A. Aşyrow, H.Geldiýew

Funksional analiz we integral deňlemeler boýunça meseleler we gőnükmeler ýygyndysy

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat-2010

Aşyrow A., Geldiýew H. Funksional analiz we integral deňlemeler boýunça meseleler we gőnükmeler ýygyndysy. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw kitaby. - Aşgabat, 2010

Giriş

Häzirki zaman matematika biliminde funksional analiza wajyp orun degişlidir. Soňky wagtlarda funksional analiziň ideýalarynyň we metodlarynyň matematikanyň (diňe bir matematikanyň hem däl) dürli bölümlerine içgin aralaşmagy bu derse bolan ünsi has hem güýçlendirdi.

Emma şeýlede bolsa bu ders boýunça okuw kitaplary ýetmezçilik edýär. Bu okuw kitaby agzalan kemçilikleri aradan aýyrmak boýunça edilen ilkinji synanşykdyr. Bu ýygyndyda funksional analiziň esasy bölümleri boýunça dürli derejedäki kynçylykly meseleler we gönükmeler ýygnanandyr.

§ 1. Metrik giňişligiň kesgitlenişi

1.Metrik giňişligiň aksiomalarynyň aşakdaky iki aksioma ekwiwalentdigini subut etmeli:

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$ 2) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(y,z).$

2. Metrik giňişlikde islendik x,y,z,t dőrt nokatlar üçin

$$\left|\rho(x,z)-\rho(y,t)\right|\le\rho(x,y)+\rho(z,t)$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

3. Eger A boş bolmadyk kőplük bolsa, onda R metrik giňişlige degişli islendik x,y nokatlar üçin

$$\left|\rho(x,A)-\rho(y,A)\right|\le\rho(x,y)$$

deňsizligiň dogrudygyny subut etmeli.

4. Aşakdaky ρ (x,y) funksiýalaryň haýsysy R kőplükde uzaklygy kesgitleýär?

1) $\rho(x,y)=|x-y|.$ 2) $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|.$

3) $\rho(x,y)=|\sin(x-y)|.$ 4) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}.$

5) $\rho(x,y)=|x-y|^3.$ 6) $\rho(x,y)=(x^2+2y^2)|x-y|.$

7) $\rho(x,y)=|x-y|^{1/4}.$ 8) $\rho(x,y)=|x^7-y^7|.$

9) $\rho(x,y)=|e^x-e^y|.$ 10) $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\ne y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$

11) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|^{1/2}}{1+|x-y|^{1/2}}.$ 12) $\rho(x,y)=|x-y|^{3/2}.$

13) $\rho(x,y)=(x-y)^2.$ 14) $\rho(x,y)=arctg|x-y|.$

Allaberdi Aşyrow, Hajymuhammet Geldiýew

Funksional analiz integral deňlemeler boýunça meseleler we gönükmeler ýygyndysy

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw kitaby

5. Aşakdaky getirilen ρ (n,m) funksiýalaryň N natural sanlaryň köplüginde uzaklygy kesgitleýändigini görkezmeli:

1) $\rho(n,m)=\dfrac{|m-n|}{m\cdot n}.$ 2) $\rho(n,m)=\begin{cases}0, & n=m,\\ 1+\dfrac{1}{n+m}, & n\neq m.\end{cases}$

6. Aşakdaky ρ (x,y) funksiýalaryň haýsysy R^4-de uzaklygy kesgitleýär?

1) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}|x_k-y_k|.$ 2) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{4}|x_k-y_k|.$

3) $\rho(x,y)=\left\{\sum\limits_{k=1}^{4}(x_k-y_k)^2\right\}^{1/2}.$ 4) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}|x_k-y_k|^{1/2}.$

5) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{4}|x_k-y_k|^{1/k}.$ 6) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}k\cdot|x_k-y_k|^{1/8}.$

7) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}\dfrac{|x_k-y_k|^{1/8}}{1+|x_k-y_k|^{1/8}}.$

8) $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+\max\limits_{2\le k\le 4}\left(\dfrac{1}{k}\cdot|x_k-y_k|^{1/2}\right).$

9) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 3}|x_k-y_k|.$

10) $\rho(x,y)=\dfrac{|x_1-y_k|}{1+|x_1-y_1|}+\sum\limits_{k=2}^{4}k^2\cdot|x_k^3-y_k^3|.$

7. [a,b] kesimde kesgitlenen we üznüksiz funksiýalaryň köplüginde aşakdaky funksiýalaryň haýsysy metrika bolýar?

1) $\rho(x,y)=|x(t)-y(t)|.$ 2) $\rho(x,y)=\sup\limits_{a\le t\le b}[x(t)-y(t)]^2.$

3) $\rho(x,y)=\left|\int\limits_a^b[x(t)-y(t)]dt\right|.$ 4) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|dt.$

5) $\rho(x,y)=\dfrac{\sup\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}{1+\sup\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}.$

8. Aşakdaky getirilen ρ(x,y) funksiýalaryň haýsysy [0,1] kesimde üznüksiz differensirlenýän ähli funksiýalaryň $C^1[0,1]$ kőplüginde uzaklygy kesgitleýär?

1) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|.$

2) $\rho(x,y)=\int\limits_0^1 |x(t)-y(t)|dt.$

3) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|.$

4) $\rho(x,y)=\max\left\{\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|,\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|\right\}.$

5) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 0,5}|x(t)-y(t)|.$

9. Goý položitel bahany kabul edýän $f:X\to R$ (X-erkin kőplük) funksiýa berlen bolsun.

$$\rho(x,y)=\begin{cases} f(x)+f(y), x\ne y,\\ 0 \quad , \qquad x=y\end{cases}$$

funksiýanyň metrikanyň aksiomalaryny kanagatlandyrýandygyny gőrkezmeli.

10. Hakyky sanlaryň kőplüginde

$$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$$

funksiýanyň uzaklyk bolýandygyny subut etmeli.

Mazmuny

Edebiýat

1. Антоневич А.Б, Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения
по функциональному анализу.- Минск: Вышейшая, школа, 1978.-
208с.

2. Терногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и
упражнения по функциональному анализу.- М.:Наука, 1984.-256 с.

3. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу.-М.:
Просвещение, 1981.-271 с.

4. Методические указания и задания к лабораторным работам по
функциональному анализу и интегральным уравнениям
/Состав: Ашыров О., Ашыралыев А.,Гелдиев Х., Дурдыев Н.,
Имамбердиев Б., Худайкулыев Г.-Ашгабад: МНО ТССР.-1990.-56с.

11. Hakyky sanlaryň köplüginde $\alpha > \frac{1}{2}$ bolanda

$$\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{(1+x^2)^{\alpha} \cdot (1+y^2)^{\alpha}}$$

funksiýanyň metrikanyň aksiomalaryny kanagatlandyrmaýandygyny subut etmeli.

12. Goý, X tekizlikde koordinata başlangyjynda geçmeýän ähli gőni çyzyklaryň kőplügi bolsun. Bu kőplükde $\ell_1 : x\cos\alpha_1 + y\sin a_1 - \rho_1 = 0,\quad \ell_2 : x\cos\alpha_2 + y\sin a_2 - \rho_2 = 0$ (bu ýerde $0 \le a_1 2\pi,\ 0 \le a_2 < 2\pi,\ \rho_1 > 0, \rho_2 > 0)$ iki gőni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy aşakdaky formulalar bilen kesgitläliň:

1) $\rho_1(\ell_1, \ell_2) = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)^2 + (\sin a_2 - \sin a_1)^2 + (\cos a_2 - \cos a_1)^2}.$

2) $\rho_2(\ell_1, \ell_2) = |\rho_2 - \rho_1| + |\sin a_2 - \sin a_1| + |\cos a_2 - \cos a_1|.$

3) $\rho_3(\ell_1, \ell_2) = |\rho_2 - \rho_1| + |\sin a_2 - \sin a_1|.$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 metrikalar bolýarmy?

13. Goý, A_R $\quad |z| < R(0 < R \le \infty)$ tegelekde birbahaly we analitik ähli funksiýalaryň kőplügi bolsun.

Metrikany

$$\rho(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |x(z) - y(z)|}$$

formula bilen girizeliň, bu ýerde r_k - R-de monoton artýan položitel sanlaryň yzygiderligi.

Metrikanyň aksiomalaryny barlamaly.

14. Goý, f funksiýa $R^+ = \{x \in R : x \ge 0\}$ – kőplükde üznüksiz differensirlenýän we aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan bolsun:

1) f(0)=0 we x>0 üçin f(x)>0.

2) $x \ge 0$ bolanda f(x) kemelmeýär.

3) x>0 bolanda $\frac{f(x)}{x}$ artmaýar.

$\rho(x,y) = f(|x-y|)$ funksiýanyň metrikany kesgitleýändigini subut etmeli.

17. Goý, f funksiýa R^+ – de iki gezek üznüksiz differensirlenýän we

1) f(0)=0 we x>0 bolanda f(x)>0.
2) f(x) kemelmeýär.
3) x>0 bolanda $f''(x) \le 0$

şertleri kanagatlandyrýan bolsun. $\rho(x,y) = f(|x-y|)$ funksiýanyň R-de metrikany kesgitleýändigini subut etmeli.

15.Eger metrik giňişligiň ähli boş bolmadyk bőlek kőplüklerinde $A \subset R$ we $B \subset R$ iki kőplügiň arasyndaky uzaklyk $d(A,B) = \inf_{x \in A} \rho(x,y)$ formula boýunça $y \in B$ kesgitlenýän bolsa, onda bu bőlek kőplükleriň kőplügi metrik giňişlik bolarmy?

16. Coý, X kőplükde $\rho(x,y)$ metrika berlen bolsun. X kőplükde aşakdaky $\rho_1(x,y)$ funksiýalaryň metrika bolýandygyny subut etmeli:

1) $\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+p(x,y)}$.
2) $\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$.
3) $\rho_1(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$.

17. Eger X kőplükde $\rho_1,...\rho_n$ metrikalar bolsa, onda islendik $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ položitel sanlar üçin $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i(x,y)$ funksiýanyň hem X kőplükde metrika bolýandygyny subut etmeli.

12. 1) $A^{-1}x(t) = \int_0^t \ell^{-4(t-\tau)} x(\tau)d\tau$. 2) $A^{-1}x(t) = \int_0^t \ell^{t^2-\tau^2} x(\tau)d\tau$.

3) $A^{-1}x(t) = \int_0^t \ell^{t^3-\tau^3} x(\tau)d\tau$. 4) $A^{-1}x(t) = \int_0^t \frac{t+1}{(\tau+1)} x(\tau)d\tau$.

5) $A^{-1}x(t) = \int_0^t \frac{t^2+1}{(\tau^2+1)^2} x(\tau)d\tau$.

15. $(AB)^{-1}x(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+1}$, $(BA)^{-1}x(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{t+1}$.

20. $R(B)CE = \{y \in C[1,2] : y' \in C[1,2], y(1) = 0\}$,

$B^{-1}y(t) = \frac{1}{\sin t} \frac{d}{dt}[y(t) \cdot \sin t]$.

3) $A_n = (2/\ell)^{n-1} t\ell^{\tau}$.

4) $A_n = (2/3)^{n-1}(1+t)(1+\tau)$.

5) $A_n = 2^{n-2}\ \pi^{n-1} \cdot t \cdot (2\sin\tau - \tau)$.

6) $A_n = (2/3)^{n-1} t^2 (1-3\tau)$.

7) $A_n = |\pi - \tau| \cos t \cdot 4^{n-1}$.

8) $A_{2n+1} = (-8/3)^n (2t-\tau),\ A_{2n} = (-4)^n \cdot (2/3)^{n-1}(t\tau + 1/3)$.

9) $A_n = t(\ell^{\tau} - 1)(3/4)^{n-1}$.

10) $A_{2n+1} = (-1/2)\cos(t-\tau)\cdot(-\pi/4)^{n-1},\ A_{2n} = \sin(t-\tau)\cdot(\pi/4)^n$

11) $A_{2n+1} = (0{,}5 - \ell^{\pi}/2)^{n-1} \ell^t \cos\tau$.

12) $A_n = (\pi^2/2 - 2)^{n-2} \cdot (\pi t - 2)\cdot(\pi/2 - \sin\tau)$.

§ 13

4. $A^{-1}y = y(t) - \int_0^t \ell^{\tau - t} y(\tau)d\tau$.

5. $A^{-1}y = y(t) - \dfrac{2}{\ell^2 - 1}\int_0^1 y(s)\ell^{s+t} ds$.

6. Hawa.

7. $A^{-1}(t) = \int_0^t sh(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

8. 1), 2), 5) ýok. 3), 4), 6 hawa.

9. $(A_j^{-1}x(t) = x'(t)$.

11. $B^{-1}x(t) = x(\sqrt[3]{t})$.

12. $A^{-1}x(t) = x(t) + \int_0^t \ell^{t-\tau} x(\tau)d\tau$.

18. Goý, X kőplükde $\{\rho_n\}$ metrikalaryň yzygiderligi berlen bolsun.

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)}$$

funksiýanyň hem X kőplükde metrika bolýandygyny subut etmeli.

19. C[0,1] giňişlikde aşakdaky funksiýalaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly

1) $x(t) = t^3,\ y(t) = t^5$.

2) $x(t) = \sin\pi t,\ y(t) = \cos\pi t$.

20. Goý, $C'[0,1]$ giňişlikde $x(t) = t^3,\ y(t) = 0$ funksiýalar berlen bolsun. Onda aşakdaky berlen $\rho(x,y)$ metrikalar boýunça $\rho(x,y)$ uzaklygy tapmaly:

1) $\rho(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t) - y(t)|$. 2) $\rho(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$.

3) $\rho(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t) - y(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t) - y'(t)|$.

4) $\rho(x,y) = \max\left\{\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t) - y(y)|, \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t) - y'(t)|\right\}$.

§ 2. Metrik giňişlikde ýygnanmaklyk.

1. Metrik giňişlikde ýygnanýan yzygiderligiň çäklenen kőplükdigini subut etmeli.
2. Metrik giňişlikde ýygnanýan yzygiderlikleriň predeliniň ýeke-täkdigini subut etmeli.
3. Eger $x_n \to x, y_n \to y$ bolsa, onda $\rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(x,y)$ bolýandygyny subut etmeli

4. Eger $x_n \to x, \rho(x_n, y_n) \to 0$ bolsa,onda $y_n \to x$ bolýandygyny subut etmeli.

5. Goý, ℓ_1 giňişligiň $x_n(x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{ni}, ...)(n = 1,2,...)$ we $a(a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ elementleri bolsun. Onda $\forall i \in N$ üçin $a_i = \lim_{n+\infty} x_{ni}$ predeliň barlygyndan $\rho(x_n, a) \to 0$ gelip çykýarmy?

6. Eger

1) $x_n = \left(\frac{n^3}{n^4+1}, \frac{10n+6}{2n}, -3 + \frac{2}{9^n}, n^2 - 6n\right)$.

2) $x_n = \left(\frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}, \sin\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$

bolsa, onda metrikalary

1) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{4} |x_k - y_k|$.

2) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (x_k - y_k)^2}$.

3) $\rho(x, y) = \max_{1 \le k \le 4} |x_k - y_k|$.

bolanda, R^4 giňişlikde yzygiderlikleriň predelini tapmaly.

7. $x_n = \left(\frac{n+5}{n}, \frac{n}{n+1}\right), n = 1,2,...$nokatlaryň yzygiderligi haýsy nokatda koordinatalar boýunça ýygnanýar? R^2, R_1^2 we R_∞^2 giňişliklerde x_n yzygiderlikler gőrkezilen nokada ýygnanarmy?

8. $x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...\right)$

$x^{(2)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$

41. $\alpha > 0$. $\|A\| = 1$. 42. $0 < \alpha. \le 1$, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

43. $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha - 2\beta \le 1$, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

§ 12.

7. 1) deňőlçegli. 2) gowşak.
8. 1) gowşak. 2) güýçli. 3) güýçli. 4) deňőlçegli. 5) ýygnanmaýar. 6) gowşak. 7) deňőlçegli 8) ýygnanmaýar. 9) güýçli.
24. 1) gowşak. 2) güýçli. 3) güýçli. 4) gowşak. 5) gowşak.

25. $A^n x(t) = \int_0^t A_n(t, \tau) x(\tau) d\tau,$

(1-4) we (6-8) ýagdaýlarda

$A_n(t, \tau) = A(t, \tau)(t - \tau)^{n-1} / (n-1)!,$

5) ýagdaýda

$A_n(t, \tau) = (t - \tau)^{2n-1} / (2n-1)!,$

26. $A^n x(t) = \int_1^t \frac{\sin\xi}{\sin t} \cdot \frac{(t-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} x(\xi) d\xi.$

27. $A^n x(t) = \int_a^b A_n(t, \tau) x(\tau) d\tau,$

bu ýerde a,b degişli meseläniň şertindäki ýalydyr,

1) $A_{2n+1} = (-4/3)^n (t - \tau)$, $A_{2n} = (-2)^n \cdot (1/3 + t\tau) \cdot (2/3)^{n-1}$.

2) $A_{2n+1} = (2\pi)^{2n} (t + \sin\tau)$, $A_{2n} = (2\pi)^{2n-1} (1 + t\sin\tau)$.

4) $\|A\| = \frac{1}{2}\ell^3\left(1-\ell^{-2}\right).$ 5) $\|A\| = \pi.$ 6) $\|A\| = \pi.$

9. 1) $\|A\| = 1.$ 2) $\|A\| = 1.$ 3) $\|A\| = 1.$ 4) $\|A\| = 1.$ 5) $\|A\| = 1.$
6) $\|A\| = 1.$ 7) $\|A\| = 1/\sqrt{3}.$ 8) $\|A\| \le 1.$ 9) $\|A_\lambda\| = 1.$

10. $\sqrt{2(a^2+b^2)}.$ 11. Hawa. 12. $\|A\| = 4.$ 13. $\|A\| = \frac{1}{2}.$

14. $\|A\| = 3.$ 15. $\|A\| = 1.$ 16. $\|A\| = 3;$ $\|B\| = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$

17. 1) $\|A\| = 1.$ 2) $\|B\| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$ 3) $\|c\| = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$
4) $\|M\| = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$

18. 1) $\|A\| = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$ 2) $\|A\| = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$ 3) $\|A\| = 3.$
4) $\|A\| = 1.$

19. $\|A\| \sup\limits_k |\lambda_k|$ 20. $\|A\| = \frac{9}{4}.$ 22. $\|A\| = \frac{25}{24}.$

23. $\|A\| = \frac{3}{2}.$

24. $\|A\| = \frac{4}{3}.$ 25. $\|A\| = \frac{1}{2}.$

26. 1) $\|A\| = 2^{1/\rho}.$ 2) $\|A\| = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/\rho}.$

39. 1) $\|A\| = 1.$ 2) $\|A\| = 1.$

40. $\|A\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}.$

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{3^{n-1}}, \frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n+1}}, \ldots\right)$$

san yzygiderlikleriniň yzygiderligi berlen:

1) ol koordinatalar boýunça haýsy predele ýygnanar?
2) $R_1^\infty, R^\infty, R_\infty^\infty$ giňişlikleriň metrikalarynda berlen yzygiderlik şol bir predele ýygnanarmy?

9. Eger:

1) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right),\ R = R^2.$

1) $x_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+k}\right),\ R = R^k.$

2) $x_n = \frac{1}{n}\sin nt, R = c[0,1].$

3) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ R = R^1.$

4) $x_n = \left(\frac{n}{1+n}, \frac{n}{2+n}, \ldots, \frac{n}{k+n}, \ldots\right), R = \ell_2$

bolsa, onda $\{x_n\} \subset R$ yzygiderlikleri ýygnanmaklyga derňemeli.

10. C[0,1] we C_1[0,1] giňişlikleriň metrikalary boýunça berlen funksiýalaryň yzygiderliginiň f(x)=0 funksiýa ýygnanýandygyny barlamaly:

1) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},$

2) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},$

11. Goý $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \rho_1(x,y) = |x-y|$ we $\rho_2(x,y) = |tgx - tgy|$ bolsun. Onda ρ_1 we ρ_2 metrikalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli.

12. $C[0,1]$ we $C_1[0,1]$ metrik giňişlikleriň metrikalarynyň ekwiwalent däldigini subut etmeli.

Gőrkezme. Bu giňişliklerde

$$\varphi_n(t)=\begin{cases} nt, & 0\le t\le \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \dfrac{1}{n}\le t\le 1 \end{cases}$$

funksiýalaryň yzygiderligine garamaly.

13. Goý [0,1] kesimdäki n derejeli algebraik kőpagzalaryň hemmesiniň kőplügi X bolsun. Eger

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k,\quad Q(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k t^k$$

bolsa,onda

$\rho_1(P,Q)=\max\limits_{0\le t\le 1}|P(t)-Q(t)|$ we $\rho_2(P,Q)=\sum\limits_{k=0}^{n}|\alpha_k-\beta_k|$ iki metrikalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli.

14. $C^{(n)}[0;1]$ giňişlikde

$$\rho_1(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\max_{0\le t\le 1}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|,$$

$$\rho_2(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\max_{0\le t\le 1}\frac{\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|}{k!},$$

$$\rho_3(x,y)=\max_{0\le k\le n}\max_{0\le t\le 1}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|$$

metrikalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli.

15. C[0;1] giňişlikde $x_n(t)=t^n-t^{2n}$ funksiýalaryň yzygiderliginiň ýygnanmaýandygyny subut etmeli.

10. 1) Hawa. 2) Hawa. 3) Hawa.

11. 1) $\|f\|=1/2.$ 2) $\|f\|=1.$ 3) $\|f\|=\sqrt{2/3}.$

4) $\|f\|=\sqrt{2}.$ 5) $\|f\|=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\right)=\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}.$

6) $\|f\|=2.$ 7) $\|f\|=2.$ 8) $\|f\|=1.$

12. 1) $\|f\|=\dfrac{2}{3}.$ 2) $\|f\|=\dfrac{1}{2}.$ 3) $\|f\|=1.$ 4) $\|f\|=4.$

13. 1) $\|f\|=(2/3)^3.$ 2) $\|f\|=\int\limits_0^1\left|t-\dfrac{1}{3}\right|^2 dt.$

§ 11.

3. 1) $\|A\|=\sum\limits_{j=1}^{n}\max\limits_{1\le k\le m}|\alpha_{jk}|.$ 2) $\|A\|=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{k=1}^{m}|\alpha_{jk}|.$

3) $\|A\|=\max\limits_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le m}}|\alpha_{jk}|.$ 4) $\|A\|=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}|\alpha_{jk}|.$

4. $\rho\in C[a,b],\ \|A\|=\max\limits_{a\le t\le b}|\rho(t)|.$

7. 1) $\|A\|=1.$ 2) $\|A\|=1.$ 5) $\|A\|=1-\cos 1.$ 6) $\|A\|=\dfrac{2}{\pi}.$

6) $\|A\|=\left(\sqrt{2}\right)^7\dfrac{\pi^8}{\sqrt{63}}.$

8. 1) $\|A\|=1.$ 2) $\|A\|=1.$ 3) $\|A\|=(1+\beta)^{-1}.$

4. 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) 1. 5) $\frac{1}{2}$.

