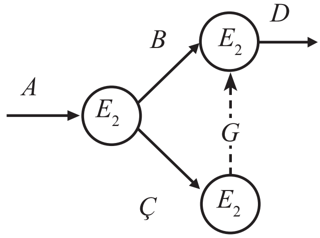


7-nji surat

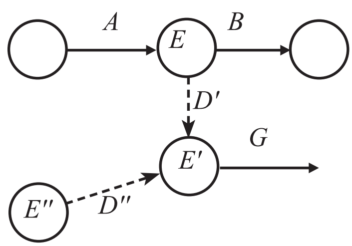


8-nji surat

Öňden gelmeleri we yzygiderliligi gabat gelýän *B* we *Ç* işleri biri-birine birikdirmek bolardy. Ýöne amalda bu hemişe maksadalaýyk däldir, sebäbi işleriň düzümi, ýerine ýetirmäge gatnaşyjylar we sarp edilýän çig mallar bu işler üçin düýbünden tapawutlanýarlar. Bu ýagdaýda ýasama (fiktiw) hadysalary we işleri girizmeklik maslahat berilýär (*9-njy surat*).

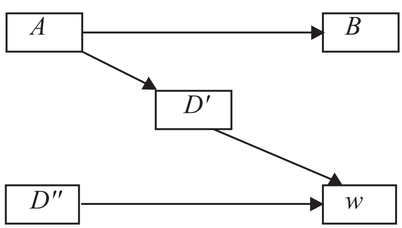


9-njy surat



10-njy surat

10-njy suratda *Ç* işiň iki sebäbe görä yza süýşürilendigi şekillendirilendir, olaryň biri *A* iş ýerine ýetirilenden soňky saklanma wagtydyr. Iki sany ýalan hadysalar *E*′, *E*″ we iki sany ýalan işler *D*′, *D*″ girizilen. Şeýle ýagdaý 11-nji suratda hem şekillendirilendir.



11-nji surat

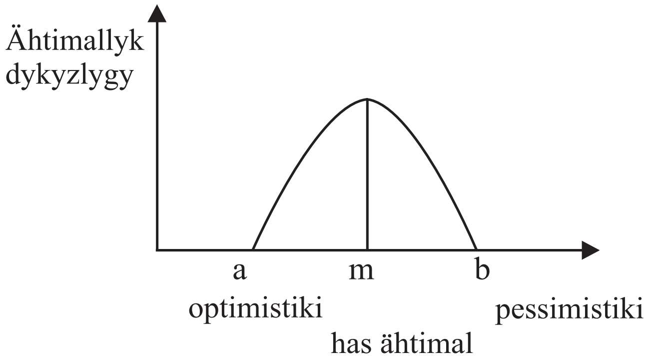
Ýokarda seredilen iki ýagdaýyň hersiniň öz amatlyklary we ýetmezçilikleri bardyr we olar meseläniň goýluşyna baglylykda seçilip alynýar. Iri taslamalar üçin belentlikli grafikleri hödürlemek bolar. Gözegçilik etmeli hadysalaryň sanynyň azlygy gözegçilik etmegi ýeňilleşdirýär. Ýöne görkezijili grafik meseläniň böleklere bölünmesini ýeňilleşdirýär. Hususan-da ol taslama täze gatnaşyklary girizmeklik we tory täzeden gurmazdan dugany goşmak arkaly işleriň tertibiniň gatnaşygyny üýtgetmäge ýardam edýär.

Işleriň ýerine ýetiriliş möhletiniň kesgitsizligi. Derňewleriň ýokarda getirilen usullarynda işleriň ýerine ýetiriliş wagtynyň takyk bellidigi çak edildi. Ýöne amalda işleriň ýerine ýetiriliş möhleti adatça kesgitli däldir. Önümçiligi dolandyryjy her işi ýerine ýetirmek üçin näçe wagtyň gerekdigini çaklap biler, ýöne ýüze çykjak kynçylyklary ýa-da ýerine ýetirmäniň saklanmasyny öňünden görüp bilmeýär. Işleriň ýerine ýetiriliş möhletiniň näbelliligi, taslamanyň umumy dowamlylygynyň hem şonuň ýaly näbellidigini aňladýar.

Bu näbelliligi göz öňünde tutmaklyga ýardam edýän usuly seçip almaklyk, taslamanyň görnüşine we näbelliligiň tebigatyna baglydyr. Eger-de her işiň minimal we maksimal dowamlylygyny kesgitläp bolsa, onda garaşylýan dowamlylygyň (ortaça) görkezijisiniň we taslamanyň ýerine ýetirilmesiniň garaşylýan wagtynyň kömegi bilen hasaplamak bolar. Has giňden ulanylýan algoritm, taslamany bahalandyrma we oňa gaýtadan seretme usullary diýlip atlandyrylýar (Project Evaluation and Reiew Technique – PERT). PERT usulynda taslamanyň ýerine ýetirilişiniň garaşylýan wagty hasaplananda işleriň ýerine ýetirilmesiniň garaşylýan wagtynyň görkezijileri ulanylýar. Algoritmiň galan bölegi işleriň ýerine ýetiriliş wagty, ýokarda takyk bellige alnan ululyk bolup durýan wagtyndaky ýagdaýda ulanylýan algoritme meňzeşdir.

Eger işleriň ýerine ýetiriliş wagtyna näbelliligiň täsiri ýetýän bolsa, onda grafikde howply däl ýollaryň uly ähmiýeti ýüze çykýar we şol halatda hemme işleriň ýerine ýetiriliş möhleti üýtgeýär. Amalda garaşylýan möhletleriň ähmiýeti esasyndaky ýol howply däl hasap edilse, onda ol howply ýollary kesgitleme usulynyň netijeliligine laýyklykda howply bolup biler.

Işleriň dowamlylygynyň geçirilişi hakyndaky öňünden döräň şertler PERT usulynyň esasyny düzýärler. Aýratyn alnan her işiň ýerine ýetirilme wagtynyň β – paýlamada approksimirlenýändigi çaklanýar. Eger bu çyn bolsa, onda tutuş taslamanyň ýerine ýetiriliş wagtyny paýlamaklyk kadaly bolup durýar. PERT usuly takyk taslamanyň derňewinde berlen şertler ýerine ýetirilen ýagdaýynda ulanylýar. Işleriň ýerine ýetirilmesiniň mümkin bolan has az wagty optimistiki möhlet (*a*), onuň ýerine ýetirlişiniň has köp wagty bolsa pessimistiki möhlet (*b*) diýlip atlandyrylýar. Aşakda wagta görä işleri ýerine ýetirmekde adaty *β*–paýlanma grafigi şekillendirilýär.



12-nji surat

Paýlanmanyň depesine işleriň ýerine ýetirilmesiniň has amatly wagty gabat gelýär (*m*). Grafige girýän hemme işler üçin bu üç möhletiň hemmesini aýratynlykda bahalandyrmak hökmanydyr.

Bu üç sany ähmiýetden ugur alyp, işleriň garaşylýan dowamlylygyny (*t*) we onuň dispersiýasyny tapmak bolar. Işleriň garaşylýan dowamlylygy aşakdaky görnüşde kesgitlenilýär:

$$\frac{a + 4m + b}{6}. \tag{29}$$

Garaşylýan dowamlylygyň gabatlaşýan dispersiýasy aşakdaky formula boýunça kesgitlenilýär:

$$\sigma_t^2 = \left[\frac{b - a}{6}\right]^2. \tag{30}$$

Taslamanyň ýerine ýetirilme wagtyny grafikden tapmak bolar, munuň üçin işleriň dowamlylygynyň garaşylýan ähmiýetinden peýdalanylýar. Taslamanyň ýerine ýetiriliş wagtynyň, umuman, kadaly kanun boýunça paýlanandygy çak edilýär.

Işleriň ýerine ýetiriliş möhletiniň biri-birine bagly däldiginiň çaklamasynda kadaly paýlamanyň ortaça ähmiýeti howply işleriň garaşylýan dowamlylygynyň matematiki jemi hökmünde, dispersiýa bolsa olaryň dispersiýalarynyň jemi hökmünde kesgitlenilýär. Alnan kadaly paýlanmanyň öňünde bellenen senedäki taslamanyň tamamlanmasyny ähtimallyk bahasy üçin ulanmak bolar.

PERT usulynyň algoritmi işleriň dowamlylygynyň bellige alnan ähmiýeti bilen tor grafigindäki derňewe meňzeşdir.

1. Öňünden gelýän işleri, ondan başga-da optimistiki işleri hökmany görkezmek bilen, taslama girýän hemme işleriň sanawyny we onuň ýerine ýetirilme möhletini düzmeli.

2. Tor grafigini gurmaly.

3. Islendik işiň ýerine ýetirilme wagtynyň β-paýlanmada approksimirlenýändigini çaklap, her iş üçin onuň ýerine ýetirilmesinde garaşylýan wagty we onuň dispersiýasyny bahalandyrmaly.

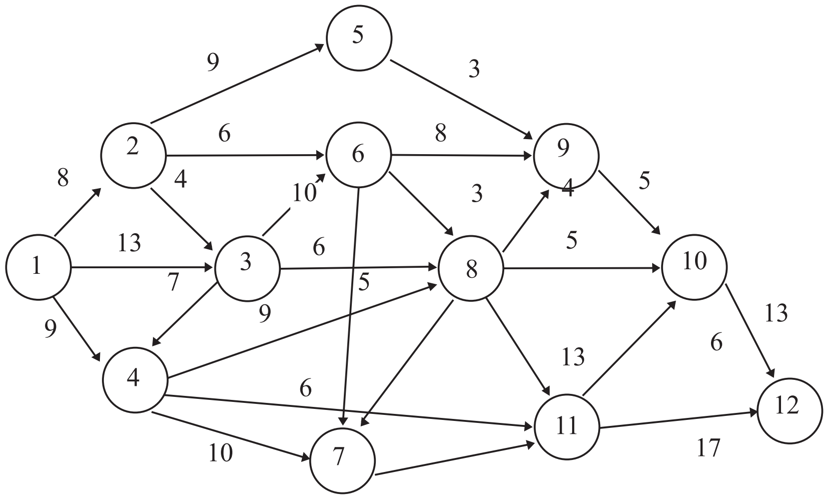
4. Işleriň ýerine ýetiriliş möhletiniň garaşylýan ähmiýetinden peýdalanyp, tutuş taslamanyň dowamlylygyny tapmaly.

5. Howply işleri we howply ýollary kesgitlemeli.

6. Howply işler üçin dispersiýa ähmiýetleriniň kömegi bilen tutuş taslamanyň garaşylýan dowamlylygynyň dispersiýasyny bahalandyrmaly.

Taslamany (proýekti) amala aşyrmak üçin gerekli bolan işlerden tory düzenimizde, tor grafikleriň derňewinde ýüze çykýan meseleleriň birnäçesine seredip geçeliň. Köplenç işleri baglanyşdyrýan hadysalaryň nomerleri (belgisi) arkaly belgilenýändigini öňünden ýatladyp geçeliň. Mysal üçin, 3-nji suratda A iş $P_{1,2}$ belgi, B iş $P_{2,3}$ belgi, $Ç$ iş $P_{3,5}$ belgi, D iş $P_{3,4}$ belgi we ş.m. bilen belgilenýär.

Taslamany derňemekligiň has giň ýaýran meselesi onuň ýerine ýetirilýän wagty boýunça taslamany bahalandyrmakdan durýar. Bu meselede her işiň ýerine ýetirilişiniň dowamlylygy ýeterlikli takyklykda bellenilýär. Işi belgilemäniň – görkezijiniň (strelkanyň) ýanynda işiň dowamlylygy görkezilýär. Hadysalaryň belgileri suratda tegelekleriň içinde görkezilen. Şeýle çemeleşmede ýüze çykýan birinji sorag şeýledir: seredilýän taslamanyň ýerine ýetirilişiniň minimal dowamlylygy näçe? Taslamanyň ýerine ýetiriliş dowamlylygyny bahalandyrmagyň köpsanly algoritmi bardyr. Olaryň biri aşakdakylardan durýar.



13-nji surat

U_i^--niň üsti bilen i-nji hadysa girýän birnäçe işleriň toplumyny belgileýäris, U_i^+-niň üsti bilen bolsa i-nji hadysadan çykýan işleriň toplumyny belgileýäris. Başlangyç hadysa E_1 üçin U_i^- köplük boşdur, U_i^+ köplük bolsa $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, $P_{1,4}$ işlerden ybaratdyr. Tamamlaýjy E_{12} hadysa üçin U_{12}^- köplük $P_{10,12}$ we $P_{11,12}$ işlerden ybarat, U_{12}^+ köplük bolsa boşdur. Galan E_i hadysalar üçin U_i^- we U_i^+ köplükleriň ikisi hem boş däldir. E_8 hadysa üçin U_8^- köplük $P_{6,8}$, $P_{3,8}$, $P_{4,8}$ işlerden ybarat, U_8^+ köplük bolsa $P_{8,9}$, $P_{8,10}$, $P_{8,11,}$ $P_{8,7}$ işlerden durýar. i-nji hadysanyň has ir amala aşyrylmagynyň t_i wagt pursady aşakdaky formula boýunça hasaplanylar:

$$T_j = \max(t_i + t_{ij}), \quad P_{ij} \in U_i^-, \tag{31}$$

bu ýerde t_{ij} – ol P_{ij} işiň ýerine ýetiriliş dowamlylygy. E_1 hadysa laýyklykda ol wagtyň pursady 0-a deň bolanda başlanýar. (31) formulanyň esasynda 13-nji suratdaky torlaryň hadysalaryndan hersiniň has irki amala aşyrylma döwrüni hasaplap bolar:

$$t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 20,\ t_5 = 17,\ t_6 = 23,\ t_8 = 29,$$

$$t_7 = 37,\ t_9 = 33,\ t_{11} = 42,\ t_{10} = 48,\ t_{12} = 61.$$

Tamamlaýjy hadysanyň iň irki gelme pursady tor grafikde modelirlenýän taslamanyň amala aşmasynyň iň az bolan dowamlylygydyr.

Taslamanyň ýerine ýetirilişiniň dowamlylygy, E_1 hadysadan E_{12} hadysasyna «has amatsyz ýolda» alnan işleriň dowamlylyklarynyň jemine deňdir. Bu «has amatsyz ýol» howply ýoldur. 13-nji suratda görkezilen tordaky howply ýol $P_{1,3}$; $P_{3,4}$; $P_{4,8}$; $P_{11,10}$; $P_{10,12}$ işlerden durýar. Howply ýollarda durýan hadysalara howply hadysalar diýilýär. Her işiň ýerine ýetiriliş dowamlylygynyň esasynda taslamanyň ýerine ýetirilme wagtyny tapyp bolar.Her grafikde birnäçe mümkin bolan ýollar bardyr. Haýsy-da bolsa bir ýoly geçmeklige gerekli bolan umumy wagt, bu ýola degişli ähli işleriň ýerine ýetiriliş wagtynyň jemidir.

Tutuş taslamanyň ýerine ýetirilme dowamlylygy uzak wagty eýeleýär. Has dowamly işler howply (kritiki) diýlip atlandyrylýar. Bu işleriň ýerine ýetirilmesinde işiň başlanmasynyň ýa-da tamamlanmasynyň islendik yza galmasy, tutuş taslamanyň ýerine ýetirilmesiniň saklanmagyna getirýär. Howply işler bütin grafikden geçýän üznüksiz zynjyry emele getirýärler. Howply işleriň bu zynjyry howply ýol diýlip atlandyrylýar. Her grafikde hiç bolmanda bir sany howply ýol tapylýar.

Taslamanyň ýerine ýetirilmesiniň umumy dowamlylygyny tapmak üçin, howply ýoluň dowamlylygyny kesgitlemek zerurdyr. Grafikleriň köpüsinde grafikleriň içinden geçýän has köp wagty eýeleýän ýollary tapawutlandyrmak kyndyr. Grafikde wagt hereketini yzarlamaklyga ýardam berýän iki sany usul bardyr:

1. Her iş üçin onuň ýerine ýetirilmesiniň başlangyç we soňky möhletlerini kesgitlemek.

2. Her hadysa üçin onuň gelmesinde has irki möhletleri kesgitlemek.

Ikinji usulyň diňe görkezijili grafikde ulanylýandygyny bellemek zerurdyr.

Eger haýsy-da bolsa bir sebäbe görä işiň ýerine ýetirilmesi saklansa, onda taslamanyň tamamlanmasy şol möhlete çenli uzaldylýar. Şonuň üçin taslamanyň ýolbaşçysy howply ýolundaky işleriň ýerine ýetirilişine esasy ünsi ugrukdyrmalydyr. Hut şunda hem torly grafikleriň derňewinde howply ýollar aýratyn belgilenýär.

Howply hadysalardan we işlerden başga-da, beýleki hadysalar we işler taslamanyň ýerine ýetirilişiniň umumy wagty üçin zyýansyz wagtda saklanyp bilner. Howply däl işleriň ýerine ýetirilişini saklamak üçin gerekli bolan wagty bahalandyrmak üçin ätiýaç wagt düşünjesi girizilýär.

Ilki bilen her E_i hadysanyň gelme wagtynyň çäkli möhletini bahalandyralyň, bu wagta E_i hadysasy üçin çäklendirilen wagt diýilýär.

Ony t_i^* bilen belgileýäris we E_1 hadysadan çykýan hem-de E_j hadysanyň çäkli wagtynda, P_{ij} işiň dowamlylygyny belläp hasaplaýarys:

$$t_i^* = \min(t_j^* - t_{ij}).$$

$$P_{ij} \in U_i^+. \tag{32}$$

(32) formuladan görnüşi ýaly, gutarnykly hadysanyň çäkli wagtyny bilip, toruň hemme hadysalary üçin çäklendirilen wagty tapgyrlaýyn hasaplamak bolar. 13-nji suratda görkezilen torda hadysalaryň çäklendirilen möhleti şu aşakdaky ähmiýetlerde bolýar:

$$t^*_{12} = 61,\ t^*_{10} = 48,\ \ t^*_{11} = 42\ \ t^*_9 = 43,$$
$$t^*_7 = 38,\ \ t^*_8 = 29,\ \ t^*_6 = 26,\ \ t^*_5 = 40,$$
$$t^*_4 = 20,\ \ t^*_3 = 13,\ \ t^*_2 = 9,\ \ t^*_1 = 0.$$

$[t_i, t_i^*]$aralyga E_i hadysanyň erkinlik aralygy (ätiýaç aralyk) diýilýär, $t_i^* - t_i$ululyga bolsa ätiýaçlyk wagty diýilýär. Eger-de E_1 hadysa erkin aralygyň içinde amala aşsa, onda bütewi taslamanyň amala aşma möhleti üýtgemän galar. t_1 wagtdan öň E_i hadysa geçmeýär, onuň t_i^* wagtdan soň amala aşmasy bolsa taslamanyň ýerine ýetirilme möhletiniň saklanmagyna getirýär.

E_1, E_3, E_4, E_8, E_{11}, E_{10}, E_{12} howply hadysalar üçin çäkli wagt t^*_i garyşylýan wagt t_i bilen gabat gelýär. Bu bolsa howply hadysalar üçin ätiýaçlyk aralygyň nola deňdigini aňladýar.

Ätiýaçlyk aralygyň hasabatyny geçirmezden toruň her aýratyn hadysasy üçin ätiýaçlyk wagty bahalandyrmaga mümkinçilik döreýär.

P_{ij} iş E_j hadysa eglenmez ýaly işi t_j wagta çenli gutarmaklyk hökmanydyr, beýleki tarapdan, P_{ij} iş t_i wagtdan öň başlanyp bilmez.

$$M_{ij} = t_j - t_i - t_{ij}\,, \tag{33}$$

bu P_{ij} iş üçin erkin ätiýaçlyk wagty. M_{ij} ululyga E_i hadysanyň gelmegine garaşylýan t_i wagty üýtgetmezden P_{ij} işiň ýerine ýetirilmegini saklamak bolar.

13-nji suratdaky torlaryň işi üçin işiň erkin ätiýaçlyk wagty şu aşakdaky ähmiýete eýedir:

$$M_{1,2} = 0,\ M_{1,3} = 0,\ M_{1,4} = 11,\ M_{2,5} = 0 \textit{ we ş.m.}$$

M_{ij} erkin ätiýaçlyk wagtyndan geçýän möhletde P_{ij} işiň ýerine ýetirilmeginiň yza galýandygyny bellemek bolar, ýöne E_j hadysa gelmekligi gijä galsa-da, iş toplumyny tutuşlykda ýerine ýetirmekde gijikmäni döretmeýär. Sebäbi E_j hadysanyň nol däl erkinlik aralygy bolup biler. Umumy taslamanyň ýerine ýetirilmeginiň gijikmesi diňe şol waka t^*_i wagt pursadyndan soň ýüze çyksa bolup biler. Şonuň üçin:

$$M^*_{ij} = t_j - t_i - t_{ij}. \tag{34}$$

$P_{i,j}$ işiň doly ätiýaçlyk wagty diýlip atlandyrylýan umumy taslamanyň ýerine ýetirilme möhletiniň üýtgetmesizligi P_{ij} işiň mümkin bolan gijikmesini häsiýetlendirýär.

Hadysalaryň we işleriň ätiýaçlygy taslamanyň çeýeligini häsiýetlendirýär. Olar näçe az bolsa, şonça-da taslamanyň tor grafigi berk bolýar, çeýeligi ýitýär. Eger-de torda wagt ätiýaçlygy bolmasa, onda hemme ýollar howpludyr, şonuň üçin işleriň hiç birinde hem gijikmelere rugsat edilmeýär. Adatça, taslamanyň tor grafiginde taslama boýunça işleriň tertibi meýilleşdirilende we onuň ýerine ýetiriliş döwründe ätiýaçlyk wagtlary goýulýar.

