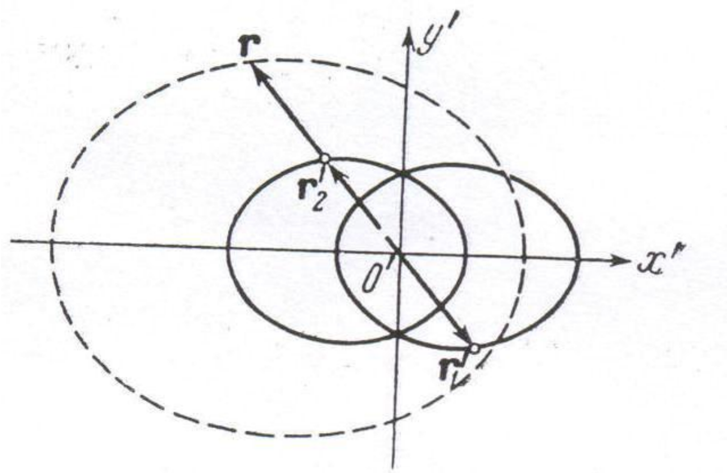
Nazary mehanika we tutuş gurşawlaryň mehanikasy



Aşgabat-2010

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

Mazmuny

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

J Hojagulyýew

Nazary mehanika we tutuş gurşawlaryň mehanikasy

(Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy)
Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenen

Aşgabat-2010

Giriş

Nazary mehanika jisimleriň giňişlikdäki ornunyň wagtyň geçmegi bilen üýtgemegini öwrenýän ylymdyr(mehaniki hereket). Nazary mehanika mehanikanyň beýleki bölümleri(maýyşgaklyk nazaryýeti, materiallaryň garşylygy, plastiklik nazaryýeti, maşynlaryň we mehanizmleriň nazaryýeti, gidrodinamika) we köp tehniki dersler üçin esas bolup durýar.

Nazary mehanika mehaniki hereketiň umumy kanunalaýyklyklaryny öwrenýär we diňe mehaniki hereketi dälde , eýsem maddalaryň mikrobölejikleriniň içki hereketini we bular bilen özara täsir edişýän fiziki meýdanlary öwrenýän fizikanyň bir bölümidir.

Nazary mehanikanyň predmeti mehaniki hereket we bu hereket bilen baglanşykly material jisimleriň mehaniki özara täsiridir. Fizikadan tapawutlylykda mehanika mehaniki özara täsiriň fiziki tebigatyny gapdalda goýup, mehaniki hereket bilen bu baglanşygyň diňe mukdar tarapyny öwrenýär.

Nazary mehanikada real jisimleriň takyk häsiýetlerinden tapawutlanýan material jisimleriň dürli modellerine seredilýär. Jisimiň ölçegleri abstragirlenip jisim material nokat hökmünde kabul edilýär. Jisimleriň aýlaw hereketini öwrenmek absolýut gaty jisim modeline getirýär.

Gaty jisimleriň deformirlenmegi, suwuklyklaryň we gazlaryň akyjylygy we gysylmaklygy bilen baglanşykly has çylşyrymly mehaniki hereketleri öwrenmeklik tutuş gurşaw düşünjesini girizmeklige getirdi.

Mehaniki hereket hem beýleki hereketler ýaly giňişlikde wagtyň geçmegi bilen bolup geçýär.Giňişlik, wagt we hereket materiýanyň bar bolmagynyň esasy formasydyr. Derňewiň obektiniň häsiýetine görä material nokadyň, material nokatlar ulgamynyň, absolýut gaty jisimiň we maýyşgak,suwuk we gaz halyndaky jisinleriň mehanikasyny öz içine alýan tutuş gurşawyň mehanikasyny tapawutlandyrýarlar.

Nazary mehanika kursuny üç bölüme bölmek kabul edilen: statika, kinematika we dinamika. Nazary mehanikanyň statika bölüminiň ŷgüýç baradaky ylym düzýär. Nazary mehanikanyň kinematika bölümi jisimleriň hereketini aňlatmagyň usulyny takyklaýar.

Nazary mehanikanyň wajyp bölümleriniň biri dinamikadyr. Bu bölümde material jisimleriň özara täsiri bilen baglanşykly hereketi öwrenilýär.

Kitap nazary mehanikanyń we tutuş gurşawlaryň mehanikasynyń esaslarynyň ulgamlaýyn beýanyny özünde saklaýar. Nÿuton-Galileÿiń mehanikasynyń fundamental düşünjeleri we kanunlary, hereket mukdarynyń, hereket mukdarynyń momentiniń, energiÿanyń üÿtgemek we saklanmak kanunlary, Lagranžyń, Gamiltonyń, Gamilton-Ÿakobiniń(potensial güÿçler üçin) deńlemeleri, şeÿle hem tutuş gurşawlaryň mehanikasynyń kanunlary őwrenilŷăr. Kitapda iki jisimiń meselesi we bölejikleriń dargamagynyň nazaryýeti, impulsyň, impulsyň momentiniň we energiýanyň üýtgemeginiň kanunlary, potensial,giroskopik we dissipatiw güýçleriň täsirindäki çyzykly yrgyldylaryň nazaryýeti, çyzykly däl yrgyldylar üçin Krylow- Bogolÿubowyń usuly yzygiderli beýan edilýär. Ideal suwuklyga, şepbeşik suwuklyga we maÿyşgak jisime bir esasda seredilÿär. Kitap fizikler üçin gyzykly meseleleriň birnäçesini hem özünde saklaýar.

Kitap fizikler üçin niÿetlenenem hem bolsa, beÿleki tehniki ugurlarda bilim alÿan talyplara hem gollanma bolup biler.

$$\dot{x} = \frac{e\varepsilon_0}{m\varpi}\sin\varpi t + \dot{x}_0 \qquad x = \frac{e\varepsilon_0}{m\varpi^2}(1-\cos\varpi t) + \dot{x}_0 t + x_0$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 \qquad y = \dot{y}_0 t + y_0$$

$$\dot{z} = 0 \qquad z = 0$$

Şeýlelikde, zarýad ε_0 we v_0 wektorlar bilen emele getirilýän z=0 tekizlikde hereket edýär. Ox okuň ugruna hereket hemişelik tizlik bilen bolup geçýär. Zarýadyň Ox okuň ugruna hereketi başlangyç $\dot{x}_0$ tizlikli inersiýa boýunça hereketden we berlen güýjüň ω ýygylykly yrgyldysyndan jemlenýär.

I bölüm.Nazary mehanika (Dinamika)

I bap. Mehanikanyň esasy düşünjeleri we kanunlary

§ 1. Material nokat, giňişlik we wagt barada düşünjeler.

Bize mälim bolan material obýektleriň hemmesi meýdan, elementar bölejikler, atomlar, molekulalar, janly we jansyz jisimler sözüň umumy manysynda hereket edýärler, ýagny üýtgeýärler.

Jisimleriň hereketiniň iň ýönekeý görnüşi olaryň bir-birine görä orunlarynyň üýtgemegidir. Ýönekeý orun üýtgetmegiň nazaryýetine klassik mehanika diýilýär. Klassik mehanikada makro jisimleriň (köp sanly atomlardan we molekulalardan durýan jisimleriň) hereketine seredilýär. Şeýle hem hereketiň tizligi ýagtylygyň tizliginden kän kiçi hasap edilýär. Şeýlelikde klassik mehanika–bir makroskopik jisimiň beýleki bir makroskopik jisime görä, ýeterlik haýal orun üýtgetmeginiň nazaryýetidir.

Klassik mehanikanyň esasy düşünjeleri – giňişlik we wagt baradaky, güýç we massa baradaky, inersial hasaplaš ulgamy baradaky düşünjelerdir.

Klassik mehanikanyň esasy kanunlary - Galileý - Nýutonyň inersiýa kanuny (Nýutonyň birinji kanuny), inersial hasaplaŷyş ulgamyna görä hereketiň deňlemesi (Nýutonyň 2-nji kanuny), täsiriň we garşylykly täsiriň deňliginiň kanuny (Nýutonyň 3-nji kanuny).

Jisimiň hakyky hereketi şeýle bir çylşyrymly, şonuň üçin seredilýän herekete zerur bolmadyk ölçeglerden ünsi sowmak gerek bolŷar. Şeýle maksat bilen birnäçe düşünjeler ulanylýar. Düşünjeleriň iň esasylarynyň biri material(maddy) nokat baradaky düşünjedir.

Material nokat diýip jisimiň hereketini häsiýetlendirýän ölçegler bilen deňeşdireniňde ölçeglerini hasaba almasaň hem bolýan jisimlere diýilýär. Meselem, Günüň töwereginde Ýeriň hereketi. Bu mysalda Gün we Ýer material nokat deregine kabul edilýär. Sebäbi Günüň we Ýeriň radiuslary degişlilikde $7x10^8$m we $6x10^6$m, ikisiniň aralygy bolsa $1,5x10^{11}$m.

Her biri material nokat diýip hasap edilýän jisimleriň toplumyna material nokatlaryň ulgamy diýilýär.

Mehanikanyn esasy düşünjeleriniň biri hem, absolýut gaty jisim düşünjesidir. Absolýut gaty jisim diýip, erkin orun üýtgemede material nokatlaryň arasyndaky aralyk üýtgemeýän material nokatlaryň ulgamyna diýilýär.

Material nokatlaryň özara ýerleşişi öwrenilende uzynlyk etalony bilen olaryň aralygyny ölçemek wajyp bolup durýar. 1960-njy ýyldan başlap Halkara birlikler ulgamyna laýyklykda, uzynlyk etalony metr deregine Kripton 86 atomynyň $5d_5$ we $2P_{10}$ derejeler arasyndaky geçişde şöhlelendirýän tolkunynyň uzynlygynyň 1650763,73-i kabul edilendir.

Hereketi öwrenilýän material nokadyň ýagdaýy görälikde kesgitlenýän, göz öňüne getirilýän absolýut gaty jisime hasaplaýyş jisimi diýilýär. Koordinatalar ulgamy berk baglanan hasaplaýyş jisiminden we wagt ölçeýji abzaldan durýan topluma hasaplaýyş ulgamy diýilýär.

Hereketi öwrenilýän material nokadyň ýagdaýy, hasaplaýyş ulgamyndaky özi bilen gabat gelýän nokadyň ýagdaýy bilen kesgitlenýär. Hasaplaýyş ulgamyndaky nokadyň ýagdaýy dürli koordinatalar ulgamyny girizmek bilen kesgitlenip bilner.

Nokadyň tekizlikdäki ýagdaýy gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda nokadyň Ox we Oy oklara bolan ugrukmalary x we y bilen kesgitlenýär (1-nji surat). Polýar koordinatalar ulgamynda bolsa ρ we φ ululyklar bilen kesgitlenýär(2-nji surat). ρ-nokatdan koordinatalar başlangyjyna çenli aralyk, φ- koordinatalar başlangyjyndan geçirilen şöhle bilen nokady koordinatalar başlangyjy bilen birikdirýän kesimiň arasyndaky burç.

Wagtyñ t=0 momentinde zarýad $\vec{r}_0$ ýagdaýda bolup kondensatoryñ plastinanalary bilen baglanyşykly hasaplaýyş ulgamyna görä $\vec{v}_0$ tizlige eýedir. Zarýadyñ wagtyñ islendik pursatyndaky (t>0) ýagdaýyny we tizligini tapmaly.

Meseläniñ şertinden zarýada tässir edýän güýjüň

$\vec{F} = e\varepsilon_0 \cos\varpi t$ -digi gelip çykýar.

Onda hereketiñ deñlemesi

$m\ddot{\vec{r}} = e\varepsilon_0 \cos\varpi t$ bolar.

Güýç wagtyñ islendik pursatynda hemişelik ε_0 wektora kollineardyr. Şonuñ üçin tizlenme we tizligiñ artmasy hem ε_0 wektora kollineardyr. Şeýlelikde zarýadyñ hereketi $\vec{\varepsilon}_0$ we $\vec{v}_0$ wektorlar bilen berilýän tekizlikde geçýär. Dekart koordinatalar ulgamyny alalyñ. ox oky ε_0 wektoryñ ugruna ugrukdyralyñ. z tekizligi hereketiñ tekizligi bilen gabat getireliñ. Saýlanyp alnan koordinatalar ulgamynda güýjüñ ugrukmalary

$$F_x = e\varepsilon_0 \cos\varpi t,\ F_y = F_z = 0$$

Hereketiñ wektor deñlemesiniñ çep we sag tarapyny saýlanyp alnan ulgamyñ oklaryna proýektirläp üç differensial deñlemäni alarys.

$$m\ddot{x} = e\varepsilon_0 \cos\varpi t;\ m\ddot{y} = 0;\ \ m\ddot{z} = 0$$

Deñlemäni integrirläp alarys.

$$\dot{x} = \frac{e\varepsilon_0}{m\varpi}\sin\varpi t + c_1 \qquad x = -\frac{e\varepsilon_0}{m\varpi^2}\cos\varpi t + c_1 t + c_4$$

$$\dot{y} = c_2 \qquad y = c_2 t + c_5$$

$$\dot{z} = c_3 \qquad z = c_3 t + c_6$$

Bu funksiýalara t=o goýup we başlangyç şertleri peýdalanyp $\vec{r}(t)$ we $\vec{v}(t)$ üçin çözgütleri alarys.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i \quad (t, c_1, c_2, ..., c_{6N}) \qquad \text{(i=1, 2, …, N)}$$
(1.49)

1.48-de we 1.49-da $t=t_0$ diýip alarys.

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i \quad (t_0, c_1, c_2, ..., c_{6N});$$

$$\vec{v}_{i0} = \vec{v}_i \quad (t_0, c_1, c_2, ..., c_{6N}) \qquad (1.50)$$

1.50-nji ulgam integrirlemegiñ hemişeliklerine görä çözgüde eýe diýip hasap edip taparys.

$$c_\alpha = c_\alpha (t_0,\ \vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}, ..., \vec{r}_{N0}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}, ..., \vec{v}_{N0}) \quad (\alpha = 1,2,...,6N)$$
(1.51)

1.51-ni 1.44-de ýerine goýup 1.40 ulgamyñ umumy çözgüdini alarys.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i (t, t_0,\ \vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}, ..., \vec{r}_{N0}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}, ..., \vec{v}_{N0}) \qquad \text{(i=1, 2, …, N)}$$
(1.52)

Şeýlelikde, eger nokatlaryñ massalary, ulgamyñ nokatlaryna täsir edýän güýçler we başlangyç şertler berlen bolsa, onda ulgamyñ özüni alyp barşy aňyk kesgitlenýär.

Haçan-da material nokada diñe wagta bagly bolan güýç täsir etse hereketiñ hemme üç deñlemesi

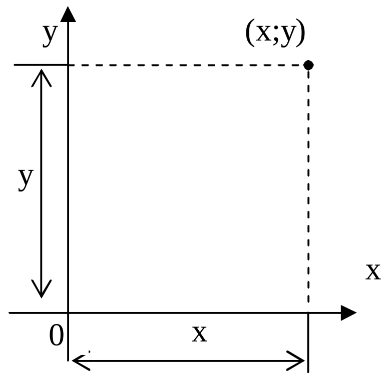
$$m\ddot{x} = F_x(t)$$

görnüşe eýedir. Bu deñlemäni integrirläp we başlangyç şertleri hasaba alyp umumy çözgüdi kwadraturada taparys.

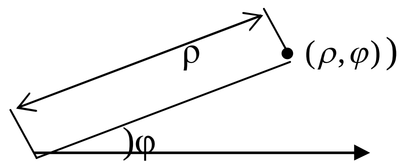
$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_x(t)dt + \dot{x}_0; \qquad x = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} F_\alpha(t)dt\right]dt + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0$$

Mysal 1.2 *m* massaly *e* zarýad hereketsiz tekiz kondensatoryñ plastinalarynyñ arasynda hereket edýär. Elektrik meýdanynyñ güýjenmesi

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \varpi t$ (ε_0 we ϖ - hemişelik ululyklar).



1-nji surat. Tekizlikdäki gönüburçly dekart koordinatalar ulgamy[3]



2-nji surat.Tekizlikdäki polýar koordinatalar ulgamy

Giňişlikdäki gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda nokadyň ýagdaýy nokadyň Ox, Oy we Oz oklara bolan ugrukmalary x,y we z bilen(3-nji surat), silindr koordinatalar ulgamynda üç ululyk φ, ρ we z bilen(4-nji surat), sferik koordinatalar ulgamynda bolsa üç ululyk (r, φ, θ) bilen(5-nji surat) kesgitlenýär.

Nokadyň bir ulgamdaky koordinatalaryny beýleki ulgamdaky koordinatalary bilen baglanyşdyrýan formula koordinatalary özgertmek diýilýär.

Nokadyň tekizlikdäki x we y dekart koordinatalary tekizlikdäki polýar koordinatalary $\rho we \varphi$ bilen

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad (1.1)$$

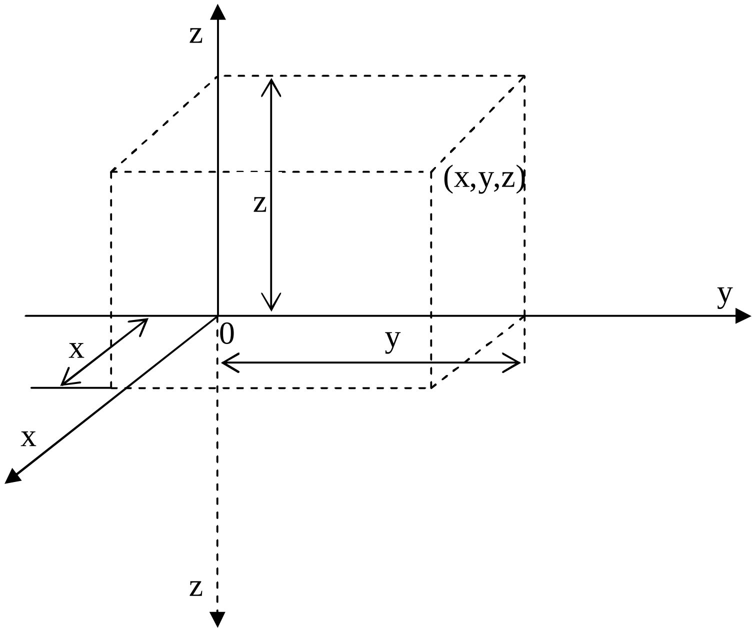
giňişlikdäki dekart koordinatalary x, y we z giňişlikdäki slindrik ρ,φ,z koordinatalar bilen

$$x = \rho \cos\varphi; \quad y = \rho \sin\varphi; \quad z = z\ , \qquad (1.2)$$

we nokadyň sferik koordinatalary bolan r,φ,ѳ bilen

$$x = r\sin\theta\cos\varphi; \quad y = r\sin\theta\sin\varphi; \quad z = r\cos\theta \qquad (1.3)$$

görnüşde baglanşykdadyr.



3-nji surat. Giňişlikdäki gönüburçly dekart koordinatalar ulgamy

ulgamlarynda birmeňzeşdir.Bu diýildigi $m\vec{w} = \vec{F}$ deňleme $m'\vec{w}' = \vec{F}'$ deňlemä ekwiwalent diýildigidir.

Klassiki mehanikada $m = m'$ we $\vec{w} = \vec{w}'$ -ligi üçin Galileýiň prinsipinden

$$\vec{F} = \vec{F}' \qquad (1.47)$$

deňlik gelip çykýar. Başgaça aýdanynda Nýutonyň deňlemesi Galileýiň özgertmesine görä inwariantdyr. Klassiki görälilik prinsipine görä mehanikanyń kanunlary hemme inersial hasaplama ulgamlarynda birmeńzeşdir.

§ 4. Hereketiñ deñlemesiniñ çözgüdi we başlangyç şertler.

N material nokatlardan durýan mehaniki ulgamyñ hereketi 1.36-njy deñlemä boýun egýär. Eger hemme nokatlaryñ massalary we olaryñ wagtyñ islendik pursatyndaky ýagdaýlary belli bolsa, onda, 1.36-njy deñlemäniñ kömegi bieln güýji wagtyñ funksiýasy ýaly kesgitläp bolar. Eger güýç nokadyń ýagdaýynyñ, tizliginiñ we wagtyñ funksiýasy ÿaly berlen bolsa, onda radius-wektory wagtyñ funksiýasy hökmünde kesgitlemek has kyn mesele bolup durýar. Matematiki nukdaÿ nazardan bu mesele 2-nji derejeli 3N differensial (adaty) deñlemeler ulgamynyñ umumy çözgüdini tapmaga syrykdyrylýar. Bu çözgüt 6N erkin hemişeliklere bagly bolup

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\ (t, c_1, c_2, ..., c_{6N}) \qquad \text{(i=1, 2, …, N)} \qquad (1.48)$$

görnüşde ýazylyp bilner. Integrirlemegiñ hemişelikleri başlangyç şertler bilen baglanyşykly.

Goý bize 1.48-nji umumy çözgüt we nokatlaryñ başlangyç ýagdaýlary we tizlikleri belli bolsun, ýagny

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0), \quad \vec{v}_{i0} = \vec{v}_i(t_0) \qquad \text{(i=1, 2, …, N)}$$

1.48-nji çözgüdi wagta görä differensirläp nokadyñ tizligini wagtyñ funksiýasy ýaly taparys.

başlangyjy S ulgama görä deńölçegli we gönüçyzykly hereket edÿär, oklarynyń arasyndaky burçlar bolsa hemişelik diÿildigidir. Hakykatdanam, 1.21-den islendik material nokadyń S we S' ulgamlara görä ÿagdaÿyny häsiÿetlendirÿän $\vec{r} we \vec{r}\,'$ radius-wektorlar özara

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}\,' \qquad (1.43)$$

gatnaşyk bilen baglanyşykdadyr. Bu ÿerde $\vec{r}_{0'} = \left(\vec{v}_{0'}\right)_0 t + \left(\vec{r}_{0'}\right)_0$ - O'başlangyjyń S sistema görä radius-wektory; $\left(v_{0'}\right)_0 we \left(r_{0'}\right)_0$ O'başlangyjyń t=0 wagtdaky tizligi we radius-wektory. 1.43-i wagta görä differensirläp we S'-hiń oklarynyń ÿagdaylarynyń üÿtgewsizligini hasaba alyp, nokatlaryń tizlikleri üçin

$$\vec{v} = \left(v_{0'}\right)_0 + \vec{v}\,', \qquad (1.44)$$

gatnaşygy alarys. Bu ÿerde $\vec{v} we \vec{v}\,'$-nokadyń $S we S'$sistemalara görä tizlikleri. 1.44-i wagta görä differensirläp taparys:

$$\vec{w} = \vec{w}' \qquad (1.45)$$

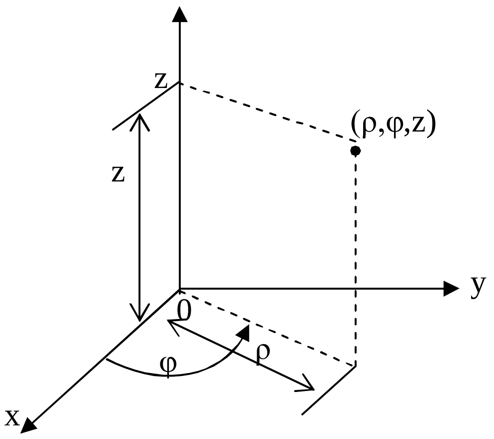
Şeÿlelikde nokadyń wagtyń berlen pursatyndaky tizlenmesi biri-birine görä tizlenmesiz hereket edÿän ulgamlar üçin hemişelikdir. Eger S ulgam inersial bolsa onda S-e görä tizlenmesiz hereket edÿän islendik başga S' ulgam hem inersialdyr.

Bir inersial ulgamdan başga bir inersial ulgama geçilende koordinatalaryń özgermesi (1.43) gatnaşyk bilen kesgitlenÿär. Bu özgertmä Galileÿiń özgertmesi diÿilÿär. Eger $S we S'$ sistemalar birmeńzeş ugrukdyrylan bolup, wagtyń başlangyç pursatynda 0 başlangyç bilen gabat gelÿän $0'$ başlangyjyń tizligi haÿsy hem bolsa bir ok boÿunça (meselem Ox ok boýunça) ugrukdyrylan bolsa onda Galileÿiń özgertmesi

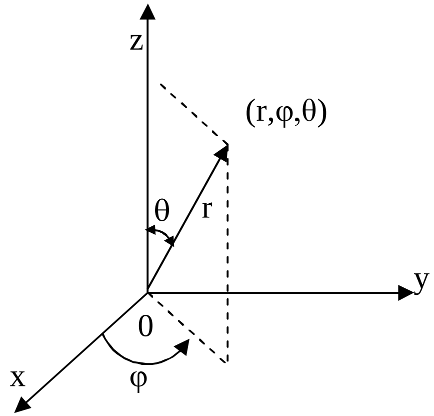
$$x = \vartheta_0 t + x', y = y', z = z' \qquad (1.46),$$

görnüşe eÿe bolar, bu ýerde $v_0 = \left(\dot{x}_{o'}\right)_0$

Galileý tarapyndan tassyklanan klassik görälilik prinsipine laýyklykda mehanikanyň kanunlary islendik inersial hasaplama



4-nji surat. Silindrik koordinatalar ulgamy



5-ji surat.Sferik koordinatalar ulgamy

A ulgamyň islendik material nokadynyň saýlanyp alnan S hasaplaýyş ulgamyna görä ýagdaýy ol nokadyň $\vec{r}$ -radius wektory bilen kesgitlenýär(6-njy surat).

$\vec{r}$ wektory üç Ox, Oy, Oz oklar boýunça dargadyp alýarys

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z \qquad (1.4)$$

bu ýerde x, y, z- radius wektoryň Ox, Oy, Oz oklara bolan ugrukmalary; $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ - birlik wektorlar.

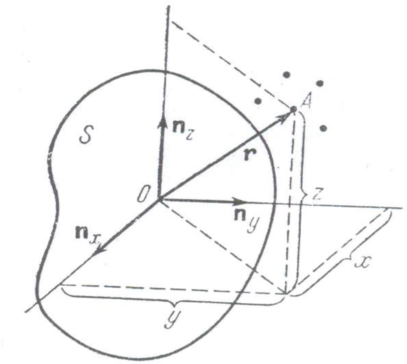
Eger A sistema N nokatlardan durýan bolsa, onda 1.4–de meňzeşlikde alarys:

$$\vec{r}_i = x_i\vec{n}_x + y_i\vec{n}_y + z_i\vec{n}_z \quad \left(i = 1,2,...,N\right) \qquad (1.5)$$

bu ýerde $\vec{r}_i$-i-nji nokadyň radius wektory, x_i, y_i, z_i-i-nji nokadyň dekart koordinatalary.

Eger-de bize A ulgamda islendik iki nokat berlen bolsa (1we 2) , onda

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{n}_x + y_1\vec{n}_y + z_1\vec{n}_z, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{n}_x + y_2\vec{n}_y + z_2\vec{n}_z$$



6-njy surat. Material nokatlaryň A ulgamy dekart koordinatalar ulgamynda[4]

1-nji nokatdan ikinji nokada geçirilen wektor

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Bu iki nokadyň arasyndaky aralygyň ululygy $\vec{r}_{12}$ wektoryň modulyna deňdir.

$$r_{12} = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2} \qquad (1.6)$$

Tizligi ýeterlik kiçi bolan makrojisimler bilen geçirlen tejribäniň esasynda wagtyň berlen pursatyndaky giňişligiň berlen interwalynyň ululygy dürli, erkin hereket edýän hasaplaýyş ulgamyna görä birmeňzeşdir diýip tassyklap bolar. Bu wajyp tassyklamany analitik ýazmak üçin merkezi O nokatda, birlik wektorlary $\vec{n}_x, \vec{n}_y we \vec{n}_z$ bolan S hasaplaýyş ulgamyny we merkezi O[1] nokatda, birlik wektorlary $\vec{n}'_x, \vec{n}'_{y,} \vec{n}'_z$ bolan S' hasaplaýyş ulgamyny alalyň(7-nji surat). Iki nokadyň (1 we 2) S hasaplaýyş ulgamyna görä aralygy r_{12} – ä deň. Iki nokadyň S[1] hasaplaýyş ulgamyna görä ýagdaýy

$r'_{12} = \left|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\right|$ deňdir. Bu ýerde

$$\vec{r}'_2 = x'_2\,\vec{n}_{x'} + y'_2\,\vec{n}_{y'} + z'_2\,\vec{n}_{z'};\ \vec{r}'_1 = x'_1\,\vec{n}_{x'} + y'_1\,\vec{n}_{y'} + z'_1\,\vec{n}_{z'};$$

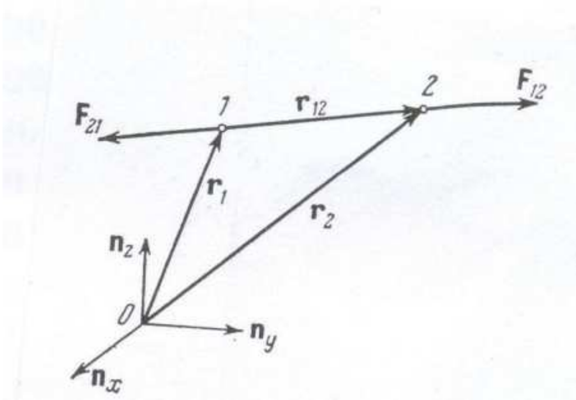
$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \qquad (1.40),$$

bu ýerde F$_i$ –i-nji nokada täsir edýän güýç.

Nýutonyń 3-nji kanunynda islendik iki material nokat biri-birine ululygy boýunça deń, ugry boýunça garşylykly, iki nokady birikdirýän göni boýunça täsir edýär diýip tassyklanýar(13-nji surat). Şeýlelikde, islendik iki nokat üçin

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (1.41),$$

bu ýerde F_{21} -2-nji nokat tarapyndan 1-nji nokada täsir edýän güýç, F_{12} bolsa 1-nji nokat tarapyndan 2-njä täsir edýän güýç.



13-nji surat. Iki nokadyň özara täsiri

Mehanikanyń 2-nji we 3-nji kanunlaryndan islendik iki nokadyń biri-birine massalaryna ters proporsional we iki nokady birleşdirýän göni boýunça garşylykly ugrukdyrylan tizlenmeleri berýändigi gelip çykýar. Seýlelikde özara täsir edişýän nokatlaryń massalary we tizlenmeleri

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (1.42)$$

gatnaşyk bilen baglanşykdadyrlar.

S hasaplaýyş ulgamyna görä tizlenmesiz hereket edýän S' hasaplaýyş ulgamyny alalyń. Beýle diýildigi, S' ulgamyń

$\vec r_0$ we $\vec v_0$ ululyklary bilip t_0 pursatdaky güýji kesgitlemek mümkin, bu güýji we massany bilip, şol wagtdaky tizlenmäni tapmak mümkin:

$$\ddot{\vec r}_0 = \frac{1}{m}\vec F\left(\vec r_0, \vec v_0, t_0\right)$$

Tizlenme öz gezeginde tizligiň $d\vec v = \ddot{\vec r}_0 dt$ ösmegini, $\vec v_0$ tizlik radius-wektoryň $d\vec r = \vec v_0 dt$ ösmegini kesgitleýär. Şeýlelikde, nokadyň $t_0 + dt$ pursatdaky ýagdaýy, tizligi we nokada täsir edýän $\vec F\left(\vec r_0 + d\vec r, \vec v_0 + d\vec v, t_0 + dt\right)$ güýji kesgitlenýär.

Nokadyń massasyny we wagtyń islendik pursatyndaky ÿagdaÿyny bilip Nÿutonyń 2-nji kanunyny ulanyp, nokada, wagtyń islendik pursatynda täsir edÿän F_{x^2} güÿji tapyp bileris.

Goÿ nokadyń hereketiniń kanuny dekart koordinatalar ulgamynda berlen bolsun: x=x(t), y=y(t), z=z(t). Iki gezek wagta görä differensirläp alarys:

$$F_x = m\ddot x,\quad F_y = m\ddot y,\quad F_z = m\ddot z,$$

bu ÿerden deń täsir ediji güÿji taparyş:

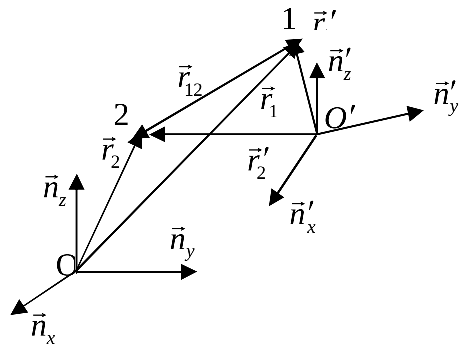
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad \cos(F,x) = \frac{F_x}{F},\ \cos(F,y) = \frac{F_y}{F},$$

$$\cos(F,z) = \frac{F_z}{F}$$

Berlen güÿjüń täsirinden uly massaly jisimiń tizliginiń üÿtgemegi uzak wagt aralygynda bolup geçÿär. Şol sebäpli jisim inertlilige eÿe diÿÿärler. Jisimiń massasy inertliligiń ölçegidir.

Nÿutonyń 2-nji kanuny mehanikanyń esasy ölçeg birliklerini saÿlamaga mümkinçilik berÿär. Bu kanun ölçeg birlikleri massanyń, uzynlygyń, wagtyń we güÿjüń birlikleri bolan ululyklaryń arasyndaky özara baglanyşygy guraÿar.

Nÿutonyń 2-nji kanunyny material nokatlaryń ulgamyna ulanyp mehaniki ulgamyň inersial hasaplama ulgamyna görä hereketiniń deńlemesini alarys:



7-nji surat. Koordinatalary özgertmek

(1.6) formulany göz öňünde tutup alarys:

$$\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]^{1/2} = \left[(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2\right]^{1/2} \qquad (1.7)$$

Bu ýerde $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ we ş.m. (1.7) postulatdan $\vec r'_{12}$ we $\vec r_{12}$ wektorlaryň S' we S hasaplaýyş ulgamlaryna ugrukmalary bir-biri bilen

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= a_{x'x}\Delta x + a_{x'y}\Delta y + a_{x'z}\Delta z \\ \Delta y' &= a_{y'x}\Delta x + a_{y'y}\Delta y + a_{y'z}\Delta z \\ \Delta z' &= a_{z'x}\Delta x + a_{z'y}\Delta y + a_{z'z}\Delta z \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

ortogonal özgertme bilen baglanyşykdadyr. Bu ýerde $a_{i'j}$ koeffisiýentler ortogonallyk şertine boýun egýärler

$$a_{x'x}^2 + a^2_{y'x} + a_{z'x}^2 = 1,\quad a_{x'y}^2 + a^2_{y'y} + a_{z'y}^2 = 1$$

$$a_{x'z}^2 + a^2_{y'z} + a_{z'z}^2 = 1$$

$$a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y} = 0 \quad a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z} = 0$$

$$a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z} = 0 \qquad (1.8)'$$

we S' we S hasaplaýyş ulgamlarynyň birlik wektorlarynyń arasyndaky kosinus burçlarydyr.(meselem $a_{x'x} = \cos\vec n_{x'}\vec n_x$).

Islendik iki nokadynyň aralygy 1.6-njy formula bilen kesgitlenýän giňişlige Ýewklidiň giňişligi diýilýär.Şeýlelikde, klassiki mehanikanyň giňişligi Ýewklidiň giňişligidir.

(1.8) baglanyşygy

$$\vec{r}\,'_{12} = \vec{r}_{12} \tag{1.9}$$

görnüşde aňlatmak bolar.Bu ýerde

$$\vec{r}\,'_{12} = \vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1 = (\Delta x')\vec{n}_{x'} + (\Delta y')\vec{n}_{y'} + (\Delta z')\vec{n}_{z'}$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\Delta x)\vec{n}_x + (\Delta y)\vec{n}_y + (\Delta z)\vec{n}_z$$

S we S' ulgamlaryň birlik wektorlary özara

$$\vec{n}_x = a_{x'x}\vec{n}_{x'} + a_{y'x}\vec{n}_{y'} + a_{z'x}\vec{n}_{z'};$$

$$\vec{n}_y = a_{x'y}\vec{n}_{x'} + a_{y'y}\vec{n}_{y'} + a_{z'y}\vec{n}_{z'};$$

$$\vec{n}_z = a_{x'z}\vec{n}_{x'} + a_{y'z}\vec{n}_{y'} + a_{z'z}\vec{n}_{z'};$$

görnüşdäki baglanyşykdadyrlar. 1.9–njy deňlikden şol bir material nokadyň dürli hasaplaýyş ulgamlaryna görä radius wektorlarynyň örän wajyp we ýönekeý gatnaşygy ýüze çykýar. Goý $\vec{r}_{0'}$ S' hasaplaýyş ulgamynyň başlangyjynyň S hasaplaýyş ulgamyna görä radius wektory, $\vec{r}$ - nokadyň S hasaplaýyş ulgamyna görä radius wektory , $\vec{r}\,'$ - nokadyň S' hasaplaýyş ulgamyna görä radius wektory bolsun. Onda $\vec{r}_2 = \vec{r}$; $\vec{r}\,'_2 = \vec{r}\,'$; $\vec{r}_1 = \vec{r}_{0'}$; $\vec{r}\,'_1 = 0$ hasap edip 1.9–dan alarys.

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}\,' \tag{1.10}$$

Mehanikada periodik proses düşünjesi uly ähmiýete eýedir(gaýtalanýan hadysa).Şeýle hadysa maýatnigiň yrgyldysy,Ỳeriň öz okunyň daşynda aýlanmagy, Yeriň Günüň daşynda aýlanmagy mysal bolup biler. Kömegi bilen perýodik proses amala aşyrylýan jisim sagat bolup hyzmat edip biler.Periodyň dowamlylygy wagtyň etalonydyr. Halkara birlikler ulgamynda wagtyň etalony deregine sekunt kabul edilipdir. Sekunt 1900-nji ýyl

jisime berilýän tizlenmäniń erkinligi we inersial hasaplaýyş ulgamynyń barlygynyń tassyknamasy ýatyr.

Üç nokatdan(1,2 we 3) ybarat ulgama seredeliň. Birinji nokat üçin (1.22), (1.23), (1.24) we (130.) tassyklamalaryň esasynda ikinji we üçünji nokatlar tarapyndan täsir edýän $\vec{F}_1^{(2,3)}$ güýç bilen bu güýjüň döredýän $\vec{w}_1^{(2,3)}$tizlenmesiniň arasyndaky

$$m_1\vec{w}_1^{(2,3)} = \vec{F}_1^{(2,3)} \tag{1.37}$$

gatnaşygy alyp bolar, bu ýerde m_1 – 1-nji nokadyň massasy,

$$\vec{w}_1^{(2,3)} = \vec{w}_1^{(2)} + \vec{w}_1^{(3)}; \quad \vec{F}_1^{(2,3)} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

Emma, 2-nji we 3-nji jisimleriň 1-nji nokatda döredýän $\vec{w}_1^{(2,3)}$ tizlenmesi nokadyň inersial hasaplaýyş ulgamyna görä $\vec{w}_1$ tizlenmesine deň, sebäbi berlen ulgamda 2-nji we 3-nji jisimler nokadyň tizlenmesiniň ýeke-täk sebäbi; şeýlelikde,

$$\vec{w}_1^{(2,3)} = \vec{w}_1 \tag{1.38}$$

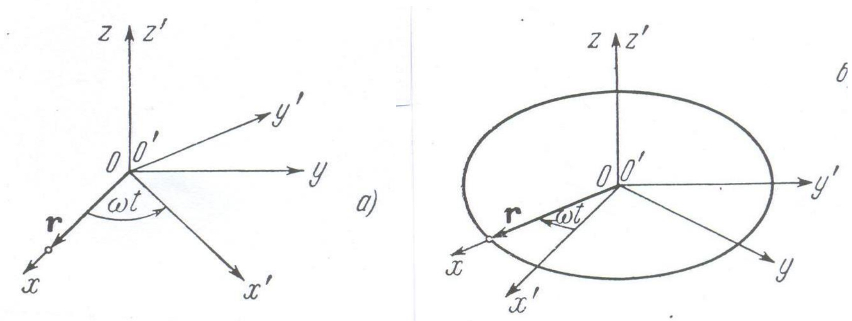
bu ýerde $\vec{w}_1 = \ddot{\vec{r}}_1$. (1.37) we(1.38) gatnaşyklar berlen nokada täsir edýän güýçleriň islendik sany üçin adalatlydyr. Şeýlelikde, nokadyň inersial sistema görä $\vec{w}_1$ tizlenmesi we nokada hemme jisimler tarapyndan täsir edýän güýçleriň jemi

$$m_1\vec{w}_1 = \vec{F}_1 \tag{1.39}$$

deňleme bilen baglanyşykdadyr.Bu deňlemä Nýutonyň 2-nji kanuny diýilýär. Nýutonyň 2-nji kanunyna laýyklykda islendik material nokadyň massasynyń onuń inersial hasaplaýyş ulgamyna görä tizlenmesine kopeltmek hasyly nokada täsir edýän beýleki jisimleriň hemme güýçleriniň jemine deńdir. 2-nji kanun tebigatyň fundamental kanunlarynyň biridir. Ol kanun mehanikanyň material nokatlaryň güjüň täsirine baglylykdaky hereketini öwrenýän dinamika bölüminiň esasynda ýatyr. Eger nokadyň m massasy, nokada täsir edýän $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ güýç we wagtyň t_0 pursatyndaky nokadyň $\vec{r}_0$ ýagdaýy we $\vec{v}_0$ tizligi belli bolsa onda 2-nji kanun nokadyň wagtyň islendik pursatyndaky ýagdaýyny we tizligini tapmaga mümkinçilik döredýär.

deňölçegli hereket edýän hasaplaýyş ulgamyna inersial hasaplaýyş ulgamy diýilýär, Inersial hasaplaýyş ulgamynda nokadyň radius wektory $\vec{r}_0$ we $\vec{\vartheta}_0$ hemişelikleriň islendik bahalarynda wagtyň çyzykly funksiýasydyr.

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \qquad (1.36)$$



12-nji surat. Nokadyň S (a) we S' (b) ulgamlara görä ýagdaýlary.

Inersial hasaplaýyş ulgamynyň barlygy tejribede belli takyklyk derejesi bilen tassyklanýar. Galileý özüniň tejribesinde geosentrik ulgamy inersial hasaplapdyr. Asman jisimleriniň tizlenmesine gözegçilik Kopernigiň geliosentrik ulgamynyň inersial ulgamdygyny görkezdi. Şeýle-de bolsa Gün ulgamynyň biziň Galaktikamyzyň dasyndan aýlanmagy, köp bolmadyk inersial dällige getirmeli. Bu ýagdaýda inersial ulgam deregine bir näçe galaktikalar bilen baglanyşykly ulgamy alyp bolar.

Klassiki mehanikanyń 1-nji kanuny ÿa-da Galileÿ-Nÿutonyń inersiÿa kanuny inersial hasaplaýyş ulgamynyń barlygyny tassyklaÿar, ÿagny, 1.36-njy talaby kanagatlandyrÿan hasaplaýyş ulgamy bardyr.

Daşky tasirden erkin material nokat daşky güÿç täsir edÿänçä özüniń dynçlyk ÿagdaÿyny ÿa-da göniçyzykly deńölçegli hereketini saklamaga ymtylÿar.

Nÿutonyń ikinji kanunynyń esasynda massanyń jisimiń hereketine bagly däldigi, güÿjüń we dürli jisimler tarapyndan berlen

üçin tropiki ýylyň 31556925,9747 –den bir böleginiň dowamlylygydyr.

Berlen wagt interwalynyň ululygy dürli, erkin hereket edýän hasaplaýyş ulgamlaryna görä birmeňzeşdir diýip tassyklanýar, ýagny

$$t_{12} = t'_{12}$$

Material nokadyň wagtyň islendik pursatyndaky S hasaplaýyş ulgamyna görä ýagdaýy wagtyň funksiýasy bolan radius wektor bilen kesgitlenýär

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.11)$$

Bu radius wektoryň ujy giňişlikde nokadyň traýektoriýasy diýilýän egrini çyzýar.

Nokadyň S hasaplaýyş ulgamyna görä tizligi onuň radius wektoryndan wagta görä alnan önüme deňdir.

$$\vec{\vartheta} = \dot{\vec{r}} \qquad (1.12)$$

S hasaplaýyş ulgamyna görä nokadyň tizlenmesi tizlikden wagta görä alnan birinji önüme deňdir.

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1.13)$$

Käbir meselelerde sektor tizligi diýen düşünjäni ulanýarlar

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}\ \vec{v}] \qquad (1.14)$$

Nokadyň $d\vec{r}$ elementar süýşmesinde radius wektoryň çyzýan meýdany $\frac{1}{2}\left|\left[\vec{r}\ \ d\vec{r}\right]\right|$ deňdir. Şeýlelikde sektor tizliginiň moduly şol meýdanyň üýtgemek tizligine deňdir.

Dekart koordinatalar ulgamynda nokadyň radiusy üç dekart koordinatasy bilen aňladylýar(1.4). Onda

$$\vec{\upsilon} = \dot{x}\vec{n}_x + \dot{y}\vec{n}_y + \dot{z}\vec{n}_z \qquad (1.15)$$

Dekart koordinatalar ulgamynda tizlenme

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{n}_x + \ddot{y}\vec{n}_y + \ddot{z}\vec{n}_z \qquad (1.16)$$

Şeýlelikde ,

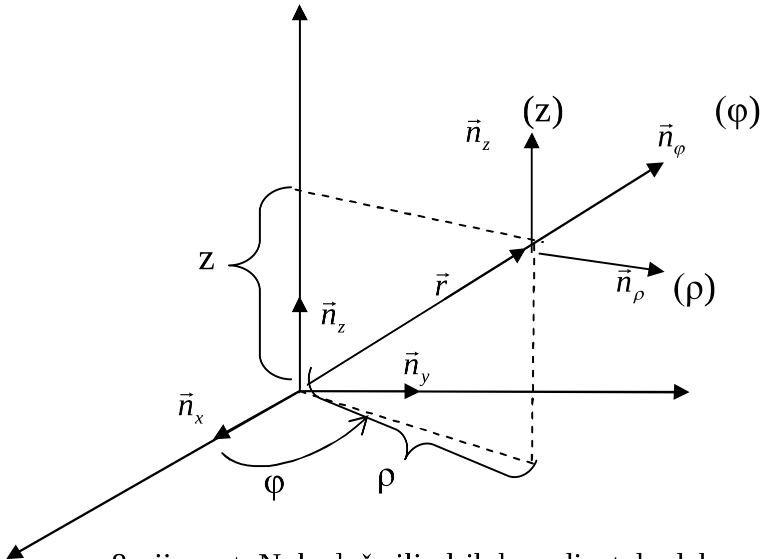
$$\vec{w} = w_x\vec{n}_x + w_y\vec{n}_y + w_z\vec{n}_z$$

Silindrik koordinatalarda radius wektor $\vec{r}(t)$ skalýar funksiýalar bolan ρ(t), φ(t) we z(t) ululyklar bilen berilýär (8-nji surat).

$$\vec{r} = \rho\cdot\vec{n}_\rho + z\cdot\vec{n}_z \qquad (1.17)$$

Silindrik koordinatalaryň birlik wektorlary (ortlary) dekart koordinatalaryň birlik wektorlary bilen aşakdaky baglanyşykdadyrlar.

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_\rho &= \vec{n}_x\cdot\cos\varphi + \vec{n}_y\cdot\sin\varphi;\\ \vec{n}_z &= \vec{n}_z\\ \vec{n}_\varphi &= -\vec{n}_x\cdot\sin\varphi + \vec{n}_y\cdot\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$



8-nji surat. Nokadyň silindrik koordinatalardaky radius-wektory

Nokadyň S hasaplaýyş ulgamyna görä hereketinde $\vec{n}_\rho$ we $\vec{n}_\varphi$ birlik wektorlaryň ýagdaýlary üýtgeýär, n_x,n_y,n_z birlik wektorlaryň ýagdaýlary üýtgemeýär. Şeýle ýagdaýy göz öňünde tutup radius

1.32,1.30 we 1.23 formulalardan ikinji jisimiň grawitasion meýdanyndaky 1-nji jisimiň

$$\vec{w}_1^{(2)} = -\gamma\frac{m_2}{r_{21}^{\ 2}}\left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}\right) \qquad (1.33)$$

tizlenme alýandygy görünýär. Ol tizlenme m_1 massa bagly däl. Diýmek, 2-nji jisimden şol bir aralykda ýerleşen islendik iki 1 we et jisimiň alýan tizlenmeleri özara deňdir,ýagny

$$\vec{w}_1^{(2)} = \vec{w}_{et}^{(2)} \qquad (1.34)$$

(1.32) we (1.34) formulalardan berlen iki 1 we et jisimleriň islendik üçinji 2 jisim bilen grawitasion çekişme güýçleriniň gatnaşygy olaryň massalarynyň gatnaşygyna deňdir

$$\frac{F_{21}}{F_{2,et}} = \frac{m_1}{m_{et}} \qquad (1.35)$$

Grawitasion güýçleriň bu häsiýeti massany ölçemek üçin amatlydyr.

§3. Inersial hasaplaýyş ulgamy barada düşünje.Nyutonyň kanunlary . Galileýiň görälilik prinsipi.

Inersial hasaplaýyş ulgamy baradaky düşünje erkin(izolirlenen) nokat baradaky düşünje bilen baglanyşykdadyr.Tejribe derňewleri beýle nokadyň bir hasaplaýyş ulgamyna görä tizlenmeli, başga bir hasaplaýyş ulgamyna görä tizlenmesiz hereket edýändigini görkezýär. S ulgama görä dynçlykda duran erkin material nokady alalyň. Nokadyň ýagdaýy goý $x=x_0$, y=z=0 bolsun(12-nji a sur.). Onda nokadyň tizlenmesi bu ýagdaýda nola deň. Geliň indi Oz okuň daşynda S ulgama görä hemişelik $\vec{\omega}$ burç tizligi bilen aýlanýan S' ulgamda nokadyň ýagdaýyna seredeliň. Hasaplaýyş ulgamlarynyň O we O' başlangyçlary gabat gelýär diýeliň. Nokat S' ulgama görä x_0 -radiusly töwerek boýunça $\vec{\omega}$ burç tizligi bilen hereket eder(12-nji b sur.). Onuň tizlenmesi S' ulgama görä noldan tapawytly bolar.

Özüne görä erkin material nokat dynçlykda ýa-da islendik başlangyç ýagdaýdan tizligiň islendik ygrunda göniçyzykly gatnaşygy berlen nokat üçin hemişelik ululykdyr. Bu hemişeligi inert massasy ýa-da ýöne massa diýip atlandyrýarlar.

$$\frac{F_{21}}{w_1^{(2)}} = m_1 \qquad (1.30)$$

bu ÿerde m_1-položitel hemişelik-1-nji nokadyń massasy. Massanyń hemişelikliginiń tassyklamasy jisimiń tizligi ÿagtylygyń tizliginden kän kiçi bolanda dogrydyr.

1.30-a esaslanyp, dürli jisimleriň massasyny ölçemek mümkin. Käbir jisimiň m_{et} massasyny massanyň etalony deregine saýlalyň. Ony $\frac{F_{2,et}}{w^2{}_{et}}$ gatnaşyk ýaly kesgitläliň, bu ýerde $F_{2,et}$ -2-nji jisim tarapyndan etalon-jisime täsir edýän güýjün absolýut ululygy, $w_{et}{}^2$-bu güýc tarapyndan etalon-jisimde döredilýän tizlenmäniň ululygy. 1-nji jisimiň massasyny 3-nji bir jisimiň täsirini peýdalanyp kesgitläp bolar. Onda 1-nji jisimiň massasynyň etalon-jisimiň massasyna gatnaşygy

$$\frac{m_1}{m_{et}} = \left(\frac{F_{31}}{w_1^{(3)}}\right) \Big/ \left(\frac{F_{2,et}}{w_{et}^{(2)}}\right) \qquad (1.31)$$

Massany, gűŷji we aralygy ölçemek usulyndan peŷdalanyp Nyutonyň Bűtindűnŷă dartylma kanunyny eksperimental tassyklap bolar. Bu kanuna görä iki material nokadyň grawitasion çekişme güýji bu nokatlaryň massalarynyň köpeltmek hasylyna göni proporsional, aralygynyň kwadratyna ters proporsional we nokatlary birleşdirýän göni boýunça ugrukdyrylan. Proporsionallyk koeffisiýenti bolan grawitasion hemişelik γ eksperimentden tapylýar. Şeýlelikde, bir nokadyň beýleki nokada grawitasion täsiri

$$\vec F_{21} = -\vec\gamma\,\frac{m_1 m_2}{r_{21}{}^2}\left(\frac{\vec r_{21}}{r_{21}}\right) \qquad (132)$$

deňdir.

Diňe grawitasion güýçleriň giňişligiň berlen nokadynda ýerleşen islendik jisimi birmeňzeş tizlendirýändigini belläliň.

wektor **r**-i wagta görä differensirläp taparys.

$$\dot{\vec r} = \dot\rho\cdot\vec n_\rho + \rho\cdot\dot{\vec n}_\rho + \dot z\cdot\vec n_z$$

Bu ýerden $\dot{\vec n}_\rho = \dot\varphi\cdot\vec n_\varphi$ Onda nokadyň tizligi

$$\vec\vartheta = \dot{\vec r} = \dot\rho\cdot\vec n_\rho + \rho\cdot\dot\varphi\cdot\vec n_\varphi + \dot z\cdot\vec n_z \qquad (1.18)$$

Şeýlelikde, $\vartheta_\rho = \dot\rho, \vartheta_\varphi = \rho\cdot\dot\varphi, \vartheta_z = \dot z$

Nokadyň tizlenmesi

$$\vec w = \dot{\vec\vartheta} = \ddot{\vec r} = \ddot\rho\cdot\vec n_\rho + \dot\rho\cdot\dot{\vec n}_\rho + \dot\rho\cdot\vec n_\varphi\dot\varphi + \rho\ddot\varphi\cdot\vec n_\varphi + \rho\cdot\dot\varphi\cdot\dot{\vec n}_\varphi + \ddot z\cdot\vec n_z$$

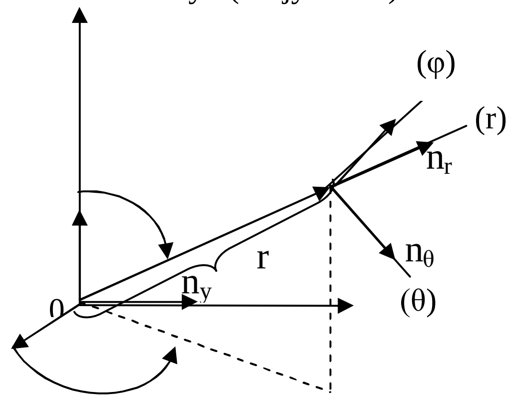
$\dot{\vec n}_\varphi = -\dot\varphi\cdot\vec n_\rho$ göz öňünde tutup alarys.

$$\vec w = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec n_\rho + \frac{d}{\rho dt}(\rho^2\dot\varphi)\cdot\vec n_\varphi + \ddot z\cdot\vec n_z \qquad (1.19)$$

Şeýlelikde, tizlenmäniň ρ, φ, z oklara bolan ugrukmalary

$$w_\rho = \ddot\rho - \rho\cdot\dot\varphi^2;\ w_\varphi = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}(\rho^2\cdot\dot\varphi);\ w_z = \ddot z$$

Sferik koordinatalarda nokadyň radius wektory r(t), θ(t) we φ(t) funksiýalar bilen berilýär(9-njy- surat).



9-njy surat. Nokadyň sferik koordinatalardaky radius-wektory

$\vec r = r\vec n_r$, $\quad \vec n_r = \vec n_\rho\sin\theta - \vec n_z\cos\theta \quad \vec n_\theta = \vec n_\rho\cos\theta - \vec n_z\sin\theta$,

$\vec{n}_r, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_\theta$ - birlik wektorlaryń ugurlarynyň nokadyň ýagdaýyna baglylygyny göz öňünde tutup nokadyň tizligi üçin

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{n}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{n}_\theta + r \cdot \sin\theta \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{n}_\varphi \qquad (1.20)$$

aňlatmany alarys.Şeýlelikde nokadyň tizliginiň (r),(ρ) we (θ) koordinata oklaryna ugrukmalary

$$\vartheta_r = \dot{r}, \vartheta_\theta = r\dot{\theta}, \vartheta_\varphi = r\sin\theta \cdot \dot{\varphi}$$

Nokadyň tizlenmesi bolsa

$$\vec{w} = \dot{\vec{\vartheta}} = \left\{\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\right\}\vec{n}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right\}\vec{n}_\theta + + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})\vec{n}_\varphi \qquad (1.21)$$

Biziň bilşimiz ýaly, özara täsiriň netijesinde jisimler bir-birine görä ýerleşýän ýerlerini üýtgedip bilerler, ýagny giňişlikde orun üýtgeýär.Şeýle hem bu orun üýtgeme giňişlikde belli bir wagtda bolup geçýär.Giňişlige we wagta material obýektleriň bolmagynyň umumy formasy diýilýär.