5. 1) Üznüksiz 2) Üznüksiz. 3) Gyzykly we üznüksiz. 4) Gyzykly.

6. 1) 2. 2) 1. 3) $\frac{1}{2}$. 4) $\frac{1}{2}$.

5) $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$.

7.
1) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = 1$.
2) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = \|y\|_{\ell\infty}$.
3) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\right)^{1/2}$.
4) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = 1$
5) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = \sqrt{2}$.
6) Çyzykly. 7) Üznüksiz. 8) Çyzykly.
9) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = \frac{2}{\pi}$.
10) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = 2$.
11) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = 2$.
12) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = 4\varepsilon^{-2}$.
13) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = 3$
14) Çyzykly we üznüksiz, $\|f\| = \int_0^1 / \rho(t) / dt$.

9. 1) $\|f\| = 2/3$. 2) $\|f\| = 4$. 3) $\|f\| = 2/\varepsilon$. 4) $\|f\| = 2$

16. M kőplükde ρ_1 we ρ_2 metrikalaryň ekwiwalent bolmagy üçin şeýle $\alpha > 0$ we $\beta > 0$ iki san tapylyp $\forall x, y \in M$ üçin

$$\alpha\rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y) \le \beta\rho_1(x, y)$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. ρ_1 we ρ_2 metrikalaryň ekwiwalent bolmagy üçin bn şertiň zerur däldigini gőrkezmeli.

§ 3. Metrik giňişlikde ýapyk we açyk köplükler

1. Eger:
1) $[0,1] \bigcup \{2\} \subset R^1$.
2) $(0,1] \setminus \{1\} \subset R^1$
3) $(0,4) \bigcap (2,5) \subset R^1$.
4) $\{1,2,3,4\} \subset R^1$.
5) $(0,5) \bigcup (7,10) \subset R^1$.
6) $\{x : x \in R^2, x = (x_1, x_2), |x_1| + |x_2| \le 3\}$.
7) $\left\{x : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2\right\}$.
8) $\left\{x : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3\right\}$.
9) $\{\varphi : \sin\varphi = 1, \varphi \in R^1\}$.
10) $\{x : x \in C[0,1], |x(t)| = |x| \le 5\}$,

bolsa, onda açyk we ýapyk kőplükleri gőrkezmeli.

2. Dürli metrik giňişliklerde M kőplük we x_o nokat berlen. Eger:

1) $M=(0,1), x_o=\frac{1}{2}$.

2) $M=[0,1], x_o=1$.

3) $M=\{x: x=(x_1,x_2)\in R^2, x_1^2+3x_2\le 2\}, x_o=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

4) $M=\{x(t): x(t)\le 1\}, x_o(t)=\sin t, M\subset C[0,1]$.

5) $M=\left\{x: x\in R^1\times C[0,1], x=(x_1,x_2), |x_1|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x_2(t)|\le 4\right\}$,
$x_o=(1,e^{-2t})$.

6) $M=\{x(t): |x(t)|\le 2, x(t)\in C[0,1]\}, x_o(t)=\sin t$ bolsa, onda M kőplük üçin x_o nokadyň içki nokat bolýandygyny barlamaly.

3. Goý, X erkin kőplük bolsun. Bu kőplükde

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, x\ne y,\\ 0, x=y\end{cases}$$

metrika kesgitlenen bolsun. X kőplügiň islendik bőlek kőplüginiň birwagtda açyk we ýapyk kőplük bolýandygyny subut etmeli.

4. Islendik metrik giňişlikde $B[x_o,r]$ açyk şaryň ýapagynyň $B[x_o,r]$ ýapyk şarda saklanýandygyny subut etmeli.

5. Metrik giňişlikde uly radiusly şar kiçi radiusly şaryň berk içinde saklanyp bilermi?

6. $\rho(n,m)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}, & m\ne n,\\ 0, & m=n\end{cases}$, metrikaly N natural sanlaryň kőplüginde biri-birinde saklanýan, radiuslary nola ymtylýan we birwagtda hemmesine degişli umumy nokady bolmadyk boş däl ýapyk şarlaryň yzygiderligini gurmaly.

$$x^{(n)}=\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n^3},0,0,\ldots\Bigg).$$

Onda c_0 we m giňişlikde $n\to\infty$ bolanda $x^{(n)}\to 0$ bolýar, ýőne ℓ_2 giňişlikde dargaýar.

27. 1) Ýok. 2) Hawa. 3) Ýok. 4) Hawa. 5) Hawa.
6) Hawa. 7) Hawa 8) Hawa 9) Hawa 10) Hawa
11) Hawa 12) Ýok. 13) Ýok. 14. Hawa 15) Hawa
16) Hawa. 17) Ýok. 18) Ýok. 19) Hawa. 20) Hawa.
21) Hawa. 22) Hawa. 23) Ýok. 24) Hawa.

§ 10

1) Çyzykly däl, üznüksiz.
2) Çyzykly, üznüksiz.
3) Çyzykly, üznüksiz däl.

2. 1) 1. 2) $\frac{1}{2}$. 3) 1. 4) Üznüksiz. 5) Üznüksiz.

3. 1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-2}\right)^{1/2}$. 2) $\sqrt{3}$. 3) 1. 4) $\max\limits_{1\le k\le n}|a_k|$.
5) $\sup\limits_{K\in N}|a_k|$.

§ 9

1.Ýok.

2.Hawa, kesgitleýär. Birlik şar depeleri (1,0), (0,1), (-1,0), (0,1) nokatlarda bolan kwadraty aňladýar.

4.Hawa.

5. 1) Ýok. 2) Ýok. 3) Hawa. 4) Hawa. 5) Ýok. 6) Hawa.

6. 1) Hawa. 2) Hawa. 3)Hawa.

10.Hawa.

15. Hawa.

19. 2), 7), 8), 9) normalar ekwiwalent, galan ýagdaýlarda ekwiwalent däl.

20. 2), 7), 8), 9) normalar ekwiwalent, galan ýagdaýlarda ekwiwalent däl

21. 2), 7), 8), 9) normalar ekwiwalent, galan ýagdaýlarda ekwiwalent däl

22. 1)-4) normalar ekwiwalent. $\{a_n\}$ yzygiderligiň çäklenendigini gőrkezmeli.

23. 1) -4) normalar ekwiwalent däl.

24. Normalar ekwiwalent.

26.1) , 3), 4)

$$x^{(n)} = \left(\underbrace{0,0,..,0,}_{2^2} \frac{1}{(2^n+1)}, \frac{1}{(2^n+2)}, ..., \frac{1}{(2^n+n)}, 0,0,.... \right).$$

Onda m, ℓ_2, C_0 giňişliklerde $n \to \infty$ bolanda $x^{(n)} \to 0$ bolýar, ýőne ℓ_1 giňişlikde dargaýar.

2), 5)

7. Natural sanlaryň mümkin bolan yzygiderliginiň X kőlüginde $x = (n_1, n_2, ..., n_k, ..), y = (m_1, m_2, ..., m_k, ..)$ elementler üçin $n_k \neq m_k$ bolanda iň kiçi indeksi $k_o(x, y)$ bilen belgiläliň. Goý, bu kőplükde

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{k_o(x, y)}, & x \neq y, \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

metrika kesgitlenen bolsun. Subut etmeli:

1) islendik *B(x,r)* açyk şar birwagtda ýapyk kőplük we $\forall y \in B(x, r)$ üçin *B(y,r)=B(x,r)*.
2) Islendik B[x,r] ýapyk şar birwagtda açyk kőplükdir we $\forall y \in B(x, r)$ üçin *B[y,r]=B[x,r]*.
3) Eger X kőplükde iki şaryň umumy nokady bar bolsa, onda olaryň biri beýlekisiniň içinde saklanýar.

8. Tassyklama dogrumy: “Iki köplügiň kesişmesiniň içki nokatlarynyň köplügi olaryň içki nokatlarynyň kesişmesine deňmi? “Şuňa meňzeş tassyklama köplükleriň tükeniksiz toplumy üçin dogrumy?

9. Tassyklama dogrumy: ”Iki köplügiň birleşmesiniň içki nokatlary olaryň içki nokatlarynyň birleşmesine deňmi”?

10 . Iki köplügiň birleşmesiniň araçäginiň olaryň araçäkleriniň birleşmesinde saklanýandygyny subut etmeli. Şuňa meňzeş tassyklamanyň köplükleriň tükeniksiz toplumy üçin elmydama dogry däldigini mysalda görkezmeli.

11. Her bir kőplügiň ýapagynyň ýapyk köplükdigini subut etmeli.

12.Her bir köplügiň araçäginiň ýapyk köplükdigini subut etmeli.

13 .R metrik giňişlikde ρ_1 we ρ_2 metrikalaryň ekwiwalentligi üçin ρ_1 metrika manysynda ýapyk R giňişlikdäki hemme bölek köplükleriň toplumynyň ρ_2 metrika manysynda ýapyk R

giňişlikdäki hemme bőlekkőplükler bilen gabat gelmegi zerur we ýeterlikdigini subut etmeli.

14. $r_1<r_2<....<r_n<.....$ şerti kanagatlandyrýan radiuslary bolan konsentrik töwerekleriň yzygiderligi tekizlikde berlipdir. Olaryň birleşmesi ýapyk köplük bolarmy?

15. Tekizlikde $r_1<r_2<....<r_n<.....$radiuslary bolan ýapyk konsentrik tegelekleriň yzygiderligi berlipdir.Olaryň birleşmesi ýapyk köplük bolýarmy? Ol açyk köplük bolýarmy?

16. Goý, f Ox okda kesgitlenen üznüksiz funksiýa bolsun. Ox okda $f(x)\geq a$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryň A_a köplüginiň ýapykdygyny subut etmeli.

17. Goý, f OX okda kesgitlenen üznüksiz funksiýa bolsun. OX okda $f(x)>a$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryň A_a köplüginiň açykdygny subut etmeli.

18.Goý [0,1] kesimde berlen f_o üznüksiz funksiýa bolsun. $\forall x\in[0,1]$ üçin $f(x)\leq f_o(x)$ şerti kanagatlandyrýan [0,1] kesimde üznüksiz f funksiýalaryň hemmesiniň M köplüginiň C[0,1] giňişlikde ýapykdygyny subut etmeli.

19. $\forall x\in[0,1]$ üçin A< f(x)<B (bu ýerde A<B berlen sanlar) deňsizligi kanagatlandyrýan [0,1] kesimde üznüksiz hemme f funksiýalaryň köplüginiň C[0,1] giňişlikde açykdygyny subut etmeli.

20.Goý, F [0,1] kesimde fiksirlenen üznüksiz funksiýa bolsun. $\forall x\in[0,1]$ üçin f(x)>F(x) deňsizligi kanagatlandyrýan hemme f funksiýalaryň köplüginiň C[0,1] giňişlikde açykdygyny subut etmeli.

21. Aşakdaky ýapyk köplügiň kesgitlemeleriniň deňgüýçlidigni subut etmeli:

1) eger köplük özüniň hemme gatyşma nokatlaryny saklaýan bolsa, onda oňa ýapyk köplük diýilýär;

2) eger köplük özüniň hemme predel nokatlaryny saklaýan bolsa, onda oňa ýapyk köplük diýilýär;

3) eger köplük özüniň hemme araçäk nokatlaryny saklaýan bolsa, onda ýapyk köplük diýilýär.

14. $f(x)=V_0^x[f]-\varphi(x)$ bu ýerde

$$V_0^x[f]=\begin{cases}1-\cos^2 x \ \ eger \ \ x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 1+\cos^2 x \ \ eger \ \ x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-2\cos^2 x \ eger \ \ x\in\left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 1 \quad eger \quad x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$$

15. $\sin x=\varphi(x)-\psi(x)$ bu ýerde

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x \ eger \ \ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 2-\sin x \ \ eger \ \ x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right] \\ 4+\sin x \ \ eger \ \ x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}0 \ eger \ \ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 2-2\sin x \ \ eger \ \ x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right] \\ 4 \ \ eger \ \ x\in\left(\dfrac{3}{2}\pi,2\pi\right]\end{cases}$$

16. $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ bu ýerde $\varphi(x)=\begin{cases}x^2 \ \ eger \ \ x\in[0,1), \\ 2 \ \ eger \ \ x=1,\end{cases}$

$$\psi(x)=\begin{cases}2x^2 \ \ eger \ \ x\in[0,1), \\ 2 \ \ eger \ \ x\in[1,2],\end{cases}$$

4. 1) $\{x_n\}$ predeli ýok, çünki ol fundamental däl;

$\{y_n\}$ yzygiderlik π sana ýygnanýar.

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell im_{n\to\infty} y_n = 0$ $(x = \pi \notin [0,\pi))$.

5. 2) hawa. 3), 4) –ýok. $p(t^n, t^{n+1}) \geq 1$ gőrkezmeli.

11. 1) doly. 3) doly däl. 2) doly däl. 3) doly däl. 4) doly.

14. 1) fundamental däl. ℓ_1-de ýygnanmaýar.

2) ℓ_2 giňişlikde ýygnanmaýar.

3) Ýygnanýar.

§ 6.

2. Gysyjy őwürme.
3. Ýok. Ýok.
4. Ýok. Ýok.
6. Hawa.

24. $x^* = 1 + \sqrt{2}.$

28. $x(t) = \dfrac{4}{21} t + 1.$

33. $x_{n_\circ}$ başlap, bu ýerde $n_\circ = \left[\dfrac{2}{\ell_g 6 - \ell_g 5}\right] + 1.$

36. Hawa.

§ 8

1. $|k| \cdot A$
2. 7
3. 23
8. Hökman däl.

22.R metrik giňişligiň ýapyk däl M bölek giňişliginiň doly giňişlik bolýandygyny subut etmeli.

23. Islendik köplügiň içki nokatlarynyň köplüginiň açyk köplükdigini subut etmeli.

24.A köplügiň A^o içki nokatlarynyň köplüginiň A köplünde saklanýan hemme açyk köplükleriň birleşmesidigni subut etmeli.

25. Metrik giňişligiň islendik A köplügi we $\forall \varepsilon > 0$ san üçin M köplügiň d(x,A)< ε deňsizligi kanagatlandyrýan x nokatlary bar bolsa onda onuň açyk köplükdigini subut etmeli.

26. Kesişmesi açyk bolmadyk açyk köplükleriň yzygiderligini gurmaly.

27.Tassyklama dogrumy: “Eger A ýapyk köplük bolsa, onda A köplügiň içki nokatlarynyň köplüginiň ýapagy A köplük bilen gabat gelýär”? Eger bu tassyklama nädogry bolsa, onda $A \subset [A^o]$ ýa-da $A \supset [A^o]$ gatnaşyklaryň biri ýerine ýetýär. Haýsysy?

28. Tassyklama dogrumy: ”Eger A açyk köplük bolsa, onda A köplügiň içki nokatlarynyň köplüginiň ýapagy A köplük bilen gabat gelýar “? Eger bu tassyklama nädogry bolsa, onda $A \supset [A^o]$ ýa-da $A \subset [A^o]$ gatnaşyklaryň biri ýerine ýetýär. Haýsysy?

29. Islendik A köplük üçin aşakdaky gatnaşyklaryň ýerine ýetýandigni subut etmeli:

1) $\left[\left[(A)^o\right]\right] \subset [A]$. 2) $[(A^o)] \supset A^o$

Ýone, deňlikler elmydama ýerine ýetmeýär. Görkeziň.

30.Goý, f [a,b] kesimde üznüksiz funksiýa we E_n $n \leq f(x) \leq n+1$ şerti kanagatlandyrýan [a,b] kesimdäki nokatlaryň köplügi bolsun. San okunda $E_1 U E_3\ U E_5 U \ldots U E_{2k-1} U \ldots$.köplügiň ýapykdygyny subut etmeli.

31. Hemme nokatlary üzňe bolan hasapsyz köplüge mysal getirmeli.

32. San okunda şeýle M köplügi gurmaly:

1) onuň ähli nokatlary üzňe.

2) onuň dürli nokatlarynyň arasyndaky uzaklygyň aşaky grany nola deň;

3) onuň san okunda predel nokatlary ýok.

33. Goý J san okunda (a,b) tükenikli interwal, birleşmesinde J-ni berýan ýapyk köplükleriň $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$artýan yzygiderligi berlen bolsun. Islendik $F \subset J$ ýapyk köplük iň bolmanda bir E_n-de saklanyp bilermi? Eger saklanýan bolsa subut etmeli, eger ýok bolsa onda mysal gurmaly.

34. Goý R- metrik giňişlik, Z-onuň bölek giňişligi bolsun. Z bölek giňişlikde $E \subset Z$ köplügiň açyk bolmagy üçin X giňişlikde şeýle G köplük tapylyp $E = G \bigcap Z$ bolmagy zerur we ýeterlikdir. Subut etmeli.

35. Goý R metrik giňişlikde Z bölekgiňişlikde $E \subset Z$ we R giňişlikde E ýapyk (ýa-da açyk) bolsun. Z bölekgiňişlikde E ýapyk (açyk) köplükdigini subut etmeli.

36. Goý R metrik giňişlikdäki Z ýapyk bölek giňişlikde (açyk bölek giňişlikde) E ýapyk (açyk) köplük bolsun. R giňişlikde E köplügiň ýapyk (açyk) köplündigini subut etmeli.

37. Goý, X we Y metrik giňişlikler, $X \times Y$ olaryň köpeltmek hasyly bolsun. Goý metrika

$$\rho_{X\times y}((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_y(y_1, y_2)$$

formula bilen girizilen bolsun. Eger X giňişlikde E ýapyk köplük, Y giňişlikde F ýapyk köplük bolsa, onda $X \times Y$ giňişlikde $E \times F$ köplügiň ýapykdygyny subut etmeli.

38. Eger R metrik giňişlikde B ýapyk bőlek köplük bolsa, onda $\forall A \subset R$ üçin $(A^o UB)^o = (AUB)^0$. Subut etmeli.

39. R metrik giňişligiň islendik Xo nokady üçin we islendik $A \subset R$ köplük üçin.

$$d(x_o, A) = d(x_o, \overline{A})$$

deňlik dogrumy?

40. R metrik giňişligiň islendik x_o nokady üçin we islendik $A \subset R$ köplük üçin.

$$d(x_o, A) = d(x_o, A^o)$$

deňlik dogrumy?

41. R metrik giňişlikde islendik ini A we B köplük üçin

Jogaplar we görkezmeler

§ 1

4. 1) metrika. 2) metrika. 3) metrika däl. 4) metrika. 5) metrika däl. 6) metrika däl. 7) metrika. 8) metrika 9) metrika. 10) metrika. 11) metrika. 12) metrika däl 13) metrika däl. 14) metrika.

6. 1) metrika. 2) metrika. 3) metrika. 4) metrika. 5) metrika 6) metrika. 7) metrika. 8) metrika 9) metrika däl. 10) metrika.

7. 1) metrika däl. 2) metrika däl. 3) metrika. 4) metrika. 5) metrika.

8. 1) metrika. 2) metrika. 3) metrika. 4) metrika. 5) metrika däl.

12. 1) hawa. 2) Hawa. 3) Ýok.

15. ýok.

19. 1) $\frac{6}{0,5}\sqrt{\frac{3}{5}}$. 2) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

20. 1) 1. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 4. 4) 3.

§ 4.

1. Fundamental. $x_o = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \in / R^2$.
2. 1-8, 10 giňişliklerde $\{x_n\}$ fundamental.
3. $x_o = (5, -1/3, 0, 0)$.

$$d(A,B)=d(A,\overline{B})=d(\overline{A},B)=d(\overline{A},\overline{B})$$
deňlik dogrudygny subut etmeli.

42. Metrik giňişlikde islendik iki A we B köplükler üçin deňligiň dogrudygny subut etmeli.

$$d(A,B)=d(A^o,B^o)$$

43. R metrik giňişlikde islendik iki kesişmeýän ýapyk F_1 we F_2 bölekköp- lükler üçin şeýle kesişmeýän açyk $G_1 \subset R$ *we* $G_2 \subset R$ köplükler bar bolup $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$ ýerine ýetýändir. Subut etmeli.

44. Doly metrik giňişlikde $\lim\limits_{n\to\infty} diamE_n = 0$ bolan $F_1 \supset F_2 \supset ....$ ýapyk kőplükleriň kemelýän yzygiderliginiň boş bolmadyk kesişmesiniň bardygyny subut etmeli.

45.Tassyklama dogrumy "Islendik doly metrik giňişlikde $F_1 \supset F_2 \supset ....$ ýapyk şarlaryň islendik kemelýän yzygiderliginiň kesişmesi boş däldir"?

46. Tassyklama dogrumy "Doly metrik giňişlikde $F_1 \supset F_2 \supset ....$ açyk şarlaryň kemelýän yzygiderliginiň $\lim\limits_{n\to\infty} diamE_n = 0$ bolanda boş bolmadyk kesişmesi bardyr?"

47. Goý,doly metrik giňişlikde açyk şarlaryň şeýle $F_1 \supset F_2 \supset ....$ yzygiderligi berlip,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} diamE_n = 0$ 2) $\forall_n$ üçin $\overline{E}_{n+1} \subset E_n$

şertler ýerine ýetýän bolsun. $\bigcap\limits_n E_n$ boş däldigini subut etmeli.

48. San okunda islendik boş bolmadyk açyk köplügi jübüt-jübütden kesişmeýan interwalwallaryň tükenikli ýa-da tükeniksiz toplumynyň hasaply ýa-da tükenikli sanysynyň birleşmesi görnüşinde aňladyp bilner. Subut etmeli.

49. [a,b] kesimi boş bolmadyk iki sany ýapyk kesişmeýän köplükleriň birleşmesi görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny subut etmeli.

50. [a,b] kesimi jübüt- jübütden kesişmeýän boş bolmadyk ýapyk köplükleriň hasaply birleşmesi görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny subut etmeli.

51. (a,b) interwaly jübüt-jübütden kesişmeýän ýapyk köplükleriň hasaply toplumynyň birleşmesi görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny subut etmeli.

52. R^1 san okuny jübüt-jübütden kesişmeýän boş bolmadyk ýapyk köplük- leriň hasaply toplumynyň birleşmesi görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny subut etmeli.

53. Predel köplügi boş bolan yzygiderlik gurmaly.

54. Predel kőplügi san oky bolan san yzygiderligini gurmaly.

55. Islendik yzygiderligiň predel köplüginiň ýapykdygyny subut etmeli.

56. Predel köplügi diňe bir nokat bolan dargaýan yzygiderlige mysal getirmeli.

§ 4. Metrik giňişlikde fundamental yzygiderlikler. Doly metrik giňişlik

1. $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ metrikaly $R = R^2$ giňişlikde

$$x_n = \left(\frac{n+5}{3n}, \frac{n-10}{n} \right)$$ yzygiderligiň fundamentaldygyny barlamaly we onuň (R^2, ρ) giňişlikde predelini tapmaly.