V BÖLÜM. KESGITSIZLIKDE YKDYSADY MODELLER WE ÝASAMA USULLAR

XI bap
Kesgitsizlikde ykdysady model

§1. Ykdysady modellerde kesgitsizlik. Kesgitsizlik faktorlarynyň esasy iki görnüşi

Ulgamyň optimal dolandyrylyşy matematiki dile geçirilende ýüze çykýan optimallaşdyrmak meselesine aşakdaky görnüşde goýmak bolar: $X(y)$ köplüge degişli bolan x nokatlaryň içinden girdejiniň ölçegi bolan $C(x, y)$ funksiýa iň uly baha berýän x^* nokady saýlap almaly. Bu ýerde y – ulgamy häsiýetlendirýän parametr (faktor). Determirlenen meselede ulgamyň parametri kesgitli baha eýe bolan diýip hasap edilýär, ýagny $y = y_0$. Gysgaldylan dilde meseläni

$$\max_{x \in X(y)} C(x,y), \;\; y = y_0,.$$

görnüşde ýazmak bolar. Eger y parametriň bahasy kesgitsiz, ýagny determinirlenmedik bolanda meseläni beýle görnüşde goýmak bolmaýar.

Deterministik däl, ýagny kesgitsiz faktorlar iki görnüşe bölünýärler.

I. Paýlanyş kanuny belli bolan *tötänleýin faktor*. Bu görnüşli faktor gündelik gaýtalanyp durýan hadysalar öwrenilende ýüze çykýar.

Mysal hökmünde telefon ulgamyny modelirlemek meselesini getirse bolar. Biz berlen wagt birliginde näçe sany telefon jaňynyň boljagyny kesgitli aýdyp bilmeýäris, emma jaňlaryň sanynyň paýlanyş funksiýasyny ýeterlik dowamly wagtyň içinde bolan jaňlaryň sanyny registrirlemek bilen hasap edip bileris.

II. *Kesgitsiz faktor*, ýagny faktor baradaky informasiýa diňe onuň haýsy hem boolsa bar bolan Y köplüge degişlidigi bilen çäklenýär: $y \in Y$.

Kesgitsiz faktorlar aşakdaky ýagdaýlarda ýüze çykyp biler.

1. Derňelýän ykdysady modelde derňewçi bilen bir hatarda onuň bilen deň bähbitleri aramaýan daşgaryn gatnaşyjylar hem bolanda. Meselem, daşary ýurtlar bilen ediljek söwda maksatnamalaşdyrylanda daşary ýurtlaryň etjek hereketlerini göz öňüne tutmak derkardyr; köp ýagdaýlarda şeýle hereketleriň nähili boljakdygyny öňünden kesgitlemek mümkin däl.

2. Kesgitsiz faktorlar hadysanyň ýa-da käbir ululyklaryň ýeterlik derejede öwrenilmändigi sebäpli hem ýüze çykyp biler. Mysal hökmünde howa şertini getirse bolar. Şeýle kesgitsizlige tebigy kesgitsizlik hem diýilýär.

3. Parametrler ýeterlik derejede mälim bolmasa, kesgitsiz faktorlar girdejisiniň ölçegi $C(x, y)$ funksiýanyň parametrleri bilen hem baglanyşykly bolup biler.

Bu işdäki serediljek meselelerde ulgamy häsiýetlendirýän faktorlar tötänleýin diýip hasap edilýär. Şeýle meselelere stohastik parametrli meseleler hem diýilýär.

Durmuşda duş gelýän stohastik parametrli meselelerde köp halatlarda gyzyklandyrýan häsiýetnamalary analitik görnüşde hasaplap bolmaýar. Şonuň ýaly ýagdaýlarda Monte Karlo usulyny ulanyp, gyzyklandyrýan häsiýetnamalary biri-birine bagly bolmadyk barlaglary geçirip, şol barlaglardan alnan netijeleriň ortaça bahasyny tapmak bilen hasaplanylýar.

Ýokarda belläp geçişimiz ýaly, adatça, stohastik parametrli meseleler gaýtalanyp durýan hadysalary derňemekde ulanylýar. Şonuň üçin şeýle meseleler derňelip netije çykarylanda, adatça, köp gaýtalananda ortaça optimal bolan çözüwi teklip edilýär.

Stohastik parametrli meselede y faktor paýlanyş funksiýasy belli bolan tötän ululyk diýip kabul edilýär. Şonuň bilen birlikde girdejiniň ölçegi $C(x, y)$ hem tötänleýin ululykdyr we onuň paýlanyş kanuny x dolandyryjy ululyga baglydyr.

Şeýlelikde, stohastik ulgamy optimallaşdyrmak meselesini aşakdaky görnüşde goýmak bolar (ýönekeýlik üçin, goý, *X* köplük *y* parametre bagly däl bolsun): $x \in X$ nokatlaryň içinden

$$\max_{x \in X} E[C(x,y)]$$

bahany berýän x^* nokady tapmaly, ýagny

$$E[C(x^*,y)] = \max_{x \in X} E[C(x,y)].$$

Bu ýerde *E* matematiki garaşmany aňladýar.

§2. Köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynda tötän faktorly modeller

Bu paragrafda ykdysady meselelerde iň köp duş gelýän model bolan köpçülige hyzmat ediş (KHE) ulgamynyň modeline seredilýär. KHE ulgamyny häsiýetlendirýän esasy zat hyzmat ediş enjamydyr (HEE). Hyzmat ediş enjamy KHE ulgamyna gowuşýan talaba kesgitli işleri ýerine ýetirmek bilen jogap berýär. Hyzmat ediş enjamynyň işjeňliginiň çäkliligi we talaplaryň yzygiderliginiň tötänleýin wagtlarda gowuşýanlygy sebäpli, KHE ulgamynda hyzmat edilmegine garaşýan talaplaryň nobaty emele gelýär. Käwagtlar bolsa HEE talabyň gowuşmagyna garaşyp boş durýar. Hyzmat edilmegine garaşýan nobat bilen baglanyşykly ýitgiler müşderileriň dükanlardaky, ulaglary ýangyç bilen üpjün ediji stansiýalardaky, uçarlaryň howa menzilinde garaşýan wagtyndaky çekýän ýitgileri bilen kesgitlenýär. HEE-niň boş durmagy ony satyn almak üçin sarp edilen serişdeleriň bisarpa ulanylýandygyny aňladýar.

Şeýlelikde, ykdysady nukdaýnazardan KHE ulgamyň işini dolandyrmak iki alternatiw meseläni, ýagny bir tarapdan hyzmat edilmegine garaşýan nobaty kiçeltmek we beýleki tarapdan HEE-niň boş durýan wagtyny azaltmak meselelerini çözmekden ybaratdyr.

KHE ulgamynda talaplar paýlanyş funksiýasy belli bolan kada boýunça tötänleýin wagt yzygiderliginde gelip gowuşýar diýip hasap edilýär. Birinji gezek şeýle model geçen asyryň başynda telefon stansiýasynyň işini derňemekde daniýaly matematik A.K. Erlang tarapyndan ulanylypdy. Şondan soň KHE nazaryýetiniň usulyýetleri söwda dükanlarynyň işini kämilleşdirmekde, ulag we aragatnaşyk ulgamlarynyň işini derňemekde, derýa we deňiz ýollarynyň işi derňelende, ulaglary ýangyç bilen üpjün edýän stansiýalaryň işini kämilleşdirmekde we başga-da köp meselelerde ulanylyp başlady.

Ýokarda agzalyp geçilişi ýaly KHE ulgamlary derňelende gowuşýan talaplaryň yzygiderligi tötänleýin we onuň ähtimallyk häsiýetnamalary berlen diýip hasaplanylýar. Pul ulgamy dolandyryjy parametrler hyzmat ediji enjamyň ýa-da nobata durmagyň kanunlaryny dolandyrýan parametrler bilen baglanyşykly bolýar. Netije çykarylanda hyzmat edilmegine garaşyp nobata durulandaky we hyzmat ediji enjamyň boş durandaky ýitgilerini azaltmaga çalşylýar.

Şeýlelikde, KHE ulgamy hyzmat ediji enjamdan, hyzmat edilmäge gowuşýan talaplaryň yzygiderliliginden we hyzmat edilmegine garaşýan talaplaryň nobatyndan ybaratdyr. Indi bolsa şu agzalan üç bölegiň her birine aýratynlykda giňişleýin seredip geçeliň.

Birinjiden, ulgamyň hyzmat ediji enjamy bir ýa-da birnäçe guraldan ybarat bolup biler. Bu ýerde gural diýip diňe bir jansyz gurala däl, eýsem talaplary kanagatlandyrýan islendik birlige, şol sanda meselä baglylykda, adama ýa-da birnäçe adamdan düzülen topara hem aýdylyp bilner.

Meselem, kinoteatrlarda petekler bir ýa-da birnäçe kassada satylyp bilner. Birinji ýagdaýda (bir kassa) hyzmat ediji enjam bir guraldan (kassirden) ybarat, ikinji ýagdaýda bolsa (birnäçe kassa) hyzmat ediji enjam birnäçe guraldan (kassirlerden) ybaratdyr.

Stansiýada ýangyç diňe bir benzokolonkada guýulýan bolsa, bir gurally hyzmat ediji enjamlaryň mysaly hökmünde awtoulaglary ýangyç bilen üpjün edýän stansiýany hem getirmek bolar. Başga mysallar: bir satyjysy bolan dükan, ýekeje dellekçisi bolan dellekhana, ýekeje uçuş meýdançasy bolan howa menzili we ş.m.

Köp gurally hyzmat ediş enjamly KHE ulgamy durmuşda has hem ýygydan duş gelýär: birnäçe satyjysy bolan dükan, birnäçe uçuş meýdançasy bolan howa menzili, birnäçe dellekçisi bolan dellekhana we ş.m.

Her gural birbada bir ýa-da birnäçe talaby kanagatlandyryp biler. Meselem, köp gatly jaýyň lifti birbada birnäçe adama, dellekçi bolsa diňe bir adama hyzmat edip biler. Hyzmat ediji enjamyň guraly talaby haýsam bolsa belli bir wagtyň dowamynda ýerine ýetirýär. Käbir meselede şol wagtyň dowamlylygy öňünden belli bolýar, käbirinde bolsa wagtyň dowamlylygy paýlanyş kanuny belli bolan tötänleýin ululyk bolup biler.

KHE ulgamyň ikinji bölegi, ýagny ulgama gowuşýan talaplaryň yzygiderligi hakynda aýdylanda ilki bilen belläp geçmeli zat talaplaryň tötänleýin wagtda gelip gowuşýandygydyr. Has takygy iki goňşy talabyň aralygyndaky dowamlylyk berlen kanunly tötän ululyk diýlip hasap edilýär. Bu dowamlylyklar özara baglanyşyksyz we deň kanun boýunça paýlanan hasaplanylýar. Käbir ulgamlarda şol bir wagtda birnäçe talaplar hem gowşup bilýär (meselem, dükana gelýän müşderiler). Adatça, talaplaryň yzygiderligi tükeniksiz hasaplanýar. Käbir modellerde eger hyzmat edilmegine garaşýan talaplaryň nobaty uzyn bolsa, täze gowşan talap hyzmat edilmegine garaşmazdan ulgamy taşlap gidip bilýär (meselem, eger dellekhanada garaşyp oturmaga ýer bolmasa). Käbir ulgamlarda, eger talap şol bada ýerine ýetirilmese, ol ulgamy taşlaýar (meselem, telefon stansiýasy).

Indi bolsa KHE ulgamynyň iň soňky, ýagny üçünji bölegi bolan hyzmat edilmegine garaşýan toplumlar nobatyny häsiýetlendireliň. Iň köp gabat gelýän ýagdaý ilki gowuşan talap ilki bolup hyzmat edilýär. Ýöne käbir seýrek duşýan ulgamlarda ýagdaý tersine hem bolup biler: iň soňky gowşan talaba ilki bilen hyzmat edilýär. Käbir ulgamlarda hyzmat edilmeli talap nobatda duran talaplaryň içinden tötänleýin kanun boýunça saýlanyp alynýar. Käbir KHE ulgamynda talaplaryň nobatynda käbir talaplara oňaýly ýagdaýda hyzmat edilip bilner (meselem, dellekhanada ýaşululara). Çäklendirilen wagtly nobatlar hem duş gelip biler: nobata duran talap belli bir wagtyň dowamynda ýerine ýetirilmese, ol nobaty taşlaýar (meselem, halkara telefon gürrüňleri).

Şeýlelikde, ýokardaky aýdylanlardan görnüşi ýaly, durmuşda gabat gelýän hyzmat ediş ulgamlarynyň aglabasy matematika dilinde KHE ulgamy hökmünde modelirläp bolýar. Belli bir model kabul edilenden soň ony derňemegiň usullary hakyndaky mesele ýüze çykýar.

Adatça, KHE modeli derňelende aşakdaky usul ulanylýar: hyzmat ediji enjam birnäçe wariant boýunça işläp biler diýip çaklanýar we ol wariantlaryň içinden KHE ulgamyny häsiýetlendirýän haýsy hem bolsa bir tötänleýin ululygyň (meselem, talabyň nobatda duran wagty, hyzmat ediji enjamyň boş duran wagty we ş.m.) ortaça bahasyna optimal (ýagny maksimum ýa-da minimum) baha berýän warianty saýlanyp alynýar. Ondan başga-da nobatyň ortaça uzynlygy, hyzmat ediji enjamyň üznüksiz işleýiş wagtynyň ortaça bahasy ýaly häsiýetnamalar hem gyzyklandyryp biler. Käbir ýagdaýda berlen KHE ulgamyň işlänindäki ýitgini (girdejini) bir ölçeg bilen kesgitläp bolýar. Şeýle bolanda derňewiň maksady her bir wariant üçin ýitginiň (girdejiniň) ölçeginiň ortaça bahasyny tapyp, olaryň içinden iň kiçi (uly) ortaça ýitgi (girdeji) berýän warianty saýlap almak bolýar. Şeýle mesele çözülende ähtimallyklar nazaryýetini ulanmak mümkindir.

Gynansak-da, çylşyrymly KHE ulgamlary derňelende bu nazaryýeti ulanmak çylşyrymlaşýar we onuň deregine statistiki modelirleme (başgaça ady Monte Karlo) usulyny ulanmak galýar.

Indi mysal hökmünde awtoulaglary ýangyç bilen üpjün ediji bekediň (gysgaça, stansiýa) birnäçe wariantynyň içinde iň optimal warianty tapalyň. Awtoulaglar bekede tötänleýin wagtda gelýärler we ýangyjy guýujy enjam boş bolmasa, nobata durýarlar. Nobatyň tertibi: ilki gelen ilki bolup hyzmat edilýär. Nobatyň uzynlygyna hiç bir çäklendirme ýok – awtoulag başga stansiýa gidip bilmeýär. Derňewi ýönekeýleşdirmek üçin beket diňe bir ýangyç guýujy gural bilen üpjün edilen diýip hasaplaýarys. Bir görnüş beýleki bir görnüşden ýangyç guýujy guralyň öndürijiligi bilen tapawutlanýar.

Şeýlelikde, goý, awtoulag bekede tötänleýin wagtda gelýän bolsun. Has takygy, goý, islendik kiçi $(t, t+\tau)$ wagt interwalynda bekede awtoulagyň geliş ähtimallygy $\lambda\tau + 0\ (\tau)$ bolsun we iki kesişmeýän wagt interwallary $(t_1, t_2), (t_3, t_4), (t_2 \leq t_3)$ üçin awtoulagyň (t_1, t_2) interwalda gelmek we $(t_3; t_4)$ interwalda gelmek hadysalary özara baglanyşyksyz bolsun. λ ululygyň $(\lambda > 0)$ wagt birliginde bekede gelen awtoulaglaryň ortaça sanydygyny subut etmek bolar. $1/\lambda$ ululyk bolsa awtoulagyň peýda bolýan wagtynyň ortaça bahasyna deňdir. Eger τ kiçi bolanda $(t, t + \tau)$ wagt böleginde hiç bir awtoulagyň gelmezliginiň ähtimallygy $1 - \lambda\tau + 0\ (\tau)$ sana deňdir. Şol wagt böleginde iki ýa-da ikiden köp awtoulagyň gelmek ähtimallygy 0 (τ)-a deňdir. Ýokardaky sanalan çaklamalar aşakdaky netijelere getirýär:

1) iki awtoulagyň peýda bolmagynyň arasyndaky geçen t wagt tötänleýindir we onuň paýlanyş kanunynyň dykyzlygy

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

funksiýa deňdir;

2) islendik (t, $t + T$) wagt interwalynda gelip gowşan awtoulaglaryň sany aşakdaky Puassonyň kanunyny kanagatlandyrýar:

$$p(n) = P(v = n) = \frac{(\lambda T)^n 3^{-\lambda t}}{n!}, n = 0, 1, 2, ...$$

Indi awtoulaga hyzmat ediş wagtyna seredip geçeliň. Her müşderi (awtoulagyň sürüjisi) bekede gelende ýangyjy özüne gerek bolan mukdarda talap edýär. Şonuň üçin hyzmat ediş wagtyny tötänleýin ululyk hasaplamak tebigydyr. Goý, t wagta çenli hyzmat edilip durlan awtoulagyň kiçi $(t, t + \tau)$ wagt böleginde ýumşuň bitiş ähtimallygy $\mu t + 0(\tau)$ deň bolsun. Diýmek, şol wagt bölejiginde awtoulaga hyzmat edilip ýetişmezligiň ähtimallygy $1 - \mu\tau + 0(\tau)$ deň we birnäçe ulagyň hyzmat etmek ähtimallygy $0(\tau)$ ululyga deňdir. Şeýlelik bilen hyzmat etmäge sarp edilen wagt t eksponensial kanun boýunça paýlanandyr:

$$f_2(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

μ ululyk wagt birliginde hyzmat edilen awtoulaglaryň sanynyň ortaça bahasyna deňdir, $1/\mu$ bolsa bir awtoulaga hyzmat etmek üçin sarp edilen wagtyň ortaça bahasyna deň.

Indi bolsa awtoulaglary ýangyç bilen üpjün ediji bekediň işini derňemäge geçeliň. Munuň üçin nobatyň uzynlygy, awtoulagyň garaşan wagty, ýangyç guýujy enjamyň boş duran wagty ýaly ululyklaryň ortaça bahasyny bilmeli. Bekediň işi λ we μ parametrlere baglydyr. Birinji parametr, ýagny λ wagt birliginde gelýän awtoulaglaryň ortaça bahasyna deňdir. Şonuň üçin biz ol parametri berlen diýip hasaplaýarys we ony üýtgedip bilmeýäris. Ikinji parametr, ýagny λ ululyk wagt birliginde hyzmat edilen awtoulaglaryň ortaça bahasyna deňdir we biz onuň bahasyny üýtgedip bilýäris. μ ululygy üýtgedemizde, ilki bilen $\mu \geq \lambda$ şerti göz öňüne tutmalydyr. Dogrudan hem, eger tersine, ýagny $\mu < \lambda$ bolanda wagt birliginde gowuşýan awtoulaglaryň ortaça bahasy şol wagtyň dowamynda hyzmat edilen awtoulaglaryň ortaça sanyndan uly bolýar. Diýmek, nobatyň uzynlygy wagtyň geçmegi bilen ösýär. Bu bolsa stansiýanyň işiniň kanagatlanarlyk däldigini aňladýar. $\lambda < \mu$ şerti ýerine ýetende belli bir başlangyç wagt geçenden soň stansiýanyň işi durnukly ýagdaýa geçýär, ýagny ýokarda sanalan statistiki häsiýetnamalaryň (nobatyň uzynlygy, awtoulagyň garaşan wagty we ş.m.) ortaça bahasy wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär. Durnukly ýagdaýyň statistiki häsiýetnamasyny öwreneliň.

Goý, $P(n)$ beketdäki awtoulaglaryň (hyzmat edilip duran we hyzmat edilmegine garaşyp nobatda duran) umumy sanynyň n-e deňdiginiň ähtimallygy bolsun. $P(0), P(1), ...$ yzygiderlige nobatyň uzynlygynyň paýlanyş kanuny diýip aýdylýar. Bu yzygiderligiň üsti bilen bizi gyzyklandyrýan her bir statistiki häsiýetnamanyň ortaça bahasyny tapmak bolar. Şonuň üçin häzir biz şol yzygiderligi tapmagyň usulyna geçeliň.

Goý, $[t, t + \tau]$ dowamlylygy ýeterlik derejede kiçi bolan wagt kesimi bolsun we $P_0(0), P_0(1), ..., P_\tau(0), P_\tau(1), ...,$ şol wagt kesimiň başlangyjyndaky (ýagny t wagtdaky) we ahyryndaky (ýagny $t + \tau$ wagtdaky) nobatyň uzynlygynyň paýlanyş kanunlary bolsun. Bu wagt kesiminiň dowamynda ýene-de bir awtoulagyň gelmek ähtimallygy $\lambda\tau$-a deň, hyzmat edilip duran awtoulagyň ýumşunyň bitmeginiň ähtimallygy bolsa $\mu\tau$-a deň. Görkezilen wagt kesiminiň ahyrynda (ýagny $t + \tau$ wagtda) hiç hili ulag bomazlygy üçin ýa başky t wagtda hiç hili ulag bolman wagt kesiminiň dowamynda hem hiç hili ulagyň gowuşmazlygy, ýa-da beketde bir ulag bolup, ahyrky wagta çenli onuň hyzmatynyň bitirilmegi ýeterlikdir hem zerurdyr.