M**ysal 1.1** Nokadyň inersial S hasaplaýyş ulgamyna görä hereketiniň kanuny x=acosωt, y=bsinωt, z=0 görnüşe eýe. Bu ýerde a,b we ω hemişelik ululyklar. Nokadyň hereketiniň traýektoriýasyny, çyzyk we sektor tizligini, şeýle hem tizlenmesini tapmaly.

Berlen x(t),y(t) we z(t) funksiýalary wagta görä differensirläp, nokadyň tizliginiň we tizlenmesiniň dekart oklaryna ugrukmalaryny alarys

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t, \dot{y} = b\omega\cos\omega t, \dot{z} = 0,$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t, \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t, \ddot{z} = 0$$

Tizlenmäniň ugrukmasyny radius wektoryň ugrukmasynyň üsti bilen aňladyp, tizlenmäniň wagtyň islendik pursatynda koordinatalar başlangyjyna ugrukdyrylandygyny göreris.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \ddot{y} = -\omega^2 y, \ddot{z} = 0, \text{ ýagny } \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 r$$

Sektor tizligi üçin aňlatmany x(t),y(t), $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ funksiýalary ulanyp taparys

$$F = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{\vartheta}\ \vec{H}] \qquad (1.28)$$

Bu ýerde c-ýagtylygyń tizligi; $\vec{\vartheta}$ -zarýadyń tizligi, $\vec{E}(\vec{r},t)we\vec{H}(\vec{r},t)$degişlilikde elektrik we magnit meýdanlaryň güýjenmeleri.

Gurşawyň garşylyk güýji.

Gurşawyň garşylyk güýji hereketiň tizliginiň ugruna ters ugrukdyrylandyr we ýeterlik kiçi tizliklerde tizlige proporsionaldyr.

$$\vec{F} = -k\ \vec{\vartheta} \qquad (1.29)$$

Bu ýerde k-berlen jisim we gurşaw üçin häsiýetli polojitel hemişelik, $\vec{\vartheta}$ -jisimiń dynçlykdaky gurşawa görä tizligi.

Güýç bilen güýjüň döredýän tizlenmesiniň arasyndaky gatnaşygy içgin öwreneliň. Material hokat ideal ýylmanak gorizontal sterženiň boýuna steržene saralan prujiniň täsirinden hereket edýär(ideai ýylmanak steržen nokada steržne perpendikulýar ugurda täsir edýär). Eger pružin nokada (1.26) güýç bilen täsir edýän bolsa, steržen hem Ýere görä hereketsiz bolsa, onda, Ox oky sterženiň boýuna ugrukdyrylan S hasaplama ulgamyna görä nokadyň tizlenmesini analitik $\vec{w}_1^{(2)} = -\omega^2{}_1(x_1 - \ell)\vec{n}_x$,

görnüşde aňladyp bolar. Bu ýerde x_1 –nokadyň koordinatasy , ω_1 – berlen nokat we pružin üçin hemişelik ululyk. Pružin tarapyndan nokada täsir edýän güýjüň æ $(x_1 - \ell)\vec{n}_x$ -e

deňdigi üçin $\frac{F_{21}}{w^2{}_1}$ gatnaşyk berlen pružin we nokat üçin hemişelik ululyk bolar, ýagny,:

$$\frac{F_{21}}{w^2{}_1} = \frac{\chi}{\omega^2}$$

Şeýlelikde, klassiki mehanikanyň fundamental tassyklamasyna gelýäris:Islendik hasaplama ulgamynda käbir material nokada täsir edýän güýjüň, bu güýç tarapyndan nokatda döredilýän tizlenmä

(1.22), (1.24) we (1.25) –e esaslanyp, güýji ölçemegi amala aşyryp bolar. Güýji ölçemek, ony güýjüň etalony bilen deňeşdirmek arkaly ýerine ýetirilýär.

Güýçleriň görnüşleri bilen tanşalyň: maýyşgaklyk güýji; Lorensiň güýji; sredanyň garşylyk güyji; elektrostatik täsiriň güýji.

Maýyşgaklyk güyji.

Pružinyń ujuna berkidilen jisime pružin tarapyndan täsir edÿän maÿyşgak güÿjüń ululygy pružinyń köp bolmadyk uzalmasynda, şol uzalma proporsionaldyr we pružinyń oky boÿunça ugrukdyrylandyr.

$$\vec{F}_{21} = -k(r_{21} - \ell)\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \qquad (1.26)$$

Bu ÿerde $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{r}_1 -$ pružina berkidilen jisimiń radius-wektory; $\vec{r}_2 -$ pružinyń beÿleki ujynyń radius-wektory; ℓ - pružinyń başky uzynlygy; k- pružinyń gatylygy diýip atlandyrylýan, berlen pružini häsiýetlendirýän položitel ululyk. Maÿyşgak $\vec{F}_{21}$ güÿjüń absolÿut ululygynyň we ugrunyň 1-nji we 2-nji nokatlaryń ÿagdaÿlaryna baglydygyny tejribe görkezýär.

Elektrostatik özara täsir güýji.

Kulonyň kanunyna görä zarÿadlanan 2-nji nokadyń zarÿadlanan 1-nji nokada elektrostatik täsir güÿji nokatlaryń arasyndaky aralygyń kwadratyna ters proporsionaldyr we bu zarÿadlary birikdirÿän göni boÿunça ugrukdyrylandyr.

$$\vec{F}_{21} = \frac{e_1 e_2}{r^2{}_{21}}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \qquad (1.27)$$

Bu ýerde $e_1 we e_2$ degişlilikde 1-nji we 2-nji nokatlaryň elektrik zarýadlary.

Lorensiň güyji

Elektrik we magnit meÿdanlary tarapyndan nokatlanç e zarÿada täsir edÿän Lorensiń güÿji zarÿadyń ÿagdaÿyna we tizligine bagly

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{n}_x \vec{n}_y \vec{n}_z \\ x, y, 0 \\ \dot{x}, \dot{y}, 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}ab\omega\vec{n}_z = \vec{\sigma}_0,$$

bu ýerde $\sigma_0 -$ wagtyň başlangyç pursatyndaky sektor tizliginiň bahasy. x(t),y(t) funksiýalardan t-ni ýoklap, hereketiň traýektoriýasynyň deňlemesini alarys

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad z = 0$$

Şeýlelikde, seredýän mysalymyzda nokat z=0 tekizlikde ýatan ellips boýunça hemişelik sektor tizligi bilen hereket edýär. Tizlenmesi bolsa hemişe ellipsiň merkezine ugrukdyrylan.

§2. Güýç we massa barada düşünjeler.

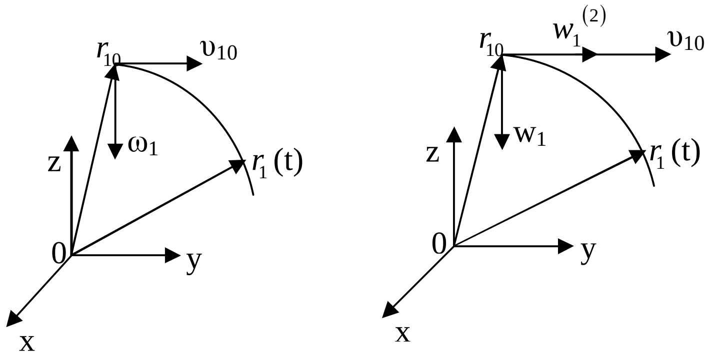
Ýeriň üstüne golaý ýerde bir(1), elektrik zarýadyna eýe, material nokadyň iki ýagdaýdaky hereketine seredeliň. Birinji ýagdaýda nokat wagtyň başlangyç pursatynda $\vec{r}_{10}$ ýagdaýa eýe bolsun. Onuň şol wagtky tizligi $\vec{\vartheta}_{10}$ (10-njy a surat). Wagtyň islendik pursatynda nokadyň ýagdaýyny, tizligini we $\vec{w}_1$ tizlenmesini tapýarys. Soňra nokadyň başlangyç ýagdaýyna ýakyn ýerde ýeterlik kiçi zarýada eýe bolan 2-nji nokady ýerleşdireliň(10-njy b surat) . 1-nji nokadyň şeýle ýagdaýda goşmaça $\hat{w}_1^{(2)}$ tizlenme aljakdygyny tejribe görkezýär. Jemleýji tizlenme iki $\vec{w}_1$ we $\vec{w}_1^{(2)}$ tizlenmeleriň jemine deň bolar. Şeýlelikde, nokadyň hereketiniň kanuny we onuň traýektoriýasy başgaça bolar.

Zarýadlanan 2-nji nokady 1-nji nokatdan tükeniksiz uly aralyga daşlaşdyryp birinji nokadyň goşmaça alýan $w_1^{(2)}$ tizlenmesiniň ýok bolýandygyny göreris, yagny, $r_{12} \to \infty, w^{(2)}{}_1 \to 0$. 2-nji we 3-nji jisimleriiň birinji nokada bir wagtda berýän $\vec{w}_1^{(2,3)}$ tizlenmesiniň, jisimleriň aýratynlykda täsir edende berjek

$\vec{w}_1^{(2)}$ *we* $\vec{w}_1^{(3)}$ tizlenmeleriniň wektor jemine deňdigini tejribe görkezýär, ýagny,

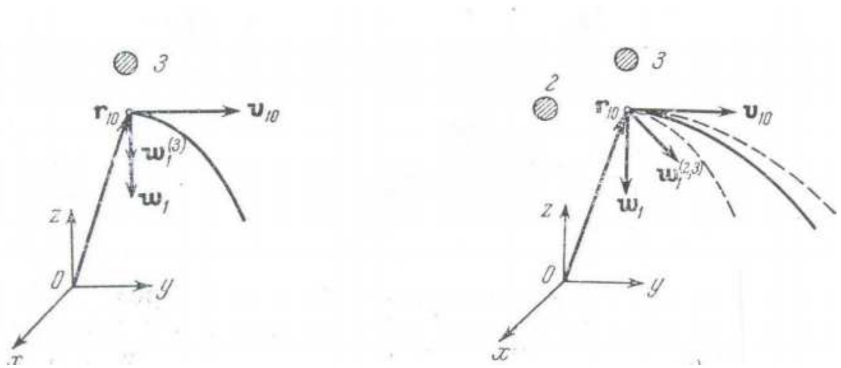
$$\vec{w}_1^{(2,3)} = \vec{w}_1^{(2)} + \vec{w}_1^{(3)} \qquad (1.22)$$

Bu tassyklamanyň dogrudygyny ýokarda geçiren tejribämizi dowam etdirmek bilen, görkezip bileris. Eger 2-nji jisimiň ýerine zarýadlanan 3-nji jisimi



10-njy surat. Nokadyň wagtyň başlangyç(a) we islendik momentindäki(b) ýagdaýlary.

ýerleşdirsek(11-nji a surat) onda ol 1-nji nokada $\vec{w}_1^{(3)}$ tizlenme berer. Zarýadlanan 2-nji we 3-nji jisimleri bir wagtda başky orunlarynda ýerleşdirip 1-nji nokadyň $\vec{w}_1^{(2,3)}$ tizlenme alýandygyny göreris(11-nji b surat). Şeýleleikde, dürli jisimleriň berlen jisime berýän tizlenmeleri biri-birine bagly däldir. Bu netije mehanikanyň esasy düşünjesi bolan güýjüň esasynda ýatandyr.



a) b)

11-nji surat. Nokadyň 3-nji (a) we 2,3-nji(b) jisimleriň täsirinden eýe bolýan tizlenmeleri

Berlen material nokada erkin jisimiň täsir güýji diýip şol nokada tizlenme berýän täsire düşünilýär. Tizlenmäniň sebäbiniň güýçdügi we tizlenmäniň wektor häsiýete eýedigi üçin güýç hem wektor ululykdyr diýip kabul edilýär. Güýç özüniň döreden tizlenmesiniň ugruna ugrukdyrylandyr.

$$\vec{F}_{21} \uparrow\uparrow \vec{w}_1^{(2)} \qquad (1.23)$$

Bu ýerde $\vec{F}_{21}$ - ikinji jisim tarapyndan birinji jisime täsir edýän güýçdür. $\vec{w}_1^{(2)}$ –şol güýjüň beren tizlenmesi.

(1.22) – nji göz öňünde tutup ýazarys

$$F_1^{(2,3)} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \qquad (1.24)$$

Ikinji we üçünji jisimleriň birinji nokada bir wagtda edýän täsir güýji $F_1^{(23)}$ bu jisimler tarapyndan berlen nokada aýratynlykda täsir edýän $F_1^{(2)}$ we $F_1^{(3)}$ güýçleriň wektor jemine deňdir.

Eger-de, material nokada bir wagtda täsir edýän birnäçe güýçler nokadyň öňki tizlenmesini üýtgetmeseler, onda, täsir edýän güýçleriň jemi we goşmaça tizlenme nola deňdir.

$$F_1^{(2,3)} = 0, \quad w_1^{(2,3)} = 0 \qquad (1,25)$$

II bap. Impulsyň, impulsyň momentiniň we energiýanyň üýtgemek we saklanmak kanunlary

§ 5. Material nokadyň impulsynyň, impulsyň momentiniň üýtgemek we saklanmak kanunlary

Güýçleriň giň topary üçin bir nokadyň hereketiniň meselesiniň umumy çözgüde eýedigi bize birinji bölümden bellidir. Nokatlaryň arasyndaky özara täsir güýçleri baradaky ýeterlik umumy çaklamalarda iki nokadyň hereketiniň meselesi hem kwadraturadaky umumy çözgüde eýedir. Üç we köp nokatlaryň meselesiniň umumy çözgüdini tapmaklyk kynçylyklara sezewar bolýar. Şonuň üçin material nokatlaryň islendik sany üçin adalatly umumy teoremalar uly ähmiýete eýedir. Şeýle teoremalara impulsyň, impulsyň momentiniň we energiýanyň üýtgemek we saklanmak kanunlary degişlidir.

Impulsyň, impulsyň momentiniň we energiýanyň saklanmak kanunlary hereketiň integraly diýen düşünjä getirýär. Mehaniki ulgamyň hereketinde özüniň bahasyny hemişelik saklaýan we başlangyč şertler bilen kesgitlenýän nokadyň koordinatasynyň, tizliginiň we wagtyň funksiýasyna hereketiň integraly diýilýär.Şeýlelikde, hereketiň integraly ulgamyň nokatlarynyň radius – wektorlary bilen tizlikleriniň arasyndaky

$$f(t,\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N,\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_N)=C \qquad (2.1)$$

gőrnüşdäki gatnaşygy kesgitleýar. f funksiýa islendik başlangyç şertlerde özüniň bahasyny hemişelik saklaýar, ýagny

$$f(t,\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N,\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_N)=C_0 \qquad (2.2)$$

Bu ýerde $C_o = f(t_0,\vec{r}_{10},\vec{r}_{20},...,\vec{r}_{N0},\vec{v}_{10},\vec{v}_{20},...,\vec{v}_{N0})$.

Nokatlaryň tizliklerini őzünde saklaýan hereketiň integralyna (p = hemişelik) hereketiň birinji integraly diýilýär. Hereketiň ikinji integraly diýip ulgamyň hereketi wagtynda őz bahasyny hemişelik saklaýan nokadyň koordinatasynyň, wagtyň we erkin hemişeligiň funksiýasyna aýdylýar.

Eger hereketiň 6N sany

$$f_\alpha(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n) = C_\alpha \quad (\alpha = 1,2,...,6N), \tag{2.3}$$

erkin birinji integrallary belli bolsa, onda mehaniki ulgamyň (1.40) deňlemesini integrirlenen diýip hasaplap bolar.

Nokadyň $\vec{p}$ impulsy diÿip nokadyň m massasynyň onuň $\vec{v}$ tizligine kőpeltmek hasylyna aÿdylÿar (kőplenč bu ululygy hereketiň mukdary diÿip atlandyrÿarlar). Nokadyň massasynyň hemişelikligi üčin Nÿutonyň (1.39) deňlemesinden impulsyň üÿtgemek kanunyny alarys:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \tag{2.4}$$

(2.4) deňlemäniň esasynda aşakdaky kesgitlemäni tassyklamak bolar: eger wagtyň islendik pursatynda(momentinde) güÿjüň käbir dynčlykdaky oka ugrukmasy nola deň bolsa, onda impulsyň şol oka bolan ugrukmasy saklanÿandyr. Mysal üčin, eger $F_z = 0$ bolsa onda

$$p_z = p_{z0} \tag{2.5}$$

Eger güýjüň bellenen iki oka ugrukmasy nula deň bolsa, onda hereketiň iki integralyny alarys. Goý nokada agyrlyk güýji m$\vec{g}$ täsir edýän bolsun. $\vec{g}$ wektoryň hemişelikligi üçin bu wektora perpendikulýar oklara güýjüň ugrukmalary wagtyň islendik pursatynda nula deňdir. Şeýlelikde, $\vec{g}$ wektora perpendikulýar oklara impulsyň ugrukmalary (we tizligi)saklanýandyr, ýagny $\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0$ (Oz ok z okuň ugruna ugrukdyrylandyr) Eger nokada täsir edýän güýçleriň jemi nula deň bolsa $(\vec{F} = 0)$, onda

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \tag{2,6}$$

(2.6) deňlik impulsyň saklanmak kanunydyr. Bu kanun daşky güÿčleriň ÿok wagtynda material nokadyň gőni čyzyk boÿunča hemişelik tizlik bilen hereket edÿändigini aňladÿar.(2.6) deňlemä material nokadyň hereketiniň birinji integraly diÿilÿär.

Güýjüň gozganýan oka ugrukmasynyň nula deň bolmagy bilen impulsyň bu oka ugrukmasynyň saklanmagy gelip çykmaýar. Goý

Üýtgeme kanunlary

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{e}, \dot{\vec{M}} = \vec{L}^{e}, \dot{E} = \frac{\partial U^{e}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,d} \vec{V}_i \qquad (2.114)$$

ýedi deňlemäni düzýärler.Bular güýjüň käbr häsiýetlerinde saklanma kanunyna getirýär.

Içki dissipatiw güýçleri ýok ýapyk ulgamyň saklanma kanunyndan gelip çykýan hereketiň integrallary ýedi 1-nji integraldan we üç 2-nji integraldan durýar.

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \;,\; \left(\vec{V}_m = \vec{V}_{m0}\right) \; \vec{M} = \vec{M}_0,\; E = E_0,\; \vec{r}_m = \vec{V}_{mo}\left(t - t_0\right) + \vec{r}_{mo} \qquad (2.115)$$

ýagny, mehanikanyň 10 klassiki integralyndan durýar.

Saklanmak kanunlary Nýutonyň hereket deňlemeleriniň netijesidir. Şonuň üçin olar giňişligiň we wagtyň häsiýetleri bilen baglanşyklydyr.Impulsyň saklanmagy giňişligiň birhililigi, momentiň saklanmagy giňişligiň izotroplygy, mehaniki energiýanyň saklanmagy wagtyň birhililigi bilen baglanşyklydyr.

güýjüň (ρ) koordinat okuna bolan ugrukmasy nola deň bolsun. Bu oka (1.39) deňlemäniň iki tarapyny hem ugrukdyryp taparys, ýagny

$$mw_\rho = F_\rho$$

Denlemäniň çep tarapy (1.13) görä $m\dot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2$, deň. Bu ýerde $p_\rho = m\dot{\rho}$ nokadyň impulsynyň ρ oka bolan ugrukmasydyr. Şeýlelikde, eger $F_\rho = 0$ bolsa bu $m\dot{\rho}$-nyň saklanýandygyny aňlatmaýar.

(2.4) deňlemäniň iki tarapyny hem čepden nokadyň $\vec{r}$ radius–wektoryna wektor köpeldip, alarys.

$$\left[\vec{r}\;\dot{\vec{p}}\right] = \left[\vec{r}\;\vec{F}\right]$$

Bu deňlemäniň sag tarapyna güýjüň $\left(\vec{L}\right)$momenti diÿilÿar.

Deňlemäniň čep tarapyny (impulsyň kesgitlemesinden we $\left[\vec{v}\vec{v}\right]$=0 deňlikden)

$$\left[\vec{r}\;\dot{\vec{p}}\right] = \frac{d\vec{M}}{dt}$$

gőrnüşde aňlatmak bolar, bu ÿerde $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{p}\right]$– nokadyň impulsynyň momenti. Netijede, material nokadyň impulsynyň momentiniň wagta gőrä őnümi şol nokada täsir edÿän güÿjüň momentine deňdir:

$$\dot{\vec{M}} = \vec{L} \qquad (2.7)$$

Şeÿlelikde, (2.7) deňleme impulsyň momentiniň üýtgemek kanunyny aňladÿar. Ol Nÿutonyň ikinji kanunynyň netijesidir.Bu ÿerden güÿjüň momentiniň haÿsy hem bolsa bir dynçlykdaky oka wagtyň islendik pursatyndaky ugrukmasy nula deň bolsa, onda nokadyň impulsynyň momentiniň şol oka ugrukmasynyň saklanÿandygy gilip çykýar.

Mysal üçin, eger $L_z = 0$ bolsa,onda

$$M_z = M_{z0} \qquad (2.8)$$

(2.8) deňleme nokadyň impulsynyň momentiniň saklanmak kanunyny aňladÿar.Güýjüň nula deň däl wagtynda hem güýjüň momentiniň nula deň bolmagy mümkin. Goý ugry hemişelik bolan güýç berlen bolsun. Oz oky güýje parallel ugrukdyryp (2.8)-iň esasynda taparys(14-nji a surat).

$$F_x = F_y = 0, F_z \neq 0;$$
$$L_x \neq 0, L_y \neq 0, L_z = xF_y - yF_x = 0; \quad (2.9)$$
$$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = M_{z0}$$

Şeýlelikde, nokadyň impulsynyň momentiniň güýjüň ugruna ugrukmasy saklanýar. Bu bolsa hereketiň bir birinji integralyny berýär. Indi täsir çyzygy wagtyň hemme pursatynda gozganmaýan oky göni burç bilen kesýän güýje seredeliň(14-nji b surat). Täsir çyzygy diýip, güýç wektory ýerleşen göni çyzyga aýdylýar. Gozganmaýan oky 0z oky deregine saýlap alyp (2.8)-iň esasynda alarys

$$F_\rho \neq 0, F_\varphi = F_z = 0;$$
$$L_\rho = -zF_\varphi = 0, L_\varphi \neq 0, L_z = \rho F_\varphi = 0; \quad (2.10)$$
$$M_z = m\rho^2\dot{\varphi} = M_{zo}$$

Şeýlelikde, nokadyň impulsynyň momentiniň gozganmaýan oka ugrukmasy saklanýar we hereketiň bir birinji integralyny berýär.

$$L_\rho = -zF_\varphi = 0,$$

deňlikden $M_{o\rho} - ny$ ň hemişelikligi gelip çykmaýar, sebäbi $\vec{n}_\rho$ -iň özi hem wagta baglydyr.

Praktikada merkezi güýç düşünjesi giňden ulanylýar. Merkezi güýç diýip täsir çyzygy wagtyň hemme pursatynda güýç merkezi diýilýän gozganmaýan nokatdan geçýän güýje diýilýär. Bu nokady koordinatalar başlangyjy deregine kabul edip(14-nji w surat), taparys

$$\vec{F} = F_r\vec{n}_r, \vec{L} = 0,$$
$$\vec{M} = m[\vec{r}\vec{v}] = \vec{M}_0, \quad (2.11)$$

Şeýlelikde, nokadyň impulsynyň momenti güýç merkezine görä saklanýar. Emma impulsyň momentiniň üç ugrukmasynyň arasynda aňyk baglanyşyk bar:

nokatlaryna täsir edýän dissipatiw içki we daşky güýçleriň kuwwatynyň jemine deňdigini taparys:

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,d}\vec{V}_i \quad (2.108)$$

Eger ulgamyň daşky meýdandaky potensial energiýasy wagta anyk bagly bolmasa,şeýle hem dissipatiw güýçler nola deň bolsa, ýagny,

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} = 0 \quad \text{we} \quad \vec{F}_t^{\,d} = 0(i = 1,2,...., N), \quad (2.109)$$

onda ulgamyň mehaniki energiýasy saklanýar:

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} U_i^{\,e} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\le j}}^{N} U_{ij} = E_0 \quad (2.110)$$

Beýle ulgama konserwatiw ulgam diýilýär.

Dissipatiw güýçleriň hasabyna kemelýän energiýa ulgama energiýanyň berilmegi bilen kompensirlenýän ýagdaýynda hem energiýa saklanyp biler. Onda

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,d}\vec{V}_i = 0, E = E_0 \quad (2.111)$$

özem

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,d}\vec{V}_i \leq 0 \text{ (2.36-a seret).}$$

Eger içki dissipatiw güýçler ýok bolsa ýapyk ulgamyň mehaniki energiýasy saklanýar.

$$E = T + U^{in} = E_0 \quad (2.112)$$

Eger içki dissipatiw güýçler bar bolsa ýapyk ulgamyň mehaniki energiýasy kemelýär.

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,in,d}_{\,i}\vec{V}_i \leq 0, \quad (2.113)$$

Bu güýçler Nýutonyň 3-nji kanunyny kanagatlandyrýar. Olaryň elementar işi

$$\vec{F}_{ji}{}^{p} d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij}{}^{p} d\vec{r}_j = -dU_{ij} \qquad (2.102)$$

(2.102)-ni ulgamyň hemme jübüt nokatlary üçin jemläp, hemme içki potensial güýçleriň işini

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,in,p} d\vec{r}_i = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\le j}}^{N} \left\{ \vec{F}_{ji}{}^{p} d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij}{}^{p} d\vec{r}_j \right\} = -dU^{in} \qquad (2.103)$$

bu ýerde $U^{in} = \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\le j}}^{N} U_{ij} -$ ulgamyň içki potensial energiýasy.

Ulgamyň U potensial energiýasyny onuň daşky meýdandaky potensial energiýasy bilen içki potensial energiyasynyň jemi ýaly kesgitleýärler:

$$U = U^{e} + U^{in} \qquad (2.104)$$

(2.98) we (2.100) güman etmekligiň çäklerinde ulgamyň potensial energiýasy

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i{}^{e}(\vec{r}_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\ne j}}^{N} U_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right). \qquad (2.105)$$

Ulgamyň doly mehaniki energiýasy E ulgamyň kinetik we potensial energiýalaryň jemi hökmünde kesgitlenýär.

$$E=T+U \qquad (2.106)$$

(2.92) kanunyna esaslanyp we (2.97), (2.99), (2.103), (2.106) deňlemeleri peýdalanyp, alarys

$$dE = \frac{\partial U^{e}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{N} F_i^{d} d\vec{r}_i \qquad (2.107)$$

bu ýerde $\vec{F}_i{}^{d} = \vec{F}_i{}^{in,d} + \vec{F}_i{}^{e,d}$ - i-nji nokada täsir edýän içki we daşky dissipatiw güýçleriň jemi. (2.107)-niň sag we çep tarapyny dt-e bölüp, ulgamyň energiýasynyň doly önüminiň daşky meýdandaky potensial energiýanyň wagta görä hususy önümi bilen ulgamyň

$$\vec{M}\vec{v} = m[\vec{r}\vec{v}]\vec{v} = 0 \qquad (2.12)$$

Şonuň üçin alynan üç birinji integrallaryň ikisi erkindir.

Merkezi güýjüň täsirinden nokadyň hemişe tekiz traýektoriýa boýunça hereket edýändigi

$$\vec{M}_0\vec{r} = m[\vec{r}\vec{v}]\vec{r} = 0 \qquad (2.13)$$

ikinji integraldan görünýär.

. Traýektoriýanyň tekizligi güýç merkezinden geçýär we nokadyň impulsynyň hemişelik momentine perpendikulýardyr. Bu tekizligiň ýagdaýy başlangyç şertler bilen kesgitlenýär, ýagny

$$\vec{M}_0 = m[\vec{r}_o\vec{v}_0]$$

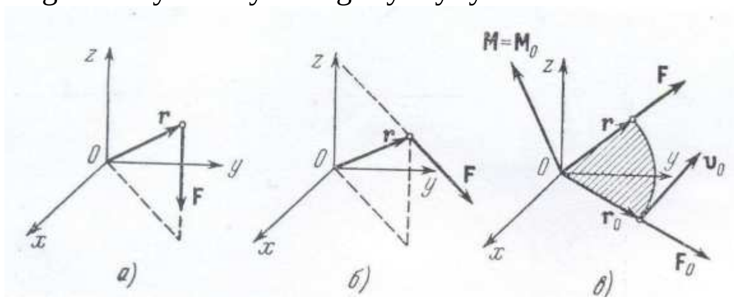
(2.7) deňlemäni $\vec{\sigma}$ sektor tizliginiň üsti bilen aňladalyň. Onda alarys

$$2\mathrm{m}\dot{\vec{\sigma}} = \vec{L}$$

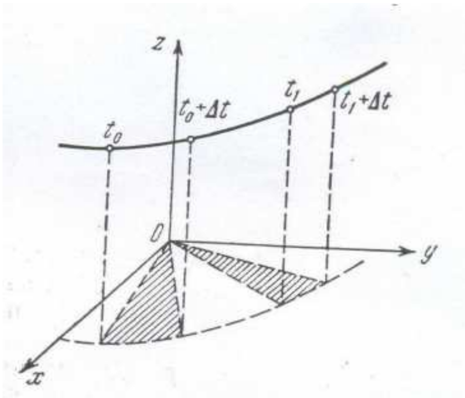
Bu ýerden $M_z = M_{z0}$ deňligi

$$\sigma_z = \sigma_{z0} \qquad (2.14)$$

görnüşde ýazyp boljakdygy gelip çykýar. Nokadyň radius-wektorynyň ugrukmasy Oz oka perpendikulýar tekizlikde islendik deň wagt aralygynda deň meýdany çyzýar(15-nji surat). Şonuň üçin (2.14) integrala meýdanlaryň integraly diýilýär.



14-nji surat



15-nji surat

§6. Material nokadyň energiýasynyň üýtgemek we saklanmak kanunlary

Hereketiň (1.39) deňlemesiniň iki tarapyny nokadyň (dr) orun üÿtgemesine skalÿar kőpeldip alarys:

$$m\dot{\vec v}d\vec r = \vec F d\vec r,$$

deňligiň sag tarapy ($\vec F d\vec r$) F güÿjüň dA elementar (ÿőnekeÿ) işi. Deňligiň čep tarapy kinetik energiÿadan alnan differensiala deň:

$$m\frac{d\vec v}{dt}d\vec r = m\vec v\, d\vec v = mv\,dv = dT,$$

bu ýerde $T=\frac{mv^2}{2}$- nokadyň kinetik energiýasy. Nokadyň kinetik energiýasynyň differensialy nokada täsir edýän güýjüň elementar işine deň:

$$dT = dA \tag{2.15}$$

(2.15) – deňleme nokadyň kinetik energiÿasynyň üÿtgeme kanuny.
(2.15) deňligi dt-he bolup alarys:

Ulgamyň i-nji nokadyna täsir edýän hemme daşky we içki güýçleriň jemi degişlilikde

$$\vec F_i^{\,e} = \vec F_i^{\,e,p} + \vec F_i^{\,e,g} + \vec F_i^{\,e,d}, \qquad \vec F_i^{\,in} = \vec F_i^{\,in,p} + \vec F_i^{\,in,d} \tag{2.95}$$

diýip guman edip kinetik energiýanyň üýtgemegine seredeliň. Giroskopik güýjüň iş etmeýänligi üçin, ýagny,

$$\vec F_i^{\,e,g} d\vec r_i = 0 \tag{2.96}$$

taparys.

$$dA^e = \sum_{i=1}^N \vec F_i^{\,e,p}d\vec r_i + \sum_{i=1}^N \vec F_i^{\,e,d}d\vec r_i$$

$$dA^{in} = \sum_{i=1}^N \vec F_i^{\,in,p}d\vec r_i + \sum_{i=1}^N \vec F_i^{\,in,d}d\vec r_i \tag{2.97}$$

Potensial güýçleriň (2.16) şerti kanagatlandyrýandygy üçin

$$\vec F i^{e,p} = -\nabla_i U_i^{\,e},\ \ U_i^{\,e} = -\int \vec F_i^{\,e,p} d\vec r_i + C$$

$$(\, i = (1,2,....,N) \tag{2.98}$$

bu ýerde $U_i^{\,e}(\vec r t)$– i-nji nokadyň daşky potensial meýdandaky potensial energiýasy. (2.98)-i peýdalanyp daşky potensial güýçleriň işi üçin aňlatmany alarys(2.30-a seret).

$$\sum_{i=1}^N \vec F_i^{\,e,p} d\vec r_i = -dU^e + \frac{\partial U^e}{\partial t}dt, \tag{2.99}$$

bu ýerde $U^e = \sum_{i=1}^N U_i^{\,e}$- ulgamyň daşky meýdandaky potensial energiýasy.

Islendik jübüt nokatlar ulgamy üçin özara täsir potensial energiýasy

$$U_{ij} = U_{ij}\left(\left|\vec r_i - \vec r_j\right|\right) \tag{2.100}$$

funksiýa bilen berlen bolsun. Onda nokatlaryň özara täsir potensial güýçleri üçin taparys

$$\vec F_{ji}^{\,p} = -\nabla_i U_{ij},\ \ \vec F_{ij}^{\,p} = -\nabla_i U_{ij} \tag{2.101}$$

§11. Ulgamyň energiýasynyň üýtgemek we saklanmak kanunlary.

(1.36) deňlemäni elementar $d\vec{r}_i$ orun üýtgemä skalýar köpeldeliň we güýçleriň içki we daşky güýçlere bölünýändigini göz önüne tutalyň. Şeýlelikde, i-nji nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgeme aňlatmasyny alarys.

$$dT_i = dA^{in}{}_i + dA^e{}_i \,, \qquad (2.91)$$

Bu ýerde T_i - ulgamyň i-nji nokadynyň kinetik energiýasy dA_i^{in} we dA_i^e i-nji nokady elementar süýşürmede daşky $\left(F_i^e\right)$ we içki $\left(F_i^{in}\right)$ güýçleriň işleri. (2.91)-I hemme nokatlar boýunça jemläp taparys

$$dT=dA^{in}+dA^e \qquad (2.92)$$

Bu ýerde $T=\sum_{i=1}^{N} T_i$ -ulgamyň kinetik energiýasy, $dA^{in}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,in} d\vec{r}_i$ - hemme içki güýçleriň elementar işi, $dA^e=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,e} d\vec{r}_i$ -hemme daşky güýçleriň elementar işi.

Şeýlelikde, ulgamyň kinetik energiýasynyň differensialy ulgamyň nokatlaryna täsir edýän hemme içki we daşky güýçleriň elementar işine deňdir. Kinetik energiýanyň üýtgemegi daşky hemde içki güýçlere baglydyr. Muňa göz ýetirmek üçin içki güýçleriň işini

$$dA^{in}=\sum_{\substack{i,j=1\\ j\le i}}^{N}(\vec{F}_{ji}d\vec{r}_i+\vec{F}_{ij}d\vec{r}_j)=\sum_{\substack{i,j=1\\ j\le i}}^{N}\vec{F}_{ji}\left(d\vec{r}_i-d\vec{r}_j\right) \qquad (2.93)$$

görnüşde aňladalyň.Birmeňzeş güýjüň täsirinden dürli nokatlaryň ornuny üýtgetmesi umuman dürli bolar, ýagny, $d\vec{r}_i \neq d\vec{r}_j$. Onda

$$dA^{in}\neq 0 \qquad (2.94)$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dA}{dt}$$

Nokadyň kinetik energiýasynyň wagta görä önümi nokada täsir edýän güýjüň kuwwatyna deňdir:

$$\dot{T}=\frac{dA}{dt} \qquad (2.16)$$

(2.14), (2.15), deňlemelere material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgeme kanuny diýilýär. Umuman kinetik energiýanyň gutarnykly üýtgemegini hasaplamak üčin hereketiň deňlemesiniň čözgüdini bilmeli. Emma köp hilli güýčler üčin hereketiň deňlemesiniň čözgüdini bilmezden kinetik energiýanyň üýtgemegini tapyp bolýar. Şeýle güýčlere potensial güýčler mysal bolup biler.

Diňe koordinata bagly bolan we

$$\text{rot}\,\vec{F}\,(\vec{r})=0 \qquad (2.17)$$

şerti kanagatlandyrýan güýčlere potensial güýčler diýilýär.Potensial güýji

$$\vec{F}=-grad\,U(\vec{r}) \qquad (2.18)$$

görnüşde aňlatmak bolar. Bu ýerde U nokadyň ýagdaýyna bagly bolan skalýar funksiýa. Potensial güýjüň elementar işi doly differensial bolar:

$$dA=-\nabla U d\vec{r}=-dU \qquad (2.19)$$

Bu ýerden nokadyň r_0 ýagdaýdan r_1 ýagdaýa ornuny gutarnykly üýtgedenindäki işi

$$A=-\int_{(r_0)}^{(r_1)} dU = U(\vec{r}_0)-U(\vec{r}_1) \qquad (2.20)$$

kesgitli integrala deňdigi gelip çykýar.Şeýlelikde, potensial güýjüň işi material nokadyň başlangyç we soňky ýagdaýlaryndaky U funksiýanyň bahalarynyň tapawudyna deňdir. Skalýar funksiýa bolan U – a nokadyň potensial energiýasy diýilýär. Ol energiýa nokadyň potensial güýč meýdanynda ýerleşen ýagdaýyna baglydyr. (2.18) we

(2.19)-dan potensial energiýany kesgitsiz integralyň kömegi bilen berlen potensial güýç arkaly tapyp boljakdygy görünýär:

$$U=-\int \vec{F}d\vec{r}+C \qquad (2.21)$$

Bu ýerde C-potensial energiýanyň nol derejesini kesgitleýän hemişelik.

Mysallara ýüzleneliň. Göý güýç gozganmaýan tekizlige perpendikulýar we tekizlik bilen aralygyň funksiýasy bolsun. Beýle güýç (2.16) şerti kanagatlandyrÿanlygy üçin potensial güýçlere degişlidir. Eger 0z oky tekizlige perpendikulýar güýje ugurdaş ugrukdyrsak, onda taparys.(Oxy koordinat tekizligini zarýadlanan tekizlik bilen gabat getirip) taparys:

$$\vec{F}=F(z)\vec{n}_z,\ \vec{F}d\vec{r}=F(z)dz,\ U=-\int F(z)dz+C. \qquad (2.22)$$

.(Oxy koordinat tekizligini zarýadlanan tekizlik bilen gabat getirip) taparys:

E güýjenmesi ululygy boýunça hemişelik we tekizlige perpendikulýar ugrukdyrylan birmeňzeş zarýadlandyrylan tükeniksiz tekizlik üçin (2.21)-iň ilkinji iki deňligini

$$\vec{F}=e\mathrm{E}\vec{n}_z,\ dA=e\mathrm{E}dz \qquad (2.22)$$

görnüşde aňladyp bolar. Zarýadyň potensial energiýasy we elektrostatik meýdanyň güýjüniň işi üçin taparys

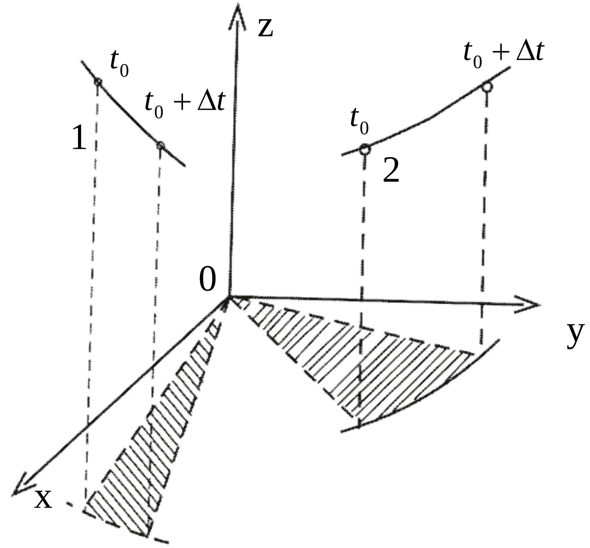
$$U=-e\mathrm{E}z+C,\ A=-\int_{z_0}^{z_1} dU=e\mathrm{E}(z_1-z_0). \qquad (2.23)$$

Bu ýerden nokady $z=z_0$ tekizlikden $z=z_1$ tekizlige süýşürýän güýjüň işiniň traýektoriýanyň görnüşine bagly däldigi görünýär.

Göý güýç gozganmaýan zarýadlanan gönä perpendikulýar we göni bilen aralygyň funksiýasy bolsun. Beýle güýç hem (2.16) şerti kanagatlandyrÿanlygy üçin potensial güýçlere degişlidir. Eger 0z oky meýdanyň simmetriýa oky bilen gabat getirsek, onda silindrik koordinatalarda

$$\vec{F}=F(\rho)\vec{n}_\rho, \qquad dA=F(\rho)d\rho, \qquad (2.24)$$

köpeltmek hasylynyň jeminiň saklanýandygy (2.89)-dan gelip çykýar(20-nji surat).



20-nji surat. Iki nokadyň radius-wektorlarynyň çyzýan tekizlikleriniň ugrukmalary

Ýapyk ulgam üçin hemme güýçler $\vec{F}_i^e=0$, şeýlelikde

$$\vec{L}^e=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i\vec{F}_i^e\right]=0,$$

ýagny

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{r}_i\vec{V}_i\right]=\vec{M}_0 \qquad (2.90)$$

Kinetik momentiň saklanma kanuny ýerine ýetýär. Şeýlelikde, ýapyk ulgamyň momenti içki güýçleriň täsirinden üýtgäp bilmeýär.

Eger daşky güýçleriň momentleriniň jemi ulgamyň nokatlarynyň koordinatasyna we tizligine bagly bolsa, ýapyk däl ulgamyň içki güýçleri umuman impulsyň momentiniň üýtgemegine täsir edýär.

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji}\right] = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\leq j}}^{N}\left\{\left[\vec{r}_i\vec{F}_{ji}\right]+\left[\vec{r}_j\vec{F}_{ij}\right]\right\}=0 \qquad (2.85)$$

Soňky jemimiziň her bir agzasy (1.37)-ä laýyklykda islendik hasaplama ulgamynda nola deňdir(13-nji surata seret), ýagny

$$\left[\vec{r}_i\vec{F}_{ji}\right]+\left[\vec{r}_j\vec{F}_{ij}\right]=\left[\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\vec{F}_{ji}\right]=0 \qquad (2.86)$$

sebäbi $\vec{F}_{ji}$ wektor $\vec{r}_{ji}=\vec{r}_i-\vec{r}_j$ wektora collinear.

2.86-ny we 2.85-i hasaba alyp 2.84-den ulgamyň kinetiki momentiniň wagta görä önüminiň ulgamyň nokatlaryna täsir etýän daşky güýçleriň momentleriniň jemine deňdigini taparys

$$\dot{\vec{M}}=\vec{L}^e \qquad (2.87)$$

Bu ýerde

$$\vec{L}^e=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i^{\,e}$$

(2.87) deňlemä ulgamyň kinetiki momentiniň üýtgemek kanuny diýilýär. Eger wagtyň islendik pursatynda(momentinde) daşky güýçleriň momentleriiniň jeminiň käbir dynčlykdaky oka ugrukmasy nola deň bolsa, onda ulgamyň impulsynyň momentiniň şol oka bolan ugrukmasy saklanÿandyr. Mysal üčin, eger

$$L_z^{\,e}=\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i\vec{F}_i^{\,e}\right]_z=0$$

Onda, $$M_z=\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{r}_i\vec{V}_i\right]_z=M_{z0} \qquad (2.88)$$

Sektor tizliginiň kesgitlemesini (1.14) hasaba alyp (2.88) integraly meýdanyň integraly görnüşinde aňladyp bolar.

$$2\sum_{i=1}^{N}m_i\sigma_{iz}=M_{z0} \qquad (2.89)$$

Nokatlaryň radius-wektorlarynyň Oxy tekizlige ugrukmasynyň islendik deň wagtdaky çyzýan meýdanlarynyň nokadyň massasyna

$$U=-\int F(\rho)d\rho+C. \qquad A=\int_{\rho_0}^{\rho_1}F(\rho)d\rho$$

e zarýada beýle meýdan tarapyndan täsir edýän güýç

$$\vec{F}=e\frac{2\chi}{\rho}\vec{n}_\rho \quad [5] \qquad (2.25)$$

Bu ýerde χ- uzynlyk birligine düşýän zarýad. 25-njini 24-njide ýerine goýup alarys

$$dA=e\frac{2\chi}{\rho}d\rho\,,U=-2e\chi\ln\rho+C,\ A=2e\chi\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right). \qquad (2.26)$$

Goý bize merkezi güýç berlen bolsun. Bu güýç güýjüň merkezinden nokada çenli aralygyň funksiýasydyr. Koordinatalar başlangyjyny güýjüň merkezi bilen gabat getirip güýji

$$\vec{F}=F(r)\vec{n}_r. \qquad (2.27)$$

görnüşde ýazarys. Onda bizi gyzyklandyrýan ululyklar indiki formulalar bilen kesgitlener:

$$dA=F(r)dr,U=-\int F(r)dr+C,A=\int_{r_0}^{r_1}F(r)dr. \qquad (2.28)$$

Eger $\vec{F}=\frac{e_1e_2}{r^2}\vec{n}_r$ bolsa, onda

$$dA=\frac{e_1e_2}{r^2}dr,U=\frac{e_1e_2}{r^2}+C,A=e_1e_2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right). \qquad (2.29)$$

Bu mysalda merkezi gozganmaýan zarýad bilen gabat gelýän sferalar deň potensially üstlerdir.

Hemme seredilen ýagdaýlarda güýç stasionardy, ýagny anyk wagta bagly däldi. Beýle diýildigi nokadyň belli bir ýagdaýynda onuň potensial energiýasy wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär diýildigidir, ýagny hususy önüm $\frac{\partial U}{\partial t}=0.$ Eger nokat ornunyny üýtgetse onda onuň potensial energiýasy hem üýtgär. Ol üýtgeme

$$\frac{dU(\vec{r})}{dt} = \nabla U \frac{d\vec{r}}{dt}$$

doly önüm bilen häsiýetlendirilýär.Bu ýerde $\vec{r}$ material nokadyň radius-wektory.

Nokadyň ýagdaýyna we wagta anyk bagly güýç hem (2.16) potensiallyk şerti kanagatlandyryp biler. Bu ýagdaýda güýje stasionar däl potensial güýç diýilýär. Potensial energiýa berlen güýçde (2.20) integral bilen kesgitlenýär. Eger U $\vec{r}$ -e we t-he anyk bagly bolsa, onda

$$dU = \nabla U d\vec{r} + \frac{\partial U}{dt} dt \qquad (2.30)$$

we, şeýlelikde,

$$dA = -\nabla U d\vec{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt \qquad (2.31)$$

Bu ýagdaýda (2.19) häsiýet ýerine ýetmeýär, şonuň üçin gutarnykly ýolda ýerine ýetirilen işi kesgitlemek üçin nokadyň hereketiniň kanunyny bilmeli, ýagny, $\vec{r}(t)$ funksiýany.

Mysal hökmünde güýjenmesi $E_0 \cos\omega t$ bolan üýtgeýän elektrik meýdanyndaky e zarýada seredeliň. Bu meýdan tarapyndan e zarýada täsir edýän güýç

$$\vec{F} = eE_0 \cos\omega t.$$

0x oky E_0 wektoryň ugry boýunça ugrukdyryp (2.20)-ä görä alarys:

$$U = -eE_0 x \cos\omega t + C \qquad (2.32)$$

Şeýlelikde, bu mysalda potensial energiýanyň wagta görä doly we hususy önümi noldan tapawutly.

Giroskopik güýč diýip nokadyň tizligine çyzykly bagly bolan we hemişe tizligiň ugruna perpendikulýar bolan güýje aýdylýar.

Giroskopik güýčleriň işleri hemişe nola deňdir.

Giroskopik güýje magnit meýdanynda hereket edýän zarýada täsir edýän Lorens güýji mysal bolup biler.

$$\ddot{x}_m(t) = \frac{\chi}{2m}\left[\left(1+\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)\psi(t) + \left(1-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)\theta(t)\right], \qquad (12)$$

$$x_m(t) = \frac{1}{2m}\left[\left(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}\right)\psi(t) + \left(m_1 - \sqrt{m_1 m_2}\right)\theta(t)\right], \qquad (13)$$

Daşky güýçleriň ýok wagtynda massa merkeziniň tizliginiň hemişelik bolup ony içki güýçleriň üýtgedip bilmeýändigi 9-njy we 12-nji formulalardan görünýär. Emma eger daşky birhilli däl güýçler noldan tapawutly bolsa , onda içki güýçleriň massa merkeziniň hereketine täsir etjekdigi 10-njy we 13-nji formulalardan görünýär.

§10. Ulgamyň impulsynyň momentiniň üýtgemek we saklanmak kanunlary.

(1.36) deňlemäniň iki tarapyny hem ćepden $\vec{r}$ radius wektora wektor köpeldip we (2.73)-I hasaba alyp i-nji nokadyň impulsynyň momentiniň üýtgemegini kesgitleýän

$$\dot{\vec{M}}_i = \vec{L}_i^e + L_i^{in} \qquad (2.83)$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde $\vec{L}^{in}_i = \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{in}\right]$ - i-nji nokada täsir edýän içki güýjüň momenti, $L_i^e = \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^e\right]$-i-nji nokada täsir edýän daşky güýjüň momenti

2-83-i hemme nokatlar boýunća jemläp, taparys

$$\dot{\vec{M}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i^e + \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i^{in}, \qquad (2.84)$$

Bu ýerde $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$ - ulgamyň kinetiki momenti . Nýutonyň 3-nji kanunyny hasaba alyp içki güýçleriň momentini hemme özara täsir edişýän jübüt nokatlaryň güýçleriniň momentleriniň jemi görnüşinde ýazalyň.

Bu ýerde $\varphi_1(t) = A_1\ell^{k_1 t} + A_2\ell^{-k_1 t}$ $\varphi_2(t) = B_1\ell^{k_2 t} + B_2\ell^{-k_2 t}$, A_1 we A_2, B_1 we B_2 - başlangyç şertler bilen kesgitlenýän erkin hemişelikler. 8-njini göz öňünde tutup 1-nji deňlemeden özara täsir edişmeýän nokatlaryň massa merkeziniň tizlenmesiniň ugrukmasyny wagtyň funksiýasy ýaly taparys

$$\ddot{x}_m(t) = \frac{\chi}{m}[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)], \tag{9}$$

Massa merkeziniň kesgitlemesinden we 8-nji çözgütden alarys

$$x_m(t) = \frac{1}{m}[m_1\varphi_1(t) + m_2\varphi_2(t)], \tag{10}$$

7-njiniň ikinji deňlemesiniň iki tarapyny hem $\frac{k_1}{k_2}$ gatnaşyga köpeldip we alnan köpeltmek hasylyny 7-njiniň birinjisine bir gezek goşup, bir gezek aýryp

$$\ddot{\psi} = k_1k_2\psi\ ,\ \ \ddot{\theta} = -k_1k_2\theta \tag{11}$$

deňlemä geleris. Bu ýerde $\psi = x_1 + \frac{k_1}{k_2}x_2$, $\theta = x_1 - \frac{k_1}{k_2}x_2$

11-nji ulgamyň çözgüdi

$$\psi(t) = C_1\ell^{\sqrt{k_1k_2}t} + C_2\ell^{-\sqrt{k_1k_2}\ t}$$

$$\theta(t) = a\cos\left(\sqrt{k_1k_2\,t}\right) + \alpha$$

Bu ýerden x_1, x_2 we ψ, θ ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklary peýdalanmak bilen taparys

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[\psi(t) + \theta(t)], \qquad x_2(t) = \frac{k_2}{2k_1}[\psi(t) - \theta(t)],$$

Bu çözgüt özara täsir edişýän nokatlaryň massa merkeziniň tizlenmesiniň we massa merkeziniň Ox oka ugrukmalaryny kesgitlemäge mümkinçilik berýär.

$$\vec{F}_g = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\,;\vec{H}\right] \tag{2.33}$$

Bu ýerde e-zarýadyň mukdary, $\vec{v}$ –zarýadlanan bőlejigiň tizligi, $\vec{H}$ – magnit meýdanynyň güýjenmesi, c – ýagtylygyň tizligi.Bu güýjüň kuwwaty hem hemişe nula deňdir.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{e}{C}\left[\vec{v}\,;\vec{H}\right]\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{e}{c}\left[\vec{v};\vec{H}\right]\vec{v} = 0 \tag{2.34}$$

Dissipatiw güýč diýip jisimiň sreda gőrä tizligine hemişe garşylykly ugrukdyrylan güýje diýilýär. Ol güýč jisime saklaýjy güýč bilen täsir edýär:

$$\vec{F}^{\,d} = -k\vec{v} \tag{2.35}$$

bu ýerde k –položitel skalýar ululyk. Ol jisimiň ýagdaýyna we tizligine bagly. Bu güýjüň dekart koordinata oklaryna ugrukmalary

$$F_x^{\,d} = -k\dot{x} + 0 + 0$$

$$F_y^{\,\alpha} = 0 - k\dot{y} + 0$$

$$F_z = 0 + 0 + k\dot{z}$$

görnüşe eýedir. Dissipatiw güýç tizligiň koordinat oklaryna ugrukmalarynyň koeffisiýentleriniň diagonal matrisasy $\begin{Vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{Vmatrix}$ bilen berilýär.

Dissipatiw güýjüň kuwwaty otrisatel alamata eýedir:

$$\frac{dA}{dt} = -kv^2 < 0, \tag{2.36}$$

Material nokada güýčleriň üč gőrnüşi hem täsir edýär diýeliň:

$$\vec{F} = -\nabla U + \vec{F}^{\,g} + \vec{F}^{\,d} \tag{2.37}$$

Onda güýjüň kuwwaty üçin (2.31) we(2.34)-i hasaba alyp alarys

$$\frac{dA}{dt} = -\dot{U} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}^{\,d}\vec{v} \tag{2.38}$$

Nokadyň doly mehaniki energiÿasyna (E) kinetik we potensial

energiÿalaryň jemi hőkmünde garap:

$$E=T+U \qquad (2.39)$$

we (2.15)-i gőz –őňünde tutup potensial, giroskopik we dissapotiw güÿçleriň bar wagtyndaky nokadyň doly energiÿasynyň üÿtgemek kanunyny taparys:

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}^{d}\vec{v}. \qquad (2.40)$$

Şeýlelikde, nokadyň doly energiÿasynyň üÿtgemegi potensial güÿçleriň wagta anyk baglylygy bilen hem–de dissipatiw güÿčleriň barlygy bilen şertlenendir , Giroskopik güÿčler energiÿany üÿtgetmeÿär.

Meselem, üýtgeýän elektrik meýdanyndaky zarýadyň doly energiýasynyň üýtgemegi($\vec{F} = eE_0 \cos\omega t$, $U = -eE_0 x \cos\omega t + C)\dot{E} = eE_0 \omega x \sin\omega t$ deňlemä boýun egýär.

Eger nokada agyrlyk güýji m $\vec{g}$ we garşylygyň dissipatiw güýji -k $\vec{v}$ täsir edýän bolsa, ýagny, $\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v}$, onda nokadyň potensial energiýasy $U = mgz + C$ (0z ok agyrlyk güýjüne garşylykly ugrukdyrylan) deň. Energiýanyň üýtgemegi bolsa $\dot{E} = -kv^2$, (k >0) Şeýlelikde, nokadyň doly energiýasy kemelýär. Elbetde, bu kemelme energiýanyň ýok bolmagyny aňlatmaýar. Energiýanyň ýylylyga öwrülmesini (2.40) deňleme görkezmeýär.

Eger nokada täsir edýän güýçleriň arasynda dissipatiw güýçler ýok bolsa, potensial güýçler stasionar bolsalar, onda nokadyň doly energiýasy saklanar, ýagny, eger $\vec{F}^{d} = 0$ we $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, onda

$$E = \frac{m\vartheta^2}{2} + U(\vec{r}) = E_0 \qquad (2.41)$$

impulsyň üýtgemegine we ulgamyň massa merkeziniň tizlenmesine täsir edýär.