2. R^4 giňişlikde $x_n = \left(\frac{5n^2}{(n+3)^2}, -\frac{n+6}{3n}, \sin\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{3}{n^3}} \right)$ yzygiderligiň fundamentaldygyny barlamaly.

3. 1) $\rho(x,y) = \max\limits_{1 \le k \le 4} |x_k - y_k|$. 2) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{4} |x_k - y_k|$.

3) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{4} |x_k - y_k|^{1/k}$.

24. $C[0,\pi]$ giňişlikde

1) $Ax(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

2) $Ax(t) = \int\limits_0^{\pi} \ell^t \cos\tau\, x(\tau)d\tau$.

operatorlaryň R(A) bahalar ýaýlasyny tapmaly we olaryň ters operatorlarynyň bardygyny anyklamaly.

25. ℓ_2 giňişlikde

1) $Ax = \left(\frac{2\xi_1}{1!}, \frac{4\xi_2}{2!}, \ldots, \frac{2^n \xi_n}{n!}, \ldots \right)$.

2) $Bx = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{2\xi_2}{3}, \ldots, \frac{n\xi_n}{n+1}, \ldots \right)$.

3) $Cx = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \ldots, \frac{\xi_n}{n}, \ldots \right)$,

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots), \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \infty$$

deňlikler bilen kesgitlenýän operatorlaryň ters operatorlaryny tapmaly.

1) $Bx(t)=\int\limits_0^t \frac{\ell n(t+1)}{\ell n(\tau+1)}x(\tau)d\tau.$

2) $Bx(t)=\int\limits_0^t \ell^{t-\tau}x(\tau)d\tau.$

3) $Bx(t)=\int\limits_0^t \frac{1+t}{1+\tau}x(\tau)d\tau.$

4) $Bx(t)=\int\limits_0^t \frac{1+t^2}{1+\tau^2}x(\tau)d\tau.$

Wolterra operatorynyň R(B) bahalar ýaýlasyny we eger bar bolsa ters operatoryny tapmaly.

22. C[-1,1] giňişlikde

1) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1}(t-\tau)x(\tau)d\tau.$

2) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1}(2t-\tau)x(\tau)d\tau.$

3) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1}t\ell^{\tau}x(\tau)d\tau.$

4) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1}(t^2-\tau)x(\tau)d\tau.$

Fredgolm operatorlarynyň R(A) bahalar ýaýlasyny tapmaly we olaryň ters operatorlarynyň bardygyny anyklamalay

23. $C[-\pi,\pi]$ giňişlikde

1) $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\sin\tau)x(\tau)d\tau.$

2) $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t\sin\tau-\tau^2\sin t)x(\tau)d\tau.$

Fredgolm operatorlarynyň R(A) bahalar ýaýlasyny tapmaly we olaryň ters operatorlarynyň bardygyny anyklamaly

4) 4) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4} k\cdot|x_k-y_k|^{1/8}.$

metrikaly $/R^4$ giňişlikde $x_n=\left(\frac{2n^3}{(n+3)^3},-\frac{n^2+1}{4n^2},\sin\frac{1}{n^2},\sqrt{\frac{4}{n^5}}\right)$ yzygiderligiň predelini tapmaly.

4. Goý, $x_{2n}=1/(2n)$, $x_{2n+1}=\pi-1/(2n+1)$, $y_n=\pi-1/n$ bolsun.

Eger:

1) $M=[0,\pi]$; $p(x,y)=|x-y|$.

2) $M=[0,\pi)$; $p(x,y)=|\sin(x-y)|$.

bolsa, onda (M,ρ) giňişliklerde $\{x_n\}$ we $\{y_n\}$ yzygiderlikleriň predelini tapmaly we fundamentaldygyny barlamaly.

5. $C^1[0,1]$ giňişlikde

1) $\rho(x,y)=\int\limits_0^1 |x(t)-y(t)|dt.$

2) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|.$

metrikalarda $x_n(t)=t^n$ yzygiderligiň fundamentaldygyny barlamaly.

6. Her bir ýygnanýan $\{x_n\}CR$ yzygiderligiň fundamentaldygyny subut etmeli.

7. 1) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}\frac{|x_k-y_k|^{1/8}}{1+|x_k-y_k|^{1/8}}.$

3) $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+\max\limits_{2\le k\le 4}\left(\frac{1}{k}\cdot|x_k-y_k|^{1/2}\right).$

4) $\rho(x,y)=\frac{|x_1-y_1|}{1+|x_1-y_1|}+\sum\limits_{k=2}^{4}k^2\cdot|x_k^3-y_k^3|.$

metrikalarda R^4 giňişligiň doludygyny barlamaly.

8. $\rho(x,y)=|arctx-arctgy|$ metrikaly R^1 giňişligiň doludygyny barlamaly.

9. 1) $\rho(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt.$

2) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|.$

3) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\left\{\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|,\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|\right\}.$

metrikalarda $C^1[0,1]$ giňişligiň doludygyny barlamaly.

10. $C_2[0,1]$ giňişligiň doly däldigini subut etmeli.

11. Aşakdaky (X,ρ) metrik giňişlikleriň haýsysy doly:

1) $X=R,\quad \rho(x,y)=|x-y|.$

2) $X=Q,\quad \rho(x,y)=|x-y|.$

3) $X=c_1[-1,1]\quad \rho(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|dt.$

4) $X=\{x(t)\in C[a,b]:\forall t\in[a,b],\ 0\le x(t)\le 1\},$

$\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$?

12. Aşakdaky metrik giňişlikleriň haýsysy doly:

1) $X=R,\ \rho(x,y)=|\ell^x-\ell^y|.$

2) X-[a,b] kesimde kesgitlenen algebraik kőpagzalaryň kőplügi, $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|.$

3) X- D kőplükde çäklenen ähli san funksiýalaryň kőplügi, $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in D}|x(t)-y(t)|.$

formulalar bilen kesgitlenýän A we B operatorlara garalyň. $(AB)^{-1}$ *we* $(BA)^{-1}$ nämä deň ?

16. Goý, R_x Banah giňişligi, $\{A,b\}\subset Z(R_x,R_x)$, $A^{-1}\in Z(R_x,R_x)$we $\|B\|\le\|A^{-1}\|^{-1}$ bolsun. A+B operatoryň üznüksiz ters operatorynyň bardygyny subut etmeli.

17. $A:\ell_2\ni(\xi_1,\xi_2,....)\to(\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,...)\in\ell_2,\sup\limits_{k\ge1}|\alpha_k|<\infty$ operatora garalyň. Subut etmeli:

1) $\inf\limits_{k\ge1}|\alpha_k|>0$ bolanda A operatoryň üznüksiz ters operatorynyň bardygydyr.

2) eger $\alpha_k=\dfrac{1}{k},k\ge1$ bolsa, onda A operatoryň R(A) bahalar ýaýlasy ℓ_2 giňişlikde ýapyk däldir.

18. Goý, R_x Banah giňişligi bolsun. Eger A^2 operatoryň üznüksiz ters operatory bar bolsa, onda $A\in Z(R_x,R_x)$ operatoryň hem üznüksiz ters operatorynyň bardygyny subut etmeli.

19. Goý, C[0,1] giňişlikde $Ax(t)=\rho(t)x(t)$, $t\in[0,1]$ deňlik bilen kesgitlenen A operator berlen bolsun, bu ýerde $\rho-C[0,1]$ giňişlikden berlen funksiýadyr. Islendik $t\in[0,1]$ üçin $\rho(t)\neq 0$ bolanda A operatoryň ters operatorynyň bardygyny subut etmeli.

20. C[1,2] giňişlikde $Bx(t)=\int_1^t\dfrac{\sin\tau}{\sin t}x(\tau)d\tau$ Wolterra operatorynyň R(B) bahalar ýaýlasyny we ters operatoryny tapmaly.

21. C[0,2] giňişlikde

10. Goý, R_{x1} – 9-njy mysaldaky giňişlik we $Ax(t)=x'(t)-x(t),\ t\in[0,1]$ formula bilen kesgitlenýän $A:R_{x1}\to C[0,1]$ operatorlar berlen bolsun. Onuň üznüksiz A^{-1} operatorynyň bardygyny we

$$Ax^{-1}x(t)=\int_0^t \ell^{t-\tau}x(\tau)d\tau,\ t\in[0,1]$$

deňligi subut etmeli.

11. Goý, C[-1,1] deňlikde $Ax(t)=x(t^2),\ Bx(t)=x(t^3), t\in[-1,1]$ formula bilen kesgitlenýän A we B operatorlar berlen bolsun. A opertoryň ters operatorynyň ýokdugyny, B operatoryň bolsa ters operatorynyň bardygyny subut etmeli. B^{-1} tapmaly.

12. $Ax(t)=x(t)-\int_0^t x(\tau)d\tau,\ t\in[0,1]$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operator üçin A^{-1} tapmaly.

13. 1) $Ax(t)=x'(t)+4x(t).$ 2) $Ax(t)=x'(t)-2tx(t).$

3) $Ax(t)=x'(t)-3t^2x(t).$ 4) $Ax(t)=(t+1)x'(t)-x(t).$

5) $Ax(t)=(t^2+1)x'(t)-2tx(t).$

deňlikler bilen kesgitlenýän $A:R_{x1}\to C[0,1]$ (R_{x1}-giňişligiň kesgitlenişi 9-njy mysalda berlendir) operatoryň üznüksiz ters operatorynyň bardygyny subut etmeli. A^{-1} tapmaly.

14. Goý, $L_2[0,1]$ giňişlikde $Ax(t)=\rho(t)x(t),\ t\in[0,1]$ deňlik bilen kesgitlenýän A operator berlen bolsun, bu ýerde $\rho-C[0,1]$ giňişlikden berlen funksiýadyr. Islendik $t\in[0,1]$ üçin $\rho(t)\neq 0$ bolanda A operatoryň üznüksiz ters operatorynyň bardygyny subut etmeli.

15. C[0,1] Banah giňişliginde
$Ax(t)=(t+1)x(t),\ Bx(t)=x(t^2),\ t\in[0,1]$

4) $X=R_1^n,\ \rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|,$

$x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n).$

5) X-nola ýygnanýan san yzygiderlikleriniň kőplügi,
$\rho(x,y)=\sup_{k\in N}|x_k-y_k|,\ x=(x_1,x_2,...,x_n...),\ y=(y_1,y_2...,y_n...)$?

13. Aşakdaky (X, ρ) metrik giňişlikleriň haýsysy doly:

1) $X=R,\ \rho(x,y)=|arct(x-y)|.$

2) $X=N,\ \rho(n,m)=\dfrac{|n-m|}{n\cdot m}.$

3) X- san okundaky kesimleriň kőplügi,
$\rho([a,b],[c,d])=|a-c|+|b-d|.$

4) $X=C^1[a,b], \rho(x,y)=\max\left\{\sup_{0\le t\le T}|x(t)-y(t)|,\sup_{0\le t\le T}|x'(t)-y'(t)|\right\}$

5) X-ýygnanýan san yzygiderlikleriň kőplügi,
$\rho(x,y)=\sup_{n\in N}|x_n-y_n|,\ x=(x_1,x_2,...,x_n,...), y=(y_1y_2,...,y_n...)$?

14. Eger:

1) $R=\ell_1,\ x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}}_{n},0,0...\right).$

2) $R=\ell_2, x_n\left(\underbrace{\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}}_{n^2}0,0,...\right)$

3) $R=\ell_3,\ x_n=\left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,0,...\right)$

bolsa, onda R metrik giňişlikde $x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_k^{(n)},...\right)$ nokatlaryň yzygiderligi ýygnanýarmy?

15. Goý, $\sup_n (\alpha_n|\xi_n| < +\infty$ şerti kanagatlandyrýan $x_n = (\xi_1, \xi_2, ...)$ san yzygiderlikleriniň hemmesiniň kőplügi n_α (bu ýerde $\alpha = \{\alpha_n\}$ – berlen položitel sanlaryň yzygiderligi), $\beta = \{\beta_n\}$ yzygiderlik bolsa $L = \sup_n \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$ ululyk tükenikli bolan položitel sanlaryň yzygiderligi bolsun. n_α kőplükde metrikany

$$\rho(x, y) = \sup_n (\beta_n|\xi_n - \eta_n|)$$

formula bilen girizeliň. n_α giňişligiň doludygyny subut etmeli.

16. ℓ_1 giňişligiň doludygyny subut etmeli.

17. ℓ_2 giňişligiň doludygyny subut etmeli

18. $C'[a,b]$ giňişligiň doly däldigini subut etmeli

19. $C[a,b]$ giňişligiň doludygyny subut etmeli

20. [0,1] kesimde üznüksiz differensirlenýän ähli funksiýalaryň $C_0^1[0,1]$ giňişliginde metrikany

$$\rho(x, y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$$

formula bilen girizeliň. Bu giňişligiň doly däldigini subut etmeli.

21. Goý, X-ähli (a,b) san jübütleriniň kőplügi bolsun. $\forall x(a_1, b_1),\ y(a_2, b_2)$ üçin metrikalary

$$\rho_1(x, y) = \max\{|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\}.$$

$$\rho_2(x, y) = |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|.$$

$$\rho_3(x, y) = \sqrt{|a_2 - a_1|^2 + |b_2 - b_1|^2}$$

giňişligini R_x bilen belgiläliň. Bu giňişlikde normany $\|x\| = \sum_{k=0}^{2} \max_{0 \le t \le 1} |x^{(k)}(t)|$ formula bilen kesgitläliň. Onda $Ax(t) = x''(t) - x(t),\ t \in [0,1]$ deňlik bilen kesgitlenýän $A: R_x \to C[0,1]$ operatoryň ters operatoryny tapmaly.

8.

1) $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$.

2) $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$.

3) $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, ...)$.

4) $Ax = (\xi_1 + 2\xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...)$.

5) $Ax = (\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3,\ 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, ...)$.

6) $Ax = (\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, ...)$.

bu ýerde $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, deňlik bilen kesgitlenýän $A: \ell_2 \to \ell_2$ operatoryň üznüksiz ters operatorynyň bardygyny barlamaly.

9. Goý, x(0)=0 şerti kanagatlandyrýan [0,1] kesimde üznüksiz differensirlenýän x funksiýalaryň R_{xo} *we* R_{x1} giňişliginde normalar degişlilikde $\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|$ we $\|x\|_1 = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| + \max_{0 \le t \le 1} |x'(t)|$ formulalar bilen kesgitlenýän bolsun.

$$Ax_j(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau,\ t \in [0,1],\ i = 0,1$$

deňlikler bilen kesgitlenýän $A_j: C[0,1] \to R_j$ operatorlar üçin ters operatorlary tapmaly. A_1^{-1} oparatoryň üznüksizdigini, A_0^{-1} oparatoryň üznüksiz däldigini subut etmeli.

§ 13. Ters operatorlar

1. Goý, R Banah giňişliginde A we B tçyzykly operatorlar berlen bolsun.
   Eger A we B operatorlaryň ters operatorlary bar bolsa, onda AB operatoryň $B^{-1}\ A^{-1}$ deň ters operatorlarynyň bardygyny subut etmeli;
2. Goý, C[0,1] giňişlikde

$$Ax(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau,\ t\in[0,1]$$

deňlik bilen kesgitlenýän A operator berlen bolsun. A operatoryň üznüksiz ters operatorynyň ýokdugyny subut etmeli.

3. $Ax(t)=\dfrac{dx}{dt}$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C^1[0,1]\to C[0,1]$ operatoryň sag ters operatorynyň bardygyny, ýőne ň ýokdugyny subut etmeli.

4. $Ax(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau+x(t)$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operatoryň A^{-1} operatoryny tapmaly.

5. $Ax(t)=x(t)+\int_0^1 \ell^{s+t}x(s)ds$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operatoryň A^{-1} operatoryny tapmaly.

6. $Ax(t)=\int_0^t \ell^{-|s-t|}x(s)ds$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[0,1]\to C^2[0,1]$ operatora garalyň. Onuň A^{-1} operatory barmy ?

7. $x(0)=0,\ x(1)=0$ şertleri kanagatlandyrýan we [0,1] kesimde iki gezek üznüksiz differensirlenýän x funksiýalaryň

formulalar bilen girizeliň. ρ_1,ρ_2 we ρ_3 metrikalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli. $(X,\rho_1),(X,\rho_2),(X,\rho_3)$ giňişlikleriň doludygyny gőrkezmeli.

22 . m giňişligiň doludygyny subut etmeli.

23. Eger φ we ψ funksiýalaryň arasyndaky uzaklyk deregine

$$\rho(\varphi,\psi)=\sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)|$$

sany kabul etsek, onda E kőplükde çäkli ähli funksiýalaryň M (E) kőplüginiň metrik giňişligi emele getirýändigini subut etmeli. Bu giňişligiň doludygyny gőrkezmeli.

24. Eger (f_1,g_1) we (f_2,g_2) funksiýalar jübütiniň arasyndaky uzaklyk deregine

$$p((f_1,g_1),\ (f_2,g_2))=\sup_{a\le x\le b}\left(|f_1(x)-f_2(x)|+|g_1(x)-g_2(x)|\right)$$

san kabul edilse, onda [a,b] kesimde üznüksiz ähli funksiýalar jübütiniň F[a,b] kőplüginiň metrik giňişlik bolýandygyny subut etmeli. Bu giňişligiň dolulygyny gőrkezmeli.

25. C[a,b] giňişligiň E bőlek giňişligi $\forall x\in[a,b]$ üçin $A\le f(x)\le B$ (a we B berlen sanlar) şerti kanagatlandyrýan ähli üznüksiz f funksiýalardan düzülipdir. Onuň doly giňişlik bolýandygyny subut etmeli.

26. Goý, F we G funksiýalar [a,b] kesimde üznüksiz we bütin [a,b] kesimde $F(x)\le(x)$ şerti kanagatlandyrýan bolsun. $F(x)\le f(x)\le G(x)$ şerti kanagatladyrýan ähli üznüksiz f funksiýalardan düzülen giňişlik C[a,b] giňişligiň bőlek giňişligi bolsun. Bu giňişligiň doludygyny subut etmeli.

27. Goý, X kőplükde $\rho_1,\ we\ \rho_2$ metrikalar ekwiwalent bolsunlar. (X,ρ_1) giňişligiň doludygyndan (X,ρ_2) giňişligiň doludygy gelip çykýarmy?

28. [a,b] kesimde üznüksiz őnümi bar bolan ähli üznüksiz funksiýalaryň kőplügini $C^1[a,b]$ bilen belgiläliň. $C^1[a,b]$ kőplükde

$$\rho_1(t,g)=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|+\sup_{a\le x\le b}|f'(x)-g'(x)|,$$

$$\rho_2(t,g)=\sup_{a\le x\le b}(|f(x)-g(x)|+|f'(x)-g'(x)|)$$

formula bilen iki metrika girizeliň. Bu metrikalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli. (C_1,ρ_1) *we* (C_2,ρ_2) giňişlikleriň doludygyny gőrkezmeli.

29. [a,b] kesimde üznüksiz $f_1, f_2,\dots f_n,\dots$ funksiýalaryň ähli yzygiderlikleri- niň kőplügini X bilen belgiläliň. Coý, $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{a\le x\le b}|f_n(x)|$ hatar ýygnanýan bolsun.

$$\rho(\{f_1\},\{g_i\})=\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{a\le x\le b}|f_i(x)-d_i(x)|$$

metrikaly (X, ρ) metrik giňişligiň doludygyny subut etmeli.

30. Coý, R metrik giňişligiň E we F doly bőlek giňişlikleri bolsun. EUF we $E\bigcap F$ hem doly giňişlikdigini subut etmeli. E/F tapawudyň doly däl giňişlik bolup bilýändigini mysalda gőrkezmeli.

31. Goý, (X,ρ_x) *we* $(\mathrm{Y},\rho_{\mathrm{Y}})$ doly metrik giňişlikler bolsunlar.

$$\rho_{X\times\mathrm{Y}}((x_1,y_1),(x_2y_2))=\sqrt{(\rho_\times(x_1,x_2))^2+(\rho_{\mathrm{Y}}(y_1,y_2))^2}$$

metrikaly $X\times\mathrm{Y}$ giňişligiň doly metrik giňişlikdigini subut etmeli.

§ 5. Separabel metrik giňişlikler

1. Aşakdaky kőplükler dykyzmy?
   1) San okunda rasional sanlaryň kőplügi.
   2) C[a,b] giňişlikde hemme kőpagzalaryň kőplügi.
2. Üzňe nokatlary bolmadyk her doly metrik giňişligiň hasapsyzdygyny subut etmeli.

8) $Ax(t)=\int_{-1}^{1}(2t-\tau)x(\tau)d\tau$

9) $Ax(t)=\int_{0}^{1}t\left(\ell^{\tau}-\frac{1}{2}\right)x(\tau)d\tau.$

10) $Ax(t)=\int_{0}^{\pi}\sin(t-\tau)x(\tau)d\tau.$

11) $Ax(t)=\int_{0}^{\pi}\ell^{t}\cos\tau x(\tau)d\tau.$

12) $Ax(t)=\int_{0}^{\pi}(t-\sin\tau)x(\tau)d\tau$

bolsa, onda Fredgolm operatorynyň A^n derejesini tapmaly.

28. ℓ_2 giňişlikde

1) $Ax=\left(\frac{2x_1}{1!},\frac{4x_2}{2!},\dots,\frac{2^n x_n}{n!},\dots\right).$

2) $Bx=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3},\dots,\frac{nx_n}{n+1},\dots\right).$

3) $Cx=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{4},\dots,\frac{x_n}{n},\dots\right).$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots),\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$ operatorlar berlen. Bu operatorlaryň n-nji derejesini tapmaly.

1) $A(t,\tau)=\ell n(t+1)/\ell n(\tau+1)$.

2) $A(t,\tau)=\ell xp\{t-\tau\}$.

3) $A(t,\tau)=(1+t)/(1+\tau)$.

4) $A(t,\tau)=(1+t^2)/(1+\tau^2)$.

5) $A(t,\tau)=(t-\tau)$.

6) $A(t,\tau)=3^{t-\tau}$.

7) $A(t,\tau)=\ell xp\{t^2-\tau^2\}$.

8) $A(t,\tau)=(2+\cos t)/(\alpha+\cos\tau)$,

bolsa, onda A^n tapmaly.

26. $Ax(t)=\int\limits_1^t \dfrac{\sin\tau}{\sin t}x(\tau)d\tau$ Wolterra operatorynyň A^n derejesini tapmaly.

27. Eger:

1) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1}(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

2) $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\sin,\tau)x(\tau)d\tau$.

3) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1} t\cdot\ell^{\tau}x(\tau)d\tau$.

4) 4) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{0}(1+\tau)(1+t)x(\tau)d\tau$.

5) $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t\sin\tau-\tau^2\sin t)x(\tau)d\tau$.

6) 6) $Ax(t)=\int\limits_{-1}^{1}(t^2-\tau)x(\tau)d\tau$.

