Gűýçgeldi Gutlyýew

Ykdysady-matematiki modeller we usullar

Ýokary okuw mekdepleriniň
ykdysady hünärli talyplary üçin
okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan makullanyldy

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2017

UDK 000.0:000
G 86

G.Gutlyýew

G 86 **Ykdysady-matematiki modeller we usullar.** Ýokary okuw mekdepleriniň ykdysady hünärli talyplary üçin okuw gollanmasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2017.

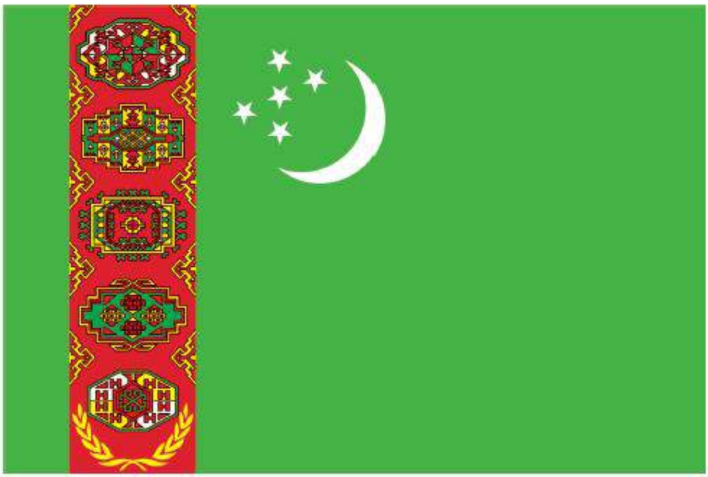
Gollanmada ykdysadyýetde ulanylýan matematiki modeller we olary amala aşyrýan usullar barada düşünjeler berilýär. Usullaryň ýerine ýetiriliş algoritmleri, kompýuter programmalarynyň ulanylyş düzgünleri we yzygiderligi sada dilde beýan edilýär.

Gollanma ýokary okuw mekdepleriniň ykdysady hünärli talyplary üçin niýetlenen.

TDKP №79, 2017 KBK 65.05 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Giriş

Adamzat özüniň bilim, ylym, tehnologik, çeperçilik we ş.m. işlerinde, hemişe daş-töweregimizi gurşap alýan obýektleriň, hadysalaryň we prosesleriň köp mukdardaky dürli häsiýetlerini öwrenip, degişli modelleri döredýär we ulanýar.

Model − anyk maksatlar üçin öwrenilýän obýektiň-asyl nusganyň, hadysanyň ýa-da prosesiň düýpli häsiýetnamalaryny aňladýan, esasy däl aýratynlyklaryny bolsa aýryp taşlaýan käbir täze obýektdir. Hiç hili model obýektiň özüni çalşyp bilmez. Emma, haçan-da öwrenilýän obýektiň kesgitli häsiýetleri bizi gyzyklandyryp anyk meseleler çözülende, model örän peýdalydyr, käbir halatlarda bolsa, ýeke-täk derňew serişdesi bolup çykyş edýär.

Dürli ylymlar modelleriň aýratyn tiplerini gurýarlar hem-de obýektleri we prosesleri dürli nukdaý nazardan derňeýärler, ýagny modelirleýärler. *Modelirlemek* – islendik obýekte ýa-da prosese akyl ýetirmek maksady bilen modelleriň döredilmeginden we derňelmeginden durýan usuldyr.

Model düşünjesine takyk kesgitleme bermek mümkin däldir. “*Model*” adalgasy latynça *modelium* sözünden gelip çykan bolup, türkmençe: “ölçeg”, “usul”, “haýsydyr bir zat bilen meňzeşlik” ýaly manylary berýär.

Modelleri iki sany uly topara: *material (predmet) we informasion* modellere bölýärler. *Material modeller* obýektleriň geometriki, fiziki we beýleki häsiýetlerini material formada ýüze çykarýarlar (globus, anatomik şekiller, kristallik gözenekleriň, jaýlaryň, toplumlaryň maketleri we ş.m.).

Informasion model – obýektiň, hadysanyň ýa-da prosesiň düýpli häsiýetlerini we ýagdaýyny beýan edýän informasiýalaryň toplumydyr. Informasion modeller degişli formada we informasiýa göterijilerinde (kagyzda, görnüş serişdelerinde, kompýuter informasiýa göterijilerinde we ş.m.) aňladylýarlar.

Informasion modelleri beýan ediliş formalaryna, wagtyň pursadyna hem-de ulanylyş ýaýlasyna baglylykda birnäçe toparlara bölmek bolar. Beýan ediliş formalary boýunça *keşpleýin* we *belgileýin informasion modellerini* tapawutlandyrýarlar.

Keşpleýin informasion modelleri (suratlar, şekiller we ş.m.) obýektleriň görnüş keşplerini informasiýa göterijileriniň haýsy-da bolsa birinde (kagyzda, foto ýa-da kino maglumat göterijilerinde we ş.m.) berkidip aňladýarlar. *Belgileýin informasion modelleri* dürli dilleriň (belgileýin sistemalaryň) ulanylmagy bilen gurulýarlar we öz gezeginde *teswirleýji belgileýin* we *formal belgileýin informasion modellerine* bölünýärler. *Teswirleýji belgileýin informasion modelleri* tebigy dilde ýa-da ýazgy formasynda döredilýärler. Teswirleýji informasion modeli gurlanda, zerur düşünjeler we aňlatmalar peýdalanylyp, sözlemler gysga we düşnükli beýan edilýärler.

Formal belgileýin informasion modelleri matematiki, himiki formulalardan, tablisalardan, meseleleriň çözüwleriniň programmirleme dillerindäki kodlaryndan we ş.m. ybaratdyr. Bu modeller: formulalar (meselem, Nýutonyň ikinji kanuny $F = m \cdot a$), tablisalar (meselem, D.U. Mendeleýewiň himiki elementler boýunça periodik tablisasy), tekst (meselem, berlen programmirleme dilindäki programmanyň teksti) görnuşinde aňladylyp bilner. *Matematiki model* – öwrenilýän obýektiň, prosesiň ýa-da hadysanyň esasy kanunalaýyklygyny beýan edýän matematiki gatnaşyklaryň, deňlemeleriň we deňsizlikleriň toplumydyr. *Ykdysady-matematiki model (YMM)* bolsa, käbirlerinde ýa-da hemmesinde ykdysady many bolan, özaralarynda matematiki baglanyşyklar (formulalar, deňlemeler, deňsizlikler, logiki şertler we ş.m.) bilen baglanyşdyrylan faktorlaryň-ululyklaryň toplumydyr. YMM-leri hem, öz gezeginde, modeliň ulanylýan ýerine, matematiki ýazgysyna, wagta görä toparlara bölmek bolar.

Ykdysady meseleleriň matematiki ýazgysy umumy görnüşinde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$F = f(x_1, ..., x_n) \to \max(\min)$$

maksat funksiýasynyň maksimal ýa-da minimal bahasyny

$$\Phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{pmatrix} b_i, \ (i=1,...,m)$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j=1,...,n)$$

şertlerde kesgitlemeli, bu ýerde:

- ✓ F – ykdysady meseläniň maksadyny aňladýan funksiýa;
- ✓ $x_1, \ldots, x_n$ – meseläniň maksadyna täsirini ýetirip bilýän ykdysady faktorlar, ýagny gözlenýän näbelli ululyklar;
- ✓ Φ_i – maksada ýetmek üçin goýberilen serişdeleriň ulanylyşyny görkezýän funksiýa;
- ✓ b_i – obýektde bar bolan i-nji serişdäniň mukdary.

Bu matematiki ýazgynyň görnüşine hem-de $x_1,...,x_n$ faktorlaryň özara baglanyşygyna görä model: çyzykly, çyzykly däl, dinamiki, stohastik we ş.m. görnüşlerde bolup biler.

Eger bu faktorlarda wagt faktory göz öňünde tutulmasa – statik, bolmasa, dinamiki model alnar.

Okuw gollanmasynyň 1-nji babynda ykdysadyýetde modelirlemegiň ähmiýeti we duş gelýän modelleriň esaslary teswirlenýär. 2-nji bapda ykdysadyýetde jemleýin, orta we predel ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklara seredilýär. Gollanmanyň 3-nji babynda elastiklik düşünjesine we onuň ykdysady seljermede ulanylyşyna, 4-nji bapda bolsa, önümçilik funksiýalaryna garalýar. 5-nji, 6-njy baplarda çyzykly we çyzykly däl programmirläniň häsiýetli meseleleri çözülýär. 7-nji bapda dinamiki programmirlemäniň tipli meseleleriniň dürli usullarda çözülişine garalýar. 8-nji bapda matrisaly oýunlaryň hem-de tor meseleleriniň çözülişlerine seredilýär.

Gollanmada ykdysady modelleriň çözüwleriniň algoritmik-kompýuter taýdan amala aşyrylyşyna ýykgyn edilip, netijeler derňelýär. Mysaly gönükmeleriň çözülişleri we talyplaryň özbaşdak işlemekleri üçin mesele-mysallaryň toplumlary getirilýär.

1. Modelirlemek we modeller

1.1. Ykdysadyýetde modelirlemegiň ähmiýeti

Häzirki zaman ykdysady teoriýa mikro-, şeýle hem makro derejelerde tebigy zerur element hökmünde matematiki modelleri we usullary özünde jemleýär. Matematikany ykdysadyýetde ulanmagyň artykmaçlyklary şulardan ybaratdyr:

- ✓ ykdysady üýtgeýänleriň we obýektleriň arasynda has möhüm, düýpli baglanyşyklary tapawutlandyrmaga we formal taýdan beýan etmäge mümkinçilik berýär, şeýlelikde, çylşyrymly obýekt ýokary derejedäki abstrakt (howaýy) forma, ýagny ykdysady-matematiki model hökmünde öwrenilýär;
- ✓ anyk formulirlenen başlangyç maglumatlardan we gatnaşyklardan, deduksiýa usuly arkaly, öwrenilýän obýekte ýokary derejede adekwat bolan netijeleri almak mümkin;
- ✓ induksiýa ýoly arkaly, matematikanyň we statistikanyň usullary öwrenilýän obýekt barada täze bilimleri almaga, ýagny obýektiň bar bolan tejribe-syn etme maglumatlaryna ýokary derejede laýyk gelýän parametrleri bahalandyrmaga mümkinçilik berýär;
- ✓ matematikanyň dilini peýdalanmak – ykdysady teoriýanyň düşünjelerini takyk we ykjam beýan etmäge ýol berýär.

Islendik ykdysady derňew, elmydama, teoriýa (ykdysady model) bilen amalyýetiň (statistik maglumatlaryň) birleşdirilmegini göz öňünde tutýar. Şol sebäpli, teoretik modeller syn edilýän prosesleri beýan etmek we düşündirmek üçin ulanylýan bolsalar, statistik maglumatlar matematiki modelleri gurmakda we esaslandyrmakda peýdalanylýar.

Dürli ykdysady hadysalary öwrenmek üçin olaryň ýönekeýleşdirilen formal beýanlaryny – YMM-leri ulanýarlar. YMM-leriň mysallary bolup, alyjylaryň saýlamasy, firmanyň, ykdysady ösüşiň modelleri, haryt, faktor, maliýe bazarlaryndaky deňagramlyk modelleri we ş.m. çykyş edýärler. Modelleri guranlarynda, ykdysadçylar, derňelýän hadysany kesgitleýän düýpli faktorlary ýüze çykarýarlar we goýlan mesele üçin düýpli bolmadyk detallary aýryp taşlaýarlar.

Modeller gurlanda aşakdaky işleriň yzygiderligi ýerine ýetirilýär:

- ✓ derňewiň predmeti we maksady formulirlenýär;
- ✓ seredilýän ykdysady sistemada maksada laýyk gelýän gurluşlaýyn ýa-da funksional elementler tapawutlandyrylýar, bu elementleriň has möhüm hil häsiýetnamalary ýüze çykarylýar;
- ✓ modeliň elementleri arasyndaky baglanyşyklar hil taýdan, dilden beýan edilip, teswirleýji model alynýar;
- ✓ ykdysady obýektiň göz öňünde tutulýan häsiýetnamalary üçin simwoliki belgilemeler girizilip, obýektiň matematiki modeli gurulýar;
- ✓ matematiki model boýunça degişli usullarda hasaplamalar geçirilýär we alnan çözüwler seljerilýär.

Modelleriň matematiki gurluşyny we mazmunyny tapawutlandyrmak gerekdir. Mysallara seredeliň.

1-nji mysal. Berlen göterim (ýyldakyň 20 %) boýunça bir ýyldan soň 12000 manat almak üçin banka goýumyň möçberini kesgitlemeli.

Mysaldaky ululyklara formal belgilemeleri girizeliň:

- ✓ S_0 − pullaryň başlangyç mukdary;
- ✓ S_1 − pullaryň ahyrky mukdary;
- ✓ D − göterimiň derejesi.

Onda belli düzgün boýunça: $S_1 = S_0\left(1+\frac{D}{100}\right)$ formulany-modeli alarys. Bu ýerden S_0-y kesgitläliň:

$$S_0 = \frac{S_1}{1+\frac{D}{100}} = \frac{12000}{1+\frac{20}{100}} = \frac{12000}{1{,}2} = 10000\ (manat)$$

2-nji mysal. Eger zawodda tehniki täzeleniş netijesinde zähmet öndürijiligi ortaça 20 % artyp, berlen döwürde zawod 12000 birlik önüm goýberip başlan bolsa, önümleriň goýberilişiniň başdaky möçberini kesgitlemeli.

Meseläniň ululyklaryna simwoliki belgilemeleri girizeliň:

- ✓ G_0 − önümleriň başky goýberilişi;
- ✓ G_1 − önümleriň soňky goýberilişi;
- ✓ D − önümçiligiň artmagynyň depgini.

Bu ýerde ortaça zähmet öndürijiliginiň

$$G/L = G\frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

($L_0, L_1 -$ degişlilikde, başky we soňky döwürler) ýaly kesgitlenýändigini göz öňünde tutup alarys:

$$G_1 = G_0(1+\frac{L_1 - L_0}{L_0 \cdot 100}) = G_0\left(1+D/100\right).$$

Onda gözlenýän ululyk üçin taparys:

$$G_0 = \frac{G_1}{1+D/100} = \frac{12000}{1+20/100} = \frac{12000}{1{,}2} = 10000.$$

Mysallar boýunça alnan modeller deňeşdirilip, matematiki modelleriň şol bir $U_1 = U_0\left(1+\frac{D}{100}\right)$ görnüşindedigini, hatda formulalara girýän ululyklaryň iki ýagdaýda hem şol bir baha eýedigini görýäris. Emma beýan edilýän prosesleriň modelleriniň ykdysady manysy we mazmuny dürlüdir. Diýmek, şol bir matematiki modelleri we usullary biri-birlerinden düýpden tapawutly dürli ykdysady meseleleri çözmekde ulanyp bolýan eken.

YMM-ler ykdysady obýektiň hereketiniň aýratynlyklaryny ýüze çykarmaga we şonuň esasynda käbir parametrlerini üýtgetmek bilen obýektiň geljekde özüni alyp barşyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Geljekki üýtgemeleri, meselem, pul çalyşma kursunyň ýokarlanmagyny, peýdanyň peselmegini we ş.m. adamzat öz hususy tejribesi boýunça hem kesgitläp biler. Emma, bu ýerde, ýagdaýa täsir edýän ykdysady görkezijileriň möhüm baglanyşyklarynyň ünsden düşürilmegi, nädogry kesgitlenmegi ýa-da bahalandyrylmagy mümkin. Modelde üýtgeýänlerin hemme baglanyşyklary mukdar taýdan bahalandyrylýar, şol sebäpli ýokary hilli we ygtybarly çaklama alynýar.

Islendik ykdysady subýekt üçin ýagdaýy çaklamagyň mümkinçiligi, ilki bilen, oňat netijeleriň alynmagyny ýa-da ýitgilerden sowlunmagy aňladýar. Şol sebäpli, YMM-leriň ulanylmagynyň netijesinde çözüwleri kabul etmegiň ähmiýeti örän uludyr.

1.2. Ykdysady-matematiki modeller we onuň esasy elementleri

YMM-deňlemeleriň, deňsizlikleriň, logiki gatnaşyklaryň we grafikleriň toplumy görnüşindäki ykdysady obýektiň gomomorf şekillenmesidir. Gomomorf şekillenme öwrenilýän obýektiň elementleriniň gatnaşyklarynyň toparlaryny modeliň elementleriniň degişli gatnaşyklaryna birleşdirýär. Başgaça, model – obýektiň derňewini ýönekeýleşdirmek üçin gurlan şertli obrazdyr. Şeýlelikde, modeli öwrenmek arkaly, obýekt barada täze bilimleri almak, ol ýa-da beýleki ýagdaýlarda iň gowy çözüwleri tapmak maksat edinilýär.

YMM-iň elementleriniň esasy görnüşlerini beýan etmek üçin anyk meselä seredeliň. Goý, firma önümleriň birnäçe görnüşlerini öndürýän bolsun. Önümçilik prosesinde resurslaryň *enjamlar, işçi güýji we çig mal* ýaly üç görnüşi ulanylýar:. Bu resurslar birjynsly, mukdarlary belli we berlen önümçilik aýlawynda şol bir mukdarlarda saklanýar diýip hasap edeliň. Önüm birligini öndürmek üçin sarp bolýan resurslaryň her görnüşiniň möçberleri berlen. Önümleriň bahalary belli. Önümleri ýerleşdirmekden gelýän umumy girdejiniň maksimal bahasyny üpjün edýän önümçiligiň möçberini – planyny (her önümden näçesini öndürmeli) kesgitlemeli.

Goýlan meseläni çözmek üçin meseläniň matematiki modelini düzmeli, modeli zerur informasiýalar bilen üpjün etmeli hem-de degişli usullar boýunça hasaplamalary geçirmelidir. Öňi bilen, model gurulýan döwründe *indeksleri, ekzogen* we *endogen üýtgeýänleri* hem-de *modeliň parametrlerini* kesgitlemelidir. Biziň meselämizde önümleriň her görnüşiniň öz i indeksi ($i=\overline{1,n}$), şeýle hem, eger bir üýtgeýän arkaly aňladylsa, resurslaryň her görnüşiniň öz j indeksi ($j=\overline{1,m}$), bolmalydyr. Eger resurslary dürli harplar bilen bellesek, onda olar üçin indeks gerek däldir. *Ekzogen üýtgeýänler* – öňünden bahalary belli, modeliň daşyndan bahalary berilýän üýtgeýänlerdir. Seredilýän meselede ekzogen üýtgeýänler bolup, bar bolan enjamlaryň S sany, G işçi güýji we M çig mal çykyş edýärler.

Endogen üýtgeýänler – modeliň daşynda bahalary berilmedik, gaýta, model boýunça hasaplamalar arkaly bahalary kesgitlenýän näbelli üýtgeýänlerdir. Biziň ýagdaýymyzda, bular önümleriň i görnüşiniň, häzirlikçe näbelli x_i ($i=\overline{1,n}$) mukdarlarydyr.

Modeliň parametrleri – modeliň deňlemeleriniň koeffisiýentleri, ýagny, önüm birligini öndürmek üçin sarp bolýan ekzogen s_i, g_i we

m_i ($i=\overline{1,n}$) ululyklaryň bahalarydyr. Taýýar önümleriň ýerlenme bahalary c_i ($i=\overline{1,n}$) hem bellidir.

Üýtgeýänler we parametrler beýan edilenden soň meseläniň şertlerini formallaşdyrmaga, ýol berilýän köplügiň we maksat funksiýasynyň beýanlaryna geçilýär. Biziň meselämizde ýol berilýän köplük – bar bolan resurslar bilen üpjün edilen önümçiligiň hemme wariantlarynyň toplumydyr. Bu köplük şeýle deňsizlikler sistemasy arkaly berilýär:

$$\begin{cases} s_1x_1 + s_2x_2 + \dots s_nx_n \le S, \\ g_1x_1 + g_2x_2 + \dots + g_nx_n \le G, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n \le M, \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} s_ix_i \le S, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} g_ix_i \le G, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i \le M. \end{cases}$$

Resurslar boýunça bu çäklendirmelere x_i üýtgeýänleriň otrisatel dällik şerti hem goşulýar. Eger haýsy-da bolsa bir resursy doly harçlamaly (meselem, hemme işçi güýjüni işe çekmeli) bolsa, onda degişli deňsizlik deňlemä öwrülerdi. Bular ýaly şertler ýol berilýän köplügiň ýaýlasyny gysyp, hatda bu köplükden başlangyç iň gowy çözüwi aýryp taşlamagy hem mümkin.

Eger optimallaşdyrma modeli berlen bolsa, çäklendirmeler bilen bir hatarda maksat funksiýany hem düzmelidir. *Maksat funksiýasy* – çözüwi kabul ediji subýektiň bähbidini aňladýan, ýol berilýän köplük boýunça maksimal ýa-da minimal bahasy gözlenýän funksiýadyr. Berlen mesele üçin degişli ýerlenme bahalarda umumy girdejini aňladýan

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad \text{ýa-da} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$$

funksiýanyň maksimal bahasy gözlenýär.

Görşümiz ýaly, goýlan mesele ýagdaýy doly teswirleýän däldir hem-de *çözüwi kabul edijiniň* (*ÇKE*) maksatlaryna doly laýyk gelmeýär. Hakykatdan, iň bolmanda:

- ✓ resurslary käbir derejä çenli özara çalşyp bolmalydyr;

- ✓ resurslaryň sarp edilişi goýberilýän önüme berk proporsional bolmaly däldir (goýberilişiň möçberine bagly bolmadyk hemişelik harajatlar hem bolup, predel harajatlar üýtgäp bilerler);
- ✓ önümçilik prosesinde resurslaryň möçberi berk fiksirlenen däldirler, sebäbi, olar satyn alnyp, satylyp, ujundan alnyp bilner;
- ✓ önümiň bahasy satylýan möçberine, resurslaryň bahasyna bagly bolup biler;
- ✓ alynýan girdejiniň dürli birlikleri *ÇKE* üçin dürli gymmatlykda (meselem salgyt sistemasyna baglylykda) bolmagy mümkin;
- ✓ *ÇKE*-niň maksady diňe girdejini ýa-da peýdany ýokarlandyrmak bolman, başga gyzyklanmalaryň hem döremegi mümkin;
- ✓ *ÇKE* üçin çözülýän mesele bir pursat ýa-da döwür bilen çäklenmeýär, dinamiki baglanyşyklary hem göz öňünde tutmak möhüm bolup biler;
- ✓ ünsden düşürmesiz bolýan tötän faktorlaryň hem ýagdaýa uly täsir etmegi mümkin we ş.m.

Ykdysady teoriýanyň köp bölümleri, hojalyk işleriniň dürli ugurlarynda, ol ýa-da beýleki derejelerde detallaşdyrylyp ýa-da utgaşdyrylyp, ýokarda agzalan aspektleri öwrenmeklige, beýan etmeklige we modelirlemäge bagyşlanandyr.

1.3. Ykdysady-matematiki modelleriň esasy tipleri

Ykdysadyýetde ulanylýan matematiki modelleri modelirlenýän obýektiň aýratynlyklaryna we modelirlemegiň maksadyna baglylykda dürli nyşanlar boýunça birnäçe tiplere bölmek mümkin. Olardan esasylary: makro-we mikroykdysady, teoretiki we amaly, deňagramlykly we optimallaşdyrma, statik we dinamiki, determinirlenen we stohastik modellerdir.

Makroykdysady modeller jemi milli önüm, sarp ediş, maýa goýum, raýatlaryň iş üpjünçiligi, pullaryň mukdary ýaly ireldilen materiýal we maliýe görkezijileri baglanyşdyryp, ykdysadyýeti umumy bütewilik ýaly beýan edýärler.

Mikroykdysady modeller ykdysadyýetiň gurluşlaýyn we funksional komponetleriniň özara täsirlerini ýa-da bazar gurşawynda olaryň aýratyn düzüjileriniň özüni alyp barşyny teswirleýärler. Ykdysady elementleriň bazarda dürli tipleriniň hem-de özara täsirleriniň bolmagy sebäpli, mikroykdysady modelirleme ykdysady-matematiki teoriýanyň esasy bölegini eýeleýär.

Teoretiki modeller formal gelip-çykmalardan deduksiýa usulyny ulanyp netije çykarmak bilen, ykdysadyýetiň we onuň häsiýetli elementleriniň umumy häsiýetlerini öwrenmäge mümkinçilik berýär. *Amaly modeller* anyk ykdysady obýektiň funksionirlenme parametrlerini bahalandyrmaga we şu esasda amaly çözgütleriň kabul edilmegi üçin hödürnamalary teklip etmäge ýardam edýär. Amaly modellere, öňi bilen ykdysady üýtgeýänleriň san bahalary bilen iş salyşýan we olary bar bolan gözegçilik maglumatlary esasynda statistik manyly bahalandyrmaga mümkinçilik berýän *ekonometriki modeller* degişlidir.

Bazar ykdysadyýetini modelirlemekde *deňagramlykly modeller* esasy orny eýeleýär. Olar ykdysadyýetiň, haçan-da, ony berlen ýagdaýdan çykarmaga çalyşýan hemme güýçleriň jemleýji güýji nola deň bolandaky ýagdaýyny beýan edýärler. Bazar däl ykdysadyýetde bir parametr (meselem, ýetmezçilik-defisit) boýunça deňagramsyzlyk başga faktorlar (gara bazar, nobatlar we ş.m) arkaly sazlanýar. Deňagramlykly modeller, esasan, teswirleýji modellerdir.

Optimallaşdyrma modelleri bazar ykdysadyýeti teoriýasynda, esasan mikro derejelerde ulanylýar (berlen şertlerde girdejiniň maksimal ýa-da çykdajynyň minimal bahasyny gözlemek we ş.m). Makro derejede ykdysady obýektiň boluşynyň rasional saýlanmasynyň netijesi käbir deňagramlykly ýagdaýda bolýar.

Statik modellerde ykdysady obýektiň anyk pursatdaky ýa-da wagtyň berlen döwründäki ýagdaýy beýan edilýär. *Dinamiki modeller*, özüne üýtgeýänleriň wagt boýunça arabaglanyşygyny hem girizýär. Statik modellerde, adatça dinamiki üýtgeýänleriň bahalary fiksirlenendir. Dinamiki model ykdysadyýetde prosesleriň bolup geçişini kesgitleýän güýçleri we arabaglanyşyklary beýan edýär hem-de, adatça, differensial we tapawutly deňlemeleriň, wariasion hasaplamalaryň apparatlaryny ulanýar.

Determinirlenen modeller modeliň üýtgeýänleriniň arasynda berk funksional baglanyşyklary talap edýär.

Stohastik modeller derňelýän görkezijilere tötän täsirleriň bolmagyna ýol berýär we olary beýan etmek üçin ähtimallyklar teoriýasynyň we matematiki statistikanyň usullaryny ulanýar.

1.4. Matematiki ykdysadyýet we ekonometrika

Matematiki ykdysadyýet(*MY*) ykdysady prosesleriň matematiki modelleriniň häsiýetleriniň we çözüwleriniň seljerilmegi bilen meşgullanýan ykdysady ylymlaryň bölümidir. *MY*-da kesgitli formal baglanyşyklara (baglanyşyklaryň çyzyklylygyna, güberçekligine, monotonlygyna we ş.m, ululyklaryň baglanyşyklarynyň anyk formulalaryna) esaslanan teoretik modeller derňelýär. *MY* – umuman, berlen baglanyşygyň ol ýa-da beýleki görnüşi alýandygynyň esaslandyryş derejesini (meselem, sarp etmegiň ululygynyň girdejiden çyzykly artýan funksiýadygyny) öwrenmek bilen meşgullanmaýar. Bu işler ekonometrika galdyrylýar. *MY*-nyň meselesi, matematikadaky ýaly, modeliň çözüwiniň barlygy, otrisatel, stasionar däldigi we beýleki häsiýetleri baradaky soraglary öwrenmek bolup durýar. Şeýlelikde, *MY* beýleki tarapdan, ykdysady ylymlaryň usulyýeti bolup çykyş edýär.

MY-nyň modelleriniň arasynda iki sany iri: *ykdysady sistemalarda deňagramlylyk modelleri, ykdysady ösüşiň modelleri* toparlaryny tapawutlandyrmak bolar. *Deňagramlylyk modelleri* (meselem, Erroy-Debre modeli, W.Leontýewiň “Harajat-goýberiş” modeli we ş.m) hemme daşky güýçleriň deňtäsiredijisi nola deň bolan ykdysady sistemalaryň ýagdaýyny derňemäge kömek berýär. Bular, umuman, statik modellerdir. Ykdysady dinamika bolsa, *ykdysady ösüş modelleriniň* (Harrod-Domoryň modeli, Salou modeli, magistral tipdäki modeller we ş.m) kömegi bilen beýan edilýär. Ösüş modellerini derňemegiň esasynda, çykyşyna ykdysady sistema ymtylýan stasionar ösüşiň seljermesi geçirilýär we traýektoriýasy gurulýar.

Ekonometrika − matematiki statistikanyň usullary arkaly ykdysadyýetde mukdar kanunalaýyklygyny we özara baglanyşyklary derňeýän ylymdyr. Bu usullaryň esasy guraly bolup, korrelýasiýa-regresiýa seljermesi çykyş edýär. Ekonometrikanyň modelleri we usullary ykdysadyýetde, diňe täze bilimleri almagyň kuwwatly guraly bolmak bilen çäklenmän, eýsem çaklama we bank işlerinde, telekeçilikde amaly çözgütleriň kabul edilmegi üçin hem giňden ulanylýar.

1-nji baba degişli soraglar we ýumuşlar

1. Matematikany ykdysadyýetde ulanmak nähili artykmaçlyklary berýär?
2. Ykdysady-matematiki model näme?
3. Modelleri gurmakda işleriň yzygiderligi haýsylar?
4. Modeliň matematiki gurluşy we mazmuny arasynda nähili baglanyşyk bar?
5. Ykdysady-matematiki modellerde ekzogen we endogen üýtgeýänler näme?
6. Ykdysady-matematiki modelleriň prosesi doly teswirlemegi üçin, ýene haýsy faktorlar göz öňünde tutulmaly?
7. Ykdysady-matematiki modelleriň haýsy tiplerini bilýärsiňiz?
8. Matematiki ykdysadyýet we ekonometrika nähili ylymlar?

2. Ykdysadyýetde jemleýin, ortaça we predel ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklar

2.1. Ykdysady seljermede absolýut we otnositel ululyklar

Hemme ykdysady görkezijileri absolýut we otnositel toparlara şertli bölmek bolar. *Absolýut görkezijiler*, esasan, möçberleýin ýa-da pul birliklerinde aňladylyp, *akymlaýyn* (kesgitli döwürdäki ululyk) ýa-da *ätiýaçlaýyn* (kesgitli senedäki ululyk) görnüşlerde bolup bilerler. *Otnositel gökezijiler* absolýut (ýa-da başga otnositel) görkezijileriň gatnaşygydyr, ýagny bir görkezijiniň birlikleriniň mukdarynyň başga görkezijiniň bir birligine gatnaşygydyr. Otnositel görkezijiler, diňe dürli görkezijileriň şol bir pursatdaky gatnaşygy bolman, şol bir görkezijiniň dürli pursatdaky bahalarynyň gatnaşygy hem bolup biler – bu bir görkezijiniň ösüş tempini (depginini) aňladar. Ykdysady seljermede we çözüwleri kabul etmelerde, bir ýagdaýda absolýut görkezijiler (meselem, peýdanyň umumy möçberi), beýleki ýagdaýda otnositel görkezijiler (meselem, adam başyna düşýän girdeji) möhüm bolýar.

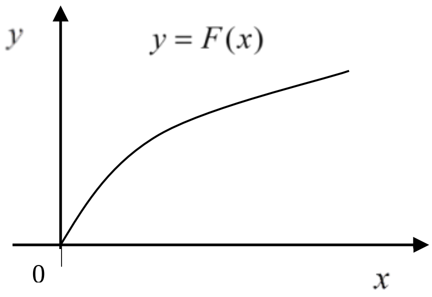
Belli bolşy ýaly, ykdysady ýagdaýy toplumlaýyn seljermede, iň gowy çözgüdi saýlamak üçin hem absoýut, hem otnositel görkezijiler möhümdir. Goý, firma önümçiligiň möçberini zerur masştabda giňeltmegiň (ýa-da azaltmagyň) meselesini çözýän bolsun. Onda firma, ilki bilen girdeji we harajatlar absolýut görkezijileriň tapawudy bolan peýda görkezijisi bilen gyzyklanar. Emma, peýdany ýokarlandyrmak maksady bilen, firma, otnositel görkezijileriň (girdejiniň, harajatlaryň we peýdanyň) bahalarynyň iki tipini, ýagny *ortaça* we *predel* ululuklary giňden ulanmaly bolýar. Berlen ýagdaýda, görkezijiniň *ortaça ululygy*, degişli görkezijiniň ululygynyň goýberilýän önümiň birliginiň hasabyna tapylýar, *predel ululyk* bolsa-degişli görkezijiniň ösüşiniň goýberilýän önümiň birliginiň ösüşiniň ululygyna gatnaşygy bilen kesgitlenýär.

Eger ortaça girdeji ortaça harajatlardan ýokary bolsa, onda firma peýda görýär we önüm öndürmek amatlydyr. Eger, şunlukda, predel girdeji predel harajatlardan ýokary bolsa, onda firma üçin peýdany artdyrmak maksady bilen önümçiligi giňeltmek ýerliklidir.

Eger ortaça harajatlar ortaça girdejiden ýokary bolsa, onda firma ýitgä sezewar bolýar, eger predel harajatlar predel girdejiden köp bolsa, onda önümçiligiň möçberini azaltmak gerekdir.

2.2. Jemleýin, ortaça we predel ululyklaryň kesgitlemeleri

Bagly däl *x* üýtgeýäne bagly islendik *F(x)* funksiýa *jemleýin ululyk* diýlip düşünilýär. Ykdysadyýetde goýberilýän önümiň *Q* möçberinden kesgitlenýän *R(Q)* girdeji ýa-da *C(Q)* harajatlar, üýtgeýän resurslaryň (meselem, zähmet resurslarynyň) *L* mukdaryna bagly goýberilýän önümiň *Q(L)* möçberi we ş.m. jemleýin ululyklardyr. Görkezilen funksiýalaryň islendigi, meselem $F(x) = ax - bx^3$ ýaly formula ýa-da grafiki görnüşlerde aňladylyp bilner (2.1-nji surat)



2.1–nji surat

AF(x) ortaça ululyk jemleýin $F(x)$ ululygyň bagly däl x üýtgeýäne gatnaşygy bilen kesgitlenýär:

$$AF(x) = F(x)/x$$

bu ýerde *A* harpy Average (ortaça) sözüniň baş harpydyr. Ortaça ululygy $\bar{F}$ ýaly hem belleýärler, $\overline{F} \equiv AF(x)$.

Ykdysadyýetde ortaça ululyklara mysallar köpdür: ilat başyna ortaça sarp edilişiň möçberi, $AR = R(Q)/Q$ ortaça girdeji, $AC = C(Q)/Q$ ortaça harajatlar, $AQ_L = Q(L)/L$ ortaça zähmet öndürijiligi we ş.m.

$MF(x)$ *maržinal (predel) ululyk* jemleýin $F(x)$ ululykdan x üýtgeýän boýunça alnan önüm arkaly kesgitlenýär:

$$MF(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x},$$

bu ýerde $F(x)$-seredilýän aralykda üznüksiz funksiýa diýlip hasap edilýär.

Eger jemleýin $F(x)$ ululyk diskret üýtgeýän bolsa, onda maržinal (predel) ululyk jemleýin $F(x)$ ululygyň $\Delta F(x)$

üýtgemesiniň, üýtgeýän ululygyň bu üýtgemäni döredýän Δx artdyrmasyna gatnaşygy arkaly tapylýar:

$$MF(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

Ykdysadyýetde predel ululyklara mysallar:

- ✓ predel girdeji – $MR = R'(Q)$ ýa-da $MR = \frac{\Delta R}{\Delta Q}$;
- ✓ predel harajatlar – $MC = C'(Q)$ ýa-da $MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}$
- ✓ predel zähmet önümi – $MQ_L = Q'(L)$ ýa-da $MQ_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$;
- ✓ predel peýdalylyk – $MU_x = U'(x)$ ýa-da $MU_x = \frac{\Delta U}{\Delta x}$ we

ş.m.

Ortaça we predel ululyklar, bagly däl üýtgeýäniň funksiýalary hökmünde, formula ýa-da grafiki görnüşlerde hem aňladylyp bilner.

2.3. Jemleýin, ortaça we predel ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklar

Ykdysadyýetde jemleýin, ortaça we predel ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklar häli-şindi duş gelip, olaryň biri arkaly beýlekilerini tapmak gerek bolýar. Şu meseleleriň çözülişine hem-de olaryň formal we grafiki seljermelerine seredeliň.

2.3.1. Jemleýin ululyk boýunça ortaça ululygy tapmak

Bu mesele, kesgitlemä görä:

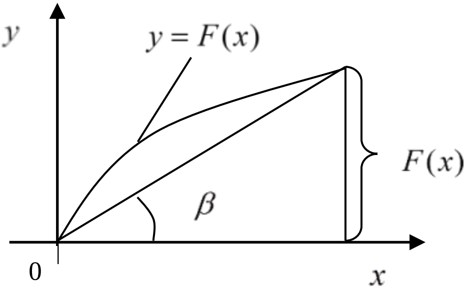
$$AF(x) = F(x)/x \qquad (2.1)$$

formula arkaly çözülýär. Meselem, $F(x) = ax - bx^3$ bolsa, onda

$$AF(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{ax - bx^3}{x} = a - bx^2.$$

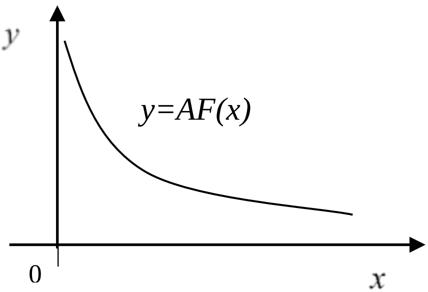
Eger *F(x)* grafik görnüşinde berlen bolsa, onda meseläni grafiki çözmek üçin grafigiň *(x,F(x))* nokadyny koordinatalar başlangyjy bilen birikdirýärler. Bu kesimiň *Ox* oky bilen emele getirýän β-

ýapgytlyk burçunyň tangensi (2.2-nji surat) ortaça ululyga deňdir $tg\,\beta = F(x)/x$



2.2–nji surat

x üýtgeýän ululygyň üýtgemegi bilen β ýapgytlyk burçy hem üýtgeýär. x-iň artmagy bilen β burç hem ulalýan bolsa, ol ortaça ululygyň artýandygyny aňladýar, β burç kiçelse, ortaça ululygyň kemelýändigi gelip çykýar. Meselem, 2.2-nji suratdaky getirilen jemleýin ululyk üçin, onuň ortaça ululygy kemelýär (2.3-nji surat).



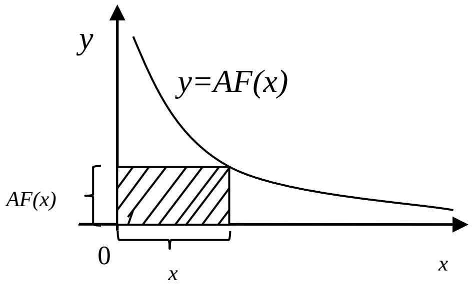
2.3–nji surat

2.3.2. Ters mesele-ortaça ululyk boýunça jemleýin ululygy tapmak

Formal taýdan, ters mesele, (2.1) formula arkaly çözülýär:

$$F(x) = x \cdot AF(x) \qquad (2.2)$$

Eger ortaça ululyk 2.3-nji suratdaky ýaly grafik görnüşinde berlen bolsa, onda jemleýji ululygyň bahasy islendik x üçin 2.4-nji suratda görkezilen gönüburçlygyň meýdanyna deň bolar. Bu meýdanyň üýtgeýiş häsiýetnamalary boýunça jemleýin ululygyň grafigini gurmak bolar.



2.4–nji surat

2.3.3. Jemleýin ululyk boýunça üznüksiz ýagdaý üçin maržinal (predel) ululygy tapmak

Maržinal (predel) ululyk öz kesgitlemesi boýunça tapylýar:

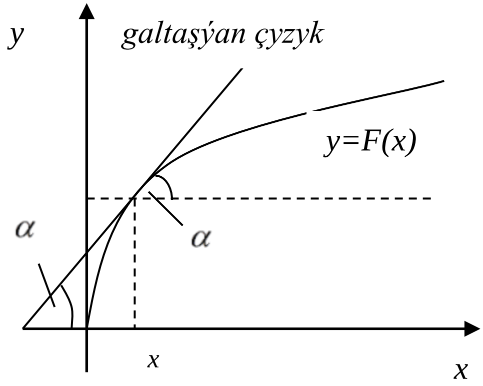
$$MF(x) = F'(x) \tag{2.3}$$

Meselem, eger $F(x) = ax - bx^3$ bolsa, onda

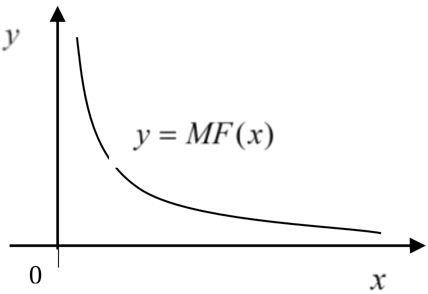
$$MF(x) = F'(x) = a - 3bx^2.$$

Eger $y = F(x)$ funksiýa grafik görnüşinde berlen bolsa, onda meseläni grafiki çözmek üçin grafigiň $(x, F(x))$ koordinataly nokadynda egrä galtaşýan çyzyk geçirmelidir. Galtaşýan çyzygyň Ox oky bilen emele getirýän α ýapgytlyk burçunyň tangensiniň bahasy, önümiň geometriki manysyna görä $MF(x)$ predel ululyga deňdir (2.5-nji surat), ýagny bagly däl x üýtgeýän ululyk üýtgände, bu nokatlarda degişlilikde geçirilen galtaşýanlaryň α ýapgytlyk burçlary hem üýtgeýär.

x-iň artmagy bilen bu burçlar ($tg\alpha$ -lar) ulalýan (kiçelýän) bolsa, predel ululygyň bahasy hem artar (kemeler). Meselem, getirilen grafikde (2.6-njy surat) predel ululyk kemelýär.



2.5–nji surat



2.6–njy surat

2.3.4. Ters mesele − predel ululyk boýunça jemleýin ululygy tapmak

Ters mesele belli $F' = MF(x)$ önüm funksiýasy boýunça $F(x)$ funksiýany tapmakdan ybaratdyr. Bu meseläni çözmek üçin differensirleme amalyna ters bolan integrirleme amaly ulanylýar. $F(x)$ funksiýasyna $MF(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasy diýlip düşünilýär we kesgitsiz integral arkaly

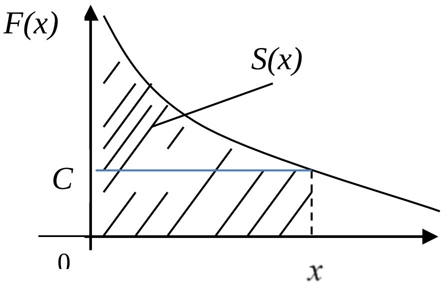
$$F(x) = \int MF(x)dx + C$$

formula bilen tapylýar, bu ýerde C=*const* erkin hemişelik.

Meselem, eger $MF(x) = a - 3bx^2$ bolsa, onda

$$F(x) = \int MF(x)dx = \int (a - 3bx^2)dx = a\int dx - 3b\int x^2 dx =$$
$$= ax - bx^3 + C$$

Eger predel ululyk grafik görnüşinde berlen bolsa, onda kesgitsiz integralyň geometriki manysyna görä, bagly däl ululyk *0*-dan *x*-e çenli üýtgände, funksiýanyň grafiginiň aşagyndaky meýdanyň ululygyna käbir hemişelik *C* ululygy (gönüburçlugyň meýdanyny) goşanymyzda jemleýin *F(x)* ululygyň bahasyny alarys, ýagny *F(x)*= *S(x)* +*C* (2.7-nji surat).



2.7–nji surat

Eger $x \to 0$ mahalynda $S(x) \to 0$ bolsa, onda $C = F(x)|_{x=0}$ ýaly kesgitlener. Meselem, jemi girdeji $F(Q) = p \cdot Q$ görnüşinde hasaplananda we *Q=0* bolanda *F(0)=0* bolup, bu ýerden *C=0* alarys. Eger *C=C(Q)* baglanyşykda bolsa, onda bu ýagdaýda *C=C(0)* fiksirlenen harajady alarys.

2.3.5. Ortaça (AF) we maržinal (MF) ululyklar arasyndaky gatnaşyklar

Eger öňünden jemleýin *F(x)* ululygyň bahasy tapylsa, onda ortaça (*AF*) we maržinal (*MF*) ululyklaryň birini beýlekisi boýunça tapmak, ýokarda beýan edilen meseleleriň birine getirýär. Meselem, eger AF(x) berlen bolsa, onda: *F(x)*= *x·AF(x)*, bu ýerden bolsa:

$$MF(x) = F'(x) = (x \cdot AF(x))' = AF(x) + x \cdot AF'(x) \qquad (2.4)$$

Şuňa meňzeşlikde, ortaça ululyk:

$$AF(x) = \frac{1}{x} \cdot F(x) = \frac{1}{x} \int MF(x) dx \qquad (2.5)$$

ýaly tapylýar.

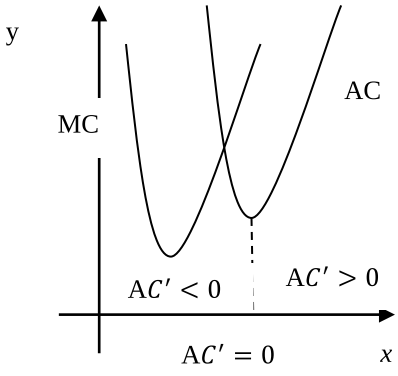
(2.4) formulanyň ýönekeý geometriki düşündirilişi bardyr. x^* ekstremum nokadynda *AF(x)* funksiýanyň bahasy $AF'(x^*) = 0$ bolup, predel ululyk ortaça ululyk bilen gabat gelýär: $MF(x\cdot) = AF(x\cdot)$.

Goý, bagly däl x üýtgeýän, diňe položitel ($x > 0$) bahalary alýan bolsun. Onda :

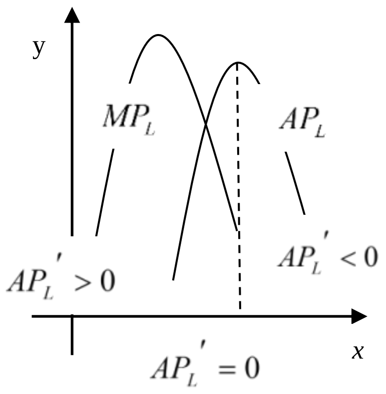
- ✓ *AF(x)* funksiýanyň artýan aralyklarynda $AF'(x) > 0$ we MF(x) > AF(x) – predel ululyk ortaça ululykdan uly;
- ✓ *AF(x)* funksiýanyň kemelýän aralyklarynda $AF'(x) < 0$ we MF(x) < AF(x)-predel ululyk ortaça ululykdan kiçidir.

Şeýlelikde, predel ululygyň grafigi, ortaça ululygyň artýan (kemelýän) aralyklarynda, ortaça ululygyň grafiginden ýokarda (aşakda) ýerleşýär.

Ortaça we predel harajatlaryň (*AC* we *MC*), şeýle hem, ortaça we predel zähmetiň önümleriniň (AP_L we MP_L) grafikleriniň arasyndaky gatnaşyklaryň mysallary getirilen (2.8-nji we 2.9-njy suratlar).



2.8-nji surat



2.9–njy surat

2.3.6. Diskret ýagdaý

Eger x-bagly däl üýtgeýän diňe diskret bahalary alýan bolsa (meselem, firmanyň goýberýän enjamlarynyň sany, işgärleriniň sany we ş.m), onda (2.1)-(2.5) formulalarda berilýän gatnaşyklarda:

- ✓ $F'(x)$ önüm $\Delta F(x)/\Delta x$ gatnaşyga çalşylýar;
- ✓ $\int MF(x)dx$ integral $\sum_x MF(x)$ jeme çalşylýar;
- ✓ $F(x)$ funksiýanyň grafigine x nokatda geçirilen galtaşýan çyzyk, $(x, F(x))$ we $(x+\Delta x, F(x+\Delta x))$) nokatlardan geçýän kesiji çyzyga çalşyrylýar.

Diskret ýagdaýa mysal edip, diňe 4-lik bahalary alýan "4-lükçi" okuwçyny alalyň. Onuň her bir indiki aljak bahasyny predel bahalandyrma, ortaça bahasyny bolsa, ortaça bahalandyrma hökmünde kabul etmek bolar. Eger geljekde okuwçy "5-likçi" boljak bolsa, onuň ortaça bahasy kem-kemden ýokarlanar (predel bahalandyrma ortaçadan ýokarda bolar), tersine, "3-lik" alyp başlasa, onuň ortaça bahasy peseler (predel bahalandyrma ortaçadan aşak bolar).

2.4. Jemleýin, ortaça we predel girdejiniň hem-de harajatlaryň funksiýalary

Jemleýin, ortaça we predel ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklary ulanmagyň mysaly hökmünde firmanyň işini häsiýetlendirýän: goýberilýän önümiň Q möçberi, p bahasy, $R=p(Q)\cdot Q$ girdeji, C harajatlar, $S=R-C$ peýda ýaly ykdysady görkezijileri bazar ykdysadyýetiniň kämil bäsdeşlik we monopoliýa gurluşlarynda seredeliň.

Kämil bäsdeşlik ýagdaýynda firmanyň berlen önüminiň bahasy firmanyň önümçilik kuwwatyna görä däl-de, bazar tarapyndan hemişelik ululyk hökmünde kesgitlenilýär. Onda $p(Q)=p$ bolup, $R(Q)=p\cdot Q$. Diýmek, girdeji goýberilýän önümiň möçberinden çyzykly funksiýadyr.

Adaty harajatlar funksiýasy (goýberilýän önümiň möçberi azalanda harajatlar çalt artýan) üçin Q möçbere baglylykda girdejiniň, harajatlaryň we peýdanyň grafiklerini şeýle görkezmek bolar (2.10-njy surat). Olar boýunça ortaça we predel ululyklaryň grafikleri gurulýar (2.11-nji surat). Bu ýerde:

$$MR = (p \cdot Q)' = p = \frac{p \cdot Q}{Q} = AR$$

bolany üçin, ortaça we predel girdejileriň grafikleri gabat gelýärler hem-de Q okuna parallel göni çyzyk görnüşindedir. 2.10-njy suratdan görşümiz ýaly, Q_2 we Q_4 möçberlerde:

$C(Q_2) = R(Q_2)$ we $C(Q_4) = R(Q_4)$,

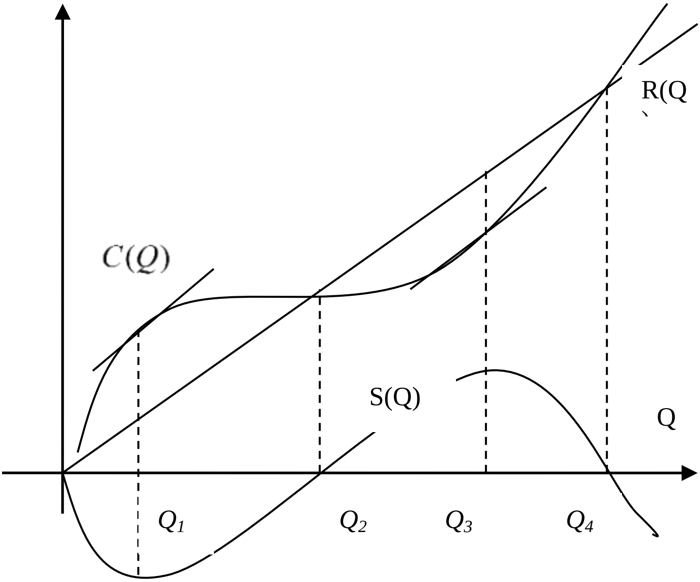
Q< Q_2 we Q> Q_4 bolanda bolsa, $C(Q) > R(Q)$.

Bu ýerden alarys:

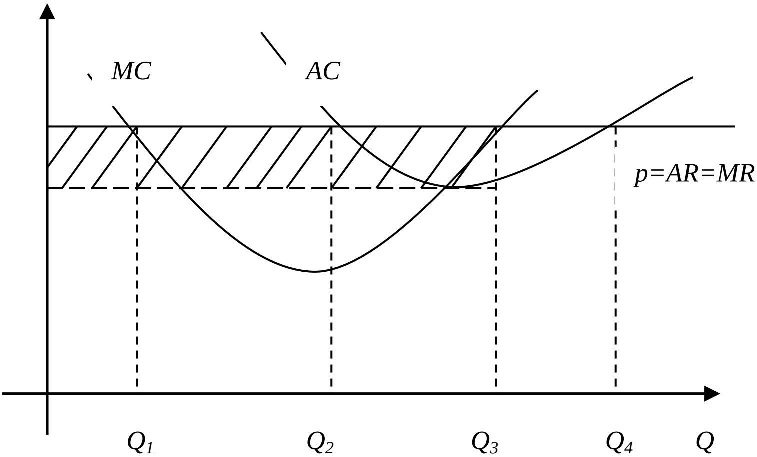
$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} > \frac{R(Q)}{Q} = MC(Q)$, ýagny $AC(Q)>MC(Q)$.

Eger $Q_2<Q<Q_4$ aralykda bolsa, onda $C(Q)< R(Q)$ bolar.

Q_3 nokadyň golaý töwereginde ortaça harajatlar minimaldyr. Bu nokady koordinatalar başlangyjyndan $C(Q)$ grafige galtaşýan çyzyk geçirip tapmak bolar.



2.10 – njy surat



2.11–nji surat

Predel harajatlaryň grafigini *C(Q)*-nyň grafigine geçirilen galtaşýanlaryň ýapgytlyklarynyň üýtgemelerini seljermek arkaly gurmak bolar.

