TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN
DÖWLET UNIWERSITETI

NAZARY MEHANIKA

Awtorlar : A. Ataýew, H.Gulamow

Aşgabat -2010

TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN
DÖWLET UNIWERSITETI

NAZARY MEHANIKA

Awtorlar : A. Ataýew, H.Gulamow

Aşgabat -2010

GIRIŞ

Gaty,suwuk we gaz haldaky jisimleriň hereket hem-de deňagramlaşmak kanunlaryny öwrenýän ylyma nazary (teoretiki) mehanika diýilýär. Eger giňişlikde haýsy hem bolsa bir jisim wagt geçdigiçe hasaplaýyş sistemasy diýilýän başga ikinji bir jisime görä öz ýagdaýyny üýtgetse,onda şol birinji jisime ikinji jisime görä hereket edýän jisim diýilýär. Seýlelilik bilen hereket hakdaky düşünje giňişlik,wagt,hereket edýän obýekt we hasaplaýyş sistemasy baradaky düşünjeleri öz içine alýar.Giňişlikde jisim wagt geçdigiçe başga jisimlere görä öz ornyny üýtgetmesine mehaniki hereket diýilýär. Nazary mehanika mehaniki hereketiň umumy kanunlaryny öwrenýär. Ňazary mehanika kinematika,statika we dinamika ýaly üç bölüme bölünýär

KINEMATIKA

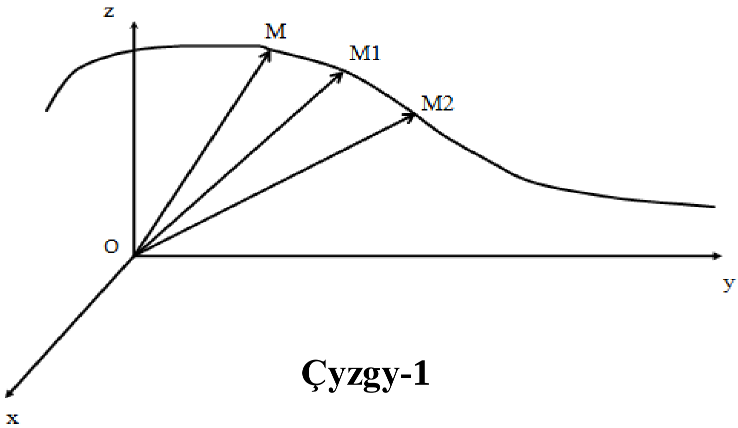
Nazary mehanikanyň hereketi emele getirýän we olary üýtgedýän sebäpleri nazara alman jisimleriň hereket kanunlaryny öwrenýän bölümine kinematika diýilýär. Kinematikada geometriýanyň hemme teoremalaryndan we aksiomalaryndan bolşy ýaly peýdalanylýar.

Kinematika wagt hakdaky düşünje girizilendigi sebäpli ol geomtriýadan mehanika geçiş basgançagydyr.Ölçegleri örän kiçi we tükenikli ýa-da tükeniksiz kiçi massasy bolan jisime material nokat diýilýär. Geljekde material nokat diýmegiň deregine ýöne nokat diýjekdiris Ilki bilen nokadyň,ondan soň bolsa nokatlaryň sistemasynyň we absolýut gaty jisimiň kinematikasy öwrenilýär. Mehanikanyň hemme bölümleriniň öwrenilişinde sag koordinatalar sistemasyny ulanjakdyrys.

NOKADYŇ KINEMATIKASY

Nokadyň hereketiniň traýektoriýasy we deňlemeleri. Radiýus-wektoryň godografy. Nokadyň hereketiniň kesgitleniş usullary.

Oxyz koordinatalar sistemasyny alyp, radiýus wektory ***r*** bolan ***M*** nokadyň hereketine seredeliň (çys 1). Hereket edýän şu ***M*** nokadyň dürli ***M*1, *M*2, …, *Mn*** ýagdaýlaryndaky ***r*1, *r*2, …, *rn*** radiýus-wektorlaryň uçlarynyň AMB geometrik orunyna hereketiň traektoriýasy diýilýär. Şu manyda nokadyň hereketiniň traýektoriýasyna onuň radiýus-wektorynyň godografy hem diýilýär.



Çyzgy-1

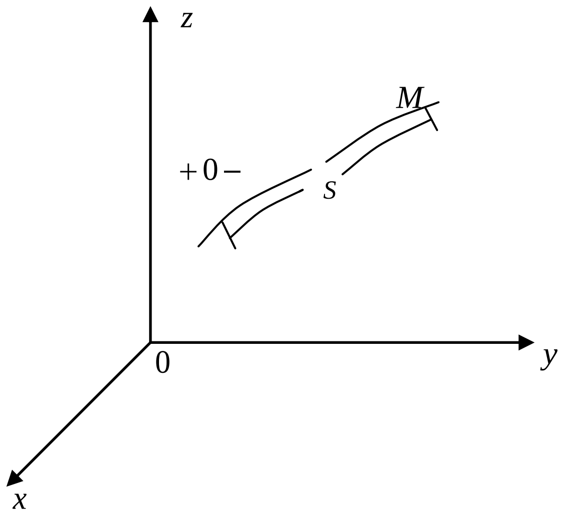
Şeýlelik bilen giňişlikde hereket edýän nokadyň çyzýan çyzygy onuň hereketiniň traektoriýasy bolýar. Giňişlikde islendik wagtda nokadyň ýagaýyny we hereketini (ýa-da hereket kanunyny) kesgitlemäge mümkinçilik berýän deňlemelere hereketiň deňlemeleri ýa-da hereket kaňuny diýilýär.

Nokadyň hereketi üç usul bilen kesgitlenýär:

1.Nokadyň hereketiniň tebigy usul bilen kesgitlenşi.

Bu usul hasaplaýyş sistema görä iki sany silindrik üstleriň kesişmesi görnüşinde onuň traektoriýasy we traktoriýanyň üstünde başlangyç O nokatdan M nokada çenli t wagtyň funksiýasy bolan S-aralyk berilýär: (çyz.2)

$$S=f(t) \qquad (1.1)$$



Çyzgy-2

(1.1)-deňlegä hereketiň gutarnykly görnüşdäki deňlemesi ýa-da hereket kanuny diýilýär. Bu ýerde f(t)-aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:
a) - birbelgili funksyýa bolmalydyr,ýagny giňişlikde hereket edýän nokat edil şol bir wagtyň äözünde dürli-dürli iki ýagdaýda bolup bimez.
b)-üznüksiz funksiýa bolmalydyr,ýagny hereket üznüksizdir we şonuň üçin hem t-niň her bir tükeniksiz kiçi üýtgemesine S-iň tükeniksiz kiçi üýtgemesi degişlidir.
ç)-differensirlenýän fuksiýa bolmalydyr
2. Nokadyň hereketiniň koordinatalar usuly bilen kesgitlenşi.
Bu usulda herket edýän nokadyň koordinatalary t wagtyň funksiýasy gärnüşinde berilýärler:

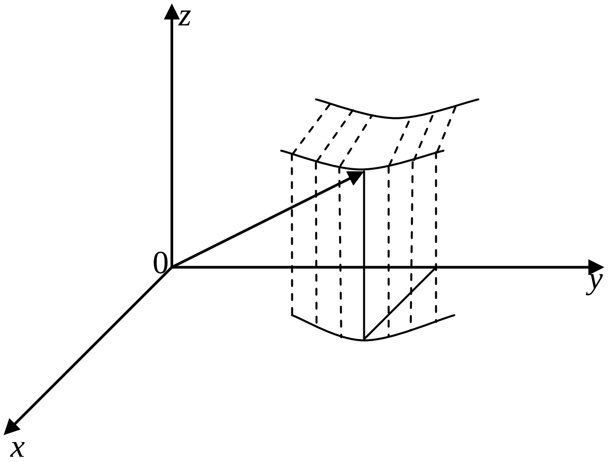
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

(1.2)
Şu (1.2) nokadyň herketiniň koordinatalar deňlemeleridir we olaryň her biri şol nokadyň degişli koordinata oklara proeksiýalarynyň hereket kanunlaryny kesgitleýärler . Bu (1.2) –deňlemelerden t –wagty ýok edip, aşakdaky iki deňlemeler sistemasyny alýarys:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= 0 \\ f(x,z) &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \psi(y,z) &= 0 \\ \varphi(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f(x,z) &= 0 \\ \psi(y,z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(1,3)

Bularyň her biri emele getirijileri degişli koordinata oklara paallel bolan iki sany silindrik üstleriň kesişmesi görnüşde berlen nokadyň traýektoriýasynyň deňlemesidir (çyz. 3)



Çyzgy-3

3.Nokadyň hereketiniň wektor usuly bilen kesgitlenşi.
Bu usulda nokadyň hereket kanuny wektor görnüşde berilýär:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

(1.4)

Herket kanuny wektor görnüşde berlende nokadyň traýektoriýasy onuň r- radius-wektorynyň godografy bolýar. (1.4)-deňlige nokadyň hereketiniň wektor deňlemesi diýilýär.
Nokadyň hereketiniň polýar koordinatalardaky r=r(t), deňlemelerden t- wagty ýok edip onuň traýektoriýasynyň polýar koordinatalardaky deňlemesini alarys:

$$\phi(r,\varphi) = 0$$

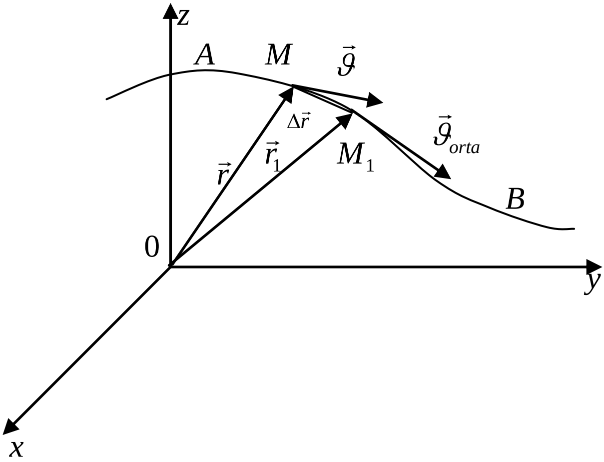
(1.5)

Nokadyň hereketiniň tizligi,tizlenmesi we olaryň koordinata oklara proeksiýalary.Tizligiň godografy.

Oxyz sag koordinatalar sistemasyny alalyň we radius-wektory r -bolan M nokadyň hereketine seredeliň. Δt wagtdan soň M nokadyň radius-wektory Δr artdyrma alýar.

Hereket edýän nokadyň radius-wektorynyň artdyrmasynyň şoňa degişli wagtyň artdyrmasyna gatnaşygyna orta tizligiň wektory diýilýär:(çyz 4)

$$\bar{V}_{orta} = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \qquad (1.6)$$



Çyzgy-4

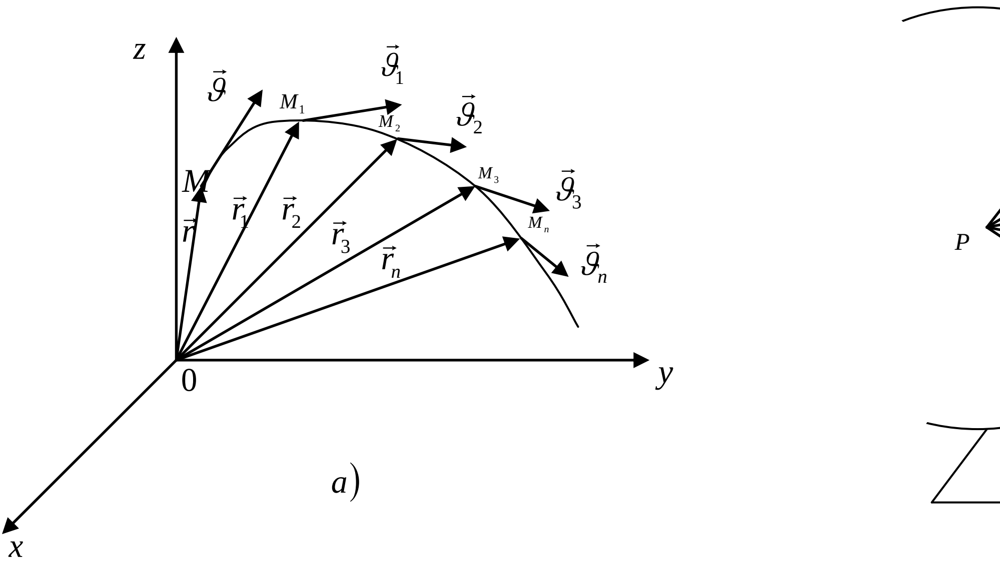
(1. 6) -dan predela geçip nokadyň hereketiniň hakyky tizligini tapýarys.

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (1.7)$$

Görşümiz ýaly nokadyň hakyky tizliginiň wektory onuň radius-wektorynyň wagta görä birinji önümine deňdir we

berlen nokatda traýektoriýa galtaşýan boýunça ugrukdyrylandyr.
Egri çyzyk boýunça hereket edýän M nokadyň $t_1,t_2,\ldots,t_n$ wagtlardaky $M_1,M_2,\ldots,M_n$ ýagdaýlaryna degişli tizlikleriniň wektorlaryny $\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,\overline{V}_n$ bilen belläliň (çyz 5) . Bu tizlikler ululyklary we ugurlary boýunça dürli-dürlidirler.Bulary polýus diýlip atlandyrylýan bir P nokada geçireliň.Sol tizligiň wektorlarynyň uçlarynyň geometrik ornyna tizligiň wektorynyň godografy diýilyär. (çyz 5)



Çyzgy-5

(1.4)-den wagta görä önün alyp,tizligi kesgitläliň:

$$\overline{V} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

(1. 8)

ýa-da $$\overline{V} = V_x i + V_y j + V_z k$$

Bu ýerden

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

Görşümiz ýaly nokadyň hereketiniň tizliginiň wektorynyň koordinata oklara proýeksiýalary onuň degişli koordinatalarynyň wagta görä birinji önüumine deňdirler.Seýlelik bilen tizligiň wektorynyň moduly aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

(1.10)

Tizligiň ugrukdyryjy burçlarynyň kosinuslary şeýle aňladylýär:

$$\left.\begin{aligned} Cos\left(\overline{V}\,\hat{,}\, x\right) &= \frac{V_x}{V} \\ Cos\left(\overline{V}\,\hat{,}\, y\right) &= \frac{V_y}{V} \\ Cos\left(\overline{V}\,\hat{,}\, z\right) &= \frac{V_z}{V} \end{aligned}\right\}$$

Nokadyň hereketiniň tizliginiň wagt birliginde üýtgemesi bilen ölçelýän ululyga hereketiň tizlenmesi diýilýär:

$$\overline{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt}$$

$$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt} \qquad (1.11)$$

Görşümiz ýaly tizlenme tizligiň wagta görä birinji önüme deňdir.

(1.7) we (1.11)-den

$$\overline{W} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

(1.12)

Bu formuladan,hereket edýän nokadyň tizlenmesiniň onuň radius-wektorynyň wagta görä ikinji önüme deňdigini görýäris.

Onda $$\overline{W} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k$$

Ýa-da

$$\overline{W} = W_x i + W_y j + W_z k$$

Bu ýerden

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ W_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ W_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

Su aňlatmalardan görnüşi ýaly nokadyň hereketiniň tizlenmesiniň wektorynyň koordinata oklara proýeksiýalary onuň degişli koordinatalarynyň wagta görä ikinji önümlerine deňdirler.

Tizlenmäniň wektorynyň moduly şeýle aňladylýar:

$$W = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

(1.14)

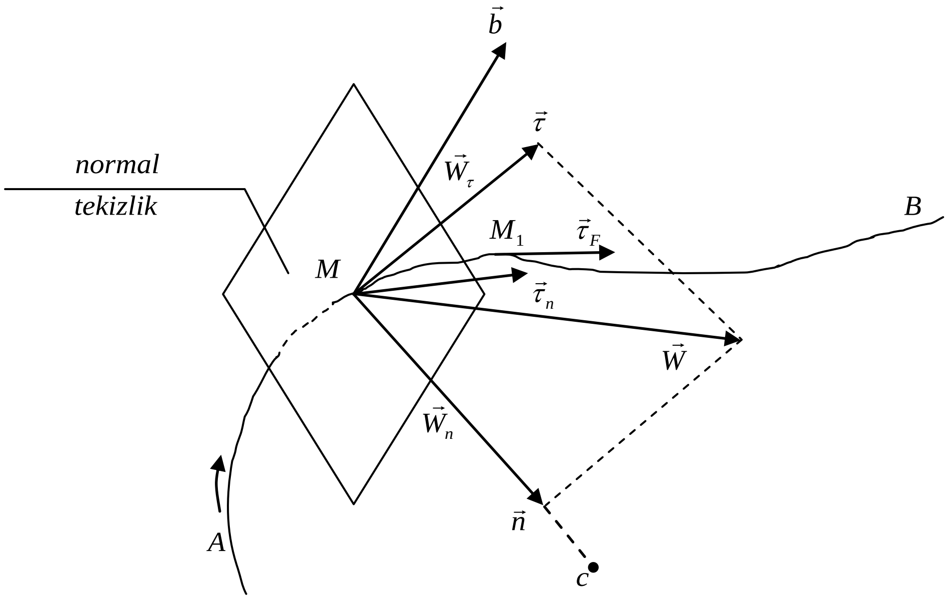
Tizlenmäniň wektorynyň ugrukdyryjy burçlarynyň kosinuslaryny kesgitlemek üçin aşakdaky formulalardan peýdalanylýar:

$$\left.\begin{aligned} Cos\left(\overline{W}\,\hat{,}\, x\right) &= \frac{W_x}{W} \\ Cos\left(\overline{W}\,\hat{,}\, y\right) &= \frac{W_y}{W} \\ Cos\left(\overline{W}\,\hat{,}\, z\right) &= \frac{W_z}{W} \end{aligned}\right\}$$

(1.15)

TIZLENMÄNIŇ WEKTORYNYŇ TEBIGY ÜÇGRANLYGYŇ OKLARYNA PROÝEKSIÝALARY

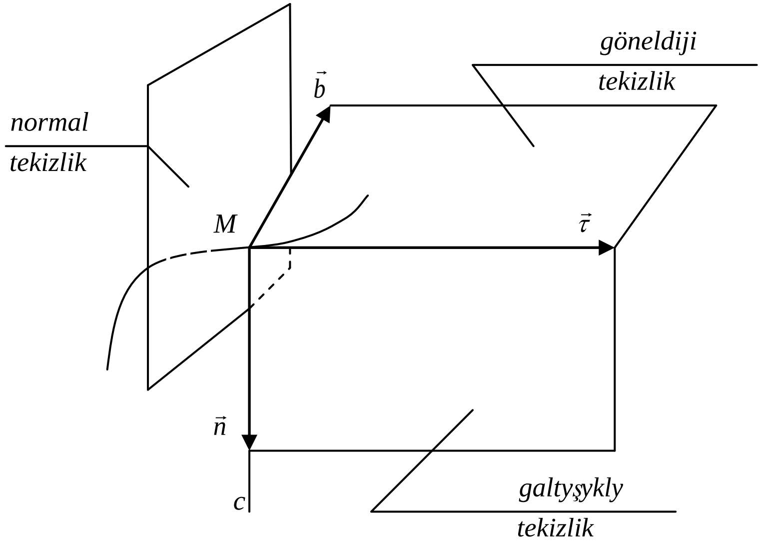
M nokat **AMB** traýektoriýa boýunça hereket edýär. Su nokatda traýektoriýa galtaşýanyň, normalyň we binormanyň birlik wektorlaryny $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ bilen belläliň.Galtaşýan, normal we binormal şol tebigy üçgranlygyň oklarydyr.**M** nokatda $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ wektorlaryň emele getirýän koordinata oklaryň sag sistemasyna tebigy sistema we $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ üçgranlyga bolsa tebigy üçgranlyk diýilýzär. Binormalyň wektory $\bar{b}$ galtaşyjy tekizlige perpendikulýar bolany üçin ol hereketiň tizlenmesiniň wektorynada perpendikulýardyr. Şonuň üçin hem tizlenmäniň binormalyň wektoryna proýeksiýasy nula deňdir. Şoňa göräde tizlenmäniň diňe galtaşýan we normal wektorlara proüýeksiýalaryny tapaýmaly bolýarys (çyz.6)



Çyzgy-6.

Egriniň,ýagdaýy τ we n wektorlar bilen kesgitlenýän tekizligine galtaşyjy, n we b wektorlar wektorlar bilen kesgitlenýän tekizligine normal we b we τ wektorlar bilen kesgitlenýän tekizlige göneldiji tekizlik diýilýär.

(çyz 7)



Çyzgy-7.

Tizligiň wektorynyň galtaşýan boýunça ugrukdyrylandygy üçin

(1.11)-den : $$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V \cdot \overline{\tau}\right) = \frac{dV}{dt}\overline{\tau} + V\frac{d\overline{\tau}}{dt}$$

Frenäniň birinji formulasyndan peýdalanalyň:

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{V}{\rho}\overline{n}$$

Bu ýerde p-M nokatda traýektoriýanyň egrilik radiusydyr;n-baş normalyň birlik wektorydyr. Şeýlelik bilen:

$$\overline{W} = \frac{dV}{dt}\overline{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\overline{n}$$

(1.16)

Şu(1.16) formuladan görnüşi ýaly doly tizlenmäniň wektory galtaşýan boýunça ugrukdyrylan we galtaşýan tizlenme diýilýän hem normal boýunça ugrukdyrylan we normal tizlenme diýilýän wektorlaryň wektor jemine deňdir (çyz 6)

Galtaşýan we normal tizlenmeler aşakdaky ýaly bellenýär:

$$\left.\begin{aligned} \overline{W_\tau} &= \frac{dV}{dt}\bar{\tau} \\ \overline{W}_n &= \frac{V^2}{\rho}\bar{n} \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

Onda bularyñ moduly:

$$\left.\begin{aligned} W_\tau &= \frac{dV}{dt} \\ W_n &= \frac{V^2}{\rho} \end{aligned}\right\}$$

(1.18)

Doly tizlenmniñ moduly aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}$$

(1.19)

NOKADYÑ TOWEREK BOÝUNÇA AÝLANMA HEREKETI. GÖNÜÇYZYKLY HEREKET.

Eger nokat tegelegiñ toweregi boýunça hereket edýän bolsa,onda onuñ şu hereketine towerek boýunça aýlanma hereket diýilýär.Towerek boýunça aýlanýan nokadyñ radiusynyñ wagt geçdigiçe çyzýan burçyna öwrülme burçy diýilýär we ony φ bilen belleýäris.

Öwrülme burçuñ wagt birliginde üýtgemesi bilen ölçeýän ululyga aýlanma hereketiñ burç tizligi diýilýär we ol ϖ bilen bellenýär. Tükeniksiz kiçi burç şol burçuñ depesinden geçýän we onuñ tekizligine perpendikulýar bolan wektordyr.Eger-de herekete wektoryñ ujundan gözegçilik etsek,onda burç tizligiñ wektory sagat peýkamynyñ hereketiniñ tersine ugrukdyrylandyr.Sagat peýkamynyñ hereketiñ tersine bolan ugry polojitel we onuñ bilen ugurdaş bolan hereketi bolsa otrisatel edip almaklygy şertleşeliñ . Şeýlelik bilen burç tizlik tegelegiñ merkezinden geçýän,onuñ tekizligine perpendikulýar bolan we sagat peýkamynyñ hereketiniñ tersine ugrukdyrylan wektordyr. Δ t wagta öwrülme burç $\Delta\varphi$ ulylyga üýtgän bolsa,onda orta burç tizlik şeýle kesgitlenýär :(çyz.8)

$$\overline{\omega}_{orta} = \frac{\Delta\overline{\varphi}}{\Delta t}$$

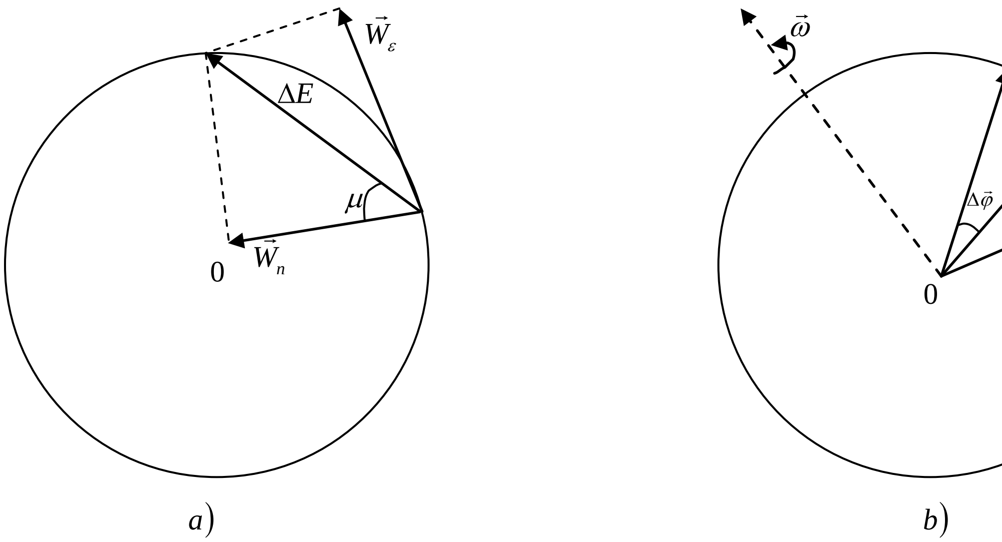
Bu ýerden predele geçip hereketiñ hakyky burç tizligini tapýarys:

$$\overline{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\varphi}}{\Delta t}$$

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt}$$

(1.20)

Ýagny burç tizlik öwrülme burçyñ wagta görä alnan birinji önüme deñdir.



Çyzgy-8.

Burç tizligiñ wagt birliginde üýtgemegi bilen ölçeýän ululyga aýlanma hereketiñ burç tizlenmesi diýilýär we ε bilen bellenýär:

$$\bar{\varepsilon}_{orta} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}$$

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

(1.21)

(1.20) we (1.21) -den

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dt^2}$$

(1. 22)

(1.21) we (1.22)-den görnüşi ýaly burç tizlenme burç tizligiñ wagta görä birinji ýa-da öwrülme burçyñ wagta görä ikinji önümine deñdir.

Nokadyñ töwerek boýunça aýlanma hereketiniñ çyzyk tizliginiñ ululygyny tapalyñ :

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$V = \omega r$$

(1. 23)

Görşümiz ýaly nokadyñ töwerek boýunça hereketiniñ çyzyk tizliginiñ ululygy,onuñ burç tizliginiñ töwereginiñ radiusyna köpeltmek hasylyna deñdir.

Eger-de $\omega = const$ bolsa , onda aýlanma herekete deňölçegli aýlanma hereket diýilýär . Deñ ölçegli aýlanma hereket üçin (1.20)-däki differensial deñlemäni integrirläp öwrülme burçy kesgitleýäris:

$$\varphi = \int \omega dt + C$$

$$\varphi = \omega t + C$$

t=0 bolanda C=φ_0 bolýar ,onda

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

(1.24)

Eger-de hususy halda $\varphi_0 = 0$ bolsa,onda

$$\varphi = \omega t$$

(1.25)

Aýlanma hereketde ε=const bolsa,oña deñ ölçegli üýtgeýän aýlanma hereket diýilýär.Bu hereket üçin (1.21)-

däki differensial deñlemäni integrirläp burç tizligi tapýarys.

$$\omega = \int \varepsilon\, dt + C_1$$

$$\omega = \varepsilon\, t + C_1$$

t=0 bolanda $C_1 = \omega_0$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t$$

(1.26)

Hususy halda ω_0=0 bolanda

$$\omega=\varepsilon t$$

(1.27)

Indi (1.20)-däki differensial deñlemäni integrirläliñ:

$$\varphi = \int \omega dt + C = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt + C$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

(1.28)

Şu deñölçegli üýtgeýän aýlanma hereketiñ deñlemesidir.Bu ýerden $\varphi_0 = 0$ bolanda

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

(1.29)

$\omega_0 = 0$ bolsa,onda

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

(1.30)

Nokadyñ göni çyzykly hereketi üçin (1.26) we (1.28) formulalar aşakdaky görnüşe geçýärler.

$$\left.\begin{aligned} V &= V_0 + Wt \\ S &= S_0 + V_0 t + \frac{Wt^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

(1.31)

Hususy halda S_0=0,V_0=0 bolsa ,onda

$$\left.\begin{aligned} V &= Wt \\ S &= \frac{Wt^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

(1.32)

Ýokardan erkin gaçýan jisimler üçin (1.32)-däki formulalar aşakdaky görnüşdäki añladylýarlar:

$$\left.\begin{aligned} V &= g\,t \\ h &= \frac{g\,t^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

(1.33)

Bu deñlemelerden wagt t-ni ýok edip tizligi tapalyñ:

$$V = \sqrt{2gh}$$

(1.34)

Şu (1.34) formula ilkinji gezek Galileý tarapyndan alnany üçin oña Galileýiñ formulasy diýilýär.

Galileýiñ formulasy göni çyzykly we aýlanma hereketler üçin aşakdaky görnüşi geçýär:

$$\left.\begin{aligned} V &= \sqrt{2WS} \\ \omega &= \sqrt{2\varepsilon\varphi} \end{aligned}\right\}$$

(1.35)

(1.18) formuladaky normal tizlenmäniñ añlatmasy we Galileýiñ formulasy (1.34) .Ýeriñ üstündäki jisim üçin aşakdaky görnüşe geçýärler:

$$\left.\begin{array}{l} g = \dfrac{V_1^2}{R} \\ V_2 = \sqrt{2gR} \end{array}\right\}$$

(1.36)

Bu ýerde V_{1}- birinji ,V_{2}- bolsa ikinji kosmik tizliklerdir.Ýeriñ çekiş güýjiniñ tizlenmesiniñ g=9,81m/sek^2 ' we onuñ ekwatorial radiusynyñ R=3678 km V -bahalaryny ýerine ýazyp birinji we ikinji kosmik tizligi tapýarys:

$$V_1 = \sqrt{gR} = 7{,}9\,км/сек \approx 8\,км/сек$$

$$V_2 = \sqrt{2gR} = 11{,}2\,км/сек$$

Ikinji kosmik tizlige parabolik tizlik hem diýilýär.

Galtaşýan we normal tizlenmeleri şeýle hem añlatmak bolýar:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r\,\varepsilon$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\left.\begin{array}{l} W_\tau = \varepsilon\, r \\ W_n = \omega^2 r \end{array}\right\}$$

(1.37)

onda:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

(1.38)

çyz.8 den:

$$tg\mu = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Töwerek boýunça N sany doly aýlaw üçin öwrülme burçyñ añlatmasyny ýazalyñ

$$\varphi = 2\pi N$$

(1.39)

Bu ýerden wagta görä önüm alýarys:

$$\omega = 2\pi\overline{n}$$

(1.40)

$\overline{n} = \dfrac{dN}{dt}$ sekundaky aýlowlaryň sany bilen ölçeýän burç tizlenmedir.

(1.40)-dan ýene-de bir gezek önümi alalyň

$$\varepsilon = 2\pi\dot{\overline{n}}$$

(1.41)

$\dot{\overline{n}} = \dfrac{d\overline{n}}{dt}$ sekuntdaky aýlawlaryň sany bilen ölçenýän burç tizlenmedir.

(1.26) we (1,28) formulalary 2π bölüp (1.39),(1.40),(1.41)aňlatmalary göz öňünde tutsak:

$$\left.\begin{aligned} \overline{n} &= \overline{n}_0 + \dot{\overline{n}}\,t \\ N &= N_0 + \overline{n}_0 t + \frac{\dot{\overline{n}}\,t^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

(1.42)

Eger-de n minutdaky aýlanmalaryň sany bilen ölçeýän burç tizlik bolsa,onda(40) formula aşakdaky görnüşe geçýär:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

(1.43)

Tizligiň we tizlenmäniň polýar koordinatalardaky aňlatmasy.

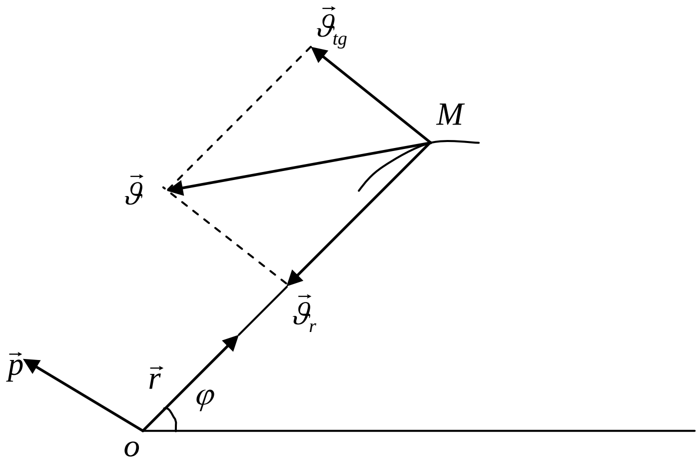
Hereket edýän M nokadyň $\bar{r} = \overline{OM}$ radius-wektorynyň birlik wektoryny $\bar{r}_0$ we şu radius-wektora perpendikulýar wektoryň birlik wektoryň $\bar{p}^0$ bilen belläp (çyz.9) M nokadyň tizligini kesgitläliň

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\bar{r}^0\right) = \frac{dr}{dt}\bar{r}^0 + r\frac{d\bar{r}^0}{dt}$$

ýa-da

$$\bar{V} = \frac{dr}{dt}\bar{r}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^0$$

(1.44)



Çyzgy -9

Bu ýerdäki birinji goşulyja $(\frac{dr}{dt}\bar{r}^0)$ radial we ikinji goşulyja $(r\frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^0)$ bolsa transwersal tizlik diýilýär.Bu tizlikleriň ulylygy şeýle bellenýär:

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ V_{mp} &= r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} = r\omega \end{aligned}\right\}$$

(1.45)

Doly tizligiň moduly aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_{mp}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \omega^2 r^2}$$

(1. 46)

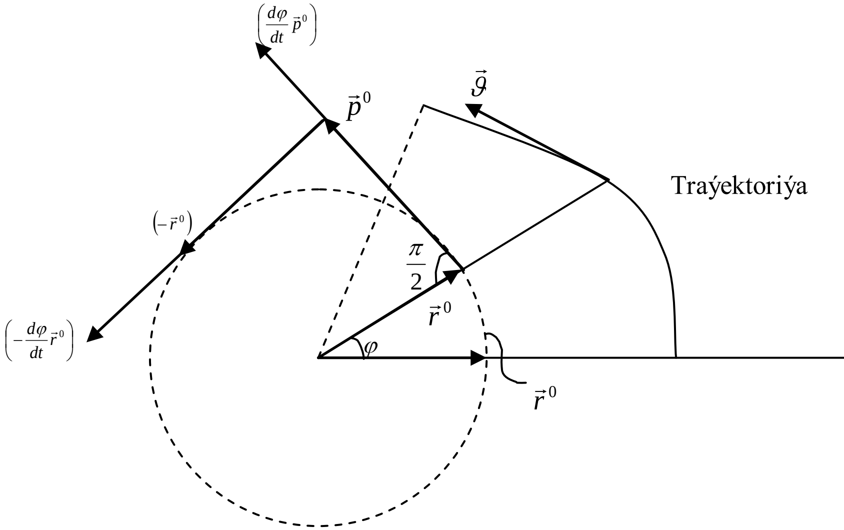
Tizligiň (1.44) aňlatmasyndan önüm alyp tizlenmäni tapýarys:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}\bar{r}^0 + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\overline{p}^0 + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\overline{p}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d\overline{p}^0}{dt}$$

Çyzgy (10)-den görnüşi ýaly

$$\frac{d\bar{r}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\overline{p}^0 \qquad ;$$

$$\frac{d\overline{p}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\bar{r}^0$$



Çyzgy 10

Doly tizlenme şeýle aňladylýar:

$$\overline{W} = \left(\ddot{r} - r\omega^2\right)\overline{r}^0 + \left(r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega\right)\overline{p}^0$$

(1. 47)

$$W = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\omega^2\right)^2 + \left(r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega\right)^2}$$

(1. 48)

Tizligiň egriçyzykly koordinatalarda aňladylyşy.

Nokadyň polýar,silindrik we sferik koordinatalary onuň egriçyzykly koordinatalarydyr.Bu egriçyzykly koordinatalara nokadyň umumylaşdyrylan koordinatalary hem diýilýär we $(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ bilen bellenýärler.Bu koordinatalaryň wagta görä birinji önümlerine umumylaşdyrylan tizlikler diýilýär.

Nokadyň x,y,z göniburçly koordinatalarynyň islendik üznüksiz bir belgili we differensirlenýän funksiýalarny şol nokadyň umumylaşdyrylan koordinatalary diýip kabul etmek bolýar:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1(x,y,z) \\ q_2 &= q_2(x,y,z) \\ q_3 &= q_3(x,y,z) \end{aligned}\right\}$$

(1. 49)

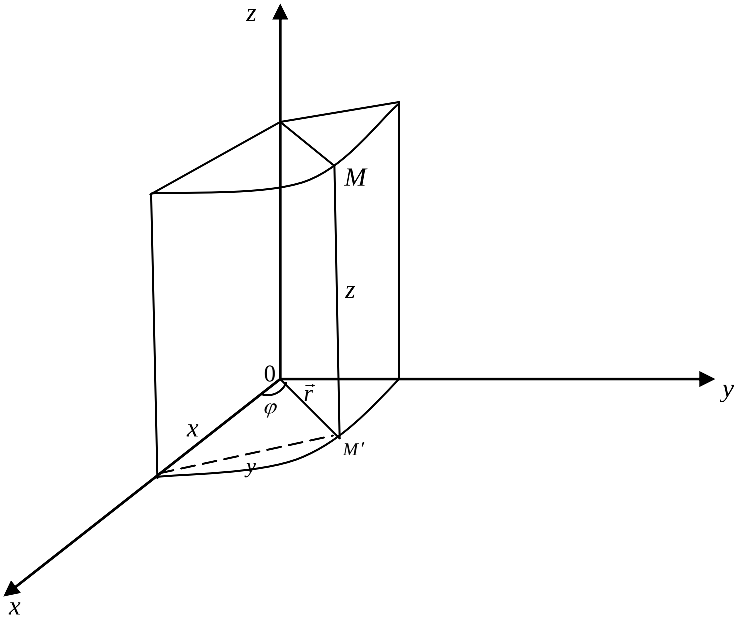
ýa-da

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1,q_2,q_3) \\ y &= y(q_1,q_2,q_3) \\ z &= z(q_1,q_2,q_3) \end{aligned}\right\}$$

(1. 50)

Tizligiň silindrik koordinatalardaky aňlatmasyny kesgitläliň;

r,φ we z hereket edýän M nokadyň silindrik koordinatalarydyr (çyz 11) ýagny onda $r=q_1$, $\varphi=q_2$, *we* $z=q_3$,



Çyzgy 11 .

$r=r(q_1,q_2,q_3)$-den wagta görä birinji önümi alyp tizligiň wektoryny tapýarys:

$$\bar{V} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

(1. 51)

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_n} = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_n}\right| \bar{q}_n^0$ bolany üçin ,

$$\bar{V} = \left|\frac{\partial r}{\partial q_1}\right|\dot{q}_1\bar{q}_1^0 + \left|\frac{\partial r}{\partial q_2}\right|\dot{q}_2\bar{q}_2^0 + \left|\frac{\partial r}{\partial q_3}\right|\dot{q}_3\bar{q}_3^0 \qquad (1.\ 52)$$

Aşakdaky belgilemäniň girizeliňl:

$$H_n = \left|\frac{\partial r}{\partial q_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_n}\right)^2}$$

(1. 53)

onda: $$\overline{V} = H_1\dot{q}_1\overline{q}_1^0 + H_2\dot{q}_2\overline{q}_2^0 + H_3\dot{q}_3\overline{q}_3^0$$
(1. 54)

H_n-lere Lame koeffisientleri diýilýär.

Çyzgydan:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,Cos\varphi \\ y &= r\,Sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$
(1. 55)

(1. 52)-nazara alyp Lame koeffisentlerini tapalyň:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{Cos^2\varphi + Sin^2\varphi + 0} = 1 \\ H_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2Cos^2\varphi + r^2Sin^2\varphi + 0} = r \\ H_z &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1 \end{aligned}\right\}$$
(1 56)

(1. 52) we (1. 54)-den:

$$V_r = \dot{r} \quad , \quad V_\varphi = r\dot{\varphi} \quad , V_z = \dot{z}$$
$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$
(1. 57)

Şu tizligiň silindrik koordinatalardaky aňlatmasydyr.

Edil şunuň ýaly edip tizligiň r, φ, θ sferik koordinatalardaky aňlatmasynyň hem almak bolýar:

$$V = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(rCos\,\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Nokadyň hereketiniň sektor tizligi.

Oxyz koordinatalar sistemasyny alaliň.Hereket edýän nokadyň radius-wektorynyň wagt birliginde çyzýan meýdanyna nokadyň hereketiniň sektor tizligi diýilýär.

Egerde nokadyň radius-wektory Δ t wagtda Δ S meýdan çyzýan bolsa,onda $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ orta sektor tizlik we bu gatnasygyň predeli bolsa herket edýän nokadyň hakyky sektor tizligi bolýar: (çyz 12).

$$\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

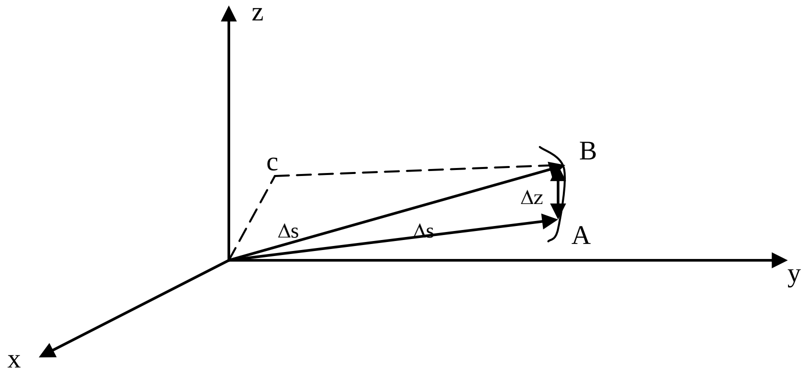
$$\sigma = \frac{dS}{dt} \qquad (1.58)$$

Nokadyň Δt wagtdaky r radius-wektorynyň artdyrmasyny $\Delta\bar{r}$ bilen belläp $\Delta\bar{r}$ we $\bar{r}$ wektorlaryň üstünde parallelogram guraliň.

Wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny kwadrat ýaýlar bilen bellemegi şertleşeliň.Iki wektoryň wektor köpeltmek hasylynyň moduly şol wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deň bolany üçin:

$$\left|[\bar{r}\ \Delta\bar{r}]\right| = S_{OABC} = 2\Delta S$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}\left|[\bar{r}\ \Delta\bar{r}]\right|$$



Çyzgy 12.

Bu ýerden:

$$\Delta\bar{S} = \frac{1}{2}\left[\bar{r}\,\Delta\bar{r}\right] \qquad (1.59)$$

Şeýlelik bilen tükeniksiz kiçi meýdan şol meýdanyň tekizligine perpendikulýar bolan wektordyr(1.58) we (1.59)-den peýdalanyp sektor tizligiň wektoryny aşakdaky formula bilen aňladýarys:

$$\bar{\sigma} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\bar{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right]$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\bar{r}\,\bar{V}\right] \qquad (1.60)$$

Eger-de r we v-iň arasyndaky burç α bolsa,onda sektor tizligiň ululygy;

$$\sigma = \frac{1}{2} rVSin\alpha \qquad (1.61)$$

(1. 60)-den görnüşimiz ýaly hereket edýän nokadyň sektor tizliginiň wektory onuň radius-wektorynyň tizligine wektor köpeltmek hasylynyň ýarsyna deňdir we şu wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň tekizligine perpendikulýardyr.(1.60)-formulany kesgitleýji görnüşinde ýazyp sektor tizligiň koordinata oklara proýeksiýalaryny kesgitläliň:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

Onda

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ \sigma_z &= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (1.62)$$

Indi sektor tizligi polýar koordinatalar bilen aňladylýar. Δt wagtda meýdan S we öwrülme burç φ degişlilikde ΔS we $\Delta\varphi$ artdyrmalar alýarlar. Şu ýerde ΔS esasy r, beýikligi $r\Delta\varphi$ bolan üçburçlygyň meýdany hökmünde garamak bolýar: (çyz 13).

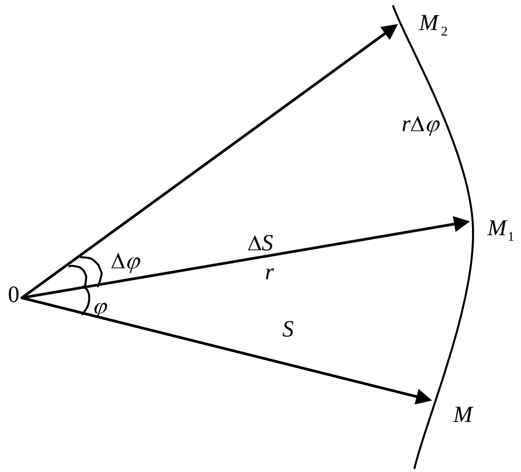
$$\Delta S = \frac{1}{2} r\, r\Delta\varphi = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

Bu deňligi Δt bölüp predele geçsek hakyky sektor tizlik polýar koordinatalar bilen aňladylýar.

$$\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

(1. 63)



Çyzgy 13.

Nokadyň ýönekeý garmonik yrgyldysy.

Nokadyň garmonik yrgyldysy hakda doly düşünjä mehanikanyň dinamika bölüminde serediljekligi üçin bu ýerde diňe onuň kesgitlemesini bermek bilen çäklenýäris.

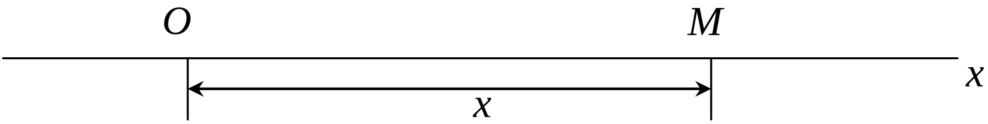
Nokadyň sinus (kosinus) kanuny boýunça yrgyldysyna ýönekeý garmonik yrgyldy we nokady başlangyç deň agramlyk ýagdaýyndan iň uly gyşarmasyna bolsa yrgyldynyň amplitudasy diýilýär. Garmonik yrgyldynyň deňlemesi aşakdaky görnüşde aňladylýar:(çyz 14).

$$x = aSin(kt + \varepsilon) \qquad (1.\ 64\ )$$

Yrgyldynyň öwrülme burçyny φ bilen bellesek,onda onuň deňlemesi aşakdaky görnüşe geçýär:

$$\varphi = ASin(kt+\varepsilon) \qquad (1.65)$$

(1.64),(1.65)-daky a we A yrgyldynyň amplitudalary $(kt+\varepsilon)$ fazasy we ε başlangyç fazasydyr.



Çyzgy 14.

Nokadyň doly bir gezek yrgyldysyna sarp edilýän wagta – T- yrgyldynyň periody diýilýär.Yrgyldynyň deňlemesinden onuň periodyny kesgitläliň.

$$x = aSin(kt+\varepsilon) = aSin[k(t+T)+\varepsilon]$$

Bu ýerden $kT=2\pi$, $T = \dfrac{2\pi}{k}$, $k = const$

Egerde $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$ bolsa onda yrgyldynyň (1.64)we(1.65) deňlemeleri şeýle aňladylýar:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,Coskt \\ \varphi &= ACoskt \end{aligned}\right\} \qquad (1.\ 66)$$

Gaty jisimiň öňe hereketi.

Gaty jisimiň hereketinde onuň iki nokadyny birleşdirýän islendik göni çyzyk özüniň başlangyç ugruny parallel bolup galmak bilen mydama öz-özüne parallel hereket etse,jisimiň beýle hereketine onuň öňe hereketi diýilýär.

Teorema.

Jisimiň öňe hereketinde onuň hemme nokatlarnyň :

a/traýektoriýalary deňdirler.

b/tizlikleri deňdirler.
ç/tizlenmeleri deňdirler.

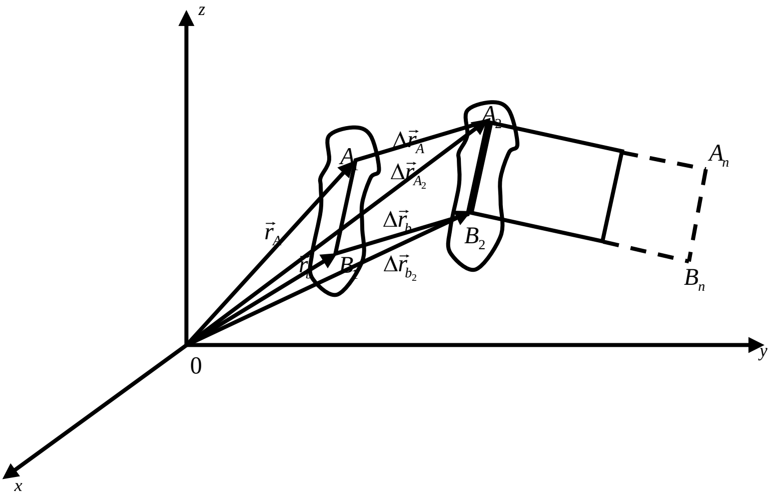
Subudy.

Oxyz koordinatalar sistemasyny alalyň.Jisimiň iki sany islendik A we B nokatlarnyň traýektoriýalaryny, tizliklerini we tizlenmelerini tapalyň.Bu nokatlaryň dürli pursatlardaky ýagdaýyny

$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$

bilen belläliň. (çyz.15) Jisim gaty we onuň hereketi öňe hereket bolany üçin nokatlary birikdirýän kesimler deňdirler we paralleldirler:

$A_1B_1 \# A_2B_2 \# \ldots \# A_nB_n$



Çyzgy 15.

Şeýlelik bilen $\Delta t = t_2 - t_1$ wagta *A* we *B* nokatlaryň radius-wektorlarynyň artdyrmalary deňdirler:

$$\Delta\bar{r}_A = \Delta\bar{r}_B = \Delta\bar{r}$$

A we B nokatlaryň orta tizlikleri şeýle aňladylýar:

$$\frac{\Delta\bar{r}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}_B}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

Bu ýerden predela geçip şu nokatlaryň hakyky tizliklerni tapýarys:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\,\bar{r}_A}{d\,t} = \frac{d\,\bar{r}_B}{d\,t} = \frac{d\,\bar{r}}{d\,t}$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V} \qquad (2.1)$$

(2.1)-formuladan wagta görä önüm alyp, şol nokatlaryň hakyky tizlenmelerini kesgitleýäris :

$$\frac{d\bar{V}_A}{d\,t} = \frac{d\bar{V}_B}{d\,t} = \frac{d\bar{V}}{d\,t}$$

$$\bar{W}_A = \bar{W}_B = \bar{W} \qquad (2.2)$$

Predelde ($\Delta t \to 0$) (16)-çyzgydaky döwük çyzyklar egri çyzyklara öwrülýärler. Bu egri çyzyklar degişlilikde *A* we *B* nokatlarynyň traýektoriýalarydyr. Şeýlelik bilen *A* we *B* nokatlaryň traýektoriýalary hem deňdirler.