Mysal: m_1 we m_2 massaly iki nokat $\vec{F}^{e} = \chi\vec{r}$ güýç meýdanynda hereket edýär(bu ýerde $\chi \geq 0, \vec{r}$ - nokadyň başlangyjy güýç merkezinde ýerleşen hasaplama ulgamyna görä radius-wektory). Ulgamyň massa merkeziniň ýagdaýyny iki ýagdaý üçin(1. nokatlaryň özara täsirini hasaba alman; 2. Içki güýçleri çekişme güýçleri hasaplap) wagtyň funksiýasy ýaly tapmaly.

Iki ýagdaýda- massa merkeziniň hereketi (2.76) deňleme bilen kesgitlenýär

$$m\ddot{\vec{r}}_m = \vec{F}_1^{\,e} + \vec{F}_2^{\,e} = \chi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \qquad (1)$$

Bu ýerde $m = m_1 + m_2$. Emma nokatlaryň hereketleriniň deňlemeleri dürli bolar. 1-nji ýagdaý üçin

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \chi\vec{r}_1, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \chi\vec{r}_2 \qquad (2)$$

2-nji ýagdaý üçin

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} + \chi\vec{r}_1, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} + \chi\vec{r}_2 \qquad (3)$$

bu ýerde

$$\vec{F}_{21} = -\chi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}$$

2 we 3-nji ulgamlary integrirlemäge amatly görnüşe getireliň

$$\ddot{\vec{r}}_1 = k_1^{\,2}\vec{r}_1, \quad \ddot{\vec{r}}_2 = k_2^{\,2}\vec{r}_2 \qquad (4)$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = k_1^{\,2}\vec{r}_2 \quad \ddot{\vec{r}}_2 = k_2^{\,2}\vec{r}_1 \qquad (5)$$

Bu ýerde $k_1^{\,2} = \frac{\chi}{m_1}$, $k_2^{\,2} = \frac{\chi}{m_2}$. Nokatlaryň Ox ugur boýunça hereketlerini häsiýetlendirýän deňlemeler ulgamy

$$\ddot{x}_1 = k_1^{\,2}x_1 \quad \ddot{x}_2 = k_2^{\,2}x_2 \qquad (6)$$

$$\ddot{x}_1 = k_1^{\,2}x_2 \quad \ddot{x}_2 = k_2^{\,2}x_1 \qquad (7)$$

6-njy ulgamyň çözgüdi

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t) \qquad (8)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i = \vec{P}_0 \qquad (2.81)$$

ýa-da

$$\vec{V}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i = \vec{V}_{m0},$$

ýagny ýapyk ulgamyň impulsynyň saklanmak kanuny ýerine ýetýär.

Ýapyk ulgamyň massa merkezi gönüçyzykly we deňölçegli hereket edýär, onuň içki güýçleri massa merkeziniň tizligini(ýa-da ulgamyň impulsyny) üýtgedip bilmeýär. Gün ulgamyny kesgitli takyklyk bilen ýapyk ulgam diýip hasap edip bolar. Onuň jisimleriniň tizlenmeli hereket edýändigine garamazdan, olaryň arasyndaky özara täsir güýji ulgamyň massa merkeziniň gönüçyzykly we deňölçegli hereketine täsir etmeýär.

Mysal: E güýjenmeli birhilli, hemişelik elektrik meýdanynda m_1, m_2 massaly we e_1, e_2 zarýadly iki nokat hereket edýär. Eger başlangyç $\vec{r}_{m0}$ we $\vec{V}_{m0}$ bahalar belli bolsa ulgamyň massa merkeziniň ýagdaýyny wagtyň funksiýasy ýaly tapmaly.

Ox oky E wektoryň ugry boýunça ugrukdyryp we içki elektrostatik özara täsir güýji (1.37) kanuna boýun egýär diýip hasaplap (2.78)-iň dekart koordinatalar okuna ugrukmalaryny

$$m\ddot{x}_m = e_1E + e_2E\,,\quad \ddot{y}_m = 0\,,\quad \ddot{z}_m = 0$$

görnüşinde ýazarys. Bu ulgamy integrirläp, taparys

$$x_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} E \frac{t^2}{2} + \dot{x}_{m0}t + x_{m0}$$

$$y_m = \dot{y}_{m0}t + y_{m0}\,,\quad z_m = \dot{z}_{m0}t + z_{mo}$$

Iki zarýadyň massa merkezi $m_1 + m_2$ massaly we $e_1 + e_2$ zarýadly nokadyň hereketi ýaly hereket edýär.

Eger daşky güýçleriň jemi ulgamyň nokatlarynyň koordinatasyna we tizligine bagly bolsa, ýapyk däl ulgamyň içki güýçleri umuman

(2.41) deňlemä nokadyň doly energiýasynyň saklanmak kanuny diýilýär. Şeýle hem oňa hereketiň 1–nji integraly ýa–da energiýanyň integraly diýilýär.Energiýanyň integraly deňlemäniň čőzgüdini gőzlemän hereketiň tizligini nokadyň ýagdaýynyň funksiýasy hőkmünde tapmaga mümkinčilik berýär.

Meselem, giňişlik ossilýatorynyň potensial energiýasy

$$U = \frac{\chi}{2} r^2$$

Dissapotiw güýčleriň ýoklugy, şeýle hem U potensial enegriýanyň wagta anyk bagly däldigi üčin ossilýatoryň doly energiýasy saklanar:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\chi}{2} r^2 = \frac{m\delta_0^2}{2} + \frac{\chi}{2} r_0^2$$

bu ýerden tizligi güýjüň merkezine çenli aralygyň funksiýasy ýaly taparys: $v = \sqrt{v_0{}^2 + \dfrac{\chi}{m}(r_0{}^2 - \vec{r})}$

Hemişelik magnit meýdanynda hereket edýän zarýada giroskopik güýç täsir edýär. Bu ýagdaýda (2.41) kanun zarýadyň tizliginiň absolýut ululygynyň saklanýandygyny görkezýän

$$E = T = \frac{m\vartheta^2}{2} = \frac{m\vartheta_0{}^2}{2},$$ integrala getirýär.

Hemişelik, birhilli özara perpendikulýar elektrik we magnit meýdanlarynda hereket edýän zarýada eE potensial güýç we $\vec{F}_H$ giroskopik güýç täsir edýär. 0x oky $\vec{E}$ wektoryň ugry boýunça ugrukdyryp potensial energiýanyň

$$U = -eEx + C$$

aňlatmasyny taparys. Bu ýerden energiýanyň

$$\frac{m\vartheta^2}{2} - eEx = \frac{m\vartheta_0{}^2}{2} - eEx_0,$$

integralyny alarys. Bu ýerde giroskopik güýç traýektoriýany egreldip zarýadyň 0x ugur boýunça hereketini çäklendirýär. Kinetik energiýada kesgitli çäklerde üýtgeýär.

Güýjüň wirialy baradaky Klauziusyň teoremasy.

Eger nokadyň hereketi giňişligiň çäklendirilen oblastynda moduly boýunça çäklendirilen tizlik bilen bolup geçýän bolsa, onda bu hereket üçin Klauziusyň teoremasy bar. Ol teorema görä nokadyň wagtyň tükeniksiz interwalyna ortalaşdyrylan kinetik energiýasy şol interwala ortalaşdyrylan güýjüň wirialyna deňdir.

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{Fr} \qquad (2.42)$$

$\vec{F}$ güýjüň wirialy diýip

$$-\frac{1}{2}\vec{F}\vec{r}$$

funksiýa aydylýar.

Potensial $\vec{F}$ güýç üçin (2.17) laýyklykda (2.42)-ni ýazarys

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{(\vec{r}\nabla)U} \qquad (2.43)$$

Eger potensial energiýa nokadyň koordinatasyna görä v derejeli birhilli funksiýa bolsa, onda nokadyň potensial energiýasy bilen kinetik energiýasynyň orta bahasynyň arasynda (2.43)-den

$$\overline{T} = -\frac{v}{2}\overline{U}$$

görnüşdäki wajyp gatnaşyk gelip çykýar[4]. Çyzykly garmoniki ossilýator üçin ($U \sim r^2, v = 2$) $\overline{T} = \overline{U}$, Nýutonyň dartylma meýdanynda hereket edýän nokat üçin

(U$\sim\frac{1}{r}, v = -1$) $\overline{T} = -\frac{\overline{U}}{2}$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,e}, \qquad (2.74)$$

Her bir jübüt nokatlara Nýutonyň üçünji kanunyny ulanyp, taparys

$$\vec{F}^{\,in} = 0 \qquad (2.75)$$

Şeýlelikde 2.72-nji formulany göz öňünde tutup alarys

$$m\vec{w}_m = \vec{F}^{\,e} \qquad (2.76)$$

Bu ýerde $\vec{F}^{\,e} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,e}$ -ulgamyň nokatlaryna täsir edýän hemme daşky güýçleriň jemi. 2.76-njy deňleme 2.69-njynyň esasynda impulsyň üýtgeme kanunyna getirýär

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\,e} \qquad (2.77)$$

(2.78) deňlemäniň esasynda(bir material nokadyň mysalyna meňzeşlikde) aşakdaky kesgitlemäni tassyklamak bolar: eger wagtyň islendik pursatynda(momentinde) daşky güýçleriň jeminiň käbir dynčlykdaky oka ugrukmasy nula deň bolsa, onda ulgamyň impulsynyň ýa-da ulgamyň massa merkeziniň tizliginiň şol oka bolan ugrukmasy saklanÿandyr. Mysal üčin, eger

$$F_z^{\,e} = \sum_{i=1}^{N}F_{iz}^{\,e} = 0 \text{ bolsa onda } P_z = \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{z}_i = P_{z0} \qquad (2.78)$$

ýa-da

$$\dot{z}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{z}_i = \dot{z}_{m0}$$

Şeýlelikde, ulgamyň massa merkezi 0z oky boýunça deňölçegli hereket edýär

$$z_m = \dot{z}_{m0}t + z_{m0} \qquad (2.79)$$

Ýapyk sistema üćin impulsyñ saklanmak kanuny aśakdaky ýaly bolar:

$$\overline{F_i}^{\,e} = 0 \text{ (i=1,2,3,….,N)} \; \dot{\vec{P}} = 0 \qquad (2.80)$$

şonuň üçin

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i \qquad (2.71)$$

Şeýlelikde, ulgamyň massasynyň onuň massa merkeziniň tizlenmesine köpeltmek hasyly 2.70-e görä ulgamyň her bir nokadyna täsir edýän güýçleriň jemine deňdir(19-njy w surat).

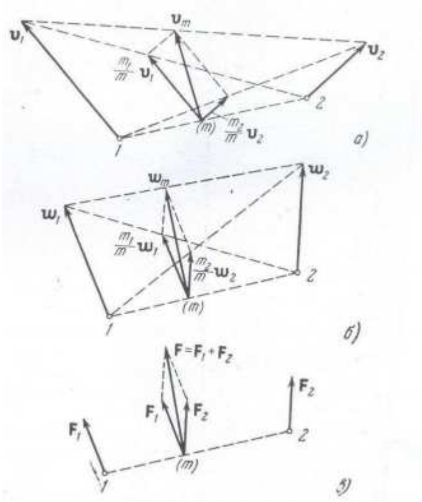
$$m\vec{w}_m = \vec{F} \qquad (2.72)$$

Bu ýerde $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$, $\vec{F}_i$ bolsa i-nji nokada täsir edýän güýç.

Ulgamyň nokatlaryna täsir edýän güýçleriň içinde içki we daşky güýçler bardyr. Berlen mehaniki ulgamyň nokatlarynyň arasynda täsir edýän güýçlere içki güýçler diýilýär. Bu ulgama girmeýän jisimler tarapyndan berlen ulgamyň nokatlaryna täsir edýän güýçlere daşky güýçler diýilýär. i-nji nokada täsir edýän güýji

$$\vec{F}_i = \vec{F}^{in} + \vec{F}^{e}{}_i \qquad (2.73)$$

Görnüşde ýazyp bolar. Bu ýerde $\vec{F}^{in} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}_{ji}$ – i-nji nokada täsir edýän içki güýçleriň jemi, $\vec{F}_i^{e}$ – i-nji nokada täsir edýän daşky güýçleriň jemi. 2.73-däki hemme güýçleri goşup alarys:



19-njy surat. Ulgamyň massa merkezi

§7. Merkezi-simmetrik meýdandaky hereket.

Täsir çyzygy hemişe güýjüň merkezi diýilýän käbir gozganmaýan nokatdan geçýän güýje merkezi güýč diýilýär.
Merkezi güjüň täsirinden nokat hemişe tekiz traýektoriýa boýunča hereket edýär. Merkezi güýč, güýjüň merkezine çenli aralygyň funksiýasydyr(2.27).Bu güýč potensial güýčlere degişlidir(2.16).

m massaly material nokadyň merkezi güýjüň täsirindäki hereketine seredeliň. Hasaplaýyş ulgamynyň başlangyjyny güýjüň merkezinde ýerleşdirilip we impulsyň momentiniň we energiýanyň saklanmak kanunlaryny peýdalanyp hereketiň üçüsi baglanyşyksyz bolan dőrt 1–nji integralyny alarys (2.10) we (2.41):

$$m[\vec{r};\vec{V}] = \vec{M}_0 \qquad \frac{mv^2}{2} + U(r) = E_0 \qquad (2.44)$$

Berlen meselede 1- nji integrallar bilen bir hatarda üč erkin 2 – nji integrallary tapyp bolar. Olaryň biri nokadyň hereketiniň bolup geçýän tekizliginiň deňlemesidir(2.12). Beýleki iki integrallar (2.44) deňlemeden gelip çykýar. Oz oky $\vec{M}_0$ wektoryň ugry boýunča ugrukdyryp we Oxy tikizlikde polýar koordinatalar ρ we φ-ni girizip alarys.

$$mr^2\dot{\varphi} = M_{0,} \quad \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \qquad (2.45)$$

Meýdanyň integralynyň kömegi bilen energiýanyň integralyndan $\dot{\varphi}$-ni ýoklap üýtgeýan ululyklar bolan r we t-ni aýralamaga mümkinçilik berýän

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}[E_0 - U_{eff}] \qquad (2.46)$$

deňlemäni alarys.Bu ýerde

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2{}_0}{2mr^2} \qquad (2.47)$$

nokadyň effektiw potensial energiýasy. (2.46) deňleme U_{eff} den bolan potensial energiýaly nokadyň gőnüčyzykly hereketiniň deňlemesine ekwiwalent deňlemedir. (2.46) deňlemedäki üýtgeýän ululyklary aýralap ýene bir ikinji integraly alarys.

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}\right]}, \quad t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U_{eff}]}} + C \qquad (2.48)$$

Momentiň integraly soňky ikinji integraly tapmaga mümkinçilik berýär.

$$\varphi = \frac{M_0}{m}\int \frac{dt}{r^2(t)} + C \qquad (2.49)$$

(2.48) hasaba alyp
alarys

$$\varphi = \pm\int \frac{\frac{M_0}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U_{eff}]}} + C. \qquad (2.50)$$

(2.48) we (2.50) integrallaryň öňündäki alamatlar başlangyç şertler bilen kesgitlenýär. Mysal üçin (2.48) integralyň alamaty $\dot{r}$ -iň wagtyň başlangyç pursatyndaky alamaty bilen kesgitlenýär.

Şeýlelikde, (2.12), (2.48) we (2.49) ikinji integrallar goýlan meseläniň umumy çözgüdini kesgitleýärler. Bu çözgüt alty hemişelikleri ($E_0, M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}, r_0, \varphi_0$) özünde saklaýar.

Alnan umumy çözgüt güýç merkezine çenli aralyga bagly bolan islendik merkezi güýç üçin adalatlydyr. Şeýle güýçleriň meýdanynda nokadyň hereketi güýç merkezinden geçýän, gozganmaýan tekizlikde bolup geçýär. Nokadyň radius-wektory deň wagt aralygynda deň meýdany çyzýar, φ burçy wagta görä hemişe monoton üýtgeýär, nokadyň traýektoriýasy apside görä simmetrikdir.

Soňky tassyklama görä wagtyň başlangyç pursatynda öwrülme nokadynda ýerleşen material nokat, bir ýagdaýda, başlangyç ϑ_0 tizlik bilen, başga bir ýagdaýda -ϑ_0 tizlik bilen simmetrik egriler

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \vec{W} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_{ii}W_i}{m} \qquad (2.66)$$

i-nokadyñ hereketi netijesinde massa merkeziniñ eýe bolýan tizligi we tizlenmesi degiślilikde $\frac{m_i}{m}\vec{V}_i$ we $\frac{m_i}{m}\vec{W}_i$ - e deñdir. Şeýlelikde massa merkeziniñ i-nji nokadyñ hereketi netijesinde alýan tizligi we tizlenmesi i-nji nokadyñ tizligine we tizlenmesine degiślilikde paralleldirler we olarda $\frac{m}{m_i}$ esse kićidir(19-njy a we b suratlar).

Mehaniki ulgamyň impulsy $\vec{P}$ diýip ulgamyň nokatlarynyñ impulslarynyň jemine aýdylýar.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i \qquad (2.67)$$

Bu ýerde $\vec{P}_i$ - i-nji nokadyñ impulsy .

2.67-nji formula görä ulgamyň impulsy, ulgamyň ähli massasynyñ massa merkeziniñ tizligine köpeldilmegine deñdir.

$$\vec{P} = m\vec{V}_m \qquad (2.68)$$

2.68-nji formula görá ulgamyň impulsynyň wagta görá önümi ulgamyň massasynyň massa merkeziniň tizlenmesine köpeldilmegine deňdir.

$$\dot{\vec{P}} = m\vec{W}_m \qquad (2.69)$$

Massa merkeziniň hereketiniň deňlemesini material nokatlaryň hereketiniň deňlemesiniň [1.36] kömegi bilen alyp bolar.

2.66-njy formuladan alarys:

$$m\vec{W}_m = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{W}_i \qquad (2.70)$$

Nýutonyñ ikinji kanunyna görä käbir nokadyñ massasyny onuñ tizlenmesine köpeltmek hasyly śol nokada täsir edýän güýje deñdir, ýagny

$$T^2 = \frac{\pi^2}{2}\frac{2m\alpha^2}{|E_0|^3} = 4\pi^2\frac{ma^3}{\alpha} \qquad (2.63)$$

2.55, 2.62 we 2.63 deňlemeler Kepleriň üç kanunynyň matematiki aňlatmasydyrlar. Bu üç kanunlarda aşakdakylar tassyklanypdyr.

1. Her bir planeta haýsy hem bolsa bir fokusynda Gün ýerleşen ellips boýunça hereket edýär.

2. Her bir planetanyň sektor tizligi Güne görä hemişelikdir.

3. Planetalaryň aýlanma periodynyň kwadratynyň orbitasynyň uly ýarym okunyň kubuna bolan gatnaşygy hemişelikdir we hemme planetalar üçin birmeňzeşdir.

§9. Massa merkeziniñ hereketi. Ulgamyň impulsynyň üýtgemek we saklanmak kanunlary.

Massa merkezi ýa-da inersi\ya merkezi diýip giñiślikdäki ýagdaýy

$$\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i m_i}{m} \qquad (2.64)$$

radius - wektor bilen kesgitlenýän, massasy ulgamyň ähli massasyna deñ bolan käbir göz öñüne getirilýän nokada aýdylýar.Bu ýerde m_i we $\vec{r}_i$ - ulgamyň i-nji nokadynyñ massasy we radius wektory ; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ - ulgamyň massasy. N - ulgamyň material nokatlarynyñ sany. 1-nji deñlemäniñ ćep we sag tarapyny wagta görä differensirläp massa merkeziniñ $\vec{V}_m$ tizligini alarys:

$$\frac{d\vec{r}_m}{dt} = \vec{V}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}_i}{m} \qquad (2.65)$$

2.65-nji deñlemäniñ iki tarapyny hem wagta görä differensirläp massa merkeziniñ tizlenmesini alarys

boýunça hereket eder.Öwrülme nokatlarynda $\dot{r}$ nola öwrülýär, nokatlaryň töwereginde bolsa r alamatyny üýtgedýär, r bilen bilelikde bolsa (2.47) we (2.50) –daky integralyň aşagyndaky funksiýalaryň alamatyny kesgitleýän

$$\left\{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

aňlatmanyň alamaty üýtgeýär.

Eger $U(r)$ funksiýa berlen bolsa, onda (2.48) we (2.49) (ýa-da 2.50) integrallary hasaplap degişli özara täsir üçin umumy çözgüdi alyp bolar.

$U_{eff}(r)$-iň grafigini gurup hereket edýän nokadyň r koordinatasynyň üýtgemek ýaýlymyny kesgitläp bolar. (2.46) deňlemeden r-iň üýtgeme ýaýlymyny kesgitleýän

$$E_0 \geq U_{eff}(r) \qquad (2.51)$$

deňsizlik we ol ýaýlymyň araçägini kesgitleýän

$$E_0 = U_{eff}(r) \qquad (2.52)$$

deňleme gelip çykýar.

Nokadyň inersiýa boýunça başlangyjy nokadyň traýektoriýasynda ýatmaýan koordinatalar ulgamyna görä hereketine seredeliň. Bu ýagdaýda

$$U_{eff} = \frac{M_0^2}{2mr^2} \quad (M_0 \neq 0, E_0 = T_0),$$ r-iň üýtgemek oblasty

$$r \leq r_{\min} = \frac{M_0}{\sqrt{2mT_0}}$$

$r = r_{\min}$ radiusly töwerege galtaşýan islendik göni nokadyň traýektoriýasy bolup biler(16-njy surat).

Eger nokat $U = \frac{\chi}{2}r^2$ potensial meýdanynda hereket edýän bolsa, onda

$$U_{eff} = \frac{\chi r^2}{2} + \frac{M^2{}_0}{2mr^2}$$

Bu ýagdaýda (2.52) deňleme

$$r^2{}_{1,2} = \frac{1}{\chi}\left[E_0 \mp \left(E^2{}_0 - \frac{\chi}{m}M^2{}_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

deňlik bilen kesgitlenýän öwrülmäniň iki nokadyny berýär. (2.51) deňsizlik bolsa $r_1 \le r \ge r_2$ oblasty kesgitleýär(17-nji surat).

§8. Güýç merkezine çenli aralygyň kwadratyna ters proporsional güýjüň täsirindäki hereket.

m massaly nokadyň $\qquad U = -\frac{\alpha}{r} \qquad$ (2.53)

görnüşli merkezi-simmetrik meýdandaky hereketini öwreneliň (güýç merkezi gozganmaýän). Elektrostatik meýdan ýagdaýynda $\alpha = -ee_c$, grawitasion meýdan ýagdaýynda $\alpha = vmm_c$. Bu ýerde e_c - gozganmaýan zarýad, m_c -gozganmaýan massa.

18-nji suratdaky U_{eff}-niň grafigini öwrenip we (2.51) –i hasaba alyp özara çekişmede (α>0), doly energiýa položitel bolanda (E_0>0) hem, doly energiýa nola deň bolanda hem(E_0=0) nokadyň hereketiniň çäklendirilmedik oblastda boljakdygyny($r \ge r_{\min}$, hereket infinitno), doly energiýanyň otrisatel bahasynda($E_0 \le 0$) hereketiň çäklendirilen oblastda($r_{\min} \le r \le r_{mas}$, ýagny hereket finitno) boljakdygyny, $E_0 = (U_{eff})_{\min}$, bolanda bolsa nokadyň töwerek boýunça hereket etjekdigini we ahyrynda itekleşmede (α>0) mydama r $r \ge r_{\min}$ we doly energiýanyň položitel boljakdygyny anyklaýarys.

Hemme getirilen ýagdaýlarda nokadyň traýektoriýasy(orbitasy) şol bir formula bilen kesgitlenýär. 2.53-nji formulany 2.50-de ýerine goýup alarys.

Nokadyň elliptik orbita boýunça hereketiniň kanunyny 2.48-nji integraldan alarys.

$E_0 = -|E_0|$ we α>0 bahalary hasaba alyp, hem-de (2.58)-i peýdalanyp 2.48-njini

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}\int \frac{rdr}{(-r^2 + 2ar - b^2)^{1/2}}$$

2.57-njiniň kömegi bilen $b^2=a^2(1-\varepsilon^2)$ dygyny bilip integraly

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int \frac{rdr}{\left[a^2\varepsilon^2 - (r-a)^2\right]^{1/2}}$$

görnüşe getireris. $r = a(1 - \varepsilon\cos\xi)$ ýerine goýup alarys.

$$\pm(t - c') = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - \varepsilon\sin\xi)$$

ξ - niň ulalmagy bilen wagtyň ýokarlanmagy bolar ýaly ξ-niň parametrini saýlap alyp we başlangyç şertleri

$$r_0 = a(1-\varepsilon) = r_{\min}, t_0 = 0(\xi = 0 - da) \qquad (2.60)$$

diýip kabul edip nokadyň elliptik orbitadaky hereketiniň kanunyny parametrik görnüşde ýazarys.

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi\text{-}\varepsilon\sin\xi) \qquad (2.61)$$

bu ýerde $T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}$ -doly aýlawynyň periody (elliptik orbitada).

Periodyň bahasyny meýdanyň integralynyň üsti bilen aňsat tapyp bolýar. Meýdan integralyny

$$2m\sigma_z = 2m\frac{ds}{dt} = M_0, \qquad (2.62)$$

görnüşde ýazyp we ellipsiň meýdanynyň πab -ni göz öňünde tutup we 14-nji deňlemäni doly perioda görä integrirläp alarys.

$$2m\pi ab = M_0 T$$

Bu ýerden 2.58-i peýdalanyp alarys.

öňündäki “-” alamatyny düşürip orbitanyň deňlemesini taparys:

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - c)} \qquad (2.55)$$

“+” alamaty $\alpha \geq 0$, “-” alamaty $\alpha<0$ ýagdaýa degişlidir.

(2.55) deňleme fokusynda koordinatalar başlangyjy ýerleşen ikinji tertipli egriniň deňlemesidir.Bu ýerde p-orbitanyň parametri, ε - orbitanyň ekssentrisiteti.

Eger $\varepsilon>1$ bolsa nokadyň hereketiniň traýektoriýasy giperbola, $\varepsilon=1$ bolsa parabola, $\varepsilon<1$ ellips we $\varepsilon=0$ bolsa töwerek bolýar. Berlen $u = -\alpha / 2$ potensial meýdanda özara çekişme üçin ($\alpha>0$) eger $0>E_0>u_{eff\ min}$ bolsa nokadyň traýektoriýäsy ellipsdir, $E_0 \geq 0$ bolsa giperbola, $E_0 = 0$ bolsa parabola, $E_0 = (U_{eff})_{min}$ bolsa töwerek bolýar.

Nokadyň ellips boýunça hereketini $\alpha>0$ we $0>E_0>u_{eff\ min}$ ýagdaýda öwreneliň. 2.55-den

$$r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} \quad we \quad r_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon} \qquad (2.56)$$

Ellipsiň ýarym oklary üçin

$$a = \frac{p}{1+\varepsilon^2} \quad we \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon}} \qquad (2.57)$$

formulalardan we 2.54 formuladan a we b ululyklary E_0 we M_0 ululyklaryň üsti bilen aňlatmak mümkin.

$$a = \frac{\alpha}{2|\varepsilon|}; \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2m|E_0|}} \qquad (2.58)$$

bu ýerden ellipsiň uly ýarym okunyň nokadyň doly energiýasyna baglylygy we onuň momentine bagly däldigi görünýär. Töwerek boýunça orbitada ($E_0=(U_{eff})_{min}$ we $\varepsilon=0$)

$$\dot{r}=0; \quad r=r_0=a=b \qquad (2.59)$$

Töwerek boýunça hereketde diňe doly energiýa hemişelik bolman, eýsem kinetik we potensial energiýa hem hemişelikdir.

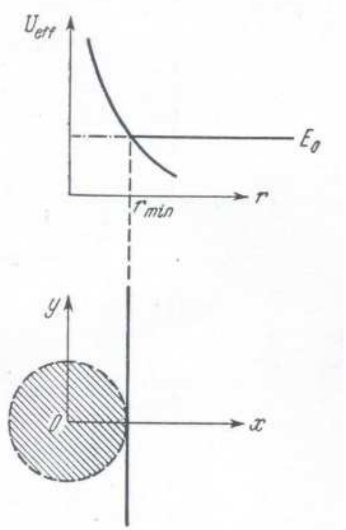
$$\pm(\varphi - c) = -\int \frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{\frac{2mE_0}{M_0} \pm \frac{em|\alpha|}{M_0^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}}$$

(bu ýerde “+” alamaty $\alpha>0$ ýagdaýa degişlidir. we tersine “-” alamaty $\alpha<0$ ýagdaýa).

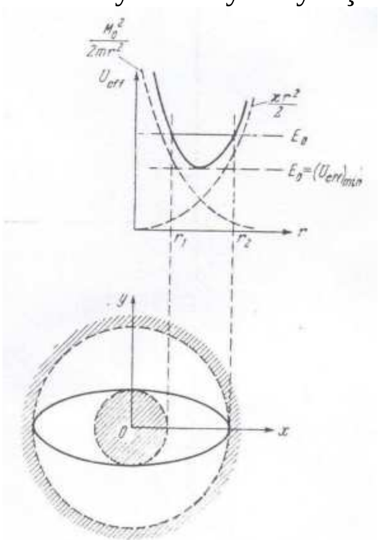
E_0 we M_0 hemişelikleriň ýerine položitel hemişelikler girizip alarys.

$$P = \frac{M_0^2}{m|\alpha|}; \qquad \varepsilon = \left[1 + \frac{2E_0 M_0^2}{ma^2}\right]^{1/2} \qquad (2.54)$$

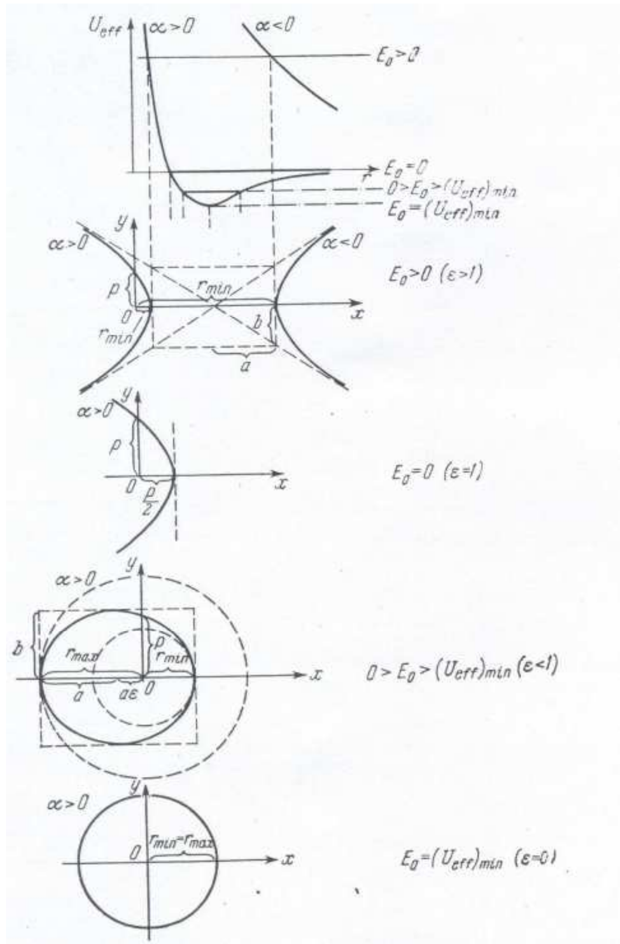
$$\pm(\varphi - c) = -\int \frac{d\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)}{\left[\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$



16=njy surat. Nokadyň inersiýa boýunça hereketi[4].



17-nji surat. Nokadyň potensial meýdandaky hereketi[4]



18-nji surat.

U_{eff} -iň grafigi

Integrirlemegiň netijesinde alarys

$$\varphi - c = \pm \arccos \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r} \mp 1\right)$$

Kosinusyň jübütdigini göz öňünde tutup (ϕ-c) burçuň

III bap. Iki jisim meselesi we bölejikleriň dargamagynyň nazaryýeti.

§12. Iki jisim meselesi

Iki jisim meselesi diýip, daşky guýçler ýok wagtyndaky, özara täsirleşýän iki nokadyň hereketiniň meselesine düşünilýär. Bu meseläniň çözgüdi asman mehanikasynyň we emeli hemralaryň erkin hereketiniň, bölejikleriň çaknyşmagynyň we dargamagynyň nazaryýetiniň esasynda ýatyr. Munuň çözüwini statiki mehanikada hem peýdalanýarlar.

Iki jisim meselesi.

U özara täsir potensial energiýasy nokatlaryň arasyndaky aralyga bagly m_1 we m_2 massaly iki nokadyň, daşky güýçler ýok wagtyndaky hereketini öwreneliň.

Nokatlaryň hereketiniň inersial S hasaplama ulgamyna görä deňlemeleri (1.35) deňleme bolar.

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right), \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right), \tag{3.1}$$

bu ýerde $\vec{F}_{21} = -\nabla_1 U\, \vec{F}_{21}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right)$, $\quad \vec{F}_{12} = -\nabla_2 U\, \vec{F}_{21}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right)$

Daşky güýçleriň ýoklugy sebäpli ulgamyň massa merkezi S hasaplama ulgamyna görä gönüçyzykly deňölçegli hereket edýär. Şeýlelikde, massa merkeziniň tizligi we radius-wektory degişlilikde

$$\vec{V}_m = \vec{V}_{m0}, \qquad \vec{r}_m = \vec{V}_{m0} t + \vec{r}_{m0} \tag{3.2}$$

bolar. Bu ýerde $\vec{V}_{m0} = \dfrac{1}{m}\left(m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20}\right)$, $\quad \vec{r}_{m0} = \dfrac{1}{m}\left(m_1\vec{r}_{10} + m_2\vec{r}_{20}\right)$,

$\vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}$ we $\vec{V}_{10}$, $\vec{V}_{20}$, bolsa degişli nokatlaryň başlangyç tizlikleri we ýagdaýlary.

Öňe bolan hereket edýän S_m massa merkezi ulgamyna görä nokatlaryň hereketine seredeliň(21-nji surat). Şeýle hereket edýän massa merkezi ulgamy diýip başlangyjy mehaniki ulgamyň massa merkezinde ýerleşen we oklary S hasaplama ulgamynyň oklaryna görä ýagdaýlaryny üýtgetmeýän hasaplama ulgamyna aýdylýar. Berlen ýagdaýda S_m hasaplama ulgamy inersial ulgamdyr, sebäbi massa merkezi gönüçyzykly deňölçegli hereket edýär. Şeýlelikde, nokadyň S we S_m –e görä ýagdaýy, tizligi we tizlenmesi biri biri bilen

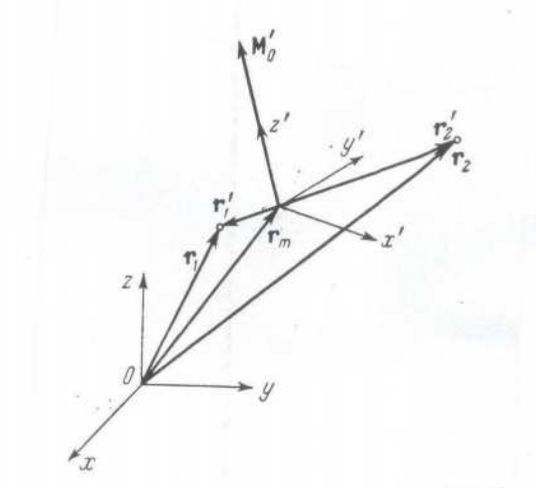
$$\vec{r}_i = \vec{r}_m + \vec{r}_i{}' \qquad \vec{V}_i = \vec{V}_{m0} + \vec{V}_i{}' , \quad \vec{W}_i = \vec{W}_i{}' \tag{3.3}$$

görnüşdäki baglanşykdadyrlar. Ştrihli wektorlar S_m ulgama degişlidir. S ulgamdan S_m ulgama geçilende hereketiň deňlemesiniň inwariantlylygyny göz önünde tutup alarys.

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1{}' = \vec{F}_{21}\left(\left|\vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}'\right|\right), \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2{}' = \vec{F}_{21}\left(\left|\vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}'\right|\right), \tag{3.4}$$

Massa merkeziniň(2.64) we S_m ulgamyň kesgitlemesinden alarys

$$m_1 \vec{r}_1{}' + m_2 \vec{r}_2{}' = 0 \tag{3.5}$$

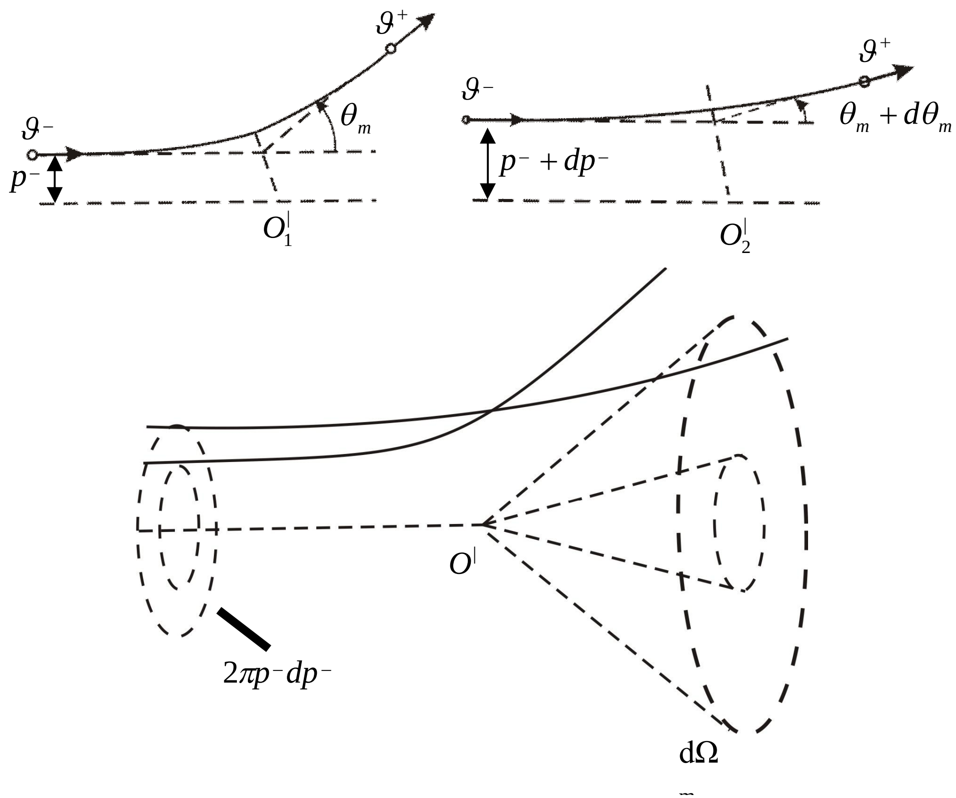


21-nji surat. Nokadyň massa merkezi ulgamyna görä hereketi.

Şonuň üçin nokatlaryň göräli ýagdaýlaryny häsiýetlendirýän $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ radius-wektor $\vec{r}_1{}' we \vec{r}_2{}'$ wektorlaryň üsti bilen aňladylýar.

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}' = -\frac{m}{m_2}\vec{r}_1{}' = \frac{m}{m_1}\vec{r}_2{}' \tag{3.6}$$

$\vec{r}_2{}'$ we $\vec{r}_1{}'$ radius-vektorlar bolsa $\vec{r}$ vektor bilen



27-nji surat.Iki dürli jübüt çaknyşýan bölejikleriň μ nokatlarynyň traýektoriýasy(a), $d\Omega$ jisim burçyna düşýän μ nokatlaryň traýektoriýasy(b)

$$\vec r_2' = \frac{m_1}{m}\vec r \quad \text{we} \quad \vec r_1' = -\frac{m_2}{m}\vec r \qquad (3.7)$$

gatnaşyk bilen baglanşyklydyr.
3.5-3.7 deňlemeleri wagta görä differensirläp nokatlaryň tizlikleri üçin meňzeş gatnaşyklary alarys:

$$m_1 \vec V_1' + m_2 \vec V_2' = 0 \qquad (3.8)$$

$$\vec V_2 - \vec V_1 = \vec V_2' - \vec V_1' = -\frac{m}{m_2}\vec V_1' = \frac{m}{m_1}\vec V_2' \qquad (3.9)$$

$$\vec V_1' = -\frac{m_2}{m}\vec V \;; \qquad \vec V_2' = \frac{m_1}{m}\vec V$$

bu ýerde $\vec V = \vec V_2 - \vec V_1$.

3.6-njyny 3.4-de ýerine goýup taparys:

$$m_1 \ddot{\vec r}_1' = \vec F_{21}\left(-\frac{m}{m_2}\vec r_1'\right), \; m_2 \ddot{\vec r}_2' = \vec F_{12}\left(\frac{m}{m_1}\vec r_2'\right) \qquad \mathbf{(}3.10\mathbf{)}$$

Bu ýerden üýtgeýän ululyk r-e geçip 3.10-njydaky iki deňlemäniň ýerine bir deňlemä geleris.

$$\mu\,\ddot{\vec r} = \vec F_{21}\left(|\vec r|\right) \qquad \mathbf{(}3.11\mathbf{)}$$

Bu ýerde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$- getirilen massa**.** **(**3.11) deňlemämiz iki nokatlar ulgamynyň massa merkezinde ýerleşen merkezi güýjüň meýdanyndaky bir nokadyň hereketiniň deňlemesidir. Şeýlelikde, iki jisim meselesi bu meselä ekwiwalent bolan μ massaly we $\vec r$ radius-wektorly göz öňüne getirilýän nokadyň gozganmaýan merkezli merkezi-simmetrik meýdandaky hereketine syrykdyrylýar.

μ massaly nokada merkezi, stasionat, potensial güýç täsir edýänligi üçin impulsyň momentiniň we energiýanyň S_m ulgama görä saklanmagy ýerine ýetýär. 1-nji nokadyň impulsynyň momentini we kinetik energiýasyny üýtgeýän $\vec r, \vec V$ ululyklar bilen aňladalyň(3.7-ä we 3.9-a seret).

$$\vec{M}_1' = m_1[\vec{r}_1\vec{V}_1'] = m_1\left(\frac{m_2}{m}\right)^2[\vec{r}\vec{V}]$$

$$T_1' = \frac{m_{1^2}(\vartheta_1')^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m}\right)^2\vartheta^2 \qquad (3.13)$$

ikinji nokat üçin meňzeşlikde alarys

$$T_1' = \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m}\right)^2\vartheta^2 \quad \vec{M}_2' = m_2\left(\frac{m_1}{m}\right)^2[\vec{r}\vec{V}] \qquad (3.14)$$

Bu ýerden ulgamyň impulsynyň momenti we kinetik energiýasy üçin aňlatmany üýtgeýän $\vec{r}$ we $\vec{V}$ ululyklar bilen aňladarys

$$\vec{M}' = \vec{M}_1' + \vec{M}_2' = \vec{M}_0' = \mu[\vec{r}\vec{V}],$$

$$E' = T_1' + T_2' + U = E_0' = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \mathrm{U}(\vec{r}\ ) \qquad \mathbf{(}3.15\mathbf{)}$$

(3.14)-i (2.44) integrallar bilen deňeşdirip{ eger (2.12), (2.48),(2.50) formulalardaky m-i μ bilen M$_o$–i M_o^1 bilen we E$_o$-I E_o^1 bilen çalşyrsak }

$$m \to \mu, \vec{M}_0 \to \vec{M}_0', E_0 \to E_0' \qquad (3.15)$$

Onda (3.11) deňlemäniň umumy çözüwini alarys. ;

$$\vec{M}_0'\vec{r} = 0; \quad t = \pm\int \frac{dr}{\left[\frac{2(E_o^1 - U_{eff})}{\mu}\right]^{1/2}} + hemielik \qquad (3.16)$$

$$\varphi = \pm\int \frac{\frac{M_o^1}{\mu r^2}dr}{\left[\frac{2(E_o^1 - U_{eff})}{\mu}\right]^{1/2}} + hemielik$$

Bu ýerde $d\Omega_m = 2\pi\sin\theta_m d\theta_m$.

Inersial ulgamda dargamagyň kesigini tapmak üçin $\theta_m(\theta_1)$ we $\theta_m(\theta_2)$ ululyklary bilmeli.

1-nji dessäniň bőlejikleri dargama çenli dynçlykda diýeliň. 2-nji dessäniň bőlejikleri dargama çenli v_2^- tizlige eýe diýeliň. Onda $\theta_1 = \frac{\pi - \theta_m}{2}$ formuladan

$$\theta_m = \pi - 2\theta_1 \qquad (3)$$

bu ýerde θ_1 0-dan $\frac{\pi}{2}$-ye çenli çäkde üýtgeýär.

3-njini 2-njide goýup alarys

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{\mu(\vartheta_2^-)^2}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\cos^3\theta_1} \qquad (4)$$

Bu ýerde $d\Omega_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$

$\vartheta_1^+ = 0$, $\vartheta_2^+ = \vartheta_2^-$, $\theta_2 = \theta_m$ we

$$\vartheta_1^+ = \vartheta_2^-\sin\frac{\theta_m}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\pi - \theta_m}{2}, \quad \vartheta_2^+ = \vartheta_2^-\cos\frac{\theta_m}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\theta_m}{2}$$

aňlatmalary peýdalanyp

2nji formuladan 2-nji dessäniň bőlejikleri üçin dargamagyň differensial kesigi üçin alarys

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2m_2(\vartheta_2^-)^2}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{\sin^4\frac{\theta_2}{2}{}_1} \quad (m_2 \le m_1; 0 \le \theta_2 \le \pi) \qquad (5)$$

$$d\sigma_2 = \left(\frac{2\alpha}{m_2(\vartheta_2^-)^2}\right)^2 \frac{\cos\theta_2 d\Omega_2}{\sin^4\theta_2} \quad \left(m_2 = m_1; 0 \le \theta_2 \le \frac{1}{2}\pi\right) \qquad (6)$$

5-nji formula Rezerfordyň formulasy diýilýär.

Onda 3.50-ni peýdalanyp iki desse üçin dargamagyň differensial kesigi üçin massa merkezi ulgamynda

$$d\sigma = 2\pi\rho^{-}\left|\frac{d\rho^{-}}{d\theta_m}\right|d\theta_m \qquad (3.53)$$

alarys. Kőplenç 3.53-e derek

$$d\sigma = \frac{\rho^{-}}{\sin\theta_m}\left|\frac{d\rho^{-}}{d\theta_m}\right|d\Omega_m \qquad (3.54)$$

Gőrnüşdäki aňlatmadan peýdalanýarlar. Bu ýerde $d\Omega_m = 2\pi\sin\theta_m d\theta_m$

Mysal: Bőlejikleriň iki dessesi berlen. 1-nji desse $m_1$massaly we $e_1$zarýadly bőlejiklerden durýar.Ol bőlejikleriň inersial hasaplaýyş ulgamyna gőrä tizligi v_1^{-}. Bu ululyklar 2-nji bőlejikler üçin $m_2, e_2 we v_2^{-}$ Iki desse hem ýeterlik seýreklendirilen. Inersial hasaplaýyş ulgamynda dargamagyň differensial kesigini bőlejikleriň iki dessesi üçin kesgitlemeli.

Massa merkezi ulgamynda θ_m burç üçin belli $\theta_m = -2arctg\,\frac{\alpha}{\mu\rho^{-}\left(\vartheta^{-}\right)^2}$ formuladan peýdalanyp massa merkezi ulgamynda nyşana aralygy üçin alarys

$$\rho^{-} = \frac{-\alpha}{\mu\left(\vartheta^{-}\right)^2}ctg\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \qquad (1)$$

Bu ýerde $\alpha = -e_1e_2$, őzem eger $\alpha \geq 0$, bolsa onda $\theta_m \leq 0$ we tersine.

Bu funksiýany 3.54-de ýerine goýup massa merkezi ulgamda dargamagyň kesigi üçin alarys

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu\left(\vartheta^{-}\right)^2}\right)^2 \frac{d\Omega_m}{\sin^4\frac{1}{2}\theta_m}{}_m \qquad (2)$$

bu ýerde U_{eff} = U(r) $+\frac{\left(M_o^1\right)^2}{2\mu r^2}$. (3.16)-yň birinji integraly μ nokadyň hereket tekizligini kesgitleýär. Bu tekizlik massa merkezinden geçýär we M_o^1-he perpendikulýardyr, ýagny $o^1x^1y^1$ tekizlik bilen gabat gelýär. Ikinji we üçünji integrallary bolsa μ nokadyň görkezilen tekizlikdäki hereketini polýar koordinatalarda kesgitleýär. Şeýlelikde (3.16)-njy integrallaryň kömegi bilen $\vec{r}(t)$ funksiýany kesgitläp bolar we (3.7)-njiniň kömegi bilen 1-nji we 2-nji nokatlaryň S_m ulgama görä ýagdaýyny tapyp bolar$\left(r_1^1, r_2^1\right)$ .Soňra (3.2) we (3.3)-nji deňlemeleri peýdalanyp nokatlaryň S ulgama görä hereketiniň kanunyny taparys:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_m(t) - \frac{m_2}{m}\vec{r}(t) \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_m(t) + \frac{m_1}{m}\vec{r}(t) \qquad (3.17)$$

bu ýerde $\vec{r}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ iki nokadyň arasyndaky S ulgama görä aralyk. Nokatlaryň tizlikleri üçin meňzeşlikde S ulgama görä ýazarys(3.9-a we 3.3-e seret).

$$\vec{V}_1(t) = \vec{V}_{m0} - \frac{m_2}{m}\vec{V}(t) \quad \vec{V}_2(t) = \vec{V}_{m0} + \frac{m_1}{m}\vec{V}(t) \qquad (3.18)$$

Şeýlelikde, daşky güýçler ýok wagtynda özara täsir potensial energiýasy nokatlaryň aralygyna bagly iki nokadyň meselesin çozgüdi (3.16), (3.2) we (3.17) formulalar bilen kesgitlenýär. Bu formulalardan, nokadyň massa merkeziniň inersial hasaplama ulgama görä deňölçegli we gönüçyzykly hereket edýändigi, iki nokadyň bolsa inersial hasaplama ulgama görä öz ugrukmasyny saklaýan we massa merkezinden geçýän tekizlikde hereket edýändigi gelip çykýar. Iki nokadyň traýektoriýasy massa merkezi ulgamyna görä biri birine meňzeş. Meňzeşlik merkezi nokatlaryň massa merkezinde ýerleşýär. Meňzeşlik gatnaşygy nokatlaryň massalarynyň gatnaşygyna deň.

Iki jisim meselesine özara täsir potensial energiýasy(2.53-e seret)

$$U=-\frac{\alpha}{r}$$

bolan iki nokadyň mysalynda garalyň, Bu ýerde α - $\gamma m_1 m_2$ (grawitasiýa özara täsirde) we $-e_1 e_2$ (elektrostatik özara täsirde). (2.55) formulada (3.15) çalşygy geçirip μ nokadyň orbitasynyň deňlemesini alarys

$$r=\frac{p}{\pm 1+\varepsilon\cos(\varphi-c)} \quad (3.19)$$

bu ýerde $p=\frac{(M_0')^2}{\mu|\alpha|}$ -orbitanyň parametri, $\varepsilon=\left[1+\frac{2E_0'(M_0')^2}{\mu\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ - orbitanyň ekssentrisiteti, formulanyň maýdalawjysyndaky +1 $\alpha\geq 0$ we -1 $\alpha\leq 0$ ýagdaýa degişlidir.

μ nokadyň elliptik orbita boýunça hereketiniň kanunyny (2.61)-nji formuladan taparys

$$r=a(1-\varepsilon\cos\xi),\qquad t=\frac{T}{2\pi}(\xi\text{-}\varepsilon\sin\xi)$$

bu ýerde $a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}$ - μ nokadyň hereket edýän ellipsiniň uly ýarym oky, $T^2=4\pi^2\left(\frac{\mu a^3}{\alpha}\right)$ - ellips boýunça öwrülmäniň periodynyň kwadraty, p we ε (3.18)-de kesgitlenen.

Eger $m_1\geq m_2$ bolsa, onda nokatlaryň radius-wektorlaryny μ nokadyň radius-wektorynyň üsti bilen $\vec{r}_2'\approx\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\vec{r}$ we $\vec{r}_1'\approx-\frac{m_2}{m_1}\vec{r}$ görnüşde aňladyp bolar(3.7-ä seret). Nokatlaryň traýektoriýasy 20-nji a suratda görkezilen. Eger $m_2=m_1$ bolsa, onda

Dargama hadysasynyň wajyp häsiýetnamasyna dargamagyň differensial effektiw kese kesigi degişlidir. Ol ululyk

$$d\sigma_1=\frac{dj_1^{+}}{j_1^{-}} \quad (3.47)$$

formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde dj_1^{+} -wagt birliginde $d\Omega_m$ jisim burçyna dargaýan bőlejikleriň sany, j_1^{-} -wagt birliginde kese kesigiň birlik meýdanyndan dargama çenli uçup geçýän bőlejikleriň sany. Dargamagyň doly effektiw kesigi

$$\sigma_1=\frac{\Delta j_1^{+}}{j_1^{-}} \quad (3.48)$$

formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde Δj_1^{+} - $\theta_m\neq 0$ burçlaryň ählisi boýunça wagt birliginde dargaýan berlen dessäniň bőlejikleriniň umumy sany,

Dessäniň dargama çenli kese kesigi boýunça birhilligi üçin nyşana aralygy ρ^{-}, $\rho^{-}+d\rho^{-}$ interwalyň içinde ýatan bőlejikleriň akymy bőlejikleriň dargama çenli akymynyň dykyzlygynyň ρ^{-} we $\rho^{-}+d\rho^{-}$ radiusly halkalaryň meýdanyna kőpeldilmegine deňdir. Onda 1-nji desse üçin $d\Omega_m$ jisim burçyna wagt birliginde dargaýan bőlejikleriň sany

$$dj_1^{+}=j^{-}{}_1 2\pi\rho^{-}d\rho^{-} \quad (3.49)$$

deňdir. Bu ýerden massa merkezi ulgamynda dargamagyň differensial kesigi üçin alarys

$$d\sigma=2\pi\rho^{-}d\rho^{-} \quad (3.50)$$

$r=r_{\max}$ -da őzara täsir potensial energiýany hasaba alman doly kesigi

$$\sigma=\pi(r_{\max})^2 \quad (3.51)$$

formula bilen tapyp bolar.

3.36-ny ρ^{-} -e gőrä çőzüp alarys

$$\rho^{-}=\rho^{-}(\theta_m,\vartheta^{-}) \quad (3.52)$$

Dargamagyň kese kesigi

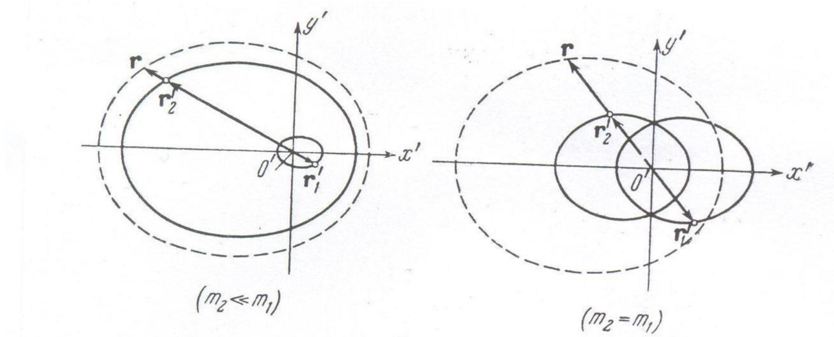
Mundan őňki paragrafda iki bőlejigiň dargamagy őwrenilipdi. Emma durmuşda dargamagyň has umumy gőrnüşi bilen iş salyşmaly bolýar. Mysal üçin Rezerfordyň tejribesinde α bölejikleriň dessesi metal plýonkanyň atomlarynyň ýadrosynda dargadylypdy.

Bőlejikleriň bir dessesiniň bőlejikleriň başga bir dessesinde dargamagyny öwreneliň.