Şeýlelikde,

$$P_\tau(0) = P_0(0)(1 - \lambda\tau) + P_0(1)\,\mu\tau.$$

Edil ýokardaky aýdylanlara meňzeşlikde,

$$P_\tau(1) = [P_0(0)\,\lambda\tau + P_0(1)(1 - \lambda\tau)](1 - \mu\tau) + P_0(2)(1 - \lambda\tau)\mu\tau.$$

Wagt kesiminiň dowamlylygy bolan ululygyň kiçidigini nazara alyp, ahyrky deňlikdäki τ^2-a proporsional agzalary taşlap bileris we

$$P_\tau(1) = P_0(0)\,\lambda\tau + P_0(1)(1 - \mu + \lambda\tau) + p_0(2)\mu\tau$$

deňligi alarys.

Indi bolsa stansiýanyň işini durnukly ýagdaýa çykanynda derňeýändigimizi göz öňüne tutalyň. Diýmek, $t + \tau$ wagtlardaky nobatyň uzynlygynyň paýlanyş kanunlary birmeňzeşdir:

$$P_\tau(n) = P_0(n) = P(n),\ n = 1, 2, ...$$

Aýdylany ulanyp gyzyklandyrýan ähtimallyklara görä

$$-\lambda P(0) + \mu p(1) = 0.$$

$$\lambda P(0) - (\lambda + \mu)\mathrm{P}(1) + \mu\, P(2) = 0 \qquad (1)$$

deňlemeler ulgamyny alarys. Bu ulgamyň ikinji deňlemesini alanymyzdaky esaslandyrmalara meňzeş esaslary ulanyp, islendik $n \geq 1$ natural san üçin

$$\lambda P(n-1) - (\lambda + \mu)\,\mathrm{P}(n) + \mu P(n+1) = 0,\ \ n = 1, 2, ... \qquad (2)$$

deňlemeler ulgamyny almak bolar.

Indi alnan (1)-(2) deňlemeler ulgamyny derňäliň. (1)-nji deňlemeden

$$P(1) = \frac{\lambda}{\mu} P(0)$$

baglanyşygy, (2) deňlemeler ulgamyndan $n=1$ bolanda

$$P(2) = \frac{(\lambda - \mu)}{\mu} P(1) - \frac{\lambda}{\mu} P(0) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P(0)$$

baglanyşygy alarys. Aýdylanlary dowam edip islendik $n \geq 1$ natural san üçin

$$P(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P(0),\ n = 1, 2, ... \qquad (3)$$

baglanyşygy alarys. Ähtimallyklaryň jeminiň bire deňlik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$$

kanunyny we (3) baglanyşygy ulanyp,

$$P(0) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 \qquad (4)$$

deňligi alarys. Bu ýerde $\rho = \lambda/\mu$. Soňky deňlikden görnüşi ýaly, $\rho < 1$ şert ýokardaky getirilen derňewiň ulanyp bolýan şertidir. Ýagny

$\rho \geq 1(\lambda \geq \mu)$ deňligiň çep tarapyndaky jem tükeniksizlige deňdir. $\rho < 1$ şert ýerine ýetende bu jem tükeniklidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}. \tag{5}$$

Şeýlelikde, bu ýagdaýda nobatyň uzynlygynyň paýlanyş kanunyny anyk görnüşde tapyp bolýar:

$$P(0) = 1 - \rho, \; P(n) = \rho^n(1-\rho), \; 1, 2, \ldots$$

Indi biz ulgamyň käbir häsiýetnamalaryny tapyp bileris. Birinjiden, bekediň $[t, t + T]$ wagt aralygynda boş duran wagtynyň ortaça mukdarynyň şol aralygyň dowamlylygyna bolan gatnaşygyny E_1 belgi bilen bellesek, onda $E_1 = P(0) = 1 - \rho$ netijäni alarys.

Diýmek, ρ ululyk stansiýanyň $[t, t + T]$ wagt aralygyndaky işlän ortaça wagtynyň şol wagt aralygynyň dowamlylygyna bolan gatnaşygyna deň bolýar. Şonuň üçin ρ ululyga peýdalylyk koeffisiýenti ýa-da boş dällik koeffisiýenti hem diýilýär.

Eger beketdäki awtoulaglaryň ortaça sanyny E_2 belgi bilen bellesek, onda

$$E_2 = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n (1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n.$$

Iň soňky jemi hasaplamak üçin (5) deňligiň iki tarapyny hem ρ parametre görä differensirleýäris we

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

netijäni alýarys. Diýmek:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Şeýlelikde:

$$E_2 = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Indi nobatyň ortaça uzynlygyny tapalyň. Eger beketde hiç hili awtoulag bolmasa, onda nobatyň uzynlygy 0-a deň we beketde n awtoulag bar bolsa, onda nobatyň uzynlygy n-1-e deňdir. Şonuň üçin eger biz nobatyň ortaça uzynlygyny E_3 belgi bilen bellesek onda:

$$E_3 = 0P(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) - \sum_{n=1}^{\infty} P(n) =$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho} - p = \frac{p^2}{1-p}.$$

Edil ýokardaky hasaplaşymyz ýaly, bizi gyzyklandyrýan beýleki häsiýetnamalary hem hasaplamak mümkindir. Meselem, awtoulagyň beketde ortaça duran wagty

$$E_4 = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

we nobatda duran wagtynyň ortaça bahasy

$$E_5 = \frac{1}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

bahalara deňdir.

Geçirilen derňew, ýangyç bilen üpjün ediji bekediniň dürli görnüşleriniň içinden iň oňaýly usulyny saýlap almaga mümkinçilik berýär. Mysal hökmünde, goý, iki awtoulagyň bekede gelen wagtynyň ortaça aralygy 4 minuta deň bolsun (ýagny $1/\lambda = 4$ minut). Goý, stansiýanyň 5 warianty bolup, olar biri-birinden awtoulaga ortaça hyzmat ediş wagty bilen tapawutlanýan bolsunlar: $1/\mu_1 = 5min; 1/\mu_2 = 3min\ 30sek; 1/\mu_3 = 2\ min; 1/\mu_4 = 1\ min;$ $1/\mu_5 = 30\ sek.$

Dürli wariantlar üçin ulgamyň işine täsir edýän parametrleriň bahalary aşakdaky 1-nji tablisada berlendir.

1-nji tablisa

Wariant	λ	$1/\lambda$	μ	$1/\mu$	ρ
1	0.25 min.	4 min	0.2 min.	5 min	1.25
2	0.25 min.	4 min	0.286 min.	3 min.30 sek	0.875
3	0.25 min.	4 min	0.5 min.	2 min	0.5
4	0.25 min.	4 min	1 min.	1 min	0.25
5	0.25 min.	4 min	2 min.	30 sek	0.125

Dürli wariantlar üçin $E_1, E_2, ..., E_5$ statistiki häsiýetnamalaryň bahalary 2-nji tablisada görkezilen. Bu tablisa bellenen wariantlaryň içinden iň oňaýlysyny saýlap almakda gollanma bolup biler.

Birinji wariantda nobatyň ortaça uzynlygy tükeniksiz bolanlygy üçin hiç bir nukdaýnazardan oňaýly bolup bilmeýär.

Ikinji wariant peýdalylyk koeffisiýenti ρ-niň ýokary bahasy we hyzmat ediji enjamyň ortaça işsiz duran wagtynyň ($E_1 = 0,125$) kiçiligi bilen tapawutlanýar. Emma bu görnüşde awtoulaglaryň nobatynyň ortaça uzaklygynyň (ortaça uzaklygy 7 ulag) we şonuň bilen baglylykda awtoulagyň ýitirýän ortaça wagtynyň ($E_4 = 28min$) ýokary bahalary bilen tapawutlanýar.

Üçünji wariantda hyzmat ediji enjam orta hasap bilen 50% wagtyň dowamynda boş durýar, ýöne nobatky ulaglaryň ortaça sany bary-ýogy bire deň we awtoulagyň ýitirýän ortaça wagty dört minuta deň. Galan wariantlarda ortaça aýdylanda nobatda duran awtoulag ýok diýsegem bolar, emma hyzmat ediji enjam wagtynyň köp bölegini boş durýar.

2-nji tablisa

Wariant	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
1	–	–	–	–	–
2	0.125	7	6.13	28 min.	24 min.30 sek
3	0.5	1	0.5	4 min.	2 min.
4	0.75	1/3	1/12	1 min.20 sek	20 sek.
5	0.875	1/7	1/56	34 sek.	4 sek.

Görnüşleriň içinde has oňaýlysyny saýlap almak üçin bize käbir goşmaça maglumat gerek. Meselem, goý, hyzmat ediji enjamyň bir wagt birliginde boş durmagy C1 mukdardaky gymmatlyk birligiň (meselem, manadyň) ýitgisene getirýär we awtoulagyň bir wagt birligindäki garaşyp durmagy C2 mukdarly ýitgä getirýär diýip çak edeliň.

Diýmek, eger beketde hiç bir ulag bolmanda onda bir wagt birligindäki ýitgi C_1-e, eger ulaglaryň sany n-e deň bolsa, bir wagt birligindäki ýitgi C_2-ä deň bolar.

Şeýlelikde, bir wagt birligindäki ortaça ýitgi $C(\lambda;\mu)$ aşakdaky jeme deňdir:

$$C(\lambda,\mu) = C_1P(0) + C_2[1P(1) + 2P + ...] =$$
$$= C_1E_1 + C_2E_2 = C_1(1-p) + C_2\frac{p}{1-p}. \qquad (6)$$

Hyzmat ediji enjamyň boş durandaky ýitgisi C_i-i hemişelik sandyr. Umumy ýagdaýda ol ululyk hemişelik bolman biler, meselem ol her bir görnüş üçin aýratyn baha eýe bolup biler. Şeýle bolanda hem (6)-njy formula güýjünde galýar, ýöne C_1 koeffisiýent görnüşe bagly bolýar. Meselem, goý, ýokarda seredilip geçilen 5 wariantly mysalda C_1-iň bahasy 1-nji görnüşde 1-e, 2-nji görnüşde 1.5-e, üçünji görnüşde 2-ä, dördünji görnüşde 4-e we bäşinji görnüşde 8-e deň bolsun. Goý, ululyk 1-e deň bolsun. Onda bir wagt birligindäki ýitgi birinji wariantda tükeniksizlige (sebäbi $E_2 = \infty$), ikinji wariantda $1,5 \cdot 0,125 + 7 = 7,1875$-e, üçünjide 2 · 0,5 + 1 = 2-ä, dördünjide 4 · 0,75 + 1/3 = 3,3333-e we bäşinjide 8 · 0,875 + 1/7 = 7,1429-a deňdir.

Diýmek, wariantlaryň içinde iň oňaýlysy (ýitginiň azy) ikinji wariantdyr.

Getirilen mysalda biz iň ýönekeý ýagdaýa seredip geçdik: gelýän talaplar Puassonyň yzygiderligini emele getirýär, hyzmat ediş wagty eksponensial kanun boýunça paýlanan we diňe bir hyzmat ediji gural. Durmuşda duş gelýän KHE ulgamlarynda ýagdaý has çylşyrymlaşýar we köp halatlarda ýokardaky ýaly gyzyklandyrýan häsiýetnamalary analitik görnüşde hasaplap bolmaýar. Şonuň ýaly ýagdaýlarda Monte Karlo usulyny ulanyp gyzyklandyrýan häsiýetnamalary biri-birine bagly bolmadyk barlaglary geçirip, şol barlaglardan alnan netijeleriň ortaça bahasyny tapmak bilen hasaplanylýar.

Indi bolsa tötänleýin parametrli ykdysady meseleleriň durmuşda giňden ýaýranlarynyň ýene-de bir görnüşi – serişdeleri dolandyrmakda tötän faktorly modellere geçeliň.

§3. Serişdeleri dolandyrmakda tötän faktorly modeller

Serişdeleri dolandyrmakda tötän faktorly modelleriň öz içine alýan usullary aşakdaky ýaly meseleler çözülende ulanylýar, ýagny üznüksiz talap edilýän haýsy hem bolsa bir önümiň serişdeleriniň mukdary näçe bolmaly? Şeýle meselede gürrüň serişdäniň optimal mukdary hakda gidýär. Dogrudan-da, eger biz serişdäni gereginden artyk ýa-da gereginden az mukdarda basyp goýsak, onda biz harydyň ammarda ýatanlygy üçin, ýa-da şol haryda bolan talaby ýerine ýetirip bilmänligimiz üçin belli bir mukdarda ýitgi çekýäris. Köp meselelerde haryda bolan talap (ýagny talabyň gowşan wagty we talap edilýän harydyň mukdary) tötänleýin diýip hasaplanylýar. Şeýle bolanda serişdeleri dolandyryş modeli tötänleýin faktorly mesele hökmünde seredilip bilner.

Serişdeleri dolandyrmak modeli köpdürli ykdysady meselelerde gabat gelýär. Şolaryň içinde iň köp duşýany dükanlaryň işini dolandyryş meselesidir. Bu meselede haýsy hem bolsa belli bir harydyň dükandaky serişdelerine garalýar. Bu haryda bolan talap paýlanyş kanuny belli bolan tötänleýin ululyk diýip çaklanylýar. Dükandaky serişdäniň üsti dükany dolandyryjynyň talaby boýunça wagtal-wagtal doldurylyp durulýar. Şonda, ýagny dükanyň dolandyryjysyndan haryt bilen üpjün ediji ammara (sklada) talap barandan isleg bildirilen mukdardaky harydyň dükana gelip gowuşýança belli bir wagt sarp edilýär. Şol wagtyň dowamlylygy kesgitli ýa-da tötänleýin ululyk bolup biler.

Dükany dolandyryjynyň öňünde ammara haçan we näçe mukdarda haryt talap etmeli diýen mesele ýüze çykýar. Şeýle soraga serişdeleri dolandyrmakda tötän faktorly modeller jogap berýär.

Indi bolsa serişdeleri dolandyrmaga degişli bolan meseleleriň içinde iň ýönekeý mysallaryň birine garalyň. Bu mysalda ýekeje görnüşli we islendik gatnaşykda bölünýän haryda garalýar. t wagtda harydyň dükandaky mukdaryny $Z(t)$ bilen belläliň. Meseläni has ýönekeýleşdirmek üçin goý, haryda bolan talap kesgitli (ýagny tötänleýin däl) bolsun. Has dogrusy, goý, haryda bolan talap wagt boýunça üznüksiz (ýagny islendik wagt böleginde haryt sarp edilýär) we islendik $(t,\ t + dt)$ wagt aralygynda sarp edilen harydyň mukdary λdt ululyga deň bolsun. Adatça, serişdeler dolandyrylanda haýsy hem bolsa bir s ululyk saýlanyp alynýar we harydyň dükandaky mukdary şol ululykdan pese düşse (ýagny $Z(t) \leq s$ bolanda), dükanyň dolandyryjysy q mukdardaky harydyň iberilmegini sorap, ammara talap iberýär. Biziň ýönekeý modelimizde, goý, ammara iberilen sargyt θ wagtdan soň ýerine ýetirilsin. Diýmek, dowamlylygy θ-ä deň bolan wagt aralygyndan soň harydyň dükandaky mukdary q ululyga artar. Diýmek, dükandaky harydyň mukdary $Z(t)$ aşakdaky deňleme bilen beýan edilýär:

$$Z(t) = Z(0) - \lambda t + W(t).$$

Bu ýerde $W(t)$ – ammardan $[0, t]$ wagt aralygynda gelip gowşan harydyň jemi mukdary. Ýokarda aýdylyşy ýaly, dükandan ammara talap iberilmek şertini $Z(t) \le s$ görnüşde ýazyp bolar. Diýmek, eger $[0, t]$ wagt aralygynda ammardan dükana $n(t)$ gezek haryt gelen bolsa, onda ammardan gelip gowşan harydyň umumy mukdary aşakdaka deňdir:

$$W(t) = qn(t).$$

Eger q_θ dükandan ammara talap iberilmegi bilen şol talap boýunça dükana harydyň gelip gowuşýança geçen wagt aralygynda sarp edilen harydyň mukdary bolsa, onda $q_\theta = \lambda\theta$. Diýmek, ammardan dükana harydyň gelen wagtynda dükandaky harydyň mukdaryny S bilen belgilesek, onda

$$S = s - q_\theta + q = s - \lambda\theta + q.$$

Kesgitlilik üçin, goý, başlangyç $t = 0$ wagtda dükandaky harydyň mukdary S-e deň bolsun, ýagny $Z(0) = S$. Diýmek, dükandaky harydyň ilkinji gezek s derejä ýetjek τ_1 wagtyny

$$\tau_1 = \frac{S - s}{\lambda}$$

deňlik bilen kesgitlemek bolar. τ_1 wagtda dükandan ammara talap iberiler we θ wagtdan soň ammardan dükana q mukdardaky haryt geler, şondan soň, ýagny $\tau_1 + \theta$ wagtda dükandaky harydyň mukdary ýene-de başlangyç wagtdaky ätiýaçlyk $Z(0) = S$-e deň bolar. Şondan soň hemme zat gaýtalanýar. $[0, t]$ wagt aralygynda dükanyň ammara iberen talaplarynyň ýerine ýeten sany $n(t)$-ni hasaplamak üçin $[0, t]$ kesimde näçe gezek $\tau = \tau_1 + \theta$ uzynlykly kesimiň ýerleşenligini hasaplamaly:

$$n(t) = \left[\frac{t}{\tau}\right].$$

Bu ýerde $[a]$ bilen a sanyň bitin bölegi aňladylan. Indi τ ululygy τ_1 we θ ululyklaryň üsti bilen aňladyp,

$$\tau = \tau_1 + \theta = \frac{S-s}{\lambda} + \theta = \frac{S-s+q_\theta}{\lambda} = \frac{q}{\lambda}$$

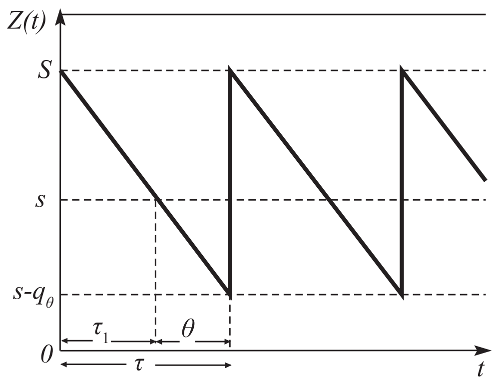
deňligi alarys. Şeýlelikde

$$n(t) = \left[\frac{t}{\tau}\right] = \left[\frac{\lambda t}{q}\right]$$

we

$$Z(t) = S - \lambda t + q\left[\frac{\lambda t}{q}\right].$$

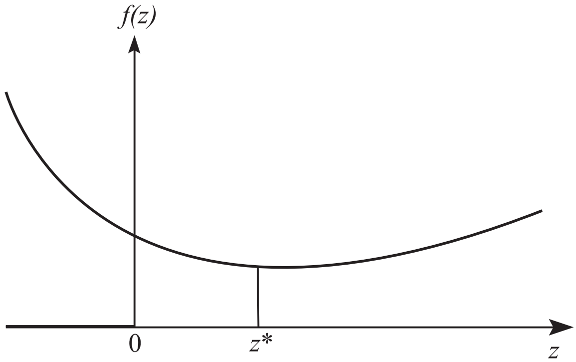
Ätiýaçlygyň mukdary $Z(t)$ funksiýanyň grafigi 1-nji suratda şekillendirilen.



1-nji surat

(7) deňleme bilen biziň garaýan modelimiz doly beýan edilýär. Garalýan meselede serişdeleri dolandyrmagyň maksady s we q parametrleriň içinden iň oňaýlysyny saýlap almakdyr. Bu ýerde «oňaýly» diýip biz çykdajynyň ölçegine iň kiçi baha berýän ýagdaýa aýdýarys.

Serişdeleri saklaýan ulgamlardaky çykdajy, esasan, iki görnüşden, ýagny $Z(t)$ serişdäni saklamak üçin sarp edilen çykdajylar we onuň üstüni doldurmak üçin ammara iberilen talap bilen baglanyşykly çyk dajylardan ybaratdyr. Goý, serişde $Z(t) = z$ bolanda bir wagt birligindäki ätiýaçlygy saklamak üçin edilen çykdajy $f(z)$-e deň bolsun. Çykdajyny kesgitleýän $f(z)$ funksiýanyň grafiginiň mysaly 2-nji suratda şekillendirilen.



2-nji surat

Z serişdäniň otrisatel bahalarynda (ýagny haryda bolan talaby ýerine ýetirilip bilinmedik ýagdaýynda) $f(Z)$ funksiýa kemelýän funksiýadyr; belli bir z^* nokatda (serişdeleriň mukdarynyň iň optimal bahasynda) ol funksiýa minimum baha eýe bolýar we ondan soň artyp başlaýar.

Iň ýönekeý ýagdaýda ammara iberilen talap bilen baglanyşykly çykdajy

$$c(d) = c_0 + c_1 d$$

baglanyşyk bilen şekillendirilýär. Bu ýerde ammara d mukdardaky harydyň sargyt edilendäki çykdajysy $c(d)$ bilen bellenen.

Adatça, serişdeleri saklamagy dolandyrylanda ulgamyň bir wagt birligindäki ortaça çykdajysyny minimizirlemäge çalşylýar. Ýokarky aýdylanlardan gelip çykyşyna görä, serişdäniň wagt boýunça periody τ-a deň bolan periodik funksiýadyr (*1-nji surata seret*). Ammara iberilýän sargytlar hem periodik bolanlygy üçin bir wagt birligindäki çykdajy

$$V(s,S) = \frac{1}{\tau}\left[\int_0^{\tau} f(Z(t))dt + c(q)\right]$$

formula bilen kesgitlenýär. Diýmek, garalýan ulgamy optimal dolandyrmak $V(s,S)$ funksiýany minimallaşdyrýan s^* we S^* parametrleri tapmakdan ybaratdyr. Eger käbir a_1 we a_2 otrisatel bolmadyk sanlar üçin

$$f(Z)=\begin{cases}-\alpha_1 Z, & Z\le 0\\ \alpha_2 Z, & Z\ge 0\end{cases}$$

bolanda optimal parametrler

$$s^*=-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{2\lambda c_0}{\alpha_1+\alpha_2}}+\lambda\theta,\qquad S^*=\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{2\lambda c_0}{(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

formulalar bilen kesgitlenýär.