7) $Ax(t)=\int\limits_{0}^{2\pi}|\pi-\tau|\cos tx(\tau)d\tau$.

3. C[0,1] we C[0,2] metrik giňişlikleriň izometrikdigini gőrkezmeli.
4. Eger R rasional sanlaryň metrik giňişligi bolsa, onda onuň doldurmasyny tapmaly.
5. Eger $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|P_n(t)-Q_n(t)|$ metrikaly [a,b] kesimde berlen hemme kőpagzalaryň metrik giňişliginiň doldurmasyny tapmaly.
6. Aşakdaky metrik giňişlikleriň separabeldigini gőrkezmeli:

1) R^1. 2)$R_p^2(p\ge1)$. 3)R_∞^n. 4)$C[a,b]$. 5)$C_p[a,b](p\ge1)$. $\ell_p(p\ge1)$.

7. m metrik giňişligiň separabel däldigini subut etmeli.
8. m giňişligiň bőlekgiňişligi bolan c metrik giňişligiň separabeldigini subut etmeli.
9. $C^k[a,b]$ giňişlikde hemme kőpagzalaryň M kőplüginiň hemme ýerde sykdygyny subut etmeli.
10. Goý, n$_o$ berlen natural san we $L_{no}=\{x=\{x_n\}\in\ell_2 : x_n=0,\ eger\ n>n_o\ bolsa\}$ bolsun. L_{no} kőplügiň ℓ_2 giňişlikde hiç ýerde syk däldigini subut etmeli.
11. $\rho(x,y)=\sup\limits_n\dfrac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ metrikaly ähli san yzygiderlikleriniň S giňişliginiň separabel däldigini subut etmeli.
12. $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ metrikaly S giňişliginiň separabeldigini subut etmeli.
13. Hakyky sanlaryň kőplüginde $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|$ metrikaly giňişligiň doldurmasyny tapmaly.
14. Goý, f funksiýa R metrik giňişligi $\overline{R}$ doly metrik giňişlige izometrik őwürýän bolsun (ýagny $\rho_{\overline{R}}(f(x_1),f(x_2))=\rho_R(x_1,x_2),\forall x_1,x_2\in R)$. $\rho_{\overline{R}}$ – metrikaly

[f(R)] kőplügiň R giňişligiň doldurmasy bolýandygyny subut etmeli.

15. $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in R}|x(t)-y(t)|$ metrikaly $\lim\limits_{|t|\to+\infty} x(t)=0$ şerti kanagatlandyrýan san okunda üznüksiz funksiýalaryň $C_o(-\infty;+\infty)$ giňişliginiň separabeldigini subut etmeli.

16. C_o giňişliginiň separabeldigini subut etmeli.

17. $$\rho((f_1,g_1),(f_2,g_2))=\max_{a\le x\le b}|f_2(x)-f_1(x)|+\max_{a\le x\le b}|g_2(x)-g_1(x)|$$
metrikaly [a,b] kesimde üznüksiz funksiýalar jübütiniň giňişliginiň separabeldigini subut etmeli.

18. $\forall\varepsilon>0$ üçin R giňişlikde hasaply ε-toryň bolmagy onuň separabelligi üçin zerur we ýeterlikdigini subut etmeli.
19. Islendik kompakt giňişligiň separabel giňişlik bolýandygyny subut etmeli.
20. R separabel giňişlikde ýatan islendik M kőplük őzünde syk hasaply N bőlekkőplügi saklaýandygyny subut etmeli.
21. Separabel metrik giňişlikdäki hemme açyk bőlekkőplükleriň toplumynyň kuwwatynyň kontinnum kuwwatdan uly däldigini subut etmeli.
22. Separabel metrik giňişlikdäki hemme ýapyk bőlekkőplükleriň toplumy -nyň kuwwatynyň kontinnum kuwwatdan uly däldigini subut etmeli.
23. Islendik separabel metrik giňişligiň kuwwaty kontinnum kuwwatdan uly däldigini subut etmeli.
24. Eger R kontinnum kuwwatly separabel giňişlik bolsa, onda onuň hemme ýapyk kőplükleriniň toplumynyň hem kontinnum kuwwatynyň bardygyny subut etmeli.
25. R doly separabel metrik giňişlikde M ýapyk kőplük ýa-ha hasply, ýa-da kontinnum kuwwatlydygyny subut etmeli.

23. Goý, $0\in(a,b)$ we $\delta(x)=x(0)$ funksional C [a,b] giňişlikde kesgitlenen bolsun. Goý, $\{\varphi_n(t)\}\subset C[a,b]$ yzygiderlik
   1) $|t|>\dfrac{1}{n}$ bolanda $\varphi_n(t)\ge 0$;
   2) $\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt=1$

şertleri kanagatlandyrýan bolsun. Onda
$$f_n(x)=\int_a^b \varphi_n(t)x(t)dt,\ \ \forall x\in C[a,b]$$
funksionallaryň yzygiderliginiň δ funksionala gowşak ýygnanýandygyny subut etmeli.

24. Aşakdaky $\{A_n, n\ge 1\}\subset Z(R,R)$ operatorlaryň yzygiderliginiň güýçli, gowşak, deňőlçegli ýandygyny barlamaly:
   1) $R=L_2(R^1),\ A_n x(t)=x(t+n).$
   2) $R=L_2(R^1),\ A_n x(t)=\begin{cases}x(t), t\ge n,\\ 0,\quad t<n.\end{cases}.$
   3) $R=L_2(R^1),\ A_n x(t)=\dfrac{1}{1+|t-n|}x(t).$
   4) $R=L_2(R^1),\ A_n x(t)=\begin{cases}x(t-n), t\ge n,\\ 0,\quad t<n.\end{cases}.$
   5) $R=L_2(R^1),\ A_n x(t)=\ell^{-(t-n)^2}x(t).$

25. Goý, $0\le t\le 2$,
$$Ax(t)=\int_0^t A(t,\tau)x(\tau)d\tau$$
Wolterra operatory. Eger

17. Coý, R Banah giňişligi, $\{A_n, n \geq 1\} \subset Z(R, R)$ we her bir $x \in R$ üçin $\{A_n x, n \geq 1\}$ yzygiderlik R giňişlikde ýygnanýan bolsun. $\exists A \in Z(R, R): A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$ güýçli ýygnanýandygyny subut etmeli.
18. ℓ_2 giňişlikde aşakdaky yzygiderlikleriň haýsysy güýçli, gowşak ýygnanýar?
1) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$.
2) $x_n = \left(0, 0, \ldots, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$.
3) $x_n = \left(\underbrace{1, \ldots 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$.
19. $L_2[0,1]$ giňişlikde aşakdaky yzygiderlikleriň haýsysy güýçli, gowşak ýygnanýar?
1) $x_n(t) = t^n + t^{n+1}$. 2) $x_n(t) = \ell^{i\sqrt{nt}}$.
4) $x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, \quad t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$
20. ℓ_2 giňişlikde güýçli we gowşak ýygnanmaklygyň gabat gelýändigini subut etmeli.

21. ℓ_2 giňişlikde güýçli we gowşak ýygnanmaklygyň gabat gelmeýändigi ni görkezmeli.

22. $C^*[0,2\pi]$ giňişlikde güýçli we gowşak ýygnanmak deňgüýçlimi ?

26. Eger R separabel metrik giňişlikde M köplükügiň hemme nokatlary üzňe bolsa, onda M köplügiň hasaplydygyny subut etmeli.
27. R doly separabel däl metrik giňişlik bolsa, onda ýokardaky meseläniň tassyklamasynyň nädogrydygyny mysalda görkezmeli.
28. Goý, R metrik giňişlikde syk M açyk köplük berlen bolsun. Islendik $B_o \subset R$ açyk şar üçin $[B] \subset B_o \bigcap M$ bolan B açyk şaryň tapdyrýandy- gyny subut etmeli.
29. R doly metrik giňişlikde syk açyk köplükleriň hasaply toplumynyň kesişmesiniň R giňişlikde syk köplükdigini subut etmeli.
30. Eger R doly däl metrik giňişlik bolsa, onda ýokardaky meseläniň tassyklamasynyň dogry däldigini mysalda görkezmeli.
31. Goý, R üzňe nokatsyz doly giňişlik bolsun. R giňişlikde syk açyk köplükleriň hasaply sanysynyň kesişmesiniň kuwwatynyň kontinnum kuwwatdan pes däldigini subut etmeli.
32. Goý, M hiç ýerde syk däl köplük bolsun.Onuň ýapagynyň hem hiç ýerde syk däldigini subut etmeli.
33. Hiç ýerde syk däl köplügiň doldurgyjynyň hemme ýerde sykdygyny subut etmeli.
34. Hemme ýerde syk açyk M köplügiň doldurgyjy hiç ýerde syk däldigyni subut etmeli.
35. R metrik giňişlikde hiç ýerde syk däl köplükleriň tükenikli sanysynyň birleşmesiniň bu giňişlikde hiç ýerde syk däldigini subut etmeli.Hiç ýerde syk däl köplükleriň hasaply sanysynyň birleşmesi üçin bu tassyklama öz güýjünde galýarmy ?
36. Eger M köplük san okunda hiç ýerde syk däl (ýa-da hemme ýerde syk) bolsa, onda x+a görnüşdäki hemme nokatlaryň M_a köplügi hem san okunda hiç ýerde syk däl (ýa-da hemme ýerde syk) köplükdigini subut etmeli, bu ýerde a fiksirlenen san, $x \in M$.

37. Goý, M kőplük R^1-giňişlikde hemme ýerde syk açyk kőplük bolsun. $\forall a \in R^1$ nokady $a = x_1 + x_2,\ x_1 \in M,\ x_2 \in M$ gőrnüşde aňladyp bolýandygyny subut etmeli.

38. Eger M san okunda hemme ýerde syk açyk kőplük we N onuň tükenikli bőlek kőplügi bolsun. San okunda M\ N kőplügiň hemme ýerde sykdygyny subut etmeli.

39. Goý, X we Y metrik giňişlikler, $X \times Y$ metrik giňişlikde metrika

$$\rho_{x\times y}((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \sqrt{(\rho_x(x_1, x_2))^2 + (\rho_y(y_1, y_2))^2}$$

formula bilen girizilen bolsun. Goý, X giňişlikde M hiç ýerde syk däl kőplük, N bolsa Y giňişlikde erkin kőplük bolsun. $X \times Y$ giňişlikde $M \times N$ kőplügiň hiç ýerde dykyz däldigini subut etmeli.

40. Goý X metrik giňişlikde M syk kőplük,Y metrik giňişlikde N syk kőplük bolsun. $X \times Y$ giňişlikde $M \times N$ kőplügiň dykyzdygyny subut etmeli.

41. Goý, ξ irrasional san bolsun. Eger m we n bitin sanlar bolsa, onda $m + n\xi$ gőrnüşdäki hemme sanlaryň kőplüginiň san okunda dykyzdygyny subut etmeli.

42. Goý, ξ irrasional san bolsun. Eger m we n jübüt sanlar bolsa, onda $m + n\xi$ gőrnüşdäki hemme sanlaryň kőplüginiň san okunda dykyzdygyny subut etmeli.

43. Rasional koordinataly hemme (x,y) nokatlaryň kőplüginiň tekizlikde dykyzdygyny subut etmeli.

44. Rasional koeffisientli hemme kőpagzalaryň kőplüginiň c[0,1] giňişlikde dykyzdygyny subut etmeli.

45. Kesişmeleri boş, emma her biri c[0,1] giňişlikde syk $\{M_n\}$ kőplükleriň yzygiderligine mysal getirmeli. c[0,1] giňişlikde hemme M_n kőplükler açyk bolup bilermi?

$$\forall x \in C[a,b]:\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b x(t)dt$$

subut etmeli.

Eger islendik $n \ge 1$ we $1 \le k \le n$ üçin $A_{nk} \ge 0$ bolsa, onda 1) şertden 2) şertiň gelip çykýandygyny barlamaly.

13. Goý, $\{f_n, n \ge 0\} \subset C^*[a,b], n \ge 0$

bolsun. Eger $\sup\limits_{n\ge1} \bigvee\limits_a^b (F_n) < \infty, F_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_o(t),$

$F_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_o(a), F_n(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_o(b)$ bolsa onda

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{gowşak}} f_o$ subut etmeli.

14. Goý, islendik $n \ge 1$ we $t \in [-\pi, \pi]$ üçin

$$A_n x(t) = 2\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

bu ýerde $D_n(t) = \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}$ (Dirihle ýadrosy) bolsun.

$L_2[-\pi, \pi]$ giňişlikde $\{f_n, n \ge 1\}$ yzygiderligiň toždestwa operatora güýçli ýygnanýandygyny subut etmeli..

15. Goý, Banah giňişligi, $\{A, B, A_n, B_n, n \ge 1\} \subset Z(R, R),$

$A_n \xrightarrow[\overrightarrow{n\to\infty}]{} A,\ B \xrightarrow[\overrightarrow{n\to\infty}]{} B$ bolsun, $A_n \mathbf{B}_n \xrightarrow[\overrightarrow{n\to\infty}]{} AB$ subut etmeli.

16. Coý, R_x, R_y Banah giňişlikleri, $\{A, A_n, n \ge 1\} \subset Z(R_x, R_y)$ we gowşak

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ bolsun. A_n operatorlaryň normalarynyň çäklidigini subut etmeli.

10. $R-\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$ normaly [0,1] kesimde üznüksiz differensielenýän funksiýalaryň giňişligi bolsun.

$$A_n x(t)=\left[x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right], t\in[0,1]$$

$$\left(eger\, t+\frac{1}{n}>1 \text{ } bolsa, onda \text{ } x\left(t+\frac{1}{n}\right)=x(1)\right)$$

formula bilen kesgitlenýän $A_n: R\to C[0,1], n\ge 1$ operatora garalyň. Subut etmeli:

1) $\{A_n, n\ge 1\}$ güýçli ýygnanýan we predeli tapmaly.

2) $\{\| A_n \|\}$ çäklenmedik.

Bu tassyklamalar deňölçegli çäklilik prinsipi bilen nähili ylalaşýar?

11. C [0,1] kiňişlikde kesgitlenen $f_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} x\left(\frac{k}{n}\right), x\in C[0,1], n\ge 1$ formula bilen berlen $\{f_n, n\ge 1\}$ funksionallaryň yzygiderliginiň gowşak ýygnanýandygyny subut etmeli we onuň predelini tapmaly. Ol norma boýunça ýygnanýarmy?

12. Goý,

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} A_{nk}x(t_{nk}), a\le t_{n1}<\ldots<t_{nn}\le b, n\ge 1 \text{ bolsun.}$$

Eger:

1) $\sup\limits_{n\ge 1}\sum\limits_{k=1}^{n}|A_{nk}|<\infty;$

2) Islendik P köpagza üçin $f_n(P)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b P(t)dt$ şertler ýerine ýetse, onda

46. Eger N fiksirlenenen natural san bolsa, onda derejesi N-den uly bolma- dyk hemme köpagzalaryň M köplüginiň c[0,1] giňişlikde hiç ýerde dykyz däldigini subut etmeli.

§ 6. Gysyjy öwürmeler prinsipi

1. Öwürmeleriň gozganmaýan nokatlaryny tapmaly:

   1) $Ax=x^2,\ A:\left(0,\frac{1}{9}\right)\to\left(0,\frac{1}{9}\right).$

   2) $Ax=\sqrt{x},\ A:[1,4]\to[1,2].$

   3) $Ax=2+\frac{1}{x},\ A:[2,3]\to[2,3].$

2. $Ax=\sqrt{x}$ funksiýanyň [1,4] aralygy özüne öwürýändigini görkezmeli. Bu öwürme gysyji bolarmy ?

3. $[1,\infty)$ aralygy özüne öwürýän $Ax=x+\frac{1}{x}$ öwürme gysyjy bolarmy? Onuň gozganmaýan nokady barmy?

4. $Ax=\frac{\pi}{2}+x-arctgx$ funksiýa R^1 san okuny özüne öwürýär. A gysyjy öwürme bolarmy? x=Ax deňlemäniň çözüwi barmy?

5. $Ax=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{4}$ funksiýa $\left[\frac{1}{2},1\right]$ kesimdäki rasional nokatlaryň köplügini özüne öwürýär. A gysyjy öwürme bolarmy? x=Ax deňlemäniň çözüwi barmy?

6. $Ax=\frac{1}{x}\sin x(t)+e^t$ funksiýa $C[0,\pi]$ giňişligi özüne öwürýär. A gysyjy öwürme bolarmy?

7. $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$ öwürmäniň [1,2] kesimde gysyjydygyny barlamaly.

8. $1 \le x < +\infty$ ýaýlada $f(x)=\frac{1}{2}e^{nx}$ funksiýa garalyň. Berlen őwürme gysyjy. Ýőne, onuň gozganmaýan nokady ýok ($x=\frac{1}{2}e^{nx}$ deňlemäniň hakyky kőki ýok). Bu ýerde Banah teoremasy bilen gapma-garşylyk barmy?

9. Goý, M kőplük $f(x)=\frac{x^2}{2|x|}$ funksiýanyň kesgitlenýän ýaýlasy bolsun. $\forall x_1,\ x_2 \in M$ üçin $|f(x_2)-f(x_1)| \le \frac{1}{2}|x_2-x_1|$ deňsizlik ýerine ýetýän hem bolsa, bu funksiýanyň gozganmaýan nokady ýok. Bu ýerde Banah teoremasy bilen gapma-garşylyk barmy?

10. Ax=sinx deňlik bilen kesgitlenýän $A:[0,\pi]\to[0,1]$ operatoryň gysyjydygyny barlamaly.

11. Ax=cosx deňlik bilen kesgitlenýän $A:[0,\pi]\to[0,1]$ operatoryň gysyjydygyny barlamaly.

12. Goý, tekizlikdäki nokatlaryň kőplügi X bolsun. $M(x,y)$ we $N(u,\vartheta)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\rho(M,N)=|x-n|+|y-\vartheta|$ formula bilen kesgitlenýär. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gysyjy bolmagy üçin $\max(|a|+|c|,|b|+|d|)<1$ şertiň ýerine ýetmeginiň ýeterlikdigini gőrkezmeli.

13. Goý, tekizlikde nokatlaryň X kőplügi berlen bolsun. $M(x,y)$ we $N(u,\vartheta)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\rho(M,N)=\max(|x-u|,|y-\vartheta|)$ formula bilen kesgitlenýär. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gysyjy őwürme bolarmy?

7. Coý, Z(R,R) giňişlikde $\{A_n, n\ge 1\}$ operatoryň yzygiderligi bolsun. Aşakdaky ýagdaýlarda onuň güýçli, gowşak, deňőlçegli ýygnanýandygyny barlamaly:

1) $R=C[0,1],\ A_n x(t)\int_0^1 \sqrt{(t-\tau)^2+\frac{1}{n}}\ x(\tau)d\tau.$

2) $R=C[0,1],\ A_n x(t)\int_0^1 (t^n+\tau^n)\ x(\tau)d\tau.$

8. Aşakdaky ýagdaýlarda $\{A_n, n\ge 1\}\subset Z(R,R)$ operatorlaryň yzygiderliginiň güýçli, gowşak, deňőlçegli ýygnanýandygyny barlamaly:

1) $R=\ell_2,\ A_n x=\left(\underbrace{0,\dots,0}_{n},\xi_1,\xi_2,\dots\right).$

2) $R=\ell_2,\ A_n x=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots).$

3) $R=\ell_2,\ A_n x=\left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},\xi_n,\xi_{n+1},\dots\right).$

4) $R=L_2[0,1],\ A_n x=\int_0^1 t^n\tau^n x(\tau)d\tau.$

5) $R=C[0,1],\ A_n x(t)=t^n x(t).$

6) $R=C[0,1],\ A_n x(t)=\ell^{-nt}x(t).$

7) $R=C[0,1],\ A_n x(t)=t^n(1-t)x(t).$

8) $R=C[0,1],\ A_n x(t)=n\int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)d\tau.$

bu ýerde $\tau>1$ bolanda $x(\tau)=x(1)$. gowşak

9. Goý, R Banah giňişligi, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ we $A\in Z(R,R)$ gowşak bolsun.

$Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$ subut etmeli.

operatorlar bolsun.

Subut etmeli:

1) $\{A_n, n\ge 1\}$ yzygiderlik birlik operatora güýçli ýygnanýar.

2) $\{C_n, n\ge 1\}$ yzygiderlik birlik operatora gowşak, ýőne güýçli däl ýygnanýar.

3. Goý, C[a,b] Banah giňişliginde anyk $\{\rho_n, n\ge 1\}$ yzygiderlik berlen bolsun.Her bir $n\ge 1$ üçin A_n operatory

$$A_n x(t) = \rho_n(t)x(t),\ t\in[a,b]$$

deňlikden kesgitläliň. $\rho_n, n\ge 1$ funksiýanyň haýsy şertlerinde $\{A_n, n\ge 1\}$ operatoryň yzygiderligi

1) güýçli. 2) gowşak ýygnanýar?

4. Coý, R Banah giňişligi bolsun. $\{x_n\}\subset R$ yzygiderligiň gowşak çäkli (ýagny islendik $f\in R^*$ üçin $\{f(x_n)\}$ san yzygiderligi çäkli) bolmagy üçin onuň bu giňişlikde normalary boýunça çäkli bolmalydygyny subut etmeli.

5. Goý, R Banah giňişligi we $\{A, B, A_n B_n\}\subset Z(R,R)$ bolsun.

1) $n\to\infty$ bolanda $A_n\to A,\ B_n\to B$ güýçli ýygnanmaklykdan $A_n B_n\to AB$ güýçli ýygnanmaklygyň gelip çykýandygyny subut etmeli.

2) $n\to\infty$ bolanda $A_n\to A,\ B_n\to B$ gowşak ýygnanmaklykdan $A_n B_n\to AB$ gowşak ýygnanmaklyk gelip çykmaýan A_n, B_n operatora mysal getirmeli.

6. Goý, R Banah giňişligi, $\{x, x_n\}\subset R$ we $\{A, A_n\}\subset Z(R,R)$ bolsun.

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Rightarrow A_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax.$ Subut etmeli.

14. C[0,1] diňişlikde $Ax=\int_0^t \frac{4ts}{t+s}x(s)ds$ őwürmäniň gysyjy däldigini gőrkezmeli.

15. Gysyjy őwürmeler prinsipindäki $\rho(Ax,Ay)\le\alpha p(x,y)(\alpha<1$ şerti $\rho(Ax,Ay)\le\rho(x,y)$ gowşak şert bilen çalşyryp bolmaýandygyny gőrkezmeli.

16. Eger [0,1] kesimde kesgitlenen we üznüksiz f funksiýa 0<f(x)<1 we $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda onuň ýeke-täk gozganmaýan nokadynyň bardygyny subut etmeli.

17. Eger $f: R\to R$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän we $0<c<f'(x)<d<+\infty$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda f(x)=0 deňlemäniň ýeke-täk çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

18. Coý, $A: x=(\xi_1,\xi_2,...)\to y=(1,\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,...)-m$ giňişlikde berlen őwürme bolsun. Bu ýerde $\alpha=(1,\alpha_1,...)$ berlen yzygiderlik we $w=\sup_k|\alpha_k|<+\infty$. Diňe w<1 bolanda A operatoryň gysyjydygyny subut etmeli.