Goý bize ýeterlik seýreklendirilen we kese kesigi boýunça birhilli m_1 we m_2 massaly bőlejikleriň iki dessesi berlen bolsun.Bőlejikleriň dargama çenli tizlikleri degişlilikde $\vec{v}_1^{\,-}$ we $\vec{v}_2^{\,-}$ bolsun. Bu ýagdaýda bőlejikleriň bir dessesiniň bőlejikleriň başga bir dessesinde dargamagyny bőlejikleriň bir dessesiniň her bir bőlejiginiň bőlejikleriň beýleki dessesiniň bir bőlejiginde dargamagyna getirip bolar. Bőlejikleriň dessesindäki őzara täsir hasaba alynmaýar. Onda bőlejikleriň dürli jübütleriniň hersiniň őzüne degişli nyşana aralygy ρ^{-} we ε burçy bolar. Her bir jübütiň őzüniň massa merkezi ulgamyna gőrä dargama burçy θ_m şol bir baha eýe bolar. 27-nji a suratda şol bir ε burçly we dürli nyşana aralykly iki dürli jübütleriň μ nokatlaryň traýektoriýasy gőrkezilen.

Nyşana aralygy ρ^{-}, $\rho^{-}+d\rho^{-}$ interwalyň içinde ýatan we ε burçy 0-dan 2π -e çenli çäklerde üýtgeýän μ nokatlara massa merkezi hasaplaýyş ulgamynda seredeliň. Bőlejikleriň arasyndaky őzara täsiriň merkezi simmetrikligi üçin bu μ nokatlaryň her biri őz tekizliginde θ_m-den θ_m+dθ_m-e çenli dargaýar. Şeýlelikde hasaplaýyş ulgamynyň başlangyjyndan ýeterlik daşlykda saýlanan μ nokatlar $d\Omega_m$ jisim burçyna düşerler(27-nji b surat). Bu jisim burçy depesi hasalaýyş ulgamynyň başlangyjynda bolan we rastwor burçlary degişlilikde $2\theta_m$ we $2(\theta_m$+d$\theta_m)$ bolan konusyň üstleri bilen çäklenen. Konusyň oky μ nokadyň dargama çenli tizligine paralleldir.

$\vec{r}_2' \approx \dfrac{\vec{r}}{2}$ we $\vec{r}_1' \approx -\dfrac{\vec{r}}{2}$ **(**20-nji b surat**).** Şeýlelikde, eger μ nokat ellips boýunça hereket etse, onda hakyky nokatlar elliptik orbitany çyzýarlar(22-nji a we b suratlar). Seredilen mysal planeta-Gün we goşolanan ýyldyzlar ulgamynyň hereketi barada düşünje berýär.



a b

22-nji surat. Iki nokadyň S_m hasaplama ulgamyna görä hereketi

Nokatlaryň elliptik orbita boýunça aýlanmak periody T bilen onuň uly a ýarym oklarynyň arasydaky gatnaşygy tapalyň. Grawitasion çekişmäni göz öňünde tutup μ nokat üçin ýazarys.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{a^3}{m_1+m_2},$$

3.7-iden $\vec{r}_2' = \dfrac{m_1}{m}\vec{r}$**,** $\vec{r}_1' = \dfrac{m_2}{m}\vec{r}$ gelip çykýar we şeýlelikde,

$$a_2 = \frac{m_1}{m}a\textbf{,}\ a_1 = \frac{m_2}{m}a\textbf{,}$$

bu ýerde a_1 we a_2- 1-nji we 2-nji nokatlaryň elliptik orbitalarynyň uly ýarym oklary. Şeýlelikde, periodyň kwadratynyň a_1 we a_2 uly ýarym oklaryna bolan gatnaşygyny taparys

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{m^2}{m_2^3}\textbf{,}\ \frac{T^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{m^2}{m_1^3}\textbf{,}$$

bu ýerde $m = m_1 + m_2$. Bu gatnaşyklar nokatlaryň massalaryna bagly, şonuň üçinem 39-njy sahypada getirilen Kepleriň 3-nji kanunynyň takmynanlygy düşnükli bolýar.Islendik planetanyň massasynyň Günüň massasy bilen deňeşdireninde kiçidigi sebäpli $\frac{T^2}{a_2^3}$ gatnaşyk islendik iki planeta üçin uly takyklyk bilen birmeňzeşdir.

Seredýän meselämize güýjüň wirialy hakyndaky teoremany ulanalyň(nokatlar ellips boýunça hereket edýär).

$\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\vec{r}_i$ formula S_m ulgama görä seredip alarys

$$\overline{T'} = -\frac{1}{2}\left(\vec{F}_{12}\vec{r}_2' + \vec{F}_{21}\vec{r}_1'\right)$$

$U(r)$ potensial energiýanyň üsti bilen aňladylan güýji ýerine goýup (2.53) görnüşli potensial üçin ýönekeý

$$\overline{T'} = -\frac{\overline{U}}{2} \qquad (3.20)$$

görnüşe gelýän $\overline{T'} = \frac{1}{2}\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}r$, gatnaşygy taparys. Mundan başga-da,

$\overline{T'} + \overline{U} = E_0'$ bolansoň (3.20)

$$\overline{T'} = -E_0', \ \overline{U} = 2E_0' \qquad (3.21)$$

formulalara getirýär. (3.21) deňlemeler ulgamyň kinetik we potensial energiýalarynyň orta bahasyny wagtyň başlangyç momentinde onuň doly energiýasynyň üsti bilen kesgitleýär.

§13. Bölejikleriň maýyşgak dargamagy
Bölejikleriň maýyşgak çakyşmagy we dargamagy.Rezerfordyň formulasy.

Eger iki bölejik wagtyň başlangyç pursatynda biri-birinden ýeterlik daşlykda duran bolsalar, şeýle hem olaryň başlangyç tizlikleri wagtyň geçmegi bilen bölejikler ýakynlaşar ýaly ugrukdyrylan

merkeziniň tizlik wektorynyň ujy bu kesişme çyzygynda ýatýar. Nokatlaryň S_m-e görä kesgitlenen tizlikleriniň ýatan tekizligi umuman $\vec{V}_1^-$, $\vec{V}_2^-$ wektorlaryň tekizlikleri we $\vec{V}_1^+$, $\vec{V}_2^+$ wektorlaryň tekizlikleri bilen gabat gelenok.

Bölejikleriň biri-biriniň üstüne gaçmagyna seredeliň($\vec{r} \to 0, t \to +\infty$). Umuman güýç merkezine gaçmak şertini

$$r^2E_0 \geq r^2U(r) + \frac{M_o^2}{2m}$$

görnüşde ýazylan (2.51) şertden almak mümkin. r-i nola ymtyldyryp güýýdanynyň merkezine gaçmak şertini taparys

$$0 \geq r^2U(\vec{r})\big|_{r\to 0} + \frac{M_o^2}{2m} \qquad (3.43)$$

Derejeli potensial $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ üçin bu şert haçanda

$$n = 2, \quad \text{eger} \quad \alpha \geq \frac{M_0^2}{2m}, \quad n \geq 2, \quad \text{eger} \quad \alpha \geq 0 \qquad (3.44)$$

bolanda ýerine ýetýär.

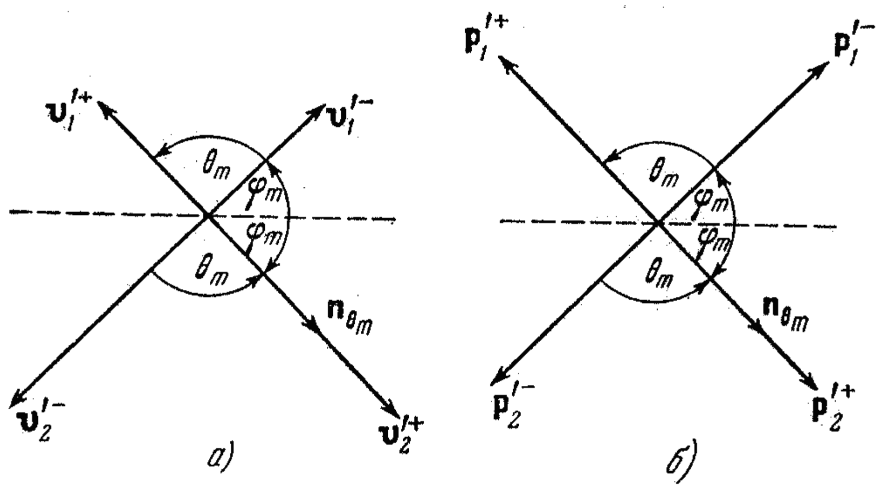
(2.51) we (3.40) formulalarda m-i μ bilen çalşyryp we (3.30), (3.31)-i hasaba alyp iki jisimiň meselesinde r-iň üýtgemek oblastyny kesgitleýän deňsizligi

$$\frac{\mu(\vartheta^-)^2}{2} \geq U(r) + \frac{\mu(\vartheta^-)^2}{2}\cdot\frac{(\rho^-)^2}{r^2} \qquad (3.45)$$

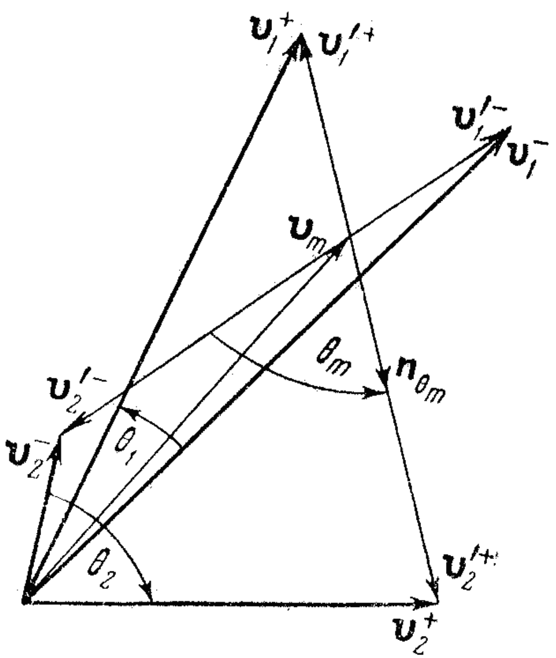
we bölejigiň gaçmak şertini

$$0 \geq r^2U(r)\big|_{r\to o} + \frac{\mu(\vartheta^-)^2}{2}(\rho^-)^2 \qquad (3.46)$$

ýazarys.



25-nji surat. S_m ulgama görä tizlikleriň diagrammasy



26-njy surat. S ulgama görä tizlikleriň diagrammasy

bolsalar, onda olar özara täsiriň netijesinde täzeden biri-birinden ýeterlik uly aralyga daşlaşyp bilerler. Şeýle hem olaryň tizlikleri ugry we ululygy boýunça üýtgeýär. Bu ýagdaýda bölejikleriň dargamagy bolup geçdı diýýärler. Eger özara täsiriň netijesinde t→ + ∞ bolanda bölejikleriň arasyndaky aralyk nola ymtylýan bolsa ýa-da çäklendirilen bolup galýan bolsa, onda bölejikleri tutmak boldy diýýärler. Bölejikleriň dargamagy we tutulmagy özara täsiriň häsiýetine baglydyr. Beýle hadysalary öwrenmegiň fizikada uly ähmiýeti bardyr.

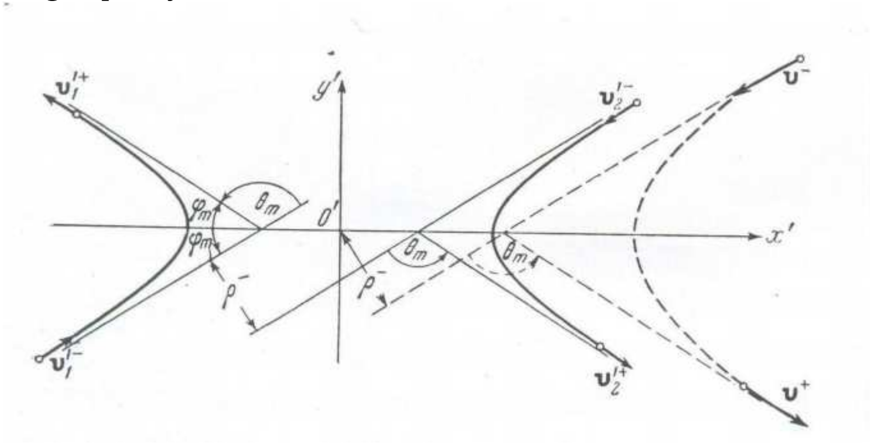
Massalary belli we aralygynyň funksiýasy bolan potensial energiýaly iki bölejigiň dargamak meselesine garalyň. Daşky güýçlerı hasaba almaýarys. Dargama çenli, ýagny t→ − ∞ ymtylanda bölejikler biri-birinden tükeniksizlige daşlaşan diýip hasap edilýär. Olar degişlilikde

$$\vec{V}_1^{\,-} = \vec{V}_1(t)\big|_{t\to-\infty}\,, \qquad \vec{V}_2^{\,-} = \vec{V}_2(t)\big|_{t\to-\infty} \tag{3.22}$$

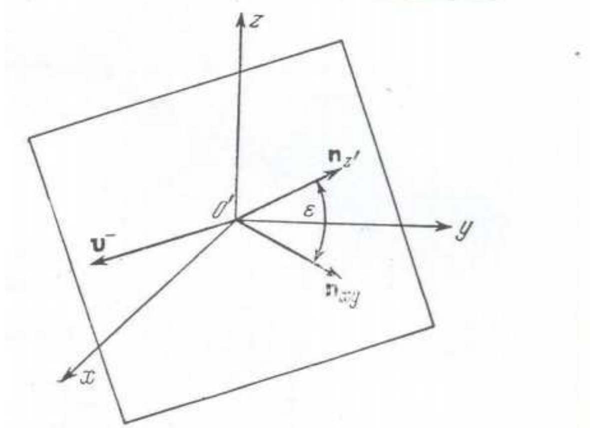
tizliklere eýedirler. Bu ýerde $\vec{V}_1(t)$ we $\vec{V}_2(t)$ nokatlaryň wagtyň t pursatyndaky tizlikleri. Dargama çenlı ýagdaý özara täsir energiýasy hasaba alynmaz ýaly gutarnykly aralyk bilen häsiýetlendirilýär. 3.22-njidaky tizlikler bölejikleriň käbir inersial hasaplama ulgamyna görä tizlikleridir. Dargama nazaryýetinde bu ulgama laboratoriýa ulgamy ýa-da L ulgamy diýilýär. Hereketiň tekizliginiň dargama nazaryýetinde ц-ulgam diýilýän Sm ulgama görä ýagdaýy belli hasap edilýär.

Meselede nyşana aralygy (ρ‾) belli hasap edilýär. Nyşana aralygy diýip nokatlaryň S_m hasaplama ulgamyna görä traýektoriýalarynyň asimtotlarynyň aralygyna ýa-da özara täsir bolmandaky bölejikleriň biri-biriniň golaýyndan geçip gitjek iň ýakyn aralygyna düşünilýär(23-nji surat). Bu suratda μ-nokadyň traýektoriýasy deregine giperbolanyň itekleşme ýagdaýa degişli şahasy şekillendirilen. Hakyky nokatlaryň traýektoriýalary $m_1 = m_2$ ýagdaý üçin şekillendirilen.

Eger bölejikleriň dargama çenli tizlikleri berlen bolsa, hereket tekizliginiň Sm ulgama görä ugrukmasy bir skalýar parametr bilen kesgitlenýär. Hakykatdanam, başlangyç $\vec{V}_1^{\,-}$ we $\vec{V}_2^{\,-}$ tizlikler boýunça hereket tekizliginde ýatan (Sm ulgama görä) tizlikleriň tapawudyny kesgitläp bolýar



23-nji surat. Bölejikleriň maýyşgak dargamagy



24-nji surat. Hereket tekizliginiň massa merkezi ulgamyna görä ugrukmasy.

$$\vec{V}^{\,-} = \vec{V}_2^{\,-} - \vec{V}_1^{\,-} \qquad (3.23)$$

$\overline{V}$ -wektor wagtyň islendik pursatynda $\vec{V}_2^{\,-} we \vec{V}_1^{\,-}$ wektorlara (Sm –e görä) kollinear.

$$\vec{V}_2^{\,+} = \frac{m_2 - m_1}{m}\vec{V}_2^{\,-} + \frac{2m_1}{m}\vec{V}_1^{\,-}$$

S_m ulgamda tizlikleriň diagrammasyny guralyň. Dargamadan soňky tizlikler (3.34) çözgütden belli, dargamadan öňki tizlikler (3,9)-da $t \to \infty$ ymtyldyryp alarys

$$\vec{V}_1'^{-} = -\frac{m_2}{m}\vec{V}^{\,-}, \ \vec{V}_2'^{-} = \frac{m_1}{m}\vec{V}^{\,-} \qquad (3.41)$$

3.41 –den we (3.34)-den peýdalanyp tizlikleriň diagrammasyny S_m ulgamda alarys(25-nji a surat). Nokatlaryň tizliklerini(3.34-e seret) we 3.41-i degişli massalaryna köpeldip nokatlaryň S_m ulgama görä impulslaryny alarys(25-nji b surat).

$$\vec{p}_1'^{-} = -\mu\vec{V}^{\,-}, \ \vec{p}_2'^{-} = \mu\vec{V}^{\,-}$$

$$\vec{p}_1'^{+} = -\mu\vec{V}^{\,+} \quad \vec{p}_2'^{+} = \mu\vec{V}^{\,+} \qquad (3.42)$$

Iki bölejigiň S_m ulgama görä maýyşgak dargamagy bölejikleriň tizlikleriniň we impulslarynyň şol bir θ_m burça öwrülmegine syrykdyrylýar.Tizlikleriň we impulslaryň ululyklary saklanýar.

Laboratoriýa ulgamyna görä tizlikleriň diagrammasy(3.34)-iň çözgüdine laýyk gelýär(26-njy surat). Umuman, tizlikleriň diagrammasyndaky $\vec{V}_1^{\,-}$ we $\vec{V}_2^{\,-}$ wektorlar bilen emele gelen tekizlik $\vec{V}_1^{\,+}$ we $\vec{V}_2^{\,+}$ wektorlar bilen emele gelen tekizlik bilen gabat gelenok. Emma bu tekizlikler kesişýärler we massa

$$\theta_m = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho^-}{r^2} \frac{dr}{\left[1 - \frac{2U(r)}{\mu(\vartheta^-)^2} - \frac{(\rho^-)^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.36)$$

bu ýerde r_{min}

$$1 - \frac{2U(r)}{\mu(\vartheta^-)^2} - \frac{(\rho^-)^2}{r^2} = 0 \qquad (3.37)$$

deňlemäniň köki.

(3.35) we (3.36) formulalar iki bölejigiň maýyşgak dargamagynyň meselesiniň çözgüdidir. Bu mesele iki jisimiň meselesiniň hususy halydyr(haçanda bölejikleriň diňe darganyndan soňky tizlikleri bilen gyzyklanylanda). (3.35) görnüşdäki çözgüdiň saklanmak kanunynyň esasynda alynandygy üçin dargamakdan soňky tizlikler $\vec V_1'^{+}, \vec V_2'^{+}$ dargama çenli tizlikleriň($\vec V_1'^{-}, \vec V_2'^{-}$) we bölejikleriň islendik merkezi özara täsirindäki ε, θ_m burçlaryň funksiýasydyr. Başga bir tarapdan $\vec V_1'^{+}, \vec V_2'^{+}$ tizlikler $\vec V_1'^{-}, \vec V_2'^{-}$ tizlikleriň, ε burçyň we ρ^- nyşana aralygynyň funksiýasy bolup, dürli özara täsir üçin dürlidir. Sebäbi θ_m-iň ρ^- we ϑ^- baglylygy potensial energiýanyň görnüşi bilenkesgitlenýär. Diňe bir ýagdaýda(özara täsir potensial energiýasynynyň islendik bahasynda) massa merkezi ulgamyndaky gyşarma burçy kesgitli baha eýedir. Ol maňlaýdan urgy ýagdaýydyr.

$$\rho^- = 0, \ (\varphi_m = 0, \ \theta_m = \pi) \qquad (3.38)$$

Şeýlelikde $\vec n_{\theta_m}$ wektor $\vec V^-$ wektora garşylykly ugrukdyrylan.

$$\vec n_{\theta_m} = -\frac{\vec V^-}{\vartheta^-} \qquad (3.39)$$

3.39-y 3.35-de ýerine goýup maňlaýdan urgy meselesiniň çözgüdini alarys

$$\vec V_1^+ = \frac{m_1 - m_2}{m}\vec V_1^- + \frac{2m_2}{m}\vec V_2^- \qquad (3.40)$$

Şonuň uçin bu tekizligiň ugrukmasyny(24-nji surat) islendik wagt $\vec n_{z'}$ birlik wektor bilen (tekizlige we $\vec V^-$ wektora perpendikulýar) berip bolýar. $\vec n_{z'}$–iň ugry (eger $\vec V^-$ berlen bolsa) $\vec n_{z'}$ bilen $\bar n_{xy}$ –iň arasyndaky ε burç bilen kesgitlenýär. ($\bar n_{xy}$ $\overline{V}$ wektora perpendikulýardyr). Şeýlelikde iki jisimiň dargamagy meselesinde jisimiň m_1, m_2 massalaryny, olaryň özara täsir $U(\vec r)$potensial energiýasyny, dargama çenli $\vec V_1^-, \vec V_2^-$ tizliklerini (S hasaplama ulgamyna görä), ε burçy (Sm hasaplama ulgamyna görä hereket tekizliginiň ugrukmasyny), şeýle hem nyşana aralygyny (ρ^-) belli hasaplaýarys.Şu berlen ululyklar boýunça dargamadan soňky $\vec V_1^+$ we $\vec V_2^+$ tizlikleri kesgitlemek talap edilýär, ýagny

$$\vec V_1^+ = \vec V_1(t)\,\Big|_{t\to\infty} \ , \quad \vec V_2^+ = \vec V_2(t)\,\Big|_{\to\infty} \qquad (3.24)$$

Wagtyň islendik pursaty üçin adalatly (3.9)we (3.17) deňlemelerdäki wagty tükeniksizlige ymtyldyryp (t→+∞) we bölejikleriň massa merkeziniň tizliginiň saklanmagyny peýdalanyp alarys.

$$\vec V_1'^{+} = -\frac{m_2}{m}\vec V^+ \ ; \quad \vec V_2'^{+} = \frac{m_1}{m}\vec V^+ \ ; \qquad (3.25)$$

$$\vec V_1^+ = \vec V_m^- + \vec V_1'^{+} = \vec V_m^- + -\frac{m_2}{m}\vec V^+ ; \ \vec V_2^+ = \vec V_m^- + \vec V_2'^{+} = \vec V_m^- + \frac{m_1}{m}\vec V^+ \qquad (3.26)$$

Bu ýerde $\vec V_1'^{+}$ we $\vec V_2'^{+}$ nokatlaryň Sm hasaplama ulgamyna görä dargamadan soňky tizlikleri.

$\vec V_m^- = \frac{1}{m}\,(m_1 \overline{V_1^-} + m_2 \overline{V_2^-}$ - massa merkeziniň tizligi.

Çörüşimiz ýaly 3.25-nji we 3.26-njy formulalara bir näbelli wektor $\vec V^+$– nokatlaryň dargamadan soňky tizlikleriniň tapawudy girýär. Bu wektoryň ululygyny Sm ulgama görä energiýanyň saklanmak kanunyny peýdalanyp tapyp bolar. Hakykatdanam,

$$\frac{\mu(\upsilon^{+})^{2}}{2}+U^{+}=\frac{\mu(\upsilon^{-})^{2}}{2}+U^{=}$$

Bu ýerde U^{-} we U^{+} özara täsir potensial energiýalaryň dargamadan öňki we soňky bahalary. Bölejikleriň dargamadan öň hem, soň hem biri-birinden daş aralykda bolýandyklary üçin U⁻ =U⁺ diýip hasap edip bolar. Şeýlelikde 3.25-njiden we 3.26-njydan

$$\vartheta^{+}=\vartheta^{-} \tag{3.27}$$

gelip çykýar. Bu netije dargamak prosesinde bölejikleriň içki energiýasy üýtgemeýär diýen tassyklama esaslanýar, Şeýle dargama maýyşgak dargama diýilýär. 3.27-njini göz öňünde tutup näbelli $\vec{V}^{+}$ wektor üçin

$$\vec{V}^{+}=\vartheta^{-}\vec{n}_{\theta_m} \tag{3.28}$$

ýazyp bileris, bu ýerde $\vartheta^{-}=\left|\vec{V}_2^{-}-\vec{V}_1^{-}\right|$ belli ululyk. $\vec{n}_{\theta_m}$ - $\vec{V}^{+}$ ýa-da $\vec{V}_2'^{+}$ wektor boýunça ugrukdyrylan birlik wektordyr. $\vec{n}_{\theta_m}$ wektory iki jisimiň meselesiniň çözgüdini peýdalanyp kesgitläp bolýar. 3.16-yň ikinji integralyny $r_{\min}$-dan ∞-ge çenli çäklerde hasaplap traýektoriýanyň asimtoty bilen apsidiň arasyndaky φ_m burçy alarys.

$$\varphi_m=\downarrow\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\frac{M_0'}{\mu r^2}dr}{\left[\frac{2}{\mu}\left(E_0'-U_{eff}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.29}$$

bu ýerde $r_{\min}$ $E_0'=U_{eff}$ deňlemeden kesgitlenýär.

(3.29) integral φ_m burçy E_0', M_0' we μ-iň funksiýasy ýaly kesgitleýär($U(r)$ potensial energiýanyň berlen bahasynda). E_0', M_0' hemişelikler öz gezeginde ϑ^{-} we ρ^{-} ululyklaryň üsti bilen aňladylynyp biliner. (3.14)-iň ikinji formulasyny potensial energiýa tükeniksizlikde nola deň diýip peýdalanyp alarys

$$E_0'=\frac{\mu\left(\vartheta^{-}\right)^{2}}{2} \tag{3.30}$$

Kinetiki momenti massa merkezi nulgama görä

$$M_0'=\mu r\vartheta\sin\left(\vec{r},\vec{V}\right)\Big|_{t\to-\infty}$$

bu ýerden

$$r\vartheta\sin\left(\vec{r},\vec{V}\right)\Big|_{t\to-\infty}=\rho^{-} \tag{3.31}$$

hasaba alyp alarys

$$M_0'=\mu r\rho^{-}\vartheta^{-} \tag{3.32}$$

(3.30), (3.32) gatnaşyklar we (3.29)-njy çözgüd φ_m burçy berlen ululyklaryň funksiýasy ýaly tapmaga mümkinçilik berýär. Bu ýerden 1-nji we2-nji nokatlaryň tizlikleriniň massa merkezi ulgamyndaky gyşarma burçlaryny tapmaga mümkinçilik döreýär. $\vec{V}_1'^{+}$ we $\vec{V}_1'^{-}$ wektorlaryň arasyndaky burç $\vec{V}_2'^{+}$ we $\vec{V}_2'^{-}$ wektorlaryň arasyndaky burça deňdir. Bu burça massa merkezi ulgamynda dargama burçy diýilýär we θ_m bilen belgilenýär. Merkezi-simmetrik özara täsirde φ_m burç bilen θ_m burçuň arasynda

$$\theta_m=\pi-2\varphi_m \tag{3.33}$$

gatnaşyk bardyr.

(3.24), (3.25) gatnaşyklar (3.28)-(3.33) –ni hasaba alyp iki bölejigiň dargamagynyň meselesinin çözgüdine getirýär.

$$\vec{V}_1'^{+}=-\frac{m_2}{m}\vartheta^{-}\vec{n}_{\theta_m},\ \vec{V}_2'^{+}=\frac{m_1}{m}\vartheta^{-}\vec{n}_{\theta_m} \tag{3.34}$$

$$\vec{V}_1^{+}=\vec{V}^{-}{}_m-\frac{m_2}{m}\vartheta^{-}\vec{n}_{\theta_m},\ \vec{V}_2^{+}=\vec{V}^{-}{}_m+\frac{m_1}{m}\vartheta^{-}\vec{n}_{\theta_m}, \tag{3.35}$$

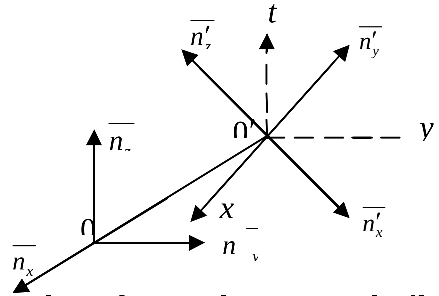
bu ýerde $\vec{V}_m^{-}=\frac{1}{m}\left(m_1\vec{V}_1^{-}+m_2\vec{V}_2^{-}\right)$, $\vartheta^{-}=\left|\vec{V}_2^{-}-\vec{V}_1^{-}\right|$, $\vec{n}_{\theta_m}$ birlik wektor ε we θ_m burçlar bilen kesgitlenýär. θ_m burçuň ϑ^{-} we ρ^{-} ululyklara baglylygy we özara täsiriň häsiýetleri

IV bap.Inersial däl hasaplama ulgamyna görä hereket

Nýutonyň deňlemesiniň diňe inersial hasaplama ulgamlarynda adalatlydygyny bilýäris. Praktikada (gündelik durmuşda) inersial däl hasaplama ulgamyna-da köp duş gelinýär. Şonuň üçin beýle ulgamlara görä hereketiň deňlemesini tapmak zerurdyr. Nýutonyň kanuny material nokadyň massasyny, tizlenmesini we nokada başga jisimler tarapyndan täsir edýän güýji özünde saklaýar. Nokadyň massasy we wagt bir hasaplama ulgamyndan başga bir hasaplama ulgamyna geçilmegine görä inwariantdyr, güýçler bolsa nokadyň ýagdaýynyň we tizliginiň funkdiýasydyr. Şeýlelikde, bizi gyzyklandyrýan hereketiň deňlemesini getirip çykarmak üçin ilki bilen inersial S hasaplama ulgamyndan inersial däl hasaplama ulgamyna geçilende nokadyň ýagdaýynyň, tizliginiň we tizlenmesiniň nähili özgerýändigini aýdyňlaşdyrmaly. Kinematikanyň gözi bilen seredeniňde bizi gyzyklandyrýan hereketiň deňlemesini getirip çykarmak üçin ilki bilen haýsy hem bolsa bir erkin hasaplama ulgamynyň başga bir erkin hasaplama ulgamyna görä hereketini öwrenmeli.

§14. Hasaplama ulgamynyň ýagdaýy

Başlangyjy O', ortlary $\vec{n}_{x'}, \vec{n}_{y'}, \vec{n}_{z'}$ bolan S' hasaplama ulgamynyň başlangyjy O, ortlary $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ bolan S hasaplama ulgamyna görä ýagdaýyna seredeliň (28-nji surat)



28-nji surat. Bir hasaplama ulgamynyň beýleki bir hasaplama ulgamyna görä ýagdaýy.

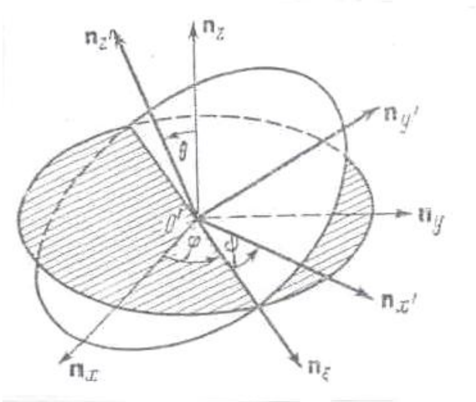
O' başlangyjyň S hasaplama ulgamyna görä ýagdaýy $\vec{r}_{o'}$ wektor bilen kesgitlenýär

$$\vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{n}_x + y_{O'}\vec{n}_y + z_{O'}\vec{n}_z \qquad (4.1)$$

S' hasaplama ulgamynyň S hasaplama ulgamyna görä ugrukmasyny iki hasaplama ulgamynyň ortlarynyň arasyndaky burçlaryň kosinusy bilen berýärler. Emma dokuz ugrukdyryjy kosinusyň diňe üçüsi erkindirler. Sebäbi $a_{i'j}$ ortogonallygyň alty $(1.4'')$ şertine boýun egýändir. Köplenç üç erkin ugrukdyryjy kosinuslaryň ýerine Eýleriň üç burçundan peýdalanýarlar(29-njy surat).

$\varphi = <(\overline{n_x}, \overline{n}), \quad \theta = <(\overline{n_z}, \overline{n_{z^1}}), \quad \psi = <(\overline{n}, \overline{n_{x^1}})$

burçlara Eýleriň burçlary diýilýär.



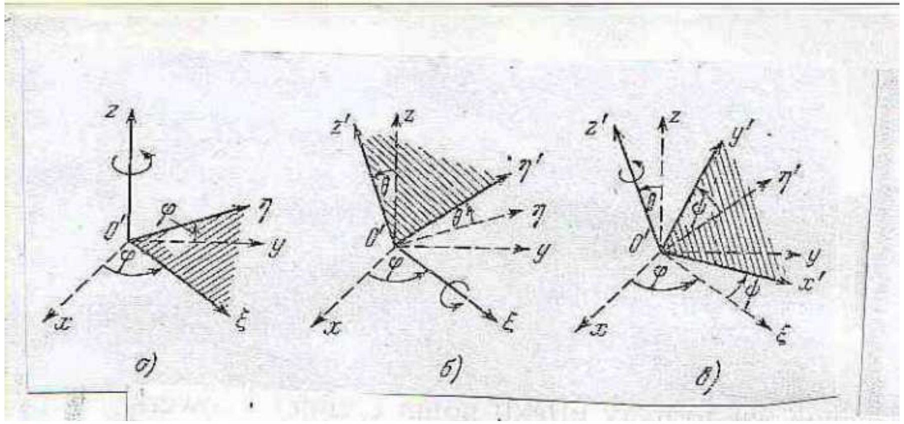
$(0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi)$

29-njy surat.

Şeýlelikde bir erkin hasaplama ulgamynyň (S') beýleki bir (S)erkin hasaplama ulgamyna görä ýagday alty baglanşyksyz (erkin) ululyklar bilen kesgitlenýär: S' ulgamynyň başlangyjynyň radius-wektorynyň üç ugrukmalary we üç Eýleriň (φ, ψ, θ) burçlary bilen. Eýleriň burçalry S' ulgamyň S ulgama görä ugrukmasyny kesgitleýär.

Geliň ol burçlaryň kesgitlenilşine seredeliň.Ilki bada gaty jisim bilen berk baglanykda bolan hasaplaÿy sistemasynyň oklary $X^1,Y^1,Z^1(S^1)$ inersial hasaplaÿy sistemasynyň oklary bilen (x,y,z) gabat gelÿän bolsun.Soňra jisim käbir öwrüm eden bolsun. Şol öwrüm netijesinde S^1 sistemanyň oklarynyň ÿagdaÿy üÿtgär(S hasaplaÿy sistemasyna görä).Şol öwrüm üç hili öwrüm bilen amala ayryp bolar:

1. Z okuň töwereginde φ burça öwrülme.(30-njy a surat).X^1 okuň eÿe bolan n
ugruna uzel çyzygy diÿilÿär.
2. Uzel çyzygynyň töwereginde θ burça öwrülme (30-njy b surat).
3. Z^1 okuň töwereginde ψ burça öwrülme (30-njy ç surat).



30-njy surat.

a) b) ç)

φ-x ok bilen uzel çyzygynyň arasyndaky burç.

Ψ-uzel çyzygy bilen x^1 okuň arasyndaky burç.

θ – z ok bilen z^1 okuň arasyndaky burç.

φ we ψ burçlar 0-dan 2π-e çenli baha alyp bilÿärler. θ burç bolsa 0-dan π-e çenli baha alÿar.φ burçyň üÿtgeme tizligi burç tizliginiň wektory ω_φ iki düzüjä dargaÿar.

1. Z^1 ok boÿunça onuň moduly φcosθ ; 2. Z^1 oka perpendikulÿar,ÿagny X^1,Y^1 tekizlikde ÿatÿar.Onuň moduly X^1 ok

boÿunça φsinθcos(π/2-ψ), ok boÿunça φsinθcosψ. ω_θ tizlik uzel çyzygy (n) boÿunça ugrukdyrylan.Onuň X^1,Y^1,Z^1 oklara bol;an proÿeksiÿalary
Burç tizligi (ω_ψ) Z^1 ok boÿunça ugrukdyrylan. Şeÿlelikde

$$\dot{\varphi}\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$$

$$\left(\vec{\omega}_\varphi\right)_{X'} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \qquad \left(\vec{\omega}_\theta\right)_{X'} = \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\left(\vec{\omega}_\varphi\right)_{Y'} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \qquad \left(\vec{\omega}_\theta\right)_{Y'} = -\dot{\theta}\sin\psi$$

$$\left(\vec{\omega}_\varphi\right)_{Z'} = \dot{\varphi}\cos\theta \qquad \left(\vec{\omega}_\theta\right)_{Z'} = 0$$

$$\begin{cases} \left(\vec{\omega}_\psi\right)_{X'} = 0 \\ \left(\vec{\omega}_\psi\right)_{Y'} = 0 \\ \left(\vec{\omega}_\psi\right)_{Z'} = \dot{\psi} \end{cases} \qquad (4.2).$$

Gaty jisimiň inersial hasaplaÿy sistemasyna (S) görä burç tizliginiň wektoryny üç öwrülmäniň jemi hökmünde (tizliginiň) hasaplap ÿazalyň.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi \qquad (4.3)$$

Burç tizligi ω S^1 sistemanyň oklaryna bolan proÿeksiÿalary

$$\begin{cases} \omega_{X'} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_{Y'} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_{Z'} = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases} \qquad (4.4)$$

Eger inersial koordinatalar sistemasynyň Z oky wertikal boÿunça ugrukdyrylan bolsa we hereketli koordinatalar sistemasynyň Z^1 oky giroskopyň ÿa-da wolçogyň hususy aÿlanma oky bilen gabat gelÿän bolsa ,onda ψ burçuň üÿtgemesi giroskopyň hususy aÿlanmagyna gabat gelÿär,φ burçuň üÿtgemesi giroskopyň pressesiÿasyna gabat gelÿär,θ burçuň üÿtgemesi onuň nutasiÿasyny häsiÿetlendirÿär.

S' sistema görä $\vec{P}', \vec{M}' we T'$ ululyklaryň üýtgemek kanunlaryny ýazarys.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{W}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} I_i^{\ h} + \sum_{i=1}^{N} I^e{}_i$$

Bu ýerde $\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{W}_i' = \frac{d\vec{P}'}{dt}$ Inersiýa güýçleriň jemi

$$\sum_{i=1}^{N} I_i^{\ h} = -m\left\{\vec{W}_{o'} + \left[\dot{\vec{\varpi}}\vec{r}_m'\right] + \left[\vec{\varpi}\left[\vec{\varpi}\vec{r}_m'\right]\right]\right\}$$

Inersiýanyň Koriolisow güýçleriniň jemi meňzeşlikde

$$\sum_{i=1}^{N} I^c{}_i = -2m\left[\vec{\varpi}\vec{V}_m'\right]$$

Şeýlelikde, inersial däl ulgama görä impulsyň üýtgeme kanuny

$$\frac{d\ \vec{P}'}{dt} = \vec{F}^e + I_m^{\ h} + I_m^{\ c}$$

Kinetik momentiň üýtgeme kanuny

$$\frac{d'\vec{M}'}{dt} = \left(\vec{L}^e\right)' + \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i' I^h{}_i\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}'iI^c{}_i\right]$$

Inersial däl ulgama görä kinetik energiýanyň üýtgeme kanuny

$$\frac{d'T'}{dt} = \frac{(dA)'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} I_i^{\ h}\vec{V}_i \qquad (4.15)$$

Güýjüň kuwwaty bolsa

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}^{e}\vec{V}_m + \frac{(dA)'}{dt} \qquad (4.14)$$

Kinetik momentiň we kinetik energiýanyň S_m ulgama görä üýtgeme kanuny

$$\frac{d\vec{M}'}{dt} = \left(\vec{L}^e\right)'; \frac{dT'}{dt} = \frac{\left(dA^{in}\right)'}{dt} + \frac{\left(dA^{e}\right)'}{dt}$$

Ulgamyň S we S' ulgamlaryna görä impulslarynyň arasyndaky gatnaşygy tapalyň. Munuň üçin impulsyň kesgitlemesinden peýdalanalyň. Şehle hem islendik nokadyň S we S' ulgamlara görä tizlikleriniň baglanşygyny peýdalanalyň

$$\vec{P} = m\vec{V}_{0'} + m[\varpi\vec{r}'_m] + \vec{P}'$$

Bu ýerde m- ulgamyň massasy. $\vec{r}'_m - S'$ ulgamyna görä massa merkeziniň radius-wektory. Bu ýerden massa merkeziniema görä tizligi

$$\vec{V}_m = \vec{V}_{0'} + [\vec{\varpi}\vec{r}'_m] + \vec{V}'_m$$

Bu ýerde $\vec{V}'_m$ – massa merkeziniň S' ulgama görä tizligi.Meňzeşlikde kinetik momentleriň we daşky güýçleriň momentleriniň gatnaşyklary üçin alarys

$$\vec{M} = [\vec{r}_{o'}\vec{P}] + m[\vec{r}_m\vec{V}_{o'}] + \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i'[\vec{\varpi}\vec{r}_i']] + \vec{M}'$$

$$\vec{L}^e = [\vec{r}_{o'}\vec{F}^e] + (\vec{L})'$$

Kinetik energiýa we kuwwat üçin gatnaşyklary ýokarky ululyklary peýdalanyp taparys.

$$T = \frac{m\vartheta^2{}_{o'}}{2} + mV_{o'}[\vec{\varpi}\vec{r}'_m] + mV_{o'} + \sum_{i=1}^{N}\frac{M_i}{2}[\vec{\varpi}\vec{r}_i']^2 + \vec{\varpi}\vec{M}' + T'$$

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}^e\vec{V}_{0'} + \vec{\varpi}\left(\vec{L}^e\right)' + \frac{(dA')}{dt}$$

§15. Öňe bolan hereket. Hasaplama ulgamynyň ugrukmasynyň üýtgemegi.

Ştrihlenen ulgamyň ştrihlenmedik ulgama görä ýagdaýy eger $\overline{r_{o'}}, \varphi, \theta, \psi$ ululyklar wagtyň funksiýasy ýaly belli bolsa wagtyň islendik pursatynda kesgitlenip bilner.

Indi tükeniksiz kiçi öwrülmä seredeliň .Bu öwrülme $d\vec{\chi} = d\chi\vec{n}_x$ wektor bilen bilen berilýär.Bu wektoryň moduly $d\chi$ öwrüm burçuna deň. Bu wektoryň ýatan gönüsi aýlanma oky bolýar.

$d\vec{\chi}$ wektor bilen kesgitlenýän tükeniksiz kiçi öwrülme okuny mgnowen aýlanma oky diýip atlandyrýarlar. S' ulgam bilen berk birikdirilen islendik $\overline{r'}$ wektor üçin

$$d\vec{r}' = [d\vec{\chi}\cdot\vec{r}'] \qquad (4.5)$$

S' sistemanyň S-e görä oriýentasiýasynyň üýtgemek tizligi ýa-da burç tizligi

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\chi}}{dt}. \qquad (4.6)$$

Burç tizliginiň S' sistemanyň oklaryna proýeksiýasy

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_{y'} = \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_{z'} = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases} \qquad (4.7)$$

S sistemanyň oklaryna proýeksiýasy

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_y = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Soňky iki deňlemeler sistemasyna(3,4) Eýleriň kinematiki formulalary diýilýär. Olar burç tizligi bilen Eýleriň burçlarynyň we olaryň wagta görä önüminiň arasynda baglanşyk guraýar.

§16. Material nokadyň dürli hasaplaýyş ulgamlaryna görä ýagdaýy we tizligi.

Goý $\vec{r}$ nokadyň S ulgama görä radius-wektory, $\vec{r}'$ bolsa S' ulgama görä. Onda $\vec{r}_{0'}$ wektoryň S ulgama görä düzüjileri $\vec{r}_{0'} = x_{0'}\vec{n}_x + y_{0'}\vec{n}_y + z_{0'}\vec{n}_z$, $\vec{r}'$ wektoryň S'-he görä düzüjileri $\vec{r}' = x'n_{x'} + y'n_{y'} + z'n_{z'}$ bolar. Bu ýerden $x - x_{0'} = a_{x'x}x' + a_{y'x}y' + a_{z'x}z'$, $y - y_{0'} = a_{x'y}x' + a_{y'y}y' + a_{z'y}z'$

$z - z_{0'} = a_{x'z}x' + a_{y'z}y' + a_{z'z}z'$

özgertmäni alarys. Nokadyň S'-he göra tizligi $\vec{V}' = \dot{x}'\vec{n}_{x'} + \dot{y}'\vec{n}_{y'} + \dot{z}'\vec{n}_{z'}$ Nokadyň S hasaplaýyş ulgamyna görä tizligi $\vec{V} = \vec{V}_{0'} + [\vec{\omega}\vec{r}']$ (4.9) $\vec{V}$ tizlik bilen $\vec{V}'$ tizligiň arasynda

$\vec{V} = \vec{V}_{0'} + [\vec{\omega}\vec{r}'] + \vec{V}'$ $(4.9)'$ gatnaşyk bar.Bu ýerde $\overline{V}_{0'}$ S' sistemanyň başlangyjynyň S-e görä tizligi, $\vec{r}'$-nokadyň S'-e görä radius-wektory; $\omega - S'$-iň S-e görä burç tizligi. S'-he görä tizlenme $\vec{W}' = \ddot{x}'\vec{n}_{x'} + \ddot{y}'\vec{n}_{y'} + \ddot{z}'\vec{n}_{z'}$. $(4.9)'$ -hi differensirläp $\vec{W}$ we $\vec{W}'$ tizlenmeleriň baglanşygyny taparys $\vec{W} = \vec{W}_{0'} + [\dot{\omega}\vec{r}'] + [\vec{\omega}\dot{\vec{r}}'] + \vec{V}'$ Islendik $\vec{a}'$ wektor üçin ştrihlenen we ştrihlenmedik önümleriň arasynda $\frac{d\vec{a}'}{dt} = [\vec{\omega}\vec{a}'] + \frac{d'\vec{a}'}{dt}$ görnüşli gatnaşyk bar. Şeýlelikde S-e görä tizlenme $\vec{W} = \vec{W}_{0'} + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ bolýar.

§17. Material nokadyň inersial däl hasaplama ulgamyna görä hereketiniň deňlemesi; inersiýa güýji.

S inersial hasaplama ulgamyna görä nokadyň hereketi Nýutonyň $m\overline{w} = \overline{F}$ deňlemesine boýun egýär. $\vec{w}$-iň $\vec{w} = \vec{w}^h + \vec{w}^c + \vec{w}'$ bahasyny goýup alarys:

$$m\vec{w}^h + m\vec{w}^c + m\vec{w}' = \overline{F}$$

$$\Im m\vec{w}^h + m\vec{w}^c + m\vec{w}' = \overline{F}$$

$$I^h = -m\overline{W}^h = -m(\overline{W}_{0'} + \dot{\overline{w}}\cdot\overline{r}') + [\overline{w}[\overline{w}\,\overline{r}']]$$

$I^c = -m\overline{W}^c = -2m[\overline{w}\,\overline{v}']$ belgileri girizip alarys.

$$m\overline{w}' = \overline{F} + I^h + I^c \qquad (4.10)$$

Bu ýerde I^h -inersiýanyň perenosnyý güýji, I^c- inersiýanyň koriolis güýji. Perenosnyý güýjiň - $m[\overline{w}[\overline{w}\,\overline{r}']]$ bölegine inersiýanyň merkezden gaçýan güýji diýilýär. Soňky deňlemämiz maddy nokadyň (S') inersial däl sistema görä hereketiniň deňlemesidir.

Mehaniki ulgamyň S we S_m hasaplama ulgamlara görä impulsy degişlilikde

$$\vec{P} = m\vec{V}_m; \vec{P}' = 0 \qquad (4.11)$$

Mehaniki ulgamyň S hasaplama ulgamyna görä kinetik momenti massa merkeziniň momenti bilen öňe bolan hereket edýän massa merkezi ulgama görä kinetik momentiň jemine deňdir.

$$\vec{M} = [\vec{r}_m\vec{P}] + \vec{M}' \qquad (4.12)$$

Mehaniki ulgamyň kinetik energiýasy(inersial hasaplama ulgama görä) massa merkeziniň kinetik energiýasy bilen öňe bolan hereket edýän massa merkezi ulgamyna görä kinetik energiýasynyň jemine deňdir.

$$T = \frac{mV_m^2}{2} + T' \qquad (4.13)$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q dt+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q dt=0$$

$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$ Şonuň üçin 2-nji agza ýok bolýar. Şeýlelikde alarys

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q dt=0$$

ýa-da
$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\right)\delta q dt=0 \qquad (5.35)$$

bu ýagdaý haçanda integralyň aşagyndaky aňlatma nula deň bolanda ýerine ýtýär. Şeýlelikde alarys

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

bu deňleme Lagranžyň iknji tertipli deňlemesidir. Birnäçe erkinlik derejesi bolanda we dissipatiw güýçleriň ýok wagtynda

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

V bap. Lagranžyň deňlemesi.

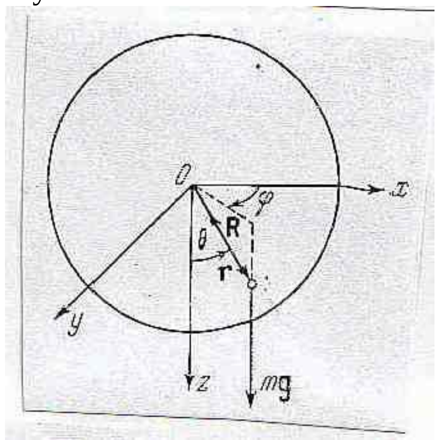
§18. Erkin däl ulgamyň dinamikasynyň esasy meselesi we baglanyşyklar barada düşünje.

Mehanikanyň köp meseleleri hereketiň

$$m_i\ddot{\bar r}_i=F_i(\bar r_i\vec v_i,t) \qquad (i=1,2,\dots N) \qquad (5.1)$$

deňlemelerini çözmäge syrykdyrylýar. Bu ýerde güýçler ulgamyň ýagdaýynyň, tizliginiň hem-de wagtyň belli funksiýasy hasaplanýar. Beýle güýçleri berlen güýçler diýip atlandyrylýarlar. Şeýle hem başlangyç şertlere hiç hili çäklendirme goýulmaýar.Mehanikada nokadyň ýagdaýynyň,tizliginiň hem-de wagtyň belli funksiýasy ýaly bolmadyk güýçlere hem seredilýär.

Beýle herekete sferik maýatnigiň mysalynda garalyň(31-nji surat). Süýnmeýän l uzynlykly sapakdan asylan örän kiçi ölçegli jisim ýeriň üstüne golaý aralykda yrgyldaýar diýip güman edeliň. Onda m massaly material nokada berlen m$\vec g$ güýç we sapagyň $\overline{R}$ dartuw güýji täsir edýär.



31-nji surat.Sferik maýatnik

Şeýlelikde maýatnigiň hereketiniň deňlemesi 1-nji deňlemä laýyklylda

$$m\ddot{\vec{r}} = m\overline{g} + \overline{R} \qquad (5.2)$$

görnüşe eýedir. Bu wektor deňleme koordinatalardaky ikinji derejeli üç diferensial deňlemeleriň ulgamyna ekwiwalent deňlemedir.Ol alty näbelli funksiýalary özünde saklaýar.[x(t),y(t),z(t),R_x(t),R_y(t),R_z(t)] Getirilen deňlemäniň çözgüdini tapmak üçin gerek goşmaça maglumatlara wagtyň islendik pursatynda material nokadyň ℓ radiusly sferik üstde bolýandygy we şeýlelikde nokadyň koordinatasy $\ell^2 = r^2$ şerti kanagatlandyrmagy we dartuw güýjüniň sapagyň boýuna ugrukdyrylandygy sebäpli $\vec{R} = 2\lambda\vec{r}$ ýazyp bolmagy degişlidir.Şeýlelikde meseläniň şerti

$$m\ddot{\vec{r}} = m\overline{g} + 2\lambda\overline{r}, \qquad r^2-\ell^2=0 \qquad (5.3)$$

ulgama getirýär. Bu ulgam dört näbellili dört diferensial deňlemeleriň ulgamyndan ybaratdyr[x(t),y(t),z(t) we λ(t)]. Getirilen deňlemeleriň kömegi bilen nokadyň sfera boýunça hereketiniň kanunyny we sapagyň dartuw güýjüni tapmak bolar. Serdilýän meselede hereketiň deňlemesinden gelip çykmaýan kesgitli şertlere nokadyň ýagdaýy we tizligi kanagatlandyrýar. Bu jähtden material nokat erkin däl,oňa baglanşyk goýulypdyr diýilýär.

Baglanşyk hakynda düşünje.

Eger nokadyň hereketi nokada täsir edýän güýç bilen we onuň başlangyç ýagdaýy bilen kesgitlenýän bolsa, onda bu nokada erkin material nokat diýilýär. Erkin material nokatlardan düzülen mehaniki ulgama erkin mehaniki ulgam diýilýär. Material nokadyň hereketi nokada täsir edýän güýje we başlangyç şerte bagly bolman çäklenen bolsa, onda oňa erksiz material nokat diýilýär. Mehaniki ulgamyň erkin herketini çäklendirýän şerte baglanşyk diýilýär. Baglanşygy aňladýan deňlemä baglanşyk deňlemesi diýilýär. Baglanşyk deňlemesi özünde mehaniki ulgamyň nokatlarynyň koordinatalaryny, tizliklerini, tizlenmelerini we wagty saklap biler. Baglanşygy amala aşyrýan jisimiň nokada täsir edýän güýjüne baglanşyk reaksiýasy

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right) dt \qquad (5.32)$$

integral mümkin bolan iň kiçi baha eýe bolar ýaly hereket edýär. Bu ýerde funksiýa berlen ulgam üçin Lagranžyň funksiýasy diýilýär. Integrala bolsa täsir integraly diýilýär. Ulgamy suratlandyrýan nokat S täsiriň bahasy minimal bolan egri boýunça hereket edýär diýilýär.

Iň kiçi täsir prinsipinden hem Lagranžyň ikinji tertipli deňlemesini alyp bolýar. Iň kiçi täsir prinsipini aşakdaky şertde aňladyp bolar.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right) dt = 0 \qquad (5.33)$$

ýa-da stasionar ýagdaý üçin $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \qquad (5.34)$$

$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ - ni belläp dyrnagyň içindäki agzalaryň ikinjisini bölekleýin usul bilen integrirläliň.

$$\int_{t_1}^{t2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt$$

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right), du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) dt$$

$$d\vartheta = \frac{d}{dt}\delta q dt, \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q, \vartheta = \delta q$$

Energiýanyň integraly bolsa

$$E_0 = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + a^2k^2\cos^2 kx\right) + mga\sin kx\cos\alpha$$

Umumylaşdyrylan koordinatalar

Ulgamyň doly ýagdaýyny häsiýetlendirýän islendik s sany $q_1, q_2, \ldots, q_s$ ululyklara ulgamyň umumylaşdyrylan koordinatalary, olaryň q önümlerine umumylaşdyrylan tizlikleri diýilýär.

Umumylaşdyrylan koordinatalaryň bahasynyň berilmegi ulgamyň wagtyň islendik pursatyndaky ýagdaýyny öňünden aýtmaga mümkinçilik bermeýär. Ulgam koordinatalaryň berlen bahasynda erkin tizliklere we tizliklere baglylykda ýagdaýlara eýe bolup bilýär. Hemme koordinatalaryň we tizlikleriň bir wagtda berilmegi ulgamyň ýagdaýyny doly kesgitleýär we ulgamyň indiki hereketini öňünden aýtmaga mümkinçilik berýär. Matematikanyň nukdaý nazaryndan wagtyň käbir pursatynda hemme koordinatalaryň we tizlikleriň berilmegi şol pursatdaky tizlenmäniň kesgitlenýändigini aňladýar.

Tizlenmäni koordinatalar we tizlikler bilen baglanyşdyrýan gatnaşyga hereketiň deňlemesi diýilýär. Bu deňleme q(t) funksiýa görä 2-nji tertipli differensial deňlemedir. Bu deňlemäni integrirlemek bilen mehaniki ulgamyň traýektoriýasyny kesgitleýäris.

Iň kiçi täsir prinsipi.