Şeýlelikde, biz determinirlenen ätiýaçlyklary dolandyryş modeline seretdik. Emma durmuşda duşýan serişdeleri dolandyryş meseleleriniň aglabasynda haryda bolan talap determinirlenen funksiýa däl-de, tötänleýin funksiýa bolýar. Şeýle meseleleriň biri hökmünde awtoulaglaryň ätiýaçlyk şaýlaryny satýan dükanyň işini getirip bolar. Mysal üçin, goý, dükanda bir hili haryt toplanan bolsun (meselem awtoulaglaryň tekerleri). Adatça, dükana talaplar biri-birine baglanyşyksyzlykda köp sany müşderilerden tötänleýin wagtlarda gelip gowuşýar. Ýöne islendik iki ýanaşyk gowuşan talaplaryň arasyndaky geçen wagt birmeňzeş paýlanan we biri-birine baglanyşyksyz tötänleýin ululyklaryň yzygiderligi diýip çaklamak bilen şeýle ulgamy dürs modelirläp bolar. Ulgamy dolandyryjy s we q parametrleriň içinden iň oňaýlysy saýlananda dükanyň bir wagt birligindäki ortaça ýitgisini mümkin boldugyça kiçeltmek ýoly esas bolýar. Agzalan parametrleri analitiki usul bilen saýlap almagy tötänleýin yzygiderligiň diňe käbir modelleri üçin amala aşyryp bolýar. Eger tötänleýin yzygiderlik ýönekeý bolmasa, ulgam bir-biri bilen baglanyşykly birnäçe dükandan ybarat bolup, isleg bildirilýän haryt bolsa birnäçe görnüşli bolanda analitiki usuly ulanmak bolmaýar. Şonuň ýaly bolanda diňe statistik modelirleme (ýagny Monte Karlo) usulyny ulanmak galýar.

XII bap
Ykdysady modellerde ýasama usulynyň seljermeleri

§1.Ýasama tejribe düşünjesi

Ykdysady – matematiki modelleri we olaryň gözegçilik usullary iki sany häsiýete eýe bolýarlar:

1) öwrenilýän ulgama bolan täsirleri hakynda alynýan ykdysady çözüwleriň hiline baha berýän käbir bahalandyrmanyň – kriteriýany matematiki kesgitlemek;

2) öwrenilen ulgamlaryň ýönekeý bolany sebäpli, bu meseläni optimallaşdyrmanyň käbir usuly bilen çözmek (analitiki, sanly ýagny EHM-i ulanmak arkaly).

Tejribe gözegçilikde meseleleriň uly bölegi bu ýerde getirilen talaplara kanagatlandyrýan meselelere getirilmeýär.

Esasanam ikinji talap – modelleriň ýeterlik derejede ýönekeý bolmagy. Hakykatdan hem, ykdysady prosesleriň çylşyrymlylygy bu prosesleri çylşyrymly matematiki modellere getirýär. Bu talap diňe tilsimat häsiýeti alýar: ol meseleleriň giň synpy üçin optimallaşdyrma usullaryň öwrenilmegi bilen kem-kemden kanagatlandyrýar.

Birinji talap has prinsipialdyr – köplenç çözüwleri saýlamak meselesi şeýle çylşyrymly boýar, ýagny olaryň ulgama edýän täsirleriniň dürli wariantlarynyň deňeşdirmek kriteriýanyň girizilmesini amala aşyryp hem bolmaýar. Şonuň üçin çözüwiň her wariantynyň netijeleriniň derňewi zerurdyr. Bu ýagdaýda ýasama diýlip atlandyrylýan gözegçilik usullaryny ulanýarlar.

Ýasama (imitasiýa) düşünjä kesgitleme bereliň. Ýasama – bu gözegçilik edilýän obýektleriň EHM-de amala aşyrylýan matematiki modeller arkaly bu obýektleriň öwrenmesidir.

Ýasama gözegçiliginiň esasy aýratynlygy – bu gözegçilikde diňe obýektbilen däl-de, onuň matematiki modeli bilen tejribe geçirilýär. Ýasama hakynda şeýle düşünje XX asyryň 60-njy ýyllarynda ýüze çykdy. Ýasama gözegçilikler ylmyň şeýle meňzeş däl ýaýlalarda, ýagny özen (ýadro) reaktorlaryň gözegçiligi we adamyň psihologiýasynyň öwrenmesi, uruş hereketleriniň modelirleme we tebigatda biologik ulgamyň derňewi, epidemiýalaryň ýaýramalarynyň öwrenmesi we taryhy prosesleriň modelirleme çylşyrymly tehniki ulgamlaryň awtomatlaşdyrylan proýektirleme we adamyň organizmine bolan sagaldyş proseduralaryň täsirine barýan baha ýaly, çylşyrymly ulgamlaryň derňewi üçin ulanylýarlar.

Ýasama gözegçilikleri ykdysady prosesleriň derňewinde has wajyp ýer alýarlar. Ykdysady gözegçiliklerde ýasama meseleleriň giň diapazonynda ulanylýar, ýagny köpçülikleýin hyzmat etmegiň aýratyn soraglaryndan we önümçiligi operatiw meýilnamalaşdyrmakdan biziň älemimiziň ykdysadyýetini ösdürmeginiň soraglaryny öwrenmegine çenli. Ýasama gözegçilik olary amala aşyrýan adamyň özbaşdaklygyny we uly döredijilikli işjeňligini talap edýän meseledir.

Bu bölümde ýasama tejribelerini geçirmegiň esasy prinsiplerine serederis.

Käbir adalgalaryň kesgitlemelerine seredeliň. Matematiki modeli bolan tejribäniň düşünjesini bereliň. Hemmämiz fiziki ýa-da himiki tejribeleri bilýäris. Bu tejribelerde her hili täsirleriň üsti bilen dürli obýektleriň fiziki we himiki häsiýetlerini öwrenýärler: olardan (obýektlerden) elektrik akymy geçirýärler, olary gyzdyrýarlar, kislotanyň içine salýarlar we ş.m. Öwrenilýän obýekt bilen käbir hadysalary birnäçe gezekgaýtalap geçirýärler. Bu hadysalary enjamlaryň kömegi bilen fiksirleýärler. Käbir parametrleri üýtgedip, mysal üçin, elektrik akymynyň ululygyny, kislotanyň konsentrasiýasyny çalyşýarlar, obýekte bolan täsirleri geçirýärler. Fiksirlenen hadysalar tebigatyň kanunalaýyklygynda geçirýärler, şonuň üçin tejribäniň netijeleri tebigatyň kanunlary we berlen ýüze çykýan aýratynlyklary hakyndaky maglumatlary berýärler. Obýektiň häsiýetleri hususan tebigatyň kanunlary hakyndaky şeýle maglumatlaryň alnyşy adaty tejribäniň maksady bolup durýar. Biz ýasamanyň kesgitlemesinde matematiki modeli bolan tejribeler hakynda aýdypdyk. Şeýle sowal ýüze çykýar: matematiki modelleri bolan tejribeler näme?

Ýasama tejribede önümçiligiň kanunlary ykdysady-matematiki modeller görnüşinde seredilýär. Soň hakyky tejribede bolşy ýaly, daşky täsirler berilýär, şondan soň model «ösýär» we hasaplaýjy maşyn üçin maksatnama görnüşde amala aşyrylýar. Soň gözegçilik ediji ýene-de EHM iň kömegi bilen modele bolan netijeleri fiksirleýär. Şeýle adam – maşyn bolan, gepleşik, işleýiş düzgünde gözegçilik ediji modele bolan daşky täsirleriň netijelerini alýar. Bu ýagdaýda geçirilýän hakyky tejribe öwrenilýän obýektiň özi bilen däl-de, onuň modeli bilen amala aşyrylýar.

Differensial deňlemeleri bilen ýazylan kibernetiki ulgamlary ýatlalyň. Tötän we kesgitsiz täsirleri ýok bolanda meňzeş görnüşli modelleri bolan ýasama tejribeler wariant hasaplamalara getirilýär. Eger-de tötän täsirleri bar bolsa, onda ýasama bolanda olary model gurlanda formulirlenen paýlanyşy bolan tötän täsiriň amala aşyrmagy ýaly interpretirläp bilýän ululyklaryň yzygiderligi bilen çalyşýarlar. Eger kesgitsiz täsirler bar bolsa, onda gözegçiligi ýasama oýun görnüşinde geçirýärler. Bu oýunda gepleşik düzgünde ölçenilýän modele birnäçe oýunçy täsir edýär. Bu bölümde daşky täsirleri dolandyrma we tötänleýinlikler bolup durýan şeýle bir modelleriň derňewine seredeliň.

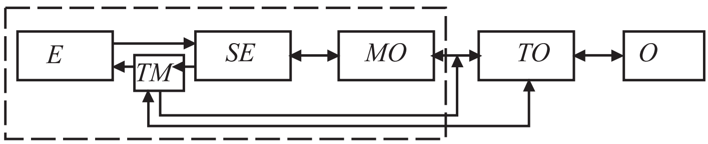
Şu wagta çenli biz hakyky we ýasama tejribäniň umumy häsiýetlerine seretdik. Indi bolsa olaryň tapawutlary hakynda hem aýtmalydyrys.

Hakyky we ýasama tejribeleriň arasyndaky tapawuda gowy düşünmek üçin bu tejribeleriň shemalary getirilen. Hakyky tejribäniň shemasy 1-nji suratda görkezilen. Bu ýerde *T*-tejribeçi, *ST*-tejribäniň serişdeleri, *O* – öwrenilýän obýekt, *N* – obýekt hakynda nazary pikirler.

1-nji surat

Tejribeçi tejribäniň serişdelerine täsir edýär, olar öz gezeginde obýekte täsir edýärler we obýektler olara täsir edýärler. Tejribeçi tejribäniň serişdelerinde bolup geçýän üýtgemelere gözegçilik edýär we olary obýekt hakyndaky öz nazary pikirlerine laýyklykda düşündirýär. Tejribäniň netijeleri obýekt hakynda täze nazary pikirleriň emele gelmegine we şol sanda dolandyrýan obýekte bolan laýyklyk täsirleri saýlamaga mümkinçilik berýär.

Model tejribe (şol sanda ýasama hem) has çylşyrymly gurluşa eýe bolýar (*2-nji surat*). Bu ýerde täze belgileri: *MO* – obýektiň modeli, *NO* – obýekt hakyndaky nazary pikirleri, *NM* – model hakyndaky nazary pikirleri. Tejribeçi obýekt hakynda nazary pikirlere laýyklykda obýektiň modelini gurýar. Obýektden oňyn modele bolan geçiş islendik model tejribäniň iň wajyp ädimi bolup durýar we obýektiň nazaryýetiniň kömegi bilen amala aşyrylýar. Eger bu geçiş ýeterlik gowy esaslanan (obýekti we onuň modelirlemäniň usullary ýeterlik gowy esaslanan) bolsa, onda gözegçiligi amala aşyrmak üçin laýyk modeli saýlap bolýar.



2-nji surat

Soň model tejribe 2-nji suratda ştrihlenen çyzygy bilen görkezilen çäklerde geçirilýär, ýagny gurluş boýunça hakyky tejribeden tapawutlyndyranok. Bu ýerde hakyky tejribede ýaly kynçylyklar ýüze çykýarlar: gözegçiligiň maksadyny iň kiçi ýitgiler bilen amala aşyrar ýaly, daşky täsirleri saýlamaly we kombinirlemeli. Model tejribede alnan netijeleri modelirlenen obýekte geçirýärler.

Şeýlelikde, model tejribeleriň hakyky tejribelerden esasy aýratynlygy ölçenilýän obýektiň onuň modele bolan geçişde we modelden ölçenilýän obýekte bolan geçişde durýar. Munda bir tarapdan bu goşmaçylyklary döredýär.

Eger gözegçilik ediji gözegçilik etmeli obýekti gowy düşünýän bolsa, ýagny şeýle görnüşli obýektleriň funksionirlemäniň esasynda bolan kanunalaýyklary we bir obýektden dürli kanunlaryň özara gurluşyna düşünýän bolsa, eger şeýle görnüşli obýektleriň modelleriň binasynda degişli bolan öňünde taýýarlap goýulanlary bar bolsa, onda ol obýektiň matematiki modelini formulirlemek we identifisirlemek bolýar, ýagny modeliň parametrlerine baha bermek bolýar. Şondan soň gözegçilik ediji modeli hasaplaýjy maşyn üçin bolan maksatnama görnüşde amala aşyryp we ýasama tejribeleri geçirip bolýar. Bu ýerde modeliň modelirleýän obýekte görä başga tebigaty bar. Bu ýagdaýda tejribäniň netijeleriniň modelden gözegçiligiň obýektine getirilişi onuň fiziki tebigatyň ýekeliginde esaslanyp bilenok, şonuň üçin tejribäniň netijeleri modelde obýekte bolan getirilişiniň mümkinçiligi hakynda we matematiki model ölçenýän obýekti nähili öwrenýändigi hakynda ýörite derňewi geçirmeli. Bu tassyklama ýasama tejribelerde ulanylýan çylşyrymly modellere degişlidir.

Ýasama tejribeleriniň örän köp artykmaçlyklary bar: olar käbir sebäpler boýunça hakyky tejribeleri amala aşyrylmaýan obýektler bolan model tejribäni geçirmäge mümkinçilik berýärler. Prinsipial amala aşyrylmaýan geçmişde bolan tejribelerdir. Ykdysady sebäplerden döwletiň ykdysadyýetiniň dolandyrmagynyň dürli wariantlary bolan hakyky tejribeleri geçirip bolmaýar. Etiki sebäplerden adamlaryň geçiren tejribelerini amala aşyryp bolmaýar.

Hakyky tejribeler mümkin bolan ýagdaýlarda ýasama gözegçilige sarp edilen ýitgileri kemeltmäge mümkinçilik berýär. Gözegçiligiň dowamlylygyny gysgaltmaga mümkinçilik ýasama tejribeleriň ýene bir artykmaçlygydyr.

Häzirki zaman ýasama gözegçilikleriniň köpüsi matematiki modelleriň belli gurluş düzgünleri bolan obýektleriň derňewi üçin niýetlenendir. Bu gözegçilikler esasan amaly, bularda modeliň barlagy onuň çylşyrymlylygy üçin bir modelde dürli bloklary bermek zerurlygy üçin geçirilýär. Bu ýagdaýda bloklar matematiki modelleriň binasyndan saýlanýandygy we dogry birleşýändigi barlanylýar.

Ýokarda aýdylyşy ýaly, ykdysady prosesleriň derňewinde şeýle ýagdaýa elmydama duşulmaýar. Gözegçiligiň şeýle ýaýlalarynda ýasama tejribeler häzirki zamanda özüne köp üns çekýärler. Bu ýagdaýda gözegçiligiň maksady ölçenilýän obýektleriň mynasyp modelleri gurmagy, dürli gipotetiki ýazgylary barlamagy we olardan iň laýyklaryny öwrenmekden durýar. Indi bolsa fundamental gözegçiliklerde ýasama usullaryň ulanylmagynyň soraglaryna seredeliň. Deňalamatly usullaryna seredeliň.

Şeýlelikde, ýasama tejribeler – bumatematiki modelleriň tejribäniň görnüşini alýan we hasaplaýjy maşynlaryň kömegi bilen amala aşyrylýan gözegçiliklerdir.

Ýasama tejribeler başga gözegçilik edilen obýektleri derňemäge mümkinçilik berýär

§2. Amaly ýasama tejribede esasy tapgyrlar

Matematiki modelleriň esasynda ykdysady proseslere ýasama tejribelerde seredeliň. Bu amaly ýasama tejribeleriň geçirilmegine baha bermäge mümkinçilik berýär.

Islendik gözegçiligiň birinji tapgyry – meseläni goýmakdyr. Ýasama gözegçilikde bu basgançagyň amaly ýasama gözegçilik ýeterlik derejedäki çylşyrymly meseleleri çözmek üçin geçirilmegi bilen baglanyşdyrylan aýratynlyklary bar. Şonuň üçin matematika bilen müşderiniň özara gatnaşyklary wajypdyr. Müşderi diňe gözegçiligiň maksadynyň formallaşmada däl-de, dürli faktorlara baha bermekde kömek edip bilýär.

Soň modeli gurma tapgyry gidýär. Ýasama tejribede model gözegçilik üçin modeliň formulirlemeden we onuň parametrlerine baha bermekden başga EHM-de maksatnamalaşdyrmanyň diliniň saýlanyp alynmagy ýasama gözegçiligi geçirmek üçin zerur bolan ýörite maşyn serişdeleriniň döremegi, şeýle hem modeliň barlagy uly rol oýnaýar.

Ýasama gözegçiligiň indiki basgançagy – bu tejribäni geçirmekden durýar. Kiçi ýitgiler bolan gözegçilik edijini gyzyklandyrýan netijeleri alar ýaly, modele daşky täsiriň wariantlarynyň rasional saýlanylyp alynmagy bilen baglanyşdyrylan soraglar ýüze çykýarlar.

Ýasama gözegçiliginiň tapgyrlaryny biz iki meseläniň mysalynda sererdeis. Bularyň birinjisi – adamlara hyzmat etmegiň ulgamynda çözüwiň wariantyny saýlamak. Goý, ýangyç guýulýan stansiýany gurmaly bolsun. Müşderini gyzyklandyrýan punktda gurup bolýan ýangyç guýulýan stansiýalaryň çäkli sany bar. Müşderiň öňünde haýsyny saýlamaly diýen sorag ýüze çykýar. Siziň bilşiňiz ýaly, şeýle jynsly ulgamlaryň derňewi adatça tötän täsirleri bolan modelleriň gözegçiligine degişlidir. Alnan bilimler bize modeli gurmakda we ýasama gözegçiligiň kemçiliklerine we artykmaçlyklaryna seretmekde kömek eder.

Ikinji mesele içki çylşyrymly özara täsirleri we ters baglanyşyklar hasaba alnanda ykdysady ulgamlaryň ösdürilmeginiň perspektiwalarynyň ýasama tejribeleriniň kömegi bilen maglumatlaşdyrma usullaryna has ýakyndyr. Bu ýerde seredilen model döwletiň ykdysadyýetiniň esasy görkezijilerine baglydyr: milli girdeji we maýa goýumlary.

Goý, müşderini döwletiň ykdysadyýetiniň agregirlenen görkezijilerde bolan ösdürmesi gyzyklandyrýan bolsun we ol esasy fondlara maýa goýumlaryň we ylmyň ösdürilmegine bolan çykdajylarynyň arasynda milli girdejiniň paýynyň dürli wariantlarynyň täsirini biljek bolýar.

§3. Ýasama derňewiň birinji tapgyry we meseläniň şekillendirilişi

Ýasama derňeme meselesi beýleki meseleler ýaly, hökman formulirlemeden başlanylmaly, ýagny tejribäniň maksatlaryny düşnükli we takyk düzmekden başlamaly. Amaly ýasama derňemekde tejribäniň maksady, adatça öwrenilýän ulgamyň ösdürilmegine bolan käbir täsirleriniň bahasydyr, ýagny ýasama käbir sowallar boýunça dogry çözüwi almaga kömek bermeli. Bu çözüwi matematik däl-de, degişlilikde doly hukugy bar bolan, ýagny çözüwi kabul edýän tarap (ÇKET) ýa-da meseleleri tejribede derňemek we ýasama meseleleri geçirmek üçin serişdeleri çykarýan, «müşderi» kabul edýär. Amaly ýasama derňeme seljerme ulgamynda sargaýjynyň gyzyklanmalarynyň nukdaý nazaryndan durýar. Şonuň üçin meseläni şekillendirmegi matematik sargaýjy bilen bilelikde amala aşyrýar. Bu tassyklamany birinji tapgyrda we ýasama derňemede sargaýjynyň gatnaşygy çäklendirilen diýip düşünmeli däl. Şeýle hem bolsa, tejribäni şekillendirmek meselesinde – esasy tapgyra sargaýjynyň gatnaşmagy ýa-da edil sargaýjy tarapyndan derňemegiň maksady anyklanylýar. Sargaýjynyň amaly tejribesi meňzeş meselelerde netijeleri çykarmakda, şeýle hem modeli gurmakda ulanyp bilinýär. Elbetde, sargaýjy matematiki modeli gurmaga gatnaşmaýar, ýöne sargaýjyny gyzyklandyrýan obýektiň esasy häsiýetnamalaryny obýektiň funksionirlemä mümkin bolan çäklendirmeleri anyklamakda sargaýjy hökman gatnaşmaly. Modeli düzmek üçin başlangyç ädime adatça modeliň konseptualizasiýasy diýilýär we şeýle hem ol ýasama derňewin birinji tapgyry bolup, meseläniň şekillendirmegine degişlidir. Konseptualizasiýe ädimden soň modeli şekillendirmegine wajyp ädimi gelýär, sargaýjyny gyzyklandyrýan obýektleriň görnüşlerine seretmek üçin niýetlenen matematiki modelleriň meselesine goýulan bahasy amaly ýasama derňewiň kömegi bilen çözülip bilermi ýa-da başlangyç düýpli derňewi geçirmek zerurmy (ýasamamy ýa-da ýok – edil şu ýagdaýda tapawudy ýok) diýen sowalyň çözüwidir. Şeýlelikde, amaly ýasama derňewiň birinji ädiminde sargaýjy bilen ýygjam özara täsiriniň netijesinde aşakdaky soraglary çözmeli:

1) Derňewiň maksady hökman formulirlenmeli;

2) Modeliň konseptual şekilledirilişihökman ýerine ýetirilmeli;

3) Amaly ýasama derňewi geçirmegiň mümkinçilikleri baradamesele hökman çözülen bolmaly.