Diýmek, bu nokatlarda predel harajatlaryň bahalary predel girdejiniň bahalary bilen gabat gelip, Q_1 nokatda peýdanyň minimumy (ýitginiň-zyýanyň maksimumy) ýerine ýetýär, Q_3 nokatda bolsa peýdanyň maksimumy gazanylýar

$$S' = R' - C' = MR - MC = 0.$$

Gönüburçlugyň depeleri: $Q_2 < Q < Q_4$ bolanda S(Q)> 0 hem-de

Q< Q_2 we Q> Q_4 bolanda S(Q) $<$0.

Goýberilýän önümiň Q_3 optimal möçberinde peýdanyň ululygy ştrihlenen gönüburçlygyň meýdanyna deňdir.

Gönüburçlugyň depeleri:

(Q_3, P), (Q_3, AC(Q_3)), (0, AC(Q_3)), (0, p)

koordinatalarda ýatýar (2.11-nji surat).

Monopoliýa ýagdaýynda, firma öz önümine bolan *p(Q)* isleg egrisine baglylykda, bahany özi kesgitleýär. *p(Q)*-kemelýän funksiýa bolany üçin, $p'(Q) < 0$. Öňki ýagdaýlarda bolşy ýaly, şol bir harajatlar funksiýasynda jemleýin, ortaça we predel görkezijileriň grafiklerini 2.12, 2.13-nji suratlardaky ýaly görkezmek bolar.

Ortaça girdejiniň grafigi:

$$AR = \frac{p(Q) \cdot Q}{Q} = p(Q)$$

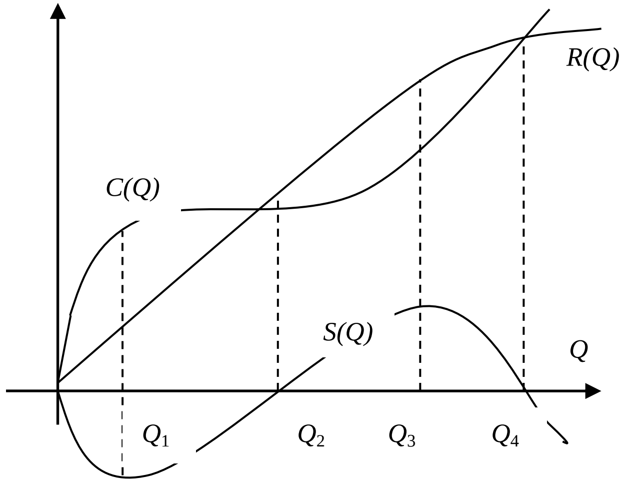
isleg funksiýasy bilen gabat gelýär we ortaça harajatlaryň grafigini Q_2 we Q_4 nokatlarda (R(Q) = C(Q)) kesýär.Predel girdejiniň grafigi, goýberilýän önümiň islendik möçberinde, ortaça girdejiniň grafiginden aşakda ýerleşýär, sebäbi

$$MR = R'(Q) = (p(Q) \cdot Q)' = p(Q) + Q \cdot p'(Q) = AR + Q \cdot p'(Q) < AR,$$

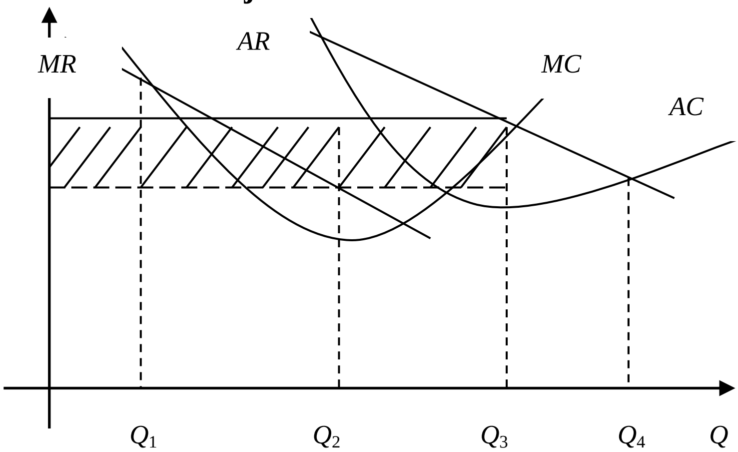
(bu ýerde $p'(Q) < 0$) we predel harajatlaryň grafigini Q_1 we Q_3 nokatlarda kesýär (bu nokatlarda girdejiniň we harajatlaryň grafigine geçirilen galtaşýanlaryň şol bir ýapgytlyk burçy bardyr). Bu möçberde peýda funksiýasy S(Q) özüniň minimal we maksimal bahalaryny alýar, sebäbi $S' = R' - C' = MR - MC = 0$ ýerine ýetip, optimal nokatlarda predel girdeji, hökman, predel harajatlara deň bolýar. Öňki ýagdaýlardaky ýaly, ortaça we predel ululyklaryň grafigindäki peýdany (2.13-nji surat), ştrihlenen gönüburçlugyň meýdany arkaly kesgitlenýär. Onuň depeleri:

(Q_3, $AR(Q_3)$), (Q_3, $AC(Q_3)$), (0, $AC(Q_3)$), (0, $AR(Q_3)$)

nokatlarda ýatýar.



2.12–nji surat



2.13–nji surat

Şeýlelikde, firmanyň optimal önümçiligi kesgitlenende, eger onuň jemleýin girdeji R(Q) we harajatlar C(Q) funksiýalary belli we bu funksiýalar differensirlenýän hem bolsalar, onda ortaça we predel görkezijileri şeýle ulanmak bolar:

- ✓ ilki bilen *MR(Q) = MC(Q)* ýerine ýetýän nokatlar tapylýar;
- ✓ eger şeýle nokatlar ýok we *R(Q)<C(Q)* bolsa, onda firma üçin önüm öndürmek düýbünden amatsyz ýa-da *R(Q)>C(Q)* bolanda, mümkin boldygyça firma üçin önümçiligi artdyrmak peýdaly bolar.

Tapylan nokatlarda maksimum peýda, maksimum zyýan, minimum peýda, minimum zyýan gazanylmagy ýa-da hiç biriniň hem bolmazlygy mümkin, şol sebäpli bu nokatlaryň arasynda peýda funksiýasy *S(Q) = R(Q) – C(Q)* maksimum baha eýe bolýany (funksiýanyň önümi “+”-dan “-“-a üýtgeýär) gözlenýär.

Bu nokatda peýdanyň maksimumy ýa-da zyýanyň minimumy gazanylýar. Ahyry soňunda, peýdanyň ululygy položitel bolýan nokat (nokatlar) gözlenýär. Şeýle nokatlarda, köplenç *AR(Q)>MR(Q)* ýerine ýetip, olar firmanyň peýdasynyň global ýa-da lokal maksimum nokatlarydyr.

2-nji baba degişli soraglar we ýumuşlar

1. Ykdysadyýetde absolýut we otnositel görkezijiler näme? Mysallar getiriň.
2. Ykdysadyýetde jemleýin ululyk näme? Bu ululyklaryň grafiki aňladylyşyna mysallar getiriň.
3. Ortaça ululyk näme? Bu ululyklaryň grafiki aňladylyşyna mysallar getiriň.
4. Predel ululyk näme? Ykdysadyýetde üznüksiz we diskret ýagdaýlar üçin predel ululyklara, olaryň grafiki aňladylyşyna mysallar getiriň.
5. Jemleýin harajatlar $C(Q)=3Q-2Q^2+2Q^3$ formulada berilýär. Ortaça we predel harajatlary tapyň.
6. Goý, jemleýin girdejiniň grafigi artýan funksiýa bolsun. Ortaça we predel girdejileriň grafikleri barada näme aýdyp bolar?
7. Goý, ortaça girdejiniň grafigi kemelýän funksiýa bolsun. Jemleýin we predel girdejileriň grafikleri barada näme aýdyp bolar?

8. Eger ortaça we predel harajatlaryň ikisi hem artýan bolsalar, olaryň arasynda nähili gatnaşyklar bar?

9. Eger önümçiligiň islendik möçberinde ortaça we predel girdejiler gabat gelýän bolsa, onda kärhananyň girdejisiniň önümçiligiň möçberine baglydygy barada näme aýdyp bolar?

10. Eger önümçiligiň islendik $Q>Q_0$ (Q_0 berlen) möçberinde predel girdeji predel harajatlardan az bolsa, onda kärhananyň peýdasynyň önümçiligiň möçberine baglydygy barada näme aýdyp bolar?

11. Eger firmanyň ortaça we predel harajatlarynyň hem-de girdejisiniň grafikleri belli bolsa, onda haýsy usullar arkaly kärhananyň peýdasyny kesgitläp bolar?

3. Elastiklik we onuň ykdysady seljermede ulanylyşy

Ykdysadyýetde differensial hasaplamagy ulanmagyň möhüm ugurlarynyň biri elastiklik düşünjesini girizmekdir. Elastiklik koeffisiýenti derňelýän ykdysady görkezijiniň, beýleki täsir edýän faktorlar üýtgewsiz galdyrylanda, bu görkezijiniň bagly ykdysady faktorynyň birlik otnositel üýtgemesiniň täsiri astynda otnositel üýtgemesini görkezýär.

3.1. Funksiýanyň elastikligi we onuň geometriki manysy

Goý, *y* we *x* ululyklaryň arasynda baglanyşyk *y=f(x)* funksiýa arkaly berlen bolsun. *x* (ýa-da Δx) bagly däl üýtgeýän ululygyň üýtgemesi, funksional baglanşyga laýyklykda, *y* (ýa-da Δy) üýtgeýäniň bahasynyň üýtgemesine getirýär. Şunlukda, y-iň üýtgemesiniň *x*-iň üýtgemesine baglylygynyň *duýujylygyny ölçemek* meselesi döreýär. Şeýle görkezijileriň biri funksiýanyň önümi $y_x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bolup, *x* argumentiň üýtgemegine görä *y* funksiýanyň üýtgemesiniň tizligini häsiýetlendirýär. Emma bu görkeziji ölçeg birliginiň saýlanmagyna bagly bolup, ykdysadyýetde ulanmaga amatsyzdyr. Meselem, eger şeker üçin onuň *p* nyrhyndan *Q(p)* isleg funksiýasyna seredilýän bolsa, onda manatda ölçenýän her *p* nyrhy üçin *Q(p)* funksiýanyň $Q_p' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta p}$ önüminiň bahasy şekere bolan islegiň kilogramda ýa-da sentnerde ölçenýändigine bagly bolar. Birinji ýagdaýda funksiýanyň önümi kg/man-da, ikinji ýagdaýda sentner/man-da ölçener, degişlilikde, şol bir *p* nyrhda önümiň bahasy dürli bolar. Şol sebäpli, funksiýanyň üýtgemesiniň argumentiň üýtgemesine duýujylygyny ölçemek üçin, ykdysadyýetde *x* we *y* (Δx we Δy) üýtgeýänleriň absolýut üýtgemeleriniň däl-de, otnositel ýa-da göterimde üýtgemeleriniň baglanyşygy öwrenilýär.

Kesgitleme. *y=f(x)* funksiýanyň elastikligi $E_x(y)$ diýip, *y* we *x* üýtgeýänleriň otnositel üýtgemeleriniň gatnaşygynyň $\Delta x \to 0$ ýagdaýyndaky predeline aýdylýar.

Onda kesgitlemä görä:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=f'(x)\cdot\frac{x}{y}=\frac{f'(x)}{\frac{y}{x}}=\frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{Mf}{Af}$$

ýazyp bileris. *Mf, Af-de*gişlilikde, *f(x)* funksiýanyň *x* nokatda maržinal we ortaça bahalarydyr. Bu elastiklige *predel* ýa-da *nokatlanç elastiklik* hem diýilýär.

$d\ln y=\frac{dy}{y}$; $d\ln x=\frac{dx}{x}$ bolany üçin, predel elastikligi hasaplamagyň:

$$E_x(y)=\frac{Mf}{Af} \tag{3.1}$$

formulasyny:

$$E_x(y)=\frac{d\ln y}{d\ln x} \tag{3.2}$$

görnüşinde hem ulanmak bolar.

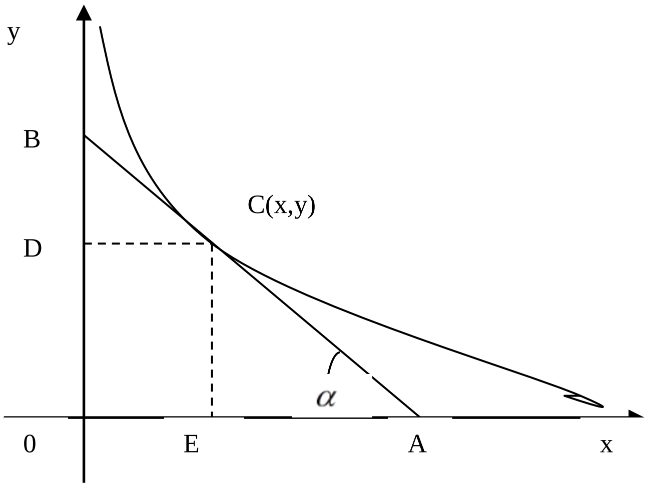
Üznüksiz ýagdaýda funksiýanyň elastikliginiň geometriki manysy üçin kemelýän oýuk *y=f(x)* funksiýasyna seredeliň (3.1-nji surat).

Grafigiň erkin *C(x,y)* nokadynda *AB* galtaşýan kesimi geçireliň. *AEC* üçburçlukdan alarys: *AE* = $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{tg}\alpha}$. *C(x,y)* nokatda *y= f(x)* funksiýanyň önümi $f'(x)=tg(180^0-\alpha)=-tg\,\alpha$. Diýmek $tg\,\alpha=-f'(x)$ bolup:

$$AE=\frac{CE}{tg\,\alpha}=\frac{y}{tg\,\alpha}=-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

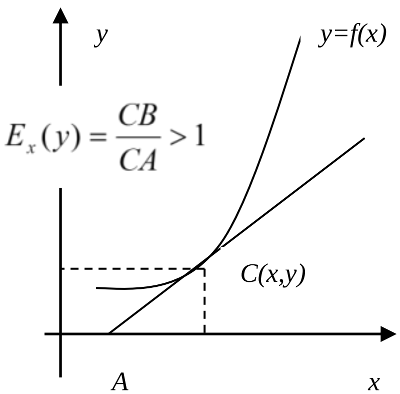
CDB we *AEC* üçburçlyklaryň meňzeşliginden alarys:

$$\frac{CB}{\mathrm{CA}}=\frac{CD}{\mathrm{AE}}=\frac{x}{\mathrm{AE}}=-\frac{x\cdot f'(x)}{f(x)}=-\frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}=-E_x(y) \tag{3.3}$$

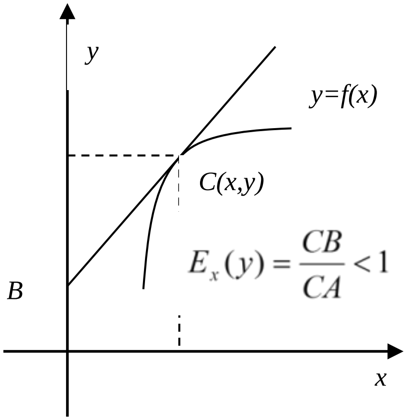


3.1–nji surat

Güberçek we oýuk artýan funksiýalar üçin hem elastiklik (3.2-nji we 3.3-nji suratlar) absolýut ululygy boýunça *CB/CA* gatnaşyga deňdir, gatnaşygyň alamaty bolsa *CB* we *CA* kesimleriň ugurlary boýunça kesgitlenýär. Eger galtaşýanyň üstünde *A* we *B* nokatlar *C* nokatdan



3.2–nji surat



3.3–nji surat

bir tarapda ýatsalar, onda (3.3) formula “+” alamatyny, ýogsa-da, “-” alamatyny almalydyr.

Diskret ýagdaýda, şeýle hem maglumatlaryň diskret ýygyndysy üçin elastiklik ýakynlaşan hasaplananda, üznüksiz ýagdaýdaky ýaly bir bahaly kesgitlenmeýär. Sebäbi, seredilýän ululygyň

$\delta_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x_2 - x_1}{x}$.

otnositel üýtgemesinde x deregine $x = x_1$ başlangyç ýa-da $x = x_2$ ahyrky, ýa-da $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$ orta bahasyny almalydygy belli bolman galýar. Şuňa baglylykda:

çetki (göterimleýin) elastiklik üçin

$$E_x(y) = \left(\frac{y_2 - y_1}{y_1}\right) / \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right), \qquad (3.4)$$

ortaça (dugalaýyn) elastiklik üçin

$$E_x(y) = \left[\frac{2(y_2 - y_1)}{y_1 + y_2}\right] / \left[\frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2}\right], \qquad (3.5)$$

logarifmik elastiklik üçin

$$E_x(y) = \frac{\Delta ln y}{\Delta ln x} = \frac{ln y_2 - ln y_1}{ln x_2 - ln x_1} = ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) / \, ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \qquad (3.6)$$

formulalar ulanylýar.

x we y ululyklaryň uly bolmadyk otnositel (göterimleýin) üýtgemelerinde (3.4)-(3.6) formulalarda hasaplanýan elastiklik bahalary biri-birlerinden az tapawutlanýarlar. Hasaplamalarda olaryň haýsylarynyň ulanylýandygy teswirlenmelidir.

3.2. Elastikligiň häsiýetleri we ýönekeý funksiýalaryň elastikligi

3.2.1. Elastikligiň häsiýetleri

1-nji häsiýet: x we y ululyklaryň haýsy birliklerde ölçenendigine garamazdan, elastiklik ölçegsiz ululykdyr $E_{ax}(by)=E_x(y)$.

Subudy.

$$E_{ax}(by) = \frac{d(by)}{d(ax)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{bdy}{adx} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = E_x(y).$$

2-nji häsiýet: Özara ters funksiýalaryň elastikligi – özara ters ululyklardyr $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$

Subudy

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Meselem, baha boýunça islegiň ululygynyň elastikligi – islegiň ululygy boýunça bahanyň elastikligine tersdir.

3-nji häsiýet. Şol bir x argumente bagly *U(x)* we *V(x)* funksiýalaryň köpeltmek hasyllarynyň elastikligi-ol funksiýalaryň elastiklikleriniň jemine deňdir $E_x(UV) = E_x(U) + E_x(V)$.

Subudy.

$$E_x(UV) = \frac{d(UV)}{dx} \cdot \frac{x}{UV} = \frac{V \cdot \frac{dU}{dx} + U \cdot \frac{dV}{dx}}{UV} \cdot x = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} =$$

$$= E_x(U) + E_x(V).$$

4-nji häsiýet. Şol bir x argumente bagly *U(x)* we *V(x)* funksiýalaryň paýynyň elastikligi-ol funksiýalaryň elastiklikleriniň tapawudyna deňdir $E_x(U/V) = E_x(U) - E_x(V)$.

Subudy.

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{d\left(\frac{U}{V}\right)}{dx}\cdot\frac{xV}{U}=\frac{V\cdot\frac{dU}{dx}-U\cdot\frac{dV}{dx}}{V^2}\cdot\frac{x\cdot V}{U}=$$

$$=\frac{dU}{dx}\cdot\frac{x}{U}-\frac{dV}{dx}\cdot\frac{x}{V}=E_x(U)-E_x(V).$$

5-nji häsiýet. *U(x)* we *V(x)* funksiýalaryň jeminiň elastikligi şeýle formulada hasaplanyp bilner:

$$E_x(U\pm V)=\frac{d(U\pm V)}{dx}\cdot\frac{x}{U\pm V}=\left(\frac{dU}{dx}\pm\frac{dV}{dx}\right)\cdot\frac{x}{U\pm V}=$$

$$=\left(U\cdot\frac{dU}{dx}\cdot\frac{1}{U}\pm\frac{V\cdot dV}{dx}\cdot\frac{1}{V}\right)\cdot x\cdot\frac{1}{U\pm V}=\frac{U\cdot E_x(U)\pm V\cdot E_x(V)}{U\pm V}.$$

3.2.2. Ýönekeý funksiýalaryň elastikligi

a) $y=x^\alpha$ derejeli funksiýanyň elastikligi hemişe α ululyga deňdir $E_x(x^\alpha)=\alpha$.

Subudy. $E_x(x^\alpha)=\frac{dx^\alpha}{dx}\cdot\frac{x}{x^\alpha}=\frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot x}{x^\alpha}=\alpha.$

b) $y=a^x$ görkezijili funksiýanyň elastikligi x ululyga proporsionaldyr $E_x(a^x)=x\cdot\ln a$.

Subudy. $E_x(a^x)=\frac{da^x}{dx}\cdot\frac{x}{a^x}=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{x}{a^x}=x\cdot\ln a$.

ç) *y=ax+b* çyzykly funksiýanyň elastikligi şeýle hasaplanyp bilner $E_x(ax+b)=\frac{ax}{ax+b}$.

Subudy.

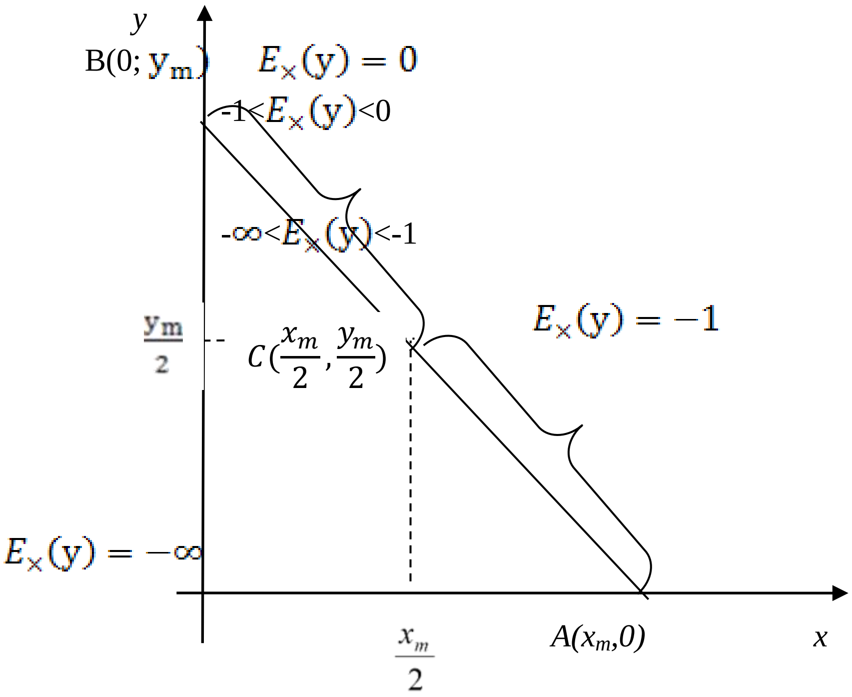
$$E_x(ax+b)=\frac{d(ax+b)}{dx}\cdot\frac{x}{ax+b}=\frac{ax}{ax+b}.$$

Eger $y=ax+b$ çyzykly funksiýa otrisatel ýapgytlyga eýe bolsa (*a<0*), onda funksiýanyň elastikligi:

- ✓ B(0; y_m) nokatda $E_x(y)=-\frac{CB}{CA}$=-$\frac{0}{AB}$=0;
- ✓ aralyk C($\frac{x_m}{2}$; $\frac{y_m}{2}$) nokatda $E_x(y)=-\frac{CB}{CA}=-1$;

✓ A(x_m; 0) nokatda $E_{\times}(\mathrm{y}) = -\frac{CB}{CA} = -\frac{AB}{0} = -\infty$

bahalarda hasaplanar (3.4-nji surat).



3.4–nji surat

Kesgitleme. x argutmentiň hemme ýolbererlik bahalarynda $y = f(x)$ funksiýasy tükeniksiz elastiklige (nol elastiklige) eýe bolsa, onda oňa *kämil elastik (düýbünden elastik däl) funksiýa* diýilýär.

3.3. Elastikligi ykdysady seljermede ulanmak

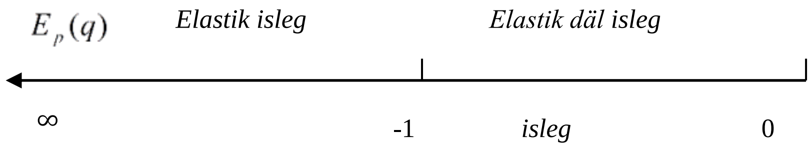
3.3.1. Ykdysadyýetde elastikligiň görnüşleri

a) N*yrh boýunça islegiň elastikligi (göni):*

$$E_p(q)=\left(\frac{dq}{q}\right)/\left(\frac{dp}{p}\right)=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q} \qquad (3.7)$$

formulada kesgitlenip, haýsy-da bolsa bir maddy nygmata bolan nyrh 1% üýtgände, şuňa bolan islegiň göterimlerde aňladylan ululygynyň otnositel üýtgemesini aňladýar, başgaça, önüme nyrh üýtgände, sarp ediljileriň duýujylygyny häsiýetlendirýär.

Eger islegiň nyrha görä (3.7) elastikligi absolýut ululygy boýunça 1-den uly bolsa, onda islege *elastik* (islegiň elastikligi tükeniksiz ululyga eýe bolsa, onda islege *kämil elastik*) diýilýär. Eger islegiň nyrha görä (3.7) elastikligi absolýut ululygy boýunça 1-den kiçi bolsa, onda islege *elastik däl* (islegiň elastikligi 0 baha eýe bolsa, onda islege *düýbünden elastik däl*) diýip aýdylýar. Eger islegiň nyrha görä elastikligi absolýut ululygy boýunça 1-e deň bolsa, onda islege *1-lik elastik* diýilýär (3.5-nji surat).



3.5–nji surat

b) *girdeji boýunça islegiň elastikligi*

$$E_i(q)=\frac{dq}{q}/\frac{di}{i} \qquad (3.8)$$

ýaly aňladylyp, haýsy-da bolsa bir maddy nygmat boýunça sarp edijileriň girdejisi 1% üýtgände, şuňa bolan islegiň göterimlerde aňladylan ululygynyň otnositel üýtgemesine aýdylýar. Girdeji boýunça (3.8) islegiň položitel elastikligi ýokary hilli (normal) harydy, otrisatel elastiklik bolsa, pes hilli (az bahaly) harydy häsiýetlendirýär.

Şeýlelikde, pudakda berlen önüme görä girdeji boýunça islegiň elastikliginiň ýokary položitel bahasy, ykdysadyýetiň gurluşyndaky önümiň paýyndan, onuň ykdysady ösüşe goşandynyň uludygyny, diýmek, önümçiligi giňeltmäge we geljekde gülläp ösdürmäge mümkinçiliginiň ýokarydygyny görkezýär. Tersine, eger pudagyň önümine görä girdeji boýunça islegiň elastikligi uly bolmadyk položitel ýa-da otrisatel baha eýe bolsa, onda bu önümçilik boýunça durgunlyga ýa-da önümçiligi kemeltmeklige garaşylýar.

ç) *Nyrh boýunça islegiň çatyrymlaýyn elastikligi*

$$E_{p_j}(q_i) = \frac{dq_i}{q_i} / \frac{dp_j}{p_j} = \frac{dq_i}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{q_i} \qquad (3.9)$$

formulada kesgitlenip, haýsy-da bolsa bir maddy nygmata bolan islegiň ululygynyň başga bir (sarp etmede bu maddy nygmaty çalyşýan ýa-da üstüni dolýan) maddy nygmatyň nyrhy 1% üýtgändäki otnositel üýtgemesini häsiýetlendirýär. (3.9)-elastikligiň položitel (otrisatel) alamaty maddy nygmatlary çalşyryp (üstüni dolup) bolýandygyny görkezýär.

d) Resurslaryň bahalaýyn elastikligi

$$E_{p_i}(R_i) = \left(\frac{dRi}{Ri}\right) / \left(\frac{dpi}{pi}\right) = \frac{dRi}{dpi} \cdot \frac{Pi}{Ri} \qquad (3.10)$$

ýaly aňladylyp, haýsy-da bolsa bir resursa (meselem, zähmet) bolan baha (degişlilikde, zähmet haky) 1% üýtgände, şuňa bolan islegiň göterimlerde aňladylan ululygynyň otnositel üýtgemesini görkezýär.

e) Bir resursy başga resursa çalşyrmagyň elastikligi

$$E_{R_j}(R_i) = \left(\frac{dRi}{Ri}\right) / \left(\frac{dRj}{Rj}\right) = \frac{dRi}{dRj} \cdot \frac{Rj}{Ri} \qquad (3.11)$$

ýaly aňladylyp, önümleriň goýberilişi üýtgedilmezden, başga bir resursyň (meselem, zähmetiň) möçberi 1%-üýtgände, berlen resursyň ululygynyň (meselem, kapitalyň) göterimlerde aňladylan zerur üýtgemesini häsiýetlendirýär.

3.3.2. Islegiň elastikligini kesgitleýän faktorlar

a) *Sarp edişde maddy nygmaty çalşyrmak we onuň agregirlenme derejeleri*. Maddy nygmaty çalşyrmaklyk – ony çalşyryjylaryň barlygy we olaryň sany bilen, şeýle hem, maddy nygmatyň *agregirlenme derejesi* bilen kesgitlenýär. Sarp edijileriň berlen maddy nygmaty ulanmaklygy, başga maddy nygmatlar bilen çalşyrmaklyga mümkinçilikleri näçe köp boldugyça, bu maddy nygmata islegiň elastikligi şonça ýokarydyr. Maddy nygmatyň agregirlenme derejesi bolsa, berlen maddy nygmatyň düşünjesine girýän dürli maddy nygmatlaryň sany bilen kesgitlenýär. Meselem, “süýt önümleri” maddy nygmaty düşünjesine: süýt, gaýmak, gatyk, peýnir ýaly önümler girýärler. Maddy nygmatyň agregirlenme derejesi näçe ýokary boldugyça, ony çalşyryjylaryň sany azalýar we bu maddy nygmata islegiň elastikligi şonça pesdir. Meselem, ýuwujy serişdelere islegiň elastikligi – ýuwujy külkelere islegiň elastikliginden pesdir, a umuman, sabyna bolan islegiň elastikligi – sabynyň anyk markasyna islegiň elastikliginden azdyr we ş.m.

Elastikligi dogry kesgitlemek maksady bilen maddy nygmatyň agregirlenme derejesini dogry tapmak, ylaýta-da nyrh we salgyt syýasatlaryny kesgitlemekde, örän möhümdir. Meselem, aragyň elastikligi otnositel pesdir we oňa bolan *aksizi* ýokarlandyrmak – býujete gelýän maliýe serişdelerini artdyrjak ýalydyr (sebäbi, elastik däl islegde nyrhyň ulalmagy bilen girdeji artýar). Emma, Russiýa federasiýasynda 1993-nji ýylyň dekabrynda arak üçin aksiziň 90 %-e çenli artdyrylmagy – rus arak-likýor önümlerine islegiň düýpli peselmegine, nyrh boýunça bu pudagyň bäsdeşlik ukyplylygynyň ýitirilmegine hem-de býujete girdejileriň birden peselmegine getirdi. Munuň sebäbi, arak önümleriniň agregirlenme derejesiniň nädogry kesgitlenmegi, şu düzümde daşary ýurt arak önümleriniň hem göz öňünde tutulmandygy boldy. Şol döwürde daşary ýurt arak önümleriniň söwda nokatlarynda satylyşy ýokary boldy. Şol sebäpli, birnäçe aýdan soň, degişli aksiz 85%-e çenli azaldylyp, daşary ýurt arak önümlerine aksiz 250 %-e çenli ýokarlandy.

Maddy nygmaty çalşyrmak derejesi näçe ýokary bolsa, nyrh boýunça islegiň elastikligi hem şonça ýokarydyr, tersine, maddy nygmatyň agregirlenme derejesi näçe ýokary bolsa, nyrh boýunça islegiň elastikligi şonça pesdir

b) Maddy nygmaty sarp etmegiň girdejidäki udel möçberi. Hemme ýerde bolşy ýaly, meselem, otlyçöpleriň sarp edilişinde, hatda, olaryň nyrhlary birnäçe esse ýokarlansa hem, isleg öňküligine galar, bu bolsa onuň elastikliginiň pesdigini aňladýar.

Sarp edijiniň girdejisinde berlen maddy nygmaty sarp etmegiň udel agramy näçe ýokary boldugyça – nyrh boýunça elastiklik hem şonça ýokarydyr.

ç) *Subýektiw zerurlyk.* Adatça, bezeg predmetlerine isleg ilkinji zerurlyk predmetlerine garanyňda, has elastik diýlip hasap edilýär. Bu beýle dogry hem däldir – diňe modanyň, däpleriň ýa-da başga sebäpleriň netijesinde, aýratyn bezeg predmetlerine isleg diýseň ýokary bolup biler hem-de olara bolan islegiň pes elastikligine getirýär. Diýmek, aýratyn maddy nygmatlaryň elastiklgine subýektiw faktorlar täsir edýär.

Berlen maddy nygmata subýektiw zerurlyk näçe pes bolsa, oňa nyrh boýunça elastiklik hem şonça ýokarydyr.

d)Wagt faktory. Adatça, islegiň uzakmöhleteýin elastikligi gysgamöhletleýin elastiklikden ýokary hasap edilýär. Bu ýagdaý, uzak döwürde sarp edijileriň endiklerini üýtgetmekleriniň hem-de berlen maddy nygmat üçin köp çalşyryjylary tapmaklarynyň mümkindigi bilen düşündirilýär.

Şunlukda, aýratyn-da nyrhlaryň birden göterilýän döwründe, uzak ulanylýan harytlar hem-de ilkinji zerurlyk harytlary üçin wagtyň dowamynda gorlary döretmegiň we maddy nygmatyň könelmeginiň sarp edijileriň çözgütlerine düýpli täsir edýändigini, elastikligiň peselýändigini ýatdan çykarmaly däldir. Meselem, 1991-nji ýylda ilat tarapyndan döredilen unuň, makaron önümleriniň, konserwalaryň we ş.m. gorlary, nyrhlar birden ýokary göterilen döwründe hem, indiki ýylyň başynda, bu harytlara islegi azaltdy, emma, wagtyň geçmegi bilen, gorlar azalyp başlady we bu harytlara islegiň elastikligi hem azaldy.

Wagtyň aralygy uzyn boldugyça, nyrh boýunça islegiň elastikligi ýokarydyr.

3.3.3. Satyjylaryň girdejisi (alyjylaryň çykdajysy) bilen elastikligiň baglanyşygy

Haýsy-da bolsa bir maddy nygmatyň satylmagyndan gelýän girdejiniň elastikligi, bu önüme bolan islegiň ealstikligi bilen ýakyn baglanyşykdadyr. Girdeji üçin *R=p·q* formulany we funksiýalaryň köpeltmek hasylynyň elasltikligini ulanyp alarys:

$$E_p(R) = E_p(pq) = E_p(p) + E_p(q) = 1 + E_p(q) = 1 - \left|E_p(q)\right|, \quad (3.12)$$

bu ýerde $p'(q) < 0$ bolany üçin $E_p(q) < 0$.

(3.12) formuladan görnüşi ýaly, nyrh boýunça girdejiniň elastiklgi, özüne isleg elastik bolan $\left(\left|E_p(q)\right| > 1\right)$ harytlar üçin otrisateldir ($E_p(R) < 0$) we isleg elastik bolmadyk $\left(\left|E_p(q)\right| < 1\right)$ harytlar üçin položiteldir. Bu ýerden bolsa, eger isleg elastik däl bolsa, onda nyrhy üýtgetmek girdejini hem şol ugurda üýtgedýär we satyjylara nyrhy ýokarlandyrmagyň amatlydygy (girdeji köpelýär) gelip çykýar. Özüne isleg elastik bolan harytlar üçin – bu ýagdaý tersinedir. Şuňa meňzeşlikde, özüne isleg elastik bolan haryt üçin salgydy ýokarlandyrmak hem salgyt salmadan gelýän girdejiniň peselmegine getirer.

Elastik islegde girdeji – mukdaryň artmagy ýa-da nyrhyň peseldilmegi bilen artar, elastik däl islegde-peseler. Meselem, oba hojalyk önümlerine islegiň elastikligi ýeterlik pes bolany üçin, oňat hasylda fermerleriň girdejileri peseler.

3.3.4. Nyrh bilen monopolistiň predel harajatlary arasyndaky baglanyşyk

Belli bolşy ýaly, kämil bäsdeşlik şertlerinde, firma öz harytlaryna nyrhy predel harajatlaryna barabar goýýar $p_c = MC$. Monopolist bolsa, harydyna nyrhy predel harajatlardan ýokary goýýar $p_m = MC(1+s)$. Bu ýerde s ululyk: 10%, 20%, 30% ýaly möçberlerdäki nyrha goşundydyr. Şu goşundyny haýsy ululykda saýlamak barada sorag gelip çykýar. Has jikme-jik seredilende, goşundynyň ululygy elastiklik bilen baglydyr.

Dogrudan hem, peýdany girdejiniň we harajatlaryň tapawudy ýaly ýazsak: $P = R - C$. Onda peýdany maksimallaşdyrmak şertlerinde

$P' = (R - C)' = R' - C' = MR - MC = 0$ ýa-da $MR = MC$. (*)

alarys. Predel girdejini hasaplalyň

$$\cdot MR = R'(q) = (p(q) \cdot q)' = p(q) + q \cdot p'(q) = p\left(1 + \frac{q \cdot p'(q)}{p}\right) =$$

$$= p \cdot \left(1 + {}^{1}/_{E^D}\right) = p \cdot \left(1 - {}^{1}/_{|E^D|}\right).$$

Bu ýerden (*) deňlige görä $MR = MC \Leftrightarrow p\left(1 - \frac{1}{\left|E^D\right|}\right) = MC$.

Diýmek,

$$p = MC/\cdot\left(1 - {}^{1}/_{|E^D|}\right) \tag{3.13}$$

(3.13) formuladan görnüşi ýaly, islegiň elastikligi näçe ýokary bolsa, goşundynyň ululygy hem şonça pesdir.

Goşmaça peýdany almak üçin monopol öndüriji bazary segmentirleýär, ýagny dürli alyjylar topary üçin, (3.13) formula laýyklykda, şol bir önüme (hyzmata) dürli nyrhlary goýýar. Şeýlelikde, meselem, şol bir haryt (hyzmat) üçin iki bazardan alynýan jemi girdeji maksimal bolar ýaly, bazarlardan alynýan predel girdejiler deň bolmalydyr

$$MR_1 = p_1\left(1 - \frac{1}{\left|E_1^D\right|}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{\left|E_2^D\right|}\right) = MR_{2.}$$

Bu ýerden

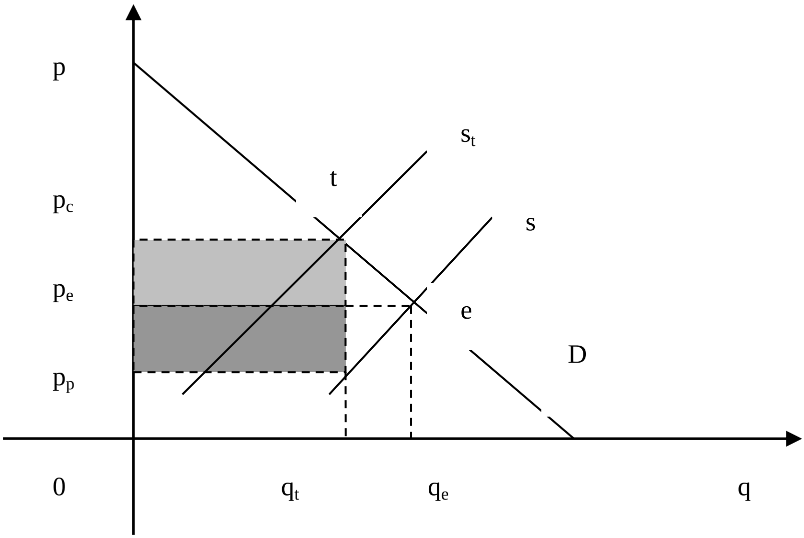
$$\frac{p_1}{p_2} = \left(1 - {}^{1}/_{|E_2^D|}\right) / \left(1 - {}^{1}/_{|E_1^D|}\right)$$

Netije-de, haryda bolan isleg az elastikli bolan bazardaky alyjylar bu haryda ýokary nyrh töleýärler.

3.3.5. Elastiklik we salgyt syýasaty

Haçanda döwlet harytlara salgyt salmaly bolanda: "Haýsy haryda salgyt salmaly? Salgydy kimden tutmaly, öndürijidenmi ýa-da sarp edijidenmi? Býujete goşmaça girdejileriň möçberi nähili bolar? Esasy salgydyň agramy kime düşer?" ýaly soraglara jogap bermeli bolýar. Adatça, salgydyň möçberi köpeldilse, býujete gelýän girdejiler köpeljek ýalydyr. Emma, ykdysady seljermeleriň görkezişi ýaly, salgydyň möçberi töleýjiler arkaly däl-de, *isleg we teklipleriň elastikliginiň ululyklary* arkaly kesgitlenýär.

Mysala seredeliň. Goý, salgyt, ilki başda, öndürijilere salynýan bolup, ýönekeýlik üçin, salgyt t önüm birliginden hemişelik we goýberilişiň möçberine bagly däl diýeliň (eger salgyt goýberilişiň göterimi ýa-da möçberi boýunça salynsa beýle däldir). Bu ýagdaýda, salgydyň girizilmegi *s*-teklip egrisini salgydyň *t* möçberine görä parallel süýşürmeklige eltýär (3.6-njy surat).



3.6–njy surat

Suratdan görnüşi ýaly, *t* salgydyň girizilmegi bilen harydyň p_e-bazar nyrhy p_c-nyrha ulalýar. (bu ýerde: p_p-harydy öndürijileriň nyrhy $p_c = p_p + t$; *D*-isleg egrisi (gönüsi); *S*-teklip egrisi). Şeýlelikde, satuwyň möçberi q_e-den q_t-çenli azalýar. Býujete düşýän jemi salgyt girdejisi $T = t \cdot q_t$ ýaly hasaplanar. Beýleki tarapdan $T = T_c + T_p$ bolup, T_c , T_p –degişlilikde, sarp edijilere we öndürijilere düşýän salgydyň möçberleridir:

$$T_c = q_t(p_c - p_e); \quad T_p = q_t(p_e - p_p).$$

Onda

$$T = T_c + T_p = q_t(p_c - p_p)$$

ýazyp bileris. Bu bölekleriň gatnaşygy islegiň we teklibiň elastikligine ters proporsionaldyr:

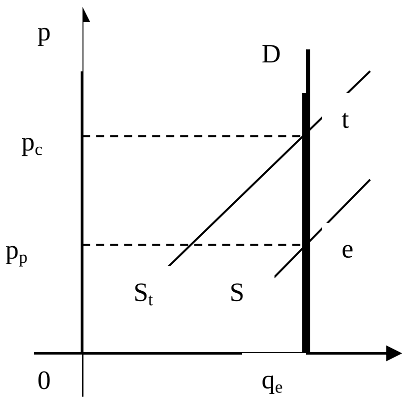
$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{p_c - p_e}{p_e - p_p} = -\frac{E^S}{E^D}; \qquad -E^D = \left(-\frac{q_t - q_e}{q_e}\right) / \left(\frac{p_c - p_e}{p_e}\right);$$

$$E^s = \left(\frac{q_t - q_e}{q_e}\right) / \left(\frac{p_p - p_e}{p_e}\right).$$

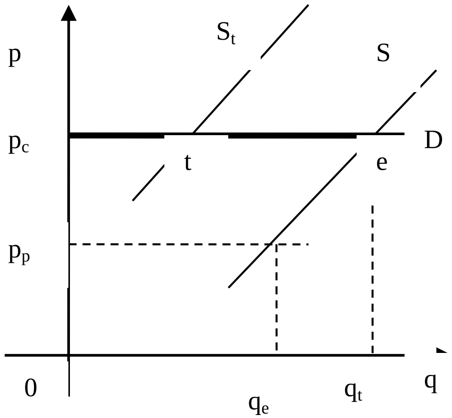
Bu formulalary seljermek arkaly, salgydyň esasy agramynyň az elastikli ykdysady agente düşýändigini görýäris. Hususan-da, eger isleg elastikligi nola deň bolsa, onda salgydyň hemme agramy sarp edijileriň gerdenine düşüp, salgydyň möçberi näçe bolsa hem, oňa garamazdan, sarp edijiler (alyjylar) satyn alyş möçberlerini üýtgetmezler (3.7-nji surat).

Eger haýsy-da bolsa bir haryda isleg kämil elastik häsiýetli bolsa, onda haryt öndürijiler utulyşda bolarlar, sebäbi, sarp edijiler islegiň möçberini azaldyp we çalşyryjy harytlary ulanmaklyga geçip, salgyt tölemekden daşlaşarlar. Diýmek, bu ýagdaýda salgydyň hemme agramy öndürijilere düşer (3.8-nji surat).

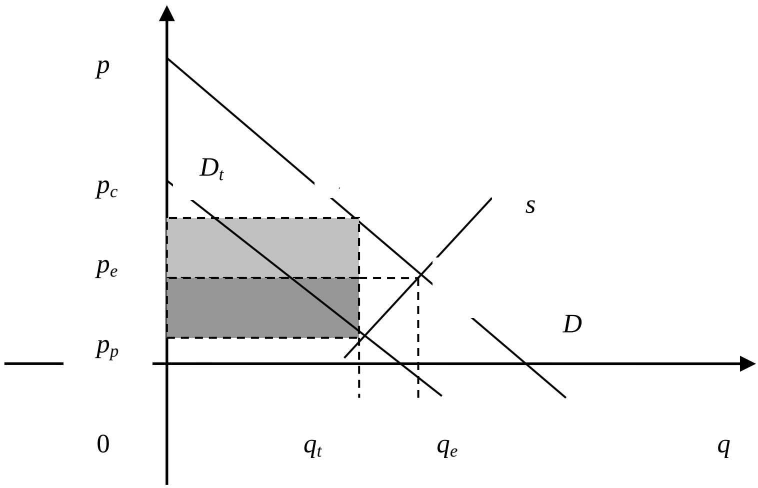
Eger salgyt sarp edijilerden formal tutulýan bolsa, ýagny alyjy bir harydy satyn alyp, goşmaça çek boýunça käbir pul mukdaryny ýa-da pul mukdarynyň käbir göterimini töleýän bolsa, salgydyň täze paýlanmasy bolup geçer. Bu ýagdaýda salgydy girizmeklik, *D* isleg egrisini çepe süýşürmeklige elter (3.9-njy surat).



3.7–nji surat



3.8–nji surat



3.9 –njy surat

Bu suraty 3.8-nji surat bilen deňeşdirip, öňki ýagdaýlardaky ýaly, salgyt ýüküniň sarp edijileriň we öndürijileriň arasynda paýlanýandygyny hem-de olaryň gatnaşyklarynyň elastikliklerine ters proporsionaldygyny görýäris. Salgydy formal we hakyky töleýänler gabat gelmeýärler. Islendik ýagdaýda, ylaýta-da islegiň we teklibiň elastiklikleri güýçli tapawutlanýan bolsalar, salgydy, esasan az elastikli agent (tarap) töleýär.

Salgydyň ululygynyň salgydyň girdejisine täsirini seljermek arkaly, satuwdan girdejiniň harydyň nyrhyna bagly bolşy ýaly, olaryň biri-birine baglydygyny görmek bolýar. Onda şeýle pikir etmek bilen

$$E_t(T)=\frac{t}{T}\cdot\frac{dT}{dt}=1-\frac{t/p_e}{(1/|E^D|+1/E^S)}$$

formulany alarys.

Bu formuladan görnüşi ýaly, häzirlikçe, harydyň nyrhyna görä salgydyň möçberi, islegiň we teklibiň ters elastiklikleriniň jeminden kiçikä, salgydyň möçberiniň artmagy bilen salgytdan gelýän girdeji hem artýar. Mundan bolsa, şu haryt üçin isleg ýa-da teklip elastik däl bolanda, harydyň nyrhyndan has tapawutlanýan, salgydyň uly möçberini salmak bolar. Muňa mysal edip arak-çakyr hem-de temmäki önümlerine degişli aksizi getirmek bolar.

Diýmek, islegiň elastikligi öndürijiler, biznesmenler, döwlet syýasatyny işläp-taýýarlaýjylar we beýleki ykdysady subýektler üçin nyrh çözgütlerini kabul edenlerinde möhümdir.

3-nji baba degişli soraglar we ýumuşlar

1. Ykdysadyýetde elastiklik koeffisiýenti nämäni görkezýär?
2. Funksiýanyň elastikligi näme?
3. Kemelýän oýuk funksiýanyň elastikliginiň geometriki manysyny düşündiriň.
4. Nokatlanç, dugaly elastiklik näme? Bu düşünjeler haýsy ýagdaýlarda ulanylýar?
5. Elastikligiň häsiýetlerini sanap beriň.
6. Iki haryt üçin islegiň çatyrymlaýyn elastiklik koeffisiýenti boýunça bu harytlaryň özara çalşyrylýandygyny ýa-da biri-biriniň üstüni dolýandygyny nähili kesgitlemeli?
7. Girdeji boýunça haryda islegiň elastiklik koeffisiýenti arkaly, harydy goýberýän pudagyň gülläp ösjegini ýa-da durgunlyga sezewar boljakdygyny nähili kesgitlemeli?
8. Elastikligiň ykdysadyýetde ulanylyş ýaýlalaryny sanaň.

4. Önümçilik funksiýalary

4.1. Bir üýtgeýän ululykdan önümçilik funksiýasy düşünjesi

Kesgitleme. Bagly däl *x* üýtgeýän harç edilýän ýa-da ulanylýan resursyň (önümçiligiň faktorynyň) möçberiniň bahasyny alsa, oňa bagly *y* üýtgeýän bolsa, goýberilýän önümiň möçberiniň (göwrüminiň) bahasyny alsa, onda

$$y = f(x) \qquad (4.1)$$

funksiýa *önümçilik funksiýasy (ÖF)* diýilýär.

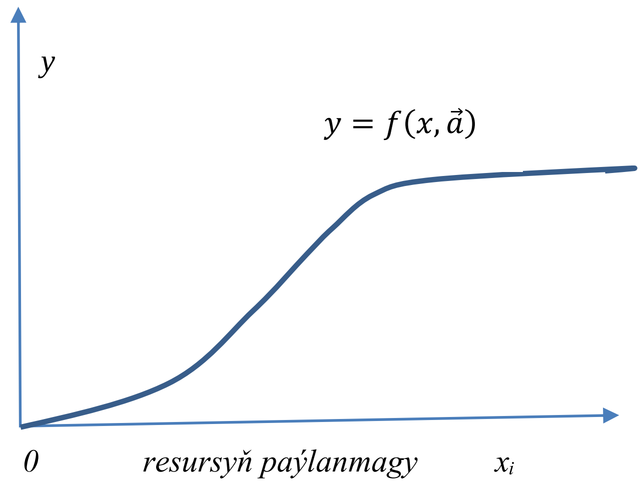
(4.1) formulada *x* we *y* üýtgeýänler, degişlilikde $x \geq 0$, $y \geq 0$ san bahalaryny alýarlar. Şol sebäpli, *ÖF bir resursly* ýa-da *bir faktorly* diýilýär. Bu ýerde funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $D(f)=\{x|\ x \geq 0\}$.

(4.1) ýazgydaky *f* funksiýanyň belgisine-*önümçilik sistemasynyň häsiýetnamasy* diýlip, *x* resurs (faktor) sarp edilende ýa-da ulanylanda *y=f(x)* birlik önüm goýberilýändigini aňladýar. Mikroykdysadyýet teoriýasynda *y* ululyga, eger *x* birlik resurs ulanylýan bolsa, *önümiň goýberilmeginiň maksimal mümkin bolan möçberi* diýlip düşünilýär. Makroykdysadyýetde bu düşünje dogry hasap edilmeýär: ykdysadyýetiň gurluş birlikleriniň arasynda resurs başgaça paýlananda, goýberilýän önümiň möçberi uly bolmagy mümkin. Bu ýagdaýda, *ÖF* – resursyň harçlanmagy we önümiň goýberilmegi arasyndaky statistik durnukly baglanyşygy aňladar. Şol sebäpli, *ÖF*-iň has dogry ýazgysy:

$$y = f(x, \vec{a}) \qquad (4.2)$$

bolar, bu ýerde $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ funksiýanyň parametrleriniň wektorydyr.

Mysal. Goý, $y = a_1 x^{a_2}$ bolsun. Bu ýerde x harç edilýän resurs (meselem, iş wagty), $f(x) = a_1 x^{a_2}$ goýberilýän önümiň (meselem, taýyn sowadyjylaryň) möçberi, a_1, a_2-ululyklar θF-iň parametrleri $(a_1 \geq 0,\ 0 < a_2 \leq 1)$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$. *ÖF*-iň grafigi (*G*) boýunça (4.1-nji surat) x sarp edilýän resursyň artmagy bilen y goýberilmäniň möçberi artýar, şunlukda, resursyň her *goşmaça birligi*, gitdigiçe, goýberilýän önümiň y möçberiniň az artmasyna getirýär.



4.1-nji surat. Girdeji (peýda) önümçilik funksiýasynyň görnüşi

Seredilýän ýagdaý, amalyýetde köplenç tassyklanylyp, ykdysady teoriýanyň kemelýän netijelilik kanunyna mysaldyr. $y=a_1 x^{a_2}$ önümçilik funksiýasy ykdysadyýetde bir faktorly prosesleriň aglabasyny beýan edýär.

ÖF mikro, şeýle hem, makroykdysady derejelerde dürli ýaýlalarda ulanylyp bilner. Meselem, mikroykdysady derejede, seredilen mysala laýyklykda, önümçilik sistemasy hökmünde, aýratyn kärhana-firma çykyş edýär. Makroykdysady derejede önümçilik sistemasy – pudak, pudagara önümçilik toplumy bolup biler. Bu derejede *ÖF*-leri, esasan *seljerme* we *planlaşdyrma*, şeýle hem *çaklama* meselelerini çözmek üçin ulanýarlar. Bu derejede *ÖF*-ler welaýat ýa-da tutuş ýurduň möçberinde zähmetiň bir ýylda sarp edilişi we önümiň ahyrky goýberilişi (ýa-da girdejisi) arasyndaky baglanyşygy beýan etmek üçin peýdalanylyp bilner. Bu ýerde önümçilik sistemasy hökmünde welaýatyň ýa-da tutuş ýurduň hojalyk sistemasy çykyş edip, seljerme, planlaşdyrma we çaklama meseleleri çözüler.