Mehanikanyň esasyna Nýütonyň kanunlaryna gerek iň kiçi täsir (hereket) prinsipini goýup hem bolar. Ol prinsipe Irland matematigi Gamiltonyň hormatyna **Gamiltonyň prinsipi** hem diýilýär. Ol prinsipe görä her bir mihaniki ulgam kesgitli $L\left(q_1, q_2, \ldots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t\right)$ funksiýa bilen häsiýetlendirilýär. Şeýle hem ulgam wagtyň $t=t_1$ we $t=t_2$ momentlerinde $q^{(1)}$ $q^{(2)}$ koordinatalar toplumynyň bahalary bilen häsiýetlendirilýän kesgitli ýagdaýlary eýeleýär; şeýle hem ulgam şol iki ýagdaýlaryň arasynda

diýilýär. Baglanşyk nokadyň ýagdaýyna we tizligine geometrik ýa-da kinematic çäklendirme goýup biler. Geometrik häsiýetli baglanşyga:
1) nokat özüniň hereketinde berlen üsti ýa-da egrini taşlap gidip bilmeýär.
2) Iki A we B bölejik(nokat) gaty, agramsyz l uzynlykly sterjen bilen biri-birine baglanan. Bu ýagdaýda çäklendirme

$$\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2 + \left(z_A - z_B\right)^2 = l^2 \qquad (5.4)$$

deňleme görnüşinde ýazylyp bilner.
3) Iki bölejik agramsyz l uzynlykly sapak bilen baglanşykly. Beýle baglanşygyň analitik aňlatmasy

$$\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2 + \left(z_A - z_B\right)^2 = l^2 \qquad (5.5)$$

(4) Absolýut gaty jisim(bölejikleri 1-nji baglanşyga boýun egýän)

Geometrik şeýle hem kinematik baglanşyga mysal büdür-südür üstde typman tigirlenýän şar bolup biler. Bu mysalda kinematik çäklendirme üste galtaşýan nokatda nokadyň tizliginiň nola deň bolmagy.

Geometrik häsiýetli baglanşygy

$$f(\bar{r}_1, .., \bar{r}_N, t) = 0 \qquad (5.6)$$

deňleme bilen aňladyp bolar.

Baglanşygyň görnüşleri:

1.Deňlemesini hemme wagt 6-njy görnüşe getirip bolýan baglanşyga golonom ýa-da integrirlenýän baglanşyk diýilýär. Bu ýerde f diňe nokatlaryň koordinatalaryň we wagtyň funksiýasydyr. Bu baglanşyklar ulgamyň nokatlarynyň diňe bir ýagdaýyna däl-de, eýsem tizligine we tizlenmesine hem çäk goýýar. 6-njy deňlemäni wagta görä diferensirläp tizlige goýulýan çäklendirmäni alarys.

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N}(\nabla_i f)\bar{V}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (5.7)$$

(7)-njyny wagta görä diferensirläp nokadyň tizlenmesine goýlan çäklendirmäni alarys.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}(\nabla_i f)\bar{W}_i + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}(\nabla_i f)\right]V_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = 0 \qquad (5.8)$$

Golonom baglanşygynyň häsýetli tarapy tizlige we tizlenmä goýlan çäklendirmäniň nokadyň ýagdaýyna goýlan çäklendirmä syrykdyrylmagydyr. Başgaça (7) we (8) deňlemeleriň integrirlenmek mümkinçiligidir.

Eger baglanşyk deňlemesi wagta aýdyň bagly bolmasa, onda baglanşyga stasionar baglanşyk diýilýär we tersine wagta bagly bolsa stasionar däl baglanşyk diýilýär.Şeýlelikde golonom baglanyşykly erksiz ulgamyň mehenikasynyň esasy meselesi berlen $\overline{F}_i$ güýçleriň we golonom baglanşygyň K deňlemeleriň kömegi bilen ulgamyň hereketiniň kanunyny we baglanşyk reaksiýasyny tapmakdan ybaratdyr. Bu mesele hereketiň we baglanşygyň

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}_i + \overline{R}_i (i = 1,2,..., N) \qquad (5.9)$$

$$f_\alpha(\overline{r}_i, t) = o(\alpha = 1,2,...k)$$

deňlemeleriniň bilelikdäki çözgüdine syrykdyrylýar. 9-njy ulgam 6 N näbelli funksyýalary($\vec{r}_i(t)$ we $\vec{R}_i(t)$ wektorlaryň koordinat oklaryna ugrukmalary) özünde saklaýar. Her bir golonom baglanşyk ulgamyň erkinlik derejesini bir birlige kemeldýär. Eger k baglanşyk bar bolsa onda ulgamyň erkinlik derejesi 3N-k deňdir.

Baglanşyk ulgamyň bölejiklerine R_α güýç bilen täsir edýär. Ol güýje reaksiýa diýilýär. Sürtülmesiz baglanşyga ideal baglanşyk diýilýär. Eger ideal baglanşyk stasionar bolsa, onda baglanşyk reaksiýasy $\vec{R}$ bölejigiň mümkin bolan elementar orun üýtgetmesiniň ugruna hemişe perpendikulýar bolýar. Şonuň üçin ideal,stasionar baglanşyk reaksiýasy ulgamyň üstünde iş etmeýär.

$$dA = \sum_i R_i dx_i = 0 \qquad (5.10)$$

Kinetik energiýa üçin alarys: $T_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}^2{}_1 + \dot{y}_1{}^2\right) =$

$$\frac{m_1}{2}(l^2{}_1\dot{\varphi}_1{}^2 \cos^2\varphi_1 + l^2{}_2\dot{\varphi}_2{}^2 \sin^2\varphi_2) + \frac{m_1}{2} l_1{}^2\dot{\varphi}_1{}^2$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}^2{}_2\right) = \frac{m_2}{2}\left(l_1{}^2\dot{\varphi}_1{}^2 + l_2{}^2\dot{\varphi}_2{}^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Şeýlelikde gutarnykly alarys

$$L = T_1 + T_2 - U = \frac{1}{2}m_1l_1\dot{\varphi}_1{}^2 +$$

$$+\frac{m_2}{2}\left[l_1{}^2\dot{\varphi}_1{}^2 + l_2{}^2\dot{\varphi}_2{}^2 + 2l_1l_2\varphi_1\varphi_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] + U =$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2} l_1{}^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{m_2}{2} l_2{}^2\dot{\varphi}_2{}^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$(m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2l_2\cos\varphi_2$$

Mysal: m massaly nokat $y = a\sin kx$ endigan egri boýunça hereket edip bilýär. x ok gorizontal, y ok wertikal bilen α burç emele getirýär. Lagranžyň funksiýasyny we nokadyň energiýa integralyny tapmaly.

Çőzgüdi: $y = a\sin kx$, $\dot{y} = ak\dot{x}\cos kx$, $\dot{y}^2 = a^2k^2\dot{x}^2\cos^2 kx$,

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + a^2k^2\dot{x}^2\cos^2 kx\right) T = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + a^2k^2\cos^2 kx\right)$$

$$U = -mgr = mgy\cos\alpha == mga\sin kx\cos\alpha$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + a^2k^2\cos^2 kx\right) - \quad L = -mga\sin kx\cos\alpha$$

güýç üçin

$$D=\frac{1}{2}\sum_i k_i \dot{x}_i^2 \qquad (5.30)$$

$$F_i^{(d)}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}$$

Onda

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}=0 \qquad (5.31)$$

Mysal: Ikeldilen tekiz maýatnik üçin Lagranžyň funksiýasyny ýazmaly.

Çözgüdi: Umumylaşdyrylan koordinatalar hökmünde l_1 we l_2 uzynlykly sapaklaryň wertikaldan gyşarmalary bolan φ_1 we φ_2 burçlary alalyň. y oky 1-nji maýatnigiň asma nokadyndan wertikal ýokaryk, x oky bolsa yrgyldynyň tekizliginde ýerleşdireliň.

m_1 nokat üçin ýazarys

$x_1 = l_1 \sin\varphi_1, \quad y_1 = -l_1\cos\varphi_1$

m_2 nokat üçin

$x_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \; y_2 = -l_1\cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2$

m_1 nokat üçin potensial energiýa $U_1 = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1$

m_2 nokat üçin $U_2 = -m_2 g l_2 \cos\varphi_2$

Umumy $m_1 + m_2$ massa üçin $(m_1+m_2) g l_1 \cos\varphi_1$

§19. Dalamberiň prinsipi

Goý M erksiz hereket edýän material nokat. $\vec{P}$ nokada täsir edýän berlen güýç we $\vec{R}$ baglanşyk reaksiasy. $\vec{P}$ we $\vec{R}$ güýçleri goşup deňtäsirediji $\vec{F}$ güýji alarys. Dinamikanyň ikinji esasy kanunyna laýyklykda $\vec{F}$ güýç M nokadyň ϖ tizlenmesiniň ugruna ugrukdyrylandyr we moduly boýynça mϖ –ä deňdir.

Wagtyň berlen pursatynda M nokada $\vec{F}$ güýje moduly boýunça deň ugry boýunça garşylykly güýç goýulypdyr diýip göz öňüne getireliň. Bu güýje inersia güýji diýilýär we

$$\overline{F}^{in} = -m\vec{\varpi} \qquad (5.11)$$

formula bilen kesgitlenýär. Onda ýazyp bileris:

$$\vec{F} = -\overline{F}^{in} \quad (5.12) \qquad \text{ýada} \qquad \vec{F}+\overline{F}^{in}=0$$

Şeýlelikde material nokadyň hereketiniň her bir berlen pursatynda $\vec{P}$güýç, baglanşyk reaksiýasy $\vec{R}$ we inersia güýji $\overline{F}^{in}$ öz-ara deňagramlaşýarlar. Material nokat üçin Dalamberiň prinsipi şundan ybarat. Material nokatlaryň ulgamy üçin Dalamberiň prinsipi

$$\vec{P}_k + \vec{R}_k + \overline{F}^{in} = 0 \qquad (k=1,2..,n) \qquad (5.13)$$

görnüşe eýedir.

§20. Lagranžyň 1-nji tertipli deňlemesi.

Material nokadyň herekediniň deňlemesi

$$m\ddot{\bar{r}}_i = \overline{F}_i + \overline{R}_i \qquad (5.14)$$

görnüşe eýedir. Bu ýerde $\overline{R}$ -baglanyşyk reaksyýasy . Eger bagylanyşyk golonom we ideal bolsa , onda ideal , golonom baglanyşygyň reaksyýasy $\overline{R}$ bilen f_α funksyýanyň $(f_\alpha(\bar{r},t)=0)$ arasynda aşakdaky gatnaşyk bardyr .

$$\sum[R_i - \sum_{\alpha=1}^{K}\lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha]\delta\bar{r} = 0 \text{ bu ýerden}$$

$$\overline{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha (i = 1,2..N) \qquad (5.15)$$

λ_α -wagtyň funksiýasy bolan näbelli köpeldiji .Onda 3-njini (1)-jide ýerine goýup alarys.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \qquad (5.16)$$

$$f_\alpha(\overline{r},...,\overline{r}_N, t) = 0 (\alpha = 1,2..K)$$

5.16-njy deňlemä Lagranžyň birinji tertipli deňlemesi diýilýär.Bu ýerde $\overline{F}_i$, r_i ,V_i we t-iň berlen funksiýalary. Bu deňlemelerdäki hemme radius-wektorlar $r_i(t)$ we Lagranžyň köpeldijileri $\lambda_\alpha(t)$ näbellilerdir. Deňlemeleriň sany we näbelli ululyklaryň sany gabat gelýär we 3N+K –deň.

Baglanşyk reaksiýasy 5.16-njy deňlemäniň çözgüdi netijesinde kesgitlenýär. Şeýlelikde, baglanşyk reaksiýasy berlen güýçlere bagly bolýar. Berlen $\overline{F}_i$ güýçlere köplenç aktiw güýçler diýilýär.

Baglanşyk reaksiýalaryna bolsa passiw güýçler diýilýär.

Impulsyň kinetik momentiniň we energiýanyň üýtgeme kanunlaryny (baglanşyk barka) Lagranžyň birinji tertipli deňlemesinden alyp bolar.

$\overline{M} = [\overline{r}\overline{p}]$ impulsyň momenti. $\dot{\overline{M}} = \frac{d\overline{M}}{dt} = [\overline{r}\dot{\overline{p}}]$ Sebäbi $[\dot{\overline{r}}\overline{p}] = 0$

$$\dot{\overline{P}} = \frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{F}$$

$[\overline{r}\dot{\overline{p}}] = [r\overline{F}] = \overline{L}$ -güýjüň momenti. Onda $\dot{\vec{M}} = \vec{L}$ Şeýlelikde $\dot{\overline{P}} = \overline{F}^e + R^e$ (5)

Bu ýerde $\overline{R}^e = \sum_{i=1}^{N} \overline{R}^e_i$ -e daşarky baglanşygyň reaksiýasynyň jemi

$$\dot{\overline{M}} = \overline{L}^e + \overline{L}^e_R \qquad (5.17)$$

Özara täsir edişýän nokatlar üçin Lagranžyň funksiýasy $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x_i)$ görnüşe eýedir.

Lagranžyň funksiýasyndan tizlige görä hususy önüm alalyň

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \qquad (5.24)$$

3-njini wagta görä differensirläp alarys.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = m\ddot{x}_i \qquad (5.25)$$

Lagranžyň funksiýasynyň x_i –ä görä hususy önümi

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (5.26)$$

1-njini, we 4-njini göz öňünde tutup deňlemäni aşakdaky ýaly ýazarys.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \vec{F}^*_i \qquad (5.27)$$

6-njy deňlemä dekart koordinatalar ulgamdaky Lagranžyň II-nji tertipli deňlemesi diýilýär. Egerde ulgamda diňe potensial güýçler täsir edýän bolsa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (5.28)$$

Umumylaşdyrlar koordinatalrda bu deňleme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (5.29)$$

görnüşe eýedir.

Dissipatiw güýç F^*_i Releýiň dissipatiw funksiýasynyň üsti bilen hem aňladylyp bilner.Mysal üçin

$$F_i^{(d)} = -k_i \dot{x}_i$$

U=U($x_1, x_2, ..., x_n, t$) funksiýa ulgamyň potensialy diýilýär. Eger U funksiýa wagta anyk bagly bolmasa onda oňa ulgamyň potensial energiýasy diýilýär.

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (5.22)$$

güýje potensial güýç diýilýär. Stasionar potensial güýje konserwatiw güýç diýilýär. Konserwatiw güçleriň täsir edýän ulgamyna konserwatiw ulgam diýilýär.

Eger ulgamyň böleşiklerine täsir edýän güýçleriň bir bölegi potensial, beýleki bir bölegi bolsa potensial däl bolsa Nýütonyň ilkinji kanuny aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F_i^* \qquad (i=1,....n) \qquad (5.23)$$

Bu ýerde F^* –potensial däl güýjüň düzüjisi

Mehaniki ulgamyň hereketiniň kanunynyň has umumy aňlatmasy iň kiçi täsir prinsipi diýilýän prinsip bilen berilýär. Bu prinsipe Gamiltonyň prinsipi hem diýilýär. Bu prinsipe gőrä her bir mehaniki ulgam Lagranžyň funksiýasy diýilýän L(x_i, $\dot{x}_i$, t) kesgitli funksiýa bilen häsiýetlendirilýär.

Erkin hereket edýän material nokat üçin Lagranžyň unksiýasy

$$L = \frac{m\dot{x}_i^{\,2}}{2}$$, dekart koordinatalarda

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right),$$ silindrik koordinatalarda

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right),$$ sferik koordinatalarda

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

bu ýerde $\overline{L}_R^{\,e} = \sum_{i=1}^{N} [\bar{r}\overline{R}^e{}_i]$ daşarky basglanşygyň reaksiýasynyň jemi.

Energiýanyň üýtgeme kanuny

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^{\,d}\overline{V}_i + \sum_{i=1}^{N} \overline{R}_I\overline{V}_i \qquad (5.18)$$

$\overline{R}_i = \overline{R}_i^{\,n} + R_i^e$ -içki we daşky baglanşyk reaksiýasynyň jemi. 5-njini we

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla_i f_\alpha d\bar{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0(\alpha = 1,2,..,K) \qquad (5.19)$$

göz öňünde tutup

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{R}_i\overline{V}_i = \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} (\nabla_i f_\alpha)\overline{V}_i \right) = -\sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \qquad (5.20)$$

7-nji aşakdaky görnüşde ýazmaga mümkinçilik berýär.

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^{\,d}\overline{V}_i - \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \qquad (5.21)$$

Mysal: Material nokat gorizont bilen α burç emele getirýän ýylmanak tekizlik boýunça agyrlyk meýdanyn täsirinde hereket edýär.Nokadyň hereket kanunyny we tekizligiň reaksiýasyny tapmaly.

Baglanşyk deňlemesini

$$f = xtg\alpha + z = 0$$

(1)

gőrnüşde ýazyp bolar. Lagranžyň 1-nji tertipli deňlemesini mysalymyz üçin giňişlikdäki dekart koordinatalarda ýazalyň.

$$m\ddot{x} = \lambda f_x' = \lambda tg\alpha$$

(2)

$$m\ddot{y} = 0 \qquad (3)$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda f_z' = -mg + \lambda \qquad (4)$$

Bu ýerden

$$\ddot{x} = \frac{\lambda}{m} tg\alpha \qquad (5)$$

Baglanşyk deňlemesini iki gezek wagta görä differensirläliň

$\ddot{x} tg\alpha + \ddot{z} = 0$

5-njiden tizlenmeleriň bahalaryny goýup alarys

$\frac{\lambda}{m} tg^2\alpha - g + \frac{\lambda}{m} = 0$ ýa-da

$\lambda tg^2\alpha - mg + \lambda = 0 \quad \lambda\left(tg^2\alpha + 1\right) = mg$

bu ýerden $\lambda = \frac{mg}{tg^2\alpha + 1} = mg\cos^2\alpha$ (6)

2-nji, 3-nji we 4-nji deňlemelerden alarys

$m\ddot{x} = \lambda tg\alpha = mg\cos^2\alpha \; tg\alpha$ ýa-da $\ddot{x} = g\cos^2\alpha \; tg\alpha$

$\cos^2\alpha \; tg\alpha = \cos\alpha \sin\alpha$ deňligi göz önünde tutup alarys

$\ddot{x} = g\cos\alpha \sin\alpha \quad d\dot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha \; dt, \quad \dot{x} = \int g\cos\alpha\sin\alpha \; dt,$

bu ýerde

$\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ -dygyny

hasaba alyp $\dot{x} = \int \frac{1}{2} g \sin 2\alpha dt = \frac{1}{2} g \sin 2\alpha \; t + c_1$

$t = 0$ -da $\dot{x}_0 = c_1$ Onda $\dot{x} = \frac{1}{2} gt \sin 2\alpha + \dot{x}_0$ Bu ýerde

$dx = \frac{1}{2} gt \sin 2\alpha dt + \dot{x}_0 dt$

$x = \int \frac{1}{2} gt \sin 2\alpha dt + \int \dot{x}_0 dt \qquad x = \frac{1}{2} g \frac{t^2}{2} \sin 2\alpha + \dot{x}_0 t + c_2, \qquad t = 0$ -da $x_0 = c_2$. Bu ýerden

$$x = \frac{1}{4} gt^2 \sin 2\alpha + \dot{x}_0 t + x_0 \qquad (7)$$

$\ddot{y} = 0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad y = \int \dot{y}_0 dt = \dot{y}_0 t + c_4, \quad t = 0$ -da $c_4 = y_0$, onda alarys

$$y = \dot{y}_0 t + y_0 \qquad (8)$$

1-nji deňlemeden $z = -xtg\alpha$. 7-nji deňlemedäki x-yň bahasyny ýerine goýup alarys

$z = -xtg\alpha = \left(\frac{1}{4} gt^2 \sin 2\alpha + \dot{x}_0 t + x_0\right) tg\alpha = -$

$\left(x_0 + \dot{x}_0 t\right) tg\alpha - \frac{1}{4} gt^2 \, 2\sin\alpha\cos\alpha \; tg\alpha =$

$-\left(x_0 + \dot{x}_0 t\right) tg\alpha - \frac{1}{2} gt^2 \sin^2\alpha$

$$z = -\left(x_0 + \dot{x}_0 t\right) tg\alpha - \frac{1}{2} gt^2 \sin^2\alpha \qquad (9)$$

Indi tekizligiň reaksiýasyny tapalyň.

$R_x = \lambda f_x'$. 6-njydan we 1-njiden peýdalanyp ýazarys.

$R_x = mg\cos^2\alpha \; tg\alpha = mg\sin\alpha\cos\alpha$

$R_y = \lambda f_y' = 0$

$R_z = \lambda f_z' = mg\cos^2\alpha$

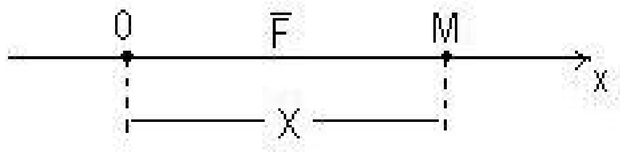
§21. Lagranžyň 2-nji tertipli deňlemesi.

Lagranžyň funksyýasy. Lagranžyň 2-nji tertipli deňlemesi. Umumylaşdyrylan koordinatolardaky Lagranžyň deňlemesi.

VI bap.Çyzykly yrgyldylar.

§22. Bir ölçegli hususy yrgyldy.

Goý m massasy M nokat F çekiş güýjüň täsirinden gönüçyzykly hereket edýän bolsun(32-nji surat).



32-nji surat

F güýjüň moduly M nokadyň O merkezden uzaklygyna proporsional bolsun.

$$F=-K x OM \qquad (6.1)$$

Bu ýerde K-proporsionallyk koeffisiýenti. Nokadyň hereketiniň kanunyny tapmak talap edilýär.

Eger M nokadyň gönüçyzykly traýektoriýasyny x oka derek kabul etsek, kordinatanyň başlangyjy deregine gozganmaýan O nokady alsak, M nokadyň absissasyny x bilen belläp, F güýjüň x oka bolan proeksiýasyny F_x bilen belläp alarys.

$$F_x=-Kx \qquad (6.2)$$

Nýutonyň ikinji kanunyndan

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx \qquad (6.3)$$

Deňligiň iki tarapyny m-e bölüp

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{K}{m}x \qquad (6.4)$$

$\frac{K}{m}=\omega^2$ bilen belläp alarys $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ ýa-da $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \qquad (6.5)$$

bu ýerde $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$

6.5-nji deňlemämiz 2-nji derejeli, erkin agzasyz, hemişelik koeffisiýentli çyzykly differensial deňlemedir.Differensial deňlemeleriň nazarýerinden belli bolşy ýaly bu deňlemäniň umumy integraly

$$x=a\sin(\omega t+\alpha) \tag{6.6}$$

görnüşde aňladylýar.Bu ýerde a we α erkin hemişelik ululyklar. Bu deňleme garmoniki yrgyldynyň deňlemesidir. a ululyga yrgyldynyň amplitudasy, $(\omega t+\alpha)$ ululyga yrgyldynyň fazasy, α ululyga bolsa urgyldynyň başlangyç fazasy diýilýär(t=0 wagtdaky fazanyň bahasy).

Garmoniki yrgyldyda nokadyň tizligi

$$\vartheta=\frac{dx}{dt}=a\omega\cos(\omega t+\alpha) \tag{6.7}$$

formula bilen kesgitlenýär. $\frac{dx}{dt}$ -niň alamaty nokadyň x oky boýunça haýsy tarapa hereket edýändigini görkezýär.

Yrgyldynyň amplitudasy we başlangyç fazasy hereketiň başlangyç şertleri bilen kesgitlenýär.

Goý, wagtyň başlangyç pursatynda M nokat x_0 ýagdaýa eýe bolsun (t=0), tizligi bolsa ϑ_0 bolsun. 6-njydan we 7-njiden alarys.

$$x_0=a\sin\alpha \text{ we } \vartheta_0=a\omega\cos\alpha$$

bu ýerden

$$x_0^2=a^2\sin^2\alpha;\vartheta_0^2=a^2\omega^2\cos^2\alpha;\frac{x_0^2}{a^2}=\sin^2\alpha;\frac{\vartheta_0^2}{a^2\omega^2}=\cos^2\alpha$$

Eger $\frac{2n^2}{\omega^2}<1$ (material nokadyň hereket edýän sredanyň garşylygy uly bolmasa, onda $n<<\omega$ -dan) bolsa, onda ν_2 hakyky baha eýedir.

Indi ν_1 we ν_2-niň bahalaryny ikinji önümde ýerine goýup alarys.

$f''(\nu_1)=4\left(\frac{2n^2}{\omega^2}-1\right)<0$ (sebäbi $\frac{2n^2}{\omega^2}<1$ bolsa) we

$$f''(\nu_2)=4\left[3\left(1-\frac{2n^2}{\omega^2}\right)-1+\frac{2n^2}{\omega^2}\right]=4\left[3-6\frac{n^2}{\omega^2}-1+2\frac{n^2}{\omega^2}\right]=4\left[2-4\frac{n^2}{\omega^2}\right]=8\left[1-\frac{2n^2}{\omega^2}\right]>0$$

Bu ýerden $\left(f''(\nu_1)<0\right)$ $\nu=0$ bolanda $f(\nu)$ maksimuma ýetýär.

Amplituda bolsa (b) minimum.$\left(\nu=\frac{p}{k}=0, p=0\right)$ p – daşary güýçleri $\nu=\nu_2$ bolanda, ýagny $p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$ $f(\nu)$ minimum bolsa, onda b maksimum.

$$b_{\max}=\frac{b_0}{\sqrt{(1-\nu_2^2)^2+4\frac{n^2}{\omega^2}\nu_2^2}}=\frac{b_0}{\frac{2n}{\omega}\sqrt{1-\frac{n^2}{\omega^2}}}$$

$$\left(\frac{b_0}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{k^2}\right)^2+4\frac{n^2}{k^2}\frac{n^2}{\omega^2}}}=\frac{b_0}{\sqrt{1+\frac{n^4}{\omega^4}-2\frac{n^2}{\omega^2}+4\frac{n^2}{\omega^2}\frac{n^2}{\omega^2}}}=\frac{b_0}{\frac{2n}{\omega}\sqrt{1-\frac{n^2}{\omega^2}}}\right)$$

$$\left(4\frac{n^2}{\omega^2}-4\frac{n^4}{\omega^4}=\frac{4n^2}{\omega^2}\left(1-\frac{n^2}{\omega^2}\right)\right)$$

Bu ýerde $p = 0$ hasap edip $b = \frac{h}{\omega^2}$ alarys. $\frac{h}{\omega^2}$-dy b0 bilen, $\frac{p}{\omega}$-ny ν bilen belläp 6.36-njy deňlemäni täzeçe ýazarys.

$$b = \frac{b_0}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \frac{4\nu^2 n^2}{\omega^2}}} \qquad (6.37)$$

Bu ýerden $\frac{n}{\omega}$-nyň berlen bahasynda b ululyk ν-iň funksiýasydyr.

Indi ν-iň haýsy bahalarynda b-iň maksimum we minimum bahalary alýandygyny göreliň. Şonuň üçin köküň aşagyndaky aňlatmany (funksiýany) $f(\nu)$ bilen belläliň.

$$f(\nu) = (1-\nu^2)^2 + \frac{4n^2\nu^2}{\omega^2}$$

Bu funksiýanyň 1-nji we 2-nji önümi

$$f'(\nu) = \left(1 + \nu^4 - 2\nu^2 + \frac{4n^2}{\omega^2}\nu^2\right)' = 4\nu^3 - 4\nu + \frac{8n^2\nu}{\omega^2} = 4\nu\left(\nu^2 - 1 + \frac{2n^2}{\omega^2}\right)$$

$$f''(\nu) = 4\left(3\nu^2 - 1 + \frac{2n^2}{\omega^2}\right)$$ görnüşde aňladylýar.

1-nji önümi nola deňläp $\nu\left(\nu^2 - 1 + \frac{2n^2}{\omega^2}\right) = 0$ deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň kökleri $\nu_1 = 0$ we $\nu_2 = \sqrt{1 - \frac{2n^2}{\omega^2}}$ $\left(\nu_2^2 - 1 + \frac{2n^2}{\omega^2} = 0 \Rightarrow \nu_2^2 = 1 - \frac{2n^2}{\omega^2} \Rightarrow \nu_2 = \sqrt{1 - \frac{2n^2}{\omega^2}}\right)$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{\vartheta_0^2}{a^2\omega^2} = \frac{1}{a^2}\left(x_0^2 + \frac{\vartheta_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$a^2 = x_0^2 + \frac{\vartheta_0^2}{\omega^2}; a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\vartheta_0^2}{\omega^2}}; tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{x_0^2 a^2\omega^2}{a^2\vartheta_0^2} = \frac{x_0^2\omega^2}{\vartheta_0^2}$$

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{x_0^2\omega^2}{\vartheta_0^2}} = \frac{x_0\omega}{\vartheta_0 v_0} \qquad (6.8)$$

Yrgyldynyň doly periodyny (T) tapalyň. Sinusyň ýa-da kosinusyň periody 2π-e deň bolany üçin T wagt geçeninden soň yrgyldynyň fazasy 2π-e köpelýär. Onda $\omega(t+T) + \alpha - (\omega t + \alpha) = 2\pi$ bu ýerden $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ýa-da ω-niň bahasyny goýup alarys

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (6.9)$$

Yrgyldynyň periody herekeriň başlangyç şertine bagly däl.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ululyga 2π-sekuntdaky doly yrgyldylaryň sany diýilýär(aýlaw ýygylygy). Trigonometriýanyň belli formulalaryndan peýdalanyp (6.6) deňligi başgarak görnüşde hem ýazyp bolar.

$$x = a\sin\omega t\cos\alpha + a\cos\omega t\sin\alpha$$

bu ýerde $a\cos\alpha = A$; $a\sin\alpha = B$ alarys. 5-nji deňlemäniň hususy çözgütleri $x_1 = \cos\omega t; x_2 = \sin\omega t$

$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ onda $x = Ax_1 + Bx_2$ $a\sin\alpha = x_0$

$a\omega\cos\alpha = \vartheta_0$ dygyny göz öňünde tutup $A = \frac{\vartheta_0}{\omega}$ $B = x_0$ Onda

$x = \frac{\vartheta_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$ Eger $\vartheta_0 = 0$ bolsa $x = x_0\cos\omega t$

$\frac{A}{a} = \cos\alpha$ $\frac{B}{a} = \sin\alpha$ $\cos^2\alpha = \frac{A^2}{a^2}$ $\sin^2\alpha = \frac{B^2}{a^2}$

$\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{a^2} = 1 = \frac{1}{a^2}\left(A^2 + B^2\right) = 1$ $a^2 = A^2 + B^2$;

$a = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{B\cdot a}{a\cdot A} = \frac{B}{A}$

Birinji derejeli erkinlige eýe bolan ulgamyň yrgyldyly hereketine Lagranžyň usulynda seredeliň. Durnukly deňagramlylyk ýagdaýynda ulgam iň kiçi (minimum) poten- sial energiýa ($U(q)$) eýedir. Ulgamyň şol ýagdaýdan gyşarmagy ulgamy öňki ýagdaýyna getirmäge ymtylýan $-\frac{\partial U}{\partial q}$ güýjüň ýüze çykmagyna getirýär.

Potensial energiýanyň üýtgemegini aşakdaky ýaly ýazarys.

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{k}{2}(q - q_0)^2 \tag{6.10}$$

Bu ýerde $k \approx U''_q(q) = q$, $q = q_0$ -daky $U(q)$ -yň ikinji önümi.

$x = q - q_0$ we $U(q_0) = 0$ diýip alarys.

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \tag{6.11}$$

Ulgamyň kinetik energiýasy $\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$ (6.12)

$a(q_0) = m$ diýip Laranžyň funksiýasy üçin alarys.

$$-bp^2\sin(pt+\beta) + 2nbp\cos(pt+\beta) + \omega^2 b\sin(pt+\beta) = h\sin pt$$

$pt + \beta = \theta$ diýip alarys.

$$b(\omega^2 - p^2)\sin\theta + 2nbp\cos\theta = h\sin(\theta - \beta) \text{ ýa-da}$$

$$b(\omega^2 - p^2)\sin\theta + 2nbp\cos\theta = h\sin\theta\cos\beta - h\sin\beta\cos\theta$$

deňligiň sag we çep tarapyndaky koeffisientleri deň bolmaly. Onda

$h\cos\beta = b(\omega^2 - p^2)$, $h\sin\beta = -2nbp \Rightarrow h^2\cos^2\beta = b^2(\omega^2 - p^2)^2$,

$$h^2\sin^2\beta = 4n^2b^2p^2$$

$$(\cos^2\beta + \sin^2\beta)h^2 = b^2\left[(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2\right]$$

Bu deňlemelerden taparys.

$$b = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \text{ we } tg\beta = -\frac{2np}{\omega^2 - p^2} \tag{6.34}$$

Şeýlelikde umumy çözgüt.

$$x = ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha) + b\sin(pt + \beta) \tag{6.35}$$

6.35-nji deňligiň sag tarapynyň 1-nji agzasy sönýän yrgyldyny suratlandyrýar. 2-nji agzasy bolsa $\frac{2\pi}{p}$ periodly we p ýygylykly garmonik yrgyldyny aňladýar. Bu yrgyldylara mejbury yrgyldylar diýilýär. Berlen ýagdaýda material nokadyň hereketiniň grafigini sönýän yrgyldynyň grafigi bilen garmonik yrgyldynyafigini goşmak arkaly gurup bolar. Mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň (b) (ýarym geriminiň) bu yrgyldylaryň ýygylygyna (p) baglylykda üýtgeýşine seredeliň.

6.34-nji deňlemäniň sag tarapynyň sanawjysyny hem-de maýdalawjysyny ω^2-a böleliň.

$$b = \frac{\frac{h}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2p^2}{\omega^4}}} \tag{6.36}$$

güýç täsir edýär diýeliň. Şol güýjüň x oka bolan proýeksiýasy wagta görä sinuslar kanuny boýunça üýtgeýär diýeliň, ýagny

$$F'_x = H \cdot \sin pt \qquad (6.30)$$

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F'_x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{H}{m}\sin pt \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\mu}{m}\dot{x} = \frac{H}{m}\sin pt$$

Bu ýerde H we p – käbir hemişelik berlen sanlar. Bu ýagdaýda nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h\sin(pt) \qquad (6.31)$$

Bu ýerde $h = \frac{H}{m}$, $\omega^2 = \frac{K}{m}$, $2n = \frac{\mu}{m}$. 6.31-nji deňleme sag tarapy noldan tapawutly, hemişelik koeffisiýentli, ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemedir. Çyzykly differensial deňlemesiniň nazatýetinden 6.31-nji deňlemämiziň umumy çözgüdini

$$x = x_1 + x_2 \qquad (6.32)$$

görnüşde diýip bolar.
Bu ýerde x_2 berlen deňlemäniň haýsy hem bolsa bir hususy çözgüdi, x_1 bolsa sag agzasyz deňlemäniň umumy çözgüdi ($\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$).
$x_1 = ae^{-nt} \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha)$ umumy çözgüdi biz bilýäris. Bu ýerde $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$, a we α erkin hemişelikler.
Şeýlelikde 6.31-nji differensial deňlemäni integrirlemeklik onuň hususy x_2 çözgüdini tapmaga syrykdyrylýar (x_2).

$$x_2 = b\sin(pt + \beta) \qquad (6.33)$$

diýip hasap edeliň.Bu ýerde β we b käbir hemişelik ululyklar.Bu ýerden alarys

$$\frac{dx_2}{dt} = bp\cos(pt + \beta), \ \frac{d^2x_2}{dt^2} = -bp^2\sin(pt + \beta).$$

x_2-iň, $\dot{x}_2$ we $\ddot{x}_2$-yň bahalaryny 6.31-nji deňlemede goýup alarys.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (5.3) \text{ bu ýerde } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx.$$

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (11) \text{ bu ýerde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (6.13)$$

çyzkly differensial deňlemesiniň (11) umumy çözgüdi

$$x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t \quad (13) \text{ ýa-da } x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

$$(14) \text{ bu ýerde } a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \ \cos\alpha = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},$$

$$\sin\alpha = -\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \text{ ýa-da } tg\alpha = -\frac{c_2}{c_1} \text{ başgaça } x = a\sin(\omega t + \alpha)$$

a – ululyga amplituda diýilýär; ω - garmoniki yrgyldynyň ýygylygy diýilýär; $\omega t + \alpha$ - ululyga yrgyldynyň fazasy diýilýär; $t = 0$ wagtdaky α-nyň bahasyna fazanyň başlangyç bahasy diýilýär. Şeýlelik-de durnukly deňagramlylygyň töwereginde (ýakynynda) sistema garmoniki yrgyldy edýär. Yrgyldysy hereketiň ýygylygy ω durşuna sistemanyň häsiýeti bilen kesgitlenýär.
Kiçi yrgyldy edýän sistemanyň energiýasy

$$E = T_k + U_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) \qquad (6.15)$$

14-njini göz öňünde tutup alarys:

$$(\dot{x} = -a\sin(\omega t + \alpha) \cdot \omega \Leftrightarrow \dot{x}^2 = a^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha))$$

$$E = \frac{m}{2}\left\{a^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha) + a^2\omega^2\cos^2(\omega t + \alpha)\right\} = \frac{ma^2\omega^2}{2};$$

Ýagny $$E=\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \qquad (6.16)$$

Garmoniki yrgyldylar öwrenilinende olary, goşmaça, düzüjilere dargatmaly bolýar hem-de has çylşyrymly deňlemeleri çözmeli bolýar. Şol meseleleri çözmeklik kompleks sanlaryň nazaryýeti ulanylanda has aňsatlaşýar. Seredilen garmoniki yrgyldynyň aňlatmasynyň (14) kompleks formasy aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\tilde{x}=ae^{i(\omega t+\alpha)} \qquad (6.17)$$

Yrgyldaýan sistemanyň koordinatasynyň wagta baglylygyny kompleks aňlatmanyň maddy böleginiň üsti bilen aňlatmak köplenç amatly bolýar.

$$x=\mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\} \quad \text{bu ýerde} \quad A=ae^{i\alpha} \qquad (6.18)$$

Kompleks amplituda

Mysala ýüzleneliň:

1. Yrgyldynyň amplitudasyny we başlangyç fazasyny başlangyç koordinatanyň (x_0) we tizligiň (ϑ_0) üsti bilen aňlatmaly.

$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ haçanda t=0 bolanda $x_0=c_1$ sebäbi,

$$\cos\omega t=1 \ \sin\omega t=0 .$$

$\dot{x}_{t=0}=c_1\sin\omega t\cdot\omega+c_2\cos\omega t\cdot t=c_2\cdot\omega$ şeýlelikde $c_1=x_0$;

$$c_2=\frac{\vartheta_0}{\omega}$$

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{\vartheta_0^2}{\omega^2}}\ ; \ tg\alpha=-\frac{\vartheta_0}{\omega\cdot x_0}$$

$\ddot{x}+\omega^2\cdot x=0$ deňlemäniň hususy çözgütleri $x_1=c_1\cos\omega t$, $x_2=c_2\sin\omega t$.

Bize belli bolan (differensial çyzykly deňlemeleriň) häsiýetleerine görä umumy çözgüt hususy çözgütleriň çyzykly kombinasiýalarydyr.

$$tg(\omega_1 t+\alpha)=\frac{\omega_1}{n};\ \omega_1 t=arctg\frac{\omega_1}{n}-\alpha;\ \omega_1 t+\alpha=arctg\frac{\omega_1}{n};$$

$$\omega_1 t=arctg\frac{\omega_1}{n}-\alpha;\ t=\frac{1}{\omega_1}(arctg\frac{\omega_1}{n}-\alpha); \qquad (6.29)$$

arktangensiň yzygiderli bahalary biri-birinden π ululyga tapawutanỳarlar. Onda t-niň bahalary biri-birinden $\frac{\pi}{\omega_1}$ baha tapawutlanỳarlar.

$$t_2=t_1+\frac{\pi}{\omega_1};$$

$$t_3=t_2+\frac{\pi}{\omega_1}=t_1+\frac{\pi}{\omega_1}+\frac{\pi}{\omega_1}=t_1+\frac{2\pi}{\omega_1};$$

10-njy deňlemede yzygiderli t-niň bahalaryny goỳup alarys.

$$x_1=ae^{-nt}\sin(\omega_1 t_1+\alpha);\ x_2=ae^{-nt_2}\sin(\omega_1 t_2+\alpha);$$

$$x_2=\alpha e^{-n(t_1+\frac{\pi}{\omega_1})}\sin(\omega_1 t_1+\alpha+\pi)=-e^{-n\frac{\pi}{\omega_1}}x_1$$

$e^{-n\frac{\pi}{\omega_1}}=e^{-n\frac{T}{2}}$ ululyga sönỳän yrgyldynyň dekrementi diỳilỳär.

$\ln e^{-n\frac{\pi}{\omega_1}}=-n\frac{T}{2}$ ululyga logarifmik dekrement diỳilỳär.

§24. Mejbury yrgyldy.

Material nokada beýleki güýçler (gurşawyň garşylygy, x aralyga proporsional güýç) bilen bir hatarda periodik üýtgeýän $\vec{F}'$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = ae^{-nt}[\omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha) - n\sin(\omega_1 t + \alpha)] \qquad (6.28)$$

a we α ululyklar başlangyç x_0 we υ_0 ululyklar bilen kesgitlenỳär. t=0 diỳip, 10-njy we 11-nji deňlemelerden alarys.

$x_0 = a\sin\alpha$ we $\upsilon_0 = a(\omega_1 \cos\alpha - n\sin\alpha) = a\omega_1 \cos\alpha - nx_{0i}$ ỳa-da

$$a\sin\alpha = x_0;\ a\cos\alpha = \frac{\upsilon_0 + nx_0}{\omega_1} \quad \text{bu ỳerden}$$

$$a^2 \sin^2\alpha = x_0^2;\ a^2\cos^2\alpha = \frac{(\upsilon_0 + nx_0)^2}{\omega_1^2};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{x_0^2}{a^2};\ \cos^2\alpha = \frac{(\upsilon_0 + nx_0)^2}{a^2\omega_1^2};$$

$$1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{(\upsilon_0 + nx_0)^2}{a^2\omega_1^2} = \frac{1}{a^2}[x_0^2 + \frac{(\upsilon_0 + nx_0)^2}{\omega_1^2}]$$

$$a^2 = (x_0^2 + \frac{(\upsilon_0 + nx_0)^2}{\omega_1^2});\ a\sqrt{x_0^2 + \frac{(\upsilon_0 + nx_0)^2}{\omega_1^2}}$$

$$tg^2\alpha = \frac{x_0^2 a^2 \omega_1^2}{a^2(\upsilon_0 + nx_0)^2};\quad tg\alpha = \frac{x_0\omega_1}{\upsilon_0 + nx_0};$$

t wagtyň haỳsy bahalarynda nokadyň tizliginiň nula deňdigini, ỳagny iň uly gyşarmasyna barỳandygyny tapalyň. Nokadyň tizligini nula deňläp, alarys.

$$\omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha) - n\sin(\omega_1 t + \alpha) = 0 \quad \text{ỳa-da}$$

$$x = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t$$

c_1 we c_2 hemişelikleri başlangyç şertlerden kesgitläp bolar. t=0 bolanda $x = x_0, \dot{x} = \vartheta_0$ onda $c_1 = x_0, c_2 = \frac{\vartheta_0}{\omega}$.

Şonuň üçinem $x = \frac{\vartheta_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t \Rightarrow x = c_1(\sin\omega t + \frac{c_2}{c_1}\cos\omega t)$

ýazalyň. $\frac{c_2}{c_1} = tg\delta$ diýip hasap edip

$$x = c_1(\cos\omega t + tg\delta\sin\omega t) = \frac{c_1}{\cos\delta}\cos(\omega t - \delta) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos\omega t$$

$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = a$ diýip alarys.

$$x = a\cos(\omega t - \delta)$$

Bu ýerde a we δ täze erkin hemişelikler.

§23. Togtaýan yrgyldy.

Goỳ, material nokat $\overline{F}$ dartuw güỳjüň täsirinden gozganmaỳan O nokada tarap x ok boỳunça gönüçyzykly hereket edỳän bolsun. O nokady koordinatalar sistemasynyň başlangyjy deregine alarys. Sredanyň $\overline{R}$ garşylygyny tizlige proporsional hasap edỳäris. Bu güỳç mydama tizligiň garşysyna ugrukdyrylandyr. Onda

$$\overline{R} = -\mu\overline{\upsilon} \qquad (6.18)$$

diẏip ẏazarys. Bu ẏerde μ -proporsionallyk koeffisiẏenti. Şeẏlelikde, bu güẏjüň x oka ugrukmasy

$$R_x = -\mu \upsilon_x = -\mu \frac{dx}{dt} \qquad (6.19)$$

bolar. $\overline{F}$ güẏjüň x oka ugrukmasy $-\kappa x$. Onda nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x - \mu \frac{dx}{dt} \qquad (6.20)$$

bolar. Deňlemäniň iki tarapyny hem m-e bölüp we $\frac{\kappa}{m} = \omega^2; \ \frac{\mu}{m} = 2n$ bellikleri girizip alarys:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - 2n\frac{dx}{dt}$$ ẏa-da

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad (6.21)$$

Bu deňlemäni integrirlemek üçin üẏtgeẏän ululyklary çalyşmak usulyndan peẏdalanalyň.

$$x = \xi e^{-nt} \qquad (6.22)$$

bu ẏerde ξ - täze üẏtgeẏän ululyk. Bu ululygy t wagta görä differensirläp alarys.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = e^{-nt}\frac{d\xi}{dt} - n\xi e^{-nt} = e^{-nt}(\frac{d\xi}{dt} - n\xi) \qquad (6.23)$$

we

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}e^{-nt} - n\frac{d\xi}{dt}e^{-nt} - ne^{-nt}\frac{d\xi}{dt} + n^2\xi e^{-nt} =$$

$$e^{-nt}(\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\xi}{dt} + n^2\xi)$$

x funksiẏanyň we onuň önümleriniň bahasyny 4-nji deňlemede ẏerine goẏup alarys.

$$e^{-nt}(\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\xi}{dt} + n^2\xi) + 2ne^{-nt}(\frac{d\xi}{dt} - n\xi) + \omega^2\xi e^{-nt} = 0$$

e^{-nt} köpeldijä bölüp alarys.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\xi}{dt} + n^2\xi + 2n\frac{d\xi}{dt} - 2n^2\xi + \omega^2\xi = 0$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + (\omega^2 - n^2)\xi = 0 \qquad (6.24)$$

Goẏ, $\omega > n$, onda $\omega^2 - n^2 = \omega_1^2$ hasaplap 7-nji deňlemäni aşakdaky görnüşe getirers.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_1^2\xi = 0 \qquad (6.25)$$

8-nji deňleme garmoniki yrgyldynyň differensial deňlemesidir.(geçen paragrafda seredilen). Soňky deňlemäni integrirläp alarys.

$$\xi = a\sin(\omega_1 t + \alpha) \qquad (6.26)$$

Onda

$$x = a\sin(\omega_1 t + \alpha)e^{-nt} \qquad (6.27)$$

Bu deňleme öňki garmoniki yrgyldynyň deňlemesinden e^{-nt} köpeldiji bilen tapawutlanẏar.Şonuň üçinem yrgyldynyň amplitudasy wagtyň geçmegi bilen kemelẏär. Bu hili yrgyldylara sönẏän yrgyldylar diẏilẏär.

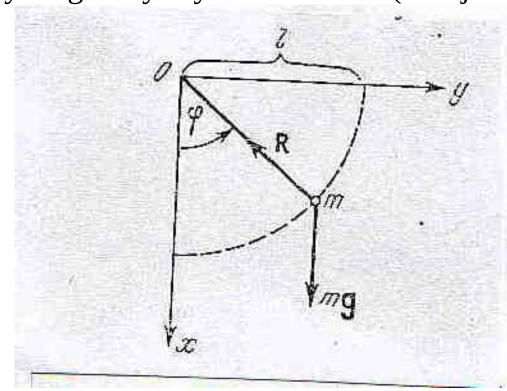
10-njy deňlemäni wagta görä differensirläp sönẏän yrgyldydaky nokadyň tizigini taparys.

VII bap.Çyzykly däl yrgyldylar.

§25.Hususy yrgyldylar we Krylow—Bogolýubowyň usuly.

Golonom hemişelik baglanşyk goýlan we berlen hemişelik güýç täsir edýän bir derejeli sistema seredeliň.Sistema durnukly deňagramlylyga eýe diýip hasap edýäris.Sistemanyň kinetik, potenseal we dissipatiw funksiýalarny deňagramlylyk nokadyň töwereginde ikinji tertibe çenli dargatmak çyzykly deňlemä getirýär.

Köp praktiki meselelerde ýeterlik uly amplitudaly we tizlikli yrgyldylary öwrenmek zerur bolup durýar. Şeýle ýagdaýda dargatmanyň çyzykly däl deňlemä getirýän indiki agzalaryny hem hasap etmeli bolýar.Eger deňagramlylyk ýagdaýdan gyşarma we nokadyň tizligi gaty uly bolmasa, onda alynýan degişli deňleme kiçi çyzykly däl yrgyldyny beýan eder.Şeýle yrgyldylaryň aýratynlygyny matematiki maýatnigiň mysalynda öwreneliň(33-nji surat).



33-nji surat

Maýatnik “çyzykly” garşylyga eýe bolan sredada ýerleşen diýip hasap edeliň.Onda maýatnigiň kinetik, potensial energiýesi, hem-de dissipatiw funksiýasy degişlilikde deňdir.

$$T = \frac{ml^2}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 \;\; ; \;\; U = mgl(1-\cos\varphi) \;\; ; \;\; D = \frac{Kl^2}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 \qquad (7.1)$$

Potensial energiýany durnukly deňagramlylyk ýagdaýynda dördünji agza degişli takyklyk alarys.

$$cost = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \dots$$

onda $$U = mgl(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!}) \qquad (7.2)$$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\alpha}$ (j= 1, 2,…, s) we

$Q_j^{\alpha} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$ (j= 1, 2,…, s)

deňlemeleri peýdalanyp seredýän sistemamyz üçin Lagranžyň deňlemesini alarys.

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl(1-\cos\varphi); \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}; \ \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) =$$

$$= ml^2\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = kl^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} mgl\varphi + mgl\frac{\varphi^3}{3!}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi - mgl\frac{\varphi^3}{3!} = -kl^2\dot{\varphi}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + kl^2\dot{\varphi} + mgl\varphi = mgl\frac{\varphi^3}{3!}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{g}{l}\frac{\varphi^3}{3!}$$

ýa-da

$$\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{\omega_0^2}{3!}\varphi^3 \qquad (7.3)$$

bu ýerde

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}; \quad 2\mu = \frac{k}{m} \qquad (7.4)$$

Eger 3-nji deňlemedäki $\varphi^3 - a$ proporsional çyzykly däl agzany göz öňünde
tutmasak çyzykly deňlemä gelýäris.

$$\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (7.5)$$

$\omega_0 > \mu$ bolonda (4')-deňlemäniň çözgüdi

$$\varphi = \alpha_0 e^{-\mu t}\cos(\omega t + \psi_0) \qquad (7.6)$$

funksiýa bolýar. bu ýerde

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \mu^2 \qquad (7.7)$$

Eger çyzykly däl agzany hem göz öňünde tutsak we onuň φ ululyga propersional çyzykly agza bilen deňeşdirende kiçidigini göz öňünde tutsak, onda çyzykly däl yrgyldyny suratlandyrýan çözgüdi formulasy boýunça çyzykly deňlemäniň çözgüdine meňzeş

$$\varphi \approx a\cos\psi \qquad (7.8)$$

görnüşinde diýip güman etmek bolar,

bu ýerde a we ψ -çyzykly däl yrgyldynyň näbelli ampletudasy we fazasy.

$-\varphi + \dfrac{\varphi^3}{6}$ -ululyga proporsional we maýatnigiň wertikaldan gyşarmasyna bagly umumylaşdyrylan güýjüň ululygy çyzykly golaýlamanyň güýjündenkiçidir. Özem ol tapawut maýatnigiň gyşarmasy näçe uly bolsa şonçada ulydur.

Şeýlelikde fazadan wagta görä birinji önüm ýa-da maýatnigiň çyzykly däl yrgyldysynyň ýygylygy ($\dot{\psi}$) çyzykly yrgyldynyň ýygylygyndan kiçidir.Ol yrgyldynyň ampletudasyna baglydyr.Şonuň üçinem hususy çyzykly däl yrgyldylar üçin

$$\dot{\psi} = \omega(a) \qquad (7.9)$$

baglanşyk bar diýip hasap edip bolar. Bu ýerde $\psi(a)$ -görnüşi umumylaşdyrlan güýjüň görnüşi bilen kesgitlenýän kabelli funksiýadyr. Çyzykly ýakynlaşmada matematiki maýatnigiň ampledudasy $a = a_o e^{-\mu t}$ kanun boýunça üýtgeýär we $\dot{a} = -\mu a$ deňlemäni kanagatlandyrýar.Şonuň üçünem umuman çyzykly däl yrgyldynyň amplitudasynyň wagta görä önümi yrgyldynyň ampletudasynyň funksiýasydyr diýip hasap edýäris.

$$\dot{a} = f(a) \qquad (7.10)$$

Çyzykly däl yrgyldylar üçin “obertonlaryň” bolmagy häsiýetlidir.

Obertonyň bolmagyny deňlemesinde çyzykly däl agza saklaýan matematiki
maýatnigiň mysalynda görüp bileris.

$$\varphi^3 \cong a^3 \cos^3 \varphi = \frac{a^3}{4}(3\cos\psi + \cos 3\psi)$$

Çyzykly däl kiçi yrgyldylaryň aýratynlygy—superpozisiýa prinsipi ýerine yetenok.Hereketiň deňlemesiniň çyzykly däldigi üçin onuň umumy çözgüdi hususy çözdütlerniň jemine deňdir.

we Krylow—Bogolýubowyň usuly. Mejbury yrgyldylar. Rezonans.

Pes, çyzykly däl hususy bir ölçegli

$$\dot{\xi} + {\omega_0}^2 \xi = \varepsilon \cdot Q \cdot (\xi, \dot{\xi}) \qquad (7.11)$$

görnüşli deňlemesine seredeliň.Bu ýerde $\varepsilon - \varepsilon Q$ funksiýanyň çyzykly agza bilen deňeşdireniňde kiçidigini görkezýän parametr. Bu deňlemäni çözmegiň usullarynyň biri hem Krylow—Bogolýubowyň usulydyr. 7-nji deňlemäni göz öňünde tutup 10-njy deňlemäniň çözgüdini

$$\xi = a \cdot \cos\psi + \varepsilon \xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2 \xi_2(a,\psi) + ... \qquad (7.12)$$

hatar görnüşinde gözleýäris, bu ýerde $\varepsilon\xi_1, \varepsilon\xi_2$ amplitudanyň funksiýasy we fazanyň periodik funksiýasydyr. Öz gezeginde

amplitudanyň üýtgemegi we ýygylyk amplitudanyň bahasyna we faza bozulmasyna (θ)-ä baglydyr.

hökmünde alarys.Bu funksiýalary peýdalanyp (7.12-njiniň we 7.25-ň kömegi bilen) 7.11-njy deňlemäniň çözgüdini taparys:

$$\xi = a(t)\cos\psi(t) + \varepsilon\xi_1(a(t), \psi(t))$$

Meňzeş hasaplamany ε^2 takyklyk bilen ýerine ýetirip 2-nji ýakynlaşmadaky çözgüdi alyp bolar.

Ýeterlik uly wagt interwalynda $a\omega\psi$ funksiýalaryň birinji ýakynlaşmasyna ξ funksiýanyň nulynyň ýakynlaşmasy degişlidir.

Mejbury,çyzykly däl yrgyldylaryň fiziki aýratynlygyna seredeliň.Sistema kiçi, hemişelik däl, wagta görä gormoniki üýtgeýän $\varepsilon Q_{eo}\cos\omega_e t$ güýç täsir edýär diýip pikir edeliň.Şol güýjüň ortaça kuwwatyny kesgitläliň(∇ t wagtda).

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\varepsilon Q_{e0}\cos\omega_2 t\dot{\xi}dt$$

Δt wagt hususy çyzykly yrgyldylaryň periodyndan ($2\pi/\omega_o$) ýeterlik uly bolmaly. Şol bir wagtda-da, şol Δt wagtda yrgyldynyň formasy duýarlyk üýtgemeli däldir. Δt wagt hususy çyzykly däl yrgyldy çyzykly yrgylda golaý diýip, ýagny:$\xi = a\cos\psi$; $\xi = -a\omega_o\sin\psi$ bu ýerde $\psi = \omega_o t + \theta(t)$ hemde Δt wagtda a(t) we θ(t) funksiýalaryň üýtgemesiniň kiçidigini hasaba alyp ortaça kuwwat üçin aşakdaky aňlatmany alarys:

$$\frac{\varepsilon Q_{e0}\omega_0\cdot a(t)}{\Delta t}\left\{\frac{\cos[(\omega_0+\omega_e)t+\theta(t)]}{\omega_0+\omega_e} - \frac{\cos[(\omega_0-\omega_e)t-\theta(t)]}{\omega_0-\omega_e}\right\} \quad (7.27)$$

Haçanda ω_e- ω_o-dan örän tapawutlanýan bolsa(rezonans däl ýagdaý) mejbur ediji güýjüň kuwwaty ýok bolmaga çenli kiçi, sebäbi $\Delta t >> 2\pi/\omega_o$.