Gözegçiligiň birinji tapgyrynda getirilen maksatnamanyň birinji bölüminde, sargaýjy bilen bilelikde soraglaryň sanawyny hökman formulirlemeli we ylalaşyp, ýüze çykan soraglara ýasama derňew jogap bolmaly. Bu ýagdaýda mümkin boldugyça, sanawa giren soraglar «birjynsly» bolmaly, ýagny hili boýunça dürli modelleri gurmagy talap etmeýän soraglar bolmaly. Mysal üçin, ýangyç guýulýan stansiýany guranda «birjynsly» soraglar şu aşakdakylardyr:

– gurluşlaryň işlemän durmagynyň orta wagty;

– beketde awtoulagyň bolan wagty;

– bu ululyklaryň dispersiýasy we ş.m.

Gözegçiligiň obýekti düşünjesi formulirleme meselesi bilen baglanyşyklydyr. Ilkibaşda meseläniň masştablary,ýagny onuň göwrümi,ginişlikde bolan çäkleri,wagty modulirleýän kesimiň dowamlylygy hakynda we ş.m. soraglary çözmeli.

Gözegçiligiň haýsy obýekti üçin formulirlenen soraglara jogap bermelidigini hokman takyklamaly: ýa-da bu stansiýanyň häsiýetlerini şekillendirýän käbir görnüşli umumylaşdyrylan obýekt, ýa-da bu stansiýanyň görnüşlerini saýlap almagynyň käbir meselesi. Meseläniň göwrümi baradaky sorag aşakdakylardan durýar: haýsy elementlere derňewde seredilmeli we haýsylary daşky diýip hasap edip bolýar, olaryň täsiri ekzogen bolýandygyny çözmeli. Şeýle stansiýanyň derňewinde stansiýa awtoulaglaryň gelmeginiň sebäpleri hakynda sorag goýmak bolýar ýa-da stansiýa girýän yzygiderli awtoulaglaryň parametrleri berlen diýip hasap etmeli.

Goý, stansiýanyň amatly görnüşlerini saýlap almak meselesinde sargaýjyny hyzmata garaşanyňda wagty ýitirmek barada we enjamlaryň işlemän duran wagtynda ýüze çykýan ýitgileri barada soraglaryň jogaby gyzyklandyrýan bolsun. Obýekt düşünjesini formulirlemek prosesinde bize sargaýjynyň köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynyň seljermesiniň umumy meseleleri bilen gyzyklanmaýandygyny kesgitlemek başartdy: oňa ýangyç guýulýan stansiýany takyk şertlerde saýlap almagyň meselesini çözmek wajypdyr. Goý, bize stansiýa gelýän awtoulaglaryň yzygiderligini stohastik diýip hasap etmek başartsyn. Şeýlelikde, biz ýangyç guýujy stansiýada bolan wakalara gözegçiligi tamamlaýarys. Soň, goý sargaýjy hyzmat etmegiň häsiýetnamalary diňe ýangyç guýujynyň wariantyna bagly diýen teklip bilen razy bolsun. Indi bolsa, sargaýja dine stansiýanyň "ortaça" wagt aralygynyň dowamynda edýän hereketi bilen gyzyklanýandygyny takyklamak galdy. Şeýlelikde, obýekti derňemegiň maksady ýangyç guýulýan stansiýanyň wariantlaryny saýlamak meselesi üçin umuman şekillendirildi.

Indi ykdysadyýeti maglumatlaşdyrma meselesinde derňewiň maksadyny we obýektini nähili şekillendirip boljakdygyny göz öňüne getireliň. Sargaýjyny modellerde uzak möhletleýin peýdalylyk gyzyklandyrýar: ol ýakyndaky 20–25 ýyllar dowamynda ykdysadyýetiň ösüşiniň mümkinçilikleriniň maglumatlaryny derňejek bolýar. Seljermede sargaýjynyň pikiri boýunça, hökman ylmy-tehniki progresi,serişdeleri täsirli peýdalanmagy şekillendirmek wajyp orun tutýar. Şeýle hem sargaýjyny, önümçilige bolan maýa goýumlaryň we ylmyň ösdürilmegine bolan çykdajylaryň arasynda milli girdejiniň paýlanyşynyň seljermesiniň dürli wariantlary gyzyklandyrýar.

Indi bolsa ýasama derňewiň birinji tapgyrynyň ilkinji bölümine, ýagny konseptuallaşdyrma modeline geçmek bolar. Konseptuallaşdyrma düzümi boýunça, birinji bölüm heniz hil derejesini ýitirizmezinden ozal öňki netijelerini takyklamakdan durýar. Bu başlangyç tapgyry derňemek üçin, näbellileri, modeliň parametrlerini we olaryň özara arabaglanyşygyny hil taýdan şekillendirmek, berlen maglumatlary bahalandyrmak we olary almaklyk mümkinçiligini sargaýjy bilen maslahatlaşmak hökmanydyr.

Ýangyç guýulýan stansiýanyň wariantyny saýlamagyň meselesinde, üýtgeýänleri sargaýjynyň islegleri boýunça aşakdaky görnüşde takyklamaly. Goý, onda:

1) stansiýanyň mehanizmleriniň gurluşygyna gerek bolan wagtyň ortaça bölegini x bilen;

2) bir awtoulagyň ýangyç guýmak üçin sarp edýän wagtynyň orta ýitgilerini y bilen belläliň.

Bu ýitgileri manatda hasaplap, ýitgileriň ýeke funksiýasyny alyp bileris:

$$f = c_1 x + c_2 y,$$

bu ýerde c_1 – gurluşlaryň durmagyndan udel ýitgileri, c_2 – ulgamyň durmagyndan udel ýitgileri. Bu ýagdaýda bekediň görnüşini saýlama meselesini minimal f ýitgileri bolan görnüşini tapmaklyk meselesine getirip bolýar. Köplenç ýitgileriň funksiýasyny gurmak bolmaýar. Şonuň üçin müşderi iki görnüşiň ýitgileri bilen aýratynlykda gyzyklanýar. Gerek bolan maglumaty alyp, ol öz pikirleriniň esasynda çözüwini saýlar.

Sargaýjyny gyzyklandyrýan üýtgeýänler anyklanynydan soň, sargaýjynyň tejribesine esaslanyp, üýtgeýänlere täsir edýän esasy faktorlary anyklalyň. Ýangyç guýulýan stansiýada mehanizmleriň gurluşygyna we awtoulaglara bolan ýitgilere, bir awtoulaga hyzmat etmegiň ortaça wagty, onuň dispersiýasy, şeýle hem awtomobilleriň akymynyň häsiýetnamasy täsir edýär. Ilki bilen stansiýada ýangyjyň näçe görnüşiniň peýdalanylýandygyny anyklalyň: mümkin bu stansiýa aýry-aýry stansiýalaryň jemlenmesi hökmünde garap bolar, olaryň her biri awtomobilleri ýangyjyň ýeke – täk görnüşi bilen üpjün edýärler we biri-birlerine hiç hili täsir etmeýärler. Awtomobiliň görnüşine baglylykda hyzmatyň wagty üýtgeýärmi, stansiýalaryň dürli görnüşleri biri-birinden nämä görä tapawutlanýar we ş.m soraglara seredip geçeliň. Şeýle hem hasaplamalar üçin başlangyç maglumaty hakynda soragy elmydama göz öňünde tutalyň we modelde ýüze çykýan çylşyrymlaşmalaryň goşmaça maglumatlary almagy talap edýändigini ýatda saklalyň. Eger--de, biz awtoulaglaryň dürli görnüşlerini tapawutlandyrmagy başarsak, onda bize awtoulaglaryň her bir görnüşi üçin aýratynlykda giriş akymyň häsiýetnamalary gerek bolar.

Indi ykdysadyýeti ösdürmegiň uzak möhletleýin çaklamalarynyň meselesine geçeliň. Bu ýerde sargaýjy şu aşakdaky görnüşdäki özüni gyzyklandyrýan üýtgeýänleri mälim edip biler:

1) milli girdeji;

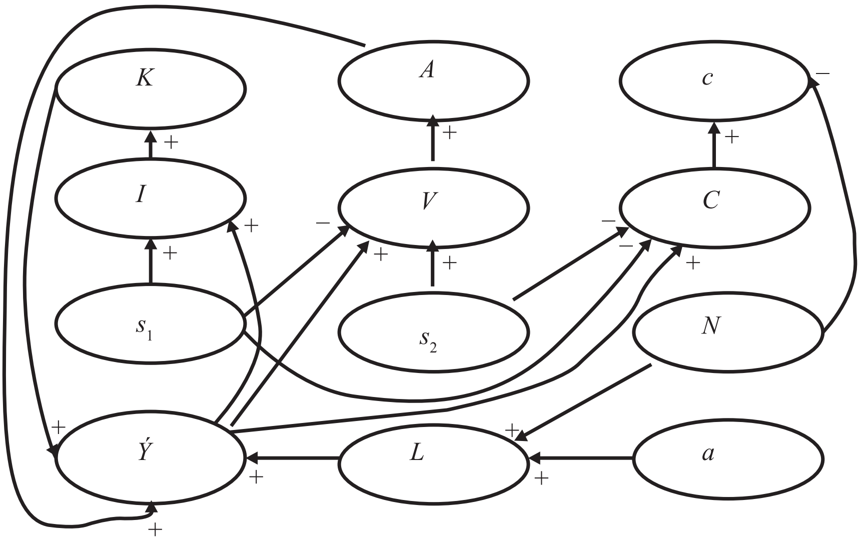
2) jan başyna düşýän milli girdeji;

3) jan başyna düşýän sarp ediş.

Elbetde, bu ululyklary ykdysady ulgam yfunksionirlemegiň kriteriýasyna birikdirmek bolmaýar: olaryň her biri aýratynlykda gyzykly. Bu meselede sargaýjyny gyzyklandyrýan üýtgeýänlere täsir edýän esasy faktorlaryň ulgamy has çylşyrymlydyr. Milli girdejiniň düzümine serişdeleriň mukdary we olaryň peýdalylygynyň netijesi täsir edýär. Egerde biz serişdeleriň diňe iki görnüşi bilen – esasy we zähmet serişdeleri bilen çäklensek, onda bu serişdeleriň mukdaryna baha bermek üçin ýurtda bar bolan ilatyň sanyny we gurluşyny şekillendirýän demografiki model, şeýle hem esasy serişdeleriň giňeldilen önümçilik modeli gerek bolar. Şeýle modelleri gurmagyň çylşyrymlylygy we olarda hasaba alynýan faktorlaryň sany sargaýjyny kanagatlandyryp biljek gödek çaklamalara baglydyr. Derňeýji sargaýjy bilen öwrenilýän ulgamda ýüze çykýan ähli baglanyşyklara gözegçilik etmelidir. Elbetde,munuň üçin öwrenilýän ulgam bilen işlemekde sargaýjynyň uly tejribesi bolmaly. Ýene bir gezek belläliň, ýagny modeli konseptuallaşdyrmakda sargaýjydan başlangyç maglumatlaryň çeşmesini anyklamagy unutmaly däldiris.

Modeliň konsepsiýa prosesinde, haçan-da ulgam hil taýdan suratlandyrylanda, käbir üýtgeýänleriň ýitmegi we soňra matematiki model gurlanda ýüze çykmagy mümkin. Bu maksatlaýyn üýtgeýänlere degişli bolsa-da sargaýjyny gyzyklandyrýan üýtgeýänlere degişli däldir, şeýle hem dolandyrýan üýtgeýänler bilen sargaýjynyň öwrenýän obýektine täsiri degişlidir. Bu ýangyç guýulýan stansiýa barada meselede sargaýjynyň dolandyrmasy – stansiýanyň wariantyny saýlap almak; maglumatlaşdyrmanyň meselesinde dolandyrma hökmünde milli girdejiniň paýlanyşygy hyzmat edýär. Konseptuallaşdyrmak prosesinde sargaýjynyň dolandyrmanyň haýsy çäklerde çalşyp bolýandygyny aýtmagy örän zerur: aýdalyň, milli girdejide sarp edileniň paýyny üýtgetmek, ylmyň ösdürilmegine goýulýan serişdeleriň paýyny köpeltmek we ş.m.

Üýtgeýänleriň sanawyny düzmek üçin we olaryň baglanyşygynyň hili barada aýdanyňda, köplenç öňki asyryň başynda hünärmenleriň arasynda meşhur bolan usuly ulanmak amatly bolýar. Bu usulda modeliň üýtgeýänleriniň arasyndaky baglanyşyklaryň diagrammasy gurulýar we peýkam täsiriň ugruny görkezýär. Bu diagrammany maksatlaýyn üýtgeýänlerden başlanyňda gurmak amatly bolýar. Şeýle diagramma çylşyrymly modellerde hemme baglylyklary görkezmäge we derňewiň maksady üçin üýtgeýänleriň ählisiniň hereketdedigini we haýsy hem bolsa bir wajyp üýtgeýäniň goýberilen däldigini ýeňil barlamaga mümkinçilik berýär.



3-nji surat

K – esasy gaznanyň göwrümi, I – düýpli maýa goýumlary, s_1 – milli girdejide düýpli maýa goýumlaryň bölegi, Y – milli girdeji, A – ylmyň ösüşiniň derejesi, V – ylmyň ösüşine bolan harajat, s_2 – milli girdejide ylmyň ösüşiniň derejesi, L – zähmet resursy, c – her adam başyna düşýän C – sarp edilme, N – ilatyň sanawy, α – ilatyň içinde zähmet çekýän adamlaryň bölegi.

Ykdysadyýeti maglumatlaşdyrma meselesi üçin şeýle diagramma görkezeliň. Milli *Ý* girdeji zähmet *L* serişdeleriň esasy *K* fondlaryň mukdaryna hem ylmy-tehniki progrese baglydyr we ol bu ululyklar artanda ösýär. Şonuň üçin milli girdejide ýokardaky ululyklary aňladýan peýkamlaryň ýanynda «+» alamaty dur. Milli girdeji maýa goýumlarynyň arasyndaky bölegi s_1-e, ylma goýlan çykdajylaryň bölegi s_2-ä we olaryň ulanylýan bölegi 1-s_1-s_2-ä deň. s_1-iň artdyrmasy maýa goýumlaryň ösmegine we ulanylyşynyň azalmagyna getirýär. Bu degişli «+» we «-» alamatlary bilen görkezilen.

Şeýle görnüşli diagramma matematikany gowy bilmeýän adamlara model barada düşünje almaga mümkinçilik berýär.

Eger-de biz ýasama tejribesi geçirilende modellerdäki birnäçe nabellilere üns bersek, olara beýleki näbellileriň täsir etmeýändigi öňünden belli bolmaly. Şeýle näbellilere ekzogen näbelliler diýilýär. Bulardan tapawutlylykda hasaplamalarda kesgitleýän näbellilereen dogen näbelliler diýilýär. Ekzogen üýtgeýänlere s_1 we s_2 dolandyrmalardan başga beýleki üýtgeýänler degişli. Olaryň dinamikasyny modelden erkin edip maglumatlaşdyrmaly.

Biziň sudurymyzda ekzogen üýtgeýänler aşakdakylardyr:

1) dolandyrma – milligirdejiniň s_1 we s_2 bölekleri;

2) bilelikde gelýän üýtgeýänler – ilatyň mukdary, işleýän ilatyň bölegi.

Dolandyrýan we bilelikde gelýän üýtgeýänlere bölünme suduryň gurnama basgançaklarda absolýut däldir. Diagramma derňelende müşderide işleýän ilatyň böleginiň dürli wariantlarynyň ykdysadyýetine bolan täsirine höwes döredilip bilner.

Şeýle diagrammany hemme meseleler üçin gurmak amatly däldir. Şeýle usuly «dinamiki ýasama» meselelerde has gowy ulanylýar, haçanda üýtgeýänleriň uly sanyň wagtynda bolan üýtgemesini hasaba almaly we islendik iki üýtgeýänleriň arasyndaky baglanyşyklar otnositel ýönekeýdir, ýöne umuman olar ters baglanyşygyň görnüşli çylşyrymly özara döredilýän çylşyrymly gurluşlary döredilýär.

Ýangyç guýulýan stansiýanyň wariantyny saýlap almak ýagdaýynda müşderi bilen işlände ulgama görä sazlaşan çaklamalaryň aşakdaky görnüşli sanawy ulanyp bolýar:

1) Gözegçilik edende saýlanan stansiýanyň warianty hakynda dürli çözüwleriň täsiriniň gurluşlaryň durmagynyň orta bölegine we ulgamda awtoulagyň bolmagynyň orta wagtyna bahasyny almaly;

2) Bir awtoulaga hyzmat etmegiň wagty tötän ululykdyr we tötän ululygyň paýlanyşyk funksiýanyň görnüşi we parametrleri diňe stansiýanyň wariantyna bagly;

3) Gelýän awtoulaglaryň arasyndaky aralyk şeýle hem tötän ululyk, bu ululyk stansiýanyň parametrlerine bagly däldir;

4) Awtoulaglara arakesmesiz hyzmat edilýär;

5) Awtoulagyň sarp edýän wagty nobata garaşmaly wagtyndan we hyzmat etmegiň wagtyndan durýar.

Şeýle görnüşli sanawy seredilýän ulgam üçin dinamiki ýasama meselelerde konseptual diagramma peýdaly bolýar.

Diagramma ýa-da *n* sanawy gurmakdan soň üýtgeýäniň arasyndaky gatnaşyklary çylşyrymlylygyň we bu üýtgeýäniň mukdarynyň bahanyň esasynda alnan sudur boýunça hasaplamalary mümkinçiligine baha bermeli. Diagrammany ulanyp, agregirleme, ýagny birnäçe üýtgeýänleri çalyşýan üýtgeýänleriň ulgamyna bolan täsirini ýakynlaşan serpikdirýän bir üýtgeýäni bilen çalyşmany geçirmeli. Agregirleme düşünje detallaşma derejesiniň kemelme düşünjesine ýakyn bolanda-da, olar bir manyny berenoklar: eger detallaşma derejesi kemelende biz käbir täsirini aýyrýarys, agregirlemede bolsa agregat diýilýän käbir üýtgeýäniň kömegi bilen bu täsir san hasabynda alynýar. Agregirleme modeli has ýönekeýleşdirip bilýän bolsa-da, ulgama diňe birmeňzeş täsir edýän üýtgeýänleri birleşdirmeli we ony örän seresap ulanmaly. Hakykatdan hem, agregirlemäniň maksimal derejesi saýlanyp alynsa, onda derňewçiniň öňünde durýan soraglara jogap berip bolar.

Konseptual diagramma suduryň maglumatyna talaplary kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Maglumat – bu käbir parametrleriň diňe san bahalary däl-de, sudury üýtgeýänleriň arasyndaky baglylyklaryň görnüşidir. Haýsy üýtgeýänlere görä olaryň üýtgeýiş ýaýlasyny bermeli, haýsy üýtgeýänleriň dinamikasyny öňünden belli bermeli, haýsy baglanyşyklaryna seretmeli. Maglumatyň uly bölegi müşderiden galan bölegi resmi kagyzlardan alnyp biler. Gözegçilik edilýän ýaýlasynda gowy bilýän hünärmenler tapylyp bilner. Şondan başga edebiýatyň derňewi peýda getirip bilýär. «Ykdysady – matematiki sudurlaryň binasynda» käbir baglanyşyklaryna seretmek üçin niýetlenen işläp düzülen sudurlar bar bolmagy mümkin. Şeýle stansiýanyň wariantyny saýlap alanda köpçülikleýin hyzmat etmegiň ulgamlarynyň sudurlary ulanyp bolýar, ykdysadyýetiniň käwagtlaýyn maglumatlaşdyrma meselede resurslaryň we milli girdejiniň ulanmagynyň arasyndaky baglanyşyklaryna seretmek üçin önümçilik funksiýalaryň apparaty ulanmak bolýar. Zerurlyk informasiýany almak mümkin däl ýagdaýda näme etmeli diýip sorag ýüze çykýar. Bu dürli ýagdaýlar bolup bilýärler. Käwagt berlen maglumat gözegçiligiň netijesinde täsir edenok diýip pikir gelýär. Onda berlen maglumatlaryň dereksizligi hakynda gipotezany barlamak üçin matematiki suduryň formulirlemesine we EHM-de maksatnamany düzmegine geçip, sudury gurmagy dowam edip bolýar. Şeýle gipoteza dogry däl. Öň edilen işe gaýdyp gelip, täzeden oňa seretmeli. Hususanda agregirlemäniň ýa-da suduryň detallaşmanyň derejesini kiçeltmeginiň üsti bilen maglumatyň dolulygyna ýetip bolýar. Eger bu kömek hasap edilmese, onda ýasama gözegçiligiň netijesinde öwrenmeli soraglaryna seretmek zerurdyr.

Matematiki sudury gurmakda maglumaty almagynyň mümkinçilikleriniň derňewi geçirilende, şeýle hem amaly ýasama tejribäni geçirmeginiň mümkinçiligi hakynda sorag çözülýär, ýagny gözegçilik edilýän meseleleri formulirlemäniň üçünji basgançagy ýerine ýetirilýär. Suduryň üýtgeýänleriniň arasyndaky käbir basgançaklary gowy öwrenilmedik bolsa, öwrenilýän obýektiň adekuret sudury gurmak we ýasama tejribesini geçirmek mümkin däldir. Muny müşderä aýtmaly.