Mikroykdysady derejede resurslaryň sarp edilmesi we önümleriň goýberilmesi *natural*, şeýle hem *bahalaýyn birliklerde (görkezijilerde)* ölçenip bilner. Zähmetiň ýyllyk sarp edilişi üçin adam-sagat (natural görkeziji) ýa-da zähmet hakyna tölenen manat (bahalaýyn görkeziji) birlikleri ulanylyp bilner; önümleriň goýberilmesi sanaklarda (ştuklarda) ýa-da beýleki birliklerde (tonnalarda, metrlerde we ş. m.) ölçenilip bilner.

Makroykdysady derejede harajatlar we goýberilme, düzgün boýunça, bahalaýyn görkezijilerde ölçelinilip, *bahalaýyn (gymmatlaýyn) agregatlary* emele getirýärler, ýagny sarp edilýän (ulanylýan) resurslaryň we olar esasynda goýberilýän önümleriň möçberleriniň olaryň nyrhlaryna (bahalaryna) köpeltmek hasyllarynyň jemi görnüşinde aňladylýar.

Kesgitleme. Eger bagly däl x_1, x_2, ..., x_n üýtgeýänler, degişlilikde, harç edilýän ýa-da ulanylýan resurslaryň möçberleriniň bahalaryny, a bagly y üýtgeýän bolsa, goýberilýän önümiň bahasyny alýan bolsa, onda

$$y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (4.3)$$

funksiýasyna *köp üýtgeýänlerden önümçilik funksiýasy* diýilýär.

(4.3) formulada $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ otrisatel däl wektor ($x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$), $y(y \geq 0)$ bolsa skalýar ululykdyr. Şol sebäpli, bu önümçilik funksiýasyna *köpresursly* ýa-da *köpfaktorly ÖF* diýilýär. Diýmek, funksiýanyň has dogry ýazgysy:

$$y = f(\vec{x}, \vec{a}) \qquad (4.4)$$

görnüşde bolar, bu ýerde $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_k)$ *ÖF-iň* parametrleriniň wektorydyr.

Ykdysady manysy boýunça köpfaktorly $f(x_1, x_2, ... x_n)$ *ÖF*-iň kesgitleniş ýaýlasy *n* ölçegli $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ giňişlikdäki *x* wektorlaryň köplügidir.

Bir jynsly önüm öndürýän aýratyn kärhana (firma) üçin: $f(x_1, x_2, ... x_n)$ *ÖF* önüm goýbermäniň (natural ýa-da bahalaýyn aňlatmada) möçberini – dürli iş hünärleri boýunça iş wagtynyň sarp edilişi, çig mallaryň dürli görnüşleriniň, ýygnaýjy önümleriň, energiýanyň, esasy kapitalyň (adatça, natural birliklerde) harçlanylyşy bilen baglanyşdyryp biler. Şeýle tipdäki *ÖF*-ler kärhanada (firmada) ulanylýan tehnologiýany häsiýetlendirýär.

Welaýat ýa-da tutuş yurt üçin, köpfaktorly *ÖF* gurlanda ýyllyk önüm goýbermäniň *Y* ululygy hökmünde, adatça, häzirki däl-de birýyllyk üýtgemeýän nyrhda regionyň jemi önümini (girdejisini) alýarlar. Resurslar deregine bolsa, adatça, bahalaýyn ölçenilýän $x_1=K$ – bir ýylyň dowamynda ulanylýan esasy kapitaly, $x_2=L$ – adam zähmetini (bir ýylyň dowamynda sarp edilýän diri zähmetiň birligini) ulanýarlar. Şeýlelikde, iki faktorly *Y=f(K, L) ÖF* gurulýar (makroderejede, köplenç, aňlatmalar uly harplar bilen bellenilýär). Käwagtlar, ulanylýan *R* tebigy resurslary goşmak bilen *y=f (K, L, R)* üçfaktorly *ÖF-i* hem perýdalanýarlar. Mundan hem başga, eger *ÖF* wagtlaýýn yzygiderligiň maglumatlary boýunça gurulýan bolsa, onda önümçiligiň ösmeginiň aýratyn faktory hökmünde tehniki progres hem goşulyp bilner.

Kesgitleme. Eger $y=f(x_1,x_2)$ funksiýanyň parametrleri we *f* häsiýetnamasy *t* wagta bagly bolmasa, onda oňa *statik ÖF* diýilýär. Statik *ÖF*-lerde resurslaryň we goýberilmäniň möçberleri wagta bagly bolup bilerler. Umumy ýagdaýda, statik *ÖF* $y(t)=f(x_1(t),x_2(t))$ görnüşde aňladylyp, *t*-ýyllaryň nomeridir, ýagny $t=0,1,2,\ldots,T$.

$t=0$ baza ýyly bolup, degişli möçberler:

$x_1(0), x_1(1), x_1(2),\ldots,x_1(T);$

$x_2(0), x_2(1), x_2(2), \ldots,x_2(T);$

$y(0), y(1), y(2), \ldots, y(T)$

wagt boýunça yzygiderliklerdir.

Mysal. Mikro, şeýle hem makro derejelerde modelirlemek üçin, köplenç:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \tag{4.5}$$

funksiýany ulanýarlar, bu ýerde:

- ✓ $\vec{a}=(a_0,a_1,a_2)$ *ÖF-iň* parametri;
- ✓ $a_i=const$, i=1,2. Köplenç, $a_1+a_2=1$ deňlik ýerine ýetýär.

Kesgitleme. (4.5) görnüşli funksiýa *Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy (KDÖF)* diýilýär.

Bu görnüşli funksiýany ulanmagy 1929-njy ýylda iki sany amerikan ykdysadyýetçileri *Kobba, Duglas* teklip etdiler. *KDÖF* özüniň gurluş ýönekeýligi üçin köp teoretiki we amaly meseleleri çözmekde ulanylýar, şol sebäpli, bu funksiýany *multiplikatiw (köpeltmek hasylly) ÖF-leriň* toparyna goşýarlar. Ulanylmalarda, köplenç:

x_1 =*K* (ulanylýan esasy kapitalyň, esasy fonduň möçberi),

x_2 =*L* (diri zähmetiň harçlanmasy)

kabul edilip:

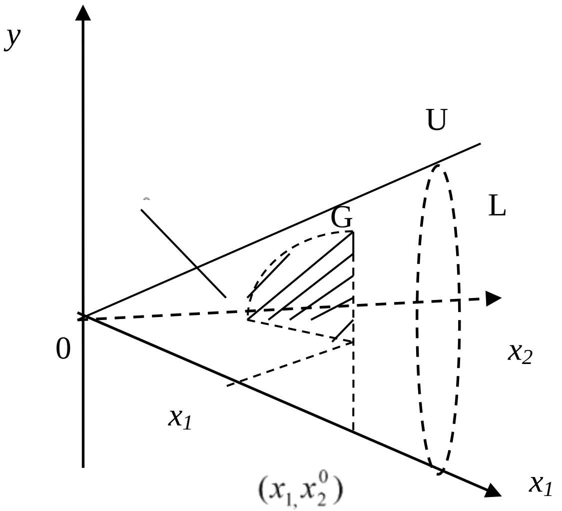
$$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2} \qquad (4.5a)$$

ÖF-i alýarlar. $a_1+a_2=1$ ýagdaýda, (4.5a) funksiýanyň grafigi üc ölçegli giňişlikde *U* üsti emele getirýär. (4.2-nji surat). Bu üst ugrukdyryjysy *L* çyzyk, emele getirijileri *O* nokatdan çykýan şöhleler bolan konik üstdür. Goý, $x_2 = x_2^0 > 0$ fiksirlenen bolsun. Onda $y = a_0 x_1^{a_1} (x_2^0)^{a_2}$ derejeli funksiýa alnyp, onuň grafigi 4.1-nji suratdaka meňzeşdir (4.3-nji surat). *G* çyzyk $x_2 = x_2^0$ wertikal tekizlik bilen *U* üstüň kesişmesidir. *G* çyzygyň görnüşi boýunça, birinji resursyň harçlanmasynyň artmagy bilen *y* goýbermäniň möcberi artýar, ýöne, x_1 resursyň her goşmaça birligi *y* goýbermäniň gitdigiçe az artmasyna getirýär. Bu ýagdaýy şeýle düşündirmek bolar: eger işgärleriň sany we olaryň hünär derejeleri üýtgemeýän bolsa, onda olaryň hyzmat edýän stanoklarynyň sanyny 2 esse artdyrmak bilen (olaryň sany öň hem ýeterlik bolsa), önümiň goýberilmesi iki esse artmaz.

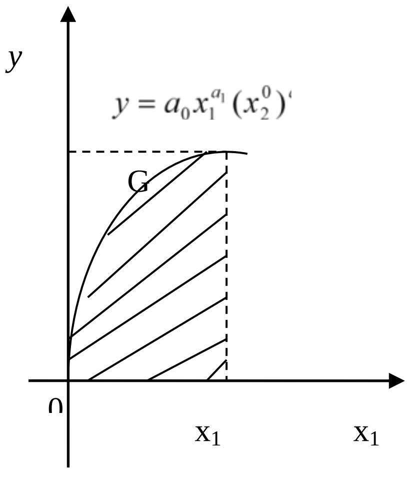
Eger (4.5a) funksiýada $a_1+a_2<1$ şerti ulanyp, *KDÖF*-iň grafiginde (x_1, x_2) nokady Ox_1x_2 tekizlik boýunça "demirgazyk-gündogara" süýşürsek, onda üstüniň aýlawlygy peselýän "baýyrjygy" alarys.

Köpfaktorly çyzykly *ÖF-iň* şeýle görnüşi bardyr:

$$y=a_0+a_1x_1+...+a_nx_n \qquad (4.6)$$



4.2–nji surat



4.3–nji surat

(4.6) funksiýasy *additiw (goşulyjyly) ÖF-leriň* toparyna degişlidir. *Multiplikatiw (köpeldijili) ÖF*-lerden additiw *ÖF*-lere geçmek üçin logarifmirleme amalyny ulanýarlar. Meselem, ikifaktorly multiplikatiw $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ *ÖF*-iň iki tarapyny hem logarifmirläp alarys

$lny=lna_0+a_1 lnx_1+a_2 lnx_2$.

Bu ýerde $lny=u$, $lnx_1=V_1$ *we* $lnx_2=V_2$ belläp,

$u=lna_0+a_1 V_1+a_2 V_2$

görnüşdäki additiw *ÖF* alarys. Tersine geçmäni, ýagny potensirlemäni amala aşyryp, additiw *ÖF*-den multiplikatiw *ÖF*-i alarys.

Eger $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ *KDÖF*-de $a_1+a_2=1$ bolsa, onda ony başgaça ýazmak bolar

$$\frac{y}{L}=\frac{a_0 K^{a_1} L^{a_1}}{L}=\frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}}=\mathrm{a}_0\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right), .\text{ýagny } \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}}=\mathrm{a}_0\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right).$$

$Z=\dfrac{y}{L}$ we $K=\dfrac{K}{L}$ ululyklara, degişlilikde, *zähmet öndürijiligi* we *zähmet kapitalüpçünjiligi* diýilýär.

Täze belgilemeleri ulanyp $Z=a_0 K^{a_1}$ funksiýany alarys, ýagny ikifaktorly *ÖF*-den, birfaktorly *ÖF*-i aldyk. $0<a_1<1$ bolany üçin Z zähmet öndürijiligi K zähmet kapital üpjünçiliginden haýal artýar. Emma bu netije, bar bolan tehnologiýalaryň we resurslaryň çäginde, diňe statik KDÖF-ler üçin adalatlydyr.

Bellik. Y/K droba *kapitalyň öndürijiligi* ýa-da *kapitalyň gaýtarylmasy* diýlip, K/Y we L/Y droblara bolsa, degişlilikde, *kapitalsygymlylyk* we *zähmetsygymlylyk* diýilýär.

Eger *ÖF*-de t wagt goýberilýän önümiň möçberine täsir edýän özbaşdak üýtgeýän ululyk (özbaşdak önümçilik faktory) hem-de *ÖF-iň* parametrleri we f häsiýetnamasy t wagta bagly bolsa, onda *dinamiki ÖF* diýilýär.

Bellik. Eger *ÖF-iň* parametrleri dowamlylygy T_0 ýyl bolan *wagtlaýyn yzygiderlikleriň* maglumatlary (resurslaryň we goýbermäniň möcberleri) boýunça bahalandyrylan bolsa (parametrleri bahalandyrmak üçin baza interwalynyň uzynlygy T_0

ýyl), onda şeýle *ÖF* üçin ekstrapolýasiýa (daşgyn) hasaplamalary $T_0/3$ ýyla çenli öňünden geçirmelidir (ýagny ekstropolýasiýanyň aralygy $T_0/3$ ýyla çenli bolmalydyr).

ÖF-ler gurlanda ylmy-tehniki progresi (*YTP*) göz öňünde tutmak üçin e^{Pt} köpeldiji girizilýär, bu ýerde *P* (*P>0* san) parametri *YTP*-niň täsiri astynda önüm goýbermäniň *ösüş depginini* häsiýetlendirýär:

$$y(t)= e^{Pt} f(x_1(t), x_2(t)), \quad (t=0,1,2,..., T) \qquad (4.7)$$

(4.7) funksiýasy ýönekeý *dinamiki ÖF*-e mysaldyr, ol özüne, neýtral, ýagny materiallaşdyrylmadyk faktorlaryň biri bolan *tehniki progresi* girizýär. Has çylşyrymly ýagdaýlarda tehniki progres, gös-göni zähmet öndürijiligine ýa-da kapital gaýtarylmasyna täsir edip biler:

$y(t)=f(A(t)L(t),K(t))$ ýa-da $y(t)=f(A(t)K(t),L(t))$.

Bu funksiýalara, degişlilikde, *zähmeti tygşytlaýan* ýa-da *kapitaly tygşytlaýan* YTP diýilýär.

YTP-ni göz öňünde tutýan *KDÖF*-e:

$$y(t)=a_0 e^{Pt} x_1(t)^{a_1} x_2(t)^{a_2}$$

funksiýasy mysaldyr.

Resurslaryň düýpli görnüşlerini (önümçilik faktorlaryny) tapawutlandyrmaklyga we $f(x_1,x_2)$ funksiýanyň analitik formasyny saýlamaklyga $y= f(x_1,x_2)$ *ÖF*-i *ýöriteleşdirmek* diýilýär.

Hakyky we tejribe maglumatlaryny model informasiýasyna öwürmeklige, ýagny statistik maglumatlar bazasynda regression we korrelýasion seljermäniň kömegi bilen $y=f(x_1,x_2)$ *ÖF-iň* parametrleriniň san bahalaryny hasaplamaklyga $y=f(x_1,x_2)$ *ÖF-iň parametrlenmegi* diýilýär.

ÖF-iň hakykylygynyň-adekwatlylygynyň barlanmasyna *werifikasiýa* diýilýär.

$y= f(x_1,x_2)$ *ÖF*-iň analitik formasynyň saýlanmasy (ýagny ýöriteleşmesi) teoretik pikir ýöretmelere hem-de *ÖF-iň* parametrlerine öwürdilýän hakyky ýa-da tejribe maglumatlarynyň aýratynlyklaryna (ýagny parametrlenmegiň aýratynlyklaryna) baglydyr. *ÖF-iň* kämilleşmesi prosesinde, onuň ýöriteleşmesine we parametrlenmesine *ÖF-iň* werifikasiýasynyň netijeleri täsir edýär.

Adatça, *ÖF-iň* parametrlerinin bahalandyrmasy *iň kiçi kwadratlar usulynda* geçirilýär.

Mysal. ABŞ-nyň ykdysadyýeti üçin, dürli awtorlar tarapyndan dürli bazalaýyn wagt aralyklarynda hasaplanan, makroykdysady $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ KDÖF-iň a_1 we a_2 parametrleriniň bahalaryny getireliň (4.1-nji tablisa) (öňünden $a_1 + a_2 = 1$ bolýandygyny awtorlar bilenok).

Dürli awtorlaryň hasaplan parametrleri. **4.1-nji tablisa**

Ýyllar ýa-da aralyklar	*Parametrler*			*Awtorlar*
	a_1	a_2	$a_1 + a_2$	
1899-1922	0,25	0,75	1,00	Duglas
1904	0,31	0,65	0,96	Duglas
1914	0,36	0,61	0,97	Duglas
1919	0,25	0,76	1,01	Duglas
1869-1948	0,70	0,25	0,95	Walawanis
1900-1953	0,16	0,84	1,00	Kleýn
1909-1949	0,35	0,65	1,00	Colon
1921-1941	0,34	2,13	2,47	Tintner
1934-1959	0,41	0,91	1,32	Mihalewskiý

Parametrleri dürli awtorlar dürli usullar boýunça hasaplapdyrlar, şol sebäpli, netijeleriň tapawutly bolýandygy tebigydyr. Awtorlaryň köpüsinde a_1 parametriňkä seredeniňde a_2 parametriň bahalary galarak. Şeýle hem, hemme awtorlaryňky diýen ýaly, $a_1 + a_2$ jemiň bahasy *1*-e ýakyn.

4.2 Önümçilik funksiýalarynyň formal häsiýetleri

f(x_1, x_2) funksiýasy $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ýagdaýlarda formal konstruksiýa görnüşinde kesgitlenip, aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) $f(0,0)=0$;

2) $f(0, x_2)=f(x_1,0)=0$;

3) $(x(1)\geq x(0), (x(1)\neq x(0))\rightarrow f(x(1))>f(x(0)),$
$(x(k)=(x_1(k), x_2(k)), k=0,1);$

4) $x>0\rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}>0 \ (i=1,2), \ x=(x_1,x_2);$

5) $x>0\rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2_i}\leq 0 \ (i=1,2), \ x=(x_1,x_2);$

6) $x>0\rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}\geq 0, \ x=(x_1,x_2);$

7) $f(tx_1,tx_2)=t^p f(x_1,x_2);$

1-nji häsiýet, resurs bolmasa, goýberilmäniň ýokdygyny, 2-nji häsiýet bolsa, resurslaryň iň bolmanda biri bolmasa hem goýberilmäniň ýokdygyny aňladýar, 3-nji häsiýet boýunça, resurslaryň sarp edilmesiniň artmagy bilen goýberilme artýar. 4-nji häsiýet (birinji tertipli hususy önümler položitel) resurslaryň biriniň sarp edilmesi artyp, beýlekisi üýtgewsiz galýan bolsa hem, goýberilmäniň artýandygyny aňladýar. Şu ýerde hem mundan beýläk, (x_1,x_2)-sanlaryň tertipleşdirilen jübti wektor ululyk hökmünde düşünilýär.

5-nji häsiýet (ikinji tertipli hususy önüm položitel däl) *i* resursyň harçlanmagynyň artmagy, beýlekisiniň mukdarynyň üýtgewsiz galdyrylmgy bilen, *i* resursyň her goşmaça birligi üçin, goýberilmäniň ösmeginiň ululygy artmaýar (kemelýän netijelilik kanuny). 6-njy häsiýet boýunça, resurslaryň biriniň artmagy bilen beýleki resursyň predel effektiwligi artýar.

Eger 5-6-njy şertler ýerine ýetýän bolsa, *ÖF*-iň grafigi Ox_1x_2y üçölçegli giňişligiň $x_1\geq 0, x_2\geq 0, y\geq 0$-otrisatel däl oktantynda ýokarlygyna güberçek üstdir. Umuman aýdanyňda, *ÖF*-iň geometriki obrazy, (x_1, x_2) nokat Ox_1x_2 koordinat tekizliginde başlangyçdan “demirgazykdan-gündogara” gidende aýlawlygy kemelýän güberçek baýryň üstüni emele getirýär.

7-nji häsiýet *ÖF*-iň $p>0$ derejä görä birjynsly funksiýadygyny aňladýar. $p>1$ bolanda, önümçiligiň masştabynyň t esse ($t>1$) artmagy, ýagny x wektordan tx wektora geçilmegi bilen, goýberilmäniň möçberi t^P esse artýar, başgaça, *önümçiligiň masştabynyň ulalmagyndan önümçiligiň netijeliliginiň artmagy* alynýar. $p=1$ bolanda, *önümçiligiň masştabynyň ulalmagyndan-önümçiligiň hemişelik netijeliligi* gazanylýar. $p<1$ bolanda, *önümçiligiň masştabynyň ulalmagyndan önümçiligiň netijeliliginiň peselmegi* alynýar.

$$y=a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ ,\quad a_1+a_2=1$$

KDÖF üçin 1-7-nji häsiýetleriň hemmesi ýerine ýetýär. Çyzykly:

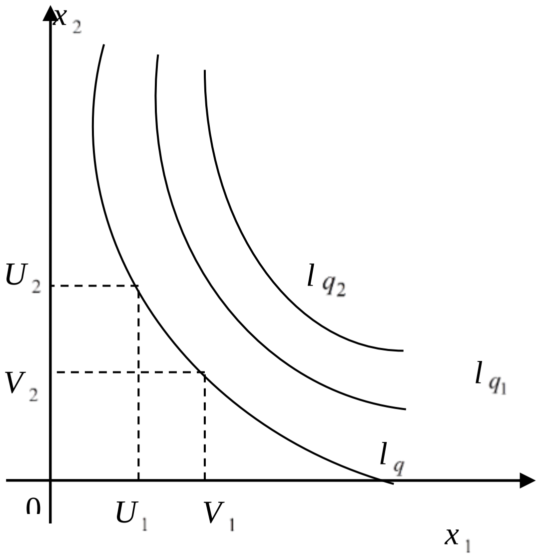
$$y=a_0+a_1x_1+a_2\ x_2\ \ (a_0>0, a_1>0, a_2>0)$$

ÖF üçin 1-nji, 2-nji ($a_0=0$ bolanda) we 4-nji häsiýetler ýerine ýetmeýär.

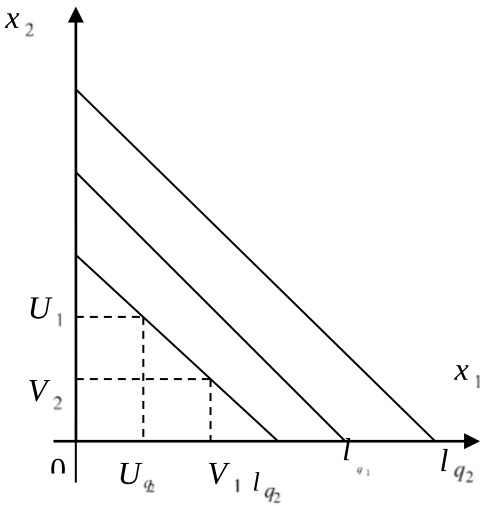
Kesgitleme. $y=f(x_1,x_2)$ *ÖF*-iň x_1Ox_2 tekizliginde $q=f(x_1,x_2)$ ($q\in R_+$) deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügine(l_q derejelere) *ÖF-iň izokwanty* diýilýär.

Görşümiz ýaly, harçlanýan resurslaryň şol bir l_q izokwanta degişli (U_1,U_2) we (V_1,V_2) dürli ýygyndylary, önümiň $q=f(x_1,x_2)$-ä deň bolan şol bir goýberilme möçberini berýärler.

Mysal. *KDÖF*-iň $l\,q_1$ we lq_2 izokwantlarynyň eskizleri 4.4-nji suratda getirilen. Bu ýerde lq_1 izokwantdan “demirgazyk-gündogarda” ýerleşýän lq_2 izokwanta goýberilmäniň uly möçberi degişlidir ($q_1>q_2$). Eger ulanylýan esasy kapital çäksiz artýän bolsa (ýagny $x_1=K\ \ \to+\infty$), onda zähmetiň sarp edilişi çäksiz kemelýär (ýagny $x_2=L\to+0$). Şuňa meňzeşlikde, eger $x_2=L\to+\infty$, onda $x_2=K\to+0$. 4.5-nji suratda çyzykly *ÖF*-iň $l\,q_1$ we $l\,q_2$ $(q_2>q_1)$ izokwantlarynyň eskizleri berlen. Hemme 7 häsiýeti hem ýerine



4.4–nji surat



4.5–nji surat

.

ýetýän ÖF üçin n=2 bolanda, degişli izokwantasy (eger ol göni çyzyk bolmasa) O nokat tarapa *güberçek* bolan çyzykdyr (4.4-nji surat).

4.3. Önümçilik funksiýasynyň predel (maržinal) we ortaça bahalary

Goý, $y=f(x)=f(x_1,x_2)$ *ÖF* berlen bolsun.

$$A_i=\frac{f(x)}{x_i} \quad (i=1,2)$$

droba *i resursyň (önümçilik faktorynyň) ortaça öndürijiligi* ýa-da *i resurs boýunça ortaça goýberiliş* ýa-da *ortaça önümçilik funksiýasy (OÖF)* diýilýär.

Ikifaktorly *KDÖF* bolan $y=a_0K^{a_1}L^{a_2}$ ýagdaýynda $\frac{y}{K}$-esasy kapitalyň we $\frac{y}{L}$ esasy zähmetiň ortaça öndürijiliklerine, başgaça, kapitalgaýtarylma we zähmetiň öndürijilikleri diýlipdi. Bu adalgalar, argumentleri $x_1=K$ we $x_2=L$ bolan islendik ikifaktorly ÖF üçin ulanylýar.

$y=f(x)=f(x_1,x_2)$ *ÖF*-den alnan birinji tertipli hususy önüme:

$$\mathrm{M}_i=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i=1,2)$$

i resursyň predel (maržinal) öndürijiligi (PÖF) ýa-da i *resurs boýunça predel goýberiliş* diýilýär.

x_i üýtgeýäniň artdyrmasyny we oňa degişli $y=f(x)$ *ÖF*-iň hususy artdyrmasyny, degişlilikde, Δx_i we $\Delta_i(f(x))$ $(i=1,2)$ bilen belläliň:

$$\Delta_1 f(x_1,x_2)=f(x_1+\Delta x_1, x_2)-f(x_1,x_2)$$

$$\Delta_2 f(x_1,x_2)=f(x_1, \Delta x_2+x_2)-f(x_1,x_2)$$

Δx_i artdyrmanyň kiçi bahalarynda ýazyp bileris:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\approx\frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} \quad (i=1,2).$$

Diýmek, ýakynlaşan aňlatmada, *PÖF*, eger *i*-resursyň x_i sarp edilmesi, beýleki sarp edilýän resursyň möçberi üýtgewsiz galdyrylanda, bir (ýeterlik kiçi) birlige artanda, önüm goýberilmäniň möçberiniň näçe birlige ulaljakdygyny görkezýär.

Mesele. $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ görnüşdäki *KDÖF* üçin anyk görnüşde: A_1, A_2, M_1, M_2 ululyklaryň aňlatmalaryny tapmaly.

Çözülişi.

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2};$$

$$A_2 = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a-1} x_2^{a_2} = a_1 A_1;$$

$$M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_0 x_1^{a_1} a_2 x_2^{a_2 - 1} = a_2 A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Mesele. $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ $(a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$ *ÇÖF* üçin anyk görnüşde A_1, A_2, M_1, M_2 ululyklaryň aňlatmalaryny tapmaly.

Çözülişi.

$$\mathrm{A}_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 \frac{x_2}{x_1}; \ \mathrm{A}_2 = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + \mathrm{a}_1 \frac{x_1}{x_2} + \mathrm{a}_2 .$$

$$\mathrm{M}1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1; \qquad \mathrm{M}_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \qquad \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

$y = f(x_1, x_2)$ ÖF-leriň hemmesi boýunça $M_i \le A_i$ $(i=1,2)$

deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny *i*-resursyň predel öndürijiligi, bu resursyň ortaça öndürijiliginden uly däldir.

Goý, $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ *ÖF* berlen bolsun. *i*-resursyň M_i-predel öndürijiliginiň, onuň A_i-ortaça öndürijiligine bolan gatnaşygyna, bu *i-resurs (önümçiligiň faktory) boýunça önüm goýbermäniň elastikligi* (hususy) diýilýär we E_i bilen bellenilýär. Onda:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{f(x)}{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i=1,2)$$

$E_x = E_1 + E_2$ jeme *önümçiligiň elastikligi* diýilýär.

Ýeterlik kiçi Δx_i artdyrmada ýazyp bileris:

$$E_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{f(x)}{x_i} \approx \frac{\Delta_i f(x)}{f(x)} : \frac{\Delta x_i}{x_i}, \ (i=1,2).$$

Sag gyraky aňlatmada iki $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ *we* $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ otnositel ululyklaryň gatnaşyklary alnar, diýmek, E_i (ýakynlaşan aňlatmada), eger i-resursyň sarp edilmesi, beýleki resursyň üýtgewsiz möçberinde, bir % artanda, *y* önüm goýbermäniň näçe % ulaljakdygyny görkezýär. Bu bolsa, i-resurs boýunça önüm goýbermäniň hususy elastikliginiň ykdysady manysydyr.

Mesele. KDÖF üçin E_1, E_2, E_x-leriň anyk aňlatmalaryny tapmaly.

Çözülişi. $E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$, $E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$.

Mesele. $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ $(a_0 = 0)$ ÇÖF üçin E_1, E_2, E_x -leriň anyk aňlatmalaryny tapmaly.

Çözülişi.

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2};$$

$$E_2 = \frac{x_2}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2}; \quad E_x = E_1 + E_2 = 1$$

Goý, $y=f(x)= f(x_1, x_2)$ *ÖF* berlen bolsun. *i-resursy* (önümçiligiň faktoryny) *j-resurs bilen çalşyrmagyň predel normasy* R_{ij} diýip, hemişelik y ululykda

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \quad (i,j=1,2) \tag{4.8}$$

aňlatma aýdylýar. Bu ýerde *i-çalşyrylýan*, *j*-bolsa ony *çalyşýan* resurslaryň nomerleridir.

R_{ij} -ululyga i-resursy (önümçiligiň faktoryny) *j*-resursa (önümçiligiň faktoryna) çalşyrmagyň *predel tehnologik normasy* ýa-da, gysgaça, *resurslary çalşyrmagyň predel normasy* diýilyär.

Goý, $y=q$ hemişelik ululyk, ýagny harçlanýan resurslaryň hemme ýygyndylary şol bir l_{q_2} izokwantda ýerleşýän bolsunlar. Onda $y=f(x)$ *ÖF*-den alynýan dy-doly differensial toždiki nola deň bolar:

$$0=dy=\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}dx_2$$

Bu ýerden, $i \neq j$ ýagdaýda alarys:

$$dx_j = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}}dx_i \quad (i,j=1,2) \tag{4.9}$$

Deňligiň iki tarapyny dx_i ululyga böleliň:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} \quad (i,j=1,2) \tag{4.10}$$

(4.8)-(4.10) formulalar esasynda ýazyp bileris:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0 \ (i \neq j,\ i,j=1,2) \tag{4.11}$$

Önüm goýbermäniň hususy elastikliginiň aňlatmalaryny ulanyp, (4.11)-den iki faktorly *ÖF* üçin alarys:

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{x_2}{x_1} \tag{4.12}$$

Diýmek, birinji resursy ikinji resurs bilen çalyşmagyň normasy, bu resurslar boýunça önüm goýbermäniň elastiklikleriniň gatnaşygynyň, ikinji resursyň möçberiniň birinji resursa gatnaşygyna köpeltmek hasylyna deňdir.

Goý, *ÖF* iki faktorly bolsun. Hemişelik y önüm goýbermede hem-de Δx_1 we Δx_2-kiçi artdyrmalarda ýakynlaşan formulany alarys:

$$R_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \qquad (4.13).$$

(4.13) esasynda, R_{12}-resurslaryň çalyşma normasy-$y=q$ üýtgewsiz goýberilmede, eger birinji resursyň harçlanmasy bir kiçi birlik azaldylsa ($-\Delta x_i$), ikinji resursyň harçlanmasynyň näçe kiçi birlik ulaljakdygyny takmyn görkezýär.

Mesele. $y=a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ *KDÖF* üçin anyk görnüşde R_{12} we R_{21} aňlatmalary tapmaly.

Çözülişi.

$$R_{12} = \frac{\partial y}{\partial x_1} : \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{a_1 \cdot x_2}{a_2 \cdot x_1}; \quad R_{21} = \frac{\partial y}{\partial x_2} : \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a_2 \cdot x_1}{a_1 \cdot x_2};$$

Mesele. $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ *ÖF* üçin anyk görnüşde R_{12} we R_{21} aňlatmalary tapmaly.

Çözülişi.

$$R_{12} = \frac{\partial y}{\partial x_1} : \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{a_1}{a_2}; \quad R_{21} = \frac{\partial y}{\partial x_2} : \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a_2}{a_1};$$

4.4. Templeýin ýazgyda önümçilik funksiýalary

Önümleri goýbermäniň we resurslary harçlamagyň möçberli görkezijileriniň baglanyşyklary bilen bir hatarda, bu görkezijileriň ösüş templeri arasyndaky baglanyşyklar hem seredilip bilner. Bu ýerde, *Y*-jemi önümi (girdejini) *K*-kapital we *L* –zähmet bilen baglanyşdyrýan makroykdysady önümçilik funksiýalary barada aýdyp geçeris, ýöne, bu maglumatlar islendik beýleki önümçilik funksiýalary üçin hem umumylaşdyrylyp bilner.

Y, K we L ululyklaryň ösüş templerini, degişlilkde, kiçi harplar *y, k* we *l* bilen belläliň. Bu ululyklar ösüşiň diskretleýin ýa-da üznüksiz templeri bolup bilerler:

$$y_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}},\ k_t = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}},\ l_t = \frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}} \ - \text{diskret};$$

$$y_t = \frac{Y_t^{/}}{Y_t},\ k_t = \frac{K_t^{/}}{K_t},\ l_t = \frac{L_t^{/}}{L_t} \ - \text{üznüksiz.}$$

Şeýlelikde, templeýin ýazgyda *ÖF y=f(k,l)* görnüsde bolar.

Indi bolsa, *KDÖF*-iň möçberleýin we templeýin ýazgylardaky baglanyşygyna seredeliň. Goý, *K* we *L* ululyklar *t* wagt boýunça üznüksiz, differensirlenýän funksiýalar (K_t we L_t) bolsunlar. Bu ýagdaýda, olar, kesgitli wagt döwründe ulanylan resurslaryň möçberlerini däl-de, wagtyň her pursatynda olaryň ulanylyşynyň "intensiwligini" aňladar. Goý, funksiýa:

$$Y_t = A K_t^{\alpha} L_t^{\beta} e^{\gamma t} \tag{4.14}$$

görnüşde bolsun. Funksiýany logarifmläp, doly differensial alalyň:

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t + \gamma^{\ t}$$

$$d(\ln Y_t) = \alpha\, d(\ln K_t) + \beta\, d(\ln L_t) + \gamma\, dt \quad \text{ýa-da:}$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \alpha \frac{dK_t}{K_t} + \beta \frac{dL_t}{L_t} + \gamma dt$$

$$\frac{Y_t^{/} dt}{Y_t} = \alpha \frac{K_t^{/} dt}{K_t} + \beta \frac{L_t^{/} dt}{L_t} + \gamma dt$$

Deňlemäniň iki tarapyny hem dt bölüp alarys:

$$\frac{Y_t^{/}}{Y_t} = \alpha \frac{K_t^{/}}{K_t} + \beta \frac{L_t^{/}}{L_t} + \gamma$$

Bu ýerde: $y_t = \frac{Y_t^{/}}{Y_t},\ k_t = \frac{K_t^{/}}{K_t},\ l_t = \frac{L_t^{/}}{L_t}$ degişlilikde, goýberilmäniň, kapitalyň we zähmetiň ösüşiniň üznüksiz templeridir. Şeýlelikde, möçber görkezijilerdäki *KDÖF*-e ösüş templeriniň çyzykly baglanyşygy degişlidir:

$$y_t = \alpha\ k_t + \beta l_t + \gamma \qquad (4.15)$$

Bu baglanşyga templeýin ýazgydaky Kobba-Duglasyň önümçilik funksiýasy diýilýär.

Eger aňlamatlarda dY_t, dK_t, dL_t-differensiallary (artdyrmalaryň baş çyzykly böleklerini), degişlilikde, ΔY_t, ΔK_t, ΔL_t-artdyrmalaryň özi bilen çalşyrsak, onda ýakynlaşan:

$$y_t \approx = \alpha\ k_t + \beta l_t + \gamma \qquad (4.16)$$

formulany alarys, bu ýerde y_t, k_t, l_t-ululyklar ösüşiň diskretleýin templeridir. (4.15), (4.16) formulalaryň seljermesinde we bahalandyrmasynda aşakdakylary göz öňünde tutmalydyr: (4.14) we (4.15) formulalary üznüksiz ýagdaýda deňgüýçlidir. Şol bir wagtda, ÖF bahalandyrylýan statistik maglumatlar, elmydama diskret bolup, bu ýagdaýda (4.14) we (4.16) dürli ÖF-lerdir. Käwagtlar, (4.14) formula üçin alnan α, β-parametrleriň bahalandyrmalaryny (4.16) formulada ulanýarlar we tersine. Beýle etmek dogry däldir, bu formulalaryň her biri aýratynlykda bahalandyrylmalydyr. Eger olar şol bir statistik maglumatlar boýunça (ýagny biri-birine laýyk gelýän möçberler we templer boýunça) bahalandyrylan hem bolsalar, şeýle bahalandyrmalaryň netijeleri düýpden tapawutly bolmagy mümkin. Formulalaryň biri, meselem, doly ulanarlykly netijäni, beýlekisi bolsa, staistik ähmiýetsiz bahalandyrmany berip biler.

Şu aýdylanlardan, (4.15), (4.16) formulalardaky γ-azat agzanyň-neýtral tehniki progsesiň tempidigi gelip çykýar. Bu ululyk, önüm goýbermäniň ösüş tempiniň-kapitalyň we zähmetiň harçlanmagynyň ösüşi bilen bagly bolmadyk bölegi bolup, makroderejede önümçiligiň intensifikasiýasyny görkezýär.

Mysal. Goý, templeýin ýazgydaky $y_t = 0.3\ k_t + 0{,}6 l_t + 1{,}5$ *ÖF* bahalandyrylýan bolup, zähmetiň harçlanmagynyň ösüşiniň ortaça tempi t_t=1%, ulanylýan kapitalyň ösüşiniň ortaça tempi k_t =*6%* bolsun. Onda önüm goýbermäniň ösüşiniň ortaça tempi:

$$y_t = 0{,}3 \cdot 6\% + 0{,}6 \cdot 1\% + 1{,}5\% = 1{,}8\% + 0{,}6\% + 1{,}5\% = 3{,}9\%.$$

bolar. Görşümiz ýaly, bu sana intensiw faktorlaryň-kapitalyň we zähmetiň harçlanmagynyň ösüşiniň goşantlary, degişlilikde, 1,8% we 0,6 % boldular. Bu sana intensiw faktorlaryň (tehniki progresiň) goşandy 1,5% möçberde bolup, otnositel ululykda:

$\frac{1{,}5}{y_t} \cdot 100\% = \frac{1{,}5}{3{,}9} \cdot 100\% = 38{,}5\%$ bahalandyrmany alarys.

4-nji baba degişli soraglar we ýumuşlar

1. Kemelýän netijelilik kanunynyň manysy näme?
2. Statik ÖF-lerde t wagta bagly we bagly däl ululyklary aýdyp beriň.
3. Iki faktorly KDÖF-iň we çyzykly ÖF-iň görnüşleri nähili?
4. ÖF-leriň häsiýetlerini düşündiriň. Haýsy ÖF-lerde bu häsiýetler doly ýerine ýetýär?
5. Izokwantanyň ykdysady manysyny düşündiriň.
6. Kapitalyň ortaça öndürijiligi (kapitalyň gaýtarylmasy) nähili kesgitlenýär?
7. Kapitalyň we zähmetiň predel öndürijilikleri nähili kesgitlenýär?
8. i resurs (önümçilik faktory) ($i=1,2$) boýunça goýberilmäniň hususy elastikliginiň kesgitlemesini aýdyň.
9. Templeýin ýazgydaky *ÖF*-iň kesgitlemesini beriň.
10. *KDÖF* möçberleýin we templeýin ýazgylarda nähili baglanyşýar?
11. Möçberleýin we templeýin ýazgylardaky *ÖF*-lerde tehniki progres nähili beýan edilýär?

5. Çyzykly programmirlemegiň meselelerini çözmek

5.1. Çyzykly programmirlemegiň başlangyç düşünjeleri

Çyzykly programmirlemek (ÇP) − näbellilerine çyzykly çäklendirmeler goýlan çyzykly funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahasyny tapmaklygyň usullary baradaky ylymdyr. Şeýlelikde, ÇP-meselesi funksiýanyň şertli ekstremumyny tapmaklyga degişlidir. Emma şertli ekstremum üçin matematiki seljermäniň usullaryny bu meselede ulanmak mümkin däldir. Goý,

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

çyzykly funksiýanyň:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k \end{cases}$$

şertlerde ekstremumyny derňemeli bolsun. Bu ýerde Z-çyzykly funksiýa bolany üçin, $\frac{\partial z}{\partial x_j} = C_j \, (j = 1,2,...,n)$, bolup, bulary hem nola deňlemelidir. Çyzykly funksiýanyň bolsa, hemme koeffisiýentleri nola deň bolup bilmez. Diýmek, ekstremal nokatlar oblastyň içki nokatlarynda ýokdur, diňe, ýaýlanyň gyrasynda-araçäginde şeýle nokatlar bolup biler. Emma olary hem bu usulda derňäp bolmaz, sebäbi, hususy önümleriň bahasy hemişelik sandyr.

Görşümiz ýaly, ÇP-meselelerini çözmek üçin aýratyn usullar derkardyr.

5.1.1. Ýönekeý ykdysady meseleleriň matematiki modellerini gurmak

a) Çig mallary ulanmak meselesi. $P_1, P_2, ..., P_n$ önümleri öndürmek üçin $S_1, S_2, ..., S_k$ çig mallary ulanylýar. Çig mallaryň gorlary, önüm birligine sarp bolýan çig mallaryň birlikleriniň sany, şeýle hem, önümleriň birliklerini ýerleşdirmekden galýan $C_1, C_2, ..., C_n$ peýdalar aşakdaky tablisada (5.1-nji tablisa) getirilen. Iň köp peýda galar ýaly, öndürilmeli önümleriň sanynyň optimal planyny tapmaly:

Başlangyç maglumatlar. **5.1-nji tablisa**

Çig mal görnüşleri	Çig mal gorlary	j-önüm birliginde sarp bolýan, i-çig mal birlikleriň sany			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
…	…	…	…	...	…
S_k	b_k	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kn}
Peýda		C_1	C_2	...	C_n

Goý, x_j-ululyk *j*-önümiň gözlenýän mukdary bolsun. Onda meseläniň matematiki modeli şeýle düzüler:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = 1,2,..., n)$$

$$b_i \ge 0, (i = 1,2,..., k)$$

b) Iýmit rasionyny düzmek meselesi. Mallar baka goýlanda, olaryň her biri her gün S_1 ýokumly maddasyndan 9 birlikden, S_2 maddadan 8 birlikden, S_3-ýokumly maddasyndan 12 birlikden az bolmadyk iýmit maddalaryny almalydyr. Iýmitleriň iki görnüşleri bar bolup, olaryň *1 kg*-daky iýmit maddalarynyň birlikleri 5.2-nji tablisada getirilen.

Başlangyç maglumatlar. **5.2-nji tablisa**

Ýokumly maddalar		1 kg iýmitdäki ýokumly maddalaryň sany	
		I iým	II iým
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6
1 kg iýmiň bahasy		4	6

Mallar her günde gerek ýokumly maddalary alar ýaly hem-de iýmlere çykdaýjylar iň az bolar ýaly iýmleriň her birinden näçe *kg* mallara bermeli.

Gözlenýän iýmleriň *kg*-daky sanlaryny x_1 we x_2 bilen belläliň. Onda şeýle matematiki modeli geleris:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Iýmit rasionyny düzmegiň umumy meselesini şeýle ýazmak bolar:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \geq b_k \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = 1,2,...,n)$$

$$b_i \geq 0, (i = 1,2,...,k)$$

5.1.2. Deňlemeleri deňsizlikler bilen çalyşmak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

deňsizlige seredeliň. Bu deňsizligi deňlemä öwürmek üçin, onuň çep tarapyna käbir otrisatel däl $x_{n+1} \geq 0$ üýtgeýäni goşalyň. Netijede, *n+1* näbellili (üýtgeýänli) deňlemäni alarys:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$$

x_{n+1} -näbellä *goşmaça näbelli* diýilýär.

Bu ýerden görnüşi ýaly, ÇP meselesiniň çäklendirmeleri deňsizligi saklaýan bolsa, olaryň her birini, goşmaça näbellini-üýtgeýäni girizmek bilen, deňlemä öwürmek bolar, şeýlelikde, goşmaça näbelliler maksat funksiýasyna 0 koeffisiýent bilen girýärler.

Meselem, iýmit rasionyny düzmek meselesini şeýle ýazmak bolar:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_{n+k} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = 1,2,...,n+k)$$

$$b_i \geq 0, (i = 1,2,...,k)$$

5.1.3. ÇP meselelerini formulirlemegiň görnüşleri

$$Z_{\min} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \tag{5.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n \tag{5.3}$$

meselä seredeliň. Eger $\vec{C} = (c_1, c_2, ..., c_n)$; $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{k1} \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{k2} \end{pmatrix}, ...,\ \vec{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{kn} \end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_k \end{pmatrix}$$

wektorlary bellesek, onda (5.1)-(5.3) meseläniň wektor ýazgysyny alarys**:**

$$Z_{\min} = \vec{C}\vec{X}, \tag{5.1$'$}$$

$$\vec{A}_1x_1 + \vec{A}_2x_2 + ... + \vec{A}_nx_n = \vec{A}_0, \tag{5.2$'$}$$

$$\vec{x} \geq 0. \tag{5.3$'$}$$

(5.1)-(5.3) meseläni jemleme belgileriniň kömegi bilen şeýle görnüşde hem ýazýarlar:

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{5.1$''$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j,\ i=1,2,...,k; \tag{5.2$''$}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j=1,2,...,n. \tag{5.3$''$}$$

Eger $C = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

matrisalary bellesek, onda (5.1)-(5.3) meseläniň matrisalaýyn ýazgysyny alarys:

$$Z_{min} = CX \tag{5.1'''}$$

$$AX = A_0 \tag{5.2'''}$$

$$X \geq 0 \tag{5.3'''}$$

Kesgitleme. *ÇP* meselesiniň *plany* ýa-da *ýol berilýän çözüwi* diýip, (5.2)-(5.3) şertleri kanagatlandyrýan $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ wektoryna aýdylýar.

Kesgitleme. Eger x_i-položitel koeffisiýentler bilen (5.2′) dargatma girýän $\vec{A}_i (i = \overline{1,k})$ wektorlar çyzykly bagly däl bolsalar, onda $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ plana *daýanç plany* diýilýär.

$\vec{A}_i$ wektorlar *k*-ölçegli bolandyklary üçin, daýanç planyň kesgitlemesinden, onuň položitel komponentleriniň sanynyň *k*-dan geçmeýänligi gelip çykýar.

Kesgitleme. Eger daýanç plany *k*-sany položitel komponenti saklaýan bolsa, onda oňa *boluşly plan* diýilýär.

Kesgitleme. *ÇP* meselesiniň *optimal plany* ýa-da *optimal çözüwi* diýip-maksat funksiýasyna iň uly (iň kiçi) baha kabul etdirýän çözüwe aýdylýar.

Şu bölümde, biz, köplenç, çyzykly funksiýanyň iň kiçi bahasy gözlenýän *ÇP* meselelerine serederis. Eger çyzykly funksiýanyň iň uly-maksimal bahasy gözlenýän bolsa, onda funksiýanyň alamatyny garşylykla öwrüp, soňky funksiýanyň minimal bahasyny gözlemek ýeterlikdir. Funksiýanyň alnan minimal bahasynyň alamatyny garşylykly alamata öwrüp, başdaky çyzykly funksiýanyň maksimal bahasyny taparys.

ÇP meseleleriniň çözüwleriniň häsiýetleri, ylaýta-da grafiki çözüwlerde, güberçek köplükleriň häsiýetleri bilen gös-göni baglanyşyklydyr. Şol sebäpli, güberçek köplükleriň düşünjelerini getireliň

5.1.4. Güberçek köplükler

Goý, x_1Ox_2 koordinat tekizliginde $A_1(x_1^{(1)}x_2^{(2)})$ we $A_2(x^{(2)}_1x_2^{(2)})$ nokatlar berlen bolsun. Onda:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad (*)$$

şertler ýerine ýetýän A nokada $-A_1$ *we* A_2 *nokatlaryň güberçek çyzykly kombinasiýasy(GÇK)* diýilýär ýa-da $[A_1, A_2]$ *kesimiň nokatlary* diýilýär. Bu ýerde:

$$A = \begin{cases} A_1, & \\ A_2, & \end{cases} \text{haçanda} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1 \end{matrix} \quad \text{bolanda;}$$

galan ýagdaýlarda *A* nokat $[A_1, A_2]$-kesimiň içki nokatlarydyr. A_1 we A_2 nokatlara *kesimiň gyraky* ýa-da *burç nokatlary* diýilýär. Görşümiz ýaly, burç nokady, hiç wagt, beýleki nokatlaryň *GÇK*-sy bolup bilmez. (*) gatnaşyklar giňişligiň ölçegliligine baglanşyksyzlykda ýerine ýetýär.

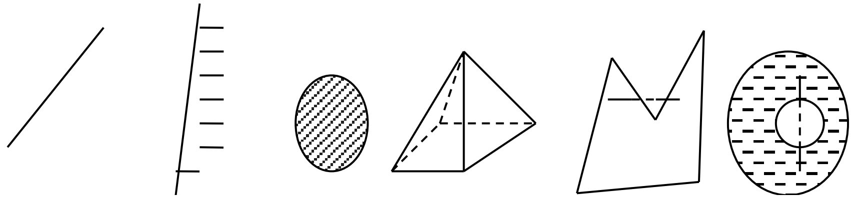
Goý, *n* sany $A_1, A_2, ..., A_n$ nokatlar bar bolsun. Eger:

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (**)$$

şertler ýerine yetýän bolsa, onda *A* nokada $A_j(j = \overline{1, n})$ *nokatlaryň GÇK-sy* diýilýär.

Eger nokatlar köplügi özüniň islendik iki nokady bilen bu nokatlaryň GÇK-syny (bu nokatlary birleşdirýän tutuş kesimi) hem özünde saklaýan bolsa, onda bu köplüge *güberçek* diýilýär. Güberçek köplükleriň mysaly bolup, kesim, şöhle, göni çyzyk, ýarym tekizlik, tekizlik, tegelek, şar, kub, ýarymgiňişlik we ş. m. hyzmat edip biler. Meselem, 5.1-nji suratda a)-d) wariantlar-güberçek, e), f)-güberçek däl köplüklere mysaldyr. Soňky köplüklerde, islendik A_1 we A_2 nokatlary birleşdirýän kesim tutuşlygyna berlen köplükde ýatmaz.

Eger köplügiň nokady islendik radiusly şaryň merkezi bolup, bu şar berlen köplüge degişli we degişli bolmadyk nokatlary hem özünde saklaýan bolsa, onda köplügiň bu nokadyna onuň *çäk nokady* diýilýär. Çäk nokatlary köplügiň *çägini* emele getirýärler. Özüniň hemme çäk nokatlaryny saklaýan köplüge-*ýapyk köplük* diýilýär. Ýapyk köplük çäklenen hem çäklenmedik bolup bilýär. Eger merkezi köplügiň islendik nokady bolan tükenikli radiusly şar bu köplügi özünde saklaýan bolsa, onda bu köplüge *çäklenen köplük,* bolmasa *çäklenmedik köplük* diýilýär.



a) b) c) d) e) f)

5.1 – nji surat

Iki köplügiň kesişmesi diýip, olaryň umumy nokatlaryndan ybarat köplüge aýdylýar. Güberçek köplükleriň kesişmesiniň hem güberçek köplük boljakdygy düşnüklidir.

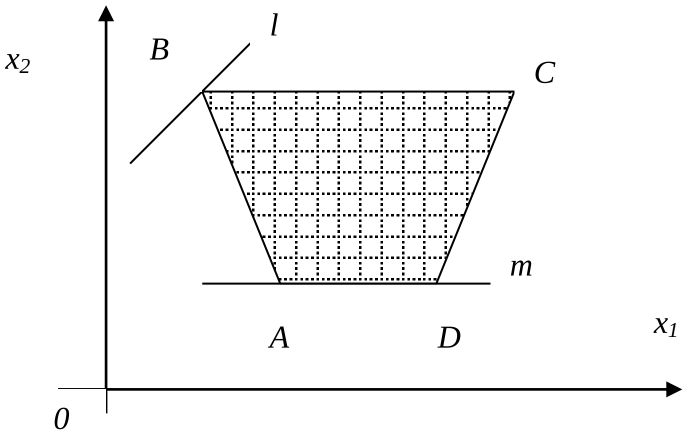
Güberçek köplügiň *burç nokady* diýip, onuň islendik iki nokadynyň GÇK-sy bolmaýan nokada aýdylýar. Meselem, üçburçlugyň burç nokatlary-onuň depeleridir, tegelegiň burç nokatlary-onuň çäk nokatlarydyr. Göni çyzygyň, tekizligiň, ýarymtekizligiň, giňişligiň, ýarymgiňişligiň burç nokatlary ýokdur.

Güberçek köpburçluk diýip, tekizlikde tükenikli sanly burç nokatlary bolan güberçek, ýapyk, çäklenen köplüge aýdylýar. Köpburçlugyň burç nokatlaryna, onuň *depeleri,* iki depesini birleşdirýän hem-de çägini emele getirýän kesimlere bolsa-*taraplary* diýlýär.

Eger köpburçluk gönüden haýsyda bolsa bir tarapda ýatsa hem-de göni çyzyk bilen iň bolmanda bir umumy nokady bar bolsa, onda bu gönä-*güberçek köpburçlugyň daýanç gönüsi* diýilýär (5.2–nji surat).

Güberçek köpgranlyk diýip, giňişlikde tükenikli sanly burç nokatlary bolan güberçek, ýapyk we çäklenen köplüge aýdylýar. Köpgranlygyň burç nokatlaryna-onuň *depeleri*, köpgranlygy çäklendirýän köpburçluklara-onuň *granlary*, granlaryň kesişip emele getirýän kesimlerine-*gapyrgalary* diýilýär.

Eger köpgranlyk tekizlikden bir tarapda ýatsa hem-de tekizlik bilen iň bolmanda bir umumy nokady bar bolsa, onda bu tekizlige-*köpgranlygyň daýanç tekizligi* diýilýär.