Şunuň bilen teorema subut edildi. Şu teoremada aşakdaky netijeler gelip çykýar:

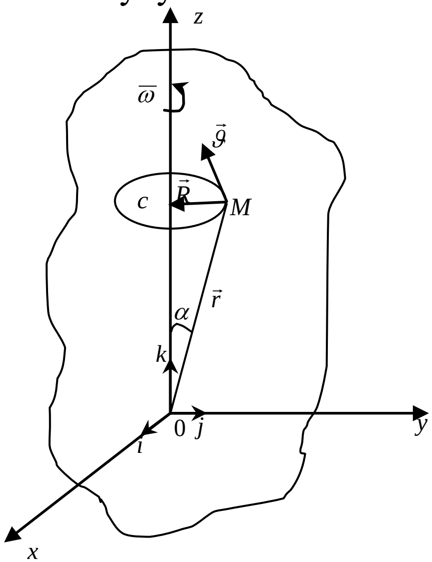
1).Jisimiň öňe hereketini öwrenmek üçin onuň diňe bir nokadynyň hereketini öwrenmek ýeterlikdir.

2). Jisimiň öňe hereketiniň tizliginiň wektory erkin wektorydyr, ýagny ululygyny we ugruny üýtgetmän ony jisimiň islendik nokadyna geçirmek bolýar.

Gaty jisimiň gozganmaýan okuň töwereginde aýlanma hereketi. Eýleriň we Puassonyň formulalary.

Jisimiň hereketinde onuň iň azyndan iki sany gozganmaýan nokatlary bolsa ,onda jisimiň beýle hereketine gozganmaýan okuň töwereginde aýlanma hereket we bu gozganmaýan oka aýlanma oky diýilýär. Bu okuň üstündäki hemme nokatlar hem gozganmaýan nokatlardyr.

Jisim gozganmaýan z okuň töwereginde $\overline{\omega}$-burç tizlik bilen aýlanýar. (Çyzgy 16). Jisim hemme nokatlary şol gozgalmaýan okuň töwereginde dürli-dürli töwerekler boýunça aýlanýarlar. Radiusy R bolan töwerek boýunça aýlanýan bir M nokadyň hereketine seredeliň. Bu nokadyň radius-wektoryny r bilen belläliň.



Çyzgy 16.

M nokadyň tizligini kesgitläliň:

$$V = \omega R = \omega r Sin\alpha \left| [\overline{\omega}\, \overline{r}] \right|$$

$$\overline{V} = [\overline{\omega}\, \overline{r}] \qquad (2.3)$$

Şu (2,3) Eýleriň formulasydyr.Görüşimiz ýaly gozganmaýan okuň töwereginde aýlanma hereketiň çyzyk tizligininiň wektory burç tizligiň aýlanýan nokadyň radius-wektoryna wektor köpeltmek hasylyna deňdir.

$$\omega_x = p \ , \qquad \omega_y = q \ , \qquad \omega_z = r$$

bilen belläp Eýleriň formulasyny kesgitleýji görnüşinde ýazyp,çyzyk tizligiň göniburçly koordinata oklara proýeksiýalaryny tapalyň:

$$\overline{V} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad \text{ýada}$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= qz - ry \\ V_y &= rx - pz \\ V_z &= py - qx \end{aligned} \right\} \qquad (2.4)$$

Eýleriň formulasyny birlik wektorlar üçin ulanaliň.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{i}}{dt} &= [\overline{\omega}\,\bar{i}]\\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= [\overline{\omega}\,\bar{j}]\\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= [\overline{\omega}\,\bar{k}]\end{aligned}\right\}$$

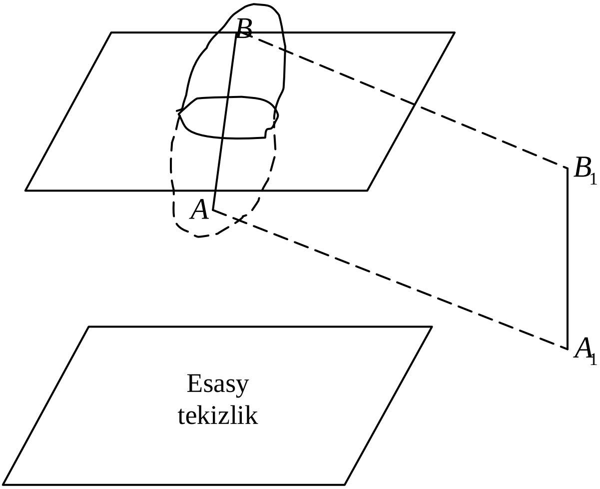
(2.5)

Şu formulalara Puassonyň formulalary hem diýilýär.

Gaty jisimiň tekizparallel hereketi.

Egerde jisimiň hereketinde onuň hemme nokatlary haýsy hem bolsa bir gozganmaýan esas tekizlige parallel bolan tekizlikde hereket etseler ,onda jisimiň beýle hereketine tekizparallel hereket diýilýär.

Jisimiň tekizparallel hereketinde ony berkidilen we esas tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk öňe hereket edýär.Şeýlelik bilen jisimiň tekiz parallel hereketi onuň esas tekizlige parallel bolan-kesigininiň hereketi bilen kesgitlenýär.(çyz.17).

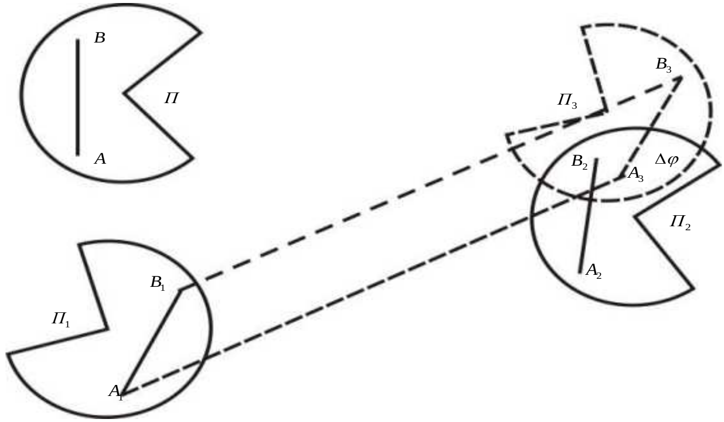


Çyzgy-17.

Tekizparallel hereketiň geometrik öwrenilşi.

Teorema 1.
Tekiz figuranyň onuň tekizligindäki her bir hereketini öňe hereket we erkin merkeziň (polýusyň) töwereginde aýlamak arkaly amala aşyryp bolýar.

Subudy.
Il erkin figura bilen mydama bagly bolan AB kesimiň A_1,B_1 we A_2,B_2 ýagdaýlary bilen kesgitlenýän erkin Π_1 we Π_2 ýagdaýlary berilýär (çyz.18).



Çyzgy 18.

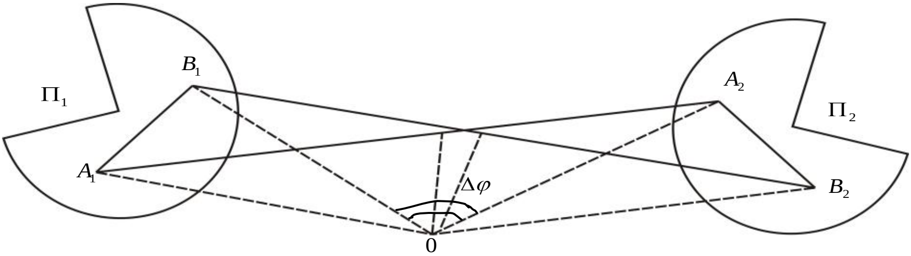
П Tekiz figurany $П_1$ ýagdaýynda $П_2$ ýagdaýyna geçirmek talap edilýär.Öňe hereket bilen figurany A_1 nokat A_2 nokadyň üstüne düşer ýaly edip onuň $П_1$ ýagdaýynda $П_2$ ýagdaýyna süýşüreliň.Bu ýerde $b_1$nokat b_2 ýagdaýa geçýär.Figurany A_2 merkeziň töwereginde $B_3A_2B_2=\Delta\varphi$ burça aýlamyzda A_2B_3 kesim A_2B_2 ýagdaýa we П tekiz figura $П_1$ ýagdaýyndan talap edilýän $П_2$ ýagdaýyna geçýär.Teorema subut edildi.

Teorema 2.

Tekiz figuranyň onuň tekizligindäki öňe bolmadyk hereketini aýlanmanyň gutarnykly merkezi ýa-da polýusydiýip atlandyrylýan kesgitli merkeziň töwereginde aýlamak bilen ýerine ýetirmek bolýar.

Subudy.

Tekiz figura bilen mydama bagly bolan AB kesimiň A_1B_1we A_2B_2 ýagdaýlary bilen kesgitlenýän erkin $П_1$ we $П_2$ ýagdaýlary berilýär.(çyz.19).



Çyzgy 19.

figurany Π_1 ýagdaýynda Π_2 ýagdaýyna geçirmek talap edýär. A_1 nokady A_2 we B_1 nokady B_2 nokat bilen birikdirip A_1A_2 we B_1B_2 kesimleriň ortasyndan bu kesimlere perpendikulýarlar çekýäris. Şu perpendikulýarlaryň kesişme nokady 0-nyň merkezidigini subut edeliň. Hakykatdan hem,

$$A_1B_1=A_2B_2, A_10, B_10=B_20, \quad A_10A_2= \quad B_10B_2$$

bolany üçin tekiz figura 0 nokadyň töwereginde $A_10A_1=\Delta\varphi$ burça aýlananda A_1B_1 kesim A_2B_2 kesim bilen gabat gelýär we tekiz figura Π_1 ýagdaýyndan Π_2 ýagdaýa geçýär. Teorema subut edildi.

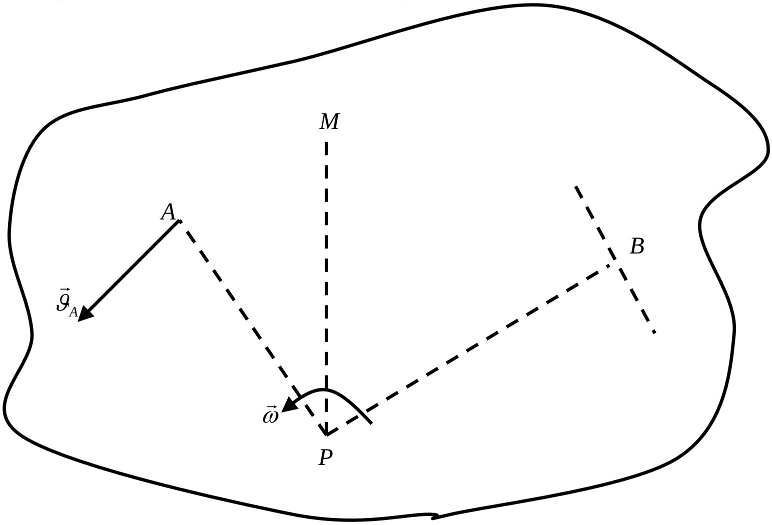
Tekizparallel hereketiň analitik öwrenilişi.

Teorema 1.

Eger-de tekiz figuranyň haýsy hem bolsa bir nokadyň tizligi we beýleki bir nokadyň bolsa tizliginiň şol birinji nokadyň tizligine parallel bolmadyk ugry belli bolsa, onda aýlanmanyň mgnowen merkeziniň kömegi bilen şu figuranyň islendik nokadynyň tizligini kesgitlemek bolýar.

Subudy:

A nokadyň tizligi we *B* nokadyň tizliginiň ugry berilýär. M nokadyň tizligini tapalyň. A we B nokatlarda şu nokatlaryň tizliklerine perpendikulýarlaryň kesişme nokadynda aýlanmanyň P mgnowen merkezini tapýarys. Aýlanmanyň burç tizligini ϖ bilen belläliň.(çyz.20).



Çyzgy 20.

Onda

$$V_A = \omega PA \quad , \qquad \omega = \frac{V_A}{PA} \qquad (2.6)$$

Şeýlelik bilen figuranyň islendik M nokadynyň tizligini kesgitleýäris:

$$V_M = \omega PM = V_A \frac{PM}{PA} \qquad (2.7)$$

Bu ýerde $\bar{V}_M \perp \overline{PM}$

Teorema subut edildi.

Görşümiz ýaly tekiz figuranyň hemme nokatlarynyň tizlikleri olaryň aýlanmanyň mgnowen merkezinden aralyklaryna proporsionaldyr.

Ỳagny

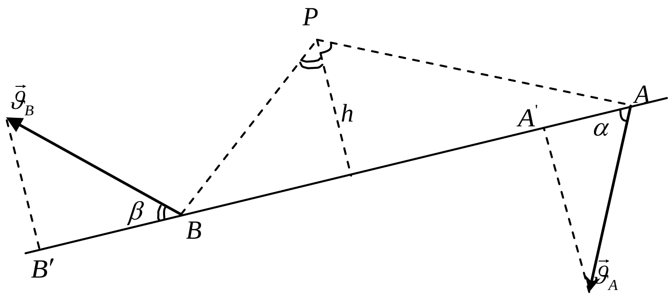
$$\frac{V_M}{V_A} = \frac{PM}{PA} \qquad (2.8)$$

Teorema 2.

Üýtgemeýän kesimiň uçlarynyň tizliklerniň onuň ugruna proýeksiýalary özara deňdirler.

Subudy.

AB kesimiň uçlarynyň tizliklerini ϑA we ϑB bilen belläliň.(çyz 21).



Çyzgy 21.

Öňki bilşimiz ýaly aýlanmanyň P mgnowen merkezini tapýarys.Eger-de AB kesimiň mgnowen burç tizligi ϖ bolsa,onda $V_A = \omega PA$, $V_B = \omega PB$

Bularyň AB kesime proýeksiýalaryny taparys:

$$AA' = \left(\overline{V}_A\right)_{AB} = V_A Cos\alpha = \omega PACos\alpha = \omega h$$

$$BB' = \left(\overline{V}_B\right)_{AB} = V_B Cos\beta = \omega PBCos\beta = \omega h$$

Bu ýerde A,P-den AB kesime çekilen perpendikulýaryň uzynlygydyr.

Şeýlelik bilen:

$$\left(\overline{V}_A\right)_{AB} = \left(\vec{V}_B\right)_{AB} \qquad (2.9)$$

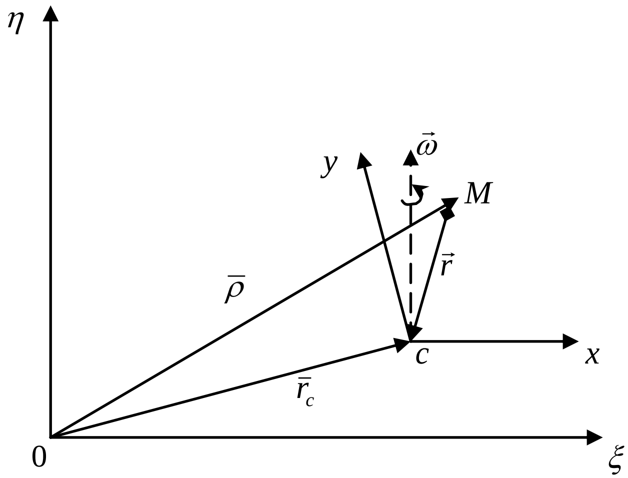
Teorema subut edildi.

Teorema.

Tekiz figarynyň islendik nokadynyň tizligi polýusyň öňe hereketiniň we şol islendik nokadyň polýusyň töwereginde aýlanma hereketiniň tizlikleriniň wektor jemine deňdir.

Subudy:

Gozganmaýan $0\xi\eta$ we hereket edýän tekiz figura bilen bagly koordinatalar başlangyjy C polýusda bolan hereket edýän Cxy koordinatalar sistemalaryny alyp, tekiz figuranyň tizligini kesgitläliň. C polýusyň töwereginde aýlanmanyň burç tizligini ϖ bilen belläliň (çyz 22). Çyzgydan $\bar{\rho} = \bar{r}_C + \bar{r}$



Çyzgy 22.

Bu wektor deňlemäniň iki tarapyndanam wagta görä önüm alýarys:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}$$

ýa-da

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + [\bar{\varpi}\,\bar{r}] \qquad (2.10)$$

Bu ýerde $\bar{V}_c$ polýus C –niň öňe hereketiniň $[\bar{\varpi}\bar{r}]$ bolsa M nokadyň C polýusyň töwereginde aýlanma hereketiniň tizlikleridir.

Teorema subut edildi.

$\varpi \perp \bar{r}$ -digini nazara alyp (2.10) formulany kesgitleýji görnüşde ýazalyň:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Şu ýerden tizligiň hereket edýän koordinata oklara proýeksiýalary tapylar:

$$\left.\begin{array}{l} V_x = V_{Cx} - \omega_y \\ V_y = V_{Cy} + \omega_x \end{array}\right\} \qquad (2.11)$$

Tizligiň gozganmaýän koordinata oklara proýeksiýalary hem edil şeýle kesgitlenýär.

Aýlanmanyň mgnowen merkeziniň çyzyk tizliginiň 0-a deňdigini bilýäris ($v=0$, $v_x=0$, $v_y=0$). Aýlanmanyň mgnowen merkeziniň hereket edän sistemadaky koordinatalaryny (x_p, y_p)bilen belläp ,olary (2.11) formuladan kesgitleýäris.

$$V_{Cx} - \omega y_p = 0 \quad ; \quad V_{Cy} + \omega x_p = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_p &= -\frac{V_{Cy}}{\omega} \\ y_p &= \frac{V_{Cx}}{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

Şu (2.12)hereket edýän sentroidanyň parametrik deňlemeleridir. Bu deňlemelerden t wagty ýok edip hereket edýän sentroidanyň deňlemesini aşakdaky görnşde alýarys;

$$F(x_p, y_p)=0 \qquad (2.13)$$

Gozganmaýan sentroidanyň deňlemesi hem edil şunuň ýalý edilip tapylýar.

Teorema.

Tekiz figuranyň islendik nokadynyň tizlenmesi polýusyň öňe hereketiniň we şol işlendik nokadyýusyň töwereginiň aýlanma hereketiniň tizlenmeleriniň wektor jemine deňdir.

Subudy:

(2.10)- den wagta görä önüm alyp tekizparallel hereketiň tizlenmesini kesgitläliň:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d\overline{V}_0}{dt} + \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}\bar{r}\right] + \left[\overline{\omega}\,\frac{d\bar{r}}{dt}\right] = \overline{W}_C + [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}] + [\overline{\omega}[\overline{\omega}\bar{r}]]$$

Wektor algebrasyndan belli bolan aşakdaky formuladan peýdalanýarys:

$$[\overline{\omega}[\overline{\omega}\bar{r}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}\bar{r}) - \omega^2\bar{r}$$

(2.14)

Tekizparallel hereketde $\varpi \perp \bar{r}$ bolany üçin (2.14) formula aşakdaky görnüşe geçýär:

$$[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{r}]] = -\omega^2 \bar{r}$$

(2.15)

Onda

$$\bar{W} = \bar{W}_C + [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}] - \bar{r}\omega^2$$

(2.16)

Bu(2.16) formulada $[\bar{\varepsilon}\bar{r}]$ aýlanma /galtaşýan /we $-w^2r$ bolsa merkeze ymtylýan /normal/ tizlenmelerdir.Bu tizlenmelere 2-si hem figuranyň C polýusynyň töwereginde aýlanmasyndan alynýarlar.

Eger-de

$$[\bar{\varepsilon}\,\bar{r}] - \bar{r}\omega^2 = \bar{W}_{MC}$$

diýip bellesek onda (2.16)formula aşakdaky görnüşe geçýär:

$$\bar{W} = \bar{W}_C + \bar{W}_{MC}$$

(2.17)

Bu ýerde W_c polýus C-nyň öňe hereketiniň we W_{mc} bolsa M nokadynyň şol C polýusyň töwereginde aýlanma hereketiniň tizlenmeleridir.

Teorema subut edildi.

Tekizparallel hereketiniň gozganmaýan koordinatalar ulgamyna görä tizlenmesi hem şunuň ýaly edilip tapylýar.

Tekiz figuranyň öz tekizliginde öňe bolmadyk hereketinde berlen wagtda tizlenmesi nula deň bolan nokadyna ,tizlenmeleriň mgnowen merkezi diýilýär. (2.16) aňlatmadaky tizlenmäniň hereket edýän koordinata oklara proýeksiýalarny tapaliň:

$$[\bar{\varepsilon}\,\bar{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} W_x &= W_{cx} - \varepsilon y - \omega^2 x \\ W_y &= W_{cy} + \varepsilon x - \omega^2 y \end{aligned}\right\}$$

(2.18)

(2.16)-ny gozganmaýan koordinata oklar üçin ýazaliň:

$$\overline{W} = \overline{W}_c + [\bar{\varepsilon}(\bar{\rho} - \bar{r}_c)] - \omega^2(\bar{\rho} - \bar{r}_C)$$

(2.19)

Tizlenmeleriň mgnowen merkeziniň hereket edýän koordinatalar ulgamyndaky koordinatalaryny (x, y) bilen belläp bulary (2.18)-den tapýarys:

$$\left.\begin{aligned} W_{cx} - \varepsilon\bar{y} - \omega^2\bar{x} = 0 \\ W_{cy} + \varepsilon\bar{x} - \omega^2\bar{y} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\bar{y} + \omega^2\bar{x} &= W_{cx} \\ \varepsilon\bar{x} - \omega^2\bar{y} &= -W_{Cy} \end{aligned}\right\}$$

Bu ýerden:

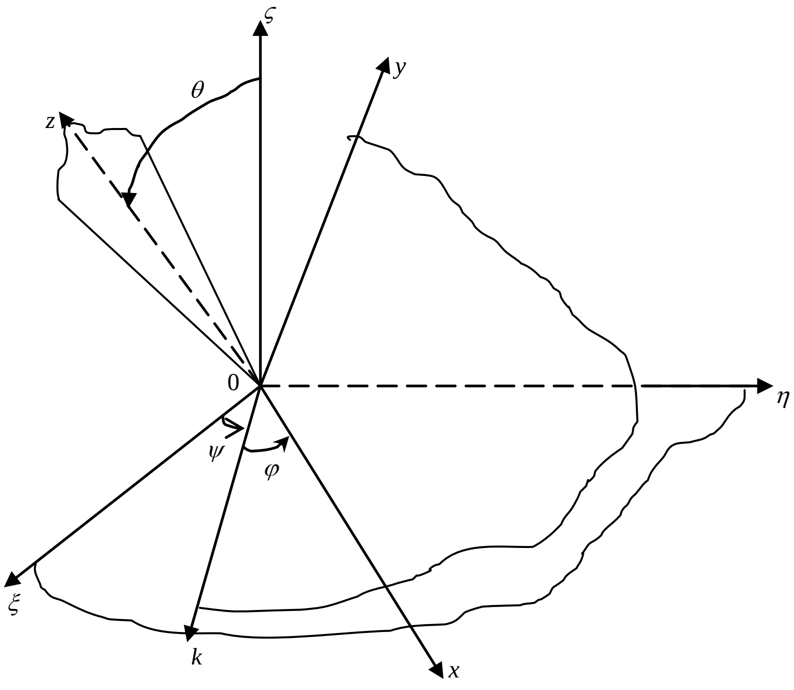
$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\omega^2 W_{cx} - \varepsilon W_{cy}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \\ \bar{y} &= \frac{\omega^2 W_{cy} + \varepsilon W_{cx}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \end{aligned}\right\}$$

(2.20)

Edil şunuň ýaly edilip(2.19)-dan tizlenmäniň gozganmaýan oklara proýeksiýalary hem tapylýar.

Eýleriň burçlary.

Koordinatalar başlangyjy jisimiň gozganmaýan O nokadynda bolan gozganmaýan $o\xi\eta\zeta$ we hereket edýän Oxyz koordinatalar sistemamlaryny alalyň.(çyz.23).



Çyzgy 23.

Egerde Oxy we $o\xi\eta$ tekizlikleriň kesişmesini *OK* bilen bellesek, onda $\angle\varphi = \angle KOX$,$\angle\psi = \angle\xi OK$, $\angle\theta = \angle\xi OZ$

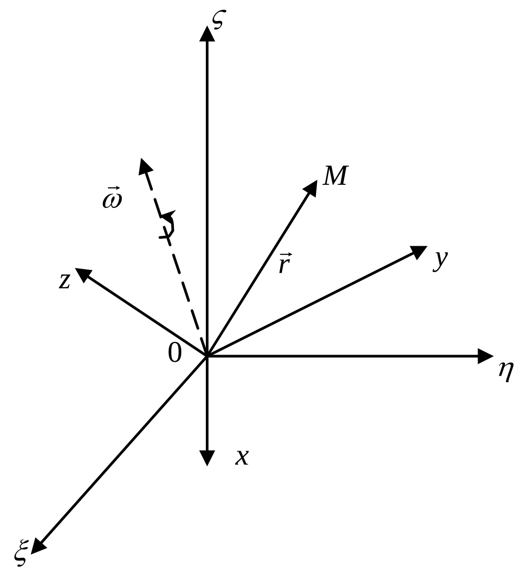
Burçlara Eýleriň burçlary we OK çyzyga düwünleriň çyzygy diýilýär.Hereket edýän Oxyz sistemanyň ýagdaýy şu burçlar bilen kesgitlenýär .Bu ýerde φ-jisimiň hususy aýlanmasynyň burçy. ψ presesiýanyň burçy we θ-nutasiýanyň burçydyr.Görşümiz ýaly gozganmaýan bir nokady bolan gaty jisimiň 3-ç sany erk inlik derejesi bar,bular Eýleriň burçlary bolup wagt t-nyň funksiýalarydyr:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) \\ \psi &= \psi(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned}\right\} \quad (2.21)$$

Şu (2.21) gozganmaýan bir nokady bolan gaty jisimiň hereketiniň deňlemeleridir.

Gaty jisimiň gozganmaýan nokadyň töwereginde aýlanmasynyň analitik öwrenilişi.

Koordinatalar başlangyjy jisimiň gozganmaýan O nokadynda bolan gozganmaýan $o\xi\eta\,\zeta$ we hereket edýän Oxyz koordinatalar ulgamyny alalyň. Jisimiň radius – wektory r bolan islendik bir nokadynyň hereketine seredeliň (çyz.24).



Çyzgy 24.

onda berlen wagtda jisimiň islendik nokadynyň tizliginiň wektory Eýleriň formulasy bilen kesgitlener:

$$\bar{V} = [\varpi \bar{r}]$$

(2.22)

Tizligiň hereket edýän koordinata oklara proýeksiýalarynyň tapmak üçin Eýleriň formulasyny kesgitleýji gőrnüşinde ýazýarys:

$$\bar{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

bu ýerden

$$\left.\begin{aligned} V_x &= qz - ry \\ V_y &= rx - pz \\ V_z &= py - qx \end{aligned}\right\}$$

(2.23)

Aýlanmanyň mgnowen oklarynyň üstündäki nokatlaryň tizlikleri berlen wagtda nula deň bolanlary üçin (2.23)-den alýarys:

$$\left.\begin{aligned} qz - ry &= 0 \\ rx - pz &= 0 \\ py - qx &= 0 \end{aligned}\right\}$$

bu ýerden

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

(2.24)

Şu hereket edýän koordinatalar sistemasyndaky aýlanmanyň mgnowen okunyň deňlemesidir.

Mgnowen okuň gozganmaýan koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi hem edil şunuň ýaly edilip tapylýar.

$$\frac{\xi}{p_1} = \frac{\eta}{q_1} = \frac{\zeta}{r_1}$$

(2.25)

(2.24)-den

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{p}{r} \\ \frac{y}{z} &= \frac{q}{r} \end{aligned}\right\}$$

(2.26)

(2.25)-den

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{\zeta}=\frac{p_1}{r_1}\\ \frac{\eta}{\zeta}=\frac{q_1}{r_1}\end{aligned}\right\}$$

(2.27)

(2.26) we (2.27)-den t wagty ýok edip degişlilikde hereket edýän we gozganmaýan aksoidleriň deňlemelerni alýarys:

$$f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$$

(2.28)

$$F\left(\frac{\xi}{\zeta},\frac{\eta}{\zeta}\right)=0$$

(2.29)

(2.28) we (2.29) depeleri gozganmaýan koordinatalar başlangyjynda bolan hereket edýän we gozganmaýan konuslardyr.

(2.22) formula bilen aňladylan tizligiň wektoryndan wagta gőrä önümi alyp, gozganmaýan bir nokady bolan gaty jisimiň hereketiniň tizlenmesini tapýarys:

$$\overline{W}=\frac{d\overline{V}}{dt}=\left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}\bar{r}\right]+\left[\overline{\omega}\frac{d\bar{r}}{dt}\right]=\left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}\bar{r}\right]+[\overline{\omega}[\overline{\omega}\bar{r}]]$$

(2.14) formulany ulanyp:

$$\overline{W}=[\bar{\varepsilon}\bar{r}]+\overline{\omega}(\overline{\omega}\bar{r})-\bar{r}\omega^2$$

(2.30)

$$\left[\bar{\varepsilon}\bar{r}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

(2.31)

(2.30) we (2.31)-den tizlenmäniň hereket edýän koordinata oklara proýeksiýalarny tapýarys:

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x \\ W_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y \\ W_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z \end{aligned}\right\}$$

(2.32)

Rewalsyň teoremasy.

Gaty jisimiň gozganmaýan nokadyň tőwereginde aýlanmasynyň doly tizlenmesiniň wektory galtaşýan we mgnowen oka ymtylýan tizlenmeleriň jemine deňdir.

Subudy.

Riwals tizlenmäniň (2.30)-daky aňlatmasyny aşakdaky ýaly edip başga gőrnüşe getiripdir.Egerde ω^0 burç tizligi ϖ -yň birlik wektory bolsa ,onda:

$$\left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{r}\right]\right] = \omega^2\left\{\bar{\omega}^0\left(\bar{\omega}^0\bar{r}\right) - \bar{r}\right\}$$

Bu ýerde $\overline{\varpi}^{0}\overline{r} = r_{\omega}$ M-nokadyň r radius-wektorynyň ϖ burç tizligiň ugruna proýeksiýasy bolany üçin (çyz.25):

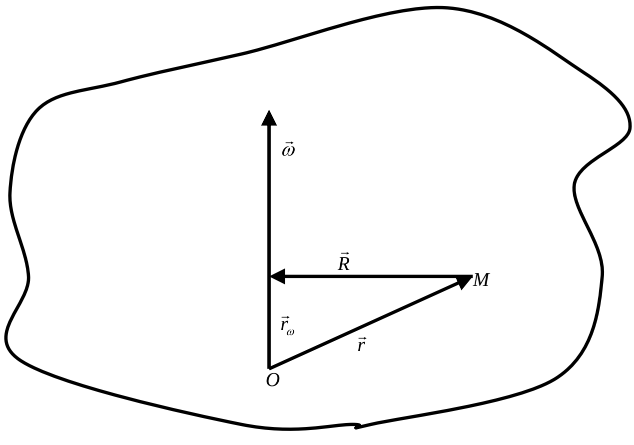
$$[\overline{\varpi}[\overline{\varpi}\overline{r}]] = \omega^{2}\left(r_{\omega}\overline{\varpi}^{0} - \overline{r}\right) = \omega^{2}\left(\overline{r}_{\omega} - \overline{r}\right)$$

bu aňlatmadaky $\overline{r}_{\omega} - \overline{r} = \overline{R}$ mgnowen oka tarap ugrukdyrylan wektorydyr. Şeýlelik bilen (2.30) formulany aşakdaky gőrnüşdealýarys.

$$\overline{W} = [\overline{\varepsilon}\overline{r}] + \omega^{2}\overline{R} \qquad (2.33)$$

(2.33)-de $[\overline{\varepsilon}\,\overline{r}]$ galtaşýan, w^2R bolsa mgnowen oka ymtylýan tizlenmelerdir.

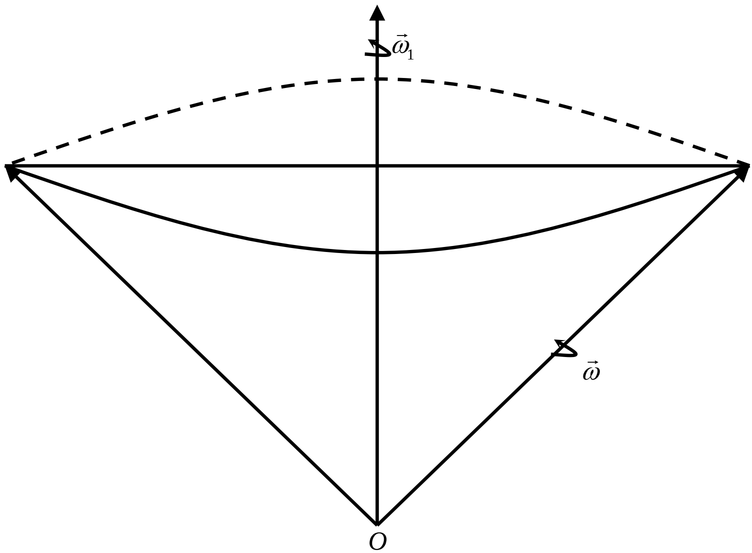
Teorema subut edildi.



Çyzgy 25.

Gaty jisimiň gozganmaýan nokadyň tőwereginde aýlanma hereketiniň mgnowen burç tizlenmesi.

Jisim gozganmaýan O nokadyň tőwereginde ω=çonst burç tizlik bilen aýlanma hereket edýär.Onda burç tizlenme $\bar{\varepsilon}$ ululygy hemişelik bolan $\overline{\omega}$ burç tizligiň wagta gőrä birinji önüme deň bolany üçin $\left(\bar{\varepsilon} = \frac{d\overline{\varpi}}{dt}\right)$ ol şu $\overline{\varpi}$ burç tizligiň wektoryna perpendikulýardyr. Burç tizligiň wektory $\overline{\varpi}$ wertikal z okuň tőwereginde $\overline{\varpi}_1$ burç tizlik bilen aýlanýar. (çyz.26).



Çyzgy 26.

Şeýlelik bilen burç tizlenmäniň wektory $\bar{\varepsilon}$ şol $\overline{\varpi}$ burç tizligiň wektorynyň godografina galtaşýan boýunça ugrukdyrylan wektordyr. Jisimiň her bir nokady z okuň tőwereginde haýsam bolsa bir tőwerek boýunça aýlanýar.

Şu ýerde $\overline{\varpi}$ jisimiň nokadynyň radius-wektory we $\bar{\varepsilon}$ bolsa,şol nokadyň çyzyk tizligi hőkmünde garalýar.

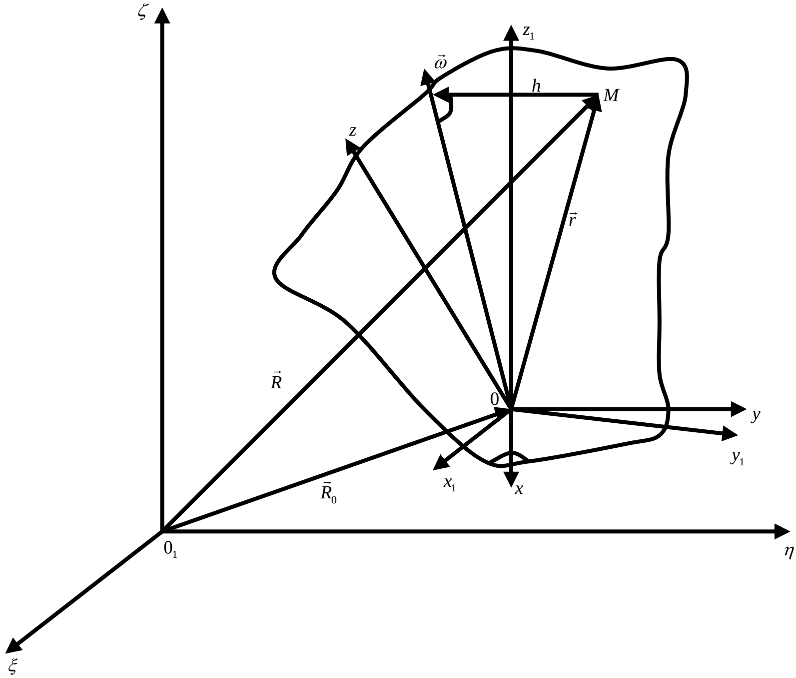
Şeýlelik bilen $\bar{\varepsilon}$ Eýleriň (2.3)formulasynyň esasynda aşakdaky wektor kőpeltmek hasyly bilen aňladylýar:

$$\bar{\varepsilon} = [\overline{\omega}\ \overline{\omega}_1]$$

Erkin gaty jisim hereketi.

Giňişlikde erkin ýägdaýda bolup bilýan jisime erkin jisim diýilýär.Erkin gaty jisimiň hereketiniň geometrik we analitik őwrenilişi gaty jisimiň tekizparallel hereketiniň geometrik analitik őwrenilişe meňzeşdir.

Erkin gaty jisimiň hereketiniň tekizparallel hereketden birnäçe tapawutly ýerlerini belläliň. Gozganmaýan $o\xi\eta\varsigma$ we hereket edýän Oxyz koordinatalar sistemamlaryny alalyň. O nokadyň üstünden gozganmaýan $o\xi, o\eta, o\zeta$ oklara parallel bolan O_x,O_y,O_z oklary geçirýäris (çyz 27)



Çyzgy 27.

Hereket edyän koordinatalar sistemanyň başlangyjy bolan 0 nokadyň ýagdaýy ξ_0, η_0, ξ_0 we φ, ψ, θ Eýleriň burçlary bilen kesgitlenýär. Erkin jisimiň hereketiniň deňlemeleri şeýle aňladylýarlar:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_0 = \xi_0(t) & \varphi = \varphi(t) \\ \eta_0 = \eta_0(t) & \psi = \psi(t) \\ \zeta_0 = \zeta_0(t) & \theta = \theta(t) \end{array}\right\}$$

(2.34)

Çyzgy 28-den

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + \bar{r}$$

bu ýerden wagta görä önümi alyp erkin jisimiň herekrtiniň tizligini kesgitleýär.

$$\overline{V} = \overline{V}_0 + [\overline{\omega}\,\bar{r}]$$

(2.35)

Erkin jisimiň hereketinden ϖ we $\bar{r}$ özara perpendikulýar bolmanlary üçin $(\varpi, \bar{r}) \neq 0$

bolýar.

Tizligiň (2.35)-däki wektor aňlatmasyndan wagta görä önümi alyp erkin jisimiň hereketiniň tizlenmesini tapýarys

$$\overline{W} = \overline{W}_0 + [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}] + \overline{\omega}(\overline{\omega}\,\bar{r}) - \omega^2 \bar{r}$$

(2.36)

Ýa-da

$$\overline{W} = \overline{W}_0 + [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}] + \omega^2 \overline{h}$$

(2.37)

(2.37)-däki h jisimiň M nokadynyň O -nyň töwereginde aýlanýan töwereginiň radiusydyr,W_0 jisimiň (O nokadyň) öňe hereketiniň $\overline{W_1} = [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}]$ koordinatalar başlangyjy 0 nokadyň üstünden geçýän mgnowen okyň töwereginde aýlanma hereketiniň we $\overline{W_2} = \omega^2 \vec{h}$ bolsa M nokadyň oka ymtylýan tizlenmeleridir.

$$\overline{W} = \overline{W_0} + \overline{W_1} + \overline{W_2}$$

(2.38)

Tizligiň (2.35) formuladaky wektor aňlatmasyny hereket edýän koordinata oklara proýektirleýäris:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_{OX} + qz - ry \\ V_y &= V_{OY} + rx - pz \\ V_z &= V_{OZ} + py - qx \end{aligned}\right\}$$

(2.39)

Tizlenmäniň (2.36)-daky wektor aňlatmasynyň hereket edýän koordinata oklaryň proýektirläp tizlenmäniň şu oklara proýeksiýalaryny tapýarys:

$$\left.\begin{aligned} W_x &= W_{OX} + \dot{q}z - \dot{r}y + (px + qy + rz) - \omega^2 x \\ W_y &= W_{OY} + \dot{r}x - \dot{p}z + (px + qy + rz) - \omega^2 y \\ W_z &= W_{OZ} + \dot{p}y - \dot{q}x + (px + qy + rz) - \omega^2 z \end{aligned}\right\}$$

(2.40)

Edil şunuň ýaly edip tizligiň we tizlenmäniň gozganmaýan oklara-da proýeksiýalaryny kesgitlemek bolar.

NOKADYŇ ÇYLŞYRYMLY HEREKETI

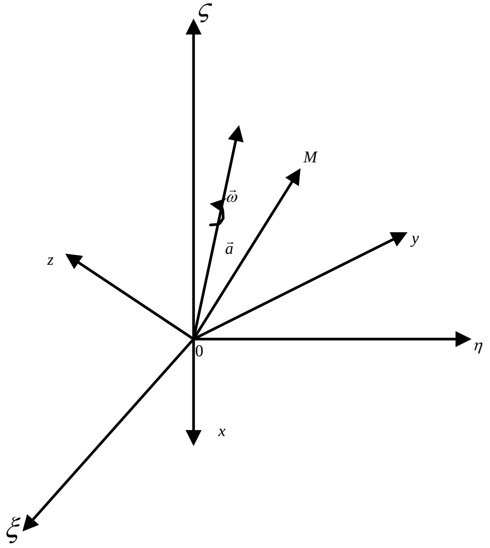
Eger-de nokat edil bir wagtyň özünde birnäçe hereketlere gatnaşşa, onda nokadyň beýle herketine çylşyrymly hereket diýilýär. Mysal üçin ýolagçynyň parahoda, parahodyň suwa, suwyň kenara görä hereketini. Ýeriň öz okuna we Günüň töwereginde aýlanýandygyny göz öňünde tutsak, onda ýolagçynyň hereketi çylşyrymly hereket bolýar we ş.m.

Biz öň nokadyň edil bir wagtyň özünde diňe iki sany / otnositel we göçürme/ hereketlere gatnaşýan halyna seredipdik.

Indi bolsa nokadyň edil bir wagtyň özünde iki we ikiden köp birnäçe heketlere gatnaşýan çylşyrymly hereketine seretjekdiris

WEKTORYŇ DOLY WE LOKAL /OTNOSITEL/ ÖNÜMI.

Koordinatalar başlangyjy O nokatda bolan gozganmaýan $O\xi\eta\zeta$ we hereket edýän $Oxyz$ koordinatolar sistemalaryny alalyn. $\overline{\omega}$ hereket edýän sistemanyň gozganmaýan sistema görä mgnowen burç tizligidir. Radius wektory $\overline{\alpha}$ bolan M nokadyň hereketine seredeliň. (çyz. 28).



Çyzgy 28.

$\overline{\alpha}$ wektora onuň proýeksiýalarynyň üsti bilen aňladalyň:

$$\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k$$

(2. 41)

Egerde i , j , k hereket edýän $Oxyz$ sistemanyň koordinatalarynyň birlik wektorlary bolsalar, onda (2. 41)-den:

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k \right) + a_x \frac{di}{dt} + a_y \frac{dj}{dt} + a_z \frac{dk}{dt}$$

Bu ýerde skobkalardaky aňlatma $\overline{a}$ wektoryň lokal ýa-da otnositel önümi diýilýär we şeýle bellenýär:

$$\frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k = \frac{\tilde{d}\overline{a}}{dt}$$

(2.42)

Puassonyň (2.5) formuladan peýdalanyp $\overline{a}$ wektoryň doly önümini aşakdaky görnüşde aňladýarys:

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{a}}{dt} + \left[\overline{\omega}\left(a_x i + a_y j + a_z k\right)\right]$$

Ýa-da

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{a}}{dt} + \left[\overline{\omega}\, \hat{a}\right]$$

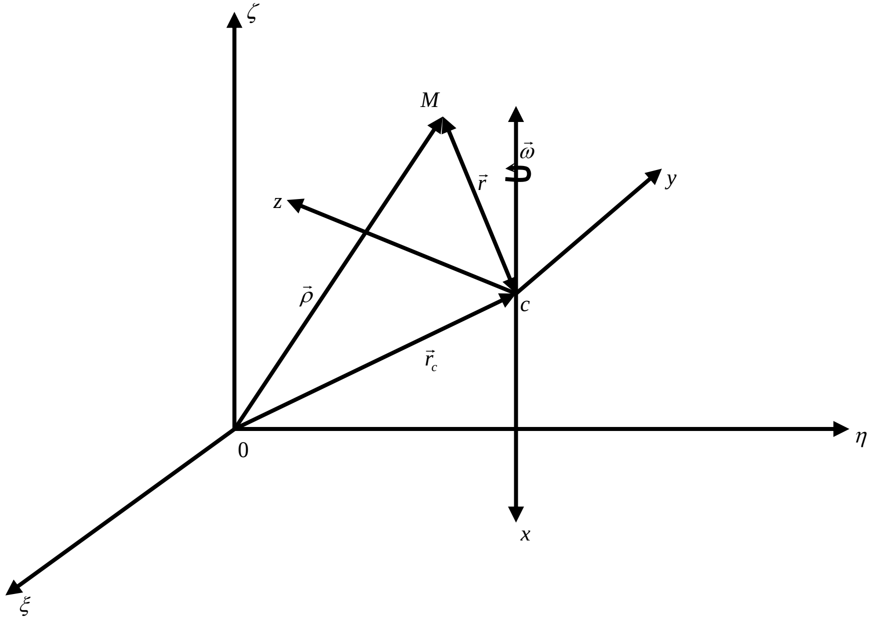
(2. 43)

Şu (2. 43) formuladan görnüşi ýaly hereket edýän koordinatalar sistemasynda wektoryň doly önümi onuň lokal önümi bilen burç tizligiň şol wektora wektor köpeltmek hasylynyň jemine deňdir.

ÇYLŞYRYMLY HEREKETIŇ TIZLIKLERINI WE TIZLENMELERINI GOŞMAK HAKYNDAKY TEOREMALAR. KORIOLISIŇ TEOREMASY.

Teorema: Nokadyň çylşyrymly hereketiniň absolýut tizligi onuň göçürme we otnositel tizlikleriniň wektor jemine deňdir.

Subudy: Hereket edýän *Cxyz* sisteama gozganmaýan $O\xi\eta\zeta$ hereketine bagly bolmadyk *M* nokada seredeliň. (çyz. 29) *M* nokadyň absolýut radius-wektoryny $\bar{\rho}$ otnositel radius-wektoryny $\bar{r}$ we C nokadyň radius-wektoryny $\bar{r}_C$ bilen belleýäris.



Çyzgy 29.

Çyzgydan $$\bar{\rho} = \bar{r}_C + \bar{r}$$ (2. 44)

(2.44) dan wagta görä önüm alalyň:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_C}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}$$

lokal önüm hakdaky (2. 32) formulany ulanýarys:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + [\bar{\omega}\,\bar{r}]$$

Şeýlelik bilen nokadyň absolýut tizligi aşakdaky görnüşde aňladylýar:

$$\bar{V} = \bar{V}_C + [\bar{\omega}\bar{r}] + \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$$

(2. 45)

Bu ýerde $\bar{V}_C + [\bar{\omega}\,\bar{r}]$ nokadyň göçürme we $\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$ bolsa otnositel tizlikleridir:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{V}_C + [\bar{\omega}\bar{r}] = \bar{V}_r \\ &\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \bar{V}_{otn} \end{aligned}\right\}$$

(2. 46)

Onda:

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_{otn}$$

(2. 47)

Şu (2.47)formuladan görnüşi ýaly *M* nokadyň çylşyrymly hereketiniň absolýut tizligi onuň göçürme we otnositel tizlikleriniň wektor jemine deňdir. Şunuň bilen tizlikleri goşmak hakdaky teorema subut edildi.

Koriolisiň teoremasy: Nokadyň çylşyrymly hereketiniň tizlenmesi onuň göçürme, otnositel we koriolisiň tizlenmeleriniň wektor jemine deňdir.

Subudy: Absolýut tizligiň (2.47)-däki wektor aňlatmasyndan wagta görä önüm alyp nokadyň çylşyrymly hereketiniň absolýut tizlenmesini tapýarys:

$$\overline{W}=\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{d\overline{V}_r}{dt}+\frac{d\overline{V}_{otn}}{dt}$$

(2.48)

(2.45) formulany ulanýarys:

$$\frac{d\overline{V}_{otn}}{dt}=\frac{\tilde{d}\overline{V}_{otn}}{dt}+\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]=\overline{W}_{otn}+\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]$$

(2.49)

(2.44) nazara alyp (2.48)-däki $\frac{d\overline{V}_r}{dt}$ -ni kesgitläliň:

$$\frac{d\overline{V}_r}{dt}=\frac{d\overline{V}_C}{dt}+\left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}\overline{r}\right]+\left[\overline{\omega}\frac{d\overline{r}}{dt}\right]=\overline{W}_C+\left[\overline{\varepsilon}\overline{r}\right]+\left[\overline{\omega}\left(\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt}+\left[\overline{\omega}\overline{r}\right]\right)\right]=$$

$$=\overline{W}_C+\left[\overline{\varepsilon}\overline{r}\right]+\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]+\left[\overline{\omega}\left[\overline{\omega}\overline{r}\right]\right]=\overline{W}_C+\left[\overline{\varepsilon}\overline{r}\right]+\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]+\overline{\omega}\left(\overline{\omega}\overline{r}\right)-\omega^2\overline{r}=$$

$$=\overline{W}_C+\left[\overline{\varepsilon}\overline{r}\right]+\overline{\omega}\left(\overline{\omega}\overline{r}\right)-\omega^2\overline{r}+\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]$$

(2.47)

(2.47) we (2.48)-däki aňlatmalary (2.46)-de ýazýarys:

$$\overline{W}=\overline{W}_C+\left[\overline{\varepsilon}\overline{r}\right]+\overline{\omega}\left(\overline{\omega}\overline{r}\right)-\omega^2\overline{r}+\overline{W}_{otn}+2\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]$$

(2.48)

Bu ýerde $\overline{W}_C+\left[\overline{\varepsilon}\overline{r}\right]+\overline{\omega}\left(\overline{\omega}\overline{r}\right)-\omega^2\overline{r}=\overline{W}_2$

(2.49)

(2.45) göçürme tizlenmedir. $2\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]$ goşmaça tizlenme bolup, ol göçürmewe otnositel tizlenmelere girmeýär.Bu goşmaça tizlenmä Koriolisiň tizlenmesi diýilýär we şeýle bellenýär:

$$2\left[\overline{\omega}\overline{V}_{otn}\right]=\overline{W}_k$$

(2.50)

Koriolisiň tizlenmesi Ýerin aýlanmasynyň täsirinden ýüze çykýar. Şeýlelik bilen nokadyň çylşyrymly hereketiniň absolýut tizlenmesi aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$\overline{W} = \overline{W}_r + \overline{W}_{otn} + \overline{W}_k$$

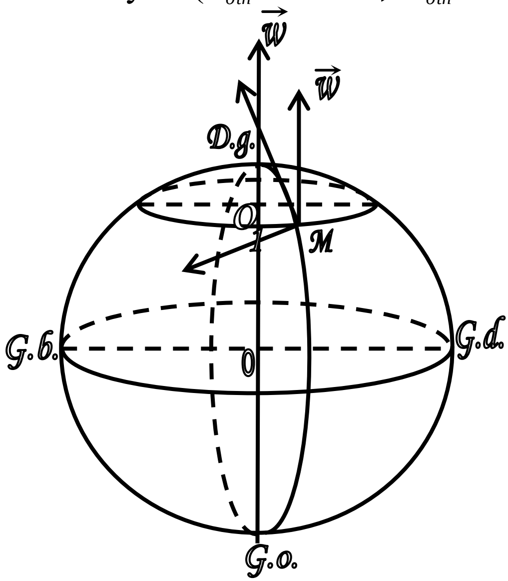
(2.51)

Şunuň bilen Koriolisiň tizlenmeleri goşmak hakyndaky teoremasy subut edildi.