Eger rezonans bolsa, ýagny $\omega_e \approx \omega_o$, onda kuwwat ε tertibinde bolýar.Hakykatdan hem $\omega_e = \omega_o + \Delta\omega$-i (27)-de ýerine goýup we $\Delta\omega$-nula ymtyldyryp ortaça kuwwat üçin alarys:

$$-\varepsilon Q_{eo}\omega_o a(t)\sin\theta(t) \quad (7.28)$$

Şeýlelikde rezonans ýagdaýda ortaça kuwwat amplitudanyň we fazanyň bozulmagynyň (θ) funksiýasy bolýar.Şeýlelikde aşakdakyny güman etmek bolar:Rezonans ýagdaýda

amplituda a we faza ψ wagtyň näbelli funksiýasydyr. Amplituda a we faza ψ özlerniň

$$\dot{a} = \varepsilon\cdot f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \ldots; \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\cdot\omega_1(a) + \omega_2(a) + \ldots \quad (7.13)$$

görnüşli differensial deňlemelerine tabyndyrlar. Soňky deňlemämiziň sag tarapy tapylyp bilner. Sebäbi (7.12) hatar 7.11-nji deňlemämizi kanagatlandyrmalydyr.Sebäbi (7.12)-nji hatar 7.13-nji deňleme bilen kesgitlenýär.

Näbelli funksiýalar bolan

$$\varepsilon\cdot\xi_1, \varepsilon^2\xi_2, \ldots, \varepsilon\cdot f_1, \varepsilon^2 f_2, \ldots, \varepsilon\omega_1, \varepsilon^2\omega_2$$

käbir erkinlik bilen kesgitlenýär. Eger α esasy garmonikaň doly ampletudasy bolsun diýip talap etsek onda ol erkinligi ýok edip bolar. Onda $\varepsilon\xi$,$\varepsilon^2\xi_2$ funksiýalar $\cos\psi$ we $\sin\psi$ ululyklara proporsional agzalary özünde saklamazlar we

(7.12) $\int_0^{2\Pi} E^n\ \xi_n(a,\ \Psi)\cos\Psi\, d\Psi = 0$, $\int_0^{2\Pi} E^n \sum_n (a,\psi)\sin\psi d\psi = 0$

(n=1,2,…)

şerti kanagatlandyrarlar. Deňlemäni çözmegiň umumy shemasy εf_1, $\varepsilon\omega_1$,$\varepsilon\xi_1$ funksiýalary berlen εQ funksiýa boýunça gözlemekden ybaratdyr. Yrgyldynyň amplitudasy we fazasy bolsa wagtyň funksiýasy hökmünde tapylan εf, $\varepsilon\omega$ we şuňa meňzeş funksiýalar boýunça 12-nji deňlemäniň kömegi bilen kesgitlener. 10-njy deňlemäniň çözgüdini birinji ýakynlaşmada tapalyň.ε-ny öz içine alýan takyklyk bilen $\dot{\zeta}$ we $\ddot{\zeta}$ ululyklary a we Ψ ululyklaryň funksiýasy hökmünde tapalyň. 11-nji hataryň ilkinji iki agzasyny wagta görä differensirläp taparys:

$$\dot{\zeta} = -\dot{a}\cos\Psi - a\sin\Psi\dot{\psi} + \varepsilon\left\{\frac{\partial\zeta_1}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\psi}\dot{\psi}\right\} \quad (7.14)$$

a we Ψ ululyklaryň 12-nji deňlemä tabynlygyny göz öňünde tutyp, olary ýerine goýmak bilen şol takyklykda alarys.

$$\dot{\xi} = -\omega_0 a \sin\psi + \mathrm{E}\left\{ f_1 \cos\psi - \omega_1 a \sin\psi + \omega_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right\} \quad (7.15)$$

Soňky deňlemämizi wagta görä differensirläp alarys

$$\ddot{\xi} = -\omega_0 \dot{a} \sin\psi - \omega_o a \cos\psi\dot{\psi} +$$

$$+\mathrm{E}\left\{ \frac{df_1}{dU} \dot{a} \cos\psi - f_1 \sin\psi\dot{\psi} - \frac{d\omega_1}{da} \dot{a} a \sin\psi - \right\} \quad (7.16)$$

12-ni şu ýerde goýup ε-no çenli takyklyk bilen taparys

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 a \cos\psi + \varepsilon\left\{ -2\omega_0 a\omega_1 \cos\psi - 2\omega_0 f_1 \sin\psi + \omega_o^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \right.$$

$$\left. -\omega_1 \dot{a} \sin\psi - \omega_1 a \cos\psi\dot{\psi} + \omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \dot{\psi} \right\} \quad (7.17)$$

17-nji we11-nji formulalar başlangyç deňlemämiziň çep tarapyny a we Ψ ululyklaryň funksiýasy hökmünde kesgitlemäge mümkinçilik berýär. 10 njy deňlemäniň sag tarapyny ε-na çenli takyklykda, a we Ψ ululyklaryň funksiýasy hökmünde gözlemek üçin $\varepsilon Q\left(\xi_1 \dot{\xi}\right)$ ululygy $a\cos\psi$ $\left(-\omega_0 a \sin\psi\right)$
nokatda dargatmaly.

$$\varepsilon Q\left(\xi_1 \dot{\xi}\right) = \varepsilon Q\left(a\cos\psi_1 - \omega_0 a \sin\psi\right) \quad (7.18)$$

11-nji,17-nji, we 18-i 10-nji deňlemede ýerine goýup(görkezilen takyklyk bilen) alarys:

$$\omega_0^2\left(\varepsilon\xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon\xi_1}{\partial\psi^2}\right) = 2\omega_0 a\varepsilon\omega_1 \cos\psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin\psi + \varepsilon Q_o\left(a_1\psi\right) \quad (7.19)$$

(19)-njy gatnaşyk berlen εQ_o funksiýa boýunça näbelli funksiýalar bolan $\varepsilon\xi_1$,εf_1 we $\varepsilon\omega_1$-y kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Berlen funksiýany (εQ_o) we näbelli ($\varepsilon\xi_1$) funksiýany(Periodik funksiýa diýip hasap edýäris) Furýeniň hatary görnüşde göz-öňüne getireliň.

$$\varepsilon Q_0\left(a_1\psi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon\beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon\alpha n(a) \sin\psi \right\} \quad (7.20)$$

Bu ýerde $\varepsilon\beta_n(a)$ we $\varepsilon\alpha_n(a)$-Furýeniň belli koeffisiýentleri

$$\varepsilon\xi_1\left(a_1\psi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon\nu_n(a) \cos n\psi + \varepsilon\gamma_n(a) \sin n\psi \right\} \quad (7.21)$$

Bu ýerde $\varepsilon\nu_n$ we $\varepsilon\gamma_n(a)$ (n=o,1,2,3…….) Furýeniň kesgitlemäge degişli koeffisiýentleri. Koeffisiýentler ε we ε (13) görä $\varepsilon\nu_1 = \varepsilon\gamma_1 = 0$ (7.22)

(20) we (21)-i (19)-da ýerine goýup meňzeş gormonikadaky koeffisiýentleri biri-birine deňläp εf εω-ny we ε we ε koeffisiýentleri taparys.

$$\varepsilon f_1 = -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0}, \qquad \varepsilon\omega_1 = -\frac{\varepsilon\beta_1}{2\omega_0 a} \quad (7.23)$$

$$\varepsilon\nu_0 = \frac{\varepsilon\beta_0}{\omega_0^2}, \quad \varepsilon\nu_n = \frac{\varepsilon\beta_n}{\left(1-n^2\right)\omega_0^2}, \quad \varepsilon\gamma_n = \frac{\varepsilon\alpha_n}{\left(1-n^2\right)\omega_0}\left(n = 2,3....\right) \quad (7.24)$$

(23)-i ulanyp (12)-den amplituda we faza üçin differensial deňleme alarys:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \ \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2\omega_0 a} \quad (7.25)$$

Şeýlelikde birinji ýakynlaşmada amplitudanyň wagta görä önümi we ýygylyk Furýeniň berlen funksiýasynyň koeffisiýentleri arkaly kesgitlenýär.Ýagny (10)-njy deňlemäniň sag tarapynyň Furýe koeffisiýentleri arkaly kesgitlenýär.Amplitudanyň önümi sinψ funksiýanyň Furýe koeffisiýenti, fazanyň önümi cosψ funksiýanýň Furýe koeffisiýenti arkaly kesgitlenýär. (24) - i (21)-de
goýsak

$$\varepsilon\xi_1 = \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2}\left\{ \varepsilon\beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a) \sin n\psi \right\} \quad (7.26)$$

funksiýany kesgitlemäge getirer. (23) deňlemeler sistemasyny çözüp amplitudany (a) we fazany (ψ) wagtyň we a bilen ψ-niň başlangyç (a_o,ψ_o) bahalarynyň funksiýasy görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerde $\vec{P} = m\left[\vec{\omega}\vec{r}_m'\right]$-jisimiň impulsy, $\vec{R}^e$ - berkitme nokatdaky daýanjyň reaksiýasy(hasaplamanyň başlangyjynyň saýlanyp alynyşy sebäpli reaksiýa moment nola deňdir). S' sistemanyň oklarynyň inersiýanyň esasy oklary boýunça ugrukdyrylanlygy sebäpli momentiň deňlemesini

$$\frac{d'\vec{M}}{dt} + \left[\vec{\omega}\vec{M}\right] = £^{e} \qquad (8.51)$$

görnüşde ýazarys. 2-nji deňlemäniň iki tarapyny hem S^i sistemanyň oklarina ugrukdyryp we $\frac{d'\vec{M}}{dt}$ ululygyň ol oklara ugrukmasynyň $J_x^i\,\omega_x^i$, $J_y^i\,\omega_y^i$, $J_z^i\,\omega_z^i$ -ny hasaba alyp Eýleriň dinamiki deňlemelerini taparys.

$$J_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \left(J_{x'} - J_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} = L^e{}_{x'}$$

$$J_{y'}\dot{\omega}_{x'} + \left(J_{x'} - J_{z'}\right)\omega_{z}\omega_{x'} = L^e{}_{y'} \qquad (8.52)$$

$$J_{z'}\dot{\omega}_{z'} + \left(J_{y'} - J_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} = L^e{}_{z'}$$

Meseläni Lagranzyň usuly bilen çözmek üçin kinetik energiýany erkin φ, θ, ϕ koordinatalaryň funksiýalary ýaly tapmaly.

VIII bap.Gaty jisimiň dinamikasy

§26. Burç tizligi.

Islendik gaty jisime içki ideal baglanşyk goÿlan material nokatlaryň toplumy hökmünde garamak bolar.Başgaça, gaty jisimi hemişelik uzynlykly, nul massaly steržen bilenbirleşdirilen material nokatlaryň toplumy hökmünde kesgitlemek bolar.Ideal baglanşyk goÿulanlygy üçin gaty jisimiň erkinlik derejesiniň sany degişli erkin material nokatlaryň toplumynyň derejesinden kiçidir.

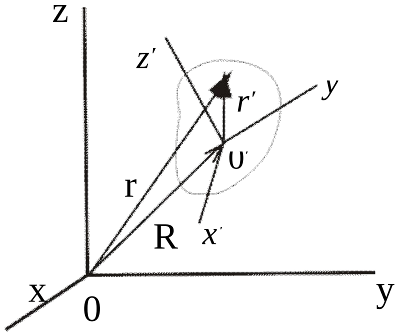
Gaty jisimiň käbir S hasaplaÿyş toplumyna görä hereketini häsiÿetlendirmek üçin öwrenilÿän gaty jisim bilen berk baglanşykly S^1 hasaplayÿyş toplumynyň hereketiniň kanunyny bilmek ÿeterlikdir.Gaty jisimiň hereketiniň kanuny(erkin) alty skalÿar funksiÿalar bilen kesgitlenÿär.Olar radius-wektoryň üç proÿeksiÿalary we Eÿleriň üç burçlary(θ(t),ξ(t), φ(t)).

Gaty jisimiň tükeniksiz kiçi orun üÿtgetmesine garalyň. Bu kiçi orun üÿtgetmä iki bölegiň jemi hökmünde garap bileris.Ikiň birine jisimiň öňe bolan tükeniksiz kiçi orun üÿtgetmesi, beÿlekisine bolsa inersiÿa merkeziniň töweregindäki tükeniksiz kiçi öwrülmesi ÿaly garamak bolar.

Goÿ radius wektor R gaty jisim bilen berk baglanşykly hasaplaÿyş toplumynyň başlangyjynyň S hasaplaÿyş toplumyna görä ÿagdaÿyny kesgitleÿän bolsun(34-nji surat)

Gaty jisimiň bir nokadynyň S^1 sistema görä radius-wektoryny r^1 bilen, S hasaplaÿyş sistemasyna görä r bilen belläliň. Onda şol nokadyň tükeniksiz kiçi orun üÿtgemesi inersiÿa merkezi bilen bilelikdäki orun üÿtgeme bilen (dR) inersiÿa merkezine görä tükeniksiz kiçi burça (dφ) orun üÿtgetmäniň jemidir.

$$d\bar{r} = d\vec{R} + \left[d\varphi\bar{r}'\right] \quad (8.1)$$



34-nji surat

Seredilýän orun üýtgetme geçen dt wagta deňlemäni bölüp we tizligi girizip alarys:

dr/dt =v, dR/dt=V, dφ/dt=ω

Şeýlelikde $v = V + [\vec{\omega}\vec{r}\,']$ (8.2)

Bu ýerde V-gaty jisimiň inersiýa merkeziniň tizligi. Başgaça, bu ululyga jisimiň öňe bolan hereketiniň tizligi diýilýär. ω-gaty jisimiň aýlanmagynyň burç tizligi. Onuň ugry aýlanma okunyň ugry bilen gabat gelýär.

Şeýlelikde jisimiň islendik nokadynyň S hasaplaýyş sistemasyna görä tizligi (v) jisimiň öňe bolan hereketiniň tizligi we onuň aýlanmasynyň burç tizligi bilen aňladylyp bilner.

Eger gaty jisim berk baglanşykly koordinatalar sistemasynyň başlangyjy jisimiň inersiýa merkezi bilen gabat gelmän, inersiýa merkezinden a aralykda ýerleşen bolsa onda ol sistemanyň başlangyjynyň tizligi V^1

radius-wektoryny r^{11} bilen belläliň .Onda $r^1=r^{11}+a$ .Bu ýerden r wektoryň bahasyny (2)-de goýup alarys:

$v=V+[\omega a]+[\omega r]+[\omega r^{11}]$ ýa-da $v=V^1+[\omega^1 r^{11}]$ Bu ýerde $v^1=V+[a]$ (8.3) $\omega=\omega^1$

Jisim bilen berk baglanşykly koordinatalar sistemasynyň aýlanmasynyň burç tizligi (wagtyň berlen pursatyndaky) sistemanyň özüne bagly däldir.Burç tizligi absolýut häsiýete eýedir.

$T = \frac{1}{2}\left(J_{x'}\omega_{x'}{}^2 + J_{y'}\omega_{y'}{}^2 + J_{z'}\omega_{z'}{}^2\right)$ deňlemä 8.47-njini goýup aýlanmanyň kinetik energiýasyny

$$T = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2 \qquad (8.48)$$

görnüşde alarys.Bu ýerde $J_\omega = J_x{}^m a_{\omega x'}{}^2 + J_{y'}{}^m a^2{}_{\omega y'} + J_{z'}{}^m a^2{}_{\omega z'}$ - jisimiň aýlanma okyna görä inersiýa momenti, $J_x{}^m, J_{y'}{}^m, J_{z'}{}^m$ - baş merkezi momentler. Berlen ýagdaýda

$J_\omega bilen J_{z'z'}{}^m$ gabat gelýär wehemişelik ululykdyr, sebäbi $S we S'$.
sistemalaryň oklarynyň arasyndaky burçlar üýtgemeýär.
S' sistemanyň saýlanyp alnyşy hereketiň

$$\omega_g{}^2 = \frac{mgl}{ml^2 + J_{x'}{}^m a_{\omega x'}{}^2 + J^m{}_{y'} a_{\omega y'}{}^2 + J_{z'}{}^m a\omega z'^2} \qquad (8.49)$$

görnüşdäki deňlemesine getirýär. φ koordinatanyň üýtgemek kanuny S'-hiň saýlanyp alnyşyna bagly däl. ω_g üçin alynan hemme aňlatmalar görnüşleriniň dürlüligine garamazdan deňdirler.

Bir gozganmaýan nokatly gaty jisimiň hereketi. Eýleriň deňlemesi.

Bir gozganmaýan nokatly gaty jisimiň ýagdaýynyň üýtgemegi Eýleriň hemme burçlarynyň üýtgemegi bilen baglanşyklydyr.

Inersial S hasaplama sistemasynyň we gaty jisim bilen berk baglanşykly S^i hasaplama sistemasynyň O we O^i başlangyçlaryny gaty jisimiň gozganmaýan nokadynda ýerleşdireliň S^i sistemanyň oklaryny inersiýanyň gozganmaýan nokada görä esasy oklary boýunça ugrukdyralyň. $\vec{P} = m[\vec{\omega}\vec{r}\,'_m]$, $\vec{M}$ = M $L^e = £^e$ formulalary hasaba alyp hereketiň

$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^e + \vec{R}^e$, $\dot{\vec{M}} = \vec{L}^e + \vec{L}^e{}_R$ wektor deňlemelerini

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^e + \vec{R}^e,\ \dot{\vec{M}} = £^e \qquad (8.50)$$

Bu ýagdaýda erkin koordinata deregine φ burçy saýlap (0x we 0x' oklaryny arasyndaky burç) sistemanyň kinetik energiýasy aýlanma hereketiniň T kinetik energiýasy bilen kesgitlenýär.

$U = U^e$; we $\overline{F}^e = \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{g} = m\overline{g}$ deňliklerden maýatnigiň potensiýal energiýasy üçin

$$U = -mg\overline{r}_m = -gm\ell\cos\varphi \tag{8.43}$$

bu ýerde ℓ-maýatnigiň massa merkezinden okuna çenli aralyk. Lagranzyň deňlemesiniň kömegi bilen we 3 we 10- nji deňlemeleri peýdalanyp taparys.

$$\ddot{\varphi} + \omega_g^2 \sin\varphi = 0 \tag{8.44}$$

bu ýerde $\omega_g = \left(\frac{mg\ell}{J_{z'z'}}\right)^{1/2}$ - maýatnigiň çyzykly yrgyldysynyň ýygylyşy.

Eger massa merkezi S'-hiň başlangyjy bilen gabat gelse(2-nji б surat), 0'z'; 0z ok bilen parallel bolsa onda kinetic energiýa üçin

$$T = \frac{m\delta^2{}_m}{2} + \frac{J^m_{z'z'}}{2}\dot{\varphi}^2 \tag{8.45}$$

aňlatmany alarys. bu ýerde $\vartheta_m = l\dot{\varphi}$. Potensiýal energiýanyň şol bir bahalaryny göz öňünde tutup maýatnigiň kwadrat ýygylykly hereket deňlemesine geleris

$$\omega_g{}^2 = \frac{mgl}{ml^2 + J_{z'z'}{}^m} \tag{8.46}$$

S' sistemanyň başlangyjyny massa merkez bilen gabat getireliň. S'-hiň oklary baş merkezi inersiýa oklary bilen gabat gelär

ω -nyň S' sistemanyň oklaryna proýeksiýalary

$$\omega_{x'} = \omega\, a_{\omega x'},\ \omega_{y'} = \omega\, a_{\omega y'},\ \omega_{z'} = \omega\, a_{\omega z'}. \tag{8.47}$$

bu ýerde $a_{\omega a}$-a indeksli baş merkezi ok bilen aýlanma okuň arasyndaky kosinus burç, ω-burç tizliginiň moduly.

§27. Inersiýa tenzory.

Gaty jisimiň kinetik energiÿasyny hasaplamak üçin oňa material nokatlaryň aÿry-aÿry bölekleriniň sistemasy hökmünde seredÿäris.Onda kinetik energiÿany

$$T = \sum \frac{mV^2}{2} \tag{8.4}$$

formula görnüşinde ÿazÿarys. Bu ÿerik 2-jini goÿup alarys:

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + [\vec{w}\vec{r}\,']\right)^2 = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum m\vec{V}[\vec{w}\vec{r}\,'] + \sum \frac{m}{2}[\vec{w}\vec{r}\,']^2 \tag{8.5}$$

Gaty jisimiň hemme nokatlary üçin v we ω-nyň bahalary birmeňze.Şonuň üçinem 1-njy agzadaky $v^2/2$ jemiň daşyna çykarylÿar.Σm jem hem gaty jisimiň massasy μ. Ikinji agza $\sum m\vec{V}[\vec{w}\vec{r}\,'] = \sum m\vec{r}\,'[\vec{V}\vec{w}] = [\vec{V}\vec{w}]\sum m\vec{r}\,'$. Eger hereket edýän hasaplama sustemasynyň başlangyjy deregine inersiýa merkezi alynan bolsa $\sum m\vec{r}\,' = 0$.

Şeýlelikde ikinji agza nula deňdir. Üçinji agza $\sum \frac{m}{2}[\vec{w}\vec{r}\,']^2 = \frac{1}{2}\sum m\left\{w^2 r^2 - (\vec{w}\vec{r})^2\right\}$

Şeýlelikde “gaty jisimiň kinetik energiýasy iki agzanyň jemi hökmünde aňladylynyp bilner.

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left\{w^2 r^2 - (\vec{w}\vec{r})^2\right\} \tag{8.6}$$

Bu ỳerde birinji agza gaty jisimiň öne bolan hereketiň kinetik energiýasy.Ikinji agza inersiýa merkezinden geçýän okuň töwereginde w burç tizlikli aýlow hereketiniň kinetik energiýasy.

Aýlanmanyň kinetik energiýasyny tenzor aňlatmasynda ýazalyň .

$$T = T_{\text{öňe}} + T_{\text{aỳ}} \tag{8.7}$$

$$T_{ayl} = \frac{1}{2}\sum m\{w_i^2 x_i^2 - w_i x_i w_k x_k\} = \frac{1}{2}$$
$$\sum m\{w_i w_k \delta_{ik} x_i^2 - w_i w_k x_i x_k\} = \frac{1}{2} w_i w_k \sum m\{x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}$$

Sebäbi bu ỳerde δ_{ik} - birlik tenzor, bu birlik tenzor i=k bolanda 1-e deň. Eger i=k bolsa δ_{ik} =0.

$$I_{ik} = \sum m\{x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}$$

Tenzor girizip gaty jisimiň kinetik energiýasy üçin gutarnykly aňlatmany alarys:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\omega_i\omega_k \tag{8.8}$$

Jik tenzora jisimiň inersiýa tenzory ýa-da inersiýa momentleriniň tenzory diýilýär.Jik simmetrik tenzordyr, ýagny $I_{ik}=I_{ki}$

Jisimiň inersiýa momenti onyň ölekleriniň inersiýa momentleriň jemine deňdir.

Eger gaty jisimi üznüksiz diýip hasap etsek 10`-däki jem jisimiň göwrüninden alnan integral bilen çalşyrylyar.

$$I_{ik} = \int \sigma\left(x_i^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)dV \tag{8.9}$$

Inersiýa tenzoryny diogonal görnüze getirmek mümkin .Diogonal görnüşe getirmek x,y,z oklaryň degişli ugurlaryny saýlap almak bilen ýerine ýetirilýär.Bu ugurlara inersiýanyň baş oklary diýär, degişli bahalaryna (tenzoryň komponentleriň)inersinyň baş momentleri diýilýär.Okuň şeyle saýlawynda (x,y,z) aýlanmanyň kinetik energiýasy aşakdaky ýaly aňladylýar.

$$T_{ayl} = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) \tag{8.10}$$

I_1,I_2,I_3Inersiýa momentleriniň işlendigi beýleki ikisiniň jeminden uly bolup bilmez.

$$I_3 = I_1 + I_2 = \sum m\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right) \geq \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{8.11}$$

Eger gaty jisim haýsy hem bolsa bir tertipli simmetriýa oka eýe bolsa, onda inersiýa merkezi şol okuň üstünde ýatýar we

bu ýerde $\frac{d'}{dt}$ fiksirlenen ortlarda wagta görä önüm. Bu ýerden 1-nji we 2-nji dargatmany göz öňünde tutup momentiň üýtgemesiniň deňlemesini

$$\left.\begin{array}{l} J_{x'z'}\ddot{\varphi} - J_{y'z'}\dot{\varphi}^2 = L_{x'}^e + (L_R^e)_{x'} \\ J_{y'z'}\ddot{\varphi} + J_{x'z'}\dot{\varphi}^2 = L_{y'}^e + (L_R^e)_{y'} \\ J_{z'z'}\ddot{\varphi} = L_{z'}^e + (L_R^e)_{z'} \end{array}\right\} \tag{8.41}$$

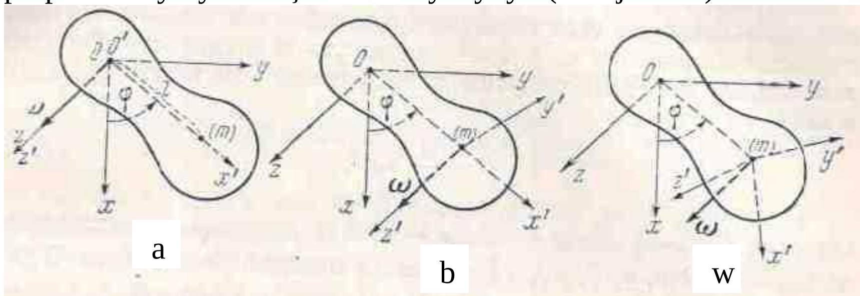
Şeýlelikde jisimiň tekizparallel hereketiniň deňlemesi (6), (8) deňlemelerdir.

Erkin koordinatalardaky deňlemeler Lagranžyň

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right) + \frac{J_{z'z'}}{2}\dot{\varphi}^2 - U \tag{8.42}$$

görnüşdäki funksiýasy bilen kesgitlenýär

Jisimiň daşky baglanşykly tekiz parallel hereketine fiziki maýatnigiň hereketine mysal getirmek bolar . Baglanşygyň idealdygyny göz öňünde tutup meseläni erkin koordinatalarda ýeňil çözüp bolýar .Inersial hasaplama sistemasynyň bir okuny maýatnigiň oky bilen gabat getireliň (oky gorizontal hasap edip). Beýleki koordinata okuny agyrlyk güýjüniň güýjenmesiniň ugry bilen gabat getirýäris (g) . Başlangyç O nokat deregine maýatnigiň oky bilen maýatnigiň massa merkezinden geçýän we maýatnigiň okuna perpendikulýaryň kesişme nokady alynýar(32-nji surat).



32-nji surat

koordinatasy we Eýleriň bir y burçy bilen kesgitlener. Jisimiň burç tizligi we onuň aýlanma momenti umuman aýdanyňda collinear däldirler we degişlilikde

$$\omega = \dot{\varphi}\dot{\bar{n}}_z, \qquad (8.34)$$

we $M_{x'} = J_{x'z'}\dot{\varphi}$, $M_{y'} = J_{y'z'}\dot{\varphi}$, $M_{z'} = J_{z'z'}\dot{\varphi}$, **(**8.35**)**

Jisimiň aýlanmasy bilen baglanşykly kinetik energiýasy $\left(T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} J_{\alpha,\beta}\omega_\alpha\omega_\beta \right)$ aňlatma görä

$$T = \frac{1}{2} J_{z'z'}\dot{\varphi}^2 \qquad (\mathbf{8.}36)$$

S' hasaplama sistemasynyň başlangyjynyň erkin däl jisimiň massa merkezinde ýerleşdirip bu massa merkeziniň S hasaplama sistemasyna görä hereketiniň deňlemesini

$$m\ddot{\bar{r}}_m = \bar{F}^e + \bar{R}^e \qquad (8.37)$$

we jisimiň aýlanma momentiniň üýtgeme kanunyny S' sistema görä

$$\dot{M} = L^e + L^e{}_R \qquad (8.38)$$

4 – nji deňlemäni tekizparallel hereket üçin dekart koordinatalarda ýazalyň.

$$m\ddot{x}_m = F_x^e + R_x^e, \qquad m\ddot{y}_m = F_y^e + R_y^e, \qquad 0 = F_z^e + R_z^e \qquad (8.39)$$

Aýlanma momentinden wagta görä önüm $\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z$ ortlaryň hemişelikliginde alynýar. M moment bolsa $\bar{n}'_x, \bar{n}'_y, \bar{n}'_z$ ortlara dargadylan görnüşde berilýär(2). Bu kynçylygy ýok etmek üçin hereket edýän ortlara dargadylan gatnaşykdan $\left(\frac{d\bar{a}'}{dt} = [\overline{\omega a}] + \frac{d'\bar{a}'}{dt} \right)$ peýdalanalyň. Onda 8.38-e derek

$$\frac{d'\vec{M}}{dt} + \left[\vec{\omega}\vec{M}\right] = L^e + L_R^e \qquad (8.40)$$

inersiýanyň baş oklarynyň biri hem şol ok bilen gabat gelýär.Beýleki iki oklary ol oka perpendikulýardyrlar.Simmetriýa okunyň tertibi ikiden ýokary bolsa, onda jisime simmetrik wolşok diýilýär.Eger bölejikleriň sistemasy bir göniniň ugrunda ýatýan bolsalar(mysal üçin z ugur)onda hemme bölejikler üçin x=y=0.bu ýaddaýda iki baş inersiýa momenti gabat gelýär.Üçinji baş inersiýa momenti nula deňdir.

$$I_1 = I_2 = \sum m\omega_z^2; \quad I_3=0 \qquad (8.12)$$

Şeýle sistemany rotor diýip atlandyrýarlar.Rotoryň häsiýetli aýratynlygy jemi iki erkinlikli aýlanma derejesine eýe bolmagydyr.Hemme üç baş inersiýa momentleri dürli bolan jisimlere asimmetrik wolçok diýilýär.Eger haýsy hem bolsa iki komponenty bi-birine deň bolsa, onda jisime simmetrik wolçok diýilýär.

Gaty jisimiň impilsynyň momenti

8.2-nji formulany göz önünde tutup gaty jisimiň impulsyny S hasaplaýys sistemasyna görä ýazarys.

$$V = V + \left[\vec{\omega}\vec{r}^{|}\right] \qquad \vec{P} = m\vec{V} + m\left[\vec{\omega}\vec{r}^{|}\right] \qquad (8.13)$$

Sistemanyň impulsynyň momentiniň ululygy özüne görä kesgitlenýän nokadyň saýlanyşyna bagly.Gaty jisimiň mehanikasynda ol nokat deregine hereket edýan hasaplaýyş sistemasynyň başlangyjy alynýar, ýagny inersiýa merkezi. ,Hereket edýän hasaplaýyş sistemasynyň başlangyjy deregine gaty jisimiň inersiýa merkezi alnanda onuň momenti “hususy momenti” bilen gabat gelýär.

Başda söz bilen aýdanynda $\vec{M} = \sum m\left[\vec{r}\vec{V}\right]$ kesgitlemedäki V $\left[\vec{\omega}\vec{r}^{|}\right]$ bilen çalşyrylýar.

$$\vec{M} = \sum m\left[\vec{r}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right] = \sum m\left\{r^2\vec{\omega} - \vec{r}\left(\vec{r}\vec{\omega}\right)\right\} \qquad (8.14)$$

Ýa-da tenzor belliklerde

(19) $M_i = \sum m\{x_i^2\omega_i - x_i x_k \omega_k\} = \omega_k \sum m\{x_i^2\delta_{ik} - x_i x_k\}$

Inersiýanyň tenzoryny göz öňunde tutyp alarys.(10’)

$$M_i = I_{ik}\omega_k \qquad (8.15)$$

Eger x,y,z oklar inersiýanyň baş oklarynyň ugruna ugrukdyrylan bolsa onda (20) formula aşakdakylary berýär.

$$M_1 = I_1\omega_1 \qquad M_2 = I_2\omega_2 \qquad M_3 = I_3\omega_3 \qquad (8.16)$$

Haçanda hemme üç baş inersiýa momentleri gabat gelseler, onda $\vec{M} = I\vec{\omega}$ ýagny momentiň wektory burçtizliginiň wektoryna proporsionaldyr, we şol bir ugra ugrukdyrylandyr.

Daşky güýçleriň täsirinden azat daty jisimiň hereketine garalyň .Şeýle hem öňe bolan hereket hasaba almalyň .Onda diňe jisimiň erkin aýlow hereketi gakýar.er bir ýanyk sistemada bolşy ýaly erkin aýlow hereket edýän jisim üçin impulsyň momenti hemişelikdir.Şol şekilliň wolçok üçin momentiň hemeşeligi burç tisligiň wektorynyň hemiselik ligine gitirýär.($\vec{\omega}$ =hemiş.)

Şar şekilli wolçogyň hereketi iki aýlow hereketinden ybaratdyr:

1.Öz hususy okunyň töweregindäki deňölçegli hereket.

2.Momentiň töwereginde konus çyzyp aýlanýarys.Bu iki aýlanma hereketiň burç tizliklerini berlen M we Ö ululyklaryň üşti bilen aňladyp bolar.

Wolçogyň öz okunyň daşyndaky hereketiň burç tizligi $\vec{\omega}$ wektoryň şol oka bolan proýeksiýasy w_3

$$\omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta \qquad (8.17)$$

Presisiýanyň burç tizligi w_3 tapmak üçin w wektoryny parallellogram düzgüni boýunça x ,w M ugurlar boýunça

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1}\omega_2\omega_3 = 0 \\ \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2}\omega_3\omega_1 = 0 \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3}\omega_1\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.33)$$

Alan deňlemämizi simmetrik bolçogyň erkin alÿanmasyna ulanalyň. $I_1=I_2$ diÿip üçinji deňlemeden $\dot{\omega}_3=0$,ÿagny ω_3-hemişelik. Onda ikinji iki deňlemäni ÿazarys:

$$\dot{\omega}_1 = -\omega\omega_2; \dot{\omega}_2 = \omega\omega_1 \quad \text{bu ýerde} \quad \omega = \omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

2-ji deňlemäni i-e köpeldip we 1-nji bilen goşup alarys:

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 + i\omega_2) = i\omega(\omega_1 + i\omega_2) \quad \text{bu ýerden} \quad \omega_1 + i\omega_2 = A\cdot e^{i\omega t}$$

$$\omega_1 = A\cdot\cos\omega t; \quad \omega_2 = A\cdot\sin\omega t; \quad \left(A = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\right)$$

Wolçogyň okuna perpendikulýar tekizlige proeksiýasy (burç tizliginiň) şol tekizlikde ω burç tizligi bilen (hemişelik) aýlanýar. W_3-iň wolçogyň okuna proeksiýasy hemişelikligi üçin tutuş w wektor wolçogyň okunyň töwereginde w burç tizligi bilen aýlanýar diýen netijä gelýäris.

§29. Gaty jisimiň tekizparallel hereketi.

Gaty jisimiň itersiýa häsiýeti jisimiň massasyna we onuň göwürimi boýunça paýlanşyna bagly.

Tekizparallel hereket diýip, jisimiň hemme hokatlary käbir gözganmaýan tekizlige parallel tekizliklerde hereket edýän hereketine düşünilýär. Eger gaty jisim tekizparallel hereket edýän bolsa,onda jisim bilen berk baglanşykly S′ sistemanyň 0'x'y' tekizligini gözganmaýan S sistemanyň 0xy tekizligi bilen gabat geler ýaly alyp bolar. Onda 0 z we 0'z' oklar parallel bolarlar we jisimiň ýagdaýy 0' nokadyň iki

Bu umumy formulanyň kömegi bilen jisimiň hereketiniň deňlemelerini (dP/dt=F we dm/dt=K) aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$\frac{d'\vec{P}}{dt}+\left[\vec{\omega}\,\vec{P}\right]=\vec{F},\ \frac{d\,\vec{m}}{dt}+\left[\vec{\omega}\,\vec{M}\right]=\vec{K} \qquad (8.30)$$

Bu ÿerde wagta görä differensirlemäniň hereketli ulgamda geçirilÿänligi üçin deňlemäni ulgamyň oklaryna ugrukdyryp bileris:

$$\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1=\frac{dP_1}{dt},..,\left(\frac{d'\vec{M}}{dt}\right)1=\frac{d\vec{M}_1}{dt},..$$

Bu ÿerde indeksler 1,2,3, x,y,z oklar boÿunça düzüjileri aňladÿar.1-njy deňlemede P wektory μV ululyga çalşyp alarys:

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\omega_2V_3-\omega_3V_2\right)=F_1\\ \mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\omega_1V_3-\omega_3V_1\right)=F_2\\ \mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\omega_1V_2-\omega_2V_1\right)=F_3\end{aligned}\right\} \qquad (8.31)$$

x,y,z oklar inersiÿanyň baş oklarynda saÿlanyp alyndy diÿip hasaplap $\mu_1 I\omega$ diÿip ÿazyp alarys:

$$\left.\begin{aligned}I_1\frac{d\omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\omega_2\omega_3=K_1\\ I_2\frac{d\omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\omega_3\omega_1=K_2\\ I_3\frac{d\omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\omega_1\omega_2=K_3\end{aligned}\right\} \qquad (8.32)$$

Soňky deňlemeler ulgamyna – Eÿleriň deňlemesi diÿilÿär.Erkin aÿlanmada K=0 onda Eÿleriň deňlemesi aşakdaky görnüşe gelÿär:

düzüjilere dargadalyň .Bu ýerden ikiji (M) gözlenýän burç tizligini berer.

$$\omega_1=\frac{M_1}{I_1}=\frac{M}{I_1}\sin\theta \qquad \omega_{pr}=\frac{M}{I_1} \qquad (8.18)$$

§28. Gaty jisimiň hereketiniň deňlemesi.

Gaty jisimiň 6 erkinlik derejä eýedigi üçin hereketiň deňlemesiniň umumy sistemasy 6 erkin deňlemäni öžünde saklamaly .Olary iki wektordan (jisimiň momenti we impulsy) wagta görä alnan önüm görnüşinde kabul etmek üçin alyp we jemläp alarys.Bu ýerde P we f degişlilikde bölejigiň impulsy we oňa täsir edýän güýç.Jisimiň doly impulsynywe doly güýjüni girizip alarys

$$\vec{P}=\sum\vec{P}=\mu V \quad \text{we} \quad \vec{F}=\sum\vec{f},\ \frac{d\,\vec{P}}{dt}=\vec{F} \qquad (8.19)$$

Bu ýerde F güýje diňe daşky çeşmeleriň täsir güýji girýär. Bölejikleriň arasyndaky özara täsir özara gysgalýarlar.ýagny daşky täsirleriň ýok wagtynda jisimiň impulsy hemişelikdir we F=0. Eger gaty jisimiň daşky meýdandaky potensial energiýasy U bolsa onda F güýç potensial energiýanyň koordinata görä differensirlenmegi bilen kesgitlenip bilner.

$$\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{R}} \qquad (8.20)$$

Bu ýerde $\delta U=-\vec{F}\,\delta\,\vec{R}$ gaty jisimiň öňe bolan hereketinde onuň potensial energiýasynýn üýgemegi,.

Lagranžyň gaty jisim üçin funksiýasy

$$L=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k-U \qquad (8.21)$$

Bu ýerden $\frac{\partial L}{\partial\vec{V}}=\mu\vec{V}=\vec{P};\quad \frac{\partial L}{\partial\vec{R}}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{R}}=\vec{F}$

$\dot{P} = F$ deňlemäni inersiýa merkeziniň koordinaatsyna görä Lagranžyň deňlemesi ýaly ýazyp bileris:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{V}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{V}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = \vec{P} = \vec{F} \qquad (8.22)$$

Hereketiň ikinji deňlemesini alalyň. Deňlemäni getirip çykarmagy ýönekeýledirmek üçin jisimiň inersiýa merkezi inersial hasaplaýyş ulgamyna görä dynçlykda diýip hasap edýäris. Alnan deňleme Galileýiň görälik prinsipine laýyklykda islendik başga inersial hasaplaýyş ulgamlarynda hem adalatlydyr.

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\sum\left[\vec{r}\,\vec{P}\right] = \sum\left[\vec{r}\,\vec{P}\right] + \sum\left[\vec{r}\,\vec{P}\right] \qquad (8.23)$$

Biziň ýönekeýledirmämize görä V=0 we r v tizlik bilen gabat gelýär.Wektorlar V we P=mV birmeňzeş ugra eýe bolýandyklary üçin P wektory f wektor bilen çalyşyp gutarnykly alarys:

DM/dt=K, bu ýerde $\vec{K} = \sum\left[\vec{r}\,\vec{f}\right]$. Wektor $\left[\vec{r}\,\vec{f}\right]$ güýjüň momentidir.Şonuň üçünem $\vec{K}$ wektor hemme güýçleriň momentleriniň jemidir.

Güýjüň momenti hem impulsyň momenti ýaly göräleýin kesgitlenen koordinatalar başlangyjynyň saýlanşyna baglydyr. Lagranžyň 8.21-nji funksiýasyny ω wektoryň komponentlerine görä differensirläp alarys:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = \frac{\partial}{\partial \omega_0}\left(\frac{1}{2} I_{ik}\omega_i^2\delta_{ik}\right) = I_{ik}\omega_i\delta_{ik} = I_{ik}\omega_k \quad \text{bu ýerde } \delta_{ik}\cdot\omega_i = \omega_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = I_{ik}\omega_k = M_i \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_i}\right) = M_i \qquad (8.24)$$

Jisimiň tükeniksiz kiçi бφ burça öwrülmeginde potensial energiýanyň (U) üýtgemesi

$$\delta U = -\sum \vec{f}\,\delta\vec{r} = -\sum \vec{f}\left[\delta\varphi\cdot\vec{r}\right] = -\delta\varphi\sum\left[\vec{f}\,\vec{r}\right] = -K\delta\varphi$$

Onda

$$K = -\frac{\delta U}{\delta\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} \qquad (8.25)$$

Şeýlelikde

$$dM/dt=K \qquad (8.26)$$

deňlemä Lagranžyň

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \qquad (8.27)$$

deňlemesi ýaly garamak bolar.

Eýleriň deňlemesi.

Ýokarda ýazylan jisimiň hereketiniň deňlemesi hereketsiz koordinatalar ulgamyna degişlidir.dp/dt we dM/dt önümler hereketsiz koordinatalar ulgamyna degişli P we M wektorlaryň üýtgemegidir.

Aýlanma momentiniň komponentleri bilen burç tizliginiň komponentleriniň arasynda has ýönekeý arabaglanşyk inersiýanyň baş oklary boýunça oklary bardyr. Bu arabaglanşykdan peýdalanmak üçin ilki hereketiň deňlemesini hereketli X,Y,Z koordinatalara öwürmeli

Goý dA/dt hereketsiz koordinatalar sistemasyna görä haýsy hem bolsa bir wektoryň üýtgemeginiň tizligi. Eger aýlanýan koordinatalar ulgamyna görä A wektor üýtgemeýän bolsa, onda hereketsiz koordinatalar ulgamyna görä onuň üýtgemegi diňe aýlanmak bilen şertlenendir.Onda

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\omega}\,\vec{A}\right] \qquad (8.28)$$

Bu deňligiň sag gapdalyna hereketli ulgama görä A wektoryň üýtgeme tizligini goşmaly.Bu tizligi d^1A/dt bilen belläp alarys:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \left[\vec{\omega}\,\vec{A}\right] \qquad (8.29)$$

IX bap.Gamiltonyň deňlemesi.

§30. Gamiltonyň funksiýasy. Gamiltonyň deňlemesi.

Ideal baglanşykly mehaniki sistemanyň hereketi eýýäm biziň bilişimiz ýaly Lagranžyň deňlemesine boýun egýändir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\kappa}=Q_k^d \qquad (9.1)$$

Bu ýerde Q_k^d -berlen dissipatiw güýç, L – Lagranžyň funksiýasy (L = T - U).

Eger Lagranžyň funksiýasy berlen mehaniki sistema üçin belli bolsa onda Lagranžyň deňlemesi berlen mehaniki ulgamyň tizlenmesiniň, tizliginiň we koordinatasyň arasynda arabaglanşygy guraýar, ýagny mehaniki ulgamyň hereketiniň deňlemesi bolýar. Matematikanyň nukdaý nazaryndan 9.1 – nji deňleme s sany $q_k(t)$ funksiýa üçin s sany ikinji tertipli differensial deňlemeleriň ulgamyny düzýär.Erkin material nokat üçin Lagranžyň funksiýasy:

$$L=\frac{mv^2}{2}$$

Özara täsir edişýän material nokatlaryň ulgamy üçin Lagranžyň funksiýasy : L = T – U.

Bu ýerde $U = U(r_1 r_2 ,\dots r_a)$, $T = \sum\limits_a \frac{m_a v_a^2}{2}$; r_a – a – njy nokadyň radius – wektory.

Biziň görşümiz ýaly ulgamyň mehaniki ýagdaý onuň berlen, umumylaşdyrylan koordinatasy q_k we tizligi ($\dot{q}_k$) bilen kesgitlenýär. Ulgamyň mehaniki ýagdaýyny onuň berlen umumylaşdyrylan koordinatasy we impulsy bilen aňladyp bolýar. Ležandranyň özgertmesi ady alan özgertme ýoly bilen erkin üýtgeýän ululyklaryň toplumyny özgerdip bolýandygyny biz bilýäris.

Ležandranyň өzgertmesi

Bir kanoniki ŭýtgeýän $q_1,q_2,\dots,q_n$, $p_1,p_2,\dots p_n$ ululyklardan başga bir $q_1', q_2', ..., q_n', p_1', p_2', ... p_n'$ kanoniki ululyklara geçmegiň maksady hereketiň täze kanoniki ululyklarda ýazylan deňlemesiniň ýənekeý bolmagy we doly bolmasada, iň bolmanda bəlekleýin integrirlenmegidir.

Lagranžyň deňlemesi ýa-da Gamiltonyň kanoniki deňlemesi dŭzŭlende seredilýän dinamiki sistemanyň ýagdaýyny kesgitleýän, əzara baglanşyksyz islendik n sany ululyklar (umumylaşdyrylan koordinatalar) erkin saýlanyp alynýar. Bu deňlemeleriň gərnŭşi saýlanyp alynan umumylaşdyrylan koordinatalar sistemasyna bagly däl. Beýle diýildigi haýsy hem bolsa bir $q_1, q_2, …, q_n$ umumylaşdyrylan koordinatalardan täze $q_1', q_2', ..., q_n'$ umumylaşdyrylan koordinatalara

$$q_1' = q_1'(q_1, q_2, …, q_n\ t) \quad (i=1,2,…,n) \tag{9.2}$$

formulanyň kəmegi bilen geçilende Lagranžyň we Gamiltonyň deňlemeleri əňkŭligine galýar. 9.2-nji koordinatalar əzgertmesine nokatlanç əzgertme diýilýär.

Kanoniki əzgertmeleriň nazaryýetinde wajyp ýeri eýeleýän əzgertme-Ležandranyň əzgertmesi bilen tanyşalyň. Goý n=2s+1 $x_1, x_2, …, x_n$ ŭýtgeýän ululyklaryň ψ funksiýasy berlen bolsun.

$$\psi = \psi\,\phi\,(x_1, x_2, …, x_n), \tag{9.3}$$

Bu funksiýa $x_1, x_2, …, x_{n-1}$ ŭýtgeýän ululyklara gərä əndŭriji diýilýär.

$$y_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (i=1,2,…,n-1) \tag{9.4}$$

baglanşykdan kesgitlenýän täze ŭýtgeýän ululyklary girizeliň. Onda ψ funksiýadan alynan differensial

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n-1} y_i dx_i + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n. \tag{9.5}$$

gərnŭşe eýe bolýar. 4-nji deňlemäni $x_1, x_2, …, x_{n-1}$ kəne ŭýtgeýän ululyklara gərä çəzŭp alarys

$$x_i = x_i(y_1, y_2, …, y_{n-1}, x_n) \quad (i=1,2,…,n-1)$$

Bu täze ŭýtgeýän ululyklardan kəne ŭýtgeýän ululyklara geçmek formulalaryny 9.4-njiniň gərnŭşinde ýazmak bolar. Munuň ŭçin $(y_1, y_2, …, y_{n-1}, x_n)$ ŭýtgeýän ululyklaryň traektoryýa α – nyň kesgitli bahasy degişlidir. Diňe bir traektoryýa α = 0 we α = α_0 bahalar degişlidir.

Berlen trubkada her bir emele getiriji diňe bir nokadyndan geçýän C_1 kontur saýlalyň. C_1 kontur

$$q_{j1} = q_{j1}(\alpha); \ P_{jo} = P_{jo}(\alpha); \ t_o = t_o(\alpha) \tag{9.74}$$

funksiýalar bilen berilýär. Faza traektoriýasynda täsiri hasaplalyň. 11 – e we 12 – ä görä täsiriň bu bahasy α parametre baglydyr.

$$S(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt \tag{9.75}$$

S(α) funksiýanyň doly wariasiýasyny integrirläp taparys:

$$\int_0^{\alpha_o} \delta S(\alpha) = S(\alpha_0) - S(0) = 0 \tag{9.76}$$

$S(\alpha_o) = S(0)$- dygy üçin 10 – njyny peýdalanyp 14 – njini aşakdaky görnüşde ýazyp bolar.

$$\oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^{S} P_j \delta q_j - H\delta t \right] = \oint_{C_o} \left[\sum_{j=1}^{S} P_j \delta q_j - H\delta t \right] \tag{9.77}$$

9.77–nji häsiýet çykarlanda hereketi lagranzyň we Gamyltonyň deňlemelerine boýun egýän ulgam üçin adalatly δS wariasiýanyň aňlatmasy ulandy. Şonuň üçinem umumylaşdyrylan patensiýal güýçli we golonom ideal baglanşykly mehaniki ulgam üçin

$$I = \oint \left\{ \sum_{j=1}^{S} P_j \delta q_j - H\delta t \right\} \tag{9.78}$$

Integralyň ululygy 2S + 1 ölçegi giňişlikdäki hakyky traýektoriýalaryň fazasyndaky trubkany öz içine alýar.
16 – njy integrala Puankare – kartanyň integral inwarianty diýilýär.(Mehanikanyň esasy integral inwarianty diýilýär).

$$x_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \quad (i=1,2,\dots,n-1) \tag{9.6}$$

bolar ýaly ψ funksiýasyny alalyň

$$\psi = \psi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n)$$

ψ funksiýadan alynan doly differensial

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n. \tag{9.7}$$

ψ funksiýa $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ üýtgeýän ululyklara görä öndüriji diýilýär.
$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ üýtgeýän ululyklardan $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ üýtgeýän ululyklara we ϕ funksiýadan ψ funksiýa geçmeklige Ležandranyň özgertmesi diýilýär. Bu özgertmäni

$$\psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - \phi. \tag{9.8}$$

gatnaşygyň kömegi bilen ýerine ýetirip bolar.Mysal hökmünde Lagranžyň $t, q_i, \dot{q}_i$ üýtgeýän ululyklaryndan Gamiltonyň t, q_i, p_i üýtgeýän ululyklaryna geçilişine seredeliň.

Lagranžyň üýtgeýän ululyklaryndan öndürüji funksiýa deregine Lagranžyň funksiýasyny alalyň. L = L($q_i, \dot{q}_i$ t). Lagranžyň deňlemesinden

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

9.8-nji formula görä öndürüji funksiýa $\psi = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{q}_i p_i - L.$, ýagny ψ funksiýa Gamiltonyň funksiýasy bilen gabat gelýär.

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{q}_i p_i - L. \tag{9.10}$$

9.6-njy formulanyň esasynda

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \tag{9.11}$$

kanoniki deňlemeleri aldyk.

Indi kanoniki өzgertmă geçeliň. Umuman t, q_i, p_i ŭýtgeýăn ululyklardan t, q_i', p_i' ŭýtgeýăn ululyklara geçilende 9.11-nji kanoniki deňleme

$$\dot q_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \dot p_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'} \qquad (9.12)$$

gөrnŭşdăki deňlemă geçýăr. Biziň myslymyzda ol aşakdaka syrykýar.

Lagranžyň funksiýasy L = L(q_k, $\dot q_k$ t) satasionar ýagdaýda L = L(q_k, $\dot q_k$). Lagranžyň funksiýasynyň doly differensialy :

$$dL=\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} d\dot q_k \qquad (9.13)$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ önümiň umumylaşdyrylan impulsdygyny (Pi), $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ -nyň $(\dot p_k)$-ny göz – öňünde tutyp doly differensialy aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$dL = \sum_k \dot p_k dq_k + \sum_k p_k d\dot q_k \qquad (9.14)$$

9.14–nji deňlemäniň sag tarapynyň ikinji agzasyny

$$\sum_k p_k dq_k = d\left(\sum p_k \dot q_k\right) - \sum_k \dot q_k dp_k$$

görnüşde ýazarys. Soňra deňlemäniň doly differensiallyny $d\left(\sum_k p_k \dot q_k\right)$ deňligiň çep tarapyna geçirýäris.

$$-d\left(\sum_k p_k \dot q_k\right) + \sum_k p_k d\dot q_k = -\sum_k \dot q_k dp_k,$$

$d\sum_k p_k \dot q_k - \sum_k p_k d\dot q_k = \sum_k \dot q_k dp_k$, alamatyny üýtgedip 9.14–nji deňlemeden alarys:

şeýle hem söňky ýagdaýyň wariýas

$$\delta q_1 = \delta q(t_1) + \dot q(t_1)\delta t_1 \qquad (9.71)$$

Gamiltonyň funksiýasynyň kesgitlemesini peýdalanyp $\left(H = \sum p_i \dot q_i - L\right)$, hemde 9.70–nji we 9.71–njy gatnaşyklardan her bir q_j koordinata üçin peýdalanyp täsiriň doly wariasiýasyny taparys.

$$\left(\sum P_{j1}\delta q_j(t_1) = \sum P(\delta q_1 - \delta q(t_1)); \delta S_1 =\right)$$

$$\sum P_{j1}\delta q_1 - \sum P\delta q_j(t_1) + L_1\delta t_1 = \sum P_{j1}\delta q_1 - H\delta t_1$$

$$\delta S = \sum_{j=1}^{S} P_{j1}\delta q_{j1} - H_1\delta t_1 - \sum P_{j0}\delta q_{j0} + H_0\delta t_0 \qquad (9.72)$$

Bu ýerde H_1 we H_0 – gamyltonýanyň (H) wagtyň t_1 we t_o momentindäki bahalary.

Indi koordinata oklarynda q, P, t ululyklary goýulýan “giňeldilen” faza giňişligi baradaky düşünjäni girizäliň. Görkezilen giňişlikde käbir ýapyk C_0 kontur emele getirýän q_o, P_o, t_o başlangyç ýagdaýly mehaniki ulgamlaryň ansamblyny alalyň. Bu kontury

$q_{jo} = q_{jo}(\alpha)$; $P_{jo} = P_{jo}(\alpha)$; $t_o = t_o(\alpha)$ (j = 1,…S; $0 \le \alpha \le \alpha_o$) (9.73)

funksiýalar bilen bereliň, bu ýerde $\alpha = 0$ we $\alpha = \alpha_o$ bahalara C_o konturyň şol bir nokada degişlidir.

S = 1 ýagdaý üçin ýerine ýetirilendir.