5.2–nji surat (*m, l* – daýanç gönüleri)

5.1.5. ÇP meseleleriniň geometriki manysy

ÇP meselesiniň aşakdaky görnüşine seredeliň:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \qquad \text{ýa-da} \qquad Z=CX \rightarrow \min \qquad (5.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=1,2,...,k \qquad \text{ýa-da} \qquad AX \le A_0 \qquad (5.5)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2,..., n \qquad \text{ýa-da} \qquad X \ge 0 \qquad (5.6)$$

(5.5) we (5.6) çäklendirmeleri kanagatlandyrýan $x_1, x_2, ..., x_n$ sanlaryň toplumyna *çözüw* diýilýär. Eger (5.5)-(5.6) deňsizlikler sistemasynyň iň bolmanda bir çözuwi bar bolsa, onda sistema *kökdeş* diýilýär.

(5.5) –(5.6) kökdeş sistemasyna *n=2* ýagdaýda seredeliň. Onda:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_x + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \leq b_k \end{cases} \qquad (5.5^1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad (5.6^1)$$

(5.5^1) deňsizlikler sistemasynyň her bir deňsizligi x_1Ox_2 koordinatalar tekizliginde çägi $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i (i = 1, k)$ göni çyzyk bolan ýarymtekizlikdir. Sistema kökdeş bolany üçin, bu güberçek köplükler kesişip, güberçek köpburçlugy emele getirýär. Bu bolsa *ýolbererli çözüwleriň köplügidir − planydyr*.

n=3 ýagdaýda, deňsizlikleriň her biri-çägi degişli tekizlik bolan ýarymgiňişligi aňladýar. Sistema kökdeş bolsa, bu ýarymgiňişlikler kesişip, güberçek kögranlygy, ýagny *ýolbererli çözüwleriň köplügini-*planyny emele getirýär we ş.m.

5.1.6. ÇP meseleleriniň çözüwleriniň häsiýeti

Teorema 5.1. *ÇP* meseleleriniň çözüwleriniň köplügi-güberçekdir.

Subudy. Goý, $\vec{x}_1$ we $\vec{x}_2$ wektorlar (5.4)-(5.6) meseläniň plany bolsunlar. Onda $\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ çyzykly kombinasiýanyň hem bu meseläniň çözüwidigini subut etmelidir. Bu ýerde $\vec{x}_1$ we $\vec{x}_2$ (5.4)-(5.6) meseläniň çözüwi bolany üçin: $A\vec{x}_1 = \vec{A}_0,\ \ A\vec{x}_2 = \vec{A}_0$ ýerine ýetýär. Onda:

$$A\vec{x} = A(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 A\vec{x}_1 + \lambda_2 A\vec{x}_2 = \lambda_1\vec{A}_0 + \lambda_2\vec{A}_0 = \vec{A}_0(\lambda_1 + \lambda_2) = \vec{A}_0$$

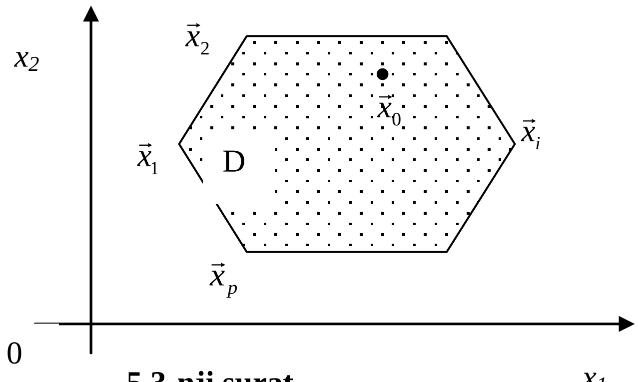
Teorema 5.2. *ÇP* meselesiniň maksat funksiýasy özüniň ekstremal (optimal) bahasyny çözüwler köplüginiň burç nokadynda ýa-da gapyrgasynda (granynda) alýar.

Subudy. Goý, *D*-çözüwler köplüginiň tükenikli sanly burç nokatlary bolsun. Goý, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p$ burç nokatlary, $\vec{x}_0$-optimal çözüw bolsun. Onda $Z(\vec{x}_0) \le Z(\vec{x}),\ \ \vec{x} \in D.$ Çözüwler köplügini tekizlikde aňladalyň: goý, $\vec{x}_0$-burç nokady bolsun. Onda teoremanyň birinji bölegi ýerine ýetýär.

Goý, $\vec{x}_0$-burç nokady däl diýeliň (surat 5.3.). Onda:

$$\vec{x}_0 = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_p\vec{x}_p,\ \lambda_i \ge 0 \quad (i = \overline{1, p}), \quad \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1$$

ýazyp bileris. Bu ýerde $Z(\vec{x})$-çyzykly funksiýa. Onda:



5.3-nji surat

$$Z(\vec{x}_0) = Z(\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p) = \lambda_1 Z(\vec{x}_1) + \lambda_2 Z(\vec{x}_2) + ... + \lambda_p Z(\vec{x}_p),$$

bu ýerde: $\min\{Z(\vec{x}_1),\ Z(\vec{x}_2), ...,\ Z(\vec{x}_p)\} = Z(\vec{x}_k) = m$ bolsun. Onda:

$$Z(\vec{x}_0) \ge \lambda_1 m + \lambda_2 m + ... + \lambda_p m = m(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p) = m \cdot 1 = m.$$

Bir tarapdan: $Z(\vec{x}_0) \le m$, beýleki tarapdan $Z(\vec{x}_0) \ge m$. Diýmek:

$Z(\vec{x}_0) = m = Z(\vec{x}_k)$, bu ýerde $\vec{x}_k$-burç nokady.

Goý, $Z(\vec{x})$-funksiýasy optimal baha birden köp burç nokatlarynda ýetýän bolsun: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q$, $1 < q \le p$. Onda

$Z(\vec{x}_1) = Z(\vec{x}_2) = ... + Z(\vec{x}_q) = m.$

Eger $\vec{x}$ burç nokadynyň çyzykly kombinasiýasy bolsa, onda

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + ... + \lambda_q \vec{x}_q,\ \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1.$ Bu verden

$$Z(\vec{x}) = Z(\lambda_1 \vec{x}_i + ... + \lambda_q \vec{x}_q) = m \cdot \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = m \cdot 1 = m.$$

Bu ýerde $\vec{x}$ gapyrganyň ýa-da granyň erkin nokadydyr. Eger *D*-oblast bir tarapy çäklenmedik köplük bolsa, onda kesiji çyzygy ýa-da tekizligi geçirmek bilen, çäklenen köplügi alarys (5.4-nji surat).

Aşakdaky teoremalary subutsyz kabul edeliň

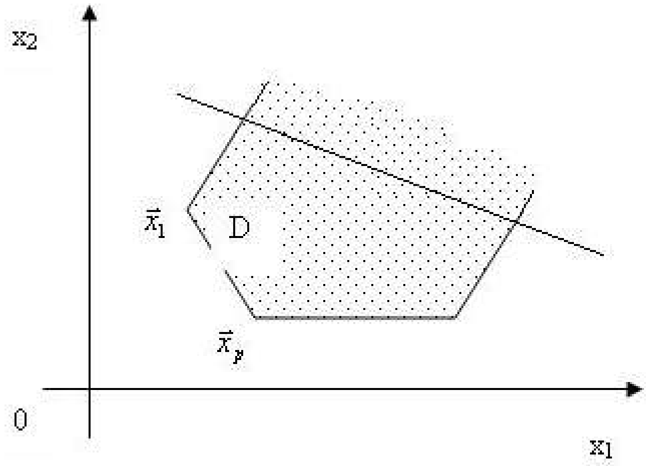
Teorema 5.3. Eger (5.2′) dargatmada $\vec{A}_1, \vec{A}_2, ..., \vec{A}_k\ (k \le n)$ wektorlar sistemasy çyzykly bagly däl we $x_j \ge 0,\ (j = \overline{1,n})$ giňişlikde $\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + ... + \vec{A}_k x_k = \vec{A}_0$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0) \tag{5.7}$$

nokat çözüwler köpgranlygynyň burç nokadydyr.

Teorema 5.4. Eger $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$-çözüwler köpgranlygynyň burç nokady bolsa, onda (5.2′) dargatmadaky položitel x_j-lere degişli wektorlar çyzykly bagly däldirler.

Eger (5.2) çäklendirmeler sistemasy, meselem, dört näbelliden we iki deňlemeden ybarat bolsa, onda iki sany näbellä erkin bahalary berip, galanlaryny bulara görä çözüp, çözüw (ýol berilýän bolmazlygy hem mümkin) almak bolar. Erkin näbellilere nol baha berilýän çözüwler aýratyn gyzyklydyr. Eger şeýle çözüw ýeke-täk bolsa, onda oňa *bazis çözüwi* diýilýär. Onuň üstesine, ýol berilýän çözüw hem bolsa, onda oňa *ýol berilýän bazis çözüwi* diýilýär.



5.4-nji surat

n-näbellili, *k*-çäklendirmeli *(k<n) ÇP*-niň umumy meselesi üçin bazis çözüwler (5.7) görnüsde alynýar, ýagny sistemanyň *k* deňlemeleri galan *n-k* näbellilere görä çözülýär, *n-k* näbellilere nol baha berilýär hem-de bu deňlemeleriň ýeke-täk çözüwi bar hasap edilýär. Bahalary nola deňlenen üýtgeýänlere *bazis däl*, galanlaryna bolsa *bazis üýtgeýänler* diýilýär.

5.2. Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesi we ony çözmegiň usullary

5.2.1. Başlangyç maglumatlar

Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesi(ÇPUM) aşakdaky ỳaly formulirlenỳär:

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (5.8)$$

maksat funksiỳasynyň maksimal (minimal) bahasyny:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n * b_1 \\ ---------------- \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n * b_k \end{cases} \qquad (5.9)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; ......x_n \geq 0 \qquad (5.10)$$

şertlerde tapmaly.

Bu ỳerde · simwol ≤, ≥, = simwollaryň biridir. Başgaça, gysga görnüşinde aşakdaky ỳaly ỳazylỳar.

$$\max(\min) \qquad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i \qquad (i = \overline{1,k})$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

(5.8) meseläniň *maksat funksiỳasy* bolmak bilen, önümçiligiň girdejisini-peýdasyny aňladýan bolsa-onuň maksimal bahasy, çykdajyny-harajatlary aňladýan bolsa-onuň minimal bahasy gözlenýär. (5.9.)-(5.10) şertlere bolsa meseläniň *çäklendirmeleri* diỳilỳär.

Eger (5.8)-(5.10) meselede (5.9) çäklendirme diňe deňlik görnüşinde bolsa, onda (5.8)-(5.10) meselä *kanonik ỳa-da ỳönekeỳ mesele* diỳilỳär.

Käbir ỳagdaỳlarda, bu meselede (5.9) çäklendirmeler (≤) ỳa-da (≥) deňsizlikler görnüşinde berilỳär, şeỳle meselä *standart mesele* diỳilỳär.

Eger-de (5.9) çäklendirmeler sistemasy deňligi we deňsizligi bilelikde saklaỳan bolsa, onda ol meselä *çyzykly programmirlemegiň umumy meselesi (ÇPUM)* diỳilỳär.

(5.8)-(5.10) çäklendirmeleri kanagatlandyrỳan $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ üỳtgeỳänleriň islendik toplumyna-wektora meseläniň *ýolbererlik çözüwi* diỳilỳär.

Çäklendirmeleri kanagatlandyrỳan we maksat funksiỳasyny maksimal (minimal) baha getirỳän $\vec{x}^* = (x^*{}_1, x^*{}_2, ..., x^*{}_n)$ wektor-çözüwe bolsa-meseläniň *optimal çözüwi* diỳilỳär.

Cig mallary ulanmak meselesine degişli anyk meseläniň matematiki modeliniň gurlyşyna seredeliň.

Mesele. Tikinçilik sehinde *840 m* mata bar bolup, ondan halatlar we halatçalar taýýarlanýar. 1 halat üçin *4m, 1* halatça üçin *3m* mata sarp edilýär. Eger 1 halat satylyp görülýän girdeji 6 manat, halatçadan 3 manat bolsa, onda ýokarky şertlerde maksimal (iň ýokary) girdejini görmek üçin, jemi näçe halat we halatça tikmeli?

Buýurmalara görä, halatlaryň sany 150-den, halatçalaryň sany bolsa 200-den geçmeli däldir. Meseläniň matematiki modelini gurmaly.

Gurluşy. Şertlerden görnüşi ỳaly, öndürilmeli halatlaryň we halatçalaryň gözlenýän mukdarlaryny üỳtgeỳän ululyklar hökmünde almalydyr. Goý, x_1-halatlaryň sany; x_2-halatçalaryň sany bolsun. Diýmek, gözlenýän çözüw $\vec{x} = (x_1, x_2)$ görnüşinde bolar. Bu üýtgeýänleriň baglanyşyklaryny, ýagny esasy çäklendirmeleri guralyň. Onuň üçin berlen meseläniň şertini ýene bir gezek öwrenmek zerurdyr.

Eger 1 halada *4m* mata, 1 halatça bolsa *3m* mata gidýän bolsa, onda $4x_1 + 3x_2 \leq 840$ deňsizligi düzeris.

Buýurmalara görä: $x_1 \leq 150$; $x_2 \leq 200$. x_1 we x_2 önümleriň sanyny aňladýandyklary üçin otrisatel dällik şertini kanagatlandyrýarlar. Onda meseläniň matematiki modeli şeýle görnüşinde bolar:

$$\max\ Z(x) = 6x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 840 \\ \quad x_1 \leq 150 \\ \quad x_2 \leq 200 \end{cases} \qquad \text{(M1)}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \, .$$

5.2.2. Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesini grafiki usulda çözmek

ÇPUM-y grafiki usulda çözmeklik ÇP meseleleriniň geometriki manysyna esaslanan bolup, esasan, ikiölçegli (iki näbellili) tekizlik meselelerini çözmekde üstünlikli ulanylýar. Üçölçegli giňişligiň, diňe, käbir meselelerini grafiki çözmek başardýar, sebäbi, ýarymgiňişlikleriň kesişip emele getirýän köpgranlygyny-çözüwleriň ýol berilýän köplügini takyk gurmak örän kyndyr ýa-da mümkin däldir. Üçden uly ölçegli giňişlik meselelerini çözmek, haçan-da, çäklendirmeler sistemasy deňlemeler görnüşinde bolup, umuman, $n-k=2$ deňlik ýerine ýetende mümkindir, bu ýerde: n-näbellileriň; k-deňlemeleriň sany. Bu ýagdaýda, meseläniň $x_1, x_2, \ldots, x_k$-näbellileri x_{n-1}, x_n (ýa-da x_{k+1}, x_{k+2}) erkin näbellileriň üsti bilen aňladylyp, iki ölçegli ÇPUM-a getirilýär. Mesele çözülüp, x_{n-1}^*, x_n^* – optimal bahalar tapylýar hem-de degişli baglanyşyklar boýunça, beýleki üýtgeýänleriň optimal bahalary kesgitlenýär.

Iki ölçegli ÇPUM-a seredeliň:

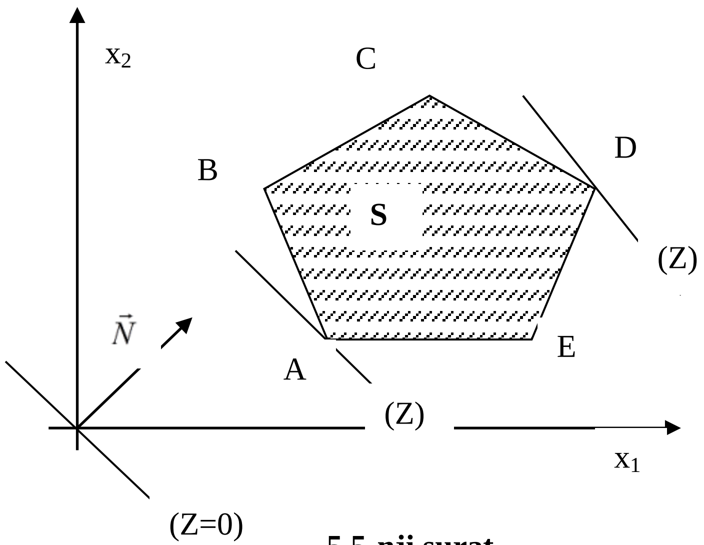
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{5.11}$$

funksiýanyň maksimal (minimal) bahasyny:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ ---------- \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k \end{cases} \tag{5.12}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{5.13}$$

Goý, bu sistemanyň çözüwi bar we çözüw köpburçlygy çäklendirilen diýeliň. Bu çözüw köpburçlugyny we çyzykly funksiýanyň grafigini guralyň (5.5-nji surat).



5.5-nji surat

Bu ýerde, ýokarda belleşimiz ýaly, (5.12) çäklendirmeleriň deňsizlikleriniň her biri, otrisatel däl çärýekde:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \qquad (i = \overline{1,k})$

göni çyzyk bilen çäklenen ýarymtekizlikleri kesgitleýär.

(5.11)-çyzykly funksiýa $Z=const$ bahalarda

$$c_1x_1+c_2x_2=const \qquad (5.14)$$

göni çyzygyň deňlemesidir. Onda ÇPUM-a şeýle many bermek bolar: S çözüwler köplüginde (5.14)-daýanç gönüsi bolýan hem-de (5.11) funksiýasy maksimal ýa-da minimal baha eýe bolýan optimum nokady gözlemeli. Bilşimiz ýaly, maksat funksiýasy özüniň optimal (maksimal ýa-da minimal) bahasyna çözüwler köpburçlugynyň (köpgranlygynyň) depelerinde ýetýär. Onda köpburçlugyň A,B,C,D,E-nokatlarynyň koordinatalaryny tapyp hem-de şol nokatlarda (5.11) funksiýanyň $Z(A)$, $Z(B)$, $Z(C)$, $Z(D)$, $Z(E)$ bahalaryny hasaplap, ol bahalaryn arasyndan iň ulusyny ýa-da iň kiçisini kesgitlemek ýeterlikdir. Emma depe nokatlary köp sanly ýa-da çözüwler köplügi çäklenmedik ýagdaýlarynda bu usul amatsyzdyr.

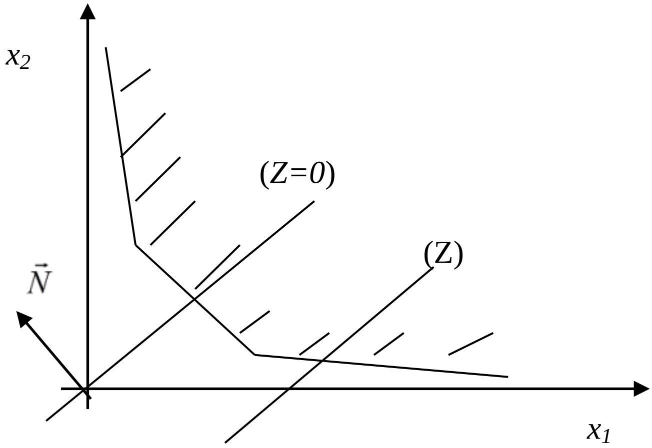
(5.11) funksiýanyň bahalary

$$\vec{N}=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1};\qquad \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)=(c_1;c_2)$$

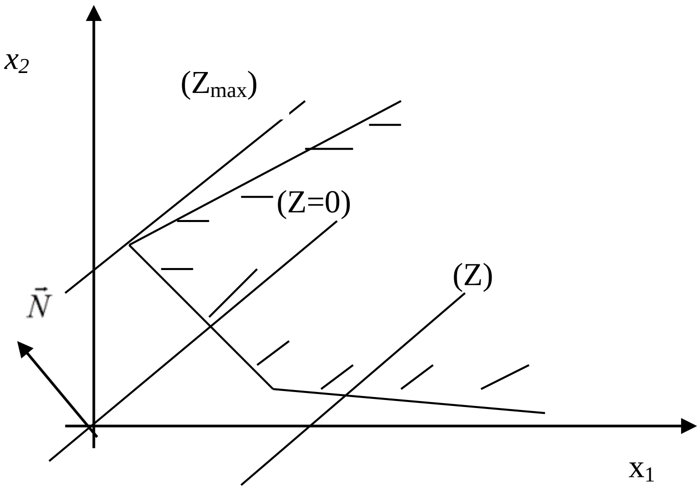
normal wektoryň ugruna artýar, şol sebäpli $Z=0$ göni çyzygy özüne parallel ($\vec{N}$ wektoryna perpendikulýar) ýagdaýda $\vec{N}$ wektoryň ugruna süýşüreliň. 5.5-nji suratdan görnüşi ýaly, (5.14)-göni çyzyklar A we D nokatlarda çözüwler ýaýlasyna daýanç gönüsi bolýar, şeýlelikde, $Zmin=Z(A)$, $Zmax=Z(D)$. Onda, diňe, A ýa-da D nokatlaryň koordinatalaryny hasaplap, maksat funksiýasynyň degişli bahasyny kesgitlemek ýeterlikdir (meselem, A nokadyň koordinatyny tapmak üçin AB we AE göni çyzyklaryň denlemeleriniň sistemasy çözülýär).

Eger çözüwler köpburçlugy çäklenmedik köpburçly ýaýla bolsa, onda iki ýagdaýyň bolmagy mümkin.

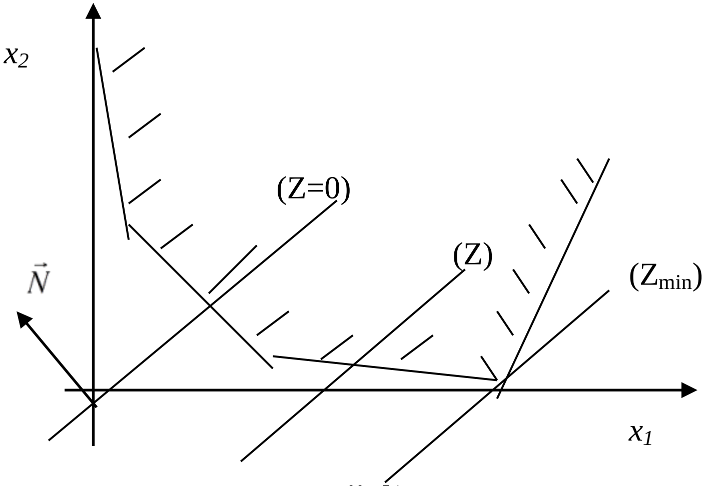
1 –nji ýagdaý. (5.14) göni $\vec{N}$ wektoryň ugruna ýa-da garşysyna süýşürilende, hemişe, çözüwler ýaýlasyny oňa daýanç bolman kesýär (5.6-njy surat). Bu ýagdaýda, (5.11) funksiýa çözüwler ýaýlasynda ýokardan hem-de aşakdan çäklenmedikdir.



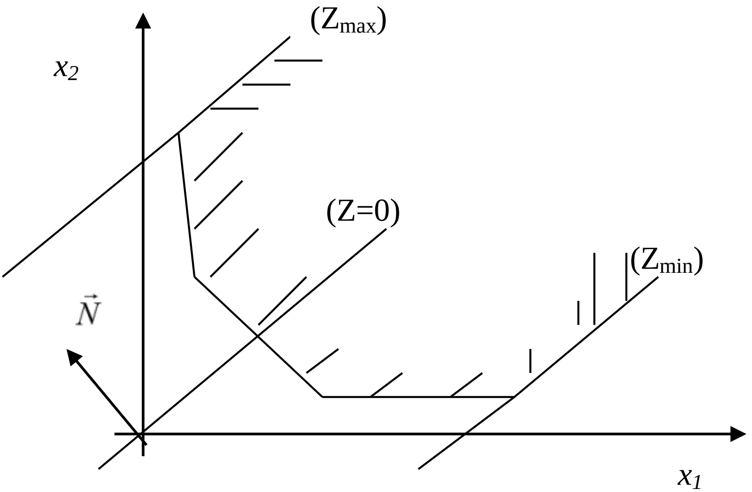
5.6-njy surat



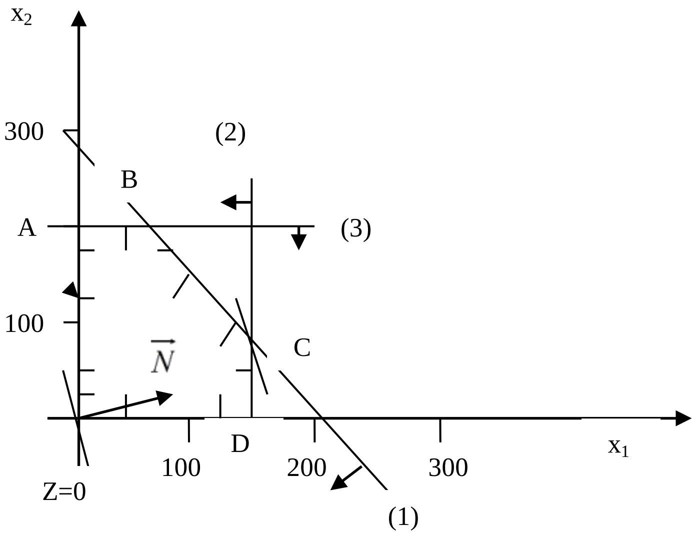
5.7-nji *a*) surat



5.7-nji *b*) surat



5.7-nji *ç*) surat



5.8–nji surat

2-nji ýagdaý. (5.14) göni süýşüp, her niçik-de bolsa, çözüwler ýaýlasyna görä daýanç gönisi bolýar (5.7-nji surat). Onda çözüwler ýaýlasynyň görnüşine baglylykda çyzykly funksiýa, diňe ýokardan çäklenen (5.7-nji *a* surat), diňe aşakdan çäklenen (5.7-nji *b* surat), ýa-da ýokardan hem aşakdan çäklenen (5.7-nji *ç* surat) bolup biler.

Grafiki usuly ulanyp, çig mallary tygşytly ulanmak meselesine, hususan-da (*M1*) meselesine seredeliň.

$$\max\ Z(x) = 6x_1 + 3x_2 \qquad (M1)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 840 & (1) \\ x_1 \le 150 & (2) \\ x_2 \le 200 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \qquad (4)$$

Ilki bilen ýol berilýän çözüwler ýaýlasyny guralyň. (4) deňsizlikler $x_1 0 x_2$ koordinat tekizliginiň otrisatel däl çärýegini kesgitleýär. (1) deňsizligiň aňladýan ýarym tekizligini şekillendirmek üçin $4x_1+3x_2=840$ çäk göni çyzygyny aşakdaky tablisany ulanyp guralyň (5.8-nji surat).

$4x_1+3x_2=840$

(1)	x_1	0	210
	x_2	280	0

Şundan soň, ýarym tekizligiň bu göni çyzygyň haýsy tarapynda ýatýandygyny kesgitlemek üçin O(0;0) nokadyň koordinatyny (1) deňsizlikde goýalyň. Eger bu nokadyň koordinaty deňsizligi kanagatlandyrsa, onda göni çyzygyň bu nokady saklaýan ýarym tekizligi (1) deňsizligiň grafigi bolar. Dogrudan hem, $0 \le 840$ çyn deňsizligi-pikir aýtmany aldyk.

Bu göni çyzygyň degişli tarapy görkezgiç arkaly şekillendirilendir. (2), (3) deňsizlikleriň grafiklerini hem gurup, olaryň kesişmesini-ýol berilýän çözüwler köplügini, ýagny *OABCD*-bäşburçlugyny alarys.

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (c_1; c_2) = (6;3)$$

normal wektoryny guralyň. *Z=0* göni çyzyk oňa perpendikulýardyr.

Bu göni çyzygy-maksat funksiýasynyň grafigini $\vec{N}$ wektoryň ugruna öz-özüne parallellikde süýsürşek, onda onuň bahasy artyp, *C* nokatda ahyrky maksimal bahasyna eýe bolar. *C* nokat (1) we (2) ýarymtekizlikleriň çäkleriniň kesişmesidir. Onda: $4x_1+3x_2=840$ we $x_1=150$ deňlemeler sistemasyny çözüp, ekstremum C nokadynyň koordinatyny-optimal çözüwi alarys: $C(x_1^*, x_2^*) = C(150;80)$. $x_1^* = 150;\ x_2^* = 80$ optimal çözüwde *Z* funksiýasynyň maksimal bahasy şeýledir:

$$Z_{\max} = Z(C) = 6x_1^* + 3x_2^* = 6 \cdot 150 + 3 \cdot 80 = 900 + 240 = 1140 .$$

Näbellileriň sany üçden köp, çäklendirmeler deňlemeler görnüşinde hem-de *n-k=2* şert ýerine ýetýän meseläni grafiki çözeliň.

Mesele.

$$\min\ Z(x) = x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 10$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Goý, x_1 we x_2 üýtgeýänler erkin bolsunlar. Galan üýtgeýänleri bularyň üsti bilen aňladalyň:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 - 5 \\ x_4 = -x_1 - 2x_2 + 10 \\ x_5 = x_1 + 5x_2 - 15 \end{cases} \qquad (5.15)$$

$Z(x)=x_1+3x_2+(x_1+x_2-5)+(-x_1-2x_2+10)+(x_1+5x_2-15)+10=2x_1+x_2$

Onda x_3, x_4 we x_5 üýtgeýänlerin otrisatel dällik şertlerini ulanyp, ikiölçegli giňişligiň täze meselesine geleris:

$$\min\ Z(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \geq 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 10 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 - 15 \geq 0 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \ \text{ ýa-da}$$

$$\min\ Z(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 & (2) \\ x_1 + 5x_2 \geq 15 & (3) \end{cases} \qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Ýol berilýän çözüwler köpburçlugynyň çäk gönülerini gurmak üçin degişli tablisalary peýdalanarys:

Grafikden görnüşi ýaly (5.9-njy surat), optimum nokat ABC üçburçlugynyň B depesidir. Onda $B(x_1^*, x_2^*) = B(0;5)$ bolup, maksat funksiýasynyň minimal bahasy şeýledir:

$$min\ Z(x)=Z(B)=2\cdot 0+5=5;$$

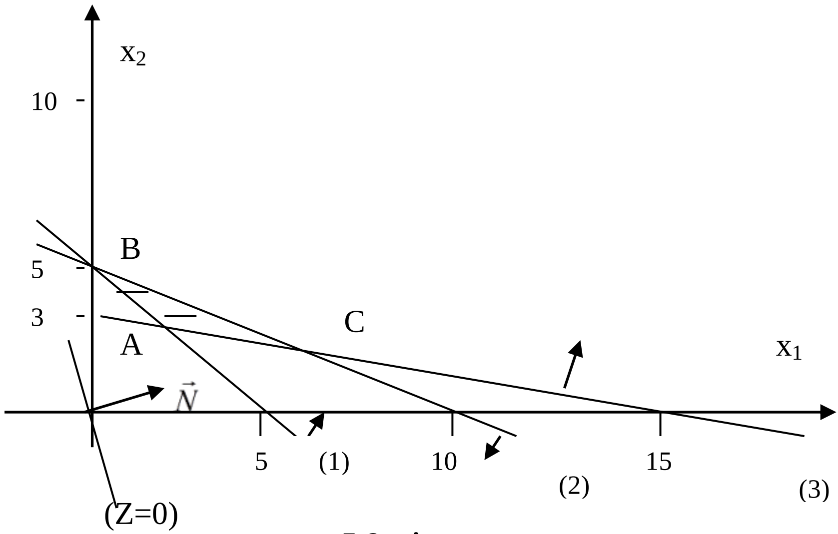
$x_1+x_2=5$ $\qquad$ $x_1+2x_2=10$ $\qquad$ $x_1+5x_2=15.$

Meseläniň beýleki üýtgeýänleriniň optimal bahalary (5.15) deňlemelerden kesgitlener:

x_1	x_2
0	5
5	0

x_1	x_2
0	5
10	0

x_1	x_2
0	3
15	0



5.9-njy surat

$$\begin{cases} x_3^* = x_1^* + x_2^* - 5 = 0 + 5 - 5 = 0 \\ x_4^* = -x_1^* - 2x_2^* + 10 = -0 - 2*5 + 10 = 0 \\ x_5^* = x_1^* + 5x_2^* - 15 = 0 + 5*5 - 15 = 10 \end{cases}$$

Diýmek, optimal çözuw şeýle görnüşdedir:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0; 5; 0; 0; 10).$$

5.2.3. Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesiniň çözülişiniň simpleks usuly

Simpleks usul birnäçe özara baglanyşykly çyzykly deňlemeleriň we deňsizlikleriň optimal çözüwini almaklyga mümkimçilik berýär. Bu usulyň kömegi bilen çyzykly funksiýanyň maksimal ýa-da minimal bahasyna degişli bolan ýeke täk çözüwi saýlamak mümkin.

Simpleks usulyň algoritmini (*M1*) meseläniň şertinde seredeliň.

$$\max\ Z(x) = 6x_1 + 3x_2 \qquad (M1)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 840 \\ x_1 \le 150 \\ x_2 \le 200 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Çözülişi. Meseläni simpleks usuly bilen çözmek üçin deňsizlikler sistemasyny deňgüýçli deňlemeler sistemasyna öwürmelidir. Onda $x_i \ge 0,\ i = \overline{3,5}$ goşmaça näbellileri girizmek arkaly şeýle meselä geleris:

$$max\ Z(x)=6\cdot x_1+3\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 840 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 150 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 200 \end{cases} \qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}$$

Maksat funksiýasyny $Z(x)-6\cdot x_1-3\cdot x_2-0\cdot x_3-0\cdot x_4-0\cdot x_5=0$ görnüşde ýazyp, aşakdaky simpleks tablisany dolduralyň (5.3-nji tablisa).

Maksat funksiýasynyň maksimal bahasynyň gözlenýändigi üçin, iň soňky setirden otrisatel koeffisiýentler bellenýär, olar (–6) we (-3) bahalardyr.(Eger maksat funksiýasynyň minimal bahasy gözlenýän bolsa, *Z*-setirden položitel koeffisiýentler bellenýär).

|-6| > |-3| bolany üçin (-6) –ny alalyň. Bu baha degişli x_1 sütün- *çözüji sütün* bolar. Çözüji sütüne degişli položitel: 4 we 1 koeffisiýentler boýunça:

$$\min\left\{\frac{840}{4};\quad \frac{150}{1}\right\} = \frac{150}{1} = 150$$

Başlangyç simpleks tablisa (0-njy iterasiýa). **5.3-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Erkin agza*	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	840	4	3	1	0	0
$x_4 \rightarrow$	150	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	1	0
x_5	200	0	1	0	0	1
Z	0	-6	-3	0	0	0

ululygy tapyp, çözüji setiri kesgitleýäris (2-nji setir, 1-lik koeffisiýent). Diýmek, çözüji sütüniň we çözüji setiriň kesişmesindäki çözüji element 1-dir. (Eger çözüji element 1-e deň bolmasa, onda bu setiriň elementleri çözüji elemente bölünýär). Degişli setir we sütün görkezgiçler arkaly, çözüji element bolsa çarçuwada görkezilendir. Şu sütünde çözüji element **1,** galanlary 0 bolar ýaly Žordan-Gaussyň deňgüýçli öwürmelerini geçireliň. Netijede, x_4-bazis üýtgeýäniň ornuna x_1 bazis üýtgeýäni girizdik hem-de x_3, x_1 we x_5 täze bazis üýtgeýänleri bolan indiki iterasiýanyň tablisasyny (5.4-nji tablisa) aldyk.

Soňky setirde ikinji sütüne degişli (-3) koeffisiýent bar. Onda çözüji sütün x_2 bolar. Bu sütündäki položitel koeffisiýentler boýunça:

$$\min\left\{\frac{240}{3};\quad \frac{200}{1}\right\} = \frac{240}{3} = 80$$

kesgitläliň. Ol (3) element bolup, çözüji-birinji setir bolar. Çözüji element (1) bolar ýaly, bu setiriň hemme elementlerini (deňlemäniň iki tarapyny) 3-e böleliň.

Indiki simpleks tablisa (1-nji iterasiýa). **5.4-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5
$x_3 \rightarrow$	240	0	3	1	-4	0
x_1	150	$\boxed{1}$	0	0	1	0
x_5	200	0	1	0	0	1
Z	900		-3	0	6	0

Çözüji element 1, çözüji sütüniň galan elementleri 0 bolar ýaly deňgüýçli öwürmeleri geçireliň we täze x_2, x_1 we x_5 bazis boýunça 2-nji iterasiýanyň tablisasyny guralyň (5.5-nji tablisa).

Indiki simpleks tablisa (2-nji iterasiýa). **5.5-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	80	0	1	1/3	-4/3	0
x_1	150	$\boxed{1}$	0	0	1	0
x_5	120	0	0	-1/3	4/3	1
Z	1140		0	1	2	0

Soňky tablisanyň Z setirinde otrisatel koeffisiýentler ýok. Bu optimal (iň gowy) çözüwiň alnandygyny aňladýar. Optimal çözüw boýunça:

$$\max Z(x) = 1140.\ x_1^* = 150;\ x_2^* = 80;\ x_3^* = x_4^* = 0;\ x_5^* = 120$$

Şeýlelikde, ÇPUM-y simpleks usuly bilen çözmekligiň *algoritmini* birnäçe tapgyrlarda bermek bolar:

I. Çäklendirmeler sistemasynyň deňsizlikleriniň her birine bir näbellini goşmak bilen deňlemeler sistemasy alynýar.

II. Başlangyç simpleks tablisasy gurylýar (5.6-njy tablisa):

Başlangyç simpleks tablisa (0-njy iterasiýa). **5.6-njy tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+k}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	...	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	....	..	...	
x_{n+k}	b_k	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kn}	0	...	1
$Z(x)$	A	$-c_1$	$-c_2$	.	$-c_n$	0	...	0

III. Daýanç planyň optimallygyny barlamaly.

Eger simpleks-tablisanyň söňky setirinde, maksimum mesele üçin položitel element, minimum mesele üçin otrisatel element ýok bolsa, onda plan optimal plan hasap edilýär. Eger iň bolmanda bir položitel (otrisatel) element bar bolsa, onda indiki tapgyra geçilýär.

IV. Çözüji sütün aşakdaky usul bilen saýlanýar:

$C_l=max\{|c_j|\}$, $c_j<0$, *ýa-da* $C_l=max\{c_j\}$, $c_j>0$ $j=1,2,...,n.$

V. Bazisden aýyrmak üçin üýtgeýän ululygy saýlamak:

$\frac{b_i}{a_{il}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{il}}\right\}$, $a_{il} > 0$ düzgünde gözlenýär.

VI..Simpleks-tablisanyň elementleri aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýar:

$b_m'=b_m/a_{ml}$; $a'_{mj}=a_{mj}/a_{ml}$; $(j=\overline{1,n+k})$; *m-çözüji setir.*

$b'_i=b_i-b_m/a_{ml}.a_{il}$; $(i=\overline{1,n+k})$;

$a'_{ij}=a_{ij}-a_{ij}/a_{ml}.a_{il}$; $i=\overline{1,k}$; $j=\overline{1,n+k}$.

VII. Nobatdaky iterasiýanyň tablisasy doldurylýar we 3-nji tapgyra geçilýär.

5.2.4. Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesiniň çözülişiniň emeli bazis usuly

Çyzykly programmirlemegiň kanonik-ýönekeý meselesine seredeliň:

$$\min \qquad Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=\overline{1,k}) \qquad\qquad (*)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=\overline{1,n}),$$

Bu ỳerde $b_i \geq 0$.

Başlangyç bazis çözüwi almak üçin (*) deňlemeleriň her birine $y_i \geq 0$, $i=\overline{1,k}$ emeli bazis näbellilerini goşalyň hem-de

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i\ ,\ x_j \geq 0,\ y_i \geq 0 \qquad (i=\overline{1,k};\ j=\overline{1,n})$$

şertlerde:

$$\min \quad F(y)=\sum_{i=1}^{k} y_i \quad we \quad \min \quad Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

meselesini çözeliň. Bu meseläni çözmek üçin şeýle görnüşdäki başlangyç simpleks tablisasy doldurylýar (5.7-nji tablisa).

Hasaplamalar F setiriň položitel elementiniň çözüji sütünini saýlamakdan başlanýar. Çözüji setiri saýlamak we simpleks tablisany hasaplamak adaty görnüşde geçirilýär. Şeýle iterasion prosesler daýanç plany alynýança dowam etdirilýär. Netijede, F setiriň ähli elementleri nula deň bolup, bu setir tablisadan öçürilýär. Soňra meseläni çözmek-adaty simpleks usulynda, Z-setiriň maglumatlary boýunça dowam etdirilýär.

Başlangyç simpleks tablisa (0-njy iterasiýa). **5.7-nji tablisa**

Bazis üỳtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_1 y_2 … y_k	b_1 b_2 … b_k	a_{11} a_{21} … a_{k1}	a_{12} a_{22} … a_{k2}	a_{13} a_{23} … a_{k3}	… … … …	a_{1n} a_{2n} … a_{kn}
F	$\sum_i b_i$	$\sum_i a_{i1}$	$\sum_i a_{i2}$	$\sum_i a_{i3}$	…	$\sum_i a_{in}$
Z	*0*	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	…	$-c_n$

Mysal.

$$\begin{cases} x_1+0{,}5x_2+0{,}2x_3+0{,}3x_4 \ge 0{,}2, \\ 9x_1+5x_2+2{,}1x_3+0{,}9x_4 \ge 1{,}3, \\ x_1 \ge 0{,}08, \\ x_j \ge 0, \quad (j=1,2,3,4) \end{cases} \tag{5.16}$$

şertlerde $\min \; Z(x)=5{,}2x_1+1{,}4x_2+0{,}5x_3+0{,}6x_4$ bahany tapmaly.

Çözülişi. (5.16) deňsizlikler sistemasyny deňlemeler sistemasyna öwrüp, ÇP-niň kanonik meselesini alarys:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 - x_5 = 0{,}2, \\ 9x_1 + 5x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 - x_6 = 1{,}3, \\ x_1 - x_7 = 0{,}08, \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1{,}2{,}3) \end{cases}$$

şertlerde:

$$\min\ Z(x) = 5{,}2 \cdot x_1 + 1{,}4 \cdot x_2 + 0{,}5 \cdot x_3 + 0{,}6 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7$$

bahany tapmaly.

Täze kömekçi *(y_1, y_2, y_3)* häbellileri girizeliň hem-de:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 - x_5 + y_1 = 0{,}2, \\ 9x_1 + 5x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 - x_6 + y_2 = 1{,}3, \\ x_1 - x_7 + y_3 = 0{,}08, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\ ,\ \ y_i \geq 0,\ \ j = \overline{1{,}7};\ \ i = \overline{1{,}3}$$

şertlerde:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$

$$Z = 5{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}6x_4 \rightarrow \min$$

bahalary tapmak meselesini çözeliň. Onuň üçin, 5.7-nji tablisa laýyklykda 0-njy iterasiýanyň tablisasyny dolduralyň (5.8-nji tablisa).

Simpleks usulyň düzgünlerine görä, F setiriň iň uly položitel koeffisiýenti boýunça çözüji sütüni, soňra, çözüji setiri kesgitläliň. Çözüji element 1-e deňdir. Onda y_3 bazis üýtgeýäni x_1-bazis üýtgeýäne çalyşmagyň simpleks öwürmelerini geçirip, 5.9 –njy tablisany alarys. Hasaplamalary şeýle dowam etdirip, 5.10-njy we 5.11-nji tablisalary hem gurarys. Her gezekde çözüji elementler çarçuwada görkezilendir.

Başlangyç simpleks tablisa (0-njy iterasiýa). **5.8-nji tablisa**

Bazis üỳtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_1 y_2 y_3	0.2 1.3 0.08	1 9 $\boxed{1}$	0.5 5 0	0.2 2.1 0	0.3 0.9 0	-1 0 0	0 -1 0	0 0 -1
F	1.58	11	5.5	2.3	1.2	-1	-1	-1
Z	0	- 5.24	-1.4	-0.5	-0.6	0	0	0

5.11-nji simpleks tablisadaky F setirde diňe nul koeffisiýentler galdy. Diýmek, bize F funksiýanyň minimumyny tapmak başartdy we bu planda onuň bahasy nola deňdir. Bu setiri tablisadan aýryp, alnan daýanç plany hem-de Z funksiýasy boýunça simpleks öwürmeleri dowam etdireliň.

Indiki simpleks tablisa (1-nji iterasiýa). **5.9-njy tablisa**

Bazis üỳtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_1 y_2 x_1	0.1 0.6 0.08	0 0 1	0.5 5 0	0.2 2.1 0	0.3 0.9 0	-1 0 0	0 -1 0	1 $\boxed{9}$ -1
F	0.7	0	5.5	2.3	1.2	-1	-1	10
Z	0.4	0	-1.4	-0.5	-0.6	0	0	-5.2

Indiki simpleks tablisa (2-nji iterasiýa). **5.10-njy tablisa**

Bazis üỳtgeýän	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_1 x_7 x_1	0.03 0.067 0.15	0 0 1	- 0.06 0.56 0.56	- 0.03 0.23 0.23	$\boxed{0.2}$ 0.1 0.1	-1 0 0	0.1 -0.1 -0.1	0 1 0
F	0.03	0	- 0.06	- 0.03	0.2	-1	0.1	0
Z	0.55	0	15	0.7	-0.1	0	0	0

Indiki simpleks tablisa (3-nji iterasiýa). **5.11-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	Erkin agza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4 x_7 x_1	0.15 0.08 0.17	0 0 1	-0.5 0.59 0.59	0.15 0.23 0.23	$\boxed{1}$ 0 0	-5 0.5 0.5	0 -0.1 -0.1	0 1 0
F	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	0.57	0	1.47	0.6	0	-0.5	-4.7	0

Z setiriň položitel koeffisiýentleri boýunsa x_2 çözüji sütün, x_7 çözüji setir, çözüji element bolsa 0.59 deň bolar. Indiki simpleks tablisany guralyň (5.12-nji tablisa).

Indiki simpleks tablisa (4-nji iterasiýa). **5.12-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	Erkin agza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4 x_2 x_1	0,2 0,13 0,09	0 0 1	0 1 0	0.2 7 0,4	1 0 0	-5,2 0,8 0	0,4 -0,3 3	0,5 1,6 -1
Z	0,37	0	0	0	0	-1,7	-4,4	-2,4

Soňky tablisanyň Z setirinde položitel koeffisiýentleriň ýoklugy-alnan planyň optimaldygyny aňladýar:

$$x_1^* = 0{,}09;\ x_2^* = 0{,}13;\ x_3^* = 0;\ x_4^* = 0{,}2;\ Z_{\min} = 0{,}37$$

5.2.5. Çyzykly programmirlemegiň goşalaýyn meseleleri

Çyzykly programmirlemegiň iki meselesine serediň.

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \min\ Z = \sum_{i=1}^{k} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (*) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{k} a_{ij} y_i \ge c_j \qquad (**)$$

$$x_j \ge 0\ (i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n}) \qquad\qquad y_i \ge 0\ (i = \overline{1,k};\ j = \overline{1,n})$$

Bu meseleler aşakdaky häsiýetlere eýedir:

Eger (*) mesele çyzykly funksiýanyň maksimumyny tapmaklyga goýulan bolsa, onda (**)-minimum tapmaklyga niýetlenendir.

(*) meseläniň maksat funksiýasynyň koeffisiýentleri (**) meseläniň çäklendirmeler sistemasynyň erkin agzalarydyr.

(*) meseläniň çäklendirmeler sistemasynyň erkin agzalary (**) meseläniň maksat funksiýasynyň koeffisiýentleridir.

Çäklendirmeler sistemalaryndaky koeffisiýentler berlen iki meseläniň biri birine görä transponirlenen matrisalaryny düzýärler.

Bir meseläniň çäklendirmeler sistemasyndaky deňsizlikleriniň sany-beýleki meseledäki näbellileriň sany bilen gabat gelýär.

Şeýle meselelere *özara goşalaýyn ýa-da taýdaş, ýa-da çatyrymlaýyn meseleler* diýilýär. (*) göni, (**)-a bolsa-çatyrymlaýyn mesele diýmek bolar we tersine.

Özara goşalaýyn meseleleriň çözüwleriniň arasynda bar bolan baglanyşyklar aşakdaky lemma we iki sany teoremalar bilen häsietlendirilýär.

1-nji lemma. Eger (*) we (**) meseleleriň käbir $\overrightarrow{x^*}$ we $\overrightarrow{y^*}$ planlary üçin F ($\overrightarrow{x^*}$)=Z($\overrightarrow{y^*}$) bolsa, onda $\overrightarrow{x^*}$ -(*) meseläniň we $\overrightarrow{y^*}$ -bolsa (**) meseläniň optimal planlarydyr.

1-nji teorema. Eger (*) we (**) özara goşalaýyn meseleleriň biriniň optimal plany bar bolsa, onda *max F=min Z.*

Eger özara goşalaýyn meseleleriň biriniň maksat funksiýasy çäklenmedik bolsa, onda beýleki meseläniň hiç hili çözüwi ýokdur.

2-nji teorema. (*)-meseläniň $\overrightarrow{x^*}=(x^{\cdot}_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$, (**) meseläniň $\overrightarrow{y^*}=(y^*_1, y^*_2, \dots, y^*_n)$ çözüwleriniň optimal bolmaklary üçin aşakdaky şertleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i^* - c_j\right)\cdot x_j^* = 0,\ j = 1,2,\dots,n;$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* - b_i\right)\cdot y_i^* = 0,\ i = 1,2,\dots,k.$$

Eger B^{-1} matrisa (*) meseläniň optimal planynyň bazisiniň wektorlaryndan duran B matrisanyň ters matrisasy bolsa we C-bazis üýtgeýänleriň bahalar wektory bolsa, onda goşalaýyn meseläniň optimal plany $\overline{Y} = \overline{C} \cdot B^{-1}$ deňdir.

Ö*zara goşalaýyn ýa-da çatyrymlaýyn meseleleriň* matematiki modelleri aşakdaky görnüşleriň birinde bolup biler (5.13-nji tablisa).

Özara goşalaýyn meseleleriň görnüşleri. **5.13-nji tablisa**

Başlangyç mesele	*Goşalaýyn meselesi*
max F=CX *AX≤B, X≥0*	*min Z=YB* *YA≥C*, Y≥0
max F=CX *AX=B, X≥0*	*min Z=YB* *YA≥C*
min F=CX *AX≥B, X≥0*	*max Z=YB* *YA≤C*, Y≥0
min F=CX *AX=B, X≥0*	*max Z=YB* *YA≤C*

Mysal. *Başlangyç mesele:*

$Z=12x_1+10x_2$ maksat funksiýasynyň

$$\begin{cases} 13x_1 + 12x_2 \le 260 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 124 \\ 3x_1 + 14x_2 \le 280 \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

şertlerde maksimumyny tapmaly.

Goşalaýyn meselesi:

$$F=260y_1+124y_2+280y_2$$

maksat funksiýasynyň:

$$\begin{cases} 13y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 12 \\ 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \ge 10 \end{cases} \quad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$$

şertlerde minimumyny tapmaly.

Çözülişi. Başlangyç meseläni simpleks usul bilen çözeliň:

Başlangyç tablisa (0-njy iterasiýa). **5.14-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	*260*	*13*	*12*	*1*	*0*	*0*
x_4	*124*	*4*	*4*	*0*	*1*	*0*
x_5	*280*	*3*	*14*	*0*	*0*	*1*
Z	*0*	*-12*	*-10*	*0*	*0*	*0*

Başlangyç tablisa (1-nji iterasiýa). **5.15-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	*20*	*1*	*0.92*	*0.08*	*0*	*0*
x_4	*44*	*0*	*3.4*	*-0.3*	*1*	*0*
x_5	*20*	*0*	*13.5*	*-0.23*	*0*	*1*
Z	*240*	*0*	*-8.2*	*0*	*0*	*0*

Başlangyç tablisa (2-nji iterasiýa). **5.16-njy tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Azat agzalar*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	*18*	*1*	*0*	*0.09*	*-0.04*	*0*
x_2	*13*	*0*	*1*	*-0.09*	*0.3*	*0*
x_5	*47*	*0*	*0*	*0.22*	*-4*	*1*
Z	*346*	*0*	*0*	*0.22*	*2.4*	*0*

5.16-njy tablisada başlangyç meseläniň optimal çözüwini tapdyk:

$$\vec{x}^* = (18,13,0,0,47), \ \max Z = 346.$$

Soňky tablisany ulanmak bilen, goşalaýyn meseläniň optimal çözüwini tapalyň. Goşalaýyn meseläniň optimal çözüwi 5.16-njy tablisanyň soňky setirinde ýerleşdirilendir.

$$\vec{y}^* = (0.22;2.4;0), \qquad \min F=346.$$

5.2.6. Çyzykly programmirlemegiň ulag meselesini çözmek

5.2.6.1. Ulag meselesini goýmak we onuň matematiki modeli

Ulag meselesi-bir jynsly önümi, meselem, çagyly iberijiden (känlerden) kabul edijä (gurluşyklara) iň az harajatly daşamaklygyň planyny tapmakdyr.

Ulag meselesiniň şertini aşakdaky tablisa görnüşinde getirýärler(5.17-nji tablisa). Bu ýerde:

- ✓ *n* – iberijileriň (çeşmeleriň) sany;
- ✓ *m* – kabul edijileriň(ulanyjylaryň) sany;
- ✓ A_i (i=1,2,...,n) – iberijiniň kuwwaty - mümkinçiligi;
- ✓ B_j (j=1,2,...,m) – ulanyjynyň islegi - talaby;
- ✓ C_{ij} – bir jynsly önüm birligini *i* iberijiden *j* ulanyja ýetirmegiň harajaty;
- ✓ X_{ij} – ululyk *i* iberijiden *j* ulanyja ýetirilmeli önümiň, häzirlikçe näbelli mukdarydyr.

Ulag meselesiniň şertiniň berlişi. **5.17-nji tablisa**

***Kabul edijiler** (talaplary)* / ***Iberjiler** islegleri) (mümkinçilikleri*		*1*	*2*	...	*j*	...	*m*
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
1	A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1j} X_{1j}	...	C_{1m} X_{1m}
2	A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	....	C_{2j} X_{2j}	...	C_{2m} X_{2m}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	A_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	...	C_{ij} X_{ij}	...	C_{im} X_{im}
...	...	...	....	...	...	...	
n	A_n	C_{n1} X_{n1}	C_{n2} X_{n2}	...	C_{nj} X_{nj}	...	C_{nm} X_{nm}

Ulag meselesiniň matematiki modelini şeýle ýazyp bolar:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

çyzykly funksiýasynyň minimal bahasyny:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = A_i \qquad (i=1,2,...,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = B_j \qquad (j=1,2,...,m)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,...,n; \quad j=1,2,...,m)$$

şertlerde tapmaly.