3. Koriolisiň tizlenmesiniň ugry we onuň aşak gaçýan jisimlere täsiri.

Koriolisiň tizlenmesiniň ugruny kesgitlemek üçin aşakdaky mysala seredeliň.

Demirýol otlysy demirgazyk ýarym şarda, $\overline{V}_{otn}$ tizlik bilen meridian ugur günortadan demirgazyga tarap deňölçegli hereket edýär. ($\overline{V}_{otn}$ = const, $\overline{W}_{otn}$ = 0)



Çyzgy 30

Ýeriň günbatardan gündogara aýlanýandygy sebäpli sag koordinatalar sistemasynda $\overline{\omega}$ -nyň ugry ýeriň oky boýunça günorta polýusdan demirgazyk polýusa tarap bolýar. Onuň moduly :

$$\omega = \frac{2\pi}{24*60*60} * sek^{-1} \approx 7,272*10^{-5} * sek^{-1}$$

Kiçi bolany üçin $W_2 = \omega' * r$ has hem kiçi bolýar. Şoňa görä $\vec{W}_2$-ni nazara almaýarys. $(W_2 \approx 0)$ Şeýlelik bilen (2.51) formula diňe Koriolisiň tizlenmesi $\vec{W}_k$ galýar. Onuň ugruny kesgitlemegiň oňaýly bolmagy üçin $\vec{\omega}$-ny Ýeriň üstünde otlynyň haýsy hem bolsa bir momentdäki ýagdaýyny aňladýan M nokada geçirýäris.

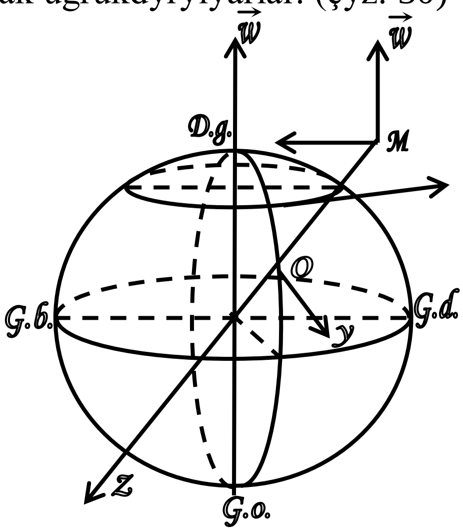
(2.50) formuladan görşümiz ýaly Koriolisiň tizlenmesiniň wektory $\vec{W}_k$, burç tizligi $\vec{\omega}$ we otnositel tizlik ϑ_{otn} wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna perpendikulýar bolmalydyr. Otlynyň hereketine onuň ugry boýunça gözegçilik edilende Koriolisiň tizlenmesiniň ugry M nokatda parallele galtaşýan boýunça günbatar tarapa /çep tarapa/ boljakdygy düşnüklidir.

Başga sözler bilen aýdanymyzda bolsa Ýer otla günbatara /çep tarapa/ ugrukdyrlan güýç we otly bolsa ýere gündogara /sag tarapa/ ugrukdyrlan güýç bilen täsir edýär.

Şeýlelik bilen otlynyň basyş güýji sag tarapdaky relse düşýär. Netijede sag tarapdaky rels tiz aýlanýar. Edil şunuň ýaly hem meridian boýunça günortadan demirgazyk tarapa akýan derýalaryň sag kenarlary tiz oýulýarlar we ş.m. Şuňa Beriň kanuny diýilýär.

Eger-de otly meridian boýunça demirgazykdan günorta tarapa hereket etse, onda Koriolosiň tizlenmesiniň ugry şol nokatda parallele galtaşýan boýunça gündogar tarapadyr. /çep tarapadyr/ Şeýlelik bilen hereketiň ugry boýunça gözegçilik edilende Koriolisiň tizlenmesiniň ugry mydama çep tarapa bolýar.

Indi Koriolisiň tizlenmesiniň uly bolmadyk bir h beýiklikden erkin Ýere gaçýan M jisime täsirini kesgitläliň. OXYZ koordinatalar sistemasy alýarys. Bu ýerde Ox parallel boýunça gündogara, Oy meridian boýunça günorta, Oz wertikal aşak ugrukdyrylýarlar. (çyz. 30)



Çyzgy 30

t=0 bolanda M(0,0,h) we t wagtda $\vartheta_{otn} = g * t$ bolýar. Koriolisiň tizlenmesi Ox oka parallel bolany üçin onuň Oy we Oz oklara proýeksiýalary nula deňdir. Şeýlelik bilen (2.77)-den :

$$W_{kx} = \frac{d^2x}{dt^2} = 2\left\|\left[\varpi * \vartheta_{otn}\right]\right\| = 2 * \omega * \vartheta_{otn} * \sin(\pi/2 - \varphi) = 2 * \omega g t \cos\varphi$$

Belli bir berlen ýer üçin $\varphi = const$, $\cos\varphi = const$ bolýandygyny nazara alyp şu differensial deňlemäni iki gezek yzly-yzyna integrirläliň :

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = \omega g t^2 \cos\varphi + c$$

Bu ýerde t=0, c=0 bolany üçin

$$\frac{dx}{dt} = \omega g t^2 \cos\varphi$$

Muny ýene-de bir gezek integrirleýäris :

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^2 \cos\varphi + c_1$$

t=0 bolanda $c_1 = 0$ bolýar. Onda

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^2 \cos\varphi \quad (2.52)$$

Şu ýerde x Koriolisiň tizlenmesiniň täsiri astynda ýokardan erkin gaçýan M jisimiň t wagtyň dowamynda gündogar tarapa gyşarmasydyr.

Eger-de h beýiklikden Ýere erkin gaçmanyň doly wagty T bolsa, onda :

$$h = \frac{1}{2} g T^2, \quad T = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Jisimiň gündogara doly gyşarmasy (2.52) formuladan şeýle kesgitlenýär:

$$d = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \cos\varphi \quad (2.53)$$

Mysal : Eger-de jisim $h = 100m = 10^4 sm$ beýiklikden erkin gaçýan bolsa, onda Moskwa üçin $\varphi = 55^o 45'3''$,

$g = 982 sm/sek^2$ bolany sebäpli (2.53) formuladan $d = 1.23 sm$ bolýar.

M E S E L E L E R

1. R radiusly gozganmaýan şesterenkanyň içinden tigirlenýän r radiusly şesterenka gozganmaýan şesterenkanyň O okuň töwereginde ω_0 burç tizlik bilen deňölçegli aýlanýan OA kriwoşip bilen herekete getirilýär.

t=0 bolanda burç $\varphi_0 = 0$.

Hereket edýän şesterenkanyň A merkezini polýus deregine kabul edip onuň hereketiniň deňlemesini düzmeli.

<u>Çözülişi :</u> OC=R , AC=r

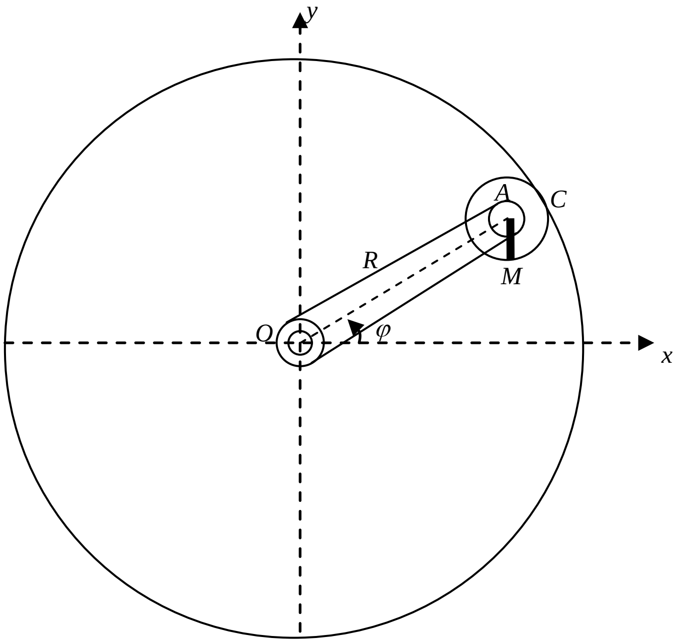
Hereket edýän şesterenkanyňp merkezi A-nyň koordinatalaryny x we y bilen belläp olary çyzgyndan kesgitleýäris :

$$x = (R-r)\cos\varphi = (R-r)\cos\omega_0 t$$

$$y = (R-r)\sin\varphi = (R-r)\sin\omega_0 t$$

Radiusy r bolan şesterenkanyň öwrülme burçyny φ, we burç tizligini bolsa ω, bilen bellälíň.

Onda : $\dfrac{\omega_0}{\omega_1} = \dfrac{AC}{OA}; \quad \omega_1 = \dfrac{OA}{AC}\omega_0; \quad \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \dfrac{OA}{AC}\omega_0$



Şesterenkanyň kriwoşipiň tersine aýlanýandygyny göz öňünde tutsak : $\varphi_1 = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega_0 t$

2. Welosipeddäki zynjyrly geçiriji 26 dişi bolan A dişli tigiri we 9 dişli bolan B şesterni gurşap alýan zynjyrdan ybaratdyr. B şestern diametri 70sm bolan C yzky tigir bilen üýtgewsiz birleşdirlendir. A tigir sekuntda bir aýlaw edýär we C tigir bolsa göniçyzykly ýol boýunça typman tigirlenýär. Welosipediň tizliini kesgitlemeli.

Çözülişi : Meseläniň şerrine görä alarys:

$$\omega_1 * 9 = \omega_2 * 26$$

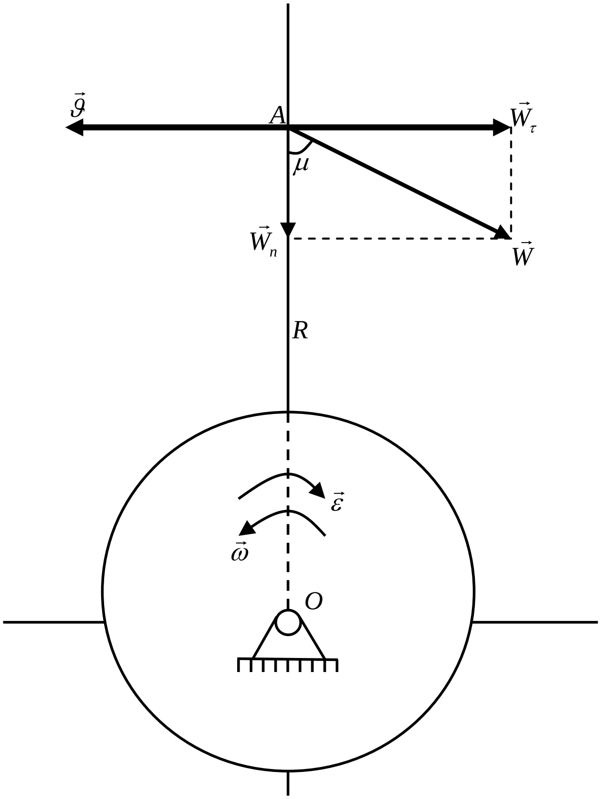
$$\omega_1 = \frac{26}{9}\omega_2 = \frac{26}{9}2\pi sek^{-1} = \frac{52}{9}\pi sek^{-1}$$ Onda:

$$\vartheta = \omega_1 r = \frac{52}{9}\pi * 35 sm/sek = 22.87 km/sag$$

$$\vartheta = 22.87 km/sag$$

3. Wal özüne birikdirlen plastina bilen podşipniklerde $\varphi = a\ln\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)$ deňleme boýunça aýlanýar, bu ýerde φ - walyň öwrülme burçy, a we ω_0 hemişelik koeffisientler. Walyň burç tizligini we burç tizlenmesini kesgitlemeli. Aýlanma okundan R aralykda bolan plastinanyň merkezi A-nyň tizligini we tizlenmesini tapmaly.

Çözülişi :



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{d}t}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{{\omega_0}^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{d}t\right)^2} * \frac{1}{a};$$

Şu aňlatmalardan :

$$\varepsilon = -\frac{\omega^2}{a}, \qquad \vartheta = R\omega = \frac{R\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{a}t}$$

$$W_n = R\omega^2 = \frac{R{\omega_0}^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2}$$

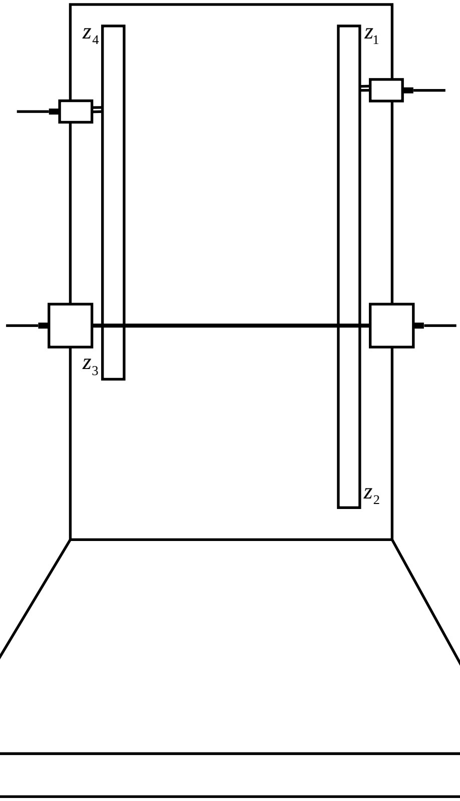
$$W_\tau = R\varepsilon = -\frac{R\omega^2}{a} = -\frac{R}{a} * \frac{\omega_0{}^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2}$$

$$W = \sqrt{W_\tau{}^2 + W_n{}^2} = \frac{R}{a} * \frac{\omega_0{}^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2} * \sqrt{1+a^2}$$

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\frac{1}{a}$$

4. Aýlanma I waldan II wala geçirlende burç tizliginiň ululygyny üýtgetmek üçin niýetlenen tizligiň reduktory gozganmaýan oklaryň töwereginde aýlanýan dört sany dişli tigirden guralan. Dişli tigitleriň dişleriniň sany $z_1 = 12$, $z_2 = 72$, $z_3 = 10$.

II wal 100 aýlaw/min edende I wal 5400 aýlaw/min etmeli. Dördünji dişli tigiriň dişleriniň sanyny tapmaly.



Çözülişi : Dişli tigiriň bur tizlikleriniň ululyklary olaryň dişleriniň sanyna ters proporsional bolanlary üçin :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3} \quad \text{bolýar.}$$

$\omega_2 = \omega_3$ nazar alyp şu deňlikleri köpeldýäris :

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}; \qquad \frac{5400}{100} = \frac{72 z_4}{12 * 10}; \quad z_4 = 90$$

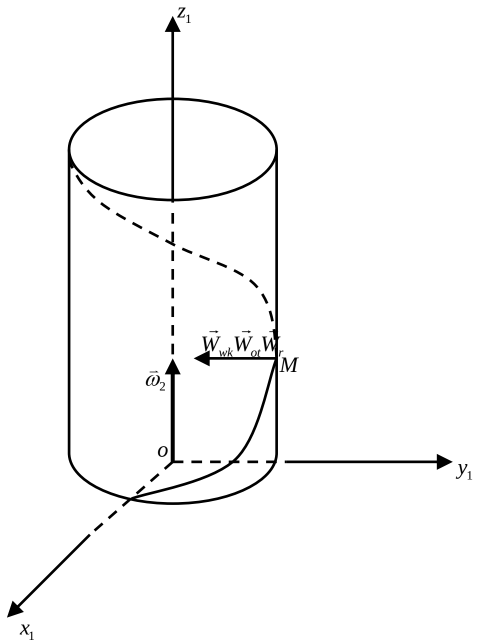
5. Silindr ω_r hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar. Silindriň üsti boýunça M nokat

$$x_1 = 3\cos 2\pi t\mu, \qquad y_1 = 3\sin 2\pi t\mu, \quad z_1 = 3t\mu$$

Deňlemelere görä hereket edýär. x_1, y_1, z_1 koordinata oklary silindr bilen berk baglanşykly we şoňa görä-de onuň bilen bile ω_r burç tizlik bilen aýlanýarlar. z_1 ok simmetriýa oky bilen gabat gelýär. Göçürme burç tizligiň z_1 oka proýeksiýasy

$$\omega_r z_1 = 2sek^{-1}$$

M nokadyň absolýut tizligini we absolýut tizlenmesini tapmaly :



Çözülişi : M nokadyň Oz, okdan aralygy $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 3m$

M nokadyň göçürme tizligi : $\vartheta_2 = r\omega_2 = 3*2 = 6m/sek$

Göçürme tizligi : $W_2 = r\omega_2^2 = 3*4 = 12m/sek^2$

Otnasitel tizligiň proýeksiýalary : $\vartheta_{otn.x_1} = \dot{x}_1 = -6\pi\sin 2\pi t$

$$\vartheta_{otn.y_1} = \dot{y}_1 = 6\pi\cos 2\pi t$$

$$\vartheta_{otn.z_1} = \dot{z}_1 = 3$$

Otnositel tizligiň ululygy : $\vartheta_{otn} = \sqrt{\dot{x}_1^{\ 2} + \dot{y}_1^{\ 2} + \dot{z}_1^{\ 2}} = 19.1m/sek$

M nokadyň jemleýji tizligi $\vartheta_{otn.xy}$ ugry boýunça göçürme ϑ_r bilen gabat geleni üçin onuň absolýut tizligi : $\vartheta = \sqrt{\left(\vartheta_{otn.xy} + \vartheta_2\right)^2 + \vartheta_{otn.z}^{\ 2}} \approx 25.5m/sek$

$$\vartheta \approx 25.5m/sek$$

Otnositel tizlenmäniň proýeksiýalary :

$$W_{otn.x_1} = \ddot{x}_1 = -12\pi^2 \cos 2\pi t = -4\pi^2 x_1$$

$$W_{otn.y_1} = \ddot{y}_1 = -12\pi^2 \sin 2\pi t = -4\pi^2 y_1$$

$$W_{otn.z_1} = \ddot{z}_1 = 0$$

Otnositel tizlenmäniň ululygy :

$$W_{otn.} = \sqrt{\ddot{x}_1 + \ddot{y}_1 + \ddot{z}_1} = 12\pi^2$$

M nokat üçin Koriolisiň tizlenmesi :

$$\vec{W}_k = 2\left[\vec{\omega}_2 \vec{\vartheta}_{otn}\right]$$

Bu ýerden Koriolisiň tizlenmesiniň ululygy :

$W_k = 2\omega_2 \vartheta_{otn} \sin\left(\vec{\omega}_2 \vec{\vartheta}_{otn}\right) = 2\omega_2 \vartheta_{otn.xy} = 2\omega_2 6\pi = 24\pi$

$W_k = 24\pi$

Şeýlelik bilen absolýut tizligiň ululygy:

$$W = W_2 + W_{otn} + W_k = 12 + 12\pi^2 + 24\pi \approx 206.5m/sek^2$$

$W = 206.5m/sek^2$

STATIKA

Mehanikada güýçleriň sistemanyň täsiri astynda mehaniki sistemanyň deňagramlaşmak we güýçleriň sistemalarynyň ekwiwalentlik şertlerini öwrenýän bölüme statika diýilýär. Güýç-jisimleriň özara mehaniki täsiriniň intensiwligini we ugruny häsiýetlendirýän esasy mukdar ölçegidir.

GÜÝĢLERIŇ GÖRNÜSLERI

1. Jisimiň üstündäki nokatlara täsir edýän güýçlere üst güýçleri diýilýär. Bu güýçler jisimler galtasyp özara täsir edenlerinde ýüze çykýarlar.

2. Jisimiň hemme bölejiklerine täsir edýän güýçlere göwrüm ýa-da massa güýçleri diýilýär.Mysal üçin çekis we agyrlyk güýçler şu güýçlere degişlidirler.

Sistemaa degisli bolmadyk jisimleriň özara täsirlerinden ýüze çykýan güýçlere daşky we sistemaa degisli bolan bölejikleriň özara täsirlerinden ýüze çykýan güýçlere bolsa içki güýçler diýilýär.

Jisimi herekete getirýän ýa-da ony herekete getirmäge ukyply bolan güýçlere aktiw güýçler diýilýär.

Hereketi emele getirmeýän, jisimiň süýşmesini çäklendirýän we oňa päsgel berýän güýçlere passiw güýçler diýilýär.

BAGLANŞYKLAR, BAGLANŞYGYŇ REAKSIÝASY, ERKIN WE ERKIN DÄL JISIMLER.

Giňişlikde erkin ýagdaýda bolup bilýän jisimlere erkin jisimler diýilýär. Giňişlikde erkin ýagdaýda bolup bilmeýän jisimlere bolsa erkin däl jisimler diýilýär. Jisimiň hereketini we erkinligini çäklendirýän şertlere baglanşyklar diýilýär. Jisime Baglanşygyň jisime edýän täsir güýjüne baglanşygyň reaksiýasy diýilýär. Baglanşyklaryň reaksiýasy passiw güýçlere degişlidir.

Öwreniliş usulyna görä statikany 1) elementar statika we 2)analitik statika ýaly iki bölüme bölmek bolýar.

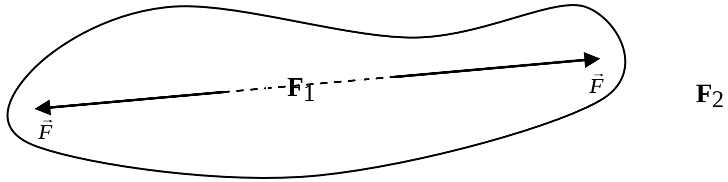
Elementar statika absolýut gaty jisime täsir edýän güýçleriň dürli sistemalaryny has ýönekeý sistemalar bilen çalşyrmagyň usulyny we olaryň deňagramlaşmak şertlerini öwrenýär.

Geljekte “absolýut gaty jisim” diýmegiň deregine “gaty jisim” ýa-da ýöne jisim diýjekdiris. Analitik statika mehaniki sistemanyň deňagramlaşmagynyň umumy kriteriýasyny berýän mehanikanyň esasy prinsipleriniňbiri bolan mümkin süýşmeleriň prinsipiniň ösmegi bilen baglydyr.

ELEMENTAR STATIKA.

Statikanyň aksiomalary we kesgitlemeleri

Aksioma 1. Erkin jisime goýlan, ululyklary deň we bir göni çyzyk boýunça garşylykly taraplara urukdyrylan iki sany güýç özara deňagramlaşýarlar (çyzgy 1.)



Çyzgy1

Kesgitleme 1. Haýsam bolsa bir mehaniki sistemaa ýa-da hususy halda gaty jisime täsir edýän güýçleriň toplumyna güýçleriň sistemany diyilýär.

Kesgitleme 2. Gaty jisime goýlan güýçleriň sistemany başga bir güýçleriň sistemany bilen çalşyrylanda şol jisimiň öňki ýagdaýy üýtgemän galsa, onda güýçleriň şular ýaly sistemalaryna güýçleriň ekwiwalent sistemalary diýilýär.

Kesgitleme 3. Güýçleriň sistemanyna ekwiwalent bolan diňe bir güýje şol sistemanyň deňtäsiredijisi diýlýär.

Kesgitleme 4. Deňtäsiredijisi nula deň bolan güýçleriň sistemanyna deňagramlaşan sistema diýilýär.

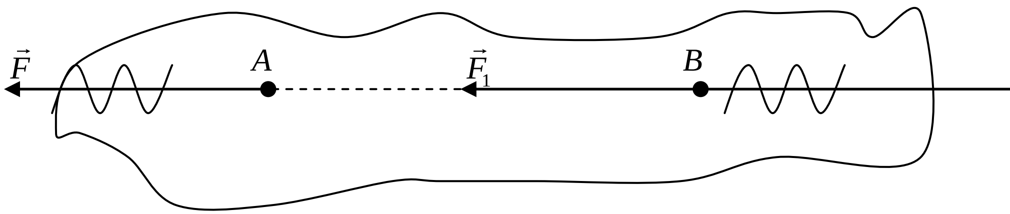
Kesgitleme 5. Güýçleriň sistemanyna birikdirilende şol sistema bilen güýçleriň deňagramlaşan sistemanyny emele getirýän güýje sistemanyň deňagramlaşdyryjysy diýilýär.

Edil şol bir güýçler sistemanyň deňtäsiredijisi we deňagramlaşdyryjysy ululyklary boýunça garşylykly bolup özara deňagramlaşjaklyry düşünüklidir.

Aksioma 2. Güýçleriň deňagramlaşan sistemany jisime birikdirilende ýa-da ondan aýrylyp taşlananda şol jisime öň täsir edýän güýçleriň täsiri üýtgemän galýýär.

Teorema. Gaty jisimde güýjüň goýlan nokadyny şol güýjiň täsirini üýtgetmän onuň ugry boýunça başga nokada geçirmek bolýar.

Subudy. Jisimiň A nokadyna goýlan we oňa täsir edýän *F* güýç berilýär.Şu güýji *A* nokatdan onuň ugrundaky *B* nokada geçirmek talap edilýär. Onuň üçin bolsa *B* nokatda ululyklary boýunça berlen *F* güýje deň we ugurlary boýunça garşylykly bolan *F* we F_1 güýçleri alýärys.(çyz 2)

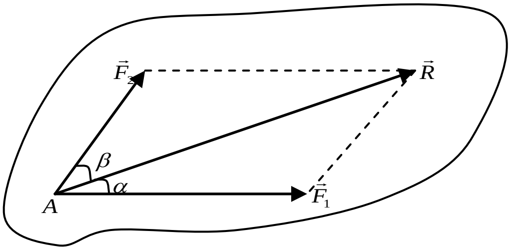


Çyzgy 2.

F we F_1 güýçler özara deňagramlaşýandyklary üçin biz olary taşlaýärys. Şeýlelik bilen *F* güýç *A* nokatdan *B* nokada geçirilen berlen *F* güýçdir. Şunuň bilen teorema subut edildi.

Güýç haýsy hem bolsa bir çyzyk boýunçajisime täsir etse, şol çyzyga güýjüň täsir çyzygy diýilýär.

Aksioma 3. Bir nokada goýlan, öz aralarynda käbir burç emele getirýän iki sany güýçleriň deňtäsiredijisi şol nokada goýulýär we berlen güýçleriň wektor jemine deň bolup olaryň üstünde gurlan parallelogramyň diognaly bilen aňladylýar. *A* nokatda goýlan F_1 we F_2 güýçleriň deňtäsiredijisini *R* bilen bellesek (çyzgy 3), onda $R=F_1+F_2$ bolýýar.



Çyzgy 3

Indi çyzgy 3-den peýdalanyp kosinuslar teoremasyna görä deňtäsiredijisiniň absolýut ululygyny kesgitläliň:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos[180^o - (\alpha+\beta)]}$$

Ýa-da

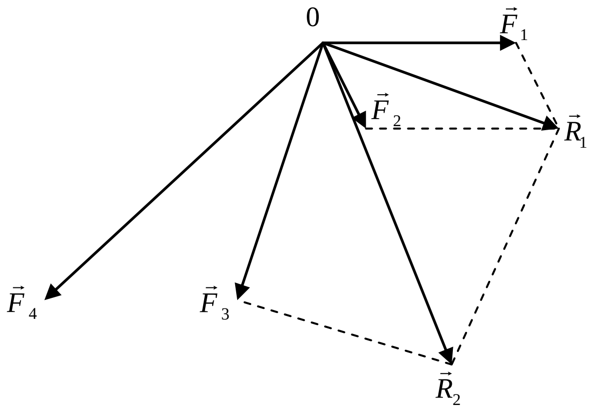
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha+\beta)}$$

Egerde hususy halda F_1 we F_2 güýçler bir göni çyzyk boýunça bir tarapa ugrukdyrylan bolsalar, onda $\alpha+\beta=0$, $R=F_1+F_2$ bolýýar.Tersine, F_1 we F_2 güýçler bir göni çyzyk boýunça garşylykly taraplara ugrukdyrylan bolsalar, onda $\alpha+\beta=180$; $R=F_1-F_2$ bolýýar.

Sinuslar teoremasyna görä çyzgy 3-den:

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Aksioma 3-den peýdalanyp parallelogram usuly bilen bir *O* nokatda kesişýän $F_{1,}\ F_2,\ldots,\ {}_nF$ güýçleriň sistemanyň deňtäsiredijisini *R* bilen belläp ony berlen düzüji güýçleriň wektor jemi görnüşinde aňlatmak bolýär (çyz.4.)



Çyzgy 4

$R = F_1 + F_2$

$R_1 = R + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$

$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_N$

Ýa-da

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad (1.1)$$

Teorema. Bir nokatda kesişýän güýçleriň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin güýçleriň hemmesiniň koordinata oklara proeksiýalarynyň jeminiň nula deň bolmagy zerur we ýeterlik şertdir.

Subudy.(/1.1) formuladaky wektor deňligi koordinata oklara proektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{aligned}\right\} \quad (1,2)$$

Onda $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (1,3)$$

Ilki bilen teoremanyň zerur şertini subut edeliň. Onuň üçin bolsa berilen güýçleriň sistemanyny deňagramlaşan diýip hasap edeliň. Güçleriň deňagramlaşan sistemanyň deňtäsiredijisiniň nula deňdigini bilýäris. Onda R=0 edip (1.3) we (1.2) formulalardan aşakdaky üç sany deňlemeleri alýarys:

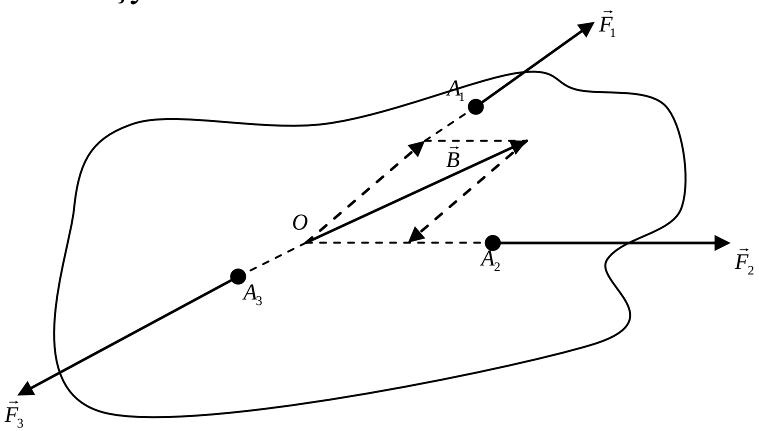
$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1,4)$$

Şunuň bilen teoremanyň zerur şerti subut edildi.

Indi teoremanyň eterlik şertini subut edeliň. Onuň üçin bolsa güýçleriň koordinata oklara proeksiýalarynyň jemi nula deň diýip alýýarys, ýagny (1.4) berilýär. (1.4) berilende (1.2) we (1.3) formulalardan R=0 bolýar, başga sözler bilen aýdamyzda bolsa güýçleriň ugamy deňagramlaşýar. Şunuň bilen teoremanyň eterlik şerti hem subut edildi.

Şeýlelik bilen (1.4) bir nokatda kesişýän güýçleriň sistemanyň deňagram-laşmagy üçin zerur we eterlik analitik şertidir. Şunuň bilen teorema subut edildi. Berlen güýçlerden düzülen wektor köpburçlygyň ýapyk bolmagy bu güýçleriň deňagramlaşmagynyň zerur we eterlik geometrik şertidir /bu köpburçlykda iň soňky güýjiň ujy birinji güýjiň başlangyjy bilen gabat gelýär./

Aksioma 4. Iki jisimiň biri-birine täsir edýän güýçleriň ululyklary deň we ugurlary bir göni çyzyk boýunça garşylykly taraplara ugrukdyrlandyrlar.
Aksioma 5. Gaty däl jisimiň deňagramlygy onuň absolýut gaty jisime öwrileni bilen bozulmaýar.
Aksioma 6. Egerde jisim erkin däl bolsa , onda baglanşyklaryň jisime täsiri olaryň reaksiýasy bilen çalşyrlyp bilner.
Teorema. Egerde tekizlikde üç sany parallel däl güýçler deňagramlaşan bolsalar, onda olaryň täsir çyzyklary bir nokatda kesişýärler.
Subudy. A, B, C nokatlarda goýlan F_1 F_2 F_3deňagramlaşan güýçler berilýär (çyzgy 5.) F_1 we F_2 güýçleri olaryň täsir çyzyklarynyň kesişýän O nokadyna geçirip olary parallelogram usuly bilen goşup R deňtäsiredijini tapýarys. Aksioma 1 görä R we F_3 güýçleriň ululyklary boýunça deň we ugurlary boýunça bolsa bir göni çyzyk boýunça garşylykly taraplara boljakdyklary düşnüklidir, ýagny F_1 F_2 F_3 güýçler O nokatda kesişýärler . Teorema subut edildi.



Çyzgy 5

Aksioma 7. / güýjiň täsiriniň baglydällik prinsipi/. Jisime edil şol bir wagtda birnäçe güýçleriň täsiriniň tizlenmesi şol güýçleriň aýry-aýrylykda şol jisime edendäki tizlenmeleriniň wektor jemine deňdir.
Egerdr massasy *m* bolan jisime $F_!$, $F_{2,}$…, F_n güýçler täsir edýän bolsalar , onda

$$\overline{W} = \overline{W}_1 + \overline{W}_2 + ... + \overline{W}_n = \frac{1}{m}(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_N)$$

$$m\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_I$$

ýa-da

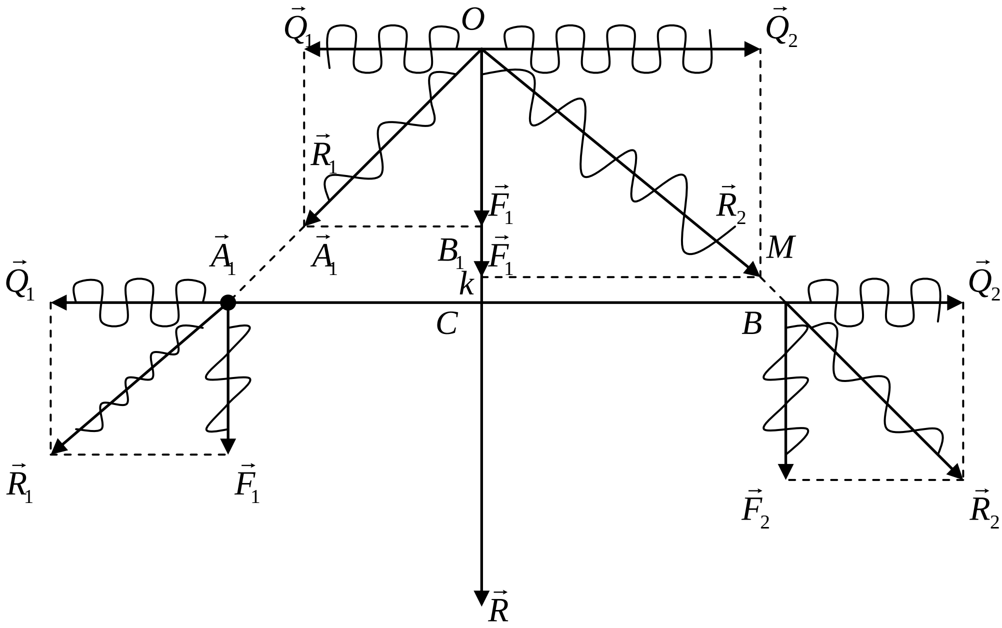
$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_I \qquad (1,5)$$

PARALLEL GÜÝÇLERI GOŞMAK

1. Bir tarapa ugrukdyrlan iki sany parallel F_1 weF_2 güýçleri goşmak.

Teorema. Iki sany bir tarapa ugrukdyrlan parallel güýçleriň deňtäsiredijisi olara parallel, şolar bilen bir tarapa ugrukdyrlan we olaryň jemine deň bolup, berlen güýçleriň ululyklaryna ters proporsional bolan kesimlere bölýär.
Subuty. A we B nokatlarda goýlan bir tarapa ugrukdyrlan ikisany parallel F_1we F_2 güýçler berilýär. Şu güýçleriň goýlan nokatlarynda AB kesimiň dowamynda ululyklary deň we ugurlary boýunça garşylykly bolan Q_1we Q_2 güýçleri alýärys.
F_1 we Q_1 güýçleriň deňtäsiredijisini R_1 we F_2, Q_2 güýçleriň, deňtäsiredijisini bolsa R_2 bilen beläp, olaryň täsir

çyzyklaryny tä bir O nokatda kesişýänçäler dowam edýäris . Ondan soň R_1 we R_2 üýçleri O nokada geçirip degişlilikde berlen güýçlere we AB kesime parallel bolan F_1, Q_1, we F_2,Q_2 düzüjilere dagadýarys.$Q'_1=Q_1$, $Q'_2=Q_2$ bolup garşylykly taraplara ugrukdyrylandyklary üçin Q'_1 we Q'_2 özara deňagramlaşýarlar we biz olary aksioma 2 görä taşlaýarys. Şeýlelik bilen O nokatda bir göni çyzyk boýunça bir tarapa ugrukdyrylan $F'_1=F_1$, $F'_2=F_2$ güýçler galar (çyzgy 6.).



Çyzgy 6.

Bu güýçleriň deňtäsiredijisiniň olaryň jemine deň bolýandygyny bilýäris, ýagny

$$R = F_1' + F_2'$$

ýa-da

$$R = F_1 + F_2$$

Berlen güýçleriň täsiredijisi bolan R güýji öz ugry boýunça AB kesimiň üstündäki C nokada geçirýäris. Çyzgydaky meňzeş üçburçlykdan :

$$\frac{AC}{A_1B_1}=\frac{OC}{OB_1} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{AC}{Q_1'}=\frac{OC}{Q_2'}$$

$$\frac{CB}{KM}=\frac{OC}{OK} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{CR}{Q_B'}=\frac{OC}{F_2'} \qquad (1,6)$$

Şu gatnaşyklaryň degişli taraplaryny bölýäris:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{F_2'}{F_1'} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{AC}{F_2}=\frac{CB}{F_1} \qquad (1,7)$$

(1,6) we (1.7) aňlatmalardan görnüşi ýaly teorema subut edildi.
netije. (1.7) formulany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{CB}{AC} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{F_1+F_2}{F_2}=\frac{CB+AC}{AC}$$

Onda

$$\frac{R}{F_2}=\frac{AB}{AC} \qquad (1,8)$$

(1.7) we (1.8)-den

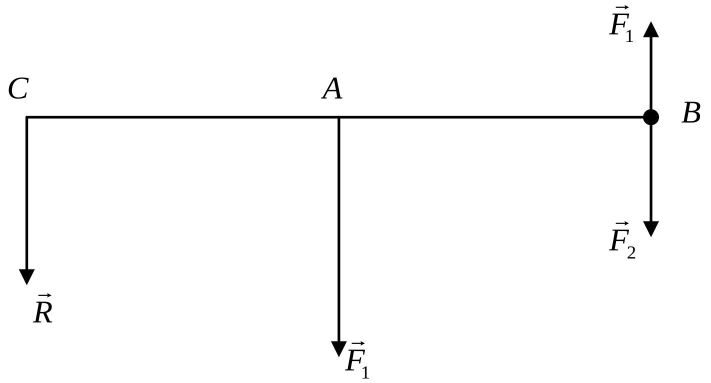
$$\frac{F_2}{AC}=\frac{R}{AB}=\frac{F_1}{CB} \qquad (1,9)$$

Şu aňlatmalardan görşümiz ýaly bir tarapa ugrukdyrlan üç sany güýçleriň her biriniň beýleki ikisiniň goýlan nokatlarynyň aralygyna gatnaşyklary deňdirler.

2. Ululyklary deň bolmadyk garşylykly taraplara ugrukdyrylan iki sany parallel F_1 we F_2 güýçleri goşmak

Anyk bolmagy üçin $F_1>F_2$ edip alýarys.
Teorema. Ululyklary boýunça deň bolmadyk garşylykly taraplara ugrukdyr-lan parallel güýçleriň deňtäsiredijisiniň ululygy olaryň tapawudyna deňdir,özem uly güýjiň aňyrsynda bolup şonuň bilen ugurdaş we berlen güýçleriň

goýlan nokatlary-nyň aralygyny daşky ýagdaýda olaryň ululygyna ters proporsional bolan kesimlere bölýär.
Subudy. F_1güýç biri F'_2=-F_2 beýlekisi bolsa ululygy boýunça R=F_1-F_2 bolan iki sany güýçleriň deňtäsiredijisidir diýeliň (çyz. 7.).



Çyzgy 7

Onda /1.9/ formula görä:

$$\frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 - F_2}{AB}$$

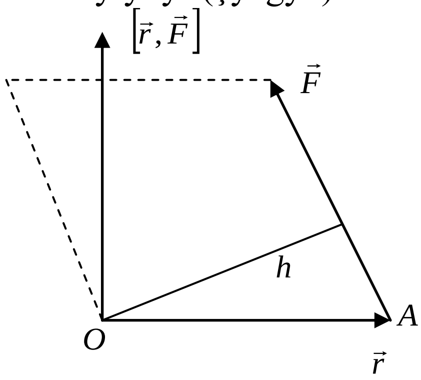
ýa-da

$$\frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB} = \frac{F_1}{CB} \qquad (1,10)$$

F_2we F'_2 güýçler özara deňagramlaşýandyklary üçin taşlaýarys we şeýlelik bilen diňe R galýar, ýagny R berlen F_1 we F_2 güýçleriň deňtäsiredijisidir.Şunuň bilen teorema subut edildi.

Güýjiň nokada we oka görä momenti

F güýjiň O nokada görä wektor momenti güýjiň goýlan nokadynyň O nokada görä radius wektory r-iň şol güýje wektor köpeltmek hasylydyr (çyzgy8):



Çyzgy 8.

Nokatdan güýjiň täsir çyzygyna çekilen perpendikulýaryň *h* uzynlygyna şol güýjiň berlen nokada görä egni diýilýär.
Öňden bilşimiz ýaly güýjiň nokada görä momenti *r* we *F* wektorlaryň üstünde gurlan tekizlige perpendikulýar bolan wektordyr. Güýjiň nokada görä momentiniň modulyny kesgitläliň.

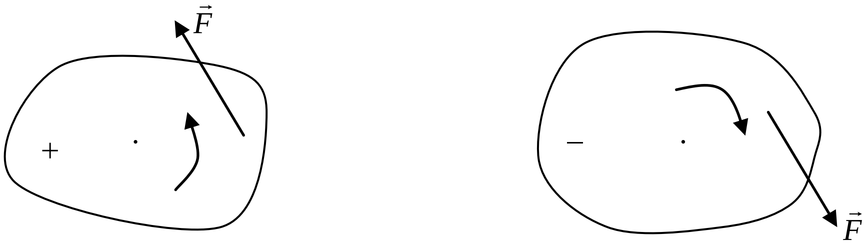
$$\left|\mathrm{mom}_0(\overline{\mathrm{F}})\right| = \left|[\overline{\mathrm{r}}\overline{\mathrm{F}}]\right| = \mathrm{Fh}$$

$$\left|\mathrm{mom}_0(\overline{\mathrm{F}})\right| = \mathrm{Fh} \quad (1,11)$$

Görşiňiz ýaly güýjiň nokada görä momentiniň moduly güýjiň egnine köpelt-mek hasylyna, ýagmy esasy F bolan r, F-leriň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir .
Eger-de O nokat güýjiň täsir çyzygynyň üsтünde bolsa, onda güýjiň şol nokada görä momenti nula deňdir /bu halda nula deňdir /.
Güýji öz ugry boýunça suýşirip başga bir nokada geçirsek onuň berlen nokada görä momentiniň ululygy ütgemeýär.

Sag koordinatalar sistemanyny ulanyp eger-de güýç jisimi sagat strelkasynyň hereketini ugruna aýlamaklyga ymtylýan bolsa onuň momentini otrisatel we sagat strelkasynyň hereketiniň tersine aýlamaklyga ymtylsa polojitel edip almaklygy şertleşeliň(çyzgy 9).

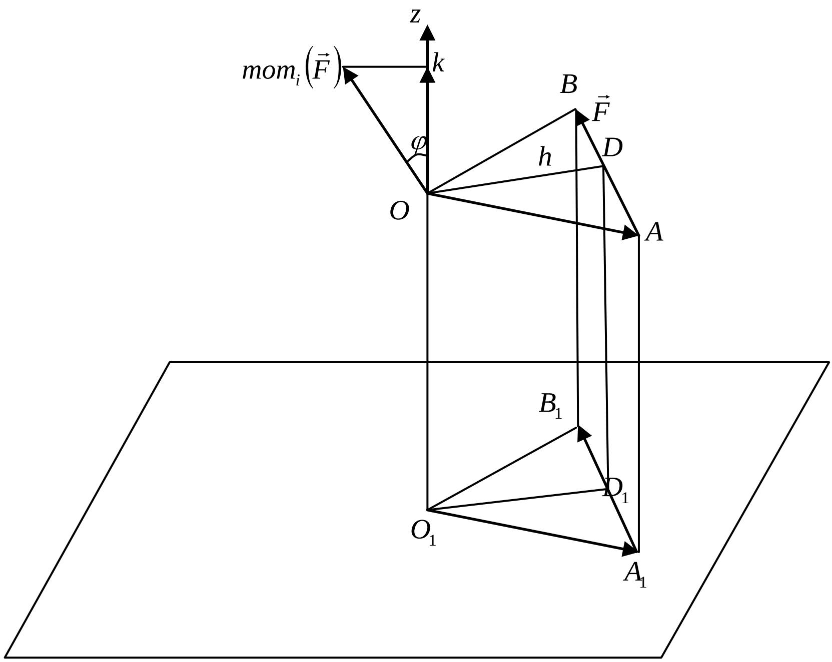
$$\left|\mathrm{mom}_0(\overline{\mathrm{F}})\right| = \pm \mathrm{Fh}$$



Çyzgy 9.

Onuň üstündäki islendik nokada görä güýjiň momentiniň şol oka proeksiýasyna güýjiň şu berlen oka görä momencti diýilýär.

F güýjiň z oka görä momentini kesgitläliň. Onuň üstüňde bir O nokat alyp ony güýjiň başlangyjy we ujy bilen biriktirip alnan tekiz figurany z oka perpendikulýar bolan tekizlige proektirleýäris. Kesgitlemä görä OK kesim F güýjiň z oka görä momentidir /çyzgy 10/.



Çyzgy 10.

$$\left|mom_z(\overline{F})\right| = \overline{O}\overline{K}$$

Güýjiň oka görä momentiniň modulyny kesgitläliň çyzgydan:

$$\left|mom_z(\overline{F})\right| = OK = \left|mom_0(\overline{F})\right|\cos\varphi = Fh\cos\varphi$$

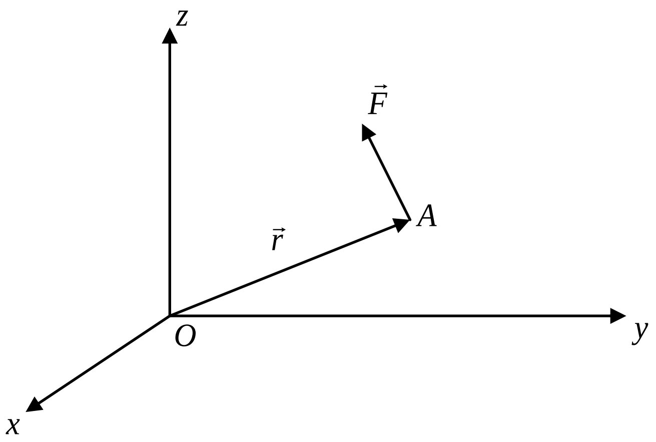
$$2S_{\nabla O_1A_1B_1} = 2S_{O_1A_1B_1}\cos\varphi = 2\frac{1}{2}Fh\cos\varphi = Fh\cos\varphi$$

bu ýerden

$$\left|mom_z(\overline{F})\right| = 2S_{O_1A_1B_1} = A_1B_1 \cdot O_1D_1 \qquad (1,12)$$

Görşimiz ýaly güýç berlen oka parallel bolsa, ýa-da oky O nokatda kesip geçse, onda güýjiň şol berlen oka görä nula deňdir.

Güýjiň koordinata oklara görä momentini tapalyň/çyzgy 11/.



Çyzgy 11

$$mom_0(\overline{F}) = [\varepsilon\overline{F}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

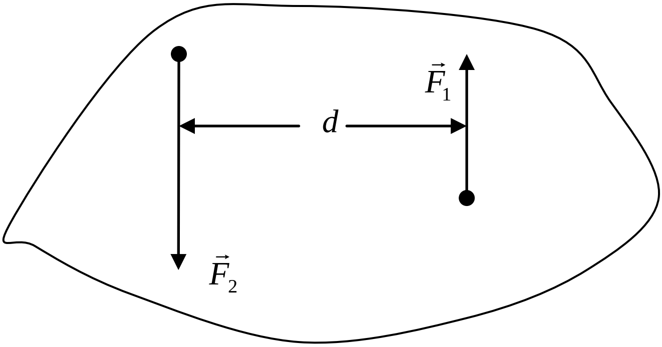
$$\left|mom_x(\overline{F})\right| = yZ - zY$$

$$\left|mom_y(\overline{F})\right| = zX - xZ$$

$$\left|mom_z(\overline{F})\right| = xY - yX$$

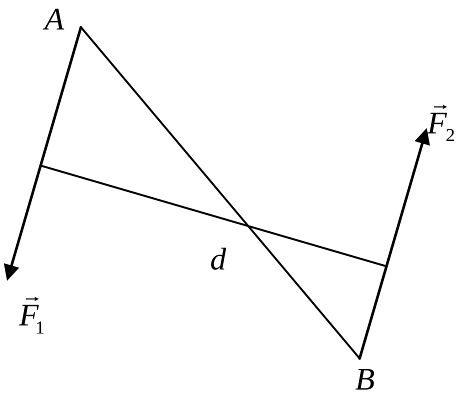
GÜÝÇ WE ONUŇ MOMENTI.

Absolýut gaty jisime täsir edтän ululyklary boýunça deň iki sany antiparallel güýçleriň sistemanyna (F_1, F_2) jübüt güýç diýilýär.(çyz.12).



Çyzgy 12

Jübüt güýjiň güýçleriniň täsir çyzyklarynyň arasyndaky iň ýakyn d aralyga jübüt güýjiň egni diýilýär.
Jübüt güýjiň deňtäsiredijisiniň ýoklygygny subut etmek kyn däldir. Jübüt güýjiň aýlanma effektini häsietlendirýän ululyga jübüt güýjiň momenti diýilýär. (F_1, F_2) jübüt güýji alalyň (çyz.13)



Çyzgy 13

Çyzgy 13-den

$$\left|\mathrm{mom}_b(\overline{F}_1)\right| = [\overline{B}\overline{A} - \overline{F}_1]$$

$$\left|mom_A(\overline{F}_2)\right| = [\overline{A}\overline{B}F_2] = [(-\overline{B}\overline{A})(-\overline{F}_1)] = [\overline{B}\overline{A}F_1]$$

Bu ýerden

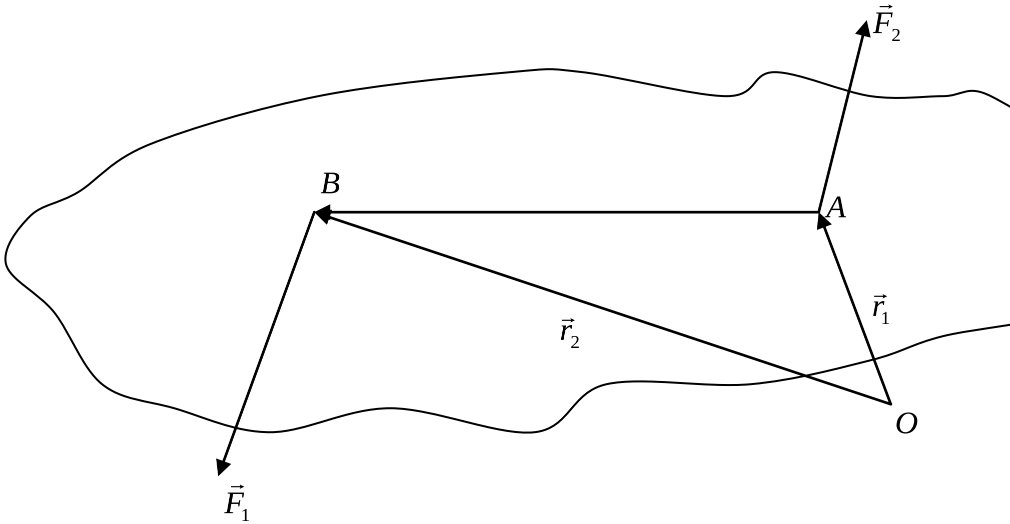
$$mom_b(\overline{F}) = mom_A(\overline{F}) \quad (1.13)$$

Görşimiz ýaly jübüt güýjiň moduly güýçleriniň biriniň onuň egnine köpeltmek hasylyna deňdir .

$$\left|mom\ (\overline{F}_1, \overline{F}_2)\right| = \pm F_1 d$$

Teorema. Jübüt güýjiň momenti onuň güýçleriniň wektor jemine deňdir.