Bu ýagadaýda ýasama gözegçilik jogap berilmeli, soraglara seretmeli. Önümçilik-ykdysady ulgamlary derňelende köplenç ýagdaýda ykdysady-matematiki sudurlaryň binasynda kiçi modifisirlemeden soň gözegçilikde ulanylyp bolýan degişli bolan standart sudurlar bar. Şeýlelikde, önümçilik-ykdysady ulgamlaryň amaly ýasama derňewi gerek bolan sudurlary saýlap, amala aşyryp bolýar. San maglumaty şeýle hem köplenç alyp bolýar. Şondan soň amaly ýasama gözegçiligiň indiki basgançagyna – sudury gurmagyna geçip bolýar.

Gözegçiligiň meseleleriň formulirleme basgançagynyň käbir esasy aýratynlyklaryna seredeliň:

1) Bu basgançak interatiw, munda elmydama öň edilen işe gaýdyp gelmeli we oňa üýtgemeleri girizmeli;

2) Ýasama tejribäniň birinji basgançagynyň esasynda diňe matematiki sudury gurmakmala aşyrylman, eýsem bu ýerde bellenen çäreleriň ýerine ýetirilmegi müşderiniň meselä doly düşünmegine, öwrenilýän ulgamyň «dar ýerleri» tapyp, olary aýyrmaga getirýär. Şeýlelikde, ýasama suduryň ulanmagy ýasama tejribeler geçirmekden öň başlanýar.

§4. Matematiki modeliň gurluşy

Geçen babyň dördünji paragrafynda belläp geçişimiz ýaly analitik usul bilen diňe ýönekeý KHE ulgamlaryny derňemek mümkin. Eger-de ulgamyň stohastik parametrleriniň tebigaty çylşyrymly bolanynda diňe stohastiki modelirleme, ýagny Monte Karlo usulyny ulanmak mümkinçiligi galýar. Biz şu paragrafda awtoulaglary ýangyç bilen üpjün ediş stansiýanyň mysalynda Monte Karlo usulynyň ulanyşyny beýan edýäris.

Goý, mesele awtoulaglary ýangyç bilen üpjün edýän stansiýany gurmak bolsun. Has takygy şeýle stansiýany gurmagyň birnäçe wariantynyň içinden iň amatlysyny saýlap almak gerek bolsun. Bu ýerde amatly wariant diýip müşderileriň garaşyp ýitiren wagty bilen ulaglary ýangyn bilen üpjün edýän enjamyň boş duran mahalyndaky ýüze çykýan umumy ýitgini mümkingadar azaldýan warianta aýdýarys.

Goý, awtoulaglary ýangyç bilen üpjün edýän beketde diňe ýekeje üpjün ediji enjam bolsun. Goý, x_i – i-nji awtoulagyň stansiýada sarp eden umumy wagty, y_i – ýangyç bilen üpjün ediji enjamyň i-nji awtoulaga garaşyp ýitiren wagty, T_i-nji awtoulagyň beketde peýda bolan wagty, $t_{i-1} = T_i - T_{i-1}$ i-1-nji awtoulag bilen i-nji awtoulagyň peýda bolan wagtlarynyň aralygy, θ_i – i-nji awtoulagy ýangyç bilen üpjün edilende sarp edilen wagt, Z_i – i-nji awtoulagyň ýangyç bilen üpjün ediji enjamyň boşamagyna garaşyp ýitiren wagty. Onda ýangyç bilen üpjün ediji bekediň işleýşini şeýle häsiýetlendirmek bolar:

1) eger $t_{i-1} < x_{i-1}$ bolsa, i-nji awtoulag $z_i = x_{i-1} - t_{i-1}$ wagtlap garaşar we $y_i = 0$

2) eger $t_{i-1} > x_{i-1}$ bolsa, $z_i = 0$ we $y_i = t_{i-1} - x_{i-1}$

3) eger $t_{i-1} = x_{i-1}$ bolsa, $z_i = y_i = 0$.

Bu modelde t_i we θ_i ululyklar tötänleýin ululyklardyr we olar berlen paýlanyş funksiýalary boýunça Monte Karlo usuly bilen modelirlenýär. Şeýlelik bilen bekediň görnüşini saýlap almak bilen t_i we θ_i, $i = 1, \ldots, m$ (m-awtoulaglaryň umumy sany) tötän ululyklary modelirlemek bolar. Ondan soňra saýlanyp alnan görnüşde bekediň işini aşakdaky formulalar boýunça häsiýetlendirmek bolar:

$$x_i = z_i + \theta_i,$$

$$z_i = \begin{cases} x_{i-1} - t_{i-1}, & eger \quad x_{i-1} > t_{i-1} \\ 0, & eger \; x_{i-1} \le t_{i-1} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} t_{i-1} - x_{i-1}, & eger \quad t_{i-1} > x_{i-1} \\ 0, & eger \quad t_{i-1} \le x_{i-1} \end{cases}$$

$$X_i = X_{i-1} + x_{i-1}, \quad X_1 = 0;$$

$$Y_i = Y_{i-1} + y_{i-1}, \quad Y_1 = 0,$$

bu ýerde X_i -ol i-nji awtoulagyň stansiýada sarp eden umumy wagty, Y_i – awtoulaga hyzmat edip bolýança ýangyç bilen üpjün ediji enjamyň umumy boş duran wagty. Awtoulagyň ýangyç bilen üpjün ediji beketde sarp eden wagtynyň matematiki garaşmasy $(\bar{x})$we hyzmat ediji enjamyň boş duran wagtynyň umumy wagta bolan gatnaşygy $(\bar{y})$ ýaly ululyklary X_m/m we Y_m/T_m sanlaryň üsti bilen takmynan hasaplap bolar:

$$\bar{x} \approx X_m/m, \quad \bar{y} \approx Y_m/T_m.$$

4-nji suratda ýokarda getirilen algoritmiň bloklaýyn çyzgysy görkezilen.

Aşakda biz awtoulaglary ýangyç bilen üpjün edýän bekediň işini Monte Karlo usuly boýunça modelirlemegiň MATLAB 6.5 dilinde ýazylan programmasyny getirýäris we 1-nji tablisada şol programma boýunça geçirilen käbir hasaplamalaryň netijesini görkezýäris.

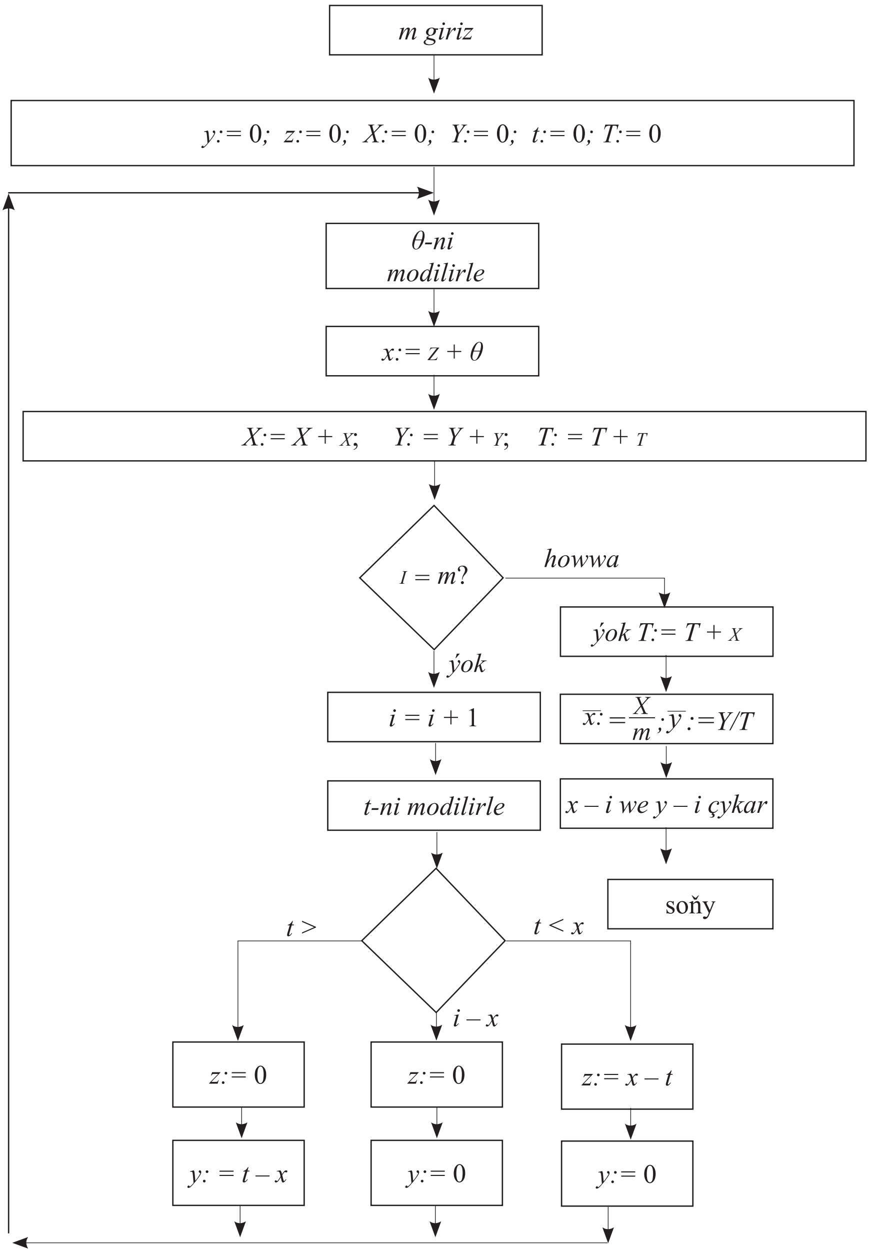
1-nji tablisa

Görnüş	m_θ	σ_θ	m_t	σ_t	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1a	5 min	4 min	5 min	4 min	28.74 min	0.011
2a	4 min	3 min	-----	-----	4.47 min	0.201
3a	3 min	2 min	-----	-----	3.00 min	0.404
1b	3 min	1 min	4 min	3 min	3.09 min	0.233
2b	2 min	2 min	3 min	3 min	2.11 min	0.338

Ýokardaky tablisada geçirilen hasaplamalarda θ_i (ýangyç bilen üpjün ediji enjamyň i-nji awtoulagy ýangyç bilen üpjün edeninde sarp etjek wagty) we t_i (i-nji awtoulag bilen (i + 1)-nji awtoulagyň peýda bolan wagtlarynyň aralygy) tötän ululyklary

$$\theta_i = m_\theta + (0.5 - \gamma_i)\sigma_\theta, \quad t_i = m_t + (0.5 - \lambda_i)\sigma_t,\ i = 1, ..., m \quad (1)$$

formulalar boýunça modelirlenen we m = 1000 sany ulanylan. Bu ýerde γ_i we λ_i, $i = 1,...,m$ özara baglanyşyksyz bolan [0, 1] kesimde tekiz paýlanan tötän ululyklardyr.



4-nji surat. *Ýangyç bilen üpjün edýän bekediň işini Monte Karlo usuly boýunça modelirlelemegiň blok çyzgysy*

```
m = 1000;
y = 0; z = 0; X = 0; Y = 0; t = 0; T = 0;
mteta = 3; dteta = 1;          % hyzmat ediji enjamyň parametrleri
mt = 5; dt = 3;                % iki awtoulagyň peýda bolanlaryndaky
                               % wagtyň tapawudynyň parametrleri
for i = 1:
mteta = mteta + (0.5-rand(1,1))*dteta;
                               % awtoulaga hyzmat etmek
                               % üçin sarp ediljek wagt
X = z + teta;
X = X + x; Y = Y + y; T = T + t;
t = mt + (0.5-rand(1,1))*dt;
                               % iki awtoulagyň arasyndaky wagt
if t > x
z = 0; y = t – x;
elseif t < x
z = x – t; y = 0;
else
z = 0; y = 0;
end
end
T = T + x;
xs = X/m;                      % awtoulagyň ortaça sarp eden wagty
ys = Y/T;                      % hyzmat ediji enjamyň boş duran
                               wagtynyň umumy
                               % wagta bolan gatnaşygy
xs, ys
```

Belläp geçmeli zadyň biri eger θ we t tötän ululyklar (1)-nji aňlatmalar boýunça kesgitlenen bolsa, ýangyç bilen üpjün ediji bekediň derňewini geçenki babyň ikinji paragrafynda beýan edilen analitiki serişdeler bilen derňäp bolman, diňe Monte Karlo usuly bilen modelirläp bolýanlygydyr. 1-nji tablisada ulgamyň işini häsiýetlendirýän (awtoulagyň ýangyç bilen üpjün ediji beketde sarp eden wagtynyň $\overline{x}$ matematiki garaşmasy) we $\overline{y}$ (hyzmat ediji enjamyň boş duran wagtynyň umumy wagta bolan gatnaşygynyň matematiki garaşmasy) ululyklaryň ýangyç bilen üpjün ediji bekediň işleýşiniň we awtoulaglaryň peýda boluş ýagdaýynyň birnäçe görnüşlerde hasaplanan bahalary getirilendir.

Ýene bir belläp geçmeli zat şu paragrafda getirilen algoritm boýunça diňe θ we t tötän ululyklaryň diňe tekiz paýlanan ýagdaýynda däl-de, eýsem islendik kanun boýunça paýlananynda-da derňäp bolýandygydyr.

GOŞUNDY

Ýokarda belleýşimiz ýaly, düzülen meseläniň maksimum hem-de minimum çözüwlerini gözleýän derse *optimallaşdyrma usulynyň dersi* diýilýär. Onuň maksat funksiýasyny kesgitlemegiň özimeseläniň çözüwini kesgitlemek bilen häsiýetlendirilýär. Bu meselede bar bolan çäklendirilen ulgama bolsa, bu meseläniň ýolbererlik çözüwlerini kesgitleýän, onuň näbellilerine bolsa, *dolandyrmany kesgitleýän näbelliler* diýilýär. Seredilýän meselä umumy bilelikde meseläniň matematiki modeli diýilýär. Bu model bar bolan usullaryň kömegi bilen çözülende ol meseläniň goýluşyna baglylykda çyzykly programmirlemäniň ýa-da çyzykly däl programmirlemäniň meselesini emele getirip, optimallaşdyrma usulyny ulanyp,onuň optimal çözüwi kesgitlenýär.

1. Garyşygyň amatly düzümini kesgitlemek meselesi.

Amerikan alymy Džon Donsigin tarapyndan ilkinji gezek berhiziň düzümini kesgitlemek meselesine seredilip, onuň modeli çyzykly programmirleme meselesi görnüşe getirilip, soňra simpleks usuly ulanylyp, onuň optimal çözüwi kesgitlenen. Bumeselä ýakyn bolan, mallary optimal iýmitlemegi kesgitlemegiň meselesi bilen çalşalyň.

Goý, bize mallary iýmitlendirmek üçin, hökmany gerek bolan iýmleriň ýokumly bölekleriniň dürli iýmlerde bar bolan mukdary belli bolsun. Şeýle hem iýmitiň her bir görnüşiniň birligi boýunça bahalar belli bolsun. Onda eger her bir iýmiň içinde bar bolan ýokumlylyk birligine görä bu meseläniň seredilýän mallar üçin iýmleriň mukdaryny, ýagny onuň rasionynyň,düzümini şeýle bir saýlamaly, netijede, onuň iýminde ýokumly bölekler ýeterlik derejede bar bolmaly, şeýle hem ol iýmiň mukdarynyň umumy bahasynyň çykdaýjysy minimum bolmaly. Eger biz aşakdaky şertli bellikleri girizsek:

m – dürli görnüşdäki iýmlerde hökmany ýokumly iýmiň böleginiň sany;

n – iýmleriň görnüşleriniň sany;

a_{ik} – k – görnüşli iým birliginiň içinde i görnüşli ýokumly böleginiň birliginiň sany;

b_i – bir gije – gündiziň dowamynda hökmany gerekbolan i ýokumly iýmiň böleginiň minimumy;

c_k – k görnüşli iýmleriň birliginiň bahasy;

x_k – k görnüşli iým birliginden peýdalanyp düzülen rasiondaky umumy möçberini kesgitlemeli;

Bu ýerde optimal meýilnama bolup, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sanlaryň tertibi aşakdaky çäklendirilmeleri kanagatlandyrmaly:

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ (rasiona girýän haýsy hem bolsa bir görnüşli iýmitiň mukdary otrisatel bolmaly däldir)

2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_{i,} i = 1, 2, \ldots, n$

(i-nji ýokumly iýmitiň umumy sany rasionda berlen b_i-den aşak bolmaly däldir) we optimal rasion düzülende harajatlaryň jemini minimumlaşdyrmaly

3. $Z_{\min} = \sum_{j=0}^{n} c_k x_k.$

(1), (3) – nji formula berhiziň düzüminiň matematiki modeli, şeýle hem mallary iýmitlendirmäniň rasionynyň düzüminiň matematiki modelini aňladýar. Alnan matematiki model diňe bir mallary iýmitlendirmäniň rasionynyň optimal modeli bolman, eýsem bu model islendik şihti garyşygyň matematiki modelidir. Muňa degişli bolup, islendik tehniki himiki dermanlar oba hojalygynda we senagatda alynýan garymlaryň netijesinde emele gelýän düzümi kesgitlemek üçin esasy model bolup hyzmat edýär.

Garyndy barada ýene bir mesele.Ýangyjyň dürli görnüşlerini, tehniki häsiýetleri dürli bolan nebit önümlerini garmak arkaly alýarlar. Ýangyjyň öňünden berlen görkezijileri örän takyk bolmaly, sebäbi peýdalanyjylar üçin bu görkezijiler gaty wajyp bolup durýar. Kärhananyň peýdalylygy haýsy nebit önümleriniň garylýandygyna bagly bolup durýar. Kärhananyň maksimum peýdalylygyny hemde ýangyjyň dürli görnüşlerini gerekli mukdarda almak üçin, nebit önümlerini garmagyň optimal meýilnamasy talap edilýär..

2. Önümiň çykarylyşynyň optimal meýilnamasy barada mesele. Bu mesele, haçan kärhanalar tarapyndan önüm öndürmäniň meýilnamasyny düzmeli bolanda ýüze çykýar, şona görä tejribelikde ol wajyp baha eýedir.

Goý, kärhana tarapyndan çykarylýan namenklatur önümleriň sanawy n atlardan duryan bolsun. a_{ij} bilen j ($j = 1, 2, \dots, n$), görnüşli önüm birligini öndürmek üçin i ($i = 1, 2, \dots, m$), görnüşli serişdäniň harajatyny, b_i – bilen bar bolan serişdeleriň umumy möçberini, c_i bilen bolsa öndürilen önüm birliginiň ýerleşdirilmeginden alnan girdeýjini, a_i we A_i – bilen degişlilikde i-görnüşli önümiň çykyşynyň göwrüminiň aşaky we ýokarky çäklerini belgiläliň. Önüm çykarmak üçin şeýle bir meýilnama düzmeklik talap edilýär, netijede kärhanada bar bolan hemme görnüşdäki serişdeleriň esasynda, tehniki taýdan üpjün bolup, her bir görnüşli önümleri çykarmak bilen, kärhana ýokary derejede umumy girdeýjini alyp çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrmaly.

Meseläniň matematiki modeli aşakdaky şertlerden durýar: önüm öndürmäniň şeýle bir meýilnamasyny tapmaly, netijede $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ aşakdaky deňsizlikleri ýerine ýetirer ýaly:

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, ($i = 1, 2, ..., m$) (tehniki çäklendirme);

2. $a_j \le x_j \le A_j$, ($j = 1, 2, ..., n$) (aýratyn görnüşli önümleriň çykarylyşynyň göwrümine çäklendirme); bu ýagdaýda maksat funksiýa

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

ýetýär (önümi öndürmekden we ýerleşdirmekden alynan umumy girdeýji).

1–2–3-nji şertleriň esasynda kärhananyň n – görnüşli öndürýän önümleri degişlilikde girdejini maksimum bermeli. Önümleriň hemme görnüşleri degişli kärhanalarda hökman öndürilýän bolmaly.

3. Pudaklar toplumyny optimallaşdyrmak meselesi.

Goý, hojalykda n sany pudak bar bolup, olaryň her biri, diňe bir ýörite görnüşli önüm öndürýän bolsun. Öndürilýän önümleriň her bir görnüşleri beýleki n pudagyň önümlerinde peýdalanylýar (hususy ýagdaýda nol sanda).

Goý x_i – pudagyň önüminiň göwrümi.

y_i önümçiligiň daşynda peýdalanmak üçin i – görnüşli önümiň göwrümi.

a_{ij}, j – görnüşli önümiň gös-göni harajatynyň koeffisientleri we i-nji pudagyň i-nji önüm birliginiň görnüşleri.

N_i, i-nji pudagyň mümkin bolan maksimum önüminiň göwrümi.

d_i, i – görnüşli önümçiligiň daşyndan peýdalanmak üçin gerek bolan önümiň sany.

c_i, i – görnüşli önümiň birlik bahasy.

Berilen x_i önümiň göwrümini şeýle bir mümkin bolan şertlerde kesgitlemeli, netijede çykarylan taýýar önümiň $y_i (i = 1, 2, ..., n)$ umumy bahasy maksimuma baha eýe bolar ýaly.

Bu meseläniň matematiki modeli aşakdaky görnüşde berilmegi mümkin: wektorlary tapmaly $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ we $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ ýeter ýaly

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

(taýýar önümiň hemme umumy bahasy) haçanda aşakdaky çäklendirmeler ýerine ýetende:

1. $0 \leq x_i \leq N_i. \ (i = \overline{1,n})$ (önümçiligiň göwrümine çäklendirmeli).

2. $y_i \geq d_i \quad (i = \overline{1,n})$ (taýýar önümiň çykyşyna çäklendirmeli)

3. $x_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad (i = \overline{1,n})$ (önümleriň çykyşyna bolan tehniki çäklendirmeli).