Eger $\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{j=1}^{m} B_j$ bolsa, onda *ýapyk*, ýogsa – da, *açyk* ulag meselesiniň matematiki modeli alnar. Açyk ulag meselesini çözmek üçin, hyýaly(fiktiw) iberijini ýa-da ulanyjyny girizmek bilen, meseläni ýapyk görnüşine getirýärler.

Eger $\sum_{i=1}^{n} A_i < \sum_{j=1}^{m} B_j$ bolsa, onda kuwwaty

$A_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{i=1}^{n} A_i$ bolan A_{n+1} iberijini girizýärler, ondan ulanyjylara önüm birligini daşamagyň harajaty bolsa $C_{n+1\,j} = 0$ $(j=1,2,...,m)$ hasap edilýär.

Eger $\sum_{i=1}^{n} A_i > \sum_{j=1}^{m} B_j$ bolsa, onda kuwwaty

$B_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{j=1}^{m} B_j$ bolan B_{m+1} ulanyjy girizilip, oňa

iberijilerden ýetirilýän önüm birligini daşamagyň harajatyny $C_{i\,m+1} = 0$ $(i=1,2,..,n)$ belleýärler.

5.2.6.2. Ulag meselesiniň başlangyç-daýanç çözüwini gurmak usullary

Ulag meselesiniň optimal çözüwini tapmaklygy, onuň *başlangyç*-daýanç çözüwini gurmakdan başlaýarlar. B*aşlangyç*-daýanç çözüwini gurmaklygyň birnäçe usullary, düzgünleri bar bolup, olaryň käbirlerine mysallarda seredeliň.

“***Demirgazyk – günbatar burçy***” düzgüni. Goý, meseläniň şerti tablisada berilsin (5.18-nji tablisa).

Tablisany doldurmak çepki – ýokarky burçdan başlanýar:

$X_{11} = \min\{A_1, B_1\} = \min\{100,75\} = 75;$ $X_{21} = X_{31} = 0.$

$X_{12} = \min\{100 – 75;80\} = \min\{25;80\} = 25;$ $X_{13} = X_{14} = 0$

$X_{22} = \min\{150; 80 – 25\} = \min\{150;55\} = 55;$ $X_{32} = 0$

Anyk ulag meselesiniň şerti. **5.18-nji tablisa**

j		*1*	*2*	*3*	*4*
i	B_j / A_i	*75*	*80*	*60*	*85*
1	*100*	^{6}	^{7}	^{3}	^{5}
2	*150*	^{1}	^{2}	^{5}	^{6}
3	*50*	^{8}	^{10}	^{20}	^{1}

$X_{23} = \min\{150 – 55; 60\} = \min\{95;60\} = 60;$ $X_{33} = 0$

$X_{24} = \min\{150 – (55+60), 85\} = \min\{35,85\} = 35;$

$X_{34} = \min\{50;85 – 35\} = \min\{50;50\} = 50.$

Çörşümiz ýaly, *başlangyç*–daýanç çözüwini gurduk (5.19-njy tablisa).

Başlangyç–daýanç çözüwini **5.19-njy tablisa**
“Demirgazyk – günbatar burçy” düzgüni boýunça gurmak

j		*1*	*2*	*3*	*4*
i	B_j / A_i	*75*	*80*	*60*	*85*
1	*100*	*75* ^{6}	*25* ^{7}	– ^{3}	– ^{5}
2	*150*	– ^{1}	*55* ^{2}	*60* ^{5}	*35* ^{6}
3	*50*	– ^{8}	– ^{10}	– ^{20}	*50* ^{1}

Bu ýerde tablisanyň eýelenen gözenekleriniň sany 6 – a deňdir we $m+n$ sandan 1 birlik azdyr ($6=m+n-1$). Şeýle çözüwe *heňe gelýän* (*gowy*) (gaýtalanmalary bolmadyk) *çözüw* diýýärler.

Bu plan boýunça umumy çykdaýjylary hasaplalyň:

$Z = 6 \cdot 75 + 7 \cdot 25 + 2 \cdot 55 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 35 + 1 \cdot 50 =$

$= 450+175+110+300+210+50 = 1295$ (man).

b)“***Minimal bahalar***” usuly. Öňki meselämize (5.18-nji tablisa) seredeliň. Tablisada önüm birligini i iberijiden j ulanyja ýetirmegiň harajaty boýunça minimal bahalary saýlalyň. Şeýle 1-e deň bahalar (A_2, B_1) we (A_3, B_4) gözeneklerde ýerleşýär. Öňi bilen olary ýük bahalary bilen eýeli edeliň:.$X_{21} = min\ \{150;\ 75\} = 75;$ $X_{34} = min\ \{50;85\} = 50.$ Şundan soň, 2-ä deň bahaly *(A2, B2)* gözenegi saýlap, ony eýeläliň: $X_{22} = min\ \{150 - 75;80\} = min\ \{75;80\} = 75$

Şeýle prosesi, hemme gorlar tükenýänçä, islegler bolsa, ödelýänçä dowam edeliň (5.20-nji tablisa).

Başlangyç-daýanç çözüwini **5.20-nji tablisa**
“Minimal bahalar” düzgüni boýunça gurmak

j		*1*	*2*	*3*	*4*
i	B_j / A_i	*75*	*80*	*60*	*85*
1	*100*	^{6}	*5* ^{7}	*60* ^{3}	*35* ^{5}
2	*150*	*75* ^{1}	*75* ^{2}	^{5}	^{6}
3	*50*	^{8}	^{10}	^{20}	*50* ^{1}

Görşümiz ýaly, bu planda hem gaýtalanmalar ýokdur we eýelenen gözenekleriň sany 6-a deňdir. Diýmek, bu çözüwi hem, *heňe gelýän* (gowy) hasaplaýarys. Çözüw boýunça umumy çykdajylary hasaplalyň:

$Z=7 \cdot 5+3 \cdot 60+5 \cdot 35+1 \cdot 75+2 \cdot 75+1 \cdot 50=$

$=35+180+175+75+150+50=665$ *(man).*

Bu usulda alnan çözüw boýunça umumy çykdaýjylar, has azdyr, ýagny öňkiň ýarysyna barabardyr.

5.2.6.3. Ulag meselesini potensiýallar usulynda çözmek

Ulag meselesiniň optimal çözüwini tapmakda, esasan potensiýallar usuly ulanylyp, meseläniň daýanc çözüwi ýokardaky usullaryň birinde tapylýar we çözüwiň yzy potensiýallar usuly bilen dowam etdirilýär.

Bu ýerde α_i we β_j bilen degişlilikde, iberijiniň we ulanyjynyň potensiýallary belgilenýär. Şunlukda, potensiallar usulynda optimal çözüwiň alynmagy üçin aşakdaky şertler ýerine ýetmelidir:

Doly(eýeli) öýjükler üçin: $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$;

Boş(eýelenmedik) öýjükler üçin: $\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}$.

Şu şertler doly ýerine ýetende ***optimal çözüw*** tapylýar.

Aşakdaky mysalda potensiýallar usulynyň doly ulanylyşy görkezilýär(5.21-nji tablisa). Ilkinji daýanç çözüwi minimal bahalar usuly bilen tapylan. Doly öýjükleri belläliň. Olaryň sany:

n + m – 1= 3 + 4 – 1= 6

Z_1*= 180+70+320+110+100+400=1180*

Köp eýelenen setir ýa-da sütün boýunça potensiýallaryň birini erkin, meselem, $\alpha_1 = 5$ kabul edip, galanlaryny birinji şert boýunça tapalyň: $\beta_2 = C_{12} - \alpha_1 = 2 - 5 = -3;$ $\alpha_1 + \beta_2 = C_{12}$.

Potensiallar usuly boýunça 0-njy iterasiýa. **5.21-nji tablisa**

Bj / Ai	B_1 110	B_2 90	B_3 70	B_4 130	α i
A_1 200	6	2 90	1 70	8 40	5
A_2 120	1 110	3	7	10 10	7
A_3 80	5	4	2	5 80	2
β j	-6	-3	-4	3	

Galan potensiallar hem şeýle tapylar:

$\alpha_2 = 7 \quad \alpha_3 = -2 \quad \beta_1 = -6 \quad \beta_3 = -4 \quad \beta_4 = 3.$

Boş öýjükler üçin ikinji şerti ($\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}$) barlalyň:

$6 >= 5 - 6;\ 3 >= 7 - 3;\ 7 >= 7 - 4;\ 5 >= 2 - 6;\ 4 >= 2 - 3;\ 2 >= 2 - 4.$

(2,2), ýagny 3 bahaly öýjük üçin şert ýerine ýetmeýär. Şonuň üçin bu öýjügi doldurmalydyr, oňa "+" belgisini goýalyň hem-de depeleri eýelenen öýjüklerde bolan, gönüburç bilen öwrülýän ýapyk ýoly guralyň (5.22-nji tablisa).

Potensiallar usuly boýunça 1-nji iterasiýa. **5.22-nji tablisa**

Bj / Ai	B_1 110	B_2 90	B_3 70	B_4 130	αi
A_1 200	6	- 2 90	1 70	+ 8 40	5
A_2 120	1 110	3 +	7	10 10 -	7
A_3 80	5	4	2	5 80	2
βj	-6	-3	-4	3	

Ýoluň depeleri boýunça, yzygider, " – ", "+" belgilerini belläliň.

" – " belgili eýeli öýjüklerdäki ýükleriň iň kiçisini:

$\theta = \min x_{ij}^{-} = \min\{90;10\} = 10$

kesgitläp, bu tapylan baha $x_{ij}^{-} - \theta,\ \ x_{ij}^{+} + \theta$ düzgünlerde " – " belgili öýjüklerden aýrylýar, "+" belgili öýjüklere goşulýar. Netije-de, ýükleriň täze paýlanmasy boýunça nobatdaky tablisany (5.23-nji tablisa) alarys.

Täzeden potensiýallary tapalyň. $\alpha_1 = 5$-i öňküligine galdyralyň we galanlaryny täzeden kesgitläliň. Soňra ikinji şerti täzeden barlalyň:

$6 >= 5 - 5, \quad 7 >= 6 - 4, \quad 10 >= 6 + 3,$

$5 >= 2 - 5, \quad 4 >= 2 - 3, \quad 2 >= 2 - 4.$

Görşümiz ýaly, tablisa boýunça optimal çözüwi saýlamagyň iki şerti hem ýerine ýetýär. Onda bu çözüw optimal bolup,. çözüw boýunça iň az ulag çykdajylary alynýar

$Z_{opt}=Z_2$ =160 + 70 + 400 + 110 + 30 + 400 = 230 + 940 = 1170.

Potensiallar usuly boýunça 2-nji iterasiýa. **5.23-nji tablisa**

Bj / Ai	B_1 110	B_2 90	B_3 70	B_4 130	αi
A_1 200	6	2 80	1 70	8 50	5
A_2 120	1 110	3 10	7	10	6
A_3 80	5	4	2	5 80	2
βj	-5	-3	-4	3	

5.2.7. Çyzykly programmirlemegiň bitin sanly meselesi

Çyzykly programmirlemegiň bitin sanly meselesi adaty ÇP meseleden diňe üýtgeýän ululyklaryň bitin san bahalary alýanlygy bilen tapawutlanýar. Ol aşakdaky görnüşe eýedir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad \left(i=\overline{1,k}\right)$$

$x_j \geq 0$, x_j – bitin sanlar, (j=$\overline{1,n}$) çäklendirmelerde:

$$\min F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ tapmaklyk talap edilýär.

Berlen meseläni çözmek üçin aşakdaky ädimlerden ybarat algoritm ulanylýar:

✓ Bitin bahalylyk şertlerini göz öňünde tutmazdan, simpleks usul bilen meseläniň optimal plany tapylýar. Eger alnan optimal plan bitin bahaly bolsa, onda hasaplama tamamlanýar, bolmasa, ikinji ädime geçilýär;

✓ Azat agzalaryň sütüninde drob bölegi iň uly bolan sany saklaýan setir üçin aşakdaky görnüşdäki goşmaça çäklendirme düzülýär;

✓ $-q_{i1}-q_{i2}-...-q_{in} \leq -q_i$, bu ýerde: $q_i=b_i$ - $[b_i]$, $q_{ij}=a_{ij}$ - $\lfloor a_{ij} \rfloor$

(q_i,q_{ij} – položitel sanlar, $\left[a\right]$ san a sanyň bitin bölegidir).

✓ Goşmaça çäklendirmeleriň koeffisiýentleri soňky simpleks tablisa girizilýär;

✓ Goşmaça setir çözüji edilip saýlanylýar;

✓ Çözüji element goşalaýyn simpleks usulyň kadasy boýunça saýlanylýar;

✓ Adaty simpleks algoritmi ulanyp, indiki simpleks tablisa geçilýär;

✓ Eger alnan çözüw bitin sanly däl bolsa, onda ýene-de ikinji ädime geçilýär we ş.m.

Mysal.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 25 \\ 7x_1 + 2x_2 \le 15 \\ x_j \ge 0, \;\; x_j - bitin \end{cases}$$ şertlerde *max F=3*x_1+x_2 tapmaly.

Çözülişi: meseläniň goýluşynyň bitin sanlydygyny göz öňünde tutmazdan, optimal plan alynýança meseläni simpleks usul bilen çözeliň.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 25 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 15 \end{cases} \qquad x_j \ge 0, \;\; x_j - bitin\,,\; j = \overline{1,4}$$

$max\ F - 3x_1 - x_2 - 0x_3 - 0x_4 = 0$

0-njy iterasiýa. **5.24-nji tablisa**

Bazisüýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4	*25* *15*	*5* *7*	*3* *2*	*1* *0*	*0* *1*
F	*0*	*– 3*	*– 1*	*0*	*0*

1-nji iterasiýa. **5.25-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_1	*100/7* *15/7*	*0* *1*	*11/7* *2/7*	*1* *0*	*– 5/7* *1/7*
F	*45/7*		*– 3/7*	*0*	*3/7*

2-nji iterasiýa. **5.26-njy tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_2	*5/2* *15/2*	*– 11/2* *7/2*	*0* *1*	*1* *0*	*– 3/2* *1/2*
F	*15/2*	*1/2*	*0*	*0*	*0*

5.26-njy tablisada bitin sanly däl optimal plan alyndy. Azat agzalar sütüninde iň uly drob bölekli sany saklaýan setir üçin goşmaça çäklendirme düzeliň. Şu meselede $q_1=q_2$,, şonuň x_2 setir boýunça goşmaça çäklendirme guralyň. Onuň koeffisiýentleri aşakdaky ýaly hasaplanar:

$$q_2=\frac{15}{2}-\left[\frac{15}{2}\right]=\frac{1}{2};\ q_{21}=\frac{7}{2}-\left[\frac{7}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

$$q_{22}=1-[1]=0;\ q_{23}=0-[0]=0;\ q_{24}=\frac{1}{2}$$

Netijede, şeýle görnüşdäki goşmaça çäklendirmäni alarys:

$$-\frac{1}{2}x_1-0\cdot x_2-0\cdot x_3-\frac{1}{2}x_4+S_1=-\frac{1}{2}$$

Goşmaça çäklendirmeleriň koeffisiýentlerini simpleks tablisa girizeliň (5.27-nji tablisa). S_1 setiri çözüji setir edip saýlalyň, ($-\frac{1}{2}$) element bilen indiki simpleks tablisa geçmegi amala aşyralyň (5.28-nji tablisa).

3-nji iterasiýa. **5.27-nji tablisa**

Bazis üýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1
x_3 x_2 S_1	*5/2* *15/2* *– 1/2*	*– 11/2* *7/2* *– 1/2*	*0* *1* *0*	*1* *0* *0*	*– 3/2* *½* *– 1/2*	*0* *0* *1*
F	*105/14*	*1/2*	*0*	*0*	*1/2*	*0*

4-nji iterasiýa. **5.28-nji tablisa.**

Bazis üýtgeýän	*Azat agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1
x_3	*3*	*0*	*0*	*1*	*4*	*– 11*
x_2	*4*	*0*	*1*	*0*	*– 3*	*7*
x_1	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*– 2*
F	*8*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*

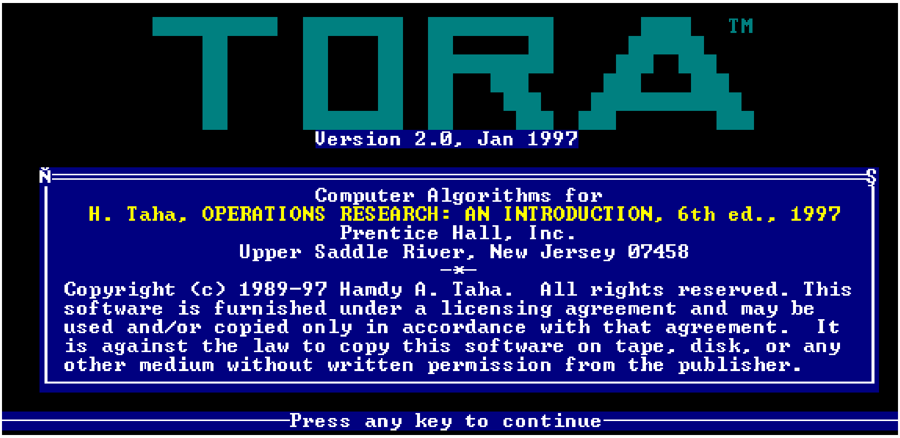
5.28-nji tablisanyň azat agzalar sütüninde ähli elementleri bitindir. Diýmek, bu plan goýlan meseläniň optimal çözüwidir

$max\ F=8;\ x_1=1;\ x_2=4;\ x_3=3;\quad x_4=0.$

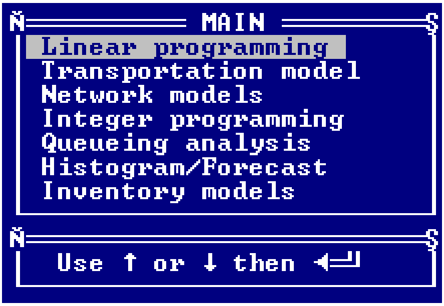
5.2.8. Çyzykly programmirlemegiň meselelerini Tora programmalar paketinde çözmek

5.2.8.1. Tora programmalar paketinde mysaly ÇP meselesini çözmek

M1 ýaly matematiki modeli *Tora* programmasynda işlemek üçin, *Tora* papkasyndan *Tora.exe* faýlyny tapyp, ony işe goýbereliň.



Ekrana *Tora* programmasynyň başlangyç maglumatlary çykyp, dowam etdirmek üçin islendik düwmäni basýarys. Ekrana:



iş režimleri çykar. *Linear programming (Çyzykly programmirleme)* saýlap, *Enter* basalyň. Ekrana goşmaça:

DATA ENTRY

- ✓ *Read an existing data file (Bar bolan maglumatlar faýlyny okamak);*
- ✓ *Enter new problem (Täze meseläni girizmek)*

ýaly penjire çykyp, täze meseläni çözjek bolýanymyz üçin:

Enter new problem

saýlalyň we *Enter* basalyň. Ekrana bu režimiň degişli iş penjiresi çykyp:

- ✓ *Problem Title (Meseläniň ady)*
- ✓ *Nbr of Variables (Üýtgeýänleriň sany)*
- ✓ *Nbr of Constraintes (Çäklendirmeleriň sany)*
- ✓ *User-defined Vars Names* **(y(n)**)
- ✓ *Nonzero Lowers Boundes* **(y(n))**
- ✓ *Unrestricted Variables* **(y(n))**

setirlerine degişli maglumatlar soralýar.

M1 modeli çözeliň. Onda, birinji setire – *M1*, ikinji setire – *2* (x_1 *we* x_2 üýtgeýänler bar), üçünji setire – *3* (üç sany çäklendirmeler bar), galan setirleriň bahalary üçin *n* (*no* – ýok) bahalary girizeliň (baha girizilip ↓ (aşak) düwmesi basylýar).

Bölek penjire döräp, onda maksat funksiýasynyň *max* ýa-da *min* tapmakdygyny hem-de üýtgeýänleriň öňündäki koeffisiýentleri (*max*, x_1 üçin *6*, x_2 üçin *3*) *Enter* basyp girizýäris. Şundan soň, bu penjirede birinji, ikinji we üçinji çäklendirmeler üçin üýtgeýänleriň koeffisiýentleri hem-de erkin agzalaryň bahalary soralýar. Olary hem *Enter* basyp girizmelidir:

- ✓ I çäklendirme üçin**:** *4, 3, <, 840;*
- ✓ II çäklendirme üçin: *1, 0, <, 150*;
- ✓ III çäklendirme üçin: *0, 1, <, 200*.

Şundan soň:

Do you wish save this (new or modified) set of data (y(n)?)

((Täze ýa-da üýtgedilen) maglumatlar ýygyndysyna at berip saklamakçymy, (hawa(ýok)?)

soragy çykar. *y(yes) (hawa)* jogabyny bereliň. Onda maglumatlar faýlynyň ady soralar. Mysal üçin *M1* girizip, *Enter* basalyň. Onda çözüw-iş režimleriniň:

SOLVE(MODIFY)

- ✓ *Solve Problem (Meseläni çözmek);*
- ✓ *Modify data (Maglumatlary üýtgetmek);*
- ✓ *View data (Maglumatlary gözden geçirmek);*
- ✓ *Print data (Maglumatlary çap etmek*)

görnüşi çykar. Çözüw almakçy bolýanymyz üçin *Solve Problem* saýlap, *Enter* basalyň Onda:

- ✓ *Automated procedure (Awtomatlaşdyrylan çözüliş);*
- ✓ *User – guided procedure (Yzygider çözüliş)*

režimleri soralar. Köplenç ýokarky režim saýlanýar. Onda:

OPTIMUM

- ✓ *View solution(sensitivity summary) (çözüwi görmek);*
- ✓ *Print solution(sensitivity summary) (çözüwi çap etmek);*
- ✓ *Obtain alternatiol optimum (alternatiw optimum almak);*
- ✓ *Viev optimum tableau (optimal tablisany görmek);*
- ✓ *Print optimum tableau (optimal tablisany çap etmek);*
- ✓ *Viev original data (başlangyç maglumatlary görmek);*
- ✓ *Print original data (başlangyç maglumatlary çap etmek)*

menýusy çykyp, ondan 1-nji setiri saýlalyň. Onda tablisa görnüşdäki üç iterasiýadan soň alynýan optimal çözüwiň jemleýji maglumatlary çykar.

```
m1                                   max              Final Iteration No: 3
                    *** OPTIMUM SOLUTION SUMMARY ***
Obj value =        1140.0000
 Variable          Value         Obj Coeff        Obj Val Contrib
 x1               150.0000        6.0000           900.0000
 x2                80.0000        3.0000           240.0000
```

Bu ýerden görnüşi ýaly: halatlardan 150 sany, halatçalardan bolsa 80 sanysyny öndürmek maslahat berilýär. Şunlukda, kärhananyň bu önümleri ýerleşdirmekden aljak iň ýokary girdejisi 1140 manat boljak eken.

Bu meseläni maglumatlaryň üýtgedilen ýagdaýynda, meselem, satuw bahalar halat we halatça üçin, degişlilikde 5 manat we 4 manat bolanda çözeliň. Onda *F6* we *F2* funksional düwmeleri yzygider basyp, çykýan penjireden: *Modifi data* saýlalyň. Onda:

Modifi LP(IP)

- ✓ *Modify a row (Setiri üýtgetmek);*
- ✓ *Modify a column (sütüni üýtgetmek);*
- ✓ *– – – – – – – – – – – – – – – –*

Modify problem title

ýaly penjire çykyp, ondan *Modifi a row* saýlalyň. Onda ýene:

Modify a row

- ✓ *Modifi variables names (Üýtgeýänleriň adyny üýtgetmek);*
- ✓ *Modifi objective function (Maksat funksiýasyny üýtgemek);*
- ✓ *Modifi a constraint (Çäklendirmeleri üýtgetmek)*

penjiresi çykyp, ondan: *Modify objective function* saýlalyň. Bu ýerde degişli bahalary (x_1 *we* x_2 üýtgeýänleriň koeffisiýentlerini) *5* we *4* – e üýtgedeliň. Soň *F2* basyp, maglumatlara *M11* adyny berip, bize tanyş bolan *SOLVE(MODYFY)* menýusuna çykaryş. Çözüw almagyň öňki yzygiderligini gaýtalamak bilen, häzirki meseläniň optimal çözüwiniň jemleýji maglumatlaryny alarys (5.29-njy tablisa).

Jemleýji maglumatlar **5.29-njy tablisa**

Object value = 1100.0000			
Variable	*Value*	*Obj Coeff*	*Obj Val Contrib*
x_1	*60.0000*	*5.0000*	*300.0000*
x_2	*200.0000*	*4.0000*	*800.0000*

Şeýle ýol bilen meseläniň beýleki maglumatlaryny hem üýtgedip çözmek bolar.

Eger, soň *M1* model ýa-da onuň *M11* warianty üçin optimal çözüw tapmak talap edilse, onda *DATA ENTRI* menýusynyň *Read an* *existing file* görnüşi saýlanyp, goşmaça penjirede maglumatlar faýllarynyň *M1* ýa-da *M11* adyny ýazyp, tanyş yzygiderlikde çözüw hasaplanýar.

5.2.8.2. Tora programmasynda çyzykly programmirlemegiň ulag meselesini çözmek

Ulag meselesiniň matematiki modelini *Tora* programmasynda işlemek üçin, *Tora* papkasyndan *Tora.exe* faýlyny tapyp, ony işe goýbereliň. Ekrana *Tora* programmasynyň başlangyç maglumatlary çykyp, dowam etdirmek üçin islendik düwmäni basýarys. Ekrana

iş režimleriniň sanawy çykar. Sanawdan *Transportation model (Ulag modeli)* saýlap, *Enter* basalyň. Ekrana goşmaça:

DATA ENTRY

- ✓ *Read an existing data file (Bar bolan maglumatlar faýlyny okamak);*
- ✓ *Enter new problem (Täze meseläni girizmek)*

penjiresi sykyp, täze meseläni çözjek bolýanymyz üçin:

Enter new problem

saýlap, *Enter* basalyň. Ekrana bu režimiň degişli iş penjiresi çykyp:

- ✓ *Problem Title (Meseläniň ady);*
- ✓ *Nbr of Sources (Iberijileriň sany);*
- ✓ *Nbr of Destinatians (Ulanyjylaryň sany);*
- ✓ *User-defined Names (y(n) (Ulanyjynyň kesgitlän ady (hawa(ýok))*

setirlerine degişli maglumatlarlar soralýar. 5.30-njy tablisa boýunça berlen ulag meselesini çözeliň.

Ulag meselesiniň başlangyç maglumatly. **5.30-njy tablisa**

	j	*1*	*2*	*3*	*4*
i	B_j / A_i	*75*	*80*	*60*	*85*
1	*100*	*6*	*7*	*3*	*5*
2	*150*	*1*	*2*	*5*	*6*
3	*50*	*8*	*10*	*20*	*1*

Birinji setire – *Ulag1*, ikinji setire – *3*, üçünji setire – *4*, 4-nji setire – *n* (ýok) bahalary girizip, *Enter* basalyň. Bölek penjire döräp,onda:

	S1	**S2**	**S3**
Supply Amts (Iberijileriň kuwwaty)	0	0	0

görnüşde madlumatlar talap edilýär. *S1, S2, S3* öýjüklere degişlilikde: *100, 150, 50* bahalary *Enter* basyp girizeliň. Onda ýene täže bölek penjire döräp:

	D1	*D2*	*D3*	*D4*
Demand Amts (Ulanyjylaryň kuwwaty)	0	0	0	0

görnüşde baha soralar. *D1, D2, D3, D4* öýjüklere degişlilikde: *75, 80,* *60, 85* bahalary *Enter* basyp girizýäris. Şundan soň, täze penjirede

	D1	*D2*	*D3*	*D4*
S1 unit costs (S1 boýunça birlik bahalar):	0	0	0	0

görnüşde önüm (çagyl) birligini *S1* iberijiden *D1, D2, D3, D4* ulanyjylara ýetirmegiň harajatlary talap edilýär. Degişlilikde: *6, 7, 3,* *5* bahalary görkezeliň. Şuňa meňzeşlikde, ikinji we üçünji setirler üçin *1, 2, 5, 6* we *8, 10, 20, 1* bahalary girizýäris. Şundan soň:

Do you wish save this (new or modified) set of data (y(n)?)

((Täze ýa-da üýtgedilen) maglumatlar ýygyndysyna at berip saklamakçymy, (hawa(ýok)?) soragy çykar. *Y (yes) (hawa)* jogabyny bereliň. Onda maglumatlar faýlynyň ady soralar. Mysal üçin *ulag1* girizip, *Enter* basalyň. Onda çözüw-iş režimleriniň:

SOLVE(MODIFY)

- ✓ *Solve Problem (Meseläni çözmek)*
- ✓ *Modify data (Maglumatlary üýtgetmek)*
- ✓ *View data (Maglumatlary gözden geçirmek)*
- ✓ *Print data (Maglumatlary çap etmek)*

görnüşi çykar. Çözüw almakçy bolýanymyz üçin *Solve Problem* saýlap, *Enter* basalyň Onda:

- ✓ *Automated procedure (Awtomatlaşdyrylan çözüliş);*
- ✓ *User – guided procedure (Yzygider çözüliş)*

režimleri soralar. Köplenç ýokarky režim saýlanýar. Onda:

OPTIMUM

- ✓ *View solution(sensitivity summary)*
- ✓ *Print solution(sensitivity summary)*
- ✓ *Obtain alternatiol optimum*
- ✓ *Viev optimum tableau*
- ✓ *Print optimum tableau*
- ✓ *Viev original data*
- ✓ *Print original data*

menýusy çykyp, ondan 1-nji setiri saýlalyň. Onda

Ulag1 (Final) Iteration No:1

··· OPTIMVM TRANSPORTATION SOLUTION ···

Total cost = 665,0000 (Alternata soln detected at route < 1,1>)

görnüşdäki optimal çözüwiň jemleýji maglumatlary çykar. Bu ýerden görnüşi ýaly, *S1* çeşmeden (känden) *D2, D3* we *D4* ulanyjylara, degişlilikde *5, 60* we *35* birlik (meselem, tonna) önümi (çagyly) ibermek, *S2* çeşmeden *D1* we *D2* ulanyjylara deň mukdarda *75* birlik önüm, *S3* çeşmeden bolsa diňe *D4* ulanyja *50* birlik ibermek maslahat berilýär. Şunlukda önümleri ulanyjylara daşamaklygyň umumy minimal harajaty (iň soňky sütündäki çykdajylaryň jemi) *665* manada barabardyr (5.31-nji tablisa).

Bu meseläni maglumatlaryň üýtgedilen ýagdaýynda, meselem önüm birliklerini daşamaklygyň harajatlary üýtgände, çözeliň. Onda *F6* we *F2* funksional düwmeleri yzygider basyp, çykýan penjireden:

MODIFY TRANSPORTATION

- ✓ *Modify sources names (Iberijileriň adyny üýtgetmek);*
- ✓ *Modify destinations names (Ulanyjylaryň adyny üýtgetmek);*
- ✓ *Modify supply amounts (Iberijileriň kuwwatyny üýtgetmek);*
- ✓ *Modify unit costs of a source (Iberijilerden birlik bahalary üýtgetmek);*
- ✓ *Modify unit costs of a destination (Ulanyjylardan birlik bahalary üýtgetmek);*
- ✓ *Modify problem title (Meseläniň adyny üýtgetmek);*
- ✓ *Modify unit costs of a source*

düzgünini saýlalyň Onda, täze meýdança döräp, onda

Source nbr :

Ulag meselesiniň optimal çözüwi. **5.31-nji tablisa**

From	*To*	*Amont (möçber)*	*Unit Cost (birlik bahalar)*	*Route Cost (ugurlaýyn bahalar)*
S1	*D1*	*0*	*6.00*	*0.00*
	D2	*5*	*7.00*	*35.00*
	D3	*60*	*3.00*	*180.00*
	D4	*35*	*5.00*	*175.00*
S2	*D1*	*75*	*1.00*	*75.00*
	D2	*75*	*2.00*	*150.00*
	D3	*0*	*5.00*	*0*
	D4	*0*	*6.00*	*0*
S3	*D1*	*0*	*8*	*0*
	D2	*0*	*10*	*0*
	D3	*0*	*20*	*0*
	D4	*50*	*1*	*50*

ýazgysy çykyp, iberijileriň haýsysy boýunça maglumatlaryň üýtgeýändigi soralýar. *3* nomeri girizip, *Enter* basalyň we *8,10,20,1* bahalaryň deregine, meselem *2,5,3,4* girizeliň Onda *F2* düwmesine basyp, üýtgän maglumatlar faýlyna *ulag2* adyny berip, ýene *SOLVE(MODIFY* menýusyna çykarys. Ol ýerden *SOLVE Problem*, *Automated procedure, View solution (sensitivity summary)* ugurlaryny saýlap, täze ýagdaý üçin umumy minimal harajatlaryň jemi bahasy *800* manat bolan, optimal çözüwi alarys.

5.2.8.3. Çyzykly programmirlemegiň bitin sanly meselesini Tora programmasynda çözmek

Çyzykly matematiki modeli *Tora* programmasynda işlemek üçin, *Tora* papkasyndan *Tora.exe* faýlyny tapyp, ony işe goýbereliň. Ekrana *Tora* programmasynyň iş režimleriniň sanawy çykar. Sanawdan *Integer programming* saýlap, *Enter* basalyň. Ekrana goşmaça:

DATA ENTRY

- ✓ *Read an existing data file (Bar bolan maglumatlar faýlyny okamak);*
- ✓ *Enter new problem (Täze meseläni girizmek)*

penjiresi sykyp, täze meseläni çözjek bolýanymyz üçin

Enter new problem

saýlalyň we *Enter* basalyň. Ekrana bu režimiň degişli iş penjiresi çykyp:

- ✓ *Problem Title (Meseläniň ady);*
- ✓ *Nbr of Variables (Üýtgeýänleriň sany);*
- ✓ *Nbr of Constraintes (Çäklendirmeleriň sany);*
- ✓ *User-defined Vars Names (y(n);*
- ✓ *Nonzero Lowers Boundes (y(n);*
- ✓ *Unrestricted Variables (y(n)*

setirlerine degişli maglumatlar soralýar. Ýokarda seredilen *M1* – modeli, beýleki tarapdan, *ÇP* – niň bitin sanly meselesine degişlidir. Bu modeli kompýuterde çözeliň. Onda, optimal çözüwiň jemleýji maglumatlary çykar. Bu ýerden görnüşi ýaly: halatlardan *150* sany, halatçalardan bolsa *80* sanysyny öndürmek maslahat berilýär. Şunlukda, kärhananyň bu önümleri ýerleşdirmekden aljak iň ýokary girdejisi *1140* manat boljak eken.

Bu meseläni, maglumatlaryň üýtgedilen ýagdaýynda, meselem, goý, halat we halatçany tikmek üçin, degişlilikde, *3.7 m* we *2.9 m* mata sarp bolup, jemi matalaryň möçberi *843 m* bolanda çözeliň. Onda *F6* we *F2* funksional düwmeleri yzygider basyp, çykýan penjireden: *Modifi data* saýlalyň Onda

Modifi LP(IP)

- ✓ *Modifi a row (setirleri üýtgetmek);*
- ✓ *Modifi a column (sütünleri üýtgetmek);*

– – – – – – – – – – – – – – –

- ✓ *Modify problem title*

ýaly penjire çykyp, ondan *Modifi a row* saýlalyň. Onda ýene:

- ✓ *Modify a row;*
- ✓ *Modifi variables names (Üýtgeýänleriň adyny üýtgetmek);*
- ✓ *Modifi objective function (Maksat funksiýasyny üýtgemek);*
- ✓ *Modifi a constraint (Çäklendirmeleri üýtgetmek)*

penjiresi çykyp, ondan *Modifi a constraint* saýlalyň. Onda işjeň penjirede

Constraint nbr: ▢ *(Çäklendirmelerin nomeri)* soralyp, oňa 1 jogaby gorkezeliň hem-de täze çykýan *Constraint 1*: setirde *3,7; 2,9* we *843* bahalary *Enter* basyp girizeliň. Meseläniň galan bahalaryny öňküligine galdyralyň. Soňky bahany tassyklanymyzdan son, *F2* basalyn. Onda ýene:

Do you wish save this (new or modified) set of data (y(n)?)

((Täze ýa-da üýtgedilen) maglumatlar köplügine at berip saklamakçymy, (hawa(ýok)?)

habary çykar. *Y (yes) (hawa)* jogabyny bereliň. Onda maglumatlar faýlynyň ady soralar. Mysal üçin *seh1* girizip, *Enter* basalyň. Onda ekrana ýene:

SOLVE(MODIFY)

- ✓ *Solve Problem (Meseläni çözmek);*
- ✓ *Modify data (Maglumatlary üýtgetmek);*
- ✓ *View data (Maglumatlary gözden geçirmek);*
- ✓ *Print data (Maglumatlary çap etmek)*

penjiresi çykyp, ol ýerden ilki *View data* saýlap, umumy maglumatlary täzeden gözden geçireliň. Indi ýene *F2* basyp, çykýan penjireden *Solve Problem saýlalyň. Onda täze*

INSPECT SOLUTIONS (Çözüwleri barlamak)

- ✓ *Provide an obj value bound (Maksatlaýyn çäk bahasy bilen üpjün etmek);*
- ✓ *Inspect oll feasibl solutions (Mümkin bolan çözüwleriň hemmesini barlamak);*
- ✓ *Interrupt execution using ESC (Ulanyjy tarapyndan ýerine ýetirilişi üzmek)*

penjiresi çykyp, ol ýerden

Inspect oll feasibl solutions saýlalyn. Onda täze:

CURRENT SOLN SUMMARY (Häzirki jemi çözüwler)

- ✓ *View current soln summary (Häzirki jemi çözüwleri görmek);*
- ✓ *Print current soln summary (Häzirki jemi çözüwleri çap etmek)*

penjiresi çykyp, ol ýerden *View current soln summary* saýlalyn. Onda optimal çözüwleriň tablisasy çykyp, $x_1 = 149$, $x_2 = 100$ bitin sanly çözüwler alnyp, jemi girdeji $Z_{max} = 1149$ *man* bolar.

5.3. Parametrik ÇP meselelerini çözmek

Bilşimiz ýaly ÇPUM-de C_j, a_{ij} koeffisiýentler hem-de b_i – azat agzalar ($i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n$) hemişelik ululyklardyr. Emma, hakykatdan durmuşda duş gelýän meselelerde, bu ululyklar hemişelik däl-de, olaryň bahalary käbir interwalda üýtgeýärler. Beýleki tarapdan, eger käbir ykdysady meseläniň optimal çözüwi alnan bolsa, onda bu çözüw optimallygyna galar ýaly, ululyklaryň üýtgeme interwalyny kesgitlemek gerek bolýar.

Şol sebäpli, ÇP meselesiniň optimal çözüwini koeffisiýentleriň we azat agzanyň üýtgän ýagdaýynda derňemek zerurlygy çykýar.

5.3.1. Maksat funksiýasynda parametr bolan meseläni çözmek we derňemek

Goý, ÇP meselesiniň $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$ maksat funksiýasynyň C_j koeffisiýentleri käbir ýol berilýän $[C_j - C_j'; C_j + C_j']$ interwalda üýtgeýän bolsun. Onda amatlylyk üçin maksat funksiýasynyň koeffisiýentlerini $C_j(\lambda) = C_j' + \lambda * C_j''$, (bu ýerde: C_j', C_j''– hemişelikler, λ –parametr) görnüşinde aňlatsak, onda ÇP meselesini şeýle formulirlemek bolar:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} (C_j^{'} + \lambda C_j^{''}) x_j \to \min \qquad (5.17)$$

bahany:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \quad i = \overline{1,m} \qquad (5.18)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n \qquad (5.19)$$

çäklendirmelerde gözläp, δ, φ – erkin sanlar bolanda $\delta \leq \lambda \leq \varphi$ şertde her bir λ üçin (5.18) we (5.19) şertleri kanagatlandyrýan hem-de (5.17) funksiýa minimum bahany kabul etdirýän $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ otrisatel däl wektory tapmaly.

Goýlan meseläniň çözüwiniň häsiýetlerini λ ululygyň üýtgemeginde derňemek bolar. Eger $\lambda = \delta$ diýsek, onda optimal çözüw bar (A ýagdaý) we çyzykly funksiýa çäklenmedik (B ýagdaý) görnüşleri alarys.

Meseläni kompýuterde çözmek üçin, λ ululygy kiçi interwalda degişli aralykda üýtgetmek hem-de çözüwleriň häsiýetlerini derňemek ýeterlikdir.

5.3.2. Maksat funksiýasynda parametr bolan anyk meseläni çözmek

Şeýle meselä seredeliň: λ parametriň $-\infty < \lambda < \infty$ bahalarynda

$$Z = \lambda x_1 + \lambda x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$

bahany:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 2, \end{cases} \qquad x_1 \geq 0, x_2 = 0$$

çäklendirmelerde tapmaly.

Çözülişi. Goşmaça hem-de emeli üýtgeýänleri girizip, giňeldilen meseläni alarys:

$$Z = \lambda x_1 + 2x_2 + Mx_6 \quad \rightarrow \quad min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_6 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \qquad = 11 \\ \quad 3x_1 - 2x_2 \quad + x_5 = 2, \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1,6$$

Parametriň üýtgeme interwallaryny kesgitlemek üçin giňeldilen meseläni 5.32-nji tablisa geçireliň. Başlangyç daýanç plany Žordan – Gaussyň usuly boýunça kesgitläliň. Üç iterasiýanyň netijesinde $\overrightarrow{x_1} = (2; 2; 0; 7; 0)$ daýanç plany alarys. A_6 wektory hasapdan aýralyň. Bu planyň optimallyk şertini barlalyň. Onuň üçin:

Giňeldilen meseläniň çözüwi. **5.32-nji tablisa**

i	*Bazis*	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	–	6	2	1	-1	0	0	1
2	–	11	-1	3	0	1	0	0
3	–	2	3	-2	0	0	1	0
1		14/3	0	7/3	-1	0	$-2/3$	1
2		35/3	0	7/3	0	1	1/3	0
3	x_1	2/3	1	$-2/3$	0	0	1/3	0
1	x_2	2	0	1	$-3/7$	0	$-2/7$	5/7
2	x_4	7	0	0	1	1	1	-1
3	x_1	2	1	0	$-2/7$	0	1/7	2/7
m+1	$-\check{z}$	$4+2\lambda$	0	0	$-6/7-(2/7)\lambda$	0	$-4/7+(1/7)\lambda$	$6/7+(2/7)\lambda-M$
1	x_2	5	0	1	0	3/7	1/7	–
2	x_3	7	0	0	1	1	1	–
3	x_1	4	1	0	0	2/7	3/7	–
m+1	$-\check{z}$	$10+4\lambda$	0	0	0	$6/7+(2/7)\lambda$	$2/7+(3/7)\lambda$	–
1	x_2	4	1	1	$-1/7$	2/7	0	–
2	x_5	7	0	0	1	1	1	–
3	x_1	1	0	0	$-3/7$	$-1/7$	0	–
m+1	$-\check{z}$	$8+\lambda$	0	0	$-4/7-(3/7)\lambda$	$4/7-(1/7)\lambda$	0	–

$$\begin{cases} -\frac{6}{7}-\left(\frac{2}{7}\right)\lambda \leq 0 \\ -\frac{4}{7}+\left(\frac{1}{7}\right)\lambda \leq 0 \end{cases}$$

deňsizligi çözeris we $-3 \leq \lambda \leq 4$ taparys. Diýmek, x_1 nokatda, eger λ parametr [–3;4] kesimde üýtgeýän bolsa, çyzykly maksat funksiýasy öz minimal bahasynda bolar.

$\lambda < -3$ bolanda plany barlalyň. Onuň üçin A_3 wektoryň komponentlerini barlalyň, sebäbi şu wektoryň bahalandyrmasy üçin $\lambda = -3$ baha tapylypdy.

A_3 wektoryň komponentleriniň içinde $x_{33}=1 > 0$. Bu komponenti çözüji element hökmünde kabul edip, ýene bir iterasiýa geçireliň. A_4-i bazisden çykaryp, A_3-i bazise salalyň.

Dördünji iterasiýanyň netijesinde täze $\overrightarrow{x_2}$ = (4;5;7;0;0;0) daýanç planyny alarys. Bu planyň optimallygyny barlalyň. Onuň üçin:

$$\begin{cases} 6/7+(2/7)\lambda \leq 0 \\ 2/7+(3/7)\lambda \leq 0 \end{cases}$$

deňsizligi çözüp, $-\infty < \lambda < -3$ alarys. Bu netijäniň dogrudygyny λ= – 4; – 10; λ= – 1000 bahalarda Tora PP-de barlalyň. Tassyklama dogry bolup çykýar, diýmek, $(-\infty; -3]$ interwalda çyzykly funksiýa $\overrightarrow{x_2}$ nokatda minimal bahasyna eýe bolýar.

Netije-de parametriň üýtgeme interwallaryna baglylykda şeýle optimal çözüwleri aldyk (5.33-nji tablisa).

Optimal çözüwler. **5.33-nji tablisa**

Üýtgeme interwallary	Kritiki çözüw	z_{min} bahasy
$-\infty < \lambda \leq -3$	x_2=(4;5)	z_{min}=4 λ+10
$-3 \leq \lambda \leq 4$	x_1=(2;2)	z_{min}=2 λ+4
$4 < \lambda < +\infty$	x_3=(1;4)	z_{min}= λ+8

5.3.3. Çäklendirmeler sistemasynyň azat agzalarynda parametr bolan meseleleri çözmek

Şeýle meselä seredeliň:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (5.20)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i' + \lambda b_i',\ i = 1,2 \dots m \qquad (5.21)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (5.22)$$

$\delta \leq \lambda \leq \varphi$ interwalda λ – yň her bahasy üçin (5.21) – (5.22) şertleri kanagatlandyrýan we (5.20) funksiýa minimum bahany kabul etdirýän $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wektory tapmaly.

Goý, $\lambda=\delta$ bahada $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ optimal çözüw alnan bolsun. Onda bu wektoryň her komponenti δ ululykdan funksiýadyr, ýagny: $x_i^* = q_i + \delta p_i$ we

$$q_i + \delta p_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,m \qquad (5.23)$$

deňlemeler sistemasynyň çözüwi bardyr.

Eger hemme $p_i=0$ bolsa, onda (5.23) sistema λ bagly däldir we $\vec{x}^*$ plan parametriň hemme bahalary üçin optimaldyr. Eger hemme $p_i \geq 0$ bolsa, onda $\vec{x}^*$ plan hemme $\lambda \geq \delta$ üçin optimaldyr. p_i ululyklar hem položitel, hem otrisatel bolup bilýäni üçin, (5.23) sistemadan:

hemme $p_i > 0$ üçin $\lambda \geq -\frac{q_i}{p_i}$ kesgitläris, şeýlelikde:

$$\lambda' = \begin{cases} \max\limits_{p_i>0}\left(-\dfrac{q_i}{p_i}\right) \\ -\infty, eger\ hemme\ p_i \leq 0, \end{cases}$$

hemme $p_i < 0$ üçin $\lambda \leq -\frac{q_i}{p_i}$ kesgitläris, şeýlelikde:

$$\lambda'' = \begin{cases} \min\limits_{p_i<0}\left(-\dfrac{q_i}{p_i}\right), \\ +\infty, eger\ hemme\ p_i \geq 0. \end{cases}$$

Bu ýerden, $\vec{x}^*$ planyň $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$ interwalda optimaldygy gelip çykýar.

Goý, λ'' – tükenikli bolsun. λ – ululygy tükeniksiz artdyryp başlasak, onda $x_i^* = q_i + \lambda p_i$ komponentli $\vec{x}^*$ wektor optimallyk şertini kanagatlandyrmagyny dowam etdirýär, emma berlen meseläniň plany bolmagyny bes edýär. Bu ýagdaý, haçan – da, wektoryň komponentleriniň biri otrisatel bolanda ýüze çykýar.

5.3.4. Çäklendirmeler sistemasynyň azat agzalarynda parametr bolan anyk meseläni çözmek

$$Z = x_1 + 2x_2 \ \ \rightarrow \ \ min$$

bahany:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 2\lambda, \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

çäklendirmelerde $-\infty < \lambda < +\infty$ bahalaryň her biri üçin tapmaly.

Çözülişi. Goşmaça we emeli üýtgeýänleri girizmek arkaly, giňeldilen meseläni alarys:

$$Z = x_1 + 2x_2 + Mx_6 \rightarrow \ min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \ x_3 \qquad + x_6 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 \ \ + x_4 = 11, \ \ x_j \geq 0, j = 1{,}6 \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad + x_5 \leq 2\lambda. \end{cases}$$

λ ululygyň üýtgeme interwalyny tapmak üçin giňeldilen matrisany tablisa ýazyp, Žordan – Gaussyň usuly boýunça başlangyç bazisi tapalyň. Ol üçünji iterasiýada alnar (5.34-nji tablisa). Tablisanyň erkin agzalar sütüninde meseläniň daýanç planynyň komponentleriniň bahalary ýazylan. Olaryň hemmesi λ bagly bolup, şerte görä otrisatel däl ululyklar bolmaly. Onda şeýle sistema geleris:

$$\begin{cases} -\frac{4}{7}\lambda + \frac{18}{7} \geq 0 \\ 2\lambda + 5 \geq 0 \\ \left(\frac{2}{7}\right)\lambda + \frac{12}{7} \geq 0 \end{cases}$$

Bu deňsizlikleri çözüp, $-\frac{5}{2} \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$ alarys.

$\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ *we* $\lambda_2 = \frac{9}{2}$ bahalar üçin daýanç çözüwleri:

$\vec{x}_1 = (1;4)$; $\vec{x}_2 = (3;0)$ bolarlar.

$\lambda < -\frac{5}{2}$ üçin meseläni derňäliň. Onda ilki bilen $x_4 = 2\lambda + 5$ komponent otrisatel bolar. Diýmek, $\vec{A}_4$ wektory bazisden çykarmaly.

Ikinji setirdäki x_{2j} elementlere seredeliň, olaryň diňe $x_{26}= -1$-den özgesi otrisatel däldirler, x_{26} bolsa emeli üýtgeýäne degişli. Diýmek, $\lambda<-\frac{5}{2}$ bolanda meseläniň planlary, ýagny sistemanyň çözüwi ýokdur.

$\lambda > \frac{3}{2}$ bolanda, ilkinji otrisatel komponent $x_2 = \frac{18}{7} + (\frac{4}{7})\lambda$

bolup, $\vec{A}_2$ wektory bazisden çykarmalydyr. Birinji setirde: $x_{13}= -3/7$ we $x_{15}= -2/7$ otrisatel elementler bardyr. Onda alarys:

$$min_{x_{ij}>0}\frac{z_j-c_j}{x_{ij}} = min(_{x_{ij}<0}\frac{-8/7}{-3/7}; \frac{-3/7}{-2/7}) = min(\frac{8}{3};\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$$

$\vec{A}_5$ wektor bazise goşulmalydyr. Doly dördünji iterasiýany geçirip (5.34-nji tablisa) täze plan alarys. Bu planyň diňe bir komponenti λ bagly, çyzykly funksiýa bolsa λ bagly däldir.

Deňsizlikler sistemasyny çözeliň:

$$2\lambda - 9 \geq 0;\ \lambda \geq \frac{9}{2};\ \ \frac{9}{2} \leq \lambda < +\infty$$

Tora PP-de:

$\lambda=\frac{9}{2}$; $\lambda = 45$; $\lambda = 4500$

bahalarda optimal çözüwleri tapalyň. Optimal plan $x_2=(3;0)$ bolup galar.

Diýmek:

- ✓ $-\infty < \lambda < -\frac{5}{2}$ interwalda meseläniň çözüwi ýok;
- ✓ $-\frac{5}{2} \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$ – interwalda $\vec{x}_1=(1;4)$ we $\vec{x}_2=(3;0)$ wektorlaryň islendik kombinasiýasy optimal çözüw bolar;
- ✓ $-\frac{9}{2} \leq \lambda < +\infty$ – interwalda $\vec{x}_2=(3;0)$ wektoryň komponentleri optimal çözüwdir.

Giňeldilen meseläniň çözüwi. **5.35-nji tablisa**

Koeffisiýentler			1	2	0	0	0	M
i	*Bazis*	*Erkin agza*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	–	6	2	1	– 1	0	0	1
2	–	11	– 1	3	0	1	0	0
3	–	2λ	3	– 2	0	0	1	0
1	–	$-4/3\lambda+6$	0	7/3	– 1	0	– 2/3	1
2	–	$2/3\lambda+11$	0	7/3	0	1	1/3	0
3	x_1	$2/3\lambda$	1	– 2/3	0	0	1/3	0
1	x_2	$-4/7\lambda+18/7$	0	1	– 3/7	0	– 2/7	3/7
2	x_4	$2\lambda+5$	0	0	1	1	1	– 1
3	x_1	$2/7\lambda+12\lambda$	1	0	– 2/7	0	1/7	2/7
m+1	– Z	$-6/7\lambda+48/7$	0	0	– 8/7	0	– 3/7	8/7 – M
1	A_5	$2\lambda-9$	0	– 7/2	3/2	0	1	–
2	A_4	14	0	7/2	– 1/2	1	0	–
3	A_1	3	1	½	– 1/2	0	0	–
m+1	– Z	3	0	– 3/2	– 1/2	0	0	–

5-nji baba degişli soraglar we ýumuşlar

1. ÇP meselesiniň plany – ýol berilýän çözüwi diýip nämä aýdylýar?
2. ÇP meseleleriniň çözüwleriniň häsiýetlerini aýdyp beriň.
3. Bazis we bazis däl üýtgeýänlere kesgitleme beriň.
4. ÇP meselesiniň doly we gysga matematiki ýazgysyny görkezmeli
5. ÇP-niň “kanonik” meselesi haýsy görnüşde ýazylýar? Mysal getirmeli.
6. ÇP-niň “simmetrik” meselesi haýsy görnüşde ýazylýar?
7. ÇP-niň umumy meselesine mysal getirmeli.
8. Tora programmasynda haýsy meseleleri çözmek bolýar?
9. Tora programmasynda ÇP-niň umumy meselesini çözmegiň yzygiderligini görkezmeli.
10. Getirilen ÇP-meseleleriniň çözüwlerini grafiki, simpleks usullarynda hem-de Tora programmasyny ulanyp çözmeli. Netijeleri deňeşdirmeli (5.35-nji tablisa).
11.