Subuty. F_1, F_2 jübüt güýç we islendik O merkez alalyň (çyzgy14).



Çyzgy 14.

Çyzgydan

$$mom(F_1F_2\ ) = [ABF_2] = [(r_1 - r_2)F_2] = [r_2F_2] - [r_1F_2] = [r_2F_2] - [r_1(-F_1)] =$$

$$[r_2F_2] + [r_1F_1]$$

$$mom(F_1F_2\ ) = [r_2F_2] + [r_1F_1]$$

ýa-da

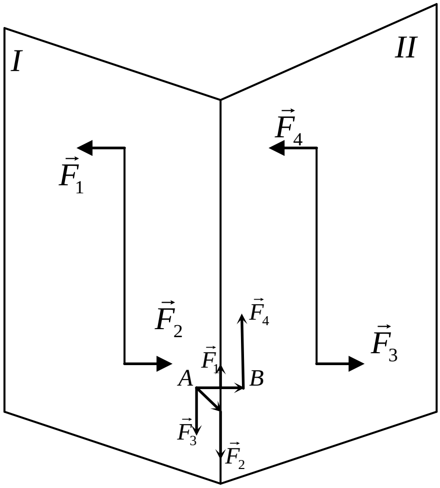
$$\mathrm{mom}(F_1F_2\ ) = \mathrm{mom}_0(F_1) + \mathrm{mom}_0(F_2) \quad (1.14)$$

Teorema subut edildi.

JÜBÜT GÜÜÝÇLERI GOŞMAK WE OLARYŇ DEŇAGRAMLAŞMAK ŞERTI.

Teorema. Gaty jisime täsir edýän jübüt güýçleriň sistemanyň momenti olaryň momentleriniň wektor jemine deň bolaan bir jübüt güýje ekwiwalentdir.

Şubudy. Ilki bilen bu teoremany iki sany (F_1, F_2),(F_3’ F_4) jübür güýçler üçin subut edeliň. Ekwiwalent jübüt güýçler hakyndaky teoremadan peýdalanyp berlen jübüt güýçleriň ikisinem güýçlriniň ululyklaryny deňläp olary berlen jübüt güýçleriň tekizlikleriniň kesişmesindäki bir M nokada geçurýäris we F, F güýçleri garşylykly taraplara ugrykdyrýarys(çyzgy 15.).



Çyzgy 15

F weF deňagramlaşýandyklary üçin olary taşlaýarys welin diňe (F,F) jübüt güýç galýar, ýagny berlen (F,F) ,(F,F) jübüt güýçler olara ekwiwalent bolan diňe bir jübüt (F,F) güýç bilen çalşyryldy. mom(F,F)=M bilen belläp jübüt güýjiň momentiniň kesgitlemesine görä çyzgydan

$$M = [ABF_4] = [(AM + MB)F_4]$$

F=F bolany üçin:

$$M = [AMF_1] + [MBF_4] = M_1 + M_2$$

$M=M_1+M_2$ (1.15)

Bu ýerde M we M berlen jübüt güýçleriň momentleridir. Şunuň bilen teorema iki sany jübüt güýç üçin subut edildi. Edil şunuň ýaly edilip şu teorema n sany jübüt güýçler üçin hem subut edilýär , ýagny

$$M = M_1 + M_2 + ... + M_N$$

$$M = \sum_{I=1}^{n} M_i \quad (1.16)$$

(1.16) formuladan görşümiz ýaly jübüt güýçleriň sistemanyny momenti şol jübüt güýçleriň momentleriniň wektor jemine deňdir. Jübüt güýçlerň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin onuň deňtäsirediji jübüt güýjüniň momentiniň nula deň bolmagy (M=0) zerur we ýeterlik şertdir Şeýllelik bilen /1.16/-dan

$$\sum_{I=1}^{n} M_i = 0$$

Görşümiz ýaly jübüt güýçleriň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin olaryň momentleriniň wektor jeminiň nula deň bolmagy zerur we ýeterlik şertdir.

ERKIN GÜÝÇLERIŇ SISTEMANYŇ DEŇAGRAMLAŞMAGYNYŇ ZERUR WE ÝETERLIK ŞERTI.

Teorema. Erkin güýçleriň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin güýçleriň hemmesiniň koordinata oklara proeksiýalarynyň jeminiň we olaryň oklaryň her birine görä momentleriniň jeminiň nula deň bolmagy zerur we ýeterlik şertdir.

Subudy. Bilşimiz ýaly erkin güýçleriň sistemany bir güýç we bir jübüt güýç bilen çalşyrylýar:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (F_i)$$

$$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_o \, \mathrm{F_i}$$

Şu wektor deňlikleri koordinata oklara proýektirleýäris:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ M_x &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_x (F_i) \\ M_y &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_y (F_i) \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_z (F_i) \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

Bu ýerden

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 = Z^2} \qquad (2.2)$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

1.Ilki bilen teoremanyň zerur şertini subut edeliň. Onuň üçin bolsa erkin güýçleriň sistemanyny deňagramlaşan diýip hasap edýäris. Güýçleriň deňagramlaşan sistemany üçin R=0, M=0 bolýar. Onda (2.1) we(2.2) formuladan:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ &\sum_{i=1}^{n} mom_x(F_i) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} mom_y(F_i) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} mom_z(F_i) = 0 \end{aligned}\right\} (2,3)$$

Teoremanyň zerur şerti subut edildi.
2. Indi teoremanyň ýeterlik şertini subut edeliň. Bu ýerde (2.3) berilýär. Onda (2.1) we (2.2) formulalara görä R=0 we M=0 bolýar.
Teoremanyň ýeterlik şerti hem subut edildi.
Şeýlelik bilen (2.3) erkin güýçleriň ulgaynyň deňagramlaşmagy üçin zeryr we ýeterlik şertdir.
Bir nokatda kesişýän güýçleriň we haýsam bolsa koordinata oklaryň birine parallel bolan parallel güýçleriň sistemalarynyň deňagramlaşmak şertleri hususy hal görnüşde (2.3)-de alynýar.

ERKIN GÜÝÇLERIŇ SISTEMANYŇ INWARIANTLARY

Erkin güýçleriň sistemalarynyň getirme merkezi üýtgedilende üýtgemän galýan ululyklaryna onuń inwariýantlary diýilyär.

Teorema. Erkin güýçleriń sistemanynyń inwariýantlary şu aşakdakylardyr:

Baş wektor R

Baş wektoryń baş momente skalýar köpeltmek hasyly (R,M)

Baş momentiń baş wektoryń ugruna proýeksiýasy Mcos φ

Subudy.

1. Ilki bilen getirme merkezini O nokatda, ondan soń ony üýtgedip başga bir O nokatda alýarys.üýçleri ilki O ondan soń O nokatlara geçirip parallelogram usuly bilen goşýarys:

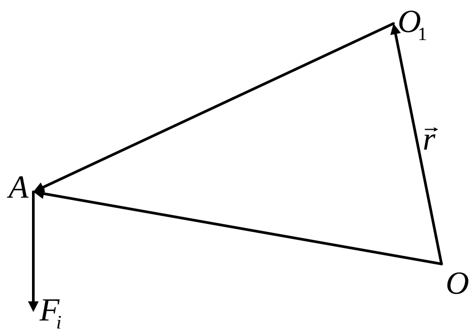
$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i \ ; \quad R_1 = \sum_{i=1}^{n} F_{I\,i}$$

Bu ýerde

$R=R_1$=const (2.4)

Baş wektoryń inwariýantdygy subut edildi.

2.



Ćyzgydan O_1 getirme merkeze görä baş momenti kesgitleýäris:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} mom_o(F_i) = \sum_{i=1}^{n}[O_1 A_i F_i] = \sum_{i=1}^{n}[(OA_I - r)]F_i = \sum_{i=1}^{n}[O\ A_i F_i] - \sum_{i=1}^{n}[r, F] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[O_1 A_i F_i] - [r\sum_{i=1}^{n} F_i]$$

Bu ýerde $\sum_{i=1}^{n}\left[O_1 A_i E_i\right]$ güýçleriń O nokada görä baş momentidir.Şeýlelik bilen:

$M_1 = m - [rR]$ (2.5)

Bu ýerden görşimiz ýaly $M_1 \neq M$ bolany üçin baş moment erkin güýçleriń sistemanynyń inwarianty däldir. (2.5) ańlatmany R baş wektora skalýar köpeldeliń:

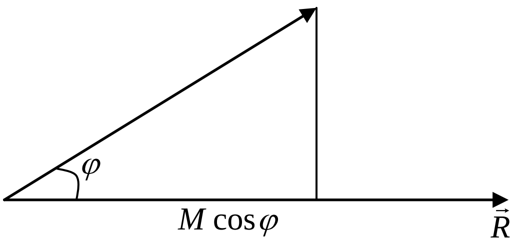
$(RM) = (RM_1) = const$ (2.6)

Görşimiz ýaly baş wektoryń baş momente skalýar köpeltmek hasyly inwariantdyr.

3. (2,6) formuladan

$(RM) = RM\cos\varphi = const$

R=const bolany üçin $M\cos\varphi = const$ (2.7)



STATIK KESGITLI WE KESGITSIZ MESELELER

Statikanyń meselelerinde jisimiń deńagramlyk şertini ańladýan deńlemeleriń we olara girýän häbelli güýçleriń sany deń bolsa, onda beýle meselelere statik kesgitli meseleler diýilýär.Şu şertleri kanagatlandyrýan jisimleriń sistemanyna bolsa statik kasgitli sistemalar diýilýär.
Şu meselelrde näbelli güýçleriń sany jisimiń deńagramlaşmagyny ańladýan deńlemeleriń sanyndan köp bolsa, onda bu meselelere statik kesgitsiz meseleler we şulara degişli jisimleriń sistemanyna bolsa statik kesgitsiz sistemalar diýilýär.
Statik kesgitsiz meseleleri absolýut gaty jisimiń statikasynyń metodlary bilen çözmek mümkin däldir.
Bu meseleleri çözmek üçin goşmaça çaklamalar girizilmelidir.

ANALITIK STATIKA

Öň beleýşimiz ýaly analitik statika mehanika sistemanyň deňagramlaşmagynyň umumy kriteriýasyny berýän mehanikanyň esasy prinsipleriniň biri bolan mümkin süýşmeleriň prinsipiniň ösmegi bilen baglydyr.

IŞ, KUWWAT, KINETIK ENERGIÝANYŇ DEŇLEMESI WE MEHANIKI ENERGIÝANYŇ SAKLANMAK KANUNY

Güýjiň haýsy hem bolsa garşylygy ýeňip geçmegine iş diýilýär. Iş energiýanyň bir görnüşden başga görnüşe geçmeginiň ölçegidir. Ululygy boýunça hemişelik bolan F güýç nokadyň hereket edýän göni çyzygy boýunça oňa täsir edýän bolsa, onda fizikadan belli bolşy ýaly iş A aşakdaky ýaly aňladylýar:

A=F*S (2.8)

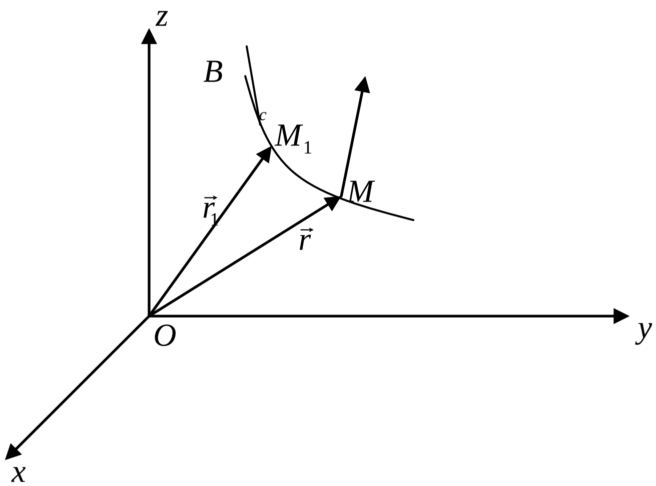
Bu ýerde S nokadyň göni çyzyk boýunça geçen ýoludyr /süýşmesidir/. Egerde F güýç gorizont bilen haýsam bolsa bir α burç emele getirýän göni çyzyk boýunça täsir edýän bolsa ,onda iş şeýýle aňladylýar:

$$A=F*S\cos\alpha$$

Ýa-da A=F*S (2.9)

Görşimiz ýaly iş güýjiň süýşmä skalýar köpeltmek hasylyna deňdir.

F güýjiň M material nokada täsiriniň astynda onuň ∇ r elementar süýşmede eden işine elementar iş diýilýär we dA bilen bellenýär (çyzgy 16).



Çyzgy 16.

(2.9) formulanyň esasynda elementar dA işi şeýle aňladýarys:

$$dA = F*dr \quad (2.10)$$

ýa-da

$$dA = Xdx+Ydy+Zdz \quad (2.11)$$

nokadyň DÇB süýşmesindäki doly iş aşakdaky egriçyzykly integral görnüşinde kesgitlenýär:

$$A = \int_{DCB} (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2.12)$$

Giňişligiň her bir material nokadyna birbergili, tükenikli we şol nokadyň koordinatalaryna görä differensirlenýän belli bir güýç täsir edýän ýaýlasyyna güýçleriň meýdany diýilýär.

Anyk, wagta bagly bolmadyk güýçleriň meýdanyna stasionar meydan diýilýär. Eger-de meýdanyň güýçleri wagta bagly bolsalar, onda oňa stasionar däl meýdan diýilýär. Stasionar meýdanda güýç F diňe meýdanyň nokadynyň koordinatalarynyň funksiýasydyr, ýagny

$$X,Y,Z|\ x,y,z$$

Eger-de (2.11)-daky sag tarapdaky differensial U(x,y,z) funksiýanyň doly differensialy bolsa, onda şu funksiýa potensial funksiýa we potensial funksiýasy bar bolan güýçleriň meýdanyna potensial güýç meýdany diýilýär. Şu funksiýanuň güýjiň täsir edýän nokadynyň koordinatalaryna görä hususy önümleri şol nokada täsir edýän güýjiň koordinata oklara proeksiýalaryna deňdir:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Potensial funksiýanyň bar bolmagynyň zerur we ýeterlik şerti aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Şu ýerde egriçyzykly ýoldaky iş nokadynyň diňe başlangyç we soňky ýagdaýyna baglydyr. Onda (2,12)-den

$$A = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 \quad (2.15)$$

(2.13), (2.14), (2.15) häsiýetlere eýe bolan güýçlere konserwatiw güýç we bu güýçleriň meýdanyna bolsa konserwatiw güýçleriň meýdany diýilýär.

Kinetik energiýa aşakdaky ýaly aňladylýandygyny bilýäris:

$$T = \frac{1}{2} m\vartheta^2 \qquad (2.16)$$

$$mW = m\frac{d\vartheta}{dt} = F \quad \text{bolany ůçin} \quad (2.10)\text{-dan}$$

$$A = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} m\frac{d\vartheta}{dt} dr = m\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}m\vartheta^2 - \frac{1}{2}m\vartheta_0^2$$

$$A = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = T - T_0 \quad (2.17)$$

Otrisatel alamat bilen alynan potensial funksiýa potensial energiýa diýilýär, özem şeýle bellenýär:Π=-U. Onda (2.15) formula aşakdaky görnüşe geçýär:

$$A = \Pi_0 - \Pi \qquad (2.18)$$

(2.17) we(2.18)-den:

$$\Pi-\Pi_0=T-T_0$$

$$\Pi+T=\Pi_0+T_0=const \qquad (2.19)$$

Şu mehanika energiýanyň saklanmak kanunynyň matematik görnüşde aňladylyşydyr, özem şeýle kesgitlenýär: konserwatiw güýçleriň meýdanynyň islendik nokadynda potensial we kinetik energiýalaryň jemi hemişelik ululykdyr.

Energiýa çeşmesiniň iş ukybyna kuwwat diýilýär. Kuwwat wagt birliginde görlen işdir. Eger Δt wagtda ΔA iş görlen bolsa onda kuwwat W aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$W=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{dA}{dt}$$

$$W=\frac{dA}{dt} \qquad (2.20)$$

Eger-de W= const bolsa, onda $A=\int_0^t Wdt$

Ýa-da

$$A=Wt$$

(2.10) we (2.20)-den:

$$W=F\frac{dr}{dt}=F\vartheta$$

$$W=F\vartheta \qquad (2.21)$$

Goröimiz ýaly kuwwat güýjiň tizlige skalýar köpeltmek hasylyna deňdir.

Eger-de güýjiň we tizligiň ugurlary bir göni çyzyk boýunça bir tarapa bolsalar, onda (2.21)-den:

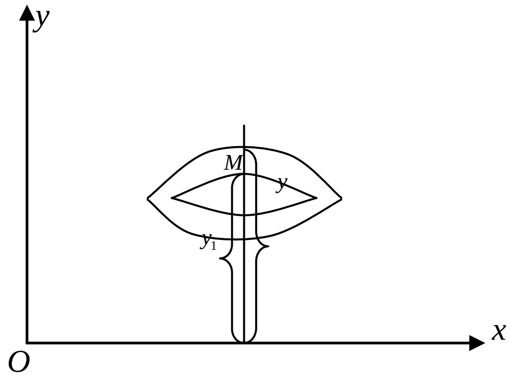
$$W=F\vartheta\cos 0^o=F\vartheta$$

$$W=F\vartheta \qquad (2.22)$$

MÜMKIN SÜÝŞMELERIŇ PRINSIPI

Jisim giňişlikde A nokatdan B nokada şol nokatlary birikdirýän islendik çyzyk boýunça hereket edip gelip bilýär. Giňişlikde sistemanyň ýagdaýyny doly kesgitleýän A we B nokatlara onuň konfigurasiýalary diýilýär. Egerdeňsizlik jisim A we B nokatlary birikdirýän belli bir AMB traektoriýa boýunça hereketine hakyky hereket edýän bolsa, onda jisimiň şu AMB traektoriýa boýunça hereketine hakyky hereket diýilýär. Şol jisimiň A we B nokatlary birikdirýän çyzyklaryň islendigi boýunça hereket etmegi mümkin bolany üçin jisimiň AMB çyzykdan beýleki çyzyklar boýunça-da mümkin bolan herektlerine mümkin ýa-da wirtual süýşmeler diýilýär. Şeýlelik bilen baglanşyklaryň hemme çäklemelerini kanagatlandyrýan süýşmelere mümkin ýa-da wirtual süýşmeler diýilýär.

A we B nokatlary birikdirýän çyzyklary kesip geçýän Ox oka perpendikulýar çyzyk çekeliň. Şol perpendikulýaryň iki sany goňşy çyzyklary kesýän nokatlarynyň aralygy y(x) funksiýanyň şol iki goňşy çyzyga görä üýtgemesi bolýar we funksiýanyň şu üýtgemesine onuň wariýasiýasy diyilýar /çyzgy 17/.



Çyzgy 17.

Funksiýanuň wariasiýasy şeýle bellenýär:

$$y - y_1 = \delta y$$

Şunlykda mümkin süýşmelerdäki nokadyň koordinatalarynyň tükeniksiz kiçi δx, δy, δz üýtgemelerinde olaryň wariasisy diýilýär. Funksiýanyň warýirlenme düzgünleri bilen doly gabat gelýär. Mysal üçin f(x,y,z) funksiýanyň doly differensialynyň aşakdaky ýaly aňladylýandygyny bilýäris:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Şu funksiýanyň doly wariasiýasy hem şeýle aňladylýar:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

Mümkin süýşmeleriň prinsipi Lagranjyň bir teorema edilip alnan göni teoremalarynyň üsti bilen aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

Ideal baglanşykly material nokatlaryň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin oňa täsir edýän aktiw güýçleriň her mümkin süýşmede ikitaraplaýyn baglanşyk üçin

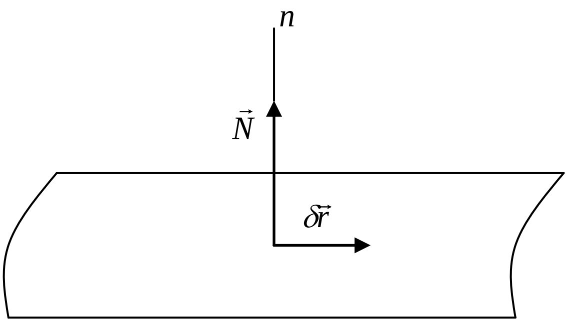
elementar işleriniň jeminiň nula deň bolmagy we birtaraplaýyn baglanşyk üçin bolsa şol elementar işleriň jeminiň nula deň ýa-da nuldan kiçi bolmagy zerur we ýeterlik şertdir.
Subudy. 1. Ilki bilen teoremanyň zeryr şertini subut edeliň. Onuň üçin bolsa berlen sistemanyny deňagramlaşan diýip hasap edýäris. Ideal we ikitaraplaýyn baglanşygy bolan material nokatlaryň sistemanyň her bir nokadynyň deňagramlaşmagy üçin oňa täsir edýän F aktiw güýç we N baglanşygyň reaksiýasy özara deňagramlaşmalydyrlar:

$$F_i+N_i=0$$

Şu wektor aňlatmanyň iki tarapyny hem δr elementar süýşme skalýar köpeldip ony hemme n-ler boýunça jemläliň:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i + N_i)\delta r_i = 0$$

Ikitaraplaýyn baglanşykda δr galtaşýan tekizlikde bolup baglanşygyň N reaksiýasyna perpendikulýar N δr /çyzgy 32/ bolany üçin $N_i\delta r_i=0$ bolýar.



Çyzgy 18.

Şeýlelik bilen deňagramlaşan material nokatlaryň sistemasy üçin oňa täsir edýän aktiw güýçleriň elementar işleriniň jeminiň nula deňligini gelip çykýar:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i = 0 \qquad (3,1)$$

Şunuň bilen teoremanyň zerur şerti subut edildi.
Teoremanyň şu zerur şertine Lagranjyň göni teoremasy diýilýär.
Indi teoremanyň ýeterlik şertini subut edeliň, ýagny (3.1) şertiň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin hemem ýeterlik şertdigini görkezeliň. Ýeterlik şerti subut etmek üçin (3.1) şert berlende-de sistema deňagramlykda bolan, tersine , ol hereket edýän diýip hasap edeliň.(/3.1) aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i + N_i)\delta r_i = \sum_{i=1}^{n} R_i \delta r_i = 0$$

bu ýerde R nokada goýlan hemme güýçleriň deňtäsiredijisidir. Onda dt wagta hakyky hereketiň ugry R bilen ugurdaş bolaş. Dt wagta mümkin süýşmeleri hakyky süýşmeler bilen gabat geler ýaly edip saýlap alalyň. Onda $\cos(R_i, \wedge\delta r_i)=1$ bolany sebäpli:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta r_i > 0 \qquad (3,2)$$

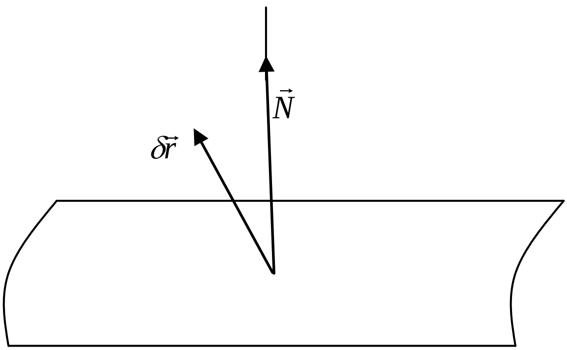
Onda $\sum_{i=1}^{n} R_i \delta r_i = 0$ bolany üçin:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i > 0 \qquad (3,3)$$

Görşimiz ýaly (3.2) şert (3.1) şerte ters gelýär. Şonuň üçinem (3.3) şert berlende sistema hereket edýän diýen çaklamamyz nädogry bolup çykýar. Şeýlelik bilen (3.3) ideal we ikitaraplaýyn baglanşykly material nokatlaryň sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin zerur we ýeterlik şertdir.

Şu teoremanyň ýeterlik şertine Lagranjyň ters teoremasy diýilýär.

Birtaraplaýyn baglanşykda N normal boýunça nokafyň baglanöygy mümkin bolany üçin mümkin süýşme δr baglanşygyň N reaksiýasy bilen ýa göni ýa-da ýiti burç emele getirýär: Şonuň üçin hem N *δr$\geq$0 bolýar (çyzgy 19).



Çyzgy 19

Sistema deňagramlaşan ýagdaýynda

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i + N_i)\delta r_i = 0$$

Bolany üçin birtaraplaýyn baglanşygy bolan sistemanyň deňagramlaşmak şerti aşakdaky görnüşde bolýar:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \ \delta r_i \leq 0 \quad (3,4)$$

Şunuň bilen teorema ikitaraplaýyn we birtaraplaýyn baglanşyklar üçin doly subut edildi.

(3.1) we (3.2) şertleri proýeksiýalaryň üsti bilen aňladalyň:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i \ \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z \ \delta r_z = 0 \qquad (3,5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i \ \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z \ \delta r_z \le 0 \qquad (3,6)$$

Lagranjyň şerti kämahal aşakdaky görnüşde hem ýazylýar:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{n}(X_i \ \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta r_i) = \delta A \quad (3.7)$$

Bu ýerde

δ A=0 ikitaraplaýyn baglanşyk üçin

δ A$\le$0 birtaraplaýyn baglanşyk üçin

MÜMKIN SÜÝŞMELERIŇ PRINSIPINI UMUMYLAŞDYRIAN KOORDINATALARDA AŇLATMAK

Öňden bilşimiz ýaly nokadtň polýar, silindrik, sferik we ş. m. hemme egriçyzykly koordinatalaryna umumylaşdyrlan koordinatalar ýa-da Lagranjyň koordinatalary diýilýär we q,q,…,q bilen bellenýär. Umumylaşdyrylan koordinatalaryň wagta görä önűmlerine $\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1, \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2, ..., \frac{dq_s}{dt} = \dot{q}_s$ umumylaşyr-lan $q_1, q_2, \ldots, q_s$ koordinatalarynyň funksiýalarydyr:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, ..., q_s) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, ..., q_s) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, ..., q_s) \end{aligned}\right\} \qquad (3,8)$$

N material nokatlarynyň sistemasynyň baglanşygynyň K sany deňlemesi bar diýeliň:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (3,9)$$

j=1,2,…,k

Onda bagly däl koordinatalaryň sany 3n-k=s bolar. Sistemanyň hemme nokatlarynyň ýagdaýyny doly kesgitleýän bagly däl ululyklarynyň koordinatalarynyň sanyna onuň erkinlik derejesi diýilýär. Şeýlelik bilen S sany $q_1, q_2, \ldots, q_s$ umumylaşdyrlan koordinatalar sistemanyň hemme nokatlarynyň ýagdaýyny doly kesgitleýändikleri üçin şu sistemanyň erkinlik derejesi S deňdir.

/3.8/ aňlatmanyň esasynda mümkin süýşmeleriň proeksiýalary aşakdaky görnüşde kesgitlenýär:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \\ \delta y_i &= \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \\ \delta z_i &= \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

Şu /3.10/ aňlatmany /3.7/-deňsizlik ýerine ýazýarys:

$$\sum_{\nu=1}^{s}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu}\right)\right]\delta q_\nu = 0 \quad (3.11)$$

Bu ýerde kwadrat skobkanyň içindäki aňlatma umumylaşdyrlan güýç diýilýär, ony aşakdaky ýaly belläliň:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu}) = Q_\nu \qquad (3,12)$$

Onda

$$\sum_{i=1}^{n} Q_\nu \delta q_\vartheta = 0 \qquad (3,13)$$

Şu mümkin süýşmeleriň prinsipiniň umumylaşdyrlan koordinatalarda aňladylyşydyr, özem umumylaşdyrlan güýçleriň her bir mümkin süýşmede elementar işleriniň jeminiň nula deňdigini görkezýär. Bu ýerde δq wirtual süýşmeler bagly däl bolanlary üçin ($\delta q \neq 0$) umumylaşdyrlan güýçleriň deňtäsiredijisi nula deň bolmalydyr:

$Q_{\vartheta} = 0$ (3,14)

(3.14) nokatlaryň erkin däl mehaniki sistemanyň deňagramlaşmagynyň zerur we ýeterlik şertidir.

Potensial güýç ýa-da güýçleriň konserwatiw meýdany üçin (3.5) aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0$$

Ýa-da

$$\delta U = 0 \quad (3,15)$$

Bu ýerden

$$U = const \quad (3,16)$$

Şeýlelik bilen potensial güýç ýa-da güýçleriň konserwatiw meýdanynda material nokatlaryň sistemanyň deňagramlaşmagy üçin U(q,q,…,q) potensial funksiýanyň ululygy hemişelik bolmalydyr.

Massalaryň agyrlyk merkeziniň koordinatasyny z bilen bellesek onda (3.15) aşakdaky görnüşde alynýar:

$$\delta z_s = 0 \quad (3,17)$$

Dartyş güýçleriň birjynsly meydanyndaky z-niň ekstremal bahasy bolan ýagdaýlary material nokatlaryň sistemanyň deňagramlyk ýagdaýlaryna degişlidir.

LAGRANJYŇ 1 JYNS DEŇLEMELERI

Lagranjyň 1 jyns deňlemeleri ideal, stasionar we ikitaraplaýyn baglanşykly erkin däl mehaniki sistemanyň deňagramlaşmak şertiniň differensial deňlemeleriniň sistemanydyr.

(3.5) we(3.9) aňlatmalaryň esasynda $f_j(x_i y_i z_i)$ funksiýanyň doly wariasiýasyny ýazalyň:

$$\delta f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_i}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_i}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \quad (3,18) \qquad j = 1,...,k$$

Nokatlaryň sistemanyynyň deňagramlaşmagynyň deňlemelerini almak üçin Lagranjyň kesgitsiz köpeldijiler metodyndan peýdalanýarys. (3.18) deňlemeleri kesgitsiz λ_j köpeldip onsoň olary (3.5) bilen goşýarys:

$$\sum_{i=1}^{n}[(X_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial x_i})\delta x_i + (Y_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial y_i})\delta y_i + (Zi\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_i}\delta z_i)\right) = 0$$

(3,19)

k sany kesgitsiz λ_j köpeldijileri ýaý skobkalardaky aňlatmalar nula öwrüler ýaly edip saýlaýarys:

$$\left.\begin{aligned} X_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \\ Y_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = 0 \\ Z_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial z_i} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

Şular Lagranjyň 1 jyns deňlemeleridir. Lagranjyň şu deňlemelerine (3.5)-däki baglanşyklaryň k sany deňlemelerini birikdirip (3n+k) sany deňlemeleriň sistemanyny alýarys. Bu deňlemelerden (3n+k) sany x,y, z… $x_n, y_n, z_n\ \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ näbelliler kesgitlenýär.

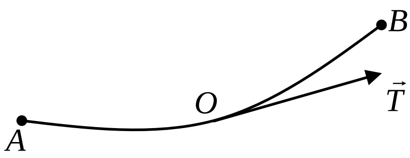
(x, y, z,…x_n, y_n, z_n) koordinatalaryň toplumy nokatlaryň sistemanyň deňagramlaşmagynyň konfigurasiýasyny kesgitleýärler, $\lambda_1\lambda_{2,\ldots}\lambda_n$ köpeldijiler bolsa baglanşygyň reaksiýalaryny tapmaga mümkinçilik berýär.

Süýnmeýän çeýe ýüpüň deňagramlylygy

Üznüksiz ýerleşen egrisi boýunça nokatlaryň aralygy hemişelik bolan material nokatlaryň sistemasyna süýnmeýän çeýe ýüp diýilýär.

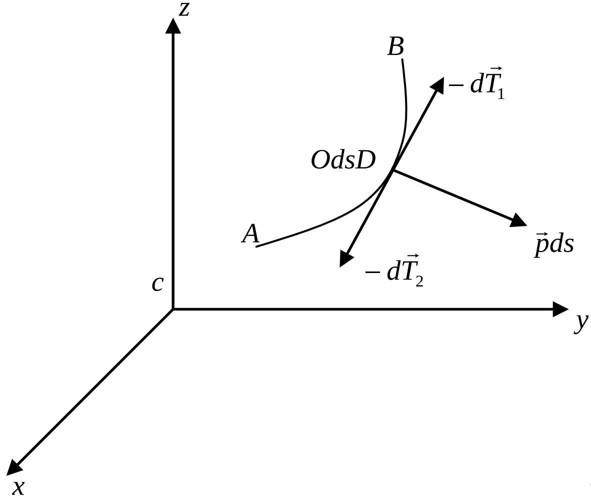
Käbir aktiw güýçler täsir edýän A we B nokatlarda berkidilen süýnmeýän çeýe ýüň berilýär. Aktiw güýçleriň täsiriniň astyndaky ýüpüň kesgitli bir egri görnüşine onuň deňagramlylygynyň figurasy diýilýär. O nokadynda kesilen ýüpüň OB bölegi taşlanandan soň onuň galan AO bölegini deňagramlylykda saklamak üçin ýüpüň şol O nokadynda oňa galtaşýan boýunça ugrukdyrlan haýsy hem bolsa bir $\bar{T}$ güýç bolmaly. Şu $\bar{T}$ güýje ýüpüň O nokadynda onuň dartyşy diýilýär.

(çyzgy20) Hemme nokatlaryna täsir edýän güýçleriň täsiriniň astynda deňagramlaşan AB ýüp berilýär. Ýüpüň uzynlyk birligine täsir edýän güýji $\bar{p}$ bilen belläliň.



Çyzgy 20

Onda ýüpüň $OD = ds$ elementi onuň O we D nokatlarydaky dartyş güýçleri $d\overline{T}_1$, $-d\overline{T}_2$ we ýüpüň ds elementine täsir edýän $\overline{p}ds$ güýçleriň täsiriniň astynda deňagramlaşar. (çyzgy 21)



Çyzgy 21

A nokatdan B nokada tarap bolan ugry polozitel ugur diýip kabul edýäris. Ýüpüň ds elementini deňagramlaşmak şerti şeýle bolar :

$$\overline{p}ds + d\overline{T}_1 + \left(-d\overline{T}_2\right) = 0$$

$d\overline{T}_1$ we $-d\overline{T}_2$ dartyş güýçleriň deňtäsiredijisini $d\overline{T}$ bilen belläliň, onda :

$$\overline{p}ds + d\overline{T} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{d\overline{T}}{ds} + \overline{p} = 0 \quad (3.21)$$

Şu (3.21) ýüpüň ds elementiniň deňägramlaşmagynyň wektor görnüşdäki differensial deňlemesidir. Eger-de ýüpüň $\overline{T}$ dartyşynyň birlik wektoryny $\overline{\tau}$ bilen bellesek, onda (3.21) differensial deňleme aşakdaky görnüşe geçýär :

$$\frac{d}{ds}\left(T\overline{\tau}\right) + \overline{p} = 0 \quad (3.22) \quad \text{ýa-da}$$

$$\frac{dT}{ds}\bar{\tau} + T\frac{d\bar{\tau}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad (3.23)$$

Differensial geometriýadaky Freneniň birinji formulasynda peýdalanyp (3.23) deňlemäni şeýle ýazýarys :

$$\frac{dT}{ds}\bar{\tau} + \frac{T}{\rho}\bar{n} + \bar{p} = 0 \quad (3.24)$$

Şu (3.24) deňlemäni ilki bilen $\bar{\tau}$ onsoň $\bar{n}$ we soňra bolsa binormalyň birlik wektory $\bar{b}$ skalýar köpeldip ýüpüň deňagramlaşmagynyň deňlemeleriniň tebigy üçgranlygyň oklaryna proýeksiýalaryny alýarys :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} = -p_\tau \\ &\frac{T}{\rho} = -p_n \\ &P_b = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

Öňden bilşimiz ýaly :

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j + \frac{dz}{ds}k$$

$$\bar{\tau}' = \frac{\bar{n}}{\rho} = \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}i + \frac{d^2y}{ds^2}j + \frac{d^2z}{ds^2}k$$

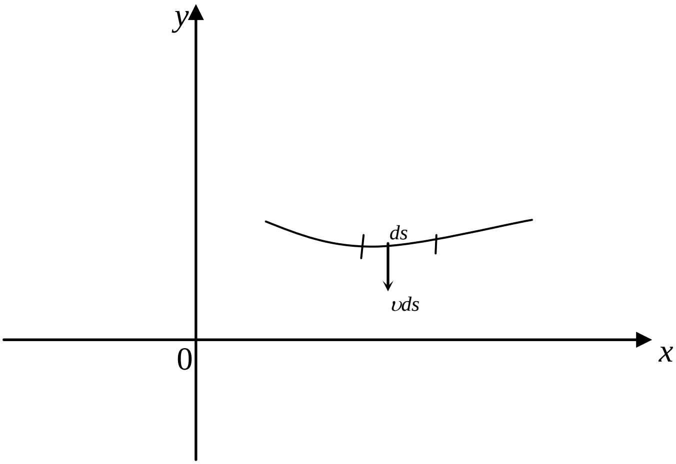
bolany üçin (3.22) we (3.24) deňlemeleriň gönüburçly koordinata oklara proýeksiýalary aşakdaky görnüşde aňladylýar :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + P_x = 0 \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + P_y = 0 \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + P_z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.26)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}+T\frac{d^2x}{ds^2}+P_x&=0\\\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+T\frac{d^2y}{ds^2}+P_y&=0\\\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}+T\frac{d^2z}{ds^2}+P_z&=0\end{aligned}\right\}\quad(3.27)$$

(3.26) we (3.27) süýnmeýän çeýe ýüpüň deňagramlaşmagynyň deňlemeleriniň gönüburçly koordinatalara proýeksiýalarynyň üsti bilen aňladylýan differensial deňlemeleriniň sistemalarydyr.

Süýşmeýän çeýe ýüpüň birjynsly çekiş güýçleriniň meýdanyndaky deňagramlylygynyň figurasyna zynjyr çyzyk diýilýär. Birjynsly ýüpüň birlik uzynlygynyň agramyny $\nu = const$ bilen belläliň(çyzgy 22).



Çyzgy 22

Ýüpüň birjynsly çekiş güýçleriniň meýdanyndaky deňagramlylygyndaky figurasy wertikal Oxy tekizlikde ýerleşýär. Onda $p_x = 0$, $p_y = -\nu$ bolany üçin (3.116) deňlemeler sistemasy aşakdaky görnüşe geçýär:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) &= \nu \end{aligned}\right\}(3.28)$$

Şu (3.28) iki sany differensial deňlemeleriň sistemasyny integrirläp zynjyr çyzygyň deňlemesini tapýarys; (3.28) birinji deňlemesinden:

$T\dfrac{dx}{ds} = T_0 = const$, $T = T_0\dfrac{ds}{dx}$ bolýar,

Şu aňlatmany (3.28)-däki ikinji deňlemede ýerine ýazýarys :

$$d\left(T_0\frac{dy}{dx}\right) = \nu ds$$

Bu ýerde $ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}dx$ bolany üçin

$$T_0 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \nu\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Şu differensial deňlemäni integrirlemek üçin $\dfrac{dy}{dx} = u$ edip belleýäris. Onda :

$T_0 du = \nu\sqrt{1+u^2}dx$ ýa-da $\dfrac{T_0}{\nu} = a$ edip bellesek :

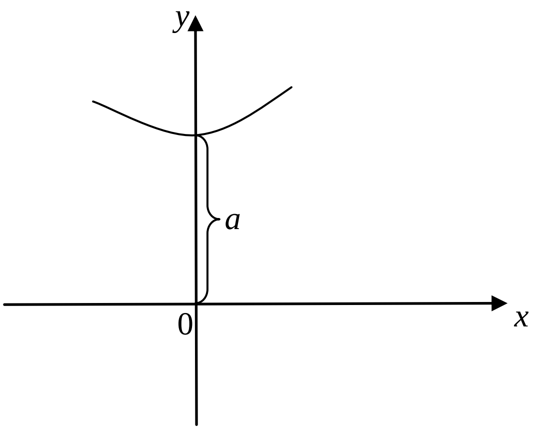
$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{a} \quad (3.29)$$

Ilki bilen $\sqrt{1+u^2}=t-u$ we onsoň bolsa $\sqrt{1+u^2}=t+u$ ornuna goýmalary ulanyp (3.29) deňlemäni integrirleýäris :

$$\left.\begin{aligned} &\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\frac{x}{a}+c \\ &\ln\left(-u+\sqrt{1+u^2}\right)=-\frac{x}{a}+c_1 \end{aligned}\right\} \text{Bu ýerden}$$

$$\left.\begin{aligned} u+\sqrt{1+u^2}&=e^{\frac{x}{a}+c} \\ -u+\sqrt{1+u^2}&=e^{-\frac{x}{a}+c_1} \end{aligned}\right\} (3.30)$$

c we c_1 ululyklary tapmak üçin $x=0$, $y=a$ we $u=\dfrac{dy}{dx}=y'=0$ şertleri kabul edýäris (çyzgy 23).



Çyzgy 23

Onda (3.30)-den : $c=0$, $c_1=0$ bolýar. Şeýlelik bilen (3.30) aşakdaky görnüşe gelýär :

$$\left.\begin{aligned} u+\sqrt{1+u^2}&=e^{\frac{x}{a}} \\ -u+\sqrt{1+u^2}&=e^{-\frac{x}{a}} \end{aligned}\right\}$$

Bularyň birinjisinden ikinjisini aýryp :

$$u=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}=sh\frac{x}{a}$$ ýa-da

$$\frac{dy}{dx}=sh\frac{x}{a},\ dy=sh\frac{x}{a}dx$$

Bu differensial deňlemäni integrirlesek :

$$y=ach\frac{x}{a}+c_2$$

$x=0,\ y=a$ bolanda $c_2=0$ bolýar. Onda

$$y=ach\frac{x}{a}=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad (3.31)$$

Şu (3.31) zynjyr çyzygyň deňlemesidir.

$$e^{\frac{x}{a}}=1+\frac{x}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\dots,$$

$$e^{-\frac{x}{a}}=1-\frac{x}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\dots$$

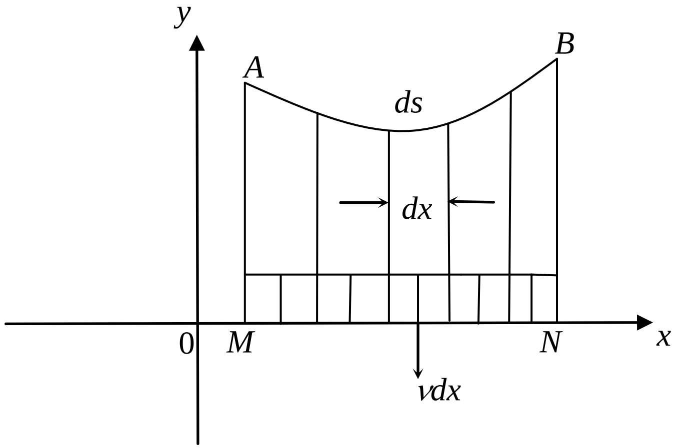
Bolany üçin zynjyr çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşe geçýär :

$$y=a\left(1+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{a^4}+\dots\right) \quad (3.32)$$

Bu (3.32) deňlemede $x<a$ bolanda üçünji çlenlerinden başlap hemme çlenleriniň jemi taşlananda Galileýiň birjynsly çekiş güýçleriniň meýdanynda süýnmeýän çeýe ýüp parabola boýunça ýerleşýär diýen çaklamasy tassyklanýar :

$$y-a=\frac{x^2}{2a} \quad (3.33)$$

Ýüpüň hemme nokatlarynda onuň gorizontal MN proýeksiýasyna deňölçegli bölünen üznüksiz wertikal ýükleriň täsiriniň astyndaky egri görnüşine parabolik ýüp diýilýär (çyzgy 24).



Çyzgy 24

Görşümiz ýaly parabolik ýüp üçin (3.34) şeýle alynýar :

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=v$$

Bu ýerden

$$\left.\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right)&=0\\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right)&=vdx \end{aligned}\right\} \quad (3.34)$$

Bu deňlemeleriň birinjisinden $T\frac{dx}{ds}=T_0=const$ ýa-da $T=T_0\frac{ds}{dx}$

T -niň şu bahasyny (3.34)-iň ikinjisinde ýerine ýazýarys.

$$T_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \nu$$

$$T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \nu \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\nu}{T_0}$$

ýa-da $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a}$

Şu differensial deňlemäni iki gezek integrirläp parabolik ýüpüň deňlemesini kesgitleýäris :

$$y = \frac{x^2}{2a} + c_3 x + c_4 \quad (3.35)$$

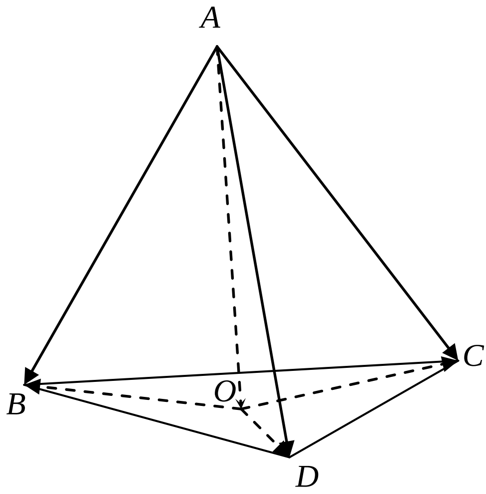
Görşümiz ýaly bu halda ýüp parabola boýunça ýerleşýär, Parabolik ýüpdäki ýagdaý asma köprülerde we ş.m. duş gelýär.

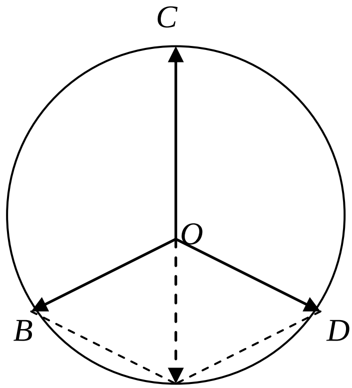
M E S E L E L E R

1. $ABCD$ dogry tetraedr berilýär. Onuň A depesine üç sany $\overline{AB} = \overline{F}_1$, $\overline{AC} = \overline{F}_2$ we $\overline{AD} = \overline{F}_3$ güýç goýlupdyr. Olaryň deňtäsiredijisini tapmaly.

Çözülişi: Tetraedriň gapyrgasynyň uzynlygyny a bilen belläliň. Esasynyň daşyndan çyzylan BCD tegelegiň OB radiusy $\frac{a}{\sqrt{3}}$ deňdir; tertaedriň beýikligi :

$$AO = a\sqrt{1-\frac{1}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

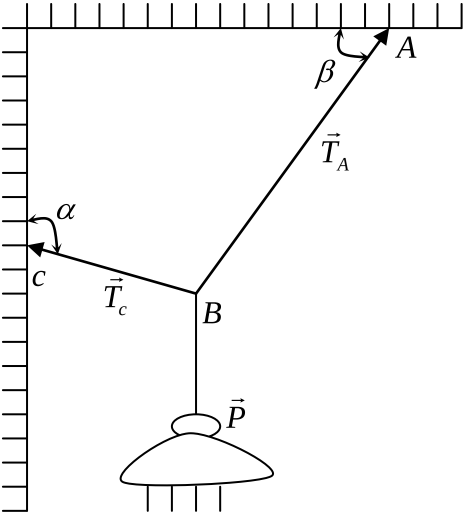




Çyzgydan görnüşi ýaly $\overline{AC}$ wektor $\overline{AO}$ we $\overline{OC}$ wektorlaryň jemine deňdir, edil şonuň ýaly hem $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ we $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD}$. $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ we $\overline{OD}$ üç wektory A nokada goýlan hasap edip, olaryň hem nula ekwiwalent diýen netijä gelýäris. Ýene her biri $\overline{OA}$ deň bolan üç wektor galýar; olaryň jemi $3\overline{OA}$ deňdir. Şeýlelik bilen deňtäsirediji $\overline{OA}$ boýunça ugrukdyrlyp onuň ululygy $3a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ýa-da $a\sqrt{6}$ deňdir.

2. Agramy 2 kg bolan elektrik lampasy AB şnurda patalokdan asylypdyr we soňra BC ýüp bilen diwara

çekilipdir. Eger $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 135^\circ$ bolsa, onda AB şnuryň $\overline{T}_A$ we BC ýüpüň $\overline{T}_C$ dartyş güýjini kesgitlemeli. Şnuryň we ýüpüň agramyny hasaba almaly däl.

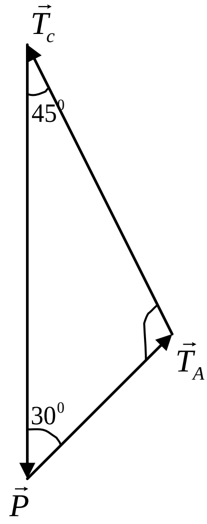


Çözülişi : Elektrik lampasynyň agramyny $\overline{P}$, AB şnuryň we ýüpüň dartyş güýçlerini degişlilikde $\overline{T}_A$ we $\overline{T}_C$ bilen belläliň. Bu güýçlerden üçburçlyk gurup sinuslar teoremasyndan peýdalanýarys :

$$\frac{P}{\sin 105^\circ} = \frac{T_C}{\sin 30^\circ} = \frac{T_A}{\sin 45^\circ}$$

$$T_C = \frac{P \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = 1.04kg$$

$$T_A = \frac{P \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = 1.46kg$$

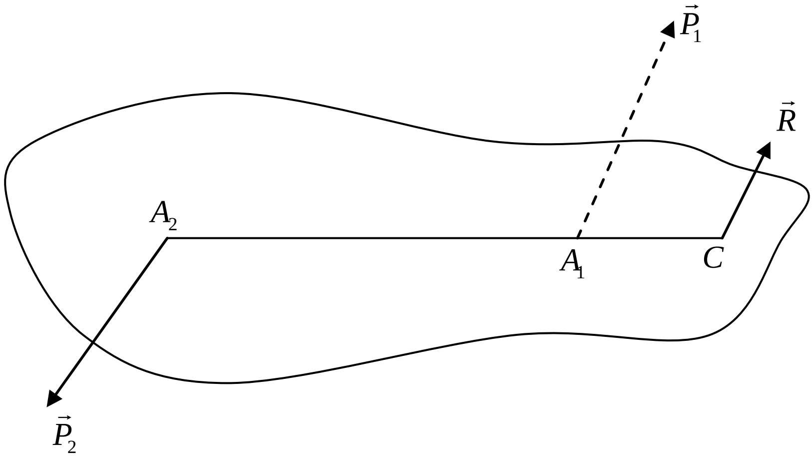


3. Jisime 2 sany parallel güýç täsir edýär, özem düzüjileriň biri $\overline{P_2}$ we olaryň deňtäsiredijisi $\overline{R}$ berilýär. Eger $P_2 = 12kg$; $R = 4kg$ we $AC = 6m$ bolsa, onda ikinji $\overline{P_1}$ düzüji güýji kesgitlemeli.