19. Coý, R doly metrik giňişlikde A we B gysyjy őwürmeler berlen we $\rho(Ax,Ay)\le\alpha_A\rho(x,y),\ \rho(Bx,By)\le\alpha_B\rho(x,y)$ deňsizlikler ýerine ýetýän bolsun. Eger $\forall x\in R$ üçin $\rho(Ax,Bx)<\varepsilon$ bolsa, onda olaryň gozganmaýan nokatlarynyň arasyndaky uzaklygyň $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$-den geçmeýändigini subut etmeli,bu ýerde $\alpha=\max(\alpha_A,\alpha_B)<1$.

20. C[0,1], giňişlikde λ-nyň haýsy bahalarynda A gysyjy őwürme bolar?

1) $Ax(t)=\lambda\int_0^t (t-s)^3 x(s)ds+t.$

2) $Ax(t)=\int_{t-\lambda}^{t+\lambda} \cos x(s)ds.$

3) $Ax(t)=\int_0^{t+\lambda} (t+3s)\sin tx(s)ds.$

4) $Ax(t)=\int_\lambda^t (t^2-s^2)x(s)ds.$

5) $Ax(t)=\int_0^{\lambda\cdot t} \sqrt[3]{t+s}\; x(s)ds.$

6) $Ax(t)=\lambda\int_0^t t^2 s^5 x(s)ds.$

7) $Ax(t)=\lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds+1.$

8) $Ax(t)=\lambda\int_0^1 \sin\pi(t-s)x(s)ds+1.$

9) $Ax(t)=\lambda\int_0^t \sin x(s)ds+t.$

10) $Ax(t)=\lambda\int_0^t (t-s)\sin x(s)ds.$

11) $Ax(t)=\lambda\int_0^t \cos x(s)ds.$

12) $Ax(t)=\int_0^t (t+s)^2 x(s)ds.$

21.

1) $A(t,\tau)=\begin{cases}(t-\tau), & \tau\le t,\\ 0, & \tau>t.\end{cases}$ 2) $A(t,\tau)=\begin{cases}\sqrt{t-\tau}, & \tau<t,\\ 0, & \tau>t.\end{cases}$

kesgitlenýär. $\beta>\alpha>\gamma\ge 0$ bolanda

$$Ax(t)=\int_0^t \ell^{-\beta(t-\tau)}x(\tau)d\tau.$$

deňlik bilen kesgitlenýän $A:C_\alpha\to C_\gamma$ operatoryň çyzykly çäklenendigini subut etmeli. A operatoryň normasyny tapmaly.

46. Eger additiw operator bir nokatda üznüksiz bolsa, onda ol islendik nokatda üznüksizdir. Subut etmeli.

47. Hakyky giňişlikde additiw we üznüksiz operator birjynsly bolýar, emma kompleks giňişlikde bu dogry däldir. Subut etmeli.

48. Islendik additiw operatoryň birjynsly bolmaýandygyny gőrkezýän mysal getirmeli.

49. Tükenikli őlçegli giňişlikde islendik distributiw operator üznüksizdir.

50. Distributiw operatoryň çäklenendigini onuň üznüksizligi gelip çykýar we tersine. Subut etmeli.

§ 12. Operatorlar yzygiderlikleriniň ýygnanmaklygy.

1. R^n Banah giňişliginde çyzykly operatorlaryň yzygiderligi üçin gowşak we güýçli ýygnanmaklygyň gabat gelýändigini subut etmeli.
2. Goý, ℓ_2 giňişlikde $\{A_n, n\ge 1\}$ *we* $\{C_n, n\ge 1\}$ yzygiderlik.

$$A_n x=(\xi_1,\dots,\xi_n,0,\dots),\; C_n x=\Big(\underbrace{0,..,0}_{n-1},\xi_1,0,\dots\Big),\; x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in\ell_2$$

1) $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$. 2) $A: L_\rho[0,\pi] \to L_q[0,\pi], \rho \geq q$
bolsa, onda A toždestwa operatoryň normasyny tapmaly.

40. $Ax = \left(\frac{\xi_1}{1},\dots,\frac{\xi_n}{1},\dots,\frac{\xi_1}{k},\dots\frac{\xi_n}{k},\dots\right), x = (\xi_1,..,\xi_n) \in R^n$ deňlik bilen kesgitlenýän $A: R^n \to \ell_2$ operatoryň normasyny tapmaly

41. C[0,1] giňişlikde $\alpha > 0$ haýsy bahalarynda $Ax(t) = x(t^\alpha)$ operator çyzykly we üznüksiz ? Onuň normasyny tapmaly

42. $L_2[0,1]$ giňişlikde $\alpha > 0$ haýsy bahalarynda $Ax(t) = x(t^\alpha)$ operator çyzykly we üznüksiz ? Onuň normasyny tapmaly

43. $L_2[0,1]$ giňişlikde α, β haýsy bahalarynda $Ax(t) = t^\beta x(t^\alpha)$ operator çyzykly we üznüksiz ? Onuň normasyny tapmaly.

44. Goý, $k \in C([a,b]\times[a,b]), 0 < \alpha < 1$ bolsun.

$$Ax(t) = \int_a^b \frac{k(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} x(\tau) d\tau, \ t \in [a,b]$$

deňlik bilen kesgitlenen $A: C[a,b] \to C[a,b]$ operatoryň çäklenendigini subut etmeli.

45. Coý, $\alpha \geq 0$ belli san bolsun. $[0,+\infty)$ aralykda üznüksiz we

$\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \ell^{at}|x(t)| < +\infty$ şerti kanagatlandyrýan x(t) funksiýalaryň C_a Banah giňişliginde norma $\|x\|_\alpha = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \ell^{at}|x(t)|$ formula bilen

3) $A(t,\tau) = \begin{cases} \sin(t-2\tau), & \tau < t, \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$ 4) $A(t,\tau) = |1-2\tau|\sin t$.

5) $A(t,\tau) = t[\exp(t\tau) - 1/2]$. 6) $A(t,\tau) = \sin\pi(t-2\tau)$.

7) $A(t,\tau) = (t-\tau)^4$. 8) $A(t,\tau) = (t-\tau)^5$.

9) $A(t,\tau) = \sin(\pi t)\cdot\sin^2(\pi\tau)/\tau$. 10) $A(t,\tau) = tch\tau - \tau cht$.

11) $A(t,\tau) = (t^2+\tau)\cos\tau$. 12) $A(t,\tau) = \sin(t\cdot\tau)$.

13) $A(t,\tau) = t+\tau$.

bolsa, λ -nyň haýsy bahalarynda

$$A(t) = \lambda\cdot\int_0^1 A(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

operator $C[0,1]$ giňişlikde gysyjy bolar?

22. Eger

1) $Ax(t) = \lambda\int_0^1 |1-2\tau|\sin tx(\tau)d\tau$.

2) $Ax(t) = \lambda\int_0^1 t[\exp(t\tau)-1/2]x(\tau)d\tau$.

3) $Ax(t) = \lambda\int_0^1 \sin\pi(t-2\tau)x(\tau)d\tau$.

4) $Ax(t) = \lambda\int_0^1 (t-\tau)^4 x(\tau)d\tau$.

5) $Ax(t) = \lambda\int_0^1 \sin(t\tau)x(\tau)d\tau$.

6) $Ax(t) = \lambda\int_0^1 (t^2+\tau)\cos\tau x(\tau)d\tau$.

bolsa, onda x=Ax+sint deňlemäniň $|\lambda|$ ýeterlikçe kiçi bolanda ýeketäk differensirlenýän çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

23. R^4 giňişlikde

1) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}|x_k-y_k|$. 2) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{4}|x_k-y_k|$.

3) $\rho(x,y)=\left\{\sum\limits_{k=0}^{4}(x_k-y_k)^2\right\}^{1/2}$. 4) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 4}|x_k-y_k|^{1/2}$.

metrikalarda

$$Ax=\lambda\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 5 & -2 & 0,5 & 10\\ 4 & 0 & 0 & 1\\ 0,3 & 0,06 & 7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

gőrnüşdäki A operatoryň λ -nyň haýsy bahasynda gysyjy bolýandygyny anyklamaly.

24.

$$x_1=2,\ x_2=2+\frac{1}{2},\ x_3=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},...$$

zynjyr droblaryň $\{x_n\}$ yzygiderliginiň ýygnanýandygyny subut etmeli we onuň predelini tapmaly.

25. $x_1=3,\ x_2=3+\frac{1}{3},...,x_n=3+\frac{1}{x_{n-1}}$ san yzygiderliginiň ýygnanýandygyny subut etmeli we onuň predelini tapmaly.

26. Aşakdaky integral deňlemelri çőzmeli:

1) $x(s)=\frac{1}{2}\int_0^1 stx(t)dt+\frac{5}{6}s.$

5) $A:C[0,\pi]\to L_2[0,\pi]$. 6) $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$.

7) $A:L_2[0,\pi]\to L_1[0,\pi]$. 8) $A:L_2[0,\pi]\to C[0,\pi]$.

9) $A:L_2[0,\pi]\to L_2[0,\pi]$.

operatoryň çyzyklydygyny barlamaly we onuň normasyny bahalandyrmaly.

36. Goý, $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ sanly matrisa $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_{jk}|^2<+\infty$ şerti kanagatlandyrýan bolsun. $A:\ell_2\ni x\to y\ni\ell_2$, bu ýerde $x=(\xi_1,\xi_2,...),\ y=(\eta_1,\eta_2,...),\ \eta j=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{jk}\xi_k,\ j\in N$ operatoryň çyzykly we üznüksiz bolýandygyny subut etmeli.

37. $Ax(t)=\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau, t\in[a,b]$ deňlik bilen kesgitlenen, bu ýerde

$k\in C([a,b]\times[a,b])$ $A:C[b]\to C[a,b]$ operatoryň çyzykly we üznüksiz bolýandygyny subut etmeli

38. $Ax(t)=\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau, t\in[a,b]$ deňlik bilen kesgitlenen, bu ýerde $k\in L_2([a,b]\times[a,b])$ $A:L_2[b]\to L_2[a,b]$ operatoryň çyzykly we üznüksizdigini subut etmeli.

$$\|A\|\le\left(\int_a^b\int_a^b|k(t,\tau)|^2dtd\tau\right)^{1/2}$$

subut etmeli.

39. Eger:

2) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = t^2 \int_0^1 x(\tau^2) d\tau.$

32. $Ax(t) = \int_0^\pi (t - \sin \tau) x(\tau) d\tau$ deňlik bilen kesgitlenen

1) $A: L_2[0,\pi] \to C[0,\pi].$ 2) $A: L_2[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$

operatoryň normasyny bahalandyrmaly.

33. $Ax(t) = \int_0^\pi (t + \tau + 0{,}5) x(\tau) d\tau$ deňlik bilen kesgitlenen

1) $A: L_1[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$ 2) $A: L_1[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$
3) $A: L_1[0,\pi] \to C[0,\pi].$ 4) $A: C[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$
5) $A: C[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$ 6) $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi].$
7) $A: L_2[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$ 8) $A: L_2[0,\pi] \to C[0,\pi].$
10) $A: L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$

operatoryň çyzyklydygyny barlamaly we onuň normasyny bahalandyrmaly.

34. $Ax(t) = \int_0^\pi (t - 2\tau)^2 x(\tau) d\tau$ deňlik bilen kesgitlenen

1) $A: L_1[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$ 2) $A: L_1[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$
3) $A: L_1[0,\pi] \to C[0,\pi].$ 4) $A: C[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$
5) $A: C[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$ 6) $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi].$
7) $A: L_2[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$ 8) $A: L_2[0,\pi] \to C[0,\pi].$
11) $A: L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$

operatoryň çyzyklydygyny barlamaly we onuň normasyny bahalandyrmaly.

35. $Ax(t) = \int_0^\pi (2\sin t - \cos \tau) x(\tau) d\tau$ deňlik bilen kesgitlenen

1) $A: L_1[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$ 2) $A: L_1[0,\pi] \to L_2[0,\pi].$
3) $A: L_1[0,\pi] \to C[0,\pi].$ 4) $A: C[0,\pi] \to L_1[0,\pi].$

2) $x(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)dt + e^s - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}.$

3) $x(s) = \int_0^1 sx(t)dt - \frac{3}{4}s.$

4) $x(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{s-t} x(t) + 1.$

27. $x(t) = \frac{1}{4}x\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{5}x\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{6}x\left(\frac{t}{4}\right) + e^t \sin t,\ t \in [0,1]$

funksional deňlemäniň çőzüwiniň bardygyny barlamaly.

28. Gysyjy őwürmeler prinsipini ulanyp C[0,1] giňişlikde

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^t ts^2 x(s)ds + 1.$$

integral deňlemäniň çőzüwini tapmaly.

29. C[0,1] giňişlikde

$$x(t) - \lambda \int_0^t x(s)ds = t$$

deňlemäni yzygiderli ýakynlaşmalar usuly bilen çőzmeli.

30. Yzygiderli ýakynlaşmalar usuly bilen aşakdaky deňlemeleri çőzmeli.

1) $x(t) - \lambda \int_0^t x(s)ds = t^2, x(t) \in c[0,1].$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad (x,y) \in R^2.$

31. Goý, K(t,s) funksiýa $[0,1]\times[0,1]$ gőnüburçlukda üznüksiz bolsun. $\forall y \in C[0,1]$ üçin

$$x(t) - \int_0^t k(t,s)x(s)ds = y(t)$$

deňlemäniň çőzüwiniň bardygyny we ýeke-täkdigini subut etmeli.

32. Goý, K(x,t,z) funksiýa $a \le x \le b,\ a \le t \le b,\ |z| \le c$ ýaýlada üznüksiz we bu ýaýlada

$$|k(x,t,z_1) - k(x,t,z_2)| \le \mu |z_1 - z_2| \ (\mu = const),$$

$$|k(x,t,z)| \le d \ (d = const),$$

şertleri ýerine ýetýän bolsun.

$$|\lambda| d(b-a) < c \text{ we } |\lambda| \mu(b-a) < 1$$

şertler ýerine ýetende

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt$$

çyzykly däl integral deňlemäniň $|\varphi(t)| \le c$ şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk $\varphi(x) \in C[a,b]$ çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

33. {x_n } ýakynlaşmanyň haýsy agzasyndan başlap

3x-cosx+sinx+arctgyx=0

deňlemäniň takmyn çőzüwiniň takyklygy 0,01 sandan geçmez?

34. Goý, $f \in C[a,b]$ bolsun. C[a,b] giňişlikde $x + \frac{1}{2}\sin x + f(t) = 0$ deňlemäniň x=x(t) ýeke-täk çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

35. Coý, x=f(t) funksiýa [a,b] kesimde berlen, differensirlenýän we bu kesimi őzüne őwürýän bolsun. Eger

$$\max_{a \le t \le b} |f'(t)| < 1$$

şert ýerine ýetse, onda [a,b] kesimde f(t)=t deňlemäniň ýeke-täk çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

36. Eger f funksiýa [0,1] kesimde differensirlenýän we $0 \le f(x) \le 1,\ 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ şertleri kanagatlandyrýan bolsa f(x)-x=0 deňlemäniň çőzüwi barmy?

27. Eger

1) $\|x\| = \sum_{k=1}^{3} |\xi_k|$. 2) $\|x\| = \max_k |\xi_k|$.

3) $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{3} \xi_k^2 \right)^{1/2}$

bolsa, onda

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

deňlik bilen kesgitlenen A operatoryň normasyny tapmaly.

28.

1) ℓ_2. 2) ℓ_1. 3) ℓ_∞ giňişliklerde

$Ax = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_4, \xi_5, ...\xi_1, ...)$.

deňlik bilen kesgitlenen A operatoryň normasyny tapmaly.

29. Operatoryň normasyny tapmaly.

1) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t^3)$.

2) $A: L_\rho[0,1] \to L_\rho[0,1],\ Ax(t) = x(t^3)$.

3) $A: L_\rho[0,8] \to L_\rho[0,2],\ Ax(t) = x(t^3)$.

4) $A: L_\rho[0,10] \to L_\rho[0,2],\ Ax(t) = x(t^3)$.

30. Operatoryň normasyny tapmaly.

1) $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 (\pi t + 2) x(\tau) d\tau$.

2) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 (\pi t + 2) x(\tau) d\tau$.

31. Operatoryň normasyny tapmaly.

1) $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1],\ Ax(t) = t^2 \int_0^1 x(\tau^2) d\tau$.

22. $L_\rho[0,1]$ giňişlikde $Ax(t)=(6t^2-5t)x(t)$ deňlik bilen kesgitlenen A operatoryň normasyny tapmaly.

23. C[0,1] giňişlikde

$$Ax(t)=\int_0^1 (t+\tau)x(\tau)d\tau$$

deňlik bilen kesgitlenen A operatoryň normasyny tapmaly.

24. C[0,1] giňişlikde

$$Ax(t)=\int_0^1 (t^2+\tau^2)x(\tau)d\tau$$

deňlik bilen kesgitlenen A operator çyzykly we çäkli bolýarmy? Onuň normasyny tapmaly.

25. C[0,1] giňişlikde

$$Ax(t)=\int_0^1 t^2(2\tau-1)x(\tau)d\tau$$

deňlik bilen kesgitlenen A operator çyzykly we çäkli bolýarmy? Onuň normasyny tapmaly.

26. $L_\rho[0,1]$ giňişlikde asakdaky deňlik bilen kesgitlenen operatorlaryň normasyny tapmaly:

1) $Ax(t)=x\left(\frac{t}{2}\right).$

2) $Ax(t)=x\left(\frac{2t+1}{3}\right).$

3) $Ax(t)=x\left(\frac{5t+1}{6}\right).$

4) $Ax(t)=\frac{5t+1}{6}x(t).$

5) $Ax(t)=\int_0^1 \frac{5t+1}{6}x(t)dt.$

37. Goý, F(x,y) funksiýa (0,0) nokadyň etrabynda őzüniň birinji tertipli hususy őnümleri bilen üznüksiz we $F(0,0),\ F_y'(0,0)\neq 0$ şertleri kanagatlandyrýan bolsun. Hemme ýeterlikçe kiçi $|x|$ üçin F(x,y)=0 deňlemäniň ýeke-täk y=y(x) çőzüwiniň bardygyny we onuň x=0 bolanda nola őwrülýändigi- ni gysyjy őwürmeler prinsipini ulanyp subut etmeli.

38 Eger $f(t,x)(0\le t\le T; x\in R)$ funksiýa üznüksiz we x boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda $x'f(t,x), x(0)=x_o$ Koşi meselesiniň [0,T] kesimde kesgitlenen ýeke-täk üznüksiz differensirlenýän çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

39. Goý, $\varphi(s,u)$ funksiýa $\Pi=\{(s,u)\in R^2 : a\le s\le b,\ -\infty<u<+\infty\}$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz bolup $0<m\le\varphi_u'(s,u)\le M<+\infty\ ((s,u)\in\Pi)$ şerti kanagatlandyrýan u boýunça üznüksiz hususy őnümi bar bolsun. $\varphi(s,x^*(s))\equiv 0\ (s\in[a,b]$ bolan [a,b] kesimde üznüksiz ýeke-täk $u=x^*(s)$ funksiýanyň bardygyny subut etmeli.

40. Goý, f(x) funksiýa bütin san okunda kesgitlenen we islendik x üçin őnümi bar bolsun. Eger ol $|f'(x)|\le K,\ 0<K<1$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda x=f(x) deňlemäniň ýeke-täk çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

41. Goý, f(x) funksiýa bütin san okunda kesgitlenen we islendik x üçin őnümi bar we $|f'(x)|\ge K$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsun, bu ýerde K>1 berlen san. x=f(x) deňlemäniň ýeke-täk çőzuwiniň bardygyny subut etmeli.

42. 1) $\xi_i=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k+b_1\ (i=1,2,...)$ deňlemeler ulgamyna garalyň, bu ýerde $(b_1,b_2,...)\in m.$

Eger $\sup_i\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|=c<+\infty$ bolsa, onda $|\lambda|c<1$ bolanda ulgamyň m giňişlikde ýeke-täk çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

2) Eger $(b_1, b_2, ...) \in \ell_2$. we $d = \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty$ bolsa, onda $|\lambda| d < 1$ bolanda gőrkezilen ulgamyň ℓ_2 giňişlikde ýeke-täk çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

43. Goý, $x_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i \ (i = 1,2,...)$ deňlemeler ulgamyberlen bolsun

Barlamaly:

1) $a = \sup_m \sum_{i=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ *we* $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty$ şertleri ýerine ýetende onuň $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*{}_i| < +\infty$ şerti kanagatlandyrýan $x^* = (x_1^*, x_2^*, ...)$ ýeke-täk çőzüwi bardyr.

2) Eger $\beta = \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ *we* $\sup_i |a_i| < +\infty$ bolsa, onda berlen ulgamyň $\sup_i |x_i^*| < +\infty$ şerti kanagatlandyrýan $x^* = (x_1^*, x_2^*, ...)$ ýeke-täk çőzüwi bardyr.

44. Eger $\sum_{i,k}^{\infty} c_{ik}^2 < 1 \ \sum_i b_i^2 < +\infty$ bolsa, onda ℓ_2 giňişlikde

$$x_i = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{ik} x_k + b_i \ (i = 1,2,...)$$

ulgamyň ýeke-täk $(x_1, x_2, ...)$ çőzüwiniň bardygyny subut etmeli.

45. Eger R doly metrik giňişligi őzüne őwürýän üznüksiz A operatoryň käbir A^n derejesi gysyjy, onda A operatoryň R giňişlikde ýeke-täk gozganmaýan nokadynyň bardygyny subut etmeli.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{we} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

operatoryň normasyny tapmaly.

17. R^2 giňişlikde

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 3) $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

operatoryň normasyny tapmaly.

18. Aşakdaky operatorlaryň normasyny tapmaly:

1) $A: \ell_2 \to \ell_2, \ Ax = (\xi_1 + 2\xi_2, \xi_1 - \xi_2 \xi_3, \xi_4, \xi_5, ...)$.

2) $A: \ell_2 \to \ell_2$,
$Ax = (2\xi_1 + 3\xi_2, \xi_1 - \xi_2, 2\xi_3 + 3\xi_4, \xi_3 - \xi_4, 2\xi_5, \xi_6, \xi_7, ...)$.

3) $A: \ell_2 \to \ell_2, \ Ax = (3\xi_1, \xi_2 + \xi_3, \xi_3, \xi_4, \xi_5, ...)$.

4) $A: \ell_2 \to \ell_2, \ Ax = (\xi_1, \xi_3, \xi_5, \xi_7, ..., \xi_{2k-1}, ...)$.

19. ℓ_ρ giňişlikde $Ax = \{\lambda_k \xi_k\} (\{\lambda_k\} \in \ell_\infty)$ deňlik bilen kesgitlenen A operatoryň normasyny tapmaly.