Çyzykly programmirlemegiň meseleleri. **5.35-nji tablisa**

10.1. $\max C(x)=3x+2x_2$ $\begin{cases} 4x_1+7x_2 \le 28 \\ -2x_1+3x_2 \le 6 \\ x_1-x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	10.2. $\max C(x)=2x_1+3x_2$ $\begin{cases} 5x_1+3x_2 \le 15 \\ -2x_1+3x_2 \le 6 \\ -3x_1+x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge o$
10.3. $\min C(x)=2x_1-8x_2$ $\begin{cases} 6x_1+7x_2 \le 42 \\ 4x_1+3x_2 \le 24 \\ -4x_1+5x_2 \le 20 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	10.4. $\max C(x)=3x_1-x_2+2x_3$ $\begin{cases} x_1-x_2+x_3 \ge 2 \\ x_1-x_2 \ge 1 \\ x_1+x_2-3x_3 \ge 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

$10.5.\ \max C(x)=40x_1+30x_2$	$10.6.\ \min C(x)=2x_1-10x_2$
$\begin{cases} 2x_1+2x_2\le 50 \\ 4x_1+2x_2\le 80 \\ 5x_1+4x_2\le 90 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	$\begin{cases} x_1-5x_2\ge 5 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_1-x_2\ge 2 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$

12. Tora programmasyny ulanyp, ÇP-niň ulag meselelerini çözmeli, çözüwiň ykdysady manysyny düşündirmeli. Maglumatlaryň üýtgedilen ýagdaýynda meseläni gaýtadan çözmeli.

№ 11.1

B_j / A_i	40	20	60	10
25	7	9	3	7
25	2	1	4	8
80	6	2	8	3
20	5	4	7	7

№ 11.2

B_j / A_i	25	25	40	20
30	1	2	7	8
30	2	3	6	9
30	1	4	3	6
10	5	2	7	1

№ 11.3

B_j / A_i	30	20	80	35
70	1	4	5	2
50	7	2	3	4
40	6	2	4	2
60	3	4	6	5

№ 11.4

A_i \ B_j	25	10	25	50
40	2	5	3	5
20	5	1	2	1
50	7	3	1	1
10	1	4	5	9

12. Ýokarda 10-njy punktda getirilen meselelere goşalaýyn mesele düzüp, Tora programmasynda çözmeli.

13. Çyzykly programmirlemegin bitin sanly meseleleriniň çözüwlerini tapmaly.

13.1. *max* $F=2x_1+x_2-3x_3$

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3\le 4 \\ 5x_1-x_3\le 12 \\ 2x_1-x_2+3x_3\le 4 \end{cases}$$

$x_j\ge 0\ (j=1,2,3)$

x_j – *bitin*

13.2. *min* $F=x_1+2x_2+x_5$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5 \\ x_2+x_3+x_4-x_5=2 \\ x_3-x_4+x_5=4 \end{cases}$$

$x_j\ge 0\ (j=1,2,3)$

x_j – *bitin*

6. Çyzykly däl programmirlemegiň meselelerini çözmek

6.1. Çyzykly däl programmirlemegiň (ÇDP) umumy meselesi

Aşakdaky meselä seredeliň

$$Z = f(x_1, x_2,..., x_n) \to ekstremum \qquad (6.1)$$

maksat funksiýasyna:

$$\begin{aligned} &g_i(x_1, x_2,..., x_n)=b_i,\ i=1,2,...,k \\ &g_i(x_1, x_2,..., x_n)\le b_i,\ i=k+1,...,m \end{aligned} \qquad (6.2)$$

şertlerde ekstremum baha kabul etdirýän $\vec{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$ wektoryny tapmaly. Bu ýerde $f(x_1, x_2,..., x_n)$ we $g_i(x_1, x_2,..., x_n)$, $i= l,2,...,m$ funksiýalar belli hasap edilýär. $x_1, x_2,..., x_n$ – üýtgeýänleriň hemmesine ýa-da käbirine otrisatel dällik şerti goýulýar. Üýtgeýänleriň käbirine bitin sanlylyk şertleri hem goýlup bilner. Eger

$$Z = f(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{ekstremum} \qquad (6.1')$$

$$g_i(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i,\ \ i = \overline{1,m}; \qquad (6.2')$$

mesele berlip, a_{ij} *we* c_j – belli koeffisiýentler bolup, çözüwiň otrisatel dällik şertlerinde hem-de $*\cdot\in\{=,\ge,\le\}$) bolanda *ÇP* meselesini alarys. (6.1′) we (6.2′) formulalarda çyzyklylyk şertleri kanagatlandyrylmadyk ýagdaýynda bolsa, ÇDP meselesine geleris.

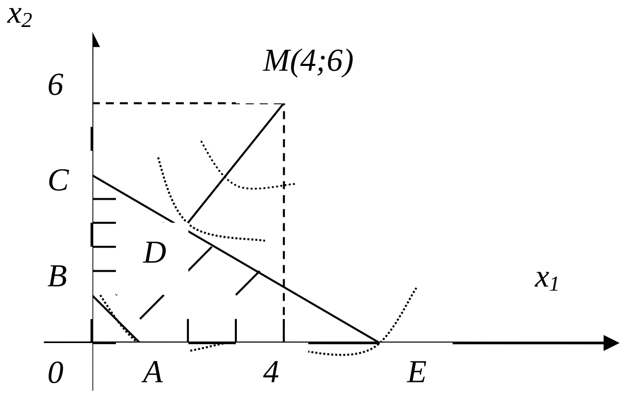
ÇDP meseleleriniň toplumy ÇP – meselelerine garanyňda giňdir. ÇDP meselelerinde esasy netijeler, haçanda maksat funksiýasy çyzykly däl, çäklendirilmeler bolsa çyzykly ýagdaý üçin alnandyr. Mysal hökmünde, iki üýtgeýänli ÇDP meselesini grafiki çözeliň.

Mysal. $Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to min\ (max)$

bahasyny şeýle şertlerde tapmaly:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases} \qquad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Çözülişi. Bu ýerde $Z = Q$ – diýsek, maksat funksiýasynyň grafigi (6.1-nji surat) merkezi *M(4;6)* nokatda, radiusy $\sqrt{Q}$ bolan konsentrik töwerekleri emele getirýär. *ABCD* dörtburçlugyň depeleri üçin: *A(1;0), B(0;1), C(0;4), E (6;0)* koordinatalary kesgitläp bolýar.



6.1 – nji surat

Çyzgydan görşümiz ýaly: min $Z = Z(D) = 196/13$; max $Z = Z(A) = 45$ – global maksimum; $Z(E) = 40$ lokal maksimum.

6.1.1. Çyzykly däl programmirlemegiň umumy meselesini çözmekde Lagranžyň köpeldijileri usuly

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max \qquad (6.3)$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \qquad (6.4)$$

meselä seredeliň. Çäklendirmeler deňleme görnüşinde berlen. Köp üýtgeýänli funksiýalar üçin şertli ekstremum gözlenýän klassyk usuly ulanalyň.

Goý, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ we $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ funksiýalary özleriniň I tertipli hususy önümleri bilen bilelikde üznüksiz bolsunlar. Aşakdaky funksiýany düzeliň:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (6.5)$$

Bu ýerden $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ $(j=\overline{1,n})$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ $(i=\overline{1,m})$ ululyklary tapyp nola deňläliň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}=g_i(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases} \quad i=\overline{1,m} \qquad (6.6)$$

(6.5) funksiýa – *Lagranžyň funksiýasy,* λ_i – sanlara bolsa *Lagranžyň köpeldijileri* diýilýär.

Eger $Z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiýasy $\vec{x}^{\cdot} = (x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot},..., x_n^{\cdot})$ nokatda ekstremuma eýe bolsa, onda $\vec{\lambda}^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$ wektor tapylyp, $(x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot},..., x_n^{\cdot},\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$) nokat (6.6) sistemanyň çözüwi bolar. Diýmek (6.6) sistemany çözüp, birnäçe ekstremum nokatlary kesgitläp, global ekstremum üçin ol nokatlarda funksiýanyň bahalaryny deňeşdireris.

Mysal. $Z=x_1x_2 + x_2x_3$ funksiýanyň şertli ekstremum nokadyny

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_2+x_3=2 \end{cases}$$ çäklendirmelerde tapmaly.

Çözülişi. Lagranžyn funksiýasyny düzeliň

$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)=x_1x_2+x_2x_3+ \lambda_1(x_1 + x_2-2)+\lambda_2 (x_2 + x_3-2)$

hem-de ony $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ üýtgeýeýänler boýunça differensirläliň. Alnan aňlatmalary nola deňlemek bilen şeýle deňlemeler sistemasyny ((6.6) sistemany) alarys

$$\begin{cases} x_2+\lambda_1=0\,, & (I) \\ x_1+x_3+\lambda_1+\lambda_2=0, & (II) \\ x_2+\lambda_2=0, & (III) \\ x_1+x_2-2=0\,, & (IV) \\ x_2+x_3-2=0. & (V) \end{cases}$$

(I) we (III) deňlemelerden $\lambda_1=\lambda_2=-x_2$ gelip çykýar. Onda bu bahany (II) deňlemä ulanyp, täze deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, ýagny üç ölçegli giňişlikde (1;1;1) ekstremum nokadyny alarys. Bu nokatda maksat funksiýanyň ekstremal bahasy $Z_{ekstr} = 1\cdot1+1\cdot1=2$ deň bolar. Bu nokadyň maksimum ýa-da minimum nokatdygyny biz entek kesgitlemedik.

6.1.2. Güberçek we oýuk funksiýalar

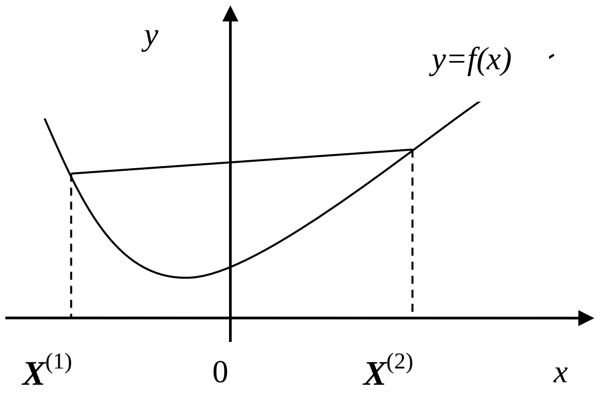
Goý, bize n – ölçegli E^n çyzykly giňişlik berlen bolsun. $X \subset E^n$ güberçek köplüginde berlen $f(\boldsymbol{X})$ funksiýasy üçin X ýaýlanyn islendik $\boldsymbol{X}^{(1)}$ we $\boldsymbol{X}^{(2)}$ nokatlary hem-de islendik $0 \le \lambda \le 1$ san üçin:

$$f[\lambda \boldsymbol{X}^{(2)} + (1-\lambda) \boldsymbol{X}^{(1)}] \le \lambda f(\boldsymbol{X}^{(2)}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{X}^{(1)})$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(\boldsymbol{X})$ funkiýasyna *güberçek funksiýa* diýilýär.

Köplenç, X köplügi E^n ýa-da otrisatel däl oktant bilen gabat gelýär. Eger $f(\boldsymbol{X})$ güberçek bolsa, onda $-f(X)$ – oýuk funksiýadyr.

Geometriki taýdan, eger $f(\boldsymbol{X})$ funksiýasy güberçek bolsa, onda onuň islendik $\boldsymbol{X}^{(1)}$ we $\boldsymbol{X}^{(2)}$ nokatlaryny birleşdirýän kesim (6.2-nji surat) onuň üstünde ýa-da ondan ýokarda ýatýar ($X \in [\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}]$)



6.2 –nji surat

Eger ýokarky kesgitlemede $0<\lambda<1$ sanlar ulanylýan bolsa, onda oňa *berk güberçek (oýuk) funksiýa* diýilýär.

Aşakdaky tassyklamalar dogrudyr:

1) Eger f_j $(\boldsymbol{X})$ – güberçek funksiýalar bolsalar, onda $f(\boldsymbol{X})=\sum f_j(\boldsymbol{X})$ – hem güberçekdir.

2) Şuňa meňzeşlikde, oýuk funksiýalaryň jemi hem oýukdyr.

3) Eger E^n giňişligiň otrisatel däl oktantynda kesgitlenen $f(\boldsymbol{X})$ funksiýasy güberçek bolsa, onda $f(\boldsymbol{X})\leq$b, $\boldsymbol{X}\geq 0$ şerti kanagatlandyrýan V – nokatlaryň köplügi hem güberçekdir.

4) Güberçek köplükleriň kesişmesi hem güberçekdir.

Teorema 6.1. Goý, $f(\boldsymbol{X})$ güberçek funksiýasy ýapyk güberçek $X \subset E^n$ köplüginde berlen bolsun. Onda X köplüginde islendik lokal minimum – globaldyr.

1-nji netije. Eger global minimum iki dürli nokatlarda ýerine ýetýän bolsa, onda ol bu nokatlary birikdirýän kesimde hem ýerine ýetýändir.

2-nji netije. $f(\boldsymbol{X})$ berk güberçek funksiýa bolsa, onda X güberçek köplüginde lokal minimum – global minimumdyr.

Teorema 6.2. Goý $f(\boldsymbol{X})$ funksiýasy güberçek $X \subset E^n$ köplüginde berlen hem-de içki nokatlarda özüniň I tertipli hususy önümleri bilen bilelikde üznüksiz bolsunlar. Goý, $\mathbf{X}^{(0)}$ nokatda $\nabla f(\boldsymbol{X}^{(0)}) = 0$. Onda $\mathbf{X}^{(0)}$ nokatda lokal minimum ýerine ýetýär we ol hem globaldyr. (Bu ýerde $\nabla f(\boldsymbol{X}^{(0)})$ baha $\boldsymbol{X}^{(0)}$ nokatdaky funksiýanyň gradiýentiniň bahasydyr.)

6.1.3. Seperabel funksiýaly meseleleri çözmegiň ýakynlaşan usuly

Kesgitleme. Eger üýtgeýän ululykly aňlatma degişli üýtgeýänlerden hem-de olaryň derejelerinden düzülip, üýtgeýänleriň biri-birine köpeltmek hasyllaryny hem saklamaýan bolsa, onda oňa *seperabel aňlatma* diýilýär.

Şeýle meselä seredeliň:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \rightarrow \max \qquad (6.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) = b_i\ ,\quad i=\overline{1,m};\quad x_j \ge 0\,,\quad j=\overline{1,n}.$$

Bu meselede maksat funksiýasy hem-de çäklendirmeler sistemasyndaky funksiýalar *seperabel*. (6.7) meseläni ýakynlaşan çözmeklik $f_j(x_j)$ we $g_{ij}(x_j)$ funksiýalary bölekleýin – çyzykly aproksimirlemeklige esaslanandyr. Şeýlelikde, ýakynlaşan mesele alnyp, bu meseläni simpleks usulynda çözmek bolar. Umumy ýagdaýda, mesele çözlüp, ýakynlaşan meseläniň, diýmek, (6.7) meseläniň hem lokal maksimumy tapylýar. Eger ýolbererli X çözüwler köplügi güberçek, $f_j(x_j)$ funksiýalary hem oýuk bolsalar, onda lokal maksimum şol bir wagtda global maksimum bolar. Bu ýagdaýda, ýakynlaşan meseläniň global maksimumy tapylyp, ol hem (6.7) – niň ýakynlaşan çözüwi bolar.

Goý, (6.7) meselede hemme f_j we g_{ij} funksiýalar üznüksiz bolsunlar. x_j, $(j=\overline{1,n})$ üýtgeýäniň alyp biljek bahalarynyň $[0;\ a_j]$ interwalyny r_j böleklere bölüp, ol nokatlary x_{kj} bilen belläliň hem-de ol nokatlar boýunça $\hat{f}_j(x_j)$ we $\hat{g}_{ij}(x_j)$ aproksimirleme funksiýalaryny guralyň. Onda (6.7) meseläniň ornuna:

$$\max \hat{Z} = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) = b_i\ ,\ i=\overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n} \tag{6.8}$$

ýakynlaşan meselä serederis. Şu meseläni aproksimirlemegiň netijesinde:

$$\max \hat{Z} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{r_j} f_{kj}\lambda_{kj}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{r_j} g_{kij}\lambda_{kj} = b_i\ ,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{k=0}^{r_j}\lambda_{kj} = 1 \tag{6.9}$$

ýakynlaşan ÇP meselesine geleris. Bu ýerde:

$f_{kj}= f_j(x_{kj}); k=0,1,..., r_j$;

$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij};\ g_{kij} = g_{ij}(x_{kj}),\ i = \overline{1,m}$$

(6.9) – meseläni çözüp, λ_{kj}^* *we* x_{kj}^* bahalary tapyp:

$$x_j^* \approx \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj}^* x_{kj}^* \qquad \text{kesgitläris.}$$

Görşümiz ýaly, meseläniň göwrümi ulydyr. Eger meseläniň berlişinde çyzykly üýtgeýänler bar bolsa, olary şol durşuna ulanarys. Bu bolsa meseläniň möçberini azaldar.

6.1.4. Kuna – Takkeriň teoremasy

ÇDP teoriýasynda *Kuna – Takkeriň* teoremasy esasy orny eýeleýär. Goý, şeýle ÇDP meselesi berlen bolsun:

$$\begin{aligned} &Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max \\ &g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,\ i= 1, 2, \ldots, m; \qquad (6.10) \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Berlen mesele üçin Lagranžyň funksiýasyny düzeliň:

$$F(\vec{X}, \vec{\Lambda}) = f(\vec{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{X}) \qquad (6.11)$$

Eger regulýarlyk şerti ýerine ýetse, ýagny hemme *i-ler* üçin $g_i(X) > 0$ ýerine ýetýän iň bolmanda bir $\vec{X}$ nokat bar bolsa, onda aşakdaky Kuna – Takkeriň teoremasy adalatlydyr:

Teorema. Eger $\vec{X}^{(0)} \geq 0$ üçin $\vec{\Lambda}^{(0)} \geq 0$ tapylyp, hemme $\vec{X} \geq 0$ we $\vec{\Lambda} \geq 0$ üçin:

$$F(\vec{X}, \vec{\Lambda}^{(0)}) \leq F(\vec{X}^{(0)}, \vec{\Lambda}^{(0)}) \leq F(\vec{X}^{(0)}, \vec{\Lambda}) \qquad (6.12)$$

şert ýerine ýetse, şonda we diňe şonda $\vec{X}^{(0)}$ wektor (6.10) meseläniň optimal çözüwi bolar. ($\vec{X}^{(0)}, \vec{\Lambda}^{(0)}$) nokada (6.11) funksiýanyň *eýer nokady* diýilýär, teorema bolsa, başgaça, *eýer nokady barasyndaky* teorema diýilýär.

Eger $f(\vec{X})$ we $g_i(\vec{X})$ – funksiýalary differensirlenýän bolsalar, onda (6.12) şerti Kuna – Takkeriň şeýle lokal şertine deňgüýçlidir:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} \le 0 \\ x_j^{(0)}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} = 0 \\ x_j^{(0)} \ge 0,\ j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{6.13}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} \ge 0 \\ \lambda_i^{(0)}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} = 0 \\ \lambda_i^{(0)} \ge 0,\ i=\overline{1,m} \end{cases} \tag{6.14}$$

Bu ýerde:

$\vec{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$, $\vec{\Lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)},..., \lambda_m^{(0)})$.

(6.13) we (6.14) şertlere *Kuna Takkeriň şertleri* diýlip, olary wektor formada şeýle ýazmak bolar:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{X}}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} \le 0;\quad \vec{X}'^{(0)}\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{X}}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} = 0 \tag{6.13$'$}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{\Lambda}}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} \ge 0;\quad \vec{\Lambda}'^{(0)}\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{\Lambda}}\right)_{\vec{X}^{(0)},\vec{\Lambda}^{(0)}} = 0 \tag{6.14$'$}$$

6.2. Kwadratik programmirlemegiň meselelerini çözmek

6.2.1. Kwadratik programmirlemegiň meseleleri barada düşünje

Kwadratik programmirlemegiň (KP) meseleleri ÇDP meseleleriniň hususy haly bolup, çäklendirmeler:

$$g_i\,(x_1, x_2,..., x_n) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,, \quad (i=\overline{1,m})$$

çyzykly funksiýalardyr, Z funksiýasy bolsa çyzykly we kwadratik funksiýalaryň jemidir:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+d_{11}x_1^2+d_{22}x_2^2+...+d_{nn}x_n^2+$$
$$+2d_{12}x_1x_2+2d_{13}x_1x_3+...+2d_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$$

n üýtgeýänli kwadratik funksiýa, başgaça, *kwadratik forma* diýlip, ol şeýle görnüşde aňladylyp bilner:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1} d_{ij}x_{ij} = \vec{X}'D\vec{X}\ , \text{ bu ýerde:}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ \ \vec{X}' = (x_1, x_2, ..., x_n);\ \ D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & ... & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Şunlukda, D – simmetrik matrisa ($d_{ij}=d_{ji}$) hasaplanýar. KP meselesini matrisalaýyn formada ýazalyň:

$$\max Z = \vec{C}'\vec{X} + \vec{X}'D\vec{X} \qquad \text{bahany:}$$

$$A\vec{X} = B,\ \ \vec{X} \geq 0 \qquad (6.15)$$

şertlerde tapmaly.

ÇDP meselelerinde bolşy ýaly KP meselelerinde hem islendik lokal ekstremum – global ekstremum däldir. (6.15) meselede ýol berilýän çözüwler köplügi güberçekdir. Onda, eger maksat funksiýasy güberçek (oýuk) bolsa, lokal minimum (maksimum) – global minimum (maksimum) bolar. Bu ýagdaý kwadratik formanyň (KF) otrisatel kesgitlenendigine, položitel däl kesgitlenendigine, položitel kesgitlenendigine, otrisatel däl kesgitlenendigine we düýbünden kesgitlenen däldigine baglydyr.

Eger $\vec{X}$ =*0*-dan başga hemme $\vec{X}$ -ler üçin $\vec{X}'D\vec{X}$ < *0* bolsa, onda $\vec{X}'D\vec{X}$ KF otrisatel kesgitlenen diýilýär.

Eger $\vec{X}'D\vec{X}$ =0 ýerine ýetýän $\vec{X} \neq 0$ bar bolup, hemme $\vec{X}$ -ler üçin $\vec{X}'D\vec{X} \leq 0$ bolsa, onda $\vec{X}'D\vec{X}$ KF položitel däl kesgitlenen diýilýär.

Eger $\vec{X}'D\vec{X}$ KF otrisatel (položitel däl) kesgitlenen bolsa, onda $\vec{X}'D\vec{X}$ KF položitel (otrisatel däl) kesgitlenen diýilýär.

Eger $\vec{X}'D\vec{X}$ KF $\vec{X}$ -leriň bir bahalary üçin položitel, beýleki bahalary üçin otrisatel bolsa, onda oňa *kesgitsiz* diýilýär.

6.2.2. KP meseleleri üçin Kuna – Takkeriň teoremasy

(6.15) meselesi üçin Kuna – Takkeriň teoremasy şeýle formulirlenýär:

***Teorema*:** Eger *m* – ölçegli $\vec{U}$, $\vec{W} \geq 0$ wektorlary hem-de *n* – ölçegli $\vec{V} \geq 0$ üçin şeýle şertler:

1) $C + D\vec{X} - A'\vec{U} + \vec{V} = 0$

2) $B - A\vec{X} - \vec{W} = 0$

3) $\vec{V}'\vec{X} = 0$

4) $\vec{W}'U = 0$

ýerine ýetse, şonda we diňe şonda $\vec{X}^{(0)}$ wektor KP meslesiniň optimal çözüwidir.

Görşümiz ýaly, 1) we 2) şertler $\vec{X}, \vec{U}$, $\vec{V}$ we $\vec{W}$ üýtgeýänler (wektorlar) üçin *n+m* deňlemeli we *2(m+n)* näbellili sistemany aňladýar.

Şeýlelikde, (15) meseläniň optimal çözüwi bar bolsa, onda ol 1), 2) bazis çözüwleriniň biri bolar. Onda KP meselesini çözmek üçin simpleks usullaryň birini ulanmak bolar.

1), 2) deňlemeleri şeýle ýazalyň:

$$D\vec{X} + A'\vec{U} + \vec{V} = -C \qquad (6.16)$$
$$A\vec{X} + \vec{W} = B$$

(6.15) – başlangyç bazis çözüwi tapmak üçin emeli bazis usulyny ulanalyň. $\vec{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ we $\vec{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ emeli üýtgeýänleri girizeliň. Netije-de, şeýle sistema geleris:

$$D\vec{X} + A'\vec{U} + \vec{V} + \vec{Z} = -C \qquad (6.17)$$
$$A\vec{X} + \vec{W} + \vec{Y} = B$$

Bu ýerde, $\vec{Z}$ we $\vec{Y}$ wektorlaryň komponentlerini –*C, B* – azat agzalaryň alamaty bilen birmeňzeş saýlap, bazis çözüwi taparys. Onuň üçin:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} M\, y_i+\sum_{j=1}^{n} M\, z_j\,, \qquad (M\gg C)$$

emeli maksat funksiýasyny düzüp, bazisden $\{y_i\}$ we $\{z_j\}$ üýtgeýänleri çykarýarys we $\vec{X}$,$\vec{U}$, $\vec{V}$ we $\vec{W}$ boýunça üýtgeýänleri girizýäris. Şu ýerde $\vec{X}'\vec{V}=0$; $\vec{U}'\vec{W}=0$ şertleri göz öňünde tutmalydyr. Eger emeli üýtgeýänler bazisden çykarylsa hem-de teoremanyň 3) 4) şertleri hem ýerine ýetse, onda tapylan bazis çözüw optimaldyr.

6.2.3. Anyk meseläniň çözüwini kompýuterde amala aşyrmak

Aşakdaky meselä seredeliň:

$f(x_1, x_2)=max\,(10x_1+20x_2+x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2)\to max$ bahany

$$\begin{cases} 8-x_2\ge 0 \\ 10-x_1-x_2\ge 0, \;\; x_1\ge 0,\, x_2\ge 0 \end{cases}$$

şertlerde tapmaly.

Görşümiz ýaly, kwadratik forma oýukdyr, çäklendirmeler bolsa çyzyklydyr. KP meselesi üçin Lagranžyň funksiýasyny düzeliň:

$F(x_1, x_2, u_1, u_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2) + u_1(8 - x_1) + u_2(10 - x_1 - x_2)$

Kuna – Takkeriň teoremasyny ulanyp, eýer nokady üçin aşakdaky şertleri alarys:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=10+x_2-4x_1-u_2\le 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=20+x_1-4x_2-u_1-u_2\le 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1}=8-x_2\ge 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_2}=10-x_1-x_2\ge 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdot x_1 = (10 + x_2 - 4x_1 - u_2) \cdot x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \cdot x_2 = (20 + x_1 - 4x_2 - u_1 - u_2) \cdot x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1} \cdot u_1 = (8 - x_2) \cdot u_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_2} \cdot u_2 = (10 - x_1 - x_2) \cdot u_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Şol bir wagtda (II) sistemany hem kanagatlandyrýan (I) – sistemanyň çözüwini tapmaly. Bu meseläni:

1) $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0$;
2) $x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0$;
– – – – – – – – – – – – – – –
16) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0$;

wariantlarda çözüp hem-de jogaplary derňäp tapsa-da bolardy. Emma bu rasional usul däldir.

(I) sistemany aşakdaky görnüşde ýazalyň:
(II)

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + u_2 \geq 10 \\ -x_1 + 4x_2 + u_1 + u_2 \geq 20 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases} \qquad (Ia)$$

(Ia) deňsizligi deňlige öwürýän v_1, v_2, w_1, w_2 – erkin üýtgeýänleri girizeliň. Bu üýtgeýänler: $v_1 \cdot x_1 = 0;\ v_2 \cdot x_2 = 0;\ w_1 u_1 = 0;\ w_2 u_2 = 0$ goşmaça şertleri hem kanagatlandyrýar. Onda:

$$Z = My_1 + My_2 \rightarrow min \quad (M=10\ 000)$$

bahany, şeýle çäklendirmelerde:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + u_2 - v_1 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + u_1 + u_2 - v_2 = 20 \\ x_2 + w_1 = 8 \\ x_1 + x_2 + w_1 = 10 \end{cases} \qquad (Ia)$$

tapýan ÇP meselesini çözeliň. Meseläni Tora PP-de çözeliň. Netijede biz: $x_1 \cdot = 4$; $x_2 \cdot = 6$; $w_1 \cdot = 2$; $w_2 \cdot = 0$; $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$ bazis çözüwini aldyk. Bu ýerde:

$$v_1 \cdot x_1 = 0;\ v_2 \cdot x_2 = 0;\ w_1 u_1 = 0;\ w_2 u_2 = 0$$

şertler hem ýerine ýeteni üçin alnan çözüw optimaldyr. Diýmek:

$$x_1^{opt} = 4; \quad x_2^{opt} = 6$$

6.3. ÇDP – niň anyk meselelerini çözmek

6.3.1 Funksiýanyň global ekstremumyny gözlemek meselesi

6.3.1.1 Funksiýanyň global ekstremumyny gözlemek meselesini goýmak

Funksiýanyň global ekstremumyny gözlemek uçin programma ýazmak ýa-da taýyn programmalaryň paketini ulanmak talap edilýär. Onuň üçin aşakdaky işleriň yzygiderligini ýerine ýtirmek gerekgir:

- ✓ *f(X)* funksiýanyň global ekstremumyny hemişelik ädimli koordinat gözenegi boýunça gözleg usulynda tapmaly;
- ✓ *f(X)* funksiýanyň global ekstremumyny tötänleýin gözleg usulynda tapmaly;
- ✓ hasaplamalaryň alnan netijelerini deňeşdirmeli.

Asakdaky funksiya seredeliň:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2$$

6.3.1.2. *f(X)* funksiýanyň global ekstremumyny hemişelik ädimli koordinat gözenegi boýunça gözleg usulynda tapmak

f(X) funksiýanyň global ekstremumyny hemişelik ädimli koordinat gözenegi boýunça gözleg usulynda tapmak ygtybarlydyr, n<4 – kiçi ölçegli meseleleri çözmekde bolsa has oňaýlydyr. Bu ýerde, gözenegiň başlangyç ädiminiň hädogry saýlanmagynyň lokal minimumyň globol minimum hökmünde kabul edilmegine getirmegi mümkin. Bu usulda koordinat gözenegi boýunça hasaplanan funksiýanyň hemme bahalarynyň içinden minimumy saýlanyp alynýar. Programmany algoritmik dilleriň birinde ýa-da Excel elektron tablisasynda düzmek bolar. Meselem, Excel elektron tablisasynda aşakdaky netijeleri alarys: (x_1[– 4; 4], x_2[– 4; 4], hasaplamalaryň sany *289, H=0,5*). Görşumiz ýaly

$$f(X^{*}) = -2.500, \ X^{*}=(-0.500;\ 2.000).$$

6.3.1.3. *f(X)* funksiýanyň global ekstremumyny tötänleýin gözleg usulynda tapmak

Bu usulda gözleg algoritmine tötänlik elementini goşýarlar. Usula laýyklykda, tötän sanlary dörediji bölek programma berlen paýlanyş kanunyna göra tötän wektory (x_1 we x_2 sanlary) formirläp, funksiýanyň bahalaryny hasaplaýar we ol bahalardan minimumy saýlaýar. MathCAD programmalar paketini ulanmak arkaly şeýle netijeleri alýarys:

$$f(X^{*}) = -2{,}500, \ X^{*}=(-0{,}500;\ 2{,}000).$$

Hasaplamalardan gornüşi ýaly, soňky usul boýunça hasaplamalar 65% gysgalýar, otnositel yalňyşlyk bolsa 1% – e barabardyr.

6.3.2. Bir argumentli funksiýalary optimizirlemek

6.3.2.1. Bir argumentli funksiýalary optimizirlemek meselesini goýmak

Bir argumentli funksiýalary optimizirlemek meselesiniň ýumşunda funksiýanyň lokal ekstremumynyň interwalyny dihotomiýa usulynda gözläliň (3 – 4 iterasiýa), Fibonaççi usulynda interwaly anyklalyň, kubik aproksimasiýa usulynda bolsa, çözüwi tapalyň.

Mesele. Berlen funksiýanyň lokal ekstremumyny berlen aralykda we berlen interwalda tapmaly:

$$f(x) = x^4 + e^{-x}, \quad x \in [0;1], \quad \varepsilon = 0{,}01$$

6.3.2.2 Dihotomiýa usuly

$$f(x) = x^4 + e^{-x}, \quad x \in [0;1]$$

1-nji iterasiýa:

$$a = 0; \quad b = 1; \quad L = b - a = 1 - 0 = 1$$

$$x_m = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0{,}5 \quad f(x_m) = 0{,}669030659$$

$$x_1 = \frac{a+x_m}{2} = \frac{0+0.5}{2} = 0{,}25 \quad f(x_1) = 0{,}782707033$$

$$x_2 = \frac{x_m+b}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0{,}75 \quad f(x_2) = 0{,}778800783$$

$bu\ ýerde \quad f(x_m) < f(x_1)\ we\ f(x_m) < f(x_2),$

$onda\ \ a = x_1 = 0{,}25;\ b = x_2 = 0{,}75;\ x_m = 0{,}5.$

$f(x_m) = 0{,}669030659.$

2-nji iterasiýa:

$a = 0{,}25; \quad b = 0{,}75; \quad L = b - a = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}50$

$x_m = 0{,}5 \quad f(x_m) = 0{,}669030659$

$$x_1 = \frac{a+x_m}{2} = \frac{0{,}25+0{,}5}{2} = 0{,}375 \quad f(x_1) = 0{,}707064669$$

$$x_2 = \frac{x_m+b}{2} = \frac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625 \quad f(x_2) = 0{,}687849319$$

$bu\ ýerde\ f(x_m) < f(x_1)\ we\ f(x_m) < f(x_2),$

$onda\ \ a = x_1 = 0{,}375;\ b = x_2 = 0{,}625;\ x_m = 0{,}5.$

$f(x_m) = 0{,}669030659.$

3-nji iterasiýa:

$a = 0{,}375; \quad b = 0{,}625; \quad L = b - a = 0{,}625 - 0{,}375 = 0{,}25$

$x_m = 0{,}5 \quad f(x_m) = 0{,}669030659$

$$x_1 = \frac{a+x_m}{2} = \frac{0{,}375+0{,}5}{2} = 0{,}4375 \quad f(x_1) = 0{,}682284879.$$

$$x_2 = \frac{x_m+b}{2} = \frac{0{,}5+0{,}625}{2} = 0{,}5625 \quad f(x_2) = 0{,}669895739$$

$bu\ ýerde: f(x_m) < f(x_1)\ we\ f(x_m) < f(x_2),$

$onda\ a = x_1 = 0{,}375;\ b = x_2 = 0{,}625;\ x_m = 0{,}5.$

$f(x_m) = 0{,}669030659.$

4-nji iterasiýa:

$a = 0{,}4375; \quad b = 0{,}5625; \quad L = b - a = 0{,}5625 - 0{,}4375 = 0{,}125$

$x_m = 0{,}5 \quad f(x_m) = 0{,}669030659.$

$$x_1 = \frac{a + x_m}{2} = \frac{0.4375 + 0.5}{2} = 0{,}46875 \quad f(x_1) = 0{,}674063771$$

$$x_2 = \frac{x_m + b}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}5625}{2} = 0{,}53125 \quad f(x_2) = 0{,}667521505.$$

$bu\ ýerde\ f(x_1) > f(x_2) > f(x_m),\ onda\ a = x_m = 0{,}5; b = 0{,}5625$

Dört iterasiýadan soň şeýle netijeleri aldyk:

$$L = b - a = 0{,}0625;\ x^* = \frac{a+b}{2} = 0{,}53125$$

$$f(x^*) = 0{,}667521505 \quad [0{,}5;\ 0{,}5625].$$

6.3.2.3. Fibonaççi usuly

$$f(x) = x^4 + e^{-x}, \quad x \in [0{,}5;\ 0{,}5625]$$

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, u_6 = 13$$

1 nji iterasiýa: $n = 4$

$$x_1 = a + \frac{u_4}{u_6}(b - a) = 0.5 + \frac{5}{13}(0{,}5625 - 0{,}5) =$$

$= 0{,}524038461 \quad f(x_1) = 0{,}667538558$.

$$x_2 = a + \frac{u_5}{u_6}(b - a) = 0{,}5 + \frac{8}{13}(0{,}5625 - 0{,}5) =$$

$= 0{,}538461538 \quad f(x_2) = 0{,}667711162$

$bu\ ýerde: f(x_2) > f(x_1),\ onda\ a = 0{,}5;$

$b = x_2 = 0{,}538461538;\ x_2 = 0{,}524038461$.

$f(x_2) = f(x_1) = 0.667538558$.

2-nji iterasiýa: $n = 4 - 1 = 3$.

$a = 0{,}5;\ b = x_2 = 0{,}538461538;\ x_2 = 0{,}524038461;\ f(x_2) = 0{,}66753858$

$$x_1 = a + \frac{u_3}{u_5}(b - a) = 0.5 + \frac{3}{8}(0.538461538 - 0.5) = 0.514423076 \quad f(x_1) = 0.667875026$$

$bu\ \acute{y}erde:\ f(x_1) > f(x_2),\ onda\ a = x_1 = 0{,}514423076;\ b = 0{,}538461538;\ x_1 = x_2 = 0{,}524038461$

$f(x_1) = f(x_2) = 0.667538558$

3-nji iterasiýa $n = 3 - 1 = 2$

$$x_2 = a + \frac{u_3}{u_4}(b - a) = 0.514423076 + \frac{8}{13}(0.538461538 - 0.514423076) = 0.528846153$$

$f(x_2) = 0{,}667504447$

$bu\ \acute{y}erde:\ f(x_1) > f(x_2),\ onda\ \ a = x_1 = 0{,}524038461;\ b = 0{,}538461538;\ x_1 = x_2 = 0{,}528846153$

$f(x_1) = f(x_2) = 0{,}667504447$

4-nji iterasiýa. $n = 2 - 1 = 1$. Gözleg tamamlandy. Interwalyň uzynlygy $L = b - a = 0{,}014423077$.

$$x^* = \frac{a+b}{2} = 0{,}53125 \qquad f(x^*) = 0{,}667521505.$$

6.3.2.4. Kubik aproksimirleme usuly

$$f(x) = x^4 + e^{-x}; \qquad f'(x) = 4x^3 - e^{-x}$$

$x_1 = 0.53125 \qquad \Delta x = 0.0125 \qquad x_2 = x_1 + \Delta x = 0.54375$

$f_1 = f(x_1) = 0{,}667521505 \qquad f_2 = f(x_2) = 0{,}667984276$

$f'_1 = f'(x_1) = 0{,}011861772 \quad f'_2 = f'(x_2) = 0{,}062502297$

$bu\ \acute{y}erde:\ \ sign\ f'_1 = sign\ f'_2\ u\ f_2 > f_1,\ onda\ \ \Delta x = -0{,}0125$

$x_2 = x_1 + \Delta x = 0{,}51875$

$f_2 = f(x_2) = 0{,}667679814$

$f'_2 = f'(x_2) = -0{,}036878421$

$$z = \left[\frac{3(f_1 - f_2)}{x_2 - x_1}\right] + f'_1 + f'_2 = 0{,}012977511$$

$$bu\ ýerde\ x_1 > x_2,\ onda\ \omega = -\sqrt{z^2 - f'_1 f'_2} = -0{,}157434287$$

$$\mu = \frac{f'_2 + \omega - z}{f'_2 - f'_1 + 2\omega} = 0{,}570091366$$

Bu ýerde

$0 \leq \mu \leq 1$

şert ýerine ýetýär. Onda:

$$x^* = x_2 - \mu(x_2 - x_1) = 0{,}525876142$$
$$f(x^*) = 0{,}667514838\ .$$

6-njy baba degişli soraglar we ýumuslar

1. Matematiki programmirlemäniň umumy meselesi haýsy şertlerde: a) ÇP – meselesi; b) ÇDP – meselesi bolýar?

2. ÇDP meseleleriniň haýsy topary üçin çözüw usullary işlenip taýýarlanan?

3. ÇDP meselesiniň optimal çözüwi ÇP meseläňkiden nähili tapawutlanýar?

4. $Z=x_1x_2 \rightarrow max$ bahany

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$ şertlerde tapmaly.

Jogaby: $\max Z = 9; x_1^* = x_2^* = 3$.

5. Lagranžyň köpeldijileri usulynyň ulanylmagy üçin $f(x_1,x_2,...,x_n)$ we $g_i(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiýalary haýsy şertleri kanagatlandyrmaly?

6. a) $x_1+x_2=1$ çäklendirmede $Z=x_1 \cdot x_2$ funksiýanyň;

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ çäklendirmede $Z=x_1 - 2x_2+2x_3$ funksiýanyň maksimal bahalaryny Lagranžyň köpeldijileri usulyny peýdalanyp tapmaly.

7. $y = e^x$ funksiýanyň güberçekdigini subut etmeli.

8. Seperabel $Z=3x_1+2x_2$ funksiýanyň max bahasyny $4x_1+x_2^2 \leq 16; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ çäklendirmelerde tapmaly.

9. Haýsy şertlerde kwadratik programmirlemäniň meselesiniň global maksimumy bolar?

10. $Z=5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ funksiýanyň maksimal bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \end{cases} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

çäklendirmelerde tapmaly (kwadratik programmirlemäniň meselesi).

7. Dinamiki programmirlemegiň meselelerini çözmek

7.1. Dinamiki programmirlemegiň tipli meseleleri

7.1.1. Giriş düşünjeler we kesgitlemeler

Belli bolşy ýaly, ÇP hem-de ÇDP meselelerinde, ykdysady proses statik, ýagny wagta görä üýtgemeýän, wagta bagly bolmadyk hasap edilýärdi. Şol sebäpli, optimal çözüw meýilleşdirmegiň diňe bir döwri, tapgyry üçin tapylýardy. Şeýle meselelere *birtapgyrly* ýa-da *birädimli* diýilýär.

DP meselelerinde bolsa, ykdysady proses wagta bagly bolup, her tapgyr-döwür üçin optimal çözüwler tapylyp, tutuş prosesiň optimal ösüşini üpjin edýär. DP meseleleri – köptaraply, köpädimlidirler. Şeýlelikde, DP köptapgyrly dolandyrylýan, wagta bagly prosesleri optimal meýilleşdirmegi amala aşyrýan matematiki aparatdyr.

Eger ykdysady prosesiň ösüşine täsir edip bolýan bolsa, onda oňa *dolandyrylýan* diýilýär**.** *Dolandyryş* diýip, prosesiň ösüşine täsir etmek üçin her tapgyrda kabul edilýän çözüwleriň toplumyna düşünilýär.

Ykdysady proseslerde dolandyryş – her tapgyrda serişdeleri paýlamakdan we täzeden paýlamakdan ybaratdar. Meselem, islendik kärhanada önümleri goýbermek – dolandyrylýan prosesdir, sebäbi, ol enjamlaryň düzümini, çig mal bermeleriň möçberini, maliýeleşdirmegiň ululygyny we ş.m. üýtgetmek arkaly kesgitlenýär. Şunlukda, meýilleşdirme döwrüniň başynda enjamlary çalyşmak, çig mal bilen üpjün etmek, maliýeleşdirmegiň möçberini üýtgetmek we ş.m. boýunça kärhana tarapyndan kabul edilýän çözgütleriň toplumy – *dolandyryşdyr***.**

Göräýmäge, goýberilýän öňümiň maksimal möçberini almak üçin serişdeleriň maksimal mukdaryny ugrukdyrmak hem-de enjamlary doly güýjinde ulanmak ýeterlik boljak ýalydyr. Emma beýle etmek, enjamlaryň tiz hatardan çykmagyna we netijede, önümleriň goýberilişiniň azalmagyna getirer. Diýmek, önümleriň goýberilişini islenilmeýän ýagdaýlar ýüze çykmaz ýaly meýilleşdirmek gerekdir.

Dolandyrylýan prosesiň *tapgyrynyň başy* diýlip, pul serişdelerini goýbermek, enjamlary çalyşmak ýaly çözgütleriň kabul edilýän pursatyna düşünilýär. *Tapgyr* hökmünde, köplenç bir ýyly kabul edýärler. Şeýlelikde, köptapgyrly prosesi meýilleşdirmegiň maksady – kriterisi bolmalydyr.

Mysal. Goý, käbir T dolandyryş döwri k sany t_i $(i=\overline{1,k})$ hojalyk ýyllaryndan ybarat bolup, $T=\sum_{i=1}^{n} t_i$ bolsun. Bu döwürde $P_1, P_2,..., P_n$ senagat kärhanalarynyň sistemasynyň işi meýilleşdirilýär. Döwrüň başynda kärhanalaryň ösmegi üçin D esasy serişdeler bölünip berlen. Her hojalyk ýylynyň başynda kärhanalaryň sistemasy maliýeleşdirilýär, ýagny, hersine esasy serişdelerden paýy bölünip berilýär.

Kärhanalara öň goýlan serişdeleriň mukdary bilen häsiýetlendirilýän *sistemanyň S_0 başlangyç ýagdaýy* we hemme goşmaça goýlan D pul mukdary bilen häsiýetlendirilýän sistemanyň ahyrky S_k ýagdaýy bellidir.

D esasy serişdäni kärhanalar hem-de ýyllar boýunça nähili paýlanyňda, T döwrüň ahyrynda tutuş sistemadan alynýan jemi girdeji W maksimal bolar ?

x_{ij} bilen i-nji ýylyň başynda j-nji kärhana bölünip berilýän pul mukdaryny belläliň $(i=\overline{1,k};\ j=\overline{1,n})$. Goý, i-nji tapgyrda serişdeler paýlanan bolsun, ýagny $\vec{u}_i$ kesgitli dolandyryş saýlanyp, oňa laýyklykda, i-nji ýylyň başynda P_1 kärhana x_{i1} serişde, P_2 kärhana x_{i2} serişde we ş.m. paýlanan. Onda $\vec{u}_i=\left(x_{i1}, x_{i2},..., x_{in}\right)$ wektor serişdeleriň i-nji tapgyrda paýlanmasyny kesgitleýär. Onda k tapgyrlarda-ädimlerde bölünip berlen serişdeleriň (dolandyryşlaryň) toplumy n ölçeli wektor giňişliginde k sany:

$$\vec{u}_1=\left(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\right),\ \vec{u}_2=\left(x_{21}, x_{22},..., x_{2n}\right),\ ...,$$

$$\vec{u}_k=\left(x_{k1}, x_{k2},..., x_{kn}\right)$$

wektorlaryň sistemasyny kesgitlär. k ýyl boýunça jemi girdeji dolandyryşlaryň toplumyna baglydyr, ýagny

$$W=W\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2,..., \vec{u}_n\right)$$

Mesele şeýle goýulýar: *T* döwürde kärhanalar sistemasyndan alynýan jemi girdeji maksimal bolar ýaly her tapgyrda dolandyryşy saýlamaly.

Umumy ýagdaýda, S_0 – başlangyç we S_k – ahyrky ýagdaýlar takyk berilmän, bu – ýagdaýlaryň $\tilde{S}_0$ – başlangyç we $\tilde{S}_k$ – ahyrky oblastlary berilýär.

DP meseleleriniň köpüsi üçin matematiki seljermäniň we wariasion hasaplamalaryň klassyk usullaryny ulanyp bolmaýar we bu meseleleri çözmek üçin uniwersal usul ýokdur. Her mesele üçin çemli çözüw usulýetini peýdalanmaly bolýar.

7.1.2. Dinamiki programmirlemegiň meseleleriniň umumy goýluşy

Goý käbir fiziki dolandyrylýan *S* sistema $S_0 \in \tilde{S}_0$ başlangyç ýagdaýda ýerleşýän bolsun. Wagtyň geçmegi bilen onuň ýagdaýy üýtgeýär we sistema $S_k \in \tilde{S}_k$ ahyrky ýagdaýa geçýär.

Sistemanyň ýagdaýynyň üýtgeme prosesi bilen käbir W san kriterisi baglydyr. Kriteri özüniň optimal bahasyna ýeter ýaly prosesi guramaly.

Mümkin bolan dolandyryşlaryň köplügini $\vec{U}$ bilen belläliň. Onda meseläni şeýle kesgitläp bolar: mümkin bolan $\vec{U}$ dolandyryşlaryň köplüginden sistemany $S_0 \in \tilde{S}_0$ başlangyç ýagdaýdan $S_k \in \tilde{S}_k$ ahyrky ýagdaýa geçirýän hem-de *W(U)* kpiterä optimal *W* baha kabul etdirýän çözüwi tapmaly.

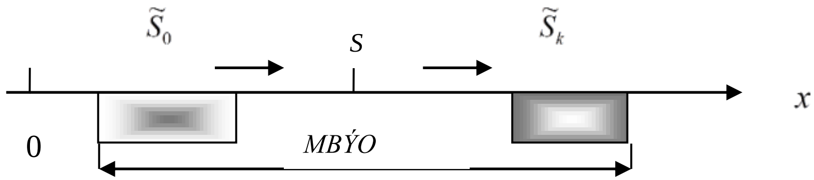
7.1.3. Dinamiki programmirlemegiň meseleleriniň geometriki manysy

S fiziki sistemanyň ýagdaýyny san parametrleri bilen beýan etmek bolar. Bu parametrlere: tizlik, ýangyjyň harçlanmasy, goýlan pul serişdeleri we ş.m. degişlidir. Bu parametrlere *sistemanyň koordinatalary* diýilýär. Onda sistemanyň ýagdaýyny *S* nokat ýaly, onuň S_1 nokatdan S_2 nokada geçmesini bolsa *S* nokadyň traýektoriýasy görnüşinde şekillendirmek bolar. Şeýlelikde, $\vec{u}$ –

dolandyryş S nokadyň S_1 – nokadyň S_2 – nokada geçmesiniň traýektoriýasynyň saýlanmagyny, ýagny kesgitli hereket kanunynyň dikeldilmegini aňladýar.

Sistemanyň geçip biljek ýagdaýlarynyň toplumyna *mümkin bolan ýagdaýlaryň oblasty (MBÝO)* diýilýär. Sistemanyň ýagdaýlaryny häsiýetlendirýän parametrleriň sanyna baglylykda MBÝO dürli görnüşlerde bolup biler.

Meselem, goý S – sistemanyň bir x parametri – koordinaty bolsun. Bu ýagdaýda koordinatyň üýtgemegi Ox oky we onuň bölekleri boýunça bolup geçer. Eger S – sistemanyň ýagdaýy x_1 we x_2 parametrler bilen häsiýetlendirilse, onda dolandyryş x_1Ox_2 koordinat tekizliginde bolup geçer (7.1-nji we 7.2-nji suratlar).



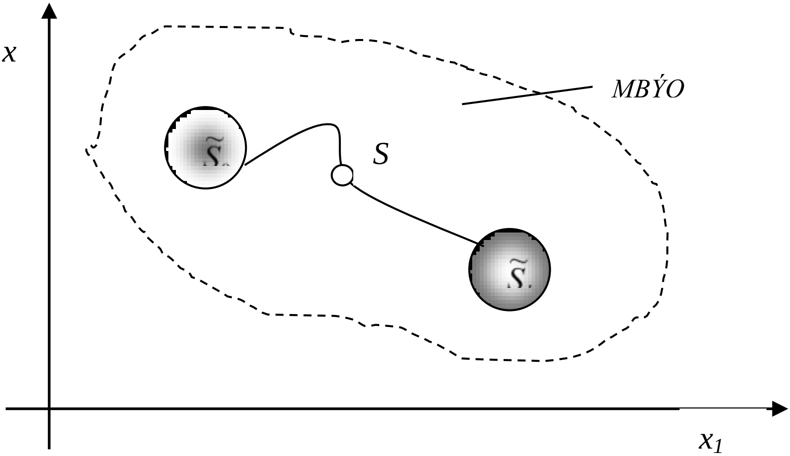
7.1–nji surat

Umumy ýagdaýda, haçanda, sistemanyň ýagdaýy $x_i \ (i=\overline{1,n})$ parametrler bilen beýan edilýän bolsa, onda MBÝO bolup, n –ölçegli giňişlik hyzmat edýär.

Şeýlelikde, *DP* meselesine aşakdaky geometriki manyny bermek bolar: *MBÝO* degişli bolan we $\widetilde{S}_0$ hem-de $\widetilde{S}_k$ oblastlary birikdirýän hemme traýektoriýalardan W kriterä optimal baha eýe bolar ýalysyny saýlamaly.

7.1.4. Optimal dolandyryşy tapgyrlaýyn gurmak ýörelgesi

DP – munuň özi, köptapgyrly prosesi optimal meýilleşdirmek bolup, tutuş prosesiň ösüşini göz öňünde tutmak bilen her tapgyrda diňe bir ädim optimizirlenýär. Emma her ädimde soňky k-njy ädim bar bolup, çözüw kabul etmek geljege bagly däldir. Şol sebäpli, bu ädimde iň uly netijeliligi alyp bolýan dolandyryşy saýlaýarlar. Bu ädimi meýilleşdirip, oňa (k – 1)-nji, (k – 2)-nji,... we ş.m. 1-nji ädimi birikdirmek bolar. Netijede, S_0 başlangyç ýagdaýa gelnip, *DP* proses soňundan – başyna meýilleşdirilýär.



7.2–nji surat

k-njy ädimi meýilleşdirmek üçin (k – 1)-nji ädimiň ýagdaýyny bilmek gerekdir. Eger (k – 1)-nji ädimiň ýagdaýy belli bolmasa, bu derňelýän prosesiň häsiýetlerinden sistemanyň mümkin bolan ýagdaýlary barada dürli teklipleri taýýarlaýarlar. Her teklip üçin soňky k ädime degişli optimal dolandyryşy saýlaýarlar. Şeýle optimal dolandyryşa – *şertli optimal* diýilýär.

Goý, k-njy ädim meýilleşdirilýän bolsun. (k – 1)-nji ädimdäki sistemanyň ýagdaýlary barada dürli teklipleri taýýarlalyň. Bu ýagdaýlary $S_{k-1,1}$, $S_{k-1,2}$,..., $S_{k-1,r}$ bilen belläliň. Soňky ädimde olaryň her biri üçin $u^*_{k,1}(S_{k-1,1}), u^*_{k,2}(S_{k-1,2}),..., u^*_{k,r}(S_{k-1,r})$ – şertli optimal dolandyryşlary tapalyň. k-njy ädim meýilleşdirildi. (k–1)-nji, (k–2)-nji we ş.m. üçin hem şeýle çemeleşeris. Netije-de, $S_0 \in \tilde{S}_0$ – sistemanyň başlangyç ýagdaýyna geleris.