Çözülişi : Goý A_1 bize näbelli bolan $\overline{P_1}$ güýjiň goýlan nokady bolsun, onda onuň ululygyny we goýlan nokadyny şeýle deňlemelerden taparys:

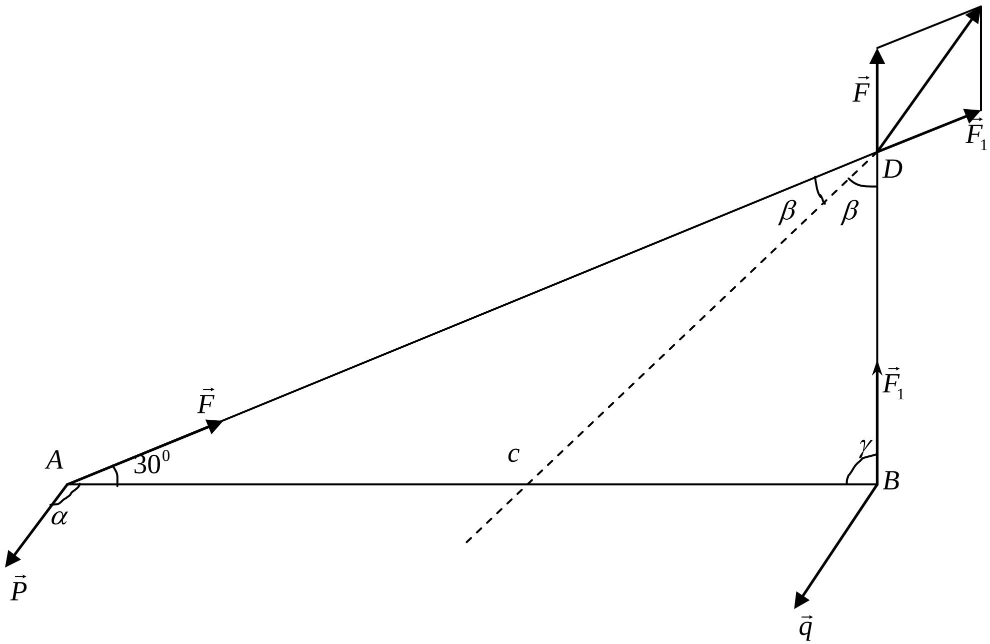
$R = P_1 - P_2$ ýa-da $P_1 = R + P_2 = 16kg$

$\frac{A_2A_1}{R} = \frac{A_1C}{P_1}$ bu ýerden $A_2A_1 = 1.5m$



Iki sany parallel we bir tarapa ugrukdyrlan $P = 4kg$ we $q = 8kg$ güýçler üýtgemeýän AB sterjeniň A we B uçlarynda goýlan. Bu güýçler şol nokatlarda goýlan özara deň we kesişýän $\overline{F}$, $\overline{F_1}$ güýçler bilen deňagramlaşýar, özem $\overline{F}$ güýç AB bilen 30° burç emele getirýär. $\overline{F}$ güýjiň ululygyny, $\overline{P}$ we $\overline{q}$ güýçleriň AB bilen emele getirýän burçyny tapmaly.

Çözülişi : Goý D nokat $\overline{F}$ we $\overline{F_1}$ güýçleriniň ugurlarynyň kesişme nokadyny, Ç bolsa $\overline{p}$ we $\overline{q}$ güýçleriniň deňtäsiredijisiniň goýlan nokady bolsun.



Şu soňky güýç $\overline{F}$ we $\overline{F_1}$ güýçleriň deňtäsiredijisine ululygy boýunça deň we garşylykly tarapa ugrukdyrylmalydyr. $\angle ADC = \angle CDB = \beta$ bolany üçin $\overline{F}$ we $\overline{F_1}$ güýçleriň üstünde gurlan parallelogram romba öwrülýär. $AC = 2k$, $CB = k$, $DC = h$ bilen belläliň. ACD we DCB üçburçlyklardan sinuslar teoremasyna görä alýarys :

$$\frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{2k}{\sin\beta} = \frac{2h}{\sin\gamma} \text{ bu ýerde}$$

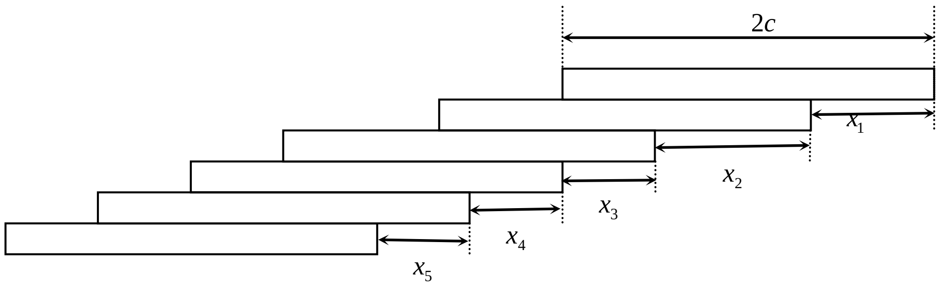
$$\sin\gamma = 2\sin 30^\circ = 1 \qquad \gamma = 90^\circ$$

$$2\beta = 60^\circ,\ \beta = 30^\circ,\ \alpha = 120^\circ$$

$\overline{F}$ we $\overline{F_1}$ güýçleriň deňtäsiredijisi 12 kg bolany sebäpli çyzgydaky rombdan tapýarys : $2F\cos 30^\circ = 12$; $F = 4\sqrt{3}kg$

Birnäçe birmeňzeş birjynsly uzynlygy $2l$ bolan plitalar biri-biriniň üstünde goýlupdyr, özem her plitanyň bir bölegi aşakda ýatan plitadan daşyna çykýar. Plitalar deňagramlykda bolar ýaly edip daşyna çykyp duran bölekleriň predel uzynlyklaryny kesgitlemeli.

Çözülişi : Plitalaryň deňagramlykda bolmaklary üçin olaryň her biriniň daşyna çykyp duran böleginiň agramy bilen onuň aşagyndaky plitanyň üstündäki böleginiň agramlary deň bolmalydyr.



Plitanyň uzynlyk birliginiň agramyny P we plitalaryň daşyna çykyp duran bşlekleriniň uzynlyklaryny degişlilikde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ bilen belläliň. Çyzgydaky iň ýokarky birinji plitanyň deňagramlykda bolmagy üçin aşakdaky deňleme kanagatlandyrylmalydyr : $(2l - x_1)p = x_1 p$; $2l = 2x_1$; $x_1 = l$

Ikinji plitanyň deňagramlykda bolmagy üçin aşakdaky deňleme kanagatlanmalydyr : $(2l - x_2)p = [2l - (x_1 + x_2)]p = x_1 p + 2x_2 p$ bu ýerden $x_2 = \frac{1}{2} l$

Üçünji plitanyň deňagramlaşmagynyň deňlemesi bolsa aşakdaky görnüşde alynýar:
$(2l - x_3)p + [2l - (x_2 + x_3)]p + [2l - (x_1 + x_2 + x_3)]p = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)p$

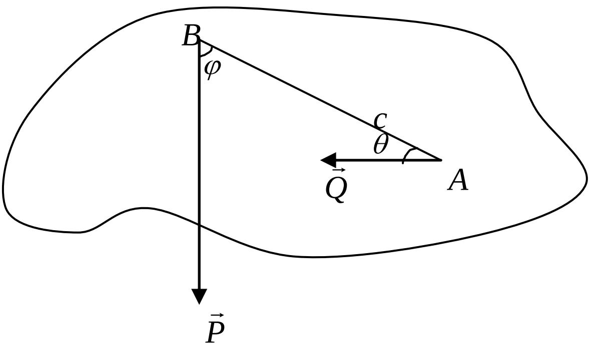
bu ýerden $x_3 = \frac{1}{3}l$

Şeýlelik bilen plitalaryň daşyna çykyp duran bölekleriniň uzynlyklary aşakdaky ýaly aňladylýar :

$$x_1 = l,\ x_2 = \frac{1}{2}l,\ x_3 = \frac{1}{3}l,\ x_4 = \frac{1}{4}l, \ldots, x_n = \frac{1}{n}l$$

6. AB göni çyzyk bilen bir tekizlikdäki we onuň bilen φ we θ burçlary emele getirýän $\overline{P}$ we $\overline{Q}$ güýçler gaty jisimiň A we B nokatlarynda oňa täsir edýärler. AB çyzygyň haýsy bir C nokady berkidilende jisim hereket etmez?

Çözülişi : Eger $\overline{P}$ we $\overline{Q}$ güýçleriň deňtäsiredijisi gozganmaýan C nokatdan geçýän bolsa, onda jisim dynçlyk ýagdaýynda bolýar.

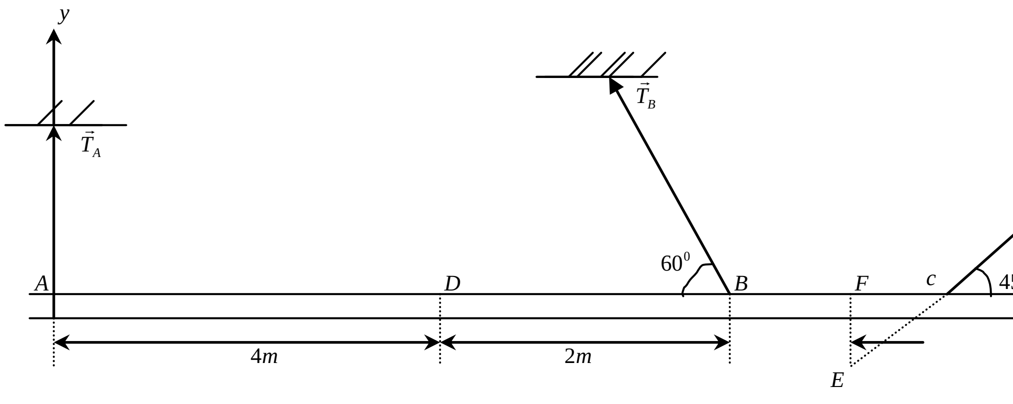


BC aralygy x bilen belläp güýçleriň gozganmaýan C nokada görä momentleriniň jemini nula deňleýäris :

$$Px\sin\varphi + Q(AB - x)\sin\theta = 0 \quad \text{bu ýerden} \quad x = \frac{QAB\sin\theta}{P\sin\varphi + Q\sin\theta} \; ;$$

Köpri gurnalanda onuň bir ABC bölegini çyzgydaky ýaly ýerleşen 3 kanat bilen götermeli boldy. Bu bölegiň agramy 4200kg bolup onuň agyrlyk merkezi D nokatdadyr. Aralyklar degişlilikde $AD = 4m$, $DB = 2m$, $BF = 1m$ deňdirler. Eger AC göni çyzyk gorizontal bolsalar, kanatlaryň dartyş güýçlerini tapmaly.

Çözülişi : Kanatlaryň A, B we C nokatlardaky dartyş güýçlerini degişlilikde $\overline{T}_A$, $\overline{T}_B$, $\overline{T}_C$ bilen belläp Axy koordinatalar sistemasyny alalyň.



Güýçleriň E nokada görä momentleriniň jemini nula deňleýäris :

$$-T_A 7 + 4200 * 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = 1800kg$$

Indi güýçleriň koordinata oklaryna proýeksiýlarynyň jemini nula deňleýäris :

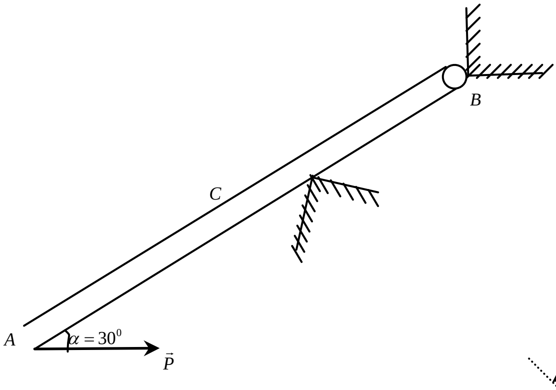
$$\begin{cases} T_C \cos 45^\circ - T_B \cos 60^\circ = 0 \\ T_A + T_B \cos 30^\circ + T_C \cos 45^\circ - 4200 = 0 \end{cases}$$

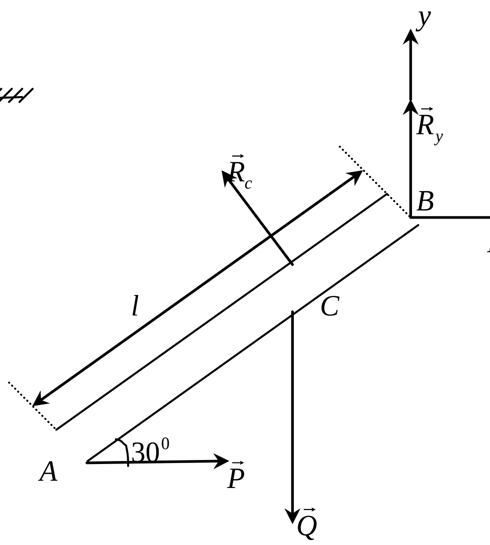
Bu deňlemeleri çözüp T_B we T_C kesgitleýäris :

$$T_B = 1757kg, \quad T_C = 1243kg$$

Agramy $Q = 200kg$ bolan birjynsly AB brusok B nokatda gozganmaýan şarnir bilen berkidilen, B nokatdan sterjeniň $\frac{1}{3}$ uzynlygyndaky daşlykda ýerleşen C nokatda bolsa ol ýylmanak diregiň burçyna daýanýar. Brusogyň A nokadyna $P = 400kg$ gorizantal güýç goýlan. C we B nokatlardaky reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli.

Çözülişi : $AB = l$ baglanşygyň reaksiýalaryny degişlilikde $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$ we $\overline{R}_c$ bilen bellap, B nokatdan koordinata oklary geçirýäris.





Güýçleriň koordinata oklara proýeksiýalarynyň we olaryň B nokada görä momentleriniň jemini nula deňleýäris :

$$\sum X_i = P - R_c \cos 60^\circ + R_x = 0$$

$$\sum Y_i = -Q + R_c \cos 30^\circ + R_y = 0$$

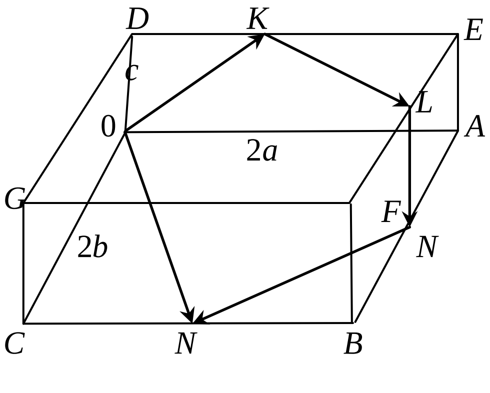
$$\sum M_B = Pl \sin 30^\circ + \frac{l}{2} Q \cos 30^\circ + \frac{l}{3} R_C = 0$$

Bu deňlemeleri çözüp reaksiýa güýçleri kesgitleýäris :

$R_i = 150\left(4 + \sqrt{3}\right) = 860kg$; $R_x = 30kg$; $R_y = -544kg$

9. $2a$, $2b$ we c ölçegli göniburçly OAB, CD, EFG parallelepipetde dört sany $\overline{OK} = \overline{F_1}$, $\overline{KL} = \overline{F_2}$, $\overline{LM} = \overline{F_3}$, $\overline{MN} = \overline{F_4}$ güýçleri goýlan. K, L, M, N nokatlar DE, EF, AB we BC gapyrgalaryň ortalarydyr. O nokady getirme merkezine deregine kabul edip, deňtäsirediji güýji we deňtäsirediji jübü güýji tapmaly.

Çözülişi : OA, OC we OD gapyrgalaryň ugurlaryny Ox, Oy we Oz koordinata oklaryň ugulary diýip kabul edeliň.



Güýçleri O nokada geçirip, olaryň deňtäsiredijisini $\overline{ON} = \overline{R}$ bilen aňladýarys we onuň ululygyny şeýle kesgitleýäris : $R = \sqrt{a^2 + 4b^2}$

Güýçleriň koordinata oklara görä momentleriniň jemini tapyp, $\bar{l}$ jübüt güýjiň koordinata oklara proýeksiýalaryny alýarys :

$$L_x = mom_x\left(\overline{F}_2\right) + mom_x\left(\overline{F}_1\right) = -bc - bc = -2bc$$

$$L_y = mom_y\left(\overline{F}_2\right) + mom_y\left(\overline{F}_3\right) = ac + 2ac = 3ac$$

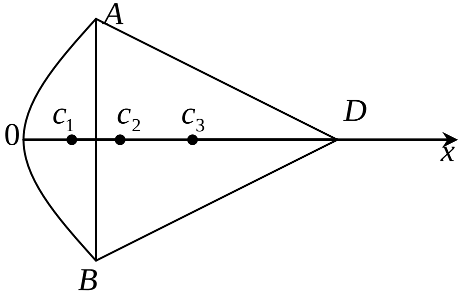
$$L_z = mom_z\left(\overline{F}_3\right) + mom_z\left(\overline{F}_4\right) = ab + 3ab = 4ab$$

Bu ýerden $L = \sqrt{4b^2c^2 + 9a^2c^2 + 16a^2b^2}$;

$$\cos(L,x) = \frac{-2bc}{L}; \quad \cos(L,y) = \frac{3ac}{L}; \quad \cos(L,z) = \frac{4ab}{L}$$

Radiusy R bolan AOB ýarym tölwerek, AD we DB göni çyzyklar bilen çäklenen geometrik figuranyň meýdanynyň C agyrlyk merkezini tapmaly. Bu ýerde OD=3R.

Çözülişi : Seredilýän geometrik figura AOB ýarym tegelek bilen ABD üçburçlygyň jemine deňdir. OD göi çyzygy Ox okuň deregine kabul edeliň.



Ýarym tegelegiň we üçburçlygyň agyrlyk merkezlerini degişlilikde $C_1(x_1,O)$, $C_2(x_2,O)$ we olaryň meýdanlaryny S_1, S_2 bilen belläliň. Onda :

$$S_1=\frac{\pi R^2}{2};\qquad S_2=\frac{1}{2}AB\cdot KD=\frac{1}{2}2R\cdot 2R=2R^2$$

Çyzgydan : $x_1=R-KC_1=R-\dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha}=R-\dfrac{2R\sin\frac{\pi}{2}}{3\frac{\pi}{2}}=R-\dfrac{4R}{3\pi};$

$$x_1=R\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)$$

$$x_2=R+KC_2=R-\frac{1}{3}KD=R+\frac{1}{3}2R=R+\frac{2}{3}R$$

$$x_2=\frac{5}{3}R$$

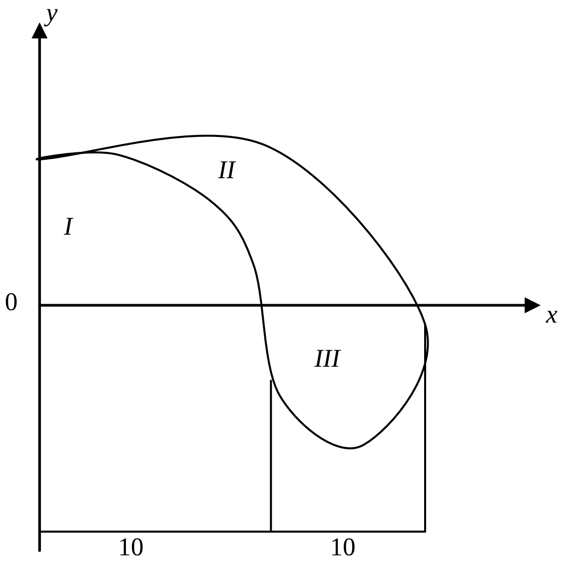
Şeýlelik bilen

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{2}x_i\cdot S_i}{\sum_{i=1}^{2}S_i}=\frac{x_1S_1+x_2S_2}{S_1+S_2}=1.19R$$

$$x_c=1.19R$$

Kontury diametrleri 20 sm we 10 sm bolan ýarym töwerekler bilen çäklenen ştrihlenen figuranyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi : Berlen figura I,II,III bölejiklerden düzülýär. Bu ýerde I we II bölejikleriň meýdanlary Ox we diametri 10 sm bolan ýarym töwerek, II bölejigin meýdany bolsa şol Ox we diametri 20 sm bolan ýarym töwerek bilen çäklenendir.



I bölejigiň meýdany ştrihlenen figura degişli däldigi üçin ony minus alamat bilen almaly. Bu bölejikleriň meýdanyny S_1, S_2, S_3 olaryň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny bolsa $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ bilen belläliň. Onda :

$$S_1 = -\pi \cdot 5^2 \, sm^2; \quad x_1 = 5sm; \quad y_1 = \frac{4 \cdot 5}{3\pi} = 2.12sm;$$

$$S_2 = \pi \cdot 10^2 \, sm^2; \quad x_2 = 10sm; \quad y_2 = \frac{4 \cdot 10}{3\pi} = 4{,}24sm;$$

$$S_3 = \pi \cdot 5^2 \, sm^2; \quad x_3 = 15sm; \quad y_3 = \frac{4 \cdot 5}{3\pi} = -2{,}12sm;$$

Şeýlelik bilen ştrihlenen figuranyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary şeýle aňladylýar :

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{-\pi \cdot 5^2 \cdot 5 + \pi \cdot 10^2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 \cdot 15}{-\pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 10^2 + \pi \cdot 5^2} = 12{,}5sm$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{-\pi \cdot 5^2 \cdot 2{,}12 + \pi \cdot 10^2 \cdot 4{,}24 - \pi \cdot 5^2 \cdot 2{,}12}{-\pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 10^2 + \pi \cdot 5^2} = 3{,}18sm$$

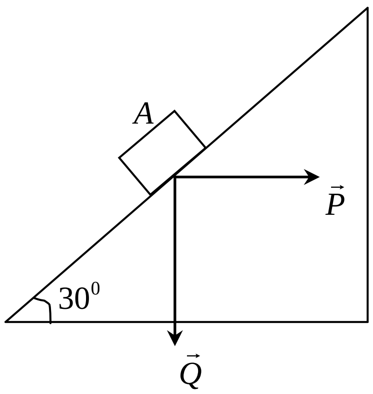
12. $Q=100kg$ agramy bolan A jisim büdür-südür ýapgyt ýerde ýatyr. Eger jisimiň tekizlige sürtülme koeffisienti $f=0{,}2$ deň bolsa, onuň hereket edip başlamagy üçin gerek bolan iň kiçi $\overline{P}$ gorizontal güýji tapmaly.

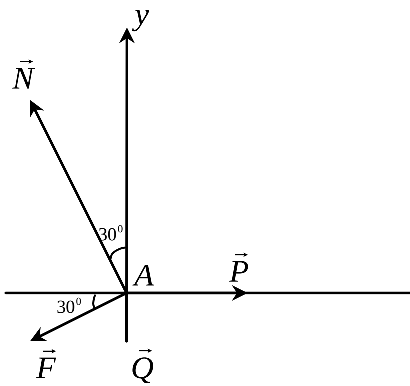
Çözülişi : Normal reaksiýany $\overline{N}$ we sürtülme güýji $\overline{F}$ bilen belläliň. Deňagramlaşmagyň deňlemelerini ýazalyň :

$$\sum X_i = -N\cos 60^\circ - F\cos 30^\circ + P = 0$$

$$\sum Y_i = N\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ - Q = 0$$

$$F = fN$$





Ýa-da

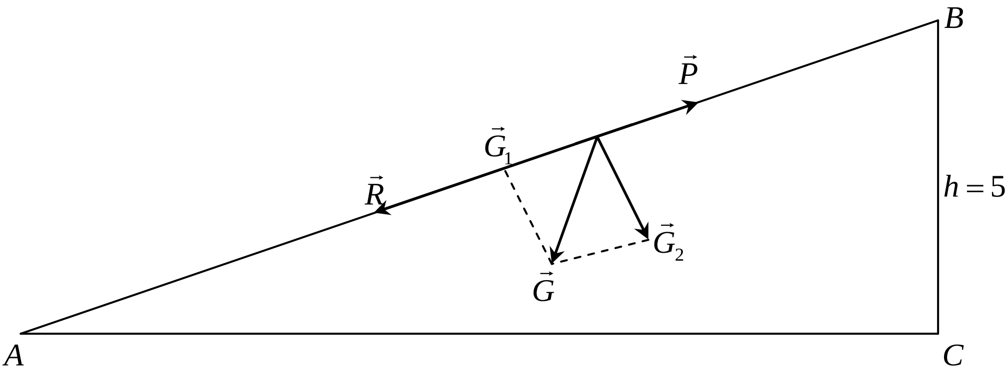
$$\frac{1}{2}N + \frac{\sqrt{3}}{2}fN = P$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N - \frac{1}{2}fN = Q$$

Bu ýerden

$$N = 131kg\,; \quad P = 88kg$$

2t ýüki gorizont bilen 30° burç emele getirýän ýapgyt tekizlik boýunça hereket etdirip 5m galdyrmak üçin sarp edilmeli iň kiçi işi kesgitlemeli; sürtülme koeffisenti 0,5;
Çözülişi : Ýükiň agramyny $\overline{G_1}$ we $\overline{G_2}$ düzüjilere dargydýarys. Sürtülme güýji $\overline{R}$ we hereket etdiriji güýji bolsa $\overline{P}$ bilen belläliň.



Gözlenilýän işi şeýle kesgitleýäris :

$$A = PAB = PS = (G_1 + R)\cdot S = (G\sin\alpha + fG\cos\alpha)\cdot s$$

Çyzgydan :

$$\frac{h}{s} = \sin 30^\circ; \quad \frac{5}{s} = \frac{1}{2}; \quad s = 10m$$

Şeýlelik bilen :

$$A = G(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot 10 = 2000\left(\frac{1}{2} + 0{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 10$$

$$A = 18650kg\cdot m$$

14.Eger liniýadaky wagonlaryň sany 45, her wagonyň agramy 10t, sürtülme garşylygy wagonyň agramynyň 0,002-sine deň, wagonyň ortaça tizligi 12km/sag we setdäki ýitgi 5% bolsa, tramwaý setiniň stansiýadaky turbogeneratorlaryň kuwwatyny hasaplamaly.

Çözülişi : $\vartheta = \dfrac{10}{3} m/sek$; $\quad P = 0{,}02 \cdot 450000kg = 900kg$

$$N_1 = P\vartheta = 9000 \cdot \frac{10}{3} = 3000kgm/sek$$

Setdäki ýitgini kesgitläliň :

$$x = \frac{30000 \cdot 5}{100} = 1500kgm/sek$$

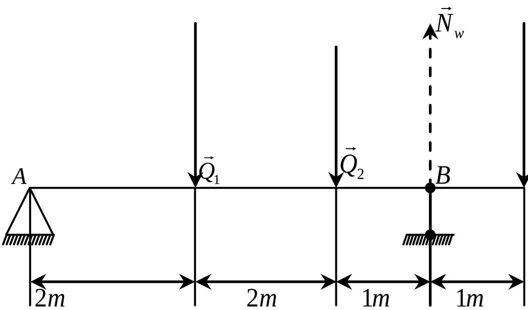
Şeýlelik bilen turbogeneratorlaryň kuwwaty şeýle tapylýar :

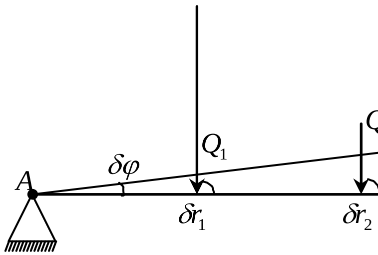
$$N = N_1 + x = 31500kgm/sek = \frac{31500kgm/sek}{75}$$

$N = 421$ at güýji.

15.Iki sany A we B daýançlarda ýatan AB balka $Q_1 = 6t$, $Q_2 = 2t$, $Q_3 = 4t$ wertikal güýçleriň sistemasy täsir edýär. Mümkin süýşmeleriň prinsipinden peýdalanyp B şarnirdäki baglanşygyň reaksiýasyny kesgitlemeli.

Çözülişi : B daýançdaky reaksiýany $\overline{N}_b$ bilen belläliň.





Indi balkanyň A şarniriň töwereginde aýlanmagyna mümkinçilik döredi. Balka mümkin süýşme berip işiň deňlemesini guralyň :

$$-Q_1\delta r_1 - Q_2\delta r_2 + N_b\delta r - Q_3\delta r_3 = 0$$

Bu ýerde

$$\delta r_1 = 2\delta\varphi; \quad \delta r_2 = 4\delta\varphi; \quad \delta r = 5\delta\varphi\,; \; \delta r_3 = 6\delta\varphi$$

Şeýlelik bilen

$$N_b = \frac{2a_1 + 4a_2 + 6a_3}{5} = \frac{2\cdot 6 + 4\cdot 2 + 6\cdot 4}{5} = 8{,}8m \qquad N_b = 8{,}8m$$

DINAMIKA

Nazary mehanikanyň hereket emele getirýän we ony üýtgedýän sebäpleri nazara alyp mehaniki ulgamyň hereketini öwrenýän bölümine dinamika diýilýär. Seýlelik bilen dinamika material jisimleiň hereketini olara täsir edýän güýçlere baglylykda öwrenýär.

ERKIN MATERIAL NOKADYŇ WE MEHANIKI

ULGAMANYŇ DINAMIKASY

Dinamikanyň esasy kanunlary.

1638 ýylda Galileý tarapyndan açylan inersiýa kanuny şeýle kesgitlenýär:

Daşky täsirlerden çetleşdirlen material nokat özüniň dynçlyk ýagdaýyny ýa-da deňölçegli we göniçyzykly hereketini, tä oňa goýlan güýçler ony şol ýagdaýyny üýtgetmäge mejbur edýänçä saklaýar. Galileýiň şu kanunyna esaslanyp Nýuton özüniň hereket hakdaky esasy kanunlaryny şeýle kesgitledi:

Nyutonyň birinji kanuny. Material nokada goýlan güýçler ony ýagdaýyny üýtgetmäge mejbur edýänçäler, ol özüniň dynçlyk ýagdaýyny ýa-da deňölçegli we göniçyzykly hereketini saklaýar.

Nyutonyň ikinji kanuny. Hereket mukdarynyň üýtgemegi nokady hereket etdiriji goýlan güýje proporsional bolup, şol güýjiň täsir edýän göni çyzygy boýunça ýüze çykýar.

Massanyň tizlige köpeltmek hasylyna hereket mukdary diýilýär we Nýutonyň ikinji kanuny differensial görnüşde şeýle aňladylýar:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}$$

(1)

bu ýerde $\bar{v}$ – hereket edýän nokadyň tizligi, m – onuň massasy, $m\bar{v}$ – hereket mukdary we $\bar{F}$ – hereket etdiriji goýlan güýçdir. (1)-de hereket mukdaryny $m\bar{v} = \bar{Q}$ bilen belgiläliň:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}$$

(2)

Material nokadyň massasynyň ululygyny hemişelik hasap edip Nýutonyň ikinji kanunyny aşakdaky görnüşde hem ýazmak bolýar:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

(3)

Tizligiň wagta görä birinji önüminiň tizlenmä deň bolany üçin

$$m\bar{w} = \bar{F}$$

(4)

(3) deňleme material nokadyň hereketiniň differensial görnüşdäki esasy kanunydyr.

Ýagny Nýutonyň ikinji kanunyna görä nokadyň massasynyň onuň tizlenmesine köpeltmek hasyly nokada täsir edýän güýje deňdir.

$$w = \frac{F}{m}$$

(5)

Görşümiz ýaly massa köp boldugyça tizlenme şonça-da az bolýar. Şeýlelik bilen massa köp boldugyça jisimiň güýjiň täsirine garşylyk görkezmek ukyby köp bolýar. Başga sözler bilen aýdanymyzda bolsa, massa material nokadyň inersiýasynyň ölçegidir.

Nýutonyň üçünji kanuny. Täsir edýän güýje deň garşylykly täsir edýän güýc bardyr. Başga sözler bilen aýdanymyzda bolsa, mydama iki jisimiň özara täsir güýçleri ululyklary boýunça deň we garşylykly taraplara ugrukdyrylandyrlar. (2)-den

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt \qquad (6)$$

Bu ýerde $dQ = Fdt$ köpeltmek hasylyna güýjiň elementar impulsy diýilýär.

(6) formula aşakdaky teoremany aňladýär:

Material nokadyň hereket mukdarynyň differensialy güýjiň elementar impulsyna deňdir.

Material nokadyň we material nokatlaryň ulgamynyň hereketiniň differensial we tebigi deňlemeleri.

Nýutonyň ikinji kanunyny aňladýän (4) formulany differensial görnüşde ýazalyň:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \qquad (7)$$

Şu material nokadyň hereketiniň wektor görnüşdäki differensial deňlemesidir. (7) wektor görnüşdäki deňlemäni koordinata oklara proektirläp material nokadyň hereketiniň differensial deňlemeleriniň ulgamyny alýarys:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\}$$

(8)

bu ýerde X,Y,Z hereket etdiriji güýjiň koordinata oklara proeksiýalarydyr. Material nokatlaryň ulgamynyň hereketine seredilende her bir nokada täsir edýän daşky $\overline{F}_i^{\,g}$ we sistemanyň nokatlarynyň biri-birine täsir edýän içki $\overline{F}_i^{\,u}$ güýçler nazara alynýär. Şeýlelik bilen ulgam üçin (4) şeýle ýazylýar.

$$\sum_{i=1}^{n} m\overline{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,g} + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,u}$$

(9)

bu ýerde n – ulgamynyň nokatlarynyň sanydyr. Nýutonyň üçünji kanunyna görä içki güýçleriň wektor jemi nula deňdir:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,u} = 0$$

(10)

Daşky güýçleriň deňtäsiredijisini ýagny daşky güýçleriň baş wektoryny $\overline{R}$ bilen belläp (4.9) aňlatmany şeýle ýazýarys:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{w}_i = \overline{R}$$

(11)

Bu wektor aňlatmany koordinata oklara proýektirläp material nokatlaryň ulgamynyň hereketiniň differensial deňlemeleriniň ulgamyny alýarys:

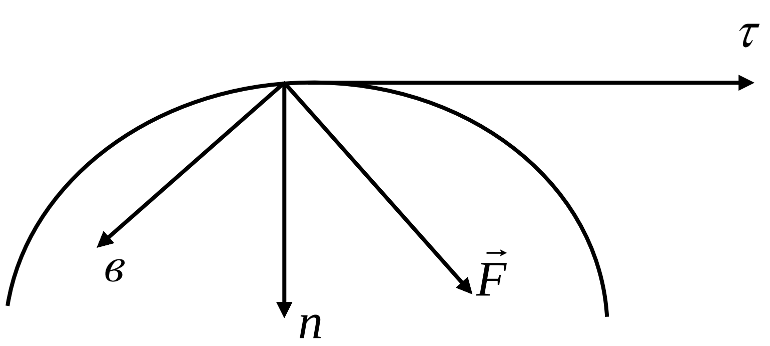
$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} X_i = X \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = Y \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = Z\end{aligned}\right\}$$

(12)

(4) wektor aňlatmany galtaşýan, normal we binormal wektorlaryň ugurlaryna proýektirläliň (çyz.1)

$$\left.\begin{aligned}m\frac{dv}{dt} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b\end{aligned}\right\}$$

(13)



Çyzgy I.

(13) aňlatmalara nokadyň hereketiniň tebigi deňlemeleri diýilýär.

DINAMIKANYŇ ESASY TEOREMALARY

Hereket mukdary hakdaky teoremalar.

Teorema 1. Material nokadyň hereket mukdarynyň wagta görä birinji proizwodnysy şol nokada täsir edýän güýje we material nokatlaryň ulgamynyň hereket mukdarynyň wagta görä birinji proizwodnysy bolsa şu sistema täsir edýän daşky güýçleriň wektor jemine deňdir.

Subudy. (1) we (2) formulalardan görnüşi ýaly teoremanyň birinji böleginiň subudy Nýutonyň ikinji kanunyndan gelip çykýar. Ulgamyň hemme nokatlarynyň hereket mukdarlarynyň wektor jemine şu ulgamyň hereket mukdary diýilýär:

$$\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{v}_i$$

(14)

(2), (9) formulalary nazara alyp şu (14) wektor aňlatmanyň proizwodnysyny tapalyň:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\overline{Q}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,g} + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,u}$$

içki güýçleriň wektor jemi nula deň bolany üçin şu aňlatma şeýle alynýar:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,g}$$

(15)

Teorema subut edildi.

__Teorema 2.__ Material nokatlaryň ulgamynyň massasynyň şu sistemanyň agyrlyk merkezinde jemlenenligi nazara alynsa, onda ulgamyň hereket mukdary onuň agyrlyk merkeziniň hereket mukdaryna deňdir.

__Subudy.__ (14) formulanyň differensial görnüşde ýazalyň:

$$\overline{Q} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i$$

Ulgamyň agyrlyk merkeziniň radius-wektorynyň formulasyndan peýdalanalyň:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{M}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = M\overline{r}_c$$

$$\overline{Q} = \frac{d}{dt}(M\overline{r}_c) = M\frac{d\overline{r}_c}{dt} = M\overline{v}_c$$

(16)

$$\overline{Q} = M\overline{v}_c$$

bu ýerde $\overline{v}_c$ ulgamyň agyrlyk merkeziniň tizligidir. Teorema subut edildi

. Eger-de ulgama daşky güýçler hem täsir etmeýän bolsa onda $\frac{d\overline{Q}}{dt} = 0$ bolany üçin

$$\overline{Q} = M\overline{v}_c = \overline{const}$$

(17)

Şu hereket mukdarynyň saklanmak kanunydyr.

(17)- den

$$\overline{v}_c = \overline{const}$$

(18)

(17), (18) wektor aňlatmalary koordinata oklara proýektirlesek üç sany birinji integrallar alynýar:

$$\left.\begin{array}{lll} Q_x = c_1, & Q_y = c_2, & Q_z = c_3 \\ \dot{x}_c = c_1', & \dot{y}_c = c_2', & \dot{z}_c = c_1' \end{array}\right\}$$

(19)

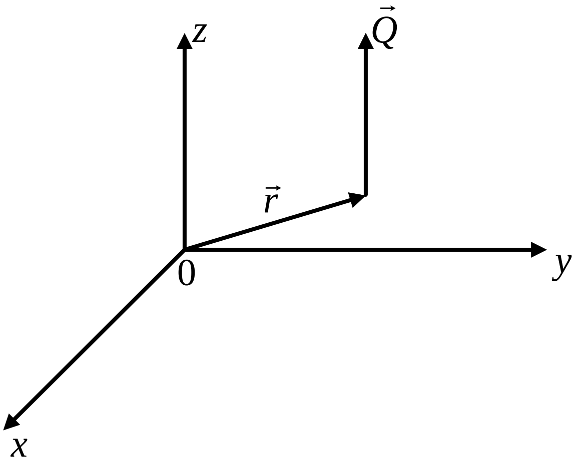
Hereket mukdarynyň wektorynyň nokada görä momentine hereket mukdarynyň kinetik momenti ýa-da ýöne kinetik moment diýilýär we şeýle bellenýär (çyz.2);

$$\overline{G} = mom_0(\overline{Q}) = [\overline{r}\overline{Q}]$$

ýa-da

$$\overline{G} = [\overline{r}m\overline{v}]$$

(20)



Çyzgy 2.

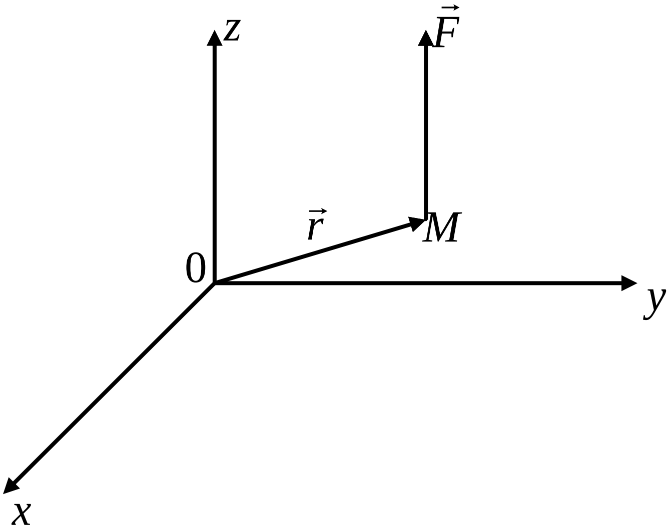
Ulgamyň hemme nokatlarynyň kinetik momentleriniň wektor jemine şu ulgamyň kinetik momenti diýilýär.

$$\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} \overline{G}_i = \sum_{i=1}^{n} [\overline{r}_i m_i \overline{v}_i] \qquad (21)$$

Kinetik moment hakdaky teoremalar

<u>Teorema 3.</u> Material nokadyň kinetik momentiniň wagta görä birinji önümi şu nokada täsir edýän güýjiň haýsam bolsa bir gozganmaýan nokada görä momentine we ulgamyň kinetik momentiniň wagta görä birinji önümi bolsa, ulgama täsir edýän hemme daşky güýçleriň edil şol bir gozganmaýan nokada görä momentleriniň wektor jemine deňdir.

<u>Subudy.</u> Ulgamyň haýsy hem bolsa bir M nokadynyň hereketine seredeliň (çyzgy 3).



Çyzgy 3.

Nýutonyň ikinji kanunyny aňladýan (1) formulanyň iki tarapyny hem nokadyň radius wektoryna wektor köpeldeliň:

$$\frac{d}{dt}[\bar{r}m\bar{v}] = \frac{d\overline{G}}{dt} = [\bar{r}\overline{F}] = mom_0(\overline{F})$$

(22)

Şunuň bilen teoremanyň birinji bölegi subut edildi. (9), (22)-leri nazara alyp (21)-den önüm alýarys:

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\overline{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} mom_0(\overline{F}_i^{\,g}) + \sum_{i=1}^{n} mom_0(\overline{F}_i^{\,u})$$

Içki güýçleriñ momentleriniñ wektor jemi nula deñ bolany üçin

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} mom_0(\overline{F}_i^{\,g})$$

(23)

Şunuñ bilen teorema subut edildi.

(22)-ä esaslanyp (23)-i şeýle ýazalyñ:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\bar{r}_i m_i \bar{v}_i] = \sum_{i=1}^{n}[\bar{r}_i \overline{F}_i^{\,g}]$$

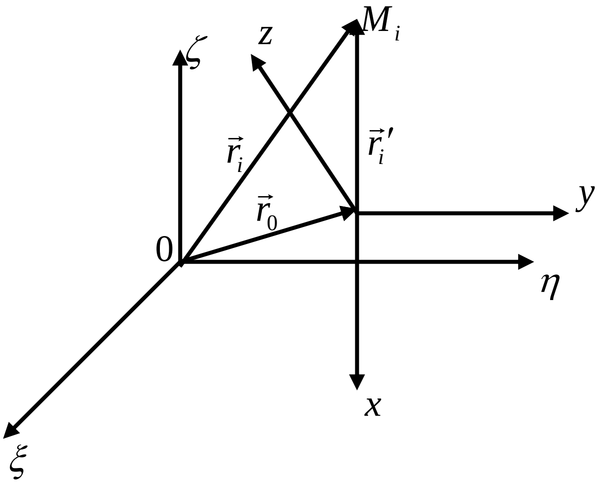
Şu wektor añlatmany koordinata oklara proýektirläliñ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i z_i - z_i y_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i Z_i^g - z_i Y_i^g)\\
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i (z_i x_i - x_i z_i) = \sum_{i=1}^{n}(z_i X_i^g - x_i Z_i^g)\\
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i y_i - y_i x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i^g - y_i X_i^g)
\end{aligned}\right\}$$

(24)

Teorema 4. Sistemanyñ kinetik momenti onuñ agyrlyk merkeziniñ kinetik momenti bilen özüniñ agyrlyk merkezine görä kinetik momentiniñ jemine deñdir.

Subudy. Gozganmaýan $O\zeta\eta\varsigma$ we hereket edýän oxyz koordinatalar sistemalaryny alalyñ. Hereket edýän koordinatalar sistemaynyñ başlangyjy C sistemanyñ agyrlyk merkezidir (çyzgy 4).



Çyzgy 4.

Çyzgydan:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_i'$$

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d\bar{r}_c}{dt} + \frac{d\bar{r}_i'}{dt}$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{v}_i'$$

$\bar{r}_i$ we $\bar{v}_i$-leriñ añlatmalaryny (21)-de ýazýarys:

$$\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} m_i[(\bar{r}_c + \bar{r}_i')(\bar{v}_c + \bar{v}_i')] = [\bar{r}_c\bar{v}_c]\sum_{i=1}^{n} m_i + \left[\bar{r}_c \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(m_i\bar{r}_i')\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}[(m_i\bar{r}_i')\bar{v}_c] + \sum_{i=1}^{n}[\bar{r}_i' m_i\bar{v}_i']$$

C nokadyñ Cxyz sistemada radius- wektory nula deñdir, onda

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i'}{M} = 0$$

bu ýerden

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i' = 0$$

Şoña görä-de ikinji we üçinji goşulyjylar nula deñ bolýarlar.

$$\overline{G} = [\bar{r}_c m \bar{v}_c] + \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i' m_i \bar{v}_i']$$

(25)

Bu ýerde sag tarapdaky birinji goşulyjy sistemanyñ agyrlyk merkeziniñ kinetik momenti we ikinji goşulyjy bolsa sistemynyñ özüniñ agyrlyk merkezine görä kinetik momentidir.

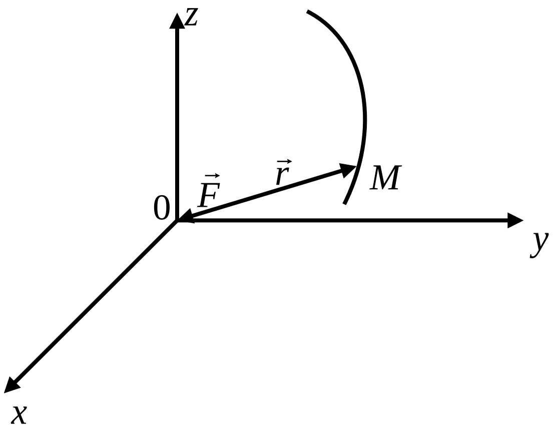
Teorema subut edildi.

Ugry ulgamyñ merkezinden geçýän güýje merkezi güýç diýilýär.

Eger-de ulgama daşky güýçler tasir etmeýän bolsalar ýa-da şol ulgama täsir edýän güýç merkezi güýç bolsa, onda (22)-den (çyzgy 5):

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = [\bar{r}\overline{F}] = 0$$

(26)



Çyzgy 5.

(26)-dan:

$$\overline{G} = \overline{const} \qquad (27)$$

ýa-da

$$[\bar{r} m\bar{v} = \overline{const}$$

bu ýerden

$$[\bar{r}\bar{v}] = \bar{c} \qquad (28)$$

Kinematikadan sektor tizligiñ formulasyndan peýdalanalyñ:

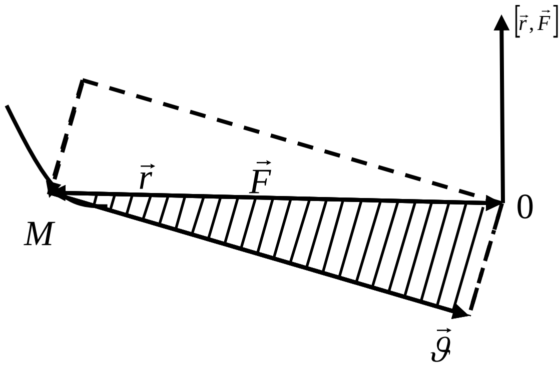
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}[\bar{r}\ \bar{v}] = \bar{c}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sigma = c$$

bu ýerden

$$S = ct + c_1 \qquad (29)$$

Şu (29) meýdanlar hakdaky teoremanyñ añlatmasydyr we şeýle kesgitlenýär: merkezi güýjiñ täsiriniñ astynda hereket edýän nokadyñ traýektoriýasy tekiz egri çyzykdyr we nokadyñ radius-wektorynyñ çyzýan meýdany wagta proporsionaldyr. Bu teorema meýdanlar hakdaky kanun hem diäýär (çyzgy 6).



Çyzgy 6.

Kinetik energiýa hakdaky teoremalar.

Teorema 5. Kinetik energiýanyñ wagta görä önümi kuwwata deñdir.

Subudy. (1) deñlemäniñ iki tarapyny hem $\bar{v}$ skalýar köpeldeliñ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\bar{V}$$

Teorema subut edildi.

Teorema 6. Kinetik energiýanyñ differensialy nokada täsir edýän güýjiñ elementar işine deñdir.

Subudy. $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ bolany sebäpli

$$\frac{\alpha}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}\,\frac{d\bar{r}}{dt}$$

bu ýerden

$$\alpha\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}d\bar{r}$$ Teorema subut edildi.

Teorema 7. Ulgamyñ kinetik energiýasynyñ differensialy şu ulgama täsir edýän hemme daşky we içki güýçleriñ elementar işleriniñ jemine deñdir.

Subudy. n sany material nokatlaryñ ulgamy berilýär. Daşky güýçleriñ deñtäsiredijisini $\bar{F}_i^{\,g}$ we içki güýçleriñ deñtäsiredijisini bolsa $\bar{F}_i^{\,g}$ bilen belläliñ. Onda öñden bilşimiz ýaly şeýle bolýar:

$$\alpha\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)=\bar{F}_i^{\,g}\,d\bar{r}_i+\bar{F}_i^{\,u}\,d\bar{r}_i$$

Şu n sany deñlemeleri agzama-agza goşalyñ:

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{\,g}\,d\bar{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{\,u}\,d\bar{r}_i$$

ýa-da

$$T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)$$ ulgamyñ kinetik energiýasy bolany üçin

$$dT=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{\,g}\,d\bar{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{\,u}\,d\bar{r}_i$$

(30)

Sag tarap içki we daşky güýçleriñ elementar işleriniñ jemidir:

$$dT = \sum_{i=1}^{n} A_i^g + \sum_{i=1}^{n} A_i^u$$

(31)

Teorema subut edildi.

Içki güýçler ulgamyñ nokatlarynyñ aralygynyñ funksiýalarydyr. Eger-de U^u içki güýçleriñ potensialy bolsa, onda

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^g d\overline{r}_i + dU^u$$

ýa-da

$$d(T + \Pi^u) = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^g d\overline{r}_i$$

Absolýut gaty jisimiñ nokatlarynyñ aralygy hemişelik bolany üçin:

$$U^u = const, \qquad dU^u = 0$$

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^g d\overline{r}_i$$

Görşümiz ýaly absolýut gaty jisimiñ kinetik energiýasynyñ differensialy daşky gýçleriñ işiniñ jemine deñdir.