4. Önümçilik maksatnamasyny saýlamak barada Kontorowiçiň meselesi

Bu mesele belli rus matematigi L.W. Kantorawiç tarapyndan 1939-njy ýylda tejribe meselesi hökmünde çyzykly programmirlemäniň birinjileriniň hatarynda düzülen we çözülen.

Goý, m sany kärhananyň tarapyndan önümleri öndürmek gerek bolsun. Goý, ol kärhanalarda n sany dürli görnüşli önümleriň $l_1, l_2, l_3, ..., l_n$ assortimentde önümleri öndürýän bolsunlar. Şeýle hem şol kärhanalaryň i-njisi, j-nji önümi öndürýänlerini a_{ij} harç edilýän birlik wagtda diýip belgiläliň. Goý max $a_{ij} > 0$ bolsun, ýagny islendik kärhana iň bolmanda bir görnüşli önüm öndürýän bolsun. Onda kärhanalaryň birlik wagtda öndürýän önümleriň görnüşleriniň ýagny assortimentleriniň möçberiniň jeminiň maksimum bolmagy üçin ol kärhanalaryň iş maksatnamalarynyň optimal bolar ýaly edip düzülmegini talap edilýär, ýagny islendik kärhananyň haýsy hem bolsa bir görnüşli önüm öndürende, oňa sarp edilýän wagt birligini görkezmeli. Başgaça aýdanyňda, öndürilýän önümlere ýetmezçilik bolanda, öndürijilik güýjüň bolsa çäklendirilen ýagdaýynda önüm öndürmesini güýçli derejede, ýagny kärhanany doly mümkinçilikler esasynda işledilip, önümleriň maksimum çykarylyşyny almaly. Bu meseläniň matematiki modeli aşakdaky görnüşde şekillendirilýär.

Goý, x_{ij} $i=\overline{1,m};\overline{1,n})$ – haýsy hem bolsa bir i-nji kärhananyň j-nji önümi öndürmek üçin goýberilen iş wagty bolsun. Onda kärhanalaryň önüm öndürmek üçin goýberilýän wagtlarynda doly işläp, maksimum önüm almak üçin optimal maksatnama aşakdaky görnüşde ýazylýar:

aşakdaky şertlerden x_{ij} sany tapmaly:

1. $x_{ij} \geq 0$ (i-nji önümi öndürmek üçin goýberilen wagt ol otrisatel bolmaly däldir);

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \leq 1$ (önüm öndürmek üçin kärhana goýberilýän doly wagt hemme wagtlaryň jemi);

3. $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$ (hemme kärhanada öndürilen önümler, j-nji önümiň sany),

4. $z = \min \dfrac{y_j}{l_j}$ (assortiment görnüşleri önümleriň ýygyndysy)

z maksimuma ýetýär max z.

(1), (4) – mesele Kontorowiçiň önümçilik maksatnamasyny saýlamak baradaky meseleleriniň matematiki modelini aňladýar. Biz umuman çyzykly programmirlemä gelýän matematiki modellere seredýäris. Ýagny, meseläniň maksat funksiýasy şeýle hem çäklendirmeler ulgamy gözlenýän x – näbellilere görä 1-nji derejede bolup, çyzykly programmirlemäniň meselesi bolmaly. Häzirki wagtda seredýän meselämiz bolsa, maksat funksiýa görä ülüşli (drob) bolup, çyzykly däl programmirlemäniň meselesine gelýär, ýöne ony biz ýönekeýleşdirip, haçan alnan önümleriň görnüşleri l_i – hemişelik diýip talap etsek, ýagny $L_i = const$, onda biz çyzykly programmirlemäniň meselesini alarys.

5. Ulag meselesiniň parametriki görnüşi.

Optimallaşdyrma usullary dersinden bize belli bolşy ýaly, ulag meselesiniň umumy görnüşi çyzykly programmirlemäniň meselesine degişli bolup, ol meseleleriň ekstremal bahalary gözlenilýär. Ýagny, onuň maksimum hem minimum çözüwleri gözlenilýär. Bu meselä degişli bolup, seredilýän birnäçe ýörite meseleleriň bardygyny biz ýokarda belläpdik. Parametrik ulag meselesi, şol bir goýulýan meselede ugradylýan punktlarda (ýerlerde) bar bolan a_i-serişdeler $a_i = \alpha_i + \alpha'_i \; t, (i = \overline{1,m})$ görnüşinde berlip, oňa degişli bolan islegleriň bar bolan punktlarynda ýa-da ýerlerinde talaplary $b_j = b_j + b'_j$ $t(j = \overline{1,n})$ görnüşde, şeýle hem ýükleriň degişli ýerlerden soralýan islegleri kanagatlandyrmak üçin eltilmeginiň bahalary $c_{ij} = c_{ij}' + c''_{ij} t, (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, ýagny i-nji ýerden j-nji ýere bar bolan a_i – serişdäni talap edilýän b_i islegi kanagatlandyrmanyň meýilnamasy x_{ij} – bolup, degişlilikdäki bahasy c_{ij} – görnüşde seredilýär.

Seredilýän meselede serişdeler islegler hem-de ulagda eltilmeli ýükleriň bahalary iki bölekden durýar.

1-*nji bölek* parametre degişli bolmaýar;

2-*nji bölek* bolsa, t- parametre degişli bolup durýar. Mysal üçin, matematiki modelde şeýle özgerişler emele gelýär:

$x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a'_1 + a''_1 t$ haçan $t = 0$ bolanda biz ulag meselesiniň umumy matematiki modelini alarys (berinji setir).

$x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b'_1 + b''_1 t$, t – parametr wagty kesgitleýär. Onda biz bu meseläniň matematiki modelini aşakdaky görnüşde ýazyp bileris (berinji sütün):

$$1.\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b'_j + b''_j, \qquad j = 1, 2, ..., n;$$

$$2.\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a'_i + a''_i, \qquad i = 1, 2, ..., m;$$

Ulaga bolan çykdajynyň minimum bolmagy talap edilýär.

$$3.\ Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (c'_{ij} + c'_{ij} t) x_{ij} \to \min,$$

modeliň ýapyk bolmagy üçin:

$$4.\ \sum_{i=1}^{m}(a'_{ij} + a''_{ij}t) = \sum_{i=1}^{m}(b'_{ij} + b''_{ij}t),\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$$

şerti ýerine ýetirmeli.

Şeýle hem:

$$5.\ x_{ij} \geq 0, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Onda biz t-parametriň ýerine kesgitli sanlary goýup, bu meseläniň optimal çözüwini kesgitläp bileris.

6. Bellemek meselesi.

Goý dürli görnüşli n sany uçarlar bar bolup, olary n sany uçar gatnawlaryň arasynda paýlamaklyk talap edilýän bolsun. Olardan garaşylýan peýdalylyk c_{ij} bolup, i-nji uçar j-nji gatnawda, meselem hyzmat edilýän ýolagçylaryň sany belli. Mesele uçarlary haýsy gatnawa bellenendigi (her bir gatnowda bir uçar) bellenip, netijede hemme uçarlaryň peýdalanylmagynda jemi peýdalylyk maksimum bolar ýaly (ýagny hyzmat edilen müşderileriň sany mysal bolup biler). Eger aşakdaky formula arkaly kesgitlenýän x_{ij} näbellileri girizsek

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ eger i-nji uçar j-nji gatnawa bellenen bolsa,} \\ 0, \textit{ eger uçar bellenmedik bolsa,} \end{cases}$$

onda meseläniň matematiki modeli, aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

x_{ij} näbelliniň şeýle bir bahalaryny tapmaly, netijede

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

baha eýe bolar ýaly (jemi peýda) aşakdaky şertlerde:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ (her bir gatnawa bir uçar bellenilýär).}$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ (her bir uçar bir gatnawa bellenilýär).}$$

$x_{ij} = 1$ ýa-da $x_{ij} = 0$ şert umuman aýdanda meseläni örän güýçli çylşyrymlaşdyrýar. Seredilýän bellemek meselesine degişlilikde $x_{ij} = x$ (1 ýa-da 0) şerti örän ýönekeý $0 \leq x_{ij} \leq 1$ şert bilen çalyşmak bolýar.

Ulag meselesiniň hususy haly bolan bellemek meselesi ýörite meseleleriň biridir. Bellemek meselesiniň esasy şertleriniň biri hem kärhanada bar bolan hünärleriň sanyna görä degişlilikde bir dalaşgäri kabul edip bolýar. Şonuň üçin hem $a_1 = 1$, $b_j = 1$. Onda c_{ij}, x_{ij} öňküligine galýar. Onda bu meseläniň matematiki modeli

$$1. \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$2. \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$3. \sum_{j=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_i$$

$$4. \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \max.$$

Has takygy, eger biz hemişekimiz ýaly, ulag meselesiniň algoritmini ulanyp (peýdalanyp) çözsek, onda bu ýagdaýda ol ony öz-özünden x_{ij} bitin sana getirer, ýagny meseläniň çözülişini başlangyç şertine getirer. Şeýlelikde bellemek meselesiniň matematiki modeli hem ulag meselesiniň matematiki modeli ýaly, şol bir meňzeşlikde düzmek bolar. Bellemek meselesiniň çözülişiniň algoritmi, umumy ulag meselesiniň çözülişiniň algoritminden örän ýönekeýdir.

7. Halk hojalygynda ýüze çykýan meseleleriň meýilnamasynyň ulag meselesine getirilişi we olaryň çözülişi.

Goý, n sany hojalykda dürli görnüşli işler alnyp barylýan bolsun. Şol işleri ýerine ýetirmek üçin m görnüşli tehnikalar ulanylýan bolsun. Onda degişli işleriň degişli tehnikalary bilen ýerine ýetirilmeginiň optimal meýilnamasyny kesgitlemek gerek bolsun. Eger biz i-nji hojalygyň işini j-nji tehnikanyň üsti bilen ýerine ýetirmegiň meýilnamasyny x_{ij} diýip bellesek, işiň bahasyny c_{ij} diýip bellesek, işleriň görnüşlerini a_i, tehnikalaryň görnüşlerini b_j diýip bellesek, onda biz bu meseläniň matematiki modelini düzenimizde ol modeli ulag meselesiniň umumy matematiki modeli görnüşinde ýazmak bolýar.

Çyzykly programmirlemä, ulag meselesine gelýän ýörite meseleler we olaryň matematiki modeli.

Ýokarda belleýşimiz ýaly, matematiki modelirlemäniň esasy bolup, çyzykly we çyzykly däl programmirlemäniň meselelerinden durýar. Biz yzygiderlikde çyzykly programmirlemäniň ulag meselesiniň ýöriteleşdirilen ýüze çykýan birnäçe meselelerine seretdik. Olardan ulag meselesiniň parametrli bellemek, meselelerine seretdik. Indi bolsa degişlilikde oba hojalygyna hem-de senagata degişli bolan meselelerine seredeliň.

1. Oba hojalyk önümçiligini meýilnamalaşdyrma meselesiniň matematiki modeli.

Goý, *m* görnüşli oba hojalyk önümlerini *n* dürli hojalyklarda öndürmek gerek bolsun. Goý, bu mesele ykdysady tarapdan maksimum önüm alyp, hojalyga girdejilikli mesele bolsun, onda şertine görä onuň optimal meýilnamasyny düzeliň:

Her bir hojalygyň ekilýän ekinler üçin kesgitlenilen ýerleriniň mukdaryna görä ekinleriň möçberi görkezilen bolsun. Eger biz *i*-nji önüm *j*-nji hojalykda öndürmegiň 1 *gekdar* üçin, harajadynyň birligini c_{ij} bilen belgilesek, şeýle hem hemme ekilmeli ekinleriň degişlilikdäki meýdanlary a_i bilen sürülip, taýýarlanan ýerleri b_j bilen olaryň yzygiderlikde ekinleriň hojalyklara degişliligini x_{ij} bilen bellesek, onda biz bu mesele üçin maksimum girdejini almak ýa-da kesgitlemek modelini düzeris. Munuň matematiki modelini aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar: x_{ij} ululygyň şeýle bir bahalaryny tapmaly, netijede aşakdaky aňlatma minimum baha eýe bolar ýaly:

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

(Önümçilige we ulaga bolan harajatlaryň jemi) aşakdaky şertlerde;

1. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, 2, ..., n$ (her bir talap edilýän punkta, talap edilýän sanyndan az bolmadyk önümler eltilýär);

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, 2, ..., n$ (önümçiligiň her bir punktyndan öndürilen önümiň sanyndan köp bolmadyk önümler eltilýär);

3. $x_{ij} \geq 0. \quad i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2, ..., n$ (eltilýän önümiň göwrümi otrisatel bolup bilmez).

Görşümiz ýaly, bu mesele ulag meselesine meňzeş, ýöne ondan tapawudy bu meselede maksimum gözlenýär. Şeýle hem a_i we b_j bir-birine deň bolmagy hökman hem däl.

8. Çyzykly programmirlemäniň önümçilik merkezleriniň ýönekeý optimal ýerleşdirme meselesi. Onuň matematiki modeli.

Goý, bize *m* sany belli ýerlerde senagat edaralary ýerleşdirilýän bolsun. Goý, bu edaralar haýsy hem bolsa bir önümleri öndürýän bolsun.

Goý, şol öndürilýän önümler n sany görnüşli ýerlerde talap edip alynýan bolsun. Onda öndürilýän önümi a_i bilen bellesek, şol öndürilen önümlere bildirilýän islegleri b_j bilen belläris. Eger-de biz öndürilen önümleriň senagat merkezlerinden talap edilýän islegleri kanagatlandyrmak üçin ulaglar arkaly eltilmesiniň çykdajysyny c_{ij} bilen bellesek, ýagny degişlilikde i-nji senagat merkezindäki önümi j-nji talaplary, islegleri kanagatlandyrmak üçin eltilmegi, şeýle hem bu ulgamyň degişlilikdäki meýilnamasyny x_{ij} bilen bellesek, onda biz ýokarda görkezilen hem-de düzülen ulag meselesiniň matematiki modelini $z_{\min}$ görnüşde alarys.

Bellik: bu meselede $(c_{ij})_{i=1,\, j=1}^{m\times n}$ ulaglaryň harajaty bolup, öndürilýän önüme çykarylýan harajatyň üstüne goşulan harajaty aňladýan matrisadyr.

Eger biz c_i diýip m hojalykda öndürilýän a_i önümleriň meýilnamasyny x_i diýip bellesek, onda ol onuň harajatyny aňladar. Onda biz bu meseläniň matematiki modelini aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

x_{ij} näbelliniň şeýle bir bahalaryny tapmaly, netijede ol aşakdaky şerte eýe bolmaly:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} c_i x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}\right\}$$

(önümçilikde we ulagda harajatyň jemi minimum bolar ýaly) aşakdaky şertlerde:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \begin{cases} \nearrow \max \\ \searrow \min \end{cases}$$

1. $x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$ (öndürilen önümiň sany dolulygyna talaplara eltilip kanagatlandyrylýar);

2. $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ önümler doly sanda eltilmeli, otrisatel bolmaly däl);

3. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_{ij}$ (her bir talap edilýän punkt talap edilýän göwrümden az bolmadyk möçberde alýar).

9. Önümçilikleri amatly optimal ýerleşdirmäniň çyzykly däl meselesi we onuň matematiki modeli.

Bu meseläniň optimal çözüwi has ýönekeý bolup, ol çyzykly programmirleme meselesi bolýar. Biz onuň san usullary bilen *i* aňsatlykda kesgitläp bilýäris. Ýöne önümçilikleri optimal ýerleşdirmäniň umumy halynda biz çyzykly däl programmirlemäniň umumy halyny alýarys. Bu mesele has çylşyrymly bolup, biziň ýokarda görkezen usullarymyz bilen optimal çözülmeýär. Onuň üçin birnäçe täze usullary ulanmaly bolýar. Eger biz ýokarda seredilen önümçilikleri optimal ýerleşdirme meselesiniň goýluşyny ýokardaky görnüşde ulanyp, önümçilige bolan çykdajylary önümiň çykyşyna proporsional diýip, ýagny hemişelik diýip hasap etmese, onda biz proporsional baglanyşygyň önümiň çykyşynyň möçberine bolan harajady proporsional däl, ýagny çykdajymyz hemişelik däl-d üýtgeýän bolanlygy üçin biz täze çyzykly däl programmirlemäniň meselesini alýarys. Bu ýagdaý ýokardaky ýönekeý meselä garanyňda has çylşyrymly bolup, özüniň düzümi boýunça hakykata has golaýdyr.

Goý, $f_i(x_i)$ – funksiýa *i*-nji hojalygyň öndürilýän önümiň möçberi x_i, onda $f_i(x_i)$ önüme edilen harajadyň birligi diýilýär. Önümçiligiň güýjini çäklendirmeýäris.

Eger biz ýokardaky şertleri göz öňünde tutsak, onda ýokarda seredilen matematiki modeliň ýönekeý şerti üýtgäp, aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner.

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right\}.$$

$f_i(x_i)$ – önümiň çykyşynyň çyzykly däl görnüşi.

$$Z = (c_i x_i) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Soňky formulanyň 1-nji bölegi amatly ýerleşdirilen kärhanalaryň, zawod-fabrikleriň önüm çykaryşynda edilýän harajady görkezýär. 2-nji bölegi ol önümlere bolan islegleri kanagatlandyrmak üçin ýükleri (önümleri) eltip bermek üçin çykarylýan harajatlar. Şonuň üçin umumy çykdajylaryň jemi minimum bolmalydyr. Galan şertler ýokardaky meselede seredilen çyzykly görnüşdäki önümçiligi amatly ýerleşdirmäniň ýönekeý meselesini şertleri bilen kesgitlenilýär. Ýagny çyzykly görnüş we çyzykly däl görnüş biri-biri bilen diňe maksat funksiýanyň 1-nji bölegi bilen tapawutlanýar.

10. Önümçiligi amatly ýerleşdirmäniň bitinsanly meselesi we onuň matematiki modeli.

Goý, bize m-sany önümçilik kärhanalaryny ýerleşdirmek üçin punktlar berlen bolsun. Goý, ol kärhanalar degişlilikde haýsy hem bolsa bir görnüşli önümi çykarýan bolsun. Ol pursatlarda täzeden gurulýan fabrikler ýa-da zawodlar haýsy hem bolsa bir görnüşli proýektler esasynda gurulýan bolsun. Goý, olaryň önümçilikde öndürýän önümleriniň güýji X_i- gutarnykly önümleriniň toplumyndan durýan bolsun.

Meselem, olar 1 ýa-da 2 bölümden durýan konweýerde (yzygiderlikde) önüm çykarýan bolsun. Goý, birnäçe birmeňzeş tehniki enjamlardan durýan bolsun. Şeýlelikde, seredilýän her bir zawodyň ýa-da fabrigiň çykarýan önüminiň güýji kesgitli bitinsanly önümlerden durýan bolsun (taýýar egin-eşik önümleri, gazan, çäýnek we ş.m.).

Her bir önüm öndürilýän punktlarda önümçilik bilen önümiň çykyşy we oňa bolan hyrydaryň arasyndaky arabaglanyşyk belli.

Eger-de biz ol arabaglanyşyga ýönekeýleşdirip seretsek, onda ony $f_i(x_i) = c_i x_i$ görnüşinde ýazmak bolýar. Eger-de biz degişlilikde n-sany punktda şol çykarylýan önümlere $b_i(i = 1,n)$ islegler bar diýsek, onda ol isleglere görä ulag harajaty c_{ij} diýip bellesek, şeýle hem x_{ij} – bilen öndürilýän önümiň möçberini i-nji punktdan j-nji punkta eltmegiň meýilnamasy diýip hasap etsek hem-de x_i-ni i-nji punktdaky öndürilen önümiň möçberi diýip bellesek, onda biz aşakdaky meseläni alýarys. Ýagny, degişli kärhanalary amatly ýerleşdirmek, onuň önümçilik güýjüni kesgitlemek hem-de çykarylan önümleri degişli isleglere eltmek. Onda bu meseläniň matematiki modeli ýokardaky seredilen 2-meseläniň matematiki modeli bilen gabat gelýär.

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}\right\}; \qquad x_i = \begin{cases}1\\0\end{cases}.$$

Ýokarky şertde $(0 \le i \le 1)$.

Ýokarda seredilýän mesele çyzykly programmirlemäniň bitinsanly meselesi bolup, ýönekeý görnüşe eýe bolýan hem bolsa, onuň özboluşly kynçylyklary bardyr. Ol bolsa meseläniň bulewoý şerti bilen baglanyşykly bolup, ol çyzykly däl görnüşine getirýär. Muňa mysal edip, bellemek meselesini almak bolar.

11. Ykdysadyýeti giňeldýän Jon fon Neýmanyň matematiki modeli.

Amerikan alymy Jon fon Neýman 1937-nji ýylda ykdysady meseleler üçin matematiki modeliň düzülişine hem-de ykdysadyýetiň ösmegine täsir edip biljek meselelere seredipdir.

Goý, önüm öndürmek üçin n tehnologik usul we m görnüşli öndürilýän we peýdalanylýan önümler bar bolsun. x_j bilen önümiň yzygiderli öndürilmegi j-nji tehnologiýa usul bilen ýerine ýetirilýän bolsun. Eger-de a_{ij} bilen i görnüşli önümi j görnüşli tehnologik usuly peýdalanyp alsak, onda oňa ykdysady tehnologik koeffisiýent diýlip, i-nji önümi öndürmek üçin edilýän j-nji harajat diýlip aýdylýar. Edil şonuň ýaly edip b_{ij} bilen j-nji tehnologik usul arkaly i-nji önümiň öndürilmegini n^i diýip belgiläliň. Şeýlelikde, b_{ij} we a_{ij}, degişlilikde i – önümiň j – tehnologik usuly bilen öndürilmeginiň harajatynyň ululygyny görkezýär. Edil şeýle degişlilikde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bilen ýokary derejede önümiň çykyşyny, onuň harajatynyň matrisasyny $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ hem-de önümiň çykyş matrisasyny $B = (b_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$ diýip belgiläliň.