C_o konturyň her bir nokadyndan ulgamyň ýeke , hakyky trektoriýasy geçýär. Bu traektoriýalaryň toplumy trupkany emele getirýär. Bu trupkany emele getirýän her bir

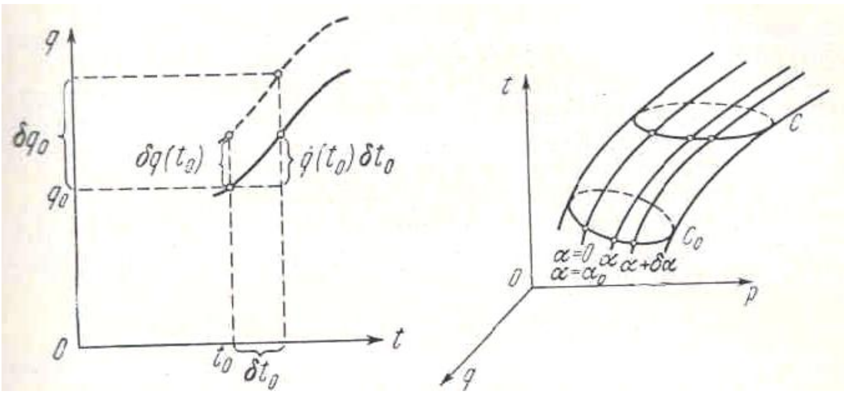
$$\delta S = \sum_{j=1}^{S} P_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{S} P_{j0} \delta q_{j0} \qquad (9.68)$$

Onda doly wariasiýa üçin alarys:

$$\delta S = \sum_{j=1}^{S} P_{j1} \delta q_j(t_1) - \sum_{j=1}^{S} P_{j0} \delta q_j(t_0) + L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 \qquad (9.69)$$

bu ýerde P_{j1} we P_{j0} –t_1 we t_o momentlerdäki impulslar, $\delta q_j(t_1)$ we $\delta q(t_0) - q_j(t)$ - funksiýanyň t_1 we t_o momentlerdäki wariasiýasy. Bu wariasiýalar belli bir wagtdaky wariýasiýalardyr we q_j (t) funksyanyň görnüşiniň üýtgemesi bilen baglanşyklydyr.

$\delta q_j(t_o), \delta q_j(t_1)$ we $\delta q_{jo}, \delta q_{j1}$ wariasiýalaryň arasyndaky gatnaşygy tapalyň(34-nji surat).Ỳönekeýlik üçin bir erkinlik derejeli ýagdaý bilen çäklänýäris.



34–nji surat.

Traýektoriýalaryň biri t_o , q_o nokatdan, beýlekisi $q_0 + \delta q_0$, $t_0 + \delta t_0$ nokatdan geçýär.

Başlangyç ýagdaýyň wariasiýasy,

$$\delta q_0 = \delta q(t_0) + \dot{q}(t_0)\delta t_0 \qquad (9.70)$$

$$dL = \sum_k \dot p_k dq_k - \sum_k p_k d\dot q_k = -\sum_k \dot p_k dq_k - d\left(\sum_k p_k \dot q_k\right) + \sum_k \dot q_k dp_k$$ ýa-da

$$d\left(\sum_k p_k \dot q_k - L\right) = -\sum_k \dot p_k dq_k + \sum_k \dot q_k dp_k$$ başgaça

$$H(p,w,t) = \sum_k p_k \dot q_k - L \qquad (9.15)$$

Dyrnagyň içindäki aňlatma ulgamyň energiýasyny aňlatýar. Ol energiýa koordinatanyň we impulsiň üsti bilen aňladylan.Bu ululyga Gamiltonyň funksiýasy diýilýär.

Gamiltonyň funksiýasyny doly differensirläp alarys :

$$dH = \sum_k \dot p_k dq_k + \sum \dot q_k dp_k \qquad (9.16)$$

Bu ýerden 9.14 – njini göz – öňünde tutup alarys :

$$\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (9.17)$$

Bu deňlemä Gamiltonyň deňlemesi diýilýar. Bu deňleme 2S näbelli funksiýalar (P(t) we q(t)) üçin 2S birinji tertipli differensial denmeller sistemasyndan ybaratdyr. Bu deňlemelere köplenç kanoniki deňlemeler hem diýilýär.

Gelin käbir mysallara ýüzleneliň.Material nokat üçin Gamiltonyň funksiýasyny tapmaly.

Gamiltonyň funksiýasy 9.15– nji deňlemeden görnüşi ýaly : H = Pυ – L, bu ýerde L bir material nokat üçin Lagranjyň funksiýasy :

$$L = \frac{m\vartheta^2}{2}$$, onda

$$H = m\vartheta^2 - \frac{m\vartheta^2}{2} = \frac{m\vartheta^2}{2}$$,sebäbi P = mυ ýa – da $\upsilon = \frac{p}{m}$

Şeýlelikde :

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + U(\vec r). \qquad (9.18)$$

Potensial meýdandaky erkin nokat üçin Gamiltonyň funksiýasy(Dekart,silindrik we sferik koordinatalarda)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p^2{}_y + p^2{}_z\right) + U(x, y.z) \qquad (9.19)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho{}^2 + \frac{p_\varphi{}^2}{\rho^2}p^2{}_y + p^2{}_z\right) + U(\rho, \varphi.z) \qquad (9.20)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r{}^2 + \frac{p_\theta{}^2}{r^2}p^2{}_y + \frac{p_\varphi{}^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r, \theta.\varphi) \qquad (9.21)$$

9.15-de berlen elektromagnit meýdanda hereket edýän erkin zarýad üçin Lagranžyň funksiýasy

$$L = \frac{m}{2}\vartheta^2 + \frac{e}{c}\vec{A}x\vec{V} - e\varphi \qquad (9.22)$$

Goýup we umumylaşdyrylan impulsa geçip

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m\vec{V} + \frac{e}{c}\vec{A} \qquad (9.23)$$

Şol zarýad üçin Gamiltonyň funksiýasyny alarys

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi \qquad (9.24)$$

Potensial meýdandaky erkin nokat üçin Gamiltonyň deňlemesi(Dekart,silindrik we sferik koordinatalarda)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad (9.25)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial yx} \qquad (9.26)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (9.27)$$

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \dot{p}_\rho = \frac{p_\varphi{}^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \qquad (9.28)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \qquad (9.29)$$

$$\delta\int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q})dt = \int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}\right\}dt \qquad (9.66)$$

Wagta görä differensirlemek operasiýasynyň komutatiwligini we belli bir wagtdaky warirlemeden peýdalanyp, ýagny 9.66 –njy deňligiň sag tarapynyň ikinji agzasyny bölekleýin integrirläp we $\delta\dot{q} = \delta\frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_j$ belgilemäni göz önünde tutup alarys

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\sigma = \delta\dot{q}\,dt, \sigma = \delta q, du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dt$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\,dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)\Bigg|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt, \delta S =$$

$$\sum_{j=1}^{S}\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right\}\delta q dt + \sum_{j=1}^{S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Bigg|_{t_0}^{t_1}$$

birinji agzanyň (sag tarapynyň) nola deňdigini göz öňünde tutyp alarys:

$$\delta S = \sum_{j=1}^{S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Bigg|_{t_0}^{t} \qquad (9.67)$$

Kanoniki impulsa geçip $(\rho = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$ alarys

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\sum P_k \overset{\circ}{q}_k + L = -(P_k \overset{\circ}{q}_k - L) = -H \; ; \quad \text{bu ýerde}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + H(t_1\, q_1 P) = \frac{\partial s}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, ... q_s, \frac{\partial s}{\partial q_1}, \frac{\partial s}{\partial q_2}, ... \frac{\partial s}{\partial q_s}, t \right) = 0 \, . \quad (9.64)$$

9.64-nji deňlemä Gamilton – Ýakobiniň deňlemesi diýilýär. Ol birinji tertipli hususy önümli deňlemedir. Bu deňlemäni $S(q_1, q_2, ..., q_s; t)$ funksiýa kanagatlandyrylmalydyr.

§35. Puankare-Kartananyň integral inwarianty.

Puankare – kartanyň inwarianty hem uly baha eýedir. Ol inwariantyň bardygyna ynanmak (göz ýetirmek) üçin täsiriň doly wariasiýasyndan peýdalanýarys $(S(q,t,q_o,t_o))$. Doly wariasiasiýada ulgamyň diňe başlangyç we soňky yagdaýy warirlenmän wagtyň başlangyç we soňky momentleri warirlenýär.

$$S = \int_{t_0}^{t} J(q,q,t)dt$$

Kesgitlemäni peýdalanyp täsiriň doly wariasiasyny taparys:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t} \delta L dt + L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 \qquad (9.65)$$

bu ýerde L_1 – t_1 wagtdaky L funksiýanyň bahasy, L_0 – t_0 wagtdaky L funksiýanyň bahasy, δt_1 we δt_0 – wagtyň soňky we başky momentleriniň wariasiýasy.

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}, \dot{p}_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (9.30)$$

9.15-de berlen elektromagnit meýdanda hereket edýän erkin zarýad üçin Gamiltonyň deňlemesi(dekart koordinatalarda)

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)$$

$$\dot{p}_x = \frac{e}{mc}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\dot{p}_y = \frac{e}{mc}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} - e\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (9.31)$$

$$\dot{p}_z = \frac{e}{mc}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - e\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

§31Rausyň funksiýasy.

Käbir ýgdaýlarda, täze üýtgeýan ululyklara geçilende hemme umumylaşdyrylan tizlikleri umpulsa çalyşman, diňe käbirini çalyşsaň amatly bolýar. Bu geçiş hem edil Lagranžyň funksiýasyndan Gamiltonyň funksiýasyna geçilişi ýaly amala aşyrylýar. Geliň üýtgeýän ululyklar bolan q, $\varsigma, q, \dot{\varsigma}$ - den üýtgeýan ululyklar bolan q, $\varsigma, p, \dot{\varsigma}$ - geçeliň. Bu ýerde P ,q koordinatanyň degişli impulsy (umumylaşdyrylan). Biziň mysalymyz üçin Lagranjyň funksiýasy

$$L = L(q, \varsigma, \dot{q}, \dot{\varsigma}) \qquad (9.32)$$

Lagranjyň funksiýanyň differensiäly :

$$d\,L = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{d\,L}{d\,\dot{q}}d\,\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}}d\,\dot{\zeta} \qquad (9.33)$$

ýa-da

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{P}, \; \frac{d\,L}{d\,\dot{q}} = P$$ - göz öňünde tutyp alarys.

$$d\,L = \dot{P}\,d\,q + P\,d\,\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{d\,L}{d\,\dot{\zeta}} d\,\dot{\zeta} \qquad (9.34)$$

$d\,(P\cdot\dot{q}) = Pd\,\dot{q} + \dot{q}\,dP$ ýa-da $Pd\,\dot{q} = d(P\dot{q}) - \dot{q}\,dP$ bu aňlatmany ýokarda ýerine goýup alarys

$$d\,L = \dot{P}\,dq + d\,(P\,\dot{g}) - \dot{g}\,dP + \frac{\partial L}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \cdot d\,\dot{\zeta} \quad \text{ýa – da}$$

$$d\,(L - P\,\dot{q}) = \dot{P}\,dq - \dot{q}\,dP + \frac{\partial L}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \cdot d\,\dot{\zeta} \qquad (9.35)$$

başgaça

$$d\,R = -\dot{P}\,dq + \dot{q}\,dP - \frac{\partial L}{\partial \zeta} d\zeta - \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \cdot d\,\dot{\zeta} \qquad (9.36)$$

bu ýerde $R(q, P, \zeta, \dot{\zeta}) = P\,\dot{q} - L$ - Raussyň funksiasy (9.37)

Raussyň funksiýasynda tizlik $\dot{q}$ p impulsiň üsti bilen aňladylandyr. Şol bir wagtda tizlik $\dot{\varsigma}$ üýtgemän galdy. ($dR = -\dot{P}\,dq + \dot{q}\,dP - \frac{\partial L}{\partial \zeta} d\zeta - \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} d\,\dot{\zeta}$)

Raussyň funksiýasyny differensialyndan alarys:

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial R}{\partial q} \Bigg| \quad \frac{\partial L}{\partial \zeta} = -\frac{\partial R}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\zeta}} \qquad (9.38)$$

Soňky deňlemäni ς, koordinata üçin Lagranžyň deňlemesine goýup alarys :

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\right) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\zeta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0 \qquad (9.39)$$

Şeýlelikde , Rausyň funksiýasy q koordinata görä Gamiltonynky ýaly, ς, kordinata görä bolsa Lagranžyňky ýaly

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q_k^{dt} + P_k \delta q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \delta q\, dt \right) \quad \text{ýa-da}$$

$$\delta S = P_k \delta q_k + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \right] \delta q_k\, dt \qquad (9.61)$$

Hakyky traýektoriýanyň Lagražynyň deňlemesini kanagatlandyrýandygy üçin integralyň aşagyndaky aňlatma nola deňdir, ýagny

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0. \quad \text{Onda}$$

$\delta q = P_k \delta q_k$. Bu ýerden

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (9.62)$$

Bu ýerde P_k – wagtyň t momentindäki impulsydyr.

Täsirden umumylaşdyrylan koordinatalara görä alynan hususy önüm degişli umumylaşdyrylan impulsa deň.

Indi integrirlemegiň ýokary çägi üýtgeýär diýeliň, ýagny S=S (t). Onda $\frac{d\,s}{dt} = L$ (9.63)

Şeýle hem 2-nji deňlige görä

$$\frac{d\,s}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial s}{\partial t} + \sum P_k \mathring{q}_k$$

9.63-njini göz öňünde tutyp alarys.

$$L = \frac{\partial s}{\partial t} + \sum P_k \mathring{q}_k \qquad -\frac{\partial s}{\partial t} = \sum P_k \mathring{q}_k - L \quad \text{ýa-da}$$

Ulgamyň $q^{(2)}+б\,q$ nokatdan geçýän traýektoriýasynyň S_1 täsiri $q^{(2)}$ nokatdan geçýän traýektoriýasynyň S täsirinden

$$б\,S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_K\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}б\,q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}б\,\dot{q}_k\right)dt \qquad (9.58)$$

ululyga tapawutlanýar. Bu ýerde $б\,q_k$ - şol bir wagt üçin iki traýektoriýa üçin alynan q_k ululyklaryň tapawudy. $б\,\dot{q}_k$ - wagtyň t momentindäki $\dot{q}_k$ ululygyň tapawudy. 9.58-njiniň ikinji agzasyny bölekler usuly bilen integrirläliň.

$$d\,u=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,L}{d\dot{q}}\right)dt, u=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}};\ v=á\,q, d\,v=d\,\overset{\circ}{q}\,dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\underbrace{б\,\dot{q}\,dt}_{d\,v}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}б\,q\int_{t_1}^{t_2}-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)б\,q\,dt \qquad (9.59)$$

Hakyky traýektoriýa üçin $\frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{q}_k}=P_k$ - umumylaşdyrylan impuls. Iki traýektoriýanyň başlangyjy gabat gelýär. Şonuň üçin $á\,q_k\,(t_1)=0$. Onda $б\,q_k\,(t_2)$ ýöne $б\,q_k$ diýip billeýäris. Onda 9.59-njidäki 1-nji agza $P_kб\,q_k$ bolar. 9.59-njini ýazarys.

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{q}}б\,\dot{q}\,dt=P_kб\ q_k-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)б\,q\,dt \qquad (9.60)$$

9.60-njyny 9.58-njide ýerine goýup alarys.

bolýar. Umumy kesgitlemä görä ulgamyň energiýasy: $E=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L$. Biziň mysalymyz üçin ýa-da $E=\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\dot{\zeta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}}-L$ 9.37-njini we 9.38-njini şu ýerik goýup alarys:

$$E=P\dot{q}-L-\dot{\zeta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}}=R-\dot{\zeta}\frac{\partial R}{\partial \dot{\zeta}} \qquad (9.40)$$

§32. Puassonyň ýaýlary

Umumylaşdyrylan potensially, golonom we ideal baglanşykly mehaniki ulgamyň hereketi dissipatiw güýçler ýok wagtynda Gamiltonyň

$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i}:\dot{P}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ görnüşdäki deňlemesine boyun egýär. bu ýerde H=$\sum_i P_i\dot{q}_i-L$ -Gamiltonyň funksiýasy. Ol H=H(t,q_i,p_i). Bu ýerde L-Lagranžyň funksiýasy. Ol $L=T_k-U_p$ görnüşde ýazylýar. Kanoniki deňlemeleriň 1-nji integraly diýip kanoniki üýtgeýän ululyklaryň (q_i we p_i) islendik bahasynda hemişelik galýan käbir f(t,q_i, p_i) funksiýa aýdylýar. Bu funksiýanyň hereketin integraly bolmagynyň şertini gözläliň .

Hereketiň integraly diýip ulgamyň hereketi wagtynda öz bahasyny hemişelik saklayan funksiýalara aýdylýar. Başgaça hereketiň birinji integral hem diýilýär.

Goý f(t,q_i, p_i)=hemişelik. Onda bu funksiýadan wagta görä doly önüm nola deňdir, ýagny:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}=0$$

Gamiltonyň deňlemesini göz öňünde tutup alarys

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}=0 \text{ ýa-da}$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left[f,H\right]=0\,, \qquad (9.41)$$

bu ýerde

$$\left[f,H\right]=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$$

f funksiýanyň hereketiň 1-nji integraly bolmak şerti

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left[f,H\right]=0 \text{ görnüşe gelýär.}$$

Şeýlelikde f funksiýasynyň hereketiň birinji integraly bolmagy üçin şol funksiýanyň Gamiltonyň funksiýasy bilen emele getiren Puassonyň ýayy nola deň bolmaly

Puassonyň ýaýlarynyň häsýetleri.

$1.\,[\varphi,\phi]=-[\phi,\varphi]$, $\quad 2.\,[\varphi,\varphi]=0 \quad 3.\,[(\varphi_1+\varphi_2),\phi]=[\varphi_1\phi]+[\varphi_2,\phi]$,

$4.\,[(\varphi_1,\varphi_2),\phi]=\varphi_1[\varphi_2,\phi]+\varphi_2[\varphi_1,\phi] \quad 5.\,\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\phi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\phi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]$

Eger $\varphi we \phi$ funksiýalaryň ýerine kanoniki üýtgeýän ululyklar alynsa

onda $\quad 1.\left[q_i,\phi\right]=\frac{\partial\phi}{\partial p_i}, \quad 2.\left[p_i,\phi\right]=-\frac{\partial\phi}{\partial q_i} \quad 3.\left[q_i,q_k\right]=0$

$4.\left[p_i,p_k\right]=0 \quad 5.\left[q_i,p_k\right]=\delta_{ik}\ :6.\left[\varphi,c\right]=0$

Bu ýerde c hemişelik ululyk.

Geliň $\left[q_i,\phi\right]=\frac{\partial\phi}{\partial p_i}$, ýayy açalyň. $\left[q_i,\phi\right]=\frac{\partial q_i}{\partial q_i}\frac{\partial\phi}{\partial p_i}-\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}$:

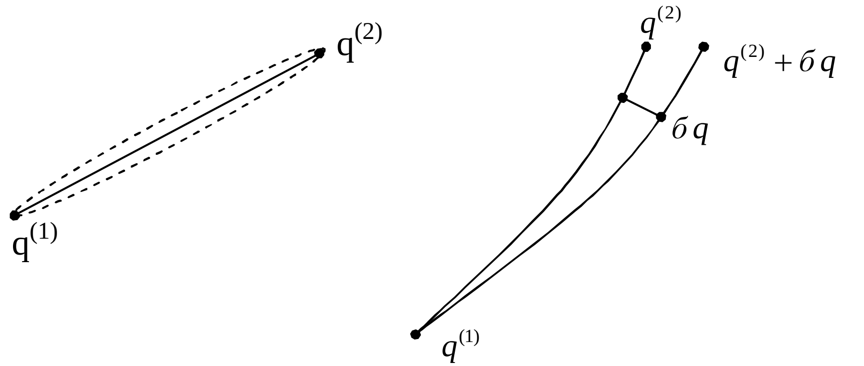
$\frac{\partial q_i}{\partial p_i}=0$ bolýandygy sebäpli $\left[q_i,\phi\right]=\frac{\partial\phi}{\partial p_i}$ bolar

$$\left[p_i,\phi\right]=\frac{\partial p_i}{\partial q_i}\frac{\partial\phi}{\partial p_i}-\frac{\partial p_i}{\partial p_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}=\frac{\partial\phi}{\partial q_i}$$

Gamilton – Ýakobiniň deňlemesi.

Ulgamyň hereketiniň hakyky traýektoriýasy tapylanda

$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$ (1) -täsiri warirlemeklik $q_k(t_1)=q_k^{(1)}$ we $q_k^{(t_2)}=q_k^{(2)}$ ululyklylaryň birmeňzeş bahalaryndaky ýakyn traýektoriýalaryň S-ni deňeşdirmeklikden durýar.



33-nji surat

Bu ýagdaý 33-nji a suratda aýdyň göz öňüne getirip bolar. Traýektoriýalaryň diňe S-i minimumy hakyky herekete jogap berýär(suratda ol tutuş çyzyk bilen berlen.).Indi täsir S-iň $q^{(2)}$ üýtgemeginde(wagt t_2 hemişelik) we t_2 wagtyň üýtgemegindäki ösüni alyp barşyna seredeliň. Onda täsire $S=S(q_k)t)$ funksiýa ýaly serederis. $q^{(2)}$ nokadyň töwereginde koordinatasy $q^{(2)}+á\,q$ bolan nokady alalyň. Bu nokada ulgam şol bir t_2 wagtda düşüp bilýär(33-nji b surat).

Kesgitlemä görä täsiriň wagtdan alnan hususy önümi (traýektoriýanyň boýuna) degişli impulsa deňdir.

Başga bir tarapdan täsir S-i koordinatanyň we wagtyň funksiýasy ýaly seredip alarys

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \tag{9.51}$$

Soňky iki deňlemäni deňeşdirip alarys

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i \tag{9.52}$$

ýa-da gutarnykly

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \tag{9.53}$$

Şeýlelikde integrirlemäniň ýokary derejesi üçin doly deferensialy

$$dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt \tag{9.54}$$

Şeýlelikde berlen nokatdan giňişlige pytraýan bölejikleriň dessesi üçin bir näçe umumy kanunalaýyklyklary goýup boljak. Bu kanunalaýyklyklary geometrik optika öwrenýär.Täsiriň minumumlygynyň şertinden Gamiltonyň deňlemesini alyp bolýar.Bir koordinata we bir impuls bar diýip alarys.

$$\delta S = \int \left\{ \delta p dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p dt \right\} \tag{9.55}$$

ýa-da sag tarapdaky ikinji integraly bölekler boýunça integrirläp alarys

$$\delta S = \int \delta p\left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p\delta q\,| - \int \delta q\left(dp + \frac{\delta H}{\delta q} dt \right) \tag{9.56}$$

Integrirlemegiň araçäklerinde $\delta q = 0$ hasap edip ikinji agzany deňlemeden aýyrýarys. Galan agzalar nola deň bolýar haçanda integrallaryň aşagyndaky (dyrnakdaky) aňlatmalar nula deň bolanda. Onda alarys.

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt \tag{9.57}$$

Geliň mysala ýüzleneliň:

$$\left[x, M_x\right] = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial M_x}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial p_x}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial M_x}{\partial p_y} - \frac{\partial x}{\partial p_y}\frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial M_x}{\partial p_z} - \frac{\partial x}{\partial p_z}\frac{\partial M_x}{\partial z}$$

Bu ýerde $M_x = yp_z - zp_y$. Onda

$$\frac{\partial M_x}{\partial p_x} = 0 : \frac{\partial M_x}{\partial p_y} = -z : \frac{\partial M_x}{\partial z} = y : \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 : \frac{\partial M_x}{\partial y} = p_z : \frac{\partial M_x}{\partial z} = -p_y$$

Şeýlelikde $\left[x, M_x\right] = 0$

Biziň sredýänimiz Puassonyň klassik dyrnagy. Kwant mehanikasynda Puassonyň kwant dyrnagy bardyr.

§33. Kanoniki özgertmeler

Umumylaşdyrylan koordinata (q) bolup, giňişlikde ulgamyň ýagdaýyny kesgitleýän islendik s ululyklar bolup bilerler. Bu erkin saýlamaklyga Lagranžyň deňlemesiniň formal görnüşi bagly däldir.Bu ýagdaýda Lagranžyň deňlemesi özgertmä inwariantdyr diýilýär.Özgertmeden alnan täze koordinatalar $Q_1, Q_2, \ldots$.. öňki $q_1, q_2, \ldots$ koordinatalaryň funksiýalardyr.Ýagny $Q_i = Q_i(q,t)$. Bu özgertmä nokatlanç özgertme hem diýilýär. Edil Lagranžyň deňlemesiniň bolşy ýaly Gamiltonyň deňlemesi hem bu özgertmede öz formasyny saklaýar.Gamiltonyň usuly has giň özgertmä inwariantdyr. Şeýle-de bolsa her bir özgertmede deňlemeleriň öz formasyny saklamagy üçin özgertme belli bir şertleri kanagatlandyrmaly.

Gamiltonyň deňlemesi täze ululykda aşakdaky görnüşe eýedir:

$$Q = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}\partial H' \tag{9.42}$$

Bu ýerde $H^1(P,Q)$.- Gamiltonyň täze funksiýasy. Şeýle özgertmelere kanonik özgertmeler diýilýär.

Kanonik özgertmäniň formulalaryna aşakdaky ýol bilen gelip bolar:

Iň kiçi täsir prinsipinden bilýäris

S= $\int$ Ldt ýa-da $\delta\rho = \delta\int(\sum$ $P_i dq_i$-Hdt)=0

Täze üýtgeýän ululyklar üçin hem iň kiçi täsir prinsipi ýerine ýetmeli. Ýagny

$$\delta\int(\sum P_i dQ_i - H^1 dt)=0 \tag{9.43}$$

Eger integralyň aşagyndaky aňlatmalar biri-birinden wagtyň,koordinatanyň we impulsyň funksiýasy bolan erkin F funksiýanyň doly differensialy ululygyna tapawutlanýan bolsalar iki prinsip biri-birine ekwiwalentdirler diýilýär.Şeýlelikde

$$\sum P_i dq_i - Hdt = \sum P_i dQ_i - H^1 dt + dF \tag{9.44}$$

F – funksiýa özgertmäni öndürýän funksiýa diýilýär.Alan gatnaşygymyzy täzeçe ýazyp

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H)dt \tag{9.45}$$

Bu ýerden $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}, P_i = \dfrac{\partial F}{\partial Q_i,}, H' = H + \dfrac{\partial F}{\partial t}$ (9.46)

Häzir özgerdiji funksiýany q,Q we t üýtgeýän ululyklaryň üsti bilen hem aňladyp bolýar.

$$d\left(F + \sum P_i Q_i\right) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt \tag{9.47}$$

Deňligiň çep tarapyndaky differensialyň belgisiniň aşagyndaky aňlatma q we P ululyklaryň üsti bilen aňladylýar.Ol funksiýany $\Phi(q, P, t)$ bilen belläp alarys:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{9.48}$$

Şeýle meňzeşlikde P we Q ýa-da p we P üýtgeýän ululykdan bagly öndüriliş funksiýanyň üsti bilen aňladylan kanonik özgertmek formulalaryna hem geçmek bolar.

§34. Gamilton –Ŷakobiniň deňlemesi

Biziň eýýäm bilişimiz ýaly mehaniki ulgamyň hereketiniň kanunyň mümkingadar umumy aňlatmasy iň kiçi täsir prinsipi tarapyndan berilýär.Ol prinsipe görä her bir mehaniki ulgam

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{dt}$$

görnüşli kesgitli funksiýa bilen häsýetlendirilýär.

Mehaniki sistema şeýle hereket edýär, ýagny başlangyç we soňky ýagdaýlaryň arasynda $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{dt}$ integral mümkin bolan iň kiçi baha eýe bolýar.Bu integrala täsir diýip aýdylýar. q(t_1) we q(t_2)nokatlaryň arasyndaky traýektoriýalardan diňe biri hakyky herekete degişlidir.Ol traýektoriýa üçin S integral iň kiçi baha eýe bolýar.

Biz häzir S-i hemmesiniň başlangyjy bir nokatda, ýagny q(t_1) bolup t_2 wagtda dürli koordinatalardan geçýän traýektoriýalar üçin deňeşdirmekçi.

Bu traýektoriýadan şoňa ýakyn bolan beýleki traýektoriýa geçilende S täsiriň üýtgemesi aşakdaky aňlatma bilen berilýär.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\,|^{t_2}_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

Hakyky hereketiň traýektoriýasynyň Lagranžyň deňlemesini kanagatlandyrýanlygy üçin deňlemedäki integral nula öwrülýär($\int_{t_1}^{t_2}\left(\dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0$).Birinji agzanyň aşaky çäkde $\delta q(t_1) = 0$ -dygyny göz öňünde tutup we$\delta q(t_2) = \delta q$, şeýle hem $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$ diýip alarys $\delta S = p\delta q$ ýa-da erkinligiň islendik derejesi üçin

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i, \tag{9.49}$$

bu ýerden

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \tag{9.50}$$

15-nji , 16-njy we 19-njy deňlemeleri ulanyp we alnan deňlemeleriň hemme agzalaryny ΔV-e gysgaldyp tutuş gurşawyň hereketiniň deňlemesine geleris:

$$\Delta m \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\Delta V \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^{e}; \; \vec{F}^{e} = \oint\limits_{\Delta\sigma} d\vec{F}^{\sigma} + \vec{f}\Delta m$$

$$= \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}\Delta V + \vec{f}\rho\Delta V \qquad (10.41)$$

$$\rho\Delta V \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}\Delta V + \vec{f}_i\rho\Delta V \quad \text{ýa-da} \quad \rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \qquad (10.42)$$

Bu ýerde $\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$ tizliginiň wagta görä doly önümi. Şeýlelikde, impulsyň üýtgeme kanuny tutuş gurşawyň hereketiniň deňlemesine getirdi.

II bölüm. Tutuş gurşawlaryň mehanikasy

X bap. Tutuş gurşawlaryň mehanikasynýň esasy düşünjeleri we kanunlary.

§36. Fiziki tükeniksiz kiçi bölejik.

Mehanikanyň esasy obýektleriniň biri örän köp molekulalardan durýan ulgamlardyr. Bular ýaly ulgam giňişlikde tutuş gurşaw hasap edilýär.Bu ulgamlaryň molekulalary dykyz ýerleşendirler. Bular ýaly ulgamlaryň hereketi üçin klassiki mehanikanyň degişli deňlemelerini ýazyp bolar. 1 sm^3 howadaky molekulalaryň hereketiniň adaty atmosfera basyşynda we otag temperaturasynda deňlemeleri 10^{19} bolar. Şonça deňlemeleri integrirlemeli bolar. Şonuň üçinem tutuş gurşawyň hereketini takmynan beýan etmeklik bilen çäklenýärler. Şeýle maksat bilen tutuş gurşawyň mehanikasy öwrenilende tükeniksiz kiçi fiziki bölejigiň hereketi öwrenilýär.

Tükeniksiz kiçi fiziki bölejigiň molekulalarynyň ΔN sany 1-den kän uludyr we tutuş gurşawyň molekulalarynyň N sanyndan kän kiçidir, ýagny ΔN« N.

Tükeniksiz kiçi bölejik tükeniksiz kiçi ΔV göwrümi eýeleýär. Bu göwrüm öz içine ýeterlik uly mukdarda molekulalary alýar we şol bir wagtda makro parametrleri duýarlyk üýtgär ýaly göwrümden kän kiçi bolmalydyr.

Tükeniksiz kiçi bölejigiň giňişlikdäki ýagdaýy wagtyň t pursatynda massa merkeziniň radius-wektory bilen kesgitlenýär. Bölejigiň tizligi onuň radius-wektory bilen

$$\vec{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (10.1)$$

gatnaşykdadyr. Bölejigiň tizlenmesi massa merkeziniň radius-wektory bilen

$$\vec{W} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \qquad (10.2)$$

gatnaşykdadyr.

Fiziki meýdanyň nazaryýeti

Tutuş gurşawyň ýene bir wajyp düşünjesi meýdan düşünjesidir. Meýdan diýip giňişligiň nokadynyň we wagtyň funksiýasy bolan islendik fiziki ululyga düşünilýär. Meýdanlar skalýar , wektor we tenzor bolup bilýärler. Şol bir ýerde birnäçe meýdanyň bolmagy hem mümkin. Atmosferada skalýar meýdanlar bolan temperatura meýdany, basyş meýdany we wektor meýdanlar bolan howanyň tizliginiň meýdany, elektrik we magnit meýdany, bütin dünýä dartylma meýdany bolýar.

Haýsy hem bolsa bir fiziki hadysa bolup geçýän giňişlige fiziki meýdan diýilýär.

Goý, bize haýsy hem bolsa bir φ skalýaryň meýdany berlen bolsun. Bu diýildigi belli bir giňişligin hemme nokatlary üçin φ-iň bahalary berlen diýildigidir. φ-e koordinatanyň funksiýasy (φ=φ(x,y,z)) diýilýär. Kä halatlarda φ funksiýany potensial diýip atlandyrýarlar. φ-iň skalýar temperaturanyň, basyşyň, suwuklygyň dykyzlygynyň bahalaryna eýe bolmagy mümkin. Birmeňzeş baha eýe bolan giňişligiň hemme nokatlaryna birmeňzeş potensially üst ýa-da ekwipotensial üst diýilýär.

Skalýar meýdanyň gradiýenti wektor meýdanydyr.

Giňişlikde berlen meýdanda O nokadyň üstünden φ ekwipotensial üsti geçireliň. Onuň golaýyndan φ+dφ ekwipotensial üsti hem geçireliň. Şu ýerden

$$\vec{G} = \frac{d\varphi}{dn} \qquad (10.3)$$

wektor alarys. Bu wektora skalýar meýdanyň gradiýenti diýilýär.

$$\vec{G} = \nabla\varphi = grad\varphi \qquad (10.4)$$

$$\vec{F}^{\,e} = \oint_{\Delta\sigma} d\vec{F}^{\sigma} + \vec{f}\Delta m \qquad (10.37)$$

bu ýerde $d\vec{F}^{\sigma}$ bölejigiň üstüniň elementar meýdanyna goýlan üst güýjüdir; $\vec{f}$ -birlik massa düşýän göwrüm güýjüdir. $d\vec{F}^{\sigma}$ güýç $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$ wektoryň ugruna baglydyr hem-de $d\sigma$ meýdanyň ululygyna baglydyr. Başgaça aýdanyňda, üst güýji aşakdaky görnüşe eýedir diýip guman edilýär

$$dF^{\sigma}{}_i = P_{ik} d\sigma_k \qquad (10.38)$$

ýagny onuň ululygy P_{ik} ululyklaryň toplumy bilen kesgitlenýär we $d\sigma$ wektoryň komponentlerine baglydyr($d\sigma_k = \cos(\vec{n}\ ,\vec{n}_k)d\sigma$). Bu ýerde cos($\vec{n}\vec{n}_k$) $\vec{n}_k$ ortly koordinat oky bilen $\vec{n}$ ortyň arasyndaky kosinus burçydyr. P_{ik} ululyklaryň toplumyna dartgynlylygyň tenzory diýilýär. Bu tenzoryň düzüjileri $\vec{r}wet$ -niň funksiýalarydyr we gurşawda dartgynlylygyň meýdanyny kesgitleýär.

Dartgynlylygyň tenzorynyň P_{ik} komponenti birlik meýdana täsir edýän güýjüň i-nji düzüjisini aňladýar. Meýdan x_k oka perpendikulýardyr. x oka perpendikulýar meýdana (şol meýdanyň $d\sigma$ wektory x okuň ugruna ugrukdyrylan)

$dF_i^{\sigma} = P_{ix} d\sigma_x$ güýç täsir edýär. Degişlilikde ol güýjüň proeksiýalary

$$dF_x^{\sigma} = P_{xx} d\sigma_x,\ \ dF_y^{\sigma} = P_{yx} d\sigma_x,\ \ dF_z^{\sigma} = P_{zx} d\sigma_x. \qquad (10.39)$$

Bu ýerde P_{xx} güýjüň dykyzlygynyň normal düzüjisi, P_{yx}, P_{zx} - galtaşýan düzüjileri.

Ostrogradskiniň teoremasyny ulanyp we bölejigiň kiçidigini hasaba alyp berlen bölejige täsir edýän jemleýji üst güýjüni özgerdeliň

$$\oint_{\Delta\sigma} dF_i^{\sigma} = \oint_{\Delta\sigma} P_{ik} d\sigma_k = \int_{\Delta V} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} dV = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}\Delta V\,. \qquad (10.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_{\sigma_0} \rho\vec{V} d\sigma_0 \qquad (10.35)$$

V_0 göwrümdäki gurşawyň massasynyň üýtgemek tizligi şol göwrümi gurşaýan σ_0 üstden wagt birliginde guýulýan we dökülýän bölejikleriň massalarynyň tapawudyna deňdir. $\rho\vec{V}$ wektora gurşawyň akymynyň dykyzlygy diýilýär

Impulsyň üýtgemek kanuny.

Δm massaly we ΔV göwrümli bölejigiň impulsynyň üýtgemek kanunyny ýazalyň:

$$\Delta \mathrm{m}\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^e \qquad (10.36)$$

Bu ýerde $\vec{V}$ massa merkeziniň tizligi ýaly hasaplanýar, $\vec{F}^e$ bölejige goýlan daşky güýçleriň jemi. Bu güýç bölejigiň ýagdaýyna we wagta bagly, ýagny $\vec{F}^e(\vec{r},t)$. $\vec{F}^e$-güýç birinjiden gurşawyň molekulalarynyň özara täsirinden, ikinjiden hemme gurşawa degişli güýç meýdanlaryndan ybaratdyr. Molekulalaryň özara täsiriniň radiusyny örän kiçi hasap etsek , onda fiziki tükeniksiz kiçi bölejigiň berlen bölejige edýän täsir güýji şol bölejigiň ýuka üst gatlagynda duýular. Mehanikada şol üst gatlagynyň galyňlygyny hasaba almaýarlar.Goňşy bölejikleriň bir-birine edýän täsirini üst güýçleri hasap edýärler. Daşky güýç meýdanlary bolsa ΔV göwrümdäki molekulalaryň hemmesine deň täsir edýär diýip hasap edýärler. Şonuň üçin ol güýçlere göwrüm güýçleri diýilýär. Eger ol güýçler bölejigiň massasyna proporsional bolsa onda ol güýçlere massa güýçleri diýilýär. Şeýle güýçlere grawatasion güýçler, elektromagnit güýçler we inersiýa güýji girýär. Inersiýa güýji, gurşawyň inersial däl hasaplaýyş ulgamyna görä, hereketi öwrenilende ýüze çykýar. Şeýlelikde, tutuş sredanyň mehanikasynda berlen bölejige goýlan güýçleriň hemmesiniň jemi aşakdaky ýaly aňladylýar diýip guman edilýär.

Bu ýerde φ skalýar meýdany $\vec{G}$ wektor meýdany emele getirýär.

Fizikada, köplenç, wektor ululygyň ösmegine däl-de tersine, kemelmegine degişli meseleler çözülýär. Meselem, hereket edýän suwuklygyň tizligi basyşyň pes tarapyna ugrukdyrylan,ýylylyk akymy temperaturanyň pes tarapyna ugrukdyrylan. Onda $\vec{V} = -grad\varphi = -\nabla\varphi = \frac{d\varphi}{dn}$

Maddanyň massasynyň dykyzlygynyň meýdany $\rho = \rho(\vec{r},t)$, tükeniksiz kiçi orun üýtgetmegiň meýdany: $d\vec{r} = \vec{u}(\vec{r},t)$, tizligiň meýdany: $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r},t)$

Temperaturanyň wagta görä üýtgemegi

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{X_i} + V_i\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad (10.5)$$

bu ýerde $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{X_i}$ – giňişligiň berlen nokadynda temperaturanyň wagt birliginde üýtgemegi, $V_i\frac{\partial T}{\partial x_i}$- konwektiw önüm(giňişligiň başlangyç nokadyndan dx aralykda ýerleşen nokadynyň çägindäki temperaturanyň üýtgemegi).

§37. Kiçi bölejigiń deformasiýasy.

Gurşawyň kiçi bölejiginiň ornunyň üýtgemegini öwreneliň. Bu maksat bilen bölejigiň ýakyn iki (1) we (2) ýagdaýyna seredeliň(35-nji surat).

Bölejigiň islendik A we O' nokatlarynyň radius-wektorlary $\bar{r}$ we $\bar{r}_{0'}$

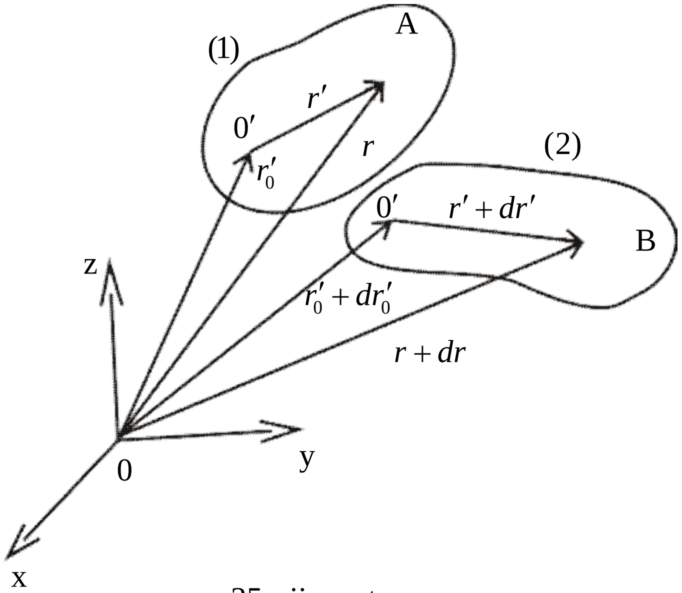
$$\bar{r} = \bar{r}_{0'} + r' \qquad (10.6)$$

gatnaşyk bilen baglanyşyklydyr. Bu ýerden A nokadyň ornunyň $d\bar{r}$ üýtgemegi

$$d\bar{r} = d\bar{r}_{0'} + d\bar{r}' \qquad (10.7)$$

aňlatma bilen kesgitlenýär. Başga bir tarapdan $d\bar{r}$ we $d\bar{r}_{0'}$ orun üýtgemeler $\bar{u}$ funksiýanyň giňişligiň $\bar{r}$ we $\bar{r}_{0'}$ nokatlardaky bahalarydyr:

$$d\bar{r} = \bar{u}(\bar{r}, t); d\bar{r}_{0'} = \bar{u}(\bar{r}_{0'}, t) \qquad (10.8)$$



35-nji surat

Şeýlelikde, A nokadyň merkezi 0′ nokatda bolan öňe bolan hereket edýän, hasaplaŷyš ulgamyna göra orun üýtgetmesi $d\bar{r}' = d\bar{r} - d\bar{r}_{0'} = \bar{u}(\bar{r}, t) - \bar{u}(\bar{r}_{0'}, t)$ deňdir. u($\bar{r}$,t) funksiýany 0′ nokatda hatara dargadyp, we $\bar{r}^{\mathbf{1}}$-iň ýeterlik kiçi ululykdygyny(böl ejigiň özi kiçi ululyk) göz öňünde tutup

$$d\bar{r}^{\mathbf{1}} = \mathbf{(}\bar{r}' grad\,\mathbf{)}\bar{u} \qquad (10.9)$$

alarys.10.9-njy aňlatmany tenzor görnüşde ýazalyň ($x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ we $u_x=u_1$,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ diV } \vec{V} = 0 \qquad (10.29)$$

Bu gatnaşyga üznüksizligiň deňlemesi diýilýär.

Başga bir tarapdan bölejigiň ρ ($\vec{r}$,t) dykyzlygynyň doly önümini ulanyp
10.29-njy gatnaşygy aşakdaky görnüşde alarys.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{r}}\frac{d\bar{r}}{dt} \text{ ; ýa-da } \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{\bar{r}}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{r}} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\dot{\bar{r}} grad)\rho$$

Onda

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{V} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\dot{\bar{r}}\ grad)\ \rho + \rho div\vec{V} = 0 \qquad (10.30)$$

10.30-njy gatnaşyk nazary mehanikada köp ulanylýar.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{V} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V}grad\rho + \rho div\vec{V} \qquad (10.31)$$

Tenzor aňlatmasynda üznüksizlik deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe bolýar.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\vartheta_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (10.32)$$

Giňişligiň kesgitli V_0 göwrümine seredeliň. Şol giňişlik üçin

$$\int_{V_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{V}\right)dV = 0 \qquad (10.33)$$

Ostorgradskiniň formulasyny ulanyp diwergensiýadan alnan göwrüm integralyny üst integralyna öwreliň .

$$\int_{V_0}\left(div\rho\vec{V}\right)dV = \oint_{\sigma_0}\rho\vec{V}d\sigma_0 \qquad (10.34)$$

Bu ýerde σ_0 V_0 göwrümi çäklendirýän ýapyk üstüň meýdany, dσ_0 - üstüň elementi, absolýut ululygy boýunça elementiň üstüniň meýdanyna deň bolan wektordyr. Onda

$$\int_{V_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV = -\oint_{\sigma_0}\rho\vec{V}d\sigma_0 \quad \text{ýa-da}$$

Deformasiýa tenzoryny bilip tutuş gurşawyň kiçi böleginiň uzynlygynyň üýtgemesini , deformasiýanyň tizliginiň tenzoryny bilip ol üýtgemäňiň tizligini kesgitläp bolar.

Mysal: 0′A material kesimiň uzynlygynyň göräli üýtgemesini tapalyň. Ilki ýagdaýda $r' = |\bar{r}'|$ ikinji ýagdaýda üýtgeme dr'. $\bar{r}'d\bar{r}' = r'dr'$ deňligi peýdalanyp, şeýle hem $d\bar{r}' = [d\bar{x}, \bar{r}'] + grad_{2'}\psi$ aňlatmany we 10.17, 10.18 deňlikleri hasaba alyp alarys. $\frac{dr'}{r'} = \varepsilon_{ki} a_k a_i$. Bu ýerde $a_i = \frac{x_i'}{r'}$ i-nji koordinat oky bilen $\vec{r}$ – wektoryň arasyndaky kosinus burç.

§38. Massanyń saklanmak kanuny, impulsyň we impulsyň momentiniń üýtgemek kanuny.

Dykyzlygyň ρ ($\vec{\imath}$,t) we tizligiň $\vec{\upsilon}(\vec{\imath}, t)$ meýdanlary massanyň saklanmak kanunyndan gelip çykýan deňleme bilen özara baglanyşykdadyr. Bu ýagdaýa göz ýetirmek üçin Δm massaly berlen bölejigiň hereketine gözegçilik edeliň.

Massanyň hemişelikligi üçin

$$\frac{d}{dt}\Delta m = 0 \qquad (10.27)$$

Δm=ρΔV baglanyşygy göz öňünde tutup

$$\frac{d}{dt}\Delta m = \frac{d}{dt}(\rho\Delta V) = \frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho\frac{d}{dt}\Delta V = 0$$

gatnaşygy alarys. Ýa-da

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta V}\frac{d\Delta V}{dt} = 0 \qquad (10.28)$$

Bölejigiň göwrüminiň göräli üýtgemeginiň tizliginiň meýdanynyň

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{d\Delta V}{dt} = diV \ \vec{V}$$

bilen kesgitlenýändigini göz öňünde tutup gözleýän gatnaşygymyzy alarys.

$u_y = u_2, u_z = u_3$)

$$dx_i' = x_k' \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad (10.10)$$

i = 1 baha üçin 10.10–njy aňlatmany ýazalyň

$$dx_1' = x_1'\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_2'\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + x_3'\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ önümiň antisimmetrik we simmetrik tenzorlaryň düzüjileriniň jemi ýaly aňladylýandygyny göz öňünde tutup, ($\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \chi_{ki} + \varepsilon_{ki}$, $\chi_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ antisimmetrik tenzor, $\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ simmetrik tenzor) A nokadyň göräli orun üýtgetmegini

$$dx_i' = x_k' \chi_{ki} + x_k'\varepsilon_{ki} \qquad (10.11)$$

görnüşde ýazarys.

χ_{ki} – tenzor özüniň antisimmetrikligi sebäpli üç baglanyşyksyz düzüjiler bilen kesgitlenýär we

$$\chi_{ki} = \begin{vmatrix} 0, \chi_{12}, \chi_{13} \\ -\chi_{12}, 0, \chi_{23} \\ -\chi_{13}, -\chi_{23}, 0 \end{vmatrix} \qquad (10.12)$$

matrisa bilen aňladylyp bilner. Özi hem χ_{ki} –niň düzijileri

$$\chi_{ki} = a_k b_i - a_i b_k \qquad (10.13)$$

görnüşe eýedir.

Şonuň üçin antisimmetrik tenzoryň üç baglanyşyksyz düzijileri $\chi_{12}, \chi_{23}, \chi_{31}$ iki degişli wektoryň wektor köpeltmek hasylyny emele getirýär.Onda antisimmetrik we simmetrik tenzorlaryň düzüjileriniň jemi üçin wektor köpeltmek hasyly $\frac{1}{2}[\nabla\bar{u}]$ ýagny $\frac{1}{2}rot\bar{u}$

$$\left(\chi_{ki}+\varepsilon_{ki}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)$$

$\frac{1}{2}rot\bar{u}$ - yň düzijileri $\frac{1}{2}(rot\bar{u})_1=\chi_{23};\frac{1}{2}(rot\bar{u})_2=\chi_{31}$

$$\frac{1}{2}(rot\bar{u})_3=\chi_{12} \qquad (10.14)$$

rot$\bar{u}$ - yň tükeniksiz kiçi wektordygyny göz öňünde tutup, ol wektor we onuň düzijileri üçin belgileme girizeris.

$$d\chi=\frac{1}{2}(rot\bar{u}),d\chi_1=\chi_{23},d\chi_2=\chi_{31},d\chi_3=\chi_{12} \qquad (10.15)$$

χ_{ki} – tenzoryň antisimmetrikliginden we 10.15– njiden peýdalanyp 10.11-nji jemden i = 1 üçin bizi gyzyklandyrýan aňlatmany alarys

$$x'_k\chi_{k1}=x'_2\chi_{21}+x'_3\chi_{31}=-x'_2d\chi_3+x'_3d\chi'_2=[d\bar{\chi},\bar{r}'],$$

meňzeşlikde alarys

$$x'_k\chi_{k2}=[d\bar{\chi},\bar{r}']_{2i}\, x'_k\chi_{k3}=[d\bar{\chi},\bar{r}']_3 \qquad (10.16)$$

Şeýlelikde $x'_k\chi_{ki}$ jem$[d\bar{\chi},\bar{r}']$ wektor köpeltmek hasylynyň i-nji düzüjisini aňladýar.

10.11-njiniň 2-nji agzasyny

$$\varepsilon_{ki}x'_k=\frac{\partial\Psi}{\partial x'_i} \qquad (10.17)$$

görnüşde ýazyp bolar .Bu ýerde

$$\Psi=\frac{1}{2}\varepsilon_{ki}x'_kx'_i \qquad (10.18)$$

Seýlelikde , 10.11-njiniň ikinji agzasy , x'_i üýtgeýän ululyga görä Ψ funksiýanyň gradientiniň i-nji düzüjisine deňdir .

Şeýlelikde, 10.7-nji , 10.9-njy ,10.10-njy , 10.16-njydan peýdalanyp A nokadyň $d\bar{r}$ orun üýtgetmesini birinji derejeli takyklyk bilen.

$$d\bar{r}=d\bar{r}_{0'}+[d\bar{\chi};\bar{r}']+grad_{r'}\Psi \qquad \mathbf{(}10.19\mathbf{)}$$

görnüşde ýazarys .Şeýlelikde, kiçi bölejigiň islendik nokadynyň ornunyň üýtgemegi bölejigiň absalýut gaty jisim ýaly $d\bar{r}_{0'}+[d\bar{\chi},\bar{r}']$orun üýtgemeginden we bölejigiň deformasiýasy bilen baglanyşykly grad$_{r'}$ Ψ orun üýtgemeden durýar $d\bar{r}_{0'}$ bölejigiň öňe bolan hereketi $d\bar{\chi}$ -bölejigiň absalýut gaty jisim ýaly tükeniksiz kiçi öwrülmesi gradΨ orun üýtgeme deformasiýanyň wektory .Şonuň üçin æki –tenzora öwrülme tenzory ε_{ki}-tenzora deformasiýa tenzory diýilýär. dt wagtdaky orun üýtgemäniň $u_i=\sigma_i$ dt- gini göz öňünde tutup öwrülme we deformasiýa tenzorlaryny

$$\chi_{ki}=\omega_{ki}dt;\ \varepsilon_{ki}=\upsilon_{ki}dt \qquad \mathbf{(}10.20\mathbf{)}$$

görnüşde ýazarys.

Bu ýerde

$$\omega_{ki}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\right)^{(17)}: \qquad \mathbf{(}10.21\mathbf{)}$$

$$\vartheta_{ki}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\right) \qquad \mathbf{(}10.22\mathbf{)}$$

ω_{ki} tenzor bölejigiň burç tizligini kesgitleýär.

$$\bar{\omega}=\frac{d\bar{\chi}}{dt}=\frac{1}{2}rot\bar{v} \qquad \mathbf{(}10.23\mathbf{)}$$

υ_{ki} – tenzor deformasiýanyň tizliginiň tenzory. Ol deformasiýanyň tizligini kesgitleýär. Bu wektor gradiýent görnüşde, ýagny

$$\frac{\partial\Phi}{\partial xi}=\vartheta_{ki}x'_k \text{ ýazylyp bilner.} \qquad \mathbf{(}10.24\mathbf{)}$$

Sebäbi

$$\Phi=\frac{1}{2}\vartheta_{ki}x'_kx'_i \qquad \mathbf{(}10.25\mathbf{)}$$

Şeýlelikde tizlikler üçin

$$\bar{v}=v_{0'}+[\bar{\omega}\bar{r}']+grad_{r'}\Phi \qquad \mathbf{(}10.26\mathbf{)}$$

XI bap. Ideal suwuklyk

§39. Üznüksizlik deńlemesi.

Suwuklygyň we gazlaryň hereketini öwrenmek gidrodinamikanyň mazmunyny düzýär. Gidrodinamikada seredilýän hadysalaryň makroskopik häsiýete eýedigi üçin suwuklyga gidrodinamikada tutuş gurşaw ýaly seredilýär. Munuň özi suwuklygyň göwrüminiň bir kiçi elementi nämede bolsa, örän köp molekulany öz içine alýan bolmalydyr diýildigidir. Bu diýildigi, suwuklygyň göwrüminiň kiçi elementiniň göwrüminiň ölçegi molekulalaryň aralyklarynyň ölçeglerinden uly bolmaly diýildigidir.

Gidrodinamikada "suwuk bölejik", "suwuklygyň nokady" diýen aňlatmalara hem şeýle manyda düşünmelidir.

Ideal suwuklyk diýip islendik deformasiýada we deformasiýanyň tizliginde galtaşýan dartgynlyklar normal dartgynlyklar bilen deňeşdireniňde örän kiçi we hemme normal dartgynlyklary birmeňzeş bolan tutuş gurşawa aýdylýar. Şeýlelikde ideal suwuklygyň dartgynlygynyň tenzory

$$P_{ik} = -p\delta_k \qquad (11.1)$$

görnüşe eýedir. Bu ýerde p-basyş. 11.1-nji aňlatmany $dF_i^{\sigma} = P_{ik}\delta\sigma_k$ formulada ýerine goýup üst güýji üçin alarys.

$$dF_i^{\delta} = -p\delta_i \quad (\delta\sigma_k = \frac{\sigma_i}{\sigma_k}) \qquad (11.2)$$

Şeýlelikde birlik meýdana täsir edýän güýjüň absolýut bahasy (ideal suwuklyk üçin) meýdanyň ugrukmasyna bagly däl. Eger ideal suwuklyk diýip gaza seredilse p>0 , suwuk sreda üçin p položitelem, otrisatelem bolup biler. Sebäbi dartgynlyk gysýan ýa-da süýndürýän bolup biler.

Ideal suwuklygyň hereketiniň deňlemesi.

Hereket edýän suwuklygyň ýagdaýyny matematik aňlatmak suwuklygyň $\vec{\vartheta}(x, y, z, t)$ tizliginiň paýlanyşyny kesgitleýän funksiýanyň we onuň haýsy hem bolsa iki termodinamıki ululyklarynyň, mysal üçin $\rho(x,y,z,t)$ dykyzlygyň we p(x,y,z,t) basyşyň kömegi bilen ýerine ýetirilýär. Hemme termodinamiki ululyklaryň bu ululyklaryň haýsy hem bolsa iki ululygynyň bahalaryny peýdalanyp maddanyň hal-ýagdaý deňlemesiniň kömegi bilen kesgitlenýändigini biz bilýäris. Şonuň üçin tizligiň üç düzüjisiniň, basyşyň we dykyzlygyň berilmegi hereket edýän suwuklygyň ýagdaýyny doly kesgitleýär. Bu funksiýalaryň hemmesi umuman x,y,z koordinatalaryň we t wagtyň funksiýlarydyr. $\vartheta\ (x,y,z,t)$-giňişligiň berlen nokadynda wagtyň berlen pursatyndaky suwuklygyň tizligi. Ýagny, giňişligiň kesgitli nokadyna degişli. Bu häsiýet ρ, p ululyklara hem degişli.