20. ℓ_ρ giňişlikde $Ax = \left\{ \frac{\xi_n - 7}{n^2} \xi_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ deňlik bilen kesgitlenen A operatoryň normasyny tapmaly.

21. Goý, $f(t) \in C[a,b]$ bolsun. $L_\rho[a,b]$ giňişlikde $A\varphi(t) = f(t)\varphi(t)$ deňlik bilen kesgitlenen A operatora garalyň. $\|A\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$ subut etmeli.

10. R_2^2 giňişlikden R_2^2 giňişlige täsir edýän

$A:(x,y)\to(u,\vartheta)$:

$$\begin{cases} u = ax + ay, \\ \vartheta = -bx - by \end{cases}$$

operatoryň çyzyklydygyny gőrkezmeli we onuň normasyny tapmaly.

11. R_2^3 giňişlikden R_2^2 giňişlige täsir edýän

$A:(x,y,z)\to(u,\vartheta)$:

$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_2z, \\ \vartheta = a_2x + b_2y + c_2z \end{cases}$$

operator çyzykly bolarmy?

12. $Ax(t) = t^2x(1)$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[1,2]\to C[1,2]$ operatoryň çyzyklydygyny gőrkezmeli we onuň normasyny tapmaly.

13. $Ax(t) = \int_0^1 t\tau x(\tau)d\tau$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operatoryň çyzyklydygyny gőrkezmeli we onuň normasyny tapmaly.

14. $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ deňlik bilen kesgitlenýän $A:C[0,3]\to C[0,3]$ operatoryň çyzyklydygyny gőrkezmeli we onuň normasyny tapmaly.

15. R_2^∞ giňişligiň $x=(x_1,x_2...)$ nokadyny şol giňişligiň $x'=(x_2,x_3...)$ nokadyna őwürýän A operatoryň çyzyklydygyny gőrkezmeli we onuň normasyny tapmaly.

16. R^3 giňişlikde

§ 7. Metrik giňişlikde kompakt köplükler

1.Islendik predkompakt köplügiň çäklenendigini subut etmeli.
2. Islendik kompakt köplügiň predkompakt we ýapykdygyny subut etmeli.
3. Kompakt metrik giňişligiň doludygyny subut etmeli.
4. Kompakt däl doly metrik giňişlige mysal getirmeli.

5. ℓ_2 giňişlikde predkompakt däl ýapyk çäkli köplüge mysal getirmeli.

6. Tükenikli sany predkompakt köplükleriň birleşmesiniň predkompakt köplükdigini subut etmeli.

7. Islendik predkompakt köplükleriň kesişmesiniň predkompakt kőplükdigini subut etmeli.

8.R^n giňişlikde E köplük üçin ε -tor ýazmaly
1) E=[0,1], ε =1/4; n=1.
2) E={x$\in R^2$:$x_1\in$ [0,1], $x_2\in$ [0,2]}, ε =1/3, n=2.
3) E={x$\in R^4$: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in$ [0,1]}, $\in$=1/4, n=4.
4) E={x$\in R^n$: $x_1,x_2,....,x_n\in$[0,1]}, ε =1/2.

9. Eger M köplük üçin S erkin ε -tor bolsa, onda M köplükde saklanýan M köplük üçin 2ε - tor bolan S_1 köplügiň bardygyny subut etmeli.

10. Aşakdaky köplükleri kompaktlyga ýa-da predkompaktlyga derňemeli:

1) $[0,1]\subset R^1$.
2) $(0,1)\subset R^1$
3) $1V[0,2]\subset R^1$
4) $\{1;2;3;4;5\}\subset R^1$
5) $[0,1]/\left\{\frac{1}{2}\right\}\subset R^1$
6) $[0,1]\times(0,1)\subset IR^2$
7) $\{x:|x|<1\}\subset R^1$
8) $\{x:|x|\leq 1\}\subset R^1$
9) $\{x : p_{\ell_2}(x,0)\leq 1\}$
10) $\{x : x=(x_1,x_2), x_1\in R^1, x_2\in C[0,1], x_1^2+\max_{0\leq t\leq 1}|x_2(t)|\leq 3\}$?

11. C[0,1] giňişlikde aşakdaky köplükleri predkompaktlyga derňemeli:

1) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$.
2) $\{\sin(t+n)\}_{n=1}^{\infty}$.
3) $\{\sin nt)\}_{n=1}^{\infty}$.
4) $\{\sin\alpha t\}_{\alpha\in R}$.
5) $\{arctg\alpha t\}_{\alpha\in R}$.
6) $\{arctg(t+\alpha)\}_{\alpha\in R}$.
7) $\{arctg\alpha t\}_{\alpha\in[3,4]}$.
8) $\{\ell^{t-a}\}_{\alpha\in R,\alpha\geq 0.}$
9) $\{(at)^n\}_{n=1,a\in R}^{\infty}$.
10) $\{2^{nt}\}_{n=1.}^{\infty}$
11) $\left\{sh\frac{t}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
12) $\left\{\frac{t^{2n}}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
13) $\left\{t^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1.}^{\infty}$.
14) $\left\{\sin\left(\frac{\pi t}{n}\right)\right\}_{n=1.}^{\infty}$
15) $\left\{\ell^{\frac{t}{2n}}\right\}_{n=1.}^{\infty}$
16) $\{\sin(\pi nt)\}_{n=1.}^{\infty}$
17) $\{\ell^{nt}\}_{n=1.}^{\infty}$
18) $\{(1+nt^2)^{-1}\}_{n=1.}^{\infty}$
19) $\left\{\frac{a}{n}t^2+b\right\}_{n=1.}^{\infty}$
20) $\{arctg\alpha t\}_{\alpha\in[1,2]}$.

12. [0,1] kesimde üznüksiz differensirlenýän x(t) funksiýalaryň köplügini M bilen belgiläliň. Goý,

1) $|x(t)|\leq 1$.
2) $|x'(t)|\leq 1$

7) $R=L_2[0,2\pi],\ Ax(t)=\int_0^{\pi}t^3\tau^4x(\tau)d\tau$.

Çyzykly üznüksiz operatorlaryň normalaryny tapmaly.

8. Aşakdaky operatorlaryň çyzykly üznüksizdigini gőrkezmeli we olaryň normalaryny tapmaly:
1) $A:\ell_2\to\ell_2,\ Ax=(0,\xi_1,\xi_2,...)$.
2) $A:\ell_2\to\ell_2,\ Ax=(\xi_2,\xi_3,...)$.
3) $A:C[0,1]\to C[0,1],\ Ax(t)=\int_0^1\ell^{3t-2\tau}x(\tau)d\tau$.
4) $A:L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi],\ Ax(t)=\int_0^{2\pi}\cos(2t+3\tau)x(\tau)d\tau$.

9. Aşakdaky operatorlaryň çyzykly çäklidigini subut etmeli we olaryň normalaryny tapmaly:
1) $A:C[0,1]\to C[0,1],\ Ax(t)=\int_0^1 x(\tau)d\tau$.
2) $A:C[-1,1]\to C[0,1],\ Ax(t)=x(t)$.
3) $A:C[0,1]\to C[0,1],\ Ax(t)=t^2x(0)$.
4) $A:C[0,1]\to C[0,1],\ Ax(t)=x(t^2)$.
5) $A:C^1[a,b]\to C[a,b],\ Ax(t)=x(t)$.
6) $A:C^1[a,b]\to C[a,b],\ Ax(t)=\frac{dx}{dt}$.
7) $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\ Ax(t)=t\int_0^1 x(\tau)d\tau$.
8) $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\ Ax(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$.
9) $A_\lambda:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\ A_\lambda x(t)=\begin{cases}x(t), t\leq\lambda, \lambda\in(0,1),\\ 0,\quad t>\lambda,\ \lambda\in(0,1).\end{cases}$

3) $R_x = R_1^m,\ R_y = R_\infty^n.$

4) $R_x = R_\infty^m,\ R_y = R_1^n.$

4. Goý, $Ax(t) = \rho(t)x(t),\ t \in [a,b]$ bolsun. ρ funksiýalaryň haýsysy üçin $A: C[a,b] \to C[a,b]$ operator üznüksiz? Eger ol üznüksiz bolsa, onda A operatoryň normasyny tapmaly.

5. $Ax(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ deňlik bilen kesgitlenýän $A: X \to C[a,b]$ operatoryň bu ýerde X $\|x\| = \max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$ normaly [a,b] kesimde üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň giňişligi, üznüksiz däldigini subut etmeli.

6. Goý, $\{\rho, q\} \subset L_2[a,b]$ bolsun.

$$Ax(t) = \int_a^b \rho(t)q(\tau)x(\tau)d\tau,\ t \in [a,b]$$

deňlik bilen kesgitlenýän $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ operatoryň çyzykly we üznüksizdigini, onsoňam $\|A\| = \|\rho\|\|q\|$ bolýandygyny subut etmeli.

7. R Banah giňişliginde $A: R \to R$ operator çyzykly, üznüksiz bolýarmy:

1) $R = \ell_2,\ Ax = (\xi_1, 0, \xi_3, \ldots, 0, \xi_{2k+1}, 0, \ldots).$

2) $R = \ell_2,\ Ax = (0, \xi_2, 0, \xi_4, \ldots, 0, \xi_{2k}, 0, \ldots).$

3) $R = C[0,1],\ Ax(t) = x^2(t).$

4) $R = C[0,1],\ Ax(t) = \sin x(t).$

5) $R = C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 \cos t \sin \tau x(\tau)d\tau.$

6) $R = C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 \sin \pi(t-\tau)x(\tau)d\tau.$

şertler ýerine ýetsin. C[0,1] giňişlikde M köplügiň predkompaktdygyny subut etmeli.

13. C[0,1] giňişlikde

$$M=\{x \in C^1[0,1]:\ x(o)=x_o,\ |x^1(t)| \le m\}$$

köplügiň predkompaktdygyny subut etmeli.

14. Goý, C[0,1] giňişlikde M={x(t)} çäklenen kőplük bolsun. C[0,1] giňişlikde

$$\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t x(\xi)d\xi,\ x(t) \in M \right\}$$

köplügiň predkompaktdygyny görkezmeli.

15. C[0,1]giňişlikde funksiýalaryň köplüginiň predkompaktdygyny görkezmeli:

1) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t (t^2 - \xi^2)x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

2) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t K(t,\xi)x(\xi)d\xi, K(t,\xi) \in c([0,1]\times[0,1]) \right\}.$

3) $\left\{ y(t): \int_0^t K(t,\xi)x(\xi)d\xi = y(t), K(t,\xi) \in L_2[0,1] \right\}.$

4) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^1 \ell^{t\xi} x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

5) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t (\sin t + 3\xi)x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

6) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t \sin(t - 2\xi)x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

7) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t arctg(t + \xi)x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

8) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t (arctgt + 2\xi)x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

9) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t \ell^t x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

10) $\left\{ y(t): y(t) = \int_0^t \sin(t+\xi)x(\xi)d\xi, |x(t)| \le 1 \right\}.$

16. ℓ_2 giňişlikde aşakdaky köplükleriň haýsysy predkompakt:

1) $M = \left\{ x: \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i!} \le 1 \right\}.$

2) $M = \left\{ x: \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i} \le 1 \right\}.$

3) $M = \left\{ x: \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \cdot 3^i \le 1 \right\}.$

4) $M = \left\{ x: \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \cdot i! \le 1 \right\}.$

5) $M = \left\{ x: \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{3^i} \le 1 \right\}.$

6) $M = \left\{ x: \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \cdot i \le 1 \right\}?$

17. M={x(t):x(0)=0, x(1)=1, $\max_{0 \le t \le 1} |x(t) \le 1|$ } köplügiň kompakt däldigini subut etmeli.

18. Aşakdaky köplükler predkompakt ýa-da kompakt köplükler bolýarmy:

1) $M = \left\{ x(t): \int_0^1 x(t)\ell^{-t}dt = 4 \right\}.$

2) $M = \left\{ x(t): x(t) + \int_0^1 \ell^{-\frac{1}{1000}t\xi} x(\xi)d\xi = 3, t \in [0,1] \right\}.$

4. Goý, C[,1] giňişlikde $\rho_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ köpagzalaryň L bőlekgiňişligi berlen bolsun. Aşakdaky funksionallaryň haýsysy L bőlek giňişlikden C[0,1] giňişlige üznüksiz dowam edýär:

1) $f_0(\rho_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}.$ 2) $f_0(\rho_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$

5. Goý, $L = \{x \in C[0,1]: x(0) = 0\}$ bolsun. L giňişlikde nola deň we $f_0(x_1) = 2,\ x_1(t) = t+1,\ tC[0,1]$ bolan $C[0,1] \ni x \to f_0(x)$ çyzykly üznüksiz funksionaly gurmaly.

6. Goý, c_0 giňişlikde f_0 çyzykly üznüksiz funksional berlen bolsun. f_0 funksionalyň bütin C giňişlige hemme çyzykly dowam etdirmelerini gőrkezmeli.

7. Goý, $c_0 \subset m$ bőlek giňişlikde f_0 çäkli çyzykly funksional berlen bolsun. f_0 funksionalyň normasyny saklamak bilen bütin m giňişlige ýeke-täk dowam etdirmesiniň bardygyny subut etmeli.

§ 11. Çyzykly operatorlar.

1. R_1^n banah giňişlikde çyzykly operatoryň umumy gőrnüşini tapmaly. Şeýle operatoryň normasyny hasaplamaly.
2. Tükenikli őlçegli Banah giňişliginde islendik çyzykly operatoryň üznüksizdigini barlamaly.
3. Aşakdaky ýagdaýlarda $A: R_x \to R_y$ çyzykly operatorlaryň umumy gőrnüşini tapmaly we olaryň normalaryny hasaplamaly:

   1) $R_x = R_1^m,\ R_y = R_1^n.$

   2) $R_x = R_\infty^m,\ R_y = R_\infty^n.$

6) $f_0(x)=x_1,\ L=\{x: x_2=2x_1\}$.

7) $f_0(x)=-x_1,\ L=\{x: x_2=2x_1\}$.

2. Eger $\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|\}$, f_0 çyzykly funksional we L giňişlik aşakdaky gőrnüşde bolsa, onda f_0 çyzykly funksionalyň normasyny saklamak bilen bütin R^2 giňişlige dowam etdirmeli:

1) $f_0(x)=-x_1/3,\ L=\{x=(x_1,x_2): x_1=-2x_2\}$.

2) $f_0(x)=-x_2,\ L=\{x: x_1=0\}$.

3) $f_0(x)=-x_1,\ L=\{x: x_2=-3x_1\}$.

4) $f_0(x)=-2x_2,\ L=\{x: x_1=0{,}5x_2\}$.

5) $f_0(x)=x_1,\ L=\{x: x_2=-2x_2\}$.

6) $f_0(x)=x_1,\ L=\{x: x_2=2x_1\}$.

7) $f_0(x)=x_1,\ L=\{x: x_2=2x_1\}$.

3. Eger $\|x\|=\left(|x_1|^2+|x_2|^2\right)^{1/2}$, f_0 çyzykly funksional we L giňişlik aşakdaky gőrnüşde berlen bolsa, onda f_0 çyzykly funksionalyň normasyny saklamak bilen bütin R^2 giňişlige dowam etdirmeli:

1) $f_0(x)=-x_1/3,\ L=\{x=(x_1,x_2): x_1=-2x_2\}$.

2) $f_0(x)=-x_2,\ L=\{x: x_1=0\}$.

3) $f_0(x)=-x_1,\ L=\{x: x_2=-3x_1\}$.

4) $f_0(x)=-2x_2,\ L=\{x: x_1=0{,}5x_2\}$.

5) $f_0(x)=6x_2,\ L=\{x: x_1=-2x_2\}$.

6) $f_0(x)=x_1,\ L=\{x: x_2=2x_1\}$.

7) $f_0(x)=-x_1,\ L=\{x: x_2=2x_1\}$.

3) $M=\left\{x(t): x(t)+\int_0^t \ell^{-\frac{1}{1000}t\xi}x(\xi)d\xi=3, t\in[a,b]\right\}$.

4) $M=\left\{x(t): x(t)=(u(t),v(t)); u(t)+\int_0^1 v(\xi)=3; v(t)+\int_0^1 u(\xi)d\xi=4\right\}$.

5) $M=\{x(t): x(t)\in c^1[0,1]; x'(t)=t+x(t); x(0)=x_o\in[0,1]\}$.

6) $M=\left\{x(t): x(t)=\frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)+\int_0^t x(\xi)d\xi=t\right\}$.

19. Goý, X köplük berlen bolsun. M$\subset$X köplük (X,p$_1$) giňişlikde kompakt, (X,þ$_2$) giňişlikde bolsa kompakt däl bolar ýaly þ$_1$ we þ$_2$ metrikalar alyp bolarmy?

20. Goý, R metrik giňişlikde A ýapyk köplük B kompakt köplük bolsun. A$\bigcap$B we A$\bigcup$B kompakt köplük bolarmy?

21.Tükeniksiz kompakt bölek köplüklikleri bolmadyk tükeniksiz metrik giňişlik bolup bilermi?

22. Aşakdaky köplükleriň kompaktdygyny barlamaly:

1) A={p$\in$Q:2<p^2<3}, R=(Q,|p-q|)

2) S$_1$(0)={x=(x$_1$, x$_2$.....x$_n$)$\in$R^n: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1\}$, R=R^n.

3) $A=\{y=t\cdot x(t): x(t)\in c[0,1], |x(t)|\le 1\}, R=c[0,1]$.

4) $A=\{x(t)\in c[0,1]: x(0)=x(1)=0, x''(t)\in c[0,1], |x''|\le 1\}, R=c[0,1]$.

5) $A=\left\{x=(x_1,x_2,...x_n,...)\in\ell_2: \forall n\in/N, |x_n|<\frac{1}{n}\right\}, R=\ell_2[0,1]$.

23. Goý, A$\subset$X, B$\subset$X bolsun. A+B={a+b:a$\in$A,b$\in$B} köplügi kesgitläliň. Eger A we B köplükler kompakt bolsalar, onda A+B köplügiň hem kompakt köplükdigini subut etmeli.

24.Goý, x∈X, A⊂X, $A \neq \emptyset$ bolsun. Eger A kompakt köplük bolsa, onda

$$\rho(x,a) = \inf_{y \in A} p(x,y)$$

deňligi kanagatlandyrýan $\alpha \in A$ nokadyň bardygyny subut etmeli.

25. Aşakdaky köplükleriň kompaktdygyny barlamaly:

1) $A = \left\{ \frac{\rho^2}{q^2} : \rho \in z, q \in z, q \neq 0 \right\}, R = R, z -$ bitin sanlaryň köplügi.

2) $A = \left\{ x = (x_{1,} x_2 x_3) \in R^3 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0, |x_3| \leq |a_3| \right\} R = R^3.$

3) $A = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = x'(0) = 0, x''(t) \in c[0,1], |x''| \leq 1\} R = c[0,1].$

4) $A = \left\{ x(t) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] : x(t) = t^n \cdot f(t), n \in N, f(t) \in B, B \right.$ köplük C[0,1] giňişlikde kompakt $\left. \right\}, R = C\left[0, \frac{1}{2}\right].$

5) $A = \left\{ x = (x_{1,} ... x_n ...) \in \ell_2 : \forall n \in N, |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \right\} R = \ell_2.$

26.Goý, A⊂X, B⊂X bolsun. A+B={a+b:a∈A,b∈B} köplügi kesgitläliň. Eger A kompakt, B ýapyk köplük bolsa, onda $A \cdot B$ ýapyk köpdügini subut etmeli.

27. Goý, R metrik giňişlikde A kompakt köplük bolsun.

$$B = \{\alpha \in R : \alpha = p(x,y), x \in A, y \in A\}$$

köplügiň kompaktdygyny subut etmeli.

28. Aşakdaky kőplükleriň kompaktdygyny barlamaly:

normasynyň $\|f\| = \left(\sum_{c=1}^{n} \alpha_i^2 \right)^{1/2}$ deňligini subut etmeli.

30. R_2^2 giňişlikde kesgitlenen çyzykly funksiýanal (1,1) we (1,0) nokatlarda degişlilikde 2 we 5 bahalary kabul edýär. (3,4) nokatda onuň bahasyny tapmaly. Onuň normasyny tapyň.

31. Goý, $x = (x_1, ..., x_n ...) \in R_1^\infty$ bolsun. Eger $\{\alpha_n\}$ erkin çäkli san yzygiderligi bolsa, onda R_1^∞ giňişlikde çyzykly funksionalyň umumy gőrnüşiniň $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ formula bilen berilýändigini we onuň normasynyň $\|f\| = \sup\{|\alpha_n|\}$ deňligini subut etmeli.

32. Coý, $x = (x_1, ..., x_n ...) \in R_2^\infty$ we $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ hatar ýygnanýan $\{\alpha_n\}$ san yzygiderligi berlen bolsun. R_2^∞ giňişlikde çyzykly funksionalyň umumy gőrnüşiniň $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ formula bilen berilýändigini we onuň normasynyň $\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \right)^{1/2}$ deňligini subut etmeli.

1. Eger f_0 çyzykly funksional we L giňişlik aşakdaky gőrnüşde berlen bolsa, onda $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ bolanda f_0 çyzykly funksionaly normasyny saklamak bilen bütin R^2 giňişlige dowam etdirmeli.
   1) $f_0(x) = x_1 / 3,\ L = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = -2x_2\}.$
   2) $f_0(x) = -x_2,\ L = \{x : x_1 = 0\}.$
   3) $f_0(x) = -x_1,\ L = \{x : x_2 = -3x_1\}.$
   4) $f_0(x) = 2x_2,\ L = \{x : x_1 = 0{,}5x_2\}.$
   5) $f_0(x) = 6x_2,\ L = \{x : x_1 = -2x_2\}.$

4) $c_0 \ni x=(x_1,x_2,....)\to \sum_{k=1}^{\infty} x_k /[(-1)^k+3]^k$.

20.

1) ℓ_1. 2) c_0. 3) m giňişliklerde $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot f_k$ formula çyzykly çäkli funksionaly berer ýaly $(f_1, f_2,....)$ yzygiderligiň zerur we ýeterlik şertlerini tapmaly.

21. R_2^n, R_2^{∞}, $C[a,b]$ giňişliklerde kesgitlenen funksionallara mysallar getirmeli.

22. y=ax+b çyzykly san funksiýa additiw funksional bolýarmy?

23. Islendik $x\in R$ we islendik λ rassional san üçin $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ deňligiň islendik additiw funksional üçin ýerine ýetýändigini subut etmeli.

23. Additiw, ýőne üznüksiz funksionala mysal getirmeli.

24. $C_1[0,1]$ giňişligi R^1 őwürýän f(x)=x(1) őwürme berilipdir. Bu őwürme üznüksizmi?

25. Islendik additiw we üznüksiz funksionalyň birjinslydygyny subut etmeli.

26. Eger additiw f funksional R giňişligiň Ő nolunda üznüksiz bolsa, onda ol bütin R giňişlikde üznüksizdir, ýagny çyzyklydyr. Subut etmeli.