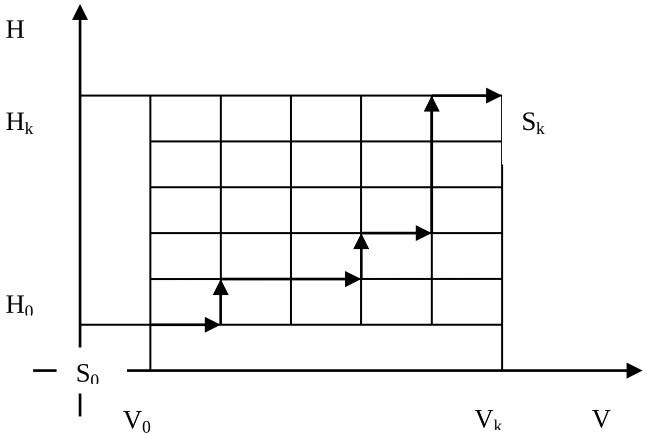
Optimal dolandyryşyň tapgyrlaýyn gurluş ýörelgesine görä, W additiwlik häsiýetine eýe bolmalydyr $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$, bu ýerde: w_i – kriteriniň i-nji tapgyrdaky bahasydyr. Şu pursatdaky ýagdaýyna görä, prosesiň şu hili optimal dowam etdirilmesine *R. Bellmanyň optimallyk ýörelgesi* diýilýär.

7.1.5. Beýikligi we tizligi alýan döwründe uçaryň ýangyç harçlamasyny minimallaşdyrmak meselesi

Goý, H_0 beýiklikde we V_0 – tizlikde barýan uçar H_k beýiklige we V_k – tizlige geçmeli bolsun, Islendik H_1 beýiklikden islendik H_2 beýiklige galan wagtyndaky hem-de islendik V_1 tizlikden islendik V_2 $(V_1<V_2)$ tizlige geçen wagtyndaky sarp edilýän ýangyjyň mukdary bellidir. Ýangyjyň minimal sarp edilmesinde beýikligi we tizligi almagyň optimal dolandyryşyny tapmaly.

Çözülişi. *S* – sistemanyň (uçaryň) iki parametri: *V* tizligi we *H* beýikligi bardyr. Şol sebäpli, çözüwi *VOH* tekizliginde $V=V_0$, $V=V_k$ we $H=H_0$, $H=H_k$ gönüler bilen çäklenen gönüburçlukda gözläris.

Bu gönüburçluk *MBÝO* bolup, başlangyç $S_0(V_0,H_0)$ we ahyrky $S_k(V_k,H_k)$ ýagdaýlar kesgitli S_0 we S_k nokatlardyr (7.3-nji surat).



7.3–nji surat

DP usulynda çözmek üçin $[H_k - H_0]$ kesimi n_1 deň bölege, $[V_k - V_0]$ kesimi n_2 deň bölege böleliň. Şunlukda, her tapgyrda (ädimde) uçar ýa beýikligini $\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ ululyga, ýa-da tizligini $\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ ululyga artdyryp bilýär diýip şertleşeliň.

Görşümiz ýaly, S_0 – dan S_k eltýän traýektoriýalar köpdür. n_1 we n_2 uly sanlar bolanda, hemme wariantlar boýunça gözlegler uly hasaplamalara getirer (bu ýerde hemme wariantlarda *W* ýangyjyň sarp edilmesi hasaplanyp, ol bahalar özara deňeşdirilýär). *DP* usulynda mesele has çalt hasaplanýar.

$n_1 =4$; $n_2 =6$; $k=n_1+n_2=4+6$ şertlerdäki meselä seredeliň (7.4-nji surat). Bu ýerde wertikal çyzyklardaky sanlarda uçaryň hemişelik tizlikde beýikligini almakdaky, gorizontal çyzyklardaky sanlarda bolsa, üýtgemeýän beýiklikde tizlik artandaky ýangyjyň harçlanmasy, kesişme çyzyklardaky tegelejiklerde bolsa ýangyjyň sarp edilmesi görkezilen. Optimallaşdyrmany iň soňky ädimden başlalyň. S_k burça seredeliň. Oňa A_1 we A_2 nokatlardan baryp boljak.

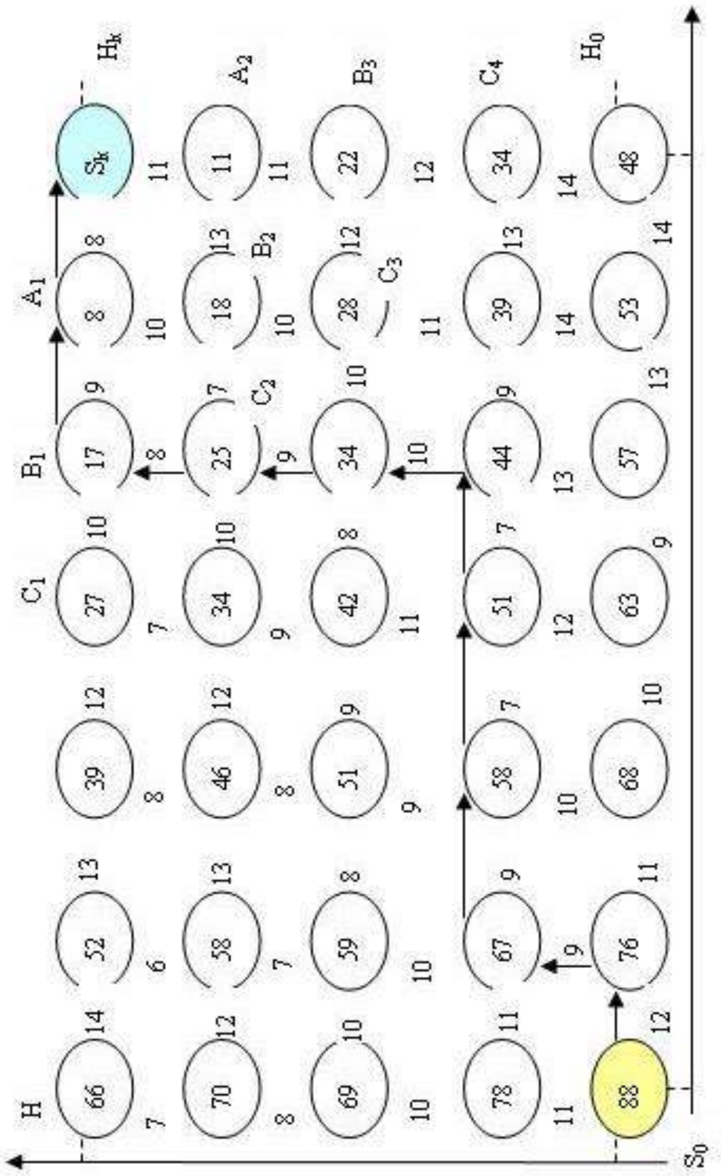
Uçar A_1-den barmak üçin *8*, A_2-den barmak üçin *11* birlik ýangyç harçlar. Bu bahalary degişli tegeleklere ýazalyň. Tegeleklerden çykýan görkezgiçleri ýazalyň. Olar ugry görkezerler. $k=10$ nomerli ädim üçin şertli optimal dolandyryş tapyldy (7.5-nji surat).

9-njy ädimi meýilleşdireliň. *8*-nji ädimde uçaryň ýagdaýyna B_1, B_2, B_3, nokatlaryň biri degişlidir. Bu ýagdaýlar üçin şertli optimal dolandyryşy we bu dolandyryşa degişli ýangyjyň minimal harçlanyşyny kesgitläliň (7.6-njy surat).

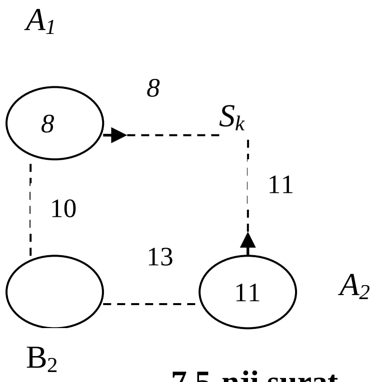
B_1 –nokat üçin saýlama ýok. Mümkin bolan ýeketäk dolandyryş A_1 nokatdan geçer we ýangyjy *17* birlik harçlar. B_2 – nokatdan A_1 we A_2 nokatlaryň üsti bilen iki ýol mümkindir: Birinji ýagdaýda ýangyç harçlanmasy *18* birlik, ikinjide – *24* birlik. A_1 nokatdan geçýän dolandyryşy saýlalyň. Minimal *18* birligi tegelejikde ýazalyň.

B_3 nokat üçin hem A_2 – iň üstünden geçýän ýeketäk ýol bar. Ýangyç harçlanmasynyň *22* birligini tegelejige ýazyp, dolandyryşy görkezeliň.

B_1, B_2 we B_3 nokatlar üçin şertli optimal dolandyryşlar saýlanan, diýmek *9*-njy ädim meýilleşdirilen.



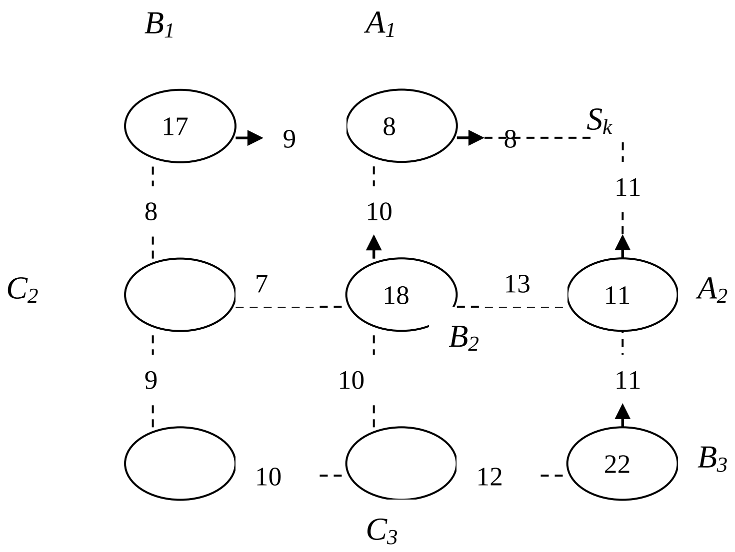
7.4 –nji surat



7.5-nji surat

Şeýle meýilleşdirmeleri C_1, C_2, C_3, C_4 nokatlar we ş.m. üçin geçireliň. Onda S_0 nokada hem geleris. Optimal tutuş dolandyryş *7.4*-nji suratda goşmaça peýkamlar arkaly görkezilendir.

Bu modeli bir wagtda tizligi we beýikligi alyp bolýan ýagdaý üçin hem işlemek bolar.



7.6– njy surat.

7.2. Dinamiki programmirlemegiň meselelerini funksional deňlemeler usulynda çözmek

7.2.1. Funksional deňlemeler usuly barada düşünjeler

R. Bellmanyň belleýşi ýaly, köptapgyrly prosesiň optimal çözüwini tapmaklyk käbir funksional deňlemäniň çözüwine getirýär. Dinamiki programmirlemäniň häsiýetli köptapgyrly prosesi hökmünde ýönekeý maýa goýum meselesine seredeliň. Goý, käbir mukdardaky x maýa goýum serişdeleri bar bolup, ony iki sany birjynsly bolmadyk pudaklaryň ösmegi üçin gönükdirmek gerek bolsun. Eger *I* pudaga y serişde goýlan bolsa, onda *II* pudaga $x-y$ serişde goýlar. Goý goýlan serişdelerden alynýan girdeji, degişlilikde, $g(y)$ we $h(x-y)$ görnüşlerde aňladylsyn.

y ululygy (x-iň paýlanmagyny) nähili saýlanymyzda, umumy girdeji W maksimal bolar diýen soragy goýalyň. Goýlan mesele:

$$W_1(x,y)=g(y) + h(x-y) \qquad (7.1)$$

maksat funksiýanyň maksimal bahasyny hemme $y \in [0,x]$ bahalar üçin tapmaklyga getirýär.

Goý, g we h funksiýalary hemme tükenikli $x \geq 0$ bahalar üçin üznüksiz bolsunlar. Şeýlelikde, $\max_{y\in[0,x]} W_1(x,y)$ ululyk bir tapgyrly prosesde mümkin bolan maksimal girdejini kesgitleýär. Şu ýerde, girdejiniň ölçeg birligi x serişdäniň ölçeg birliginden tapawutlanmagy mümkin, meselem, x pul mukdaryny, a $g(y)$ bolsa y pul mukdaryna satyn alnan maşynlaryň hasabyna tygşytlanan adam-sagatlaryň mukdaryny we ş.m. aňladyp biler.

Iki tapgyrly prosese seredeliň. Goý, $g(y)$ girdejini almak üçin serişdeleriň başlangyç y mukdary ay ululyga ($0 \leq a < 1$) azalan bolsun. Şuňa meňzeşlikde, serişdeleriň ($x-y$) mukdary hem $b(x-y)$, ($0 \leq b < 1$) ululyga azalar. Şeýlelikde, bir tapgyrly proses amala aşandan soň, serişdeleriň galan mukdary $ay+b(x-y)$ bolar. Bu ululygy $ay + b(x-y) = x_1 = y_1 + (x_1 - y_1)$ görnüşde belläliň, bu ýerde: $0 \leq y_1 \leq x_1$. Bu paýlamanyň netijesinde hem $g(y_1) + h(x_1 - y_1)$ girdejini alarys. Onda bu ýagdaýda doly girdeji

$W_2(x,y,y_1) = g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1)$ bolar we iki ölçegli $y0y_1$ giňişlikde $\max_{0\le y\le x, 0\le y_1\le x_1} W_2(x,y,y_1)$ ululygyň bahasy gözlener.

Serişdeleriň paýlanmasy yzygider N gezek amala aşyrylýan N tapgyrly prosese seredeliň. Bu prosesden doly girdeji:

$$W_N(x,y,y_1,y_2,\dots,y_{N-1}) = g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + \cdots + g(y_{N-1}) + h(x_{N-1} - y_{N-1}) \qquad (7.2)$$

bu ýerde *I, II, ... (N – 1)*-nji tapgyrlardan soňky paýlanmaly ululyklar:

$$\begin{array}{ll} x_1 = ay + b(x-y), & 0 \le y \le x; \\ x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1), & 0 \le y_1 \le x_1; \\ ------------------ & \\ x_{N-1} = ay_{N-2} + b(x_{N-2} - y_{N-2}), & 0 \le y_{N-2} \le x_{N-2}; \\ & 0 \le y_{N-1} \le x_{N-1} \end{array} \qquad (7.3)$$

görnüşinde kesgitlenýär. (7.2) funksiýany N ölçegli giňişlikde $y, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ üýtgeýänler boýunça maksimallaşdyryp, (7.3) şertlerde jemi girdejiniň maksimal bahasyny taparys.

Netijede, käbir oblastda N üýtgeýänli funksiýanyň maksimal bahasy gözlenýän analitik (klassyk) meselä geldik. Meseläniň çözüwini klassyk usullarda gözlemek uly kynçylyklara eltýär. Şol sebäpli, meseläni N tapgyrly prosesde optimallyk ýörelgesine laýyklykda tapgyrlaýyn çözeliň. Onda maksat funksiýasyny

$$f_N(x)=\max_{0\le y\le x} W_N(x,y,y_1,y_2,\dots,y_{N-1}), \qquad x\ge 0, \quad N=1,2,\dots$$

görnüşinde kesgitläris. Bu ýerden, meseläniň şertine görä, bir tapgyrlaýyn proses üçin

$$f_1(x) = \max_{0\le y\le x}[g(y) + h(x-y)] \qquad (7.4)$$

funksional deňlemäni alarys.

Iki tapgyrlaýyn proses üçin funksional deňleme düzülende, $f_2(x)$ funksiýany $f_1(x)$-iň üsti bilen aňlatmalydyr. Iki tapgyrlaýyn prosesde, doly girdeji *I* tapgyryň hem-de paýlanmagy üçin $ay+b(x-y)$ pul mukdary galýan *II* tapgyryň girdejilerinden durýar.

Şunlukda, başda y nähili saýlanan bolsa hem, galýan pul mukdary iň oňaýly peýdalanylmalydyr. Diýmek, y_1 optimal saýlanan bolsa, y ululyga baglylykda, ikinji tapgyrda $f_1(ay + b(x-y))$ girdejini alarys. Doly girdeji bolsa:

$$f_2(x) = \max_{0 \le y \le x}\left[g(y) + h(x-y) + f_1(ay + b(x-y))\right] \quad (7.5)$$

formula bilen kesgitlener hem-de f_1 we $f_2$funksiýalar baglanyşar. Şuňa meňzeşlikde, N tapgyrly proses üçin esasy funksional deňlemäni alarys:

$$f_N(x) = \max_{0 \le y \le x}\left[g(y) + h(x-y) + f_{N-1}(ay + b(x-y))\right] \quad (7.6)$$

bu ýerde $N \ge 2$ we $f_1(x)$ funksiýa (7.4) boýunça kesgitlenýär.

$f_1(x)$ funksiýany peýdalanyp, (7.6) boýunça $f_2(x), f_2(x), \dots, f_{N-1}(x), f_N(x)$ funksiýalary kesgitläris. Şunlukda, her tapgyrda diňe $f_k(x), k = \overline{1, N}$, kesgitlenmän, $y_k(x)$ funksiýalar hem tapylýar. Bu usul arkaly bir N ölçegli mesele – N sany bir ölçegli meseleleriň yzygiderligine getirildi.

7.2.2. Resurslary paýlama meselesini funksional deňlemeler usulynda çözmek

Goý, (7.6) meselede x serişdeler y we $x-y$ ululyklara bölünende, k-njy ýylda $g_k(x, y)$ girdeji alnan bolup, mundan beýläk paýlanmagy üçin hem $r_k(x, y)$ serişdeler galýan bolsun. N tapgyrlaýyn prosesde doly girdejini maksimal edýän dolandyryşy tapmak talap edilýär.

Goý, $g_k(x, y)$ we $r_k(x, y)$ funksiýalary x we y-den üznüksiz $(x \ge 0,\ 0 \le y \le x)$ bolup, ýene-de $0 \le r_k(x, y) \le ax,\ a \le 1,\ k = 1,2,...$ şert hem ýerine ýetsin.

Goý, $f_{k,N}(x)$ – bölünip berlen x ululykdan başlanýan N tapgyrlaýyn prosesiň k-njy ýylyndaky doly girdeji bolsun. Onda

$N=1$ üçin $f_{k1}(x)=\max\limits_{0\le y\le x} g_k(x,y).$ alarys. Tapgyrlaryň sany $N\geq 2$ bolanda $f_{kN}(x)=\max\limits_{0\le y\le x}\{\ g_k(x,y)+f_{k+1,N-1}(r_k(x,y))\ \}.$

Ýönekeýlik üçin, diňe bir indeksi ulanalyň. Goý, her tapgyra $k=1,2,...,N$ bahalar degişli bolsun. Onda şeýle funksional deňlemelere geleris.

$k=N$ bolanda:

$$f_N(x)=\max_{0\le y\le x} g_N(x,y); \tag{7.7}$$

$k=N-1,\ N-2,\ ...,\ 2,1$ bolanda:

$$f_k(x)=\max_{0\le y\le x}\{\ g_k(x,y)+f_{k+1}(r_k(x,y))\ \}. \tag{7.8}$$

1-nji mesele. I we II önümçilik kärhanalaryny 1 ýylda ösdürmek üçin x (pul möçberi) serişdesi bölünip berlen. Goý, birinji kärhana bölünip berlen x_1 serişde $g(x_1)=0{,}4\sqrt{x_1}$ peýda, ikinji kärhana bölünip berlen x_2 serişde bolsa $h(x_2)=0{,}6\sqrt{x_2}$ peýda getirýän bolsun, bu ýerde $x_1+x_2=x$. Serişdeler nähili paýlananda kärhanalardan alynýan umumy peýda maksimal bolar?

Çözülişi. Peýda funksiýalary $[0,x]$ kesimde üznüksiz we güberçek. Onda eger $x_1=y$ belgilesek, onda $x_2=x-y$ bolar. Diýmek, peýda funksiýalary

$g(x_1)=g(y)=0{,}4\sqrt{y}, \qquad h(x_2)=h(x-y)=0{,}6\sqrt{x-y}$

görnüşlerde bolup, umumy peýda-maksat funksiýasy

$$R(x,y)=g(y)+h(x-y)=0{,}4\sqrt{y}+0{,}6\sqrt{x-y}$$

ýaly ýazylar. Meseläniň şerti boýunça $y\in[0,x]$ kesimde $\max_{0\le y\le x} R(x,y)$ gözlenýär. Bu ýerde x belli, y–näbelli. Onda berlen $[0,x]$ aralykda $x=x_1+x_2,\quad x_1,x_2\geq 0$ şertde $R(x,y)$ funksiýasynyň iň uly bahasy gözlenýän klassyky meselä geldik. Meseläniň umumy çözüw algoritmi şeýledir:

1-nji ädim. $R(x,y)$ funksiýanyň ${dR}/{dy}$ önümini hasaplamaly we ony nola deňläp, ekstremum y^* nokadyny kesgitlemeli, bu nokatda $R(x,y^*)$ bahany hasaplamaly.

2-nji ädim. $[0, x]$ kesimiň uçlarynda $R(x, 0)$ we $R(x, x)$ bahalary kesgitlemeli.

3-nji ädim. $R(x, y^*)$, $R(x, 0)$ we $R(x, x)$ bahalary özara deňeşdirip, $R(x, y)$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Bu algoritme görä alarys:

1-nji ädim. $R(x, y)'_y = \left(0{,}4\sqrt{y} + 0{,}6\sqrt{x-y}\right)'_y = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + 0{,}6 \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{x-y}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{y}} - \frac{0{,}3}{\sqrt{x-y}}$; $\quad \frac{0{,}2}{\sqrt{y}} - \frac{0{,}3}{\sqrt{x-y}} = 0$; $\quad \frac{0{,}2}{\sqrt{y}} = \frac{0{,}3}{\sqrt{x-y}}$;

Deňligiň iki tarapyny hem kwadrata götereliň

$$\frac{0{,}04}{y} = \frac{0{,}09}{x-y}; \quad 0{,}04(x-y) = 0{,}09y; \quad 0{,}04x = 0{,}13y.$$

Onda: $y = \frac{0{,}04}{0{,}13}x$ ýa-da $y^* = \frac{4}{13}x$ optimal çözüw alynýar. Bu bahany maksat funksiýasynda ornuna goýup, onuň maksimal bahasyny hasaplalyň.

$$R(x, y^*) = 0{,}4\sqrt{y^*} + 0{,}6\sqrt{x - y^*} = 0{,}4\sqrt{\frac{4}{13}x} + 0{,}6\sqrt{x - \frac{4}{13}x} =$$

$$= 0{,}4 \cdot \sqrt{\frac{4}{13}} * \sqrt{x} + 0{,}6 \cdot \sqrt{\frac{9}{13}} \cdot \sqrt{x} =$$

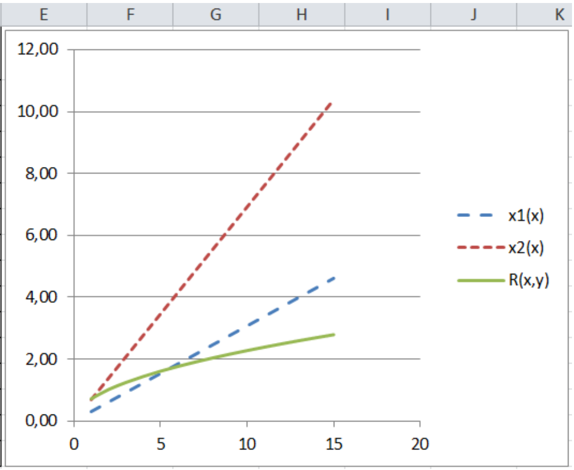
$$= \frac{0{,}4\sqrt{4}}{\sqrt{13}} + \frac{0{,}6\sqrt{9}}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{x} == \frac{0{,}4 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 3}{\sqrt{13}}\sqrt{x} =$$

$$= \frac{0{,}8 + 1{,}8}{\sqrt{13}}\sqrt{x} = \frac{2{,}6}{\sqrt{13}}\sqrt{x} \approx 0{,}72111\sqrt{x}.$$

2-nji ädim. $y = 0$; onda $R(x, 0) = 0{,}6\sqrt{x}$; $y = x$; onda $R(x, x) = 0{,}4\sqrt{x}$.

3-nji ädim. $R(x, y^*) \approx 0{,}72111\sqrt{x}$; $R(x, 0) = 0{,}6\sqrt{x}$ we $R(x, x) = 0{,}4\sqrt{x}$ bahalary özara deňeşdirip $0{,}72111\sqrt{x} > 0{,}6\sqrt{x} > 0{,}4\sqrt{x}$ gatnaşyklary alarys. Bu ýerden $0{,}72111\sqrt{x}$–iň uly baha degişli $y_{opt} = y^* = \frac{4}{13}x$ optimal paýlanyşy alarys. Diýmek, bölünip berlen x serişdäniň $\frac{4}{13}$ bölegini birinji kärhananyň, $\frac{9}{13}$ bölegini ikinji kärhananyň ygtyýaryna bermek bilen takmyn $0{,}72111\sqrt{x}$–umumy peýda alynjak eken (kärhanalaryň diňe birine − ikinjisine gönükdirmek bilen $0{,}6\sqrt{x}$ peýda alnar). Optimal çözüwleri $x_1(x) = \frac{4}{13}x,\ \ x_2(x) = \frac{9}{13}x$ ýaly belgiläp, olaryň hem-de $R(x, y^*) = 0{,}72111\sqrt{x}$ maksimal peýda funksiýasynyň bahalaryny we grafiklerini görkezeliň (7.7-nji surat).

	A	B	C	D
1	x	x1(x)	x2(x)	R(x,y)
2	1	0,31	0,69	0,72
3	2	0,62	1,38	1,02
4	3	0,92	2,08	1,25
5	4	1,23	2,77	1,44
6	5	1,54	3,46	1,61
7	6	1,85	4,15	1,77
8	7	2,15	4,85	1,91
9	8	2,46	5,54	2,04
10	9	2,77	6,23	2,16
11	10	3,08	6,92	2,28
12	11	3,38	7,62	2,39
13	12	3,69	8,31	2,50
14	13	4,00	9,00	2,60
15	14	4,31	9,69	2,70
16	15	4,62	10,38	2,79

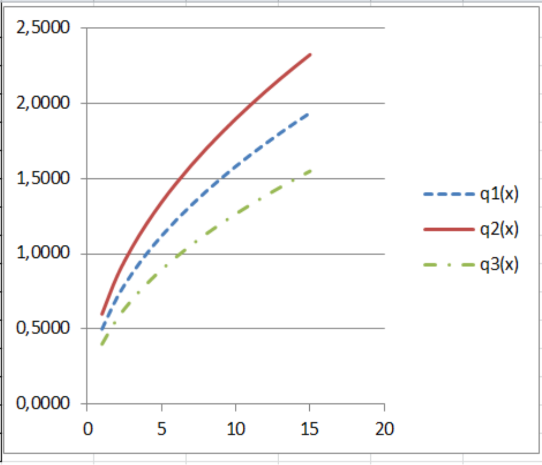


7.7-nji surat.

2-nji mesele. Täze tehnikalary almak maksady bilen *x* serişde (pul möçberi) bölünip berlip, olary I, II we III kärhanalaryň arasynda, degişlilikde $x_1{:}x_2{:}x_3$ görnüşinde paýlamak talap edilýär. Maýa goýumynyň netijeliligi-peýdalylygy (önümçilik funksiýalary) kärhanalaryň arasynda birmeňzeş däl, olar argumentiň artmagy bilen ösüş tempi kemelýän, güberçek monoton artýan üznüksiz funksiýalar ýaly aňladylýarlar (7.8-nji surat):

$$q_1(x_1) = 0{,}5\sqrt{x_1}\ ; \qquad q_2(x_2) = 0{,}6\sqrt{x_2}\ ; \qquad q_3(x_3) = 0{,}4\sqrt{x_3}\ .$$

x	q1(x)	q2(x)	q3(x)
1	0,5000	0,6000	0,4000
2	0,7071	0,8485	0,5657
3	0,8660	1,0392	0,6928
4	1,0000	1,2000	0,8000
5	1,1180	1,3416	0,8944
6	1,2247	1,4697	0,9798
7	1,3229	1,5875	1,0583
8	1,4142	1,6971	1,1314
9	1,5000	1,8000	1,2000
10	1,5811	1,8974	1,2649
11	1,6583	1,9900	1,3266
12	1,7321	2,0785	1,3856
13	1,8028	2,1633	1,4422
14	1,8708	2,2450	1,4967
15	1,9365	2,3238	1,5492



7.8-nji surat.

Cözülişi. Görşümiz ýaly, umumy netijelilik

$$R(x_1, x_2, x_3) = q_1(x_1) + q_2(x_2) + q_3(x_3) =$$
$$= 0{,}5\sqrt{x_1} + 0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}4\sqrt{x_3}.$$

görnüşinde aňladylyp, onuň maksimal bahasyny $x = x_1 + x_2 + x_3$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ şertlerde gözlemelidir. Onda meseläniň matematiki modeli şeýle aňladylar:

$$R(x_1, x_2, x_3) = 0{,}5\sqrt{x_1} + 0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}4\sqrt{x_3} \to max$$
$$x = x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Başdan göräýmäge hemme serişdäni diňe II kärhana gönükdiräýmeli ýalydyr (onuň girdejililik koeffisiýenti 0,6 deň). Emma berlen pul möçberini optimal (rasional) paýlamak has ýokary netijeliligi üpjün edýär.

Meseläniň funksional deňlemeler usulyndaky çözüw yzygiderligini getireliň:

1-nji ädim. $f_1(x) = q_1(x) = 0{,}5\sqrt{x}$;

2-nji ädim. $f_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} R_2(x_1, x_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq x}\{q_2(x_2) + f_1(x - x_2)\} = \max\limits_{0 \leq x_2 \leq x}\{0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}5\sqrt{x - x_2}\}$.

Bu ýerde $R_2(x_1, x_2) = R_2(x_2) = 0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}5\sqrt{x - x_2}$ funksiýanyň $\frac{dR_2}{dx_2}$ önümini nola deňläliň: $\frac{dR_2}{dx_2} = \frac{0{,}6}{2\sqrt{x_2}} - \frac{0{,}5}{2\sqrt{x - x_2}} = 0.$

Degişli özgertmelerden soň alarys:

$0{,}3\sqrt{x-x_2}=0{,}25\sqrt{x_2}$; $\quad 0{,}09(x-x_2)=0{,}0625x_2$;

$x_2=\frac{900}{1525}\,x=\frac{36}{61}\,x$; $\qquad x-x_2=\frac{625}{1525}\,x=\frac{25}{61}\,x.$

$R_2(x_1,x_2)=R_2(x_2)$ funksiýasy seredilýän *[0, x]* kesimde güberçek üznüksiz bolany üçin onuň iň uly bahasy onuň maksimum nokadynda ýetýär, şol sebäpli kesimiň uçlarynda funksiýanyň bahalaryny hasaplamaýarys.

Diýmek, I we II kärhanalar üçin niýetlenen resursyň ölçegine garamazdan ony $x_1{:}x_2 = 25{:}36$ gatnaşykda bölmelidir. Şunlukda, bu tapgyrda maksat funksiýasynyň maksimal bahasy

$$f_2(x)=0{,}6\cdot\frac{6}{\sqrt{61}}\cdot\sqrt{x}+0{,}5\cdot\frac{5}{\sqrt{61}}\cdot\sqrt{x}=\frac{3{,}6+2{,}5}{\sqrt{61}}\cdot\sqrt{x}=0{,}1\sqrt{61}\sqrt{x}\,.$$

3-*nji ädim.*

$$f_3(x)=\max_{0\le x_3\le x}R_3(x_1,x_2,x_3)=\max_{0\le x_3\le x}\{q_3(x_3)+$$
$$+f_2(x-x_3)\}=\max_{0\le x_3\le x}\left\{0{,}4\sqrt{x_3}+0{,}1\cdot\sqrt{61}\sqrt{x-\ x_3}\right\}.$$

Bu ýerde hem ýokardakylara meňzeşlikde alarys:

$$\frac{dR_3}{dx_3}=\frac{0{,}4}{2\sqrt{x_3}}-\frac{0{,}1\cdot\sqrt{61}}{2\sqrt{x-x_3}}=0;\ 0{,}2\sqrt{x-x_3}=0{,}05\cdot\sqrt{61}\cdot\sqrt{x_3}\,;$$

$$x_3=\frac{16}{77}x;\qquad x-x_3=\frac{61}{77}x\,.$$

Diýmek jemi pul möçberiniň $\frac{16}{77}$ bölegini III kärhana, a I we II kärhanalara bolsa galan $\frac{61}{77}$ bölegini gönükdirmeli eken. Bu ýagdaýda jemi netijeliligiň maksimal bahasy

$$f_3(x)=\left\{0{,}4\sqrt{\frac{16}{77}x}+0{,}1\cdot\sqrt{61}\sqrt{\frac{61}{77}x}\right\}=\frac{1{,}6+6{,}1}{\sqrt{77}}\sqrt{x}=0{,}1\cdot\cdot$$
$$\cdot\sqrt{77}\sqrt{x}=0{,}8775\cdot\sqrt{x}$$

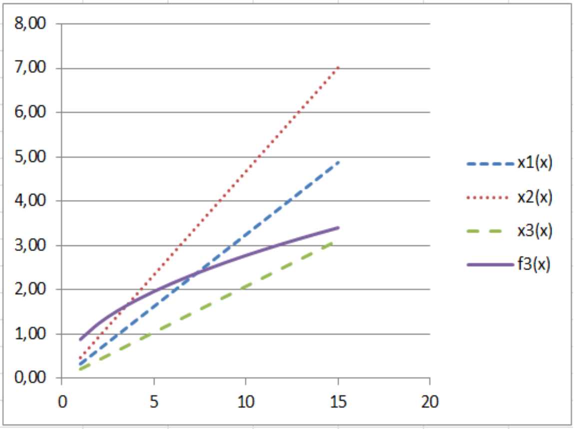
ululyga deň bolar.

Çözüwiň ters ugry. 2-nji ädime geçmek bilen $\frac{61}{77}\,x$ pul möçberini I we II kärhanalaryň arasynda 25:36 gatnaşykda paýlalyň.

$$x_1=\frac{25}{61}\cdot\frac{61}{77}x=\frac{25}{77}x\,,\qquad x_2=\frac{36}{61}\cdot\frac{61}{77}x=\frac{36}{77}x\,.$$

Şeýlelikde, maýa goýumynyň islendik resursynda optimal çözüw boýunça ony $x_1{:}x_2{:}x_3=25{:}36{:}16$ gatnaşykda paýlamalydyr. *Maýa goýumynyň*$-x$ *r*esursyň bölünip berlen möçberine baglylykda x_1, x_2, x_3 üýtgeýänleriň optimal hem-de netijeleýji maksat funksiýasynyň maksimal $f_3(x) = 0{,}8775 \cdot \sqrt{x}$ bahalarynyň tablisasy hem-de grafikleri 7.9-njy suratda görkezilen.

x	x1(x)	x2(x)	x3(x)	f3(x)
1	0,32	0,47	0,21	0,88
2	0,65	0,94	0,42	1,24
3	0,97	1,40	0,62	1,52
4	1,30	1,87	0,83	1,76
5	1,62	2,34	1,04	1,96
6	1,95	2,81	1,25	2,15
7	2,27	3,27	1,45	2,32
8	2,60	3,74	1,66	2,48
9	2,92	4,21	1,87	2,63
10	3,25	4,68	2,08	2,77
11	3,57	5,14	2,29	2,91
12	3,90	5,61	2,49	3,04
13	4,22	6,08	2,70	3,16
14	4,55	6,55	2,91	3,28
15	4,87	7,01	3,12	3,40



7.9-njy surat.

Iki kärhananyň arasyndaky bir tapgyrlaýyn mesele çözülende (1-nji mesele) optimal çözüw goýlan *x* serişdäni (kärhanalaryň peýda önümçilik funksiýalary $g(x_1) = 0{,}4\sqrt{x_1}$ we $h(x_2) = 0{,}6\sqrt{x_2}$ bolanda) möçberine garamazdan $x_1{:}x_2=4{:}9$ görnüşde paýlamaklygy teklip edýär hem-de maksat funksiýasynyň maksimal bahasy $0{,}72111\sqrt{x}$ peýda funksiýasy arkaly aňladylýar (bu ýerde netijelilik $0{,}72111/0{,}6 \cdot 100\% = 120\% -$ e barabar). Optimal cözüwleriň, maksimal peýda funksiýasynyň bahalary we grafikleri şekillendirilýär.

Peýda funksiýalary:

$q_1(x_1) = 0{,}5\sqrt{x_1}$; $q_2(x_2) = 0{,}6\sqrt{x_2}$; $q_3(x_3) = 0{,}4\sqrt{x_3}$

görnüşde bolan üç kärhananyň arasynda maýa goýum meselesi optimal çözülende, goýlan *x* serişdäni möçberine garamazdan $x_1{:}x_2{:}x_3=25{:}36{:}16$ gatnaşykda paýlamak teklip edilip, optimal çözüw

maksat-peýda funksiýasynyň $f_3(x) = 0{,}8775 \cdot \sqrt{x}$ ýaly bahasyny kesgitleýär
(munda netijelilik 0,8775/0,6$\cdot$ $100\% \approx 146\%$ ululyga barabar).

Görşümiz ýaly, şu ýerde esasy mesele önümçilik prosesiniň hakyky şertlerinde Kobba-Duglasyň funksiýasyna ýakyn önümçilik (peýda ýa-da girdeji) funksiýalarynyň görnüşini real kesgitlemekdir.

7.3. Dinamiki programmirlemegiň stohastik meselelerini çözmek

7.3.1. Dinamiki programmirlemegiň stohastik meseleleri barada

Meýilleşdirme tejribesinde sistemanyň ýagdaýyna we kriteriniň bahasyna tötän faktorlaryň täsir edýän halatlary köp bolýar. Şeýle meselelerde dolandyrylýan proses diňe sistemanyň başlangyç ýagdaýy we saýlanan dolandyryşlar bilen kesgitlenmän, tötänliklere hem baglydyr. Şeýle meselelere *stohastik* ýa-da *ähtimallykly meseleler* diýilýär.

Stohastik meselelerde sistemanyň ýagdaýyny her tapgyrynda anyk kesgitlemek mümkin däldir, sebäbi:

- ✓ sistema girýän üýtgeýän ululyklar belli paýlanma funksiýaly tötän ululyklar bolup bilerler;
- ✓ maksat funksiýasy üýtgäp biler;
- ✓ uzak möhletleýin döwre meýilleşdirilen wagtynda hemme normatiwleriň we koeffisiýentleriň bahalary üýtgemegi mümkin we ş.m.

Additiw kriterili köptapgyrly ekstremal stohastik meseleleri çözmek üçin DP usullaryny ulanmak bolar. Meseläniň stohastik modelinde i tapgyrdan i – 1 tapgyra geçmeklik käbir kesgitsizligi saklaýar. $\vec{V}_i(\vec{S}_i, \vec{U}_i)$ öwürmäniň netijesinde $\vec{S}_i$ – belli ýagdaý wektory, $G(\vec{S}_i, \overrightarrow{Z_{i-1}}, \vec{U}_i)$ paýlanma funksiýaly $\vec{Z}_i$ – tötän ýagdaý wektoryna geçýär. Şol sebäpli, i – 1 tapgyrda çözüw kabul etmek üçin $\overrightarrow{S_{i-1}}$ – ýagdaý wektorynyň bahasyny üpjün etmelidir

Determinirlenen prosesdäki ýaly, stohastik prosesde hem öwürmeleriň yzygiderligini shematik ýazmak bolar:

$$\overrightarrow{Z_{N-1}} = \overrightarrow{V_N}(\overrightarrow{S_N}, \overrightarrow{U_N})$$
$$\overrightarrow{Z_{N-2}} = \overrightarrow{V_{N-1}}(\overrightarrow{S_{N-1}}, \overrightarrow{U_{N-1}})$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$\overrightarrow{Z_0} = \overrightarrow{V_1}(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{U_1})$$

Bu ýerde tersine yzygiderligi ýazmak bolýan däldir. Sebäbi öwürmeleriň netijesi syn etmelerden soň belli bolýar.

$\overrightarrow{Z_i}$ wektorlaryň tötänliginden $\overrightarrow{U_i}$ – dolandyryş wektorynyň hem tötänligi gelip çykýar. Bu kriteriniň bahasynyň kesgitsizligi bilen düşündirilýär, ýagny $W = \sum_{i=1}^{N} g_i(\overrightarrow{S_i}, \overrightarrow{U_i})$ funksiýa tötän ululyklaryň jeminiň funksiýasydyr. Şol sebäpli, sistemanyň özüni alyp barşynyň hil ölçegı bolup, mümkin bolýan netijeleriň orta häsiýetnamalary çykyş eder. Şeýle häsiýetnama orta arifmetiki bahadyr, ýagny matematiki garaşmadyr (*MG*).

MG-niň *çyzyklylyk* $M(X_1+X_2+...+X_n)=M(X_1) + M(X_2) +...+ +M(X_n)$ häsiýeti funksional deňlemeleri ýönekeýleşdirmäge mümkinçilik berýär, onuň $M[M(X_1) + M(X_2) +... +M(X_n)] = M(X_1) + +M(X_2) +... +M(X_n)$ *inwariantlyk häsiýeti* bolsa, geljekki çözüwleriň sistemanyň ýagdaýynyň önki taryhyna däl-de, diňe, şu pursatdaky ýagdaýyna esaslanýandygyny görkezýär.

Goý, S_N –ýagdaýdan başlanýan N – tapgyrlaýyn prosesde $\overrightarrow{Z_{N-1}}$ ýagdaýlar boýunça kesgitlenen $f_N(\overrightarrow{S_N})$ funksiýasy kriteriniň ululygynyň matematiki garaşmasynyň maksimumy bolsun. Onda:

$$f_N(\overrightarrow{S_N}) = \max_{\overrightarrow{U_i}} M\left\{\sum_{i=1}^{N} g_i\left[\overrightarrow{V_i}(\overrightarrow{S_i}, \overrightarrow{U_i}), \overrightarrow{U_i}\right]\right\} =$$
$$= \max_{\overrightarrow{U_i}} M\left\{\sum_{i=1}^{N} g_i(\overrightarrow{Z_{i-1}}, \overrightarrow{U_i})\right\} \qquad (7.9)$$

Bu formuladan diskret ýagdaýlar üçin alarys:

$$f_N(\overrightarrow{S_N}) = \max_{\overrightarrow{U_N}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} [g_N(\overrightarrow{Z_{N-1}}, \overrightarrow{U_N}) + f_{N-1}(\overrightarrow{Z_{N-1}})] \cdot p_j \right\} \qquad (7.10)$$

bu ýerde $p_j(j=\overline{1,m})$ ululyk $\overrightarrow{Z_{N-1}}$ – tötän wektoryň alyp biljek bahalarynyň mümkin bolan *m* diskret ýagdaýlarynyň ähtimallygydyr:

$$0 \le p_j \le 1, \ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1.$$

7.3.2 Stohastik wariantda resurslary paýlama meselesi

Goý, *x* serişdesi *y* we *x – y* ululyklara paýlananda *g(y)* we *h(x – y)* girdeji funksiýalary şeýle kesgitlenýän bolsunlar:

- ✓ $g(y)=g_1(y)$, haçanda, p_1 ähtimallyk bilen, *y* ululyk a_1y ululyga çenli azaldylanda;
- ✓ $g(y)=g_2(y)$, haçanda, $p_2=1-p_1$ ähtimallyk bilen, *y* ululyk a_2y ululyga çenli azaldylanda;
- ✓ $h(x-y)=h_1(x-y)$, haçanda, q_1 ähtimallyk bilen, *x – y* ululyk $b_1(x-y)$ ululyga çenli azaldylanda;
- ✓ $h(x-y)=h_1(x-y)$, haçanda, $q_2=1-q_1$ ähtimallyk bilen, *x – y* ululyk $b_2(x-y)$ ululyga çenli azaldylanda.

Görşümiz ýaly, p_1, p_2, q_1, q_2 – ähtimallyklar bilen bolup geçýän wakalar özara baglanyşyksyz. Onda olaryň paýlanma kanunlaryny şeýle görnüşde ýazmak bolar (7.1-nji tablisa).

Ululyklaryň paýlanma kanunlary. **7.1-nji tablisa**

Serişdeleriň mukdary	$a_1y+b_1(x-y)$	$a_2y+b_1(x-y)$	$a_1y+b_2(x-y)$	$a_2y+b_2(x-y)$
Ähtimallygy	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2

Eger $P_1=p_1\,q_1$, $P_2=p_1\,q_2$, $P_3=p_2\,q_1$, $P_4=p_2\,q_2$ kabul etsek, onda $\sum_{i=1}^{4} P_i = 1,\ 0 \le P_i \le 1$. ýazyp bileris. Şeýlelikde, tötän ululygyň diskret paýlanma kanunyny aldyk.

$f_N(x)$ – maksat funksiýasyny, haçanda, optimallyk ýörelgesi berjaý edilende, *N* – tapgyrlaýyn prosesiň doly girdejisiniň matematiki garaşmasy ýaly kesgitläliň:

$$f_N(x)=\max_{0\le y\le x}\{p_1q_1[g_1(y)+h_1(x-y)+f_{N-1}(a_1y+b_1(x-y))]+$$
$$+p_1q_2[g_1(y)+h_2(x-y)+f_{N-1}(a_1y+b_2(x-y))]+$$
$$+p_2q_1[g_2(y)+h_1(x-y)+f_{N-1}(a_2y+b_1(x-y))]+ \qquad (7.11)$$
$$+p_2q_2[g_2(y)+h_2(x-y)+f_{N-1}(a_2y+b_2(x-y))]$$

we

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{p_1q_1[g_1(y)+h_1(x-y)]+p_1q_2[g_1(y)+h_2(x-y)]+$$
$$+p_2q_1[g_2(y)+h_1(x-y)]+p_2q_2[g_2(y)+h_2(x-y)]\}, \qquad (7.12)$$

bu ýerde:

$0 \le a_1, a_2, b_1, b_2 \le 1;\ \ 0 \le p_1, p_2, q_1, q_2 \le 1;\ p_1 + p_2 = 1;\ q_1 + q_2 = 1.$

Eger p_1, p_2, q_1, q_2 – ähtimallyklar belli bolsa, onda determinirlenen prosese ýakyn prosesi alýarys, ýöne, hasaplamalaryň warianty köpelip, kompýuterleriň ulanylmagy hökmanydyr.

7.3.3. Peýdaly magdanlaryň gazylyp alynma meselesini çözmek

Goý, peýdaly magdanlaryň A we B gazylyp alynýan ýerleri bolup, olaryň gorlary, degişlilikde, x we y birlikler bolsun. Magdanlary gazyp almak üçin bir gazyjy enjam ulanylyp, ýa kesgitli ähtimallykda goruň bölegini gazyp alýar, ýa-da hatardan çykyp, mundan beýläk ulanylmaýar. Eger gazyjy enjam A ýerde işleýän bolsa, onda p_1 ähtimallyk bilen goruň r_1 bölegini gazyp alýar we $1\text{-}p_1$ ähtimallykda hatardan çykýar. Eger gazyjy enjam B ýerde işleýän bolsa, onda p_2 ähtimallykda bar bolan goruň r_2 bölegini gazyp alýar we $1\text{-}p_2$ ähtimallykda hatardan çykýar.

A we B ýerlerde gazyjy enjamy haýsy yzygiderlikde ulanamyzda, gazyjy enjam hatardan çykýança, gazylyp alynýan peýdaly magdanlaryň umumy mukdary maksimal bolar?

Meseläni çözmek üçin gazyjy enjamyň işleme döwrüni tapgyrlara böleliň. Gazyjy enjamy ulanmaklygy A ýa-da B ýerden başlamak bolar. Eger gazyjy enjam öňki tapgyrda hatardan çykmadyk bolsa, onda indi haýsy ýerde ony işletmelidigini çözmelidir.

$f_N(x,y)$ funksiýany, gazyjy enjam hatardan çykýança, gazylyp alynýan peýdaly magdanyň garaşylýan mukdary görnüşinde kesgitläliň.

Birtapgyrlaýyn prosesde *A* ýerden ortaça p_1r_1x , *B* ýerden bolsa, p_2r_2y mukdar alnar. Onda:

$$f_1(x,y) = max\ [\ p_1r_1x;\ p_2r_2y\ ] \qquad (7.13)$$

N+1 tapgyrly prosese seredeliň. Başlangyç saýlama nähili bolsa-da, prosesiň galan *N* tapgyrdaky dowamy optimal bolmalydyr. Onda *A* ýer saýlanan mahalynda, *N+1* tapgyrly prosesde gazylyp alnan peýdaly magdanlaryň *(GAPM)* mukdary:

$$f_A(x,y)=p_1[r_1x+f_N((1-r_1)x,y)]. \qquad (7.14)$$

B ýeri saýlananda bolsa:

$$f_B(x,y)=p_2[r_2y+f_N(x,(1-r_2)y)]. \qquad (7.15)$$

Meseläniň şerti boyunça GAPM-iň umumy mukdaryny maksimallaşdyrmaly bolany üçin (7.14) we (7.15) deňlemeleri birleşdirip, *(N+1)* tapgyrly proses üçin esasy funksional deňlemäni alarys:

$$f_{N+1}(x,y)=max[f_A(x,y),\ f_B(x,y)] = \max\begin{cases} p_1\left[r_1x + f_N\left((1-r_1)x, y\right)\right] \\ p_2\left[r_2x + f_N\left(x,(1-r_2)y\right)\right] \end{cases} \qquad (7.16)$$

7.3.3.1. GAPM-iň anyk meselesini çözmek

(7.13) we (7.16) funksional deňlemeleri ulanyp, üçtapgyrly prosesde optimal çözüwi $x=400,\ y=200,\ p_1= 0,7;\ r_1= 0,6;\ p_2 = 0,8$; $r_2 = 0,8$; bahalarda kesgitläliň.

Birtapgyrly prosese garalyň, şunlukda (7.13) deňlemäni ulanarys. Birinji tapgyrda işi *A*-dan ýa-da *B*-den başlarys. *A*-ny saýlasak, onda ortaça *GAPM* $f_1(x,y)=p_1r_1x\ =0.7\cdot 0.6\cdot 400=168(birlik)$ bolar. Eger 1-nji tapgyryň dowamynda gazyjy enjam hatardan çykmasa, onda 2-nji tapgyryň başynda, “*A*-da dowam etmelimi, ýa-da *B*-den başlamalymy” diýen saýlamany geçirmelidir. *A* ýerden r_1x birlik *GAPM* alyndy. Onda onuň galyndysy x-r_1x $=(1$-$r_1)x$ birlik bolar ; *B* ýerde gor öňküligine galdy. Funksional deňlemäni çözüp alarys:

$$f_1[(1-r_1)x,y] = \max\begin{Bmatrix} p_1(1-r_1)x \\ p_2r_2y \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 0,7\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 400 \\ 0,8\cdot 0,8\cdot 200 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 67,2 \\ 128 \end{Bmatrix} = 128(birlik)$$

Diýmek, 2-nji tapgyrda gazyjy enjam *B* punktda işlemelidir.

3-nji tapgyryň başynda *B* ýer boýunça işi dowam etmelidigi ýa-da *A* ýere geçmelidigi baradaky çözüw saýlanmalydyr. *B* ýerde r_2y birlik GAPM alnan, onuň galyndysy bolsa $y\text{-}r_2y=(1\text{-}r_2)y$ birlik ululyga deňdir. Onda alarys:

$$f_1[(1-r_1)x,\ (1-r_2)y] = \max\begin{Bmatrix} p_1 r_1 (1-r_1)x \\ p_2 r_2 (1-r_2)y \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 400 \\ 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 200 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 67{,}2 \\ 25{,}6 \end{Bmatrix} = 67{,}2(birlik).$$

Diýmek, *3*-nji tapgyrda gazyjy enjam *A* ýerinde işlemelidir. Şeýlelikde, eger *1*-nji tapgyrda iş *A* ýerde başlanan bolsa, optimal hereket boýunça *2*-nji tapgyrda işi *B* ýerde başlamalydyr, *3*-nji tapgyrda bolsa *A* ýerde işi dowam etdirmelidir.

Goý, iş *B* ýerde başlanan bolsun. Onda *1*-nji tapgyrda GAPM-iň alynmagy, ortaça $f_1(x,y)=p_2r_2y=0.8\cdot 0.8\cdot 200=128(birlik)$ bolar.

2-nji tapgyryň başynda saýlalyň:

$$f_1[x,(1-r_2)y] = \max\begin{Bmatrix} p_1 r_1 x \\ p_2 r_2 (1-r_2) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 168 \\ 25{,}6 \end{Bmatrix} = 168(birlik).$$

Diýmek, işi *A* ýerinde başlamalydyr.

3-njı tapgyryň başynda ýene saýlama geçireliň:

$$f_1[(1-r_1)x,(1-r_2)y] = \max\begin{Bmatrix} 67{,}2 \\ 25{,}6 \end{Bmatrix} = 67{,}2(birlik)$$

ýagny, işi *A* ýerinde dowam etmelidir.

7.3.4. Markow proseslerinde aňladylýan stohastik meseleler

Özüni alyp barmasy markow prosesleri arkaly beýan edilýän stohastik sistemalary çözmekde *DP* usullaryny peýdalanmak netijelidir.

Markow prosesleri arkaly *P* – geçiş matrisasy hem-de başlangyç ýagdaýlaryň $\overrightarrow{\Pi}(0)$ – wektor-setiri berlen ähtimallykly sistemalary beýan etmek bolar.