Şeýle hem düzülen ykdysady matematiki model, aşakdaky şertleri ýerine ýetirýär diýip hasap edeliň:

1. Önümiň çykyşynda hemme tehnologik usullar yzygiderli ýerine ýetirilmeli. Ol yzygiderlilik otrisatel bolmaly däldir.

2. Hemme tehnologik usullarda önümi nula deň bolmadyk harajatlar bardyr.Her bir görnüşli önüm öndürmek üçin ony öndürmäniň usuly bardyr (başgaça aýdaňda A matrisa O setiri, B matrisa 0 sütünleri özünde saklamaýar). Aşakdaky şertlerde önümçiligiň maxα (α-san parametri) maksimum çalt depginler bilen ösmeginiň mümkinçiliklerini tapmaly.

1. $\alpha Ax \leq Bx$

2. $x \geq 0$

Bu meseläni $x_j \geq 0$ bolanda başgaça şekillendirmek hem bolýar:

$$\max_{\{x_j\}} \left\{ \alpha = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} \right\}$$

(maksimal tehniki çalt depginler bilen ösüşi).

Şu meselede haçan $n = m$ bolsa, onda öndürilýän önümleriň sany bilen tehnologik usulyň sany bir-birine deň bolýar. Ýagny bu ýagdaýda her bir çykarylýan önüm ýeke-täk tehnologik usul bilen öndürilýär we $x \geq \alpha Ax$ görnüşde şekillendirilýär. Bu ýerde α aşakdaky görnüşde keşgitlenilýär:

$$\max_{\{x_j\}} \left\{ \alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_j}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j} \right\}$$

12. Tehnologiýanyň esasynda önümçilik funksiýalarynyň faktorlarynyň optimal saýlanyşy

Belli bolşy ýaly, köplenç ýagdaýlarda amaly meseleler düzülende hem-de çözülende olar birnäçe faktorlara bagly bolup durýar. Goý, haýsy hem bolsa bir kärhananyň önüm öndürijiligi ýa-da önümiň çykyşy bahasyna, harajatyna ýa-da gös-göni onuň hiline bagly bolup, olary x-wektor bilen $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ görnüşinde berlen diýip hasap etsek, onda ol faktorlara bagly bolan önümiň çykyşy aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$y = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}. \tag{19}$$

Bu ýerde α_1, α_2, …, α_n – belli sanlar parametrleri statistiki berlenleriň esasynda kesgitlenilýär. Biz çyzykly programmirleme meselesini $f(x)$ ýa-da y önümçilik funksiýasy ýa-da mappkp[jkp-ksat funksiýasy diýip atlandyrarys. Bu ýerde y tehnikaly önümçilik funksiýasy. Eger-de tehnologiýa üçin sarp edilen çykdajylar her bir j-nji faktorlar bilen bagly bolsa hem-de ony c_j diýip bellesek we degişli parametrleri statistikanyň beren maglumatlaryna görä kesgitlesek, onda biz çykarylan c harajatyň köp bolman öndürilen, önümiň çykarylyşynyň max bolmagyny gazanmagy talap edilse, onda biz şu şertleri göz öňünde tutup, onuň matematiki modelini aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$x_1, x_2, ..., x_n$ näbellileriň aşakdaky şertleri ýerine ýetirer ýaly bahalaryny tapmaly:

1) $x_j \geq 0$ (faktorlaryň sany otrisatel bolup bilmeýär);

2) $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq c$ (umumy harajata we hemme faktorlara bolan çäklendirmeler almaly);

3) $\max a\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ (öndürilýän önümiň mümkin bolan maksimal göwrümi).

13. Tordaky gaz meseleleriniň optimallaşdyrylyşy

Bu mesele optimallaşdyrma meselesiniň proýektleriniň düzüliş meseleleriniň görnüşlerine degişli bolup, onuň manysy aşakdakylardan durýar.

Goý, m sany gazyň çykýan ýa-da akýan ýerleri bar bolsun. $A_1, A_2, ..., A_m$ ýerlerde degişlilikde gazyň akymynyň güýçlüliginiň mümkinçiligi $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ maksimum bolsun. Gazylyp alynan gazyň akymynyň güýjüne bolan harajat g, her bir gazyň çykýan ýerine görä $\varphi_i(g)$ $(i = 1, m)$ onuň funksiýasy bolup durýandyr. Gazylyp alnan gaz $B_1, B_2, ..., B_n$ punktlarda (şäherlerde) peýdalanylýar.

Bu punktlaryň her birinde, gerek bolan gazyň akymynyň güýji $P_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Gazyň çykýan ýerinden, onuň peýdalanylýan punktyna eltilmeginiň tory öňünden belli. Ol N sany $C_1, C_2, ..., C_n$ düwünlerden we M sany $D_1, D_2, ..., D_m$ olary baglaşdyrýan bölümlerden durýar. Her bir k bölüme gazyň goýberilmesiniň bahasyny $f_k(r)$, funksiýa görnüşinde ýazmak bolar, bu ýerde r – bölümdäki gazyň güýji.

Goý, her bir k bölümde, gerek bolan gazyň akymynyň güýji r_k, $k = 1, 2, ..., M$ bolsun.

Kirhgofyň kanunynyň esasynda toruň düwünlerinde alarys:

1. $\sum\limits_{K\in C_e^+} r_k = \sum\limits_{K\in C_e^-} r_k, \qquad e = 1, 2, ..., N$

(her bir düwüne girýän akym çykýan akyma deňdir)

Bu ýerde C_e^+ we C_e^- bilen, degişlilikde toruň köp bölümlerinde e düwünlere girýänler we e düwünlerden çykýan gazyň toplumlaryny belgiläliň. Peýdalanylýan punktlarda hem alarys.

2. $\sum\limits_{K\in B_e^{\mp}} r_k = P_j + \sum\limits_{K\in B_e^-} r_k, \qquad j = 1, 2, ..., n$

(her bir j-nji punktda peýdalanylmaga berilýän gazyň akymy, peýdalanylan akymyň we çykýan akymyň jemine deňdir).

B_e^+ we B_e^- belgileriň manysy 1-nji bölümiň belgilemesiniň manysyna bir meňzeşlikdedir.

Punktlarda gazyň alnyşyny ýazalyň:

3. $g_i = \sum\limits_{K\in A_e^-} r_k, \quad i = 1, 2, ..., m$

(i-nji punktda g_i gazyň alnyşynyň güýji onuň çykyşynyň jemine deňdir).

Şeýle hem, her bir punktda gazyň alnyşynyň akymynyň güýji çäklidir.

4. $0 \leq g_i \leq Q_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Bu ýerde mesele, gazyň şeýle bir alnyşyny kesgitlemeli, netijede 1–4 çäklendirmeler ulgamynyň şertlerine görä, gazy almanyň umumy çykdaýjysy minimum baha eýe bolup, ähli ulgamyň hyzmaty aşakdaky ýaly bolmaly:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(g_i) + \sum_{k=1}^{m} f_k(r_k)\right\}.$$

Soňky ulgamyň esasynda biz maksat funksiýanyň 2 bölümden durýandygyny görkezýäris. 1-nji bölümde $\varphi_i\ (g_i\ )$ – gazyň çykyşy hem-de onuň güýji, 2-nji bölümde gazyň çykyşynyň umumy bahasy.

Netije: bu mesele ykdysady tehniki mesele bolup, onuň matematiki modeli örän çylşyrymly hasap edilýär. Şonuň üçin köplenç ýagdaýda bu meseläniň modeli çyzykly däl diýip hasap edilýär. Bu bolsa meseläniň çözülişini has kynlaşdyrýar. Eger gazyň çykýan nokatlarynyň sany we oňa bolan islegleriň sany köp bolsa, onda ulgama girýän näbellileriň sany köpelýär we ony kesgitlemek üçin ýörite programmalar düzmeli bolýar ýa-da öň bar bolan programmalara getirmeli bolýar.

14. Optimallaşdyrmanyň stohastik meselesi

Seredilýän ykdysady ýa-da amaly meseleleriň tötän hadysalary ýa-da şertleri göz öňüne tutulan bolsa, onda ol meselä stohastik mesele diýilýär. Biz optimal meseleleriň matematiki modelini düzenimizde stohastik şertleri göz öňüne tutsak, onda ol model stohastik matematiki model bolýar. Şunuň ýaly şertde model düzmek meseläniň has takyk modeliniň düzülişi diýlip hasaplanylýar.

Belli bolşy ýaly, kesgitli (determenirlenen) şertde düzülen meseläniň matematiki modeli hakykaty doly suratlandyrmaýar. Şonuň üçin koeffisiýentleriniň ýa-da parametrleriniň üýtgemeginiň netijesinde ol model meýilnama hökmünde hakykaty suratlandyryp bilmeýär. Mysal üçin, tehniki bazada ýylyň dowamyndaky emele gelen nazarlyklary düzetmek üçin düzülen meýilnama hakykaty suratlandyryp bilmeýär. Şonuň üçin meýilnamada möwsümleýin hem-de tötänleýin ýüze çykýan nazarlyklary peýdalanyp, düzülen matematiki model doly suratda hakykaty kesgitlemäge mümkinçilik berýär.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2009.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. I – II tomlar. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010 .

5. *Gubanguly Berdimuhamedow.* Älem içre at gezer. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2011.

6. *Ahundow A.M., Töräýew A., Garajaýew A.* Analitik geometriýa we çyzykly algebranyň elemetleri / Gaýbanaçylar üçin metodiki golanma. I bölüm. – A., 1979.

7. *Ahundow A.M., Töräýew A., Garajaýew A.* Analitik geometriýa we çyzykly algebranyň elemetleri / Gaýbanaçylar üçin metodiki golanma. II bölüm. – A., 1980.

8. *Garajaýew A., Bäşimow I.* Amaly meseleleri derňemekde ýasama usulynyň ulanylyşy. Türkmenistanyň Garaşsyzlygynyň şanly 16 ýyllygy we Türkmen döwlet ulag we aragatnaşyk institutynyň döredilmeginiň 15 ýyllygy mynasybetli mugallymlaryň, talyplaryň we önümçilik hünärmenleriniň ylmy işleriniň ýygyndysy. – A.: 2007.

9. *Garajaýew A.* we başg. Käbir ykdysady meseleleriň matematiki modelleri we olary optimal çözmekligiň simpleks usuly. – A.: 2001.

10. *Garajaýew A.* we başg. Kesgitsizlik şertli matematiki modelleriň düzülişi we optimal çözülişi. – A.: 2007.

11. *Garajaýew A.* we başg. Ätiýaçlyklary meýilnamalaşdyrma we dolandyrma meselesiniň matematiki modeli. – A.: 2008.

12. *Garajaýew A.* we başg. Kesgitsizlikde ätiýaçlyklary dolandyrmak meselesi we onuň matematiki modeli. – A.: 2008.

13. *Garajaýew A.* we başg. Tor usuly bilen ykdysady meseleleriň meýilnamalaşdyrylyşy. – A.: 2008.

14. *Garajaýew A.* we başg. Köpçülige hyzmat ediş ulgamyň ykdysady matematiki modeli. – A.: 2008. №6.

15. *Ç. Aşyralyýewiň* umumy redaksiýasy bilen. Kompýuter ulanyjylara gollanma. Windows, Word, Internet. –A.: 2001.

16. *Ç. Aşyralyýewiň* umumy redaksiýasy bilen. Kompýuter ulanyjylara gollanma. Excel, Access, Power Point. – A.: 2002.

17. *Aşyralyýew Ç., Soltanow S.* Informatika dersinde okuw gollanmasy. – A., 1999.

18. *Babakulyýew M., Muhammetberdiýew Ö.* Maglumatlar tilsimatlarynyň adalgalarynyň sözlügi. – A.: «Ylym« neşirýaty, 2004.

19. *Hudaýberenow Ö. G., Nuryllaýew N.* Tehniki we ykdysady meselelerde matematiki modelirleme. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

20. *Esenamanow G. M.* Matematiki modelirlemek. – A., TDKP, 2009.

21. *Öwezowa M. M., Täjiýew A. T., Durdyýew G. D., Möwlamow D. A.* Ykdysadyýetde matematika. II kitap. – A.: 2001.

22. *Мамедов М. Б.* Экономический анализ в условиях перехода к рынку. – А.: «Туркменистан», 1995.

23. *Монахов В. М., Беляева Э. С., Краснер Н. Я.* Методы оптимизации. – М.: «Просвещение», 1978.

24. *Ашманов С. А.* Введение в математическому экономику. – М.: «Наука», 1984.

25. *Иванилов Ю. П., Лотов А. Б.* Математические модели в экономике. – М.: «Наука», 1979.

26. *Эддоус М., Стенис Филд П.* Методы принятия решений – М.: «Аудит«, «Юнити», 1997.

27. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: «Наука», 2003.

28. *И. Л. Акулич.* Математическое программирование в примерах и задачах. – Минск: БГЭУ, 2005.

29. *В. Г. Карманов.* Математическое программирование. – М.: «Наука», Гл. ред. физ. – мат. лит., 1986.

30. *Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко*. Введение в теорию массового обслуживания – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: «Наука», Гл. ред. физ. – мат. лит., 1987.

31. *И. Ф. Полунин.* Курс математического программирования. – Минск.: «Вышейшая школа», 1970.

32. *М. Чарыяров, О. Аннаоразов, Д. Бердимурадов.* Исследование операций и методы оптимизации. – А.: Магарыф, 1989.

33. Экономико-математические методы и модели. Задачник; учебно-практическое пособие / кол. авторов; под. ред. С. И. Макарова, С. А. Севастьяновой. – М.: КНОРУС, 2009.

34. Под редакцией Ляшенко И. Н., Линейное и нелинейное программирование. – Киев.: «Высшая школа», 1975.

35. *Лесин В. В., Лисовец Ю. П.* Основы методов оптимизации. – М.: МАИ, 1995.

36. *Замков О. О.* и другие. Математические методы в экономике. – М.: «Дис», 1997.

37. Основы теории оптимального управления. *Под редакцией В. Ф. Кротова.* – М.: «Высшая школа», 1990.

38. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: «Наука», 1980.

39. *Алексеев В. М.* и др. Сборник задач по оптимизации. – М., 1984.

40. *Болтянский В. Г.* Матаматические методы оптимального управление. 2-е изд. – М., 1969.

41. *Габасов Р.* и др. Методы оптимизации. – Минск, 1981.

42. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. – М., 1981.

43. *Моисеев Н. Н.* Методы оптимизации. – Минск, 1978.

44. *Пшеничный Б. Н.* Численные методы в экстремальных задачах. – М., 1975.

45. *Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г.* Математические методы и модели в управлении. – М., 2000.

46. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. – М.: «Наука», 1982.

47. *Курносов Р. П.* Вычислительная техника и программирование. – М., 1993.

48. *Костевич Л. С.* Математическое программирование. – Минск: Новое знание, 2003.

49. *Кузнецов А. В.* Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. Пособие. 2-е изд. – Минск: «Вышейшая школа», 2001.

MAZMUNY

Sözbaşy 7
Giriş.. 11

I BÖLÜM. YKDYSADYÝETDE MATEMATIKI MODEL WE ÇYZYKLY PROGRAMMIRLEME

§1. Model we modelirleme.Ykdysady hadysalarda matematiki modelirlemäniň aýratynlyklary 19
§2. Ykdysady proseslerde önümçilik–tehniki derejäniň esasy prinsipleriniň görkezilişi 22
§3. Matematiki modelirlemäniň kömegi bilen ykdysady prosesleri derňemäniň esasy tapgyrlary... 25

I bap. Çyzykly programmirleme meselesi

§1. Çyzykly programmirleme meselesine gelýän amaly meseleler....... 31
§2. Deňlemeler ulgamynyň Žordan usuly bilen çözülişi 40
§3.Çyzykly programmirlemäniň umumy meselesi 49
§4. Çyzykly programmirleme meselesiniň çözüliş usullary 55
§5.Çyzykly programmirlemäniň ikeldilen meselesi 72

II bap. Çyzykly programmirlemäniň ýörite meseleleri

§1.Ulag meselesi 92
§2. Potensiallar usulynyň algoritmi 104
§3. Algoritmiň esaslandyrmasy 117

III bap. Dinamiki programmirleme meseleleri

§1. Dinamiki optimallaşdyrma meselesiniň köp ädimli proses arkaly çözülişi. 128
§2.Dinamiki optimallaşdyrmada R. Belmanyň algoritmi 136
§3. Dinamikanyň usullary bilen ykdysady meseleleriň çözülişi............ 139
§4. Dinamiki optimallaşdyrma meseleleriniň innowasion tehnologiýalaryň kömegi bilen çözülişi 153

II BÖLÜM. ÇYZYKLY DÄL PROGRAMMIRLEMÄNIŇ KÄBIR MESELELERI

IV bap. Matematiki programmirlemäniň käbir meseleleri

§1. Bitinsanly çyzykly programmirleme meselesi 157
§2. Bitinsanly meseläniň optimal çözüwiniň informasion tehnologiýalar arkaly tapylyşy 178
§3. Diskret programmirleme meselesi 183
§4. Parametrik çyzykly programmirleme meselesi 202
§5. Ülüşli çyzykly programmirleme meselesi 221
§6. Çyzykly programmirlemäniň we oýunlar teoriýasynyň meseleleri ... 237

V bap. Çyzykly däl programmirleme meseleleri

§1. Çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesiniň goýluşy 253
§2. Lagranjyň köpeldijilerini ulanmak usuly. 272
§3.Gradiýent usullary 275

VI bap. Stohastik progrimmirleme meselesi we usuly

§1. Stohastik meseläniň goýluşy 277
§2. Stohastik meseläniň iki tapgyrda çözülişi 280
§3. Stohastik programmirlemäniň meseläniň düzetmesiz çözülişi 284
§4. Stohastik meseläniň umumylaşdyrylan gradiýentler usuly bilen çözülişi 286

III BÖLÜM. YKDYSADY ULGAMYŇ MATEMATIKI MODELIRLENILIŞI

VII bap. Ykdysadyýeti ösdürmekde uzak möhletleýin agregirlenen model

§1. Ykdysady ýönekeý model 291
§2. Ýönekeý agregirlenen ykdysady modelde önümçilik funksiýasy 294

§3. Köp gabat gelýän önümçilik funksiýasy 298
§4. Ykdysady modelleriň ýönekeý görnüşleriniň derňelişi 310
§5. Tehniki ösüşiň modelirlenilişi 319

VIII bap. Ykdysady ulgamlary seljermekde we modelirlemekde önümçilik funksiýasynyň peýdalanylyşy

§1. Önümçilik funksiýasynyň birnäçe umumy häsiýetleri 326
§2. Birnäçe serişdeli şol bir görnüşli önümçilik funksiýalary 333
§3. Çaklamanyň modelinde önümçilik funksiýasynyň peýdalanylyşy 339
§4. Hojalyk birleşmesiniň ekonometriki modeli.................................. 342

IX bap. Halk hojalygynyň ösüşini meýilnamalaşdyrmak we pudagara modelleri seljermek

§1. Halk hojalyk ulgamyny meýilnamalaşdyrmakda pudagara modeller 347
§2. Statistiki pudagara modeli... 352
§3. Dinamiki pudagara modeller.. 359

IV BÖLÜM. AÝRATYN YKDYSADY OBÝEKTLERIŇ HEREKETLERINI MEÝILNAMALAŞDYRMAKDA PEÝDALANYLÝAN MATEMATIKI MODELLER

X bap. Aýratyn ykdysady obýektleriň hereketlerini meýilnamalaşdyrmakda peýdalanylýan matematiki modeller

§1. Ykdysady obýektleriň hereketlerini meýilnamalaşdyrmak meselesinde matematiki derňew 364
§2. Ýükleri daşamagyň meýilnamasy 368
§3. Önümçiligiň tizleşdirilen görnüşdäki meýilnamalaşdyrylyşynyň käbir modelleri 374
§4. Pudaklary ösdürmek meýilnamasynyň modeli 378
§5. Tor usuly bilen meýilnamalaşdyrmak 381

V BÖLÜM. KESGITSIZLIKDE YKDYSADY MODELLER WE ÝASAMA USULLAR

XI bap. KESGITSIZLIKDE YKDYSADY MODELLER

§1. Ykdysady modellerde kesgitsizlik. Kesgitsizlik faktorlarynyň esasy iki görnüşi.. 394
§2. Köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynda tötän faktorly modeller.. 396
§3. Serişdeleri dolandyrmakda tötän faktorly modeller......................... 406

XII bap. Ykdysady modellerde ýasama usulynyň seljermeleri

§1.Ýasama tejribe düşünjesi 412
§2. Amaly ýasama tejribede esasy tapgyrlar.. 417
§3. Ýasama derňewiň birinji tapgyry we meseläniň şekillendirilişi.. 418
§4. Matematiki modeliň gurluşy 426
Goşundy 432
Peýdalanylan edebiýatlar 448

Amangeldi Garajaýew, Akmyrat Öwezow,
Orazgül Meläýewa

YKDYSADY MATEMATIKI MODELLER WE USULLAR

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*O. Artykowa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Teh.redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Kompýuter bezegi	*G. Orazowa, O. Çudina*
Neşir üçin jogapkär	*G. Gutlyýew*

Çap etmäge rugsat edildi 27.09.2017.
Ölçegi 60x90 $^{1}/_{16}$. Edebi garniturasy. Şertli çap listi 28,5.
Şertli reňkli ottiski 92,75. Hasap-neşir listi 22,98.
Çap listi 28,5. Sargyt № 2592. Sany 1 500.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat, 2127-nji (G.Gulyýew) köçe, 51/1.