27. Islendik additiw we funksional üçin f(ő)=0, f(-x)=-f(x), $\forall x\in R$ deňlikleriň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

28. C[-1,1] giňişligiň nol nokatda differensirlenýän funksiýalardan ybarat C' bőlek giňişliginde $f(x)=x'(0)$ funksional berilipdir. Bu funksional çyzyklymy?

29. Goý, $x=(x_1,...,x_n)\in R_2^n$ bolsun. Eger $\alpha_1,...,\alpha_n$ erkin hakyky sanlar bolsa, onda R_2^n giňişlikde çyzykly funksionalyň umumy gőrnüşiniň $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ formula bilen berilýändigini we onuň

1) $A=\left\{x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3 : \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3\right\} R=R^3$.

2) $A=\left\{\frac{q^2}{4p^2+q^2} : p\in z, q\in z, p^2+q^2\neq 0\right\} R=R$.

3) $A=\{x(t)\in C[0,\pi]: x''(t)\in C[0,\pi], |x''+x|\le 1, x(0)=0, x(\pi)=0\} R=C[0,\pi]$.

4) $A=\{x(t)\in C[0,1]: x(t)=t^n\cdot f(t), n\in N, f(t)\in B, B$ kőplük C[0,1] giňişlikde kompakt $\}$, $R=C[0,1]$.

5) $A=\left\{x=(a_1x_1,a_2x_2,....,a_nx_n,...)\in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty, \lim_{n\to\infty} a_n=0\right\}, R=\ell_2$

29.Goý, R metrik giňişlikde M kompakt köplük bolsun we x∈R. Onda a∈M nokat tapylyp $\rho(x,M)=\rho(x,a)$ deňligiň ýerine ýetýandigini subut etmeli.

30.Goý

1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3}e^{-nx}$. 2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x+n^2}$

görnüşindäki funksiýalar berlen bolsun, bu ýerde $\{a_n\}_{n\in N}$ - erkin yzygiderlik hem-de $|a_n|<1$ (n=1,2,....). Olaryň C[0,1] giňişlikde kompakt köplügi emele getirýandigini subut etmeli.

31. $\forall$ x∈[a,b] üçin $[f^1(x)]^2+f^2(x)<1$ şerti kanagatlandyrýan ähli funksiýalar köplüginiň C[a,b] giňişlikde kompaktygyny subut etmeli.

32.Goý,[a,b] × [a,b] kwadratda y(t,s) funksiýa kesgitlenen we üznüksiz bolsun. Her bir s∈[a,b] üçin $X_s(t)=y(t,s)$ bolsun.$\{X_s\}$ funksiýalaryň köplüginiň C[a,b] giňişlikde kompakdygyny subut etmeli.

33. Goý, C[a,b] giňişlikde käbir { X_{α} }funksiýalaryň kompakt köplügi berlen bolsun we $x_*(t)=\max\limits_{\alpha} x_{\alpha}(t).x_*(t)$ funksiýanyň [a,b] kesimde üznüksizdigini subut etmeli.

34. Lipşis şertini kanagatlandyrýan her bir çäkli funksiýalaryň köplüginiň C[a,b] giňişlikde kompaktygyny subut etmeli.

35. [a,b] kesimde n-nji tertipli önümi bolan we K san bilen çäklenen funksiýalaryň köplüginiň C[a,b] giňişlikde kompaktdygyny subut etmeli.

Görkezme. Teýlor formulasyny peýdalanmaly.

36. {x$\in$C[0;2π] : $|x(t)\le 1|$} şaryň C[0;2π] giňişlikde doly çäklenen köplük däldigini barlamaly.

Görkezme. x_n(t)=sinnt funksiýalaryň yzygiderligine garamaly we n$\neq$m bolanda $\rho(x_n,x_m)\ge 1$görkezmeli.

37. Goý, f(x,y) funksiýa П={(x,y):o≤x≤1,- ∞<y<+∞} ýaýlada üznüksiz we çäklenen bolsun. $y'=f(x,y)$ deňlemäniň çözüwleriniň M köplüginiň C[0,1] giňişlikde predkompakt bolmagynyň ýeterlikdigini subut etmeli.

38. 1) [0,1] kesimde üznüksiz we $|x(t)|\le 1(t\in[0,1]), x(0)=0, x(1)=1$ şertleri kanagatlandyrýan hemme funksiýalaryň M_o köplüginiň kompaktdygyny barlamaly.

2) [0,1]kesimde üznüksiz diferensirlenýän we |x'(t)|≤1 (t$\in$[0,1]), x(o)=a şertleri kanagatlandyrýan funksiýalaryň M' köplüginiň C[0,1] giňişlikde predkompaktdygyny subut etmeli.

39. $\Pi=\left\{x=\{\xi_n\}\in\ell_2:|\xi_n|\le\frac{1}{2^n}\right\}$ paralelepipediň ℓ_2 giňişlikde predkompakt köplükdigini subut etmeli.

40.Kompakt köplügiň islendik ýapyk bölekköplüginiň kompaktdygyny subut etmeli.

9) $g(t)=\sin(2\pi t)$. 10) $g(t)=t^3-1/3$.
11) $g(t)=\sin(t-0{,}5)$. 12) $g(t)=t^2-6t+0{,}5$.
13) $g(t)=\cos\pi t$. 14) $g(t)=\ell^t-1{,}5$.
15) $g(t)=\sin(\pi t)-0{,}5$. 16) $g(t)=(t+)^{1/2}$.
17) $g(t)=(t^2-t+4)^{1/2}$. 18) $g(t)=cht$.

bolsa, onda C[0,1] giňişlikde

$$f(x)\int_0^1 x(t)g(t)dt$$

aňlatma bilen çyzykly funksionalyň normasyny tapmaly.

17. $L_1[0,1]$ giňişlikde 16-njy mysalda berlen çyzykly funksionallaryň normalaryny tapmaly.

18. Aşakdaky aňlatmalar bilen berlen f(x) çyzykly funksionalyň ℓ_1 giňişlikde normasyny tapmaly:

1) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k x_k/k!$. 4) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot\left[(-1)^k+3-1/k\right]$.

2) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k/(-2)^k$. 5) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot(-1)^k$.

3) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k/2^{3/2}$. 6) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot(k)^{1/k}$.

19. Aşakdaky çyzykly funksionallaryň normalaryny tapmaly:

1) $c_0\ni x=(x_1,x_2,....)\to\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot 2^k/k!$

2) $c_0\ni x=(x_1,x_2,....)\to\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k/k^{3/2}$.

3) $c_0\ni x=(x_1,x_2,....)\to\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k/(-2)^k$.

14. R^4 giňişlikde çyzykly funksionalyň umumy gőrnüşini tapmaly.

15. Eger $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ elementiň normasy aşakdaky aňlatmalar bilen berilse, onda $f(x) = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i$ formula bilen berlen f funksionalyň normasyny tapmaly:

1) $\sum_{k=1}^{4} |x_k|$.

2) $\max_{1 \le k \le 4} |x_k|$.

3) $\left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2 \right)^{1/2}$.

4) $\left(\sum_{k=1}^{4} |x_k|^{\rho} \right)^{1/\rho}$.

5) $|x_1|/2 + |x_2|/3 + 3|x_3| + |x_4|/4$.

6) $\max\{2|x_1|, |x_2|/3, 7|x_3|, |x_4|/6\}$.

7) $\left\{ \sum_{k=1}^{4} (k+2) \cdot x_k^2 \right\}^{1/2}$.

8) $|x_1 \cdot 2x_2| + |x_1 + x_2| + |x_3| + |x_4|$.

16. Eger:

1) $g(t) = \ell n(t + 0{,}5)$.

2) $g(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < 1/10, \\ 1/2, & 1/10 \le t \le 1. \end{cases}$

3) $g(t) = \begin{cases} +1, & 0 \le t < 1\frac{1}{4}, \\ -3, & 1/4 \le t \le 1. \end{cases}$

4) $g(t) = t - 1/2$.

5) $g(t) = t^2 - 0{,}2$.

6) $g(t) = \sin \pi (t - 1/3)$.

7) $g(t) = ex\rho(t) - 2$.

8) $g(t) = t^2 - 3t + 1$.

41. Goý, A köplük R metrik giňişligiň predkompakt bölekköplügi bolsun.[A] köplügiň kompaktygyny subut etmeli.

42.y=kx^2,k$\in$[0,3] funksiýalaryň M köplüginiň C[0,1] giňişlikde kompakt köplükdigini subut etmeli.

43. y=kx+b(0≤k≤1, 0≤b≤1) görnüşdäki hemme funksiýalaryň M köplüginiň C[0,1] giňişlikde kompaktgyny subut etmeli.

44. [0,1] kesimde üznüksiz we $|f(x)| \le A$ (A berlen polojitel san) şerti kanagatlandyrýan hemme f (x) funksiýalaryň M köplüginiň C[0,1] giňişlikde çäklenen we ýapykdygyny, ýöne kompakt däldigini (predkompakt hem däl) subut etmeli.

45. Goý, A , B- R giňişlikde boş däl predkompakt köplük bolsun. ρ(x,y) (x$\in$A, y$\in$B) sanyň çäkli san köplük emele getirýandigini subut etmeli.

46.Islendik kompaktlaryň kesişmesi kompaktdyr. Subut etmeli.

47. Goý, A$\subset$ X, B$\subset$Y, we $A \ne \emptyset$, B= $\emptyset$ bolsunlar.

$$p_{x \times y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(p_\times(x_1, x_2,))^2 + (p_y(y_1, y_2))^2}$$

metrikaly X$\times$Y giňişlikde A$\times$B köplügiň kompakt bolmagy üçin A we B köplükleriň kompakt bolmagynyň zerur we ýeterlikdigini subut etmeli.

48. Boş bolmadyk A$\times$B köplügiň X$\times$Y giňişlikde predkompakt bolmagy üçin X giňişlikde A köplügiň predkompakt, bolmagynyň zerur we ýeterlikdigini subut etmeli.

49. Goý, A$_1$,A$_2$,…. kompakt köplükleriň kemelýän yzygiderligi bolsun we $K = \bigcap_n A_n$.$\forall \varepsilon > 0$ üçin N nomer tapylyp $\forall n > N$ bolanda $A_n \subset \nu(k, \varepsilon)(\nu(k, \varepsilon) = \bigcup_{x \in k} \nu(x, \varepsilon))$ subut etmeli.

50. Goý, A$_1$,A$_2$,... kesişmeleri bir nokatly köplük bolan kompakt köplükleriň kemelýän yzygiderligi bolsun. $n \to +\infty$ bolanda diam $A_n \to 0$ bolýandygyny görkezmeli.

51. Goý, R metrik giňişlikde berlen {A$_i$} köplükleriň yzygiderligi aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan bolsun.

1) $\forall i$ üçin [A_i]kompakt köplük.

2) $\forall i > 1$ üçin [A_i]$\subset A_{i-1}$.

$\bigcap_i A_i$ boş däldigini subut etmeli.

Eger 2) şerti 2) $\forall_i > 1$ üçin $A_i \subset A_{i-1}$ şert bilen çalşyrylsa, onda tassyklamanyň nädogrydygyny mysalda görkezmeli.

52. R doly metrik giňişlikde

1) $\forall n$ üçin $A_{n+1} \subset A_n$;

2) 2) $\bigcap_n A_n$ boş köplük,

şertleri kanagatlandyrýan boş bolmadyk çäkli ýapyk köplükleriň {A_n} yzygiderligine mysal getirmeli.

53. Goý,{A_n} kompakt köplükleriň yzygiderligi bolup bu kompakt köplükleriň islendik tükenikli sanysynyň kesişmesi boş däl bolsun. Bu kompakt köplükleriň hemmesiniň $\bigcap_n A_n$ kesişmeleriniň hem boş däldigini subut etmeli.

54. Eger M köplük üçin $\forall \varepsilon > 0$ san üçin tükenikli ε-tor bar bolsa, ol köplügiň çäklidigini subut etmeli.

55. Goý, R doly metrik giňişlik bolsun. M$\subset$R köplük üçin Vε>o san üçin kompakt ε-toruň bolmagy onuň kompakt üçin ýeterlikdigini subut etmeli.

56. Her bir kompakt metrik giňişligiň separabeldigini subut etmeli.

57. M köplügiň kompakt bolmagy üçin $\forall$є>o san üçin tükenikli ε-toruň bolmagynyň zerur şertidir. Bu şert ol köplügiň kompaktlygynyň ýeterlik şerti bolmaýarmyka? Erkin metrik giňişlik üçin bu soragyň jogabynyň otrisateldigini görkezmeli.

58. R^n ýewklid giňişlikde islendik çäkli M köplügiň predkompaktdygyny subut etmeli. (Bolsano-Weýerştras teoremasy).

59. R^n ýewklid giňişlikde islendik çäklenen ýapyk köplügiň kompaktdygyny subut etmeli.

1) $C^1[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_0^1 tx(t)dt.$

2) $L_1[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_{-1}^1 tx(t)dt.$

3) $L_2[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_{-1}^1 tx(t)dt.$

4) $\ell_2 \ni x = (x_1, x_2, ...) \to x_1 + x_2.$

5) $\ell_2 \ni x = (x_1, x_2, ...) \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}.$

6) $m \ni x = (x_1, x_2, ...) \to x_1 + x_2.$

7) $c_0 \ni x = (x_1, x_2, ...) \to \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k.$

8) $C \ni x = (x_1, x_2, ...) \to \lim_{n\to\infty} x_n.$

12.Aşakdaky funksionallaryň çyzyklydygyny gőrkezmeli we olaryň
normalaryny tapmaly:

1) $C[a,b] \ni x \longrightarrow \int_0^1 (1-t^2)dt.$

2) $C[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} - t^2\right) x(t)dt.$

3) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2} x(t)dt.$

4) $C[0,2] \ni x \longrightarrow \int_0^2 (t-1)x(t)dt.$

13.Aşakdaky funksionallaryň normasyny tapmaly:

1) $L_1[0,1] \ni x \longrightarrow \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right)^3 x(t)dt.$

2) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right)^3 x(t)dt.$

10) $C[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_{-1}^{1} x(t) sign t dt.$

11) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \int_{0}^{1} x(t)dt - x(0).$

12) $C[-1,1] \ni x \longrightarrow \dfrac{x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)}{\varepsilon^2}, \varepsilon \in (0,1).$

13) $C[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_{-1}^{1} x(t)dt - \dfrac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x\left(\dfrac{k}{n}\right), n \in N$

fiksirlenene.

14) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \int_{0}^{1} \rho(t)x(t)dt,$ bu ýerde $\rho \in L_1[0,1]$ fiksirlenen

element.

8. $C^1[0,1] \ni x \to x'(0) + x(0)$ funksionalyň üznüksizdigini subut etmeli.

9. Aşakdaky funksionallaryň çyzykly, üznüksiz bolýandygyny subut etmeli we olaryň normalaryny tapmaly:

1) $C[-1,1] \ni x \to \dfrac{1}{3}[x(-1) + x(1)].$

2) $C[-1,1] \ni x \to 2[x(1) - x(0)].$

3) $C[-1,1] \ni x \to \dfrac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)], \varepsilon \in [-1,1].$

4) $C[-1,1] \ni x \longrightarrow \int_{-1}^{1} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt.$

10. Aşakdaky çyzykly funksionallar çäklimi:

1) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \int_{0}^{1} x(\sqrt{t})dt.$

2) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} x(t^n)dt$?

11. Aşakdaky funksionallaryň çyzykly, üznüksizdigini subut etmeli we olaryň normalaryny tapmaly:

60. Eger f funksional ýapyk kompakt M$\subset$R köplükde üznüksiz bolsa, onda şol köplükde çäklidigini subut etmeli.

61. Eger f funksional ýapyk M$\subset$R köplükde üznüksiz bolsa, onda ol şol köplükde özüniň takyk aşaky we takyk ýokarky çäklerini kabul edýändigini subut etmeli.

62.Kompakt M$\subset$R köplügi özüne öwürýän we $\forall x, y \in M, x \neq y$ nokatlar üçin $\rho(A_x, A_y) < \rho(x, y)$ şerti kanagatlandyrýan A operatoryň M köplükde ýeke-täk gozganmaýan nokadyny bardygyny subut etmeli.

63. Goý, S köplük M kőplük üçin ε -tor bolsun. Onda $\bigcup_{x\in s} S(z,\varepsilon) \supset M$ subut etmeli.

64. Çäkli, ýöne kompakt däl köplüge mysal getirmeli.

65. ℓ_1 we ℓ_∞ giňişliklerde çäkli ýöne kompakt däl köplüklere mysal getirmeli.

66. Goý, X - $\rho(x, y) = \max_{0\le t\le 2}|x(t) - y(t)|$ metrikaly x(t)=at^2+bt+c kwadrat üçagzalaryň köplügi we ž=(a,b,c)$\in$IR^3 bolsun.Şeýle $\alpha_1, a_2 > 0$ sanlar tapylyp $\alpha_2 d(z_1, z_2) \le \rho(x_1, x_2) \le \alpha_1 d(z_1, z_2)$ (d-R^3 giňişlikde uzaklyk) şertiň ýerine ýetýändigini görkezmeli.

67.Goý, X- $\rho(x, y) = \max_{0\le t\le 2}|x(t) - y(t)|$ metrikaly

$x(t) = at^2 + bt + c$

kwadrat uçagzalaryň köplügi we M bolsa |x(t)|≤1 şerti kanagatlandyrýan funksiýalaryň bölek köplügi bolsun. M köplügiň kompakt we ýapykdygyny subut etmeli.

68.[a,b]=[0,1] kesimiň G açyk bölek köplügine we tükenikli örtügi bölüp alyp bolmaýan G köplügiň $\{C_n\}_{k=1}^{\infty}$ açyk örtüklerine mysal getirmeli.

69. Metrik giňişlikde çäkli ýapyk köplüge we tükenikli örtük bölüp alyp bolmaýan açyk örtüge mysal getirmeli.

70. R metrik giňişlikde ýapyk kompakt F kőplüge we tükenikli örtük bölüp alyp bolmaýan F ýapyk köplügiň { F_n } örtüklerine mysal getirmeli.

71. Metrik giňişlikde çäkli ýapyk köplükde çäklenmedik üznüksiz funksiýa mysal getirmeli.

72. Metrik giňişlikde çäkli ýapyk köplükde özüniň infimumyna eýe bolmaýan üznüksiz funksiýa mysal getirmeli.

73. Metrik giňişlikde çäkli ýapyk köplükde üznüksiz ýöne deňölçegli üznüksiz däl funksiýa mysal getirmeli.

74.Goý, R=C[0,1], $M = \{x \in C[0,1] : 0 \le x(t) \le 1, x(1) = 1\}$, $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$ bolsun. C[0,1]giňişlikde M köplügiň çäkli ýapykdygyny görkezmeli.

75.Natural sanlaryň köplüginiň R-de $\frac{1}{2}$ - tordygyny subut etmeli.

76. ε -iň haýsy bahasynda R^n üçin N^n üçin N^n ε -tor bolýar?

77. C[0,1] giňişlikde hiç bir ε >o san üçin x(t)=at+b çyzykly funksiýalaryň köplügi ε -tor bolmaýandygyny subut etmeli.

4) $C[a,b] \ni x \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x(t_k)$, bu ýerde $t_1, t_2, ..., t_n \in [a,b], \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ hakyky sanlar.

7. Aşakdaky funksionallaryň haýsysy çyzykly, üznüksiz bolýar?

Çyzykly üznüksiz funksionallaryň normalaryny tapmaly.

1) $\ell_1 \ni x = (\xi_1, \xi_2, ...) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}$.

2) $\ell_1 \ni x = (\xi_1, \xi_2, ...) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$, bu ýerde $y = (\eta_1, \eta_2, ...) - \ell_\infty$ giňişligiň fiksirlenen elementi.

3) $\ell_2 \ni x = (\xi_1, \xi_2, ...) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi_{2k}}{k}$.

4) $\ell_2 \ni x = (\xi_1, \xi_2, ...) \longrightarrow \xi_j,\ j \in N$ fiksirlenen.

5) $\ell_2 \ni x = (\xi_1, \xi_2, ...) \longrightarrow \xi_j - \xi_{j-1},\ j \in N$ fiksirlenen.

6) $L \ni x = (\xi_1, \xi_2, ...) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{k^2}$, bu ýerde $L - \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{1/2} \right)$ normaly, funksional kesgitlenen $x \in \ell_2$ elementleriň çyzykly giňişligi.

7) $L_2[0,1] \ni x \longrightarrow \int_0^1 x^2(t)dt$.

8) $L[0,1] \ni x \longrightarrow \int_0^1 x(t^2)dt$, bu ýerde $L - \|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \right)^{1/2}$ normaly, funksional kesgitlenen $x \in L_2[0,1]$ funksiýalaryň çyzykly giňişligi.

9) $C[0,1] \ni x \longrightarrow \int_0^1 x(t) \cos \pi t dt$

2) $\ell_1 \ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)\xi_k.$

3) $\ell_2 \ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{k(k+1)}}.$

4) $L_2[0,1]\ni x\longrightarrow \int_0^1 x(t)sign\left(t-\frac{1}{2}\right)dt.$

5) $C[0,1]\ni x\longrightarrow \int_0^1 (1-2t)x(t)dt.$

5. Aşakdaky funksionallaryň haýsysy çyzykly, üznüksiz bolýar:

1) $C[0,1]\ni x\longrightarrow \int_0^1 tx^2(t)dt.$

2) $\ell_2 \ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2.$

3) $L_2[0,1]\ni x\longrightarrow \int_0^1 x(t)\sin t dt.$

4) $L \ni x\longrightarrow x'(0),$ bu ýerde $L-\|x\|=\max_{0\le t\le 1}|x(t)|,\ x\in C^1[0,1]$ normaly $C^1[0,1]$ çyzykly giňişlik.

6. Aşakdaky funksionallaryň normalaryny tapmaly:

1) $\ell_2 \ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}[1-(-1)^k]\frac{k-1}{k}\xi_k.$

2) $\ell_2 \ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k+\xi_{k+1}}{2^2}.$

3) $L_2[0,1]\ni x\longrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\ \ x(t^2)dt.$

§ 8. Çäkli üýtgeýişli funksiýalar.

1. $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimde wariasiýasy A deň. $kf(x)+m$ funksiýanyň bu kesimde wariýasiýasyny tapmaly.

2.
$$f(x)=\begin{cases}0, & eger\ x=0\ bolsa\\ 1-x, & eger\ 0<x<1\ bolsa\\ 5, & eger\ x=1\ bolsa\end{cases}$$
funksiýanyň [0,1] kesimde wariýasiýasyny tapmaly

3.
$$f(x)=\begin{cases}x-1, & eger\ x<0\ bolsa\\ 10, & eger\ x=1\ bolsa\\ x^2, & eger\ x<1\ bolsa\end{cases}$$
funksiýanyň [0,2] kesimde wariýasiýasyny tapmaly.