Gidrodinamikanyň esasy deňlemeleriniň getirilip çykarylyşyna garalyň. Giňişligiň V_0 göwrümine garalyň. Şol göwrümdäki suwuklygyň mukdary(massasy) $\int\limits_{V_0}\rho dV$. Bu ýerde ρ-suwuklygyň dykyzlygy. Integrirlemek V_0 göwrüm boýunça alynýar. V_0 göwrümi çäklendirýän üstüň df elementinden birlik wagtda $\rho\vec{v}d\vec{f}$ mukdarda suwuklyk akyp geçýär , $d\vec{f}$ wektor absolýut ululygy boýunça üstüň elementiniň meýdanyna deňdir . $d\vec{f}$ -i daşky normal boýunça ugrykdyrmagy şertleşeliň. Onda, eger suwuklyk göwrümden daşyna akýan bolsa, $\rho\vec{v}d\vec{f}$ položitel, eger içine akýan bolsa otrisatel. V_0 göwrümden birlik wagtda akyp çykýan suwuklygyň doly mukdary $\oint\limits_f \rho\vec{v}d\vec{f}$. Integrirleme seredilýän göwrümi öz içine alýan ýapyk üst boýunça alynýar.

Başga bir tarapdan V_0 göwrümdäki suwuklygyň mukdarynyň

azalmasyny $-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_v \rho dV$

görnüşde ýazyp bolar. Iki aňlatmany deňläp, alarys:

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}=\oint \vec{E}'\delta\vec{r} \quad (11.53)$$

bu ýerde magnit induksiýasynyñ akymy

$$\vec{\Phi}=\int\limits_\sigma \vec{n}d\vec{\sigma}$$, sebäbi μ=1

11.51-njini 11.53-njiniñ sag tarapyna goýup we Stoksyñ teoremasyny ulanyp alarys:

$$\int\limits_\sigma rot\vec{E}d\sigma+\frac{1}{c}\int rot\left[\vec{V}\vec{n}\right]d\sigma=\int\limits_\sigma rotE'd\sigma \quad (11.54)$$

Makswelıñ deñlemesini peýdalanyp taparys

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}=\int\limits_\sigma -\frac{1}{c}\frac{\partial n}{\partial t}d\sigma+\frac{1}{c}\int\limits_\sigma rot\left[\vec{V}\vec{n}\right]d\sigma$$

$$\frac{d\Phi}{dt}=\int\limits_\sigma \frac{\partial n}{\partial t}d\sigma-\int\limits_\sigma rot\left[\vec{V}\vec{n}\right]d\sigma=\int\limits_\sigma\left(\frac{\partial n}{\partial t}-rot\left[\vec{V}\vec{n}\right]\right)d\sigma \quad (11.55)$$

11.40-njy ýerine ýetýän tükeniksiz geçiriji sredada berlen material konturdan geçýän magnit güýjenmesiniñ akymynyñ saklanýändygy bu ýerden görünýär.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{V} = 0 \quad (11.47)$$

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -gradP + \frac{1}{4\pi}\left[rot\vec{H}, \vec{H}\right] \quad (11.48)$$

$$\rho\frac{de}{dt} = -pdiv\vec{V}, (11.49)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (11.50)$$

görnüşde ýazarys.
11.49-njy deñlemede bölünip çykýan joul ýylylygyna deñ we kiçi $\frac{1}{\lambda}$ ululyga proporsional $\frac{j^2}{\lambda}$ galdyrylan.

11.40-njy, 11.41-nji, 11.47 – 11.50-nji deñlemeler ideal suwuklygyñ magnitogidrodinamikasynyñ deñlemeler sistemasyny düzýär. Seredilýän tükeniksiz geçiriji gurşaw wajyp häsiyete eýedir. Berlen material konturdan geçýän magnit güýjenmesiniñ akymy wagtyñ geçmegi bilen üýtgemeýär. Şeýlelikde magnit güýç çyzyklary gurşawda donup galyp onuñ bilen bile hereket edýär. Seredýän ýagdaýmyzda geçiriji togunyň

$$\vec{E} = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}\vec{H}\right] \ (11.51)$$

güýjenme bilen döredilýändigi 11.37-njiden görünýär. Şeýlelikde berlen, ýapyk material konturda döreýän EHG

$$\oint \vec{E}'\delta\vec{r} \qquad (11.52)$$

integrala deñdir. Bu integral $\oint \vec{V}\delta\vec{r}$ integrala meňzeşlikde kesgitlenýär ($\oint \vec{V}\delta\vec{r}$ integrala ýapyk material konturyň boýuna tizligiň sirkulýasiýasy diýilýär).

Faradeýiñ kanunyna görä EHG-i şol kontura daýanýan üstden üýtgeýän magnit akymynyñ üýtgemegi bilen kesgitlenýär.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho dV = -\oint_f \rho\bar{v}df \qquad (11.3)$$

Gaussyň teoremasynyň esasynda üstden alnan integraly göwrümden alnan integrala öwürýäris

$$\oint \rho\vec{v}d\vec{f} = \int div\rho\vec{v}dV$$

Şeýlelikde $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\int div\rho\bar{v}dV$ ýa-da $\int\frac{\partial}{\partial t}\rho dV + \int div\rho\bar{v}dV = 0$

ýa-da $\int_v\left(\frac{\partial p}{\partial t} + div\rho\vec{v}\right)dV = 0$

Bu deňligiň islendik göwrüm üçin ýerine ýetmeginiň hökmanlygy üçin integralyň aşagyndaky aňlatma nola deňdir,ýagny

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\bar{v} = 0 \qquad (11.4)$$

$\vec{j} = \rho\bar{v}$ wektora suwuklygyň akymynyň dykyzlygy diýilýär. Bu wektoryň ugry suwuklygyň hereketiniň ugry bilen gabat gelýär. Onuň absolýut ululygy wagt birliginde tizlige perpendikulýar ýerleşen birlik meýdandan akyp geçýän suwuklygyň mukdaryna deňdir .
11.4-nji deňleme üznüksizlik deňlemesidir. div $\rho\bar{v}$ aňlatmany açyp 11.4-nji deňlemäni başgaça hem ýazyp bolar:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho div\bar{v} + \bar{v}grad\rho = 0, \qquad (11.5)$$

§40. Eýleriň deňlemesi .

Suwuklykda kesgitli bir göwrümi alalyň .Basyşy p bolsun, saýlanyp alnan göwrüme täsir edýän doly güýç

$$-\oint pd\vec{f}$$

integrala deňdir .Gaussyň teoremasyny göz öňüne tutup alarys

$$-\oint p d\vec{f} = -\int gradpdV .$$

Bir birlik göwrüme täsir edýän güýç –grad p . Göwrüm elementine täsir edýän güýç $gradPdV$. Suwuklygyň göwrüm elementiniň hereketiniň deňlemesini ýazarys.

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -gradp \qquad (11.6)$$

Bu ýerde ρ - birlik göwrüminiň massasy.

$\frac{d\vec{V}}{dt}$ - giňişlikde hereket edýän suwulygyň böleginiň tizliginiň üýtgemesi . Suwuklyklaryň berlen böleginiň tizliginiň üýtgemesi iki bölekden ybaratdyr : giňişligiň berlen ýerinde tizligiň üýtgemesinden; giňiligiň başlanngyç nokadyndan d**r** uzaklykda ýerleşen nokadynyň çägindäki tizligiň üýtgemesinden. Birinjisi $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}dt$, ikinjisi

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}dz = \left(d\vec{r}\nabla\right)\vec{v}, d\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \left(d\vec{r}\nabla\right)\vec{v}$$

Şeýlelikde, deňligiň iki tarapyny hem dt-e bölüp alarys .

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} \qquad (11.7)$$

Alnan gatnaşygy 11.6-da ýerine goýup alarys.

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -gradp\frac{1}{\rho} \qquad (11.8)$$

Bu geňlemä suwuklygyň hereketiniň deňlemesi diýilýär. Ona Eýleriň deňlemesi hem diýilýär. Eýleriň deňlemesi gidrodinamikanyň esasy deňlemesidir. Eger daşky güýji hasaba alsak, onda deňleme aşakdaky ýaly ýazylar:.

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v} = -grad\mathrm{P}\frac{1}{\rho} + \vec{f}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = rot\left[\vec{V}\vec{H}\right] \\ div\vec{H} = 0 \end{cases} \qquad (11.40)$$

(11.41)

Bu deñlemeler sistemasyny ideal suwuklygyñ gidrodinamik meýdanynyñ

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{V} = 0 \qquad (11.42)$$

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -gradP + \rho\vec{f} \qquad (11.43)$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = -Pdiv\vec{V} \qquad (11.44)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \qquad (11.45)$$

deñlemeleri bilen bilelikde işlemeli.

11.34-nji formuladan magnit meýdany tarapyndan $\vec{j}$ toga täsir edýan Lorensin $\rho\vec{f}$ güýjüni

$$\frac{1}{c}\left[\vec{j}\vec{H}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[rot\vec{H}, \vec{H}\right] \qquad (11.46)$$

görnüşde ýazarys. 13-ni hasaba alyp 11.4,11-9,11.10 deňlemeleri etmelerimiz ýerine ýetýän bolsa onda Makswelíñ deñlemelerinden alarys:

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (11.34) \qquad rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (11.35)$$

$$div\vec{H} = 0 \quad (11.36) \qquad \vec{j} = \lambda\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}\vec{H}\right]\right) \quad (11.37)$$

$$\left(rot\vec{H} = j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \quad \left(j_{suysme} = \frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

bu ýerde σ = D – obkladkalardaky zarýadyñ üst dykyzlygy, c-ýagtylygyň tizligi.

11.37-njiniñ kömegi bilen 11.34-njiden güýjenme E-ni ýok edip alarys.

$$rot\vec{j} = \lambda rot\vec{E} + \frac{\lambda}{c}rot\left[\vec{V}\vec{H}\right]; \quad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}rot\left[\vec{V}\vec{H}\right] + \frac{1}{\lambda}rot\vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -rot\vec{E}\cdot c = -\frac{c}{\lambda}rot\vec{j} + rot\left[\vec{V}\vec{H}\right] \qquad (11.38)$$

Bu ýerden11.35-njiniñ kömegi bilen j-ni ýok edip magnit meýdanynyñ güýjenmesiniñ

$$rotrot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}rot\vec{j} \qquad rot\vec{j} = \frac{c}{4\pi}rotrot\vec{H}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c}{\lambda}\frac{c}{4\pi}rotrot\vec{H} + rot\left[\vec{V}\vec{H}\right] = rot\left[\vec{V}\vec{H}\right] - \frac{c^2}{4\pi\lambda}rotrot\vec{H} \qquad (11.39)$$

deñlemä boýun egýändigini taparys. 11.39-njy deňlemäni 11.36-njy deňleme bilen bile işlemeli.

Sredanyñ elektrik geçirijiliginiñ ýokarydygyny göz önünde tutyp seredýän ýagdaýymyz üçin elektromagnit meýdanynyň deňlemesini alarys:

Eger suwuklyk agyrlyk güýjüniň täsirinde bolsa, onda her bir birlik göwrümine güýç tasir eder. Şeýlelikde suwuklygyň hereketiniň deňlemesi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}grad\rho + g \qquad (11.9)$$

Suwuklyklaryň aýratyn bölekleriniň arasynda we suwuklyk bilen degişýän jisimleriň arasynda ýylylyk alyş ýok bolsa, onda hereket adiobatik bolýar diýilýär. Hereketiň adiobatiligi

$$\frac{ds}{dt} = 0 \qquad (11.10)$$

Bu ýerde doly differensial suwuklygyň berlen hereket edýän böleginiň entropiýasynyň üýtgemegini aňladýar. Bu önümi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{dt} + \vec{v}gradp = 0 \qquad (11.11)$$

görnüşde ýazyp bolar.11.10-njy deňleme ideal suwuklygyň adibatik hereketini aňladýan deňlemedir.11.8-nji deňlemäniň kömegi bilen 10-njy deňlemäni üznüksizlik deňlemesi görnüşinde ýazyp bileris:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + div(\rho s\vec{v}) = 0 \qquad (11.12)$$

$\rho s.\vec{v}$ - köpeltmek hasylyna entropiýanyň akymynyň dykyzlygy diýilýär.

Eger wagtyň käbir başlangyç pursatynda suwuklygyň göwrüminiň hemme nokatlarynda entropiýa birmeňzeş bolsa onda suwuklygyň indiki hereketinde wagtyň geçmegi bilen birmeňzeş we üýtgewsiz bolar. Bu ýagdaýda adiabatiklik deňlemesi

s=hemişelik (11.13)

görnüşde bolar.Beýle herekete izentropik hereket diýilýär.

11.12-nji deňlemäni başgarak görnüşde aňlatmak üçin hereketiň izentropikliginden peýdalanalyň. Munuň üçin belli termodinamiki gatnaşyk bolan

d w=Tds+Vdp (10.56)

gatnaşykdan peýdalanalyň. Bu ýerde w-suwuklygyň birlik massasynyň ýylylyk funksiýasy, V=$\frac{1}{\rho}$- udel göwrüm, s-iň hemişelikliginden

$$dw=Vdp=\frac{1}{\rho}dp$$

Şonuň üçin $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla$ w Bu ýerden

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -grad\ \mathrm{w} \qquad (11.14)$$

Wektor derňewiniň belli formulasy bolan $\frac{1}{2}grad\,\vartheta^2 = [\vec{v}rot\,\vec{v}] + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$ formyladan peýdalanyp

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -gradH$$

formylany täzeçe ýazarys

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}grad\,\vartheta^2 - [\vec{v}rot\,\vec{v}] = -gradH \qquad (11.15)$$

Bu ýerde H – termodinamiki funksiýa bolan entalpiýa. Eger deňligiň iki tarapyna hem rot operasiýasyny ulansak

$$\frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{v} = rot[\vec{v}rot\,\vec{v}] \qquad (11.16)$$

Diňe tizligi özünde saklaýan Eýleriň deňlemesini aldyk.

Eger suwuklyk dynçlykda bolsa, ýagny $\vec{V}=0.$ onda ideal suwuklygyň deňlemesi gidrostatikanyň deňlemesine geler.

$$gradP = \rho f \qquad (11.16)'$$

Bu deňleme gurşawyň mehaniki deňagramlylygyny suratlandyrýar. Eger göwrüm güýçlerini hasaba almasak (f=0), onda gurşawyň hemme nokatlarynda basyş hemişelik(Paskalyň kanuny)

Eger suwuklyk gysylmaýan bolsa we birhilli agyrlyk güýjüniň täsiri astynda bolsa, onda koordinatalar başlangyjyny suwuklygyň

Maddanyň akymynyň üznüksizligi sebäpli dykyzlygyň böküşi gazyň urgy tolkunyny geçenden soň tizliginiň peselmesi bilen ugurlaşýar($\upsilon_2<\upsilon_1$).Bu peselme stasionar urgy tolkunynyň gaza görä u tizliginiň gazyň öňünde $u_1=-\upsilon_1$) we yzynda ($u_2=-\upsilon_2$) dürli bolmagyna getirýär($u_2>u_1$).

11.31-njiniň kömegi bilen 11.28-njiden tizlikleri ýok edip we11.32-njini peýdalanyp entalpiýanyň böküşini taparys.

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_1}\right), \qquad (11.33)$$

Bu gatnaşyk Gýugonnonyň adibaty ady bilen bellidir(urgy adibaty). Bu gatnaşyk p_2 bilen ρ_2–niň arabaglanşygyny p_1 we ρ_1–iň berlen bahalarynda kesgitleýär.

§42.Ideal suwuklygyñ magnitogidrodinamikasy.

Magnit meýdany täsir edýän, elektrik geçiriji ideal suwuklygyň hereketine seredeliñ. Şeýle suwuklykda ýüze çykýan elektrik togy magnit meýdany tarapyndan suwuklyga mehaniki täsiri şertlendirýär we magnit meýdanyny üýtgedýär. Bu hadysalary beýan etmek üçin ideal suwuklygyñ deñlemeler sistemasyny Maksweliñ deñlemeleri bilen bilelikde ulanmak gerek. Meýdanlaryň güýjenmeleriniň yrgyldysynyñ ω ýygylygy ýeterlik kiçi, sredanyñ elektrik geçirijiligi λ bolsa örän ýökary hem hemişelik, ýagny $\varepsilon\omega \ll 2\pi\lambda$ ýagdaý bilen çäklenýäris. Bu ýerde ε – sredanyñ dielektrik hemişeligi. Onda $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t}$ süýşme togy geçiriji J tok bilen deñeşdireñde hasaba almasañ hem bolýar. Ýökary elektrik geçirijiligi üçin erkin göwrüm zarýadlarynyñ hereketi bilen baglanşykly konweksion togy hem hasaba almaýarys. Ol zarýadlar elektrik geçirijiligi näçe ýokary bolsa şonçada tiz sindirilýär.

Magnit syzyjylygy μ = 1 gurşawa seredýäris. Sebäbi hemme geçiriji suwuklyklar we gazlar üçin $\mu \cong$ 1. Eger heme sanan guman

$$\left(\frac{\vartheta_1^{\ 2}}{2}+h_1\right)=\left(\frac{\vartheta_2^{\ 2}}{2}+h_2\right) \qquad (11.26)$$

şertlere boýun egýär. Soňky şerti 5-njini we 10-njyny hasaba alyp 9-njydan alyp bolýar.

Akymyň ugruna perpendikulýar , gozganmaýan urgy tolkunyna seredeliň. Ýagny dykyzlanmanyň göni böküşi. Bu ýagdaýda tizligiň tangensial düzüjisi nola deň, ýagny $\vartheta_x = \vartheta$. Şonuň üçin 11.20-nji, 11.21-nji we 11.26-njy şertleri

$$\rho_1\vartheta_1 = \rho_2\vartheta_2 \qquad (11.27)$$

$$p_1 + \rho_1\vartheta^2{}_1 = p_2 + \rho_2\vartheta^2{}_2 \qquad (11.28)$$

$$\left(\frac{\vartheta_1^{\ 2}}{2}+h_1\right)=\left(\frac{\vartheta_2^{\ 2}}{2}+h_2\right) \qquad (11.29)$$

görnüşde ýazyp bolar.

Alynan şertler gurşawyň urgy tolkunyndan geçenden soň hemme termodinamiki ululyklarynyň gutarnykly üýtgemesini kesgitleýär. Bu gazyň gaty ýuka gatlagynda bolup geçýän (şepbeşiklik we ýylylyk geçirijilik bilen baglanşykly) dissipatiw prosesler bilen baglanşykly. Bu nazaryýetde ýuka gatlagyň galyňlygy hasaba alynmaýar.Şeýlelikde, ideal suwuklygyň urgy tolkunyndan geçişi öwrülşiksiz akymdyr, ýagny

$$s_2 > s_1 \qquad (11.30)$$

Gurşawyň akymynyň dykyzlygyny j=ρυ bilen belgiläp we onuň üzülme üstde üznüksizdigini hasaba alyp 11.26-njydan alarys

$$\vartheta_1 = \frac{j}{\rho_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{j}{\rho_2} \qquad (11.31)$$

16-njynyň kömegi bilen 13-njiden tizlikleri ýok edip alarys.

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} \qquad (11.32)$$

üstünde ýerleşdirip we z okuny wertikal aşak ugrukdyryp $(11.16)'$-dan alarys

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho z \text{, bu ýerden } p = p_0 + \rho g z$$

bu ýerde p_0 – suwuklygyň üstündäki daşky basyş.

Eger gazyň hemme nokatlarynda ýylylyk deňagramlylygy bar bolsa, onda ideal gazyň deňlemesinden peýdalanyp we z oky wertikal ýokaryk ugrukdyryp 11.16-njy deňlemeden

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{kT}{m}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g .$$

Bu ýerden dykyzlygyň beýiklige görä paýlanyşynyň aňlatmasyny alarys.

$\rho = \rho_0 \exp\left\{-\frac{mg}{kT}(z - z_0)\right\}$, bu formula barometrik formula diýilýär.

§41. Urgy tolkunlary

Gozganmaýan S hasaplaýyş ulgamyna görä V tizlik bilen hereket edýän stasionar, birhilli gaz akymyna seredeliň. Eger akymyň tizligi sesiň gazdaky tizliginden uly bolsa, onda akyma sesden ýokary tizlikli akym diýilýär, tersine kiçi bolsa sese çenli tizlikli akym diýilýär. Bu iki akym häsiýetleri boýunça biri birinden düýpli tapawutlanýarlar. Şu sebäpli akymyň wajyp häsiýetnamasy akymyň tizliginiň akymdaky sesiň tizligine bolan

$$M = \frac{V}{c} \qquad (11.17)$$

gatnaşygydyr. Bu ýerde V-akymyň tizligi, c-sesiň tizligi. Bu sana Mahyň sany diýilýär.

Gazyň dykyzlygynyň ýa-da beýleki ululyklarynyň kiçi tolgunmasynyň sesden ýokary tizlikli akymda islendik ugur boýunça ýaýrap bilmezligi sesden ýokary tizlikli akymyň aýratynlyklarynyň biridir. Hakykatdanam tolgunmanyň S hasaplaýyş ulgamyna görä ýaýramagynyň tizligi

$$\vec{V} + c\vec{n} \qquad (11.18)$$

jeme deňdir. Bu ýerde $\vec{n}$-tolgunmanyň gaza görä ýaýramagynyň ugry. Onda S hasaplaýyş ulgamyna görä tolgunmanyň ýaýramagynyň hemme mümkin bolan ugurlaryny almak üçin tolgunma döreýän, gozganmaýan O nokatdan $\vec{V} + c\vec{n}$ wektory goýmaly we V-niň fiksirlenen ýagdaýynda $\vec{n}$ – wektora hemme mümkin bolan ugurlary bermeli. Netijede $\vec{V} + c\vec{n}$ wektoryň soňy merkezi $\vec{V}$ wektoryň ujynda bolan c radiusly sfera boýunça taýar. Şeýlelikde, sese çenli tizlikli (V<c) akymda $\vec{V} + c\vec{n}$ wektor islendik ugra eýe bolup biler. Sesden ýokary tizlikli akymda (V>c) $\vec{V} + c\vec{n}$ wektor ($\vec{n}$-niň islendik ugrunda) depesi tolgunma merkezinde ýerleşen konusyň içinde ýerleşýär. Beýle konusyň ýarym jisim burçy

$$\sin\alpha = \frac{c}{V} \qquad (11.19)$$

formula bilen kesgitlenýär. 11.17-njini göz önünde tutup 11.19-njyny ýazarys.

$$\sin\alpha = \frac{1}{M} \qquad (11.20)$$

Sesden ýokary tizlikli akymyň ýene bir aýratynlygy urgy tolkunynyň döremek mümkinçiligidir.

Basyşyň we temperaturanyň birden üýtgemegi bilen baglanşykly gurşawyň dykyzlygynyň ýeterlik ýokarlanmak tolkunyna urgy tolkuny diýilýär. Bu ýagdaýda gurşawyň ýuka gatlagynda parametrleriň birden üýtgemegi we bu gatlakdan maddanyň akymy bolup geçýär. Urgy tolkunlary sesden ýokary tizlikli gazyň jisimiň daşyndan akmagy wagtynda, partlamada we gurşawyň beýleki uly tolgunmalarynda döreýär.Urgy tolkunynyň nazaryýetini parametrleri güýçli üýtgeýän örän ýuka gatlakdaky bolup geçýän proseslere üns bermän öwrenmek amatly bolýar. Bu ýagdaýda bu ýuka gatlagy üzülme üsti bilen çalyşmaga mümkinçilik döreýär. Gazyň stasionar akymy bilen çäklenýäris. Gazyň hereketi seredilýän

hasaplaýyş ulgamyna görä üzülme üsti gozganmaýan diýip hasaplaýarys. Gazyň ýagdaýyny häsiýetlendirýän(üzülme üsti geçen we geçmedik ýagdaýyndaky) ululyklar massanyň, impulsyň we energiýanyň saklanmak kanunlarynyň üsti bilen bir-biri bilen baglanşyklydyr. Şeýlelikde, üzülme üstde maddanyň akymy, impulsy we energiýasyüznüksiz bolmaly. Bu şertleri aňlatmak üçin üzülme üstüniň $\vec{n}d\sigma$ elementini alalyň. X oky elementiň üstüne normal boýunça ugrukdyralyň. Soňra x ok boýunça oky ugrukdyrylan slindr guralyň.(kese kesiginiň meýdany $d\sigma$ bolan). Bu slindrde ýerleşen gurşawa

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0}\rho dV = -\oint_{\sigma_0}\rho\vec{V}d\sigma; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0}\rho\vartheta_i dV = -\oint_{\sigma_0}\Pi_{ik}d\sigma_k;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0}\rho\left(\frac{\vartheta^2}{2}+e\right)dV = -\oint_{\sigma_0}\rho\vartheta_i\left(\frac{\vartheta^2}{2}+h\right)d\sigma_i$$

integral gatnaşyklary ulanyp we akymyň stasionardygyny göz önünde tutup

$$\rho_1\vartheta_{x_1} = \rho_2\vartheta_{x_2}; \qquad (11.21)$$

$$p_1 + \rho_1\vartheta^2{}_{x_1} = p_2 + \rho_2\vartheta^2{}_{x_2} \text{ (6) } \rho_1\vartheta_{x_1}\vartheta_{y_1} = \rho_2\vartheta_{x_2}\vartheta_{y_2} \qquad (11.22)$$

$$\rho_1\vartheta_{x_1}\vartheta_{z_1} = \rho_2\vartheta_{x_2}\vartheta_{z_2} \qquad (11.23)$$

$$\rho_1\vartheta_{x_1}\left(\frac{\vartheta_1^2}{2}+h_1\right) = \rho_2\vartheta_{x_2}\left(\frac{\vartheta_2^2}{2}+h_2\right) \qquad (11.24)$$

şertleri alarys. Bu ýerde 1-nji indeks üzülme üsti geçmedik gaza, 2-nji indeks üsti geçen gaza degişlidir. Bu şertlerden tangensal üzükligiň bolmagy görünýär. Ýagny üzülme üstden maddanyň akymy bolmaýar, onda $\vartheta_{x_1} = \vartheta_{x_2} = 0$. Bu ýagdaýda $p_1 = p_2$. Eger üzülme üstden maddanyň akymy bolsa, onda ($\vartheta_{x_1} \neq 0, \vartheta_{x_2} \neq 0$) urgy tolkuny bolýar. Bu ýagdaýda 5-njä görä tizligiň tangensial düzüjisi üznüksizdir, ýagny

$$\vartheta_{y_1} = \vartheta_{y_2}, \ \vartheta_{z_1} = \vartheta_{z_2}, \qquad (11.25)$$

dykyzlygy, basyş we tizligiň normal düzüjisi birden üýtgeýär.Bu üýtgemeler 5-nji, 6-njy şertlere we görnüşdäki çözüwiniň bardygyny barlamak kyn däl. Bu ýerde $\alpha = \frac{H_0}{c}\sqrt{\frac{\lambda}{\eta}}$.

Magnit meýdanynyň suwuklygyň akymynyň häsiýetine täsiri αl parametriň bahasy bilen häsiýetlendirilýär. αl<<1(ýagny, magnit meýdanynyň H_0 güýjenmesiniň uly bolmadyk bahalarynda)6-njy formuladan aňryçäk ýagdaýy alarys($\vartheta_{\max} = \frac{l^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}$). Eger H_0 gaty uly bolsa, ýagny αl >>1, onda 6 we 7-den

$$\vartheta = \frac{cl}{2H_0\sqrt{\lambda\eta}}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\left[1-\ell^{-\alpha\left(\frac{l}{2}-y\right)}\right] \qquad (8)$$

$$h = \frac{2\pi l}{H_0}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\left[\ell^{-\alpha\left(\frac{l}{2}\right)-y} - \frac{2y}{l}\right] \qquad (9)$$

8-nji formulany $\vartheta_{\text{ч}} = \frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{L}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2\right]$ formula bilen deňeşdirip magnit meýdany bar wagtyndaky akymyň maksimal tizliginiň magnit meýdany ýok wagtyndaky tizligine gatnaşygy

$\frac{4c\eta^{\frac{1}{2}}}{H_0 l\lambda^{\frac{1}{2}}}$ ululyga deňdir. Şeýlelikde, magnit meýdany suwuklygyň maksimal tizligini peseldýär, ýagny akymyň orta tizligi pes bolýar.

XII bap.Şepbeşik suwuklyk
§43 Şepbeşik suwuklygyň hereketiniň deňlemesi. Nawýe-Stoksyň deňlemesi

Şepbeşik suwuklyk diýip dartgynlygy deformasiýanyň tizligine bagly bolan, şeýle hem normal dartgynlyk bilen bir hatarda galtaşýan dartgynlygy noldan tapawutly bolan suwuklyga diýilýär.

Hereket wagtynda bolup geçýän energiýanyň dissipasiýasynyň suwuklygyň hereketine edýän täsirine garalyň. Bu prosesler ýylylyk geçirijilik we içki sürtülme (şepbeşiklik) bilen baglanşykly, hemme wagt ol ýa-da beýleki derejede bar bolan, hereketiň termodinamiki öwrülşiksizliginiň aňlatmasydyr.

Şepbeşik suwuklygyň hereketiniň deňlemesini almak üçin ideal suwuklygyň hereketiniň deňlemesine goşmaça agzalary girizmek zerurdyr. Ideal suwuklyk üçin ýazan üznüksizlik deňlemämiz($\frac{\partial\rho}{\partial t} + diV\rho\vec{V} = 0$) hemme suwuklyklar üçin birmeňzeşdir. Eýleriň deňlemesi($\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -gradP\frac{1}{\rho}$) bolsa hökman üýtgemelidir. Impulsyň akymyny öwrenemizde Eýleriň deňlemesiniň

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vartheta_i = -\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

görnüşde ýazylýandygyny hem gördük. Bu ýerde Π_{ik} - impulsyň akymynyň dykyzlygynyň tenzory(birlik üstden birlik wagtda akyp geçýän impulsyň akymy). Bu tenzor

$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho\vartheta_i\vartheta_k$ formula bilen kesgitlenýär. Ol suwuklygyň dürli uçastoklarynyň bir ýerden beýleki bir ýere ornunyň üýtgemegi bilen baglanşykly impulsyň öwrülişikli geçirilmegini aňladýar. Suwuklygyň şepbeşikligi impulsyň öwrülişiksiz geçirilýän bölegininiň ýüze çykmagyna getirýär. Şeýlelikde, şepbeşik suwuklyk üçin impulsyň akymynyň dykyzlygynyň tenzoryny

$$\Pi_{ik}=\rho\vartheta_i\vartheta_k+p\delta_{ik}-\sigma'_{ik}=-\sigma_{ik}+\rho\vartheta_i\vartheta_k \quad (12.56)$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerde σ_{ik}-dartgynlygyň tenzory. σ'_{ik} – dartgynlygyň şepbeşik tenzory. Bu tenzoryň umumy görnüşini kesgitlemek üçin aşakdaky pikirlerden ugur almaly:1.Suwuklygyň içinde içki sürtülme(şepbeşiklik) haçan-da suwuklygyň dürli yçastoklary dürli tizlikler bilen hereket edende ýüze çykýar. Şeýlelikde, σ'_{ik} tizlikden koordinata görä alnan önüme baglydyr($\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}$). Bu tenzoryň düzüjilerinden iki simmetrik tenzory emele getirip bolýar. Ol tenzorlar dürli häsiýetli deformasiýalaryň tizligi bilen baglanyşyklydyr. Deformasiýanyň tizligi hem iki hili bolýar.1arassa süýşme; 2deňölçegli gysylma deformasiýasy. Şeýle tenzor bolup

$$S_{ik}=\vartheta_{ik}-V_{ik} \quad (12.57)$$

hyzmat edýär. Bu ýerde ϑ_{ik}-deformasiýanyň tizliginiň tenzory. Simmetrik tenzor S_{ik} diňe süýşme deformasiýasy bilen baglanyşykly. Sebäbi, deňölçegli gysylmada $S_{ik}=0$.(bu ýagdaýda $(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k})_{i\neq k}$ –nyň hemme agzalary nula

görnüşde gözläliň.1-njini peýdalanyp 12.67-12.69 deňlemelerden alarys.

$$0=\vec{H}_0\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{c^2}{4\pi\lambda}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \quad (2) \quad \frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P+\frac{h_x^{\ 2}}{8\pi}\right)=0 \quad (4)$$

4-nji deňleme integrala getirýär:

$$\left(P+\frac{h_x^{\ 2}}{8\pi}\right)=C(x) \quad (5)$$

Bu integral basyş bilen magnit meýdanynyň gozganmagyny baglanyşdyrýar. 9-njy çözgüdi göz önünde tutup we basyşyň x ok boýunça gradiýentiniň hemişelikdigini hasaba alyp 2 we 3-njini ýönekeýleşdireliň.

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{c^2}{4\pi\lambda H_0}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\frac{H_0}{4\pi\eta}\frac{dh}{dy}=-\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{L}$$

Bu ýerde $\frac{\Delta p}{L}$- basyşyň uzynlyk birligine düşỳän peselmesi.

Bu deňlemeler ulgamynyň

$\vartheta\Big|_{u=\pm\frac{1}{2}}=0,\ h\Big|_{y=\pm\frac{1}{2}}=0$ şerti kanagatlandyrýan

$$\vartheta=\frac{cl}{2H_0\sqrt{\lambda\eta}}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{1}{sh\left(\frac{\alpha l}{2}\right)}\left[ch\left(\frac{\alpha l}{2}\right)-ch(\alpha y)\right] \quad (6)$$

$$h=\frac{2\pi l}{H_0}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{1}{sh\left(\frac{\alpha l}{2}\right)}\left[sh(\alpha y)-\frac{2}{l}ysh\left(\frac{\alpha l}{2}\right)\right] \quad (7)$$

$$\nabla(\vec{h}\vec{A}) = (\vec{h}\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\nabla) + [\vec{h}[\nabla\vec{A}]] + [\vec{A}[\nabla\vec{h}]];$$

$$[rot\vec{H}\vec{H}] = (\vec{H}\nabla)H - V\left(\frac{H^2}{2}\right) -$$

gatnaşygyň kömegi bilen Lorensiň güýjüni üýtgederis.Netijede gidrodinamik deňlemeleri

div$\vec{V} = 0$ (12.68) $\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \eta\Delta\vec{V} + \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\nabla)\vec{H}$

(12.69) görnüşde alarys. 12.67-12.69 deňlemeler ulgamynyň kömegi bilen gidrodinamik meýdanyň we magnit meýdanynyň üýtgemegini(gysylmaýan, şepbeşik, ýeterlik geçiriji suwuklykda) aňladyp bolýar.

Birmeňzeş magnit meýdanynda, parallel tekizlikleriň arasyndan akýan gysylmaýan, şepbeşik, geçiriji suwuklygyň hemişelik akymyna seredeliň.Tekizlikleriň biri-birinden uzaklygy l bolsun. Tekizliklere parallel ugurda basyşyň peselmesi(birlik uzynlygyna düşýäni) berlen bolsun. Stasionar akymda suwuklygyň tizligi basyşyň peselmesiniň ugruna ugrukdyrylandyr. x oky tizligiň ugruna ugrukdyrylandyr.y oky magnit meýdanynyň ugruna,koordinatalar başlangyjyny iki tekizligiň ortasynda ýerleşdirýäris. Akymyň tizligi y oka bagly bolup akymyň ortasynda gyralaryna garanda uly bolar. Bu ýagdaý güýç çyzyklarynyň akymyň ugruna süýşmegine getirer. Şeýlelikde, magnit meýdanynyň h_x düzüjisi ýüze çykýar. Meseläniň çözgüdini

$$\vec{V} = \vartheta(y)\vec{n}_x; P = P(x,y); \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}; \vec{H}_0 = H_0\vec{n}_y; \vec{h} = h(y)\vec{n}_x$$

(1).

deňdir, $\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_2} = \frac{\vartheta_3}{\partial x_3}$). Simmetrik tenzor V_{ik} -nyň düzüjileri tizligiň diwergensiýasyna proporsionaldyr($\frac{1}{\Delta V}\frac{d\Delta V}{dt} = div\vec{V}$)

$$V_{ik} = \frac{1}{3}\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ik} \qquad (12.58)$$

Şeýlelikde,

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k} + \frac{\vartheta_k}{\partial x_i}\right) + b\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ik} \qquad (12.59)$$

alarys.

Bu ýerde a we b tizlige bagly däldirler. Başgaça, aşakdaky ýaly ýazarys

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k} + \frac{\vartheta_k}{\partial x_i}\right) + \eta\frac{2}{3}\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ik} + \varsigma\delta_{ik}\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

Skalýar ululyklar bolan $\eta we \varsigma$ -ýe birinji we ikinji şepbeşiklik koeffisientleri diýilýär. Bu ululyklar umuman gurşawyň dykyzlygyna we temperaturasyna baglydyrlar. Dartgynlygynyň tenzory 6-njy görnüşe eýe gurşawlara çyzykly şepbeşik suwuklyk diýilýär. Beýle gurşaw izotropdyr. Sebäbi, onuň häsiýetleri skalýar ululyklar ($\eta we \varsigma$) bilen kesgitlenýär($\eta \geq 0, \varsigma \geq 0$). Impulsyň üýtgemek kanunyndan peýdalanyp($\frac{\partial}{\partial t}\rho\vartheta_i = -\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$) şepbeşik suwuklygyň impulsynyň üýtgemeginiň deňlemesini ýazarys.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vartheta_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\,\delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_{k\{\,\}}}$$

$$\left\{\eta\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik}\left(\varsigma\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)+\rho f_i \quad (12.60)$$

$\frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - ni$ we $\frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ -ni göz önünde tutup alarys

$$\rho\frac{\partial\vartheta_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\left\{\eta\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varsigma\frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)+\rho f_i \qquad (12.61)$$

$\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_i} = div\vec{V}$ -ni we $\frac{\partial^2\vartheta_i}{\partial x^2{}_k} = \Delta\vartheta_i$ -ni göz önünde tutup şepbeşik suwuklygyň hereketiniň deňlemesini wektor görnüşinde ýazarys.

$$\rho[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}] = -grad\Pi+\eta\Delta\vec{V}+\left(\varsigma+\frac{\eta}{3}\right)graddiv\vec{V} \qquad (12.62)$$

Eger-de suwuklyk gysylmaýan bolsa onda div$\vec{V}$=0 we 9-njy deňleme

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}grad\Pi+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V} \qquad (12.63)$$

11.63-nji deňlemä Nawýe-Stoksyň deňlemesi diýilýär. Gysylmaýan suwuklyk üçin dartgynlygyň tenzory Π_{ik} ýönekeý görnüşe eýedir

$$\Pi_{ik} = -p\delta_{ik}+\eta\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\right) \quad (11),\ \gamma=\frac{\eta}{\rho}$$ -gatnaşyga kinematik şepbeşiklik diýilýär. η -nyň őzüne bolsa dinamiki şepbeşiklik diýilýär.

§44.Şepbeşik suwuklygyň magnitogidrodinamikasy.

Şepbeşik suwuklygyň hereketiniň deňlemesine seredeliň. Ideal suwuklygyň magnitogidrodinamikasynda ýerine ýetýän şertler bu ýerde hem ýerine ýetýär diýip hasap edýäris. Suwuklygyň elektrik geçirijiligi hemişelik diýip hasap edýäris. Ol ýeterlik ýokary baha eýedir.Onda suwuklygyň deňlemeleri

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = rot\left[\vec{V}\vec{H}\right]-\frac{c^2}{4\pi\lambda}rotrot\vec{H}; \quad (12.64) \qquad \text{div}\,\vec{H}=0$$

(12.65)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}gradP+\gamma\Delta\vec{v}+\vec{f} \qquad (11.66)$$

Bu ýerde $\gamma=\frac{\eta}{\rho}udel$ şepbeşiklik.

$\left[\nabla\left[\vec{V}\vec{A}\right]\right] = \left(\vec{A}\nabla\right)\vec{V}-\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{A}+\vec{V}\left(\nabla\vec{A}\right)-A\left(\nabla\vec{V}\right)$ formulany peýdalanyp 12.64 gatnaşygy başgaça ýazarys.

$$\text{rotrot}\,\vec{H} = graddiv\vec{H}-\Delta\vec{H} = -\Delta\vec{H}$$

$$\text{rot}\left[\vec{V}\vec{H}\right] = \left(\vec{H}\nabla\right)\vec{V}-\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{H}$$

bu ýerde divH=0 we divV=0 hasaba alnan.Onda 12.64-njiniň we 12.65-njiniň ýerine

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \left(\vec{H}\nabla\right)\vec{V}-\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{H}+\frac{c^2}{4\pi\lambda}\Delta\vec{H} \quad (5).\ \ \text{div}\,\vec{H}=0 \qquad (12.67)$$

$$\frac{\omega}{k} = C_1,\ \left[\vec{k}\vec{a}_1\right] = 0 \tag{13.44}$$

ikinji tolkun üçin

$$\frac{\omega}{k} = C_2,\ \left[\vec{k}\vec{a}_2\right] = 0 \tag{13.45}$$

Bu ýerden gysylma we süýnme tilkunlaryň ugurdaş tolkunlardygy görünýär, sebäbi $\vec{k} \parallel \vec{a}_1$; süýşme tolkuny – kese tolkundyr. $\vec{k} \perp \vec{a}_2$

XIII bap.Ideal maýyşgak jisim

§45.Gukuñ kanuny we ideal maýyşgak jisimiñ hereketiniñ deñlemesi.

Jisimiñ deformasiýasy we onuñ temperaturasynyñ üýtgemesi ýeterlik kiçi bolanda, dartgynlygy deformasiýa we temperaturanyñ tapawudyna çyzykly bagly naprýaźeniyanyñ tenzory

$$P_{i,k} = C_{iklm} E_{lm} - \alpha_{i,k}\left(T - T_o\right) \tag{13.1}$$

görnüşe eýedir.

bu ýerde: C_{iklm} we $\alpha_{i,k}$ maýyşgaklyk moduly we termomaýyşgaklyk koeffisienti diýilýän hemişelikler. 1-nji gatnaşyk Gukuñ kanunynyñ umumylaşdyrylan görnüşidir. Bu gatnaşyk izotrop we anizotrop jisimler üçin adalatlydyr.

Islendik nokatdaky, wagtyň islendik pursatyndaky dartgynlygy şol nokatdaky we wagtyň şol pursatyndaky deformasiýa bagly gaty jisime ideal maýyşgak jisim diýilýär. Şeýle hem onda bolup geçýän hadysalar termodinamiki öwrülişikli hasap edilýär.

Ideal maýyşgak jisimi häsiýetlendirýän esasy ululyklaryň biri deformasiýanyň tenzorydyr. Ol ululyk sredanyň iki ýagdaýyny deňeşdirmek bilen girizilýär. Adatça başlangyç ýagdaý deregine T_o temperatura we ρ_o dykyzlyk alynýar (daşky güýçleriň ýok wagtynda deformirlenmedik ýagdaý). Ikinji ýagdaý (T we ρ)- deformirlenen ýagdaý. Ol ýagdaý daşky güýçleriň täsirinden ýa-da daşardan ýylylyk bermek bilen alynýar.

1-njidäki dartgynlyk tenzory deformasiýa tenzorynyň üsti bilen, ol bolsa öz gezeginde süýşme wektorynyň üsti bilen aňladylýar. Hereketiň deňlemesinde $\vec{u}$ wektory näbelli funksiýa hökmünde kabul edýärler.

Berlen bölejigiñ süýşmegi hemme wagt

$$\vec{u} = \vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right) - \vec{r}_0 \tag{13.2}$$

formula bilen kesgitlenýär.

Bu ýerde $\overline{r}$ bölejijgiñ t wagtdaky radius wektory, $\overline{r}_0$-wagtyñ başlangyç pursatyndaky radius-wektory. Onda bölejigiñ tizligi

$$\overline{V} = \frac{\partial \overline{u}\left(\overline{r}_0, t\right)}{\partial t} \tag{13.2}$$

$\overline{r}$ we t üýtgeýän ululyklara Eýleriň üýtgeýän ululyklary diýilýär, $\overline{r}_0$, t_0 ululyklara Lagranžyň üýtgeýän ululyklary diýilýär. Eger wagtyň islendik interwalynda süýşme kiçi diýsek onda 13.2-njä derek

$$\overline{V} = \frac{\partial \overline{u}\left(\overline{r}, t\right)}{\partial t} \tag{13.3}$$

ýazyp bolar. Tizligiň kiçidigini we tizliginiň wagta görä doly önümini ($\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$) göz önünde tutup bölejigiň tizlenmesi üçin alarys

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} \tag{13.4}$$

Tizlenmäniň kiçiligini we dykyzlygyň gyşarmasynyň kiçiligini göz öňünde tutup 11.43-njiden impulsyň üýtgeme kanunyny alarys .

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho_0 f_i \tag{13.5}$$

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -div\, \overline{u} \tag{13.6}$$

üznüksizlik deňlemesi bolsa süýşme meýdany boýunça massanyň dykyzlygyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär.

$$\rho \frac{de}{dt} = P_{ik} \vartheta_{ik} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}; \quad \rho T \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial q_k}{dx_k} + D$$

deňlemelerden ýylylyk akymyny ýok edip we deformasiýanyň öwrülşiklidigini göz öňünde tutup ($D=0$)

10-njy tolkun deňlemesi C_1 tizlik bilen ýaýraýan tolkuny suratlandyrýar.

$$c_1 = \left[\frac{\left(\lambda_{ad} + 2\mu\right)}{\rho_0}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Bu tolkunlar gysma we süýnme tolkunlarydyr. Sebäbi $div\vec{u}_1 \neq 0$. 13.40-njy deňlemäniň iki tarapyna hem rot operasiýasyny ulanyp hem-de 13.39-njyny we $rot\, grad = 0$ deňligi göz öňünde tutup $\vec{u}_1$- i ýok ederis

$$rot\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - c_2{}^2 rotrot\vec{u}_2\right) = 0 \tag{13.42}$$

Solenoidal wektor üçin . $rotrot\vec{u}_2 = -\Delta\vec{u}_2$ Şonuň üçin 13.42-njiden alarys

$$rot\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - c_2{}^2 \Delta\vec{u}_2\right) = 0$$

Özem 13.39-nja görä

$$div\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - c_2{}^2 \Delta\vec{u}_2\right) = 0$$

Şeýlelikde $\vec{u}_2$ wektor

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - c_2{}^2 \Delta\vec{u}_2 = 0 \tag{13.43}$$

deňlemä boýun egýär.13.43-nji deňleme $c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ tizlik bilen ýaýraýan tolkuny aňladýar. Bu tolkunlar süýşme tolkunlarydyr. Süýşmäniň tekiz monohromatik tolkunlaryna seredip $\left(\vec{u}_{1,2} = a_{1,2}\ell^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}\right)$ we bu süýşmäni degişli tolkun deňlemelerine goýup hem-de 13.39-njy şerti göz öňünde tutyp 1-nji tolkun üçin alarys.

$$c_1^2 = \frac{\lambda_{ad} + 2\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0} \qquad (13.37)$$

Indi 13.35-njiniň ýa-da 13.36-njynyň iki deňlemeleriň sistemasyna getirilişine garalyň. Ol deňlemeleriň biri C_1 tizlikli ugurdaş maýyşgak tolkuny, beýlekisi bolsa C_2 tizlik bilen ýaýraýan kese maýyşgak tolkuny suratlandyrýar. Wektor meýdany iki meýdanyň (potensial we solenoidal) jemi hökmünde göz öňünde tutýaň Gelmgosyň teoremasyna görä ýazýarys:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \qquad (13.38)$$

bu ýerde $rot\vec{u}_1 = 0, \; diV\vec{u}_2 = 0$ (13.39)

13.38-njnii 13.36-nja goýup, 13.38,13.39-njileri hasaba alyp, hem-de $\Delta\vec{u} = graddiv\vec{u}_1 - rotrot\vec{u}_2$ göz öňünde tutyp esasy deňlemäni taparys.

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{u}^2{}_2}{\partial t^2} = \left(c_1^2 graddiv\vec{u}_1 - c_2^2 rotrot\vec{u}_2\right) \qquad (13.40)$$

Bu deňlemeden $\vec{u}_2$ - ni ýok edeliň. Şonuň üçin 13.40-njy deňlemäniň agzalaryna div operasiýasyny ulanalyň. Bu ýerde 13.39-njyny we $div\, grad = \Delta$ hem-de $div\, rot = 0$ deňlikleri hasaba alyp alarys.

$$div\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \vec{u}_1\right) = 0$$

Bu ýerde $$rot\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \vec{u}_1\right) = 0$$

sebäbi $\vec{U}_1$ - potensial wektor. Eger, ähli giňişlikde wektoryň div - sy we rot - ry nola deň bolsa, onda wektoryň özi hem nola deň bolmalydyr. Şeýlelikde süýşmäniň potensial bölegi bolan wektor $\vec{U}_1$ aşakdaky tolkun deňlemesine boýun egýändir.

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \vec{u}_1 = 0 \qquad (13.41)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \Pi_{ik} \vartheta_{ik} + \rho \mathrm{T} \frac{ds}{dt} \qquad (13.7)$$

deňlemäni alarys. 13.3-njiniň kömegi bilen deformasiýanyň tizliginiň tenzoryny

$$\vartheta_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)\right] = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} \qquad (13.8)$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerde kiçi tizliklerde $\vartheta_{ik} = \frac{d\varepsilon_{ik}}{dt}$. Şeýlelikde 13.7-njä derek

$$\rho\, de = \Pi_{ik} d\varepsilon_{ik} + \rho \mathrm{T} ds \qquad (13.9)$$

deňlemäni alarys.

Deformirlenmedik birlik göwrüme düşýän energiýany we entropiýany seredýän nazaryýetimize amatly bolar ýaly degişlilikde $\mathrm{E} = \rho_0 e$ $\varepsilon = \rho_0 e$ we $S = \rho_0 s$ görnüşde alyp, şeýle hem dykyzlygyň üýtgemeginiň kiçidigini hasaba alyp

$$d\mathrm{E} = \Pi_{ik} d\varepsilon_{ik} + TdS \qquad (13.10)$$

termodinamiki deňlemäni alarys. 13.5-nji, 13.6-njy we13.10-nji deňlemeler ulgamy idealmaýyşgak jisimiň hereketiniň deňlemesini düzýär.

Termodinamiki deňlemeden gelip çykýan gatnaşyklara seredeliň. Mysal üçin:

$$\Pi_{ik} = \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\varepsilon_{ik}} \qquad (13.11)$$

13.11-nji formulalar energiýany deformasiýanyň we temperaturanyň funksiýasy ýaly bilip dartgynlygy we temperaturany hasaplamaga mümkinçilik berýär. Eger 13.11-njini erkin energiýanyň üsti bilen aňladyp

$$F = U - \mathrm{T}S \qquad (13.12)$$

alarys

$$dF = dU - \mathrm{T}dS - Sd\mathrm{T} = \Pi_{ik} d\varepsilon_{ik} - Sd\mathrm{T} \qquad (13.13)$$

bu ýerde

$$\Pi_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_{\mathrm{T}}, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\varepsilon_{ik}} \qquad (13.14)$$

dartgynlygy we entropiýany deformasiýanyň we temperaturanyň funksiýasy ýaly kesgitleýär.
13.1-njini 13.14-njiniň birinji agzasy bilen deňeşdirmek maýyşgak jisimiň erkin energiýasynyň

$$F = \frac{1}{2} C_{ik,em} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{em} + L_{ik} \varepsilon_{ik} \left(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0\right) + F_0\left(\mathrm{T}\right) \qquad (13.15)$$

görnüşe eýedigini görkezýär.

Jisimiň maýyşgaklyk häsiýeti 4-nji derejeli $C_{ik,lm}$ tenzor bilen kesgitlenýär. Oňa maýyşgaklyk tenzory diýilýär.

Umuman bu tenzor $3^4 = 81$erkin düzüjilerden durýar. Emma hakykatda erkin düzüjileri 21-e deňdir.

$C_{ik,em} = C_{ki,em} = C_{ik,me}$ we $C_{ik,em} = C_{em,ik}$ gatnaşyklaryň ỳerine ỳetỳändigi üçin düzüjileri 21-e deňdir.

Izotrop jisim üçin Gukuň kanuny

$$\Pi_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \qquad (13.16)$$

bu ýerde λ we μ hemişeliklere Lameniň modullary diýilýär.
13ю16-njyny $\Pi_{ik} = C_{ik,em} \varepsilon_{em}$ bilen deňeşdirip

$$C_{xx,xx} = \lambda + 2\mu; \qquad C_{xx,yy} = \lambda; \qquad C_{xy,xy} = 2\mu \qquad (13.31)$$

alarys.

§46.Maýyşgak tolkunlar

Umuman, maýyşgak jisimiň bölejiginiň ýagdaýynyň üýtgemegi (wagtyň geçmegi bilen) onuň temperaturasynyň üýtgemegi bilen baglanyşykly. Emma bölejigiň yrgyldysynyň jisimiň boýuna ýaýramagy (maýyşgak tolkunlar) ýylylygyň bölejikden bölejige berilmeginden ýeterlik çalt bolup geçýär. Şol maýyşgak tolkuny hasaba alyp dartgynlygyň tenzoryny hasaplalyň. Onuň üçin entropiýanyň deformasiýanyň we temperaturanyň funksiýasy ýaly aňlatmasyny peýdalanalyň

$$\left(S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ik}} = K\alpha\varepsilon_{ik} + C_\varepsilon \frac{T - T_0}{T_0} + S_0 \right)$$

α - ýylylykdan giňelmek koeffisienti;
C_ε - hemişelik deformasiýadaky ýylylyk sygymy (jisimiň)
$S = S_0$ diýip taparys.

$$T - T_0 = -\frac{\alpha K T_0}{C_0} \varepsilon_{ii} \qquad (13.32)$$

onda dartgynlygyň tenzory

$$P_{ik} = \left(\lambda + \frac{\alpha^2 K^2}{C_\varepsilon} T_0\right) \varepsilon_{ii} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} \qquad (13.33)$$

Alnan tenzor (13.33) (13.6)-dan izotermik maýyşgak modulyna (λ) derek adibatik modulyň ýüze çykmagy bilen tapawutlanýar.

$$\lambda_{ad} = \lambda + \frac{\alpha^2}{C_\varepsilon}\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)^2 T_0 \qquad (13.34)$$

$\left(\rho \frac{\partial U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \right)$deňlemäni we 13.33-njini peýdalanyp göwrüm güýçleriniň ýok wagtyndaky maýyşgak tolkundaky süýşmäniň deňlemesini alarys.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \left(\lambda_{ad} + \mu\right) graddiV\vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \qquad (13.35)$$

ýa – da

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \left(c_1^{\,2} - c_2^{\,2}\right) graddiV\vec{u} + c_2^{\,2} \Delta \vec{u} \qquad (13.36)$$

bu ýerde

Edebiýat

1. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklere tarap. Saýlanan eserler. 1 - nji tom. Aşgabat, 2008
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklere tarap. Saýlanan eserler. 2 - nji tom. Aşgabat, 2009
3. J.Ho1.А.Н.Матвеев,Механика и теория относительности,М.,«Высшая школа», 1976
4. И.И.Ольховский “Курс теоретической механики для физиков”, М., 1978
5. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики М-Л., Гостехиздат, 1946.
6.Давыдов А.С. Квантовая механика. М., Физматгиз. 1965.
7. D.Gylyjow., A.Akmuhammedow., H.Ataýew. Nazary mehanika. Aşgabat. Ylym. 2003.
8. И.И.Ольховский. Задачник по теоретической механике для физиков. М. 1977.
9.Л.Д. Ландау и Е.М. Лифщис. Механика. М. 1973.
10.Л.Д. Ландау и Е. М. Лифщис. Механика сплошной среды. М. 1953.
11.Черняк В.Г. и Суетин П.Е. Механика сплошной среды. Изд-во физ-мат. лит. 2006
12. Л.И. Седов. Механика сплошной среды. М. Наука, т. 1-2. 1973.
13. А.А. Ильюшин и др. Задачи и упражнение по механике сплошной среды. М. 1979.
14. М.Н. Кирсанов и др. Сб. коротких задач по теоретической механике. 2002.
15. Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М.Э. Эглит. Московский лицей, т. 1-2, 1996.
16. О.Э. Кене Сб. коротких задач по теоретической механике. 1989.
17. Г.С. Казакевич Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Изд-во СП6ГУП6. 2003.

J.Hojagulyýew, „Nazary mehanika we tutuş gurşawlaryň mehanikasy“ dersinden umumy okuwlaryň ýazgysy.Aşgabat. TDU. 2009.