Daşky güýçleriñ potensial energiýasyny Π^g bilen bellesek, onda

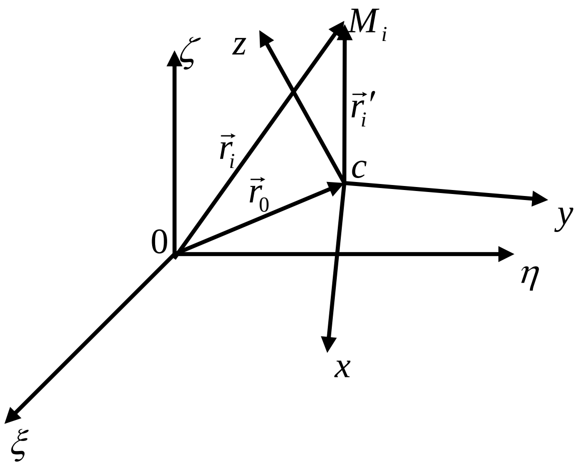
$$\alpha(T + \Pi^g + \Pi^u) = 0$$

$$E = T + \Pi^g + \Pi^u = const$$

Şu mehaniki energiýanyñ saklanmak kanunydyr. Şu kanuna boýun egýän sistema konserwatiw sistema diýilýär.

Kýonigiñ teoremasy. Material nokatlaryñ sistemasynyñ hemme massasy nokatlaryñ massalarynyñ merkezinde jemlenen hasap edilende sistemanyñ doly kinetik energiýasy massalaryñ merkeziniñ öñe hereketiniñ kinetik enegiýasynyñ we sistemanyñ massalaryñ merkezine görä hereketiniñ kinetik energiýasynyñ jemine deñdir.

Subudy. Gozganmaýan $O\zeta\eta\varsigma$ we başlangyjy massalaryñ merkezinde bolan hereket edýän Cxyz koordinatalar sistemalaryny alalyñ. Sistemanyñ massasy m bolan haýsy hem bolsa bir M_i nokadynyñ hereketine seredeliñ (çyzgy 7).



Çyzgy 7.

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + r_i'$$

C nokadyñ Cxyz sistemada radius-wektory $\bar{r}_c'$ nula deñ bolany sebäpli:

$$\bar{r}_c' = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i'}{M} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i' = 0$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \frac{d\bar{r}_i'}{dt}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \bar{v}_c \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2$$

Bu ýerden ikinji goşulyjy nula deň bolany üçin

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2$$

Şunuň bilen Kýonigiň teoremasy subut edildi.

DINAMIKI ULULYKLAR.

1. Massanyň ölçegi.

$$m = \frac{F}{w}, \qquad w = \frac{2s}{t^2}, \qquad m = \frac{Ft^2}{2s}$$

$$(m)_{olcegi} = (s^{-1}, t^2, F^1)$$

2. Hereket mukdarynyň ölçegi.

$$mv = \frac{Ft^2}{2s} \cdot \frac{s}{t} = \frac{Ft}{2}$$

$$(mv)_{olcegi} = (s^0, t^1, F^1)$$

3. Kinetik energiýanyň ölçegi.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ft^2}{2s} \cdot \frac{s^2}{t^2} = \frac{1}{4} F^s$$

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{olcegi} = (s^1, t^0, F^1)$$

4. Güýjiň impulsynyň ölçegi.

$$(Ft)_{olcegi} = (s^0, t^1, F^1)$$

5. Işiñ ölçegi.

$$(Fs)_{olcegi} = (s^1, t^0, F^1)$$

Nokadyñ göniçyzykly hereketi.

Eger-de nokadyñ başlangyç tizligi ýok bolsa ýa-da onuñ tizligi ugry hemişelik bolan güýjiñ ugry boýunça ugrukdyrlan bolsa, onda nokat güýjiñ ugry boýunça göniçyzykly hereket edýär. Şu göni çyzygy ox ok diýip alsak, onda nokadyñ hereketiniñ diñe bir differensial deñlemesi bolýar:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

(32)

Bu differensial deňlemäni şeýle Ox okuna proýektirläp nokadyň hereketiniň deňlemesini şeýle görnüşde alýarys:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = X$$

(33)

ýa-da

$$m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dx} = mv\frac{dv}{dx} = X$$

(34)

I/. Birinji hal. Güýç diňe wagtyň funksiýasydyr:

$$X = f(t)$$

Teorema. Berlen wagtyň içinde hereket mukdarynyň artdyrmasy şu wagtdaky täsir edýän güýjiň impulslarynyň jemine deňdir.

Subudy. (33) deňlemäni dt köpeldeliň:

$$Xdt = mdv$$

Bu deňlemäni integrirleýäris:

$$\int_0^t Xdt = mv + c$$

$$t = 0, \qquad v = v_0$$ bolanda

$$0 = mv_0 + c, \quad c = -mv_0$$

$$mv - mv_0 = \int_0^t Xdt$$

(35)

Şunuň bilen teorema subut edildi.

$v = \dfrac{dx}{dt}, \quad t = 0, \quad x = x_0$ peýdalanyp (35)-i integrirlesek, onda x şeýle aňladylýar:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t dt \int_0^t Xdt$$

2/. Ikinji hal. Güýç diňe aralygyň funksiýasydyr:

$$X = f(x)$$

Teorema. Şu berlen aralykdaky kinetik energiýanyň artdyrmasy şol aralykda täsir edýän güýjiň işine deňdir.

Subudy. (34) deňlemäni şeýle görnüşde ýazalyň:

$$Xdx = mvdv$$

integrirläliň:

$$\int_x^0 Xdx = \frac{mv^2}{2} + c$$

$x = 0, \quad v = v_0$ edip alalyň:

$$0 = \frac{mv^2}{2} + c, \quad c = -\frac{mv^2}{2}$$

onda

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^x X dx \qquad (36)$$

Teorema subut edildi.

<u>3/. Üçinji hal.</u> Güýç diňe tizligiň funksiýasydyr:

$$X = f(v)$$

(33) deňlemäni $t = 0, \quad v = v_0$ şertde integrirläliň:

$$dt = m\frac{dv}{X}$$

$$t + c = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X}, \quad c = 0$$

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X}$$

(37)

$$v = \varphi(t), \quad t = 0, \quad x = x_0, \quad x_0 + c_1 = 0, \quad c_1 = -x_0$$

$$x = x_1 + \int_0^t \varphi(t)dt$$

(38)

Indi (34) deňlemäni alalyň:

$$dx = mv\frac{dv}{X}$$

$$x + c_2 = m\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{X}$$

$$x_0 + c_2 = 0$$

$$x - x_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{X}$$

$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{X} \qquad (39)$$

Material nokadyň örän uly beýiklikden aşak gaçmagy.

Bu halda Nýutonyň bütündünýä dartylma kanunyndan peýdalanýarys.

Eger-de ýeri özüne dartýan jisimiň-Günüň massasy M we m ýeriň massasy bolsa, onda bütündünýä dartylma kanunyny şeýle görnüşde ýazylýar:

$$F = k\frac{mM}{x^2}$$

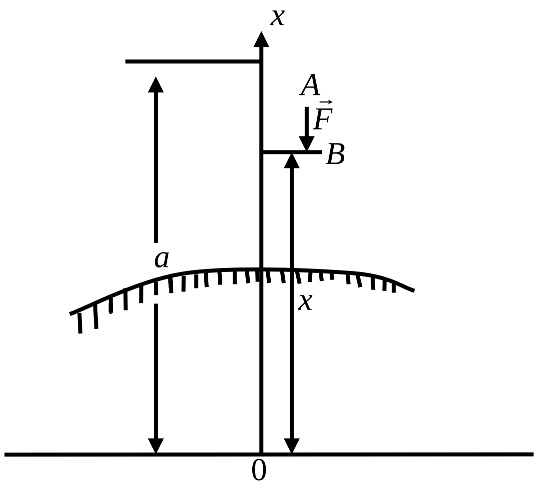
(40)

bu ýerde x Ýeriň merkezinden ony dartýan jisime çenli bolan aralykdyr, k-proporsionallyk koeffisientidir (çyz.8).

$kM = \mu$ bilen belläp (40)-y täzeden alalyň:

$$F = \mu\frac{m}{x^2}$$

(40)



Çyzgy 8.

Eger –de jisim ýeriň üstünde bolsa, onda

$$mg = F, \quad F = \mu \frac{m}{R^2}, \quad mg = \mu \frac{m}{R^2}, \quad \mu = gR^2$$

Bu ýerde R-Ýeriň radiusydyr. Aşak gaçan nokadyň B nokatdaky tizligini tapalyň. Güýç aralygyň funksiýasy bolany üçin (34) differensial deňlemeden peýdalanýarys. Güýç wertikal aşak ugrukdyrylany sebäpli

$$X = -F = -\mu \frac{m}{x^2}$$

şu aňlatmany (34)-de ýerine goýýarys:

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu \frac{m}{x^2}$$

ýa-da

$$vdv = -\mu \frac{dx}{x^2}$$

Bu deňlemäni 2-ä köpeldip integrirläliň:

$$\int 2v dv = -2\mu \int \frac{dx}{x^2}$$

ýa-da

$$v^2 + c = \frac{2\mu}{x}$$

c-ni tapalyň. Jisim A nokatda bolanda

$$x = \alpha, \quad v = 0, \quad c = \frac{2\mu}{\alpha}$$

Şeýlelik bilen

$$v^2 = \frac{2\mu}{x} - \frac{2}{\alpha} = 2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$v = -\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

(42)

Tizligi ugry wertikal aşak bolany üçin (42)-de kököň öňünde minus edip aldyk. Jisim tükeniksiz uly beýiklikden aşak gaçýan halynda $\alpha = \infty, \quad x = R$ bolýar. Onda (42) şeýle görnüşe geçýär:

$$v = -\sqrt{\frac{2\mu}{R}}$$

bu ýerde $\mu = gR^2$ ýazýarys:

$$v = \sqrt{2gR}$$

(43)

Eger-de g=9,81m/sek^2 , $R \approx 6000$ km edilip alynsa, onda

$$v = 11{,}179 km/sek.$$

Öňden bilişimiz ýaly şu ikinji kosmik tizlikdir.

Dinamikanyň iki esasy meseleleri.

Dinamikanyň iki esasy meseleleri erkin nokadyň hereketiniň (8)-däki differensial deňlemeleriniň kömegi bilen çözülýär:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Dinamikanyň birinji esasy meselesi.

Dinamikanyň birinji esasy meselesinde nokadyň hereketiniň kinematik deňlemeleri berilýär we oňa täsir edýän güýji kesgitlemek talap edilýär. Dinamikanyň birinji esasy meselesi hereketiň berlen deňlemelerini differensirlemek arkaly çözülýär. Hereketiň kinematik deňlemelerini şeýle görnüşde alalyň:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$

Nokadyň differensial deňlemelerinden oňa täsir edýän güýji şeýle kesgitleýäris:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mf_1''(t) = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mf_2''(t) = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mf_2''(t) = Z$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = m\sqrt{f_1''^2(t) + f_2''^2 + f_3''^2}$$

<u>Mysal.</u> Nokadyň hereketiniň kinematik deňlemeleri şeýle görnüşde berilýärler:

$$x = a\cos(kt)$$

$$y = b\sin(kt)$$

Täsir edýän güýjiň ululygyny we ugruny kesgitläliň. Nokadyň hereketiniň differensial deňlemelerinden peýdalanyp güýjiň ululygyny tapýarys:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2\alpha\cos(kt) = -mk^2x = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mk^2b\sin(kt) = -mk^2y = Y$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = k^2m\sqrt{x^2 + y^2} = k^2mr$$

bu ýerde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Indi güýjiň ugruny kesgitläliň:

$$\cos(\overline{F}, i) = \frac{x}{F} = -\frac{x}{r}$$

$$\cos(\overline{F}, j) = \frac{y}{F} = -\frac{y}{r}$$

Nokadyň radius-wektorynyň ugrukdyryjy burçlarynyň kosinuslaryny ýazalyň:

$$\cos(\kappa, i) = \frac{x}{r}$$

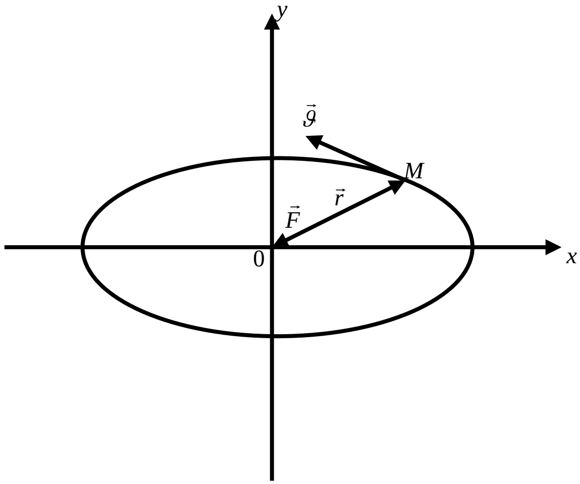
$$\cos(r, j) = \frac{y}{r}$$

Şu aňlatmalardan görnüşi ýaly nokada täsir edýän güýç ony merkeze dartýan güýçdir (çyz.9). Şonuň üçin hem

$$\bar{F} = k^2 m \bar{r}$$

Nokadyň berlen kinematik deňlemelerinden t-ni ýok edip onuň traýektoriýasynyň deňlemesini alarys:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

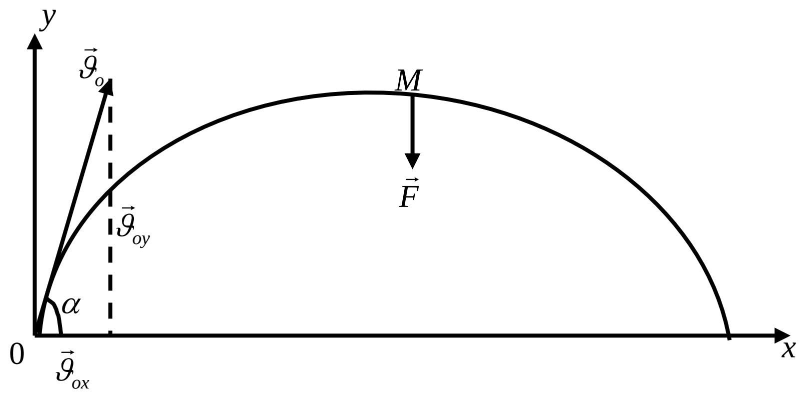


Çyzgy 9.

Dinamikanyň ikinji meselesi

Dinamikanyň ikinji esasy meselesinde nokada täsir edýän güýç berilýär we şu nokadyň hereketiniň deňlemelerini tapmak talap edilýär. Dinamikanyň ikinji esasy meselesi nokadyň hereketiniň differensial deňlemelerini integrirlemek arkaly çözülýär.

Aşakdaky meselä seredeliň.Diňe agyrlyk güýjiň täsiri astynda gorizont bilen α burç emele getirýän $\bar{v}_0$ başlangyç tizlik bilen boşlukda zyňylan material nokadyň hereketiniň deňlemelerini kesgitläliň. Nokadyň başlangyç ýagdaýyny Oxy koordinatalar ulgamynyň başlangyjy hasap edip nokadyň şu tekizlikdäki hereketini öwreneliň (çyz.10).



Çyzgy 10.

Görşümiz ýaly $Y = -mg, \quad X = 0$ bolany we nokat Oxy wertikal tekizlikde hereket edýändigi üçin onuň differensial deňlemeleri şeýle görnüşe geçýär:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Bu deňlemeleri integrirläliň:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c_1, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + c_2$$

$t = 0$ bolanda $c_1 = v_{ox} = v_0 \cos\alpha \quad c_2 = v_{oy} = v_0 \sin\alpha$ bolýar. Onda

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha$$

Bu differensial deňlemeleri ýene-de bir gezek integrirleýäris:

$$x = v_0 t \cos\alpha + c_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + \sin\alpha + c_4$$

$t = 0$ bolanda $c_3 = 0, \quad c_4 = 0$ bolýar. Onda

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

(44)

Şu (44) nokadyň hereketiniň kinematik deňlemeleridir.

Bu deňlemelerden wagt t-ni ýok edip nokadyň hereketiniň traýektoriýasynyň deňlemesini tapýarys:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

(45)

Görşümiz ýaly nokadyň hereketiniň traýektoriýasy paraboladyr.

Nokadyň gorizontal ugur bilen şu parabola boýunça uçuşynyň daşlygyny kesgitläliň. Gorizontal Ox ok boýunça $y = 0$ bolany sebäpli parabolanyň deňlemesi şeýle görnüşe geçýär:

$$xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0, \quad x\left(tg\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad tg\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$$

bu deňlemeden

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Şu formula bilen uçuşyň daşlygy kesgitlenýär. Görşümiz ýaly nokadynyň uçuşynyň daşlygynyň maksimum bolmagy üçin $\sin 2\alpha = 1 \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0$ bolmalydyr. Şeýlelik bilen nokadyň uçuşynyň daşlygynyň maksimum bahasy aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Indi nokadyň uçuşynyň beýikligini tapalyň. Parabolanyň deňlemesinden:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

(46)

bu ýerden

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

(47)

Şu aňlatmany parabolanyň deňlemesinde goýup uçuşyň beýikligini tapýarys:

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

(48)

Bu ýerden

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

(49)

Görşümiz ýaly

$$x_{\max} = 2y_{\max}$$

(50)

Hemişelik $\bar{v}_0$ tizlikde hemme parabolik traýektoriýalary gurşap alýan parabolany tapalyň. Onuň üçin bolsa $tg\alpha = a$ bilen belläp parabolanyň deňlemesini aşakdaky görnüşde alýarys:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \frac{1}{\sec^2\alpha}} = xtg\alpha - \frac{gx^2(1+tg^2\alpha)}{2v_0^2} = x\alpha - \frac{gx^2(1+a^2)}{2v_0^2}$$

$$y = xa - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+a^2)$$

(51)

Gurşap alýan parabola boýunça uçuşyň daşlygyny kesgitläliň. Onuň üçin bolsa şu parabolanyň deňlemesinden:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = x - \frac{gx^2}{2v_0^2}2\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$$

Şu aňlatmany (51)-de goýup gurşap alýan parabolanyň deňlemesini şeýle görnüşde alýarys. (çyz.11).

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

(52)

Şeýlelik bilen $y = 0$ edip (52)-den gurşap alýan parabola boýunça uçuşyň daşlygyny kesgitleýäris:

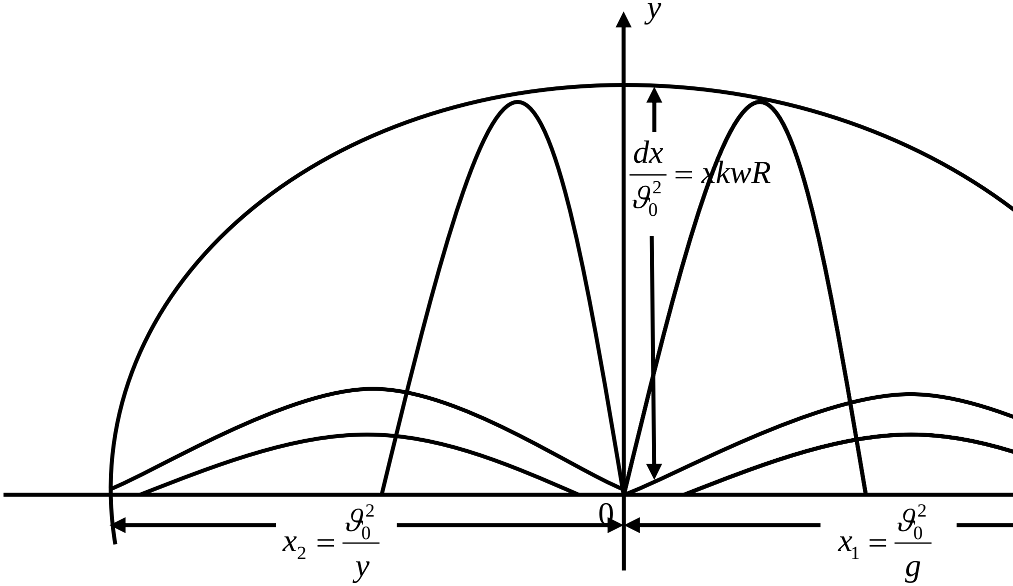
$$x_{1,2} = \pm\frac{v_0^2}{g}$$

(53)

(52) formulada $x=0$ edip uçuşyň beýikligini kesgitleýäris:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

(54)



Çyzgy 11.

Gurşap alýan parabola howpsuzlyk parabolasy hem diýilýär.

Erkin material nokadyň merkezi güýjiň täsiriniň astynda hereketi. Bineniň formulalary.

Bineniň formulalary astronomiýada planetalaryň hereketini öwrenmekde uly ähmiýete eýedir.

Koordinatalar ulgamynyň başlangyjy edilip alnan gozganmaýan nokatdan geçýän güýje merkezi güýç diýilýär. Nokat merkezi güýjiň täsiri astynda hereketi eden halynda onuň sektor tizliginiň henişelik ululykdygyny bilýäris:

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 w, \quad r^2 w = 2\sigma = const = c$$

$$w = \frac{c}{r^2}$$

(55)

Tizligiň polýar koordinatalardaky aňlatmasyny ýazalyň:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 w^2$$

(56)

(55) aňlatmany (56)-da goýýarys:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}$$

(57)

Kinetik energiýanyň differensialynyň aşakdaky görnüşde aňladylýandygyny bilýäris:

$$\alpha\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fdr$$

(58)

Şu deňlemäni ∂t bölеliň:

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{d}{dt}(v^2)=F\frac{dr}{dt}$$

(57)-ni göz öňünde tutsak, onda

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{c^2}{r^2}\right]=F\frac{dr}{dt}$$

ýa-da

$$\frac{m}{2}\left(2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}-2\frac{c^2}{r^3}\frac{dr}{dt}\right)=F\frac{dr}{dt}$$

bu ýerden

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F+\frac{mc^2}{r^3}$$

(59).

Görşümiz ýaly nokadyň merkezi güýjiň täsiri astynda radius-wektory boýunça otnositel hereketi F we goşmaça $m\frac{c^2}{r^3}$ güýçleriň täsiri bilen amala aşyrylýar.

Şu goşmaça güýjiň täsirini yzda mysal işlemek bilen düşündirjekdiris.

Indi (56) formulany şeýle görnüşde ýazalyň:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Dinamikanyň esasy teoremalaryndan we kinematikadan sektor tizligiň aňlatmasyndan

bilşimiz ýaly:

$$ds=cdt,\quad dt=\frac{ds}{c}=\frac{1}{2}\frac{r^2d\varphi}{c}=\frac{r^2d\varphi}{c}$$

onda

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

(60)

Şuňa Bineniň birinji formulasy diýilýär.

$\frac{1}{r} = u$ bilen belläliň. Bu ýerden

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r^2\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$$

Şu aňlatmalary göz öňünde tutsak (60) formula şeýle görnüşe geçýär:

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

(61)

(58) formulany $d\varphi$ bölüp ondan soň bu ýerde (61) aňlatmany goýýarys:

$$\frac{c^2m}{2}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] = F\frac{dr}{d\varphi} = -r^2F\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}F\frac{du}{d\varphi}$$

Bu ýerden

$$\frac{m}{2}c^2\left(2\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u\frac{du}{d\varphi}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}F$$

$$F = -mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)$$

(62)

Şu Bineniň ikinji formulasydyr.

Nokat merkezi güýjiň täsiriniň astynda hereket eden halynda Bineniň formulalarynyň kömegi bilen dinamikanyň esasy meseleleriniň ikisi çözülýär.

Görşümiz ýaly hereket etdiriji güýç dartyjy güýçdir.

Bineniň formulalarynyň mysallaryň işlenişinde ulanylyşyna seredeliň.

Mysal . Nokat deňlemesi $r = ae^{k\varphi}$ bilen berlen logarifmik spiral boýunça hereket edýär. Nokada täsir edýän merkezi güýji tamaly. Bu ýerde a we k hemişelik ululyklardyr.

Çözülişi . Bineniň formulasyndan peýdalanalyň:

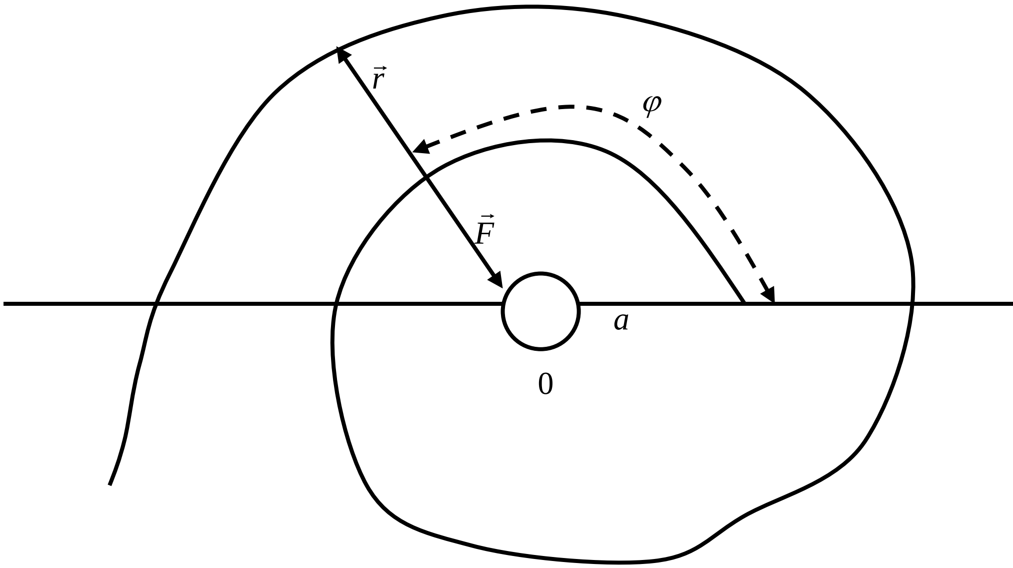
$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}e^{-k\varphi} \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{k^2}{a}e^{-k\varphi}$$

$$F = -mc^2\frac{1}{a^2}e^{-2k\varphi}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-k\varphi} + \frac{k^2}{\alpha}e^{-k\varphi}\right) = -c^2\frac{1}{\alpha^3}e^{-3k\varphi}m(1+k^2) = \frac{-mc^2}{\alpha^3 e^{3k\varphi}}(1+k^2$$

$$F = -mc^2(1+k^2)\frac{1}{r^3}$$

(63).

Görşümiz ýaly şu güýç (59)-daky goşmaça güýçdir. Şeýlelik bilen goşmaça güýjiň täsiriniň astynda nokat logarifmik spiral boýunça hereket edýär (çyz.12).



Çyzgy 12.

Goşmaça güýjiň täsiri astynda logarifmik spiral boýunça hereket edýän nokat (planeta) ýa hemişe Günden daşlaşýar, ýa-da oňa üznüksiz ýakynlaşýar.

Planetalaryň hereketi, Kepleriň ***kanunlary we Nýutonyň bütündünýä dartylma kanuny.***

Astronom Tiho Brageniň planetalaryň hereketini öwrenmek üçin geçiren gözegçiliklerinden Kepler (1571-1630) özüniň aşakdaky kanunlaryny alypdyr:

I. Hemme planetalar (we kometalar) meýdanlar hakdaky kanuna görä Günüň töwereginde tekiz orbitalar çyzýarlar.

2. Şu orbitalar konik kesiklerdir we olaryň fokuslarynyň birinde Gün ýerleşýär.

3. Planetalaryň Günüň töwereginde aýlanmalarynyň ýyldyz wagtlarynyň kwadratlary olaryň orbitalarynyň uly ýarym oklarynyň kublaryna proporsionaldyr.

Kepleriň kanunlaryndan peýdalanyp Nýuton bütündünýä dartylma kanunyny açdy. Kepleriň birinji kanunyndan planetalara täsir edýän güýçleriň Günüň merkezinden geçýän merkezi güýçdigi gelip çykýar. Kepleriň ikinji kanunyndan we Bineniň formulasyndan peýdalanyp planetalara täsir edýän güýçleriň olary Günüň özüne dartyjy güýçlerdigini we aralygyň kwadratyna ters proporsionaldygyny görkezeliň. Konik kesigiň polýar koordinatalardaky deňlemesini ýazalyň:

$$z = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

bu ýerden

$$u = \frac{1 + e\cos\varphi}{p}, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{e\cos\varphi}{p}$$

$e-$ekssentrisitet, p-parametr , özem ellips ýa-da giperbola üçin $p = \frac{b^2}{a}$, a we $b-$degişlilikde uly we kiçi ýarymoklardyr. Şu aňlatmalary Bineniň formulasynda goýýarys.

$$-\frac{mc^2u^2}{p}(-e\cos\varphi + 1 + e\cos\varphi) = F$$

$$F = -\frac{mc^2u^2}{p}$$

bu ýerde $\frac{c^2}{p} = \mu$ ululyga Gaussyň hemişeligi diýilýär. Seýlelik bilen $u = \frac{1}{z}$ bolany üçin:

$$F = -\mu \frac{m}{z^2}$$

(64)

Görşümiz ýaly planetalara täsir edýän güýçler-olary Günüň özüne dartyjy güýçler aralygyň kwadratyna ters proporsionaldyrlar.

Kepleriň üçinji kanunyna görä:

$$\frac{a^3}{T^2} = const$$

(65)

Ellipsiň meýdanynyň πab deňdigini bilýäris. Şonuň üçin hem sektor tizlik şeýle aňladylýar:

$$\sigma = \frac{\pi ab}{T}$$

onda

$$c = 2\sigma = \frac{2\pi ab}{T}$$

$$c^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2a^3b^2}{aT^2} = \frac{4\pi^2a^3}{T^2}\,p$$

bu ýerden

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2} = \frac{c^2}{p}$$

ýagny

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = const$$
(66)

Şeýlelik bilen Gaussyň hemişeligi diýilýän koeffisient μ Güne tarap dartyjy güýçleriň täsiriniň astynda hereket edýän planetalaryň hemmesi üçin birmeňzeş ululykdyr we diňe Günüň massasyna baglydyr. (64) formulada μ Gün üçin Gaussyň hemişeligidir, m planetanyň massasy, r planeta bilen Günüň aralygy we $\bar{F}$ Günüň planetany dartyjy güýjüdir.

Onda planetanyň Günüň töwereginde aýlanmasynyň orbitasynda planetanyň Güni dartyjy güýji şeýle aňladylýar:

$$\bar{F}_n = -\lambda \frac{M}{r^2}$$
(67)

bu ýerde λ – planeta üçin Gaussyň hemişeligidir, M- Günüň massaydyr.

Planetanyň Günüň töwereginde aýlanmasynyň orbitasy boýunça (64) we (67) formulalar bilen aňladylan Günüň planetany özüne we planetanyň Güni özüne dartyjy güýçleri deňdirler:

$$\frac{\mu m}{r^2} = \frac{\lambda M}{r^2}$$

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = const = f$$
(68)

Bu ýerde f grawitasiýa hemişeligidir. (68)-den $\mu = fM$ aňlatmany (64) formulada goýýarys:

$$F = -f\frac{mM}{r^2}$$

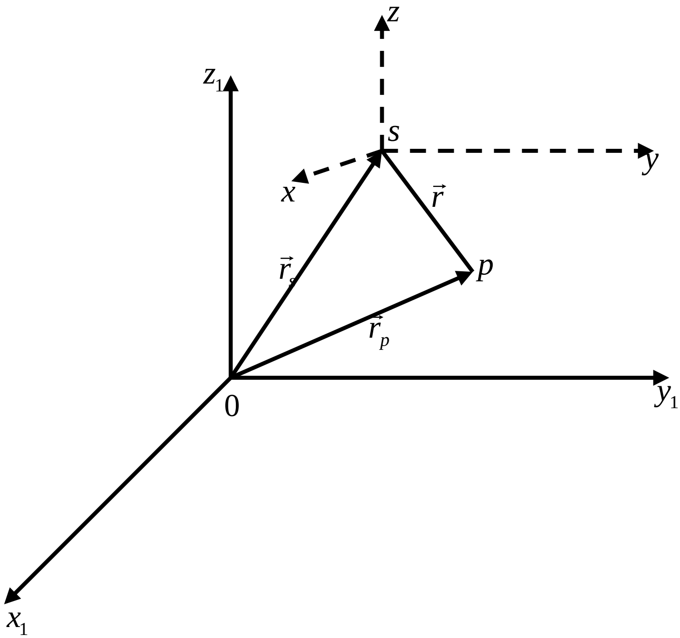
(67)

Şu formula Nýutonyň bütündünýä dartylma kanunyny aňladýar we şeýle kesgitlenýär: Iki jisim olaryň massalarynyň köpeltmek hasyllaryna proporsional bolan güýç bilen çekişýärler. Grawitasiýa hemişeliginiň ölçegi şeýledir:

$$f = 6{,}673\cdot 10^{-11} m^3 / kgsek^2$$

Iki jisim meselesi we Kepleriň üçinji kanunyna düzediş

Şuňa çenli bolan hemme hallarda dartyjy merkez bolan Gün haýsy hem bolsa bir gozganmaýan inersial hasaplaýyş sistema görä (ýyldyzlara görä) gozganmaýan diýlip hasap edilipdi. Indi dartyjy merkez bolan Güni hereket edýär diýip alýarys. Massasy M bolan Güni S bilen belläp Sxyz koordinatalar sistemasyna görä massasy m bolan p planetanyň hereketine seredeliň. Ox,y,z, haýsy hem bolsa bir inersial hasaplaýyş sistemasydyr (çyz.13).



Çyzgy 13.

Onda Ox,y,z, hasaplaýyş sistema görä Günüň hereketiniň differensial deňlemesi şeýle bolýar:

$$M = \frac{d^2\bar{r}_s}{dt^2} = \frac{fmM}{r^2}\bar{r}^0 = \frac{fmM}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$$

(70)

Edil şeýle hem Ox,y,z, hasaplaýyş sistema görä P planetanyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m = \frac{d^2\bar{r}_p}{dt^2} = -\frac{fmM}{r^2}\bar{r}^0 = -\frac{fmM}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$$

(71)

(70) deňlemäni m-e, (71) deňlemäni bolsa M-e köpeldip (71)-den (70) deňlemäni aýyrýarys:

$$mM\left(\frac{d^2\bar{r}_p}{dt^2}-\frac{d^2\bar{r}_s}{dt^2}\right)=-\frac{fmM}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}(M+m)$$

$$mM\frac{d^2}{dt^2}(\bar{r}_p-\bar{r}_s)=-\frac{fmM}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}(M+m)$$

ýa-da

$\bar{r}_p-\bar{r}_s=\bar{r}$ bolany üçin:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=-\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}(M+m)$$

Aşakdaky belgilemäni girizeliň:

$$f'=f(M+m)$$

(72).

Şeýlelik bilen planetanyň Güne görä hereketiniň differensial deňlemesi aşakdaky görnüşde alynýar:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=-f'\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$$

(73)

Görşümiz ýaly bu halda planetanyň Güne görä otnositel hereketi massasy (M+m) bolan dartyjy merkeziň töwereginde bolup geçýär.

Massalary m_1 we m_2 bolan iki sany planetalaryň Günüň töwereginde hereketine seredeliň. (66) formula şu planetalar üçin degişlilikde şeýle görnüşde ýazylýar:

$$\left.\begin{aligned}\mu_1&=\frac{4\pi^2a_1^3}{T_1^2}=f_1'=f(M+m_1)\\ \mu_2&=\frac{4\pi a_2^3}{T_2^2}=f_2'=f(M+m_2)\end{aligned}\right\}$$

(74).

Şu aňlatmalaryň birinjisini ikinjisine bölýäris:

$$\left(\frac{a_1^3}{T_1^2}\right):\left(\frac{a_2^3}{T_2^2}\right)=\frac{M+m_1}{M+m_2}=\frac{1+\frac{m_1}{M}}{1+\frac{m_2}{M}}$$

(75).

Kepleriň üçinji kanunyna görä şu (75) deňligiň sag tarapy I-e deň bolmalydyr, başga sözler bilen aýdanymyzda bolsa (75) formula Kepleriň üçünji kanunyna berilýän düzedişi aňladýar.

Erkin däl material nokadyň we ulgamyň dinamikasy.

Erkin däl material nokadyň differensial we tebigi deňlemeleri.

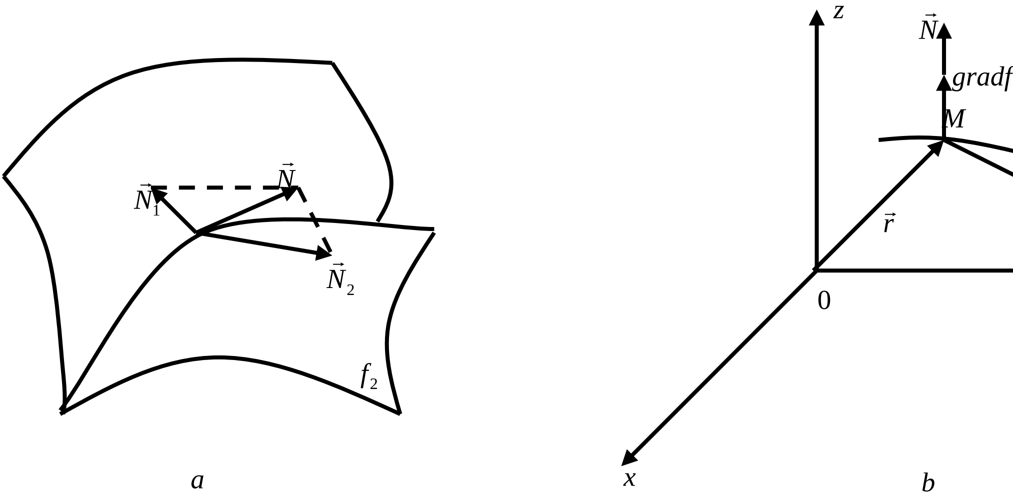
Bilşimiz ýaly giňişlikde erkin ýagdaýda bolup bilmeýän nokatlara erkin däl nokatlar diýilýär. Erkin däl nokatlara aktiw $\overline{F}_i$ güýçlerden başga passiw $\overline{N}_i$ güýçler (baglanyşygyň reaksiýalary) hem täsir edýärler.

I. Erkin däl nokadyň berlen egri boýunça hereketiniň differensial deňlemeleri.

Nokat reonom baglanyşykda hereket edýär we onuň hereket edýän egri çyzygy iki sany üstüň kesişmesi görnüşinde berilýär (çyz. 14a)

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z,t)=0 \\ f_2(x,y,z,t)=0 \end{aligned}\right\}$$

(1)



Çyzgy 14

Nokadyň wektor görnüşdäki differensial deňlemesini ýazalyň:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \bar{N}$$

(2)

bu ýerde

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$$

(3)

Bilşimiz ýaly

$$\left.\begin{array}{l}\bar{N}_1 = \lambda_1 gradf_1 \\ \bar{N}_2 = \lambda_2 gradf_2\end{array}\right\}$$

(4)

Onda

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \lambda_1 gradf_1 + \lambda_2 gradf_2$$

(5)

Şu wektor görnüşdäki differensial deňlemäni koordinata oklara proýektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1\frac{df_1}{dx} + \lambda_2\frac{df_2}{dx} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1\frac{df_1}{dy} + \lambda_2\frac{df_2}{dy} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1\frac{df_1}{dz} + \lambda_2\frac{df_2}{dz} \end{aligned}\right\}$$

(6)

Nokadyň (6) differensial deňlemelerini (1) bilen birikdirip alnan deňlemelerden $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ wagtyň funksiýasy görnüşinde kesgitlenýärler.

2. Erkin däl nokadyň berlen üst boýunça hereketi (çyz. 14 b).

Üstüň deňlemesi şeýle berilýär:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

(7)

Bu halda nokadyň wektor görnüşdäki differensial deňlemesi şeýle görnüşde bolýar:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \bar{N}$$

(8)

ýa-da

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \lambda grad f$$

(9)

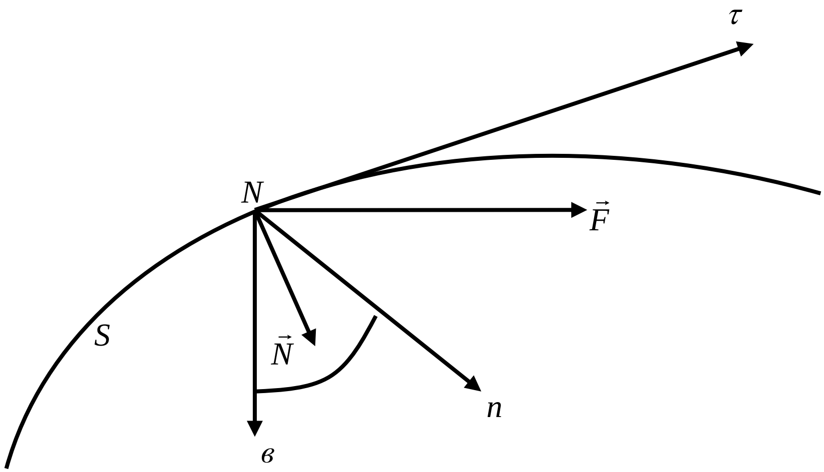
Bu deňlemäni koordinata oklara proýektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{df}{dx} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{df}{dy} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{df}{dz} \end{aligned}\right\}$$

(10)

Nokadyň (10) differensial deňlemelerini (7) bilen birikdirip alnan deňlemelerden x, y, z, λ wagtyň funksiýalary görnüşinde kesgitleňýärler.

Indi nokadyň tebigi deňlemelerini çykaralyň (çyz.15).



Çyzgy 15

Baglanyşyk ideal bolanda reaksiýa $\overline{N}$ egrä normal bolýar, ýagny ol $\overline{n}\overline{b}$

tekizlikde ýerleşýär, onda hereketiň deňlemesi şeýle alynýär:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \bar{N}$$

(11)

Bu wektor deňlemäni $\tau, \bar{n}, \bar{b}$ ugurlaryna proýektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau \\ & m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \\ & 0 = F_b + N_b \end{aligned}\right\}$$

(12)

Şu erkin däl nokadyň tebigi deňlemeleridir.

Erkin däl nokat üçin kinetik energiýanyň üýtgemegi hakdaky teorema.

Teorema. Erkin däl nokat üçin kinetik energiýanyň üýtgemegi şeýle aňladylýar:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} - \lambda_1\frac{df_1}{dt}dt - \lambda_2\frac{df_2}{dt}dt$$

(13)

Subudy. Umuman kinetik energiýanyň üýtgemegi hakdaky teoremadan bilýäris:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overline{F} \cdot d\overline{r} + \lambda_1 gradf_1 \cdot d\overline{r} + \lambda_2 gradf_2 \cdot d\overline{r} \qquad (14)$$

bu ýerde

$$gradfd\overline{r} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$f(x, y, z, t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

$$gradf \cdot d\overline{r} = -\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

bolany sebäpli (14) aňlatma aşakdaky görnüşe geçýär:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overline{F} \cdot d\overline{r} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t}dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{dt}dt$$

Şunuň bilen teorema subut edildi.
Skleronom baglanýşyk üçin

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$$

bolany sebäpli bu halda erkin nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakdaky teorema alynýar:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

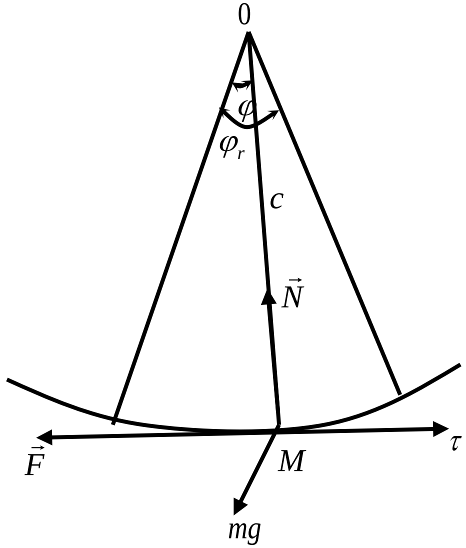
(15)

Matematik maýatnik.

Bir ujy gozganmaýan nokatda berkidilen süýnmeýän çee ýüpiň beýleki ujyna berkidilen we diňe öz agyrlyk güýjiniň täsiriniň astynda hereket

edýän material nokada matematik maýatnik diýilýär.

Uzynlygy l bolan ýüpiň ujyna berkidilen we diňe özüniň $P = mg$ agyrlyk güýjiniň täsiriniň astynda hereket edýän M nokada seredeliň. Nokady polojitel tarapa φ_0 burça gyşardalyň we şu nokadyň hereketiniň deňlemesini ýazalyň (çyz.16).



Çyzgy 16.

Çyzgydan:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi$$

ýa-da $v = l\dfrac{d\varphi}{dt}$ bolany üçin

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

(1)

bu ýerde

$$\frac{g}{l} = \omega^2$$

(2)

$\varphi_0 << 1^0$ bolan kiçi yrgyldylara seretmek bilen çäkleneliň. Bu halda (1) deňleme şeýle görnüşe geçýär:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$$

(3)

Bu ýönekeý garmonik yrgyldynyň differensial deňlemesiniň umumy çözüwiniň aşakdaky ýaly aňladylýändygyny bilýäris.

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t = a\sin(\omega t + \varepsilon)$$

(4)

bu ýerde A, B, a, ε integrirlemegiň hemişelikleri başlangyç şertlerden kesgitlenýärler. $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ bolanda

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t$$

(5)

Matematik maýatnigiň periody:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(6)

Potensial U funksiýa bar diýeliň we kinetik energiýanyň üýtgemesi hakdaky teoremanyň aňlatmasyny ýazalyň:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = u - u_0$$

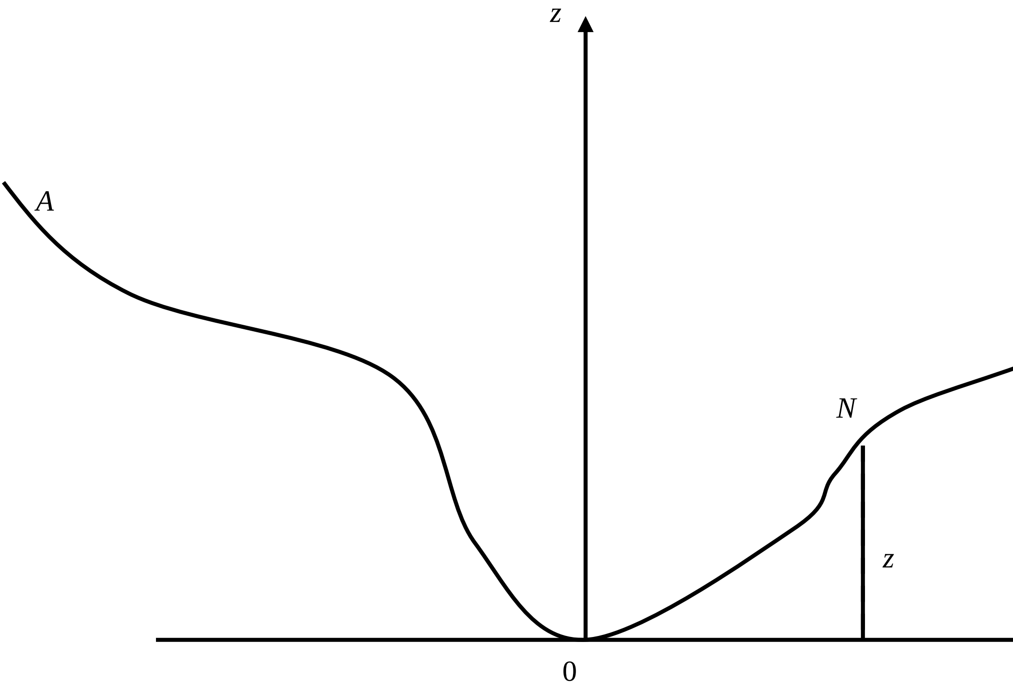
ýa-da

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(u - u_0)}$$

(7)

Maýatnik Oz oka simmetrik bolan AB traýektoriýa boýunça hereket edýär. Traýektoriýanyň galtaşýan Ox ok diýip alýarys.

Maýatnigiň M ýagdaýyndaky beýikligini h we N ýagdaýyndaky beýikligini bolsa z bilen belläliň (çyz.17).



Çyzgy 17.

S=OM edip alsak, onda t=0 bolanda S=S_0 bolýar. Maýatnik M nokatdan başlangyç tizliksiz $(v_0 = 0)$ hereket edip başlaýar.

$$U_0 = -\Pi_0 = -mgh$$

$$U = -\Pi = -mgz$$

bolany sebäpli (7) formula şeýle görnüşe geçýär:

$$v = \pm\sqrt{2g(h-z)}$$

(8)

Bu differensial deňlemäni integrirläliň. Maýatnik M nokatdan O nokada tarap otrisatel ugur bilen hereket edýär, onda

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(h-z)}$$

$$t = -\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} + c$$

$t = 0, \quad S = OM = S_0$ üçin

$$0 = -\int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} + c$$

$$c = \int_0^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$

onda

$$t = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} - \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} = \int_s^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} + \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$

$$t = \int_s^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$

(9)

Maýatnik ýoluň ýarsyny $\frac{T}{2}$ wagtda geçýänligi sebäpli

$$\frac{1}{2}T = \int_{s}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$

Şu matematik maýatnigiň esasy formulasydyr.

Dalamberiň prinsipi.

Nýutonyň ikinji kanunynyň matematik aňlatmasyny ýazalyň:

$$m\overline{w} = \overline{F}$$

(1)

ýa-da

$$\overline{F} + (-m\overline{w}) = 0$$

bu ýerde $-m\overline{w} = \overline{D}$ inersiýanyň güýjidir.

$$\overline{F} + \overline{D} = 0$$

(2)

Şu erkin nokat üçin Dalamberiň prinsipidir, muňa Dalamberiň başlangyjy hem diýilýär.

Şeýlelik bilen Dalamberiň prinsipine görä nokada inersiýanyň güýji goýlanda güýçler deňagramlaşýarlar. Dalamberiň prinsipi erkin däl nokat üçin şeýle kesgitlenýär:

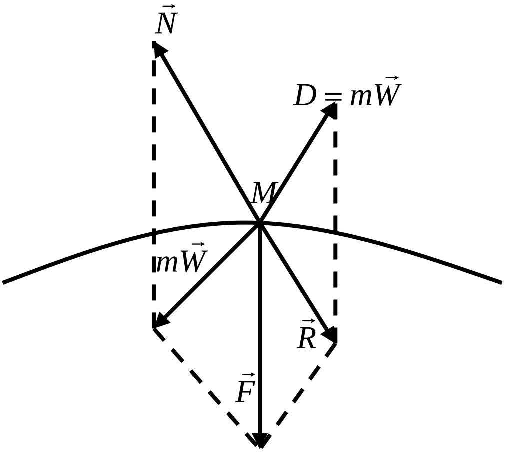
$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{D} = 0$$

(3)

bu ýerde $\overline{N}$ baglanyşygyň reaksiýasydyr. $\overline{F}$ we $\overline{D}$ güýçleriň deňtäsiredijisini $\overline{R}$ bilen bellesek (3) formula şeýle görnüşe geçýär (çyz.18):

$$\overline{N} + \overline{R} = 0$$

(4)



Çyzgy 18.

Şeýlelik bilen Dalamberiň prinsipi erkin däl nokat üçin şeýle kesgitlenýär: nokada täsir edýän aktiw güýje we baglanyşygyň reaksiýasyna inersiýa güýjini goşmak bilen olary deňagramlaşdyrmak bolýar.