4. $[a,b]$ kesimiň hemme nokatlarynda çäkli önüme eýe bolan funksiýanyň şol kesimde çäkli üýtgeýişlidigini subut etmeli.

5.
$$f(x)=\begin{cases}0, & eger\ x=0\ bolsa\\ x^2\cos\frac{\pi}{x}, & eger\ x\neq 0\ bolsa\end{cases}$$
funksianyň [0,1] kesimde çäkli üýtgeýişli funksiýadygyny subut etmeli.

6. $$f(x)=\begin{cases}0, eger\ x=0\ bolsa,\\ x\sin\frac{\pi}{x}, eger\ x\neq 0 bolsa\end{cases}$$

funksiýanyň $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ kesimde çäkli üýtgeýişli däldigini subut etmeli.

7. Goý, $f(x)$ funksiýa $[0,1]$ kesimde çäkli üýtgeýişli bolsun. $F(x)=f(ax+b)$ funksiýanyň $\left[-\frac{b}{a},\frac{1-b}{a}\right]$ $(a>0)$ kesimde çäkli üýtgeýişlidigini subut etmeli we $V_0^1[f]=V_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a}}[F]$ deňligi görkezmeli.

8. Çäkli üýtgeýişli üznüksiz funksiýalaryň deňölçegli ýygnanýan hatarynyň jeminiň çäkli üýtgeýişli bolmagy hökmanmy?

9. $[a,b]$ kesimde Lipşis şertini kanagatlandyrýan funksiýanyň şol kesimde çäkli üýtgeýişlidigini subut etmeli.

10. Goý, $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde çäkli üýtgeýişli bolsunlar. Bu funksiýalaryň jeminiň we köpeltmek hasylynyň şol kesimde çäkli üýtgeýişlidigini subut etmeli we

$$V_a^b[f+g]\le V_a^b f+V_a^b g$$

deňsizlikleriň ýerine ýetýändigini görkezmeli.

11. Goý, $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde çäkli üýtgeýişli we bu kesimiň hemme nokatlarynda $f(x)\ge c>0$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsun. Onda $\frac{1}{f(x)}$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimde çäkli üýtgeýişlidigini subut etmeli.

12. Goý, $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde çäkli üýtgeýişli funksiýa bolsun. f funksiýanyň $[a,x]$ kesimde wariasiýasyny $\vartheta(x)=V_a^x[f]$ bilen belgiläliň.

3) $C[0,1]\ni x\xrightarrow{f}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^2}x\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

Funksionallar çyzykly, üznüksiz bolýarmy:

4) $C[0,1]\ni x\xrightarrow{f}\int_0^1|x(t)|dt$.

5) $C[0,1]\ni x\xrightarrow{f}\|x\|$?

3. Aşakdaky funksionallaryň çyzykly we üznüksizdigini subut etmeli we olaryň normalaryny tapmaly:

1) $\ell_2\ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\xrightarrow{f}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k}$.

2) $L_2[0,1]\ni x\xrightarrow{f}\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}x(t)dt$.

3) $C[0,1]\ni x\xrightarrow{f}\int_0^1 x(t)sign\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$.

4) $R\ni x\xrightarrow{f}a_1x_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k(x_{k+1}-x_k)$

$R-\|x\|=|x_1|+\sum_{k=1}^{n-1}|x_{k+1}-x_k|$ normaly n őlçegli arifmetik giňişlik.

5) $\ell_1\ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\xrightarrow{f}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k,\{a_k\}$. çäkli san yzygiderligi.

4. Aşakdaky funksionallaryň çyzyklydygyny, üznüksizdigini barlamaly we normalaryny tapmaly:

1) $\ell_1\ni x=(\xi_1,\xi_2,....)\longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$.

$$\|x\| = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^\rho \right)^{1/\rho}, \ 1 \le \rho \le \infty, \\ \sup_{k \ge 1} |\xi_k|, \ \rho = \infty, \ x = \{\xi_k\} \in \ell_\rho \end{cases}$$

norma gőrä Banah giňişligi bolýandygyny barlamaly.

45. $C^1[a,b]$ kőplügiň $\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)| + \max_{a \le t \le b} |x'(t)|$ norma gőrä Banah giňişligi bolýandygyny subut etmeli.

§ 10. Çyzykly funksionallar

1. Aşakdaky f funksionallaryň haýsysy çyzykly, üznüksiz bolýar:

   1) $C[0,1] \ni x \xrightarrow{f} \int_0^1 x^2(t)dt.$

   2) $L_2[0,1] \ni x \xrightarrow{f} \int_0^1 x(t)\sin^2 tdt.$

   3) $L \ni x = \{\xi_k\} \xrightarrow{f} \sum_0^{\infty} \xi_k \sin k.$

   (bu ýerde $L - \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}$ normasy bolan $x \in \ell_2$ elementleriň çyzykly giňişligidir we $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k < \infty$)?

2. C[0.1] banah giňişliginde aşakdaky funksionallaryň çyzyklydygyny, üznüksizdigini barlamaly we normalaryny tapmaly:

   1) $C[0,1] \ni x \xrightarrow{f} x(0).$

   2) $C[0,1] \ni x \xrightarrow{f} \int_0^1 tx(t)dt.$

$f(x)$ funksiýanyň $x_0 \in [a,b]$ nokatda üznüksiz bolmagy üçin $\vartheta(x)$ funksiýanyň bu nokatda üznüksiz bolmagynyň zerur we ýeterlikdigini subut etmeli.

13. $[a,b]$ kesimde çäkli üýtgeýişli funksiýalaryň $V(a,b)$ köplüginiň

$$\rho(f,g) = |f(a) - g(a)| + V_a^b[f - g]$$

metrika bilen metrik giňişligi emele getirýändigini subut etmeli. Bu giňişligiň dolulugyny görkeziň.

14. $[0,\pi]$ kesimde çäkli üýtgeýişli $\cos^2 x$ funksiýany iki artýan funksiýanyň tapawudy görnüşinde aňlatmaly.

15. $[0,2\pi]$ kesimde çäkli üýtgeýişli $\sin x$ funksiýany iki artýan funksiýanyň tapawudy görnüşinde aňlatmaly.

16. $[0,2]$ kesimde çäkli üýtgeýişli

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \ eger \ x \in [0,1), \\ 0 \quad eger \ x = 1, \\ 1 \quad eger \ x \in (1,2] \end{cases}$$

funksiýany iki artýan funksiýanyň tapawudy görnüşinde aňlatmaly.

§ 9. Normirlenen giňişlikler. Ekwiwalent normalar. Banah giňişlikleri.

1. $/ R^1 \ni x \to |arctgx|$ funksiýa norma bolýarmy?

2. $/ R^2 \ni x = (\xi_1, \xi_2) \to \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ funksiýa $/ R^2$ giňişlikde normany kesgitleýärmi? Eger kesgitleýän bolsa, onda girizilen norma gőrä $/ R^2$ giňişlikde birlik şar nämäni aňladýar?

3. $/ R^2 \ni x = (\xi_1,\ldots\xi_n) \to \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$ funksiýanyň 0<p<1 we $n \geq 2$ bolanda $/ R^n$ giňişlikde norma bolmaýandygyny görkezmeli.

4. $/ R^2$ giňişlikde

$\|x\| = \max\{|\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2|\}$ $\left(x = (\xi_1, \xi_2) \in / R^2\right)$ formula bilen normany kesgitläp bolarmy?

5. Aşakdaky funksiýalar kesgitlenen köplüklerinde norma bolýarmy:

1) $c[a,b] \ni x \to \max\limits_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|$.

2) $c^1[a,b] \ni x \to \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$.

3) $c[0,1] \ni x \to \max\limits_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|$.

4) $c^1[0,1] \ni x \to |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$.

5) $c^1[0,1] \ni x \to |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$.

6) $c^1[0,1] \ni x \to \int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$?

6. $c^2[a,b]$ çyzykly giňişlikde x(t) elementli norma deregine kabul edip bolarmy:

1) $|x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$.

2) $|x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$.

3) $\max\limits_{a \leq t \leq b} |x''(t)| + \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

37. Banah giňişliginde diametrleri nola ymtylýan biri-biriniň içinde saklanýan boş bolmadyk ýapyk köplükleriň yzygiderliginiň ýeke-täk umumy nokadynyň bardygyny subut etmeli.

38. Goý, R çyzykly normirlenen giňişlikde radiuslary nola ymtylýan biri- biriniň içinde saklanýan ýapyk şarlaryň islandik yzygiderliginiň boş däl kesişmesi bar bolsun. R giňişligiň Banah giňişligi bolýandygyny subut etmeli.

39. Banah giňişliginde boş däl biri-biriniň içinde saklanýan ýapyk şarlaryň islendik yzygiderliginiň umumy nokadynyň bardygyny subut etmeli.

40. Banah giňişliginde biri-biriniň içinde saklanýan boş däl ýapyk köplükleriň yzygiderliginiň kesişmesi boş bolup bilermi?

41. $\|x\|_1 = \sup|\xi_k|$ $(x = \{\xi_k\})$ norma görä ℓ_1 giňişlik doly bolup bilermi?

42. $L = \left\{x = \{\xi_k\} \in R : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0,\ \xi_k \in R\right\}$ bolsun. Eger:

1) $R = \ell_2$. 2) $R = \ell_\rho (\rho > 1)$

bolsa, onda R giňişligiň L bölekgiňişligi bolup bilermi?

43. [a,b] kesimde $\alpha \in (0,1]$ görkezijili

$$H_\alpha(x) = \sup_{\substack{a \leq t, \tau \leq b \\ t \neq \tau}} \frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha} < +\infty$$

Gýolder şertini kanagatlandyrýan hemme funksiýalaryň köplügini $C^\alpha[a,b]$ bilen belgiläliň. $C^\alpha[a,b]$ giňişligiň $\|x\|_\alpha = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| + H_\alpha(x),\ x \in C^\alpha[a,b]$ norma görä Banah giňişligi bolýandygyny subut etmeli.

44. $\ell_\rho (1 \leq \rho \leq \infty)$ köplügiň

28.Goý, $x_n(t), x(t), y(t) \in C^k[a,b], n \to \infty$ bolanda $x_n(t) \to x(t)$ bolsun. $n \to \infty$ bolanda $x_n(t)y(t) \to x(t)y(t)$ subut etmeli.

29. Goý, $x_n \in R$ fundamental yzygiderlik we x_{n_k} bőlek yzygiderlik ýygnanýan bolsun. x_n yzygiderligiň ýygnanýandygyny subut etmeli.

30. Goý, $x_n \in R$ we $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ hatar ýygnanýar. x_n yzygiderligiň fundamentaldygyny subut etmeli. Tersine tassyklama dogrumy?

31. Goý, $x_n, y_n \in R$ fundamental yzygiderlik bolsun. $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ yzygiderligiň ýygnanýandygyny subut etmeli.

32. [a,b] kesimde garalýan kőpagzalaryň çyzykly giňişliginde

$$\|x\|_1 = \max_{a\le t\le b} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \left[\int_a^b |x(t)|^2 dt\right]^{1/2}$$

normalar girizeliň.

1) Normanyň aksiomalaryny barlamaly.
2) Alnan giňişlikler Banah giňişligi bolarmy?

33. R çyzykly giňişlikde ekwiwalent iki normalar berlipdir, we olaryň biri bilen R Banah giňişligidir. Başga norma boýunça-da R çyzykly giňişligiň Banah giňişligi bolýandygyny subut etmeli.

34 Eger bir çyzykly giňişlikde iki normanyň biri boýunça yzygiderligiň ýygnanýandygyndan beýleki norma boýunça ýygnanmaklyk gelip çykýan bolsa, onda bu iki normanyň ekwiwalentdigini subut etmeli.

35. Islendik tükenikli őlçegli çyzykly normirlenen giňişligiň Banah giňişligi bolýandygyny subut etmeli.

36. Banah giňişligiň bőlekgiňişliginiň Banah giňişlik bolýandygyny subut etmeli.

7. Derejeleri n natural sandan geçmeýän hemme kőpagzalaryň kőplüginde normany $\|x\| \max_{a\le t\le b} |x'(t) - x(t)|$ gatnaşyk bilen kesgitläliň. Normanyň aksiomalaryny barlamaly.

8. $c^k[a,b]$ giňişlikde x(t) elementiň normasyny aşakdaky formulalar bilen kesgitläliň:

1) $\|x\| \max_{a\le j\le k} \left\{ \sup_{a\le t\le b} p_j(t) |x^{(j)}(t)| \right\}.$

2) $\|x\| = \left(\int_a^b \sum_{j=0}^{k} p_j(t) |x^{(j)}(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, q \ge 1.$

3) $\|x\| \sup_{a\le t\le b} \sum_{j=0}^{k} p_j(t) |x^{(j)}(t)|,$

bu ýerde $p_j \in c[a,b]$ $(j = 0,1,...,k)$ – položitel funksiýalar.

Normanyň aksiomalarynyň ýerine ýetýändigini gőrkezmeli.

9. $/ R^m \ni x \to \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$ funksiýanyň p<1 we $m \ge 2$ bolanda $/ R^m$ giňişlikde norma bolmaýandygyny subut etmeli.

10.

1) $p(x, y) = \max_{1\le k\le 4} |x_k - y_k|.$

2) $p(x, y) = \sum_{k=1}^{4} |x_k - y_k|.$

3) $p(x, y) = \max_{1\le k\le 4} |x_k - y_k|^{1/2}.$

4) $p(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (x_k - y_k)^2}.$

5) $p(x, y) = \max_{1\le k\le 4} \frac{|x_k - y_k|^{1/8}}{1 + |x_k - y_k|^{1/8}}.$

6) $p(x,y)=|x_k-y_k|+\max\limits_{1\le k\le 4}\left(\frac{1}{k}\cdot|x_k-y_k|^{1/2}\right).$

metrikaly / R^4 metrik giňişlikleriň haýsysy normirlenen giňişlik bolup bilýär?

11. C[a,b] giňişlikde $\|x\|_1 \max\limits_{a\le t\le 1}|x(t)|$ we $\|x\|_2=\int\limits_a^b |x(t)|dt$ normalaryň ekwiwalent däldigini barlamaly.

12. C[0,1] giňişlikde $\|x\|_1 \max\limits_{a\le t\le 1}|x(t)|$ we $\|x\|_2=\left(\int\limits_0^1 x^2(t)dt\right)^{1/2}$ normalaryň ekwiwalent däldigini barlamaly.

13. $c^1[a,b]$ giňişlikde $\|x\|_1 \max\limits_{a\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$ we

$\|x\|_2=\int\limits_0^1 |x(t)|dt+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$ normalar ekwiwalent bolýarmy?

14. Eger [a,b] kesimde $\vartheta(t)$ üznüksiz funksiýa we [a,b] kesimde $\vartheta(t)\ge\alpha>0$ bolsa, onda

$\|x\|_1=\left(\int\limits_a^b |x(t)|^2dt\right)^{1/2}$ we $\|x\|_2=\left(\int\limits_a^b \vartheta(t)|x(t)|^2dt\right)^{1/2}$ normalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli.

15. $c^1[a,b]$ giňişlikde $\|x\|_1 \max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le b}|x'(t)|$

we

$$\|x\|_2=|x(a)|+\max\limits_{0\le t\le b}|x'(t)|$$

normalar ekwiwalentmi?

16. $c[0,\tau]$ çyzykly giňişlikde

$\|x\|_1 \max\limits_{a\le t\le \tau}|x(t)|$ we $\|x\|_2-\max\limits_{a\le t\le\tau}\ell^{-\lambda t}|x(t)|$ $(\lambda=const>0)$

normalaryň ekwiwalentdigini subut etmeli.

16. $R=\ell_3,\ x_n=\left(1,\frac{1}{2},\dots\frac{1}{n},0,\dots.\right).$

17. $R=\ell_4,\ x_n=\left(\underbrace{0,\dots 0}_{n-1},2,0,\dots.\right).$

18. $R=L_1[0,1],\ x_n(t)=n\ell^{-nt}.$

19. $R=L_1[0,1],\ x_n(t)=\begin{cases}\ell^{-\frac{t}{n}}, eger\, t\ irrasional\ bolsa,\\ 0,\ \ eger\, t\ rasional\ bolsa.\end{cases}$

20. $R=L_2[0,1],\ x_n(t)=t^n-t^{2n}.$

21. $R=L_2[0,1],\ x_n(t)=\begin{cases}1-nt,\ t\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\\ 0,\qquad t\in\left(\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$

22. $R=L_2[0,1],\ x_n(t)=t^n-t^{n+1}.$

23. $R=L_2[0,1],\ x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}-n\sqrt{nt},\ t\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\\ 0,\qquad t\in\left(\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$

24. $R=L_2[0,1],\ x_n(t)=t^n.$

6) $R = C[0,1],\ x_n(t) = \sin - \sin\frac{t}{n}.$

7. $R = C[0,1],\ x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}.$

8. $R = C[0,1],\ x_n(t) = t^n - t^{n-1}.$

9. $R = C^1[0,1],\ x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$

10. $R = \ell_1,\ x_n = \left(\underbrace{0,\ldots,0,}_{n-1}\ \frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{(n+1)^\alpha}, \ldots\right),\ \alpha > 1.$

11. $R = \ell_1,\ x_n = \left(\underbrace{0,\ldots,0,}_{n-1}\ \frac{1}{n}, 0, \ldots.\right).$

12. $R = \ell_2,\ x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}0,\ldots,0,1,}_{n}0,0,\ldots\right).$

13. $R = \ell_2,\ x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots.\right).$

14. $R = \ell_2,\ x_n = \left(\underbrace{1,0,\ldots,0,}_{n-1}\ \frac{1}{n}, 0, \ldots\right).$

15. $R = \ell_2,\ x_n = \left(\underbrace{0,\ldots,0,}_{n-1}\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots.\right).$

17. Tükenikli őlçegli çyzykly giňişlikde kesgitlenen islendik iki normanyň
ekwiwalentdigini subut etmeli.

18. $L_p[0,1]$ giňişlikde

$$\|x\|_1 = \left\{\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p},\quad \|x\|_2 = \left\{\int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| \cdot |x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p},$$

$$\|x\|_3 = \left\{\int_0^1 \left|t + \frac{1}{2}\right| \cdot |x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}$$

normalara garalyň. $\|\cdot\|_1$ we $\|\cdot\|_3$ normalaryň ekwiwalentdigini we

$\|\cdot\|_1$ we $\|\cdot\|_2$

normalaryň ekwiwalentdäldigini subut etmeli.

19. Eger:

1) $f(t) = t^2 - 9/16.$ 2) $f(t) = \exp(t/2).$

3) $f(t) = |t - 1/3|^{1/2}.$ 4) $f(t) = \ell n(t+1).$

5) $f(t) = sn(t - 1/3).$ 6) $f(t) = t^2.$

7) $f(t) = t^2 + 1.$ 8) $f(t) = \sqrt{t^2 + 0{,}1}.$

9) $f(t) = cht.$ 10) $f(t) = sht.$

11) $f(t) = t^2 - t.$

bolsa, onda c[0,1] giňişlikde $\|x\|_1 \max\limits_{a \le t \le 1} |x(t)|$ we

$\|x\|_2 \max\limits_{a \le t \le 1} |g(t)| \cdot |x(t)|$ normalaryň ekwiwalentdigini derňemeli.

20. Eger f(t) funksiýa 19-njy mysaldaky ýaly kesgitlenen bolsa, onda $L_2[0,1]$ giňişlikde $\|x\|_1 = \left\{\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$ we $\|x\|_2 = \left\{\int_0^1 |g(t)\cdot x(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$ normalaryň ekwiwalentdigini barlamaly.

21. Eger f(t) funksiýa 19-njy mysaldaky ýaly kesgitlenen bolsa, onda $L[0,1]$ giňişlikde $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt,\quad \|x\|_2 = \int_0^1 |g(t)x(t)|dt$ we normalaryň ekwiwalentdigini barlamaly.

22. Goý, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ we $\|x\|_1 = \|x\|_L,\ \|x\|_2 = \|(a_1x_1, a_2x_2, \ldots)\|_L$ bolsun, bu ýerde $a = (1, \sqrt{2}, \ldots, n^{1/n}, \ldots..)$. Eger $\|x\|_L$ norma degişlilikde:
1) L=m. 2) $L = \ell_1$. 3) $L = \ell_2$. 4) $L{=}C_o$ giňişliklerde hasaplanan bolsa, onda bu normalaryň ekwiwalentdigini barlamaly.

23. Goý, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (x_1, x_2/3, \ldots, x_n/n, \ldots,)$ we $\|x\|_1 = \|x\|_L$, $\|x\|_2 = \|y\|_L$ bolsun. Eger: 1) L=m. 2) $L = \ell_1$. 3) $L = \ell_2$. 4) L=C$_o$ bolsa, onda $\|x\|_1$, *we* $\|x\|_2$ normalaryň ekwiwalentdigini barlamaly.

24. $/R^4$ giňişlikde

$$\|x\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \|x_4\|,\ \|x\|_\infty = \max_{1\le k\le 4}|x_k|,\ \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^4 x_k^2\right)^{1/2}$$

normalaryň ekwiwalentdigini barlamaly.

25. Goý, $x_n, x, y_n, y \in R\ (n \in N)$ bolsun. Subut etmeli:
1) eger $x_n \to x$ bolsa, onda x_n çäkli yzygiderlik.
2) eger $x_n \to x\ \lambda_n \to \lambda, \lambda \in c$ bolsa, onda $\lambda_n x_n \to \lambda, x$.
3) eger $x_n \to x$ bolsa, onda $\|x_n\| \to \|x\|$.
4) eger $x_n \to x$ we $\|x_n - y_n\| \to 0$ bolsa, onda $y_n \to x$..
5) eger $x_n \to x$ bolsa, onda $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$
6) eger $x_n \to x\ y_n \to y$ bolsa, onda $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$

26.
1) m giňişlikde ýygnanýan, ýőne, ℓ_1 giňişlikde ýygnanmaýan.
2) m giňişlikde ýygnanýan, ýőne , ℓ_2 giňişlikde ýygnanmaýan.
3) ℓ_2 giňişlikde ýygnanýan, ýőne, ℓ_1 giňişlikde ýygnanmaýan.
4) c_0 giňişlikde ýygnanýan, ýőne, ℓ_1 giňişlikde ýygnanmaýan.
5) c_0 giňişlikde ýygnanýan, ýőne, ℓ_2 giňişlikde ýygnanmaýan

$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)\ (x_k \in R)$ yzygiderlikde mysal getirmeli

27. R normirlenen giňişlikde $\{x_n, n \ge 1\}$ yzygiderligiň ýygnanýandygyny anyklamaly:
1) $R = C[0,1],\ x_n(t) = t^n$.
2) $R = C[0,1],\ x_n(t) = t^n - t^{n+1}$.
3) $R = C[0,1],\ x_n(t) = t^n - t^{2n}$.
4) $R = C[0,1],\ x_n(t) = \dfrac{t^n + 1}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$.
5) $R = C[0,1],\ x_n(t) = \ell^{-\frac{t}{n}}$.