Bir ýagdaýyndan beýleki ýagdaýyna geçmek diskret wagt interwallarynda bolup geçýän sistema seredeliň. Goý, sistemanyň *N* ýagdaýlary *1,2 ..., N* nomerler bilen belgilenen bolsun. Eger sistemanyň ýagdaýy ýönekeý markow prosesi arkaly beýan edilse, onda *i* ýagdaýdan *j* ýagdaýa (*i*<*j*) geçmekligiň ähtimallygy, diňe *i* we *j* indekslere bagly bolup, sistemanyň *i* ýagdaýa gelmezden öňki özüni alyp barmasyna bagly däldir. Başgaça, geçiş ähtimallygy *i* ýagdaýyň häzirki we geljekki hallaryna baglydyr. Onda $P=(p_{ij}),\ i,j=1,2,...,N$ geçiş matrisasyny girizmek bolar, bu ýerde p_{ij} – *i* ýagdaýdan *j* ýagdaýa geçmekligiň ähtimallygydyr, şunlukda:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1,\ i = 1,2,3,\ ...,\quad p_{ij} \geq 0$$

şertler ýerine ýetmelidir. Başlangyç ýagdaýlaryň:

$$\vec{\Pi}(0) = (p_1(0), p_2(0), ..., p_N(0)),\qquad \sum_{j=1}^{N} p_j(0) = 1$$

wektoryny girizeliň. Onda *1* takt işden soň ähtimallykly ýagdaýy

$$p_1(1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0)\, p_{i1}$$

görnüşde hasaplarys. Şuňa menzeşlikde:

$$p_k(1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0)\, p_{ik}\ ,\quad k = 2,3,...,N$$

hasaplanar. Diýmek:

$$\vec{\Pi}(1) = \vec{\Pi}(0)\cdot P;\ \ \vec{\Pi}(2) = \vec{\Pi}(1)\cdot P = \vec{\Pi}(0)\cdot P^2;...,$$

$$\vec{\Pi}(m) = \vec{\Pi}(0)\cdot P^m; \qquad (7.17)$$

ýa-da:

$$\vec{\Pi}(n+1) = \vec{\Pi}(n)\cdot P; \qquad (7.18)$$

formulalary alarys.

Mesele. “Deriönümleri” firmasy aýal torbalarynyň täze modeliniň önümçiligini ýola goýýar. Firmanyň ýagdaýlar köplügini şertli iki hala bölmek bolar:

1) täze model isleg tapýar;

2) täze model isleg tapmaýar.

Goý, geçiş ähtimallyklarynyň matrisasy şeýle bolsun :

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

Goý, firma işini torbanyň şowly modelinden başlasyn. Onda $\vec{\Pi}(0)$=(1;0) bolar. Goý, ýagdaýlara geçmeklik diskret wagt interwallarynda, meselem her hepdeden bolsun. Onda bir hepdeden soň sistemanyň ýagdaýy:

$$\vec{\Pi}(1)=\vec{\Pi}(0)\cdot P=(1;0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

bolar. Diýmek, bir hepdeden soň, torbanyn isleg tapýandygynyň ýa-da tapmaýandygynyň ähtimallyklary $p_1=p_2=1/2$ deň eken. Iki hepdeden soň alarys ($n=2$):

$$\vec{\Pi}(2)=\vec{\Pi}(1)\cdot P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot P=\begin{pmatrix}\frac{9}{20} & \frac{11}{20}\end{pmatrix};$$

$n=3,4,5$ üçin hem hasaplap, netijeleri tablisada ýazalyň (7.2-nji tablisa).

Hasaplamalaryň netijeleri. **7.2-nji tablisa**

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$p_1(n)$	*1*	*0,5*	*0,45*	*0,445*	*0,4445*	*0,44445*
$p_2(n)$	*0*	*0,5*	*0,55*	*0,555*	*0,5555*	*0,55555*

Indi firma öz işini torbanyň şowsuz modelinden başlandaky ýagdaýlarynyň ähtimallygyny hasaplalyň (7.3-nji tablisa).

Hasaplamalaryň netijeleri. **7.3-nji tablisa**

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$p_1(n)$	*0*	*0.4*	*0.44*	*0.444*	*0.4444*	*0.44444*
$p_2(n)$	*1*	*0.5*	*0.56*	*0.556*	*0.5556*	*0.55556*

Tablisalardaky maglumatlary seljermek arkaly, $n \to \infty$, $p_1(n) \to 4/9$; $p_2(n) \to 5/9$ bolýandygyny görýäris. Diýmek, ýagdaýlaryň predel ähtimallyklary başlangyç ýagdaýa bagly dal eken. Şeýle häsiýetlere eýe bolan markow proseslerine – *ergodik* diýilýär.

7.3.5. Z – öwürmeler usuly arkaly markow proseslerini seljermek

Geçiş döwründe markow prosesleriniň özüni alyp barmasyny öwrenmek üçin Laplasyň *Z* – öwürmeler usulyny ulanmak amatlydyr.

Gözenekleýin $f(n)$, $n=0,1,\ \ldots$ funksiyalary üçin Laplasyň *Z* – öwürmeleri:

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot z^n\,, \quad z < 1$$

gatnaşyklary arkaly kesgitlenýär, bu ýerde:

- ✓ $f(n)$ – asyl-original funksiýa;
- ✓ $f(z)$ – original $f(n)$ funksiýanyň Laplas tarapyndan diskret aňladylyşy;
- ✓ z – öwürmäniň parametri.

Esasy ulanylýan funksiýalar hem-de olaryň *Z* – öwürmeleri 7.4-nji tablisada görkezilýär.

Esasy ulanylýan funksiýalaryň Z – öwürmeleri. **7.4-nji tablisa**

Original funksiýalar	***Olaryň Z – öwürmeleri***
$f(n)$	$f(z)$
$f_1(n)+f_2(n)$	$f_1(z)+f_2(z)$
$k \cdot f(n)$	$k \cdot f(z)$
$f(n-1)$	$z \cdot f(z)$
α^n	$1/(1+\alpha z)$
$f(n+1)$	$(f(z)-f(0))/z$
1 (birlik böküş)	$1/(1-z)$
$n * \alpha^n$	$\alpha \cdot z/(1-\alpha \cdot z)$
n (basgançaklaýyn)	$z/(1-z)^2$
$a^n f(n)$	$f(\alpha \cdot z)$

(7.18) formula Laplasyň z – öwürmelerini ulanalyň:

$$(\vec{\Pi}(z) - \vec{\Pi}(0)) / z = \vec{\Pi}(z) \cdot P \qquad (7.19)$$

Onda alarys: $\vec{\Pi}(z) - z\vec{\Pi}(z) \cdot P = \vec{\Pi}(0)$, $\vec{\Pi}(z)(E - z \cdot P) = \vec{\Pi}(0)$ ýa-da

$$\vec{\Pi}(z) = \vec{\Pi}(0)(E - z \cdot P)^{-1}. \qquad (7.20)$$

Bu ýerde E – birlik matrisa, $(E\text{-}z\cdot P)^{-1}$ bolsa, $(E - z \cdot P)$– matrisanyň ters matrisasydyr.

Mesele. “Deriönümleri” firmasynyň geçiş matrisasyny *Z*-öwürmeler arkaly seljermeli.

Çözülişi.

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ bolany üçin $(E - zP) = \begin{pmatrix} 1 - z/2 & -z/2 \\ -2z/5 & 1 - z/2 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}z}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

7.5-nji tablisadan originaly tapalyň:

$$(E - zP)^{-1} \Rightarrow H(n) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

$\vec{\Pi}(n) = \vec{\Pi}(0) \cdot H(n)$, $\vec{\Pi}(n) = \vec{\Pi}(0) \cdot P^n$. Onda: $P^n = H(n)$.

Goý, $\vec{\Pi}(0) = (1;0)$ bolsun. Onda:

$$\vec{\Pi}(n) = \left(\frac{4}{9}; \quad \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^n \left(\frac{5}{9}; \quad \frac{-5}{9}\right) \text{ ýa-da}$$

$$p_1(n) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n; \quad p_2(n) = \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Görşümiz ýaly, *H(n)* matrisasy birnäçe goşulyjylardan ybarat. Onuň $\frac{1}{1-z}$ köpeldijili goşulyjylarynyň biri hemişelik matrisadyr. Şeýle matrisa *stasionar* diýilýär. Ergodik prosesde *H(n)*-i düzýän matrisalaryň hökman biri stasionar bolar. *H(n)*-iň beýleki düzüjisi bolan *T(n)* matrisasy – geçiş matrisasy bolup, onuň komponentleri *n*-iň derejelerine baglydyr. Şeýle matrisanyň her setiriniň elementleriniň jemi nola deň bolup, oňa *differensiallaýyn matrisa* diýilyär.

Diýmek, *H(n)* matrisasy her setiri ýagdaýlaryň predel ähtimallyklarynyň wektoryndan ybarat stasionar *S* – matrisasyndan hem-de elementleri *n*-iň artmagy bilen kemelýän geometriki progressiýa bolan differensial *T(n)* matrisasyndan durýar.

Käwagtlar $\vec{\Pi}$ wektoryň birden köp nol elementleri bolýar. Şeýle ýagdaýlara *gaýdypgelmesiz* diýýärler. Gaýdypgelmesiz ýagdaýdan, sistema käbir aragatnaşykly ýagdaýlaryň köplügine düşüp biler hem-de ol köplükde tükeniksiz gezek geçişleri amala aşyrar. Ýagdaýlaryň şeýle köplügine markow prosesiniň *ergodik klasy* diýilýär. Her bir markow prosesiniň iň bolmanda bir ergodik klasy bardyr. Eger sistemada diňe bir ergodik klas bar bolsa, onda sistema *ergodikdir*. Eger prosesde birden köp ergodik klaslar bolsa, onda sistemanyň ergodiklik häsiýeti ýerine ýetmeýär, sebäbi, tükeniksiz gezek şol klaslarda geçişleri amala aşyryp, başga ýagdaýlara düşüp bilmeýär. Şol sebäpli, ýagdaýlaryň ergodik klasyna, başgaça *umumy ýuwdulýan ýagdaý* diyilýär.

7.3.6. Girdejili markow prosesleri

Goý, *N* ýagdaýly markow prosesi arkaly teswirlenýän sistema *i* ýagdaýdan *j* ýagdaýa geçende V_{ij} manat girdeji getirýän bolsun. Sistemanyň girdejileriniň köplügi $R=(V_{ij}),\ i,j=1,2,\dots,N$ matrisasyny emele getirýär. Onda şeýle meselani formulirlemek bolar: eger berlen pursatda sistema *i* ýagdaýda bolsa, indiki *n* geçişlerde sistemanyň ortaça utuşy nähili bolar? Bu utuşy $V_i(n)$ bilen belläliň. Onda

$$V_i(n)=\sum_{j=1}^{N}(V_{ij}+V_i(n-1))\cdot p_{ij}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}p_{ij}V_{ij}+\sum_{j=1}^{N}V_i(n-1)\cdot p_{ij},\ i=\overline{1,N} \qquad (7.21)$$

ýazyp bileris.

$\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\ V_{ij}=q_i$ belläliň. Bu ululyga, *i* ýagdaýdan çykanda, garaşylýan *ortaça girdeji* hökmünde garamak bolar. Onda q_i – ululyga *i ýagdaý üçin garaşylýan girdeji* diýeris.

(7.21) deňlemäni wektor formada şeýle ýazmak bolar:

$$\vec{V}(n)=\vec{q}+P\vec{V}(n-1), \qquad (7.22)$$

$\vec{V}(n))$ – doly girdejileriň wektory.

$\vec{V}(n+1)=\vec{q}+P\vec{V}(n)$ gatnaşyga *Z*-öwürmäni ulanalyň. Onda:

$$z^{-1}(\vec{V}(z)-\vec{V}(0))=\frac{1}{1-z}\cdot\bar{q}+P\vec{V}(z)$$

$$\vec{V}(z)-\vec{V}(0)=\frac{z}{1-z}\cdot\bar{q}+P\vec{V}(z) \quad \text{ýa-da}$$

$$\vec{V}(z)(E-zP)=\frac{z}{1-z}\cdot\bar{q}+\vec{V}(0) \quad \text{bu ýerden:}$$

$$\vec{V}(z)=\frac{z}{1-z}(E-zP)^{-1}\cdot\bar{q}+(E-zP)\vec{V}(0) \qquad (7.23)$$

Öňden görkezişimiz ýaly, ergodik markow prosesleri üçin *(E – zP)* – matrisanyň tersi *S+T(n)* – görnüşinde aňladylýar (*S* – stasionar ; *T(n)* – differensial matrisalar). Diýmek:

$$(E-zP)^{-1}=\frac{1}{1-z}*S+T(z) \qquad (7.24)$$

(7.24) aňlatmany (7.23)-e goýup taparys:

$$\vec{V}(z)=\frac{z}{(1-z)^2}S\cdot\vec{q}+\frac{z}{1-z}T(z)\vec{q}+\frac{1}{1-z}S\vec{V}(0)+T(z)\vec{V}(0) \quad (7.25)$$

(7.25) aňlatma degişli $\vec{V}(n)$ originalyň häsiýetlerine seredeliň. Onuň üçin z – öwürmäniň esasy häsiýetlerini ulanalyň (tablisa seret).

1) $\frac{z}{(1-z)^2}S\cdot\vec{q}$ aňlatma S$\vec{q}$ – basgançaklaýyn funksiýa degişli;

2) $\frac{z}{1-z}T(z)\cdot\vec{q}$ agza polozitel elementli, n – iň artmagy bilen agzalary T(1) $\vec{q}$ ululygyň böküşini aňladýar;

3) $\frac{z}{1-z}S\cdot\vec{V}(0)$ goşulyjy $S\cdot\vec{V}(0)$ ululygyň böküşine degişlidir;

4) T(z)V(0) – agza n – iň artmagy bilen ululygy peselýän goşulyja degişlidir.

Şeýlelikde, *n*-iň uly bahalarynda girdeji funksiýasynyň asimptotasy şeýle görnüşde bolar:

$$\vec{V}(n)=nS\vec{q}+T(1)\vec{q}+S\vec{V}(0) \qquad (7.26)$$

Girdejili markow proseslerini dolandyrmak üçin, esasan, rekurrent we iterasiýa usullaryny peýdalanýarlar.

7.3.6.1. Girdejili markow prosesini dolandyrmak üçin iterasiýa usuly

Tükeniksiz uzynlykdaky *N* ýagdaýlary bolan, girdejili ergodik prosesine seredeliň. Goý, bu proses wagt birligindäki ortaça girdeji bilen ýa-da g peýda bilen häsiýetlenýän bolsun. Proses ergodik bolany üçin $\pi_i(i=\overline{1,N})$ predel ähtimallyklary sistemanyň başlangyç ýagdaýyna bagly däldir, a peýda bolsa:

$$g=\sum_{i=1}^{N}\pi_i\cdot q_i \qquad (7.27)$$

görnüşinde kesgitlener, bu ýerde q_i – ululyk i ýagdaýda garaşylýan girdejidir.

Peýdany (1 geçişde ortaça girdejini) maksimallaşdyrýan çözüwe *optimal* diýilýär. Islendik çözüwi $\vec{d}$ bilen belläliň, onuň komponentleri prosesin degişli ädimlerinde strategiýalaryň nomerlerini aňladar.

R.Howard tarapyndan hödürlenen iterasiýa usulyny ulanalyň. (7.22) formula laýyklykda $V_i(n)$ ululyklary aşakdaky rekurrent gatnaşyklary kanagatlandyrýar:

$$V_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} V_j(n-1), \quad i=\overline{1,N}, \quad n=1,2,... \qquad (7.28)$$

Beýleki tarapdan, ergodik prosesler üçin $V_i(n)$ ululygyň şeýle asimptotik görnüşi bardyr:

$$V_i(n)=ng_i + w_i, \quad i=1,2,...,N \qquad (7.29)$$

Sistemanyň asimptotik hereketine seredeliň. Onuň üçin (7.28) we (7.29) – formulalardan alarys:

$$ng_i + w_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[(n-1)g_i + w_j], \quad i=\overline{1,N}, \quad n=1,2,...$$

$$ng_i + w_i = q_i + (n-1)g_i \sum_{j=1}^{N} p_{ij} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} w_j, \quad i=\overline{1,N}, \quad n=1,2,... \qquad (7.30)$$

$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$ bolany üçin (7.30) – dan alarys:

$$g_i+w_i=q_i+\sum_{j=1}^{N} w_j p_{ij}, \quad i=\overline{1,N} \qquad (7.31)$$

Görşümiz yaly, gözlenýän g peýdany hem-de w_i ululyklary $P=(p_{ij}),\ i,j=1,2,...,N$ – ähtimallyklar hem-de $R=(r_{ij}),\ i,j=1,2,...,N$ – girdejiler matrisalary bilen baglanyşdyrýan N – çyzykly deňlemeler sıstemasy alyndy. Bu ýerde näbellileriň (w_i we g) sany $N+1$. Kynçylykdan çykmak üçin w_i agramlaryň islendigini nola deňläp (meselem, $w_N=0$), galan agramlary şunuň üsti bilen kesgitläris.

(7.31) – sistemanyň i-nji deňlemesini π_i – ululyga (i – ýagdaýyň predel ähtimallygyna) köpeldip, hemme i-ler boyunça jemläliň:

$$g\sum_{i=1}^{N} \pi_i + \sum_{i=1}^{N} \pi_i w_i = \sum_{i=1}^{N} \pi_i q_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \pi_i p_{ij} w_{ij} \qquad (7.32)$$

Deňeşdirmek arkaly (7.28) we (7.31) deňliklerin deňgüýçlidigini görýäris.

Biz ýokarda, n – ädime çenli optimal çözüwler ulanylanda ($n+1$)-nji ädimdaki optimal strategiýanyň:

$$\max_k \left\{ q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k V_i(n) \right\}$$

aňlatma boýunça tapylýandygyny görkezdik. N-iň uly bahalarynda $V_i(n)$ ululygy $ng+w_j$ aňlatma bilen çalşyp, maksimum kriterini şeýle görnüşde alarys :

$$\max_k \left\{ q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k (ng + w_j) \right\},\ i = \overline{1, N} \qquad (7.33)$$

Bu ýerde $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k = 1$ bolany üçin $\sum_{j=1}^{N} ngp_{ij}^k$ goşulyjy k nomere bagly däldir we kriteriden ýok edilip bilner.

Şeýlelikde, eger sistema i ýagdaýda bolsa, onda K – optimal strategiýany tapmak üçin:

$$\max_k \left\{ q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k w_j \right\},\ i = \overline{1, N}$$

tapmaklyga geldik, şunlukda, öň ýandaky ädimde (7.31) deňlemelerden tapylan w_j – otnositel agramlaryň bahalaryny ulanmak bolar.

Şeýlelikde, Howardyn usulynda bir iterasiýa iki tapgyrdan ybaratdyr :

a) *Agramlary kesgitlemek* – berlen adimin p_{ij} we q_i çözüwlerini ulanmak bilen (7.31) sistemadan $w_N = 0$ kabul edip, g peýdany hem-de w_i – otnositel agramlary taparys.

b) *Çözüwi gowulandyrmak.* Öň ýandaky çözüwiň otnositel agramlaryny ulanyp, her i ýagdaý üçin:

$$\left\{ q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k w_j \right\},\ i = \overline{1, N}$$

Kriterini *max* baha eýe etdirýän k' strategiýany tapýarys. Şundan soň, bu strategiýany *i* ýagdaý üçin täze çözüw hökmünde kabul edip, q_i^k ululygy $q_i^{k'}$, p_{ij}^k ululyklary $p_{ij}^{k'}$ bilen çalşyrýarys hem-de “agramlary kesgitlemek” tapgyryna dolanyp gelýäris.

Iterasiýa tapgyryny islendik tapgyrdan başlamak bolar. Eger birinji tapgyrdan başlansa, onda başlangyç çözüwi saýlamalydyr. Eger ikinji tapgyrdan başlansa, onda başlangyç agramlaryň ýygyndysyny bermelidir. Eger ýörite başlangyç çözüwi saýlamak boýunça deslapky informasiýalar bolmasa, onda hemme $w_i = 0$ kabul edip prosesi başlamak bolar. Onda her bir *i* ýagdaý üçin q_i^k ululygy – girdejini maksimizirleýän k' strategiýa tapylar. Şundan soň, agramlary kesgitlemek tapgyryna girişilip ($d_i = k'$ kabul edilip) iterasiýa başlanýar. Şunlukda, eger iki yzygider iterasiýalaryň çözüwleri gabat gelseler, onda optimal çözüw alyndy diýlip hasap edilýär.

7.3.6.2. Girdejili markow prosesini dolandyrmagyň anyk meselesini iterasiýa usulynda çözmek

“Deriönümleri” firmasy prosesiň ähtimallygyny hem-de girdejilerini üýtgedýän çözüwleri kabul edip bilýär. Meselem, eger taýýarlanan model şowly bolsa, onda oňa islegi artdyrmak üçin mahabatdan peýdalanmak bolar. Emma mahabatlar goşmaça çykdajylara getirip, garaşylýan girdeji azalar.

Goý, mahabatlar ulanylanda 1-nji ýagdaýyň geçiş ähtimallyklary $[p_{1j}]=[0,8;\ 0,2]$, degişlilikde girdejileriň paýlanmasy $[r_{1j}]=[4;\ 4]$ diýeliň. Indi firma 1-nji ýagdaýda bolmak bilen, mahabatyny ulanyp ýa-da ulanman biler. Bu mümkinçilikleri 1-nji we 2-nji strategiýalar diýeris *(k=1,2)*. Şeýlelikde, 1-nji ýagdaý üçin alarys:

$$p_{1j}^{(1)} = [0{,}5;\ 0{,}5],\ r_{1j}^{(1)} = [9;\ 3],\ p_{1j}^{(2)} = [0{,}8;\ 0{,}2],\ r_{1j}^{(2)} = [4;\ 4].$$

2-nji ýagdaýda hem strategiýalaryň birnäçe warianty bolup biler. Meselem, şowly modeli almak ähtimallygyny ýokarlandyrmak üçin derňew işlerine harajatlary artdyrmak bolar, ýöne sistemanyň bu ýagdaýda bolmagynyň gymmaty artyp, girdejiler azalar. Bu strategiýa (2-nji strategiýa) ýagdaýlaryň ähtimallygynyň hem-de girdejileriň şeýle paýlanyşyny berer:

$$p_{2j}^{(2)} = [0,7; 0,3], \; r_{2j}^{(2)} = [1; -9].$$

Meseläniň maglumatlaryny tablisa görnüşinde aňladalyň (7.5-nji tablisa).

Önümçiligi bes etmezden kän öň, maksimal peýda görer yaly, firmanyň ýolbaşçylaryna haýsy çözgüdi kabul etmek gerek?

Çözülişi. Başda haýsy çözgüdiň gowudygy bize belli däldir. Şol sebäpli $w_1 = w_2 = 0$ kabul edýäris.

1-nji ýagdaýdaky sistema üçin optimal strategiýanyň k – nomeri

$$\max_{k=1,2}\{q_1^k\} = \max\{6; 4\} = 6$$

aňlatma boýunça hasaplanar (diýmek, $k=1$).

Meseläniň maglumatlary. **7.5-nji tablisa**

i *ýagdaýlar*	*k* *strategiýalar*	*Girdejiler*				q_i^k
		p_{i1}^k	p_{i2}^k	r_{i1}^k	r_{i2}^k	
Şowly model	*Mahabatsyz*	*0,5*	*0,5*	*9*	*3*	*6*
	Mahabatly	*0,8*	*0,2*	*4*	*4*	*4*
Şowsuz model	*Derňewsiz*	*0,4*	*0,6*	*3*	*– 7*	*– 3*
	Derňewli	*0,7*	*0,3*	*1*	*– 19*	*– 5*

2-nji ýagdaýdaky sistema üçin optimal strategiýanyň k nomeri

$$\max_{k=1,2}\{q_2^k\} = \max\{-3; -5\} = -3$$

aňlatmadan alnar (ýene $k=1$).

Diýmek $i=1,2$ ýagdaýlarda hem fırmanyň ýolbaşçylary $k=1$ strategiany saýlamalydyrlar. Şunlukda:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \; P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \; \vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

bolar. Şundan soň, agramlary kesgitlemegiň tapgyryna geçýäris. (7.31)-den alarys:

$$g+w_1=6+0{,}5w_1+0{,}5w_2;\ \ g+w_2=-3+0{,}4w_1+0{,}6w_2.$$

$w_2=0$ kabul edip, deňlemeler sistemasyny çözüp: $g=1,\ w_1=10$ taparys.

Şundan soň, çözüwi gowulandyrmak tapgyryna geçeliň we netijeleri *7.6*-njy tablisada ýerleşdireliň. Görşümiz ýaly, iki ýagdaýda hem 2-nji strategiýa, 1-nji strategiýa garanyňda, kriteriniň uly bahalaryny üpjün edýär. Iterasiýany dowam etdirýäs.

$\vec{d}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ çözüw üçin alarys: $P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix},\ \vec{q_2}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$

Agramlary kesgitlemek tapgyryna geçip ýazarys :

$$g+w_1=q_1^2+\sum_{j=1}^{2}p_{ij}^{(2)}w_j=4+0{,}8w_1+0{,}2w_2;$$
$$g+w_2=q_2^2+\sum_{j=1}^{2}p_{ij}^{(2)}w_j=-5+0{,}7w_1+0{,}3w_2;$$

bu ýerde hem $w_2=0$ kabul edip, $g=2,\ w_1=10,\ w_2=0$ taparys.

Çözüw netijeleri. **7.6-njy tablisa**

I ýagdaý	*K strategiýa*	*Kriteriýa:* $\left\{q_i^k+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^k w_j\right\}$
1	*1*	$6+0{,}5\cdot(10)+0{,}5\cdot(0)=11$
	2	$4+0{,}8\cdot(10)+0{,}2\cdot(0)=12$
2	*1*	$-3+0{,}4\cdot(10)+0{,}6\cdot(0)=1$
	2	$-5+0{,}7\cdot(10)+0{,}3\cdot(0)=2$

7 –nji baba degişli soraglar we ýumuşlar

1. Dinamiki programmirlemegiň meselesini formulirläň.

2. Dinamiki programmirlemegiň meselesiniň geometriki manysy näme?

3. Optimal dolandyryşy tapgyrlaýyn gurmaklygyň düýp manysyny düşündiriň.

4. Beýikligi we tizligi alýan döwründe uçaryň ýangyç harçlamasyny minimallaşdyrmak meselesini formulirläň.

5. Haýsy ýagdaýlarda *DP* meseleleriniň çözüwleri ýeke-täk däl?

6. *DP* meselelerini funksional deňlemeler usulynda çözmekligiň aýratynlyklaryny aýdyp beriň.

7. Resurslary paýlama meselesiniň şertini formulirläň we funksional deňlemeler usulynda çözmekligiň algoritmini beýan ediň.

8. Tehnologik liniýanyň enjamlarynyň düzümini saýlamak meselesini goýuň we onuň matematiki modelini teswirläň.

9. *DP* – niň stohastik meselelerine häsiýetnama beriň.

10. Stohastik wariantda resurslary paýlama meselesiniň matematiki modelini formulirläň.

8. Matrisaly oýunlaryň meselelerini çözmek

8.1. Oýnuň ýokarky we aşaky bahasy

Matrisaly oýunlar teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biri oýundyr. *Oýun* – ykdysadyýetde ýüze çykýan jedelli ýagdaýlaryň matematiki modelidir. Jedelleşýän görkezijilere *oýunçylar* diýilýär. Oýunlar teoriýasynyň esasy maksady utýan tarap, mümkin boldugyça köp utar ýaly, beýleki tarap, mümkin boldugyça az utular ýaly optimal strategiýany işläp düzmekden ybaratdyr.

Eger oýunçylaryn strategiýalarynyň sany tükenikli bolsa, onda tükenikli oýny alarys. Oýna gatnaşýanlaryň sanyna görä jübütleýin ýa-da köpçülikleýin oýunlary tapawutlandyrýarlar.

Strategik oýunlaryň ýönekeý görnüşi iki tarapyň nol jemli oýnudyr (taraplaryň utuşlarynyň jemi nola deň). Oýun iki göçümden ybaratdyr: A oýunçy özüniň mümkin bolan A_i $(i=1,2,\ldots,m,)$ strategiýalarynyň birini, B oýunçy bolsa, B_j $(j=1,2,\ldots,n)$ strategiýalarynyň birini saýlaýar, şeýlelikde, her saýlamada, oýunçy, beýleki oýunçynyň saýlamasy barada düýbünden hiç zat bilmeýär. Netije-de, oýunçylaryň her biriniň, degişlilikde, $\varphi_1(A_i,B_j)$ we $\varphi_2(A_i,B_j)$ utuşlary şeýle gatnaşygy kanagatlandyrmalydyr:

$$\varphi_1(A_i,B_j) + \varphi_2(A_i,B_j) = 0, \text{ ýagny } \varphi_1(A_i,B_j) = -\varphi_2(A_i,B_j).$$

A oýunçynyn maksady $\varphi(A_i,B_j)$ funksiýany maksimallaşdyrmak, B oýunçynyn maksady $\varphi(A_i,B_j)$ funksiýany minimallaşdyrmakdyr.

Goý, $\varphi(A_i,B_j)=a_{ij}$ bolsun. Onda m×n matrisaly oýnuň

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

töleg matrisasyny alarys. Matrisanyň setirleri we sütünleri degişlilikde A_i we B_j strategiýalara degişlidir.

Eger *A* oýunçy A_i strategiýany, *B* oýunçy B_j strategiýany saýlan bolsa, onda a_{ij} – element *A* – oýunçynyň utuşydyr.

Eger A oýunçy A_i strategiýany saýlan bolsa, onda ol pesinden $\min\limits_j a_{ij}$ utuşly bolar.

Şeýle mümkinçiligi göz öňünde tutup, oýunçy özüniň minimal utuşyny maksimallaşdyrmak üçin anyk strategiýany saýlamalydyr: $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. α – ululyk A – oýunçynyň kepillendirilen utuşydyr we oňa oýnuň *aşaky bahasy* ýa-da *maksimin bahasy* diýlip, α – ululygyň alynmagyny üpjün edýän A_{i_0} – strategiýa bolsa, *maksimin strategiýasy* ady berilýär.

B oýunçy, özüne strategiýa saýlanda, şeýle ýörelgeden ugur alýar: ol käbir B_j strategiýany saýlamak bilen onuň utulyşy matrisanyň j – sütüniň elementleriniň iň uly bahasyndan, ýagny $\max_i a_{ij}$-den uly bolmaz. Diýmek, B oýunçy maksimum utulyşda oýnyň bahalaryny minimallaşdyrar: $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

β – ululyga oýnyň *ýokarky bahasy* ýa-da *minimaks bahasy* diýlip, β utuşa degişli bolan B_{j_0} – strategiýa bolsa, *maksimin strategiýasy* diýilýär.

A oýunçynýň hakyky utuşy, garşydaşlaryň paýhasly hereketlerinde, oýnyň aşaky we ýokarky bahalary bilen çäklenendir. Eger bu bahalar deň, ýagny $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \gamma$ bolsa, onda γ ululyga *oýnuň bahasy (deňagramlyk ýagdaýy)* diýilýär. Oýnuň özüne bolsa *eýer nokatly oýun* diýilýär.

Mysal. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisa bilen berlen oỳnuň eýer nokadynyň bardygyny derňemeli.

Çözüwi. Hasaplalyň: $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \max\limits_i \{-1,\ 1\} = 1.$

$\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \min\limits_j \{3,\ 2\} = 2.$ $\alpha \neq \beta$, diýmek eýer nokady ýok.

Mysal. A_1 we A_2 töleg matrisalary bilen berlen oýunlaryň aşaky we ýokarky bahalaryny kesgitlemeli:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Çözülişi. A_1 matrisa üçin alarys: sütünler boýunça *min* bahalar, degişlilikde 2,3,1,2 sanlardyr. Onda $\alpha_1 = max\ \{2,3,1,2\} = 3$ oýnuň aşaky bahasydyr.

A_1 matrisanyň setirleri boýunça *max* bahalar 4,6,5 sanlardyr. Onda $\beta_1 = min\{4,6,5\} = 4$ bolup, bu ýerde $\alpha_1 < \gamma < \beta_1$ ýerine ýetýär.

A_2 matrisa üçin alarys:

$\alpha_2 = max\{0, 0, -1, 3\} = 3, \quad \beta_2 = min\{5, 3, 4\} = 3.$

Görşümiz ýaly, $\alpha_2 = \beta_2 = 3$ oýnuň bahasydyr, ol bolsa, A_2 matrisanyň elementleriniň birine deňdir. Biz eýer nokatly oýun aldyk. Eýer nokatly oýunda oýnuň çözüwi bellidir: A oýunçy A_2 strategiýany saýlaýar, şeýlelikde, onuň utuşy *3*-den az däldir. B oýunçy üçin optimal strategiýa B_2 bolup, *3*-den köp bolmadyk utulyşa sezewar bolýar.

Oýun üçin $\alpha < \gamma < \beta$ ýagdaýda, birinji oýunçy özüniň utuşyny artdyrmaga, ikinji oýunçy bolsa, özüniň utulyşyny azaltmaga çalyşar. Seýle çözüwiň gözlenmeginde, oýunçylar, özleriniň bir däl-de, birnäçe strategiýalaryny saýlamaly bolýarlar. Strategiýalaryň saýlanmagy tötänlikde bolup geçýär hem-de *garyşyk strategiýalar* diýlip atlandyrylýar.

Matrisasy m×n ölçegli oýunda birinji oýunçynyň strategiýalary $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_m)$ ähtimallyklar toplumy bilen berilýär. Bu m ölçegli wektoryň koordinatalary üçin:

$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \ x_i \geq 0, \ \ i = \overline{1,m}$

şertler ýerine ýetýär. Ikinji oňunçy üçin ähtimallyklar toplumy n ölçegli $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ wektory kesgitleýär we onuň koordinatalary üçin aşakdaky şertler ýerine ýetýär:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ \ y_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,n}.$$

Oýunlar teoriýasynyň esasy teoremasynda her çäkli oýnuň iň bolmanda bir çözüwi garyşyk strategiýalar oblastynda bolar diýlip tassyklanylýar.

Oýunlar teoriýasynyň esasy teoremasy. *Iki oýunçynyň nola deň jemli matrisa oýnunyň garyşyk strategiýalarda iň bolmanda bir deňagramlyk ýagdaýy bardyr*.

Optimal strategiýany ulanmaklyk oýnuň bahasyna deň utuşy almaklyga mümkinçilik berýär: $\alpha \le \gamma \le \beta$.

8.2. *2·2* we *2·n* (*m·2*) oýnuň algebraik çözülişi

Haçanda, oýunçylaryň her birinde, diňe iki strategiýa bolanda, iň ýönekeý $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisaly oýun alynýar.

Bilşimiz ýaly, eýer nokady ỳok bolsa, oỳunlar garyşyk strategiỳaly hasap edilỳär. Goý, *A* we *B* oýunçylaryn tötän strategiyalary, degişlilikde $\vec{x}=(x_1, x_2)$; $\vec{y}=(y_1, y_2)$ bolsun. Oỳunlar teoriỳasynyň esasy teoremasyna görä *A* oýunçy üçin $\vec{x}^{\cdot}=(x_1, x_2)$ optimal strategiỳany ulanmak *B* oýunçynyň islendik strategiỳasynda *A* üçin γ utuşy almaklygy üpjün edỳär:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = \gamma \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = \gamma \end{cases}$$

Bu ýerde ähtimallyklaryň jemi $x_1+x_2=1$. Onda $x_2= 1 - x_1$ tapyp hem-de sistemanyň deňlemelerini deňläp, ilki x_1, soň x_2 kesgitlener:

$$x_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};\ x_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

x_1 we x_2-niň bahalaryny sistemanyň deňlemelerinde goỳup

$$\gamma=\frac{a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

bahany alarys. Şuňa meňzeşlikde, *B* oýunçy üçin

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = \gamma \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = \gamma \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny düzüp, bu oỳunçy üçin optimal strategiỳany taparys:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\ ;\ y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\ .$$

8.3. Simpleks usul bilen matrisa oỳnunyň çözülişi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matrisa bilen berlen oỳna seredeliň.

Bu ýerde optimal strategiýalary tapmak, çyzykly programmirlemegiň goşalaỳyn jübüt meselelerini çözmeklige getirilýär.

Başlangyç mesele (birinji oỳunçy üçin):

$$\sum_i a_{ij}x_i \geq \gamma, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\sum_i x_i = 1, \qquad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

şertlerde min F= γ tapmaklyk talap edilỳär.

Goşalaỳyn mesele (ikinji oỳunçy üçin)

$$\sum_j a_{ij}y_j \leq \gamma, \quad i = \overline{1,m}\,,$$

$$\sum_j y_j = 1\,, \quad y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

şertlerde *max F=* γ tapmak talap edilỳär.

γ näbelli ululyk oỳnuň bahasydyr, ýöne γ>0 hasap etmek mümkin. Bu şert, eger $a_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1,n})$ bolsa ýerine ýetỳändir. $a_{ij} \geq 0$ şerti bolsa matrisanyň ähli elementlerine şol bir M>0 sany goşup alyp bolar. Netijede oỳnuň çözgüdi üỳtgemez, dine oýnyň bahasy *M* birlik artar.

Çäklendirmeler sistemasynda deňsizlikleriň ähli agzalaryny γ sana bölüp we belleme girizmek bilen alarys:

$$x_i' = \frac{x_i}{\gamma}, \quad y_j' = \frac{y_j}{\gamma}.$$

$\sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_j y_j = 1, \quad y_j \geq 0$ şertlerden bolsa

$$\sum_i x_i' = 1/\gamma, \quad x_i' \geq 0, \quad \sum_j y_j' = 1/\gamma, \quad y_j' \geq 0$$

aňlatmalary alyp bileris. Netijede, aşakdaky goşalaỳyn jübüt meselelere geleris.

Başlangyç mesele (birinji oỳunçy üçin):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq 1, \quad j = \overline{1,n},$$

$$x_i' \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

şertleri kanagatlandyrỳan we $F=\sum_i x_i'$ çyzykly funksiỳany minimuma getirỳän $x_1', x_2', \dots, x_m'$ bahalary tapmak talap edilỳär.

Goşalaỳyn mesele (ikinji oỳunçy üçin):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j' \leq 1, \quad i = \overline{1,m},$$

$$y_j' \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

şertlerde $F' = \sum_j y_j'$ çyzykly funksiýany maksimuma getirỳäň $y_1', y_2', \dots, y_n'$ bahalary tapmak talap edilỳär.

Şeỳlelikde, oỳny çözmek üçin çyzykly programmirlemegiň goşalaỳyn jübüt simmetrik meselelerini aldyk. Simmetriklik häsietlerini peỳdalanyp, olaryň az hasaplama talap edỳänini ilki çözüp, onuň optimal planyna esaslanyp bolsa, beýleki optimal çözüwi tapyp bileris.

Mysal. $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisa bilen berlen oỳnuň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Oỳun matrisasy bir otrisatel elementi saklaỳar ($a_{11}= -1$). Onda matrisanyň ähli elementlerine 1 – sany goşup, seýle matrisany alarys:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bu meseläni çözmezden öň alnan matrisanyň eýer nokadynyň bardygyny anyklamaly:

$$\alpha=\max_i \min_j a_{ij}=2\,, \quad \beta=\min_j \max_i a_{ij}=6\,.$$

Görşümiz ỳaly, $\alpha \neq \beta$, diỳmek oỳnuň çözüwi garyşyk optimal strategiỳalar bolar, oỳnuň bahasy bolsa $\gamma = \gamma + 1$ (sebäbi biz bir birlik goşduk) $2 < \gamma < 6$ aralykda bolar.

Optimal garyşyk (x_1', x_2') we (y_1', y_2', y_3') strategiýalary tapmaklyk çyzykly programmirlemegiň goşalaỳyn jübüt meselesini çözmeklige meňzeşdir.

Başlangyç mesele (birinji oỳunçy üçin):

$$\begin{cases} 7x_2' \geq 1 \\ 6x_1' + x_2' \geq 1 \\ 3x_1' + 2x_2' \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1' \geq 0\,, \qquad x_2' \geq 0$$

şertlerde *min* $F = x_1' + x_2'$ tapmaklyk talap edilỳär.

Goşalaỳyn mesele (ikinji oỳunçy üçin):

$$\begin{cases} 6y_2' + 3y_3' \leq 1 \\ 7y_1' + y_2' + 2y_3' \leq 1 \end{cases}$$

$$y_1' \geq 0, \quad y_2' \geq 0, \quad y_3' \geq 0$$

şertlerde *max* $F' = y_1' + y_2' + y_3'$ tapmaklyk talap ediýär.

Bu ýerde: $x_i' = \frac{x_i}{\gamma}$; $y_j' = \frac{y_j}{\gamma}$; $minF = maxF' = \frac{1}{\gamma}$.

Goşalaỳyn meseleleriň birini çözüp, ikinjisiniň çözüwini taparys.

8.4. Tora PP – de matrisa oỳnunyň çözülişi

Başlangyç mesele (birinji oỳunçy üçin):

$$\begin{cases} 7x_2' \geq 1 \\ 6x_1' + x_2' \geq 1 \\ 3x_1' + 2x_2' \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1' \geq 0\,, \qquad x_2' \geq 0$$

şertlerde $min \quad F = x_1' + x_2'$ tapmaklyk talap edilỳär. Tora PP-de degişli maglumatlary girizip, 4 iterasiýada optimal çözüwi alarys (8.1-nji surat):

Obj value = 0.3810

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1	0.2381	1.0000	0.2381
x2	0.1429	1.0000	0.1429

8.1-nji surat. Birinji oýunçy üçin optimal çözüw

Suratda $x1 = x_1'$; $x2 = x_2'$ belgilemeler ulanylan.

$$x_{1opt}' = \frac{5}{21} = 0{,}2381; \; x_{2opt}' = \frac{3}{21} = 0{,}1429;$$

$$\min F = \frac{8}{21} = 0{,}3810\,.$$

$$\gamma = \frac{1}{\min F} = \frac{21}{8}; \quad x_{1opt} = x_{1opt}' \cdot \gamma = \frac{5}{21} \cdot \frac{21}{8} = \frac{5}{8};$$

$$x_{2opt} = x_{2opt}' \cdot \gamma = \frac{3}{21} \cdot \frac{21}{8} = \frac{3}{8}.$$

Onda I – oỳunçy üçin optimal strategiỳa $\overrightarrow{x_{opt}} = \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$ ýaly kesgitlener.

Ikinji oỳunçy üçin**:**

$$\begin{cases} 6y_2' + 3y_3' \leq 1 \\ 7y_1' + y_2' + 2y_3' \leq 1 \end{cases}$$

$$y_1' \geq 0, \quad y_2' \geq 0, \quad y_3' \geq 0$$

şertlerde $max \quad F' = y_1' + y_2' + y_3'$ tapmak meselesini Tora PP-de çözeliň.

Suratda optimal çözüwiň netijesi getirilen, bu ýerde:

$$x1 = y_1';\; x2 = y_2';\; x3 = y_3'.$$

belgilemeler peýdalanylan.

Obj value =	0.3810		
Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1	0.0476	1.0000	0.0476
x2	0.0000	1.0000	0.0000
x3	0.3333	1.0000	0.3333

8.2-nji surat. Ikinji oýunçy üçin optimal çözüw

$$y'_{1opt} = \frac{1}{21} = 0{,}0476;\ y'_{2opt} = 0;\ y'_{3opt} = \frac{1}{3} = 0{,}3333;$$

$$\max F = \frac{8}{21} = 0{,}3810\,.$$

$$\gamma = \frac{1}{\max F} = \frac{21}{8};\quad y_{1opt} = y'_{1opt}\cdot\gamma = \frac{1}{8};$$

$$y_{2opt} = y'_{2opt}\cdot\gamma = 0;\quad y_{3opt} = y'_{3opt}\cdot\gamma = \frac{7}{8}.$$

Şeỳlelikde, II – oỳunçy üçin optimal çözüw – strategiýa $\overrightarrow{y_{\text{opt}}} = \left(\frac{1}{8};0;\ \frac{7}{8}\right)$ görnüşde bolar.

8.5. Tor grafigini gurmak we parametrlerini kesgitlemek meselesini çözmek

Ýol – bu işleriň we hadysalaryň islendik üznüksiz yzygiderligidir.

Kritiki ỳol – bu ätiýaçlyk ýollary (rezerwleri) bolmadyk ỳoldur.

Tor modeli halkalardan we peýkamlardan duran tor grafigi görnüşinde şertlendirilip bilner. Torda peýkamlar bilen aýratyn işler şekillendirilỳär. Tor modelleri gurlanda aşakdaky düzgünler berjaỳ edilỳär:

- ✓ tor grafiginiň ähli peýkamlarynyň çepden saga umumy ugry bolmalydyr;
- ✓ bir jübüt hadysalaryň arasynda diňe bir iş görkezilmelidir;
- ✓ eger iki iş bir hadysadan, bir wagtda başlanyp bir wagtda beỳleki hadysada deň tamamlanỳan bolsa, onda parallel peýkamlar bolmaz ỳaly nol dowamlylykly fiktiw iş girizilmelidir.

Her bir hadysa kesgitli nomer berilỳär. Onuň üçin iki hadysany birikdirỳän peýkam görnüşinde berlen iş *(i,j)* $(i \triangleleft j)$ görnüşinde aňladylýar. Islendik *(i,j)* işe onuň *dowamlylygy* diỳlip atlandyrylỳan *t(i,j)* ululyk kesgitlenỳär.

Toruň esasy wagt parametrleri *hadysanyň ir* we *giç ỳüze çykmalarydyr.* Hadysanyň ỳüze çykmasynyň $t_r(j)$ – *irki möhleti* şeýle kesgitlenýär:

$$t_r(j) = \begin{cases} t_r(j) - t(i,j), & \text{eger } j \text{ hadysa diňe bir iş girse;} \\ max\{t_r(j) + t(i,j)\}, & \text{eger } j \text{ hadysa birnäçe iş girse .} \end{cases}$$

Hadysanyň ỳüze çykmasynyň *giçki möhleti* kritiki ỳola degişli hadysalar üçin:

$$t_p(i) = \begin{cases} t_r(i), & \text{kritiki ýola degişli hadysalar üçin;} \\ t_p(i) + t(i,j), & \text{eger } i \text{ hadysadan bir iş çyksa;} \\ min\{t_p(i) - t(i,j)\}, & \text{eger } i \text{ hadysadan birnäçe iş çyksa.} \end{cases}$$

Toruň ähli hadysalary üçin $t_p(i)$ we $t_n(i)$ parametrleri bilmek bilen islendik *(i,j)* iş üçin aşakdaky parametrleri kesgitläp bileris:

- ✓ işiň başlanmagynyň irki möhleti: $t_{r,n}(i,j)=t_r(i);$
- ✓ işiň başlanmagynyň giçki möhleti: $t_{p,n}(i,j)=t_p(j) – t(i,j);$
- ✓ işiň tamamlanmagynyň irki möhleti: $t_{r,o}(i,j)=t_r(i)+t(i,j);$
- ✓ işiň tamamlanmagynyň giçki möhleti: $t_{p,o}(i,j)=t_p (j);$
- ✓ kritiki ỳolüň ähli işleri üçin: $t_{r,o}(i,j)=t_p(j),t_{r,o}(i,j)=t_p(i,j)$.

Tor modeliniň işi üçin *(i,j)* işi ýerine ýetipmegiň ätiýaçlyk-rezerw wagtynyň dört görnüşi bardyr:

- ✓ doly rezerw: $R_{pr}=R_p(j) – t_r(i) – t(i,j);$
- ✓ kepilli rezerw: $R_{gr}=t_{p(}j) – t_p(i) – t(i,j);$
- ✓ erkin rezerw: $R_{sr}=t_r(j) – t_p(i) – t(i,j);$
- ✓ baglanyşyksyz reserw: $R_{nr}=t_r(j) – t_p(i) – t(i,j.)$

Kritiki ỳoldaky işler üçin rezerwleriň ähli dört görnüşi hem nula deňdir.

Mesele. Harytlaryň sergi-satuw işleriniň tertipleşdirilen gurluş-wagt düzümi berlen (8.1-nji tablisa). Işleriň tor grafigini gurmak, kritiki ỳoly kesgitlemek, wagt rezerw tablisasyny hasaplamak talap edilỳär.

Çözülişi. 1. Işiň tor grafigini guralyň, tegelekleriň içinde hadysalary, görkezgiçleriň üstünde bolsa işleriň dowamlylygyny görkezeliň (8.3-nji surat).

2. 1-nji hadysadan, 9-njy hadysa çenli dört sany ýol bolup, T_3 doly ỳolyň gün hasabynda iň uly dowamlylygy bar, onda oňa ***kritiki ýol*** diýilýär.

8.1-nji tablisa

Iş	*Işiň mazmyny*	*Günleriň sany*
(1,2)	Harytlaryň we gurallaryň sargydy	10
(1,7)	Islegiň hasap sistemasyny işläp düzmek	12
(2,3)	Harytlary saỳlamak we tölegnama ỳazmak	6
(3,4)	Haryt getirmek	4
(2,5)	Gurallary getirmek	3
(5,6)	Gurallary gurnamak	2
(4,6)	Harytlary goỳuşdyrmak	4
(4,7)	Harytlaryň ýerbe – ýerliginiň hasaby	5
(7,8)	Witrinany we zaly haşamlamak	5
(6,8)	Isleg – dokumentlerini taỳỳarlamak	7
(8,9)	Satuw sergisiniň barlanmasy	2

3. $T_1=t(1,7)+t(7,8)+t(8,9)=12+5+2=19.$

$T_2=t(1,2)+t(2,3)+t(3,4)+t(4,7)+t(7,8)+t(8,9)=10+6+4+5+5+2=32.$

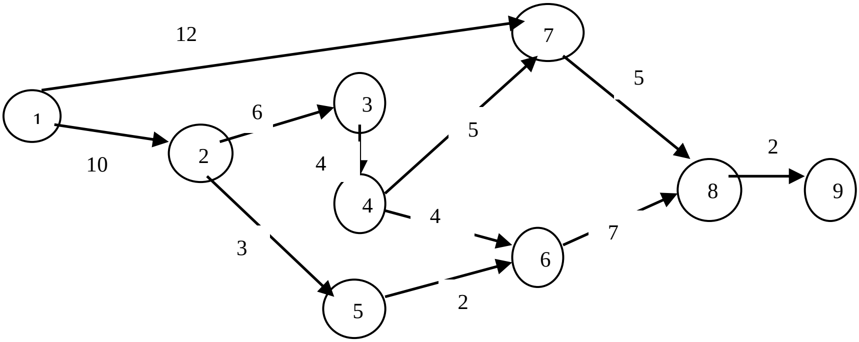
$T_3=10+6+4+4+7+2=33$, $T_4=10+3+2+7+2=24.$

$T_{kr}=max\ \{T_1,T_2,T_3,T_4\}=T_3=33$

Kritiki ýoluň ugrundaky işlere ***kritiki işler*** diýilýär, olaryň wagt rezerwleri ýokdur. Kritiki däl işleriň wagt rezerwlerini kesgitlemek üçin hadysanyň ỳüze çykmagynyň irki we giçki möhletlerini kesgitläliň:

$t_r(1)=0$	$t_p(9)=t_r(9)=33$
$t_r(2)=0+10=10$	$t_p(8)=33-2=31$
$t_r(3)=10+6=16$	$t_p(7)=31-5=26$
$t_r(4)=16+4=20$	$t_p(6)=31-7=24$
$t_r(5)=10+3=13$	$t_p(4)=min\{24-4;26-5\}=20$
$t_r(6)=max\{20+4;13+2\}=24$	$t_p(5)=24-2=22$
$t_r(7)=20+5=25$	$t_p(3)=20-4=16.$
$tr(8)=max\{25+5;24+7\}=31$	$t_p(2)=min\{22-3;16-6\}=10$
$t_r(0)=31+2=33$	$t_p(1)=10-10=0.$

Islendik *(i,j)* iş üçin aşakdaky parametrleri hasaplamak mümkin (8.6-njy tablisa) $t_{r,n}(1,2)=0.$



8.3-nji surat. Işiň tor grafigi

Parametrleriň bahalary. **8.6-njy tablisa.**

Iş	*Işiň dowamlylygy (gün):*	*Işiň başlanma wagty*		*Işiň ahyry*		*Wagtyň rezerwi*			
		Irki möhlet	*Giçki möhlet*	*Irki möhlet*	*Giçki möhlet*	*ПР*	*ГР*	*СР*	*НР*
(1,2)	10	0	0	10	10	0	0	0	0
(1,7)	12	0	14	12	26	14	14	13	3
(2,3)	6	10	10	16	16	0	0	0	0
(3,4)	4	16	16	20	20	0	0	0	0
(2,5)	3	10	19	13	22	9	9	1	0
(5,6)	2	13	22	15	24	11	0	9	0
(4,6)	4	20	20	24	24	0	0	0	0
(4,7)	5	20	21	25	26	1	1	0	0
(7,8)	5	25	26	30	31	1	0	1	0
(6,8)	7	24	24	31	31	0	0	0	0
(8,9)	2	31	31	33	33	0	0	0	0

8 –nji baba degişli soraglar we ýumuslar

1. Matrisa oýnunyň kesgitlemesini beriň.
2. Oýnun asaky we ýokarky bahasy näme?
3. Eýer nokatly oýunda oýnuň bahasy nähili kesgitlenýär?
4. Aşakdaky oỳunlaryň çözüwlerini tapmaly

1) $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5. Simpleks usulynda matrisaly oýnuň çözüliş algotitmini beýan ediň.
6. Tor grafigini gurmak we parametrlerini kesgitlemek meselesiniň çöžüliş algoritmini beýan ediň.

Edebiýat:

1. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanyň durmuş – ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. I, II tomlar. Aşgabat. TDNG, 2010.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanyň ykdysady strategiýasy: halka daýanyp, halkyň hatyrasyna. Aşgabat. TDNG, 2010.
3. Esenamanow G.M. Matematiki modelirlemek. Aşgabat. TDNG, 2012.
4. Hudaýberenow Ö. G. Ýokary matematika. Aşgabat. TDNG, 2007.
5. Öwezowa M., Täjiýew A., Möwlamow D., Durdyýew G. Ykdysadyýetde matematika. Aşgabat. TDNG, 2001.
6. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. Учебник. 2 – ое изд. М.: Дело и сервис, 1999.
7. Исследование операции и методы оптимизации: Учебн. пособие для вузов. /И.Чарыяров, О.Аннаоразов, Д.Бердимурадов/ А.: Магарыф, 1989
8. Кузнецов Ю. Н., Кузубов, Волощенко А.Б. Математическое программирование: Учебное пособие. 2 изд. – М.: Высш. школа, 1980.
9. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Учебное пособие. – Киев: Вища школа, 1975.
10. Глотов В.В. Экономико – математические методы планирования. М.: Лесная промышленность, 1980
11. Б. Банди. Основы линейного программирования. Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989
12. Вентцел У.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972.
13. Терехов Л.Л. Экономико – математические методы. М.: Статистика, 1972
14. H.A. Taha. Operations Research:an Introduction. 6th ed., 1977, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 07458

Mazmuny