Material nokatlaryň sistemasy üçin Dalamberiň prinsipiniň aňlatmasyny ýazalyň. Haýsam bolsa ulgamyň bir nokady üçin (3) şeýle ýazylýar:

$$\overline{F}_i + \overline{N}_i + \overline{D}_i = 0$$

(5)

Şu wektor aňlatmany ulgamyň hemme nokatlary üçin ýazalyň:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{w}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i = 0$$

(6)

ýa-da

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i = 0$$

(7)

(5) deňlemäni $\overline{r}_i$ wektor köpeldip jemläliň:

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{r}_i \overline{F}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{r}_i \overline{D}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{r}_i \overline{N}_i] = 0$$

(8)

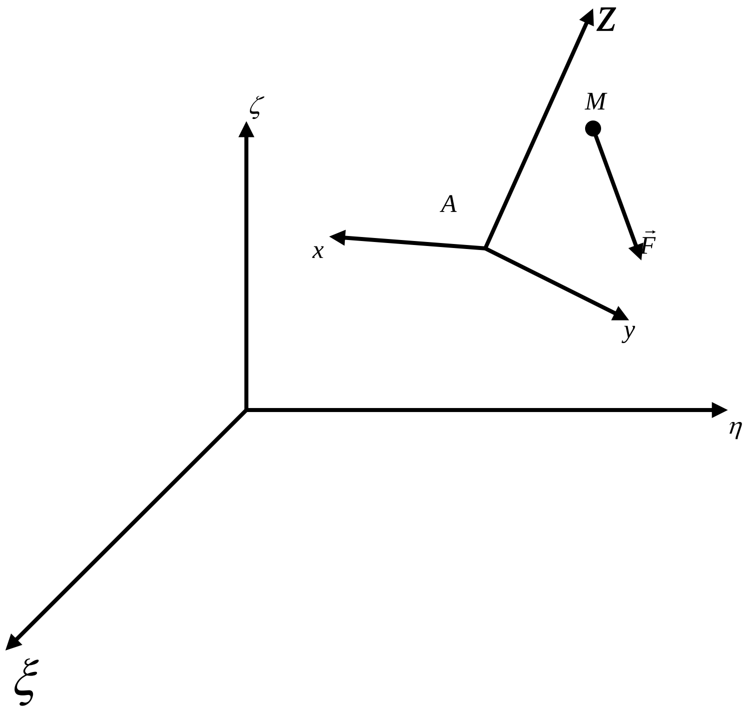
ýa-da

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{r}_i \overline{R}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{r}_i \overline{N}_i] = 0$$

(9)

Nokadyň otnositel hereketi.

Nokadyň her bir hereketi haýsy hem bolsa bir hasasplaýyş sistemasyna görä seredilmelidir. Şu wagta çenli nokadyň inersial hasaplaýyş sistema görä deňölçegli we göniçyzykly hereketine seredipdik. Inersial hasaplaýyş sistema gozganmaýan sistema hem diýilýär. Indi M nokadyň $O\xi\eta\xi$ inersial hasaplaýyş sistema görä hereket edýän Axyz sistema görä hereketine seredeliň (çyzgy 19).



Çyzgy 19.

Bu nokadyň çylşyrymly hereketiniň absolýut tizlenmesiniň otnositel, göçüriji we Kariolisiň tizlenmeleriniň wektor jemine deňdigini bilýäris:

$$\overline{W} = \overline{W}_{otn} + \overline{W}_r + \overline{W}_k$$

Şu aňlatmany nokadyň massasyna köpeldeliň:

$$m\overline{W} = m\overline{W}_{otn} + m\overline{W}_r + m\overline{W}_k = \overline{F}$$

$$mW_{otn} = \overline{F} + (-m\overline{W}_r) + (m\overline{W}_k)$$

ýa-da

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F} + (-m\overline{W}_r) + (-m\overline{W}_k)$$

(1)

Şu nokadyň otnositel hereketiniň wektor görnüşdäki differensial deňlemesidir. Bu deňlemäni koordinata oklara proýektirläliň:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - m(\overline{W}_r)_x - m(\overline{W}_k)_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - m(\overline{W}_r)_y - m,(\overline{W}_k)_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - m(\overline{W}_r)_t - m(\overline{W}_k)_z \end{aligned}\right\}$$

(2)

(1) deňlemede

$$\overline{D}_r = -m\overline{W}_r; \qquad \overline{D}_k = -m\overline{W}_k$$

degişlilikde inersianyň göçüriji we kariolis güýçleridir:

$$m\overline{W}_{otn} = \overline{F} + \overline{D}_2 + \overline{D}_k$$

(3)

Bu ýerde

$$\overline{W}_k = 2[\overline{w}\overline{v}_{otn}]$$

(4)

Eger-de nokat hereket edýän Axyz sistema görä deňagramlylykda bolsa, onda

$$\overline{W}_{otr} = 0, \qquad v_{otn} = 0, \qquad \overline{W}_k = 0$$

bolany sebäpli nokadyň otnositel dynçlygynyň deňlemesi şeýle alynýar:

$$\overline{F} + (-m\overline{W}_r) = 0$$

(5)

ýa-da

$$\left.\begin{aligned} X + (-m\overline{W}_r)_x &= 0 \\ Y + (-m\overline{W}_r)_y &= 0 \\ Z + (-m\overline{W}_r)_Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Dalamberiň – Logranžyň deňlemesi (dinamikanyň simwolik deňlemesi)

Ideal we ikitaraplaýyn baglanşykly material nokatlaryň sistemasyna seredeliň. Sistemanyň bir nokady üçin Dalamberiň prinsipini aňladýan (5) deňlemäni $\delta\vec{r}_i$ mümkin süýşmelere skalýar köpeldip alnan aňlatmany sistemanyň hemme nokatlary üçin jemläp ýazalyň:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} + \vec{N}_i\right)\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (7)$$

Ideal we ikitaraplaýyn baglanyşykda

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i\delta\vec{r}_i = 0$$

Bolan sebäpli:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right)\delta\vec{r}_i = 0 \quad (8)$$

Şu Dalamberiň-Lagranžyň wektor görnüşdäki deňlemesidir.

Skalýar köpeltmek hausylyny köpeldijileriň proeksiýalarynyň üsti bilen aňladalyň:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - m_i\frac{d'x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d'y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right] = 0$$

Şu deňleme Dalamberiň prinsipiniň mümkin süýşmeleriň prinsipi bilen birleşmesidir. Bu deňleme mehanikanyň has umumy deňlemesidir we bütin mehanikany içine alýar. Şu deňlemelerden dinamikanyň umumy teoremalary we mehaniki sistemanyň hereketiniň deňlemeleri netije görnüşinde alynýar.

Golonom sistemanyň hereketiniň umumylaşdyrylan koordinatalardaky deňlemeleri

Logranžyň ikinji jyns deňlemeleri.

N sany nokatlaryň sistemasynyň inersial hasaplaýyş sistema görä hereketine seredeliň. Bu sistemanyň ýagdaýy 3N dekart koordinatalary ýa-da n sany $q_1, q_2, ..., q_n$ umumylaşdyrylan koordinatalar bilen kesgitlenýär.Bu halda hem bir göniçyzykly koordinatanyň n umumylaşdyrylan koordinatalaryň funksiýasydygny bilýäris :

$$x_i = \varphi(q_1, q_2, ..., q_n, t) \quad (9)$$

Onda

$$\dot{x}_i = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_i}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{dq_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial x_i}{dq_n}\dot{q}_n + \frac{\partial x_i}{dt}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_i}\dot{q}_j$$

(10)

Bu aňlatmanyň iki tarapynam $\dot{q}_j$ görä hususy önümini alarys:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ köpeltmek hasylyndan wagta görä önümi alalyň:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \quad (11)$$

Bu ýerde

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)$$

(12)

Sitemanyň dekart koordinatalardakt deňlemelerini ýazalyň:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3N} X_i$$

Bu deňlemeleriň iki tarapyny hem $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ hususy önüme köpeldip jemläliň:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

(13)

ýa-da /12/ aňlatmany göz öňüne tutsak:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}) = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Sag tarapyndaky umumylaşdyrylan güýji Q_j bilen belläliň

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (14)$$

Onda

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}) = Q_j \quad (15)$$

Bu ýerde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k \quad (16)$$

(10) aňlatmadan q_k görä hususy önümi alarys:

$$\frac{\partial(\dot{x}_i)}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j \quad (17)$$

(16) we (17) formulalardaky j we k indeksleriň ikisi hem deň 1-den n-e çenli üýtgtýändikleri sebäpli:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial(\dot{x}_i)}{\partial q_j} \quad (18)$$

(11) we (18) aňlatmalary (15) formulada ýerine goýarys:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (19)$$

Sistemanyň kinetic energiýasynyň aňlatmasyny ýazalyň:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i^2 \quad (20)$$

bu ýerden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\,\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\,\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Şu hususy önümleri (19)-de ýerine goýarys:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (22)$$

Şu Lagranžyň ikinji jyns deňlemesidir.

Lagranžyň ikinji jyns deňlemelerini potensial güpçleriň täsiriniň astynda hereket edýän sistema üçin çykaralyň. Bu sistemada:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (23)$$

bolany sebäpli (14)

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} X_i\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial u}{\partial q_j}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (24)$$

Şeýlelik bilen Lagranžyň ikinji jyns deňlemesi (22) deňlik aşakdaky görnüşde alynýar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial u}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T+U) = 0$$

ýa-da

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

bolany sebäpli

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}(T+U) = 0$$

bu ýerde

$$Z = T + U = T - Ï \quad (25)$$

Funksiýa Lagranžyň funksiýasy ýa-da Gelmgolsa görä potensial diýilýär.

Logranžyň ikinji jyns deňlemelerine potensial güýçleriň täsiri astynda hereket edýän sistema üçin şeýle alynýar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial Z}{\partial q_j} = 0 \quad (26)$$

Kinetik energiýanyň we Logranžyň funksiýasynyň umumylaşdyrylan koordinatalarda aňladylyşy

(10) aňlatmany (16) formulada ýerine goýarys:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 + \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)^2$$

ýa-da

$$T = \sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{n}\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

(27)

Şeýle belgilemeleri girizeliň:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = a_{jk} \\ &\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial t} = b_j \\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 = c \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Onda

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{3N} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{N} b_j\dot{q}_j + c \quad (29)$$

ýa-da

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{3N} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = T_2 \\ &\sum_{j=1}^{N} b_j\dot{q}_j = T_1 \\ &c = T_0 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

edip bellesek, onda

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (31)$$

bu ýerde T_2, T_1, T_0 degişlilikde umumylaşdyrylan tizlikleriň ikinji, birinji we nul deerejeli funksiýalarydyr.

Sklerenom sistema üçin kinetic energiýa şeýle aňladylýar:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{3N} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad (32)$$

bu ýerde $a_{jk} = \frac{\partial^2 t}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}$ aňlatma inersiýa koeffisenti diýilýar.

Görşümiz ýaly skleronom sistema üçin kinetic energiýany umumylaşdyrylan tizlikleriň ikinji derejeli birjynysly funksiýasydyr, başga sözler bilen aýdanymyzda bolsa şu tizlikleriň kwadratik formasydyr. Edil şonuň ýaly edip kinetic pýotensialy hem umumylaşudyrylan koordinatalarda aňlatmak bolýar:

$$Z = T + U = T_2 + T_1 + T_0 + U \quad (33)$$

ýa-da

$$Z = Z_2 + Z_1 + Z_0 \quad (34)$$

bu ýerde

$$Z_2 = T_2, Z_1 = T_1, Z_0 = T_0 + U \quad (35)$$

Energiýanyň integraly
Energiýanyň umumylaşdyrylan interaly

(25) belgilemäni göz öňünde tutup Lagranžyň (26) deňlemesini şeýle görnüşde ýazalyň:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Bu deňlemäniň iki tarapyny hem $\dot{q}_j$ köpelip jemläliň:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 0$$

bu ýerden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

bolany sebäpli

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 0$$

(36)

Eýleriň birjynysly funksiýalara hakda tieremasyna görä:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = 2T$$

Kinetik energiýanyň we potensilal funksiýany doly önümleri şeýle aňladylýar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) \\ \frac{du}{dt} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Onda (36) şeýle görnüşe geçýär:

$$2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} - \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0$$

$$\begin{aligned} T - U &= const \\ T + \Pi &= const = c \end{aligned} \qquad (38)$$

Mehaniki energiýanyň saklanlmak kanunyny aňladýan (38) formula energiýanyň entegraly diýilýär.

(31) aňlatmany (36) formulada ýerine goýup Eýleriň birjynysly funksiýalar hakda tieremaan peýdalanyp (38) aňlatmany göz öňünde tutsak şeýle alynýar:

$$\frac{d}{dt}\left(2T_2 + T_1 + T - U\right) = \frac{d}{dt}\left(2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 - U\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(T_2 - T_0 - U\right) = \frac{d}{dt}\left(T_2 - T_0 + \Pi\right) = 0$$

$$T_2 - T_0 + \Pi = const \qquad (39)$$

Mehaniki energiýanyň saklanmak kanunynyň (39) görnüşdäki aňlatmasyna energiýanyň umumylaşyrylan integraly ýa-da Ýkobiniň integraly diýilýär.

Sistemanyň potensial güýçleriň täsiriniň astynda garşylykly sredada kiçi yrgyldylaury

Sitemanyň ýagdaýy $q_1, q_2, ..., q_n$ umumylaşdyrylan koordinatalar bilen kesgitlenýär we oňat täsir edýän güňçleriň $U(q_1, q_2, ..., q_n) = -\Pi$ potensial funksiýasy bar diýeliň. Garşylykly sredada hereket edýän sistema tizligiň garşysyna ugrukdyryln we umumylaşdyrylan $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ tizlikleriň funksiýasy bolan garşylyk füýç täsir edýär:

$$R_2 = -\sum_{s=1}^{n} b_{rs}\dot{q}_s \qquad \text{(r=1,2,...n)} \quad (40)$$

Dissipotiw funksiýa diýilýän f funksiýa şeýle kesgitlenýär:

$$R_2 = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2} \qquad (41)$$

Şu kesgitlemjä görä dissipotiw funksiýanyň umumylaşdyrylan tizlikleriň birljynysly funksiýadygy gelip çykýar:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{n} b_{rs}\dot{q}_2\dot{q}_s \qquad (42)$$

bu ýerde $b_{rs} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_s}$ aňlatma garşylyk koeffisenti diýilýär.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 = P_2 + R_2 \qquad (43)$$

bu ýerde P_2 umumylaşdyrylan aktiw güýç we R_2 umumylaşdyrylan garşylyk güýçdir. Umumylaşudyrylan aktiw güýç şeýle aňladylýar:

$$P_2 = \frac{\partial u}{\partial q_2} = -\frac{\partial П}{dq_2} \qquad (4.4)$$

Onda

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial П}{\partial q_2} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2} \qquad (4.5)$$

Bu deňlemäniň iki tarapyny hem $\dot{q}_2$ köpeldip jemläliň:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)\dot{q}_2 - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_2}\dot{q}_2 = -\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial П}{\partial q_2}\dot{q}_2 - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)\dot{q}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\dot{q}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r - \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r + \frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r\right) + -\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial П}{\partial q_r}\dot{q}_r = -\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r$$

(46)

Eýleriň birjynysly funksiýalar hakdaky teoremasyndan we funksiýalarynyň doly önümleriniň doly önümleriniuň aňlatamalaryndan peýdalanalyň:

$$2\frac{dT}{dt}-\frac{dT}{dt}+\frac{d\Pi}{dt}=-2F$$

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi)=-2F \tag{47}$$

ýa-da

$$\frac{dE}{dt}=-2F \tag{48}$$

bu ýerde E=T+Π doly mahaniki energiýadyr.

(48) formuladan görşümiz ýaly dissipotiz funksiýa doly mehaniki energiýanyň wagt birliginde kemelmeginiň ölçeginiaňladýar.(48) deňlemüni integrirläp doly mehaniki energiýany şeňle aňladýarys:

$$E=-\int 2Fdt+const \tag{49}$$

Sistemanyň deňagramlykdaky ýagdaýyny onuň başlangyç ýagdaýy diýip hasap edeliň. Şu ýagdaýda $q_2=0$ bolýar. Deňagramlaşmanyň golaýynda bolsa bu koordinatalaryň we olaryň önümleri bolan umumylaşdyrylan tizlikleriň ululyklary örän kiçidir. Mümkin süşmeleriň prinsipinden belli bolşy ýaly sistemanyň deňagramlygynyň zerur we ýeterlik şňerti şeýle aňladylýar:

$\delta u=0$ ýa-da $\delta\Pi=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_2}\delta q_2=0$

bu ýerden

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q_2}=0 \tag{50}$$

Sistemanyň potensial energiýasyny onuň deňagramlaşýan oblastynda Teýloir hataryn adagadalyň:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_r}\right)q_r + \frac{1}{2}\sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_r \partial q_s}\right)q_r q_s + \text{ýokary} \quad \text{derejeli}$$

kiçi çlenler (51)

Sistemanyň başlangyç ýagdaýynda $\Pi_0=0$ bolýar. Ýokary derejeli kiçi çlenleri taşlasak (51) şeýle görnüşe gelýär:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_r \partial q_s}\right)q_r q_s$$

(52)

bu ýerde

$$C_{rs} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0 \qquad (53)$$

aňlatma dikeldiş koeffisenti diýilýär, onda

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{n} C_{rs} q_r q \qquad (54)$$

(32),(42),(35) aňlatmalardan peýdalanyp Lagranžyň ikinji jyns (45) görnüşdäki deňlemesi şeýle ýazarys:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(a_{rs}\ddot{q}_s + b_{rs}\dot{q}_s + c_{rs}q_s\right) = 0 \qquad (55)$$

Şu sistemanyň özüniň deňhagramlyk ýagdaýynyň golaýyndaky kiçi yrgyldysynyň differensial deňlemelerdir. differensal deňlemeleriň teoremasyndan bilşimiz ýaly (55) görnüşdäki deňlemeler şeýle ornuna goýmek bilen integrirlenýär:

$$q_s = A_s e^{\lambda t} \qquad (56)$$

(4.243) aňlatmany (55) deňlemede goýup alnan differensial deňleemelerden A_s we λ ululyklar (56) ýerine goýandan soň q_s koordinatalar (555) differensal deňlemeleriň çözüwleri bolýarlar. Görşümiz ýaly egerde λ wagtyň funksiýasy görnüşinde otrisatel bolsa, onda wagt geçdigiçe q_s koordinatalar üznüksiz kemelýärler we sistema durnukly deňagramlylykda bolýar.Eger-de λ ululyklar položitel bolsa, onda wagt geçdigiçe q_s koordinatalr üznüksiz artýarlar we sistemanyň deňagramlylygy durnuksyz bolýar.

Absalýut gaty jisimiň dinamikasy
Inersiýanyň momentleri.(massalaryň geometriýasy)

Material nokatlaryň sistemasynda massalaryň bölünişigini häsiýetlenodirýän ululyga sistemanyň inersiýausynyň momenti diýilýär. Absolýut gaty jisimiň inersiýasynyň momenti hemişelik ululykdyr.

Sistemanyň inersiýasynyň momentleri şeýle aňladyl ýar:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{\alpha} y_i^{\beta} z_i^{\gamma} \qquad (57)$$

bu ýerde N sistemanyň material nokatlarynyň sanydyr.

$\alpha + \beta + \gamma = n$ ululyga inersiýanyň momentiniň derejesi diýilýär.

Inersiýanyň birinji derejeli momentleri

Statikadan bilşimiz ýaly sistemanyň massalarynyň merkeziniň radius-wektory we koordinatalary şeýle aňladylýar;

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} \\
x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \\
y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \\
z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}
\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Absalýut gaty jisimler üçin bu aňlatmalar şeýle görnüşe geçýär:

$$\left.\begin{aligned}
x_c &= \frac{\iint_V x dm}{m} \\
y_c &= \frac{\iint_V y dm}{m} \\
z_c &= \frac{\iint_V z dm}{m}
\end{aligned}\right\} (59)$$

(58) we (59) aňlatmalardaky droplaryň sanowjylary degişlilikde sistemanyň we absalýur gaty jisimiň inersiýasynyň degişlilikde OYZ,OXZ we OXY tekizliklere görä birinji derejeli momentlerdir. Olary degişlilikde S(yz),S(xz),S(xy) bilen belläris:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{S(yz)}{m}; S(yz) = mx_c \\ y_c &= \frac{S(xz)}{m}; S(xz) = my_c \\ z_c &= \frac{S(xy)}{m}; S(xy) = mz_c \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Inersiýanyň birinji derejeli momentlerine statiki momentler hem diýilýär. Görşümiz ýaly eger-de massalaryň merkezi koordinatalar sistemasynyň başlangyjy bilen gabat gelse, onda $x_c = 0, y_c = 0, z_c = 0$ bolany sebäpli statiki momentler nula deňdir:

$$S(yz) = 0, S(xz) = 0, S(xy) = 0$$

Inersiýanyň ikinji derejeli momentleri

Nokada görä inersiýanyň ikinji derejeli momentine inersiýanyň polýar momenti diýilýär. Inersiýanyň polýar momenti koordinatalaryň başlangyjyna görä absalýut gaty jisim üçin şeýle aňladylýar:

$$I_0 = \iiint_V r^2 dm \qquad (61)$$

ýa-da

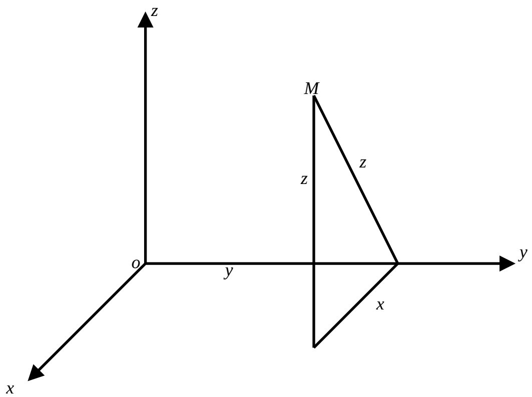
$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ bolany sebäpli

$$I_0 = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm \qquad (62)$$

Koordinata tekizliklere görä absalýut gaty jisimiň inersiýasynyň ikinji derejeli momentleri aşakdaky ýaly aňladylýar:

$$\left.\begin{aligned} I(yz) &= \iiint_V x^2 dm \\ I(xz) &= \iiint_V y^2 dm \\ I(xy) &= \iiint_V z^2 dm \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Absalýut gaty jisimiň inersiýasynyň koordinata oklara görä ikinji derejeli momentlerini tapalyň. M nokaudyndan Oy oka çenli aralygy $z^2 = x^2 + y^2$ bolany üçin inersiýanyň Oy oka görä ikinji derejeli momenti şeýle alynýar. (çyzgy 20)



çyzgy 20

Edil şunuň ýaly ox we oz oklara görä ikinji derejeli momentleri şeýle kesgitlenýärler:

$$I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$I_z = \iiint_V \left(z^2 + y^2\right) dm \qquad (64)$$

Inersiýanyň merkezinden daşlaşan momentleri aşakdaky formulalar bilen aňladýarlar:

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint\limits_V xydm \\ I_{xz} &= \iiint\limits_V xzdm \\ I_{yz} &= \iiint\limits_V yzdm \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Inersiýanyň momentleri hakda teoremalar

Teorema 1: Jisimiň inersiýasynyň özara perpendikulýar bolan üç sany tekizlikleriň kesilme nokadyna görä polýar momenti onuň şol tekizliklere görü inersiýalaryň momentleriniň jemine deňdir.

Subudy:

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dm = \iiint\limits_V x^2dm + \iiint\limits_V y^2dm + \iiint\limits_V z^2dm = I(yz) + I(xz)$$

$$I_0 = I_{(yz)} + I_{(xz)} + I_{(xy)} \qquad (66)$$

Teorema subut edildi.

Teorema 2: Jisimiň özara özara perpendikulýar bolan üç sany oklara görä inersiýa momentleriniň jemi şol oklaryň kisişme nokadyna görä inersiýanyň polýar ikeldilen momentine deňsir.

Subudy:

$$I_x + I_y + I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)dm + \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dm = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2\right)$$

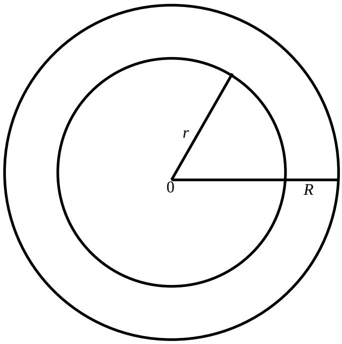
$$= 2\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dm = 2I_0$$

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0$$

Teorema subut edildi.

Mesal: Birjynysly şaryň merkezine we diametrine görä inersiýasynyň momentlerini tapmaly.

Çözülişi: Radiusy R bolan şaryň konsentrik r radiusly şar alalyň.



Şar birjynysly bolany üçin onuň dykyzlygy hemişelikdir $(\rho = const)$

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr$$

$$I_0 = \int_0^R r^2 dm = \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\frac{3}{5}R^2 = \frac{3}{5}MR^2$$

Şaryp özara perpendikulýar üç sany diametrlerini x, y, z bilen belläp (67) formula görä:

$$I_x + I_y + I_z = 3I_x = 2I_0$$

$$I_x = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} MR^2 = \frac{2}{5} MR^2$$

$ya - da$

$$I_{ular} = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{4}{10} MR^2$$

Tiorema 3: Jisim oklara ýa-da tekizliklere parallel hereket edip süýşende onuň şu oklara we tekizliklere görä inersiýasynyň momentleri üýtgemeýär.

Bu teoremanyň subudy jisimiň oka we tikizlige görä momentleriniň aňlatmasyndan gelip çykýar.

Mysal: Birjynysly tegelegiň merkezinden geçýän we onuň tekizlige perpendikulýar bolanoka görä inersiýasynyň momentini tapmaly.

Çözülişi: Radiusy R bolan tegelege konsentrik r radiusly tegelek alarys. Tegelek birjynysly bolany üçin onuň dykyzlygy hemişelikdir. $(v = const)$

$$S = \pi r^2 \qquad m = \pi r^2 v \qquad dm = 2\pi r dr$$

$$I_{mer} = \iiint\limits_V r^2 dm = \iiint\limits_V 2\pi r^3 v dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi v \frac{r^4}{4} /_o^R = \frac{1}{2} \pi v R^4 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 v\right) R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

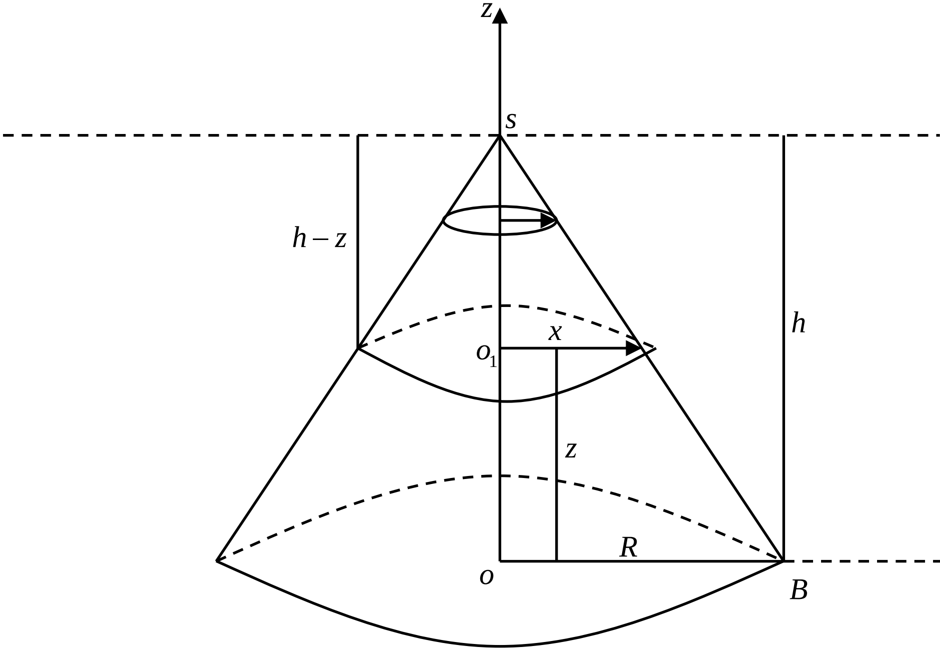
$$I_{mer} = \frac{1}{2} MR^2$$

Silindriň ýokarky esasyndan başlap ony aşaky esasyna süýşürsek material tegelek alynýar, şonuň üçin hem silindriň öz okuna görä inersiýanyň momenti hem tegelegiňki ýaly kesgitlenýär

$$I_{sik} = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{5}{10} MR^2$$

Mysal: R radiusly we beýikligi h bolan konusyň okuna görä inetsiýanyň momentini tapmaly.

Çözülişi: Konusyň esasyna pareallel bolan tekizlikler bilen ol tükeniksiz kiçi bölejiklere bölünende alnan kesik konusy predelde radiusy x we beýikligi dz bolan silindr diýip hasap edilýär.



Onda

$$dI = \frac{1}{2}mx^2 = \frac{1}{2}\pi x^2 dz\rho x^2 = \frac{1}{2}\pi\rho x^4 dx$$

$$\frac{x}{R} = \frac{h-z}{h} \qquad x = \frac{R}{h}(h-z)$$

$$dI = \frac{1}{2}\pi\rho\frac{R^4}{h^4}(h-z)^4 dz$$

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho\frac{R^4}{h^4}\int_0^h (h-z)^4 dz = -\frac{1}{2}\pi\rho\frac{R^4}{h^4}(h-z)^{-5}\frac{1}{5}/_0^h$$

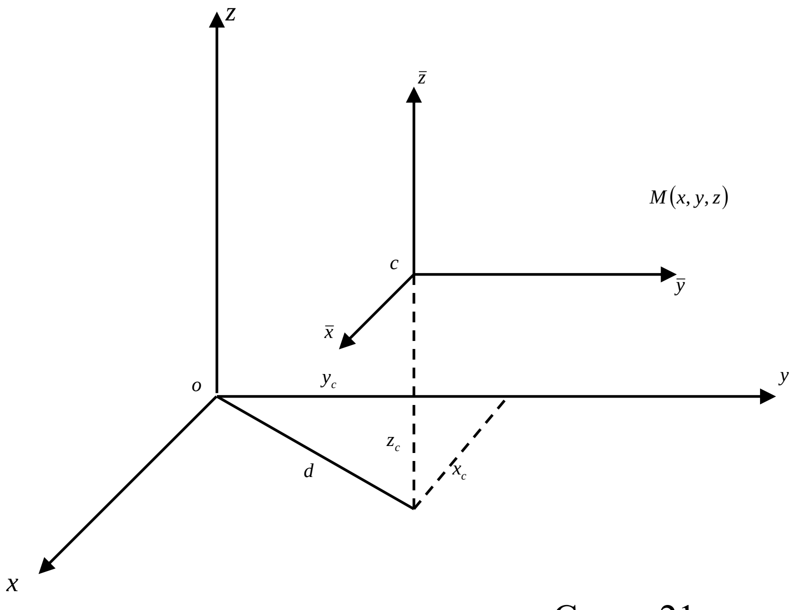
$$I_{kon} = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\rho\right)R^2 = \frac{3}{10}MR^2$$

Şeýlelik bilen

$$I_{sik} : I_{sar} : I_{kon} = 5:4:3$$

Teorema 4: (Gýugensiň – Şteýneriň teoremasy). Jisimiň haýsy hem bolsa bir oka görä inersiýasynyň momenti şol oka parallel we massalaryň merkezinden geçýän oka inersiýasynyň momenti bilen şol oklaryp aralygynyň kwadratynyň jisimiň massasyna köpeltmek hasylynyň jemine deňdir.

Subudy: Degişli oklary parallel bolan $Oxyz$ we $C\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ koordinatalar sistemasyny alarys.Bu ýerde c massalaryň merkezidir (çyzgy 21)



Çyzgy 21

$$I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)dm = \iiint_V \left[\left(x_c + \bar{x}\right)^2 + \left(y_c + \bar{y}\right)^2\right]dm$$

Statik momentler nula deň we $d^2 = x_c^2 + y_c^2$ bolany sebäpli:

$$I_z = I_{\bar{z}} + md^2 \quad (67)$$

bu ýerde $I_{\bar{z}} = \iiint_V \left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)dm$

Teorema subut edildi.

Teorema 5: Jisimiň koordinata başlangyjyndan geçýän oka görä inersiýasynyň momenti şeýle aňladylýar:

$$I_{\bar{z}} = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma -$$

Subudy: Jisimiň M nokadyndan koordinatalar başlangyjyndan geçýän oka görä aralygy α bilen belläliň (çyzgy 22)

$$I_{\bar{x}} = \iiint_V d^2 dm = \iiint_V \left(r^2 - OE^2\right)dm$$

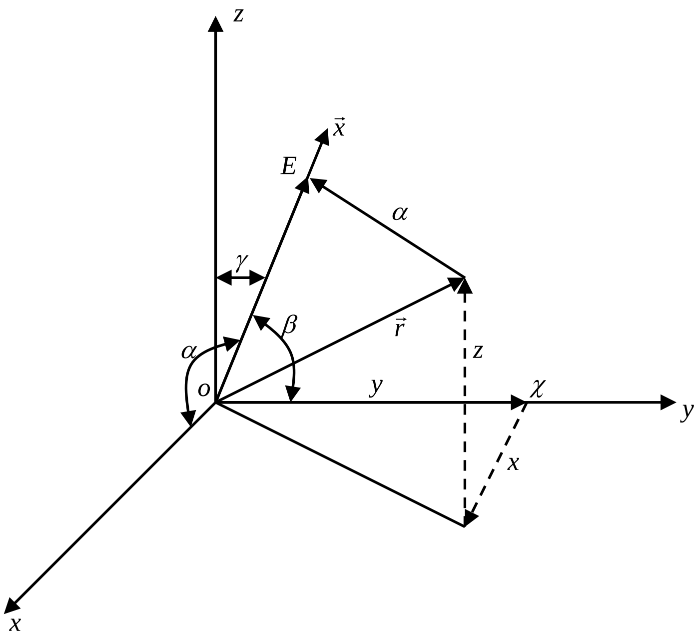
$$OE = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

$$OE^2 = x^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\beta + z^2\cos^2\gamma + 2xy\cos\alpha\cos\beta + 2xz\cos\alpha\cos\gamma$$

$$+ 2yz\cos\beta\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$



Çyzgy 22

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$$

$$OE^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \cos^2\alpha\left(y^2 + z^2\right) - \cos^2\beta\left(x^2 + z^2\right) - \cos^2\gamma\left(x^2 + y^2\right)$$

$$2xy\cos\alpha\cos\beta + 2xz\cos\alpha\cos\gamma + 2yz\cos\beta\cos\gamma$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$d^2 = r^2 - OE^2 = \cos^2\alpha\left(y^2 + z^2\right) + \cos^2\beta\left(x^2 + z^2\right) + \cos^2\gamma\left(x^2 + y^2\right) -$$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma$$

Onda

$$I_{\vec{x}} = \cos^2\alpha\iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)dm + \cos^2\beta\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)dm + \cos^2\gamma\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dm$$

$$-\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_V 2xydm - \cos\alpha\cos\gamma\iiint\limits_V 2xzdm - \cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_V 2yzdm$$

ýa-da

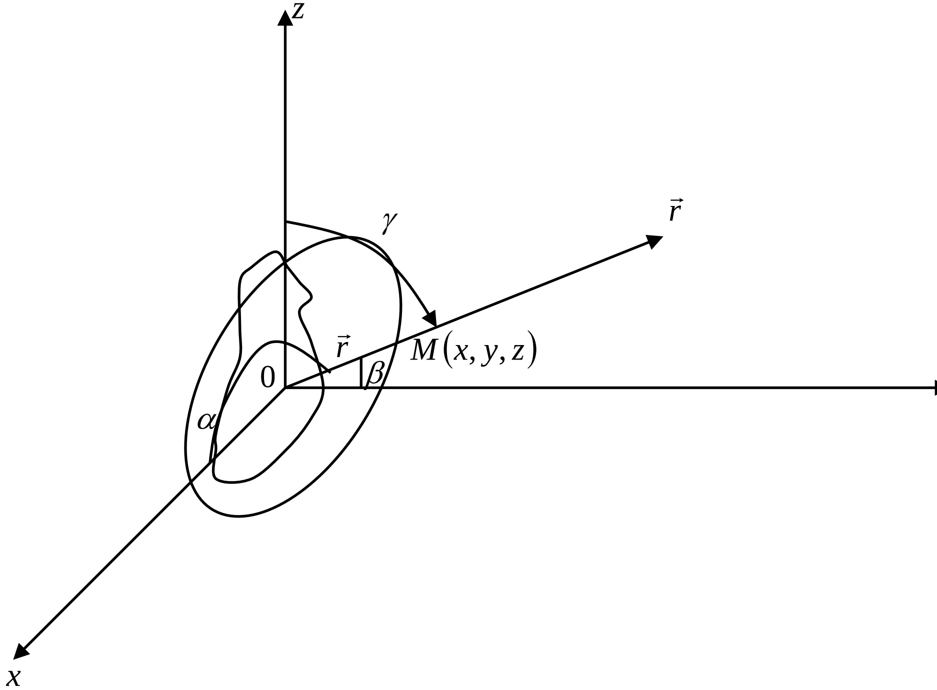
$$I_{\vec{x}} = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - \\ - I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - I_{yz}\cos\beta\cos\gamma \qquad (68)$$

Tiorema subut edildi.

Inersiýanyň ellipsoidi

Koordinatalar naşlangyjyndan geçýän $\vec{x}$ okuň üstüjnde erkin bir M nokat alarys we OM=r bilen belläris. Bu ýerde r aşakdaky deňlikden kesgitlenýär (çyzgy 23)

$$I_{\vec{x}} = mr^2 \qquad (69)$$



Çyzgy 23

Şu M nokadyň geometriki ornuny tapalyň. Çyzgydan:

$$\cos\alpha = \frac{x}{2}, \cos\beta = \frac{y}{2}, \cos\gamma = \frac{z}{2}$$

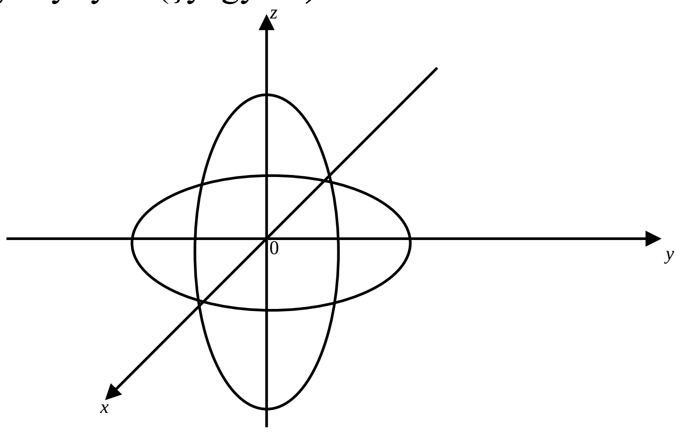
Bu aňlatmalary (68) formulada goýarys:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz = I_{\bar{x}}r^2 = k^2 \quad (70)$$

Şu ikinji tertipli üstüň tükeniksiz daşlaşan nokady bolmany üçin ol ellipsoiddir. Şu ellipsoide energiýanyň ellipsoidi we onuň baş oklaryna inersiýanyň baş oklary diýilýär. Eger-de koordinata oklaryň deregine inersiýanyň baş oklaryny alsak, onda inersiýanyň ellipsoidiniň deňlemesi şeýle görnüşe geçýär:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = k^2 \quad (71)$$

eger-de inersiýanyň baş oklary messalaryň merkezinden geçse. onda bu oklara inersiýanyň, merkeizi baş oklary diýilýär. (çyzgy 24)



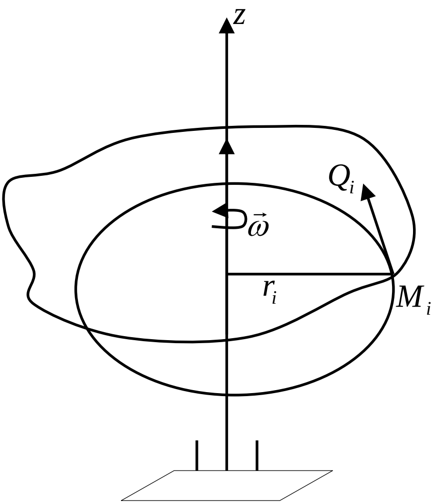
Çyzgy 25

Gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýan absalýut gaty jisimiň kinetik momenti we kinetik energiýasy

Absalýut gaty jisim $\vec{\omega}$ burç tizlik bilen gozganmaýan okuň töweregine aýlanýar, onda onuň haýsy hem bolsa bir M nokady radiusy r_1 bolan töwerek boýunça şu okuň töwereginde aýlanýar. Bu nokadyň hereket mukdary

$$\vec{Q}_i = m_i \vec{\vartheta}_i$$

şol töwerege şu nokatda galtaşýan boýunça ugrukdyrylýar (çyzgy 26)



Çyzgy 26

Sistemaýň kinetik momenti onuň hemme nokatlarynyň kinetik momentleriniň jemine deňdir:

$$G_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\vartheta}_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega \qquad (72)$$

Absalýut gaty jisim üçin şu deňlik şeýle görnüşe geçýär:

$$G_z = \omega \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

ýa-da (72)-den

Belleýşimiz ýaly jisimiň oka görä inersiýasynyň momenti şeýle bellenýär:

$$\iiint_V r^2 dm = I_z \qquad (73)$$

Onda

$$G_z = I_z \omega \quad (74)$$

Sistemanyň kinetik energiýasynyň aňlatmasyny ýazalyň:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vartheta_i^2$$

Bu ýerden absalýut gaty jisim üçin kinetik energiýa şeýle aňladylýar:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_V r^2 dm$$

ýa-da

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (75)$$

absalýut gaty jisi üçin şu formulany aşakdaky görnüşde ýazmak hem bolar:

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

(76)

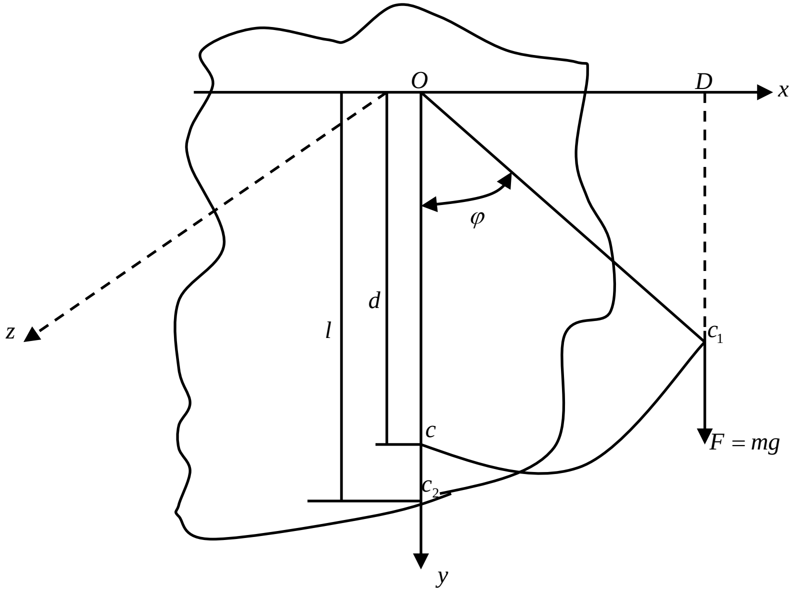
Şeýlelik bilen absalýut gaty jisim üçin Kýonigiň teoremasy şeýle görnüşe geçýär:

$$T = \frac{1}{2} m \vartheta_c^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

(76)

Fiziki maýatnik
Sinhron maýatnikler

Diňe agyrlyk güýjiň täsiri astynda gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýan absalýut gaty jisime fiziki maýatnik diýilýär. Uzynlygy d aralyk merkezi c bolan fiziki maýatbik z okuň töwereginde aýlanýar we haýsy hem bolsa bir φ burça öwrülýär (çyzgy 27)



Çyzgy 27

Gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýan absalýut gaty jisimiň momentiniň aňlatmadyndan peýdalanalyň:

$$G = I_z \omega = I_z \frac{d\varphi}{dt}$$

bu ýerde

$$\frac{dG}{dt} = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \frac{dG}{dt} = -F \cdot OD = -mg\alpha \sin\varphi$$

bolany sebäpli, kiçi $\varphi \leq 1^0$ yrgykdylar üçin fiziki maýatnigiň yrgyldysynyň deňlemesi aşakdaky görnüşde alynýar:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0$$

$$\frac{mgd}{I_z} = k^2$$

(77)

öňden bilöimiz ýaly (77) differensal deňlemesiniň umumy çözülişi şeýledir:

$$\varphi = \alpha \sin(kt + \varepsilon)$$

(78)

Şu çözülişden peýdalanyp fizii9 maýatnigiň periodyny kesgitläris:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

(79)

Periodlary deň bolan maýatniklere sinhron maatnikler diýilýär.

Eger-de matematiki we fiziki maaýtnikler sinhron maýatnikler bolsalar, onda

$$2\pi\sqrt{\frac{e}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

(80)

Gýugensiň-Şteýneriň teoremasyndan peýdalanyp (80) formulany şeýle görnüşde alýarys:

$$l = \alpha + \frac{I_z}{md} \qquad (81)$$

Görşümiz ýaly *l*>*d*

Ugry teoriýasy

Urgyda sekundyň müňden bir we ondanam kiçi bölegi bilen ölçenýän iňňän kiçi wagtda tizlik we hereket mukdary tükenikli üýtgeýär.

Material nokadyň urgy teoriýasy

Hereket mukdarynyň differensialynyň güýjüň elementar inpulsyna deňdigini belläris:

$$d\left(m\vec{\vartheta}\right)=\vec{F}dt$$

Bu deňlemäni integrirleýäris:

$$m\vec{\vartheta}-m\vec{\vartheta}_0=\int_0^{\tau}\vec{F}dt \qquad (82)$$

Bu ýerde τ iňňän kiçi wagtdyr. Orta baha baradaky teoremadan peýdalanýarys:

$$m\vec{\vartheta}-m\vec{\vartheta}_0=\vec{F}_0\tau \qquad (83)$$

Bu ýerde $\vec{F}_0$ kiçi τ interwalda urgy güýjiň orta bahasydyr we sag tarap urgy güýjýň impulsydyr. (83) material nokadyň urgy teoriýasynyň esasy deňlemesidir we şeýl ekesgitlenýär: iňň än kiçi w agtda urgydsaky hereket mukdarynyň üýtgemegi urgy güýjüň impulsyna deňdir.

Urgy impulsyny $\vec{F}^*$ bilen belläp, (83) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$m\vec{\vartheta}-m\vec{\vartheta}_0=\vec{F}^* \qquad (84)$$

Bu ýerde

$$m\frac{d\vec{r}}{dt}-m\vec{\vartheta}_0=\vec{F}^*$$

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{\vartheta}_0\tau + \frac{1}{m}\vec{F}^*\tau$$

(85)

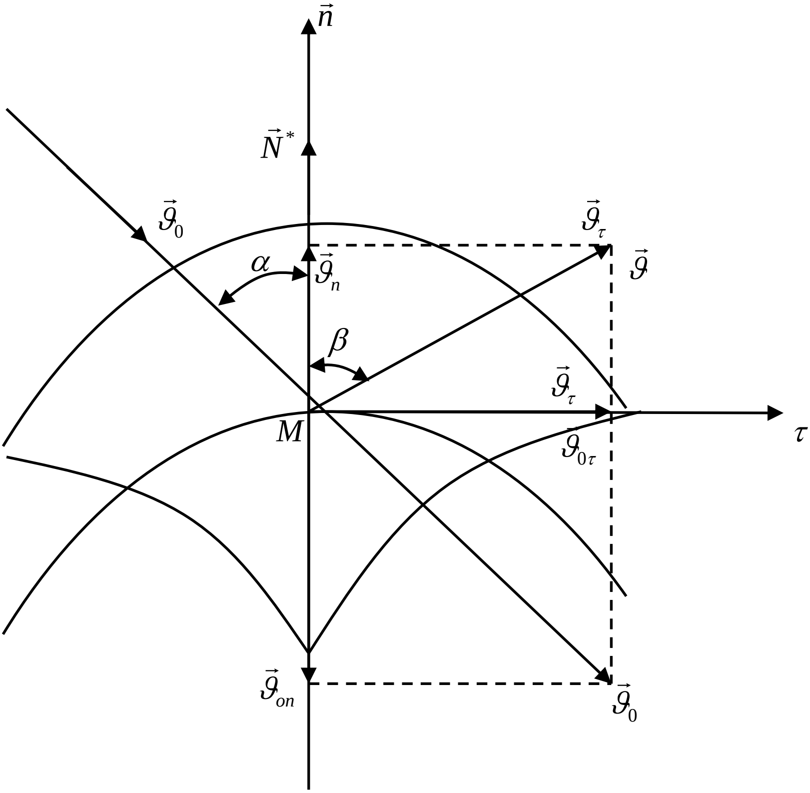
Bu ýerde $\vec{F}_0^*$ urgy güýjüň kiçi τ interwalda orta bahasydyr. görşümiz ýaly yrgynyň özüne sarp edilen wagtdaky süýşme iňňän kiçi bolany üçin ol nazara alynmasada bolýar. Urgy güýjüň örän uly bolmalydygy düşnüklidir.

Nokadyň gozganmaýan üstde maýyşgak we maýyşgak däl urgylary. Dikeldiş koeffisneti

Başlangyç tizligi $\vec{\vartheta}_0$ we massasy m bokan material nokat hereket edip barýarka ýolda gozganmaýban üste degip özüniň hereketiniň ugryny we tizligini üýtgedýär. Onuň urgysan soňky tizligini $\vec{\vartheta}$ bilen belläliň. Ideal baglanşyk üçin readsiýa güýjüň impulsy üstüň normaply boýunça ugrykdyrylýar. Bu halda material nokadyň urugysynyň esasy deňlemesi şeýle görnüşe geçýär:

$$m\vec{\vartheta} - m\vec{\vartheta}_0 = \vec{N}^* \qquad (86)$$

Şu deňlemäni galtaşýanj we normalyň ugurlaryna proektirläliň. (çyzgy 28)



Cyzgy 28

$\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}_0$ tizlikleriň proeksiýalary degişlilikde $\vec{\vartheta}_n, \vec{\vartheta}_\tau, \vec{\vartheta}_{on}, \vec{\vartheta}_{o\tau}$ bilen belgiläris we $\vec{\vartheta}_0$ tizligi M nokada geçirýäris. Şeýlelik bilen (86) deňlemäniň galtaşýan proejsiýasy şeýle bolýar:

$$\vartheta_\tau - \vartheta_{0\tau}, \vartheta_\tau = \vartheta_{0\tau}$$

Çyzgydan

$$tg\alpha = \frac{\vartheta_\tau}{\vartheta_{on}}, tg\beta = \frac{\vartheta_\tau}{\vartheta_n}$$

1. $\vartheta_n = 0$ bolan halatda absalýut maýyşgak däl urgy diýilýär. Bu urgy üçin:

$$tg\beta = \frac{\vartheta_\tau}{0} = \infty$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

2. $\vartheta_n = \vartheta_{0n}$ bolan halatda absalýut maýyşgak urgy diýilýär we bu urgy üçin:

$$tg\beta = \frac{\vartheta_\tau}{\vartheta_n} = \frac{\vartheta_\tau}{\vartheta_{0n}} = tg\alpha$$

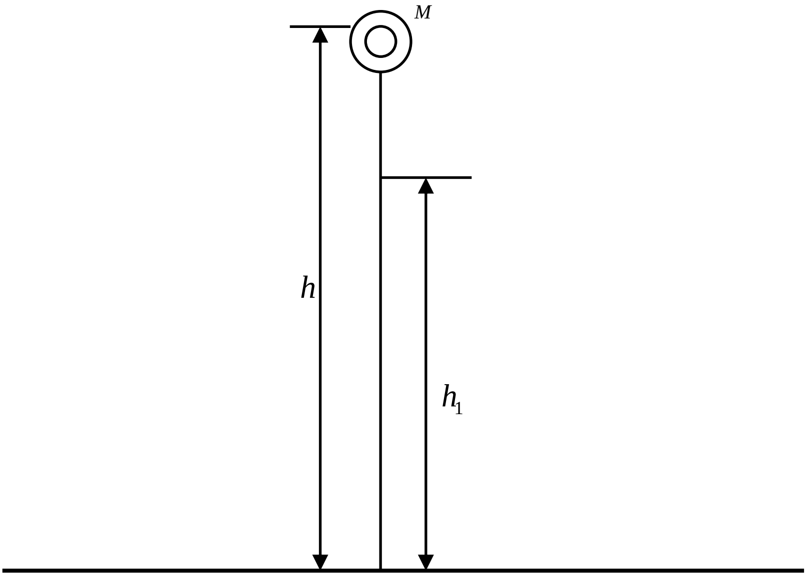
$$\alpha = \beta$$

3. $\vartheta_n = k\vartheta_{0n}, \leq k \leq 1$ halda bütinleýin doly däl ma ýyşgak urgy we k dikeldiş koeffisenti diýilýär. Bu urgy üçin:

$$tg\beta = \frac{\vartheta_\tau}{\vartheta_n} = \frac{\vartheta_\tau}{k\vartheta_{0n}} = \frac{1}{k}tg\alpha$$

$$\alpha < \beta$$

Dikeldiş koeffisenti praktikada şeýle kesgitlenýär: h beýiklikden gaçýan maýyşgak şar gorizontal maýyşgak gozganmaýan tizlige degip h_1 beýiklige galýar. (çyzgy 29)



Çyzgy 29

Galileýiň formulasyna görä:

$$\vartheta_{on} = \sqrt{2gh}, \vartheta_n = \sqrt{2gh}$$

$$k = \frac{\vartheta_n}{\vartheta_{0n}} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$$

(87)

$\vartheta_0 = 3\dfrac{m}{sek}$ bolanda dikeldiş koeffisentiniň orta bahasy şeýle alynýar:

agaç üçin $k = \dfrac{1}{2}$

polat we probka üçin $k = \dfrac{5}{9}$

piliň süňki üçin $k = \frac{8}{9}$

aýna üçin $k = \frac{15}{16}$

we ş.m

Sistemanyň urgy teoriýasy. Karionyň urgy hakda teoramalary.

Nokat üste ugrukdyrylandan soň ýene-de şol üste galsa, onda beýle baglanyşyga goýlan baglan goýlan baglanşyk eger-de nokat urgydan soň ýstden aýyrylyp gitse, onda baglanşyga aýrylan baglanşyk diýilýär. Karnonyň teoremalary bu baglanşyklardaky urgylarda kinetik energiýanyň üýtgemegini kesgitlemäge mümkinçilik berýär.

Teorema 1: Mgnowen aýrylan baglanşykda sistemanyň gazana kinetik energiýasy onuň gazana tizliginiň kinetik energiýasyna deňdir.

Subudy: Kinetik energiýanyň üýtgemeginiň şeýle aňladylýandygyny bilýäris:

$$T - T_0 = \frac{1}{2} m\left(\vartheta^2 - \vartheta_0^2\right) \quad (88)$$

Şu halda tejribäniň görkezişi ýaly $\vec{\vartheta}_0 \perp \vec{N}^*$ bolany sebäpli (86) deňlemäni $\vec{\vartheta}_0$ başlangyç tizlige sklaýar köpeldip şeýle alýarys:

$$\vec{\vartheta}\vec{\vartheta}_0 - \vartheta_0^2 = 0 \qquad (89)$$

Şonuň ikeldilen çep tarapyny (88) aňlatmanyň sag tarapyndaky skopkadaky aňlatmadan aýyrarys:

$$T - T_0 = \frac{1}{2} m\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0\right)^2 \qquad (90)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \left(\Delta \vec{\vartheta} \right)^2 \qquad (91)$$

(91) aňlatmany sistemanyň hemme nokatlary üçin jemläliň:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\Delta \vec{\vartheta}_i \right)^2 \qquad (92)$$

Şonuň bilen Karnonyň birinji teoremasy subut edildi.

Teorema 2: Sistemanyň mgnowen absalýut maýyşgak däl goýlan baglanşykda ýitirýän kinetik energiýasy onuň ýitiren tizliginiň kinetik energiýasyna deňdir.

Subudy: Bu halda tejribäniň görkezişi ýaly $\vec{\vartheta} \perp \vec{N}^*$ bolany üçin (86) deňlemäniň iki tarapyny hem $\vec{\vartheta}$ tizlige sklaýar köpeldip aşakdaky aňlatmany alarys:

$$\vartheta^2 - \vec{\vartheta}_0 \vec{\vartheta} = 0 \quad (93)$$

Şonuň ikeldilen çep tarapyny (88) deňlemäniň sag tarapyndaky skopkanyň içindäki aňlatmadan aýyrýarys:

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m \left(\vec{\vartheta}_0 - \vec{\vartheta} \right)^2$$

(94)

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \left(\Delta \vec{\vartheta}_0 \right)^2$$

(95)

Şu deňligi sistemanyň hemme nokatlart üçin jemläliň:

$$\Delta T_0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_{0_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\Delta \vec{\vartheta}_{0i} \right)^2 \qquad (96)$$

Teorema subut edildi:

Sistemanyň urgydaky hereket mukdarynyň we kinetik momentiniň üýtgemegi hakdaky teoremalar.

Teorema: sistemanyň ugry wagtyndaky hereket mukdarynyň üýtgemegi, sistemanyň goýlan daşky güýçleriň impulsynyň jemine deňdir.

Subudy: Sistemanyň haýsy hem bolsa bir nokady üçin urgy teoriýasynyň esasy deňlemesini ýazalyň:

$$\Delta m_i \vec{\vartheta}_i = \vec{F}_i^{*g} + \vec{F}_i^{*u} \qquad (97)$$

Indi bu deňlemäni sistema üçin ýazalyň:

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\vartheta}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{*g} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{*u} \qquad (98)$$

Içki güýçleriň impulslarynyň wektor jemi nula deň bolany sebäpli:

$$\Delta \vec{Q} = \Delta m \vec{\vartheta}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{*g} \qquad (99)$$

Teorema subut edildi

Teorema: Sistemanyň urgy wagtyndaky edil şol bir merkeze görä alnan kinetik momenti sistema goýlan hemme daşky güýçleriň impulslarynyň şol bir merkeze görä momentleriniň jemine deňdir.

Subudy: (99) deňligi radius-wektora wektor köpeldýäris:

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{Q}_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{*g} \right]$$

ýa-da

$$\Delta \vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{*g} \right] \qquad (100)$$

Teorema subut edildi.

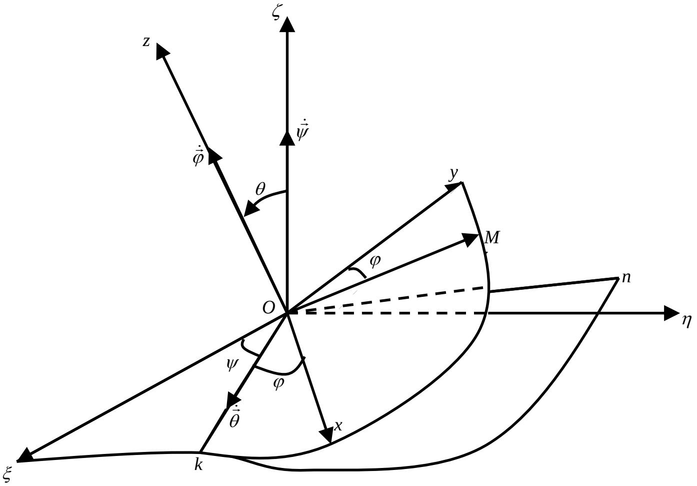
Eger-de sitema daşky güýçler täsir etmeýän bolsa ýa-da inersiýa boýunça hereket edýän bolsa, onda (99) we (100) deňliklerden hereket mukdarynyň we kinetik momentiniň saklanmak kanuny alynýar:

$$\Delta\vec{Q} = 0; \vec{Q} - \vec{Q}_0 = 0; \vec{Q} = \vec{Q}_0 = const \qquad (101)$$

$$\Delta\vec{G} = 0; \vec{G} - \vec{G}_0 = 0; \vec{G} = \vec{G}_0 = const \qquad (102)$$

Gozganmaýan bir nokady bolan absalýut gaty jisimiň hereketi.Eýleriň kinematik jemlemeleri.

Başlangyjy jisimiň gozganmaýan nokady bolan $O\zeta\eta\xi$ we hereket edýän $Oxyz$ koordinatalar sistemalaryny alalyň: (çyzgy 30)



Çyzgy 30

ZOK tekizlige perpendikulýar bolan $\vec{OM}$ wekory alýarys.

Kinematikadan bilşimiz ýaly φ, θ, ψ Eýleriň burçlarydyr we OK düwünleriň çyzygydyr. Bu ýerde prestessiýa burç tizligi $\dot{\vec{\psi}}$ jisimiň husussy aýlanma burç tizligi $\dot{\vec{\varphi}}$ we nutatsiýa burç tizligi $\dot{\vec{\theta}}$ degişlilikde $O\xi, Oz, Ok$

oklar biýunça ugrukdyrylandyrlar. Şeýlelik bilen jisim jemleýji burç tizligi şeýle aňladylýar:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\psi}}$$

(103)

$Ok, Oz, O\xi, Ox, Oy, OM$ oklar birlik wektorlaryny degişlilikde $\vec{k}^0, \vec{z}^0, \vec{\xi}^0, \vec{x}^0, \vec{y}^0, \vec{m}^0$ bilen belläliň. Onda:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}^0 + \dot{\varphi}\vec{z}^0 + \dot{\psi}\vec{\xi}^0 \qquad (104)$$

Gozganmaýan oklaryň birlik wektorlaryny hereket edýän oklaryň birlik wektorlary bilen çalşyrýarys. Onuň üçin bolsa $\vec{\xi}^0$ birlik wektory $\overrightarrow{OM}$ we OZ oklara proektirleýäris:

$$\vec{\xi}^0 = \vec{r}^0 \cos\theta + \vec{m}^0 \sin\theta$$

Indin $\vec{m}^0$ birlik wektory $O\vec{x}$ we $O\vec{y}$ oklara ptoektirläliň:

$$\vec{m}^0 = \vec{x}^0 \sin\varphi + \vec{y}^0 \cos\varphi$$

onda

$$\vec{\xi}^0 = \vec{r}^0 \cos\theta + \left(\vec{x}^0 \sin\varphi + \vec{y}^0 \cos\varphi\right)\sin\theta$$

Indi bolsa $\vec{k}^0$ birlik wektory $O\vec{x}$ we $O\vec{y}$ oklara proektirläliň

$$\bar{k}^0 = \vec{x}^0 \cos\varphi - \vec{y}^0 \sin\varphi$$

Şeýlelik bilen jisimiň jemleýji burç tizligi şeýle alynýar:

$$\vec{\omega} = \left(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{x}^0 + \left(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\right)\vec{y}^0 + \left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)\vec{r}^0$$

(105)

Sag tarapdaky skopkalaryň içindäki aňlatmalar jemleýji burç tizligiň hereket edýän koordinata oklara proeksiýalarydyr. Bu proeksiýalary kinematikadaky ýaly

$\omega_x = P, \omega_y = P, \omega_z = P$ bilen belläp aşakdaky deňlemeleri alýarys:

$$\left.\begin{aligned} P &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Şular eýleriň kinematik deňlemeleridir. Görşümiz ýaly bu üç sany differensial deňlemeleriň sistemasynda wagtyň funksiýasy bolan alty sany $\varphi, \psi, \theta, p, q, r$ näbellileri bar. Şu sebäbe görä-de Eýleriň kinematik deňlamalerini integrirlemek üçin ýene-de şol näbelli funksiýalara görä üç sany differensial deňleme gerek. Şular ýaly üç sany goşmaça deňlemeler bolup p, q, r näbellilere görä Eýleriň dinamik deňlemeleri hyzmat edýärler.

Gozganmaýan bir nokady bolan gaty jisimiň kinetik momenti we kinetik energiýasy

Sistemanyň kinetik momentiniň şeýle aňladylýandygyny bilýäris:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i m_i \vec{\vartheta}_i\right]$$

Absalýut gaty jisim üçin bolsa şeýle alynýar:

$$\vec{G} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i m_i \vec{\vartheta}_i\right]$$

ýa-da

$$\vec{G} = \iiint_V \left[\vec{r}\,\vec{\vartheta}\right] dm \qquad (107)$$

Eýleriň formulasyndan peýdalanyp şu aňlatmany aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$\vec{G} = \iiint_V [\vec{r}[\vec{\omega}\vec{r}]]dm = \vec{\omega}\iiint_V r^2 dm - \iiint_V \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})dm$$

Indi proeksiýalarda ýazalyň:

$$G_x = p\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dm - \iiint_V x(px + qy + rz)dm$$

$$G_y = q\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dm - \iiint_V y(px + qy + rz)dm$$

$$G_z = r\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dm - \iiint_V z(px + qy + rz)dm$$

ýa-da

$$G_x = p\iiint_V (y^2 + z^2)dm - q\iiint_V xydm - r\iiint_V xzdm$$

$$G_y = q\iiint_V (x^2 + z^2)dm - p\iiint_V xydm - r\iiint_V yzdm$$

$$G_z = r\iiint_V (x^2 + y^2)dm - p\iiint_V xzdm - q\iiint_V yzdm$$

Bu ýerden:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= pI_x - qI_{xy} - rI_{xz} \\ G_y &= qI_y - pI_{xy} - rI_{yz} \\ G_z &= rI_z - pI_{xz} - qI_{yz} \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Eger-de hereket edýän kordinata oklar inersiýanyň baş oklary bolsalar, onda

$$\left.\begin{aligned} G_x &= pI_x \\ G_y &= qI_y \\ G_z &= rI_z \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Bu ýerden:

$$G^2 = p^2 I_x^2 + q^2 I_y^2 + r^2 I_z^2 \qquad (110)$$

Indi sistemanyň kinetik energiýasynyň formulajsyndan paýdalanalyň:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i \vartheta_i^2$$

Absalýut gaty jisim üçin kinetik energiýanyň aňlatmasy şeýle görnüşe geçýär:

$$2T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \vartheta_i^2$$

ýa-da

$$2T = \iiint_V \vec{\vartheta}\vec{\vartheta}dm = \iiint_V \vec{\vartheta}[\vec{\omega}\vec{r}]dm = \iiint_V \vec{\omega}\left[\vec{r}\,\vec{\vartheta}\right]dm = \vec{\omega}\iiint_V \left[\vec{r}\,\vec{\vartheta}\right]dm$$

$$2T = \vec{\omega}\vec{G}$$

(111)

$$2T = pG_x + qG_y + rG_z$$

(112)

(4.298) formuladan peýdalanyp şu aşakdaky aňlatma şeýle görnüşe geçýär:

$$2T = p^2 I_x + q^2 I_y + r^2 I_z - 2pqI_{xy} - 2prI_{xz} - 2qrI_{yz} \qquad (113)$$

Eger-de hereket edýän edýän koordinata oklar inersiýanyňp baş oklary bolsalar, onda

$$2T = p^2 I_x + q^2 I_y + r^2 I_z$$

(114)

(4.303) formuladan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= pI_x - qI_{xy} - rI_{xz} \\ \frac{\partial T}{\partial q} &= qI_y - pI_{xy} - rI_{yz} \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= rI_z - pI_{xz} - qI_{yz} \end{aligned}\right\}$$

(115)

(115) we (108) aňlatmalardan:

$$\left.\begin{array}{l} G_x = \dfrac{\partial T}{\partial p} \\ G_y = \dfrac{\partial T}{\partial q} \\ G_z = \dfrac{\partial T}{\partial r} \end{array}\right\}$$

(116)

Ýagny

$$\vec{G} = grad_{p,q,r} T$$

(117)

Eýleriň dinamik deňlemeleri

Eýler özüniň dinamik deňlemelerini 1765 ýylda çykardy.

Kinetik momentiň wagta görä önüminiň sistema täsir edýän daşky güýçleriň gozganmaýan bir nokada görä momentiniň wektor jemine deňdigini bilýäris:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} mom_0\left(\vec{F}_i^{\,g}\right)$$

Sag tarapyny Z bilen belläliň:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = Z \qquad (118)$$

Bu formula hereket edýän sistema üçin lokal önümi hakdaky düşünjeden peýdalansak şeýle bolýar:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} + \left[\vec{\omega}\vec{G}\right] = Z \qquad (119)$$

Önümleri ýazalyň

$$\left.\begin{aligned}
I_x \frac{dp}{dt} + qr\left(I_z - I_y\right) = Z_x \\
I_y \frac{dq}{dt} + pr\left(I_x - I_y\right) = Z_y \\
I_z \frac{dz}{dt} + pq\left(I_z - I_x\right) = Z_z
\end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Şu Eýleriň dinamik deňlemeleridir.

Indi Eýleriň dinamik deňlemelerini onuň kinematik deňlemeleri bile birikdirip ýazalyň:

$$\left.\begin{aligned}
P = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi;_ I_x \frac{dp}{dt} + qr\left(I_z - I_y\right) = Z_x \\
q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi;_ I_y \frac{dq}{dt} + pr\left(I_x - I_y\right) = Z_y \\
r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi};_ I_z \frac{dz}{dt} + pq\left(I_z - I_x\right) = Z_z
\end{aligned}\right\}$$

(121)

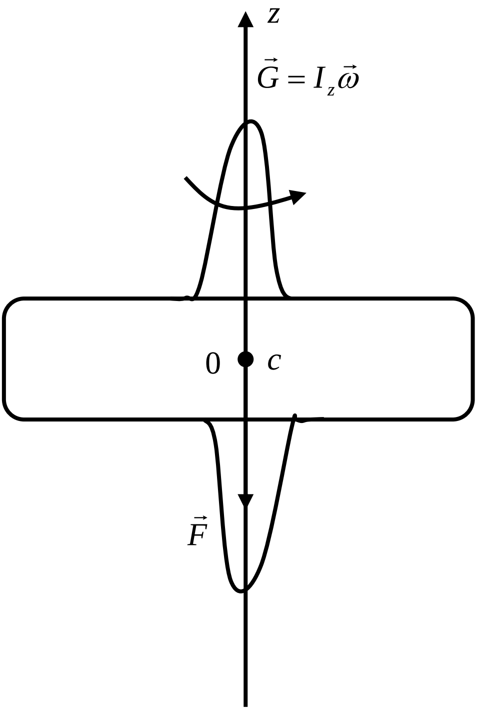
Şeýlelik bilen wagtyň funksiýasy bolan alty sany $\varphi, \psi, \theta, p, q, r$ näbelli funksiýalara görä alty sany differensial deňlemeleriň sistemasy alyndy.Bu deňlemeleri Eýler-Suanso, Lagranž-Puasson we S.W.Kawalewskaýa hususy hallarda integrirläpdirler.

GIROSKOP

Giňişlikde ugruny üýgedip belýän we simmetriýa okunyň töwereginde örän tiz aýlanýan birjynsly jisime **gireskop** diýilýär.

Aşakdaky iki hususy hala seredeliň.

I. Giroskopyň aýlanma simmetriýa oky wertikal ýagdaýda we onuň agyrlyk merkezi **C** gozganmaýan **O** nokady bilen gabat gelýär.



(Çyzgy 31)

Giroskopyň üstündäki sürtülme güýjüni nazara almaýarys.

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = mom_0(\overline{F}) = 0, \qquad \overline{G} = \overline{const}$$

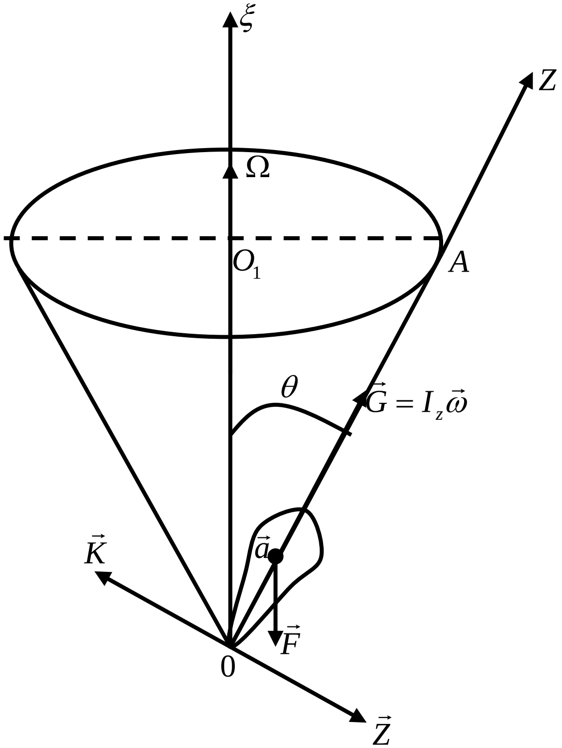
$$I_f\,\overline{\omega} = \overline{const}$$

$$\overline{\omega} = \overline{const}$$

Görşümiz ýaly bu halda gireskop hemişelik burç tizlik bilen wertikal ýagda-ýyny saklaýan simmetriýa okunyň töwereginde aýlanýar.

II. Giroskopyň aýlanma simmetriýa oky ýapgyt ýagdaýda we onuň agyrlyk merkezi gozganmaýan nokady bilen gababt gelmeýär. Bu halda pressessiýa burç tizligini $\overline{\Omega}$ bilen belläliň.

Tejribäniň görkezişine görä bu halda giroskop edilşol bir wagtyň özünde wertikal okuň töwereginde hem $\overline{\Omega}$ burç tizlik bilen aýlanýar.(31).



(Çyzgy 32)

Giroskopyň wertikal okuň töwereginde aýlanmasyndan inersiýa güýji ýüze çykýar. Inersiýa güýjiniň momenti $\overline{K}$ dikeldiji momentdir.

$$\left|\frac{d\overline{G}}{dt}\right| = V = \Omega \cdot 0, A = \Omega G Sin\theta = \left|\left[\overline{\Omega}\overline{G}\right]\right| \qquad (1)$$

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = \left[\overline{\Omega}\overline{G}\right] \qquad (2)$$

Çysgydan:

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = mom_0(\overline{F}) = \left[\overline{a}\overline{F}\right] = \overline{Z} \qquad (3)$$

bu ýerde $\overline{Z}$ agdaryjy momentdir. Şeýlelik bilen:

$$\left[\overline{\Omega}\overline{G}\right] = \left[\overline{a}\overline{F}\right] \qquad \left|\left[\overline{\Omega}\overline{G}\right]\right| = \left|\left[\overline{a}\overline{F}\right]\right|$$

$$\Omega G Sin\theta = aF Sin\theta$$

$$\Omega = \frac{aF}{G} = \frac{aF}{I_f \omega} \qquad (4)$$

Görşümiz ýaly prissessiýa burç tizlik giroskopyň agyrlygyna göni, onuň hususy momentine bolsa ters proporsionaldyr.

Inersiýa we agdarjy momentleriň wektor jeminiň nula deň bolandygy düşnük-lidir:

$$\overline{K} = -\overline{Z} = -\left[\overline{\Omega}\overline{G}\right] = \left[\overline{G}\overline{\Omega}\right]$$

$$\overline{K} = \left[I_f \overline{\omega}\overline{\Omega}\right] \qquad (5)$$

$\overline{K}$ -dikeldiji momenta **giroskopik effeky** diýilýär.

Köplenç giroskopik hadysalar Grýueniň düzgüni bilen düşündirilýär we şeýle kesgitlenýär: öz okunyň töwereginde örän tiz aýlanýan giroskop öwrülende başga bir okuň töwereginde giroskopyň okuny öwrülme oka parallel etmäge ymtylýan jü-büt güýç /moment/ ýüze çykýar. Giroskoplar örän uly burç tizliler bilen aýlanýan /hereket edýän/ jisimleriň deňagramlykda saklanmaklary üçin peýdalanylýar.

I.W.MEŞERSKIŇ ÜÝTGEÝÄN MASSALY NOKADYŇ HERKETI ÜÇIN DEŇLEMESI

Wagt geçdigiçe emassasy üýtgeýän nokadyň herketine seredeliň.

t wgtda nokadyň massasy $M = M(t)$ we tizligi diýeliň. Bu nokadyň hereketini gozganmaýan $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä öwreneliň. Nokadyň t wagtda hereket mukdary şeýle bolýar:

$$\overline{Q_0} = M\overline{V} \qquad (1)$$

dt wagtda nokat özüniň massasynda (- dM) massany taşlaýarys. Onda $t + dt$ wagtda nokadyň hereket mukdary:

$$\overline{Q} = \left[M - (-dM)\right](\overline{V} + d\overline{V_1}) + (-dM)\overline{U} \qquad (2)$$

bu ýerde $d\overline{V_1}$ massanyň şol böleginiň taşlanandan soňky tizliginiň artdyrmasydyr we nokadyň obsolýut tizligidir. Herek mukdarynyň saklanmak $\overline{Q} = \overline{Q_0}$ kanuna görä:

$$(M + dM)(\overline{V} + d\overline{V_1}) - \overline{U}dM = M\overline{V}$$

bu ýerden $(dMd\overline{V_1})$ çleni nazara almasak:

$$d\overline{V_1} = \frac{dM}{M}(\overline{U} - \overline{V}) \qquad (3)$$

Eger-de nokada deň täsiredijisi $\overline{F}$ bolan daşky güýçler täsir edýän bolsalar, onda Nýutonyň ikinji kanunyna görä:

$$M\overline{W_2} = M\frac{d\overline{V_2}}{dt} = \overline{F}$$

$$d\overline{V_2} = \frac{1}{M}\overline{F}dt \qquad (4)$$

Güyjiň täsiriniň baglydällik kanunyna görä nokadyň tizleşmesiniň doly üýtge-mesi şeýle aňladylýar:

$$\overline{W} = \overline{W_1} + \overline{W_2}$$

ýa-da

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d\overline{V_1}}{dt} + \frac{d\overline{V_2}}{dt} \qquad (5)$$

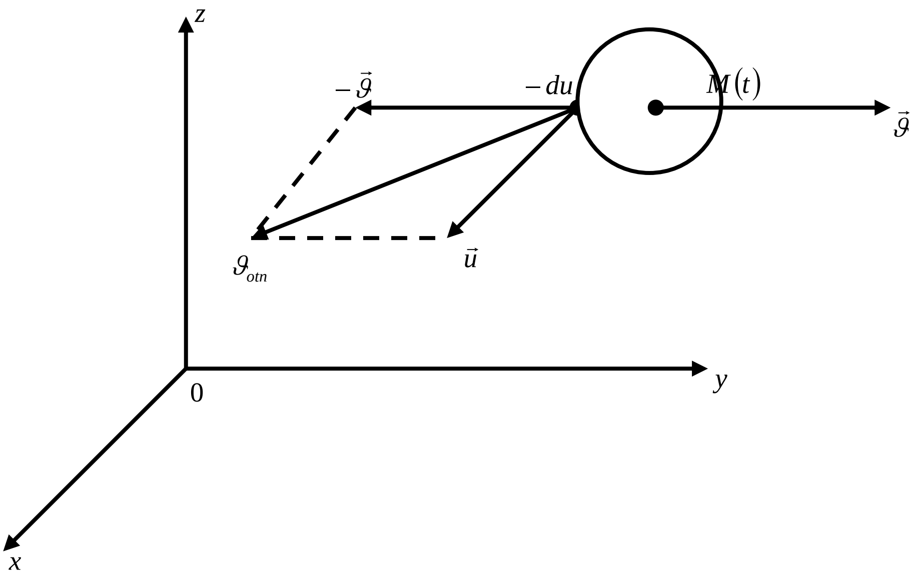
Bu ýerde (3) we (4) aňlatmalary goýýarys:

$$d\overline{V} = \frac{dM}{M}(\overline{U} - \overline{V}) + \frac{1}{M}\overline{F}dt \qquad (6)$$

Şu deňlemeden M köpeldeliň we dt böleliň:

$$M\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F} + \frac{dM}{dt}(\overline{U} - \overline{V}) \qquad (7)$$

Şu deňlemäni üýtgeýän massaly nokadyň hereketi üçin 1897 ýylda Meşerskiý çykarypdyr we şonuň üçin hem oňa I.W.Meşerskiň deňlemesi diýilýär. Bu ýerde $\overline{U} - \overline{V} = \overline{V_{omn}}$ bolany sebäpli Meşerskiň deňlemesi şeýle görnüşe geçýär.(çyz 33)



(çyzgy 33)

Meşerskiň deňlemesindäki

$$\frac{dM}{dt}\overline{V}_{omn} = \overline{F}_{resekt}$$

güýje goşmaça ýa-da reaktiw güýç diýilýär. Şeýlelik bilen Mişerskiniň deňlemesi aşakdaky görnüşe geçýär:

$$M\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F} + \overline{F}_{resekt}$$

Meşrskiniň şu deňlemesi şeýle kesgitlenilýär: islendik momentde üýtgeýän massaly merkeziň massasyny onuň tizlenmesine köpeltmek hasyly öna täsir edýän daşky we reakriw güýçleiň wektor jemine deňdir.

MESELELER

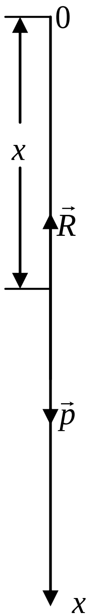
1. Massasy 1g. bolan şarik agyrlyk güýjiniň täsiri astynda ýokardan aşak gaçýar we oňa howanyň garşylyk güýji täsir edýär. Şeýlelikde şarigiň hereketi

$$x = 490t - 245\left(1 - e^{-2t}\right)$$

deňleme bilen aňladylýar, bu ýerde x - santimetrde, t - sekuntlarda, Ox oky wertikal aşak ugrukdyrlan. $g = 980 sm/sek^2$ göz öňüne tutup howanyň R garşylyk güýjüni dinalarda kesgitlemeli.

Çözülişi : Dinamikanyň esasy deňlemesine görä :

$$m\ddot{x} = P - R$$



Indi hereketiň deňlemesinden $\ddot{x}$ kesgitläliň :

$\dot{x} = 490 + 490e^{-2t}$

$\ddot{x} = -980e^{-2t}$

Onda $R = mg - m\ddot{x}$

$R = m(g - \ddot{x}) = m\left(980 + 980e^{-2t}\right)$

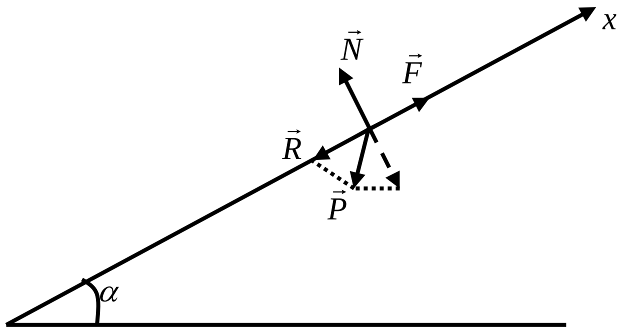
$R = 2m\left(490 + 490e^{-2t}\right) = 2m\vartheta = 2\vartheta$

$R = 2\vartheta$

2. Agyr M nokat gorizont bilen α burç emele getirýän ýapgyt tekizlik boýunça ýokary süýşýär. Nokadyň başlangyç tizligi $\vartheta_0 = 15 m/sek$. Sürtülme koeffisienti $f = 0{,}1$, $\alpha = 30^\circ$. Nokat durýança näçe ýol geçer? Nokat şol ýoly näçe wagtda geçer?

Çözülişi : $T = \dfrac{\vartheta_0}{W}$, $S = \dfrac{\vartheta_0^{\ 2}}{2W}$ formulalardan peýdalanýarys.

Çyzgydan görnüşi ýaly nokada dört sany güýç täsir edýär : $\overline{F}$ - hereketlendiriji güýç, $\overline{R}$ - garşylyk güýji, $\overline{P}$ - agyrlyk güýji we $\overline{N}$ - tekizligiň normal reaksiýasy, öňden bilşimiz ýaly $R = fN$, onda



$$F - R - P\sin\alpha = 0$$
$$F = fN + P\sin\alpha$$
$$m\ddot{x} = fP\cos\alpha + P\sin\alpha$$
$$m\ddot{x} = mg\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$
$$\ddot{x} = w = g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$

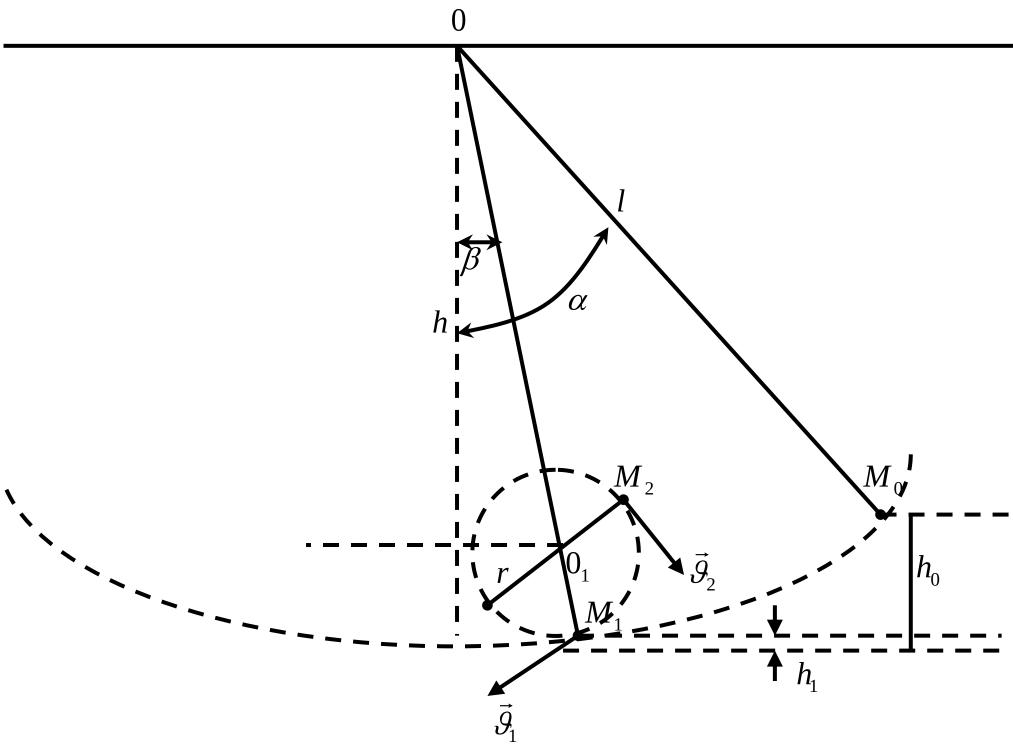
Onda $T = \dfrac{\vartheta_0}{W} = \dfrac{\vartheta_0}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} = 2{,}61sek$

$$S = \frac{\vartheta_0^{\ 2}}{2W} = \frac{\vartheta_0^{\ 2}}{2g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} = 19{,}55m$$

3. Gozganmaýan O nokatda uzynlygy l bolan OM ýüpüň kömegi bilen m massaly M ýük asylypdyr. Başlangyç momentde OM wertikal bilen α burç emele getirýär we M ýüküň tizligi nula deň. Soňraky hereketinde ýüp ugry ýüküň hereket edýän tizligine perpendikulýar bolan

hem-de ýagdaýy h=00, we β polýar koordinatalary bilen kesgitlenýän inçejik O_1 sime gabat gelýär. OM ýüküň şol gabat gelen simiň daşyna saralmagy üçin ýeterlik bolan α burçuň iň kiçi bahasyny tapmaly hem-de ýüpüň sime gabat gelen momentinde çekiş güýjüniň üýtgemesini tapmaly. Simiň ýogynlygyny hasaba almaýarys.

Çözülişi : Çyzgydan :



$$h_0 = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$$
$$h_1 = l - l\cos\beta = l(1-\cos\beta)$$

$$r = l - h = l\left(1 - \frac{h}{l}\right)$$

$$\vartheta_1^{\ 2} = 2g(h_0 - h_1) = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\frac{m\vartheta_2^{\ 2}}{r} = mg$$

$$\vartheta_2^{\ 2} = gr$$

Mehaniki energiýanyň saklanma kanunyna görä :

$$\frac{m\vartheta_2^{\ 2}}{2} + 2mgr = \frac{m\vartheta_1^{\ 2}}{2} + mgr(1 - \cos\beta)$$

Bu ýerden

$$\vartheta_2^{\ 2} = \vartheta_1^{\ 2} - 2gr(1 + \cos\beta)$$

$$gr = \vartheta_1^{\ 2} - 2gr(1 + \cos\beta)$$

$$gr = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha) - 2gr(1 + \cos\beta)$$

Bu ýerden

$$0 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha) - 2gr(1 + \cos\beta) - gr$$

Ýa-da

$$0 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha) - 2gl\left(1 - \frac{h}{l}\right)(1 + \cos\beta) - gl\left(1 - \frac{h}{l}\right)$$

$$0 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha) - 2gl\left(1 - \frac{h}{l}\right)\left(1 + \cos\beta + \frac{1}{2}\right)$$

$$0 = 2gl\cos\beta - 2gl\cos\alpha - 2gl\left(1 - \frac{h}{l}\right)\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right)$$

$$\cos\alpha = \cos\beta - \left(1 - \frac{h}{l}\right)\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right) - \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right]$$

$$\Delta P = m\vartheta_1^2\left(\frac{1}{l-h}-\frac{1}{l}\right) = 2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)$$

4. Massasy m=2 bolan material nokat merkezi güýjiň täsiri astynda güýjiň täsir merkezinden daşlaşýar, özem şol hereketiň bütin dowamynda onuň tizligi aralygyň üçünji derejesine proporsionaldyr. Başlangyç ýagdaýda $r_0 = 3m$, $\vartheta_0 = 4m/sek$ bilip we güýji diňe merkezden nokada çenli r aralyga bagly hasap edip, şol güýjiň ululygyny tapmaly.

Çözülişi : Goý, k tizligiň aňlatmasynda proporsionallygyň koeffisienti bolsun, onda :

$$\vartheta = \frac{dr}{dt} = kr^3\ ,\quad \vartheta_0 = kr_0^{\ 3},\quad 4 = 27k$$

Nokadyň herekediniň differensial deňlemesi

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\frac{d\vartheta}{dt} = m\frac{d\vartheta}{dr}\vartheta = 2*3kr^2\vartheta$$

Bu ýerden

$$F = \left[m\frac{d^2r}{dt^2}\right]_{r=3} = 2*3*\frac{4}{27}*9*4 = 32kg$$

5. Massasy m_1 bolan şar massasy m_2 bolan dynçlyk ýagdaýyndaky şary merkezi urgy bilen urýar. Urgydan soň m_1 öz ýerinde galýar. m_1 we m_2 massalaryň gatnaşygyny kesgitlemeli.

Çözülişi : Iki şara hem bir sistema hökmünde seredýäris. Urgynyň ugry boýunça daşky güýçler ýokdur, şonuň üçin bütin sistemanyň hereket mukdarynyň artdyrmasy nula deňdir. Urga çenli tizlikleri ϑ_1 we ϑ_2 bilen, urgydan soňky tizlikleri bolsa u_1 we u_2 bilen belläliň, onda :

$$m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Mundan başga-da :

$$u_2 - u_1 = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

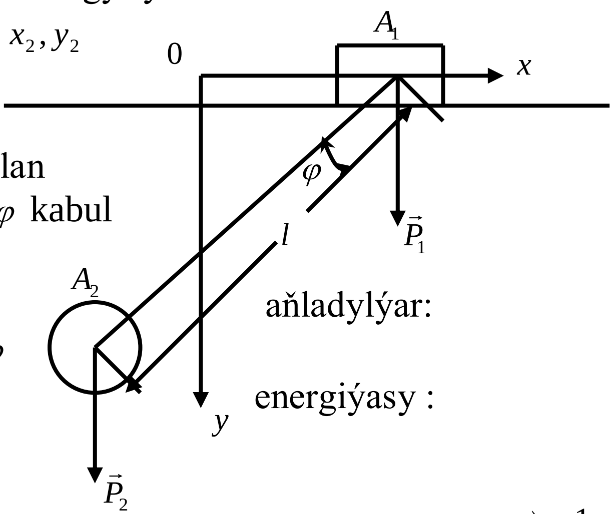
K- dikeldiş koeffisienti ;
Şerte görä $\vartheta_2 = 0$, $u_1 = 0$ bolany üçin :

$$u_2 = k\vartheta_1, \quad m_1\vartheta_1 = m_2 k u_1$$

$$\frac{m_1}{m_2} = k$$

6. Biri gorizontal göni boýunça sürtülmesiz typýan we beýlekisi onuň bilen agramsyz sterjeniň kömegi bilen birleşdirlen we wertikal tekizlikde yrgyldyly hereket edýän iki A_1 we A_2 jisimleriň sistemasynyň hereketini derňemeli.

Çözülişi : A_1 we A_2 jisimleriň agyrlyk merkezleriniň koordinatalaryny x_1, y_1 we x_2, y_2 bilen belläliň. Berlen sistemanyň iki erkinlik derejesi bar; umumylaşdyrlan koordinatalar diýip x_1 we φ kabul edeliň; onda x_2 we y_2 koordinatalar şeýle aňladylýar:



$$x_2 = x_1 - l\sin\varphi, \quad y_2 = l\cos\varphi$$

Her bir jisimiň kinetik energiýasy :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^{\,2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2\left(\dot{x}_2^{\,2} + \dot{y}_2^{\,2}\right) = \frac{1}{2} m_2\left(\dot{x}_1^{\,2} + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right) = \frac{1}{2} m$$

Doly kinetik energiýa:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^{\ 2} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos\varphi$$

Potensial energiýa bolsa edil ýönekeý mýatnigiňki ýaly bolar : $P = -m_2 g l \cos\varphi$

Proizwodlaryny düzeliň :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi\,; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi\,; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0\,; \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = m_2 g l \sin\varphi$$

Lagranjyň iki deňlemesini alýarys :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$$

Olar şeýle sistema getirilýär :

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi\right) - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

Bularyň birinjisini integiriläp x_1-i tapýarys :

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin\varphi$$

Bu ýerden sistemanyň inersiýa merkeziniň wertikal boýunça hereket edýändigi gelip çykýar: Ikinji deňlemede

$\sin\varphi \approx \varphi$ we $\cos\varphi \approx 1$ hasap edip ony aşakdaky görnüşe getirýäris :

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{g}{l}\varphi = 0$$

Bu bolsa erkin yrgyldynyň deňlemesidir. Onuň periody :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)g}}$$

7. Potensail güýçleriň meýdanynda hereket edýän m massaly erkin material nokat üçin Gamiltonyň deňlemesini düzeliň. Bu halda nokadyň ýagdaýy üç x, y, z bagly däl koordinatalar bilen kesgitlenýär. Nokadyň kinetik energiýasy :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Potensial energiýasy bolsa - $u(x, y, z)$. Bu ýerde u güýç meýdanynyň potensialy. Doly energiýasy :

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - u(x, y, z)$$

H funksiýany almak üçin E aňlatmasynda tizlikleriň ýerine impulslary girizmeli. Onda alarys :

$$P_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$P_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$P_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Bu ýerden :

$$\dot{x} = \frac{P_x}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{P_y}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{P_z}{m}$$

Bulary E aňlatmasynda ýerine goýsak

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}\right) - u(x, y, z)$$

Gamiltonyň deňlemesi şeýle görnüşe gelýär :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_x} \quad \text{we ş.m.} \quad \text{we} \quad \frac{dP_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{we ş.m.}$$

Ýa-da

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P_x}{m} \qquad \frac{dP_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{P_y}{m} \qquad \frac{dP_y}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{P_z}{m} \qquad \frac{dP_z}{dt} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

P_x, P_y, P_z bahalaryny ýerine goýsak Nýutonyň deňlemelerini alarys :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, \; m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \; m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Edebiýat.

Esasy edebiýatlar:

1. Gurbanguly Berdimuhamedow, ,,Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary,'' Aşgabat,2007.
2. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow.Gysgaça terjimehal. Aşgabat,2007.
3. ,,Halkyň ynam bildireni''.Aşgabat,2007.
4. Gurbanguly Berdimuhammedow, ,,Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr''. Aşgabat,2007.
5. ,,Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy.'' Aşgabat,2007.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow, ,,Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhybelentligiň ýurdy,''Aşgabat,2007.
7. Gurbanguly Berdimuhamedow.Eserler ýygyndysy.Aşgabat,2007.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň ýurdy täzeden galdyrmak baradaky syýasaty.Aşgabat,2007.

9. ,,Parahatçylyk, döredijilik,progress syýasatynyň dabaralanmagy.’’Aşgabat,2007.
10. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Umumymilli ,,Galkynyş’’ Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary v gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlislerinde sözlän sözi.
11. ,,Täze Galkynyş eýýamy. Wakalaryň senenamasy-2007 ýyl.’’Aşgabat, 2008.
12. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap.Saýlanan eserler. I tom.Aşgabat, 2008.
13. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap.Saýlanan eserler. II tom.Aşgabat, 2009.
14. Türkmenistanyň Prezidentiniň permanlary, kararlary we görkezmeleri, mejlisiniň maglumatlary, namalary. Aşgabat 1991-2009 ýyllar.
15. Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2003.
16. Bat M.I. Djanelidze G,Ýu Kelzon A.S. Nazary mehanika mysallarda we meselelerde.tom I, II, III Moskwa 1975.
17. Çetaýew. N.G. Nazary mehanika Mokwa 1978
18. Buhgols. N.N Nazary mehanikanyň esaslary I.II bölek Moskwa 1972.
19. Golubýew.G.W Nazary mehnaika, Moskwa 1961.
20. Zykowskyý.N.E Teoretiki mehanika, Moskwa 1952 Lelingrad.

21. Zernow.B.S. Nazary mehanikadan meseleler ýygyndysy I,II bölüm. Moskwa 1931 Lelingrad
22. Kosmodemýanskiý.A.A Nazary mahanikanyň kursy, I,II bölüm. Moskwa 1965
23. Losýanskiý.L.G, Lurýe.A.I Nazary mehanika kursy I,II bölüm Moskwa 1954
24. Meşerskiý.I.W Nazary mehanikadan meseleler ýygyndysy Moskwa 1988
25. Suslow.G.K Nazary mehanika, Moskwa 1946. Lelingrad
26. Timolow.E.D Nazary mehanika Tomsk 1966
27. Turbin.B.I Nazary mehanika, Moskwa 1959

Goşmaça edebiýatlar:

1. H.A.Gulamow. Matematika fakultetiniň studentleri üçin nazary mehanikadan metodiki görkezme (Kinematika) Aşgabat 1980.
2. H.A.Gulamow. Matematika fakultetiniň studentleri üçin nazary mehanikadan metodiki görkezme (Statika) Aşgabat 1980.
3. H.A.Gulamow. Matematika fakultetiniň studentleri üçin nazary mehanikadan metodiki görkezme (Dinamika)Aşgabat 1981.

MAZMUNY:

16. Gaty jisimiň gozganmaýan nokadyň töwreginde aýlanmasynyň analitik
öwrenilişi.
17. Rewalsyň teoremasy.
18. Gaty jisimiň gozganmaýan nokadyň töwreginde aýlanma hereketiniň
mgnowen burç tizlenmesi.
19. Erkin gaty jisim hereketi.
20. Nokadyň çylşyrymly hereketi. Wektoryň doly we lokal önümi.
21. Çylşyrymly hereketiň tizkliklerini we tizlenmelerini goşmak hakdaky
teoremalar. Koriolisiň teoremasy.
22. Statika. Güýçleriň görnüşleri. Baglanşyklar. Baglanşyklaryň reaksiýasy.
Erkin we erkin däl jisimler.
23. Elementar statika. Statikanyň aksiomalary we kesgitlemeleri.
24. Parallel güýçleri goşmak. Bir tarapa ugrukdyrylan iki sany parallel güýçleri
goşmak.
25. Ululyklary deň bolmadyk garşylykly taraplara ugrukdyrylan iki sany parallel
güýçleri goşmak.
26. Güýjiň nokada we oka görä momenti.
27. Güýç we onuň momenti.
28. Jübüt güýçleri goşmak we olaryň deňagramlaşmak şerti.
29. Erkin güýçleriň ulgamynyň deňagramlaşmagynyň zerur we ýeterlik şerti.
30. Erkin güýçleriniň ulgamynyň inwariantlary.

31. Statik kesgitli we kesgitsiz meseleleri. Analitik statika. Iş, kuwwat, kinetik
energiýanyň deňlemesi we mehaniki ene4rgiýanyň saklanma kanuny.
32. Mümkin süýşmeleriň prinsipi.
33. Mümkin süýşmeleriň prinsipini umumylaşdyrylan koordinatalarda aňlatmak.
34. Lagranžyň 1-nji jyns deňlemeleri.
35. Dinamika. Erkin materialn nokadyň we mehaniki ulgamyň dinamikasy.
Dinamikanyň esasy kanunlary.
36. Dinamikanyň esasy teoremalary. Hereket mukdary hakyndaky teoremalar.
37. Kinetik moment hakyndaky teoremalar.
38. Kinetik energiýa hakyndaky teoremalar.
39. Dinamiki ululyklar.
40. Nokadyň göni çyzykly hereketi.
41. Material nokadyň örän uly beýiklikden aşak gaçmagy.
42. Dinamikanyň esasy iki meselesi.
43. Erkin material nokadyň merkezi güýjiň täsiri astynda hereketi. Bineniň
formulalary.
44. Planetalaryň hereketi. Kepleriň kanunlary we Nýutonyň bütindünýä
dartylma kanuny.
45. Iki jisim meselesi we Kepleriň üçünji kanuna düzediş.
46. Erkin däl material nokadyň we ulgamyň dinamikasy.
47. Erkin däl nokat üçin kinetik energuiýanyn üýtgemek hakdaky teorema.
48. Matematiki maýetnik maýatnik.
49. Dalamberiň prinsipi.

50. Nokadyň otnositel hereketi.
51. Dalamberiň – Logranžyň deňlemesi (dinamikanyň simwolik deňlemesi)
52.Golonom sistemanyň hereketiniň umumylaşdyrylan koordinatalardaky deňlemeleri
53.Logranžyň ikinji jyns deňlemeleri.
54.Kinetik energiýanyň we Logranžyň funksiýasynyň umumylaşdyrylan koordinatalarda aňladylyşy
55.Energiýanyň integraly
56.Energiýanyň umumylaşdyrylan interaly
57.Sistemanyň potensial güýçleriň täsiriniň astynda garşylykly sredada kiçi yrgyldylaury
58.Absalýut gaty jisimiň dinamikasy
59.Inersiýanyň momentleri.(massalaryň geometriýasy)
60.Inersiýanyň birinji derejeli momentleri
61.Inersiýanyň ikinji derejeli momentleri
62.Inersiýanyň momentleri hakda teoremalar
63.Inersiýanyň ellipsoidi
64.Gozganmaýan okuň töwereginde aýlanýan absalýut gaty jisimiň kinetik momenti we kinetik energiýasy
65.Fiziki maýatnik
66.Sinhron maýatnikler
67.Ugry teoriýasy.Material nokadyň urgy teoriýasy.Nokadyň gozganmaýan üstde maýyşgak we maýyşgak däl urgylary. Dikeldiş koeffisneti.
68.Sistemanyň urgy teoriýasy.
69.Karionyň urgy hakda teoramalary.
70.Sistemanyň urgydaky hereket mukdarynyň we kinetik momentiniň üýtgemegi hakdaky teoremalar.
71.Gozganmaýan bir nokady bolan absalýut gaty jisimiň hereketi.Eýleriň kinematik jemlemeleri.